



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID  
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA



\* 5 3 0 9 5 3 7 8 9 9 \*  
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

ANALISIS DE UN SISTEMA  
HIBRIDO BIDIMENSIONAL  
FLUIDO-ESTRUCTURA

SORIN DANIEL MICU

Director: ENRIQUE ZUAZUA IRIONDO

Memoria presentada para optar al  
Grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

1995

*A mi querida madre*

Deseo agradecer:

-a Enrique Zuazua por aceptar dirigir esta Tesis, introducirme en el fascinante mundo de las e.d.p.'s y mostrarme las amplias posibilidades que ofrece este campo. También quiero expresar toda mi admiración por su manera de trabajar, pensar y transmitir ideas y su capacidad de luchar para encontrar soluciones incluso allí donde no se veían.

-a E. Feireisl, J.J.L. Velázquez y M. Tucsnak por sus numerosas y útiles sugerencias.

-a P. Lax, G. Lebeau, A. Majda y A. Rodríguez-Bernal por interesantes discusiones.

-a Ildefonso Díaz y Jose Carrillo que, durante sus periodos como Directores del Departamento, me han ofrecido las mejores condiciones de trabajo.

-al grupo de profesores que han iniciado y organizado el Proyecto Matarou Tempus Jep 2797 y especialmente a Doina Cioranescu por su dedicación y su constante buena disposición.

-a Soledad Rodríguez por el cálido recibimiento a mi llegada en España y su excelente amabilidad.

-a Luis Bonilla, cuyo apoyo para la finalización de esta Tesis ha sido decisivo.

-al profesor A. Dinca, decano de la Facultad de Matemática de Craiova, por su apoyo a lo largo de los últimos años.

-a mis compañeros becarios que han hecho que mi estancia en España sea mucho más agradable e interesante.

# Indice

Introducción	iii
<b>1 Formulación matemática del problema</b>	<b>1</b>
1.1 Formulación matemática del problema	2
1.2 Propiedades elementales de las soluciones	3
1.3 Caracterización de las soluciones débiles	8
<b>2 Comportamiento asintótico de las soluciones</b>	<b>13</b>
2.1 Decaimiento a cero de la energía	13
2.2 El comportamiento asintótico de $\Phi$ y $W$	18
2.3 Decaimiento no exponencial de la energía	21
<b>3 Análisis espectral</b>	<b>25</b>
3.1 El problema conservativo	25
3.2 El problema disipativo	31
3.2.1 Algunos lemas técnicos	32
3.2.2 Autovalores de módulo mayor que $\sqrt{2}k\pi$	38
3.2.3 Autovalores de módulo menor que $\sqrt{2}k\pi$ y mayor que $k\pi$ (primera parte)	46
3.2.4 Autovalores de módulo menor que $\sqrt{2}k\pi$ y mayor que $k\pi$ (segunda parte)	52
3.2.5 Autovalores de módulo menor que $k\pi$	57
3.2.6 Conclusiones	63
3.3 Comparación de los resultados	64
3.4 Sobre la propiedad de completitud de las autofunciones	65
3.5 Un resultado de no compacidad	68
<b>4 Un problema de control frontera</b>	<b>71</b>
4.1 El problema de control unidimensional	73
4.1.1 Propiedades fundamentales del problema unidimensional	73
4.1.2 Observabilidad (caso $n \neq 0$ )	76
4.1.3 Observabilidad (caso $n = 0$ )	81
4.1.4 Controlabilidad	84
4.2 El problema de control bidimensional	92
4.3 Control $\alpha = 0$	96
<b>5 Existencia de soluciones periódicas</b>	<b>105</b>
5.1 El problema unidimensional	106
5.1.1 El problema homogéneo con perturbación	106

---

5.1.2	El problema no homogéneo con perturbación . . . . .	111
5.1.3	Estimaciones uniformes para las soluciones periódicas . . . . .	113
5.1.4	Paso al límite . . . . .	116
5.2	El problema bidimensional . . . . .	117
<b>6</b>	<b>Algunas variantes del modelo original</b> . . . . .	<b>121</b>
6.1	Término de disipación no acotado . . . . .	122
6.2	Sobre el decaimiento de la energía con otras condiciones de contorno para $W$ . . .	126
6.3	Sobre el soporte del término disipativo . . . . .	132
	<b>Bibliografía</b> . . . . .	<b>137</b>

# Introducción

En los últimos años, tanto en la literatura matemática como en la técnica, un número cada vez mayor de trabajos tratan el tema del control activo del ruido generado en distintos recintos cerrados por la vibración de las estructuras flexibles que forman las paredes.

Uno de los más recientes ejemplos que han generado un destacado aumento de interés para este tipo de problemas lo constituye la aparición de nuevos turbopropulsores para los aviones. Dichos motores, sin duda muy potentes y muy eficientes, provocan vibraciones acústicas de alta amplitud que se transmiten al fuselaje del avión produciendo la vibración de éste. La utilización de nuevos materiales superligeros para la construcción de las paredes hace que estas oscilaciones sean todavía más amplias. Debido a la interacción entre la estructura del avión y el campo acústico interior, las vibraciones mecánicas determinan un alto nivel de ruido en las cabinas que puede resultar realmente molesto para los pasajeros.

Se han propuesto y analizado diversas estrategias de control activo de las vibraciones acústicas interiores. Una de las más interesantes la constituye, sin duda, la implementación del control mediante piezas piezocerámicas fijadas sobre una parte del fuselaje. Estas piezas son un ejemplo de materiales inteligentes que se caracterizan por la capacidad de ser al mismo tiempo actuantes y sensores y que, hoy en día, se utilizan en multitud de aplicaciones. Las piezas piezocerámicas transforman la excitación eléctrica a la que están sometidas en vibraciones mecánicas de las estructuras sobre las cuales están fijadas. De esta manera se pueden utilizar para cambiar la dinámica de las partes flexibles y, finalmente, reducir el ruido interior (vease, por ejemplo, Destuynder et al. [14]).

Este es sólo un ejemplo de los muchos que han motivado amplios estudios de los fenómenos de transmisión de vibraciones de una estructura a otra.

En esta Tesis nos proponemos abordar diversos problemas matemáticos relacionados con el análisis de las propiedades cualitativas de un sistema híbrido bidimensional lineal que ha surgido recientemente en el desarrollo de estas nuevas técnicas para la reducción del ruido en el interior de un recinto (avión, automóvil, etc.). En general podemos decir que un sistema híbrido describe una estructura compleja que acopla el movimiento vibratorio de dos componentes de naturalezas diferentes.

El ejemplo más clásico y sencillo lo constituye el sistema formado por una parte flexible (barra o cuerda) que, en uno de sus extremos, está ligada a un cuerpo rígido. Las características más importantes de un sistema híbrido se pueden ver con facilidad en el caso del sistema cuerda-cuerpo, cuyas ecuaciones de movimiento se escriben de la siguiente forma (vease Littman, Markus y You [34] y Rao [42]):

$$(0.1) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{para } 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0) = 0 & \text{para } t > 0 \\ u_x(1) = -u_{tt}(1) - u_t(1) & \text{para } t > 0. \end{cases}$$

La energía del sistema se describe mediante la función:

$$E(t) = \int_0^1 (u_t)^2 dx + \int_0^1 (u_x)^2 dx + (u_t(1))^2$$

y contiene una parte que representa la energía de la cuerda (los primeros dos términos) y otra que es la energía del cuerpo (el último término).

Formalmente se obtiene que:

$$\frac{dE}{dt}(t) = -(u_t(1))^2 \leq 0.$$

Es decir, el sistema tiene un carácter disipativo.

Esta es una variante simplificada del modelo experimental SCOLE (Spacecraft Control Laboratory Experiment) que describe las vibraciones de un satélite orbital y una antena, unidas por una estructura larga y flexible (vease Littman y Marcus [31] y [33]). Otros ejemplos de sistemas híbridos se pueden encontrar en los trabajos de Hansen y Zuazua [18] donde se estudian dos cuerdas unidas por un cuerpo rígido, o de You [49], donde se presenta un modelo que acopla membranas y cuerdas.

Desde el punto de vista matemático los sistemas híbridos se describen mediante ecuaciones en derivadas parciales acopladas con ecuaciones diferenciales ordinarias o con otras ecuaciones en derivadas parciales en las condiciones de contorno. Por ejemplo, en el caso del sistema (0.1) si notamos  $u(1, t) = v(t)$ , tenemos que el movimiento del cuerpo fijado en el extremo  $x = 1$  de la cuerda, está descrito por  $v(t)$  que satisface la ecuación diferencial ordinaria:

$$v_{tt} - v_t = u_x(1, t).$$

De esta forma, el sistema (0.1) acopla la ecuación de ondas con la ecuación diferencial ordinaria del cuerpo.

Tal y como hemos mencionado anteriormente, en esta Tesis nos ocuparemos de un modelo híbrido bidimensional motivado principalmente por el problema de la reducción de ruido mediante la correcta aplicación de un voltaje eléctrico sobre piezas piezocerámicas acopladas al contorno del recinto. Este problema motivó una serie de trabajos de H. T. Banks et al. (vease [3], [4] y [5]) en los que se desarrollan algunos modelos matemáticos que permiten describir y analizar esta problemática. En estos trabajos se estudian también algunas cuestiones matemáticas básicas tales como la existencia de soluciones, su aproximación numérica, así como la existencia de controles óptimos para algunos problemas elementales de control. Sin embargo, en estos artículos algunas de las cuestiones fundamentales quedan sin respuesta. Son justamente éstas las cuestiones que nos proponemos resolver y que seguidamente describimos.

Desde el punto de vista matemático, consideramos una versión simplificada fiable del modelo propuesto por Banks et al. que consiste en estudiar la propagación de las ondas acústicas en un fluido bidimensional dentro de un dominio cuadrado. Una parte de la frontera se considera flexible, bajo la forma de una cuerda disipativa, mientras que las partes restantes serán inmóviles. Se llega así a un sistema híbrido en el que se acoplan las vibraciones acústicas del fluido con las vibraciones mecánicas de la cuerda.

Presentamos a continuación la deducción de este modelo.

Consideramos un fluido elástico, no viscoso y compresible en el abierto bidimensional

$$\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$$

y estudiamos la propagación de las ondas acústicas en este dominio.

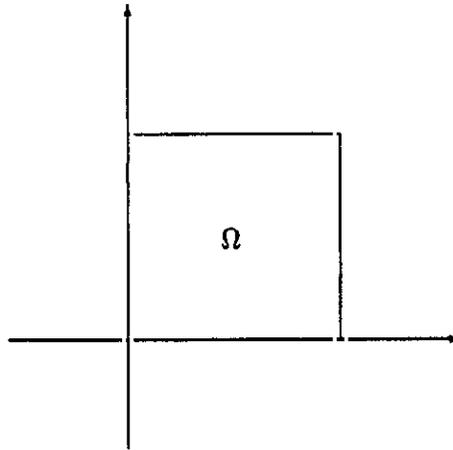


Fig.1

El estado del fluido móvil queda determinado por cuatro magnitudes dadas en cada punto  $(x, y)$  de  $\Omega$  y en cada instante de tiempo  $t$ : las dos componentes de la velocidad  $\vec{v} = \vec{v}(t, x, y)$ , la presión  $p = p(t, x, y)$  y la densidad  $\rho = \rho(t, x, y)$ . Un sistema completo de ecuaciones que describen las ondas acústicas está formado por:

$$(0.2) \quad \begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ \rho \vec{v}_t + \rho(\nabla \vec{v}) \cdot \vec{v} + \nabla p = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ p = f(\rho). \end{cases}$$

Para la deducción de estas ecuaciones vease Landau y Lifchitz [28], Cap. 1, pp. 1-5 y Cap. 8, pp. 281-282.

La primera ecuación de (0.2) es la ecuación de continuidad que expresa la conservación de la masa. La segunda es la ecuación de Euler y representa la ley de Newton. La última es la ecuación de estado. Suponiendo que no hay intercambio térmico entre las diferentes partes del fluido podemos considerar como ecuación de estado la ecuación adiabática de un gas perfecto:

$$(0.3) \quad p = p_0(\rho/\rho_0)^\gamma,$$

donde  $\gamma$  es una constante que depende del fluido considerado.

En la relación precedente  $p_0$  y  $\rho_0$  son la presión y la densidad al equilibrio, respectivamente, y suponemos que ambas son constantes en todo el dominio  $\Omega$ .

En el caso de las pequeñas oscilaciones del fluido, se tiene que  $p_1 = p - p_0 \ll p_0$ ,  $\rho_1 = \rho - \rho_0 \ll \rho_0$  y  $|\vec{v}| \ll 1$  y por consiguiente, en una primera aproximación, se pueden despreciar los productos de las cantidades  $p_1$ ,  $\rho_1$  y  $|\vec{v}|$ . También se puede linealizar la relación entre  $p$  y  $\rho$ . Las ecuaciones (0.2) se escriben entonces de la siguiente forma:

$$(0.4) \quad \begin{cases} \rho_t + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ \rho_0 \vec{v}_t + \nabla p = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ p - p_0 = c^2(\rho - \rho_0) \end{cases}$$

donde  $c = \sqrt{\gamma(p_0/\rho_0)}$  es la velocidad del sonido en nuestro medio.

El sistema (0.4) representa la linealización de las ecuaciones (0.2) y describe la propagación de las ondas acústicas de amplitud pequeña.

Con el objeto de expresar todas las incógnitas en función de una sola es conveniente introducir un potencial de velocidades  $\Phi = \Phi(t, x, y)$  tal que:

$$(0.5) \quad \vec{v} = \nabla \Phi.$$

La segunda ecuación de (0.4) nos indica que  $\nabla(\rho_0 \Phi_t + p) = 0$  y como de momento  $\Phi$  sólo satisface (0.5) se puede elegir de tal manera que:

$$(0.6) \quad p_1 = p - p_0 = -\rho_0 \Phi_t.$$

La primera y la última ecuación de (0.4) implican que  $\Phi$  satisface la ecuación de ondas:

$$(0.7) \quad \Phi_{tt} - c^2 \Delta \Phi = 0 \text{ en } \Omega \times (0, \infty).$$

Observamos que la función  $\Phi$  queda determinada de manera única, módulo una constante aditiva, por las relaciones (0.5) y (0.6). Los datos iniciales significativos para el problema físico serán  $\nabla \Phi(0, x, y)$  y  $\Phi_t(0, x, y)$  que representan la velocidad inicial y la diferencia entre la presión inicial y la presión de equilibrio  $p_0$ , respectivamente.

Sea  $\Gamma$  la frontera del dominio  $\Omega$ . En la parte  $\Gamma_0 = \{(x, 0) : x \in (0, 1)\} \subset \Gamma$  de esta frontera se coloca una cuerda vibrante disipativa con condiciones Neumann en los extremos  $x = 0$  y  $x = 1$ . El desplazamiento transversal de la cuerda en el plano de  $\Omega$  se denota por  $W$  y satisface la ecuación de ondas:

$$(0.8) \quad \begin{cases} W_{tt} - W_{xx} + W_t = F & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ W_x(0) = W_x(1) = 0 & \text{para } t \in (0, \infty). \end{cases}$$

Las vibraciones de la cuerda se acoplan con las vibraciones del fluido mediante el término  $F = F(t, x)$  que representa la fuerza debida a la variación de la presión interna:

$$F = p - p_0 = -\rho_0 \Phi_t.$$

La condición de continuidad de la velocidad sobre  $\Gamma$ , que resulta suponiendo que el borde es impenetrable para el fluido interior, proporciona una segunda condición de acoplamiento. Además, la parte  $\Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma_0$  de la frontera de  $\Omega$  se considera rígida (inmóvil), obteniéndose al final las siguientes relaciones sobre el borde:

$$(0.9) \quad \begin{cases} \vec{v} \cdot n = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ \vec{v} \cdot n = W_t & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty), \end{cases}$$

donde  $n$  denota la normal exterior unitaria a la frontera de  $\Omega$ .

Finalmente, resulta que  $\Phi$  y  $W$  son soluciones del sistema:

$$(0.10) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Phi_{tt} - c^2 \Delta \Phi = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -W_t & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ W_{tt} - W_{xx} + W_t + \rho_0 \Phi_t = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ W_x(0, t) = W_x(1, t) = 0 & \text{para } t \in (0, \infty) \\ \Phi(0) = \Phi^0, \quad \Phi_t(0) = \Phi^1 & \text{en } \Omega \\ W(0) = W^0, \quad W_t(0) = W^1 & \text{sobre } \Gamma_0 \end{array} \right.$$

A lo largo del estudio que vamos a realizar consideraremos que las constantes  $c$  y  $\rho_0$  iguales a uno. En este caso la energía del sistema se define por:

$$(0.11) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla \Phi|^2 + (\Phi_t)^2) dx dy + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} ((W_x)^2 + (W_t)^2) dx$$

Multiplicando adecuadamente por  $\Phi_t$  y  $W_t$  e integrando por partes se obtiene, al menos formalmente, que

$$(0.12) \quad \frac{dE}{dt}(t) = - \int_{\Gamma_0} (W_t)^2 dx \leq 0.$$

Es decir, el sistema tiene un caracter disipativo.

Si las constantes  $c$  y  $\rho_0$  no fuesen iguales a uno, tendríamos que introducir una ligera modificación en la función de energía, incorporando estas constantes. Sin embargo, del punto de vista matemático esto no supondría cambios importantes.

Uno de los objetivos principales de esta Tesis es el de explicar la naturaleza del acoplamiento fluido-estructura que el sistema (0.10) representa y para ello intentar entender el efecto que la disipación, que en principio está concentrada en  $\Gamma_0$ , tiene sobre el conjunto del sistema.

Comparando los sistemas (0.1) y (0.10) observamos que existe, por lo menos, una característica común: ambos acoplan dos ecuaciones diferenciales que describen las vibraciones de dos estructuras de naturalezas diferentes; cuerda y cuerpo en el primer caso, fluido y cuerda en el segundo. Esta es la razón por la cual consideramos que nuestro sistema es un sistema híbrido.

Al mismo tiempo cabe señalar por lo menos una diferencia importante entre los dos sistemas: mientras que en (0.1) aparece una ecuación unidimensional en derivadas parciales y otra ordinaria, en (0.10) hay dos ecuaciones en derivadas parciales, una bidimensional y otra unidimensional. Por esta razón consideramos que nuestro sistema es un sistema híbrido bidimensional.

El hecho de que las dimensiones de los sistemas (0.1) y (0.10) sean diferentes tiene consecuencias importantes. Por ejemplo, en el primer sistema, el término disipativo tiene un carácter compacto mientras que en el segundo solamente acotado. Esto impedirá la aplicación de algunas técnicas ya conocidas para los sistemas híbridos unidimensionales.

Como veremos más adelante, mediante la separación de variables, el sistema (0.10) se puede descomponer en una familia infinita de problemas del tipo (0.1). Esto será particularmente útil en el análisis espectral de (0.10).

Pasamos a continuación a describir los contenidos de los capítulos de esta Tesis.

La existencia y la unicidad de las soluciones del sistema (0.10), así como sus propiedades elementales de continuidad con respecto a los datos iniciales y términos no homogéneos, se estudian en el primer capítulo. Mediante métodos clásicos se obtiene que el problema está bien planteado en el espacio de energía finita:

$$(0.13) \quad \mathcal{X} = H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^1(\Gamma_0) \times L^2(\Gamma_0).$$

\* Las soluciones débiles se definen usando dos métodos distintos: la teoría de semigrupos y técnicas variacionales, comparándose los resultados. Las herramientas principales usadas son, por un lado, la teoría hilbertiana de los operadores maximales-monótonos y el Teorema de Hille-Yosida y, por otro lado, la caracterización de soluciones mediante el operador adjunto introducida en Ball [1].

El segundo capítulo contiene el estudio de las propiedades asintóticas de las soluciones cuando el tiempo tiende al infinito. Se demuestra en primer lugar que el sistema se puede estabilizar mediante el término  $W_t$  que actúa sobre la parte  $\Gamma_0$  de la frontera, es decir, la energía de toda solución débil converge a cero cuando el tiempo tiende al infinito. Una extensión del Principio de invarianza de LaSalle (vease Cazenave y Haraux [22]) y el Teorema de unicidad de Holmgren (vease Hörmander [23] y Lions [29]) son los dos resultados fundamentales en los cuales se apoya la demostración de este resultado. Argumentos similares han sido utilizados en muchos trabajos que estudian propiedades asintóticas de sistemas disipativos. Entre ellos citamos los artículos de Littman y Marcus [31] y Komornik y Zuazua [27].

La energía del sistema no es coerciva en  $\mathcal{X}$  y por lo tanto la convergencia a cero de ésta no indica el comportamiento de  $\Phi$  y  $W$ . Por lo tanto, a continuación se estudian los comportamientos de estas dos cantidades.

Una vez conocido el decaimiento a cero de la energía del sistema, cabe preguntarse sobre la tasa de decaimiento. En la sección siguiente se aborda este problema y se deduce que el decaimiento de la energía no es uniforme, mediante la construcción de soluciones con decaimiento exponencial arbitrariamente pequeño. Esta construcción se basa en la posibilidad de considerar autofunciones del problema en variables separadas y de demostrar la existencia de una sucesión de autovalores que se aproximan al eje imaginario. Argumentos similares se usan, por ejemplo, en Hansen y Zuazua [18] y Littman y Marcus [31].

De esta manera se pone en evidencia una de las características matemáticas principales de muchos sistemas híbridos: la disipación ejercida sobre una componente del sistema asegura la estabilización, pero es demasiado débil para garantizar el decaimiento uniforme de la energía. Observamos que la debilidad del término disipativo se debe a la estructura del problema y no a su localización en una parte relativamente pequeña de la frontera.

Observemos que, para demostrar el decaimiento no uniforme de la energía, no podemos utilizar técnicas de compacidad (como las que se utilizan en Rao [42] en el caso de un sistema híbrido unidimensional) ya que, en nuestro caso, el término disipativo es acotado pero no compacto en el espacio de la energía.

En el tercer capítulo se lleva a cabo un análisis del espectro de los operadores diferenciales conservativo y disipativo, asociados al sistema (0.10).

En la primera sección se localizan los autovalores puramente imaginarios del operador conservativo y se describen las propiedades fundamentales de las autofunciones correspondientes.

La segunda sección es la más amplia, ya que es aquí donde se obtienen los desarrollos asintóticos de los autovalores y de las autofunciones del operador asociado al sistema (0.10).

En primer lugar, se obtienen tres tipos de autovalores que, a altas frecuencias, se acercan al eje imaginario. De forma más precisa, los autovalores del primer tipo se aproximan a los

autovalores del problema con condiciones Neumann homogéneas en toda la frontera, es decir los autovalores de:

$$(0.14) \quad \begin{cases} \Phi_{tt} - \Delta\Phi = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, \infty). \end{cases}$$

Los autovalores del segundo tipo se comportan como los autovalores del problema mixto siguiente:

$$(0.15) \quad \begin{cases} \Phi_{tt} - \Delta\Phi = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ \Phi = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty). \end{cases}$$

Los autovalores del tercer tipo hacen la transición de una zona a otra.

Las autofunciones correspondientes son tales que la energía concentrada en la cuerda se anula asintóticamente, confirmando, una vez más, el carácter no uniforme del decaimiento de la energía.

Es a este nivel en el que se aprecia la mayor diferencia entre nuestro sistema y la clásica ecuación de ondas con disipación en la frontera:

$$(0.16) \quad \begin{cases} \Phi_{tt} - \Delta\Phi = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \Phi_t & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty). \end{cases}$$

En este caso la energía del sistema:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla\Phi|^2 + (\Phi_t)^2) dx dy$$

verifica:

$$\frac{dE}{dt}(t) = - \int_{\Gamma_0} (\Phi_t)^2 dx \leq 0.$$

Se puede comprobar que  $E(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Sin embargo, el decaimiento no es uniforme puesto que todo segmento de la forma  $I_l = \{(x, l) : x \in [0, 1]\}$ ,  $0 < l < 1$ , constituye un rayo que jamás intersecta la región de disipación  $\Gamma_0$  (vease [6]).

Por el contrario, si buscamos soluciones de la forma  $\Phi(x, y, t) = \varphi(y, t) \cos(k\pi x)$  vemos que  $\varphi$  ha de satisfacer

$$(0.17) \quad \begin{cases} \varphi_{tt} - \varphi_{yy} + k^2\pi^2\varphi = 0, & 0 < y < 1, t > 0 \\ \varphi_y(1, t) = 0 & t > 0 \\ \varphi_y(0, t) = \varphi_t(0, t) & t > 0. \end{cases}$$

Se puede probar que, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , la energía:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 ((\varphi_y)^2 + (\varphi_t)^2 + n^2\pi^2(\varphi)^2) dy$$

del sistema (0.17) decae uniformemente, cosa que, según el análisis de este capítulo, no ocurre con nuestro sistema (0.10).

En (0.16) la pérdida del decaimiento uniforme proviene de que la tasa de decaimiento en (0.17) tiende a cero cuando  $k$  tiende a infinito. Vemos pues que en (0.10) la ausencia del decaimiento es más debida a la estructura del acoplamiento en  $\Gamma_0$  que al soporte de la región disipativa.

Además de los autovalores anteriores, existe una sucesión de autovalores cuyas partes reales no convergen a cero, fenómeno que no se puede encontrar en un problema unidimensional. Estos autovalores corresponden a vibraciones en las que la energía concentrada en la cuerda no decae a cero cuando la frecuencia crece. Las autofunciones correspondientes son disipadas uniformemente.

El análisis se realiza de nuevo mediante separación de variables y reducción a problemas unidimensionales, en los que interviene un parámetro entero, que expresa la frecuencia de vibración en la dirección  $x$ . El Teorema de Rouché es la herramienta básica para localizar los autovalores del operador.

A continuación se estudian algunas propiedades de completitud y la posibilidad de que las autofunciones formen una base de Riesz. Fijando la frecuencia  $k$  de vibración en la dirección  $x$ , se obtiene un sistema unidimensional, al que corresponde una sucesión de autofunciones que forma una base de Riesz, para cada  $k$ . Pasando al sistema bidimensional inicial, se deduce que las autofunciones correspondientes forman un sistema completo en el espacio  $\mathcal{X}$ , pero las estimaciones de las que disponemos no nos permiten demostrar que se trata de una base de Riesz.

Finalmente, con la ayuda de los autovalores del segundo tipo (con partes reales "significativas") se demuestra que la diferencia entre el semigrupo generado por el operador disipativo y el semigrupo generado por el operador conservativo no es un operador compacto para ningún instante de tiempo  $t$ .

Tal y como mencionábamos al principio de la Introducción, uno de los problemas que más interés tienen en el contexto de este tipo de sistemas es la posibilidad de controlar el nivel de ruido mediante la acción sobre la parte flexible de la frontera del dominio. El problema de la controlabilidad del sistema mediante funciones que actúan sobre la parte  $\Gamma_0$  de la frontera se considera en el cuarto capítulo. La formulación matemática precisa de este problema es la siguiente: dado  $T$  suficientemente grande y un dato inicial  $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1)$  en un espacio  $\mathcal{E}$ , que está a nuestra disposición, encontrar un control  $\beta \in H^{-2}(0, T; L^2(0, 1))$  tal que la solución del sistema:

$$(0.18) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Phi_{tt} - \Delta \Phi = 0 & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, T) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -W_t & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, T) \\ W_{tt} - W_{xx} + \Phi_t = \beta & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, T) \\ W_x(0, t) = W_x(1, t) = 0 & \text{para } t \in (0, T) \\ \Phi(0) = \Phi^0, \quad \Phi_t(0) = \Phi^1 & \text{en } \Omega \\ W(0) = W^0, \quad W_t(0) = W^1 & \text{sobre } \Gamma_0 \end{array} \right.$$

satisfaga las relaciones:

$$(0.19) \quad \begin{cases} \Phi(T) = \Phi_t(T) = 0 \\ W(T) = W_t(T) = 0. \end{cases}$$

Se trata pues de conducir el sistema al equilibrio mediante la acción de una fuerza externa distribuida sobre la parte flexible de la frontera. En los trabajos de Banks et al. que hemos citado al principio se propone la posibilidad de controlar el sistema mediante piezas piezocerámicas lo que, de alguna manera, equivale a considerar controles que actúan en un conjunto discreto de puntos de  $\Gamma_0$ . Este tipo de control es mucho más difícil de estudiar y está estrechamente relacionado con la multiplicidad de los autovalores del operador asociado y con la localización de los puntos en los que se actúa. Más detalles sobre este tema se pueden encontrar en el trabajo de Tucsnak [46].

Integrando la primera ecuación de (0.18) se obtiene que la cantidad  $\int_{\Omega} \Phi_t - \int_{\Gamma_0} W$  se conserva. Por consiguiente, no siempre es posible conducir a cero tanto  $\Phi_t$  como  $W$ . Teniendo en cuenta ésto, conviene considerar primero la acción de dos controles. De este modo, al principio del capítulo, se estudia el problema siguiente: dado  $T$  suficientemente grande y un dato inicial  $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1)$  en un espacio  $\mathcal{E}$ , que está a nuestra disposición, encontrar dos controles  $\alpha = \alpha(t, x) \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$  y  $\beta = \beta(t, x) \in H^{-2}(0, T; L^2(0, 1))$  tales que la solución del sistema:

$$(0.20) \quad \begin{cases} \Phi_{tt} - \Delta \Phi = 0 & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, T) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -W_t + \alpha & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, T) \\ W_{tt} - W_{xx} + \Phi_t = \beta & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, T) \\ W_x(0, t) = W_x(1, t) = 0 & \text{para } t \in (0, T) \\ \Phi(0) = \Phi^0, \quad \Phi_t(0) = \Phi^1 & \text{en } \Omega \\ W(0) = W^0, \quad W_t(0) = W^1 & \text{sobre } \Gamma_0 \end{cases}$$

satisfaga las relaciones (0.19).

Considerando soluciones de (0.20) que tengan la forma

$$\Phi(t, x, y) = \Psi(t, y) \cos n\pi x, \quad W(t, x) = V(t) \cos n\pi x, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

nuestro problema se reduce a una infinidad de problemas de control unidimensionales: dado  $T$  suficientemente grande y un dato inicial  $(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1)$  en un espacio  $\mathcal{Y}$  adecuado, encontrar dos controles  $\alpha = \alpha(t)$  y  $\beta = \beta(t)$ , en unos espacios que están a nuestra disposición, de forma que la solución del sistema:

$$(0.21) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Psi_{tt} - \Psi_{yy} + n^2 \pi^2 \Psi = 0 & \text{para } y \in (0, 1), t \in (0, T) \\ \Psi_y(1) = 0 & \text{para } t \in (0, T) \\ \Psi_y(0) = -V_t + \alpha & \text{para } t \in (0, T) \\ V_{tt} + n^2 \pi^2 V + \Psi_t(0) = \beta & \text{para } t \in (0, T) \\ \Psi(0) = \Psi^0, \quad \Psi_t(0) = \Psi^1 & \text{para } y \in (0, 1) \\ V(0) = V^0, \quad V_t(0) = V^1 & \end{array} \right.$$

satisfaga las relaciones:

$$(0.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi(T) = \Psi_t(T) = 0 \\ V(T) = V_t(T) = 0. \end{array} \right.$$

Nuestro argumento para resolver el problema bidimensional se basa en esta posibilidad de separar las variables, ya que, tras resolver el problema de control (0.21), se combinan los controles encontrados obteniéndose un control para el problema bidimensional original.

Sin embargo, como estamos actuando solamente sobre una parte relativamente pequeña de la frontera sólo se podrá controlar un espacio reducido de datos iniciales. Este tipo de resultado, encontrado ya en una serie de trabajos de Haraux (vease, por ejemplo, [22]), no es sorprendente teniendo en cuenta las condiciones geométricas que tiene que cumplir el soporte del control para asegurar la controlabilidad en un espacio de Sobolev de datos iniciales de la ecuación de ondas (vease Bardos, Lebeau y Rauch [6] y Bardos y Rauch [8]). Esta condición dice, a *grosso modo*, que para poder controlar las soluciones de energía finita de una ecuación de ondas mediante controles en  $L^2$ , es preciso que el subconjunto de la frontera en el que actúa el control sea tal que todo rayo de la óptica geométrica pase por ese conjunto en un tiempo uniforme. El subconjunto  $\Gamma_0$  de nuestro problema, obviamente, no satisface esa condición ya que todo segmento de la forma  $\{(x, l) : x \in (0, 1)\}$ , con  $0 < l < 1$ , constituye un rayo que nunca pasa por  $\Gamma_0$ .

La interpretación de los resultados tiene que hacerse con cuidado ya que, para algunas soluciones débiles definidas por transposición, no todas las cantidades que aparecen en las relaciones (0.22) tienen sentido. Como se podrá ver, se controlan más bien diversas combinaciones de aquellas funciones, que en el caso de soluciones regulares proporciona (0.21).

En la última parte del capítulo volvemos al problema (0.18) que presenta un interés especial ya que la interpretación física del término  $\beta$  es la de una fuerza que actúa sobre  $\Gamma_0$ , mientras que  $\alpha$  no tiene una interpretación tan natural. Sin embargo, en este problema sólo podemos conseguir una controlabilidad parcial puesto que el sistema se puede conducir, en tiempo finito, solamente al conjunto de estados de equilibrio:

$$(0.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(T) = c_1 = \text{cte}, \quad \Phi_t(T) = 0 \\ W(T) = c_2 = \text{cte}, \quad W_t(T) = 0. \end{array} \right.$$

Por otra parte, en el estudio de un sistema como el nuestro que acopla las vibraciones acústicas en una cavidad interior con las vibraciones mecánicas de una parte flexible de la frontera, una de las cuestiones más importantes es la siguiente: ¿si las fuerzas exteriores que producen las oscilaciones de las paredes permanecen acotadas, qué ocurre con el nivel del ruido interior? ¿Permanece dentro de ciertos límites o puede producirse el fenómeno de la resonancia?

En primer lugar cabe considerar el problema en el caso en que la fuerza exterior viene dada por una función periódica con respecto al tiempo, caso en el que el problema de la acotación del ruido es equivalente a la existencia de soluciones periódicas.

Por consiguiente, en el capítulo quinto estudiamos la existencia de soluciones periódicas del sistema suponiendo que sobre la parte  $\Gamma_0$  de la frontera actúa una función periódica:

$$(0.24) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Phi_{tt} - \Delta \Phi = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -W_t & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ W_{tt} - W_{xx} + W_t + \Phi_t = f & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ W_x(0, t) = W_x(1, t) = 0 & \text{para } t \in (0, \infty) \end{array} \right.$$

suponiendo que  $f$  es una función periódica en el tiempo:

$$(0.25) \quad \exists T > 0 \text{ tal que } f(t+T, x) = f(t, x), \forall t \geq 0, \forall x \in (0, 1).$$

La presencia del término no homogéneo  $f$  modeliza una fuente de ruido exterior sobre la parte activa de la frontera.

Dado el carácter débilmente disipativo del sistema, que no asegura el decaimiento uniforme de la energía, la aplicación directa de métodos como el de punto fijo no da resultados ya que la norma del semigrupo asociado,  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ , es uno para cada instante de tiempo  $t$ . Para la aplicación de tales argumentos en el caso de disipación fuerte vease, por ejemplo, Haraux [20].

Una vez más el estudio se realiza reduciendo el problema a una infinidad de problemas unidimensionales:

$$(0.26) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \psi_{tt} - \psi_{yy} + n^2 \pi^2 \psi = 0 & \text{para } y \in (0, 1), t \in (0, \infty) \\ \psi_y(1) = 0 & \text{para } t \in (0, \infty) \\ \psi_y(0) = -w_t & \text{para } t \in (0, \infty) \\ w_{tt} + w_t + n^2 \pi^2 w + \psi_t(0) = f_n & \text{para } t \in (0, \infty). \end{array} \right.$$

En cada uno de estos problemas deducimos la existencia de una solución periódica mediante un argumento de perturbación, suponiendo que  $f \in H^1(0, T)$ . Es digno de mención el hecho de que para que (0.26) esté bien planteado es suficiente con que  $f \in L^2(0, T)$ . El paso al problema bidimensional se hace combinando las soluciones periódicas obtenidas. Sin embargo, sólo se deduce la existencia de soluciones periódicas de energía finita para funciones no homogéneas  $f$  muy regulares con respecto a  $x$ , ya que, solamente así se puede asegurar la convergencia de la combinación infinita considerada en el espacio de la energía. La optimalidad del resultado obtenido queda abierta.

El último capítulo recoge resultados obtenidos para algunas variantes del modelo original que nos ayudan a entender mejor las principales características de este tipo de sistemas.

En el primer apartado consideramos un término disipativo no acotado  $-W_{xxt}$  en vez de  $W_t$ . Esta nueva disipación, del punto de vista físico supone considerar materiales viscoelásticos del tipo Kelvin-Voigt en los que la disipación se debe a las propiedades del material utilizado para la construcción de la cuerda vibrante (vease Barnes et al [9]).

Los resultados obtenidos en los capítulos 1, 2 y 5 son válidos también en este caso, lo que nos indica que el cambio no afecta las principales propiedades del sistema.

En el segundo apartado consideramos el mismo sistema con condiciones de contorno de Dirichlet para  $W$  en lugar de las de Neumann anteriores, i.e.  $W(t, 0) = W(1, t) = 0$ . Este

cambio, aparentemente sencillo, plantea muchos problemas técnicos puesto que el método de separación de variables ya no se puede aplicar.

El resultado de estabilidad deducido en el Capítulo 2 no es válido ya que la estructura del conjunto de los puntos de equilibrio es más compleja. Sin embargo, un cambio natural de variables, nos permitirá identificar el espacio de los puntos de equilibrio y demostrar que cada trayectoria tiende asintóticamente a uno de estos puntos.

Aprovechando la información que tenemos sobre las autofunciones del modelo inicial, demostraremos, por reducción al absurdo, que en este caso tampoco hay un decaimiento uniforme del semigrupo asociado. Por lo tanto, el cambio de las condiciones de contorno para  $W$  no modifica sustancialmente las características del modelo.

En el último apartado se estudia un problema similar pero en un dominio circular y con disipación en toda la frontera. Se demuestra que la energía tampoco converge uniformemente a cero, lo que nos indica que la estructura híbrida del problema es la causa de este fenómeno y no la localización de la disipación en una parte más o menos grande de la frontera.

# Capítulo 1

## Formulación matemática del problema

En este capítulo nos proponemos estudiar las propiedades elementales de las soluciones del sistema híbrido deducido en la introducción:

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Phi_{tt} - \Delta \Phi = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -W_t & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ W_{tt} - W_{xx} + W_t + \Phi_t = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ W_x(0, t) = W_x(1, t) = 0 & \text{para } t \in (0, \infty) \\ \Phi(0) = \Phi^0, \quad \Phi_t(0) = \Phi^1 & \text{en } \Omega \\ W(0) = W^0, \quad W_t(0) = W^1 & \text{sobre } \Gamma_0. \end{array} \right.$$

Definimos la energía del sistema por:

$$(1.2) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla \Phi|^2 + (\Phi_t)^2) dx dy + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} ((W_x)^2 + (W_t)^2) dx.$$

Multiplicando la primera ecuación por  $\Phi_t$ , la cuarta por  $W_t$  e integrando por partes se obtiene, al menos formalmente, que

$$(1.3) \quad \frac{dE}{dt}(t) = - \int_{\Gamma_0} (W_t)^2 dx \leq 0.$$

Es decir, el sistema tiene un carácter disipativo.

**Observación 1.1** *Teniendo en cuenta el carácter disipativo, cabe esperar que todas las trayectorias converjan al equilibrio, lo que se va a demostrar en el siguiente capítulo. Del punto de vista práctico esto nos indica que el mecanismo propuesto realiza la reducción de ruido.*

*Sin embargo, la disipación (1.3) se mostrará tan débil que no asegurará una tasa de decaimiento uniforme. Esto hace que muchos de los modos de Fourier correspondientes a frecuencias altas sean afectados de forma sensible solamente en tiempos largos.*

En la sección 1.1 escribimos el sistema (1.1) en una forma abstracta que permite el estudio de las soluciones en el espacio de energía finita. Este estudio se lleva a cabo en la sección 1.2 donde también se demuestran las propiedades elementales de las soluciones. En la sección 1.3 se hace una discusión más detallada de las soluciones débiles correspondientes al sistema (1.1) presentándose una caracterización variacional de las mismas.

## 1.1 Formulación matemática del problema

Sea el espacio  $\mathcal{X} = H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^1(\Gamma_0) \times L^2(\Gamma_0)$ . Definimos en  $\mathcal{X}$  el producto escalar:

$$(f, g) = \int_{\Omega} (\nabla f_1 \cdot \nabla g_1 + f_1 g_1) dx dy + \int_{\Omega} f_2 g_2 dx dy + \int_{\Gamma_0} ((f_3)_x (g_3)_x + f_3 g_3) dx + \int_{\Gamma_0} f_4 g_4 dx,$$

$$\forall f = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathcal{X}, \quad \forall g = (g_1, g_2, g_3, g_4) \in \mathcal{X}.$$

Mediante  $\cdot$  denotamos el producto escalar en  $\mathbb{R}^2$ .

Obtenemos que  $(\mathcal{X}, (\cdot, \cdot))$  es un espacio de Hilbert.

Definimos los operadores:

$$\mathcal{B} \in \mathcal{L}(H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0) \times H^1(\Gamma_0), (H^1(\Omega))'),$$

$$\langle \mathcal{B}(\Phi, \Upsilon, W, V), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla \Phi \cdot \nabla \varphi dx dy - \int_{\Gamma_0} V \varphi dx$$

$$\mathcal{C} \in \mathcal{L}(H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0) \times H^1(\Gamma_0), (H^1(\Gamma_0))'),$$

$$\langle \mathcal{C}(\Phi, \Upsilon, W, V), \psi \rangle = \int_{\Gamma_0} W_x \psi_x dx + \int_{\Gamma_0} (\Upsilon + V) \psi dx.$$

Consideramos el operador  $(\mathcal{D}(\mathcal{A}), \mathcal{A})$  definido por :

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ U = (\Phi, \Upsilon, W, V) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0) \times H^1(\Gamma_0) : \mathcal{B}(U) \in L^2(\Omega), \right.$$

$$\left. \mathcal{C}(U) \in L^2(\Gamma_0), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = V \text{ sobre } \Gamma_0, \quad W_x(0) = W_x(1) = 0 \right\}$$

$$(1.4) \quad \mathcal{A}(\Phi, \Upsilon, W, V) = (-\Upsilon, \mathcal{B}(\Phi, \Upsilon, W, V), -V, \mathcal{C}(\Phi, \Upsilon, W, V)).$$

Veamos a continuación en que sentido se cumplen las condiciones de contorno presentes en la definición del dominio  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ .

De  $\mathcal{B}(U) \in L^2(\Gamma_0)$  y usando el resultado de regularidad para el Laplaciano en una dimensión con condiciones Neumann (ver Brezis [10], p. 182), se obtiene que  $W \in H^2(\Gamma_0)$  si  $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  y por consiguiente la traza de  $W_x$  está bien definida.

En segundo lugar, el elemento  $U = (\Phi, \Upsilon, W, V) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  tiene que cumplir la condición  $\mathcal{C}(U) \in L^2(\Gamma_0)$ , lo que, en la forma diferencial, se escribe:

$$\begin{cases} -\Delta \Phi \in L^2(\Omega) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = V \in H^1(\Gamma_0) & \text{sobre } \Gamma_0. \end{cases}$$

Como el dominio  $\Omega$  es poligonal no podemos deducir que  $\Phi \in H^2(\Omega)$  usando directamente los resultados clásicos de regularidad para el Laplaciano, ya que, en general, en este tipo de dominios, la función puede ser menos regular cerca de los vértices.

Sin embargo, otros resultados de regularidad (Grisvard [15], Teorema 5.1.3.5, p. 263), nos aseguran que, en nuestro caso, debido a los valores particulares de los ángulos (iguales a  $\frac{\pi}{2}$ ) y a la convexidad del dominio  $\Omega$ , no hay pérdida de regularidad. Resulta que  $\Phi \in H^2(\Omega)$  y por lo tanto  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$  sobre  $\Gamma_0$  tiene sentido como traza.

Al mismo tiempo, de los resultados anteriores se deduce que:

$$(1.5) \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset H^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^2(\Gamma_0) \times H^1(\Gamma_0).$$

Con estas definiciones y considerando  $U = (\Phi, \Phi_t, W, W_t)$ , el sistema (1.1) se escribe:

$$(1.6) \quad \begin{cases} U_t(t) + \mathcal{A}U(t) = 0 & \text{para } t \in (0, \infty) \\ U(0) = (\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \\ U(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), & t \in [0, \infty). \end{cases}$$

## 1.2 Propiedades elementales de las soluciones

Tenemos el siguiente resultado de existencia, unicidad y estabilidad:

**Teorema 1.1** Si  $\mathcal{A}$  es el operador definido en (1.4) entonces:

i)  $\mathcal{A} + \mathcal{I}$  es un operador maximal y monótono en  $\mathcal{X}$ .

ii) Soluciones fuertes: Si  $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  existe una única solución  $(\Phi, \Phi_t, W, W_t)$  de la ecuación (1.6) con las siguientes propiedades:

$$(1.7) \quad (\Phi, W) \in C^2([0, \infty), L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_0)) \cap C^1([0, \infty), H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0)) \cap C([0, \infty), H^2(\Omega) \times H^2(\Gamma_0)).$$

Estas soluciones verifican el sistema (1.1) puntualmente.

iii) Soluciones débiles: Si  $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1) \in \mathcal{X}$  existe una única solución  $(\Phi, \Phi_t, W, W_t)$  de la ecuación (1.6) con las propiedades:

$$(1.8) \quad (\Phi, W) \in C^1([0, \infty), L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_0)) \cap C([0, \infty), H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0)).$$

Para cualquier solución débil la energía asociada

$$(1.9) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla \Phi|^2 + (\Phi_t)^2) dx dy + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} ((W_x)^2 + (W_t)^2) dx$$

verifica la relación:

$$(1.10) \quad \frac{dE(t)}{dt} = - \int_{\Gamma_0} (W_t)^2 dx.$$

Para dos soluciones débiles cualesquiera se tiene la siguiente propiedad de estabilidad:

$$(1.11) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} (|\nabla \Phi(t) - \nabla \widehat{\Phi}(t)|^2 + |\Phi_t(t) - \widehat{\Phi}_t(t)|^2) dx dy + \int_{\Gamma_0} (|W_x(t) - \widehat{W}_x(t)|^2 + \\ & + |W_t(t) - \widehat{W}_t(t)|^2) dx \leq \int_{\Omega} (|\nabla \Phi^0 - \nabla \widehat{\Phi}^0|^2 + |\Phi^1 - \widehat{\Phi}^1|^2) dx dy + \\ & + \int_{\Gamma_0} (|W_x^0 - \widehat{W}_x^0|^2 + |W^1 - \widehat{W}^1|^2) dx. \end{aligned}$$

**Demostración:**

Demostramos que el operador  $\mathcal{A} + \mathcal{I}$  es maximal y monótono en  $\mathcal{X}$ .

Sea  $z = (\Phi, \Upsilon, W, V) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  arbitrario. Tenemos:

$$\begin{aligned}
 (z, (\mathcal{A} + \mathcal{I})z) &= - \int_{\Omega} (\nabla \Phi \cdot \nabla \Upsilon + \Phi \Upsilon) dx dy - \int_{\Gamma_0} (W_x V_x + WV) dx + \\
 &\quad + \int_{\Omega} \Upsilon \mathcal{B}(\Phi, \Upsilon, W, V) dx dy + \int_{\Gamma_0} V \mathcal{C}(\Phi, \Upsilon, W, V) dx + \\
 (z, z) &= - \int_{\Omega} (\nabla \Phi \cdot \nabla \Upsilon + \Phi \Upsilon) dx dy - \int_{\Gamma_0} (W_x V_x + WV) dx + \\
 &\quad + \langle \mathcal{B}(\Phi, \Upsilon, W, V), \Upsilon \rangle + \langle \mathcal{C}(\Phi, \Upsilon, W, V), V \rangle + (z, z) = \\
 &= \int_{\Omega} |\nabla \Phi|^2 + \int_{\Omega} |\Phi|^2 + \int_{\Omega} |\Upsilon|^2 + \int_{\Gamma_0} |W_x|^2 + \int_{\Gamma_0} |W|^2 + \int_{\Gamma_0} |V|^2 + \int_{\Gamma_0} |V|^2 - \int_{\Omega} \Phi \Upsilon - \int_{\Omega} WV \geq \\
 &\geq \int_{\Omega} |\nabla \Phi|^2 + \int_{\Gamma_0} |W_x|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Phi^2 + \Upsilon^2) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} (W^2 + V^2) + \int_{\Gamma_0} V^2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

De aquí resulta que el operador  $\mathcal{A} + \mathcal{I}$  es monótono.

Sea ahora  $s = (f, g, m, n) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^1(\Gamma_0) \times L^2(\Gamma)$  arbitrario y busquemos un elemento  $z = (\phi, \xi, w, \eta) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  tal que  $(\mathcal{A} + \mathcal{I})z = s$ .

Esto es equivalente a encontrar  $(\phi, \xi, w, \eta) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  solución de:

$$(1.12) \quad \begin{cases} \phi - \xi = f \\ \xi + \mathcal{B}(\phi, \xi, w, \eta) = g \\ w - \eta = m \\ \eta + \mathcal{C}(\phi, \xi, w, \eta) = n \end{cases}$$

lo que, a su vez, se reduce a hallar  $(\phi, w) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0)$  tal que:

$$(1.13) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} \phi u dx dy + \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla u dx dy - \int_{\Gamma_0} w u dx = \int_{\Omega} (f + g) u dx dy - \int_{\Gamma_0} m u dx \\ \int_{\Gamma_0} w v dx + \int_{\Gamma_0} w_x v_x dx + \int_{\Gamma_0} (\phi + w) v dx = \int_{\Gamma_0} (n + 2m + f) v dx \end{cases}$$

para todo  $u \in H^1(\Omega)$  y  $v \in H^1(\Gamma_0)$ .

Con ese objetivo definimos la forma bilineal  $a : (H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0))^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 a((\phi, w), (u, v)) &= \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla u dx dy + \int_{\Omega} \phi u dx dy - \int_{\Gamma_0} w u dx + \\
 &\quad + \int_{\Gamma_0} w_x v_x dx + \int_{\Gamma_0} w v dx + \int_{\Gamma_0} (\phi + w) v dx, \quad \forall (\phi, w), (u, v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0)
 \end{aligned}$$

y la forma lineal  $L : H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$L(\phi, w) = \int_{\Omega} (g + f) \phi dx dy - \int_{\Gamma_0} m \phi dx + \int_{\Gamma_0} (n + 2m + f) w dx, \quad \forall (\phi, w) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0).$$

Se obtiene fácilmente que  $a$  es una forma bilineal, continua y coercitiva y  $L$  es una forma lineal y continua. Por el Lema de Lax-Milgram resulta que existe una única  $(\phi, w) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0)$ , tal que:

$$a((\phi, w), (u, v)) = L(u, v), \quad \forall (u, v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0).$$

Considerando elementos de la forma  $(u, 0)$  con  $u \in H^1(\Omega)$  y  $(0, v)$  con  $v \in H^1(\Gamma_0)$ , obtenemos que  $(\phi, w)$ , encontrada arriba, verifica (1.13).

Como  $\Phi \in H^1(\Omega)$  y  $\xi = \Phi - f$  obtenemos que  $\xi \in H^1(\Omega)$ . De la misma manera se deduce que  $\eta \in H^1(\Gamma_0)$ .

Aplicando los resultados clásicos de regularidad para el operador  $-\frac{d^2}{dx^2} + \mathcal{I}$ , con condiciones Neumann en  $\Gamma_0$ , se obtiene de la segunda ecuación de (1.13) que  $w \in H^2(\Gamma_0)$ . También,  $w$  verifica las condiciones de contorno  $w_x(0) = w_x(1) = 0$  en el sentido clásico, ya que  $w_x \in H^1(\Gamma_0) \subset C[0, 1]$ .

Por último, los resultados de regularidad para el operador  $-\Delta + \mathcal{I}$ , con condiciones Neumann no homogéneas en  $\Omega$  (ver Grisvard [15], Teorema 5.1.3.5), implican que la función  $\Phi$ , solución de la primera ecuación de (1.13), pertenece a  $H^2(\Omega)$ . Las condiciones de contorno para  $\Phi$  se cumplen en el sentido de la traza.

Resulta que existe una única solución del sistema (1.12) en  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  y por lo tanto  $\mathcal{A} + \mathcal{I}$  es maximal.

Finalmente, aplicando el Teorema de Hille-Yosida (Brezis [10], Cap. VII y Cazenave y Haraux [12], Cap. 3), obtenemos que el operador  $\mathcal{A} + \mathcal{I}$  genera un semigrupo de contracciones en  $\mathcal{X}$ . Por lo tanto, el sistema:

$$\begin{cases} Z_t(t) + (\mathcal{A} + \mathcal{I})Z(t) = 0, & t \in (0, \infty) \\ Z(0) = (\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1) \in \mathcal{X} \end{cases}$$

tiene una solución única  $Z(t)$  con las siguientes propiedades de regularidad:

$$Z \in C^1([0, \infty), \mathcal{X}) \cap C([0, \infty), \mathcal{D}(\mathcal{A})) \text{ si } Z(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

$$Z \in C([0, \infty), \mathcal{X}) \text{ si } Z(0) \in \mathcal{X}.$$

Si notamos por  $U(t) = e^t Z(t)$ , se deduce que  $U$  es solución de la ecuación (1.6) que, además, tiene todas las propiedades de regularidad de  $Z$ .

La identidad de la energía se obtiene, para soluciones fuertes, directamente del sistema que verifica  $U$ . En efecto, multiplicando la primera ecuación de (1.1) por  $\Phi_t$  e integrando por partes se obtiene:

$$0 = \int_{\Omega} (\Phi_{tt} - \Delta \Phi) \Phi_t = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} ((\Phi_t)^2 + |\nabla \Phi|^2) - \int_{\Gamma_0} W_t \Phi_t.$$

Multiplicando la cuarta ecuación de (1.1) por  $W_t$  e integrando por partes se obtiene:

$$0 = \int_{\Gamma_0} (W_{tt} - W_{xx} + W_t + \Phi_t) W_t = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_0} ((W_t)^2 + (W_x)^2) + \int_{\Gamma_0} W_t \Phi_t + \int_{\Gamma_0} (W_t)^2.$$

Sumando las últimas dos ecuaciones se obtiene la relación (1.10).

Para soluciones débiles la función  $t \rightarrow E(t)$  también es diferenciable. En efecto, considerando soluciones fuertes e integrando la relación (1.10) se deduce que:

$$(1.14) \quad E(t) = E(0) - \int_0^t \int_{\Gamma_0} (W_t)^2.$$

Esta relación es válida también para soluciones débiles. Esto se puede ver mediante un argumento de regularización de los datos iniciales y de paso al límite.

Por otro lado, la aplicación  $t \rightarrow \int_{\Gamma_0} (W_t)^2$  es continua ya que  $W \in C^1([0, \infty); L^2(\Gamma_0))$ . Por lo tanto, teniendo en cuenta la relación (1.14), se deduce que la aplicación  $t \rightarrow E(t)$  también es diferenciable en el caso de las soluciones débiles y además se cumple (1.10).

■

**Observación 1.2** Como el operador  $\mathcal{A} + \mathcal{I}$  es maximal y monótono en el espacio de Hilbert  $\mathcal{X}$  se obtiene que  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  es denso en  $\mathcal{X}$ .

La proposición anterior nos asegura la existencia y la unicidad de las soluciones en  $\mathcal{X}$  y la acotación de la función de energía asociada a cada solución. Sin embargo, no se obtiene la acotación de las soluciones en la norma de  $\mathcal{X}$ . Para obtener esto necesitaríamos que el operador  $\mathcal{A}$  fuese maximal-monótono en  $\mathcal{X}$ , lo que no es cierto. Lo que se tiene es que  $\mathcal{A}$  genera un semigrupo fuertemente continuo en  $\mathcal{X}$ , que denotamos por  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ , pero este semigrupo no es de contracciones (pero es uniformemente acotado tal y como veremos a continuación).

Este fenómeno se relaciona estrechamente con el hecho de que la energía definida por (1.2) no es coercitiva en  $\mathcal{X}$  y por lo tanto no puede definir una norma en este espacio.

A continuación nos proponemos descomponer el espacio  $\mathcal{X}$  en suma directa de dos subespacios invariantes para el operador  $\mathcal{A}$  y con la propiedad de que en uno de ellos la energía es coercitiva. En este espacio el operador será maximal-monótono y las trayectorias permanecerán acotadas.

Con este objeto definimos los espacios:

$$\mathcal{X}^0 = \left\{ (\Phi, \Psi, W, V) \in \mathcal{X} : \int_{\Omega} \Psi - \int_{\Gamma_0} W = 0, \int_{\Gamma_0} (V + W + \Phi) = 0 \right\},$$

$$\mathcal{X}^1 = \{ (\Phi, \Psi, W, V) \in \mathcal{X} : \Phi = c_1 = \text{cte}, \Psi = 0, W = c_2 = \text{cte}, V = 0 \}.$$

Observemos que:  $\mathcal{X} = \mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^1$ .

También notemos que  $\mathcal{X}^1$  es un espacio de dimensión igual a dos y que  $\mathcal{X}^1 \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ .

Antes de pasar a analizar las ventajas de esta decomposición mencionamos dos desigualdades del tipo Poincaré.

**Lema 1.1** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un dominio acotado y regular a trozos. Sea  $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$  con la medida estrictamente positiva,  $|\Gamma_0| > 0$ . Existe una constante  $C > 0$  tal que

$$(1.15) \quad \left\| u - \frac{1}{|\Gamma_0|} \int_{\Gamma_0} u \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

**Lema 1.2** Sea  $\Gamma_0 \subset \mathbb{R}$  un intervalo acotado con la medida estrictamente positiva,  $|\Gamma_0| > 0$ . Existe una constante  $C > 0$  tal que:

$$(1.16) \quad \left\| v - \frac{1}{|\Gamma_0|} \int_{\Gamma_0} v \right\|_{L^2(\Gamma_0)} \leq c \|v_x\|_{L^2(\Gamma_0)}, \quad \forall v \in H^1(\Gamma_0).$$

**Teorema 1.2** En el espacio  $\mathcal{X}^0$  la cantidad:

$$(1.17) \quad \|(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1)\|_0 = \int_{\Omega} (|\nabla \Phi^0|^2 + |\Phi^1|^2) + \int_{\Gamma_0} (|W_x^0|^2 + |W^1|^2)$$

define una norma equivalente a la inducida por  $\mathcal{X}$ .

Además, si el dato inicial de la ecuación (1.1) pertenece a  $\mathcal{X}^i$ ,  $i = 1, 2$ , la solución débil correspondiente, encontrada en el Teorema 1.1, permanece en  $\mathcal{X}^i$  en todos los instantes  $t \geq 0$ .

**Demostración:**

En primer lugar observemos que la cantidad (1.17) define una seminorma en  $\mathcal{X}^0$ .

Para demostrar que es una norma consideramos un elemento  $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1) \in \mathcal{X}^0$  con  $\|(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1)\|_0 = 0$  y vemos si este elemento es cero o no. De  $\|(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1)\|_0 = 0$  se obtiene que  $\Phi^0 = c_1$ ,  $\Phi^1 = 0$ ,  $W^0 = c_2$  y  $W^1 = 0$  donde  $c_1$  y  $c_2$  son dos constantes. La relación  $\int_{\Omega} \Phi^1 - \int_{\Gamma_0} W^0 = 0$  implica que  $\int_{\Gamma_0} W^0 = 0$ . Aplicando el Lema 1.2 se deduce que  $W^0 = 0$ .

Por otro lado la relación  $\int_{\Gamma_0} (W^1 + W^0 + \Phi^0) = 0$  implica que  $\int_{\Gamma_0} \Phi^0 = 0$  y por lo tanto, teniendo en cuenta el Lema 1.1, se obtiene que  $\Phi = 0$ .

Obtenemos finalmente que  $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1) = 0$  y por lo tanto (1.17) define una norma en  $\mathcal{X}^0$ .

Para la segunda parte del teorema observamos primero que  $\mathcal{X}^1 \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$  y que la solución correspondiente a un dato inicial del tipo  $(c_1, 0, c_2, 0) \in \mathcal{X}^1$  permanece constante, igual a  $(c_1, 0, c_2, 0) \in \mathcal{X}^1$ .

Consideramos ahora un dato inicial  $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1) \in \mathcal{X}^0$  y demostramos que la solución de (1.1) correspondiente permanece en  $\mathcal{X}^0$ .

Analizamos primero el caso  $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1) \in \mathcal{X}^0 \cap \mathcal{D}(\mathcal{A})$ .

En este caso la solución  $(\Phi, W)$  correspondiente satisface el sistema (1.1) en casi todo punto. Integrando la ecuación en  $\Omega$  se obtiene que:

$$0 = \int_{\Omega} (\Phi_{tt} - \Delta \Phi) = \int_{\Omega} \Phi_{tt} - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \int_{\Omega} \Phi_{tt} - \int_{\Gamma_0} W = \left( \int_{\Omega} \Phi_t - \int_{\Gamma_0} W \right)_t.$$

Resulta que:

$$\int_{\Omega} \Phi_t - \int_{\Gamma_0} W = \int_{\Omega} \Phi^1 - \int_{\Gamma_0} W^0 = 0.$$

Por otro lado, integrando la ecuación de  $W$  en  $\Gamma_0$  se obtiene:

$$0 = \int_{\Gamma_0} (W_{tt} - W_{xx} + W_t + \Phi_t) = \left( \int_{\Gamma_0} (W_t + W + \Phi) \right)_t.$$

Resulta que:

$$\int_{\Gamma_0} (W_t + W + \Phi) = \int_{\Gamma_0} (W^1 + W^0 + \Phi^0) = 0.$$

Por consiguiente, la solución fuerte del problema correspondiente a un dato inicial en  $\mathcal{X}^0$  permanece en  $\mathcal{X}^0$ .

En el caso general se aplica un argumento de regularización del dato inicial y de paso al límite. De manera más precisa, si  $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1) \in \mathcal{X}^0$  consideramos una sucesión de elementos  $(\Phi_n^0, \Phi_n^1, W_n^0, W_n^1)_n$  en  $\mathcal{X}^0 \cap \mathcal{D}(\mathcal{A})$  tales que

$$(\Phi_n^0, \Phi_n^1, W_n^0, W_n^1) \longrightarrow (\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1) \text{ en } \mathcal{X}^0.$$

Si denotamos por  $(\Phi_n, W_n)$  la solución fuerte del problema (1.1) correspondiente al dato inicial  $(\Phi_n^0, \Phi_n^1, W_n^0, W_n^1)$  obtenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\Phi_n)_t - \int_{\Gamma_0} W_n &= \int_{\Omega} \Phi_n^1 - \int_{\Gamma_0} W_n^0 = 0, \\ \int_{\Gamma_0} ((W_n)_t + W_n + \Phi_n) &= \int_{\Gamma_0} (W_n^1 + W_n^0 + \Phi_n^0) = 0. \end{aligned}$$

Pasando al límite en las últimas dos relaciones se obtiene que

$$\int_{\Omega} \Phi_t - \int_{\Gamma_0} W = 0, \quad \int_{\Gamma_0} (W_t + W + \Phi) = 0,$$

donde  $(\Phi, W)$  es la solución de (1.1) correspondiente al dato inicial  $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1)$ .

