Universidad Complutense de Madrid
Facultad de Matemáticas

FUNCIONALES SEMICLASICOS: REPRESENTACION INTEGRAL Y CLASIFICACION

Ignacio Alvarez Rocha

Memoria para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas

Director: Francisco Marcellán Español
Tutor: Baldomero Rubio Segovia

Agradecimientos

En primer lugar, mi profundo agradecimiento al Director de Tesis Dr. D. Francisco Marcellán Español, Catedrático del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Carlos III de Madrid, por haberme puesto en contacto con el atractivo mundo de los polinomios ortogonales, por sus imprescindibles orientaciones y comentarios, y por todo el notable esfuerzo que ha realizado para que este proyecto llegase a buen fin.

Mis más sinceras gracias al profesor Dr. D. Baldomero Rubio Segovia, Catedrático del Departamento de Análisis Matemático de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, no sólo por haber aceptado ser Tutor de esta Tesis sino también por la siempre amable y desinteresada colaboración que me ha brindado en cuantas ocasiones he precisado.

A todos los compañeros que participan en el Seminario de Polinomios Ortogonales por el agradable ambiente creado.

Por último, y desde una óptica muy diferente, a todos mis hermanos, por su interés y su ánimo. Tengo que hacer aquí una especial mención a Manolo quién, bastantes más que una vez, ha tenido que oir las palabras "polinomios ortogonales" sin ser precisamente un especialista en el tema.

INDICE

Introducción:

Los orígenes del estudio de los polinomios ortogonales pueden situarse en los trabajos de Legendre sobre el movimiento planetario. Aunque autores como Gauss, Jacobi o Christoffel habían ya estudiado algunos casos especiales, fueron sobre todo T.J. Stieltjes con sus trabajos sobre fracciones continuas y el problema de momentos, así como P.L. Tchebichef, Markov y Heine, los primeros en dar un tratamiento general de esta teoría. Más tarde han sido H. Hamburger, M. Riesz, R. Nevalinna, F. Hausdorff, T. Carleman y M.H. Stone entre otros, quienes, estudiando ecuaciones integrales y operadores en espacios de Hilbert, han dado un importante impulso al estudio de los polinomios ortogonales. El primer tratado sistemático sobre el tema se debe a J.A. Shohat con su obra "Théorie Génèrale des Polynômes Orthogonaux de Tchebichef" de 1934. En 1939 G. Szegö, en su monografía "Orthogonal Polynomials", presentó un exhaustivo compendio sobre esta teoría, sintetizando buena parte de los resultados conocidos hasta esa fecha.

En la actualidad, el estudio de los polinomios ortogonales ha experimentado un gran crecimiento debido a las múltiples aplicaciones no sólo en diferentes ramas de las Matemáticas como por ejemplo Aproximación de Padé, Fracciones Continuas, Análisis Numérico, Probabilidad, Estadística, Ecuaciones Diferenciales, Teoría de Operadores, etc. sino también en otras áreas de la Ciencia como Física Nuclear, [41], Física del Estado Sólido, [59], Teoría de la Señal, [12], Química Teórica, [17], etc.

El inicial punto de vista de las fracciones continuas ha sido progresivamente abandonado y en su lugar las propiedades de ortogonalidad han pasado a ser el punto central en el desarrollo de esta teoría:

Si $\sigma(x)$ es una función no decreciente en algún intervalo I, acotado o no, de la recta real con infinitos puntos de crecimiento y tal que los monomios x^n, $n=0,1,\ldots$, pertenecen al correspondiente espacio L^2_σ, el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt permite hallar una familia de polinomios $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ tales que cada $P_n(x)$ es un polinomio mónico de grado n y de forma que

$$(P_n(x),\ P_m(x)) = \int_I P_n(x)\ P_m(x)\ d\sigma(x) = K_n\ \delta_{nm}$$

con $K_n > 0$. Se dice entonces que $(P_n(x)\ )_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a σ.

Entre las diferentes clases de polinomios ortogonales, el modelo más importante en la literatura lo constituyen los llamados polinomios ortogonales clásicos que responden a medidas absolutamente continuas $d\sigma(x) = w(x)\, dx$ (la función $w(x)$ recibe el nombre de función de peso):

a) $w(x) = \exp(-x^2)$ $\quad -\infty < x < \infty$ $\quad$ Pol. de Hermite

b) $w(x) = x^{\alpha} \exp(-x)$ $\quad 0 < x < \infty; \quad \alpha > -1$ $\quad$ Pol. de Laguerre

c) $w(x) = (1 - x)^{\alpha} (1 + x)^{\beta}$ $\quad -1 \leq x \leq 1; \quad \alpha, \beta > -1$ $\quad$ Pol. de Jacobi

Como casos particulares de los polinomios de Jacobi aparecen los polinomios de Legendre cuando $\alpha = \beta = 0$, los de Tchebichef de primera especie si $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ o, más genéricamente, los de Gegenbauer cuando α y β son iguales.

Si se elimina la restricción inicial de que la medida sea positiva, tanto en el caso b) como en c) se puede dar un sentido al producto $(P_n(x), P_m(x))$ cuando los parámetros α en el caso b) y $\alpha + \beta$ en el caso c) son menores que -1 pero distintos de -1, -2, -3,... y se siguen encontrando polinomios que todavía satisfacen la relación

$$(P_n(x), P_m(x) = \int_I P_n(x)\, P_m(x)\, d\sigma(x) = K_n\, \delta_{nm}$$

pero ahora la medida tiene una parte singular formada por una suma finita de derivadas de la delta de Dirac en los extremos del intervalo I. Los polinomios reciben el nombre de generalizados de Laguerre o de Jacobi respectivamente.

El más amplio punto de vista consiste en considerar un funcional lineal cualquiera L en el espacio de polinomios con coeficientes complejos llamado funcional de momentos

$$L : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{C}$$

que queda definido por su actuación sobre los monomios x^n, n=0,1,..., y por tanto por la sucesión de números $(\mu_n)_{n=0}^{\infty}$ llamados momentos, $< L, x^n > = \mu_n$. De esta forma se puede definir el producto

$$(P(x), Q(x)) = < L, P(x)\, Q(x) >.$$

La existencia de polinomios ortogonales con respecto a este producto, en otras palabras, la existencia de polinomios $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ tales que

$$(P_n(x), P_m(x)) = < L, P_n(x)\, P_m(x) > = K_n\, \delta_{nm}$$

es equivalente al hecho de que los llamados determinantes de Hankel

$$H_n = \begin{vmatrix} \mu_0 \mu_1 \ldots\ldots \mu_n \\ \mu_1 \mu_2 \ldots\ldots \mu_{n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mu_n \mu_{n+1} \ldots\ldots \mu_{2n} \end{vmatrix}$$

sean no nulos para todo valor de n. Este punto de vista permite considerar entre los polinomios clásicos los polinomios de Bessel, que son ortogonales con respecto al producto

$$(P,Q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} P(z)\, Q(z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha + 1)_k} \left(- \frac{2}{z}\right)^k dz$$

para cualquier valor del parámetro α distinto de -1, -2,... .

Todos los polinomios ortogonales clásicos tienen en común diferentes propiedades que los caracterizan. Una posible caracterización, la que más interesa en este trabajo y debida a P. Maroni, es que el funcional de momentos L satisface una ecuación funcional de la forma

$$D(\phi\, L) + \psi\, L = 0,$$

donde $\phi(x)$ es un polinomio mónico de grado 2 como máximo y $\psi(x)$ es otro polinomio de grado igual a 1.

Si en la anterior relación se permite a los polinomios $\phi(x)$ o $\psi(x)$ tener grados mayores que 2 ó 1 respectivamente, aparecen nuevos funcionales y en muchos casos nuevas sucesiones de polinomios ortogonales asociadas a ellos. Tanto los funcionales como los polinomios reciben el nombre de semiclásicos.

Si se denota s = máx.{ grad(ϕ)-2, grad(ψ)-1 }, los polinomios clásicos se encuentran en el caso de que s sea igual a 0. En la terminología que se usará los polinomios clásicos son los semiclásicos de clase s = 0.

Los primeros antecedentes de los polinomios semiclásicos aparecen en los trabajos de E.N. Laguerre y también de J. Shohat quien estudió los polinomios que son ortogonales con respecto a un peso w(x) que satisface una ecuación diferencial de tipo Pearson

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = - \frac{\psi(x) + \phi'(x)}{\phi(x)} .$$

Aún desde el concepto general de ortogonalidad considerado anteriormente, un resultado debido a R.P. Boas establece que cualquier funcional lineal definido sobre $\mathbb{P}$ con valores en $\mathbb{C}$ admite al menos una representación integral de la forma

$$< L, p(x) > = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\ d(\sigma(x) + i\ \mu(x))$$

donde $\sigma(x)$ y $\mu(x)$ son en general funciones de variación acotada.

Nuestra contribución al tema, detallada en los Capítulos III y IV de esta Memoria, consiste en dar representaciones integrales para cualquier funcional de momentos que satisfaga una relacion del tipo $D(\Phi\ L) + \Psi\ L = 0$, independientemente de que este sea o no regular; es decir, tenga o no asociada una sucesión $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ de polinomios ortogonales. De esta forma, todos los funcionales regulares semiclásicos quedan representados.

En la resolución del problema se ha visto que, debido al tamaño de los momentos, existen dos grandes categorías de funcionales semiclásicos que obligan a utilizar diferentes técnicas para hallar una representación integral. Se han denominado genéricamente funcionales *(A)* o *(B)*-semiclásicos. La estimación del tamaño de los momentos así como la solución del problema para los *(A)*-funcionales se incluyen en el Capítulo III, en donde se establece que todo funcional de este tipo admite una representación de la forma

$$< L, p(x) > = \int_\gamma p(x)\ w(x)\ dx,$$

donde γ es cualquier circunferencia en el plano complejo de radio adecuado y $w(x)$ es una solución de la ecuación diferencial lineal no homogénea

$$(\phi(x)\ w(x))' + \psi(x)\ w(x) = D(x)$$

siendo $D(x)$ un polinomio.

En el Capìtulo IV se da una solución para los funcionales *(B)*-semiclásicos probando que siempre es posible la representación

$$< L, p(x) > = \int_\gamma p(x)\ w(x)\ dx,$$

donde $w(x)$ ahora verifica la ecuación homogénea

$$(\phi(x)\ w(x))' + \psi(x)\ w(x) = 0$$

y γ es una curva adecuada en el plano complejo, cerrada o no según que las raices del polinomio $\phi(x)$ sean múltiples o simples. Como la función $w(x)$ contiene factores de la forma $(x-a)^{\alpha}$ y la curva γ tiene un extremo en el punto a, es necesario regularizar las correspondientes integrales cuando $Re(\alpha) \leq -1$. Esto se ha hecho dando un criterio recurrente obtenido a partir del lenguaje de P. Maroni descrito en el epígrafe 2 del Capítulo I. Este proceso se ha denominado regularización semiclásica.

Los Capítulos iniciales contienen una breve exposición de resultados relacionados con los polinomios semiclásicos, siempre orientada hacia la representación integral. El objetivo que se ha pretendido alcanzar con estos preliminares ha sido el de dar una visión homogénea y coherente del problema objeto de este trabajo.

El Capítulo I comienza con la descripción de algunos resultados generales de ortogonalidad. Posteriormente, se introducen los polinomios ortogonales clásicos utilizando la terminología de P.Maroni, y finalmente, se incluye el trabajo de R.D.Morton y A.M. Krall "Distributional weight functions for orthogonal polynomials" en el que está resuelto el problema de la representación integral para los polinomios clásicos.

El Capítulo II esta dedicado específicamente a los polinomios ortogonales semiclásicos y en él se dan algunas de las diferentes caracterizaciones de estos polinomios. Se incluye también, en los epígrafes finales 5 y 6, el estudio de las modificaciones que se producen, en la regularidad y en la clase, al perturbar un funcional semiclásico con una masa de Dirac o con su derivada. El estudio en general de la clase así como la aplicación de estos resultados al caso particular de los polinomios de Laguerre dado en el ejemplo final, es también aportación del autor.

CAPITULO I

Polinomios Ortogonales Clásicos

Introducción

En 1939 J.L.Geronimus [18] resolvió el siguiente problema planteado por W.Hahn [20]:

"Hallar condiciones necesarias y suficientes para que una sucesión de polinomios ortogonales $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ sea tal que la sucesión de sus derivadas $\{P'_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ sea también ortogonal".

Para que esto ocurriese, Geronimus encontró que los momentos del funcional asociado a la sucesión $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ deberían de satisfacer una cierta ecuación en diferencias que más tarde se precisará. También dió las soluciones de esta ecuación hallando representaciones integrales en el plano complejo y, en particular, vió que las únicas soluciones que correspondían al caso definido positivo eran los funcionales de momentos asociados a las familias de polinomios ortogonales de Hermite, Laguerre y Jacobi.

H.L. Krall y O. Frink [33] en 1948 encuentran una cuarta clase de polinomios ortogonales que también satisfacen la condición del problema de Hahn pero que en este caso no responden a un funcional definido positivo. Son los llamados polinomios de Bessel que habían ya sido considerados por S. Bochner en [6], donde se señalaban sus conexiones con las funciones de Bessel. Las cuatro familias reciben el nombre de polinomios clásicos.

Por otra parte, J. Shohat [63] en 1939 estudió los polinomios que son ortogonales con respecto a un peso w que satisface una ecuación de tipo Pearson, $\frac{w'}{w} = \frac{\phi' + \psi}{\phi}$ con ϕ y ψ polinomios, lo que constituye una generalización de las familias de polinomios de Hermite, Laguerre y Jacobi, dando lugar a los hoy llamados polinomios semiclásicos.

Después del trabajo de Shohat, diferentes autores han tratado de generalizar las propiedades de los polinomios clásicos. En este contexto, P. Maroni [48],...,[55] ha realizado una teoría unificada sobre los polinomios semiclásicos. Su punto de vista consiste en situarse en el espacio dual de los polinomios $\mathbb{P}'$ y trabajar directamente sobre las formas lineales o bien, sobre el espacio de las series formales que es isomorfo a $\mathbb{P}'$. Desde esta óptica se presentan a continuación los polinomios clásicos.

Se comienza con una breve descripción de propiedades generales de los polinomios ortogonales para, más tarde, entrar al estudio más concreto de las familias clásicas incluyendo su representación integral.

§ 1. Ortogonalidad

A lo largo del presente trabajo se denotará con $\mathbb{P}$ al espacio de polinomios en una indeterminada y con coeficientes complejos.

Definición 1.1

Sea $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números complejos y sea $L: \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{C}$ un funcional lineal tal que la actuación de L sobre los monomios x^n viene dada por

$$< L, x^n > = \mu_n \qquad n=0,1,2,...$$

L se llama *funcional de momentos* asociado a la sucesión $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ y los números μ_n se llaman *momentos* del funcional L.

Es inmediato que si $\pi(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ entonces

$$< L, \pi(x) > = \sum_{k=0}^{n} a_k \mu_k$$

Definición 1.2

Una sucesión de polinomios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ se llama *sucesion de polinomios ortogonales* (SPO) con respecto al funcional de momentos L si y sólo si

i) $P_n(x)$ es un polinomio de grado n.

ii) $< L, P_n(x) P_m(x) > = k_n \delta_{nm}$ con $k_n \neq 0$ para n=0,1,... y donde δ_{nm} es la delta de Kronecker.

Cuando $k_n = 1$ para n = 0,1,..., la sucesión de polinomios se llama *ortonormal*, y cuando el coeficiente principal de cada $P_n(x)$ es la unidad, la sucesión se llama *mónica* (SPOM).

El siguiente resultado es inmediato:

Proposición 1.1

Son equivalentes:

i) $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ es una SPO con respecto a L.

ii) Para todo polinomio $\pi(x)$ de grado $\leq$ n existen constantes $k_n \neq 0$ tales que

$$< L\ \pi(x)\ P_n(x) > = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \text{grad}(\pi) < n \\ k_n & \text{si} \quad \text{grad}(\pi) = n\ , \qquad n=0,1,... \end{cases}$$

iii) $< L,\ x^m\ P_n(x) > = k_n\ \delta_{nm}$ para alguna constante $k_n \neq 0$, $m \leq n$ y $n=0,1,...$

Cuando $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ es una SPO con respecto a un funcional L, los polinomios $P_n(x)$ constituyen una base de $\mathbb{P}$ de manera que todo polinomio $\pi(x)$ de grado n se puede escribir como

$$\pi(x) = c_0\ P_0(x) + c_1\ P_1(x) + ... + c_n\ P_n(x)$$

y en consecuencia, por la ortogonalidad de $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$, se tiene el resultado siguiente:

Proposición 1.2

Sea $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ una SPO con respecto a L. Sea $\pi(x)$ un polinomio de grado n. Entonces

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\ P_k(x)$$

y además

$$c_k = \frac{< L,\ \pi(x)\ P_k(x) >}{< L,\ P_k^2(x) >} \ ■$$

Corolario

Si $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ son dos SPO con respecto al funcional L entonces existen constantes complejas $c_n \neq 0$ tales que

$$Q_n(x) = c_n\, P_n(x) \qquad\qquad n=0,1,2,... \blacksquare$$

Por lo tanto una SPO con respecto a L es única si se impone la condición de que cada $P_n(x)$ sea mónico o también si se exige que $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ sea ortonormal y con coeficiente principal positivo

Se trata ahora el problema de la existencia de sucesiones de polinomios ortogonales con respecto a un funcional dado.

Sea $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión de momentos de un funcional L. Para cada valor de n se denota H_n el determinante de Hankel de orden n+1

$$H_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}$$

De la Proposición 1.1 se obtiene fácilmente el siguiente resultado básico:

Proposición 1.3

Sea L un funcional de momentos dado por la sucesión $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$. La condición necesaria y suficiente para la existencia de una SPO asociada a L es que H_n sea no nulo para todo n=0,1,...

Demostración (ver pág. 11 de [11])$\blacksquare$

Cuando $H_n \neq 0$ para n=0,1,2,... el funcional se llama *regular o casi-definido*.

Sea $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión de momentos de un funcional regular L. Si se consideran los polinomios definidos por

$$(1.1) \qquad P_n(x) = \frac{1}{H_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots\cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots\cdots & \mu_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots\cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots\cdots & x^n \end{vmatrix}$$

es claro que cada $P_n(x)$ es mónico y además, para cada $k \leq n$, se tiene que

$$(1.2) \qquad < L, x^k P_n(x) > = \frac{1}{H_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots\cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots\cdots & \mu_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots\cdots & \mu_{2n-1} \\ \mu_k & \mu_{k+1} & \cdots\cdots & \mu_{k+n} \end{vmatrix} = \frac{H_n}{H_{n-1}} \delta_{kn},$$

y la Proposición 1.1 dice entonces que los elementos de la SPO mónica asociada a L vienen dados por la relación (1.1).

Una característica de las sucesiones de polinomios ortogonales es que satisfacen una relación de recurrencia a tres términos:

Cuando L es un funcional regular y $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ es su SPO mónica, escribiendo el polinomio $x\, P_n(x)$ en términos de los polinomios de la SPO, la Proposición 1.2 garantiza la existencia de constantes complejas β_n y γ_n de manera que

$$(1.3) \qquad \begin{cases} P_0(x) = 1; \quad P_1(x) = x - \beta_0 \\ P_{n+1}(x) = (x - \beta_n)\, P_n(x) - \gamma_n\, P_{n-1}(x) & n \geq 1. \end{cases}$$

Una consecuencia inmediata es que

$$\gamma_n < L, x^{n-1} P_{n-1}(x) > = -< L, x^{n-1} P_{n+1}(x) > + < L, (x-\beta_n)\, x^{n-1} P_n(x) >,$$

de donde

$$(1.4) \qquad \gamma_n = \frac{< L,\ x^n\ P_n(x) >}{< L,\ x^{n-1}\ P_{n-1}(x) >} = \frac{< L,\ P_n^2(x) >}{< L,\ P_{n-1}^2(x) >} \neq 0$$

La relación de recurrencia a tres términos (1.3) con la condición $\gamma_n \neq 0$ que satisfacen las sucesiones de polinomios ortogonales es también una condición suficiente de ortogonalidad según pone de manifiesto el siguiente resultado debido a Favard:

Proposición 1.4 (Teorema de Favard)

Sean $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ dos sucesiones arbitrarias de números complejos y sea $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ la sucesión de polinomios dada por

$$(1.5) \qquad \begin{cases} P_{-1}(x) = 0; \quad P_0(x) = 1 \\ P_{n+1}(x) = (x - \beta_n)\ P_n(x) - \gamma_n\ P_{n-1}(x) \qquad n = 0,1,... \end{cases}$$

Entonces existe un único funcional de momentos L tal que

$$< L,\ 1 > = \gamma_0,\ < L,\ P_n(x)\ P_m(x) > \ = 0 \quad \text{si } n \neq m, \qquad n,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ ....$$

Además, L es regular y $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ es la correspondiente SPO mónica si y sólo si $\gamma_n \neq 0$ para $n \geq 0$.

Demostración (ver pág. 21 de [11])∎

La relación de recurrencia a tres términos es por tanto una característica de las sucesiones de polinomios ortogonales asociados a funcionales de momentos en $\mathbb{P}$. Esto permite su estudio al margen de la representación integral del funcional de momentos que más tarde se verá o de cualquier otra caracterización.

Otra posible vía de estudio de los polinomios ortogonales la proporciona el resultado de Christoffel-Darboux:

Proposición 1.5 (Identidad de Christoffel-Darboux)

Sea $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ una SPO mónica cuya relación de recurrencia a tres términos viene dada por (1.5) con $\gamma_n \neq 0$ para $n \geq 0$. Entonces

$$(1.6)\qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(x)\ P_k(y)}{\gamma_0\ \gamma_1 \cdots \gamma_k} = \frac{1}{\gamma_0\ \gamma_1 \cdots \gamma_n}\ \frac{P_{n+1}(x)\ P_n(y) - P_n(x)\ P_{n+1}(y)}{x - y}$$

Demostración (ver pág. 23 de [11])∎

Recientemente, C .Brezinski [10] ha demostrado que si una sucesión libre de polinomios satisface una relación del tipo (1.6), necesariamente ha de verificar una relación de recurrencia a tres términos. De esta forma, la identidad de Christoffel-Darboux es otra caracterización de las sucesiones de polinomios ortogonales y permite una forma de estudio independiente de la anterior.

Finalmente, se estudia la representación integral de un funcional de momentos arbitrario:

Definición 1.3

Un funcional de momentos L se denomina *definido positivo* cuando $< L, \pi(x) > \, > 0$ para todo polinomio no nulo $\pi(x)$ que es no negativo en toda la recta real.

Cuando L es un funcional de momentos definido positivo, se verifica que

$$< L, x^{2n} > \, > 0 \qquad y \qquad < L, (x+1)^{2n} > \, > 0$$

y por lo tanto todos sus momentos μ_n tienen que ser reales. De la relación (1.2) se deduce también que

$$< L, P_n^2(x) > = \frac{H_n}{H_{n-1}}$$

y, como $H_0 = \mu_0 = < L, 1 > \, > 0$, los determinantes de Hankel H_n de un funcional de momentos definido positivo tienen que ser todos positivos. De hecho se verifica el recíproco:

Proposición 1.6

L es definido positivo si y sólo si sus momentos son reales y $H_n > 0$ para todo entero $n \geq 0$.

Demostración (ver pág. 15 de [11])$_\blacksquare$

Otra consecuencia inmediata de la positividad de un funcional L es que los coeficientes γ_n de la relación de recurrencia (1.3) tienen que ser todos positivos. Basta tener en cuenta la relación (1.2).

Definición 1.4

Sea $E \subset (-\infty, \infty)$. Un funcional de momentos L se dice *definido positivo en* E si y sólo si $< L, \pi(x) > > 0$ para todo polinomio no nulo $\pi(x)$ que es no negativo en E. El conjunto se dice que es un *soporte* de L.

Cuando L es definido positivo en un conjunto E que es infinito entonces L es definido positivo en cualquier subconjunto de E (en general no es cierto si E está formado por un número finito de puntos). En particular, L es definido positivo en cada subconjunto denso en E. Por consiguiente, si L es definido positivo y tiene un soporte con infinitos puntos, en general no existe el "más pequeño" soporte infinito para L. Sin embargo, si L tiene un soporte acotado, puede demostrarse que entre todos los conjuntos cerrados que son soportes de L hay uno que es el "más pequeño". Esto no es verdad en general si todos los soportes de L son no acotados.

