



\* 5 3 0 9 6 4 7 7 1 X \*  
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

# UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Facultad de Ciencias Matemáticas  
Departamento de Matemática Aplicada



## ALGUNOS TOPICOS SOBRE SOLUCIONES DE VISCOSIDAD EN ECUACIONES DE HAMILTON-JACOBI

MEMORIA PRESENTADA POR  
JOSE MARIA REY CABEZAS  
PARA OPTAR AL GRADO DE  
DOCTOR EN MATEMATICAS  
POR LA UNIVERSIDAD  
COMPLUTENSE DE MADRID

21.133

Madrid, Junio de 1996



Archivo

*A mis padres,  
Julio y María,  
y a mi hermana,  
María Gracia.*

## Agradecimientos.

Quisiera comenzar estas líneas de agradecimiento mencionando al Director de esta Memoria, Gregorio Díaz. Sus muestras de interés (tanto a nivel profesional como personal) durante la realización de este Trabajo, el trato directo con él y la confianza que me ha mostrado, su entusiasmo y apoyo en todos los sentidos, así como su afecto y sus continuas enseñanzas han sido fundamentales en la consecución de los objetivos que nos habíamos marcado. Gracias a él he adquirido una formación matemática de la que, sinceramente, estoy muy orgulloso.

También quisiera agradecer el trato personal que siempre me ha dispensado Jesús Ildefonso Díaz; él fue quien me orientó y encauzó en mis comienzos investigadores al finalizar mis estudios de Licenciatura, facilitando mi incorporación e integración en el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Complutense.

Cómo no hacer partícipes también a mis compañeros de despacho Julio, Julián y Rosa por haberme 'soportado' en los últimos años, así como el recuerdo entrañable de la extinta *Quinta Planta* en el antiguo edificio de la Facultad de Matemáticas (Jesús, Juan Antonio, Merche, Ana, René, Domingo, ...). El ambiente cordial de compañerismo y de trabajo han hecho más llevadera esta ardua tarea investigadora.

Finalmente, no quisiera dejar al margen a ningún miembro del Departamento de Matemática Aplicada. Quisiera agradecer a todos y cada uno de los mismos el apoyo, el aliento y los ánimos que me han mostrado en todas las ocasiones.



# Contenidos

Presentación.	vii
Notaciones.	xxi
<b>I Algunos modelos.</b>	<b>1</b>
1 Las ecuaciones de Hamilton–Jacobi.	3
2 La ecuación eikonal.	9
3 Modelo de propagación de una llama.	13
<b>II La ecuación sin perturbar. Fenómeno de explosión en tiempo finito.</b>	<b>25</b>
4 Propiedades intrínsecas.	27
4.1 Soluciones de similaridad.	27
4.2 Propiedades de los conjuntos semidiferenciales.	45
4.2.1 Funciones semiconvexas.	57
4.2.2 $m$ -convolución de funciones s.c.s.	59
4.3 Soluciones de viscosidad. Problemas de contorno.	81
4.4 Teorema de Verificación.	101
4.4.1 Caso $H(p) = R p ^m$ , $p \in \mathbb{R}^N$ ( $R > 0$ , $m > 1$ ).	128
4.4.2 Caso $H(p) = R p $ , $p \in \mathbb{R}^N$ ( $R > 0$ ).	134

<b>5</b>	<b>Un problema de control.</b>	<b>137</b>
5.1	Planteamiento del problema de control. . . . .	137
5.2	Ecuación de la Programación Dinámica. . . . .	159
5.3	El problema de Cauchy. . . . .	164
5.3.1	Método de las características. . . . .	173
5.4	Algunas extensiones a hamiltonianos convexos. . . . .	176
5.5	Regularidad de las soluciones. . . . .	179
<b>6</b>	<b>El cono de dependencia.</b>	<b>199</b>
6.1	Hamiltonianos lipschitzianos. . . . .	199
6.2	Hamiltonianos no lipschitzianos. . . . .	206
6.2.1	Existencia de soluciones. . . . .	225
<b>7</b>	<b><math>D^+</math>-soluciones.</b>	<b>231</b>
7.1	Modelo de la llama. . . . .	231
7.2	Definición de las $D^+$ -soluciones. . . . .	238
7.3	La ecuación eikonal. . . . .	244
7.3.1	Programación Dinámica. . . . .	244
7.3.2	Problemas de contorno con datos iniciales discontinuos. . . . .	247
7.3.3	Convergencia $m \rightarrow 1$ para datos iniciales discontinuos. . . . .	254
<b>III La ecuación perturbada. Fenómeno de extinción en tiempo finito.</b>		<b>259</b>
7.4	Propiedad de extinción. Tipos de absorciones. . . . .	261
7.5	Resumen de resultados. . . . .	269
<b>8</b>	<b>Hamiltonianos lipschitzianos.</b>	<b>273</b>
8.1	Fórmulas de representación. . . . .	273
8.2	Extinción en tiempo finito. . . . .	283
8.2.1	Caracterización de la función $t_\infty(\cdot)$ . Propiedades generales. . . . .	283
8.2.2	Regularidad. . . . .	290
8.2.3	Tasa de extinción. . . . .	294
8.2.4	Datos iniciales no acotados. . . . .	299

<b>9</b>	<b>Hamiltonianos no lipschitzianos.</b>	<b>303</b>
9.1	Introducción. . . . .	303
9.2	Existencia de una solución. . . . .	305
9.3	Extinción en tiempo finito. . . . .	313
9.3.1	Caracterización de la función $t_\infty(\cdot)$ . Propiedades generales. . . . .	318
9.3.2	Regularidad. . . . .	322
9.3.3	Tasa de extinción. . . . .	327
<b>IV</b>	<b>Comportamiento para tiempos grandes.</b>	<b>333</b>
<b>10</b>	<b>La ecuación sin perturbar.</b>	<b>339</b>
10.1	Hamiltonianos con crecimiento superlineal. . . . .	340
10.1.1	Tiempos positivos. . . . .	340
10.1.2	El problema retrógrado. . . . .	352
10.1.3	Evolución de datos $u_0$ que explotan en la frontera de compactos. . . . .	371
10.1.4	Generalizaciones. . . . .	376
10.2	Hamiltonianos con crecimiento lineal. . . . .	381
10.2.1	El problema de valor inicial. . . . .	381
10.2.2	Evolución de datos $u_0$ que explotan en la frontera de compactos. . . . .	385
10.2.3	Tránsito de hamiltonianos superlineales a lineales. . . . .	391
10.2.4	Generalizaciones. . . . .	399
<b>11</b>	<b>La ecuación perturbada.</b>	<b>403</b>
11.1	Soluciones de similaridad. . . . .	403
11.1.1	Caso $m \geq 1$ y $q \notin \{1, m\}$ . . . . .	403
11.1.2	Caso $m > 1$ y $q = 1$ . . . . .	409
11.1.3	Caso $q = m > 1$ . . . . .	410
11.1.4	Caso $m = q = 1$ . . . . .	411
11.1.5	Caso $m = 1$ y $q < 1$ . . . . .	412
11.2	Propiedades comunes para $m > 1$ y $m = 1$ . . . . .	417
11.3	Hamiltonianos con crecimiento lineal. . . . .	425
11.4	Hamiltonianos con crecimiento superlineal. . . . .	437

<b>V Apéndices.</b>	<b>471</b>
<b>A La naturaleza de estas ecuaciones.</b>	<b>473</b>
A.1 Soluciones clásicas. Método de las características. . . . .	473
A.2 Soluciones generalizadas. . . . .	479
A.3 Soluciones continuas de viscosidad. . . . .	480
A.3.1 Método de la viscosidad evanescente. Propiedades. . .	480
A.3.2 Propiedades de las soluciones de viscosidad. . . . .	490
A.3.3 Ecuaciones de Hamilton–Jacobi. . . . .	494
A.3.4 Operadores acretivos. . . . .	495
<b>B Análisis convexo.</b>	<b>499</b>
B.1 Definiciones y propiedades elementales. . . . .	499
B.2 Semiconvexidad. . . . .	502
B.3 Teorema de Alexandroff. . . . .	503
<b>C Fórmulas de representación.</b>	<b>505</b>
C.1 Fórmulas de Hopf y Lax–Oleinik. . . . .	505
C.2 Ejemplos. . . . .	509
<b>Bibliografía.</b>	<b>511</b>
<b>Relación de Figuras.</b>	<b>524</b>
<b>Relación de Tablas.</b>	<b>525</b>



# Presentación.

La presente Memoria trata sobre el estudio de ciertas ecuaciones de Hamilton–Jacobi. En términos generales, las que aquí consideramos son de la forma

$$u_t - H(x, u, \nabla u) = 0 \text{ en } \mathbb{R}^N \times ]0, T_\infty[ \quad (N \geq 1)$$

donde  $T_\infty \leq +\infty$  es el *horizonte maximal*, cuyas soluciones están sujetas a la prescripción de un dato inicial

$$u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) \text{ en } \mathbb{R}^N.$$

Determinadas aplicaciones, de contextos muy variados, son abordadas por ecuaciones de esta naturaleza. Parece obligado relacionar estas ecuaciones con las que surgen en la *Mecánica Clásica*. Dedicamos, por ello, algunas páginas a la presentación correspondiente, destacando las hipótesis *genuinas* que cabe exigir. Las ecuaciones de la *Optica Geométrica* han sido otro motivo de esta Memoria; también dedicamos algunos comentarios a tal cuestión en los que, mediante *argumentos de homogeneización*, obtenemos una versión generalizada de la *ecuación eikonal*. Finalmente, el denominado *criterio de Entropía* aplicado al estudio de la *propagación del frente de una llama*, determina otro objetivo de esta Memoria. Se trata de un caso particular de los *fenómenos de propagación de fronteras* al que dedicamos, a lo largo de este trabajo, una especial atención debido a su relevancia.

Junto a las anteriores motivaciones, la terminología y objetivos del *Control Óptimo Determinista* es utilizado en multitud de ocasiones a lo largo de las líneas que siguen. Más concretamente, interpretamos la solución como la función *coste óptimo* de determinados problemas de optimización abordados mediante el *Principio de la Programación Dinámica*, cuyo tratamiento matemático determina las ecuaciones en derivadas parciales que nos ocupan.

De las motivaciones anteriores extraemos algunas consideraciones sobre las ecuaciones y la naturaleza de las soluciones que debemos tener en cuenta. Aunque nuestro estudio se aplica, en ocasiones, a *hamiltonianos* más generales, la *convexidad* de la aplicación

$$p \mapsto H(x, r, p)$$

es una herramienta primordial que empleamos con frecuencia. Se trata de una hipótesis consustancial con los modelos que hemos destacado anteriormente. Con el fin de precisar nuestras contribuciones, el caso más ilustrativo está reflejado por la elección

$$H(p) = R|p|^m, \quad p \in \mathbb{R}^N \quad (m \geq 1, R > 0)$$

en el que englobamos dos tipos:  $m > 1$ , como ejemplo de hamiltonianos *estrictamente convexos* y  $m = 1$ , como ‘caso límite’ de los anteriores.

El clásico *método de las características* presenta, junto a sus indudables ventajas, algunos inconvenientes para nuestro trabajo. En efecto, sólo admite, en general, soluciones clásicas  $\mathcal{C}^1$  con carácter *local*. Sin embargo, en el modelo de propagación de la llama, ‘la solución no es, ni siquiera, continua’; por otra parte, puede impedir el estudio del comportamiento de las soluciones para tiempos largos que es otro de los objetivos destacados que pretendemos. La teoría de las *soluciones de viscosidad* es un cauce adecuado para el tratamiento de las ecuaciones que consideramos. Motivados por las limitaciones del método de las características y de los que ofrecen las soluciones generalizadas, M.G. Crandall y P.L. Lions introdujeron las *soluciones continuas y acotadas de viscosidad* siguiendo, en un primer momento, una especie de ‘dualidad’ con las *soluciones de entropía* definidas por S.N. Kruzkov (recuérdese que nuestras ecuaciones son, en general, completamente no lineales, por lo que debemos ajustarnos al marco que éstas ofrecen). En esta teoría, cuestiones clásicas en el estudio de las EDP’s (existencia, unicidad y estabilidad) tienen una respuesta acertada, superando las carencias de los otros métodos. Obviamente, las soluciones son *consistentes* con las clásicas  $\mathcal{C}^1$ , cuando esta regularidad es posible. Después del pionero trabajo de M.G. Crandall y P.L. Lions, se han producido otros de los mismos autores o en colaboración (G. Barles, I. Capuzzo Dolcetta, L.C. Evans, H. Ishii, P.E. Souganidis, . . .) que han establecido una teoría contrastada para el adecuado tratamiento de las Ecuaciones en Derivadas Parciales completamente no lineales.

Describimos, a continuación, de una forma rápida, las principales contribuciones que recoge esta Memoria. Dedicamos una especial atención a la comprensión intrínseca de las ecuaciones que nos ocupan, así como a la naturaleza de sus soluciones. Posteriormente, estudiamos con detalle dos *fenómenos evolutivos*: el primero surge en ‘tiempos cortos’ (*extinción en*

*tiempo finito*) mientras que el segundo tiene que ver con distintos comportamientos que aparecen en los ‘tiempos largos’. Así, después de una Primera Parte en la que presentamos los modelos anteriormente citados, nos detenemos, en la Segunda, en la consideración de ecuaciones del tipo

$$u_t - R|\nabla u|^m = 0 \quad (m \geq 1, R > 0).$$

Reiteramos que, aunque nuestras contribuciones incluyen extensiones a hamiltonianos más generales, en esta presentación sólo ilustraremos sobre ejemplos potenciales ‘sencillos’. Nos ha parecido oportuno comenzar obteniendo las *soluciones de similitud* asociadas, lo que nos ha aportado información interesante de lo que ‘podía haber detrás’ de nuestros objetivos. Aunque la teoría de las soluciones continuas y acotadas de viscosidad está hoy en día bien desarrollada, aún quedan algunas cuestiones delicadas por precisar sobre las soluciones discontinuas y no acotadas. No está de más recordar el papel destacado que juega la semicontinuidad en los problemas de optimización. Hemos recogido, por tanto, las principales propiedades que requerimos en el posterior estudio, presentando, en la forma adecuada a nuestros fines, algunas propiedades esbozadas por otros autores e incluyendo otras originales tanto de valor práctico como conceptual. En forma análoga, hemos procedido con las ideas sobre *semiconvexidad* y *m*-convolución, que son de gran utilidad. Como venimos señalando, nuestro marco de trabajo son las soluciones eventualmente discontinuas, por lo que la descripción de la ecuación y de los valores de contorno presenta alguna inconcreción por precisar, lo que hemos hecho a continuación. Con este bagaje, hemos empleado la *convexidad* para determinar cuestiones intrínsecas a priori de las ‘soluciones interiores’: es lo que denominamos *Teorema de Verificación*. Hemos determinado la clase de los *datos iniciales admisibles* para los problemas de Cauchy, caracterizados por la propiedad

$$\ell \doteq \limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{u_0(x)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} \in \mathbb{R} \quad (m > 1)$$

y con ellos obtenemos el *horizonte maximal temporal*  $\mathbf{T}_\infty \leq +\infty$  correspondiente. Cuando se da el fenómeno de *explosión en tiempo finito* ( $\mathbf{T}_\infty < +\infty$ ) hemos caracterizado el *comportamiento asintótico* espacial de las soluciones

$$\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} = \ell \left( \frac{\mathbf{T}_\infty}{\mathbf{T}_\infty - t} \right)^{\frac{1}{m-1}}, \quad 0 < t < \mathbf{T}_\infty.$$

También hemos empleado el Teorema de Verificación para destacar, entre todos los comportamientos iniciales posibles de estas soluciones discontinuas, aquellas que *intrínsecamente tienen sentido*, lo que nos ha ayudado a precisar cómo debemos entender la *prescripción de los datos iniciales* y formular el sentido de los resultados de comparación y unicidad.

En el siguiente Capítulo relacionamos los problemas que nos ocupan con un Problema de Control Optimo Determinista. La naturaleza y comprensión de éste, refuerza y complementa las ideas que teníamos sobre aquellos. Como es bien conocido, estas EDP que nos interesan tienen, empleando la terminología clásica, un *carácter hiperbólico* en el que la propiedad del *cono de dependencia* tiene un papel destacado. Ciertamente, existen en la literatura resultados al respecto para las soluciones de viscosidad cuando  $m = 1$ . Aquí ofrecemos una presentación diferente y original mediante aproximaciones de las soluciones de similaridad para este caso  $m = 1$ . Además, aportamos, contribuciones propias para el caso  $m > 1$ , sobre el que existe poca información.

Cuando el hamiltoniano es estrictamente convexo, un efecto regularizante sobre la evolución de las soluciones las dota de lipschitzianidad en cualquier instante positivo, aunque inicialmente sean, incluso, discontinuas. Tal cosa no ocurre, en general, cuando el hamiltoniano es 'sólomente' convexo, como sucede con

$$H(p) = R|p|, \quad p \in \mathbb{R}^N \quad (R > 0).$$

Finalizamos esta Parte dedicando un Capítulo a un concepto especial de soluciones discontinuas que da una respuesta adecuada al modelo de la propagación de un frente de llama. Incluimos también algunos resultados de unicidad en este marco funcional, así como algunos aspectos del *tránsito* de las soluciones continuas ( $m > 1$ ) a las discontinuas ( $m = 1$ ) a través de la convergencia  $m \rightarrow 1$ .

Una vez que se ha obtenido una comprensión de este tipo de ecuaciones, pasamos a estudiar dos propiedades cualitativas relacionadas con el carácter evolutivo de las soluciones. Dedicamos la Tercera Parte de esta Memoria al estudio del *fenómeno de extinción en tiempo finito*

$$\begin{cases} u(x, t) \neq 0 & \text{si } 0 < t < t_\infty(x) \\ u(x, t) = 0 & \text{si } t \geq t_\infty(x). \end{cases}$$

Entendida la naturaleza de las soluciones, hemos preferido argumentar sobre las soluciones continuas de ecuaciones como

$$u_t - R|\nabla u|^m + \lambda u^q = 0 \quad (m \geq 1, 0 < q < 1)$$

donde  $R, \lambda > 0$ , a fin de centrarnos, fundamentalmente, sobre la propiedad cualitativa, aunque nuestros resultados se pueden extender a otras situaciones más generales. Nótese que sobre el modelo

$$u_t - R|\nabla u|^m = 0 \quad (m \geq 1)$$

la condición  $u_t > 0$  hace prácticamente irrelevante el estudio de la propiedad de extinción.

Queremos resaltar que en la Segunda Parte presentábamos dos tipos de contribuciones: en algunas, relativas esencialmente a las propiedades de los conjuntos semidiferenciales y la  $m$ -convolución, nuestra aportación se mezclaba, en ocasiones, con la presentación adecuada de resultados de la literatura; a partir del Teorema de Verificación nuestra aportación personal aumenta progresivamente. En lo referente a las Tercera y Cuarta Partes, los resultados que presentamos son *exclusivamente personales* y, a nuestro entender, originales en la literatura conocida.

Regresando a la propiedad de extinción en tiempo finito, los objetivos que nos marcamos son: existencia de la función *primer instante de extinción*  $t_\infty(x)$ , regularidad y comportamiento asintótico de la misma y determinación de la *tasa de extinción*. Junto a respuestas comunes, existe una ligera diferencia cuando se tiene la convexidad estricta ( $m > 1$ ) del caso límite  $m = 1$  que, por cierto, tiene peculiaridades interesantes. De forma sumaria indicamos que la *existencia* y *lipschitzianidad* de la función

$$x \mapsto t_\infty(x)$$

así como algunos resultados sobre su comportamiento asintótico, son obtenidas de forma parecida. La principal diferencia estriba en las propiedades de la *tasa de extinción*: para  $m > 1$  probamos la relación

$$u(x, t_\infty(x) - t) \sim (\lambda(1 - q)t)^{\frac{1}{1-q}}, \quad 0 < t \ll 1$$

que expresa un *carácter uniforme en  $x$* , mientras que para  $m = 1$  sólo podemos mantener esa relación en las *proximidades* de los *máximos del dato inicial*  $u_0$ . No obstante, este caso límite presenta otras novedades peculiares:

- permite obtener una *representación explícita* de la solución

$$u(x, t) = \max_{|\xi| \leq R} \left\{ \left( [(u_0(x - \xi t))^{1-q} - \lambda(1-q)t]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}} \right\}$$

y, consecuentemente, una *expresión implícita* de los instantes de extinción

$$\lambda(1-q)t_\infty(x) = \max_{|\xi| \leq R} \left\{ (u_0(x - \xi t_\infty(x)))^{1-q} \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

lo que es adecuadamente aprovechado.

- la *propiedad del cono de dependencia* permite abordar el caso de datos iniciales  $u_0$  no acotados que, en otras circunstancias, hay que manejar con cuidado. En particular, obtenemos que la *clase de datos iniciales admisibles* para la existencia de extinción en tiempo finito es

$$\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{(u_0(x))^{1-q}}{|x|} < \frac{\lambda(1-q)}{R}.$$

que, obviamente, incluye datos iniciales acotados. Además, bajo el supuesto complementario

$$(u_0(x))^{1-q} \sim C|x|, \quad |x| \gg 1$$

para una constante concreta  $C$  que determinamos, podemos precisar el comportamiento asintótico de la función  $t_\infty(x)$ ,

$$t_\infty(x) \sim \frac{(u_0(x))^{1-q}}{\lambda(1-q)}, \quad |x| \gg 1.$$

Completamos esta propiedad con un estudio general del comportamiento para ‘tiempos largos’ para la ecuación general

$$u_t - R|\nabla u|^m + \lambda u^q = 0 \quad (m \geq 1, q \in \mathbb{R})$$

donde  $R > 0$  y  $\lambda \geq 0$ . Debido a la multitud de casos posibles según los balances que se pueden dar entre los parámetros  $m$ ,  $q$  y los distintos comportamientos iniciales, que para simplificar hemos limitado a

$$u_0(x) = A|x|^{1+\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

dividimos la Cuarta Parte en dos grandes Capítulos relativos a la denominada ecuación sin perturbar ( $\lambda = 0$ ) y la perturbada ( $\lambda > 0$ ). En ambos casos se sigue una misma idea motriz: *tener bien presentes las distintas soluciones de similitud.*

En el Capítulo referente a la ecuación sin perturbar obtenemos *todos los comportamientos posibles*, tanto en la evolución natural ( $t \rightarrow +\infty$ ) como en la retrógrada ( $t \rightarrow -\infty$ ). Nótese que el carácter hiperbólico de estas ecuaciones de primer orden da sentido a esa evolución retrógrada. Los cuadros y figuras que siguen recogen *todos los comportamientos posibles* para  $m > 1$ , de los que de una forma rápida destacamos que para la evolución retrógrada *todos* los datos iniciales

$$u_0(x) = A|x|^{1+\alpha} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

son *admisibles*, determinando cuatro tipos de comportamientos asintóticos para las soluciones:

1. *potencial*:  $C_{-\infty}(-t)^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}$  si  $1 + \alpha < 0$ .
2. *constante*:  $A$  si  $1 + \alpha = 0$ .
3. *de similitud (en tiempo finito)*: si  $0 < 1 + \alpha \leq \frac{m}{m-1}$ .
4. *de similitud (asintóticamente)*: si  $1 + \alpha > \frac{m}{m-1}$ .

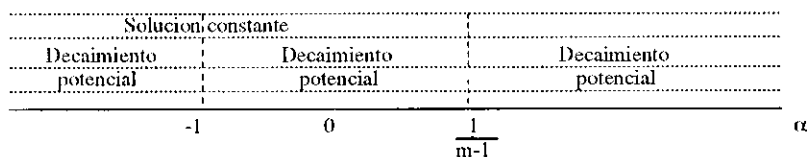


Figura 0.1: Comportamiento asintótico ( $m > 1$ ,  $t \rightarrow -\infty$ ).

$\alpha$	$\tau_{-\infty}$	Convergencias
$\alpha < -1$	$-\infty$	$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\mathcal{U}(x, t)}{(-t)^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}} = C_{-\infty}$
$\alpha = -1$	$-\infty$	$\mathcal{U}(x, t) = A, t \leq 0$
$-1 < \alpha < \frac{1}{m-1}$	$-\infty$	$\mathcal{U}(x, t) = \begin{cases} -\mathcal{S}(x, -t), & t \leq -\tau(x, t) \\ \mathcal{W}(x, -t), & -\tau(x, t) \leq t \leq 0 \end{cases}$
$\alpha = \frac{1}{m-1}$	$-\infty$	$\mathcal{U}(x, t) = -\mathcal{S}(x, \mathbf{T}_{\infty} - t), t \leq 0$
$\alpha > \frac{1}{m-1}$	$-\infty$	$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\mathcal{U}(x, t)}{-\mathcal{S}(x, -t)} = 1$

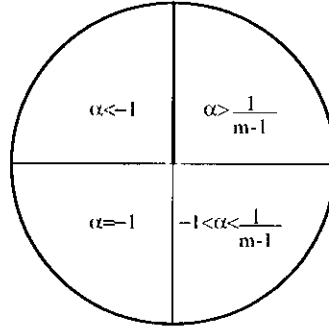
Tabla 0.1: Comportamientos maximales iniciales ( $t < 0$ ).

Figura 0.2: Carácter cíclico del comportamiento asintótico (regresivo).

Para la evolución natural de los tiempos sólo son posibles los comportamientos iniciales

$$u_0(x) = A|x|^{1+\alpha} \quad \text{con} \quad 0 \leq 1 + \alpha \leq \frac{m}{m-1}$$

(recuérdense los resultados sobre explosión en tiempo finito de la Segunda Parte) que determinan tres tipos de comportamientos asintóticos de las soluciones:

1. *constante*:  $A$  si  $1 + \alpha = 0$ .
2. *potencial*:  $C_{\infty} t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}$  si  $0 < 1 + \alpha < \frac{m}{m-1}$ .



$\alpha$	$\tau_\infty$	Convergencias
$\alpha < -1$	0	No hay solución
$\alpha = -1$	$+\infty$	$\mathcal{U}(x, t) = A, t \geq 0$
$-1 < \alpha < \frac{1}{m-1}$	$+\infty$	$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{U}(x, t)}{t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}} = C_\infty$
$\alpha = \frac{1}{m-1}$	$\mathbf{T}_\infty$	$\mathcal{U}(x, t) = -\mathcal{S}(x, \mathbf{T}_\infty - t), 0 \leq t < \mathbf{T}_\infty$
$\alpha > \frac{1}{m-1}$	0	No hay solución

Tabla 0.2: Comportamientos maximales finales ( $m > 1, t > 0$ ).

3. de similaridad (en tiempo finito) (que ahora explotan en tiempo finito):

si  $1 + \alpha = \frac{m}{m-1}$ .

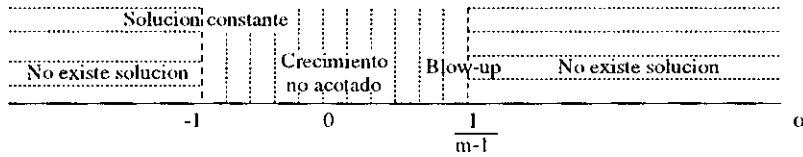


Figura 0.3: Comportamiento asintótico ( $m > 1, t \rightarrow +\infty$ ).

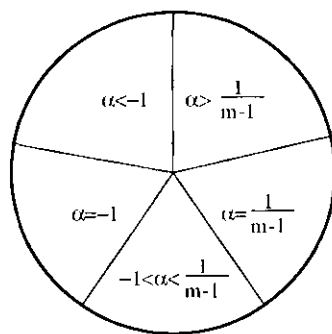


Figura 0.4: Carácter cíclico del comportamiento asintótico (progresivo).

El comportamiento cuando los datos iniciales explotan en la frontera de compactos también ha sido considerado con detalle mediante los casos límites  $\alpha \rightarrow \pm\infty$ .

Para  $m = 1$  la situación está más controlada y, por tanto, ofrece menor riqueza. También abordamos y ratificamos este caso mediante la aproximación hamiltoniana  $m \rightarrow 1$ .

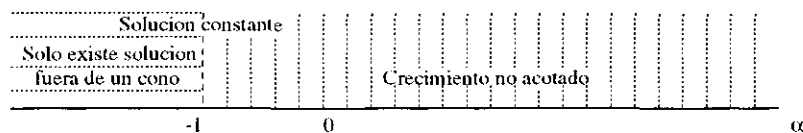


Figura 0.5: Comportamiento asintótico ( $m = 1, t \rightarrow +\infty$ ).

El último Capítulo estudia la ecuación perturbada

$$u_t - R|\nabla u|^m + \lambda u^q = 0 \quad (m \geq 1, q \in \mathbb{R})$$

con  $R, \lambda > 0$ , sujeta, como antes, a la prescripción inicial

$$u_0(x) = A|x|^{1+\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

siguiendo la idea motriz, ya comentada, de tener presente las diversas soluciones de similitud obtenidas. Existe un *balance intrínseco*

$$q = \frac{\alpha m}{1 + \alpha}$$

$\alpha$	$q$	Convergencias
$\alpha < -1$	$q \leq 1$	$u(x, t) = +\infty \Leftrightarrow t \geq \frac{ x }{R}$
$\alpha < -1$	$q > 1$	$u(x, t) = \left( \frac{1}{\lambda(q-1)t} \right)^{\frac{1}{q-1}} \Leftrightarrow t \geq t_\infty(x) = \frac{ x }{R}$
$\alpha = -1$	$q < 1$	$u(x, t) = 0 \Leftrightarrow t \geq t_\infty(x) \equiv \frac{A^{1-q}}{\lambda(1-q)}$
$\alpha = -1$	$q = 1$	$u(x, t) = Ae^{-\lambda t}, x \in \mathbb{R}^N, t \geq 0$
$\alpha = -1$	$q > 1$	$u(x, t) \sim \left( \frac{1}{\lambda(q-1)t} \right)^{\frac{1}{q-1}}, t \rightarrow +\infty$
$\alpha > -1$	$q < \frac{\alpha}{1+\alpha}$	$u(x, t) \sim AR^{1+\alpha}t^{1+\alpha}, t \rightarrow +\infty$
$\alpha > -1$	$q = \frac{\alpha}{1+\alpha}$	$u(x, t) \begin{cases} = 0 \Leftrightarrow t \geq t_\infty(x) = \frac{A^{1-q} x }{\lambda(1-q) - RA^{1-q}} & (A < A_0) \\ = A x ^{\frac{1}{1-q}}, x \in \mathbb{R}^N, t \geq 0 & (A = A_0) \\ \sim ((RA^{1-q} - \lambda(1-q))t)^{\frac{1}{1-q}}, t \rightarrow +\infty & (A > A_0) \end{cases}$
$\alpha > -1$	$\frac{\alpha}{1+\alpha} < q < 1$	$u(x, t) = 0 \Leftrightarrow t \geq t_\infty(x)$
$\alpha > -1$	$q = 1$	$u(x, t) \sim AR^{1+\alpha}t^{1+\alpha}e^{-\lambda t}, t \rightarrow +\infty$
$\alpha > -1$	$q > 1$	$u(x, t) \sim \left( \frac{1}{\lambda(q-1)t} \right)^{\frac{1}{q-1}}, t \rightarrow +\infty$

Tabla 0.3: Comportamientos maximales finales ( $m = 1, \lambda > 0, t > 0$ ).

sobre el que se engarzan los diversos tipos de comportamientos. El caso  $m = 1$  presenta una riqueza de resultados que obtenemos en forma *exhaustiva* como se aprecia en la tabla y la figura que siguen.

Por debajo del balance intrínseco

$$q = \frac{\alpha}{1 + \alpha}$$

el comportamiento de las soluciones sigue *todos* los posibles *crecimientos potenciales*  $1 + \alpha$ ; por encima, la recta  $q = 1$  (asíntota horizontal) marca la diferencia entre *extinción en tiempo finito* y *decaimientos potencial y exponencial*. Existe una región peculiar (relativa a la asíntota vertical  $\alpha = -1$ )

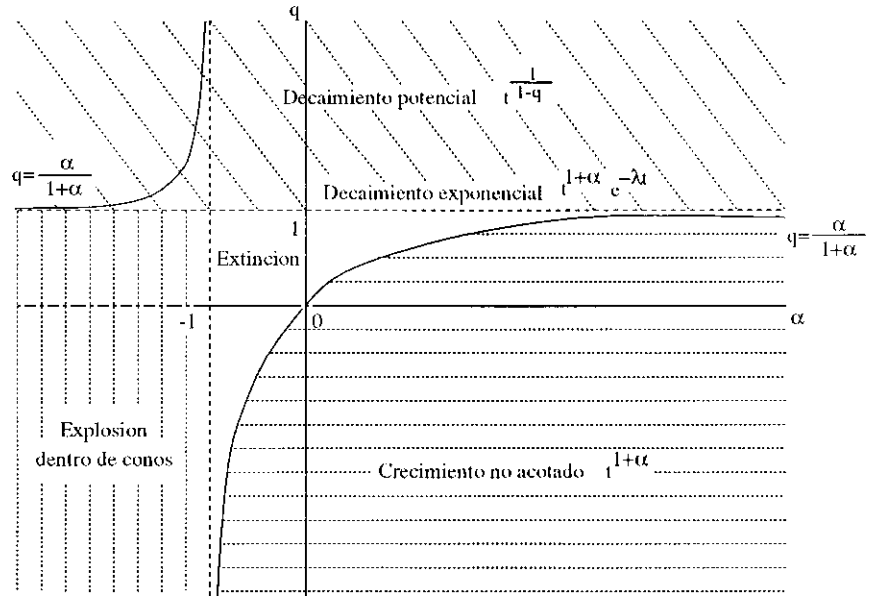


Figura 0.6: Comportamiento asintótico ( $m = 1, \lambda > 0$ ) en el plano  $(\alpha, q)$ .

en la que hay *explosión fuera de conos*. Sobre el balance intrínseco, los comportamientos tienden a adaptarse a las regiones contiguas.

El caso  $m > 1$  tiene, obviamente, una mayor complejidad, pues el *balance intrínseco*

$$q = \frac{\alpha m}{1 + \alpha}$$

tiene por asíntotas

$$\begin{cases} q = m & \text{(horizontal)} \\ \alpha = -1 & \text{(vertical)} \end{cases}$$

que, junto con las rectas propias de propiedades que nos interesan

$$\begin{cases} q = 1 & \text{(relativa a extinción en tiempo finito)} \\ \alpha = \frac{1}{m-1} & \text{(relativa a explosión en tiempo finito)} \end{cases}$$

delimitan el plano  $(\alpha, q)$  en una amplia variedad de regiones sobre las que se dan los comportamientos que expresa la figura que sigue.

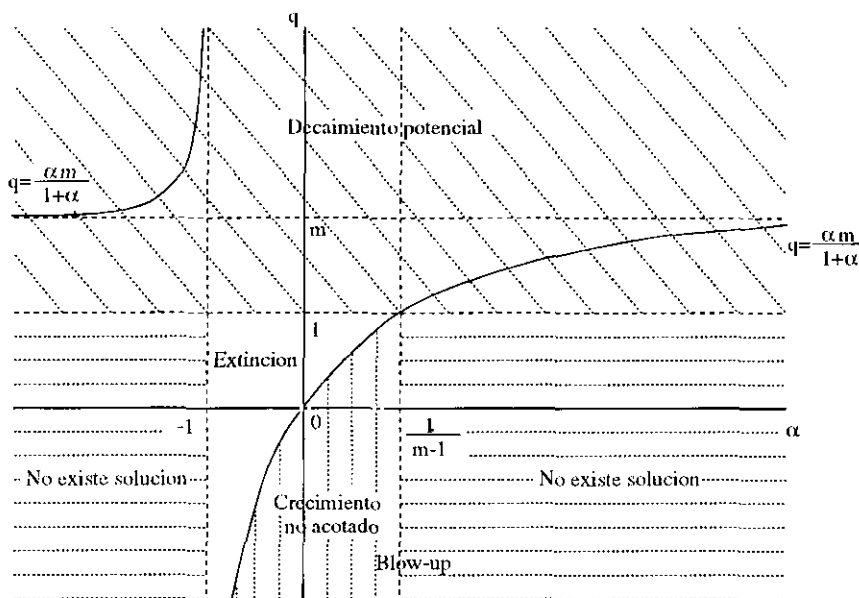


Figura 0.7: Comportamiento asintótico ( $m > 1, \lambda > 0$ ) en el plano  $(\alpha, q)$ .

Acompañamos esta Memoria con algunos Apéndices así como una lista de referencias, tablas y figuras que pueden facilitar la lectura de este trabajo.

Queremos reseñar, finalmente, que la redacción de esta Memoria está realizada de modo que cada Parte pueda leerse de forma autónoma.



# Notaciones.

Dado  $\mathcal{O}$  conjunto de  $\mathbb{R}^M$ ,  $M \geq 1$ , consideramos la ecuación general de primer orden

$$\mathcal{F}(z, u, \nabla u) = 0 \text{ en } \mathcal{O} \quad (0.1)$$

donde  $\mathcal{F}(z, r, p)$  es una función que supondremos continua en  $\overline{\mathcal{O}} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M$  (salvo que explícitamente se diga lo contrario).

En lo que sigue, por  $\nabla u$ ,  $Du$  o  $\nabla_z u$  denotamos el gradiente en  $z$  de  $u$ , mientras que  $u_{z_i}$  o  $\frac{\partial u}{\partial z_i}$  denota la derivada de  $u$  respecto a  $z_i$ ,  $1 \leq i \leq M$ . Por otra parte,  $\mathcal{F}'(p)$ ,  $\nabla \mathcal{F}(p)$  o  $D\mathcal{F}(p)$  indica el gradiente de  $\mathcal{F}(p)$  y por  $x \cdot y$  o  $\langle x, y \rangle$  denotaremos el producto escalar de  $x$  por  $y$  donde  $x, y \in \mathbb{R}^M$ .

Si  $u$  es semicontinua superiormente en  $z_0 \in \mathcal{O}$

$$D^+u(z_0) = \left\{ p \in \mathbb{R}^M : u(z) \leq u(z_0) + p \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|) \right\}$$

es el conjunto de las *superdiferenciales* de  $u$  en  $z_0$  donde  $h(z) = o(|z - z_0|)$  indica

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z)}{|z - z_0|} = 0.$$

Análogamente cuando  $u$  es semicontinua inferiormente en  $z_0 \in \mathcal{O}$

$$D^-u(z_0) = -D^+(-u(z_0))$$

es el conjunto *subdiferencial* de  $u$  en  $z_0$ . En general,  $D^\pm u(z_0)$  son conjuntos cerrados y convexos<sup>1</sup> que, en el caso en que la función  $u$  sea diferenciable en el punto  $z_0$ , se tiene

$$D^+u(z_0) = D^-u(z_0) = \{\nabla u(z_0)\}.$$

Vamos a denotar por

$$D^+u = \{z \in \mathcal{O} : D^+u(z) \neq \emptyset\}$$

---

<sup>1</sup>Pudiendo ser vacíos.

y

$$D^-u = \{z \in \mathcal{O} : D^-u(z) \neq \emptyset\}.$$

A continuación damos una breve lista de espacios funcionales que utilizaremos. Si  $\mathcal{O}$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^M$ ,  $M \geq 1$ , de interior no vacío, vamos a denotar:

- $\mathcal{C}(\mathcal{O}) = \{u : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ continua en } \mathcal{O}\}.$
- $L^\infty(\mathcal{O}) = \{u : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible, } u \text{ acotada en } \mathcal{O}\}.$
- $L_{\text{loc}}^\infty(\mathcal{O}) = \{u \text{ medible y acotada en cada abierto acotado } \omega \text{ con } \bar{\omega} \subset \mathcal{O}\}.$
- $BC(\mathcal{O}) = \mathcal{C}_b(\mathcal{O}) = \mathcal{C}(\mathcal{O}) \cap L^\infty(\mathcal{O}).$
- $UC(\mathcal{O}) = \mathcal{C}_u(\mathcal{O}) = \{u : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ uniformemente continua en } \mathcal{O}\}.$
- $BUC(\mathcal{O}) = BC(\mathcal{O}) \cap UC(\mathcal{O}).$
- $SCI(\mathcal{O}) = \{u : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ semicontinua inferiormente en } \mathcal{O}\}.$
- *s.c.i.* función semicontinua inferiormente.
- $SCS(\mathcal{O}) = \{u : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ semicontinua superiormente en } \mathcal{O}\}.$
- *s.c.s.* función semicontinua superiormente.
- $LIA(\mathcal{O}) = \{u : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ localmente inferiormente acotada en } \mathcal{O}\}.$
- $LSA(\mathcal{O}) = \{u : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ localmente superiormente acotada en } \mathcal{O}\}.$
- $LA(\mathcal{O}) = \{u : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ localmente acotada en } \mathcal{O}\}.$
- $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\bar{\mathcal{O}}) = \{u \in \mathcal{C}(\bar{\mathcal{O}}) : \exists c > 0 |u(x) - u(y)| \leq c|x - y|^\alpha, x, y \in \bar{\mathcal{O}}\}$  para  $0 < \alpha \leq 1$ .
- $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathcal{O}) = \{u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\bar{\omega}) \forall \omega \text{ abierto acotado con } \bar{\omega} \subset \mathcal{O}\}, 0 < \alpha \leq 1.$
- $\mathcal{C}_0(\mathcal{O}) = \{u : \bar{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbb{R}, u \equiv 0 \text{ en } \partial\mathcal{O}\}.$
- $\mathcal{C}_c(\mathcal{O}) = \{u : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ con soporte compacto en } \mathcal{O}\}.$



- $\mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O}) = \mathcal{D}(\mathcal{O}) = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}) \cap \mathcal{C}_c(\mathcal{O})$ .
- $\text{Lip}(\mathcal{O}) = \{u : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ lipschitziana en } \mathcal{O}\}$ .
- $\text{Lip}_{\text{loc}}(\mathcal{O}) = \{u : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ localmente lipschitziana en } \mathcal{O}\}$ .
- $W^{1,\infty}(\mathcal{O}) = \{u \in L^\infty(\mathcal{O}), Du \in L^\infty(\mathcal{O})\}$ .
- $W^{k,\infty}(\mathcal{O}) = \{u \in L^\infty(\mathcal{O}), D^\alpha u \in L^\infty(\mathcal{O}) \forall |\alpha| \leq k\}$ .
- $W_{\text{loc}}^{k,\infty}(\mathcal{O}) = \{u \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathcal{O}), D^\alpha u \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathcal{O}) \forall |\alpha| \leq k\}$ .

Una función  $u : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  es *solución generalizada* de (0.1) si  $u \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathcal{O}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathcal{O}})$  y

$$\mathcal{F}(z, u, \nabla u) = 0 \text{ a.e. } z \in \mathcal{O}.^2$$

Finalmente, si  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y convexa, denotamos por  $\mathcal{F}^*$  a la *función dual convexa o conjugada* de  $\mathcal{F}$  dada por

$$\mathcal{F}^*(p) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^M} \{p \cdot \xi - \mathcal{F}(\xi)\} \leq +\infty$$

que está definida en el conjunto convexo

$$D(\mathcal{F}^*) = \{p \in \mathbb{R}^M : \mathcal{F}^*(p) < +\infty\}.$$

Además,  $\mathcal{F}^*$  es una función convexa y *s.c.i.*

Por otra parte, las fórmulas están numeradas secuencialmente en cada Capítulo. Así, (2.n) indica la fórmula  $n$ -ésima del Capítulo 2. Análogamente, la Sección 3.4 indica la cuarta Sección del Capítulo 3, ...

---

<sup>2</sup>La definición anterior tiene sentido, ya que en virtud del *teorema de Rademacher*, si  $u \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathcal{O})$  entonces  $u$  es diferenciable en casi todo punto y, por tanto, la ecuación anterior se verifica en casi todos los puntos (los de diferenciabilidad de  $u$ ).

**Parte I**  
**Algunos modelos.**



# Capítulo 1

## Las ecuaciones de Hamilton–Jacobi en la Mecánica Clásica.

En Mecánica Analítica, un *sistema lagrangiano* que gobierna un sistema mecánico holonómico con  $N$  grados de libertad toma la forma

$$(\mathcal{L}_p(t, u, u'))' - \mathcal{L}_u(t, u, u') = 0.$$

Denotando por  $\mathcal{H}$  a la *transformada de Legendre* de  $\mathcal{L}$  y por  $v = \mathcal{L}_p(t, u, u')$  al *momento conjugado*, el sistema lagrangiano anterior puede transformarse en un *sistema hamiltoniano*

$$\begin{cases} u' = \mathcal{H}_v(t, u, v) \\ v' = -\mathcal{H}_u(t, u, v). \end{cases}$$

Un ejemplo sencillo de lagrangiano es

$$\mathcal{L}(t, u, p) = \frac{1}{2}|p|^2 - V(u),$$

que lleva asociado el hamiltoniano

$$\mathcal{H}(t, u, v) = \frac{1}{2}|v|^2 + V(u).$$

El ejemplo anterior es un caso sencillo de la consideración general

$$\mathcal{L}(t, u, p) = \frac{1}{2}(A(t, u)p, p) - V(t, u)$$

siendo  $A$  una matriz simétrica real no singular, para la cual

$$\mathcal{H}(t, u, v) = \frac{1}{2}(A^{-1}(t, u)v, v) + V(t, u).$$

En general, las derivaciones standard de las ecuaciones de Hamilton presuponen que la matriz hessiana del lagrangiano es no singular y además obtienen sólo resultados locales o, desde otro punto de vista, hamiltonianos multivaluados en la variable conjugada. Los principales objetivos que surgen entonces (ver [Pu-Serr]) son:

- dar condiciones que garanticen que el hamiltoniano sea una función univaluada en todo el dominio del momento conjugado.<sup>1</sup>
- grado de regularidad que se requiere al lagrangiano para que el sistema hamiltoniano sea válido.
- la obtención de las ecuaciones de Hamilton incluso cuando el lagrangiano es sólo de clase  $\mathcal{C}^1$  (de forma que la matriz hessiana no esté definida) y cuando la matriz hessiana está definida pero degenera en algunos puntos (nótese que la convexidad fuerza a que esta matriz sea, al menos, definida no negativa).

Claramente, en los últimos casos descritos, las derivaciones ‘clásicas’ de las ecuaciones de Hamilton no pueden aplicarse. Concretamente, muestran que el sistema hamiltoniano va a estar globalmente definido en el dominio del momento conjugado cuando se verifican las siguientes condiciones ‘naturales’:

(H1)  $\mathcal{L} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O} \times \Omega)$  siendo  $\mathcal{O}$  un abierto de  $\mathbb{R}^{N+1}$  y  $\Omega$  un abierto *convexo* de  $\mathbb{R}^N$ .

(H2) Para cada  $(t, u) \in \mathcal{O}$  fijo, la función  $\mathcal{L}(t, u, \cdot)$  es *estrictamente convexa*.

Obviamente, las condiciones de convexidad anteriores determinan que  $\mathcal{L}$  es *estrictamente convexo en el sentido de Weierstrass*, es decir, verifica la condición

$$\mathcal{L}(t, u, p) - \mathcal{L}(t, u, p_0) > \mathcal{L}_p(t, u, p_0) \cdot (p - p_0)$$

para todo  $p, p_0 \in \Omega$  con  $p \neq p_0$  donde  $\cdot$  denota el producto escalar en  $\mathbb{R}^N$ . Así, podemos reemplazar las condiciones anteriores por:

---

<sup>1</sup>Este objetivo será alcanzado por medio de condiciones de convexidad sobre el lagrangiano.

(H1)\*  $\mathcal{L} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O} \times \Omega)$  siendo  $\mathcal{O}$  un abierto de  $\mathbb{R}^{N+1}$  y  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}^N$ .

(H2)\* Para cada  $(t, u) \in \mathcal{O}$  fijo, la función  $\mathcal{L}(t, u, \cdot)$  es estrictamente convexa en el sentido de Weierstrass.

Estas últimas condiciones son equivalentes a las anteriores cuando  $\Omega$  es convexo; en caso contrario estas últimas son, en general, más débiles.

Una derivación de las ecuaciones de Hamilton bajo estas condiciones minimales no sólo tiene un interés intrínseco, sino que nos va a permitir considerar lagrangianos singulares, por ejemplo, de la forma

$$\mathcal{L}(t, u, p) = \frac{1}{m}|p|^m - V(u), \quad m > 1, \quad m \neq 2.$$

Supongamos que  $\mathcal{L}_p \in \mathcal{C}^1$  y que la matriz hessiana

$$\mathcal{L}_{pp} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial p_i \partial p_j}$$

es no singular. Entonces, el procedimiento más general empleado para la obtención de las ecuaciones de Hamilton consiste en aplicar las reglas de diferenciación así como el Teorema de la Función Implícita. Evidentemente, este procedimiento proporciona sólo un resultado local.

Para mostrar que el hamiltoniano está globalmente bien definido y univaluado en todo el dominio de la variable conjugada se requieren hipótesis adicionales. Así por ejemplo, consideremos en  $\mathbb{R}^2$  el siguiente lagrangiano no cuadrático

$$\mathcal{L}(p_1, p_2) = e^{p_2} \operatorname{sen} p_1$$

para el cual

$$|\det \mathcal{L}_{pp}| = e^{p_2} > 0$$

mientras que la aplicación conjugada

$$\begin{cases} v_1 = e^{p_2} \cos p_1 \\ v_2 = e^{p_2} \operatorname{sen} p_1 \end{cases}$$

no es globalmente inyectiva.

Cuando  $\mathcal{L}$  es sólo de clase  $\mathcal{C}^1$  o  $\mathcal{L}_{pp}$  es singular únicamente trataremos aquellos casos en los que se pueda escribir

$$\mathcal{L}(t, u, p) = \mathcal{G}(p) - V(t, u), \quad (t, u) \in \mathcal{O}, \quad p \in \Omega$$

donde  $\mathcal{G}$  y  $\Omega$  son convexas, en cuyo caso puede obtenerse una derivación del sistema hamiltoniano en base al trabajo de Rockafellar [**Rock**] o de Mawhin & Willem [**Ma-Wi**] en el contexto del Análisis Convexo. Concretamente, además de las hipótesis (H1) y (H2), en [**Ma-Wi**] la derivación se obtiene para  $\Omega$  convexo y acotado extendiendo a todo  $\mathbb{R}^N$  la función  $\mathcal{G}(p)$  por  $+\infty$  cuando  $p \notin \Omega$  bajo el supuesto

$$\lim_{|p| \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{G}(p)}{|p|} = +\infty, \quad (1.1)$$

mientras que en [**Rock**] la derivación se obtiene para  $\Omega = \mathbb{R}^N$  bajo la condición

$$\lim_{p \rightarrow p_0} |\mathcal{G}_p(p)| = +\infty, \quad p_0 \in \partial\Omega. \quad (1.2)$$

Mostremos a continuación algunos ejemplos:

### Ejemplo 1.1

Veamos un lagrangiano  $\mathcal{L}$  separable para el que no se puede obtener una derivación directa del sistema hamiltoniano. Consideremos en  $\Omega = \mathbb{R}^N$  la función

$$\mathcal{G}(p) = \frac{1}{m}|p|^m, \quad m > 1, \quad m \neq 2.$$

Claramente, la función  $\mathcal{L}_p$  no es de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $p = 0$  si  $m < 2$  y  $\mathcal{L}_{pp}$  es singular en  $p = 0$  si  $m > 2$ . Nótese que se verifican las condiciones (1.1) y (1.2). Además,

$$\mathcal{H}(t, u, v) = \frac{m-1}{m}|v|^{\frac{m}{m-1}} + V(t, u), \quad (t, u) \in \mathcal{O}, \quad v \in \mathbb{R}^N. \quad \square$$

### Ejemplo 1.2

Consideremos en  $\Omega = \mathbb{R}^N$  la función

$$\mathcal{G}(p) = \sqrt{1 + |p|^2} - 1.$$

Entonces  $\mathcal{L}_p \in \mathcal{C}^1$  y  $\mathcal{L}_{pp}$  es definida positiva. Ahora se verifica (1.2) pero no (1.1). En este caso

$$\mathcal{H}(t, u, v) = 1 - \sqrt{1 - |v|^2} + V(t, u), \quad (t, u) \in \mathcal{O}, \quad |v| < 1. \quad \square$$

**Ejemplo 1.3**

Consideremos para  $N = 2$  la función

$$\mathcal{G}(p) = |p|^2 + \frac{p_1^2}{p_2}$$

en el semiplano

$$\Omega = \{p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : p_2 > 0\}.$$

De nuevo  $\mathcal{L}_p \in \mathcal{C}^1$  y  $\mathcal{L}_{pp}$  es definida positiva. En cambio se verifica (1.1) pero no (1.2).<sup>2</sup> Este ejemplo es interesante porque el dominio de la variable conjugada  $v = \mathcal{G}_p(p)$

$$\{v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : v_1^2 + 4v_2 > 0\}$$

no es convexo.  $\square$

**Ejemplo 1.4**

Finalmente, si para  $N = 2$  consideramos

$$\mathcal{G}(p) = \frac{(1 + |p_1|^m)^{\frac{1}{m}}}{p_2}, \quad m > 1, \quad m \neq 2$$

en el dominio

$$\Omega = \{p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 : |p_1|^m < 2(m-1), p_2 > 0\}$$

no se verifica ninguna de las condiciones (1.1) y (1.2). Además, a pesar que la función  $\mathcal{G}$  es estrictamente convexa y de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $\Omega$  falla la diferencial segunda en el rayo  $p_1 = 0$ ,  $p_2 > 0$  si  $m < 2$  mientras que si  $m > 2$  la función  $\mathcal{G} \in \mathcal{C}^2(\Omega)$  pero  $\det \mathcal{L}_{pp} = 0$  en el rayo anterior.  $\square$

El principal objetivo es, como se comentó anteriormente, la derivación del sistema hamiltoniano a partir de las condiciones (H1)\* y (H2)\* (ver, nuevamente, [Pu-Serr]). Para ello, se considera *solución* del sistema lagrangiano

$$(\mathcal{L}_p(t, u, u'))' - \mathcal{L}_u(t, u, u') = 0$$

a una función  $u = u(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  de clase  $\mathcal{C}^1(I)$  que verifique:

---

<sup>2</sup>Pues  $\lim_{p \rightarrow 0} |\mathcal{G}_p(p)| \neq +\infty$ .



1.  $(t, u(t), u'(t)) \in \mathcal{O} \times \Omega$  para todo  $t \in I$ .
2. el momento conjugado  $v(t) = \mathcal{L}_p(t, u(t), u'(t))$  es continuamente diferenciable en  $I$ .
3.  $v'(t) = \mathcal{L}_u(t, u(t), u'(t))$  para todo  $t \in I$ .

Las condiciones anteriores son, además, las hipótesis naturales bajo las cuales las ecuaciones de Hamilton están bien definidas.

## Capítulo 2

### La ecuación eikonal.

En la Teoría de Campos, una *onda plana* se caracteriza porque tanto su dirección de propagación como su amplitud son las mismas en todos los puntos.<sup>1</sup>

Muchas ondas electromagnéticas que no son planas pueden considerarse como tales al menos en pequeñas regiones del espacio. Para ello es necesario que la amplitud y la dirección de la onda sean prácticamente constantes a distancias del orden de la longitud de onda. Si ésto ocurre, podemos introducir la *superficie de onda* formada por el conjunto de puntos cuyas vibraciones son iguales en un instante de tiempo dado.<sup>2</sup> De esta forma, en pequeñas regiones del espacio, podemos hablar de una *dirección de propagación de la onda* que será normal a la superficie de onda. Aparece así la noción de *rayos* como las trayectorias ortogonales a las superficies de onda. La tangente en cada punto del rayo coincide, por tanto, con la dirección de propagación de la onda.

El estudio de las leyes de propagación de las ondas en la situación anterior constituye el objeto de la *Optica Geométrica*: es decir, considera la propagación de las ondas (en particular, de la luz) como propagación de rayos, sin tener en cuenta sus propiedades ondulatorias. Dicho de otra forma, la Optica Geométrica corresponde al caso límite de pequeñas longitudes de onda.

Esbocemos una obtención de la ecuación eikonal a partir del siguiente

---

<sup>1</sup>Recuérdese que, en general, una onda electromagnética no tiene esa propiedad.

<sup>2</sup>Así, la superficie de onda de una onda plana está formada por los planos perpendiculares a la dirección de propagación de la onda.

modelo que aparece en el estudio de la propagación de un campo eléctrico ó magnético

$$(P)_\varepsilon \begin{cases} u_{tt}^\varepsilon - \operatorname{div}(k(x, t)\nabla u^\varepsilon) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u^\varepsilon(x, 0) = \varepsilon e^{\frac{i}{\varepsilon} S_0(x)} v_0(x) & \text{en } \mathbb{R}^N \\ u_t^\varepsilon(x, 0) = w_0(x) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (N = 2 \text{ ó } 3)$$

donde  $k : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ ,  $S_0$  y  $v_0$  son funciones reales y  $w_0, u^\varepsilon$  complejas para cada  $\varepsilon > 0$ . Una presentación detallada de este modelo puede seguirse en L.D. Landau y E.M. Lifschitz [**Lan-Lif**].

Como hemos dicho, el objetivo de la Optica Geométrica es el estudio de las pequeñas longitudes de onda, que se corresponden con valores del parámetro  $\varepsilon$  pequeños. Por tanto, nos interesamos por soluciones  $u^\varepsilon$  de la forma

$$u^\varepsilon(x, t) = \varepsilon e^{\frac{i}{\varepsilon} S(x, t)} v(x, t)$$

con  $v(x, 0) = v_0(x)$  y  $S(x, 0) = S_0(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ . De esta manera se obtiene

$$u_t^\varepsilon = \varepsilon \left[ v_t + \frac{i}{\varepsilon} v S_t \right] e^{\frac{i}{\varepsilon} S(x, t)}$$

y

$$u_{tt}^\varepsilon = \left[ \varepsilon v_{tt} - \frac{1}{\varepsilon} v S_t^2 + i(2v_t S_t + v S_{tt}) \right] e^{\frac{i}{\varepsilon} S(x, t)}.$$

Por otra parte, para cada  $j = 1, 2, \dots, N$  se tiene

$$\begin{aligned} \left( k(x, t) u_{x_j}^\varepsilon \right)_{x_j} &= k_{x_j} u_{x_j}^\varepsilon + k u_{x_j x_j}^\varepsilon = \varepsilon k_{x_j} \left[ v_{x_j} + \frac{i}{\varepsilon} v S_{x_j} \right] e^{\frac{i}{\varepsilon} S(x, t)} \\ &+ k \left[ \varepsilon v_{x_j x_j} - \frac{1}{\varepsilon} v S_{x_j}^2 + i(2v_{x_j} S_{x_j} + v S_{x_j x_j}) \right] e^{\frac{i}{\varepsilon} S(x, t)} \\ &= \left[ \varepsilon (k v_{x_j x_j} + k_{x_j} v_{x_j}) - \frac{1}{\varepsilon} k v S_{x_j}^2 + i(2k v_{x_j} S_{x_j} + k v S_{x_j x_j} + v k_{x_j} S_{x_j}) \right] e^{\frac{i}{\varepsilon} S(x, t)}. \end{aligned}$$

De esta forma

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(k(x, t)\nabla u^\varepsilon) &= \sum_{j=1}^N \left( k(x, t) u_{x_j}^\varepsilon \right)_{x_j} \\ &= \left[ \varepsilon (k \Delta v + \nabla k \cdot \nabla v) - \frac{1}{\varepsilon} k v |\nabla S|^2 + i(2k \nabla v \cdot \nabla S + k v \Delta S + v \nabla k \cdot \nabla S) \right] e^{\frac{i}{\varepsilon} S(x, t)}. \end{aligned}$$

Consecuentemente, a partir de la ecuación

$$u_{tt}^\varepsilon - \operatorname{div}(k(x, t)\nabla u^\varepsilon) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

obtenemos, de los términos en  $\varepsilon$ , la *ecuación de ondas generalizada*

$$v_{tt} = k(x, t)\Delta v + \nabla k \cdot \nabla v,$$

de los términos en  $\frac{1}{\varepsilon}$ , la *ecuación eikonal generalizada*

$$S_t = \sqrt{k(x, t)}|\nabla S| \tag{2.1}$$

y, de los términos en la unidad imaginaria  $i$ , la *ecuación de transporte generalizada*

$$vS_{tt} + 2v_tS_t = k(x, t)(v\Delta S + 2\nabla v \cdot \nabla S) + v\nabla k \cdot \nabla S.$$

En particular, una elección interesante es

$$k(x, t) = R^2|\nabla S(x, t)|^{2(m-1)}$$

donde  $R > 0$  y  $m \geq 1$ , para la que (2.1) toma la forma

$$S_t = R|\nabla S|^m \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

### Observación 2.1

Una presentación parecida para el caso  $m = 1$

$$S_t = R|\nabla S| \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+,$$

conocida como *ecuación eikonal*, es considerada en G. Barles [Ba3].  $\square$



## Capítulo 3

# Modelo de propagación de una llama.

En este Capítulo presentamos, brevemente, la fenomenología de *frente de una llama* que se propaga en un fluido combustible sobre una región sin frontera siguiendo las líneas expuestas en J. Sethian [Set].

Sea  $\Omega$  una región simple, cerrada y regular de  $\mathbb{R}^2$  cuya frontera  $\Gamma$  está parametrizada por  $(\mathcal{X}(s), \mathcal{Y}(s))$ . Supongamos que la mezcla combustible ocupa el exterior de  $\Omega$  mientras que en el interior se encuentran las partículas quemadas o incombustibles. En el instante  $t = 0$  se pone en ignición la mezcla variando, por la naturaleza de la combustión, la frontera  $\Gamma(t)$  (*frente de la llama* en el instante  $t$ ) entre la región por quemar y el resto incombustible o ya quemado  $\Omega(t)$ .

El modelo de J. Sethian esencialmente está basado en las *ondas de superficie*. Supone, por tanto, que la propagación del frente de la llama se hace con velocidad constante  $c$  y en dirección normal a sí misma. Siendo  $\Gamma(t)$  la posición del frente de la llama en el instante  $t$ , la parametrización  $(\mathcal{X}(s, t), \mathcal{Y}(s, t))$  debe verificar

$$\begin{cases} \mathcal{X}_t = -\frac{c\mathcal{Y}_s}{\sqrt{\mathcal{X}_s^2 + \mathcal{Y}_s^2}} \\ \mathcal{Y}_t = \frac{c\mathcal{X}_s}{\sqrt{\mathcal{X}_s^2 + \mathcal{Y}_s^2}} \end{cases} \quad (\mathcal{X}_t^2 + \mathcal{Y}_t^2 = c^2).$$

La gráfica de la función  $t \mapsto (\mathcal{X}(s, t), \mathcal{Y}(s, t))$  se denomina *curva de ignición*. Si  $\Gamma(0) = (\mathcal{X}(s, 0), \mathcal{Y}(s, 0))$  es suficientemente regular, el método de las características permite resolver el sistema anterior, al menos para instantes pequeños, con lo que el frente de la llama viene dado por

$$\begin{cases} \mathcal{X}(s, t) = \mathcal{X}(s, 0) - \frac{c\mathcal{Y}_s(s, 0)}{\sqrt{\mathcal{X}_s^2(s, 0) + \mathcal{Y}_s^2(s, 0)}}t \\ \mathcal{Y}(s, t) = \mathcal{Y}(s, 0) + \frac{c\mathcal{X}_s(s, 0)}{\sqrt{\mathcal{X}_s^2(s, 0) + \mathcal{Y}_s^2(s, 0)}}t. \end{cases}$$

Por tanto, los puntos del frente de llama  $\Gamma(t)$  en el instante  $t$  están caracterizados por verificar la relación

$$(\mathcal{X}(s, t) - \mathcal{X}(s, 0))^2 + (\mathcal{Y}(s, t) - \mathcal{Y}(s, 0))^2 = (ct)^2. \quad (3.1)$$

### Observación 3.1

En la descripción anterior surgen algunas peculiaridades que debemos tener presentes:

1. la no linealidad del sistema hace que al cabo de un cierto tiempo las curvas de ignición puedan, eventualmente, colisionar. Debe indicarse, por tanto, cómo continúa la propagación de la llama tras un instante de colisión.
2. la región inicialmente no combustible pudiera ser no regular o no tener bien definido su vector normal exterior.

Ambas cuestiones son relativamente próximas y tienen mucho que ver con los inconvenientes del clásico *método de las características* (véase el Apéndice A).  $\square$

No obstante, la apreciación del fenómeno nos anima a buscar una formulación más general del modelo en la que existan *soluciones globales*. Para ello suele considerarse el siguiente *criterio de entropía*: “la propagación del frente de la llama debe ser tal que las partículas que se queman deben permanecer quemadas con la evolución del proceso”. Con esta idea podemos introducir una *formulación débil* a partir de la función característica de la

región quemada.<sup>1</sup> Concretamente, la relación (3.1) permite caracterizar la región quemada en el instante  $t$

$$\Omega(t) = \Omega \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \text{dist}((x, y), \overline{\Omega}) < ct\}, \quad (3.2)$$

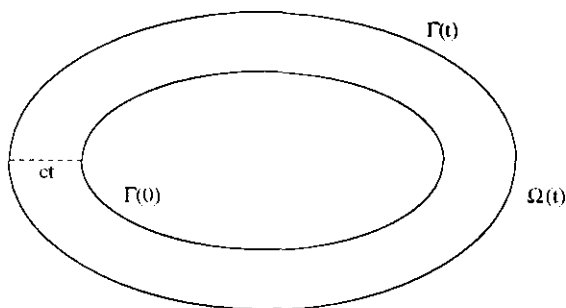


Figura 3.1: Región quemada en el instante  $t$ .

cuya función característica

$$\varphi(x, y, t) = \chi_{\overline{\Omega(t)}}(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0, \quad (3.3)$$

tiene las siguientes propiedades:  $\varphi$  es cóncava,  $\varphi \in SCS(\mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}_+})$ ,

$$\varphi(x, y, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in \overline{\Omega} = \overline{\Omega(0)} \\ 1 & \text{si } \min_s [(x - \mathcal{X}(s, 0))^2 + (y - \mathcal{Y}(s, 0))^2] \leq (ct)^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y, además,  $\varphi$  admite la representación

$$\varphi(x, y, t) = \sup\{\varphi(\xi, \eta, 0) : |x - \xi|^2 + |y - \eta|^2 \leq (ct)^2\}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0.$$

Podemos aprovechar este modelo para introducir el concepto de *solución de viscosidad*.<sup>2</sup> Es ésta una noción que permite ‘resolver’ ecuaciones en

<sup>1</sup>Se trata de una *formulación débil* porque no requiere ningún supuesto de regularidad sobre la curva  $(\mathcal{X}(s, 0), \mathcal{Y}(s, 0))$ ; en particular, no precisamos la existencia del vector normal en todo punto de  $\Gamma$ .

<sup>2</sup>Una presentación más detallada incluyendo algunas contribuciones propias está desarrollada en el Apéndice A.



derivadas parciales de primer orden completamente no lineales mediante funciones semicontinuas. La idea general reposa en lo siguiente: si  $u : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^M$ ,  $M \geq 1$ , es diferenciable en  $z = z_0$  entonces *localmente* se verifica

$$u(z) = u(z_0) + \nabla u(z_0) \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

para un único elemento  $\nabla u(z_0) \in \mathbb{R}^M$ . De esta forma, podemos extender la idea anterior a funciones  $u \in \mathcal{SCS}(\mathcal{O})$  considerando el conjunto  $D^+u(z_0)$  formado por los elementos  $p \in \mathbb{R}^M$  que verifican

$$u(z) \leq u(z_0) + p \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|).$$

Se trata, por tanto, de aquellos vectores  $p \in \mathbb{R}^M$  para los que el *hiperplano*

$$\eta = u(z_0) + p \cdot (z - z_0)$$

es *supertangente* a la gráfica de la función  $\eta = u(z)$  en el punto  $z_0$ . En forma análoga, para  $u \in \mathcal{SCI}(\mathcal{O})$  se define el conjunto  $D^-u(z_0)$  como

$$D^-u(z_0) = -D^+(-u(z_0)).^3$$

En general,  $D^\pm u(z_0)$  son conjuntos cerrados y convexos, pudiendo ser vacíos, que coinciden con las conocidas *semidiferenciales* de  $u$  en  $z_0$ . Además, en el caso en que la función  $u$  sea diferenciable en el punto  $z_0$ , se tiene

$$D^+u(z_0) = D^-u(z_0) = \{\nabla u(z_0)\}.$$

Así, una manera amplia de resolver ecuaciones en derivadas parciales de primer orden completamente no lineales como

$$\mathcal{F}(z, u, \nabla u) = 0 \quad \text{en } \mathcal{O} \tag{3.4}$$

consiste en encontrar funciones  $u \in \mathcal{C}(\mathcal{O})$  con la propiedad de que para todo  $z \in \mathcal{O}$  se verifique

$$\mathcal{F}(z, u(z), p) \leq 0, \quad p \in D^+u(z)$$

y

$$\mathcal{F}(z, u(z), p) \geq 0, \quad p \in D^-u(z).$$

---

<sup>3</sup>Ahora se argumenta con *hiperplanos subtangentes*.

De nuevo enviamos al Apéndice A para justificar este tipo de soluciones y su consistencia con la idea clásica de resolver (3.4). De hecho, esta noción puede debilitarse, extendiéndose a funciones localmente acotadas (que pueden ser discontinuas) como mostramos en la Definición 4.53.

Con vistas a encontrar la ecuación diferencial que verifica la función

$$\varphi(x, y, t) = \chi_{\bar{\Omega}(t)}(x, y)$$

definida en (3.3) vamos a suponer que  $\Omega(0) = \mathbf{B}_\sigma(0, 0)$ ,  $\sigma > 0$ , en cuyo caso, por (3.2), la región quemada viene dada en función del tiempo por

$$\Omega(t) = \mathbf{B}_{\sigma+ct}(0, 0), \quad t \geq 0.$$

Por definición, para  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  y  $t \geq 0$ , se verifica

$$\varphi(x, y, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x^2 + y^2 \leq (\sigma + ct)^2 \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 > (\sigma + ct)^2. \end{cases}$$

Además,  $(\varphi_x(x, y, t), \varphi_y(x, y, t), \varphi_t(x, y, t)) = (0, 0, 0)$  si  $x^2 + y^2 \neq (\sigma + ct)^2$ . Veamos qué ocurre en los puntos  $(x_0, y_0, t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  en los que  $x_0^2 + y_0^2 = (\sigma + ct_0)^2$ . Ante todo, la *concavidad* de  $\varphi$  hace que no puedan existir *hiperplanos subtangentes* a la función  $\varphi$  en el punto  $(x_0, y_0, t_0)$ , por lo que

$$D^- \varphi(x_0, y_0, t_0) = \emptyset.$$

Por otra parte, la consideración de  $(p_x, p_y, p_t) \in D^+ \varphi(x_0, y_0, t_0)$  conduce al siguiente *hiperplano supertangente* a  $\varphi$  en  $(x_0, y_0, t_0)$

$$z = \varphi(x_0, y_0, t_0) + p_x(x - x_0) + p_y(y - y_0) + p_t(t - t_0),$$

es decir,

$$z = 1 + p_x(x - x_0) + p_y(y - y_0) + p_t(t - t_0). \quad (3.5)$$

Para cada  $\phi \in [0, 2\pi[$  consideremos en  $\mathbb{R}^4$  la recta  $r$  determinada por los puntos

$$A = (\sigma \cos \phi, \sigma \sin \phi, 0, 1)$$

(correspondiente al instante  $t = 0$ ) y

$$B = ((\sigma + c) \cos \phi, (\sigma + c) \sin \phi, 1, 1)$$

(correspondiente a  $t = 1$ ), con lo que un vector director de la recta  $r$  es

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{AB} = c \cos \phi \vec{e}_1 + c \operatorname{sen} \phi \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

siendo

$$\vec{e}_i = (0, \dots, \overbrace{1}^i, \dots, 0), \quad 1 \leq i \leq 4.$$

Por otro lado, un vector de dirección unitario de la recta que une los puntos  $O$  y  $A$  es

$$\vec{w}_1 = \cos \phi \vec{e}_1 + \operatorname{sen} \phi \vec{e}_2.$$

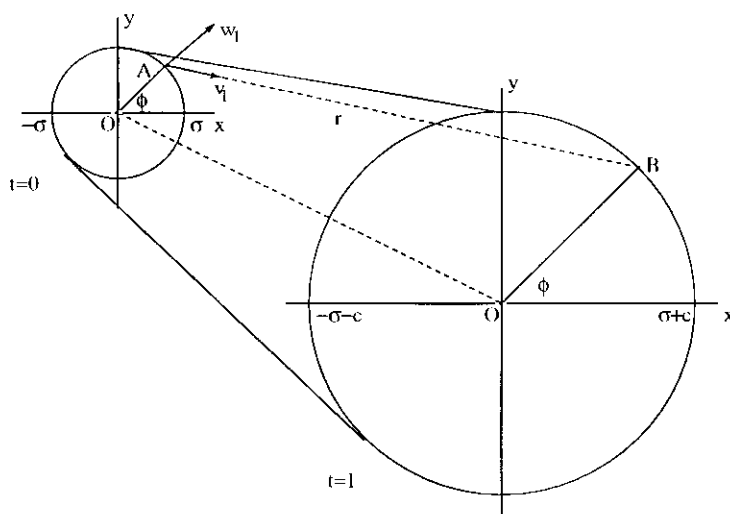


Figura 3.2: Vectores de dirección  $\vec{v}_1$  y  $\vec{w}_1$ .

Si nos restringimos al hiperplano  $z = 0$ , para obtener la variedad tangente a la superficie cónica

$$x^2 + y^2 = (\sigma + ct)^2$$

en el punto  $A$  requerimos, además de  $\vec{v}_1$ , el vector

$$\begin{aligned} \vec{v}_2 &= \vec{v}_1 \times \vec{w}_1 = \begin{vmatrix} c \operatorname{sen} \phi & 1 \\ \operatorname{sen} \phi & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + \begin{vmatrix} 1 & c \cos \phi \\ 0 & \cos \phi \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} c \cos \phi & c \operatorname{sen} \phi \\ \cos \phi & \operatorname{sen} \phi \end{vmatrix} \vec{e}_3 \\ &= -\operatorname{sen} \phi \vec{e}_1 + \cos \phi \vec{e}_2. \end{aligned}$$

Claramente, el hiperplano supertangente definido en (3.5) pertenece al haz que contiene a la recta  $r$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda c \cos \phi - \mu \operatorname{sen} \phi + \nu u_1 \\ y = y_0 + \lambda c \operatorname{sen} \phi + \mu \cos \phi + \nu u_2 \\ t = t_0 + \lambda & + \nu u_3 \\ z = 1 & + \nu u_4 \end{cases}$$

siendo  $\vec{v}_3 = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3 + u_4 \vec{e}_4$  un vector que determinaremos más adelante. Se trata de un sistema lineal en  $\lambda, \mu, \nu$  cuya compatibilidad requiere la condición

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & c \cos \phi & -\operatorname{sen} \phi & u_1 \\ y - y_0 & c \operatorname{sen} \phi & \cos \phi & u_2 \\ t - t_0 & 1 & 0 & u_3 \\ z - 1 & 0 & 0 & u_4 \end{vmatrix} = 0,$$

es decir,

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} c \operatorname{sen} \phi & \cos \phi & u_2 \\ 1 & 0 & u_3 \\ 0 & 0 & u_4 \end{vmatrix} (x - x_0) - \begin{vmatrix} c \cos \phi & -\operatorname{sen} \phi & u_1 \\ 1 & 0 & u_3 \\ 0 & 0 & u_4 \end{vmatrix} (y - y_0) \\ &+ \begin{vmatrix} c \cos \phi & -\operatorname{sen} \phi & u_1 \\ c \operatorname{sen} \phi & \cos \phi & u_2 \\ 0 & 0 & u_4 \end{vmatrix} (t - t_0) - \begin{vmatrix} c \cos \phi & -\operatorname{sen} \phi & u_1 \\ c \operatorname{sen} \phi & \cos \phi & u_2 \\ 1 & 0 & u_3 \end{vmatrix} (z - 1) \\ &= -u_4 \cos \phi (x - x_0) - u_4 \operatorname{sen} \phi (y - y_0) + cu_4 (t - t_0) \\ &\quad + [(u_1 \cos \phi + u_2 \operatorname{sen} \phi) - cu_3] (z - 1), \end{aligned}$$

obteniéndose

$$z = 1 + \frac{u_4}{(u_1 \cos \phi + u_2 \operatorname{sen} \phi) - cu_3} [\cos \phi (x - x_0) + \operatorname{sen} \phi (y - y_0) - c(t - t_0)].$$

Por tanto, debe verificarse

$$u_3 \neq \frac{u_1 \cos \phi + u_2 \operatorname{sen} \phi}{c}.$$

Sin pérdida de generalidad, los comentarios anteriores permiten la elección

$$\vec{v}_3 = \cos \phi \vec{e}_1 + \operatorname{sen} \phi \vec{e}_2 + k \vec{e}_4, \quad k \in \mathbb{R}$$

que conduce a

$$\begin{cases} p_x = k \cos \phi \\ p_y = k \operatorname{sen} \phi \\ p_t = -kc. \end{cases} \quad (3.6)$$

De esta forma se obtiene la igualdad

$$p_x^2 + p_y^2 = k^2 = \left(\frac{p_t}{c}\right)^2,$$

es decir,

$$|p_t| = c\sqrt{p_x^2 + p_y^2}. \quad (3.7)$$

Como  $(p_x, p_y, p_t) \in D^+\varphi(x_0, y_0, t_0)$  con  $x_0^2 + y_0^2 = (\sigma + ct_0)^2$  se verifica

$$\varphi(x, y, t) \leq 1 + p_x(x - x_0) + p_y(y - y_0) + p_t(t - t_0) + o(|x - x_0| + |y - y_0| + |t - t_0|).$$

Como además  $0 \leq \varphi(x, y, t) \leq 1$ , entonces  $(0, 0, 0) \in D^+\varphi(x_0, y_0, t_0)$ . La evaluación en  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  y  $t > t_0$  determina  $\varphi(x, y, t) = 1$  y con ello

$$0 \leq p_t(t - t_0) + o(t - t_0).$$

Dividiendo ahora por  $t - t_0$  y haciendo tender  $t \rightarrow t_0$  obtenemos

$$p_t \geq 0.$$

De esta forma, la relación (3.6) requiere la condición  $k \leq 0$  lo que a partir de (3.7) permite escribir

$$p_t = c\sqrt{p_x^2 + p_y^2}. \quad (3.8)$$

Así se concluye que aún siendo  $\varphi$  discontinua es “solución de viscosidad” de

$$\varphi_t = c\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} \text{ en } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \quad (3.9)$$

(véase la Sección 4.3).

### Observación 3.2

1. El resultado anterior puede extenderse fácilmente al caso en que  $\Omega(0)$  es un conjunto convexo arbitrario.

2. Como veremos en el Capítulo 7, la función

$$\varphi(x, y, t) = \sup\{\varphi(\xi, \eta, 0) : |x - \xi|^2 + |y - \eta|^2 \leq (ct)^2\}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0$$

se corresponde con la fórmula de Lax–Oleinik relativa al problema de Cauchy

$$\begin{cases} \varphi_t = c\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} \\ \varphi(x, y, 0) = \chi_{\overline{\Omega}(0)}(x, y). \quad \square \end{cases}$$

De la problemática anterior interesa particularmente la evolución del *frente de llama*  $\gamma$ , por tanto, la frontera de la región quemada en el instante  $t$

$$\Gamma(t) = \partial\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x, y, t) = 1\}.$$

Una aplicación de nuestras contribuciones nos permite caracterizar dicho frente mediante el uso de *conjuntos de nivel* gobernados por una función lipschitziana. En efecto, si consideramos el dato inicial

$$\begin{aligned} \psi_0(x, y) &= [1 - \text{dist}((x, y), \overline{\Omega})]_+ + \text{dist}((x, y), \mathbb{R}^2 \setminus \Omega) \\ &= \begin{cases} [1 - \text{dist}((x, y), \overline{\Omega})]_+ & \text{si } (x, y) \notin \overline{\Omega} \\ 1 & \text{si } (x, y) \in \partial\Omega \\ 1 + \text{dist}((x, y), \mathbb{R}^2 \setminus \Omega) & \text{si } (x, y) \in \Omega \end{cases} \end{aligned}$$

expresado en términos de la distancia a  $\Gamma = \partial\Omega$ , se tiene

$$\psi_0(x, y) = 1 \Leftrightarrow (x, y) \in \partial\Omega. \quad (3.10)$$

Además, la solución correspondiente del problema

$$\begin{cases} \psi_t = c\sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2} \\ \psi(x, y, 0) = \psi_0(x, y) \end{cases}$$

viene dada, como se verá en el Capítulo 7, por la fórmula de Lax–Oleinik

$$\psi(x, y, t) = \sup\{\psi_0(\xi, \eta) : |x - \xi|^2 + |y - \eta|^2 \leq (ct)^2\}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0.$$

Un análisis detallado de esta fórmula (véase la Figura adjunta) permite obtener la representación

$$\psi(x, y, t) = \begin{cases} [1 - \text{dist}((x, y), \overline{\Omega(t)})]_+ & \text{si } (x, y) \notin \overline{\Omega(t)} \\ 1 & \text{si } (x, y) \in \partial\Omega(t) \\ 1 + \text{dist}((x, y), \mathbb{R}^2 \setminus \Omega(t)) & \text{si } (x, y) \in \Omega(t) \end{cases}$$

para  $t \geq 0$ , por lo que la *región quemada* en el instante  $t$  es

$$\Omega(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \psi(x, y, t) \geq 1\},$$

mientras que el *frente de la llama* queda caracterizado por

$$\Gamma(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \psi(x, y, t) = 1\}.$$

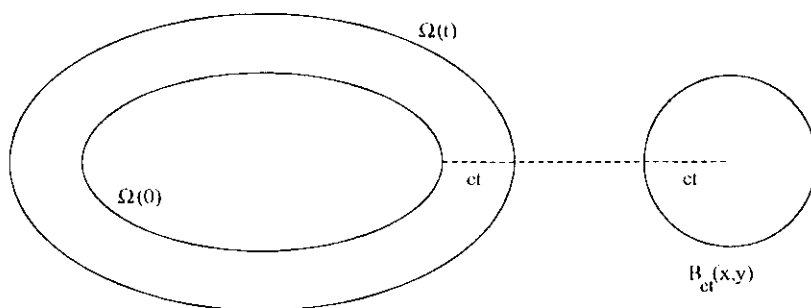


Figura 3.3: Dominio de definición de  $\psi(x, y, t)$ .

Nótese que  $\psi$  preserva la caracterización (3.10) para  $t \geq 0$  pues

$$\psi(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow (x, y) \in \partial\Omega(t).$$

Puesto que

$$\begin{cases} \psi(x, y, 0) > \varphi(x, y, 0) & \text{si } (x, y) \in \Omega \\ \psi(x, y, 0) = \varphi(x, y, 0) & \text{si } (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

la propiedad del *cono de dependencia* para el caso particular  $\Omega(0) = \mathbf{B}_\sigma(0, 0)$  (ver el Capítulo 6) permite afirmar

$$\begin{cases} \psi(x, y, t) > \varphi(x, y, t) & \text{si } (x, y) \in \mathbf{B}_{\sigma+ct}(0, 0) \\ \psi(x, y, t) = \varphi(x, y, t) & \text{si } (x, y) \in \partial\mathbf{B}_{\sigma+ct}(0, 0). \end{cases}$$

Consecuentemente, la relación

$$\psi(x, y, t) = \varphi(x, y, t) \text{ en } \overline{\Omega(t)} \Leftrightarrow \psi(x, y, t) = \varphi(x, y, t) = 1 \text{ en } \partial\Omega(t)$$

expresa la caracterización del frente de la llama

$$\Gamma(t) = \partial\Omega(t) = \partial\mathbf{B}_{\sigma+ct}(0, 0).$$





## Parte II

La ecuación sin perturbar.  
Fenómeno de explosión en  
tiempo finito.



# Capítulo 4

## Propiedades intrínsecas.

En este Capítulo pretendemos profundizar en el estudio de las *propiedades intrínsecas* de las soluciones de viscosidad de la ecuación

$$u_t = H(\nabla u) \text{ en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[ \quad (0 < T \leq +\infty)$$

siendo  $H : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua que denominaremos, como es habitual, *hamiltoniano*.

### 4.1 Soluciones de similaridad.

Comenzamos abordando un tipo especial de soluciones de la ecuación

$$u_t = R|\nabla u|^m \text{ en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \tag{4.1}$$

para  $m \geq 1$  y  $R > 0$  dados. Tratemos, primeramente, el caso  $m > 1$ . Si  $u$  es una solución de (4.1) entonces, mediante cálculos inmediatos, se comprueba que la función

$$u_\lambda(x, t) = \lambda^{\frac{b-m}{m-1}} u(\lambda x, \lambda^b t)$$

verifica también la ecuación (4.1) para todo  $\lambda > 0$  y  $b \in \mathbb{R}$ . Así, las soluciones *autosimilares* son funciones que vienen determinadas por la relación

$$u(x, t) = \lambda^{\frac{b-m}{m-1}} u(\lambda x, \lambda^b t),$$

por lo que la *ecuación de similitud* se obtiene sin más que diferenciar con respecto a  $\lambda$  y particularizar en  $\lambda = 1$ , llegándose a

$$btu_t + x \cdot \nabla u + \frac{b-m}{m-1}u = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

Si la resolvemos por el clásico *método de las características* (véase el Apéndice A) obtenemos

$$u(xe^s, te^{bs}) = u(x, t)c^{\frac{m-b}{m-1}s}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+, \quad s > 0.$$

Por tanto,

$$u(x, t) = t^{\frac{m-b}{b(m-1)}} u\left(\frac{x}{t^{\frac{1}{b}}}, 1\right), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

por lo que para  $\mathbf{f}(\eta) \doteq u(\eta, 1)$  se tiene

$$u_t - \mathbb{R}|\nabla u|^m = -t^{\frac{m(1-b)}{b(m-1)}} \left( \frac{b-m}{b(m-1)} \mathbf{f}(\eta) + \frac{1}{b} \eta \cdot \nabla \mathbf{f}(\eta) + \mathbb{R}|\nabla \mathbf{f}(\eta)|^m \right)$$

donde  $\eta = \frac{x}{t^{\frac{1}{b}}}$  es la *variable de similitud*. Consecuentemente, el *perfil de la similitud* viene dado por

$$\frac{b-m}{m-1} \mathbf{f}(\eta) + \eta \cdot \nabla \mathbf{f}(\eta) + \mathbb{R}b|\nabla \mathbf{f}(\eta)|^m = 0, \quad \eta \in \mathbb{R}^N.$$

Para simplificar, fijamos nuestra atención en soluciones clásicas no constantes con simetría esférica

$$\mathbf{f}(\eta) = f(|\eta|)$$

cuya existencia requiere, obviamente, la condición  $f'(0) = 0$ . Para ellas, la ecuación del perfil se reduce a una EDO de tipo *Lagrange*:

$$\frac{b-m}{m-1} f(\xi) + \xi f'(\xi) + \mathbb{R}b|f'(\xi)|^m = 0, \quad \xi > 0. \quad (4.2)$$

Considerando, en primer lugar, funciones decrecientes, distinguimos dos casos:

1. si  $b = m$  se tiene

$$\xi = \mathbb{R}m (-f'(\xi))^{m-1}. \quad (4.3)$$

2. si  $b \neq m$  argumentando con la variable  $\zeta = f'(\xi)$  obtenemos que ésta verifica la ecuación

$$\frac{b-1}{m-1}\zeta + (\xi - \text{Rm}b(-\zeta)^{m-1}) \frac{d\zeta}{d\xi} = 0. \quad (4.4)$$

De esta forma, si  $b = 1$  la ecuación (4.4) coincide, exactamente, con (4.3); en otro caso, es equivalente a

$$\frac{d\xi}{d\zeta} = \left( \frac{m-1}{1-b} \frac{1}{\zeta} \right) \xi + \frac{m(m-1)}{1-b} \text{Rm}b(-\zeta)^{m-2}$$

que admite la solución

$$\xi = \text{Rm}(-f'(\xi))^{m-1}.$$

En ambos casos, se llega a

$$f'(\xi) = - \left( \frac{\xi}{\text{Rm}} \right)^{\frac{1}{m-1}},$$

por lo que  $f'(0) = 0$  es, como ya habíamos adelantado, una condición necesaria. Por otra parte,  $f(0) = f_0$  nos permite escribir

$$f(\xi) = f_0 - (m-1) \left( \frac{\xi^m}{\text{Rm}^m} \right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

Finalmente, nótese que la relación (4.2) determina

$$f_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } b \neq m \\ \text{arbitrario} & \text{si } b = m. \end{cases}$$

Podemos así enunciar el siguiente resultado:

**Teorema 4.1**

Si  $m > 1$  y  $\sigma \in \mathbb{R}$ , la función

$$w(x, t; m, \text{R}, \sigma) = \sigma - (m-1) \left( \frac{|x|^m}{\text{Rm}^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}} \quad (4.5)$$

es una solución clásica (no constante) de similaridad<sup>1</sup> de la ecuación

$$u_t = \text{R}|\nabla u|^m \text{ en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+. \quad \square$$

<sup>1</sup>Hay que tomar  $b = m$  pues en otro caso no obtenemos soluciones autosimilares.

**Observación 4.2**

Si repetimos los razonamientos anteriores con vistas a encontrar soluciones no decrecientes de (4.2) llegamos a

$$\xi = -\text{Rm}(f'(\xi))^{m-1},$$

de donde

$$0 \leq f'(\xi) \leq 0, \quad \xi > 0$$

y el hecho  $f(0) = f_0$  conducen a  $f \equiv f_0$ , lo que muestra la inexistencia de tal tipo de soluciones.  $\square$

**Observación 4.3**

1. Claramente

$$w(0, t) = \sigma, \quad t > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0} w(x, t) = -\infty, \quad x \neq 0.$$

2. La función

$$W(x, t; m, R, \sigma) \doteq -w(x, t; m, R, \sigma), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

es una solución de

$$v_t + R|\nabla v|^m = 0 \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

verificando

$$W(0, t) = -\sigma, \quad t > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0} W(x, t) = +\infty, \quad x \neq 0.$$

3. Dado  $T > 0$ , la función

$$V(x, t; m, R, \sigma, T) \doteq -w(x, T - t; m, R, \sigma), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[ \quad (4.6)$$

es también una solución de

$$u_t = R|\nabla u|^m \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^N \times ]0, T[,$$

ahora con las propiedades

$$V(0, t; m, R, \sigma, T) = -\sigma, \quad 0 < t \leq T$$

y

$$\lim_{t \rightarrow T} V(x, t; m, R, \sigma, T) = +\infty, \quad x \neq 0. \quad \square$$

Las soluciones de similaridad van a tener, para nosotros, una especial importancia en el estudio del comportamiento asintótico  $t \rightarrow +\infty$ . No obstante, determinan otras propiedades interesantes, como:

**Teorema 4.4 (Comparación local)**

Sea  $\omega(r, t) : \overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  una función tal que

$$\omega_r(r, t) > 0 \quad \text{y} \quad \omega_t(r, t) < 0, \quad (r, t) \in \overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad (4.7)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \omega(r, t) = +\infty, \quad r > 0, \quad (4.8)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t, t^\kappa) = +\infty \quad \text{para algún } \kappa > 0 \quad (4.9)$$

y

$$-\omega_t(r, t) \leq \Upsilon(\omega_r(r, t)), \quad (r, t) \in \overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}_+ \quad (4.10)$$

donde  $\Upsilon : \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  es una función continua verificando

$$\Upsilon(\lambda r) \geq \lambda \Upsilon(r), \quad r \geq 0, \quad \lambda \geq 1. \quad (4.11)$$

Si  $u \in \mathcal{LIA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$  con  $T \leq +\infty$  resuelve

$$u_t \geq \Upsilon(|\nabla u|) \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[,$$

entonces

$$u(x, t) \geq u_*(x, t) \geq u_*(0, 0^+) - \omega(|x|, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[$$

siendo

$$u_*(0, 0^+) = \liminf_{(y, s) \rightarrow (0, 0^+)} u_*(y, s).$$

**Demostración.**

Para  $\mathbf{t} \in ]0, T[$  fijo, la idea consiste en construir una modificación  $\omega_\mu$  de  $\omega$  tal que

$$u_*(x, \mathbf{t}) \geq u_*(0, 0^+) - \omega_\mu(|x|, \mathbf{t}), \quad x \in \mathbf{B}_{\mu+\sigma}(0)$$

y

$$\omega_\mu = \omega \quad \text{en } [0, \mu] \times \{\mathbf{t}\}$$

para  $\sigma > 0$  suficientemente grande. De esta forma, los valores de  $\mu$  y  $\mathbf{t}$ , al ser arbitrarios, concluyen el resultado.



Por definición, existe  $\varepsilon \in ]0, \min \{1, \mathfrak{t}\}[$  tal que

$$u_*(0, 0^+) \leq u_*(x, t), \quad x \in \mathbf{B}_\varepsilon(0), \quad 0 < t < \varepsilon.$$

Consideremos los conjuntos

$$\mathcal{R} \doteq \mathbf{B}_{\mu+\sigma}(0) \times ]\varepsilon^\kappa, \tau[$$

y

$$\mathcal{R}_0 \doteq (\partial\mathbf{B}_{\mu+\sigma}(0) \times ]\varepsilon^\kappa, \tau]) \cup (\mathbf{B}_{\mu+\sigma}(0) \times \{\varepsilon^\kappa\}) \quad \text{con } \tau \in ]\mathfrak{t}, \Gamma[.$$

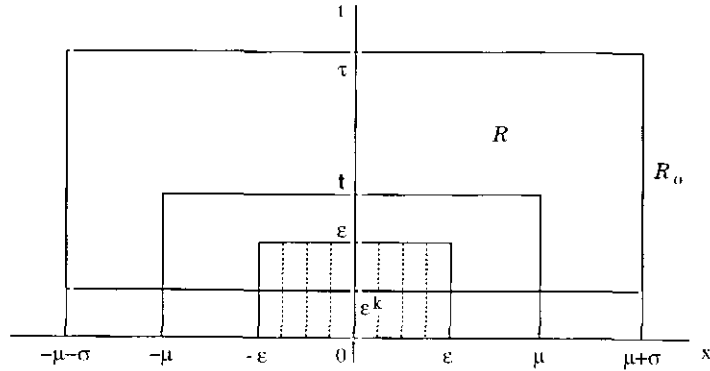


Figura 4.1: Conjuntos  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{R}_0$ .

Como  $u_* \in \mathcal{SCT}(\mathbb{R}^N \times ]0, \Gamma])$  existe, por tanto,  $\Lambda = \inf_{\mathcal{R}_0} u_*$ . De esta forma, podemos considerar

$$\phi(x, t) = u_*(0, 0^+) - \varrho(\omega(|x|, t)), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

siendo  $\varrho \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[)$  una función con las siguientes propiedades:

1.  $\varrho'(r) \geq 1$ ,
2.  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \varrho(r) = +\infty$ ,
3.  $\varrho(r) = r$  si  $0 \leq r \leq \omega(\mu, \mathfrak{t})$ ,
4.  $\varrho(r) \geq [u_*(0, 0^+) - \Lambda]_+$  si  $r \geq \omega(\mu + \sigma, \tau)$ .

Nótese que si denotamos por  $\chi(\cdot) = (\omega(\cdot, \tau))^{-1}$  y elegimos  $\sigma = \chi(\omega(\mu, \mathbf{t}))$ , se sigue la compatibilidad de las hipótesis, ya que al ser  $\omega_r > 0$  se tiene

$$\omega(\mu, \mathbf{t}) = \omega(\sigma, \tau) < \omega(\mu + \sigma, \tau).$$

En primer lugar, por construcción, para  $(x, t) \in \partial \mathbf{B}_{\mu+\sigma}(0) \times ]\varepsilon^\kappa, \tau[$  se verifica

$$\phi(x, t) = u_*(0, 0^+) - \varrho(\omega(\mu + \sigma, t)).$$

Como  $\omega_t < 0$  para  $t < \tau$  y  $\varrho$  es creciente entonces

$$\phi(x, t) \leq u_*(0, 0^+) - \varrho(\omega(\mu + \sigma, \tau)) \leq \Lambda \leq u_*(x, t). \quad (4.12)$$

Por otro lado, la no negatividad de  $\varrho$  hace que

$$\phi(x, \varepsilon^\kappa) = u_*(0, 0^+) - \varrho(\omega(|x|, \varepsilon^\kappa)) \leq u_*(0, 0^+) \leq u_*(x, \varepsilon^\kappa), \quad x \in \mathbf{B}_\varepsilon(0).$$

Además, si  $x \notin \mathbf{B}_\varepsilon(0)$  se obtiene<sup>2</sup>

$$\phi(x, \varepsilon^\kappa) = u_*(0, 0^+) - \varrho(\omega(|x|, \varepsilon^\kappa)) \leq u_*(0, 0^+) - \varrho(\omega(\varepsilon, \varepsilon^\kappa)),$$

por lo que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega(\varepsilon, \varepsilon^\kappa) = +\infty$  para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño lleva a

$$u_*(0, 0^+) - \Lambda \leq \varrho(\omega(\varepsilon, \varepsilon^\kappa)), \quad \varepsilon < \mu$$

y, consecuentemente, a

$$\phi(x, \varepsilon^\kappa) \leq \Lambda \leq u_*(x, \varepsilon^\kappa), \quad x \in \mathbf{B}_{\mu+\sigma}(0). \quad (4.13)$$

Por otra parte, como  $\phi$  es diferenciable en  $(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}_+$  con

$$\phi_t(x, t) = -\varrho'(\omega(|x|, t))\omega_t(|x|, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

y

$$\nabla \phi(x, t) = -\varrho'(\omega(|x|, t))\omega_r(|x|, t) \frac{x}{|x|}, \quad x \neq 0, \quad t > 0,$$

la propiedad  $\varrho' \geq 1$  hace que

$$\Upsilon(|\nabla \phi|) = \Upsilon(\varrho'(\omega(|x|, t))\omega_r(|x|, t)) \geq \varrho'(\omega(|x|, t))\Upsilon(\omega_r(|x|, t))$$

---

<sup>2</sup>Téngase en cuenta que  $\omega_r > 0$ ,  $|x| > \varepsilon$  y  $\varrho$  es creciente.

$$\geq -\varrho'(\omega(|x|, t))\omega_t(|x|, t) = \phi_t(x, t), \quad (x, t) \in (\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}_+.$$

Puesto que

$$D^+\phi(0, t) = \emptyset, \quad t > 0$$

se tiene así que

$$\phi_t \leq \Upsilon(|\nabla\phi|) \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

en el sentido de la viscosidad. Denotando por

$$\phi^\varepsilon(x, t) = \phi(x, t) - \varepsilon t$$

veamos que el mínimo  $(y, s)$  de  $u_* - \phi^\varepsilon$  en  $\overline{\mathbf{B}}_{\mu+\sigma}(0) \times [\varepsilon^\kappa, \tau]$  no se alcanza en  $\mathbf{B}_{\mu+\sigma}(0) \times ]\varepsilon^\kappa, \tau]$ . En efecto, en caso contrario, la desigualdad

$$(u_* - \phi^\varepsilon)(x, t) \geq (u_* - \phi^\varepsilon)(y, s), \quad (x, t) \in \overline{\mathbf{B}}_{\mu+\sigma}(0) \times [\varepsilon^\kappa, \tau]$$

con  $(y, s) \in \mathbf{B}_{\mu+\sigma}(0) \times ]\varepsilon^\kappa, \tau]$  conduce a

$$u_*(x, t) - u_*(y, s) \geq \nabla\phi^\varepsilon(y, s) \cdot (x - y) + \phi_t^\varepsilon(y, s)(t - s) + o(|x - y| + |t - s|),$$

luego

$$(\nabla\phi^\varepsilon(y, s), \phi_t^\varepsilon(y, s)) \in D^-u_*(y, s),$$

derivándose la contradicción

$$0 \leq \phi_t^\varepsilon(y, s) - \Upsilon(|\nabla\phi^\varepsilon(y, s)|) \leq -\varepsilon < 0.$$

Por tanto, a partir de (4.12) y (4.13) se deduce

$$(u_* - \phi)(y, s) \geq 0$$

por lo que

$$(u_* - \phi)(x, t) + \varepsilon t \geq (u_* - \phi)(y, s) + \varepsilon s \geq \varepsilon s \geq 0$$

es decir,

$$\phi(x, t) - \varepsilon t \leq u_*(x, t), \quad (x, t) \in \overline{\mathbf{B}}_{\mu+\sigma}(0) \times [\varepsilon^\kappa, \tau]$$

de donde se sigue el resultado.  $\square$

**Observación 4.5**

Si  $w(\cdot - y, \cdot - t_0; m, R, 0)$  es la solución de similaridad dada en (4.5) relativa a la ecuación

$$u_t = R|\nabla u|^m \text{ en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[,$$

entonces es claro que las funciones

$$\omega(|x|, t) = w(x - y, t - t_0; m, R, 0), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]t_0, T[$$

y

$$\Upsilon(r) = Rr^m, \quad r \geq 0$$

satisfacen las hipótesis del Teorema 4.4. Puesto que

$$u_*(x, t_0^+) = \liminf_{(y,t) \rightarrow (x,t_0^+)} u_*(y, t) \geq \liminf_{(y,t) \rightarrow (x,t_0)} u_*(y, t) = u_*(x, t_0),$$

se sigue

$$\begin{aligned} u_*(x, t) &\geq u_*(y, t_0^+) - (m-1) \left( \frac{|x-y|^m}{Rm^m(t-t_0)} \right)^{\frac{1}{m-1}} \\ &\geq u_*(y, t_0) - (m-1) \left( \frac{|x-y|^m}{Rm^m(t-t_0)} \right)^{\frac{1}{m-1}}. \quad \square \end{aligned}$$

A continuación, estudiamos el caso  $m = 1$  que conduce a la ecuación

$$u_t = R|\nabla u| \text{ en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \tag{4.14}$$

para la que las soluciones autosimilares vienen ahora dadas por

$$u_\lambda(x, t) = \lambda^{-b} u(\lambda x, \lambda t)$$

para todo  $\lambda > 0$  y  $b \in \mathbb{R}$ , supuesto que  $u$  es también una solución de (4.14). Para obtener la ecuación de similaridad, argumentamos como antes sobre la igualdad

$$u(x, t) = \lambda^{-b} u(\lambda x, \lambda t) \tag{4.15}$$

para llegar a

$$tu_t + x \cdot \nabla u - bu = 0 \text{ en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

Utilizando de nuevo el método de las características obtenemos

$$u(xe^s, te^s) = u(x, t)e^{bs}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+, \quad s > 0.$$

Por tanto,

$$u(x, t) = t^b u\left(\frac{x}{t}, 1\right), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

De esta forma, si  $\mathbf{f}(\eta) \doteq u(\eta, 1)$ , se tiene

$$u_t - \mathbf{R}|\nabla u| = t^{b-1} (b\mathbf{f}(\eta) - \eta \cdot \nabla \mathbf{f}(\eta) - \mathbf{R}|\nabla \mathbf{f}(\eta)|)$$

para la *variable de similitud*  $\eta = \frac{x}{t}$ , por lo que el *perfil de similitud* viene dado por

$$b\mathbf{f}(\eta) - \eta \cdot \nabla \mathbf{f}(\eta) - \mathbf{R}|\nabla \mathbf{f}(\eta)| = 0, \quad \eta \in \mathbb{R}^N.$$

Busquemos soluciones clásicas de la forma

$$\mathbf{f}(\eta) = f(|\eta|) \tag{4.16}$$

que llevan a resolver el problema de Cauchy

$$\begin{cases} bf(\xi) - \xi f'(\xi) - \mathbf{R}|f'(\xi)| = 0, & \xi > 0 \\ f(0) = f_0. \end{cases} \tag{4.17}$$

Obviamente,

1. si  $b = 0 \Rightarrow f(\xi) \equiv f_0$ .
2. si  $b \neq 0$  distinguimos a su vez dos casos:

(a)  $f' \geq 0$  para el que (4.17) toma la forma<sup>3</sup>

$$\begin{cases} bf(\xi) = (\xi + \mathbf{R})f'(\xi), & \xi > 0 \\ f(0) = f_0 \end{cases}$$

cuya solución es

$$f(\xi) = f_0 \left(1 + \frac{\xi}{\mathbf{R}}\right)^b, \quad \xi \geq 0 \quad (bf_0 \geq 0).$$

---

<sup>3</sup>Nótese que  $bf(\xi) \geq 0$ ,  $\xi \geq 0$ .

(b)  $f' \leq 0$  en cuyo caso el problema (4.17) es<sup>4</sup>

$$\begin{cases} bf(\xi) = (\xi - R)f'(\xi), & 0 < \xi \leq R \\ f(0) = f_0 \end{cases}$$

cuya solución viene dada por

$$f(\xi) = f_0 \left(1 - \frac{\xi}{R}\right)^b, \quad 0 \leq \xi \leq R \quad (bf_0 \geq 0).$$

Nótese que, en ambos casos,

$$|f'(0)| = \frac{bf_0}{R},$$

por lo que sólo podremos encontrar soluciones clásicas en  $(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}_+$ .

Teniendo en cuenta que aquí la variable de similaridad es  $\eta = \frac{x}{t}$ , a partir de la relación (4.16), podemos enunciar el siguiente resultado:

#### Teorema 4.6

Para  $b, \sigma > 0$  arbitrarios, las funciones continuas

$$w_1(x, t; R, b, \sigma) = \sigma(Rt + |x|)^b, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

y

$$w_2(x, t; R, b, \sigma) = -\frac{\sigma}{(Rt + |x|)^b}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

son soluciones de viscosidad de la ecuación

$$u_t = R|\nabla u| \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

#### Demostración.

Claramente se verifica

$$\begin{cases} (w_1)_t(x, t) = Rb\sigma(Rt + |x|)^{b-1}, & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ \nabla w_1(x, t) = b\sigma(Rt + |x|)^{b-1} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0, t > 0 \end{cases}$$

---

<sup>4</sup>De nuevo,  $bf(\xi) \geq 0$ ,  $\xi \geq 0$ .

y

$$\begin{cases} (w_2)_t(x, t) = \frac{Rb\sigma}{(Rt + |x|)^{b+1}}, & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ \nabla w_2(x, t) = \frac{b\sigma}{(Rt + |x|)^{b+1}} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0, t > 0 \end{cases}$$

por lo que

$$(w_i)_t = R|\nabla w_i|, \quad x \neq 0, t > 0 \quad (i = 1, 2).$$

Como

$$D^+ w_1(0, t) = D^+ w_2(0, t) = \emptyset, \quad t > 0,$$

se verifica que  $w_i$ ,  $i = 1, 2$ , es solución de viscosidad de

$$(w_i)_t \leq R|\nabla w_i| \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

Por otro lado, como

$$D^- w_1(0, t) = \left\{ (b\sigma(Rt)^{b-1}\xi, Rb\sigma(Rt)^{b-1}) : |\xi| \leq 1 \right\}, \quad t > 0$$

y

$$D^- w_2(0, t) = \left\{ \left( \frac{b\sigma}{(Rt)^{b+1}}\xi, \frac{Rb\sigma}{(Rt)^{b+1}} \right) : |\xi| \leq 1 \right\}, \quad t > 0$$

se verifica

$$p_2 - R|p_1| = Rb\sigma(Rt)^{b-1}(1 - |\xi|) \geq 0, \quad (p_1, p_2) \in D^- w_1(0, t)$$

y

$$p_2 - R|p_1| = \frac{Rb\sigma}{(Rt)^{b+1}}(1 - |\xi|) \geq 0, \quad (p_1, p_2) \in D^- w_2(0, t)$$

dado que  $|\xi| \leq 1$ , lo que permite concluir la prueba.  $\square$

La demostración anterior utiliza un sencillo resultado técnico de gran utilidad. Supongamos que

$$u(z) = f(|z|), \quad z \in \mathbb{R}^M$$

con  $f \in C^1(\mathbb{R})$ . Entonces se verifica

$$u(y) - u(z) = f(|y|) - f(|z|) = f'(|z|) \frac{z}{|z|} \cdot (y - z) + o(|y - z|)$$

por lo que

$$D^+u(z) = D^-u(z) = \nabla u(z) = f'(|z|)\frac{z}{|z|}, \quad z \neq 0.$$

Veamos a continuación lo que ocurre en el punto  $z = 0$ .

**Lema 4.7**

Sea  $u(z) = f(|z|)$ ,  $z \in \mathbb{R}^M$ , con  $f'(0) \in \mathbb{R}$ . Entonces:

1.  $f'(0) = 0 \Rightarrow D^+u(0) = D^-u(0) = \{0\}$ .
2.  $f'(0) > 0 \Rightarrow D^+u(0) = \emptyset$  y  $D^-u(0) = [-f'(0), f'(0)]$ .
3.  $f'(0) < 0 \Rightarrow D^+u(0) = [f'(0), -f'(0)]$  y  $D^-u(0) = \emptyset$ .

**Demostración.**

Basta tener en cuenta las relaciones

$$u(y) - u(0) = f(|y|) - f(0) = f'(0)|y| + o(|y|)$$

y

$$|y| \geq p \cdot y + o(|y|), \quad |p| \leq 1$$

así como la no existencia de elementos  $p \in \mathbb{R}^M$  verificando

$$|y| \leq p \cdot y + o(|y|). \quad \square$$

**Observación 4.8**

Nótese que si  $b, \sigma > 0$ , las funciones

$$w_3(x, t; R, b, \sigma) = \begin{cases} \sigma(Rt - |x|)^b & \text{si } |x| < Rt \\ 0 & \text{si } |x| \geq Rt \end{cases}$$

y

$$w_4(x, t; R, b, \sigma) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{(Rt - |x|)^b} & \text{si } |x| < Rt \\ -\infty & \text{si } |x| \geq Rt \end{cases}$$

son *soluciones generalizadas* pero no de viscosidad<sup>5</sup> de la ecuación

$$u_t = R|\nabla u| \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

<sup>5</sup>De hecho, no son sub ni supersoluciones de viscosidad.



En efecto, si  $0 < |x| < Rt$  se verifica

$$\begin{cases} (w_3)_t(x, t) = Rb\sigma(Rt - |x|)^{b-1} \\ \nabla w_3(x, t) = -b\sigma(Rt - |x|)^{b-1} \frac{x}{|x|} \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} (w_4)_t(x, t) = \frac{Rb\sigma}{(Rt - |x|)^{b+1}} \\ \nabla w_4(x, t) = -\frac{b\sigma}{(Rt - |x|)^{b+1}} \frac{x}{|x|} \end{cases}$$

mientras que

$$(\nabla w_i(x, t), (w_i)_t(x, t)) = 0 \quad \text{si } |x| > Rt$$

por lo que

$$(w_i)_t = R|\nabla w_i|, \quad 0 < |x| \neq Rt \quad (i = 3, 4).$$

Por la analogía que presentan ambas funciones mostramos, con detalle, el resultado para  $w_4(x, t)$ . Ante todo, la propiedad

$$w_4\left(x, \frac{|x|}{R}\right) = -\infty, \quad x \neq 0$$

hace que

$$D^- w_4\left(x, \frac{|x|}{R}\right) = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \quad x \neq 0,$$

mientras que

$$D^- w_4(0, t) = \emptyset, \quad t > 0$$

por lo que, obviamente, no se puede verificar la desigualdad

$$p_2 - R|p_1| \geq 0, \quad (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

Se sigue, por tanto, que  $w_4(x, t)$  no puede ser solución de viscosidad de

$$u_t \geq R|\nabla u| \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

Por otra parte, la caracterización

$$D^+ w_4(0, t) = \left\{ \left( \frac{b\sigma}{(Rt)^{b+1}} \xi, \frac{Rb\sigma}{(Rt)^{b+1}} \right) : |\xi| \leq 1 \right\}, \quad t > 0$$

muestra

$$\frac{Rb\sigma}{(Rt)^{b+1}}(1 - |\xi|) > 0, \quad |\xi| < 1$$

por lo que  $w_4(x, t)$  tampoco es solución de viscosidad de

$$u_t \leq R|\nabla u| \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

En el razonamiento para  $w_3$  (véanse las figuras adjuntas) basta tener en cuenta que para  $x \neq 0$  y  $b \geq 1$

$$D^+ w_3 \left( x, \frac{|x|}{R} \right) = \begin{cases} (0, 0), & b > 1 \\ \emptyset, & b = 1 \end{cases}$$

y

$$D^- w_3 \left( x, \frac{|x|}{R} \right) = \begin{cases} (0, 0), & b > 1 \\ \{(\sigma\xi, R\sigma) : |\xi| \leq 1\}, & b = 1 \end{cases}$$

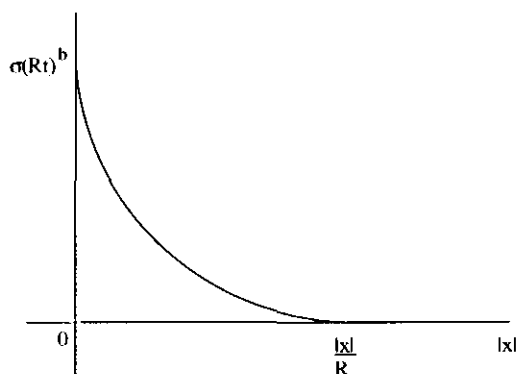


Figura 4.2: Función  $w_3$  para  $b \geq 1$ .

mientras que si  $0 < b < 1$

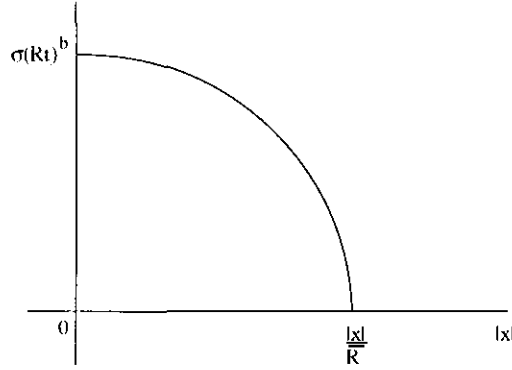
$$D^+ w_3 \left( x, \frac{|x|}{R} \right) = \emptyset \quad \text{y} \quad D^- w_3 \left( x, \frac{|x|}{R} \right) = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_-.$$

Por otro lado, para  $t > 0$ ,

$$D^- w_3(0, t) = \emptyset \quad \text{y} \quad D^+ w_3(0, t) = \left\{ \left( -b\sigma(Rt)^{b-1}\xi, Rb\sigma(Rt)^{b-1} \right) : |\xi| \leq 1 \right\};$$

así, si  $(p_1, p_2) \in D^+ w_3(0, t)$ , entonces

$$p_2 - R|p_1| = Rb\sigma(Rt)^{b-1}(1 - |\xi|) > 0 \quad \text{si } |\xi| < 1. \quad \square$$

Figura 4.3: Función  $w_3$  para  $0 < b < 1$ .**Observación 4.9**

Por otro lado si  $b, \sigma > 0$  para cada  $\tau > 0$  la función

$$V(x, t; R, b, \sigma, \tau) = \begin{cases} \frac{\sigma}{(R(\tau - t) - |x|)^b} & \text{si } |x| < R(\tau - t) \\ +\infty & \text{si } |x| \geq R(\tau - t) \end{cases}$$

es una función semicontinua que verifica

$$V(\cdot, \cdot; R, b, \sigma, \tau) \in C^1(\mathbf{C}_R(0, \tau) \setminus (\{0\} \times ]0, \tau[))$$

siendo

$$\mathbf{C}_R(0, \tau) \doteq \{(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ : |x| < R(\tau - t)\}.$$
<sup>6</sup>

Además,  $V$  es solución generalizada de

$$V_t = R|\nabla V| \quad \text{en } \mathbf{C}_R(0, \tau)$$

y solución de viscosidad de

$$V_t \geq R|\nabla V| \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

En efecto, como

$$\begin{cases} V_t(x, t) = \frac{Rb\sigma}{(R(\tau - t) - |x|)^{b+1}} \\ \nabla V(x, t) = \frac{b\sigma}{(R(\tau - t) - |x|)^{b+1}} \frac{x}{|x|} \end{cases}$$

<sup>6</sup>Obsérvese que  $V(x, t; R, b, \sigma, \tau) \doteq -w_4(x, \tau - t; R, b, \sigma)$ .

si  $0 < |x| < R(\tau - t)$  y

$$(\nabla V(x, t), V_t(x, t)) = (0, 0) \text{ si } |x| > R(\tau - t)$$

entonces

$$V_t = R|\nabla V|, \quad 0 < |x| \neq R(\tau - t).$$

Además, como

$$D^+V(0, t) = \emptyset, \quad 0 < t < \tau$$

y

$$D^-V(0, t) = \left\{ \left( \frac{b\sigma}{(R(\tau - t))^{b+1}} \xi, \frac{Rb\sigma}{(R(\tau - t))^{b+1}} \right) : |\xi| \leq 1 \right\}, \quad 0 < t < \tau,$$

se verifica

$$\frac{Rb\sigma}{(R(\tau - t))^{b+1}}(1 - |\xi|) \geq 0, \quad |\xi| \leq 1$$

lo que implica

$$p_2 - R|p_1| \geq 0, \quad (p_1, p_2) \in D^-V(0, t). \quad (4.18)$$

Por otra parte, la propiedad

$$V \left( x, \frac{R\tau - |x|}{R} \right) = +\infty, \quad 0 < |x| \leq R\tau$$

determina

$$D^+V \left( x, \frac{R\tau - |x|}{R} \right) = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \quad 0 < |x| \leq R\tau,$$

con lo que  $V$  no puede ser solución de viscosidad de

$$u_t \leq R|\nabla u| \text{ en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

No obstante, la relación (4.18) y el hecho que

$$D^-V \left( x, \frac{R\tau - |x|}{R} \right) = \emptyset, \quad 0 < |x| < R\tau$$

determinan que  $V$  sea solución de viscosidad de

$$u_t \geq R|\nabla u| \text{ en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+. \quad \square$$

**Observación 4.10**

Queremos reseñar que se pueden encontrar soluciones de viscosidad de la ecuación

$$u_t = R|\nabla u| \text{ en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \quad (4.19)$$

de la forma

$$w_1(x, t) = f(Rt + |x|) \quad (4.20)$$

y

$$w_2(x, t) = f(Rt - |x|) \quad (4.21)$$

donde  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  con  $f' > 0$ .<sup>7</sup> Concretamente,

1.  $w_1$  es solución de viscosidad de  $u_t = R|\nabla u|$ .

2.  $w_2$  es solución de viscosidad de  $u_t \geq R|\nabla u|$ .

En efecto, como

$$\begin{cases} (w_1)_t(x, t) = Rf'(Rt + |x|), & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ \nabla w_1(x, t) = f'(Rt + |x|)\frac{x}{|x|}, & x \neq 0, t > 0 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} (w_2)_t(x, t) = Rf'(Rt - |x|), & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ \nabla w_2(x, t) = -f'(Rt - |x|)\frac{x}{|x|}, & x \neq 0, t > 0 \end{cases}$$

se verifica

$$(w_i)_t = R|\nabla w_i|, \quad x \neq 0, t > 0 \quad (i = 1, 2).$$

Como además

$$D^+w_1(0, t) = D^-w_2(0, t) = \emptyset, \quad t > 0$$

y

$$D^-w_1(0, t) = D^+w_2(0, t) = \{(f'(Rt)\xi, Rf'(Rt)) : |\xi| \leq 1\}, \quad t > 0 \quad (4.22)$$

entonces  $w_1$  es subsolución y  $w_2$  supersolución de

$$u_t = R|\nabla u| \text{ en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

---

<sup>7</sup>Como  $u_t = R|\nabla u| \geq 0$  sólo es válido este caso.

Además, el hecho

$$Rf'(Rt)(1 - |\xi|) \geq 0, \quad |\xi| \leq 1$$

y la caracterización (4.22) muestran que  $w_1$  es supersolución de viscosidad de (4.19). Por otra parte, la relación

$$Rf'(Rt)(1 - |\xi|) > 0, \quad |\xi| < 1$$

indica que  $w_2$  no es subsolución de viscosidad de dicha ecuación.

Finalmente, nótese que las *únicas* soluciones de similaridad de (4.19) de la forma (4.20) o (4.21) son aquellas en las que  $f$  es *positivamente homogénea* de grado  $b$ , es decir, cuando

$$f(\lambda z) = \lambda^b f(z), \quad z \geq 0 \quad \text{para } \lambda \geq 0,$$

pues en tal caso se verifica

$$\lambda^{-b} u(\lambda x, \lambda t) = u(x, t)$$

(ver (4.15)).  $\square$

## 4.2 Propiedades de los conjuntos semidiferenciales.

Recogemos en esta Sección algunas propiedades de los conjuntos semidiferenciales de una función  $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $\mathcal{O}$  es un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^M$  con  $M \geq 1$ .

Se incluyen aportaciones personales, en forma de resultados o de demostraciones directas, que son de gran utilidad en la lectura de esta Memoria.

Comenzamos recordando la definición de estos conjuntos:

### Definición 4.11

Sea  $z_0 \in \mathcal{O}$ .

$$D^+ f(z_0) \doteq \{p \in \mathbb{R}^M : f(z) \leq f(z_0) + p \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|)\}$$

es el conjunto *superdiferencial* de  $f$  en  $z_0$  y

$$D^-f(z_0) \doteq \{p \in \mathbb{R}^M : f(z) \geq f(z_0) + p \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|)\}$$

es el conjunto *subdiferencial* de  $f$  en  $z_0$ . En ambos casos, “ $\cdot$ ” denota el producto escalar euclídeo y con la notación  $h(z) = o(|z - z_0|)$  indicamos, como es habitual, que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z)}{|z - z_0|} = 0.$$

#### Observación 4.12

Como se sigue inmediatamente,  $D^\pm f(z_0)$  son conjuntos cerrados y convexos. Además, cuando la función  $f$  es diferenciable en el punto  $z_0$  se tiene, obviamente,

$$D^+f(z_0) = D^-f(z_0) = \{\nabla f(z_0)\}.$$

El resultado recíproco se muestra en la Proposición 4.25. Nótese que, además, se verifica

$$D^\pm f(z_0) = -D^\mp(-f(z_0)). \quad \square$$

Sea  $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$  y  $p \in D^+f(z_0)$ . Entonces por definición se verifica

$$f(z) \leq f(z_0) + p \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|). \quad (4.23)$$

Obviamente

$$f(z) \leq f(z_0) + p \cdot (z - z_0) + \Phi^+(z)$$

siendo

$$\Phi^+(z) \doteq \overline{[f(z) - f(z_0) - p \cdot (z - z_0)]_+}, \quad z \in \mathcal{O} \quad (4.24)$$

(donde  $r_+ \doteq \max\{r, 0\}$ ) una función con las propiedades

$$\Phi^+(z) \geq 0, \quad \Phi^+(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad \nabla \Phi^+(z_0) = 0,$$

ya que la relación (4.23) determina

$$0 \leq \Phi^+(z) - \Phi^+(z_0) = [f(z) - f(z_0) - p \cdot (z - z_0)]_+ \leq [o(|z - z_0|)]_+.$$

Podemos así enunciar el siguiente resultado:

**Proposición 4.13**

Con las notaciones anteriores, si existe  $\delta > 0$  tal que

$$\Phi^+(z) > 0, \quad z \in \mathbf{B}_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$$

entonces la función  $f$  es diferenciable en  $z_0$  y, además,  $p = \nabla f(z_0)$ .

**Demostración.**

Basta tener en cuenta que

$$0 < f(z) - f(z_0) - p \cdot (z - z_0) = \Phi^+(z), \quad z \in \mathbf{B}_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$$

de donde

$$0 \leq \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - p \cdot (z - z_0)}{|z - z_0|} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\Phi^+(z) - \Phi^+(z_0)}{|z - z_0|} = 0. \quad \square$$

**Observación 4.14**

Análogamente, si  $p \in D^- f(z_0)$  entonces, a partir de la función

$$\Phi^-(z) \doteq [f(z) - f(z_0) - p \cdot (z - z_0)]_-, \quad z \in \mathcal{O} \quad (r_- \doteq \min\{r, 0\})$$

se verifica que si existe  $\delta > 0$  tal que

$$\Phi^-(z) < 0, \quad z \in \mathbf{B}_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$$

entonces la función  $f$  es diferenciable en  $z_0$  y  $p = \nabla f(z_0)$ .  $\square$

**Definición 4.15**

Sea  $f \in \mathcal{LA}(\mathcal{O})$ .

1.  $f^*(z) = \limsup_{r \rightarrow 0} \{f(y) : |z - y| \leq r\}$ ,  $z \in \mathcal{O}$ , es la *envuelta semicontinua superior* de  $f$ .
2.  $f_*(z) = \liminf_{r \rightarrow 0} \{f(y) : |z - y| \leq r\}$ ,  $z \in \mathcal{O}$ , es la *envuelta semicontinua inferior* de  $f$ .



**Observación 4.16**

1. La definición de envueltas semicontinuas de una función  $f$  sólo tiene sentido para funciones localmente acotadas, para las que se verifica

$$f_*(z) \leq f(z) \leq f^*(z), \quad z \in \mathcal{O}.$$

Además, de la propia definición, se da la igualdad

$$f_*(z) = -(-f)^*(z), \quad z \in \mathcal{O}.$$

2. Sea  $z_0 \in \mathcal{O}$ . Claramente,

$$f \text{ es s.c.s. en } z_0 \Leftrightarrow f(z_0) = f^*(z_0)$$

y

$$f \text{ es s.c.i. en } z_0 \Leftrightarrow f(z_0) = f_*(z_0).$$

3. La envuelta semicontinua superior (resp. inferior) de  $f$  en  $z_0 \in \mathcal{O}$  también se puede definir como la menor (resp. mayor) función s.c.s. (resp. s.c.i.) que mayor (resp. menor) a  $f$  en las proximidades de  $z_0$ . En efecto, si  $g \in \mathcal{SCS}(\mathbf{B}_\delta(z_0))$  con  $\delta > 0$  verifica

$$f(z) \leq g(z), \quad z \in \mathbf{B}_\delta(z_0),$$

tomando envueltas superiores se tiene

$$f(z) \leq f^*(z) \leq g^*(z) = g(z), \quad z \in \mathbf{B}_\delta(z_0).$$

4. Si  $f^*(z_0) = f(z_0)$  entonces  $D^+ f^*(z_0) = D^+ f(z_0)$ . En efecto, por un lado, la desigualdad

$$\begin{aligned} f(z) &\leq f^*(z) \leq f^*(z_0) + p \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|) \\ &= f(z_0) + p \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|), \quad p \in D^+ f^*(z_0) \end{aligned}$$

determina

$$D^+ f^*(z_0) \subset D^+ f(z_0).$$

Por otra parte, si  $p \in D^+ f(z_0)$ , se verifica

$$f(z) \leq f(z_0) + p \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

$$= f^*(z_0) + p \cdot (z - z_0) + \Phi^+(z)$$

donde  $\Phi^+(z)$  viene dada en (4.24); como  $\Phi^+$  es continua en un entorno de  $z_0$  entonces, tomando envueltas superiores en la desigualdad anterior obtenemos

$$f^*(z) \leq f^*(z_0) + p \cdot (z - z_0) + \Phi^+(z), \quad |z - z_0| \ll 1$$

de donde se concluye que  $p \in D^+ f^*(z_0)$ .

5. De forma análoga se muestra que si  $f_*(z_0) = f(z_0)$  entonces

$$D^- f_*(z_0) = D^- f(z_0).$$

6. Si la función  $f$  alcanza un máximo (resp. mínimo) local en  $z_0 \in \mathcal{O}$  entonces  $f$  es s.c.s. (resp. s.c.i.) en  $z_0$ , pues basta observar

$$f(z_0) \leq f^*(z_0) = \limsup_{z \rightarrow z_0} f(z) \leq f(z_0). \quad \square$$

Un primer resultado es el siguiente:

**Proposición 4.17**

$$D^+ f(z_0) \neq \emptyset \Rightarrow f \text{ es s.c.s. en el punto } z_0.$$

**Demostración.**

Por definición

$$D^+ f(z_0) \neq \emptyset \Leftrightarrow f(z) \leq f(z_0) + p \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

para algún  $p \in \mathbb{R}^M$ , de donde

$$f^*(z_0) = \limsup_{z \rightarrow z_0} f(z) \leq f(z_0) \leq f^*(z_0). \quad \square$$

**Observación 4.18**

1. A la vista del resultado anterior, parece conveniente requerir la semi-continuidad superior al argumentar con las superdiferenciales.

2. Análogamente, se muestra

$$D^-f(z_0) \neq \emptyset \Rightarrow f \text{ es s.c.i. en } z_0.$$

3. Existen funciones que no son s.c.s. ni s.c.i. en algunos puntos. Así por ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{|x|}\right), & x \neq 0 \\ \ell, & x = 0 \end{cases} \quad \text{con } \ell \in [-1, 1]$$

es una función que verifica

$$f_*(0) = -1 \text{ y } f^*(0) = 1$$

por lo que

$$f_*(0) < f(0) < f^*(0) \text{ si } -1 < \ell < 1$$

lo que, en estos casos, implica

$$D^-f(0) = D^+f(0) = \emptyset. \quad \square$$

Una caracterización de los elementos de las sub y superdiferenciales viene dada en el siguiente resultado que puede encontrarse en [Cr-Li3] y [Cr-Ev-Li] (véase también la demostración de la Proposición 4.57).

**Lema 4.19**

Si  $f \in \mathcal{SCS}(\mathcal{O})$  (resp.  $f \in \mathcal{SCI}(\mathcal{O})$ ),  $z_0 \in \mathcal{O}$  y  $p \in \mathbb{R}^M$ , se tiene

$$p \in D^+f(z_0) \text{ (resp. } p \in D^-f(z_0)) \Leftrightarrow \exists \Phi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O}) \text{ tal que } \nabla\Phi(z_0) = p \text{ y}$$

$$f - \Phi \text{ tiene un máximo (resp. mínimo) local en } z_0. \quad \square$$

Respecto a las ‘reglas clásicas’ de la derivación de un producto y la regla de la cadena, se tienen las siguientes propiedades más generales:

**Teorema 4.20 (Regla del producto)**

Sea  $f \in \mathcal{C}(\mathcal{O})$ ,  $g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ ,  $z_0 \in \mathcal{O}$  y  $\delta > 0$  tal que  $\mathbf{B} \doteq \mathbf{B}_\delta(z_0) \subset \mathcal{O}$ .

1. Si  $g(z) \geq 0$ ,  $z \in \mathbf{B}$  y  $p \in D^+f(z_0)$  (resp.  $g(z) \leq 0$ ,  $z \in \mathbf{B}$  y  $p \in D^-f(z_0)$ ) entonces

$$g(z_0)p + f(z_0)\nabla g(z_0) \in D^+(fg)(z_0).$$

2. Si  $g(z) \geq 0$ ,  $z \in \mathbf{B}$  y  $p \in D^-f(z_0)$  (resp.  $g(z) \leq 0$ ,  $z \in \mathbf{B}$  y  $p \in D^+f(z_0)$ ) entonces

$$g(z_0)p + f(z_0)\nabla g(z_0) \in D^-(fg)(z_0).$$

### **Demostración.**

Mostremos la primera afirmación. Sea  $p \in D^+f(z_0)$  y  $g(z) \geq 0$ ,  $z \in \mathbf{B}$ . Por definición de conjunto superdiferencial se tiene

$$\begin{cases} f(z) \leq f(z_0) + p \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|) \\ 0 \leq g(z) = g(z_0) + \nabla g(z_0) \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|). \end{cases}$$

El resultado se sigue de la desigualdad

$$(fg)(z) \leq (fg)(z_0) + [g(z_0)p + f(z_0)\nabla g(z_0)] \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|). \quad \square$$

### **Observación 4.21**

El lema anterior sigue siendo válido si  $f \in \mathcal{C}(\mathcal{O})$ ,  $g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$  y  $z_0 \in \mathcal{O}$  con  $g(z_0) > 0$  (resp.  $g(z_0) < 0$ ).  $\square$

Una clara extensión de la anterior propiedad es:

### **Proposición 4.22**

Sean  $f, g \in \mathcal{C}(\mathcal{O})$ ,  $z_0 \in \mathcal{O}$  y  $\delta > 0$  tal que  $\mathbf{B} \doteq \mathbf{B}_\delta(z_0) \subset \mathcal{O}$ .

1. Si  $f(z), g(z) \geq 0$ ,  $z \in \mathbf{B}$  y  $p \in D^+f(z_0)$ ,  $q \in D^+g(z_0)$  (o  $f(z), g(z) \leq 0$ ,  $z \in \mathbf{B}$  y  $p \in D^-f(z_0)$ ,  $q \in D^-g(z_0)$ ) entonces

$$g(z_0)p + f(z_0)q \in D^+(fg)(z_0).$$

2. Si  $f(z) \geq 0 \geq g(z)$ ,  $z \in \mathbf{B}$  y  $p \in D^+f(z_0)$ ,  $q \in D^-g(z_0)$  (o  $f(z) \leq 0 \leq g(z)$ ,  $z \in \mathbf{B}$  y  $p \in D^-f(z_0)$ ,  $q \in D^+g(z_0)$ ) entonces

$$g(z_0)p + f(z_0)q \in D^-(fg)(z_0). \quad \square$$

**Observación 4.23**

Nótese que cuando  $f$  y  $g$  son diferenciables en  $z_0 \in \mathcal{O}$ , las relaciones anteriores conducen a la conocida *regla de Leibnitz* para diferenciar un producto.  $\square$

**Teorema 4.24 (Regla de la cadena)**

Sean  $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $M, N \geq 1$ ,  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\Omega \subset f(\mathcal{O})$  y  $z_0 \in \mathcal{O}$ .

1. Si  $f$  es diferenciable en  $z_0$  entonces

$$[D^\pm g(f(z_0))] \cdot J_f(z_0) \subset D^\pm (g \circ f)(z_0)$$

donde  $J_f(z_0)$  denota la matriz jacobiana de  $f$  en  $z_0$ .

2. Si  $N = 1$  y  $g$  es diferenciable en  $\Omega$  con  $g'(y) \geq 0$ ,  $y \in \Omega$ , se verifica

$$[g'(f(z_0))] D^\pm f(z_0) \subset D^\pm (g \circ f)(z_0).$$

**Demostración.**

Dado  $p \in D^+ g(f(z_0))$  veamos que  $p J_f(z_0) \in D^+ (g \circ f)(z_0)$ . En efecto, por definición de conjunto superdiferencial, se tiene

$$g(y) \leq g(f(z_0)) + p \cdot (y - f(z_0)) + o(|y - f(z_0)|), \quad y \in \Omega.$$

Por hipótesis, dado  $y \in \Omega$  existe  $z \in \mathcal{O}$  tal que  $f(z) = y$ .

Por otra parte, como  $f$  es diferenciable en el punto  $z_0$  se verifica

$$y - f(z_0) = f(z) - f(z_0) = J_f(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

y

$$o(|y - f(z_0)|) = o(|z - z_0|),$$

ya que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{o(|y - f(z_0)|)}{|z - z_0|} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{o(|y - f(z_0)|) |y - f(z_0)|}{|y - f(z_0)| |z - z_0|} = 0 |J_f(z_0)| = 0.$$

Consecuentemente,

$$(g \circ f)(z) = g(y) \leq g(f(z_0)) + p \cdot (y - f(z_0)) + o(|y - f(z_0)|)$$

$$= g(f(z_0)) + pJ_f(z_0) \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

de donde se sigue el resultado.