Observemos que la desigualdad (1.11) no nos asegura que  $(\Phi_n, W_n)(t) \rightarrow (\Phi, W)(t)$  en  $L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_0)$ . Sin embargo, esta convergencia tiene lugar ya que  $\mathcal{A}$  genera un semigrupo fuertemente continuo en  $\mathcal{X}$ .

Obtenemos que, en este caso, la solución también permanece en  $\mathcal{X}^0$  y con ésto se concluye la demostración del teorema.

■

**Observación 1.3** El operador  $\mathcal{A}$  se puede definir como operador no acotado en  $\mathcal{X}^0$ , de dominio  $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{X}^0$ . Teniendo en cuenta ésto, del Teorema 1.2 se obtiene que  $\mathcal{A}$  es maximal y monótono en  $\mathcal{X}^0$  y por lo tanto genera un semigrupo de contracciones en este espacio, que denotamos también por  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ .

**Observación 1.4** Tanto en la definición del espacio  $\mathcal{X}^0$  como en la demostración del teorema anterior han surgido dos cantidades que se conservan a lo largo de las trayectorias:

$$\int_{\Omega} \Phi_t - \int_{\Gamma_0} W \quad \text{y} \quad \int_{\Gamma_0} (W_t + W + \Phi).$$

**Observación 1.5** Sean  $U^0 = (\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1)$  un elemento en  $\mathcal{X}$  y  $U = (\Phi, \Phi_t, W, W_t)$  la solución correspondiente en  $\mathcal{X}$ , que viene dada por el Teorema 1.1.

Consideramos que

$$\int_{\Omega} \Phi^1 - \int_{\Gamma_0} W^0 = c_2 \quad \text{y} \quad \int_{\Gamma_0} (W^1 + W^0 + \Phi^0) = c_1.$$

Por lo tanto podemos descomponer el dato inicial como suma de dos componentes:

$$(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1) = (\Phi_0 + c_1 - c_2, \Phi_1, W_0 + c_2, W_1) + (c_2 - c_1, 0, -c_2, 0),$$

donde la primera componente, que denotamos por  $U_0^0$ , pertenece a  $\mathcal{X}^0$  mientras que la segunda, que denotamos por  $U_0^1$ , está en  $\mathcal{X}^1$ . De hecho  $U_0^0$  es la proyección del dato  $U_0$  sobre  $\mathcal{X}^0$  mientras que  $U_0^1$  es la proyección del mismo dato sobre  $\mathcal{X}^1$ .

La solución de (1.1) correspondiente a la primera componente permanece en  $\mathcal{X}^0$  y es la proyección de la solución  $U$  sobre  $\mathcal{X}^0$ .

Por otro lado, la solución de (1.1) correspondiente a la segunda componente permanece constante en el tiempo, igual a  $(c_2 - c_1, 0, -c_2, 0)$  y es la proyección de la solución  $U$  sobre  $\mathcal{X}^1$ .

### 1.3 Caracterización de las soluciones débiles

En este apartado nos proponemos dar una caracterización variacional de las soluciones débiles del sistema (1.1) que se obtienen al considerar datos iniciales  $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1)$  en  $\mathcal{X}$ .

Definimos los operadores diferenciales  $\mathcal{L}_2$  y  $\mathcal{L}_1$  de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}_2 : H^1(\Omega) \rightarrow (H^1(\Omega))', \quad \mathcal{L}_2 \Phi(\varphi) = \int_{\Omega} \nabla \Phi \cdot \nabla \varphi, \quad \forall \Phi, \varphi \in H^1(\Omega),$$

$$\mathcal{L}_1 : H^1(\Gamma_0) \longrightarrow (H^1(\Gamma_0))', \quad \mathcal{L}_1 \Phi(\varphi) = \int_{\Gamma_0} \Phi_x \varphi_x, \quad \forall \Phi, \varphi \in H^1(\Gamma_0).$$

El dual del espacio  $\mathcal{X}$  viene dado por:

$$\mathcal{X}' = L^2(\Omega) \times (H^1(\Omega))' \times L^2(\Gamma_0) \times (H^1(\Gamma_0))'.$$

Empezamos por definir el operador adjunto asociado al operador  $(\mathcal{D}(\mathcal{A}), \mathcal{A})$ .

**Proposición 1.1** *El operador adjunto  $(\mathcal{D}(\mathcal{A}^*), \mathcal{A}^*)$  se caracteriza por:*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}^*) = \{(\Phi^*, \Upsilon^*, W^*, V^*) \in H^1(\Omega) \times (H^1(\Omega))' \times H^1(\Gamma_0) \times L^2(\Gamma_0) : -\Upsilon^* + W^* \delta_{\Gamma_0} \in L^2(\Omega)\},$$

$$\mathcal{A}^*(\Phi^*, \Upsilon^*, W^*, V^*) = (-\Upsilon^* + W^* \delta_{\Gamma_0}, \mathcal{L}_2(\Phi^*), -V^* + W^* - \Phi^*(0), \mathcal{L}_1(W^*)),$$

donde  $\delta_{\Gamma_0}$  es la delta de Dirac concentrada en el segmento  $\Gamma_0$ .

**Demostración:**

Por definición, el dominio del operador adjunto es:

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}^*) = \{U^* = (\Phi^*, \Upsilon^*, W^*, V^*) \in \mathcal{X}' : \exists c > 0 \text{ tal que } |\langle U^*, \mathcal{A}U \rangle_{\mathcal{X}', \mathcal{X}}| \leq c \|U\|_{\mathcal{X}}, \forall U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})\}.$$

Veamos que condiciones tienen que cumplir los elementos de  $\mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$ . Para esto consideramos dos elementos  $U^* = (\Phi^*, \Upsilon^*, W^*, V^*)$  de  $\mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$  y  $U = (\Phi, \Upsilon, W, V)$  de  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  y calculamos:

$$\begin{aligned} \langle U^*, \mathcal{A}U \rangle_{\mathcal{X}', \mathcal{X}} &= \langle (\Phi^*, \Upsilon^*, W^*, V^*), (-\Upsilon, -\Delta\Phi, -V, -W_{xx} + V + \Upsilon(0)) \rangle = \\ &= \langle \Phi^*, -\Delta\Phi \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \Upsilon^*, \Upsilon \rangle_{-1,1} + \langle W^*, -W_{xx} + V + \Upsilon(0) \rangle_{L^2(\Gamma_0)} - \langle V^*, V \rangle_{-1,1} = \\ &= \langle \Phi^*, -\Delta\Phi \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \Upsilon^* - W^* \delta_{\Gamma_0}, \Upsilon \rangle_{-1,1} + \langle W^*, -W_{xx} \rangle_{L^2(\Gamma_0)} - \langle V^* - W^*, V \rangle_{-1,1} \end{aligned}$$

donde por  $\langle \dots \rangle_{-1,1}$  denotamos el producto de dualidad entre  $(H^1)'$  y  $H^1$ .

Determinamos la condición que tiene que cumplir  $\Phi^*$  considerando un elemento de la forma  $U = (\Phi, 0, 0, 0)$  en  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  e imponiendo la condición

$$|\langle U^*, \mathcal{A}U \rangle_{\mathcal{X}', \mathcal{X}}| \leq c \|U\|_{\mathcal{X}},$$

que, en este caso, es equivalente a:

$$|\langle \Phi^*, -\Delta\Phi \rangle_{L^2(\Omega)}| \leq c \|\Phi\|_{H^1(\Omega)}.$$

De aquí se deduce que  $\Phi^*$  tiene que pertenecer a  $H^1(\Omega)$ .

De una manera similar obtenemos que  $\Upsilon^* - W^* \delta_{\Gamma_0}$  tiene que estar en  $L^2(\Omega)$ ,  $W^*$  tiene que pertenecer a  $H^1(\Gamma_0)$  y  $V^*$  tiene que estar en  $L^2(\Gamma_0)$ .

Estas condiciones son necesarias y también suficientes para asegurar que  $(\Phi^*, \Upsilon^*, W^*, V^*)$  pertenece a  $\mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$ , obteniendo así la caracterización del dominio.

Por otro lado, probamos que el operador adjunto es:

$$\mathcal{A}^*(\Phi^*, \Upsilon^*, W^*, V^*) = (-\Upsilon^* + W^* \delta_{\Gamma_0}, \mathcal{L}_2(\Phi^*), -V^* + W^* - \Phi^*(0), \mathcal{L}_1(W^*))$$

demostrando que, para todo  $U^* \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$  y  $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ , tenemos:  $\langle U^*, \mathcal{A}U \rangle = \langle \mathcal{A}^*U^*, U \rangle$ .

En efecto,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}^*U^*, U \rangle &= \langle (-\Upsilon^* + W^* \delta_{\Gamma_0}, \mathcal{L}_2(\Phi^*), -V^* + W^* - \Phi^*(0), \mathcal{L}_1(W^*)), (\Phi, \Upsilon, W, V) \rangle = \\ &= \langle \Upsilon^* + W^* \delta_{\Gamma_0}, \Upsilon \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \mathcal{L}_2(\Phi^*), \Phi \rangle_{-1,1} + \langle -V^* + W^* - \Phi^*(0), V \rangle_{L^2(\Gamma_0)} + \langle \mathcal{L}_1(W^*), W \rangle_{-1,1} = \\ &= \langle \Phi^*, B(U) \rangle + \langle \Upsilon^*, -\Upsilon \rangle + \langle W^*, C(U) \rangle + \langle V^*, -V \rangle = \langle U^*, \mathcal{A}U \rangle. \end{aligned}$$

■

**Observación 1.6** Damos a continuación una interpretación, en términos de edp's, del sistema:

$$U_t^* + \mathcal{A}^* U^* = 0.$$

Teniendo en cuenta la definición del operador  $\mathcal{A}^*$  se obtiene que, para todo  $t > 0$ , tenemos:

$$\begin{cases} \Phi_t^*(t) - \Upsilon^*(t) + W^*(t) \delta_{\Gamma_0} = 0, & \text{en } L^2(\Omega) \\ (\Upsilon^*)_t(t) + \mathcal{L}_2 \Phi^*(t) = 0, & \text{en } (H^1(\Omega))' \\ (W^*)_t(t) - V^*(t) + W^*(t) - \Phi^*(t, 0) = 0, & \text{en } L^2(\Gamma_0) \\ (V^*)_t(t) + \mathcal{L}_1 W^*(t) = 0, & \text{en } (H^1(\Gamma_0))'. \end{cases}$$

Esto es equivalente a:

$$\begin{cases} (\Phi_t^*(t) + W^*(t) \delta_{\Gamma_0})_t + \mathcal{L}_2 \Phi^*(t) = 0, & \text{en } (H^1(\Omega))' \\ ((W^*)_t(t) - \Phi^*(t, 0))_t + (W^*)_t(t) + \mathcal{L}_1 W^*(t) = 0, & \text{en } (H^1(\Gamma_0))'. \end{cases}$$

Cuando las soluciones son más regulares este sistema es equivalente a:

$$(1.18) \quad \begin{cases} \Phi_{tt}^* - \Delta \Phi^* = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial \Phi^*}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ \frac{\partial \Phi^*}{\partial y} = W_t^* & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ W_{tt}^* - W_{xx}^* + W_t^* - \Phi_t^* = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ W_x^*(0, t) = W_x^*(1, t) = 0 & \text{para } t \in (0, \infty). \end{cases}$$

Se observa que este sistema se parece mucho al sistema inicial cambiando solamente dos signos delante de  $W_t$  y  $\Phi_t(0)$ .

Con la ayuda del operador adjunto encontrado podemos caracterizar las soluciones débiles del problema. Este es el objetivo del siguiente teorema.

**Teorema 1.3** Consideramos un dato inicial  $U_0 = (\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1)$  en  $\mathcal{X}$  y definimos  $U_0^* = (\Phi^0, -\Phi^1 + W^0 \delta_{\Gamma_0}, W^0, W^1 - W^0 + \Phi^0(0))$ .

Entonces  $U_0^* \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$  y el sistema:

$$(1.19) \quad \begin{cases} U_t^* + \mathcal{A}^* U^* = 0 \\ U^*(0) = U_0^* \end{cases}$$

tiene una única solución fuerte  $U^* = (\Phi^*, \Upsilon^*, W^*, V^*) \in \mathcal{C}([0, T], \mathcal{D}(\mathcal{A}^*)) \cap \mathcal{C}^1([0, \infty), \mathcal{X}')$ .

La solución débil  $U(t) = (\Phi, \Phi_t, W, W_t)$  del problema:

$$(1.20) \quad \begin{cases} U_t + \mathcal{A}U = 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

se puede expresar usando la solución de (1.19) de la siguiente forma:

$$U(t) = (\Phi^*(t), \Upsilon^*(t) - W^*(t) \delta_{\Gamma_0}, -W^*(t), -V^*(t) + W^*(t) - \Phi^*(t, 0)).$$

Además de pertenecer a la clase  $\mathcal{C}([0, \infty), \mathcal{X})$  la solución  $U$  satisface las siguientes propiedades de regularidad:

$$(1.21) \quad \begin{cases} \Phi_t - W \delta_{\Gamma_0} \in \mathcal{C}^1([0, T], (H^1(\Omega))'), \\ W_t + \Phi(0) \in \mathcal{C}^1([0, T], (H^1(\Gamma_0))'). \end{cases}$$

En este caso la solución  $U$  verifica el sistema (1.20) en el siguiente sentido variacional:

$$(1.22) \quad \begin{cases} (\Phi_t - W \delta_{\Gamma_0})_t + \mathcal{L}_2 \Phi = 0, \text{ para todo } t \in [0, \infty), \text{ en } (H^1(\Omega))' \\ (W_t + \Phi(0))_t + W_t + \mathcal{L}_1 W = 0 \text{ para todo } t \in [0, \infty), \text{ en } (H^1(\Gamma_0))'. \end{cases}$$

**Demostración:**

Puesto que:

$$\Phi^0 \in H^1(\Omega), \quad W^0 \in H^1(\Gamma_0), \quad W^1 + \Phi^0(0) \in L^2(\Gamma_0),$$

y

$$-(-\Phi^1 + W^0 \delta_{\Gamma_0}) + W^0 \delta_{\Gamma_0} = \Phi^1 \in L^2(\Omega),$$

se obtiene que  $U_0^* \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$ .

El operador  $(\mathcal{D}(\mathcal{A}^*), \mathcal{A}^*)$  genera un semigrupo fuertemente continuo en  $\mathcal{X}'$  y por lo tanto el problema (1.19) tiene una solución fuerte  $U^*$  en  $\mathcal{X}'$  que, para cada  $t > 0$  verifica:

$$(1.23) \quad \begin{cases} \Phi_t^*(t) - \Upsilon^*(t) + W^*(t) \delta_{\Gamma_0} = 0, & \text{en } L^2(\Omega) \\ (\Upsilon^*)_t(t) + \mathcal{L}_2 \Phi^*(t) = 0, & \text{en } (H^1(\Omega))' \\ (W^*)_t(t) - V^*(t) + W^*(t) - \Phi^*(t, 0) = 0, & \text{en } L^2(\Gamma_0) \\ (V^*)_t(t) + \mathcal{L}_1 W^*(t) = 0, & \text{en } (H^1(\Gamma_0))'. \end{cases}$$

Consideramos ahora el cambio:

$$(1.24) \quad \begin{cases} \Phi(t) = \Phi^*(t) \\ \Upsilon(t) = \Upsilon^*(t) - W^*(t) \delta_{\Gamma_0} \\ W(t) = -W^*(t) \\ V(t) = -V^*(t) - \Phi^*(t, 0) + W^*. \end{cases}$$

Si llamamos  $U(t) = (\Phi, \Upsilon, W, V)(t)$  obtenemos que  $U \in \mathcal{C}([0, \infty), \mathcal{X})$ ,  $\Phi_t = \Upsilon$ ,  $W_t = V$  y además se cumplen:

$$\Phi_t - W \delta_{\Gamma_0} \in \mathcal{C}^1([0, \infty), (H^1(\Omega))'), \quad -W_t - \Phi(0) \in \mathcal{C}^1([0, \infty), (H^1(\Gamma_0))').$$

Las ecuaciones (1.23) nos indican que  $U$  satisface (1.22).

Para ver que  $U$  es la solución del problema (1.20) recordamos la siguiente caracterización de las soluciones débiles dada en Ball [1]: " $U$  es solución de la ecuación  $U_t + \mathcal{A}U = 0$  si y sólo si, para todo  $V^* \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$ , la aplicación  $t \rightarrow \langle U(t), V^* \rangle$  es absolutamente continua y se cumple:

$$(1.25) \quad \frac{d}{dt} \langle U(t), V^* \rangle + \langle U(t), \mathcal{A}^* V^* \rangle = 0."$$

Se comprueba inmediateamente que  $U$  definida por (1.24) satisface las condiciones de la caracterización anterior.

■

**Observación 1.7** La primera ecuación de (1.22) implica que, para todo  $t > 0$ , tenemos:

$$\langle (\Phi_t - W \delta_{\Gamma_0})_t + \mathcal{L}_2 \Phi, \varphi \rangle = 0 \text{ para toda } \varphi \text{ en } H^1(\Omega).$$

Si tuvieramos que  $\Phi_t$  es diferenciable en  $L^2(\Omega)$  la relación anterior se escribiría:

$$\int_{\Omega} \Phi_{tt} \varphi + \int_{\Omega} \nabla \Phi \cdot \nabla \varphi - \int_{\Gamma_0} W_t \varphi = 0 \text{ para toda } \varphi \text{ en } H^1(\Omega),$$

lo que nos conduciría a una solución clásica  $\Phi$  de la ecuación:

$$\begin{cases} \Phi_{tt} - \Delta \Phi = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -W_t & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty). \end{cases}$$

Sin embargo, en el caso de las soluciones débiles, sólo tenemos garantizado que  $\Phi_t - W \delta_{\Gamma_0} \in C^1([0, \infty), (H^1(\Omega))')$ .

Una observación similar se puede hacer con respecto a  $W$ . La segunda relación de (1.22) nos dice que, para cada  $t > 0$  tenemos:

$$\langle (W_t + \Phi(0))_t + W_t + \mathcal{L}_1 W, v \rangle = 0 \text{ para todo } v \text{ en } H^1(\Gamma_0).$$

Si tuvieramos que  $W_t$  es diferenciable  $L^2(\Gamma_0)$  la relación anterior se escribiría:

$$\int_{\Gamma_0} (W_{tt} + \Phi_t(0) + W_t)v + \int_{\Gamma_0} W_x v_x = 0 \text{ para todo } v \text{ en } H^1(\Gamma_0),$$

de donde se obtendría que  $W$  es solución clásica de:

$$\begin{cases} W_{tt} - W_{xx} + W_t + \Phi_t = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ W_x(0, t) = W_x(1, t) = 0 & \text{para } t \in (0, \infty). \end{cases}$$

Sin embargo, lo que se puede asegurar en el caso de las soluciones débiles es que solamente la combinación  $W_t + \Phi(0) \in C^1([0, \infty), (H^1(\Gamma_0))')$ .

En el capítulo 4 (dedicado al control) volveremos a encontrarnos con las cantidades  $\Phi_t - W \delta_{\Gamma_0}$  y  $W_t + \Phi(0)$ . Estas funciones substituyen, en el caso de las soluciones débiles, a las variables clásicas  $\Phi_t$  y  $W_t$ .

## Capítulo 2

# Comportamiento asintótico de las soluciones

En esta sección nos proponemos estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones del problema (1.1). Se demostrará que la energía asociada a cada solución débil tiende a cero cuando el tiempo tiende al infinito, es decir, el término disipativo  $W_t$  asegura la convergencia de las soluciones al equilibrio.

En la última parte se demuestra que el decaimiento a cero no es uniforme. Esta es una de las características principales de los sistemas híbridos: la disipación asegura la convergencia al equilibrio de toda solución pero la velocidad de convergencia depende fuertemente del dato inicial.

También se estudiarán los comportamientos de  $\Phi$  y  $W$  cuando el tiempo tiende al infinito ya que, como la energía no es coercitiva en  $\mathcal{X}$ , los resultados anteriores no ofrecen informaciones sobre estas cantidades.

### 2.1 Decaimiento a cero de la energía

En este párrafo demostramos la convergencia al equilibrio de toda trayectoria de energía finita.

**Teorema 2.1** *Para cada dato inicial  $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1) \in \mathcal{X}$ , la solución débil correspondiente a la ecuación (1.6) es tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0$ .*

#### **Demostración:**

Etapa 1: Caso en que  $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ .

El Teorema 1.1 nos asegura que existe una única solución fuerte  $U = (\Phi, \Phi_t, W, W_t)$  para la ecuación (1.6). Además, del Teorema 1.2 deducimos que  $\{U(t)\}_{t \geq 0}$  permanece acotada en  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ .

Como (1.5) nos indica que  $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{X}$ , con inclusión compacta, tenemos que  $\{U(t)\}_{t \geq 0}$  es relativamente compacta en  $\mathcal{X}$ . Por lo tanto basta probar que el único punto de acumulación en  $\mathcal{X}$  de la trayectoria  $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ , cuando  $t$  tiende a infinito, es del tipo  $(c_1, 0, c_2, 0)$ .

**Observación 2.1** *Tal y como mencionábamos en la Observación 1.5, cualquier dato inicial  $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1) \in \mathcal{X}$  se puede descomponer como suma de dos elementos, uno en  $\mathcal{X}^0$  y otro*

del tipo  $(c_1, 0, c_2, 0)$ . La proyección de la solución correspondiente sobre el espacio  $\mathcal{X}^0$  es la que tiende a cero, cuando el tiempo tiende al infinito, mientras que la proyección sobre  $\mathcal{X}^1$  permanece constante, igual a  $(c_1, 0, c_2, 0)$ . También observamos que  $2E(t) = \|(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1)\|_0$ .

A continuación nos dedicaremos a estudiar el comportamiento de la proyección de la solución sobre  $\mathcal{X}^0$ . Por lo tanto, podemos limitar nuestro análisis al caso  $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1) \in \mathcal{X}^0$ .

Nuestro objetivo es demostrar que si  $(t_n)_{n \geq 0}$  es una sucesión con  $t_n \rightarrow \infty$  y  $U(t_n) \rightarrow (z^0, z^1, v^0, v^1)$  en  $\mathcal{X}^0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  entonces

$$(2.1) \quad z^0 = z^1 = 0, \quad v^0 = v^1 = 0 \text{ en } \mathcal{X}^0.$$

Definimos, para  $T > 0$  arbitrario,

$$\Phi_n(t) = \Phi(t + t_n), \quad W_n(t) = W(t + t_n), \quad \forall n \geq 0 \text{ y } t \in [0, T].$$

Por el Teorema de Ascoli Arzela  $(\Phi_n, (\Phi_n)_t, W_n, (W_n)_t)_{n \geq 0}$  es relativamente compacta en  $C([0, T]; \mathcal{X}^0)$  y por tanto existe una subsucesión (notada de la misma manera) y un elemento del tipo  $(z, z_t, v, v_t) \in C([0, T]; \mathcal{X}^0)$  tal que  $(\Phi_n, (\Phi_n)_t, W_n, (W_n)_t) \rightarrow (z, z_t, v, v_t)$  en  $C([0, T]; \mathcal{X}^0)$ .

Observamos que  $z(0) = z^0, v(0) = v^0, z_t(0) = z^1, v_t(0) = v^1$ . La conclusión del problema se obtiene si demostramos que  $z = 0$  en  $C([0, T], L^2(\Omega))$  y  $v = 0$  en  $C([0, T], L^2(\Gamma_0))$ .

Como tenemos que

$$E(t_n) - E(T + t_n) = \int_{t_n}^{T+t_n} \int_{\Gamma_0} (W_t)^2 dx = \int_0^T \int_{\Gamma_0} ((W_n)_t)^2 dx$$

y como el Teorema 1.1 nos asegura que la energía  $E$  es no creciente, podemos pasar al límite en la relación anterior obteniendo que  $\int_0^T \int_{\Gamma_0} (v_t)^2 = 0$ .

Como  $v_t \in C([0, T], L^2(\Gamma_0))$  resulta que  $v_t(t, x) = 0$  para todo  $t \in [0, T]$  y para casi todo  $x \in \Gamma_0$ .

A continuación demostraremos que este resultado implica que  $z = 0$  en  $C([0, T], L^2(\Omega))$  y  $v = 0$  en  $C([0, T], L^2(\Gamma_0))$ .

Sea  $\hat{\Omega} = \Omega \cup \Omega'$ , donde  $\Omega'$  es la imagen de  $\Omega$  en el semiplano negativo (Fig. 2).

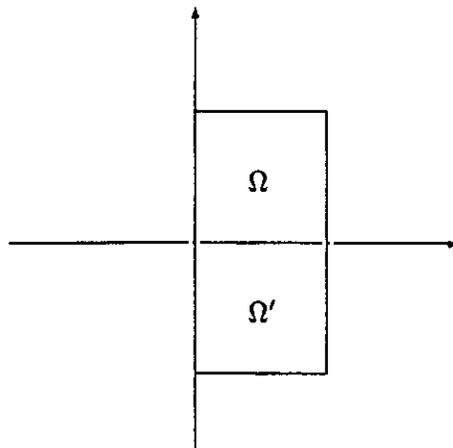


Fig. 2

Las funciones  $\Phi_n$  y  $W_n$  verifican la ecuación (1.6) y entonces obtenemos:

$$(2.2) \quad \begin{cases} \int_0^T \int_{\Omega} \Phi_n \xi_{tt} dx dy dt + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \Phi_n \cdot \nabla \xi dx dy dt + \int_0^T \int_{\Gamma_0} (W_n)_t \xi dx dt = 0 \\ - \int_0^T \int_{\Gamma_0} (W_n)_t \psi_t dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_0} ((W_n)_x \psi_x + (W_n)_t \psi - \Phi_n \psi_t) dx dt = 0 \end{cases}$$

para todo  $\xi \in \mathcal{D}((0, T); H^1(\hat{\Omega}))$ ,  $\psi \in \mathcal{D}((0, T) \times \Gamma_0)$ .

Pasando al límite obtenemos:

$$(2.3) \quad \begin{cases} \int_0^T \int_{\Omega} z \xi_{tt} dx dy dt + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla \xi dx dy dt = 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{D}((0, T); H^1(\hat{\Omega})) \\ \int_0^T \int_{\Gamma_0} v_x \psi_x dx dt = \int_0^T \int_{\Gamma_0} z \psi_t, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}((0, T) \times \Gamma_0). \end{cases}$$

Observamos que si en la segunda ecuación de (2.3) consideramos, en vez de  $\psi$ ,  $\psi_t$  y aplicamos integración por partes en el primer miembro, tenemos:

$$(2.4) \quad \begin{cases} \int_0^T \int_{\Omega} z \xi_{tt} dx dy dt + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla \xi dx dy dt = 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{D}((0, T); H^1(\hat{\Omega})) \\ \int_0^T \int_{\Gamma_0} z \psi_{tt} dx dt = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}((0, T) \times \Gamma_0). \end{cases}$$

Definimos la distribución  $\eta \in \mathcal{D}'((0, T) \times \hat{\Omega})$ ,  $\eta = \hat{z}_{tt}$ , es decir:

$$\langle \eta, \xi \rangle = \int_0^T \int_{\hat{\Omega}} \hat{z} \xi_{tt} dx dy dt, \quad \forall \xi \in \mathcal{D}((0, T) \times \hat{\Omega}),$$

donde  $\hat{z}(t, x) = z(t, x)$  si  $x \in \Omega$ , y  $\hat{z}(t, x) = 0$  si  $x \in \hat{\Omega} \setminus \Omega$ .

Teniendo en cuenta la definición de  $\eta$  y que  $z$  verifica (2.4) obtenemos:

$$(2.5) \quad \begin{cases} \eta_{tt} - \Delta \eta = 0 & \text{en } \hat{\Omega} \times (0, T) \\ \eta = 0 & \text{en } \Omega' \times (0, T) \end{cases}$$

ya que

$$\langle \Delta \eta, \xi \rangle = \int_0^T \int_{\hat{\Omega}} \hat{z} \Delta \xi_{tt} = - \int_0^T \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla \xi_{tt} + \int_0^T \int_{\Gamma_0} z \frac{\partial}{\partial n} \xi_{tt} = - \int_0^T \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla \xi_{tt}.$$

Aplicando el Teorema de Holmgren (Hörmander [23], Teorema 5.3.3, p. 129, Lions [29], pp. 87-90) se obtiene que para  $T > 2 \text{ diam}(\hat{\Omega})$ , existe  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(T - \text{diam}(\hat{\Omega}))$  tal que  $\eta = \hat{z}_{tt} = 0$  en  $\left(\frac{T}{2} - \varepsilon, \frac{T}{2} + \varepsilon\right) \times \hat{\Omega}$ , es decir,

$$\int_0^T \int_{\hat{\Omega}} \hat{z} \xi_{tt} dx dy dt = 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{D}\left(\left(\frac{T}{2} - \varepsilon, \frac{T}{2} + \varepsilon\right) \times \hat{\Omega}\right).$$

A continuación necesitamos el siguiente lema:

**Lema 2.1** Sea  $z \in C^1((T_1, T_2); L^2(\Omega))$  con la propiedad  $z_{tt} = 0$  en  $\mathcal{D}'((T_1, T_2) \times \Omega)$ , es decir:

$$\int_{T_1}^{T_2} \int_{\Omega} z(t, x) \xi_{tt}(t, x) dx dy dt = 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{D}((T_1, T_2) \times \Omega).$$

Entonces existen dos funciones  $c_1, c_2 \in L^2(\Omega)$  tales que  $z(t, x) = c_1(x)t + c_2(x)$ , para todo  $t \in (T_1, T_2)$  y casi todo  $x \in \Omega$ .

**Demostración del lema:**

Tenemos

$$\int_{T_1}^{T_2} \int_{\Omega} z(t, x) \xi_{tt}(t, x) dx dy = - \int_{T_1}^{T_2} \int_{\Omega} z_t(t, x) \xi_t(t, x) dx dy dt$$

Elejimos  $\xi(t, x) = \phi(t)\psi(x)$  con  $\phi \in \mathcal{D}(T_1, T_2)$  y  $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Resulta:

$$\int_{T_1}^{T_2} \int_{\Omega} z_t(t, x) \xi_t(t, x) dx dy dt = \int_{T_1}^{T_2} \left( \int_{\Omega} z_t(t, x) \psi(x) \right) \phi_t(t) dx dy dt, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(T_1, T_2).$$

Por el Lema VIII.1 de Brezis [10], y como  $z_t \in \mathcal{C}((T_1, T_2); L^2(\Omega))$ , se obtiene que

$$\int_{\Omega} z_t(t, x) \psi(x) dx dy = C_{\psi}, \quad \forall t \in (T_1, T_2), \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

siendo  $C_{\psi}$  una constante independiente de  $t$ .

Ahora para  $t_1, t_2 \in (T_1, T_2)$  arbitrarios

$$\int_{\Omega} (z_t(t_1, x) - z_t(t_2, x)) \psi(x) dx dy = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Por el Lema IV.2 de Brezis [10], se obtiene:

$$z_t(t_1, x) = z_t(t_2, x) \text{ para casi todo } x \in \Omega,$$

es decir existe  $c_1 \in L^2(\Omega)$  tal que:

$$z_t(t, x) = c_1(x) \quad \text{para todo } t \in (T_1, T_2) \text{ y para casi todo } x \in \Omega.$$

Utilizando el Teorema del valor intermedio resulta que existe  $c_2 \in L^2(\Omega)$  con

$$z(t, x) = c_1(x)t + c_2(x) \quad \text{para todo } t \in (T_1, T_2) \text{ y casi todo } x \in \Omega.$$

■

Utilizando el lema anterior resulta que existen  $c_1, c_2 \in L^2(\Omega)$  tales que

$$(2.6) \quad z(t, x) = c_1(x)t + c_2(x), \quad \text{para todo } t \in \left( \frac{T}{2} - \varepsilon, \frac{T}{2} + \varepsilon \right) \text{ y casi todo } x \in \hat{\Omega}.$$

Tomando  $\xi(t, x) = \phi(t)\psi(x)$  con  $\phi \in \mathcal{D}\left(\frac{T}{2} - \varepsilon, \frac{T}{2} + \varepsilon\right)$  y  $\psi \in H^1(\Omega)$ , de (2.4) obtenemos que:

$$\int_0^T \phi(t) \int_{\Omega} \nabla(c_1(x)t + c_2(x)) \cdot \nabla \psi = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}\left(\frac{T}{2} - \varepsilon, \frac{T}{2} + \varepsilon\right), \quad \forall \psi \in H^1(\Omega).$$

Como  $z(x, t) = c_1(x)t + c_2(x)$  está en  $\mathcal{C}\left(\left(\frac{T}{2} - \varepsilon, \frac{T}{2} + \varepsilon\right), H^1(\Omega)\right)$ , resulta que

$$\int_{\Omega} \nabla(c_1(x)t + c_2(x)) \cdot \nabla\psi(x) \, dx \, dy = 0, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega), \forall t \in \left(\frac{T}{2} - \varepsilon, \frac{T}{2} + \varepsilon\right).$$

Se obtiene :

$$\nabla(c_1(x)t + c_2(x)) = 0 \text{ para casi todo } x \in \Omega \text{ y para todo } t \in \left(\frac{T}{2} - \varepsilon, \frac{T}{2} + \varepsilon\right).$$

y de aquí que  $z = cte$  en  $\left(\frac{T}{2} - \varepsilon, \frac{T}{2} + \varepsilon\right) \times \Omega$ .

Como la primera ecuación de (2.4) nos indica que  $z$  satisface una ecuación de ondas en  $\Omega$ .  $z_t$  también satisface esta ecuación (en el sentido de las distribuciones). Pero  $z_t = 0$  en  $\left(\frac{T}{2} - \varepsilon, \frac{T}{2} + \varepsilon\right) \times \Omega$  y, por tanto, usando la unicidad de las soluciones resulta que  $z_t = 0$  en  $(0, T) \times \Omega$ . Si repetimos el argumento, con  $z_x$  y  $z_y$  en vez de  $z_t$  obtenemos que  $\nabla z = 0$  en  $(0, T) \times \Omega$ .

Finalmente, resulta que  $z = cte$  en  $(0, T) \times \Omega$ .

Como  $(z, z_t, v, v_t) \in \mathcal{X}^0$  resulta que  $z = 0$  en  $L^2(\Omega)$  y  $v = 0$  en  $L^2(\Gamma_0)$ .

Etapa 2: Caso en que  $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1) \in \mathcal{X}$ .

Como  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  es denso en  $\mathcal{X}$  podemos considerar una sucesión  $(\Phi_n^0, \Phi_n^1, W_n^0, W_n^1)_n \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{A})$  que converge a  $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1) \in \mathcal{X}$ .

Sea  $(\Phi_n, (\Phi_n)_t, W_n, (W_n)_t)$  la solución de (1.6) correspondiente al dato inicial  $(\Phi_n^0, \Phi_n^1, W_n^0, W_n^1)$  y  $(\Phi, W, \Phi_t, W_t)$  la solución de (1.6) correspondiente al dato inicial  $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1)$ .

Consideramos la energía  $E(t)$  asociada a la solución  $(\Phi, \Phi_t, W, W_t)$

Utilizando la propiedad de estabilidad (1.11) obtenemos:

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla\Phi(t)|^2 + |\Phi_t(t)|^2) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} (|W_x(t)|^2 + |W_t(t)|^2) \leq \\ &\leq \int_{\Omega} (|\nabla(\Phi - \Phi_n)(t)|^2 + |(\Phi - \Phi_n)_t(t)|^2) + \int_{\Gamma_0} (|(W - W_n)_x(t)|^2 + |(W - W_n)_t(t)|^2) + \\ &\quad + \int_{\Omega} (|\nabla\Phi_n(t)|^2 + |(\Phi_n)_t(t)|^2) + \int_{\Gamma_0} (|(W_n)_x(t)|^2 + |(W_n)_t(t)|^2) \leq \\ &\leq \int_{\Omega} (|\nabla(\Phi^0 - \Phi_n^0)(t)|^2 + |(\Phi^1 - \Phi_n^1)(t)|^2) + \int_{\Gamma_0} (|(W^0 - W_n^0)_x(t)|^2 + |(W^1 - W_n^1)(t)|^2) + \\ &\quad + \int_{\Omega} (|\nabla\Phi_n(t)|^2 + |(\Phi_n)_t(t)|^2) + \int_{\Gamma_0} (|(W_n)_x(t)|^2 + |(W_n)_t(t)|^2) \end{aligned}$$

Para un  $\varepsilon > 0$ , fijo, existe  $n_\varepsilon$  tal que para todo  $n \geq n_\varepsilon$

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} (|\nabla(\Phi^0 - \Phi_n^0)(t)|^2 + |(\Phi^1 - \Phi_n^1)(t)|^2) + \\ &\int_{\Gamma_0} (|(W^0 - W_n^0)_x(t)|^2 + |(W^1 - W_n^1)(t)|^2) \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

La etapa 1 nos asegura que para cada  $n$  existe  $t_\varepsilon$  tal que para todo  $t \geq t_\varepsilon$

$$\int_{\Omega} (|\nabla \Phi_n(t)|^2 + |(\Phi_n)_t(t)|^2) + \int_{\Gamma_0} (|(W_n)_x(t)|^2 + |(W_n)_t(t)|^2) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

De las últimas dos desigualdades deducimos inmediatamente que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0,$$

lo que concluye la demostración del teorema. ■

**Observación 2.2** Hemos demostrado la convergencia hacia cero de la proyección de toda trayectoria sobre  $\mathcal{X}^0$ . Esto significa que  $\nabla \Phi, \Phi_t, W_x$  y  $W_t$  convergen a cero en  $L^2$  pero no ocurre lo mismo con  $\Phi$  y  $W$ . Se puede observar que  $\Phi = c_1 = \text{cte}$  y  $W = c_2 = \text{cte}$  son soluciones del problema pero no convergen a cero cuando  $t$  va al infinito. En la próxima sección describimos el comportamiento asintótico de  $\Phi$  y  $W$  cuando el tiempo tiende al infinito.

## 2.2 El comportamiento asintótico de $\Phi$ y $W$

El Teorema 2.1 nos asegura que:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi_t\|_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\nabla \Phi\|_{L^2(\Omega)} = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|W_t\|_{L^2(\Gamma_0)} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|W_x\|_{L^2(\Gamma_0)} = 0. \end{aligned}$$

Nos proponemos a continuación estudiar el comportamiento asintótico de  $\Phi$  y  $W$  cuando el tiempo tiende a infinito ya que los resultados anteriores no ofrecen estimaciones sobre estas cantidades.

Primero demostramos el siguiente lema:

**Lema 2.2** Si  $(\Phi, W) \in C([0, \infty); H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0))$  es una solución del problema entonces:

$$(2.7) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \Phi - \int_{\Gamma_0} \Phi \right\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

**Demostración:**

Si  $\Phi \in H^1(\Omega)$ , la siguiente desigualdad de Poincaré (vease el Lema 1.1) es válida :

$$(2.8) \quad \left\| \Phi - \frac{1}{|\Gamma_0|} \int_{\Gamma_0} \Phi \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla \Phi\|_{L^2(\Omega)}$$

con  $C > 0$  independiente de  $\Phi$ .

Ahora, aplicando esta desigualdad a la función  $\Phi(t)$  y sabiendo que  $\nabla \Phi(t)$  tiende a cero cuando el tiempo tiende al infinito, se obtiene que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \Phi - \int_{\Gamma_0} \Phi \right\|_{L^2(\Omega)} = 0. \quad \blacksquare$$

**Observación 2.3** El lema anterior nos indica que el comportamiento asintótico de  $\Phi$  en  $L^2(\Omega)$  se puede obtener estudiando  $\int_{\Gamma_0} \Phi$ .

Para  $W$  tenemos una propiedad similar:

**Lema 2.3** Si  $(\Phi, W) \in C([0, \infty); H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0))$  es una solución del problema (1.1) entonces:

$$(2.9) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|W - \int_{\Gamma_0} W\|_{L^2(\Gamma_0)} = 0.$$

**Demostración:**

Recordamos la siguiente variante de la desigualdad de Poincaré (vease el Lema 1.2), válida para todo  $v \in H^1(\Gamma_0)$ :

$$(2.10) \quad \left\| v - \frac{1}{|\Gamma_0|} \int_{\Gamma_0} v \right\|_{L^2(\Gamma_0)} \leq c \|v_x\|_{L^2(\Gamma_0)}$$

con  $c$  independiente de  $v$ .

Aplicando esta desigualdad a la función  $W(t)$ , se obtiene:

$$\int_{\Gamma_0} \left( W(t) - \int_{\Gamma_0} W(t) \right)^2 \leq c \|W_x(t)\|_{L^2(\Gamma_0)}^2.$$

Como hemos demostrado que  $W_x(t)$  tiende a cero cuando  $t$  tiende al infinito, se deduce que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_0} \left( W(t) - \int_{\Gamma_0} W(t) \right)^2 = 0.$$

■

**Observación 2.4** El lema anterior nos indica que el comportamiento asintótico de  $W$  en  $L^2(\Gamma_0)$  se puede obtener estudiando  $\int_{\Gamma_0} W$ .

Pasamos ahora a estudiar el comportamiento asintótico de  $W$ .

**Teorema 2.2** Si  $(\Phi, W) \in C([0, \infty); H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0))$  es una solución del problema (1.1) entonces:

$$(2.11) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| W - \int_{\Gamma_0} W_0 + \int_{\Omega} \Phi_1 \right\|_{L^2(\Gamma_0)} = 0.$$

**Demostración:**

Por la observación anterior es suficiente demostrar que:

$$(2.12) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_0} W = \int_{\Gamma_0} W_0 - \int_{\Omega} \Phi_1.$$

Tal y como mencionabamos en la Observación 1.4 tenemos que, para cualquier solución del sistema (1.1), la siguiente ley de conservación es válida:

$$\int_{\Omega} \Phi_t - \int_{\Gamma_0} W = \int_{\Omega} \Phi_1 - \int_{\Gamma_0} W_0 = \text{cte.}$$

De esta igualdad deducimos que:

$$\left| \int_{\Gamma_0} W + \left( \int_{\Omega} \Phi_1 - \int_{\Gamma_0} W_0 \right) \right| = \left| \int_{\Omega} \Phi_t \right| \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |\Phi_t|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como además, sabemos del Teorema 2.1 que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t = 0 \text{ en } L^2(\Omega)$$

resulta que:

$$(2.13) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_0} W = \int_{\Gamma_0} W_0 - \int_{\Omega} \Phi_1.$$

Esto nos proporciona el resultado deseado para  $W$ .

■

**Observación 2.5** *El resultado anterior nos indica que, en la posición de equilibrio, la cuerda se encuentra desplazada de la posición cero. Esto se debe a la presión inicial  $\Phi_1$  y a su posición inicial  $W_0$ .*

*Si la presión inicial tiene media cero,  $\int_{\Omega} \Phi_1 = 0$ , entonces  $W$  va a tender a la posición  $\int_{\Gamma_0} W_0$ . Si la posición inicial es de media cero,  $\int_{\Gamma_0} W_0 = 0$ , pero  $\int_{\Omega} \Phi_1 \neq 0$ , entonces la cuerda va a tender a una posición desplazada puesto que el dominio aumenta o disminuye para compensar la presión inicial. Se observa que si  $\int_{\Gamma_0} W_0 - \int_{\Omega} \Phi_1 = 0$  entonces  $W$  tiende a cero.*

Pasamos ahora al estudio de  $\Phi$ .

**Teorema 2.3** *Si  $(\Phi, W) \in \mathcal{C}([0, \infty); H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0))$  es una solución del problema entonces:*

$$(2.14) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \Phi - \left( \int_{\Omega} \Phi_1 + \int_{\Gamma_0} W_1 + \int_{\Gamma_0} \Phi_0 \right) \right\|_{L^2(\Gamma_0)} = 0.$$

**Demostración:**

Tal y como hemos observado es suficiente demostrar que:

$$(2.15) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_0} \Phi = \int_{\Omega} \Phi_1 + \int_{\Gamma_0} W_1 + \int_{\Gamma_0} \Phi_0.$$

La Observación 1.4 nos indica que es válida la siguiente ley de conservación:

$$\int_{\Gamma_0} (W_t + W + \Phi) = \int_{\Gamma_0} (W_1 + W_0 + \Phi_0) = \text{cte.}$$

De esta última igualdad deducimos que:

$$\left| \int_{\Gamma_0} (\Phi + W) - \int_{\Gamma_0} (W_1 + W_0 + \Phi_0) \right| = \left| \int_{\Gamma_0} W_t \right| \leq |\Gamma_0|^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Gamma_0} |W_t|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como del Teorema 2.1 sabemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W_t = 0 \text{ en } L^2(\Omega)$$

resulta que:

$$(2.16) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_0} (\Phi + W) = \int_{\Gamma_0} (W_1 + W_0 + \Phi_0).$$

Además, el teorema anterior nos indica que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_0} W = \int_{\Gamma_0} W_0 - \int_{\Omega} \Phi_1,$$

y por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_0} \Phi = \int_{\Omega} \Phi_1 + \int_{\Gamma_0} W_1 + \int_{\Gamma_0} \Phi_0.$$

Esto nos proporciona el resultado deseado para  $\Phi$ .

■

**Observación 2.6** *Los dos teoremas anteriores nos indican que las funciones  $W$  y  $\Phi$  convergen a la proyección del dato inicial del sistema sobre el espacio  $\mathcal{X}^1$  (vease también la Observación 1.5).*

### 2.3 Decaimiento no exponencial de la energía

El Teorema 2.1 nos asegura que la energía asociada a cada solución del sistema (1.1) converge a cero cuando el tiempo tiende al infinito. Nos proponemos a continuación estudiar la tasa del decaimiento de la energía, lo que es equivalente, la tasa del decaimiento del semigrupo de contracciones  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  generado por el operador  $\mathcal{A}$  en  $\mathcal{X}^0$ .

La teoría de los semigrupos de contracciones nos asegura que existen dos posibilidades: o bien existen dos constantes  $M > 0$  y  $\omega > 0$  tal que  $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}^0, \mathcal{X}^0)} \leq M e^{-\omega t}$ , para todo  $t \geq 0$  o bien  $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}^0, \mathcal{X}^0)} = 1$ , para todo  $t \geq 0$ .

El siguiente teorema nos indica que, en nuestro caso, es cierta la segunda de estas dos posibilidades. es decir, el semigrupo no tiene un decaimiento exponencial.

**Teorema 2.4** *El semigrupo de contracciones, generado por el operador  $\mathcal{A}$  en  $\mathcal{X}^0$ , no tiene un decaimiento exponencial.*

**Demostración:**

Buscamos soluciones del sistema (1.1) que sólo dependan de la variable  $y$ . Este tipo de soluciones verifican:

$$(2.17) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \psi_{tt} - \psi_{yy} = 0 & \text{para } y \in (0, 1), t \in (0, \infty) \\ \psi_y(1) = 0 & \text{para } t \in (0, \infty) \\ \psi_y(0) = -\bar{w} & \text{para } t \in (0, \infty) \\ \hat{w}_t + \bar{w} + \psi_t(0) = 0 & \text{para } t \in (0, \infty) \\ \psi(0) = \psi^0, \quad \psi_t(0) = \psi^1 & \text{en } (0, 1) \\ \bar{w}(0) = \bar{w}^0. & \end{array} \right.$$

Hemos notado por  $\bar{w}$  la función  $w_t$ .

Estamos interesados en encontrar soluciones de la ecuación (2.17) del tipo:

$$(2.18) \quad (\psi, \tilde{w}) = e^{\lambda t}(\varphi, v), \text{ con } \varphi = \varphi(y) \text{ y } v \in \mathbb{R}.$$

Nuestro objetivo es demostrar la existencia de una sucesión de autovalores  $(\lambda_n)_n$  tal que  $(\operatorname{Re} \lambda_n)_n$  converja a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ , lo que implica un decaimiento no exponencial de la energía en el tiempo.

Las soluciones de la ecuación (2.17) del tipo (2.18) son soluciones de la ecuación:

$$(2.19) \quad \begin{cases} \lambda^2 \varphi - \varphi_{yy} = 0 & \text{para } y \in (0, 1) \\ \varphi_y(1) = 0 \\ \varphi_y(0) = -\lambda v \\ \lambda^2 v + \lambda v + \lambda \varphi(0) = 0. \end{cases}$$

Eliminando  $v$  en el sistema (2.19) obtenemos una ecuación diferencial ordinaria:

$$(2.20) \quad \begin{cases} \lambda^2 \varphi - \varphi_{yy} = 0 & \text{para } y \in (0, 1) \\ \varphi_y(1) = 0 \\ -\lambda \varphi_y(0) - \lambda_y(0) + \lambda \varphi(0) = 0. \end{cases}$$

Las soluciones del sistema (2.20) son del tipo  $\varphi(y) = C_1 e^{\lambda y} + C_2 e^{-\lambda y}$ , de donde, teniendo en cuenta las condiciones en el borde, resulta la siguiente ecuación para los autovalores  $\lambda$ :

$$(2.21) \quad e^{2\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda + 2}.$$

El teorema quedará demostrado si se prueba que la ecuación (2.21) tiene una sucesión de soluciones  $(\lambda_n)_{n \geq 0}$  con  $\operatorname{Re} \lambda_n \rightarrow 0$ .

Las soluciones de la ecuación (2.21) serán estudiadas aplicando el Teorema de Rouché y con este objetivo escribimos la ecuación en la forma:

$$(2.22) \quad e^{2\lambda} - 1 + \frac{2}{\lambda + 2} = 0.$$

La ecuación  $e^{2\mu} = 1$  tiene una sucesión de soluciones  $\mu_k = k\pi i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Consideramos para cada  $k \in \mathbb{N}$  los cuadrados  $\gamma_k$  de centro  $\mu_k$  y lado  $\varepsilon_k$  que precisaremos más tarde.

Demostramos que, para  $k$  suficientemente grande,

$$(2.23) \quad \left| \frac{2}{x+2} \right| < |e^{2x} - 1|, \quad \forall x \in \gamma_k.$$

Para  $x \in \gamma_k$  tenemos

$$\left| \frac{2}{x+2} \right| \leq \frac{2}{|x|-2} < \frac{2}{k\pi - 2 - \frac{\varepsilon_k}{2}} < \frac{3}{k\pi}$$

si se cumple que  $k > 2$ ,  $\varepsilon_k < -4 + \frac{2k\pi}{3}$  y

$$|e^{2x} - 1| = |e^{2\operatorname{Re} x} (\cos(2\operatorname{Im} x) + i \operatorname{sen}(2\operatorname{Im} x)) - 1| =$$

$$\begin{aligned}
&= |e^{4\mathcal{R}e x} - 2e^{2\mathcal{R}e x} \cos(2\mathcal{I}m x) + 1|^{\frac{1}{2}} \geq \max \left\{ |e^{2\mathcal{R}e x} - 1|, |\sin(2\mathcal{I}m x)| \right\} \geq \\
&\geq \max \left\{ 2|\mathcal{R}e x|, |\sin(2\mathcal{I}m x)| \right\} > \frac{\varepsilon_k}{2}
\end{aligned}$$

si  $\varepsilon_k > \max \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{6}{k\pi} \right\}$ .

Finalmente se obtiene que (2.23) se cumple si  $\frac{k\pi}{3} - 2 > \varepsilon > \frac{3}{k\pi}$ .

Por lo tanto, existe una sucesión de soluciones de tipo (2.18) con  $\mathcal{R}e\lambda$  decreciente a cero, lo que indica un decaimiento no exponencial de la energía.

■

**Observación 2.7** En este capítulo hemos encontrado una de las características de muchos sistemas híbridos: la disipación asegura la convergencia a cero de la energía del sistema pero no es suficientemente fuerte para garantizar el decaimiento uniforme de ésta. La mayoría de los modos de Fourier correspondientes a altas frecuencias son cada vez menos disipados. También subrayamos que el decaimiento no uniforme de la energía se debe a la estructura híbrida del sistema y no a la localización de la disipación en una parte relativamente pequeña de la frontera. Esto se pondrá de manifiesto en el último capítulo cuando analizaremos un modelo semejante en el que el cuadrado  $\Omega$  se sustituye por un círculo y donde la disipación se ejerce en toda la frontera.

**Observación 2.8** Observemos que el operador diferencial asociado a nuestro sistema es un operador disipativo que se obtiene de un operador conservativo mediante una perturbación acotada pero no compacta.

En efecto, si  $(\mathcal{D}(\mathcal{A}), \mathcal{A})$  es el operador diferencial introducido por (1.4), definimos el operador conservativo asociado,  $(\mathcal{D}(\mathcal{A}_C), \mathcal{A}_C)$ , por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\mathcal{A}_C) &= \mathcal{D}(\mathcal{A}), \\
\mathcal{A}_C(\Phi, \Psi, W, V) &= (-\Psi, -\Delta\Phi, -V, -W_{xx} + V + \Psi).
\end{aligned}$$

Si  $\mathcal{P}_4$  es el operador de proyección sobre la cuarta componente definido en  $\mathcal{X}$  tenemos que:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_C + \mathcal{P}_4.$$

Se observa que el operador  $\mathcal{A}$  se obtiene de  $\mathcal{A}_C$  mediante la perturbación  $\mathcal{P}_4$  que es acotada en  $\mathcal{X}$  pero no es compacta.

Esta es una diferencia importante con respecto a la mayoría de los sistemas híbridos unidimensionales estudiados hasta ahora. Por ejemplo, si consideramos el sistema estudiado por Littman, Markus y You [34] y por Rao [43], que acopla una cuerda vibrante a un cuerpo rígido:

$$(2.24) \quad \begin{cases} \Phi_{tt} - \Phi_{xx} = 0 & \text{para } x \in (0, 1), \quad t \in (0, \infty) \\ \Phi(0, t) = 0 & \text{para } t > 0 \\ \Phi_x(1, t) = -\Phi_{tt}(1, t) - \Phi_t(1, t) & \text{para } t > 0, \end{cases}$$

se puede ver fácilmente que el operador disipativo asociado a este sistema es una perturbación compacta del operador conservativo correspondiente.

Esta propiedad permite la aplicación de resultados de perturbación compacta para demostrar que el decaimiento de la energía no es uniforme. En nuestro caso esto no es posible. Además, tal y como se verá en la última sección del Capítulo 3, ni tan siquiera la diferencia de los semigrupos generados por  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}_C$  es compacta.

**Observación 2.9** Como se demuestra en Littman, Marcus y You [34], el decaimiento no exponencial de la energía es equivalente al decaimiento no uniforme: para cualquier función real  $\psi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , continua y decreciente a cero, existe un dato inicial y una sucesión  $\{t_n\}_{n \geq 1}$  tal que la energía asociada al dato inicial encontrado satisface  $E(t_n) > \psi(t_n)$  para todo  $n \geq 1$ .

**Observación 2.10** En el siguiente capítulo realizaremos un análisis más detallado del espectro del operador diferencial asociado al sistema (1.1).

## Capítulo 3

# Análisis espectral

En este capítulo nos proponemos analizar los autovalores y las autofunciones de los operadores diferenciales asociados a nuestro sistema y al sistema conservativo correspondiente. Obtendremos estimaciones asintóticas para los espectros de los dos operadores y compararemos los resultados.

En la primera sección analizamos los autovalores del operador conservativo y las propiedades principales de las autofunciones correspondientes. Ponemos en evidencia la existencia de dos tipos principales de autovalores que corresponden a comportamientos asintóticos distintos de las últimas componentes de las autofunciones. Prestamos especial atención a los autovalores del primer tipo que se acercan a autovalores de la ecuación de ondas en el recinto  $\Omega$  con condiciones de contorno conservativas clásicas.

La parte principal de este capítulo la constituye la segunda sección donde se describen las propiedades asintóticas de los autovalores y de las autofunciones correspondientes al problema disipativo. En las subsecciones 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4 y 3.2.5 se encuentran cuatro tipos de autovalores que se distinguen por las siguientes propiedades: los del primer tipo se acercan asintóticamente a los autovalores de un problema Neumann, los del segundo tipo se aproximan a los autovalores de un problema Neumann-Dirichlet, los del tercer tipo describen la transición entre los primeros dos y los del último son los autovalores con partes reales que no tienden a cero y que describen la parte del espacio de energía en la que la tasa de disipación es uniforme. En cada subsección se estudian también las autofunciones correspondientes.

En la sección tres se hace una breve comparación entre los autovalores del problema disipativo y los del problema conservativo.

Algunos aspectos relacionados con las propiedades de completitud de las autofunciones y la posibilidad de que formen una base de Riesz se analizan en la sección cuatro.

Finalmente, en la última sección, presentamos una consecuencia directa de los resultados obtenidos en la sección dos: la diferencia de los semigrupos generados por el operador disipativo y el operador conservativo no es compacta en ningún momento de tiempo.

### 3.1 El problema conservativo

Consideramos primero el problema conservativo siguiente:

$$(3.1) \quad \begin{cases} \Phi_{tt} - \Delta \Phi = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -W_t & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ W_{tt} - W_{xx} + \Phi_t = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ W_x(0, t) = W_x(1, t) = 0 & \text{para } t \in (0, \infty) \end{cases}$$

y nos proponemos determinar las autofunciones y los autovalores del operador diferencial asociado. Para hacer ésto buscamos soluciones de la forma  $e^{-\nu t}(\Phi, W)$ ; con lo cual el sistema (3.1) se reduce a:

$$(3.2) \quad \begin{cases} \nu^2 \Phi - \Delta \Phi = 0 & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \nu W & \text{sobre } \Gamma_0 \\ \nu^2 W - W_{xx} - \nu \Phi = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \\ W_x(0) = W_x(1) = 0. \end{cases}$$

Por la simetría del sistema, las autofunciones del problema se obtienen por separación de variables, i.e. son de la forma:  $\Phi(x, y) = X(x)Y(y)$ .

Las funciones  $X$  e  $Y$  verifican en este caso los siguientes sistemas con parámetro  $s$ :

$$(3.3) \quad \begin{cases} X'' + s^2 X = 0 & \text{para } x \in (0, 1) \\ X'(0) = X'(1) = 0 \end{cases}$$

$$(3.4) \quad \begin{cases} Y'' - (\nu^2 + s^2)Y = 0 & \text{para } y \in (0, 1) \\ Y'(1) = 0 \\ (-\nu^2 - s^2)Y'(0) + \nu^2 Y(0) = 0. \end{cases}$$

La ecuación (3.3) implica que  $s^2 = k^2 \pi^2$ , con  $k$  entero y  $X(x) = \cos k\pi x$ .

La ecuación (3.4) nos indica que  $Y(y) = e^{\sqrt{\nu^2 + k^2 \pi^2}(y-1)} + e^{-\sqrt{\nu^2 + k^2 \pi^2}(y-1)}$  y además, los autovalores  $\nu$  del problema vienen dados por la ecuación:

$$(3.5) \quad e^{2\sqrt{\nu^2 + k^2 \pi^2}} = -\frac{\nu^2 - \sqrt{\nu^2 + k^2 \pi^2}(\nu^2 + k^2 \pi^2)}{\nu^2 + \sqrt{\nu^2 + k^2 \pi^2}(\nu^2 + k^2 \pi^2)}$$

También obtenemos que las autofunciones del operador diferencial asociado al problema conservativo (3.1) son de la forma:

$$(3.6) \quad \xi_\nu = \begin{pmatrix} \frac{1}{\nu} \cosh(\sqrt{\nu^2 + k^2\pi^2}(y-1)) \cos k\pi x \\ -\cosh(\sqrt{\nu^2 + k^2\pi^2}(y-1)) \cos k\pi x \\ -\frac{\sqrt{\nu^2 + k^2\pi^2}}{\nu^2} \sinh(\sqrt{\nu^2 + k^2\pi^2}) \cos k\pi x \\ \frac{\sqrt{\nu^2 + k^2\pi^2}}{\nu} \sinh(\sqrt{\nu^2 + k^2\pi^2}) \cos k\pi x \end{pmatrix}^t$$

donde los autovalores  $\nu$  vienen dados por la ecuación (3.5). Recordemos que, en esta notación vectorial, las cuatro componentes del vector corresponden a  $(\Phi, \Phi_t, W, W_t)$  para una solución  $(\Phi, W)$  de (3.1).

**Teorema 3.1** *Sea  $k \in \mathbb{N}$  fijo. La ecuación (3.5) tiene una sucesión de ceros imaginarios  $(\nu_{k,m})_{m \in \mathbb{Z}}$  que vienen dados por la fórmula*

$$(3.7) \quad \nu_{k,m} = \sqrt{z_{k,m}^2 + k^2\pi^2} i \text{ si } m > 0 \text{ y } \nu_{k,m} = -\nu_{k,-m} \text{ si } m < 0,$$

donde  $(z_{k,m})_{m \in \mathbb{N}}$  son los ceros (en orden creciente) de la ecuación:

$$(3.8) \quad \operatorname{tg} z = \frac{z^2 + k^2\pi^2}{z^3}.$$

Además de los ceros  $(\nu_{k,m})_{m \in \mathbb{Z}}$ , la ecuación (3.5) tiene otros dos únicos ceros, notados  $\nu_k^*$  y  $\nu_k^{**}$ , de módulos menores que  $k\pi$  y que vienen dados por las fórmulas

$$(3.9) \quad \nu_k^* = \sqrt{k^2\pi^2 - (z_k^*)^2} i, \quad \nu_k^{**} = \bar{\nu}_k^*,$$

y donde  $z_k^*$  es la única raíz real positiva de la ecuación:

$$(3.10) \quad e^{2z} = \frac{z^3 - z^2 + k^2\pi^2}{z^3 + z^2 - k^2\pi^2}.$$

En este último caso, si  $k = 0$ ,  $\nu_k^* = \nu_k^{**} = 0$ .

**Observación 3.1** *Según el teorema que acabamos de enunciar los autovalores del problema conservativo se separan en dos clases: los que vienen dados por la ecuación (3.8) y los que se obtienen de la ecuación (3.10). Tal y como veremos al final de esta sección, esta separación no es gratuita, ya que las autofunciones correspondientes  $\xi_\nu$  tienen comportamientos distintos cuando  $\nu$  tiende al infinito. Si  $\nu \in \{\nu_{k,m}\}_{k,m}$ , las últimas dos componentes de  $\xi_\nu$  tienden a cero en las normas correspondientes del espacio de la energía, cuando  $|\nu|$  tiende al infinito, mientras que si  $\nu \in \{\nu_k^*, \nu_k^{**}\}_k$  esta propiedad no es válida.*

#### Demostración:

Observemos que, por el cambio de variable  $\nu = \sqrt{\zeta^2 - k^2\pi^2}$  la ecuación (3.5) se transforma en:

$$(3.11) \quad e^{2\zeta} = \frac{\zeta^3 - \zeta^2 + k^2\pi^2}{\zeta^3 + \zeta^2 - k^2\pi^2}.$$

Como los ceros de la ecuación (3.5) son puramente imaginarios (ya que el operador diferencial asociado es antiadjunto) tenemos que los ceros  $\zeta$  de la ecuación (3.11) serán:

- reales si  $|\nu| \leq k\pi$
- imaginarios si  $|\nu| > k\pi$ .