Aunque el problema de la *unicidad* de la representación integral de un funcional de momentos definido positivo no se tratará en este trabajo, simplemente mencionar que tanto este hecho como la existencia del mínimo cerrado que es soporte para L son equivalentes a que los polinomios ortogonales con respecto a L sean densos en el correspondiente espacio L^2 que define el funcional de momentos. Este problema y cuestiones relacionadas pueden verse por ejemplo en G. Freud [16], N.I. Akhiezer [2] y otros.

Sea ahora L un funcional de momentos definido positivo y sea I un intervalo que es soporte para L. Sea $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ la correspondiente SPO mónica. Para cada $n \geq 1$ se tiene que $< L, P_n(x) > = 0$ y por tanto $P_n(x)$ ha de tener al menos un cambio de signo en el intervalo I. Por consiguiente, al menos un cero de multiplicidad impar ha de estar en I. Si $x_1,\dots,x_k$ son todos los ceros distintos de multiplicidad impar que están en el interior de I entonces

$$< L, (x-x_1)\ldots(x-x_k)\, P_n(x) > \; > 0$$

puesto que $(x-x_1)\ldots(x-x_k)\, P_n(x) \geq 0$ cuando x está en I. De la ortogonalidad se deduce que k ha de ser mayor o igual que n. Es decir, se verifica el resultado siguiente:

Proposición 1.7

Sea L definido positivo y sea I un soporte para L. Si $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ es una SPO con respecto a L, los ceros de cada $P_n(x)$ son reales, simples y están en el interior del intervalo I ■

Con la notación anterior, y llamando $x_{n1} < x_{n2} < \ldots < x_{nn}$ a los ceros de cada $P_n(x)$, se tiene:

Proposición 1.8 (Fórmula de cuadratura de Gauss) [11]

Si L es definido positivo entonces existen números $A_{n1},\ldots,A_{nn}$, reales y positivos, tales que para cada polinomio $\pi(x)$ de grado menor o igual que 2n - 1 se verifica que

$$< L, \pi(x) > = \sum_{k=1}^{n} A_{nk}\pi(x_{nk}) \quad \text{y} \quad A_{n1}+\ldots+A_{nn} = \mu_0 \;■$$

Sea L definido positivo y, como antes, $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ su SPO mónica y $x_{n1} < \ldots < x_{nn}$ los ceros de cada $P_n(x)$. Sea $\xi_1 = \inf\{ x_{n1}: n=1,2,\ldots\}$ y sea $\eta_1 = \sup\{ x_{nn}: n=1,2,\ldots\}$. El intervalo $[\xi_1, \eta_1]$ recibe el nombre de *verdadero intervalo de ortogonalidad* de L.

Teniendo en cuenta la forma de cuadratura de Gauss, para cada entero positivo n existen números positivos $A_{n1},\ldots,A_{nn}$ tales que

$$\mu_k = < L, x^k > = \sum_{i=1}^{n} A_{ni}\, x_{ni}^k \quad \text{para} \quad k=0,1,\ldots,2n-1$$

Sea $\psi_n(x)$ la función definida por

$$(1.7) \qquad \psi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < x_{n1} \\ A_{n1}+\ldots+A_{np} & \text{si} \quad x_{np} \leq x < x_{n,p+1} \qquad (1 \leq p < n) \\ \mu_0 & \text{si} \quad x \geq x_{nn} \end{cases}$$

Cada $\psi_n(x)$ es una función acotada, contínua a la derecha, no decreciente y con un número finito de puntos de crecimiento. Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k\, d\psi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} A_{ni}\, x_{ni}^k = \mu_k \qquad \text{para} \quad k=0,...,2n-1$$

Por el Principio de Selección de Helly, puesto que $\{\psi_n\}$ está uniformemente acotada por μ_0, existe una subsucesión que converge en $(-\infty, \infty)$ a una función ψ que es acotada y no decreciente. Si el verdadero intervalo de ortogonalidad $[\xi_1, \eta_1]$ está acotado, directamente del segundo Teorema de Helly se obtiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k\, d\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k\, d\psi_n(x) = \mu_k = < L, x^k >$$

para cada k=0,1..., puesto que $\psi(x) = 0$ cuando $x \le \xi_1$ y $\psi(x) = \mu_0$ cuando $x \ge \eta_1$. Se tiene asi una representación integral para L.

Cuando el intervalo $[\xi_1, \eta_1]$ no está acotado, el Teorema de Helly no se puede aplicar directamente y es necesaria una ligera extensión:

Proposición 1.9 [11]

Sea L definido positivo y sea $\{\psi_n\}$ la sucesión definida en (1.7). Entonces existe una subsucesión de $\{\psi_n\}$ que converge en $(-\infty, \infty)$ a una función ψ acotada, no decreciente y con infinitos puntos de crecimiento de manera que

$$\mu_k = < L, x^k > = \int_{-\infty}^{\infty} x^k\, d\psi(x) \qquad k=0,1,2,... \blacksquare$$

Ahora es sencillo de demostrar que cualquier sucesión $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ de números reales admite alguna representación integral en la recta real:

Proposición 1.10 (Teorema de Boas)

Sea $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión arbitraria de números reales. Entonces existe una función ϕ de variación acotada tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n \, d\phi(x) = \mu_n \qquad n=0,1,2,...$$

Demostración

Dado μ_0, es claro que existen números $\mu_{1,0}$ y $\mu_{2,0}$ reales y positivos tales que

$$\mu_0 = \mu_{1,0} - \mu_{2,0}$$

Supongamos que $\mu_{i,0}, \mu_{i,1}, ..., \mu_{i,2n}$, para i=1,2, han sido determinados de forma que

i) $\mu_k = \mu_{1,k} - \mu_{2,k} \qquad k=0,1,...,2n$

ii) $H_{pk} = \det \left[\mu_{p,i+j}\right]_{i,j=0}^{k} > 0 \qquad$ para p=1,2 y para k=0,1,...,n.

Sean ahora $\mu_{1,2n+1}$ y $\mu_{2,2n+1}$ números reales tales que

$$\mu_{2n+1} = \mu_{1,2n+1} - \mu_{2,2n+1}$$

Los correspondientes determinantes de Hankel $H_{p,n+1}$, para p=1,2, se pueden desarrollar por la última fila y se obtiene

$$H_{p,n+1} = \mu_{p,2n+2} + f(\mu_{p,0}, \mu_{p,1}, ..., \mu_{p,2n+1})$$

donde f es alguna función que no depende del momento $\mu_{p,2n+2}$. Basta entonces elegir para cada valor de p el número $\mu_{p,2n+2}$ suficientemente grande para que $H_{p,n+1}$ sea positivo y tal que

$$\mu_{2n+2} = \mu_{1,2n+2} - \mu_{2,2n+2}$$

lo que siempre es posible. Se tienen así dos sucesiones $\{\mu_{1,n}\}$ y $\{\mu_{2,n}\}$ de números reales cuyos determinantes de Hankel son positivos. La Proposición 1.6 y la Proposición 1.9 garantizan la existencia de funciones ϕ_1 y ϕ_2 acotadas, no decrecientes y con infinitos puntos de crecimiento, de forma que

$$\mu_{p,n} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \, d\phi_p(x) \qquad p=1,2.$$

En consecuencia $\phi_1 - \phi_2$ es una función de variación acotada tal que

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \, d(\phi_1(x) - \phi_2(x)) \blacksquare$$

Es obvio que si $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión arbitraria de números complejos, existen funciones de variación acotada $\mu(x)$ y $\sigma(x)$ tales que

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \, d(\mu(x) + i\,\sigma(x)) \quad \text{para} \quad n=0,1,...$$

§ 2. Operaciones en el dual de los Polinomios.

$\mathbb{P}$ ahora representa el espacio de los polinomios en una variable con coeficientes complejos pero considerados como elementos de $C^{\infty}(\mathbb{R})$. Si $\mathbb{P}_n$ es el espacio de los polinomios de grado menor o igual que n entonces $\mathbb{P} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_n$. Considerando en cada $\mathbb{P}_n$ la topología que lo convierte en un espacio de Banach, $\mathbb{P}$ queda dotado de la topología de L.F. (límite inductivo estricto, Trèves [65]). De esta forma, la topología débil del dual topológico $\mathbb{P}'$ viene definida por la familia de seminormas

$$|L|_n = \sup \{ |< L, x^k >| : 0 \leq k \leq n \}$$

y coincide con la topología dual fuerte. Si ε denota el espacio $C^{\infty}(\mathbb{R})$ con la topología de la convergencia uniforme en compactos, se puede demostrar, ver [48], que la inclusión $\varepsilon' \subset \mathbb{P}'$ es contínua.

Por otra parte, es posible demostrar también que todo elemento L de $\mathbb{P}'$ admite la representación

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} (L)_n \frac{(-1)^n}{n!} \delta^{(n}$$

donde $(L)_n = \langle L, x^n \rangle$ y δ es la medida de Dirac ($\langle \delta(x), p \rangle = p(0)$). También se puede probar que la aplicación

$$(2.1) \qquad L = \sum_{n=0}^{\infty} (L)_n \frac{(-1)^n}{n!} \delta^{(n} \longrightarrow F(L)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (L)_n x^n$$

es un isomorfismo topológico entre el espacio anterior $\mathbb{P}'$ y el espacio de las series formales dotado de la topología definida por la familia de seminormas

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right|_n = \sup \{ |a_k| : k \leq n \}.$$

Las justificaciones de todos estos hechos se pueden ver en los trabajos [48] y [53] de P. Maroni.

Definición 2.1

Sea L un elemento de $\mathbb{P}'$. Se llama *función de Stieltjes* asociada a L a la serie formal S(L) (z) definida por

$$S(L)(1/z) = -z\, F(L)(z)$$

Es claro que $S(L)(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(L)_n}{z^{n+1}}$ y de este modo, su derivada formal viene dada por

$$S'(L)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{(L)_{n+1}}{z^{n+2}}$$

Se consideran ahora las siguientes operaciones en $\mathbb{P}$:

$$p(x) \longrightarrow (\phi\, p)(x) = \phi(x)\, p(x), \ \phi \in \mathbb{P}$$

$$p(x) \longrightarrow (\vartheta_c\, p)(x) = \frac{p(x) - p(c)}{x - c}, \ c \in \mathbb{C}$$

$$p(x) \longrightarrow (D\, p)(x) = p'(x)$$

$$p(x) \longrightarrow (\tau_b\, p)(x) = p(x-b), \ b \in \mathbb{C}$$

$$p(x) \longrightarrow (h_a\, p)(x) = p(ax),\ a \in \mathbb{C}-\{0\}$$

y por trasposición quedan definidas las correspondientes operaciones en $\mathbb{P}'$:

La multiplicación a la izquierda de una forma por un polinomio

$$< \phi(x)\, L,\ p(x) > \ = \ < L,\ \phi(x)\, p(x) >.$$

La división de una forma por un polinomio de primer grado

$$< (x-c)^{-1}\, L,\ p(x) > \ = \ < L,\ \vartheta_c\, p(x) > \ = \ < L,\ \frac{p(x) - p(c)}{x - c} >.$$

La derivada de una forma

$$< D\, L,\ p(x) > \ = \ - < L,\ p'(x) >.$$

La traslación de una forma

$$< \tau_b\, L,\ p(x) > \ = \ < L,\ \tau_{-b}\, p(x) > \ = \ < L,\ p(x+b) >$$

La homotecia de una forma

$$< h_a\, L,\ p(x) > \ = \ < L,\ h_a p(x) > \ = \ < L,\ p(a\, x) >.$$

En $\mathbb{P}'$ se puede definir un producto de formas. Para esto, se considera previamente el producto a la derecha de una forma por un polinomio dado por

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}' \times \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P} \\ &(L,\ \phi) \longrightarrow (L\ \phi)\ (x) = \sum_{n=0}^{p} \left(\sum_{k=n}^{p} a_k (L)_{k-n} \right) x^n \end{aligned}$$

Puesto que $\| L\, \phi \|_p \leq (p+1)\ |L|_p\ \| \phi \|_p$, donde se ha considerado $\| \sum_{k=0}^{p} a_k\, x^k \|_p = \sum_{k=0}^{p} |a_k|$,

la multiplicación a la derecha está en $\mathscr{L}(\mathbb{P}' \times \mathbb{P},\ \mathbb{P})$ y así, por trasposición, se puede definir

$$< L_1 L_2, p(x) > = < L_1, (L_2 p)(x) >$$

Con este producto y la suma habitual, el espacio $\mathbb{P}'$ es un anillo con elemento unidad que es la forma δ. Además las formas inversibles resultan ser aquellas cuyo primer momento $(L)_0$ es no nulo.

Se verifican las siguientes propiedades:

Proposición 2.1 [51]

Sea $p \in \mathbb{P}$ y L, L_1 y L_2 elementos de $\mathbb{P}'$. Entonces en $\mathbb{P}$ se verifica:

1) $p(L_1 L_2) = (p L_1) L_2 + x(L_1 \vartheta_0 p) L_2$
2) $(x^{-1} L) p = \vartheta_0 (L p)$
3) $D(L p) = (DL) p + L p' + L \vartheta_0 p$

y en $\mathbb{P}'$

4) $D(p L) = p' L + p DL$
5) $x^{-n} L = (-1)^n (D\delta)^n L$
6) $D^n \delta = n!(D\delta)^n$
7) $D(x^{-1} L) = x^{-1} DL - x^{-2} L$ ∎

Por lo que se refiere a la división de una forma por un polinomio, es claro que

$$< (x-a) (x-a)^{-1} L, p(x) > = < (x-a)^{-1} L, (x-a) p(x) > = < L, p(x) >$$

y se tiene entonces

$$(x-a) (x-a)^{-1} L = L,$$

mientras que

$$< (x-a)^{-1} (x-a) L, p(x) > = < (x-a) L, \frac{p(x) - p(a)}{x - a} > = < L, p(x) - p(a) > =$$

$$= < L, p(x) > - p(a) < L, 1 > = < L - (L)_0 \delta(x-a), p(x) >;$$

es decir,

$$(x-a)^{-1} (x-a) L = L - (L)_0 \delta (x-a)$$

El caso general de la división por un polinomio R(x) está estudiado en [13] y [14]. Aquí se detallan los resultados cuando R(x) tiene todas sus raices simples.

Si $R(x) = (x-a_1)...(x-a_n)$, iterando la operación ϑ_{a_i} definida anteriormente, se obtiene

$$\vartheta_{a_1 \dots a_n} p(x) = \frac{p(x) - L_n(x)}{R(x)},$$

donde $L_n(x)$ es el polinomio de interpolación de Lagrange en los nodos $a_1,...,a_n$:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p(a_i)\, l_i(x) \quad \text{con} \quad l_i(x) = \frac{R(x)}{R'(x)\,(x-a_i)}.$$

De esta forma

$$< R^{-1}(x) L, p(x) > = < L, \frac{p(x) - L_n(x)}{R(x)} >.$$

Cuando R(x) tiene alguna raíz múltiple, se puede definir $R^{-1}(x) L$ pero en este caso hay que considerar el polinomio de interpolación de Hermite en lugar de $L_n(x)$.

Se verifican también las propiedades:

Proposición 2.2 [14]

Sea $p(x) \in \mathbb{P}$, L, L_1 y $L_2 \in \mathbb{P}'$, R(x) y S(x) polinomios con raices simples. Entonces

1) $R(R^{-1} L) = L$
2) $R^{-1}(R\, L) = L - \sum_{i=1}^{n} (l_i(x)\, L)_0\, \delta(x-a_i)$
3) $R^{-1}(L_1 L_2) = (R^{-1} L_1) L_2 = L_1 (R^{-1} L_2)$
4) $R^{-1}(S^{-1} L) = S^{-1} (R^{-1} L)$

5) $R^{-1} L = (x^{-n} L)\, \delta(x-a_1)...\delta(x-a_n)$

6) $(R^{-1} L)^n = R^{-n} L^n$ ∎

Finalmente, se considera la sucesión dual asociada a cada sucesión de polinomios ortogonales:

Una sucesión de polinomios $(P_n)_{n=0}^{\infty}$, con grad $P_n \leq n$, es libre si y sólo si grad $P_n = n$ $n \geq 0$. En este caso se puede siempre normalizar los polinomios y considerar cada P_n mónico. Se dice que la sucesión está normalizada.

Sea $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión normalizada. Efectuando la división euclídea de P_{n+2} por P_{n+1} se puede escribir

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x-\beta_0$$

$$P_{n+2}(x) = (x-\beta_{n+1})\, P_{n+1}(x) - \sum_{k=0}^{n} \gamma_{n,k}\, P_k(x), \quad n \geq 0$$

donde β_n y $\gamma_{n,k}$ son constantes.

Definición 2.2

Se llama *sucesión dual* de la sucesión normalizada $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ a la sucesión de formas lineales $(L_n)_{n=0}^{\infty}$ definida por la condición

$$< L_n, P_m > = \delta_{n,m} \quad n,m \geq 0$$

Proposición 2.3 [62]

La sucesión $(L_n)_{n=0}^{\infty}$ es libre, es única y además constituye una base universal de $\mathbb{P}'$ ∎

Es claro que

$$\gamma_{n,k} = < L_k, x\, P_{n+1} >, \quad 0 \leq k \leq n, \quad n \geq 0$$

$$\beta_n = < L_n, x\, P_n >, \quad n \geq 0$$

Si en particular $(P_n)_{n\geq 0}$ es una S.P.O. mónica y L es su funcional de momentos tal que $(L)_0 = 1$, entonces la sucesión dual $(L_n)_{n=0}^{\infty}$ vendrá dada por

$$L_n = \frac{P_n(x)\, L}{< L, P_n^2>}, \quad n \geq 0$$

§ 3. Ecuación Distribucional de las Formas Clásicas.

Proposición 3.1 [53]

Sea $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ una S.P.O. mónica y sea L su funcional asociado. Sea $Q_n = \frac{P'_{n+1}}{n+1}$ para $n \geq 0$. Entonces $(Q_n)_{n=0}^{\infty}$ es una S.P.O. mónica si y sólo si existen polinomios $\phi(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ y $\psi(x) = a_2x + b_2$ tales que

$$(3.1) \qquad D(\phi\, L) + \psi\, L = 0,$$

donde $0 \leq \text{grad}\ \phi(x) \leq 2$ y grad $\psi(x) = 1$. Además, cuando grad $\phi(x) = 2$, ha de verificarse que $-na_1 + a_2 \neq 0$ para todo entero $n \geq 0$.

Demostración

Supongamos que $(Q_n)_{n=0}^{\infty}$ es una S.P.O mónica y que $\overline{L}$ es su funcional de momentos. Como

$$P_{n+1}(x) = (x - \beta_n)\, P_n(x) - \gamma_n\, P_{n-1}(x) \quad \text{si} \quad n \geq 1,$$

derivando se obtiene que

$$P_n(x) = Q_n(x) + c_{n,n-1}\, (x - \beta_n)\, Q_{n-1}(x) + c_{n,n-2}\, Q_{n-2}(x), \quad n \geq 1,$$

para algunas constantes $c_{n,n-1}$ y $c_{n,n-2}$. De esta forma

$$(3.2) \qquad < \overline{L}, P_n > = 0 \qquad \text{para} \quad n \geq 3.$$

Sea $(L_n)_{n=0}^{\infty}$ la base dual de $(P_n)_{n=0}^{\infty}$; es decir, $L_n = \frac{P_n}{< L, P_n^2>}\, L$. Escribiendo $\overline{L}$ de la forma $\overline{L} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j L_j$, la relación (3.2) significa que $\lambda_j = 0$ si $j \geq 3$ y, en consecuencia,

$$\overline{L} = \left[\frac{\lambda_2 P_2}{< L, P_2^2 >} + \frac{\lambda_1 P_1}{< L, P_1^2 >} + \frac{\lambda_0 P_0}{< L, P_0^2 >} \right] L = \phi(x) L$$

y $\phi(x)$ es un polinomio de grado 2 a lo sumo. Por otra parte

$$< \overline{L}, Q_n > = < \phi L, \frac{P'_{n+1}}{n+1} > = - < D(\phi L), \frac{P_{n+1}}{n+1} >$$

y como $< \overline{L}, Q_n > = 0$ si $n \geq 1$, la expresión del funcional $D(\phi L)$ en términos de la base $(L_n)_{n=0}^{\infty}$ será

$$D(\phi L) = \beta_0 L_0 + \beta_1 L_1 = - \psi(x) L.$$

Además $\beta_1 = < D(\phi L), P_1 > = -< \phi L, 1> = -< \overline{L}, 1 > \neq 0$. Luego $\psi(x)$ tiene grado 1. Es claro también que grad $\phi(x) \geq 0$ puesto que si fuese el polinomio nulo, se tendría que $\psi(x) L = 0$, que es absurdo ya que L es regular. Finalmente

$$(3.3) \qquad 0 \neq < \overline{L}, x^n Q_n > = < \phi L, x^n \frac{P'_{n+1}}{n+1} > =$$

$$= - \frac{1}{n+1} < D (x^n \phi L), P_{n+1} > = - \frac{1}{n+1} \{< n x^{n-1} \phi L, P_{n+1}> +$$

$$+ < D (\phi L), x^n P_{n+1} >\} = - \frac{n}{n+1} < L, x^{n-1} \phi P_{n+1} > + \frac{1}{n+1} < L, x^n \psi P_{n+1}>$$

$$= \frac{1}{n+1} (-n a_1 + a_2) < L, x^{n+1} P_{n+1} >, \quad n \geq 0,$$

de lo que se deduce que $-n a_1 + a_2 \neq 0$ para $n \geq 0$.

Recíprocamente, supongamos que L verifica la relación $D(\phi L) + \psi L = 0$ y que $-n a_1 + a_2 \neq 0$. Razonando como en (3.3) se tiene que

$$< \phi L, x^k Q_n > = - \frac{k}{n+1} < L, x^{k-1} \phi P_{n+1} > + \frac{1}{n+1} < L, x^k \psi P_{n+1} > =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k < n \\ \frac{1}{n+1} (-n a_1 + a_2) < L, x^{n+1} P_{n+1} > \neq 0 & \text{si } k = n \end{cases}$$

por lo que $(Q_n)_{n=0}^{\infty}$ es ortogonal con respecto al funcional $\overline{L} = \phi(x)\ L$ ∎

Observaciones:

(1) $D(\phi\ L) + \psi\ L = 0$ es equivalente a que

$$0 = < D(\phi\ L) + \psi\ L,\ x^n > = -n\ \{a_1(L)_{n+1} + b_1(L)_n + c_1(L)_{n-1}\} + a_2(L)_{n+1} + b_2(L)_n$$

que es la ecuación en diferencias considerada por J.L. Geronimus en [18].

(2) Puesto que $\phi(x)$ es no nulo, siempre se puede suponer mónico en la ecuación (3.1).

Definición 3.1 [53]

Se llama *funcional clásico* a toda solución regular de la ecuación (3.1). Las correspondientes sucesiones de polinomios ortogonales se llaman también clásicas.

Corolario

La sucesión $(Q_n)_{n=0}^{\infty}$ es también clásica ∎

Esto se debe a que $(Q_n)_{n=0}^{\infty}$ es ortogonal con respecto a $\overline{L} = \phi\ L$ que satisface la ecuación

$$D(\phi\ \overline{L}) + (\psi - \phi')\ \overline{L} = 0 \quad \text{con} \quad \mathrm{grad}(\psi - \phi') = 1.$$

Sea L una forma regular y sean a y b constantes con $a \neq 0$. Se considera la forma desplazada L^* definida por

$$< L^*,\ p(x) > = < L,\ p(\frac{x - b}{a}) >.$$

Si $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ es una S.P.O. asociada a L entonces

$$< L^*,\ (ax+b)^k\ P_n\ (ax+b) > = < L,\ x^k\ P_n(x) > = k_n\ \delta_{n,m},$$

por lo que L^* es también regular y la sucesión $(P_n(ax+b))_{n=0}^{\infty}$ es una S.P.O. asociada a L^*.