Para mostrar el segundo apartado, sea  $p \in D^+f(z_0)$ . Entonces, por definición,

$$f(z) \leq f(z_0) + p \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|).$$

De nuevo, utilizando el hecho que  $g$  es diferenciable, obtenemos

$$g(\xi) = g(\eta) + g'(\eta)(\xi - \eta) + o(|\xi - \eta|), \quad \xi, \eta \in \Omega$$

que, para las elecciones  $\xi = f(z)$  y  $\eta = f(z_0)$  se convierte en

$$g(f(z)) = g(f(z_0)) + g'(f(z_0))(f(z) - f(z_0)) + o(|f(z) - f(z_0)|).$$

Utilizando las desigualdades anteriores y la hipótesis  $g' \geq 0$ , concluimos

$$g(f(z)) \leq g(f(z_0)) + g'(f(z_0))p \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|). \quad \square$$

A continuación veamos otras propiedades de interés de los conjuntos sub y superdiferenciales.

### Proposición 4.25

Sea  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^M$ ,  $f \in \mathcal{L}\mathcal{A}(\mathcal{O})$  y  $z_0 \in \mathcal{O}$ . Si

$$D^+f(z_0) \neq \emptyset \quad y \quad D^-f(z_0) \neq \emptyset$$

simultáneamente entonces

$$D^+f(z_0) \cap D^-f(z_0) = \{\nabla f(z_0)\}.$$

Consecuentemente,  $f$  es diferenciable en  $z_0$  y

$$\nabla f(z_0) = D^+f(z_0) = D^-f(z_0).$$

### Demostración.

Ante todo, la existencia de

$$p^+ \in D^+f(z_0) \quad y \quad p^- \in D^-f(z_0)$$

hace que la función  $f$  sea, simultáneamente, semicontinua superior e inferiormente y, por tanto, continua en  $z_0$  (véase la Proposición 4.17). Por otra parte, a partir de su propia definición se tiene

$$\limsup_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - p^+ \cdot (z - z_0)}{|z - z_0|} \leq 0 \leq \liminf_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - p^- \cdot (z - z_0)}{|z - z_0|},$$

es decir

$$\limsup_{z \rightarrow z_0} \frac{(p^- - p^+) \cdot (z - z_0)}{|z - z_0|} \leq 0.$$

En particular, siendo  $z_0 = (z_0^1, \dots, z_0^M)$ , consideramos

$$z = (z_0^1, \dots, z_0^i + \lambda, \dots, z_0^M), \quad 1 \leq i \leq M, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

por lo que la propiedad anterior muestra

$$(p_i^- - p_i^+) \limsup_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda}{|\lambda|} \leq 0, \quad 1 \leq i \leq M$$

de donde se concluye

$$p_i^- = p_i^+, \quad 1 \leq i \leq M$$

sin más que tomar la convergencia anterior para valores positivos de  $\lambda$  y luego para valores negativos.  $\square$

#### Proposición 4.26

Sea  $f : ]a, b[ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función s.c.i. en  $x_0 \in ]a, b[$ . Entonces:

$$D^- f(x_0) \neq \emptyset \Leftrightarrow D^- f(x_0) = \{p \in \mathbb{R} : f'(x_0^-) \leq p \leq f'(x_0^+)\}$$

donde

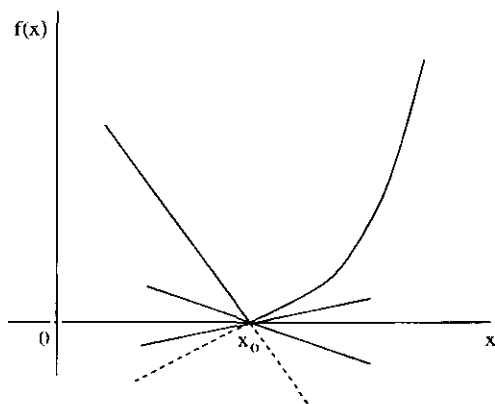
$$f'(x_0^+) \doteq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

y

$$f'(x_0^-) \doteq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}.$$

Nótese que, por tanto, si  $D^- f(x_0) \neq \emptyset$  entonces

$$-\infty \leq f'(x_0^-) \leq f'(x_0^+) \leq +\infty.$$

Figura 4.4: Subdiferenciales de  $f$  en  $x_0$ .**Demostración.**

Sea  $p \in D^- f(x_0)$ . Si  $f'(x_0^+) = +\infty$  es obvio que  $p \leq f'(x_0^+)$ . En otro caso, por definición, para  $x > x_0$  se verifica

$$f'(x_0^+)(x - x_0) + o(|x - x_0|) = f(x) - f(x_0) \geq p(x - x_0) + o(|x - x_0|).$$

Dividiendo por  $x - x_0$  y haciendo tender  $x \rightarrow x_0$  obtenemos  $p \leq f'(x_0^+)$ . Un argumento análogo con puntos  $x < x_0$  determina  $p \geq f'(x_0^-)$ . Así,

$$D^- f(x_0) \subset [f'(x_0^-), f'(x_0^+)].$$

Para mostrar el otro contenido, sea  $p \in \mathbb{R}$  tal que  $f'(x_0^-) \leq p \leq f'(x_0^+)$  y consideremos el cociente

$$\frac{f(x) - f(x_0) - p(x - x_0)}{|x - x_0|} \geq \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0^+)(x - x_0)}{|x - x_0|} & \text{si } x > x_0 \\ \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0^-)(x - x_0)}{|x - x_0|} & \text{si } x < x_0 \end{cases}$$

por lo que

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - p(x - x_0)}{|x - x_0|} \geq 0$$

y, consecuentemente,  $p \in D^- f(x_0)$ .  $\square$



**Observación 4.27**

Un argumento análogo muestra para una función  $f : ]a, b[ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s.c.s. en  $x_0 \in ]a, b[$  la siguiente equivalencia:

$$D^+f(x_0) \neq \emptyset \Leftrightarrow D^+f(x_0) = \{p \in \mathbb{R} : f'(x_0^+) \leq p \leq f'(x_0^-)\}. \quad \square$$

**Corolario 4.28**

Si  $f : ]a, b[ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es s.c.i. en  $x_0 \in ]a, b[$  y  $D^-f(x_0)$  es un conjunto unitario entonces la función  $f$  es diferenciable en  $x_0$ . Concretamente,

$$D^-f(x_0) = \{p\} \Rightarrow p = \nabla f(x_0).$$

**Demostración.**

Supongamos que  $f$  no fuera diferenciable en  $x_0$  (es decir,  $f'(x_0^-) < f'(x_0^+)$ ) y derivemos una contradicción. Por la Proposición 4.26 si se tuviera

$$f'(x_0^-) < p_1 < p_2 < f'(x_0^+)$$

entonces

$$p_i \in D^-f(x_0), \quad i = 1, 2$$

lo cual contradice el hecho que el conjunto  $D^-f(x_0)$  sea unitario.  $\square$

De forma completamente análoga se muestra:

**Corolario 4.29**

Si  $f : ]a, b[ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es s.c.s. en  $x_0 \in ]a, b[$  y  $D^+f(x_0)$  es un conjunto unitario entonces la función  $f$  es diferenciable en  $x_0$ . Concretamente,

$$D^+f(x_0) = \{p\} \Rightarrow p = \nabla f(x_0). \quad \square$$

Algunas propiedades conocidas de las funciones diferenciables pueden extenderse a las semidiferenciales de las funciones continuas. A modo ilustrativo, se tiene:

**Teorema 4.30 (Valor medio)**

Si  $f \in \mathcal{C}([a, b])$  entonces al menos existe  $x_0 \in ]a, b[$  tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \in D^+f(x_0) \cup D^-f(x_0).$$

**Demostración.**

Consideremos la función auxiliar  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$g(x) \doteq f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

que tiene las propiedades:

$$g \in \mathcal{C}([a, b]) \text{ y } g(a) = f(a) = g(b).$$

Por tanto, existen  $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$  tal que

$$g(x_{\min}) \leq g(x) \leq g(x_{\max}), \quad x \in [a, b]. \quad (4.25)$$

Pueden presentarse dos posibilidades:

1.  $x_{\min} = x_{\max} = a$  ó  $b$ . En este caso la función  $g$  es constante, por lo que el resultado es obvio.
2. Uno de ellos, p.e.  $x_{\max} \in ]a, b[$ . En esa situación, la relación (4.25) determina

$$\limsup_{x \rightarrow x_{\max}} \frac{g(x) - g(x_{\max})}{|x - x_{\max}|} \leq 0 \Rightarrow 0 \in D^+ g(x_{\max}). \quad \square$$

Una consecuencia inmediata del resultado anterior es:

**Teorema 4.31 (Rolle)**

Sea  $f \in \mathcal{C}([a, b])$  tal que  $f(a) = f(b)$ . Entonces al menos existe  $x_0 \in ]a, b[$  tal que

$$0 \in D^+ f(x_0) \cup D^- f(x_0). \quad \square$$

**4.2.1 Funciones semiconvexas.****Definición 4.32**

Sea  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^M$ ,  $M \geq 1$  y  $f \in \mathcal{C}(\mathcal{O})$ .  $f$  es *semiconvexa* en  $\mathcal{O}$  si para todo  $\delta > 0$  existe  $C_\delta > 0$  tal que la función

$$f(z) + \frac{1}{2}C_\delta|z|^2$$

es convexa en todo subconjunto convexo de  $\mathcal{O}_\delta$  siendo

$$\mathcal{O}_\delta \doteq \left\{ z \in \mathcal{O} : |z| < \frac{1}{\delta}, \text{ dist}(z, \partial\mathcal{O}) > \delta \right\}.$$

**Observación 4.33**

Nótese que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $f$  es semiconvexa en  $\mathcal{O}$ .
2. para todo  $\delta > 0$  existe  $C_\delta > 0$  tal que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \chi^2} \geq -C_\delta \text{ en } \mathcal{D}'(\mathcal{O}_\delta)$$

para todo  $\chi \in \mathbb{R}^M$  con  $|\chi| = 1$ .

3. para todo  $\delta > 0$  existe  $C_\delta > 0$  tal que para todo  $z \in \mathcal{O}$  se verifica

$$f(z + \xi) - 2f(z) + f(z - \xi) \geq -C_\delta |\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^M. \quad \square$$

El siguiente resultado muestra que el conjunto superdiferencial de una función semiconvexa en un punto es o bien unitario (en cuyo caso la función es diferenciable) o bien igual al vacío.

**Proposición 4.34**

Sea  $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$  una función semiconvexa en  $z_0 \in \mathcal{O}$ . Entonces:

$$p \in D^+ f(z_0) \Leftrightarrow p = \nabla f(z_0).$$

**Demostración.**

La semiconvexidad de  $f$  en  $z_0$  determina la existencia de una constante positiva  $C$  tal que

$$f(z_0 + \xi) - 2f(z_0) + f(z_0 - \xi) \geq -C|\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^M.$$

Entonces, puesto que para cada  $p \in D^+ f(z_0)$  se verifica

$$f(z_0 - \xi) - f(z_0) \leq -p \cdot \xi + o(|\xi|),$$

se concluye

$$\begin{aligned} f(z_0 + \xi) - f(z_0) &\geq f(z_0) - f(z_0 - \xi) - C|\xi|^2 \\ &\geq p \cdot \xi + o(|\xi|) - C|\xi|^2 = p \cdot \xi + o(|\xi|) \end{aligned}$$

de donde  $p \in D^- f(z_0)$ .  $\square$

**Observación 4.35**

1. A la vista del resultado anterior, si  $f$  es semiconvexa en  $z_0 \in \mathcal{O}$  entonces se tiene la siguiente alternativa:

$$D^+f(z_0) = \begin{cases} \emptyset \\ \text{ó} \\ D^-f(z_0) = \{\nabla f(z_0)\}. \end{cases}$$

Por otro lado, recuérdese que el *teorema de Alexandroff* (véase el Apéndice B) afirma que toda función semiconvexa en  $\mathcal{O}$  es dos veces diferenciable en casi todo punto de  $\mathcal{O}$ .

2. Si  $f$  es semiconvexa en  $z_0 \in \mathcal{O}$  tal que  $f(z_0) = f^*(z_0)$  entonces  $f^*$  es semiconvexa en  $z_0$ . En efecto, para todo  $\delta > 0$  existe  $C_\delta > 0$  tal que

$$\begin{aligned} -C_\delta|\xi|^2 &\leq f(z_0 + \xi) - 2f(z_0) + f(z_0 - \xi) \\ &\leq f^*(z_0 + \xi) - 2f^*(z_0) + f^*(z_0 - \xi), \quad \xi \in \mathbf{B}_\delta(z_0). \end{aligned}$$

3. Puesto que  $f$  es *semicóncava* en  $\mathcal{O}$  si  $-f$  es semiconvexa en  $\mathcal{O}$ , todos los resultados anteriores pueden ser trasladados a funciones semicóncavas.  $\square$

**4.2.2 m-convolución de funciones s.c.s.**

Junto a los métodos clásicos de regularización basados en núcleos integrales, como la *convolución ordinaria*, se pueden encontrar otras formas de aproximar funciones mediante otras ‘más regulares’. En particular, motivados en parte por la Teoría de Control que estudiaremos en el Capítulo 5, podemos definir la *supconvolución de funciones localmente superiormente acotadas* mediante funciones localmente lipschitzianas e, incluso, dos veces diferenciables en casi todo punto. Entre otras peculiaridades (que desarrollaremos más adelante) destacamos que esta forma de aproximación puede extenderse a funciones definidas en espacios de Banach de dimensión arbitraria que verifican ciertas propiedades ‘geométricas’ (véanse los comentarios de la Observación 4.47).

Comenzamos definiendo estas funciones aproximantes.

**Definición 4.36**

Sea  $f \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^M)$  con  $M \geq 1$  verificando

$$\ell \doteq \limsup_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{f(z)}{|z|^{\frac{m}{m-1}}} \in \mathbb{R} \quad (4.26)$$

para algún  $m > 1$ . Dado  $k > 0$  para cada  $\varepsilon > 0$  consideramos la función

$$f^\varepsilon(z) \doteq \sup_{y \in \mathbb{R}^M} \left\{ f(y) - k \left( \frac{|z-y|^m}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\}, \quad z \in \mathbb{R}^M \quad (4.27)$$

que denominaremos, en lo que sigue, la  $m, k$ -supconvolución de  $f$ . Nótese que

$$f(z) \leq f^\varepsilon(z), \quad z \in \mathbb{R}^M.$$

Veamos algunas propiedades de la  $m, k$ -supconvolución.

**Proposición 4.37**

Sea  $f \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^M)$ ,  $M \geq 1$ , verificando (4.26) para algún  $m > 1$ . Entonces, para todo  $k > 0$  se verifica:

1.  $f^\varepsilon(z) \in \mathbb{R}$ ,  $z \in \mathbb{R}^M$ , si  $0 < \varepsilon < \left(\frac{k}{\ell^+}\right)^{m-1}$ .
2. si  $f(z) \leq f(z_0)$ ,  $z \in \mathbb{R}^M$ , entonces  $f^\varepsilon(z_0) = f(z_0)$ ,  $\varepsilon > 0$ .
3.  $f(z) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} f^\varepsilon(z) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} f^\varepsilon(z) \leq f^*(z)$ ,  $z \in \mathbb{R}^M$ . En particular, si  $f$  es s.c.s. en  $z \in \mathbb{R}^M$  entonces  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f^\varepsilon(z) = f(z)$ .

4.  $f^*$  y  $f^\varepsilon$  verifican también (4.26) cuando  $0 < \varepsilon < \left(\frac{k}{\ell^+}\right)^{m-1}$ .

5. Si  $f \in \mathcal{SCS}(\mathbb{R}^M)$  entonces  $f^\varepsilon \in \mathcal{SCS}(\mathbb{R}^M)$  y, además,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f^\varepsilon(z) = f(z), \quad z \in \mathbb{R}^M.$$

6. si  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^M)$  entonces  $f^\varepsilon$  converge, cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , uniformemente a  $f$  en subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^M$ .

**Demostación.**

1. La condición (4.26) junto con la acotación local superior de  $f$  hacen que dado  $\delta > 0$  exista  $C_\delta > 0$  tal que

$$f(y) \leq (\ell^+ + \delta)|y|^{\frac{m}{m-1}} + C_\delta, \quad y \in \mathbb{R}^M.$$

Consecuentemente, dado  $z \in \mathbb{R}^M$ , se verifica

$$f^\varepsilon(z) \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^M} \left\{ \frac{(\ell^+ + \delta)|y|^{\frac{m}{m-1}} + C_\delta - k \left( \frac{|z-y|^m}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{m-1}}}{\varepsilon} \right\} \quad (4.28)$$

donde, sin pérdida de generalidad, tomamos  $C_\delta > f(z)$ . Por otra parte, las desigualdades

$$(r+s)^\alpha - r^\alpha \leq 2^{\alpha-1} s^\alpha, \quad r, s \geq 0 \quad \text{si } \alpha \geq 1 \quad ^8 \quad (4.29)$$

y

$$|y| \leq |z-y| + |z|$$

conducen a

$$|y|^{\frac{m}{m-1}} \leq |z-y|^{\frac{m}{m-1}} + 2^{\frac{1}{m-1}} |z|^{\frac{m}{m-1}},$$

por lo que

$$f^\varepsilon(z) \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^M} \left\{ \left( (\ell^+ + \delta) - \frac{k}{\varepsilon^{\frac{1}{m-1}}} \right) |z-y|^{\frac{m}{m-1}} + 2^{\frac{1}{m-1}} (\ell^+ + \delta) |z|^{\frac{m}{m-1}} + C_\delta \right\}.$$

De esta forma,

$$f^\varepsilon(z) \leq 2^{\frac{1}{m-1}} (\ell^+ + \delta) |z|^{\frac{m}{m-1}} + C_\delta \quad \text{si } 0 < \varepsilon < \left( \frac{k}{\ell^+ + \delta} \right)^{m-1}. \quad (4.30)$$

2. Si  $z_0 \in \mathbb{R}^M$  es un máximo global de  $f$ , dado  $\varepsilon > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$  existe  $y_n = y_n(z, \varepsilon) \in \mathbb{R}^M$  tal que

$$f(z_0) \leq f^\varepsilon(z_0) \leq f(y_n) - k \left( \frac{|z_0 - y_n|^m}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{m-1}} + \frac{1}{n} \leq f(z_0) + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

<sup>8</sup>En efecto, basta considerar la variable  $\sigma \doteq \frac{r}{s}$  y la función

$$f(\sigma) \doteq (1+\sigma)^\alpha - \sigma^\alpha - 2^{\alpha-1}, \quad \sigma \geq 0$$

que verifica:  $f(0) = 1 - 2^{\alpha-1} < 0$ ,  $f'(\sigma) = \alpha [(1+\sigma)^{\alpha-1} - \sigma^{\alpha-1}] > 0$  y  $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} f(\sigma) = 0$ .

Haciendo tender  $n \rightarrow +\infty$  obtenemos  $f^\varepsilon(z_0) = f(z_0)$ .

3. Sea  $z \in \mathbb{R}^M$  y  $\{\varepsilon_n\}_n > 0$  tal que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$ . Por definición, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $y_n = y_n(z, \varepsilon_n) \in \mathbb{R}^M$  verificando

$$f(z) \leq f^{\varepsilon_n}(z) \leq \frac{f(y_n) - k \left( \frac{|z - y_n|^m}{\varepsilon_n} \right)^{\frac{1}{m-1}}}{\varepsilon_n} + \frac{1}{n}. \quad (4.31)$$

Nuevamente la condición (4.26) y la acotación local superior de  $f$  hacen que exista  $C > \max \{f(z), 0\}$  tal que

$$f(y) \leq (\ell^+ + 1) |y|^{\frac{m}{m-1}} + C, \quad y \in \mathbb{R}^M.$$

De esta forma, de (4.31) se desprende

$$|z - y_n| \leq \left( \frac{\varepsilon_n^{\frac{1}{m-1}}}{\frac{k}{\varepsilon_n}} (f(y_n) - f(z) + 1) \right)^{\frac{m-1}{m}},$$

es decir,

$$|z - y_n| \leq \left( \frac{\varepsilon_n^{\frac{1}{m-1}}}{k} \left( (\ell^+ + 1) |y_n|^{\frac{m}{m-1}} + C - f(z) + 1 \right) \right)^{\frac{m-1}{m}}. \quad (4.32)$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} |y_n| &\leq |z - y_n| + |z| \\ &\leq \left( \frac{\varepsilon_n^{\frac{1}{m-1}}}{k} \left( (\ell^+ + 1) |y_n|^{\frac{m}{m-1}} + C - f(z) + 1 \right) \right)^{\frac{m-1}{m}} + |z|. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Sea  $n \gg 1$  de forma que

$$\varepsilon_n < \left( \frac{k}{2(\ell^+ + 1)} \right)^{m-1}$$

y consideremos la función

$$g(r) \doteq r - \left( \frac{1}{2} \left( r^{\frac{m}{m-1}} + \frac{C - f(z) + 1}{\ell^+ + 1} \right) \right)^{\frac{m-1}{m}} - |z|, \quad r \geq 0$$

que tiene las siguientes propiedades:

a)  $g \in C^1([0, +\infty[)$ ,  $g(0) < 0$  y  $\lim_{r \rightarrow +\infty} g(r) = +\infty$ .

b)  $g'(r) > 0$ ,  $r > 0$ . En efecto, basta tener en cuenta que

$$g'(r) = 1 - \frac{r^{\frac{1}{m-1}}}{2} \left( \frac{1}{2} \left( r^{\frac{m}{m-1}} + \frac{C - f(z) + 1}{\ell^+ + 1} \right) \right)^{-\frac{1}{m}}, \quad r > 0$$

y

$$\left( \frac{1}{2} \left( r^{\frac{m}{m-1}} + \frac{C - f(z) + 1}{\ell^+ + 1} \right) \right)^{\frac{1}{m}} > \frac{r^{\frac{1}{m-1}}}{2}.$$

De esta forma, los resultados anteriores obtenidos en (4.33) muestran la desigualdad

$$g(|y_n|) \leq 0, \quad n \gg 1$$

ó, equivalentemente,

$$|y_n| \leq g^{-1}(0), \quad n \gg 1$$

que, junto con la relación (4.32), hace que se tenga

$$|z - y_n| \leq \left( \frac{\varepsilon_n^{\frac{1}{m-1}}}{k} \left( (\ell^+ + 1) (g^{-1}(0))^{\frac{m}{m-1}} + \frac{C - f(z) + 1}{\ell^+ + 1} \right) \right)^{\frac{m-1}{m}}, \quad n \gg 1.$$

Por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = z \tag{4.34}$$

pues basta observar que el miembro derecho de la desigualdad anterior es el producto de una sucesión acotada por otra que tiende a cero. De esta forma, como  $f^*$  es s.c.s. en el punto  $z$ , de la expresión (4.31) se deduce

$$\begin{aligned} f(z) &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f^{\varepsilon_n}(z) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} f^{\varepsilon_n}(z) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left\{ f(y_n) - k \left( \frac{|z - y_n|^m}{\varepsilon_n} \right)^{\frac{1}{m-1}} + \frac{1}{n} \right\} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = f^*(z), \end{aligned}$$

es decir,

$$f(z) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f^{\varepsilon_n}(z) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} f^{\varepsilon_n}(z) \leq f^*(z).$$



4. Por definición, dado  $\delta > 0$  existe  $C_\delta > 0$  tal que

$$f(z) \leq (\ell^+ + \delta)|z|^{\frac{m}{m-1}} + C_\delta, \quad z \in \mathbb{R}^M.$$

Como la función

$$\eta(z) \doteq (\ell^+ + \delta)|z|^{\frac{m}{m-1}} + C_\delta, \quad z \in \mathbb{R}^M$$

verifica  $\eta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^M)$  entonces, de la propia definición se sigue

$$f^*(z) \leq \eta(z), \quad z \in \mathbb{R}^M,$$

concluyéndose el resultado. Para  $f^\varepsilon$  basta dividir por  $|z|^{\frac{m}{m-1}}$  y hacer tender  $\delta \rightarrow 0$  en (4.30).

5. Véase la Proposición 4.76 donde se demuestra un resultado más general.

6. Dado  $\varrho > 0$  existe (por (4.34))  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$y_n \in \overline{\mathbf{B}}_\varrho(z), \quad n \geq n_0.$$

Como  $f \in \mathcal{UC}(\overline{\mathbf{B}}_\varrho(z))$ , el resultado se sigue de las relaciones

$$\begin{aligned} 0 \leq f^{\varepsilon_n}(z) - f(z) &\leq f(y_n) - f(z) - k \left( \frac{|z - y_n|^m}{\varepsilon_n} \right)^{\frac{1}{m-1}} + \frac{1}{n} \\ &\leq f(y_n) - f(z) + \frac{1}{n}, \quad n \geq n_0. \quad \square \end{aligned}$$

#### Observación 4.38

1. La definición anterior la hemos hecho para  $\varepsilon > 0$ . No obstante, también tiene sentido considerar  $\varepsilon = 0$  para el que se tiene

$$f^0(z) = f(z), \quad z \in \mathbb{R}^M.$$

El proceso de regularización con  $\varepsilon > 0$  tiene el ‘inconveniente’ de que cuando hacemos tender  $\varepsilon \rightarrow 0$  no describimos directamente el dato inicial cuando éste no es *s.c.s* pues, como

$$f(z) \leq f^\varepsilon(z) \leq f^*(z), \quad z \in \mathbb{R}^M,$$

haciendo tender  $\varepsilon \rightarrow 0$  y tomando envueltas superiores, lo más que podemos afirmar es

$$(f^{0+})^*(z) = f^*(z), \quad z \in \mathbb{R}^M.$$

2. La propiedad 2 muestra que la supconvolución conserva los máximos globales.
3. La relación (4.34) junto con

$$\begin{aligned} f^{\varepsilon_n}(z) &\leq f(y_n) - k \left( \frac{|z - y_n|^m}{\varepsilon_n} \right)^{\frac{1}{m-1}} + \frac{1}{n} \\ &\leq f(y_n) + \frac{1}{n} \leq f^{\varepsilon_n}(y_n) + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

permiten demostrar que, de hecho, se verifica

$$|z - y_n| = o\left((\varepsilon_n)^{\frac{1}{m}}\right) \quad \text{si } n \rightarrow +\infty. \quad \square$$

### Proposición 4.39

Si  $f$  es convexa en  $\mathbb{R}^M$ ,  $M \geq 1$ , entonces la función  $f^\varepsilon$  es también convexa para  $0 < \varepsilon < \left(\frac{k}{\ell^+}\right)^{m-1}$ .

### Demostración.

Emplearemos la caracterización

$$f^\varepsilon(\xi) = \sup_{y \in \mathbb{R}^M} \left\{ f(\xi + y) - k \left( \frac{|y|^m}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\}, \quad \xi \in \mathbb{R}^M.$$

Por ser  $f$  una función convexa se verifica

$$\begin{aligned} f(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta + y) &= f(\lambda(\xi + y) + (1-\lambda)(\eta + y)) \\ &\leq \lambda f(\xi + y) + (1-\lambda)f(\eta + y), \quad \xi, \eta, y \in \mathbb{R}^M, \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \end{aligned}$$

De esta forma, para cada  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^M$  y  $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\begin{aligned} f^\varepsilon(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^M} \left\{ f(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta + y) - k \left( \frac{|y|^m}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\} \\ &\leq \sup_{y \in \mathbb{R}^M} \left\{ \lambda f(\xi + y) + (1-\lambda)f(\eta + y) - k \left( \frac{|y|^m}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\} \end{aligned}$$

$$\leq \lambda \sup_{y \in \mathbb{R}^M} \left\{ f(\xi + y) - k \left( \frac{|y|^m}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\} \\ + (1 - \lambda) \sup_{y \in \mathbb{R}^M} \left\{ \lambda f(\eta + y) - k \left( \frac{|y|^m}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\} = \lambda f^\varepsilon(\xi) + (1 - \lambda) f^\varepsilon(\eta). \quad \square$$

Por tanto, cuando  $f$  es convexa, sus ‘aproximantes’  $f^\varepsilon$  son también convexas y, por tanto, dos veces diferenciables en casi todo punto de  $\mathbb{R}^M$  (véase el *teorema de Alexandroff* en el Apéndice B).

Veamos que, esencialmente, ésto es lo que ocurre para una función  $f$  general.

**Proposición 4.40**

Sea  $f \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^M)$ ,  $M \geq 1$ , con la propiedad (4.26). Entonces para todo  $z \in \mathbb{R}^M$  y  $0 < \varepsilon < \left( \frac{k}{\ell^+} \right)^{m-1}$  existe una constante  $\Lambda \geq 0$ , dependiente sólo de  $f$ , de forma que

$$\frac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial \chi^2}(z) \geq -\frac{\Lambda}{\varepsilon^{\frac{1}{m-1}}} \quad \forall \chi \in \mathbb{R}^M \quad \text{con } |\chi| = 1.$$

**Demostración.**

Fijado  $z \in \mathbb{R}^M$  y  $\varepsilon > 0$  la acotación local superior de  $f$  y la hipótesis (4.26) determinan, para cada  $\delta > 0$ , la existencia de  $C_\delta > 0$  tal que

$$f(y) \leq (\ell^+ + \delta) |y|^{\frac{m}{m-1}} + C_\delta, \quad y \in \mathbb{R}^M.$$

Por tanto, por definición

$$f^\varepsilon(z) \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^M} \psi_\delta(y; z) \tag{4.35}$$

siendo

$$\psi_\delta(y; z) \doteq (\ell^+ + \delta) |y|^{\frac{m}{m-1}} + C_\delta - k \left( \frac{|y - z|^m}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

Claramente  $\psi_\delta(\cdot; z) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^M)$  y como

$$\psi_\delta(y; z) \sim \left( (\ell^+ + \delta) - \frac{k}{\varepsilon^{\frac{1}{m-1}}} \right) |y|^{\frac{m}{m-1}} \quad \text{si } |y| \rightarrow +\infty$$

entonces, si tomamos  $0 < \varepsilon < \left(\frac{k}{\ell + \delta}\right)^{m-1}$ , se verifica

$$\lim_{|y| \rightarrow +\infty} \psi_\delta(y; z) = -\infty. \quad (4.36)$$

Consecuentemente, (4.35) y (4.36) implican la existencia de  $\delta_0 > 0$  tal que si  $0 < \delta < \delta_0$  entonces

$$f^\varepsilon(z) = \sup_{y \in \overline{\mathbf{B}}_{\frac{1}{\delta}}(z)} \left\{ f(y) - k \left( \frac{|y - z|^m}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\}, \quad z \in \mathbb{R}^M.$$

Por tanto, dado  $n \in \mathbb{N}$  existe  $y_n = y_n(z, \varepsilon, k, m, \delta) \in \overline{\mathbf{B}}_{\frac{1}{\delta}}(z)$  tal que

$$f^\varepsilon(z) \leq f(y_n) - k \left( \frac{|y_n - z|^m}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{m-1}} + \frac{1}{n}.$$

Como  $|y_n| \leq \frac{1}{\delta}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , existirá  $y_0 \in \overline{\mathbf{B}}_{\frac{1}{\delta}}(z)$  y una subsucesión de  $\{y_n\}_n$  (que seguimos denotando  $\{y_n\}_n$ ) tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y_0.$$

Sea ahora  $\chi \in \mathbb{R}^M$  con  $|\chi| = 1$  y  $h > 0$ . Entonces se verifica

$$\begin{aligned} f^\varepsilon(z + h\chi) - 2f^\varepsilon(z) + f^\varepsilon(z - h\chi) &\geq \left( f(y_n) - k \left( \frac{|y_n - z - h\chi|^m}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right) \\ &- \left( 2f(y_n) - 2k \left( \frac{|y_n - z|^m}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{m-1}} + \frac{2}{n} \right) + \left( f(y_n) - k \left( \frac{|y_n - z + h\chi|^m}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right) \\ &= -\frac{k}{\varepsilon^{\frac{1}{m-1}}} \left( |y_n - z - h\chi|^{\frac{m}{m-1}} - 2|y_n - z|^{\frac{m}{m-1}} + |y_n - z + h\chi|^{\frac{m}{m-1}} \right) - \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Haciendo tender  $n \rightarrow +\infty$  en la expresión anterior se obtiene

$$f^\varepsilon(z + h\chi) - 2f^\varepsilon(z) + f^\varepsilon(z - h\chi)$$

$$\geq -\frac{k}{\varepsilon^{\frac{1}{m-1}}} [\phi(h; y_0, z) - 2\phi(0; y_0, z) + \phi(-h; y_0, z)]$$

siendo

$$\phi(k; y_0, z) \doteq |y_0 - z - k\chi|^{\frac{m}{m-1}}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\phi(\pm h; y_0, z) = \phi(0; y_0, z) \pm h\phi'(0; y_0, z) + \frac{h^2}{2}\phi''(0; y_0, z) + o(h^2)$$

y

$$|\phi''(0; y_0, z)| = m|y_0 - z|^{\frac{2-m}{m-1}},$$

se verifica

$$\begin{aligned} & \frac{f^\varepsilon(z + h\chi) - 2f^\varepsilon(z) + f^\varepsilon(z - h\chi)}{h^2} \geq -\frac{k}{\varepsilon^{\frac{1}{m-1}}} \left( \phi''(0; y_0, z) + \frac{o(h^2)}{h^2} \right) \\ & = -\frac{k}{\varepsilon^{\frac{1}{m-1}}} \left( m|y_0 - z|^{\frac{2-m}{m-1}} + \frac{o(h^2)}{h^2} \right) \geq -\left( \frac{km}{\delta^{\frac{2-m}{m-1}}} + \frac{o(h^2)}{h^2} \right) \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{m-1}}} \geq -\frac{\Lambda}{\varepsilon^{\frac{1}{m-1}}}. \quad \square \end{aligned}$$

#### Observación 4.41

En la demostración anterior se ha obtenido

$$\frac{f^\varepsilon(z + h\chi) - 2f^\varepsilon(z) + f^\varepsilon(z - h\chi)}{h^2} \geq -\left( \frac{km}{\delta^{\frac{2-m}{m-1}}} + \frac{o(h^2)}{h^2} \right) \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{m-1}}}$$

lo que permite escribir, haciendo tender  $h \rightarrow 0$ ,

$$\frac{\partial^2 f^\varepsilon}{\partial \chi^2}(z) \geq -\Lambda(\delta, m, k) \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{m-1}}} \quad \forall \chi \in \mathbb{R}^M \quad \text{con } |\chi| = 1$$

donde

$$\Lambda(\delta, m, k) \doteq -\frac{km}{\delta^{\frac{2-m}{m-1}}}.$$

El valor de  $\Lambda(\delta, m, k)$  puede precisarse en algunos casos:

1. si  $m = 2$  entonces  $\Lambda(\delta, 2, k) = 2k$ .
2. si  $m > 2$  haciendo tender  $\delta \rightarrow 0$  se obtiene

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \Lambda(\delta, m, k) = 0,$$

por lo que la función  $f^\varepsilon$  es convexa.  $\square$

La lipschitzianidad local de las funciones convexas (ver [Au1] o [Au2]) permite concluir el siguiente efecto regularizante.

**Corolario 4.42**

Si  $f \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^M)$ ,  $M \geq 1$ , verifica (4.26), para todo  $0 < \varepsilon < \left(\frac{k}{\ell^+}\right)^{m-1}$  la función  $f^\varepsilon \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^M)$ . Además,  $f^\varepsilon$  es dos veces diferenciable en casi todo punto de  $\mathbb{R}^M$ .

**Demostración.**

Como la función  $\frac{f^\varepsilon(z) + \frac{\Lambda}{\varepsilon^{m-1}}|z|^2}{\varepsilon^{m-1}}$  es convexa, entonces

$$f^\varepsilon(z) + \frac{\Lambda}{\varepsilon^{m-1}}|z|^2 \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^M) \Rightarrow f^\varepsilon \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^M). \quad \square$$

Uno de los resultados fundamentales de esta Subsección permite ‘descubrir’ elementos superdiferenciales de una función  $f$  a partir de las superdiferenciales de las funciones  $f^\varepsilon$ .

**Teorema 4.43**

Sea  $f \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^M)$ ,  $M \geq 1$ , verificando (4.26) y su  $m, k$ -supconvolución  $f^\varepsilon$  dada en (4.27). Entonces, para cada  $\varepsilon > 0$  se verifica

$$p \in D^+ f^\varepsilon(z) \Rightarrow p \in D^+ f \left( z - \left( \frac{m-1}{mk} \right)^{m-1} \varepsilon |p|^{m-2} p \right)$$

y, además

$$f^\varepsilon(z) = f \left( z - \left( \frac{m-1}{mk} \right)^{m-1} \varepsilon |p|^{m-2} p \right) - \left( \frac{m-1}{m} \right)^m \frac{\varepsilon}{k^{m-1}} |p|^m. \quad (4.37)$$

**Demostración.**

En primer lugar, fijados  $z \in \mathbb{R}^M$  y  $\varepsilon > 0$ , sea  $y_{z,\varepsilon} \in \mathbb{R}^M$  tal que

$$f^\varepsilon(z) = f(y_{z,\varepsilon}) - k \left( \frac{|z - y_{z,\varepsilon}|^m}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

De esta forma, si  $p \in D^+ f^\varepsilon(z)$ , para cada  $x, y \in \mathbb{R}^M$  se sigue, por definición, la siguiente cadena de desigualdades

$$\begin{aligned} f(y) - k \left( \frac{|x - y|^m}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{m-1}} &\leq f^\varepsilon(x) \leq f^\varepsilon(z) + p \cdot (x - z) + o(|x - z|) \\ &= f(y_{z,\varepsilon}) - k \left( \frac{|z - y_{z,\varepsilon}|^m}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{m-1}} + p \cdot (x - z) + o(|x - z|). \end{aligned}$$

Así, la elección  $x = y - y_{z,\varepsilon} + z$  conduce a

$$f(y) \leq f(y_{z,\varepsilon}) + p \cdot (y - y_{z,\varepsilon}) + o(|y - y_{z,\varepsilon}|).$$

Por tanto,  $p \in D^+ f(y_{z,\varepsilon})$ .

Por otra parte, hagamos  $y = y_{z,\varepsilon}$  y  $x = z + \lambda\xi$  con  $\lambda > 0$  y  $\xi \in \mathbb{R}^M$  por determinar. Ahora se tiene:

$$0 \leq \frac{k}{\varepsilon^{\frac{1}{m-1}}} \left[ |z - y_{z,\varepsilon} - \lambda\xi|^{\frac{m}{m-1}} - |z - y_{z,\varepsilon}|^{\frac{m}{m-1}} \right] + \lambda p \cdot \xi + o(\lambda|\xi|). \quad (4.38)$$

Teniendo en cuenta que la función

$$g(\eta) \doteq |z - y_{z,\varepsilon} - \eta|^{\frac{m}{m-1}}$$

tiene la propiedad

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{g(\lambda\xi) - g(0)}{\lambda} = \frac{\partial g}{\partial \xi}(0) = \nabla g(0) \cdot \xi = -\frac{m}{m-1} |z - y_{z,\varepsilon}|^{\frac{2-m}{m-1}} (z - y_{z,\varepsilon}) \cdot \xi,$$

dividiendo por  $\lambda$  en (4.38) y haciendo  $\lambda \rightarrow 0$  obtenemos

$$0 \leq \left[ -\frac{m}{m-1} \frac{k}{\varepsilon^{\frac{1}{m-1}}} |z - y_{z,\varepsilon}|^{\frac{2-m}{m-1}} (z - y_{z,\varepsilon}) + p \right] \cdot \xi.$$

De esta forma, la elección

$$\xi \doteq \frac{m}{m-1} \frac{k}{\varepsilon^{\frac{1}{m-1}}} |z - y_{z,\varepsilon}|^{\frac{2-m}{m-1}} (z - y_{z,\varepsilon}) - p$$

determina

$$0 \leq -|\xi|^2 \leq 0 \Rightarrow \xi = 0,$$

es decir,

$$|z - y_{z,\varepsilon}|^{\frac{2-m}{m-1}}(z - y_{z,\varepsilon}) = \frac{m-1}{mk} \varepsilon^{\frac{1}{m-1}} p.$$

Como los vectores  $z - y_{z,\varepsilon}$  y  $p$  están en la misma dirección, la relación anterior hace que

$$z = y_{z,\varepsilon} + \mu p \quad \text{con } \mu > 0.$$

Por tanto,

$$(\mu|p|)^{\frac{1}{m-1}} = \frac{m-1}{-mk} \varepsilon^{\frac{1}{m-1}} |p|$$

de donde

$$\mu = \left(\frac{m-1}{mk}\right)^{m-1} \varepsilon |p|^{m-2}$$

y, consecuentemente,

$$y_{z,\varepsilon} = z - \left(\frac{m-1}{mk}\right)^{m-1} \varepsilon |p|^{m-2} p. \quad \square$$

#### Observación 4.44

El resultado anterior permite aproximar el valor  $f(z)$  mediante valores semicontinuos, pues  $f$  es *s.c.s.* en el punto

$$z - \left(\frac{m-1}{mk}\right)^{m-1} \varepsilon |p|^{m-2} p$$

(recuérdese la Proposición 4.17). En particular,

$$0 \in D^+ f^\varepsilon(z) \Rightarrow 0 \in D^+ f(z) \Rightarrow f(z) = f^*(z) \Rightarrow f \text{ es s.c.s. en } z. \quad \square$$

Podemos concluir un resultado, en cierto sentido recíproco, al de la Proposición 4.17.

#### Corolario 4.45

Sea  $f \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^M)$ ,  $M \geq 1$ , verificando (4.26). Entonces

$$D^+ f(z) \neq \emptyset \quad \text{a.e. } z \in \mathbb{R}^M$$

lo que implica

$$f \text{ es s.c.s. a.e. } z \in \mathbb{R}^M.$$

Por tanto, el conjunto  $\mathbb{R}^M \setminus A^+$  es denso en  $\mathbb{R}^M$  donde

$$A^+ \triangleq \{z \in \mathbb{R}^M : D^+ f(z) = \emptyset\}.$$



**Demostración.**

Basta tener en cuenta que las funciones  $f^\varepsilon$  definidas en (4.27) son localmente lipschitzianas, por lo que son diferenciables en casi todo punto. El resultado se sigue entonces del Teorema 4.43.  $\square$

Otra interesante propiedad de la supconvolución es la siguiente *acotación del gradiente* que permite precisar la lipschitzianidad local de las regularizaciones  $f^\varepsilon$ .

**Corolario 4.46 (Cota del gradiente)**

Sea  $f \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^M)$ ,  $M \geq 1$ , verificando (4.26). Dado  $z \in \mathbb{R}^M$  y  $\delta > 0$  existe  $C_\delta = C_\delta(f, \delta) \geq 0$  tal que para todo  $p \in D^+ f^\varepsilon(z)$  con

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \left( \frac{k}{\ell^+ + \delta} \right)^{m-1}$$

se verifica

$$|p| \leq \frac{mk}{m-1} \left( \frac{(\ell^+ + \delta)|z|^{\frac{m}{m-1}} + C_\delta - f(z)}{[k - (\ell^+ + \delta)(2\varepsilon)^{\frac{1}{m-1}}]\varepsilon} \right)^{\frac{1}{m}}.$$

**Demostración.**

Por el Teorema 4.43 sabemos que

$$f(z) \leq f^\varepsilon(z) = f\left(z - \left(\frac{m-1}{mk}\right)^{m-1} \varepsilon |p|^{m-2} p\right) - \left(\frac{m-1}{m}\right)^m \frac{\varepsilon}{k^{m-1}} |p|^m.$$

La condición (4.26) junto con la acotación local superior de  $f$  hacen que dado  $\delta > 0$  exista  $C_\delta > 0$  tal que

$$f(y) \leq (\ell^+ + \delta)|y|^{\frac{m}{m-1}} + C_\delta, \quad y \in \mathbb{R}^M.$$

De esta forma, de las dos relaciones anteriores se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{m-1}{m}\right)^m \frac{\varepsilon}{k^{m-1}} |p|^m &\leq (\ell^+ + \delta) \left| z - \left(\frac{m-1}{mk}\right)^{m-1} \varepsilon |p|^{m-2} p \right|^{\frac{m}{m-1}} + C_\delta - f(z) \\ &\leq (\ell^+ + \delta) \left( |z| + \left(\frac{m-1}{mk}\right)^{m-1} \varepsilon |p|^{m-1} \right)^{\frac{m}{m-1}} + C_\delta - f(z). \end{aligned}$$

Por otra parte, la conocida desigualdad

$$(r + s)^{\frac{m}{m-1}} - r^{\frac{m}{m-1}} \leq 2^{\frac{1}{m-1}} s^{\frac{m}{m-1}}, \quad r, s \geq 0 \quad (4.39)$$

(ver (4.29)) conduce a

$$\begin{aligned} & \left(\frac{m-1}{m}\right)^m \frac{\varepsilon}{k^{m-1}} |p|^m \\ & \leq (\ell^+ + \delta) \left( |z|^{\frac{m}{m-1}} + 2^{\frac{1}{m-1}} \left(\frac{m-1}{mk}\right)^m |p|^m \varepsilon^{\frac{m}{m-1}} \right) + C_\delta - f(z). \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\varepsilon \left(\frac{m-1}{mk}\right)^m \left(k - (\ell^+ + \delta)(2\varepsilon)^{\frac{1}{m-1}}\right) |p|^m \leq (\ell^+ + \delta) |z|^{\frac{m}{m-1}} + C_\delta - f(z),$$

de donde se sigue el resultado.  $\square$

#### Observación 4.47

1. La regularidad  $\mathcal{C}^1$  sobre  $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$  de la norma euclídea tiene un papel básico en muchos de los argumentos empleados anteriormente sobre la  $m, k$ -supconvolución de funciones localmente superiormente acotadas. Aunque no se desarrollarán en esta Memoria, estas ideas pueden extenderse a espacios de Banach de dimensión arbitraria cuya norma posea esa propiedad (ver [Di-Re2]).
2. En forma parecida, se puede definir la  $m, k$ -infconvolución

$$f_\varepsilon(z) \doteq \inf_{y \in \mathbb{R}^M} \left\{ f(y) + k \left( \frac{|z-y|^m}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\} \leq f(z), \quad z \in \mathbb{R}^M$$

de una función  $f \in \mathcal{LIA}(\mathbb{R}^M)$ ,  $M \geq 1$ , verificando

$$\liminf_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{f(z)}{|z|^{\frac{m}{m-1}}} \in \mathbb{R}$$

para algún  $m > 1$ . Obviamente se pueden trasladar a  $f_\varepsilon$  todas las propiedades de la  $m, k$ -supconvolución.

3. Sea  $f \in \mathcal{L}\mathcal{A}(\mathbb{R}^M)$ ,  $M \geq 1$ , verificando

$$-\infty < \liminf_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{f(z)}{|z|^{\frac{m}{m-1}}} \leq \limsup_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{f(z)}{|z|^{\frac{m}{m-1}}} < +\infty$$

para algún  $m > 1$ . Denotando por

$$A^\pm \doteq \{z \in \mathbb{R}^M : D^\pm f(z) = \emptyset\}$$

y por  $d(f)$  al conjunto de puntos de diferenciabilidad de  $f$ , la relación

$$d(f) = (\mathbb{R}^M \setminus A^+) \cap (\mathbb{R}^M \setminus A^-)$$

y el Corolario 4.45 determinan que el conjunto  $d(f)$  es denso (si es no vacío) en  $\mathbb{R}^M$ .

4. El conjunto  $d(f)$  puede ser vacío. En efecto, consideremos la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  definida como

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathcal{Q} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathcal{Q}. \end{cases}$$

Como para cada  $x \in \mathbb{R}$  se verifica  $f_*(x) = 0$  y  $f^*(x) = 1$ , entonces

$$\begin{cases} f(x) = 0 = f_*(x) & \text{si } x \in \mathcal{Q} \\ f(x) = 1 = f^*(x) & \text{si } x \notin \mathcal{Q} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f \in \text{SCI}(\mathcal{Q}) \\ f \in \text{SCS}(\mathbb{R} \setminus \mathcal{Q}) \end{cases}$$

(véase la Observación 4.16). Nótese que

$$0 \in D^- f(x) \quad \text{si } x \in \mathcal{Q},$$

$$0 \in D^+ f(x) \quad \text{si } x \notin \mathcal{Q}$$

y  $f$  no es continua en ningún punto de  $\mathbb{R}$ .  $\square$

Otro resultado práctico de gran utilidad es el que sigue.

**Lema 4.48**

Sea  $T > 0$  y  $g \in C([0, T])$ . Entonces

$$p \leq 0, p \in D^+ g(t), 0 < t < T \tag{4.40}$$

si y sólo si

$$g(t) \leq g(s), 0 \leq s \leq t \leq T.$$

**Demostración.**

$\Rightarrow$ ) Para  $s \in ]0, T[$  fijo basta con mostrar (como en [Cr-Li2]) que para cada  $\varepsilon > 0$  se tiene

$$f(t) \leq 0, \quad s \leq t \leq T \quad (4.41)$$

siendo

$$f(t) \doteq g(t) - g(s) - \varepsilon.$$

Claramente se verifica

$$D^+ f(t) = D^+ g(t), \quad t \in ]s, T[$$

por lo que la propiedad (4.40) hace que para cada  $t \in ]s, T[$  se tenga

$$p \leq 0, \quad p \in D^+ f(t). \quad (4.42)$$

Ante todo,  $f \in \mathcal{C}([s, T])$  y  $f(s) = -\varepsilon < 0$ . En el caso en que no se verificara (4.41) existiría  $t_2 \in ]s, T[$  tal que  $f(t_2) > 0$ . De esta forma, el *teorema de Bolzano* implica la existencia de  $t_1 \in ]s, t_2[$  con la propiedad

$$f(t_1) = 0 \quad \text{y} \quad f(t) > 0, \quad t \in ]t_1, t_2[.$$

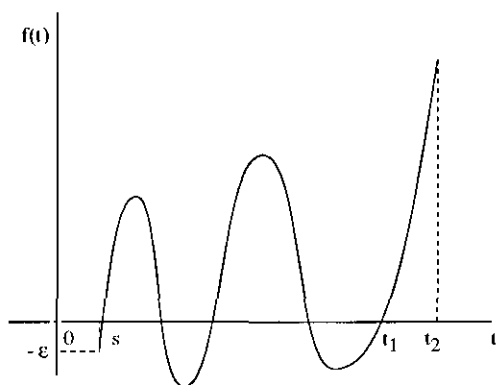


Figura 4.5: Función  $f(t)$ .

Consideremos ahora una función  $\eta \in \mathcal{C}^1([t_1, t_2])$  verificando:

$$\eta(t) > 0, \quad t \in [t_1, t_2[, \quad \eta(t_2) = 0 \quad \text{y} \quad \eta'(t) < 0, \quad t \in ]t_1, t_2[.$$

A continuación construimos la función

$$h(t) \doteq \eta(t)f(t), \quad t \in [t_1, t_2]$$

que tiene las propiedades:

$$h \in \mathcal{C}([t_1, t_2]), \quad h(t_1) = h(t_2) = 0 \quad \text{y} \quad h(t) > 0, \quad t \in ]t_1, t_2[.$$

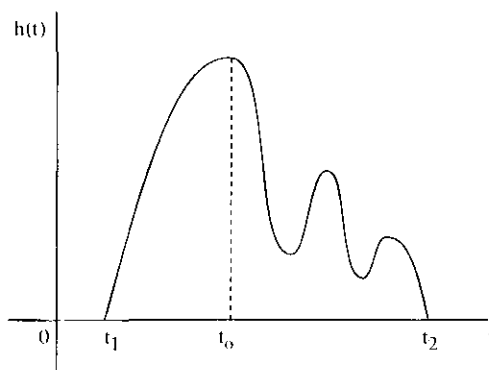


Figura 4.6: Función  $h(t)$ .

Por tanto, existe  $t_0 \in ]t_1, t_2[$  con  $h(t_0) > 0$  tal que

$$h(t) \leq h(t_0), \quad t \in [t_1, t_2].^9 \quad (4.43)$$

Por otro lado

$$h(t) - h(t_0) = \eta(t)f(t) - \eta(t_0)f(t_0) = \eta(t)(f(t) - f(t_0)) + f(t_0)(\eta(t) - \eta(t_0)).$$

Teniendo en cuenta que

$$\eta(t) = \eta(t_0) + \eta'(t_0)(t - t_0) + o(|t - t_0|)$$

la expresión anterior queda en la forma

$$h(t) - h(t_0) = \eta(t_0)(f(t) - f(t_0)) + \overbrace{\eta'(t_0)(f(t) - f(t_0))(t - t_0)}^{o(|t-t_0|)}$$

<sup>9</sup>El hecho que en  $t_0$  la función  $h$  tenga un máximo local conduce a que  $0 \in D^+h(t_0)$ .

$$+\eta'(t_0)f(t_0)(t-t_0)+o(|t-t_0|) = \eta(t_0)(f(t)-f(t_0))+\eta'(t_0)f(t_0)(t-t_0)+o(|t-t_0|).$$

Reemplazando esta igualdad en (4.43) obtenemos

$$\eta(t_0)(f(t) - f(t_0)) + \eta'(t_0)f(t_0)(t - t_0) + o(|t - t_0|) \leq 0.$$

Dividiendo esta expresión por  $\eta(t_0) > 0$  se tiene

$$f(t) \leq f(t_0) - \frac{\eta'(t_0)f(t_0)}{\eta(t_0)}(t - t_0) + o(|t - t_0|),$$

lo que implica

$$-\frac{\eta'(t_0)f(t_0)}{\eta(t_0)} \in D^+ f(t_0).$$

Como

$$-\frac{\eta'(t_0)f(t_0)}{\eta(t_0)} > 0$$

obtenemos una contradicción con (4.42).

$\Leftarrow$ ) Si  $g$  es una función decreciente en  $[0, T]$  entonces

$$g(t) \leq g(s), \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

De esta forma, si  $p \in D^+ g(t)$  con  $0 < t < T$ , se tiene

$$0 \leq g(s) - g(t) \leq -p(t - s) + o(t - s), \quad 0 \leq s \leq t.$$

Dividiendo la expresión anterior por  $t - s$  y haciendo tender  $t \rightarrow s$  se concluye

$$p \leq 0, \quad p \in D^+ g(t), \quad 0 < t < T. \quad \square$$

#### Observación 4.49

De forma análoga se muestra que si  $g \in \mathcal{C}([0, T])$  entonces

$$p \geq 0, \quad p \in D^- g(t), \quad 0 < t < T$$

si y sólo si

$$g(t) \geq g(s), \quad 0 \leq s \leq t \leq T. \quad \square$$

A continuación veamos como el uso de la  $m, k$ -supconvolución permite debilitar las hipótesis del Lema 4.48. Concretamente,

**Corolario 4.50**

Sea  $T > 0$  y  $g \in \mathcal{LSA}([0, T])$  verificando

$$p \leq 0, p \in D^+g^*(t), 0 < t < T. \quad (4.44)$$

Entonces

$$g(t) \leq \underline{g^*}(t) \leq g^*(s), 0 \leq s \leq t \leq T.$$

**Demostración.**

Sin pérdida de generalidad podemos suponer  $g^*(s) = 0$  sin más que reemplazar la función  $g(t)$  por  $G(t) = g(t) - g^*(s)$ . De esta forma, primeramente, prolongamos la función  $g^*$  a todo  $\mathbb{R}$  de la siguiente forma

$$\tilde{g}(t) \doteq \begin{cases} g^*(0), & t \leq 0 \\ g^*(t), & 0 \leq t \leq T \\ g^*(T), & t \geq T. \end{cases}$$

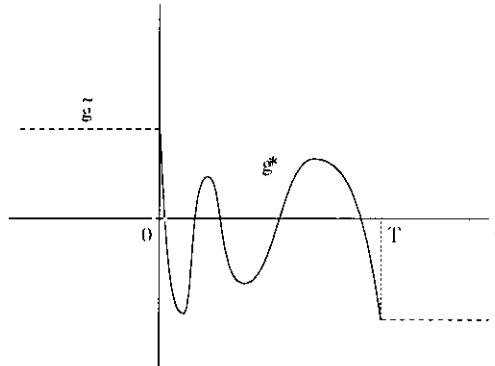


Figura 4.7: Funciones  $g^*$  y  $\tilde{g}$ .

Nótese que

$$D^+\tilde{g}(0) \subset D^+g^*(0) \cup \{0\},$$

$$D^+\tilde{g}(t) = D^+g^*(t), 0 < t < T$$

y

$$D^+\tilde{g}(T) \subset D^+g^*(T) \cup \{0\}.$$

A continuación, dado  $\delta > 0$ , consideramos la función

$$g_\delta(t) \doteq \tilde{g}(t) - \delta t, \quad t \in \mathbb{R}$$

que para  $0 < t < T$  tiene la propiedad

$$p_\delta \in D^+g_\delta(t) \Leftrightarrow p_\delta = p - \delta \quad \text{con } p \in D^+g^*(t).$$

Por tanto, para cada  $t \in ]0, T[$  se verifica

$$p_\delta \leq -\delta, \quad p_\delta \in D^+g_\delta(t). \quad (4.45)$$

De esta forma, si consideramos la  $m, k$ -supconvolución para la función  $g_\delta$ :

$$g_\delta^\varepsilon(t) \doteq \sup_{s \in \mathbb{R}} \left\{ g_\delta(s) - k \left( \frac{|t-s|^m}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\}, \quad \varepsilon > 0$$

sabemos por el Teorema 4.43 que

$$D^+g_\delta^\varepsilon(t) \subset D^+g_\delta \left( t - \left( \frac{m-1}{mk} \right)^{m-1} \varepsilon |p|^{m-2} p \right)$$

por lo que (4.45) hace que se verifique

$$p_\delta^\varepsilon \leq -\delta, \quad p \in D^+g_\delta^\varepsilon(t), \quad 0 < t < T.$$

Como  $g_\delta^\varepsilon \in \mathcal{C}([0, T])$ , el Lema 4.48 conduce a

$$g_\delta^\varepsilon(t) - g_\delta^\varepsilon(s) \leq -\delta(t-s), \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Finalmente basta tender  $\varepsilon \rightarrow 0$  y después  $\delta \rightarrow 0$  para obtener

$$g(t) \leq g^*(t) \leq 0. \quad \square$$

Podemos generalizar aún el resultado anterior.

#### Corolario 4.51

Sea  $T > 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $g \in \mathcal{LSA}([0, T])$ ,  $h \in \mathcal{LIA}([0, T])$  verificando

$$p + \mu g^*(t) \leq h(t), \quad p \in D^+g^*(t), \quad 0 < t < T. \quad (4.46)$$

Entonces,

$$g(t) \leq g^*(t) \leq e^{-\mu(t-s)} g^*(s) + \int_s^t e^{-\mu(t-r)} h(r) dr, \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$



**Demostración.**

Para  $s \in ]0, T[$  fijo consideramos la función *s.c.s.*

$$\phi(t) = e^{\mu t} g^*(t) - \int_s^t e^{\mu r} h(r) dr, \quad s \leq t \leq T.$$

Dado  $t_0 \in ]0, T[$  y  $p_0 \in D^+ \phi(t_0)$ , es decir,

$$\phi(t) - \phi(t_0) \leq p_0(t - t_0) + o(|t - t_0|),$$

gracias a las relaciones

$$e^{\mu t} = e^{\mu t_0} + \mu e^{\mu t_0}(t - t_0) + o(|t - t_0|),$$

y

$$\int_s^t e^{\mu r} h(r) dr = e^{\mu t_0} h(t_0)(t - t_0) + o(|t - t_0|)$$

se verifica

$$\begin{aligned} \phi(t) - \phi(t_0) &= e^{\mu t} (g^*(t) - g^*(t_0)) + (e^{\mu t} - e^{\mu t_0}) g^*(t_0) - \int_{t_0}^t e^{\mu r} h(r) dr \\ &= e^{\mu t_0} (g^*(t) - g^*(t_0)) + \overbrace{\mu e^{\mu t_0} (t - t_0) (g^*(t) - g^*(t_0))}^{o(|t - t_0|)} \\ &\quad + \mu e^{\mu t_0} g^*(t_0)(t - t_0) - e^{\mu t_0} h(t_0)(t - t_0) + o(|t - t_0|) \\ &= e^{\mu t_0} (g^*(t) - g^*(t_0)) + (\mu g^*(t_0) - h(t_0)) e^{\mu t_0} (t - t_0) + o(|t - t_0|). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$g^*(t) \leq g^*(t_0) + [p_0 e^{-\mu t_0} + h(t_0) - \mu g^*(t_0)] (t - t_0) + o(|t - t_0|)$$

lo que implica

$$p_0 e^{-\mu t_0} + h(t_0) - \mu g^*(t_0) \in D^+ g^*(t_0).$$

Consecuentemente, hemos mostrado

$$p_0 \in D^+ \phi(t_0) \Rightarrow p_0 e^{-\mu t_0} + h(t_0) - \mu g^*(t_0) \in D^+ g^*(t_0).$$

De esta forma, la relación (4.46) hace que para todo  $t \in ]0, T[$  se verifique

$$[p e^{-\mu t} + h(t) - \mu g^*(t)] + \mu g^*(t) \leq h(t), \quad p \in D^+ \phi(t).$$

Por tanto,

$$p \leq 0, p \in D^+ \phi(t), 0 < t < T.$$

Aplicando el Corolario 4.50 se obtiene

$$\phi(t) \leq \phi(s), 0 \leq s \leq t \leq T$$

de donde para  $0 \leq s \leq t \leq T$  se concluye

$$e^{\mu t} g(t) \leq e^{\mu t} g^*(t) \leq e^{\mu s} g^*(s) + \int_s^t e^{\mu r} h(r) dr = \int_s^t e^{\mu r} h(r) dr. \quad \square$$

### 4.3 Soluciones de viscosidad. Problemas de contorno.

Parece conveniente resaltar algunas ideas básicas de la noción de solución de viscosidad que van quedando latentes en la exposición. Consideremos a estos efectos un conjunto  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{R}^M$  con  $M \geq 1$  y una función  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(\mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M)$  a la que asociamos la ecuación

$$\mathcal{F}(z, u, \nabla u) = 0 \text{ en } \mathcal{O}. \quad (\text{E})$$

Sea, por otra parte,  $u : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  y denotemos por

$$D^+ u = \{z \in \mathcal{O} : D^+ u(z) \neq \emptyset\}$$

y

$$D^- u = \{z \in \mathcal{O} : D^- u(z) \neq \emptyset\}.$$

Recordemos que  $u$  es

1. *subsolución de viscosidad* de (E) si  $u \in SCS(\mathcal{O})$  y

$$\mathcal{F}(z, u(z), p) \leq 0, p \in D^+ u(z), z \in \mathcal{O}.$$

2. *supersolución de viscosidad* de (E) si  $u \in SCI(\mathcal{O})$  y

$$\mathcal{F}(z, u(z), p) \geq 0, p \in D^- u(z), z \in \mathcal{O}.$$

3. *solución de viscosidad* de (E) si es, simultáneamente, sub y supersolución de viscosidad de (E).

**Observación 4.52**

Para que  $u$  sea solución de viscosidad de (E) no se precisa, necesariamente, que  $u$  sea continua en todo su dominio de definición, basta con que  $u \in \mathcal{SCS}(D^+u)$  para ser subsolución y que  $u \in \mathcal{SCI}(D^-u)$  para poder ser supersolución.  $\square$

La anterior noción de solución de viscosidad puede generalizarse de la siguiente forma.

**Definición 4.53**

Sea  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^M$ ,  $M \geq 1$  y  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(\mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M)$ . Una función  $u : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  es:

1. *subsolución de viscosidad* de (E) si  $u \in \mathcal{LSA}(\mathcal{O})$  y

$$\mathcal{F}(z, u^*(z), p) \leq 0, \quad p \in D^+u^*(z), \quad z \in \mathcal{O}.$$

2. *supersolución de viscosidad* de (E) si  $u \in \mathcal{LIA}(\mathcal{O})$  y

$$\mathcal{F}(z, u_*(z), p) \geq 0, \quad p \in D^-u_*(z), \quad z \in \mathcal{O}.$$

3. *solución de viscosidad* de (E) si  $u \in \mathcal{LA}(\mathcal{O})$  es sub y supersolución de viscosidad de (E).

**Observación 4.54**

1. Nótese que ahora no se requiere ningún supuesto de semicontinuidad.  
2. Las propiedades

$$\begin{cases} D^+u(z) \neq \emptyset \Rightarrow u(z) = u^*(z) \text{ y } D^+u^*(z) = D^+u(z) \\ D^-u(z) \neq \emptyset \Rightarrow u(z) = u_*(z) \text{ y } D^-u_*(z) = D^-u(z) \end{cases}$$

(véase la Observación 4.16) expresan la *consistencia* de las nociones anteriores.  $\square$

**Observación 4.55**

Podemos ahora enunciar el Corolario 4.51 en la forma: "Sea  $T > 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $g \in \mathcal{LSA}([0, T])$ ,  $h \in \mathcal{LIA}([0, T])$  verificando

$$g' + \mu g \leq h \quad \text{en } ]0, T[$$

en el sentido de la viscosidad. Entonces,

$$g(t) \leq g^*(t) \leq e^{-\mu(t-s)}g^*(s) + \int_s^t e^{-\mu(t-r)}h(r)dr, \quad 0 \leq s \leq t \leq T." \quad \square$$

Estudieemos una propiedad que tienen las soluciones semiconvexas.

**Proposición 4.56**

Sea  $u : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$  una función semiconvexa en  $\mathcal{O}$ . Si  $u$  es solución de viscosidad de

$$\mathcal{F}(z, u, \nabla u) = 0 \quad \text{en } \mathcal{O}$$

entonces  $u$  es diferenciable en  $D^+u$  y

$$\mathcal{F}(z, u(z), \nabla u(z)) = 0, \quad z \in D^+u.$$

**Demostración.**

Por definición se verifica

$$\mathcal{F}(z, u^*(z), p) \leq 0, \quad p \in D^+u^*(z), \quad z \in \mathcal{O}$$

y, puesto que toda función semiconvexa es continua, se tiene

$$u = u^* = u_*.$$

Por otra parte, la Proposición 4.34 determina

$$p \in D^+u(z) \Rightarrow \{p\} = D^+u(z) = \nabla u(z).$$

Consecuentemente,  $u$  es diferenciable en  $z$  y

$$0 \leq \mathcal{F}(z, u(z), p) \leq 0. \quad \square$$

El siguiente resultado que abordamos es relativo a la existencia.

**Proposición 4.57 (Existencia de ‘soluciones interiores’)**

Sea  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^M$ ,  $M \geq 1$ ,  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(\mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M)$  y  $u \in \mathcal{LIA}(\mathcal{O})$  una solución de viscosidad de

$$\mathcal{F}(z, u, \nabla u) \geq 0 \quad \text{en } \mathcal{O}$$

verificando

$$u \leq v \quad \text{en } \mathcal{O}$$

para toda función  $v \in \mathcal{LIA}(\mathcal{O})$  solución de viscosidad de

$$\mathcal{F}(z, v, \nabla v) \geq 0 \quad \text{en } \mathcal{O}.$$

Entonces  $u$  es solución de viscosidad de

$$\mathcal{F}(z, u, \nabla u) = 0 \quad \text{en } \mathcal{O}.$$

**Demostración.**

Consideramos dos etapas:

1. Sea  $p_0 \in D^+u^*(z_0)$ . Entonces existe  $\phi \in \mathcal{C}_c^1(\mathcal{O})$  tal que

$$\phi(z_0) = u^*(z_0), \quad \nabla \phi(z_0) = p_0$$

y  $u^* - \phi$  alcanza un máximo local en  $z_0$ . En efecto, consideremos la función diferenciable

$$\eta(z) = [u^*(z) - u^*(z_0) - p_0 \cdot (z - z_0)]_+, \quad z \in \mathcal{O} \quad (r_+ \doteq \max\{r, 0\})$$

que satisface

$$\eta(z) \geq 0, \quad \eta(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad \nabla \eta(z_0) = 0$$

puesto que

$$0 \leq \eta(z) - \eta(z_0) = [u^*(z) - u^*(z_0) - p_0 \cdot (z - z_0)]_+ \leq [o(|z - z_0|)]_+.$$

Por tanto, existe una función continua  $\varrho$  verificando

$$0 \leq \varrho \leq 1, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \varrho(z) = 0 \quad \text{y} \quad \eta(z) = |z - z_0| \varrho(z - z_0), \quad z \in \mathbf{B}_\delta(z_0)$$

para algún  $0 < \delta \ll 1$ . Definimos entonces

$$\phi(z) = u^*(z_0) + p_0 \cdot (z - z_0) + \int_{|z-z_0|}^{2|z-z_0|} \tilde{\varrho}(s) ds + |z - z_0|^2 \quad (4.47)$$

siendo

$$\tilde{\varrho}(s) \doteq \sup\{\varrho(z) : |z| \leq s\}.$$

Como

$$|z - z_0| \tilde{\varrho}(|z - z_0|) \leq \int_{|z-z_0|}^{2|z-z_0|} \tilde{\varrho}(s) ds \leq |z - z_0| \tilde{\varrho}(2|z - z_0|)$$

claramente se tiene

$$\phi(z_0) = u^*(z_0), \quad \nabla \phi(z_0) = p_0$$

y, para  $z \neq z_0$ :

$$\nabla \phi(z) = p_0 + 2(z - z_0) + [2\tilde{\varrho}(2|z - z_0|) - \tilde{\varrho}(|z - z_0|)] \frac{z - z_0}{|z - z_0|}. \quad (4.48)$$

Además, para cada  $z \in \mathbf{B}_\delta(z_0)$  se verifica

$$\begin{aligned} u^*(z) - \phi(z) &\leq u^*(z) - u^*(z_0) - p_0 \cdot (z - z_0) - |z - z_0| \tilde{\varrho}(|z - z_0|) \\ &\leq u^*(z) - u^*(z_0) - p_0 \cdot (z - z_0) - |z - z_0| \varrho(z - z_0) \\ &= u^*(z) - u^*(z_0) - p_0 \cdot (z - z_0) - \eta(z) \leq 0 = u^*(z_0) - \phi(z_0). \end{aligned}$$

Una adecuada prolongación de  $\phi$  fuera de  $\mathbf{B}_{\frac{\delta}{2}}(z_0)$  permite obtener  $\phi$  de soporte compacto en todo  $\mathcal{O}$ .

2. Sólo necesitamos probar

$$\mathcal{F}(z, u, \nabla u) \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{O}$$

cuando  $u$  es la supersolución minimal. Para ello, supongamos que para algún  $z_0 \in \mathcal{O}$  y  $p_0 \in D^+ u^*(z_0)$  se tuviera la desigualdad

$$c \doteq \mathcal{F}(z_0, u^*(z_0), p_0) > 0$$

y derivemos una contradicción. Para ello, formamos la función

$$w(z) = u^*(z_0) + |z - z_0|^2 - \varepsilon + \phi(z) - \phi(z_0) = |z - z_0|^2 - \varepsilon + \phi(z)$$

definida a partir de la función  $\phi$  dada en (4.47). Como

$$w(z_0) < \phi(z_0) = u^*(z_0) \quad (4.49)$$

y  $u^* - \phi$  alcanza un máximo local en  $z_0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$(u^* - \phi)(z) < (u^* - \phi)(z_0) = 0, \quad z \in \mathbf{B}_{2\delta}(z_0) \setminus \{z_0\},$$

con lo que

$$w(z) > u^*(z) + |z - z_0|^2 - \varepsilon, \quad z \in \mathbf{B}_{2\delta}(z_0) \setminus \{z_0\}$$

y

$$w(z) > u^*(z) + \delta^2 - \varepsilon > u^*(z), \quad z \in \partial\mathbf{B}_\delta(z_0) \quad (4.50)$$

tomando  $\delta^2 > \varepsilon$ . Formemos la desigualdad

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(z, w(z), \nabla w(z)) &= \mathcal{F}(z_0, u^*(z_0), p_0) + \mathcal{F}(z, w(z), \nabla\phi(z) + 2(z - z_0)) \\ &\quad - \mathcal{F}(z_0, u^*(z_0), p_0) \geq c - \rho_{\mathcal{F}, \mathbf{K}}(|w(z) - u^*(z_0)| + 3|z - z_0| + |\nabla\phi(z) - p_0|) \end{aligned}$$

siendo  $\rho_{\mathcal{F}, \mathbf{K}}$  un módulo de continuidad de  $\mathcal{F}$  sobre un compacto  $\mathbf{K}$  centrado en  $(z_0, u^*(z_0), p_0) \in \mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M$ . Recuérdese que la propiedad

$$\lim_{s \rightarrow 0} \rho_{\mathcal{F}, \mathbf{K}}(s) = 0$$

determina la existencia de  $s_0(c) \in ]0, 1[$  tal que

$$\rho_{\mathcal{F}, \mathbf{K}}(s) \leq c, \quad 0 < s < s_0(c).$$

De esta forma, como a partir de (4.47)

$$\phi(z) \leq u^*(z_0) + |p_0||z - z_0| + |z - z_0| + |z - z_0|^2$$

la relación

$$|w(z) - u^*(z_0)| \leq (1 + |p_0|)|z - z_0| + \varepsilon + 2|z - z_0|^2$$

y el hecho

$$\begin{aligned} |\nabla\phi(z) - p_0| &\leq 2|z - z_0| + |2\tilde{\varrho}(2|z - z_0|) - \tilde{\varrho}(|z - z_0|)| \\ &\leq 2|z - z_0| + 2\tilde{\varrho}(2|z - z_0|), \quad z \neq z_0 \end{aligned}$$

(ver (4.48)) muestran

$$\mathcal{F}(z, w(z), \nabla w(z)) \geq 0, \quad z \in \mathbf{B}_\delta(z_0) \quad (4.51)$$

tomando  $\varepsilon > 0$  tan pequeño de forma que la constante  $\delta > \sqrt{\varepsilon}$  satisfaga

$$(6 + |p_0|)\delta + 3\delta^2 + 2\tilde{\varrho}(2\delta) < s_0(c).$$

Finalmente, podemos definir

$$v(z) = \begin{cases} \min \{u_*(z), w(z)\}, & z \in \mathbf{B}_\delta(z_0) \\ u_*(z), & z \in \mathcal{O} \setminus \mathbf{B}_\delta(z_0) \end{cases}$$

que será, gracias a (4.50) y (4.51) una supersolución (véase el Teorema A.29 del Apéndice A). El carácter minimal de  $u$  y (4.49) concluyen la contradicción

$$u_*(z_0) \leq u(z_0) \leq v(z_0) = w(z_0) < u_*(z_0). \quad \square$$

#### Observación 4.58

1. El anterior es un resultado interior en  $\mathcal{O}$  en el sentido que no se requiere ninguna condición sobre  $\partial\mathcal{O}$ .
2. La existencia de la supersolución minimal es, en general, una cuestión muy delicada. Cuando se tienen resultados de comparación (que normalmente implican la prescripción de valores de contorno), la hipótesis de que el conjunto de supersoluciones sea no vacío puede ser suficiente para mostrar la existencia de soluciones. Estas ideas son las líneas maestras que se utilizan al aplicar el *método de Perron*.
3. De forma análoga se muestra que si  $u \in \mathcal{LSA}(\mathcal{O})$  es una solución de viscosidad de

$$\mathcal{F}(z, u, \nabla u) \leq 0 \text{ en } \mathcal{O}$$

verificando

$$v \leq u \text{ en } \mathcal{O}$$

para toda función  $v \in \mathcal{LSA}(\mathcal{O})$  solución de viscosidad de

$$\mathcal{F}(z, v, \nabla v) \leq 0 \text{ en } \mathcal{O},$$

entonces  $u$  es solución de viscosidad de

$$\mathcal{F}(z, u, \nabla u) = 0 \text{ en } \mathcal{O}. \quad \square$$



Habitualmente trabajaremos con problemas de contorno de la forma

$$\begin{cases} \mathcal{F}(z, u, \nabla u) = 0 & \text{en } \mathcal{O} \\ u = \varphi & \text{en } \partial\mathcal{O} \end{cases} \quad (\text{P})$$

para funciones  $\varphi : \partial\mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ . Debemos, por tanto, determinar el sentido de la prescripción de los datos en la frontera del dominio  $\mathcal{O}$ .

**Definición 4.59**

Sea  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^M$ ,  $M \geq 1$  y  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(\mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M)$ .

1.  $u \in \mathcal{LSA}(\mathcal{O})$  es *subsolución fuerte de viscosidad* del problema (P) si  $u$  es solución de viscosidad de

$$\mathcal{F}(z, u, \nabla u) \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{O}$$

y

$$u^*(z) = \limsup_{y \rightarrow z} u^*(y) \leq \varphi^*(z), \quad z \in \partial\mathcal{O}.$$

2.  $u \in \mathcal{LSA}(\mathcal{O})$  es *supersolución fuerte de viscosidad* del problema (P) si  $u$  es solución de viscosidad de

$$\mathcal{F}(z, u, \nabla u) \geq 0 \quad \text{en } \mathcal{O}$$

y

$$u_*(z) = \liminf_{y \rightarrow z} u_*(y) \geq \varphi_*(z), \quad z \in \partial\mathcal{O}.$$

3.  $u \in \mathcal{LA}(\mathcal{O})$  es *solución fuerte de viscosidad* del problema (P) si  $u$  es sub y supersolución fuerte de viscosidad de (P).

4.  $u \in \mathcal{LSA}(\overline{\mathcal{O}})$  es *subsolución débil de viscosidad* del problema (P) si  $u$  es solución de viscosidad de

$$\mathcal{F}(z, u, \nabla u) \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{O}$$

y

$$\min \{ \mathcal{F}(z, u^*(z), p), (u^* - \varphi^*)(z) \} \leq 0, \quad p \in D^+ u^*(z), \quad z \in \partial\mathcal{O}.$$

5.  $u \in \mathcal{LIA}(\overline{\mathcal{O}})$  es *supersolución débil de viscosidad* del problema (P) si  $u$  es solución de viscosidad de

$$\mathcal{F}(z, u, \nabla u) \geq 0 \text{ en } \mathcal{O}$$

y

$$\max \{ \mathcal{F}(z, u_*(z), p), (u_* - \varphi_*)(z) \} \geq 0, p \in D^- u_*(z), z \in \partial \mathcal{O}.$$

6.  $u \in \mathcal{LA}(\overline{\mathcal{O}})$  es *solución débil de viscosidad* del problema (P) si  $u$  es sub y supersolución débil de viscosidad de (P).

#### Observación 4.60

1. Nótese que hemos utilizado las siguientes propiedades de las funciones semicontinuas

$$u^{**}(z) = \limsup_{y \rightarrow z} u^*(y) = u^*(z)$$

y

$$u_{**}(z) = \liminf_{y \rightarrow z} u_*(y) = u_*(z).$$

2. La justificación de la noción de soluciones débiles proviene del siguiente hecho: supongamos que para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathcal{O}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathcal{O}})$  solución clásica del problema

$$\begin{cases} -\varepsilon \Delta u_\varepsilon + \mathcal{F}(z, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) = 0 & \text{en } \mathcal{O} \\ u_\varepsilon = \varphi & \text{en } \partial \mathcal{O} \end{cases}$$

tal que  $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$  está uniformemente acotada en  $\overline{\mathcal{O}}$ . Entonces se prueba (véase [Ba-Pe3]) que las funciones semicontinuas

$$\underline{u}(z) \doteq \liminf_{y \rightarrow z, \varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(y)$$

y

$$\overline{u}(z) \doteq \limsup_{y \rightarrow z, \varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(y)$$

son, respectivamente, sub y supersoluciones débiles de (P).

3. Toda solución fuerte de un problema de contorno que esté definida en  $\overline{\mathcal{O}}$  es, obviamente, solución débil de dicho problema, por lo que se tiene la *consistencia* de las nociones de solución anteriores. Además, existen soluciones débiles que no son fuertes. En efecto, si  $\varphi \in L^\infty(\partial\mathcal{O})$  y  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(\mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M)$  tiene la propiedad

$$\mathcal{F}(z, r, 0) = 0, \quad (z, r) \in \mathcal{O} \times \mathbb{R}$$

entonces la función

$$u(z) \doteq \|\varphi\|_{L^\infty(\partial\mathcal{O})} + 1, \quad z \in \overline{\mathcal{O}}$$

es una solución débil de (P) que no es solución fuerte.

4. Si  $u \in \mathcal{LA}(\overline{\mathcal{O}})$  es solución fuerte de viscosidad del problema

$$\begin{cases} \mathcal{F}(z, u, \nabla u) = 0 & \text{en } \mathcal{O} \\ u = \varphi & \text{en } \partial\mathcal{O} \end{cases}$$

y  $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\mathcal{O})$  entonces, de la cadena de desigualdades

$$\varphi_*(z) \leq u_*(z) \leq u(z) \leq u^*(z) \leq \varphi^*(z) \leq \varphi_*(z), \quad z \in \partial\mathcal{O}$$

se deduce que  $u \in \mathcal{C}(\partial\mathcal{O})$  y  $u(z) = \varphi(z)$ ,  $z \in \partial\mathcal{O}$ .  $\square$

Podemos ahora abordar la existencia de soluciones del problema de contorno (P) utilizando, como antes, el *método de Perron*. Este ‘método’ fue inicialmente ideado por este autor (véase [Perr]) para construir funciones armónicas a partir de las funciones subarmónicas mediante ‘levantamientos armónicos’ (véase [Gil-Tr]). Posteriormente, esta idea fue extendida para construir soluciones de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden, esencialmente, elípticas. Finalmente, la línea argumental general fue llevada al ámbito de las soluciones de viscosidad tanto de primer orden (ver [Is5]) como de segundo (véase [Cr-Is-Li2]).

Presentamos a continuación un desarrollo particularizado de este método para las ecuaciones en las que estamos interesados. Sigue las líneas generales aunque desarrolladas aquí con una mayor profundidad.

Comenzamos con el caso de las soluciones débiles.

**Teorema 4.61 (Existencia de soluciones débiles)***Supongamos*

$$\mathcal{L}_d \doteq \{w \in \mathcal{LSA}(\overline{\mathcal{O}}) : w \text{ es subsolución débil de (P)}\} \neq \emptyset.$$

*Entonces, si la función*

$$U_P(z) = \sup \{w(z) : w \in \mathcal{L}_d\}, \quad z \in \overline{\mathcal{O}} \quad (4.52)$$

*toma valores finitos en  $\overline{\mathcal{O}}$ , se verifica que  $U_P$  es solución débil de viscosidad del problema (P).***Demostración.**Ante todo veamos que la función  $U_P$  dada en (4.52) puede ser escrita como

$$U_P(z) = \sup \{w^*(z) : w \in \mathcal{L}_d\}, \quad z \in \overline{\mathcal{O}}. \quad (4.53)$$

En efecto, por una parte se verifica

$$w \leq w^* \Rightarrow U_P(z) \leq \sup \{w^*(z) : w \in \mathcal{L}_d\}$$

y, por otra, si  $w \in \mathcal{L}_d$  entonces  $w^* \in \mathcal{L}_d$ . Consecuentemente,

$$\{w^*(z) : w \in \mathcal{L}_d\} \subset \{w(z) : w \in \mathcal{L}_d\}$$

por lo que, tomando supremos, obtenemos

$$\sup \{w^*(z) : w \in \mathcal{L}_d\} \leq U_P(z).$$

A continuación consideremos las envueltas semicontinuas superior de  $U_P$ 

$$(U_P)^*(z) \doteq \limsup_{r \rightarrow 0} \{U_P(y) : |z - y| \leq r\}, \quad z \in \overline{\mathcal{O}}$$

e inferior de  $U_P$ 

$$(U_P)_*(z) \doteq \liminf_{r \rightarrow 0} \{U_P(y) : |z - y| \leq r\}, \quad z \in \overline{\mathcal{O}},$$

respectivamente, que obviamente verifican

$$(U_P)_*(z) \leq U_P(z) \leq (U_P)^*(z), \quad z \in \overline{\mathcal{O}}.$$

Mostremos, en primer lugar, que la función  $U_P$  dada en (4.52) es el elemento maximal de  $\mathcal{L}_d$ . En efecto, sea  $z \in \mathcal{O}$  y  $p \in D^+(U_P)^*(z)$ . Por la definición de  $U_P$ , existe una sucesión  $\{(z_n, w_n)\} \subset \mathcal{O} \times \mathcal{L}_d$  tal que

$$\{(z_n, w_n(z_n))\} \rightarrow (z, (U_P)^*(z)) \quad (4.54)$$

en donde, gracias a (4.53), podemos suponer  $w_n \in \mathcal{SCS}(\mathcal{O})$ . Además la definición de  $(U_P)^*$  muestra la propiedad general

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow +\infty} w_n(y_n) \leq (U_P)^*(y). \quad (4.55)$$

Así, para todo  $\nu > 0$  existe  $\mu > 0$  suficientemente pequeño tal que

$$(U_P)^*(y) \leq (U_P)^*(z) + p \cdot (y - z) + \nu|y - z|, \quad y \in \overline{\mathbf{B}}_\mu(z).$$

Además, podemos suponer que, de hecho,  $\{z_n\}_n \subset \mathbf{B}_\mu(z)$ . Consideremos a continuación la función

$$\Psi(y) = w_n(y) - p \cdot (y - z) - 2\nu|y - z|, \quad y \in \overline{\mathbf{B}}_\mu(z)$$

y sea  $\xi_n \in \overline{\mathbf{B}}_\mu(z)$  tal que

$$\Psi(y) \leq \Psi(\xi_n), \quad y \in \overline{\mathbf{B}}_\mu(z)$$

es decir,

$$w_n(y) \leq w_n(\xi_n) + p \cdot (y - \xi_n) + 2\nu(|y - z| - |\xi_n - z|) \quad (4.56)$$

y, en particular, como hemos supuesto que  $z_n \in \mathbf{B}_\mu(z)$ , se tendrá

$$w_n(z_n) \leq w_n(\xi_n) + p \cdot (z_n - \xi_n) + 2\nu(|z_n - z| - |\xi_n - z|). \quad (4.57)$$

Por otra parte, un argumento de compacidad determina la existencia de  $\xi \in \overline{\mathbf{B}}_\mu(z)$  y de una subsucesión de  $\{\xi_n\}_n$  a la que seguimos denotando por  $\{\xi_n\}_n$ , tales que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = \xi.$$

Tomando límites en (4.57) obtenemos

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} w_n(z_n) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} w_n(\xi_n) + p \cdot (z - \xi) - 2\nu|z - \xi|.$$

Así, las relaciones (4.54) y (4.55) hacen que, para  $n \gg 1$ , se verifique

$$(U_P)^*(z) \leq (U_P)^*(\xi) + p \cdot (z - \xi) - 2\nu|\xi - z| \leq (U_P)^*(z) - \nu|\xi - z|.$$

Consecuentemente,  $\xi = z$  y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n(\xi_n) = (U_P)^*(z)$ . Como la relación (4.56) determina

$$p + 2\nu e \in D^+ w_n(\xi_n)$$

para cualquier vector  $e \in \mathbb{R}^M$  con  $|e| = 1$ , entonces

$$\mathcal{F}(\xi_n, w_n(\xi_n), p + 2\nu e) \leq 0$$

lo que conduce, haciendo tender  $\nu \rightarrow 0$  y  $n \rightarrow +\infty$  a

$$\mathcal{F}(z, (U_P)^*(z), p) \leq 0.$$

Nos falta demostrar la ‘realización’, en sentido débil, del dato de contorno

$$\min \{ \mathcal{F}(z, (U_P)^*(z), p), ((U_P)^* - \varphi^*)(z) \} \leq 0, \quad p \in D^+(U_P)^*(z) \quad (4.58)$$

para  $z \in \partial\mathcal{O}$ . Supongamos que para algún  $z \in \partial\mathcal{O}$  se tuviera

$$(U_P)^*(z) > \varphi^*(z).$$

Entonces, existiría una sucesión  $\{(z_n, w_n)\} \subset \overline{\mathcal{O}} \times \mathcal{L}_d$  tal que

$$\{(z_n, w_n(z_n))\}_n \rightarrow (z, (U_P)^*(z))$$

donde  $w_n \in \mathcal{SCS}(\overline{\mathcal{O}})$  verifica

$$w_n(z_n) > \varphi^*(z) \quad \text{para } n \gg 1. \quad (4.59)$$

Para cada  $p \in D^+(U_P)^*(z)$  podemos repetir la argumentación anterior y concluir la existencia de una sucesión  $\{\xi_n\}_n \subset \mathbf{B}_\mu(z) \cap \overline{\mathcal{O}}$  verificando

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n &= z, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n(\xi_n) &= (U_P)^*(z), \\ w_n(\xi_n) &> \varphi^*(z) \quad \text{para } n \gg 1 \end{aligned} \quad (4.60)$$

(véase (4.57) y (4.59)) y

$$p + 2\nu\mathbf{e} \in D^+w_n(\xi_n)$$

para cualquier vector  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^M$  con  $|\mathbf{e}| = 1$ . De esta forma,

$$\mathcal{F}(\xi_n, w_n(\xi_n), p + 2\nu\mathbf{e}) \leq 0.^{10}$$

Haciendo tender, como antes,  $\nu \rightarrow 0$  y  $n \rightarrow +\infty$ , se concluye

$$\mathcal{F}(z, (U_P)^*(z), p) \leq 0,$$

lo que implica (4.58). De esta forma hemos probado que  $(U_P)^* \in \mathcal{L}_d$ , de donde la maximalidad de  $U_P$  conduce a

$$U_P \leq (U_P)^* \leq U_P \Rightarrow U_P = (U_P)^* \quad (4.61)$$

y, con ello, a que  $U_P \in \mathcal{L}_d$ . Por tanto,  $U_P$  es subsolución débil de viscosidad del problema (P).

Para ver que, de hecho,  $U_P$  es solución débil de (P), basta con mostrar que  $(U_P)_*$  es solución de la ecuación hasta la frontera, es decir,

$$\mathcal{F}(z, (U_P)_*, \nabla(U_P)_*) \geq 0 \text{ en } \overline{\mathcal{O}}. \quad (4.62)$$

Si no se verificara (4.62), existirían  $z_0 \in \overline{\mathcal{O}}$  y  $p_0 \in D^-(U_P)_*(z_0)$  tales que

$$\mathcal{F}(z_0, (U_P)_*(z_0), p_0) < 0. \quad (4.63)$$

Adaptando algunas ideas de [Cr-Is-Li2] y [Di2], consideremos la función regular

$$v(z) = (U_P)_*(z_0) + p_0 \cdot (z - z_0) - \gamma|z - z_0|^2 + \delta \quad (4.64)$$

donde  $\delta, \gamma > 0$ . Claramente  $v$  es diferenciable con

$$\nabla v(z) = p_0 - 2\gamma(z - z_0)$$

y

$$v(z_0) = (U_P)_*(z_0) + \delta. \quad (4.65)$$

---

<sup>10</sup>Nótese que el caso  $\xi_n \in \partial\mathcal{O}$  está contemplado en (4.60) por ser  $w_n$  una subsolución débil de (P).

Por tanto, para  $\delta, \gamma, \varrho > 0$  suficientemente pequeños, a partir de (4.63) se verifica

$$\mathcal{F}(z, v(z), \nabla v(z)) \leq 0, \quad z \in \mathbf{B}_\varrho(z_0) \cap \overline{\mathcal{O}}. \quad (4.66)$$

Además, como  $p_0 \in D^-(U_P)_*(z_0)$ , podemos obtener

$$U_P(z) \geq (U_P)_*(z) \geq v(z) + \gamma|z - z_0|^2 + o(|z - z_0|) - \delta$$

(véase (4.64)). De esta forma, si  $\frac{\varrho}{2} \leq |z - z_0| \leq \varrho$  se verifica

$$U_P(z) \geq v(z) + \frac{\gamma\varrho^2}{4} - \frac{\gamma\varrho^2}{8} - \delta = v(z) + \frac{\gamma\varrho^2}{16} > v(z)$$

para  $\delta = \frac{\gamma\varrho^2}{16}$ . Así, como la función  $v$  es continua,

$$w(z) = \begin{cases} \max \{U_P(z), v(z)\} & \text{si } z \in \mathbf{B}_\varrho(z_0) \cap \overline{\mathcal{O}} \\ U_P(z) & \text{si } z \notin \mathbf{B}_\varrho(z_0) \cap \overline{\mathcal{O}} \end{cases}$$

es semicontinua superiormente. Por tanto, por las propiedades de las superdiferenciales, se tiene

$$w^*(z) = w(z), \quad z \in \overline{\mathcal{O}},$$

$$w(z) = U_P(z), \quad z \in \partial\mathbf{B}_\varrho(z_0) \cap \overline{\mathcal{O}},$$

$$D^+w(z) = D^+U_P(z), \quad z \in \overline{\mathcal{O}} \setminus \overline{\mathbf{B}}_\varrho(z_0)$$

y

$$D^+w(z) \subset D^+U_P(z) \cup D^+v(z), \quad z \in \overline{\mathbf{B}}_\varrho(z_0) \cap \overline{\mathcal{O}}$$

por lo que  $w$  verifica en el sentido de la viscosidad la ecuación

$$\mathcal{F}(z, w, \nabla w) \leq 0 \quad \text{en } \overline{\mathcal{O}}.^{11}$$

<sup>11</sup>Recuérdese (4.66) así como que  $U_P = (U_P)^* \in \mathcal{L}_d$  por lo que se verifica

$$\mathcal{F}(z, U_P, \nabla U_P) \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{O}.$$



De esta forma, por ser  $U_P$  maximal en el conjunto  $\mathcal{L}_d$ , se tiene

$$w(z) = U_P(z), \quad z \in \overline{\mathcal{O}}.$$

Por otra parte, podemos construir una sucesión  $\{z_n\}_n$  tal que

$$\{(z_n, U_P(z_n))\}_n \rightarrow (z_0, (U_P)_*(z_0)).$$

Por tanto, para  $n$  suficientemente grande, se verifica

$$0 \leq U_P(z_n) - (U_P)_*(z_0) \leq \frac{\delta}{4}, \quad z_n \in \mathbf{B}_\rho(z_0) \cap \overline{\mathcal{O}}$$

y

$$|v(z_n) - v(z_0)| \leq \frac{\delta}{4}, \quad z_n \in \mathbf{B}_\rho(z_0) \cap \overline{\mathcal{O}}.$$

De esta forma, teniendo en cuenta (4.65), se deriva la contradicción

$$\begin{aligned} 0 = (w - U_P)(z_n) &\geq v(z_n) - U_P(z_n) \geq \left[ v(z_0) - \frac{\delta}{4} \right] - \left[ (U_P)_*(z_0) + \frac{\delta}{4} \right] \\ &= v(z_0) - (U_P)_*(z_0) - \frac{\delta}{2} = \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} > 0. \quad \square \end{aligned}$$

#### Observación 4.62

Razonando de forma análoga se muestra que si

$$\mathcal{L}^d \doteq \left\{ w \in \mathcal{L}\mathcal{I}\mathcal{A}(\overline{\mathcal{O}}) : w \text{ es supersolución débil de (P)} \right\} \neq \emptyset$$

de manera que la función

$$u_P(z) = \inf \{ w(z) : w \in \mathcal{L}^d \}, \quad z \in \overline{\mathcal{O}}$$

toma valores finitos en  $\overline{\mathcal{O}}$ , se verifica que  $u_P$  es solución débil de viscosidad del problema (P).  $\square$

A continuación damos un resultado de existencia para soluciones fuertes.

**Teorema 4.63 (Existencia de soluciones fuertes)**

Sea  $\varphi \in \mathcal{LSA}(\partial\mathcal{O})$  y supongamos

$$\mathcal{L}_f \doteq \{w \in \mathcal{LSA}(\mathcal{O}) : w \text{ es subsolución fuerte de (P)}\}$$

$$\text{tal que } w^*(z) = \varphi^*(z), z \in \partial\mathcal{O} \neq \emptyset.$$

Entonces, si la función

$$\mathbf{U}_P(z) = \sup \{w(z) : w \in \mathcal{L}_f\}, z \in \mathcal{O} \quad (4.67)$$

toma valores finitos en  $\mathcal{O}$ , se verifica que  $\mathbf{U}_P$  es solución fuerte de viscosidad del problema (P). Además,

$$\mathbf{U}_P(z) = \varphi^*(z), z \in \partial\mathcal{O}.$$

**Demostración.**

Argumentando como en el Teorema 4.61 se obtiene que  $\mathbf{U}_P = (\mathbf{U}_P)^* \in \mathcal{L}_f$  es solución de viscosidad de

$$\mathcal{F}(z, u, \nabla u) = 0 \text{ en } \mathcal{O}$$

y, además, verifica

$$\mathbf{U}_P(z) = (\mathbf{U}_P)^*(z) = \varphi^*(z) \geq \varphi_*(z), z \in \partial\mathcal{O},$$

de donde

$$(\mathbf{U}_P)_*(z) \geq \varphi_*(z), z \in \partial\mathcal{O}.$$

Luego  $\mathbf{U}_P$  es una solución fuerte de (P).  $\square$

**Observación 4.64**

Análogamente, si para  $\varphi \in \mathcal{LIA}(\partial\mathcal{O})$  se verifica

$$\mathcal{L}^f \doteq \{w \in \mathcal{LIA}(\mathcal{O}) : w \text{ es supersolución fuerte de (P)}\}$$

$$\text{tal que } w_*(z) = \varphi_*(z), z \in \partial\mathcal{O} \neq \emptyset$$

de forma que la función

$$\mathbf{u}_P(z) = \inf \{w(z) : w \in \mathcal{L}^f\}, z \in \mathcal{O} \quad (4.68)$$

toma valores finitos en  $\mathcal{O}$ , entonces  $\mathbf{u}_P$  es solución fuerte de viscosidad del problema (P). Además,

$$\mathbf{u}_P(z) = \varphi_*(z), \quad z \in \partial\mathcal{O}.$$

Nótese que siempre se verifica

$$-\infty \leq \mathbf{u}_P(z) \quad \text{y} \quad \mathbf{U}_P(z) \leq +\infty, \quad z \in \mathcal{O}.$$

Además:

1. si  $(\varphi^*)_*(z) = \varphi_*(z)$ ,  $z \in \partial\mathcal{O}$ , entonces

$$(\mathbf{U}_P)_*(z) = (\varphi^*)_*(z) = \varphi_*(z), \quad z \in \partial\mathcal{O} \Rightarrow (\mathbf{U}_P)_* \in \mathcal{L}^f$$

que, por definición, conduce a

$$\mathbf{u}_P(z) \leq (\mathbf{U}_P)_*(z) \leq \mathbf{U}_P(z), \quad z \in \mathcal{O}.$$

2. si  $(\varphi_*)^*(z) = \varphi^*(z)$ ,  $z \in \partial\mathcal{O}$ , entonces

$$(\mathbf{u}_P)^*(z) = (\varphi_*)^*(z) = \varphi^*(z), \quad z \in \partial\mathcal{O} \Rightarrow (\mathbf{u}_P)^* \in \mathcal{L}_f$$

que lleva a

$$\mathbf{u}_P(z) \leq (\mathbf{u}_P)^*(z) \leq \mathbf{U}_P(z), \quad z \in \mathcal{O}.$$

En general, no se puede asegurar que  $\mathbf{u}_P \equiv \mathbf{U}_P$ .  $\square$

#### Observación 4.65

En las condiciones del resultado anterior se tiene una especie de *Teorema de Verificación*: si la función  $\mathbf{U}_P$  dada en (4.67) es localmente superiormente acotada entonces

$$w(z) \leq \mathbf{U}_P(z), \quad z \in \mathcal{O}$$

para cualquier subsolución fuerte  $w$  de (P) en la clase  $\mathcal{L}_f$ .  $\square$

La unicidad de las soluciones fuertes es una cuestión muy delicada, como muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4.66**

Sea  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^M$ ,  $M \geq 1$ , y consideremos el problema de contorno

$$(P) \begin{cases} \mathcal{F}(z, u, \nabla u) = 0 & \text{en } \mathcal{O} \\ u = \varphi & \text{en } \partial\mathcal{O} \end{cases}$$

donde  $\mathcal{F} : \mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$  verifica

$$\mathcal{F}(z, 0, 0) = 0, \quad z \in \mathcal{O}$$

y la función  $\varphi : \partial\mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  viene dada por

$$\varphi(z) = \begin{cases} 0, & z \neq z_0 \\ 1, & z = z_0 \end{cases}$$

con  $z_0 \in \partial\mathcal{O}$ . Si para cada  $k \in [0, 1]$  consideramos

$$u_k(z) = \begin{cases} 0, & z \neq z_0 \\ k, & z = z_0, \end{cases}$$

es claro que la familia de funciones  $\{u_k\}_{0 \leq k \leq 1}$  son soluciones fuertes de viscosidad de (P), pues

$$\begin{cases} \mathcal{F}(z, u^*, \nabla u^*) = \mathcal{F}(z, 0, 0) = 0, & z \in \mathcal{O} \\ (u_k)^*(z) = u_k(z) \leq \varphi(z) = \varphi^*(z), & z \in \partial\mathcal{O} \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \mathcal{F}(z, u_*, \nabla u_*) = \mathcal{F}(z, 0, 0) = 0, & z \in \mathcal{O} \\ (u_k)_*(z) \equiv 0 \equiv \varphi_*(z), & z \in \partial\mathcal{O}. \end{cases}$$

Nótese que, además,

$$(u_k)^*(z) = u_1(z), \quad z \in \mathcal{O}, \quad 0 \leq k \leq 1. \quad \square$$

Con vistas a tener resultados de unicidad admitamos, como es habitual, un Principio de Comparación: si  $v \in \mathcal{LSA}(\mathcal{O})$  y  $w \in \mathcal{LTA}(\mathcal{O})$  son, respectivamente, sub y supersolución de la ecuación

$$\mathcal{F}(z, u, \nabla u) = 0 \text{ en } \mathcal{O}$$

tales que

$$v^*(z) \leq w_*(z), \quad z \in \partial\mathcal{O}$$

entonces

$$v(z) \leq v^*(z) \leq w_*(z) \leq w(z), \quad z \in \mathcal{O}.$$

De esta forma, se verifica:

**Teorema 4.67 (Unicidad)**

Si  $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\mathcal{O})$  y se verifica un Principio de Comparación entonces el problema (P) admite, a lo sumo, una única solución fuerte que, además, es continua en  $\overline{\mathcal{O}}$ .

**Demostración.**

Sean  $v_1$  y  $v_2$  soluciones fuertes de (P) con  $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\mathcal{O})$ . Como

$$\varphi^*(z) \leq \varphi_*(z), \quad z \in \partial\mathcal{O}$$

el Principio de Comparación conduce a

$$(v_1)^*(z) \leq (v_2)_*(z), \quad z \in \overline{\mathcal{O}}$$

y

$$(v_2)^*(z) \leq (v_1)_*(z), \quad z \in \overline{\mathcal{O}}$$

de donde podemos completar la cadena

$$(v_1)^*(z) \leq (v_2)_*(z) \leq (v_2)^*(z) \leq (v_1)_*(z) \leq (v_1)^*(z), \quad z \in \overline{\mathcal{O}}$$

que conduce a la continuidad y unicidad de solución.  $\square$

**Observación 4.68**

1. En el ambiente del Principio de Comparación en el que cabe esperar que toda subsolución fuerte sea menor o igual que toda supersolución fuerte, la continuidad de una solución fuerte  $u$  en el borde es necesaria. En efecto,

$$u^*(z) \leq u_*(z), \quad z \in \partial\mathcal{O} \Rightarrow u \in \mathcal{C}(\partial\mathcal{O}).$$

2. Como hemos visto en el Ejemplo 4.66, si  $\varphi \notin \mathcal{C}(\partial\mathcal{O})$  puede ocurrir que no haya unicidad. Como se ve, en ese caso no hay comparación, pues existen subsoluciones mayores que supersoluciones. Además, la función

$$w(z) \doteq \begin{cases} 0, & z \neq z_0 \\ 2, & z = z_0 \end{cases}$$

es una solución débil de (P) que no es solución fuerte.  $\square$

**Corolario 4.69**

Si  $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\mathcal{O})$ ,  $\mathcal{L}_t \neq \emptyset$ , se verifica un Principio de Comparación y la función  $\mathbf{U}_P$  dada en (4.67) toma valores finitos en  $\overline{\mathcal{O}}$ , entonces  $\mathbf{U}_P$  es la única solución fuerte de viscosidad de (P). Además,  $\mathbf{U}_P \in \mathcal{C}(\overline{\mathcal{O}})$  y

$$\mathbf{U}_P(z) = \varphi(z), \quad z \in \partial\mathcal{O}. \quad \square$$

De la misma forma, se tiene el resultado análogo al anterior.

**Corolario 4.70**

Si  $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\mathcal{O})$ ,  $\mathcal{L}^t \neq \emptyset$ , se verifica un Principio de Comparación y la función  $\mathbf{u}_P$  dada en (4.68) toma valores finitos en  $\overline{\mathcal{O}}$ , entonces  $\mathbf{u}_P$  es la única solución fuerte de viscosidad de (P). Además,  $\mathbf{u}_P \in \mathcal{C}(\overline{\mathcal{O}})$  y

$$\mathbf{u}_P(z) = \varphi(z), \quad z \in \partial\mathcal{O}. \quad \square$$

## 4.4 Teorema de Verificación.

Bajo este epígrafe entenderemos una serie de propiedades intrínsecas de las soluciones  $u \in \mathcal{LVA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$  de la inecuación

$$u_t \geq H(\nabla u) \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[ \quad (T \leq +\infty) \quad (4.69)$$

supuesto que  $H : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua cuando se emplean argumentos de convexidad. Para ello consideraremos la *transformada de Legendre* del hamiltoniano  $H$

$$H^*(\xi) = \sup_{p \in \mathbb{R}^N} \{p \cdot \xi - H(p)\}$$

y, a partir de ella, la *desigualdad de Young generalizada*

$$\xi \cdot p \leq H(p) + H^*(\xi), \quad p \in \mathbb{R}^N, \quad \xi \in D(H^*). \quad (4.70)$$

Comenzamos definiendo un comportamiento de las soluciones relacionado con la *traza inicial*.

**Teorema 4.71**

Si  $u \in \mathcal{LIA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$  es una solución de (4.69) entonces, para cada  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $\xi \in D(H^*)$ , se tiene la *monotonía intrínseca*

$$u_*(x - \xi t_2, t_2) + t_2 H^*(\xi) \geq u_*(x - \xi t_1, t_1) + t_1 H^*(\xi), \quad 0 < t_1 \leq t_2 < T. \quad (4.71)$$

En particular, existe

$$u_\xi^0(x; u_*) \doteq \lim_{t \rightarrow 0^+} u_*(x - \xi t, t) \geq -\infty.$$

**Demostración.**

Dado  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $\xi \in D(H^*)$  y  $\varepsilon > 0$  consideremos la función

$$\varphi(t) = u_*(x - \xi t, t) + (H^*(\xi) + \varepsilon)t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Claramente  $\varphi \in \mathcal{SCI}(]0, T[)$  y para cada  $t_0 \in ]0, T[$  se tiene

$$p_0 \in D^-\varphi(t_0) \Leftrightarrow p_0 - (H^*(\xi) + \varepsilon) = p_2 - \xi \cdot p_1 \quad \text{con} \quad (p_1, p_2) \in D^-u_*(x - \xi t_0, t_0).$$

Además, como por (4.69) y (4.70) se verifica

$$p_2 \geq H(p_1) \geq \xi \cdot p_1 - H^*(\xi),$$

entonces

$$p_0 = p_2 - \xi \cdot p_1 + (H^*(\xi) + \varepsilon) \geq \varepsilon$$

por lo que  $\varphi$  es solución de viscosidad de la ecuación

$$\varphi' \geq \varepsilon > 0 \quad \text{en} \quad ]0, T[.$$

Así, aplicando el Corolario 4.50, se obtiene

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) > 0, \quad t_0 \leq t < T$$

es decir,

$$u_*(x - \xi t, t) + (H^*(\xi) + \varepsilon)t \geq u_*(x - \xi t_0, t_0) + (H^*(\xi) + \varepsilon)t_0, \quad t_0 \leq t < T,$$

Consecuentemente, para cada  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $\xi \in D(H^*)$ , la sucesión

$$\{u_*(x - \xi, t) + (H^*(\xi) + \varepsilon)t : t \in ]0, T[ \}$$

es estrictamente creciente, lo que permite concluir el resultado.  $\square$

#### Observación 4.72

1. En particular, si  $H^*(0) = 0$ , entonces existe

$$u^0(x; u_*) \doteq \lim_{t \rightarrow 0^+} u_*(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

2. Por definición, para cada  $\xi \in D(H^*)$  se tiene

$$u_\xi^0(x; u_*) \geq u_*(x, 0^+) \doteq \liminf_{(y,t) \rightarrow (x,0^+)} u_*(y, t), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

sin que, en general, pueda asegurarse que la función parcial  $x \mapsto u_\xi^0(x; u_*)$  sea *s.c.i.* en  $\mathbb{R}^N$ . En algunas circunstancias, como se muestra en el Corolario 4.82 (véase también la Observación 5.19), se da la propiedad  $u^0(x; u_*) \in \mathcal{SCS}(\mathbb{R}^N)$ .  $\square$

#### Observación 4.73

Si  $u \in \mathcal{LA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$ ,  $T \leq +\infty$ , es solución de viscosidad de

$$u_t - H(\nabla u) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[$$

entonces, a partir de (4.71) se obtiene

$$(u_*)^*(x - \xi h, t + h) \geq (u_*)^*(x, t) + hH^*(\xi), \quad h > 0, \quad \xi \in D(H^*)$$

y, consecuentemente,

$$\mathbf{T}_\infty(x - \xi h) \leq \mathbf{T}_\infty(x) + h,$$

siendo

$$\mathbf{T}_\infty(x) \doteq \inf \left\{ \tau > 0 : \left\{ \begin{array}{l} (u_*)^*(x, t) < +\infty, \quad 0 < t < \tau \\ (u_*)^*(x, t) = +\infty, \quad t \geq \tau \end{array} \right\} \leq T. \right.$$



Por tanto,

$$|\mathbf{T}_\infty(x) - \mathbf{T}_\infty(y)| \leq \frac{|x - y|}{|\xi|}, \quad x, y \in \mathbb{R}^N, \quad \xi \in D(H^*).$$

En particular:

1. Si  $D(H^*) = \mathbb{R}^N$  se tiene la *propiedad uniforme*

$$\begin{cases} \mathbf{T}_\infty(\tilde{x}) < +\infty & \text{para algún } \tilde{x} \in \mathbb{R}^N \Rightarrow \mathbf{T}_\infty(x) \equiv \mathbf{T}_\infty(\tilde{x}), \quad x \in \mathbb{R}^N \\ \mathbf{T}_\infty(\tilde{x}) = +\infty & \text{para algún } \tilde{x} \in \mathbb{R}^N \Rightarrow \mathbf{T}_\infty(x) \equiv +\infty, \quad x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

2. Si  $D(H^*) = \overline{\mathbf{B}}_R(0)$  entonces

$$\mathbf{T}_\infty(\tilde{x}) < +\infty \text{ para algún } \tilde{x} \in \mathbb{R}^N \Rightarrow \mathbf{T}_\infty(x) < +\infty, \quad x \in \overline{\mathbf{B}}_{R(\Gamma - \mathbf{T}_\infty(\tilde{x}))}(\tilde{x})$$

y, además

$$|\mathbf{T}_\infty(x) - \mathbf{T}_\infty(y)| \leq \frac{|x - y|}{R}$$

en los puntos  $x, y \in \mathbb{R}^N$  tales que  $\mathbf{T}_\infty(x), \mathbf{T}_\infty(y) < +\infty$ . Más precisamente,

$$\begin{cases} \mathbf{T}_\infty(\tilde{x}) < +\infty & \text{para algún } \tilde{x} \in \mathbb{R}^N \Rightarrow \mathbf{T}_\infty(x) < +\infty, \quad x \in \mathbb{R}^N \\ \mathbf{T}_\infty(\tilde{x}) = +\infty & \text{para algún } \tilde{x} \in \mathbb{R}^N \Rightarrow \mathbf{T}_\infty(x) \equiv +\infty, \quad x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Más adelante mostraremos que  $\mathbf{T}_\infty(\cdot) \equiv +\infty$  cuando

$$H(p) = R|p|, \quad p \in \mathbb{R}^N \quad (R > 0).$$

No obstante, en este caso, si para cada  $n \in \mathbb{N}$  definimos

$$\mathbf{T}_n(x) \doteq \inf \left\{ \tau > 0 : \begin{cases} (u_*)^*(x, t) < n, & 0 < t < \tau \\ (u_*)^*(x, \tau) = n \end{cases} \right\} \leq T;$$

se verifica

$$|\mathbf{T}_n(x) - \mathbf{T}_n(y)| \leq \frac{|x - y|}{R}, \quad x, y \in \mathbb{R}^N, \quad n \in \mathbb{N}. \quad \square$$

La principal consecuencia del resultado anterior queda recogida en:

**Teorema 4.74 (Verificación)**

Si  $u \in \mathcal{LIA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$  es solución de (4.69) y  $t_0 \in ]0, T[$ , entonces se verifica

$$u(x, t) \geq u_*(x, t) \geq u_*(y, t_0) - (t - t_0)H^* \left( \frac{y - x}{t - t_0} \right) \quad (4.72)$$

para todo  $x, y \in \mathbb{R}^N$  y  $t \in [t_0, T[$  tales que  $y \in x + (t - t_0)D(H^*)$ . En particular,

$$u(x, t) \geq u_*(x, t) \geq \mathcal{U}(x, t; u^0(\cdot; u_*)), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[ \quad (4.73)$$

siendo

$$\mathcal{U}(x, t; u^0(\cdot; u_*)) = \sup_{y \in x + tD(H^*)} \left\{ u^0(y; u_*) - tH^* \left( \frac{y - x}{t} \right) \right\}$$

la fórmula de Lax-Oleinik asociada al hamiltoniano  $H^*$  y al dato inicial

$$u^0(\cdot; u_*) \doteq \lim_{t \rightarrow 0^+} u_*(\cdot, t). \quad \square$$

**Observación 4.75**

1. Como

$$u^0(x; u_*) = \lim_{t \rightarrow 0^+} u_*(x, t) \geq \liminf_{(y,t) \rightarrow (x,0^+)} u_*(y, t) \doteq u_*(x, 0^+), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

entonces, para cualquier  $u \in \mathcal{LIA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$  solución de (4.69) se verifica

$$u_*(x, t) \geq \mathcal{U}(x, t; u_*(\cdot, 0^+)), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[. \quad (4.74)$$

2. De (4.72) se sigue la *ordenación intrínseca* de los valores de las soluciones de la ecuación (4.69), es decir, para  $t_1 \leq t_2$ ,

$$u_*(x, t_1) \leq u_*(y, t_2) \quad \text{si} \quad \frac{y - x}{t_2 - t_1} \in (H^*)^{-1}(0).$$

En particular, si

$$\inf_{p \in \mathbb{R}^N} H(p) = 0$$

entonces  $H^*(0) = 0$ , obteniéndose la *monotonía*

$$u_*(x, t_1) \leq u_*(x, t_2), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t_1 \leq t_2.$$

Recuérdese que para la elección

$$H(p) = R|p|^m, \quad p \in \mathbb{R}^N \quad (R > 0, m \geq 1)$$

se verifica

$$(H^*)^{-1}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } m > 1 \\ \overline{\mathbf{B}}_R(0) & \text{si } m = 1, \end{cases}$$

con lo que para  $t_1 \leq t_2$  se tiene

$$\begin{cases} u_*(x, t_1) \leq u_*(x, t_2), \quad x \in \mathbb{R}^N & \text{si } m > 1 \\ u_*(x, t_1) \leq u_*(y, t_2), \quad y \in \overline{\mathbf{B}}_{R(t_2-t_1)}(x) & \text{si } m = 1. \quad \square \end{cases}$$

La función de Lax–Oleinik asociada al hamiltoniano  $H^*$  y a un dato inicial  $u_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\mathcal{U}(x, t; u_0(\cdot)) = \sup_{y \in x+tD(H^*)} \left\{ u_0(y) - tH^* \left( \frac{y-x}{t} \right) \right\}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[,$$

puede escribirse en la forma

$$\mathcal{U}(x, t; u_0(\cdot)) = \sup_{\xi \in D(H^*)} \{ u_0(x + \xi t) - tH^*(\xi) \}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[. \quad (4.75)$$

Destaquemos algunas propiedades de *regularidad* para la función de Lax–Oleinik:

**Proposición 4.76**

1. Si  $u_0 \in \mathcal{L}\mathcal{A}(\mathbb{R}^N)$  entonces

$$\mathcal{U}(\cdot, \cdot; (u_0)_-(\cdot)) \leq \mathcal{U}(\cdot, \cdot; u_0(\cdot)) \leq \mathcal{U}(\cdot, \cdot; (u_0)^*(\cdot)) \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[.$$

2. Si  $u_0 \in \mathcal{L}\mathcal{I}\mathcal{A}(\mathbb{R}^N)$  entonces  $\mathcal{U}(\cdot, \cdot; (u_0)_*(\cdot)) \in \mathcal{S}\mathcal{C}\mathcal{I}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$ .
3. Si  $u_0 \in \mathcal{L}\mathcal{S}\mathcal{A}(\mathbb{R}^N)$  entonces  $\mathcal{U}(\cdot, \cdot; (u_0)^*(\cdot)) \in \mathcal{S}\mathcal{C}\mathcal{S}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$ .
4. Si  $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$  entonces  $\mathcal{U}(\cdot, \cdot; u_0(\cdot)) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$ .

5. Si  $u_0 \in \mathcal{LA}(\mathbb{R}^N)$  verifica

$$((u_0)_*)^* = (u_0)^* \quad \text{en } \mathbb{R}^N \quad (4.76)$$

entonces

$$\mathcal{U}^*(\cdot, \cdot; (u_0)_*(\cdot)) = \mathcal{U}(\cdot, \cdot; (u_0)^*(\cdot)) \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[.$$

6. Si  $u_0 \in \mathcal{LA}(\mathbb{R}^N)$  entonces

$$\mathcal{U}(\cdot, \cdot; ((u_0)_*)^*(\cdot)) \leq (\mathcal{U}_*)^*(\cdot, \cdot; u_0(\cdot)) \leq \mathcal{U}^*(\cdot, \cdot; u_0(\cdot)) \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[.$$

En particular, si  $u_0$  tiene la propiedad

$$(((u_0)^*)_*)^* = (u_0)^* \quad \text{en } \mathbb{R}^N \quad (4.77)$$

entonces

$$(\mathcal{U}_*)^*(\cdot, \cdot; (u_0)^*(\cdot)) = \mathcal{U}^*(\cdot, \cdot; (u_0)^*(\cdot)) \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[.^{12}$$

### Demostración.

1. Basta tener en cuenta la definición.
2. De la relación (4.75) se deduce

$$\mathcal{U}(x, t; (u_0)_*(\cdot)) \geq (u_0)_*(x + \xi t) - tH^*(\xi), \quad \xi \in D(H^*) \quad (4.78)$$

y, consecuentemente,

$$\mathcal{U}_*(x, t; (u_0)_*(\cdot)) \geq (u_0)_*(x + \xi t) - tH^*(\xi), \quad \xi \in D(H^*).$$

Por tanto,

$$\mathcal{U}_*(x, t; (u_0)_*(\cdot)) \geq \sup_{\xi \in D(H^*)} \{(u_0)_*(x + \xi t) - tH^*(\xi)\} = \mathcal{U}(x, t; (u_0)_*(\cdot)),$$

obteniéndose la cadena de desigualdades

$$\mathcal{U}_*(x, t; (u_0)_*(\cdot)) \geq \mathcal{U}(x, t; (u_0)_*(\cdot)) \geq \mathcal{U}_*(x, t; (u_0)_*(\cdot)).$$

---

<sup>12</sup>Todos los resultados anteriores son para algún  $T \leq +\infty$ . Véase el Teorema 4.89 donde se estudian los *horizontes maximales*.

3. Por definición de supremo, dado  $\varepsilon > 0$  va a existir  $\xi_\varepsilon \in D(H^*)$  tal que

$$\mathcal{U}(x, t; (u_0)^*(\cdot)) \leq (u_0)^*(x + \xi_\varepsilon t) - tH^*(\xi_\varepsilon) + \varepsilon.$$

Por tanto, tomando envueltas superiores,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^*(x, t; (u_0)^*(\cdot)) &\leq (u_0)^*(x + \xi_\varepsilon t) - tH^*(\xi_\varepsilon) + \varepsilon \\ &\leq \sup_{\xi \in D(H^*)} \{(u_0)^*(x + \xi t) - tH^*(\xi)\} + \varepsilon = \mathcal{U}(x, t; (u_0)^*(\cdot)) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Haciendo tender  $\varepsilon \rightarrow 0$  se obtiene la desigualdad

$$\mathcal{U}^*(x, t; (u_0)^*(\cdot)) \leq \mathcal{U}(x, t; (u_0)^*(\cdot)) \leq \mathcal{U}^*(x, t; (u_0)^*(\cdot)).$$

4. Es consecuencia inmediata de los apartados 2 y 3.  
5. Claramente, por (4.76), se verifica

$$\mathcal{U}(x, t; (u_0)_*(\cdot)) \leq \mathcal{U}(x, t; ((u_0)_*)^*(\cdot)) = \mathcal{U}(x, t; (u_0)^*(\cdot))$$

de donde, tomando envueltas superiores y teniendo en cuenta 3,

$$\mathcal{U}^*(x, t; (u_0)_*(\cdot)) \leq \mathcal{U}^*(x, t; (u_0)^*(\cdot)) = \mathcal{U}(x, t; (u_0)^*(\cdot)).$$

Por otro lado, tomando envueltas superiores en la expresión (4.78), se obtiene

$$\mathcal{U}^*(x, t; (u_0)_*(\cdot)) \geq ((u_0)_*)^*(x + \xi t) - tH^*(\xi) = (u_0)^*(x + \xi t) - tH^*(\xi)$$

para todo  $\xi \in D(H^*)$ , donde nuevamente hemos utilizado la propiedad (4.76). De esta forma, tomando supremo en  $\xi \in D(H^*)$  se concluye

$$\mathcal{U}^*(x, t; (u_0)_*(\cdot)) \geq \mathcal{U}(x, t; (u_0)^*(\cdot)).$$

6. En primer lugar, como

$$\mathcal{U}_*(x, t; u_0(\cdot)) \leq \mathcal{U}(x, t; u_0(\cdot)),$$

entonces

$$(\mathcal{U}_*)^*(x, t; u_0(\cdot)) \leq \mathcal{U}^*(x, t; u_0(\cdot)).$$

Por otro lado, la desigualdad

$$\mathcal{U}(x, t; u_0(\cdot)) \geq u_0(x + \xi t) - tH^*(\xi), \quad \xi \in D(H^*)$$

lleva a

$$\mathcal{U}_*(x, t; u_0(\cdot)) \geq (u_0)_*(x + \xi t) - tH^*(\xi), \quad \xi \in D(H^*),$$

por lo que tomando envueltas superiores,

$$(\mathcal{U}_*)^*(x, t; u_0(\cdot)) \geq ((u_0)_*)^*(x + \xi t) - tH^*(\xi), \quad \xi \in D(H^*).$$

Consecuentemente,

$$(\mathcal{U}_*)^*(x, t; u_0(\cdot)) \geq \sup_{\xi \in D(H^*)} \{((u_0)_*)^*(x + \xi t) - tH^*(\xi)\} = \mathcal{U}(x, t; ((u_0)_*)^*(\cdot)).$$

De esta forma,

$$(\mathcal{U}_*)^*(x, t; u_0(\cdot)) \geq \mathcal{U}(x, t; ((u_0)_*)^*(\cdot)). \quad \square$$

#### Observación 4.77

Los argumentos empleados en la demostración de la Proposición anterior permiten mostrar:

1. Si  $u_0 \in \mathcal{LA}(\mathbb{R}^N)$  verifica

$$((u_0)^*)_* = (u_0)_* \text{ en } \mathbb{R}^N$$

entonces

$$\mathcal{U}_*(\cdot, \cdot; (u_0)^*(\cdot)) = \mathcal{U}(\cdot, \cdot; (u_0)_*(\cdot)) \text{ en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[.$$

2. Si  $u_0 \in \mathcal{LA}(\mathbb{R}^N)$  tiene la propiedad

$$(((u_0)_*)^*)_* = (u_0)_* \text{ en } \mathbb{R}^N$$

entonces

$$(\mathcal{U}^*)_*(\cdot, \cdot; (u_0)_*(\cdot)) = \mathcal{U}_*(\cdot, \cdot; (u_0)_*(\cdot)) \text{ en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[. \quad \square$$

En cuanto a la descripción del dato inicial, si denotamos

$$\mathcal{U}_0(x; u_0(\cdot)) \doteq \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{U}(x, t; u_0(\cdot)), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

se tiene la siguiente acotación:

**Proposición 4.78**

Para cada  $x \in \mathbb{R}^N$  se verifica

$$(u_0)_*(x) \leq \mathcal{U}_0(x; u_0(\cdot)) \leq (u_0)^*(x).$$

**Demostración.**

Claramente, para cada  $\xi \in D(H^*)$ , se tiene

$$\mathcal{U}(x, t; u_0(\cdot)) \geq u_0(x + \xi t) - tH^*(\xi)$$

luego

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{U}(x, t; u_0(\cdot)) \geq \lim_{t \rightarrow 0^+} u_0(x + \xi t) \geq (u_0)_*(x).$$

Por otro lado, por definición de supremo, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\xi_\varepsilon \in D(H^*)$  tal que

$$\mathcal{U}(x, t; u_0(\cdot)) \leq u_0(x + \xi_\varepsilon t) - tH^*(\xi_\varepsilon) + \varepsilon \leq u_0(x + \xi_\varepsilon t) + tH(0) + \varepsilon$$

ya que, a partir de la *desigualdad de Young generalizada*,

$$H^*(\xi) + H(0) \geq 0, \quad \xi \in D(H^*).$$

Por tanto,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{U}(x, t; u_0(\cdot)) \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} u_0(x + \xi_\varepsilon t) + \varepsilon \leq (u_0)^*(x) + \varepsilon.$$

Haciendo tender  $\varepsilon \rightarrow 0$  obtenemos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{U}(x, t; u_0(\cdot)) \leq (u_0)^*(x). \quad \square$$

En algunas ocasiones puede mejorarse la afirmación anterior:

**Proposición 4.79**

Si  $u_0 \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N)$ , bajo el supuesto

$$0 \in D(H^*), \quad (4.79)$$

se verifica

$$(\mathcal{U}_0)^*(x; u_0(\cdot)) = (u_0)^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

En particular,

$$u_0(x; (u_0)^*(\cdot)) = (u_0)^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (4.80)$$

**Demostración.**

Basta tener en cuenta que la hipótesis (4.79) determina

$$\mathcal{U}(x, t; u_0(\cdot)) \geq u_0(x) - tH^*(0)$$

de donde, haciendo tender  $t \rightarrow 0^+$ , se obtiene

$$u_0(x) \leq \mathcal{U}_0(x; u_0(\cdot)) \leq (u_0)^*(x).$$

Basta tomar envueltas superiores para concluir el resultado.  $\square$

**Observación 4.80**

Si para algún  $\varrho > 0$  y  $\zeta \in \mathbb{R}^N$ , se verifica

$$D(H^*) \supset \partial \mathbf{B}_\varrho(\zeta) \quad (4.81)$$

entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{\xi \in D(H^*)} u_0(x + \xi t) = (u_0)^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Nótese que la propiedad (4.81) es verificada por hamiltonianos de la forma

$$H(p) = R|p|^m, \quad p \in \mathbb{R}^N \quad (R > 0, m \geq 1).$$

En particular, cuando  $m = 1$ , se verifica

$$\mathcal{U}_0(x; u_0(\cdot)) = (u_0)^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (4.82)$$

para cualquier dato  $u_0 \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N)$ .  $\square$



Las soluciones de la ecuación (4.69) tienen la siguiente *regularidad complementaria*:

**Corolario 4.81**

Si  $u \in \mathcal{LIA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$  es una solución de (4.69) entonces, para cada  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[$  y  $\xi \in D(H^*)$ , se verifica

$$\limsup_{s \rightarrow t^-} u_*(x + \xi(t - s), s) \leq u_*(x, t) \leq \liminf_{s \rightarrow t^-} u_*(x - \xi(t - s), t).$$

**Demostración.**

Tomando  $t_0 = s$  e  $y = x + \xi(t - s)$  en (4.72) obtenemos

$$u_*(x, t) \geq u_*(x + \xi(t - s), s) - (t - s)H^*(\xi), \quad 0 < s \leq t < T. \quad (4.83)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} u_*(x, t) &\geq \limsup_{s \rightarrow t^-} [u_*(x + \xi(t - s), s) - (t - s)H^*(\xi)] \\ &= \limsup_{s \rightarrow t^-} u_*(x + \xi(t - s), s). \end{aligned}$$

La relación (4.83) escrita en la forma

$$u_*(x - \xi(t - s), t) \geq u_*(x, s) - (t - s)H^*(\xi), \quad 0 < s \leq t < T$$

conduce a

$$\begin{aligned} \liminf_{s \rightarrow t^-} u_*(x - \xi(t - s), t) &\geq \liminf_{s \rightarrow t^-} [u_*(x, s) - (t - s)H^*(\xi)] \\ &= \liminf_{s \rightarrow t^-} u_*(x, s) \geq u_*(x, t). \quad \square \end{aligned}$$

Además,

**Corolario 4.82**

Sea  $u \in \mathcal{LIA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$  una solución de (4.69). Bajo la hipótesis (4.82), para cada  $t_0 \in ]0, T[$  la función parcial  $u^{t_0}(\cdot; u_*) \in \mathcal{SCS}(\mathbb{R}^N)$  donde

$$u^{t_0}(\cdot; u_*) \doteq \lim_{t \rightarrow t_0^+} u_*(\cdot, t), \quad t_0 \geq 0.$$

**Demostración.**

Dado  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $0 \leq t_0 < T$ , a partir de (4.72) y (4.73) se sigue la cadena de desigualdades

$$u^{t_0}(x; u_*) \geq \lim_{t \rightarrow t_0^+} \mathcal{U}(x, t - t_0; u^{t_0}(\cdot; u_*)) = \mathcal{U}_0(x; u^{t_0}(\cdot; u_*)) = (u^{t_0})^*(x; u_*). \quad \square$$

En el caso en que el hamiltoniano es convexo, también se tiene el resultado recíproco al del Teorema 4.74.

**Teorema 4.83 (Caracterización de las supersoluciones)**

Sea  $\mathcal{H} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  una función propia, convexa, s.c.i. y  $u \in \mathcal{LIA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$  con  $T \leq +\infty$ . Entonces  $u$  es solución de viscosidad de la ecuación

$$u_t \geq \mathcal{H}(\nabla u) \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[$$

si y sólo si para cada  $t_0 \in ]0, T[$  se verifica

$$u(x, t) \geq u_*(x, t) \geq u_*(y, t_0) - (t - t_0) \mathcal{H}^* \left( \frac{y - x}{t - t_0} \right) \quad (4.84)$$

para todo  $x, y \in \mathbb{R}^N$  y  $t \in [t_0, T[$  tales que  $y \in x + (t - t_0)D(\mathcal{H}^*)$ .

**Demostración.**

Basta con demostrar la implicación recíproca del Teorema 4.74. Para ello, sea  $(p_1, p_2) \in D^-u_*(x, t)$  con  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[$ . Por definición

$$u_*(y, s) \geq u_*(x, t) + p_1 \cdot (y - x) + p_2(s - t) + o(|y - x| + |s - t|). \quad (4.85)$$

Por otra parte, si  $s < t$ , la relación (4.84) determina

$$u_*(y, s) \leq u_*(x, t) + (t - s) \mathcal{H}^* \left( \frac{y - x}{t - s} \right). \quad (4.86)$$

Dado  $\xi \in D(\mathcal{H}^*)$  consideramos  $t = s + h$  e  $y = x + \xi h$  con  $h > 0$ . Así, de (4.85) y (4.86) obtenemos

$$p_1 \cdot \xi - p_2 + \frac{o(h)}{h} \leq \mathcal{H}^*(\xi), \quad h > 0.$$

Haciendo tender  $h \rightarrow 0$  se deduce

$$p_1 \cdot \xi - p_2 \leq \mathcal{H}^*(\xi),$$

es decir,

$$p_2 \geq p_1 \cdot \xi - \mathcal{H}^*(\xi), \quad \xi \in D(\mathcal{H}^*).$$

Por ser  $\mathcal{H}$  una función convexa, tomando supremo en  $\xi \in D(\mathcal{H}^*)$  en la expresión anterior se obtiene

$$p_2 \geq \mathcal{H}^{**}(p_1) = \mathcal{H}(p_1),$$

gracias al *Teorema de Fenchel–Moreau*.  $\square$

Una aplicación inmediata es:

**Proposición 4.84**

Si  $u \in \mathcal{LA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$ ,  $T \leq +\infty$ , es una solución de

$$u_t - H(\nabla u) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[$$

entonces

$$(u_*)^*(x, t) \geq \mathcal{U}\left(x, t; \left(u_*(\cdot, 0^+)\right)^*(\cdot)\right), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[.$$

**Demostración.**

La relación (4.74) determina

$$u_*(x, t) \geq \mathcal{U}(x, t; u_*(\cdot, 0^+)) \geq u_*(x + \xi t, 0^+) - tH^*(\xi)$$

para  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[$  y  $\xi \in D(H^*)$ , por lo que tomando envueltas superiores

$$(u_*)^*(x, t) \geq \left(u_*(x + \xi t, 0^+)\right)^* - tH^*(\xi), \quad \xi \in D(H^*).$$

El resultado se sigue tomando supremo en  $\xi \in D(H^*)$ .  $\square$

Como hemos comentado anteriormente, la descripción del dato inicial  $u_0$  en un problema de Cauchy es ambigua, pues

$$\begin{aligned} (u_0)_*(x) &\leq u_*(x, 0^+) \leq \liminf_{t \rightarrow 0^+} u_*(x, t) \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow 0^+} u^*(x, t) \leq u^*(x, 0^+) \leq (u_0)^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

El teorema de Verificación nos va a permitir especificar el *único comportamiento inicial* posible para una amplia clase de datos iniciales.

**Teorema 4.85**

Sea  $u_0 \in \mathcal{L}\mathcal{A}(\mathbb{R}^N)$  verificando

$$((u_0)_*)^*(x) = (u_0)^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (4.87)$$

y  $u \in \mathcal{L}\mathcal{A}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$ ,  $T \leq +\infty$ , una solución fuerte de viscosidad del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - H(\nabla u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (4.88)$$

Entonces, bajo la hipótesis (4.82), se verifica

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = (u_0)^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

**Demostración.**

Por la propiedad (4.74) sabemos que

$$u_*(x, t) \geq \mathcal{U}(x, t; u_*(\cdot, 0^+)) \geq \mathcal{U}(x, t; (u_0)_*(\cdot)), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[. \quad (4.89)$$

Por tanto, (4.82) y (4.87) implican

$$\liminf_{t \rightarrow 0^+} u_*(x, t) \geq ((u_0)_*)^*(x) = (u_0)^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Por otra parte, de la cadena de desigualdades

$$u_*(x, t) \leq u(x, t) \leq u^*(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0$$

se obtiene

$$\begin{aligned} (u_0)^*(x) &\leq \liminf_{t \rightarrow 0^+} u_*(x, t) \leq \liminf_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) \leq \limsup_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow 0^+} u^*(x, t) \leq u^*(x, 0^+) \leq (u_0)^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad \square \end{aligned}$$

**Observación 4.86**

1. La condición (4.87) no es muy exigente, pues se verifica si  $u_0 \in \mathcal{SCI}(\mathbb{R}^N)$ . Sin embargo, existen funciones  $u_0 \in \mathcal{SCS}(\mathbb{R}^N)$  con la propiedad anterior, como por ejemplo

$$u_0(x) = \chi_{\overline{B}_\sigma(0)}(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (\sigma > 0).$$

2. Bajo la hipótesis (4.82) se precisa la *traza inicial* de cualquier supersolución fuerte de viscosidad del problema (4.88) dado que

$$\liminf_{t \rightarrow 0^+} u_*(x, t) \geq ((u_0)_*)^*(x) \geq (u_0)_*(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad \square$$

En particular, al considerar problemas de Cauchy, una amplia clase de datos iniciales conducen a la minimalidad de la fórmula de Lax-Oleinik.