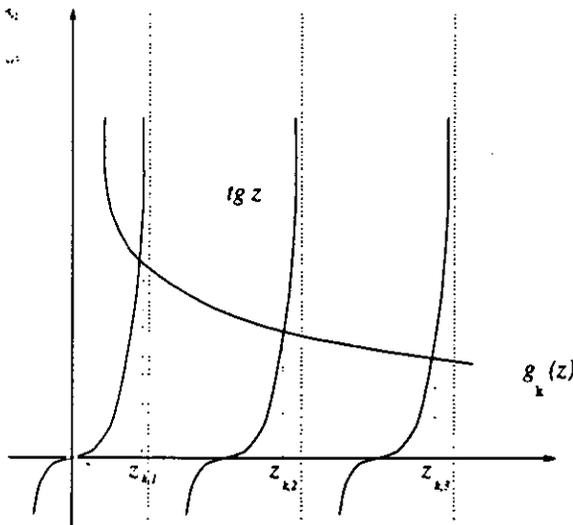
Caso 1: Suponemos que las raíces  $\zeta$  de la ecuación (3.11) son puramente imaginarias,  $\zeta = z i$  con  $z \in \mathbb{R}$ . En esta situación obtenemos que (3.11) equivale a:

$$(3.12) \quad e^{2zi} = \frac{-z^3 i + z^2 + k^2 \pi^2}{-z^3 i - z^2 - k^2 \pi^2}.$$

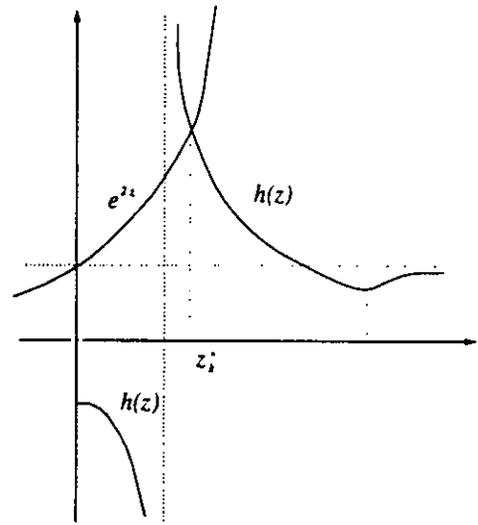
Igualando a cero la parte real de (3.12) se obtiene la siguiente ecuación para  $z$ :

$$(3.13) \quad \operatorname{tg} z = \frac{z^2 + k^2 \pi^2}{z^3}.$$

Esta ecuación tiene, para cada  $k$ , un cero en cada intervalo  $(m\pi, m\pi + \frac{\pi}{2})$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , que denotamos por  $z_{k,m+1}$ . La justificación de esta afirmación se obtiene inmediatamente analizando la Gráfica 1.



Gráfica 1.



Gráfica 2.

En las gráficas hemos notado por  $g_k(z) = \frac{z^2 + k^2 \pi^2}{z^3}$ .

Caso 2: Suponemos que las raíces  $\zeta$  de la ecuación (3.11) son reales.

Un análisis gráfico de la función de variable real:

$$h(z) = \frac{z^3 - z^2 + k^2 \pi^2}{z^3 + z^2 - k^2 \pi^2}$$

nos indica que el denominador de  $h$  se anula en un punto positivo comprendido entre  $\sqrt[3]{k^2 \pi^2}$  y  $k\pi$  y que la función  $h$  tiene un mínimo a la derecha de este punto en  $\sqrt{3}k\pi$ .

Resulta que hay sólo una raíz real positiva de la ecuación (3.11) situada en el intervalo  $(\sqrt[3]{k^2\pi^2}, k\pi)$  y que denotamos por  $z_k^*$ . La justificación de esta afirmación se obtiene analizando la Gráfica 2.

Notando  $\nu_k^* = \sqrt{k^2\pi^2 - (z_k^*)^2} i$ , obtenemos el único autovalor  $\nu_k^*$  que tiene el módulo menor que  $k\pi$ .

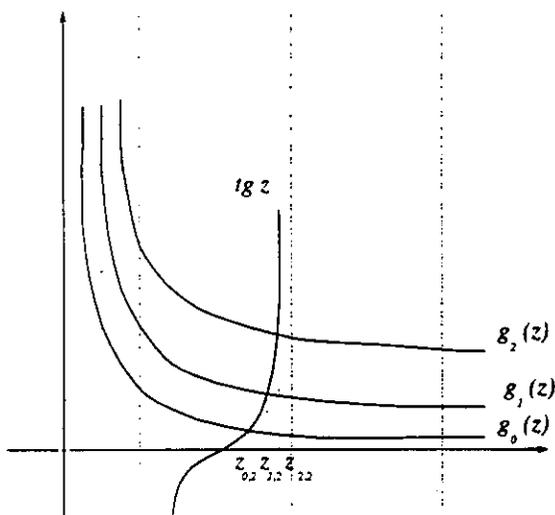
En el caso  $k = 0$  se obtiene directamente del sistema (3.1) que  $\nu_k^* = 0$  es un autovalor del problema.



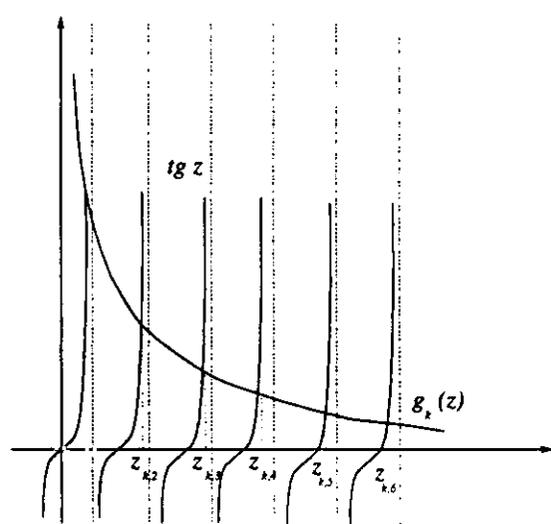
**Observación 3.2** La gráfica 1 nos indica dos tipos distintos de comportamiento para los autovalores  $\nu_{k,m}$ .

En primer lugar, si consideramos  $k$  fijo y hacemos que  $m$  tienda al infinito, las raíces de la ecuación (3.8) se aproximan a las raíces de la función  $\operatorname{tg} z$  que son de la forma  $m\pi$  (vease la gráfica 3). Des haciendo el cambio de variable se obtienen, en este caso, autovalores  $\nu_{k,m}$  que se aproximan a los valores  $\sqrt{m^2 + k^2} \pi i$ . Observemos que  $(m^2 + k^2) \pi^2$  son los autovalores del Laplaciano con condiciones Neumann en toda la frontera del dominio  $\Omega$ . En los párrafos siguientes se obtendrá el mismo comportamiento para los autovalores correspondientes del problema disipativo.

Por otro lado, considerando  $m$  fijo y haciendo que  $k$  tienda al infinito, obtenemos que las raíces de la ecuación (3.8) se aproximan a los valores en los cuales la función  $\operatorname{tg} z$  tiende a infinito y que son de la forma  $\frac{2m+1}{2} \pi$  (vease la gráfica 4). Resulta que los autovalores  $\nu_{k,m}$  correspondientes se aproximan a los valores  $\sqrt{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 + k^2} \pi i$ . Observamos que  $\left(\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 + k^2\right) \pi^2$  son los autovalores del Laplaciano con condiciones mixtas: Neumann en la parte  $\Gamma_1$  y Dirichlet en la parte  $\Gamma_0$  de la frontera de  $\Omega$ . Los autovalores correspondientes del problema disipativo tendrán en este caso el mismo comportamiento.



Gráfica 3.



Gráfica 4.

**Observación 3.3** Como hemos visto la ecuación (3.5) tiene, para un  $k$  dado, dos raíces  $\nu_k^*$  y  $\nu_k^{**}$  de módulo menor que  $k\pi$  y éstos son los autovalores de módulo más pequeño para cada  $k$ . Estos autovalores, al pasar al problema disipativo, se desplazan hacia la derecha y alcanzan una parte real que no tiende a cero cuando  $k$  tiende al infinito formando la única sucesión de autovalores con esta propiedad. Se trata pues de los modos que decaen uniformemente en presencia de la disipación.

Pasamos ahora al estudio de las autofunciones correspondientes a los autovalores encontrados.

**Proposición 3.1** Las autofunciones  $\xi_\nu$  definidas por (3.6) y que corresponden a los autovalores  $\nu$  dados por las ecuaciones (3.8) tienen la siguiente propiedad:

$$\lim_{|\nu| \rightarrow \infty} \frac{\|\xi_\nu^3\|_{H^1(0,1)}}{\|\xi_\nu\|_{\mathcal{X}}} = 0, \quad \lim_{|\nu| \rightarrow \infty} \frac{\|\xi_\nu^4\|_{L^2(0,1)}}{\|\xi_\nu\|_{\mathcal{X}}} = 0$$

donde  $\xi_\nu^j$  es la componente  $j$ -ésima de la autofunción  $\xi_\nu$ .

**Demostración:**

En este caso  $\zeta = \sqrt{\nu^2 + k^2\pi^2}$  es un número imaginario puro,  $\zeta = zi$  con  $z \in \mathbb{R}$  solución de la ecuación (3.8).

Se obtiene que:

$$(3.14) \quad \xi_\nu = \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{z^2 + k^2\pi^2}} \cos z(y-1) \cos k\pi x \\ -\cos z(y-1) \cos k\pi x \\ -\frac{z}{z^2 + k^2\pi^2} \operatorname{sen} z \cos k\pi x \\ \frac{zi}{\sqrt{z^2 + k^2\pi^2}} \operatorname{sen} z \cos k\pi x \end{pmatrix}.$$

Calculamos ahora

$$\begin{aligned} \|\xi_\nu\|_{\mathcal{X}}^2 &= \|\xi_\nu^1\|_{H^1}^2 + \|\xi_\nu^2\|_{L^2}^2 + \|\xi_\nu^3\|_{H^1}^2 + \|\xi_\nu^4\|_{L^2}^2 = \\ &= \frac{1}{2(z^2 + k^2\pi^2)} \int_0^1 \left( (1 + k^2\pi^2) \cos^2 z(y-1) + z^2 \operatorname{sen}^2 z(y-1) \right) dy + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \cos^2 z(y-1) \right) dy + \frac{z^2(1 + k^2\pi^2) \operatorname{sen}^2 z}{2(z^2 + k^2\pi^2)^2} + \frac{z^2 \operatorname{sen}^2 z}{2(z^2 + k^2\pi^2)} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4(z^2 + k^2\pi^2)} + \frac{(1 + 2k^2\pi^2) \operatorname{sen} 2z}{8z(z^2 + k^2\pi^2)} + \frac{z^2(1 + k^2\pi^2) \operatorname{sen}^2 z}{2(z^2 + k^2\pi^2)^2} + \frac{z^2 \operatorname{sen}^2 z}{2(z^2 + k^2\pi^2)}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $z$  es solución de la ecuación (3.8) se deduce que:

$$\operatorname{sen}^2 z = \frac{(z^2 + k^2\pi^2)^2}{z^6 + (z^2 + k^2\pi^2)^2}, \quad \operatorname{sen} 2z = \frac{2z^3(z^2 + k^2\pi^2)}{z^6 + (z^2 + k^2\pi^2)^2}.$$

Con estas dos relaciones obtenemos que:

$$\begin{aligned} \|\xi_\nu^1\|_{H^1}^2 + \|\xi_\nu^2\|_{L^2}^2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4(z^2 + k^2\pi^2)} + \frac{(1 + 2k^2\pi^2) \operatorname{sen} 2z}{8z(z^2 + k^2\pi^2)} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4(z^2 + k^2\pi^2)} + \frac{2z^3(z^2 + k^2\pi^2)}{4(z^6 + (z^2 + k^2\pi^2)^2)}, \\ \|\xi_\nu^3\|_{H^1}^2 &= \frac{z^2(1 + k^2\pi^2) \operatorname{sen}^2 z}{2(z^2 + k^2\pi^2)^2} = \frac{z^2(1 + k^2\pi^2)}{2(z^6 + (z^2 + k^2\pi^2)^2)}, \\ \|\xi_\nu^4\|_{L^2}^2 &= \frac{z^2 \operatorname{sen}^2 z}{2(z^2 + k^2\pi^2)} = \frac{z^2(z^2 + k^2)}{2(z^6 + (z^2 + k^2\pi^2)^2)}. \end{aligned}$$

Distinguimos los siguientes casos posibles cuando  $|\nu| \rightarrow \infty$ :

- i)  $k$  permanece acotado, caso en el que  $|\nu| \rightarrow \infty$  si y sólo si  $|z| \rightarrow \infty$ .
- ii)  $k \rightarrow \infty$ , caso en el que  $|\nu| \rightarrow \infty$  incluso si  $|z|$  permanece acotado.

Analizando las expresiones de las normas en cada uno de estos casos obtenemos que:

$$\begin{aligned} \|\xi_\nu^1\|_{H^1}^2 + \|\xi_\nu^2\|_{L^2}^2 &\rightarrow \frac{1}{2}, \text{ cuando } \nu \rightarrow \infty, \\ \|\xi_\nu^3\|_{H^1}^2 &\rightarrow 0, \text{ cuando } \nu \rightarrow \infty, \\ \|\xi_\nu^4\|_{L^2}^2 &\rightarrow 0, \text{ cuando } \nu \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. ■

**Observación 3.4** *Se puede demostrar que las autofunciones asociadas a los autovalores  $\nu_k^*$  no tienen esta propiedad, es decir  $\lim_{|\nu| \rightarrow \infty} \frac{\|\xi_\nu^3\|_{H^1(0,1)}}{\|\xi_\nu\|_X} \neq 0$  y  $\lim_{|\nu| \rightarrow \infty} \frac{\|\xi_\nu^4\|_{L^2(0,1)}}{\|\xi_\nu\|_X} \neq 0$ . Sin embargo, la demostración es, por un lado laboriosa y por otro lado muy semejante a la propiedad correspondiente del caso disipativo. Por este motivo la omitiremos.*

## 3.2 El problema disipativo

Consideramos ahora el sistema disipativo:

$$(3.15) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Phi_{tt} - \Delta \Phi = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -W_t & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ W_{tt} - W_{xx} + W_t + \Phi_t = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ W_x(0, t) = W_x(1, t) = 0 & \text{para } t \in (0, \infty) \end{array} \right.$$

y nos proponemos analizar las autofunciones y los autovalores del operador diferencial asociado.

Mediante un argumento de separación de variables similar al del primer apartado, es decir, buscando soluciones de la forma  $e^{-\lambda t}(\Phi, W) = e^{-\lambda t}(Y(y)X(x), W(x))$  obtenemos que los autovalores  $\lambda$  del problema vienen dados por la ecuación:

$$(3.16) \quad e^{2\sqrt{\lambda^2+k^2\pi^2}} = -\frac{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2 + k^2\pi^2}(-\lambda^2 + \lambda - k^2\pi^2)}{\lambda^2 - \sqrt{\lambda^2 + k^2\pi^2}(-\lambda^2 + \lambda - k^2\pi^2)}$$

y las autofunciones asociadas a un autovalor  $\lambda$  tienen la siguiente forma:

$$(3.17) \quad \varphi_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} \cosh(\sqrt{\lambda^2 + k^2\pi^2}(y-1)) \cos k\pi x \\ -\cosh(\sqrt{\lambda^2 + k^2\pi^2}(y-1)) \cos k\pi x \\ -\frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2\pi^2}}{\lambda^2} \sinh(\sqrt{\lambda^2 + k^2\pi^2}) \cos k\pi x \\ \frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2\pi^2}}{\lambda} \sinh(\sqrt{\lambda^2 + k^2\pi^2}) \cos k\pi x \end{pmatrix}^t$$

En este capítulo obtendremos desarrollos asintóticos del espectro cuando  $|\lambda| \rightarrow \infty$ . Se encontrará, para cada  $k$ , una sucesión de autovalores  $(\lambda_{k,m})_{m \in \mathbb{Z}}$  cuyas propiedades asintóticas dependen de la región en la que se encuentre  $\lambda_{k,m}$ :

Dividimos el estudio en los siguientes casos:

i) Caso 1: autovalores  $\lambda_{k,m}$  de módulo mayor que  $\sqrt{2}k\pi$ .

ii) Caso 2: autovalores  $\lambda_{k,m}$  de módulo menor que  $\sqrt{2}k\pi$  y mayor que  $k\pi$ . En este caso encontraremos dos tipos distintos de autovalores

iii) Caso 3: dos autovalores  $\lambda_k^*$  y  $\lambda_k^{**}$  de módulo menor que  $k\pi$  y que van a tener partes reales que no tienden a cero cuando  $k$  tiende al infinito.

Precisamos que, mediante el análisis de los casos 1, 2 y 3, obtenemos la localización exacta de todos los autovalores del problema que tienen módulo suficientemente grande. En efecto, en el caso 1 se obtendrá información sobre todos los autovalores  $\lambda_{k,m}$  que, para  $k$  fijo, pero arbitrario, tienen módulo mayor que  $\sqrt{2}k\pi$ . En los casos 2 y 3 se analizarán todos los autovalores  $\lambda_{k,m}$  que, para  $k$  fijo, mayor que un valor dado  $k_0$ , tienen el módulo menor que  $\sqrt{2}k\pi$ . Por lo tanto obtenemos la localización de todos los autovalores de módulo mayor que  $k_0\pi$  dejando fuera sólo un número finito.

A continuación suponemos que  $k \in \mathbb{N}$ , ya que, en la ecuación (3.16), el parámetro  $k$  aparece solamente al cuadrado. El caso  $k = 0$  no se estudia ya que, por un lado, nos da información solamente sobre una rama de autovalores y, por otro lado, ha sido parcialmente discutido al demostrar que el decaimiento de la energía del sistema (3.15) no es uniforme (vease la Sección 3.3).

### 3.2.1 Algunos lemas técnicos

Empezamos por la demostración de unos lemas técnicos sobre las raíces del denominador de la fracción que aparece en el miembro derecho de (3.16).

Con este propósito introducimos el siguiente cambio de variable:

$$(3.18) \quad \sqrt{\left(\frac{\lambda}{k}\right)^2 + \pi^2} = z$$

con lo cual la ecuación (3.16) se transforma en:

$$(3.19) \quad e^{2kz} = -\frac{z^2 - \pi^2 - kz^3 + z\sqrt{z^2 - \pi^2}}{z^2 - \pi^2 + kz^3 - z\sqrt{z^2 - \pi^2}}$$

El primer lema nos indica la zona donde se encuentran las raíces del denominador de (3.19).

**Lema 3.1** Si  $\alpha$  es una raíz de la ecuación:

$$(3.20) \quad z^2 - \pi^2 + kz^3 - z\sqrt{z^2 - \pi^2} = 0$$

entonces, para  $k$  suficientemente grande,

$$(3.21) \quad \frac{\pi}{2\sqrt[3]{k}} < |\alpha| < \frac{2\pi}{\sqrt[3]{k}}.$$

**Demostración:**

Si  $\alpha$  es raíz de la ecuación (3.20) entonces:

$$\begin{aligned} |k||\alpha|^3 &= |\alpha^2 - \pi^2 - \alpha\sqrt{\alpha^2 - \pi^2}| \leq 2|\alpha|^2 + \pi|\alpha| + \pi^2 \leq \\ &\leq \max\{6|\alpha|^2, 3\pi^2\}. \end{aligned}$$

Obtenemos que

$$(3.22) \quad |\alpha| \leq \max\left\{\frac{6}{k}, \sqrt[3]{\frac{3\pi^2}{k}}\right\} < \frac{2\pi}{\sqrt[3]{k}} \text{ para todo } k \geq 1.$$

Por otro lado tenemos:

$$\begin{aligned} |k||\alpha|^3 &= |\alpha^2 - \pi^2 - \alpha\sqrt{\alpha^2 - \pi^2}| = \frac{\pi^2|\alpha^2 - \pi^2|}{|\alpha^2 - \pi^2 + \alpha\sqrt{\alpha^2 - \pi^2}|} \geq \\ &\geq \frac{\pi^2|\alpha^2 - \pi^2|}{|\alpha|^2 + \pi^2 + |\alpha|\sqrt{|\alpha|^2 + \pi^2}} \geq \frac{\pi^2(\pi^2 - |\alpha|^2)}{|\alpha|^2 + \pi^2 + |\alpha|(|\alpha| + \pi)}. \end{aligned}$$

Ahora, como (3.22) nos asegura que el modulo de  $\alpha$  es pequeño (por ejemplo menor que 2 si  $k > \pi^3$ ), resulta que

$$|\alpha| > \frac{\pi^2(\pi^2 - 4)}{8 + \pi^2 + \pi} > \frac{\pi}{2\sqrt[3]{k}}.$$

En conclusión obtenemos que se cumple (3.21) para  $k > \pi^3$ .

■

El segundo lema localiza todas las raíces de la ecuación (3.20).

**Lema 3.2** La ecuación (3.20) tiene, para  $k$  suficientemente grande, exactamente tres raíces  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  que cumplen las siguientes estimaciones:

$$(3.23) \quad \left| \alpha_i - \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{k}} \omega_i \right| \leq \frac{10}{\sqrt[3]{k^2}},$$

donde  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  son las tres raíces cúbicas de la unidad.

**Demostración:**

Estudiamos la relación que existe entre los ceros de la ecuación (3.20) y los de la ecuación:

$$(3.24) \quad kz^3 - \pi^2 = 0.$$

Esta última ecuación tiene tres raíces  $a_i = \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{k}}\omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , donde  $\omega_i$  son las tres raíces cúbicas de la unidad.

- Consideramos ahora las funciones:

$$u(z) = kz^3 - \pi^2, \quad v(z) = z\sqrt{z^2 - \pi^2} - z^2$$

definidas en el círculo  $\delta_0$  de centro 0 y radio  $\frac{2\pi}{\sqrt[3]{k}}$  donde las dos son analíticas.

En el círculo  $\delta_0$  tenemos:

$$\begin{aligned} |v(z)| &= |z\sqrt{z^2 - \pi^2} - z^2| \leq |z|(\sqrt{|z|^2 + \pi^2} + |z|) \leq \\ &\leq |z|(2|z| + \pi) \leq |z|(4\pi + \pi) < \frac{10\pi^2}{\sqrt[3]{k}} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$(3.25) \quad |v(z)| < \frac{10\pi^2}{\sqrt[3]{k}} \text{ si } |z| \leq \frac{2\pi}{\sqrt[3]{k}}.$$

Por otro lado,

$$|u(z)| = |kz^3 - \pi^2| = k|z - \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{k}}\omega_1| |z - \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{k}}\omega_2| |z - \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{k}}\omega_3|.$$

Si  $z$  pertenece a la circunferencia  $\delta_0$  tenemos que

$$|z - \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{k}}\omega_i| \geq |z| - |\sqrt[3]{\frac{\pi^2}{k}}\omega_i| = \frac{2\pi}{\sqrt[3]{k}} - \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{k}} > \sqrt[3]{\frac{\pi^3}{k}}$$

y por lo tanto

$$(3.26) \quad |u(z)| > \pi^3 \text{ si } |z| = \frac{2\pi}{\sqrt[3]{k}}.$$

Las desigualdades (3.25) y (3.26) implican que, para todo  $z$  perteneciente a la circunferencia  $\delta_0$ , se cumple  $|u(z)| > |v(z)|$  y por lo tanto, aplicando el Teorema de Rouché, se obtiene que la ecuación (3.20) tiene dentro de este círculo el mismo número de raíces que la ecuación (3.24).

Teniendo en cuenta el Lema 3.1, resulta que la ecuación (3.20) tiene exactamente tres ceros que están situados dentro del anillo:

$$A = \left\{ z \in C : \frac{\pi}{2\sqrt[3]{k}} < |z| < \frac{2\pi}{\sqrt[3]{k}} \right\}.$$

· Pasamos ahora a demostrar que estos ceros se aproximan a los ceros de la ecuación (3.24).

Consideramos los círculos  $\delta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  de centros  $a_i$  y radios  $\frac{10}{\sqrt[3]{k^2}}$  que están contenidos dentro del anillo  $A$  (ver Fig. 3).

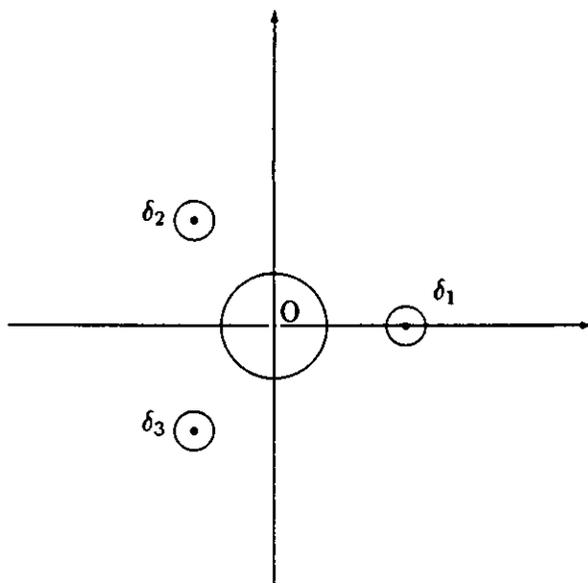


Fig. 3

La desigualdad (3.25) obtenida anteriormente para  $v$  sigue siendo válida en los círculos  $\delta_i$ . Además, sobre las circunferencias de estos círculos

$$\begin{aligned} |u(z)| &= |kz^3 - \pi^2| = k \left| z - \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{k}}\omega_1 \right| \left| z - \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{k}}\omega_2 \right| \left| z - \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{k}}\omega_3 \right| > \\ &> k \frac{10}{\sqrt[3]{k^2}} \left( \frac{\pi}{\sqrt[3]{k}} \right)^2 = \frac{10\pi^2}{\sqrt[3]{k}}. \end{aligned}$$

Aplicando de nuevo el Teorema de Rouché resulta que los ceros de la ecuación (3.20) están situados dentro de los círculos  $\delta_i$ .

■

Obtenemos un resultado similar para los ceros del numerador de la función que aparece en el miembro derecho de la ecuación (3.19).

**Lema 3.3** *La ecuación*

$$(3.27) \quad z^2 - \pi^2 - kz^3 + z\sqrt{z^2 - \pi^2} = 0$$

*tiene exactamente tres raíces  $\beta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  que cumplen las siguientes estimaciones:*

$$(3.28) \quad \left| \beta_i - \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{k}}\tilde{\omega}_i \right| \leq \frac{10}{\sqrt[3]{k^2}},$$

donde  $\tilde{\omega}_i = -\omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

**Demostración:**

Observamos simplemente que mediante el cambio de variable  $z = -s$  la ecuación (3.27) se transforma en la ecuación (3.20).

■

Para el análisis del último tipo de autovalores necesitaremos informaciones más precisas sobre la parte imaginaria de la raíz  $\alpha_1$  (hasta ahora sabemos que  $\alpha_1$  está en el círculo  $\delta_1$  pero no sabemos el orden de magnitud de su parte imaginaria). Para ésto demostramos un lema que, usando las estimaciones del Lema 3.2, obtiene una localización más exacta de la raíz  $\alpha_1$ .

**Lema 3.4** *La raíz  $\alpha_1$  de la ecuación (3.20) cumple la siguiente estimación:*

$$(3.29) \quad \alpha_1 = \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{k}} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{\pi}{k^2}} i + o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}\right).$$

**Demostración:**

Eta 1: Demostramos primero que la ecuación:

$$(3.30) \quad -\pi^2 + kz^3 - \pi z i = 0$$

tiene una sólo raíz  $p_k$  en el círculo  $\delta_1$  de centro  $\sqrt[3]{\frac{\pi^2}{k}}$  y radio  $\frac{10}{\sqrt[3]{k^2}}$  y que verifica:

$$p_k = \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{k}} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{\pi}{k^2}} i + o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}\right).$$

**Observación 3.5** *Observemos que en el miembro izquierdo de la ecuación (3.30) aparece la parte dominante,  $-\pi z i$ , de la expresión  $-z\sqrt{z^2 - \pi^2}$  cuando  $z \rightarrow 0$ . Como la presencia de la cantidad  $-z\sqrt{z^2 - \pi^2}$  en la ecuación (3.20) se debe al término disipativo del sistema inicial, es lógico pensar que la información adicional que tendremos sobre  $\alpha_k$  será muy útil a la hora de encontrar autovalores con parte real "significativa" (vease el apartado 4.2.5).*

La existencia de la raíz  $p_k$  en el interior de  $\delta_1$  se obtiene aplicando las mismas estimaciones del Lema 3.2 a las funciones  $u(z) = -\pi^2 + kz^3$  y  $v(z) = \pi z i$ .

Consideramos ahora  $r_k = p_k - \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{k}}$  e introducimos esta nueva variable en la ecuación verificada por  $p_k$ . Se obtiene:

$$kr_k^3 + 3kr_k^2 \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{k}} + 3kr_k \sqrt[3]{\frac{\pi^4}{k^2}} - \pi r_k i - \pi \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{k}} i = 0.$$

Multiplicamos en la última relación por  $\sqrt[3]{k}$  y separamos los términos de la siguiente forma:

$$\sqrt[3]{k} \left( 3kr_k \sqrt[3]{\frac{\pi^4}{k^2}} - \pi \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{k}} i \right) = \sqrt[3]{k} \left( -kr_k^3 - 3kr_k^2 \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{k}} + \pi r_k i \right).$$

Como hemos visto en la primera parte que  $|r_k| = \left| p_k - \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{k}} \right| \leq \frac{10}{\sqrt[3]{k^2}}$  resulta que el miembro derecho tiende a cero cuando  $k$  tiende al infinito.

Obtenemos que:

$$r_k = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{\pi}{k^2}} i + o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}\right),$$

y de aquí se deduce que:

$$p_k = \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{k}} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{\pi}{k^2}} i + o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}\right).$$

Este resultado nos muestra que la parte imaginaria de  $p_k$  es positiva y de orden  $\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}$ .

Etapa 2: Demostramos ahora que la raíz  $\alpha_1$  de la ecuación (3.20) pertenece al círculo  $C$  centrado en  $p_k$  y de radio  $s_k = \frac{1}{\sqrt[3]{k^3}}$ . De aquí resulta inmediatamente que  $\alpha_1$  cumple la estimación (3.29).

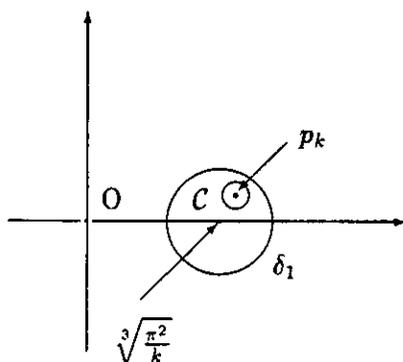


Fig.4

Aplicamos nuevamente el Teorema de Rouché. Para ello consideramos las funciones:

$$u(z) = -\pi^2 + kz^3 - \pi z i, \quad v(z) = -z^2 + z\sqrt{z^2 - \pi^2} - \pi z i.$$

Para un elemento  $z$  en el círculo  $\delta_1$  se tiene:

$$|v(z)| = |z|^2 \left| -1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - \pi^2} + \pi i} \right| \leq 2|z|^2 \leq \frac{100}{\sqrt[3]{k^2}}.$$

Por otro lado, aplicando la fórmula de Taylor alrededor del punto  $p_k$ , se obtiene:

$$u(z) = \frac{u'(p_k)(z - p_k)}{2\pi i} - \frac{(z - p_k)^2}{2\pi i} \int_{\hat{\gamma}} \frac{u(\zeta) d\zeta}{(\zeta - p_k)^2(\zeta - z)},$$

donde  $\hat{\gamma}$  es un círculo de centro  $p_k$  y radio  $S_k = \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$ .

Estimamos primero el término de error:

$$\left| \frac{(z - p_k)^2}{2\pi i} \int_{\hat{\gamma}} \frac{u(\zeta) d\zeta}{(\zeta - p_k)^2(\zeta - z)} \right| \leq \frac{s_k^2}{2\pi} \frac{M}{S_k^2(S_k - s_k)} 2\pi S_k \leq 2M \sqrt[12]{\frac{1}{k^{10}}},$$

donde  $M$  es una cota superior de la función  $u$  en el círculo  $\hat{\gamma}$ .

Por otro lado

$$|z - p_k| |u'(p_k)| = s_k |3kp_k^2 - \pi i| \geq s_k (3k|p_k|^2 - \pi) \geq$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt[4]{k^3}} (3k \sqrt[3]{\frac{\pi^4}{k^2}} - \pi) \geq \frac{1}{2} \sqrt[12]{\frac{1}{k^5}}.$$

Obtenemos que, para  $k$  suficientemente grande y  $z$  sobre la circunferencia  $C$ :

$$\begin{aligned} |u(z)| &> |z - p_k| |u'(p_k)| - 2M \sqrt[12]{\frac{1}{k^{10}}} \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \sqrt[12]{\frac{1}{k^5}} - 2M \sqrt[12]{\frac{1}{k^{10}}} > \frac{1}{4 \sqrt[12]{k^5}} > \frac{100}{\sqrt[3]{k^2}}. \end{aligned}$$

Resulta que, para  $k$  suficientemente grande,  $|u(z)| > |v(z)|$  sobre la circunferencia  $C$ .

Por lo tanto, la ecuación (3.29) tiene la raíz  $\alpha_1$  en el círculo  $C$  y por consiguiente cumple la estimación (3.29).

■

**Observación 3.6** El lema anterior nos indica que la raíz  $\alpha_1$  de la ecuación (3.20) tiene una parte imaginaria positiva de orden  $\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}$ .

A continuación pasamos ya al análisis de los autovalores y las autofunciones según el plan que presentamos al principio de esta sección.

### 3.2.2 Autovalores de módulo mayor que $\sqrt{2} k \pi$

En este apartado encontramos, para cada  $k \in \mathbb{N}^*$  fijo, las raíces de la ecuación (3.16) y damos una estimación de aquellas raíces que tienen la propiedad  $|\lambda| \geq \sqrt{2} k \pi$ .

**Teorema 3.2** Para cada  $k \in \mathbb{N}^*$ , la ecuación (3.16) tiene una sucesión de ceros  $(\lambda_{k,m})_{m \in \mathbb{N}^*} \cup \{\lambda_k^*\}$  con parte imaginaria positiva y otra sucesión de ceros  $(\lambda_{k,-m})_{m \in \mathbb{N}^*} \cup \{\lambda_k^{**}\}$  con parte imaginaria negativa y con la propiedad  $\lambda_{k,-m} = \bar{\lambda}_{k,m}$  si  $m > 0$  y  $\lambda_k^{**} = \bar{\lambda}_k^*$ .

Los autovalores  $\lambda_{k,m}$  con  $|\lambda_{k,m}| > \sqrt{2} k \pi$  se aproximan al eje imaginario cuando  $|m|$  tiende al infinito, cumpliendo las siguientes estimaciones:

$$(3.31) \quad \begin{aligned} |\lambda_{k,m} - \sqrt{k^2 + m^2} \pi i| &\leq \frac{24}{\sqrt{m^2 + k^2} \pi} \text{ si } \operatorname{Im} \lambda_{k,m} > 0, \quad (m > k > 0), \\ |\lambda_{k,m} + \sqrt{k^2 + m^2} \pi i| &\leq \frac{24}{\sqrt{m^2 + k^2} \pi} \text{ si } \operatorname{Im} \lambda_{k,m} < 0, \quad (m < -k < 0). \end{aligned}$$

En particular, los autovalores  $\lambda_{k,m}$  se aproximan a los autovalores  $\pm \sqrt{k^2 + m^2} \pi i$  de la ecuación de ondas en  $\Omega$  con condiciones de Neumann homogéneas en todo  $\partial\Omega$ .

**Demostración:** Escribamos la ecuación (3.16) en una forma que permita un análisis más sencillo de las raíces y para ésto notemos  $\sqrt{\lambda^2 + k^2 \pi^2} = \mu$ . Se obtiene la siguiente ecuación en  $\mu$ :

$$(3.32) \quad e^{2\mu} = -\frac{\mu^2 - k^2 \pi^2 - \mu(\mu^2 - \sqrt{\mu^2 - k^2 \pi^2})}{\mu^2 - k^2 \pi^2 + \mu(\mu^2 - \sqrt{\mu^2 - k^2 \pi^2})}.$$

Ponemos la ecuación (3.32) en la forma:

$$(3.33) \quad e^{2\mu} - 1 = -\frac{2(\mu^2 - k^2\pi^2)}{\mu^2 - k^2\pi^2 + \mu(\mu^2 - \sqrt{\mu^2 - k^2\pi^2})}$$

e intentamos localizar los ceros aplicando el Teorema de Rouché.

Consideramos las funciones

$$f(z) = e^{2z} - 1 \text{ y } g(z) = -\frac{2(z^2 - k^2\pi^2)}{z^2 - k^2\pi^2 + z(z^2 - \sqrt{z^2 - k^2\pi^2})}$$

y observamos que la ecuación  $f(z) = 0$  tiene las soluciones  $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{Z}}$  con  $\alpha_m = m\pi i$ .

Definimos para cada  $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ :

- los cuadrados  $\gamma_m^1$  de centro  $\alpha_m$  y lado  $2\varepsilon_m$

- los rectángulos  $\gamma_m^2$  definidos por las rectas  $\operatorname{Re} z = \pm\delta_m$  e  $\operatorname{Im} z = m\pi \pm \frac{3\pi}{4}$ .

Además consideramos el cuadrado  $\gamma^0$  de centro 0 y lado  $2M_k$  (ver Fig. 2).

Las constantes  $\varepsilon_m$ ,  $\delta_m$  y  $M_k$  serán elegidas de tal manera que:

$$(3.34) \quad |f(z)| > |g(z)| \text{ para todo } z \in \gamma_m^1 \cup \gamma_m^2 \cup \gamma^0.$$

En primer lugar tenemos:

$$|f(z)|^2 = |e^{2z} - 1|^2 = (e^{2\operatorname{Re} z} - \cos 2\operatorname{Im} z)^2 + (\operatorname{sen} 2\operatorname{Im} z)^2$$

y por lo tanto, para todo número complejo  $z$ ,

$$(3.35) \quad |f(z)| \geq \max \{ |e^{2\operatorname{Re} z} - 1|, |\operatorname{sen} 2\operatorname{Im} z| \}.$$

En segundo lugar en la región del plano complejo:

$$(3.36) \quad |z| > \max \{ k\pi, 4 \}$$

la función  $g(z)$  es analítica (el denominador no se anula) y tenemos:

$$|g(z)| = \left| \frac{2(z^2 - k^2\pi^2)}{z^2 - k^2\pi^2 + z(z^2 - \sqrt{z^2 - k^2\pi^2})} \right| \leq \frac{2}{|z| \left| \frac{z^2 - \sqrt{z^2 - k^2\pi^2}}{z^2 - k^2\pi^2} \right| - 1}$$

Por otro lado para  $z$  cumpliendo (3.36) se obtiene:

$$|z| \left| \frac{z^2 - \sqrt{z^2 - k^2\pi^2}}{z^2 - k^2\pi^2} \right| \geq |z| \frac{|z|^2 - |\sqrt{z^2 - k^2\pi^2}|}{|z|^2 + k^2\pi^2} \geq |z| \frac{|z|^2 - \sqrt{2}|z|}{|z|^2 + k^2\pi^2} \geq \frac{|z|}{4} > 1.$$

Por lo tanto resulta que, para cualquier  $z$  con  $|z| > \max \{ k\pi, 4 \}$ , se tiene:

$$(3.37) \quad |g(z)| \leq \frac{8}{|z| - 4}.$$

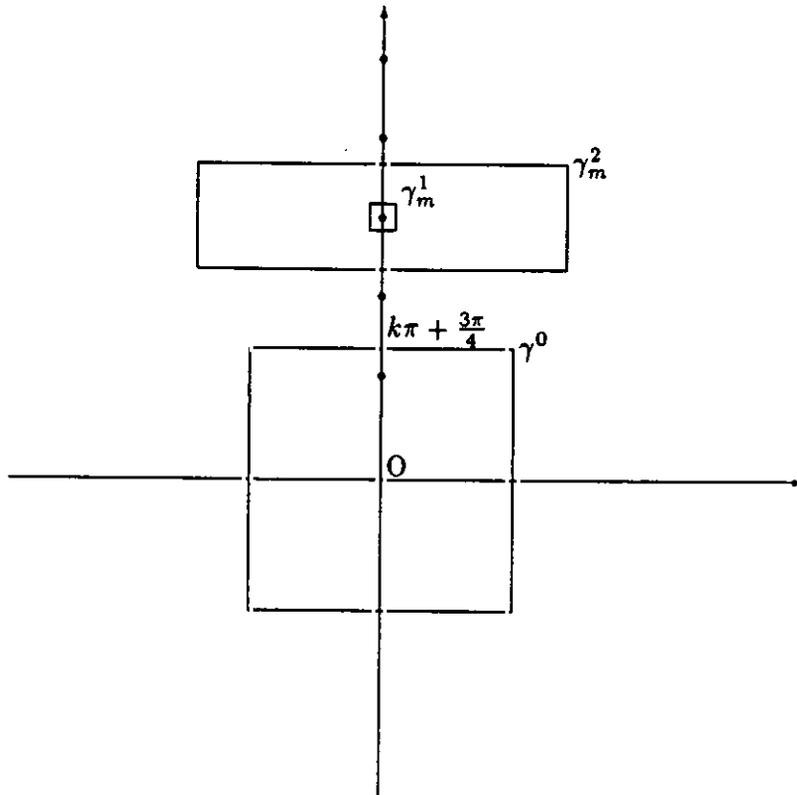


Fig. 5

Determinamos ahora las condiciones que tienen que satisfacer las constantes  $\varepsilon_m$ ,  $\delta_m$  y  $M_k$  para que se cumplan las desigualdades (3.34).

i) Si  $z$  pertenece a  $\gamma_m^1$  y además cumple (3.36), teniendo en cuenta las estimaciones anteriores, obtenemos que  $|f(z)| > \varepsilon_m > |g(z)|$  si:

$$(3.38) \quad \frac{16}{2m\pi - 9} < \varepsilon_m < \frac{1}{2}.$$

Aplicando el Teorema de Rouché resulta que existe, para cada  $k$ , una única raíz de la ecuación (3.32) en cada cuadrado  $\gamma_m^1$  si  $m \geq k + 1$ . Denotamos  $\mu_{k,m}$  a estas raíces.

ii) Si  $z$  pertenece a  $\gamma_m^2$  y además cumple (3.36) obtenemos que  $|f(z)| > \frac{1}{2} > |g(z)|$  si:

$$(3.39) \quad \delta_m > \frac{1}{2}.$$

Como la condición que tiene que cumplir  $\delta_m$  no impone ninguna cota superior, aplicando de nuevo el Teorema de Rouché, resulta que, para cada  $k$ , y  $m \geq k + 1$  en las franjas

$$\left(m\pi - \frac{3\pi}{4}\right) i \leq \Im m z \leq \left(m\pi + \frac{3\pi}{4}\right) i$$

la ecuación (3.32) tiene el mismo número de ceros que la ecuación  $f(z) = 0$ . Esto implica que no existen otras raíces de la ecuación (3.32) en la región del plano complejo definida por (3.36), excepto las encontradas ya en el apartado i).

iii) Si elegimos

$$(3.40) \quad M_k = k\pi + \frac{3\pi}{4}$$

obtenemos, como en el apartado ii), que, si  $z$  pertenece a  $\gamma^0$ ,

$$|f(z)| > \frac{1}{2} > |g(z)|.$$

Aplicando el Teorema de Rouché resulta que, para cada  $k$ , el número de soluciones de la ecuación (3.32) en el cuadrado  $\gamma^0$  es igual al número de ceros de la ecuación  $f(z) = 0$  más el número de polos de la función  $g(z)$  situados en  $\gamma^0$ . Como hemos visto en la subsección anterior,  $N = 3$  y, por lo tanto, la ecuación (3.32) tiene  $2k + 4$  ceros en el cuadrado  $\gamma^0$ .

Des hacemos ahora el cambio de variable  $\mu \rightarrow \lambda$  para obtener los ceros de la ecuación (3.16).

Primero observamos que si  $\lambda$  es solución de la ecuación (3.16) entonces  $\bar{\lambda}$  también lo es y, por lo tanto, basta encontrar los autovalores  $\lambda$  con  $\text{Im } \lambda > 0$ , los demás siendo conjugados de éstos.

Por otro lado, estamos interesados en aquellas raíces de la ecuación (3.16) que tengan la parte real positiva, puesto que las soluciones de la ecuación (3.15) tienden a cero cuando  $t$  va al infinito.

También observamos que la relación entre  $\mu$  y  $\lambda$  que hemos usado al principio

$$\sqrt{\lambda^2 + k^2\pi^2} = \mu$$

queda determinada sin ambigüedad si se considera que  $\text{Re } \mu > 0$ .

Con las dos observaciones anteriores obtenemos que la correspondencia entre  $\mu$  y  $\lambda$  es biunívoca. Resulta que si  $\mu$  es solución de (3.32) entonces  $\lambda = \sqrt{\mu^2 - k^2\pi^2}$  es solución de (3.16) y no hay más raíces de esta última ecuación. La recíproca también es válida.

El análisis anterior nos da todas las raíces  $\mu$  de la ecuación (3.32) con la propiedad  $|\mu| > \max\{k\pi, 4\}$ . Mediante el cambio  $\lambda = \sqrt{\mu^2 - k^2\pi^2}$  obtenemos todas las raíces de la ecuación (3.16) con la propiedad  $|\lambda| > \sqrt{2}k\pi$ .

Para los autovalores  $\lambda$  con  $\text{Im } \lambda > 0$  calculamos:

$$\begin{aligned} & |\lambda - \sqrt{m^2 + k^2}\pi i| = |\sqrt{\mu^2 - k^2\pi^2} - \sqrt{m^2 + k^2}\pi i| = \\ & = \frac{|\mu^2 - k^2\pi^2 + (m^2 + k^2)\pi^2|}{|\sqrt{\mu^2 - k^2\pi^2} + \sqrt{m^2 + k^2}\pi i|} = \frac{|\mu - m\pi i| |\mu + m\pi i|}{\sqrt{|\text{Im } \sqrt{\mu^2 - k^2\pi^2} + \sqrt{m^2 + k^2}\pi|^2 + |\text{Re } \sqrt{\mu^2 - k^2\pi^2}|^2}} \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon_m |\mu + m\pi i|}{\text{Im } \sqrt{\mu^2 - k^2\pi^2} + \sqrt{m^2 + k^2}\pi} \leq \frac{\varepsilon_m(\varepsilon_m + 2m\pi)}{\sqrt{k^2 + m^2}\pi} \leq \frac{3m}{\sqrt{k^2 + m^2}} \varepsilon_m. \end{aligned}$$

Resulta que para cada  $k$  y  $m > k + 1$  obtenemos que los autovalores  $\lambda_{k,m}$  con  $\text{Im } \lambda_{k,m} > 0$  cumplen la siguiente estimación:

$$(3.41) \quad |\lambda_{k,m} - \sqrt{m^2 + k^2}\pi i| \leq \frac{24}{\sqrt{k^2 + m^2}\pi}.$$

Un resultado semejante se obtiene para autovalores  $\lambda_{k,m}$  con  $\text{Im } \lambda_{k,m} < 0$ :

$$(3.42) \quad |\lambda_{k,m} + \sqrt{m^2 + k^2} \pi i| \leq \frac{24}{\sqrt{k^2 + m^2} \pi}.$$

Con esto queda concluida la prueba de la proposición. ■

**Observación 3.7** El teorema anterior nos asegura que, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , existe una sucesión de autovalores  $(\lambda_{k,m})_{m \in \mathbb{Z}} \cup \{\lambda_k^*, \lambda_k^{**}\}$ . Esta forma de notar los autovalores necesita una justificación.

En primer lugar las estimaciones (3.31) nos dan la localización exacta de los autovalores  $\lambda_{k,m}$  con  $|m| \geq k + 1$ . En este caso un autovalor  $\lambda_{k,m}$  está cerca de los valores  $\pm \sqrt{k^2 + m^2} \pi i$  (según  $m$  es positivo o negativo). Por lo tanto, el segundo índice  $m$  del autovalor  $\lambda_{k,m}$  viene dado por el valor  $\pm \sqrt{k^2 + m^2} \pi i$  más cercano.

Para los demás autovalores, que se encuentran en el círculo centrado en el origen y de radio  $\sqrt{2} k \pi$ , el teorema anterior no nos da una localización más precisa. Lo que sabemos es que en este círculo hay  $2k + 4$  ceros de la ecuación (3.32). Como vamos a ver en los tres apartados siguientes, a estos ceros le corresponden  $2k + 2$  autovalores  $\lambda$  que denotamos por  $\lambda_k^*$ ,  $\lambda_k^{**}$ ,  $\lambda_{k,\pm 1}$ ,  $\lambda_{k,\pm 2}$ , ...,  $\lambda_{k,\pm k}$  (veanse los Teoremas 3.3, 3.4 y 3.5 y la Proposición 3.5). La ordenación de estos autovalores se hace en orden creciente del módulo. Por lo tanto, para cada  $k$  fijo,  $\lambda_k^*$  y  $\lambda_k^{**}$  tienen el módulo más pequeño mientras que el módulo de  $\lambda_{k,\pm k}$  se aproxima a  $\sqrt{2} k \pi$ .

**Observación 3.8** La Proposición anterior nos muestra que, fijando la frecuencia de oscilación en la dirección  $x$  ( $k$  fijo) y considerando vibraciones de frecuencia grande en la dirección  $y$  ( $k \ll m$ ), el comportamiento del sistema se asemeja al de la ecuación de ondas con condiciones Neumann homogéneas en todo  $\partial\Omega$ . La influencia de la cuerda vibrante disipativa colocada en la parte  $\Gamma_0$  de la frontera es, por tanto, despreciable cuando hay una relación de este tipo entre las dos frecuencias (vease también la siguiente proposición). Recordamos que un resultado semejante se obtuvo en el caso conservativo (vease la Observación 3.2 y la Proposición 3.1).

**Observación 3.9** El resultado obtenido muestra que ni siquiera el problema unidimensional con  $k$  fijo presenta decaimiento uniforme. Esto está en contraste con lo que ocurre con la ecuación de ondas con la disipación clásica:

$$\begin{cases} \Phi_{tt} - \Delta \Phi = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} + \Phi_t = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty). \end{cases}$$

En este último caso, con  $k$  fijo hay decaimiento uniforme aunque, globalmente el decaimiento no es uniforme como muestra el ejemplo de Ralston (ver [41]).

Se deduce de aquí que en nuestro sistema no es la ausencia de condiciones de tipo geométrico sobre el soporte del mecanismo disipativo la que hace que la disipación sea muy débil, sino la estructura híbrida del problema. Esto será ilustrado en el último capítulo cuando estudiamos el caso en que  $\Omega$  es una bola y la disipación se ejerce en toda su frontera.

Analizamos ahora las autofunciones asociadas a los autovalores encontrados. Consideramos el problema con condiciones Neumann homogéneas en toda la frontera:

$$(3.43) \quad \begin{cases} \Phi_{tt} - \Delta \Phi = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial \Omega \times (0, \infty) \end{cases}$$

que tiene las autofunciones  $\left( \frac{\pm i}{\sqrt{k^2 + m^2 \pi}} \cos m\pi y \cos k\pi x, \quad \cos m\pi y \cos k\pi x \right)$ .

Consideramos ahora la función:

$$(3.44) \quad \psi_{k,m} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{m+1} i}{\sqrt{k^2 + m^2 \pi}} \cos m\pi y \cos k\pi x \\ (-1)^{m+1} \cos m\pi y \cos k\pi x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^t.$$

**Observación 3.10** Observemos que  $\|\psi_{k,m}\|_{\mathcal{X}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**Proposición 3.2** Las autofunciones  $\varphi_\lambda$  correspondientes a los autovalores  $\lambda = \lambda_{k,m}$  encontrados en la proposición anterior satisfacen:

$$(3.45) \quad \|\varphi_\lambda - \psi_{k,m}\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{c}{m}$$

donde  $c$  es una constante que no depende de  $m$  y  $k$ .

**Demostración:**

Hemos visto que  $\sqrt{\lambda^2 + k^2 \pi^2} = \mu = m\pi i + \alpha(m)$  con  $|\alpha(m)| \leq \frac{1}{m}$ .

Escribimos la autofunción  $\varphi_\lambda$  en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} \cosh \sqrt{\lambda^2 + k^2 \pi^2} (y-1) \cos k\pi x \\ -\cosh \sqrt{\lambda^2 + k^2 \pi^2} (y-1) \cos k\pi x \\ -\frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2 \pi^2}}{\lambda^2} \sinh (\sqrt{\lambda^2 + k^2 \pi^2}) \cos k\pi x \\ \frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2 \pi^2}}{\lambda} \sinh (\sqrt{\lambda^2 + k^2 \pi^2}) \cos k\pi x \end{pmatrix}^t = \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^m \frac{1}{\lambda} \cosh \alpha(m)(y-1) \cos m\pi y \cos k\pi x \\ (-1)^{m+1} \cosh \alpha(m)(y-1) \cos m\pi y \cos k\pi x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^t + \end{aligned}$$

$$= + \begin{pmatrix} (-1)^m \frac{1}{\lambda} \operatorname{senh} \alpha(m)(y-1) \operatorname{sen} m\pi y \cos k\pi x \\ (-1)^{m+1} \operatorname{senh} \alpha(m)(y-1) \operatorname{sen} m\pi y \cos k\pi x \\ (-1)^{m+1} \frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2\pi^2}}{\lambda^2} \operatorname{senh} \alpha(m) \cos k\pi x \\ (-1)^m \frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2\pi^2}}{\lambda} \operatorname{senh} \alpha(m) \cos k\pi x \end{pmatrix}^t$$

Sean  $\varphi_\lambda^1$  y  $\varphi_\lambda^2$  las dos funciones en las que hemos descompuesto la función  $\varphi_\lambda$ . Evaluamos primero la norma de  $\varphi_\lambda^1$  en  $\mathcal{X}$ :

$$\begin{aligned} \|\varphi_\lambda^1\|_{\mathcal{X}}^2 &= \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \left| \frac{1}{\lambda} \operatorname{senh} \alpha(m)(y-1) \operatorname{sen} m\pi y \cos k\pi x \right|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{k\pi}{\lambda} \operatorname{senh} \alpha(m)(y-1) \operatorname{sen} m\pi y \operatorname{sen} k\pi x \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left| \left( \frac{\alpha(m)}{\lambda} \cosh \alpha(m)(y-1) \operatorname{sen} m\pi y + \frac{m\pi}{\lambda} \operatorname{senh} \alpha(m)(y-1) \cos m\pi y \right) \cos k\pi x \right|^2 \right\} dx dy + \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 |\operatorname{senh} \alpha(m)(y-1) \operatorname{sen} m\pi y \cos k\pi x|^2 dx dy + \\ &\quad + \int_0^1 \left\{ \left| \frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2\pi^2}}{\lambda^2} \operatorname{senh} \alpha(m) \cos k\pi x \right|^2 + \left| \frac{k\pi \sqrt{\lambda^2 + k^2\pi^2}}{\lambda^2} \operatorname{senh} \alpha(m) \operatorname{sen} k\pi x \right|^2 \right\} dx + \\ &\quad + \int_0^1 \left| \frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2\pi^2}}{\lambda} \operatorname{senh} \alpha(m) \cos k\pi x \right|^2 dx \leq \int_0^1 \left\{ \left| \frac{1}{\lambda} \operatorname{senh} \alpha(m)(y-1) \right|^2 + \right. \\ &\quad \left. \left| \frac{\alpha(m)}{\lambda} \cosh \alpha(m)(y-1) \right|^2 + \frac{(k^2 + m^2)\pi^2}{|\lambda|^2} |\operatorname{senh} \alpha(m)(y-1)|^2 + |\operatorname{senh} \alpha(m)(y-1)|^2 \right\} dy + \\ &\quad + \left| \frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2\pi^2}}{\lambda^2} \operatorname{senh} \alpha(m) \right|^2 + \left| \frac{k\pi \sqrt{\lambda^2 + k^2\pi^2}}{\lambda^2} \operatorname{senh} \alpha(m) \right|^2 + \left| \frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2\pi^2}}{\lambda} \operatorname{senh} \alpha(m) \right|^2 \leq \\ &\quad \leq 4 \frac{|\alpha(m)|^2}{|\lambda|^2} + 4|\alpha(m)|^2 + 5 \frac{|\alpha(m)|^2}{|\lambda|^2} + 4 \frac{(k^2 + m^2)\pi^2 |\alpha(m)|^2}{|\lambda|^2} + \\ &\quad + 4|\alpha(m)|^2 \left( \left| \frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2\pi^2}}{\lambda^2} \right|^2 + \left| \frac{k\pi \sqrt{\lambda^2 + k^2\pi^2}}{\lambda^2} \right|^2 + \left| \frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2\pi^2}}{\lambda} \right|^2 \right) \leq 33|\alpha(m)|^2 \leq \frac{c'}{m^2}. \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que, para  $m$  suficientemente grande,

$$|\operatorname{senh} \alpha(m)| \leq 2|\alpha(m)| \text{ y } |\cosh \alpha(m)| \leq 5.$$

\* Se obtiene por lo tanto que:

$$(3.46) \quad \|\varphi_\lambda^2\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{c'}{m}.$$

Pasando ahora a evaluar la norma de  $\varphi_\lambda^1 - \psi_{k,m}$  en  $\mathcal{X}$  obtenemos:

$$\begin{aligned}
\| \varphi_\lambda^1 - \psi_{k,m} \|_{\mathcal{X}} &= \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{i}{\sqrt{m^2 + k^2 \pi}} + \frac{1}{\lambda} \cosh \alpha(m)(y-1) \right|^2 |\cos m\pi y \cos k\pi x|^2 dx dy + \\
&\int_0^1 \int_0^1 \left\{ \left| \frac{i}{\sqrt{m^2 + k^2 \pi}} + \frac{1}{\lambda} \cosh \alpha(m)(y-1) \right|^2 |k\pi \cos m\pi y \operatorname{sen} k\pi x|^2 + \right. \\
+ \left. \left| \frac{i}{\sqrt{m^2 + k^2 \pi}} + \frac{1}{\lambda} \cosh \alpha(m)(y-1) \right|^2 |m\pi \operatorname{sen} m\pi y \cos k\pi x|^2 + \left| \frac{\alpha(m)}{\lambda} \operatorname{senh} \alpha(m)(y-1) \right|^2 \right. \\
&\left. |\cos m\pi y \cos k\pi x|^2 \right\} dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |(1 - \cosh \alpha(m)(y-1)) \cos m\pi y \cos k\pi x|^2 dx dy \leq \\
&\leq \int_0^1 \left\{ \left| \frac{i}{\sqrt{m^2 + k^2 \pi}} + \frac{1}{\lambda} \cosh \alpha(m)(y-1) \right|^2 + \right. \\
&\quad + \left| \frac{i(k^2 + m^2)\pi^2}{\sqrt{m^2 + k^2 \pi}} + \frac{(k^2 + m^2)\pi^2}{\lambda} \cosh \alpha(m)(y-1) \right|^2 + \\
&\quad + \left. \left| \frac{\alpha(m)}{\lambda} \operatorname{senh} \alpha(m)(y-1) \right|^2 + |1 - \cosh \alpha(m)(y-1)|^2 \right\} dy \leq \\
&\leq \left| \frac{i}{\sqrt{m^2 + k^2 \pi}} + \frac{1}{\lambda} \right|^2 + \int_0^1 \left| \frac{1}{\lambda} (1 - \cosh \alpha(m)(y-1)) \right|^2 dy + \\
&+ (k^2 + m^2)\pi^2 \left| \frac{i}{\sqrt{m^2 + k^2 \pi}} + \frac{1}{\lambda} \right|^2 + (m^2 + k^2)\pi^2 \int_0^1 \left| \frac{1}{\lambda} (1 - \cosh \alpha(m)(y-1)) \right|^2 dy + \\
&+ \int_0^1 \left| \frac{\alpha(m)}{\lambda} \operatorname{senh} \alpha(m)(y-1) \right|^2 dy + \int_0^1 |1 - \cosh \alpha(m)(y-1)|^2 dy \leq \\
&\leq \frac{c''}{m^2} + 4|\alpha(m)|^2 + 2\frac{c''}{m^2} + 8|\alpha(m)|^2 + 4|\alpha(m)|^2 + 4|\alpha(m)|^2 \leq \frac{c'''}{m^2}
\end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que, para  $m$  suficientemente grande,

$$|1 - \cosh \alpha(m)| \leq 2 |\alpha(m)|.$$

Obtenemos de aquí que

$$(3.47) \quad \| \varphi_\lambda^1 - \psi_{k,m} \|_{\mathcal{X}} \leq \frac{c'''}{m}.$$

Las estimaciones (3.46) y (3.47) implican que

$$\| \varphi_\lambda - \psi_{k,m} \|_{\mathcal{X}} \leq \frac{c}{m}.$$

■

**Observación 3.11** Según se puede ver en la demostración de la proposición anterior, la energía de  $\varphi_\lambda$  concentrada sobre  $\Gamma_0$ , que viene dada por las últimas dos componentes, tiende a cero cuando  $\lambda$  tiende al infinito. Esta parte de la energía es mucho menor que la concentrada en  $\Omega$ , que es del orden de la unidad.

### 3.2.3 Autovalores de módulo menor que $\sqrt{2}k\pi$ y mayor que $k\pi$ (primera parte)

En esta subsección y en la siguiente nos proponemos encontrar, para  $k$  suficientemente grande, estimaciones de los autovalores:  $\lambda_{k,\pm 1}, \lambda_{k,\pm 2}, \dots, \lambda_{k,\pm k}$ , que están ordenados en orden creciente del módulo.

Igual que en la sección anterior se considera  $k \in \mathbb{N}^*$ . Las estimaciones serán exclusivamente válidas para valores de  $k$  suficientemente grandes ya que los desarrollos asintóticos obtenidos así lo exigen.

El siguiente teorema ofrece estimaciones para  $\lambda_{k,\pm 1}, \lambda_{k,\pm 2}, \dots, \lambda_{k,\pm q}$  con  $q = q(k) \leq [\sqrt[3]{k}]$ , donde mediante  $[\cdot]$  se denota la función parte entera. En este caso, los autovalores se acercan a los autovalores de un problema mixto Neumann-Dirichlet. Se determina de esta manera el comportamiento de los autovalores del problema cuando hay una relación inversa entre las frecuencias de vibración en las dos direcciones, es decir,  $m$  fijo y  $k$  tendiendo al infinito.

**Teorema 3.3** Para cada  $k \in \mathbb{N}^*$  suficientemente grande y  $m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm[\sqrt[3]{k}]$ , los ceros  $\lambda_{k,m}$  de la ecuación (3.16) cumplen las siguientes estimaciones:

$$(3.48) \quad \left| \lambda_{k,m+1} - \sqrt{k^2 + \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2} \pi i \right| \leq \frac{2\pi}{\sqrt[3]{k}} \text{ si } \operatorname{Im} \lambda_{k,m} > 0, \quad (0 \leq m \leq [\sqrt[3]{k}] - 1),$$

$$\left| \lambda_{k,m} + \sqrt{k^2 + \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2} \pi i \right| \leq \frac{2\pi}{\sqrt[3]{k}} \text{ si } \operatorname{Im} \lambda_{k,m} < 0, \quad (-[\sqrt[3]{k}] \leq m < 0).$$

**Demostración:**

El cambio de variable  $\lambda = \sqrt{k^2 z^2 - k^2 \pi^2}$  transforma la ecuación (3.16) en la siguiente ecuación en  $z$ :

$$(3.49) \quad e^{2kz} = -\frac{z^2 - \pi^2 - kz^3 + z\sqrt{z^2 - \pi^2}}{z^2 - \pi^2 + kz^3 - z\sqrt{z^2 - \pi^2}}.$$

Entre los ceros de la ecuación (3.49) estamos interesados en aquellos que cumplen la condición  $\lim_{k \rightarrow \infty} k z^3(k) = 0$ .