Proposición 3.2

Sea L una forma clásica verificando (3.1). Entonces la forma desplazada L^* es también clásica y satisface la ecuación

$$D(\bar{\phi}\, L^*) + \bar{\psi}\, L^* = 0$$

con $\bar{\phi}(x) = a^{-t}\, \phi(ax+b)$, $\bar{\psi}(x) = a^{1-t}\, \psi(ax+b)$ y donde $t = \text{grad}\ \phi(x)$.

Demostración (ver por ejemplo pág. 152 de [4])$_\blacksquare$

La caracterización de las formas clásicas de la Proposición 3.1 tiene su forma equivalente en términos de la serie formal de Stieltjes en virtud del isomorfismo dado en la expresión (2.1):

Proposición 3.3 [53]

L es clásica si y sólo si existen polinomios $\phi(x)$ y $\psi(x)$, $\text{grad}(\phi) \leq 2$ y $\text{grad}(\psi) = 1$, tales que su serie formal de Stieltjes verifica la ecuación diferencial

$$\phi(x)\ S'(L)(z) = C(z)\ S(L)(z) + D(z),$$

donde

$$C(z) = -\phi'(z) - \psi(z),\ D(z) = -(L\vartheta_0\phi)'(z) - (L\vartheta_0\psi)(z) = \text{cte}.$$

Cuando grad $\phi = 2$, el coeficiente principal del polinomio C(z) tiene que ser distinto de $-n$, $n \geq 2_\blacksquare$

Si un funcional L es clásico, aplicando la Proposición (3.2), se pueden elegir las constantes a y b de forma adecuada para que la ecuación de L^* sea tal que $\bar{\phi}(x)$ tenga sus raices en puntos prefijados, o bien, que los coeficientes de $\bar{\psi}(x)$ sean números previamente establecidos. En consecuencia, cualquier forma clásica ha de verificar, salvo una transformación afín de la variable, alguna de las cuatro ecuaciones canónicas siguientes:

E_1: $D\,L + 2x\,L = 0$

E_2: $D(x\,L) + (x-\alpha-1)\,L = 0, \quad \alpha \in \mathbb{C}$

E_3: $D(x^2-1)\,L - \{(\alpha+\beta)\,x + \alpha-\beta\}\,L = 0, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{C},\ \alpha+\beta \neq -1,-2,\ldots$

E_4: $D(x^2\,L) + (1-\alpha x)\,L = 0, \quad \alpha \in \mathbb{C},\ \alpha \neq -1,-2,\ldots$

Ecuación E_1

$$< D\,L + 2x\,L,\ x^n > = -n\,\mu_{n-1} + 2\,\mu_{n+1} = 0 \qquad n \geq 0$$

Entonces $\mu_{n+1} = \frac{n}{2}\,\mu_{n-1}$, $n \geq 0$ y así

$$(3.4) \qquad \begin{cases} \mu_{2n+1} = 0 & n \geq 0 \\ \mu_{2n} = \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n} = \dfrac{(2n)!}{4^n\ n!}\ \cancel{\mu_0 \quad n \geq 1.} \end{cases}$$

Estos son los momentos del funcional asociado a los *polinomios de Hermite* $H_n(x)$ ■

Ecuación E_2

$$< D(x\,L) + (x-\alpha-1)\,L,\ x^n > = -n\,\mu_n + \mu_{n+1} - (\alpha+1)\,\mu_n = 0, \quad n \geq 0.$$

Entonces $\mu_{n+1} = (n+\alpha+1)\,\mu_n$ y por tanto

$$(3.5) \qquad \mu_n = (n+\alpha+1)\cdots(\alpha+1)\,\mu_0 = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\cancel{\Gamma(\alpha+1)}}\,\mu_0,$$

que son los momentos del funcional asociado a los *polinomios de Laguerre* $L_n^{\alpha}(x)$ siempre que $\alpha \neq -1,-2,\ldots$ (los casos $\alpha = -1,-2,\ldots$ dan lugar a funcionales no regulares).

Ecuación E_3

Para resolver esta ecuación conviene determinar los momentos $\mu_n(1) = < L,\ (x-1)^n >$ o bien $\mu_n(-1) = < L,\ (x+1)^n >$ en lugar de $\mu_n(0) = < L,\ x^n >$. Con este fin se escribe la ecuación E_3 en la forma

$$D\{((x-1)^2 + 2(x-1))\ L\} - \{(\alpha+\beta)\ (x-1) + 2\alpha\}\ L = 0$$

y se obtiene

$$-n(\mu_{n+1}(1) + 2\ \mu_n(1)) - \{(\alpha+\beta)\ \mu_{n+1}(1) + 2\alpha\ \mu_n(1)\} = 0, \quad n \geq 0,$$

de donde

$$\mu_{n+1}(1) = -\ \frac{2(\alpha+n)}{n+\alpha+\beta}\ \mu_n(1) \quad \text{y así} \quad \mu_n(1) = \frac{(-1)^n\ (\alpha)_n\ 2^n}{(\alpha+\beta)_n}\ \mu_0(1)$$

siendo $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$.

Análogamente se obtiene para $\mu_n(-1)$ la expresión

$$\mu_n(-1) = \frac{2^n\,(\beta)_n}{(\alpha+\beta)_n}\ .$$

Teniendo ahora en cuenta que

$$< L,\ x^n > = < L,\ (x-1+1)^n > = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} < L,\ (x-1)^j > = < L,\ (x+1-1)^n > =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\ (-1)^{n-j} < L,\ (x+1)^j > ,$$

se obtienen las expresiones de los momentos $\mu_n(0)$

$$(3.6) \qquad \mu_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{\binom{n}{j}(-1)^j\, 2^j\ (\alpha)_j}{(\alpha+\beta)_j}\ \mu_0 = \sum_{j=0}^{n} \frac{\binom{n}{j}(-1)^{n-j}\ 2^j\ (\beta)_j}{(\alpha+\beta)_j}\ \mu_0,\ \alpha+\beta \neq -1,-2,...$$

que son los momentos del funcional asociado a los *polinomios de Jacobi* $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ ∎

Ecuación E_4

$$< D(x^2\ L) + (1-\alpha x)\ L,\ x^n > = -\ n\ \mu_{n+1} - \alpha\ \mu_{n+1} + \mu_n = 0$$

entonces

$$\mu_{n+1} = \frac{\mu_n}{n+\alpha}, \quad n\geq 0 \qquad \text{y así}$$

(3.7) $$\mu_n = \frac{\mu_0}{(\alpha)_n} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+\alpha)}\,\mu_0, \quad \alpha \neq -1,-2,\ldots,$$

que son los momentos del funcional de los *polinomios de Bessel* $Y_n^{\alpha}(x)$ ∎

Las expresiones explícitas de estas sucesiones de polinomios ortogonales en su forma mónica pueden obtenerse por ejemplo a partir de la fórmula (1.1). Son las siguientes:

$$H_n(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k\,(2x)^{n-2k}}{(n-2k)!\;k!}$$

$$L_n^{\alpha}(x) = (-1)^n\, n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!}$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = K_n^{-1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k}\binom{n+\beta}{k} (x-1)^k\,(x+1)^{n-k} \quad \text{con } K_n = \binom{n+\alpha}{n} + \binom{n+\beta}{n}$$

$$Y_n^{\alpha}(x) = K_n^{-1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n+\alpha+1)_k\,(x/2)^k \quad \text{con} \quad K_n = \frac{(n+\alpha+1)_n}{2^n}$$

§ 4. Representaciones Integrales.

La técnica que se presenta a continuación para hallar representaciones integrales en la recta real de las formas clásicas es debida a R.D. Morton y A.M. Krall [58] y en esta referencia se pueden consultar todas las demostraciones que aquí se omiten.

Se consideran los conocidos espacios de funciones test dentro de $C^{\infty}(\mathbb{R})$, D (soporte compacto), S (decrecimiento rápido) y ε (sin restricciones en el crecimiento), y sus correspondientes espacios duales D', S', ε'. Se introduce el espacio $\mathscr{P}$, S $\subset \mathscr{P} \subset \varepsilon$, de las funciones de crecimiento lento que incluye a los polinomios:

$$\mathscr{P} = \{ \psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : \lim_{x \to \pm\infty} e^{-a|x|} \psi^{(q)}(x) = 0, \text{ para todo } a>0 \text{ y } q \geq 0 \}$$

con la topología inducida por las seminormas

$$\| \psi \|_p = \sup\{ e^{-|x|/(a+1)} |\psi^{(q)}(x)| : 0 \leq a \leq p,\ 0 \leq q \leq p,\ x \in \mathbb{R} \}.$$

Proposición 4.1 [58]

Sea $\{\psi_j\}$ una sucesión de elementos de $\mathscr{P}$. Entonces $\{\psi_j\} \longrightarrow 0$ en $\mathscr{P}$ si y sólo si para cada $a>0$ y $q \geq 0$, la sucesión $\{e^{-a|x|} \psi_j^{(q)}(x)\}$ converge a cero uniformemente en $\mathbb{R}$ ∎

Siguiendo la notación de [58], se considera la transformada de Fourier de una función $\phi(t)$ de la forma

$$F(\phi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\, e^{ixt}\, dt$$

Se considera también el espacio $Z = F(D)$ de las funciones que son transformada de Fourier de elementos de D. Denotando $D_{M\varepsilon}$ al subespacio de D de funciones cuyo soporte está contenido en el intervalo $[-(M+\varepsilon)^{-1}, (M+\varepsilon)^{-1}]$, sea $Z_{M\varepsilon}$ el espacio $F(D_{M\varepsilon})$. Explícitamente

$$Z_{M\varepsilon} = \{\psi : |x+iy|^q\, |\psi(x+iy)| \leq C_q\, e^{a|y|},\ a \leq M+\varepsilon,\ C_q > 0\}$$

Como ya se ha dicho en §.2, todo funcional de momentos L se puede representar de la forma

$$(4.1) \qquad L = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \mu_n\, \delta^{(n)}, \quad \mu_n = \langle L, x^n \rangle$$

y además, cuando L es clásico, es claro que los momentos satisfacen la condición

(4.2) $\quad |\mu_n| \leq C\, M^n\, n!,\ \ n \geq 0$, para algunas constantes positivas C y M.

Si $\psi = F(\phi)$ con $\phi \in D_{M\varepsilon}$ entonces $\psi^{(n)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (it)^n\, \phi(t)\, e^{itx}\, dt$, y así

$$|\psi^{(n)}(0)| \leq \int_{-1/(M+\varepsilon)}^{1/(M+\varepsilon)} |t|^n\, |\phi(t)|\, dt \leq \frac{1}{(M+\varepsilon)^n} \int_{-1/(M+\varepsilon)}^{1/(M+\varepsilon)} |\phi(t)|\, dt$$

Por consiguiente, si μ_n verifica la condición (4.2), se tendrá que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\mu_n|\, |\psi^{(n)}(0)|\, \frac{1}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} C \frac{M^n}{(M+\varepsilon)^n} \int_{-1/(M+\varepsilon)}^{1/(M+\varepsilon)} |\phi(t)|\, dt = C\, \frac{M+\varepsilon}{\varepsilon} \int_{-1/(M+\varepsilon)}^{1/(M+\varepsilon)} |\phi(t)|\, dt$$

de donde se deduce que el funcional

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, \mu_n\, \delta^{(n)} \qquad \text{con} \quad |\mu_n| \leq C\, M^n\, n!$$

está bien definido en $Z_{M\varepsilon}$ y es contínuo en el sentido de Z.

Se pretende, por una parte localizar la representación integral de los funcionales así definidos con μ_n correspondientes a formas clásicas, como elementos de $Z_{M\varepsilon}$, y a continuación, ver si es posible extender su actuación al espacio $\mathscr{P}$. De ahora en adelante L denota entonces el funcional definido en (4.1) pero considerado como elemento de $Z'_{M\varepsilon}$.

Supongamos inicialmente que L admite una extensión L_P que es contínua sobre $\mathscr{P}$. Sea

$$\delta_m(t) = \begin{cases} A_m \exp\{-(1/m^2 - t^2)^{-1}\}, & -1/m < t < 1/m \\ 0 & |t| > 1/m \end{cases}$$

para $m \geq M+\varepsilon$ y con A_m tales que $\int_{-1/m}^{1/m} \delta_m(t)\, dt = 1$, y sea $\psi_m = F(\delta_m)$

a) Se prueba que $\{\psi_m\} \longrightarrow 1$ en $\mathscr{P}$.

b) Como L_P se supone contínuo, $< L_P, 1 > = \lim_{m\to\infty} < L_p, \psi_m > = \lim_{m\to\infty} < L, \psi_m >$ y calculando este límite,

$$\lim_{m\to\infty} < L, \psi_m > = \mu_0.$$

c) Es claro también que x^n es un multiplicador tanto en $\mathscr{P}$ como en $Z_{M\varepsilon}$; es decir, si $\psi \in \mathscr{P}$ (resp. $Z_{M\varepsilon}$) entonces $x^n\, \psi \in \mathscr{P}$ (resp. $Z_{M\varepsilon}$). Por lo tanto, como $\{\psi_m\} \longrightarrow 1$ en el espacio $\mathscr{P}$, $\{x^n \psi_m\} \longrightarrow x^n$ en $\mathscr{P}$ y así $< L_p, x^n > = \lim_{m\to\infty} < L_p, x^n \psi_m > =$ $= \lim_{m\to\infty} < L, x^n \psi_m >$. El cálculo de este límite produce

$$\lim_{m\to\infty} < L, x^n \psi_m > = \mu_n$$

Se tiene entonces el siguiente resultado:

Proposición 4.2 [58]

Si L admite una extensión L_p que es contínua en $\mathscr{P}$ entonces

$$< L_p, x^n > = \mu_n \quad n=0,1,... \blacksquare$$

Entre los espacios $D'_{M\varepsilon}$ y $Z'_{M\varepsilon}$ se considera la transformada de Fourier:

Si $\phi \in D_{M\varepsilon}$ y $\psi = F(\phi) \in Z_{M\varepsilon}$, $f \in D'_{M\varepsilon}$ y $g \in Z'_{M\varepsilon}$, la transformada de Fourier de f viene dada por

$$< Ff, F\phi > = 2\pi < f, \phi >$$

y así la transformada inversa vendrá dada por

$$< F^{1}g, F^{1}\psi > = \frac{1}{2\pi} < g, \psi >.$$

Se tienen las relaciones

$$1. \quad (F^{1}g)^{(n)} = F^{1}((-ix)^n g) \qquad 2. \quad F^{1}(g^{(n)}) = (it)^n F^{1}g.$$

Esto en particular significa que

$$F^{1}(\delta^{(n)}) = \frac{(it)^n}{2\pi} \quad \text{y por tanto} \quad F^{1}L\ (t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \frac{(-it)^n}{n!},$$

que es una función analítica en $|t| < 1/M$ puesto que $|\mu_n| \le C\, M^n\, n!$.

Lema 4.1 [58]

Sea f(z) analítica en la región $|\mathrm{Im}(z)| < s_0$ y tal que

i) Existe $h_0(t)$ tal que $|f(z)| \le h_0(t)$ cuando $|\mathrm{Im}(z)| < s_0$ y verificando $\lim_{t\to\pm\infty} h_0(t) = 0$

ii) Existe $h_1(t)$ tal que $|f'(z)| \le h_1(t)$ si $|\mathrm{Im}(z)| < s_0$ y tal que $\int_{-\infty}^{\infty} h_1(t)\, dt < \infty$.

Entonces f(x) tiene una Transformada de Fourier clásica g(x), y existen constantes positivas C y r de manera que

$$|g(x)| < \frac{C\, e^{-r|x|}}{|x|} \;\blacksquare$$

Cuando f(z) es una prolongación analítica de $F^{-1}L$ (t) que verifica las condiciones i) y ii) del Lema 4.1, <u>la función</u> g(x) = (Ff) (x) <u>define un funcional regular</u> L_p <u>que es la pretendida extensión a</u> $\mathscr{P}$ <u>de</u> L. Esto es porque

a) Sea $\psi \in \mathscr{P}$,

$$|< L_p, \psi >| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)}\, \psi(x)\, dx \right| \le$$

$$\le C \sup \{e^{-(r/2)|x|}\, |\psi(x)| : x \in \mathbb{R}\} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(r/2)|x|}\, dx < \infty$$

y por lo tanto L_p es contínuo sobre $\mathscr{P}$.

b) L_p extiende a L porque cuando $\psi = F(\phi)$ está en $Z_{M\varepsilon}$ se tiene que

$$< L_p, \psi > = < Ff, F\phi > = 2\pi < f, \phi > = 2\pi \int_{-1/(M+\varepsilon)}^{1/(M+\varepsilon)} \overline{f(t)}\, \phi(t)\, dt =$$

$$= 2\pi \int_{-1/(M+\varepsilon)}^{1/(M+\varepsilon)} \overline{F^{-1}L(t)}\, \phi(t)\, dt = 2\pi < F^{1}L, F^{1}\psi > = < L, \psi >.$$

La Proposición 4.2 nos asegura ahora que $< L_p, x^n > = \mu_n$.

Polinomios de Hermite

Según se ha visto en (3.4), los momentos del funcional de Hermite son

$$\mu_{2n} = (\pi)^{1/2} \frac{(2n)!}{4^n\ n!}, \quad \mu_{2n+1} = 0. \text{ Entonces } \quad L = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pi)^{1/2}\ \delta^{(2n)}}{4^n\ n!}$$

y por tanto

$$F^{1}L(t) = \frac{1}{2(\pi)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2/4)^n}{n!}$$

La función $f(z) = \dfrac{1}{2(\pi)^{1/2}}\ e^{-z^2/4}$ es su prolongación analítica y además, con $s_0 = 1$, $h_0(t) = e^{-t^2/4}$, $h_1(t) = \dfrac{|t|}{2}\ e^{-t^2/4}$, $f(z)$ satisface las condiciones del Lema 4.1. Como $Ff(x) = e^{-x^2}$, $-\infty < x < \infty$, se tiene que

$$< L_p, x^n > = \int_{-\infty}^{\infty} x^n\ e^{-x^2}\ dx$$

es una representación integral del funcional de Hermite ∎

Polinomios de Laguerre

De (3.5) se tiene que $\mu_n = \dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}$, $\alpha \neq -1,-2,\ldots$ Entonces

$$L^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\ \delta^{(n)}$$

y por tanto, la función $f(z) = \dfrac{1}{2\pi}\ (1+iz)^{-\alpha-1}$ es la prolongación analítica de $F^{1}L(t)$. Además, cuando $\alpha > -1$, la función $f(t)$ se puede invertir y se obtiene

$$Ff(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\ x^{\alpha}\ e^{-x}, \qquad 0 \leq x < \infty,$$

por lo que

$$< L_p^{\alpha}, x^n > = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{\infty} x^{n+\alpha} e^{-x} dx, \quad n \geq 0$$

es una representación de los funcionales de Laguerre para $\alpha > -1$ ■

Cuando $\alpha < -1$ se presenta una singularidad no integrable en el origen y es necesario un proceso de regularización. El mismo problema se plantea con los funcionales de Jacobi por lo que previamente se describe este procedimiento.

Supongamos que $h(x)$ es una función que tiene una singularidad en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ y que es integrable sobre todo compacto de $\mathbb{R}$ que no contenga al punto x_0.

Definición 4.1

Se llama *regularización* de $h(x)$ a todo funcional lineal y contínuo f que verifica que $< f, \phi > = < h, \phi >$ para toda función test $\phi(x)$ tal que $x_0 \notin$ sop $\phi(x)$.

Proposición 4.3 [19]

Si existe algún entero m tal que $(x-x_0)^m h(x)$ es localmente integrable, entonces $h(x)$ admite regularizaciones ■

Proposición 4.4 [19]

Dos regularizaciones distintas de $h(x)$ difieren en un funcional concentrado en x_0 ■

Cuando la regularización de $h(x)$ conserva la suma, multiplicación por funciones y la derivación, se llama canónica y se denota RC $h(x)$. Si la función $h(x)$ tiene más de una singularidad, es suficiente escribir $h(x)$ como suma de funciones $h_i(x)$ de manera que cada $h_i(x)$ tenga una única singularidad y así manejar cada $h_i(x)$ separadamente. Las regularizaciones que se utilizan aquí son las regularizaciones canónicas de funciones de la forma

$$h(x) = \sum_{i=0}^{N} p_i(x)\, q_i(x)$$

donde $p_i(x)$ son funciones infinitamente derivables y cada $q_i(x)$ es alguna de las funciones x_+^λ, x_-^λ, x^{-n} (ver [19]) o bien sus desplazadas a 1 ó -1. Es decir

$$\mathrm{RC}\ h(x) = \sum_{i=0}^{N} p_i(x)\ \mathrm{RC}\ q_i(x).$$

Supongamos que f(z) es la prolongación analítica de $F^{-1}L(t)$ y que $f^{(m)}(x)$ es analítica y verifica las condiciones i) y ii) del Lema 4.1. Entonces $f^{(m)}(x)$ admite transformada de Fourier clásica g(x). Supongamos que $g(x)/(-ix)^m$ tiene una regularización canónica h(x). Entonces

$$< g(x),\ \psi(x) > = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)}\ \psi(x)\ dx$$

es un funcional contínuo sobre $\mathscr{L}$, y por tanto también lo es h(x). Sea $\gamma(t) = F^{-1}h(t)$. Entonces

$$2\pi < \gamma^{(m)}, \phi > = < F\ \gamma^{(m)}, F\ \phi> = < (-ix)^m\ h,\ F\ \phi > = < \mathrm{RC}\ (-ix)^m \frac{g(x)}{(-ix)^m},\ F\phi >$$

$$= < g,\ F\ \phi > = 2\pi < f^{(m)}, \phi >.$$

En consecuencia $\gamma^{(m)} = f^{(m)}$. Como además en D' cada distribución tiene antiderivadas de orden m,

$$f(t) = \gamma(t) + \sum_{k=0}^{m} \frac{c_k}{2\pi} (it)^k$$

para algunas constantes c_k. Calculando la transformada de Fourier de f(t) se obtiene

$$Ff(x) = h(x) + \sum_{k=0}^{m} c_k\ \delta^{(k)}(x).$$

Es claro que Ff(x) es un funcional contínuo sobre $\mathscr{L}$ y que es una extensión de L. Luego L_p = Ff es la extensión buscada de L. Además

$$\mu_k = < L,\ x^k > = < L_p,\ x^k > = < h,\ x^k > + \sum_{i=0}^{m} c_i < \delta^{(i)},\ x^k > =$$

$$= < h,\ x^k > + (-1)^k\ c_k\ k!$$

de donde $c_k = \dfrac{\mu_k - \langle h, x^k \rangle}{(-1)^k\, k!}$. Se ha probado entonces el siguiente resultado:

Proposición 4.5 [58]

Sea f(z) la prolongación analítica de $F^{1}L(t)$. Supongamos que $f^{(m)}(z)$ verifica las condiciones del Lema 4.1. Sea $g(x) = Ff^{(m)}(x)$ y supongamos que $g(x) / (-ix)^m$ admite una regularización canónica h(x). Entonces

$$L_p(x) = h(x) + \sum_{k=0}^{m} c_k \delta^{(k)}(x) \qquad \text{con} \qquad c_k = \frac{\mu_k - \langle h, x^k \rangle}{(-1)^k\, k!}$$

es una extensión contínua de L sobre $\mathscr{D}$ ∎

Polinomios generalizados de Laguerre

El procedimiento anterior aplicado a los funcionales de Laguerre para $\alpha < -1$ da lugar al siguiente resultado:

Si $-j-1 < \alpha < -j$

$$\langle L^{\alpha}, \psi(x) \rangle =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{\infty} x^{\alpha} \left[e^{-x}\psi(x) - \sum_{i=0}^{j-1} \left(\sum_{k=i}^{j-1} \frac{(-1)^k x^k}{i!(k-i)!} \right) (-1)^i \psi^{(i)}(0) \right] dx$$ ∎

Polinomios de Jacobi

El proceso de regularización junto con el procedimiento de extensión de antes y teniendo en cuenta las expresiones de los momentos de los funcionales de Jacobi dadas en (3.6) da lugar a las siguientes representaciones de los funcionales $J^{(\alpha,\beta)}$:

si $\alpha > -1$ y $\beta > -1$

$$< J^{(\alpha,\beta)}, x^n > = \int_{-1}^{1} x^n (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} dx$$

y cuando $-M > \alpha > -M-1, \quad -N > \beta > -N-1, \quad N,M > 1$

$$< J^{(\alpha,\beta)}, \psi(x) > =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\ \Gamma(\beta+1)\ 2^{\alpha+\beta+1}} \left[\int_0^1 (1-x)^{\alpha} \{(1+x)^{\beta} \psi(x) - \right.$$

$$- \sum_{j=0}^{N} \frac{[(1+x)^{\beta} \psi(x)]^{(j)}}{j!} \Big|_{x=1} (-1)^j (1-x)^j \} dx + \int_{-1}^{0} (1+x)^{\beta} \{(1-x)^{\alpha} \psi(x) -$$

$$- \sum_{k=0}^{M} \frac{[(1-x)^{\alpha} \psi(x)]^{(k)}}{k!} \Big|_{x=-1} (1+x)^k \} dx + \sum_{j=0}^{N} \frac{[(1+x)^{\beta} \psi(x)]^{(j)}}{j!} \Big|_{x=1} \frac{(-1)^j}{\beta+j+1}$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{M} \frac{[(1-x)^{\alpha} \psi(x)]^{(k)}}{k!} \Big|_{x=-1} \Big/ (\alpha+k+1) \right] \blacksquare$$

Polinomios de Bessel

La técnica hasta aquí descrita aplicada a los funcionales de Bessel no da resultado porque no se sabe calcular la correspondiente Ff(t). A continuación se da una representación integral para este funcional en el plano complejo tomada de A.M.Krall [34]

Los momentos de los funcionales de Bessel, según se ha visto en (3.7), son

$$\mu_n = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+\alpha)}, \ \alpha \neq -1,-2,...$$

y por tanto la correspondiente función de Stieltjes $S(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n}{z^{n+1}}$ es una función analítica salvo en $z = 0$. Siguiendo entonces la fórmula de Laurent

$$\mu_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C S(z)\, z^n \, dz,$$

donde C es cualquier curva cerrada que rodea al origen■

Una representación integral del funcional de Bessel en la recta real ha sido dada por A.J. Durán en [15], por K.H. Kwon y otros en [32] y más recientemente por P. Maroni en [55].