**Corolario 4.87 (Propiedad de minimalidad)**

Sea  $u_0 \in \mathcal{L}\mathcal{A}(\mathbb{R}^N)$  y  $u \in \mathcal{L}\mathcal{I}\mathcal{A}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$ ,  $T \leq +\infty$ , una supersolución fuerte de viscosidad del problema

$$\begin{cases} u_t - H(\nabla u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Entonces, bajo la hipótesis (4.82), se verifica

$$(u_*)^*(x, t) \geq \mathcal{U}(x, t; ((u_0)_*)^*(\cdot)), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[.$$

**Demostración.**

La relación (4.89) determina

$$u_*(x, t) \geq \mathcal{U}(x, t; (u_0)_*(\cdot)), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[,$$

por lo que tomando envueltas superiores se verifica

$$(u_*)^*(x, t) \geq \mathcal{U}^*(x, t; (u_0)_*(\cdot)) \geq \mathcal{U}(x, t; ((u_0)_*)^*(\cdot)) \quad (4.90)$$

para todo  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[$  (para la última desigualdad véase el apartado 6 de la Proposición 4.76).  $\square$

**Observación 4.88**

A la vista del resultado anterior, si además  $u_0$  verifica (4.87), entonces

$$(u_*)^*(x, t) \geq \mathcal{U}(x, t; (u_0)^*(\cdot)), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[. \quad \square$$

Interesa ocuparse en la *banda maximal* en el que las supersoluciones fuertes de viscosidad del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - H(\nabla u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (4.91)$$

están definidas, es decir,  $\mathbb{R}^N \times [0, \mathbf{T}_\infty[$ , siendo

$$\begin{cases} u(x, t) < +\infty & \text{si } (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, \mathbf{T}_\infty[ \\ u(\hat{x}, \mathbf{T}_\infty) = +\infty & \text{para algún } \hat{x} \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

**Teorema 4.89 (Horizonte maximal)**

Sea  $u_0 \in \mathcal{L}\mathcal{A}(\mathbb{R}^N)$  y  $H \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$  verificando

$$D(H^*) = \mathbb{R}^N \quad \text{y} \quad \limsup_{|\xi| \rightarrow +\infty} H^*(\xi) = +\infty. \quad (4.92)$$

Entonces, para que el problema (4.91) admita supersoluciones fuertes de viscosidad, debe verificarse

$$\limsup_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{((u_0)_*)^*(\xi)}{tH^*\left(\frac{\xi}{t}\right)} \leq 1 \quad \text{para algún } t > 0. \quad (4.93)$$

En tal caso, el horizonte maximal de las supersoluciones fuertes de viscosidad de (4.91) es

$$\mathbf{T}_\infty \doteq \sup \left\{ T > 0 : \limsup_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{((u_0)_*)^*(\xi)}{tH^*\left(\frac{\xi}{t}\right)} \leq 1, \quad 0 < t < T \right\} \leq +\infty. \quad (4.94)$$

**Demostración.**

Dado  $t > 0$ , de la relación (4.90) se sigue

$$(u_*)^*(0, t) \geq \mathcal{U}(0, t; ((u_0)_*)^*(\cdot)) \geq ((u_0)_*)^*(\xi t) - tH^*(\xi)$$

para todo  $\xi \in D(H^*)$ , luego

$$\frac{((u_0)_*)^*(\xi t)}{tH^*(\xi)} \leq 1 + \frac{(u_*)^*(0, t)}{tH^*(\xi)} \quad \text{si } H^*(\xi) > 0. \quad {}^{13}$$

<sup>13</sup>Nótese que la hipótesis (4.92) garantiza la existencia de  $\xi \in D(H^*)$  con  $H^*(\xi) > 0$ .

Haciendo tender  $|\xi| \rightarrow +\infty$ , la hipótesis (4.92) determina que (4.93) es una condición necesaria para la existencia de supersoluciones de (4.91).  $\square$

**Observación 4.90**

El horizonte maximal  $\mathbf{T}_\infty$  definido en (4.94) es *uniforme*.  $\square$

Cuando  $\mathbf{T}_\infty < +\infty$  podemos estudiar el comportamiento de las supersoluciones del problema de Cauchy (4.91) al hacer tender  $|x| \rightarrow +\infty$ . Concretamente,

**Teorema 4.91 (Comportamiento asintótico espacial)**

Sea  $H \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$  verificando (4.92). Si  $\mathbf{T}_\infty < +\infty$  entonces para toda función  $u \in \mathcal{LIA}(\mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[)$  que sea supersolución fuerte de (4.91) se verifica

$$\frac{\mathbf{T}_\infty \ell_\infty - t}{\mathbf{T}_\infty - t} \leq \ell_\infty(t) \leq 1, \quad 0 < t < \mathbf{T}_\infty \quad (4.95)$$

donde

$$\ell_\infty(t) \doteq \limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{(u_*)^*(x, t)}{(\mathbf{T}_\infty - t)H^*\left(\frac{x}{\mathbf{T}_\infty - t}\right)}, \quad 0 < t < \mathbf{T}_\infty$$

y

$$\ell_\infty \doteq \limsup_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{((u_0)_*)^*(\xi)}{\mathbf{T}_\infty H^*\left(\frac{\xi}{\mathbf{T}_\infty}\right)} (\leq 1).$$

En particular, si

$$\limsup_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{((u_0)_*)^*(\xi)}{\mathbf{T}_\infty H^*\left(\frac{\xi}{\mathbf{T}_\infty}\right)} = 1 \quad (4.96)$$

entonces

$$\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{(u_*)^*(x, t)}{H^*\left(\frac{x}{\mathbf{T}_\infty - t}\right)} = \mathbf{T}_\infty - t, \quad 0 < t < \mathbf{T}_\infty.$$

**Demostración.**

Por ser  $u$  supersolución fuerte de viscosidad del problema (4.91) entonces, del Teorema 4.71, se deduce

$$(u_*)^*(y - \xi t_2, t_2) + t_2 H^*(\xi) \geq (u_*)^*(y - \xi t_1, t_1) + t_1 H^*(\xi)$$

para  $y \in \mathbb{R}^N$  y  $0 < t_1 \leq t_2 < \mathbf{T}_\infty$ . Tomando  $0 < \varepsilon \ll 1$ , las elecciones  $t_1 = t$ ,  $t_2 = \mathbf{T}_\infty - \varepsilon$  e  $y = \xi(\mathbf{T}_\infty - \varepsilon)$  llevan a

$$(u_*)^*(0, \mathbf{T}_\infty - \varepsilon) + (\mathbf{T}_\infty - \varepsilon)H^*(\xi) \geq (u_*)^*(\xi(\mathbf{T}_\infty - t - \varepsilon), t) + tH^*(\xi).$$

Dividiendo la expresión anterior por  $tH^*(\xi)$  y tomando supremo en  $\xi \in \mathbb{R}^N$ , a partir de (4.92), se obtiene

$$\frac{(u_*)^*(\xi(\mathbf{T}_\infty - t - \varepsilon), t)}{tH^*(\xi)} \leq \frac{\mathbf{T}_\infty - \varepsilon}{t} - 1 = \frac{\mathbf{T}_\infty - t - \varepsilon}{t}, \quad 0 < t < \mathbf{T}_\infty - \varepsilon.$$

Con el cambio de variable  $x = \xi(\mathbf{T}_\infty - t - \varepsilon)$  y haciendo tender primero  $\varepsilon \rightarrow 0$  y luego  $|\xi| \rightarrow +\infty$ , obtenemos

$$\ell_\infty(t) \leq 1, \quad 0 < t < \mathbf{T}_\infty.$$

Por otra parte, de (4.90), para todo  $\xi \in \mathbb{R}^N$  se verifica

$$(u_*)^*(x, t) \geq ((u_0)_*)^*(x + \xi t) - tH^*(\xi), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[.$$

En particular, la elección

$$\xi = \frac{x}{\mathbf{T}_\infty - t}$$

conduce a

$$(u_*)^*(x, t) \geq ((u_0)_*)^*\left(\frac{\mathbf{T}_\infty}{\mathbf{T}_\infty - t}x\right) - tH^*\left(\frac{x}{\mathbf{T}_\infty - t}\right), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[.$$

Dividiendo la expresión anterior por

$$(\mathbf{T}_\infty - t)H^*\left(\frac{x}{\mathbf{T}_\infty - t}\right)$$

y tomando límites cuando  $|x| \rightarrow +\infty$  se obtiene

$$\begin{aligned} \ell_\infty(t) &\geq \limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{(u_*)^*\left(\frac{\mathbf{T}_\infty}{\mathbf{T}_\infty - t}x\right)}{(\mathbf{T}_\infty - t)H^*\left(\frac{x}{\mathbf{T}_\infty - t}\right)} - \frac{t}{\mathbf{T}_\infty - t} \\ &= \frac{\mathbf{T}_\infty}{\mathbf{T}_\infty - t} \limsup_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{((u_0)_*)^*(\xi)}{\mathbf{T}_\infty H^*\left(\frac{\xi}{\mathbf{T}_\infty}\right)} - \frac{t}{\mathbf{T}_\infty - t} = \frac{\mathbf{T}_\infty \ell_\infty - t}{\mathbf{T}_\infty - t}, \quad 0 < t < \mathbf{T}_\infty. \quad \square \end{aligned}$$



**Observación 4.92**

Cuando  $H^*$  es  $\gamma$ -homogéneo con  $\gamma > 1$ , la hipótesis (4.93) toma la forma

$$\limsup_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{((u_0)_*)^*(\xi)}{H^*(\xi)} \leq \frac{1}{t^{\gamma-1}} \text{ para algún } t > 0. \quad (4.97)$$

Por tanto, la clase de datos iniciales  $u_0$  admisibles viene dada por la relación

$$\limsup_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{((u_0)_*)^*(\xi)}{H^*(\xi)} \doteq \Lambda \in \mathbb{R}, \quad (4.98)$$

para los cuales

$$\mathbf{T}_\infty = \left( \frac{1}{\Lambda_+} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (\Lambda_+ = \max\{\Lambda, 0\}).$$

En el caso en que  $\mathbf{T}_\infty < +\infty$ , como

$$\limsup_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{((u_0)_*)^*(\xi)}{\mathbf{T}_\infty H^*\left(\frac{\xi}{\mathbf{T}_\infty}\right)} = (\mathbf{T}_\infty)^{\gamma-1} \limsup_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{((u_0)_*)^*(\xi)}{H^*(\xi)} = 1,$$

entonces todas las supersoluciones  $u$  verifican

$$\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{(u_*)^*(x, t)}{H^*(\bar{x})} = \left( \frac{1}{\mathbf{T}_\infty - t} \right)^{\gamma-1}, \quad 0 < t < \mathbf{T}_\infty. \quad (4.99)$$

En particular, para

$$H(p) = R|p|^m, \quad p \in \mathbb{R}^N \quad (m > 1)$$

las relaciones (4.97), (4.98) y (4.99) toman, respectivamente, la forma

$$\limsup_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{((u_0)_*)^*(\xi)}{|\xi|^{\frac{m}{m-1}}} \leq \frac{m-1}{(Rm^m t)^{\frac{1}{m-1}}} \text{ para algún } t > 0,$$

$$\limsup_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{((u_0)_*)^*(\xi)}{|\xi|^{\frac{m}{m-1}}} \doteq \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \text{ con } \mathbf{T}_\infty = \frac{1}{Rm^m} \left( \frac{m-1}{\ell_+} \right)^{m-1}$$

y

$$\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{(u_*)^*(x, t)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} = \ell \left( \frac{\mathbf{T}_\infty}{\mathbf{T}_\infty - t} \right)^{\frac{1}{m-1}}, \quad 0 < t < \mathbf{T}_\infty. \quad \square$$

Bajo adecuadas hipótesis, obtenemos resultados de comparación. Concretamente,

**Proposición 4.93**

Sea  $W \in C^1(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$  verificando

$$W_t(x, t) \geq H(\nabla W(x, t)), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[ \quad (T \leq +\infty)$$

de forma que

$$W(x) \geq 0 \quad \text{cuando} \quad |x| \rightarrow +\infty. \quad (4.100)$$

Entonces, si  $u \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$  es una solución de viscosidad de

$$u_t \leq H(\nabla u) \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^N \times ]0, T[$$

tal que

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} (u^*(x, t) - W(x, t)) \leq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

y

$$\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{u^*(x, t)}{W(x, t)} < 1, \quad t \in ]0, T[, \quad (4.101)$$

se verifica

$$u(x, t) \leq u^*(x, t) \leq W(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[.$$

**Demostración.**

Como  $u^* \in \mathcal{SCS}(\mathbb{R}^N \times [0, T - \varepsilon])$  para todo  $\varepsilon > 0$ , las condiciones (4.100) y (4.101) implican que

$$\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T - \varepsilon]} (u^* - W^\varepsilon) < +\infty,$$

donde

$$W^\varepsilon(x, t) = W(x, t) + \varepsilon t.$$

Si existiera  $(\hat{x}, \hat{t}) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T - \varepsilon]$  tal que

$$(u^* - W^\varepsilon)(x, t) \leq (u^* - W^\varepsilon)(\hat{x}, \hat{t}), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T - \varepsilon],$$

entonces se tendría

$$u^*(x, t) - u^*(\hat{x}, \hat{t}) \leq W^\varepsilon(x, t) - W^\varepsilon(\hat{x}, \hat{t})$$

$$= (W^\varepsilon)_t(x, t)(t - \hat{t}) + \nabla W^\varepsilon(\hat{x}, \hat{t}) \cdot (x - \hat{x}) + o(|x - \hat{x}| + |t - \hat{t}|)$$

y, por tanto,

$$(\nabla W^\varepsilon(\hat{x}, \hat{t}), (W^\varepsilon)_t(\hat{x}, \hat{t})) \in D^+ u^*(\hat{x}, \hat{t})$$

lo que conduce a la contradicción

$$0 < \varepsilon + [W_t(\hat{x}, \hat{t}) - H(\nabla W(\hat{x}, \hat{t}))] = (W^\varepsilon)_t(\hat{x}, \hat{t}) - H(\nabla W^\varepsilon(\hat{x}, \hat{t})) \leq 0.$$

Consecuentemente, el supremo de  $u^* - W^\varepsilon$  o bien se alcanza cuando  $|x| \rightarrow +\infty$  o en  $t = 0$ . Como en ambos casos es no positivo, entonces

$$\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T - \varepsilon]} (u^* - W^\varepsilon) \leq 0.$$

De esta forma,

$$(u^* - W^\varepsilon)(x, t) \leq 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T - \varepsilon],$$

de donde se sigue el resultado haciendo tender  $\varepsilon \rightarrow 0$ .  $\square$

A continuación vamos a utilizar el resultado anterior para hacer un estudio de la unicidad de soluciones en problemas de Cauchy gobernados por hamiltonianos convexos utilizando para ello técnicas propias de la convolución standard.

#### **Teorema 4.94 (Unicidad)**

Bajo el supuesto  $\mathbf{T}_\infty < +\infty$ , sea  $\mathcal{H} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y convexa con la propiedad (4.92) y  $u_0 \in \mathcal{L}\mathcal{A}(\mathbb{R}^N)$  verificando (4.93), (4.96) y

$$((u_0)_*)^*(x) = (u_0)^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (4.102)$$

Si la función de Lax-Oleinik asociada a  $\mathcal{H}^*$  y  $(u_0)^*$ , es decir

$$\mathcal{U}(x, t; (u_0)^*(\cdot)) = \sup_{y \in x - tD(\mathcal{H}^*)} \left\{ (u_0)^*(y) - t\mathcal{H}^*\left(\frac{y-x}{t}\right) \right\},$$

es una solución de viscosidad localmente lipschitziana del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - \mathcal{H}(\nabla u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (4.103)$$

entonces es, de hecho, la única.

**Demostración.**

Sea  $u \in \mathcal{LA}(\mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[)$  una solución fuerte de viscosidad de (4.103). El Corolario 4.87 y la propiedad (4.102) determinan

$$\mathcal{U}(x, t; (u_0)^*(\cdot)) \leq (u_*)^*(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, \mathbf{T}_\infty[$$

por lo que basta mostrar la desigualdad contraria. Por el Teorema 4.91 se tiene

$$\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{(u_*)^*(x, t)}{H^* \left( \frac{x}{\mathbf{T}_\infty - t} \right)} = \mathbf{T}_\infty - t, \quad 0 < t < \mathbf{T}_\infty.$$

Consideremos a continuación la familia de datos iniciales

$$u_{0,n}(x) \doteq \mathcal{U} \left( x, \frac{1}{n}; u_0(\cdot) \right) + \frac{1}{n}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad n \in \mathbb{N}$$

que verifican  $u_{0,n} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$  y

$$u_{0,n}(x) > u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Además, nuevamente por el Teorema 4.91, se tiene

$$\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{u_{0,n}(x)}{H^* \left( \frac{x}{\mathbf{T}_\infty - \frac{1}{n}} \right)} = \mathbf{T}_\infty - \frac{1}{n}$$

supuesto  $n > \frac{1}{\mathbf{T}_\infty}$ . De esta forma, la solución de Lax-Oleinik para los datos iniciales  $u_{0,n}$ ,

$$\mathcal{U}(x, t; u_{0,n}(\cdot)) = \sup_{y \in x - tD(H^*)} \left\{ u_{0,n}(y) - t\mathcal{H}^* \left( \frac{y - x}{t} \right) \right\},$$

está definida en la banda  $\mathbb{R}^N \times [0, \mathbf{T}_{\infty,n}[$  siendo

$$\mathbf{T}_{\infty,n} \doteq \mathbf{T}_\infty - \frac{1}{n} < \mathbf{T}_\infty.$$

Además, aplicando una vez más el Teorema 4.91, se verifica

$$\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{U}(x, t; u_{0,n}(\cdot))}{(\mathbf{T}_\infty - \frac{1}{n} - t)\mathcal{H}^* \left( \frac{x}{\mathbf{T}_\infty - \frac{1}{n} - t} \right)} = 1, \quad 0 \leq t < \mathbf{T}_\infty - \frac{1}{n}.$$

Como  $\mathcal{U}(\cdot, \cdot; u_{0,n}(\cdot))$  es localmente lipschitziana, la convolución standard

$$\mathcal{U}_\varepsilon \doteq \mathcal{U} * \varrho_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

verifica

$$(\mathcal{U}_\varepsilon)_t = \mathcal{H}(\nabla \mathcal{U}(\cdot, \cdot; u_{0,n}(\cdot))) * \varrho_\varepsilon.$$

Así, la *desigualdad de Jensen* lleva a

$$(\mathcal{U}_\varepsilon)_t(x, t) \geq \mathcal{H}(\nabla \mathcal{U}_\varepsilon(x, t)), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \left] \varepsilon, \mathbf{T}_\infty - \frac{1}{n} - \varepsilon \right[.$$

Finalmente, de la propiedad

$$\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{(u_*)^*(x, t)}{\mathcal{U}(x, t; u_{0,n}(\cdot))} = 1, \quad 0 \leq t < \mathbf{T}_\infty - \frac{1}{n}$$

se obtiene que para cada  $\sigma > 0$

$$(u_*)^*(x, t) \leq (1 + \sigma)\mathcal{U}_\varepsilon(x, t; u_{0,n}(\cdot)), \quad |x| \gg 1.$$

La dependencia monótona de la función de Lax–Oleinik respecto de la evolución temporal y su comportamiento asintótico determinan la existencia de  $\delta = \delta(\sigma; \mathcal{H}^*, (u_0)^*)$  con

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \delta(\sigma; \mathcal{H}^*, (u_0)^*) = 0$$

tal que

$$(1 + \sigma)\mathcal{U}_\varepsilon(x, t; u_{0,n}(\cdot)) \leq \mathcal{U}_\varepsilon(x, t + \delta; u_{0,n}(\cdot)) + \delta t$$

para  $|x| \gg 1$  y  $0 < t < \mathbf{T}_\infty - \frac{1}{n} - \varepsilon$ . Así, los argumentos empleados en la prueba de la Proposición 4.93 conducen a

$$(u_*)^*(x, t) \leq \mathcal{U}_\varepsilon(x, t + \delta; u_{0,n}(\cdot)) + \delta t, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \left[ 0, \mathbf{T}_\infty - \frac{1}{n} - \varepsilon \right].$$

Haciendo  $\sigma \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  y  $n \rightarrow +\infty$  concluimos el resultado.  $\square$

#### Observación 4.95

Argumentos de comparación utilizando la convolución standard han sido utilizados por diversos autores ([Ba8], [Barr-Je1], [Li-Sou-Va], ...).  $\square$

Como caso particular del anterior, consideremos el problema

$$\begin{cases} u_t - R|\nabla u|^m = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (4.104)$$

donde  $R > 0$  y  $m > 1$ .

**Corolario 4.96**

Si  $u_0 \in \mathcal{LA}(\mathbb{R}^N)$  verifica (4.102) y

$$\ell \doteq \limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{u_0(x)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} > 0 \quad (4.105)$$

entonces la fórmula de Lax-Oleinik

$$\mathcal{U}(x, t; (u_0)^*(\cdot)) \doteq \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \left\{ (u_0)^*(y) - (m-1) \left( \frac{|x-y|^m}{Rm^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\} \quad (4.106)$$

para  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, \mathbf{T}_\infty[$ , donde

$$\mathbf{T}_\infty = \frac{1}{Rm^m} \left( \frac{m-1}{\ell} \right)^{m-1},$$

proporciona el candidato a la única solución fuerte de viscosidad del problema (4.104).  $\square$

**Observación 4.97**

En el Corolario 5.34 probaremos que, en las condiciones anteriores, la función  $\mathcal{U}(x, t; (u_0)^*(\cdot))$  va a ser la única solución fuerte de viscosidad de (4.104).  $\square$

En algunos casos, cuando la función de Lax-Oleinik es solución, ella es localmente lipschitziana. Concretamente, mostramos un resultado más general:

**Teorema 4.98**

Sea  $H \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$  con la propiedad

$$\liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{H(rp)}{r} \geq 1 \quad \text{para } 0 < |p| \leq 1 \quad (4.107)$$

y  $u \in \mathcal{LIA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$  una solución de viscosidad de

$$u_t - H(\nabla u) \geq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[.$$

Entonces,  $u_* \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$ .

**Demostración.**

Sea  $\mathcal{O}$  un abierto acotado de  $\mathbb{R}^N \times ]0, T[$ . A partir de un elemento arbitrario  $(y, s) \in \mathcal{O}$  definimos la función

$$\Phi(x, t) \doteq u_*(x, t) + L\sqrt{|x - y|^2 + (t - s)^2}, \quad (x, t) \in \overline{\mathcal{O}}$$

siendo  $L > 0$ . Por hipótesis, existe  $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in \overline{\mathcal{O}}$  tal que

$$\Phi(\tilde{x}, \tilde{t}) = \min_{(x,t) \in \overline{\mathcal{O}}} \Phi(x, t).$$

Claramente,  $(\tilde{x}, \tilde{t}) \notin \partial\mathcal{O}$  pues, en otro caso, se llegaría a la contradicción

$$\Phi(\tilde{x}, \tilde{t}) > u_*(\tilde{x}, \tilde{t}) \geq \min_{(x,t) \in \overline{\mathcal{O}}} \Phi(x, t).$$

Por otra parte, si  $(\tilde{x}, \tilde{t}) \neq (y, s)$  entonces, de la relación

$$u_*(x, t) + L\sqrt{|x - y|^2 + (t - s)^2} \geq u_*(\tilde{x}, \tilde{t}) + L\sqrt{|\tilde{x} - y|^2 + (\tilde{t} - s)^2}$$

se obtiene

$$u_*(x, t) - u_*(\tilde{x}, \tilde{t}) \geq -L \left( \sqrt{|x - y|^2 + (t - s)^2} - \sqrt{|\tilde{x} - y|^2 + (\tilde{t} - s)^2} \right),$$

de donde

$$\left( L \frac{y - \tilde{x}}{\sqrt{|\tilde{x} - y|^2 + (\tilde{t} - s)^2}}, L \frac{s - \tilde{t}}{\sqrt{|\tilde{x} - y|^2 + (\tilde{t} - s)^2}} \right) \in D^- u_*(\tilde{x}, \tilde{t}).$$

Por tanto,

$$H \left( L \frac{y - \tilde{x}}{\sqrt{|\tilde{x} - y|^2 + (\tilde{t} - s)^2}} \right) \leq L \frac{s - \tilde{t}}{\sqrt{|\tilde{x} - y|^2 + (\tilde{t} - s)^2}} < L.$$

De esta forma, si suponemos  $\tilde{x} \neq y$  entonces, de la expresión

$$\frac{H\left(L \frac{y - \tilde{x}}{\sqrt{|\tilde{x} - y|^2 + (\tilde{t} - s)^2}}\right)}{L} < 1$$

obtenemos, tomando  $L \gg 1$ , una contradicción con (4.107).<sup>14</sup> Por tanto,  $\tilde{x} = y$  y se verifica

$$u_*(y, s) \geq u_*(y, \tilde{t}) + L|\tilde{t} - s| \geq \min_{(x,t) \in \bar{O}} u_*(x, t) + L|\tilde{t} - s|.$$

Por tanto, al hacer tender  $L \rightarrow +\infty$  se obtiene

$$L|\tilde{t} - s| \rightarrow 0 \text{ si } L \rightarrow +\infty \Rightarrow |\tilde{t} - s| \rightarrow 0 \text{ si } L \rightarrow +\infty.$$

De esta forma, si  $\tilde{t} \neq s$  entonces, para todo  $(p_1, p_2) \in D^- u_*(y, s)$  se tendría

$$\begin{aligned} u_*(y, s) &\geq u_*(y, \tilde{t}) + L|\tilde{t} - s| \geq u_*(y, s) + p_2(\tilde{t} - s) + o(|\tilde{t} - s|) + L|\tilde{t} - s| \\ &\geq u_*(y, s) + (L - |p_2|)|\tilde{t} - s| + o(|\tilde{t} - s|). \end{aligned}$$

Por tanto, haciendo tender  $L \rightarrow +\infty$  en la expresión

$$L - |p_2| + \frac{o(|\tilde{t} - s|)}{|\tilde{t} - s|} \leq 0$$

obtendríamos una contradicción. Consecuentemente,  $(\tilde{x}, \tilde{t}) = (y, s)$  y, por tanto,

$$u_*(y, s) - u_*(x, t) \leq L\sqrt{|x - y|^2 + (t - s)^2}, \quad (x, t), (y, s) \in \bar{O}$$

de donde se concluye el resultado.  $\square$

<sup>14</sup>Nótese que se tiene la acotación

$$\frac{|y - \tilde{x}|}{\sqrt{|\tilde{x} - y|^2 + (\tilde{t} - s)^2}} \leq 1, \quad L > 0.$$



**Observación 4.99**

Mediante argumentos de la Programación Dinámica mostraremos, más adelante, que la función de Lax-Oleinik  $\mathcal{U}(\cdot, \cdot; (u_0)^*(\cdot))$  asociada a  $H^*$  y al dato inicial  $(u_0)^*$  es solución de viscosidad del problema (4.103).

En particular, aplicando el resultado anterior a la fórmula de Lax-Oleinik asociada al dual convexo del hamiltoniano

$$H(p) = R|p|^m, \quad p \in \mathbb{R}^N \quad (m > 1, R > 0)$$

y a la envuelta superior de un dato inicial  $u_0 \in \mathcal{L}\mathcal{A}(\mathbb{R}^N)$  verificando

$$((u_0)_*)^* = (u_0)^* \quad \text{en } \mathbb{R}^N$$

y

$$\ell \doteq \limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{((u_0)_*)^*(x)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} \in \mathbb{R}$$

obtenemos que

$$\mathcal{U}_*(\cdot, \cdot; (u_0)^*(\cdot)) \in W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$$

siendo

$$\mathbf{T}_\infty = \frac{1}{Rm^m} \left( \frac{m-1}{\ell_+} \right)^{m-1}.$$

Por tanto, como a partir de la Proposición 4.76 se sigue

$$\mathcal{U}(\cdot, \cdot; (u_0)^*(\cdot)) = \mathcal{U}_*(\cdot, \cdot; (u_0)^*(\cdot)),$$

se tiene un *efecto regularizante*.  $\square$

**4.4.1 Caso  $H(p) = R|p|^m$ ,  $p \in \mathbb{R}^N$  ( $R > 0$ ,  $m > 1$ ).**

De toda la problemática general estamos especialmente interesados en el estudio de las supersoluciones de la ecuación

$$u_t - R|\nabla u|^m = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[ \quad (4.108)$$

con  $R > 0$  y  $m \geq 1$ . Aunque los resultados han sido probados para hamiltonianos más generales, pormenorizamos éstos para un uso posterior en las estimaciones del 'gradiente'. Comenzamos con el caso  $m > 1$ .

La expresión que toma el Teorema de Verificación cuando el hamiltoniano se comporta como una función superlineal es la siguiente:

**Teorema 4.100 (Verificación)**

Sea  $u \in \mathcal{LIA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$ ,  $T \leq +\infty$ , una solución de

$$u_t \geq R|\nabla u|^m \text{ en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[ \quad (m > 1) \quad (4.109)$$

donde  $R > 0$ . Entonces, para cada  $t_0 \in ]0, T[$ , se tiene

$$u(x, t) \geq u_*(x, t) \geq u_*(y, t_0) - (m-1) \left( \frac{|x-y|^m}{Rm^m(t-t_0)} \right)^{\frac{1}{m-1}} \quad (4.110)$$

para todo  $x, y \in \mathbb{R}^N$  y  $t \in [t_0, T[$ . En particular,

$$u(x, t) \geq u_*(x, t) \geq \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \left\{ u_*(y, 0^+) - (m-1) \left( \frac{|x-y|^m}{Rm^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\} \quad (4.111)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $t \in ]0, T[$ .  $\square$

**Observación 4.101**

1. La hipótesis (4.109) puede, obviamente, generalizarse a la condición

$$\liminf_{|p| \rightarrow +\infty} \frac{H(p)}{|p|^m} \geq R \quad (R > 0, m > 1).$$

2. De (4.110) se deduce la monotonía creciente de  $u_*$  en la variable  $t$

$$u_*(x, t_1) \leq u_*(x, t_2), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad 0 < t_1 \leq t_2 < T. \quad (4.112)$$

3. La función

$$\mathcal{U}(x, t; u^0(\cdot; u_*)) \doteq \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \left\{ u^0(y; u_*) - (m-1) \left( \frac{|x-y|^m}{Rm^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\}$$

se corresponde con la *fórmula de Lax-Oleinik* asociada al conjugado del hamiltoniano  $\mathcal{H}(p) = R|p|^m$  y al dato inicial  $u^0(\cdot; u_*)$ . Nótese que para cada  $t > 0$  la función  $\mathcal{U}(x, t; u^0(\cdot; u_*))$  coincide con la  $m, k$ -sup-convolución del dato inicial  $u^0(\cdot; u_*)$  relativa al exponente  $m > 1$  para la elección

$$k = (m-1) \left( \frac{1}{Rm^m} \right)^{\frac{1}{m-1}}$$

(véase la Definición 4.36).<sup>15</sup> Recordemos también que las propiedades de la  $m, k$ -supconvolución muestran que la función  $\mathcal{U}$  es localmente lipschitziana para  $t > 0$ .  $\square$

**Observación 4.102**

Si  $u \in \mathcal{LIA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$ ,  $T \leq +\infty$ , es solución de (4.109) entonces para todo  $t_0 > 0$  se obtiene, a partir de (4.110), la estimación

$$\frac{u_*(0, t_0)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} - (m-1) \left( \frac{1}{Rm^m(t-t_0)} \right)^{\frac{1}{m-1}} \leq \frac{u_*(x, t)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t_0 \leq t < T,$$

de donde se deduce

$$-(m-1) \left( \frac{1}{Rm^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}} \leq \liminf_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{u_*(x, t)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}}, \quad 0 < t < T.$$

Además, la condición (4.110) implica

$$\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{u_*(x, t)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} \leq (m-1) \left( \frac{1}{Rm^m(T-t)} \right)^{\frac{1}{m-1}}, \quad 0 < t < T. \quad \square$$

De (4.110) se siguen algunas relaciones entre la traza inicial y el horizonte. Concretamente, para cada  $\delta > 0$ , se verifica

$$\frac{u_*(x, 0^+)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} \leq \frac{u_*(0, T-\delta)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} + (m-1) \left( \frac{1}{Rm^m(T-\delta)} \right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

Si hacemos tender  $|x| \rightarrow +\infty$  y luego  $\delta \rightarrow 0$  obtenemos:

**Teorema 4.103 (Comportamiento de la traza inicial en el infinito)**

*Supongamos la condición*

$$\liminf_{|p| \rightarrow +\infty} \frac{H(p)}{|p|^m} \geq R \quad (R > 0, m > 1) \quad (4.113)$$

<sup>15</sup>Nótese que la relación (4.111) determina la acotación de la función  $\mathcal{U}$  en los puntos  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[$  en los que  $u(x, t) < +\infty$ .

y sea  $T \leq +\infty$ . Si  $u \in \mathcal{L}\mathcal{L}\mathcal{A}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$  resuelve

$$u_t \geq H(\nabla u) \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[$$

entonces

$$\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{(u_*)^*(x, 0^+)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} \leq (m-1) \left( \frac{1}{\text{Rm}^m T} \right)^{\frac{1}{m-1}}. \quad \square \quad (4.114)$$

El resultado anterior es muy importante en el estudio de la ecuación

$$u_t \geq H(\nabla u) \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[ \quad (4.115)$$

donde el hamiltoniano  $H$  verifica la condición (4.113). Si denotamos por

$$\ell \doteq \limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{u_*(x, 0^+)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \quad (4.116)$$

se sigue la desigualdad

$$\ell \leq (m-1) \left( \frac{1}{\text{Rm}^m T} \right)^{\frac{1}{m-1}}. \quad (4.117)$$

Por tanto, una condición necesaria para que la inecuación (4.115) admita soluciones es que  $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ . En el Teorema 5.2 probaremos que esta condición es, de hecho, *necesaria y suficiente*.

A la vista de (4.117), en la *banda maximal*  $\mathbb{R}^N \times [0, \mathbf{T}_\infty[$  en la que las soluciones están definidas, pueden presentarse dos casos:

1.  $\ell \leq 0 \Rightarrow T$  no está acotado superiormente; luego,  $\mathbf{T}_\infty = +\infty$ .
2.  $\ell > 0 \Rightarrow T \leq \frac{1}{\text{Rm}^m} \left( \frac{m-1}{\ell} \right)^{m-1}$ , por lo que el *primer instante de blow-up* relativo a la ecuación (4.115) es

$$\mathbf{T}_\infty = \frac{1}{\text{Rm}^m} \left( \frac{m-1}{\ell} \right)^{m-1}. \quad (4.118)$$

Con estos comentarios podemos mejorar las estimaciones dadas en la Observación 4.102. Concretamente, se tiene el siguiente *comportamiento asintótico espacial*:

**Proposición 4.104**

Bajo la hipótesis (4.113) sea  $u \in \mathcal{LIA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$  solución de (4.115) verificando

$$\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{(u_*)^*(x, 0^+)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} = \ell > 0. \quad (4.119)$$

Entonces,

$$\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{(u_*)^*(x, t)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} = \ell \left( \frac{\mathbf{T}_\infty}{\mathbf{T}_\infty - t} \right)^{\frac{1}{m-1}}, \quad 0 < t < \mathbf{T}_\infty. \quad \square \quad (4.120)$$

**Observación 4.105**

Cuando  $\mathbf{T}_\infty = +\infty$  (es decir,  $\ell \leq 0$ ) la Observación 4.102 muestra que

$$\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{u_*(x, t)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} = 0, \quad t > 0,$$

supuesto  $u \geq 0$ .  $\square$

Además se tiene el resultado recíproco al dado en el Teorema 4.100.

**Teorema 4.106 (Caracterización de las supersoluciones ( $m > 1$ ))**

Sea  $u \in \mathcal{LIA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$ ,  $T \leq +\infty$ . Entonces  $u$  es solución de viscosidad de la ecuación

$$u_t \geq R|\nabla u|^m \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[ \quad (m > 1)$$

si y sólo si  $u$  verifica la propiedad (4.110).

**Demostración.**

A la vista del Teorema 4.100, basta demostrar su implicación recíproca. Para ello, sea  $(p_1, p_2) \in D^-u_*(x, t)$  con  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[$ . Por definición

$$u_*(y, s) \geq u_*(x, t) + p_1 \cdot (y - x) + p_2(s - t) + o(|y - x| + |s - t|). \quad (4.121)$$

Por otra parte, si  $s < t$ , la relación (4.110) determina

$$\frac{u_*(y, s)}{|y|^{\frac{m}{m-1}}} \leq \frac{u_*(x, t)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} + (m-1) \left( \frac{|x-y|^m}{Rm^m(t-s)} \right)^{\frac{1}{m-1}}. \quad (4.122)$$

Tomamos  $t = s + h$  e  $y = x + c \frac{p_1 + e}{|p_1 + e|} h$  con  $h > 0$ ,  $c > 0$  y  $e \neq -p_1$ . Así, de (4.121) y (4.122) obtenemos

$$c|p_1 + e| - p_2 + \frac{o(h)}{h} \leq (m-1) \left( \frac{1}{Rm^m} \right)^{\frac{1}{m-1}}, \quad h > 0.$$

Haciendo tender  $h \rightarrow 0$  y  $|e| \rightarrow 0$  se deduce

$$c|p_1| - p_2 \leq (m-1) \left( \frac{c^m}{Rm^m} \right)^{\frac{1}{m-1}},$$

de donde

$$|p_1| \leq \frac{p_2}{c} + (m-1) \left( \frac{c}{Rm^m} \right)^{\frac{1}{m-1}}. \quad (4.123)$$

Como la función auxiliar

$$\phi(c) = \frac{A}{c} + Bc^{\frac{1}{m-1}}, \quad c \geq 0 \quad (A, B > 0)$$

tiene las propiedades

$$\phi(0) = \lim_{c \rightarrow 0} \phi(c) = +\infty$$

y

$$\phi'(c) = 0 \Leftrightarrow c_{\min} = \left( \frac{(m-1)A}{B} \right)^{\frac{m-1}{m}},$$

el valor  $c_{\min}$  se corresponde con el mínimo (global) de la función  $\phi$ . La elección

$$A \doteq p_2 \quad \text{y} \quad B \doteq (m-1) \left( \frac{1}{Rm^m} \right)^{\frac{1}{m-1}}$$

lleva a

$$c_{\min} = mR^{\frac{1}{m}} p_2^{\frac{m-1}{m}}$$

que, reemplazado en (4.123) conduce a

$$|p_1| \leq \frac{1}{mR^{\frac{1}{m}}} p_2^{\frac{1}{m}} + \frac{m-1}{mR^{\frac{1}{m}}} p_2^{\frac{1}{m}} = \left( \frac{p_2}{R} \right)^{\frac{1}{m}},$$

obteniéndose

$$p_2 \geq R|p_1|^m. \quad \square$$

#### 4.4.2 Caso $\mathcal{H}(p) = R|p|$ , $p \in \mathbb{R}^N$ ( $R > 0$ ).

Como el caso  $m > 1$  ha sido tratado en la Sección anterior, hacemos algunos comentarios sobre las propiedades para  $m = 1$ , para el cual el hamiltoniano  $\mathcal{H}$  toma la forma

$$\mathcal{H}(p) = R|p|, \quad p \in \mathbb{R}^N$$

y se verifica

$$\mathcal{H}^*(\xi) = 0, \quad \xi \in D(\mathcal{H}^*) = \overline{\mathbf{B}}_R(0).$$

Si  $u \in \mathcal{L}\mathcal{I}\mathcal{A}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$  con  $T \leq +\infty$ , es solución de

$$u_t - R|\nabla u| \geq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[$$

entonces se verifica:

1.  $u(x, t) \geq u_*(x, t) \geq u_*(y, t_0)$ ,  $|x - y| \leq R(t - t_0)$ ,  $t_0 \leq t < T$  (*propiedad del cono de dependencia*).

2.  $u(x, t) \geq u_*(x, t) \geq \mathcal{U}(x, t; u^0(\cdot; u_*))$ ,  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T[$  siendo

$$\mathcal{U}(x, t; u^0(\cdot; u_*)) \doteq \sup_{|x-y| \leq Rt} u^0(y; u_*).$$

3.  $u^{t_0}(x; u_*) = (u^{t_0})^*(x; u_*)$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$  para  $t_0 > 0$ .

4.  $(u_*)^*(x, t) \geq \mathcal{U}(x, t; (u_*(\cdot, 0^+))^*(\cdot))$ ,  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T[$ .

Además, si  $u \in \mathcal{L}\mathcal{A}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$  es solución de

$$\begin{cases} u_t - R|\nabla u| = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

donde  $u_0 \in \mathcal{L}\mathcal{A}(\mathbb{R}^N)$  verifica (4.87) entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = (u_0)^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

y

$$(u_*)^*(x, t) \geq \mathcal{U}(x, t; ((u_0)_*)^*(\cdot)), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T[.$$

Finalmente, al igual que ocurría en el caso  $m > 1$  se tiene la siguiente caracterización de las soluciones de (4.108):

**Teorema 4.107 (Caracterización de las supersoluciones ( $m = 1$ ))**

Sea  $u \in \mathcal{LVA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$ ,  $T \leq +\infty$ . Entonces  $u$  es solución de viscosidad de la ecuación

$$u_t \geq R|\nabla u| \text{ en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[$$

si y sólo si para cada  $t_0 \in ]0, T[$  se verifica

$$u_*(x, t) \geq u_*(y, t_0), \quad |x - y| \leq R(t - t_0), \quad t_0 \leq t < T. \quad (4.124)$$

**Demostración.**

Por el Teorema 4.74 es suficiente mostrar la implicación de derecha a izquierda. Para ello, sea  $(p_1, p_2) \in D^-u_*(x, t)$  con  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[$ . Por definición

$$u_*(y, s) \geq u_*(x, t) + p_1 \cdot (y - x) + p_2(s - t) + o(|y - x| + |s - t|). \quad (4.125)$$

Por otro lado, si  $s < t$ , la relación (4.124) determina

$$u_*(y, s) \leq u_*(x, t), \quad |x - y| \leq R(t - s). \quad (4.126)$$

Tomamos  $t = s + h$  e  $y = x + R \frac{p_1 + \mathbf{e}}{|p_1 + \mathbf{e}|} h$  con  $h > 0$  y  $\mathbf{e} \neq -p_1$ . Así, de (4.125) y (4.126) obtenemos

$$R|p_1 + \mathbf{e}| - p_2 + \frac{\sigma(h)}{h} \leq 0, \quad h > 0.$$

Haciendo tender  $h \rightarrow 0$  y  $|\mathbf{e}| \rightarrow 0$  se concluye

$$p_2 \geq R|p_1|. \quad \square$$





# Capítulo 5

## Un problema de control.

### 5.1 Planteamiento del problema de control.

Consideremos el sistema dinámico

$$(S) \begin{cases} \mathcal{X}'(s) = a(s), & s > 0 \\ \mathcal{T}'(s) = -1, & s > 0 \end{cases}$$

sobre el que actúan los *controles admisibles*  $a(\cdot)$  tomados en la clase

$$\mathcal{A} = \mathcal{C}(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathbb{R}^N).^1$$

De esta manera, un *estado inicial*

$$(\mathcal{X}(0), \mathcal{T}(0)) = (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

evoluciona, a través del sistema, de la forma

$$(\mathcal{X}(s), \mathcal{T}(s)) = \left( x + \int_0^s a(\sigma) d\sigma, t - s \right) \in \mathbb{R}^N \times \overline{\mathbb{R}}_+, \quad s \geq 0.$$

A efectos prácticos, conviene utilizar la notación

$$\mathcal{X}(s) = \mathcal{X}(s; x, a(\cdot)) \quad \text{y} \quad \mathcal{T}(s) = \mathcal{T}(s; t), \quad s \geq 0.$$

---

<sup>1</sup>Lo interesante es reseñar que los elementos de  $\mathcal{A}$  son funciones definidas en  $s = 0$  e incluyendo, desde luego, a las constantes.

**Observación 5.1**

Hagamos unos comentarios inmediatos:

1.  $(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \in \mathcal{C}^1(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathbb{R}^N) \times \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+; \overline{\mathbb{R}}_+)$ .
2. Dependencia de  $\mathcal{X}$  en los controles  $a(\cdot)$ : para cada  $s > 0$  se verifica
 
$$|\mathcal{X}(s; x, a_1(\cdot)) - \mathcal{X}(s; x, a_2(\cdot))| \leq \|a_1(\cdot) - a_2(\cdot)\|_{L^1(0, s)}, \quad a_1(\cdot), a_2(\cdot) \in \mathcal{A},$$
 por tanto, la aplicación  $a(\cdot) \mapsto \mathcal{X}(s; x, a(\cdot))$  es lipschitziana en  $L^1(0, s)$ .
3. Dependencia respecto al estado inicial: para todo  $a(\cdot) \in \mathcal{A}$  y  $s > 0$  se verifica

$$\mathcal{X}(s; x, a(\cdot)) - \mathcal{X}(s; y, a(\cdot)) = x - y, \quad x, y \in \mathbb{R}^N$$

y

$$\mathcal{T}(s; t) - \mathcal{T}(s; r) = t - r, \quad t, r \geq 0. \quad \square$$

Referente a la evolución del estado vamos a considerar dos tipos de *coste*:

- un *coste interior* dado por

$$- \int_0^{\tau(x, t, a(\cdot))} \mathcal{L}(a(s)) ds$$

donde la función  $\mathcal{L} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  se denomina *lagrangiano*.<sup>2</sup>

- un *coste de frontera* de la forma

$$u_0[\mathcal{X}(\tau(x, t, a(\cdot))); x, a(\cdot)]$$

siendo  $u_0 \in \mathcal{SCS}(\mathbb{R}^N)$ .

En ambas expresiones

$$\tau(x, t, a(\cdot)) = \inf \left\{ s \geq 0 : (\mathcal{X}(s; x, a(\cdot)), \mathcal{T}(s; t)) \notin \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \right\}$$

denota el *primer instante de salida* de la trayectoria  $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  de la región  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$  que, como se aprecia, es constante en los controles y en la posición inicial. En nuestro caso, es obvio que

$$\tau(x, t, a(\cdot)) \equiv t, \quad t \geq 0.$$

---

<sup>2</sup>Utilizando la terminología de la Mecánica Clásica.

A continuación asociamos a cada control  $a(\cdot) \in \mathcal{A}$  una *función coste total*

$$J(x, t, a(\cdot)) = u_0(\mathcal{X}(t; x, a(\cdot))) - \int_0^t \mathcal{L}(a(s)) ds. \quad (5.1)$$

En la literatura del Control Optimo Determinista, (5.1) se corresponde con el denominado *criterio de tipo Bolza* que, para la elección concreta del *lagrangiano*

$$\mathcal{L}(p) = \nu |p|^\alpha, \quad p \in \mathbb{R}^N \quad (\alpha > 1)$$

con  $\nu > 0$ , toma la forma

$$J(x, t, a(\cdot)) = u_0\left(x + \int_0^t a(s) ds\right) - \nu \int_0^t |a(s)|^\alpha ds.$$

Estamos interesados en maximizar el criterio anterior, por lo que introducimos la *función coste óptimo*<sup>3</sup>

$$\mathbf{u}(x, t) = \sup_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} J(x, t, a(\cdot)), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

Uno de los objetivos básicos de la teoría de Control es caracterizar la función  $\mathbf{u}$  y determinar controles óptimos, que son aquellos en los que se realiza el supremo o, en su defecto, controles que realicen valores próximos a éste.

El siguiente resultado establece la clase de estados iniciales  $u_0$  admisibles para la existencia de la función  $\mathbf{u}$ .

### Teorema 5.2

Sea  $u_0 \in SCS(\mathbb{R}^N)$ . Entonces

$$\ell \doteq \limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{u_0(x)}{|x|^\alpha} \in \mathbb{R} \quad (5.2)$$

es una condición necesaria y suficiente para la existencia de la función coste óptimo  $\mathbf{u}$  en  $\mathbb{R}^N \times ]0, T[$  para algún  $T > 0$ .

---

<sup>3</sup>Sería más preciso denominarla función *ganancia* óptima.

**Demostración.**

Fijado  $x \in \mathbb{R}^N$ , la acotación local superior de  $u_0$  junto con la hipótesis (5.2) determinan que para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $C_\varepsilon > 0$  tal que

$$u_0(x + y) \leq (\ell^+ + \varepsilon)|x + y|^\alpha + C_\varepsilon \leq (\ell^+ + \varepsilon)(|x| + |y|)^\alpha + C_\varepsilon, \quad y \in \mathbb{R}^N$$

donde  $\ell^+ = \max\{\ell, 0\}$ . Consecuentemente, para cada  $t > 0$  y cada control  $a(\cdot) \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} J(x, t, a(\cdot)) &= u_0\left(x + \int_0^t a(s) ds\right) - \nu \int_0^t |a(s)|^\alpha ds \\ &\leq (\ell^+ + \varepsilon) \left(|x| + \left|\int_0^t a(s) ds\right|\right)^\alpha + C_\varepsilon - \nu \int_0^t |a(s)|^\alpha ds \\ &\leq (\ell^+ + \varepsilon) \left(|x| + \int_0^t |a(s)| ds\right)^\alpha - \nu \int_0^t |a(s)|^\alpha ds + C_\varepsilon \\ &= (\ell^+ + \varepsilon) \left[\int_0^t \left(\frac{|x|}{t} + |a(s)|\right) ds\right]^\alpha - \nu \int_0^t |a(s)|^\alpha ds + C_\varepsilon. \end{aligned}$$

Como  $\alpha > 1$  sabemos que

$$(r + s)^\alpha - r^\alpha \leq 2^{\alpha-1} s^\alpha, \quad r, s \geq 0$$

(ver (4.29)); además, la *desigualdad de Jensen* implica

$$\left[\int_0^t \left(\frac{|x|}{t} + |a(s)|\right) ds\right]^\alpha \leq t^{\alpha-1} \int_0^t \left(\frac{|x|}{t} + |a(s)|\right)^\alpha ds.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} J(x, t, a(\cdot)) &\leq (\ell^+ + \varepsilon) t^{\alpha-1} \int_0^t \left(\frac{|x|}{t} + |a(s)|\right)^\alpha ds - \nu \int_0^t |a(s)|^\alpha ds + C_\varepsilon \\ &\leq [(\ell^+ + \varepsilon) t^{\alpha-1} - \nu] \int_0^t |a(s)|^\alpha ds + 2^{\alpha-1} (\ell^+ + \varepsilon) |x|^\alpha + C_\varepsilon, \end{aligned}$$

con lo que

$$\mathbf{u}(x, t) \leq [(\ell^+ + \varepsilon) t^{\alpha-1} - \nu] \sup_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} \int_0^t |a(s)|^\alpha ds + 2^{\alpha-1} (\ell^+ + \varepsilon) |x|^\alpha + C_\varepsilon.$$

Claramente, el segundo miembro de esta expresión es finito si y sólo si

$$(\ell^+ + \varepsilon)t^{\alpha-1} - \nu \leq 0, \quad \varepsilon > 0$$

o, equivalentemente,

$$t \leq \left( \frac{\nu}{(\ell^+ + \varepsilon)} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} < \left( \frac{\nu}{\ell^+} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}. \quad (5.3)$$

Por tanto, para todo  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $0 \leq t < \left( \frac{\nu}{\ell^+} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$  existe  $\varepsilon \in \left] 0, \frac{\nu}{t^{\alpha-1}} - \ell^+ \right[$  tal que

$$\mathbf{u}(x, t) \leq 2^{\alpha-1}(\ell^+ + \varepsilon)|x|^\alpha + C_\varepsilon < +\infty.^4$$

Recíprocamente, si  $\mathbf{u}(x, t) < +\infty$  se tendrá, por definición,

$$\mathbf{u}(x, t) \geq u_0 \left( x + \int_0^t a(s) ds \right) - \nu \int_0^t |a(s)|^\alpha ds$$

para cualquier control  $a(\cdot) \in \mathcal{A}$ . En particular, para todo  $y \in \mathbb{R}^N$  se tiene

$$\mathbf{u}(x, t) \geq u_0(x + yt) - \nu|y|^\alpha t. \quad (5.4)$$

Con el cambio de variable  $z = x + yt$  la expresión anterior toma la forma

$$\mathbf{u}(x, t) \geq u_0(z) - \nu \left| \frac{z-x}{t} \right|^\alpha t \geq u_0(z) - \nu t^{1-\alpha} (|x| + |z|)^\alpha.$$

Consecuentemente,

$$\frac{\mathbf{u}(x, t)}{|z|^\alpha} \geq \frac{u_0(z)}{|z|^\alpha} - \nu t^{1-\alpha} \left( \frac{|x|}{|z|} + 1 \right)^\alpha.$$

Tomando límites en la expresión anterior obtenemos<sup>5</sup>

$$\ell = \limsup_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{u_0(z)}{|z|^\alpha} \leq \nu t^{1-\alpha} < +\infty \quad (5.5)$$

lo que implica la condición (5.2).  $\square$

<sup>4</sup>Nótese que la constante  $C_\varepsilon$  depende de  $t$  y, en particular,  $C_\varepsilon$  puede tender a infinito cuando  $t \rightarrow \left( \frac{\nu}{\ell^+} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ . Remitimos al Capítulo 10 para el estudio del comportamiento para tiempos grandes de  $\mathbf{u}$ .

<sup>5</sup>Claramente:  $|y| \rightarrow +\infty \Leftrightarrow |z| \rightarrow +\infty$ .

**Observación 5.3**

1. Si la función  $u_0$  tiene un comportamiento en el infinito de la forma

$$\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{u_0(x)}{|x|^{\ell^+}} = +\infty$$

entonces la función  $\mathbf{u}$  no está nunca definida en  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$ . Por tanto, a la vista del resultado anterior, en todo lo que sigue supondremos la hipótesis (5.2).

2. De la propia definición se sigue un resultado de comparación:

$$u_0(\cdot) \leq v_0(\cdot) \Rightarrow \mathbf{u}(\cdot, t) \leq \mathbf{v}(\cdot, t)$$

donde  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  vienen definidas a partir de los estados iniciales  $u_0$  y  $v_0$  respectivamente.  $\square$

La función  $\mathbf{u}(x, \cdot)$  tiene la siguiente propiedad de monotonía:

**Proposición 5.4**

Si  $u_0 \in \mathcal{SCS}(\mathbb{R}^N)$  verifica (5.2) entonces, para todo  $x \in \mathbb{R}^N$ , se tiene

$$u_0(x) \leq \mathbf{u}(x, s) \leq \mathbf{u}(x, t), \quad 0 \leq s \leq t < \left(\frac{\nu}{\ell^+}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}. \quad (5.6)$$

En particular, fijado  $x \in \mathbb{R}^N$ ,

$$\mathbf{u}(x, t) < +\infty \Rightarrow \mathbf{u}(x, s) < +\infty, \quad 0 \leq s \leq t.$$

**Demostración.**

La primera desigualdad la obtenemos tomando el control  $a(\cdot) \equiv 0$ , y para la segunda basta observar que para todo control  $a(\cdot) \in \mathcal{A}$  se verifica

$$\begin{aligned} J(x, t, a(\cdot)) &= u_0 \left( x + \int_0^t a(\sigma) d\sigma \right) - \nu \int_0^t |a(\sigma)|^\alpha d\sigma \\ &= u_0 \left( x + \int_0^s a(\sigma) d\sigma + \int_s^t a(\sigma) d\sigma \right) - \nu \left( \int_0^s |a(\sigma)|^\alpha d\sigma + \int_s^t |a(\sigma)|^\alpha d\sigma \right). \end{aligned}$$

Tomando para cada  $a(\cdot) \in \mathcal{A}$  el control

$$\tilde{a}(\sigma) = a(\sigma)\chi_{[0,s]}, \quad \sigma > 0$$

obtenemos

$$\begin{aligned} J(x, t, \tilde{a}(\cdot)) &= u_0 \left( x + \int_0^t \tilde{a}(\sigma) d\sigma \right) - \nu \int_0^t |\tilde{a}(\sigma)|^\alpha d\sigma \\ &= u_0 \left( x + \int_0^s a(\sigma) d\sigma \right) - \nu \int_0^s |a(\sigma)|^\alpha d\sigma. \end{aligned}$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, t) &= \sup_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} J(x, t, a(\cdot)) \\ &\geq \sup_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} \left\{ u_0 \left( x + \int_0^s a(\sigma) d\sigma \right) - \nu \int_0^s |a(\sigma)|^\alpha d\sigma \right\} = \mathbf{u}(x, s). \quad \square \end{aligned}$$

Con el fin de progresar en las propiedades de la función coste óptimo

$$\mathbf{u}(x, t) = \sup_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} \left\{ u_0 \left( x + \int_0^t a(s) ds \right) - \nu \int_0^t |a(s)|^\alpha ds \right\},$$

resulta muy útil la siguiente caracterización:

**Teorema 5.5 (Fórmula de representación de Lax–Oleinik)**

Si  $u_0 \in \mathcal{SCS}(\mathbb{R}^N)$ , bajo la hipótesis (5.2) se verifica

$$\mathbf{u}(x, t) = \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \left\{ u_0(z) - \nu \frac{|x - z|^\alpha}{t^{\alpha-1}} \right\}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, \left( \frac{\nu}{\ell^+} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} [ . \quad (5.7)$$

**Demostración.**

Sea  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, \left( \frac{\nu}{\ell^+} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} [$ . Como  $\nu|p|^\alpha$  es una función convexa, la desigualdad de Jensen determina

$$\mathbf{u}(x, t) \leq \sup_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} \left\{ u_0 \left( x + \int_0^t a(s) ds \right) - \nu t \left( \frac{\left| \int_0^t a(s) ds \right|}{t} \right)^\alpha \right\}$$



---


$$\leq \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \left\{ u_0(z) - \nu \frac{|x-z|^\alpha}{t^{\alpha-1}} \right\}.$$

Por otra parte, considerando para cada  $z \in \mathbb{R}^N$  controles constantes de la forma

$$a_z(s) \equiv \frac{z-x}{t}, \quad 0 < s < t$$

se verifica

$$\mathbf{u}(x, t) \geq u_0(z) - \nu t \left( \frac{|x-z|}{t} \right)^\alpha, \quad z \in \mathbb{R}^N.$$

Por tanto,

$$\mathbf{u}(x, t) \geq \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \left\{ u_0(z) - \nu \frac{|x-z|^\alpha}{t^{\alpha-1}} \right\}. \quad \square$$


---

### Observación 5.6

Los comentarios de la Parte anterior sobre la función de Lax-Oleinik expresan la conveniencia de que el dato inicial  $u_0$  sea *s.c.s.*  $\square$

### Corolario 5.7

*La fórmula de Lax-Oleinik para un estado inicial de la forma*

$$u_0(x) = \ell \left( [|x| - \sigma]_+ \right)^\alpha + \mu, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

donde  $\ell > 0$ ,  $\alpha > 1$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$  y  $\mu \in \mathbb{R}$  viene dada por

$$\mathbf{u}(x, t) = \ell \left( [|x| - \sigma]_+ \right)^\alpha \left( \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{T} - t} \right)^{\alpha-1} + \mu, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, \mathbf{T}[$$

siendo

$$\mathbf{T} \doteq \left( \frac{\nu}{\ell} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

### Demostración.

Por definición, a partir de (5.7) sabemos que para cada  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}[$  se tiene

$$\mathbf{u}(x, t) - \mu = \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \phi(z; x, t)$$

donde

$$\phi(z; x, t) = \ell \left( [|z| - \sigma]_+ \right)^\alpha - \nu \frac{|x-z|^\alpha}{t^{\alpha-1}}, \quad z \in \mathbb{R}^N.$$

Como

$$\phi(x; x, t) = \ell \left( [|x| - \sigma]_+ \right)^\alpha \geq 0$$

y

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{\phi(z; x, t)}{|z|^\alpha} = \ell - \frac{\nu}{t^{\alpha-1}} = \nu \left( \frac{1}{\mathbf{T}^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right) < 0$$

entonces tenemos garantizada la existencia de  $z_{\max} = z_{\max}(x, t) \in \mathbb{R}^N$  tal que

$$\mathbf{u}(x, t) - \mu = \phi(z_{\max}(x, t); x, t).$$

Como

$$\phi(0; x, t) = -\nu \frac{|x|^\alpha}{t^{\alpha-1}} \leq 0 \leq \phi(x; x, t)$$

entonces  $z_{\max}(x, t) \neq 0$ , por lo que

$$\nabla \phi(z_{\max}(x, t)) = 0.$$

Por otra parte,

$$\nabla \phi(z) = \alpha \ell \left( [|z| - \sigma]_+ \right)^{\alpha-1} \frac{z}{|z|} - \nu \alpha \frac{|x - z|^{\alpha-1}}{t^{\alpha-1}} \frac{x - z}{|x - z|}, \quad z \neq 0.$$

Entonces, para que  $\nabla \phi(z) = 0$  basta con que se verifique

$$\ell \left( [|z| - \sigma]_+ \right)^{\alpha-1} = \nu \frac{|x - z|^{\alpha-1}}{t^{\alpha-1}} \Leftrightarrow [|z| - \sigma]_+ = \frac{\mathbf{T}}{t} |x - z|$$

(recuérdese la definición de  $\mathbf{T}$ ). El valor crítico en el que se alcanza el máximo es

$$z_{\max} = \begin{cases} x + \frac{(|x| - \sigma)_+ t}{\mathbf{T} - t} \frac{x}{|x|} = \frac{(\mathbf{T} - t)|x| + (|x| - \sigma)_+ t}{\mathbf{T} - t} \frac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{t[-\sigma]_\pm}{\mathbf{T} - t} \mathbf{e} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

donde  $|\mathbf{e}| = 1$ . Distinguimos dos casos:

1. Si  $x \neq 0$  se verifica

$$|x - z_{\max}| = \frac{(|x| - \sigma)_+ t}{\mathbf{T} - t} = \begin{cases} \frac{(|x| - \sigma)t}{\mathbf{T} - t} & \text{si } |x| > \sigma \\ 0 & \text{si } |x| \leq \sigma \end{cases}$$

y

$$\begin{aligned} |z_{\max}| - \sigma &= \frac{(\mathbf{T} - t)(|x| - \sigma) + (|x| - \sigma)_+ t}{\mathbf{T} - t} \\ &= \begin{cases} \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{T} - t}(|x| - \sigma) & \text{si } |x| > \sigma \\ |x| - \sigma & \text{si } |x| \leq \sigma \end{cases} \end{aligned}$$

por lo que

$$[|z_{\max}| - \sigma]_+ = \begin{cases} \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{T} - t}(|x| - \sigma) & \text{si } |x| > \sigma \\ 0 & \text{si } |x| \leq \sigma. \end{cases}$$

Consecuentemente:

- (a) si  $|x| \leq \sigma$  entonces  $\mathbf{u}(x, t) = \mu$ .  
 (b) si  $|x| > \sigma$  se verifica

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, t) - \mu &= \ell \left( \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{T} - t}(|x| - \sigma) \right)^\alpha - \ell \mathbf{T}^{\alpha-1} \left( \frac{(|x| - \sigma)t}{\mathbf{T} - t} \right)^\alpha \frac{1}{t^{\alpha-1}} \\ &= \ell \frac{\mathbf{T}^{\alpha-1}}{(\mathbf{T} - t)^\alpha} (|x| - \sigma)^\alpha (\mathbf{T} - t) = \ell (|x| - \sigma)^\alpha \left( \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{T} - t} \right)^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

2. Si  $x = 0$  entonces

$$|z_{\max}| = \begin{cases} -\frac{t\sigma}{\mathbf{T} - t} & \text{si } \sigma < 0 \\ 0 & \text{si } \sigma \geq 0 \end{cases}$$

y

$$|z_{\max}| - \sigma = \frac{(\sigma + [-\sigma]_+)t - \sigma\mathbf{T}}{\mathbf{T} - t} = \begin{cases} -\sigma & \text{si } \sigma \geq 0 \\ -\frac{\mathbf{T}\sigma}{\mathbf{T} - t} & \text{si } \sigma < 0 \end{cases}$$

por lo que

$$[|z_{\max}| - \sigma]_+ = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma \geq 0 \\ -\frac{\mathbf{T}\sigma}{\mathbf{T} - t} & \text{si } \sigma < 0. \end{cases}$$

De esta forma,

- (a) si  $\sigma \geq 0$  entonces  $\mathbf{u}(x, t) = \mu$ .  
 (b) si  $\sigma < 0$  se verifica

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(0, t) - \mu &= \ell \left( -\frac{\mathbf{T}\sigma}{\mathbf{T}-t} \right)^\alpha - \ell \mathbf{T}^{\alpha-1} \left( -\frac{t\sigma}{\mathbf{T}-t} \right)^\alpha \frac{1}{t^{\alpha-1}} \\ &= \ell \left( -\frac{\sigma}{\mathbf{T}-t} \right)^\alpha \mathbf{T}^{\alpha-1} (\mathbf{T}-t) = \ell (-\sigma)^\alpha \left( \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{T}-t} \right)^{\alpha-1}. \quad \square \end{aligned}$$

Una primera consecuencia que extraemos es la descripción del comportamiento inicial.

### Proposición 5.8

Sea  $u_0$  una función s.c.s. en  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  verificando (5.2). Entonces

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0, 0^+)} \mathbf{u}(x, t) = u_0(x_0).$$

### Demostración.

Sea  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  y  $\{(x_n, t_n)\}_n \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$  tal que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n, t_n) = (x_0, 0)$ . Por definición, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $z_n = z_n(x_0, x_n, t_n) \in \mathbb{R}^N$  verificando

$$u_0(x_0) - \nu \frac{|x_n - x_0|^\alpha}{t_n^{\alpha-1}} \leq \mathbf{u}(x_n, t_n) \leq u_0(z_n) - \nu \frac{|x_n - z_n|^\alpha}{t_n^{\alpha-1}} + \frac{1}{n}. \quad (5.8)$$

La condición (5.2) y la acotación local superior de  $u_0$  determinan la existencia de una constante  $C > \max \{u_0(x_0), 0\}$  tal que

$$u_0(z) \leq (\ell^+ + 1) |z|^\alpha + C, \quad z \in \mathbb{R}^N.$$

De esta forma, de (5.8) se desprende

$$|x_n - z_n| \leq \left( \frac{t_n^{\alpha-1}}{\nu} (u_0(z_n) - u_0(x_0) + 1) + |x_n - x_0|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

es decir,

$$|x_n - z_n| \leq \left( \frac{t_n^{\alpha-1}}{\nu} \left( (\ell^+ + 1) |z_n|^\alpha + C - u_0(x_0) + 1 \right) + |x_n - x_0|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (5.9)$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} |z_n| &\leq |x_n - z_n| + |x_n - x_0| + |x_0| \\ &\leq \left( \frac{t_n^{\alpha-1}}{\nu} \left( (\ell^+ + 1) |z_n|^\alpha + C - u_0(x_0) + 1 \right) + |x_n - x_0|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} + |x_n - x_0| + |x_0|. \end{aligned}$$

Sea  $n \gg 1$  de forma que

$$\underline{\hspace{10em}} |x_n - x_0| < 1 \text{ y } t_n < \left( \frac{\nu}{2(\ell^+ + 1)} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

y consideremos la función

$$g(r) \doteq r - \left( \frac{1}{2} \left( r^\alpha + \frac{C - u_0(x_0) + 1}{\ell^+ + 1} \right) + 1 \right)^\alpha - 1 - |x_0|, \quad r \geq 0$$

que tiene las siguientes propiedades:

1.  $g \in C^1([0, +\infty[)$ ,  $g(0) < 0$  y  $\lim_{r \rightarrow +\infty} g(r) = +\infty$ .

2.  $g'(r) > 0$ ,  $r > 0$ . En efecto, basta tener en cuenta que

$$g'(r) = 1 - \frac{\alpha^2}{2} r^{\alpha-1} \left( \frac{1}{2} \left( r^\alpha + \frac{C - u_0(x_0) + 1}{\ell^+ + 1} \right) + 1 \right)^{\alpha-1}, \quad r > 0.$$

De esta forma, los resultados anteriores muestran la desigualdad

$$g(|z_n|) \leq 0, \quad n \gg 1$$

o, equivalentemente,

$$|z_n| \leq g^{-1}(0), \quad n \gg 1$$

que junto con la relación (5.9) hace que para  $n \gg 1$  se tenga

$$|x_n - z_n| \leq \left( \frac{t_n^{\alpha-1}}{\nu} \left( (\ell^+ + 1) (g^{-1}(0))^\alpha + \frac{C - u_0(x_0) + 1}{\ell^+ + 1} \right) + |x_n - x_0|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \tag{5.10}$$

pues basta observar que en el miembro derecho de la desigualdad anterior aparece el producto de una sucesión acotada por otra que tiende a cero. De esta forma, como  $u_0$  es *s.c.s.* en el punto  $x_0$ , de la expresión (5.8) se deduce

$$\begin{aligned} u_0(x_0) &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{u}(x_n, t_n) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{u}(x_n, t_n) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left\{ u_0(z_n) - \nu \frac{|x_n - z_n|^\alpha}{t_n^{\alpha-1}} + \frac{1}{n} \right\} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} u_0(z_n) = u_0(x_0), \end{aligned}$$

es decir,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{u}(x_n, t_n) = u_0(x_0). \quad \square$$

### Observación 5.9

A la vista del resultado anterior podemos ‘aclarar’ cómo se describe el comportamiento inicial. Para cada  $u_0 \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N)$  se tiene

$$\mathbf{u}(x, 0^+) \doteq \limsup_{(y,t) \rightarrow (x,0^+)} \mathbf{u}(y, t) = (u_0)^*(x) \geq u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Estos comentarios serán muy útiles al abordar problemas de Cauchy. En particular, cuando dos costes iniciales  $u_0$  y  $v_0$  son iguales en el sentido semicontinuo<sup>6</sup> entonces ambas definen la misma función coste óptimo  $\mathbf{u}$  que coincide con la fórmula de Lax–Oleinik asociada al dual convexo del hamiltoniano y al dato inicial  $(u_0)^*$ .

Esta descripción del dato inicial es compatible con la caracterización obtenida en el Corolario 5.7, pues allí, el dato inicial era una función continua.  $\square$

A efectos prácticos, se verifica la siguiente propiedad:

### Lema 5.10

Si  $u_0 \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N)$  verifica (5.2) entonces  $(u_0)^* \in \mathcal{SCS}(\mathbb{R}^N)$  también satisface (5.2).

<sup>6</sup>Recuérdese que:

$$f = g \text{ en s.c.s.} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f^* = g^*.$$

**Demostración.**

Por definición, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $C_\varepsilon > 0$  tal que

$$u_0(x) \leq (\ell^+ + \varepsilon)|x|^\alpha + C_\varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Como la función

$$\eta(x) \doteq (\ell^+ + \varepsilon)|x|^\alpha + C_\varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

es continua entonces, de la propia definición, se sigue

$$(u_0)^*(x) \leq \eta(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

concluyéndose el resultado.  $\square$

Sea  $\mathbf{T}_\infty \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  el mayor instante verificando

$$\mathbf{u}(x, t) < +\infty, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, \mathbf{T}_\infty[.$$

El siguiente resultado nos permite determinar exactamente el valor de  $\mathbf{T}_\infty$  que coincide con  $\mathbf{T}$  y ya ‘adelantamos’ en el Corolario 5.7.

**Proposición 5.11**

*Para un coste inicial  $u_0 \in \mathcal{SCS}(\mathbb{R}^N)$  con la propiedad (5.2) se verifica*

$$\mathbf{T}_\infty = \left( \frac{\nu}{\ell^+} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

**Demostración.**

Por (5.3), es claro que

$$\mathbf{T}_\infty \geq \left( \frac{\nu}{\ell^+} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Para mostrar la desigualdad en sentido contrario distinguimos dos casos:

1. Si  $\mathbf{T}_\infty < +\infty$  ( $\Rightarrow \ell > 0$ ) entonces para todo  $\varepsilon > 0$  se verifica

$$\mathbf{u}(x, \mathbf{T}_\infty - \varepsilon) < +\infty.$$

Por tanto, (5.5) lleva a

$$\ell^+ \leq \nu (\mathbf{T}_\infty - \varepsilon)^{1-\alpha}$$

de donde

$$\mathbf{T}_\infty \leq \varepsilon + \left(\frac{\nu}{\ell^+}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad \varepsilon > 0$$

por lo que, haciendo tender  $\varepsilon \rightarrow 0$ , obtenemos

$$\mathbf{T}_\infty \leq \left(\frac{\nu}{\ell^+}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

2. Si  $\mathbf{T}_\infty = +\infty$  entonces  $\mathbf{u}(x, t) < +\infty$  para todo  $t > 0$ , por lo que (5.5) implica

$$\ell^+ \leq \nu t^{1-\alpha}$$

o, equivalentemente,

$$t \leq \left(\frac{\nu}{\ell^+}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad t > 0.$$

Haciendo tender  $t \rightarrow +\infty$  se concluye  $\ell \leq 0$ .  $\square$

### Observación 5.12

1. De la caracterización anterior se desprende:  $\mathbf{T}_\infty < +\infty \Leftrightarrow \ell > 0$ .
2. Como  $\mathbf{u}(x, t) < +\infty$ ,  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, \mathbf{T}_\infty[$  y  $\mathbb{R}^N \times [0, \mathbf{T}_\infty[$  es la banda maximal de definición de  $\mathbf{u}$ , en el caso en que  $\mathbf{T}_\infty < +\infty$  al menos existirá un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  tal que

$$\mathbf{u}(x_0, \mathbf{T}_\infty) = +\infty.$$

Por esta razón,  $\mathbf{T}_\infty$  se denomina *primer instante de blow-up*.  $\square$

Cuando el dato inicial tiene un adecuado crecimiento, el *instante de blow-up*  $\mathbf{T}_\infty$  es *uniforme* como lo muestra el siguiente resultado:

### Proposición 5.13

Sea  $u_0 \in SCS(\mathbb{R}^N)$  verificando (5.2) y

$$\ell([\|x\| - \sigma_1]_+)^{\alpha} + \mu_1 \leq u_0(x) \leq \ell([\|x\| - \sigma_2]_+)^{\alpha} + \mu_2, \quad x \in \mathbb{R}^N$$



donde  $\ell > 0$ ,  $\sigma_i, \mu_i \in \mathbb{R}$ . Entonces, para todo  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, \mathbf{T}_\infty[$ , se tiene

$$\begin{aligned} \ell(|x| - \sigma_1)_+^\alpha \left( \frac{\mathbf{T}_\infty}{\mathbf{T}_\infty - t} \right)^{\alpha-1} + \mu_1 &\leq u(x, t) \\ &\leq \ell(|x| - \sigma_2)_+^\alpha \left( \frac{\mathbf{T}_\infty}{\mathbf{T}_\infty - t} \right)^{\alpha-1} + \mu_2. \end{aligned}$$

**Demostración.**

Por el Corolario 5.7 sabemos que las funciones

$$w^{(i)}(x, t) \doteq \ell(|x| - \sigma_i)_+^\alpha \left( \frac{\mathbf{T}_\infty}{\mathbf{T}_\infty - t} \right)^{\alpha-1}, \quad i = 1, 2$$

se corresponden con la fórmula de Lax-Oleinik para los datos iniciales

$$w_0^{(i)}(x) \doteq \ell(|x| - \sigma_i)_+^\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad i = 1, 2.$$

De esta forma,

$$w^{(1)}(x, t) + \mu_1 \leq u(x, t) \leq w^{(2)}(x, t) + \mu_2$$

es decir,

$$\begin{aligned} \ell(|x| - \sigma_1)_+^\alpha \left( \frac{\mathbf{T}_\infty}{\mathbf{T}_\infty - t} \right)^{\alpha-1} + \mu_1 &\leq u(x, t) \\ &\leq \ell(|x| - \sigma_2)_+^\alpha \left( \frac{\mathbf{T}_\infty}{\mathbf{T}_\infty - t} \right)^{\alpha-1} + \mu_2. \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} \ell(|x| - \sigma_1)_+^\alpha \mathbf{T}_\infty^{\alpha-1} + \mu_1 (\mathbf{T}_\infty - t)^{\alpha-1} &\leq u(x, t) (\mathbf{T}_\infty - t)^{\alpha-1} \\ &\leq \ell(|x| - \sigma_2)_+^\alpha \mathbf{T}_\infty^{\alpha-1} + \mu_2 (\mathbf{T}_\infty - t)^{\alpha-1}. \quad \square \end{aligned}$$

**Observación 5.14**

Obviamente, en las condiciones anteriores se verifica

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{|x|^\alpha} = \ell \left( \frac{\mathbf{T}_\infty}{\mathbf{T}_\infty - t} \right)^{\alpha-1}, \quad 0 \leq t < \mathbf{T}_\infty,$$

$$\begin{aligned} \ell \mathbf{T}_\infty^{\alpha-1} (||x| - \sigma_1|_+)^{\alpha} &\leq \liminf_{t \rightarrow \mathbf{T}_\infty} \mathbf{u}(x, t) (\mathbf{T}_\infty - t)^{\alpha-1} \leq \limsup_{t \rightarrow \mathbf{T}_\infty} \mathbf{u}(x, t) (\mathbf{T}_\infty - t)^{\alpha-1} \\ &\leq \ell \mathbf{T}_\infty^{\alpha-1} (||x| - \sigma_2|_+)^{\alpha}, \quad \begin{cases} x \neq 0 & \text{si } \sigma_1, \sigma_2 \geq 0 \\ x \in \mathbb{R}^N & \text{si } \sigma_1, \sigma_2 < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

y

$$\mu_1 \leq \mathbf{u}(0, t) \leq \mu_2, \quad 0 \leq t < \mathbf{T}_\infty \quad \text{si } \sigma_1, \sigma_2 \geq 0.$$

1. Cuando  $\sigma_1 \geq 0$  se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \mathbf{T}_\infty} \mathbf{u}(x, t) = +\infty, \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \mathbf{B}_{\sigma_1}(0)$$

siendo  $\mathbf{T}_\infty$  *uniforme* en  $\mathbb{R}^N \setminus \mathbf{B}_{\sigma_1}(0)$ . Además, para el caso particular

$$u_0(x) = \ell |x|^\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

con  $\alpha > 1$ , la función coste óptimo

$$\underline{\mathbf{u}(x, t) = \ell |x|^\alpha \left( \frac{\mathbf{T}_\infty}{\mathbf{T}_\infty - t} \right)^{\alpha-1}}$$

verifica

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \mathbf{T}_\infty} \mathbf{u}(x, t) (\mathbf{T}_\infty - t)^{\alpha-1} = \ell \mathbf{T}_\infty^{\alpha-1} |x|^\alpha, & x \neq 0 \\ \mathbf{u}(0, t) = 0, & 0 \leq t < \mathbf{T}_\infty. \end{cases}$$

En el Teorema 10.6 mostraremos que, de hecho, se verifica

$$\mathbf{u}(0, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \mathbf{T}_\infty \\ +\infty, & t \geq \mathbf{T}_\infty. \end{cases}$$

2. Si  $\sigma_1 < 0$  entonces

$$\lim_{t \rightarrow \mathbf{T}_\infty} \mathbf{u}(x, t) = +\infty, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

por lo que  $\mathbf{T}_\infty$  es *globalmente uniforme* en todo  $\mathbb{R}^N$ .  $\square$ 

Seguidamente veamos cómo la evolución del coste óptimo preserva la conexidad.

**Proposición 5.15**

Si  $u_0$  es convexa en algún conjunto convexo  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  entonces para cada  $t \in [0, \mathbf{T}_\infty[$  la función parcial  $\mathbf{u}(\cdot, t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es también convexa.

**Demostración.**

En efecto, al ser  $u_0$  una función convexa en  $\Omega$  se verifica

$$u_0(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda u_0(x) + (1 - \lambda)u_0(y), \quad x, y \in \Omega, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

De esta forma, para cada  $a(\cdot) \in \mathcal{A}$ ,  $t > 0$  y  $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\begin{aligned} J(\lambda x + (1 - \lambda)y, t, a(\cdot)) &= u_0 \left( \lambda x + (1 - \lambda)y + \int_0^t a(s) ds \right) - \nu \int_0^t |a(s)|^\alpha ds \\ &= u_0 \left( \lambda \left[ x + \int_0^t a(s) ds \right] + (1 - \lambda) \left[ y + \int_0^t a(s) ds \right] \right) - \nu \int_0^t |a(s)|^\alpha ds \\ &\leq \lambda u_0 \left( x + \int_0^t a(s) ds \right) + (1 - \lambda) u_0 \left( y + \int_0^t a(s) ds \right) - \nu \int_0^t |a(s)|^\alpha ds \\ &= \lambda \left[ u_0 \left( x + \int_0^t a(s) ds \right) - \nu \int_0^t |a(s)|^\alpha ds \right] \\ &\quad + (1 - \lambda) \left[ u_0 \left( y + \int_0^t a(s) ds \right) - \nu \int_0^t |a(s)|^\alpha ds \right] \\ &= \lambda J(x, t, a(\cdot)) + (1 - \lambda) J(y, t, a(\cdot)), \quad x, y \in \Omega. \end{aligned}$$

Es decir,  $J(\cdot, t, a(\cdot))$  es también una función convexa, lo que nos permite concluir que para cada  $t > 0$  y  $0 \leq \lambda \leq 1$  se tenga

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\lambda x + (1 - \lambda)y, t) &= \sup_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} J(\lambda x + (1 - \lambda)y, t, a(\cdot)) \\ &\leq \sup_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} \{ \lambda J(x, t, a(\cdot)) + (1 - \lambda) J(y, t, a(\cdot)) \} \\ &\leq \lambda \sup_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} J(x, t, a(\cdot)) + (1 - \lambda) \sup_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} J(y, t, a(\cdot)) \\ &= \lambda \mathbf{u}(x, t) + (1 - \lambda) \mathbf{u}(y, t), \quad x, y \in \Omega. \quad \square \end{aligned}$$

Por tanto, si el dato inicial  $u_0$  es convexo, la función  $\mathbf{u}(\cdot, t)$  es también convexa para cada  $t \in [0, \mathbf{T}_\infty[$ , lo que hace que sea dos veces diferenciable en casi todo punto de  $\mathbb{R}^N$  (véase el *teorema de Alexandroff* en el Apéndice B).

Veamos que, de hecho, la fórmula de representación permite abordar aspectos ‘geométricos’ para datos iniciales generales para los que se verifica un efecto regularizante del tipo anterior. En particular se deduce que la función  $\mathbf{u}$  es *semiconvexa* (consúltese la Subsección 4.2.1).

**Proposición 5.16**

Si  $u_0 \in \mathcal{SCS}(\mathbb{R}^N)$  verifica (5.2) entonces, para todo  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[$ , existe una constante  $\Lambda = \Lambda(\alpha, \nu, x, u_0) \geq 0$  de forma que

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \chi^2}(x, t) \geq -\frac{\Lambda}{t^{\alpha-1}} \quad \text{para todo } \chi \in \mathbb{R}^N \text{ con } |\chi| = 1.$$

**Demostración.**

Fijado  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[$  sea  $0 < \varepsilon \ll 1$  tal que

$$t < \left( \frac{\nu}{\ell^+ + \varepsilon} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} < \left( \frac{\nu}{\ell^+} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = \mathbf{T}_\infty$$

(véase la Proposición 5.11). De esta forma, la hipótesis (5.2) determina la existencia de  $C_\varepsilon > 0$  tal que

$$u_0(z) \leq (\ell^+ + \varepsilon)|z|^\alpha + C_\varepsilon, \quad z \in \mathbb{R}^N.$$

Por tanto, la representación (5.7) hace que se tenga

$$\mathbf{u}(x, t) \leq \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \psi_\varepsilon(z; x, t) \tag{5.11}$$

siendo

$$\psi_\varepsilon(z; x, t) \doteq (\ell^+ + \varepsilon)|z|^\alpha + C_\varepsilon - \nu \frac{|z - x|^\alpha}{t^{\alpha-1}}.$$

Claramente  $\psi_\varepsilon(\cdot; x, t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$  y

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \psi_\varepsilon(z; x, t) = -\infty.^7 \tag{5.12}$$

---

<sup>7</sup>Más precisamente,

$$\psi_\varepsilon(z; x, t) \sim \left( (\ell^+ + \varepsilon) - \frac{\nu}{t^{\alpha-1}} \right) |z|^\alpha \quad \text{si } |z| \rightarrow +\infty.$$

Consecuentemente, (5.11) y (5.12) implican la existencia de  $\delta_0 > 0$  tal que si  $0 < \delta < \delta_0$  entonces

$$\mathbf{u}(x, t) = \sup_{z \in \overline{\mathbf{B}}_{\frac{1}{\delta}}(x)} \left\{ u_0(z) - \nu \frac{|z - x|^\alpha}{t^{\alpha-1}} \right\}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[.$$

Por tanto, dado  $n \in \mathbb{N}$  existe  $z_n = z_n(x, t, \nu, \alpha, \delta) \in \overline{\mathbf{B}}_{\frac{1}{\delta}}(x)$  tal que

$$\mathbf{u}(x, t) \leq \frac{u_0(z_n) - \nu \frac{|z_n - x|^\alpha}{t^{\alpha-1}}}{1} + \frac{1}{n}.$$

Como  $|z_n| \leq \frac{1}{\delta}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , existirá  $z_0 \in \overline{\mathbf{B}}_{\frac{1}{\delta}}(x)$  y una subsucesión de  $\{z_n\}_n$  (que seguiremos denotando  $\{z_n\}_n$ ) tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z_0.$$

Sea ahora  $\chi \in \mathbb{R}^N$  con  $|\chi| = 1$  y  $h > 0$ . Entonces se verifica

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x + h\chi, t) - 2\mathbf{u}(x, t) + \mathbf{u}(x - h\chi, t) &\geq \left( u_0(z_n) - \nu \frac{|z_n - x - h\chi|^\alpha}{t^{\alpha-1}} \right) \\ &- \left( 2u_0(z_n) - 2\nu \frac{|z_n - x|^\alpha}{t^{\alpha-1}} + \frac{2}{n} \right) + \left( u_0(z_n) - \nu \frac{|z_n - x + h\chi|^\alpha}{t^{\alpha-1}} \right) \\ &= -\frac{\nu}{t^{\alpha-1}} [|z_n - x - h\chi|^\alpha - 2|z_n - x|^\alpha + |z_n - x + h\chi|^\alpha] - \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Haciendo tender  $n \rightarrow +\infty$  en la expresión anterior se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x + h\chi, t) - 2\mathbf{u}(x, t) + \mathbf{u}(x - h\chi, t) \\ \geq -\frac{\nu}{t^{\alpha-1}} [\phi(h; z_0, x) - 2\phi(0; z_0, x) + \phi(-h; z_0, x)] \end{aligned}$$

siendo

$$\phi(k; z_0, x) \doteq |z_0 - x - k\chi|^\alpha, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\phi(\pm h; z_0, x) = \phi(0; z_0, x) \pm h\phi'(0; z_0, x) + \frac{h^2}{2}\phi''(0; z_0, x) + o(h^2)$$

y

$$|\phi''(0; z_0, x)| = \alpha(\alpha - 1)|z_0 - x|^{\alpha-2}$$

se verifica

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}(x + h\chi, t) - 2\mathbf{u}(x, t) + \mathbf{u}(x - h\chi, t)}{h^2} &\geq -\frac{\nu}{t^{\alpha-1}} \left( \phi''(0; z_0, x) + \frac{o(h^2)}{h^2} \right) \\ &= -\frac{\nu}{t^{\alpha-1}} \left( \alpha(\alpha - 1)|z_0 - x|^{\alpha-2} + \frac{o(h^2)}{h^2} \right) \\ &\geq -\left( \frac{\nu\alpha(\alpha - 1)}{\delta^{\alpha-2}} + \frac{o(h^2)}{h^2} \right) \frac{1}{t^{\alpha-1}} \geq -\frac{\Lambda}{t^{\alpha-1}} \quad \text{para } 0 < h \ll 1. \quad \square \end{aligned}$$

### Observación 5.17

En la prueba anterior hemos obtenido

$$\frac{\mathbf{u}(x + h\chi, t) - 2\mathbf{u}(x, t) + \mathbf{u}(x - h\chi, t)}{h^2} \geq -\left( \frac{\nu\alpha(\alpha - 1)}{\delta^{\alpha-2}} + \frac{o(h^2)}{h^2} \right) \frac{1}{t^{\alpha-1}}$$

Esto permite determinar  $\Lambda$  en algunos casos concretos:

1. si  $\alpha = 2$  entonces  $\Lambda = 2\nu$ .
2. si  $\alpha > 2$  haciendo tender  $\delta \rightarrow 0$  se obtiene  $\Lambda = 0$ , por lo que la función  $\mathbf{u}(\cdot, t)$  es convexa.  $\square$

La lipschitzianidad local de las funciones convexas (ver [Au1] o [Au2]) permite concluir el siguiente efecto regularizante.

### Corolario 5.18

Si  $u_0 \in \mathcal{SCS}(\mathbb{R}^N)$  verifica (5.2) entonces la función  $\mathbf{u}(\cdot, t) \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$  para cada  $0 < t < \mathbf{T}_\infty$ . Además,  $\mathbf{u}(\cdot, t)$  es dos veces diferenciable en casi todo punto de  $\mathbb{R}^N$ .

### Demostración.

Como la función

$$\mathbf{u}(x, t) + \frac{k}{t^{\alpha-1}}|x|^2$$

es convexa, se verifica que

$$x \mapsto \mathbf{u}(x, t) + \frac{k}{t^{\alpha-1}}|x|^2 \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow x \mapsto \mathbf{u}(x, t) \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^N). \quad \square$$

**Observación 5.19**

Como se ve, no se requiere la hipótesis  $u_0 \in \mathcal{SCS}(\mathbb{R}^N)$  para la definición ‘interior’ de  $\mathbf{u}(\cdot, t)$  en  $\mathbb{R}^N$ . En cualquier caso, si consideramos la *traza inicial*

$$u^0(\cdot; \mathbf{u}) \doteq \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbf{u}(\cdot, t)$$

de la continuidad ‘interior’ de  $\mathbf{u}(\cdot, t)$  (por ser convexa) y de la relación

$$u_0(x) \leq \mathbf{u}(x, t), \quad t \geq 0$$

(ver (5.6)) se sigue que la sucesión  $\{\mathbf{u}(\cdot, t)\}_t$  es no decreciente, por lo que se tienen las propiedades

$$u^0(\cdot; \mathbf{u}) \in \mathcal{SCS}(\mathbb{R}^N) \quad \text{y} \quad u_0(x) \leq u^0(x; \mathbf{u}) \leq \mathbf{u}_*(x, 0^+), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Por tanto, por la Observación 5.9, se tiene

$$u_0(x) \leq u^0(x; \mathbf{u}) \leq \mathbf{u}_*(x, 0^+) = (u_0)^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Sin embargo, salvo que  $u_0 \in \mathcal{SCS}(\mathbb{R}^N)$ , no podemos concluir la igualdad

$$u^0(x; \mathbf{u}) = \mathbf{u}_*(x, 0^+) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

y, consecuentemente, la continuidad de  $\mathbf{u}(\cdot, t)$  en  $t = 0$  (véase la demostración de la Proposición 4.37).  $\square$

**Observación 5.20**

Cuando  $m = 1$ , la fórmula de Lax–Oleinik asociada al dual convexo de

$$H(p) = R|p|, \quad p \in \mathbb{R}^N \quad (R > 0)$$

y al dato inicial  $(u_0)^*$  viene dada por

$$\mathbf{u}(x, t) = \sup\{(u_0)^*(x - \xi t) : |\xi| \leq R\}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

Nótese que  $\mathbf{u}$  no tiene, en general, la regularidad anterior (véase el modelo de la llama estudiado en el Capítulo 3).  $\square$

El resultado de la Proposición 5.16 puede generalizarse al caso de una función convexa  $\mathcal{H}$  más general. Concretamente,

**Proposición 5.21**

En las condiciones del Teorema 4.94, si además

$$\mathcal{H}^* \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$$

entonces, la fórmula de Lax-Oleinik

$$u(x, t) = \sup_{y \in x + tD(\mathcal{H}^*)} \left\{ (u_0)^*(y) - t\mathcal{H}^* \left( \frac{y - x}{t} \right) \right\}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[$$

tiene la propiedad de que para todo  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[$  existe una constante  $\Lambda = \Lambda(\mathcal{H}^*, x, t, u_0) \geq 0$  de forma que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \chi^2}(x, t) \geq -\Lambda \quad \text{para todo } \chi \in \mathbb{R}^N \quad \text{con } |\chi| = 1.$$

**Demostración.**

Argumentando como en la Proposición 5.16 llegaríamos a

$$\begin{aligned} u(x + h\chi, t) - 2u(x, t) + u(x - h\chi, t) &\geq \left[ u_0(z_n) - t\mathcal{H}^* \left( \frac{z_n - x - h\chi}{t} \right) \right] \\ &\quad - \left[ 2u_0(z_n) - 2t\mathcal{H}^* \left( \frac{z_n - x}{t} \right) + \frac{2}{n} \right] + \left[ u_0(z_n) - t\mathcal{H}^* \left( \frac{z_n - x + h\chi}{t} \right) \right] \\ &= -t \left[ \mathcal{H}^* \left( \frac{z_n - x - h\chi}{t} \right) - 2\mathcal{H}^* \left( \frac{z_n - x}{t} \right) + \mathcal{H}^* \left( \frac{z_n - x + h\chi}{t} \right) \right]. \end{aligned}$$

La convexidad y regularidad de  $\mathcal{H}^*$  concluyen el resultado.  $\square$

## 5.2 Ecuación de la Programación Dinámica.

Obviamente, se plantean los problemas de caracterizar la función  $u$  y obtener el *control óptimo*, que es aquel valor  $\hat{a}_{(x,t)}(\cdot) \in \mathcal{A}$  donde se realiza el supremo, es decir,

$$u(x, t) = J(x, \hat{a}_{(x,t)}(\cdot)), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, \mathbf{T}_\infty[.$$

En una primera aproximación, introducimos la siguiente noción:



**Definición 5.22**

Dado  $\varepsilon > 0$  se dice que un control  $a(\cdot) \in \mathcal{A}$  es  $\varepsilon$ -óptimo correspondiente a un punto  $(x, t)$  si

$$\mathbf{u}(x, t) - \varepsilon \leq J(x, t, a(\cdot)).$$

**Observación 5.23**

Nótese que de la definición de  $\mathbf{u}$  se desprende la existencia de un control  $\varepsilon$ -óptimo para cada estado  $(x, t)$  del sistema. En efecto, dado  $\varepsilon > 0$  existe un control  $a_\varepsilon(\cdot) \in \mathcal{A}$  tal que

$$\mathbf{u}(x, t) - \varepsilon \leq J(x, t, a_\varepsilon(\cdot)) \leq \mathbf{u}(x, t). \quad \square$$

La herramienta fundamental que permite caracterizar la función  $\mathbf{u}$  a través de una ecuación en derivadas parciales es el siguiente resultado.<sup>8</sup>

**Teorema 5.24 (Principio de la Programación Dinámica)**

Sea  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[$ . Entonces, para cada  $0 \leq s \leq t$  se verifica

$$\mathbf{u}(x, t) = \sup_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} \left\{ \mathbf{u} \left( x + \int_0^s a(\sigma) d\sigma, t - s \right) - \nu \int_0^s |a(\sigma)|^\alpha d\sigma \right\}. \quad (5.13)$$

**Demostración.**

Veamos que la función

$$W(x, t) = \sup_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} \left\{ \mathbf{u} \left( x + \int_0^s a(\sigma) d\sigma, t - s \right) - \nu \int_0^s |a(\sigma)|^\alpha d\sigma \right\}$$

coincide con  $\mathbf{u}$ .<sup>9</sup> Consideramos el control  $\tilde{a}_\varepsilon(\sigma) = a_\varepsilon(s + \sigma)$ ,  $\sigma \geq 0$ , donde  $a_\varepsilon(\cdot)$  es un control  $\varepsilon$ -óptimo para el punto  $(x, t)$ . Es inmediato que<sup>10</sup>

$$\int_0^t |a_\varepsilon(\sigma)|^\alpha d\sigma = \int_0^s |a_\varepsilon(\sigma)|^\alpha d\sigma + \int_s^t |a_\varepsilon(\sigma)|^\alpha d\sigma$$

<sup>8</sup>Véanse los trabajos pioneros de R. Bellman, por ejemplo, en [FI-Ri].

<sup>9</sup>Recordemos que

$$\mathbf{u}(x, t) = \sup_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} J(x, t, a(\cdot)) = \sup_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} \left\{ u_0 \left( x + \int_0^t a(\sigma) d\sigma \right) - \nu \int_0^t |a(s)|^\alpha ds \right\}.$$

<sup>10</sup>Hacemos el cambio de variable  $\tilde{\sigma} = \sigma - s$ .

$$= \int_0^s |a_\varepsilon(\sigma)|^\alpha d\sigma + \int_0^{t-s} |a_\varepsilon(s+\sigma)|^\alpha d\sigma = \int_0^s |a_\varepsilon(\sigma)|^\alpha d\sigma + \int_0^{t-s} |\tilde{a}_\varepsilon(\sigma)|^\alpha d\sigma$$

y

$$x + \int_0^t a_\varepsilon(\sigma) d\sigma = x + \int_0^s a_\varepsilon(\sigma) d\sigma + \int_s^t a_\varepsilon(\sigma) d\sigma$$

$$= \left( x + \int_0^s a_\varepsilon(\sigma) d\sigma \right) + \int_0^{t-s} \tilde{a}_\varepsilon(\sigma) d\sigma.$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, t) - \varepsilon &\leq J(x, t, a_\varepsilon(\cdot)) = u_0 \left( x + \int_0^t a_\varepsilon(\sigma) d\sigma \right) - \nu \int_0^t |a_\varepsilon(\sigma)|^\alpha d\sigma \\ &= \left[ u_0 \left( \left( x + \int_0^s a_\varepsilon(\sigma) d\sigma \right) + \int_0^{t-s} \tilde{a}_\varepsilon(\sigma) d\sigma \right) - \nu \int_0^{t-s} |\tilde{a}_\varepsilon(\sigma)|^\alpha d\sigma \right] \\ &\quad - \nu \int_0^s |a_\varepsilon(\sigma)|^\alpha d\sigma = J \left( x + \int_0^s a_\varepsilon(\sigma) d\sigma, t-s, \tilde{a}_\varepsilon(\cdot) \right) - \nu \int_0^s |a_\varepsilon(\sigma)|^\alpha d\sigma \\ &\leq \sup_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} J \left( x + \int_0^s a_\varepsilon(\sigma) d\sigma, t-s, a(\cdot) \right) - \nu \int_0^s |a_\varepsilon(\sigma)|^\alpha d\sigma \\ &= \mathbf{u} \left( x + \int_0^s a_\varepsilon(\sigma) d\sigma, t-s \right) - \nu \int_0^s |a_\varepsilon(\sigma)|^\alpha d\sigma \leq W(x, t). \end{aligned}$$

Haciendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  se concluye que  $\mathbf{u} \leq W$ .

Para demostrar la otra desigualdad, dados  $a_1(\cdot), a_2(\cdot)$  controles en  $\mathcal{A}$ , consideramos el control

$$a(\sigma) = a_1(\sigma)\chi_{[0,s]} + a_2(\sigma)\chi_{[s,t]}, \quad 0 \leq \sigma \leq t$$

donde  $\chi_{[a,b]}$  denota la *función característica* del intervalo  $[a, b]$ . De esta forma, por definición

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, t) &\geq J(x, t, a(\cdot)) = u_0 \left( x + \int_0^t a(\sigma) d\sigma \right) - \nu \int_0^t |a(\sigma)|^\alpha d\sigma \\ &= u_0 \left( x + \int_0^t a(\sigma) d\sigma \right) - \nu \int_0^s |a_1(\sigma)|^\alpha d\sigma - \nu \int_s^t |a_2(\sigma)|^\alpha d\sigma \\ &= u_0 \left( x + \int_0^t a(\sigma) d\sigma \right) - \nu \int_0^s |a_1(\sigma)|^\alpha d\sigma - \nu \int_0^{t-s} |\tilde{a}_2(\sigma)|^\alpha d\sigma \end{aligned}$$

donde

$$\tilde{a}_2(\sigma) = a_2(s+\sigma), \quad 0 \leq \sigma \leq t-s.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} x + \int_0^t a(\sigma) d\sigma &= x + \int_0^s a_1(\sigma) d\sigma + \int_s^t a_2(\sigma) d\sigma \\ &= \left( x + \int_0^s a_1(\sigma) d\sigma \right) + \int_0^{t-s} \tilde{a}_2(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

De esta forma, si tomamos que  $\tilde{a}_2(\cdot)$  sea un control  $\varepsilon$ -óptimo correspondiente al punto

$$\left( x + \int_0^s a_1(\sigma) d\sigma, t - s \right),$$

regresando a la desigualdad que obtuvimos anteriormente podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, t) &\geq u_0 \left( x + \int_0^t a(\sigma) d\sigma \right) - \nu \int_0^s |a_1(\sigma)|^\alpha d\sigma - \nu \int_0^{t-s} |\tilde{a}_2(\sigma)|^\alpha d\sigma \\ &= \left[ u_0 \left( \left( x + \int_0^s a_1(\sigma) d\sigma \right) + \int_0^{t-s} \tilde{a}_2(\sigma) d\sigma \right) - \nu \int_0^{t-s} |\tilde{a}_2(\sigma)|^\alpha d\sigma \right] \\ &\quad - \nu \int_0^s |a_1(\sigma)|^\alpha d\sigma = J \left( x + \int_0^s a_1(\sigma) d\sigma, t - s, \tilde{a}_2(\cdot) \right) - \nu \int_0^s |a_1(\sigma)|^\alpha d\sigma \\ &\geq \mathbf{u} \left( x + \int_0^s a_1(\sigma) d\sigma, t - s \right) - \varepsilon - \nu \int_0^s |a_1(\sigma)|^\alpha d\sigma, \quad a_1(\cdot) \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Tomando supremo en  $a_1(\cdot) \in \mathcal{A}$  en la expresión anterior obtenemos

$$\mathbf{u}(x, t) \geq W(x, t) - \varepsilon.$$

Finalmente, haciendo tender  $\varepsilon \rightarrow 0$  concluimos  $\mathbf{u} \geq W$ .  $\square$

### Observación 5.25

De hecho se tiene que

$$\mathbf{u}(x, t) = \sup_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} \left\{ \mathbf{u} \left( x + \int_0^{s \wedge t} a(\sigma) d\sigma, t - (s \wedge t) \right) - \nu \int_0^{s \wedge t} |a(\sigma)|^\alpha d\sigma \right\}, \quad s > 0$$

donde  $s \wedge t = \min\{s, t\}$ .  $\square$

### Observación 5.26

Para generalizaciones de estos resultados y referencias clásicas, ver [Li4] o [Ev3]. Otra referencia que pone de relevancia la interacción entre las soluciones de viscosidad y la Teoría de Control es [Li-Ni].  $\square$

**Observación 5.27**

1. La relación establecida en (5.13) se conoce con el nombre de *condición de optimalidad* dado que para obtener la función coste óptimo dejamos evolucionar el sistema siguiendo una estrategia marcada por cualquier control  $a(\cdot)$  hasta un instante  $s > 0$ , *pagamos* el coste integral correspondiente y adicionalmente un coste final desde  $s$  usando el coste óptimo relativo al estado en que se encuentra el sistema en el instante  $s$  y, finalmente, tomamos el extremo superior sobre el conjunto  $\mathcal{A}$  de todos los controles.
2. Empleando la fórmula de Lax–Oleinik dada en (5.7) podemos expresar el Principio de la Programación Dinámica en la forma

$$\mathbf{u}(x, t + s; u_0(\cdot)) = \mathbf{u}(x, t; \mathbf{u}(\cdot, s))$$

es decir, el estado del sistema en el instante  $t + s$  debe ser el mismo que el que alcance el sistema desde el instante  $s$  tras haber transcurrido un intervalo de tiempo  $t$ . Este hecho, conocido como el *Principio de Huygens*, coincide con la propiedad matemática del *semigrupo* y puede ser expresado como

$$S(t + s)u_0 = S(s)[S(t)u_0]. \quad \square$$

**Observación 5.28**

En la Proposición 5.15 establecimos

$$u_0(\cdot) \text{ convexa} \Rightarrow \mathbf{u}(\cdot, t) \text{ convexa} \quad \forall t \geq 0.$$

A partir del *Principio de Optimalidad* podemos generalizar ese resultado:

$$\mathbf{u}(\cdot, s) \text{ convexa} \Rightarrow \mathbf{u}(\cdot, t) \text{ convexa} \quad \forall t \geq s. \quad \square$$

### 5.3 El problema de Cauchy.

Para relacionar la *condición de optimalidad* con las *ecuaciones de Hamilton-Jacobi*, dividiendo por  $s > 0$ , podemos escribir (5.13) en la forma

$$\sup_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} \left\{ \frac{\mathbf{u} \left( x + \int_0^s a(\sigma) d\sigma, t - s \right) - \mathbf{u}(x, t)}{s} - \frac{\nu}{s} \int_0^s |a(\sigma)|^\alpha d\sigma \right\} = 0 \quad (5.14)$$

lo que nos permite enunciar el siguiente resultado:

**Lema 5.29**

Sea  $u_0 \in \mathcal{SCS}(\mathbb{R}^N)$  verificando (5.2). En los puntos  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[$  en los que la función de coste óptimo  $\mathbf{u}$  es diferenciable, ésta verifica la ecuación

$$\mathbf{u}_t(x, t) - \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \{ z \cdot \nabla \mathbf{u}(x, t) - \nu |z|^\alpha \} = 0. \quad (5.15)$$

**Demostración.**

Como  $\mathbf{u}$  es diferenciable en  $(x, t)$ , considerando para cada  $z \in \mathbb{R}^N$  el control  $\tilde{a}(\cdot) \equiv z \in \mathcal{A}$  en (5.14) obtenemos

$$\frac{\mathbf{u}(x + zs, t - s) - \mathbf{u}(x, t)}{s} - \frac{\nu}{s} \int_0^s |z|^\alpha d\sigma \leq 0.$$

Tomando límites en la expresión anterior cuando  $s \rightarrow 0$  se tiene

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{\mathbf{u}(x + zs, t - s) - \mathbf{u}(x, t)}{s} - \frac{\nu}{s} \int_0^s |z|^\alpha d\sigma \right\} \leq 0. \quad (5.16)$$

Las funciones

$$f(s) = \nu \int_0^s |z|^\alpha d\sigma = \nu |z|^\alpha s \quad \text{y} \quad g(s) = \mathbf{u}(x + zs, t - s)$$

obviamente verifican

$$f'(s) = \nu |z|^\alpha$$

y

$$g'(s) = D\mathbf{u}(x + zs, t - s) \cdot (z, -1) = z \cdot \nabla \mathbf{u}(x + zs, t - s) - \mathbf{u}_t(x + zs, t - s),$$

con lo que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(x + zs, t - s) - \mathbf{u}(x, t)}{s} = g'(0) = z \cdot \nabla \mathbf{u}(x, t) - \mathbf{u}_t(x, t)$$

y

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{\nu}{s} \int_0^s |a(\sigma)|^\alpha d\sigma \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s) - f(0)}{s} = f'(0) = \nu |z|^\alpha.$$

De esta forma, regresando a la expresión (5.16) obtenemos

$$-\mathbf{u}_t(x, t) + z \cdot \nabla \mathbf{u}(x, t) - \nu |z|^\alpha \leq 0, \quad z \in \mathbb{R}^N$$

y, por tanto,

$$\mathbf{u}_t(x, t) - \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \{z \cdot \nabla \mathbf{u}(x, t) - \nu |z|^\alpha\} \geq 0.$$

Por otro lado

$$\sup_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} \left\{ \frac{\mathbf{u} \left( x + \int_0^s a(\sigma) d\sigma, t - s \right) - \mathbf{u}(x, t)}{s} - \frac{\nu}{s} \int_0^s |a(\sigma)|^\alpha d\sigma \right\} = 0.$$

Es decir

$$\sup_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} \left\{ \frac{\Phi(s) - \Phi(0)}{s} - \frac{\Psi(s) - \Psi(0)}{s} \right\} = 0 \quad (5.17)$$

estando las funciones  $\Phi, \Psi : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$\Phi(s; a(\cdot)) = \mathbf{u} \left( x + \int_0^s a(\sigma) d\sigma, t - s \right)$$

y

$$\Psi(s; a(\cdot)) = \nu \int_0^s |a(\sigma)|^\alpha d\sigma.$$

Claramente<sup>11</sup>

$$\Phi'(s; a(\cdot)) = \nabla \mathbf{u} \left( x + \int_0^s a(\sigma) d\sigma, t - s \right) \cdot a(s) - \mathbf{u}_t \left( x + \int_0^s a(\sigma) d\sigma, t - s \right)$$

y

$$\Psi'(s; a(\cdot)) = \nu |a(s)|^\alpha.$$

<sup>11</sup>Téngase en cuenta que  $\mathbf{u}$  es diferenciable en  $(x, t)$ .

Por tanto, (5.17) y la relación

$$\begin{cases} \Phi(s) - \Phi(0) = \Phi'(0)s + o(s; a(\cdot)) \\ \Psi(s) - \Psi(0) = \Psi'(0)s + o(s; a(\cdot)) \end{cases}$$

determinan

$$\begin{aligned} 0 &= \sup_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} \left\{ \Phi'(0) - \Psi'(0) + \frac{o(s; a(\cdot))}{s} \right\} \\ &\leq \sup_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} \{ \nabla \mathbf{u}(x, t) \cdot a(0) - \mathbf{u}_t(x, t) - \nu |a(0)|^\alpha \} + \sup_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} \left\{ \frac{o(s; a(\cdot))}{s} \right\} \\ &= \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \{ z \cdot \nabla \mathbf{u}(x, t) - \mathbf{u}_t(x, t) - \nu |z|^\alpha \} + \sup_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} \left\{ \frac{o(s; a(\cdot))}{s} \right\}. \end{aligned}$$

De esta forma, como dado  $\varepsilon > 0$  existe  $a_\varepsilon(\cdot) \in \mathcal{A}$  tal que

$$\sup_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} \left\{ \frac{o(s; a(\cdot))}{s} \right\} \leq \frac{o(s; a_\varepsilon(\cdot))}{s} + \varepsilon,$$

se verifica

$$0 \leq -\mathbf{u}_t(x, t) + \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \{ z \cdot \nabla \mathbf{u}(x, t) - \nu |z|^\alpha \} + \frac{o(s; a_\varepsilon(\cdot))}{s} + \varepsilon, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Haciendo tender  $s \rightarrow 0$  se tendrá

$$\mathbf{u}_t(x, t) - \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \{ z \cdot \nabla \mathbf{u}(x, t) - \nu |z|^\alpha \} \leq \varepsilon.$$

Como  $\varepsilon > 0$  es arbitrario, la desigualdad anterior nos permite concluir

$$\mathbf{u}_t(x, t) - \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \{ z \cdot \nabla \mathbf{u}(x, t) - \nu |z|^\alpha \} \leq 0. \quad \square$$

### Observación 5.30

1. Obviamente, en el caso particular en que  $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[)$ , ésta es una *solución clásica* de la ecuación

$$\mathbf{u}_t - \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \{ z \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu |z|^\alpha \} = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[.$$

2. Considerando la función

$$\mathcal{L}(z) = \nu|z|^\alpha, \quad z \in \mathbb{R}^N,$$

tenemos que

$$0 = \mathbf{u}_t - \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \{z \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathcal{L}(z)\} = \mathbf{u}_t - \mathcal{L}^*(\nabla \mathbf{u})$$

donde  $\mathcal{L}^*$  denota el *dual conjugado de Fenchel* de la función  $\mathcal{L}$ . Una ecuación del tipo

$$u_t - \mathcal{H}(\nabla u) = 0$$

se denomina *ecuación de Hamilton–Jacobi*, donde el *hamiltoniano* viene dado por

$$\mathcal{H}(p) = \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \{z \cdot p - \mathcal{L}(z)\} = \mathcal{L}^*(p), \quad p \in \mathbb{R}^N.$$

De una manera general, las líneas anteriores indican que asociada a toda ecuación de Hamilton–Jacobi gobernada por un hamiltoniano cóncavo se puede dar un problema de control.

3. A la vista de lo anterior, tenemos caracterizada la función  $\mathbf{u}$  de coste óptimo únicamente en los puntos en los que es diferenciable, lo que es una condición bastante restrictiva. Fundamentalmente por esta razón precisamos un concepto más general que permita interpretar que una función semicontinua (o incluso discontinua)  $\mathbf{u}$  que verifique (5.13) satisfaga la ecuación (5.15) en  $\mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[$ . Como veremos, una respuesta satisfactoria a este problema viene dada por la noción de *solución de viscosidad*.
4. En las ecuaciones anteriores, la eventual no linealidad aparece sobre los términos del gradiente, lo que las diferencia de las que aparecen en las *Leyes de conservación*.
5. Existe una conexión entre las *ecuaciones de Hamilton–Jacobi* y los *sistemas hamiltonianos de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Concretamente, el *hamiltoniano*  $\mathcal{H}$  es el dual cóncavo del *lagrangiano*  $\mathcal{L}$ , es decir

$$\mathcal{H}(x, p) = \sup_{q \in \mathbb{R}^N} \{q \cdot p - \mathcal{L}(x, q)\}, \quad x, p \in \mathbb{R}^N. \quad \square$$



La noción de solución de viscosidad permite obtener la forma más general de verificar una ecuación de Hamilton–Jacobi, ya que no requiere ninguna hipótesis sobre la diferenciabilidad de la función coste óptimo. Una vez que sabemos (gracias al Corolario 5.18) que la función  $\mathbf{u} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[)$ , con esta noción de solución, veamos la ecuación en derivadas parciales que verifica  $\mathbf{u}$ . La respuesta la proporciona el siguiente resultado.

**Proposición 5.31**

*Si  $u_0 \in \mathcal{SCS}(\mathbb{R}^N)$  verifica (5.2) entonces la función  $\mathbf{u}(x, t)$  es solución de viscosidad del problema*

$$\mathbf{u}_t - \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \{z \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu |z|^\alpha\} = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[.$$

**Demostración.**

1. Sea  $(p_1, p_2) \in D^- \mathbf{u}(x_0, t_0) \Rightarrow \exists \phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[)$  tal que  $u - \phi$  alcanza un mínimo local en el punto  $(x_0, t_0)$  y

$$(\nabla \phi(x_0, t_0), \phi_t(x_0, t_0)) = (p_1, p_2)$$

(véase el Apéndice A o la demostración de la Proposición 4.57). Por el Principio de Optimalidad para cada  $a(\cdot) \in \mathcal{A}$  y  $0 < t < t_0$  se verifica

$$\mathbf{u}(x_0, t_0) \geq \mathbf{u} \left( x_0 + \int_0^t a(s) ds, t_0 - t \right) - \nu \int_0^t |a(s)|^\alpha ds.$$

Así pues,

$$\begin{aligned} & \phi(x_0, t_0) - \phi \left( x_0 + \int_0^t a(s) ds, t_0 - t \right) \\ & \geq \mathbf{u}(x_0, t_0) - \mathbf{u} \left( x_0 + \int_0^t a(s) ds, t_0 - t \right) \geq -\nu \int_0^t |a(s)|^\alpha ds. \end{aligned}$$

Dividiendo por  $t > 0$  y tomando límites, se tiene

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(x_0, t_0) - \phi \left( x_0 + \int_0^t a(s) ds, t_0 - t \right)}{t} \geq -\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\nu}{t} \int_0^t |a(s)|^\alpha ds \right).$$

El mismo argumento que utilizamos en el Lema 5.29 conduce a

$$\phi_t(x_0, t_0) - \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \{z \cdot \nabla \phi(x_0, t_0) - \nu |z|^\alpha\} \geq 0,$$

es decir,

$$p_2 - \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \{z \cdot p_1 - \nu |z|^\alpha\} \geq 0.$$

2. Sea  $(p_1, p_2) \in D^+ \mathbf{u}(x_0, t_0) \Rightarrow \exists \phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N \times ]0, T_\infty[)$  tal que  $u - \phi$  alcanza un máximo local en el punto  $(x_0, t_0)$  y

$$(\nabla \phi(x_0, t_0), \phi_t(x_0, t_0)) = (p_1, p_2).$$

Por el Principio de Optimalidad, para cada  $t > 0$

$$\mathbf{u}(x_0, t_0) = \sup_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} \left\{ \mathbf{u} \left( x_0 + \int_0^t a(s) ds, t_0 - t \right) - \nu \int_0^t |a(s)|^\alpha ds \right\}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \sup_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} \left\{ \frac{\mathbf{u} \left( x_0 + \int_0^t a(s) ds, t_0 - t \right) - \mathbf{u}(x_0, t_0)}{t} - \frac{\nu}{t} \int_0^t |a(s)|^\alpha ds \right\} \\ &\leq \sup_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} \left\{ \frac{\phi \left( x_0 + \int_0^t a(s) ds, t_0 - t \right) - \phi(x_0, t_0)}{t} - \frac{\nu}{t} \int_0^t |a(s)|^\alpha ds \right\}. \end{aligned}$$

De nuevo, el Lema 5.29 nos permite concluir

$$\phi_t(x_0, t_0) - \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \{z \cdot \nabla \phi(x_0, t_0) - \nu |z|^\alpha\} \leq 0,$$

o, lo que es lo mismo,

$$p_2 - \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \{z \cdot p_1 - \nu |z|^\alpha\} \leq 0. \quad \square$$

A la vista de la Definición 4.59, podemos precisar la naturaleza de los problemas de valor inicial de la forma

$$\begin{cases} u_t - H(\nabla u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (5.18)$$

donde  $u_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  y  $T \leq +\infty$ .

**Definición 5.32**

Sea  $H \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$ ,  $N \geq 1$  y  $T > 0$ .

1.  $u \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$  es *subsolución fuerte de viscosidad* del problema de Cauchy (5.18) si  $u$  es solución de viscosidad de

$$u_t - H(\nabla u) \leq 0 \text{ en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[$$

y

$$u^*(x, 0^+) \leq (u_0)^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

2.  $u \in \mathcal{LIA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$  es *supersolución fuerte de viscosidad* del problema de Cauchy (5.18) si  $u$  es solución de viscosidad de

$$u_t - H(\nabla u) \geq 0 \text{ en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[$$

y

$$u_*(x, 0^+) \geq (u_0)_*(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

3.  $u \in \mathcal{LA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$  es *solución fuerte de viscosidad* del problema de Cauchy (5.18) si  $u$  es sub y supersolución fuerte de viscosidad de (5.18).
4.  $u \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$  es *subsolución débil de viscosidad* del problema de Cauchy (5.18) si  $u$  es solución de viscosidad de

$$u_t - H(\nabla u) \leq 0 \text{ en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[$$

y

$$\min \{ p_2 - H(p_1), u^*(x, 0^+) - (u_0)^*(x) \} \leq 0,$$

para todo  $(p_1, p_2) \in D^+ u^*(x, 0^+)$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ .

5.  $u \in \mathcal{LIA}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$  es *supersolución débil de viscosidad* del problema de Cauchy (5.18) si  $u$  es solución de viscosidad de

$$u_t - H(\nabla u) \geq 0 \text{ en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[$$

y

$$\max \{ p_2 - H(p_1), u_*(x, 0^+) - (u_0)_*(x) \} \geq 0$$

para todo  $(p_1, p_2) \in D^- u_*(x, 0^+)$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ .

6.  $u \in \mathcal{L}\mathcal{A}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$  es *solución débil de viscosidad* del problema de Cauchy (5.18) si  $u$  es sub y supersolución débil de viscosidad de (5.18).

**Observación 5.33**

En particular, para los casos que aquí consideramos

$$H(p) = R|p|^m, \quad p \in \mathbb{R}^N \quad (R > 0, m \geq 1)$$

(o, en general, hamiltonianos  $H$  convexos), la solución de Lax–Oleinik está unívocamente determinada por los valores semicontinuos superiores del dato inicial. Para la realización del dato inicial nos remitimos a los comentarios de la Observación 5.19.  $\square$

**Corolario 5.34**

Si  $u_0 \in \mathcal{L}\mathcal{S}\mathcal{A}(\mathbb{R}^N)$  verifica (5.2) y

$$((u_0)_*)^* = (u_0)^* \quad \text{en } \mathbb{R}^N$$

entonces la función  $\mathbf{u}(x, t)$  es la *única solución fuerte de viscosidad* del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t - \frac{\alpha - 1}{\alpha} \left( \frac{|\nabla \mathbf{u}|^\alpha}{\alpha \nu} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[ \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (5.19)$$

y verifica

$$\mathbf{u}(x, 0^+) = (u_0)^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Además,  $\mathbf{u}(\cdot, t) \in W_{\text{loc}}^{1, \infty}(\mathbb{R}^N)$  para cada  $0 < t < \mathbf{T}_\infty$ .

**Demostración.**

Considerando la función

$$\mathcal{L}(z) = \nu|z|^\alpha, \quad z \in \mathbb{R}^N,$$

por la Proposición 5.31 sabemos que  $\mathbf{u}$  es solución de viscosidad de la ecuación

$$\mathbf{u}_t - \mathcal{H}(\nabla \mathbf{u}) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[$$

donde el hamiltoniano  $\mathcal{H} = \mathcal{L}^*$  denota el dual conjugado de Fenchel de la función  $\mathcal{L}$  (véase la Observación 5.30), es decir

$$\mathcal{H}(p) = \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \{z \cdot p - \nu|z|^\alpha\}, \quad p \in \mathbb{R}^N.$$

Sea  $p \in \mathbb{R}^N$ ,  $p \neq 0$ . Claramente,

$$\mathcal{H}(p) = \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \psi(z)$$

donde

$$\psi(z) = z \cdot p - \nu|z|^\alpha. \quad (5.20)$$

Como  $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$  con

$$\psi(0) = 0 \quad \text{y} \quad \limsup_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{\psi(z)}{|z|^\alpha} = -\nu < 0$$

tenemos garantizada la existencia de un vector  $z_p \in \mathbb{R}^N$  donde la función  $\psi$  alcanza un máximo absoluto. Determinemos dicho valor; como

$$\nabla \psi(z) = p - \nu\alpha|z|^{\alpha-2}z, \quad z \in \mathbb{R}^N,$$

se tiene<sup>12</sup>

$$\nabla \psi(z) = 0 \Leftrightarrow z_p = \left( \frac{|p|}{\nu\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \frac{p}{|p|}.$$

De esta forma para cada  $p \in \mathbb{R}^N$  se tiene que<sup>13</sup>

$$\mathcal{H}(p) = \psi(z_p) = \left[ \left( \frac{1}{\nu\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - \nu \left( \frac{1}{\nu\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right] |p|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \frac{\alpha-1}{\alpha} \left( \frac{|p|^\alpha}{\nu\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Finalmente, basta aplicar el Corolario 4.96 para obtener que, de hecho,  $u$  es la única solución fuerte de (5.19) que, por el Corolario 5.18, además es localmente lipschitziana en la variable espacial.  $\square$

<sup>12</sup>Nótese que al ser  $p \neq 0 \Rightarrow z_p \neq 0$ .

<sup>13</sup>De la propia definición

$$\mathcal{H}(0) = \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \{z \cdot 0 - \nu|z|^\alpha\} = \inf_{z \in \mathbb{R}^N} \{\nu|z|^\alpha\} = 0.$$

**Observación 5.35**

Para obtener el hamiltoniano

$$\mathcal{H}(p) = R|p|^m, \quad p \in \mathbb{R}^N \quad (R > 0, m > 1)$$

basta escoger

$$\alpha = \frac{m}{m-1} \quad \text{y} \quad \nu = (m-1) \left( \frac{1}{Rm^m} \right)^{\frac{1}{m-1}}. \quad (5.21)$$

En este caso, el punto donde  $\psi$  alcanza el máximo es

$$z_p = Rm|p|^{m-2}p, \quad p \in \mathbb{R}^N. \quad \square$$

**5.3.1 Método de las características.**

Siguiendo las líneas expuestas en el Apéndice A, los *sistemas dinámicos conservativos* son aquellos que no contienen ningún elemento que disipe energía. Estos sistemas se caracterizan por medio de *hamiltonianos*  $H(x(t), p(t))$  que representan la energía total (cinética y potencial) del sistema y dependen de la posición  $x(t)$  y del momento del sistema  $p(t)$ . Por ser el sistema conservativo, se verifica

$$0 = \frac{dH}{dt}(x(t), p(t)) = \frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t))x'(t) + \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t))p'(t).$$

De esta forma, el sistema conservativo lleva asociado un *sistema hamiltoniano*

$$\begin{cases} x'(t) = -\frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t)), & x(0) = x \\ p'(t) = \frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t)), & p(0) = p_0(x). \end{cases} \quad (5.22)$$

Por tanto, si consideraremos el problema

$$\begin{cases} u_t(x, t) - H(\nabla u(x, t)) = 0, & x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

el sistema conservativo asociado está caracterizado para cada función  $u \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$  por un hamiltoniano  $H$  que depende del momento del sistema

$p(t)$  ( $= \nabla u(x(t), t)$ ) y es independiente de la posición del mismo  $x(t)$ . Así, de (5.22) se deduce

$$p(t) \equiv \text{cte}, \quad t \geq 0.$$

Consecuentemente,

$$\nabla u(x(t), t) = p(t) = p(0) = \nabla u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0$$

y

$$\begin{cases} x'(t) = \nabla H(p(t)) = \nabla H(\nabla u_0(x)) \\ x(0) = x. \end{cases}$$

Es decir, las *características* vienen determinadas por la expresión

$$\mathcal{X}(x, t) = x - t \nabla H(\nabla u_0(x)), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0. \quad (5.23)$$

Por tanto, si  $u$  satisface la ecuación en derivadas parciales se tendrá, para cada  $x \in \mathbb{R}^N$ , la relación

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(\mathcal{X}(x, t), t) &= \nabla u(\mathcal{X}(x, t), t) \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t}(x, t) + u_t(\mathcal{X}(x, t), t) \\ &= -\nabla H(\nabla u_0(x)) \cdot \nabla u_0(x) + H(\nabla u_0(x)). \end{aligned}$$

Si además  $u$  satisface el dato inicial entonces

$$u(\mathcal{X}(x, t), t) = u_0(x) - t [\nabla H(\nabla u_0(x)) \cdot \nabla u_0(x) - H(\nabla u_0(x))] \quad (5.24)$$

para  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $t \geq 0$ .

En este caso, las características  $\mathcal{X}(x, t) = x - t \nabla H(\nabla u_0(x))$  no son, en general, paralelas y su pendiente depende de la forma del hamiltoniano  $H$  (concretamente de  $\nabla H$ , como en el caso lineal) y ahora también de  $u_0$  y  $x$  (en concreto, de  $\nabla u_0(x)$ ). En consecuencia, para el caso no lineal, las características *dependen*, en general, de *todo el problema* (EDP, contorno y dato inicial) y no solamente de la EDP como ocurría en el caso lineal.

Apliquemos los resultados anteriores a las siguientes elecciones de hamiltoniano y dato inicial:

$$H(p) = R|p|^m, \quad p \in \mathbb{R}^N \quad (R > 0, \quad m > 1)$$

y

$$u_0(x) = A|x|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (A > 0, \alpha \in \mathbb{R}).$$

En esta situación las expresiones (5.23) y (5.24) toman, respectivamente, la forma

$$\mathcal{X}(x, t) = x - \operatorname{Rm}(A(1 + \alpha))^{m-1} |x|^{\alpha(m-1)-1} t x$$

y

$$u(\mathcal{X}(x, t), t) = A|x|^{1+\alpha} - \operatorname{Rm}(m-1)(A(1 + \alpha))^m |x|^{\alpha m} t.$$

Como se observa, en general, la aplicación

$$x \mapsto \mathcal{X}(x, t)$$

no es biyectiva. En cambio, para la elección

$$\alpha = \frac{1}{m-1}$$

las características vienen dadas como

$$\mathcal{X}(x, t) = \left( 1 - \operatorname{Rm} \left( \frac{Am}{m-1} \right)^{m-1} t \right) x.$$

Si definimos

$$\mathbf{T}_\infty \doteq \frac{1}{\operatorname{Rm}^m} \left( \frac{m-1}{A} \right)^{m-1}$$

obtenemos la expresión equivalente

$$\mathcal{X}(x, t) = \left( 1 - \frac{t}{\mathbf{T}_\infty} \right) x = \frac{\mathbf{T}_\infty - t}{\mathbf{T}_\infty} x, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad 0 \leq t < \mathbf{T}_\infty.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} u \left( \frac{\mathbf{T}_\infty - t}{\mathbf{T}_\infty} x, t \right) &= A|x|^{\frac{m}{m-1}} - \operatorname{Rm}(m-1) \left( \frac{Am}{m-1} \right)^m |x|^{\frac{m}{m-1}} t \\ &= A \left( 1 - \frac{t}{\mathbf{T}_\infty} \right) |x|^{\frac{m}{m-1}} = A \frac{\mathbf{T}_\infty - t}{\mathbf{T}_\infty} |x|^{\frac{m}{m-1}}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad 0 \leq t < \mathbf{T}_\infty. \end{aligned}$$

Con el cambio de variable

$$z \doteq \frac{\mathbf{T}_\infty - t}{\mathbf{T}_\infty} x \Rightarrow x = \frac{\mathbf{T}_\infty}{\mathbf{T}_\infty - t} z$$



obtenemos la fórmula explícita de la solución

$$u(z, t) = A|z|^{\frac{m}{m-1}} \left( \frac{\mathbf{T}_\infty}{\mathbf{T}_\infty - t} \right)^{\frac{1}{m-1}}$$

en toda la banda maximal  $\mathbb{R}^N \times [0, \mathbf{T}_\infty[$ .

## 5.4 Algunas extensiones a hamiltonianos convexos.

En términos generales, para cada  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$ , podemos considerar la *función coste óptimo*

$$\mathbf{u}(x, t) = \sup_{a(\cdot)} J(x, t, a(\cdot)), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

correspondiente a optimizar el *criterio de tipo Bolza*

$$J(x, t, a(\cdot)) = u_0(\mathcal{X}(t; x, a(\cdot))) - \int_0^t \mathbf{H}^*(a(s)) ds$$

sobre el *sistema dinámico determinista*

$$\mathcal{X}(t; x, a(\cdot)) = x + \int_0^t \mathbf{H}^*(a(s)) ds$$

sujeta a la *acción de los controles*  $a(\cdot) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; D(\mathbf{H}^*))$ . Se trata, por tanto, de optimizar un criterio con *coste en la frontera*  $\mathbb{R}^N \times \{0\}$

$$u_0(\mathcal{X}(t; x, a(\cdot)))$$

y otro *coste interior* dado por

$$- \int_0^t \mathbf{H}^*(a(s)) ds$$

donde el *lagrangiano*  $\mathbf{H}^*$  es el dual convexo del hamiltoniano  $\mathbf{H} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ .

En la situación anterior, la *desigualdad de Jensen* determina

$$\int_0^t \mathbf{H}^*(a(s)) ds \geq t \mathbf{H}^* \left( \frac{1}{t} \int_0^t a(s) ds \right),$$

con lo que

$$\mathbf{u}(x, t) \leq \sup_{a(\cdot)} \left\{ u_0(\mathcal{X}(t; x, a(\cdot))) - tH^* \left( \frac{\mathcal{X}(t; x, a(\cdot)) - x}{t} \right) \right\}.$$

Puesto que  $t$  permanece fijo, se verifica

$$\mathbf{u}(x, t) \leq \sup_{z \in x+tD(H^*)} \left\{ u_0(z) - tH^* \left( \frac{z-x}{t} \right) \right\}.$$

Por otra parte, para controles constantes

$$a_z = \frac{z-x}{t}$$

se obtiene

$$\sup_{z \in x+tD(H^*)} \left\{ u_0(z) - tH^* \left( \frac{z-x}{t} \right) \right\} \leq \mathbf{u}(x, t).$$

Por tanto, concluimos la caracterización

$$\mathbf{u}(x, t) = \sup_{z \in x+tD(H^*)} \left\{ u_0(z) - tH^* \left( \frac{x-z}{t} \right) \right\}$$

de la función coste óptimo, que coincide con la función de Lax–Oleinik  $\mathcal{U}$  relativa a  $H^*$  y  $u_0$ . Se puede, en consecuencia, extender a  $\mathbf{u}$  las propiedades y comentarios efectuados anteriormente de  $\mathcal{U}$ , que aquí omitimos.

Con vistas a la caracterización de  $\mathbf{u}$  (es decir,  $\mathcal{U}$ ) mediante ecuaciones en derivadas parciales, el resultado clave es:

**Teorema 5.36 (Principio de la Programación Dinámica)**

*Fijado  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[$ , se verifica*

$$\mathcal{U}(x, t) = \sup_{a(\cdot)} \left\{ \mathcal{U} \left( x + \int_0^s a(\sigma) d\sigma, t-s \right) - \int_0^s H^*(a(\sigma)) d\sigma \right\}. \quad \square$$

Con este resultado, se obtiene la desigualdad

$$\mathcal{U}_*(x, t) \geq \mathcal{U}_*(x + \xi s, t-s) - sH^*(\xi)$$

para  $\xi \in D(H^*)$ . Por otro lado, para todo  $(p_1, p_2) \in D^-\mathcal{U}_*(x, t)$ , se verifica

$$\mathcal{U}_*(x + \xi s, t-s) \geq \mathcal{U}_*(x, t) + sp_1 \cdot \xi - sp_2 + o((1+|\xi|)s).$$

De esta forma, las relaciones anteriores conducen a

$$0 \geq p_1 \cdot \xi - p_2 - H^*(\xi) + \frac{o((1 + |\xi|)s)}{s}, \quad (p_1, p_2) \in D^- \mathcal{U}_*(x, t),$$

de donde haciendo tender  $s \rightarrow 0$  se concluye

$$p_2 \geq \sup_{\xi \in D(H^*)} \{p_1 \cdot \xi - H^*(\xi)\} = H^{**}(p_1).$$

Por otra parte, para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $a_\varepsilon(\cdot) \in D(H^*)$  tal que

$$\mathcal{U}^*(x, t) \leq \mathcal{U}^* \left( x + \int_0^\varepsilon a_\varepsilon(\sigma) d\sigma, t - \varepsilon \right) - \int_0^\varepsilon H^*(a_\varepsilon(\sigma)) d\sigma + \varepsilon^2$$

para  $0 < \varepsilon < t$ . Luego, si  $(p_1, p_2) \in D^+ \mathcal{U}^*(x, t)$ , como

$$\mathcal{U}^* \left( x + \int_0^\varepsilon a_\varepsilon(\sigma) d\sigma, t - \varepsilon \right) \leq \mathcal{U}^*(x, t) + \int_0^\varepsilon p_1 \cdot a_\varepsilon(\sigma) d\sigma - \varepsilon p_2 + o(\varepsilon),$$

se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon (p_1 \cdot a_\varepsilon(\sigma) - H^*(a_\varepsilon(\sigma))) d\sigma - p_2 + \varepsilon + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \\ &\leq \sup_{\xi \in D(H^*)} \{p_1 \cdot \xi - H^*(\xi)\} - p_2 + \varepsilon + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} = H^{**}(p_1) - p_2 + \varepsilon + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Así pues, haciendo tender  $\varepsilon \rightarrow 0$  obtenemos

$$p_2 \leq H^{**}(p_1), \quad (p_1, p_2) \in D^+ \mathcal{U}^*(x, t).$$

Por tanto, hemos obtenido que la función de Lax-Oleinik  $\mathcal{U}$  es solución de viscosidad de la ecuación

$$u_t - H^{**}(\nabla u) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[.$$

En particular, cuando  $H$  es una función convexa, el *teorema de Fenchel-Moreau* hace que  $\mathcal{U}$  sea solución de viscosidad de

$$u_t - H(\nabla u) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[.$$

## 5.5 Regularidad de las soluciones.

Aunque ya hemos probado que la función de Lax–Oleinik es, para  $m > 1$ , localmente lipschitziana, las líneas que siguen pretenden ratificar lo anterior, estimando localmente los conjuntos semidiferenciales, lo que tendrá una gran importancia a la hora de utilizar la propiedad del cono de dependencia cuando  $m > 1$ .