Como en estas condiciones tenemos que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( -\frac{z^2 - \pi^2 - kz^3 + z\sqrt{z^2 - \pi^2}}{z^2 - \pi^2 + kz^3 - z\sqrt{z^2 - \pi^2}} \right) = -1$$

cabe esperar que estos ceros se aproximen, cuando  $k$  tiende al infinito, a las soluciones de:

$$(3.50) \quad e^{2kz} = -1.$$

Es lo que vamos a demostrar a continuación con la ayuda del Teorema de Rouché y de las estimaciones del Lema 3.1

Sea ahora  $k \in \mathbb{N}^*$  fijo suficientemente grande para que las estimaciones del Lema 3.1 sean ciertas. Consideramos las funciones:

$$f(z) = e^{2kz} + 1, \quad g(z) = \frac{2(kz^3 - z\sqrt{z^2 - \pi^2})}{z^2 - \pi^2 + kz^3 - z\sqrt{z^2 - \pi^2}}.$$

Para cada número entero  $m$ ,  $0 \leq |m| \leq [\sqrt[3]{k}]$  sean  $\gamma_{k,m}^1$  los cuadrados de centros  $\frac{2m-1}{2k}\pi i$  y lados  $\frac{3\pi}{2k\sqrt[3]{k}}$ .

Se obtiene que, para todo  $z \in \gamma_{k,m}^1$ ,

$$|f(z)| = |e^{2kz} + 1| \geq \max \{ |e^{2k \operatorname{Re} z} - 1|, |\operatorname{sen} 2k \operatorname{Im} z| \}$$

y como  $|e^x - 1| > \frac{|x|}{2}$  y  $|\operatorname{sen} x| > \frac{|x|}{2}$ , para  $x$  suficientemente pequeño, resulta que:

$$(3.51) \quad |f(z)| \geq \frac{3\pi}{4\sqrt[3]{k}}, \quad \forall z \in \gamma_{k,m}.$$

Obtenemos estimaciones para  $g$  limitandonos al dominio

$$G^1 = \{z \in C : |z| \leq \frac{\pi}{\sqrt[3]{k^2}}\}.$$

Según el Lema 3.1 en esta región del plano complejo el denominador de la función  $g$  no se anula y por lo tanto esta función es analítica en  $G^1$ .

Para todo  $z \in G^1$ ,  $|z| \sqrt[3]{k} \leq \pi$  y por lo tanto tenemos que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} kz^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} z^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} kz^3 = 0.$$

De aquí se obtiene que, para todo  $z \in G^1$ , se cumple:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{kz^2 - \sqrt{z^2 - \pi^2}}{z^2 - \pi^2 + kz^3 - z\sqrt{z^2 - \pi^2}} \right| = \frac{1}{\pi}.$$

Por consiguiente, para  $k$  suficientemente grande, tenemos que:

$$\left| \frac{kz^2 - \sqrt{z^2 - \pi^2}}{z^2 - \pi^2 + kz^3 - z\sqrt{z^2 - \pi^2}} \right| \leq 1, \quad \forall z \in G^1.$$

Resulta que, para  $k$  suficientemente grande y  $z \in G^1$ ,

$$|g(z)| = 2|z| \left| \frac{kz^2 - \sqrt{z^2 - \pi^2}}{z^2 - \pi^2 + kz^3 - z\sqrt{z^2 - \pi^2}} \right| \leq 2|z| \leq \frac{2\pi}{\sqrt[3]{k^2}}.$$

Finalmente, teniendo en cuenta las estimaciones de  $f$  y  $g$ , se obtiene que:

$$|f(z)| > |g(z)|$$

para todo  $z \in \gamma_{k,m}^1$  si  $k$  es suficientemente grande y  $\gamma_{k,m}^1 \subset G^1$ .

Observemos que  $\gamma_{k,m}^1 \subset G^1$  si  $|m| \leq [\sqrt[3]{k}]$ .

Aplicando el Teorema de Rouché, resulta que la ecuación (3.49) tiene en cada cuadrado  $\gamma_{k,m}^1$  un cero, denotado por  $z_{k,m}$ ,  $|m| \leq [\sqrt[3]{k}]$  que, por lo tanto, cumple la estimación:

$$|z_{k,m+1} - \frac{1}{2k}(2m+1)\pi i| \leq \frac{3\sqrt{2}\pi}{4k\sqrt[3]{k}} \leq \frac{2\pi}{k\sqrt[3]{k}} \text{ si } m \geq 0.$$

$$|z_{k,m} + \frac{1}{2k}(2m+1)\pi i| \leq \frac{3\sqrt{2}\pi}{4k\sqrt[3]{k}} \leq \frac{2\pi}{k\sqrt[3]{k}} \text{ si } m < 0.$$

Volviendo ahora a las variables  $\lambda = \sqrt{k^2 z^2 - k^2 \pi^2}$  encontramos, para  $k$  suficientemente grande, que los autovalores  $\lambda_{k,m}$  con  $0 < |m| \leq [\sqrt[3]{k}]$  cumplen las estimaciones (3.48).

■

Pasamos ahora al estudio de las autofunciones que corresponden a estos últimos autovalores. Consideramos funciones de la forma

$$(3.52) \quad \tilde{\psi}_{k,m} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{m+1} i}{\sqrt{k^2 + \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 \pi}} \operatorname{sen} \frac{2m+1}{2} \pi y \cos k\pi x \\ (-1)^{m+1} \operatorname{sen} \frac{2m+1}{2} \pi y \cos k\pi x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^t$$

y observemos que  $\left( \frac{\pm i}{\sqrt{k^2 + \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 \pi}} \operatorname{sen} \frac{2m+1}{2} \pi y \cos k\pi x, \operatorname{sen} \frac{2m+1}{2} \pi y \cos k\pi x \right)$  son las autofunciones del problema:

$$(3.53) \quad \begin{cases} \Phi_{tt} - \Delta \Phi = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ \Phi = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty). \end{cases}$$

**Proposición 3.3** Las autofunciones  $\varphi_\lambda$  correspondientes a los autovalores  $\lambda = \lambda_{k,m}$  encontrados en el Teorema 3.3 satisfacen:

$$(3.54) \quad \|\varphi_\lambda - \tilde{\psi}_{k,m}\|_X \leq \frac{c}{\sqrt[3]{k}}$$

donde  $c$  es una constante que no depende de  $k$  y  $m$ .

**Demostración:**

En este caso hemos visto que

$$\sqrt{\lambda^2 + k^2 \pi^2} = \mu = \frac{2m+1}{2} \pi i + \alpha(k) \text{ con } |\alpha(k)| \leq \frac{2\pi}{\sqrt[3]{k}}.$$

Escribimos la autofunción  $\varphi_\lambda$  en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\varphi_\lambda &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} \cosh(\sqrt{\lambda^2 + k^2\pi^2}(y-1)) \cos k\pi x \\ -\cosh(\sqrt{\lambda^2 + k^2\pi^2}(y-1)) \cos k\pi x \\ -\frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2\pi^2}}{\lambda^2} \sinh(\sqrt{\lambda^2 + k^2\pi^2}) \cos k\pi x \\ \frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2\pi^2}}{\lambda} \sinh(\sqrt{\lambda^2 + k^2\pi^2}) \cos k\pi x \end{pmatrix}^t \\
&= \begin{pmatrix} (-1)^m \frac{1}{\lambda} \cosh \alpha(k)(y-1) \sin \frac{2m+1}{2} \pi y \cos k\pi x \\ (-1)^{m+1} \cosh \alpha(k)(y-1) \sin \frac{2m+1}{2} \pi y \cos k\pi x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^t + \\
&+ \begin{pmatrix} (-1)^{m+1} \frac{i}{\lambda} \sinh \alpha(k)(y-1) \cos \frac{2m+1}{2} \pi y \cos k\pi x \\ (-1)^m i \sinh \alpha(k)(y-1) \cos \frac{2m+1}{2} \pi y \cos k\pi x \\ (-1)^{m+1} i \frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2\pi^2}}{\lambda^2} \cosh \alpha(k) \cos k\pi x \\ (-1)^m i \frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2\pi^2}}{\lambda} \cosh \alpha(k) \cos k\pi x \end{pmatrix}^t
\end{aligned}$$

Sean de nuevo  $\varphi_\lambda^1$  y  $\varphi_\lambda^2$  las dos funciones en las que hemos descompuesto la función  $\varphi_\lambda$ . Evaluamos primero la norma de  $\varphi_\lambda^2$  en  $\mathcal{X}$ :

$$\begin{aligned}
\|\varphi_\lambda^2\|_{\mathcal{X}}^2 &= \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{1}{\lambda} \sinh \alpha(k)(y-1) \cos \frac{2m+1}{2} \pi y \cos k\pi x \right|^2 + \\
&+ \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \left| \frac{k\pi}{\lambda} \sinh \alpha(k)(y-1) \cos \frac{2m+1}{2} \pi y \sin k\pi x \right|^2 + \right. \\
&+ \left| \frac{\alpha(k)}{\lambda} \cosh \alpha(k)(y-1) \cos \frac{2m+1}{2} \pi y \cos k\pi x + \frac{(2m+1)\pi}{2\lambda} \sinh \alpha(k)(y-1) \times \right. \\
&\times \left. \left. \sin \frac{2m+1}{2} \pi y \cos k\pi x \right|^2 \right\} + \int_0^1 \int_0^1 \left| \sinh \alpha(k)(y-1) \cos \frac{2m+1}{2} \pi y \cos k\pi x \right|^2 + \\
&+ \int_0^1 \left\{ \left| \frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2\pi^2}}{\lambda^2} \cosh \alpha(k) \cos k\pi x \right|^2 + \left| \frac{k\pi \sqrt{\lambda^2 + k^2\pi^2}}{\lambda^2} \cosh \alpha(k) \sin k\pi x \right|^2 \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 \left| \frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2 \pi^2}}{\lambda} \cosh \alpha(k) \cos k\pi x \right|^2 \leq \int_0^1 \left\{ \left| \frac{1}{\lambda} \sinh \alpha(k)(y-1) \right|^2 + \right. \\
& + \left. \left| \frac{\alpha(k)}{\lambda} \cosh \alpha(k)(y-1) \right|^2 + \left( k^2 + \left( \frac{2m+1}{2} \right)^2 \right) \frac{\pi^2}{|\lambda|^2} |\sinh \alpha(k)(y-1)|^2 + |\sinh \alpha(k)(y-1)|^2 \right\} + \\
& + \left| \frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2 \pi^2}}{\lambda^2} \cosh \alpha(k) \right|^2 + \left| \frac{k\pi \sqrt{\lambda^2 + k^2 \pi^2}}{\lambda^2} \cosh \alpha(k) \right|^2 + \left| \frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2 \pi^2}}{\lambda} \cosh \alpha(k) \right|^2 \leq \\
& \leq 4 \frac{|\alpha(k)|^2}{|\lambda|^2} + 5 \frac{|\alpha(k)|^2}{|\lambda|^2} + \left( k^2 + \left( \frac{2m+1}{2} \right)^2 \right) \frac{|\alpha(k)|^2 \pi^2}{|\lambda|^2} + 4|\alpha(k)|^2 + \\
& 5 \left| \frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2 \pi^2}}{\lambda^2} \right|^2 + 5 \left| \frac{k\pi \sqrt{\lambda^2 + k^2 \pi^2}}{\lambda^2} \right|^2 + 5 \left| \frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2 \pi^2}}{\lambda} \right|^2 \leq \\
& \leq 14|\alpha(k)|^2 + 60|\alpha(k)|^2 \leq \frac{c'}{\sqrt[3]{k}},
\end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que, para  $k$  suficientemente grande,

$$\left| \frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2 \pi^2}}{\lambda} \right| \leq 2|\alpha(m)|, \quad |\sinh \alpha(m)| \leq 2|\alpha(m)| \quad \text{y} \quad |\cosh \alpha(m)| \leq 5.$$

Se obtiene por lo tanto que:

$$(3.55) \quad \|\varphi_\lambda^2\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{c'}{\sqrt[3]{k}}.$$

Pasamos ahora a evaluar la norma de  $(\varphi_\lambda^1 - \tilde{\psi}_{k,m})$  en  $\mathcal{X}$ :

$$\begin{aligned}
\|\varphi_\lambda^1 - \tilde{\psi}_{k,m}\|_{\mathcal{X}}^2 &= \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{i}{\sqrt{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 + k^2 \pi^2}} + \frac{1}{\lambda} \cosh \alpha(k)(y-1) \right|^2 |\sin \frac{2m+1}{2} \pi y \cos k\pi x|^2 + \\
& \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \left| \frac{i}{\sqrt{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 + k^2 \pi^2}} + \frac{1}{\lambda} \cosh \alpha(k)(y-1) \right|^2 |k\pi \sin \frac{2m+1}{2} \pi y \sin k\pi x|^2 + \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{\alpha(k)}{\lambda} \sinh \alpha(k)(y-1) \right) \left( \sin \frac{2m+1}{2} \pi y \cos k\pi x \right) \right|^2 + \\
& + \left| \left( \frac{i}{\sqrt{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 + k^2 \pi^2}} + \frac{1}{\lambda} \cosh \alpha(k)(y-1) \right) \left( \frac{2m+1}{2} \pi \cos \frac{2m+1}{2} \pi y \cos k\pi x \right) \right|^2 \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 \int_0^1 \left| (1 - \cosh \alpha(k)(y-1)) \operatorname{sen} \frac{2m+1}{2} \pi y \cos k \pi x \right|^2 \leq \\
& \leq \int_0^1 \left\{ \left| \frac{i}{\sqrt{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 + k^2 \pi}} + \frac{1}{\lambda} \cosh \alpha(k)(y-1) \right|^2 + \right. \\
& \quad \left. + \left| \frac{\alpha(m)}{\lambda} \operatorname{senh} \alpha(m)(y-1) \right|^2 + |1 - \cosh \alpha(k)(y-1)|^2 + \right. \\
& \quad \left. + \left( \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 + k^2 \right) \left| \frac{i \pi}{\sqrt{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 + k^2 \pi}} + \frac{\pi}{\lambda} \cosh \alpha(k)(y-1) \right|^2 \right\} \leq \\
& \leq \left| \frac{i}{\sqrt{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 + k^2 \pi}} + \frac{1}{\lambda} \right|^2 + \int_0^1 \left| \frac{1}{\lambda} (1 - \cosh \alpha(k)(y-1)) \right|^2 + \\
& \quad + \left( \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 + k^2 \right) \pi^2 \left| \frac{i}{\sqrt{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 + k^2 \pi}} + \frac{1}{\lambda} \right|^2 + \\
& \quad + \left( \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 + k^2 \right) \pi^2 \int_0^1 \left| \frac{1}{\lambda} (1 - \cosh \alpha(k)(y-1)) \right|^2 + \\
& \quad + \int_0^1 \left| \frac{\alpha(k)}{\lambda} \operatorname{senh} \alpha(k)(y-1) \right|^2 + \int_0^1 |1 - \cosh \alpha(m)(y-1)|^2 \leq \\
& \leq \frac{2\pi}{\sqrt[3]{k}} + 4|\alpha(k)|^2 + 2\frac{2\pi}{\sqrt[3]{k}} + 8|\alpha(m)|^2 + 4|\alpha(k)|^2 + 4|\alpha(k)|^2 \leq \frac{c''}{\sqrt[3]{k}}
\end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que, para  $m$  suficientemente grande,

$$|1 - \cosh \alpha(k)| \leq 2 |\alpha(k)|.$$

Obtenemos de aquí que

$$(3.56) \quad \|\varphi_\lambda^1 - \tilde{\psi}_{k,m}\|_X \leq \frac{c'''}{\sqrt[3]{k}}.$$

Las estimaciones (3.55) y (3.56) implican que

$$\|\varphi_\lambda - \tilde{\psi}_{k,m}\|_X \leq \frac{c}{\sqrt[3]{k}}.$$

■

### 3.2.4 Autovalores de módulo menor que $\sqrt{2}k\pi$ y mayor que $k\pi$ (segunda parte)

Pasamos ahora a localizar las raíces de la ecuación (3.16) que hacen la transición desde la zona estudiada en el Teorema 3.2 a la zona estudiada en el Teorema 3.3. Estos son los autovalores  $\lambda_{k,\pm(q+1)}, \lambda_{k,\pm(q+2)}, \dots, \lambda_{k,\pm k}$  con  $q = [\sqrt[3]{k}]$ . Para empezar necesitamos el siguiente lema:

**Lema 3.5** Para cada  $k \in \mathbb{N}^*$ , la ecuación:

$$(3.57) \quad e^{2kz} = \frac{\pi^2 + kz^3}{-\pi^2 + kz^3}$$

tiene una sucesión de ceros imaginarios  $\pm \zeta_{k,m} i$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ , donde  $\zeta_{k,m} \in \mathbb{R}_+$  es la raíz positiva de la ecuación:

$$(3.58) \quad \operatorname{tg} k\zeta = \frac{\pi^2}{k\zeta^3},$$

situada en el intervalo  $\left(\frac{m}{k}\pi, \frac{2m+1}{2k}\pi\right)$ .

**Demostración:**

Buscamos raíces de la ecuación (3.57) de la forma  $z = \zeta i$  y por lo tanto  $\zeta$  tiene que ser una raíz de la ecuación:

$$(3.59) \quad e^{2k\zeta i} = \frac{\pi^2 - k\zeta^3 i}{-\pi^2 - k\zeta^3 i}.$$

Igualando a cero las partes reales e imaginarias de la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{cases} -\pi^2 \cos 2k\zeta + k\zeta^3 \operatorname{sen} 2k\zeta = \pi^2 \\ k\zeta^3 \cos 2k\zeta + \pi^2 \operatorname{sen} 2k\zeta = k\zeta^3, \end{cases}$$

lo que es equivalente a:

$$\begin{cases} 2 \cos k\zeta (-\pi^2 \cos k\zeta + k\zeta^3 \operatorname{sen} k\zeta) = 0 \\ 2 \operatorname{sen} k\zeta (-\pi^2 \cos k\zeta + k\zeta^3 \operatorname{sen} k\zeta) = 0. \end{cases}$$

Como  $\cos k\zeta$  y  $\operatorname{sen} k\zeta$  no se pueden anular al mismo tiempo, resulta que los ceros de la ecuación (3.59) vienen dados por los ceros de

$$-\pi^2 \cos k\zeta + k\zeta^3 \operatorname{sen} k\zeta = 0$$

y, por consiguiente, son los ceros de la ecuación (3.58). Además sabemos que esta ecuación tiene un sólo cero en cada intervalo  $\left(\frac{m}{k}\pi, \frac{2m+1}{2k}\pi\right)$  que denotamos por  $\zeta_{k,m}$ .

Recíprocamente, invirtiendo el razonamiento, se obtiene que los ceros de la ecuación (3.58) son ceros de la ecuación (3.57).

■

Pasamos ahora al estudio de los autovalores  $\lambda_{k,\pm([\sqrt[3]{k}]+1)}, \lambda_{k,\pm([\sqrt[3]{k}]+2)}, \dots, \lambda_{k,\pm k}$ .

**Teorema 3.4** Para todo  $k \in \mathbb{N}^*$  suficientemente grande las raíces  $\lambda_{k,m}$  de la ecuación (3.16) con  $[\sqrt[3]{k}] < |m| \leq k$  cumplen las siguientes estimaciones:

$$(3.60) \quad \begin{cases} |\lambda_{k,m} - \sqrt{\pi^2 k^2 + k^2 \zeta_{k,m}^2} i| \leq \frac{1}{\sqrt[5]{k}} \text{ si } \operatorname{Im} \lambda_{k,m} > 0, & (k \geq m > [\sqrt[3]{k}] > 0), \\ |\lambda_{k,m} + \sqrt{\pi^2 k^2 + k^2 \zeta_{k,m}^2} i| \leq \frac{1}{\sqrt[5]{k}} \text{ si } \operatorname{Im} \lambda_{k,m} < 0, & (-k \leq m < -[\sqrt[3]{k}] < 0), \end{cases}$$

donde  $\zeta_{k,m}$  son las raíces de la ecuación (3.58) encontradas en el lema anterior.

**Demostración:**

El cambio de variable  $\lambda = \sqrt{k^2 z^2 - k^2 \pi^2}$  transforma la ecuación (3.16) en:

$$(3.61) \quad e^{2kz} = -\frac{z^2 - \pi^2 - kz^3 + z\sqrt{z^2 - \pi^2}}{z^2 - \pi^2 + kz^3 - z\sqrt{z^2 - \pi^2}}.$$

Consideramos la región del plano complejo definida por:

$$G^2 = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2\sqrt[3]{k^2}} \leq |z| \leq 2\pi, \quad |\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{k}, \quad \operatorname{Im} z > 0 \right\}$$

y demostramos que la ecuación (3.61) tiene un conjunto de ceros  $z_{k,m}$  en  $G^2$  que cumplen la siguiente estimación:

$$(3.62) \quad |z_{k,m} - \zeta_{k,m} i| \leq \frac{1}{k\sqrt[5]{k}}, \quad m \in \{[\sqrt[3]{k}] + 1, \dots, k\},$$

donde  $\zeta_{k,m}$  son los ceros reales de la ecuación (3.58) encontrados en el lema anterior.

Observemos que, si  $m \in \{[\sqrt[3]{k}] + 1, \dots, k\}$  entonces  $\zeta_{k,m}$  pertenece a  $G^2$ .

Escribimos la ecuación (3.61) en la siguiente forma:

$$e^{2kz} - \frac{\pi^2 + kz^3}{-\pi^2 + kz^3} = \frac{2z(kz^4 - \pi^2\sqrt{z^2 - \pi^2})}{(-\pi^2 + kz^3)(z^2 - \pi^2 + kz^3 - z\sqrt{z^2 - \pi^2})},$$

y, aplicando el Teorema de Rouché, demostramos que los ceros de la ecuación (3.61) están próximos a los ceros de la ecuación (3.57).

Consideramos primero la función:

$$g(z) = -\frac{2z(kz^4 - \pi^2\sqrt{z^2 - \pi^2})}{(-\pi^2 + kz^3)(z^2 - \pi^2 + kz^3 - z\sqrt{z^2 - \pi^2})}$$

e intentamos encontrar una cota superior para  $g$  en la región  $G^2$  del plano complejo.

Evaluamos primero el numerador de  $g$ :

$$|2z(kz^4 - \pi^2\sqrt{z^2 - \pi^2})| \leq 2k|z|^5 + 2\pi^2|z|^2 + 4\pi^3|z|.$$

Se obtiene que:

$$|2z(kz^4 - \pi^2\sqrt{z^2 - \pi^2})| \leq \begin{cases} 6k|z|^5 & \text{si } \frac{\pi}{2\sqrt[3]{k^2}} \leq |z| \leq \frac{\pi}{\sqrt[4]{k}}, \\ 6\pi^3|z|, & \text{si } \frac{\pi}{\sqrt[4]{k}} \leq |z| \leq 2\pi \end{cases}$$

Evaluamos ahora el denominador de  $g$ :

$$\begin{aligned} |(-\pi^2 + kz^3)(z^2 - \pi^2 + kz^3 - z\sqrt{z^2 - \pi^2})| &\geq |-\pi^2 + kz^3| (|-\pi^2 + kz^3| - |z|(|z| + \sqrt{|z|^2 + \pi^2})) \geq \\ &\geq |-\pi^2 + kz^3|^2 - 5\pi|z| |-\pi^2 + kz^3|. \end{aligned}$$

Si  $\frac{\pi}{2\sqrt[3]{k^2}} \leq |z| \leq \frac{\pi}{\sqrt[3]{k}}$  y  $|\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{k}$  tenemos que, para  $k$  suficientemente grande:

$$|-\pi^2 + kz^3| \geq \operatorname{Re}(-\pi^2 + kz^3) \geq \frac{\pi}{2}.$$

Si  $\frac{\pi}{\sqrt[3]{k}} \leq |z| \leq 2\pi$  tenemos que:

$$|-\pi^2 + kz^3| (|-\pi^2 + kz^3| - |z|(|z| + \sqrt{|z|^2 + \pi^2})) \geq \sqrt{k}k|z|^4(\sqrt{k}|z|^2 - \frac{2\pi}{\sqrt{k}}).$$

De las últimas dos desigualdades se obtiene que, para todo entero  $k$  suficientemente grande, se cumple:

$$|(-\pi^2 + kz^3)(z^2 - \pi^2 + kz^3 - z\sqrt{z^2 - \pi^2})| \geq \begin{cases} c_1, & \text{si } \frac{\pi}{2\sqrt[3]{k^2}} \leq |z| \leq \frac{\pi}{\sqrt[3]{k}}, \\ c_2\sqrt{k}k|z|^4, & \text{si } \frac{\pi}{\sqrt[3]{k}} \leq |z| \leq 2\pi \end{cases}$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son dos constantes positivas que no dependen de  $k$ .

Volviendo ahora a la función  $g$  se obtiene que, para todo  $k$  suficientemente grande:

$$|g(z)| \leq \frac{c}{\sqrt[3]{k}}, \quad \text{para todo } z \text{ en } G^2,$$

donde  $c$  es una constante positiva que no depende de  $k$ .

Estudiamos ahora la función:

$$f(z) = e^{2kz} - \frac{\pi^2 + kz^3}{-\pi^2 + kz^3}.$$

Consideramos, para  $m \in \mathbb{N}^*$ , los círculos  $\gamma_{k,m}^2$  de centros  $\zeta_{k,m}i$  y radios  $r_{k,m} = \frac{1}{k\sqrt[5]{k}}$ .

Con el objetivo de acotar por debajo la función  $f$  sobre las circunferencias  $\gamma_{k,m}$  consideramos los círculos  $\tilde{\gamma}_{k,m}^2$  de centros  $\zeta_{k,m}i$  y radios  $R_{k,m} = \frac{1}{k}$ .

En el dominio  $G^2$  la función  $f$  es analítica y, aplicando la fórmula de Taylor alrededor del punto  $\zeta_{k,m}i$ , se obtiene:

$$(3.63) \quad f(z) = f(\zeta_{k,m}i) + (z - \zeta_{k,m}i)f'(\zeta_{k,m}i) + \frac{(z - \zeta_{k,m}i)^2}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}_{k,m}^2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - \zeta_{k,m}i)^2(\zeta - z)}.$$

Acotamos el término de error sobre las circunferencias  $\gamma_{k,m}^2$ :

$$\left| \frac{(z - \zeta_{k,m}i)^2}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}_{k,m}^2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - \zeta_{k,m}i)^2(\zeta - z)} \right| \leq \frac{r_{k,m}^2}{2\pi} \frac{2\pi R_{k,m}M}{R_{k,m}^2(R_{k,m} - r_{k,m})} = \frac{M}{\sqrt[5]{k}(\sqrt[5]{k} - 1)}$$

donde  $M$  es una cota superior para la función  $f$  sobre las circunferencias  $\widehat{\gamma}_{k,m}^2$ .

Para encontrar el valor de  $M$  procedemos de la siguiente manera:

$$|f(z)| = \left| e^{2kz} - \frac{\pi^2 + kz^3}{-\pi^2 + kz^3} \right| \leq |e^{2kz}| + \left| \frac{\pi^2 + kz^3}{-\pi^2 + kz^3} \right| \leq e^{2k|\operatorname{Re} z|} + 1 + \frac{2\pi^2}{|\pi^2 - kz^3|}.$$

Como  $|\operatorname{Re} z| < \frac{1}{k}$  en  $G^2$ , obtenemos que  $|\pi^2 - kz^3| > 1$  y por lo tanto

$$|f(z)| < M = e^2 + 1 + 2\pi^2.$$

Se obtiene que el término de error en la fórmula de Taylor se puede acotar, sobre las circunferencias  $\widehat{\gamma}_{k,m}^2$ , por:

$$\left| \frac{(z - \zeta_{k,m} i)^2}{2\pi i} \int_{\widehat{\gamma}_{k,m}^2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - \zeta_{k,m} i)^2 (\zeta - z)} \right| \leq \frac{M}{\sqrt[5]{k}(\sqrt[5]{k} - 1)}.$$

Evaluamos ahora el término:

$$|(z - \zeta_{k,m} i) f'(\zeta_{k,m} i)| = r_{k,m} \left| 2k e^{2k\zeta_{k,m} i} - \frac{6\pi^2 k \zeta_{k,m}^2}{(-\pi^2 - k \zeta_{k,m}^3 i)^2} \right|.$$

Teniendo en cuenta que  $\zeta_{k,m} i$  son raíces de la ecuación (3.57) se obtiene que:

$$\begin{aligned} |(z - \zeta_{k,m} i) f'(\zeta_{k,m} i)| &= r_{k,m} \left| 2k \frac{\pi^2 - k \zeta_{k,m}^3 i}{-\pi^2 - k \zeta_{k,m}^3 i} - \frac{6\pi^2 k \zeta_{k,m}^2}{(-\pi^2 - k \zeta_{k,m}^3 i)^2} \right| = \\ &= 2kr_{k,m} \frac{\pi^4 + k^2 \zeta_{k,m}^6 + 3\pi^2 \zeta_{k,m}^2}{\pi^4 + k^2 \zeta_{k,m}^6} \geq 2kr_{k,m}. \end{aligned}$$

Volviendo a la fórmula de Taylor se deduce que, si  $z$  pertenece a las circunferencias  $\widehat{\gamma}_{k,m}^2$ :

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq |(z - \zeta_{k,m} i) f'(\zeta_{k,m} i)| - \left| \frac{(z - \zeta_{k,m} i)^2}{2\pi i} \int_{\widehat{\gamma}_{k,m}^2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - \zeta_{k,m} i)^2 (\zeta - z)} \right| \geq \\ &\geq 2kr_{k,m} - \frac{2\Omega}{\sqrt[5]{k}(\sqrt[5]{k} - 1)} \geq \frac{C}{\sqrt[5]{k}}. \end{aligned}$$

Se obtiene finalmente que  $|f(z)| > |g(z)|$  para todo  $z$  perteneciente a  $\widehat{\gamma}_{k,m}^2$ .

Aplicando el Teorema de Rouché resulta que la ecuación (3.61) tiene, en cada círculo  $\widehat{\gamma}_{k,m}^2$ , una sola raíz que denotamos  $z_{k,m}$  que cumple las estimaciones (3.62).

La conclusión del teorema se obtiene inmediatamente mediante el cambio de variable:  $\lambda = \sqrt{k^2 \pi^2 + k^2 z^2}$ .

■

**Observación 3.12** Las raíces  $\zeta_{k,m}$  de la ecuación (3.58) se aproximan, cuando  $k$  permanece constante y  $m$  tiende al infinito, a los valores  $\frac{m\pi}{k}$ . Esto nos indica el comportamiento de los autovalores  $\lambda_{k,m}$  estudiados en el Teorema 3.2.

Por otro lado, cuando  $m$  permanece constante y  $k$  tiende al infinito, las raíces  $\zeta_{k,m}$  de la ecuación (3.58) se aproximan a los valores  $\frac{(2m+1)\pi}{2k}$ . Redescubrimos así el comportamiento de los  $\lambda_{k,m}$  estudiados en el Teorema 3.3.

\* Los autovalores  $\lambda_{k,m}$  del Teorema 3.4 son los que corresponden a la transición de una zona a otra.

A continuación demostramos que las autofunciones correspondientes a estos últimos autovalores tienen la misma propiedad de que las últimas dos componentes se anulan asintóticamente.

**Proposición 3.4** Las autofunciones  $\varphi_\lambda$  correspondientes a los autovalores encontrados en el Teorema 3.4 satisfacen:

$$(3.64) \quad \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \frac{\|\varphi_\lambda^3\|_{H^1(\Gamma_0)}}{\|\varphi_\lambda\|_{\mathcal{X}}} = 0, \quad \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \frac{\|\varphi_\lambda^4\|_{L^2(\Gamma_0)}}{\|\varphi_\lambda\|_{\mathcal{X}}} = 0,$$

donde  $\varphi_\lambda^j$  es la componente  $j$ -ésima de la autofunción  $\varphi_\lambda$ .

**Demostración:**

Los autovalores  $\lambda_{k,m}$  encontrados en el Teorema 3.4 están próximos a los valores  $\sqrt{\pi^2 k^2 + k^2 \zeta_{k,m}^2} i$ , donde  $\zeta_{k,m}$  son raíces de la ecuación:

$$(3.65) \quad \operatorname{tg} k \zeta = \frac{\pi^2}{k \zeta^3}.$$

Si volvemos al primer párrafo de este capítulo vemos que el Teorema 3.1 nos asegura la existencia de unos autovalores  $\nu_{k,m}$  que vienen dados por la expresión  $\nu_{k,m} = \sqrt{\pi^2 k^2 + k^2 \varrho_{k,m}^2} i$ , donde  $\varrho_{k,m}$  son las raíces de la ecuación:

$$(3.66) \quad \operatorname{tg} k \varrho = \frac{\pi^2 + \varrho^2}{k \varrho^3}.$$

Se observa que la ecuación (3.65) se obtiene despreciando el término  $\frac{\varrho^2}{k \varrho^3}$  en la ecuación (3.66), lo que es perfectamente justificado si  $\varrho \in G^2$ .

Mediante un razonamiento similar al del Teorema 3.4 obtenemos que los autovalores  $\lambda_{k,m}$  encontradas allí cumplen las estimaciones:

$$(3.67) \quad \begin{cases} |\lambda_{k,m} - \sqrt{\pi^2 k^2 + k^2 \varrho_{k,m}^2} i| \leq \frac{1}{\sqrt[5]{k}} \text{ si } \operatorname{Im} \lambda_{k,m} > 0, & (k \geq m > [\sqrt[3]{k}] > 0), \\ |\lambda_{k,m} + \sqrt{\pi^2 k^2 + k^2 \varrho_{k,m}^2} i| \leq \frac{1}{\sqrt[5]{k}} \text{ si } \operatorname{Im} \lambda_{k,m} < 0, & (-k \leq m < -[\sqrt[3]{k}] < 0), \end{cases}$$

donde  $\varrho_{k,m}$  es la raíz de la ecuación:

$$(3.68) \quad \operatorname{tg} k \varrho = \frac{\pi^2 + \varrho^2}{k \varrho^3}$$

situada en el intervalo  $\left(\frac{m}{k}\pi, \frac{2m+1}{2k}\pi\right)$ .

Obtendremos así una estimación que relaciona los autovalores  $\lambda_{k,m}$  con los autovalores  $\nu_{k,m}$  del problema conservativo que son iguales a  $\sqrt{\pi^2 k^2 + k^2 \rho_{k,m}^2} i$  (vease el Teorema 3.1).

Se deduce por lo tanto que, los autovalores  $\lambda_{k,m}$  encontrados en Teorema 3.4 cumplen las estimaciones:

$$(3.69) \quad |\lambda_{k,m} - \nu_{k,m}| \leq \frac{1}{\sqrt[5]{k}} \text{ para } [\sqrt[3]{k}] < |m| \leq k.$$

Como las autofunciones correspondientes  $\varphi_{\lambda_{k,m}}$  y  $\xi_{\nu_{k,m}}$  tienen la misma forma se puede deducir, a partir de la relación anterior, que:

$$\|\varphi_{\lambda_{k,m}} - \xi_{\nu_{k,m}}\|_X \leq \frac{1}{\sqrt[5]{k}}.$$

Las propiedades de las autofunciones  $\varphi_{\lambda_{k,m}}$  se deducen inmediatamente teniendo en cuenta las propiedades de las autofunciones  $\xi_{\nu_{k,m}}$  obtenidas en la Proposición 3.1.

■

Los Teoremas 3.2, 3.3 y 3.4 proporcionan estimaciones para los autovalores  $(\lambda_{k,m})_{m \in \mathbb{Z}^*}$ . Según podemos comprobar fácilmente, todos estos autovalores tienen la propiedad  $|\lambda_{k,m}| > k\pi$ . Quedan por analizar los autovalores  $\lambda_k^*$  y  $\lambda_k^{**}$  que, como vamos a ver, son los únicos de módulo menor que  $k\pi$ .

### 3.2.5 Autovalores de módulo menor que $k\pi$

Pasamos ahora al estudio de las raíces restantes de la ecuación (3.16). Igual que en el apartado anterior, hacemos el cambio de variable  $\sqrt{\left(\frac{\lambda}{k}\right)^2 + \pi^2} = z$  cambio de variable  $\sqrt{\left(\frac{\lambda}{k}\right)^2 + \pi^2} = z$  con lo cual la ecuación (3.16) se transforma en:

$$(3.70) \quad e^{2kz} = -\frac{z^2 - \pi^2 - kz^3 + z\sqrt{z^2 - \pi^2}}{z^2 - \pi^2 + kz^3 - z\sqrt{z^2 - \pi^2}}.$$

El Teorema 3.2 nos asegura que dentro del cuadrado de centro 0 y lado  $\pi + \frac{3\pi}{4k}$  existen  $2k + 1 + N$  raíces, donde  $N$  es el número de ceros del denominador que se encuentran dentro de este cuadrado. Observemos que en el Lema 3.1 hemos demostrado que  $N = 3$ . Como además en los Teoremas 3.3 y 3.4 hemos localizado  $2k$  raíces  $z_k$  en esta zona ( $k$  con parte imaginaria positiva y otras  $k$  con parte imaginaria negativa) quedan por encontrar las 4 restantes.

**Proposición 3.5** *La ecuación (3.70) tiene, para cada  $k$  suficientemente grande, cuatro raíces  $z_k^*$ ,  $z_k^{**}$ ,  $-z_k^*$  y  $-z_k^{**}$  con las siguientes propiedades:*

$$(3.71) \quad |z_k^* - \alpha_1| \leq \frac{1}{k^2} \text{ y } z_k^{**} = \bar{z}_k^*,$$

donde  $\alpha_1$  es la raíz de (3.20) encontrada en el Lema 3.2.

**Observación 3.13** *A las cuatro raíces  $z_k^*$ ,  $z_k^{**}$ ,  $-z_k^*$  y  $-z_k^{**}$ , encontradas en este teorema, les corresponderán, mediante el cambio de variable hecho al principio de esta subsección, sólo dos autovalores  $\lambda$  del problema.*

**Demostración:**

En el círculo  $\delta_1$  de centro  $\sqrt[3]{\frac{\pi^2}{k}}$  y radio  $\frac{10}{\sqrt[3]{k^2}}$  la función

$$h(z) = z^2 - \pi^2 - kz^3 + z\sqrt{z^2 - \pi^2}$$

no se anula ( las tres raíces de esta ecuación están situadas cerca de  $\sqrt[3]{\frac{\pi^2}{k}}\tilde{\omega}_i$ , donde  $\tilde{\omega}_i$  son las tres raíces cúbicas de  $-1$ , como vimos en el Lema 3.4).

Escribimos la ecuación (3.70) en la forma

$$(3.72) \quad e^{-2kz} = -\frac{z^2 - \pi^2 + kz^3 - z\sqrt{z^2 - \pi^2}}{z^2 - \pi^2 - kz^3 + z\sqrt{z^2 - \pi^2}}.$$

Si  $z$  pertenece al círculo  $\delta_1$  tenemos que  $\operatorname{Re} z > \frac{\pi}{2\sqrt[3]{k}}$  y por lo tanto:

$$|e^{-2kz}| = e^{-2k\operatorname{Re} z} \leq e^{-2k\frac{\pi}{2\sqrt[3]{k}}} = e^{-\pi\sqrt[3]{k^2}}.$$

Consideramos ahora un círculo  $C'$  centrado en  $\alpha_1$  y de radio  $\frac{1}{k^2}$  (ver Fig. 4).

Como el círculo  $C'$  está situado dentro del círculo  $\delta_1$  se obtiene que:

$$(3.73) \quad |e^{-2kz}| \leq e^{-2k\frac{\pi}{2\sqrt[3]{k}}} = e^{-\pi\sqrt[3]{k^2}}, \quad \forall z \in C'.$$

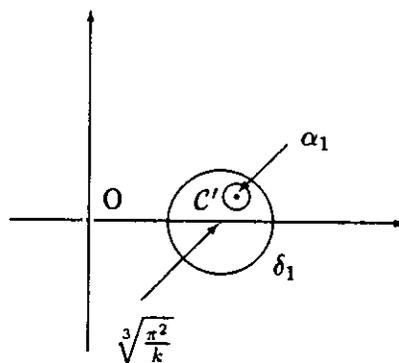


Fig.6

En el círculo  $C'$  la función

$$u(z) = z^2 - \pi^2 + kz^3 - z\sqrt{z^2 - \pi^2}$$

es analítica y tiene un solo cero,  $\alpha_1$ .

Para obtener informaciones sobre  $u$  evaluamos:

$$\begin{aligned}
 |u'(\alpha_1)| &\geq |3k\alpha_1^2| - \left( \left| \sqrt{\alpha_1^2 - \pi^2} \right| - |\alpha_1| \left| 2 + \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 - \pi^2}} \right| \right) > \\
 &> 3k \frac{\pi^2}{4\sqrt[3]{k^2}} - \left( |\alpha_1| + \pi + |\alpha_1| \left| 2 - \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 - \pi^2}} \right| \right) > \sqrt[3]{k}
 \end{aligned}$$

si  $k$  es suficientemente grande.

Aplicando el Teorema de Taylor resulta que:

$$|u(z) - u'(\alpha_1)(z - \alpha_1)| \leq a|z - \alpha_1|^2$$

donde  $a$  es una constante que depende de  $k$ .

Sin embargo, tenemos que:

$$|a| \leq \sup \{|u''(z)| : z \in \text{Int } C'\} < k.$$

Se obtiene que, para  $z$  sobre la circunferencia de  $C'$ ,

$$|u(z)| \geq |u'(\alpha_1)||z - \alpha_1| - a|z - \alpha_1|^2 > \frac{1}{k^2}.$$

Para  $z$  sobre la circunferencia de  $C'$  resulta que:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{z^2 - \pi^2 + kz^3 - z\sqrt{z^2 - \pi^2}}{z^2 - \pi^2 - kz^3 + z\sqrt{z^2 - \pi^2}} \right| &\geq \frac{|u(z)|}{|kz^3 + \pi^2| + |z||z - \sqrt{z^2 - \pi^2}|} > \\
 &\geq \frac{\frac{1}{k^2}}{\pi^2 + k|z|^3 + 2|z|^2 + \pi|z|} \geq \frac{1}{k^3}.
 \end{aligned}$$

Resulta que, para  $k$  suficientemente grande y  $z$  sobre la circunferencia  $C'$ , se tiene:

$$|e^{-2kz}| < \left| \frac{z^2 - \pi^2 + kz^3 - z\sqrt{z^2 - \pi^2}}{z^2 - \pi^2 - kz^3 + z\sqrt{z^2 - \pi^2}} \right|.$$

Del Teorema de Rouché se deduce que la ecuación (3.72) tiene una raíz  $z_k^*$  en  $C'$ .

Notemos que si  $z_k^*$  es raíz de la ecuación entonces  $z_k^{**} = \bar{z}_k^*$  también lo es.

Observemos ahora que mediante el cambio de variable  $z = -s$  la ecuación (3.70) no cambia. Por lo tanto, si  $z_k^*$  y  $z_k^{**}$  son raíces de esta ecuación,  $-z_k^*$  y  $-z_k^{**}$  también lo son.



**Observación 3.14** Como hemos visto  $z_k^* = \alpha_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$  y, por lo tanto, teniendo en cuenta

el Lema 3.4,  $z_k^* = \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{k}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{\pi}{k^2}}i + o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}\right)$ . Observemos que  $z_k^*$  son las primeras raíces de la ecuación (3.70) que encontramos con la propiedad de que  $\text{Re } k z_k^* \rightarrow \infty$  y  $\text{Im } k z_k^* \rightarrow \infty$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

Hacemos ahora el paso a los autovalores  $\lambda$  de la ecuación (3.16) correspondientes.

**Teorema 3.5** *La ecuación (3.16) tiene, para  $k$  suficientemente grande, dos raíces conjugadas  $\lambda_k^*$  y  $\lambda_k^{**}$  con las siguientes propiedades (suponemos que  $\text{Im } \lambda_k^* > 0$ ):*

$$(3.74) \quad \left| \lambda_k^* - \sqrt{k^2(\alpha_1)^2 - k^2\pi^2} \right| \leq \frac{1}{k}, \quad y \quad \lambda_k^* = \bar{\lambda}_k^{**},$$

donde  $\alpha_1$  es la raíz de (3.20) encontrada en el Lema 3.2.

Como consecuencia, los autovalores  $\lambda_k^*$  tienen la siguiente propiedad:

$$(3.75) \quad \text{Re } \lambda_k^* \longrightarrow \frac{1}{3} \text{ cuando } k \longrightarrow \infty.$$

**Demostración:**

Deslaciendo el cambio de variable  $\sqrt{\left(\frac{\lambda}{k}\right)^2 + \pi^2} = z$  y utilizando las raíces encontradas en la Proposición anterior se deduce que la ecuación (3.16) tiene dos raíces conjugadas  $\lambda_k^*$  y  $\lambda_k^{**}$  con:

$$\lambda_k^* = \sqrt{k^2(z_k^*)^2 - k^2\pi^2}, \quad \lambda_k^{**} = \sqrt{k^2(z_k^{**})^2 - k^2\pi^2}.$$

Evaluamos la diferencia:

$$\begin{aligned} \left| \lambda_k^* - \sqrt{k^2(\alpha_1)^2 - k^2\pi^2} \right| &= \frac{|(\lambda_k^*)^2 - (k^2(\alpha_1)^2 - k^2\pi^2)|}{\left| \lambda_k^* + \sqrt{k^2(\alpha_1)^2 - k^2\pi^2} \right|} = \\ &= \frac{|k^2(z_k^*)^2 - k^2(\alpha_1)^2|}{\left| \lambda_k^* + \sqrt{k^2(\alpha_1)^2 - k^2\pi^2} \right|} = \frac{k^2 |(z_k^* - \alpha_1)(z_k^* + \alpha_1)|}{\left| \lambda_k^* + \sqrt{k^2(\alpha_1)^2 - k^2\pi^2} \right|} \leq \\ &\leq \frac{|z_k^* + \alpha_1|}{k \left| \sqrt{(z_k^*)^2 - \pi^2} + \sqrt{(\alpha_1)^2 - \pi^2} \right|} \leq \frac{1}{|k|}. \end{aligned}$$

Un resultado similar se obtiene para los autovalores  $\lambda_k^{**}$ .

Antes de pasar a demostrar la propiedad (3.75) observamos que:

$$(\text{Re } \zeta)^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2}) \quad \text{si} \quad \zeta = \sqrt{a + bi}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

En efecto, si  $\zeta = \alpha + \beta i$  resulta que:

$$\begin{cases} |\zeta|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \zeta^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i = a + bi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha^2 - \beta^2 = a \end{cases}$$

de donde se obtiene la fórmula deseada.

Volviendo a nuestro problema y teniendo en cuenta que  $\lambda_k^* = \sqrt{k^2(z_k^*)^2 - k^2\pi^2}$  obtenemos:

$$(3.76) \quad \begin{aligned} (\text{Re } \lambda_k^*)^2 &= \frac{1}{2} \left( -k^2\pi^2 + k^2((\text{Re } z_k^*)^2 - (\text{Im } z_k^*)^2) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(-k^2\pi^2 + k^2((\text{Re } z_k^*)^2 - (\text{Im } z_k^*)^2))^2 + (2k^2 \text{Re } z_k^* \text{Im } z_k^*)^2} \right). \end{aligned}$$

Necesitamos ahora la información adicional sobre la parte imaginaria de  $z_k^*$ . Para esto usamos la estimación del Lema 3.4:

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{k}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{\pi}{k^2}}i + o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}\right).$$

Como la Proposición 3.5 nos asegura que la raíz  $z_k^*$  de la ecuación (3.70) tiene la propiedad:

$$|z_k^* - \alpha_1| \leq \frac{1}{k^2},$$

obtenemos que, para  $k$  suficientemente grande:

$$(3.77) \quad z_k^* = \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{k}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{\pi}{k^2}}i + o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}\right).$$

Usando la fórmula (3.76) obtenemos sucesivamente:

$$\begin{aligned} (\operatorname{Re} \lambda_k^*)^2 &= \frac{1}{2} \left( -k^2 \pi^2 + k^2 ((\operatorname{Re} z_k^*)^2 - (\operatorname{Im} z_k^*)^2) + \right. \\ &+ \left. \sqrt{(-k^2 \pi^2 + k^2 ((\operatorname{Re} z_k^*)^2 - (\operatorname{Im} z_k^*)^2))^2 + (2k^2 \operatorname{Re} z_k^* \operatorname{Im} z_k^*)^2} \right) = \\ &= 2k^4 (\operatorname{Re} z_k^* \operatorname{Im} z_k^*)^2 \left[ k^2 \pi^2 - k^2 ((\operatorname{Re} z_k^*)^2 - (\operatorname{Im} z_k^*)^2) + \right. \\ &+ \left. \sqrt{(-k^2 \pi^2 + k^2 ((\operatorname{Re} z_k^*)^2 - (\operatorname{Im} z_k^*)^2))^2 + (2k^2 \operatorname{Re} z_k^* \operatorname{Im} z_k^*)^2} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta las estimaciones para las partes real e imaginaria de  $z_k^*$  que vienen dadas por (3.77), se obtiene que:

$$\operatorname{Re} \lambda_k^* \longrightarrow \frac{1}{3}, \quad i = 1, 2.$$

■

**Observación 3.15** En el teorema anterior hemos obtenido las estimaciones (3.74) para los autovalores  $\lambda_k^*$  y  $\lambda_k^{**}$ . Teniendo en cuenta que  $(\alpha_1)^2 = \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{k^2}} + o\left(\frac{1}{k}\right)$ , se obtiene que los autovalores  $\lambda_k^*$  y  $\lambda_k^{**}$  tienen el módulo menor que  $k\pi$ . Es el momento de recordar que el operador conservativo tenía también dos y sólo dos autovalores de módulo menor que  $k\pi$ ,  $\nu_k^*$  y  $\nu_k^{**}$  (vease el primer apartado de este capítulo). Son estos dos autovalores, que para cada  $k$  tienen el módulo más pequeño, los que se desplazan hacia la derecha en el problema disipativo. Sólo las autofunciones correspondientes a estos dos autovalores son disipados uniformemente a altas frecuencias.

Las autofunciones del operador disipativo correspondientes a los autovalores  $\lambda_k^*$  encontrados en la Proposición anterior se escriben:

$$\varphi_{\lambda_k^*} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{(\lambda_k^*)^2 + k^2\pi^2}} \frac{\cosh(\sqrt{(\lambda_k^*)^2 + k^2\pi^2}(y-1)) \cos k\pi x}{\sinh(\sqrt{(\lambda_k^*)^2 + k^2\pi^2})} \\ -\frac{\lambda_k^*}{\sqrt{(\lambda_k^*)^2 + k^2\pi^2}} \frac{\cosh(\sqrt{(\lambda_k^*)^2 + k^2\pi^2}(y-1)) \cos k\pi x}{\sinh(\sqrt{(\lambda_k^*)^2 + k^2\pi^2})} \\ -\frac{1}{\lambda_k^*} \cos k\pi x \\ \cos k\pi x \end{pmatrix}$$

y ninguna de las componentes de esta función tiende a cero cuando  $k$  tiende al infinito en la norma correspondiente del espacio de energía.

Notamos por  $\varphi_{\lambda_k^*}^j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  las componentes de la autofunción  $\varphi_{\lambda_k^*}$ .

**Proposición 3.6** Con las notaciones anteriores tenemos:

- i) Las autofunciones  $\{\varphi_{\lambda_k^*}\}_k$  convergen débilmente a cero en  $X$  cuando  $k$  tiende al infinito.
- ii) Las sucesiones  $\{\varphi_{\lambda_k^*}^j\}_k$  no convergen fuerte a cero para ningún  $j = 1, 2, 3, 4$  en el espacio correspondiente.

**Demostración:**

i) La convergencia débil a cero de la sucesión  $\{\varphi_{\lambda_k^*}\}_k$  se obtiene fácilmente observando que todas vienen multiplicadas por la función  $\cos k\pi x$  y que satisfacen la ecuación elíptica correspondiente.

ii) Demostramos primero que  $\{\varphi_{\lambda_k^*}^3\}_k$  no tiende a cero en la norma de  $H^1(0, 1)$ . Tenemos:

$$\|\varphi_{\lambda_k^*}^3\|_{H^1(0,1)} = \frac{1}{|\lambda_k^*|^2} \left( \int_0^1 |\cos k\pi x|^2 + \int_0^1 |k\pi \sin k\pi x|^2 \right) = \frac{1 + k^2\pi^2}{2|\lambda_k^*|^2}.$$

Como  $(\lambda_k^*)^2 = -k^2\pi^2 + k^2\alpha_1 + \mathcal{O}(k) = -k^2\pi^2 + \mathcal{O}(k)$  se obtiene que  $\varphi_{\lambda_k^*}^3$  no tiende a cero en  $H^1(0, 1)$ . También es evidente que  $\varphi_{\lambda_k^*}^4$  no puede tender a cero en  $L^2(0, 1)$ .

Pasamos ahora a demostrar que  $\varphi_{\lambda_k^*}^1$  no tiende a cero en  $H^1(\Omega)$ . Evaluamos primero la expresión:

$$\begin{aligned} |a_k|^2 &= \left| \frac{1}{\sqrt{(\lambda_k^*)^2 + k^2\pi^2} \sinh(\sqrt{(\lambda_k^*)^2 + k^2\pi^2})} \right|^2 = \\ &= \frac{1}{|(\lambda_k^*)^2 + k^2\pi^2| \left( |\sinh \operatorname{Re} \sqrt{(\lambda_k^*)^2 + k^2\pi^2}|^2 + |\sin \operatorname{Im} \sqrt{(\lambda_k^*)^2 + k^2\pi^2}|^2 \right)}. \end{aligned}$$

Pasamos ahora a evaluar la expresión:

$$\begin{aligned} &\| \cosh(\sqrt{(\lambda_k^*)^2 + k^2\pi^2}(y-1)) \cos k\pi x \|_{H^1(\Omega)}^2 = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( |\cosh(\sqrt{(\lambda_k^*)^2 + k^2\pi^2}(y-1))|^2 + k^2\pi^2 |\cosh(\sqrt{(\lambda_k^*)^2 + k^2\pi^2}(y-1))|^2 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (|\lambda_k^*|^2 + k^2\pi^2) |\sinh(\sqrt{(\lambda_k^*)^2 + k^2\pi^2}(y-1))|^2 = \\
& = \frac{1}{4} \int_0^1 \left( (-(\lambda_k^*)^2 + k^2\pi^2) + k^2\pi^2 + 1 \right) \cos(\operatorname{Im} \sqrt{(\lambda_k^*)^2 + k^2\pi^2}(y-1)) + \\
& + (|\lambda_k^*|^2 + k^2\pi^2) + k^2\pi^2 + 1 \sinh(2\operatorname{Re} \sqrt{(\lambda_k^*)^2 + k^2\pi^2}(y-1)) = \\
& \frac{(-|\lambda_k^*|^2 + k^2\pi^2) + k^2\pi^2 + 1 \operatorname{sen} 2\operatorname{Im} \sqrt{(\lambda_k^*)^2 + k^2\pi^2}}{8\operatorname{Im} \sqrt{(\lambda_k^*)^2 + k^2\pi^2}} + \\
& + \frac{(|\lambda_k^*|^2 + k^2\pi^2) + k^2\pi^2 + 1 \operatorname{senh} 2\operatorname{Re} \sqrt{(\lambda_k^*)^2 + k^2\pi^2}}{8\operatorname{Re} \sqrt{(\lambda_k^*)^2 + k^2\pi^2}}.
\end{aligned}$$

Teniendo ahora en cuenta que  $\sqrt{(\lambda_k^*)^2 + k^2\pi^2} = kz_k^* = \sqrt[3]{k^2\pi^2} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{k\pi}i + o(\sqrt[3]{k})$  se obtiene que

$$\|\varphi_{\lambda_k^*}^1\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow \frac{\sqrt[3]{\pi^2}}{4}.$$

De una manera similar resulta que  $\|\varphi_{\lambda_k^*}^2\|_{L^2(\Omega)}$  tampoco tiende a cero.

■

**Observación 3.16** *La Proposición anterior nos indica que las autofunciones correspondientes a los autovalores  $\lambda_k^*$  son las únicas autofunciones con la propiedad de que las últimas dos componentes no se anulan asintóticamente. Por otra parte, las soluciones correspondientes del sistema inicial tienen un decaimiento uniforme.*

### 3.2.6 Conclusiones

En el Teorema 3.2 hemos localizado, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , todos los autovalores de módulo mayor que  $\sqrt{2}k\pi$  y hemos demostrado que hay otros  $2k+2$  autovalores de módulo menor que  $\sqrt{2}k\pi$ . En los Teoremas 3.3 y 3.4 se localizan, para  $k$  suficientemente grande,  $2k$  autovalores de los restantes. Por último, en el párrafo anterior se obtienen estimaciones para otros dos autovalores, si  $k$  es suficientemente grande. Observemos que, de esta manera, hemos localizado todos los autovalores de módulo suficientemente grande.

Los tipos de autovalores  $\lambda$  y su distribución están descritos a continuación:

- i) autovalores  $\lambda$  que se acercan a los autovalores del problema Neumann (3.43). Se obtienen considerando vibraciones con frecuencia grande en la dirección  $y$ .
- ii) autovalores  $\lambda$  que se acercan a los autovalores del problema mixto Neumann-Dirichlet (3.53). Se obtienen considerando vibraciones con frecuencia grande en la dirección  $x$ .
- iii) autovalores  $\lambda$  que hacen la transición de los autovalores encontrados en i) a los autovalores encontrados en ii).
- iv) dos autovalores  $\lambda_k^*$  y  $\lambda_k^{**}$  de parte real que no tiende a cero y con la particularidad de que la energía concentrada en  $\Gamma_0$  no tiende a cero a altas frecuencias.

La gráfica de la página siguiente nos indica la localización de los autovalores, para un  $k$  fijo.

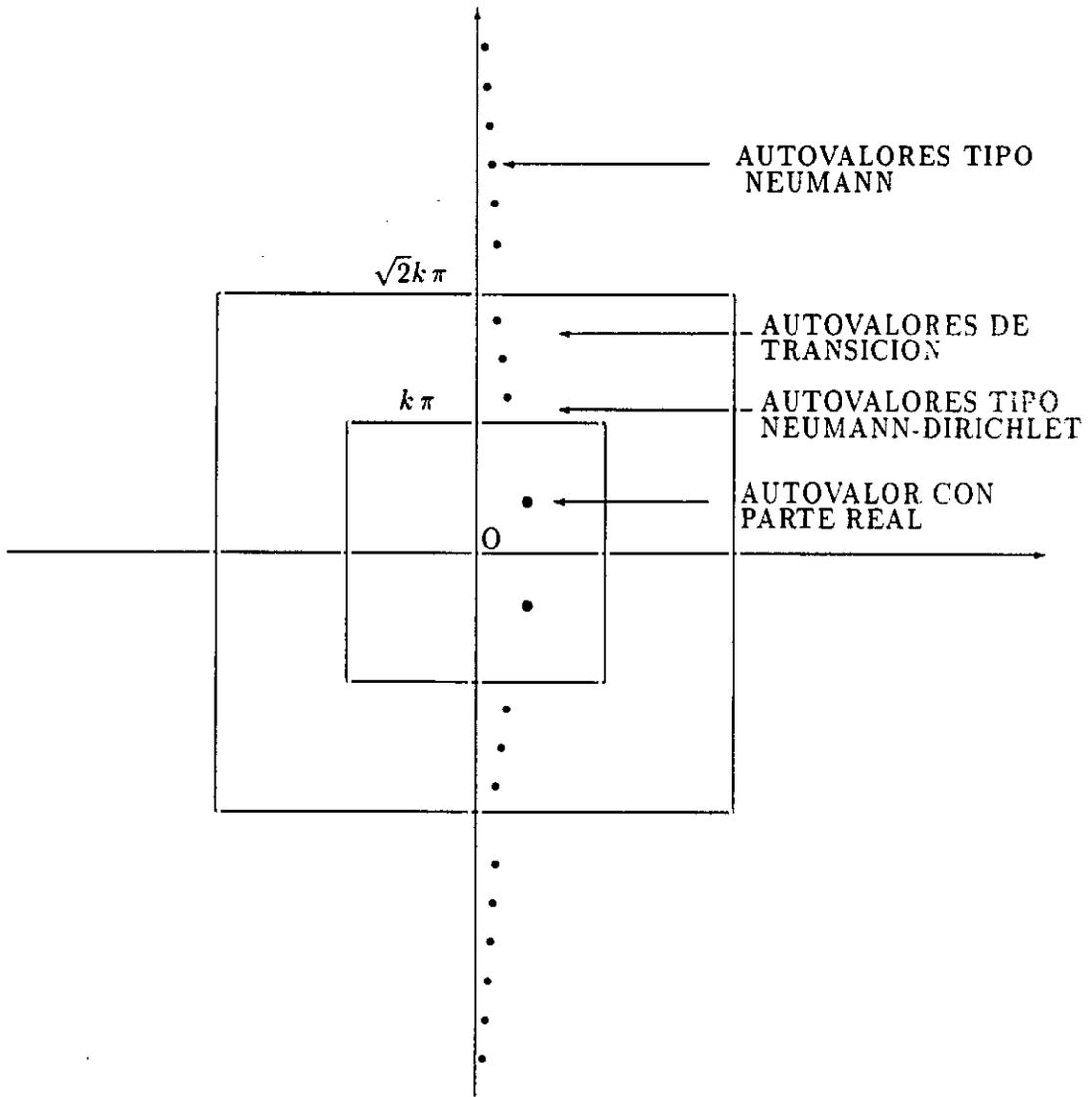


Fig. 7: La sucesión de los autovalores para  $k$  fijo

### 3.3 Comparación de los resultados

Entre los autovalores del problema con disipación y los autovalores del problema conservativo existe una estrecha relación, que ponemos de manifiesto a continuación.

En primer lugar, los autovalores con parte real “significativa” del problema disipativo,  $\lambda_k^*$  y  $\lambda_{k**}$  corresponden a los autovalores  $\nu_k^*$  y  $\nu_{k**}$  que vienen dados por la ecuación (3.10). En ambos casos se trata de los autovalores con el menor módulo para cada  $k$  fijo. El resultado del Teorema 3.5 nos indica que solamente estos autovalores son disipados uniformemente.

Los autovalores  $(\lambda_{k,m})_{m \in \mathbb{Z}^*}$  corresponden a los autovalores  $(\nu_{k,m})_{m \in \mathbb{Z}^*}$  del sistema conservativo que vienen dados por la ecuación (3.8).

Los distintos comportamientos de  $\lambda_{k,m}$  corresponden a comportamientos similares de los autovalores  $\nu_{k,m}$ . Tal y como se mencionaba en la Observación 3.2, fijando  $k$  y haciendo  $m$  tender

al infinito los valores  $\nu_{k,m}$  se aproximan a  $\sqrt{k^2 + m^2}\pi i$  igual que en el caso de los autovalores  $\lambda_{k,m}$ . Por otro lado, si fijamos  $m$  y hacemos  $k$  tender al infinito, los valores  $\nu_{k,m}$  se aproximan a  $\sqrt{k^2 + \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2} \pi i$  igual que los autovalores  $\lambda_{k,m}$ . Por último, como vimos en la demostración del Teorema 3.4 existe una correspondencia biyectiva entre los autovalores  $\lambda_{k,m}$  de transición y un conjunto de autovalores  $\nu_{k,m}$  del problema conservativo. Las dos sucesiones se aproximan a los mismos valores puramente imaginarios que vienen dados mediante la ecuación (3.8).

En general, podemos afirmar que los autovalores del problema disipativo se acercan asintóticamente a los autovalores del problema conservativo, con la excepción de los  $\lambda_k^*$  y  $\lambda_k^{**}$ .