Apéndice

Además de las caracterizaciones que se han visto de los polinomios clásicos por medio de la condición de Hahn, la ecuación distribucional o la ecuación diferencial de la serie formal de Stieltjes, existen otras posibles:

- (Al- Salam, Chihara [3]): Existe un polinomio $\phi(x)$, $0 \leq \text{grad } \phi(x) \leq 2$, y para cada n, constantes reales a_n, b_n y c_n, con $c_n \neq 0$, tales que

$$\phi(x)\ P'_n(x) = a_n\ P_{n+1}(x) + b_n\ P_n(x) + c_n\ P_{n-1}(x),\ n \geq 0.$$

- (Bochner [6]): Existen polinomios ϕ y ψ, $0 \leq \text{grad } \phi \leq 2$ y grad $\psi = 1$, y parámetros complejos λ_n, $\lambda_n \neq 0$ si $n \geq 1$, tales que $P_n(x)$ es solución de la ecuación diferencial

$$\phi(x)\ y'' + \psi(x)\ y' + \lambda_n\ y = 0,\ n \geq 0$$

(λ_n viene dado por $\lambda_n = -n\ [\psi' + (n-1)\ \phi''\ /\ 2]$)

- (Agarwal, Milovanovic, [1]): Existen polinomios ϕ y ψ, $0 \leq \text{grad } \phi \leq 2$, grad $\psi = 1$ y parámetros λ_n, $\lambda_n \neq 0$ si $n \geq 1$, tales que

$$< L, (\phi\ P''_n)^2 > - (\ 2\lambda_n + \psi'(0)\ ) < L, \phi(P'_n)^2 > + \lambda_n^2 < L, P_n^2 > = 0, \quad n \geq 0.$$

- (Marcellán, Branquinho, Petronilho, [45]): Existen parámetros r_n y s_n tales que

$$P_n(x) = Q_n(x) + r_n\ Q_{n-1}(x) + s_n\ Q_{n-2}(x),\ n \geq 2, \text{ donde } Q_n(x) = \frac{P'_{n+1}(x)}{n+1}$$

- (McCarthy, [56]): Existen polinomios ϕ y ψ, $0 \leq \text{grad } \phi \leq 2$, grad $\psi = 1$, parámetros no nulos g_n y h_n tales que

$$\phi(x)\ (P_n(x)\ P_{n-1}(x)\ )' = g_n\ P_n^2(x) - (\psi(x) - \phi'(x))\ P_n(x)\ P_{n-1}(x) + h_n\ P_{n-1}^2(x)$$

- (Versión distribucional de la fórmula de Rodrigues, [45]): Existe un polinomio $\phi(x)$, $0 \leq \text{grad } \phi(x) \leq 2$ y parámetros $k_n \neq 0$ tales que

$$P_n(x)\ L = k_n\ D^n\ [\phi^n(x)\ L],\ n \geq 0\ \blacksquare$$

CAPITULO II

Polinomios Ortogonales Semiclásicos

§ 1. Clase de una forma semiclásica.

La caracterización de una forma clásica dada en la Proposición 3.1 del Capítulo I se generaliza de forma natural dando lugar a los polinomios ortogonales semiclásicos:

Definición 1.1 (P. Maroni [53])

Se llama *forma semiclásica* a toda forma regular L tal que

(1.1) $D(\phi\, L) + \psi\, L = 0$

donde $\phi(x)$ y $\psi(x)$ son polinomios cuyos grados verifican la condición $0 \leq \text{grad}\ \phi = p$ y $1 \leq \text{grad}\ \psi = q$.

Cada S.P.O. asociada a una forma semiclásica se llamará también semiclásica.

Observaciones

(1) Si $\phi(x) = 0$ ó grad $\psi(x) = 0$, el hecho de que L satisfaga la ecuación (1.1) supone que L no es regular por lo que ambos casos están excluidos. Esto tiene como consecuencia por una parte que el número $s = \text{máx.}\{p-2, q-1\}$ tiene que ser mayor o igual que cero, y por otra, que el polinomio $\phi(x)$ siempre se puede suponer mónico sin que esto signifique restricción alguna.

(2) Si $\phi(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$ y $\psi(x) = \sum_{k=0}^{q} b_k x^k$, la ecuación (1.1) implica que los momentos $< L, x^k > = \mu_k$ satisfacen el sistema de ecuaciones lineales

$$-n \sum_{k=0}^{p} a_k\, \mu_{n-1+k} + \sum_{k=0}^{q} b_k\, \mu_{n+k} = 0, \quad n \geq 0,$$

de donde se deduce que los momentos μ_{s+n+1}, $n \geq 0$, se obtienen en función de los anteriores. Si en particular $s = p-2 = q-1$, teniendo en cuenta que $\phi(x)$ es mónico, el sistema anterior se escribe

$$(-n+b_{s+1})\, \mu_{n+s+1} = n \sum_{k=0}^{p-1} a_k\, \mu_{n-1+k} - \sum_{k=0}^{q-1} b_k\, \mu_{n+k}, \quad n \geq 0$$

y por analogía con las formas clásicas se excluirá el caso de que b_{s+1} sea un entero no negativo. Esta posibilidad conduce en general a que la ecuación correspondiente a $n=b_{s+1}$ sea incompatible con las anteriores, $n = 0,\ldots,b_{s+1}-1$, y por tanto a soluciones no regulares$_\blacksquare$

Cuando L es una solución de (1.1), el par (ϕ, ψ) se llama *par admisible*. En general no es único puesto que multiplicando la ecuación (1.1) por cualquier polinomio mónico $\pi(x)$ se tendrá

$$D(\pi\phi\ L) + (\pi\psi - \pi'\phi)\ L = 0$$

y, en consecuencia, a cada forma semiclásica L se le puede asociar una familia infinita de pares admisibles y una familia de enteros no negativos h(L),

$$h(L) = \{\text{máx.}\{\text{grad } \phi - 2,\ \text{grad } \psi - 1\} : (\phi, \psi) \text{ es admisible para } L\}.$$

Definición 1.2

Se llama *clase de* L al elemento mínimo de h(L).

Proposición 1.1 [53]

Para cada forma semiclásica L, el par (ϕ, ψ) que define la clase es único$_\blacksquare$

Con este lenguaje, según se ha visto en § 3. del Capítulo I, los polinomios clásicos son los semiclásicos de clase s = 0.

A continuación se presenta un criterio para determinar la clase de un funcional semiclásico:

Supongamos que L satisface la ecuación $D(\phi L) + \psi L = 0$. Sea $Z_\phi = \{\alpha : \phi(\alpha) = 0\}$ y sean ϕ_α, ψ_α y r_α tales que

$$\phi(x) = (x-\alpha)\ \phi_\alpha(x)$$
$$\psi(x) + \phi_\alpha(x) = (x-\alpha)\ \psi_\alpha(x) + r_\alpha.$$

Proposición 1.2 [53]

Sea L semiclásico verificando (1.1) y sea $s = \text{máx.}\{p-2, q-1\}$, donde $p = \text{grad } \phi$ y $q = \text{grad } \psi$. Entonces L es de clase s si y sólo si

$$\prod_{\alpha \in Z_\phi} (|r_\alpha| + |(\psi_\alpha L)_0|) \neq 0.$$

Demostración

$$0 = D(\phi L) + \psi L = D((x-\alpha)\, \phi_\alpha L) + \psi L = \phi_\alpha L + (x-\alpha)\, D(\phi_\alpha L) + \psi L =$$

$$= (x-\alpha)\, \{D(\phi_\alpha L) + \psi_\alpha L\} + r_\alpha L$$

y multiplicando por $(x-\alpha)^{-1}$, esta relación es equivalente a

$$D(\phi_\alpha L) + \psi_\alpha L = (\psi_\alpha L)_0\, \delta(x-\alpha) - r_\alpha\, (x-\alpha)^{-1} L,$$

lo que significa que

$$D(\phi_\alpha L) + \psi_\alpha L = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad |r_\alpha| + |(\psi_\alpha L)_0| = 0.$$

En consecuencia, L es de clase s si y sólo si $|r_\alpha| + |(\psi_\alpha L)_0| \neq 0$ para todo $\alpha \in Z_\phi$, que es la condición buscada ■

Definición 1.3

Se dice que $D(\phi L) + \psi L = 0$ es la *ecuación irreducible* de L cuando $\prod_{\alpha \in Z_\phi} (|r_\alpha| + |(\psi_\alpha L)_0|) \neq 0$. Se dice que es irreducible en α cuando $|r_\alpha| + |(\psi_\alpha L)_0| \neq 0$.

Se pasa ahora a ver la generalización de algunas de las caracterizaciones de los polinomios clásicos dadas en el Apéndice del Capítulo I.

§ 2. Relación de Estructura de los Polinomios Semiclásicos.

La extensión de la caracterización de los polinomios clásicos debida a W. Al-Salam y a T.S. Chihara es la siguiente:

Proposición 2.1 [53]

Sea L regular y $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ su correspondiente S.P.O. mónica. Son equivalentes:

i) L es semiclásico de clase s.

ii) Existe un polinomio $\phi(x)$ de grado p, $0 \leq p \leq s+2$, tal que

$$\phi(x)\ P'_n(x) = \sum_{k=n-s}^{n+p} a_{nk}\ P_k(x), \quad n \geq s, \tag{2.1}$$

con a_{nk} constantes tales que $a_{n,n-s} \neq 0$, $n \geq s+1$.

Demostración

i) $\Rightarrow$ ii). El polinomio $\phi(x)\ P'_{n+1}(x)$ escrito en términos de los elementos de la S.P.O. asociada a L vendrá dada por

$$\phi(x)\ P'_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+p} a_{nk}\ P_k(x) \quad \text{con} \quad a_{nk} = \frac{< L,\ \phi\ P'_{n+1}\ P_k >}{< L,\ P_k^2 >}.$$

Pero

$$< L,\ \phi\ P'_{n+1}\ P_k > = < \phi\ L,\ P'_{n+1}\ P_k > = < \phi\ L,\ (P_{n+1}\ P_k)' - P_{n+1}\ P'_k > =$$

$$= - < D(\phi\ L),\ P_k\ P_{n+1} > - < \phi\ L,\ P'_k\ P_{n+1} >$$

y, como $D(\phi\ L) + \psi\ L = 0$, esto es lo mismo que

$$< \psi\ L,\ P_k\ P_{n+1} > - < \phi\ L,\ P'_k\ P_{n+1} > = < L,\ \psi\ P_k\ P_{n+1} > - < L,\ \phi\ P'_k\ P_{n+1} >.$$

Teniendo ahora en cuenta que $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ es la S.P.O. asociada a L,

$$< L,\ \phi\ P_k\ P'_{n+1} > = 0 \quad \text{si} \quad k+q < n+1 \quad \text{y} \quad k-1+p < n+1,$$

y por lo tanto, $a_{nk} = 0$ cuando $k < n-s$. Por consiguiente

$$\phi(x)\ P'_{n+1}(x) = \sum_{k=n-s}^{n+p} a_{nk}\ P_k(x), \quad n \geq s.$$

Para probar que $a_{n,n-s} \neq 0$ se analiza cada una de las tres posibilidades que pueden presentarse:

I) $p < s+2$, $q = s+1$.

En este caso $\text{grad}(\phi\, P'_{n-s}) \leq n$ y $\text{grad}(\psi\, P_{n-s}) = n+1$. Entonces

$$< L, P^2_{n-s} > a_{n,n-s} = < L, \psi\, P_{n-s}\, P_{n+1} > \neq 0.$$

II) $p = s+2$, $q < s+1$.

Entonces $\text{grad}(\phi\, P'_{n-s}) = n+1$, $\text{grad}(\psi\, P_{n-s}) \leq n$ y como consecuencia,

$$< L, P^2_{n-s} > a_{n,n-s} = - < L, \phi\, P'_{n-s}\, P_{n+1} > \neq 0.$$

III) $p = s+2$, $q = s+1$.

Teniendo en cuenta que $\phi(x) = x^{s+2} + \ldots$, que $\psi(x) = b_{s+1}\, x^{s+1} + \ldots$ y que cada $P_n(x)$ es mónico, se tendrá

$$\psi\, P_{n-s} - \phi\, P'_{n-s} = (b_{s+1} - (n-s))\, x^{n+1} + \ldots \quad \text{y por tanto}$$

$$< L, P^2_{n-s} > a_{n,n-s} = (b_{s+1} - (n-s)) < L, x^{n+1}\, P_{n+1} >,$$

que es no nulo puesto que en este caso b_{s+1} no puede ser un entero no negativo según se ha dicho en la Observación (2) de la Definición 1.1.

ii) $\Rightarrow$ i)

$$\phi(x)\, P'_{n+1} = \sum_{k=n-s}^{n+p} a_{nk}\, P_k, \quad n \geq s. \quad \text{Por tanto}$$

$$< L, \phi\, P'_{n+1} > = \begin{cases} 0 & \text{cuando} \quad n \geq s+1 \\ a_{s,0} & \text{cuando} \quad n = s \end{cases}$$

y entonces

(2.2) $\qquad < D(\phi\, L), P_{n+1} > = 0 \quad \text{si} \quad n \geq s+1.$

Escribiendo $D(\phi\, L)$ en términos de la sucesión dual $(L_n)_{n=0}^{\infty}$ se tendrá que

$$D(\phi\, L) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j\, L_j, \quad \text{con} \quad L_j = \frac{P_j(x)}{< L\, ,\, P_j^2(x) >}\, L$$

y, como $\lambda_j = < D(\phi\ L),\ P_j >$, la relación (2.2) significa que $\lambda_j = 0$ para $j \geq s+2$. Entonces

$$(2.3) \qquad D(\phi\, L) = \sum_{j=0}^{s+1} \lambda_j\, L_j = -\, \psi(x)\, L, \quad \text{con} \quad \text{grad}\ \psi \leq s+1$$

y por tanto L es semiclásico. Para ver que L es de clase s se distinguen dos casos:

I) $a_{s,0} \neq 0$.

De (2.2) se deduce que $< D\ (\phi\ L),\ P_{s+1} > = a_{s,0} \neq 0$, y por (2.3), grad $\psi = s+1$. Como grad $\phi \leq s+2$, máx{grad ϕ - 2, grad ψ -1} = s y entonces L es de clase s.

II) $a_{s,0} = 0$.

En este caso las expresiones (2.2) y (2.3) implican que grad $\psi < s+1$. Se verá que grad $\phi = s+2$.

Como $\phi(x)\ P'_{n+1} = \sum_{k=n-s}^{n+p} a_{nk}\ P_k$ entonces $< L,\ \phi\ P'_{n+1}\ P_{n-s} > = a_{n,n-s} < L,\ P^2_{n-s} >$

y por hipótesis, $a_{n,n-s} \neq 0$ para $n \geq s+1$. Pero

$$< L,\ \phi\ P'_{n+1}\ P_{n-s} > = < \phi\ L,\ (P_{n+1}\ P_{n-s})' - P_{n+1}\ P'_{n-s} > =$$

$$= -\ < D(\phi\ L),\ P_{n+1}\ P_{n-s} > -\ < L,\ \phi\ P_{n+1}\ P'_{n-s} >.$$

Teniendo ahora en cuenta (2.3) y que grad $\psi < s+1$,

$$-\ < D(\phi\ L),\ P_{n+1}\ P_{n-s} > = < L,\ \psi\ P_{n+1}\ P_{n-s} > = 0,$$

y por lo tanto, para $n \geq s+1$,

$$0 \neq\ < L,\ \phi\ P'_{n+1}\ P_{n-s} > = -\ < L,\ \phi\ P'_{n-s}\ P_{n+1} >,$$

de lo que se deduce que grad($\phi\ P'_{n-s}$) $\geq n+1$ y, como consecuencia, que grad $\phi \geq s+2$. Como por hipótesis grad $\phi \leq s+2$, se tendrá que grad $\phi = s+2$. Luego L es de clase s ∎

Observación

Teniendo en cuenta la relación de recurrencia a tres términos de la sucesión $(P_n)_{n=0}^{\infty}$

$$P_{n+1}(x) = (x-\beta_n)\, P_n(x) - \gamma_n\, P_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x-\beta_0,$$

la ecuación (2.1) se puede expresar de la forma

$$(2.4) \qquad \phi(x)\, P_n'(x) = M(x,n)\, P_{n+1}(x) + N(x,n)\, P_n(x), \quad n \geq 0,$$

donde $M(x,n)$ y $N(x,n)$ son polinomios cuyos coeficientes pueden depender de n pero no sus grados, que son independientes de n y además verifican que

$$\text{grad } M \leq s, \quad \text{grad } N \leq s+1.$$

Esto explica el interés de conocer el orden de la clase de un funcional, puesto que proporciona cotas para los grados de los polinomios $M(x,n)$ y $N(x,n)$, y es en parte la motivación del trabajo realizado en § 5. y § 6. de este Capítulo, donde se estudian, además de la regularidad, las modificaciones que se producen en la clase de un funcional cuando este se perturba con una masa de Dirac o con su derivada.

§ 3. Ecuación Diferencial de los P.O. Semiclásicos

La extensión de la caracterización de Bochner para los polinomios clásicos es la siguiente:

Proposición 3.1 (Hahn [23])

Sea L regular y $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ su S.P.O. mónica. L es semiclásico de clase s si y sólo si existen polinomios $J(x,n)$, $K(x,n)$ y $L(x,n)$, cuyos grados son independientes de n y tales que

$$(3.1) \qquad J(x,n)\, P_n''(x) + K(x,n)\, P_n'(x) + L(x,n)\, P_n(x) = 0, \quad n \geq 0,$$

donde grad $J \leq 2s+2$, grad $K \leq 2s+1$, grad $L \leq 2s$.

Demostración

Por brevedad se escribirá $J_n(x)$ ó J_n en lugar de $J(x,n)$. Lo mismo se hará para $K(x,n)$ y $L(x,n)$.

Supongamos que L es semiclásico de clase s y que $D(\phi\ L) + \psi\ L = 0$ es su ecuación distribucional. Por (2.4) existen polinomios $M_n(x)$ y $N_n(x)$ cuyos grados no dependen de n aunque si pueden depender los coeficientes, tales que

$$(3.2) \qquad \phi(x)\ P'_n(x) = M_n(x)\ P_{n+1}(x) + N_n(x)\ P_n(x), \quad n \geq 0,\ \text{grad}\ M_n \leq s,\ \text{grad}\ N_n \leq s+1.$$

Utilizando la relación de recurrencia a tres términos de la S.P.O. $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ y teniendo en cuenta (2.1), se pueden encontrar polinomios $A_n(x)$ y $B_n(x)$ con grados independientes de n tales que

$$(3.3) \qquad \phi(x)\ P''_n(x) + \psi(x)\ P'_n(x) = A_n(x)\ P_{n+1}(x) + B_n(x)\ P_n(x), \quad n \geq 0,$$

$$\text{grad}\ A_n \leq s\text{-}1,\ \text{grad}\ B_n \leq s.$$

Multiplicando (3.3) por $M_n(x)$ y (3.2) por $A_n(x)$, y restando las expresiones, se obtiene la relación (3.1) con

$$J(x,n) = \phi(x)\ M(x,n)$$

$$K(x,n) = \psi(x)\ M(x,n) - \phi(x)\ A(x,n)$$

$$L(x,n) = M(x,n)\ B(x,n) - N(x,n)\ A(x,n).$$

Por consiguiente, grad $J \leq 2s+2$, grad $K \leq 2s+1$ y grad $L \leq 2s$.

Recíprocamente, supongamos que se verifica (3.1). Como

$$P_n = (x-\beta_{n-1})\ P_{n-1} - \gamma_{n-1}\ P_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

entonces

$$P'_n = P_{n-1} + (x-\beta_{n-1})\, P'_{n-1} - \gamma_{n-1}\, P'_{n-2}\ , \quad n \geq 2$$

$$P''_n = 2P'_{n-1} + (x-\beta_{n-1})\, P''_{n-1} - \gamma_{n-1}\, P''_{n-2}\ , \ n \geq 2.$$

Multiplicando la expresión de P''_n por $J_{n+1} J_n J_{n-1}$, se obtiene

$$(3.4) \qquad J_{n-2} J_{n-1}(-K_n P'_n - L_n P_n) = 2J_{n-2} J_{n-1} P'_{n-1} + (x-\beta_{n-1})\, J_{n-2} J_n(-K_{n-1} P'_{n-1} - L_{n-1} P_{n-1}) -$$

$$- \gamma_{n-1} J_{n-1} J_n\, (- K_{n-2} P'_{n-2} - L_{n-2} P_{n-2})$$

y utilizando la expresión de P'_n ,

$$(3.5) \qquad \pi_{n1}(x)\, P_n(x) + \pi_{n2}(x)\, P_{n-2}(x) = \pi_{n3}(x)\, P'_n(x) + \pi_{n4}(x)\, P'_{n-1}(x),$$

donde

$$\pi_{n1}(x) = - J_{n-1}\, J_{n-2}\, L_n$$

$$\pi_{n2}(x) = - (x-\beta_{n-1})\, J_n\, J_{n-2}\, L_n + J_n\, J_{n-1}\, [(x-\beta_{n-1})\, L_{n-2} + K_{n-1}]$$

$$\pi_{n3}(x) = J_{n-1}\, J_{n-2}\, K_n - J_n\, J_{n-1}\, K_{n-1}$$

$$\pi_{n4}(x) = 2\, J_n\, J_{n-1}\, J_{n-2} + (x-\beta_{n-1})\, J_n(J_{n-1} - J_{n-2})\, K_{n-1}.$$

Utilizando las expresiones de P_n y P'_n, el primer término de (3.4) también se puede escribir de la forma

$$(3.6) \qquad \vartheta_{n1} P_n(x) + \vartheta_{n2}(x)\, P_{n-1}(x) = \vartheta_{n3}(x)\, P'_n(x) + \vartheta_{n4}(x)\, P'_{n-1}(x)$$

con

$$\vartheta_{n1}(x) = J_n\, J_{n-1}\, [- K_{n+1} - (x-\beta_n)\, L_{n+1}] + (x-\beta_n)\, J_{n+1}\, J_n\, L_n$$

$$\vartheta_{n2}(x) = \gamma_n\, J_n(J_{n-1}\, L_{n+1} - J_{n+1}\, L_{n-1})$$

$$\vartheta_{n3}(x) = (x-\beta_n)\, J_n\, J_{n-1}\, K_{n+1} + 2J_{n+1}\, J_n\, J_{n-1} - (x-\beta_n)\, J_{n+1}\, J_{n-1}\, K_n$$

$$\vartheta_{n4}(x) = -\gamma_n J_n (J_{n-1} K_{n+1} - J_{n+1} K_{n-1}).$$

Multiplicando (3.5) por ϑ_{n4} ,(3.6) por π_{n4} y restando, se obtiene

$$(3.7) \qquad A_n(x) P_n(x) + B_n(x) P_{n-1}(x) = E_n(x) P'_n(x),$$

donde

$$A_n(x) = \pi_{n4} \vartheta_{n4} - \vartheta_{n1} \pi_{n4}$$

$$B_n(x) = \pi_{n2} \vartheta_{n4} - \vartheta_{n2} \pi_{n4}$$

$$E_n(x) = \pi_{n3} \vartheta_{n4} - \vartheta_{n3} \pi_{n4}.$$

Si se multiplica (3.5) por ϑ_{n3} y (3.6) por π_{n3}, el resultado es

$$(3.8) \qquad G_n(x) P_n(x) + H_n(x) P_{n-1}(x) = E_{n+1}(x) P'_n(x)$$

siendo

$$G_n(x) = (x-\beta_n) (\vartheta_{n+1,1} \pi_{n+1,3} - \pi_{n+1,1} \vartheta_{n+1,3}) + \vartheta_{n+1,2} \pi_{n+1,3} - \pi_{n+1,2} \vartheta_{n+1,3}$$

$$H_n(x) = - \gamma_n(\vartheta_{n+1,1} \pi_{n+1,3} - \pi_{n+1,1} \vartheta_{n+1,3}).$$

Como $E_{n+1}(x)$ y $E_n(x)$ son polinomios del mismo grado, las expresiones (3.7) y (3.8) son, para cada n, iguales salvo un factor constante:

$$E_{n+1}(x) = c_n E_n(x),\ n \geq 0. \text{ Por lo tanto } E_n(x) = c_{n-1} \dots c_0 E_0(x)$$

y en consecuencia,

$$\phi(x) \equiv (c_{n-1} \dots c_0)^{-1} E_n(x) = E_0(x)$$

es independiente de n.