Como ya hemos demostrado, la función  $u$  es solución fuerte de viscosidad del problema

$$\begin{cases} u_t - \mathcal{H}(\nabla u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

donde el hamiltoniano viene definido por la relación

$$\mathcal{H}(p) = \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \{z \cdot p - \nu|z|^\alpha\} = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \left( \frac{|p|^\alpha}{\nu\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = R|p|^m, \quad p \in \mathbb{R}^N$$

con  $R > 0$  y  $m > 1$  para los valores

$$\alpha = \frac{m}{m-1} \quad \text{y} \quad \nu = (m-1) \left( \frac{1}{Rm^m} \right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

En lo que sigue, extendemos el estudio anterior a problemas más generales de la forma

$$\begin{cases} u_t - H(\nabla u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (5.25)$$

donde  $H : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ . El primer resultado que mostramos es:

### Proposición 5.37

Sea  $u_0 \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N)$  verificando

$$u_0 \geq -c \quad \text{en } \mathbb{R}^N \quad (c \geq 0) \quad (5.26)$$

y

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{u_0(\xi)}{|\xi|^{\frac{m}{m-1}}} = \ell > 0. \quad (5.27)$$

Si  $u \in \mathcal{LIA}(\mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[)$  es una supersolución fuerte de (5.25) donde  $H$  verifica

$$H(p) \geq R|p|^m + k_1, \quad p \in \mathbb{R}^N \quad (5.28)$$

con  $R > 0$ ,  $m > 1$  y  $k_1 \in \mathbb{R}$ , entonces para cada  $0 < t < \mathbf{T}_\infty$ , la función  $u_*(\cdot, t)$  es solución de viscosidad de la ecuación

$$R(m-1)(\mathbf{T}_\infty - t)|\nabla u_*(\cdot, t)|^m \leq u_*(\cdot, t) - k_1 t + c \text{ en } \mathbb{R}^N. \quad (5.29)$$

**Demostración.**

Recuérdese (ver la Observación 5.12) que  $\ell > 0$  determina  $\mathbf{T}_\infty < +\infty$ . Para cada  $0 < t < \mathbf{T}_\infty$  consideremos la función parcial

$$w^t(x) \doteq w(x, t).$$

Por el Teorema 4.100 y (5.4) (para la elección de  $\alpha$  y  $\nu$  dada en (5.21)) sabemos

$$(u^t)_*(x) - k_1 t \geq \mathbf{u}^t(x) \geq u_0(x + zt) - (m-1) \left( \frac{|z|^m}{Rm^m} \right)^{\frac{1}{m-1}} t, \quad z \in \mathbb{R}^N. \quad (5.30)$$

La condición (5.27) determina

$$u_0(\xi) \sim \ell |\xi|^{\frac{m}{m-1}} \text{ si } |\xi| \rightarrow +\infty$$

por lo que para todo  $z \in \mathbb{R}^N$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$  se verifica

$$u_0(\xi + x + z(t - \lambda)) \sim \ell |\xi + x + z(t - \lambda)|^{\frac{m}{m-1}} \sim \ell |\xi|^{\frac{m}{m-1}} \text{ si } |\xi| \rightarrow +\infty,$$

es decir,

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{u_0(\xi + x + z(t - \lambda))}{|\xi|^{\frac{m}{m-1}}} = \ell.$$

Por tanto, dado  $\varepsilon > 0$  existirá  $k(\varepsilon) > 0$  tal que

$$\begin{cases} u_0(\xi + x + z(t - \lambda)) \geq (\ell - \varepsilon) |\xi|^{\frac{m}{m-1}} & \text{si } |\xi| > k(\varepsilon) \\ u_0(\xi + x + z(t - \lambda)) \geq C_\varepsilon(x, t) & \text{si } |\xi| \leq k(\varepsilon) \end{cases}$$

donde

$$C_\varepsilon(x, t) = \inf_{|\xi| \leq k(\varepsilon)} u_0(\xi + x + z(t - \lambda)) \geq -c$$

(ver (5.26)) por lo que podemos afirmar

$$u_0(\xi + x + z(t - \lambda)) \geq (\ell - \varepsilon) |\xi|^{\frac{m}{m-1}} - c, \quad \xi, z \in \mathbb{R}^N, \lambda \in \mathbb{R}.$$

En particular, tomando  $\xi = \lambda z$ , se tiene

$$u_0(x + zt) \geq (\ell - \varepsilon)|\lambda z|^{\frac{m}{m-1}} - c, \quad z \in \mathbb{R}^N, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Regresando a la expresión (5.30) obtenemos

$$\begin{aligned} (u^t)_*(x) - k_1 t &\geq (\ell - \varepsilon)|\lambda z|^{\frac{m}{m-1}} - (m-1) \left( \frac{|z|^m}{Rm^m} \right)^{\frac{1}{m-1}} t - c \\ &= \left( (\ell - \varepsilon)\lambda^{\frac{m}{m-1}} - (m-1) \left( \frac{1}{Rm^m} \right)^{\frac{1}{m-1}} t \right) |z|^{\frac{m}{m-1}} - c, \quad z \in \mathbb{R}^N, \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Finalmente, si  $p \in D^+((u^t)_*(x))$ , tomamos como  $z$  el máximo global de la función  $\psi$  definida en (5.20), es decir,

$$z_p = Rm|p|^{m-2}p$$

(véase la Observación 5.35) y

$$\lambda \doteq \left( \frac{m-1}{\ell - \varepsilon} \left( \frac{1}{Rm^m} \right)^{\frac{1}{m-1}} \mathbf{T}_\infty \right)^{\frac{m-1}{m}}.$$

Así obtenemos

$$\begin{aligned} (u^t)_*(x) - k_1 t + c &\geq (m-1) \left( \frac{1}{Rm^m} \right)^{\frac{1}{m-1}} (\mathbf{T}_\infty - t) |z_p|^{\frac{m}{m-1}} \\ &= (m-1) \left( \frac{1}{Rm^m} \right)^{\frac{1}{m-1}} (Rm)^{\frac{m}{m-1}} (\mathbf{T}_\infty - t) |p|^m = R(m-1)(\mathbf{T}_\infty - t) |p|^m. \quad \square \end{aligned}$$

### Corolario 5.38

Sea  $u_0 \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N)$  un dato inicial con las propiedades (5.26), (5.27) y  $H$  un hamiltoniano verificando (5.28) con  $R > 0$ ,  $m > 1$  y  $k_1 \in \mathbb{R}$ . Entonces, para toda  $u \in \mathcal{LIA}(\mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[)$  supersolución fuerte de (5.25) se tiene la acotación

$$|p_1|^m \leq \frac{u_*(x, t) - k_1 t + c}{R(m-1)(\mathbf{T}_\infty - t)^2} \quad (p_1, p_2) \in D^+u_*(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[.$$

Consecuentemente,  $u_* \in \text{Lip}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[)$ .  $\square$

**Corolario 5.39**

*Supongamos que*

$$R|p|^m + k_1 \leq H(p) \leq R|p|^m + k_2 \quad (5.31)$$

con  $R > 0$ ,  $m > 1$ ,  $k_1 \leq k_2$  y  $u_0 \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N)$  verifica (5.26) y (5.27). Si  $u \in \mathcal{LA}(\mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[)$  es una solución fuerte de (5.25) con la propiedad

$$(u_*)^* = u^* \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}[ \quad (5.32)$$

entonces, para cada  $x \in \mathbb{R}^N$ , la función parcial

$$t \mapsto u^*(x, t)(\mathbf{T}_\infty - t)^{\frac{1}{m-1}} + f(t; k_1, k_2, c, m), \quad 0 < t < \mathbf{T}_\infty$$

es no creciente, siendo

$$f(t) \doteq \begin{cases} [\alpha(k_1, k_2, m)(\mathbf{T}_\infty - t) + (c - k_1 \mathbf{T}_\infty)] (\mathbf{T}_\infty - t)^{\frac{1}{m-1}} & \text{si } m \neq 2 \\ \frac{k_2(\mathbf{T}_\infty - t)^2 + k_1 t^2}{2} - ct & \text{si } m = 2 \end{cases}$$

donde

$$\alpha(k_1, k_2, m) \doteq \frac{k_1 + (m-1)k_2}{m}. \quad (5.33)$$

En particular, para cada  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, \mathbf{T}_\infty[$ , se verifica

$$u(x, t) \leq u^*(x, t) \leq (u_0)^*(x) \left( \frac{\mathbf{T}_\infty}{\mathbf{T}_\infty - t} \right)^{\frac{1}{m-1}} + g(t; k_1, k_2, c, m)$$

siendo

$$g(t) \doteq \frac{f(0) - f(t)}{(\mathbf{T}_\infty - t)^{\frac{1}{m-1}}}, \quad 0 \leq t < \mathbf{T}_\infty$$

es decir,

$$g(t) = \begin{cases} [(\alpha - k_1)\mathbf{T}_\infty + c] \left[ \left( \frac{\mathbf{T}_\infty}{\mathbf{T}_\infty - t} \right)^{\frac{1}{m-1}} - 1 \right] + \alpha t & \text{si } m \neq 2 \\ \frac{2(c + k_2 \mathbf{T}_\infty) - (k_1 + k_2)t}{2} \frac{t}{\mathbf{T}_\infty - t} & \text{si } m = 2 \end{cases}$$

donde  $\alpha = \alpha(k_1, k_2, m)$  viene dado en (5.33).

**Demostración.**

A partir de la Proposición 5.37 tenemos la siguiente acotación del conjunto superdiferencial

$$|p|^m \leq \frac{(u^t)_*(x) - k_1 t + c}{R(m-1)(\mathbf{T}_\infty - t)}, \quad p \in D^+ \left( (u^t)_* \right)^*(x). \quad (5.34)$$

Denotemos por  $\mathcal{P}_1$  a la *proyección* sobre la primera variable. A partir de la inclusión

$$\mathcal{P}_1 \left( D^+(u_*)^*(x, t) \right) \subset D^+ \left( (u^t)_* \right)^*(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[,^{14}$$

se obtiene

$$H(p_1) \leq R|p_1|^m + k_2 \leq \frac{u_*(x, t) - k_1 t + c}{(m-1)(\mathbf{T}_\infty - t)} + k_2, \quad (p_1, p_2) \in D^+(u_*)^*(x, t).$$

La hipótesis (5.32) permite escribir la expresión anterior en la forma

$$p_2 \leq H(p_1) \leq \frac{u(x, t) - k_1 t + c}{(m-1)(\mathbf{T}_\infty - t)} + k_2, \quad (p_1, p_2) \in D^+ u^*(x, t)$$

de donde, multiplicando la anterior expresión por  $(\mathbf{T}_\infty - t)^{\frac{1}{m-1}}$ , se llega a

$$\begin{aligned} & k_2 (\mathbf{T}_\infty - t)^{\frac{1}{m-1}} - \frac{k_1 t - c}{m-1} (\mathbf{T}_\infty - t)^{\frac{2-m}{m-1}} \\ & \geq p_2 (\mathbf{T}_\infty - t)^{\frac{1}{m-1}} - \frac{u(x, t)}{m-1} (\mathbf{T}_\infty - t)^{\frac{2-m}{m-1}} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ u(x, t) (\mathbf{T}_\infty - t)^{\frac{1}{m-1}} \right]. \end{aligned}$$

Por tanto, si  $0 < t_1 \leq t_2 < \mathbf{T}_\infty$ , integrando entre  $t_1$  y  $t_2$  se verifica:<sup>15</sup>

<sup>14</sup>Sea  $(p_1, p_2) \in D^+ w(x, t) \Rightarrow w(y, s) \leq w(x, t) + p_1 \cdot (y-x) + p_2(s-t) + o(|x-y| + |s-t|)$ . En particular, si  $s = t$  entonces  $w^t(y) \leq w^t(x) + p_1 \cdot (y-x) + o(|x-y|) \Rightarrow p_1 \in D^+ w^t(x)$ .

<sup>15</sup>Téngase en cuenta que

$$\int (\mathbf{T}_\infty - t)^{\frac{1}{m-1}} dt = -\frac{m-1}{m} (\mathbf{T}_\infty - t)^{\frac{m}{m-1}},$$

$$\int (\mathbf{T}_\infty - t)^{\frac{2-m}{m-1}} dt = \begin{cases} -(m-1)(\mathbf{T}_\infty - t)^{\frac{1}{m-1}} & \text{si } m \neq 2 \\ t & \text{si } m = 2 \end{cases}$$

y

$$\int t (\mathbf{T}_\infty - t)^{\frac{2-m}{m-1}} dt = \begin{cases} -\frac{m-1}{m} (t + (m-1)\mathbf{T}_\infty) (\mathbf{T}_\infty - t)^{\frac{1}{m-1}} & \text{si } m \neq 2 \\ \frac{t^2}{2} & \text{si } m = 2. \end{cases}$$



1. si  $m \neq 2$  :

$$\begin{aligned} & u^*(x, t_2)(\mathbf{T}_\infty - t_2)^{\frac{1}{m-1}} - u^*(x, t_1)(\mathbf{T}_\infty - t_1)^{\frac{1}{m-1}} \\ & \leq -k_2 \frac{m-1}{m} \left[ (\mathbf{T}_\infty - t_2)^{\frac{m}{m-1}} - (\mathbf{T}_\infty - t_1)^{\frac{m}{m-1}} \right] \\ & + \frac{k_1}{m} \left[ (t_2 + (m-1)\mathbf{T}_\infty)(\mathbf{T}_\infty - t_2)^{\frac{1}{m-1}} - (t_1 + (m-1)\mathbf{T}_\infty)(\mathbf{T}_\infty - t_1)^{\frac{1}{m-1}} \right] \\ & - c \left[ (\mathbf{T}_\infty - t_2)^{\frac{1}{m-1}} - (\mathbf{T}_\infty - t_1)^{\frac{1}{m-1}} \right]. \end{aligned}$$

2. si  $m = 2$  :

$$\begin{aligned} & u^*(x, t_2)(\mathbf{T}_\infty - t_2) - u^*(x, t_1)(\mathbf{T}_\infty - t_1) \\ & \leq -\frac{k_2}{2} \left[ (\mathbf{T}_\infty - t_2)^2 - (\mathbf{T}_\infty - t_1)^2 \right] - \frac{k_1}{2} (t_2^2 - t_1^2) + c(t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Para mostrar la segunda parte del resultado basta tener en cuenta que

$$u^*(x, t)(\mathbf{T}_\infty - t)^{\frac{1}{m-1}} \leq (u_0)^*(x) \mathbf{T}_\infty^{\frac{1}{m-1}} + (\mathbf{T}_\infty - t)^{\frac{1}{m-1}} g(t). \quad \square$$

#### Observación 5.40

Nótese que, cuando  $k_1 = k_2 = 0$ , por el Teorema 4.100 y la monotonía en  $t$  de  $\mathbf{u}$ , para todo  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, \mathbf{T}_\infty[$  se tiene

$$0 \leq (u_0)^*(x) + c \leq \mathbf{u}(x, t) + c \leq ((u_0)^*(x) + c) \left( \frac{\mathbf{T}_\infty}{\mathbf{T}_\infty - t} \right)^{\frac{1}{m-1}}. \quad \square$$

Culminamos los resultados anteriores con una *estimación del gradiente*.

#### Corolario 5.41 (Cota del gradiente)

Sea  $u_0 \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N)$  verificando (5.26), (5.27) y  $u \in \mathcal{LA}(\mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[)$  una solución fuerte de (5.25) con la propiedad (5.32) donde  $H$  verifica (5.31). Entonces para todo  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[$  y  $(p_1, p_2) \in D^+ u^*(x, t)$  se verifica

$$|p_1|^m \leq \frac{(u_0)^*(x)}{R(m-1)} \left( \frac{\mathbf{T}_\infty}{(\mathbf{T}_\infty - t)^m} \right)^{\frac{1}{m-1}} + \frac{g(t) - k_1 t + c}{R(m-1)(\mathbf{T}_\infty - t)} \quad (5.35)$$

y

$$p_2 \leq \frac{(u_0)^*(x)}{m-1} \left( \frac{\mathbf{T}_\infty}{(\mathbf{T}_\infty - t)^m} \right)^{\frac{1}{m-1}} + \frac{g(t) - k_1 t + c}{(m-1)(\mathbf{T}_\infty - t)} + k_2. \quad (5.36)$$

**Demostración.**

La desigualdad (5.35) se sigue sustituyendo en (5.34) la función  $g$  dada en el Corolario 5.39. Finalmente, (5.36) se obtiene de la relación

$$p_2 \leq H(p_1) \leq R|p_1|^m + k_2. \quad \square$$

**Observación 5.42**

Otras estimaciones del gradiente vía la viscosidad evanescente han sido obtenidas por otros autores (ver, por ejemplo, [Li-Sou-Va]). No obstante, nuestra estimación es directa, es decir, no requiere ningún resultado auxiliar de comparación.  $\square$

Veamos a continuación una estimación del gradiente para datos iniciales verificando

$$\limsup_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{u_0(\xi)}{|\xi|^{\frac{m}{m-1}}} = 0 \quad (5.37)$$

para los cuales, como sabemos, las soluciones del problema de Cauchy correspondiente van a estar definidas para todo instante de tiempo  $t \geq 0$ .

**Proposición 5.43**

Sea  $u_0 \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N)$  verificando (5.37) y consideremos la solución de Lax-Oleinik  $\mathbf{u}(x, t)$  del problema

$$\begin{cases} u_t - R|\nabla u|^m = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (5.38)$$

Para cada  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$  y  $(p_1, p_2) \in D^+ \mathbf{u}(x, t)$  existe  $\varepsilon > 0$  y  $C_\varepsilon = C_\varepsilon(u_0(x), \varepsilon) \geq 0$  tal que

$$|p_1| \leq \left( \frac{\varepsilon|x|^{\frac{m}{m-1}} + C_\varepsilon - u_0(x)}{R \left[ (m-1) - \varepsilon(2Rm^m t)^{\frac{1}{m-1}} \right] t} \right)^{\frac{1}{m}}$$

y

$$p_2 \leq \frac{\varepsilon|x|^{\frac{m}{m-1}} + C_\varepsilon - u_0(x)}{\left[ (m-1) - \varepsilon(2Rm^m t)^{\frac{1}{m-1}} \right] t}.$$

**Demostración.**

Aplicando el Teorema 4.43 con

$$k \doteq (m-1) \left( \frac{1}{Rm^m} \right)^{\frac{1}{m-1}}$$

a la función parcial

$$\mathbf{u}^t(\cdot) = \mathbf{u}(\cdot, t), \quad t \geq 0,$$

para todo  $p_1 \in D^+ \mathbf{u}^t(x)$  se verifica

$$u_0(x) \leq \mathbf{u}^t(x) = u_0 \left( x - Rmt|p_1|^{m-2}p_1 \right) - R(m-1)t|p_1|^m. \quad (5.39)$$

Sea  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño para que  $t < \mathbf{T}_\infty^\varepsilon$ , donde

$$\mathbf{T}_\infty^\varepsilon \doteq \frac{1}{Rm^m} \left( \frac{m-1}{\varepsilon} \right)^{m-1}.$$

La condición (5.37) junto con la acotación local superior de  $u_0$  hacen que exista  $C_\varepsilon > 0$  tal que

$$(u_0)^*(y) \leq \varepsilon|y|^{\frac{m}{m-1}} + C_\varepsilon, \quad y \in \mathbb{R}^N.$$

De esta forma, de las relaciones anteriores se obtiene

$$R(m-1)t|p_1|^m \leq \varepsilon \left| x - Rmt|p_1|^{m-2}p_1 \right|^{\frac{m}{m-1}} + C_\varepsilon - u_0(x).$$

Por otro lado, la desigualdad

$$(r+s)^{\frac{m}{m-1}} - r^{\frac{m}{m-1}} \leq 2^{\frac{1}{m-1}} s^{\frac{m}{m-1}}, \quad r, s \geq 0$$

(véase (4.39)) conduce a

$$R(m-1)t|p_1|^m \leq \varepsilon \left( |x|^{\frac{m}{m-1}} + 2^{\frac{1}{m-1}} (Rmt)^m |p_1|^m \right) + C_\varepsilon - u_0(x).$$

Por tanto,

$$\left[ R(m-1)t - 2^{\frac{1}{m-1}} \varepsilon (Rmt)^m \right] |p_1|^m \leq \varepsilon |x|^{\frac{m}{m-1}} + C_\varepsilon - u_0(x),$$

de donde se sigue el resultado.<sup>16</sup>  $\square$

Los casos en los que el dato inicial  $u_0$  es globalmente lipschitziano o acotado en  $\mathbb{R}^N$ , merecen una atención especial. Bajo supuestos de comparación como los ya obtenidos y los que probaremos a partir de la propiedad del cono de dependencia, se obtienen los siguientes resultados:

**Teorema 5.44**

Sean  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  funciones convexas, s.c.i. y  $u_0 \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N)$  verificando

$$\mathcal{H}_2(\nabla u_0) - \mathcal{H}_1(\nabla u_0) \leq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \quad (5.40)$$

en el sentido de la viscosidad. Si  $u \in \mathcal{LA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$ ,  $T > 0$ , es solución fuerte de viscosidad del problema

$$\begin{cases} u_t - \mathcal{H}_1(\nabla u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

entonces  $u$  es solución de viscosidad de la ecuación

$$\mathcal{H}_2(\nabla u) - u_t \leq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[.$$

**Demostración.**

Por el Teorema de Fenchel–Moreau

$$\mathcal{H}_2(p) = \mathcal{H}_2^{**}(p) = \sup_{\xi} \{p \cdot \xi - \mathcal{H}_2^*(\xi)\}, \quad p \in \mathbb{R}^N.$$

Así, para todo  $\xi \in D(\mathcal{H}_2^*)$ , la relación (5.40) determina

$$\xi \cdot \nabla u_0 - \mathcal{H}_1(\nabla u_0) - \mathcal{H}_2^*(\xi) \leq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N. \quad (5.41)$$

Fijado  $\xi \in D(\mathcal{H}_2^*)$  consideramos la función

$$w(x, t) \doteq u_*(x - t\xi, t) + t\mathcal{H}_2^*(\xi).$$

---

<sup>16</sup>Nótese que

$$R(m-1)t - 2^{\frac{1}{m-1}} \varepsilon (Rmt)^{\frac{m}{m-1}} \geq 0 \Leftrightarrow t \leq \frac{1}{2} \mathbf{T}_{\infty}^{\varepsilon}.$$

Para todo  $(p_1^w, p_2^w) \in D^- w_*(x, t)$  existe  $(p_1^u, p_2^u) \in D^- u_*(x - t\xi, t)$  tal que

$$\begin{aligned} p_2^w &= p_2^u - \xi \cdot p_1^u + \mathcal{H}_2^*(\xi) \geq \mathcal{H}_1(p_1^u) - \xi \cdot p_1^u + \mathcal{H}_2^*(\xi) \\ &= \mathcal{H}_1(p_1^w) - \xi \cdot p_1^w + \mathcal{H}_2^*(\xi), \end{aligned}$$

es decir,

$$w_t - \mathcal{F}(\nabla w) \geq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[$$

donde

$$\mathcal{F}(p) \doteq \mathcal{H}_1(p) - \xi \cdot p + \mathcal{H}_2^*(\xi), \quad p \in \mathbb{R}^N$$

es una función convexa en  $\mathbb{R}^N$ . Como, por otra parte, se verifica

$$w_*(x, 0^+) = u_*(x, 0^+) \geq (u_0)_*(x), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

y

$$-\mathcal{F}(\nabla(u_0)^*) \leq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[$$

(véase (5.41)) entonces

$$(u_0)^*(x) \leq w(x, t) = u_*(x - t\xi, t) + t\mathcal{H}_2^*(\xi), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T]. \quad (5.42)$$

Dado  $h > 0$  sea ahora

$$\phi(x, t) = u_*(x - h\xi, t + h) + h\mathcal{H}_2^*(\xi), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T],$$

que verifica

$$\phi_t - \mathcal{H}_1(\nabla \phi) \geq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[$$

y, a partir de (5.42),

$$\phi(x, 0) = w(x, h) \geq (u_0)^*(x) \geq (u_0)_*(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} u^*(x, t) &\leq \phi(x, t) = u_*(x - h\xi, t + h) + h\mathcal{H}_2^*(\xi) \\ &\leq u^*(x - h\xi, t + h) + h\mathcal{H}_2^*(\xi), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T], \quad h > 0. \end{aligned} \quad (5.43)$$

---

<sup>17</sup>Con un cambio de variable se obtiene

$$u^*(x + h\xi, t - h) \leq u_*(x, t) + h\mathcal{H}_2^*(\xi), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad 0 < h < t$$

por lo que tomando  $(p_1, p_2) \in D^- u_*(x, t)$  se llega a

$$u_t - \mathcal{H}_2(\nabla u) \geq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[.$$

De esta forma, si  $(p_1, p_2) \in D^+ u^*(x, t)$ , entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq u^*(x - h\xi, t + h) - u^*(x, t) + h\mathcal{H}_2^*(\xi) \\ &\leq h(p_2 - \xi \cdot p_1 + \mathcal{H}_2^*(\xi)) + o((1 + |\xi|)h), \quad h > 0. \end{aligned}$$

Dividiendo la expresión anterior por  $h$  y haciendo tender  $h \rightarrow 0$  se verifica

$$\xi \cdot p_1 - \mathcal{H}_2^*(\xi) - p_2 \leq 0, \quad \xi \in D(\mathcal{H}_2^*).$$

Finalmente, tomando supremo en  $\xi \in D(\mathcal{H}_2^*)$  y aplicando de nuevo el Teorema de Fenchel–Moreau, se concluye

$$\mathcal{H}_2(p_1) = \mathcal{H}_2^{**}(p_1) \leq p_2. \quad \square$$

#### Corolario 5.45

Si  $u_0 \in \text{Lip}(\mathbb{R}^N)$  la única solución fuerte de viscosidad  $u \in \mathcal{L}\mathcal{A}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$  del problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t = R|\nabla u|^m & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (5.43)$$

donde  $R > 0$  y  $m > 1$  verifica  $u(\cdot, t) \in \text{Lip}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$  para todo  $t \geq 0$  con la misma constante de lipschitzianidad que  $u_0$ .

#### Demostración.

Ante todo, como  $u_0 \in \text{Lip}(\mathbb{R}^N)$  entonces tiene un crecimiento a lo sumo lineal en el infinito. En efecto, denotando por  $L > 0$  a la constante de lipschitzianidad de  $u_0$  se verifica

$$u_0(x) \leq u_0(0) + L|x| \leq M(1 + |x|), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

siendo  $M \doteq \max\{u_0(0), L\}$ . Por tanto,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} \frac{u_0(x)}{1 + |x|} < +\infty.$$

De esta forma,

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{u_0(x)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left( \frac{u_0(x)}{1 + |x|} \frac{1 + |x|}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} \right) = 0$$

y, por tanto, el problema (5.43) tiene una única solución definida en todo el semiespacio  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$  determinada por la fórmula de Lax–Oleinik de la que sabemos que la función parcial  $t \mapsto \mathbf{u}(\cdot, t) \in W_{loc}^{1,\infty}$  y, en particular,  $\mathbf{u} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$  (véase el Corolario 5.18). Además, como se verifica que existe  $L > 0$  tal que

$$|\nabla u_0| \leq L \text{ en } \mathbb{R}^N,$$

tomamos

$$\mathcal{H}_1(p) \doteq R|p|^m \text{ y } \mathcal{H}_2(p) \doteq \mu|p|^\sigma$$

donde  $\mu > 0$  y  $\sigma > m$  verifican la relación

$$\left(\frac{R}{\mu}\right)^{\frac{1}{\sigma-m}} = L.$$

De esta forma,

$$\mathcal{H}_2(\nabla u_0) = \mu|\nabla u_0|^\sigma \leq R|\nabla u_0|^m = \mathcal{H}_1(\nabla u_0) \text{ en } \mathbb{R}^N.$$

Aplicando el Teorema 5.44 obtenemos que  $\mathbf{u}$  es solución de

$$\mu|\nabla u|^\sigma \leq u_t \text{ en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

Como por otra parte  $\mathbf{u}$  satisface

$$u_t = R|\nabla u|^m \text{ en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+,$$

para cada  $(p_1, p_2) \in D^+ \mathbf{u}(x, t)$  se verifica

$$\mu|p_1|^\sigma \leq p_2 = R|p_1|^m,$$

de donde

$$|p_1| \leq \left(\frac{R}{\mu}\right)^{\frac{1}{\sigma-m}} = L.$$

El Lema 9.8 que mostraremos en el Capítulo 9 concluye la prueba.  $\square$

#### Observación 5.46

El Teorema 5.44 puede generalizarse de la siguiente forma. Sean  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  funciones convexas, *s.c.i.* y  $u_0 \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N)$  solución de viscosidad de la ecuación

$$\mathcal{H}_2(\nabla u_0) - \mathcal{H}_1(\nabla u_0) \leq 0 \text{ en } \mathbb{R}^N$$

de forma que existe  $\beta > 0$  tal que

$$\mu \doteq \limsup_{|p| \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{H}_2(p)}{\mathcal{H}_1(p)|p|^\beta} \in ]0, +\infty[ \quad (5.44)$$

y sea  $u \in \mathcal{L}\mathcal{A}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$ ,  $T > 0$ , solución fuerte de viscosidad del problema

$$\begin{cases} u_t - \mathcal{H}_1(\nabla u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Entonces, de (5.44) se deduce que para cada  $\varepsilon \in ]0, \mu[$  existe  $\underline{C}_\varepsilon \geq 0$  tal que

$$\frac{\mathcal{H}_2(p)}{\mathcal{H}_1(p)} \geq (\mu - \varepsilon)|p|^\beta - C_\varepsilon, \quad p \in \mathbb{R}^N$$

y del Teorema 5.44 sabemos que, formalmente, se verifica

$$\mathcal{H}_2(\nabla u) \leq u_t = \mathcal{H}_1(\nabla u) \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[.$$

Por tanto,

$$1 \geq \frac{\mathcal{H}_2(\nabla u)}{\mathcal{H}_1(\nabla u)} \geq (\mu - \varepsilon)|\nabla u|^\beta - C_\varepsilon,$$

de donde se obtiene la siguiente acotación del gradiente

$$|\nabla u| \leq \left( \frac{1 + C_\varepsilon}{\mu - \varepsilon} \right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

En particular, si  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  verifican además

$$\mathcal{H}_1(p) \geq 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{H}_2(p) \geq 0, \quad p \in \mathbb{R}^N$$

entonces  $C_\varepsilon = 0$  y, por tanto,

$$|\nabla u| \leq \left( \frac{1}{\mu} \right)^{\frac{1}{\beta}}. \quad \square$$

Busquemos estimaciones superiores de  $u$  para datos iniciales lipschitzianos.



**Proposición 5.47**

Sea  $u_0 \in \text{Lip}(\mathbb{R}^N)$  y  $u \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$  una subsolución fuerte del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - \mathcal{H}(\nabla u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

donde  $\mathcal{H} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  es una función conveza y s.c.i. verificando

$$\limsup_{|p| \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{H}(p)}{|p|^m} \leq R \quad (m > 1, R > 0). \quad (5.45)$$

Entonces, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $C_\varepsilon = C_\varepsilon(\mathcal{H}) > 0$  tal que

$$u(x, t) \leq u^*(x, t) \leq u_0(x) + [(R + \varepsilon)L^m + C_\varepsilon]t, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0$$

donde  $L > 0$  es la constante de lipschitzianidad de  $u_0$ .

En particular, si

$$\mathcal{H}(p) \leq R|p|^m + k, \quad p \in \mathbb{R}^N \quad (k \in \mathbb{R})$$

entonces

$$u(x, t) \leq u^*(x, t) \leq u_0(x) + [RL^m + k]t, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

**Demostración.**

Fijado  $\varepsilon > 0$ , la hipótesis (5.45) implica la existencia de  $C_\varepsilon = C_\varepsilon(\mathcal{H}) > 0$  tal que

$$\mathcal{H}(p) \leq (R + \varepsilon)|p|^m + C_\varepsilon, \quad p \in \mathbb{R}^N.$$

De esta forma, la función lipschitziana

$$v(x, t) = u_0(x) + [(R + \varepsilon)L^m + C_\varepsilon]t, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0$$

verifica

$$v_t - \mathcal{H}(\nabla v) = (R + \varepsilon)L^m + C_\varepsilon - \mathcal{H}(\nabla u_0) \geq (R + \varepsilon)(L^m - |\nabla u_0|^m) \geq 0$$

y

$$v(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Por tanto,

$$u(x, t) \leq u^*(x, t) \leq v(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0. \quad \square$$

Teniendo en cuenta que para el hamiltoniano

$$\mathcal{H}(p) = R|p|^m + k, \quad p \in \mathbb{R}^N \quad (k \in \mathbb{R})$$

la función lipschitziana

$$w(x, t) = L|x| + [RL^m + k]t + d, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0 \quad (L > 0, \quad d \in \mathbb{R})$$

verifica en el sentido de la viscosidad

$$w_t - \mathcal{H}(\nabla w) = RL^m + k - \mathcal{H}\left(L \frac{x}{|x|}\right) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+,^{18}$$

podemos enunciar el siguiente resultado:

**Corolario 5.48**

*Sea  $u$  la solución de Lax-Oleinik del problema*

$$\begin{cases} u_t = R|\nabla u|^m + k & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

donde  $u_0 \in \text{Lip}(\mathbb{R}^N)$ . Entonces:

1. si  $u_0(x) \geq L|x| + d$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ , se verifica

$$u(x, t) \geq L|x| + [LR^m + k]t + d, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

2. si  $u_0(x) \leq L|x| + d$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ , se tiene

$$u(x, t) \leq L|x| + [LR^m + k]t + d, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

En particular, cuando

$$u_0(x) = L|x| + d, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

tenemos la expresión explícita de la solución

$$u(x, t) = L|x| + [LR^m + k]t + d, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0. \quad \square$$

<sup>18</sup>Téngase en cuenta que  $D^-w(0, t) = [-L, L]$  y  $D^+w(0, t) = \emptyset$ .

Tratemos, a continuación, los datos iniciales  $u_0$  acotados.

**Proposición 5.49**

Sea  $u_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  acotado superiormente y consideremos la solución de Lax-Oleinik  $\mathbf{u}(x, t)$  del problema (5.38). Entonces, para cada  $x \in \mathbb{R}^N$ , la función parcial  $t \mapsto \mathbf{u}(x, t)$  es solución de viscosidad de la ecuación

$$u_t(x, \cdot) \leq \frac{\sup u_0 - u_0(x)}{(m-1)t} \quad \text{en } ]0, +\infty[.$$

En particular, si se verifica

$$u_0(x) \geq -c, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

para algún  $c \geq 0$ , entonces  $\mathbf{u}$  es solución de

$$u_t(x, \cdot) \leq \frac{\|u_0\|_\infty + c}{(m-1)t} \quad \text{en } ]0, +\infty[.$$

**Demostración.**

Como en la demostración de la Proposición 5.43 (véase (5.39)), para todo  $(p_1, p_2) \in D^+ \mathbf{u}(x, t)$  se verifica

$$\begin{aligned} u_0(x) \leq \mathbf{u}(x, t) &= u_0(x - Rmt|p_1|^{m-2}p_1) - R(m-1)t|p_1|^m \\ &\leq \sup u_0 - (m-1)p_2t, \end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado.  $\square$

También se verifica:

**Teorema 5.50**

Sea  $\mathcal{H} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa, s.c.i. y  $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ . Entonces, cualquier solución fuerte  $u \in \mathcal{LA}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$  del problema

$$\begin{cases} u_t = \mathcal{H}(\nabla u) & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (5.46)$$

verifica

$$\inf_{\mathbb{R}^N} u_0 + \mathcal{H}(0)t \leq u(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} u_0 + \mathcal{H}(0)t, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

Por tanto, para cada  $x \in \mathbb{R}^N$  se tiene

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t} = \mathcal{H}(0) \quad \text{si } \mathcal{H}(0) \neq 0$$

e

$$\inf_{\mathbb{R}^N} u_0 \leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} u_0 \quad \text{si } \mathcal{H}(0) = 0.$$

### Demostración.

Basta considerar las funciones regulares

$$\begin{cases} \underline{u}(x, t) \doteq \inf u_0 + \mathcal{H}(0)t \\ \bar{u}(x, t) \doteq \sup u_0 + \mathcal{H}(0)t \end{cases}$$

que son soluciones de viscosidad de la ecuación

$$u_t = \mathcal{H}(\nabla u) \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

Puesto que

$$\inf u_0 \leq u_0(x) \leq \sup u_0, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

entonces, para todo  $x \in \mathbb{R}^N$ , se verifica

$$\underline{u}(x, 0) = \inf u_0 \leq (u_0)_*(x) \leq u_0(x) \leq (u_0)^*(x) \leq \sup u_0 = \bar{u}(x, 0),$$

de donde se sigue el resultado.  $\square$

La estimación anterior puede ser mejorada cuando el dato inicial verifica

$$\mathcal{H}(0) \leq \mathcal{H}(\nabla u_0) \quad \text{en } \mathbb{R}^N \tag{5.47}$$

en el sentido de la viscosidad, como mostramos a continuación.

### Corolario 5.51

Sea  $\mathcal{H} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa, s.c.i. verificando (5.47) y  $u_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  acotado superiormente. Entonces, para cualquier solución fuerte  $u$  de viscosidad del problema (5.46) se tiene la acotación

$$u_0(x) + \mathcal{H}(0)t \leq u(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} u_0 + \mathcal{H}(0)t, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0. \tag{5.48}$$

En particular,

$$\sup_{\mathbb{R}^N} \{u(x, t) - \mathcal{H}(0)t\} = \sup_{\mathbb{R}^N} u_0, \quad t \geq 0.$$

Si además se verifica

$$u_0(x_0) \geq u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

podemos determinar la evolución del máximo global de  $u_0$ . Concretamente,

$$u(x_0, t) = u_0(x_0) + \mathcal{H}(0)t, \quad t \geq 0. \quad (5.49)$$

### Demostración.

Basta tener en cuenta que la función

$$\underline{u}(x, t) \doteq u_0(x) + \mathcal{H}(0)t, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0$$

verifica

$$\begin{cases} \underline{u}_t - \mathcal{H}(\nabla \underline{u}) = \mathcal{H}(0) - \mathcal{H}(\nabla u_0) \leq 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ \underline{u}(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

y aplicar el resultado anterior. La última afirmación se sigue de (5.48), pues

$$u_0(x_0) = \sup_{\mathbb{R}^N} u_0. \quad \square$$

### Observación 5.52

De la relación (5.49) se deduce

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x_0, t) = u_0(x_0).$$

Nótese que, para la solución de Lax-Oleinik  $\mathbf{u}$  se verifica

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbf{u}(x, t) = (u_0)^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Ello no implica ninguna contradicción, pues a partir de la Observación 4.16 sabemos que una función es *s.c.s.* en los puntos en los alcanza un máximo local. Por tanto,  $u_0(x_0) = (u_0)^*(x_0)$ .  $\square$

Centremos nuestra atención en la elección

$$\mathcal{H}(p) = R|p|^m, \quad p \in \mathbb{R}^N \quad (R > 0, m > 1)$$

para la que podemos precisar el comportamiento asintótico de las soluciones cuando los datos iniciales están acotados superiormente.

**Proposición 5.53**

Sea  $u_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  acotado superiormente y  $u$  una solución fuerte de viscosidad del problema (5.38). Entonces,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = \sup_{\mathbb{R}^N} u_0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

En particular, si

$$u_0(x_0) = \sup_{\mathbb{R}^N} u_0$$

entonces

$$0 \leq u_0(x_0) - u(x, t) \leq (m-1) \left( \frac{|x - x_0|^m}{Rm^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0,$$

$$0 \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} (u_0(x_0) - u(x, t)) t^{\frac{1}{m-1}} \leq (m-1) \left( \frac{|x - x_0|^m}{Rm^m} \right)^{\frac{1}{m-1}}, \quad x \neq x_0,$$

y

$$u(x_0, t) = u_0(x_0), \quad t \geq 0.$$

**Demostración.**

La elección de  $\mathcal{H}$  lleva a que podamos aplicar el Corolario 5.51 y, por tanto

$$u_0(x) \leq u(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} u_0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

Como  $u_t \geq 0$  entonces la función  $t \mapsto u(\cdot, t)$  es creciente, por lo que existe

$$u_\infty(x) \doteq \lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

y, además,

$$u_0(x) \leq u_\infty(x) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} u_0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (5.50)$$

de donde, tomando supremos en  $\mathbb{R}^N$  se deduce

$$u_\infty(x) \equiv \sup_{\mathbb{R}^N} u_0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

La segunda parte del resultado se obtiene a partir de las soluciones de similitud empleadas en el Teorema 4.100.<sup>19</sup>  $\square$

<sup>19</sup>De nuevo, recuérdese que los máximos locales son puntos en los que la función es s.e.s.



# Capítulo 6

## El cono de dependencia.

Dedicamos este Capítulo al estudio del *cono de dependencia* que tiene una importancia relevante en este tipo de ecuaciones. En [Cr-Li2] e [Is5] se aborda, esencialmente, el caso de hamiltonianos lipschitzianos. Presentamos aquí una forma directa de obtener esa propiedad para hamiltonianos más generales. Resaltamos que sólo utilizaremos *métodos intrínsecamente hiperbólicos*.

### 6.1 Hamiltonianos lipschitzianos.

El resultado fundamental es el siguiente:

#### Teorema 6.1 (Cono de dependencia)

Sea  $H : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  un hamiltoniano verificando

$$|H(p) - H(q)| \leq R|p - q|, \quad p, q \in \mathbb{R}^N \quad (R > 0) \quad (6.1)$$

y dos funciones  $v \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$  y  $u \in \mathcal{LIA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$  soluciones de

$$v_t \leq H(\nabla v) \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[$$

y

$$u_t \geq H(\nabla u) \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[,$$

respectivamente, para algún  $T \leq +\infty$ . Entonces, para cada  $(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[$ , se verifica

$$\begin{aligned} (v - u)(x, t) &\leq (v^* - u_*)(x, t) \\ &\leq \max \left\{ (v^* - u_*)^+(y, t_0) : y \in \overline{\mathbf{B}}_{R(\tau - t_0)}(\xi) \right\} \end{aligned} \quad (6.2)$$



para  $(x, t) \in \overline{\mathbf{B}}_{R(\tau-t)}(\xi) \times [t_0, \tau[$  y cualquier  $t_0 \in ]0, \tau[$ , donde  $r^+ = \max\{r, 0\}$ . En particular, tomando  $u(x, t) = H(0)t$ , se tiene que

$$v(x, t) \leq v^*(x, t) \leq \max \left\{ \left( v^*(y, 0^+) \right)^+ : y \in \overline{\mathbf{B}}_{Rt}(x) \right\} + tH(0) \quad (6.3)$$

para  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[$  y toda función  $v \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$  solución de

$$v_t \leq H(\nabla v) \text{ en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[.$$

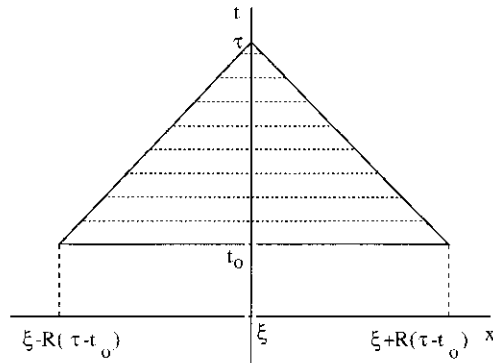


Figura 6.1: Cono de dependencia.

### Demostración.

Dado  $(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[$  vamos a trabajar con una modificación de la función

$$(x, t) \mapsto V(x - \xi, \tau - t; R, b, \sigma)$$

(ver la Observación 4.9). Si  $0 < \varepsilon < 1$  y  $0 < t_0 < \tau$  definimos para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{V}_n(x, t; \varepsilon) \doteq \begin{cases} \sigma \left( R(\tau - t) - |x - \xi|_\varepsilon + \frac{1}{n} \right)^{-b}, & (x, t) \in \overline{\mathbf{B}}_{R(\tau-t)}^\varepsilon(\xi) \times [t_0, \tau[ \\ \sigma n^b & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

donde

$$|x - \xi|_\varepsilon \doteq \sqrt{|x - \xi|^2 + \varepsilon^2} > |x - \xi|$$

y

$$\mathbf{B}_{R(\tau-t)}^\varepsilon(\xi) \doteq \{z \in \mathbb{R}^N : |z - \xi|_\varepsilon < R(\tau - t)\}.$$

Claramente  $\mathcal{V}_n(\cdot, \cdot; \varepsilon) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$  y para  $(x, t) \in \mathbf{B}_{R(\tau-t)}^\varepsilon(\xi)$  se verifica

$$(\mathcal{V}_n)_t(x, t) = Rb\sigma \left( R(\tau - t) - |x - \xi|_\varepsilon + \frac{1}{n} \right)^{-(b+1)}$$

y

$$\nabla \mathcal{V}_n(x, t) = -b\sigma \left( R(\tau - t) - |x - \xi|_\varepsilon + \frac{1}{n} \right)^{-(b+1)} \frac{x - \xi}{|x - \xi|_\varepsilon},$$

por lo que

$$(\mathcal{V}_n)_t - R|\nabla \mathcal{V}_n| = Rb\sigma \left( R(\tau - t) - |x - \xi|_\varepsilon + \frac{1}{n} \right)^{-(b+1)} \left( 1 - \frac{|x - \xi|}{|x - \xi|_\varepsilon} \right) \geq 0$$

cuando  $(x, t) \in \mathbf{B}_{R(\tau-t)}^\varepsilon(\xi)$ . Por otra parte, como

$$D^- \mathcal{V}_n(x, t) = \emptyset \quad \text{si } |x - \xi|_\varepsilon = R(\tau - t)$$

entonces

$$(\mathcal{V}_n)_t \geq R|\nabla \mathcal{V}_n| \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

en el sentido de la viscosidad. Además,

$$D^-(u_* + \mathcal{V}_n) = \begin{cases} D^-u_* + (\nabla \mathcal{V}_n, (\mathcal{V}_n)_t) & \text{en } \mathcal{O} \\ \emptyset & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde

$$\mathcal{O} \doteq (\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+) \setminus (\partial \mathbf{B}_{R(\tau-t)}^\varepsilon(\xi) \times [t_0, \tau]).$$

De esta forma, tomando  $p = \nabla(u_* + \mathcal{V}_n)$  y  $q = \nabla u_*$  en (6.1), se obtiene

$$(u_* + \mathcal{V}_n)_t - H(\nabla(u_* + \mathcal{V}_n)) \geq (u_*)_t + (\mathcal{V}_n)_t - H(\nabla u_*) - R|\nabla \mathcal{V}_n|,$$

por lo que, en el sentido de la viscosidad, se verifica la relación

$$(u_* + \mathcal{V}_n)_t \geq H(\nabla(u_* + \mathcal{V}_n)) \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]t_0, +\infty[.$$

Por otra parte, la propiedad

$$\left( R(\tau - t_0) - |x - \xi|_\varepsilon + \frac{1}{n} \right)^{-b} \rightarrow 1 \quad \text{cuando } b \rightarrow 0$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbf{B}_{\mathbb{R}(\tau-t_0)}^\varepsilon(\xi)$ , hace que

$$\left(\mathbb{R}(\tau-t_0) - |x-\xi|_\varepsilon + \frac{1}{n}\right)^{-b} \geq 1-\varepsilon, \quad x \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}(\tau-t_0)}^\varepsilon(\xi), \quad 0 < b \ll 1.$$

Por tanto, si en la definición de  $\mathcal{V}_n(\cdot, \cdot; \varepsilon)$  tomamos

$$\sigma = \max_{y \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}(\tau-t_0)}^\varepsilon(\xi)} \left\{ \frac{(v^* - u_*)^+(y, t_0)}{1-\varepsilon} \right\} + \varepsilon$$

y elegimos  $n \in \mathbb{N}$  de forma que

$$n \geq \frac{1}{\sigma} \left( \max \left\{ (v^* - u_*)^+(y, t) : (y, t) \in \partial \overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}(\tau-t_0)}^\varepsilon(\xi) \times [t_0, \tau] \right\} \right)^{\frac{1}{b}}$$

obtenemos las desigualdades

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_n(x, t_0) &= \left( \max_{y \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}(\tau-t_0)}^\varepsilon(\xi)} \left\{ \frac{(v^* - u_*)^+(y, t_0)}{1-\varepsilon} \right\} + \varepsilon \right) \left( \mathbb{R}(\tau-t_0) - |x-\xi|_\varepsilon + \frac{1}{n} \right)^{-b} \\ &\geq \max_{y \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}(\tau-t_0)}^\varepsilon(\xi)} (v^* - u_*)^+(y, t_0) \geq (v - u)(x, t_0), \quad (x, t) \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}(\tau-t_0)}^\varepsilon(\xi) \end{aligned}$$

y

$$(v^* - u_*)(x, t) \leq \mathcal{V}_n(x, t), \quad (x, t) \in \partial \mathbf{B}_{\mathbb{R}(\tau-t_0)}^\varepsilon(\xi) \times [t_0, \tau[,$$

por lo que, los criterios de comparación usuales aplicados a  $v^*$  y  $u_* + \mathcal{V}_n$ , conducen a

$$(v^* - u_*)(x, t) \leq \sigma \left( \mathbb{R}(\tau-t) - |x-\xi|_\varepsilon + \frac{1}{n} \right)^{-b}$$

para todo  $(x, t) \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}(\tau-t)}^\varepsilon(\xi) \times [t_0, \tau[$  (véanse los comentarios de la Observación 6.22). Haciendo tender  $n \rightarrow +\infty$ ,  $b \rightarrow 0$  y luego  $\varepsilon \rightarrow 0$  concluimos el resultado.  $\square$

### Observación 6.2

Del Teorema 6.1 se deduce que cuando  $H$  satisface la condición (6.1), la banda maximal para el problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t \geq H(\nabla u) & \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

es todo el semiespacio  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$  para cualquier dato inicial  $u_0 \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N)$ . En el Capítulo 10 hacemos un estudio del comportamiento de las soluciones para instantes grandes de tiempo.  $\square$

Del Teorema 6.1 se desprende el siguiente resultado:

**Corolario 6.3 (Comparación fuertemente hiperbólica)**

Sea  $H$  verificando (6.1) y  $v \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$ ,  $u \in \mathcal{LIA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$  soluciones, respectivamente, de

$$v_t \leq H(\nabla v) \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[$$

y

$$u_t \geq H(\nabla u) \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[$$

para algún  $T \leq +\infty$ . Si

$$v^*(\cdot, t_0) \leq u_*(\cdot, t_0) \quad \text{en } \overline{\mathbf{B}}_\sigma(\xi)$$

para algunos  $t_0 \in ]0, T[$  y  $\sigma > 0$ , entonces

$$v(x, t) \leq v^*(x, t) \leq u_*(x, t) \leq u(x, t)$$

para  $(x, t) \in \overline{\mathbf{B}}_{\sigma - R(t-t_0)}(\xi) \times \left[ t_0, \min \left\{ T, t_0 + \frac{\sigma}{R} \right\} \right]$ .  $\square$

**Observación 6.4**

Si en la demostración del Teorema 6.1 prolongamos, respectivamente, las funciones  $u_*$  y  $v^*$  fuera del *cono truncado*

$$\mathbf{C}_{R,t_0}(\xi, \tau) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[: x \in \mathbf{B}_{R(\tau-t)}(\xi), t_0 < t < \tau\} \quad (6.4)$$

por  $-\infty$  y  $+\infty$ , bajo la condición (6.1) se verifica el siguiente resultado: para  $(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$  y  $t_0 < \tau$  sean  $v \in \mathcal{LSA}(\mathbf{C}_{R,t_0}(\xi, \tau))$  y  $u \in \mathcal{LIA}(\mathbf{C}_{R,t_0}(\xi, \tau))$  soluciones de

$$v_t \leq H(\nabla v) \quad \text{en } \mathbf{C}_{R,t_0}(\xi, \tau)$$

y

$$u_t \geq H(\nabla u) \quad \text{en } \mathbf{C}_{R,t_0}(\xi, \tau),$$

respectivamente, para algún  $R > 0$ . Entonces,

$$(v - u)(x, t) \leq (v^* - u_*)(x, t) \leq \max \left\{ (v^* - u_*)^+(y, t_0) : y \in \overline{\mathbf{B}}_{R(\tau-t_0)}(\xi) \right\}$$

para todo  $(x, t) \in \mathbf{C}_{R,t_0}(\xi, \tau)$ .  $\square$

**Observación 6.5**

1. Se pueden deducir, inmediatamente, resultados locales de *acotación* (inferior y superior).
2. Existen otras demostraciones de resultados parecidos para datos acotados o uniformemente continuos (ver, por ejemplo, M.G. Crandall-P.L. Lions [Cr-Li2, Proposition V.4], H.Ishii [Is2, Theorem 2.4] o A. Friedman-P.E. Souganidis [Fr-Sou, Lemma 4.1]). Las principales contribuciones que aportamos son relativas al método (utilizamos las soluciones de similaridad), trabajamos con datos iniciales arbitrarios y además obtenemos una cota de la diferencia  $v - u$  en el interior del cono.  $\square$

Por los comentarios anteriores, si  $u \in \mathcal{LA}(\mathbf{C}_{R,0}(\xi, \tau))$  es solución de

$$u_t = H(\nabla u)$$

en el cono  $\mathbf{C}_{R,0}(\xi, \tau)$  para algún  $R > 0$ ,  $(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$  y  $\tau > 0$  (véase (6.4)) entonces, bajo la condición (6.1), se verifica

$$(u^* - u_*)(x, t) \leq \mathcal{U}\left(x, t; (u^*(\cdot, 0^+) - u_*(\cdot, 0^+))\right), \quad (x, t) \in \mathbf{C}_{R,0}(\xi, \tau)$$

siendo  $\mathcal{U}(x, t; (u^*(\cdot, 0^+) - u_*(\cdot, 0^+)))$  la fórmula de Lax-Oleinik relativa al hamiltoniano  $H^*$  y a la traza inicial  $(u^* - u_*)(\cdot, 0^+)$ . En particular, si

$$u_*(x, 0^+) = u^*(x, 0^+), \quad x \in \overline{\mathbf{B}}_{R\tau}(\xi)$$

entonces:

$$u \in \mathcal{C}(\mathbf{C}_{R,0}(\xi, \tau)) \tag{6.5}$$

y

$$u(x, 0^+) = u_*(x, 0^+) = u^*(x, 0^+), \quad x \in \overline{\mathbf{B}}_{R\tau}(\xi). \tag{6.6}$$

Podemos resumir este resultado en:

**Corolario 6.6**

Si  $H$  verifica (6.1) y  $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$ , entonces el problema

$$(P)_0 \begin{cases} u_t - H(\nabla u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

admite, a lo sumo, una única solución fuerte de viscosidad verificando (6.5) y (6.6).  $\square$

Concluimos esta Subsección extendiendo la propiedad del cono de dependencia a la ecuación con adecuados términos de perturbación, lo que será de gran interés más adelante.

### Corolario 6.7

Sea  $H$  un hamiltoniano verificando (6.1),  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  localmente lipschitziana y  $v \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$ ,  $u \in \mathcal{LIA}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$  soluciones de

$$v_t \leq H(\nabla v) + \lambda\beta(v) \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

y

$$u_t \geq H(\nabla u) + \lambda\beta(u) \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+,$$

respectivamente. Entonces, para cada  $(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[$ , se verifica

$$(v - u)(x, t) \leq (v^* - u_*)(x, t) \leq \max \left\{ (v^* - u_*)^+(y, t_0) : y \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}(\tau-t_0)}(\xi) \right\}$$

para  $(x, t) \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}(\tau-t)}(\xi) \times [t_0, \tau[$  y cualquier  $t_0 \in ]0, \tau[$ .

### Demostración.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer

$$M \doteq \max \left\{ (v^* - u_*)^+(y, t_0) : y \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}(\tau-t_0)}(\xi) \right\} = 0$$

(en caso contrario argumentaríamos con las funciones  $v^* - M$  y  $u_*$ ) por lo que basta con mostrar

$$(v^* - u_*)(x, t) \leq 0, \quad (x, t) \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}(\tau-t)}(\xi) \times [t_0, \tau[.$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} 0 &\geq ((v^*)_t - H(\nabla v^*) - \lambda\beta(v^*)) - ((u_*)_t - H(\nabla u_*) - \lambda\beta(u_*)) \\ &\geq (v^* - u_*)_t - (H(\nabla v^*) - H(\nabla u_*)) - |\lambda| |\beta(v^*) - \beta(u_*)| \\ &\geq (v^* - u_*)_t - R|\nabla(v^* - u_*)| - k|v^* - u_*| \quad \text{en } \mathbf{B}_{\mathbb{R}(\tau-t)}(\xi) \times ]t_0, \tau[ \end{aligned}$$

para una constante  $k > 0$  verificando

$$k > |\lambda| \frac{|\beta(v^*) - \beta(u_*)|}{|v^* - u_*|} \quad \text{en } \overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}(\tau-t)}(\xi) \times [t_0, \tau[.$$

basta argumentar sobre la ecuación

$$\Sigma_t \leq R|\nabla\Sigma| + k\Sigma \text{ en } \mathbf{B}_{R(\tau-t)}(\xi) \times ]t_0, \tau[$$

para la que el cambio de variable

$$\Lambda(x, t) \doteq e^{-kt} \Sigma(x, t)$$

conduce al caso anterior sin perturbar, ya que

$$\Lambda_t - R|\nabla\Lambda| = e^{-kt} [\Sigma_t - k\Sigma - R|\nabla\Sigma|] \leq 0 \text{ en } \mathbf{B}_{R(\tau-t)}(\xi) \times ]t_0, \tau[.$$

Aplicando, en consecuencia, el Teorema 6.1 se obtiene

$$\begin{aligned} \Lambda(x, t) &\leq \max \left\{ \Lambda^+(y, t_0) : y \in \overline{\mathbf{B}}_{R(\tau-t_0)}(\xi) \right\} \\ &= e^{-kt_0} \max \left\{ (v^* - u_*)^+(y, t_0) : y \in \overline{\mathbf{B}}_{R(\tau-t_0)}(\xi) \right\} = e^{-kt_0} M = 0 \end{aligned}$$

para  $(x, t) \in \overline{\mathbf{B}}_{R(\tau-t)}(\xi) \times [t_0, \tau[$ . Por tanto,

$$e^{-kt}(v^* - u_*)(x, t) = \Lambda(x, t) \leq 0, \quad (x, t) \in \overline{\mathbf{B}}_{R(\tau-t)}(\xi) \times [t_0, \tau[$$

de donde se sigue el resultado.  $\square$

### Corolario 6.8

Si  $H$  verifica (6.1),  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es localmente lipschitziana y  $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$  entonces el problema

$$(P)_\lambda \begin{cases} u_t - H(\nabla u) + \lambda\beta(u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

admite, a lo sumo, una única solución fuerte de viscosidad que, además, es continua.  $\square$

## 6.2 Hamiltonianos no lipschitzianos.

En esta Sección extendemos la propiedad del cono de dependencia a una clase de hamiltonianos con comportamiento poliómico.

Comenzamos con algunos resultados previos:

**Definición 6.9**

Se llama *módulo de continuidad* a toda función creciente  $\varrho : \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$  verificando

$$\varrho(0^+) = 0 \quad \text{y} \quad \varrho(r+s) \leq \varrho(r) + \varrho(s), \quad r, s > 0.$$

**Observación 6.10**

Toda función  $u \in \mathcal{C}(\mathcal{O})$  con  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^M$ ,  $M \geq 1$ , admite un módulo de continuidad local dado por

$$\varrho_{\mathbf{K}}(r) = \sup \{ \tilde{\varrho}_{\mathbf{K}}(s) : 0 \leq s \leq r \}$$

siendo

$$\tilde{\varrho}_{\mathbf{K}}(s) \doteq \sup \{ |u(x) - u(y)| : |x - y| < s, x, y \in \mathbf{K} \}$$

para cada compacto  $\mathbf{K} \subset \mathcal{O}$ .  $\square$

En las pruebas que siguen se requieren resultados técnicos que ligán el concepto de solución de viscosidad con la aparición de extremos locales. Destacamos entre todos el siguiente.

**Lema 6.11**

Sea  $\mathcal{O}$  un subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^M$ ,  $M \geq 1$ ,  $v \in \mathcal{LSA}(\mathcal{O})$ ,  $u \in \mathcal{C}(\mathcal{O})$  y  $\omega \subset\subset \mathcal{O}$  un conjunto abierto tal que

$$S(\omega) \doteq \sup \{ (v^* - u)(x) : x \in \omega \} > 0 \tag{6.7}$$

y

$$\max \{ (v^* - u)(x) : x \in \partial\omega \} \leq 0.$$

Entonces, para todo  $\varepsilon > 0$  existen  $x_\varepsilon, y_\varepsilon \in \omega$  y  $k = k(x_\varepsilon, y_\varepsilon, v^*, u, \omega) > 0$  verificando

$$|x_\varepsilon - y_\varepsilon| < \varepsilon \quad \text{y} \quad v^*(x_\varepsilon) - u(y_\varepsilon) > S(\omega) \tag{6.8}$$

$$\exists p \in D^+ v^*(x_\varepsilon) \cap D^- u(y_\varepsilon) \quad \text{con} \quad |p| \leq 2 \left( \frac{3\mu}{\varepsilon} + k\varepsilon \right)$$

siendo

$$\mu = \max \{ \|v\|_{L^\infty(\omega)}, \|u\|_{L^\infty(\omega)} \} > 0.$$



**Demostración.**

La condición (6.7) implica la existencia de  $\tilde{z} \in \omega$  tal que

$$(v^* - u)(\tilde{z}) > 0.$$

Consideremos las siguientes funciones:

1.  $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^M)$  con  $0 \leq \eta \leq 1$ ,  $\eta(0) = 1$ ,  $\eta(x) = 0$  si  $|x| \geq 1$  y  $|\nabla \eta| \leq 2$ .
2.  $\eta_\varepsilon(x) = \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ ,  $x \in \mathbb{R}^M$ , para  $\varepsilon > 0$  fijado.
3.  $\varrho(r) \doteq \sup \{|u(x) - u(y)| : |x - y| < r, x, y \in \mathbb{R}^M\}$ ,  $r \geq 0$ .
4.  $\Psi(r) = 2 \int_{r+c}^{2(r+c)} \frac{\varrho(\sqrt{s-c})}{s} ds$  donde  $c > 0$  es una constante que verifica

$$\varrho(\sqrt{c}) < \frac{v^*(\tilde{z}) - u(\tilde{z})}{2}$$

(ésto es posible debido a que  $\varrho(0^+) = 0$  y  $(v^* - u)(\tilde{z}) > 0$ ). Nótese que  $\Psi \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+)$  es una función creciente con las propiedades

$$\Psi'(r) = \frac{2}{r+c} \left( \varrho(\sqrt{2r+c}) - \varrho(\sqrt{r}) \right),$$

$$\Psi(r^2) \geq \varrho(r), \quad r \geq 0$$

y

$$\Psi(0) = 2 \int_c^{2c} \frac{\varrho(\sqrt{s-c})}{s} ds \leq 2\varrho(\sqrt{c}) < v^*(\tilde{z}) - u(\tilde{z}). \quad (6.9)$$

Finalmente construimos la función  $\Phi : \omega \times \omega \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$\Phi(x, y) = v^*(x) - u(y) + 3\mu\eta_\varepsilon(x - y) - \Psi(|x - y|^2).$$

Veamos, en primer lugar, que

$$\Phi|_{\partial(\omega \times \omega)} \leq 3\mu.$$

En efecto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $x \in \partial\omega$  e  $y \in \omega$  (en el caso general se argumenta de forma análoga). Así, se obtiene

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \overbrace{v^*(x) - u(x)}^{\leq 0} + u(x) - u_*(y) + 3\mu\eta_\varepsilon(x - y) - \Psi(|x - y|^2) \\ &\leq \overbrace{\varrho(|x - y|) - \Psi(|x - y|^2)}^{\leq 0} + 3\mu \leq 3\mu. \end{aligned}$$

Por otra parte, para el punto  $\tilde{z} \in \omega$ , se tiene, a la vista de (6.9), que

$$\Phi(\tilde{z}, \tilde{z}) = v^*(\tilde{z}) - u(\tilde{z}) + 3\mu\eta_\varepsilon(0) - \Psi(0) > 3\mu.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \sup \{ \Phi(x, y) : x, y \in \partial(\omega \times \omega) \} &\leq 3\mu \\ &< \Phi(\tilde{z}, \tilde{z}) \leq \sup \{ \Phi(x, y) : x, y \in \omega \times \omega \}. \end{aligned}$$

De esta forma, como  $\overline{\omega \times \omega}$  es un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$ , existen  $x_\varepsilon, y_\varepsilon \in \omega$  tales que

$$\Phi(x_\varepsilon, y_\varepsilon) = \sup \{ \Phi(x, y) : x, y \in \overline{\omega \times \omega} \}. \quad (6.10)$$

Además,

$$\begin{aligned} 3\mu < \Phi(x_\varepsilon, y_\varepsilon) &= v^*(x_\varepsilon) - u(y_\varepsilon) + 3\mu\eta_\varepsilon(x_\varepsilon - y_\varepsilon) - \Psi(|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2) \\ &\leq 2\mu + 3\mu\eta_\varepsilon(x_\varepsilon - y_\varepsilon). \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\eta_\varepsilon(x_\varepsilon - y_\varepsilon) > \frac{1}{3}$$

y, por definición,

$$|x_\varepsilon - y_\varepsilon| < \varepsilon.$$

Como  $\Psi$  es creciente y  $\eta_\varepsilon(0) = 1$ , por (6.10) se tiene

$$\begin{aligned} v^*(x_\varepsilon) - u(y_\varepsilon) + 3\mu - \Psi(0) &\geq v^*(x_\varepsilon) - u(y_\varepsilon) + 3\mu\eta_\varepsilon(x_\varepsilon - y_\varepsilon) - \Psi(|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2) \\ &= \Phi(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \geq \Phi(x, x) = v^*(x) - u(x) + 3\mu - \Psi(0), \quad x \in \omega, \end{aligned}$$

con lo que concluimos (6.8).

De esta forma, para cada  $x, y \in \omega$  se siguen, de (6.10), las desigualdades

$$\begin{aligned} & v^*(x_\varepsilon) - u(y_\varepsilon) + 3\mu\eta_\varepsilon(x_\varepsilon - y_\varepsilon) - \Psi(|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2) \\ & \geq \begin{cases} v^*(x) - u(y_\varepsilon) + 3\mu\eta_\varepsilon(x - y_\varepsilon) - \Psi(|x - y_\varepsilon|^2) \\ v^*(x_\varepsilon) - u(y) + 3\mu\eta_\varepsilon(x_\varepsilon - y) - \Psi(|x_\varepsilon - y|^2). \end{cases} \end{aligned}$$

Así pues, si consideramos las funciones

$$\varphi_1(x) = u(y_\varepsilon) - 3\mu\eta_\varepsilon(x - y_\varepsilon) + \Psi(|x - y_\varepsilon|^2)$$

y

$$\varphi_2(y) = v^*(x_\varepsilon) + 3\mu\eta_\varepsilon(x_\varepsilon - y) - \Psi(|x_\varepsilon - y|^2)$$

se tiene que  $\varphi_i$  son diferenciables en  $\mathbb{R}^M$  ( $i = 1, 2$ ) con

$$\nabla\varphi_1(x_\varepsilon) = -\frac{3\mu}{\varepsilon}\nabla\eta\left(\frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon}\right) + 2\Psi'(|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2)(x_\varepsilon - y_\varepsilon) = \nabla\varphi_2(y_\varepsilon) \quad (6.11)$$

y

$$\begin{cases} (v^* - \varphi_1)(x_\varepsilon) \geq (v^* - \varphi_1)(x), & x \in \omega \\ (u - \varphi_2)(y_\varepsilon) \leq (u - \varphi_2)(y), & y \in \omega. \end{cases}$$

Aplicando ahora la Proposición A.19 del Apéndice A, de (6.11) se concluye

$$\nabla\varphi_1(x_\varepsilon) = \nabla\varphi_2(y_\varepsilon) \in D^+v^*(x_\varepsilon) \cap D^-u(y_\varepsilon)$$

y

$$|\nabla\varphi_1(x_\varepsilon)| = |\nabla\varphi_2(y_\varepsilon)| \leq 2\left(\frac{3\mu}{\varepsilon} + k\varepsilon\right)$$

donde  $k$  es una constante positiva que verifica

$$k \geq \Psi'(|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2). \quad \square$$

### Observación 6.12

El Lema 6.11 generaliza un resultado de [Cr-Li2].  $\square$

Como ya comentamos, la extensión que aquí consideramos tiene que ver con hamiltonianos con comportamiento polinómico por lo que nos restringiremos al conjunto

$$\mathcal{P}_{\Lambda, m} = \left\{ H \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N) : \sup_{p, q \in \mathbb{R}^N} \frac{|H(p) - H(q)|}{(1 + |p|^{m-1} + |q|^{m-1})|p - q|} \leq \Lambda \right\}$$

donde  $\Lambda > 0$  y  $m > 1$ . El carácter ‘superlineal’ de estos hamiltonianos nos lleva, también, a argumentar sobre funciones  $u : \mathbb{R}^N \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$  localmente lipschitzianas para lo que resulta conveniente utilizar la notación

$$L_{\sigma, T}^u \doteq \inf \left\{ k > 0 : \frac{|u(x, t) - u(y, t)|}{|x - y|} \leq k, \ x, y \in \overline{\mathbf{B}}_\sigma(0), \ 0 < t < T \right\} < +\infty$$

para  $\sigma, T > 0$ . Siguiendo las líneas expuestas en [Cr-Li2] y [Di1], nuestros razonamientos reposan, esencialmente, en el siguiente resultado abstracto:

**Teorema 6.13 (Comparación hiperbólica)**

*Supongamos que para cada  $\mathcal{R} > 0$  existe  $\mathcal{V}_\mathcal{R}$  solución de*

$$-(\mathcal{V}_\mathcal{R})_t > \mathcal{R} |\nabla \mathcal{V}_\mathcal{R}| \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \quad (6.12)$$

*verificando  $\mathcal{V}_\mathcal{R} \geq 0$  y  $\|\nabla \mathcal{V}_\mathcal{R}\|_\infty \leq \kappa$  para alguna constante  $\kappa > 0$  independiente de  $\mathcal{R}$ . Sean  $v \in \mathcal{LSA}(\mathbf{B}_\sigma(0) \times ]0, T[)$  y  $u \in \mathcal{LIA}(\mathbf{B}_\sigma(0) \times ]0, T[)$ , respectivamente, soluciones de viscosidad de*

$$\begin{cases} v_t \leq H(\nabla v) & \text{en } \mathbf{B}_\sigma(0) \times ]0, T[ \\ u_t \geq H(\nabla u) & \text{en } \mathbf{B}_\sigma(0) \times ]0, T[ \end{cases}$$

*donde  $\sigma, T > 0$ . Si  $H \in \mathcal{P}_{\Lambda, m}$  y  $u$  tiene la propiedad*

$$L_{\sigma, \frac{T}{2}}^u < +\infty$$

*entonces para todo  $(x, t) \in \text{supp} \mathcal{V}_\mathcal{R}$  se verifica*

$$(v - u)(x, t) \leq (v^* - u)(x, t) \leq \max_{(y, s) \in \partial(\text{supp} \mathcal{V}_\mathcal{R})} \{(v^* - u)(y, s)\} \quad (6.13)$$

*donde*

$$\mathcal{R} \doteq \Lambda \left( 1 + (1 + c(m)) \left( L_{\sigma, \frac{T}{2}}^u \right)^{m-1} \right) \quad (6.14)$$

*con*

$$c(m) \doteq \begin{cases} 2^{m-2} & \text{si } m \geq 2 \\ 1 & \text{si } 1 < m < 2 \end{cases} \quad (6.15)$$

*y*

$$\text{supp} \mathcal{V}_\mathcal{R} \subset \overline{\mathbf{B}}_\sigma(0) \times [0, T[. \quad (6.16)$$

**Demostración.**

Sin pérdida de generalidad podemos suponer

$$M \doteq \max_{(y,s) \in \partial(\text{supp}\mathcal{V}_{\mathcal{R}})} \{(v^* - u)(y, s)\} = 0$$

(en caso contrario argumentaríamos con las funciones  $v^* - M$  y  $u$ ) por lo que basta con mostrar

$$(v^* - u)(x, t) \leq 0, \quad (x, t) \in \text{supp}\mathcal{V}_{\mathcal{R}}.$$

Para ello procedemos por reducción al absurdo: fijemos  $\mathcal{R}$  verificando (6.14) y (6.16) y supongamos que existe  $(\hat{x}, \hat{t}) \in \text{supp}\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$  tal que

$$(v^* - u)(\hat{x}, \hat{t}) > 0.$$

Como para cada  $\varepsilon > 0$  la función

$$(x, t) \mapsto \varepsilon\mathcal{V}_{\mathcal{R}}(x, t)$$

es no negativa se tiene

$$(v^* - u + \varepsilon\mathcal{V}_{\mathcal{R}})(\hat{x}, \hat{t}) > 0,$$

por lo que

$$\sup_{\text{supp}\mathcal{V}_{\mathcal{R}}} (v^* - (u - \varepsilon\mathcal{V}_{\mathcal{R}})) > 0. \quad (6.17)$$

A continuación consideramos la función

$$\phi(x, t) = (v^* - u + \varepsilon\mathcal{V}_{\mathcal{R}})(x, t), \quad (x, t) \in \text{supp}\mathcal{V}_{\mathcal{R}}.$$

Como  $\phi \in \mathcal{SCS}(\text{supp}\mathcal{V}_{\mathcal{R}})$  y  $\text{supp}\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$  es compacto, existe  $(z, \tau) \in \text{supp}\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$  tal que

$$\phi(x, t) \leq \phi(z, \tau), \quad (x, t) \in \text{supp}\mathcal{V}_{\mathcal{R}}.$$

Obviamente, pueden presentarse los siguientes casos:

1.  $(z, \tau) \in \partial(\text{supp}\mathcal{V}_{\mathcal{R}})$ . Entonces  $\mathcal{V}_{\mathcal{R}} \equiv 0$  en  $\partial(\text{supp}\mathcal{V}_{\mathcal{R}})$  implica

$$\phi(z, \tau) = \max_{(y,s) \in \partial(\text{supp}\mathcal{V}_{\mathcal{R}})} \{(v^* - u)(y, s)\} = M = 0$$

de donde se sigue

$$(v^* - u)(x, t) \leq -\varepsilon\mathcal{V}_{\mathcal{R}}(x, t) \leq 0, \quad (x, t) \in \text{supp}\mathcal{V}_{\mathcal{R}}.$$

2.  $(z, \tau) \in \text{supp } \mathcal{V}_{\mathcal{R}}$ . Ahora, a partir de (6.17), se deduce

$$\phi(z, \tau) = \sup_{\partial(\text{supp } \mathcal{V}_{\mathcal{R}})} (v^* - (u - \varepsilon \mathcal{V}_{\mathcal{R}})) > 0.$$

Como  $u$  es continua, por el Lema 6.11 sabemos que para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $(x_\varepsilon, t_\varepsilon), (y_\varepsilon, s_\varepsilon) \in \text{int}(\text{supp } \mathcal{V}_{\mathcal{R}})$  y  $k = k(x_\varepsilon, y_\varepsilon, v^*, u - \varepsilon \mathcal{V}_{\mathcal{R}}, \text{int}(\text{supp } \mathcal{V}_{\mathcal{R}})) > 0$  verificando:

(a)  $|x_\varepsilon - y_\varepsilon| + |t_\varepsilon - s_\varepsilon| \leq \varepsilon.$

(b)  $v^*(x_\varepsilon, t_\varepsilon) - (u - \varepsilon \mathcal{V}_{\mathcal{R}})(y_\varepsilon, s_\varepsilon) > \sup_{\text{supp } \mathcal{V}_{\mathcal{R}}} (v^* - (u - \varepsilon \mathcal{V}_{\mathcal{R}})) > 0.$

(c)  $\exists (p_1, p_2) \in D^+ v^*(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \cap D^- (u - \varepsilon \mathcal{V}_{\mathcal{R}})(y_\varepsilon, s_\varepsilon)$  con

$$|p_1| + |p_2| \leq 2 \left( \frac{3\mu}{\varepsilon} + k\varepsilon \right)$$

donde

$$\mu = \max \left\{ \|v\|_{L^\infty(\text{supp } \mathcal{V}_{\mathcal{R}})}, \|u - \varepsilon \mathcal{V}_{\mathcal{R}}\|_{L^\infty(\text{supp } \mathcal{V}_{\mathcal{R}})} \right\} > 0.$$

Consecuentemente, se tiene

$$(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_1^u - \varepsilon \nabla \mathcal{V}_{\mathcal{R}}, p_2^u - \varepsilon (\mathcal{V}_{\mathcal{R}})_i) & \text{para alg\u00fan } (p_1^u, p_2^u) \in D^- u(y_\varepsilon, s_\varepsilon) \\ (p_1^v, p_2^v) & \text{para alg\u00fan } (p_1^v, p_2^v) \in D^+ v^*(x_\varepsilon, t_\varepsilon), \end{cases}$$

con lo que

$$(p_1^v, p_2^v) = (p_1^u - \varepsilon \nabla \mathcal{V}_{\mathcal{R}}, p_2^u - \varepsilon (\mathcal{V}_{\mathcal{R}})_i).$$

Como se verifica

$$p_2^v \leq H(p_1^v) \quad \text{y} \quad p_2^u \geq H(p_1^u),$$

la relaci\u00f3n anterior conduce a

$$p_2^v - p_2^u \leq H(p_1^v) - H(p_1^u)$$

o, equivalentemente, a

$$-\varepsilon (\mathcal{V}_{\mathcal{R}})_i \leq H(p_1^u - \varepsilon \nabla \mathcal{V}_{\mathcal{R}}) - H(p_1^u). \quad (6.18)$$

Por otra parte, a la vista de la notaci\u00f3n empleada, se tiene

$$|p_1^u| \leq L_{\alpha, \frac{\mathbb{T}}{2}}^u.$$

Así, la desigualdad técnica<sup>1</sup>

$$(r + s)^{m-1} \leq c(m)(r^{m-1} + s^{m-1}), \quad r, s \geq 0,$$

donde  $c(m)$  viene dada en (6.15), y la propiedad  $H \in \mathcal{P}_{\Lambda, m}$  conducen a

$$\begin{aligned} H(p_1^u - \varepsilon \nabla \mathcal{V}_{\mathcal{R}}) - H(p_1^u) &\leq \varepsilon \Lambda \left( 1 + |p_1^u - \varepsilon \nabla \mathcal{V}_{\mathcal{R}}|^{m-1} + |p_1^u|^{m-1} \right) |\nabla \mathcal{V}_{\mathcal{R}}| \\ &\leq \varepsilon \Lambda \left( 1 + c(m) \left( |p_1^u|^{m-1} + \varepsilon^{m-1} |\nabla \mathcal{V}_{\mathcal{R}}|^{m-1} \right) + |p_1^u|^{m-1} \right) |\nabla \mathcal{V}_{\mathcal{R}}| \\ &= \varepsilon \Lambda \left( 1 + (1 + c(m)) |p_1^u|^{m-1} + c(m) \varepsilon^{m-1} |\nabla \mathcal{V}_{\mathcal{R}}|^{m-1} \right) |\nabla \mathcal{V}_{\mathcal{R}}| \\ &\leq \varepsilon \Lambda \left( 1 + (1 + c(m)) \left( L_{\sigma, \frac{\mathcal{R}}{2}}^u \right)^{m-1} + c(m) (\varepsilon \kappa)^{m-1} \right) |\nabla \mathcal{V}_{\mathcal{R}}|, \end{aligned}$$

es decir,

$$H(p_1^u - \varepsilon \nabla \mathcal{V}_{\mathcal{R}}) - H(p_1^u) \leq \varepsilon \left( \mathcal{R} + \Lambda c(m) (\varepsilon \kappa)^{m-1} \right) |\nabla \mathcal{V}_{\mathcal{R}}|$$

(véase (6.14)) que junto con la relación (6.18) determinan

$$-\varepsilon (\mathcal{V}_{\mathcal{R}})_t \leq H(p_1^u - \varepsilon \nabla \mathcal{V}_{\mathcal{R}}) - H(p_1^u) \leq \varepsilon \left( \mathcal{R} + \Lambda c(m) (\varepsilon \kappa)^{m-1} \right) |\nabla \mathcal{V}_{\mathcal{R}}|.$$

Dividiendo por  $\varepsilon > 0$  en la expresión anterior obtenemos

$$-(\mathcal{V}_{\mathcal{R}})_t \leq \left( \mathcal{R} + \Lambda c(m) (\varepsilon \kappa)^{m-1} \right) |\nabla \mathcal{V}_{\mathcal{R}}|$$

de donde se deriva una contradicción con (6.12) haciendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ .  $\square$

Veamos a continuación un resultado que muestra la existencia de estas funciones  $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$  con soporte en el cono

$$K_{\sigma, \mathcal{R}} \doteq \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ : x \in \mathbf{B}_{\sigma - \mathcal{R}t}(0), 0 < t < \frac{\sigma}{\mathcal{R}} \right\} \quad (6.19)$$

para  $\sigma, \mathcal{R} > 0$ .

---

<sup>1</sup>Véase una demostración de esta desigualdad en la prueba de la Proposición 4.37.

**Proposición 6.14**

Para cada  $\mathcal{R} > 0$  y  $\sigma > 0$  existe  $\mathcal{V}_{\mathcal{R}} \in \mathcal{C}^1(\overline{K}_{\sigma, \mathcal{R}})$  verificando

$$\mathcal{V}_{\mathcal{R}} \geq 0, \text{ sup} \mathcal{V}_{\mathcal{R}} = \overline{K}_{\sigma, \mathcal{R}},$$

$$\|\nabla \mathcal{V}_{\mathcal{R}}\|_{\infty} \leq \kappa \text{ con } \kappa > 0 \text{ independiente de } \mathcal{R}$$

y

$$-(\mathcal{V}_{\mathcal{R}})_t > \mathcal{R}|\nabla \mathcal{V}_{\mathcal{R}}| \text{ en } K_{\sigma, \mathcal{R}}.$$

**Demostración.**

Dado  $a > 0$  basta considerar

$$\mathcal{V}_{\mathcal{R}}(x, t) \doteq f\left((\sigma - \mathcal{R}t)^{1+a} - |x|^{1+a}\right), \quad (x, t) \in K_{\sigma, \mathcal{R}} \quad (6.20)$$

donde  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ ,  $f(r) = 0$  si  $r \leq 0$ ,  $f'(r) > 0$  si  $r > 0$  y  $f' \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ . Claramente, si  $(x, t) \in K_{\sigma, \mathcal{R}}$  entonces  $|x| < \sigma - \mathcal{R}t$ , por lo que

$$\begin{aligned} -(\mathcal{V}_{\mathcal{R}})_t - \mathcal{R}|\nabla \mathcal{V}_{\mathcal{R}}| &= \mathcal{R}(1+a)(\sigma - \mathcal{R}t)^a f' - \mathcal{R}(1+a)|x|^a f' \\ &= \mathcal{R}(1+a) \underbrace{[(\sigma - \mathcal{R}t)^a - |x|^a]}_{>0} \underbrace{f'}_{>0} + (1+a) \underbrace{(\sigma - \mathcal{R}t)^a}_{>0} \underbrace{f'}_{>0} > 0. \quad \square \end{aligned}$$

**Observación 6.15**

La figura ‘cono’ no es caprichosa; se trata de algo genuinamente relacionado con la idea de características de la ecuación en derivadas parciales.  $\square$

Una consecuencia inmediata del Teorema 6.13 es:

**Corolario 6.16 (Comparación hiperbólica)**

Sea  $u \in \mathcal{LIA}(\mathbf{B}_{\sigma}(0) \times ]0, T])$  con  $\sigma > 0$  y  $T > 0$  solución de viscosidad de

$$u_t \geq H(\nabla u) \text{ en } K_{\sigma, \mathcal{R}}$$

donde  $H \in \mathcal{P}_{\Lambda, m}$  y  $u$  tiene la propiedad

$$L_{\sigma, \frac{T}{2}}^u < +\infty$$

para

$$\mathcal{R} = \Lambda \left( 1 + (1 + c(m)) \left( L_{\sigma, \frac{T}{2}}^u \right)^{m-1} \right).$$



Entonces para cualquier  $v \in \mathcal{LSA}(K_{\sigma, \mathcal{R}})$  solución de viscosidad de

$$v_t \leq H(\nabla v) \text{ en } K_{\sigma, \mathcal{R}}$$

se verifica

$$(v - u)(x, t) \leq (v^* - u)(x, t) \leq \max_{(y, s) \in \partial K} \{(v^* - u)(y, s)\}, \quad (x, t) \in K \quad (6.21)$$

siendo

$$K \doteq \{(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ : x \in \mathbf{B}_{\sigma - \mathcal{R}t}(0), 0 < t < \tau\}$$

y

$$\tau \doteq \min \left\{ \frac{T}{2}, \frac{\sigma}{\mathcal{R}} \right\}.$$

### **Demostración.**

Basta aplicar el Teorema 6.13 a la función  $\mathcal{V}_{\mathcal{R}}$  dada en (6.20). Recuérdese que el valor de  $\mathcal{R}$  viene dado en (6.14).  $\square$

### **Observación 6.17**

1. Si  $u \in \mathcal{LSA}(\mathbf{B}_{\sigma}(0) \times [0, T])$  es solución de viscosidad de

$$u_t \leq H(\nabla u) \text{ en } K_{\sigma, \mathcal{R}}$$

donde  $H \in \mathcal{P}_{\Lambda, m}$  entonces del resultado anterior se deduce

$$u(x, t) \leq u^*(x, t) \leq \max_{(y, s) \in \partial K} u^*(y, s), \quad (x, t) \in K \quad (6.22)$$

donde  $\mathcal{R} = \Lambda$ .

2. Cuando el hamiltoniano  $H \in \mathcal{P}_{\Lambda, m}$  verifica

$$H(p) \geq R|p|^m + k_1, \quad p \in \mathbb{R}^N \quad (6.23)$$

donde  $m > 1$ ,  $R > 0$ ,  $k_1 \geq 0$  y  $u_0 \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N)$  tiene las propiedades

$$u_0(x) \geq -c, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (c \geq 0) \quad (6.24)$$

y

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{u_0(x)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} = \ell > 0 \quad (6.25)$$

entonces, por el Corolario 5.38, si  $u \in \mathcal{L}\mathcal{I}\mathcal{A}(\mathbf{B}_\sigma(0) \times ]0, T])$  es super-solución fuerte de viscosidad del problema de contorno

$$\begin{cases} u_t = H(\nabla u) & \text{en } \mathbf{B}_\sigma(0) \times ]0, \mathbf{T}_\infty[ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbf{B}_\sigma(0) \end{cases}$$

se tiene la acotación

$$|p_1|^m \leq \frac{u_*(x, t) - k_1 t + c}{R(m-1)(\mathbf{T}_\infty - t)}, \quad (p_1, p_2) \in D^+ u_*(x, t)$$

para  $(x, t) \in \mathbf{B}_\sigma(0) \times ]0, \mathbf{T}_\infty[$ , donde

$$\mathbf{T}_\infty \doteq \frac{1}{Rm^m} \left( \frac{m-1}{\ell} \right)^{m-1} \quad (< +\infty).$$

Por otra parte, la condición (6.25) hace que dado  $\varepsilon > 0$  exista  $C_\varepsilon > 0$  tal que

$$(u_0)^*(x) \leq (\ell + \varepsilon)|x|^{\frac{m}{m-1}} + C_\varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (6.26)$$

Así, si  $u \in \mathcal{L}\mathcal{A}(\mathbf{B}_\sigma(0) \times ]0, T])$  es solución fuerte de viscosidad de

$$\begin{cases} u_t = H(\nabla u) & \text{en } \mathbf{B}_\sigma(0) \times ]0, \mathbf{T}_\infty[ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbf{B}_\sigma(0) \end{cases}$$

entonces, las propiedades (6.22) y (6.26) determinan

$$u^*(x, t) \leq (\ell + \varepsilon)\sigma^{\frac{m}{m-1}} + C_\varepsilon, \quad x \in \mathbf{B}_\sigma(0), \quad 0 < t < \mathbf{T}_\infty.$$

Por tanto, para todo  $(p_1, p_2) \in D^- u_*(x, t)$  con  $x \in \mathbf{B}_\sigma(0)$  y  $0 < t < \frac{\mathbf{T}_\infty}{2}$ , se verifica

$$\begin{aligned} |p_1|^m &\leq \frac{u_*(x, t) - k_1 t + c}{R(m-1)(\mathbf{T}_\infty - t)} \leq \frac{u^*(x, t) + c}{R(m-1)(\mathbf{T}_\infty - t)} \\ &\leq \frac{(\ell + \varepsilon)\sigma^{\frac{m}{m-1}} + c + C_\varepsilon}{R(m-1)\left(\mathbf{T}_\infty - \frac{\mathbf{T}_\infty}{2}\right)} = 2 \frac{(\ell + \varepsilon)\sigma^{\frac{m}{m-1}} + c + C_\varepsilon}{R(m-1)\mathbf{T}_\infty}. \end{aligned}$$

De esta forma,

$$L_{\sigma, \frac{\mathbf{T}_\infty}{2}}^u \leq \left( 2 \frac{(\ell + \varepsilon) \sigma^{\frac{m}{m-1}} + c + C_\varepsilon}{R(m-1)\mathbf{T}_\infty} \right)^{\frac{1}{m}}.$$

Por tanto, en este caso, podemos tomar

$$\mathcal{R} = \Lambda \left( 1 + 2^{\frac{m-1}{m}} (1 + c(m)) \left( \frac{(\ell + \varepsilon) \sigma^{\frac{m}{m-1}} + c + C_\varepsilon}{R(m-1)\mathbf{T}_\infty} \right)^{\frac{m-1}{m}} \right) \quad (6.27)$$

y

$$\tau \doteq \min \left\{ \frac{\mathbf{T}_\infty}{2}, \frac{\sigma}{\mathcal{R}} \right\}$$

con lo que se tiene

$$(v - u)(x, t) \leq (v^* - u)(x, t) \leq \max_{(y, s) \in \partial K} \{(v^* - u)(y, s)\}, \quad (x, t) \in \bar{K}$$

siendo

$$K \doteq \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ : x \in \mathbf{B}_{\sigma - \mathcal{R}t}(0), 0 < t < \tau \right\}.$$

Por otra parte, si el dato inicial  $u_0$  verifica además

$$-c \leq u_0(x) \leq \ell |x|^{\frac{m}{m-1}} + k, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

entonces

$$\mathcal{R} = \Lambda \left( 1 + k(m, \ell) \left( \sigma^{\frac{m}{m-1}} + \frac{c+k}{\ell} \right)^{\frac{m-1}{m}} \right) \quad (6.28)$$

siendo

$$k(m, \ell) \doteq 2^{\frac{m-1}{m}} (1 + c(m)) \left( \frac{\ell m}{m-1} \right)^{m-1}.$$

En cualquier caso, nótese que

$$0 < \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\sigma}{\mathcal{R}} < +\infty. \quad \square$$

**Observación 6.18**

Como toda función  $u \in \mathcal{LIA}(\mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[)$  que sea supersolución fuerte de viscosidad de

$$\begin{cases} u_t = H(\nabla u) & \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, \mathbf{T}_\infty[ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

verifica

$$\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{(u_*)^*(x, t)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} = \ell \left( \frac{\mathbf{T}_\infty}{\mathbf{T}_\infty - t} \right)^{\frac{1}{m-1}}, \quad 0 \leq t < \mathbf{T}_\infty$$

(véase la Observación 4.92) entonces, para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $C_\varepsilon > 0$  tal que

$$u_*(x, t) \leq (u_*)^*(x, t) \leq \left( \ell \left( \frac{\mathbf{T}_\infty}{\mathbf{T}_\infty - t} \right)^{\frac{1}{m-1}} + \varepsilon \right) |x|^{\frac{m}{m-1}} + C_\varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Así, para todo  $(p_1, p_2) \in D^-u_*(x, t)$  con  $x \in \mathbf{B}_\sigma(0)$  y  $0 < t < \frac{\mathbf{T}_\infty}{2}$ , se verifica

$$|p_1|^m \leq \frac{u^*(x, t) + c}{R(m-1)(\mathbf{T}_\infty - t)} \leq \frac{2(\ell 2^{\frac{1}{m-1}} + \varepsilon)\sigma^{\frac{m}{m-1}} + c + C_\varepsilon}{R(m-1)\mathbf{T}_\infty}. \quad \square$$

Veamos a continuación que la estimación anterior puede precisarse aplicando la propiedad del cono de dependencia que vimos en el Teorema 6.1 para el caso lineal  $m = 1$ . La diferencia esencial con la comparación hiperbólica es que ahora podemos evitar el conocimiento previo en la ‘frontera lateral’ del cono. Concretamente,

**Teorema 6.19 (Cono de dependencia)**

Dados  $\sigma, T > 0$  sean  $v \in \mathcal{LSA}(\mathbf{B}_\sigma(0) \times ]0, T[)$  y  $u \in \mathcal{LIA}(\mathbf{B}_\sigma(0) \times ]0, T[)$  soluciones de viscosidad de

$$\begin{cases} v_t \leq H(\nabla v) & \text{en } \mathbf{B}_\sigma(0) \times ]0, T[ \\ u_t \geq H(\nabla u) & \text{en } \mathbf{B}_\sigma(0) \times ]0, T[ \end{cases}$$

donde  $H \in \mathcal{P}_{\Lambda, m}$  y  $v, u$  tienen la propiedad

$$L_{\sigma, \frac{T}{2}}^v < +\infty \quad \text{y} \quad L_{\sigma, \frac{T}{2}}^u < +\infty. \quad (6.29)$$

Entonces existe  $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\Lambda, m, \sigma, T, v, u) > 0$  tal que

$$(v - u)(x, t) \leq \max_{y \in \overline{\mathbf{B}}_\sigma(0)} \{(v - u)^+(y, 0^+)\}, \quad (x, t) \in K$$

siendo

$$K \doteq \{(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ : x \in \mathbf{B}_{\sigma - \mathcal{R}t}(0), 0 < t < \tau\}$$

y

$$\tau \doteq \min \left\{ \frac{T}{2}, \frac{\sigma}{\mathcal{R}} \right\}.$$

### **Demostración.**

Formalmente, las hipótesis determinan

$$(v - u)_t \leq H(\nabla v) - H(\nabla u) \leq \Lambda \left( 1 + |\nabla v|^{m-1} + |\nabla u|^{m-1} \right) |\nabla(v - u)|$$

para  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[$ . Por tanto, si para cada  $(x, t) \in \mathbf{B}_\sigma(0) \times ]0, \tau[$  definimos

$$\mathcal{R} \doteq \Lambda \left( 1 + \left( L_{\sigma, \frac{T}{2}}^v \right)^{m-1} + \left( L_{\sigma, \frac{T}{2}}^u \right)^{m-1} \right) \quad (6.30)$$

entonces se verifica

$$(v - u)_t \leq \mathcal{R} |\nabla(v - u)|, \quad (x, t) \in \mathbf{B}_\sigma(0) \times ]0, \tau[$$

por lo que el Teorema 6.1 permite concluir

$$(v - u)(x, t) \leq \max_{y \in \overline{\mathbf{B}}_\sigma(0)} \{(v - u)^+(y, 0^+)\}, \quad (x, t) \in K. \quad \square$$

### **Observación 6.20**

Si  $u \in \mathcal{L}\mathcal{A}(\mathbf{B}_\sigma(0) \times [0, T])$  es solución de viscosidad de

$$u_t = H(\nabla u) \quad \text{en } K_{\sigma, \mathcal{R}}$$

donde  $H \in \mathcal{P}_{\Lambda, m}$  y  $u$  tiene la propiedad

$$L_{\sigma, \frac{T}{2}}^u < +\infty$$

entonces podemos mejorar la estimación dada en la Observación 6.17, pues

$$u(x, t) \leq u^*(x, t) \leq \max_{y \in \overline{\mathbf{B}}_\sigma(0)} u^*(y, 0^+), \quad (x, t) \in K$$

donde  $\mathcal{R} = \Lambda$ .  $\square$

**Observación 6.21**

En el caso particular en que  $H \in \mathcal{P}_{\Lambda, m}$  verifique (6.23) y el dato inicial  $u_0 \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N)$  tenga las propiedades (6.24) y (6.25) entonces para toda  $u \in \mathcal{LA}(\mathbf{B}_\sigma(0) \times [0, T])$  solución fuerte de viscosidad de

$$u_t = H(\nabla u) \quad \text{en } K_{\sigma, \mathcal{R}}$$

se tiene de forma inmediata la acotación

$$L_{\sigma, \frac{T_\infty}{2}}^u \leq \left( 2 \frac{(\ell + \varepsilon) \sigma^{\frac{m}{m-1}} + c + C_\varepsilon}{\mathcal{R}(m-1) \mathbf{T}_\infty} \right)^{\frac{1}{m}}$$

(véase la Observación 6.17).  $\square$

**Observación 6.22**

1.  $\mathcal{P}_{\Lambda, 1}$  coincide, exactamente, con el conjunto de los hamiltonianos lipschitzianos de constante  $\Lambda$ . Nótese que la demostración del Teorema 6.13 sigue siendo válida para el caso particular  $m = 1$  para el que (6.14) toma la forma  $\mathcal{R} \doteq \Lambda$ . Por tanto, en este caso, no se requiere ninguna hipótesis de acotación sobre  $L_{\sigma, \frac{T}{2}}^v$  y  $L_{\sigma, \frac{T}{2}}^u$ , a diferencia de lo que ocurre con  $m > 1$  (véase (6.29)). Es decir, en el caso  $m = 1$  basta pedir que  $v \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T])$  y  $u \in \mathcal{LIA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T])$  sean soluciones de

$$v_t \leq R|\nabla v| \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[$$

y

$$u_t \geq R|\nabla v| \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[,$$

respectivamente, tal como vimos en el Teorema 6.1.

2. La propiedad del cono de dependencia es más precisa (y más gravosa) que la mera comparación hiperbólica. Por eso, a la comparación íntimamente relacionada con la propiedad del cono la hemos calificado como *fuertemente hiperbólica*. Una vez más reiteramos que la aparición del exponente  $m - 1$  hace que propiedad del cono sea más 'costosa' cuando  $m > 1$  que en el caso  $m = 1$ , dado que requerimos trabajar con la hipótesis  $L_{\sigma, \frac{T}{2}}^u < +\infty$ .  $\square$

Con la notación

$$L_{\sigma, T} \doteq \left\{ u : \mathbb{R}^N \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R} : L_{\sigma, T}^u < +\infty \right\}$$

podemos concluir

**Corolario 6.23 (Unicidad)**

Si  $H \in \mathcal{P}_{\Lambda, m}$  y  $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$  entonces el problema de valor inicial

$$(P) \begin{cases} u_t = H(\nabla u) & \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

admite, a lo sumo, una única solución fuerte de viscosidad en la clase

$$\mathcal{L} \doteq \bigcap_{\sigma > 0} L_{\sigma, \frac{T}{2}}. \quad \square$$

Al igual que hicimos en la Subsección anterior, finalizamos extendiendo la propiedad del cono de dependencia a la ecuación perturbada.

**Corolario 6.24**

Sea  $H \in \mathcal{P}_{\Lambda, m}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  localmente lipschitziana y  $v \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$ ,  $u \in \mathcal{LTA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$  soluciones de

$$v_t \leq H(\nabla v) + \lambda \beta(v) \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[$$

y

$$u_t \geq H(\nabla u) + \lambda \beta(u) \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[,$$

respectivamente, para algún  $T > 0$ , tales que

$$L_{\sigma, \frac{T}{2}}^v < +\infty \quad \text{y} \quad L_{\sigma, \frac{T}{2}}^u < +\infty.$$

Entonces, para cada  $(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[$ , se verifica

$$(v - u)(x, t) \leq \max \left\{ (v - u)^+(y, t_0) : y \in \overline{\mathbf{B}}_{R(\tau - t_0)}(\xi) \right\}$$

para  $(x, t) \in \overline{\mathbf{B}}_{R(\tau - t)}(\xi) \times [t_0, \tau[$  y cualquier  $t_0 \in ]0, \tau[$ .

**Demostración.**

Tomando nuevamente

$$\mathcal{R} \doteq \Lambda \left( 1 + \left( L_{\sigma, \frac{\tau}{2}}^v \right)^{m-1} + \left( L_{\sigma, \frac{\tau}{2}}^u \right)^{m-1} \right)$$

se verifica

$$\begin{aligned} & (v - u)_t - \mathcal{R}|\nabla(v - u)| + \lambda(\beta(v) - \beta(u)) \\ & \leq (v - u)_t - (\mathbf{H}(\nabla v) - \mathbf{H}(\nabla u) + \lambda(\beta(v) - \beta(u))) \leq 0 \end{aligned}$$

en  $\mathbf{B}_{\mathbb{R}(\tau-t)}(\xi) \times ]t_0, \tau[$ , obteniéndose el resultado a partir del Corolario 6.7.  $\square$

**Observación 6.25**

El resultado anterior sigue siendo válido cuando reemplazamos la lipschitzianidad local de  $\beta$  por otras hipótesis. Esencialmente, se trata de demostrar que no existe un máximo interior positivo de  $v - u$ . Nótese que la afirmación anterior se sigue a partir de la relación

$$(v - u)_t - \mathcal{R}|\nabla(v - u)| \leq 0 \quad \text{en } [v > u] \quad (6.31)$$

argumentando como en los resultados anteriores. En particular, si la función

$$r \mapsto \lambda\beta(r), \quad r \in \mathbb{R}$$

es creciente, entonces se verifica (6.31) pues, en tal caso

$$\begin{aligned} & (v - u)_t - \mathcal{R}|\nabla(v - u)| \leq (v - u)_t - \mathcal{R}|\nabla(v - u)| + \lambda(\beta(v) - \beta(u)) \\ & \leq (v - u)_t - (\mathbf{H}(\nabla v) - \mathbf{H}(\nabla u) + \lambda(\beta(v) - \beta(u))) \leq 0 \quad \text{en } [v > u]. \quad \square \end{aligned}$$

**Corolario 6.26**

Si  $\mathbf{H} \in \mathcal{P}_{\Lambda, m}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es localmente lipschitziana y  $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$  entonces el problema de valor inicial

$$(P)_\lambda \begin{cases} u_t - \mathbf{H}(\nabla u) + \lambda\beta(u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

admite, a lo sumo, una única solución fuerte de viscosidad en la clase

$$\mathcal{L} \doteq \bigcap_{\sigma > 0} L_{\sigma, \frac{T}{2}}.$$

Además, si  $\mathbf{H}$  verifica (6.23) y  $u_0$  tiene las propiedades (6.24) y (6.25) entonces (P) tiene, a lo sumo, una única solución fuerte de viscosidad  $w \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ .  $\square$



**Observación 6.27**

Sea  $u \in \mathcal{L}\mathcal{A}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$  una solución de viscosidad del problema

$$\begin{cases} u_t - R|\nabla u|^m + \lambda\beta(u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (6.32)$$

donde  $\beta$  es una función creciente con  $\lambda\beta(\cdot) > 0$  en  $\overline{\mathbb{R}}_+$  y  $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$  es solución de viscosidad de la ecuación

$$-R|\nabla u_0|^m + \lambda\beta(u_0) \geq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N. \quad (6.33)$$

Si  $(p_1, p_2) \in D^-u_*(x, t)$  con  $t > 0$  entonces, como mostraremos en la Proposición 9.5, se verifica  $p_2 \leq 0$ . Por tanto, como

$$u_*(x, t) \leq u_*(x, 0^+) \leq u^*(x, 0^+) \leq (u_0)^*(x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

la monotonía de  $\beta$  hace que

$$0 \leq p_2 - R|p_1|^m + \lambda\beta(u_*(x, t)) \leq -R|p_1|^m + \lambda\beta(u_0(x)).$$

De esta forma obtenemos la siguiente *cota del gradiente*

$$|p_1| \leq \left( \frac{\lambda\beta(u_0(x))}{R} \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (6.34)$$

De hecho, se ha probado un *efecto regularizante*: si  $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$  verifica (6.33) y  $u \in \mathcal{L}\mathcal{A}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$  es solución de (6.32) entonces, para cada  $t > 0$ , la función parcial  $u_*(\cdot, t) \in \text{Lip}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ . Por tanto, las únicas funciones localmente acotadas superiormente que pueden verificar (6.32) son aquellas que tienen una envuelta inferior localmente lipschitziana.

En particular, bajo la hipótesis adicional de acotación global superior

$$\beta(u_0) \leq c \quad \text{en } \mathbb{R}^N \quad (c \geq 0)$$

la condición (6.33) determina

$$|\nabla u_0|^m \leq \frac{\lambda\beta u_0}{R} \leq \frac{c\lambda}{R} \quad \text{en } \mathbb{R}^N,$$

por lo que  $u_0 \in \text{Lip}(\mathbb{R}^N)$  con constante de lipschitzianidad

$$L \doteq \left( \frac{c\lambda}{R} \right)^{\frac{1}{m}}.$$

Aplicando ahora la acotación (6.34) obtenemos que para cada  $t > 0$  se verifica

$$|\nabla u_*(\cdot, t)| \leq L \text{ en } \mathbb{R}^N,$$

es decir, que la función parcial  $u_*(\cdot, t) \in \text{Lip}(\mathbb{R}^N)$  con la misma constante de lipschitzianidad que  $u_0$ . Nótese que, en esta situación, la lipschitzianidad global se transmite al interior.  $\square$

### 6.2.1 Existencia de soluciones.

En la Sección 4.3 hicimos un estudio general sobre el uso del *método de Perron*. Obviamente, los casos allí considerados incluyen ecuaciones de evolución generales entre las que se encuentran las que aparecen en los problemas de Control Óptimo que estamos considerando. Por tanto, nos limitaremos a trasladar los resultados de existencia correspondientes a estos problemas de valor inicial sin necesidad de reiterar su demostración. Así consideraremos problemas de Cauchy de la forma

$$\begin{cases} u_t - F(x, u, \nabla u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (\text{PVI}; u_0)$$

donde  $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$  y  $T \leq +\infty$  un horizonte, no necesariamente maximal en esta etapa de la exposición, ligado a los datos del problema a través de las hipótesis posteriores (6.35) o (6.36). Nuevamente enviamos a [Is5] o [Cr-Is-Li2] para comentarios más concretos acerca de la aplicación de este método.

Comenzamos enunciando nuestro resultado de existencia para soluciones débiles del problema de valor inicial:

#### Teorema 6.28 (Existencia de soluciones débiles)

*Supongamos*

$$\mathcal{L}_d \doteq \left\{ w \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N \times [0, T]) : w \text{ es subsolución débil de (PVI); } u_0 \right\} \neq \emptyset.$$

Si la función

$$U_P(x, t) = \sup \{w(x, t) : w \in \mathcal{L}_d\}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T[ \quad (6.35)$$

toma valores finitos en  $\mathbb{R}^N \times [0, T[$ , entonces  $U_P$  es solución débil de viscosidad del problema (PVI;  $u_0$ ).  $\square$

**Observación 6.29**

De forma análoga se muestra que si

$$\mathcal{L}^d \doteq \{w \in \mathcal{LZA}(\mathbb{R}^N \times [0, T[) : w \text{ es supersolución débil de (PVI; } u_0)\} \neq \emptyset$$

y la función

$$u_P(x, t) = \inf \{w(x, t) : w \in \mathcal{L}^d\}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T[$$

toma valores finitos en  $\mathbb{R}^N \times [0, T[$ , entonces  $u_P$  es solución débil de viscosidad del problema (PVI;  $u_0$ ).  $\square$

A continuación damos un resultado de existencia para soluciones fuertes.

**Teorema 6.30 (Existencia de soluciones fuertes)**

Sea  $u_0 \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N)$  y supongamos

$$\mathcal{L}_f \doteq \{w \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[) : w \text{ es subsolución fuerte de (PVI; } u_0)\}$$

$$\text{tal que } w^*(x, 0^+) = (u_0)^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \} \neq \emptyset.$$

Entonces, si la función

$$\mathbf{U}_P(x, t) = \sup \{w(x, t) : w \in \mathcal{L}_f\}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[ \quad (6.36)$$

toma valores finitos en  $\mathbb{R}^N \times ]0, T[$ , se verifica que  $\mathbf{U}_P$  es solución fuerte de viscosidad del problema (PVI;  $u_0$ ). Además,

$$\mathbf{U}_P(x, 0^+) = (u_0)^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad \square$$

**Observación 6.31**

En el caso en que  $u_0 \in \mathcal{LIA}(\mathbb{R}^N)$ , si se verifica

$$\mathcal{L}^f \doteq \{w \in \mathcal{LIA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[) : w \text{ es supersolución fuerte de (PVI; } u_0)\}$$

$$\text{tal que } w_*(x, 0^+) = (u_0)_*(x), x \in \mathbb{R}^N \} \neq \emptyset$$

y la función

$$u_P(x, t) = \inf \{w(x, t) : w \in \mathcal{L}^f\}, (x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[ \quad (6.37)$$

toma valores finitos en  $\mathbb{R}^N \times ]0, T[$ , entonces  $u_P$  es solución fuerte de viscosidad del problema (PVI;  $u_0$ ). Además,

$$u_P(x, 0^+) = (u_0)_*(x), x \in \mathbb{R}^N. \quad \square$$

**Observación 6.32**

De hecho, si  $u_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  está acotado superiormente de forma que  $u_0 \in \mathcal{L}_f^c$  siendo

$$\mathcal{L}_f^c \doteq \{w \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N \times ]0, +\infty[) : w \text{ es subsolución fuerte de (PVI; } u_0)\}$$

$$\text{tal que } w \leq c \text{ en } \mathbb{R}^N \times ]0, +\infty[ \text{ y } w^*(x, 0^+) = (u_0)^*(x), x \in \mathbb{R}^N \}$$

con  $c \geq 0$ , entonces la función

$$U_P^c(x, t) \doteq \sup \{w(x, t) : w \in \mathcal{L}_f^c\}, (x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, +\infty[ \quad (6.38)$$

es solución fuerte de viscosidad del problema (PVI;  $u_0$ ). Además,

$$u_0(x) \leq U_P^c(x, t) \leq c, (x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, +\infty[ \quad (6.39)$$

y

$$U_P^c(x, 0^+) = (u_0)^*(x), x \in \mathbb{R}^N. \quad \square$$

**Observación 6.33**

De forma análoga, si  $u_0 \in \mathcal{LIA}(\mathbb{R}^N)$  verifica  $u_0 \in \mathcal{L}_c^f$  con

$$\mathcal{L}_c^f \doteq \{w \in \mathcal{LIA}(\mathbb{R}^N \times ]0, +\infty[) : w \text{ es supersolución fuerte de (PVI; } u_0)\}$$

tal que  $w \geq -c$  en  $\mathbb{R}^N \times ]0, +\infty[$  y  $w_*(x, 0^+) = (u_0)_*(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$  }  
 entonces la función

$$\mathbf{u}_P^c(x, t) \doteq \inf \{w(x, t) : w \in \mathcal{L}_c^f\}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, +\infty[ \quad (6.40)$$

es solución fuerte de viscosidad del problema (PVI;  $u_0$ ). Además,

$$u_0(x) \geq \mathbf{u}_P^c(x, t) \geq -c, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, +\infty[ \quad (6.41)$$

y

$$\mathbf{u}_P^c(x, 0^+) = (u_0)_*(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad \square$$

Para los resultados de unicidad también seguimos los comentarios hechos en la Sección 4.3. El Principio de Comparación toma ahora la siguiente forma: si  $v \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T])$  y  $w \in \mathcal{LIA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T])$  son, respectivamente, sub y supersolución de la ecuación

$$u_t - F(x, u, \nabla u) = 0 \text{ en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[$$

tales que

$$v^*(x, 0^+) \leq w_*(x, 0^+), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

entonces

$$v(x, t) \leq v^*(x, t) \leq w_*(x, t) \leq w(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[.$$

De esta forma, se verifica:

### **Teorema 6.34 (Unicidad)**

Si  $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$  y se verifica un Principio de Comparación entonces el problema (PVI;  $u_0$ ) admite, a lo sumo, una única solución fuerte que, además, es continua.  $\square$

### **Corolario 6.35**

Si  $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$ ,  $\mathcal{L}_f \neq \emptyset$ , se verifica un Principio de Comparación y la función  $\mathbf{U}_P$  dada en (6.36) toma valores finitos en  $\mathbb{R}^N \times [0, T[$ , entonces  $\mathbf{U}_P$  es la única solución fuerte de viscosidad de (PVI;  $u_0$ ). En tal caso,  $\mathbf{U}_P \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$  y

$$\mathbf{U}_P(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad \square$$

De forma análoga,

**Corolario 6.36**

*Si  $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$ ,  $\mathcal{L}^f \neq \emptyset$ , se verifica un Principio de Comparación y la función  $u_P$  dada en (6.37) toma valores finitos en  $\mathbb{R}^N \times [0, T[$ , entonces  $u_P$  es la única solución fuerte de viscosidad de (PVI;  $u_0$ ). En esa situación,  $u_P \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N \times [0, T[)$  y*

$$u_P(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad \square$$



# Capítulo 7

## $D^+$ -soluciones de problemas de contorno.

### 7.1 Modelo de la llama.

Como mostramos en el Capítulo 3, el *criterio de entropía* permite explicar el fenómeno de propagación de una llama mediante la función

$$\varphi(x, t) = \chi_{\overline{B}_{\sigma+ct}(0)}(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

Pretendemos ahora caracterizar esa representación mediante la teoría de las soluciones de viscosidad de un problema de contorno. Puesto que se trata de una función discontinua, requeriremos trabajar con ese tipo concreto de soluciones de viscosidad. Hasta el momento los resultados de unicidad exigían la continuidad de las soluciones con lo que debemos salvar, para este tópico, tal dificultad.

Para simplificar la exposición nos apoyaremos, en un primer momento, en el caso unidimensional, es decir, vamos a mostrar que la función  $\varphi$  (con  $N = 1$ ) es solución de viscosidad del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t = c|u_x| & \text{en } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(\cdot, 0) = \chi_{\overline{B}_\sigma(0)}(\cdot) & \text{en } \mathbb{R} \end{cases} \quad (7.1)$$

y, además,

$$p_2 = c|p_1|, \quad (p_1, p_2) \in D^+\varphi^*(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$



En primer lugar, como

$$\varphi^*(x, t) = \varphi(x, t) \quad \text{y} \quad \varphi_*(x, t) = \chi_{\mathbf{B}_{\sigma+ct}(0)}(x),$$

en el conjunto

$$Q_1 \doteq (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) \setminus \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : |x| = \sigma + ct\}$$

la función  $\varphi^* = \varphi_* = \varphi$  es diferenciable y

$$(\varphi_x(x, t), \varphi_t(x, t)) = (0, 0), \quad (x, t) \in Q_1.$$

Además

$$\limsup_{(y,t) \rightarrow (x,0^+)} \varphi^*(y, t) = \chi_{\overline{\mathbf{B}_\sigma(0)}}(x), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

y

$$\liminf_{(y,t) \rightarrow (x,0^+)} \varphi_*(y, t) = \chi_{\mathbf{B}_\sigma(0)}(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Veamos qué ocurre en los puntos  $(x_0, t_0) \in \partial Q_1$  en los que

$$|x_0| = \sigma + ct_0, \quad t_0 > 0.$$

En lo que sigue supondremos  $x_0 \geq 0$  (el caso  $x_0 < 0$  se aborda de forma análoga).

- Como  $\varphi^*(x_0, t_0) = 1$ , un vector de dirección de la recta que une los puntos

$$A = (\sigma, 0, 1) \quad \text{y} \quad B = (\sigma + ct_0, t_0, 1)$$

es

$$\vec{u} = (c, 1, 0).$$

Sea  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$  tal que

$$\vec{v} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} cv_1 + v_2 = 0 \\ v_3 \in \mathbb{R} \text{ arbitrario.} \end{cases} \quad (7.2)$$

Estamos interesados en el haz de *planos supertangentes* a  $\varphi^*$  en el punto  $B = (\sigma + ct_0, t_0, 1)$ , por tanto, de todos los vectores  $\vec{v}$  perpendiculares a

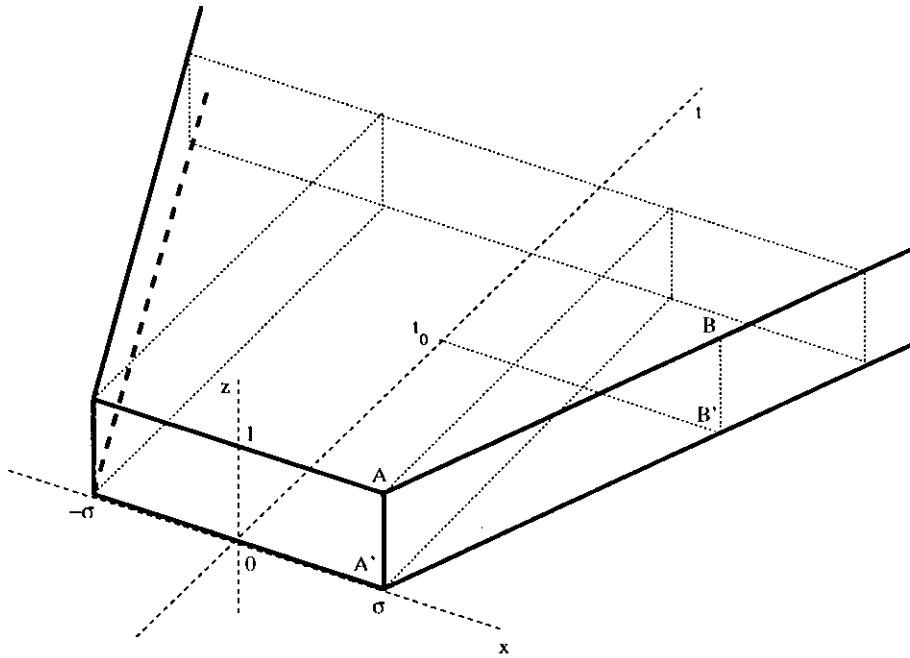


Figura 7.1: Gráficas de las funciones  $\varphi^*$  y  $\varphi_*$ .

$\vec{u}$  sólo nos interesan aquellos en los que las coordenadas  $v_1$  y  $v_3$  tienen el signo opuesto, es decir,

$$v_1 v_3 \leq 0. \tag{7.3}$$

Así, la ecuación del plano determinado por los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  que pasan por los puntos  $A$  y  $B$  es

$$n_1(x - \sigma) + n_2 t + n_3(z - 1) = 0$$

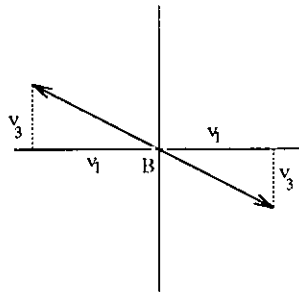


Figura 7.2: Componentes  $v_1$  y  $v_3$  del vector  $\vec{v}$ .

donde  $(n_1, n_2, n_3)$  son las componentes del vector

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \left( \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ v_2 & v_3 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} 0 & c \\ v_3 & v_1 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} c & 1 \\ v_1 & v_2 \end{array} \right| \right) = (v_3, -cv_3, cv_2 - v_1).$$

La relación (7.2) permite escribir

$$\vec{n} = (v_3, -cv_3, -(1+c^2)v_1),$$

por tanto, la ecuación del haz de planos que buscamos es

$$v_3(x - \sigma) - cv_3t - (1+c^2)v_1(z - 1) = 0.$$

Es decir,

$$z = 1 + p_1(x - \sigma) + p_2t$$

con

$$(p_1, p_2) = \left( \frac{v_3}{(1+c^2)v_1}, -\frac{cv_3}{(1+c^2)v_1} \right) \in D^+ \varphi^*(\sigma + ct_0, t_0).$$

Por tanto, a partir de (7.3), se verifica

$$p_2 = -cp_1 = c|p_1|, \quad (p_1, p_2) \in D^+ \varphi^*(\sigma + ct_0, t_0).$$

Luego  $\varphi^*$  es subsolución fuerte de viscosidad de (7.1).

- Ahora  $\varphi_*(x_0, t_0) = 0$ . Razonando como en el caso anterior se obtiene que

$$z = p_1(x - \sigma) + p_2t$$

es la ecuación del haz de *planos subtangentes* a la gráfica de  $\varphi_*$  en el punto  $B' = (\sigma + ct_0, t_0, 0)$  para

$$(p_1, p_2) = \left( \frac{v_3}{(1+c^2)v_1}, -\frac{cv_3}{(1+c^2)v_1} \right) \in D^- \varphi_*(\sigma + ct_0, t_0)$$

y las componentes  $v_1$  y  $v_3$  del vector  $\vec{v}$  siguen verificando la condición (7.3). Por tanto,

$$p_2 = -cp_1 = c|p_1|, \quad (p_1, p_2) \in D^- \varphi_*(\sigma + ct_0, t_0),$$

por lo que  $\varphi_*$  es supersolución fuerte de viscosidad de (7.1).

Para el caso general  $N > 1$  las ideas geométricas anteriores son delicadas de llevar, por lo que utilizaremos argumentos analíticos. Claramente,

$$(\nabla\varphi(x, t), \varphi_t(x, t)) = (0, 0), \quad (x, t) \in Q_N \quad (7.4)$$

donde

$$Q_N \doteq (\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+) \setminus \{(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ : |x| = \sigma + ct\}.$$

Si  $|x_0| = \sigma + ct_0$  con  $t_0 > 0$ , consideremos un elemento  $(p_1, p_2) \in D^+\varphi^*(x_0, t_0)$ . Como  $\varphi^*(x_0, t_0) = 1$  entonces

$$\varphi^*(x, t) \leq 1 + p_1 \cdot (x - x_0) + p_2(t - t_0) + o(|x - x_0| + |t - t_0|).$$

La elección  $x = x_0$  y  $t > t_0$  hace que  $\varphi^*(x, t) = 1$ ; de esta forma,

$$p_2 \geq 0. \quad (7.5)$$

Además, si  $x \in \overline{B}_{\sigma+ct}(0)$  entonces  $\varphi^*(x, t) = 1$ , por lo que

$$0 \leq p_1 \cdot (x - x_0) + p_2(t - t_0) + o(|x - x_0| + |t - t_0|), \quad |x| \leq \sigma + ct. \quad (7.6)$$

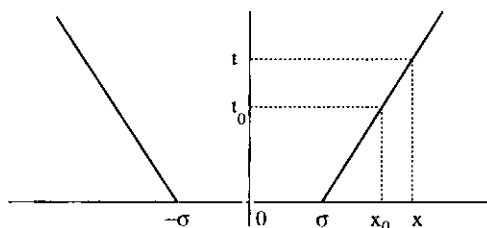


Figura 7.3:  $|x| = \sigma + ct$  con  $t > t_0$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , para la elección

$$x = \frac{|x_0| + \varepsilon}{|x_0|} x_0 \quad \text{y} \quad t = t_0 + \frac{\varepsilon}{c}$$

se verifica

$$|x| = |x_0| + \varepsilon = \sigma + ct_0 + \varepsilon = \sigma + ct,$$

por lo que reemplazando en (7.6) obtenemos

$$0 \leq \varepsilon \left( p_1 \cdot \frac{x_0}{|x_0|} + \frac{p_2}{c} \right) + o(\varepsilon).$$

Dividiendo por  $\varepsilon$  y haciendo tender  $\varepsilon \rightarrow 0$  se tiene

$$p_1 \cdot \frac{x_0}{|x_0|} + \frac{p_2}{c} \geq 0. \quad (7.7)$$

Si ahora  $0 < \varepsilon < ct_0$ , tomando

$$x = \frac{|x_0| - \varepsilon}{|x_0|} x_0 \quad \text{y} \quad t = t_0 - \frac{\varepsilon}{c}$$

se verifica

$$|x| = |x_0| - \varepsilon = \sigma + ct_0 - \varepsilon = \sigma + ct,$$

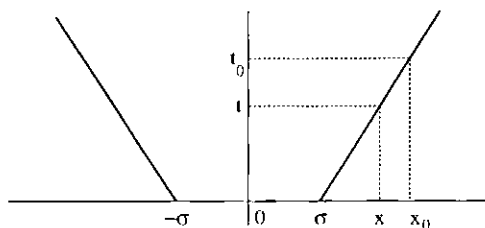


Figura 7.4:  $|x| = \sigma + ct$  con  $t < t_0$ .

por lo que sustituyendo en (7.6) se obtiene

$$0 \leq -\varepsilon \left( p_1 \cdot \frac{x_0}{|x_0|} + \frac{p_2}{c} \right) + o(\varepsilon).$$

Dividiendo nuevamente por  $\varepsilon$  y haciendo tender  $\varepsilon \rightarrow 0$  se llega a

$$p_1 \cdot \frac{x_0}{|x_0|} + \frac{p_2}{c} \leq 0. \quad (7.8)$$

De esta forma, a partir de (7.7) y (7.8) se verifica

$$p_2 = -\frac{c}{|x_0|} p_1 \cdot x_0. \quad (7.9)$$

Distinguimos dos casos:

---

<sup>1</sup>La relación (7.5) implica, por tanto, que  $p_1 \cdot x_0 \leq 0$ .

1. Si  $p_1 = 0$ , la relación (7.9) implica  $p_2 = 0$ . Luego,

$$(0, 0) \in D^+ \varphi^*(x_0, t_0). \quad (7.10)$$

2. Si  $p_1 \neq 0$  tomamos

$$x = x_0 - c \frac{p_1}{|p_1|} (t - t_0) \quad \text{con } t > t_0.$$

Como

$$|x| \leq |x_0| + c(t - t_0) = \sigma + ct,$$

dividiendo por  $t - t_0$  en la expresión (7.6), se obtiene

$$0 \leq (-c|p_1| + p_2) + \frac{o(|t - t_0|)}{t - t_0}$$

con lo que haciendo tender  $t \rightarrow t_0^+$  se verifica

$$p_2 \geq c|p_1|. \quad (7.11)$$

Nótese que por (7.10) la desigualdad anterior es también cierta cuando  $p_1 = 0$ .

De esta forma, a partir de (7.5), (7.9) y (7.11) se obtiene

$$0 \leq p_2 = -\frac{c}{|x_0|} p_1 \cdot x_0 \leq c|p_1| \leq p_2,$$

luego

$$p_2 = -\frac{c}{|x_0|} p_1 \cdot x_0 = c|p_1|, \quad (p_1, p_2) \in D^+ \varphi^*(x_0, t_0), \quad |x_0| = \sigma + ct_0. \quad (7.12)$$

Además, como

$$-p_1 \cdot x_0 = |p_1| |x_0| \Leftrightarrow p_1 = -\alpha \frac{x_0}{|x_0|} \quad \text{con } \alpha \geq 0,$$

la relación (7.12) permite determinar el conjunto superdiferencial de la función  $\varphi^*$  en cualquier punto  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$ . Concretamente,

$$D^+ \varphi^*(x, t) = \begin{cases} (0, 0) & \text{si } |x| \neq \sigma + ct \\ \left\{ \left( -\alpha \frac{x}{|x|}, \alpha c \right) \right\}_{\alpha \geq 0} & \text{si } |x| = \sigma + ct. \end{cases}$$

**Observación 7.1**

Como  $\varphi_* = -(-\varphi)^*$ , argumentando análogamente se obtiene

$$\begin{aligned} D^- \varphi_*(x, t) &= D^- (-(-\varphi)^*)(x, t) = -D^+ (-\varphi)^*(x, t) \\ &= \begin{cases} (0, 0) & \text{si } |x| \neq \sigma + ct \\ \left\{ \left( -\alpha \frac{x}{|x|}, \alpha c \right) \right\}_{\alpha \geq 0} & \text{si } |x| = \sigma + ct. \quad \square \end{cases} \end{aligned}$$

**7.2 Definición de las  $D^+$ -soluciones.**

Cuando el hamiltoniano es convexo, a partir del Teorema de Verificación se extraen propiedades interesantes.

**Teorema 7.2**

Sea  $\mathcal{H}$  una función convexa, s.c.i. y  $u \in \mathcal{L}\mathcal{A}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$ ,  $T \leq +\infty$ , una solución de viscosidad de la ecuación

$$u_t - \mathcal{H}(\nabla u) \geq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[. \quad (7.13)$$

Entonces, para todo  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[$  se verifica

$$p_2 \geq \mathcal{H}(p_1), \quad (p_1, p_2) \in D^+((u_*)^*)(x, t) \cup D^-u_*(x, t).$$

**Demostración.**

Por el Teorema 4.74 (de Verificación) sabemos que para cada  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[$  se cumple

$$u_*(x - \xi s, t + s) \geq u_*(x, t) - s\mathcal{H}^*(\xi), \quad 0 < s < T - t, \quad \xi \in D(\mathcal{H}^*)$$

(véase (4.72)) por lo que, tomando envueltas superiores, se llega a

$$(u_*)^*(x - \xi s, t + s) \geq (u_*)^*(x, t) - s\mathcal{H}^*(\xi), \quad 0 < s < T - t, \quad \xi \in D(\mathcal{H}^*). \quad (7.14)$$

Por otra parte, de la definición, si  $(p_1, p_2) \in D^+((u_*)^*)(x, t)$  entonces

$$(u_*)^*(x - \xi s, t + s) \leq (u_*)^*(x, t) + (p_2 - p_1 \cdot \xi) s + o((1 + |\xi|)s)$$

que, junto con (7.14), conducen a

$$-s\mathcal{H}^*(\xi) \leq (p_2 - p_1 \cdot \xi) s + o((1 + |\xi|)s), \quad \xi \in D(\mathcal{H}^*).$$

Dividiendo la expresión anterior por  $s > 0$  y haciendo tender  $s \rightarrow 0$  se obtiene

$$p_2 \geq p_1 \cdot \xi - \mathcal{H}^*(\xi), \quad \xi \in D(\mathcal{H}^*).$$

Tomando ahora supremo en  $\xi \in D(\mathcal{H}^*)$  se tiene

$$p_2 \geq \mathcal{H}^{**}(p_1).$$

Finalmente, la convexidad de  $\mathcal{H}$  y el Teorema de Fenchel–Moreau concluyen el resultado.  $\square$

### Observación 7.3

En las condiciones anteriores, si  $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$  entonces

$$p_2 \geq \mathcal{H}(p_1), \quad (p_1, p_2) \in D^+u(x, t) \cup D^-u(x, t). \quad \square$$

### Corolario 7.4

Sea  $\mathcal{H}$  una función convexa, s.c.i. y  $u \in \mathcal{L}\mathcal{A}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$ ,  $T \leq +\infty$ , una solución de viscosidad de (7.13) con la propiedad

$$(u_*)^* = u^* \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[. \quad (7.15)$$

Entonces, para todo  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[$  se verifica

$$p_2 = \mathcal{H}(p_1), \quad (p_1, p_2) \in D^+u^*(x, t). \quad \square$$

### Observación 7.5

1. Como ya hemos comentado, la propiedad (7.15) es verificada por cualquier función  $u \in \mathcal{SC}\mathcal{I}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$ . No obstante, existen funciones s.c.s. con la propiedad anterior como, por ejemplo,

$$u(x, t) \doteq \chi_{\overline{\mathbb{B}}_{\sigma+ct}(0)}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \sigma + ct \\ 0, & |x| > \sigma + ct. \end{cases}$$

2. Obviamente la propiedad (7.15) es más general que la continuidad. En efecto, la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

verifica  $f \in \mathcal{SCS}(\mathbb{R})$  y  $(f_*)^*(x) = f_*(x) = x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . En cambio,

$$(f_*)^*(0) = 0 \neq 1 = f^*(0). \quad \square$$



A la vista del Corolario 7.4, podemos introducir una noción de solución de viscosidad para problemas generales de contorno

$$\begin{cases} \mathcal{F}(z, u, \nabla u) = 0 & \text{en } \mathcal{O} \\ u = \varphi & \text{en } \partial\mathcal{O}, \end{cases} \quad (\text{P})$$

donde  $\varphi : \partial\mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ , que resulta más conveniente en los modelos que nos ocupan. Esta queda recogida en:

**Definición 7.6**

Sea  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^M$ ,  $M \geq 1$  y  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(\mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M)$ .

1.  $u \in \mathcal{LSA}(\mathcal{O})$  es  $D^+$ -solución de viscosidad del problema (P) si

$$\mathcal{F}(z, u^*(z), p) = 0, \quad p \in D^+u^*(z), \quad z \in \mathcal{O}$$

y

$$\limsup_{y \rightarrow z} u^*(y) = \varphi^*(z), \quad z \in \partial\mathcal{O}.$$

2.  $u \in \mathcal{LIA}(\mathcal{O})$  es  $D^-$ -solución de viscosidad del problema (P) si

$$\mathcal{F}(z, u_*(z), p) = 0, \quad p \in D^-u_*(z), \quad z \in \mathcal{O}$$

y

$$\liminf_{y \rightarrow z} u_*(y) = \varphi_*(z), \quad z \in \partial\mathcal{O}.$$

Para hamiltonianos estrictamente convexos, el conjunto superdiferencial de las  $D^+$ -soluciones es, como mostramos a continuación, unitario ó vacío.

**Teorema 7.7**

Si  $\mathcal{H} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  es estrictamente convexo y  $u \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$ ,  $T \leq +\infty$ , es  $D^+$ -solución de viscosidad del problema

$$\begin{cases} u_t - \mathcal{H}(u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (7.16)$$

entonces, para cada  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[$ , el conjunto  $D^+u^*(x, t)$  contiene, a lo sumo, un único elemento.