Las propiedades de las autofunciones correspondientes son similares. Tanto para los autovalores  $\lambda_{k,m}$  como para los autovalores  $\nu_{k,m}$  las últimas dos componentes de las autofunciones correspondientes se anulan asintóticamente. Este fenómeno no se encuentra ni en el caso de las autofunciones correspondientes a  $\lambda_k^*$  y  $\lambda_k^{**}$  ni en el caso de las autofunciones correspondientes a los autovalores  $\nu_k^*$  y  $\nu_k^{**}$ .

### 3.4 Sobre la propiedad de completitud de las autofunciones

En este apartado nos proponemos estudiar la propiedad de completitud de las autofunciones del operador diferencial unidimensional correspondiente al sistema inicial y la posibilidad de que éstas formen una base de Riesz en el espacio  $\mathcal{Y} = H^1(0,1) \times L^2(0,1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

También estudiamos si las mismas propiedades son ciertas para el operador bidimensional  $\mathcal{A}$  asociado al sistema inicial.

Empezamos con dos definiciones:

**Definición 3.1** Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert. Una sucesión de elementos  $(e_n)_{n \geq 1}$  se llama completa en  $\mathcal{H}$  si, para cualquier elemento  $x \in \mathcal{H}$  existe una sucesión de escalares  $(a_n)_{n \geq 0}$  tal que:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n = x$ .

**Definición 3.2** Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert. Una sucesión de elementos  $(e_n)_{n \geq 1}$  se llama base de Riesz en  $\mathcal{H}$  si es completa y existen dos constantes positivas  $c_1$  y  $c_2$  tales que, para cualquier sucesión de escalares  $(a_n)_{n \geq 0}$  se tenga:  $c_1 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \leq \|\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\|^2 \leq c_2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ .

La noción de base de Riesz es una generalización natural de la noción de base ortogonal y tiene una gran utilidad para expresar soluciones de ecuaciones diferenciales y dar estimaciones de las normas de éstas.

Consideramos primero el sistema unidimensional siguiente, que se obtiene del sistema inicial (1.1) fijando la frecuencia de vibración en la dirección  $x$ :

$$(3.78) \quad \begin{cases} \psi_{tt} - \psi_{yy} + k^2 \pi^2 \psi = 0 & \text{para } y \in (0,1), t \in (0, \infty) \\ \psi_y(1) = 0 & \text{para } t \in (0, \infty) \\ \psi_y(0) = -w_t & \text{para } t \in (0, \infty) \\ w_{tt} + k^2 \pi^2 w + \psi_t(0) = 0 & \text{para } t \in (0, \infty). \end{cases}$$

Nos proponemos a continuación estudiar las propiedades de las autofunciones de (3.78).

Recordamos antes lo que es un operador Hilbert-Schmidt (vease Reed y Simon [44]).

**Definición 3.3** Para un operador positivo  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  el número  $\text{tr} T = \sum_{n=1}^{\infty} (\epsilon_n, T \epsilon_n)$ , donde  $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$  es una base ortonormal de  $\mathcal{H}$ , se llama la traza de  $T$ .

**Definición 3.4** Un operador  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  se llama de Hilbert-Schmidt si  $\text{tr} T^* T < \infty$ , donde  $T^*$  es el adjunto de  $T$ .

**Teorema 3.6** Si  $k > 0$  el operador diferencial  $\mathcal{A}_C^1$  asociado al sistema (3.78) es un operador antiadjunto en  $\mathcal{Y}$  cuyas autofunciones forman una base ortonormal en  $\mathcal{Y}$ .

Además, el operador acotado  $(\mathcal{A}_C^1)^{-1}$  es un operador Hilbert-Schmidt en  $\mathcal{Y}$ .

**Demostración:**

Mediante un cálculo semejante al del Teorema 1.1 se puede ver que  $\mathcal{A}_C^1$  es antiadjunto y con resolvente compacta en  $\mathcal{Y}$ . La teoría clásica de los operadores de este tipo nos asegura que las autofunciones forman una base ortonormal en  $\mathcal{Y}$ .

Para demostrar la última afirmación utilizamos el siguiente criterio (vease Reed y Simon [44]. Teorema VI.22, p. 210): "Un operador compacto  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  es Hilbert-Schmidt si y sólo si  $\sum_n |\lambda_n|^2 < \infty$ , donde  $\lambda_n$  son los autovalores de  $T$ "

Las estimaciones sobre los autovalores del operador  $\mathcal{A}_C^1$  (vease la primera sección) nos indican que  $(\mathcal{A}_C^1)^{-1}$  es un operador Hilbert-Schmidt. En efecto, los autovalores  $\nu_{k,m}$  de  $\mathcal{A}_C^1$  cumplen para cada  $k > 0$  y  $m \in \mathbb{Z}^*$ ,  $|m| > k$  la siguiente estimación:

$$|\nu_{k,m} - \sqrt{k^2 + m^2} \pi i| \leq \frac{24}{|m| \pi},$$

y por lo tanto:

$$\left| \frac{1}{\nu_{k,m}} - \frac{1}{\sqrt{m^2 + k^2} \pi i} \right| = \frac{|\nu_{k,m} - \sqrt{m^2 + k^2} \pi i|}{|\nu_{k,m}| |\sqrt{m^2 + k^2} \pi i|} \leq \frac{3}{|m|}.$$

Los autovalores del operador  $(\mathcal{A}_C^1)^{-1}$  son exactamente  $\frac{1}{\nu_{k,m}}$  de donde, usando la estimación anterior, obtenemos que:

$$\sum_m \left| \frac{1}{\nu_{k,m}} \right|^2 < \infty.$$

Por lo tanto el operador  $(\mathcal{A}_C^1)^{-1}$  es Hilbert-Schmidt. ■

Pasamos ahora al estudio del sistema unidimensional disipativo:

$$(3.79) \quad \begin{cases} \psi_{tt} - \psi_{yy} + k^2 \pi^2 \psi = 0 & \text{para } y \in (0, 1), t \in (0, \infty) \\ \psi_y(1) = 0 & \text{para } t \in (0, \infty) \\ \psi_y(0) = -w_t & \text{para } t \in (0, \infty) \\ w_{tt} + k^2 \pi^2 w + w_t + \psi_t(0) = 0 & \text{para } t \in (0, \infty). \end{cases}$$

Sea  $\mathcal{A}^1$  el operador diferencial asociado a este sistema.

Evidentemente  $\mathcal{A}^1 = \mathcal{A}_C^1 + \mathcal{P}_4$ , donde  $\mathcal{P}_4$  es el operador de proyección sobre la cuarta componente, definido en  $\mathcal{Y}$ .

**Teorema 3.7** Las autofunciones correspondientes al operador diferencial  $\mathcal{A}^1$  forman una base de Riesz en  $\mathcal{Y}$ .

**Demostración:**

Como  $\mathcal{A}^1$  es una perturbación acotada de un operador antiadjunto  $\mathcal{A}_C^1$  cuya resolvente, en  $\nu = 0$ , es un operador Hilbert-Schmidt se deduce que las autofunciones de  $\mathcal{A}^1$  forman un conjunto completo en  $\mathcal{Y}$  (vease Gøberg y Krein [16], Teorema 10.1, p. 276).

Para demostrar que el conjunto de las autofunciones forman una base de Riesz en  $\mathcal{Y}$  es suficiente demostrar que:

$$(3.80) \quad \sum_{n,m,n \neq m}^{\infty} \frac{\text{Im } \zeta_n \text{ Im } \zeta_m}{|\zeta_n - \bar{\zeta}_m|^2} < \infty,$$

donde  $\zeta_n$  son los autovalores del operador  $(-i\mathcal{A}^1)^{-1}$  (vease Gøberg y Krein [16], Teorema 4.1, pp. 329-330).

Observemos que  $\zeta_n = \frac{i}{\lambda_{k,n}}$  donde  $\lambda_{k,n}$  son los autovalores del operador  $\mathcal{A}^1$  para  $k$  fijo.

Se obtiene que la condición (3.80) se escribe:

$$(3.81) \quad \sum_{n,m,n \neq m}^{\infty} \frac{\text{Re } \lambda_{k,n} \text{ Re } \lambda_{k,m}}{|\lambda_{k,n} - \bar{\lambda}_{k,m}|^2} < \infty.$$

Veamos que esta serie es finita. Primero observemos que las estimaciones para  $\lambda_{k,m}$  del Teorema 3.2 nos dan que, para cada  $k > 0$  y  $m > k$ :

$$|\lambda_{k,m} - \sqrt{k^2 + m^2} \pi i| < \frac{24}{\sqrt{k^2 + m^2} \pi} < \frac{8}{|m|}.$$

De aquí se obtiene que, para  $m$  y  $n$  suficientes grandes:

$$|\text{Re } \lambda_{k,m}| < \frac{8}{|m|},$$

$$|\lambda_{k,n} - \bar{\lambda}_{k,m}| > |\sqrt{n^2 + k^2} - \sqrt{m^2 + k^2}| - \left| \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right| > \frac{|m - n|}{3}.$$

Resulta que:

$$\begin{aligned} \sum_{n,m,n \neq m}^{\infty} \frac{\text{Re } \lambda_{k,n} \text{ Re } \lambda_{k,m}}{|\lambda_{k,n} - \bar{\lambda}_{k,m}|^2} &\leq c \sum_{n,m,n \neq m}^{\infty} \frac{1}{n m (n - m)^2} = \\ &= c \sum_{n,m,n > m}^{\infty} \frac{1}{n m (n - m)^2} + c \sum_{n,m,n < m}^{\infty} \frac{1}{n m (n - m)^2}. \end{aligned}$$

Ahora, para la primera suma, tenemos:

$$\sum_{n,m,n > m}^{\infty} \frac{1}{n m (n - m)^2} < \sum_m^{\infty} \frac{1}{m^2} \sum_{n > m}^{\infty} \frac{1}{(n - m)^2} < \frac{\pi^2}{6} \sum_m^{\infty} \frac{1}{m^2} < \infty.$$

Para la otra suma tenemos algo similar:

$$\sum_{n,m,n < m}^{\infty} \frac{1}{m n (m - n)^2} < \sum_n^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{n < m}^{\infty} \frac{1}{(m - n)^2} < \frac{\pi^2}{6} \sum_n^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Obtenemos que la condición (3.81) se cumple y por lo tanto el teorema está demostrado.



**Observación 3.17** Para  $k = 0$  se obtiene el mismo resultado razonando primero en el espacio  $\mathcal{Y}^0$  y teniendo en cuenta que  $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0 \oplus \mathcal{Y}^1$ .

Pasamos ahora al análisis de las autofunciones del operador  $\mathcal{A}$ .

**Teorema 3.8** El operador conservativo  $\mathcal{A}_C$  asociado al sistema (3.1) es antiadjunto en  $\mathcal{X}^0$  y con resolvente compacta. Las autofunciones que le corresponden forman una base ortogonal en  $\mathcal{X}$ .

**Demostración:**

Mediante un cálculo sencillo, muy parecido al del principio de la demostración del Teorema 1.1, se obtiene que  $\mathcal{A}_C$  es antiadjunto en  $\mathcal{X}^0$  y que tiene resolvente compacta.

La segunda afirmación es una consecuencia directa de la teoría de los operadores autoadjuntos con resolvente compacta.

■

**Teorema 3.9** El conjunto de las autofunciones del operador  $\mathcal{A}$  es completo en  $\mathcal{X}$ .

**Demostración:**

Sabemos que el conjunto de las autofunciones del operador  $\mathcal{A}^1$  es una base de Riesz para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Sean  $(\varphi_{k,m})_m$  estas autofunciones.

Construimos ahora la doble sucesión  $(\Phi_{k,m})_{k,m}$ ,  $\Phi_{k,m} = \varphi_{k,m} \cos k\pi x$ .

Esta sucesión es completa en  $\mathcal{X}$  y está formada por autovalores de  $\mathcal{A}$ .

■

**Observación 3.18** La posibilidad de que las autofunciones del operador  $\mathcal{A}$  formen una base de Riesz es un problema mucho más delicado. Por un lado, en las estimaciones que tenemos para las autofunciones de  $\mathcal{A}$  no utilizamos elementos de una base ortogonal. Por lo tanto estas estimaciones no nos ofrecen informaciones útiles para responder a esta pregunta. Por otro lado, la utilización de criterios en los que sólo se necesitan estimaciones de los autovalores (como, por ejemplo, Teorema 10.1 de Gøberg y Krein [16]) no es posible, ya que las estimaciones que tenemos para los autovalores  $\lambda_{k,m}$ , cuando  $m < k$ , no se muestran suficientes. El problema queda abierto.

### 3.5 Un resultado de no compacidad

Pasamos ahora a dar una aplicación directa de los resultados obtenidos en el párrafo anterior.

Es bien sabido que en los sistemas híbridos unidimensionales el término disipativo frecuentemente es una perturbación compacta del operador conservativo. Este argumento se utiliza habitualmente para demostrar el no decaimiento uniforme de las soluciones de un sistema híbrido disipativo unidimensional (vease Rao [42]). Esto no es posible en nuestro caso donde el término disipativo  $(0, 0, 0, W_t)$  es, al menos aparentemente, solamente una perturbación acotada del operador conservativo. Sin embargo, cabe preguntarse si la perturbación que produce es compacta.

Una manera rigurosa de plantear esta cuestión es la siguiente: ¿la diferencia entre el semigrupo generado por el operador disipativo y el semigrupo generado por el operador conservativo es compacta? La existencia de los autovalores  $(\lambda_k^*)_k$  encontrados en el Teorema 3.5 nos indica que la respuesta es negativa.

**Proposición 3.7** Sea  $\{S_D(t)\}_{t \geq 0}$  el semigrupo generado por el operador disipativo y  $\{S_C(t)\}_{t \geq 0}$  el semigrupo generado por el operador conservativo. Entonces, para todo  $t > 0$ , la diferencia  $(S_D - S_C)(t)$  no es un operador compacto en  $\mathcal{X}$ .

**Demostración:**

Supongamos que existe un instante  $t_0 > 0$  tal que  $(S_D - S_C)(t_0)$  sea compacta.

La Proposición 3.6 nos indica que la sucesión de las autofunciones  $\{\varphi_{\lambda_k^*}\}_k$ , correspondientes a los autovalores  $\lambda_k^*$  que tienen parte real "significativa", converge débilmente a cero en  $\mathcal{X}$  y por lo tanto:

$$\|(S_C(t_0) - S_D(t_0))\varphi_{\lambda_k^*}\|_{\mathcal{X}} \longrightarrow 0 \text{ cuando } k \longrightarrow \infty.$$

Como  $\varphi_{\lambda_k^*}$  es un autovalor del problema disipativo tenemos que:

$$S_D(t_0)\varphi_{\lambda_k^*} = e^{-\lambda_k^* t_0} \varphi_{\lambda_k^*},$$

y, por lo tanto,

$$(3.82) \quad \|S_C(t_0)\varphi_{\lambda_k^*} - e^{-\lambda_k^* t_0} \varphi_{\lambda_k^*}\|_{\mathcal{X}} \longrightarrow 0 \text{ cuando } k \longrightarrow \infty.$$

Ahora, como el operador conservativo genera un grupo de isometrías tenemos que:

$$\|S_C(t_0)\varphi_{\lambda_k^*}\|_{\mathcal{X}} = \|\varphi_{\lambda_k^*}\|_{\mathcal{X}},$$

y, por consiguiente,

$$(3.83) \quad \|\varphi_{\lambda_k^*}\|_{\mathcal{X}} = \|S_C(t_0)\varphi_{\lambda_k^*}\|_{\mathcal{X}} \leq \|S_C(t_0)\varphi_{\lambda_k^*} - e^{-\lambda_k^* t_0} \varphi_{\lambda_k^*}\|_{\mathcal{X}} + |e^{-\lambda_k^* t_0}| \|\varphi_{\lambda_k^*}\|_{\mathcal{X}}.$$

En el Teorema 3.5 hemos demostrado que la sucesión  $(\lambda_k^*)_k$  tiene la propiedad de que  $\mathcal{R}e \lambda_k^* \longrightarrow \frac{1}{3}$ , cuando  $k \longrightarrow \infty$  y por consiguiente, existe  $k_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{R}e \lambda_k^* > \frac{1}{4} > 0$  para todo  $k > k_1$ .

Obtenemos que, para todo  $t > 0$ , existe una constante  $\varepsilon$ , que depende de  $t$  pero no de  $k$ , tal que:

$$|e^{-\lambda_k^* t}| = e^{-\mathcal{R}e \lambda_k^* t} < 1 - \varepsilon.$$

Con  $t = t_0$  en esta última relación volvemos a (3.83) y obtenemos:

$$(3.84) \quad \varepsilon \|\varphi_{\lambda_k^*}\|_{\mathcal{X}} \leq \|S_C(t_0)\varphi_{\lambda_k^*} - e^{-\lambda_k^* t_0} \varphi_{\lambda_k^*}\|_{\mathcal{X}}.$$

Observemos ahora que (3.82) y (3.84) implican que  $\|\varphi_{\lambda_k^*}\|_{\mathcal{X}}$  tiende a cero cuando  $k$  tiende al infinito, lo que contradice el resultado de la proposición 3.6.

Resulta, por lo tanto, que la diferencia  $(S_D - S_C)(t)$  no es un operador compacto para ningún  $t > 0$ .

■



## Capítulo 4

# Un problema de control frontera

Uno de los problemas de mayor interés práctico en este tipo de modelos es la posibilidad de controlar el nivel de ruido interior mediante la acción activa sobre la parte flexible  $\Gamma_0$  de la frontera. Por ejemplo, recientemente, se ha estudiado la posibilidad de controlar el sistema mediante piezas piezocerámicas fijadas sobre esta parte (vease Banks et. al [3]).

En el presente capítulo nos proponemos estudiar la controlabilidad mediante controles que actúan solamente sobre  $\Gamma_0$ . La formulación matemática exacta del problema es la siguiente: dado  $T$  suficientemente grande y un dato inicial  $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1)$  en un espacio  $\mathcal{E}$  que está a nuestra disposición, encontrar un control  $\beta = \beta(t, x) \in H^{-2}(0, T; L^2(0, 1))$ , tal que la solución del sistema:

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Phi_{tt} - \Delta \Phi = 0 & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, T) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -W_t & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, T) \\ W_{tt} - W_{xx} + \Phi_t = \beta & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, T) \\ W_x(0, t) = W_x(1, t) = 0 & \text{para } t \in (0, T) \\ \Phi(0) = \Phi^0, \quad \Phi_t(0) = \Phi^1 & \text{en } \Omega \\ W(0) = W^0, \quad W_t(0) = W^1 & \text{sobre } \Gamma_0 \end{array} \right.$$

satisfaga las relaciones:

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(T) = \Phi_t(T) = 0 \\ W(T) = W_t(T) = 0. \end{array} \right.$$

Se trata pues de controlar el sistema mediante el término  $\beta$  que representa una fuerza distribuida que actúa sobre la parte flexible  $\Gamma_0$  de la frontera. Sin embargo, este problema no siempre se puede resolver. En efecto, integrando la primera ecuación de (4.1) en  $\Omega$  y utilizando la condición de continuidad de las velocidades en  $\Gamma_0$  deducimos que la cantidad:

$$\int_{\Omega} \Phi_t dx dy - \int_{\Gamma_0} W dx$$

permanece constante a lo largo de las trayectorias. Por consiguiente, (4.2) sólo es posible si:

$$\int_{\Omega} \Phi^1 dx dy - \int_{\Gamma_0} W^0 dx = 0.$$

Teniendo en cuenta ésto y como del punto de vista matemático es más fácil considerar dos controles, en primer lugar abordamos el siguiente problema: dado  $T$  suficientemente grande y un dato inicial  $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1)$  en un espacio  $\mathcal{E}$  que está a nuestra disposición, encontrar dos controles  $\alpha = \alpha(t, x) \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$  y  $\beta = \beta(t, x) \in H^{-2}(0, T; L^2(0, 1))$ , tales que la solución del sistema:

$$(4.3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Phi_{tt} - \Delta \Phi = 0 & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, T) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -W_t + \alpha & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, T) \\ W_{tt} - W_{xx} + \Phi_t = \beta & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, T) \\ W_x(0, t) = W_x(1, t) = 0 & \text{para } t \in (0, T) \\ \Phi(0) = \Phi^0, \quad \Phi_t(0) = \Phi^1 & \text{en } \Omega \\ W(0) = W^0, \quad W_t(0) = W^1 & \text{sobre } \Gamma_0 \end{array} \right.$$

satisfaga las relaciones:

$$(4.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(T) = \Phi_t(T) = 0 \\ W(T) = W_t(T) = 0. \end{array} \right.$$

El método de resolución de este problema consiste en reducirlo a una infinidad de problemas de control unidimensionales, encontrar los controles necesarios en estos casos y combinarlos para obtener un control del problema bidimensional (4.3).

Sin embargo, para asegurar la convergencia de las series de los controles unidimensionales, en los espacios deseados, tenemos que imponer condiciones muy restrictivas sobre los datos iniciales. Por lo tanto se va a obtener la controlabilidad de un espacio relativamente pequeño de datos. Este resultado, no es sorprendente ya que estamos intentando controlar el sistema actuando sobre una parte relativamente pequeña de la frontera que no cumple las condiciones geométricas establecidas en los trabajos de Bardos, Lebeau, Rauch [6] (vease también Bardos y Rauch [8]) y que demuestran *grosso modo* que, para que se pueda controlar el espacio de la energía mediante controles en un espacio de Sobolev, es indispensable que los rayos de la óptica geométrica intersecten la región de control en un tiempo uniforme, cosa que no ocurre en este caso.

En la primera sección estudiamos la controlabilidad del sistema unidimensional correspondiente a (4.3). La reducción de la dimensión del sistema de dos a uno nos permite obtener buenas estimaciones y demostrar la propiedad de controlabilidad en este caso.

En la segunda sección se hace el paso al problema bidimensional inicial y también se discute el sentido del resultado de control.

Como decíamos al principio, del punto de vista físico, el control  $\beta$  representa una fuerza distribuida que actúa sobre la parte flexible  $\Gamma_0$  de la frontera mientras que el significado del control  $\alpha$  no es igual de claro. Por esta razón intentaremos eliminar este último control de la ecuación (4.3) y resolver el problema (4.1). Este estudio se lleva a cabo en la última sección.

Lo más que se obtiene es un resultado de controlabilidad parcial en el que la relación (4.2) se sustituye por:

$$(4.5) \quad \begin{cases} \Phi(T) = c_1 = \text{cte}, & \Phi_t(T) = 0 \\ W(T) = c_2 = \text{cte}, & W_t(T) = 0. \end{cases}$$

Las constantes  $c_1$  y  $c_2$  se determinan de manera única en función de los datos iniciales del sistema (4.1).

## 4.1 El problema de control unidimensional

Estudiamos primero el problema de control siguiente: dado  $T$  suficientemente grande y un dato inicial  $(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1)$  en un espacio  $\mathcal{Y}$ , encontrar dos controles  $\alpha = \alpha(t)$  y  $\beta = \beta(t)$ , en unos espacios que están a nuestra disposición, de forma que la solución del sistema:

$$(4.6) \quad \begin{cases} \Psi_{tt} - \Psi_{yy} + n^2\pi^2\Psi = 0 & \text{para } y \in (0, 1), t \in (0, T) \\ \Psi_y(1) = 0 & \text{para } t \in (0, T) \\ \Psi_y(0) = -V_t + \alpha & \text{para } t \in (0, T) \\ V_{tt} + n^2\pi^2V + \Psi_t(0) = \beta & \text{para } t \in (0, T) \\ \Psi(0) = \Psi^0, \quad \Psi_t(0) = \Psi^1 & \text{para } y \in (0, 1) \\ V(0) = V^0, \quad V_t(0) = V^1 \end{cases}$$

satisfaga las relaciones:

$$(4.7) \quad \begin{cases} \Psi(T) = \Psi_t(T) = 0 \\ V(T) = V_t(T) = 0. \end{cases}$$

Obviamente, los controles  $(\alpha, \beta)$  dependen del coeficiente  $n$  de la ecuación:  $\alpha = \alpha_n$  y  $\beta = \beta_n$ . Sin embargo, a lo largo de esta sección, como  $n$  se mantiene fijo, omitiremos el índice.

**Observación 4.1** *El sistema (4.6) se obtiene buscando soluciones de (4.3) que tengan la forma:*

$$\Phi(t, x, y) = \Psi(t, y) \cos n\pi x, \quad W(t, x) = V(t) \cos n\pi x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Nuestro argumento para resolver el problema de control bidimensional se basa en esta posibilidad de separar las variables.*

Antes de empezar a estudiar el problema de control anterior tenemos que demostrar una serie de propiedades del sistema "adjunto" de (4.6). Es lo que nos proponemos en el siguiente párrafo.

### 4.1.1 Propiedades fundamentales del problema unidimensional

En este párrafo estudiaremos, para  $n \in \mathbb{N}$ , el siguiente sistema adjunto:

$$(4.8) \quad \begin{cases} \Psi_{tt} - \Psi_{yy} + n^2 \pi^2 \Psi = f & \text{para } y \in (0, 1), t \in (0, T) \\ \Psi_y(1) = 0 & \text{para } t \in (0, T) \\ \Psi_y(0) = V_t & \text{para } t \in (0, T) \\ V_{tt} + n^2 \pi^2 V - \Psi_t(0) = g & \text{para } t \in (0, T) \\ \Psi(0) = \Psi^0, \quad \Psi_t(0) = \Psi^1 & \text{para } y \in (0, 1) \\ V(0) = V^0, \quad V_t(0) = V^1 \end{cases}$$

Definimos la energía asociada al sistema por:

$$(4.9) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( (\Psi_t)^2 + (\Psi_y)^2 + n^2 \pi^2 \Psi^2 \right) dy + \frac{1}{2} \left( (V_t)^2 + n^2 \pi^2 V^2 \right).$$

Observemos que, en el caso  $f = 0$ ,  $g = 0$ , multiplicando la primera ecuación de (4.8) por  $\Psi_t$ , la cuarta ecuación por  $V_t$  e integrando por partes, se obtiene, al menos formalmente, que

$$\frac{dE}{dt}(t) = 0.$$

Es decir, la energía del sistema se conserva.

Consideramos ahora el espacio de energía finita correspondiente:

$$(4.10) \quad \mathcal{Y} = H^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

y en  $\mathcal{Y}$  definimos el producto escalar:

$$(4.11) \quad \begin{aligned} ((f_1, f_2, f_3, f_4), (g_1, g_2, g_3, g_4)) &= \int_0^1 \left( (f_1)_y (g_1)_y + n^2 \pi^2 f_1 g_1 \right) dy + \\ &+ \int_0^1 f_2 g_2 dy + n^2 \pi^2 f_3 g_3 + f_4 g_4. \end{aligned}$$

$(\mathcal{Y}, (\dots))$  es un espacio de Hilbert.

**Observación 4.2** En el caso  $n = 0$  la relación (4.11) no define un producto escalar. En esta situación consideramos el producto escalar definido por:

$$(4.12) \quad \begin{aligned} ((f_1, f_2, f_3, f_4), (g_1, g_2, g_3, g_4)) &= \int_0^1 \left( (f_1)_y (g_1)_y + f_1 g_1 \right) dy + \\ &+ \int_0^1 f_2 g_2 dy + f_3 g_3 + f_4 g_4. \end{aligned}$$

Definimos los siguientes operadores:

$$B^1 : H^1(0, 1) \times H^1(0, 1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow (H^1(0, 1))',$$

$$\langle B^1(\psi, \xi, w, v), \varphi \rangle = \int_0^1 (\psi_y \varphi_y + n^2 \pi^2 \psi \varphi) dy + v \varphi(0)$$

$$C^1 : H^1(0, 1) \times H^1(0, 1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$C^1(\psi, \xi, w, v) = n^2 \pi^2 w - \xi(0).$$

Finalmente consideramos el operador

$$\mathcal{A}^1 : \mathcal{D}(\mathcal{A}^1) \subset \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}^1) = \left\{ (\psi, \xi, w, v) \in \mathcal{Y} : \xi \in H^1(0, 1), \mathcal{B}^1(\psi, \xi, w, v) \in L^2(0, 1), \frac{\partial \psi}{\partial y}(1) = 0, \frac{\partial \psi}{\partial y}(0) = v \right\}$$

$$(4.13) \quad \mathcal{A}^1(\psi, \xi, w, v) = (-\xi, \mathcal{B}^1(\psi, \xi, w, v), -v, \mathcal{C}^1(\psi, \xi, w, v)).$$

Observemos que la condición  $\mathcal{B}^1(\psi, \xi, w, v) \in L^2(0, 1)$  implica que  $\psi \in H^2(0, 1)$  y, por lo tanto,  $\mathcal{D}(\mathcal{A}^1) \subset H^2(0, 1) \times H^1(0, 1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . En efecto, la condición  $\mathcal{B}^1(\psi, \xi, w, v) \in L^2(0, 1)$  implica la existencia de una función  $h \in L^2(0, 1)$  tal que:

$$\int_0^1 (\psi_y \varphi_y) - v\varphi(0) = \int_0^1 h\varphi \quad \text{para toda } \varphi \in H^1(0, 1).$$

Si definimos  $\tilde{v} = v - \left( \frac{y^2}{2} - y \right) v$  se obtiene que:

$$\int_0^1 (\tilde{\psi}_y \varphi_y) = \int_0^1 (h + v)\varphi \quad \text{para toda } \varphi \in H^1(0, 1),$$

lo que nos indica que  $\tilde{\psi}_{yy} \in L^2(0, 1)$  y por lo tanto  $\psi \in H^2(0, 1)$ .

Las condiciones de contorno tienen sentido en  $\mathcal{D}(\mathcal{A}^1)$  como trazas.

Si notamos  $U = (\Psi, \xi, V, \zeta)$  y  $H = (0, f, 0, g)$ , el sistema (4.8) se escribe:

$$(4.14) \quad \begin{cases} U_t + \mathcal{A}^1 U = H, \\ U(0) = U_0 \\ U(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^1), \quad \forall t \in [0, T]. \end{cases}$$

A continuación damos un teorema que se basa en la teoría general de los operadores maximales monótonos y de las ecuaciones de evolución no homogéneas:

**Teorema 4.1** Si  $\mathcal{A}^1$  es el operador definido en (4.13) se tiene:

1. El operador  $\mathcal{A}^1$  genera un semigrupo de contracciones en  $\mathcal{Y}$ , notado  $\{S^1(t)\}_{t \geq 0}$ .

2. Soluciones fuertes: Si  $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^1)$  y  $H = (0, f, 0, g) \in W^{1,1}(0, T; \mathcal{Y})$  entonces existe una única solución fuerte  $U$  de la ecuación (4.14) con las siguientes propiedades:

$$(4.15) \quad U \in C^1([0, T], \mathcal{Y}) \cap C([0, T], \mathcal{D}(\mathcal{A}^1)).$$

3. Soluciones débiles: Si  $U_0 \in \mathcal{Y}$  y  $H = (0, f, 0, g) \in L^1(0, T; \mathcal{Y})$  entonces existe una única solución débil  $U$  de la ecuación (4.14) con las propiedades:

$$(4.16) \quad U \in C([0, T], \mathcal{Y}), \quad U(t) = S^1(t)U_0 + \int_0^t S^1(t-s)H(s) ds.$$

Para dos soluciones débiles cualesquiera,  $U$  y  $\hat{U}$ , se tiene la siguiente propiedad de continuidad con respecto a los datos iniciales y a los términos no homogéneos:

$$(4.17) \quad \|U(t) - \hat{U}(t)\|_{\mathcal{Y}} \leq \|U_0 - \hat{U}_0\|_{\mathcal{Y}} + \|H - \hat{H}\|_{L^1(0, T; \mathcal{Y})}.$$

Si  $H - \hat{H} = 0$  la desigualdad (4.17) se convierte en una igualdad y expresa la conservación de la energía del sistema.

**Demostración:**

Consiste en demostrar que el operador  $\mathcal{A}^1$  es maximal monótono en  $\mathcal{Y}$  y aplicar la teoría general de los problemas de evolución no homogéneas (ver Cazenave y Haraux [12]).

Para demostrar que el operador  $\mathcal{A}^1$  es monótono evaluamos el producto escalar:

$$(\mathcal{A}^1(\psi, \xi, w, v), (\psi, \xi, w, v)) = ((-\xi, \mathcal{B}^1(\psi, \xi, w, v), -v, \mathcal{C}^1(\psi, \xi, w, v)), (\psi, \xi, w, v)) = 0$$

Para demostrar que el operador es maximal consideramos  $(f, g, h, i) \in \mathcal{Y}$  y buscamos un elemento  $(\psi, \xi, w, v) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^1)$  tal que

$$(\mathcal{A} + \mathcal{I})(\psi, \xi, w, v) = (f, g, h, i)$$

lo que se reduce a encontrar  $\psi \in H^1(0, 1)$  y  $w \in \mathbb{R}$  solución de:

$$(4.18) \quad \begin{cases} \int_0^1 (\psi_y \phi_y + n^2 \pi^2 \psi \phi) dy + \int_0^1 \psi \phi dy + w \phi(0) = \\ = \int_0^1 f \phi dy + \int_0^1 g \phi dy + h \phi(0), \forall \phi \in H^1(0, 1) \\ (n^2 \pi^2 + 1)w - \psi(0) = i + h - f(0). \end{cases}$$

La existencia de  $\psi \in H^1(0, 1)$  y  $w \in \mathbb{R}$ , solución de (4.18) resulta fácilmente aplicando el lema de Lax-Milgram. A continuación se obtiene que  $(\Psi, \xi, w, v) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^1)$  debido a la definición del dominio del operador.

Se obtiene así que el operador  $\mathcal{A}^1$  es maximal y monótono en  $\mathcal{Y}$ . Los resultados mencionados son consecuencias de la teoría clásica de los problemas de Cauchy no homogéneos en los espacios de Hilbert (vease Cazenave y Haraux [12], Cap. 4).

■

**Observación 4.3** En el caso  $n = 0$  el operador  $\mathcal{A}^1$  correspondiente no es maximal en  $\mathcal{Y}$ . De la misma manera que en el Capítulo 1, descomponemos el espacio  $\mathcal{Y}$  en suma directa de dos subespacios  $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0 \oplus \mathcal{Y}^1$  donde:

$$\mathcal{Y}^1 = \{(c_1, 0, c_2, 0) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{Y}^0 = \left\{ (\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1) \in \mathcal{Y} : \int_0^1 \Psi^1 dy + V^0 = 0, V^1 - \Psi(0) = 0 \right\}.$$

En este caso la expresión (4.11) define un producto, escalar en  $\mathcal{Y}^0$ . Además, el operador  $\mathcal{A}^1$  es maximal monótono en  $\mathcal{Y}^0$  y todas las propiedades del Teorema 4.1 son válidas si sustituimos  $\mathcal{Y}$  por  $\mathcal{Y}^0$ .

**4.1.2 Observabilidad (caso  $n \neq 0$ )**

A continuación vamos a ver un resultado de regularidad adicional que no se deduce del teorema anterior, sino que se debe a la forma particular del sistema (4.8).

**Teorema 4.2** Sea  $T > 0$  arbitrario. Si consideramos el sistema (4.8) con los datos iniciales  $(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1) \in \mathcal{Y}$  y los términos no homogéneos  $f \in L^1(0, T; L^2(0, 1))$  y  $g \in L^1(0, T)$ , entonces la solución  $(\Psi, \Psi_t, V, V_t)$  correspondiente tiene la siguiente propiedad de regularidad adicional:  $V \in W^{2,1}(0, T)$ .

Además la solución satisface la siguiente estimación:

$$(4.19) \quad \left( \int_0^T |V_{tt}| \right)^2 + \int_0^T \left( (V_t)^2 + n^4 \pi^4 V^2 + n^2 \pi^2 \Psi^2(0, t) \right) \leq \\ \leq C(n^2 + 1) \left( \|(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1)\|_{\mathcal{Y}}^2 + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(0, 1))}^2 + \|g\|_{L^1(0, T)}^2 \right)$$

Si  $g \in L^2(0, T)$ , entonces  $V \in H^2(0, T)$  y la solución satisface:

$$(4.20) \quad \int_0^T \left( (V_{tt})^2 + (V_t)^2 + n^4 \pi^4 V^2 + n^2 \pi^2 \Psi^2(0, t) \right) \leq \\ \leq C(n^2 + 1) \left( \|(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1)\|_{\mathcal{Y}}^2 + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(0, 1))}^2 + \|g\|_{L^2(0, T)}^2 \right)$$

En ambos casos  $C$  es una constante que depende de  $T$  pero que no depende ni de  $n$  ni de los datos del sistema.

### Demostración:

Consideramos una sucesión de datos regulares:

$$(\Psi_m^0, \Psi_m^1, V_m^0, V_m^1)_{m \geq 0} \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}^1),$$

tal que

$$(\Psi_m^0, \Psi_m^1, V_m^0, V_m^1) \longrightarrow (\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1) \text{ en } \mathcal{Y} \text{ cuando } m \rightarrow \infty,$$

$$(f_m)_{m \geq 0} \subset W^{1,1}(0, T; L^2(0, 1)), \quad f_m \rightarrow f \text{ en } L^1(0, T; L^2(0, 1)) \text{ cuando } m \rightarrow \infty,$$

$$(g_m)_{m \geq 0} \subset W^{1,1}(0, T), \quad g_m \rightarrow g \text{ en } L^1(0, T) \text{ cuando } m \rightarrow \infty.$$

Con estos datos el Teorema 4.1 nos asegura la existencia de una solución fuerte para cada  $m \in \mathbb{N}$ .  $(\Psi_m, (\Psi_m)_t, V_m, (V_m)_t) \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathcal{Y}) \cap \mathcal{C}([0, T], \mathcal{D}(\mathcal{A}^1))$ , que cumple la siguiente ecuación en casi todo punto:

$$(4.21) \quad \begin{cases} (\Psi_m)_{tt} - (\Psi_m)_{yy} + n^2 \pi^2 \Psi_m = 0 & \text{para } y \in (0, 1), t \in (0, T) \\ (\Psi_m)_y(1) = 0 & \text{para } t \in (0, T) \\ (\Psi_m)_y(0) = (V_m)_t & \text{para } t \in (0, T) \\ (V_m)_{tt} + n^2 \pi^2 V_m - (\Psi_m)_t(0) = 0 & \text{para } t \in (0, T) \\ \Psi_m(0) = \Psi_m^0, \quad (\Psi_m)_t(0) = \Psi_m^1 & \text{para } y \in (0, 1) \\ V_m(0) = V_m^0, \quad (V_m)_t(0) = V_m^1 & \text{sobre } \Gamma_0. \end{cases}$$

A continuación obtenemos estimaciones para estas soluciones, aplicando técnicas de multiplicadores (ver Lions [29] y Komornik [26]). Multiplicamos la primera ecuación de (4.21) por  $(1 - y)(\Psi_m)_y$  e integramos por partes en  $(0, T) \times (0, 1)$ :

$$\int_0^T \int_0^1 f(1 - y)(\Psi_m)_y = \int_0^T \int_0^1 \left( (\Psi_m)_{tt} - (\Psi_m)_{yy} + n^2 \pi^2 \Psi_m \right) (1 - y)(\Psi_m)_y =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 (\Psi_m)_t (1-y) (\Psi_m)_y \Big|_0^T - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (1-y) \left( ((\Psi_m)_t)^2 + ((\Psi_m)_y)^2 - n^2 \pi^2 (\Psi_m)^2 \right) dy \\
&= \int_0^1 (\Psi_m)_t (1-y) (\Psi_m)_y \Big|_0^T - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \left( ((\Psi_m)_t)^2 + ((\Psi_m)_y)^2 - n^2 \pi^2 (\Psi_m)^2 \right) dy \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^T (1-y) \left( ((\Psi_m)_t)^2 + ((\Psi_m)_y)^2 - n^2 \pi^2 (\Psi_m)^2 \right) \Big|_0^1.
\end{aligned}$$

Resulta que:

$$\begin{aligned}
(4.22) \quad &\frac{1}{2} \int_0^T \left( ((\Psi_m)_t)^2 + ((\Psi_m)_y)^2 - n^2 \pi^2 (\Psi_m)^2 \right) (0) = - \int_0^1 (\Psi_m)_t (1-y) (\Psi_m)_y \Big|_0^T + \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \left( ((\Psi_m)_t)^2 + ((\Psi_m)_y)^2 - n^2 \pi^2 (\Psi_m)^2 \right) dy + \int_0^T \int_0^1 f(1-y) (\Psi_m)_y dy.
\end{aligned}$$

El segundo miembro de (4.22) tiene sentido también para soluciones débiles que pertenecen a  $C([0, T], \mathcal{Y})$  si  $f \in L^1(0, T; L^2(0, 1))$ . Como además  $\Psi \in C([0, T], H^1(0, 1))$ , pasando al límite en (4.22), obtenemos:  $\int_0^T (\Psi_t)^2(0) < \infty$ .

Ahora, como de la ecuación sobre  $\Gamma_0$  se deduce que  $V_{tt} = g - n^2 \pi^2 V + \Psi_t(\cdot, 0)$ , se obtiene que  $V \in W^{2,1}(0, T)$  si  $g \in L^1(0, T)$  y  $V \in H^2(0, T)$  si  $g \in L^2(0, T)$ .

**Observación 4.4** *La estructura particular del problema hace que  $V$  sea más regular de lo que teníamos inicialmente. En efecto, el resultado anterior nos asegura que  $V \in W^{2,1}(0, T)$  mientras que del Teorema 4.1 sabíamos sólo que  $V \in C^1[0, T]$ .*

*De la demostración se deducen otros resultados de regularidad adicional como, por ejemplo,  $\Psi_y(\cdot, 0) \in W^{1,1}$  si  $V \in W^{2,1}$  y  $\Psi_y(\cdot, 0) \in H^1$  si  $V \in H^2$ .*

Pasamos ahora a obtener las estimaciones de la norma.

Volvemos a considerar la relación (4.22) y pasamos al límite cuando  $m$  tiende a infinito. Se obtiene que:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_0^T \left( (\Psi_t)^2 + (\Psi_y)^2 - n^2 \pi^2 \Psi^2 \right) (0) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \left( (\Psi_t)^2 + (\Psi_y)^2 - n^2 \pi^2 \Psi^2 \right) dy \\
&- \int_0^1 \Psi_t (1-y) \Psi_y \Big|_0^T + \int_0^T \int_0^1 f(1-y) \Psi_y dy \leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \left( (\Psi_t)^2 + (\Psi_y)^2 - n^2 \pi^2 \Psi^2 \right) dy + \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^1 \left( (\Psi_t)^2 + (\Psi_y)^2 \right) (0) + \frac{1}{2} \int_0^1 \left( (\Psi_t)^2 + (\Psi_y)^2 \right) (T) + \int_0^T \left( \int_0^1 f^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 (\Psi_y)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dy \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \left( (\Psi_t)^2 + (\Psi_y)^2 + n^2 \pi^2 \Psi^2 \right) dy + \|\Psi_t\|_{C([0, T], L^2)}^2 + \frac{3}{2} \|\Psi_y\|_{C([0, T], L^2)}^2 + \|f\|_{L^1(0, T; L^2)}^2 \leq \\
&\leq \frac{T+4}{2} \left( \|\Psi_t\|_{C([0, T], L^2)}^2 + \|\Psi\|_{C([0, T], H^1)}^2 + n^2 \pi^2 \|\Psi\|_{C([0, T], L^2)}^2 + \|f\|_{L^1(0, T; L^2)}^2 \right).
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la relación (4.17) del Teorema 4.1, se deduce que:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^T \left( (\Psi_t)^2 + (\Psi_y)^2 + n^2 \pi^2 \Psi^2 \right) (0) \leq \\
& \leq \frac{T+4}{2} \left( \|\Psi_t\|_{\mathcal{C}([0,T],L^2)}^2 + (2n^2\pi^2 + 1) \|\Psi\|_{\mathcal{C}([0,T],H^1)}^2 + n^2\pi^2 \|\Psi\|_{\mathcal{C}([0,T],L^2)}^2 + \|f\|_{L^1(0,T;L^2)}^2 \right) \leq \\
& \leq \frac{(2n^2\pi^2 + 1)(T+4)}{2} \left( \|(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1)\|_{\mathcal{Y}}^2 + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))}^2 + \|g\|_{L^1(0,T)}^2 \right).
\end{aligned}$$

Por otro lado, como  $V_{tt} = g - n^2\pi^2 V + \Psi_t(\cdot, 0)$  y  $V_t = \Psi_y(0)$ , se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \left( \int_0^T |V_{tt}| \right)^2 + \int_0^T \left( (V_t)^2 + n^4\pi^4 V^2 \right) + n^2\pi^2 \int_0^T \Psi^2(0) \leq \\
& \leq \left( \int_0^T |g - n^2\pi^2 V - \Psi_t(0)| \right)^2 + \int_0^T (\Psi_y)^2(0) + \int_0^T (n^4\pi^4 V^2) + n^2\pi^2 \int_0^T \Psi^2(0) \leq \\
& \leq 2(T+1) \left( \left( \int_0^T |g| \right)^2 + \int_0^T (n^2\pi^2 V)^2 + \int_0^T \left( (\Psi_t)^2 + (\Psi_y)^2 + n^2\pi^2 \Psi^2 \right) (0) \right).
\end{aligned}$$

Resulta que:

$$\begin{aligned}
& \left( \int_0^T |V_{tt}| \right)^2 + \int_0^T \left( (V_t)^2 + n^4\pi^4 V^2 + n^2\pi^2 \Psi^2(0, t) \right) \leq \\
& \leq (2n^2\pi^2 + 1)(T+1)(T+4) \left( \|(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1)\|_{\mathcal{Y}}^2 + \|f\|_{L^1(0,T;L^2)}^2 + \|g\|_{L^1(0,T)}^2 \right).
\end{aligned}$$

De una manera similar se obtiene la desigualdad en el caso  $g \in L^2(0, T)$ .

■

**Teorema 4.3 (La desigualdad inversa):** Si  $T > 2$  es arbitrario, para cualquier dato inicial  $(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1)$  en  $\mathcal{Y}$ , la solución débil  $(\Psi, \Psi_t, V, V_t)$  del problema homogéneo satisface:

$$(4.23) \quad \|(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1)\|_{\mathcal{Y}}^2 \leq \frac{2e^{2\pi n}}{T-2} \left\{ \int_0^T \left( (V_{tt})^2 + (V_t)^2 + n^4\pi^4 V^2 + n^2\pi^2 \Psi^2(0, t) \right) \right\}.$$

**Demostración:**

Definimos el funcional:

$$(4.24) \quad G : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$G(y) = \frac{1}{2} \int_y^{T-y} \left( (\Psi_t)^2 + (\Psi_y)^2 + n^2\pi^2 \Psi^2 \right) (t, y) dt.$$

Observamos que:

$$(4.25) \quad G(0) = \int_0^T \left( (\Psi_t)^2 + (\Psi_y)^2 + n^2\pi^2 \Psi^2 \right) (0).$$

Calculamos la derivada de  $G$ :

$$\begin{aligned}
G'(y) &= \int_y^{T-y} (\Psi_y \Psi_{yy} + \Psi_t \Psi_{ty} + n^2 \pi^2 \Psi \Psi_y) - \frac{1}{2} \sum_{t=y, T-y} ((\Psi_y)^2 + (\Psi_t)^2 + n^2 \pi^2 \Psi^2) = \\
&= \int_y^{T-y} (\Psi_y \Psi_{yy} - \Psi_{tt} \Psi_y + n^2 \pi^2 \Psi \Psi_y) + \Psi_t \Psi_y \Big|_y^{T-y} - \frac{1}{2} \sum_{t=y, T-y} ((\Psi_y)^2 + (\Psi_t)^2 + n^2 \pi^2 \Psi^2) \\
&\leq 2n^2 \pi^2 \int_y^{T-y} (\Psi \Psi_y) + \Psi_t \Psi_y \Big|_y^{T-y} - \frac{1}{2} \sum_{t=y, T-y} ((\Psi_y)^2 + (\Psi_t)^2 + n^2 \pi^2 \Psi^2) \leq \\
&\leq n\pi \int_y^{T-y} ((\Psi_y)^2 + n^2 \pi^2 \Psi^2) - \frac{n^2 \pi^2}{2} \sum_{t=y, T-y} \Psi^2 \leq n\pi \int_y^{T-y} ((\Psi_t)^2 + (\Psi_y)^2 + n^2 \pi^2 \Psi^2).
\end{aligned}$$

Resulta que:

$$G'(y) \leq 2n\pi G(y)$$

y por tanto:

$$(4.26) \quad G(y) \leq e^{2n\pi} G(0) \text{ para todo } y \in (0, 1).$$

Integrando la desigualdad precedente en  $(0, 1)$  se obtiene que:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \int_y^{T-y} ((\Psi_t)^2 + (\Psi_y)^2 + n^2 \pi^2 \Psi^2) \leq \frac{1}{2} e^{2n\pi} \int_0^T ((\Psi_t)^2 + (\Psi_y)^2 + n^2 \pi^2 \Psi^2)(t, 0),$$

y como

$$\int_0^1 \int_1^{T-1} ((\Psi_t)^2 + (\Psi_y)^2 + n^2 \pi^2 \Psi^2) \leq \int_0^1 \int_y^{T-y} ((\Psi_t)^2 + (\Psi_y)^2 + n^2 \pi^2 \Psi^2)$$

resulta que:

$$\int_1^{T-1} \int_0^1 ((\Psi_t)^2 + (\Psi_y)^2 + n^2 \pi^2 \Psi^2) \leq e^{2n\pi} \int_0^T ((\Psi_t)^2 + (\Psi_y)^2 + n^2 \pi^2 \Psi^2)(t, 0).$$

Sumando en los dos términos de la última desigualdad la cantidad

$$\int_1^{T-1} ((V_t)^2 + n^2 \pi^2 V^2)$$

y teniendo en cuenta la conservación de la energía se obtiene:

$$\begin{aligned}
(T-2) \left( \int_0^1 ((\Psi^1)^2 + ((\Psi^0)_y)^2 + n^2 \pi^2 (\Psi^0)^2) + (V^1)^2 + n^2 \pi^2 (V^0)^2 \right) &\leq \\
&\leq \int_1^{T-1} ((V_t)^2 + n^2 \pi^2 V^2) + e^{2n\pi} \int_0^T ((\Psi_t)^2 + (\Psi_y)^2 + n^2 \pi^2 \Psi^2)(t, 0).
\end{aligned}$$

Usando ahora las relaciones que se cumplen sobre la frontera obtenemos:

$$(T-2) \left( \int_0^1 ((\Psi^1)^2 + ((\Psi^0)_y)^2 + n^2 \pi^2 (\Psi^0)^2) + (V^1)^2 + n^2 \pi^2 (V^0)^2 \right) \leq$$

$$\begin{aligned}
& (T-2) \left( \int_0^1 \left( (\Psi^1)^2 + ((\Psi^0)_y)^2 + n^2 \pi^2 (\Psi^0)^2 \right) + (V^1)^2 + n^2 \pi^2 (V^0)^2 \right) \leq \\
& \leq \int_1^{T-1} \left( (V_t)^2 + n^2 \pi^2 V^2 \right) + e^{2n\pi} \left\{ \int_0^T (V_{tt} + n^2 \pi^2 V)^2 + \int_0^T (V_t)^2 + n^2 \pi^2 \int_0^T \Psi^2(t, 0) \right\} \leq \\
& \leq e^{2n\pi} \left\{ \int_0^T \left( 2(V_{tt})^2 + (V_t)^2 + 2(n^2 \pi^2 V)^2 + n^2 \pi^2 \Psi^2(t, 0) \right) \right\}
\end{aligned}$$

de donde resulta la estimación deseada. ■

**Observación 4.5** *En la demostración del teorema precedente hemos utilizado un método unidimensional para obtener estimaciones de energía que consiste en invertir el papel de las variables espacio-tiempo.*

A continuación consideramos  $\varepsilon > 0$  tal que  $4\varepsilon < T$ .

Definimos una función  $\rho \in C^\infty[0, T]$ ,  $0 \leq \rho \leq 1$  con la propiedad de que:

$$(4.27) \quad \rho(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in (2\varepsilon, T - 2\varepsilon) \\ 0 & \text{si } t \in (0, \varepsilon) \cup (T - \varepsilon, T). \end{cases}$$

Del Teorema 4.2 deducimos que, para todo  $T > 2\varepsilon$ , tenemos:

$$(4.28) \quad \begin{aligned} & \int_0^T \rho^2 \left( (V_{tt})^2 + (V_t)^2 + n^4 \pi^4 V^2 + n^2 \pi^2 \Psi^2(0, t) \right) \leq \\ & \leq C \left( \|(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1)\|_{\mathcal{Y}}^2 + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(0, 1))}^2 + \|g\|_{L^2(0, T)}^2 \right). \end{aligned}$$

Con la misma demostración que en el Teorema 4.3 obtenemos que, para todo  $T > 2 + 2\varepsilon$ , se cumple la siguiente desigualdad:

$$(4.29) \quad \begin{aligned} & \|(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1)\|_{\mathcal{Y}}^2 \leq \\ & \leq \frac{2e^{2n\pi}}{T-2-2\varepsilon} \left\{ \int_0^T \rho^2 \left( (V_{tt})^2 + (V_t)^2 + n^4 \pi^4 V^2 + n^2 \pi^2 \Psi^2(0, t) \right) \right\}. \end{aligned}$$

### 4.1.3 Observabilidad (caso $n = 0$ )

En el caso  $n = 0$  el sistema (4.8) se escribe

$$(4.30) \quad \begin{cases} \Psi_{tt} - \Psi_{yy} = f & \text{para } y \in (0, 1), t \in (0, T) \\ \Psi_y(1) = 0 & \text{para } t \in (0, T) \\ \Psi_y(0) = V_t & \text{para } t \in (0, T) \\ V_{tt} - \Psi_t(0) = g & \text{para } t \in (0, T) \\ \Psi(0) = \Psi^0, \quad \Psi_t(0) = \Psi^1 & \text{para } y \in (0, 1) \\ V(0) = V^0, \quad V_t(0) = V^1. \end{cases}$$

Definimos la energía asociada al sistema por:

$$(4.31) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( (\Psi_t)^2 + (\Psi_y)^2 \right) dy + \frac{1}{2} (V_t)^2,$$

y observamos que también se conserva.

Sin embargo, la energía definida por (4.31) no es coercitiva y la expresión (4.11) no define un producto escalar en  $\mathcal{Y}$ . Para obtener la controlabilidad del sistema en este caso algunas de las desigualdades obtenidas necesitan ligeras modificaciones. El objetivo de este párrafo es describir los cambios que este caso especial supone.

En primer lugar definimos el producto escalar en  $\mathcal{Y}$  por:

$$(4.32) \quad \begin{aligned} & ((f_1, f_2, f_3, f_4), (g_1, g_2, g_3, g_4)) = \\ & = \int_0^1 \left( (f_1)_y (g_1)_y + f_1 g_1 \right) dy + \int_0^1 f_2 g_2 dy + f_3 g_3 + f_4 g_4. \end{aligned}$$

Definimos también el siguiente subespacio  $\mathcal{Y}^0$  de  $\mathcal{Y}$  por:

$$(4.33) \quad \mathcal{Y}^0 = \left\{ (\psi, \xi, w, v) \in \mathcal{Y} : \int_0^1 \xi dy + w = 0, v - \psi(0) = 0 \right\},$$

en el que la energía (4.9) es coercitiva incluso si  $n = 0$  y la relación (4.11) define un producto escalar equivalente al definido por (4.12).

En el espacio  $\mathcal{Y}^0$  el operador diferencial  $\mathcal{A}^1$ , asociado al sistema (4.30), es maximal monótono y se cumplen todas las propiedades del Teorema 4.1.

Por lo tanto tenemos bien definidas todas las soluciones que tienen como dato inicial un elemento de  $\mathcal{Y}^0$  y además conocemos sus propiedades.

Ahora, si el dato inicial del sistema  $U_0 = (\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1)$  no pertenece a  $\mathcal{Y}^0$ , sino que

$$\int_0^1 \Psi^1 dy + V^0 = c_1, V^1 - \Psi^0(0) = c_2,$$

observamos que  $\tilde{U}_0 = (\tilde{\Psi}^0, \tilde{\Psi}^1, \tilde{V}^0, \tilde{V}^1) = (\Psi^0 + c_2, \Psi^1, V^0 - c_1, V^1)$  pertenece a  $\mathcal{Y}^0$ . Notamos por  $(\tilde{\Psi}, \tilde{V})$  la solución correspondiente a este dato inicial. Se obtiene que la solución  $(\Phi, \Phi_t, W, W_t)$ , correspondiente al dato inicial  $U_0$ , se puede descomponer de la siguiente manera:

$$(\Phi, \Phi_t, W, W_t) = (\tilde{\Psi}, \tilde{\Psi}_t, \tilde{V}, \tilde{V}_t) + (-c_2, 0, c_1, 0),$$

donde la primera componente permanece en  $\mathcal{Y}^0$  mientras que la segunda se mantiene constante en el tiempo.

**Teorema 4.4** *Sea  $T > 2$  es arbitrario. Si consideramos el sistema (4.30) con los datos iniciales  $(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1) \in \mathcal{Y}$  y los términos no homogéneos  $f \in L^1(0, T; L^2(0, 1))$  y  $g \in L^2(0, T)$ , la solución  $(\Psi, \Psi_t, V, V_t)$  correspondiente satisface:*

$$(4.34) \quad \begin{aligned} & \int_0^T \left( (V_{tt})^2 + (V_t)^2 + V^2 + \Psi^2(0, t) \right) \\ & \leq C \left( \|(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1)\|_{\mathcal{Y}}^2 + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(0, 1))}^2 + \|g\|_{L^2(0, T)}^2 \right). \end{aligned}$$

*Si además  $f = 0$  y  $g = 0$  entonces:*

$$(4.35) \quad \|(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1)\|_{\mathcal{Y}}^2 \leq C \left\{ \int_0^T \left( (V_{tt})^2 + (V_t)^2 + V^2 + \Psi^2(0, t) \right) \right\}.$$

*En ambos casos  $C$  es una constante que depende de  $T$  pero que no depende de los datos del sistema.*

**Demostración:**

Demostramos primero la desigualdad (4.33).

Tal y como mencionabamos al principio de este párrafo, el operador  $\mathcal{A}^1$  no es maximal monótono en el espacio  $\mathcal{Y}$  y por lo tanto no genera un semigrupo de contracciones. En este caso la desigualdad (4.16) no es válida. Sin embargo, el operador  $\mathcal{A}^1$  genera un semigrupo fuertemente continuo en  $\mathcal{Y}$  y, por lo tanto, la siguiente variante de la desigualdad (4.16) es válida:

$$(4.35) \quad \|U(t)\|_{\mathcal{Y}} \leq c_1 \|U_0\| + c_2 \|H\|_{L^1(0,T;\mathcal{Y})}, \quad \forall t \in [0, T],$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son dos constantes que sólo dependen de  $T$ .

Teniendo en cuenta esto, podemos seguir los pasos del Teorema 4.2 y deducir que:

$$(4.36) \quad \int_0^T \left( (V_{tt})^2 + (V_t)^2 \right) \leq C \left( \|(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1)\|_{\mathcal{Y}}^2 + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))}^2 + \|g\|_{L^2(0,T)}^2 \right)$$

para todo dato inicial  $(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1) \in \mathcal{Y}$ ,  $f \in L^1(0, T; L^2(0, 1))$  y  $g \in L^1(0, T)$ .

Sin embargo, como tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_0^T (V^2 + \Psi^2(0, t)) &\leq C \int_0^T \|(\Psi, \Psi_t, V, V_t)\|_{\mathcal{Y}}^2 \leq \\ &\leq C \left( \|(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1)\|_{\mathcal{Y}}^2 + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))}^2 + \|g\|_{L^2(0,T)}^2 \right) \end{aligned}$$

se obtiene la relación (4.33).

Pasamos ahora a demostrar la segunda desigualdad (4.34).

Para datos  $(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1)$  en  $\mathcal{Y}^0$ , siguiendo los pasos del Teorema 4.3, se obtiene:

$$(4.37) \quad \|(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1)\|_{\mathcal{Y}^0}^2 \leq C \left\{ \int_0^T \left( (V_{tt})^2 + (V_t)^2 \right) \right\}.$$

Como además el producto escalar en  $\mathcal{Y}^0$  es equivalente al producto escalar en  $\mathcal{Y}$  resulta que:

$$(4.38) \quad \|(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1)\|_{\mathcal{Y}}^2 \leq C \left\{ \int_0^T \left( (V_{tt})^2 + (V_t)^2 + V^2 + \Psi^2(0, t) \right) \right\}.$$

En el caso que  $U_0 = (\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1) \notin \mathcal{Y}^0$  si

$$\int_0^1 \Psi^1 dy + V^0 = c_1, \quad V^1 - \Psi^0(0) = c_2,$$

consideramos  $\tilde{U}_0 = (\tilde{\Psi}^0, \tilde{\Psi}^1, \tilde{V}^0, \tilde{V}^1) = (\Psi^0 + c_2, \Psi^1, V^0 - c_1, V^1) \in \mathcal{Y}^0$  y la solución de (4.30) correspondiente,  $(\tilde{\Psi}, \tilde{V})$ . Para esta solución, aplicando la relación (4.38), tenemos:

$$(4.39) \quad \|(\tilde{\Psi}^0, \tilde{\Psi}^1, \tilde{V}^0, \tilde{V}^1)\|_{\mathcal{Y}}^2 \leq C \left\{ \int_0^T \left( (\tilde{V}_{tt})^2 + (\tilde{V}_t)^2 + \tilde{V}^2 + \tilde{\Psi}^2(0, t) \right) \right\}.$$

Se obtiene finalmente que la solución  $(\Psi, V)$  satisface:

$$\begin{aligned} \|(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1)\|_{\mathcal{Y}}^2 &\leq 2 \left( \|(\tilde{\Psi}^0, \tilde{\Psi}^1, \tilde{V}^0, \tilde{V}^1)\|_{\mathcal{Y}}^2 + (c_1)^2 + (c_2)^2 \right) \leq \\ &\leq 2C \int_0^T \left( (V_{tt})^2 + (V_t)^2 + (V - c_1)^2 + (\Psi + c_2)^2(0, t) \right) + 4(c_1)^2 + 4(c_2)^2 \leq \end{aligned}$$

$$\leq 2C \int_0^T \left( (V_{tt})^2 + (V_t)^2 + V^2 + \Psi^2(0, t) \right) + C'((c_1)^2 + (c_2)^2).$$

Como además tenemos que:

$$c_1 = \int_0^1 \Psi_t(t) dy + V(t) \Rightarrow (c_1)^2 \leq 2(\|\Psi_t\|_{L^2(0,1)}^2 + V^2) \leq \frac{2}{T} \left( \int_0^T \left( (V_{tt})^2 + (V_t)^2 + V^2 \right) \right)$$

$$c_2 = V_t(t) + \Psi(0, t) \Rightarrow (c_2)^2 \leq 2((V_t)^2 + \Psi^2(0, t))$$

se deduce (4.35).

■

Las desigualdades obtenidas en el teorema anterior nos permiten resolver el problema de control también en el caso  $n = 0$ .

#### 4.1.4 Controlabilidad

Estamos ahora en las condiciones necesarias para poder estudiar el problema de controlabilidad enunciado al principio de esta sección.