Usando la relación de recurrencia, (3.7) se puede entonces escribir de la forma

$$\phi(x)\, P'_n(x) = M_n(x)\, P_{n+1}(x) + N_n(x)\, P_n(x)$$

con

$$M_n(x) = -\,(\gamma_n\, c_{n-1} \ldots c_0)^{-1}\, B_n(x)$$

$$N_n(x) = (c_{n-1} \ldots c_0)^{-1}\, [A_n(x) + \gamma_n^{-1}\, (x-\beta_n)\, B_n(x)].$$

Entonces la Proposición 2.1 implica que L es semiclásico de clase s ∎

§ 4. Ecuación de la Serie Formal de Stieltjes.

Proposición 4.1 [60]

Sea L regular. Son equivalentes:

i) L es semiclásico de clase s.

ii) La serie formal de Stieltjes S(z) asociada a L verifica

$$\phi(z)\, S'(z) = C(z)\, S(z) + D(z), \tag{4.1}$$

donde $\phi(z)$, $C(z)$ y $D(z)$ son polinomios tales que

a) $\phi(z)$ es mónico.

b) Sea $p = \text{grad}\ \phi$. Si $\text{grad}(\phi' + C) = p-1 \geq 1$, el coeficiente principal de $\phi' + C$ no es un entero negativo.

c) $s = \text{máx}\ \{\text{grad}\ C - 1, \text{grad}\ D\}$.

Demostración

i) $\Rightarrow$ ii)

Sean $\phi(x) = \sum_{i=0}^{s+2} a_i\, x^i$, $\psi(x) = -\sum_{i=0}^{s+1} b_i\, x^i$, $\text{grad}\ \phi = p \leq s+2$, $\text{grad}\ \psi = q \leq s+1$, tales que $D(\phi\, L) + \psi\, L = 0$. Denotando $\mu_n = \langle L, x^n \rangle$, $n \geq 0$, se tiene que

$$n \sum_{i=0}^{s+2} a_i\, \mu_{n+i-1} + \sum_{i=0}^{s+1} b_i\, \mu_{n+i} = 0,\ n \geq 0$$

y por tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(n \sum_{i=0}^{s+2} a_i \frac{\mu_{n+i-1}}{z^{n+1}}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{s+1} b_i \frac{\mu_{n+i}}{z^{n+1}} = 0.$$

Entonces

$$\sum_{i=0}^{s+2} a_i \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\mu_{n+i-1}}{z^{n+1}} + \sum_{i=0}^{s+1} b_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_{n+i}}{z^{n+1}} = 0. \tag{4.2}$$

Teniendo en cuenta que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_{n+i}}{z^{n+1}} = - z^i\left(S(z) + \sum_{n=0}^{i-1} \frac{\mu_n}{z^{n+1}}\right.$$

y que

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\mu_{n+i-1}}{z^{n+1}} = z^i \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{\mu_{n+i}}{z^{n+2+1}} =$$

$$= z^i \left[\left\{ S'(z) - \sum_{n=0}^{i} (n+1) \frac{\mu_n}{z^{n+2}} \right\} - i \left\{ - \frac{S(z)}{z} - \sum_{n=0}^{i-1} \frac{\mu_n}{z^{n+2}} \right\} \right] =$$

$$= - z^i S'(z) + i z^{i-1} S(z) + z^i \sum_{n=0}^{i-1} (i-n-1) \frac{\mu_n}{z^{n+2}} ,$$

la fórmula (4.2) es equivalente a

$$S'(z) \sum_{i=0}^{s+2} a_i z^i + S(z) \sum_{i=0}^{s+2} i a_i z^{i-1} + \sum_{i=0}^{s+2} a_i \left(\sum_{n=0}^{i-1} (i-n-1) \frac{\mu_n}{z^{n+2}} \right) z^i -$$

$$- S(z) \sum_{i=0}^{s+1} b_i z^i - \sum_{i=0}^{s+1} b_i \left(\sum_{n=0}^{i-1} \frac{\mu_n}{z^{n+1}} \right) z^i = 0,$$

lo que significa que

$$\phi(z) S(z) + [\phi'(z) + \psi(z)] S(z) =$$

$$= -\sum_{i=0}^{s+2} a_i\left(\sum_{n=0}^{i-1} (i-n-1) \frac{\mu_n}{z^{n+2}}\right) z^i + \sum_{i=0}^{s+1} b_i \sum_{n=0}^{i-1} \frac{\mu_n}{z^{n+1}} z^i$$

que es la expresión (4.1) con

$$C(z) = - \psi(z) - \phi'(z)$$

$$D(z) = -\sum_{i=0}^{s+2} a_i\left(\sum_{n=0}^{i-1} (i-n-1) \frac{\mu_n}{z^{n+2}}\right) z^i + \sum_{i=0}^{s+1} b_i \sum_{n=0}^{i-1} \frac{\mu_n}{z^{n+1}} z^i.$$

Por consiguiente, grad$(D(z) \leq s$ y el coeficiente de z^s es $d_s = [b_{s+1} - (s+1)a_{s+2}]\ \mu_0$ Además, si grad $(\phi' + C = - \psi) = p-1$, tendrá que ser grad $\phi = p = s+2$. Estamos entonces en el caso excluido en la Observación (2) de la Definición 1.1. Por lo tanto, el coeficiente principal no puede ser un entero negativo. Se tiene así b). Las condiciones a) y c) se comprueban de forma inmediata.

ii) $\Rightarrow$ i)

Las condiciones b) y c) aseguran que grad $C \leq s+1$, grad $D \leq s$ y que al menos se da una de las igualdades. Además (4.1) garantiza que grad $\phi \leq s+2$.

Sea $\phi(z) = \sum_{i=0}^{s+2} a_i z^i$ y $C(z) = \sum_{i=0}^{s+1} c_i z^i$. Entonces (4.1) toma la forma

$$D(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} \left[\sum_{i=0}^{s+2} a_i (n+1) \mu_n z^{i-2} + \sum_{i=0}^{s+1} c_i \mu_n z^{i-1} \right]$$

o lo que es lo mismo,

$$D(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 n \frac{\mu_{n-1}}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1) a_1 + c_0] \frac{\mu_n}{z^{n+1}} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{s} [a_{i+2} (n+1) + c_{i+1}] \mu_n z^{i-n}.$$

Como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{s} [a_{i+2} (n+1) + c_{i+1}] \mu_n z^{i-n} = \sum_{i=0}^{s} \sum_{n=0}^{i} [a_{i+2} (n+1) + c_{i+1}] \mu_n z^{i-n} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{s} \sum_{n=i+1}^{\infty} [a_{i+2}(n+1) + c_{i+1}] \mu_n z^{i-n},$$

D(z) se puede escribir de la forma

$$D(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \left\{ a_0 n \mu_{n-1} + [(n+1) a_1 + c_0] \mu_n + \sum_{i=0}^{s} [a_{i+2}(n+i+2) + c_{i+1}] \mu_{n+i+1} \right\} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{s} \sum_{n=0}^{i} [a_{i+2} (n+1) + c_{i+1}] \mu_n z^{i-n}.$$

Teniendo ahora en cuenta que D(z) es un polinomio,

$$0 = a_0 n \mu_{n-1} + [(n+1) a_1 + c_0] \mu_n + \sum_{i=0}^{s} [a_{i+2}(n+i+2) + c_{i+1}] \mu_{n+i+1}, \quad n \geq 0,$$

de donde se deduce que

$$-< D(\phi L), x^n > + < (\phi' + C) L, x^n >= 0, \quad n \geq 0.$$

Por lo tanto, $D(\phi L) + \psi L = 0$ con $\phi' + C = - \psi$ y L es semiclásico. Además, es inmediato que las condiciones a), b), c) aseguran que $\text{máx} \{ \text{grad } \phi - 2, \text{grad } \psi - 1 \} = s$, por lo que L es semiclásico de clase s ∎

Finalmente, en los epígrafes 5 y 6 de este Capítulo, se estudia el efecto que producen, en la regularidad y en la clase, las modificaciones de un funcional semiclásico por medio de una medida de Dirac y por su derivada.

§ 5. Modificación de un Funcional Semiclásico con una Masa de Dirac

Proposición 5.1. (Marcellán, Maroni [44])

Sea L una forma regular, $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ la correspondiente S.P.O. mónica, y c un complejo arbitrario. Entonces, $\overline{L} = L + \lambda\ \delta(x-c)$ es regular si y sólo si

$$(5.1) \qquad 1 + \lambda \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k^2(c)}{< L,\ P_k^2 >} \neq 0 \text{ para todo } n \geq 0.$$

Demostración

Para demostrar que la condición es necesaria se procede por inducción.

Si $\overline{L}$ es regular, necesariamente $< \overline{L},\ 1 > \neq 0$. Pero

$$< \overline{L},\ 1 > = < L,\ 1 > + \lambda < \delta(x-c),\ 1 > = < L,\ 1 > \left(1 + \frac{\lambda}{< L,\ 1 >} \right).$$

Por consiguiente, la relación (5.1) es válida cuando n = 0.

Supongamos que (5.1) es válida para 0,1,...,n-1. Sea $(\overline{P}_k)_{k=0}^{\infty}$ la S.P.O mónica con respecto a $\overline{L}$.

$$\overline{P}_n(x) = P_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_{nk}\ P_k(x) \quad \text{donde} \quad a_{nk} = \frac{< L,\ \overline{P}_n\ P_k >}{< L,\ P_k^2 >},\ 0 \leq k \leq n\text{-}1.$$

$$< L,\ \overline{P}_n\ P_k > = < \overline{L},\ \overline{P}_n\ P_k > - \lambda < \delta(x-c),\ \overline{P}_n\ P_k > = - \lambda\ \overline{P}_n(c)\ P_k(c)$$

y por lo tanto

$$\overline{P}_n(x) = P_n(x) - \lambda\ \overline{P}_n(c) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_k(c)}{< L,\ P_k^2 >}\ P_k(x).$$

Haciendo x = c en esta fórmula y teniendo en cuenta la hipótesis de inducción,

$$\overline{P}_n(c) = P_n(c) \left[1 + \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_k^2(c)}{< L,\ P_k^2 >} \right]^{-1}$$

de donde se deduce que

$$\overline{P}_n(x) = P_n(x) - \lambda\, P_n(c) \left[1 + \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_k^2(c)}{< L, P_k^2 >}\right]^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_k(c)\, P_k(x)}{< L, P_k^2 >}$$

Operando se obtiene que

$$0 \neq < \overline{L}, \overline{P}_n\, P_n > = < L, P_n^2 > \left[1 + \lambda \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k^2(c)}{< L, P_k^2 >}\right] \left[1 + \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_k^2(c)}{< L, P_k^2 >}\right]^{-1}$$

y en consecuencia,

$$1 + \lambda \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k^2(c)}{< L, P_k^2 >} \neq 0.$$

Recíprocamente, sea $\overline{P}_n(x)$ el polinomio dado por

$$\overline{P}_n(x) = P_n(x) - \lambda\, P_n(c) \left[1 + \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_k^2(c)}{< L, P_k^2 >}\right]^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_k(c)\, P_k(x)}{< L, P_k^2 >}$$

que está bien definido por la condición (5.1). Es inmediato comprobar que $(\overline{P}_n)_{n=0}^{\infty}$ es la SPO mónica con respecto a $\overline{L} = L + \lambda\, \delta(x-c)$ y por consiguiente, $\overline{L}$ es regular ∎

Proposición 5.2

Sea L un funcional de momentos tal que $D(\phi L) + \psi L = 0$. Entonces $\overline{L} = L + \lambda\, \delta(x-c)$ satisface la ecuación

(5.2) $\quad D((x-c)^2 \phi\, \overline{L}) + \{(x-c)^2 \psi - 2(x-c)\phi\}\, \overline{L} = 0.$

Demostración

Como $\overline{L} = L + \lambda\, \delta(x-c)$ entonces $(x-c)\, \overline{L} = (x-c)\, L$. Además,

$$D((x-c)^2\, \phi\, \overline{L}) = (x-c)\, \phi\, \overline{L} + (x-c)\, D[(x-c)\, \phi\, \overline{L}] = (x-c)\, \phi\, \overline{L} + (x-c)\, D[(x-c)\, \phi\, L]$$

$$= (x\text{-}c)\ \phi\ \overline{L} + (x\text{-}c)\ \{\phi\ L + (x\text{-}c)\ D(\phi\ L)\} = 2(x\text{-}c)\ \phi\ \overline{L} - (x\text{-}c)^2\ \psi\ L,$$

de donde

$$D((x\text{-}c)^2\ \phi\ \overline{L}) + \{(x\text{-}c)^2\ \psi - 2(x\text{-}c)\ \phi\}\ \overline{L} = 0_{\blacksquare}$$

Corolario

Sea L semiclásico de clase s y sea $D(\phi\ L) + \psi\ L = 0$ su ecuación irreducible. Sea $\overline{L} = L + \lambda\ \delta(x\text{-}c)$ con λ verificando la condición (5.1). Entonces $\overline{L}$ es semiclásico de clase $\bar{s}$ con $s\text{-}2 \leq \bar{s} \leq s+2$.

Demostración

Las Proposiciones 5.1 y 5.2 aseguran que $\overline{L}$ es semiclásico, y la relación (5.2) supone que $\bar{s} \leq s+2$. Como $L = \overline{L} - \lambda\ \delta(x\text{-}c)$, de nuevo por la Proposición 5.1, $s \leq \bar{s}+2$. Luego $s\text{-}2 \leq \bar{s} \leq s+2_{\blacksquare}$

Veamos en que condiciones la ecuación (5.2) se puede reducir:

Se denota la ecuación (5.2) de $\overline{L}$ en la forma $D(\overline{\phi}\ \overline{L}) + \overline{\psi}\ \overline{L} = 0$.

Proposición 5.3

$D(\overline{\phi}\ \overline{L}) + \overline{\psi}\ \overline{L} = 0$ es irreducible en toda raíz de $\overline{\phi}(x)$ distinta de c.

Demostración

Sea $\alpha \neq c$ una raíz de $\overline{\phi}(x)$. Se denota

$$\phi(x) = (x\text{-}\alpha)\ \phi_\alpha(x),\quad \psi(x) + \phi_\alpha(x) = (x\text{-}\alpha)\ \psi_\alpha(x) + r_\alpha$$

$$\overline{\phi}(x) = (x\text{-}\alpha)\ \overline{\phi}_\alpha(x),\quad \overline{\psi}(x) + \overline{\phi}_\alpha(x) = (x\text{-}\alpha)\ \overline{\psi}_\alpha(x) + \overline{r}_\alpha$$

Como $\overline{\phi}(x) = (x\text{-}c)^2\ \phi(x)$ y $\overline{\psi}(x) = (x\text{-}c)^2\ \psi(x) - 2(x\text{-}c)\ \phi(x)$, se tendrá

$$\overline{\phi}_\alpha(x) = (x-c)^2\, \phi_\alpha(x) \quad y \quad \overline{\psi}(x) + \overline{\phi}_\alpha(x) = (x-c)^2\, (\psi(x) + \phi_\alpha(x)) - 2(x-c)\, \phi(x),$$

de donde

$$\overline{r}_\alpha = \overline{\psi}(\alpha) + \overline{\phi}_\alpha(\alpha) = (\alpha-c)^2\, (\psi(\alpha) + \phi_\alpha(\alpha)) = (\alpha-c)^2\, r_\alpha.$$

Por lo tanto

(5.3) $\quad \overline{r}_\alpha \neq 0$ si y sólo si $r_\alpha \neq 0$.

Además, cuando $r_\alpha = 0$, $\overline{\psi}_\alpha(x) = (x-c)^2\, \psi_\alpha(x) - 2(x-c)\, \phi_\alpha(x)$, y así

$$(\overline{\psi}_\alpha\, \overline{L})_0 = < \overline{L}, \overline{\psi}_\alpha > = < L, \overline{\psi}_\alpha > + \lambda < \delta(x-c), \overline{\psi}_\alpha > = < L, \overline{\psi}_\alpha > =$$

$$= < D(\phi_\alpha\, L) + \psi_\alpha\, L, (x-c)^2 >.$$

Pero cuando $r_\alpha = 0$, como $D(\phi\, L) + \psi\, L = 0$ es irreducible en α, se tendrá

$$(x-\alpha)\, \{D(\phi_\alpha\, L) + \psi_\alpha\, L\} = 0 \text{ y por tanto } D(\phi_\alpha\, L) + \psi_\alpha\, L = (\psi_\alpha\, L)_0\, \delta(x-\alpha)$$

Por consiguiente

(5.4) $\quad (\overline{\psi}_\alpha\, \overline{L})_0 = (\psi_\alpha\, L)_0\, (\alpha-c)^2.$

Teniendo en cuenta la Proposición 1.2, de (5.3) y (5.4) se deduce que la ecuación

$$D(\overline{\phi}\, \overline{L}) + \overline{\psi}\, \overline{L} = 0 \quad \text{es irreducible en } \alpha \blacksquare$$

Como consecuencia, sólo es necesario estudiar bajo qué condiciones la ecuación es reducible en la raíz c.

La ecuación de $\overline{L}$ es

$$D((x-c)^2\, \phi\, \overline{L}) + ((x-c)^2\, \psi - 2(x-c)\, \phi)\, \overline{L} = 0$$

y derivando se obtiene

$$(x\text{-}c)\ \{D[(x\text{-}c)\ \phi\ \bar{L}] + ((x\text{-}c)\ \psi - \phi)\ \bar{L}\} = 0.$$

Además,

$$< \bar{L}, (x\text{-}c)\ \psi - \phi > = < L, (x\text{-}c)\ \psi - \phi > + \lambda < \delta(x\text{-}c), (x\text{-}c)\ \psi - \phi > =$$

$$= < \psi\ L + D(\phi\ L), (x\text{-}c) > + \lambda\ \phi(c) = \lambda\ \phi(c),$$

de lo que se deduce que

(5.5) <u>Si</u> $\phi(c) \neq 0$ <u>entonces</u> $\bar{L}$ <u>es de clase</u> $\bar{s} = s+2$.

Si $\phi(c) = 0$ entonces la ecuación se reduce a

$$D((x\text{-}c)\ \phi\ \bar{L}) + ((x\text{-}c)\ \psi - \phi)\ \bar{L} = 0$$

que, después de derivar, es

$$(x\text{-}c)\ \{D(\phi\ \bar{L}) + \psi\ \bar{L}\} = 0$$

Como $< \bar{L}, \psi > = < L, \psi > + \lambda\ \psi(c) = \lambda\ \psi(c)$, se tendrá:

(5.6) <u>Si</u> $\psi(c) \neq 0$ <u>entonces</u> $\bar{L}$ <u>es de clase</u> $\bar{s} = s+1$.

Si $\psi(c) = 0$, $\bar{L}$ verifica la ecuación $D(\phi\ \bar{L}) + \psi\ \bar{L} = 0$, que es equivalente a

$$(x\text{-}c)\ D(\frac{\phi}{x-c}\ \bar{L}) + \frac{\phi + (x-c)\ \psi}{x-c}\ \bar{L} = 0.$$

Es claro que esta ecuación es irreducible cuando $\phi'(c) \neq 0$ y por consiguiente

(5.7) $\phi'(c) \neq 0$ <u>implica que</u> $\bar{L}$ <u>es de clase</u> $\bar{s} = s$.

Cuando $\phi'(c) = 0$, la ecuación se escribe

$$(x-c)\left\{ D\left(\frac{\phi}{x-c}\,\bar{L}\right) + \frac{\phi + (x-c)\,\psi}{(x-c)^2}\,\bar{L} \right\} = 0$$

y puesto que

$$< \bar{L}, \frac{\phi + (x-c)\,\psi}{(x-c)^2} > \; = \; < L, \frac{\phi + (x-c)\,\psi}{(x-c)^2} > + \lambda\, \frac{\phi''(c) + 2\psi'(c)}{2},$$

y como además la ecuación de L es irreducible, $< L, \frac{\phi + (x-c)\,\psi}{(x-c)^2} > \; = \; < L, \psi_c > \neq 0$, y de esta forma:

(5.8) <u>Si</u> $\phi''(c) + 2\psi'(c) = 0$ <u>entonces</u> $\bar{s} = s$.

Cuando $\phi''(c) + 2\psi'(c) \neq 0$, hay que distinguir dos casos:

$$< L, \frac{\phi + (x-c)\,\psi}{(x-c)^2} > + \lambda\, \frac{\phi''(c) + 2\psi'(c)}{2} \neq 0$$

que indica que $\bar{L}$ es de clase s, o bien

$$\lambda = -2 < L, \frac{\phi + (x-c)\,\psi}{(x-c)^2} > (\phi''(c) + 2\psi'(c))^{-1}$$

que indica que $\bar{s} \leq s-1$. Como $\frac{\phi + (x-c)\,\psi}{(x-c)^2} = \psi_c(x)$, esto último se escribe

(5.9) $< L, \psi_c > + \lambda\, \frac{\phi''(c) + 2\psi'(c)}{2} \neq 0$ <u>implica que</u> $\bar{s} = s$

y $\lambda = -2 < L, \psi_c > (\phi''(c) + 2\psi'(c))^{-1}$ implica que $\bar{s} \leq s-1$. Estudiamos esta última posibilidad:

La ecuación tiene ahora la forma $D(\phi_c \bar{L}) + \psi_c \bar{L} = 0$, que después de derivar es

$$(x-c)\, D\left(\frac{\phi_c}{x-c}\,\bar{L}\right) + \frac{\phi_c + (x-c)\,\psi_c}{x-c}\,\bar{L} = 0.$$

Cuando $\left.\dfrac{\phi_c + (x-c)\ \psi_c}{x-c}\right|_{x=c} \neq 0$, la ecuación es irreducible. De forma equivalente

(5.10) $\quad \phi''(c) + \psi'(c) \neq 0$ <u>entonces</u> $\bar{s} = s-1$.