**Demostración.**

Supongamos que  $D^+u^*(x, t) \neq \emptyset$  y sean  $(p_1, p_2), (q_1, q_2) \in D^+u^*(x, t)$ . Como los conjuntos semidiferenciales son convexos, entonces

$$(\lambda p_1 + (1 - \lambda)q_1, \lambda p_2 + (1 - \lambda)q_2) \in D^+u^*(x, t) \text{ para } 0 < \lambda < 1.$$

De esta forma, como  $u$  es  $D^+$ -solución de (7.16) y  $\mathcal{H}$  es estrictamente convexo, se tiene

$$\begin{aligned} \lambda p_2 + (1 - \lambda)q_2 &= \mathcal{H}(\lambda p_1 + (1 - \lambda)q_1) \\ &< \lambda \mathcal{H}(p_1) + (1 - \lambda)\mathcal{H}(q_1) = \lambda p_2 + (1 - \lambda)q_2 \end{aligned}$$

lo que implica

$$(p_1, p_2) = (q_1, q_2)$$

(pues, en caso contrario, se llega a una contradicción).  $\square$

El resultado anterior es completado por el siguiente lema técnico:

**Lema 7.8**

Sea  $\mathcal{O}$  un abierto de  $\mathbb{R}^M$ ,  $M \geq 1$  y  $w \in SCS(\mathcal{O})$ . Si para algún  $z_0 \in \mathcal{O}$  se verifica

$$D^+w(z_0) = \{p_0\} \text{ con } p_0 \in \mathbb{R}^M$$

entonces  $w$  es diferenciable en  $z_0$  y

$$\nabla w(z_0) = p_0.$$

**Demostración.**

Sin pérdida de generalidad podemos suponer

$$z_0 = 0, w(z_0) = 0 \text{ y } p_0 = 0$$

pues, en otro caso, bastaría reemplazar  $w$  por la función

$$W(z) = w(z) - w(z_0) - p \cdot (z - z_0), z \in \mathcal{O}.$$

Así pues, como  $0 \in D^+w(0)$ , se verifica

$$\limsup_{|z| \rightarrow 0} \frac{w(z)}{|z|} \leq 0.$$

Por otra parte, el caracter unitario del conjunto  $D^+w(0)$  hace que, dado  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^M$  con  $|\mathbf{e}| = 1$ , se verifique

$$\delta \mathbf{e} \notin D^+w(0) \text{ para } \delta > 0,$$

luego

$$\rho(\delta) \doteq \limsup_{|z| \rightarrow 0} \frac{w(z) - \delta \mathbf{e} \cdot z}{|z|} > 0, \quad \delta > 0.$$

De esta forma, para cada  $\delta > 0$  y  $\varepsilon > 0$ , se verifican las desigualdades

$$(\rho(\delta) - \varepsilon) \leq w(z) - \delta \mathbf{e} \cdot z \leq o(|z|) - \delta \mathbf{e} \cdot z \leq o(|z|) + \delta |z|, \quad |z| \ll 1. \quad (7.17)$$

Así pues, dividiendo la expresión anterior por  $|z|$  y haciendo tender  $|z| \rightarrow 0$  se obtiene

$$\rho(\delta) - \varepsilon \leq \rho(\delta) \leq \delta \Rightarrow 0 < \rho(\delta) \leq \varepsilon + \delta.$$

Haciendo ahora  $\delta \rightarrow 0$  se llega a

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(\delta) = 0.$$

Regresando a la expresión (7.17) y haciendo tender primero  $\delta \rightarrow 0$  y luego  $\varepsilon \rightarrow 0$  se concluye

$$\lim_{|z| \rightarrow 0} \frac{w(z)}{|z|} = 0. \quad \square$$

### Observación 7.9

Este resultado generaliza al que ya habíamos mostrado en el Corolario 4.29 para funciones  $f : ]a, b[ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s.c.s. en  $x_0 \in ]a, b[$ .  $\square$

De esta forma, los dos resultados anteriores conducen a:

### Corolario 7.10

Si  $\mathcal{H} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  es estrictamente convexo y  $u \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N \times ]0, T[)$ ,  $T \leq +\infty$ , es una  $D^+$ -solución de viscosidad de (7.16) entonces

$$D^+u^*(x, t) \neq \emptyset \Rightarrow D^+u^*(x, t) = (\nabla u^*(x, t), (u^*)_t(x, t)).$$

Consecuentemente, en los puntos  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[$  en los que  $D^+u^*(x, t) \neq \emptyset$  se verifica

$$(u^*)_t(x, t) - \mathcal{H}(\nabla u^*(x, t)) = 0. \quad \square$$

En la Proposición 4.76 mostramos que si  $u_0 \in \mathcal{LA}(\mathbb{R}^N)$  tiene la propiedad

$$(((u_0)_*)^*)^* = (u_0)^* \text{ en } \mathbb{R}^N \quad (7.18)$$

entonces la función de Lax-Oleinik asociada al conjugado del hamiltoniano  $H^*$  y al dato inicial  $(u_0)^*$  verifica

$$(\mathcal{U}_*)^*(\cdot, \cdot; (u_0)^*(\cdot)) = \mathcal{U}^*(\cdot, \cdot; (u_0)^*(\cdot)) \text{ en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[$$

para algún  $T \leq +\infty$ . Por tanto, a partir de los resultados de la Sección 5.4, se tiene:

**Corolario 7.11 (Existencia de  $D^+$ -soluciones)**

Sea  $\mathcal{H}$  una función convexa, s.c.i. y  $u_0 \in \mathcal{LA}(\mathbb{R}^N)$  verificando (7.18). Entonces la función de Lax-Oleinik

$$\mathcal{U}(x, t; (u_0)^*(\cdot)) = \sup_{\xi \in D(\mathcal{H}^*)} \{(u_0)^*(x + \xi t) - t\mathcal{H}^*(\xi)\}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times ]0, T[$$

es una  $D^+$ -solución de viscosidad de

$$\begin{cases} u_t - \mathcal{H}(\nabla u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

para algún  $T \leq +\infty$ .  $\square$

**Observación 7.12**

Nótese que no toda solución fuerte de viscosidad de un problema de contorno es, necesariamente, una  $D^+$ -solución de dicho problema. En efecto, si consideramos el problema

$$\begin{cases} |u'| - 1 = 0 & \text{en } ]0, 1[ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

(veáse el Ejemplo A.7 en el Apéndice A) la *única* solución fuerte de viscosidad (que además es continua) es

$$u_1(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

pero no es una  $D^+$ -solución de viscosidad de dicho problema. En cambio, la función  $\hat{u}_1(x) = -u_1(x)$  es  $D^+$ -solución pero no solución fuerte de viscosidad (de hecho, es subsolución pero no supersolución de viscosidad).  $\square$

### 7.3 La ecuación eikonal.

Como en el caso  $m > 1$ , argumentos propios de la Teoría de Control Óptimo Determinista permiten el estudio de la ecuación eikonal

$$u_t - c|\nabla u| = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \quad (c > 0)$$

con  $N \geq 1$ .<sup>2</sup>

#### 7.3.1 Programación Dinámica.

Sea  $\mathbf{B} = \overline{\mathbf{B}}_c(0)$  el conjunto de valores de control y  $\mathcal{A} = \mathcal{C}(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathbf{B})$  el espacio de controles. Para cada  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$  formamos el sistema

$$\begin{cases} \mathcal{X}(s) = x - \int_0^s a(\sigma) d\sigma, & s > 0 \\ \mathcal{T}(s) = t - s, & s > 0 \end{cases}$$

cuyo primer instante de salida de  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$  es  $t$ . Así, para cada función  $u_0 \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N)$  y cada control  $a(\cdot)$  podemos considerar el criterio de tipo Meyer

$$J(x, t; a(\cdot)) = u_0 \left( x - \int_0^t a(\sigma) d\sigma \right).$$

En estas condiciones, estamos interesados en la función coste óptimo

$$\mathbf{u}(x, t) = \sup_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} J(x, t; a(\cdot)), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+. \quad (7.19)$$

Por una parte

$$\mathbf{u}(x, t) = \sup_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} u_0 \left( x - \int_0^t a(\sigma) d\sigma \right) \leq \sup_{z \in \mathbf{B}} u_0(x - zt)$$

y, por otra, considerando para cada  $z \in \mathbf{B}$  controles constantes de la forma

$$a_z(s) \equiv z, \quad 0 \leq s \leq t$$

se verifica

$$\mathbf{u}(x, t) \geq u_0(x - zt), \quad z \in \mathbf{B}.$$

---

<sup>2</sup>En el Capítulo 3 ya dimos otra forma de abordar la ecuación eikonal.

Se obtiene así una representación de (7.19) de la forma

$$\mathbf{u}(x, t) = \sup_{z \in \mathbf{B}} u_0(x - zt) = \sup_{|x-y| \leq ct} u_0(y), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+. \quad (7.20)$$

Sea  $s \in [0, t]$ . Por definición, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $z_\varepsilon \in \mathbf{B}$  tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, t) - \varepsilon &\leq u_0(x - z_\varepsilon t) = u_0(x - z_\varepsilon s - z_\varepsilon(t - s)) \\ &\leq \sup_{z \in \mathbf{B}} u_0(x - z_\varepsilon s - z(t - s)) = \mathbf{u}(x - z_\varepsilon s, t - s) \leq \sup_{z \in \mathbf{B}} \mathbf{u}(x - zs, t - s). \end{aligned}$$

Además, existe  $\tilde{z}_\varepsilon \in \mathbf{B}$  verificando

$$\begin{aligned} \sup_{z \in \mathbf{B}} \mathbf{u}(x - zs, t - s) - \varepsilon &\leq \mathbf{u}(x - \tilde{z}_\varepsilon s, t - s) \\ &= \sup_{z \in \mathbf{B}} u_0(x - \tilde{z}_\varepsilon s - z(t - s)) = \sup_{z \in \mathbf{B}} u_0(x - zt + (z - \tilde{z}_\varepsilon)s). \end{aligned}$$

Debido a la equivalencia

$$x - \xi t = x - zt + (z - \tilde{z}_\varepsilon)s \Leftrightarrow \xi = z - \frac{s}{t}(z - \tilde{z}_\varepsilon) = \left(1 - \frac{s}{t}\right)z + \frac{s}{t}\tilde{z}_\varepsilon$$

se obtiene  $|\xi| \leq c$  (nótese que se trata de una combinación lineal convexa entre  $z$  y  $\tilde{z}_\varepsilon$ , ambos en  $\overline{\mathbf{B}}_c(0)$ ). Consecuentemente,

$$\sup_{z \in \mathbf{B}} \mathbf{u}(x - zs, t - s) - \varepsilon \leq \sup_{\xi \in \mathbf{B}} u_0(x - \xi t) = \mathbf{u}(x, t).$$

De esta forma hemos demostrado que para  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $0 \leq s \leq t$  se verifica

$$\mathbf{u}(x, t) = \sup_{v \in \mathbf{B}} \mathbf{u}(x - vs, t - s) = \sup_{|x-y| \leq cs} \mathbf{u}(y, t - s). \quad (7.21)$$

Nótese que (7.21) es la expresión matemática del *Principio de Optimalidad de la Programación Dinámica*.

A continuación mostramos el problema de Cauchy que resuelve  $\mathbf{u}$ .

### Teorema 7.13

*La función coste óptimo  $\mathbf{u}$  definida en (7.19) es solución fuerte de viscosidad del problema*

$$\begin{cases} u_t - c|\nabla u| = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (7.22)$$

**Demostración.**

En (7.20) hemos mostrado la igualdad entre la *función coste óptimo* y la función de *Lax-Oleinik* del problema  $(\mathcal{P})$ . Utilicemos esta caracterización.

Sea  $\psi \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$  tal que para algún punto  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$  y  $\varepsilon > 0$  se verifique

$$(\mathbf{u}^* - \psi)(x_0, t_0) > (\mathbf{u}^* - \psi)(x, t), \quad |x - x_0|^2 + |t - t_0|^2 < \varepsilon.$$

De esta forma, para  $0 \leq s \leq t_0$ , se tiene

$$\mathbf{u}^*(x_0, t_0) \leq \sup_{|y-x_0| \leq cs} \mathbf{u}^*(y, t_0 - s) \leq \sup_{|y-x_0| \leq cs} \{\psi(y, t_0 - s) + (\mathbf{u}^* - \psi)(x_0, t_0)\},$$

es decir,

$$\sup_{|y-x_0| \leq cs} \{\psi(y, t_0 - s) - \psi(x_0, t_0)\} \geq 0.$$

Ahora bien, al ser  $\psi$  una función regular, se verifica

$$\psi(y, t_0 - s) - \psi(x_0, t_0) = \nabla \psi(x_0, t_0) \cdot (y - x_0) - s\psi_t(x_0, t_0) + o(s)$$

con lo que

$$\sup_{|y-x_0| \leq cs} \{\nabla \psi(x_0, t_0) \cdot (y - x_0) - s\psi_t(x_0, t_0) + o(s)\} \geq 0.$$

De esta forma, la relación

$$\sup_{|y-x_0| \leq cs} \{\nabla \psi(x_0, t_0) \cdot (y - x_0)\} = cs|\nabla \psi(x_0, t_0)|$$

determina

$$\psi_t(x_0, t_0) - c|\nabla \psi(x_0, t_0)| \leq 0$$

sin más que dividir por  $s > 0$  y hacer tender  $s \rightarrow 0$ . Un argumento análogo muestra que  $\mathbf{u}_*$  es supersolución de viscosidad. Como además,

$$\limsup_{(y,t) \rightarrow (x,0^+)} \mathbf{u}^*(y, t) \leq (u_0)^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

y

$$\liminf_{(y,t) \rightarrow (x,0^+)} \mathbf{u}_*(y, t) \geq (u_0)_*(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

entonces  $\mathbf{u}$  es solución fuerte de viscosidad del problema (7.22).  $\square$

**Observación 7.14**

Al abordar anteriormente el problema de la propagación del frente de llama, obtuvimos el valor preciso de las semidiferenciales de  $\varphi$  para el dato inicial concreto

$$u_0(\cdot) \doteq \chi_{\overline{\mathbf{B}}_\sigma(0,0)}(\cdot) \text{ en } \mathbb{R}^2.$$

Ahora, la Ecuación de la Programación Dinámica nos ha permitido demostrar de una forma general que la función coste óptimo  $\mathbf{u}$  verifica la ecuación en derivadas parciales ahora en todo  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$  para datos iniciales generales  $u_0 \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N)$  con  $N \geq 1$ .  $\square$

A la vista del Corolario 7.11, podemos concluir:

**Corolario 7.15 (Existencia de  $D^+$ -soluciones)**

Si  $u_0 \in \mathcal{LA}(\mathbb{R}^N)$  verifica (7.18) entonces la función

$$\mathbf{u}(x, t) = \sup_{z \in \mathbf{B}} (u_0)^*(x - zt) = \sup_{|x-y| \leq ct} (u_0)^*(y), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

es una  $D^+$ -solución de viscosidad de (7.22).  $\square$

**7.3.2 Problemas de contorno con datos iniciales discontinuos.**

Sea  $\Omega$  un abierto convexo de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$  y

$$u_0(x) = \chi_{\overline{\Omega}}(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

La función de Lax-Oleinik del problema

$$\begin{cases} u_t = c|\nabla u| & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(\cdot, 0) = \chi_{\overline{\Omega}}(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

viene dada por

$$\mathcal{U}(x, t; \chi_{\overline{\Omega}}(\cdot)) = \sup_{y \in \overline{\mathbf{B}}_{ct}(x)} \chi_{\overline{\Omega}}(y), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0. \quad (7.23)$$

Claramente

$$\chi_{\overline{\Omega}}(x) \leq \mathcal{U}(x, t; \chi_{\overline{\Omega}}(\cdot)) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0,$$



de donde se deduce

$$\mathcal{U}(x, t; \chi_{\overline{\Omega}}(\cdot)) = 1, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad t \geq 0.$$

Denotando

$$\Omega(t) \doteq \{x \in \mathbb{R}^N : \text{dist}(x, \overline{\Omega}) \leq ct\}$$

vamos a distinguir dos situaciones:

1.  $x \in \overline{\Omega}(t) \setminus \overline{\Omega}$ . Para todo

$$\tilde{y} \in \overline{\mathbf{B}}_{ct}(x) \cap \overline{\Omega}$$

se verifica

$$1 = \chi_{\overline{\Omega}}(\tilde{y}) \leq \mathcal{U}(x, t; \chi_{\overline{\Omega}}(\cdot)) \leq 1 \Rightarrow \mathcal{U}(x, t) = 1.$$

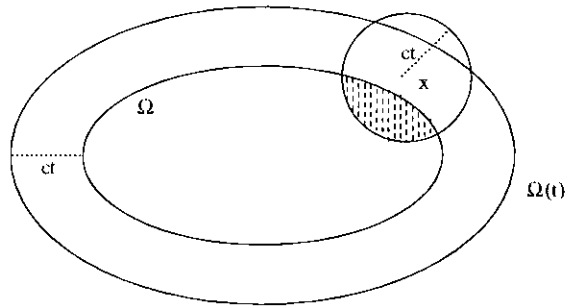


Figura 7.5: Dominio  $\Omega(t)$ .

2.  $x \notin \Omega(t)$ . En este caso

$$\chi_{\overline{\Omega}}(y) = 0, \quad y \in \overline{\mathbf{B}}_{ct}(x) \Rightarrow \mathcal{U}(x, t) = 0.$$

De esta forma, la función definida en (7.23) es

$$\mathcal{U}(x, t; \chi_{\overline{\Omega}}(\cdot)) = \chi_{\overline{\Omega}(t)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \overline{\Omega}(t) \\ 0, & x \notin \overline{\Omega}(t). \end{cases}$$

Ahora vamos a considerar datos iniciales discontinuos más generales y en lo que sigue, para simplificar la exposición, nos centraremos en el caso en el que el dominio es

$$\Omega = \mathbf{B}_\sigma(0), \quad \sigma > 0.$$

La fórmula de Lax-Oleinik del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t = c|\nabla u| & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(\cdot, 0) = A|x|^\gamma \chi_{\overline{\mathbf{B}_\sigma(0)}}(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (\text{P})$$

donde  $A \geq 0$  y  $\gamma \geq 0$ , toma la forma

$$\mathcal{U}(x, t; A \cdot |\cdot|^\gamma \chi_{\overline{\mathbf{B}_\sigma(0)}}(\cdot)) = A \sup_{y \in \overline{\mathbf{B}_{ct}(x)}} |y|^\gamma \chi_{\overline{\mathbf{B}_\sigma(0)}}(y), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

Ahora, para cada  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $t \geq 0$ , se verifica

$$A|x|^\gamma \chi_{\overline{\mathbf{B}_\sigma(0)}}(x) \leq \mathcal{U}(x, t; A \cdot |\cdot|^\gamma \chi_{\overline{\mathbf{B}_\sigma(0)}}(\cdot)) \leq A \sup_{y \in \overline{\mathbf{B}_{ct}(x)}} |y|^\gamma = A(|x| + ct)^\gamma.$$

Distinguimos varios casos,

1.  $|x| \leq \sigma - ct$ . Para el elemento

$$\tilde{y} = x + ct \frac{x}{|x|} = (|x| + ct) \frac{x}{|x|} \in \overline{\mathbf{B}_\sigma(0)} \cap \overline{\mathbf{B}_{ct}(x)}$$

se verifica

$$A(|x| + ct)^\gamma \leq \mathcal{U}(x, t; A \cdot |\cdot|^\gamma \chi_{\overline{\mathbf{B}_\sigma(0)}}(\cdot)) \leq A|\tilde{y}|^\gamma \chi_{\overline{\mathbf{B}_\sigma(0)}}(\tilde{y}) = A(|x| + ct)^\gamma.$$

Por tanto,  $\mathcal{U}(x, t; A \cdot |\cdot|^\gamma \chi_{\overline{\mathbf{B}_\sigma(0)}}(\cdot)) = A(|x| + ct)^\gamma$ .

2.  $\sigma - ct < |x| \leq \sigma + ct$ . Por consideraciones geométricas, la función  $\mathcal{U}(x, t; A \cdot |\cdot|^\gamma \chi_{\overline{\mathbf{B}_\sigma(0)}}(\cdot))$  alcanza el valor máximo en los elementos del conjunto

$$\partial \mathbf{B}_\sigma(0) \cap \overline{\mathbf{B}_{ct}(x)}$$

y, en particular, para

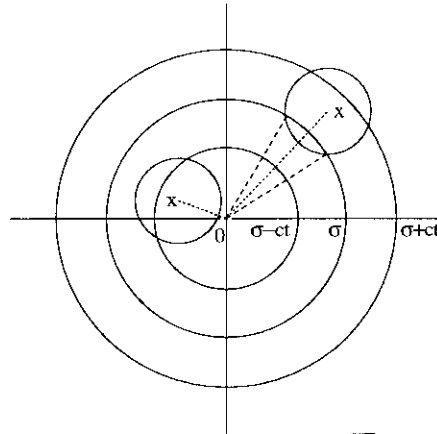
$$\tilde{y} = \sigma \frac{x}{|x|},$$

luego

$$\mathcal{U}(x, t; A \cdot |\cdot|^\gamma \chi_{\overline{\mathbf{B}_\sigma(0)}}(\cdot)) = A|\tilde{y}|^\gamma \chi_{\overline{\mathbf{B}_\sigma(0)}}(\tilde{y}) = A\sigma^\gamma.$$

3.  $|x| > \sigma + ct$ . En este caso

$$\chi_{\overline{\mathbf{B}_\sigma(0)}}(y) = 0, \quad y \in \overline{\mathbf{B}_{ct}(x)} \Rightarrow \mathcal{U}(x, t; A \cdot |\cdot|^\gamma \chi_{\overline{\mathbf{B}_\sigma(0)}}(\cdot)) = 0.$$

Figura 7.6: Región  $\partial\mathbf{B}_\sigma(0) \cap \overline{\mathbf{B}}_{ct}(x)$ .

Consecuentemente,

$$\mathcal{U}(x, t; A|\cdot|^\gamma \chi_{\overline{\mathbf{B}}_\sigma(0)}(\cdot)) = \begin{cases} A(|x| + ct)^\gamma, & |x| \leq \sigma - ct \\ A\sigma^\gamma, & \sigma - ct < |x| \leq \sigma + ct \\ 0, & |x| > \sigma + ct. \end{cases} \quad (7.24)$$

### Observación 7.16

1. En particular, para la elección  $A = 1$  y  $\gamma = 0$ , se tiene

$$\mathcal{U}(x, t; \chi_{\overline{\mathbf{B}}_\sigma(0)}(\cdot)) = \chi_{\overline{\mathbf{B}}_{\sigma+ct}(0)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \sigma + ct \\ 0 & \text{si } |x| > \sigma + ct. \end{cases}$$

2. El resultado anterior puede extenderse a datos iniciales de la forma

$$u_0(x) = f(|x|) \chi_{\overline{\mathbf{B}}_\sigma(0)}(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (\sigma > 0)$$

siendo  $f: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  una función verificando

$$f(r_1) \leq f(r_2), \quad r_1 \leq r_2.$$

Para ese dato inicial, la fórmula de Lax-Oleinik toma la forma

$$\mathcal{U}(x, t; f(|\cdot|) \chi_{\overline{\mathbf{B}}_\sigma(0)}(\cdot)) = \begin{cases} f(|x| + ct) & \text{si } |x| \leq \sigma - ct \\ f(\sigma) & \text{si } \sigma - ct < |x| \leq \sigma + ct \\ 0 & \text{si } |x| > \sigma + ct. \quad \square \end{cases}$$

Veamos que la función dada en (7.24) coincide con la función de Perron

$$\mathbf{U}_P(x, t) = \sup \{w(x, t) : w \in \mathcal{S}_f\}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0 \quad (7.25)$$

donde

$$\mathcal{S}_f \doteq \left\{ w \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N \times \overline{\mathbb{R}}_+) : w \text{ es subsolución fuerte de (P)} \right\}.$$

Ante todo,  $w \equiv 0 \in \mathcal{S}_f$ , lo que implica ya la existencia de  $\mathbf{U}_P$ . Por tanto,  $\mathbf{U}_P$  es subsolución fuerte de viscosidad de (P) y, además,  $\mathbf{U}_P \geq 0$ .

En primer lugar, la maximalidad de  $\mathbf{U}_P$  y el Teorema de Verificación llevan a

$$0 \leq \mathcal{U}(x, t; (u_0)_*(\cdot)) \leq u_*(x, t) \leq u^*(x, t) \leq (\mathbf{U}_P)^*(x, t) \quad (7.26)$$

si  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $t \geq 0$ , para cualquier solución fuerte  $u \in \mathcal{LA}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$  de (P). Por otro lado, como el dato inicial  $u_0(\cdot) = A|\cdot|^\gamma \chi_{\overline{\mathbf{B}}_\sigma(0)}(\cdot)$  es acotado, la propiedad del cono de dependencia (véase el Teorema 6.1) determina que la función

$$(x, t) \mapsto \sup u_0 = A\sigma^\gamma$$

es una supersolución de viscosidad de la ecuación verificando

$$w \leq A\sigma^\gamma, \quad w \in \mathcal{S}_f,$$

luego

$$0 \leq \mathbf{U}_P(x, t) \leq A\sigma^\gamma, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

Por tanto, tomando envueltas superiores en (7.26), se obtiene

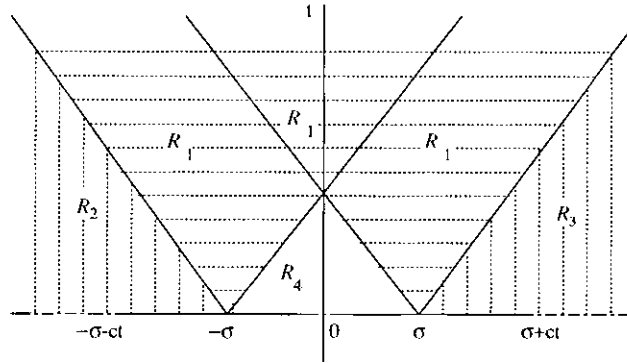
$$0 \leq \mathcal{U}(x, t; u_0(\cdot)) \leq (\mathbf{U}_P)^*(x, t) \leq A\sigma^\gamma, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0$$

dado que, como vimos en la Proposición 4.76, se verifica

$$\mathcal{U}(x, t; u_0(\cdot)) = \mathcal{U}^*(x, t; (u_0)_*(\cdot)), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

De esta forma

$$\mathcal{U}(x, t; u_0(\cdot)) = A\sigma^\gamma \Rightarrow (\mathbf{U}_P)^*(x, t) = A\sigma^\gamma$$

Figura 7.7: Regiones  $\mathcal{R}_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

y, así,

$$(\mathbf{U}_P)^*(x, t) = \mathcal{U}(x, t; u_0(\cdot)) = A\sigma^\gamma \text{ en la región } \overline{\mathcal{R}}_1$$

donde

$$\mathcal{R}_1 \doteq \{(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ : \sigma - ct < |x| < \sigma + ct\}.$$

Por otra parte, como

$$u_0(x) \equiv 0 \in \mathcal{C}(\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3)$$

siendo

$$\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3 \doteq \{(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ : |x| > \sigma + ct\}$$

nuevamente la propiedad del cono de dependencia determina

$$0 \leq (\mathbf{U}_P)^*(x, t) \leq \mathcal{U}_*(x, t; u_0(\cdot)) = 0 \text{ en las regiones } \mathcal{R}_2 \text{ y } \mathcal{R}_3,$$

de donde

$$(\mathbf{U}_P)^*(x, t) = \mathcal{U}_*(x, t; u_0(\cdot)) = \mathcal{U}^*(x, t; u_0(\cdot)) = 0 \text{ en } \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3.$$

Finalmente, como

$$u_0(x) = A(|x| + ct)^\gamma \in \mathcal{C}(\overline{\mathcal{R}}_4)$$

siendo

$$\mathcal{R}_4 \doteq \{(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ : |x| < \sigma - ct\}$$

también por la propiedad del cono de dependencia se tiene

$$A(|x| + ct)^\gamma = \mathcal{U}^*(x, t; u_0(\cdot)) \leq (\mathbf{U}_P)^*(x, t)$$

$$\leq \mathcal{U}_*(x, t; u_0(\cdot)) = A(|x| + ct)^\gamma \text{ en } \overline{\mathcal{R}}_4.$$

De esta forma concluimos la igualdad

$$(\mathbf{U}_P)^*(x, t) = \mathcal{U}(x, t; u_0(\cdot)) = \begin{cases} A(|x| + ct)^\gamma, & |x| \leq \sigma - ct \\ A\sigma^\gamma, & \sigma - ct < |x| \leq \sigma + ct \\ 0, & |x| > \sigma + ct. \end{cases}$$

Luego la función anterior es solución fuerte y  $D^+$ -solución de viscosidad del problema

$$\begin{cases} u_t = c|\nabla u| & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u_0(\cdot) = A|\cdot|^\gamma \chi_{\overline{\mathbf{B}}_\sigma(0)}(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (7.27)$$

A partir de la relación (7.26) obtenemos el siguiente criterio de unicidad:

**Corolario 7.17 (Unicidad de  $D^+$ -soluciones)**

*Cualquier solución fuerte  $u \in \mathcal{L}\mathcal{A}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$  de (7.27) es una  $D^+$ -solución de dicho problema que verifica*

$$(u_*)^* = u^* \text{ en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

y, además,

$$u^*(x, t) = (\mathbf{U}_P)^*(x, t) = \begin{cases} A(|x| + ct)^\gamma, & |x| \leq \sigma - ct \\ A\sigma^\gamma, & \sigma - ct < |x| \leq \sigma + ct \\ 0, & |x| > \sigma + ct \end{cases} \quad (7.28)$$

para  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $t \geq 0$ .  $\square$

**Observación 7.18**

Como consecuencia de los comentarios anteriores, la envuelta superior de la función de Perron,  $(\mathbf{U}_P)^*$ , es una  $D^+$ -solución del problema (P).  $\square$

**Observación 7.19**

La optimalidad de la unicidad establecida en (7.28) queda reflejada mediante ejemplos de soluciones espúreas: todas las funciones de la forma

$$u_k(x, t) = \begin{cases} 1, & |x| < \sigma + ct \\ k, & |x| = \sigma + ct \\ 0, & |x| > \sigma + ct \end{cases} \text{ con } 0 \leq k \leq 1$$

son soluciones fuertes y  $D^+$ -soluciones de (7.27) cuando  $A = 1$  y  $\gamma = 0$ . Nótese que la envuelta superior de todas ellas coincide con la solución de Lax-Oleinik del problema (7.27), es decir,

$$(u_k)^*(x, t) = \chi_{\overline{B}_{\sigma+ct}(0)}(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \overline{\mathbb{R}}_+. \quad \square$$

### 7.3.3 Convergencia $m \rightarrow 1$ para datos iniciales discontinuos.

Consideremos ahora el problema de Cauchy

$$(P)_m \begin{cases} u_t = c|\nabla u|^m & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(\cdot, 0) = \chi_{\overline{B}_\sigma(0)}(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

con  $m > 1$ . Como sabemos, la fórmula de Lax-Oleinik es solución fuerte de viscosidad de  $(P)_m$  y viene dada por

$$\mathbf{u}_m(x, t) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \left\{ \chi_{\overline{B}_\sigma(0)}(y) - (m-1) \left( \frac{|x-y|^m}{cm^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\} \quad (7.29)$$

para  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $t \geq 0$ . En particular,

$$\chi_{\overline{B}_\sigma(0)}(x) \leq \mathbf{u}_m(x, t) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0. \quad (7.30)$$

Denotando por  $y_{\max} = y_{\max}(x, t) \in \mathbb{R}^N$  al punto en el que se realiza el máximo, es decir,

$$\mathbf{u}_m(x, t) = \chi_{\overline{B}_\sigma(0)}(y_{\max}) - (m-1) \left( \frac{|x - y_{\max}|^m}{cm^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}}$$

de la relación (7.30) se sigue

$$0 \leq (m-1) \left( \frac{|x - y_{\max}|^m}{cm^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}} \leq \chi_{\overline{B}_\sigma(0)}(y_{\max}),$$

por lo que pueden presentarse dos casos:

1.  $y_{\max} \in \overline{\mathbf{B}}_{\sigma}(0)$ . Entonces:

$$0 \leq (m-1) \left( \frac{|x - y_{\max}|^m}{cm^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}} \leq 1$$

por lo que

$$|x - y_{\max}| \leq d_m(t)$$

siendo

$$d_m(t) \doteq m \left( \frac{1}{m-1} \right)^{\frac{m-1}{m}} (ct)^{\frac{1}{m}}.$$

Consecuentemente, se tiene

$$y_{\max} \in \overline{\mathbf{B}}_{\sigma}(0) \Rightarrow y_{\max} \in \overline{\mathbf{B}}_{\sigma}(0) \cap \overline{\mathbf{B}}_{d_m(t)}(x) \Rightarrow \overline{\mathbf{B}}_{\sigma}(0) \cap \overline{\mathbf{B}}_{d_m(t)}(x) \neq \emptyset.$$

2.  $y_{\max} \notin \overline{\mathbf{B}}_{\sigma}(0)$ . En tal caso:  $|x - y_{\max}| = 0$ , luego  $y_{\max} = x$ .

De esta forma, se verifica:

1. Si  $|x| \leq \sigma \Rightarrow y_{\max} = x$ . Por tanto:  $\mathbf{u}_m(x, t) = 1$ .
2. Si  $\sigma < |x| \leq \sigma + d_m(t)$  entonces  $y_{\max}$  es el punto más próximo a  $x$  en la bola  $\overline{\mathbf{B}}_{\sigma}(0)$ . Por tanto, éste debe estar en la recta que une los puntos 0 y  $x$  y, además,  $y_{\max} \in \partial \mathbf{B}_{\sigma}(0)$ . Luego,  $y_{\max} = \sigma \frac{x}{|x|}$ .

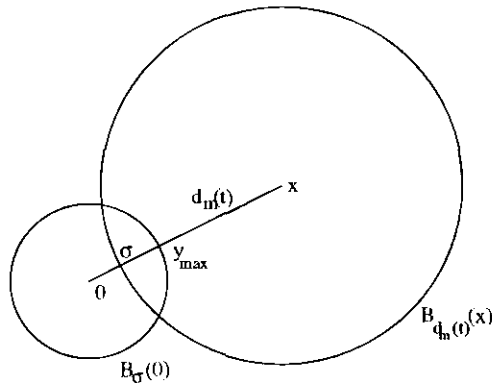


Figura 7.8: Localización de  $y_{\max}$  cuando  $\sigma < |x| \leq \sigma + d_m(t)$ .



En esta situación

$$|x - y_{\max}| = \left| x - \sigma \frac{x}{|x|} \right| = |x| - \sigma$$

con lo que el valor de la solución es

$$\mathbf{u}_m(x, t) = 1 - (m-1) \left( \frac{(|x| - \sigma)^m}{cm^{mt}} \right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

A partir de la definición de  $d_m(t)$  se obtiene

$$\frac{1}{(d_m(t))^{\frac{m}{m-1}}} = (m-1) \left( \frac{1}{cm^{mt}} \right)^{\frac{1}{m-1}},$$

con lo que la expresión anterior puede ser escrita en la forma

$$\mathbf{u}_m(x, t) = 1 - \left( \frac{|x| - \sigma}{d_m(t)} \right)^{\frac{m}{m-1}}.$$

3. Si  $|x| > \sigma + d_m(t) \Rightarrow y_{\max} = x$ . Por tanto:  $\mathbf{u}_m(x, t) = 0$ .

Así queda perfectamente determinada la función definida en (7.29)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m(x, t) &= \left[ 1 - \left( \frac{[|x| - \sigma]_+}{d_m(t)} \right)^{\frac{m}{m-1}} \right]_+ \\ &= \begin{cases} 1, & |x| - \sigma \leq 0 \\ 1 - \left( \frac{|x| - \sigma}{d_m(t)} \right)^{\frac{m}{m-1}}, & 0 < |x| - \sigma \leq d_m(t) \\ 0, & |x| - \sigma > d_m(t). \end{cases} \end{aligned}$$

Nótese que  $\mathbf{u}_m \equiv 0$  en las regiones  $\overline{\mathcal{R}}_2 \cup \overline{\mathcal{R}}_3$  y  $\mathbf{u}_m \equiv 1$  en  $\overline{\mathcal{R}}_1$ . Además se tiene un *efecto regularizante*: partiendo de un dato inicial  $u_0$  que es discontinuo en  $\partial \mathbf{B}_\sigma(0)$  hemos obtenido que  $\mathbf{u}_m \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$ . De hecho,

$$\mathbf{u}_m \in \mathcal{C}^\infty \left( \bigcup_{i=1}^5 \mathcal{R}_i \right).^3$$

<sup>3</sup>Como puede comprobarse directamente,

$$\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}(x, t) = \begin{cases} 0, & |x| - \sigma \leq 0 \text{ ó } |x| - \sigma > d_m(t) \\ \left( \frac{|x| - \sigma}{c^{\frac{1}{m}} mt} \right)^{\frac{m}{m-1}}, & 0 \leq |x| - \sigma < d_m(t), \end{cases}$$

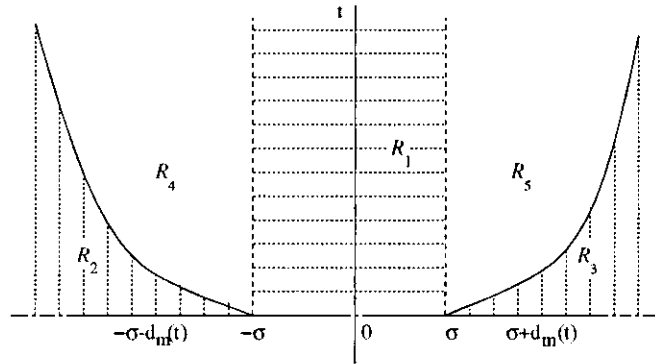


Figura 7.9: Regiones  $\mathcal{R}_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

El estudio de la convergencia de la solución anterior  $\mathbf{u}_m$  cuando  $m \rightarrow 1$  es ahora sencillo. Teniendo en cuenta que

$$\lim_{m \rightarrow 1} d_m(t) = \lim_{m \rightarrow 1} m \left( \frac{1}{m-1} \right)^{\frac{m-1}{m}} (ct)^{\frac{1}{m}} = ct, \quad t > 0$$

y

$$\lim_{m \rightarrow 1} A^{\frac{1}{m-1}} = \begin{cases} +\infty, & A > 1 \\ 1, & A = 1 \\ 0, & 0 \leq A < 1 \end{cases}$$

se verifica

$$\lim_{m \rightarrow 1} \mathbf{u}_m(x, t) = 1, \quad 0 < |x| - \sigma \leq ct$$

De esta forma, la función límite

$$\lim_{m \rightarrow 1} \mathbf{u}_m(x, t) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \sigma + ct \\ 0, & |x| > \sigma + ct \end{cases}$$

coincide con la solución de Lax-Oleinik  $\mathbf{u}_1$  del problema límite

$$(P)_1 \begin{cases} u_t = c|\nabla u| & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(\cdot, 0) = \chi_{\overline{B}_\sigma(0)}(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

por lo que  $\mathbf{u}_m$  no es diferenciable si  $|x| = \sigma + d_m(t)$ . De hecho,

$$\frac{d\mathbf{u}_m}{dt}(x, t) = \begin{cases} 0, & |x| - \sigma \leq 0 \quad \text{ó} \quad |x| - \sigma > d_m(t) \\ \frac{1 - \mathbf{u}_m(x, t)}{(m-1)t}, & 0 \leq |x| - \sigma < d_m(t). \end{cases}$$

Recordemos que cualquier otra solución  $u$  de  $(P)_1$  tiene la propiedad

$$u^*(x, t) = (\mathbf{u}_1)^*(x, t) = \chi_{\overline{\mathbf{B}}_{\sigma+ct}(0)}(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

## Parte III

La ecuación perturbada.  
Fenómeno de extinción en  
tiempo finito.



## 7.4 Propiedad de extinción. Tipos de absorciones.

Esta Parte de la memoria trata sobre el estudio de algunos aspectos de la *propiedad de extinción en tiempo finito*, es decir,

$$u(x, t) = 0, \quad t \geq T, \quad x \in \mathbb{R}^N; \quad (\text{extinción global})$$

más concretamente, en la determinación de una función  $t_\infty(\cdot)$  tal que

$$\begin{cases} u(x, t) \neq 0, & t < t_\infty(x) \\ u(x, t) = 0, & t \geq t_\infty(x) \end{cases} \quad (\text{extinción puntual})$$

donde  $u$  es una solución fuerte de viscosidad del problema

$$(P)_\lambda \begin{cases} u_t - H(\nabla u) + \lambda\beta(u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

con  $\lambda > 0$ ,  $\beta : \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ ,  $\beta \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ ,  $H \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$  con  $H(0) = 0$  y  $u_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ ,  $u_0 \not\equiv 0$ . Aunque nuestro estudio admite extensiones a soluciones discontinuas, limitaremos el tratamiento de esta propiedad a soluciones continuas por lo que, en toda esta Parte, supondremos datos iniciales  $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$  o, incluso,  $u_0 \in \mathcal{UC}(\mathbb{R}^N)$ .

Mediante argumentos conocidos, la no negatividad del término de perturbación conduce a la desigualdad

$$u(x, t) \leq v(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

siendo  $v$  una solución del problema sin perturbar  $(P)_0$ . Por esta razón,  $\lambda\beta(\cdot)$  es denominado en la literatura *término de absorción*. Relacionado con la propiedad de extinción, distinguimos tres tipos de absorciones:

1. *Absorción fuerte*:

$$\int_{0^+} \frac{ds}{\beta(s)} < +\infty. \quad (\mathbf{AF})$$

Para el caso de las potencias

$$(\mathbf{AF}) \Leftrightarrow \beta(r) = r^q, \quad 0 < r \ll 1 \quad \text{con } q < 1.$$

Mostraremos que da lugar al fenómeno de *extinción* (global) cuando  $u_0$  es acotado o crece en el infinito de una *forma concreta*.

2. *Absorción muy fuerte:*

$$\int_0^{\infty} \frac{ds}{\beta(s)} < +\infty. \quad (\mathbf{AMF})$$

Para el caso de las funciones como potencias

$$(\mathbf{AMF}) \Leftrightarrow \beta(r) = \begin{cases} r^{q_1} & \text{con } q_1 < 1 \text{ para } 0 < r \ll 1 \\ r^{q_2} & \text{con } q_2 > 1 \text{ para } r \gg 1. \end{cases}$$

En este caso probaremos que hay extinción (global) para  $u_0$  arbitrario.

3. *Absorción débil:*

$$\int_{0^+} \frac{ds}{\beta(s)} = +\infty. \quad (\mathbf{AD})$$

El estudio del comportamiento de las soluciones, para este caso, está recogido en el Capítulo 11.

### Observación 7.20

Puesto que  $u_0 \not\equiv 0$ , existe  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^N$  con  $u_0(\tilde{x}) > 0$ . En el caso en que exista un instante  $\tilde{t} > 0$  para el cual  $u(\tilde{x}, \tilde{t}) = 0$ , consideramos  $t_0 \leq \tilde{t}$  con la propiedad

$$\begin{cases} u(\tilde{x}, t) > 0 & \text{si } 0 < t < t_0 \\ u(\tilde{x}, t_0) = 0. \end{cases}$$

De esta forma, bajo la hipótesis  $H \geq 0$ , se verifica

$$u_t + \lambda\beta(u) = H(\nabla u) \geq 0 \text{ en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

Consecuentemente,

$$\int_{u(\tilde{x}, t)}^{u_0(\tilde{x})} \frac{ds}{\beta(s)} = - \int_{u(\tilde{x}, 0^+)}^{u(\tilde{x}, t)} \frac{ds}{\beta(s)} = - \int_0^t \frac{u_t}{\beta(u)} \leq \lambda t, \quad 0 < t < t_0.$$

Finalmente, haciendo tender  $t \rightarrow t_0$  obtenemos

$$\int_0^{u_0(\tilde{x})} \frac{ds}{\beta(s)} \leq \lambda t_0,$$

es decir,

$$\int_{0^+} \frac{ds}{\beta(s)} < +\infty. \quad (\mathbf{AF})$$

Así, podemos establecer que bajo los supuestos  $u_0 \geq 0$ ,  $u_0 \not\equiv 0$  y  $H \geq 0$ , la condición **(AF)** es *necesaria* para el fenómeno de extinción.  $\square$

**Observación 7.21**

De hecho, la condición **(AF)** es *óptima* para la propiedad de extinción. En efecto, si  $\inf u_0 > 0$ , la función  $\eta$  definida implícitamente por

$$\int_{\eta(x,t)}^{\inf u_0} \frac{ds}{\beta(s)} = \lambda t, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+,$$

es, bajo la condición **(AD)**, una solución fuerte del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \eta_t - H(\nabla \eta) + \lambda \beta(\eta) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ \eta(\cdot, 0) = \inf u_0 & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (7.31)$$

que verifica

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \eta(t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

y

$$0 < \eta(t) \leq u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0$$

para cualquier solución  $u$  de (7.31).  $\square$

Consideremos el problema de Cauchy

$$(P)_\lambda \begin{cases} u_t - H(\nabla u) + \lambda \beta(u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

siendo  $H \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$ ,  $\beta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  una función localmente lipschitziana con  $\beta(0) = 0$ ,  $\lambda > 0$  y  $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$ ,  $u_0 \geq 0$ . Si  $\mathcal{U}$  es la fórmula de Lax-Oleinik asociada a  $H^*$  y  $u_0$ , es decir,

$$\mathcal{U}(x, t) = \sup_{\xi \in D(H^*)} \{u_0(x + \xi t) - tH^*(\xi)\},$$

entonces, para cualquier  $u \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$  subsolución fuerte de viscosidad del problema  $(P)_\lambda$ , se verifica

$$0 \leq u(x, t) \leq u^*(x, t) \leq \mathcal{U}(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0. \quad (7.32)$$

Nuestra argumentación utiliza, con alguna frecuencia, la función

$$\gamma(r) = \int_0^r \frac{ds}{\beta(s)}, \quad r \geq 0 \quad (7.33)$$



ya introducida anteriormente, que necesita, para su definición, la condición de absorción fuerte

$$\int_{0^+} \frac{ds}{\beta(s)} < +\infty. \quad (\mathbf{AF})$$

Nótese que la no negatividad de  $\beta$  hace que  $\gamma$  sea una función creciente, pues

$$\gamma'(r) = \frac{1}{\beta(r)} > 0, \quad r > 0.$$

Comenzamos con una estimación inferior para las supersoluciones fuertes del problema  $(P)_\lambda$ .

**Teorema 7.22**

Bajo la condición  $(\mathbf{AF})$ , sea  $u \in \mathcal{LTA}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$  una supersolución fuerte del problema  $(P)_\lambda$  donde  $H : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  verifica

$$\mathcal{D}_+^* \doteq \{\xi \in D(H^*) : H^*(\xi) \geq 0\} \neq \emptyset$$

y  $\beta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  es una función no decreciente. Entonces, para todo  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$  se verifica

$$u(x, t) \geq u_*(x, t) \geq \gamma^{-1} \left( \sup_{\xi \in \mathcal{D}_+^*} \left[ [\gamma(u_0(x + \xi t)) - \lambda t]_+ - tH^*(\xi) \right]_+ \right). \quad (7.34)$$

**Demostración.**

La desigualdad de Young generalizada

$$\xi \cdot p \leq H(p) + H^*(\xi), \quad p \in \mathbb{R}^N, \quad \xi \in D(H^*)$$

hace que, formalmente, se verifique

$$(u_*)_t + \lambda\beta(u_*) \geq H(\nabla u_*) \geq \xi \cdot \nabla u_* - H^*(\xi), \quad \xi \in D(H^*).$$

Por tanto,

$$(u_*)_t - \xi \cdot \nabla u_* + H^*(\xi) + \lambda\beta(u_*) \geq 0, \quad \xi \in D(H^*).$$

Fijado  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$  consideremos  $\xi \in \mathcal{D}_+^*$  y la función

$$\varphi(s) = u_*(x + \xi(t - s), s) + sH^*(\xi), \quad 0 \leq s \leq t.$$

Como

$$\varphi'(s) = (u_*)_t(x + \xi(t-s), s) - \xi \cdot \nabla u_*(x + \xi(t-s), s) + H^*(\xi), \quad 0 < s < t,$$

$\beta$  es no decreciente y  $H^*(\xi) \geq 0$ , entonces

$$\varphi'(s) + \lambda\beta(\varphi(s)) \geq (u_*)_t - \xi \cdot \nabla u_* + H^*(\xi) + \lambda\beta(u_*) \geq 0$$

para  $0 < s < t$ , lo que hace que  $\varphi$  sea una solución de viscosidad de

$$\varphi' \geq -\lambda\beta(\varphi) \quad \text{en } ]0, t[$$

verificando

$$\varphi(0^+) = u_*(x + \xi t, 0^+) \geq u_0(x + \xi t).$$

Por tanto, se tiene

$$-\lambda t \leq \int_0^t \frac{\varphi'}{\beta(\varphi)} ds = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} \frac{d\sigma}{\beta(\sigma)} = \gamma(\varphi(t)) - \gamma(\varphi(0)),$$

es decir,

$$\gamma(u_*(x, t) + tH^*(\xi)) \geq \gamma(u_0(x + \xi t)) - \lambda t, \quad \xi \in D(H^*). \quad (7.35)$$

Por la monotonía de  $\gamma$  el resultado se sigue tomando supremo en  $\xi \in D(H^*)$ .  $\square$

### Observación 7.23

En algunas circunstancias podemos omitir la hipótesis de monotonía sobre la función  $\beta$ . Así, bajo la condición

$$\mathcal{D}_0^* \doteq \{\xi \in D(H^*) : H^*(\xi) = 0\} \neq \emptyset \quad (7.36)$$

los razonamientos anteriores prueban la relación

$$u_*(x, t) \geq \gamma^{-1} \left( \left[ \sup_{\xi \in \mathcal{D}_0^*} \gamma(u_0(x + \xi t)) - \lambda t \right]_+ \right), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

En particular, si  $H^*(0) = 0$ , se verifica

$$u_*(x, t) \geq \gamma^{-1} \left( [\gamma(u_0(x)) - \lambda t]_+ \right), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

Por otra parte, para aquellos hamiltonianos  $H$  que tengan la propiedad

$$D(H^*) = \mathcal{D}_0^* \quad (7.37)$$

se verifica

$$u_*(x, t) \geq \gamma^{-1} \left( [\gamma(\mathcal{U}(x, t)) - \lambda t]_+ \right) \quad (7.38)$$

siendo

$$\mathcal{U}(x, t) = \sup_{\xi \in D(H^*)} u_0(x + \xi t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

la fórmula de Lax-Oleinik asociada a  $H^*$  y  $u_0$ .<sup>4</sup>

En el caso de hamiltonianos convexos podemos obtener una cota superior para las subsoluciones. Concretamente:

### Teorema 7.24

Bajo la condición **(AF)**, sea  $u \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$  una subsolución fuerte de viscosidad del problema  $(P)_\lambda$  donde  $\mathcal{H} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  es continuo y convexo con  $\mathcal{H}(0) = 0$  y  $\beta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  es una función no decreciente. Entonces, para todo  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$  se verifica

$$u(x, t) \leq u^*(x, t) \leq \gamma^{-1} \left( [\gamma(\mathcal{U}(x, t)) - \lambda t]_+ \right)$$

donde  $\mathcal{U}$  es la función de Lax-Oleinik asociada a  $H^*$  y  $u_0$  y  $\gamma$  es la función definida en (7.33).

### Demostración.

Consideramos la función

$$v(x, t) = \gamma^{-1} (\gamma(u^*(x, t)) + \lambda t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0,$$

para la que se verifica

$$\gamma(v(x, t)) = \gamma(u^*(x, t)) + \lambda t, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

Formalmente, por definición, se tiene

$$\frac{v_t}{\beta(v)} = \frac{(u^*)_t}{\beta(w)} + \lambda$$

---

<sup>4</sup>Los hamiltonianos  $H(p) = R|p|$ ,  $p \in \mathbb{R}^N$  ( $R > 0$ ) y  $H(p) = e \cdot p$ ,  $p \in \mathbb{R}^N$  ( $e \in \mathbb{R}^N$ ) verifican la propiedad (7.37) (véanse los ejemplos del Apéndice B).

y

$$\frac{\nabla v}{\beta(v)} = \frac{\nabla u^*}{\beta(u^*)}$$

por lo que la función  $v$  verifica

$$v_t - \mathcal{H}(\nabla v) = \frac{\beta(v)}{\beta(u^*)} ((u^*)_t + \lambda\beta(u^*)) - \mathcal{H}\left(\frac{\beta(v)}{\beta(u^*)}\nabla u^*\right). \quad (7.39)$$

De la propia definición se desprende

$$\gamma(v(x, t)) = \gamma(u^*(x, t)) + \lambda t \geq \gamma(u^*(x, t)),$$

por lo que, siendo  $\gamma$  una función creciente, hace que se tenga

$$v(x, t) \geq u^*(x, t).$$

Consecuentemente, como  $\beta$  es creciente, entonces

$$\beta(v) \geq \beta(u^*) \Rightarrow \frac{\beta(v)}{\beta(u^*)} \geq 1.$$

Por tanto, la relación (7.39) determina

$$v_t - \mathcal{H}(\nabla v) \leq 0.$$

Por otra parte, por la monotonía de la función  $\gamma$ , se tiene

$$v^*(x, 0^+) = u^*(x, 0^+) \leq u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

De esta forma, comparando con la función  $\mathcal{U}(x, t)$  llegamos a

$$v(x, t) \leq \mathcal{U}(x, t). \quad \square$$

### Observación 7.25

Este resultado es más preciso que el recogido en (7.32), pues

$$u(x, t) \leq u^*(x, t) \leq \gamma^{-1}([\gamma(\mathcal{U}(x, t)) - \lambda t]_+) \leq \mathcal{U}(x, t). \quad \square$$

**Observación 7.26**

Supuesto **(AF)**, podemos sumarizar los resultados anteriores cuando  $\beta$  es una función no decreciente y  $\mathcal{H}$  es una función continua y convexa con  $\mathcal{H}(0) = 0$  y verificando (7.36). Obtenemos así las siguientes estimaciones de las soluciones  $u \in \mathcal{LA}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$  de  $(P)_\lambda$ : para cada  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$  se verifica

$$\begin{aligned} \gamma^{-1} \left( \left[ \sup_{\xi \in \mathcal{D}_0^*} \gamma(u_0(x + \xi t)) - \lambda t \right]_+ \right) &\leq u_*(x, t) \leq u(x, t) \\ &\leq u^*(x, t) \leq \gamma^{-1} \left( [\gamma(\mathcal{U}(x, t)) - \lambda t]_+ \right) \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{U}$  es la función de Lax-Oleinik correspondiente. En particular:

1. Fórmula de representación: si  $D(H^*) = \mathcal{D}_0^*$  obtenemos la expresión explícita de la solución<sup>5</sup>

$$u(x, t) = \gamma^{-1} \left( [\gamma(\mathcal{U}(x, t)) - \lambda t]_+ \right), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

Consecuentemente, la anterior es la *única* solución de  $(P)_\lambda$  que, además, es continua.

2. Si  $H^*(0) = 0$  entonces

$$\gamma^{-1} \left( [\gamma(u_0(x)) - \lambda t]_+ \right) \leq u(x, t) \leq \gamma^{-1} \left( [\gamma(\mathcal{U}(x, t)) - \lambda t]_+ \right),$$

de donde se deducen:

- (a) Comportamiento de la traza inicial:

$$\gamma(u_0(x)) - \lambda t \leq \gamma(u(x, t)) \leq \gamma(\mathcal{U}(x, t)) - \lambda t, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad 0 < t \ll 1.$$

Por tanto,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma(u(x, t)) + \lambda t}{\gamma(\mathcal{U}(x, t))} = 1, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

<sup>5</sup>Véase la nota 4 donde se dan ejemplos de hamiltonianos con la propiedad anterior.

(b) Acotación de la función  $t_\infty(\cdot)$ : claramente,

$$\frac{\gamma(u_0(x))}{\lambda} \leq t_\infty(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Además, si para algún  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  existe un instante  $t_0 > 0$  tal que

$$\lambda t_0 = \gamma(\mathcal{U}(x_0, t_0))$$

entonces

$$\frac{\gamma(u_0(x_0))}{\lambda} \leq t_\infty(x_0) \leq \tau_\infty(x_0)$$

donde

$$\tau_\infty(x_0) \doteq \min \{t \geq 0 : \lambda t = \gamma(\mathcal{U}(x_0, t))\} \leq t_0. \quad \square$$

## 7.5 Resumen de resultados.

A modo ilustrativo describimos, sumariamente, los resultados más interesantes obtenidos en esta Parte. Cuando el hamiltoniano  $H$  verifica la condición coerciva

$$\lim_{|p| \rightarrow +\infty} H(p) = +\infty$$

construimos, mediante métodos clásicos, una solución de viscosidad  $u$  de la ecuación

$$u_t - H(\nabla u) + \lambda \beta(u) = 0 \quad (\text{HJ})_{\lambda, \beta}$$

prescribiendo el dato inicial

$$u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) \quad \text{en } \mathbb{R}^N$$

donde  $u_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  es una función no negativa verificando

$$-H(\nabla u_0) + \lambda \beta(u_0) \geq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N.$$

Además, mostramos un *efecto regularizante*:  $u$  es lipschitziana en todo subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$ . De hecho, por el *Teorema de Rademacher*

(ver el Apéndice B), la función  $u$  verifica la ecuación  $(HJ)_{\lambda,\beta}$  en casi todo punto de  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$ , es decir,  $u$  es una solución generalizada.

Nuestras contribuciones son referentes al estudio de la función *primer instante de extinción*  $t_\infty : \mathbb{R}^N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \cup \{+\infty\}$  relativa a  $u$  definida como

$$u(x, t) > 0 \text{ si } 0 < t < t_\infty(x) \quad \text{y} \quad u(x, t) = 0 \text{ si } t \geq t_\infty(x).$$

En primer lugar, mostramos la existencia de  $t_\infty(\cdot)$  en todo el espacio  $\mathbb{R}^N$  cuando el dato inicial  $u_0$  es acotado o cuando el término  $\beta$  verifica la condición **(AMF)**.

Una vez que tenemos definida la función  $t_\infty(\cdot)$  en todo  $\mathbb{R}^N$ , obtenemos propiedades generales acerca de la misma. Describamos algunas de ellas para el problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t - R|\nabla u|^m + \lambda u^q = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(\cdot, 0^+) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

donde  $R, m > 0$  y  $0 < q < 1$ . Para ello, supondremos las condiciones

$$\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{(u_0(x))^{1-q}}{|x|} < \frac{\lambda(1-q)}{R} \tag{H1}$$

y

$$-R|\nabla u_0|^m + \lambda u_0^q \geq c \text{ en } \mathbb{R}^N \tag{H2}$$

para alguna constante no negativa  $c$ . Demostramos las siguientes propiedades:

1. *Los máximos iniciales se conservan con la evolución.* Concretamente, si  $u_0$  alcanza un máximo en un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  entonces

$$u(x, t) \leq u(x_0, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+,$$

$$t_\infty(x) \leq t_\infty(x_0) = \frac{(u_0(x_0))^{1-q}}{\lambda(1-q)}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Además, su *evolución explícita*, viene descrita por

$$u(x_0, t) = \left( \left[ (u_0(x_0))^{1-q} - \lambda(1-q)t \right]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}}, \quad t \geq 0.$$

En el caso particular  $c > 0$  y

$$|u_0(x) - u_0(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^N \quad (L > 0) \quad (\text{H3})$$

la función  $t_\infty(\cdot)$  verifica

$$|t_\infty(x) - t_\infty(y)| \leq \frac{L}{c}|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^N.$$

2. La solución  $u$  tiene una *extinción suave*, es decir,

$$u_t(x, t_\infty(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

De hecho,  $u$  es diferenciable en la *frontera libre*

$$\mathcal{F} = \{(x, t_\infty(x)) : x \in \mathbb{R}^N\}.$$

3. Si  $m > 1$  y  $c > 0$ , la *tasa de extinción es uniforme*. Concretamente, para todo  $x \in \mathbb{R}^N$  se tiene

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, t_\infty(x) - t) - t}{t^{\frac{1}{1-q}}} = (\lambda(1 - q))^{\frac{1}{1-q}}.$$

4. Para  $m = 1$ , la solución  $u$  admite la representación

$$u(x, t) = \max \left\{ \left( \left[ (u_0(x - \xi t))^{1-q} - \lambda(1 - q)t \right]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}} : |\xi| \leq R \right\}$$

para  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$ . Así pues,  $t_\infty(\cdot)$  viene dada implícitamente por la relación

$$\lambda(1 - q)t_\infty(x) = \max \left\{ (u_0(x - \xi t_\infty(x)))^{1-q} : |\xi| \leq R \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Por otra parte, bajo la condición (H3) obtenemos la estimación

$$1 \leq \lambda(1 - q) \frac{t_\infty(x)}{(u_0(x))^{1-q}} \leq \frac{\lambda(\inf u_0)^q}{[\lambda(\inf u_0)^q - LR]_+}.$$

Además, si  $c > 0$  y  $u_0$  alcanza un máximo en un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^N$ , obtenemos la tasa de extinción en puntos *próximos* a  $x_0$ . Más precisamente,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, t_\infty(x) - t) - t}{t^{\frac{1}{1-q}}} = (\lambda(1 - q))^{\frac{1}{1-q}}$$



para todo  $x \in \mathbb{R}^N$  verificando  $u_0(x) > 0$  y

$$|x - x_0| < \frac{Rc}{\lambda(1-q)(c+LR)} (u_0(x_0))^{1-q}.$$

Además, para datos iniciales con el crecimiento *óptimo* en el infinito determinado por la hipótesis (H1) demostramos la existencia de  $t_\infty(\cdot)$  en todo el espacio  $\mathbb{R}^N$ . En este caso, no es necesaria la condición (AMF).

Finalmente, si  $c > LR$  y

$$\frac{\lambda(1-q)L}{c} \leq \liminf_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{(u_0(x))^{1-q}}{|x|} \quad (\text{H4})$$

entonces el crecimiento en el infinito de la función primer instante de extinción viene dado, *exactamente*, por

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{t_\infty(x)}{(u_0(x))^{1-q}} = \frac{1}{\lambda(1-q)}.$$

# Capítulo 8

## Hamiltonianos lipschitzianos.

### 8.1 Fórmulas de representación.

El objetivo de esta Sección consiste en aplicar ciertas técnicas que permitan encontrar fórmulas de representación para las soluciones fuertes de viscosidad del problema

$$(P)_\lambda \begin{cases} u_t - R|\nabla u| + \lambda\beta(u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Como ya vimos en el Corolario 6.8, cuando  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es localmente lipschitziana y  $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$ , el problema  $(P)_\lambda$  admite, a lo sumo, una única solución fuerte de viscosidad para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$  que, además, es continua.

Recordemos que la *fórmula de Lax-Oleinik*

$$\mathcal{U}(x, t) = \sup \{ u_0(y) : y \in \overline{\mathbf{B}}_{Rt}(x) \}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

determina una solución del problema sin perturbar  $(P)_0$  cuando el dato inicial  $u_0 \in \mathcal{LSA}(\mathbb{R}^N)$ .

#### Observación 8.1

1. Como ya hemos comentado,  $\mathcal{U}$  es la función *coste óptimo* de un problema de Control Óptimo (véase la Subsección 7.3.1).
2. La propiedad del cono de dependencia hace que, como  $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$ ,  $\mathcal{U}$  sea, de hecho, la *única* solución fuerte de viscosidad de  $(P)_0$ .

3. Si consideramos ahora un valor  $\lambda > 0$  y una función  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  entonces, cualquier eventual solución fuerte  $u$  del problema perturbado

$$(P)_\lambda \begin{cases} u_t - R|\nabla u| + \lambda\beta(u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

cuando  $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$ , verifica

$$0 \leq u(x, t) \leq \mathcal{U}(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+. \quad \square$$

En lo que sigue, tomaremos una función  $\beta$  localmente lipschitziana con  $\beta(0) = 0$  verificando la condición **(AF)**.<sup>1</sup>

Puesto que la condición **(AF)** y la lipschitzianidad en el origen son incompatibles, el uso del cono de dependencia se hará sobre el interior del *dominio de positividad* de la solución

$$\mathcal{P}(u) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ : u(x, t) > 0\},$$

extendiéndose los resultados por continuidad a todo el espacio. Comenzamos con el siguiente resultado:

### Teorema 8.2

Bajo la condición **(AF)** cualquier solución fuerte  $u \in \mathcal{L}\mathcal{A}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$  del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - H(\nabla u) + \lambda\beta(u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

donde  $H : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  verifica

$$|H(p) - H(q)| \leq R|p - q|, \quad p, q \in \mathbb{R}^N \quad (R > 0) \quad (8.1)$$

y

$$H(0) = 0 \quad (8.2)$$

tiene la propiedad

$$\gamma^{-1}(\lambda[t_0 - t]_+) \leq u_*(x, t) \leq u(x, t) \leq u^*(x, t) \leq \gamma^{-1}(\lambda[t_\infty - t]_+) \quad (8.3)$$

<sup>1</sup>En general, no requerimos ninguna hipótesis de monotonía sobre  $\beta$ .

para  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$ , siendo

$$\gamma(r) = \int_0^r \frac{ds}{\beta(s)}, \quad r \geq 0$$

y

$$\begin{cases} t_0 = \frac{\gamma(\inf u_0)}{\lambda} \geq 0 \\ t_\infty = \frac{\gamma(\sup u_0)}{\lambda} \leq +\infty. \end{cases}$$

### Demostración.

Consideremos las funciones regulares

$$\underline{u}(x, t) = \gamma^{-1}(\lambda[t_0 - t]_+) = \gamma^{-1}([\gamma(\inf u_0) - \lambda t]_+), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

y

$$\bar{u}(x, t) = \gamma^{-1}(\lambda[t_\infty - t]_+) = \gamma^{-1}([\gamma(\sup u_0) - \lambda t]_+), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

Obviamente, supondremos que  $\gamma(\inf u_0) > 0$  y  $\gamma(\sup u_0) < +\infty$  pues, en caso contrario, el resultado es inmediato. Cálculos directos muestran que  $\underline{u}$  y  $\bar{u}$  satisfacen, en el sentido de la viscosidad, la ecuación

$$u_t - H(\nabla u) + \lambda\beta(u) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

y prescriben, respectivamente, el dato inicial

$$\begin{cases} \underline{u}(x, 0) = \inf u_0 \leq (u_0)_*(x) \leq u_*(x, 0^+), & x \in \mathbb{R}^N \\ \bar{u}(x, 0) = \sup u_0 \geq (u_0)^*(x) \geq u^*(x, 0^+), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

La desigualdad (8.3) se sigue, entonces, de la propiedad del cono de dependencia (véase el Corolario 6.7).  $\square$

### Observación 8.3

Nótese que si existe algún  $\tilde{t} > t_\infty$  entonces la estimación superior de (8.3) y la no negatividad de  $u$  hacen que se tenga

$$u(x, \tilde{t}) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Esto nos permite definir la *función primer instante de extinción*

$$t_\infty : \mathbb{R}^N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \cup \{+\infty\}$$

dada por

$$\begin{cases} u(x, t) > 0 & \text{si } 0 < t < t_\infty(x) \\ u(x, t) = 0 & \text{si } t \geq t_\infty(x). \end{cases}$$

Claramente, si además de **(AF)** se verifica una de las dos siguientes condiciones:

1.  $\sup u_0 < +\infty$
2. **(AMF)** (independientemente de cualquier supuesto de acotación sobre  $u_0$ )

entonces  $\gamma(\sup u_0) < +\infty$ , por lo que la función primer instante de extinción está definida en todo el espacio  $\mathbb{R}^N$ . Además, se tiene

$$t_\infty(x) \leq t_\infty < +\infty, \quad x \in \mathbb{R}^N.^2 \quad \square$$

#### Observación 8.4

En lo que sigue conviene tener presentes las siguientes propiedades:

1.  $(\gamma^{-1})'(r) = \beta(\gamma^{-1}(r))$ ,  $r \geq 0$ . En efecto,

$$r = \int_0^{\gamma^{-1}(r)} \frac{ds}{\beta(s)} \Rightarrow 1 = \frac{(\gamma^{-1})'(r)}{\beta(\gamma^{-1}(r))}.$$

2. Si  $\beta(r) = r^q$ ,  $r \geq 0$  con  $0 < q < 1$ , entonces

$$\gamma(r) = \frac{1}{1-q} r^{1-q} \quad \text{y} \quad \gamma^{-1}(r) = [(1-q)r]^{\frac{1}{1-q}}, \quad r \geq 0. \quad \square$$

---

<sup>2</sup>Nótese que bajo la condición **(AMF)** se tiene la acotación

$$t_\infty(x) \leq \frac{\gamma(+\infty)}{\lambda} < +\infty, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Por otra parte, la estimación global superior de (8.3) no aporta información cuando  $u_0$  no está acotado superiormente. Sin embargo, la idea general puede mantenerse cuando el dato inicial tiene un *adecuado crecimiento* en el infinito, de forma que la función primer instante de extinción también va a estar definida en todo el espacio  $\mathbb{R}^N$ . Concretamente,

### Teorema 8.5

Bajo la condición (AF) consideremos  $H : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  verificando (8.1) y (8.2) y un dato inicial no negativo  $u_0 \in C(\mathbb{R}^N)$  con la propiedad

$$\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(u_0(x))}{|x|} < \frac{\lambda}{R}. \quad (8.4)$$

Entonces

$$t_\infty(x) < +\infty, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

### Demostración.

De (8.4) se sigue que para todo  $0 < \varepsilon < \frac{\lambda}{R}$  existe  $C_\varepsilon > 0$  tal que

$$\gamma(u_0(x)) \leq \left( \frac{\lambda}{R} - \varepsilon \right) |x| + C_\varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Para cada  $y \in \mathbb{R}^N$ , sea  $\rho > 0$  de forma que

$$C_\varepsilon + \frac{\lambda}{R}|y| \leq \varepsilon\rho. \quad (8.5)$$

Entonces, se tiene

$$\gamma(u_0(x)) \leq \left( \frac{\lambda}{R} - \varepsilon \right) |x - y| + \varepsilon\rho, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

y

$$\gamma(u_0(x)) \leq \frac{\lambda\rho}{R}, \quad x \in \overline{\mathbf{B}}_\rho(y). \quad (8.6)$$

De esta forma, si denotamos por

$$t_{\infty,y} = \frac{1}{\lambda} \max \left\{ \gamma(u_0(x)) : x \in \overline{\mathbf{B}}_\rho(y) \right\}, \quad (8.7)$$

la función continua

$$v(x, t; \rho) = \gamma^{-1}(\lambda[\mathbf{t}_{\infty, y} - t]_+), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

verifica

$$v_t - H(\nabla v) + \lambda\beta(v) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

y

$$u_0(x) \leq v(x, 0^+; \rho), \quad x \in \overline{\mathbf{B}}_\rho(y)$$

(ver (8.7)). Así, por la propiedad del cono de dependencia (véase el Corolario 6.7) se desprende

$$u_*(x, t) \leq v(x, t; \rho) \quad \text{para } |x - y| \leq \rho - Rt, \quad 0 < t < \frac{\rho}{R}.$$

En particular, como de (8.6) y (8.7) se deduce  $\mathbf{t}_{\infty, y} < \frac{\rho}{R}$ , entonces

$$u(y, \mathbf{t}_{\infty, y}) = 0.$$

Una vez que  $u$  se anula en el instante  $\mathbf{t}_{\infty, y}$ , tiene sentido considerar el primer instante de anulación. Por tanto,

$$t_\infty(y) \leq \mathbf{t}_{\infty, y} \leq \frac{\rho}{R} < +\infty. \quad \square \tag{8.8}$$

### Observación 8.6

De las relaciones (8.5) y (8.8) se obtiene

$$t_\infty(x) \leq \frac{C_\varepsilon R + \lambda|x|}{\varepsilon R^2}, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

con lo que

$$\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{t_\infty(x)}{|x|} \leq \frac{\lambda}{\varepsilon R^2},$$

que, la vista de la condición  $0 < \varepsilon < \frac{\lambda}{R}$ , lleva a

$$\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{t_\infty(x)}{|x|} \leq \frac{1}{R}. \tag{8.9}$$

Como veremos en la Sección 8.2, si el dato inicial verifica

$$|u_0(x) - u_0(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^N$$

y es solución de viscosidad de

$$-\mathbb{R}|\nabla u_0| + \lambda\beta(u_0) \geq c \quad (c > L\mathbb{R})$$

entonces

$$|t_\infty(x) - t_\infty(y)| \leq \frac{L}{c}|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^N,$$

propiedad que ratifica la estimación (8.9). En la Subsección 8.2.4 precisamos ese comportamiento asintótico; de hecho, bajo supuestos adicionales, probamos

$$t_\infty(x) \sim \gamma(u_0(x)) \quad \text{si } |x| \gg 1. \quad \square$$

### Observación 8.7

1. Obviamente, la condición (8.4) incluye el caso en que  $u_0$  es acotado.
2. Para la elección  $\beta(r) = r^q$ ,  $0 < q < 1$ , la hipótesis (8.4) es

$$\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{(u_0(x))^{1-q}}{|x|} < \frac{\lambda(1-q)}{\mathbb{R}}.$$

3. La condición (8.4) sobre el crecimiento de  $u_0$  es *óptima* como lo pone de manifiesto el siguiente ejemplo: si consideramos como dato inicial

$$u_0(x) = \gamma^{-1} \left( \frac{\lambda}{\mathbb{R}} |x| \right), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

se verifica que

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(u_0(x))}{|x|} = \frac{\lambda}{\mathbb{R}}$$

y la única solución fuerte de viscosidad del problema de Cauchy

$$(P)_\lambda \begin{cases} u_t - \mathbb{R}|\nabla u| + \lambda\beta(u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$



es

$$u(x, t) \equiv u_0(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

que sólo se anula en  $x = 0$ , por lo que

$$t_\infty(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x \neq 0. \quad \square \end{cases}$$

Regresamos a la desigualdad (8.3) que es clave para demostrar el resultado fundamental de esta Sección cuando el hamiltoniano es

$$H(p) = R|p|, \quad p \in \mathbb{R}^N \quad (R > 0).$$

**Teorema 8.8 (Fórmula de representación)**

*Supongamos (AF). Si  $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$  entonces la función*

$$u(x, t) = \gamma^{-1}([\gamma(\mathcal{U}(x, t)) - \lambda t]_+), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+, \quad (8.10)$$

donde

$$\mathcal{U}(x, t) = \sup_{y \in \overline{B}_{Rt}(x)} u_0(y),$$

es la única solución fuerte de viscosidad del problema  $(P)_\lambda$ . Además,  $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N \times \overline{\mathbb{R}}_+)$ .

**Demostración.**

La unicidad se sigue de la propiedad del cono de dependencia (véase el Corolario 6.8). Denotemos por  $u$  a la solución fuerte del problema  $(P)_\lambda$ . Por lo comentado anteriormente, buscaremos la representación de la solución  $u$  en el interior del dominio de positividad

$$\mathcal{P}(u) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ : u(x, t) > 0\}.$$

Para la fórmula de representación consideramos la función

$$\mathcal{U}(x, t) = \gamma^{-1}(\gamma(u(x, t)) + \lambda t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \quad (8.11)$$

que permite escribir

$$\gamma(u(x, t)) = [\gamma(\mathcal{U}(x, t)) - \lambda t]_+, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

Sea  $(p_1, p_2) \in D^+u^*(x, t)$  con  $(x, t) \in \mathcal{P}(u^*)$ . Como  $\gamma \geq 0$  entonces

$$(P_1, P_2) \in D^+\mathcal{U}^*(x, t) \Leftrightarrow \begin{cases} \beta(u^*(x, t))P_2 = \beta(\mathcal{U}^*(x, t))(p_2 + \lambda\beta(u^*(x, t))) \\ \beta(u^*(x, t))P_1 = \beta(\mathcal{U}^*(x, t))p_1, \end{cases}$$

por lo que para cada  $(x, t) \in \mathcal{P}(u^*)$  se tiene

$$\beta(u^*(x, t))(P_2 - R|P_1|) = \beta(\mathcal{U}^*(x, t))(p_2 - R|p_1| + \lambda\beta(u^*(x, t))). \quad (8.12)$$

Así, la desigualdad

$$p_2 - R|p_1| + \lambda\beta(u^*(x, t)) \leq 0$$

para  $(p_1, p_2) \in D^+u^*(x, t)$ ,  $(x, t) \in \mathcal{P}(u^*)$ , implica

$$P_2 - R|P_1| \leq 0, \quad (P_1, P_2) \in D^+\mathcal{U}^*(x, t), \quad (x, t) \in \mathcal{P}(u^*)$$

(recordemos que  $\beta(u^*(x, t)) > 0$  si  $(x, t) \in \mathcal{P}(u^*)$ ). Por tanto,  $\mathcal{U}$  es una solución de viscosidad de

$$\mathcal{U}_t - R|\nabla\mathcal{U}| \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{P}(u^*).$$

Razonando de forma similar con el conjunto subdiferencial  $D^-\mathcal{U}_*(x, t)$  para  $(x, t) \in \mathcal{P}(u_*)$  se concluye que  $\mathcal{U}$  es una solución de viscosidad de la ecuación

$$\mathcal{U}_t - R|\nabla\mathcal{U}| \geq 0 \quad \text{en } \mathcal{P}(u_*).$$

Por otra parte, de (8.11), se deduce

$$\mathcal{U}^*(x, 0^+) = u^*(x, 0^+) \leq u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

por lo que

$$\mathcal{U}_*(x, 0^+) = u_*(x, 0^+) \geq u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Por tanto,  $\mathcal{U}$  es solución fuerte del problema sin perturbar

$$\begin{cases} \mathcal{U}_t - R|\nabla\mathcal{U}| = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ \mathcal{U}(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

La unicidad de solución de este problema hace que  $\mathcal{U}$  venga dada por la fórmula de representación de Lax-Oleinik.  $\square$

**Observación 8.9**

1. En la Observación 7.26 obtuvimos, para algunos casos, la anterior fórmula de representación bajo el supuesto que  $\beta$  es una función no decreciente que aquí no requerimos.
2. La relación (8.3) determina

$$\gamma(\inf u_0) \leq \gamma(u(x, t)) + \lambda t \leq \gamma(\sup u_0) < +\infty;$$

de esta forma, mediante un *argumento de continuidad*, para cada  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$  existirá  $y = y(x, t)$  tal que

$$\gamma(u_0(y(x, t))) = \gamma(u(x, t)) + \lambda t \in [\gamma(\inf u_0), \gamma(\sup u_0)].$$

La demostración anterior muestra que, de hecho, se tiene la igualdad

$$u_0(y(x, t)) = \mathcal{U}(x, t),$$

con lo que

$$y(x, t) \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}^N}(x).$$

3. La fórmula de representación (8.10) generaliza al caso sin perturbar, pues si  $\lambda = 0$  se reduce a la función  $\mathcal{U}$  que proporciona la fórmula de Lax-Oleinik (véase la Observación 7.3.1).
4. La relación establecida en (8.12), junto con los Corolarios 7.11 y 7.15, hacen que la función  $u$  dada en (8.10) sea una  $D^+$ -solución de viscosidad del problema  $(P)_\lambda$ .  $\square$

**Observación 8.10**

De nuevo,  $u$  puede ser considerada como la función *coste óptimo* de un problema de Control Óptimo. Concretamente, podemos hacer la siguiente interpretación: consideremos el *espacio de valores de control*  $\mathcal{V} = \overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}}(0)$  y el *estado*  $(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$  dado por

$$\begin{cases} \mathcal{X}(s; x, t, a(\cdot)) = x - \int_0^s a(\sigma) d\sigma \\ \mathcal{T}(s; x, t, a(\cdot)) = t - s, \end{cases}$$

donde  $s > 0$  y  $a(\cdot) \in \mathcal{A} = L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, \mathcal{V})$ .

Si  $\tau(x, t; a(\cdot))$  es el *primer instante de salida* de  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$  relativo al estado inicial  $(x, t)$  y al control  $a(\cdot)$ , se verifica

$$\tau(x, t; a(\cdot)) \equiv t, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+, \quad a(\cdot) \in \mathcal{A}.$$

La fórmula de representación (8.10) permite resolver el *problema de maximización*

$$\sup_{a(\cdot) \in \mathcal{A}} J(x, t; a(\cdot)), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \quad (8.13)$$

relativo al *criterio final*

$$\begin{aligned} J(x, t; a(\cdot)) &= \gamma^{-1} (\gamma[u_0(\mathcal{X}(\tau(x, t; a(\cdot)); x, t, a(\cdot)))] - \lambda\tau(x, t; a(\cdot))) \\ &= \gamma^{-1} \left( \gamma \left[ u_0 \left( x - \int_0^s a(\sigma) d\sigma \right) \right] - \lambda t \right). \end{aligned}$$

De hecho, argumentando como en la Observación 7.3.1, la función  $u$  construida en el Teorema 8.8 es la solución de (8.13), cuya *ecuación de la Programación Dinámica* es

$$u_t - R|\nabla u| + \lambda\beta(u) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

prescribiendo el dato inicial

$$u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) \quad \text{en } \mathbb{R}^N. \quad \square$$

## 8.2 Extinción en tiempo finito.

### 8.2.1 Caracterización de la función $t_\infty(\cdot)$ . Propiedades generales.

De la representación (8.10), si para algún  $t > 0$  se verifica

$$\lambda t = \sup\{\gamma(u_0(y)) : y \in \overline{\mathbf{B}}_{Rt}(x)\} = \gamma(\sup\{u_0(x - \xi t) : \xi \in \overline{\mathbf{B}}_R(0)\})$$

entonces  $u(x, t) = 0$ . Esto nos permite definir en el punto  $x$  la función primer instante de extinción  $t_\infty(x)$  (véase la Observación 8.3).

**Observación 8.11**

1. De la fórmula de representación (8.10), bajo las condiciones **(AF)** y (8.4) obtenemos una relación implícita para la función  $t_\infty(\cdot)$ . Concretamente, como

$$\gamma(\mathcal{U}(x, t)) = \gamma(u(x, t)) + \lambda t, \quad t > 0,$$

en particular, haciendo tender  $t \rightarrow t_\infty(x)$ , se tiene

$$\lambda t_\infty(x) = \gamma(\mathcal{U}(x, t_\infty(x))), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

es decir,

$$\lambda t_\infty(x) = \max\{\gamma(u_0(x - \xi t_\infty(x))) : |\xi| \leq R\}, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (8.14)$$

de donde se deduce

$$\frac{\gamma(u_0(x))}{\lambda} \leq t_\infty(x) \leq \frac{\gamma(\sup u_0)}{\lambda}, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (8.15)$$

En particular, si  $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$  y  $u_0(x) \leq u_0(x_0)$  entonces

$$u(x, t) \leq u(x_0, t) = \gamma^{-1}([\gamma(u_0(x_0)) - \lambda t]_+), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

y

$$t_\infty(x) \leq t_\infty(x_0) = \frac{\gamma(u_0(x_0))}{\lambda}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Es decir, tanto la función  $u$  como  $t_\infty(\cdot)$  preservan los máximos iniciales.

2. En particular, si el dato inicial es función no negativa de la norma

$$u_0(x) = u_0(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

y creciente, es decir,

$$u_0(|x|) \leq u_0(|y|) \quad \text{si} \quad |x| \leq |y|$$

entonces la relación (8.14) toma la forma<sup>3</sup>

$$\lambda t_\infty(x) = \max_{\xi \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{R}}(0)} \gamma(u_0(|x - \xi t_\infty(x)|)) = \gamma(u_0(|x| + R t_\infty(x))), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

En efecto, para todo  $\xi \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{R}}(0)$  se verifica

$$|x - \xi t_\infty(x)| \leq |x| + R t_\infty(x), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

realizándose la igualdad para la elección

$$\xi_{\max} = \begin{cases} -\frac{R}{|x|}x, & x \neq 0 \\ \text{Re con } |e| = 1, & x = 0. \end{cases}$$

En el caso particular en que

$$\beta(r) = r^q, \quad r \geq 0 \quad \text{con } 0 < q < 1$$

y

$$u_0(x) = A|x|^{1-q}, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (A > 0)$$

se verifica

$$\gamma(r) = \frac{r^{1-q}}{1-q}, \quad r \geq 0$$

en cuyo caso (8.14) queda en la forma

$$\lambda t_\infty(x) = \frac{A^{1-q}(|x| + R t_\infty(x))}{1-q}, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

de donde se obtiene de forma explícita

$$t_\infty(x) = \frac{A^{1-q}}{\lambda(1-q) - R A^{1-q}} |x|, \quad x \in \mathbb{R}^N.{}^4$$

---

<sup>3</sup>Razonando de forma análoga, si  $u_0$  hubiera tenido la propiedad

$$u_0(|x|) \geq u_0(|y|) \quad \text{si } |x| \leq |y|$$

entonces habiésemos obtenido

$$\lambda t_\infty(x) = \gamma(u_0(|x| - R t_\infty(x))), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

<sup>4</sup>Como veremos en las Observaciones 8.23 y 9.24, la condición

$$-R|\nabla u_0| + \lambda\beta(u_0) \geq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N$$

3. En general si el hamiltoniano  $H$  verifica

$$H(p) \geq 0, \quad p \in \mathbb{R}^N$$

entonces la relación

$$0 = u_t - H(\nabla u) + \lambda\beta(u) \leq u_t + \lambda\beta(u)$$

determina

$$\int_{u(x, t_\infty(x)-t)}^{u(x, t_\infty(x))} \frac{ds}{\beta(s)} = \int_{t_\infty(x)-t}^{t_\infty(x)} \frac{u_t}{\beta(u)} \geq -\lambda t,$$

de donde se deduce

$$\gamma(u(x, t_\infty(x) - t)) \leq \lambda t, \quad 0 < t < t_\infty(x). \quad (8.16)$$

En particular, haciendo tender  $t \rightarrow t_\infty(x)$  volvemos a obtener la estimación inferior

$$\gamma(u_0(x)) \leq \lambda t_\infty(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad \square$$

En la relación (8.14) hemos visto la caracterización

$$\lambda t_\infty(x) = \max\{\gamma(u_0(x - \xi t_\infty(x))) : |\xi| \leq R\}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Para cada  $x \in \mathbb{R}^N$  vamos a considerar  $\xi_{\max} = \xi_{\max}(x) \in \overline{\mathbf{B}}_R(0)$  de forma que se tenga la igualdad

$$\lambda t_\infty(x) = \gamma(u_0(x - \xi_{\max}(x)t_\infty(x))). \quad (8.17)$$

En la situación anterior se verifica:

**Proposición 8.12**

*Sca  $x \in \mathbb{R}^N$  para el cual  $t_\infty(x) < +\infty$ . Entonces*

$$\xi_{\max} \cdot \nabla u_0(x - \xi_{\max} t_\infty(x)) + \lambda\beta(u_0(x - \xi_{\max} t_\infty(x))) \geq 0 \quad (8.18)$$

*donde  $\xi_{\max} = \xi_{\max}(x) \in \overline{\mathbf{B}}_R(0)$  viene definido en (8.17). En particular, si  $u_0$  es convexo, se verifica*

$$u_0(x) - u_0(x - \xi_{\max} t_\infty(x)) + \lambda t_\infty(x)\beta(u_0(x - \xi_{\max} t_\infty(x))) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

es óptima para el fenómeno de extinción. Nótese, en este caso, la equivalencia:

$$-R|\nabla u_0| + \lambda\beta(u_0) \geq 0 \text{ en } \mathbb{R}^N \Leftrightarrow \lambda(1-q) - RA^{1-q} \geq 0.$$

**Demostración.**

Fijado  $x \in \mathbb{R}^N$  consideremos la función

$$\eta(t) \doteq \gamma^{-1}([\gamma(u_0(x - \xi_{\max}(x)t)) - \lambda t]_+), \quad t \geq 0$$

que verifica

$$\frac{\eta'(t)}{\beta(\eta(t))} = - \frac{\xi_{\max}(x) \cdot \nabla \psi(x, t) + \lambda \beta(\psi(x, t))}{\beta(\psi(x, t))} \quad (8.19)$$

para  $0 < t < t_\infty(x)$ , siendo

$$\psi(x, t) \doteq u_0(x - \xi_{\max}(x)t).$$

Como

$$\begin{cases} \eta(t) > 0, & 0 \leq t < t_\infty(x) \\ \eta(t_\infty(x)) = 0 \end{cases}$$

entonces

$$\eta'(t_\infty(x)) \leq 0.$$

De esta forma, la relación (8.19) implica (8.18). Finalmente, en el caso en que  $u_0$  sea convexo, basta tener en cuenta la relación

$$u_0(x) - u_0(x - \xi_{\max} t_\infty(x)) \geq t_\infty(x) \nabla u_0(x - \xi_{\max} t_\infty(x)) \cdot \xi_{\max}. \quad \square$$

**Observación 8.13**

Si consideramos un dato inicial no negativo de la forma

$$u_0(x) = u_0(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

con  $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  tal que

$$u_0(|x|) \leq u_0(|y|) \quad \text{si} \quad |x| \leq |y|$$

entonces, como vimos en la Observación 8.11, es posible determinar de forma explícita el vector

$$\xi_{\max}(x) = \begin{cases} -\frac{\mathbf{R}}{|x|}x, & x \neq 0 \\ \mathbf{Re} \text{ con } |\mathbf{e}| = 1, & x = 0. \end{cases}$$



Además, en este caso, se tiene la igualdad

$$|x - \xi_{\max}(x)t_{\infty}(x)| = |x| + Rt_{\infty}(x)$$

por lo que las expresiones (8.17) y (8.18) toman, respectivamente, la forma

$$\lambda t_{\infty}(x) = \gamma(u_0(|x| + Rt_{\infty}(x)))$$

y

$$-Ru'_0(|x| + Rt_{\infty}(x)) + \lambda\beta(u_0(|x| + Rt_{\infty}(x))) \geq 0.$$

Además, en esta situación, podemos afirmar que la función

$$w(x, t) \doteq \gamma^{-1}([\gamma(u_0(|x| + Rt)) - \lambda t]_+), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

es la única solución fuerte de viscosidad del problema

$$(P)_{\lambda} \begin{cases} u_t - R|\nabla u| + \lambda\beta(u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = u_0(|x|), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

ya que

$$\frac{w_t(x, t)}{\beta(w(x, t))} = \frac{Ru'_0(|x| + Rt) - \lambda\beta(u_0(|x| + Rt))}{\beta(u_0(|x| + Rt))}$$

y

$$\frac{|\nabla w(x, t)|}{\beta(w(x, t))} = \frac{u'_0(|x| + Rt)}{\beta(u_0(|x| + Rt))}. \quad \square$$

Mediante argumentos clásicos de punto fijo pueden obtenerse estimaciones precisas de la función primer instante de extinción a partir de la ecuación funcional

$$\lambda t_{\infty}(x) = \max \{ \gamma(u_0(x - \xi t_{\infty}(x))) : |\xi| \leq R \}, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

como mostramos en el

#### Corolario 8.14

*Supongamos la condición (AF) así como*

$$|u_0(x) - u_0(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^N \quad (L > 0). \quad (8.20)$$

Entonces, se verifica

$$1 \leq \frac{\lambda t_\infty(x)}{\gamma(u_0(x))} \leq \frac{\lambda \beta(\inf u_0)}{[\lambda \beta(\inf u_0) - \text{LR}]_+}, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (8.21)$$

Por otra parte, si para cada  $x \in \mathbb{R}^N$  definimos la función

$$\psi(r) = \frac{1}{\lambda} \max \{ \gamma(u_0(x - \xi r)) : |\xi| \leq R \}, \quad r \geq 0,$$

bajo la hipótesis

$$\text{LR} < \lambda \beta(\inf u_0) \quad (8.22)$$

la sucesión dada por  $r_0(x) = 0$  y  $r_n(x) = \psi(r_{n-1}(x))$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , verifica

$$t_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n(x)$$

y obtenemos el siguiente error de truncamiento

$$|t_\infty(x) - r_n(x)| \leq \frac{\mathcal{L}^n}{\lambda(1 - \mathcal{L})} \gamma(u_0(x)), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

donde  $\mathcal{L} = \frac{\text{LR}}{\lambda \beta(\inf u_0)}$ .

### Demostración.

Obviamente, para obtener (8.21) basta considerar aquellos casos en los que se verifica (8.22) y demostrar la estimación superior, dado que la inferior se sigue de (8.15). Fijado  $x \in \mathbb{R}^N$ , cálculos directos permiten obtener

$$\begin{aligned} |\gamma(u_0(x - \zeta s)) - \lambda \psi(r)| &\leq |\gamma(u_0(x - \zeta s)) - \gamma(u_0(x - \zeta r))| = \left| \int_{u_0(x - \zeta r)}^{u_0(x - \zeta s)} \frac{d\sigma}{\beta(\sigma)} \right| \\ &\leq \frac{\Gamma}{\beta(\inf u_0)} |u_0(x - \zeta s) - u_0(x - \zeta r)| \leq \frac{\text{LR}}{\beta(\inf u_0)} |s - r|, \quad s, r \geq 0 \end{aligned}$$

por lo que

$$|\psi(s) - \psi(r)| \leq \mathcal{L} |s - r|, \quad s, r \geq 0.$$

Consecuentemente,  $\psi$  es una contracción en  $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ . Por otra parte, si denotamos por

$$\mathcal{R}(x) = \frac{\beta(\inf u_0)}{\lambda \beta(\inf u_0) - \text{LR}} \gamma(u_0(x)),$$

se verifica que  $\psi : [0, \mathcal{R}(x)] \rightarrow [0, \mathcal{R}(x)]$ . En efecto, debido a que

$$\mathcal{R}(x) = \frac{1}{\lambda(1-\mathcal{L})}\gamma(u_0(x)) \quad \text{y} \quad \psi(0) = \frac{1}{\lambda}\gamma(u_0(x)),$$

se deduce, para cada  $0 \leq r \leq \mathcal{R}(x)$ , la desigualdad

$$0 \leq \psi(r) = [\psi(r) - \psi(0)] + \psi(0) \leq \mathcal{L}r + \mathcal{R}(x)(1-\mathcal{L}) \leq \mathcal{R}(x).$$

Además, la función  $\psi$  tiene un único punto fijo que coincide con  $t_\infty(x)$  (ver (8.14)) y el resultado se sigue fácilmente.  $\square$

### Observación 8.15

Los argumentos utilizados en la demostración del Corolario 8.14 ratifican, para datos iniciales continuos, la propiedad

$$t_\infty(x_0) = \frac{1}{\lambda}\gamma(u_0(x_0))$$

en aquellos puntos  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  en los que la función  $u_0$  alcanza un máximo (ver la Observación 8.11). En efecto, como  $\gamma$  es creciente, la función  $x \mapsto \gamma(u_0(x))$  alcanza un máximo en el mismo punto  $x_0$  y se verifica que

$$\max \{ \gamma(u_0(x_0 - \xi r)) : |\xi| \leq R \} = \gamma(u_0(x_0)), \quad r \in \mathbb{R}.$$

De aquí se concluye que

$$r_n(x_0) = \frac{1}{\lambda}\gamma(u_0(x_0)), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad \square$$

### Observación 8.16

La desigualdad (8.21) muestra que, bajo las hipótesis (8.20) y (8.22), la función primer instante de extinción  $t_\infty(\cdot)$  está definida en todo el espacio  $\mathbb{R}^N$ .  $\square$

## 8.2.2 Regularidad.

Para la regularidad de la función  $t_\infty(\cdot)$  requeriremos que  $u_0$  verifique

$$-(R + \mu)|\nabla u_0| + \lambda\beta(u_0) \geq 0 \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^N \quad (\mu > 0) \quad (8.23)$$

en el sentido de la viscosidad. Entonces, la propiedad del cono de dependencia permite demostrar el siguiente resultado:

**Teorema 8.17**

Supongamos la condición **(AF)** y sea  $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$  solución de viscosidad de (8.23). Entonces, para cada  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$  se verifica

$$u(x + \zeta h, t + h) \leq u(x, t), \quad h > 0, \quad |\zeta| \leq \mu. \quad (8.24)$$

En particular,  $u$  es solución de viscosidad de la ecuación

$$u_t + \mu |\nabla u| \leq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+. \quad (8.25)$$

**Demostración.**

A partir de  $\zeta \in \overline{\mathbf{B}}_\mu(0)$  consideramos la función

$$v(x, t) = u^*(x + \zeta t, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

que verifica

$$v_t - \mathbf{R}|\nabla v| + \lambda\beta(v) \leq \zeta \cdot \nabla v \leq \mu |\nabla v| \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

Como por otra parte la hipótesis (8.23) determina

$$-\mathbf{R}|\nabla u_0| + \lambda\beta(u_0) \geq \mu |\nabla u_0| \quad \text{en } \mathbb{R}^N$$

y, además, por ser  $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$  se verifica

$$v^*(x, 0^+) = u^*(x, 0^+) \leq u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Así, el Corolario 6.7 hace que se tenga

$$u^*(x + \zeta t, t) = v(x, t) \leq u_0(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+. \quad (8.26)$$

A continuación, para  $h > 0$  fijo, sea ahora

$$w(x, t) = u(x + \zeta h, t + h), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

Claramente

$$w_t - \mathbf{R}|\nabla w| + \lambda\beta(w) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

y, a partir de (8.26),

$$w(x, 0) = u(x + \zeta h, h) \leq u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Aplicando nuevamente el Corolario 6.7 obtenemos (8.24).

Con vistas a demostrar (8.25), sea  $(p_1, p_2) \in D^+u^*(x, t)$ , es decir,

$$u^*(y, s) \leq u^*(x, t) + p_1 \cdot (y - x) + p_2(s - t) + o(|y - x| + |s - t|).$$

Consecuentemente, las elecciones  $y = x - \zeta h$ ,  $s = t - h$  con  $h > 0$  y  $|\zeta| \leq \mu$  y la relación (8.24) permiten escribir

$$0 \leq u^*(x - \zeta h, t - h) - u^*(x, t) \leq -hp_1 \cdot \zeta - hp_2 + o(h).$$

Dividiendo por  $h > 0$  y haciendo tender  $h \rightarrow 0$  se tiene

$$p_2 + p_1 \cdot \zeta \leq 0, \quad (p_1, p_2) \in D^+u^*(x, t), \quad |\zeta| \leq \mu.$$

Tomando supremo en  $\zeta \in \overline{\mathbf{B}}_\mu(0)$ , el teorema de Fenchel–Moreau concluye

$$p_2 + \mu|p_1| \leq 0, \quad (p_1, p_2) \in D^+u^*(x, t). \quad \square$$

De este resultado se deduce la lipschitzianidad de la función  $t_\infty(\cdot)$ .

### Corolario 8.18

Bajo las condición **(AF)**, si  $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$  es solución de viscosidad de (8.23) y la función  $t_\infty(\cdot)$  está definida en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  entonces

$$|t_\infty(x) - t_\infty(y)| \leq \frac{1}{\mu}|x - y|, \quad x, y \in \Omega.$$

### Demostración.

La prueba se basa en una observación minuciosa de (8.24): nótese que  $t_\infty(x) + h$  es un instante de anulación para el punto  $x + \xi h$ . De esta forma,

$$\underline{t_\infty(x + \xi h) \leq t_\infty(x) + h = t_\infty(x) + \frac{|(x + \xi h) - x|}{\mu}}, \quad |\xi| = \mu. \quad \square$$

### Observación 8.19

En el caso en que la función  $t_\infty(\cdot)$  esté definida en todo  $\mathbb{R}^N$  entonces será globalmente lipschitziana, por lo que tendrá un crecimiento a lo sumo lineal en el infinito. En efecto,

$$t_\infty(x) \leq t_\infty(0) + \frac{1}{\mu}|x| \leq M(1 + |x|), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

con

$$M \doteq \max \left\{ t_\infty(0), \frac{1}{\mu} \right\}.$$

Por tanto,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} \frac{t_\infty(x)}{1 + |x|} < +\infty. \quad \square$$

### Observación 8.20

En los resultados anteriores hemos requerido que  $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$  sea solución de viscosidad de la ecuación

$$-(R + \mu)|\nabla u_0| + \lambda\beta(u_0) \geq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \quad (\mu > 0).$$

No obstante, si  $u_0$  es lipschitziana de constante  $L > 0$ , es decir,

$$|u_0(x) - u_0(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^N$$

podemos reemplazar la hipótesis anterior por

$$-R|\nabla u_0| + \lambda\beta(u_0) \geq c \quad \text{en } \mathbb{R}^N \quad (c > 0) \quad (8.27)$$

dado que, si tomamos  $\mu \leq \frac{c}{L}$ , se verifica:

$$-R|\nabla u_0| + \lambda\beta(u_0) \geq c \geq \mu L \geq \mu|\nabla u_0| \quad \text{en } \mathbb{R}^N.$$

La cuestión es ahora, ¿cómo obtener la condición (8.27)? Estรก claro que:

$$-R|\nabla u_0| + \lambda\beta(u_0) \geq -RL + \lambda\beta(\inf u_0) \doteq c$$

siempre y cuando

$$\inf u_0 > \beta^{-1} \left( \frac{RL}{\lambda} \right) (> 0)$$

(véase (8.22)).  $\square$

Como comentamos anteriormente, la extinción es *suave*. Concretamente,

### Proposición 8.21

Si se verifica (AF) entonces la función parcial  $t \mapsto u(x, t)$  es diferenciable en  $t_\infty(x)$  y, además,

$$u_t(x, t_\infty(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

### Demostración.

Véase la demostración del Corolario 9.23 donde se muestra esta propiedad bajo hipótesis más generales.  $\square$

### 8.2.3 Tasa de extinción.

El estudio de la tasa de extinción es una cuestión importante, pues a pesar de tener una fórmula de representación de la solución, no tenemos determinada explícitamente la función  $t_\infty(\cdot)$ . A continuación, bajo ciertas hipótesis, obtenemos una tasa de extinción uniforme, para lo que requeriremos trabajar con el conjunto

$$\mathcal{A}(x) \doteq \left\{ \zeta(x) \in \overline{\mathbf{B}}_R(0) : \lambda t_\infty(x) = \gamma(u_0(x - \zeta(x)t_\infty(x))) \right\} \quad (8.28)$$

asociado a cada punto  $x \in \mathbb{R}^N$  con  $u_0(x) > 0$ .

#### Teorema 8.22

Bajo la condición **(AF)** y  $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$  solución de viscosidad de

$$-R|\nabla u_0| + \lambda\beta(u_0) \geq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N, \quad (8.29)$$

sea  $x \in \mathbb{R}^N$  con  $u_0(x) > 0$  tal que

$$\mathcal{A}(x) \cap \mathbf{B}_R(0) \neq \emptyset. \quad (8.30)$$

Entonces, se tiene

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma(u(x, t_\infty(x) - t))}{\lambda t} = 1. \quad (8.31)$$

#### Demostración.

Por (8.16) basta con mostrar la desigualdad

$$\liminf_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma(u(x, t_\infty(x) - t))}{\lambda t} \geq 1. \quad (8.32)$$

Si  $\zeta = \zeta(x) \in \mathcal{A}(x) \cap \mathbf{B}_R(0)$ , consideramos

$$\mathbf{e} = \begin{cases} \frac{\zeta}{|\zeta|} & \text{si } \zeta \neq 0 \\ \text{un vector unitario arbitrario} & \text{si } \zeta = 0 \end{cases}$$

y

$$t_\varepsilon = \frac{R - |\zeta|}{R + \varepsilon} t_\infty(x), \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

para los que se verifica

$$-t_{\infty}(x)\zeta - \varepsilon t \mathbf{e} = -(t_{\infty}(x) - t)(\zeta + \eta(t)), \quad 0 < t \leq t_{\varepsilon} \quad (8.33)$$

para algún  $\eta(t) \in \mathbb{R}^N$  con  $\zeta + \eta(t) \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbb{R}}(0)$ . En efecto, para todo  $t \in ]0, t_{\varepsilon}]$  se tiene

$$-t_{\infty}(x)\zeta - \varepsilon t \mathbf{e} = -(t_{\infty}(x) - t)(\zeta + \eta(t)),$$

donde  $\eta(t) \in \mathbb{R}^N$  está definido por

$$(t_{\infty}(x) - t)\eta(t) = t(\zeta + \varepsilon \mathbf{e}).$$

Así pues, para  $0 < t \leq t_{\varepsilon}$ , se obtiene<sup>5</sup>

$$|\zeta + \eta(t)| = \left| \zeta + \frac{\zeta + \overline{\varepsilon} \mathbf{e}}{t_{\infty}(x) - t} t \right| \leq |\zeta| + \frac{|\zeta| + \varepsilon}{t_{\infty}(x) - t_{\varepsilon}} t_{\varepsilon} = R.$$

Consideremos ahora la función positiva

$$v(t) = u_0(x - t_{\infty}(x)\zeta - \varepsilon t \mathbf{e}), \quad 0 < t \ll 1.$$

Por definición, se sigue

$$p \in D^-v(t) \Leftrightarrow p = -\varepsilon \mathbf{e} q, \quad q \in D^-u_0(x - t_{\infty}(x)\zeta - \varepsilon t \mathbf{e});$$

así, la hipótesis (8.29) determina que se tenga

$$v'(t) + \frac{\lambda \varepsilon}{R} \beta(v(t)) \geq 0, \quad 0 < t \ll 1$$

en el sentido de la viscosidad, por lo que

$$-\frac{\lambda \varepsilon}{R} t \leq \int_0^t \frac{v'(s)}{\beta(v(s))} ds = \int_{v(0)}^{v(t)} \frac{d\sigma}{\beta(\sigma)}$$

(ver el Corolario 4.51). Por tanto,

$$-\frac{\lambda \varepsilon}{R} t \leq \gamma(u_0(x - t_{\infty}(x)\zeta - \varepsilon t \mathbf{e})) - \gamma(u_0(x - t_{\infty}(x)\zeta)).$$

---

<sup>5</sup>La función  $t \mapsto \frac{t}{A-t}$  es creciente en el intervalo  $]0, A[$ .



De esta forma, de (8.28) y (8.33) deducimos, para  $0 < t \ll 1$ , las desigualdades

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\varepsilon}{R} &\leq \frac{\gamma(u_0(x - t_\infty(x)\zeta - \varepsilon t e)) - \lambda(t_\infty(x) - t)}{\lambda t} \\ &= \frac{\gamma(u_0(x - (t_\infty(x) - t)(\zeta + \eta(t)))) - \lambda(t_\infty(x) - t)}{\lambda t} \\ &\leq \frac{1}{\lambda t} [\max \{ \gamma(u_0(x - \xi(t_\infty(x) - t))) : |\xi| \leq R \} - \lambda(t_\infty(x) - t)]. \end{aligned}$$

La fórmula (8.10) implica

$$1 - \frac{\varepsilon}{R} \leq \frac{\gamma(u(x, t_\infty(x) - t))}{\lambda t}, \quad 0 < t \ll 1$$

y la tasa (8.32) se alcanza haciendo tender primero  $t \rightarrow 0$  y luego  $\varepsilon \rightarrow 0$ .  $\square$

### Observación 8.23

Nótese que la hipótesis

$$-R|\nabla u_0| + \lambda\beta(u_0) \geq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N$$

es *optimal* para el fenómeno de extinción. En efecto, si consideramos un dato inicial no negativo de la forma

$$u_0(x) = u_0(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

con  $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$  tal que

$$u_0(|x|) \leq u_0(|y|) \quad \text{si } |x| \leq |y|$$

(véanse las Observaciones 8.11 y 8.13) entonces en aquellos puntos en los que  $t_\infty(x) < +\infty$ , se verifica

$$-Ru'_0(|x| + Rt_\infty(x)) + \lambda\beta(u_0(|x| + Rt_\infty(x))) \geq 0. \quad \square$$

Veamos cómo puede comprobarse la hipótesis (8.30) cuando el dato inicial es lipschitziano.

**Corolario 8.24**

Supongamos **(AF)** y sea  $u_0$  un dato inicial verificando (8.20) y

$$-R|\nabla u_0| + \lambda\beta(u_0) \geq c \text{ en } \mathbb{R}^N \quad (8.34)$$

para algún  $c > 0$ . Si  $x \in \mathbb{R}^N$  con  $u_0(x) > 0$  entonces se verifica

$$\frac{c}{c + LR} \leq \frac{\gamma(u(x, t_\infty(x) - t))}{\lambda t} \leq 1, \quad 0 < t < t_\infty(x) \quad (8.35)$$

y, por tanto,

$$1 \leq \frac{\lambda t_\infty(x)}{\gamma(u_0(x))} \leq 1 + \frac{LR}{c}. \quad (8.36)$$

Si además la función  $u_0$  alcanza un máximo en un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^N$ , para aquellos puntos  $x \in \mathbb{R}^N$  que verifiquen

$$|x - x_0| < \frac{Rc}{\lambda(c + LR)} \gamma(u_0(x_0)) \quad (8.37)$$

se tiene la siguiente tasa

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma(u(x, t_\infty(x) - t))}{\lambda t} = 1.$$

**Demostración.**

Las hipótesis (8.20) y (8.34) determinan, para la elección  $\mu \doteq \frac{c}{L}$

$$-R|\nabla u_0| + \lambda\beta(u_0) \geq c = \mu L \geq \mu|\nabla u_0| \text{ en } \mathbb{R}^N,$$

es decir,

$$-\left(R + \frac{c}{L}\right)|\nabla u_0| + \lambda\beta(u_0) \geq 0 \text{ en } \mathbb{R}^N.$$

Sea  $(p_1, p_2) \in D^+u(x, t_\infty(x) - t)$  con  $0 < t < t_\infty(x)$ . Por definición

$$p_2 - R|p_1| \leq -\lambda\beta(u(x, t_\infty(x) - t)). \quad (8.38)$$

Como por otra parte

$$p_2 + \frac{c}{L}|p_1| \leq 0 \quad (8.39)$$

(véase (8.25) del Teorema 8.17), de (8.38) y (8.39) se sigue

$$\left(1 + \frac{\text{LR}}{c}\right) p_2 + \lambda \beta(u(x, t_\infty(x) - t)) \leq 0, \quad (p_1, p_2) \in D^+ u(x, t_\infty(x) - t).$$

Argumentando como en [Cr-Li3, Corollary 1.7], para cada  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $0 < s < t < t_\infty(x)$  se tiene

$$\int_{u(x, t_\infty(x)-t)}^{u(x, t_\infty(x)-s)} \frac{d\sigma}{\beta(\sigma)} = \int_{t_\infty(x)-t}^{t_\infty(x)-s} \frac{u_t}{\beta(u)} \leq -\frac{\lambda c}{c + \text{LR}}(t - s)$$

o, equivalentemente,

$$\gamma(u(x, t_\infty(x) - t)) - \gamma(u(x, t_\infty(x) - s)) \geq \frac{\lambda c}{c + \text{LR}}(t - s).$$

Haciendo tender  $s \rightarrow 0$  se obtiene

$$\gamma(u(x, t_\infty(x) - t)) \geq \frac{\lambda c}{c + \text{LR}} t, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad 0 < t < t_\infty(x).$$

La monotonía de  $\gamma$  y (8.16) concluyen (8.35) y (8.36) (ésta última sin más que hacer tender  $t \rightarrow t_\infty(x)$ ).

Por otra parte, notemos que (8.20) y (8.34) implican

$$|t_\infty(x) - t_\infty(y)| \leq \frac{L}{c}|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^N \quad (8.40)$$

(véase el Corolario 8.18 y la Observación 8.20 tomando  $\mu = \frac{c}{L}$ ). Si  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  es un máximo de  $u_0$  entonces

$$t_\infty(x_0) = \frac{\gamma(u_0(x_0))}{\lambda}$$

(ver la Observación 8.11). Como podemos escribir (8.37) en la forma

$$|x - x_0| < R \left( t_\infty(x_0) - \frac{L}{c}|x - x_0| \right),$$

la condición (8.40) conduce a

$$|x - x_0| < R t_\infty(x). \quad (8.41)$$

Consecuentemente, la igualdad

$$\lambda t_\infty(x) = \max \{ \gamma(u_0(y)) : |y - x| \leq R t_\infty(x) \},$$

(8.28) y (8.41) conducen a la existencia de un elemento  $\zeta \in \mathbf{B}_R(0)$  con la propiedad

$$x_0 = x - \zeta t_\infty(x).$$

De esta forma,

$$\zeta(x) \in \mathbf{B}_R(0)$$

y el resultado se sigue del Teorema 8.22.  $\square$

### 8.2.4 Datos iniciales no acotados.

En las Subsecciones anteriores hemos visto como la condición de absorción fuerte

$$\int_{0^+} \frac{ds}{\beta(s)} < +\infty \quad (\mathbf{AF})$$

permite definir la función  $t_\infty(\cdot)$  en todo el espacio  $\mathbb{R}^N$  suponiendo una cualquiera de las siguientes condiciones:

1.  $\sup u_0 < +\infty$  (ver la Observación 8.3).
2. bajo la condición de absorción muy fuerte

$$\int_0^\infty \frac{ds}{\beta(s)} < +\infty \quad (\mathbf{AMF})$$

(véase de nuevo la Observación 8.3).

3. para el hamiltoniano

$$H(p) = R|p|, \quad p \in \mathbb{R}^N \quad (R > 0)$$

cuando se verifica

$$|u_0(x) - u_0(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^N \quad (L > 0) \quad (8.42)$$

de modo que se tenga

$$LR < \lambda \beta(\inf u_0)$$

(véase la Observación 8.16).

4. cuando el hamiltoniano es lipschitziano

$$|H(p) - H(q)| \leq R|p - q|, \quad p, q \in \mathbb{R}^N \quad (R > 0) \quad (8.43)$$

y el dato inicial  $u_0$  tiene un crecimiento en el infinito de la forma

$$\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(u_0(x))}{|x|} < \frac{\lambda}{R} \quad (8.44)$$

(ver el Teorema 8.5).

Ahora vamos a profundizar en el estudio del comportamiento de la función  $t_\infty(\cdot)$  en el 'infinito' para una clase de hamiltonianos y datos iniciales lipschitzianos.

### Teorema 8.25

Bajo la condición **(AF)** sea  $H$  un hamiltoniano verificando (8.43) y

$$H(p) \geq 0, \quad p \in \mathbb{R}^N \quad (8.45)$$

y un dato inicial  $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$  con las propiedades (8.42), (8.44),

$$-H(\nabla u_0) + \lambda\beta(u_0) \geq c \quad \text{en } \mathbb{R}^N \quad (c > 0) \quad (8.46)$$

$$\frac{\lambda L}{c} \leq \liminf_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(u_0(x))}{|x|} \left( < \limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(u_0(x))}{|x|} < \frac{\lambda}{R} \right) \quad (8.47)$$

y la siguiente condición de compatibilidad entre los datos

$$c > LR. \quad (8.48)$$

Entonces se verifica

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\lambda t_\infty(x)}{\gamma(u_0(x))} = 1.$$

### Demostración.

Como  $H \geq 0$ , se verifica

$$\gamma(u_0(x)) \leq \lambda t_\infty(x), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

(ver (8.16)). Por las hipótesis (8.42), (8.44) y (8.46) sabemos que la función  $t_\infty(\cdot)$  es globalmente lipschitziana de constante  $\frac{L}{c}$ , por lo que

$$t_\infty(x) \leq t_\infty(0) + \frac{L}{c}|x|, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda t_\infty(x)}{\gamma(u_0(x))} &= \lambda \frac{t_\infty(x)}{|x|} \frac{|x|}{\gamma(u_0(x))} \\ &\leq \lambda \frac{t_\infty(0) + \frac{L}{c}|x|}{|x|} \frac{|x|}{\gamma(u_0(x))} = \lambda \left( \frac{t_\infty(0)}{|x|} + \frac{L}{c} \right) \frac{|x|}{\gamma(u_0(x))}, \end{aligned}$$

de donde

$$\liminf_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(u_0(x))}{\lambda t_\infty(x)} \geq 1 \left( > \limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(u_0(x))}{\lambda t_\infty(x)} \right). \quad \square$$

### Observación 8.26

En realidad, como veremos en la Observación 9.22, la condición (8.45) puede *rebajarse* reemplazándola por las siguientes (véase la Proposición 9.18): sea  $\kappa \geq 0$  y  $\mathcal{H} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y convexa verificando

$$H(p) \geq \kappa \mathcal{H}(p), \quad p \in \mathbb{R}^N,$$

$$\mathcal{D}_0^* = \{\xi \in D(\mathcal{H}^*) : \mathcal{H}^*(\xi) = 0\} \neq \emptyset$$

$$\kappa \xi = 0 \quad \text{para algún } \xi \in \mathcal{D}_0^*.$$

Evidentemente, (8.45) se obtiene sin más que tomar  $\kappa = 0$ .  $\square$

### Observación 8.27

Hagamos algunos comentarios cuando el hamiltoniano es

$$H(p) = R|p|, \quad p \in \mathbb{R}^N \quad (R > 0).$$

1. Obviamente, la condición (8.44) se verifica si  $u_0$  es acotado. En este caso, como no se satisface la condición (8.47), para el comportamiento de la función  $t_\infty(\cdot)$  sólo tenemos la estimación

$$1 \leq \frac{\lambda t_\infty(x)}{\gamma(u_0(x))} \leq 1 + \frac{LR}{c}, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

(ver el Corolario 8.24).

2. Para el caso en que  $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ , hemos mostrado anteriormente (ver la Observación 8.11) \_\_\_\_\_

$$u_0(x) \leq u_0(x_0), x \in \mathbb{R}^N \Rightarrow t_\infty(x_0) = \frac{\gamma(u_0(x_0))}{\lambda}.$$

El Teorema 8.25 viene a *ratificar* este resultado en el sentido que si  $u_0 \notin L^\infty(\mathbb{R}^N)$  y, por tanto,

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u_0(x) = +\infty$$

entonces, con un '*abuso de escritura*', se verifica

$$t_\infty(+\infty) = \frac{\gamma(u_0(+\infty))}{\lambda}. \quad \square$$

### Observación 8.28

1. Del Corolario 6.7 y del Teorema 8.25 se sigue la *unicidad* de la función primer instante de extinción relativa a la ecuación  $(HJ)_{\lambda,\beta}$  y al dato inicial  $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$ .
2. Con el teorema anterior lo que hacemos es precisar *exactamente* el comportamiento asintótico de  $t_\infty(\cdot)$ .  $\square$

# Capítulo 9

## Hamiltonianos no lipschitzianos.

### 9.1 Introducción.

La ecuación modelo de esta Sección va a ser

$$u_t - R|\nabla u|^m + \lambda\beta(u) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \quad (m > 1)$$

sobre la que seguimos manteniendo la condición de absorción fuerte

$$\int_{0^+} \frac{ds}{\beta(s)} < +\infty \quad (\mathbf{AF})$$

(necesaria, como vimos en la Observación 7.20, para la propiedad de extinción). Sumariamente obtenemos los siguientes resultados:

1. *Existencia y regularidad de solución.* Bajo la hipótesis

$$-R|\nabla u_0|^m + \lambda\beta(u_0) \geq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N$$

mostramos, mediante un argumento de compacidad, que el problema

$$(P)_\lambda^m \begin{cases} u_t - R|\nabla u|^m + \lambda\beta(u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(\cdot, 0^+) = u_0(\cdot) \geq 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$



admite una solución  $u \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$ . Nótese que se da un *efecto regularizante*:

$$u_0 \in \mathcal{UC}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow u \in \text{Lip}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+).$$

Por tanto  $u$  es, de hecho, una solución generalizada (véase el *Teorema de Rademacher* en el Apéndice B). Además,  $u$  es *solución mínima* y

$$t_\infty^u(\cdot) \leq t_\infty^v(\cdot) \quad \forall v \text{ solución de } (P)_\lambda^m.$$

2. *Regularidad de  $t_\infty(x)$* . El supuesto<sup>1</sup>

$$-\mu|\nabla u_0| - R|\nabla u_0|^m + \lambda\beta(u_0) \geq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \quad \text{con } \mu > 0 \quad (9.1)$$

conduce a

$$|t_\infty(x) - t_\infty(y)| \leq \frac{1}{\mu}|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^N.$$

3. *Tasa de extinción*. De nuevo, la condición (9.1) nos permite demostrar

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma(u(x, t_\infty(x) - t))}{\lambda t} = 1, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

4. *Decaimiento suave*. Bajo adecuadas hipótesis se verifica

$$u_t(x, t_\infty(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

### Observación 9.1

Queremos destacar que en el caso  $m > 1$  obtenemos la tasa de extinción para todo  $x \in \mathbb{R}^N$ , a diferencia de lo que ocurría con el caso  $m = 1$ , en el que sólo teníamos la tasa exacta de extinción en puntos ‘*próximos*’ a los máximos del dato inicial (ver el Corolario 8.24).  $\square$

---

<sup>1</sup>Se trata de la misma hipótesis que requeríamos en el caso  $m = 1$ .

## 9.2 Existencia de una solución.

Como complemento al *método de Perron* descrito en la Parte anterior, damos aquí otro argumento de existencia de soluciones a partir de truncamientos sobre datos acotados. Sea  $u_0 \in \mathcal{UC}(\mathbb{R}^N)$  una función no negativa definida en  $\mathbb{R}^N$  con  $N \geq 1$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  consideramos la siguiente función positiva y acotada

$$u_0^n(x) = [u_0(x) \wedge n] + \frac{1}{n}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Como se comprueba fácilmente, se tiene que

$$|u_0^n(x) - u_0^n(y)| \leq |u_0(x) - u_0(y)|, \quad x, y \in \mathbb{R}^N,$$

por lo que  $u_0^n \in \mathcal{UC}(\mathbb{R}^N)$ , uniformemente en  $n$ ,  $\{u_0^n\}_n \rightarrow u_0$  uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^N$  cuando  $n \rightarrow +\infty$  y  $u_0^n \leq u_0 + 1$  en  $\mathbb{R}^N$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Por otra parte, en todo lo que sigue vamos a considerar un hamiltoniano  $H \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$  con  $H(0) = 0$  y una función creciente localmente lipschitziana  $\beta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  tal que  $\beta(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$  y  $\beta(0^+) = 0$ . Relativo al término  $\beta$  tomaremos la siguiente aproximación acotada y localmente lipschitziana

$$\beta_n(r) = \beta \left( \left[ (r \wedge n) - \frac{1}{n} \right]_+ \right), \quad r \geq 0,$$

con  $\{\beta_n\}_n \rightarrow \beta$  uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ . Además, para todo  $\sigma > 0$  existe  $C_{\sigma,n} \in \mathbb{R}$  tal que

$$\beta_n(r) - \beta_n(s) \geq C_{\sigma,n}(r - s), \quad 0 \leq s \leq r \leq \sigma.$$

Conocidos resultados determinan:

**Lema 9.2** (ver [Ba2], [Cr-Li2], [Is2], [Li5], [Sou])

Existe una única solución  $u^n \in \mathcal{BUC}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$  de la ecuación

$$u_t^n - H(\nabla u^n) + \lambda \beta_n(u^n) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \quad (\text{HJ})_{\lambda, \beta_n}$$

verificando

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u^n(\cdot, t) - u_0^n(\cdot)\|_\infty = 0. \quad \square$$

**Observación 9.3**

Es obvio que para cada  $n \in \mathbb{N}$  las funciones acotadas  $\underline{u}(x, t) \equiv \frac{1}{n}$  y  $\bar{u}(x, t) \equiv n + \frac{1}{n}$  son, respectivamente, sub y supersolución de viscosidad de la ecuación (HJ) $_{\lambda, \beta_n}$  en  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$ . Por tanto

$$\frac{1}{n} \leq u^n(x, t) \leq n + \frac{1}{n}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+. \quad \square \quad (9.2)$$

**Observación 9.4**

Mediante argumentos de comparación (ver [Cr-Li2] o [Cr-Ev-Li]) se comprueba la desigualdad

$$u^n(x, t) \leq v^n(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

donde  $v^n$  es la solución de la ecuación sin perturbar

$$v_t^n - H(\nabla v^n) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

que verifica

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|v^n(\cdot, t) - u_0^n(\cdot)\|_\infty = 0.$$

Nótese que cuando  $H$  es convexo, la *fórmula de representación de Lax-Oleinik* determina, para cada  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$ , la desigualdad

$$u^n(x, t) \leq v^n(x, t) = \sup_z \left\{ u_0^n(z) - tH^* \left( \frac{x-z}{t} \right) : \frac{x-z}{t} \in D(H^*) \right\}. \quad \square$$

Estudiemos el *decaimiento general* de las soluciones para una cierta clase de datos iniciales. Más precisamente, se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 9.5**

Si  $u_0 \in \mathcal{UC}(\mathbb{R}^N)$  es un dato inicial verificando

$$-H(\nabla u_0) + \lambda\beta(u_0) \geq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \quad (9.3)$$

entonces

$$D^+ u^n(x, t) \cup D^- u^n(x, t) \subset \mathbb{R}^N \times ]-\infty, 0], \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+. \quad (9.4)$$

**Demostración.**

De la definición de  $u_0^n$  se sigue

$$D^-u_0^n(x) = D^-u_0(x) \quad \text{si } u_0(x) < n$$

y

$$D^-u_0^n(x) = \{0\} \quad \text{si } u_0(x) > n.$$

Además, si  $u_0(x) = n$  el conjunto  $D^-u_0^n(x)$  es  $\{0\}$  o vacío. Por tanto, de la definición de  $\beta_n$  y de (9.3), se sigue la desigualdad

$$-H(\nabla u_0^n) + \lambda\beta_n(u_0^n) \geq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N. \quad (9.5)$$

Utilizando (9.5), como  $u_0^n \in \mathcal{BUC}(\mathbb{R}^N)$  y

$$u_t^n - H(\nabla u^n) + \lambda\beta_n(u^n) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+,$$

entonces, mediante argumentos de comparación, se tiene que

$$u^n(x, t) \leq u_0^n(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+. \quad (9.6)$$

A continuación, fijado  $h > 0$ , la función

$$w(x, t) = u^n(x, t + h)$$

verifica

$$w_t - H(\nabla w) + \lambda\beta_n(w) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+,$$

por lo que comparando de nuevo (ver (9.6)) se obtiene la relación

$$u^n(x, t + h) \leq u^n(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+. \quad (9.7)$$

A la vista de (9.7), para cada  $(p_1^n, p_2^n) \in D^-u^n(x, t)$ , se tiene la desigualdad

$$u^n(y, s) \geq u^n(x, t) + p_1^n \cdot (y - x) + p_2^n(s - t) + o(|y - x| + |s - t|),$$

que, para las elecciones  $y = x$  y  $s = t + h$ ,  $h > 0$ , se convierte en

$$0 \leq u^n(x, t) - u^n(x, t + h) \leq -p_2^n h + o(h),$$

de donde se sigue que  $p_2^n \leq 0$ .

Por otra parte, para  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$  y  $0 < h < t$ , podemos escribir (9.7) en la forma

$$u^n(x, t) \leq u^n(x, t - h).$$

Eligiendo ahora  $y = x$  y  $s = t - h$  en

$$u^n(y, s) \leq u^n(x, t) + q_1^n \cdot (y - x) + q_2^n(s - t) + o(|y - x| + |s - t|),$$

donde  $(q_1^n, q_2^n) \in D^+u^n(x, t)$ , se deduce la desigualdad

$$0 \leq u^n(x, t - h) - u^n(x, t) \leq -q_2^n h + o(h),$$

a partir de la cual se concluye que  $q_2^n \leq 0$ .  $\square$

### Observación 9.6

1. A partir de la condición (9.7) se tiene la siguiente propiedad de *localización del soporte*:

$$\text{supp } u^n(\cdot, t) \subseteq \text{supp } u^n(\cdot, s) \subseteq \text{supp } u_0^n(\cdot), \quad t \geq s \geq 0.$$

2. Nótese que la hipótesis (9.3) es verificada por cualquier hamiltoniano  $H$  no positivo.  $\square$

Para completar nuestro estudio vamos a obtener estimaciones locales uniformes del conjunto subdiferencial  $D^-u^n$ . Para ello utilizamos unos lemas técnicos:

### Lema 9.7

Sea  $w \in \mathcal{UC}(\mathbb{R}^N)$ . Para cada  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $\varepsilon > 0$  existe  $h(x, \varepsilon) > 0$  verificando

$$|p| \leq \frac{\varrho_w(h(x, \varepsilon))}{h(x, \varepsilon)} + \varepsilon, \quad p \in D^+w(x) \cup D^-w(x)$$

donde  $\varrho_w(s)$  es el módulo de continuidad de  $w$ . En particular, si

$$|w(x) - w(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^N$$

para algún  $L > 0$ , se tiene que  $\varrho_w(h) = Lh$  y

$$|p| \leq L, \quad p \in D^+w(x) \cup D^-w(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

**Demostración.**

La hipótesis  $w \in \mathcal{UC}(\mathbb{R}^N)$  muestra que la función

$$\varrho_w(s) = \max \{ |w(x) - w(y)| : |x - y| \leq s \}, \quad s > 0$$

satisface  $\varrho_w(0^+) = 0$  y

$$|w(x) - w(y)| \leq \varrho_w(|x - y|), \quad x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Considerando  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $p \in D^-w(x)$ ,  $p \neq 0$ , la noción de subdiferencial conduce a

$$w\left(x + h \frac{p}{|p|}\right) - w(x) \geq h|p| + o(h),$$

es decir,

$$|p| \leq \frac{w\left(x + h \frac{p}{|p|}\right) - w(x) + o(h)}{h}$$

supuesto  $h > 0$ . Consecuentemente, la regularidad de  $w$  determina

$$|p| \leq \frac{\varrho_w(h) + o(h)}{h}, \quad p \in D^-w(x), \quad h > 0.$$

Argumentando de forma análoga llegamos a

$$|p| \leq \frac{\varrho_w(h) + o(h)}{h}, \quad p \in D^+w(x), \quad h > 0,$$

lo que nos permite concluir el resultado.  $\square$

El resultado del lema anterior es completado por:

**Lema 9.8**

Si  $\mathbf{B}$  es una bola cerrada de  $\mathbb{R}^N$  y  $w \in \mathcal{SCS}(\mathbf{B})$  verifica

$$|p| \leq L, \quad p \in D^+w(x), \quad x \in \mathbf{B} \tag{9.8}$$

entonces

$$|w(x) - w(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in \mathbf{B}. \tag{9.9}$$

**Demostración.**

Dados  $x, y \in \mathbf{B}$ ,  $x \neq y$ , consideramos  $\mathbf{e} = \frac{x-y}{|x-y|}$  y la función

$$\varphi(r) = w(y + r\mathbf{e}), \quad 0 \leq r \leq |x-y|$$

que verifica

$$\varphi(0) = w(y), \quad \varphi(|x-y|) = w(x)$$

y

$$\varphi' \leq L \text{ en } \mathbf{B}_{|x-y|}(0)$$

en el sentido de la viscosidad (ver (9.8)). Aplicando el Corolario 4.51 se llega a

$$\varphi(|x-y|) - \varphi(0) \leq L|x-y|,$$

es decir

$$w(x) - w(y) \leq L|x-y|.$$

Reemplazando  $y$  por  $x$  se concluye (9.9).  $\square$

**Observación 9.9**

1. Debido a la relación

$$D^-w(x) = -D^+(-w)(x)$$

se obtiene la misma regularidad para  $w \in \mathcal{SCI}(\mathbf{B})$  si la condición (9.8) es reemplazada por

$$|p| \leq L, \quad p \in D^-w(x), \quad x \in \mathbf{B}.$$

2. En particular,  $\mathbf{B}$  puede ser todo  $\mathbb{R}^N$ .
3. Una versión del anterior resultado usando la primera noción de solución de viscosidad puede encontrarse en [Cr-Li2, Corollary I.15].  $\square$

**Proposición 9.10**

Supongamos la condición (9.3) y

$$\lim_{|p| \rightarrow +\infty} H(p) = +\infty. \quad (9.10)$$

Entonces, para todo subconjunto compacto  $\mathbf{K}$  de  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$  existe una constante positiva  $c = c(H, \lambda, \beta, \mathbf{K}, u_0)$  tal que

$$|p_1^n| + |p_2^n| \leq c, \quad (p_1^n, p_2^n) \in D^- u^n(x, t), \quad (x, t) \in \mathbf{K}. \quad (9.11)$$

Consecuentemente,  $u^n$  es lipschitziana, uniformemente en  $n$ , en todo subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$ .