**Teorema 4.5** *Supongamos que  $n \in \mathbb{N}$  y  $T > 2$  arbitrario. Para cualquier dato inicial*

$$(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1) \in \mathcal{Y} = L^2(0, 1) \times (H^1(0, 1))' \times \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

*tal que  $\Psi^0$  sea continua en  $y = 0$ , existen dos controles de soporte compacto  $\alpha \in L^2(0, T)$  y  $\beta \in H^{-2}(0, T)$  tales que la solución del sistema:*

$$(4.41) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Psi_{tt} - \Psi_{yy} + n^2 \pi^2 \Psi = 0 & \text{para } y \in (0, 1), t \in (0, T) \\ \Psi_y(1) = 0 & \text{para } t \in (0, T) \\ \Psi_y(0) = -V_t + \alpha & \text{para } t \in (0, T) \\ V_{tt} + n^2 \pi^2 V + \Psi_t(0) = \beta & \text{para } t \in (0, T) \\ \Psi(0) = \Psi^0, \quad \Psi_t(0) = \Psi^1 & \text{para } y \in (0, 1) \\ V(0) = V^0, \quad V_t(0) = V^1 & \end{array} \right.$$

*definida por transposición, satisfaga las relaciones:*

$$(4.42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi(T) = \Psi_t(T) = 0 \\ V(T) = V_t(T) = 0. \end{array} \right.$$

**Observación 4.6** *Al final de esta sección veremos en que sentido se verifica tanto la ecuación (4.41) como las condiciones (4.42).*

#### Demostración:

Aplicamos el método de H.U.M. (ver Lions [29]) apoyandonos en los dos resultados demostrados en los Teoremas 4.2 y 4.3.

Etapa 1: Como  $T > 2$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $T > 2 + 2\varepsilon$  y consideramos una función  $\rho$  con las propiedades (4.27). Resolvemos el problema homogéneo siguiente:

$$(4.42) \quad \begin{cases} Y_{tt} - Y_{yy} + n^2\pi^2 Y = 0 & \text{para } y \in (0, 1), t \in (0, T) \\ Y_y(1) = 0 & \text{para } t \in (0, T) \\ Y_y(0) = u_t & \text{para } t \in (0, T) \\ u_{tt} + n^2\pi^2 u - Y_t(0) = 0 & \text{para } t \in (0, T) \\ Y(0) = Y^0, \quad Y_t(0) = Y^1 & \text{para } y \in (0, 1) \\ u(0) = u^0, \quad u_t(0) = u^1 \end{cases}$$

con datos iniciales en  $\mathcal{D}(\mathcal{A}^1)$ .

La desigualdad (4.29) nos asegura que

$$(4.43) \quad \|(Y^0, Y^1, u^0, u^1)\|_{\mathcal{F}}^2 = \int_0^T \rho^2 \left( (u_{tt})^2 + (u_t)^2 + n^4\pi^4 u^2 + n^2\pi^2 Y^2(0, t) \right)$$

define una norma en  $\mathcal{D}(\mathcal{A}^1)$ .

Definimos el espacio hilbertiano  $\mathcal{F}$  como la completación de  $\mathcal{D}(\mathcal{A}^1)$  con respecto a la norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ . Las desigualdades (4.28) y (4.29) nos indican que

$$(4.44) \quad \mathcal{F} = \mathcal{Y} = H^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

y por lo tanto:

$$(4.45) \quad \mathcal{F}' = \mathcal{Y}' = L^2(0, 1) \times (H^1(0, 1))' \times \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

algebraica y topológicamente.

En el caso  $n = 0$  se considerará:

$$(4.46) \quad \|(Y^0, Y^1, u^0, u^1)\|_{\mathcal{F}}^2 = \int_0^T \rho^2 \left( (u_{tt})^2 + (u_t)^2 + u^2 + Y^2(0, t) \right)$$

que, según hemos visto en el párrafo anterior, define una norma en  $\mathcal{F} = \mathcal{Y}$ .

Etapa 2: Consideramos ahora el problema retrógrado:

$$(4.47) \quad \begin{cases} \Psi_{tt} - \Psi_{yy} + n^2\pi^2 \Psi = 0 & \text{si } (y, t) \in (0, 1) \times (0, T) \\ \Psi_y(1) = 0 & \text{si } t \in (0, T) \\ \Psi_y(0) = -V_t + n\pi\rho Y(0) & \text{si } t \in (0, T) \\ V_{tt} + n^2\pi^2 V + \Psi_t(0) = \\ \quad = -\frac{d^2}{dt^2}(\rho u_{tt}) + \frac{d}{dt}(\rho u_t) - n^2\pi^2 \rho u & \text{si } t \in (0, T) \\ \Psi(T) = 0, \quad \Psi_t(T) = 0 & \text{si } y \in (0, 1) \\ V(T) = 0, \quad V_t(T) = 0 \end{cases}$$

donde las derivadas  $\frac{d^2}{dt^2}$  y  $\frac{d}{dt}$  son derivadas distribucionales.

Observamos que  $\beta = -\frac{d^2}{dt^2}(\rho u_{tt}) + \frac{d}{dt}(\rho u_t) - n^2 \pi^2 \rho u \in H^{-2}(0, T)$  y  $\alpha = n\pi \rho Y(0) \in L^2(0, T)$  y que ambas tienen soporte compacto.

En el caso  $n = 0$  se considera:

$$\alpha = \rho Y(0) \in L^2(0, T), \quad \beta = -\frac{d^2}{dt^2}(\rho u_{tt}) + \frac{d}{dt}(\rho u_t) - \rho u \in H^{-2}(0, T).$$

Definimos las soluciones de (4.47) usando el método de transposición (ver Lions [29]). Sean  $(\xi^0, \xi^1, \zeta^0, \zeta^1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^1)$  y  $(\xi, \xi_t, \zeta, \zeta_t)$  la solución del problema no homogéneo:

$$(4.48) \quad \begin{cases} \xi_{tt} - \xi_{yy} + n^2 \pi^2 \xi = f & \text{para } y \in (0, 1), t \in (0, T) \\ \xi_y(1) = 0 & \text{para } t \in (0, T) \\ \xi_y(0) = \zeta_t & \text{para } t \in (0, T) \\ \zeta_{tt} + n^2 \pi^2 \zeta - \xi_t(0) = g & \text{para } t \in (0, T) \\ \xi(0) = \xi^0, \quad \xi_t(0) = \xi^1 & \text{para } y \in (0, 1) \\ \zeta(0) = \zeta^0, \quad \zeta_t(0) = \zeta^1 \end{cases}$$

donde  $f \in L^1(0, T; L^2(0, 1))$  y  $g \in L^1(0, T)$ .

Observamos que el problema (4.48) se puede escribir como:

$$(4.49) \quad \begin{cases} Z_t + \mathcal{A}^1 Z = H \in L^1(0, T; \mathcal{Y}) \\ Z(0) = (\xi^0, \xi^1, \zeta^0, \zeta^1) \in \mathcal{Y} \end{cases}$$

donde  $\mathcal{A}^1$  viene dado por (4.13),  $Z = (\xi, \xi_t, \zeta, \zeta_t)$  y  $H = (0, f, 0, g)$ .

El problema (4.48) tiene una única solución con todas las propiedades del Teorema 4.1 y las propiedades de regularidad adicional demostradas en el Teorema 4.2. Además, se cumplen las desigualdades (4.28) y (4.29).

A continuación nos proponemos definir las soluciones del sistema (4.47) con la ayuda de la solución  $(\xi, \zeta)$  de (4.48). Si multiplicamos la primera ecuación de (4.47) por  $\xi$  e integramos por partes en  $(0, T) \times (0, 1)$  se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_0^1 (\Psi_{tt} - \Psi_{yy} + n^2 \pi^2 \Psi) \xi = \int_0^1 (\Psi_t \xi - \Psi \xi_t) \Big|_0^T - \int_0^T (\Psi_y \xi - \Psi \xi_y) \Big|_0^1 + \\ &+ \int_0^T \int_0^1 (\xi_{tt} - \xi_{yy} + n^2 \pi^2 \xi) \Psi = \int_0^1 (-\Psi_t \xi + \Psi \xi_t)(0) + \int_0^T (\Psi_y \xi - \Psi \xi_y)(0) + \int_0^T \int_0^1 \Psi f. \end{aligned}$$

Se deduce que:

$$(4.50) \quad \int_0^T \int_0^1 \Psi f - \int_0^1 (\Psi_t(0) \xi_0 - \Psi(0) \xi_t) - \int_0^T (V_t \xi(0) + \Psi(0) \zeta_t) = n\pi \int_0^T \rho Y \xi(0).$$

Multiplicamos la última ecuación de (4.47) por  $\zeta$  e integramos por partes en  $(0, T)$ :

$$-\int_0^T \rho (u_{tt} \zeta_{tt} + u_t \zeta_t + n^2 \pi^2 u \zeta) = \int_0^T (V_{tt} + n^2 \pi^2 V + \Psi_t(0) \zeta) = \int_0^T \Psi_t(0) \zeta +$$

$$+ \int_0^T V(\zeta_{tt} + n^2 \pi^2 \zeta) + (V_t \zeta - V \zeta_t) \Big|_0^T = \int_0^T \Psi_t(0) \zeta + \int_0^T V(g + \xi_t(0)) - V_t(0) \zeta_0 + V(0) \zeta_1.$$

Se obtiene:

$$(4.51) \quad \begin{aligned} & \int_0^T Vg - V_t(0) \zeta_0 + V(0) \zeta_1 + \int_0^T (V \xi_t(0) + \Psi_t(0) \zeta) = \\ & = - \int_0^T \rho (u_{tt} \zeta_{tt} + u_t \zeta_t + n^2 \pi^2 u \zeta). \end{aligned}$$

Restando las relaciones (4.50) y (4.51) resulta:

$$(4.52) \quad \begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 f \Psi - \int_0^T gV - \int_0^1 (\Psi_t(0) \xi_0 - \Psi(0) \xi_1) + V_t(0) \zeta_0 - V(0) \zeta_1 + \\ & + V(0) \xi_0(0) + \Psi(0, 0) \zeta(0) = \int_0^T \rho (u_{tt} \zeta_{tt} + u_t \zeta_t + n^2 \pi^2 u \zeta + n \pi Y(0) \xi(0)). \end{aligned}$$

Se deduce que las soluciones regulares de (4.47) cumplen:

$$(4.53) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\Psi, V) \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1)) \times L^2(0, T), \\ \int_0^T \int_0^1 f \Psi - \int_0^T gV + \langle -\Psi_t(0) + \delta_0 V(0), \xi_0 \rangle_{(H^1)', H^1} + (\Psi(0), \xi_1)_{L^2} + \\ + (V_t(0) + \Psi(0, 0)) \zeta_0 - V(0) \zeta_1 = \int_0^T \rho (u_{tt} \zeta_{tt} + u_t \zeta_t + n^2 \pi^2 u \zeta + n \pi Y(0) \xi(0)), \\ \forall f \in L^1(0, T; L^2(0, 1)), \forall g \in L^2(0, T), \forall (\xi_0, \xi_1, \zeta_0, \zeta_1) \in \mathcal{Y} \end{array} \right.$$

donde  $\delta_0$  es la delta de Dirac en  $x = 0$ .

Adoptamos (4.53) como definición de la solución de (4.47) en el sentido de transposición.

Tenemos el siguiente resultado de existencia y unicidad de soluciones:

**Lema 4.1** *El problema (4.47) tiene una única solución  $(\Psi, V) \in C([0, T], L^2(0, 1)) \times L^2(0, T)$  que verifica la ecuación en el siguiente sentido: existen unas únicas funciones  $\rho_0 \in L^2(0, 1)$ ,  $\rho_1 \in (H^1(0, 1))'$ ,  $\mu_0 \in \mathbb{R}$  y  $\mu_1 \in \mathbb{R}$  tales que, para todo  $(\xi_0, \xi_1, \zeta_0, \zeta_1) \in \mathcal{Y}$ ,  $f \in L^1(0, T; L^2(0, 1))$  y  $g \in L^2(0, T)$ , tengamos*

$$(4.54) \quad \begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 f \Psi - \int_0^T gV + \langle \rho_1, \xi_0 \rangle_{(H^1)', H^1} + (\rho_0, \xi_1)_{L^2} + \mu_1 \zeta_0 + \mu_0 \zeta_1 = \\ & = \int_0^T \rho (u_{tt} \zeta_{tt} + u_t \zeta_t + n^2 \pi^2 u \zeta + n \pi Y(0) \xi(0)), \end{aligned}$$

donde  $(\xi, \zeta)$  es la solución de (4.48).

**Demostración:**

La aplicación definida por:

$$(4.55) \quad (f, g, \xi_0, \xi_1, \zeta_0, \zeta_1) \longrightarrow \int_0^T \rho \left( u_{tt}\zeta_{tt} + u_t\zeta_t + n^2\pi^2 u\zeta + n\pi Y(0)\xi(0) \right)$$

es una forma lineal de  $L^1(0, T; L^2(0, 1)) \times L^2(0, T) \times \mathcal{Y}$  en  $\mathcal{R}$ .

Además, esta forma lineal es continua:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \rho \left( u_{tt}\zeta_{tt} + u_t\zeta_t + n^2\pi^2 u\zeta + n\pi Y(0)\xi(0) \right) \right| \leq \\ & \leq \int_0^T |\rho u_{tt}||\zeta_{tt}| + \int_0^T |\rho u_t||\zeta_t| + n^2\pi^2 \int_0^T |\rho u||\zeta| + n\pi \int_0^T |\rho Y(0)||\xi(0)| \leq \\ & \leq \left( \int_0^T \rho^2 |u_{tt}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T |\zeta_{tt}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_0^T \rho^2 |u_t|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T |\zeta_t|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & + n^2\pi^2 \left( \int_0^T \rho^2 |u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T |\zeta|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + n\pi \left( \int_0^T \rho^2 |Y(0)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T |\xi(0)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq C^2 \|(Y_0, Y_1, u_0, u_1)\|_{\mathcal{X}} \left( \|(\xi_0, \xi_1, \zeta_0, \zeta_1)\|_{\mathcal{Y}} + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(0, 1))} + \|g\|_{L^2(0, T)} \right) \end{aligned}$$

ya que, debido a la relación (4.43), tenemos que

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \left( \int_0^T \rho^2 |u_{tt}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \left( \int_0^T \rho^2 |u_t|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, n^2\pi^2 \left( \int_0^T \rho^2 |u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, n\pi \left( \int_0^T \rho^2 |Y(0)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \leq \\ & \leq \|(Y_0, Y_1, u_0, u_1)\|_{\mathcal{X}}, \end{aligned}$$

y además, por la relación (4.20),

$$\begin{aligned} & \left( \int_0^T |\zeta_{tt}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_0^T |\zeta_t|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_0^T |\zeta|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_0^T |\xi(0)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq \left( \|(\xi_0, \xi_1, \zeta_0, \zeta_1)\|_{\mathcal{Y}} + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(0, 1))} + \|g\|_{L^2(0, T)} \right). \end{aligned}$$

La aplicación (4.55) pertenece al dual de  $L^1(0, T; L^2(0, 1)) \times L^2(0, T) \times \mathcal{Y}$  y por lo tanto existen unas únicas funciones:

$$\begin{aligned} & \Psi \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1)), \quad V \in L^2(0, T) \\ & \rho_0 \in L^2(0, 1), \quad \rho_1 \in (H^1(0, 1))', \quad \mu_0 \in \mathbb{R}, \quad \mu_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

con la propiedad de que:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 f\Psi - \int_0^T gV + \langle \rho_1, \xi_0 \rangle_{(H^1)', H^1} + (\rho_0, \xi_1)_{L^2} + \mu_1 \zeta_0 + \mu_0 \zeta_1 = \\ (4.56) \quad & = \int_0^T \rho \left( u_{tt}\zeta_{tt} + u_t\zeta_t + n^2\pi^2 u\zeta + n\pi Y(0)\xi(0) \right), \end{aligned}$$

$$\forall f \in L^1(0, T; L^2(0, 1)), \quad \forall g \in L^2(0, T), \quad \forall (\xi_0, \xi_1, \zeta_0, \zeta_1) \in \mathcal{Y}.$$

Por un proceso de regularización podemos ver que  $\Psi \in C([0, T], L^2(0, 1))$ . También se puede ver que si los datos no homogéneos  $\alpha$  y  $\beta$  son muy regulares obtenemos una solución clásica del problema (4.47) que va a verificar (4.54). Vamos a probar estas dos afirmaciones.

Consideramos dos sucesiones:

$$(\alpha_m)_{m \geq 0} \subset \mathcal{D}(0, T), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = \alpha = n\pi\rho Y(0) \text{ en } L^2(0, T)$$

$$(\beta_m)_{m \geq 0} \subset \mathcal{D}(0, T), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = \beta = -\frac{d^2}{dt^2}(\rho u_{tt}) + \frac{d}{dt}(\rho u_t) - n^2\pi^2\rho u \text{ en } H^{-2}(0, T),$$

ya que  $\mathcal{D}(0, T)$  es denso en  $H^{-2}(0, T)$ .

Mediante un cambio de incógnita, intentamos transformar la condición de contorno no homogénea en  $x = 0$  en una homogénea. Tenemos en cuenta que la dimensión es uno, lo que nos permite un cálculo explícito.

Sea  $(\bar{\Psi}_m, \bar{V}_m)$  la solución del sistema:

$$(4.57) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (\bar{\Psi}_m)_{tt} - (\bar{\Psi}_m)_{yy} + n^2\pi^2(\bar{\Psi}_m) = \\ = \left(\frac{y^2}{2} - y\right) (\alpha_m)_{tt} - \alpha_m + n^2\pi^2 \left(\frac{y^2}{2} - y\right) \alpha_m & y \in (0, 1), t \in (0, T) \\ (\bar{\Psi}_m)_y(1) = 0 & t \in (0, T) \\ (\bar{\Psi}_m)_y(0) = (\bar{V}_m)_t & t \in (0, T) \\ (\bar{V}_m)_{tt} + n^2\pi^2(\bar{V}_m) - (\bar{\Psi}_m)_t(0) = \beta_m & t \in (0, T) \\ \bar{\Psi}_m(T) = 0, \quad (\bar{\Psi}_m)_t(T) = 0 & \text{para } y \in (0, 1) \\ \bar{V}_m(T) = 0, \quad (\bar{V}_m)_t(T) = 0. & \end{array} \right.$$

Como

$$\beta_m \in \mathcal{D}(0, T) \quad \text{y} \quad \left(\frac{y^2}{2} - y\right) (\alpha_m)_{tt} - \alpha_m + n^2\pi^2 \left(\frac{y^2}{2} - y\right) \alpha_m \in \mathcal{D}((0, T), L^2(0, 1))$$

resulta, aplicando los resultados del Teorema 4.1, que la ecuación (4.57) tiene una solución fuerte única:

$$(\bar{\Psi}_m, \bar{V}_m) \in C([0, T], H^2(0, 1) \times \mathbb{R}) \cap C^1([0, T], H^1(0, 1) \times \mathbb{R}) \cap C^2([0, T], L^2(0, 1) \times \mathbb{R}).$$

Para volver al sistema inicial, definimos las funciones:

$$\Psi_m = \bar{\Psi}_m - \left(\frac{y^2}{2} - y\right) \alpha_m \quad \text{y} \quad V_m = \bar{V}_m.$$

Evidentemente, tenemos que

$$\Psi_m \in C([0, T], H^2(0, 1)) \cap C^1([0, T], H^1(0, 1)) \cap C^2([0, T], L^2(0, 1)) \quad \text{y} \quad V_m \in C^2[0, T]$$

y  $(\Psi_m, V_m)$  verifica el sistema:

$$(4.59) \quad \begin{cases} (\Psi_m)_{tt} - (\Psi_m)_{yy} + n^2 \pi^2 \Psi_m = 0 & \text{para } y \in (0, 1), t \in (0, T) \\ (\Psi_m)_y(1) = 0 & \text{para } t \in (0, T) \\ (\Psi_m)_y(0) = (V_m)_t + \alpha_m & \text{para } t \in (0, T) \\ (V_m)_{tt} + n^2 \pi^2 V_m - (\Psi_m)_t(0) = \beta_m & \text{para } t \in (0, T) \\ \Psi_m(T) = 0, \quad (\Psi_m)_t(T) = 0 & \text{en } \Omega \\ V_m(T) = 0, \quad (V_m)_t(T) = 0 & \text{sobre } \Gamma_0. \end{cases}$$

Resulta que  $(\Psi_m, V_m)$  es una solución clásica de (4.48) en el caso de controles regulares,

$$(\Psi_m, V_m) \in C([0, T]; L^2(0, 1) \times \mathbb{R}).$$

La relación (4.57) nos indica que, si  $(\Psi, V)$  es la solución, entonces:

$$\int_0^T \int_0^1 f \Psi \leq C \left( \|\alpha\|_{L^2(0, T)} + \|\beta\|_{H^{-2}(0, T)} \right) \|f\|_{L^1(0, T; L^2(0, 1))},$$

$$\int_0^T g V \leq C \left( \|\alpha\|_{L^2(0, T)} + \|\beta\|_{H^{-2}(0, T)} \right) \|g\|_{L^2(0, T)},$$

de donde se obtiene que:

$$\|\Psi\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, 1))} \leq C \left( \|\alpha\|_{L^2(0, T)} + \|\beta\|_{H^{-2}(0, T)} \right),$$

$$\|V\|_{L^2(0, T)} \leq C \left( \|\alpha\|_{L^2(0, T)} + \|\beta\|_{H^{-2}(0, T)} \right).$$

Las últimas dos desigualdades implican que:

$$(\Psi_m, V_m) \longrightarrow (\Psi, V) \text{ en } L^\infty(0, T; L^2(0, 1)) \times L^2(0, T)$$

donde  $(\Psi, V)$  es la solución de (4.55). De aquí resulta que  $\Psi \in C([0, T], L^2(0, 1))$ .

■

**Observación 4.7** *Por definición, el par  $(\Psi, V)$  encontrado en el lema anterior es la solución de la ecuación (4.48). Implícitamente se considera que si  $(\Psi, V)$  es la solución de (4.55) entonces  $\Psi(T) = \Psi_t(T) = 0$ ,  $V(T) = V_t(T) = 0$ , aunque estas cantidades no siempre están bien definidas. Vamos a ver a continuación qué cantidades tienen efectivamente sentido en el caso de soluciones débiles.*

*Si en la expresión (4.55) hacemos  $f = 0$ ,  $g = 0$ ,  $\rho_0 = 0$ ,  $\mu_0 = \mu_1 = 0$  se obtiene que:*

$$\langle \rho_1, \xi_0 \rangle_{(H^1)', H^1} = \langle \beta, \zeta \rangle + \langle \alpha, Y(0) \rangle$$

de donde se deduce que:

$$|\langle \rho_1, \xi_0 \rangle| \leq C (\|\beta\|_{H^{-2}} + \|\alpha\|_{L^2}) \|\xi_0\|_{H^1}, \quad \forall \xi_0 \in H^1(0, 1).$$

Obtenemos que:

$$\|\rho_1\|_{(H^1)'} \leq C (\|\beta\|_{H^{-2}} + \|\alpha\|_{L^2}).$$

Volviendo ahora al proceso de regularización presentado en el lema anterior obtenemos que:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (-(\Psi_m)_t(0) + (V_m)(0)\delta_0) = \rho_1, \quad \text{en } (H^1(0,1))'$$

De una manera similar se puede deducir que:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Psi_m(0) = \rho_0, \quad \text{en } L^2(0,1),$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} V_m(0) = -\mu_0, \quad \text{en } \mathbb{R},$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (-(V_m)_t(0) - \Psi_m(0,0)) = \mu_1, \quad \text{en } \mathbb{R}.$$

Las últimas relaciones nos indican que las cantidades  $(\rho_0, \rho_1, \mu_0, \mu_1)$  son las "trazas" de  $(\Psi, -\Psi_t + \delta_0 V, -V, \Psi(0) + V_t)$  en  $t = 0$  aunque no siempre podemos dar sentido a cada una de las componentes por separado.

**Observación 4.8** Observemos que, si regularizamos los datos iniciales  $(Y_0, Y_1, u_0, u_1)$  del problema (4.42), los controles  $\alpha$  y  $\beta$  se regularizan y la solución del sistema (4.47) puede llegar a ser incluso una solución clásica. Esta es la consecuencia de la utilización de la función  $\rho$  en la construcción de los controles.

**Observación 4.9** Tenemos que  $V \in L^2(0, T)$ . Si  $u_{tt} \in L^\infty(0, T)$ , (cosa que en general, si  $(Y_0, Y_1, u_0, u_1) \in \mathcal{Y}$ , no ocurre pero que es cierta para  $(\Psi_0, \Psi_1, u_0, u_1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^1)$ ), se deduce que la forma lineal (4.55) es continua en  $L^1(0, T; L^2(0, 1)) \times L^1(0, T) \times \mathcal{Y}$ . Bajo esta hipótesis se deduce  $V \in L^\infty(0, T)$  y a continuación que  $V \in C[0, T]$  si además  $u_{tt} \in C[0, T]$ .

En el caso  $n = 0$ , cambiando adecuadamente los controles  $\alpha$  y  $\beta$ , se obtiene un resultado similar.

Procedemos ahora a concluir la prueba del Teorema 4.5. Para esto definimos el operador

$$(4.59) \quad \begin{cases} \Lambda : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}' \\ \Lambda(Y_0, Y_1, u_0, u_1) = (\rho_0, \rho_1, \mu_0, \mu_1) \end{cases}$$

donde  $\rho_0, \rho_1, \mu_0, \mu_1$  vienen dadas por (4.54).

El operador  $\Lambda$  define un producto escalar en  $\mathcal{F} = \mathcal{Y}$  de la siguiente manera:

$$(4.60) \quad ((f_1, f_2, f_3, f_4), (g_1, g_2, g_3, g_4))_{\mathcal{F}} = \langle \Lambda(f_1, f_2, f_3, f_4), (g_1, g_2, g_3, g_4) \rangle_{\mathcal{Y}', \mathcal{Y}}.$$

Resulta de aquí que

$$\Lambda : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$$

es un isomorfismo.

En primer lugar, el operador es inyectivo ya que, debido a su definición, tenemos:

$$\langle \Lambda(Y_0, Y_1, u_0, u_1), (Y_0, Y_1, u_0, u_1) \rangle_{\mathcal{Y}', \mathcal{Y}} = \|(Y_0, Y_1, u_0, u_1)\|_{\mathcal{F}}^2.$$

El operador  $\Lambda$  también es sobreyectivo. En efecto, puesto que  $\Lambda$  define un producto escalar en  $\mathcal{F}$ , podemos aplicar el Teorema de representación de Riesz, resultando que, para todo  $U^*$  en  $\mathcal{F}'$ , existe un único  $U$  en  $\mathcal{F}$  tal que  $\Lambda U = U^*$ .

Como  $\Lambda$  es un isomorfismo resulta que:

(4.62) para todo  $(\rho_0, \rho_1, \mu_0, \mu_1) \in \mathcal{F}'$  existe un único  $(Y_0, Y_1, u_0, u_1) \in \mathcal{F}$  tal que

$$\Lambda(Y_0, Y_1, u_0, u_1) = (\rho_0, \rho_1, \mu_0, \mu_1).$$

Este resultado proporciona la propiedad de controlabilidad que estabamos estudiando ya que, a cada dato inicial  $(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1) \in \mathcal{Y}'$ , tal que  $\Psi^0$  sea continua en  $y = 0$ , le corresponde un elemento  $(\rho_0, \rho_1, \mu_0, \mu_1) = (\Psi^0, -\Psi^1 + \delta_0 V^0, -V, \Psi^0(0) + V^1) \in \mathcal{Y}'$  que, mediante el operador  $\Lambda$  nos da el control necesario.

■

**Observación 4.10** Observamos que, de la misma manera que hemos obtenido la interpretación de los datos iniciales  $(\rho_0, \rho_1, \mu_0, \mu_1)$  en la Observación 4.7, se puede deducir la interpretación de  $(\Psi(t), -\Psi_t(t) + \delta_0 V(t), -V(t), \Psi(t, 0) + V_t(t))$  para cada valor de  $t \geq 0$ , aunque no cada una de las cantidades que aparecen tienen sentido por separado. Estas son las cantidades que realmente controlamos en el momento  $T$ , ya que, de la formulación del problema por transposición, se deduce que:

$$(4.63) \quad \begin{cases} \Psi(T) = 0 \\ -\Psi_t(T) + \delta_0 V(T) = 0 \\ -V(T) = 0 \\ \Psi(T, 0) + V_t(T) = 0. \end{cases}$$

**Observación 4.11** Por la definición del operador  $\Lambda$  tenemos que:

$$\begin{aligned} \|(Y_0, Y_1, u_0, u_1)\|_{\mathcal{F}}^2 &= \langle \Lambda(Y_0, Y_1, u_0, u_1), (Y_0, Y_1, u_0, u_1) \rangle = \\ &= \langle (\rho_0, \rho_1, \mu_0, \mu_1), (Y_0, Y_1, u_0, u_1) \rangle_{\mathcal{Y}', \mathcal{Y}} \leq \|(\rho_0, \rho_1, \mu_0, \mu_1)\|_{\mathcal{Y}'} \|(Y_0, Y_1, u_0, u_1)\|_{\mathcal{Y}}. \end{aligned}$$

Aplicando ahora la desigualdad inversa (4.23) resulta que:

$$\begin{aligned} \|(Y_0, Y_1, u_0, u_1)\|_{\mathcal{F}}^2 &\leq \|(\rho_0, \rho_1, \mu_0, \mu_1)\|_{\mathcal{Y}'} \|(Y_0, Y_1, u_0, u_1)\|_{\mathcal{Y}} \leq \\ &\leq \frac{2e^{n\pi}}{\sqrt{T-2-2\varepsilon}} \|(\rho_0, \rho_1, \mu_0, \mu_1)\|_{\mathcal{Y}'} \|(Y_0, Y_1, u_0, u_1)\|_{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

Se deduce que:

$$(4.64) \quad \|(Y_0, Y_1, u_0, u_1)\|_{\mathcal{F}}^2 \leq \frac{2e^{n\pi}}{\sqrt{T-2-2\varepsilon}} \|(\rho_0, \rho_1, \mu_0, \mu_1)\|_{\mathcal{Y}'}.$$

Esta desigualdad será útil en la siguiente sección, cuando estudiaremos la controlabilidad del problema bidimensional.

## 4.2 El problema de control bidimensional

Nos proponemos ahora estudiar el problema de control siguiente: dado  $T$  suficientemente grande y un dato inicial  $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1)$  en un espacio  $\mathcal{E}$  que está a nuestra disposición, encontrar dos controles  $\alpha = \alpha(t, x) \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$  y  $\beta = \beta(t, x) \in H^{-2}(0, T; L^2(0, 1))$  tales que la solución del sistema:

$$(4.64) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Phi_{tt} - \Delta \Phi = 0 & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, T) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -W_t + \alpha & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, T) \\ W_{tt} - W_{xx} + \Phi_t = \beta & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, T) \\ W_x(0, t) = W_x(1, t) = 0 & \text{para } t \in (0, T) \\ \Phi(0) = \Phi^0, \quad \Phi_t(0) = \Phi^1 & \text{en } \Omega \\ W(0) = W^0, \quad W_t(0) = W^1 & \text{sobre } \Gamma_0 \end{array} \right.$$

satisfaga las relaciones:

$$(4.65) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(T) = \Phi_t(T) = 0 \\ W(T) = W_t(T) = 0. \end{array} \right.$$

La idea para la resolución de este problema consiste en reducirlo a una infinidad de problemas de control unidimensionales del tipo estudiado anteriormente, encontrar los controles necesarios y combinarlos para obtener el control del problema (4.64). Sin embargo, para tener la convergencia en norma de la serie obtenida tenemos que imponer condiciones muy fuertes sobre los datos iniciales. lo cual es consistente con los resultados de Bardos, Lebeau y Rauch [6] que indican que la ecuación de ondas no se puede controlar en el espacio de la energía mediante controles regulares localizados en  $\Gamma_0$ .

Sea ahora un dato inicial  $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1) \in \mathcal{X} = H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^1(\Gamma_0) \times L^2(\Gamma_0)$  con el siguiente desarrollo en serie (las convergencias tendrán lugar en los espacios correspondientes):

$$(4.66) \quad \begin{aligned} \Phi^0 &= \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^0 \cos n\pi x, & \Phi^1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^1 \cos n\pi x, \\ W^0 &= \sum_{n=0}^{\infty} W_n^0 \cos n\pi x, & W^1 &= \sum_{n=0}^{\infty} W_n^1 \cos n\pi x. \end{aligned}$$

Introducimos ahora las siguientes notaciones:

$$(4.67) \quad \rho_n^0 = \Phi_n^0, \quad \rho_n^1 = -\Phi_n^1 + \delta_0 W_n^0, \quad \mu_n^0 = -W_n^0, \quad \mu_n^1 = \Phi_n^0(0) + W_n^1.$$

donde  $\delta_0$  es la delta de Dirac en  $x = 0$ .

Como  $(\Phi_n^0, \Phi_n^1, W_n^0, W_n^1) \in H^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , se obtiene que:

$$(\rho_n^0, \rho_n^1, \mu_n^0, \mu_n^1) \in \mathcal{Y}'_n = \mathcal{F}'_n = L^2(0, 1) \times (H^1(0, 1))' \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Los espacios  $\mathcal{Y}_n$  son todos iguales pero se diferencian por la norma que se define en cada uno y que viene dada por el producto escalar (4.11). También, los espacios  $\mathcal{F}_n$  sólo se diferencian por la norma que viene dada por la fórmula (4.43).

**Teorema 4.6** Para  $T > 2$  y un dato  $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1)$  en el espacio  $\mathcal{E}$  definido por:

$$\mathcal{E} = \left\{ (\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1) \in \mathcal{X} : \sum_{n=1}^{\infty} e^{2n\pi} \|(\rho_n^0, \rho_n^1, \mu_n^0, \mu_n^1)\|_{\mathcal{Y}'_n}^2 < \infty \right\}$$

existen dos controles  $\alpha = \alpha(t, x) \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$  y  $\beta = \beta \in H^{-2}(0, T; L^2(0, 1))$  tales que la solución del sistema (4.64) satisface las condiciones (4.65).

**Demostración:**

Consideramos, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , el problema de control siguiente: dado  $T$  suficientemente grande y el dato inicial  $(\Phi_n^0, \Phi_n^1, W_n^0, W_n^1)$  en el espacio  $\mathcal{Y} = H^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  encontrar dos controles  $\alpha_n = \alpha_n(t)$  y  $\beta_n = \beta_n(t)$ , en unos espacios que están a nuestra disposición, de forma que la solución del sistema:

$$(4.68) \quad \begin{cases} \Psi_{tt} - \Psi_{yy} + n^2\pi^2\Psi = 0 & \text{para } y \in (0, 1), t \in (0, T) \\ \Psi_y(1) = 0 & \text{para } t \in (0, T) \\ \Psi_y = -V_t + \alpha_n & \text{para } t \in (0, T) \\ V_{tt} + n^2\pi^2V + \Psi_t(0) = \beta_n & \text{para } t \in (0, T) \\ \Psi(0) = \Phi_n^0, \quad \Psi_t(0) = \Phi_n^1 & \text{para } y \in (0, 1) \\ V(0) = W_n^0, \quad V_t(0) = W_n^1 \end{cases}$$

satisfaga las relaciones:

$$(4.69) \quad \begin{cases} \Psi(T) = \Psi_t(T) = 0 \\ V(T) = V_t(T) = 0 \end{cases}$$

En el Teorema 4.5 vimos que este problema admite, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , dos controles

$$\alpha_n \in L^2(0, T) \quad \text{y} \quad \beta_n \in H^{-2}(0, T)$$

con los cuales la solución  $(\Psi_n, V_n)$  de (4.68), definida por (4.54), satisface la condición (4.69).

Además, teníamos un valor explícito de estos controles:

$$\alpha_n = n\pi\rho Y_n(0) \quad \text{y} \quad \beta_n = -\frac{d^2}{dt^2}(\rho(u_n)_{tt}) + \frac{d}{dt}(\rho(u_n)_t) - n^2\pi^2\rho u_n.$$

donde  $(Y_n, u_n)$  vienen dados por el sistema:

$$(4.70) \quad \begin{cases} Y_{tt} - Y_{yy} + n^2\pi^2Y = 0 & \text{para } y \in (0, 1), t \in (0, T) \\ Y_y(1) = 0 & \text{para } t \in (0, T) \\ Y_y(0) = u_t & \text{para } t \in (0, T) \\ u_{tt} + n^2\pi^2u - Y_t(0) = 0 & \text{para } t \in (0, T) \\ Y(0) = Y_n^0, \quad Y_t(0) = Y_n^1 & \text{para } y \in (0, 1) \\ u(0) = u_n^0, \quad u_t(0) = u_n^1 \end{cases}$$

con datos iniciales  $(Y_n^0, Y_n^1, u_n^0, u_n^1)$  únicamente determinados mediante (4.61).

✦ Observemos que, en el caso  $n = 0$  tenemos que hacer las modificaciones necesarias indicadas en el problema unidimensional correspondiente. Los controles serán

$$\alpha_0 = \rho Y_0(0) \quad \text{y} \quad \beta_0 = -\frac{d^2}{dt^2}(\rho(u_0)_{tt}) + \frac{d}{dt}(\rho(u_0)_t) - \rho u_0,$$

donde  $(Y_0, u_0)$  vienen dados por el sistema (4.70) con  $n = 0$ .

Consideramos ahora las expresiones:

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos n\pi x = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi\rho Y_n(0) \cos n\pi x,$$

$$\beta = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \cos n\pi x = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{d^2}{dt^2}(\rho(u_n)_{tt}) - \frac{d}{dt}(\rho(u_n)_t) + n^2\pi^2\rho u_n \right) \cos n\pi x.$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} \|\alpha\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n^2\pi^2 \|\rho Y_n(0)\|_{L^2(0,T)}^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n^2\pi^2 \int_0^T (\rho Y_n(0))^2, \\ \|\beta\|_{H^{-2}(0,T;L^2(0,1))}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{d^2}{dt^2}(\rho(u_n)_{tt}) - \frac{d}{dt}(\rho(u_n)_t) + n^2\pi^2\rho u_n \right\|_{H^{-2}(0,T)}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \|\rho(u_n)_{tt}\|_{L^2(0,T)}^2 + \|\rho(u_n)_t\|_{L^2(0,T)}^2 + n^4\pi^4 \|\rho u_n\|_{L^2(0,T)}^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T \left( (\rho(u_n)_{tt})^2 + (\rho(u_n)_t)^2 + n^4\pi^4(\rho u_n)^2 \right). \end{aligned}$$

Para obtener  $\alpha \in L^2(0,T;L^2(0,1))$ ,  $\beta \in H^{-2}(0,T;L^2(0,1))$ , es suficiente pedir que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T \rho^2 \left( ((u_n)_{tt})^2 + ((u_n)_t)^2 + n^4\pi^4(u_n)^2 + n^2\pi^2(Y_n(0))^2 \right) < \infty.$$

Según la definición de la norma de  $\mathcal{F}_n$ , tenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T \rho^2 \left( ((u_n)_{tt})^2 + ((u_n)_t)^2 + n^4\pi^4(u_n)^2 + n^2\pi^2(Y_n(0))^2 \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \|(Y_n^0, Y_n^1, u_n^0, u_n^1)\|_{\mathcal{F}_n}^2.$$

Por otro lado, la Observación 4.11 y la desigualdad (4.63) nos aseguran que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|(Y_n^0, Y_n^1, u_n^0, u_n^1)\|_{\mathcal{F}_n}^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2e^{2n\pi}}{T-2-2\epsilon} \|(\rho_n^0, \rho_n^1, \mu_n^0, \mu_n^1)\|_{\mathcal{Y}_n}^2.$$

De aquí resulta que mediante controles  $\alpha \in L^2(0,T;L^2(0,1))$ ,  $\beta \in H^{-2}(0,T;L^2(0,1))$  podemos controlar "datos iniciales" del problema (4.64) tales que:

$$(4.71) \quad \sum_{n=0}^{\infty} e^{2n\pi} \|(\rho_n^0, \rho_n^1, \mu_n^0, \mu_n^1)\|_{\mathcal{Y}_n}^2 < \infty$$

donde  $(\rho_n^0, \rho_n^1, \mu_n^0, \mu_n^1)$  son las cantidades dadas por las fórmulas (4.67) y que aparecen al resolver el problema de control unidimensional para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

El problema de control se interpreta en este caso de una manera similar a la del caso unidimensional. La solución de (4.64) con los dos controles encontrados verifica una ecuación del tipo:

$$(4.72) \quad \int_0^T \int_{\Omega} f\Phi - \int_0^T \int_{\Gamma_0} gW + \langle \rho_1, \xi_0 \rangle_{(H^1)', H^1} + \langle \rho_0, \xi_1 \rangle_{L^2} + \langle \mu_1, \zeta_0 \rangle_{(H^1)', H^1} + \langle \mu_0, \zeta_1 \rangle_{L^2} = \langle \alpha, \xi(0) \rangle_{L^2} + \langle \beta, \zeta \rangle,$$

$$\forall f \in L^1(0,T;L^2(\Omega)), \quad \forall g \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)), \quad \forall (\xi_0, \xi_1, \zeta_0, \zeta_1) \in \mathcal{X},$$

donde  $(\xi, \zeta)$  es la solución de:

$$(4.73) \quad \begin{cases} \xi_{tt} - \Delta \xi = f & \text{en } \Omega, \quad t \in (0, T) \\ \frac{\partial \xi}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1, \quad t \in (0, T) \\ \frac{\partial \xi}{\partial \nu} = \zeta_t & \text{sobre } \Gamma_0, \quad t \in (0, T) \\ \zeta_{tt} + \zeta_{xx} - \xi_t = g & \text{sobre } \Gamma_0, \quad t \in (0, T) \\ \xi(0) = \xi^0, \quad \xi_t(0) = \xi^1 & \text{en } \Omega \\ \zeta(0) = \zeta^0, \quad \zeta_t(0) = \zeta^1 & \text{sobre } \Gamma_0. \end{cases}$$

■

**Observación 4.12** La relación (4.71) nos indica que los "datos iniciales" del problema (4.64):

$$\rho_0 = \Phi^0, \quad \rho_1 = -\Phi^1 + \delta_0 W^0, \quad \mu_0 = -W^0, \quad \mu_1 = W^1 + \Phi^0(0)$$

tienen que satisfacer unas condiciones muy restrictivas para ser controlables, pero, insistimos de nuevo, esto es perfectamente consistente con las propiedades clásicas de controlabilidad de la ecuación de ondas (deducidas en [6]).

Observamos también que si las series (4.66) tienen un número finito de términos, los datos iniciales correspondientes están en  $\mathcal{E}$  y, por lo tanto, se pueden controlar.

### 4.3 Control $\alpha = 0$

Tal y como mencionamos al principio del capítulo, es conveniente, del punto de vista de la interpretación física de los controles, actuar sobre el sistema solamente mediante el término  $\beta$ . En esta sección nos proponemos estudiar el problema de control siguiente: dado  $T$  suficientemente grande y un dato inicial  $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1)$  en un espacio  $\mathcal{E}$  que está a nuestra disposición, encontrar un control,  $\beta = \beta(t, x) \in H^{-2}(0, T; L^2(0, 1))$ , tal que la solución del sistema:

$$(4.74) \quad \begin{cases} \Phi_{tt} - \Delta \Phi = 0 & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, T) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -W_t & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, T) \\ W_{tt} - W_{xx} + \Phi_t = \beta & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, T) \\ W_x(0, t) = W_x(1, t) = 0 & \text{para } t \in (0, T) \\ \Phi(0) = \Phi^0, \quad \Phi_t(0) = \Phi^1 & \text{en } \Omega \\ W(0) = W^0, \quad W_t(0) = W^1 & \text{sobre } \Gamma_0 \end{cases}$$

satisfaga las relaciones:

$$(4.75) \quad \begin{cases} \Phi(T) = \Phi_t(T) = 0 \\ W(T) = W_t(T) = 0. \end{cases}$$

Se trata pues de controlar el sistema mediante el término  $\beta$  que representa una fuerza distribuida que actúa sobre la parte flexible  $\Gamma_0$  de la frontera. Lo que vamos a obtener es un resultado de controlabilidad parcial en el que la relación (4.75) se sustituye por:

$$(4.76) \quad \begin{cases} \Phi(T) = c_1 = \text{cte}, & \Phi_t(T) = 0 \\ W(T) = c_2 = \text{cte}, & W_t(T) = 0. \end{cases}$$

Las constantes  $c_1$  y  $c_2$  se determinan de manera única en función de los datos iniciales del sistema (4.74) (vease la Observación 4.16).

Veremos por tanto que, mediante un sólo control, todos los datos iniciales que verifican una condición del tipo (4.71) pueden ser conducidos a un estado de equilibrio.

El primer paso consiste en volver al caso unidimensional e intentar encontrar unas desigualdades parecidas a (4.20) y (4.23) pero sin que el término  $Y(0, t)$  intervenga. Sin embargo, esto no es siempre posible. Por ejemplo, en el caso  $n = 0$  la presencia de este término es esencial y esto hace que mediante el único control  $\beta$  no podamos alcanzar (4.75) sino (4.76). Es lo que en Lions [29] se denomina controlabilidad parcial.

Igual que en la sección 4.1, empezamos por el análisis del problema unidimensional correspondiente:

$$(4.77) \quad \begin{cases} \Psi_{tt} - \Psi_{yy} + n^2 \pi^2 \Psi = f & \text{para } y \in (0, 1), t \in (0, T) \\ \Psi_y(1) = 0 & \text{para } t \in (0, T) \\ \Psi_y(0) = V_t & \text{para } t \in (0, T) \\ V_{tt} + n^2 \pi^2 V - \Psi_t(0) = g & \text{para } t \in (0, T) \\ \Psi(0) = \Psi^0, \quad \Psi_t(0) = \Psi^1 & \text{para } y \in (0, 1) \\ V(0) = V^0, \quad V_t(0) = V^1. \end{cases}$$

El siguiente teorema nos ofrece estimaciones para la norma que interviene en el problema de control.

**Teorema 4.7** *Sea  $T > 2$  arbitrario. i) Si  $n \neq 0$ , para todo  $f \in L^1(0, T; L^2(0, 1))$ ,  $g \in L^2(0, T)$  y  $(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1) \in \mathcal{Y}$  tenemos la desigualdad siguiente:*

$$(4.78) \quad \int_0^T (V_{tt})^2 \leq C_1(T)(n^2 + 1) \left( \|(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1)\|_{\mathcal{Y}}^2 + \|f\|_{L^1}^2 + \|g\|_{L^2}^2 \right).$$

*Si además,  $f = 0$  y  $g = 0$  tenemos que:*

$$(4.79) \quad \|(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1)\|_{\mathcal{Y}}^2 \leq C_2(T, n) e^{2n\pi} \int_0^T (V_{tt})^2.$$

*La constante  $C_1$  depende de  $T$  pero no depende ni de los datos del sistema ni de  $n$ . La constante  $C_2$  depende de  $T$  y  $n$  pero no depende de los datos del sistema (en la demostración se va a dar una estimación de esta constante).*

*ii) Si  $n = 0$ , para todo  $f \in L^1(0, T; L^2(0, 1))$ ,  $g \in L^2(0, T)$  y  $(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1) \in \mathcal{Y}^0$  tenemos la desigualdad siguiente:*

$$(4.80) \quad \int_0^T (V_{tt})^2 \leq C_3(T) \left( \|(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1)\|_{\mathcal{Y}^0}^2 + \|f\|_{L^1}^2 + \|g\|_{L^2}^2 \right).$$

Si además,  $f = 0$  y  $g = 0$  tenemos que:

$$(4.81) \quad \|(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1)\|_{\mathcal{Y}^0}^2 \leq C_4(T) \int_0^T (V_{tt})^2,$$

donde constantes  $C_1$  y  $C_2$  dependen de  $T$  pero no dependen de los datos del sistema.

### 3 Demostración:

Las desigualdades (4.78) y (4.80) se obtienen inmediatamente de (4.20) y (4.33) respectivamente despreciando los términos  $(V_t)^2$ ,  $V^2$  y  $\Psi^2(0)$ .

Pasamos ahora a demostrar la desigualdad (4.79). Recordamos primero que la relación (4.23) nos da:

$$\|(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1)\|_{\mathcal{Y}^0}^2 \leq \frac{2e^{2\pi n}}{T-2} \left\{ \int_0^T \left( (V_{tt})^2 + (V_t)^2 + n^4 \pi^4 V^2 + n^2 \pi^2 \Psi^2(0, t) \right) \right\}.$$

Nos proponemos demostrar que existe una constante  $C_2(T, n) > 0$  tal que:

$$(4.82) \quad \int_0^T \left( (V_{tt})^2 + (V_t)^2 + n^4 \pi^4 V^2 + n^2 \pi^2 \Psi^2(0, t) \right) \leq C_2(T, n) e^{2\pi n} \int_0^T (V_{tt})^2.$$

Antes de pasar a demostrar la desigualdad (4.82) recordamos que el operador diferencial asociado al sistema (4.77) tiene una sucesión de autovalores  $(\nu_{n,m})_{m \in \mathbb{Z}^*} \cup \{\nu_n^*, \nu_n^{**}\}$  cuyas propiedades están descritas en el Teorema 3.1. También recordamos que las autofunciones correspondientes  $(\xi_{\nu_{n,m}})_{m \in \mathbb{Z}^*} \cup \{\xi_{\nu_n^*}, \xi_{\nu_n^{**}}\}$  forman una base de Riesz en el espacio  $Y$  (vease el Teorema 3.7).

Por consiguiente, la solución  $U(t) = (\Psi, \Psi_t, V, V_t)(t)$  de (4.77) se puede escribir como:

$$U(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} a_{n,m} e^{-\nu_{n,m} t} \xi_{\nu_{n,m}} + a_n^* e^{-\nu_n^* t} \xi_{\nu_n^*} + a_n^{**} e^{-\nu_n^{**} t} \xi_{\nu_n^{**}}.$$

De esta relación obtenemos que:

$$(4.83) \quad \begin{aligned} \Psi(t) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} a_{n,m} e^{-\nu_{n,m} t} \xi_{\nu_{n,m}}^1 + a_n^* e^{-\nu_n^* t} \xi_{\nu_n^*}^1 + a_n^{**} e^{-\nu_n^{**} t} \xi_{\nu_n^{**}}^1, \\ V(t) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} a_{n,m} e^{-\nu_{n,m} t} \xi_{\nu_{n,m}}^3 + a_n^* e^{-\nu_n^* t} \xi_{\nu_n^*}^3 + a_n^{**} e^{-\nu_n^{**} t} \xi_{\nu_n^{**}}^3, \end{aligned}$$

donde  $\xi_{\nu_{n,m}}^i$  es la componente  $i$ -ésima de la autofunción  $\xi_{\nu_{n,m}}$ .

A continuación, para demostrar la desigualdad (4.82) utilizamos las expresiones (4.83) y los resultados de Ingham [24] (vease también Haraux [21]). Mencionamos primero el resultado principal:

**Teorema 4.8** (Haraux [21], Teorema 3): Sea  $f(t) = \sum_{n=N'}^{N''} a_n e^{-\lambda_n t}$  donde  $\lambda_n$  son números reales que satisfacen  $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \gamma > 0$  y sea  $J \subset \mathbb{R}$  un intervalo acotado con  $|J| > \frac{2\pi}{\gamma}$ . Entonces existen dos constantes positivas  $c_1$  y  $c_2$  tales que:

$$(4.84) \quad c_1 \sum_{n=N'}^{N''} |a_n|^2 \leq \int_J |f(t)|^2 dt \leq c_2 \sum_{n=N'}^{N''} |a_n|^2.$$

Para las constantes  $c_1$  y  $c_2$  se tienen las siguientes estimaciones:  $c_1 = \frac{2}{3} \left( |J| - \frac{2\pi}{\gamma} \right)$  y  $c_2 = \frac{10}{\pi} |J|$ .

Los resultados correspondientes a series infinitas que convergen uniformemente en  $J$  también son válidos.

Pasamos ahora a la demostración de la desigualdad (4.83), mayorando cada uno de los términos que aparece en el miembro izquierdo. Empezamos por  $\Psi(0, t)$  y tenemos sucesivamente:

$$\Psi(0, t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} a_{n,m} e^{-\nu_{n,m} t} \xi_{\nu_{n,m}}^1(0) + a_n^* e^{-\nu_n^* t} \xi_{\nu_n^*}^1(0) + a_n^{**} e^{-\nu_n^{**} t} \xi_{\nu_n^{**}}^1(0),$$

$$\Psi_t(0, t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} -\nu_{n,m} a_{n,m} e^{-\nu_{n,m} t} \xi_{\nu_{n,m}}^1(0) - \nu_n^* a_n^* e^{-\nu_n^* t} \xi_{\nu_n^*}^1(0) - \nu_n^{**} a_n^{**} e^{-\nu_n^{**} t} \xi_{\nu_n^{**}}^1(0).$$

El Teorema 3.1 describe todos los autovalores para  $n$  fijo y por lo tanto podemos utilizar los resultados de Ingham. Estudiamos primero la separación de los autovalores. Si  $\nu_n^1$  y  $\nu_n^2$  son dos autovalores arbitrarios de  $\mathcal{A}^1$  tenemos que:

$$\gamma_n = \inf |\nu_n^1 - \nu_n^2| > \inf \{ |\nu_n^* - \nu_{n,1}|, |\nu_{n,2} - \nu_{n,1}|, \dots, |\nu_{n,m+1} - \nu_{n,m}|, \dots \}.$$

Del Teorema 3.1 y del análisis de las gráficas que lo acompaña se deduce que:

$$|\nu_{n,m+1} - \nu_{n,m}| \geq \frac{\pi}{1 + 2n}, \quad |\nu_n^* - \nu_{n,1}| \geq \frac{\pi}{4}.$$

Por lo tanto, el "gap" o "hueco espectral" correspondiente a la familia  $(\nu_{n,m})_{m \in \mathbb{Z}^*} \cup \{\nu_k^*, \nu_k^{**}\}$  es, para cada  $n$ ,  $\gamma_n = \frac{\pi}{1 + 2n}$  si  $n \geq 2$  y  $\gamma_n = \frac{\pi}{4}$  si  $n = 0, 1$ .

**Observación 4.13** Las estimaciones (4.85) nos dan:

$$\|\Psi(0, s)\|_{L^2(J)}^2 \leq c_1 \left( \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} |a_{n,m} \xi_{\nu_{n,m}}^1(0)|^2 + |a_n^* \xi_{\nu_n^*}^1(0)|^2 + |a_n^{**} \xi_{\nu_n^{**}}^1(0)|^2 \right),$$

$$\|\Psi_t(0, s)\|_{L^2(J)}^2 \geq c_2 \left( \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} |\nu_{n,m} a_{n,m} \xi_{\nu_{n,m}}^1(0)|^2 + |\nu_n^* a_n^* \xi_{\nu_n^*}^1(0)|^2 + |\nu_n^{**} a_n^{**} \xi_{\nu_n^{**}}^1(0)|^2 \right).$$

Si queremos tomar intervalos  $J$  de la forma  $(0, T)$ , para que las desigualdades anteriores sean ciertas, es preciso que  $T > \frac{2\pi}{\gamma_n} = 2 + 4n$ . Por consiguiente, el tiempo necesario para el control tiende a infinito cuando  $n \rightarrow \infty$ . Este resultado no nos permite demostrar la propiedad de controlabilidad del sistema bidimensional.

Teniendo en cuenta lo expuesto en la observación anterior, en vez de usar el Teorema 4.8, utilizamos una generalización debida a Ball y Slemrod [2] y ligeramente mejorada en Haraux [21]. Mencionamos primero este resultado.

**Teorema 4.9** (Haraux [21], Teorema 4): Sea  $f(t) = \sum_{n=N'}^{N''} a_n e^{-\lambda_n t}$  donde  $\lambda_n$  son números reales que satisfacen:

i)  $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \gamma_\infty > 0$  si  $|n| > N$ ,

ii)  $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \gamma > 0, \forall n$ ,

y sea  $J \subset \mathbb{R}$  un intervalo acotado con  $|J| > \frac{2\pi}{\gamma_\infty}$ . Entonces existen dos constantes positivas  $c_1(2N+1)$  y  $c_2(2N+1)$  tales que:

$$(4.86) \quad c_1(2N+1) \sum_{n=N'}^{N''} |a_n|^2 \leq \int_J |f(t)|^2 dt \leq c_2(2N+1) \sum_{n=N'}^{N''} |a_n|^2.$$

Las constantes  $c_1(2N+1)$  y  $c_2(2N+1)$  se calculan por recurrencia de la siguiente manera:

$$c_1(0) = c_1 \text{ y } c_2(0) = c_2,$$

$$c_1(k+1) = \left( \left( \frac{2c_2(k)}{|J|} + 1 \right) \frac{288|J|\gamma_\infty}{c_1(k)(|J|\gamma_\infty - 2\pi)^2 \gamma^4} + \frac{2}{|J|} \right)^{-1},$$

$$c_2(k+1) = 2(|J|(k+1) + c_2(k)),$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son las dos constantes que aparecen en (4.85) y  $k \geq 0$ .

Los resultados correspondientes a series infinitas que convergen uniformemente en  $J$  también son válidos.

**Observación 4.14** La ventaja del último resultado consiste en que, en la cota de la longitud del intervalo  $J$ , en lugar de aparecer el "gap"  $\gamma$ , aparece el "gap asintótico"  $\gamma_\infty$  correspondiente a la familia  $(\lambda_j)_j$ . Obviamente  $\gamma_\infty > \gamma$ .

Volvamos ahora al problema inicial.

Sea  $T > 2$  arbitrario. Resulta que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $T = 2 + \varepsilon$ .

En nuestro caso, fijando  $n \in \mathbb{N}$ , a la familia que estamos considerando,  $(\nu_{n,m})_{m \in \mathbb{Z}^*} \cup \{\nu_n^*, \nu_n^{**}\}$  le corresponde el "gap asintótico"  $\pi$ .

Notamos que, si  $\delta$  es un número con la propiedad  $0 < \delta < \pi$ , tenemos que:

$$(4.87) \quad |\nu_{n,m+1} - \nu_{n,m}| \geq \pi - \frac{24}{\pi \sqrt{1 + \frac{m^2}{n^2}}} \geq \pi - \delta \quad \text{si} \quad n \sqrt{\left(\frac{12}{\delta}\right)^2 - 1} \leq m.$$

Para demostrar la última afirmación necesitamos más información sobre la separación asintótica de los autovalores. De la misma manera que en el Teorema 3.2 se obtiene que, para  $n \in \mathbb{N}$  arbitrario y  $m \in \mathbb{Z}^*$  con  $m > n$ , tenemos:

$$\left| \nu_{n,m} - \sqrt{m^2 + n^2} \pi i \right| \leq \frac{24}{\sqrt{m^2 + n^2} \pi}.$$

De esta estimación se deduce que:

$$\begin{aligned} |\nu_{n,m+1} - \nu_{n,m}| &\geq \left| \sqrt{(m+1)^2 + n^2} \pi - \sqrt{m^2 + n^2} \pi \right| - \\ &- \left| \nu_{n,m+1} - \sqrt{(m+1)^2 + n^2} \pi i \right| - \left| \nu_{n,m} - \sqrt{m^2 + n^2} \pi i \right| \geq \end{aligned}$$

$$\geq \frac{(2|m|+1)\pi}{(2|m|+1)+2n} - \frac{48}{\sqrt{m^2+n^2}\pi} \geq \pi - \frac{24}{\sqrt{\frac{m^2}{n^2}+1}},$$

de donde se obtiene (4.86).

Elegimos  $\delta < \frac{\pi \varepsilon}{2 + \varepsilon}$  y aplicamos el Teorema 4.9 con  $\gamma = \frac{\pi}{1 + 2n}$  si  $n \geq 2$  y  $\gamma = \frac{\pi}{4}$  si  $n = 1, 2$ ,

$$\gamma_\infty = \pi - \delta, N = n \sqrt{\left(\frac{12}{\delta}\right)^2 - 1} \text{ y } T = 2 + \varepsilon.$$

Se obtiene que, si  $T > 2$ :

$$\|\Psi(0, t)\|_{L^2(0, T)}^2 \leq c_{1, n} \left( \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} |a_{n, m} \xi_{\nu_{n, m}}^1(0)|^2 + |a_n^* \xi_{\nu_n^*}^1(0)|^2 + |a_n^{**} \xi_{\nu_n^{**}}^1(0)|^2 \right),$$

$$\|\Psi_t(0, t)\|_{L^2(0, T)}^2 \geq c_{2, n} \left( \sum_{m \in \mathbb{Z}^*} |\nu_{n, m} a_{n, m} \xi_{\nu_{n, m}}^1(0)|^2 + |\nu_n^* a_n^* \xi_{\nu_n^*}^1(0)|^2 + |\nu_n^{**} a_n^{**} \xi_{\nu_n^{**}}^1(0)|^2 \right),$$

donde las constantes  $c_{1, n}$  y  $c_{2, n}$  vienen dadas por las siguientes relaciones:

$$(4.87) \quad c_{1, n} = c_1(2N + 1) \text{ y } c_{2, n} = c_2(2N + 1) \text{ con } N = n \sqrt{\left(\frac{12}{\delta}\right)^2 - 1},$$

$c_1(2N + 1)$  y  $c_2(2N + 1)$  siendo las constantes definidas por recurrencia en el Teorema 4.9.

Se obtiene que:

$$(4.88) \quad \|\Psi(0, t)\|_{L^2(0, T)}^2 \leq \frac{c_n}{|\nu_n^*|^2} \|\Psi_t(0, t)\|_{L^2(0, T)}^2,$$

donde  $c_n = \frac{c_{1, n}}{c_{2, n}}$ .

Como de la ecuación de  $V$  deducimos que:

$$\|\Psi_t(0, t)\|_{L^2}^2 \leq 2 \int_0^T \left( (V_{tt})^2 + n^4 \pi^4 V^2 \right),$$

obtenemos la acotación deseada para el término  $\Psi(0, t)$ :

$$\|\Psi(0, t)\|_{L^2}^2 \leq \frac{2c_n}{|\nu_n^*|^2} \int_0^T \left( (V_{tt})^2 + n^4 \pi^4 V^2 \right).$$

De una manera similar se obtiene la acotación de  $V_t$  y  $V$  por  $V_{tt}$ :

$$\|V(t)\|_{L^2}^2 \leq \frac{c_n}{|\nu_n^*|^4} \int_0^T (V_{tt})^2,$$

$$\|V_t(t)\|_{L^2}^2 \leq \frac{c_n}{|\nu_n^*|^2} \int_0^T (V_{tt})^2.$$

Por consiguiente, se obtiene la desigualdad (4.82) y, a continuación, (4.79), con  $C_2(T, n) = \frac{c_n}{|\nu_n^*|^4}$ .

Pasamos ahora a demostrar la desigualdad (4.81).

El Teorema 4.4 nos asegura que:

$$(4.89) \quad \|(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1)\|_{\mathcal{Y}^0}^2 \leq C \left\{ \int_0^T \left( (V_{tt})^2 + (V_t)^2 + V^2 + \Psi^2(0, t) \right) \right\}.$$

Sabemos que podemos descomponer el espacio  $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0 \oplus \mathcal{Y}^1$  y que  $\mathcal{Y}^1$  tiene dimensión dos. También sabemos que una solución del problema homogéneo (4.78) con dato inicial en  $\mathcal{Y}^0$  permanece en  $\mathcal{Y}^0$ .

Podemos aplicar el razonamiento anterior para deducir la estimación (4.82). Sólomente tenemos que eliminar, en las series que aparecen, los últimos dos términos correspondientes a  $\nu_n^*$  y  $\nu_n^{**}$  que, en este caso son iguales a 0.