Cuando $\phi''(c) + \psi'(c) = 0$, la ecuación se reduce a

$$(x-c) \left\{ D(\frac{\phi_c}{x-c}\ \bar{L}\ ) + \frac{\phi_c + (x-c)\ \psi_c}{(x-c)^2}\ \bar{L} \right\} = 0$$

de lo que se deduce que, denotando $\phi_{cc}(x) = \dfrac{\phi(x)}{(x-c)^2}$, $\psi_{cc} = \dfrac{\phi_c + (x-c)\ \psi_c}{(x-c)^2} = \dfrac{\phi_{cc} + \psi_c}{x-c}$,

(5.11) $\quad \bar{s} = s-1$ <u>cuando</u> $< L, \psi_{cc} > + \lambda\ \psi_{cc}(c) \neq 0$

(5.12) $\quad$ <u>y es de clase</u> $\bar{s} = s-2$ <u>cuando</u> $< L, \psi_{cc} > + \lambda\ \psi_{cc}(c) = 0$

lo que termina el estudio porque $\bar{s} \geq s-2$ como se había visto en el Corolario de la Proposición 5.2.

Las relaciones (5.5) a (5.12) se resumen en el siguiente resultado.

Proposición 5.4

Con las notaciones anteriores, $\bar{L} = L + \lambda\ \delta(x-c)$ verifica

$\phi(c) \neq 0 \Rightarrow \bar{s} = s+2.$

$$\phi(c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \psi(c) \neq 0 \Rightarrow \bar{s} = s+1. \\ \psi(c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \phi'(c) \neq 0 \Rightarrow \bar{s} = s. \\ \phi'(c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \phi''(c) + 2\psi'(c) = 0 \Rightarrow \bar{s} = s. \\ \phi''(c) + 2\psi'(c) \neq 0 \Rightarrow [*] \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$[*]\quad \begin{cases} <L, \psi_c> + \lambda \dfrac{\phi''(c) + 2\psi'(c)}{2} \neq 0 \Rightarrow \bar{s} = s. \\ <L, \psi_c> + \lambda \dfrac{\phi''(c) + 2\psi'(c)}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \phi''(c) + \psi'(c) \neq 0 \Rightarrow \bar{s} = s\text{-}1. \\ \phi''(c) + \psi'(c) = 0 \Rightarrow [**] \end{cases} \end{cases}$$

$$[**]\quad \begin{cases} < L, \psi_{cc} > + \lambda\ \psi_{cc}(c) \neq 0 \Rightarrow \bar{s} = s\text{-}1. \\ < L, \psi_{cc} > + \lambda\ \psi_{cc}(c) = 0 \Rightarrow \bar{s} = s\text{-}2 \end{cases} \blacksquare$$

§ 6. Modificación con la Derivada de una Masa de Dirac.

En esta sección se sigue un desarrollo análogo al realizado en el epígrafe anterior.

Proposición 6.1 (Belmehdi, Marcellán [5])

Sea L una forma regular, $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ la correspondiente S.P.O. mónica, y c un complejo arbitrario. Entonces, $\overline{L} = L + \lambda\ \delta'(x\text{-}c)$ es regular si y sólo si

$$(6.1)\qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 - \lambda\ K_n^{(0,1)}(c,c) & -\lambda\ K_n^{(0,0)}(c,c) \\ -\lambda\ K_n^{(1,1)}(c,c) & 1 - \lambda\ K_n^{(0,1)}(c,c) \end{vmatrix} \neq 0,\ n \geq 0,$$

donde
$$K_n^{(i,j)}(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k^{(i)}(x)\ P_k^{(j)}(y)}{< L,\ P_k^2 >}.$$

Demostración

Se prueba por inducción que la condición (6.1) es necesaria.

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda / < L, 1 > \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Supongamos que $\bar{L}$ es regular y que la condición (6.1) se verifica para n-1.

Sea $(P_k)_{k=0}^{\infty}$ la correspondiente S.P.O. mónica con respecto a $\bar{L}$. Entonces

$$\bar{P}_n(x) = P_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_{nk} P_k(x) \quad \text{con} \quad a_{nk} = \frac{< L, \bar{P}_n \; P_k >}{< L, \; P_k^2 >}.$$

$$< L, \bar{P}_n P_k > = < \bar{L}, \bar{P}_n P_k > - \lambda < \delta'(x-c), \bar{P}_n P_k > = \lambda(\bar{P}'_n(c) P_k(c) + \bar{P}_n(c) \; P'_k(c))$$

cuando $k \leq n-1$. Entonces

$$\bar{P}_n(x) = P_n(x) + \lambda \; \bar{P}'_n(c) \; K_{n-1}^{(0,0)}(c,x) + \lambda \; \bar{P}_n(c) \; K_{n-1}^{(0,1)}(x,c).$$

De aquí se deduce que

$$\bar{P}_n(c) = P_n(c) + \lambda \; \bar{P}'_n(c) \; K_{n-1}^{(0,0)}(c,c) + \lambda \; \bar{P}_n(c) \; K_{n-1}^{(0,1)}(c,c)$$

$$\bar{P}'_n(c) = P'_n(c) + \lambda \; \bar{P}'_n(c) \; K_{n-1}^{(0,1)}(c,c) + \lambda \; \bar{P}_n(c) \; K_{n-1}^{(1,1)}(c,c)$$

o de forma equivalente

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda K_{n-1}^{(0,1)}(c,c) & -\lambda \; K_{n-1}^{(0,0)}(c,c) \\ -\lambda K_{n-1}^{(1,1)}(c,c) & 1 - \lambda \; K_{n-1}^{(0,1)}(c,c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_n(c) \\ \bar{P}'_n(c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_n(c) \\ P'_n(c) \end{bmatrix}$$

El determinante de este sistema es Δ_{n-1}, que por hipótesis de inducción es no nulo. Entonces

$$(6.2) \qquad \bar{P}_n(c) = \frac{\begin{vmatrix} P_n(c) & -\lambda \; K_{n-1}^{(0,0)}(c,c) \\ P'_n(c) & 1 - \lambda \; K_{n-1}^{(0,1)}(c,c) \end{vmatrix}}{\Delta_{n-1}}$$

$$(6.3) \qquad \overline{P}'_n(c) = \frac{\begin{vmatrix} 1 - \lambda \; K^{(0,1)}_{n-1}(c,c) & P_n(c) \\ -\lambda \; K^{(1,1)}_{n-1}(c,c) & P'_n(c) \end{vmatrix}}{\Delta_{n-1}}$$

lo que permite expresar $\overline{P}_n(x)$ en términos de $P_0(x),\dots,P_n(x)$. Además, como

$$K^{(i,j)}_n(c,c) = K^{(i,j)}_{n-1}(c,c) + \frac{P^{(i)}_n(c)\; P^{(j)}_n(c)}{< L,\, P^2_n >},$$

es fácil comprobar que

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = 1 - \frac{\lambda}{< L,\, P^2_n > \Delta_{n-1}} \Big[2\,(1 - \lambda\, K^{(0,1)}_{n-1}(c,c))\, P_n(c)\, P'_n(c) +$$

$$+ \lambda\, K^{(0,0)}_{n-1}(c,c)\, (P'_n(c))^2 + \lambda\, K^{(1,1)}_{n-1}(c,c)\, P^2_n(c) \Big].$$

Por otra parte

$$< \overline{L},\, \overline{P}_n\, P_n > = < L,\, \overline{P}_n\, P_n > + \lambda < \delta'(x-c),\, \overline{P}_n\, P_n > =$$

$$= < L,\, P^2_n > - \lambda\, (\, \overline{P}'_n(c)\, P_n(c) + \overline{P}_n(c)\, P'_n(c)\,)$$

y así

$$0 \neq \frac{< L,\, \overline{P}_n\, P_n >}{< L,\, P^2_n >} = 1 - \frac{\lambda}{< L,\, P^2_n >}\, (\, \overline{P}'_n(c)\, P_n(c) + \overline{P}_n(c)\, P'_n(c)\,).$$

Teniendo ahora en cuenta (6.2) y (6.3), se obtiene que

$$\overline{P}'_n(c)\, P_n(c) + \overline{P}_n(c)\, P'_n(c) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \Big[2\,(1 - \lambda\, K^{(0,1)}_{n-1}(c,c))\, P_n(c)\, P'_n(c) +$$

$$+ \lambda\, K^{(0,0)}_{n-1}(c,c)\, (P'_n(c))^2 + \lambda\, K^{(1,1)}_{n-1}(c,c)\, P^2_n(c) \Big]$$

por lo que $\dfrac{<\bar{L}, \bar{P}_n P_n>}{<L, P_n^2>} = \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$. Entonces $\Delta_n \neq 0$.

Recíprocamente, si (6.1) se verifica para todo $n \geq 0$, los polinomios

$$\bar{P}_n(x) = P_n(x) + \lambda\, \bar{P}'_n(c)\, K_{n-1}^{(0,0)}(c,x) + \lambda\, \bar{P}_n(c)\, K_{n-1}^{(0,1)}(x,c)$$

con $\bar{P}'_n(c)$ y $\bar{P}'_n(c)$ dados por (6.2) y (6.3), están bien definidos y es fácil comprobar que $(\bar{P}_n)_{n=0}^{\infty}$ es la S.P.O. mónica con respecto a $\bar{L}$. Por consiguiente $\bar{L}$ es regular ∎

Proposición 6.2

Sea L un funcional de momentos tal que $D(\phi L) + \psi L = 0$. Entonces $\bar{L} = L + \lambda\, \delta'(x-c)$ satisface la ecuación

(6.4) $\quad D((x-c)^3\phi\, \bar{L}) + \{(x-c)^3\psi - 3(x-c)^2\phi\}\, \bar{L} = 0.$

Demostración

$\bar{L} = L + \lambda\, \delta'(x-c)$ implica que $(x-c)^2\, \bar{L} = (x-c)^2\, L$. Además

$$D((x-c)^3\phi\, \bar{L}) = (x-c)^2\phi\, \bar{L} + (x-c)\, D((x-c)^2\phi\, \bar{L}) = (x-c)^2\phi\, L + (x-c)\, D((x-c)^2\phi\, L)$$

$$= (x-c)^2\phi\, L + (x-c)\, \{2(x-c)\phi\, L + (x-c)^2\, D(\phi\, L)\} = 3\, (x-c)^2\phi\, \bar{L} - (x-c)^3\psi\, \bar{L}.$$

Entonces

$$D((x-c)^3\phi\, \bar{L}) + \{(x-c)^3\psi - 3(x-c)^2\phi\}\, \bar{L} = 0$$ ∎

Corolario

Sea L semiclásico de clase s y sea $D(\phi\, L) + \psi\, L = 0$ su ecuación irreducible. Sea $\bar{L} = L + \lambda\, \delta'(x-c)$ con λ verificando la condición (6.1). Entonces $\bar{L}$ es semiclásico de clase $\bar{s}$ con $s-3 \leq \bar{s} \leq s+3$.

Demostración

$\bar{L}$ es semiclásico por las Proposiciones 6.1 y 6.2. Además, por la ecuación (6.4), ha ser $\bar{s} \le s+3$. El mismo razonamiento para $L = L-\lambda\,\delta'(x-c)$ lleva a que $s \le \bar{s}+3$. Entonces $s-3\le \bar{s}\le s+3$ ■

A continuación se estudian las posibles reducciones de la ecuación (6.4) utilizando las mismas notaciones del § 5.

Se escribe (6.4) en la forma $D(\bar{\phi}\,\bar{L}) + \bar{\psi}\,\bar{L} = 0$.

Proposición 6.3

La ecuación de $\bar{L}$, $D(\bar{\phi}\,\bar{L}) + \bar{\psi}\,\bar{L}= 0$, es irreducible en toda raíz α de $\bar{\phi}(x)$ que sea diferente de c.

Demostración

Sea $\alpha \ne c$ una de raíz de $\bar{\phi}(x)$. Como $\bar{\phi} = (x-c)^3\phi$ y $\bar{\psi} = (x-c)^3\psi-3(x-c)^2\phi$, se tiene

$$\bar{\phi}_\alpha(x) = (x-c)^3\,\phi_\alpha(x), \qquad \bar{\psi}(x) + \bar{\phi}_\alpha(x) = (x-c)^3\,(\psi(x) + \phi_\alpha(x)) - 3(x-c)^2\phi(x).$$

En consecuencia, $\bar{r}_\alpha = \bar{\psi}(\alpha) + \bar{\phi}_\alpha(\alpha) = (\alpha-c)^3(\psi(\alpha) + \phi_\alpha(\alpha)) = (\alpha-c)^3 r_\alpha$, de donde se deduce que $\bar{r}_\alpha \ne 0$ si y sólo si $r_\alpha \ne 0$.

Si $r_\alpha = 0$ entonces $\bar{\psi}_\alpha(x) = (x-c)^3\,\psi_\alpha(x) - 3(x-c)^2\phi_\alpha(x)$ y así

$$(\bar{\psi}_\alpha\,\bar{L})_0 = \langle \bar{L}, \bar{\psi}_\alpha \rangle = \langle L, \bar{\psi}_\alpha \rangle + \lambda \langle \delta'(x-c), \bar{\psi}_\alpha \rangle = \langle L, \bar{\psi}_\alpha \rangle =$$

$$= \langle \psi_\alpha L, (x-c)^3 \rangle - \langle \phi_\alpha L, 3(x-c)^2 \rangle = \langle D(\phi_\alpha L) + \psi_\alpha L, (x-c)^3 \rangle.$$

Como $D(\phi L) + \psi L = 0$ es irreducible en α, cuando $r_\alpha = 0$ se verifica que

$$D(\phi_\alpha L) + \psi_\alpha L = (\psi_\alpha L)_0\,\delta(x-\alpha)$$

y en consecuencia, $(\bar{\psi}_\alpha \bar{L})_0 = (\psi_\alpha L)_0(\alpha-c)^3$. Por tanto $(\bar{\psi}_\alpha \bar{L})_0 \ne 0$ en el caso de que r_α, y por tanto $\bar{r}_\alpha$, se anule. Por consiguiente, la ecuación del funcional L es irreducible en $\alpha \ne c$ ■

La ecuación de $\overline{L}$ sólo puede admitir reducciones en la raíz c. A continuación se estudia esta posibilidad.

Después de derivar, la ecuación de $\overline{L}$ se escribe de la forma

$$(x-c)\ \{D((x-c)^2\phi\ \overline{L}) + ((x-c)^2\psi - 2(x-c)\ \phi)\ \overline{L}\} = 0.$$

Además,

$$((x-c)^2\psi - 2(x-c)\phi\ \overline{L})_0 = < L,\ (x-c)^2\psi - 2(x-c)\phi > +$$

$$+ \lambda < \delta'(x-c),\ (x-c)^2\psi - 2(x-c)\phi > = < D(\phi\ L) + \psi\ L,\ (x-c)^2 > + 2\lambda\ \phi(c) =$$

$$= 2\lambda\ \phi(c)$$

y tenemos la primera conclusión:

(6.5) <u>Si</u> $\phi(c) \neq 0$ <u>entonces</u> $\bar{s} = s+3$.

Si $\phi(c) = 0$, la ecuación de $\overline{L}$ se reduce a

$$D((x-c)^2\ \phi\ \overline{L}) + ((x-c)^2\ \psi - 2(x-2)\ \phi)\ \overline{L} = 0$$

y derivando, $(x-c)\{D((x-c)\ \phi\ \overline{L} + ((x-c)\ \psi - \phi)\ \overline{L}\} = 0$. Además,

$$\left[((x-c)\ \psi - \phi)\ \overline{L}\ \right]_0 = < L,\ (x-c)\ \psi - \phi > + \lambda < \delta'(x-c),\ (x-c)\ \psi - \phi > =$$

$$= < D(\phi\ L) + \psi\ L,\ x-c > + \lambda\ (\phi'(c) - \psi(c)) = \lambda\ (\phi'(c) - \psi(c))$$

(6.6) <u>Si</u> $\phi'(c) - \psi(c) \neq 0$ <u>entonces</u> $\bar{s} = s+2$.

Cuando $\phi'(c) - \psi(c) = 0$ se tiene $(x-c)\ \{D(\phi\ \overline{L}) + \psi\ \overline{L}\} = 0$. Además,

$$(\psi\ \overline{L})_0 = < L,\ \psi > + \lambda < \delta'(x-c),\ \psi > = -\ \lambda\ \psi'(c).$$

(6.7) <u>Si</u> $\psi'(c) \neq 0$ <u>entonces</u> $\bar{s} = s+1$.

Supongamos que $\psi'(c) = 0$. Entonces $D(\phi\,\overline{L}) + \psi\,\overline{L} = 0$, que es equivalente a

$$(x\text{-}c)\ D(\phi_c\,\overline{L}) + (\psi + \phi_c)\,\overline{L} = 0.$$

Como $\phi'(c) = \psi(c)$ entonces $\psi(c) + \phi_c(c) = 2\phi'(c)$, y en consecuencia,

(6.8) $\phi'(c) \neq 0$ <u>implica que</u> $\bar{s} = s$.

Si $\phi'(c) = 0$, la ecuación es $(x\text{-}c)\ \{D(\phi_c\,\overline{L}) + \psi_c\,\overline{L}\} = 0$. Además

$$< \overline{L}, \psi_c > \,=\, < L, \psi_c > - \lambda\, \psi_c'(c) = \,< L, \psi_c > - \frac{\lambda}{6}\,(\phi'''(c) + 3\,\psi''(c)).$$

Como la ecuación de L es irreducible, $< L, \psi_c > \neq 0$ y por tanto

(6.9) <u>Si</u> $\phi'''(c) + 3\,\psi''(c) = 0$ <u>entonces</u> $\bar{s} = s$.

(6.10) <u>Si</u> $\phi'''(c) + 3\,\psi''(c) \neq 0$ <u>y</u> $\lambda \neq \dfrac{6 < L,\ \psi_c >}{\phi'''(c) + 3\,\psi''(c)}$ <u>entonces</u> $\bar{s} = s$.

Cuando $\lambda = \dfrac{6 < L,\ \psi_c >}{\phi'''(c) + 3\,\psi''(c)}$ con $\phi'''(c) + 3\,\psi''(c) \neq 0$, la ecuación es

$$D(\phi_c\,\overline{L}) + \psi_c\,\overline{L} = 0, \text{ o bien } (x\text{-}c)\ D(\phi_{cc}\,\overline{L}) + (\psi_c + \phi_{cc})\,\overline{L} = 0.$$

Como $(\psi_c + \phi_{cc})(c) = \phi''(c)$, se deduce

(6.11) <u>Si</u> $\phi''(c) \neq 0$ <u>entonces</u> $\bar{s} = s\text{-}1$.

El caso contrario es $(x\text{-}c)\ \{D(\phi_{cc}\,\overline{L}) + \psi_{cc}\,\overline{L}\} = 0$. Además,

$$< \overline{L}, \psi_{cc} > \,=\, < L, \psi_{cc} > - \lambda\, \psi_{cc}'(c) = \,< L, \psi_{cc} > - \frac{\lambda}{12}\,(\phi^{(IV}(c) + 2\,\psi'''(c)),$$

de donde

(6.12) <u>Si</u> $< L, \psi_{cc} > - \dfrac{\lambda}{12}\,(\phi^{(IV}(c) + 2\,\psi'''(c)) \neq 0$ <u>entonces</u> $\bar{s} = s\text{-}1$.

La otra posibilidad es $D(\phi_{cc}\overline{L}) + \psi_{cc}\overline{L} = 0$ o bien $(x\text{-}c)D(\phi_{ccc}\overline{L}) + (\psi_{cc} + \phi_{ccc})\,\overline{L} = 0$.

$$(\psi_{cc} + \phi_{ccc})\ (c) = \frac{\phi'''(c) + \psi''(c)}{2} \quad \text{y así}$$

(6.13) <u>Si</u> $\phi'''(c) + \psi''(c) \neq 0$ <u>entonces</u> $\bar{s} = s\text{-}2$.

La posibilidad $\phi'''(c) + \psi''(c) = 0$ da lugar a la ecuación

$$(x\text{-}c)\ \{D(\phi_{ccc}\ \bar{L}) + \psi_{ccc}\ \bar{L}\} = 0,$$

y como

$$< \bar{L},\ \psi_{ccc} > = < L,\ \psi_{ccc}> - \lambda\ \psi'_{ccc}(c) = < L,\ \psi_{ccc}> - \frac{\lambda}{120}\ (3\phi^{(V}(c) + 5\psi^{(IV}(c)),$$

se tienen las dos últimas alternativas:

(6.14) $< L,\ \psi_{ccc} > - \frac{\lambda}{120}\ (3\ \phi^{(V}(c) + 5\ \psi^{(IV}(c)) \neq 0$ <u>entonces</u> $\bar{s} = s\text{-}2$.

(6.15) $< L,\ \psi_{ccc} > - \frac{\lambda}{120}\ (3\ \phi^{(V}(c) + 5\ \psi^{(IV}(c)) = 0$ <u>entonces</u> $\bar{s} = s\text{-}3$

y ya no es posible reducir más porque $\bar{s} \geq s\text{-}3$ en virtud del Corolario de la Proposición 6.2.

Las relaciones (6.5) a (6.15) se resumen en el siguiente resultado:

Proposición 6.4

Si $\bar{L}$ satisface la ecuación $D(\phi\ \bar{L}) + \psi\ \bar{L} = 0$ entonces

$\phi(c) \neq 0 \Rightarrow \bar{s} = s+3.$

$$\phi(c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \phi'(c) - \psi(c) \neq 0 \Rightarrow \bar{s} = s+2. \\ \phi'(c) - \psi(c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \psi'(c) \neq 0 \Rightarrow \bar{s} = s+1. \\ \psi'(c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \phi'(c) \neq 0 \Rightarrow \bar{s} = s. \\ \phi'(c) = 0 \Rightarrow [*] \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$
[*]\begin{cases}
\phi'''(c) + 3\psi''(c) = 0 \Rightarrow \bar{s} = s \\
\phi'''(c) + 3\psi''(c) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases}
\lambda \neq \dfrac{6 < L,\ \psi_c >}{\phi'''(c) + 3\,\psi''(c)} \Rightarrow \bar{s} = s \\
\lambda = \dfrac{6 < L,\ \psi_c >}{\phi'''(c) + 3\,\psi''(c)} \Rightarrow \begin{cases} \phi''(c) \neq 0 \Rightarrow \bar{s} = s\text{-}1 \\ \phi''(c) = 0 \Rightarrow [**] \end{cases}
\end{cases}
\end{cases}
$$

$$
[**]\begin{cases}
< L,\ \psi_{cc}> - \dfrac{\lambda}{12}\,(\phi^{(IV}(c) + 2\ \psi'''(c)) \neq 0 \Rightarrow \bar{s} = s\text{-}1. \\
< L,\ \psi_{cc}> - \dfrac{\lambda}{12}\,(\phi^{(IV}(c) + 2\ \psi'''(c)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \phi'''(c) + \psi''(c) \neq 0 \Rightarrow \bar{s} = s\text{-}2 \\ \phi'''(c) + \psi''(c) = 0 \Rightarrow [***] \end{cases}
\end{cases}
$$

$$
[***]\begin{cases}
< L,\ \psi_{ccc} > - \dfrac{\lambda}{120}\,(3\ \phi^{(V}(c) + 5\ \psi^{(IV}(c) \neq 0 \Rightarrow \bar{s} = s\text{-}2. \\
< L,\ \psi_{ccc} > - \dfrac{\lambda}{120}\,(3\ \phi^{(V}(c) + 5\ \psi^{(IV}(c) = 0 \Rightarrow \bar{s} = s\text{-}3 \blacksquare
\end{cases}
$$

Ejemplo (Modificación de los polinomios de Laguerre $L_n^{(0)}(x)$)

Se considera el funcional de Laguerre para $\alpha = 0$ cuya ecuación, dada en el Capítulo primero, es

$$D(x\ L) + (x\text{-}1)\ L = 0$$

y se estudia el nuevo funcional $\bar{L} = L + \lambda_1\delta(x) + \lambda_2\delta'(x)$ con λ_1 y λ_2 verificando las condiciones (5.1) y (6.1).