### Demostración.

Sea  $(p_1^n, p_2^n) \in D^- u^n(x, t)$ ,  $(x, t) \in \mathbf{K}$ . Por la definición de  $\beta_n$  se deducen, de (9.4) y (9.6), las desigualdades

$$0 \leq p_2^n - H(p_1^n) + \lambda\beta_n(u^n(x, t)) \leq -H(p_1^n) + \lambda\beta(u_0^n(x)).$$

Por tanto, la acotación  $u_0^n \leq u_0 + 1$  en  $\mathbb{R}^N$  implica que

$$H(p_1^n) \leq \lambda\beta(k + 1)$$

siendo  $k = \max \{u_0(x) : x \in \mathbf{K}_N\}$ , donde  $\mathbf{K}_N$  denota la proyección de  $\mathbf{K}$  sobre  $\mathbb{R}^N$ . Por tanto, por la condición (9.10), obtenemos que

$$|p_1^n| \leq c_1$$

para alguna constante positiva  $c_1$  independiente de  $n$ . De esta forma,

$$|p_2^n| = -p_2^n \leq -H(p_1^n) + \lambda\beta(k + 1) \leq c_2$$

siendo también  $c_2$  una constante independiente de  $n$ ; así, para obtener (9.11) basta tomar  $c = c_1 + c_2$ . Finalmente, basta argumentar como en el Lema 9.8 para obtener la regularidad de la función  $u^n$ .  $\square$

### Observación 9.11

Con el argumento anterior hemos obtenido una *acotación del gradiente sin derivar la ecuación*.  $\square$

Llegados a este punto ya estamos en condiciones de mostrar el resultado más importante de esta Sección:



**Teorema 9.12**

Supongamos (9.10). Entonces, para cada  $u_0 \in \mathcal{UC}(\mathbb{R}^N)$  verificando (9.3) existe una función  $u \in \text{Lip}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$ ,  $u \geq 0$ , solución de la ecuación

$$u_t - H(\nabla u) + \lambda\beta(u) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

prescribiendo el dato inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Además, la aplicación

$$t \mapsto \text{supp } u(\cdot, t), \quad t \geq 0$$

es no creciente. En particular, se tiene la siguiente localización del soporte

$$\text{supp } u(\cdot, t) \subseteq \text{supp } u(\cdot, s) \subseteq \text{supp } u_0(\cdot), \quad t \geq s \geq 0.$$

**Demostración.**

A la vista de la Proposición 9.10, el teorema de Ascoli–Arzelà determina que la sucesión  $\{u^n\}_n$  converge a alguna función  $u \in \mathcal{UC}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$  uniformemente en compactos de  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$ . Por tanto, por la *estabilidad* de la noción de solución de viscosidad (ver [Cr-Ev-Li, Theorem 1.4]), la función  $u$  es una solución de viscosidad del problema  $(\text{HJ})_{\lambda, \beta}$ . Las demás propiedades de  $u$  se obtienen fácilmente (ver la desigualdad (9.7)).  $\square$

**Observación 9.13**

1. El hecho de partir de un dato inicial  $u_0 \in \mathcal{UC}(\mathbb{R}^N)$  y obtener una solución  $u$  localmente lipschitziana en  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$  muestra que se da un *efecto regularizante*.
2. Como  $u \in \text{Lip}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$ , por el *teorema de Rademacher* sabemos que la función  $u$  verifica la ecuación  $(\text{HJ})_{\lambda, \beta}$  en casi todo punto de  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$ . Por tanto  $u$  es, de hecho, una *solución generalizada*.
3. Decimos que  $u$  es la *mínima solución de viscosidad* del problema de valor inicial en el siguiente sentido: si  $v \in \mathcal{UC}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$  es una super-solución de  $(\text{HJ})_{\lambda, \beta}$  verificando

$$v(\cdot, 0) = u_0(\cdot) \quad \text{en } \mathbb{R}^N$$

entonces

$$u \leq v \text{ en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+. \quad (9.12)$$

En efecto, por [Cr-Ev-Li, Proposition 1.3] se sigue que la función

$$v^n(x, t) = [v(x, t) \wedge n] + \frac{1}{n}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

verifica, en el sentido de la viscosidad, la ecuación

$$v_t^n - H(\nabla v^n) + \lambda \beta_n(v^n) \geq 0 \text{ en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

y

$$v^n(\cdot, 0) = u_0^n(\cdot) \text{ en } \mathbb{R}^N.$$

Así pues, por comparación, se obtiene

$$u^n(x, t) \leq (v(x, t) \wedge n) + \frac{1}{n}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

con lo que basta hacer tender  $t \rightarrow +\infty$  para concluir (9.12).  $\square$

### 9.3 Extinción en tiempo finito.

Para el estudio de la propiedad de extinción vamos a suponer en lo que sigue la condición de absorción fuerte (**AF**). En tal caso se tiene

$$\int_{\frac{1}{n}} \frac{ds}{\beta_n(s)} < +\infty$$

y podemos definir así las funciones

$$\gamma(r) = \int_0^r \frac{ds}{\beta(s)}, \quad r \geq 0 \quad \text{y} \quad \gamma_n(r) = \int_{\frac{1}{n}}^r \frac{ds}{\beta_n(s)}, \quad r \geq \frac{1}{n}.$$

Mostremos el siguiente resultado:

**Proposición 9.14**

Bajo el supuesto **(AF)**, la solución  $u^n \in \mathcal{BUC}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$  del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t^n - H(\nabla u^n) + \lambda \beta_n(u^n) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u^n(\cdot, 0) = u_0^n(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

verifica

$$\begin{cases} u^n(x, t) \leq \gamma_n^{-1}(\lambda(\mathbf{t}_{\infty, n} - t)) & \text{si } 0 \leq t < \mathbf{t}_{\infty, n} \\ u^n(x, t) = \frac{1}{n} & \text{si } t \geq \mathbf{t}_{\infty, n} \end{cases} \quad (9.13)$$

donde

$$\mathbf{t}_{\infty, n} = \frac{\gamma_n(\sup u_0^n)}{\lambda}.$$

**Demostración.**

Sea  $\bar{u}(x, t) = \gamma_n^{-1}(\lambda[\mathbf{t}_{\infty, n} - t]_+)$ ,  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$ . Obviamente,  $\bar{u}$  satisface, en sentido clásico, la ecuación

$$\bar{u}_t - H(\nabla \bar{u}) + \lambda \beta_n(\bar{u}) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

y prescribe el dato inicial

$$\bar{u}(x, 0) = \sup u_0^n, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Por tanto, mediante argumentos de comparación, concluimos que

$$u^n(x, t) \leq \bar{u}(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

por lo que (9.13) se sigue de (9.2).  $\square$

Por el resultado de la Proposición 9.14 tiene sentido considerar la función  $t_n(\cdot) \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  dada por  $t_n(x) = 0$  si  $u_0^n(x) = \frac{1}{n}$  y

$$u^n(x, t) > \frac{1}{n}, \quad 0 \leq t < t_n(x) \quad \text{y} \quad u^n(x, t) = \frac{1}{n}, \quad t \geq t_n(x)$$

cuando  $u_0^n(x) > \frac{1}{n}$ . Suponiendo **(AF)**, de (9.13) se deduce la desigualdad

$$t_n(x) \leq \mathbf{t}_{\infty, n}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

También podemos obtener estimaciones inferiores a través de argumentos de comparación. Concretamente:

**Proposición 9.15**

Bajo la condición (AF), se verifica

$$\gamma_n^{-1}(\lambda[t_{0,n} - t]_+) \leq u^n(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \quad (9.14)$$

donde

$$t_{0,n} = \frac{\gamma_n(\inf u_0^n)}{\lambda}$$

**Demostación.**

Si  $\inf u_0^n = \frac{1}{n}$  el resultado es obvio (ver (9.2)). En otro caso, si  $\inf u_0^n > \frac{1}{n}$  definimos la función

$$\underline{u}(x, t) = \gamma_n^{-1}(\lambda[t_{0,n} - t]_+), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

que verifica, en sentido clásico, la ecuación

$$\underline{u}_t - H(\nabla \underline{u}) + \lambda \beta_n(\underline{u}) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

Por tanto, como

$$\underline{u}(x, 0) = \inf u_0^n, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

mediante comparación obtenemos

$$\underline{u}(x, t) \leq u^n(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+. \quad \square$$

**Observación 9.16**

De la Proposición 9.15, se obtiene el comportamiento inicial de la solución está estimado por

$$\liminf_{t \rightarrow 0} \frac{u^n(x, t) - \inf u_0^n}{t} \geq -\lambda \beta_n(\inf u_0^n), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

En efecto,

$$\frac{u^n(x, t) - \inf u_0^n}{t} \geq \frac{\psi(t) - \psi(0)}{t}, \quad t > 0 \quad (9.15)$$

siendo

$$\psi(t) \doteq \gamma_n^{-1}(\gamma_n(\inf u_0^n) - \lambda t), \quad t \geq 0.$$

Como

$$\gamma_n(\psi(t)) = \gamma_n(\inf u_0^n) - \lambda t, \quad t \geq 0$$

se obtiene

$$\frac{\psi'_-(t)}{\beta_n(\psi(t))} = -\lambda, \quad t \geq 0$$

y, en particular,

$$\psi'(0) = -\lambda\beta_n(\psi(0)).$$

El resultado se sigue haciendo tender  $t \rightarrow 0$  en (9.15).  $\square$

### Observación 9.17

Bajo la condición **(AF)**, las desigualdades (9.13) y (9.14) conducen a

$$\gamma_n^{-1}(\lambda[\mathbf{t}_{0,n} - t]_+) \leq u^n(x, t) \leq \gamma_n^{-1}(\lambda[\mathbf{t}_{\infty,n} - t]_+), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

y

$$\mathbf{t}_{0,n} \leq t_n(x) \leq \mathbf{t}_{\infty,n}, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad \square$$

Los métodos de convexidad son herramientas usuales en el estudio de las ecuaciones de Hamilton–Jacobi. Estos van a permitirnos obtener el decaimiento a través de ciertas *características* como mostramos, sin utilizar argumentos de comparación, en el siguiente resultado:

### Proposición 9.18

Suponiendo **(AF)**, sea  $\kappa \geq 0$  y  $\mathcal{H} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y convexa verificando

$$H(p) \geq \kappa\mathcal{H}(p), \quad p \in \mathbb{R}^N \tag{9.16}$$

de forma que

$$\mathcal{D}_0^* = \{\xi \in D(\mathcal{H}^*) : \mathcal{H}^*(\xi) = 0\} \neq \emptyset. \tag{9.17}$$

Entonces, para todo  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$ ,  $\xi \in \mathcal{D}_0^*$  y  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t$  se verifica

$$\gamma_n(u^n(x + \kappa\xi t_2, t - t_2)) - \lambda t_2 \leq \gamma_n(u^n(x + \kappa\xi t_1, t - t_1)) - \lambda t_1. \tag{9.18}$$

### Demostración.

Como  $\mathcal{H}$  es una función convexa, el Teorema de Fenchel–Moreau determina

$$\mathcal{H}(p) = \mathcal{H}^{**}(p) = \sup \{p \cdot \xi - \mathcal{H}^*(\xi) : \xi \in D(\mathcal{H}^*)\}, \quad p \in \mathbb{R}^N.$$

Consecuentemente, para cada  $\xi \in \mathcal{D}_0^*$ , se verifica

$$0 \leq u_t^n - \kappa \xi \cdot \nabla u^n + \lambda \beta_n(u^n) \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+. \quad (9.19)$$

Por tanto, fijado  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$  y  $\xi \in \mathcal{D}_0^*$ , consideramos la función

$$\varphi(s) = u^n(x + \kappa \xi s, t - s), \quad s \in [0, t].$$

Para cada  $s_0 \in [0, t]$  y  $p_0 \in D^+ \varphi(s_0)$  se verifica

$$u^n(x + \kappa \xi s, t - s) - u^n(x + \kappa \xi s_0, t - s_0) = \varphi(s) - \varphi(s_0) \leq p_0(s - s_0) + o(|s - s_0|).$$

Por tanto,

$$p_0 \in D^+ u^n(x + \kappa \xi s_0, t - s_0).$$

Ahora bien, como todo elemento  $(p_1, p_2) \in D^+ u^n(x + \kappa \xi s_0, t - s_0)$  verifica

$$u^n(x + \kappa \xi s, t - s) \leq u^n(x + \kappa \xi s_0, t - s_0) + (\kappa \xi \cdot p_1 - p_2)(s - s_0) + o(|s - s_0|)$$

entonces

$$p_0 = \kappa \xi \cdot p_1 - p_2.$$

De esta forma,

$$p_0 \in D^+ \varphi(s_0) \Rightarrow p_0 = \kappa \xi \cdot p_1 - p_2 \quad \text{con } (p_1, p_2) \in D^+ u^n(x + \kappa \xi s_0, t - s_0).$$

Además, por (9.19) sabemos que

$$p_0 = \kappa \xi \cdot p_1 - p_2 \leq \lambda \beta_n(u^n),$$

por lo que  $\varphi$  satisface, en el sentido de la viscosidad, la inecuación

$$\varphi' < \lambda(\beta_n(\varphi) + \varepsilon) \quad \text{en } [0, t],$$

para  $\varepsilon > 0$  arbitrario. Aplicando el Corolario 4.50 obtenemos

$$\int_{\varphi(t_1)}^{\varphi(t_2)} \frac{ds}{\beta_n(s) + \varepsilon} < \lambda(t_2 - t_1), \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t$$

de donde se sigue (9.18) sin más que hacer tender  $\varepsilon \rightarrow 0$ .  $\square$

**Observación 9.19**

1. Claramente, la desigualdad (9.18) es verificada por todo hamiltoniano no negativo (pues basta tomar  $\kappa = 0$  en (9.16) y cualquier  $\mathcal{H}$  con la condición (9.17)).
2. Por otro lado, si  $\kappa > 0$  la Proposición 9.18 podría extenderse a

$$\mathcal{D}_-^* = \{\xi \in D(\mathcal{H}^*) : \mathcal{H}^*(\xi) \leq 0\};$$

en cambio, el teorema de Fenchel–Moreau y el hecho que  $\mathcal{H}(0) \leq 0$  (ver (9.16)) implican

$$\mathcal{H}^*(\xi) \geq 0 \cdot \xi - \mathcal{H}(0) \geq 0, \quad \xi \in D(\mathcal{H}^*),$$

de donde se concluye la igualdad

$$\mathcal{D}_0^* = \mathcal{D}_-^*.$$

3. En el Apéndice B se dan algunos ejemplos de hamiltonianos convexos  $\mathcal{H}$  que verifican la relación (9.17).  $\square$

**Observación 9.20**

A partir de la Proposición 9.18, para  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$  y  $\xi \in \mathcal{D}_0^*$  fijos, la función

$$\Phi^n(s) = \gamma_n(u^n(x + \kappa\xi s, t - s)) - \lambda s$$

es no creciente en  $[0, t]$ . En particular  $\Phi^n(t) \leq \Phi^n(0)$ , es decir

$$\gamma_n(u^n(x + \kappa\xi t, 0^+)) - \lambda t \leq \gamma_n(u^n(x, t)), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad \xi \in \mathcal{D}_0^*, \quad 0 < t < t_n(x)$$

y

$$\gamma_n(u_0^n(x + \kappa\xi t_n(x))) \leq \lambda t_n(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad \xi \in \mathcal{D}_0^*. \quad \square$$

### 9.3.1 Caracterización de la función $t_\infty(\cdot)$ . Propiedades generales.

Relativo a la función  $u$  construída en el Teorema 9.12 podemos definir su función *primer instante de extinción*  $t_\infty(\cdot) \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  como  $t_\infty(x) = 0$  si  $u_0(x) = 0$  y

$$\begin{cases} u(x, t) > 0 & \text{si } 0 \leq t < t_\infty(x) \\ u(x, t) = 0 & \text{si } t \geq t_\infty(x) \end{cases}$$

en el caso en que  $u_0(x) > 0$ . Suponiendo **(AF)**, se tienen las desigualdades

$$\gamma^{-1}(\lambda[t_0 - t]_+) \leq u(x, t) \leq \gamma^{-1}(\lambda[t_\infty - t]_+), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

y

$$0 \leq t_0 \leq t_\infty(x) \leq t_\infty \leq +\infty, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

con

$$t_0 = \frac{\gamma(\inf u_0)}{\lambda} < +\infty \quad \text{y} \quad t_\infty = \frac{\gamma(\sup u_0)}{\lambda} \leq +\infty$$

(véase la Observación 9.17).

**Observación 9.21**

Claramente, las condiciones

$$\mathbf{(AF)} \quad \text{y} \quad \sup u_0 < +\infty$$

o

$$\int_0^\infty \frac{ds}{\beta(s)} < +\infty \quad \mathbf{(AMF)}$$

implican  $\gamma(\sup u_0) < +\infty$ , por lo que  $t_\infty < +\infty$ . De esta forma, la función  $t_\infty(\cdot)$  está definida en todo el espacio  $\mathbb{R}^N$  y, además

$$t_\infty(x) \leq t_\infty < +\infty, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

(véase la Observación 8.3).  $\square$

**Observación 9.22**

Los argumentos de convexidad que hemos utilizado en la Proposición 9.18 pueden emplearse para el estudio de la función  $t_\infty(\cdot)$ . Así, si suponemos las condiciones **(AF)**, (9.16), (9.17) y  $t_\infty(x) < +\infty$ , para cada  $0 < t < t_\infty(x)$  y  $\xi \in \mathcal{D}_0^*$ , obtenemos las desigualdades

$$\gamma(u(x + \kappa\xi t_2, t - t_2)) - \lambda t_2 \leq \gamma(u(x + \kappa\xi t_1, t - t_1)) - \lambda t_1 \quad (9.20)$$

siempre que  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t$ ,

$$\gamma^{-1}([\gamma(u_0(x + \kappa\xi t)) - \lambda t]_+) \leq u(x, t) \leq \gamma^{-1}(\gamma(\sup u_0) - \lambda t) \quad (9.21)$$

y

$$\gamma(u(x + \kappa\xi t), t_\infty(x) - t) \leq \lambda t. \quad (9.22)$$



En particular, si se verifica

$$\kappa\xi = 0 \text{ para algún } \xi \in \mathcal{D}_0^*, \quad (9.23)$$

las elecciones  $t_1 = 0$  y  $t_2 = t$  en (9.20) conducen a

$$\gamma(u_0(x)) - \lambda t \leq \gamma(u(x, t)), \quad 0 < t < t_\infty(x)$$

y (haciendo tender  $t \rightarrow t_\infty(x)$ )

$$\gamma(u_0(x)) \leq \lambda t_\infty(x). \quad (9.24)$$

Por otra parte, por la monotonía de la función  $\gamma$ , las elecciones  $t = t_\infty(x)$ ,  $t_1 = 0$  y  $t_2 = t$  determinan

$$u(x, t_\infty(x) - t) \leq \gamma^{-1}(\lambda t), \quad 0 < t < t_\infty(x). \quad (9.25)$$

A partir de (9.21) podemos detallar la evolución de los máximos iniciales. Concretamente,

1. si  $\max u_0 = u_0(x_0 + \kappa\xi_0 t_0)$  para algún  $x_0 \in \mathbb{R}^N$ ,  $0 < t_0 \leq \frac{\gamma(\max u_0)}{\lambda}$  y  $\xi_0 \in \mathcal{D}_0^*$ , se tiene

$$u(x_0, t_0) = \gamma^{-1}(\gamma(u_0(x_0 + \kappa\xi_0 t_0)) - \lambda t_0).$$

2. si se verifica (9.23) y  $\max u_0 = u_0(x_0)$ , entonces

$$u(x_0, t) = \gamma^{-1}([\gamma(u_0(x_0)) - \lambda t]_+), \quad t \geq 0.$$

Además, en este caso se verifica:

- (a)  $u(x, t) \leq u(x_0, t)$ ,  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$ ; por tanto, los máximos iniciales se conservan con la evolución del sistema.
- (b)  $t_\infty(x) \leq t_\infty(x_0) = \frac{\gamma(u_0(x_0))}{\lambda}$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ ; es decir,  $x_0$  es también un máximo global de la función  $t_\infty(\cdot)$ .
- (c) En particular, para  $\beta(r) = r^q$  con  $0 < q < 1$ , conocemos la evolución del máximo inicial

$$u(x_0, t) = \left( [(u_0(x_0))^{1-q} - \lambda(1-q)t]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}}, \quad t \geq 0. \quad \square$$

A continuación derivamos una propiedad del tipo *extinción suave*.

**Corolario 9.23**

Si se verifican las condiciones **(AF)**, (9.16), (9.17) y (9.23), la función parcial  $t \mapsto u(x, t)$  es diferenciable en  $t_\infty(x)$  y, además,

$$u_t(x, t_\infty(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (9.26)$$

**Demostración.**

De la definición de conjunto superdiferencial se sigue

$$0 = u(x, t_\infty(x)) \leq u(x, t_\infty(x) - h) + p_2 h + o(h), \quad (p_1, p_2) \in D^+ u(x, t_\infty(x) - h),$$

por lo que, de (9.25) deducimos

$$0 \leq \gamma^{-1}(\lambda h) + p_2 h + o(h), \quad (p_1, p_2) \in D^+ u(x, t_\infty(x) - h).$$

A partir de los comentarios realizados en la Observación 8.4 se verifica que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma^{-1}(\lambda h)}{h} = \lambda(\gamma^{-1})'(0^+) = \lambda\beta(0) = 0, \quad (9.27)$$

por lo que [Cr-Ev-Li, Theorem 1.4] y (9.4) implican, para cada  $x \in \mathbb{R}^N$ , la propiedad

$$(p_1, p_2) \in D^+ u(x, t_\infty(x)) \Leftrightarrow p_2 = 0.$$

Además, la positividad y monotonía de la función

$$t \mapsto u(x, t) \quad \text{en} \quad [0, t_\infty(x)[$$

y el hecho de que  $D_t^+ u(x, t_\infty(x)) \neq \emptyset$  conducen, por definición, a (9.26).  $\square$

**Observación 9.24**

La condición

$$-H(\nabla u_0) + \lambda\beta(u_0) \geq 0 \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^N$$

es *óptima* para el fenómeno de extinción, pues si se verifica

$$-H(\nabla u_0) + \lambda\beta(u_0) \equiv 0 \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^N$$

entonces la función

$$u(x, t) = u_0(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

es una solución del problema

$$\begin{cases} u_t - H(\nabla u) + \lambda\beta(u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

que obviamente *no se anula* si  $\inf u_0 > 0$ .  $\square$

### Observación 9.25

En el sentido dado en la Observación 9.13, también podemos decir que  $t_\infty(\cdot)$  es la *mínima función primer instante de extinción* relativa a la ecuación  $(HJ)_{\lambda, \beta}$  y al dato inicial  $u_0$ : si  $v \in \mathcal{UC}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$  es una solución de  $(HJ)_{\lambda, \beta}$  verificando

$$v(\cdot, 0) = u_0(\cdot) \quad \text{en } \mathbb{R}^N$$

entonces

$$t_\infty^u(\cdot) \leq t_\infty^v(\cdot) \quad \text{en } \mathbb{R}^N. \quad \square$$

### 9.3.2 Regularidad.

En lo que sigue, supondremos las hipótesis y notaciones requeridas para la construcción de la solución  $u$ . También supondremos que la función primer instante de extinción está definida en todo el espacio  $\mathbb{R}^N$ .

Comenzamos con un resultado técnico que extiende el resultado mostrado en el Teorema 8.17.

### Proposición 9.26

Supongamos la condición **(AF)** así como

$$-\mathcal{H}(\nabla u_0) - H(\nabla u_0) + \lambda\beta(u_0) \geq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \quad (9.28)$$

para algún hamiltoniano continuo y convexo  $\mathcal{H} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  verificando

$$\mathcal{D}_0^* = \{\zeta \in D(\mathcal{H}^*) : \mathcal{H}^*(\zeta) = 0\} \neq \emptyset. \quad (9.29)$$

Entonces, para todo  $h > 0$  y  $\zeta \in \mathcal{D}_0^*$ , se verifica

$$u(x + \zeta h, t + h) \leq u(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+. \quad (9.30)$$

En particular, si

$$D(\mathcal{H}^*) = \mathcal{D}_0^* \quad (9.31)$$

se verifica que  $u$  es solución de viscosidad de

$$u_t + \mathcal{H}(\nabla u) \leq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+. \quad (9.32)$$

**Demostración.**

Como en la Proposición 9.5, se tiene

$$D^-u_0^n(x) = D^-u_0(x) \quad \text{si } u_0(x) < n,$$

$$D^-u_0^n(x) = \{0\} \quad \text{si } u_0(x) > n$$

y

$$D^-u_0^n(x) \subset \{0\} \quad \text{si } u_0(x) = n.$$

Además, por (9.28), la aproximación  $\{u_0^n\}_n$  también verifica

$$-\mathcal{H}(\nabla u_0^n) - H(\nabla u_0^n) + \lambda\beta_n(u_0^n) \geq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N.$$

De esta forma, el teorema de Fenchel–Moreau aplicado a  $\mathcal{H}$  determina

$$0 \leq -\nabla u_0^n \cdot \zeta - H(\nabla u_0^n) + \lambda\beta_n(u_0^n), \quad \zeta \in \mathcal{D}_0^*. \quad (9.33)$$

Entonces, si fijamos  $\zeta \in \mathcal{D}_0^*$ , la función

$$w(x, t) = u^n(x + \zeta t, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

verifica

$$w_t - H(\nabla w) - \nabla w \cdot \zeta + \lambda\beta_n(w) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+;$$

así, por (9.33), argumentos de comparación determinan

$$u^n(x + \zeta t, t) \leq u_0^n(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+. \quad (9.34)$$

Ahora, para  $h > 0$  fijo, la función

$$\omega(x, t) = u^n(x + \zeta h, t + h), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

satisface

$$\omega_t - H(\nabla \omega) + \lambda\beta_n(\omega) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

y

$$\omega(x, 0) \leq u_0^n(x), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

(ver (9.34)). Argumentando de nuevo por comparación, se obtiene

$$u^n(x + \zeta h, t + h) \leq u^n(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

y (9.30) se sigue haciendo tender  $n \rightarrow +\infty$ .

Por otra parte, podemos escribir (9.30) como

$$u(x, t) \leq u(x - \zeta h, t - h), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > h > 0, \quad \zeta \in \mathcal{D}_0^*. \quad (9.35)$$

Sea  $(p_1, p_2) \in D^+u(x, t)$ . Si elegimos  $y = x - \zeta h$  y  $s = t - h$  en

$$u(y, s) \leq u(x, t) + p_1 \cdot (y - x) + p_2(s - t) + o(|y - x| + |s - t|)$$

deducimos, de (9.35), la desigualdad

$$0 \leq u(x - \zeta h, t - h) - u(x, t) \leq -hp_1 \cdot \zeta - hp_2 + o(h).$$

Consecuentemente, se tiene

$$p_2 + p_1 \cdot \zeta \leq 0, \quad (p_1, p_2) \in D^+u(x, t), \quad \zeta \in \mathcal{D}_0^*.$$

Finalmente, (9.31) y el teorema de Fenchel–Moreau concluyen

$$p_2 + \mathcal{H}(p_1) \leq 0, \quad (p_1, p_2) \in D^+u(x, t). \quad \square$$

### Observación 9.27

Como la función  $u$  construída en el Teorema 9.12 tiene la regularidad  $u \in \text{Lip}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$ ,  $u$  es una *solución generalizada* de

$$u_t + \mathcal{H}(\nabla u) \leq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+. \quad \square$$

A continuación estudiamos la regularidad de la función  $u$  en la región de extinción.

**Corolario 9.28**

Supongamos las condiciones **(AF)**, (9.28), (9.31) y

$$H(p), \mathcal{H}(p) > 0, \quad p \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \quad \text{y} \quad H(0) = \mathcal{H}(0) = 0. \quad (9.36)$$

Entonces, se tiene que  $u$  es diferenciable en el conjunto nulo

$$\mathcal{N}(u) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ : t \geq t_\infty(x)\}.$$

Además, se verifica que

$$\lim_{|y|+t \rightarrow 0} \frac{u(x + \frac{y, t_\infty(x) - t}{|y| + t})}{|y| + t} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (9.37)$$

**Demostración.**

Por (9.36), se verifican las condiciones (9.16), (9.17) y (9.23). De esta forma, por el Corolario 9.23 sabemos que

$$u_t(x, t_\infty(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Así, de la desigualdad

$$p_2 + \mathcal{H}(p_1) \leq 0, \quad (p_1, p_2) \in D^+u(x, t_\infty(x)), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

(ver (9.32)) se tiene, a partir de (9.36),

$$D^+u(x, t_\infty(x)) = \{0\}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Por otra parte, por definición

$$q_2 - H(q_1) \geq -\lambda\beta(u(x, t_\infty(x))) = 0, \quad (q_1, q_2) \in D^-u(x, t_\infty(x)).$$

Usando de nuevo (9.26) y (9.36) se obtiene

$$D^-u(x, t_\infty(x)) = \{0\}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

De esta forma hemos probado que

$$D^+u(x, t_\infty(x)) \cap D^-u(x, t_\infty(x)) = \{0\}, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

de donde se sigue que  $u$  es diferenciable en el punto  $(x, t_\infty(x))$  y que, además

$$Du(x, t_\infty(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Finalmente, el resultado se concluye teniendo en cuenta que

$$u(x, t) = 0 \text{ si } x \in \mathbb{R}^N \text{ y } t > t_\infty(x). \quad \square$$

La lipschitzianidad de la función primer instante de extinción se obtiene en el siguiente resultado.

**Teorema 9.29**

Supongamos **(AF)** y que  $u_0$  es solución de (9.28) donde  $\mathcal{H}$  es una función continua y convexa verificando

$$\partial \mathbf{B}_\rho(z_0) \subset \mathcal{D}_0^* \quad (9.38)$$

para alguna bola  $\mathbf{B}_\rho(z_0)$  tal que

$$0 \notin \partial \mathbf{B}_\rho(z_0). \quad (9.39)$$

Entonces, se verifica

$$|t_\infty(x) - t_\infty(y)| < \frac{|x - y|}{|\rho - |z_0||}, \quad x, y \in \mathbb{R}^N. \quad (9.40)$$

**Demostración.**

Para cada  $h > 0$  y  $\zeta \in \mathcal{D}_0^*$ , la desigualdad

$$u(x + \zeta h, t + h) \leq u(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

(ver (9.30)) muestra que

$$t \geq t_\infty(x) \Rightarrow t + h \geq t_\infty(x + \zeta h).$$

Consecuentemente, se sigue

$$t_\infty(x) + h \geq t_\infty(x + \zeta h), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad h > 0, \quad \zeta \in \partial \mathbf{B}_\rho(z_0).$$

Denotando  $y = x + \zeta h$  se obtiene

$$t_\infty(y) - t_\infty(x) \leq \frac{|x - y|}{|\rho - |z_0||}, \quad x, y \in \mathbb{R}^N$$

ya que

$$\zeta \in \partial \mathbf{B}_\rho(z_0) \Rightarrow |\zeta| \geq ||\zeta - z_0| - |z_0||.$$

Intercambiando los papeles de  $x$  e  $y$  se concluye (9.40).  $\square$

**Observación 9.30**

Nótese que el Hamiltoniano

$$\mathcal{H}(p) = \mu|p|, \quad p \in \mathbb{R}^N \quad (\mu > 0)$$

satisface (9.38) y (9.39) para  $\rho = \mu$  y  $z_0 = 0$  (véase el Apéndice B). Por tanto, bajo la hipótesis

$$-\mu|\nabla u_0| - H(\nabla u_0) + \lambda\beta(u_0) \geq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \quad (\mu > 0) \quad (9.41)$$

obtenemos que si la función  $t_\infty(\cdot)$  está definida en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  entonces

$$|t_\infty(x) - t_\infty(y)| \leq \frac{1}{\mu}|x - y|, \quad x, y \in \Omega.$$

En el caso en que la función  $t_\infty(\cdot)$  esté definida en todo  $\mathbb{R}^N$  entonces será globalmente lipschitziana, por lo que tendrá un crecimiento a lo sumo lineal en el infinito (ver la Observación 8.19).  $\square$

**9.3.3 Tasa de extinción.**

La propiedad

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, t_\infty(x) - t) - t}{t} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

(ver (9.26) o (9.37)) da un cierto conocimiento de la tasa de extinción. Esta puede ser mejorada a partir de los resultados que mostramos en esta Subsección.

**Teorema 9.31**

Supongamos (AF), (9.28) y (9.31) para una función continua y cóncava  $\mathcal{H}$  verificando

$$H(p) \leq \nu\mathcal{H}(p), \quad p \in \mathbb{R}^N \quad (9.42)$$

para algún  $\nu > 0$ . Entonces, si  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $0 < t < t_\infty(x)$  se verifica

$$u(x, t_\infty(x) - t) \geq \gamma^{-1} \left( \frac{\lambda}{1 + \nu} t \right). \quad (9.43)$$



**Demostración.**

La idea consiste en razonar como en la demostración del Corolario 8.24. De (9.32), (9.42) y de la desigualdad

$$p_2 - H(p_1) \leq -\lambda\beta(u(x, t_\infty(x) - t)),$$

para  $(p_1, p_2) \in D^+u(x, t_\infty(x) - t)$ ,  $0 < t < t_\infty(x)$ , se sigue

$$(1 + \nu)p_2 \leq p_2 - \nu\mathcal{H}(p_1) \leq -\lambda\beta(u(x, t_\infty(x) - t)),$$

es decir,

$$(1 + \nu)p_2 + \lambda\beta(u(x, t_\infty(x) - t)) \leq 0, \quad (p_1, p_2) \in D^+u(x, t_\infty(x) - t).$$

Razonando como en [Cr-Li3, Corollary 1.7] (ver también [Di1]), para cada  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $0 < s < t < t_\infty(x)$  se tiene

$$\int_{u(x, t_\infty(x) - t)}^{u(x, t_\infty(x) - s)} \frac{d\sigma}{\beta(\sigma)} = \int_{t_\infty(x) - t}^{t_\infty(x) - s} \frac{u_t}{\beta(u)} \leq -\frac{\lambda}{1 + \nu}(t - s)$$

o, equivalentemente,

$$\gamma(u(x, t_\infty(x) - t)) - \gamma(u(x, t_\infty(x) - s)) \geq \frac{\lambda}{1 + \nu}(t - s).$$

Haciendo tender  $s \rightarrow 0$  se obtiene

$$\gamma(u(x, t_\infty(x) - t)) \geq \frac{\lambda}{1 + \nu}t, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad 0 < t < t_\infty(x).$$

La monotonía de  $\gamma$  concluye (9.43).  $\square$

**Observación 9.32**

De (9.25) y (9.43), se sigue

$$\frac{1}{1 + \nu} \leq \frac{\gamma(u(x, t_\infty(x) - t))}{\lambda t} \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad 0 < t < t_\infty(x),$$

bajo las condiciones (AF), (9.16), (9.17), (9.23), (9.28), (9.31) y (9.42). En particular, la función  $t_\infty(\cdot)$  está estimada por

$$\gamma(u_0(x)) \leq \lambda t_\infty(x) \leq (1 + \nu)\gamma(u_0(x)), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Por otra parte, cabe destacar que el comportamiento asintótico  $H(p) \rightarrow +\infty$  cuando  $|p| \rightarrow +\infty$ , no permite hacer tender  $\nu \rightarrow 0$  en (9.42).  $\square$

En algunos casos concretos, es posible obtener *exactamente* la tasa de extinción como mostramos a continuación.

**Teorema 9.33**

Supongamos que se verifican **(AF)**, (9.16), (9.17), (9.23),

$$\limsup_{|p| \rightarrow 0} \frac{H(p)}{|p|} \leq 0 \quad (9.44)$$

y

$$-\mu|\nabla u_0| - H(\nabla u_0) + \lambda\beta(u_0) \geq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \quad (9.45)$$

para algún  $\mu > 0$ . Entonces, si  $u_0(x) > 0$ , se tiene

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, t_\infty(x) - t)}{\gamma^{-1}(\lambda t)} = 1. \quad (9.46)$$

**Demostración.**

Por (9.44), para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que

$$H(p) \leq \varepsilon|p| \quad \text{si } |p| \leq \delta. \quad (9.47)$$

Como las condiciones (9.28) y (9.31) se satisfacen para la elección

$$\mathcal{H}(p) = \mu|p|, \quad p \in \mathbb{R}^N$$

(ver (9.45)), para cada  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $0 < t < t_\infty(x)$  se sigue

$$p_2 + \mu|p_1| \leq 0, \quad (p_1, p_2) \in D^+u(x, t_\infty(x) - t) \quad (9.48)$$

(ver (9.32)). A partir de las hipótesis **(AF)**, (9.16), (9.17) y (9.23), se deduce la desigualdad

$$u(x, t_\infty(x) - t) \leq \gamma^{-1}(\lambda t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad 0 < t < t_\infty(x)$$

(véase (9.25)). De esta forma, de

$$u(x, t_\infty(x)) - u(x, t_\infty(x) - t) \leq p_2 t + o(t)$$

se sigue

$$-p_2 \leq \frac{u(x, t_\infty(x) - t) + o(t)}{t} \leq \frac{\gamma^{-1}(\lambda t) + o(t)}{t}.$$

Así, la desigualdad (9.48) conduce a

$$\frac{|p_1|}{\mu t} \leq \frac{\gamma^{-1}(\lambda t) + o(t)}{\mu t}.$$

Por otra parte, por la propiedad (ver (9.27))

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma^{-1}(\lambda h)}{h} = 0$$

sabemos que existe una constante positiva  $\alpha = \alpha(\varepsilon)$  tal que

$$|p_1| \leq \delta \quad \text{si} \quad t_\infty(x) - \alpha < t < t_\infty(x).$$

Así, la ecuación (HJ) $_{\lambda, \beta}$  y (9.47) conducen a

$$p_2 + \lambda\beta(u) \leq H(p_1) \leq \varepsilon|p_1| \leq -\frac{\varepsilon}{\mu}p_2$$

y

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{\mu}\right)p_2 + \lambda\beta(u(x, t)) \leq 0 \quad \text{si} \quad t_\infty(x) - \alpha < t < t_\infty(x).$$

Razonando como en el Teorema 9.31 se obtiene

$$\gamma(u(x, t_\infty(x) - t)) - \gamma(u(x, \tau)) \geq \frac{\lambda}{1 + \frac{\varepsilon}{\mu}}(\tau - t_\infty(x) + t)$$

para  $t_\infty(x) - t < \alpha < \tau < t_\infty(x)$ ; haciendo  $\tau \rightarrow t_\infty(x)$  se tiene

$$\gamma(u(x, t_\infty(x) - t)) \geq \frac{\lambda}{1 + \frac{\varepsilon}{\mu}}t, \quad t_\infty(x) - t < \alpha < t_\infty(x)$$

y, de esta manera, se obtiene la desigualdad

$$\liminf_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, t_\infty(x) - t)}{\gamma^{-1}(\lambda t)} > 1, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Por otra parte, es obvio que (9.25) determina que

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, t_\infty(x) - t)}{\gamma^{-1}(\lambda t)} \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad \square$$

En algunos casos, la hipótesis (9.45) puede ser reemplazada por

$$-H(\nabla u_0) + \lambda\beta(u_0) \geq c \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^N \quad (9.49)$$

para alguna constante  $c > 0$ .

**Observación 9.34**

Por el Lema 9.7 está claro que si el dato inicial verifica

$$|u_0(x) - u_0(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^N$$

entonces la condición (9.49) implica

$$-\mu|\nabla u_0| - H(\nabla u_0) + \lambda\beta(u_0) \geq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N$$

siendo  $\mu \leq \frac{c}{L}$ . En efecto, basta observar que

$$-H(\nabla u_0) + \lambda\beta(u_0) \geq c \geq \mu L \geq \mu|\nabla u_0| \quad \text{en } \mathbb{R}^N. \quad \square$$

Veamos una condición suficiente para tener la condición (9.49).

**Proposición 9.35**

Si una función  $w \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$  verifica

$$|w(x) - w(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^N$$

y

$$RL^m \leq \lambda\beta(\inf w)$$

para algún  $L > 0$  y  $m > 0$ , entonces

$$-R|\nabla w|^m + \lambda\beta(w) \geq c \quad \text{en } \mathbb{R}^N$$

donde  $c = \lambda\beta(\inf w) - RL^m$ .

**Demostración.**

Nuevamente del Lema 9.7 se deduce que

$$|p| \leq L, \quad p \in D^-w(x), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

y, consecuentemente,

$$-R|\nabla w|^m + \lambda\beta(w) \geq -RL^m + \lambda\beta(\inf w) = c \quad \text{en } \mathbb{R}^N,$$

de donde se concluye el resultado.  $\square$

**Observación 9.36**

Nótese que el Hamiltoniano

$$H(p) = R|p|, \quad p \in \mathbb{R}^N \quad (R > 0)$$

no verifica la condición (9.44). Por esta razón en el estudio de su tasa de extinción empleamos otros argumentos (véase el Capítulo 8).  $\square$



## Parte IV

# Comportamiento para tiempos grandes.



En esta Parte trataremos de clasificar los distintos comportamientos, para tiempos grandes, de las soluciones del problema de valor inicial

$$(P) \begin{cases} u_t - \mathcal{H}(x, u, \nabla u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Con el fin de simplificar la exposición, nos limitaremos a hamiltonianos significativamente adecuados de la forma

$$\mathcal{H}(x, r, p) = \mathcal{H}(p) - \lambda\beta(r) - f(x).$$

Más concretamente, nos interesamos en el estudio de las siguientes propiedades

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{decaimientos} \\ \text{crecimientos} \\ \text{no existencia} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{tiempos largos} \\ \text{extinción en tiempo finito} \\ \text{tiempos largos} \\ \text{explosión en tiempo finito} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{potenciales} \\ \text{exponenciales} \\ \text{potenciales} \\ \text{exponenciales} \end{array} \right.$$

para el que empleamos las siguientes técnicas: comparaciones (locales y globales), soluciones de similaridad, análisis asintótico, ... a partir de comportamientos potenciales de los datos, del tipo

$$\lim_{|p| \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{H}(p)}{|p|^m} = R > 0 \quad (m \geq 1)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\beta(r)}{r^q} = \lambda \geq 0 \quad (q \in \mathbb{R})$$

y

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{u_0(x)}{|x|^{1+\alpha}} = A > 0 \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Consecuentemente, el estudio del *problema modelo*

$$\begin{cases} u_t - R|\nabla u|^m + \lambda u^q = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \\ u(x, 0) = A|x|^{1+\alpha}, & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$



jugará un papel esencial. Recordemos que el caso sin perturbar ( $\lambda = 0$ ) admite las *fórmulas de representación de Lax-Oleinik*:

$$\mathcal{U}(x, t) = \begin{cases} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \left\{ A|y|^{1+\alpha} - (m-1) \left( \frac{|x-y|^m}{Rm^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\}, & x \in \mathbb{R}^N, t \geq 0 \\ \inf_{y \in \mathbb{R}^N} \left\{ A|y|^{1+\alpha} + (m-1) \left( \frac{|x-y|^m}{Rm^m (-t)} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\}, & x \in \mathbb{R}^N, t \leq 0 \end{cases}$$

para  $m > 1$  y

$$\mathcal{U}(x, t) = \begin{cases} \sup_{y \in \overline{B}_{Rt}(0)} A|x-yt|^{1+\alpha}, & x \in \mathbb{R}^N, t \geq 0 \\ \inf_{y \in \overline{B}_{R(-t)}(0)} A|x-yt|^{1+\alpha}, & x \in \mathbb{R}^N, t \leq 0 \end{cases}$$

cuando  $m = 1$  (véanse (10.10) y (10.34)).

Para  $\lambda > 0$ ,  $m = 1$  y  $0 < q < 1$  se tiene la representación

$$\mathcal{U}(x, t) = \begin{cases} \sup_{y \in \overline{B}_{Rt}(x)} \left\{ \left( \left[ (A|y|^{1+\alpha})^{1-q} - \lambda(1-q)t \right]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}} \right\}, & x \in \mathbb{R}^N, t \geq 0 \\ \inf_{y \in \overline{B}_{R(-t)}(x)} \left\{ \left( \left[ (A|y|^{1+\alpha})^{1-q} - \lambda(1-q)t \right]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}} \right\}, & x \in \mathbb{R}^N, t \leq 0 \end{cases}$$

(véase el Teorema 8.8).

Entre otras propiedades, recordamos que para datos  $u_0$  localmente acotados, las fórmulas anteriores definen funciones que verifican la ecuación en derivadas parciales en el sentido de la viscosidad y que en  $t = 0$  realizan las envueltas semicontinuas, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{U}(x, t) = (u_0)^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

y

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \mathcal{U}(x, t) = (u_0)_*(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Como hemos comentado, ceñiremos nuestro estudio al problema modelo del que el siguiente es un sumario de las propiedades obtenidas:

- $\bullet \lambda = 0 \left\{ \begin{array}{l} m > 1 \\ m = 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{No hay solución} \\ \text{Solución constante} \\ \text{Crecimiento potencial} \\ \text{Blow-up} \\ \text{Existencia fuera de conos} \\ \text{Solución constante} \\ \text{Crecimiento potencial} \end{array} \right\} \text{ en función de } \alpha.$
- $\bullet \text{Convergencia } m \rightarrow 1 \quad (\lambda = 0).$
- $\bullet \lambda > 0 \left\{ \begin{array}{l} m > 1 \\ m = 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{No hay solución} \\ \text{Extinción} \\ \text{Decaimiento potencial} \\ \text{Decaimiento exponencial} \\ \text{Crecimiento potencial} \\ \text{Blow-up} \end{array} \right\} \text{ en función de } \alpha \text{ y } q.$



## Capítulo 10

### La ecuación sin perturbar.

En este Capítulo nos fijamos, primordialmente, en la ecuación modelo

$$u_t - R|\nabla u|^m = 0 \quad (m \geq 1)$$

de la que, cuando  $m > 1$ , conocemos la *solución de similitud*

$$S(x, t) = -(m - 1) \left( \frac{|x|^m}{Rm^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}}$$

en el semiespacio  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$ . Esta solución y la fórmula de Lax–Oleinik son nuestras herramientas básicas cuando consideramos el problema de Cauchy correspondiente al dato inicial

$$u_0(x) = A|x|^{1+\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Comenzamos abordando el comportamiento de la evolución positiva de los tiempos en términos del *intervalo de exponentes  $\alpha$  globalmente admisibles*

$$I_m^+ = \left[ -1, \frac{1}{m-1} \right],$$

así como el comportamiento '*explosivo*' en el caso

$$\alpha = \frac{1}{m-1}.$$

El conocimiento y las propiedades de la fórmula de Lax-Oleinik nos permite considerar el problema retrógrado ( $t \leq 0$ ) para el cual el *intervalo de exponentes  $\alpha$  globalmente admisibles* es

$$I_m^- = \mathbb{R}.$$

Hasta este momento, los datos iniciales  $u_0$  siguen un modelo que presenta una explosión en el infinito. Nuestro estudio adquiere un carácter exhaustivo al abordar, tanto para la evolución positiva como la retrógrada, el comportamiento de las soluciones para datos iniciales que explotan en la frontera de compactos.

Aunque el caso de hamiltonianos con crecimiento lineal ( $m = 1$ ) carece de una solución de similaridad tan útil, la propiedad del cono de dependencia suple, con eficacia, tal falta. Podemos seguir un plan de trabajo análogo al descrito que nos lleva a clasificar, también exhaustivamente, todos los posibles comportamientos según la evolución positiva o retrógrada de los tiempos. Algunos resultados obtenidos directamente son ratificados como caso límite de hamiltonianos superlineales ( $m \rightarrow 1$ ), lo que refuerza nuestra contribución.

Finalmente, sumarizamos los resultados con cuadros y gráficos descriptivos.

## 10.1 Hamiltonianos con crecimiento superlineal.

### 10.1.1 Tiempos positivos.

Con el fin de ilustrar, consideremos el problema modelo

$$(P)_{\alpha, m}^+ \begin{cases} u_t = R|\nabla u|^m & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = A|x|^{1+\alpha}, & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

donde  $m > 1$ ,  $A > 0$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Denotemos por  $\mathcal{U}(x, t) = \mathcal{U}(x, t; R, m, A, \alpha)$  a la solución de  $(P)_{\alpha, m}^+$ , dada por la *fórmula de Lax-Oleinik*

$$\mathcal{U}(x, t) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \left\{ A|y|^{1+\alpha} - (m-1) \left( \frac{|x-y|^m}{Rm^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\} = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \psi(y; x, t)$$

siendo

$$\psi(y; x, t) = A|y|^{1+\alpha} + \mathcal{S}(x - y, t), \quad y \in \mathbb{R}^N$$

con  $\mathcal{S}(x, t)$  dada por

$$\mathcal{S}(x, t) = -(m-1) \left( \frac{|x|^m}{Rm^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0$$

que es *solución de similitud* de la ecuación

$$u_t = R|\nabla u|^m \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

(véase el Teorema 4.1).

Aunque no nos detendremos en cuestiones de Control Determinista, señalamos que el valor  $y_{\max}(x, t)$  verificando

$$\mathcal{U}(x, t) = \psi(y_{\max}(x, t); x, t)$$

puede ser considerado, en cierto sentido, como un *control óptimo*.

Ante todo se observa

$$\mathcal{U}(x, t) \geq \psi(y; x, t), \quad y \in \mathbb{R}^N$$

y, en particular,

$$\mathcal{U}(x, t) \geq \psi(x; x, t) = A|x|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (10.1)$$

Por otra parte, cuando  $|y| \rightarrow +\infty$ , se verifica

$$\psi(y; x, t) \sim \begin{cases} -(m-1) \left( \frac{|y|^m}{Rm^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}} & \text{si } \alpha < \frac{1}{m-1} \\ \left[ A - (m-1) \left( \frac{1}{Rm^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right] |y|^{\frac{m}{m-1}} & \text{si } \alpha = \frac{1}{m-1} \\ A|y|^{1+\alpha} & \text{si } \alpha > \frac{1}{m-1}, \end{cases} \quad (10.2)$$

así como

$$\psi(0; x, t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < -1 \\ A - (m-1) \left( \frac{|x|^m}{Rm^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}} & \text{si } \alpha = -1 \\ -(m-1) \left( \frac{|x|^m}{Rm^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}} & \text{si } \alpha > -1 \end{cases} \quad (10.3)$$

lo que lleva a

$$\mathcal{U}(x, t) = +\infty \quad \text{si } t > 0 \quad (x \in \mathbb{R}^N)$$

cuando  $\alpha \notin \left[-1, \frac{1}{m-1}\right]$ . Por otro lado, para  $\alpha = \frac{1}{m-1}$  se deduce, de (10.2),

$$\begin{cases} \mathcal{U}(x, t) < +\infty & \text{si } t < \mathbf{T}_\infty \\ \mathcal{U}(x, t) = +\infty & \text{si } t > \mathbf{T}_\infty \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}^N)$$

siendo

$$\mathbf{T}_\infty \doteq \frac{1}{Rm^m} \left( \frac{m-1}{A} \right)^{m-1}.$$

Por tanto, detallaremos nuestro estudio sobre el *intervalo de exponentes globalmente admisibles*<sup>1</sup>

$$I_m^+ = \left[-1, \frac{1}{m-1}\right].$$

Para el caso  $\boxed{\alpha = -1}$  correspondiente a datos iniciales constantes, se obtiene, de forma inmediata que la solución es también constante.

### Teorema 10.1

La solución de  $(P)_{-1, m}^+$  es

$$\mathcal{U}(x, t) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \left\{ A - (m-1) \left( \frac{|x-y|^m}{Rm^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\} = A, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

### Demostración.

Como  $\alpha = -1$  entonces  $\psi(y; x, t) = A + \mathcal{S}(x-y, t)$ . Por tanto,

$$\mathcal{U}(x, t) = \psi(x; x, t) = A, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0. \quad \square$$

<sup>1</sup>Recuérdese el resultado de trazas visto en el Teorema 5.2.

Para  $\boxed{-1 < \alpha < \frac{1}{m-1}}$  las relaciones (10.2) y (10.3) implican la existencia de  $y_{\max} = y_{\max}(x, t) \in \mathbb{R}^N$  con la propiedad

$$\mathcal{U}(x, t) = \psi(y_{\max}; x, t) \geq \psi(y; x, t), \quad y \in \mathbb{R}^N.$$

Además, la condición (10.1) determina que  $y_{\max}(x, t) \neq 0$  si  $x \neq 0$ , luego el carácter crítico de  $y_{\max}(x, t)$  lleva a que  $\nabla\psi(y_{\max}; x, t) = 0$ . Como<sup>2</sup>

$$\nabla\psi(y; x, t) = (1 + \alpha)A|y|^\alpha \frac{y}{|y|} - \left( \frac{|x - y|}{Rmt} \right)^{\frac{1}{m-1}} \frac{x - y}{|x - y|}$$

se tendrá

$$(1 + \alpha)A|y_{\max}(x, t)|^\alpha = \left( \frac{|x - y_{\max}(x, t)|}{Rmt} \right)^{\frac{1}{m-1}}, \quad x \neq 0. \quad (10.4)$$

Reemplazando en la fórmula de Lax-Oleinik obtenemos, para  $x \neq 0$ , la representación

$$\mathcal{U}(x, t) = A|y_{\max}|^{1+\alpha} \left[ 1 - R(m-1)(1 + \alpha)^m A^{m-1} \frac{t}{|y_{\max}|^{1-\alpha(m-1)}} \right]. \quad (10.5)$$

Por otra parte, la fórmula de representación de Lax-Oleinik lleva directamente a

$$\mathcal{U}(0, t) = \left[ A - (m-1) \left( \frac{|y_{\max}(0, t)|^{1-\alpha(m-1)}}{Rm^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right] |y_{\max}(0, t)|^{1+\alpha}. \quad (10.6)$$

Como hemos comentado, debido a (10.1), la expresión (10.5) sólo tiene sentido cuando

$$0 \leq t < \frac{|y_{\max}(x, t)|^{1-\alpha(m-1)}}{R(m-1)(1 + \alpha)^m A^{m-1}}, \quad x \neq 0 \quad (10.7)$$

(pues  $\mathcal{U}(x, t) > 0$  si  $x \neq 0$ , pudiendo ser  $\mathcal{U}(0, t) = 0$ ).

El segundo resultado que presentamos es:

---

<sup>2</sup>Nótese que  $\nabla\psi(y; x, t)$  tiene sentido para todo  $y \in \mathbb{R}^N$  si  $\alpha > 0$  y para  $y \neq 0$  si  $\alpha \leq 0$ .



**Teorema 10.2**

Si  $-1 < \alpha < \frac{1}{m-1}$  entonces la solución de  $(P)_{\alpha, m}^+$  verifica

$$\mathcal{U}(x, t) \sim C_{\infty} t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}} \quad \text{si } t \rightarrow +\infty$$

donde la constante  $C_{\infty} = C_{\infty}(A, \alpha, R, m)$  viene dada por

$$C_{\infty} \doteq (1 - \alpha(m-1)) \left[ R^{1+\alpha} (Am^{\alpha})^m (1 + \alpha)^{(1+\alpha)(m-1)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha(m-1)}}. \quad (10.8)$$

Además,

$$\mathcal{U}(0, t) = C_{\infty} t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}, \quad t \geq 0. \quad (10.9)$$

**Demostación.**

Como en este caso se verifica la condición

$$\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{u_0(x)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} = 0$$

sabemos que la función  $\mathcal{U}(x, t)$  está definida para todo instante de tiempo  $t \geq 0$  (véase (4.118)). La propiedad general (10.7) lleva a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |y_{\max}(x, t)| = +\infty, \quad x \neq 0$$

y con ello

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{U}(x, t) = +\infty, \quad x \neq 0.$$

Así, la expresión (10.5) determina

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{|y_{\max}(x, t)|^{1-\alpha(m-1)}} \leq \frac{1}{R(m-1)(1+\alpha)^m A^{m-1}}, \quad x \neq 0.$$

La condición de máximo (10.4) implica, para  $x \neq 0$ ,

$$(1 + \alpha)A |y_{\max}(x, t)|^{\alpha} \sim \left( \frac{|y_{\max}(x, t)|}{Rmt} \right)^{\frac{1}{m-1}} \quad \text{si } t \rightarrow +\infty,$$

es decir,

$$|y_{\max}(x, t)| \sim [Rm((1 + \alpha)A)^{m-1} t]^{\frac{1}{1-\alpha(m-1)}} \quad \text{si } t \rightarrow +\infty, \quad x \neq 0.$$

Por tanto, si  $x \neq 0$ , la representación (10.5) conduce a

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(x, t) &= A|y_{\max}(x, t)|^{1+\alpha} \left[ 1 - R(m-1)(1+\alpha)^m A^{m-1} \frac{t}{|y_{\max}(x, t)|^{1-\alpha(m-1)}} \right] \\ &\sim A \left( 1 - \frac{(m-1)(1+\alpha)}{m} \right) \left[ Rm((1+\alpha)A)^{m-1} t \right]^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}} \quad \text{si } t \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

con lo que

$$\mathcal{U}(x, t) \sim (1 - \alpha(m-1)) \left[ R^{1+\alpha} (Am^\alpha)^m (1+\alpha)^{(1+\alpha)(m-1)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha(m-1)}} t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}$$

si  $t \rightarrow +\infty$  y  $x \neq 0$ .

Por otra parte, podemos determinar la evolución exacta del punto  $x = 0$  pues, en este caso, el valor  $y_{\max}(0, t)$  viene dado por

$$(1+\alpha)A|y_{\max}(0, t)|^\alpha = \left( \frac{|y_{\max}(0, t)|}{Rmt} \right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

Por tanto,

$$|y_{\max}(0, t)|^{\frac{1-\alpha(m-1)}{m-1}} = (1+\alpha)A(Rmt)^{\frac{1}{m-1}},$$

es decir,

$$|y_{\max}(0, t)| = \left[ Rm((1+\alpha)A)^{m-1} t \right]^{\frac{1}{1-\alpha(m-1)}},$$

que sustituido en (10.6) determina

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(0, t) &= \left[ A - (m-1) \left( \frac{|y_{\max}(0, t)|^{1-\alpha(m-1)}}{Rm^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right] |y_{\max}(0, t)|^{1+\alpha} \\ &= A \left( 1 - \frac{(m-1)(1+\alpha)}{m} \right) \left[ Rm((1+\alpha)A)^{m-1} t \right]^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}} \\ &= \frac{1-\alpha(m-1)}{m} \left[ (1+\alpha)^{(1+\alpha)(m-1)} A^m (Rmt)^{1+\alpha} \right]^{\frac{1}{1-\alpha(m-1)}} \\ &= (1 - \alpha(m-1)) \left[ R^{1+\alpha} (Am^\alpha)^m (1+\alpha)^{(1+\alpha)(m-1)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha(m-1)}} t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}. \quad \square \end{aligned}$$

**Observación 10.3**

1. Como se aprecia, el comportamiento asintótico temporal de  $\mathcal{U}(x, t)$  depende de cada valor  $\alpha \in I_m^+$  y es *uniforme* en  $x$ . De la misma forma, los *controles óptimos* son uniformes en  $x$  para  $t \rightarrow +\infty$ .
2. De (10.9) se deduce

$$\mathcal{U}_t(0, t) = C_\infty \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha(m-1)} t^{\frac{\alpha}{1-\alpha(m-1)}}, \quad t > 0.$$

Luego

$$|\nabla \mathcal{U}(0, t)| = \frac{\left(\mathcal{U}_t(0, t)\right)^{\frac{1}{m}}}{R} = \left(\frac{C_\infty}{R} \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha(m-1)}\right)^{\frac{1}{m}} t^{\frac{\alpha}{1-\alpha(m-1)}}, \quad t > 0. \quad \square$$

En el caso particular  $\boxed{\alpha = 0}$  se tiene, de hecho, una representación 'sencilla' de la solución.

**Teorema 10.4**

La solución de  $(P)_{0,m}^+$  viene dada por

$$\mathcal{U}(x, t) = A|x| + R A^m t, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

**Demostración.**

Utilizando la fórmula de representación obtenemos

$$\mathcal{U}(x, t) = A|y_{\max}(x, t)| - (m-1) \left( \frac{|x - y_{\max}(x, t)|^m}{R m^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}}$$

donde  $y_{\max}(x, t)$  viene dado por

$$A = \left( \frac{|x - y_{\max}(x, t)|}{R m t} \right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

Por tanto,

$$|x - y_{\max}(x, t)| = R m A^{m-1} t,$$

de donde

$$|y_{\max}(x, t)| = |x| + RmA^{m-1}t.$$

De esta forma se obtiene

$$\mathcal{U}(x, t) = A(|x| + RmA^{m-1}t) - (m-1) \left( \frac{R^m A^{m(m-1)} t^m}{Rt} \right)^{\frac{1}{m-1}} = A|x| + RA^m t$$

para  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $t \geq 0$ .  $\square$

### Observación 10.5

Este último resultado es común a una amplia clase de problemas de Cauchy de la forma

$$(P) \begin{cases} u_t - H(\nabla u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

cuando  $u_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  verifica, en el sentido de la viscosidad, la ecuación

$$-H(\nabla u_0) = -k \text{ en } \mathbb{R}^N$$

pues, en esos casos, la función

$$u(x, t) = u_0(x) + kt, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

es solución de viscosidad de (P). Como se aprecia, la evolución actúa como una *traslación en el tiempo* del dato inicial.  $\square$

El *rango de exponentes globalmente admisibles* para el dato inicial

$$-1 \leq \alpha < \frac{1}{m-1}$$

hace que en el comportamiento asintótico, de orden  $t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}$ , *recorra todas las potencias no negativas*: desde las constantes para  $\alpha = -1$  hasta el 'infinito' para  $\alpha \rightarrow \frac{1}{m-1}$ . De hecho, como mostramos a continuación, en el caso límite

$\alpha = \frac{1}{m-1}$  se da el fenómeno de *blow-up*.

**Teorema 10.6**

La solución del problema  $(P)_{\frac{1}{m-1}, m}^+$  viene dada por

$$\mathcal{U}(x, t) = -\mathcal{S}(x; \mathbf{T}_\infty - t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad 0 \leq t < \mathbf{T}_\infty$$

donde

$$\mathbf{T}_\infty = \frac{1}{Rm^m} \left( \frac{m-1}{A} \right)^{m-1}.$$

En particular,

$$\lim_{t \rightarrow \mathbf{T}_\infty} \mathcal{U}(x, t) (\mathbf{T}_\infty - t)^{\frac{1}{m-1}} = (m-1) \left( \frac{|x|^m}{Rm^m} \right)^{\frac{1}{m-1}}, \quad x \neq 0,$$

$$\mathcal{U}(0, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \mathbf{T}_\infty \\ +\infty, & t > \mathbf{T}_\infty \end{cases}$$

y

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (0, \mathbf{T}_\infty)} \mathcal{U}(x, t) \left( \frac{\mathbf{T}_\infty - t}{|x|^m} \right)^{\frac{1}{m-1}} = (m-1) \left( \frac{1}{Rm^m} \right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

**Demostración.**

Puesto que (10.7) sigue siendo válido para  $\alpha = \frac{1}{m-1}$ , se deduce que, desde luego,  $\mathcal{U}(x, t)$  está definida si

$$0 \leq t < \frac{1}{Rm^m} \left( \frac{m-1}{A} \right)^{m-1} = \mathbf{T}_\infty, \quad x \neq 0.$$

Por otra parte, (10.4) determina, en este caso

$$\frac{mA}{m-1} |y_{\max}(x, t)|^{\frac{1}{m-1}} = \left( \frac{|x - y_{\max}(x, t)|}{Rmt} \right)^{\frac{1}{m-1}}, \quad x \neq 0.$$

Es decir, para  $x \neq 0$  se verifica

$$|x - y_{\max}(x, t)|^{\frac{1}{m-1}} = \frac{mA}{m-1} (Rmt)^{\frac{1}{m-1}} |y_{\max}(x, t)|^{\frac{1}{m-1}} = \left( \frac{t}{\mathbf{T}_\infty} |y_{\max}(x, t)| \right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

Por tanto,

$$|x - y_{\max}(x, t)| = \frac{t}{\mathbf{T}_\infty} |y_{\max}(x, t)|, \quad x \neq 0,$$

de donde se obtiene

$$y_{\max}(x, t) = \frac{\mathbf{T}_{\infty}}{\mathbf{T}_{\infty} - t} x, \quad x \neq 0.$$

La sustitución de este valor en (10.5) conduce a

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(x, t) &= A \left(1 - \frac{t}{\mathbf{T}_{\infty}}\right) |y_{\max}(x, t)|^{\frac{m}{m-1}} = A \frac{\mathbf{T}_{\infty} - t}{\mathbf{T}_{\infty}} \left(\frac{\mathbf{T}_{\infty}}{\mathbf{T}_{\infty} - t} |x|\right)^{\frac{m}{m-1}} \\ &= A |x|^{\frac{m}{m-1}} \left(\frac{\mathbf{T}_{\infty}}{\mathbf{T}_{\infty} - t}\right)^{\frac{1}{m-1}} = (m-1) \left(\frac{|x|^m}{Rm^m(\mathbf{T}_{\infty} - t)}\right)^{\frac{1}{m-1}} = -\mathcal{S}(x, \mathbf{T}_{\infty} - t) \end{aligned}$$

cuando  $x \neq 0$  y  $0 \leq t < \mathbf{T}_{\infty}$ .

Por otra parte, cuando  $x = 0$ , se verifica

$$\mathcal{U}(0, t) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \left\{ \left( A - (m-1) \left(\frac{1}{Rm^m t}\right)^{\frac{1}{m-1}} \right) |y|^{\frac{m}{m-1}} \right\}.$$

Como

$$A - (m-1) \left(\frac{1}{Rm^m t}\right)^{\frac{1}{m-1}} \begin{cases} < 0 & \text{si } 0 \leq t < \mathbf{T}_{\infty} \\ = 0 & \text{si } t = \mathbf{T}_{\infty} \\ > 0 & \text{si } t > \mathbf{T}_{\infty} \end{cases}$$

entonces

$$y_{\max}(0, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < \mathbf{T}_{\infty} \\ \text{arbitrario} & \text{si } t = \mathbf{T}_{\infty} \end{cases}$$

mientras que para  $t > \mathbf{T}_{\infty}$ :

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \psi(y; 0, t) = +\infty$$

lo que hace que

$$\mathcal{U}(0, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \mathbf{T}_{\infty} \\ +\infty, & t > \mathbf{T}_{\infty}. \quad \square \end{cases}$$

**Observación 10.7**

1. Podemos ahora expresar las distintas evoluciones '*progresivas*' del punto  $x = 0$  según los valores admisibles de  $\alpha$  :

$$\mathcal{U}(0, t; \alpha) = \begin{cases} A & \text{si } \alpha = -1 & \text{y } t \geq 0 \\ C_{\infty} t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}} & \text{si } -1 < \alpha < \frac{1}{m-1} & \text{y } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } \alpha = \frac{1}{m-1} & \text{y } 0 \leq t \leq \mathbf{T}_{\infty} \\ +\infty & \text{si } \alpha = \frac{1}{m-1} & \text{y } t > \mathbf{T}_{\infty} \end{cases}$$

Nótese

$$\lim_{\alpha \rightarrow -1} \mathcal{U}(0, t; \alpha) = A \quad \text{y} \quad \lim_{\alpha \rightarrow \frac{1}{m-1}} \mathcal{U}(0, t; \alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \mathbf{T}_{\infty} \\ +\infty & \text{si } t > \mathbf{T}_{\infty}. \end{cases}$$

En efecto, de (10.8) se obtiene

$$\lim_{\alpha \rightarrow -1} \mathcal{U}(0, t; \alpha) = m \lim_{\alpha \rightarrow -1} \left[ \left( \frac{A}{m} \right)^m (1 + \alpha)^{(1+\alpha)(m-1)} \right]^{\frac{1}{m}} = A$$

y

$$\ell \doteq \lim_{\alpha \rightarrow \frac{1}{m-1}} \mathcal{U}(0, t; \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \frac{1}{m-1}} (1 - \alpha(m-1)) (\Psi(m, t))^{\frac{m}{1-\alpha(m-1)}}$$

donde

$$\Psi(m, t) \doteq \frac{A}{m-1} (\mathbf{R}m^m t)^{\frac{1}{m-1}}.$$

De esta forma

$$\begin{aligned} \ln \ell &= \lim_{\alpha \rightarrow \frac{1}{m-1}} \left[ \ln(1 - \alpha(m-1)) + \frac{m}{1 - \alpha(m-1)} \ln(\Psi(m, t)) \right] \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \frac{1}{m-1}} \frac{(1 - \alpha(m-1)) \ln(1 - \alpha(m-1)) + m \ln(\Psi(m, t))}{1 - \alpha(m-1)}. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{1}{m-1}} = (1 - \alpha(m-1)) \ln(1 - \alpha(m-1)) = 0$$

entonces

$$\ln \ell = \begin{cases} -\infty & \text{si } \Psi(m, t) < 1 \\ +\infty & \text{si } \Psi(m, t) > 1 \end{cases}$$

de donde se sigue el resultado teniendo en cuenta:

$$\Psi(m, t) > 1 \Leftrightarrow \frac{A}{m-1} (\text{Rm}^m t)^{\frac{1}{m-1}} > 1 \Leftrightarrow t > \mathbf{T}_\infty.^3$$

2. Para el caso límite  $\alpha = \frac{1}{m-1}$ , la función

$$t \rightarrow \mathcal{U}(x, t)$$

experimenta una *suave* explosión si  $t \rightarrow \mathbf{T}_\infty^-$ , lo que no ocurre cuando  $x = 0$  en que hay una explosión *brusca* cuando  $t \rightarrow \mathbf{T}_\infty^+$ .

3. Como se ve, para  $t \rightarrow \mathbf{T}_\infty^+$  hay un comportamiento *global*, pues

$$\mathcal{U}(x, t) = +\infty \text{ si } t > \mathbf{T}_\infty, x \in \mathbb{R}^N,$$

mientras que para  $t \rightarrow \mathbf{T}_\infty^-$  el comportamiento tiene un carácter *puntual*.  $\square$

A continuación mostramos un cuadro y un gráfico en el que se resume el comportamiento asintótico de la solución de  $(P)_{\alpha, m}^+$  con  $m > 1$  según los diversos valores de  $\alpha$ , en donde  $\tau_\infty$  denota el *horizonte maximal final* para las soluciones de  $(P)_{\alpha, m}^+$  y

$$C_\infty = (1 - \alpha(m-1)) \left[ \text{R}^{1+\alpha} (A m^\alpha)^m (1 + \alpha)^{(1+\alpha)(m-1)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha(m-1)}}.$$

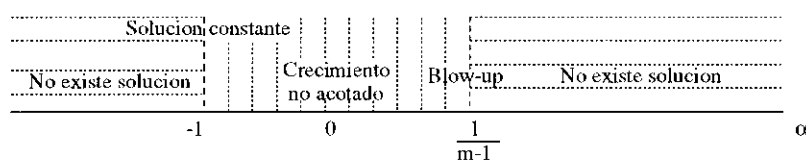


Figura 10.1: Comportamiento asintótico ( $t \rightarrow +\infty$ ).

Nótese que todas las soluciones (cuando existen y no son constantes) van a infinito en  $\tau_\infty$ , así como el *carácter cíclico* del comportamiento asintótico ‘progresivo’.

<sup>3</sup>Si  $\Psi(m, t) = 1$ , de la propia definición se sigue  $\ell = 0$ .



$\alpha$	$\tau_\infty$	Convergencias
$\alpha < -1$	0	No hay solución
$\alpha = -1$	$+\infty$	$\mathcal{U}(x, t) = A, t \geq 0$
$-1 < \alpha < \frac{1}{m-1}$	$+\infty$	$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{U}(x, t)}{t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}} = C_\infty$
$\alpha = \frac{1}{m-1}$	$\mathbf{T}_\infty$	$\mathcal{U}(x, t) = -\mathcal{S}(x, \mathbf{T}_\infty - t), 0 \leq t < \mathbf{T}_\infty$
$\alpha > \frac{1}{m-1}$	0	No hay solución

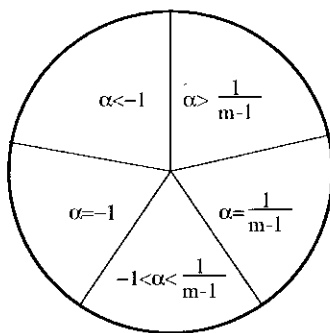
Tabla 10.1: Comportamientos maximales finales ( $m > 1, t > 0$ ).

Figura 10.2: Carácter cíclico del comportamiento asintótico (progresivo).

### 10.1.2 El problema retrógrado.

Una vez abordado el estudio para tiempos ‘grandes’ también nos interesamos por el comportamiento en los instantes más ‘remotos’. Así, fijaremos nuestra atención sobre el problema global modelo

$$(P)_{\alpha, m} \begin{cases} u_t - R|\nabla u|^m = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \\ u(x, 0) = A|x|^{1+\alpha}, & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

donde mantenemos los parámetros  $m > 1$ ,  $A > 0$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La fórmula de Lax-Oleinik para el problema  $(P)_{\alpha, m}$  toma la forma general

$$\mathcal{U}(x, t) = \begin{cases} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \left\{ A|y|^{1+\alpha} - (m-1) \left( \frac{|x-y|^m}{Rm^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\}, & t \geq 0 \\ \inf_{y \in \mathbb{R}^N} \left\{ A|y|^{1+\alpha} + (m-1) \left( \frac{|x-y|^m}{Rm^m(-t)} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\}, & t \leq 0 \end{cases} \quad (10.10)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^N$ . En efecto, si  $u$  es una supersolución de viscosidad de la ecuación

$$u_t - R|\nabla u|^m = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

entonces, para cada  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $\xi \in \mathbb{R}^N$ , se tiene que la función

$$t \mapsto u_*(x - \xi t, t) + (m-1) \left( \frac{|\xi|^m}{Rm^m} \right)^{\frac{1}{m-1}} t$$

es no decreciente (véase el Teorema 4.71), de donde

$$u_*(x, t) \geq A|y|^{1+\alpha} + \mathcal{S}(y - x, t), \quad y \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0$$

siendo

$$\mathcal{S}(z, s) = -(m-1) \left( \frac{|z|^m}{Rm^m |s|} \right)^{\frac{1}{m-1}}, \quad z \in \mathbb{R}^N, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Tomando supremo en  $y \in \mathbb{R}^N$  se concluye

$$u_*(x, t) \geq \mathcal{U}(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

Análogamente, se muestra que si ahora  $u$  es una subsolución de viscosidad de la ecuación

$$u_t - R|\nabla u|^m = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_-,$$

los argumentos anteriores determinan

$$u^*(x, t) \leq A|y|^{1+\alpha} - \mathcal{S}(y - x, -t), \quad y \in \mathbb{R}^N, \quad t \leq 0,$$

lo que lleva a

$$u^*(x, t) \leq \mathcal{U}(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \leq 0.$$

Por otra parte, resaltamos la descripción del dato inicial

$$u_0(x) = A|x|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^N;$$

concretamente, la continuidad de  $u_0$  determina

$$\lim_{t \rightarrow 0^\pm} \mathcal{U}(x, t) = A|x|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Como en la Subsección 10.1.1 hicimos un análisis de los tiempos positivos, en ésta sólo nos ocuparemos de instantes de tiempo  $t \leq 0$  para los cuales

$$\mathcal{U}(x, t) = \inf_{y \in \mathbb{R}^N} \left\{ A|y|^{1+\alpha} + (m-1) \left( \frac{|x-y|^m}{\text{Rm}^m(-t)} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\} = \inf_{y \in \mathbb{R}^N} \phi(y; x, t)$$

siendo

$$\phi(y; x, t) = A|y|^{1+\alpha} - \mathcal{S}(x-y, -t), \quad y \in \mathbb{R}^N.$$

Ante todo, para  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $t \leq 0$ , se observa

$$0 \leq \mathcal{U}(x, t) \leq \phi(y; x, t), \quad y \in \mathbb{R}^N \quad (10.11)$$

y, en particular,

$$0 \leq \mathcal{U}(x, t) \leq \phi(x; x, t) = A|x|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \leq 0. \quad (10.12)$$

Para datos iniciales constantes (que se corresponden con  $\alpha = -1$ ) obtenemos de forma inmediata

$$\mathcal{U}(x, t) = \inf_{y \in \mathbb{R}^N} \left\{ A + (m-1) \left( \frac{|x-y|^m}{\text{Rm}^m(-t)} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\} = A, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t < 0.$$

Particularizando  $y = 0$  en (10.11) para  $\alpha > -1$ , se verifica

$$0 \leq \mathcal{U}(x, t) \leq \phi(0; x, t) = -\mathcal{S}(x, -t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \leq 0 \quad (10.13)$$

lo que, en consecuencia, nos permite afirmar

$$\mathcal{U}(0, t) = 0, \quad t \leq 0 \quad (10.14)$$

y

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathcal{U}(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (10.15)$$

Veamos que para valores de  $\alpha < -1$  la función  $\mathcal{U}(x, \cdot)$  sigue verificando, para  $x \neq 0$ , el decaimiento anterior.<sup>4</sup> En efecto, para cada  $\varepsilon > 0$ , el punto

$$y_\varepsilon = \left( |x| + \varepsilon(-t)^{\frac{1}{m}} \right) \frac{x}{|x|}, \quad x \neq 0, \quad t \leq 0$$

verifica

$$|x - y_\varepsilon| = \varepsilon(-t)^{\frac{1}{m}}.$$

Así, por definición,

$$\mathcal{U}(x, t) \leq \phi(y_\varepsilon; x, t) = A \left( |x| + \varepsilon(-t)^{\frac{1}{m}} \right)^{1+\alpha} + (m-1) \left( \frac{\varepsilon^m}{Rm^m} \right)^{\frac{1}{m-1}}$$

con lo que

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathcal{U}(x, t) \leq (m-1) \left( \frac{\varepsilon^m}{Rm^m} \right)^{\frac{1}{m-1}}, \quad \varepsilon > 0.$$

Finalmente, haciendo tender  $\varepsilon \rightarrow 0$  se obtiene (10.15).

### Observación 10.8

Nótese que a diferencia del caso de los tiempos positivos, en el que el rango de exponentes globalmente admisibles era

$$I_m^+ = \left[ -1, \frac{1}{m-1} \right],$$

ahora, para el problema retrógrado, se tiene  $I_m^- = \mathbb{R}$ , no acotado, por tanto, ni por encima de  $\frac{1}{m-1}$  (contemplado en el Teorema 10.13) ni por debajo de  $-1$  (véase el Teorema 10.9).  $\square$

Salvo para el caso “constante”  $\alpha = -1$ , hemos probado

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathcal{U}(x, t) = 0, \quad x \neq 0, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

<sup>4</sup>Para estudiar la evolución de  $x = 0$  véase el Teorema 10.18 que mostramos más adelante.

Con el fin de precisar el comportamiento anterior, parece oportuno tener presente que para  $|y| \rightarrow +\infty$  se verifica

$$\phi(y; x, t) \sim \begin{cases} (m-1) \left( \frac{|y|^m}{\text{Rm}^m(-t)} \right)^{\frac{1}{m-1}} & \text{si } \alpha < \frac{1}{m-1} \\ \left[ A + (m-1) \left( \frac{1}{\text{Rm}^m(-t)} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right] |y|^{\frac{m}{m-1}} & \text{si } \alpha = \frac{1}{m-1} \\ A|y|^{1+\alpha} & \text{si } \alpha > \frac{1}{m-1} \end{cases} \quad (10.16)$$

así como la propiedad

$$\phi(0; x, t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < -1 \\ A + (m-1) \left( \frac{|x|^m}{\text{Rm}^m(-t)} \right)^{\frac{1}{m-1}} & \text{si } \alpha = -1 \\ (m-1) \left( \frac{|x|^m}{\text{Rm}^m(-t)} \right)^{\frac{1}{m-1}} & \text{si } \alpha > -1 \end{cases} \quad (10.17)$$

que junto con

$$\lim_{|y| \rightarrow +\infty} \phi(y; x, t) = +\infty$$

hacen que para  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $t \leq 0$  exista  $y_{\min} = y_{\min}(x, t) \in \mathbb{R}^N$  verificando

$$\mathcal{U}(x, t) = \phi(y_{\min}; x, t) \leq \phi(y; x, t), \quad y \in \mathbb{R}^N.^5$$

Como ahora en la definición de  $\mathcal{U}$  tomamos el ínfimo en  $\mathbb{R}^N$ , distinguimos el caso  $y = 0$  (donde  $\phi$  no es diferenciable si  $\alpha \leq 0$ ) de  $y \neq 0$  (donde sí lo es). El mínimo se realizará, por tanto, en  $y = 0$  o en el subconjunto de los puntos estacionarios de  $\phi$ :

$$\Omega(x, t) \doteq \{y \in \mathbb{R}^N : \nabla \phi(y) = 0\}.$$

Siendo

$$\nabla \phi(y) = (1 + \alpha)A|y|^\alpha \frac{y}{|y|} + \left( \frac{|x-y|}{\text{Rm}(-t)} \right)^{\frac{1}{m-1}} \frac{x-y}{|x-y|}$$

<sup>5</sup>Nótese que la relación (10.17) determina que  $y_{\min}(x, t) \neq 0$  si  $\alpha < -1$ .

entonces<sup>6</sup>

$$\nabla\phi(y) = 0 \Leftrightarrow (1 + \alpha)A|y|^\alpha \frac{y}{|y|} = - \left( \frac{|x-y|}{\text{Rm}(-t)} \right)^{\frac{1}{m-1}} \frac{x-y}{|x-y|}. \quad (10.18)$$

De esta forma, dado  $y \in \Omega(x, t)$ , se verifica

$$|1 + \alpha A|y|^\alpha = \left( \frac{|x-y|}{\text{Rm}(-t)} \right)^{\frac{1}{m-1}}, \quad ^7$$

es decir,

$$y \in \Omega(x, t) \Leftrightarrow |x-y| = \text{Rm}(|1 + \alpha A|y|^\alpha)^{m-1} |y|^{\alpha(m-1)} (-t). \quad (10.19)$$

Los posibles comportamientos asintóticos de  $y \in \Omega(x, t)$  cuando  $t \rightarrow -\infty$  son, a la vista de (10.19), los siguientes:

$$|y| \sim \begin{cases} [\text{Rm}(|1 + \alpha A|y|^\alpha)^{m-1} (-t)]^{\frac{1}{1-\alpha(m-1)}} & \text{para } \alpha < \frac{1}{m-1}, \alpha \neq -1 \\ \left( \frac{|x|}{\text{Rm}(|1 + \alpha A|y|^\alpha)^{m-1} (-t)} \right)^{\frac{1}{\alpha(m-1)}} & \text{para } \alpha > \frac{1}{m-1}. \end{cases}$$

Por tanto, parece conveniente usar la representación

$$\mathcal{U}(x, t) = \phi(y_{\min}; x, t) = \min \left\{ \phi(0; x, t), \min_{y \in \Omega(x, t)} \varphi(y) \right\} \quad (10.20)$$

siendo

$$\varphi(y) \doteq A|y|^{1+\alpha} + \text{R}(m-1)(|1 + \alpha A|y|^\alpha)^m (-t). \quad (10.21)$$

La primera tasa de decaimiento, para  $\boxed{\alpha < -1}$ , viene dada por:

<sup>6</sup>Nótese que  $\nabla\phi(y; x, t)$  tiene sentido para todo  $y \in \mathbb{R}^N$  si  $\alpha > 0$  y para  $y \neq 0$  si  $\alpha \leq 0$ . Ahora bien, cuando  $\alpha > 0$ , se tiene:  $\nabla\phi(0; x, t) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Recordemos que (10.14) ya establece la evolución para  $x = 0$ .

<sup>7</sup>Además, los vectores  $y \in \Omega(x, t)$  y  $x - y$  tienen la misma dirección. Por tanto, todos los elementos de  $\Omega(x, t)$  están en la misma dirección que  $x$ .

**Teorema 10.9**

Si  $\alpha < -1$  entonces la solución de  $(P)_{\alpha, m}$  verifica

$$\mathcal{U}(x, t) \sim C_{-\infty}(-t)^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}} \quad \text{si } t \rightarrow -\infty$$

donde la constante  $C_{-\infty} = C_{-\infty}(A, \alpha, R, m)$  viene dada por

$$C_{-\infty} \doteq (1 - \alpha(m-1)) \left[ R^{1+\alpha} (Am^\alpha)^m (-(1+\alpha))^{-(1+\alpha)(m-1)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha(m-1)}}. \quad (10.22)$$

**Demostración.**

Puesto que (10.16) y (10.17) determinan

$$\lim_{|y| \rightarrow 0} \phi(y) = \lim_{|y| \rightarrow +\infty} \phi(y) = +\infty$$

entonces  $y_{\min}(x, t) \neq 0$ . Por tanto, la caracterización de  $\Omega(x, t)$  lleva a

$$|1 + \alpha|A|y_{\min}(x, t)|^\alpha = \left( \frac{|x - y_{\min}(x, t)|}{Rm(-t)} \right)^{\frac{1}{m-1}} \quad (10.23)$$

y

$$\mathcal{U}(x, t) = A|y_{\min}(x, t)|^{1+\alpha} + R(m-1)(-t)(|1 + \alpha|A)^m |y_{\min}(x, t)|^{\alpha m} \quad (10.24)$$

(ver (10.21)). Así, las expresiones (10.23) y (10.24) implican

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |y_{\min}(x, t)| = +\infty$$

y

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |y_{\min}(x, t)|^{\alpha m} (-t) = 0,$$

que utilizadas de nuevo en (10.23) conducen a

$$-(1 + \alpha)A|y_{\min}(x, t)|^\alpha \sim \left( \frac{|y_{\min}(x, t)|}{Rm(-t)} \right)^{\frac{1}{m-1}} \quad \text{si } t \rightarrow -\infty,$$

es decir,

$$|y_{\min}(x, t)| \sim [Rm(-(1 + \alpha)A)^{m-1}(-t)]^{\frac{1}{1-\alpha(m-1)}} \quad \text{si } t \rightarrow -\infty.$$

De esta forma, a partir de (10.24), para  $t \rightarrow -\infty$  se verifica

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(x, t) &= A|y_{\min}|^{1+\alpha} \left[ 1 + R(m-1)(-(1+\alpha))^m A^{m-1} \frac{(-t)}{|y_{\min}|^{1-\alpha(m-1)}} \right] \\ &\sim A \left[ Rm(-(1+\alpha)A)^{m-1}(-t) \right]^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}} \left( 1 - \frac{(m-1)(1+\alpha)}{m} \right) \\ &= (1-\alpha(m-1)) \left[ R^{1+\alpha} (Am^\alpha)^m (-(1+\alpha))^{(1+\alpha)(m-1)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha(m-1)}} (-t)^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}. \quad \square \end{aligned}$$

### Observación 10.10

1. Como se aprecia, el comportamiento asintótico temporal retrógrado de  $\mathcal{U}(x, t)$  depende de cada valor  $\alpha < -1$  y es *uniforme* en  $x$ .
2. Para  $\alpha < -1$  el orden de decaimiento  $(-t)^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}$  recorre potencias negativas desde  $(-t)^{-\frac{1}{m-1}}$ , para  $\alpha \rightarrow -\infty$ , hasta las constantes, para  $\alpha \rightarrow -1$ .
3. Queremos reseñar que cuando  $\alpha < -1$  la evolución de la solución experimenta una “*explosión súbita*” a partir de  $t = 0$ . Concretamente, la propiedad

$$u_0(x) \doteq A|x|^{1+\alpha} < +\infty \Leftrightarrow x \neq 0$$

hace que se tenga

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(x, t) &= \inf_{y \in \mathbb{R}^N} \left\{ A|y|^{1+\alpha} + (m-1) \left( \frac{|x-y|^m}{Rm^m(-t)} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\} \\ &\leq A|x|^{1+\alpha} < +\infty, \quad x \neq 0, \quad t \leq 0 \end{aligned}$$

mientras que, por otra parte,

$$\mathcal{U}(x, t) = +\infty, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0$$

(véase la Subsección 10.1.1 y la figura adjunta).  $\square$

El caso  $\boxed{\alpha = -1}$  ya comentado, es inmediato:



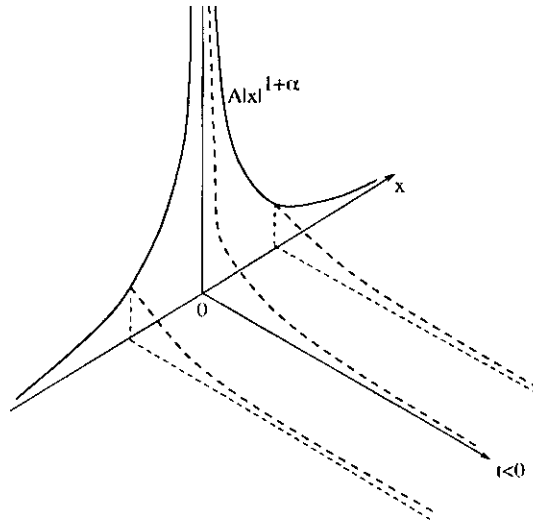


Figura 10.3: Función  $\mathcal{U}(x, t)$  cuando  $\alpha < -1$ .

**Teorema 10.11**

La solución de  $(P)_{-1,m}$  es

$$\mathcal{U}(x, t) = A, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in \mathbb{R}. \quad \square$$

A continuación precisamos la tasa de decaimiento expresada en (10.15)

cuando  $\boxed{-1 < \alpha < \frac{1}{m-1}}$ .

**Teorema 10.12**

Si  $-1 < \alpha < \frac{1}{m-1}$  entonces la solución de  $(P)_{\alpha,m}$  verifica

$$\mathcal{U}(x, t) \sim -\mathcal{S}(x, -t) \quad \text{si } t \rightarrow -\infty.$$

Consecuentemente,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathcal{U}(x, t)(-t)^{\frac{1}{m-1}} = (m-1) \left( \frac{|x|^m}{Rm^m} \right)^{\frac{1}{m-1}}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

**Demostración.**

A partir de (10.19), para todo  $y \in \Omega(x, t)$ , se da el siguiente comportamiento asintótico:

$$|y| \sim \text{Rm}(|1 + \alpha|A)^{m-1}|y|^{\alpha(m-1)}(-t) \quad \text{si } t \rightarrow -\infty,$$

es decir,

$$|y|^{1-\alpha(m-1)} \sim \text{Rm}(|1 + \alpha|A)^{m-1}(-t) \quad \text{si } t \rightarrow -\infty.$$

Consecuentemente, para todo  $y \in \Omega(x, t)$  se tiene

$$|y| \sim \left[ \text{Rm}(|1 + \alpha|A)^{m-1}(-t) \right]^{\frac{1}{1-\alpha(m-1)}} \quad \text{si } t \rightarrow -\infty.$$

De esta forma, para estos  $y$  se verifica

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= A|y|^{1+\alpha} \left[ 1 + \text{R}(m-1)|1 + \alpha|^m A^{m-1} \frac{(-t)}{|y|^{1-\alpha(m-1)}} \right] \\ &\sim \left( 1 + \frac{m-1}{m}|1 + \alpha| \right) A \left[ \text{Rm}(|1 + \alpha|A)^{m-1}(-t) \right]^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}} \quad \text{si } t \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

El resultado se obtiene a partir de (10.17) y (10.20) teniendo en cuenta que

$$\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha(m-1)} > 0 > -\frac{1}{m-1}. \quad \square$$

La información anterior puede ser, aún, más precisa. Concretamente,

**Teorema 10.13**

Para  $-1 < \alpha < \frac{1}{m-1}$  la solución de  $(P)_{\alpha, m}$  verifica

$$\mathcal{U}(x, t) = \begin{cases} -\mathcal{S}(x, -t) & \text{si } t < -\tau(x, t) \\ \mathcal{W}(x, t) & \text{si } -\tau(x, t) \leq t \leq 0 \end{cases}, \quad x \neq 0 \quad (10.25)$$

y

$$\mathcal{U}(0, t) = 0, \quad t \leq 0$$

siendo

$$\mathcal{W}(x, t) = A \left[ |x| - \text{Rm}((1 + \alpha)A|y_{\min}(x, t)|^\alpha)^{m-1}(-t) \right]^{1+\alpha}$$

$$+R(m-1)((1+\alpha)A|y_{\min}(x,t)|^\alpha)^m(-t)$$

y

$$\tau(x,t) = \frac{|x|}{Rm((1+\alpha)A|y_{\min}(x,t)|^\alpha)^{m-1}}.$$

En particular, para  $\alpha = 0$ , se tiene

$$\mathcal{U}(x,t) = \begin{cases} -\mathcal{S}(x,-t), & t < -\frac{|x|}{RmA^{m-1}} \\ A|x| + RA^m t, & -\frac{|x|}{RmA^{m-1}} \leq t \leq 0 \end{cases}$$

### **Demostración.**

Por (10.14) ya conocemos la evolución de  $x = 0$ . Por tanto, sólo consideraremos valores de  $x \neq 0$ . La definición de  $\phi$  determina

$$\mathcal{U}(x,t) = \phi(y_{\min}; x, t) = A|y_{\min}(x,t)|^{1+\alpha} - \mathcal{S}(x - y_{\min}(x,t), -t)$$

por lo que caben dos posibilidades:

1.  $y_{\min}(x,t) \neq 0 \Rightarrow y_{\min}(x,t) \in \Omega(x,t)$ . Por tanto,

$$|y_{\min}(x,t)| = |x| - Rm((1+\alpha)A|y_{\min}(x,t)|^\alpha)^{m-1}(-t),^8$$

de donde

$$\mathcal{U}(x,t) = \varphi(y_{\min}(x,t)) = \mathcal{W}(x,t).$$

2.  $y_{\min}(x,t) = 0$ , en cuyo caso

$$\mathcal{U}(x,t) = -\mathcal{S}(x,-t).$$

Como se verifica

$$\mathcal{W}(x,t) = -\mathcal{S}(x,-t) \Leftrightarrow t = -\tau(x,t)$$

con

$$\mathcal{W}(x,\tau(x,t)) = -\mathcal{S}(x,-\tau(x,t)) = \frac{m-1}{m}(1+\alpha)A|y_{\min}(x,t)|^\alpha|x|,$$

---

<sup>8</sup>Véase el comentario de la nota 7.

el resultado se sigue de la relación

$$\mathcal{U}(x, t) = \min\{\mathcal{W}(x, t), -\mathcal{S}(x, -t)\},$$

teniendo en cuenta que

$$\begin{cases} \mathcal{W}(x, t) < -\mathcal{S}(x, -t) & \text{si } -\tau(x, t) < t \leq 0 \\ \mathcal{W}(x, t) > -\mathcal{S}(x, -t) & \text{si } t < -\tau(x, t). \end{cases}$$

Para el caso  $\alpha = 0$  basta observar que

$$|y_{\min}(x, t)| = |x| - \text{RmA}^{m-1}(-t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \leq 0$$

de donde se sigue el resultado.  $\square$

#### Observación 10.14

En el caso  $\alpha = 0$  se pueden particularizar algunas propiedades especialmente interesantes. En primer lugar, la función

$$\mathcal{W}(x, t) = A|x| + \text{RA}^m t, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in \mathbb{R}$$

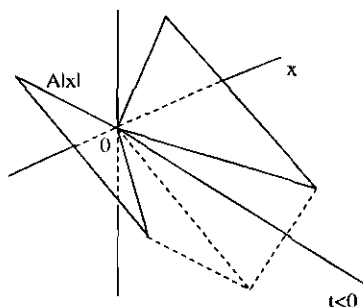


Figura 10.4: Función  $\mathcal{W}(x, t) = A|x| + \text{RA}^m t$ .

es solución de viscosidad del problema  $(P)_{0,m}$ . En efecto, como  $\mathcal{W}$  es una función diferenciable en  $(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$  verificando

$$(\nabla \mathcal{W}(x, t), \mathcal{W}_t(x, t)) = \left( A \frac{x}{|x|}, \text{RA}^m \right), \quad x \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

entonces

$$\mathcal{W}_t(x, t) - \text{R}|\nabla \mathcal{W}(x, t)|^m = 0, \quad x \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Por otra parte, para  $x = 0$  y  $t \in \mathbb{R}$ , se verifica

$$D^+\mathcal{W}(0, t) = \emptyset \quad \text{y} \quad D^-\mathcal{W}(0, t) = \overline{\mathbf{B}}_A(0) \times \mathbb{R}A^m$$

pues si  $(p_1, p_2) \in D^-\mathcal{W}(0, t)$  entonces

$$\begin{aligned} A|y| + \mathbb{R}A^m s &= \mathcal{W}(y, s) \geq \mathcal{W}(0, t) + p_1 \cdot y + p_2(s - t) + o(|y| + |s - t|) \\ &= \mathbb{R}A^m t + p_1 \cdot y + p_2(s - t) + o(|y| + |s - t|), \end{aligned}$$

es decir

$$A|y| + \mathbb{R}A^m(s - t) \geq p_1 \cdot y + p_2(s - t) + o(|y| + |s - t|).$$

En particular, para  $y = 0$ , se verifica

$$\mathbb{R}A^m(s - t) \geq p_2(s - t) + o(|s - t|).$$

Dividiendo por  $s - t$  y haciendo tender primero  $s \rightarrow t$  con  $s > t$  y luego  $s \rightarrow t$  con  $s < t$  se obtiene que  $p_2 = \mathbb{R}A^m$ . Por tanto,

$$A|y| + \mathbb{R}A^m(s - t) \geq p_1 \cdot y + \mathbb{R}A^m(s - t) + o(|y| + |s - t|). \quad (10.26)$$

La elección  $s = t$  en (10.26) determina

$$A|y| \geq p_1 \cdot y + o(|y|)$$

que, junto con la propiedad,

$$A|y| \geq p_1 \cdot y + o(|y|) \Leftrightarrow |p_1| \leq A$$

conduce al resultado deseado:

$$p_2 - \mathbb{R}|p_1|^m = \mathbb{R}(A^m - |p_1|^m) \geq 0, \quad (p_1, p_2) \in D^-\mathcal{W}(0, t).$$

Además, se verifica:

1.  $\mathcal{W}(x, t) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq -\frac{|x|}{\mathbb{R}A^{m-1}}$ .

2. La función  $\mathcal{W}$  no es diferenciable en  $x = 0$  para ningún  $t \in \mathbb{R}$ .

Por otro lado, como hemos visto en el Teorema 10.13, la función

$$\mathcal{U}(x, t) = \begin{cases} -\mathcal{S}(x, -t), & |x| < -\text{Rm}A^{m-1}t \\ A|x| + \text{R}A^m t, & |x| \geq -\text{Rm}A^{m-1}t \end{cases}$$

con  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $t \in \mathbb{R}$  es solución de viscosidad de  $(P)_{0,m}$ . Además

$$\mathcal{U} \in \mathcal{C}^1 \left( \left( (\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \right) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}_-) \right) \tag{10.27}$$

aunque  $u_0(x) = A|x|$  no es diferenciable en  $x = 0$ , siendo la regularidad anterior *maximal*. En efecto, la función

$$\mathcal{W}(x, t) = A|x| + \text{R}A^m t$$

verifica

$$\mathcal{W} \left( x, -\frac{|x|}{\text{Rm}A^{m-1}} \right) = -\mathcal{S} \left( x, \frac{|x|}{\text{Rm}A^{m-1}} \right) = \frac{m-1}{m} A|x|. \tag{10.28}$$

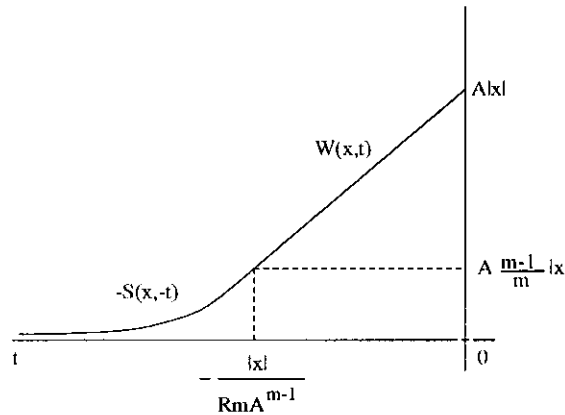
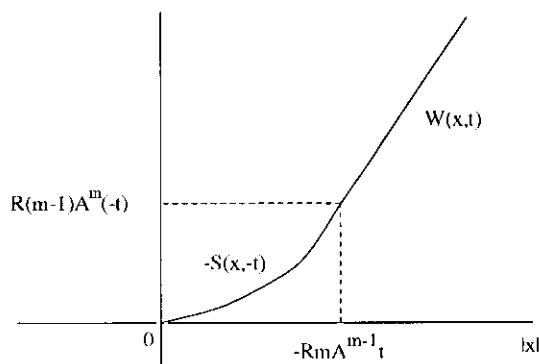


Figura 10.5: Función parcial  $t \mapsto \mathcal{U}(x, t)$ .

Denotando por  $r = |x|$  se prueba

$$\begin{cases} \mathcal{W}_t(x, t) = \text{R}A^m, & \mathcal{W}_{tt}(x, t) = 0 \\ |\mathcal{W}_r(x, t)| = A, & \mathcal{W}_{rr}(x, t) = 0 \end{cases}$$

Figura 10.6: Función parcial  $x \mapsto \mathcal{U}(x, t)$ .

y

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(-\mathcal{S}(x, -t)) = \left( \frac{|x|^m}{Rm^m(-t)^m} \right)^{\frac{1}{m-1}} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}(-\mathcal{S}(x, -t)) = \frac{m}{m-1} \left( \frac{|x|^m}{Rm^m(-t)^{2m-1}} \right)^{\frac{1}{m-1}} \\ \frac{\partial}{\partial r}(-\mathcal{S}(x, -t)) = m \left( \frac{|x|}{Rm^m(-t)} \right)^{\frac{1}{m-1}} \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2}(-\mathcal{S}(x, -t)) = \frac{m}{m-1} \left( \frac{|x|^{2-m}}{Rm^m(-t)} \right)^{\frac{1}{m-1}} \end{cases}.$$

Así, para  $t = -\frac{|x|}{RmA^{m-1}}$ , las relaciones

$$(-\mathcal{S})_t \left( x, \frac{|x|}{RmA^{m-1}} \right) = RA^m = \mathcal{W}_t \left( x, -\frac{|x|}{RmA^{m-1}} \right)$$

y

$$(-\mathcal{S})_r \left( x, \frac{|x|}{RmA^{m-1}} \right) = A = \mathcal{W}_r \left( x, -\frac{|x|}{RmA^{m-1}} \right)$$

muestran la regularidad complementaria de  $\mathcal{U}$  dada en (10.27).

Esta regularidad global es maximal. En efecto,  $\mathcal{U} \notin \mathcal{C}^2$  pues

$$(-\mathcal{S})_{rr} \left( x, \frac{|x|}{\text{Rm}A^{m-1}} \right) > 0 = \mathcal{W}_{rr} \left( x, -\frac{|x|}{\text{Rm}A^{m-1}} \right).$$

No obstante, se verifica

$$\mathcal{U} \in \mathcal{C}^\omega \text{ si } t \leq -\frac{|x|}{\text{Rm}A^{m-1}}$$

(pues  $\mathcal{U}(x, t)$  coincide con  $-\mathcal{S}(x, -t)$  en esa región).

Ahora

$$\mathcal{U} \geq 0 \text{ en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$$

y, por tanto, es la única solución de  $(P)_{0,m}$  que *no cambia de signo*. Como ya hemos comentado anteriormente, el cambio de signo imposibilita, en cierto sentido, resultados de unicidad y, así, las funciones  $\mathcal{W}$  y  $\mathcal{U}$  son dos soluciones de viscosidad del problema  $(P)_{0,m}$ : mientras que  $\mathcal{U}$  es no negativa, la función  $\mathcal{W}$  toma valores positivos y negativos.  $\square$

Para el caso  $\alpha = \frac{1}{m-1}$  se tiene:

### Teorema 10.15

La solución de  $(P)_{\frac{1}{m-1},m}$  viene dada por

$$\mathcal{U}(x, t) = A|x|^{\frac{m}{m-1}} \left( \frac{\mathbf{T}_\infty}{\mathbf{T}_\infty - t} \right)^{\frac{1}{m-1}} = -\mathcal{S}(x, \mathbf{T}_\infty - t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in ]-\infty, \mathbf{T}_\infty[.$$

### Demostración.

Basta tener en cuenta que la solución regular  $\mathcal{U}$  obtenida en el Teorema 10.6 puede extenderse al dominio maximal  $\mathbb{R}^N \times ]-\infty, \mathbf{T}_\infty[$ .  $\square$

Completamos el rango de valores positivos de  $\alpha$  cuando  $\alpha > \frac{1}{m-1}$



**Teorema 10.16**

Si  $\alpha > \frac{1}{m-1}$  entonces la solución de  $(P)_{\alpha,m}$  verifica

$$\mathcal{U}(x,t) \sim -\mathcal{S}(x,-t) \text{ si } t \rightarrow -\infty.$$

Consecuentemente,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathcal{U}(x,t)(-t)^{\frac{1}{m-1}} = (m-1) \left( \frac{|x|^m}{\text{Rm}^m} \right)^{\frac{1}{m-1}}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

**Demostración.**

A partir de (10.19), para todo  $y \in \Omega(x,t)$ , se da el siguiente comportamiento asintótico:<sup>9</sup>

$$|x| \sim \text{Rm}((1+\alpha)A)^{m-1} |y|^{\alpha(m-1)}(-t) \text{ si } t \rightarrow -\infty,$$

es decir,

$$|y| \sim \left( \frac{|x|}{\text{Rm}((1+\alpha)A)^{m-1}(-t)} \right)^{\frac{1}{\alpha(m-1)}} \text{ si } t \rightarrow -\infty.$$

De esta forma, para estos  $y$  se verifica

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= A|y|^{1+\alpha} + \text{R}(m-1)((1+\alpha)A)^m |y|^{\alpha m} \\ &\sim A \left( \frac{|x|}{\text{Rm}((1+\alpha)A)^{m-1}(-t)} \right)^{\frac{1+\alpha}{\alpha(m-1)}} + (m-1) \left( \frac{|x|^m}{\text{Rm}^m(-t)} \right)^{\frac{1}{m-1}} \\ &= A \left( \frac{|x|}{\text{Rm}((1+\alpha)A)^{m-1}(-t)} \right)^{\frac{1+\alpha}{\alpha(m-1)}} - \mathcal{S}(x,-t) \sim -\mathcal{S}(x,-t) \text{ si } t \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

A partir de (10.17) y (10.20) se sigue

$$\mathcal{U}(x,t) = \min \left\{ -\mathcal{S}(x,-t), \min_{y \in \Omega(x,t)} \varphi(y) \right\} \sim -\mathcal{S}(x,-t) \text{ si } t \rightarrow -\infty. \quad \square$$

<sup>9</sup>Nótese que para  $y \in \Omega(x,t)$  ahora sólo tiene sentido  $\lim_{t \rightarrow -\infty} |y| = 0$ .

**Observación 10.17**

A diferencia del caso  $\alpha < -1$ , para  $\alpha > -1$  la función  $\mathcal{U}(x, t)$  tiene un comportamiento asintótico retrógrado uniforme en  $\alpha$  pero dependiente de cada  $x \in \mathbb{R}^N$ .  $\square$

Al igual que en la evolución positiva de los tiempos, podemos determinar la evolución exacta del punto  $x = 0$ .

**Teorema 10.18**

Para todo  $t \leq 0$  se verifica

$$\mathcal{U}(0, t; \alpha) = \begin{cases} C_{-\infty}(-t)^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}} & \text{si } \alpha < -1 \\ A & \text{si } \alpha = -1 \\ 0 & \text{si } \alpha > -1 \end{cases}$$

donde  $C_{-\infty}$  viene dada en (10.22).

**Demostración.**

Para el caso  $\alpha > -1$  basta ver (10.14). Si  $\alpha < -1$  entonces  $y_{\min}(0, t) \neq 0$ , por lo que éste viene dado por

$$-(1 + \alpha)A|y_{\min}(0, t)|^\alpha = \left( \frac{|y_{\min}(0, t)|}{\text{Rm}(-t)} \right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

Por tanto,

$$|y_{\min}(0, t)|^{\frac{1-\alpha(m-1)}{m-1}} = -(1 + \alpha)A(\text{Rm}(-t))^{\frac{1}{m-1}},$$

es decir,

$$|y_{\min}(0, t)| = \left[ \text{Rm}(-(1 + \alpha)A)^{m-1}(-t) \right]^{\frac{1}{1-\alpha(m-1)}},$$

luego, para  $t \leq 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(0, t) &= A|y_{\min}(0, t)|^{1+\alpha} \left[ 1 + \text{R}(m-1)(-1 + \alpha)^m A^{m-1} \frac{(-t)}{|y_{\min}(0, t)|^{1-\alpha(m-1)}} \right] \\ &= A \left( 1 - \frac{(m-1)(1 + \alpha)}{m} \right) \left[ \text{Rm}(-(1 + \alpha)A)^{m-1}(-t) \right]^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}} \end{aligned}$$

$$= (1 - \alpha(m-1)) \left[ \text{R}^{1+\alpha} (A m^\alpha)^m (-1 + \alpha)^{(1+\alpha)(m-1)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha(m-1)}} (-t)^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}. \quad \square$$

**Observación 10.19**

Nótese que

$$\lim_{\alpha \rightarrow -1} \mathcal{U}(0, t; \alpha) = A. \quad \square$$

Podemos ya sumarizar cómo se comporta la función  $\mathcal{U}$  en  $x = 0$  para cualquier valor de  $t \in \mathbb{R}$ :

1.  $\boxed{\alpha < -1} \Rightarrow \mathcal{U}(0, t) = \begin{cases} C_{-\infty} t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}, & t \leq 0 \\ +\infty, & t > 0. \end{cases}$
2.  $\boxed{\alpha = -1} \Rightarrow \mathcal{U}(0, t) = A, t \in \mathbb{R}.$
3.  $\boxed{-1 < \alpha < \frac{1}{m-1}} \Rightarrow \mathcal{U}(0, t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ C_{\infty} t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}, & t \geq 0. \end{cases}$
4.  $\boxed{\alpha = \frac{1}{m-1}} \Rightarrow \mathcal{U}(0, t) = \begin{cases} 0, & t \leq \mathbf{T}_{\infty} \\ +\infty, & t > \mathbf{T}_{\infty}. \end{cases}$

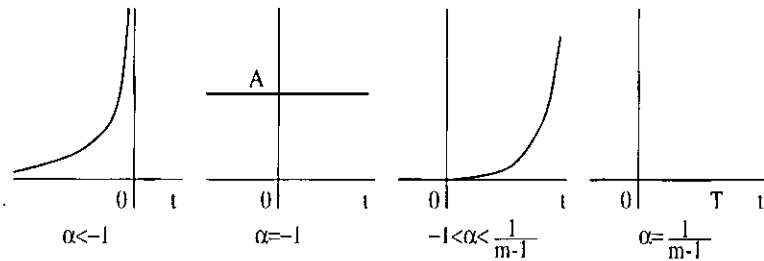


Figura 10.7: Evolución de  $\mathcal{U}(0, t)$  en función del tiempo.

Al igual que hicimos con la evolución positiva de los tiempos, presentamos un cuadro y un gráfico en el que se resume el comportamiento asintótico retrógrado de la solución de  $(P)_{\alpha, m}$  con  $m > 1$  según los valores de  $\alpha$ , donde ahora  $\tau_{-\infty}$  denota el *horizonte maximal inicial* para las soluciones de  $(P)_{\alpha, m}$  y

$$C_{-\infty} = (1 - \alpha(m-1)) \left[ R^{1+\alpha} (Am^\alpha)^m (-1 + \alpha)^{-(1+\alpha)(m-1)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha(m-1)}}.$$

$\alpha$	$\tau_{-\infty}$	Convergencias
$\alpha < -1$	$-\infty$	$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\mathcal{U}(x, t)}{(-t)^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}} = C_{-\infty}$
$\alpha = -1$	$-\infty$	$\mathcal{U}(x, t) = A, t \leq 0$
$-1 < \alpha < \frac{1}{m-1}$	$-\infty$	$\mathcal{U}(x, t) = \begin{cases} -\mathcal{S}(x, -t), & t \leq -\tau(x, t) \\ \mathcal{W}(x, -t), & -\tau(x, t) \leq t \leq 0 \end{cases}$
$\alpha = \frac{1}{m-1}$	$-\infty$	$\mathcal{U}(x, t) = -\mathcal{S}(x, T_{\infty} - t), t \leq 0$
$\alpha > \frac{1}{m-1}$	$-\infty$	$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\mathcal{U}(x, t)}{-\mathcal{S}(x, -t)} = 1$

Tabla 10.2: Comportamientos maximales iniciales ( $m > 1, t < 0$ ).

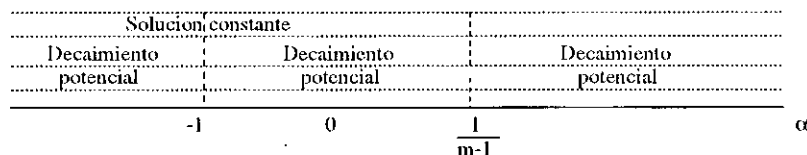


Figura 10.8: Comportamiento asintótico ( $t \rightarrow -\infty$ ).

Nótese que para  $\alpha \in ]-1, \frac{1}{m-1}[$  se da la coincidencia, en tiempo finito, de  $\mathcal{U}$  con el comportamiento de similaridad, cuando  $\alpha = \frac{1}{m-1}$  de hecho se da la coincidencia global de  $\mathcal{U}$  con  $\mathcal{S}$  y si  $\alpha > \frac{1}{m-1}$  la coincidencia de  $\mathcal{U}$  con el comportamiento de similaridad es asintótica. Además, todas las soluciones decaen a cero en  $-\infty$  salvo, obviamente, el caso constante así como el carácter cíclico del comportamiento asintótico retrógrado.

### 10.1.3 Evolución de datos $u_0$ que explotan en la frontera de compactos.

Siguiendo las líneas de este Capítulo esbozaremos nuestro estudio sobre datos  $u_0$  en la forma modelo

$$A|x|^{1+\alpha}, x \in \mathbb{R}^N \quad (A > 0)$$

para los valores extremales  $\alpha = -\infty$  y  $\alpha = +\infty$ . De esta forma, el caso de datos  $u_0$  que explotan dentro de compactos ( $\alpha = -\infty$ ) queda recogido en el

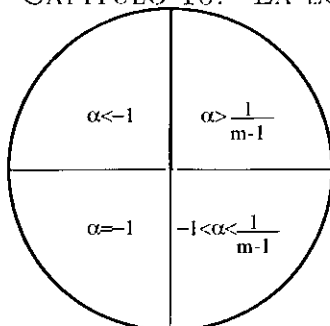


Figura 10.9: Carácter cíclico del comportamiento asintótico (regresivo).

siguiente resultado:

**Teorema 10.20**

Si

$$u_0(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } |x| < 1 \\ A & \text{si } |x| = 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

entonces la solución de Lax-Oleinik del problema

$$(P)_{-\infty, m} \begin{cases} u_t = R|\nabla u|^m & \text{en } \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

viene dada por

$$U(x, t) = \begin{cases} (m-1) \left( \frac{([1 - |x|]_+)^m}{Rm^m(-t)} \right)^{\frac{1}{m-1}}, & t < 0 \\ +\infty, & t > 0. \end{cases}$$

**Demostración.**

En primer lugar, nótese que el dato inicial anterior verifica

$$((u_0)_*)^* = (u_0)^* \quad \text{y} \quad ((u_0)^*)_* = (u_0)_* \quad \text{en } \mathbb{R}^N. \quad (10.29)$$

A la vista de (10.10), para  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $t > 0$ , se verifica

$$U(x, t) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \left\{ (u_0)^*(y) - (m-1) \left( \frac{|x-y|^m}{Rm^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{y \in \overline{\mathbf{B}}_1(0)} \left\{ (u_0)^*(y) - (m-1) \left( \frac{|x-y|^m}{\mathbf{Rm}^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\} \\
&= (u_0)^*(y_{\max}(x, t)) - (m-1) \left( \frac{|x - y_{\max}(x, t)|^m}{\mathbf{Rm}^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}} \text{ donde } y_{\max} \in \overline{\mathbf{B}}_1(0).
\end{aligned}$$

Por tanto,  $y_{\max}(x, t)$  es cualquier elemento de la bola  $\mathbf{B}_1(0)$ , lo que hace que

$$\mathcal{U}(x, t) = +\infty, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0.$$

De manera análoga, de (10.10) se tiene, ahora para  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $t < 0$

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(x, t) &= \inf_{y \in \mathbb{R}^N} \left\{ (u_0)_*(y) + (m-1) \left( \frac{|x-y|^m}{\mathbf{Rm}^m(-t)} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\} \\
&= \inf_{y \in \mathbb{R}^N} \left\{ (u_0)_*(y) + (m-1) \left( \frac{|x-y|^m}{\mathbf{Rm}^m(-t)} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\} \\
&= (u_0)_*(y_{\min}(x, t)) + (m-1) \left( \frac{|x - y_{\min}(x, t)|^m}{\mathbf{Rm}^m(-t)} \right)^{\frac{1}{m-1}}.
\end{aligned}$$

Claramente,

$$y_{\min}(x, t) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin \overline{\mathbf{B}}_1(0) \\ \frac{x}{|x|} & \text{si } x \in \overline{\mathbf{B}}_1(0) \end{cases}$$

lo que conduce a

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(x, t) &= \begin{cases} (u_0)_*(x) = 0 & \text{si } x \notin \overline{\mathbf{B}}_1(0) \\ (u_0)_*\left(\frac{x}{|x|}\right) + (m-1) \left( \frac{(1-|x|)^m}{\mathbf{Rm}^m(-t)} \right)^{m-1} & \text{si } x \in \overline{\mathbf{B}}_1(0) \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \overline{\mathbf{B}}_1(0) \\ (m-1) \left( \frac{(1-|x|)^m}{\mathbf{Rm}^m(-t)} \right)^{m-1} & \text{si } x \in \overline{\mathbf{B}}_1(0), \end{cases}
\end{aligned}$$

obteniéndose el resultado deseado.  $\square$

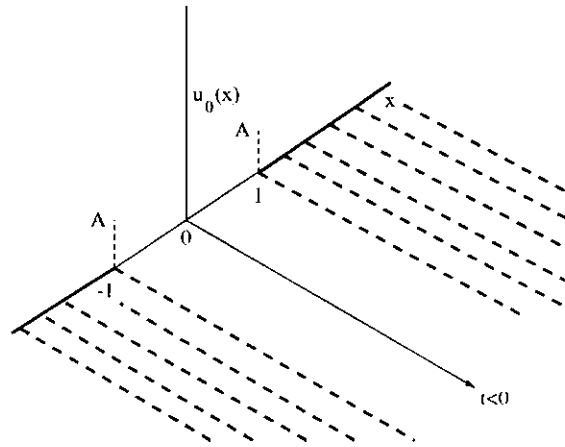


Figura 10.10: Función  $\mathcal{U}(x, t)$  cuando  $\alpha = -\infty$ .

### Observación 10.21

Nótese que

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \mathcal{U}(x, t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases} = (u_0)_*(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad \square$$

El caso relativo a datos  $u_0$  que *explotan fuera de compactos*, que se correspondería con la elección  $\alpha = +\infty$ , viene ahora dado por:

### Teorema 10.22

*La solución de Lax-Oleinik del problema*

$$(P)_{+\infty, m} \begin{cases} u_t = R|\nabla u|^m & \text{en } \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

donde

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1 \\ A & \text{si } |x| = 1 \\ +\infty & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

viene dada por

$$\mathcal{U}(x, t) = \begin{cases} (m-1) \left( \frac{(|x|-1)_+^m}{Rm^m(-t)} \right)^{\frac{1}{m-1}}, & t < 0 \\ +\infty, & t > 0. \end{cases}$$

**Demostración.**

Como  $u_0$  sigue verificando (10.29), basta argumentar como en el Teorema 10.20 teniendo en cuenta que ahora  $y_{\max}(x, t)$  es cualquier elemento que esté fuera de la bola  $\mathbf{B}_1(0)$  mientras que

$$y_{\min}(x, t) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \overline{\mathbf{B}}_1(0) \\ \frac{x}{|x|} & \text{si } x \notin \overline{\mathbf{B}}_1(0). \quad \square \end{cases}$$

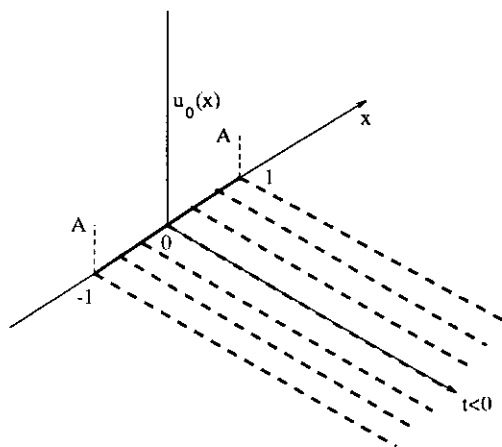


Figura 10.11: Función  $\mathcal{U}(x, t)$  cuando  $\alpha = +\infty$ .

**Observación 10.23**

Nótese ahora que también

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \mathcal{U}(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq 1 \\ +\infty & \text{si } |x| > 1 \end{cases} = (u_0)_*(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad \square$$

**Observación 10.24**

Con los Teoremas 10.20 y 10.22 se reafirma el carácter *cíclico* comentado en las Subsecciones anteriores.  $\square$



### 10.1.4 Generalizaciones.

Podemos extender el estudio anterior al problema más general

$$(P) \begin{cases} u_t = H(\nabla u) & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

para datos iniciales  $u_0$  verificando la condición

$$\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{u_0(x)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} = \ell \geq 0$$

con  $m > 1$  en el que, con el fin de simplificar, sólo hemos considerado el problema para tiempos positivos.<sup>10</sup>

#### Corolario 10.25

*Supongamos las condiciones*

$$H(p) \leq R|p|^m + k_2, \quad p \in \mathbb{R}^N$$

con  $k_2 \in \mathbb{R}$  y

$$u_0(x) \leq A|x|^{1+\alpha} + d_2, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

con  $A > 0$ ,  $d_2 \in \mathbb{R}$  y  $-1 < \alpha < \frac{1}{m-1}$ . Entonces cualquier solución  $u$  de (P) verifica para cada  $x \in \mathbb{R}^N$ :

$$\begin{cases} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t} \leq k_2 & \text{si } -1 < \alpha < 0 \\ \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t} \leq C_\infty(A, 0, R, m) + k_2 & \text{si } \alpha = 0 \\ \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}} \leq C_\infty(A, \alpha, R, m) & \text{si } 0 < \alpha < \frac{1}{m-1}. \end{cases}$$

#### Demostración.

Basta tener en cuenta la relación

$$u(x, t) \leq \mathcal{U}(x, t; v_0(\cdot)) + k_2 t + d_2, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

<sup>10</sup>El problema retrógrado se abordaría de forma parecida.

siendo  $\mathcal{U}(x, t; v_0(\cdot))$  la solución del problema  $(P)_{\alpha, m}^+$  para el dato inicial

$$v_0(x) = A|x|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

El resultado se sigue de la expresión

$$\mathcal{U}(x, t) \sim C_\infty t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}} \quad \text{si } t \rightarrow +\infty$$

(véase el Teorema 10.2).  $\square$

### Corolario 10.26

*Supongamos las condiciones*

$$H(p) \geq R|p|^m + k_1, \quad p \in \mathbb{R}^N$$

con  $k_1 \in \mathbb{R}$  y

$$u_0(x) \geq A|x|^{1+\alpha} + d_1, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

con  $A > 0$ ,  $d_1 \in \mathbb{R}$  y  $-1 < \alpha < \frac{1}{m-1}$ . Entonces cualquier solución  $u$  de (P) verifica para cada  $x \in \mathbb{R}^N$ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t} \geq k_1 & \text{si } -1 < \alpha < 0 \\ \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t} \geq C_\infty(A, 0, R, m) + k_1 & \text{si } \alpha = 0 \\ \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}} \geq C_\infty(A, \alpha, R, m) & \text{si } 0 < \alpha < \frac{1}{m-1}. \end{array} \right.$$

### Demostración.

Basta tener en cuenta que ahora

$$u(x, t) \geq \mathcal{U}(x, t; v_0(\cdot)) + k_1 t + d_1, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

siendo  $\mathcal{U}(x, t; v_0(\cdot))$  la solución del problema  $(P)_{\alpha, m}^+$  para el dato inicial

$$v_0(x) = A|x|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Como

$$\mathcal{U}(x, t) \sim C_\infty t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}} \quad \text{si } t \rightarrow +\infty,$$

el resultado se sigue de forma inmediata.  $\square$

**Corolario 10.27**

Si

$$H(p) = R|p|^m + k, \quad p \in \mathbb{R}^N$$

con  $k \in \mathbb{R}$  y

$$A|x|^{1+\alpha} + d_1 \leq u_0(x) \leq A|x|^{1+\alpha} + d_2, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

con  $A > 0$ ,  $d_1 \leq d_2$  y  $-1 < \alpha < \frac{1}{m-1}$ , entonces cualquier solución  $u$  de (P) verifica para cada  $x \in \mathbb{R}^N$ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t} = k & \text{si } -1 < \alpha < 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t} = C_\infty(A, 0, R, m) + k & \text{si } \alpha = 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}} = C_\infty(A, \alpha, R, m) & \text{si } 0 < \alpha < \frac{1}{m-1}. \quad \square \end{array} \right.$$

**Corolario 10.28**

Si

$$H(p) = R|p|^m + k, \quad p \in \mathbb{R}^N$$

con  $k \in \mathbb{R}$  y

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{u_0(x)}{|x|^{1+\alpha}} = A > 0 \quad (10.30)$$

con  $A > 0$  y  $-1 < \alpha < \frac{1}{m-1}$ , entonces para cualquier solución  $u$  de (P) y cada  $x \in \mathbb{R}^N$  se tiene que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t} = k & \text{si } -1 < \alpha < 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t} = C_\infty(A, 0, R, m) + k & \text{si } \alpha = 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}} = C_\infty(A, \alpha, R, m) & \text{si } 0 < \alpha < \frac{1}{m-1}. \end{array} \right.$$

**Demostración.**

De (10.30) se sigue que para cada  $\varepsilon > 0$  existen dos constantes  $d_1^\varepsilon$  y  $d_2^\varepsilon$  con  $d_1^\varepsilon \leq d_2^\varepsilon$  tales que

$$(A - \varepsilon)|x|^{1+\alpha} + d_1^\varepsilon \leq u_0(x) \leq (A + \varepsilon)|x|^{1+\alpha} + d_2^\varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

De esta forma,

$$\mathcal{U}(x, t; v_0^{(1)}(\cdot)) + kt + d_1^\varepsilon \leq u(x, t) \leq \mathcal{U}(x, t; v_0^{(2)}(\cdot)) + kt + d_2^\varepsilon, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

siendo  $\mathcal{U}(x, t; v_0^{(i)}(\cdot))$  las soluciones respectivas del problema  $(P)_{\alpha, m}^+$  para los datos iniciales

$$v_0^{(1)}(x) = (A - \varepsilon)|x|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

y

$$v_0^{(2)}(x) = (A + \varepsilon)|x|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Como para  $t \rightarrow +\infty$  se verifica

$$\mathcal{U}(x, t; v_0^{(1)}(\cdot)) \sim C_\infty(A - \varepsilon, \alpha, R, m)t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}$$

y

$$\mathcal{U}(x, t; v_0^{(2)}(\cdot)) \sim C_\infty(A + \varepsilon, \alpha, R, m)t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}},$$

obtenemos el resultado sin más que hacer tender  $\varepsilon \rightarrow 0$ .  $\square$

**Corolario 10.29**

*Si se verifican las condiciones*

$$\lim_{|p| \rightarrow +\infty} \frac{H(p)}{|p|^m} = R > 0 \tag{10.31}$$

y

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{u_0(x)}{|x|^{1+\alpha}} = A > 0 \tag{10.30}$$

con  $A > 0$  y  $0 < \alpha < \frac{1}{m-1}$ , entonces para cualquier solución  $u$  de (P) y cada  $x \in \mathbb{R}^N$  se tiene

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}} = C_\infty(A, \alpha, R, m).$$

**Demostración.**

De (10.31) y (10.30) se sigue que para cada  $\varepsilon > 0$  existen constantes  $k_1^\varepsilon$ ,  $k_2^\varepsilon$ ,  $d_1^\varepsilon$  y  $d_2^\varepsilon$  con  $k_1^\varepsilon \leq k_2^\varepsilon$  y  $d_1^\varepsilon \leq d_2^\varepsilon$  tales que

$$(R - \varepsilon)|p|^m + k_1^\varepsilon \leq H(p) \leq (R + \varepsilon)|p|^m + k_2^\varepsilon, \quad p \in \mathbb{R}^N$$

y

$$(A - \varepsilon)|x|^{1+\alpha} + d_1^\varepsilon \leq u_0(x) \leq (A + \varepsilon)|x|^{1+\alpha} + d_2^\varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Luego,

$$\begin{aligned} & \mathcal{U}(x, t; H_1(\cdot), v_0^{(1)}(\cdot)) + k_1^\varepsilon t + d_1^\varepsilon \leq u(x, t) \\ & \leq \mathcal{U}(x, t; H_2(\cdot), v_0^{(2)}(\cdot)) + k_2^\varepsilon t + d_2^\varepsilon, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

siendo  $\mathcal{U}(x, t; H_i(\cdot), v_0^{(i)}(\cdot))$  las soluciones respectivas del problema  $(P)_{\alpha, m}^+$  para los hamiltonianos

$$H_1(p) = (R - \varepsilon)|p|^m, \quad p \in \mathbb{R}^N$$

y

$$H_2(p) = (R + \varepsilon)|p|^m, \quad p \in \mathbb{R}^N$$

y los datos iniciales

$$v_0^{(1)}(x) = (A - \varepsilon)|x|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

y

$$v_0^{(2)}(x) = (A + \varepsilon)|x|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Como para  $t \rightarrow +\infty$  se verifica

$$\mathcal{U}(x, t; H_1(\cdot), v_0^{(1)}(\cdot)) \sim C_\infty(A - \varepsilon, \alpha, R - \varepsilon, m)t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}$$

y

$$\mathcal{U}(x, t; H_2(\cdot), v_0^{(2)}(\cdot)) \sim C_\infty(A + \varepsilon, \alpha, R + \varepsilon, m)t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}},$$

entonces la relación

$$\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha(m - 1)} \begin{cases} > 1 & \text{si } 0 < \alpha < \frac{1}{m-1} \\ \leq 1 & \text{si } -1 \leq \alpha \leq 0 \end{cases}$$

determina el resultado sin más que hacer tender  $\varepsilon \rightarrow 0$ .  $\square$

**Observación 10.30**

En el caso en que  $-1 < \alpha \leq 0$  sólo podemos decir que para cada  $\varepsilon > 0$  existen dos constantes  $k_1^\varepsilon$  y  $k_2^\varepsilon$  con  $k_1^\varepsilon \leq k_2^\varepsilon$  tales que

$$C_\infty(A - \varepsilon, 0, R - \varepsilon, m) + k_1^\varepsilon \leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t} \\ \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t} \leq C_\infty(A + \varepsilon, 0, R + \varepsilon, m) + k_2^\varepsilon \quad \text{si } \alpha = 0$$

y

$$k_1^\varepsilon \leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t} \leq k_2^\varepsilon \quad \text{si } -1 < \alpha < 0. \quad \square$$

## 10.2 Hamiltonianos con crecimiento lineal.

### 10.2.1 El problema de valor inicial.

De nuevo, argumentamos sobre el problema modelo

$$(P)_{\alpha,1}^+ \begin{cases} u_t = R|\nabla u| & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = A|x|^{1+\alpha}, & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

donde  $A > 0$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La solución  $\mathcal{U}(x, t) = \mathcal{U}(x, t; R, A, \alpha)$  de  $(P)_{\alpha,1}^+$  coincide con la fórmula de Lax-Oleinik:

$$\mathcal{U}(x, t) = \sup_{y \in \overline{B}_{Rt}(x)} u_0(y) = A \sup_{|y-x| \leq Rt} |y|^{1+\alpha}.$$

Para la elección  $y = x$  se obtiene que

$$\mathcal{U}(x, t) \geq A|x|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Sea  $y_{\max} = y_{\max}(x, t) \in \overline{B}_{Rt}(x)$  tal que

$$u_0(y_{\max}) \geq u_0(y), \quad y \in \overline{B}_{Rt}(x).$$

Como<sup>11</sup>

$$\nabla u_0(y) = (1 + \alpha)A|y|^\alpha \frac{y}{|y|}$$

<sup>11</sup>Nótese que  $\nabla u_0(y)$  está definido para  $y \in \mathbb{R}^N$  si  $\alpha > 0$  y para  $y \neq 0$  si  $\alpha \leq 0$ .

el único punto crítico de  $u_0$  es  $y^* = 0$  cuando  $\alpha > 0$ . Nótese que

$$u_0(0) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < -1 \\ A & \text{si } \alpha = -1 \\ 0 & \text{si } \alpha > -1. \end{cases} \quad (10.32)$$

Veamos cómo viene determinada la solución del problema en función del exponente  $\alpha$ .

**Teorema 10.31**

Para cada  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $t \geq 0$ , la solución del problema  $(P)_{\alpha,1}^+$  es

$$\mathcal{U}(x, t) = \begin{cases} A (|x| - Rt)_+^{1+\alpha} & \text{si } \alpha < -1 \\ A & \text{si } \alpha = -1 \\ A(|x| + Rt)^{1+\alpha} & \text{si } \alpha > -1. \end{cases} \quad (10.33)$$

**Demostración.**

Distinguimos varios casos:

1. Si  $\alpha < -1$  consideramos, a su vez, dos regiones:

- Si  $|x| \leq Rt$  entonces  $0 \in \overline{\mathbf{B}}_{Rt}(x)$  por lo que  $y_{\max} = 0$ . Luego  $\mathcal{U}(x, t) = +\infty$ .

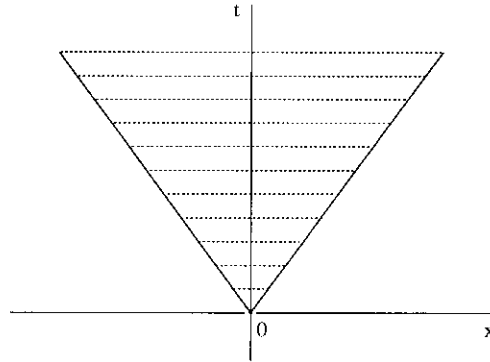


Figura 10.12:  $\mathcal{U}(x, t) = +\infty$  si  $|x| \leq Rt$ .

- Si  $|x| > Rt$  entonces  $0 \notin \overline{\mathbf{B}}_{Rt}(x)$  y como  $u_0(y_1) \geq u_0(y_2)$  si  $|y_1| \leq |y_2|$ , se verifica que el máximo se alcanza en la frontera, es decir,

$$|y_{\max} - x| = Rt$$

de donde

$$|y_{\max}| = |x| - Rt$$

y, consecuentemente,

$$\mathcal{U}(x, t) = A(|x| - Rt)^{1+\alpha}.$$

2. Si  $\alpha = -1$ , se trata del caso  $u_0$  constante, por lo que el resultado es inmediato.
3. Si  $\alpha > -1$ , como  $u_0(0) = 0$  y  $u_0(y_1) \leq u_0(y_2)$  si  $|y_1| \leq |y_2|$ , entonces el máximo se alcanza en la frontera de  $\mathbf{B}_{Rt}(x)$ , es decir,

$$|y_{\max} - x| = Rt$$

de donde se obtiene

$$|y_{\max}| = |x| + Rt. \quad \square$$

**Observación 10.32**

Para el caso  $\alpha < -1$  se tiene

$$\mathcal{U}(x, t) = +\infty \text{ si } |x| \leq Rt,$$

que expresa cómo a se propaga la explosión inicial del punto  $x = 0$  a lo largo del tiempo a través del cono de dependencia (véase la Observación 6.4).  $\square$

Veamos un gráfico en el que se resume el comportamiento asintótico de la solución de  $(P)_{\alpha,1}^+$  según los diversos valores de  $\alpha$ .

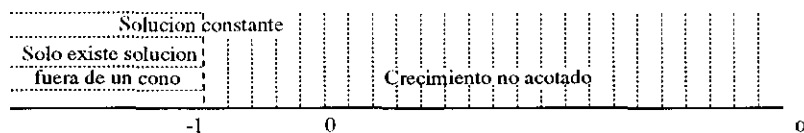


Figura 10.13: Comportamiento asintótico ( $t \rightarrow +\infty$ ).



Para el problema global

$$(P)_{\alpha,1} \begin{cases} u_t - R|\nabla u| = 0 & \text{en } \boxed{\mathbb{R}^N \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})} \\ u(x, 0) = \underline{A|x|^{1+\alpha}}, & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

la fórmula de Lax-Oleinik viene determinada por

$$\mathcal{U}(x, t) = \begin{cases} \sup_{y \in \overline{\mathbf{B}}_{Rt}(0)} A|x - yt|^{1+\alpha} = A \sup_{y \in \overline{\mathbf{B}}_{Rt}(x)} |y|^{1+\alpha}, & x \in \mathbb{R}^N, t \geq 0 \\ \inf_{y \in \overline{\mathbf{B}}_{R(-t)}(0)} A|x - yt|^{1+\alpha} = A \inf_{y \in \overline{\mathbf{B}}_{R(-t)}(x)} |y|^{1+\alpha}, & x \in \mathbb{R}^N, t \leq 0 \end{cases} \quad (10.34)$$

(véanse los comentarios de la Subsección 10.1.2). Por tanto,

### Corolario 10.33

Para cada  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $t \in \mathbb{R}$ , la solución del problema  $(P)_{\alpha,1}$  es

$$\mathcal{U}(x, t) = \begin{cases} A(|x| - Rt)_+^{1+\alpha} & \text{si } \alpha < -1 \\ A & \text{si } \alpha = -1 \\ A(|x| + Rt)_+^{1+\alpha} & \text{si } \alpha > -1. \end{cases}$$

### Demostración.

Basta tener en cuenta que para  $t \leq 0$

$$\mathcal{U}(x, t) = A \inf_{y \in \overline{\mathbf{B}}_{R(-t)}(x)} |y|^{1+\alpha} = A|y_{\min}(x, t)|^{1+\alpha}$$

con  $y_{\min}(x, t) \in \overline{\mathbf{B}}_{R(-t)}(x)$ , obteniéndose

$$|y_{\min}(x, t)| = |x| - Rt \quad \text{si } \alpha < -1,$$

$$y_{\min}(x, t) \text{ es arbitrario si } \alpha = -1$$

y, para  $\alpha > -1$ ,

$$\begin{cases} y_{\min}(x, t) = 0 & \text{si } |x| \leq R(-t) \\ |y_{\min}(x, t)| = |x| + Rt & \text{si } |x| > R(-t). \quad \square \end{cases}$$

### 10.2.2 Evolución de datos $u_0$ que explotan en la frontera de compactos.

Como en el caso de hamiltonianos superlineales, podemos completar la exposición con los casos que ilustran la evolución de datos  $u_0$  que explotan en la frontera de un compacto, que se corresponderían con las elecciones  $\alpha = -\infty$  y  $\alpha = +\infty$  en la expresión

$$A|x|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (A > 0).$$

Este estudio queda recogido en los siguientes resultados:

#### Teorema 10.34

Si

$$u_0(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } |x| < 1 \\ A & \text{si } |x| = 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

entonces la solución de Lax-Oleinik del problema

$$(P)_{-\infty,1} \begin{cases} u_t = R|\nabla u| & \text{en } \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

viene dada por

$$\mathcal{U}(x, t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } |x| - Rt < 1 \\ 0 & \text{si } |x| - Rt > 1 \end{cases}$$

mientras que en los puntos  $(\hat{x}, \hat{t})$  tales que  $|\hat{x}| - R\hat{t} = 1$  se tiene

$$\mathcal{U}(\hat{x}, \hat{t}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \hat{t} < 0 \\ +\infty & \text{si } \hat{t} > 0. \end{cases}$$

Finalmente,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{U}(x, t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \quad y \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} \mathcal{U}(x, t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

#### Demostración.

Para  $t > 0$ , como se verifica

$$((u_0)_*)^*(x) = (u_0)^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

la fórmula de Lax–Oleinik viene dada por

$$\mathcal{U}(x, t) = \sup_{y \in \overline{\mathbf{B}}_{Rt}(x)} (u_0)^*(y), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0,$$

es decir, para  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $t > 0$ ,

$$\mathcal{U}(x, t) = (u_0)^*(y_{\max}(x, t)) \quad \text{con} \quad y_{\max}(x, t) \in \overline{\mathbf{B}}_{Rt}(x).$$

Distinguimos tres casos:

1. Si  $|x| \leq Rt$  entonces  $y_{\max}(x, t) = 0$ , luego  $\mathcal{U}(x, t) = +\infty$ .
2. Si  $Rt < |x| \leq Rt + 1$  entonces

$$y_{\max}(x, t) = \frac{|x| - Rt}{|x|} x.$$

Como

$$|y_{\max}(x, t)| = |x| - Rt < 1,$$

entonces  $\mathcal{U}(x, t) = +\infty$ .