Pasamos ahora a analizar el problema de control correspondiente al sistema (4.78):

$$(4.91) \quad \begin{cases} \Psi_{tt} - \Psi_{yy} + n^2 \pi^2 \Psi = 0 & \text{para } y \in (0, 1), t \in (0, T) \\ \Psi_y(1) = 0 & \text{para } t \in (0, T) \\ \Psi_y(0) = V_t & \text{para } t \in (0, T) \\ V_{tt} + n^2 \pi^2 V - \Psi_t(0) = \beta & \text{para } t \in (0, T) \\ \Psi(0) = \Psi^0, \quad \Psi_t(0) = \Psi^1 & \text{para } y \in (0, 1) \\ V(0) = V^0, \quad V_t(0) = V^1. \end{cases}$$

Tenemos el siguiente resultado de controlabilidad:

**Teorema 4.10** Sea  $T > 2$ .

i) Si  $n \neq 0$  es sistema (4.91) es exactamente controlable, es decir, para todo dato inicial  $(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1) \in \mathcal{Y}'$ , tal que  $\Psi^0$  sea continua en  $y = 0$ , existe un control  $\beta \in H^{-2}(0, T)$  tal que la solución correspondiente de (4.91) satisfaga:

$$(4.92) \quad \begin{cases} \Psi(T) = \Psi_t(T) = 0 \\ V(T) = V_t(T) = 0. \end{cases}$$

ii) Si  $n = 0$  es sistema (4.91) es parcialmente controlable, es decir, para todo dato inicial  $(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1) \in \mathcal{Y}'$ , tal que  $\Psi^0$  sea continua en  $x = 0$ , existe un control  $\beta \in H^{-2}(0, T)$  tal que la solución correspondiente de (4.91) satisfaga:

$$(4.93) \quad \begin{cases} \Psi(T) = c_1 = \text{cte}, \quad \Psi_t(T) = 0 \\ V(T) = c_2 = \text{cte}, \quad V_t(T) = 0. \end{cases}$$

**Demostración:**

Para el caso  $n \neq 0$  podemos repetir la demostración del Teorema 4.5 usando como norma en el espacio  $\mathcal{F}$  la cantidad:

$$\|(Y^0, Y^1, u^0, u^1)\|^2 = \int_0^T \rho^2(u_{tt})^2.$$

Las desigualdades obtenidas en el Teorema 4.7 nos permiten deducir que ésta es una norma y que  $\mathcal{F} = \mathcal{Y}$  algebraica y topológicamente.

En el caso  $n = 0$  también podemos repetir el argumento del Teorema 4.5 pero sustituyendo el espacio  $\mathcal{Y}$  por  $\mathcal{Y}^0$ .

Obtendremos que el operador  $\Lambda : \mathcal{Y}^0 \rightarrow (\mathcal{Y}^0)'$  es un isomorfismo y por lo tanto cualquier dato inicial en  $(\mathcal{Y}^0)'$  es controlable mediante controles que vienen dados por la ecuación adjunta con datos iniciales en  $\mathcal{Y}^0$ .

A continuación nos proponemos extender este resultado a datos iniciales en  $\mathcal{Y}'$ .

El espacio  $(\mathcal{Y}^0)'$  es isomorfo a un espacio cociente de  $\mathcal{Y}'$ . En efecto, si definimos en  $\mathcal{Y}'$  la relación de equivalencia:

$$S_1, S_2 \in \mathcal{Y}', S_1 \equiv S_2 \Leftrightarrow \langle S_1 - S_2, U^0 \rangle = 0, \forall U^0 \in \mathcal{Y}^0,$$

obtenemos que  $(\mathcal{Y}^0)'$  es isomorfo al espacio cociente  $\mathcal{Y}' / \equiv$ .

Teniendo en cuenta que  $\Lambda : \mathcal{Y}^0 \rightarrow (\mathcal{Y}^0)'$  es un isomorfismo se obtiene que existe un isomorfismo de espacios vectoriales:  $\Lambda' : \mathcal{Y}^0 \rightarrow (\mathcal{Y}' / \equiv)$ .

Por otro lado, consideramos el conjunto:

$$\mathcal{H} = \{(c_2 \delta_0, c_1, c_1, -c_2) : c_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{Y}'.$$

Observemos que, si  $S \in \mathcal{H}$ , tenemos:

$$\langle S, U^0 \rangle = 0, \forall U^0 \in \mathcal{Y}^0.$$

**Observación 4.15** Notemos que, en la formulación por trasposición de la ecuación (4.47), aparecen como "datos iniciales" naturales combinaciones de funciones y deltas de Dirac. Partiendo del conjunto de los equilibrios del sistema (1.1) en el espacio  $\mathcal{X}$ , mediante aquellas combinaciones, se obtiene el conjunto  $\mathcal{H}$ .

Pasamos ahora a demostrar que cualquier "dato inicial"  $S^0 \in \mathcal{Y}'$  puede ser conducido, mediante controles en  $H^{-2}(0, T)$ , a un estado perteneciente al conjunto  $\mathcal{H}$ .

Sean  $(\Lambda')^{-1}(S^0) = U^0 \in \mathcal{Y}^0$  y  $\Lambda(U^0) = \hat{S}^0 \in (\mathcal{Y}^0)'$ .

Teniendo en cuenta el significado del operador  $\Lambda$ , y la formulación por trasposición del problema (4.47), (vease el Lema 4.1), se obtiene que:

$$(4.93) \quad \langle \hat{S}^0, \Xi^0 \rangle = \int_0^T \rho u_{tt} \zeta_{tt}, \forall \Xi^0 \in \mathcal{Y}^0,$$

donde  $(Y, u)$  es la solución del problema (4.42), con dato inicial  $U^0$  y  $(\xi, \zeta)$  es la solución del problema (4.48) con dato inicial  $\Xi^0$  y sin términos no homogéneos.

Consideramos ahora el problema:

$$(4.94) \quad \begin{cases} \Psi_{tt} - \Psi_{yy} = 0 & \text{para } y \in (0, 1), t \in (0, T) \\ \Psi_y(1) = 0 & \text{para } t \in (0, T) \\ \Psi_y(0) = -V_t & \text{para } t \in (0, T) \\ V_{tt} + \Psi_t(0) = -\frac{d}{dt}(\rho u_{tt}) & \text{para } t \in (0, T) \end{cases}$$

con "dato inicial"  $S^0$  y demostramos que al instante  $T$  la solución de este problema, definida por trasposición y notada por  $S(t)$ , pertenece al conjunto  $\mathcal{H}$ .

En efecto, la definición por trasposición de la solución nos indica que:

$$(4.95) \quad \langle S^0, \Xi^0 \rangle - \langle S(T), \Xi(T) \rangle = \int_0^T \rho u_{tt} \zeta_{tt}, \forall \Xi^0 \in \mathcal{Y}^0.$$

Ahora, teniendo en cuenta (4.93) y el hecho de que  $S^0 \equiv \hat{S}^0$ , se obtiene que:

$$(4.96) \quad \langle S(T), \Xi(T) \rangle = 0, \forall \Xi^0 \in \mathcal{Y}^0.$$

Por consiguiente,  $S(T) \in \mathcal{H}$ , y se concluye la demostración. ■

**Observación 4.16** *Estudiemos con más detalles los puntos a los que se puede conducir una solución del problema (4.94) mediante el control  $\beta$ .*

*Esto se puede analizar con la ayuda de la relación (4.95) que nos indica algo más que (4.96). En efecto, tomando datos  $\Xi$  en  $\mathcal{Y}^1$  y considerando que  $S_1^0$  es la proyección del dato  $S^0$  sobre  $\mathcal{H}$  se deduce que:*

$$\langle S_1^0 - S(T), \Xi(T) \rangle = 0.$$

*Resulta que la proyección de  $S^0$  sobre  $\mathcal{H}$  es igual a  $S(T)$  y por lo tanto las soluciones se conducen al estado que viene dado por la proyección del dato inicial sobre  $\mathcal{H}$ .*

*Observemos que, en el caso de soluciones regulares, se alcanza, al instante  $T$ , el estado  $(c_1, 0, c_2, 0)$ . Integrando la primera ecuación de (4.94) en  $(0, T) \times (0, 1)$  obtenemos que  $c_2 = -\int_0^1 \Psi_1 + V_0$  e integrando la última ecuación de (4.94) en  $(0, T)$  obtenemos que  $c_1 = V_1 + \Psi_0(0)$  ( $(\Psi^0, \Psi^1, V^0, V^1)$  siendo el dato inicial de (4.94)).*

**Observación 4.17** *El teorema anterior nos indica que los datos iniciales se pueden conducir al equilibrio, pero el concepto de equilibrio tiene que adaptarse a la definición de soluciones en  $\mathcal{Y}'$ .*

Podemos ahora pasar al problema bidimensional y tenemos:

**Teorema 4.11** *Para  $T > 2$  y un dato  $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1)$  en el espacio  $\mathcal{E}^1$  definido por:*

$$\mathcal{E}^1 = \left\{ (\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1) \in \mathcal{X} : \sum_{n=1}^{\infty} C_2(T, n) e^{2n\pi} \|(\rho_n^0, \rho_n^1, \mu_n^0, \mu_n^1)\|_{\mathcal{Y}_n}^2 < \infty \right\}$$

*existe un control  $\beta = \beta(t, x) \in H^{-2}(0, T; L^2(0, 1))$  tal que la solución del sistema (4.74) satisfaga las condiciones (4.76).*

**Demostración:**

Es similar a la del Teorema 4.6 y la omitiremos.

■

**Observación 4.18** *En la demostración del Teorema 4.7 se puede encontrar una estimación de las constantes  $C_2(T, n)$ .*

## Capítulo 5

# Existencia de soluciones periódicas

En el estudio de la propagación de las ondas acústicas en una cavidad interior una cuestión interesante es la siguiente: ¿cuando sobre la parte flexible de la frontera se ejerce la acción de una fuente de ruido exterior cuál es la respuesta del sistema? Por ejemplo, cuando la presión exterior está acotada (con respecto al tiempo), es muy importante saber si el nivel de ruido permanece dentro de ciertos límites o si puede ocurrir el fenómeno de resonancia.

En muchos casos la influencia exterior se presenta bajo la forma de una función periódica con respecto al tiempo. En esta situación el problema de la acotación del nivel de ruido se relaciona estrechamente con la existencia de soluciones periódicas.

Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente nos proponemos estudiar la existencia de soluciones periódicas del sistema

$$(5.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Phi_{tt} - \Delta \Phi = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -W_t & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ W_{tt} - W_{xx} + W_t + \Phi_t = f & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ W_x(0, t) = W_x(1, t) = 0 & \text{para } t \in (0, \infty) \end{array} \right.$$

suponiendo que  $f$  es una función periódica en el tiempo, es decir:

$$(5.2) \quad \text{existe } T > 0 \text{ tal que } f(t + T, x) = f(t, x), \forall t \geq 0, \forall x \in (0, 1).$$

La presencia de la función  $f$ , como miembro no homogéneo de la ecuación, representa, tal y como mencionábamos, la existencia de una fuente de ruido exterior (o una fuerza elástica) que actúa sobre la parte flexible,  $\Gamma_0$ , de la frontera.

Del punto de vista matemático, en este tipo de problemas, una de las propiedades fundamentales es el decaimiento uniforme de la energía del sistema. Bajo esta hipótesis, como la norma del semigrupo asociado es estrictamente menor que uno, se pueden aplicar técnicas de punto fijo y deducir, con relativa facilidad, la existencia de soluciones periódicas (vease, por ejemplo Haraux [20]). Sin embargo, tal y como hemos visto en la sección 2.3, el semigrupo asociado al sistema (5.1) no tiene decaimiento exponencial y por o tanto su norma es uno para todo instante  $t$ . Esto hace que, en nuestro caso, la respuesta sea mucho más difícil.

En la primera parte estudiamos un problema unidimensional que resulta de (5.1) mediante separación de variables. La reducción de la dimensión del sistema de dos a uno nos permite demostrar la existencia de soluciones periódicas mediante un argumento de perturbación, obtención de estimaciones a priori y paso al límite.

En la segunda parte, con la ayuda de los resultados y de las estimaciones del caso unidimensional, damos un resultado de existencia de soluciones periódicas en el caso bidimensional, para funciones  $f$  suficientemente regulares.

## 5.1 El problema unidimensional

En esta sección demostramos la existencia de una solución periódica del siguiente sistema:

$$(5.3) \quad \begin{cases} \psi_{tt} - \psi_{yy} + \alpha\psi = 0 & \text{para } y \in (0, 1), t \in (0, \infty) \\ \psi_y(1) = 0 & \text{para } t \in (0, \infty) \\ \psi_y(0) = -w_t & \text{para } t \in (0, \infty) \\ w_{tt} + w_t + \alpha w + \psi_t(0) = f & \text{para } t \in (0, \infty) \end{cases}$$

suponiendo que  $\alpha > 0$  y que  $f$  es una función periódica que sólo depende de  $t$ :

$$(5.4) \quad \text{existe } T > 0 \text{ tal que } f(t+T) = f(t), \forall t \geq 0.$$

El parámetro  $\alpha > 0$  ha sido introducido con el objeto de obtener estimaciones (en función de él) de las soluciones periódicas, lo que va a ser útil en la última parte, al pasar al problema bidimensional (vease el Teorema 5.2).

Con la idea de aplicar los argumentos de punto fijo consideramos un problema con un nuevo parámetro pequeño,  $\varepsilon$ , que al final lo haremos tender a 0. La importancia de este parámetro se verá en la Proposición 5.2 pero podemos decir que introduce una disipación adicional en el sistema que permite probar el decaimiento uniforme del semigrupo asociado y así obtener fácilmente la existencia de soluciones periódicas.

### 5.1.1 El problema homogéneo con perturbación

Para dos parámetros fijos,  $\alpha, \varepsilon > 0$ , consideramos el siguiente sistema:

$$(5.5) \quad \begin{cases} \psi_{tt} - \psi_{yy} + \varepsilon\psi_t + \alpha\psi = 0 & \text{para } y \in (0, 1), t \in (0, \infty) \\ \psi_y(1) = 0 & \text{para } t \in (0, \infty) \\ \psi_y(0) = -w_t & \text{para } t \in (0, \infty) \\ w_{tt} + w_t + \alpha w + \psi_t(0) = 0 & \text{para } t \in (0, \infty) \end{cases}$$

En este apartado estudiamos la existencia y la unicidad de las soluciones de (5.5), así como el comportamiento asintótico del semigrupo generado por el operador diferencial correspondiente.

El término  $\varepsilon\psi_t$  incorporado en la ecuación que verifica  $\psi$  tiene un carácter disipativo. Nuestra intención es reforzar de esta manera la disipación del sistema y conseguir que la energía decaiga exponencialmente a cero.

En primer lugar escribimos el sistema (5.5) en una forma que permita aplicar resultados clásicos para problemas de Cauchy abstractos.

Consideramos el espacio

$$(5.6) \quad \mathcal{Y} = H^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

y en  $\mathcal{Y}$  definimos el producto escalar:

$$(5.7) \quad \begin{aligned} ((f_1, f_2, f_3, f_4), (g_1, g_2, g_3, g_4)) &= \int_0^1 ((f_1)_y (g_1)_y + \alpha f_1 g_1) dy + \\ &+ \int_0^1 f_2 g_2 dy + f_3 g_3 + f_4 g_4 \end{aligned}$$

$(\mathcal{Y}, (\dots))$  es un espacio de Hilbert.

Definimos los siguientes operadores:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\varepsilon^1 : H^1(0, 1) \times H^1(0, 1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow (H^1(0, 1))', \\ \langle \mathcal{B}_\varepsilon^1(v, \xi, w, v), \varphi \rangle &= \int_0^1 ((\psi_y)(\varphi_y) + \alpha \psi \varphi) dy + \varepsilon \int_0^1 \psi \varphi dy - v \varphi(0) \end{aligned}$$

$$\mathcal{C}^1 : H^1(0, 1) \times H^1(0, 1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\mathcal{C}^1(\psi, \xi, w, v) = \alpha w + v + \xi(0).$$

Finalmente consideramos el operador

$$\mathcal{A}_\varepsilon^1 : \mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1) \subset \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1) = \left\{ (v, \xi, w, v) \in \mathcal{Y} : \xi \in H^1(0, 1), \mathcal{B}_\varepsilon^1(\psi, \xi, w, v) \in L^2(0, 1), \frac{\partial \psi}{\partial y}(1) = 0, \frac{\partial \psi}{\partial y}(0) = -v \right\}$$

$$(5.8) \quad \mathcal{A}_\varepsilon^1(\psi, \xi, w, v) = (-\xi, \mathcal{B}_\varepsilon^1(\psi, \xi, w, v), -v, \mathcal{C}^1(\psi, \xi, w, v)).$$

Observese que la condición  $\mathcal{B}_\varepsilon^1(\psi, \xi, w, v) \in L^2(0, 1)$  implica la existencia de una función  $h \in L^2(0, 1)$  tal que:

$$\int_0^1 (\psi_y \varphi_y) - v \varphi(0) = \int_0^1 h \varphi \quad \text{para toda } \varphi \in H^1(0, 1).$$

Si definimos  $\tilde{v} = v - \left(\frac{y^2}{2} - y\right) v$  se obtiene que  $\int_0^1 (\tilde{\psi}_y \varphi_y) = \int_0^1 (h + v) \varphi$  para toda  $\varphi \in H^1(0, 1)$ , lo que nos indica que  $\tilde{\psi}_{yy} \in L^2(0, 1)$  y por lo tanto  $\psi \in H^2(0, 1)$ . Por tanto, las condiciones de contorno que aparecen en la definición de  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1)$  se verifican en el sentido clásico, ya que  $H^2(0, 1) \subset C^1[0, 1]$ .

Finalmente obtenemos que  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1) \subset H^2(0, 1) \times H^1(0, 1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

El sistema (5.5) se escribe:

$$(5.9) \quad \begin{cases} U_t(t) + \mathcal{A}_\varepsilon^1 U(t) = 0, & \forall t \geq 0 \\ U(0) = U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1) \\ U(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1), & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

siendo  $U = (v, \xi, w, v)$ .

**Proposición 5.1** Si  $\alpha > 0$  y si  $(\mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1), \mathcal{A}_\varepsilon^1)$  es el operador definido por (5.8) se tiene:

i) El operador  $\mathcal{A}_\varepsilon^1$  es maximal-monótono y, por lo tanto, genera un semigrupo de contracciones en  $\mathcal{Y}$ , notado  $\{S_\varepsilon(t)\}_{t \geq 0}$ .

ii) Soluciones fuertes: Si  $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1)$  entonces existe una única solución fuerte  $U$  de la ecuación (5.9) con las siguientes propiedades:

$$(5.10) \quad U \in C^1([0, \infty), \mathcal{Y}) \cap C([0, \infty), \mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1))$$

iii) Soluciones débiles: Si  $U_0 \in \mathcal{Y}$  entonces existe una única solución débil  $U$  de la ecuación (5.9) con la propiedad:

$$(5.11) \quad U \in C([0, \infty), \mathcal{Y})$$

La energía asociada

$$(5.12) \quad E_\alpha(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\psi_t^2 + \psi_y^2 + \alpha \psi^2) dy + \frac{1}{2} (w_t^2 + \alpha w^2)$$

verifica la siguiente identidad:

$$(5.13) \quad \frac{dE_\alpha}{dt}(t) = -\varepsilon \int_0^1 \psi_t^2 dy - w_t^2.$$

**Demostración:**

Para demostrar que el operador es monótono evaluamos el producto escalar:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_\varepsilon^1(\psi, \xi, w, v), (\psi, \xi, w, v)) &= ((-\varepsilon, B_\varepsilon^1(\psi, \xi, w, v), -v, C^1(\psi, \xi, w, v)), (\psi, \xi, w, v)) = \\ &= \varepsilon \int_0^1 \xi^2 + v^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Para demostrar que el operador es maximal consideramos un elemento arbitrario  $(f, g, h, i) \in \mathcal{Y}$  y buscamos  $(\psi, \xi, w, v) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1)$  tal que  $(\mathcal{A}_\varepsilon^1 + I)(\psi, \xi, w, v) = (f, g, h, i)$ , lo que se reduce a encontrar  $v \in H^1(0, 1)$  y  $w \in \mathbb{R}$  solución de:

$$(5.14) \quad \begin{cases} \int_0^1 (\psi_y \phi_y + \alpha \psi \phi) dy + (\varepsilon + 1) \int_0^1 \psi \phi dy - w \phi(0) = \\ = (1 + \varepsilon) \int_0^1 f \phi dy + \int_0^1 g \phi dy + h \phi(0), \forall \phi \in H^1(0, 1) \\ (\alpha + 2)w + \psi(0) = i + 2h + f(0). \end{cases}$$

La existencia de  $\psi \in H^1(0, 1)$  y  $w \in \mathbb{R}$ , solución de (5.14), resulta fácilmente mediante un argumento parecido al del Teorema 1.1.

Una vez encontradas  $\psi$  y  $w$  se obtienen  $\xi = \psi - f$  y  $v = w - h$ . El hecho de que  $(\psi, \xi, w, v) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1)$  es una consecuencia de la definición de  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1)$ .

Los Teoremas clásicos de existencia, unicidad y estabilidad para el sistema (5.9) (ver Cazenave y Haraux [12], Cap. 3, pp 37-39) nos proporcionan el resultado final.

■

**Observación 5.1** Como el operador  $\mathcal{A}_\varepsilon^1$  es maximal-monótono en el espacio de Hilbert  $\mathcal{Y}$  resulta que su dominio  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1)$  es denso en  $\mathcal{Y}$ .

**Observación 5.2** Observemos que, si  $\alpha = 0$ , el sistema (5.5) se escribe:

$$(5.15) \quad \begin{cases} \psi_{tt} - \psi_{yy} + \varepsilon\psi_t = 0 & \text{para } y \in (0, 1), t \in (0, \infty) \\ \psi_y(1) = 0 & \text{para } t \in (0, \infty) \\ \psi_y(0) = -w_t & \text{para } t \in (0, \infty) \\ w_{tt} + w_t + \psi_t(0) = 0 & \text{para } t \in (0, \infty). \end{cases}$$

Igual que en el Capítulo 4 tenemos que descomponer el espacio  $\mathcal{Y}$  en suma directa de dos subespacios,  $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_\varepsilon^0 \oplus \mathcal{Y}^1$ , donde:

$$\mathcal{Y}_\varepsilon^0 = \left\{ (\psi, \xi, w, v) \in \mathcal{Y} : \int_0^1 (\xi + \varepsilon\psi) + w = 0, v - \psi(0) = 0 \right\},$$

$$\mathcal{Y}_\varepsilon^1 = \{(c_1, 0, c_2, 0) \in \mathcal{Y} : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

El operador diferencial asociado es maximal monótono en  $\mathcal{Y}_\varepsilon^0$  y la proyección de cualquier solución del sistema (5.15) en este espacio tiene las propiedades deducidas en la Proposición 5.1. La proyección de una solución de (5.15) en  $\mathcal{Y}^1$  permanece constante.

Cada vez que nos refiramos al caso  $\alpha = 0$  se considerará este planteamiento del problema.

El comportamiento asintótico del semigrupo de contracciones generado por el operador  $\mathcal{A}_\varepsilon^1$  es descrito en la siguiente proposición.

**Proposición 5.2** Si  $\varepsilon > 0$  existen dos constantes  $M > 1$  y  $\gamma > 0$ , independientes de los datos iniciales (pero dependientes de  $\varepsilon$  y de  $\alpha$ ), tales que:

$$(5.16) \quad E_\alpha(t) \leq M E_\alpha(0) e^{-\gamma t}, \quad \forall t \geq 0$$

para toda solución de (5.5).

**Demostración:**

Etapla 1: Suponemos en primer lugar que  $U = (\psi, \xi, w, v)$  es una solución fuerte de (5.5).

Para  $\delta > 0$  definimos la función:

$$(5.17) \quad F_\alpha(t) = E_\alpha(t) + \delta \left( \int_0^1 \psi_t \psi \, dy + w_t w + \psi(0) w \right), \quad \forall t \geq 0.$$

Tenemos que

$$|F_\alpha(t) - E_\alpha(t)| \leq \delta \left( \int_0^1 |\psi_t \psi| \, dy + |w_t w| + |\psi(0) w| \right) \leq \delta C_1 E(t)$$

donde  $C_1$  es una constante que no depende de  $\varepsilon$ .

Para  $\delta < \frac{1}{2C_1}$  resulta que:

$$(5.18) \quad \frac{1}{2} E_\alpha(t) < F_\alpha(t) < \frac{3}{2} E_\alpha(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Calculamos ahora

$$\begin{aligned}
 F'_\alpha(t) &= E'_\alpha(t) + \delta \int_0^1 (\psi_t^2 + \psi \psi_{tt}) dy + \delta (w_t^2 + w w_{tt}) + \delta (\psi(0)w_t + \psi_t(0)w) = \\
 &= -\varepsilon \int_0^1 (\psi_t)^2 dt - (w_t)^2 + \delta \left( \int_0^1 (\psi_t)^2 dt - \int_0^1 (\psi_y)^2 dt - \psi_y(0)\psi(0) - \right. \\
 &- \varepsilon \int_0^1 \psi_t \psi dt - \alpha \int_0^1 \psi^2 dt + (w_t)^2 - \alpha w^2 - \psi_t(0)w + w_t \psi(0) + w \psi_t(0) \left. \right) \leq \\
 &\leq - \left( \varepsilon - \delta - \frac{\varepsilon \delta}{2\mu_2} \right) \int_0^1 (\psi_t)^2 dt - \delta \left( 1 - \frac{C_1 \mu_1}{2} - \frac{C_1 \mu_4}{2} \right) \int_0^1 (\psi_y)^2 dt - \\
 &\quad - \delta \left( \alpha - \frac{C_1 \mu_1}{2} - \frac{\varepsilon \mu_2}{2} - \frac{C_1 \mu_4}{2} \right) \int_0^1 \psi^2 dt - \\
 &\quad - \left( 1 - \delta - \frac{\delta}{2\mu_1} - \frac{\delta}{2\mu_3} - \frac{\delta}{2\mu_4} \right) (w_t)^2 - \delta \left( \alpha - \frac{\mu_3}{2} \right) w^2.
 \end{aligned}$$

Elegimos  $\mu_3 = \mu_2 = \delta$  y  $\mu_1 = \mu_4 = 4\delta$  con lo que al final resulta:

$$\begin{aligned}
 F'_\alpha(t) &= - \left( \frac{\varepsilon}{2} - \delta \right) \int_0^1 (\psi_t)^2 dt - \delta(1 - 4C_1\delta) \int_0^1 (\psi_y)^2 dt - \\
 &- \delta \left( \alpha - \delta \left( \frac{\varepsilon}{2} + 4C_1 \right) \right) \int_0^1 \psi^2 dt - \left( \frac{1}{4} - \delta \right) (w_t)^2 - \delta \left( \alpha - \frac{\delta}{2} \right) w^2.
 \end{aligned}$$

Para  $\delta < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4C_1}, 2\alpha, \frac{\alpha}{4C_1 + \frac{\varepsilon}{2}} \right\}$  obtenemos:

$$F'_\alpha(t) \leq -\beta E_\alpha(t),$$

con  $\beta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2} - \delta, \delta(1 - 4C_1\delta), \delta \left( \alpha - \delta \left( \frac{\varepsilon}{2} + 4C_1 \right) \right), \frac{1}{4} - \delta, \delta \left( \alpha - \frac{\delta}{2} \right) \right\}$ .

Teniendo en cuenta (5.18) se obtiene:

$$(5.19) \quad E_\alpha(t) \leq M E_\alpha(0) e^{-\gamma t}, \quad \forall t \geq 0$$

con  $M = 3$  y  $\gamma = \frac{2}{3}\beta$ .

Etapla 2: Ahora suponemos que  $U = (\psi, \xi, w, v)$  es una solución débil de (5.9) que corresponde al dato inicial  $U^0 = (\psi^0, \psi^1, w^0, w^1) \in \mathcal{Y}$ .

Como  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1)$  es denso en  $\mathcal{Y}$ , existe una sucesión  $(U_n^0)_{n \geq 0} = (\psi_n^0, \psi_n^1, w_n^0, w_n^1)_{n \geq 0} \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1)$  tal que

$$U_n^0 = (\psi_n^0, \psi_n^1, w_n^0, w_n^1) \longrightarrow U^0 = (\psi^0, \psi^1, w^0, w^1) \text{ en } \mathcal{Y}.$$

Sea  $U_n = (\psi_n, (\psi_n)_t, w_n, (w_n)_t)$  la solución fuerte de (5.9) correspondiente al dato inicial  $U_n^0$ . Tenemos

$$\begin{aligned}
 E_\alpha(t) &= \frac{1}{2} \int_0^1 (\psi_t^2 + \psi_y^2 + \alpha \psi^2) dy + \frac{1}{2} (w_t^2 + \alpha w^2) \leq \\
 &\leq 2 \int_0^1 (|\psi_t - (\psi_n)_t|^2 + |\psi_y - (\psi_n)_y|^2 + \alpha |\psi - \psi_n|^2) dy + \\
 &\quad + 2(|w_t - (w_n)_t|^2 + \alpha |w - w_n|^2) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2 \int_0^1 ((\psi_n)_t)^2 + ((\psi_n)_y)^2 + \alpha \psi_n^2 dy + 2((w_n)_t)^2 + \alpha w_n^2 \leq \\
& \leq 2 \int_0^1 (|\psi^1 - \psi_n^1|^2 + |\psi_y^0 - (\psi_n^0)_y|^2 + \alpha |\psi^0 - \psi_n^0|^2) dy + \\
& \quad + 2(|w^1 - w_n^1|^2 + \alpha |w^0 - w_n^0|^2) + ME_{\alpha,n}(0)e^{-\gamma t}
\end{aligned}$$

donde  $E_{\alpha,n}$  es la energía correspondiente a la solución  $U_n = (\psi_n, (\psi_n)_t, w_n, (w_n)_t)$ .

Pasando al límite cuando  $n \rightarrow \infty$  obtenemos

$$E_\alpha(t) \leq ME_\alpha(0)e^{-\gamma t}, \quad \forall t \geq 0,$$

con  $\gamma > 0$  como en la etapa anterior.

■

**Observación 5.3** El término disipativo introducido,  $\varepsilon \psi_t$ , hace que, en el caso  $\varepsilon > 0$ , el semigrupo asociado al sistema (5.5) tenga un decaimiento uniforme. Se observa que la constante  $\gamma$ , que nos da la tasa del decaimiento exponencial, depende esencialmente de  $\varepsilon$ . En efecto, si  $\varepsilon$  es suficientemente pequeño, tenemos que  $\gamma < \frac{\varepsilon}{3}$  y por lo tanto  $\gamma$  tiende a cero cuando  $\varepsilon$  lo hace.

Evidentemente, cuando  $\varepsilon = 0$  el decaimiento del semigrupo no es uniforme (ver la sección 2.3).

### 5.1.2 El problema no homogéneo con perturbación

Consideramos ahora el siguiente sistema no homogéneo con  $\alpha, \varepsilon > 0$ , fijas:

$$(5.20) \quad \begin{cases} \psi_{tt} - \psi_{yy} + \varepsilon \psi_t + \alpha \psi = 0 & \text{para } y \in (0, 1), t \in (0, \infty) \\ \psi_y(1) = 0 & \text{para } t \in (0, \infty) \\ \psi_y(0) = -u_t & \text{para } t \in (0, \infty) \\ w_{tt} + w_t + \alpha w + \psi_t(0) = f & \text{para } t \in (0, \infty) \end{cases}$$

donde  $f$  es una función continua que sólo depende de  $t$  y es periódica de periodo  $T$ .

Utilizando las notaciones del apartado anterior el problema (5.20) se escribe en la forma

$$(5.21) \quad \begin{cases} U_t(t) + \mathcal{A}_\varepsilon^1 U(t) = F(t), \quad \forall t \geq 0 \\ U(0) = U_0 \\ U(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1), \quad \forall t \geq 0 \end{cases}$$

siendo  $F(t) = (0, 0, 0, f(t)) \in \mathcal{Y}$  para cada  $t$ .

Tenemos el siguiente resultado clásico de existencia y unicidad para el problema (5.21) (ver Cazenave y Haraux [12], Cap. 4, pp. 51-53):

**Proposición 5.3** Si  $\mathcal{A}_\varepsilon^1$  es el operador definido en (5.8) se tiene:

1. Soluciones débiles: Si  $F \in L^1(0, T; \mathcal{Y})$  entonces la ecuación (5.20) tiene una única solución débil  $U \in C([0, \infty); \mathcal{Y})$  que viene dada por la fórmula de variación de las constantes:

$$(5.22) \quad U(t) = S_\varepsilon(t)U_0 + \int_0^t S_\varepsilon(t-s)F(s)ds, \quad \forall t \in [0, \infty).$$

2. Soluciones fuertes: Si  $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1)$  y  $F \in W^{1,1}(0, T; \mathcal{Y})$  entonces  $U$  dada por la fórmula (5.22) es una solución clásica del problema (5.20) en la clase

$$(5.23) \quad U \in C^1([0, \infty), \mathcal{Y}) \cap C([0, \infty), \mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1)).$$

El resultado fundamental de este apartado es: ■

**Proposición 5.4** Si  $\varepsilon > 0$  y  $f \in L^1(0, T)$  es periódica, entonces el problema (5.21) tiene una única solución periódica débil,  $U_{\varepsilon, \alpha} \in C([0, \infty), \mathcal{Y})$ .

Si  $f \in W^{1,1}(0, T)$  entonces la solución periódica encontrada es una solución fuerte:  $U_{\varepsilon, \alpha} \in C^1([0, \infty), \mathcal{Y}) \cap C([0, \infty), \mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1))$ .

**Demostración:**

Definimos el operador

$$(5.24) \quad \mathcal{J} : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}, \quad \mathcal{J}(\psi^0, \psi^1, w^0, w^1) = (\psi(T), \psi_t(T), w(T), w_t(T))$$

donde  $(\psi, \psi_t, w, w_t)$  es la solución de (5.21) con  $U^0 = (\psi^0, \psi^1, w^0, w^1)$ . Tenemos

$$\begin{aligned} & \| \mathcal{J}^n U^0 - \mathcal{J}^n U^1 \|_{\mathcal{Y}} = \| S_\varepsilon(nT)(U^0 - U^1) \|_{\mathcal{Y}} \leq \\ & \leq \| S_\varepsilon(nT) \|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})} \| U^0 - U^1 \|_{\mathcal{Y}} = k \| U^0 - U^1 \|_{\mathcal{Y}} \end{aligned}$$

con  $\| S_\varepsilon(nT) \|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})} = k < 1$  para  $n$  suficientemente grande puesto que

$$\| S_\varepsilon(t) \| \leq M e^{-\gamma t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Resulta que el operador  $\mathcal{J}^n : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}$  es contractivo y por lo tanto tiene un único punto fijo en  $\mathcal{Y}$ . Sea  $U_{\varepsilon, \alpha}^0$  este punto fijo.

Demostremos ahora que el punto fijo de  $\mathcal{J}^n$  es el único punto fijo de  $\mathcal{J}$ . Se tiene

$$\mathcal{J}^n(U_{\varepsilon, \alpha}^0) = U_{\varepsilon, \alpha}^0 \Rightarrow \mathcal{J}(\mathcal{J}^n(U_{\varepsilon, \alpha}^0)) = \mathcal{J}(U_{\varepsilon, \alpha}^0) \Rightarrow \mathcal{J}^n(\mathcal{J}(U_{\varepsilon, \alpha}^0)) = \mathcal{J}(U_{\varepsilon, \alpha}^0)$$

de donde resulta que  $\mathcal{J}(U_{\varepsilon, \alpha}^0)$  es un punto fijo para  $\mathcal{J}^n$  y como éste es único deducimos que:

$$\mathcal{J}(U_{\varepsilon, \alpha}^0) = U_{\varepsilon, \alpha}^0$$

es decir,  $U_{\varepsilon, \alpha}^0$  es un punto fijo para  $\mathcal{J}$ .

La unicidad del punto fijo de  $\mathcal{J}^n$  implica la unicidad del punto fijo de  $\mathcal{J}$ .

En conclusión, hemos demostrado que el operador  $\mathcal{J}$  tiene un único punto fijo  $U_{\varepsilon, \alpha}^0 \in \mathcal{Y}$ . La solución del problema (5.20) con el dato inicial  $U_{\varepsilon, \alpha}^0$  va a ser la solución periódica de este problema, notada  $U_{\varepsilon, \alpha}$ .

Demostremos ahora que esta solución periódica es una solución fuerte o, lo que es lo mismo, que el dato inicial está en  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1)$ .

El espacio  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1)$  es invariante con respecto a  $S_\varepsilon(t)$  puesto que la solución de la ecuación (5.5) con el dato inicial en  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1)$  pertenece a  $C([0, \infty); \mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1))$ . Basta probar que el semigrupo tiene un decaimiento exponencial no sólo en la norma de  $\mathcal{Y}$  sino también en la norma de  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1)$ .

Ahora, para  $x \in \mathcal{A}_\varepsilon^1$ :

$$\begin{aligned} \|S_\varepsilon(t)x\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1)} &= \|S_\varepsilon(t)x\|_{\mathcal{Y}} + \|\mathcal{A}_\varepsilon^1 S_\varepsilon(t)x\|_{\mathcal{Y}} = \|S_\varepsilon(t)x\|_{\mathcal{Y}} + \|S_\varepsilon(t)\mathcal{A}_\varepsilon^1 x\|_{\mathcal{Y}} \leq \\ &\leq \|S_\varepsilon(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})} (\|x\|_{\mathcal{Y}} + \|\mathcal{A}_\varepsilon^1 x\|_{\mathcal{Y}}) = \|S_\varepsilon(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})} \|x\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1)}. \end{aligned}$$

Resulta que

$$\|S_\varepsilon(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1), \mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1))} \leq \|S_\varepsilon(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})}$$

y de aquí se obtiene que  $\|S_\varepsilon(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1), \mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1))}$  decae exponencialmente.

Aplicando el mismo razonamiento de antes resulta que el punto fijo del operador  $\mathcal{J}$  está en  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1)$ .

Cuando la función periódica  $F$  pertenece a  $L^1(0, T; \mathcal{Y})$  obtenemos una solución periódica débil, mientras que si  $F$  pertenece a  $W^{1,1}(0, T; \mathcal{Y})$  la solución periódica correspondiente es una solución fuerte.

En ambos casos denotamos por  $U_{\varepsilon, \alpha}$  esta solución periódica.

■

**Observación 5.4** Notemos que si  $\alpha > 0$  la existencia de una solución periódica implica que toda solución del sistema es acotada. En efecto, si  $U_{\varepsilon, \alpha}$  es la solución periódica y  $U$  es una solución arbitraria entonces  $U - U_{\varepsilon, \alpha}$  es una solución del problema homogéneo (5.5). Como sabemos que la energía asociada a esta solución  $E(t) = \frac{1}{2}\|U - U_{\varepsilon, \alpha}\|_{\mathcal{Y}}^2$  tiende a cero cuando  $t$  tiende a infinito resulta que, en particular,  $U$  permanece acotada en  $\mathcal{Y}$ .

En el caso  $\alpha = 0$  podemos hacer un análisis directo. Se obtiene que existe una solución (que esta vez puede que no sea única) tal que la proyección de ella sobre  $\mathcal{Y}_\varepsilon^0$  sea periódica. Por ejemplo, si  $f = 1$ , la solución  $\psi = t$ ,  $w = 0$ , no es periódica, pero su proyección en  $\mathcal{Y}_\varepsilon^0$ , que es igual a  $(0, 0, 0, 0)$ , sí es periódica.

### 5.1.3 Estimaciones uniformes para las soluciones periódicas

Consideramos  $\alpha, \varepsilon > 0$  fijas.

Sea  $U_{\varepsilon, \alpha}^0$  el dato inicial (que depende de  $\varepsilon$  y  $\alpha$ ) correspondiente a la solución periódica  $U_{\varepsilon, \alpha}$  del problema (5.20) encontrada en el apartado anterior. Nos proponemos obtener estimaciones para las soluciones periódicas que nos permitan pasar al límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Como en este párrafo las constantes  $\varepsilon$  y  $\alpha$  se consideran fijas omitiremos los índices correspondientes.

**Proposición 5.5** Si  $f \in H^2(0, 1)$ , la solución periódica de la ecuación (5.20),  $U_{\varepsilon, \alpha} = (\psi, \psi_t, w, w_t)$ , verifica las siguientes estimaciones:

$$(5.25) \quad \int_0^T (w_t^2 + \alpha w^2) dt \leq c \int_0^T (1 + \alpha) f^2 dt,$$

$$(5.26) \quad \begin{aligned} &\int_0^T (\psi_t^2 + \psi_y^2 + \alpha \psi^2)(y) dt \leq \\ &\leq c' \int_0^T [(1 + \alpha)(f_t)^2 + (1 + \alpha^2 + \alpha^3)(f)^2] dt \exp\left(\frac{3\sqrt{\alpha}}{2} y\right) \end{aligned}$$

donde  $c$  y  $c'$  son dos constantes que no dependen de  $\varepsilon$  y  $\alpha$ .

**Demostración:**

Etapa 1: Estimaciones para  $w$ .

Como la solución periódica del problema (5.20) es una solución fuerte resulta que las ecuaciones diferenciales se verifican en casi todo punto y tenemos la siguiente relación para la energía (5.12) del sistema:

$$(5.27) \quad \frac{dE}{dt}(t) = -\varepsilon \int_0^1 \psi_t^2 dt - w_t^2 + f w_t.$$

Integrando la relación (5.27) entre 0 y  $T$  y teniendo en cuenta la periodicidad de la solución se obtiene:

$$0 = -\varepsilon \int_0^T \int_0^1 \psi_t^2 dx dt - \int_0^T w_t^2 dt + \int_0^T f w_t dt.$$

De esta relación se deduce que

$$(5.28) \quad \int_0^T (w_t)^2 dt \leq \int_0^T f^2 dt.$$

Notamos ahora  $\psi_t = \xi$  y  $w_t = v$ . Obtenemos que  $\xi$  y  $v$  verifican la ecuación

$$(5.29) \quad \begin{cases} \xi_{tt} - \xi_{yy} + \varepsilon \xi_t + \alpha \psi = 0 & \text{para } y \in (0, 1), t \in (0, \infty) \\ \xi_y(1) = 0 & \text{para } t \in (0, \infty) \\ \xi_y(0) = -z_t & \text{para } t \in (0, \infty) \\ z_{tt} + z_t + \alpha z + \xi_t(0) = f_t & \text{para } t \in (0, \infty) \end{cases}$$

o su versión abstracta

$$(5.30) \quad \begin{cases} V_t + \mathcal{A}_\varepsilon^1 V = G \\ V(0) = V^0 \end{cases}$$

siendo  $V = (\xi, \xi_t, z, z_t)$ ,  $G = (0, 0, 0, f_t)$  y  $V^0 = (\xi^0, \xi^1, z^0, z^1)$ .

Puesto que  $v \in C^2([0, T]; L^2(0, 1))$  y  $w \in C^2([0, T])$  resulta que

$$V^0 = (\psi_t(0), \psi_{tt}(0), w_t(0), w_{tt}(0)) \in \mathcal{Y}$$

y como  $G \in H^1(0, T; \mathcal{Y})$  se obtiene que  $V$  es una solución débil del problema (5.30).

Consideramos una sucesión  $(\xi_n^0, \xi_n^1, z_n^0, z_n^1)_{n \geq 0} \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1)$  tal que

$$(\xi_n^0, \xi_n^1, z_n^0, z_n^1) \rightarrow (\xi^0, \xi^1, z^0, z^1) \text{ en } \mathcal{Y}.$$

La solución  $V_n$  de la ecuación

$$(5.31) \quad \begin{cases} (V_n)_t + \mathcal{A}_\varepsilon^1 V_n = G \\ V_n(0) = V_n^0 = (\xi_n^0, \xi_n^1, z_n^0, z_n^1) \end{cases}$$

es una solución fuerte puesto que  $V^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^1)$  y  $G \in H^1(0, T; \mathcal{Y})$ .

Integrando la función de energía se obtiene que:

$$(5.32) \quad \int_0^T ((z_n)_t)^2 dt \leq \int_0^T (f_t)^2 dt + 2(E_n(0) - E_n(T))$$

donde  $E_n(t)$  es la energía de la solución  $V_n(t)$ .

Como  $\| (V - V_n)(t) \|_y \leq \| V^0 - V_n^0 \|_y \rightarrow 0$  obtenemos que  $z_n(t) \rightarrow z(t)$  para cada  $t$  y además  $E_n(0) - E_n(T) \rightarrow E(0) - E(T) = 0$  ya que  $V$  es periódica.

Teniendo en cuenta la condición de acotación dada por (5.32) se puede aplicar el Teorema de la convergencia dominada y resulta que

$$(5.33) \quad \int_0^T (w_{tt})^2 dt \leq \int_0^T (f_t)^2 dt.$$

Integrando la ecuación diferencial entre 0 y  $T$  en el extremo  $y = 0$  y teniendo en cuenta la periodicidad de las funciones se obtiene

$$(5.34) \quad \alpha \int_0^T w dt = \int_0^T f dt.$$

Aplicando la desigualdad de Poincaré resulta

$$\int_0^T w^2 dt \leq \int_0^T \left( w - \int_0^T w \right)^2 dt + \frac{1}{T^2} \left( \int_0^T w \right)^2 dt \leq C_0 \int_0^T (w_t)^2 dt + \frac{1}{\alpha^2 T} \int_0^T f^2 dt.$$

donde  $C_0$  es la constante de Poincaré correspondiente al intervalo  $(0, T)$  y por lo tanto

$$(5.35) \quad \int_0^T w^2 dt \leq \left( C_0 + \frac{1}{\alpha^2 T} \right) \int_0^T (f_t)^2 dt.$$

Etapa 2: Estimaciones para  $\psi(0)$ .

La ecuación diferencial que se verifica en el extremo  $y = 0$  junto con las estimaciones (5.28), (5.33) y (5.35) proporcionan la siguiente estimación para  $\psi_t(0)$ :

$$(5.36) \quad \int_0^T (\psi_t)^2(0) dt \leq \left( 1 + \frac{1}{T} + \alpha^2 C_0 \right) \int_0^T f^2 dt + \int_0^T (f_t)^2 dt.$$

Integrando las ecuaciones de (5.20) en  $[0, T]$  y teniendo en cuenta la periodicidad de las funciones resulta

$$(5.37) \quad \begin{cases} \left( \int_0^T \psi dt \right)_{yy} + \alpha \int_0^T \psi dt = 0 \\ \left( \int_0^T \psi dt \right)_y(1) = 0 \\ \left( \int_0^T \psi dt \right)_y(0) = 0. \end{cases}$$

La unicidad de las soluciones de esta ecuación diferencial ordinaria implica que

$$(5.38) \quad \int_0^T \psi dt(y) = 0.$$

De esta relación y de la desigualdad de Poincaré se deduce que:

$$(5.39) \quad \int_0^T (v)^2 dt(0) \leq C_0 \int_0^T (\psi_t)^2 dt(0) \leq C_0 \left( 1 + \frac{1}{T} + \alpha^2 C_0 \right) \int_0^T f^2 dt + \int_0^T (f_t)^2 dt.$$

Etapa 3: Estimaciones para  $\psi$ .

Multiplicando la primera ecuación de (5.20) por  $\psi_y$  e integrando en  $[0, T]$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_0^T ((\psi_t)_y^2 + (\psi_y)_y^2 + \alpha(\psi)_y^2) dt (y) &= 3\alpha \int_0^T \psi_y \psi dt + \varepsilon \int_0^T \psi_t \psi_y dt \leq \\ &\leq \frac{3\alpha}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^T (\psi_y)^2 dt + \sqrt{\alpha} \int_0^T (\psi)^2 dt \right) + \frac{\varepsilon}{2} \left( \int_0^T (\psi_t^2 dt + \psi_y^2 dt) \right) \leq \\ &\leq \left( \frac{3\sqrt{\alpha}}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \int_0^T (\psi_t^2 + \psi_y^2 + \alpha\psi^2) dt. \end{aligned}$$

Aplicando el lema de Gronwall se obtiene:

$$(5.40) \quad \int_0^T (\psi_t^2 + \psi_y^2 + \alpha\psi^2) dt (y) \leq \int_0^T (\psi_t^2 + \psi_y^2 + \alpha\psi^2) dt (0) \exp\left(\left(\frac{3\sqrt{\alpha}}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right)y\right).$$

Con ésto se concluye la demostración de la proposición.

■

#### 5.1.4 Paso al límite

Sea  $\alpha > 0$ , una constante fija. El objetivo de este apartado es demostrar que la ecuación (5.20) tiene una solución periódica cuando  $\varepsilon = 0$  que se puede obtener como límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  de las obtenidas anteriormente. Como  $\alpha$  se considera fijo en este párrafo omitiremos el índice correspondiente.

**Teorema 5.1** *Si  $f \in H^1(0, T)$  el problema (5.20) con  $\varepsilon = 0$  tiene una única solución periódica en el espacio de la energía.*

**Demostración:**

i) Suponemos primero que  $f \in H^2(0, T)$ .

Sea  $U_\varepsilon = (\psi_\varepsilon, (\psi_\varepsilon)_t, w_\varepsilon, (w_\varepsilon)_t)$  la solución periódica del problema (5.20) para cada  $\varepsilon > 0$ .

Las estimaciones de la Proposición 5.5 nos indican que  $(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  permanece acotada en  $L^2(0, T; H^1(0, 1)) \cap H^1(0, T; L^2(0, 1))$  y que  $(w_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  permanece acotada en  $H^1(0, T)$  (e incluso en  $H^2(0, T)$ ).

Extrayendo subsucesiones (que denotamos mediante el índice  $\varepsilon$ ) deducimos que existen dos funciones  $\psi \in L^2(0, T; H^1(0, 1)) \cap H^1(0, T; L^2(0, 1))$  y  $w \in H^1(0, T)$  tales que

$$\psi_\varepsilon \rightharpoonup \psi, \text{ en } L^2(0, T; H^1(0, 1)) \cap H^1(0, T; L^2(0, 1)) \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0$$

$$w_\varepsilon \rightharpoonup w, \text{ en } H^1(0, T) \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Definimos la función  $(\psi, \psi_t, w, w_t)$  para todo  $t > 0$  extendiéndola por periodicidad y demostramos que es una solución periódica de (5.20), con  $\varepsilon = 0$ , de energía finita.

La solución periódica  $U_\varepsilon(t)$  satisface:

$$U_\varepsilon(t) = S_\varepsilon(t)U_\varepsilon^0 + \int_0^t S_\varepsilon(t-s)F(s) ds.$$

De aquí se obtiene que:

$$\|U_\epsilon(t)\|_{\mathcal{Y}} \leq C \|U_\epsilon(\tau)\|_{\mathcal{Y}} + \|F\|_{L^1(0,T)}, \quad \forall \tau \leq t, \quad \forall t > 0.$$

Si consideramos  $t > T$  e integramos la relación en  $\tau$ , entre 0 y  $T$ , obtenemos:

$$T \|U_\epsilon(t)\|_{\mathcal{Y}}^2 = \int_0^T \|U_\epsilon(t)\|_{\mathcal{Y}}^2 d\tau \leq C \int_0^T \|U_\epsilon(\tau)\|_{\mathcal{Y}} d\tau + T \|F\|_{L^1(0,T)}, \quad \forall t > T.$$

Teniendo en cuenta que las soluciones  $U_\epsilon$  están acotadas uniformemente en  $L^2(0, T; \mathcal{Y})$ , se deduce de la última relación que también lo están en  $\mathcal{C}([0, T]; \mathcal{Y})$ .

De aquí resulta que podemos pasar al límite, (por ejemplo en la fórmula de caracterización de Ball. (1.25)), y obtenemos que  $(\psi, \psi_t, w, w_t)$  es una solución periódica y de energía finita del problema.

ii) Supongamos ahora que  $f \in H^1(0, T)$ .

Existe una sucesión  $(f_n)_{n \geq 0} \subset H^2(0, T)$  tal que  $f_n \rightarrow f$  en  $H^1(0, T)$ .

Si  $U_n$  son las soluciones periódicas correspondientes a los términos no homogéneos  $f_n$  se obtiene, para cada  $n$ , las estimaciones (5.25) y (5.26). Como  $(f_n)$  converge en  $H^1(0, T)$  estas cotas son uniformes en  $n$ .

La sucesión  $U_n$  de soluciones periódicas está acotada uniformemente en el espacio  $L^2(0, T; \mathcal{Y})$ . A partir de un argumento de paso al límite se deduce la existencia de soluciones periódicas en el espacio de la energía.

■

## 5.2 El problema bidimensional

Consideramos ahora el problema (5.1) con  $f \in H^1((0, T); L^2(0, 1))$ , una función periódica con respecto al tiempo, de periodo  $T$ . Utilizando las notaciones de la Sección 5.1.2 el problema se escribe en la forma

$$(5.41) \quad \begin{cases} U(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), & \forall t \geq 0 \\ U_t(t) + \mathcal{A}U(t) = F(t), & \forall t > 0 \\ U(0) = U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \end{cases}$$

siendo  $F(t) = (0, 0, 0, f(t)) \in \mathcal{X}$  para cada  $t$ .

El problema (5.41) tiene una solución única cuyas propiedades dependen de la regularidad del término no homogéneo  $F$  de la misma manera que en la Proposición 5.3.

Con el objeto de enunciar el resultado de existencia de soluciones periódicas conviene desarrollar la función  $f$  en serie de Fourier:

$$(5.42) \quad f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \cos(n\pi x).$$

**Teorema 5.2** Si la función  $f \in H^1((0, T); L^2(0, 1))$  tiene las propiedades:

$$(5.43) \quad \sum_{n=0}^{\infty} n \int_0^T ((f_n)_t)^2 dt \exp\left(\frac{3\pi}{4}n\right) < \infty$$

$$(5.44) \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^5 \int_0^T (f_n)^2 dt \exp\left(\frac{3\pi}{4}n\right) < \infty$$

entonces la ecuación (5.1) tiene una solución cuya proyección sobre el espacio  $X^0$  es periódica.

**Demostración:**

Caso 1:  $f_0 = 0$ .

Para cada  $n > 0$  definimos  $\Phi_n(t, x, y) = \psi_n(t, y)\cos(n\pi x)$  y  $W_n(t, x) = w_n(t)\cos(n\pi x)$ , donde  $(\psi_n, w_n)$  es la solución periódica de la ecuación:

$$(5.45) \quad \begin{cases} \psi_{tt} - \psi_{yy} + n^2\pi^2\psi = 0 & \text{para } y \in (0, 1), t \in (0, \infty) \\ \psi_y(1) = 0 & \text{para } t \in (0, \infty) \\ \psi_y(0) = -w_t & \text{para } t \in (0, \infty) \\ w_{tt} + w_t + n^2\pi^2w + \psi_t(0) = f_n & \text{para } t \in (0, \infty). \end{cases}$$

Como hemos visto en la sección anterior esta ecuación admite una única solución periódica en el espacio de la energía que cumple las estimaciones (5.25) y (5.26).

A continuación nos proponemos demostrar que bajo las condiciones (5.43) y (5.44) la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t, y)\cos(n\pi x)$  converge en  $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$  y la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} w_n(t)\cos(n\pi x)$  converge en  $H^1(0, T; H^1(\Gamma_0))$ .

Tenemos que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t, y)\cos(n\pi x)$  converge en  $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$  si y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\psi_n(t, y)\cos(n\pi x)\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|\psi_n(t, y)\|_{L^2(0, T; H^1(0, 1))}^2 \|\cos(n\pi x)\|_{H^1(0, 1)}^2 < \infty.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\psi_n(t, y)\cos(n\pi x)\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega))}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|\psi_n(t, y)\|_{H^1(0, T; L^2(0, 1))}^2 \|\cos(n\pi x)\|_{L^2(0, 1)}^2 < \infty.$$

Teniendo en cuenta la estimación (5.26), las últimas dos relaciones se cumplen si:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \left( (1 + n^2\pi^2)(f_t)^2 + (1 + n^2\pi^2 + n^6\pi^6)(f)^2 \right) dt \frac{2}{3n\pi} \left( \exp\left(\frac{3n\pi}{2}\right) - 1 \right) < \infty.$$

Por lo tanto la serie  $\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(t, y)\cos(n\pi x)$  es convergente en el espacio  $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$  si se cumplen las condiciones (5.43) y (5.44).

Por otro lado, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} w_n(t)\cos(n\pi x)$  converge en  $H^1(0, T; H^1(\Gamma_0))$  si y sólo si se cumple:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|w_n(t)\cos(n\pi x)\|_{H^1(0, T; H^1(\Gamma_0))}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|w_n(t)\|_{H^1(0, T)}^2 \|\cos(n\pi x)\|_{H^1(0, 1)}^2 < \infty.$$

Resulta que, si se cumplen (5.43) y (5.44), la estimación (5.25) nos indica que la serie  $W(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t)\cos(n\pi x)$  es convergente en el espacio  $H^1(0, T; H^1(\Gamma_0))$ .

Obtenemos así una solución  $(\Phi, \Phi_t, W, W_t) \in L^2(0, T; \mathcal{X})$  del problema (5.1) que es periódica en  $\mathcal{X}^0$ . De aquí resulta inmediatamente que existe una solución periódica de energía finita.

Caso 2:  $f_0 \neq 0$ .

En este caso es suficiente estudiar el problema:

$$(5.46) \quad \begin{cases} \psi_{tt} - \psi_{yy} = 0 & \text{para } y \in (0, 1), t \in (0, \infty) \\ \psi_y(1) = 0 & \text{para } t \in (0, \infty) \\ \psi_y(0) = -w_t & \text{para } t \in (0, \infty) \\ w_{tt} + w_t + \psi_t(0) = f_0 & \text{para } t \in (0, \infty). \end{cases}$$

Este sistema tiene una solución del tipo  $\Phi = f_0 t + c_1$ ,  $W = c_2$ , donde  $c_1$  y  $c_2$  son dos constantes.

Si tuviera una solución periódica  $(\bar{\Phi}, \bar{W})$  el Teorema 2.1 implicaría que  $\|(\Phi - \bar{\Phi})_t\| \rightarrow 0$  de donde resultaría que  $\bar{\Phi}_t = f_0 = \text{cte}$ , lo que es imposible si  $f_0 \neq 0$ .

Por lo tanto, el problema (5.46) no tiene ninguna solución periódica.

Sin embargo, la proyección de la solución  $\Phi = f_0 t + c_1$ ,  $W = c_2$  encontrada anteriormente sobre el espacio  $\mathcal{X}^0$  es  $(0, 0, 0, 0)$  y por lo tanto es periódica.

Teniendo en cuenta que todas las soluciones  $(\Phi_n, W_n)$ , con  $n > 0$ , son periódicas, y además están en  $\mathcal{X}^0$ , se obtiene el resultado deseado.

■

**Observación 5.5** *La solución periódica no es única. Sin embargo, si  $U$  y  $V$  son dos soluciones periódicas entonces la diferencia  $U - V$  es una solución del problema homogéneo y por lo tanto satisface  $\|U - V\|_{\mathcal{X}^0} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Como  $U - V$  es periódica en el tiempo obtenemos que  $U = V$  en  $\mathcal{X}^0$ . Por consiguiente, si  $U$  es una solución periódica, todas las demás son de la forma  $U + (c_1, 0, c_2, 0)$ .*

**Observación 5.6** *Es lógico obtener la existencia de soluciones periódicas solamente para funciones  $f$  suficientemente regulares. Recordemos que, en el problema conservativo, se puede producir el fenómeno de resonancia, y por lo tanto, no siempre existen soluciones periódicas.*

*En nuestro caso, al ser muy débil la disipación, el comportamiento del sistema en algunos casos será parecido al caso conservativo. Esto se podría traducir en la necesidad de una mayor regularidad para  $f$ . La existencia de soluciones periódicas en el caso que  $f$  no cumple las condiciones del Teorema 5.2 queda abierta.*

Las condiciones (5.43) y (5.44) se cumplen si  $f(t)$  es una función que tiene un número finito de modos de Fourier.

Las dos condiciones (5.43) y (5.44) se cumplen también para una clase de funciones más amplia que definimos seguidamente en términos de los espacios de Gevrey:

**Definición 5.1** *Una función  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^\infty(\mathbb{R})$  se dice que pertenece a la clase de Gevrey de exponente  $\delta$  (se escribe  $p \in \gamma^\delta$ ) si, para todo compacto  $K \subset \mathbb{R}$ , y cualquier  $\theta > 0$ , existe una constante positiva,  $C_\theta > 0$ , tal que*

$$|\partial_x^j p(x)| \leq C_\theta \theta^j (j^j)^\delta, \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \dots$$

cuando  $x \in K$ .

**Definición 5.2** Una función  $q : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que pertenece a la clase de Gevrey de exponente  $\delta$  en la segunda variable (se escribe  $q(\cdot, x) \in \gamma^\delta$ ) si  $q$  y sus derivadas parciales en  $x$ ,  $\partial_x^j q(t, x)$ , son continuas en  $[0, \infty) \times \mathbb{R}$  y para todo compacto  $K \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}$ , y cualquier  $\theta > 0$ , existe una constante positiva,  $C_\theta > 0$ , tal que

$$|\partial_x^j q(t, x)| \leq C_\theta \theta^j (j^j)^\delta, \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \dots$$

cuando  $(t, x) \in K$ .

Para más detalles sobre estas clases de funciones vease Hörmander [23] p. 146 y Littman y Marcus [33].

**Proposición 5.6** Si  $f \in H^1(0, T; L^2(0, 1))$ ,  $\text{sop } f(t, x) \subset (0, 1)$  para todo  $t$  y además  $f(\cdot, x)$  y  $f_t(\cdot, x) \in \gamma^1$  entonces se cumplen las condiciones (5.43) y (5.44).

**Demostración:**

La función  $f$  se puede desarrollar en serie de Fourier:

$$f(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \cos(n\pi x).$$

¶

De esta relación, integrando  $k$  veces por partes y teniendo en cuenta que  $\text{sop } f(t, x) \subset (0, 1)$  implica que los términos sobre la frontera desaparecen, obtenemos:

$$\begin{aligned} |f_n(t)| &= 2 \left| \int_0^1 f(t, x) \cos n\pi x \, dx \right| = \frac{2}{(n\pi)^k} \left| \int_0^1 \partial_x^k f(t, x) \cos \left( n\pi x + \frac{n\pi}{2} \right) dx \right| \leq \\ &\leq \frac{2}{(k\pi)^k} \|\partial_x^k f\|_\infty \leq \frac{2}{(n\pi)^k} C_\theta \theta^k k^k, \quad \forall \theta > 0, \end{aligned}$$

donde por  $\|\cdot\|_\infty$  denotamos la norma de una función en  $C[0, 1]$ .

Para un  $n$  fijo, eligiendo  $k = n$ , se obtiene:

$$|f_n(t)| \leq \frac{2}{(n\pi)^n} C_\theta \theta^n n^n = 2C_\theta \frac{\theta^n}{\pi^n}, \quad \forall \theta > 0$$

y como ésto se cumple para todo  $\theta > 0$  basta con elegir  $\theta = \exp(-\frac{3\pi}{4})$  para ver que en este caso se satisface la condición (5.44).

Partiendo de

$$f_t(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n)_t(t) \cos(n\pi x),$$

y por un argumento similar se obtiene que, en este caso,  $f$  también satisface la condición (5.43)

■

## Capítulo 6

# Algunas variantes del modelo original

En este capítulo nos proponemos analizar unos modelos ligeramente distintos del original que nos permiten entender mejor las principales características de este tipo de sistemas. Sobre todo nos interesa observar como se ven afectadas las propiedades del sistema inicial (1.1) cuando cambiamos el término disipativo o la ecuación de la cuerda vibrante. Como se podrá constatar no habrá ninguna modificación importante en el comportamiento del sistema, lo que nos indica, una vez más, que la parte flexible  $\Gamma_0$  de la frontera tiene una contribución muy limitada en la dinámica del sistema.