En este caso $\phi(x) = x$ y $\psi(x) = x\text{-}1$ por lo que $\phi(0) = 0$ y $\psi(0) = -1$. De la Proposición 5.4, $L^* = L + \lambda_1\delta(x)$ es de clase $s^* = s+1 = 1$ y su ecuación irreducible es

$$D(x^2\ L^*) + (x^2\text{-}\ 2x)\ L^* = 0.$$

Teniendo ahora en cuenta la Proposición 6.4, el funcional $\bar{L} = L^* + \lambda_2\ \delta'(x)$ es de clase $\bar{s} = s^*+1 = 2$ porque $\phi^*(0) = 0$, $(\phi^*)'(0) - \psi^*(0) = 0$, $(\psi^*)'(0) = -2$. Su ecuación irreducible es

$$D(x^3\,\overline{L}) + (x^3-3x^2)\,\overline{L} = 0.$$

Por otra parte, según se ha dicho en la pág. 31, los polinomios mónicos de Laguerre son

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n\, n! \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n+\alpha \\ n-k \end{bmatrix} \frac{(-x)^k}{k!} .$$

Denotando como en (6.1)

$$K_n^{(\alpha)}(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{L_k^{(\alpha)}(x)\; L_k^{(\alpha)}(y)}{< L^{\alpha},\, (L_k^{(\alpha)}(x))^2 >} \quad \text{con} < L^{\alpha}, p(x) > = \int_0^{\infty} p(x)\, x^{\alpha}\, e^{-x}\, dx,$$

se verifica que (ver pág. 101 y 102 de [64])

$$(6.16) \qquad K_n^{(\alpha)}(x,0) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha+1)\, n!} L_n^{(\alpha+1)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n+\alpha+1 \\ n-k \end{bmatrix} \frac{(-x)^k}{k!} .$$

Siguiendo entonces la Proposición 5.1, para el caso $\alpha = 0$ y cuando la masa está colocada en $c = 0$, los polinomios $L_n^*(x)$ relativos al funcional $L^* = L + \lambda_1\, \delta(x)$ son

$$(6.17) \qquad L_n^*(x) = L_n(x) - \frac{\lambda_1\; L_n(0)}{1 + \lambda_1\, K_{n-1}(0,0)} K_{n-1}(x,0) = L_n(x) + \frac{\lambda_1 n}{1 + \lambda_1 n} L_{n-1}^{(1)}(x),$$

donde se ha denotado $L_n(x)$ y $K_n(x,y)$ en lugar de $L_n^{(0)}(x)$ y $K_n^{(0)}(x,y)$ respectivamente. Por consiguiente

$$L_n^*(x) = x^n + (-1)^n\, n! \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} - \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1 n} \begin{bmatrix} n \\ n-k-1 \end{bmatrix} \right\} \frac{(-x)^k}{k!} .$$

Para determinar los polinomios ortogonales con respecto a $\overline{L} = L^* + \lambda_2\, \delta'(x)$, $\overline{L}_n(x)$, es necesario obtener previamente las funciones

$$K_n^*(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{L_k^*(x)\; L_k^*(y)}{< L^*,\, (L_k^*)^2 >}$$

y sus derivadas parciales cuando y = 0. Se comienza con el cálculo de $K_n^*(x,0)$. Según la fórmula de Christoffel-Darboux

$$<L^*, (L_n^*)^2> x\, K_n^* (x,0) = L_{n+1}^*(x)\, L_n^*(0) - L_n^*(x)\, L_{n+1}^*(0) =$$

$$= (-1)^n\, n! \left[\frac{1}{r_{n-1}} L_{n+1}(x) + \frac{n+1}{r_n} L_n(x)\right] + \frac{(-1)^n\,(n+1)!\,\lambda_1}{r_n\, r_{n-1}} \cdot$$

$$\cdot \left[L_n^{(1)}(x) + n\, L_{n-1}^{(1)}(x)\right], \text{ donde } r_n = 1 + \lambda_1 K_n(0,0) = 1 + \lambda_1(n+1).$$

Como además $L_n^{(1)}(x) + n\, L_{n-1}^{(1)}(x) = L_n(x)$ (ver [64]), entonces

$$< L^*, (L_n^*)^2 > x\, K_n^*(x,0) = \frac{(-1)^n\, n!}{r_{n-1}} \left[L_{n+1}(x) + (n+1)\, L_n(x)\right].$$

También se cumple -[64]- que $L_{n+1}(x) + (n+1)\, L_n(x) = x\, L_n^{(1)}(x)$ y además, en la Proposición 5.1 se ha visto que

$$< L^*, (L_n^*)^2 > = \frac{r_n}{r_{n-1}} < L, L_n^2 > = (n!)^2 \frac{r_n}{r_{n-1}},$$

por lo que

$$K_n^*(x,0) = \frac{(-1)^n}{r_n\, n!} L_n^{(1)}(x) = \frac{1}{r_n} K_n(x,0). \tag{6.18}$$

También por la fórmula de Christoffel-Darboux, $(K_n^*)^{(0,1)}(x,0) = D_2 K_n^*(x,0)$ se puede escribir de la forma

$$< L^*, (L_n^*)^2 > (K_n^*)^{(0,1)}(x,0) =$$

$$= \frac{1}{x} \left[(L_n^*)'(0)\, L_{n+1}^* - (L_{n+1}^*)'(0)\, L_n\right] + \frac{1}{x^2} \left[L_n^*(0)\, L_{n+1}^* - L_{n+1}^*(0)\, L_n^* \right]$$

Como ya se ha visto, el segundo sumando es igual a

$$\frac{(-1)^n\, n!}{r_n} \frac{1}{x} L_n^{(1)}(x),$$

y teniendo en cuenta que $(L^*_n)'(0) = \dfrac{-n(1+r_n)}{2} L^*_n(0)$, el primer sumando se puede escribir de la forma

$$\frac{-1}{2}\left[n(1+r_n)\ \frac{L^*_n(0)\, L^*_{n+1} - L^*_{n+1}(0)\, L^*_n}{x} - \frac{2\, r_n}{x}\ L^*_{n+1}(0)\, L_n \right]$$

En consecuencia,

$$< L^*, (L^*_n)^2 > (K^*_n)^{(0,1)}(x,0) =$$

$$= \frac{(-1)^n\ n!\ n\,(1+r_n)}{2\, r_{n-1}}\ L^{(1)}_n + \frac{1}{x}\left[\frac{(-1)^n\, n!}{r_{n-1}}\ L^{(1)}_n + r_n\ L^*_{n+1}(0)\ L^*_n \right] =$$

$$= \frac{(-1)^n\ n!\ n\,(1+r_n)}{2\, r_{n-1}}\ L^{(1)}_n + \frac{(-1)^n\ n!\, n\ r_n}{r_{n-1}}\ \frac{1}{x}\left[L_n + L^{(1)}_{n-1} \right] =$$

$$= \frac{(-1)^n\ n!\ n}{2\, r_{n-1}}\left[(1+r_n)\ L^{(1)}_n + 2\, r_n\ L^{(2)}_{n-1} \right],$$

de donde se deduce que

$$(6.19) \qquad (K^*_n)^{(0,1)}(x,0) = \frac{(-1)^n}{2\,(n-1)!\ r_n}\left[(1+r_n)\ L^{(1)}_n(x) + 2\, r_n\ L^{(2)}_{n-1}(x) \right]$$

A partir de (6.17), (6.18) y (6.19), y teniendo en cuenta la Proposición 6.1, se obtiene que los polinomios ortogonales relativos a $\overline{L} = L^* + \lambda_2\, \delta'(x)$ son

$$\overline{L}_0(x) = 1; \qquad\qquad \overline{L}_1(x) = L_1(x) + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{1+\lambda_1};$$

$$\overline{L}_n(x) = L_n(x) + \left\{ \frac{r_{n-1} - 1}{r_{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}\, \lambda_2}{(n-2)!\ r_{n-1}} \left[\frac{A_n}{n-1} + \frac{B_n}{2}\,(1+r_{n-1}) \right] \right\} L^{(1)}_{n-1}(x) +$$

$$+ \frac{\lambda_2\, B_n\, (-1)^{n-1}}{(n-2)!}\ L^{(2)}_{n-2}(x), \quad n \geq 2,$$

donde A_n y B_n son las soluciones del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda_2 \dfrac{n(n-1)}{2\, r_{n-1}} & -\lambda_2 \dfrac{n}{r_{n-1}} \\ -\lambda_2 \dfrac{n(n-1)}{12\, r_{n-1}} \{(n+1)\, r_{n-1} + 3(n-1)\} & 1 - \lambda_2 \dfrac{n(n-1)}{2\, r_{n-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{(-1)^n\, n!}{r_{n-1}} \\ \dfrac{1}{2\, r_{n-1}} (-1)^{n+1}\, n!\, n\, (1 + r_n) \end{bmatrix}$$

CAPITULO III

Representación Integral de Funcionales (A)-Semiclásicos

§ 1. Introducción.

Sea L una forma semiclásica de clase s y sea

$$(1.1) \qquad D(\phi\, L) + \psi\, L = 0$$

su ecuación irreducible. Puesto que $s = \max\{\mathrm{grad}(\phi) - 2, \mathrm{grad}(\psi) - 1\}$, sólo una de las siguientes alternativas es posible

(A) $\mathrm{grad}(\phi) = s+2$ y $1 \leq \mathrm{grad}(\psi) \leq s+1$

(B) $\mathrm{grad}(\phi) < s+2$ y $\mathrm{grad}(\psi) = s+1$

Cuando la ecuación de L verifica la condición *(A)* (respectivamente *(B)*) se dirá que L es un funcional *(A)-semiclásico* (respectivamente *(B)-semiclásico*).

El problema de la representación integral de los funcionales que satisfacen la ecuación (1.1) para $s > 0$ ha sido tratado por diferentes autores. A.P. Magnus en [42] resuelve las ecuaciones que dan lugar a los que en ese trabajo se denominan polinomios semiclásicos genéricos, que son aquellas que satisfacen la condición *(A)* pero con la restricción de que $\phi(x)$ tenga todas sus raices simples. También da una indicación para resolver los no genéricos, que consiste en entender $\exp(x)$, con $p(x) \in \mathbb{P}$, como el límite de funciones $(1 + p(x)/\, n)^n$ cuando n tiende a infinito. Otros casos particulares han sido tratados en [7], [24], [25] y [63], mientras que la clase de todos los funcionales semiclásicos que son definidos positivos en la recta real ha sido resuelta en [8] por Bonan, Lubinsky y Nevai. Cuando s es igual a 1 hay también algunas soluciones parciales a la representación integral en [4].

En el presente Capítulo se resuelve el problema para todos los funcionales *(A)*-semiclásicos, independientemente de que sean o no regulares, probando primero, que la función de Stieltjes S(z) de cualquier funcional de este tipo es una función analítica en alguna región del plano complejo, y utilizando después la ecuación diferencial (4.1) del Capítulo II que satisface S(z) para localizar esta función. Las restantes ecuaciones de tipo *(B)* se resuelven en el Capítulo IV por un camino diferente al propuesto por A.P. Magnus.

Los ejemplos *(A)*-semiclásicos correspondientes al caso clásico son los funcionales de Jacobi y de Bessel.

§ 2. Resultados preliminares. Acotación de los momentos.

Como la ecuación (1.1) es lineal, el espacio de soluciones es un espacio vectorial. Además la ecuación $D(\phi L) + \psi L = 0$ es equivalente a

$$< D(\phi L) + \psi L, x^n> = 0 \qquad \text{para } n = 0,1,...$$

Si $\phi(x) = a_0 x^{s+2} + ... + a_{s+2}$ y $\psi(x) = b_0 x^{s+1} + ... + b_{s+1}$, la ecuación anterior significa que los momentos $\mu_n = < L, x^n >$ satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$(2.1) \qquad -n(a_0 \mu_{n+s+1} +...+ a_{s+2} \mu_{n-1}) + b_0 \mu_{n+s+1} +...+ b_{s+1} \mu_n = 0 \qquad \text{para } n \geq 0$$

Así pues

$$\mu_{n+s+1} = \frac{-n(a_1 \mu_{n+s} +...+ a_{s+2} \mu_{n-1}) + b_1 \mu_{n+s} +...+ b_{s+1} \mu_n}{a_0 n - b_0}$$

siempre que $a_0 n - b_0 \neq 0$ para todo $n \geq 0$.

Si la ecuación es de tipo *(B)*, la condición $a_0 n - b_0 \neq 0$ se verifica siempre, por lo que la dimensión del espacio de soluciones será s+1. Si la ecuación es de tipo *(A)*, a_0 es igual a 1 y así la dimensión del espacio de soluciones es también s+1 siempre que b_0 sea distinto de 0,1,2,.... Cuando b_0 es un entero no negativo se presentan dos posibilidades:

i) La ecuación (2.1) para $n = b_0$ es independiente de las ecuaciones correspondientes a $n = 0,1,....,b_0-1$. Entonces los primeros momentos son nulos y el funcional L es no regular por lo que carece de interés.

ii) La ecuación correspondiente a $n = b_0$ es combinación lineal de las anteriores. En este caso hay un parámetro libre más, y el espacio de soluciones tiene la dimensión igual a s+2.

El problema es entonces hallar alguna base del espacio de soluciones para cada tipo de ecuación.

Cuando $\{L_1, ..., L_p\}$ sea una base del espacio de soluciones de la ecuación

$D(\phi L) + \psi L = 0$, se dirá que $\{L_1, \ldots, L_p\}$ es un *sistema fundamental de soluciones* (S.F.S) de la ecuación funcional.

La independencia lineal de soluciones de la ecuación (1.1) se caracteriza de la siguiente forma:

Proposición 2.1

Sea $D(\phi L) + \psi L = 0$ de tipo *(B)*. Un conjunto de soluciones $\{L_1, \ldots, L_{s+1}\}$ es un S.F.S. si y sólo si

$$(2.2) \qquad \begin{vmatrix} <L_1, 1>, \ldots\ldots, <L_{s+1}, 1> \\ <L_1, x>, \ldots\ldots, <L_{s+1}, x> \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ <L_1, x^s>, \ldots\ldots, <L_{s+1}, x^s> \end{vmatrix} \neq 0$$

Demostración

Supongamos que $\sum_{i=1}^{s+1} \lambda_i L_i = 0$. Entonces $< \sum_{i=1}^{s+1} \lambda_i L_i, x^n > = 0$ para $n \geq 0$, y por lo tanto, cuando $n=0,1,\ldots,s$. Si el determinante (2.2) es no nulo, necesariamente los coeficientes $\lambda_1,\ldots,\lambda_{s+1}$ han de ser nulos por lo que $\{L_1,\ldots,L_{s+1}\}$ es un S.F.S.

Reciprocamente, supongamos que $\{L_1,\ldots,L_{s+1}\}$ es un sistema linealmente independiente de soluciones y que el determinante es nulo. Entonces

$$< \sum_{i=1}^{s+1} \lambda_i L_i, x^n > = 0 \quad \text{para} \quad n = 0, \ldots, s$$

con al menos un λ_i distinto de cero. Como la ecuación es de tipo *(B)*, los momentos de orden mayor que s de cualquier solución se obtienen a partir de los primeros y, como $\sum_{i=1}^{s+1} \lambda_i L_i$ es una solución, $<\sum_{i=1}^{s+1} \lambda_i L_i, x^n > = 0$ para $n \geq s+1$. En consecuencia, el funcional $\sum_{i=0}^{s+1} \lambda_i L_i$ es nulo con al menos un coeficiente λ_i distinto de cero. Esto está en contradición con el hecho de que $\{L_1,\ldots,L_{s+1}\}$ es un sistema libre ∎

Para cualquier complejo a, expandiendo $\phi(x)$ y $\psi(x)$ en potencias de (x-a), la ecuación

$D(\phi L) + \psi L = 0$ es equivalente a un sistema de ecuaciones lineales análogo a (2.1) en los momentos $< L, (x - a)^n >$ y por consiguiente, la Proposición 2.1 se puede enunciar en términos más generales:

Proposición 2.2

Sea $D(\phi L) + \psi L = 0$ de tipo *(B)*. Un conjunto de soluciones $\{L_1, ..., L_{s+1}\}$ es un S.F.S. si y sólo si

$$\begin{vmatrix} < L_1, 1 >, & \ldots\ldots, & < L_{s+1}, 1 > \\ < L_1, x - a >, & \ldots\ldots, & < L_{s+1}, x - a > \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ < L_1, (x - a)^s >, & \ldots\ldots, & < L_{s+1}, (x - a)^s > \end{vmatrix} \neq 0$$

para cualquier número complejo a ∎

Por otra parte, los momentos $\mu_n = < L, x^n >$ de un funcional semiclásico satisfacen las siguientes propiedades de acotación:

Proposición 2.3

Si L es un funcional *(A)*-semiclásico entonces existe un entero positivo N y constantes positivas C y M tales que

$$|\mu_n| \leq C M^n \qquad \text{para todo} \qquad n \geq N.$$

Demostración

Sean $\phi(x) = x^{s+2} + a_1 x^{s+1} + ... + a_{s+2}$ y $\psi(x) = b_0 x^{s+1} + ... + b_{s+1}$.

Entonces

$$-n\,(\mu_{n+s+1} + a_1\,\mu_{n+s} + \ldots + a_{s+2}\,\mu_{n-1}) + b_0\,\mu_{n+s+1} + \ldots + b_{s+1}\,\mu_n = 0$$

para todo entero no negativo n. Portanto, para todo $n > b_0$, se tiene que

$$\mu_{n+s+1} = \frac{-n\,(a_1\,\mu_{n+s} + \ldots + a_{s+2}\,\mu_{n-1}) + b_1\,\mu_{n+s} + \ldots + b_{s+1}\,\mu_n}{n - b_o}\,.$$

Se considera

$$K = \text{máx}\,\{|a_i|, |b_j| : i = 1, \ldots, s+2;\ j = 1, \ldots, s+1\}.$$

Entonces

$$|\mu_{n+s+1}| \leq \frac{n\quad K(|\mu_{n+s}| + \ldots, + |\mu_{n-1}|) + K(|\mu_{n+s}| + \ldots, + |\mu_n|)}{n - b_o} \leq$$

$$\leq \frac{n+1}{n - b_o}\; K(|\mu_{n+s}| + \ldots + |\mu_{n-1}|) \leq 2\,K(|\mu_{n+s}| + \ldots + |\mu_{n-1}|)$$

para todo n mayor que algún $N \in \mathbb{N}$.

Sea $\alpha = \text{máx}\{|\mu_o|, \ldots, |\mu_{N+s+1}|\}$ y consideremos una nueva sucesión $(\bar{\mu}_n)$ definida de la forma

$$\begin{cases} \bar{\mu}_n = \alpha & \text{para} \quad n = 0, 1, \ldots, N+s+1 \\ \bar{\mu}_{n+s+i} = 2K(\bar{\mu}_{n+s} + \ldots + \bar{\mu}_{n-1}) & \text{para} \quad n > N \end{cases}$$

Por construcción, $(\bar{\mu}_n)$ es una sucesión no decreciente y tal que $|\mu_n| \leq \bar{\mu}_n$ para todo n. Entonces, haciendo $M = 2K(s+2)$, tenemos que

$$\bar{\mu}_{n+s+1} \leq 2K(s+2)\,\bar{\mu}_{n+s} = M\,\bar{\mu}_{n+s} \qquad \text{para } n > N$$

y en consecuencia,

$$\bar{\mu}_{N+s+i} \leq M^{i-1}\, \bar{\mu}_{N+s+1} \qquad \text{para } i \geq 2.$$

Modificando ahora la constante M de forma adecuada, se tendrá que $|\mu_n| \leq \bar{\mu}_n \leq C\, M^n$ con $C = \bar{\mu}_{N+s+1}$ ■

Proposición 2.4

Si L es un funcional *(B)*-semiclásico, existe un entero positivo N y existen constantes positivas C y M tales que

$$|\mu_n| \leq C\, M^n\, n! \quad \text{para todo} \quad n \geq N.$$

Demostración

Como la ecuación es de tipo *(B)*, los polinomios $\phi(x)$ y $\psi(x)$ tienen la forma

$$\phi(x) = a_1 x^{s+1} + \ldots\ldots + a_{s+2},\ \psi(x) = b_o x^{s+1} + \ldots\ldots + b_{s+1} \quad \text{con} \quad b_o \neq 0.$$

Entonces, para todo $n \geq 0$, se verifica que

$$\mu_{n+s+1} = \frac{n(a_1 \mu_{n+s} + \ldots\ldots + a_{s+2}\, \mu_{n-1}) - (b_1\, \mu_{n+s} + \ldots\ldots + b_{s+1}\, \mu_n)}{b_o}.$$

Sea

$$K = \text{máx } \{ |a_i|,\ |b_j| \ : i=1,\ldots\ldots, s+2;\ j=1,\ldots\ldots, s+1 \}.$$

Entonces

$$|\mu_{n+s+1}| \leq \frac{n\ K(|\mu_{n+s}| + \ldots\ldots + |\mu_{n-1}|) + K(|\mu_{n+s}| + \ldots\ldots + |\mu_n|)}{|b_o|} \leq$$

$$\leq \frac{(n+1)\ K}{|b_o|} (|\mu_{n+s}| + \ldots\ldots + |\mu_{n-1}|).$$

Sea $\alpha = \text{máx} \{|\mu_o|,......, |\mu_s|\}$. Si $(\bar{\mu}_n)$ es la sucesión dada por

$$\begin{cases} \bar{\mu}_i = \alpha & \text{para} \quad i=0,1,...,s \\ \bar{\mu}_{n+s+1} = \dfrac{(n+1)\ K}{|b_0|}\ (\bar{\mu}_{n+s} +....+ \bar{\mu}_{n-1}) & \text{para} \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Por construcción, $(\bar{\mu}_n)$ es no decreciente y $|\mu_n| \leq \bar{\mu}_n$. Además,

$$\bar{\mu}_{n+s+1} \leq \frac{(n+1)\ K}{|b_o|}\ (s+2)\ \bar{\mu}_{n+s} = (n+1)\ M^*\ \bar{\mu}_{n+s}$$

y por consiguiente

$$\bar{\mu}_{n+s+1} \leq (n+1)!\ (M^*)^n\ \bar{\mu}_s \leq (n+s+1)!\ (M^*)^n\ \bar{\mu}_s.$$

De aquí se deduce que existen constantes M y C tales que $|\mu_n| \leq n!\ M^n\ C$ como se quería ∎

§ 3. Representación Integral.

Cuando L es un funcional de tipo *(A)*, de la Proposición (2.3) se deduce que su función de Stieltjes asociada,

$$S(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n}{z^{n+1}},$$

es analítica al menos fuera del disco de centro 0 y radio M. Entonces, según la fórmula de Laurent, se verifica que

$$\mu_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma S(z)\ z^n\ dz$$

y por consiguiente

$$< L, p(x) > = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma S(z)\ p(z)\ dz,$$

donde γ es una circunferencia centrada en el origen y con radio mayor que M. Esta técnica fue descrita por F. Pollaczek en [61].

Como ya se ha dicho, la serie formal de Stieltjes de un funcional semiclásico satisface la ecuación diferencial $(\phi(z)\ S(z))' + \psi(z)\ S(z) = D(z)$ donde $D(z)$ es un polinomio de grado menor o igual que s. A continuación se da una demostración alternativa de este hecho cuando $S(z)$ es una función analítica.

Proposición 3.1

Sea L un funcional semiclásico de clase s verificando la ecuación de tipo *(A)* $D(\phi\ L) + \psi\ L = 0$. Sea $S(z)$ la función de Stieltjes de L. Entonces

$$(3.1) \qquad (\phi(z)\ S(z))' + \psi(z)\ S(z) = D(z)$$

donde $D(z)$ es un polinomio de grado menor o igual que s y cuyos coeficientes son funciones lineales de los momentos $\mu_0, \ldots, \mu_s$.