3. Si  $|x| > Rt + 1$ , para cada  $y \in \overline{\mathbf{B}}_{Rt}(x)$  se verifica

$$|x| - |y| \leq |y - x| \leq Rt \Rightarrow |y| \geq |x| - Rt > 1.$$

Por tanto,

$$(u_0)^*(y) = 0, \quad y \in \overline{\mathbf{B}}_{Rt}(x) \Rightarrow \mathcal{U}(x, t) = 0.$$

Cuando  $t < 0$ , debido a

$$((u_0)^*)_{\star}(x) = (u_0)_{\star}(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

entonces

$$\mathcal{U}(x, t) = \inf_{y \in \overline{\mathbf{B}}_{R(-t)}(x)} (u_0)_{\star}(y) = (u_0)_{\star}(y_{\min}(x, t)), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t < 0.$$

Distinguimos los diversos casos que pueden presentarse:

1. Si  $|x| < Rt + 1$ , como para todo  $y \in \overline{\mathbf{B}}_{Rt}(x)$  se verifica

$$|y| - |x| \leq |y - x| \leq R(-t) \Rightarrow |y| \leq |x| + Rt < 1.$$

Luego

$$(u_0)_*(y) = +\infty, y \in \overline{\mathbf{B}}_{Rt}(x) \Rightarrow \mathcal{U}(x, t) = +\infty.$$

2. Si  $|x| \geq Rt + 1$  entonces

$$y_{\min}(x, t) = \frac{|x| - Rt}{|x|}x.$$

De esta forma, la propiedad

$$|y_{\min}(x, t)| = |x| - Rt \geq 1$$

implica

$$\mathcal{U}(x, t) = (u_0)_*(y_{\min}(x, t)) = 0. \quad \square$$

De forma análoga se muestra el siguiente resultado:

### Teorema 10.35

*La solución de Lax-Oleinik del problema*

$$(P)_{+\infty, 1} \begin{cases} u_t = R|\nabla u| & \text{en } \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

para

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1 \\ A & \text{si } |x| = 1 \\ +\infty & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

es

$$\mathcal{U}(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| + Rt < 1 \\ +\infty & \text{si } |x| + Rt > 1 \end{cases}$$

mientras que en los puntos  $(\hat{x}, \hat{t})$  tales que  $|\hat{x}| + R\hat{t} = 1$  se tiene

$$\mathcal{U}(\hat{x}, \hat{t}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \hat{t} < 0 \\ +\infty & \text{si } \hat{t} > 0. \end{cases}$$

Finalmente,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{U}(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1 \\ +\infty & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases} \quad y \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} \mathcal{U}(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq 1 \\ +\infty & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

**Demostración.**

Argumentando para  $t < 0$  (el razonamiento para  $t > 0$  es análogo), la prueba empleada en la demostración del Teorema 10.34 permite escribir

$$\mathcal{U}(x, t) = \inf_{y \in \overline{\mathbf{B}}_{R(-t)}(x)} (u_0)_*(y) = (u_0)_*(y_{\min}(x, t))$$

donde

$$\begin{aligned} |y_{\min}(x, t)| &= |x| + Rt \quad \text{si } |x| + Rt < 1, \\ y_{\min}(x, t) &= \frac{x}{|x|} \quad \text{si } |x| + Rt = 1 \end{aligned}$$

e

$$y_{\min}(x, t) \in \overline{\mathbf{B}}_{R(-t)}(x) \quad \text{arbitrario si } |x| + Rt > 1. \quad \square$$

**Observación 10.36**

Los casos considerados en los Teoremas 10.34 y 10.35 se refieren a datos  $u_0$  discontinuos para los que, por tanto, no puede haber unicidad. Sin embargo, las soluciones allí obtenidas  $\mathcal{U}_{-\infty,1}$  y  $\mathcal{U}_{+\infty,1}$ , respectivamente, son *únicas* en el sentido de las fórmulas de Lax–Oleinik, es decir:

1.  $\mathcal{U}_{-\infty,1}$  es solución fuerte de viscosidad del problema

$$(P)_{-\infty,1}^+ \begin{cases} u_t = R|\nabla u| & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = \begin{cases} +\infty & \text{si } |x| < 1 \\ A & \text{si } |x| = 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \end{cases}$$

y para cualquier otra subsolución  $u$  de  $(P)_{-\infty,1}^+$  se verifica

$$u^* = (\mathcal{U}_{-\infty,1})^* \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

2.  $\mathcal{U}_{-\infty,1}$  es solución fuerte de viscosidad del problema

$$(P)_{-\infty,1}^- \begin{cases} u_t = R|\nabla u| & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_- \\ u(x, 0) = \begin{cases} +\infty & \text{si } |x| < 1 \\ A & \text{si } |x| = 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1. \end{cases} \end{cases}$$

y para cualquier otra supersolución  $u$  de  $(P)_{-\infty,1}^-$  se verifica

$$u_* = (\mathcal{U}_{-\infty,1})_* \text{ en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_-.$$

3.  $\mathcal{U}_{+\infty,1}$  es solución fuerte de viscosidad del problema

$$(P)_{+\infty,1}^+ \begin{cases} u_t = R|\nabla u| & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1 \\ A & \text{si } |x| = 1 \\ +\infty & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \end{cases}$$

y para cualquier otra subsolución  $u$  de  $(P)_{+\infty,1}^+$  se verifica

$$u^* = (\mathcal{U}_{+\infty,1})^* \text{ en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

4.  $\mathcal{U}_{+\infty,1}$  es solución fuerte de viscosidad del problema

$$(P)_{+\infty,1}^- \begin{cases} u_t = R|\nabla u| & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_- \\ u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1 \\ A & \text{si } |x| = 1 \\ +\infty & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \end{cases}$$

y para cualquier otra supersolución  $u$  de  $(P)_{+\infty,1}^-$  se verifica

$$u_* = (\mathcal{U}_{+\infty,1})_* \text{ en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_-. \quad \square$$

**Observación 10.37**

Los casos extremales  $\alpha = -\infty$  y  $\alpha = +\infty$  pueden ser también abordados mediante argumentos de convergencia. Así, consideremos el problema aproximante

$$\begin{cases} u_t = R|\nabla u| & \text{en } \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \\ u(x, 0) = A|x|^{1+\alpha}, & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

cuya solución es, para  $\alpha < -1$ ,

$$\mathcal{U}_{\alpha,1}(x, t) = A([|x| - Rt]_+)^{1+\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si } |x| \leq Rt \\ A(|x| - Rt)^{1+\alpha} & \text{si } |x| > Rt. \end{cases}$$

Claramente se tiene que

$$\mathcal{V}(x, t) \doteq \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \mathcal{U}_{\alpha, 1}(x, t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } |x| - Rt < 1 \\ A & \text{si } |x| - Rt = 1 \\ 0 & \text{si } |x| - Rt > 1 \end{cases}$$

es una solución *discontinua* del problema

$$(P)_{-\infty, 1} \begin{cases} u_t = R|\nabla u| & \text{en } \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \\ u(x, 0) = \begin{cases} +\infty & \text{si } |x| < 1 \\ A & \text{si } |x| = 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1. \end{cases} \end{cases}$$

Nótese que la convergencia  $\alpha \rightarrow -\infty$  provoca una pérdida de la continuidad y, con ella, de la unicidad, aunque

$$\mathcal{V}^*(x, t) = \left\{ \begin{array}{ll} +\infty & \text{si } |x| - Rt \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| - Rt > 1 \end{array} \right\} = (\mathcal{U}_{-\infty, 1})^*(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0$$

es la única solución fuerte del problema  $(P)_{-\infty, 1}^+$  en el sentido relativo a soluciones discontinuas descrito anteriormente y

$$\mathcal{V}_*(x, t) = \left\{ \begin{array}{ll} +\infty & \text{si } |x| - Rt < 1 \\ 0 & \text{si } |x| - Rt \geq 1 \end{array} \right\} = (\mathcal{U}_{-\infty, 1})_*(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \leq 0$$

es la única solución de viscosidad del problema  $(P)_{-\infty, 1}^-$  en el sentido antes reseñado. Recuérdese que para todo  $x \in \mathbb{R}^N$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{V}^*(x, t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} \mathcal{V}_*(x, t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Cuando  $\alpha > -1$  se tiene

$$\mathcal{U}_{\alpha, 1}(x, t) = A([|x| + Rt]_+)^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in \mathbb{R},$$

lo que determina que

$$\mathcal{W}(x, t) \doteq \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mathcal{U}_{\alpha, 1}(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| + Rt < 1 \\ A & \text{si } |x| + Rt = 1 \\ +\infty & \text{si } |x| + Rt > 1 \end{cases}$$

sea una solución *discontinua* del problema

$$(P)_{+\infty,1} \begin{cases} u_t = R|\nabla u| & \text{en } \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \\ u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1 \\ A & \text{si } |x| = 1 \\ +\infty & \text{si } |x| > 1. \end{cases} \end{cases}$$

Análogamente a como ocurría en el caso anterior, la convergencia  $\alpha \rightarrow +\infty$  provoca una pérdida de la unicidad. Ahora

$$\mathcal{W}^*(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| + Rt < 1 \\ +\infty & \text{si } |x| + Rt \geq 1 \end{cases} = (\mathcal{U}_{+\infty,1})^*(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0$$

es la única solución del problema  $(P)_{+\infty,1}^+$  en el sentido anteriormente descrito, y

$$\mathcal{W}_*(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| + Rt \leq 1 \\ +\infty & \text{si } |x| + Rt > 1 \end{cases} = (\mathcal{U}_{+\infty,1})_*(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \leq 0$$

es la única solución, en el sentido precisado antes, de  $(P)_{+\infty,1}^-$ .  $\square$

### 10.2.3 Tránsito de hamiltonianos superlineales a lineales.

Parece natural estudiar la convergencia de la solución  $\mathcal{U}_{\alpha,m}$  del *problema global*

$$(P)_{\alpha,m} \begin{cases} u_t = R|\nabla u|^m & \text{en } \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \\ u(x, 0) = A|x|^{1+\alpha}, & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

cuando  $m \rightarrow 1$  en función de los diversos valores de  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

1.  $\boxed{\alpha < -1}$  Aquí sólo tiene sentido el comportamiento  $t \rightarrow -\infty$ . Al considerar  $m \rightarrow 1$  en

$$\mathcal{U}_{\alpha,m}(x, t) \sim C_{-\infty}(-t)^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}} \quad \text{para } t \rightarrow -\infty,$$

se obtiene, de forma heurística,

$$\lim_{m \rightarrow 1} \mathcal{U}_{\alpha,m}(x, t) \sim AR^{1+\alpha}(-t)^{1+\alpha} \quad \text{si } t \rightarrow -\infty,$$

acorde con el resultado del Corolario 10.33.



2.  $\boxed{\alpha = -1}$  De forma inmediata se verifica

$$\mathcal{U}_{-1,m}(x,t) \equiv A \equiv \mathcal{U}_{-1,1}(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

3.  $\boxed{\alpha > -1}$  Para el comportamiento  $t \rightarrow -\infty$  se tiene  $\alpha \in I_m^- = \mathbb{R}$  para cualquier  $m > 1$  y

$$\mathcal{U}_{\alpha,m}(x,t) = -\mathcal{S}_m(x,-t) \quad \text{si } t \leq -\tau(x,t)$$

donde

$$\mathcal{S}_m(z,s) \doteq -(m-1) \left( \frac{|z|^m}{\text{Rm}^m s} \right)^{\frac{1}{m-1}}, \quad z \in \mathbb{R}^N, \quad s > 0 \quad (10.35)$$

y

$$\tau(x,t) \doteq \frac{|x|}{\text{Rm}((1+\alpha)A|y_{\min}(x,t)|^{\alpha})^{m-1}}.$$

Por tanto

$$\mathcal{U}_{\alpha,m}(x,t) = k(m)|x|(\varphi(x,t))^{\frac{1}{m-1}} \quad \text{si } t \leq -\tau(x,t)$$

siendo

$$k(m) \doteq \frac{m-1}{m^{\frac{m}{m-1}}} \quad \text{y} \quad \varphi(x,t) \doteq \frac{|x|}{\text{R}(-t)}.$$

La propiedad

$$\lim_{m \rightarrow 1} m^{\frac{m}{m-1}} = e \quad (10.36)$$

(como es habitual  $e$  denota la base de los logaritmos neperianos) hace que se tenga

$$\lim_{m \rightarrow 1} k(m) = 0.$$

Como por otra parte

$$\lim_{m \rightarrow 1} (\varphi(x,t))^{\frac{1}{m-1}} = \begin{cases} 0, & |x| < \text{R}(-t) \\ 1, & |x| = \text{R}(-t) \\ +\infty, & |x| > \text{R}(-t) \end{cases}$$

entonces se verifica

$$\lim_{m \rightarrow 1} \mathcal{U}_{\alpha,m}(x,t) = 0 \quad \text{si } |x| \leq \text{R}(-t).$$

Para estudiar lo que ocurre cuando  $|x| > R(-t)$ , denotemos

$$\ell \doteq \lim_{m \rightarrow 1} \mathcal{U}_{\alpha, m}(x, t) = \frac{|x|}{e} \lim_{m \rightarrow 1} (m-1) \left( \frac{|x|}{R(-t)} \right)^{\frac{1}{m-1}}$$

donde hemos utilizado nuevamente la propiedad (10.36). De esta forma,

$$\begin{aligned} \ln \ell &= \ln \left( \frac{|x|}{e} \right) + \lim_{m \rightarrow 1} \left[ \ln(m-1) + \frac{1}{m-1} \ln \left( \frac{|x|}{R(-t)} \right) \right] \\ &= \ln \left( \frac{|x|}{e} \right) + \lim_{m \rightarrow 1} \frac{(m-1) \ln(m-1) + \ln \left( \frac{|x|}{R(-t)} \right)}{m-1} = +\infty \end{aligned}$$

puesto que

$$\lim_{m \rightarrow 1} (m-1) \ln(m-1) = 0.$$

Por tanto,

$$\lim_{m \rightarrow 1} \mathcal{U}_{\alpha, m}(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq R(-t) \\ +\infty & \text{si } |x| > R(-t) \end{cases}$$

conforme con el resultado (véase de nuevo el Corolario 10.33).

Por otra parte, como  $\alpha \in I_m = \left] -1, \frac{1}{m-1} \right[$  para  $m > 1$  verificando  $\alpha(m-1) < 1$ ,

entonces, a partir del Teorema 10.2, se verifica

$$\mathcal{U}_{\alpha, m}(x, t) \sim C_{\infty} t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}} \text{ para } t \rightarrow +\infty,$$

por lo que el límite  $m \rightarrow 1$  lleva, heurísticamente, a

$$\lim_{m \rightarrow 1} \mathcal{U}_{\alpha, m}(x, t) \sim AR^{1+\alpha} t^{1+\alpha} \text{ si } t \rightarrow +\infty,$$

resultado acorde al obtenido en el Corolario 10.33, pues

$$\mathcal{U}_{\alpha, 1}(x, t) \sim AR^{1+\alpha} t^{1+\alpha} \text{ si } t \rightarrow +\infty.$$

De hecho, las estimaciones locales del gradiente permiten probar la convergencia

$$\mathcal{U}_{\alpha, m} \rightarrow \mathcal{U}_{\alpha, 1} \text{ para } m \rightarrow 1$$

*uniformemente* en subconjuntos compactos.

Los casos  $\boxed{\alpha = -\infty}$  y  $\boxed{\alpha = +\infty}$  pueden ser también considerados en el estudio de la convergencia de hamiltonianos superlineales. Ahora los Teoremas 10.20 y 10.22 tienen un papel destacado. En efecto, recuérdese la expresión

$$\mathcal{U}_{-\infty, m}(x, t) = \begin{cases} (m-1) \left( \frac{([1-|x|]_+)^m}{Rm^m(-t)} \right)^{\frac{1}{m-1}}, & t < 0 \\ +\infty, & t > 0, \end{cases}$$

por lo que carece de sentido la convergencia para  $t > 0$ . Claramente,

$$\lim_{m \rightarrow 1} \mathcal{U}_{-\infty, m}(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } [1-|x|]_+ \leq R(-t) \\ +\infty & \text{si } [1-|x|]_+ > R(-t) \end{cases} \quad (t < 0)$$

que coincide exactamente con la función

$$\mathcal{U}_{-\infty, 1}(x, t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } |x| - Rt < 1 \\ 0 & \text{si } |x| - Rt \geq 1 \end{cases} \quad (t < 0)$$

(véase el Teorema 10.34), pues basta observar que al ser  $t < 0$ :

1. Si  $|x| - Rt < 1 \Rightarrow 1 - |x| > -Rt > 0 \Rightarrow [1 - |x|]_+ > -Rt > 0$ . Luego,

$$\lim_{m \rightarrow 1} \mathcal{U}_{-\infty, m}(x, t) = +\infty.$$

2. Si  $|x| - Rt \geq 1 \Rightarrow 1 - |x| \leq [1 - |x|]_+ \leq -Rt$ . Por tanto,

$$\lim_{m \rightarrow 1} \mathcal{U}_{-\infty, m}(x, t) = 0.$$

De forma análoga, si consideramos la función

$$\mathcal{U}_{+\infty, m}(x, t) = \begin{cases} -(m-1) \left( \frac{([|x|-1]_+)^m}{Rm^m(-t)} \right)^{\frac{1}{m-1}}, & t < 0 \\ +\infty, & t > 0 \end{cases}$$

nuevamente carece de sentido la convergencia para  $t > 0$ . Además,

$$\lim_{m \rightarrow 1} \mathcal{U}_{+\infty, m}(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } [ |x| - 1 ]_+ \leq R(-t) \\ +\infty & \text{si } [ |x| - 1 ]_+ > R(-t) \end{cases} \quad (t < 0)$$

que coincide, argumentando como en el caso anterior, con la función

$$\mathcal{U}_{+\infty,1}(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| + Rt \leq 1 \\ +\infty & \text{si } |x| + Rt > 1 \end{cases} \quad (t < 0)$$

(véase ahora el Teorema 10.35).  $\square$

### Observación 10.38

Podemos ratificar los resultados obtenidos en el estudio de los casos "extremos"  $\alpha = -\infty$  y  $\alpha = +\infty$  mediante un doble paso al límite.

1.  $\boxed{\alpha = -\infty}$  Aquí, " $u_0(x) = A|x|^{1+\alpha}$ " significa

$$u_0(x) = \begin{cases} +\infty, & |x| < 1 \\ A, & |x| = 1 \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Formemos la sucesión

$$\left\{ \alpha(m) \doteq -\frac{1}{m-1} \right\}_{1 < m < 2}.$$

Como para cada  $m \in ]1, 2[$  se verifica que  $\alpha(m) < -1$  entonces, por el Teorema 10.9 sabemos que la solución del problema

$$\begin{cases} u_t = R|\nabla u|^m & \text{en } \mathbb{R}^N \times ]-\infty, 0[ \\ u(x, 0) = A|x|^{1+\alpha(m)}, & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

verifica

$$\mathcal{U}(x,t) \sim C_{-\infty}(-t)^{\frac{1+\alpha(m)}{1-\alpha(m)(m-1)}} = C_{-\infty}(-t)^{-\frac{2-m}{2(m-1)}} \quad \text{si } t \rightarrow -\infty$$

donde la constante  $C_{-\infty} = C_{-\infty}(A, \alpha(m), R, m)$  está definida en (10.22). De esta forma, haciendo tender  $m \rightarrow 1$ , obtenemos

$$\lim_{m \rightarrow 1} \mathcal{U}_{\alpha(m),m}(x,t) = 0 \quad \text{si } t \rightarrow -\infty,$$

resultado acorde con el Corolario 10.33 puesto que, en este caso, la solución de Lax-Oleinik del problema  $(P)_{-\infty,1}$  es

$$\mathcal{U}_{-\infty,1}(x,t) = \begin{cases} +\infty, & |x| - Rt < 1 \\ 0, & |x| - Rt \geq 1 \end{cases}$$

2.  $\boxed{\alpha = +\infty}$  Ahora, con la expresión “ $u_0(x) = A|x|^{1+\alpha}$ ” queremos indicar

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ A, & |x| = 1 \\ +\infty, & |x| > 1. \end{cases}$$

Consideremos la sucesión

$$\left\{ \alpha(m) \doteq \frac{1}{m-1} \right\}_{m>1}.$$

A partir del Teorema 10.6, la solución del problema

$$\begin{cases} u_t = R|\nabla u|^m & \text{en } \mathbb{R}^N \times ]-\infty, \mathbf{T}_\infty^{(m)}[ \\ u(x, 0) = A|x|^{1+\alpha(m)}, & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

viene dada, para  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $-\infty < t < \mathbf{T}_\infty^{(m)}$ , por

$$\mathcal{U}_{\alpha(m),m}(x, t) = -\mathcal{S}_m(x, \mathbf{T}_\infty^{(m)} - t)$$

donde  $\mathcal{S}_m$  está definida en (10.35) y

$$\mathbf{T}_\infty^{(m)} \doteq \frac{1}{Rm^m} \left( \frac{m-1}{A} \right)^{m-1} \rightarrow \frac{1}{R} = \mathbf{T}_\infty^{(1)} \text{ si } m \rightarrow 1.$$

Por otro lado,

$$\lim_{m \rightarrow 1} A|x|^{1+\alpha(m)} = u_0(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ A, & |x| = 1 \\ +\infty, & |x| > 1. \end{cases}$$

En esta situación, la función límite

$$\mathcal{W}(x, t) \doteq \lim_{m \rightarrow 1} \mathcal{U}_{\alpha(m),m}(x, t)$$

estará definida para  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $-\infty < t < \frac{1}{R}$ . Por definición,

$$\mathcal{U}_{\alpha(m),m}(x, t) = (m-1) \left( \frac{|x|^m}{Rm^m (\mathbf{T}_\infty^{(m)} - t)} \right)^{\frac{1}{m-1}}$$

$$\begin{aligned}
&= (m-1) \left( \frac{|x|^m}{\left(\frac{m-1}{A}\right)^{m-1} - Rm^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}} = A \left( \frac{|x|^m}{1 - \frac{Rm^m A^{m-1} t}{(m-1)^{m-1}}} \right)^{\frac{1}{m-1}} \\
&= A|x| \left( \frac{|x|}{1 - Rt} \frac{1 - Rt}{1 - \frac{Rm^m A^{m-1} t}{(m-1)^{m-1}}} \right)^{\frac{1}{m-1}} \doteq A|x| (\Psi(x, t) \varphi_m(t))^{\frac{1}{m-1}}
\end{aligned}$$

donde

$$\Psi(x, t) \doteq \frac{|x|}{1 - Rt} \quad \text{y} \quad \varphi_m(t) \doteq \frac{1 - Rt}{1 - \frac{Rm^m A^{m-1} t}{(m-1)^{m-1}}}.$$

Como para cada  $t \geq 0$  se verifica

$$\lim_{m \rightarrow 1} \varphi_m(t) = 1$$

entonces, para todo  $\varepsilon > 0$

$$1 - \varepsilon < \varphi_m(t) < 1 + \varepsilon, \quad 0 < m - 1 \ll 1.$$

Distinguiamos las diversas situaciones que pueden presentarse:

(a)  $|x| + Rt < 1$ . En este caso  $\Psi(x, t) < 1$ , por lo que tomando

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{\Psi(x, t)} - 1$$

se verifica

$$\Psi(x, t) \varphi_m(t) < \Psi(x, t)(1 + \varepsilon) < 1, \quad 0 < m - 1 \ll 1.$$

Consecuentemente,

$$\mathcal{W}(x, t) = \lim_{m \rightarrow 1} \mathcal{U}_{\alpha(m), m}(x, t) = 0.$$

(b)  $|x| + Rt > 1$ . Ahora  $\Psi(x, t) > 1$  por lo que basta tomar

$$0 < \varepsilon < 1 - \frac{1}{\Psi(x, t)}$$

para obtener

$$\Psi(x, t)\varphi_m(t) > \Psi(x, t)(1 - \varepsilon) > 1, \quad 0 < m - 1 \ll 1.$$

De esta forma,

$$\mathcal{W}(x, t) = \lim_{m \rightarrow 1} \mathcal{U}_{\alpha(m), m}(x, t) = +\infty.$$

(c)  $|x| + Rt = 1$ . En esta situación se tiene  $\Psi(x, t) = 1$  por lo que

$$\mathcal{W}(x, t) = \lim_{m \rightarrow 1} \mathcal{U}_{\alpha(m), m}(x, t) = \exp\left(\lim_{m \rightarrow 1} \frac{\varphi_m(t) - 1}{m - 1}\right).$$

Como

$$\frac{\varphi_m(t) - 1}{m - 1} = \frac{Rt}{m - 1} \frac{m^m A^{m-1} - (m - 1)^{m-1}}{(m - 1)^{m-1} - R m^m A^{m-1} t}$$

entonces, por la *regla de L'Hôpital* se verifica

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow 1} \frac{\varphi_m(t) - 1}{m - 1} &= \frac{Rt}{1 - Rt} \lim_{m \rightarrow 1} \frac{m^m - (m - 1)^{m-1}}{m - 1} \\ &= \frac{Rt}{1 - Rt} \lim_{m \rightarrow 1} \left( (1 + \ln m)m^m - (1 + \ln(m - 1))(m - 1)^{m-1} \right) \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{si } t > 0 \\ -\infty & \text{si } t < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Luego, en esta región, se tiene

$$\mathcal{W}(x, t) = \lim_{m \rightarrow 1} \mathcal{U}_{\alpha(m), m}(x, t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t > 0 \\ -\infty & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Por tanto, la función  $\mathcal{W}$  viene determinada por

$$\mathcal{W}(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| + Rt < 1 \\ +\infty & \text{si } |x| + Rt > 1. \quad \square \end{cases}$$

### 10.2.4 Generalizaciones.

Consideremos el problema

$$(P) \begin{cases} u_t = H(\nabla u) & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

donde nuevamente, con el fin de simplificar, sólo consideramos el problema para tiempos positivos.<sup>12</sup>

A partir del Corolario 10.33 se muestra:

#### Corolario 10.39

*Supongamos las condiciones*

$$H(p) \leq R|p| + k_2, \quad p \in \mathbb{R}^N$$

con  $k_2 \in \mathbb{R}$  y

$$u_0(x) \leq A|x|^{1+\alpha} + d_2, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

con  $A > 0$ ,  $d_2 \in \mathbb{R}$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Entonces cualquier solución  $u$  de (P) verifica

$$u(x, t) \leq \mathcal{U}(x, t) + k_2 t + d_2$$

donde

$$\mathcal{U}(x, t) = \begin{cases} A(|x| - Rt)_+^{1+\alpha} & \text{si } \alpha < -1 \\ A & \text{si } \alpha = -1 \\ A(|x| + Rt)^{1+\alpha} & \text{si } \alpha > -1. \quad \square \end{cases} \quad (10.37)$$

Análogamente se verifica:

#### Corolario 10.40

*Supongamos las condiciones*

$$H(p) \geq R|p| + k_1, \quad p \in \mathbb{R}^N$$

con  $k_1 \in \mathbb{R}$  y

$$u_0(x) \geq A|x|^{1+\alpha} + d_1, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

con  $A > 0$ ,  $d_1 \in \mathbb{R}$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Entonces cualquier solución  $u$  de (P) verifica

$$u(x, t) \geq \mathcal{U}(x, t) + k_1 t + d_1$$

donde  $\mathcal{U}$  está definida en (10.37).

<sup>12</sup>El problema retrógrado se abordaría de forma parecida.



**Corolario 10.41**

*Supongamos las condiciones*

$$H(p) = R|p| + k, \quad p \in \mathbb{R}^N$$

con  $k \in \mathbb{R}$  y

$$u_0(x) = A|x|^{1+\alpha} + d, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

con  $A > 0$ ,  $d \in \mathbb{R}$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Entonces la solución  $u$  de (P) es

$$u(x, t) = \mathcal{U}(x, t) + kt + d,$$

siendo  $\mathcal{U}$  la función definida en (10.37).

**Corolario 10.42**

*Supongamos las condiciones*

$$H(p) = R|p| + k, \quad p \in \mathbb{R}^N$$

con  $k \in \mathbb{R}$  y

$$A|x|^{1+\alpha} + d_1 \leq u_0(x) \leq A|x|^{1+\alpha} + d_2, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

con  $A > 0$ ,  $d_1 \leq d_2$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Entonces cualquier solución  $u$  de (P) verifica

$$\mathcal{U}(x, t) + kt + d_1 \leq u(x, t) \leq \mathcal{U}(x, t) + kt + d_2.$$

En particular, para cada  $x \in \mathbb{R}^N$ , se verifica

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t} = k & \text{si } \alpha < 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t} = AR + k & \text{si } \alpha = 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t^{1+\alpha}} = AR^{1+\alpha} & \text{si } \alpha > 0. \quad \square \end{array} \right.$$

**Corolario 10.43**

*Supongamos que*

$$H(p) = R|p| + k, \quad p \in \mathbb{R}^N$$

con  $k \in \mathbb{R}$  y

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{u_0(x)}{|x|^{1+\alpha}} = A > 0$$

con  $A > 0$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Entonces cualquier solución  $u$  de (P) verifica

$$\mathcal{U}(x, t) + kt + d_1 \leq u(x, t) \leq \mathcal{U}(x, t) + kt + d_2.$$

En particular, para cada  $x \in \mathbb{R}^N$ , se tiene

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t} = k & \text{si } \alpha < 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t} = AR + k & \text{si } \alpha = 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t^{1+\alpha}} = AR^{1+\alpha} & \text{si } \alpha > 0. \end{cases}$$

#### Demostración.

Basta tener en cuenta que para cada  $\varepsilon > 0$  se verifica

$$\mathcal{U}(x, t; v_0^{(1)}(\cdot)) + kt + d_1^\varepsilon \leq u(x, t) \leq \mathcal{U}(x, t; v_0^{(2)}(\cdot)) + kt + d_2^\varepsilon$$

donde

$$v_0^{(1)}(x) = (A - \varepsilon)|x|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

y

$$v_0^{(2)}(x) = (A + \varepsilon)|x|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad \square$$

#### Corolario 10.44

Supongamos que

$$\lim_{|p| \rightarrow +\infty} \frac{H(p)}{|p|} = R > 0$$

y

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{u_0(x)}{|x|^{1+\alpha}} = A > 0$$

con  $A > 0$  y  $\alpha > 0$ . Entonces cualquier solución  $u$  de (P) verifica

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t^{1+\alpha}} = AR^{1+\alpha}.$$

**Demostración.**

Como en particular  $\alpha > -1$ , para cada  $\varepsilon > 0$  se verifica que

$$\begin{aligned} & (A - \varepsilon)(|x| + (R - \varepsilon)t)^{1+\alpha} + k_1^\varepsilon t + d_1^\varepsilon \leq u(x, t) \\ & \leq (A + \varepsilon)(|x| + (R + \varepsilon)t)^{1+\alpha} + k_2^\varepsilon t + d_2^\varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

De esta forma, al ser  $\alpha > 0$ :

$$\begin{aligned} (A - \varepsilon)(R - \varepsilon)^{1+\alpha} & \leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t^{1+\alpha}} \\ & \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t^{1+\alpha}} \leq (A + \varepsilon)(R + \varepsilon)^{1+\alpha}. \end{aligned}$$

Haciendo tender  $\varepsilon \rightarrow 0$  obtenemos el resultado.  $\square$

**Observación 10.45**

En el caso en que  $\alpha \leq 0$  sólo podemos decir que para cada  $\varepsilon > 0$  existen dos constantes  $k_1^\varepsilon$  y  $k_2^\varepsilon$  con  $k_1^\varepsilon \leq k_2^\varepsilon$  tales que

$$k_1^\varepsilon \leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t} \leq k_2^\varepsilon.$$

En efecto, basta tener en cuenta que para  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $t \geq 0$  se verifica

$$\begin{aligned} & (A - \varepsilon)(|x| + (R - \varepsilon)t)^{1+\alpha} + k_1^\varepsilon t + d_1^\varepsilon \leq u(x, t) \\ & \leq (A + \varepsilon)(|x| + (R + \varepsilon)t)^{1+\alpha} + k_2^\varepsilon t + d_2^\varepsilon \quad \text{si } -1 \leq \alpha \leq 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & (A - \varepsilon) \left( [|x| - (R - \varepsilon)t]_+ \right)^{1+\alpha} + k_1^\varepsilon t + d_1^\varepsilon \leq u(x, t) \\ & \leq (A + \varepsilon) \left( [|x| - (R + \varepsilon)t]_+ \right)^{1+\alpha} + k_2^\varepsilon t + d_2^\varepsilon \quad \text{si } \alpha < -1. \quad \square \end{aligned}$$

# Capítulo 11

## La ecuación perturbada.

### 11.1 Soluciones de similaridad.

Tal como sucedió en el Capítulo anterior, parece oportuno que nos interese-  
mos por las soluciones de similaridad de la ecuación

$$u_t - R|\nabla u|^m + \lambda u^q = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \quad (11.1)$$

para  $m \geq 1$ ,  $q \in \mathbb{R}$  y  $R, \lambda > 0$  dados. Para ello, distinguiremos varias  
situaciones.

#### 11.1.1 Caso $m \geq 1$ y $q \notin \{1, m\}$ .

Pretendemos encontrar soluciones  $u$  de (11.1) de forma que la función

$$u_\mu(x, t) = \mu^\alpha u(\mu x, \mu^\beta t)$$

sea también solución de dicha ecuación para algunos valores concretos de los  
parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\mu$ . Como

$$(u_\mu)_t = \mu^{\alpha+\beta} u_t \quad \text{y} \quad \nabla u_\mu = \mu^{\alpha+1} \nabla u,$$

entonces

$$(u_\mu)_t - R|\nabla u_\mu|^m + \lambda u_\mu^q = \mu^{\alpha+\beta} u_t - R\mu^{(\alpha+1)m} |\nabla u|^m + \lambda \mu^{\alpha q} u^q.$$

De esta forma, debe verificarse

$$\alpha + \beta = (\alpha + 1)m \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = (m - 1)\alpha + m & \text{si } m > 1 \\ \beta = 1 & \text{si } m = 1, \end{cases}$$

obteniéndose

$$\begin{aligned} (u_\mu)_t - R|\nabla u_\mu|^m + \lambda u_\mu^q &= \mu^{\alpha+\beta} \left( \overbrace{u_t - R|\nabla u|^m}^{-\lambda u^q} + \lambda \mu^{\alpha(q-1)-\beta} u^q \right) \\ &= \lambda \mu^{\alpha+\beta} [\mu^{\alpha(q-1)-\beta} - 1] u^q = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(q-1) - (m-1)\alpha - m = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{m}{q-m} & \text{si } m > 1 \\ \alpha(q-1) - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{q-1} & \text{si } m = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

En el caso que nos ocupa,  $q \notin \{1, m\}$ , tiene que verificarse

$$\alpha = \frac{m}{q-m} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{(q-1)m}{q-m},$$

luego la solución  $u_\mu$  debe ser de la forma

$$u_\mu(x, t) = \mu^{\frac{m}{q-m}} u \left( \mu x, \mu^{\frac{(q-1)m}{q-m}} t \right).$$

Como buscamos soluciones invariantes bajo esas transformaciones, debe cumplirse

$$u(x, t) = u_\mu(x, t) \Leftrightarrow \mu^{\frac{m}{m-q}} u(x, t) = u \left( \mu x, \mu^{\frac{(q-1)m}{q-m}} t \right).$$

Derivando la expresión anterior respecto de  $\mu$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{m}{m-q} \mu^{\frac{q}{m-q}} u(x, t) &= x \cdot \nabla u \left( \mu x, \mu^{\frac{(q-1)m}{q-m}} t \right) \\ &+ \frac{(q-1)m}{q-m} \mu^{\frac{(m-1)q}{q-m}} t u_t \left( \mu x, \mu^{\frac{(q-1)m}{q-m}} t \right). \end{aligned}$$

Finalmente, haciendo  $\mu = 1$ , obtenemos la *ecuación de similitud*

$$\frac{m}{m-q} u(x, t) = x \cdot \nabla u(x, t) + \frac{(q-1)m}{q-m} t u_t(x, t) \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

Teniendo en cuenta que  $q \notin \{1, m\}$ , un análisis dimensional lleva a

$$\frac{q-m}{(q-1)m} \frac{dt}{t} = \frac{dx}{|x|} = \frac{m-q}{m} \frac{du}{u}.$$

Por tanto,

$$\frac{dt}{t} = \frac{(q-1)m}{q-m} \frac{m-q}{m} \frac{du}{u} = (1-q) \frac{du}{u} \Rightarrow t = u^{1-q} \Rightarrow u = t^{\frac{1}{1-q}}$$

y

$$\frac{dt}{t} = \frac{(q-1)m}{q-m} \frac{dx}{x} \Rightarrow t = |x|^{\frac{(q-1)m}{q-m}} \Rightarrow |x| = t^{\frac{q-m}{(q-1)m}}.$$

De esta forma, las integrales independientes son

$$\frac{u}{t^{\frac{1}{1-q}}} \quad \text{y} \quad \frac{x}{t^{\frac{q-m}{(q-1)m}}},$$

por lo que las *soluciones de similitud* de (11.1) tienen la forma

$$u(x, t) = t^{\frac{1}{1-q}} u\left(\frac{x}{t^{\frac{q-m}{(q-1)m}}}, 1\right), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

Denotemos por

$$\mathbf{f}(\eta) \doteq u(\eta, 1)$$

donde

$$\eta = \frac{x}{t^{\frac{q-m}{(q-1)m}}}$$

es la *variable de similitud* y busquemos soluciones clásicas no constantes con simetría esférica de la forma

$$\mathbf{f}(\eta) = f(|\eta|) = f(\xi), \quad \xi > 0.$$

Utilizando de nuevo la ecuación (11.1) y la igualdad

$$\frac{m-q}{(q-1)m} - 1 = \frac{2m - (1+m)q}{(q-1)m},$$

se obtiene

$$0 = u_t - R|\nabla u|^m + \lambda u^q = \frac{1}{1-q} t^{\frac{q}{1-q}} \mathbf{f} - \frac{q-m}{(q-1)m} t^{\frac{1}{1-q}} \frac{x}{t^{\frac{(1+m)q-2m}{(q-1)m}}} \cdot \nabla \mathbf{f}$$

$$-R \left( t^{\frac{1}{1-q}} \frac{1}{t^{\frac{q-m}{(q-1)m}}} |\nabla \mathbf{f}| \right)^m + \lambda t^{\frac{q}{1-q}} \mathbf{f}^q.$$

Por otra parte, a partir de las igualdades

$$\frac{(1+m)q - 2m}{(q-1)m} + \frac{1}{q-1} = \frac{(q-1)m + q}{(q-1)m}$$

y

$$\frac{q-m}{(q-1)m} + \frac{1}{q-1} = \frac{q}{(q-1)m}$$

se deduce

$$\frac{1}{1-q} t^{\frac{q}{1-q}} \mathbf{f} + \frac{m-q}{(q-1)m} \frac{x}{t^{\frac{(q-1)m+q}{(q-1)m}}} \cdot \nabla \mathbf{f} - R t^{\frac{q}{1-q}} |\nabla \mathbf{f}|^m + \lambda t^{\frac{q}{1-q}} \mathbf{f}^q = 0.$$

Finalmente, con la notación empleada anteriormente

$$\frac{x}{t^{\frac{(q-1)m+q}{(q-1)m}}} = t^{\frac{q}{1-q}} \frac{x}{t^{\frac{q-m}{(q-1)m}}} = t^{\frac{q}{1-q}} \eta$$

podemos escribir

$$t^{\frac{q}{1-q}} \left( \frac{1}{1-q} \mathbf{f} + \frac{m-q}{(q-1)m} \eta \cdot \nabla \mathbf{f} - R |\nabla \mathbf{f}|^m + \lambda \mathbf{f}^q \right) = 0.$$

Por tanto,  $f$  debe verificar la ecuación del *perfil de la similaridad*

$$\frac{1}{1-q} f(\xi) + \frac{m-q}{(q-1)m} \xi |f'(\xi)| - R |f'(\xi)|^m + \lambda (f(\xi))^q = 0, \quad \xi > 0$$

o, equivalentemente

$$f(\xi) - \frac{m-q}{m} \xi f'(\xi) = (1-q) [R |f'(\xi)|^m - \lambda (f(\xi))^q], \quad \xi > 0. \quad (11.2)$$

### Proposición 11.1

Sea  $m \geq 1$  y  $q \notin \{1, m\}$ .

1. Las únicas soluciones constantes (no negativas) de (11.2) son

$$f_1(\xi) \equiv 0 \quad \text{si } q > 0$$

y

$$f_2(\xi) \equiv \left( \frac{1}{\lambda(q-1)} \right)^{\frac{1}{q-1}} \quad \text{si } q > 1$$

2. La única solución potencial no negativa de la ecuación (11.2) es

$$f_3(\xi) = A_0 \xi^{\frac{m}{m-q}}, \quad \xi > 0 \quad (11.3)$$

donde

$$A_0 \doteq \left[ \frac{\lambda}{R} \left( \frac{|m-q|}{m} \right)^m \right]^{\frac{1}{m-q}}.$$

### Demostración.

Las soluciones constantes y no negativas de (11.2) se obtienen de forma inmediata, pues

$$f(\xi) \equiv k \Leftrightarrow k = \lambda(q-1)k^q \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 & \text{para } q > 0 \\ \acute{o} \\ k = \left( \frac{1}{\lambda(q-1)} \right)^{\frac{1}{q-1}} & \text{para } q > 1. \end{cases}$$

Busquemos ahora soluciones de la forma

$$f(\xi) = \alpha \xi^\beta, \quad \xi > 0 \quad \text{con } \alpha > 0 \text{ y } \beta \neq 0.$$

Como

$$f'(\xi) = \alpha \beta \xi^{\beta-1}, \quad \xi > 0,$$

la ecuación (11.2) determina

$$\alpha \xi^\beta - \frac{m-q}{m} \xi \alpha \beta \xi^{\beta-1} = (1-q) \left[ R \alpha^m |\beta|^m \xi^{(\beta-1)m} - \lambda \alpha^q \xi^{\beta q} \right],$$

es decir,

$$-\alpha \frac{(\beta-1)m - \beta q}{m} \xi^\beta = (1-q) \alpha^q \left[ R \alpha^{m-q} |\beta|^m \xi^{(\beta-1)m - \beta q} - \lambda \right] \xi^{\beta q}.$$

Por ser  $\beta \neq 0$  entonces

$$(\beta-1)m - \beta q = 0 \Rightarrow \beta = \frac{m}{m-q}.$$

Por tanto,

$$R \alpha^{m-q} |\beta|^m - \lambda = 0 \Rightarrow \alpha = \left[ \frac{\lambda}{R} \left( \frac{|m-q|}{m} \right)^m \right]^{\frac{1}{m-q}} = A_0.$$



Consecuentemente  $f$  coincide con  $f_3$ .<sup>1</sup>  $\square$

### Observación 11.2

Como hemos mostrado, las únicas soluciones potenciales de (11.2) se obtenían, de hecho, para la ecuación

$$f(\xi) - \frac{m-q}{m} \xi f'(\xi) = (1-q) [\mathbb{R}|f'(\xi)|^m - \lambda(f(\xi))^q] = 0, \quad \xi > 0. \quad (11.4)$$

Veamos que éstas son las únicas soluciones de (11.4). En efecto:

1.  $\mathbb{R}|f'|^m - \lambda f^q = 0$ . Integrando esta ecuación se llega a

$$\frac{m}{m-q} \left[ (f(\xi))^{\frac{m-q}{m}} - (f(\xi_0))^{\frac{m-q}{m}} \right] = \left( \frac{\lambda}{\mathbb{R}} \right)^{\frac{1}{m}} (\xi - \xi_0), \quad \xi > \xi_0,$$

es decir,

$$f(\xi) = \left[ (f(\xi_0))^{\frac{m-q}{m}} + A_0 \frac{m-q}{m} (\xi - \xi_0) \right]^{\frac{m}{m-q}}, \quad \xi > \xi_0.$$

2.  $f = \frac{m-q}{m} \xi f'$ . Ahora se obtiene

$$f(\xi) = f(\xi_0) \left( \frac{\xi}{\xi_0} \right)^{\frac{m}{m-q}}, \quad \xi > \xi_0.$$

Así pues, cuando  $q \neq m$ , la única función que compatibiliza las dos condiciones anteriores es

$$f_3(\xi) = A_0 \xi^{\frac{m}{m-q}}, \quad \xi > 0. \quad \square$$

### Observación 11.3

Nótese que cuando  $q > m$  entonces  $f_3$  es una solución de (11.2) con la propiedad  $f_3(0) = 0$  mientras que si  $q < m$  entonces  $f_3(0) = +\infty$ .  $\square$

---

<sup>1</sup>Nótese que, de hecho, los dos miembros de la ecuación diferencial (11.2) son idénticamente nulos.

**Observación 11.4**

Las soluciones constantes de (11.2) dan lugar a las soluciones de similaridad

$$u_1(x, t) \equiv 0 \quad (q > 0) \quad \text{y} \quad u_2(x, t) = \left( \frac{1}{\lambda(q-1)t} \right)^{\frac{1}{q-1}} \quad (q > 1). \quad (11.5)$$

Una solución de similaridad cuando  $q \neq m$  viene dada por

$$\begin{aligned} u_3(x, t) &= t^{\frac{1}{1-q}} f(\xi) = t^{\frac{1}{1-q}} \left[ \frac{\lambda}{R} \left( \frac{|m-q|}{m} \right)^m \xi^m \right]^{\frac{1}{m-q}} \\ &= t^{\frac{1}{1-q}} \left[ \frac{\lambda}{R} \left( \frac{|m-q|}{m} \frac{|x|}{t^{\frac{q-m}{(q-1)m}}} \right)^m \right]^{\frac{1}{m-q}} = \left[ \frac{\lambda}{R} \left( \frac{|m-q|}{m} |x| \right)^m \right]^{\frac{1}{m-q}}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$u_3(x, t) = \left[ \frac{\lambda}{R} \left( \frac{|m-q|}{m} |x| \right)^m \right]^{\frac{1}{m-q}}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0. \quad \square \quad (11.6)$$

**11.1.2 Caso  $m > 1$  y  $q = 1$ .**

Cuando  $m > 1$  y  $q = 1$  la ecuación de la similaridad toma la forma

$$\frac{m}{m-1} u(x, t) = x \cdot \nabla u(x, t)$$

por lo que el análisis dimensional determina

$$\frac{dx}{|x|} = \frac{m-1}{m} \frac{du}{u}.$$

Por tanto, sólo hay una integral independiente

$$\frac{u}{|x|^{\frac{m}{m-1}}}.$$

Consecuentemente,

$$u(x, t) = k|x|^{\frac{m}{m-1}}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

El valor de  $k$  se determina para que  $u$  sea solución de (11.1), obteniéndose

$$u_1(x, t) \equiv 0 \quad \text{y} \quad u_3(x, t) = \left[ \frac{\lambda}{R} \left( \frac{m-1}{m} |x| \right)^m \right]^{\frac{1}{m-1}}.$$

Nótese que  $u_3$  coincide exactamente con (11.6) cuando hacemos  $q = 1$ .

### 11.1.3 Caso $q = m > 1$ .

Por lo dicho anteriormente, las soluciones de similaridad de la ecuación

$$u_t - R|\nabla u|^m + \lambda u^m = 0 \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

son de la forma

$$u(x, t) = t^{\frac{1}{1-m}} \mathbf{f}(x)$$

siendo  $\mathbf{f} \geq 0$  una solución de la ecuación

$$\frac{1}{1-m} \mathbf{f} - R|\nabla \mathbf{f}|^m + \lambda \mathbf{f}^m = 0. \quad (11.7)$$

Nótese que si  $\mathbf{f} \not\equiv 0$  entonces

$$\begin{aligned} R|\nabla \mathbf{f}|^m &= \lambda \mathbf{f}^m - \frac{1}{m-1} \mathbf{f} = \frac{\lambda(m-1)\mathbf{f}^{m-1} - 1}{m-1} \mathbf{f} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{f}(x) \geq \left( \frac{1}{\lambda(m-1)} \right)^{\frac{1}{m-1}}. \end{aligned}$$

Suponiendo que  $\mathbf{f}(x) = f(|x|)$  es una solución no constante, entonces ésta viene determinada por la relación

$$\int_{f(r_0)}^{f(r)} \frac{ds}{(\lambda(m-1)s^m - s)^{\frac{1}{m}}} = \left( \frac{1}{R(m-1)} \right)^{\frac{1}{m}} (r - r_0), \quad 0 \leq r_0 \leq r.$$

Buscando soluciones de (11.7) de la forma

$$\mathbf{f}(x) = k|x|^\gamma, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

debe verificarse

$$\frac{k}{1-m}|x|^\gamma - R(k\gamma|x|^{\gamma-1})^m + \lambda(k|x|^\gamma)^m = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \frac{k}{1-m} + \lambda k^m = 0 \Rightarrow k = 0 \quad \text{ó} \quad k = \left(\frac{1}{\lambda(m-1)}\right)^{\frac{1}{m-1}}. \end{cases}$$

Por tanto, obtenemos

$$u_1(x, t) \equiv 0$$

y

$$u_2(x, t) = \left(\frac{1}{\lambda(m-1)t}\right)^{\frac{1}{m-1}},$$

que coinciden con las funciones dadas en (11.5) haciendo  $q = m$ .

#### 11.1.4 Caso $m = q = 1$ .

En el caso particular en que  $m = q = 1$ , es decir, cuando la ecuación (11.1) es de la forma

$$u_t - R|\nabla u| + \lambda u = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

hacemos el cambio de variable

$$w(x, t) = e^{\lambda t} u(x, t)$$

para el que

$$w_t = \lambda e^{\lambda t} u + e^{\lambda t} u_t = e^{\lambda t}(u_t + \lambda u) \Rightarrow u_t + \lambda u = e^{-\lambda t} w_t$$

y

$$\nabla w = e^{\lambda t} \nabla u \Rightarrow \nabla u = e^{-\lambda t} \nabla w.$$

Luego:

$$0 = u_t - R|\nabla u| + \lambda u = e^{-\lambda t} w_t - R e^{-\lambda t} |\nabla w| = e^{-\lambda t} (w_t - R|\nabla w|).$$

Es decir,

$$w_t - R|\nabla w| = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+,$$

de donde

$$u(x, t) = w(x, t) e^{-\lambda t}.$$

### 11.1.5 Caso $m = 1$ y $q < 1$ .

Estudiemos, con más detalle, las soluciones de similaridad para esta elección de los parámetros  $m$  y  $q$ . Para ello, buscamos soluciones de similaridad de la ecuación

$$u_t - R|\nabla u| + \lambda u^q = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

entre las funciones de la forma

$$u(x, t) = t^\alpha f\left(\frac{|x|^\beta}{t}\right) = t^\alpha f(\xi)$$

donde  $\xi = \frac{|x|^\beta}{t}$ . Ahora, como  $m = 1$ , la ecuación de la similaridad tiene la expresión

$$\alpha f - \xi f' - R\beta(t\xi)^{\frac{\beta-1}{\beta}}|f'| + \lambda t^{\alpha q - \alpha + 1} f^q = 0,$$

por tanto, tomando

$$\alpha = \frac{1}{1-q} \quad \text{y} \quad \beta = 1,$$

debe verificarse

$$\frac{1}{1-q}f + \lambda f^q = \xi f' + R|f'| \Rightarrow f + \lambda(1-q)f^q = (1-q)[\xi f' + R|f'|].$$

Así, si  $f' \geq 0$  entonces

$$f + \lambda(1-q)f^q = (1-q)(\xi + R)f' \Rightarrow f' = \frac{1}{\xi + R} \left( \frac{f}{1-q} + \lambda f^q \right).$$

Para simplificar la escritura, escribimos la anterior ecuación en la forma

$$y' = \frac{1}{x + R} \left( \frac{y}{1-q} + \lambda y^q \right) = \frac{P(y)}{Q(x)} \tag{11.8}$$

con

$$P(y) = \frac{y}{1-q} + \lambda y^q = \frac{y}{1-q} (1 + \lambda(1-q)y^{q-1})$$

y

$$Q(x) = x + R.$$

Como

$$-\frac{\partial P}{\partial y} = -\left(\frac{1}{1-q} + \lambda q y^{q-1}\right) y \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \Rightarrow -\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x},$$

la ecuación (11.8) *no es exacta*. Por tanto, veamos si existen *factores integrantes* de la forma  $\nu = \nu(y)$ :

$$P^*(x, y) = \frac{y}{1-q} (1 + \lambda(1-q)y^{q-1}) \nu(y) = \frac{1}{1-q} (y + \lambda(1-q)y^q) \nu(y)$$

y

$$Q^*(x, y) = (x + R)\nu(y).$$

Por tanto,

$$-\frac{\partial P^*}{\partial y} = \frac{\partial Q^*}{\partial x}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{1-q} \left( [1 + \lambda q(1-q)y^{q-1}] \nu(y) + [y + \lambda(1-q)y^q] \nu'(y) \right) = \nu(y)$$

$$\Leftrightarrow \nu(y) = -\left(\frac{1}{1-q} + \lambda q y^{q-1}\right) \nu(y) - \left(\frac{y}{1-q} + \lambda y^q\right) \nu'(y)$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{1-q} + \lambda q y^{q-1}\right) \nu(y) = -\left(\frac{y}{1-q} + \lambda y^q\right) \nu'(y)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2-q}{1-q} + \lambda q y^{q-1}\right) \nu(y) = -\left(\frac{y}{1-q} + \lambda y^q\right) \nu'(y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\nu'(y)}{\nu(y)} = -\frac{\frac{2-q}{1-q} + \lambda q y^{q-1}}{\frac{y}{1-q} + \lambda y^q}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\nu'(y)}{\nu(y)} = -\frac{2-q + \lambda q(1-q)y^{q-1}}{y + \lambda(1-q)y^q}$$

$$= -\frac{1 + \lambda q(1-q)y^{q-1}}{y + \lambda(1-q)y^q} - (1-q) \frac{1}{y + \lambda(1-q)y^q},$$

con lo que

$$\ln(\nu(y)) = -\ln[y + \lambda(1-q)y^q] - (1-q) \int \frac{dy}{y + \lambda(1-q)y^q}.$$

Como

$$\int \frac{dy}{y + \lambda(1-q)y^q} = \int \frac{dy}{y^q[y^{1-q} + \lambda(1-q)]},$$

hacemos el cambio de variable

$$z = y^{1-q} \Rightarrow dz = (1-q)y^{-q}dy \Rightarrow \frac{dy}{y^q} = \frac{dz}{1-q},$$

de donde

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y + \lambda(1-q)y^q} &= \frac{1}{1-q} \int \frac{dz}{z + \lambda(1-q)} \\ &= \frac{1}{1-q} \ln[z + \lambda(1-q)] = \frac{1}{1-q} \ln[y^{1-q} + \lambda(1-q)]. \end{aligned}$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} \ln(\nu(y)) &= -\ln[y + \lambda(1-q)y^q] - \ln[y^{1-q} + \lambda(1-q)] \\ &= \ln\left(\frac{1}{[y + \lambda(1-q)y^q][y^{1-q} + \lambda(1-q)]}\right). \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} \nu(y) &= \frac{1}{[y + \lambda(1-q)y^q][y^{1-q} + \lambda(1-q)]} \\ &= \frac{1}{y[1 + \lambda(1-q)y^{q-1}][y^{1-q} + \lambda(1-q)]} \\ &= \frac{1}{y[y^{1-q} + 2\lambda(1-q) + \lambda^2(1-q)^2y^{q-1}]}. \end{aligned}$$

Para esta elección de  $\nu(y)$  se obtienen las siguientes funciones

$$P^*(x, y) = \frac{1}{1-q} \frac{1}{y^{1-q} + \lambda(1-q)}$$

y

$$Q^*(x, y) = \frac{x + R}{y[y^{1-q} + 2\lambda(1-q) + \lambda^2(1-q)^2y^{q-1}]}.$$

Claramente,

$$-\frac{\partial P^*}{\partial y} = \frac{1}{1-q} \frac{(1-q)y^{-q}}{[y^{1-q} + \lambda(1-q)]^2} = \frac{1}{y^q [y^{1-q} + \lambda(1-q)]^2}$$

y

$$\frac{\partial Q^*}{\partial x} = \frac{1}{y [y^{1-q} + 2\lambda(1-q) + \lambda^2(1-q)^2 y^{q-1}]}.$$

Ahora bien, como

$$\begin{aligned} y^q [y^{1-q} + \lambda(1-q)]^2 &= y^q [y^{2-2q} + 2\lambda(1-q)y^{1-q} + \lambda^2(1-q)^2] \\ &= y^{2-q} + 2\lambda(1-q)y + \lambda^2(1-q)^2 y^q \\ &= y [y^{1-q} + 2\lambda(1-q) + \lambda^2(1-q)^2 y^{q-1}] \end{aligned}$$

se verifica

$$-\frac{\partial P^*}{\partial y} = \frac{\partial Q^*}{\partial x}.$$

Además, podemos escribir el factor integrante en la forma

$$\nu(y) = \frac{1}{y^q [y^{1-q} + \lambda(1-q)]^2},$$

con lo que

$$Q^*(x, y) = \frac{x + R}{y^q [y^{1-q} + \lambda(1-q)]^2}.$$

Como

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{P^*(x, y)}{Q^*(x, y)} \Rightarrow P^*(x, y)dx - Q^*(x, y)dy = 0.$$

Busquemos  $u(x, y)$  tal que  $\frac{\partial u}{\partial x} = P^*$  y  $\frac{\partial u}{\partial y} = -Q^*$  con lo que se tendrá

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = P^*(x, y)dx - Q^*(x, y)dy = 0 \Rightarrow u(x, y) \equiv c.$$

De esta forma,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P^* = \frac{1}{1-q} \frac{1}{y^{1-q} + \lambda(1-q)} \Rightarrow u(x, y) = \frac{1}{1-q} \frac{x}{y^{1-q} + \lambda(1-q)} + c(y)$$



y

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -Q^* = -\frac{x + R}{y^q [y^{1-q} + \lambda(1-q)]^2}.$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} -\frac{x + R}{y^q [y^{1-q} + \lambda(1-q)]^2} &= \frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{x}{1-q} \frac{(1-q)y^{-q}}{[y^{1-q} + \lambda(1-q)]^2} + c'(y) &= -\frac{x}{y^q (y^{1-q} + \lambda(1-q))^2} + c'(y) \\ \Leftrightarrow c'(y) &= -\frac{R}{y^q [y^{1-q} + \lambda(1-q)]^2}. \end{aligned}$$

Con lo que (haciendo de nuevo el cambio  $z = y^{1-q} \Rightarrow dz = (1-q)y^{-q}dy$ )

$$\begin{aligned} c(y) &= -R \int \frac{dy}{y^q [y^{1-q} + \lambda(1-q)]^2} = -\frac{R}{1-q} \int \frac{dz}{[z + \lambda(1-q)]^2} \\ &= \frac{R}{1-q} \frac{1}{z + \lambda(1-q)} = \frac{R}{1-q} \frac{1}{y^{1-q} + \lambda(1-q)}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{1-q} \frac{x}{y^{1-q} + \lambda(1-q)} + \frac{R}{1-q} \frac{1}{y^{1-q} + \lambda(1-q)} \equiv \text{cte} \\ \Leftrightarrow y^{1-q} + \lambda(1-q) &= c(x + R), \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$f(\xi) = \left( [c(\xi + R) - \lambda(1-q)]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}}, \quad \xi \geq 0$$

y, de esta forma, como  $m = 1$ ,

$$\begin{aligned} v_c(x, t) &= t^{\frac{1}{1-q}} f\left(\frac{|x|}{t}\right) = t^{\frac{1}{1-q}} \left( \left[ c\left(\frac{|x|}{t} + R\right) - \lambda(1-q) \right]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}} \\ &= \left( [c(|x| + Rt) - \lambda(1-q)t]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}} = \left( [c|x| + (cR - \lambda(1-q))t]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}}, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

o bien

$$v_c(x, t) = c \left( \left[ |x| - \left( \frac{\lambda(1-q)}{c} - R \right) t \right]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}}, \quad c > 0.$$

**Observación 11.5**

Claramente:

1. En el caso en que

$$c = \frac{\lambda(1-q)}{R}$$

se tiene

$$c(|x| + Rt) - \lambda(1-q)t = \lambda(1-q) \left( \frac{|x|}{R} + t - t \right)^{\frac{1}{1-q}} = \frac{\lambda(1-q)}{R} |x|$$

Luego,

$$v_{\frac{\lambda(1-q)}{R}}(x, t) = \left( \frac{\lambda(1-q)}{R} |x| \right)^{\frac{1}{1-q}}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

que es, justamente, la solución  $u_3$  que obteníamos anteriormente (véase la Observación 11.4).

2. Si  $c > \frac{\lambda(1-q)}{R}$  entonces

$$v_c(x, t) > 0, \quad (x, t) \in ((\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+) \setminus \{(0, 0)\}) \quad \text{y} \quad v_c(0, 0) = 0. \quad \square$$

## 11.2 Propiedades comunes a hamiltonianos con crecimiento lineal o superlineal.

Como en el Capítulo 10, vamos a considerar el problema de Cauchy ‘modelo’

$$(P)_{\lambda, \alpha, q, m} \begin{cases} u_t - R|\nabla u|^m + \lambda u^q = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = A|x|^{1+\alpha}, & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

donde  $\lambda > 0$ ,  $A > 0$ ,  $m \geq 1$  y  $\alpha, q \in \mathbb{R}$ . Si  $\mathcal{U}$  es la solución del problema sin perturbar  $(P)_{0, \alpha, q, m}$  entonces, cualquier solución  $u$  de  $(P)_{\lambda, \alpha, q, m}$  verifica

$$0 \leq u(x, t) \leq \mathcal{U}(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0$$

donde, para  $m = 1$ ,

$$\mathcal{U}(x, t) = \begin{cases} A(|x| - Rt)_+^{1+\alpha} & \text{si } \alpha < -1 \\ A & \text{si } \alpha = -1 \\ A(|x| + Rt)^{1+\alpha} & \text{si } \alpha > -1 \end{cases}$$

(véase (10.33)) y, para  $m > 1$ , a partir de las consideraciones hechas en el Capítulo 10, se verifica:

1.  $\boxed{\alpha = -1} \Rightarrow 0 \leq u(x, t) \leq A, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$

2.  $\boxed{-1 < \alpha < \frac{1}{m-1}} \Rightarrow \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}} \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{U}(x, t)}{t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}} = C_\infty$  donde la constante  $C_\infty = C_\infty(A, \alpha, R, m)$  viene dada por

$$C_\infty = (1 - \alpha(m-1)) \left[ R^{1+\alpha} (Am^\alpha)^m (1 + \alpha)^{(1+\alpha)(m-1)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha(m-1)}}$$

(véase (10.8)).

3.  $\boxed{\alpha = \frac{1}{m-1}} \Rightarrow 0 \leq u(x, t) \leq A|x|^{\frac{m}{m-1}} \left( \frac{\mathbf{T}_\infty}{\mathbf{T}_\infty - t} \right)^{\frac{1}{m-1}}$  donde

$$\mathbf{T}_\infty = \frac{1}{Rm^m} \left( \frac{m-1}{A} \right)^{m-1}.$$

### Observación 11.6

Tengamos en cuenta las soluciones de similaridad de la ecuación

$$u_t - R|\nabla u|^m + \lambda u^q = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$$

vistas en la Observación 11.4.

1. Si  $q \neq m$  obtenemos

$$\psi(x) = A_0|x|^{\frac{m}{m-q}}, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

donde

$$A_0 \doteq \left[ \frac{\lambda}{R} \left( \frac{|m-q|}{m} \right)^m \right]^{\frac{1}{m-q}}. \quad (11.9)$$

2. Si  $q > 1$  la función

$$\phi(t) = \left( \frac{1}{\lambda(q-1)t} \right)^{\frac{1}{q-1}}, \quad t \geq 0$$

es una solución de similaridad de la ecuación que sólo depende de  $t$  y jugará un papel destacado en nuestro estudio.  $\square$

### Observación 11.7

La ecuación en derivadas parciales que gobierna el problema  $(P)_{\lambda, \alpha, q, m}$  sólo admite soluciones estacionarias cuando  $\alpha = \frac{q}{m-q}$  y son de la forma

$$u(x, t) = A_0 |x|^{\frac{m}{m-q}}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

En tal caso, si además queremos que se prescriba el dato inicial

$$A|x|^{1+\alpha} = A|x|^{\frac{m}{m-q}}, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

el único candidato a *solución estacionaria* del problema  $(P)_{\lambda, \frac{q}{m-q}, q, m}$  es el dato inicial. En el resto de nuestra argumentación utilizaremos fundamentalmente la ecuación ordinaria

$$u_t + \lambda u^q = 0$$

por lo que los resultados que se obtienen son para soluciones dependientes de  $t$ , es decir, *todas* salvo la solución estacionaria anterior (en los casos en que ésta exista). Nótese por otra parte que la función

$$\phi(t) = \left( \frac{1}{\lambda(q-1)t} \right)^{\frac{1}{q-1}}, \quad t \geq 0$$

para  $q > 1$  nunca puede ser solución de  $(P)_{\lambda, \alpha, q, m}$ .  $\square$

Hagamos un estudio general para  $m \geq 1$  en función de los diversos valores de  $q$  y, en las Secciones siguientes, detallaremos de una forma más precisa los resultados para los casos concretos  $m = 1$  y  $m > 1$ .

**Proposición 11.8**

Si  $q \neq m$  y  $\alpha = \frac{q}{m-q}$  (o, equivalentemente,  $q = \frac{\alpha m}{1+\alpha}$ ), cualquier solución  $u$  de  $(P)_{\lambda, \frac{q}{m-q}, q, m}$  verifica

$$u(x, t) \begin{cases} \leq A|x|^{\frac{m}{m-q}} & \text{si } A < A_0, q < m \text{ o } A > A_0, q > m \\ = A_0|x|^{\frac{m}{m-q}} & \text{si } A = A_0 \\ \geq A|x|^{\frac{m}{m-q}} & \text{si } A > A_0, q < m \text{ o } A < A_0, q > m, \end{cases}$$

donde la constante  $A_0$  viene definida en (11.9).

**Demostración.**

Como el dato inicial es de la forma

$$u_0(x) = A|x|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

éste cumple

$$\begin{aligned} -R|\nabla u_0|^m + \lambda u_0^q &= -RA^m|1 + \alpha|^m|x|^{\alpha m} + \lambda A^q|x|^{(1+\alpha)q} \\ &= RA^q|x|^{(1+\alpha)q} \left[ \frac{\lambda}{R} - A^{m-q}|1 + \alpha|^m|x|^{\alpha m - (1+\alpha)q} \right]. \end{aligned}$$

De la definición de  $A_0$  podemos escribir

$$\frac{\lambda}{R} = \left( \frac{m}{|m-q|} \right)^m A_0^{m-q},$$

por lo que

$$-R|\nabla u_0|^m + \lambda u_0^q = RA^q|x|^{(1+\alpha)q} \left[ \left( \frac{m}{|m-q|} \right)^m A_0^{m-q} - A^{m-q}|1 + \alpha|^m|x|^{\alpha m - (1+\alpha)q} \right].$$

Ahora, teniendo en cuenta que

$$\alpha m = (1 + \alpha)q \Leftrightarrow q = \frac{\alpha m}{1 + \alpha} \Leftrightarrow \alpha = \frac{q}{m - q},$$

para esta elección de  $\alpha$  se verifica

$$-R|\nabla u_0|^m + \lambda u_0^q = RA^q|x|^{\frac{mq}{m-q}} \left( \frac{m}{|m-q|} \right)^m [A_0^{m-q} - A^{m-q}],$$

de donde se sigue el resultado a partir de la propiedad del cono de dependencia.  $\square$

Continuamos con el rango de valores  $\boxed{q < 1}$ .

**Teorema 11.9**

Si  $q < 1$  cualquier solución  $u$  de  $(P)_{\lambda, \alpha, q, m}$  verifica

$$u(x, t) \geq \left( \left[ (A|x|^{1+\alpha})^{1-q} - \lambda(1-q)t \right]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

Por tanto,

$$u(0, t) = +\infty, \quad t \geq 0 \quad \text{si } \alpha < -1.$$

**Demostración.**

Como  $u$  es solución de  $(P)_{\lambda, \alpha, q, m}$  entonces verifica

$$u_t + \lambda u^q = R|\nabla u|^m \geq 0$$

en el sentido de la viscosidad. Por tanto, para todo  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $0 < t_0 < t$  se cumple

$$\int_{u(x, t_0)}^{u(x, t)} \frac{ds}{s^q} \geq -\lambda(t - t_0).$$

Como

$$\int_{u(x, t_0)}^{u(x, t)} \frac{ds}{s^q} = \frac{s^{1-q}}{1-q} \Big|_{u(x, t_0)}^{u(x, t)} = \frac{(u(x, t))^{1-q} - (u(x, t_0))^{1-q}}{1-q}$$

y  $q < 1$  se obtiene

$$(u(x, t))^{1-q} \geq (u(x, t_0))^{1-q} - \lambda(1-q)(t - t_0), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad 0 < t_0 < t. \quad \square$$

**Observación 11.10**

En las condiciones anteriores, la solución verifica *propiedades de entropía*:

$$u(x, t) < +\infty \Rightarrow u(x, t_0) < +\infty \quad \text{si } t_0 < t. \quad \square$$

En el caso en que  $q < 0$  podemos mejorar la estimación anterior mientras que si  $0 \leq q < 1$  entonces puede obtenerse, además, una estimación superior. Concretamente:

**Teorema 11.11**

Cualquier solución  $u$  de  $(P)_{\lambda, \alpha, q, m}$  verifica

$$u(x, t) \geq \left( \left[ (u(x, t))^{1-q} - \lambda(1-q)t \right]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}} \quad \text{si } q < 0,$$

$$u(x, t) = [\mathcal{U}(x, t) - \lambda t]_+ \quad \text{si } \boxed{q = 0}$$

y

$$u(x, t) \leq \left( [(\mathcal{U}(x, t))^{1-q} - \lambda(1-q)t]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}} \quad \text{si } \boxed{0 < q < 1}.$$

**Demostración.**

Consideramos la función

$$v(x, t) = \left( (u(x, t))^{1-q} + \lambda(1-q)t \right)^{\frac{1}{1-q}}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

Como en la región  $[u > 0]$  se tiene

$$v_t(x, t) = (v(x, t))^q \left( \frac{u_t(x, t)}{(u(x, t))^q} + \lambda \right) = R \left( \frac{v(x, t)}{u(x, t)} \right)^q |\nabla u(x, t)|^m$$

y

$$\nabla v(x, t) = \left( \frac{v(x, t)}{u(x, t)} \right)^q \nabla u(x, t)$$

entonces la función  $v$  verifica

$$\begin{aligned} v_t - R|\nabla v|^m &= R|\nabla u(x, t)|^m \left( \frac{v(x, t)}{u(x, t)} \right)^q \left[ 1 - \left( \frac{v(x, t)}{u(x, t)} \right)^{q(m-1)} \right] \\ &= R|\nabla u(x, t)|^m \left( \frac{v(x, t)}{(u(x, t))^m} \right)^q \left( (u(x, t))^{q(m-1)} - (v(x, t))^{q(m-1)} \right) \end{aligned}$$

y

$$v(x, 0) = A|x|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

De la propia definición se desprende que

$$(v(x, t))^{1-q} = (u(x, t))^{1-q} + \lambda(1-q)t \geq (u(x, t))^{1-q},$$

por lo que

$$v(x, t) \geq u(x, t) \quad \text{si } q < 1.$$

De esta forma se obtiene

$$v_t - R|\nabla v|^m \begin{cases} \leq 0 & \text{si } 0 < q < 1 \\ = 0 & \text{si } q = 0 \\ \geq 0 & \text{si } q < 0 \end{cases}$$

por lo que comparando con la solución  $\mathcal{U}$  del problema sin perturbar  $(P)_{0,\alpha,q,m}$  llegamos a

$$\begin{aligned} v(x, t) &\geq \mathcal{U}(x, t) \quad \text{si } q < 0, \\ v(x, t) &= \mathcal{U}(x, t) \quad \text{si } q = 0 \end{aligned}$$

y

$$v(x, t) \leq \mathcal{U}(x, t) \quad \text{si } 0 < q < 1. \quad \square$$

### Observación 11.12

Por tanto, para  $0 < q < 1$ , se tienen las estimaciones

$$\left( \left[ (A|x|^{1+\alpha})^{1-q} - \lambda(1-q)t \right]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}} \leq u(x, t) \leq \left( \left[ (\mathcal{U}(x, t))^{1-q} - \lambda(1-q)t \right]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}}. \quad \square$$

Para  $\boxed{q = 1}$  obtenemos acotaciones inferiores y superiores de las soluciones.

### Teorema 11.13

Cualquier solución  $u$  de  $(P)_{\lambda,\alpha,1,m}$  verifica

$$A|x|^{1+\alpha}e^{-\lambda t} \leq u(x, t) \leq \mathcal{U}(x, t)e^{-\lambda t}.$$

Por tanto,

$$u(0, t) = \begin{cases} +\infty, & t \geq 0 \quad \text{si } \alpha < -1 \\ 0, & t \geq 0 \quad \text{si } \alpha > -1. \end{cases}$$

### Demostración.

Como  $u$  es solución de  $(P)_{\lambda,\alpha,1,m}$  verifica

$$u_t + \lambda u = R|\nabla u|^m \geq 0$$

en el sentido de la viscosidad. Así, para todo  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $0 < t_0 < t$  se tiene

$$\int_{u(x,t_0)}^{u(x,t)} \frac{ds}{s} \geq -\lambda(t - t_0).$$

Como

$$\int_{u(x,t_0)}^{u(x,t)} \frac{ds}{s} = \ln s \Big|_{u(x,t_0)}^{u(x,t)} = \ln \left( \frac{u(x,t)}{u(x,t_0)} \right)$$



se obtiene

$$u(x, t) \geq u(x, t_0)e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad 0 < t_0 < t.$$

Para la estimación superior consideramos la función

$$w(x, t) = u(x, t)e^{\lambda t},$$

que verifica

$$\begin{aligned} w_t - R|\nabla w|^m &= (u_t + \lambda u) e^{\lambda t} - R e^{\lambda m t} |\nabla u|^m \\ &= R e^{\lambda t} |\nabla u|^m (1 - e^{\lambda(m-1)t}) \leq 0 \end{aligned}$$

y

$$w(x, 0) = A|x|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

de donde se obtiene que  $w \leq \mathcal{U}$ .  $\square$

#### Observación 11.14

Nuevamente, en las condiciones anteriores, se verifica la *propiedad de entropía*:

$$u(x, t) < +\infty \Rightarrow u(x, t_0) < +\infty \quad \text{si } t_0 < t. \quad \square$$

Finalmente, estudiamos el rango de exponentes  $\boxed{q > 1}$ .

#### Teorema 11.15

*Cualquier solución  $u$  del problema de Cauchy*

$$(P) \quad \begin{cases} u_t - R|\nabla u|^m + \lambda u^q = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

donde  $\lambda > 0$ ,  $q > 1$  y  $u_0(\cdot)$  es una función arbitraria, verifica

$$u(x, t) \geq \begin{cases} \frac{u_0(x)}{[1 + \lambda(q-1)(u_0(x))^{q-1}t]^{\frac{1}{q-1}}} & \text{si } u_0(x) < +\infty \\ \left(\frac{1}{\lambda(q-1)t}\right)^{\frac{1}{q-1}} & \text{si } u_0(x) = +\infty. \end{cases}$$

Consecuentemente,  $u$  está definida para cualquier dato inicial  $u_0$ .

**Demostración.**

Nuevamente utilizamos el hecho que  $u$  verifica

$$u_t + \lambda u^q = R|\nabla u|^m \geq 0$$

en el sentido de la viscosidad. Por tanto, para todo  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $0 < t_0 < t$  se cumple

$$\int_{u(x,t_0)}^{u(x,t)} \frac{ds}{s^q} \geq -\lambda(t - t_0).$$

Como ahora

$$\int_{u(x,t_0)}^{u(x,t)} \frac{ds}{s^q} = \frac{s^{1-q}}{1-q} \Big|_{u(x,t_0)}^{u(x,t)} = \frac{(u(x,t_0))^{1-q} - (u(x,t))^{1-q}}{q-1}$$

se obtiene

$$(u(x,t))^{1-q} \leq (u(x,t_0))^{1-q} + \lambda(q-1)(t-t_0)$$

es decir,

$$\frac{1}{(u(x,t))^{q-1}} \leq \frac{1}{(u(x,t_0))^{q-1}} + \lambda(q-1)(t-t_0), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad 0 < t_0 < t.$$

Haciendo tender  $t_0 \rightarrow 0$  obtenemos el resultado.  $\square$

**11.3 Hamiltonianos con crecimiento lineal.**

Consideremos el *problema modelo*

$$(P)_{\lambda,\alpha,q,1} \begin{cases} u_t - R|\nabla u| + \lambda u^q = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = A|x|^{1+\alpha}, & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

donde  $\lambda > 0$ ,  $A > 0$  y  $\alpha, q \in \mathbb{R}$ .

Comenzamos nuestro estudio con el caso  $\boxed{q=1}$  para el que un cambio de variable permite poner la solución  $u$  de  $(P)_{\lambda,\alpha,1,1}$  en términos de la solución  $\mathcal{U}$  del problema sin perturbar  $(P)_{0,\alpha,1,1}$ . Más precisamente,

**Teorema 11.16**

La solución  $u$  de  $(P)_{\lambda, \alpha, 1, 1}$  viene dada por

$$u(x, t) = \mathcal{U}(x, t)e^{-\lambda t}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0. \quad (11.10)$$

Por tanto,

$$u(x, t) = \begin{cases} A(|x| - Rt)_+^{1+\alpha} e^{-\lambda t} & \text{si } \alpha < -1 \\ Ae^{-\lambda t} & \text{si } \alpha = -1 \\ A(|x| + Rt)^{1+\alpha} e^{-\lambda t} & \text{si } \alpha > -1. \end{cases} \quad (11.11)$$

**Demstración.**

Consideremos la función

$$w(x, t) = u(x, t)e^{\lambda t}$$

ya utilizada en la demostración del Teorema 11.13. Para el caso  $m = 1$ ,  $w$  es solución de viscosidad del problema

$$\begin{cases} w_t - R|\nabla w| = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ w(x, 0) = A|x|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (11.12)$$

luego  $w$  coincide con la fórmula de Lax-Oleinik  $\mathcal{U}$  de (11.12). A partir de (10.33) sabemos que

$$\mathcal{U}(x, t) = \begin{cases} A(|x| - Rt)_+^{1+\alpha} & \text{si } \alpha < -1 \\ A & \text{si } \alpha = -1 \\ A(|x| + Rt)^{1+\alpha} & \text{si } \alpha > -1 \end{cases} \quad (11.13)$$

de donde se sigue el resultado.  $\square$

**Observación 11.17**

Nótese que para  $q = 1$  sólo hay dos comportamientos posibles en el infinito: *explosión fuera de conos*

$$u(x, t) = +\infty, \quad t \geq \frac{|x|}{R} \quad (\alpha < -1)$$

y *decaimiento exponencial-potencial*

$$u(x, t) \sim AR^{1+\alpha}t^{1+\alpha}e^{-\lambda t} \quad \text{si } t \rightarrow +\infty, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (\alpha \geq -1). \quad \square$$

Para  $q \neq 1$  podemos también obtener una representación explícita de la solución:

**Teorema 11.18**

Si  $q \neq 1$  entonces la solución  $u$  de  $(P)_{\lambda, \alpha, q, 1}$  viene dada por

$$u(x, t) = \left( [(\mathcal{U}(x, t))^{1-q} - \lambda(1-q)t]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0 \quad (11.14)$$

donde  $\mathcal{U}$  viene definida en (11.13).

**Demostración.**

Consideramos nuevamente la función

$$v(x, t) = \left( (u(x, t))^{1-q} + \lambda(1-q)t \right)^{\frac{1}{1-q}}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0$$

introducida en la demostración del Teorema 11.11. Basta tener en cuenta que para  $m = 1$  la función  $w$  es solución de viscosidad de

$$\begin{cases} v_t - \mathbf{R}|\nabla v| = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ v(x, 0) = A|x|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (11.15)$$

por lo que  $v$  es la función de Lax-Oleinik  $\mathcal{U}$  de (11.15).  $\square$

Podemos ahora detallar los diversos casos que aportan el parámetro  $q \neq 1$  y los datos iniciales modelo  $u_0(x) = A|x|^{1+\alpha}$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ . Atendiendo al signo de  $(1 + \alpha)(1 - q)$ , el primer resultado que mostramos es para  $\alpha < -1$ :

**Corolario 11.19**

Si  $q \neq 1$  y  $\alpha < -1$  la solución  $u$  de  $(P)_{\lambda, \alpha, q, 1}$  es

$$u(x, t) = \left( \left[ A^{1-q} ( [|x| - \mathbf{R}t]_+ )^{(1+\alpha)(1-q)} - \lambda(1-q)t \right]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}} \quad (11.16)$$

para  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $t \geq 0$ . Por tanto,

1. Si  $q < 1$  se verifica

$$u(x, t) = +\infty \Leftrightarrow t \geq \frac{|x|}{\mathbf{R}}.$$

2. Si  $\boxed{q > 1}$  entonces

$$u(x, t) = \left( \frac{1}{\lambda(q-1)t} \right)^{\frac{1}{q-1}} \Leftrightarrow t \geq \frac{|x|}{R}. \quad \square$$

Nótese que ahora, cuando  $\alpha < -1$  y  $q = \frac{\alpha}{1+\alpha} (> 1)$ , el dato inicial

$$u_0(x) = A_0|x|^{\frac{1}{1-q}} = \frac{A_0}{|x|^{\frac{1}{q-1}}}, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

con

$$A_0 \doteq \left( \frac{R}{\lambda(q-1)} \right)^{\frac{1}{q-1}}$$

no es una solución estacionaria del problema  $(P)_{\lambda, \frac{q}{1-q}, q, 1}$  cuando  $A = A_0$ , pues

$$w(0, t) = +\infty, \quad t \geq 0.$$

Veamos qué es lo que ocurre en estos casos:

**Teorema 11.20**

Cuando  $\boxed{\alpha < -1}$  y  $\boxed{q = \frac{\alpha}{1+\alpha}}$ , la solución del problema  $(P)_{\lambda, \frac{q}{1-q}, q, 1}$  para  $\boxed{A = A_0}$  viene dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{A_0}{|x|^{\frac{1}{q-1}}}, & t \leq \frac{|x|}{R} \\ \left( \frac{1}{\lambda(q-1)t} \right)^{\frac{1}{q-1}}, & t \geq \frac{|x|}{R}. \end{cases}$$

**Demostración.**

Como  $(1+\alpha)(1-q) = 1$ , de (11.16) y la definición de  $A_0$  para  $t \leq \frac{|x|}{R}$  y un dato inicial de la forma

$$u_0(x) = A|x|^{1+\alpha} = \frac{A}{|x|^{\frac{1}{q-1}}}, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

se verifica

$$u(x, t) = \left( \frac{1}{\left[ \frac{|x| - Rt}{A^{q-1}} + \frac{Rt}{A_0^{q-1}} \right]_+} \right)^{\frac{1}{q-1}} = \frac{AA_0}{\left( \left[ A_0^{q-1}|x| + R(A^{q-1} - A_0^{q-1})t \right]_+ \right)^{\frac{1}{q-1}}}.$$

En nuestro caso, como  $A = A_0$  entonces

$$u(x, t) = \frac{A_0}{|x|^{\frac{1}{q-1}}}, \quad t \leq \frac{|x|}{R}.$$

Por otra parte, por ser  $q > 1$ , en el Corolario 11.19 vimos que

$$u(x, t) = \left( \frac{1}{\lambda(q-1)t} \right)^{\frac{1}{q-1}} \quad \text{si } t \geq \frac{|x|}{R}.$$

Veamos que  $u$  es continua si  $x \neq 0$ . Para ello escribimos

$$u(x, t) = \begin{cases} \psi(|x|), & t \leq \frac{|x|}{R} \\ \phi(t), & t \geq \frac{|x|}{R} \end{cases}$$

donde  $\psi(r) = \frac{A_0}{r^{\frac{1}{q-1}}}$ ,  $r \geq 0$  y  $\phi(t) = \left( \frac{1}{\lambda(q-1)t} \right)^{\frac{1}{q-1}}$ ,  $t \geq 0$ . Como

$$A_0 = \left( \frac{R}{\lambda(q-1)} \right)^{\frac{1}{q-1}}$$

entonces

$$\phi\left(\frac{|x|}{R}\right) = \left(\frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{q-1}} A_0 \left(\frac{R}{|x|}\right)^{\frac{1}{q-1}} = \frac{A_0}{|x|^{\frac{1}{q-1}}} = \psi(|x|), \quad x \neq 0$$

luego  $u \in \mathcal{C}((\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}_+)$ . Además, como

$$\psi'(r) = -\frac{A_0}{q-1} \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{q-1}}, \quad r > 0$$

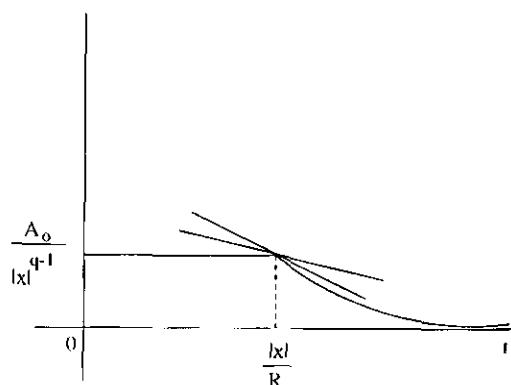


Figura 11.1: Función parcial  $t \mapsto u(x, t)$  para  $\alpha < -1$  y  $q = \frac{\alpha}{1+\alpha}$ .

y

$$\phi'(t) = -\frac{A_0}{q-1} \left( \frac{1}{Rt^q} \right)^{\frac{1}{q-1}}, \quad t > 0$$

se verifica

$$D_1^- u \left( x, \frac{|x|}{R} \right) = \left[ -\frac{A_0}{q-1} \left( \frac{1}{|x|} \right)^{\frac{1}{q-1}}, 0 \right], \quad D_1^+ u \left( x, \frac{|x|}{R} \right) = \emptyset$$

y

$$D_2^- u \left( x, \frac{|x|}{R} \right) = \emptyset, \quad D_2^+ u \left( x, \frac{|x|}{R} \right) = \left[ -\frac{RA_0}{q-1} \left( \frac{1}{|x|} \right)^{\frac{q}{q-1}}, 0 \right]$$

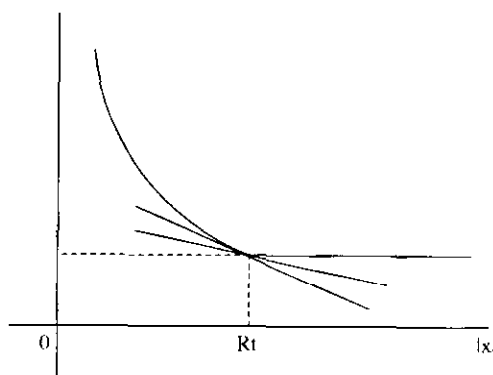


Figura 11.2: Función parcial  $x \mapsto u(x, t)$  para  $\alpha < -1$  y  $q = \frac{\alpha}{1+\alpha}$ .

por lo que  $u$  es solución de viscosidad de  $(P)_{\lambda, \frac{q}{1-q}, q, 1}$  si  $A = A_0$ .  $\square$

Nótese que de (11.13) y (11.14) para  $\boxed{\alpha = -1}$  se deduce:

**Corolario 11.21**

Si  $q \neq 1$  la solución  $u$  de  $(P)_{\lambda, -1, q, 1}$  viene dada por

$$u(x, t) = \left( [A^{1-q} - \lambda(1-q)t]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

Consecuentemente, para cada  $x \in \mathbb{R}^N$  se tiene

$$u(x, t) = 0, \quad t \geq t_\infty(x) \equiv \frac{A^{1-q}}{\lambda(1-q)} \quad \text{si } \boxed{q < 1}$$

y

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t)t^{\frac{1}{q-1}} = \left( \frac{1}{\lambda(q-1)} \right)^{\frac{1}{q-1}} \quad \text{si } \boxed{q > 1}. \quad \square$$

Finalmente, cuando  $\boxed{\alpha > -1}$  se verifica:

**Corolario 11.22**

Si  $q \neq 1$  y  $\alpha > -1$  la solución  $u$  de  $(P)_{\lambda, \alpha, q, 1}$  es, para  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $t \geq 0$ ,

$$u(x, t) = \left( [A^{1-q}(|x| + Rt)^{(1+\alpha)(1-q)} - \lambda(1-q)t]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}}. \quad (11.17)$$

Además, para cada  $x \in \mathbb{R}^N$  se tienen las siguientes propiedades:

1. Si  $\boxed{q < \frac{\alpha}{1+\alpha}}$  entonces

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t^{1+\alpha}} = AR^{1+\alpha}.$$

2. Si  $\boxed{q = \frac{\alpha}{1+\alpha}}$  se verifica

$$u(x, t) = \left( [A^{1-q}|x| + (RA^{1-q} - \lambda(1-q))t]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}}, \quad t \geq 0. \quad (11.18)$$



3. Si  $\frac{\alpha}{1+\alpha} < q < 1$  entonces

$$u(x, t) = 0 \quad \text{si } t \geq t_\infty(x)$$

donde la función primer instante de anulación  $t_\infty(x)$  viene dada por la relación implícita

$$\frac{t_\infty(x)}{(|x| + R t_\infty(x))^{(1+\alpha)(1-q)}} = \frac{A^{1-q}}{\lambda(1-q)}.$$

4. Si  $q > 1$  se verifica

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) t^{\frac{1}{q-1}} = \left( \frac{1}{\lambda(q-1)} \right)^{\frac{1}{q-1}}.$$

### **Demostración.**

Para obtener (11.17), basta reemplazar el valor  $\alpha > -1$  de (11.13) en (11.14). A continuación, estudiamos cada uno de los casos:

1. Si  $q < \frac{\alpha}{1+\alpha}$  entonces  $q(1+\alpha) - \alpha < 0$ , por lo que

$$\begin{aligned} \frac{u(x, t)}{t^{1+\alpha}} &= \left( A^{1-q} \left( \frac{|x| + R t}{t} \right)^{(1+\alpha)(1-q)} - \lambda(1-q) t^{q(1+\alpha)-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-q}} \\ &\sim \left( A^{1-q} R^{(1+\alpha)(1-q)} \right)^{\frac{1}{1-q}} = A R^{1+\alpha} \quad \text{si } t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

2. Si  $q = \frac{\alpha}{1+\alpha}$  obtenemos (11.18) sin más que sustituir en (11.17) teniendo en cuenta la igualdad  $(1+\alpha)(1-q) = 1$ .

3. Si  $\frac{\alpha}{1+\alpha} < q < 1$  el resultado es inmediato.

4. Si  $q > 1$  basta observar que cuando  $t \rightarrow +\infty$  :

$$u(x, t) = \left( \frac{1}{\frac{1}{A^{q-1}(|x| + Rt)^{(1+\alpha)(q-1)} + \lambda(q-1)t}} \right)^{\frac{1}{q-1}} \sim \left( \frac{1}{\lambda(q-1)t} \right)^{\frac{1}{q-1}} . \quad \square$$

**Observación 11.23**

Si  $\alpha > -1$  y  $\frac{\alpha}{1+\alpha} < q < 1$  en particular para el punto  $x = 0$  se verifica

$$u(0, t) = 0 \Leftrightarrow t \geq t_\infty(0)$$

estando  $t_\infty(0)$  definido por la relación

$$t_\infty(0) = \frac{A^{1-q}}{\lambda(1-q)} (Rt_\infty(0))^{(1+\alpha)(1-q)},$$

de donde se obtiene

$$t_\infty(0) = \left( \frac{(AR^{1+\alpha})^{1-q}}{\lambda(1-q)} \right)^{\frac{1}{(1+\alpha)q-\alpha}} .$$

Además, es posible dar una estimación inferior de  $t_\infty(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^N$ . Concretamente, puesto que se tiene

$$\frac{A^{1-q}}{\lambda(1-q)} \leq \min \left\{ \frac{(t_\infty(x))^{(1+\alpha)q-\alpha}}{R^{(1+\alpha)(1-q)}}, \frac{t_\infty(x)}{|x|^{(1+\alpha)(1-q)}} \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

entonces

$$t_\infty(x) \geq \max \left\{ \left( \frac{(AR^{1+\alpha})^{1-q}}{\lambda(1-q)} \right)^{\frac{1}{(1+\alpha)q-\alpha}}, \frac{A^{1-q}}{\lambda(1-q)} |x|^{(1+\alpha)(1-q)} \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^N . \quad \square$$

Hagamos un estudio más pormenorizado del caso  $q = \frac{\alpha}{1+\alpha}$  con  $\alpha > -1$ , para el cual

$$A_0 \doteq \left( \frac{\lambda(1-q)}{R} \right)^{\frac{1}{1-q}}$$

desempeña un destacado papel. Como se dá la igualdad

$$\mathbb{R}A_0^{1-q} - \lambda(1-q) = 0,$$

entonces la relación (11.18) nos permite obtener:

**Corolario 11.24**

Si  $q = \frac{\alpha}{1+\alpha}$  con  $\alpha > -1$  se verifican los siguientes resultados:

1. Si  $A < A_0$  entonces:  $u(x, t) = 0 \Leftrightarrow t \geq t_\infty(x) = \frac{A^{1-q}|x|}{\mathbb{R}(A_0^{1-q} - A^{1-q})}$ .
2. Si  $A = A_0 \Rightarrow u(x, t) = u_0(x) = A_0|x|^{\frac{1}{1-q}}, x \in \mathbb{R}^N, t \geq 0$  (solución estacionaria).
3. Si  $A > A_0 \Rightarrow u(0, 0) = 0, u(x, t) > 0$  si  $(x, t) \neq (0, 0)$  y

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t^{\frac{1}{1-q}}} = \left[ \mathbb{R}(A^{1-q} - A_0^{1-q}) \right]^{\frac{1}{1-q}}.$$

**Demostración.**

Por el Corolario 11.22 sabemos que para  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $t \geq 0$  se verifica

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \left( \left[ A^{1-q}(|x| + \mathbb{R}t) - \lambda(1-q)t \right]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}} \\ &= \left( \left[ A^{1-q}(|x| + \mathbb{R}t) - \mathbb{R}A_0^{1-q}t \right]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}} = \left( \left[ A^{1-q}|x| + \mathbb{R}(A^{1-q} - A_0^{1-q})t \right]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}}. \end{aligned}$$

De esta forma, los dos primeros resultados son inmediatos, mientras que el último se sigue de

$$\frac{u(x, t)}{t^{\frac{1}{1-q}}} = \left( A^{1-q} \frac{|x|}{t} + \mathbb{R}(A^{1-q} - A_0^{1-q}) \right)^{\frac{1}{1-q}} \sim \left( \mathbb{R}(A^{1-q} - A_0^{1-q}) \right)^{\frac{1}{1-q}} \quad \text{si } t \rightarrow +\infty. \quad \square$$

Podemos sumarizar nuestros resultados en la tabla y el gráfico siguientes:

	$q$	Convergencias	Exp	Ext
-1	$q \leq 1$	$u(x, t) = +\infty \Leftrightarrow t \geq \frac{ x }{R}$	SI	—
-1	$q > 1$	$u(x, t) = \left(\frac{1}{\lambda(q-1)t}\right)^{\frac{1}{q-1}} \Leftrightarrow t \geq t_\infty(x) = \frac{ x }{R}$	—	SI
-1	$q < 1$	$u(x, t) = 0 \Leftrightarrow t \geq t_\infty(x) \equiv \frac{A^{1-q}}{\lambda(1-q)}$	—	SI
-1	$q = 1$	$u(x, t) = Ae^{-\lambda t}, x \in \mathbb{R}^N, t \geq 0$	—	—
-1	$q > 1$	$u(x, t) \sim \left(\frac{1}{\lambda(q-1)t}\right)^{\frac{1}{q-1}}, t \rightarrow +\infty$	—	—
-1	$q < \frac{\alpha}{1+\alpha}$	$u(x, t) \sim AR^{1+\alpha}t^{1+\alpha}, t \rightarrow +\infty$	—	—
-1	$q = \frac{\alpha}{1+\alpha}$	$u(x, t) \begin{cases} = 0 \Leftrightarrow t \geq t_\infty(x) = \frac{A^{1-q} x }{\lambda(1-q) - RA^{1-q}} & (A < A_0) \\ = A x ^{\frac{1}{1-q}}, x \in \mathbb{R}^N, t \geq 0 & (A = A_0) \\ \sim ((RA^{1-q} - \lambda(1-q))t)^{\frac{1}{1-q}}, t \rightarrow +\infty & (A > A_0) \end{cases}$	— — —	SI — —
-1	$\frac{\alpha}{1+\alpha} < q < 1$	$u(x, t) = 0 \Leftrightarrow t \geq t_\infty(x)$	—	SI
-1	$q = 1$	$u(x, t) \sim AR^{1+\alpha}t^{1+\alpha}e^{-\lambda t}, t \rightarrow +\infty$	—	—
-1	$q > 1$	$u(x, t) \sim \left(\frac{1}{\lambda(q-1)t}\right)^{\frac{1}{q-1}}, t \rightarrow +\infty$	—	—

Tabla 11.1: Comportamientos maximales finales ( $m = 1, \lambda > 0, t > 0$ ).

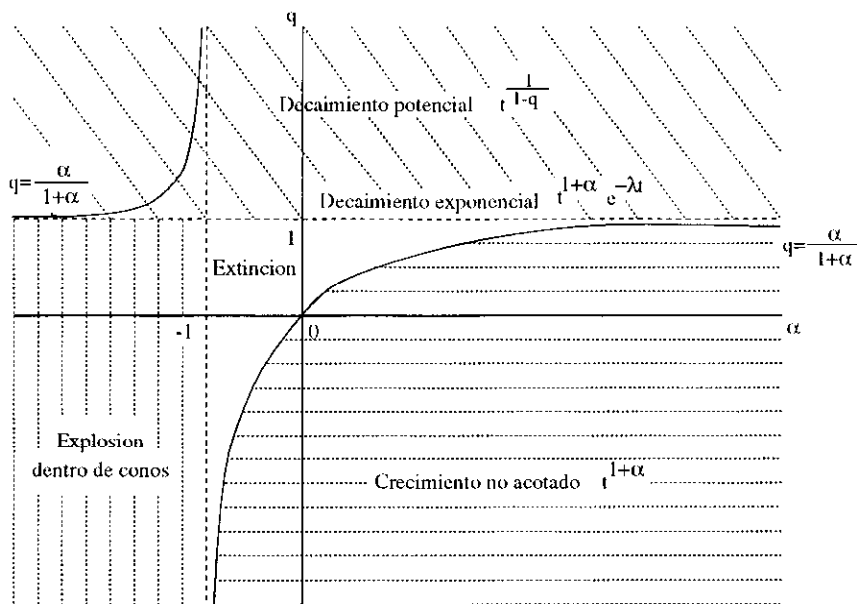


Figura 11.3: Comportamiento asintótico ( $m = 1$ ,  $\lambda > 0$ ) en el plano  $(\alpha, q)$ .

### Observación 11.25

1. Sólo hay un caso de solución estacionaria.
2. Únicamente hay explosión en el exterior del cono

$$\left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \overline{\mathbb{R}}_+ : t \geq \frac{|x|}{R} \right\}$$

cuando  $\alpha < -1$  y  $q \leq 1$ .  $\square$

### Observación 11.26

Nótese que el caso especial  $q = 0$  está también contemplado en el estudio que hicimos del problema sin perturbar en el Capítulo 10. En este caso, como

$$u_t - R|\nabla u| + \lambda = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+,$$

el Teorema 11.18 proporciona la solución

$$u(x, t) = [\mathcal{U}(x, t) - \lambda t]_+ = \begin{cases} [A(|x| - Rt)_+^{1+\alpha} - \lambda t]_+ & \text{si } \alpha < -1 \\ [A - \lambda t]_+ & \text{si } \alpha = -1 \\ [A(|x| + Rt)^{1+\alpha} - \lambda t]_+ & \text{si } \alpha > -1. \end{cases}$$

Por tanto,

1.  $\boxed{\alpha < -1} \Rightarrow u(x, t) = +\infty$  si  $t \geq \frac{|x|}{R}$ .

2.  $\boxed{\alpha = -1} \Rightarrow u(x, t) = 0$  si  $t \geq t_\infty(x) \equiv \frac{A}{\lambda}$ .

3.  $\boxed{-1 < \alpha < 0} \Rightarrow 0 < 1 + \alpha < 1 \Rightarrow u(x, t) = 0$  si  $t \geq t_\infty(x)$  con

$$\lambda t_\infty(x) = A(|x| + Rt_\infty(x))^{1+\alpha} \Rightarrow \frac{t_\infty(x)}{(|x| + Rt_\infty(x))^{1+\alpha}} = \frac{A}{\lambda}.$$

4.  $\boxed{\alpha = 0} \Rightarrow u(x, t) = [A|x| + (AR - \lambda)t]_+$ . Luego:

(a)  $\boxed{A < A_0} \Rightarrow AR - \lambda < 0 \Rightarrow u(x, t) = 0$  si  $t \geq t_\infty(x) = \frac{A|x|}{\lambda - AR}$ .

(b)  $\boxed{A = A_0} \Rightarrow AR - \lambda = 0 \Rightarrow u(x, t) = A_0|x|$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $t \geq 0$ .

(c)  $\boxed{A > A_0} \Rightarrow AR - \lambda > 0 \Rightarrow u(x, t) \sim (AR - \lambda)t$  si  $t \rightarrow +\infty$ .

5.  $\boxed{\alpha > 0} \Rightarrow 1 + \alpha > 1 \Rightarrow u(x, t) \sim AR^{1+\alpha}t^{1+\alpha}$  si  $t \rightarrow +\infty$ .  $\square$

## 11.4 Hamiltonianos con crecimiento superlineal.

Consideremos ahora el problema de Cauchy ‘modelo’

$$(P)_{\lambda, \alpha, q, m} \begin{cases} u_t - R|\nabla u|^m + \lambda u^q = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = A|x|^{1+\alpha}, & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

donde  $\lambda > 0$ ,  $A > 0$ ,  $m > 1$  y  $\alpha, q \in \mathbb{R}$ .

**Observación 11.27**

Nótese que cuando  $\alpha = -1$  la solución explícita  $u$  de  $(P)_{\lambda, -1, q, m}$  viene dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} \left( [A^{1-q} - \lambda(1-q)t]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}} & \text{si } q \neq 1 \\ Ae^{-\lambda t} & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

para cualquier  $m \geq 1$ , por lo que en nuestro estudio sólo consideraremos valores  $\alpha \neq -1$ .  $\square$

Comenzamos con una condición necesaria y suficiente para la existencia de soluciones del problema  $(P)_{\lambda, \alpha, q, m}$  cuando  $\boxed{q \leq 0}$ .

**Corolario 11.28 (Trazas)**

El problema  $(P)_{\lambda, \alpha, q, m}$  con  $q \leq 0$  tiene solución si y sólo si

$$\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{u_0(x)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} < +\infty \Leftrightarrow -1 \leq \alpha \leq \frac{1}{m-1}.$$

Además,

$$\left( [(\mathcal{U}(x, t))^{1-q} - \lambda(1-q)t]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}} \leq u(x, t) \leq \mathcal{U}(x, t).$$

**Demostración.**

Como hemos visto en el Teorema 11.11, para el caso  $q \leq 0$  se verifica

$$(u(x, t))^{1-q} \geq (\mathcal{U}(x, t))^{1-q} - \lambda(1-q)t.$$

Como  $\mathcal{U}(x, t) \equiv +\infty$  si  $\alpha \notin \left[-1, \frac{1}{m-1}\right]$  entonces  $u(x, t) \equiv +\infty$  para ese rango de valores. Por otra parte, la fórmula de Lax-Oleinik determina, para todo  $y \in \mathbb{R}^N$

$$(u(x, t))^{1-q} \geq \left( u_0(y) - (m-1) \left( \frac{|x-y|^m}{Rm^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right)^{1-q} - \lambda(1-q)t.$$

Dividiendo la expresión anterior por  $|y|^{\frac{(1-q)m}{m-1}}$  y tomando límites se obtiene

$$\limsup_{|y| \rightarrow +\infty} \frac{u_0(y)}{|y|^{\frac{m}{m-1}}} \leq (m-1) \left( \frac{1}{Rm^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}}, \quad t > 0. \quad \square$$

Vamos a hacer un estudio de las soluciones variando el exponente  $\alpha$  para  $q$  fijo. Comenzamos con el caso  $\boxed{q < 0}$ .

**Proposición 11.29**

Sea  $q < 0$  y  $u$  una solución arbitraria del problema  $(P)_{\lambda, \alpha, q, m}$ . Casos:

1. si  $\boxed{\alpha < -1}$  o  $\boxed{\alpha > \frac{1}{m-1}}$  entonces  $u(x, t) = +\infty$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $t > 0$ .

2.  $\boxed{\alpha = -1} \Rightarrow u(x, t) = \left( [A^{1-q} - \lambda(1-q)t]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}}$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $t \geq 0$ .

3. si  $\boxed{-1 < \alpha < \frac{1}{m-1}}$  distinguimos tres casos:

(a)  $\boxed{\frac{q}{m-q} < \alpha < \frac{1}{m-1}} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}} = C_\infty$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ .

(b)  $\boxed{\alpha = \frac{q}{m-q}}$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \left( [C_\infty^{1-q} - \lambda(1-q)]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}} &\leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t^{\frac{1}{1-q}}} \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t^{\frac{1}{1-q}}} \leq C_\infty. \end{aligned} \quad (11.19)$$

Vamos a denotar

$$A_0 \doteq \left[ \frac{\lambda}{R} \left( \frac{m-q}{m} \right)^m \right]^{\frac{1}{m-q}}$$

y

$$\Lambda_0 \doteq A_0 \left( \frac{1-q}{m-q} \right)^{\frac{q}{m-q}} \quad (> A_0).$$

De esta forma, si

i.  $\boxed{A > \Lambda_0} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = +\infty$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ , y, además,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t^{\frac{1}{1-q}}} = C_\infty.$$



ii.  $A \leq \Lambda_0$  Únicamente podemos afirmar

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t^{\frac{1}{1-q}}} \leq C_\infty.$$

Pueden presentarse, a su vez, varios casos:

A. si  $A < A_0$  para cada  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $t \geq 0$  se tiene

$$\left( \left[ (A|x|^{\frac{m}{m-q}})^{1-q} - \lambda(1-q)t \right]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}} \leq u(x, t) \leq A|x|^{\frac{m}{m-q}}.$$

B. si  $A = A_0$  obtenemos la solución estacionaria

$$u(x, t) = A_0|x|^{\frac{m}{m-q}}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

C. si  $A_0 < A < \Lambda_0$  entonces

$$A|x|^{\frac{m}{m-q}} \leq u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

D. si  $A = \Lambda_0$  también

$$A|x|^{\frac{m}{m-q}} \leq u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

(c)  $-1 < \alpha < \frac{q}{m-q}$  Sólo podemos afirmar

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}} \leq C_\infty.$$

4. si  $\alpha = \frac{1}{m-1}$  entonces

$$\lim_{t \rightarrow \mathbf{T}_\infty} u(x, t)(\mathbf{T}_\infty - t)^{\frac{1}{m-1}} = A\mathbf{T}_\infty^{\frac{1}{m-1}}|x|^{\frac{m}{m-1}}, \quad x \neq 0$$

y

$$u(0, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \mathbf{T}_\infty \\ +\infty, & t > \mathbf{T}_\infty. \end{cases}$$

**Demostración.**

Por el Teorema 11.11 sabemos que

$$\left( \left[ (\mathcal{U}(x, t))^{1-q} - \lambda(1-q)t \right]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}} \leq u(x, t) \leq \mathcal{U}(x, t). \quad (11.20)$$

1. Se obtiene del Corolario 11.28.
2. Se desprende de la Observación 11.27.
3. En este caso sabemos que

$$\mathcal{U}(x, t) \sim C_\infty t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}} \text{ si } t \rightarrow +\infty.$$

Para los resultados que siguen, tengamos en cuenta que

$$\frac{(1-q)(1+\alpha)}{1-\alpha(m-1)} > 1 \Leftrightarrow \overbrace{(m-q)\alpha}^{>0} > \underbrace{q}_{<0} \Leftrightarrow \alpha > \frac{q}{m-q}.$$

(a) Es inmediato.

(b) Ahora  $\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)} = \frac{1}{1-q}$ . La expresión (11.19) la obtenemos dividiendo (11.20) por  $t^{\frac{1}{1-q}}$ . Además,

$$\begin{aligned} C_\infty^{1-q} &= (1-\alpha(m-1))^{1-q} \left[ R^{1+\alpha} (Am^\alpha)^m (1+\alpha)^{(1+\alpha)(m-1)} \right]^{\frac{1-q}{1-\alpha(m-1)}} \\ &= \left( \frac{m(1-q)}{m-q} \right)^{1-q} \left[ R^{\frac{m}{m-q}} A^m m^{\frac{qm}{m-q}} \left( \frac{m}{m-q} \right)^{\frac{m(m-1)}{m-q}} \right]^{\frac{m-q}{m}} \\ &= \left( \frac{m(1-q)}{m-q} \right)^{1-q} R A^{m-q} m^q \left( \frac{m}{m-q} \right)^{m-1} \\ &= R m^m (1-q)^{1-q} \left( \frac{A}{m-q} \right)^{m-q}. \end{aligned}$$

De esta forma,

$$C_\infty^{1-q} - \lambda(1-q) > 0 \Leftrightarrow (1-q) \left[ R m^m \left( \frac{1}{1-q} \right)^q \left( \frac{A}{m-q} \right)^{m-q} - \lambda \right] > 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \text{Rm}^m \left( \frac{1}{1-q} \right)^q \left( \frac{A}{m-q} \right)^{m-q} > \lambda \\ &\Leftrightarrow A > (m-q) \left( \frac{\lambda(1-q)^q}{\text{Rm}^m} \right)^{\frac{1}{m-q}} = A_0 \left( \frac{1-q}{m-q} \right)^{\frac{q}{m-q}} = \Lambda_0. \end{aligned}$$

Los demás resultados se siguen a partir de la Proposición 11.8 y el Teorema 11.9. Nótese que cuando  $A > \Lambda_0$ , como

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = +\infty, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad \text{y} \quad q < 0$$

entonces

$$0 = u_t - \text{R}|\nabla u|^m + \lambda u^q \sim \mathcal{U}_t - \text{R}|\nabla \mathcal{U}|^m \quad \text{si} \quad t \rightarrow +\infty,$$

luego

$$u(x, t) \sim \mathcal{U}(x, t) \sim C_\infty t^{\frac{1}{1-q}} \quad \text{si} \quad t \rightarrow +\infty.$$

4. Ahora, la expresión (11.20) toma la forma

$$\begin{aligned} &\left( \left[ A^{1-q} |x|^{\frac{m(1-q)}{m-1}} \left( \frac{\mathbf{T}_\infty}{\mathbf{T}_\infty - t} \right)^{\frac{1-q}{m-1}} - \lambda(1-q)t \right]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}}, \quad x \neq 0 \\ &\leq u(x, t) \leq A |x|^{\frac{m}{m-1}} \left( \frac{\mathbf{T}_\infty}{\mathbf{T}_\infty - t} \right)^{\frac{1}{m-1}} \end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado teniendo en cuenta que

$$\mathcal{U}(0, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \mathbf{T}_\infty \\ +\infty, & t > \mathbf{T}_\infty \end{cases}$$

(véase el Teorema 10.6).  $\square$

### Observación 11.30

En el caso en que  $q < 0$  y  $\alpha = \frac{1}{m-1}$  tenemos también el *comportamiento asintótico espacial*

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} = A \left( \frac{\mathbf{T}_\infty}{\mathbf{T}_\infty - t} \right)^{\frac{1}{m-1}}, \quad 0 \leq t < \mathbf{T}_\infty. \quad \square$$

Para  $q = 0$  obtenemos la solución de forma explícita.

**Proposición 11.31**

La única solución  $u$  del problema  $(P)_{\lambda, \alpha, 0, m}$  viene dada por

$$u(x, t) = [\mathcal{U}(x, t) - \lambda t]_+, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

Por tanto:

1. si  $\alpha < -1$  o  $\alpha > \frac{1}{m-1}$  entonces  $u(x, t) = +\infty$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $t > 0$ .

2.  $\alpha = -1 \Rightarrow u(x, t) = [A - \lambda t]_+$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $t \geq 0$ .

3. Si  $-1 < \alpha < \frac{1}{m-1}$  distinguimos tres casos:

(a)  $0 < \alpha < \frac{1}{m-1} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}} = C_\infty$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ .

(b)  $\alpha = 0 \Rightarrow u(x, t) = [A|x| + R(A^m - A_0^m)t]_+$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $t \geq 0$ ,  
donde

$$A_0 = \left( \frac{\lambda}{R} \right)^{\frac{1}{m}}.$$

Luego:

i. si  $A < A_0$  entonces:  $u(x, t) = 0 \Leftrightarrow t \geq t_\infty(x) = \frac{A|x|}{R(A_0^m - A^m)}$ .

ii. si  $A = A_0 \Rightarrow u(x, t) = A_0|x|$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $t \geq 0$ .

iii. si  $A > A_0 \Rightarrow u(x, t) \sim R(A^m - A_0^m)t$  si  $t \rightarrow +\infty$ .

(c)  $-1 < \alpha < 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0$ . Además, para cada  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $\varepsilon > 0$  existe  $T_\varepsilon(x) > 0$  tal que

$$u(x, t) = 0 \quad \text{si } t > T_\varepsilon(x).$$

4. si  $\alpha = \frac{1}{m-1}$  entonces

$$\lim_{t \rightarrow \mathbf{T}_\infty} u(x, t)(\mathbf{T}_\infty - t)^{\frac{1}{m-1}} = A\mathbf{T}_\infty^{\frac{1}{m-1}}|x|^{\frac{m}{m-1}}, \quad x \neq 0$$

y

$$u(0, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \mathbf{T}_\infty \\ +\infty, & t > \mathbf{T}_\infty. \end{cases}$$

### Demostración.

Gracias al Teorema 11.11 podemos escribir

$$u(x, t) = [\mathcal{U}(x, t) - \lambda t]_+, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

1. Ver el Corolario 11.28.
2. Debido a la Observación 11.27.
3. Sabemos que

$$\mathcal{U}(x, t) \sim C_\infty t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}} \quad \text{si } t \rightarrow +\infty.$$

Para los resultados que siguen basta tener en cuenta que

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)} > 1 \Leftrightarrow \alpha > 0.$$

- (a) Es inmediato.
- (b) Utilizando el Teorema 10.4 y teniendo en cuenta que  $\lambda = RA_0^m$  se obtiene

$$u(x, t) = [A|x| + RA^m t - \lambda t]_+ = [A|x| + R(A^m - A_0^m)t]_+.$$

- (c) La primera afirmación se obtiene de forma inmediata. Para la segunda, el hecho que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{U}(x, t)}{t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}} = C_\infty, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

hace que dado  $x \in \mathbb{R}^N$ , para todo  $\varepsilon > 0$  exista  $t_\varepsilon = t_\varepsilon(x) > 0$ , tal que

$$\mathcal{U}(x, t) < (C_\infty + \varepsilon)t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}, \quad t > t_\varepsilon(x).$$

Así, si  $t > t_\varepsilon(x)$  entonces

$$\mathcal{U}(x, t) - \lambda t < t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}} \left[ (C_\infty + \varepsilon) - \lambda t^{-\frac{\alpha m}{1-\alpha(m-1)}} \right].$$

Como  $-\frac{\alpha m}{1-\alpha(m-1)} > 0$ , el segundo miembro de esta expresión se anula cuando

$$C_\infty + \varepsilon < \lambda t^{-\frac{\alpha m}{1-\alpha(m-1)}} \Leftrightarrow t > \left( \frac{C_\infty + \varepsilon}{\lambda} \right)^{-\frac{1-\alpha(m-1)}{\alpha m}}.$$

Luego, definiendo

$$T_\varepsilon(x) = \max \left\{ t_\varepsilon(x), \left( \frac{C_\infty + \varepsilon}{\lambda} \right)^{-\frac{1-\alpha(m-1)}{\alpha m}} \right\}$$

se tiene

$$\mathcal{U}(x, t) - \lambda t < 0 \quad \text{si } t > T_\varepsilon(x),$$

por lo que

$$u(x, t) = 0 \quad \text{si } t > T_\varepsilon(x).$$

4. En este caso basta observar

$$u(x, t) = \left[ A|x|^{\frac{m}{m-1}} \left( \frac{\mathbf{T}_\infty}{\mathbf{T}_\infty - t} \right)^{\frac{1}{m-1}} - \lambda t \right]_+$$

y tener en cuenta el Teorema 10.6.  $\square$

**Observación 11.32**

Si  $q = 0$  y  $\alpha = \frac{1}{m-1}$  obtenemos el *comportamiento asintótico espacial*

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} = A \left( \frac{\mathbf{T}_\infty}{\mathbf{T}_\infty - t} \right)^{\frac{1}{m-1}}, \quad 0 \leq t < \mathbf{T}_\infty$$

(véase la Observación 11.30).  $\square$

Continuamos nuestro estudio con el siguiente rango de valores  $\boxed{0 < q < 1}$ .

**Proposición 11.33**

Sea  $0 < q < 1$  y  $u$  una solución del problema  $(P)_{\lambda, \alpha, q, m}$ . Casos:

1. si  $\boxed{\alpha < -1}$  entonces  $u(x, t) = +\infty$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $t > 0$ .
2.  $\boxed{\alpha = -1} \Rightarrow u(x, t) = \left( [A^{1-q} - \lambda(1-q)t]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}}$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $t \geq 0$ .
3. Si  $\boxed{-1 < \alpha < \frac{1}{m-1}}$  distinguimos tres casos:
  - (a)  $\boxed{-1 < \alpha < \frac{q}{m-q}} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ . Además, para cada  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $\varepsilon > 0$  existe  $T_\varepsilon(x)$  tal que
 
$$u(x, t) = 0 \quad \text{si } t > T_\varepsilon(x).$$
  - (b)  $\boxed{\alpha = \frac{q}{m-q}}$  Se verifica

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t^{\frac{1}{1-q}}} \leq \left( [C_\infty^{1-q} - \lambda(1-q)]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}}. \quad (11.21)$$

Vamos a denotar

$$A_0 \doteq \left[ \frac{\lambda}{R} \left( \frac{m-q}{m} \right)^m \right]^{\frac{1}{m-q}}$$

y

$$\Lambda_0 \doteq A_0 \left( \frac{1-q}{m-q} \right)^{\frac{q}{m-q}} \quad (< A_0).$$

De esta forma, si

$$i. \quad \boxed{A \leq \Lambda_0} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t^{\frac{1}{1-q}}} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad \text{Si además } A < \Lambda_0$$

entonces para cada  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $\varepsilon > 0$  existe  $t_\varepsilon(x)$  tal que

$$u(x, t) = 0 \quad \text{si } t > t_\varepsilon(x).$$

ii.  $\boxed{A > \Lambda_0}$  Con este argumento sólo se obtiene:

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{t^{\frac{1}{1-q}}} \leq (C_\infty^{1-q} - \lambda(1-q))^{\frac{1}{1-q}}.$$

Además,

A. si  $\boxed{\Lambda_0 < A < A_0}$  entonces, para cada  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $t \geq 0$

$$\left( \left[ (A|x|^{\frac{m}{m-q}})^{1-q} - \lambda(1-q)t \right]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}} \leq u(x, t) \leq A|x|^{\frac{m}{m-q}}.$$

B. si  $\boxed{A = A_0}$  obtenemos la solución estacionaria

$$u(x, t) = A_0|x|^{\frac{m}{m-q}}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

C. si  $\boxed{A > A_0}$  entonces

$$A|x|^{\frac{m}{m-q}} \leq u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

4. si  $\boxed{\alpha = \frac{1}{m-1}}$  entonces para  $x \neq 0$  y  $0 \leq t < \mathbf{T}_\infty$  se verifica

$$\begin{aligned} & \left( \left[ (A|x|^{\frac{m}{m-1}})^{1-q} - \lambda(1-q)t \right]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}} \leq u(x, t) \\ & \leq \left( \left[ A^{1-q}|x|^{\frac{m(1-q)}{m-1}} \left( \frac{\mathbf{T}_\infty}{\mathbf{T}_\infty - t} \right)^{\frac{1-q}{m-1}} - \lambda(1-q)t \right]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}} \end{aligned}$$

y

$$u(0, t) = 0, \quad 0 \leq t < \mathbf{T}_\infty.$$

En particular,

$$u(x, t) > 0 \quad \text{si} \quad t > \frac{(A|x|^{\frac{m}{m-1}})^{1-q}}{\lambda(1-q)}, \quad x \neq 0.$$

### Demostración.

Por la Observación 11.12 sabemos que

$$\begin{aligned} & \left( \left[ (A|x|^{1+\alpha})^{1-q} - \lambda(1-q)t \right]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}} \leq u(x, t) \\ & \leq \left( \left[ (\mathcal{U}(x, t))^{1-q} - \lambda(1-q)t \right]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}}. \end{aligned} \tag{11.22}$$



1. Ver el Teorema 11.9.
2. Véase la Observación 11.27.
3. Ahora

$$\mathcal{U}(x, t) \sim C_\infty t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}} \quad \text{si } t \rightarrow +\infty.$$

Para los resultados que siguen, tengamos en cuenta que

$$\frac{(1-q)(1+\alpha)}{1-\alpha(m-1)} > 1 \Leftrightarrow \overbrace{(m-q)}^{>0} \alpha > \overbrace{q}^{>0} \Leftrightarrow \alpha > \frac{q}{m-q}.$$

- (a) La primera afirmación se obtiene de forma inmediata. Para la segunda, tengamos en cuenta

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{U}(x, t)}{t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}} = C_\infty, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

De esta forma, dado  $x \in \mathbb{R}^N$ , para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $t_\varepsilon = t_\varepsilon(x) > 0$  tal que

$$\mathcal{U}(x, t) < (C_\infty + \varepsilon) t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}}, \quad t > t_\varepsilon(x).$$

Consecuentemente, si  $t > t_\varepsilon(x)$  entonces

$$(\mathcal{U}(x, t))^{1-q} - \lambda(1-q)t < t^{\frac{(1+\alpha)(1-q)}{1-\alpha(m-1)}} \left[ (C_\infty + \varepsilon)^{1-q} - \lambda(1-q)t^{\frac{q-\alpha(m-q)}{1-\alpha(m-1)}} \right].$$

Como  $\frac{q-\alpha(m-q)}{1-\alpha(m-1)} > 0$ , el segundo miembro de esta expresión se anula cuando

$$(C_\infty + \varepsilon)^{1-q} < \lambda(1-q)t^{\frac{q-\alpha(m-q)}{1-\alpha(m-1)}} \Leftrightarrow t > \left( \frac{(C_\infty + \varepsilon)^{1-q}}{\lambda(1-q)} \right)^{\frac{1-\alpha(m-1)}{q-\alpha(m-q)}}.$$

Luego, definiendo

$$T_\varepsilon(x) = \max \left\{ t_\varepsilon(x), \left( \frac{(C_\infty + \varepsilon)^{1-q}}{\lambda(1-q)} \right)^{\frac{1-\alpha(m-1)}{q-\alpha(m-q)}} \right\}$$

se tiene que

$$(\mathcal{U}(x, t))^{1-q} - \lambda(1-q)t < 0 \text{ si } t > T_\varepsilon(x),$$

obteniéndose

$$u(x, t) = 0 \text{ si } t > T_\varepsilon(x).$$

- (b) Ahora  $\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)} = \frac{1}{1-q}$ . La expresión (11.21) la obtenemos dividiendo (11.22) por  $t^{\frac{1}{1-q}}$  y haciendo tender  $t \rightarrow +\infty$ . Al igual que hicimos en la demostración de la Proposición 11.29, se verifica

$$\begin{aligned} C_\infty^{1-q} - \lambda(1-q) &= (1-q) \leq 0 \\ \Leftrightarrow \left[ \text{Rm}^m \left( \frac{1}{1-q} \right)^q \left( \frac{A}{m-q} \right)^{m-q} - \lambda \right] &\leq 0 \Leftrightarrow A \leq \Lambda_0. \end{aligned}$$

Si  $A < \Lambda_0$  entonces  $C_\infty^{1-q} - \lambda(1-q) = (1-q) < 0$  por lo que, como

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{U}(x, t)}{t^{\frac{1}{1-q}}} = C_\infty, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

mediante un argumento de continuidad, para todo  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $0 < \varepsilon \ll 1$  existe  $t_\varepsilon(x) > 0$  tal que

$$(\mathcal{U}(x, t))^{1-q} - \lambda(1-q)t \leq (C_\infty^{1-q} - \lambda(1-q) + \varepsilon)t < 0 \text{ si } t > t_\varepsilon(x),$$

obteniéndose

$$u(x, t) = 0 \text{ si } t > t_\varepsilon(x).$$

4. Basta tener en cuenta (11.22) y el Teorema 10.6.  $\square$

#### Observación 11.34

En el caso en que  $0 < q < 1$  y  $-1 < \alpha < \frac{q}{m-q}$  tenemos, para cada  $x \in \mathbb{R}^N$  y  $\varepsilon > 0$ , la siguiente estimación de la función  $T_\varepsilon(x)$ :

$$\frac{(A|x|^{1+\alpha})^{1-q}}{\lambda(1-q)} \leq t_\infty(x) \leq T_\varepsilon(x). \quad \square$$

Para  $\boxed{q = 1}$  se verifica:

**Proposición 11.35**

Sea  $u$  una solución arbitraria del problema  $(P)_{\lambda, \alpha, 1, m}$ . Casos:

1. si  $\boxed{\alpha < -1}$  entonces  $u(x, t) = +\infty$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $t > 0$ .

2.  $\boxed{\alpha = -1} \Rightarrow u(x, t) = Ae^{-\lambda t}$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $t \geq 0$ .

3. Si  $\boxed{-1 < \alpha < \frac{1}{m-1}}$  entonces

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Además,

$$A|x|^{1+\alpha} \leq u(x, t)e^{\lambda t} \leq \mathcal{U}(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

4. si  $\boxed{\alpha = \frac{1}{m-1}}$  entonces

$$u(0, t) = 0, \quad 0 \leq t < \mathbf{T}_\infty$$

y distinguimos varios casos:

(a)  $\boxed{A < A_0} \Rightarrow A|x|^{\frac{m}{m-1}}e^{-\lambda t} \leq u(x, t) \leq A|x|^{\frac{m}{m-1}}$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $t \geq 0$ .  
Por tanto:

$$Ac^{-\lambda t} \leq \liminf_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} \leq \limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{u(x, t)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} \leq A, \quad t \geq 0.$$

(b)  $\boxed{A = A_0}$  Obtencemos la solución estacionaria

$$u(x, t) = A_0|x|^{\frac{m}{m-1}}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

(c)  $\boxed{A > A_0} \Rightarrow A|x|^{\frac{m}{m-1}} \leq u(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $t \geq 0$ .

**Demostración.**

Del Teorema 11.13 se obtiene

$$A|x|^{1+\alpha}e^{-\lambda t} \leq u(x, t) \leq \mathcal{U}(x, t)e^{-\lambda t}. \quad (11.23)$$

1. Véase el Teorema 11.13.
2. Ver la Observación 11.27.
3. Basta tener en cuenta que

$$\mathcal{U}(x, t) \sim C_{\infty} t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha(m-1)}} \text{ si } t \rightarrow +\infty.$$

4. La expresión (11.23) toma la forma

$$A|x|^{\frac{m}{m-1}}e^{-\lambda t} \leq u(x, t) \leq A|x|^{\frac{m}{m-1}} \left( \frac{\mathbf{T}_{\infty}}{\mathbf{T}_{\infty} - t} \right)^{\frac{1}{m-1}} e^{-\lambda t}, \quad 0 \leq t < \mathbf{T}_{\infty}.$$

Recordemos que en este caso especial está la solución estacionaria

$$A_0|x|^{\frac{m}{m-1}} \text{ con } A_0 = \left[ \frac{\lambda}{\mathbf{R}} \left( \frac{m-1}{m} \right)^m \right]^{\frac{1}{m-1}}.$$

Los resultados se siguen de la la Proposición 11.8.  $\square$

**Observación 11.36**

De la expresión (11.23) se deduce

$$u(x, t) > 0, \quad x \neq 0, \quad t \geq 0$$

y

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} u(x, t)e^{\lambda t} \geq A|x|^{1+\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Finalmente, para  $\boxed{q > 1}$  tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 11.37**

Sea  $q > 1$  y  $u$  cualquier solución de  $(P)_{\lambda, \alpha, q, m}$  que dependa de  $t$ . Entonces para cada  $x \neq 0$  y  $t \geq 0$  se verifica<sup>2</sup>

$$\frac{A|x|^{1+\alpha}}{[1 + \lambda(q-1)(A|x|^{1+\alpha})^{q-1}t]^{\frac{1}{q-1}}} \leq u(x, t) \leq \left( \frac{1}{\lambda(q-1)t} \right)^{\frac{1}{q-1}}.$$

Por tanto,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t)t^{\frac{1}{q-1}} = \left( \frac{1}{\lambda(q-1)} \right)^{\frac{1}{q-1}}, \quad x \neq 0.$$

Además, en el caso particular en que  $\alpha = -1$  se tiene de forma explícita

$$u(x, t) = \frac{A}{[1 + \lambda(q-1)A^{q-1}t]^{\frac{1}{q-1}}}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

**Demostración.**

La estimación inferior la obtenemos por el Teorema 11.15. Para obtener la estimación superior vamos a considerar, para cada  $\delta > 0$ , el problema aproximado

$$(P)_\delta \begin{cases} u_t^\delta - \mathbf{R}|\nabla u^\delta|^m + \lambda(u^\delta)^q = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u^\delta(x, 0) = u_0^\delta(x), & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

donde

$$u_0^\delta(x) = \begin{cases} A(|x| + \delta)^{1+\alpha} & \text{si } \alpha < -1 \\ A \left( |x|^{1+\alpha} \wedge \frac{1}{\delta} \right) & \text{si } \alpha > -1. \end{cases}$$

El caso  $\alpha = -1$  no lo consideramos dado que tenemos la solución explícita (ver la Observación 11.27). Como para cada  $\delta > 0$  la función  $u_0^\delta \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$  entonces existe  $u^\delta \in L^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$  solución de  $(P)_\delta$ . Nuestra argumentación requiere un resultado previo para estas funciones ‘aproximantes’:

**Lema 11.38**

Si  $q > 1$  para cada  $\delta > 0$  se verifica

$$\frac{u_0^\delta(x)}{[1 + \lambda(q-1)(u_0^\delta(x))^{q-1}t]^{\frac{1}{q-1}}} \leq u^\delta(x, t) \leq \left( \frac{1}{\lambda(q-1)t} \right)^{\frac{1}{q-1}}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

<sup>2</sup>Si  $\alpha > -1$  el resultado es válido también para  $x = 0$ .

Consecuentemente,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u^\delta(x, t) t^{\frac{1}{q-1}} = \left( \frac{1}{\lambda(q-1)} \right)^{\frac{1}{q-1}}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

**Demostración del Lema 11.38.**

Dado  $(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$  arbitrario y  $k > 0$  consideramos el compacto

$$\mathcal{R}_k = \{(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ : |x - \xi| \leq k, 0 \leq t \leq \tau\}.$$

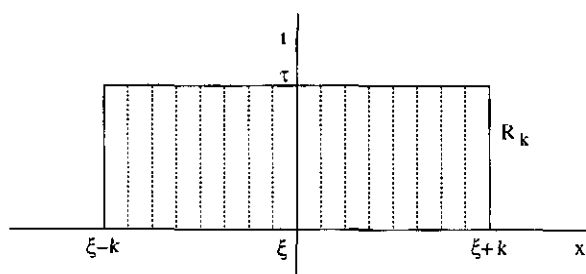


Figura 11.4: Conjunto  $\mathcal{R}_k$ .

Como  $u^\delta \in \mathcal{C}(\mathcal{R}_k)$  entonces

$$\max \{u^\delta(x, t) : |x - \xi| \leq k, 0 \leq t \leq \tau\} < +\infty.$$

Distinguimos varios casos:

1.  $m > q > 1$ . Denotando por

$$\phi(t) \doteq \left( \frac{1}{\lambda(q-1)t} \right)^{\frac{1}{q-1}}, \quad t \geq 0$$

consideramos la función auxiliar

$$\psi(x, t) = \phi(t) + \varrho(|x - \xi|)$$

siendo  $\varrho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$  con  $\varrho(0) = 0$  y  $\varrho' \geq 0$  una función por determinar.