En la primera sección cambiamos el término disipativo  $W_t$  por uno no acotado  $-W_{xx}$ . Del punto de vista físico esto supone considerar materiales viscoelásticos del tipo Kelvin-Voigt en los que la disipación se debe a las propiedades del material utilizado para la construcción de la cuerda vibrante (vease Barnes et al [9]).

En primer lugar se presenta la formulación matemática del nuevo problema y se observa que la energía decae a cero. La nueva disipación es más fuerte en altas frecuencias pero la tasa del decaimiento de la energía tampoco es uniforme. A continuación se indica que existen soluciones periódicas para funciones suficientemente regulares. Por consiguiente, las propiedades fundamentales del sistema inicial no han sido afectadas por el cambio.

En la siguiente sección estudiaremos un sistema similar al inicial pero considerando en los extremos de la cuerda condiciones Dirichlet en vez de Neumann. En primer lugar analizamos los puntos de equilibrio del sistema y demostramos que toda solución tiende a un equilibrio. A continuación analizamos la tasa del decaimiento de las soluciones. El cambio introducido hace que la separación de variables no sea posible y por lo tanto no podemos demostrar el decaimiento no exponencial de la energía mediante la construcción de soluciones explícitas. Sin embargo, como veremos, en este caso tampoco hay un decaimiento uniforme. Para la demostración de esta propiedad usaremos un argumento de reducción al absurdo y la información que tenemos sobre las autofunciones del operador diferencial asociado al sistema inicial.

En la última sección estudiaremos el caso en el que el dominio es un círculo y no un cuadrado. Este cambio nos permite considerar que la disipación se ejerce en toda la frontera del dominio. Sin embargo, incluso en este caso, obtenemos que el decaimiento de la energía es no uniforme. Esto nos indica que esta propiedad está relacionada con la estructura híbrida del sistema y no con la localización del mecanismo disipativo.

## 6.1 Término de disipación no acotado

En este párrafo nos proponemos estudiar el mismo sistema pero con un término de disipación no acotado:

$$(6.1) \quad \begin{cases} \Phi_{tt} - \Delta \Phi = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -W_t & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ W_{tt} - W_{xx} - W_{xxt} + \Phi_t = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ W_x(0, t) = W_x(1, t) = 0 & \text{para } t \in (0, \infty) \\ \Phi(0) = \Phi^0, \quad \Phi_t(0) = \Phi^1 & \text{en } \Omega \\ W(0) = W^0, \quad W_t(0) = W^1 & \text{sobre } \Gamma_0 \end{cases}$$

Observese que en la ecuación de  $W$  el término disipativo  $W_t$  ha sido sustituido por  $-W_{xxt}$ . La energía del sistema se define de la misma manera:

$$(6.2) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla \Phi|^2 + (\Phi_t)^2) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} ((W_x)^2 + (W_t)^2).$$

Multiplicando en (6.1) la primera ecuación por  $\Phi_t$ , la cuarta ecuación por  $W_t$  e integrando por partes obtenemos, al menos formalmente, que:

$$dE(t)/dt = - \int_{\Gamma_0} (W_{xt})^2 \leq 0,$$

es decir, el sistema tiene un carácter disipativo, pero el término disipativo es no acotado en el espacio de energía finita:

$$(6.3) \quad \mathcal{X} = H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^1(\Gamma_0) \times L^2(\Gamma_0).$$

Definimos ahora el siguiente espacio:

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_W) = \{ (\Phi, \Psi, W, V) \in H^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0) \times H^1(\Gamma_0) : (W + V) \in H^2(\Gamma_0),$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -V \text{ sobre } \Gamma_0, \quad (W + V)_x(0) = (W + V)_x(1) = 0 \end{aligned} \right\}$$

y el operador  $\mathcal{A}_W$  definido en  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_W)$  de la siguiente manera:

$$\mathcal{A}_W(\Phi, \Psi, W, V) = (-\Psi, -\Delta \Phi, -V, -(W + V)_{xx} + \Psi).$$

**Observación 6.1** Las condiciones de contorno que aparecen en la definición del dominio  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_W)$  se verifican en el sentido de las trazas. Observemos que, aunque no tenemos garantizada la regularidad suficiente para dar sentido a las trazas de  $W_x$  y  $V_x$ , podemos hacer ésto para la combinación  $W + V$ . La misma observación es válida para el término  $(W + V)_{xx}$  que aparece en la definición de  $\mathcal{A}_W$ .

Consideramos el problema Cauchy:

$$(6.4) \quad \begin{cases} U_t(t) + \mathcal{A}_W U(t) = 0, & \forall t > 0 \\ U(0) = U_0 \\ U(t) = (\Phi, \Phi_t, W, W_t)(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_W). \end{cases}$$

Tenemos en primer lugar un resultado de existencia, unicidad y estabilidad de soluciones:

**Teorema 6.1** *i) Soluciones fuertes: Si  $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_W)$  entonces existe una única solución  $(\Phi, \Phi_t, W, W_t) \in \mathcal{C}([0, \infty), \mathcal{D}(\mathcal{A}_W)) \cap \mathcal{C}^1([0, \infty), \mathcal{X})$  de (6.4).*

*Además, para cualquier solución fuerte, la energía asociada (6.2) satisface:*

$$(6.5) \quad \frac{dE}{dt}(t) = - \int_{\Gamma_0} (W_{xt})^2.$$

*ii) Soluciones débiles: Si  $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1) \in \mathcal{X}$  entonces existe una única solución débil de (6.4) con la propiedad:  $(\Phi, \Phi_t, W, W_t) \in \mathcal{C}([0, \infty), \mathcal{X})$ .*

*Dos soluciones débiles cualesquiera  $(\Phi, W)$  y  $(\bar{\Phi}, \bar{W})$  satisfacen la siguiente propiedad de estabilidad:*

$$(6.6) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} (|\nabla(\Phi - \bar{\Phi})|^2 + |(\Phi - \bar{\Phi})_t|^2) + \int_{\Gamma_0} (|(W - \bar{W})_x|^2 + |(W - \bar{W})_t|^2) \leq \\ & \leq \int_{\Omega} (|\nabla(\Phi^0 - \bar{\Phi}^0)|^2 + |\Phi^1 - \bar{\Phi}^1|^2) + \int_{\Gamma_0} (|(W^0 - \bar{W}^0)_x|^2 + |W^1 - \bar{W}^1|^2). \end{aligned}$$

**Demostración:**

Consiste en demostrar que el operador  $\mathcal{A}_W + \mathcal{I}$  es maximal monótono en  $\mathcal{X}$  y aplicar el Teorema de Hille-Yosida (vease Cazenave y Haraux [12], Teorema 3.1.1, p.37.)

Si  $U = (\Phi, \Psi, W, V) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_W)$  entonces  $\langle (\mathcal{A}_W + \mathcal{I})U, U \rangle \geq \int_{\Gamma_0} (V_x)^2 \geq 0$ , lo que significa que  $\mathcal{A}_W + \mathcal{I}$  es monótono.

Por otro lado, para todo  $F = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathcal{X}$  podemos encontrar un único elemento  $U = (\Phi, \Psi, W, V) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_W)$  que sea solución de  $(\mathcal{A}_W + \mathcal{I})U = F$ .

Esto es equivalente a resolver el siguiente sistema:

$$(6.7) \quad \begin{cases} -\Psi + \Phi = f_1 \\ -\Delta\Phi + \Psi = f_2, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1 \text{ y } \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = V \text{ sobre } \Gamma_0 \\ -V + W = f_3 \\ -(W + V)_{xx} + \Psi + V = f_4 \text{ y } (W + V)_x(0) = (W + V)_x(1) = 0. \end{cases}$$

Para ésto consideramos la formulación variacional correspondientes a (6.7), que consiste en encontrar  $(\Phi, W)$  en  $H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0)$  tal que, para todo  $(\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0)$ :

$$(6.8) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla\Phi \nabla\varphi + \int_{\Omega} \Phi\varphi - \int_{\Gamma_0} W\varphi + 2 \int_{\Gamma_0} W_x u_x + \int_{\Gamma_0} \Phi u + \int_{\Gamma_0} W u = \\ & \int_{\Omega} (f_1 + f_2)\varphi - \int_{\Gamma_0} f_3\varphi + \int_{\Gamma_0} (f_3)_x u_x + \int_{\Gamma_0} (f_1 + f_3 + f_4)u. \end{aligned}$$

La parte izquierda de (6.8) define una forma bilineal continua y coercitiva en  $(H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0))^2$  mientras que la parte derecha define una forma lineal y continua en  $H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0)$ .

Aplicando el Lema de Lax-Milgram's resulta que (6.8) tiene una solución única  $(\Phi, W)$  en el espacio  $H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0)$ . Finalmente, teniendo en cuenta los resultados de regularidad para el Laplaciano, se obtiene que  $\mathcal{A}_W + \mathcal{I}$  es maximal.

Definimos ahora los espacios:  $\tilde{\mathcal{X}} = \tilde{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \tilde{H}^1(\Gamma_0) \times L^2(\Gamma_0)$  donde  $\tilde{H}^1$  es el espacio cociente  $\tilde{H}^1 = H^1/P_0$ ,  $P_0$  es el conjunto de las funciones constantes y  $\tilde{\mathcal{D}}(\mathcal{A}_W)$  es el subespacio de  $\tilde{\mathcal{X}}$  definido como  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_W)$ :

$$\tilde{\mathcal{D}}(\mathcal{A}_W) = \left\{ (\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1) \in \tilde{H}^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times \tilde{H}^1(\Gamma_0) \times H^1(\Gamma_0) : (W^0 + W^1) \in H^2(\Gamma_0), \right. \\ \left. \frac{\partial \Phi^0}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1, \frac{\partial \Phi^0}{\partial y} = -W^1 \text{ sobre } \Gamma_0, (W^0 + W^1)_x(0) = (W^0 + W^1)_x(1) = 0 \right\}.$$

Observando que si  $(\Phi, \Phi_t, W, W_t)$  es la solución de (6.4) con dato inicial  $(\Phi_0, \Phi_1, W_0, W_1)$  entonces  $(\Phi + c_1, \Phi_t, W + c_2, W_t)$  es la solución del problema con dato inicial  $(\Phi_0 + c_1, \Phi_1, W_0 + c_2, W_1)$  obtenemos un resultado de existencia, unicidad y estabilidad de soluciones en  $\tilde{\mathcal{X}}$ .

Además, teniendo en cuenta la coercividad de la energía en este espacio tenemos que, para toda solución fuerte:

$$(6.9) \quad \begin{aligned} & \| (\Phi, \Phi_t, W, W_t)(t) \|_{\tilde{\mathcal{X}}} \leq \| (\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1) \|_{\tilde{\mathcal{X}}}, \quad \forall t \geq 0, \\ & \| \mathcal{A}_W(\Phi, \Phi_t, W, W_t)(t) \|_{\tilde{\mathcal{X}}} \leq \| \mathcal{A}_W(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1) \|_{\tilde{\mathcal{X}}}, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

lo que significa que las trayectorias están acotadas en  $\tilde{\mathcal{D}}(\mathcal{A}_W)$ .

Queremos ver además cuando las condiciones de contorno  $W_x(0) = W_x(1) = 0$  tienen sentido y para que datos iniciales la solución es relativamente compacta en  $\tilde{\mathcal{X}}$ . Para obtener una respuesta a estas preguntas tenemos que imponer condiciones adicionales de regularidad sobre  $H^0$ .

**Proposición 6.1** *Si el dato inicial  $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1)$  pertenece al espacio:*

$$\tilde{\mathcal{D}} = \{ (\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1) \in \tilde{\mathcal{D}}(\mathcal{A}_W) : W^0 \in \tilde{H}^2(\Gamma_0) \text{ y } W_x^0(0) = W_x^0(1) = 0 \}$$

*la solución correspondiente  $(\Phi, \Phi_t, W, W_t)$  de (6.4) pertenece a  $C_b([0, \infty), \tilde{\mathcal{D}})$ , donde  $C_b([0, \infty), \tilde{\mathcal{D}}) = C([0, \infty), \tilde{\mathcal{D}}) \cap L^\infty(0, \infty; \tilde{\mathcal{D}})$ . Además,  $\tilde{\mathcal{D}}$  es denso y compacto en  $\tilde{\mathcal{X}}$ .*

**Demostración:**

Tenemos de (6.9) que  $W_t(t) + W(t) = V(t) \in C_b([0, \infty)), H^2(\Gamma_0)$ . Por tanto  $W(t) = e^{-t}W_0 + \int_0^t e^{s-t}V(s)ds$  y si  $W^0 \in H^2(\Gamma_0)$ , se deduce que  $W \in C_b([0, \infty), H^2(\Gamma_0))$ . El mismo argumento muestra que las condiciones de contorno  $W_x(0) = W_x(1) = 0$  se cumplen para todo  $t \geq 0$  si  $W_x^0(0) = W_x^0(1) = 0$ .

**Observación 6.2** *Si los datos iniciales de (6.4) pertenecen a  $\tilde{\mathcal{D}}$ , este problema es equivalente a (6.1).*

Igual que en el primer capítulo, si definimos el espacio:

$$\mathcal{X}^0 = \left\{ (\Phi, \Psi, W, V) \in \mathcal{X} : \int_{\Omega} \Psi - \int_{\Gamma_0} W = 0, \int_{\Gamma_0} (V + \Phi) = 0 \right\}$$

obtenemos que la energía es coercitiva en este subespacio de  $\mathcal{X}$  que, además, es invariante para el operador  $\mathcal{A}_W$ . Se puede obtener una proposición similar a la Proposición 6.1 usando el espacio  $\mathcal{X}^0$  en vez de  $\tilde{\mathcal{X}}$ .

Los siguientes dos resultados se obtienen de la misma manera que sus correspondientes del capítulo 3.

**Proposición 6.2** Para cada dato inicial en  $\mathcal{X}$  la solución débil correspondiente de (6.4) tiende a cero en  $\tilde{\mathcal{X}}$ , cuando el tiempo  $t$  tiende a infinito, es decir,  $\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0$ .

**Proposición 6.3** La tasa de decaimiento de la energía no es uniforme en  $\tilde{\mathcal{X}}$ , es decir, no existe una constante  $C > 0$  y  $\omega > 0$  tal que  $E(t) \leq CE(0)e^{-\omega t}$  para cualquier solución débil.

**Observación 6.3** De la misma manera que en el capítulo 3 se deduce que:

$$(\Phi, W) \longrightarrow \left( \int_{\Omega} \Phi^1 + \int_{\Gamma_0} W^1 + \int_{\Gamma_0} \Phi^0(0), - \int_{\Omega} \Phi^1 + \int_{\Gamma_0} W^0 \right) \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Por último, se puede obtener en este caso un resultado de existencia de soluciones periódicas del sistema:

$$(6.10) \quad \begin{cases} \Phi_{tt} - \Delta \Phi = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -W_t & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ W_{tt} - W_{xx} - W_{xxt} + \Phi_t = f & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ W_x(0, t) = W_x(1, t) = 0 & \text{para } t \in (0, \infty). \end{cases}$$

**Proposición 6.4** Supongamos que  $f \in H^1(0, T; L^2(0, 1))$  es periódica con respecto a  $t$ , de periodo  $T$ . Si  $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \cos(n\pi x)$  y:

$$(6.11) \quad \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \| (f_n)_t \|_{L^2(0, T)}^2 \exp\left(\frac{3\pi}{4}n\right) < \infty, \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 \| f_n \|_{L^2(0, T)}^2 \exp\left(\frac{3\pi}{4}n\right) < \infty \end{cases}$$

entonces existe una solución débil de (6.10) periódica en  $\tilde{\mathcal{X}}$  de periodo  $T$ .

**Demostración:** Como se obtiene de una manera muy similar a la del teorema correspondiente del Capítulo 5 la omitiremos.

■

**Observación 6.4** De estos resultados se deduce que, a pesar de modificar el término disipativo de la ecuación de  $W$ , las propiedades fundamentales del sistema original permanecen intactas.

## 6.2 Sobre el decaimiento de la energía con otras condiciones de contorno para $W$

En este párrafo nos proponemos estudiar el sistema disipativo siguiente:

$$(6.12) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Phi_{tt} - \Delta \Phi = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -W_t & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ W_{tt} - W_{xx} + W_t + \Phi_t = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ W(0, t) = W(1, t) = 0 & \text{para } t \in (0, \infty) \\ \Phi(0) = \Phi^0, \quad \Phi_t(0) = \Phi^1 & \text{en } \Omega \\ W(0) = W^0, \quad W_t(0) = W^1 & \text{sobre } \Gamma_0 \end{array} \right.$$

A continuación estudiamos el comportamiento asintótico de las soluciones del sistema (6.12).

Recordamos que los puntos de equilibrio del sistema analizado en los capítulos anteriores eran del tipo  $(c_1, 0, c_2, 0)$  y formaban un espacio de dimensión dos. Cada solución tendía a un punto de equilibrio determinado de manera única por los datos iniciales.

El sistema (6.12) tiene un conjunto de puntos de equilibrio con una estructura más compleja. Incluso la función  $\Phi(t)$  puede no estar acotada en  $L^2(\Omega)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , tal y como veremos más adelante.

Por esta razón, escribimos este sistema en una forma distinta, considerando como variables  $\vec{v} = \nabla \Phi$  y  $p = -\Phi_t$  en vez de  $\Phi$  y  $\Phi_t$ .

Recordando la formulación del problema presentada en la Introducción obtenemos que el sistema (6.12) se puede escribir como:

$$(6.13) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \vec{v}_t + \nabla p = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ p_t + \operatorname{div} \vec{v} = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ \vec{v} \cdot n = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, \infty) \\ \vec{v} \cdot n = W_t & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ W_{tt} - W_{xx} + W_t - p = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, \infty) \\ W(0, t) = W(1, t) = 0 & \text{para } t \in (0, \infty) \\ \vec{v}(0) = \vec{v}^0, \quad p(0) = p^0 & \text{en } \Omega \\ W(0) = W^0, \quad W_t(0) = W^1 & \text{sobre } \Gamma_0. \end{array} \right.$$

$\vec{v}$  es la velocidad y  $p$  la presión del fluido interior.

La energía asociada a este sistema se define por:

$$(6.14) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\vec{v}|^2 + |p|^2) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} (|W_x|^2 + |W_t|^2)$$

y observamos que:

$$(6.15) \quad \frac{dE}{dt}(t) = - \int_{\Gamma_0} |W_t|^2.$$

Es decir, este sistema también es disipativo.

Definimos el espacio  $\mathcal{L} = \{\bar{v} \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) : \text{rot } \bar{v} = 0\}$ .

**Observación 6.5** La condición  $\bar{v} \in \mathcal{L}$  significa que existe  $\Phi \in H^1(\Omega)$  tal que  $\nabla \Phi = \bar{v}$ .

Consideramos el espacio de energía finita asociado al sistema anterior:

$$\mathcal{X}_0 = \mathcal{L} \times L^2(\Omega) \times H_0^1(\Gamma_0) \times L^2(\Gamma_0)$$

con el producto escalar natural.

Definimos el operador  $(\mathcal{D}(\mathcal{A}_D), \mathcal{A}_D)$  por :

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_D) = \{U = (\bar{v}, p, W, V) \in \mathcal{X}_0 : \mathcal{A}_D(U) \in \mathcal{X}_0, \bar{v} \cdot n = 0 \text{ sobre } \Gamma_1, \bar{v} \cdot n = V \text{ sobre } \Gamma_0\},$$

$$(6.16) \quad \mathcal{A}_D(\bar{v}, p, W, V) = (\nabla p, \text{div } \bar{v}, -V, -W_{xx} + V - p)$$

**Observación 6.6** Observemos que el operador  $\mathcal{A}$ , estudiado en los capítulos anteriores, se puede definir de la misma manera que  $\mathcal{A}_D$ , considerando como variables  $\nabla \Phi$  y  $\Phi_t$  y por lo tanto, desde este punto de vista no hay diferencias entre los operadores  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}_D$ . Sin embargo, una diferencia clara existe en la definición del dominio: la componente  $W$  pertenece ahora a  $H_0^1(\Gamma_0)$  y no, como antes, a  $H^1(\Gamma_0)$ .

Con estas definiciones y considerando  $U = (\bar{v}, p, W, W_t)$ , el sistema (6.13) se escribe:

$$(6.17) \quad \begin{cases} U_t(t) + \mathcal{A}_D U(t) = 0, & \forall t \in (0, \infty) \\ U(0) = (\Phi_0, \Phi_1, W_0, W_1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_D) \\ U(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_D), & \forall t \in [0, \infty) \end{cases}$$

Las propiedades del operador  $\mathcal{A}_D$  definido en (6.16) se describen en la siguiente proposición:

**Proposición 6.5** El operador  $\mathcal{A}_D$  definido en (6.16) es maximal monótono en  $\mathcal{X}_0$  y, por lo tanto, genera un semigrupo de contracciones  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ .

Las soluciones del problema (6.13) están bien definidas en el espacio de energía y tienen todas las propiedades de regularidad del Teorema 1.1.

Observemos que la proposición anterior nos asegura que  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_D)$  es denso en  $\mathcal{X}_0$ . Además, por su definición,  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_D)$  está incluido con compacidad en  $\mathcal{X}_0$ .

Los resultados anteriores y un razonamiento parecido al del Teorema 2.1 nos aseguran que:

**Teorema 6.2** La solución del problema (6.13) tiende, cuando el tiempo  $t$  tiende a infinito, al estado de equilibrio  $(\bar{0}, b, b a(x), 0) \in \mathcal{X}_0$ , donde  $b = \frac{12c}{13}$ ,  $c = \int_{\Omega} p^0 + \int_{\Gamma_0} W^0$  y  $a(x) = \frac{1}{2}(x - x^2)$ .

**Demostración:**

Los resultados anteriores nos aseguran que las trayectorias correspondientes a datos iniciales en  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_D)$  son relativamente compactas en  $\mathcal{X}_0$ .

Los puntos de equilibrio del sistema vienen dados por la relación

$$T(t)(\bar{v}^0, p^0, W^0, W^1) = (\bar{v}^0, p^0, W^0, W^1).$$

La fórmula (6.15) nos indica que, para una solución estacionaria  $(\bar{v}^0, p^0, W^0, W^1)$ , tenemos que  $W^1 = 0$ . Además, esta solución satisface el sistema:

$$(6.18) \quad \begin{cases} \nabla p^0 = 0 & \text{en } \Omega \\ \operatorname{div} \bar{v}^0 = 0 & \text{en } \Omega \\ \bar{v}^0 \cdot n = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \\ -W_{xx}^0 - p^0 = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \\ W^0(1) = W^0(0) = 0. \end{cases}$$

De aquí se obtiene que los puntos de equilibrio son del tipo  $(\bar{0}, b, b a(x), 0)$ , donde  $b$  es una constante arbitraria y  $a(x)$  es la solución de la ecuación diferencial:

$$\begin{cases} -a_{xx} + 1 = 0, & x \in (0, 1) \\ a(0) = a(1) = 0. \end{cases}$$

También tenemos que  $E(t)$  es un funcional de Lyapunov estricto (sólo los puntos de equilibrio son soluciones de energía constante). La demostración de esta afirmación es muy semejante a la utilizada en el Teorema 2.1 y se apoya fundamentalmente en el Teorema de Hölmgren.

Por consiguiente, se puede aplicar el Principio de Invarianza de LaSalle y se obtiene que las soluciones del problema (6.13) tienden al conjunto de los puntos de equilibrio cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Para demostrar que una solución converge a un punto de equilibrio único es suficiente integrar la segunda ecuación de (6.13) y observar que la cantidad  $\int_{\Omega} p + \int_{\Gamma_0} W$  se conserva a lo largo de una trayectoria.

Por consiguiente, la solución  $(\bar{v}, p, W, W_t)(t)$  tiende, cuando el tiempo tiende a infinito, al estado  $(\bar{0}, b, b a(x), 0)$  que tiene la propiedad:  $c = \int_{\Omega} p^0 + \int_{\Gamma_0} W^0 = \int_{\Omega} b + \int_{\Gamma_0} b a(x) = \frac{13}{12}b$ .

Con esto se concluye la demostración del teorema. ■

Observamos que el espacio  $\mathcal{X}_0$  se puede descomponer en suma directa  $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}_0^0 \oplus \mathcal{X}_0^1$ , donde:

$$\mathcal{X}_0^0 = \left\{ (\bar{v}^0, p^0, W^0, V^0) \in \mathcal{X}_0 : \int_{\Omega} p^0 + \int_{\Gamma_0} W^0 = 0 \right\},$$

$$\mathcal{X}_0^1 = \left\{ (\bar{0}, b, b a(x), 0) \in \mathcal{X}_0 \right\}.$$

La proyección de la solución  $U(t)$  del sistema (6.13) sobre  $\mathcal{X}_0^1$  permanece constante mientras que la proyección sobre  $\mathcal{X}_0^0$  tiende a cero.

**Observación 6.7** *Observemos que existen soluciones de la ecuación (6.12) con la propiedad de que  $\|\Phi\|_{L^2(\Omega)}$  no permanece acotada cuando  $t \rightarrow \infty$ . En efecto,  $(t, 1, a(x), 0)$  es una solución del sistema (6.12) con esta propiedad.*

A continuación nos interesa si el decaimiento del semigrupo de contracciones generado por  $\mathcal{A}_D$  en  $\mathcal{X}_0^0$  es uniforme o no.

La posibilidad de separar las variables nos permitía en el Capítulo 2 demostrar la existencia de una sucesión de autovalores del operador  $\mathcal{A}$ , que se aproximan al eje imaginario y así deducíamos que la energía de las soluciones del problema (1.1) no tiene un decaimiento uniforme.

En el caso del sistema (6.13) no es posible usar un argumento similar ya que las nuevas condiciones de contorno para  $W$  no permiten la separación de las variables y, por lo tanto, no se pueden construir soluciones explícitas con decaimiento exponencial arbitrario. Sin embargo, demostraremos que este sistema tampoco tiene un decaimiento uniforme. El resultado se apoya en el hecho de que existen autofunciones y autovalores del operador diferencial,  $\mathcal{A}_D$ , que se parecen mucho a las autofunciones y los autovalores del operador  $\mathcal{A}$ , correspondiente al sistema inicial (1.1). Esto ocurre debido a la contribución relativamente pequeña que  $W$  tiene en la norma de una autofunción.

**Teorema 6.3** *Si bien la proyección sobre  $X_0^0$  de toda solución de (6.13) tiende a cero, cuando  $t \rightarrow \infty$ , este decaimiento no es uniforme.*

**Demostración:**

Supongamos que, por el contrario, el semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  generado por el operador diferencial  $\mathcal{A}_D$  asociado al sistema disipativo (6.13) tiene un decaimiento uniforme: existen dos constantes positivas  $M$  y  $\omega$  tal que  $\|T(t)\|_{X_0^0} \leq M e^{-\omega t}$ .

Denotamos por  $\mathcal{R}(\mathcal{A}_D : \lambda)$  la resolvente de  $\mathcal{A}_D$  en  $\lambda$ :

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}_D : \lambda) = (\mathcal{A}_D - \lambda \mathcal{I})^{-1}.$$

Utilizando la expresión de la resolvente en la forma integral (ver Pazy [40], T 3.1. p. 8)  $\mathcal{R}(\mathcal{A}_D : \lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda t} S(t) dt$ , obtenemos:

$$\|\mathcal{R}(\mathcal{A}_D : \lambda)\|_{X_0^0} \leq \int_0^\infty e^{\operatorname{Re} \lambda t} \|S(t)\|_{X_0^0} dt \leq \int_0^\infty M e^{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)t} dt.$$

Considerando elementos  $\lambda$  sobre el eje imaginario (con  $\operatorname{Re} \lambda = 0$ ) obtenemos que las resolventes correspondientes están uniformemente acotadas:

$$(6.19) \quad \|\mathcal{R}(\mathcal{A}_D : \lambda)\|_{X_0^0} \leq \frac{M}{\omega} \quad \text{para todo } \lambda \text{ con } \operatorname{Re} \lambda = 0.$$

A continuación construimos una sucesión de valores  $\nu$  con  $\operatorname{Re} \nu = 0$  y de funciones de norma uno en  $X_0^0$ ,  $\xi_\nu \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_D)$  de tal forma que:

$$\|\mathcal{R}(\mathcal{A}_D : \nu) \xi_\nu\|_{X_0^0} \rightarrow \infty$$

lo que está en contradicción con (6.19) y nos indica que la suposición inicial es falsa.

Introducimos ahora el operador conservativo  $\mathcal{A}_C$  asociado al sistema (1.1) del Capítulo 1 (considerando condiciones de Neumann para  $W$ ), pero usando las variables  $\bar{v}$  y  $p$ , como lo hicimos antes.

Si notamos por  $\mathcal{P}_4$  el operador de proyección sobre la cuarta componente tenemos que  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_C + \mathcal{P}_4$ .

El Teorema 3.1 nos asegura que el operador  $\mathcal{A}_C$  tiene, para cada valor entero positivo  $k$  (que se obtiene separando la variable  $x$ ), una sucesión de autovalores  $\{\nu_{k,m}\}_{m > 0}$  puramente imaginarios y de módulo mayor que  $k\pi$ , que se acercan a los valores  $\sqrt{k^2 + m^2} \pi i$  cuando  $m$  tiende al infinito. Estos autovalores vienen dados por  $\nu_{k,m} = \sqrt{z_{k,m}^2 + k^2 \pi^2} i$  donde  $z_{k,m}$  son las raíces reales de la ecuación algebraica:

$$\operatorname{tg} z = \frac{z^2 + k^2 \pi^2}{z^3}.$$

A continuación denotamos por  $\nu$  un autovalor de este tipo.

También conocemos las autofunciones correspondientes a un autovalor  $\nu$ :

$$(6.20) \quad \psi_\nu^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\nu} \nabla \left( \cosh \sqrt{\nu^2 + k^2 \pi^2} (y-1) \cos k\pi x \right) \\ \cosh \sqrt{\nu^2 + k^2 \pi^2} (y-1) \cos k\pi x \\ -\frac{\sqrt{\nu^2 + k^2 \pi^2}}{\nu^2} \sinh \sqrt{\nu^2 + k^2 \pi^2} \cos k\pi x \\ \frac{\sqrt{\nu^2 + k^2 \pi^2}}{\nu} \sinh \sqrt{\nu^2 + k^2 \pi^2} \cos k\pi x \end{pmatrix}^t$$

Se tiene que  $\mathcal{A}_C \psi_\nu^1 = \nu \psi_\nu^1$ .

A partir de ahora utilizamos la notación  $c_\nu = \frac{\sqrt{\nu^2 + k^2 \pi^2}}{\nu} \sinh \sqrt{\nu^2 + k^2 \pi^2}$ .

Del Capítulo 3, en el que analizamos el espectro de  $\mathcal{A}_C$ , se tiene (vease la Proposición 3.1):

**Lema 6.1** *Si  $\nu$  describe los autovalores de  $\mathcal{A}_C$  de módulo mayor que  $k\pi$ , para un  $k$  fijo, entonces tenemos las siguientes dos propiedades:*

i) *La sucesión  $\{\psi_\nu^1\}$  no tiende a cero fuertemente en  $\mathcal{X}$  cuando  $|\nu|$  tiende a infinito.*

ii) *Si notamos por  $\mathcal{P}_4$  el operador de proyección sobre la cuarta componente, entonces la sucesión  $\{\mathcal{P}_4 \psi_\nu\}$  tiende a cero fuertemente en  $L^2(\Gamma_0)$ . Además,  $c_\nu = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\nu|}\right)$ .*

Definimos ahora, para cada autovalor  $\nu$  con las propiedades del lema anterior, la función  $u_\nu : [0, 1] \rightarrow [-1, 1]$  por:

$$u_\nu = \begin{cases} (-|\nu|x + 1)e^{\frac{|\nu|x}{|\nu|x-1}}, & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{|\nu|}\right) \\ (-1)^k (|\nu|x - |\nu| + 1)e^{\frac{|\nu|(1-x)}{|\nu|(1-x)-1}}, & \text{si } x \in \left(1 - \frac{1}{|\nu|}, 1\right] \\ 0 & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

También consideramos la solución  $\varphi_\nu$  de la ecuación elíptica:

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_\nu + \varphi_\nu = 0 & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \\ \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial n} = -c_\nu u_\nu & \text{sobre } \Gamma_0. \end{cases}$$

Construimos ahora las funciones  $\psi_\nu^2 = (\nabla \varphi_\nu, 0, \frac{c_\nu}{\nu} u_\nu, -c_\nu u_\nu)$  y  $\psi_\nu = \psi_\nu^1 - \psi_\nu^2$ .

\* Observemos que  $\psi_\nu \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_D)$ . En efecto, teniendo en cuenta las definiciones de las funciones  $u_\nu$  y  $\varphi_\nu$  y notando por  $\psi_{\nu,i}$  la componente  $i$ -ésima de  $\psi_\nu$ , se verifica inmediatamente que:

- $\varphi_\nu \in H^2(\Omega)$  con lo cual  $\psi_{\nu,1} \in (H^1(\Omega))^2$
- $c_{\nu,1} \cdot n = 0$  sobre  $\Gamma_1$ ,  $\psi_{\nu,1} \cdot n = \psi_{\nu,4}$  sobre  $\Gamma_0$
- $u_\nu \in C^\infty(0, 1)$ ,  $u_\nu(0) = 1$ ,  $u_\nu(1) = (-1)^k$  con lo cual las últimas dos componentes de  $\psi_\nu$  pertenecen a  $H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$ .

Definimos, para cada valor  $\nu$  con las propiedades del lema, la función:

$$\xi_\nu = \frac{(\mathcal{A}_D - \nu \mathcal{I})\psi_\nu}{\|(\mathcal{A}_D - \nu \mathcal{I})\psi_\nu\|_{\mathcal{X}_0^0}}.$$

Se obtiene que

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}_D : \nu) \xi_\nu = \frac{\psi_\nu}{\|(\mathcal{A}_D - \nu \mathcal{I})\psi_\nu\|_{\mathcal{X}_0^0}},$$

y nos proponemos demostrar que  $\|\mathcal{R}(\mathcal{A}_D : \nu) \xi_\nu\|_{\mathcal{X}_0^0} \rightarrow \infty$  cuando  $\nu \rightarrow \infty$ .

Para ésto evaluamos la norma de las cantidades  $\psi_\nu$  y  $(\mathcal{A}_D - \nu \mathcal{I})\psi_\nu$ .

Como tenemos que

$$(\mathcal{A}_D - \nu \mathcal{I})\psi_\nu = (\mathcal{A}_C + \mathcal{P}_4 - \nu \mathcal{I})\psi_\nu^1 + (\mathcal{A}_D - \nu \mathcal{I})\psi_\nu^2 = \mathcal{P}_4\psi_\nu^1 + (\mathcal{A}_D - \nu \mathcal{I})\psi_\nu^2$$

y la parte ii) del Lema 6.1 nos asegura que  $\mathcal{P}_4\psi_\nu^1$  tiende a cero cuando  $|\nu|$  tiende al infinito, nos queda evaluar la norma  $\|(\mathcal{A}_D - \nu \mathcal{I})\psi_\nu^2\|_{\mathcal{X}_0^0}$ :

$$\|(\mathcal{A}_D - \nu \mathcal{I})\psi_\nu^2\|_{\mathcal{X}_0^0}^2 = \|-\nu \nabla \varphi_\nu\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + \|-\Delta \varphi_\nu\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| -\frac{c_\nu}{\nu} (u_\nu)_{xx} - c_\nu u_\nu \right\|_{L^2(0,1)}^2.$$

Tenemos sucesivamente:

$$\bullet \|u_\nu\|_{L^2(0,1)}^2 = \int_0^1 |u_\nu|^2 = 2 \int_0^{\frac{1}{|\nu|}} (-|\nu|x + 1)^2 e^{\frac{2|\nu|x}{|\nu|x-1}} \leq 2 \int_0^{\frac{1}{|\nu|}} (-|\nu|x + 1)^2 = \frac{2}{3|\nu|}$$

$$\begin{aligned} \bullet \|(u_\nu)_{xx}\|_{L^2(0,1)}^2 &= \int_0^1 |(u_\nu)_{xx}|^2 = 2|\nu|^4 \int_0^{\frac{1}{|\nu|}} \frac{1}{(|\nu|x-1)^6} e^{\frac{2|\nu|x}{|\nu|x-1}} = \\ &= 2|\nu|^3 \int_0^1 \frac{1}{(s-1)^6} e^{\frac{2s}{s-1}} ds \leq 2c|\nu|^3, \end{aligned}$$

$$\text{donde } c = \int_0^1 \frac{1}{(s-1)^6} e^{\frac{2s}{s-1}} ds, \text{ valor que no depende de } \nu,$$

$$\bullet \|-\Delta \varphi_\nu\|_{L^2(\Omega)} = \|\varphi_\nu\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\varphi_\nu\|_{H^1(\Omega)}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \|\varphi_\nu\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \left| \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial n} \bar{\varphi}_\nu \right| = \left| - \int_{\Gamma_0} c_\nu u_\nu \bar{\varphi}_\nu \right| \leq \frac{1}{2} \left( |c_\nu|^2 \int_{\Gamma_0} |u_\nu|^2 + \int_{\Gamma_0} |\bar{\varphi}_\nu|^2 \right) \leq \\ &\leq \frac{|c_\nu|^2}{2} \int_{\Gamma_0} |u_\nu|^2 + \frac{1}{2} \|\varphi_\nu\|_{H^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\|\varphi_\nu\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq |c_\nu|^2 \int_{\Gamma_0} |u_\nu|^2 \leq \frac{2|c_\nu|^2}{3|\nu|}.$$

Las últimas estimaciones nos indican que  $\|(\mathcal{A}_D - \nu \mathcal{I})\psi_\nu^2\|_{\mathcal{X}_0^0}$  tiende a cero cuando  $|\nu|$  tiende a infinito, ya que

$$\|(\mathcal{A}_D - \nu \mathcal{I})\psi_\nu^2\|_{\mathcal{X}_0^0}^2 \leq \frac{2|c_\nu|^2}{3} + \frac{2|c_\nu|^2}{3|\nu|} + 2c|c_\nu|^2|\nu| + \frac{2|c_\nu|^2}{3|\nu|} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\nu|}\right).$$

Con ésto hemos demostrado que  $\lim_{|\nu| \rightarrow \infty} \|(\mathcal{A}_D - \nu \mathcal{I})\psi_\nu\|_{\mathcal{X}_0^0} = 0$ .

Por otro lado, la parte i) del Lema 6.1 nos asegura que la sucesión  $\{\psi_\nu^1\}$  no tiende a cero fuertemente en  $\mathcal{X}$  cuando  $|\nu|$  tiende a infinito, pero las estimaciones anteriores nos indican que  $\{\psi_\nu^2\}$  si lo hace. Resulta que la sucesión  $\{\psi_\nu\}$  no tiende a cero fuertemente en  $\mathcal{X}_0^0$ .

Los últimos dos resultados indican que  $\|\mathcal{R}(\mathcal{A}_D : \nu) \xi_\nu\|_{\mathcal{X}_0^0} \rightarrow \infty$  cuando  $\nu \rightarrow \infty$ , lo que nos proporciona la contradicción deseada.

Obtenemos que el semigrupo asociado no tiene un decaimiento uniforme.

■

**Observación 6.8** *Se podría intentar aplicar el mismo tipo de razonamiento usando como sucesión  $(\psi_\nu)_\nu$  la sucesión a la que hemos visto que ésta se acerca:*

$$\psi_{k,m} = \begin{pmatrix} \nabla \frac{(-1)^{m+1} i}{\sqrt{k^2 + m^2 \pi}} \cos m\pi y \cos k\pi x \\ \frac{(-1)^m \cos m\pi y \cos k\pi x}{0} \\ 0 \end{pmatrix}^t.$$

Sin embargo, tal y como se observa por un cálculo directo lo, no obtenemos el resultado deseado ya que

$$\|(\mathcal{A}_D - \nu \mathcal{I})\psi_{k,m}\|_{\mathcal{X}_0^0} = \|\cos m\pi y\|_{L^2(0,1)}$$

y este término no tiende a cero.

**Observación 6.9** *El resultado obtenido en el teorema anterior no es sorprendente ya que la disipación está concentrada en una parte relativamente pequeña de la frontera y que no cumple las condiciones geométricas deducidas en [6]. Sin embargo, la demostración del teorema nos indica algo más que subrayamos a continuación. La sucesión  $(\xi_\nu)_\nu$  encontrada tiene la propiedad de que le corresponde una sucesión de soluciones del problema (6.12) con un decaimiento no uniforme. La energía de estas soluciones no está concentrada a lo largo de un rayo de la óptica geométrica que no intersecta la región disipativa (como en [6]) sino que está uniformemente distribuida en  $\Omega$ . Esto nos indica, una vez más, que en este tipo de sistemas la verdadera causa del decaimiento no uniforme es la estructura híbrida del problema y no la localización de la disipación.*

También observamos que podemos encontrar, para cada  $k \in \mathbb{N}$  una sucesión diferente  $(\xi_\nu)_\nu$

**Observación 6.10** *El resultado anterior nos muestra que la propiedad de no tener un decaimiento uniforme no cambia cuando, en el sistema, las condiciones de contorno para  $W$  se modifican. Esto es lógico puesto que  $W$ , a altas frecuencias, es despreciable frente a  $\Phi$ .*

### 6.3 Sobre el soporte del término disipativo

Para demostrar que en problemas de este tipo no hay un decaimiento exponencial de la energía ni siquiera cuando la disipación se ejerce en toda la frontera estudiamos un caso distinto en el que la simetría permite cálculos explícitos.

Sea  $\Omega$  la bola unidad de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$  y supongamos que la disipación se ejerce en toda la frontera

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Planteamos el problema de las vibraciones acústicas en este nuevo dominio donde la frontera entera se considera flexible. La derivada  $W_{xx}$  se reemplaza por la derivada tangencial  $W_{\theta\theta}$ . Escribiendo el sistema en coordenadas polares obtenemos:

$$(6.21) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Phi_{tt} - \Phi_{rr} - \frac{1}{r}\Phi_r - \frac{1}{r^2}\Phi_{\theta\theta} = 0 & \text{para } 0 < r < 1, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad 0 < t \\ \Phi_r = 0 & \text{para } r = 0, \quad 0 < t \\ \Phi_r = W_t & \text{para } r = 1, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad 0 < t \\ W_{tt} - W_{\theta\theta} + W_t + \Phi_t = 0 & \text{para } r = 1, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad 0 < t \\ \Phi(0) = \Phi^0, \quad \Phi_t(0) = \Phi^1 & \text{para } 0 < r < 1, \quad 0 < \theta < 2\pi \\ W(0) = W^0, \quad W_t(0) = W^1 & \text{para } r = 1, \quad 0 < \theta < 2\pi \end{array} \right.$$

Un sistema similar se puede encontrar en Banks et al. [5] donde se estudia un problema de reducción de ruido en un cilindro infinito.

El sistema (6.21) tiene una única solución con todas las propiedades enunciadas en el teorema 1.1. Además, si consideramos datos iniciales radiales, la solución va a ser también radial  $\Phi = \Phi(t, r)$ .  $W = W(t)$  y va a verificar el sistema:

$$(6.22) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Phi_{tt} - \Phi_{rr} - \frac{1}{r}\Phi_r = 0 & \text{para } 0 < r < 1, \quad 0 < t \\ \Phi_r = 0 & \text{para } r = 0, \quad 0 < t \\ \Phi_r = W_t & \text{para } r = 1, \quad 0 < t \\ W_{tt} + W_t + \Phi_t = 0 & \text{para } r = 1, \quad 0 < t \\ \Phi(0) = \Phi^0, \quad \Phi_t(0) = \Phi^1 & \text{para } 0 < r < 1 \\ W(0) = W^0, \quad W_t(0) = W^1 & \text{para } r = 1. \end{array} \right.$$

Buscamos soluciones para la ecuación (6.22) del tipo:

$$(6.23) \quad (\Phi, W) = e^{-\lambda t}(\Psi, V), \quad \text{con } \Psi = \Psi(r) \text{ y } V \in \mathbb{R}.$$

Nuestro objetivo es demostrar la existencia de una sucesión  $(\lambda_n)_n$  de autovalores tal que  $(\mathcal{R} \in \lambda_n)_n$  converja a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ , lo que implica un decaimiento no uniforme de la energía en el tiempo.

Las soluciones de la forma (6.23) verifican:

$$(6.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi'' + \frac{1}{r}\Psi' - \lambda^2\Psi = 0 \quad 0 < r < 1 \\ \Psi'(0) = 0 \\ \Psi'(1) + \lambda V = 0 \\ \lambda^2 V - \lambda V - \lambda\Psi(1) = 0 \end{array} \right.$$

donde por ' denotamos la derivada con respecto a  $r$ .

Eliminando  $V$  se obtiene:

$$(6.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi'' + \frac{1}{r}\Psi' - \lambda^2\Psi = 0 \quad 0 < r < 1 \\ \Psi'(0) = 0 \\ (\lambda - 1)\Psi'(1) + \lambda\Psi(1) = 0. \end{array} \right.$$

Con el cambio de variable  $z = \lambda r i$  y  $\Psi(r) = \xi(\lambda r i) = \xi(z)$  resulta que la función de variable compleja  $\xi$  verifica la ecuación de Bessel de orden cero:

$$(6.26) \quad \begin{cases} \xi'' + \frac{1}{z}\xi' + \lambda^2\xi = 0 \\ \xi'(0) = 0 \\ (\lambda - 1)i\xi'(\lambda i) + \xi(\lambda i) = 0. \end{cases}$$

Notamos  $\mu = \lambda i$ .

Las primeras dos ecuaciones de (6.26) nos indican que la solución es la función de Bessel de orden cero del primer tipo, notada  $J_0$ .

Como  $J'_0 = -J_1$ , con  $J_1$  la función de Bessel de orden uno del primer tipo, la última ecuación de (6.26) se escribe:

$$(6.27) \quad (\mu - i)J_1(\mu) - J_0(\mu) = 0$$

y nos da los autovalores  $\lambda = -i\mu$  del problema (6.22).

Con la idea de aplicar el Teorema de Rouché demostramos algunas desigualdades previas.

Sea  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| < 1, \operatorname{Re} z > 1\}$ .

**Lema 6.2** Si  $J_0$  y  $J_1$  son las funciones de Bessel de orden 0 y 1 del primer tipo existe una constante  $C > 0$  tal que:

$$(6.28) \quad |J_0(z) + iJ_1(z)| < \frac{C}{|\sqrt{z}|} + \left| \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \right| e^{\operatorname{Im} z} \quad \forall z \in D$$

$$(6.29) \quad |J_1(z)| > -\frac{C}{|z\sqrt{z}|} + \left| \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \right| \left| \operatorname{sen} \left( z - \frac{\pi}{4} \right) \right| \quad \forall z \in D$$

**Demostración:**

En Watson [47], p. 199, se demuestra el siguiente desarrollo asintótico para  $J_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ :

$$(6.30) \quad J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left( \cos \left( z + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(\nu, 2m)}{(2z)^{2m}} - \operatorname{sen} \left( z + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(\nu, 2m+1)}{(2z)^{2m+1}} \right)$$

$$\text{con } (\nu, m) = \frac{\Gamma(\nu + m + \frac{1}{2})}{m! \Gamma(\nu - m + \frac{1}{2})} = \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2) \dots (4\nu^2 - (2m-1)^2)}{2^{2m} m!}.$$

Resulta que:

$$(6.31) \quad J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left( \cos \left( z + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O\left(\frac{1}{z}\right) \right) \text{ para } z \in D, \quad |z| > K$$

con  $K$  suficientemente grande y por tanto:

$$(6.32) \quad \begin{aligned} J_0(z) + iJ_1(z) - \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left( \cos \left( z - \frac{\pi}{4} \right) - i \operatorname{sen} \left( z - \frac{\pi}{4} \right) \right) &= \frac{1}{\sqrt{z}} O\left(\frac{1}{z}\right) \\ J_1(z) + \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \operatorname{sen} \left( z - \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{1}{\sqrt{z}} O\left(\frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

Obtenemos que existen  $C_1 > 0$  y  $C_2 > 0$  tales que:

$$(6.33) \quad \begin{aligned} |z\sqrt{z}(J_0(z) + iJ_1(z) - \sqrt{\frac{2}{\pi z}}(\cos(z - \frac{\pi}{4}) - i\operatorname{sen}(z - \frac{\pi}{4})))| &\leq C_1 \text{ para } z \in D \\ |z\sqrt{z}(J_1(z) + \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\operatorname{sen}(z - \frac{\pi}{4}))| &\leq C_2 \text{ para } z \in D \end{aligned}$$

Con  $C > \max\{C_1, C_2\}$  se obtiene la conclusión del lema. ■

En Watson [47], p. 506, se demuestra que la función  $J_1(z)$  tiene una sucesión de ceros  $(a_n)_{n \geq 0}$  reales, positivos y simples con el siguiente desarrollo asintótico:

$$(6.34) \quad a_n \sim n\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2\pi(4n+1)} + \frac{9}{96\pi^3(4n+1)^3} - \dots$$

Obtenemos que

$$(6.35) \quad a_n - \frac{\pi}{4} = n\pi + \alpha_n \text{ con } \alpha_n = -\frac{3}{2\pi(4n+1)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Consideramos, para cada  $n \geq 0$ , el círculo:

$$\Gamma_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z = a_n + r_n e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi)\}$$

con

$$(6.36) \quad \frac{2c}{n\pi} - \alpha_n < r_n < \alpha_n + \sqrt{-\alpha_n}$$

y  $c$  una constante que va ser precisada más tarde.

**Lema 6.3** Para  $r_n$  dada por (6.36) existe  $N_c > 0$  tal que:

$$(6.37) \quad \frac{c}{|z|} \leq \left| \operatorname{sen}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \right|, \quad \forall z \in \Gamma_n \text{ con } n > N_c.$$

**Demostración:**

Tenemos:

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{sen}\left(z + \frac{\pi}{4}\right) \right|^2 &= \left| \operatorname{sen}\left(a_n - \frac{\pi}{4} + r_n \cos\theta\right) \right|^2 + \left| \operatorname{senh}(r_n \operatorname{sen}\theta) \right|^2 \geq \\ &\geq \left| \operatorname{sen}\left(a_n - \frac{\pi}{4} + r_n \cos\theta\right) \right|^2 + \left| r_n \operatorname{sen}\theta \right|^2 \end{aligned}$$

La función

$$f: [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(\theta) = \left| \operatorname{sen}\left(a_n - \frac{\pi}{4} + r_n \cos\theta\right) \right|^2 + \left| r_n \operatorname{sen}\theta \right|^2$$

alcanza su mínimo en  $\theta = 0$  si  $\alpha_n + r_n < \sqrt{-\alpha_n}$ .

Resulta que:

$$\left| \operatorname{sen}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \right| \geq \left| \operatorname{sen}(\alpha_n + r_n) \right| = \operatorname{sen}(\alpha_n + r_n)$$

puesto que  $-\alpha_n < r_n < \pi - \alpha_n$ .

Aplicando el Teorema de Taylor se deduce que existe  $\phi \in [0, 2\pi)$  tal que

$$|\operatorname{sen}(z - \frac{\pi}{4})| \geq \frac{\operatorname{sen}(\alpha_n + r_n) = (\alpha_n + r_n - \frac{(\alpha_n + r_n)^2}{2}) \operatorname{sen}\phi}{2}$$

Para  $z \in \Gamma_n$  y  $r_n$  cumpliendo (6.36) tenemos que existe  $N_c > 0$  tal que para todo  $n > N_c$  y  $z \in \Gamma_n$ :

$$\begin{aligned} \frac{c}{|z|} &\leq \frac{c}{a_n - r_n} \leq \frac{c}{n\pi} \leq \frac{2c}{n\pi} - \frac{(\alpha_n + r_n)^2}{2} \leq \\ &\leq (\alpha_n + r_n - \frac{(\alpha_n + r_n)^2}{2}) \operatorname{sen}\phi \leq |\operatorname{sen}(z - \frac{\pi}{4})| \end{aligned}$$

■

**Teorema 3:** La ecuación (6.22) tiene una sucesión de soluciones de tipo (6.23):

$$(\Phi_n, W_n) = e^{-\lambda_n t} (\Psi_n, V_n)$$

con la propiedad  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \lambda_n = 0$ .

**Demostración:**

Utilizando el Lema 6.2 se obtiene que

$$|J_0(z) + iJ_1(z)| < \frac{C}{|\sqrt{z}|} + \left| \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \right| e^{\operatorname{Im} z} \leq \frac{1}{|\sqrt{z}|} (C + \sqrt{\frac{2}{\pi}} e) = \frac{1}{|\sqrt{z}|} (2C + \sqrt{\frac{2}{\pi}} e) - \frac{C}{|\sqrt{z}|}$$

Ahora, eligiendo  $c = C\sqrt{2\pi} + e$ , aplicando el Lema 6.3 y de nuevo el Lema 6.2 resulta

$$|J_0(z) + iJ_1(z)| < \frac{1}{|\sqrt{z}|} (2C + \sqrt{\frac{2}{\pi}} e) - \frac{C}{|\sqrt{z}|} < \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \left| \operatorname{sen}(z - \frac{\pi}{4}) \right| - \frac{C}{|z|} < |z| |J_1(z)|$$

para  $z \in \Gamma_n$  y  $n > N_C$ .

Aplicando el Teorema de Rouché se obtiene que la función  $(z - i)J_1 - J_0$  tiene un cero en el interior de la curva  $\Gamma_n$  para  $n$  suficientemente grande y de aquí que la ecuación (6.27) tiene una sucesión de ceros con la parte imaginaria convergente a cero.

Por lo tanto, existe una sucesión de soluciones de tipo (6.23) con  $\operatorname{Re} \lambda$  decreciente a cero, lo que indica un decaimiento no exponencial de la energía.

■

**Observación 6.11** El resultado anterior muestra la ausencia de decaimiento uniforme de la energía incluso si la disipación se ejerce en toda la frontera. Esto nos indica que este fenómeno se debe al carácter híbrido de los sistemas considerados y no a la localización de la disipación en una parte más o menos pequeña de la frontera.

# Bibliografía

- [1] Ball, J.M.: *Strongly Continuous Semigroups, Weak Solutions and Variation of Constant Formula*, Proc. AMS, **63**, 2 (1977), 370-373.
- [2] Ball, J.M. y Slemrod, M.: *Nonharmonic Fourier Series and the Stabilization of Distributed Semi-Linear Control Systems*, Comm. Pure Appl. Math., **XXXII** (1979), 555-587.
- [3] Banks, H.T., Fang, W., Silcox, R.J. y Smith, R.C.: *Approximation Methods for Control of Acoustic/Structure Models with Piezoceramic Actuators*, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, **4** (1993), 98-116.
- [4] Banks, H.T., Ito, K. y Wang, Y.: *Computational Methods for Identification and Feedback Control in Structures with Piezoceramic Actuators and Sensors*, Diff. Int. Eqs., **8** (1995), 587-606.
- [5] Banks, H.T. y Smith, R.C.: *Well-Posedness of a Model for Structural Acoustic Coupling in a Cavity Enclosed by a Thin Cylindrical Shell*, J. Math. Anal. Appl., **191** (1995), 1-25.
- [6] Bardos, C., Lebeau, G. y Rauch, J.: *Contrôle et stabilisation dans les problèmes hyperboliques*, Apéndice 2 en [29], 492-537.
- [7] Bardos, C., Lebeau, G. y Rauch, J.: *Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary*, SIAM J. Control Optim., **30** (1992), 1024-1065.
- [8] Bardos, C. y Rauch, J.: *Variational algorithms for the Helmholtz equation using time evolution and artificial boundaries*, Asymptotic Analysis, **9** (1994), 101-117.
- [9] Barnes, H.A., Hutton, J.F. y Walters, K.: AN INTRODUCTION TO RHEOLOGY, Elsevier, 1989.
- [10] Brezis, H.: ANALYSE FONCTIONNELLE: THÉORIE ET APPLICATIONS, Masson, Paris, 1983.
- [11] Brezis, H.: OPÉRATEURS MAXIMAUX MONOTONES ET SEMI-GROUPES DE CONTRACTIONS DANS LES ESPACES DE HILBERT, North-Holland, Amsterdam, 1973.
- [12] Cazenave, T. y Haraux, A.: INTRODUCTION AUX PROBLÈMES D'ÉVOLUTION SEMI-LINÉAIRES, Mathématiques et Applications, **1**, Ellipses, Paris, 1990.
- [13] Cox, S. y Zuazua, E.: *The Rate at which Energy Decays in a Damped String*, Comm. Partial Diff. Eqs., **19** (1994), 213-243.

- [14] Destuynder, Ph., Legrain, I., Castel, L. y Richard, N.: *Theoretical, numerical and experimental discussion on the use of piezoelectric devices for controle-structure interaction*, Eur. J. Mech., A/Solids, **11**, 2 (1992), 181-213.
- [15] Grisvard, P.: *ELLIPTIC PROBLEMS IN NON-SMOOTH DOMAINS*, Pitman, 1985.
- [16] Gohberg, I.C. y Krein, M.G.: *INTRODUCTION TO THE THEORY OF LINEAL NONSELFADJOINT OPERATORS*, AMS, Providence, 1969.
- [17] Hansen, S. y Lyashenko, A: *Exact Controllability of a Beam in an Incompressible Inviscid Fluid*, preprint, 1995.
- [18] Hansen, S. y Zuazua, E.: *Exact Controllability and Stabilization of a Vibrating String with an Interior Point Mass*, SIAM J. Control Optim., **33**, 5 (1995), 1357-1391.
- [19] Haraux, A.: *Contrôlabilité exacte d'une membrane rectangulaire au moyen d'une fonctionnelle analytique localisée*, C. R. Acad. Sci. Paris, **306** (1987), 125-128.
- [20] Haraux, A.: *SEMI-LINEAR WAVE EQUATIONS IN BOUNDED DOMAINS*, Mathematical Reports, Vol. 3(1), Harwood Academic Publishers, Gordon and Breach, London, 1987.
- [21] Haraux, A.: *Séries lacunaires et contrôle semi-interne des vibrations d'une plaque rectangulaire*, J. Math. Pures Appl., **68** (1989), 457-465.
- [22] Haraux, A.: *SYSTÈMES DYNAMIQUES DISSIPATIFS ET APPLICATIONS*, Masson, RMA, 1990.
- [23] Hörmander, L.: *LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL OPERATORS*, Springer-Verlag, 1976.
- [24] Ingham, A.E.: *Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series*, Math. Z., **41** (1936), 367-369.
- [25] Kato, T.: *PERTURBATION THEORY FOR LINEAR OPERATORS*, Springer-Verlag, New-York, 1984.
- [26] Komornik, V.: *EXACT CONTROLLABILITY AND STABILIZATION. THE MULTIPLIER METHOD*, RAM 36, Masson, 1994.
- [27] Komornik, V. y Zuazua, E.: *A direct method for the boundary stabilization of the wave equation*, J. Math. Pures Appl., **69** (1990), 33-54.
- [28] Landau, L.D. y Lifshitz, E.M.: *FLUID MECHANICS*, Pergamon Press, 1987.
- [29] Lions, J.L.: *CONTRÔLABILITÉ EXACTE, PERTURBATIONS ET STABILISATION DE SYSTÈMES DISTRIBUÉS, TOME 1: CONTRÔLABILITÉ EXACTE*, Masson, RMA 8, Paris, 1988.
- [30] Lions, J.L. y Magenes, E.: *PROBLÈMES AUX LIMITES NON HOMOGÈNES ET APPLICATIONS*, Vol. 1, 2, Dunod, 1968.
- [31] Littman, W. y Marcus, L.: *Stabilization of a Hybrid System of Elasticity by Feedback Boundary Damping*, Ann. Mat. Pura Appl., **CLII**, 4 (1988), 281-330.
- [32] Littman, W. y Marcus, L.: *Some Recent Results on Control and Stabilization of Flexible Structures*, Univ. Minn., Mathematics Report, 1988.

- [33] Littman, W. y Marcus, L.: *Exact Boundary Controllability of a Hybrid System of Elasticity*, Archive Rat. Mech. Anal., **103**, 3 (1988), 193-236.
- [34] Littman, W., Marcus, L. y You, Y.C.: *A Note on Stabilization and Controllability of a Hybrid Elastic System with Boundary Control*, Univ. Minn., Mathematics Report, 1987.
- [35] Littman, W. y You, Y.: *Dynamical boundary control for elastic plates of general shape*, SIAM J. Control Optim., **31**, 4 (1993), 983-992.
- [36] Micu, S. y Zuazua, E.: *Propriétés qualitatives d'un modèle hybride bi-dimensionnel intervenant dans le contrôle du bruit*, C. R. Acad. Sci. Paris, **319** (1994), 1263-1268.
- [37] Micu, S. y Zuazua, E.: *Stabilization and Periodic Solutions of a Hybrid System Arising in the Control of Noise*, Proceedings of the IFIP TC7/WG-7.2 International Conference, Laredo, España. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 174, Marcel Dekker, New York, 1996, 219-230.
- [38] Micu, S. y Zuazua, E.: *Resultados matemáticos recientes sobre un sistema híbrido que interviene en el control del ruido*, aparecerá en la Publicación de la E.T.S.I. de Minas de la Universidad Politécnica de Madrid.
- [39] Olver, F.W.J.: *ASYMPTOTICS AND SPECIAL FUNCTIONS*, Academic Press, 1974.
- [40] Pazy, A.: *SEMI-GROUPS OF LINEAR OPERATORS AND APPLICATIONS TO PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS*, Springer-Verlag, 1983.
- [41] Ralston, J.: *Solutions of the wave equation with localised energy*, Comm. Pure Appl. Math., **22** (1969), 807-823.
- [42] Rao, B.: *Uniform Stabilization of a Hybrid System of Elasticity*, SIAM J. Cont. Optim., **33**, 2 (1995), 440-454.
- [43] Rao, B.: *Decay Estimates of Solutions for a Hybrid System of Flexible Structure*, E. J. Appl. Math., **4** (1993), 303-319.
- [44] Reed, M. y Simon, B.: *METHODS OF MODERN MATHEMATICAL PHYSICS, VOL. 1: FUNCTIONAL ANALYSIS*, Academic Press, 1980.
- [45] Rodríguez-Bernal, A. y Zuazua, E.: *Parabolic Singular Limit of a Wave Equation with Localised Boundary Damping*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, **1**, 3 (1995), 303-346.
- [46] Tucsnak, M.: *Contrôle d'une poutre avec actionneur piézoélectrique*, C. R. Acad. Sci. Paris, **319** (1994), 697-702.
- [47] Watson, G.N.: *A TREATISE ON THE THEORY OF BESSEL FUNCTIONS*, Cambridge University Press, 1984.
- [48] Yosida, K.: *FUNCTIONAL ANALYSIS*, Springer-Verlag, 1974.
- [49] You, Y.: *Pointwise Boundary Stabilizability of Hyperbolic Evolution Equations: Two-Dimensional Hybrid Elastic Structures*, J. Math. Anal. Appl., **165** (1993), 239-265.
- [50] Zuazua, E.: *CONTROLABILIDAD EXACTA Y ESTABILIZACIÓN LA ECUACIÓN DE ONDAS*. Textos de métodos matemáticos 23, Universidad Federal do Rio de Janeiro, 1990.