- (a) Teniendo en cuenta que

$$\phi'(t) + \lambda(\phi(t))^q = 0, \quad t > 0 \tag{11.24}$$

y

$$(r+s)^\sigma - r^\sigma \geq \frac{1}{2^{\sigma-1}} s^\sigma, \quad r, s \geq 0, \quad \sigma > 1 \quad (11.25)$$

se verifica

$$\begin{aligned} \psi_t - R|\nabla\psi|^m + \lambda\psi^q &= \phi' - R(\phi')^m + \lambda(\phi + \varrho)^q \\ &= \lambda((\phi + \varrho)^q - \phi^q) - R(\phi')^m \geq \frac{\lambda}{2^{m-1}} \varrho^q - R(\phi')^m. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \psi_t - R|\nabla\psi|^m + \lambda\psi^q \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{\varrho'}{\varrho^{\frac{q}{m}}} \leq \left( \frac{\lambda}{2^{m-1}R} \right)^{\frac{1}{m}} \\ \Leftrightarrow \varrho(r) &\leq \left[ \frac{m-q}{m} \left( \frac{\lambda}{2^{m-1}R} \right)^{\frac{1}{m}} r \right]^{\frac{m}{m-q}} = \frac{A_0}{2^{\frac{m-1}{m-q}}} r^{\frac{m}{m-q}} \end{aligned}$$

donde

$$A_0 = \left[ \frac{\lambda}{R} \left( \frac{m-q}{m} \right)^m \right]^{\frac{1}{m-q}}.$$

Por tanto, consideramos

$$\varrho(r) = cr^{\frac{m}{m-q}} \quad \text{con } c \leq \frac{A_0}{2^{\frac{m-1}{m-q}}} \quad (< A_0).$$

(b)  $\lim_{t \rightarrow 0} (u(x, t) - \psi(x, t)) = -\infty < 0.$

(c) Finalmente veamos que se verifica

$$u(x, t) \leq \psi(x, t) \quad \text{si } |x - \xi| = k \quad \text{y } 0 \leq t \leq \tau.$$

Para ello utilizamos la solución del problema  $(P)_\delta$  pero sin término de perturbación, que viene dada por la fórmula de Lax-Oleinik

$$u^\delta(x, t) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \left\{ u_0^\delta(y) - (m-1) \left( \frac{|x-y|^m}{Rm^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\}.$$

Como  $u_0^\delta \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$  entonces

$$\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{u_0^\delta(x)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} = 0$$

por lo que la función  $\mathcal{U}^\delta(\cdot, t)$  está definida para todo  $t \geq 0$ . Además, para cualquier  $\alpha \in \mathbb{R}$  se verifica

$$u^\delta(x, t) \leq \mathcal{U}^\delta(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

Distinguiamos nuevamente dos casos:

i. Si  $\alpha < -1$  entonces

$$\mathcal{U}^\delta(x, t) \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^N} u_0^\delta(y) = A\delta^{1+\alpha}.$$

Por tanto, eligiendo

$$c \geq \frac{A}{k^{\frac{m}{m-q}}} \delta^{1+\alpha}$$

si  $|x - \xi| = k$  y  $0 \leq t \leq \tau$ , se verifica

$$u^\delta(x, t) \leq \mathcal{U}^\delta(x, t) \leq A\delta^{1+\alpha} \leq ck^{\frac{m}{m-q}} \leq \psi(x, t).$$

ii. Si  $\alpha > -1$  entonces

$$\mathcal{U}^\delta(x, t) \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^N} u_0^\delta(y) = \frac{A}{\delta}.$$

Luego eligiendo ahora

$$c \geq \frac{A}{k^{\frac{m}{m-q}}} \frac{1}{\delta}$$

si  $|x - \xi| = k$  y  $0 \leq t \leq \tau$ , se obtiene nuevamente

$$u^\delta(x, t) \leq \mathcal{U}^\delta(x, t) \leq \frac{A}{\delta} \leq ck^{\frac{m}{m-q}} \leq \psi(x, t).$$



Por tanto, en ambos casos, por resultados de comparación para soluciones acotadas (ver [Cr-Li2] o [Cr-Ev-Li]) se obtiene

$$u^\delta(x, t) \leq \psi(x, t) = \phi(t) + \varrho(|x - \xi|), \quad (x, t) \in \mathcal{R}_k$$

y, en particular,

$$u^\delta(\xi, \tau) \leq \phi(\tau)$$

como queríamos demostrar.

2.  $q > m > 1$ . A la vista del apartado anterior, consideramos la función

$$\psi(x, t) = \phi(t) + c(|x - \xi| + 1)^{\frac{m}{m-q}}.$$

(a) Teniendo nuevamente en cuenta las relaciones (11.24) y (11.25) se verifica

$$\begin{aligned} & \psi_t - R|\nabla\psi|^m + \lambda\psi^q \\ &= \phi' - R \left( \frac{cm}{q-m} \right)^m (|x - \xi| + 1)^{\frac{m}{m-q}} + \lambda \left( \phi + c(|x - \xi| + 1)^{\frac{m}{m-q}} \right)^q \\ & \geq c^q (|x - \xi| + 1)^{\frac{mq}{m-q}} \left[ \frac{\lambda}{2^{m-1}} - R \left( \frac{m}{q-m} \right)^m c^{m-q} \right] \geq 0 \end{aligned}$$

si escogemos

$$c \leq \left[ \frac{q-m}{m} \left( \frac{\lambda}{2^{m-1}R} \right)^{\frac{1}{m}} \right]^{\frac{m}{m-q}} = 2^{\frac{m-1}{q-m}} A_0.$$

(b)  $\lim_{t \rightarrow 0} (u(x, t) - \psi(x, t)) = -\infty < 0$ .

(c) Finalmente para mostrar que se tiene

$$u(x, t) \leq \psi(x, t) \quad \text{si } |x - \xi| = k \quad \text{y } 0 \leq t \leq \tau$$

consideramos la solución del problema  $(P)_\delta$  pero sin término de perturbación, que viene dada por la fórmula de Lax-Oleinik

$$\mathcal{U}^\delta(x, t) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \left\{ u_0^\delta(y) - (m-1) \left( \frac{|x-y|^m}{Rm^m t} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\}.$$

Como  $u_0^\delta \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$  entonces

$$\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{u_0(x)}{|x|^{\frac{m}{m-1}}} = 0$$

por lo que la función  $\mathcal{U}^\delta(\cdot, t)$  está definida para todo  $t \geq 0$ . Además, para cualquier  $\alpha \in \mathbb{R}$  se verifica

$$u^\delta(x, t) \leq \mathcal{U}^\delta(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

Distinguiamos nuevamente dos casos:

i. Si  $\alpha < -1$  entonces

$$\mathcal{U}^\delta(x, t) \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^N} u_0^\delta(y) = A\delta^{1+\alpha}.$$

Por tanto, eligiendo

$$c \geq Ak^{\frac{m}{q-m}}\delta^{1+\alpha}$$

si  $|x - \xi| = k$  y  $0 \leq t \leq \tau$ , se verifica que

$$u^\delta(x, t) \leq \mathcal{U}^\delta(x, t) \leq A\delta^{1+\alpha} \leq \frac{c}{k^{\frac{m}{q-m}}} \leq \psi(x, t).$$

ii. Si  $\alpha > -1$  entonces

$$\mathcal{U}^\delta(x, t) \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^N} u_0^\delta(y) = \frac{A}{\delta}.$$

Luego eligiendo ahora

$$c \geq Ak^{\frac{m}{q-m}} \frac{1}{\delta}$$

si  $|x - \xi| = k$  y  $0 \leq t \leq \tau$ , se obtiene nuevamente

$$u^\delta(x, t) \leq \mathcal{U}^\delta(x, t) \leq \frac{A}{\delta} \leq \frac{c}{k^{\frac{m}{q-m}}} \leq \psi(x, t).$$

Por tanto, en ambos casos, por resultados de comparación para soluciones acotadas (ver de nuevo [Cr-Li2] o [Cr-Ev-Li]) se obtiene

$$u^\delta(x, t) \leq \psi(x, t) = \phi(t) + c(|x - \xi| + 1)^{\frac{m}{m-q}}, \quad (x, t) \in \mathcal{R}_k, \quad c \leq 2^{\frac{m-1}{q-m}} A_0.$$

Así, particularizando en  $(\xi, \tau)$  y haciendo tender  $c \rightarrow 0$  concluimos

$$u^\delta(\xi, \tau) \leq \phi(\tau).$$

3.  $q = m > 1$ . Ahora la función que vamos a considerar es

$$\psi(x, t) = \phi(t) + \varrho(|x - \xi|)$$

con

$$\varrho(r) = c \left( \exp \left[ \left( \frac{\lambda}{2^{m-1}R} \right)^{\frac{1}{m}} r \right] - 1 \right), \quad r \geq 0 \quad (c > 0).$$

(a) Como la función  $\varrho$  es solución de viscosidad de la ecuación

$$\frac{\lambda}{2^{m-1}} \varrho^m - R|\varrho'|^m = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}_+,$$

las relaciones (11.24) y (11.25) determinan

$$\begin{aligned} \psi_t - R|\nabla \psi|^m + \lambda \psi^m &= \phi' - R(\varrho')^m + \lambda(\phi + \varrho)^m \\ &= \lambda((\phi + \varrho)^m - \phi^m) - R(\varrho')^m \geq \frac{\lambda}{2^{m-1}} \varrho^m - R(\varrho')^m = 0. \end{aligned}$$

(b)  $\lim_{t \rightarrow 0} (u(x, t) - \psi(x, t)) = -\infty < 0$ .

(c) Finalmente veamos que se verifica

$$u(x, t) \leq \psi(x, t) \quad \text{si } |x - \xi| = k \quad \text{y } 0 \leq t \leq \tau.$$

Para ello consideramos la solución del problema sin perturbar

$$\mathcal{U}^\delta(x, t) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \left\{ u_0^\delta(y) - (m-1) \left( \frac{|x-y|^m}{Rm^m t} \right)^{\frac{t}{m-1}} \right\}$$

que, como sabemos, está definida para todo  $t \geq 0$ . Además, para cualquier  $\alpha \in \mathbb{R}$  se verifica

$$u^\delta(x, t) \leq \mathcal{U}^\delta(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

Distinguiamos nuevamente dos casos:

i. Si  $\alpha < -1$  entonces

$$\mathcal{U}^\delta(x, t) \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^N} u_0^\delta(y) = A\delta^{1+\alpha}.$$

Por tanto, eligiendo

$$c \geq \frac{A}{\exp \left[ \left( \frac{\lambda}{2^{m-1}\mathbb{R}} \right)^{\frac{1}{m}} k \right] - 1} \delta^{1+\alpha}$$

si  $|x - \xi| = k$  y  $0 \leq t \leq \tau$ , se verifica

$$\begin{aligned} u^\delta(x, t) &\leq \mathcal{U}^\delta(x, t) \leq A\delta^{1+\alpha} \\ &\leq c \left( \exp \left[ \left( \frac{\lambda}{2^{m-1}\mathbb{R}} \right)^{\frac{1}{m}} k \right] - 1 \right) \leq \psi(x, t). \end{aligned}$$

ii. Si  $\alpha > -1$  entonces

$$\mathcal{U}^\delta(x, t) \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^N} u_0^\delta(y) = \frac{A}{\delta}.$$

Luego eligiendo ahora

$$c \geq \frac{A}{\exp \left[ \left( \frac{\lambda}{2^{m-1}\mathbb{R}} \right)^{\frac{1}{m}} k \right] - 1} \frac{1}{\delta}$$

si  $|x - \xi| = k$  y  $0 \leq t \leq \tau$ , se obtiene nuevamente

$$\begin{aligned} u^\delta(x, t) &\leq \mathcal{U}^\delta(x, t) \leq \frac{A}{\delta} \\ &\leq c \left( \exp \left[ \left( \frac{\lambda}{2^{m-1}\mathbb{R}} \right)^{\frac{1}{m}} k \right] - 1 \right) \leq \psi(x, t). \end{aligned}$$

Por tanto, en ambos casos, por resultados de comparación para soluciones acotadas (ver de nuevo [Cr-Li2] o [Cr-Ev-Li]) se obtiene

$$u^\delta(x, t) \leq \psi(x, t) = \phi(t) + c \left( \exp \left[ \left( \frac{\lambda}{2^{m-1}\mathbb{R}} \right)^{\frac{1}{m}} |x - \xi| \right] - 1 \right)$$

para cada  $(x, t) \in \mathcal{R}_k$ . En particular,

$$u^\delta(\xi, \tau) \leq \phi(\tau). \quad \square$$

**Demostración de la Proposición 11.37** (continuación).

Como acabamos de mostrar, para cada  $\delta > 0$  se verifica

$$0 \leq u^\delta(x, t) \leq \phi(t), \quad t \geq 0.$$

Además, si  $0 < \delta_1 < \delta_2$  y

$$\alpha < -1 \Rightarrow u_0^{\delta_1}(x) \geq u_0^{\delta_2}(x) \Rightarrow u^{\delta_1}(x, t) \geq u^{\delta_2}(x, t),$$

mientras que si

$$\alpha > -1 \Rightarrow u_0^{\delta_1}(x) \leq u_0^{\delta_2}(x) \Rightarrow u^{\delta_1}(x, t) \leq u^{\delta_2}(x, t).$$

Luego  $\{u^\delta\}_{\delta>0}$  es una sucesión monótona cuando  $\delta \rightarrow 0$  y está uniformemente acotada. Por tanto, existe

$$u(x, t) \doteq \lim_{\delta \rightarrow 0} u^\delta(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0$$

y se verifica

$$u(x, 0) = u_0(x) = A|x|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Para concluir el resultado, veamos que, de hecho,  $u^\delta \rightarrow u$  uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$  para, de esta forma, garantizar que esta función  $u$  así construida es solución del problema límite (P)<sub>0</sub>. Como para cada  $\sigma \geq 0$  la función

$$g(r) = \frac{r}{[1 + \sigma r^{q-1}]^{\frac{1}{q-1}}}, \quad r \geq 0$$

es creciente<sup>3</sup> cuando  $q > 1$ , entonces para cada  $0 < \delta < 1$  tenemos las estimaciones<sup>4</sup>

$$\frac{u_0^i(x)}{[1 + \lambda(q-1)(u_0^i(x))^{q-1}t]^{\frac{1}{q-1}}} \leq \frac{u_0^\delta(x)}{[1 + \lambda(q-1)(u_0^\delta(x))^{q-1}t]^{\frac{1}{q-1}}}$$

<sup>3</sup> $g'(r) = \frac{1}{[1 + \sigma r^{q-1}]^{\frac{q}{q-1}}} > 0, \quad r > 0 \text{ si } q > 1.$

<sup>4</sup>Como  $0 < \delta < 1$  entonces

$$\begin{cases} \alpha < -1 \Rightarrow u_0^\delta(x) \geq u_0^1(x) \Rightarrow g(u_0^\delta(x)) \geq g(u_0^1(x)) \\ \alpha > -1 \Rightarrow u_0^\delta(x) \leq u_0^0(x) \Rightarrow g(u_0^\delta(x)) \geq g(u_0^0(x)). \end{cases}$$

$$\leq u^\delta(x, t) \leq \left( \frac{1}{\lambda(q-1)t} \right)^{\frac{1}{q-1}} \quad \text{con } i = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha < -1 \\ 0 & \text{si } \alpha > -1. \end{cases}$$

Sea  $(p_1^\delta, p_2^\delta) \in D^-u^\delta(x, t)$ . Por definición, para cada  $h > 0$ :

$$u^\delta(x, t+h) \geq u^\delta(x, t) + p_2^\delta h + o(h).$$

Luego

$$\begin{aligned} p_2^\delta &\leq \frac{u^\delta(x, t+h) - u^\delta(x, t)}{h} + \frac{o(h)}{h} \\ &\leq \frac{1}{h} \left( \frac{1}{\lambda(q-1)(t+h)} \right)^{\frac{1}{q-1}} - \frac{1}{h} \frac{u_0^i(x)}{[1 + \lambda(q-1)(u_0^i(x))^{q-1}t]^{\frac{1}{q-1}}} + \frac{o(h)}{h}. \end{aligned}$$

Consecuentemente, de la definición se sigue

$$|p_1^\delta| \leq \frac{1}{\mathbb{R}} \left( \lambda u^q + p_2^\delta \right)^{\frac{1}{m}}$$

por lo que  $|p_1^\delta| \leq c$  en subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$ .  $\square$

Una vez que sabemos que

$$u(x, t) \leq \left( \frac{1}{\lambda(q-1)t} \right)^{\frac{1}{q-1}},$$

podemos mejorar esta estimación.

### Corolario 11.39

Si  $\boxed{q > 1}$  cualquier solución  $u$  de  $(P)_{\lambda, \alpha, q, m}$  verifica

$$u(x, t) \leq \frac{\mathcal{U}(x, t)}{(1 + \lambda(q-1)(\mathcal{U}(x, t))^{q-1}t)^{\frac{1}{q-1}}}.$$

### Demostración.

Consideramos la función

$$v(x, t) = \left( \left[ (u(x, t))^{1-q} + \lambda(1-q)t \right]_+ \right)^{\frac{1}{1-q}}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

Como en la región  $[u > 0]$  se tiene

$$v_t(x, t) = (v(x, t))^q \left( \frac{u_t(x, t)}{(u(x, t))^q} + \lambda \right) = R \left( \frac{v(x, t)}{u(x, t)} \right)^q |\nabla u(x, t)|^m$$

y

$$\nabla v(x, t) = \left( \frac{v(x, t)}{u(x, t)} \right)^q \nabla u(x, t)$$

entonces la función  $v$  verifica

$$v_t - R|\nabla v|^m = R \left( \frac{v(x, t)}{(u(x, t))^m} \right)^q \left( (u(x, t))^{q(m-1)} - (v(x, t))^{q(m-1)} \right)$$

y

$$v(x, 0) = A|x|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Como

$$u(x, t) \leq \left( \frac{1}{\lambda(q-1)t} \right)^{\frac{1}{q-1}}$$

y  $q > 1$ , de la propia definición se desprende

$$(v(x, t))^{1-q} \leq (u(x, t))^{1-q},$$

consecuentemente,

$$v(x, t) \geq u(x, t),$$

por lo que se obtiene

$$v_t - R|\nabla v|^m \leq 0.$$

Así, llegamos a

$$v(x, t) \leq \mathcal{U}(x, t)$$

de donde se sigue el resultado.  $\square$

#### Observación 11.40

1. Nótese que

$$u(0, 0) \geq 0 \quad \text{y} \quad u(x, t) > 0 \quad \text{si} \quad (x, t) \neq (0, 0)$$

y

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} u(x, t)t^{\frac{1}{q-1}} = \left( \frac{1}{\lambda(q-1)} \right)^{\frac{1}{q-1}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

2. También obtenemos el *comportamiento asintótico espacial*

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x, t) = \left( \frac{1}{\lambda(q-1)t} \right)^{\frac{1}{q-1}}, \quad t > 0.$$

3. Cuando  $q > 1$  el resultado anterior puede extenderse a datos iniciales  $u_0(x)$  arbitrarios, obteniéndose

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t)t^{\frac{1}{q-1}} = \left( \frac{1}{\lambda(q-1)} \right)^{\frac{1}{q-1}} \quad \text{si } u_0(x) \neq 0.$$

Únicamente pueden presentarse *dos excepciones* que se corresponden con las dos únicas *soluciones estacionarias*<sup>5</sup>

$$u(x, t) = A_0 |x|^{\frac{m}{m-q}} \quad \text{si } m > q$$

y

$$u(x, t) = A \exp \left[ \left( \frac{\lambda}{R} \right)^{\frac{1}{m}} |x| \right] \quad \text{si } m = q. \quad \square$$

Como hemos comentado, en el resultado anterior no están contempladas las soluciones que no dependen de  $t$ , es decir, las '*posibles*' soluciones estacionarias. Para estos casos se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 11.41**

Cuando  $\alpha < -1$  y  $q = \frac{\alpha m}{1 + \alpha}$  ( $> m$ ), la solución del problema  $(P)_{\lambda, \frac{q}{m-q}, q, m}$  con  $A = A_0$  viene dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{A_0}{|x|^{\frac{m}{q-m}}}, & t \leq f(|x|) \\ \left( \frac{1}{\lambda(q-1)t} \right)^{\frac{1}{q-1}}, & t \geq f(|x|) \end{cases}$$

estando la función  $f$  definida como

$$f(r) \doteq \frac{1}{\lambda(q-1)} \left[ \frac{\lambda}{R} \left( \frac{q-m}{m} r \right)^m \right]^{\frac{q-1}{q-m}}, \quad r \geq 0.$$

<sup>5</sup>Recuérdese que el resultado que se ha mostrado es para funciones dependientes de  $t$ .

<sup>6</sup>Nótese que en este caso el dato inicial *no* es una potencia.



**Demostración.**

Escribamos

$$u(x, t) = \begin{cases} \psi(|x|), & t \leq f(|x|) \\ \phi(t), & t \geq f(|x|) \end{cases}$$

donde  $\psi(r) = \frac{A_0}{r^{\frac{m}{q-m}}}$ ,  $r \geq 0$ ,  $\phi(t) = \left(\frac{1}{\lambda(q-1)t}\right)^{\frac{1}{q-1}}$ ,  $t \geq 0$  y determinemos la función  $f$ . Para ello, teniendo en cuenta que

$$A_0 = \left[ \frac{\lambda}{R} \left( \frac{q-m}{m} \right)^m \right]^{\frac{1}{m-q}},$$

debe verificarse

$$\begin{aligned} \psi(|x|) = \phi(f(|x|)) &\Leftrightarrow \frac{A_0}{|x|^{\frac{m}{q-m}}} = \left( \frac{1}{\lambda(q-1)f(|x|)} \right)^{\frac{1}{q-1}} \\ \Leftrightarrow f(|x|) &= \frac{|x|^{\frac{m(q-1)}{q-m}}}{\lambda(q-1)A_0^{q-1}} = \frac{1}{\lambda(q-1)} \left[ \frac{\lambda}{R} \left( \frac{q-m}{m} |x| \right)^m \right]^{\frac{q-1}{q-m}}. \end{aligned}$$

Por tanto, para esta elección de  $f$  la función  $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$ . Además, como

$$\psi'(r) = -\frac{A_0 m}{q-m} \left( \frac{1}{r} \right)^{\frac{q}{q-m}}, \quad r > 0$$

y

$$\phi'(t) = -\frac{1}{q-1} \left( \frac{1}{\lambda(q-1)t^q} \right)^{\frac{1}{q-1}}, \quad t > 0$$

se verifica

$$D_1^- u(x, f(|x|)) = \left[ -\frac{A_0 m}{q-m} \left( \frac{1}{|x|} \right)^{\frac{q}{q-m}}, 0 \right], \quad D_1^+ u(x, f(|x|)) = \emptyset$$

y

$$D_2^- u(x, f(|x|)) = \emptyset, \quad D_2^+ u(x, f(|x|)) = \left[ -\frac{1}{q-1} \left( \frac{1}{\lambda(q-1)(f(|x|))^q} \right)^{\frac{1}{q-1}}, 0 \right].$$

por lo que  $u$  es solución de viscosidad de  $(P)_{\lambda, \frac{q}{m-q}, q, m}$  para  $A = A_0$ .  $\square$

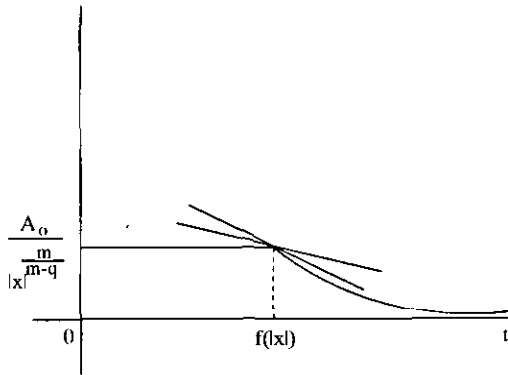


Figura 11.5: Función parcial  $t \mapsto u(x, t)$  para  $\alpha < -1$  y  $q = \frac{\alpha m}{1+\alpha}$ .

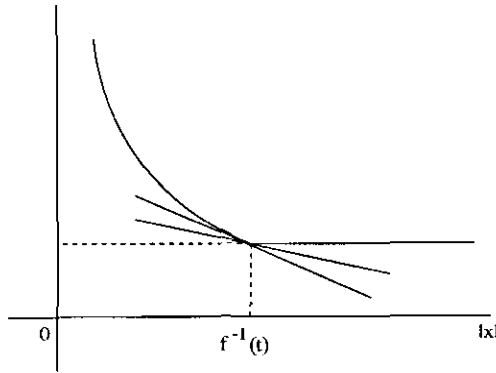


Figura 11.6: Función parcial  $x \mapsto u(x, t)$  para  $\alpha < -1$  y  $q = \frac{\alpha m}{1+\alpha}$ .

**Observación 11.42**

Este resultado extiende al que mostramos para  $m = 1$  en el Teorema 11.20 para el que la función  $f$  toma la forma

$$f(|x|) = \frac{|x|}{R}, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad \square$$

**Teorema 11.43**

Si  $\alpha > \frac{1}{m-1}$  y  $q = \frac{\alpha m}{1+\alpha} \in ]1, m[$ , la solución del problema  $(P)_{\lambda, \frac{q}{m-q}, q, m}$  para  $A = A_0$  es estacionaria

$$u(x, t) = A_0 |x|^{\frac{m}{m-q}}, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

mientras que

$$v(x, t) = \begin{cases} A_0 |x|^{\frac{m}{m-q}}, & t \leq f(|x|) \\ \left( \frac{1}{\lambda(q-1)t} \right)^{\frac{1}{q-1}}, & t \geq f(|x|), \end{cases}$$

donde la función  $f$  viene dada por

$$f(r) \doteq \frac{1}{\lambda(q-1)} \left[ \frac{R}{\lambda} \left( \frac{m-1}{m-q} r \right)^m \right]^{\frac{q-1}{m-q}}, \quad r \geq 0,$$

es una supersolución de viscosidad de  $(P)_{\lambda, \frac{q}{m-q}, q, m}$  cuando  $A = A_0$  que no es subsolución de viscosidad.

### Demostración.

Argumentamos como en el resultado anterior. Como ahora

$$A_0 = \left[ \frac{\lambda}{R} \left( \frac{m-q}{m} \right)^m \right]^{\frac{1}{m-q}},$$

entonces

$$\begin{aligned} \psi(|x|) = \phi(f(|x|)) &\Leftrightarrow A_0 |x|^{\frac{m}{m-q}} = \left( \frac{1}{\lambda(q-1)f(|x|)} \right)^{\frac{1}{q-1}} \\ \Leftrightarrow f(|x|) &= \frac{1}{\lambda(q-1)A_0^{q-1} |x|^{\frac{m(q-1)}{m-q}}} = \frac{1}{\lambda(q-1)} \left[ \frac{R}{\lambda} \left( \frac{m-1}{m-q} |x| \right)^m \right]^{\frac{q-1}{m-q}}. \end{aligned}$$

Por tanto, para esta elección de  $f$  la función  $v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$ . En cambio, la situación es ahora la siguiente:

$$D_1^- v(x, f(|x|)) = \emptyset, \quad D_1^+ v(x, f(|x|)) = \left[ 0, \frac{A_0 m}{m-q} |x|^{\frac{q}{m-q}} \right]$$

y

$$D_2^- v(x, f(|x|)) = \emptyset, \quad D_2^+ v(x, f(|x|)) = \left[ -\frac{1}{q-1} \left( \frac{1}{\lambda(q-1)(f(|x|))^q} \right)^{\frac{1}{q-1}}, 0 \right].$$

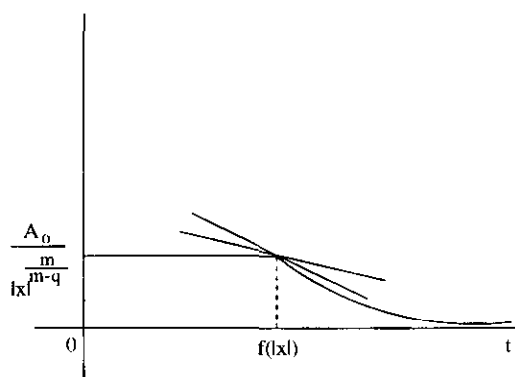


Figura 11.7: Función parcial  $t \mapsto u(x, t)$  para  $\alpha > \frac{1}{m-1}$  y  $q = \frac{\alpha m}{1+\alpha}$ .

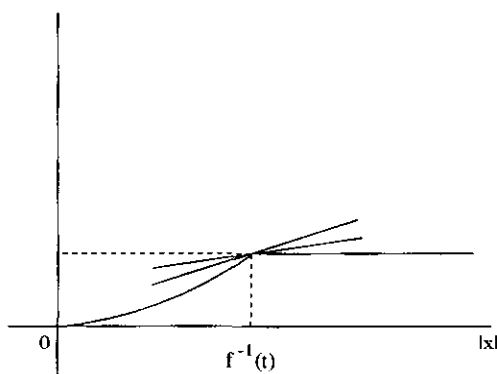


Figura 11.8: Función parcial  $x \mapsto u(x, t)$  para  $\alpha > \frac{1}{m-1}$  y  $q = \frac{\alpha m}{1+\alpha}$ .

Como

$$-\frac{1}{q-1} \left( \frac{1}{\lambda(q-1)(f(|x|))^q} \right)^{\frac{1}{q-1}} = -\lambda \left[ \frac{m-q}{m} \left( \frac{\lambda}{R} \right)^{\frac{1}{m}} |x| \right]^{\frac{mq}{m-q}} = -\lambda A_0^q |x|^{\frac{mq}{m-q}}$$

entonces

$$D^- v(x, f(|x|)) = \emptyset$$

y

$$D^+ v(x, f(|x|)) = \left[ 0, \frac{A_0 m}{m-q} |x|^{\frac{q}{m-q}} \right] \times \left[ -\lambda A_0^q |x|^{\frac{mq}{m-q}}, 0 \right].$$

De esta forma, si  $(p_1, p_2) \in D^+ v(x, f(|x|))$ , se tiene que

$$v(y, s) \leq v(x, f(|x|)) + p_1 \cdot (y - x) + p_2 (s - f(|x|)) + o(|s - f(|x|)| + |y - x|).$$

En particular, para la elección

$$y \doteq x - R|p_1|^{m-2}(s - f(|x|))p_1$$

obtenemos

$$\begin{aligned} v(x - R|p_1|^{m-2}(s - f(|x|))p_1, s) &\leq v(x, f(|x|)) - R|p_1|^m(s - f(|x|)) \\ &\quad + p_2(s - f(|x|)) + o((1 + R|p_1|^{m-1})|s - f(|x|)|). \end{aligned}$$

De esta forma, tomando valores  $s < f(|x|)$  obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{v(x, f(|x|)) - v(x - R|p_1|^{m-2}(s - f(|x|))p_1, s)}{s - f(|x|)} \\ &\geq -p_2 + R|p_1|^m - \frac{o((1 + R|p_1|^{m-1})|s - f(|x|)|)}{s - f(|x|)} \end{aligned}$$

por lo que, haciendo tender  $s \rightarrow f(|x|)$  se obtiene

$$p_2 - R|p_1|^m \geq 0$$

y, de esta forma, demostramos que  $v$  no puede ser subsolución, ya que se obtendría la contradicción

$$0 \leq p_2 - R|p_1|^m \leq -\lambda v^q = -\lambda A_0 |x|^{\frac{mq}{m-q}} < 0 \quad \text{si } x \neq 0. \quad \square$$

Al igual que hicimos en la Sección anterior, finalizamos sumariando en una gráfico los resultados anteriormente mostrados:

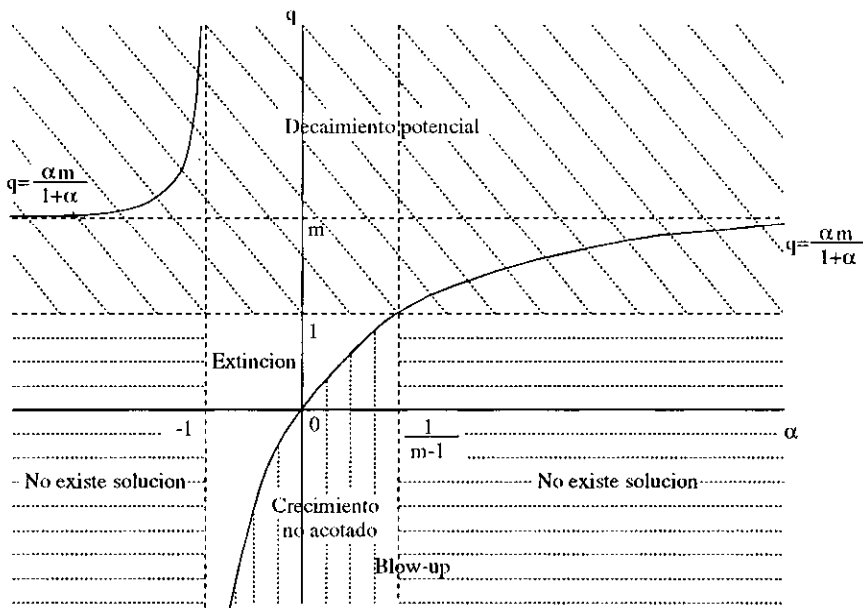


Figura 11.9: Comportamiento asintótico ( $m > 1$ ,  $\lambda > 0$ ) en el plano  $(\alpha, q)$ .



Parte V  
Apéndices.





# Apéndice A

## La naturaleza de estas ecuaciones.

### A.1 Soluciones clásicas. Método de las características.

Pretendemos abordar de una forma sencilla algunos tópicos relacionados con la siguiente ecuación en derivadas parciales de primer orden

$$\mathcal{F}(z, u(z), \nabla u(z)) = 0, \quad z \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^M$$

sujeta a algunas condiciones sobre el contorno  $\partial\mathcal{O}$ . Como nuestro propósito consiste en ofrecer una exposición descriptiva, autocontenida y relevante, vamos a fijar nuestra atención fundamentalmente en las siguientes elecciones de  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{O}$ :

$$\begin{cases} H(\nabla u) + \lambda\beta(u) = f & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ u = \varphi & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

y, para  $T \leq +\infty$ ,

$$\begin{cases} u_t + H(\nabla u) + \lambda\beta(u) = f & \text{en } \Omega \times ]0, T[ \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u = \varphi & \text{en } \partial\Omega \times [0, T[ \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

En algunas ocasiones,  $\Omega$  coincidirá con todo el espacio  $\mathbb{R}^N$ , por lo que habrá que interpretar adecuadamente la condición sobre  $\partial\Omega$  como un comportamiento asintótico a describir.

Se trata pues de ecuaciones de primer orden que, en general, vienen dadas en forma no divergente y son completamente no lineales (es decir, existe una no linealidad que actúa incluso sobre los términos diferenciales). En consecuencia, *no pueden ser abordadas*, en general, por *argumentos variacionales* que empleen la integración por partes.

El *método de las características* (ver [Cou-Hi], [Ben], [Jo], [Gue-Lee]) es el más conocido para obtener soluciones de clase  $\mathcal{C}^1$  que verifiquen la ecuación en todos los puntos. Así, para el problema

$$\begin{cases} u_t(x, t) + au_x(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (a \in \mathbb{R}) \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

cualquier solución clásica  $u$  verificará, para cualquier  $x \in \mathbb{R}$ , la relación

$$\frac{du}{dt}(x + at, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

por lo que  $u$  es constante a lo largo de las *rectas características*

$$\mathcal{X}(x, t) = x + at.$$

Consecuentemente,

$$u(x + at, t) = u(x, 0) = u_0(x)$$

y, por tanto, obtenemos la representación

$$u(x, t) = u_0(x - at), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

El hecho que por cada punto *sólo* pase una *característica* hace que, en textos clásicos, se califique a estas ecuaciones como *hiperbólicas* de primer orden debido a ciertas consideraciones geométricas. Nótese que las características obtenidas sólo dependen de la EDP y del punto inicial. Otra relación muy importante para lo que sigue es

$$u_x(x + at, t) = u'_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Extendamos la idea anterior a casos más generales, para lo cual emplearemos algunas nociones de la Mecánica clásica. Se denomina *sistema dinámico conservativo* a aquel que no contiene ningún elemento que disipe

energía. Tales sistemas están caracterizados por medio de los *hamiltonianos*  $H(x(t), p(t))$  que, representando la energía total (cinética y potencial) del sistema, dependen de la posición  $x(t)$  y del momento del sistema  $p(t)$ . Puesto que el sistema es conservativo, se tendrá

$$0 = \frac{dH}{dt}(x(t), p(t)) = \frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t))x'(t) + \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t))p'(t).$$

Así, el sistema conservativo lleva asociado un *sistema hamiltoniano*

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t)), & x(0) = x \\ p'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t)), & p(0) = p_0(x). \end{cases}$$

Para simplificar, consideraremos el problema

$$\begin{cases} u_t(x, t) + H(u_x(x, t)) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Obviamente, el sistema conservativo asociado está caracterizado para cada función  $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$  por un hamiltoniano  $H$  que depende del momento del sistema  $p(t) (= u_x(x(t), t))$  y es independiente de la posición del mismo  $x(t)$ . Así, del sistema hamiltoniano se sigue

$$p(t) \equiv \text{cte}, \quad t \geq 0$$

por lo que

$$u_x(x(t), t) = p(t) = p(0) = u'_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0$$

y

$$\begin{cases} x'(t) = H'(p(t)) = H'(u'_0(x)) \\ x(0) = x. \end{cases}$$

Es decir, las *características* vienen determinadas por la expresión

$$\mathcal{X}(x, t) = x + tH'(u'_0(x)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

Por tanto, si  $u$  satisface la ecuación en derivadas parciales se tendrá, para cada  $x \in \mathbb{R}$ , la relación

$$\frac{du}{dt}(\mathcal{X}(x, t), t) = u_x(\mathcal{X}(x, t), t) \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t}(x, t) + u_t(\mathcal{X}(x, t), t)$$

$$= H'(u'_0(x))u'_0(x) - H(u'_0(x)).$$

Si además  $u$  satisface el dato inicial entonces

$$u(\mathcal{X}(x, t), t) = u_0(x) + t[H'(u'_0(x))u'_0(x) - H(u'_0(x))], \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \quad (\text{A.4})$$

En este caso, las características  $\mathcal{X}(x, t) = x + tH'(u'_0(x))$  no son, en general, paralelas y su pendiente depende de la forma del hamiltoniano  $H$  (concretamente de  $H'$ , como en el caso lineal) y ahora también de  $u_0$  y  $x$  (en concreto, de  $u'_0(x)$ ). En consecuencia, para el caso no lineal, las características *dependen*, en general, de *todo el problema* (EDP+contorno+dato inicial) y no sólo de la EDP como ocurría en el caso lineal.

### Ejemplo A.1

Si  $H(p) = p^2$  y  $u_0(x) = x$ , las características de (A.3)

$$\mathcal{X}(x, t) = x + 2t$$

son paralelas y la solución del problema viene dada por

$$u(x, t) = x - t, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \quad \square$$

En cambio, en el caso general, *características* comenzando en puntos distintos  $x_1$  y  $x_2$  pueden coincidir en algún instante  $t^* > 0$ , con lo que la información aportada por (A.4) puede ser contradictoria. En efecto, si

$$\mathcal{X}(x_1, t^*) = \mathcal{X}(x_2, t^*)$$

entonces se tendrá

$$u_x(\mathcal{X}(x_1, t^*), t^*) = u_x(\mathcal{X}(x_2, t^*), t^*).$$

En cambio, el supuesto

$$u'_0(x_1) \neq u'_0(x_2)$$

conduciría a

$$u_x(\mathcal{X}(x_1, t^*), t^*) = u'_0(x_1) \neq u'_0(x_2) = u_x(\mathcal{X}(x_2, t^*), t^*).$$

**Ejemplo A.2**

Si  $H(p) = p^2$  y  $u_0(x) = x^3$ , las características de (A.3) vienen dadas por

$$\mathcal{X}(x, t) = x + 6tx^2$$

y ya no son paralelas. Además, si  $x_1 \neq x_2$  con  $x_1 + x_2 < 0$  se verifica que

$$\mathcal{X}(x_1, t^*) = \mathcal{X}(x_2, t^*) \quad \text{con} \quad t^* = -\frac{1}{6(x_1 + x_2)}$$

obteniéndose una discontinuidad de  $u_x$  en el punto

$$\mathcal{X}(x_1, t^*) = \mathcal{X}(x_2, t^*) = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}$$

pues, necesariamente,

$$u'_0(x_1) = 3x_1^2 \neq 3x_2^2 = u'_0(x_2). \quad \square$$

El fenómeno anterior es debido a que la aplicación  $x \mapsto \mathcal{X}$  sólo es biyectiva, en general, para valores pequeños de  $t$ , por lo que sólo se pueden obtener soluciones clásicas cerca de la frontera (es decir, para instantes de tiempo  $t$  pequeños). Así, cuando al cabo de un tiempo dos características que comienzan en puntos distintos coinciden en un punto pero con pendientes distintas, aparece en el punto de corte una discontinuidad en el gradiente de la solución y se dice entonces que se ha producido un 'shock' sobre el gradiente de la solución. Esto está relacionado con la pérdida de la hiperbolicidad de la ecuación de primer orden ya que por el punto de corte pasan dos curvas características. Por tanto, en general, no existen soluciones globales. En [Li4] se hace un estudio más amplio sobre la existencia de soluciones globales para hamiltonianos y datos iniciales estrictamente convexos y  $N \geq 1$ .

Recuérdese, una vez más, que ahora la fenomenología depende de todos los términos del problema y no sólo de la EDP. Aunque la no linealidad del hamiltoniano juega un papel importante, su intervención en el problema de contorno no es suficiente.

**Ejemplo A.3**

Si  $H(p) = p^2$  y  $u_0(x) = x^2$ , las características de (A.3)

$$\mathcal{X}(x, t) = x + 4tx$$

no son paralelas pero no se cortan en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  (pues lo hacen en instantes de tiempo negativos). Por tanto, existe una *solución clásica global* dada por

$$u(x, t) = \frac{x^2}{1 + 4t}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \quad \square$$

Por otra parte, incluso en casos en los que exista una solución clásica global, la aparición de términos no lineales hace que ésta presente un tope de regularidad incluso para hamiltonianos y datos iniciales regulares.

#### Ejemplo A.4

Consideremos en el problema (A.3) las elecciones

$$H(p) = -\frac{p^2}{2} \quad \text{y} \quad u_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \quad u_0 \text{ convexo.}$$

Admitiendo que la solución fuera muy regular, si denotamos por

$$\begin{cases} v(x, t) = u_x(x, t) \\ w(x, t) = u_{xx}(x, t) \end{cases}$$

derivando la EDP dos veces respecto a  $x$  se tendría

$$\begin{cases} w_t(x, t) - v(x, t)w_x(x, t) = (w(x, t))^2, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ w(x, 0) = u_0''(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

por lo que la función  $x(t)$  dada por

$$\begin{cases} x'(t) = -v(x(t), t) \\ x(0) = x \end{cases}$$

permite que  $\omega(t) = w(x(t), t)$  verifique, para cada  $x \in \mathbb{R}$ , el problema

$$\begin{cases} \omega'(t) = (\omega(t))^2, & t > 0 \\ \omega(0) = u_0''(x). \end{cases}$$

Por tanto, se tendría

$$u_{xx}(x(t), t) = w(x(t), t) = \omega(t) = \frac{u_0''(x)}{1 - tu_0''(x)}$$

que, obviamente, se hace infinito en el instante

$$T(x) = \frac{1}{u_0''(x)}. \quad \square$$

## A.2 Soluciones generalizadas.

Descartadas las soluciones clásicas, podríamos adoptar la forma generalizada de abordar la ecuación

$$\mathcal{F}(z, u(z), \nabla u(z)) = 0, \quad z \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^M$$

es decir, buscar soluciones que satisfagan la ecuación en casi todo punto. Este intento no es siempre útil, pues en ocasiones coexisten soluciones clásicas y generalizadas (por lo que se plantea el problema de la no unicidad).

### Ejemplo A.5

Si consideramos el problema

$$\begin{cases} u_t - (u_x)^2 = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

claramente, la función

$$u_1(x, t) = \max\{t - |x|, 0\}$$

es una función que verifica la ecuación en  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) \setminus \Omega$  siendo

$$\Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : |x| \neq t\}$$

en donde la función no es diferenciable, siendo lipschitziana en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  y de clase  $\mathcal{C}^\infty$  en  $((\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) \setminus \Omega)$ . Pero evidentemente,

$$u_2(x, t) \equiv 0$$

es otra solución del problema que además es clásica.  $\square$

La prescripción del comportamiento en el borde es aquí muy exigente (debido al bajo orden de la EDP) dando lugar, en bastantes problemas de contorno, a fuertes incompatibilidades.

### Ejemplo A.6

No existen soluciones clásicas del problema estacionario

$$\begin{cases} |u'(x)| = 1, & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

gobernado por una EDP de primer orden sujeta a esos datos de contorno.  $\square$



Parece pues que la forma generalizada pueda resultar ventajosa. Sin embargo, surgen dificultades de otro tipo.

### Ejemplo A.7

La función

$$u_1(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

es una solución generalizada de (A.5) pero no es la única. De hecho, se pueden construir infinitas y, en particular, una sucesión de soluciones generalizadas de la forma

$$u_n(x) = \begin{cases} x - \frac{2k}{2^n} & \text{si } \frac{2k}{2^n} \leq x \leq \frac{2k+1}{2^n} \\ \frac{2(k+1)}{2^n} - x & \text{si } \frac{2k+1}{2^n} \leq x \leq \frac{2(k+1)}{2^n} \end{cases}$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $k = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1$ . Puesto que

$$0 \leq u_n(x) \leq \frac{1}{2^n}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

la sucesión  $\{u_n\}_n$  converge uniformemente hacia la función  $u \equiv 0$  que obviamente no verifica la ecuación en ningún punto.  $\square$

## A.3 Soluciones continuas de viscosidad.

### A.3.1 Método de la viscosidad evanescente. Propiedades.

Los comentarios anteriores muestran algunas de las dificultades que aparecen en la teoría de las ecuaciones de Hamilton–Jacobi: no existen, en general, soluciones clásicas globales e incluso el debilitamiento natural de la noción clásica de solución conduce a pérdidas de unicidad y estabilidad. Sin embargo, a la luz de modelos que aparecen en las aplicaciones, se espera un

concepto de solución para este tipo de ecuaciones para el que puedan coexistir resultados generales de existencia global, unicidad y estabilidad. Hasta 1983 no aparece una publicación ([Cr-Li2]) conteniendo un concepto de solución adecuado a los interrogantes anteriores. Para ilustrarlo, consideremos la ecuación

$$H(\nabla u(x)) + \lambda\beta(u(x)) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (\text{E})$$

siendo  $\lambda \geq 0$ ,  $H, f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas. Un método standard que permite abordar (E) es el denominado *método de la viscosidad evanescente*,<sup>1</sup> que consiste en considerar para cada  $\varepsilon > 0$  la ecuación cuasilineal (en la que aparece el término viscoso  $\varepsilon\Delta u_\varepsilon(x)$ )

$$-\varepsilon\Delta u_\varepsilon(x) + H(\nabla u_\varepsilon(x)) + \lambda\beta(u_\varepsilon(x)) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (\text{E})_\varepsilon$$

para luego hacer un paso al límite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . La ecuación (E)<sub>ε</sub> es un ejemplo típico de ecuación cuasilineal; éstas están bien desarrolladas en [Gil-Tr], [Lad-Ur], [Serr1] y [Li1].

Supongamos, para nuestros propósitos, que las funciones  $H$ ,  $f$  y  $\beta$  permiten obtener soluciones clásicas  $u_\varepsilon \in C^2(\mathbb{R}^N)$  de (E)<sub>ε</sub> verificando acotaciones uniformes en  $\varepsilon$  de la forma

$$\|u_\varepsilon\|_\infty \leq c \quad \text{y} \quad \|\nabla u_\varepsilon\|_\infty \leq c$$

(ver [Li4] para detalles). De esta forma, *argumentos de compacidad* permiten obtener una función  $u \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$  tal que

$$u_\varepsilon \rightarrow u \quad \text{uniformemente en compactos de } \mathbb{R}^N$$

y

$$\nabla u_\varepsilon \rightarrow \nabla u \quad \text{en sentido débil.}$$

Además, esta función  $u$  es una solución generalizada de (E) con la siguiente propiedad: si  $\phi \in C^2(\mathbb{R}^N)$  es tal que  $u - \phi$  alcanza un máximo local estricto en algún punto  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  existirá, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, un punto  $x_\varepsilon$  próximo a  $x_0$  (con  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon = x_0$ ) en el que la función  $u_\varepsilon - \phi$  alcanzará un máximo local, con lo que de las condiciones

$$\nabla(u_\varepsilon - \phi)(x_\varepsilon) = 0 \quad \text{y} \quad -\Delta(u_\varepsilon - \phi)(x_\varepsilon) \geq 0$$

<sup>1</sup>Por analogía con la Mecánica de Fluidos.

se desprende

$$H(\nabla\phi(x_\varepsilon)) + \lambda\beta(u_\varepsilon(x_\varepsilon)) = H(\nabla u_\varepsilon(x_\varepsilon)) + \lambda\beta(u_\varepsilon(x_\varepsilon))$$

y

$$f(x_\varepsilon) + \varepsilon\Delta u_\varepsilon(x_\varepsilon) \leq f(x_\varepsilon) + \varepsilon\Delta\phi(x_\varepsilon),$$

por lo que

$$-\varepsilon\Delta\phi(x_\varepsilon) + H(\nabla\phi(x_\varepsilon)) + \lambda\beta(u_\varepsilon(x_\varepsilon)) \leq f(x_\varepsilon), \quad \varepsilon > 0.$$

De esta forma, haciendo tender  $\varepsilon \rightarrow 0$  se llega a

$$H(\nabla\phi(x_0)) + \lambda\beta(u(x_0)) \leq f(x_0).$$

Un razonamiento análogo muestra que si  $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$  es tal que  $u - \phi$  alcanza un mínimo local estricto en algún punto  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  entonces

$$H(\nabla\phi(x_0)) + \lambda\beta(u(x_0)) \geq f(x_0).$$

Luego, por densidad, podemos introducir el siguiente concepto.

**Definición A.8** (ver [Cr-Li2], [Cr-Ev-Li])

Dada  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(\mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M)$  con  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^M$ , consideremos la ecuación

$$\mathcal{F}(z, u(z), \nabla u(z)) = 0, \quad z \in \mathcal{O} \tag{A.6}$$

y sea  $u \in \mathcal{C}(\mathcal{O})$ .

1.  $u$  es *subsolución de viscosidad* de (A.6) si para cualquier  $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$  con  $u - \phi$  alcanzando un máximo local estricto en algún  $z_0 \in \mathcal{O}$  se verifica

$$\mathcal{F}(z_0, u(z_0), \nabla\phi(z_0)) \leq 0.$$

2.  $u$  es *supersolución de viscosidad* de (A.6) si para cualquier  $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$  con  $u - \phi$  alcanzando un mínimo local estricto en algún  $z_0 \in \mathcal{O}$  se verifica

$$\mathcal{F}(z_0, u(z_0), \nabla\phi(z_0)) \geq 0.$$

3.  $u$  es una *solución de viscosidad* de (A.6) si es sub y supersolución de viscosidad.

**Observación A.9**

Nótese que al igual que ocurría con las soluciones clásicas lineales, la anterior noción es un *concepto interior*. La naturaleza de las soluciones de viscosidad, al ser funciones continuas, las hace acordes con trazas continuas sobre el borde al estudiar problemas de contorno.  $\square$

**Ejemplo A.10**

De todas las soluciones generalizadas del problema de contorno (A.5) visto en el Ejemplo A.7, la *única* que es de viscosidad es

$$u_1(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \quad \square \end{cases}$$

Aparte de la motivación anterior, el método de la viscosidad evanescente permite obtener propiedades interesantes. Por ejemplo, regresando a la ecuación

$$H(\nabla u(x)) + \lambda\beta(u(x)) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{E}$$

y suponiendo que  $H$  y  $\beta$  son tales que para  $f, g \in \mathcal{BUC}(\mathbb{R}^N)$  existen soluciones clásicas, acotadas y uniformemente continuas de

$$\begin{cases} -\varepsilon\Delta u_\varepsilon(x) + H(\nabla u_\varepsilon(x)) + \lambda\beta(u_\varepsilon(x)) + \varepsilon u_\varepsilon(x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^N \\ -\varepsilon\Delta v_\varepsilon(x) + H(\nabla v_\varepsilon(x)) + \lambda\beta(v_\varepsilon(x)) + \varepsilon v_\varepsilon(x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

(ver p.e. [Cr-Li2]) entonces, el *Principio del máximo* (ver [Fr]) conduce a

$$\|\lambda\beta(u_\varepsilon) + \varepsilon u_\varepsilon - \lambda\beta(v_\varepsilon) - \varepsilon v_\varepsilon\|_\infty \leq \|f - g\|_\infty, \quad \varepsilon > 0. \tag{A.7}$$

Si además  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es creciente con  $\beta(0) = 0$  y  $\beta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  entonces se verifican las siguientes propiedades:

1.  $(\lambda\beta + \varepsilon I) \rightarrow \lambda\beta$  y  $(\lambda\beta + \varepsilon I)^{-1} \rightarrow \frac{\beta^{-1}}{\lambda}$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}$ .
2. Para cada  $R > 0$  la función

$$\beta_R(t) = \inf_{|s| \leq R} \{\beta(t+s) - \beta(s)\}, \quad t \geq 0$$

es creciente y verifica  $\beta_R(0) = 0$  y

$$\beta_R(r-s) \leq \beta_R(r) - \beta_R(s), \quad -R \leq s \leq r \leq R.$$

De esta forma, si  $H(0) = 0$ , la relación (A.7) implica que la familia  $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$  está uniformemente acotada en  $\mathbb{R}^N$ . Además, si denotamos por

$$\varrho_f(s) = \sup_{|x-y| \leq s} |f(x) - f(y)|, \quad s > 0 \quad (\varrho_f(0^+) = 0)$$

al *módulo de continuidad* de  $f$ , para  $v_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x + y)$ ,  $y \in \mathbb{R}^N$ , se tendrá

$$|u_\varepsilon(x + y) - u_\varepsilon(x)| \leq \sup_{|s| \leq \|f\|_\infty} \left\{ |(\lambda\beta + \varepsilon I)^{-1}(s + \varrho_f(|y|)) - (\lambda\beta + \varepsilon I)^{-1}(s)| \right\}.$$

Es decir, la familia  $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$  es *equicontinua* y además

$$\varrho_{u_\varepsilon}(s) \leq \frac{1}{\lambda} \beta_{\|f\|_\infty}^{-1}(\varrho_f(s)), \quad s > 0.$$

Por tanto, el *Teorema de Ascoli-Arzelà* determina la existencia de una función  $u \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}^N)$  tal que para alguna subsucesión se verifica  $\{u_{\varepsilon'}\}_{\varepsilon'} \rightarrow u$  uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^N$ , verificando  $u$  (por la motivación anterior) la ecuación

$$H(\nabla u) + \lambda\beta(u) = f \quad \text{en } \mathbb{R}^N$$

en el sentido de la viscosidad. Además,  $u \in \mathcal{BUC}(\mathbb{R}^N)$  y

$$\varrho_u(r) \leq \frac{1}{\lambda} \sup_{|s| \leq \|f\|_\infty} \left| \beta^{-1}(s + \varrho_f(r)) - \beta^{-1}(s) \right|, \quad r > 0.$$

Asimismo, la desigualdad (A.7) permite obtener

$$\|(u - v)^+\|_\infty \leq \frac{1}{\lambda} \beta_{\mathbb{R}}^{-1}(\|(f - g)^+\|_\infty) \quad (\text{A.8})$$

y

$$\|u - v\|_\infty \leq \frac{1}{\lambda} \beta_{\mathbb{R}}^{-1}(\|f - g\|_\infty) \quad (\text{A.9})$$

siendo

$$R = \max\{\|f\|_\infty, \|g\|_\infty\}.$$

Las desigualdades (A.8) y (A.9) entrañan, por tanto, resultados de *comparación*, *unicidad* y *dependencia lipschitziana*, respecto de los datos, de las

soluciones de viscosidad. Bien es verdad que limitadas a la clase de soluciones de viscosidad obtenidas por el método de la viscosidad evanescente.

Más adelante presentaremos este concepto de solución en varias versiones equivalentes así como una teoría matemática que comprenda resultados de existencia, unicidad y dependencia continua, entre otros. Obviamente, esta nueva noción debe ser consistente con las anteriores, en el sentido de que toda solución de viscosidad de la EDP en la clase  $W_{loc}^{1,\infty}$  debe ser una solución generalizada y, si además está en la clase  $C^1$ , una solución clásica. Sin embargo, la fuerte incompatibilidad que surge en los problemas de contorno gobernados por EDP de primer orden, puede dar lugar a algunas peculiaridades como se muestra en el siguiente ejemplo.

### Ejemplo A.11

La función  $\hat{u}_1(x) = -u_1(x)$  donde

$$u_1(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

es una solución generalizada del problema de contorno (A.5) visto en el Ejemplo A.7, que es subsolución de viscosidad, pero no supersolución de viscosidad.  $\square$

### Observación A.12

Como la noción de solución de viscosidad ha de ser útil en las aplicaciones, deberá ser compatible con los principios en los que éstas estén planteadas. Así por ejemplo, se deberá verificar alguna relación que comprenda el *Principio de Entropía*, si es que éste viene al caso. Este comentario da una explicación de porqué entre todas las soluciones generalizadas de (A.5) sólo  $u_1$  es de viscosidad.  $\square$

### Observación A.13

De la definición se sigue que si  $\phi \in C^1(\mathcal{O})$  es tal que

$$(u - \phi)(z_0) \geq (u - \phi)(z), \quad z \in \mathbf{B}_\varepsilon(z_0) \Rightarrow \mathcal{F}(z_0, u(z_0), \nabla\phi(z_0)) \leq 0.$$

Multiplicando por  $-1$  la expresión anterior se obtiene

$$-(u - \phi)(z_0) \leq -(u - \phi)(z), \quad z \in \mathbf{B}_\varepsilon(z_0) \Rightarrow -\mathcal{F}(z_0, -(-u(z_0)), -\nabla(-\phi)(z_0)) \geq 0.$$

Es decir, haciendo  $v = -u$  y  $\psi = -\phi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$  se verifica

$$(v - \psi)(z_0) \leq (v - \psi)(z), \quad z \in \mathbf{B}_\varepsilon(z_0) \Rightarrow \mathcal{G}(z_0, v(z_0), \nabla\psi(z_0)) \geq 0$$

estando la función  $\mathcal{G}$  definida como

$$\mathcal{G}(z, r, p) = -\mathcal{F}(z, -r, -p).$$

Consecuentemente, las inecuaciones

$$\mathcal{F}(z, u(z), \nabla u(z)) \leq 0 \quad \text{y} \quad -\mathcal{F}(z, u(z), \nabla u(z)) \geq 0$$

no son equivalentes, en general, en el sentido de la viscosidad.  $\square$

### Ejemplo A.14

La función

$$u_1(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

es una supersolución de viscosidad de la ecuación

$$|u'| - 1 = 0 \quad \text{en } (0, 1)$$

pero no es subsolución de viscosidad de la ecuación<sup>2</sup>

$$-|u'| + 1 = 0 \quad \text{en } (0, 1). \quad \square$$

### Observación A.15

A la vista de los comentarios anteriores se tiene la siguiente equivalencia:  $u$  es solución de viscosidad de

$$\mathcal{F}(z, u, \nabla u) \leq 0$$

si y sólo si  $v = -u$  es solución de viscosidad de

$$-\mathcal{F}(z, -v, -\nabla v) \geq 0. \quad \square$$

---

<sup>2</sup>Basta tomar  $\phi \equiv 0$ . La función  $(u_1 - \phi)$  alcanza un máximo global en  $x = \frac{1}{2}$  y, en cambio,  $-|\phi'(\frac{1}{2})| + 1 = 1 \not\geq 0$ .

Regresemos de nuevo a la ecuación

$$\mathcal{F}(z, u(z), \nabla u(z)) = 0, \quad z \in \mathcal{O} \quad (\text{A.10})$$

siendo  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^M$  y  $\mathcal{F} : \mathcal{V} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$  continua.

El concepto de sub y superdiferenciales de una función continua permite dar otra definición alternativa para las soluciones de viscosidad. Primeramente, recordemos que una función  $u : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  es *diferenciable* en  $z_0 \in \mathcal{O}$  y  $\nabla u(z_0) = p_0 \in \mathbb{R}^M$  si

$$u(z) = u(z_0) + p_0 \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

donde  $a \cdot b$  es el producto escalar euclídeo de  $a$  y  $b$  y  $h(z) = o(|z - z_0|)$  viene definida por

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z)}{|z - z_0|} = 0.$$

### Definición A.16

Sea  $u \in \mathcal{C}(\mathcal{O})$  y  $z_0 \in \mathcal{O}$ .

1)  $p_0 \in D^+u(z_0)$  si

$$u(z) \leq u(z_0) + p_0 \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|). \quad (\text{A.11})$$

$D^+u(z_0)$  es el conjunto *superdiferencial* de  $u$  en  $z_0$ .

2)  $p_0 \in D^-u(z_0)$  si

$$u(z) \geq u(z_0) + p_0 \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|). \quad (\text{A.12})$$

$D^-u(z_0)$  es el conjunto *subdiferencial* de  $u$  en  $z_0$ .

### Observación A.17

1. Es bien sabido que si  $u \in \mathcal{C}(\mathcal{O})$ ,  $u$  puede no ser diferenciable en algún  $z_0 \in \mathcal{O}$ . En cambio, existen muchas elecciones de  $(z_0, p_0) \in \mathcal{O} \times \mathbb{R}^M$  para las cuales (A.11) y (A.12) se verifican.



2. En general,  $D^\pm u(z_0)$  son conjuntos cerrados y convexos (pudiendo ser vacíos) que, en el caso en que la función  $u$  sea diferenciable en el punto  $z_0$ , se tiene

$$D^+u(z_0) = D^-u(z_0) = \{\nabla u(z_0)\}.$$

Nótese que, además, siempre se verifica

$$D^\pm u(z_0) = -D^\mp(-u(z_0)). \quad \square$$

### Observación A.18

Generalicemos a continuación la idea de que toda función  $u$  diferenciable en un punto  $z_0 \in \mathcal{O}$  es continua en dicho punto. Concretamente,

1. si  $p \in D^+u(z_0)$  entonces

$$\limsup_{z \rightarrow z_0} \frac{u(z) - u(z_0) - p \cdot (z - z_0)}{|z - z_0|} \leq 0$$

por lo que

$$\limsup_{z \rightarrow z_0} u(z) \leq u(z_0),$$

es decir,  $u$  es *s.c.s.* en el punto  $z_0$ .

2. si  $p \in D^-u(z_0)$  por definición se verifica

$$\liminf_{z \rightarrow z_0} \frac{u(z) - u(z_0) - p \cdot (z - z_0)}{|z - z_0|} \geq 0$$

lo que implica que  $u$  es *s.c.i.* en  $z_0$  ya que

$$\liminf_{z \rightarrow z_0} u(z) \geq u(z_0). \quad \square$$

### Proposición A.19 (ver [Cr-Li2], [Cr-Ev-Li])

Si  $u \in \mathcal{C}(\mathcal{O})$ ,  $z_0 \in \mathcal{O}$  y  $p \in \mathbb{R}^M$ , se tiene

$$p \in D^+u(z_0) \text{ (resp. } p \in D^-u(z_0)) \Leftrightarrow \exists \phi \in \mathcal{C}^1(\Omega) \text{ tal que } \nabla \phi(z_0) = p \text{ y}$$

$u - \phi$  tiene un máximo (resp. mínimo) local en  $z_0$ .  $\square$

Como dijimos anteriormente, es posible definir los conceptos de sub y supersoluciones de viscosidad en términos de los conjuntos semidiferenciales. Concretamente,

**Definición A.20**

Sea  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(\mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M)$  y  $u \in \mathcal{C}(\mathcal{O})$ .

1)  $u$  es *subsolución de viscosidad* de (A.10) si

$$\mathcal{F}(z, u(z), p) \leq 0 \quad \forall z \in \mathcal{O}, \quad \forall p \in D^+u(z). \quad (\text{A.13})$$

2)  $u$  es *supersolución de viscosidad* de (A.10) si

$$\mathcal{F}(z, u(z), p) \geq 0 \quad \forall z \in \mathcal{O}, \quad \forall p \in D^-u(z). \quad (\text{A.14})$$

3)  $u$  es *solución de viscosidad* de (A.10) si se verifican (A.13) y (A.14), es decir, si  $u$  es sub y supersolución de viscosidad de (A.10).

La noción de solución de viscosidad es local.

**Proposición A.21** (ver [Cr-Li2], [Ca])

1) Si  $u \in \mathcal{C}(\mathcal{O})$  es *subsolución* (resp. *supersolución*) de viscosidad de (A.10) en  $\mathcal{O}$  entonces también es *subsolución* (resp. *supersolución*) de viscosidad de (A.10) en  $\Omega$  para todo abierto  $\Omega \subset \mathcal{O}$ .

2) Si  $\mathcal{O} = \cup_{i \in I} \mathcal{O}_i$  siendo  $\mathcal{O}_i$  abiertos de  $\mathbb{R}^M$  y  $u$  es *subsolución* (resp. *supersolución*) de viscosidad de (A.10) en  $\mathcal{O}_i$ ,  $i \in I$ , entonces  $u$  es *subsolución* (resp. *supersolución*) de viscosidad de (A.10) en  $\mathcal{O}$ .  $\square$

Se tienen además las siguientes definiciones equivalentes:

**Teorema A.22** (ver [Cr-Li2], [Cr-Ev-Li])

Si  $u \in \mathcal{C}(\mathcal{O})$  son equivalentes:

1)  $u$  es *subsolución* (resp. *supersolución*) de viscosidad de (A.10).

2)  $\forall \phi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$  tal que  $u - \phi$  alcanza un *máximo* (resp. *mínimo*) local en  $z_0 \in \mathcal{O}$

$$\mathcal{F}(z_0, u(z_0), \nabla \phi(z_0)) \leq 0 \quad (\text{resp. } \mathcal{F}(z_0, u(z_0), \nabla \phi(z_0)) \geq 0).$$

3)  $\forall \phi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$  tal que  $u \leq \phi$  en  $\mathcal{O}$  (resp.  $u \geq \phi$  en  $\mathcal{O}$ ) y  $u(z_0) = \phi(z_0)$

$$\mathcal{F}(z_0, \phi(z_0), \nabla \phi(z_0)) \leq 0 \text{ (resp. } \mathcal{F}(z_0, \phi(z_0), \nabla \phi(z_0)) \geq 0).$$

4)  $\forall \phi \in \mathcal{C}_c^1(\mathcal{O})$ ,  $\phi \geq 0$  y  $k \in \mathbb{R}$ , si  $\max \phi(u - k) > 0$  y  $\phi(u - k)(z_0) = \max \phi(u - k)$  para algún  $z_0 \in \mathcal{O}$ , entonces

$$\mathcal{F}\left(z_0, u(z_0), -\frac{\nabla \phi(z_0)}{\phi(z_0)}(u(z_0) - k)\right) \leq 0$$

(resp. si  $\min \phi(u - k) < 0$  y  $\phi(u - k)(z_0) = \min \phi(u - k)$  para algún  $z_0 \in \mathcal{O}$ , entonces

$$\mathcal{F}\left(z_0, u(z_0), -\frac{\nabla \phi(z_0)}{\phi(z_0)}(u(z_0) - k)\right) \geq 0. \quad \square$$

### Observación A.23

1.  $\mathcal{C}_c^1(\mathcal{O}) = \{\phi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O}) : \text{supp } \phi \subset \mathcal{O} \text{ es compacto}\}$  es el conjunto de las funciones de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $\mathcal{O}$  con soporte compacto contenido en  $\mathcal{O}$ . Es fácil comprobar que en 2), 3) y 4) puede reemplazarse  $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$  por  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O})$  y máximo (resp. mínimo) local por máximo (resp. mínimo) estricto, global estricto o global.
2. La propiedad 4) fue la primera definición de solución de viscosidad que se dió en [Cr-Li2].
3. La equivalencia con la propiedad 1) se deduce de las ideas empleadas por L.C. Evans en [Ev2].  $\square$

### A.3.2 Propiedades de las soluciones de viscosidad.

Comenzamos con un simple resultado que establece la consistencia de la noción de solución de viscosidad con la de solución clásica.

**Teorema A.24 (Consistencia)** (ver [Cr-Li2], [Cr-Ev-Li])

1) Si  $u \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$  y  $\mathcal{F}(z, u(z), \nabla u(z)) = 0$ ,  $z \in \mathcal{O}$  (resp.  $\leq 0$ ,  $\geq 0$ ) entonces  $u$  es solución (resp. sub, supersolución) de viscosidad de (A.10).

2) Si  $u$  es solución (resp. sub, supersolución) de viscosidad de (A.10) y es diferenciable en algún punto  $z_0 \in \mathcal{O}$ , entonces

$$\mathcal{F}(z_0, u(z_0), \nabla u(z_0)) = 0 \text{ (resp. } \leq 0, \geq 0). \quad \square$$

El siguiente resultado muestra las relaciones entre las distintas nociones de solución.

**Teorema A.25** (ver [Ca])

1. Sea  $u \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ .  
 $u$  es solución de (A.10)  $\Leftrightarrow u$  verifica (A.10) en todo punto  $z \in \mathcal{O}$ .
2. Si  $u \in \text{Lip}(\mathcal{O})$  entonces  $u$  verifica (A.10) en casi todo punto de  $\mathcal{O}$ .
3. Supongamos que  $\mathcal{F}$  es continua, la aplicación  $p \mapsto \mathcal{F}(z, r, p)$  es cóncava y  $u \in W_{\text{loc}}^{1, \infty}(\mathcal{O})$ .
  - (a) Si  $u$  verifica  $\mathcal{F}(z, u(z), \nabla u(z)) \leq 0$  en casi todo punto de  $\mathcal{O}$  entonces  $u$  es subsolución de (A.10).
  - (b) Si  $u$  verifica  $\mathcal{F}(z, u(z), \nabla u(z)) \leq 0$  en casi todo punto de  $\mathcal{O}$  y  $u$  es semicóncava<sup>3</sup> entonces  $u$  es subsolución de (A.10).

En particular, si  $u \in \text{Lip}(\mathcal{O})$  es semicóncava y verifica (A.10) en casi todo punto, entonces  $u$  es solución de viscosidad de (A.10).  $\square$

**Observación A.26**

El hecho que una función  $u \in \text{Lip}(\mathcal{O})$  verifique (A.10) en casi todo punto no implica, necesariamente, que vaya a ser una solución de viscosidad de dicha ecuación. Así por ejemplo, la función  $u(x) = |x|$  verifica  $|u'| - 1 = 0$  a.c.  $(-1, 1)$  y, sin embargo, no es solución de viscosidad de esta ecuación.  $\square$

**Teorema A.27 (Cambio de variable)** (ver [Cr-Li2], [Cr-Ev-Li])

Sea  $\gamma \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  tal que  $\gamma'(r) > 0$ ,  $r > 0$  y  $\gamma(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ . Si  $u \in \mathcal{C}(\mathcal{O})$  es una solución de (A.10) entonces la función  $v = \gamma(u)$  es solución de viscosidad de

$$\mathcal{F}(z, \gamma^{-1}(v), (\gamma^{-1})'(v) \nabla v) = 0 \quad \text{en } \mathcal{O}. \quad \square$$

A continuación damos una caracterización de soluciones de viscosidad de clase  $\mathcal{C}^1$  a trozos.

<sup>3</sup>Es decir,  $\forall z_0 \in \mathcal{O}$  y  $\forall \varepsilon > 0$  tal que  $\mathbf{B}_\varepsilon(z_0) \subset \mathcal{O}$  se verifica que  $\exists C_\varepsilon > 0$  tal que la función  $v(z) = u(z) - \frac{C_\varepsilon}{2}|z - z_0|^2$  es cóncava.

**Teorema A.28** (ver [Cr-Li2], [Cr-Ev-Li])

Dividamos  $\mathcal{O}$  en dos subconjuntos abiertos  $\mathcal{O}_+$  y  $\mathcal{O}_-$  por medio de una frontera  $\Gamma$  de clase  $\mathcal{C}^1$  ( $\mathcal{O} = \mathcal{O}_+ \cup \mathcal{O}_- \cup \Gamma$ ). Dado  $z_0 \in \Gamma$  sea  $\vec{n}(z_0)$  el vector normal unitario en  $z_0$  tomado en  $\mathcal{O}_+$ ,  $\mathcal{T}z_0 = \{\tau \in \mathbb{R}^M : \vec{n}(z_0) \cdot \tau = 0\}$  el espacio tangente a  $\Gamma$  en  $z_0$  y  $P_{\mathcal{T}}$  la proyección ortogonal de  $\mathbb{R}^M$  en  $\mathcal{T}z_0$ .

Sea  $u \in \mathcal{C}(\mathcal{O})$  tal que

$$u = \begin{cases} u_+ & \text{en } \mathcal{O}_+ \\ u_- & \text{en } \mathcal{O}_- \end{cases}$$

siendo  $u_{\pm} \in C^1(\mathcal{O}_{\pm} \cup \Gamma)$ . Entonces,  $u$  es solución de viscosidad de (A.10) si y sólo si se verifican:

1.  $u_+$  y  $u_-$  son soluciones clásicas de  $\mathcal{F} = 0$  en  $\mathcal{O}_+$  y  $\mathcal{O}_-$  respectivamente.
2.  $\forall z_0 \in \Gamma$  se verifica:

- (a)  $\mathcal{F}(z_0, u(z_0), P_{\mathcal{T}}\nabla u_{\pm}(z_0) + \xi\vec{n}(z_0)) \leq 0 \quad \forall \xi \in [a, b]$   
si  $a = \nabla u_+(z_0) \cdot \vec{n}(z_0) \leq \nabla u_-(z_0) \cdot \vec{n}(z_0) = b$ .
- (b)  $\mathcal{F}(z_0, u(z_0), P_{\mathcal{T}}\nabla u_{\pm}(z_0) + \xi\vec{n}(z_0)) \geq 0 \quad \forall \xi \in [b, a]$   
si  $a = \nabla u_+(z_0) \cdot \vec{n}(z_0) \geq \nabla u_-(z_0) \cdot \vec{n}(z_0) = b$ .  $\square$

**Teorema A.29** (ver [Cr-Li2], [Cr-Ev-Li])

1) Si  $u$  y  $v$  son subsoluciones (resp. supersoluciones) de viscosidad de (A.10)  $\Rightarrow w = \max(u, v)$  (resp.  $w = \min(u, v)$ ) es subsolución (resp. supersolución) de viscosidad de (A.10).

2) Si  $\{u_n\}_n$  son subsoluciones (resp. supersoluciones) de viscosidad de (A.10) tal que  $w = \sup\{u_n\}_n$  (resp.  $w = \inf\{u_n\}_n$ ) es una función continua en  $\mathcal{O} \Rightarrow w$  es subsolución (resp. supersolución) de viscosidad de (A.10).  $\square$

**Teorema A.30** (ver [Ca])

Sea  $u \in \mathcal{C}(\mathcal{O})$  una subsolución de (A.10) verificando

$$u \geq v \quad \forall v \in \mathcal{C}(\mathcal{O}), \quad v \text{ subsolución de (A.10).}$$

Entonces,  $u$  es supersolución (y, por tanto, solución) de (A.10).  $\square$

**Teorema A.31** (ver [Ca])

Supongamos que la aplicación  $p \mapsto \mathcal{F}(z, r, p)$  es convexa.

1.  $S = \{u \in \text{Lip}(\mathcal{O}) : u \text{ es subsolución de viscosidad de (A.10)}\}$  es un conjunto convexo.
2. Si  $v \in C^1(\mathcal{O})$  y  $u \in C(\mathcal{O})$  son subsoluciones de viscosidad de (A.10) entonces  $\lambda u + (1-\lambda)v$  es subsolución de (A.10) para todo  $0 \leq \lambda \leq 1$ .  $\square$

**Teorema A.32 (Estabilidad)** (ver [Cr-Li2], [Cr-Ev-Li])

Sea  $\mathcal{F}_n(z, r, p)$  una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M$  a  $\mathcal{F}(z, r, p)$  y sea  $u_n$  una solución de viscosidad del problema

$$\mathcal{F}_n(z, u_n, \nabla u_n) = 0 \text{ en } \mathcal{O}$$

tal que  $u_n$  converge uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathcal{O}$  a una función  $u$ . Entonces,  $u$  es una solución de viscosidad de (A.10) en  $\mathcal{O}$ .  $\square$

**Teorema A.33** (ver [Cr-Li2], [Cr-Ev-Li])

Sea  $\mathcal{F}_\varepsilon(z, r, p)$  una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M$  a  $\mathcal{F}(z, r, p)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  y sea  $u_\varepsilon \in C^2(\mathcal{O})$  una solución del problema

$$-\varepsilon \Delta u_\varepsilon + \mathcal{F}_\varepsilon(z, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) = 0 \text{ en } \mathcal{O}$$

tal que  $u_\varepsilon$  converge uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathcal{O}$  a una función  $u \in C(\mathcal{O})$ . Entonces,  $u$  es solución de viscosidad de (A.10) en  $\mathcal{O}$ .  $\square$

**Observación A.34**

El argumento anterior de la viscosidad evanescente que permite resultados de existencia fue el que motivó el calificativo de solución de viscosidad.  $\square$

Finalizamos esta Sección enunciando un sencillo resultado del tipo de la desigualdad de Gronwall. Concretamente,

**Teorema A.35 (desigualdades diferenciales)** (ver [Cr-Li2])

Sea  $T > 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $g, h \in C([0, T])$  verificando la desigualdad

$$g' + \mu g \leq h \text{ en } ]0, T[$$

en el sentido de la viscosidad. Entonces

$$e^{\mu t} g(t) \leq e^{\mu s} g(s) + \int_s^t e^{\mu r} h(r) dr \text{ si } 0 \leq s \leq t < T. \quad \square$$

### A.3.3 Ecuaciones de Hamilton–Jacobi.

En esta Subsección nos especializaremos en la ecuación

$$u_t + H(u, \nabla u) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[ \quad (T \leq +\infty) \quad (\text{A.15})$$

para la que daremos resultados de existencia y unicidad bajo las hipótesis

$$H(r, p) \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N) \quad (\text{A.16})$$

de forma que  $\forall R > 0 \exists \gamma_R \in \mathbb{R}$  tal que

$$H(r, p) - H(s, p) \geq \gamma_R(r - s) \quad \text{si } -R \leq s \leq r \leq R. \quad (\text{A.17})$$

Claramente, (A.15) es un caso especial de (A.10) para las elecciones

$$\mathcal{O} = \mathbb{R}^N \times ]0, T[, \quad y = (x, t) \quad \text{y} \quad M = N + 1.$$

#### Teorema A.36 (ver [Cr-Li2])

Bajo las hipótesis (A.16) y (A.17), sean  $u, v \in \mathcal{BUC}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$  tal que  $u$  es subsolución de viscosidad de (A.15) y  $v$  supersolución de viscosidad de dicha ecuación. Si

$$u(x, 0^+) \leq v(x, 0^+) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^N$$

entonces

$$u \leq v \quad \text{en } \mathbb{R}^N \times [0, T]. \quad \square$$

#### Teorema A.37 (ver [Ba2], [Li4], [Li5], [Sou])

Supuesto (A.16) y (A.17), para todo  $u_0 \in \mathcal{BUC}(\mathbb{R}^N) \exists T = T(\|u_0\|_\infty) > 0$  y  $\exists u \in \mathcal{BUC}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$  tal que  $u$  es la única solución de viscosidad de

$$\begin{cases} u_t + H(u, \nabla u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times ]0, T[ \\ u(\cdot, 0^+) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

Además, si  $\gamma_R$  es independiente de  $R$ , entonces existe una única solución de viscosidad de (A.18)  $\forall T > 0$ .  $\square$

**Teorema A.38 (Cono de dependencia)** (ver [Cr-Li2])

Sean  $u, v \in C(\mathbb{R}^N \times [0, T])$  con  $u$  subsolución y  $v$  supersolución de viscosidad de (A.15) tales que

$$u(x, 0^+) \leq v(x, 0^+) \quad \text{si } |x| \leq R$$

y denotemos por

$$C = \max \left\{ \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, T])}, \|\nabla v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, T])} \right\} \leq +\infty$$

y

$$k = \max \left\{ \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, T])}, \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, T])} \right\} < +\infty.$$

Si  $H(r, p) \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$  es no decreciente en  $r$  y verifica

$$|H(r, p) - H(r, q)| \leq L|p - q| \quad \text{si } |p|, |q| \leq C, |r| \leq k, |x| \leq R - Lt, 0 \leq t \leq T$$

entonces

$$u(x, t) \leq v(x, t) \quad \text{si } |x| \leq R - Lt, 0 \leq t \leq T. \quad \square$$

**Observación A.39**

Claramente,

1)  $C < \infty$  significa que  $u$  y  $v$  son lipschitzianas con coeficiente  $C$ .

2)  $C = \infty$  quiere decir que no se hacen hipótesis adicionales sobre  $u$  y  $v$  (aparte de la continuidad y acotación).  $\square$

**A.3.4 Operadores acretivos.**

Aunque en general, como ya hemos comentado, no tiene sentido abordar

$$\mathcal{F}(z, u(z), \nabla u(z)) = 0, \quad z \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^M$$

en forma variacional, no obstante estas soluciones de viscosidad son *soluciones débiles*. En efecto, si  $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$  es un espacio normado, podemos considerar la aplicación

$$[u, v]_+ = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\|u + \lambda v\| - \|u\|}{\lambda} = \inf_{\lambda > 0} \frac{\|u + \lambda v\| - \|u\|}{\lambda}$$



que, en general, no es un producto escalar pero tiene interesantes propiedades que le confieren el carácter de *producto semiinterior*. Entre los operadores en  $\mathbf{E}$  destacan los *acretivos*, es decir, operadores  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$  tales que

$$\|(u - v) + \lambda(\mathcal{A}u - \mathcal{A}v)\| \geq \|u - v\|, \quad u, v \in D(\mathcal{A}), \quad \lambda > 0$$

o, equivalentemente,

$$[u - v, \mathcal{A}u - \mathcal{A}v]_+ \geq 0, \quad u, v \in D(\mathcal{A}).$$

Por tanto, la noción de acretividad extiende a espacios normados no prehilbertianos, la noción de *operadores monótonos*. La importancia de estos operadores es que sus resolventes son contracciones con lo que generan un semigrupo disipando alguna especie de energía asociada a la norma.

Regresando a nuestro modelo, estudiemos el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \mathcal{F}(z, u(z), \nabla u(z)) = 0, & z \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^M \\ u(z) = 0, & z \in \partial\mathcal{O}. \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

Podemos considerar el espacio  $\mathbf{E} = \mathcal{UC}(\mathcal{O})$  dotado de la norma del supremo. Si  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(\mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M)$  y  $u \in \mathcal{C}_0(\mathcal{O})$  consideramos el operador

$$(\mathcal{A}v)(z) = \mathcal{F}(z, u(z), \nabla v(z)), \quad v \in D(\mathcal{A}), \quad z \in \mathcal{O}$$

siendo

$$D(\mathcal{A}) = \mathcal{C}_b^1(\mathcal{O}) \cap \mathcal{C}_0(\mathcal{O}) \subset \mathbf{E}.$$

Sean ahora  $v_1, v_2 \in D(\mathcal{A})$  tales que la función  $v_1 - v_2$  alcanza un extremo no nulo en algún punto  $z_0 \in \mathcal{O}$ . Por definición se tendrá  $\nabla v_1(z_0) = \nabla v_2(z_0)$ , lo que conduce a  $\mathcal{A}v_1(z_0) = \mathcal{A}v_2(z_0)$  y, consecuentemente,

$$(v_1 - v_2)(z_0) = (v_1 - v_2)(z_0) + \lambda(\mathcal{A}v_1 - \mathcal{A}v_2)(z_0), \quad \lambda > 0$$

deduciéndose, por tanto, que  $\mathcal{A}$  es un operador acretivo en  $\mathbf{E}$ , es decir,

$$[v_1 - v_2, \mathcal{A}v_1 - \mathcal{A}v_2]_+ \geq 0.$$

Visto esto, es sencillo mostrar la equivalencia:

$$\begin{aligned} &u \text{ es solución de viscosidad de (A.19)} \\ \Leftrightarrow &[(u - \phi)(\cdot), -\mathcal{F}(\cdot, u(\cdot), \nabla \phi(\cdot))]_+ \geq 0 \quad \forall \phi \in D(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

**Ejemplo A.40**

Sea  $\mathbf{E} = \mathcal{C}([0, 1])$  dotado con la norma del supremo y el operador

$$(\mathcal{A}v)(x) = |v'(x)| - 1, \quad v \in D(\mathcal{A}), \quad 0 < x < 1$$

con

$$D(\mathcal{A}) = \mathcal{C}^1(0, 1) \cap \mathcal{C}_0(0, 1) \subset \mathbf{E}.$$

Entonces

$$u_1(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

es la única función del espacio  $\mathcal{C}_0(0, 1)$  con la propiedad

$$[u - \phi, 1 - |\phi'|]_+ \geq 0, \quad \phi \in D(\mathcal{A}),$$

es decir,  $u_1$  es la única función de  $\mathcal{C}_0(0, 1)$  compatible con la acretividad del operador  $\mathcal{A}$ .  $\square$

**Observación A.41**

Si consideramos la ecuación

$$H(\nabla u(x)) + \lambda\beta(u(x)) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{E}$$

el espacio normado  $\mathbf{E} = \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^N)$  con la norma del supremo, se prueba (ver [Sa] o [Si]) que

$$[u, v]_+ = \begin{cases} \max\{v(x_0)sg(x_0) : x_0 \in \mathbb{R}^N, |u(x_0)| = \|u\|_\infty\} & \text{si } \|u\|_\infty \neq 0 \\ \|v\|_\infty & \text{si } \|u\|_\infty = 0. \end{cases} \quad \square$$



# Apéndice B

## Análisis convexo.

### B.1 Definiciones y propiedades elementales.

El material de esta Sección está tomado fundamentalmente de J. Aubin [Au1] y H. Brèzis [Br2].

#### Definición B.1

Sea  $\mathbf{X}$  un conjunto y  $\varphi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  una función.

1.  $D(\varphi) = \{x \in \mathbf{X} : \varphi(x) < +\infty\}$  es el *dominio efectivo* de  $\varphi$ .
2.  $\varphi$  es *propia* si  $D(\varphi) \neq \emptyset$ .
3.  $\text{epi } \varphi = \{(x, \lambda) \in \mathbf{X} \times \mathbb{R} : \varphi(x) \leq \lambda\}$  es el *epigrafo* de  $\varphi$ .

#### Definición B.2

Sea  $\mathbf{X}$  un espacio topológico y  $\varphi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  una función.  $\varphi$  es *semicontinua inferiormente (s.c.i.)* si

$$\varphi(x) \leq \liminf_{y \rightarrow x} \varphi(y) \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

#### Propiedades elementales de las funciones s.c.i.

1.  $\varphi$  continua  $\Rightarrow \varphi$  es s.c.i.
2.  $\varphi$  es s.c.i.  $\Leftrightarrow \text{epi } \varphi$  es cerrado en  $\mathbf{X} \times \mathbb{R}$ .

3.  $\varphi$  es s.c.i.  $\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R} [\varphi \leq \lambda] \doteq \{x \in \mathbf{X} : \varphi(x) \leq \lambda\}$  es cerrado.
4. Si  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son s.c.i.  $\Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2$  es s.c.i.
5. Si  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  son s.c.i.  $\Rightarrow \varphi = \sup_{i \in I} \varphi_i$  es s.c.i.
6. Si  $\varphi$  es s.c.i.  $\Rightarrow \varphi$  está localmente acotada inferiormente. En particular,  $\varphi$  alcanza su mínimo en cada subconjunto compacto de  $\mathbf{X}$ .  $\square$

### Definición B.3

Sea  $\mathbf{X}$  un espacio vectorial.

1.  $\mathbf{K} \subset \mathbf{X}$  es *convexo* si

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in \mathbf{K} \quad \forall x, y \in \mathbf{K}, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

2. Una función  $\varphi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  es *convexa* si

$$\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y) \quad \forall x, y \in \mathbf{X}, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

### Propiedades elementales de las funciones convexas.

1. El dominio efectivo de una función convexa es un conjunto convexo.
2.  $\varphi$  es convexa  $\Leftrightarrow \text{epi } \varphi$  es convexo en  $\mathbf{X} \times \mathbb{R}$ .
3. Si  $\varphi$  es convexa  $\Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R} [\varphi \leq \lambda] \doteq \{x \in \mathbf{X} : \varphi(x) \leq \lambda\}$  es convexo.
4. Si  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son convexas  $\Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2$  es convexa.
5. Si  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  son convexas  $\Rightarrow \varphi = \sup_{i \in I} \varphi_i$  es convexa.
6. Si  $\varphi$  es continua y convexa  $\Rightarrow$  para cada  $x, y \in D(\varphi)$  existen los límites

$$\varphi^+(x, y) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x + \lambda y) - \varphi(x)}{\lambda} = \inf_{\lambda > 0} \frac{\varphi(x + \lambda y) - \varphi(x)}{\lambda}$$

y

$$\varphi^-(x, y) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(x + \lambda y) - \varphi(x)}{\lambda} = \sup_{\lambda < 0} \frac{\varphi(x + \lambda y) - \varphi(x)}{\lambda}$$

verificándose

$$\varphi^-(x, y) \leq \varphi^+(x, y). \quad \square$$

#### Definición B.4

Sea  $\mathbf{X}$  un e.v. normado y  $\varphi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  una función propia. La función  $\varphi^* : \mathbf{X}' \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  dada por

$$\varphi^*(f) = \sup_{x \in \mathbf{X}} \{ \langle f, x \rangle - \varphi(x) \} \quad \forall f \in \mathbf{X}'$$

es la *dual convexa* ó *conjugada de Fenchel-Legendre* de  $\varphi$ .

#### Propiedades de las funciones conjugadas.

1.  $\varphi^*$  es convexa y s.c.i. (aunque no lo sea  $\varphi$ ).
2. Si  $\varphi$  es convexa, s.c.i. y propia  $\Rightarrow \varphi^*$  es propia.
3.  $\langle f, x \rangle \leq \varphi(x) + \varphi^*(f)$ ,  $x \in \mathbf{X}$ ,  $f \in \mathbf{X}'$  (*desigualdad de Young generalizada*).  $\square$

#### Definición B.5

Sea  $\mathbf{X}$  un e.v. normado y  $\varphi^* : \mathbf{X}' \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  una función propia. La función  $\varphi^{**} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  dada por

$$\varphi^{**}(x) = \sup_{f \in \mathbf{X}'} \{ \langle f, x \rangle - \varphi^*(f) \} \quad \forall x \in \mathbf{X}$$

es la *biconjugada* de  $\varphi$ . Nótese que  $\varphi^{**}(x) \leq \varphi(x)$ ,  $x \in \mathbf{X}$ .

Por lo dicho anteriormente,  $\varphi^{**}$  es convexa y s.c.i. aunque  $\varphi$  no lo sea. ¿Bajo qué condiciones  $\varphi^{**} = \varphi$ ? La respuesta se da en el siguiente resultado:

#### Teorema B.6 (Fenchel-Moreau)

Sea  $\mathbf{X}$  un e.v. normado y  $\varphi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  una función propia.

$$\varphi \text{ es convexa y s.c.i.} \Leftrightarrow \varphi^{**} = \varphi. \quad \square$$

## B.2 Semiconvexidad.

### Definición B.7

Sea  $\mathbf{K}$  un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ . Una función  $\varphi : \mathbf{K} \rightarrow \mathbb{R}$  es *semiconvexa* si existe  $c > 0$  tal que la función

$$\psi(x) = \varphi(x) + c|x|^2$$

sea convexa en todo subconjunto compacto de  $\mathbf{K}$ .

De esta forma, para todo punto interior  $x \in \mathbf{K}$ ,  $y \in \mathbb{R}^N$  y  $h > 0$  suficientemente pequeño, se verifica

$$\varphi(x + hy) - 2\varphi(x) + \varphi(x - hy) \geq -c(|x + hy|^2 - 2|x|^2 + |x - hy|^2)$$

es decir,

$$\varphi(x + hy) - 2\varphi(x) + \varphi(x - hy) \geq -2ch^2|y|^2. \quad (\text{B.1})$$

A continuación vamos a regularizar la función

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \mathbf{K} \\ 0, & x \notin \mathbf{K}. \end{cases}$$

Así, para cada  $k = 1, 2, \dots$ , sea  $\vartheta_k \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$  una función verificando

$$\vartheta_k(x) \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta_k(x) dx = 1 \quad \text{y} \quad \vartheta_k(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| \geq \frac{1}{k}.$$

De esta forma, por las propiedades de la *convolución*

$$\tilde{\varphi}_k(x) = (\tilde{\varphi} * \vartheta_k)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{\varphi}(x) \vartheta_k(x - y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

sabemos que  $\tilde{\varphi}_k \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$  y  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\tilde{\varphi}_k - \tilde{\varphi}\| = 0$ .

Por otro lado, como  $\vartheta_k(x) = 0$  si  $|x| \geq \frac{1}{k}$ , si para cada  $k = 1, 2, \dots$  consideramos

$$\mathbf{K}_k = \left\{ x \in \mathbf{K} : d(x, \partial\mathbf{K}) > \frac{1}{k} \right\}$$

se tiene que

$$\tilde{\varphi}_k(x) = \int_{\mathbf{K}} \tilde{\varphi}(x) \vartheta_k(x - y) dy, \quad x \in \mathbf{K}_k. \quad (\text{B.2})$$

Por tanto, las condiciones (B.1), (B.2) y el hecho que  $\int_{\mathbb{R}^N} \vartheta_k(x) dx = 1$  muestran que la función  $\tilde{\varphi}_k$  verifica (B.1) en el interior de  $\mathbf{K}_k$ , es decir,

$$\tilde{\varphi}_k(x + hy) - 2\tilde{\varphi}_k(x) + \tilde{\varphi}_k(x - hy) \geq -2ch^2|y|^2, \quad x \in \mathbf{K}_k, \quad 0 < h \ll 1.$$

Dividiendo ambos miembros por  $2h^2$  y haciendo tender  $h \rightarrow 0$  se obtiene

$$\frac{1}{2} D^2 \tilde{\varphi}_k(x) y \cdot y \geq -c, \quad x \in \mathbf{K}_k.$$

### B.3 Teorema de Alexandroff.

El propósito de esta Sección es mostrar que las funciones semiconvexas son dos veces diferenciables en casi todo punto. Este resultado clásico se debe a A.D. Alexandroff (ver [Al] y también la prueba que de este resultado se hace en [Cr-Is-Li2]). Supongamos que  $\mathbf{K}$  es un convexo cerrado de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ , de frontera regular y  $\varphi : \mathbf{K} \rightarrow \mathbb{R}$  una función semiconvexa. Denotando por  $\mathcal{O}$  al interior de  $\mathbf{K}$ , recordemos que  $x \in \mathcal{O}$  es un punto en el que  $\varphi$  es dos veces diferenciable si existe  $p \in \mathbb{R}^N$  y una matriz simétrica  $Q \in \mathcal{M}(N \times N)$  tal que

$$\lim_{y \rightarrow x} F(x, y; p, Q) = 0$$

donde

$$F(x, y; p, Q) = \frac{\varphi(y) - \varphi(x) - p \cdot (y - x) - \frac{1}{2} Q (y - x) \cdot (y - x)}{|y - x|^2}, \quad y \neq x.$$

#### Teorema B.8 (Alexandroff)

*Si denotamos por*

$$A(\varphi) = \{x \in \mathcal{O} : x \text{ es un punto en el que } \varphi \text{ es dos veces diferenciable}\}$$

*se verifica que el conjunto  $\mathbf{K} \setminus A(\varphi)$  tiene medida de Lebesgue cero.  $\square$*





# Apéndice C

## Fórmulas de representación.

### C.1 Fórmulas de Hopf y Lax–Oleinik.

Dada una función  $H \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$  consideramos la ecuación de Hamilton–Jacobi

$$u_t + H(\nabla u) = 0 \text{ en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+. \quad (\text{HJ})$$

Ya hemos visto como mediante el método de las características se pueden obtener soluciones clásicas locales. Incluso podemos encontrar soluciones clásicas globales en la clase de las funciones lineales afines

$$(x, t) \mapsto a \cdot x - tH(a) + b, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \quad (\text{C.1})$$

para  $a \in \mathbb{R}^N$  y  $b \in \mathbb{R}$  fijos. En general, veamos cómo toda función  $\phi$  diferenciable puede representarse a partir de funciones afines.

#### Proposición C.1

Si  $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$  entonces

$$\phi(x) = \inf_z \sup_y \left\{ \phi(y) + \left[ \int_0^1 \nabla \phi((1-\lambda)y + \lambda z) d\lambda \right] \cdot (x - y) \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

#### Demostración.

Como  $\phi$  es diferenciable, la regla de la cadena nos permite escribir

$$\phi(x) - \phi(y) = \int_0^1 \frac{d}{d\lambda} \phi((1-\lambda)y + \lambda x) dx$$

$$= \left[ \int_0^1 \nabla \phi((1-\lambda)y + \lambda x) d\lambda \right] \cdot (x - y),$$

de donde

$$\phi(x) \geq \sup_y \left\{ \phi(y) + \left[ \int_0^1 \nabla \phi((1-\lambda)y + \lambda x) d\lambda \right] \cdot (x - y) \right\} \quad \text{para } z = x$$

luego

$$\phi(x) \geq \inf_z \sup_y \left\{ \phi(y) + \left[ \int_0^1 \nabla \phi((1-\lambda)y + \lambda z) d\lambda \right] \cdot (x - y) \right\}.$$

Por otro lado, dado  $z \in \mathbb{R}^N$  arbitrario, obtenemos que

$$\phi(x) = \phi(x) + \left[ \int_0^1 \nabla \phi((1-\lambda)x + \lambda z) d\lambda \right] \cdot (x - x) \quad \text{para } y = x$$

por lo que

$$\phi(x) \leq \sup_y \left\{ \phi(y) + \left[ \int_0^1 \nabla \phi((1-\lambda)y + \lambda z) d\lambda \right] \cdot (x - y) \right\}, \quad z \in \mathbb{R}^N$$

de donde concluimos

$$\phi(x) \leq \inf_z \sup_y \left\{ \phi(y) + \left[ \int_0^1 \nabla \phi((1-\lambda)y + \lambda z) d\lambda \right] \cdot (x - y) \right\}. \quad \square$$

El argumento anterior, propio de la Teoría de Juegos, motivó a E. Hopf (ver [Ho1]) a conjeturar que la función

$$v(x, t) = \inf_z \sup_y \{ u_0(z) + y \cdot (x - z) - tH(y) \}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0$$

debía verificar, en algún sentido, el problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t + H(\nabla u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \\ u(\cdot, 0^+) = u_0(\cdot) & \text{en } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (\text{PC})$$

El mayor inconveniente es que este problema únicamente puede ser resuelto en la clase (C.1) si  $u_0(x) = a \cdot x + b$ . Por ello, Hopf propuso dos fórmulas de representación para (PC):

$$v(x, t) = \inf_z \sup_y \{ u_0(z) + y \cdot (x - z) - tH(y) \}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0 \quad (\text{C.2})$$

si  $H : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa y

$$w(x, t) = \sup_y \inf_z \{u_0(z) + y \cdot (x - z) - tH(y)\}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0 \quad (\text{C.3})$$

cuando  $u_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  sea convexa.<sup>1</sup>

E. Hopf demostró que  $v$  y  $w$  son soluciones generalizadas de (PC), pues verifican la ecuación en casi todo punto. El principal inconveniente es que, en principio, no está claro que  $v$  o  $w$  determinen la solución generalizada 'correcta' pues, como sabemos, en general no se tiene unicidad de soluciones generalizadas. No obstante, M. Bardi y L.C. Evans [Bar-Ev] salvan este inconveniente mostrando, bajo adecuadas hipótesis, que  $v$  o  $w$  dan la única solución de viscosidad de (PC). Concretamente,

### Teorema C.2

1) Si  $H : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa y  $u_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  es uniformemente lipschitziana entonces

$$v(x, t) = \inf_z \sup_y \{u_0(z) + y \cdot (x - z) - tH(y)\}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0$$

es la única solución de viscosidad uniformemente continua de (PC).

2) Si  $H : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y  $u_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa y uniformemente lipschitziana entonces

$$w(x, t) = \sup_y \inf_z \{u_0(z) + y \cdot (x - z) - tH(y)\}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0$$

es la única solución de viscosidad uniformemente continua de (PC).  $\square$

### Observación C.3

En particular, cuando la función  $H : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa y continua, el teorema de Fenchel-Moreau determina

$$H(y) = H^{**}(y) = \sup\{y \cdot \xi - H^*(\xi) : \xi \in D(H^*)\}, \quad y \in \mathbb{R}^N$$

<sup>1</sup>Nótese que  $v$  y  $w$  sólo difieren en el orden de colocación de  $\inf$  y  $\sup$  y, además, las expresiones que aparecen entre  $\{\cdot\}$  son de la forma (C.1).

estando la función  $H^* : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  definida como

$$H^*(\xi) = \sup \{ \xi \cdot y - H(y) : y \in D(H) \} \leq +\infty, \quad \xi \in \mathbb{R}^N$$

lo que nos permite escribir la fórmula (C.2) en la forma

$$v(x, t) = \inf_z \left\{ u_0(z) + t \sup_y \left\{ y \cdot \frac{x-z}{t} - H(y) \right\} \right\} = \inf_z \left\{ u_0(z) + tH^* \left( \frac{x-z}{t} \right) \right\}$$

es decir,

$$v(x, t) = \inf \left\{ u_0(z) + tH^* \left( \frac{x-z}{t} \right) : z \in x - tD(H^*) \right\} \quad (C.4)$$

expresión que se conoce como *fórmula de Lax-Oleinik* y puede ser expresada en forma equivalente (ver [Bar-Ev]) como

$$v(x, t) = \inf \left\{ u_0(x(t)) + \int_0^t H^*(z(s)) ds : z(\cdot) \in \mathcal{A} \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0 \quad (C.5)$$

siendo  $\mathcal{A} = L^1(0, t; \mathbb{R}^N)$  y  $x(t) = x - \int_0^t z(s) ds$ . La igualdad anterior representa la expresión matemática del Principio de la Programación Dinámica aplicado al problema de control ejercido sobre el *estado*  $x(t)$ , sujeto a los *controles*  $z(\cdot)$  y con un *gasto*, por unidad de tiempo, dado por  $H^*(z(s))$ .

Análogamente, la fórmula (C.3) puede ser escrita como

$$w(x, t) = ((u_0)^* + tH)^*(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

En efecto, de la propia definición, se desprende

$$\begin{aligned} ((u_0)^* + tH)^*(x) &= \sup_y \{ x \cdot y - (u_0)^*(y) - tH(y) \} \\ &= \sup_y \left\{ x \cdot y - \sup_z \{ y \cdot z - u_0(z) \} - tH(y) \right\} \\ &= \sup_y \inf_z \{ x \cdot y + u_0(z) - y \cdot z - tH(y) \} \\ &= \sup_y \inf_z \{ u_0(z) + y \cdot (x - z) - tH(y) \} = w(x, t). \quad \square \end{aligned}$$

## C.2 Ejemplos.

Veamos algunos tipos de funciones convexas que aparecen en las aplicaciones:

1. *Funciones convexas dependientes de  $|p|$ .*

(a) Comportamiento lineal.

$$\mathcal{H}(p) = R[|p| - \mu]_+, \quad p \in \mathbb{R}^N, \quad R > 0, \quad \mu \geq 0$$

cuya conjugada de Fenchel es

$$\mathcal{H}^*(\xi) = \begin{cases} \mu|\xi| & \text{si } |\xi| \leq R \\ +\infty & \text{si } |\xi| > R, \end{cases}$$

con lo que la fórmula (C.4) toma la expresión

$$v(x, t) = \inf \{u_0(y) + \mu|x - y| : |x - y| \leq Rt\}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

(b) Comportamiento superlineal.

$$\mathcal{H}(p) = R([|p| - \mu]_+)^{\sigma}, \quad p \in \mathbb{R}^N, \quad R > 0, \quad \mu \geq 0, \quad \sigma > 1$$

cuya conjugada de Fenchel es

$$\mathcal{H}^*(\xi) = \mu|\xi| + \frac{\sigma - 1}{\sigma} \left( \frac{|\xi|^{\sigma}}{R\sigma} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Así pues, para cada  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \overline{\mathbb{R}}_+$ , la fórmula (C.4) toma la expresión

$$v(x, t) = \inf_y \left\{ u_0(y) + \mu|x - y| + \frac{\sigma - 1}{\sigma} \left( \frac{|x - y|^{\sigma}}{R\sigma t} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \right\}.$$

2. *Funciones convexas no dependientes de  $|p|$ .*

(a)  $\mathcal{H}(p) \equiv \mathbf{e} \cdot p$ ,  $p \in \mathbb{R}^N$ , para algún  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^N$ , que tiene por conjugada de Fenchel a la función

$$\mathcal{H}^*(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi = \mathbf{e} \\ +\infty & \text{si } \xi \neq \mathbf{e}. \end{cases}$$

Para esta elección, la fórmula (C.4) se convierte en

$$v(x, t) = u_0(x - t\mathbf{e}), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0.$$

$$(b) \mathcal{H}(p) = \begin{cases} (p \cdot \mathbf{a})c_L + p \cdot \mathbf{b} & \text{si } p \cdot \mathbf{a} \leq 0 \\ (p \cdot \mathbf{a})c_R + p \cdot \mathbf{b} & \text{si } p \cdot \mathbf{a} \geq 0 \end{cases}$$

donde  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$ ,  $|\mathbf{a}| = 1$  y  $c_L, c_R \in \mathbb{R}$ ,  $c_L \leq c_R$ , para el que se tiene

$$\mathcal{H}^*(\xi) = 0, \quad \xi \in D(\mathcal{H}^*) = \{s \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} : c_L \leq s \leq c_R\},$$

tomando la fórmula (C.4) la expresión

$$v(x, t) = \inf \{u_0(x - t(s \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b})) : c_L \leq s \leq c_R\}, \quad x \in \mathbb{R}^N, t \geq 0. \quad \square$$

# Bibliografía

- [Ai] S.Aizawa. *A Semigroup Treatment of the Hamilton–Jacobi Equation in Several Space Variables*. Hiroshima Math. J. **6** (1976). 15–30.
- [Al] A.D.Alexandroff. *Almost Everywhere Existence of the Second Differential of a Convex Function and Some Properties of Convex Functions*. Leningrad University Annals (Math. series). **37** (1939). 3–35 (en ruso).
- [Alv-Li-Mo] L.Alvarez, P.L.Lions y J.M.Morel. *Image Selective Smoothing and Edge Detection by Nonlinear Diffusion*. SIAM J. Numer. Anal. **29** (1992). 845–866.
- [Au1] J.P.Aubin. *L’Analyse Non Linéaire et ses Motivations Economiques*. Masson. 1984.
- [Au2] J.P.Aubin. *Initiation a L’Analyse Appliquée*. Masson. 1994.
- [Barb] V.Barbu. *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces*. Noordhoff. Leyden. 1976.
- [Bar-Ev] M.Bardi y L.C.Evans. *On Hopf’s Formulas for Solutions of Hamilton–Jacobi Equations*. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. Vol **8** (1984). 1373–1381.
- [Ba1] G.Barles. *Thèse de Doctorat de 3ème Cycle*. Université de Paris IX–Dauphine. 1982/83.
- [Ba2] G.Barles. *Existence Results for First Order Hamilton Jacobi Equations*. Ann. Ins. Henri Poincaré. Vol **1**. No **5** (1984). 325–340.
- [Ba3] G.Barles. *Remarks on a Flame Propagation Model*. Rapports de Recherche. INRIA. **464** (1985). 1–38.



- [Ba4] G.Barles. *Asymptotic Behaviour of Viscosity Solutions of First Order Hamilton Jacobi Equations*. Ricerche di Matematica. Vol XXXIV. Fasc 2 (1985). 227–260.
- [Ba5] G.Barles. *Remarques sur des Resultats d’existence pour les Equations de Hamilton–Jacobi du Premier Ordre*. Inst. H. Poincaré. Analyse Non Linéaire. 2 (1985). 21–32.
- [Ba6] G.Barles. *Regularity Results for First Order Hamilton Jacobi Equations*. Differential and Integral Equations. Vol 3. No 1 (1990). 103–125.
- [Ba7] G.Barles. *Uniqueness and Regularity Results for First Order Hamilton Jacobi Equations*. Indiana University Math. J. Vol 39. No 2 (1990). 443–466.
- [Ba8] G.Barles. *Discontinuous Viscosity Solutions of First–Order Hamilton–Jacobi Equations: A Guided Visit*. Nonlinear Analysis TMA. Vol 20. No 9 (1993). 1123–1134.
- [Ba9] G.Barles. *Solutions de Viscosité des Equations de Hamilton–Jacobi*. Springer–Verlag. 1994.
- [Ba-Pe1] G.Barles y B.Perthame. *Discontinuous Solutions of Deterministic Optimal Stopping Time Problems*. Math. Modelling Numer. Anal. Vol 21. No 4 (1987). 557–579.
- [Ba-Pe2] G.Barles y B.Perthame. *Exit time Problems in Optimal Control and Vanishing Viscosity Method*. SIAM J. Control and Optimization. Vol 26 (1988). 1113–1148.
- [Ba-Pe3] G.Barles y B.Perthame. *Comparison Principle for Dirichlet–Type Hamilton–Jacobi Equations and Singular Perturbations of Degenerated Elliptic Equations*. Applied Mathematics and Optimization. 21 (1990). 21–44.
- [Barr-Ev-Je] E.N.Barron, L.C.Evans y R.Jensen. *Viscosity Solutions of Isaac’s Equations and Differential Games with Lipschitz Controls*. J. Differential Equations. 53 (1984). 213–233.

- [Barr-Je1] E.N.Barron y R.Jensen. *Semicontinuous Viscosity Solutions for Hamilton–Jacobi Equations with Convex Hamiltonians*. Comm. in Partial Differential Equations. Vol **15**. No **12** (1990). 1713–1742.
- [Barr-Je2] E.N.Barron y R.Jensen. *Optimal Control and Semicontinuous Viscosity Solutions*. Proc. of Amer. Math. Soc. Vol **113**. No **2** (1991). 397–402.
- [Be-Cr] P.Bénilan y M.G.Crandall. *Regularizing Effects of Homogeneous Evolution Equations*. M.R.C. Techn. Sum. Rep. 2076. Univ. Wisconsin–Madison.
- [Bens-JLi-Pap] S.Bensoussan, J.L.Lions y G.Papanicolau. *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. North–Holland. 1978.
- [Ben] S.Benton. *The Hamilton–Jacobi Equation. A Global Approach*. Academic Press. 1977.
- [Br1] H.Brézis. *Maximal Monotone Operators*. North Holland. 1973.
- [Br2] H.Brézis. *Análisis Funcional*. Alianza Editorial. 1984.
- [Ca] I.Capuzzo Dolcetta. *Solution de Viscosité d'équations de Hamilton–Jacobi–Bellman et applications en Controle Optimal*. Curso para “D.E.A. Mathématiques Appliquées aux Sciences Economiques” en la Université Paris–Dauphine (Proyecto Erasmus). 1987/88.
- [Ca-Li] I.Capuzzo Dolcetta y P.L.Lions. *Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi Equations and State–Constraints*. Trans. Amer. Math. Soc. **318** (1990). 643–683.
- [Can-Son] P.Cannarsa y H.M.Sonner. *Generalized One–Sided Estimates for Solutions of Hamilton–Jacobi Equations and Applications*. Nonlinear Analysis. TMA. Vol **13**. No **3** (1989). 305–323.
- [Ch-Gi-Go] Y.Chen, Y.Giga y S.Goto. *Uniqueness and Existence of Viscosity Solutions of Generalized Mean Curvature Flow Equations*. J. Diff. Geometry. **33** (1991). 749–786.
- [Cl] F.H.Clarke. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. J. Wiley & Sons. 1983.

- [**Con-Ho**] E.D.Conway y E.Hopf. *Hamilton's Theory and Generalized Solutions of the Hamilton–Jacobi Equation*. J. Math. Mech. **13** (1964). 939–986.
- [**Cou-Hi**] R.Courant y D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*. Vol I–II. J. Wiley & Sons. 1953, 1962.
- [**Cr**] M.G.Crandall. *An Introduction to Evolution Governed by Accretive Operators*. Dynamical Systems—An International Symposium (L.Cesari, J.Hale y J.LaSalle eds). Academic Press (1976). 131–165.
- [**Cr-Ev-Li**] M.G.Crandall, L.C.Evans y P.L.Lions. *Some Properties of Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi Equations*. Trans. Amer. Math. Soc. **282** (1984). 487–502.
- [**Cr-Is-Li1**] M.G.Crandall, H.Ishii y P.L.Lions. *Uniqueness of Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi Equations Revisited*. J. Math. Soc. Japan. Vol **39**. No **4** (1987). 581–596.
- [**Cr-Is-Li2**] M.G.Crandall, H.Ishii y P.L.Lions. *User's Guide to Viscosity Solutions of Second Order Partial Differential Equations*. Bull. Amer. Math. Soc. Vol **27**. No **1** (1992). 1–67.
- [**Cr-Li1**] M.G.Crandall y P.L.Lions. *Condition d'unicité pour les Solutions Généralisées des Equations de Hamilton–Jacobi du Premier Ordre*. C.R.A.S. **292** (1981). 183–186.
- [**Cr-Li2**] M.G.Crandall y P.L.Lions. *Viscosity Solutions of Hamilton Jacobi Equations*. Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983). 1–42.
- [**Cr-Li3**] M.G.Crandall y P.L.Lions. *Solutions de Viscosité Non-bornées des Equations de Hamilton Jacobi du Premier Ordre*. C.R.A.S. **298** (1984). 217–220.
- [**Cr-Li4**] M.G.Crandall y P.L.Lions. *Solutions de Viscosité pour les Equations de Hamilton Jacobi dans les Espaces de Banach*. C.R.A.S. **300** (1985). 67–70.
- [**Cr-Li5**] M.G.Crandall y P.L.Lions. *Hamilton–Jacobi Equations in Infinite Dimensions. Part I: Uniqueness of Viscosity Solutions*. J. Functional Analysis. Vol **62** (1985). 379–396.

- [Cr-Li6] M.G.Crandall y P.L.Lions. *Hamilton–Jacobi Equations in Infinite Dimensions. Part II: Existence of Viscosity Solutions*. J. Functional Analysis. Vol **65** (1986). 368–405.
- [Cr-Li7] M.G.Crandall y P.L.Lions. *On existence and Uniqueness of Solutions of Hamilton–Jacobi Equations*. Nonlinear Analysis. TMA. Vol **10**. No **4** (1986). 353–370.
- [Cr-Li8] M.G.Crandall y P.L.Lions. *Remarks on the Existence and Uniqueness of Unbounded Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi Equations*. Illinois J. Math. Vol **31**. No **4** (1987). 665–688.
- [Cr-Li-Sou] M.G.Crandall, P.L.Lions y P.E.Souganidis. *Maximal Solutions and Universal Bounds for Some Partial Differential Equations of Evolution*. Arch. Rat. Mech. and Anal. **105** (1989). 163–190.
- [Cr-Pi] M.G.Crandall y M.Pierre. *Regularizing Effects for  $u_t - \Delta\phi(u) = 0$* . M.R.C. Techn. Sum. Rep. 2166. Univ. Wisconsin–Madison.
- [Cr-Sou] M.G.Crandall y P.E.Souganidis. *Developments in the Theory of Nonlinear First–Order Partial Differential Equations*. Proc. Internat. Sympos. on Differential Equations. Birmingham. Alabama (I.W.Knowles y R.T.Lewis eds): North–Holland. 1984. 131–142.
- [Di1] G.Díaz. *Blow-up Time Involved with Perturbed Hamilton–Jacobi Equations*. Proc. of Royal Society of Edinburgh. **122A** (1992). 17–44.
- [Di2] G.Díaz. *A Maximum Principle for Fully Nonlinear Elliptic, eventually Degenerate, Second Order Equations in the Whole Space*. Houston Journal of Mathematics. Vol **21**. No **3** (1995). 507–524.
- [Di-Re1] G.Díaz y J.M.Rey. *Finite Extinction Time for Some Perturbed Hamilton–Jacobi Equations*. Applied Mathematics and Optimization. **27** (1993). 1–33.
- [Di-Re2] G.Díaz y J.M.Rey. *Discontinuous Solutions to Hamilton–Jacobi Equations in Banach Spaces*. En elaboración.
- [Do] A.Douglis. *The Continuous Dependence of Generalized Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations Upon Initial Data*. Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961). 267–284.

- [Dr] L.Dresner. *Similarity Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations*. Pitman. 1983.
- [El] R.J.Elliot. *Viscosity Solutions and Optimal Control*. Pitman. 1987.
- [Es-Ma] J.R.Esteban y P.Marcati. *Approximate Solutions to First and Second Order Quasilinear Evolution Equations Via Nonlinear Viscosity*. Trans. Amer. Math. Soc. **342** (1994). 501–521.
- [Ev1] L.C.Evans. *A Convergence Theorem for Solutions of Nonlinear Second Order Elliptic Equations*. Indiana Univ. Math. J. **27** (1978). 875–887.
- [Ev2] L.C.Evans. *On Solving Certain Nonlinear Partial Differential Equations by Accretive Operator Methods*. Israel J. Math. **86** (1980). 225–247.
- [Ev3] L.C.Evans. *Nonlinear Systems in Optimal Control Theory and Related Topics*. Systems of Nonlinear PDE (J.M. Ball ed). NATO ASI Series C. No **111**. Boston. 1983.
- [Ev4] L.C.Evans. *Nonlinear Semigroup Theory and Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi PDE*. In Nonlinear Semigroups, PDE and Attractors (T.L. Gill y W.W. Zachary eds). Lecture Notes in Mathematics. **1248**. Springer. 1987.
- [Ev5] L.C.Evans. *The Perturbed Test Function Method for Viscosity Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations*. Proc. Royal Soc. of Edinburgh. **111A** (1989). 359–375.
- [Ev-Ga] L.C.Evans y R.Gariepy. *Lecture Notes on Measure Theory and Fine Properties of Partial Differential Equations*.
- [Ev-Is] L.C.Evans y H.Ishii. *Differential Games and Nonlinear Partial Differential Equations on Bounded Domains*. Manuscripta Math. **49** (1984). 109–139.
- [Ev-Sou1] L.C.Evans y P.E.Souganidis. *Differential Games and Representation Formulas for Solutions of Hamilton–Jacobi–Isaacs Equations*. Indiana Math. J. Vol **33**. No **5** (1984). 773–797.

- [Ev-Sou2] L.C.Evans y P.E.Souganidis. *A PDE Approach to Geometric Optics for Certain Semilinear Parabolic Equations*. Indiana Math. J. **38** (1989). 141–172.
- [Ev-Sp1] L.C.Evans y J.Spruck. *Motion of Level Sets by Mean Curvature, I*. Differential Geometry. **33** (1991). 635–681.
- [Ev-Sp2] L.C.Evans y J.Spruck. *Motion of Level Sets by Mean Curvature, II*. Trans. Amer. Math. Soc. **330** (1992). 321–332.
- [Fl1] W.H.Fleming. *The Cauchy Problem for Degenerate Parabolic Equations*. J. Math. Mech. **13** (1964). 987–1008.
- [Fl2] W.H.Fleming. *The Cauchy Problem for a Nonlinear First Order Partial Differential Equation*. J. Differential Equations. **5** (1969). 515–530.
- [Fl3] W.H.Fleming. *Nonlinear Partial Differential Equations. Probabilistic and Game Theoretic Methods*. Problems in Nonlinear Analysis. CIME. Ed. Cremonese. 1971.
- [Fl-Ri] W.H.Fleming y R.W.Rishel. *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. Springer Verlag. 1975.
- [Fl-Son] W.H.Fleming y H.Mete Soner. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. Springer Verlag. 1993.
- [Fr] A.Friedman. *The Cauchy Problem for First Order Partial Differential Equations*. Indiana Univ. Math. J. **23** (1973). 27–40.
- [Fr-Sou] A.Friedman y P.E.Souganidis. *Blow-up of Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*. Comm. in Partial Diff. Eqs. Vol **11**. No **4** (1986). 397–443.
- [Gi-Go-Is-Sa] Y.Giga, S.Goto, H.Ishii y M.H.Sato. *Comparison Principle and Convexity Preserving Properties for Singular Degenerate Parabolic Equations on Unbounded Domains*. Indiana Univ. Math. J. **40** (1990). 443–469.
- [Gil-Tr] D.Gilbarg y N.S.Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer Verlag. 1983.

- [Gue-Lee] R.B.Guenther y J.W.Lee: *Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations*. Prentice Hall. 1988.
- [Ho1] E. Hopf. *Generalized Solutions of Nonlinear Equations of First Order*. J. Math. Mech. Vol **14** (1965). 951–973.
- [Ho2] E. Hopf. *On the Right Weak Solution of the Cauchy Problem for a Quasilinear Equation of First Order*. J. Math. Mech. Vol **19** (1969/70). 483–487.
- [Is1] H.Ishii. *Remarks on the Existence of Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi Equations*. Bull. Fac. Sci. Eng. Chuo Univ. Vol **26** (1983). 5–24.
- [Is2] H.Ishii. *Uniqueness of Unbounded Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi Equations*. Indiana Univ. Math. J. Vol **33**. No **5** (1984). 721–748.
- [Is3] H.Ishii. *Hamilton–Jacobi Equations with Discontinuous Hamiltonians on Arbitrary Open Sets*. Bull. Fac. Sci. & Eng. Chuo Univ. **28** (1985). 33–77.
- [Is4] H.Ishii. *Existence and Uniqueness of Solutions of Hamilton–Jacobi Equations*. Funkcial. Ekvac. **29** (1986). 167–188.
- [Is5] H.Ishii. *Perron’s Method for Hamilton–Jacobi Equations*. Duke Math. J. Vol **55**. No **2** (1987). 369–384.
- [Is6] H.Ishii. *A Simple, Direct Proof of Uniqueness for Solutions of the Hamilton–Jacobi Equations of Eikonal Type*. Amer. Math. Soc. Vol **100**. No **2** (1987). 247–251.
- [Is7] H.Ishii. *A Boundary Value Problem of the Dirichlet Type for Hamilton–Jacobi Equations*. Preprint.
- [Is8] H.Ishii. *On Uniqueness and Existence of Viscosity Solutions of Fully Nonlinear Second Order Elliptic PDE’s*. Comm. Pure and Appl. Math. **42** (1989). 14–45.
- [Je1] R.Jensen. *Uniqueness Criteria for Viscosity Solutions of Fully Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations*. Indiana Univ. Math. J. Vol **38**. No **3** (1989). 629–666.

- [Je2] R.Jensen. *The Maximum Principle for Viscosity Solutions of Fully Nonlinear Second Order Partial Differential Equations*. Archive Rät. Mech. Anal. **101** (1988). 1-27.
- [Je-Li-Sou] R.Jensen, P.L.Lions y P.E.Souganidis. *A Uniqueness Result for Viscosity Solutions of Second Order Fully Nonlinear Partial Differential Equations*. Proc. AMS. **4** (1988). 975-978.
- [Je-Sou] R.Jensen y P.E.Souganidis. *A Regularity Result for Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations in One Space Dimension*. Amer. Math. Soc. Vol **301**. No **1** (1987). 137-147.
- [Jo] F.John. *Partial Differential Equations*. Springer Verlag. 1982.
- [Kr1] S.N.Kruzkov. *Generalized Solutions of Nonlinear First-Order Equations and Certain Quasilinear Parabolic Equations*. Vestnik Moscow. Univ. Ser. I Math. Mech. **6** (1964). 67-74 (en ruso).
- [Kr2] S.N.Kruzkov. *Generalized Solutions of First-Order Nonlinear Equations in Several Independent Variables*. I Math. Sb. **70** (112) (1966). 394-415; II Math. Sb. **1** (1967). 93-116 (en ruso).
- [Kr3] S.N.Kruzkov. *Non Local Theory for Hamilton-Jacobi Equations*. In Proceedings of the Conference on PDE (P. Alexandroff y O. Oleinik eds). Moscow University Press. (1972) (en ruso).
- [Kr4] S.N.Kruzkov. *Generalized Solutions of the Hamilton-Jacobi Equation of Eikonal Type*. I Math. USSR-Sb. Vol **27**. No **3** (1975). 406-446.
- [Lad-Sol-Ur] O.A.Ladyzhenskaya, V.A.Solonnikov y N.N.Ural'ceva. *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*. Translations of Math. Monographs. Amer. Mat. Soc. 1968.
- [Lad-Ur] O.A.Ladyzhenskaya y N.N.Ural'ceva. *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*. Academic Press. 1968.
- [Lan-Lif] L.D.Landau y E.M.Lifschitz. *Teoría clásica de los campos*. Vol 2. Reverté. 1987.
- [Las-Li] J.M.Lasry y P.L.Lions. *A Remark on Regularization in Hilbert Spaces*. Israel J. Math. Vol **55**. No **3** (1986). 257-266.



- [Li1] P.L.Lions. *Résolution de Problèmes Quasilineaires*. Arch. Rat. Mech. Anal. **74** (1980). 335–354.
- [Li2] P.L.Lions. *Solutions Généralisées des Equations de Hamilton–Jacobi du Premier Ordre*. C.R.A.S. **292** (1981). 953–956.
- [Li3] P.L.Lions. *Control of Diffusion Processes in  $\mathbb{R}^N$* . Comm. Pure Appl. Math. **34** (1981). 121–147.
- [Li4] P.L.Lions. *Generalized Solutions of Hamilton–Jacobi Equations*. Pitman. 1982.
- [Li5] P.L.Lions. *Existence Results for First Order Hamilton–Jacobi Equations*. Recherche Mat. Napoli. **32** (1983). 1–23.
- [Li6] P.L.Lions. *Optimal Control of Diffusion Processes and Hamilton–Jacobi–Bellman Equations. Part 1 : The Dynamic Programming Principle and Applications. Part 2 : Viscosity Solutions and Uniqueness*. Comm. Partial Differential Equations. Vol **8** (1983). 1101–1174 y 1229–1276.
- [Li7] P.L.Lions. *Optimal Control of Diffusion Processes and Hamilton–Jacobi–Bellman Equations. Parts 1 – 3*. College de France Seminar. Vol **V**. Pitman. 1983.
- [Li8] P.L.Lions. *Solutions de Viscosité des Equations de Hamilton–Jacobi du Premier Ordre et Applications*. Seminaire Goulaouic–Meyer–Schwartz. Ecole Polytechnique. 1983/84.
- [Li9] P.L.Lions. *Regularizing Effects for First Order Hamilton–Jacobi Equations*. Appl. Anal. **20** (1985). 283–308.
- [Li10] P.L.Lions. *Neumann type Boundary Conditions for Hamilton–Jacobi Equations*. Duke Math. J. **52** (1985). 793–820.
- [Li-Ni] P.L.Lions y M.Nisio. *A Uniqueness Result for the Semigroup Associated with the Hamilton–Jacobi–Bellman Operator*. Proc. Japan Acad. **58** (1982). 273–276.
- [Li-Roc] P.L.Lions y J.C.Rochet. *Hopf Formula and Multi-time Hamilton–Jacobi Equations*. Proc. Amer. Soc. **96** (1986). 79–84.

- [Li-Sou-Va] P.L.Lions, P.E.Souganidis y J.L.Vázquez. *The Relation between the Porous Medium and the Eikonal Equations in Several Space Dimensions*. *Revista Mat. Iberoamericana*. **3** (1987). 275–310.
- [Ma-Wi] J.Mawhin y M.Willem. *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*. *Appl. Math. Sci.* Vol **74**. Springer-Verlag. 1989.
- [Mi] F.Mignot. *Contrôle Optimal dans les Inéquations Variationnelles Elliptiques*. *J. Func. Anal.* **22** (1976). 130–185.
- [Perr] O.Perron. *Eine Neue Behandlung der Randwertufgabe für  $\Delta u = 0$* . *Math. Z.* **18** (1923). 42–54.
- [Pe-San] B.Perthame y R.Sanders. *The Neumann Problem for Non-linear Second-Order Singular Perturbation Problem*. M.R.C. Technical Rep. University of Wisconsin. Madison. 1984.
- [Pu-Serr] B.Pucci y J.Serrin. *On the Derivation of Hamilton's Equations*. *Arch. Rational Mech. Anal.* **125** (1994). 297–310.
- [Rock] R.T.Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton Univ. Press. 1970.
- [Ro] D.S.Ross. *Ion etching: An Application of the Mathematical Theory of Hyperbolic Conservation Laws*. *J. Electrochemical Society*. Vol **135**. No **5** (1988). 1235–1240.
- [Sa] K.Sato. *On the Generators of Non Negative Contraction Semigroups in Banach Lattices*. *J. Math. Soc. Japon.* **20** (1980). 423–436.
- [Serr1] J.Serrin. *The Problem of Dirichlet for Quasilinear Elliptic Differential Equations with Many Independent Variables*. *Phil. Trans. Roy. Soc. London. A* **264** (1969). 413–496.
- [Serr2] J.Serrin. *Gradient Estimates of Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations*. In *Contributions to Nonlinear Functional Analysis* (E.H. Zarantonello ed). Academic Press. 1971.
- [Set] J.Sethian. *An Analysis of Flame Propagation*. Ph.D. Thesis. Lawrence Berkeley Laboratory. University of California. 1982.

- [Si] E.Sinestrari. *Accretive Differential Operators*. Bull. Un. Mat. Ital. **13** (1976). 19-31.
- [Son] H.M.Sonner. *Optimal Control Problems with State Constraints*. SIAM J. Control Optim. Vol **24** (1986). No **3**: 551-561, No **4**: 1110-1122.
- [Sou] P.E.Souganidis. *Existence of Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*. J. Diff. Eqs. **56** (1985). 345-390.
- [Tam] M.B.Tamburro. *The Evolution Operator Approach to the Hamilton-Jacobi Equations*. Israel J. Math. **26** (1977). 232-264.
- [Vol] A.I.Vol'pert. *The Spaces BV and Quasilinear Equations*. Math. USSR-Sb. **2** (1967). 225-267.

# Relación de Figuras

0.1	Comportamiento asintótico ( $m > 1, t \rightarrow -\infty$ ) . . . . .	xiii
0.2	Carácter cíclico del comportamiento asintótico (regresivo). . .	xiv
0.3	Comportamiento asintótico ( $m > 1, t \rightarrow +\infty$ ) . . . . .	xv
0.4	Carácter cíclico del comportamiento asintótico (progresivo). .	xvi
0.5	Comportamiento asintótico ( $m = 1, t \rightarrow +\infty$ ) . . . . .	xvi
0.6	Comportamiento asintótico ( $m = 1, \lambda > 0$ ) en el plano $(\alpha, q)$ .	xviii
0.7	Comportamiento asintótico ( $m > 1, \lambda > 0$ ) en el plano $(\alpha, q)$ .	xix
3.1	Región quemada en el instante $t$ . . . . .	15
3.2	Vectores de dirección $\vec{v}_1$ y $\vec{w}_1$ . . . . .	18
3.3	Dominio de definición de $\psi(x, y, t)$ . . . . .	22
4.1	Conjuntos $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}_0$ . . . . .	32
4.2	Función $w_3$ para $b \geq 1$ . . . . .	41
4.3	Función $w_3$ para $0 < b < 1$ . . . . .	42
4.4	Subdiferenciales de $f$ en $x_0$ . . . . .	55
4.5	Función $f(t)$ . . . . .	75
4.6	Función $h(t)$ . . . . .	76
4.7	Funciones $g^*$ y $\tilde{g}$ . . . . .	78
6.1	Cono de dependencia. . . . .	200
7.1	Gráficas de las funciones $\varphi^*$ y $\varphi_*$ . . . . .	233
7.2	Componentes $v_1$ y $v_3$ del vector $\vec{v}$ . . . . .	233
7.3	$ x  = \sigma + ct$ con $t > t_0$ . . . . .	235
7.4	$ x  = \sigma + ct$ con $t < t_0$ . . . . .	236
7.5	Dominio $\Omega(t)$ . . . . .	248
7.6	Región $\partial\mathbf{B}_\sigma(0) \cap \overline{\mathbf{B}}_{ct}(x)$ . . . . .	250

7.7	Regiones $\mathcal{R}_i$ , $i = 1, 2, 3, 4$ . . . . .	252
7.8	Localización de $y_{\max}$ cuando $\sigma <  x  \leq \sigma + d_m(t)$ . . . . .	255
7.9	Regiones $\mathcal{R}_i$ , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . . . . .	257
10.1	Comportamiento asintótico ( $t \rightarrow +\infty$ ). . . . .	351
10.2	Carácter cíclico del comportamiento asintótico (progresivo). . . . .	352
10.3	Función $\mathcal{U}(x, t)$ cuando $\alpha < -1$ . . . . .	360
10.4	Función $\mathcal{W}(x, t) = A x  + RA^m t$ . . . . .	363
10.5	Función parcial $t \mapsto \mathcal{U}(x, t)$ . . . . .	365
10.6	Función parcial $x \mapsto \mathcal{U}(x, t)$ . . . . .	366
10.7	Evolución de $\mathcal{U}(0, t)$ en función del tiempo. . . . .	370
10.8	Comportamiento asintótico ( $t \rightarrow -\infty$ ). . . . .	371
10.9	Carácter cíclico del comportamiento asintótico (regresivo). . . . .	372
10.10	Función $\mathcal{U}(x, t)$ cuando $\alpha = -\infty$ . . . . .	374
10.11	Función $\mathcal{U}(x, t)$ cuando $\alpha = +\infty$ . . . . .	375
10.12	$\mathcal{U}(x, t) = +\infty$ si $ x  \leq Rt$ . . . . .	382
10.13	Comportamiento asintótico ( $t \rightarrow +\infty$ ). . . . .	383
11.1	Función parcial $t \mapsto u(x, t)$ para $\alpha < -1$ y $q = \frac{\alpha}{1+\alpha}$ . . . . .	430
11.2	Función parcial $x \mapsto u(x, t)$ para $\alpha < -1$ y $q = \frac{\alpha}{1+\alpha}$ . . . . .	430
11.3	Comportamiento asintótico ( $m = 1$ , $\lambda > 0$ ) en el plano $(\alpha, q)$ . . . . .	436
11.4	Conjunto $\mathcal{R}_k$ . . . . .	453
11.5	Función parcial $t \mapsto u(x, t)$ para $\alpha < -1$ y $q = \frac{\alpha m}{1+\alpha}$ . . . . .	465
11.6	Función parcial $x \mapsto u(x, t)$ para $\alpha < -1$ y $q = \frac{\alpha m}{1+\alpha}$ . . . . .	465
11.7	Función parcial $t \mapsto u(x, t)$ para $\alpha > \frac{1}{m-1}$ y $q = \frac{\alpha m}{1+\alpha}$ . . . . .	467
11.8	Función parcial $x \mapsto u(x, t)$ para $\alpha > \frac{1}{m-1}$ y $q = \frac{\alpha m}{1+\alpha}$ . . . . .	467
11.9	Comportamiento asintótico ( $m > 1$ , $\lambda > 0$ ) en el plano $(\alpha, q)$ . . . . .	469

# Relación de Tablas

0.1	Comportamientos maximales iniciales ( $t < 0$ ). . . . .	xiv
0.2	Comportamientos maximales finales ( $m > 1, t > 0$ ). . . . .	xv
0.3	Comportamientos maximales finales ( $m = 1, \lambda > 0, t > 0$ ). . .	xvii
10.1	Comportamientos maximales finales ( $m > 1, t > 0$ ). . . . .	352
10.2	Comportamientos maximales iniciales ( $m > 1, t < 0$ ). . . . .	371
11.1	Comportamientos maximales finales ( $m = 1, \lambda > 0, t > 0$ ). . .	435