Demostración

Si el funcional L dado por

$$< L, p(x) > = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma S(z)\ p(z)\ dz$$

verifica la ecuación $D(\phi\ L) + \psi\ L = 0$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \{-\phi(z)\ S(z)\ p'(z) + \psi(z)\ S(z)\ p(z)\}\ dz = 0$$

e integrando por partes se deduce que

$$\int_\gamma \{(\phi(z)\ S(z))' + \psi(z)\ S(z)\}\ p(z)\ dz = 0.$$

Esto significa que la parte principal de $(\phi(z)\ S(z))' + \psi(z)\ S(z)$ es igual a cero. Calculando entonces la expansión de Laurent e igualando su parte principal a cero, obtenemos que

$$(\phi(z)\ S(z))' + \psi(z)\ S(z) =$$

$$= - \sum_{k=0}^{s} (s+1-k) \sum_{i+j=k} a_i\ \mu_j\ z^{s-k} - \sum_{k=0}^{s} \sum_{i+j=k} b_i\ \mu_j\ z^{s-k} = D(z),$$

donde a_i y b_i son los coeficientes de $\phi(x)$ y $\psi(x)$ con $a_o = 1$ ∎

Como en [53], $D(z) = -(L\ \vartheta_o\ \phi)'(z) - (L\ \vartheta_o\ \psi)\ (z)$, siendo $L\ \vartheta_o\ \phi$ dado por

$$(\vartheta_0 p)(x) = \frac{p(x)\ -\ p(0)}{x} \quad \text{y} \quad (L\ p)(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i+j=k} a_i\ \mu_j\ x^{n-k}$$

donde a_i son los coeficientes de $p(x)$, μ_j los momentos de L y n el grado de $p(x)$.

Teniendo en cuenta el resultado anterior, la funcion de Stieltjes de cualquier funcional *(A)*-semiclásico tiene que ser solución de la ecuación diferencial (3.1), y así,

$$S(z,k) = \frac{1}{\phi(z)} \exp\left(- \int \frac{\psi(z)}{\phi(z)}\, dz\right) \left\{ k + \int D(z) \exp\left(\int \frac{\psi(z)}{\phi(z)}\, dz\right) dz \right\}.$$

Por consiguiente, para encontrar una representación integral de cualquier funcional de tipo *(A)*, se puede proceder de la siguiente forma:

1) Determinar los parámetros libres en el sistema de ecuaciones lineales de los momentos.

2) Para cada elección de estos parámetros, los primeros momentos μ_o, ..., μ_s y el polinomio D(z) quedan determinados. Resolviendo la ecuación diferencial (3.1) de la función de Stieltjes para estos valores obtenemos un conjunto de soluciones S(z,k).

3) Calculando ahora algunos términos de la expansión de cada S(z,k), (el primero

puede incluso ser suficiente) y comparando con los primeros momentos, se obtiene k_0 de forma que $S(z,k_o)$ es la función buscada.

Si en particular $\psi(x)$ tiene grado s+1 y su coeficiente principal no es un entero positivo, la dimensión del espacio de soluciones es s+1 y los momentos $\mu_o,....,\mu_s$ son los parámetros libres. Para cada elección canónica

$$(\mu_o,....,\mu_s) = (0,....,\overset{k}{1},....,0) \qquad k = 0,....,s$$

se obtiene

$$S_o(z) = S(z, k_0),...., S_s(z) = S\ (z, k_s)$$

cuyos correspondientes funcionales son obviamente independientes. De esta manera cada funcional solucion se puede escribir en la forma requerida

$$< L, p(x) > = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \sum_{k=0}^{s} \lambda_k\ S_k(z)\ p(z)\ dz.$$

Ejemplo

Se considera la ecuación distribucional

$$(3.2) \qquad D(x^3\ L) + ((a - 3)\ x^2 + b\ x)\ L = 0 \qquad \text{con} \qquad a \neq 2, 3, 4,..$$

Sea L un funcional de momentos que verifica esta ecuación y sean μ_n sus momentos. Entonces

$$(3.3) \qquad \mu_{n+2} = \frac{b}{n - a + 3}\ \mu_{n+1} \qquad n \geq 0.$$

Sean L_1 y L_2 soluciones de (3.2) tales que

$$< L_1, 1 > = 1; \qquad < L_1, x > = 0;$$
$$< L_2, 1 > = 0; \qquad < L_2, x > = 1.$$

Teniendo en cuenta (3.3), es claro que la función de Stieltjes asociada a L_1 es la función $S_1(z) = \frac{1}{z}$ y así

$$\boxed{< L_1, p(x) > = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{p(z)}{z} dz}$$

donde C es cualquier circunferencia centrada en el origen de radio mayor que cero.

Sea ahora $S_2(z)$ la función de Stieltjes del funcional L_2. La ecuación diferencial (3.1) asociada a la ecuación distribucional (3.2) es

$$(z^3 S(z))' +((a-3)z^2 + bz) S(z) = ((a-1)z + b) <L, 1> + (a-2) <L,x>$$

que para L_2 es

$$(z^3 S_2(z))' + ((a - 3) z^2 + b z) S_2(z) = a - 2.$$

Entonces $S_2(z)$ tiene que ser una de las siguientes funciones

$$S(z, k) = z^{-a} e^{b/z} \left\{ k + (a - 2) \int z^{a-3} e^{-b/z} dz \right\} =$$

$$= k z^{-a} e^{b/z} + (a-2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-b)^{n+1}}{n! (n + 2 - a)} z^{-(n+2)} e^{b/z}.$$

Necesariamente $S_2(z) = S(z,0)$ y en consecuencia,

$$\boxed{<L_2, p(x) > = \frac{a-2}{2\pi i} \int_C p(z) e^{b/z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-b)^{n+1}}{n! (n+2-a)} z^{-(n+2)} dz}$$

donde C es cualquier circunferencia centrada en el origen y con radio mayor que cero.

La conclusión es que, si existe algún funcional regular L tal que (3.2) es su ecuacion irreducible entonces L se puede representar como combinación lineal de los funcionales L_1 y L_2. Además, si $< L, 1 > = \alpha$ y $< L, x > = \beta$ se tiene que

$$\boxed{<L, p(x)> = \frac{1}{2\pi i} \int_C \{\alpha\, S_1(z) + \beta\, S_2(z)\}\, p(z)\, dz}$$

Observaciones

(1) Es claro que cuando a es igual a 2, la correspondiente función de Stieltjes del funcional L_2 es $S_2(z) = z^{-2} e^{b/z}$.

(2) Cuando un funcional $\overline{L}$ satisface la ecuación

$$(3.4) \qquad D(x^2 \overline{L}) + ((a - 3)\, x + b)\, \overline{L} = 0,$$

($\overline{L}$ es el funcional de Bessel) entonces el funcional $x^{-1} \overline{L}$ definido por

$$< x^{-1} \overline{L}, p(x) > = < \overline{L}, \frac{p(x) - p(0)}{x} >$$

satisface la ecuación (3.2). Por tanto L_2 puede representarse en la forma

$$< L_2, p(x) > = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{p(z) - p(0)}{z} S(z)\, dz,$$

donde S(z) es la función de Stieltjes asociada al funcional de Bessel $\overline{L}$ cuyo primer momento es igual a uno.

(3) La ecuación (3.2) tiene soluciones regulares porque, como $L_1 = \delta(x)$ y $L_2 = x^{-1}\overline{L}$, cada solución de (3.2) es de la forma $\hat{L} = \lambda\, \delta(x) + \beta\, x^{-1}\, \overline{L}$, donde λ y β son constantes. Eligiendo a y b de forma que $\overline{L}$ sea regular, lo que siempre es posible porque (3.4) es la ecuación de Bessel, siempre se pueden tomar λ y β de manera que $\hat{L}$ sea regular [52].

CAPITULO IV

Representación Integral de Funcionales (B)-Semiclásicos

§ 1. Introducción

Se consideran las formas semiclásicas de clase s cuya ecuación irreducible es

$$(1.1) \qquad D(\phi\, L) + \psi\, L = 0,$$

donde $\phi(x) = \sum_{k=0}^{s+1} a_k\, x^k$ y $\psi(x) = \sum_{k=0}^{s+1} b_k\, x^k$, con la condición $b_{s+1} \neq 0$. La dimensión del espacio de soluciones es siempre $s+1$.

La técnica utilizada para resolver los *(A)*-funcionales no es aplicable aquí debido al tamaño de los momentos. Se podría considerar una modificación natural de la función de Stieltjes $S(z)$ tomando los coeficientes $\mu_n^* = \mu_n \,/\, n!$ en lugar de los momentos μ_n y utilizar la Proposición 2.4 del Capítulo anterior, pero la ecuación diferencial de la correspondiente $S^*(z)$ tiene orden elevado y su solución no es conocida.

Se utilizará la misma técnica aplicada por J.L. Geronimus en el caso clásico y que está descrita en el texto de Milne-Thomson [57]:

Sean $w(z)$ una función diferenciable y γ una curva en el plano complejo tales que

C-1: $(\phi(z)\, w(z))' + \psi(z)\, w(z) = 0$ para todo $z \in \gamma$

C-2: $\phi(z)\, w(z)\, p(z)\Big|_\gamma = 0$ para cada polinomio $p(z)$.

Considerando el funcional definido por

$$< L, p(x) > = \int_\gamma p(z)\, w(z)\, dz,$$

entonces

$$< D(\phi\, L) + \psi\, L, p(x) > = \int_\gamma \{-\phi(z)\, w(z)\, p'(z) + \psi(z)\, w(z)\}\, dz =$$

$$= -\, \phi(z)\, w(z)\, p(z)\Big|_\gamma + \int_\gamma \{(\phi(z)\, w(z))' + \psi(z)\, w(z)\}\, p(z)\, dz = 0,$$

de lo que se deduce que L es una solución de la ecuación funcional.

A continuación se prueba que, para esta clase de ecuaciones, siempre es posible encontrar suficientes caminos γ tales que la solución w(z) de la ecuación homogenea C-1 verifica C-2 en cada γ, y además, de forma que los funcionales que inducen son independientes.

Después de un cambio de variable lineal como en la Proposición 3.2 del Capítulo I, la ecuación (1.1) se puede escribir de forma que una de las raices de $\phi(x)$ sea fija (siempre se elegirá el cero) y que el coeficiente principal de $\psi(x)$ sea un número adecuado. Esta forma de la ecuación recibirá el nombre de *ecuación canónica.*

Se distinguen tres casos en el estudio de la ecuación (1.1):

(B_1): $\phi(x)$ es una constante.
(B_2): $\phi(x)$ tiene solamente raices simples.
(B_3): $\phi(x)$ tiene alguna raiz múltiple.

La ecuación (B_2) exigirá el cálculo de integrales de la forma $\int_a^b (x-a)^{\alpha} f(x)\, dx$, por lo que, cuando la parte real de α sea menor que -1, será necesario realizar un proceso de regularización como ocurría en el caso clásico con los funcionales de Laguerre y de Jacobi. En las Proposiciones 3.2 y 3.3 se da un procedimiento para llevar a cabo esta regularización de forma recurrente. Esta técnica es más simple y más general que la descrita en el Capítulo I utilizada por Morton y Krall para regularizar los clásicos. El mismo problema fue también parcialmente abordado, dentro de los polinomios clásicos, por Ismail, Masson y Rahman en [27].

§ 2. Ecuación (B_1).

Se considera la ecuación canónica

$$(B_1): \qquad D\, L + ((s+2)\, x^{s+1} + q_s(x))\, L = 0,$$

donde $q_s(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que s.

Resolviendo la ecuación C-1 se obtiene la función

(2.1) $\quad w(z) = \exp(-z^{s+2} + \pi_{s+1}(z))$, donde $-\pi_{s+1}(z)$ es una primitiva de $q_s(z)$.

Sean $\alpha_o,\ldots,\alpha_{s+1}$ las raices de la unidad de orden $s+2$ y sea $\alpha_o = 1$. Para cada $k = 0,1,\ldots,s+1$, se considera la semirrecta Γ_k definida por

$$z_k(x) = \alpha_k\, x, \quad 0 \le x < \infty,$$

y la función $w(z)$ tiende a cero cuando z tiende a infinito a lo largo de Γ_k.

Sea γ_k la unión de Γ_o y $-\Gamma_k$ para cada valor de k. Entonces

$$\omega(z)\, p(z) \Big|_{\gamma_k} = 0,$$

por lo que se satisface la condición C-2 para los funcionales $L_1,\ldots, L_{s+1}$ definidos por

$$< L_k, p(x) > = \int_{\gamma_k} w(z)\, p(z)\, dz$$

y que por tanto son soluciones de la ecuación (B_1).

Proposición 2.1.

El conjunto de funcionales $\{L_1,\ldots,L_{s+1}\}$ es un S.F.S. de la ecuación (B_1).

Demostración

Se probará que los funcionales $L_0^*,\ldots,L_{s+1}^*$ definidos por

$$< L_k^*, p(x) > = \int_{\Gamma_k} w(z)\, p(z)\, dz$$

son linealmente independientes, por lo que $L_1,\ldots,L_{s+1}$ también lo serán y el conjunto $\{L_1,\ldots,L_{s+1}\}$ constituirá un S.F.S. de la ecuación (B_1).

Supongamos que $\sum_{k=0}^{s+1} \lambda_k\, L_k^* = 0$. Entonces

$$(2.2) \qquad < \sum_{k=0}^{s+1} \lambda_k L_k^*, \, x^{n(s+2)+i} > = 0, \qquad n \geq 0, \; i = 0,1,\dots,s+1.$$

Además,

$$< L_k^*, \, x^{n(s+2)+i} > = \int_0^\infty \alpha_k^{i+1} \, x^{n(s+2)+i} \, \exp(-x^{s+2} + \pi(\alpha_k x)) \, dx,$$

y, haciendo el cambio de variable $x^{s+2} = y$, esto es lo mismo que

$$\frac{1}{s+2} \int_0^\infty y^n \, e^{-y} \, \alpha_k^{i+1} \, y^{\frac{i-s-1}{s+2}} \, \exp(\pi(\alpha_k \, y^{1/s+2})) \, dy.$$

De esta forma, el sistema de ecuaciones (2.2) se puede escribir como

$$\int_0^\infty y^n \, e^{-y} \, y^{\frac{i-s-1}{s+2}} \sum_{k=0}^{s+1} \lambda_k \, \alpha_k^{i+1} \, \exp(\pi(\alpha_k \, y^{1/s+2})) \, dy =$$

$$= \int_0^\infty y^n \, e^{-y} \, f_i(y) \, dy = 0, \qquad n \geq 0, \quad i = 0,\dots,s+1.$$

Para cada $i = 0,\dots,s+1$, la ecuación anterior significa que la Transformada de Laplace $F_i(t)$ de cada función $f_i(y)$ y todas sus derivadas, se anulan en el punto $t = 1$, de donde se deduce que $f_i(y) = 0$ para todo $y > 0$. Como consecuencia,

$$\sum_{k=0}^{s+1} \lambda_k \, \alpha_k^{i+1} = 0 \quad \text{para} \quad i = 0,\dots,s+1,$$

y los coeficientes $\lambda_0,\dots,\lambda_{s+1}$ tienen que ser nulos porque es un sistema de Van der Monde ■

§ 3. El polinomio $\phi(x)$ tiene raices simples. Ecuación (B_2).

La ecuación canónica en este caso es

$$(B_2) \qquad D(\phi \, L) + \psi \, L = 0, \quad \phi(x) = x \prod_{i=1}^{N} (x-a_i), \quad \psi(x) = (s-N+1) \, x^{s+1} + \dots$$

donde a_i son números complejos distintos y N es un entero menor o igual que s.

De la condición C-1 se sigue que

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = - \frac{\psi(x) + \phi'(x)}{\phi(x)} =$$

$$= -(s-N+1)\, x^{s-N} + \pi(x) + \frac{\alpha_o}{x} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{x - a_i} ,$$

donde $\pi(x)$ es un polinomio cuyo grado es menor que s-N. Así

$$w(x) = x^{\alpha_0} (x - a_1)^{\alpha_1} \ldots (x - a_N)^{\alpha_N} \exp(-x^{s-N+1} + q(x)),$$

donde $q(x)$ es una primitiva de $\pi(x)$.

Caso *($B_{2.1}$)* (Re $\alpha_i > -1$)

Para evitar problemas de convergencia en las integrales que aparecerán, se considera en primer lugar el caso en que cada exponente α_i es tal que $\mathrm{Re}(\alpha_i) > -1$.

Sea γ_i el segmento que une 0 y a_i, $i = 1,\ldots,N$. Es claro que, para cada $p \in \mathbb{P}$,

$$\int_{\gamma_i} \{(w(z)\ \phi(z))' + \psi(z)\ w(z)\}\ p(z)\ dz = 0 \quad \text{y} \quad w(z)\ \phi(z)\ p(z)\Big|_{\gamma_i} = 0,$$

por lo que los funcionales L_i dados por

$$< L_i, p(x) > = \int_{\gamma_i} p(z)\ \omega(z)\ dz, \ i = 1,\ldots,N,$$

satisfacen la ecuación ($B_{2\text{-}1}$).

Sean $\beta_1,\ldots,\beta_{s-N+1}$ las raices de la unidad de orden s-N+1, y para cada i, sea $\hat{L}_i$ el funcional dado por

$$< \hat{L}_i, p(x) > = \int_{\hat{\gamma}_i} p(z)\ w(z)\ dz,$$

donde $\hat{\gamma}_i$ es el camino $z(t) = \beta_i t$, $0 \leq t < \infty$. De esta forma, los funcionales $\hat{L}_i$ y los L_i son s+1 soluciones de *($B_{2.1}$)*.

Lema 3.1

Sea ϕ :[a, b]——>$\mathbb{C}$ una curva simple tal que $\phi \in \mathcal{C}^1([a,b])$ y de forma que $\phi'(t) \neq 0$ para todo $t \in (a,b)$. Sea Γ su gráfica. Sea w una función compleja, acotada e integrable a lo largo de Γ. Si

$$\int_\Gamma z^n \, w(z) \, dz = 0 \qquad \text{para } n = 0,1,...,$$

entonces $w(z) = 0$ en todo punto $z = \phi(t)$ en donde $(w \circ \phi)(t)$ sea contínua.

Demostración

Si g(z) es una función continua a lo largo de Γ, por el teorema de aproximación de Merguelian g(z) se puede aproximar uniformemente por polinomios; es decir, para cada $\varepsilon>0$ existe un polinomio p(z) tal que

$$|g(z) - p(z)| < \varepsilon \qquad \text{para todo } z \in \Gamma.$$

Entonces

$$\int_\Gamma g(z)w(z)\, dz = \int_\Gamma (g(z)-p(z))\, w(z)\, dz + \int_\Gamma p(z)\, w(z)\, dz = \int_\Gamma (g(z)-p(z))\, w(z)\, dz.$$

Como $|g(z) - p(z)| < \varepsilon$, $|w(z)| \leq C_1$ para cada $z \in \Gamma$, y como Γ tiene longitud finita, $\text{long}(\Gamma) = C_2 < \infty$, se obtiene

$$\left| \int_\Gamma (g(z) - p(z))\, w(z)\, dz \right| < \varepsilon\, C_1\, C_2,$$

de donde se deduce que

$$\int_\Gamma g(z)\, w(z)\, dz = 0$$

Sea $\xi = \phi(t^*)$ un punto cualquiera de Γ. Puesto que $\phi \in \mathcal{C}^1([a,b])$ y es una curva simple, se puede elegir un abierto G_ξ tal que

$\phi(t) \in G_\xi$ para cada $t \in [a,t^*)$ y $\phi(t) \notin G_\xi$ para cada $t \in [t^*,b]$.

Sea

$$g(z) = \begin{cases} z & \text{cuando} \quad z \in G_\xi \\ \xi & \text{cuando} \quad z \notin G_\xi. \end{cases}$$

Es claro que g(z) es continua en Γ. Como consecuencia

$$\int_\Gamma g(z)\ w(z)\ dz = 0$$

y así

$$\int_a^{t^*} \phi(t)\ w(\phi(t))\ \phi'(t)\ dt + \int_{t^*}^b \phi(t^*)\ w(\phi(t))\ \phi'(t)\ dt = 0.$$

Sea $F(t) = \int_a^t w(\phi(t))\ \phi'(t)\ dt$. Integrando por partes se obtiene

$$0 = \phi(t)\ F(t)\Big|_a^{t^*} - \int_a^{t^*} F(t)\ \phi'(t)\ dt + \phi(t^*) \int_{t^*}^b w(\phi(t))\ \phi'(t)\ dt =$$

$$= \phi(t^*)\ F(t^*) + \phi(t^*)\ (F(b) - F(t^*)) - \int_a^{t^*} F(t)\ \phi'(t)\ dt =$$

$$= F(b)\ \phi\ (t^*) - \int_a^{t^*} F(t)\ \phi'(t)\ dt = - \int_a^{t^*} F(t)\ \phi'(t)\ dt\ ,$$

donde la última igualdad se debe a que $F(b) = \int_\Gamma w(z)\ dz = 0$.

Después de derivar, se obtiene que $F(t^*)\ \phi'(t^*) = 0$, y como $\phi'(t^*) \neq 0$, necesariamente ha de ser $F(t^*) = 0$. En consecuencia, $0 = F'(t) = w(\phi(t))\phi'(t)$ siempre que $(w \circ \phi)(t)$ sea continua en t. Entonces $w(z) = 0$ en todo $z = \phi(t)$ tal que $(w \circ \phi)\ (t)$ sea continua en t ∎

Es posible demostrar el mismo resultado cuando Γ es la unión de una colección finita de caminos Γ_i siempre que estos no tengan ningún punto en común. Incluso si los caminos Γ_i tienen el mismo punto final, el resultado sigue siendo cierto.

Proposición 3.1

$\{L_1,\ldots,L_N,\hat{L}_1,\ldots,\hat{L}_{s-N+1}\}$ es un S.F.S. de la ecuación $(B_{2.1})$.

Demostración

Es suficiente demostrar que los funcionales son linealmente independientes. Supongamos que

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i L_i + \sum_{j=1}^{s-N+1} \hat{\lambda}_j \hat{L}_j = 0$$

y escribamos w(z) en la forma $w(z) = f(z)\exp(-z^{s-N+1})$. Si los coeficientes $\hat{\lambda}_j$ fuesen nulos para j = 1,...,s-N+1, se tendría que

$$0 = <\sum_{i=1}^{N} \lambda_i L_i, x^n> = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \int_{\gamma_i} z^n f(z) \exp(-z^{s-N+1})\, dz.$$

Definiendo

$$f_i(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in \gamma_i \\ 0 & \text{si } z \notin \gamma \end{cases},$$

podemos escribir

$$0 = \int_{\gamma} z^n \exp(-z^{s-N+1}) \sum_{i=1}^{N} \lambda_i f_i(z)\, dz,$$

donde γ es la unión de los caminos γ_i. Según el Lema 3.1, se verifica que $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i f_i(z) = 0$ en todo punto z que no sea extremo de alguna curva γ_i, y así $\lambda_i = 0$ para i = 1,...,N. En consecuencia, únicamente hay que probar que $\hat{\lambda}_j = 0$ para j = 1,...,s-N+1. Para ver esto, supongamos que

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i L_i + \sum_{j=1}^{s-N+1} \hat{\lambda}_j \hat{L}_j = 0.$$

Entonces, para cada k = 0,1,...,s-N,

$$< \sum_{i=1}^{N} \lambda_i L_i + \sum_{j=1}^{s-N+1} \hat{\lambda}_j \hat{L}_j \, , \, x^{n(s-N+1)+k} > = 0, \qquad n \geq 0,$$

y por consiguiente,

$$(3.1) \qquad 0 = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \int_{\gamma_i} z^{n(s-N+1)+k} f(z) \exp(-z^{s-N+1}) \, dz +$$

$$+ \sum_{j=1}^{s-N+1} \hat{\lambda}_j \int_0^{\infty} (\beta_j t)^{n(s-N+1)+k} f(\beta_j t) \exp(-t^{s-N+1}) \, \beta_j \, dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \int_{\gamma_i} z^{n(s-N+1)} z^k f(z) \exp(-z^{s-N+1}) \, dz +$$

$$+ \int_0^{\infty} t^{n(s-N+1)} \exp(-t^{s-N+1}) \sum_{j=1}^{s-N+1} \hat{\lambda}_j \, \beta_j^{k+1} \, t^k f(\beta_j t) \, dt.$$

Se considera ahora, para cada valor de k, la función

$$F_k(y) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \int_{\gamma_i} z^k f(z) \exp(-y \, z^{s-N+1}) \, dz +$$

$$+ \int_0^{\infty} \exp(-y \, t^{s-N+1}) \sum_{j=1}^{s-N+1} \hat{\lambda}_j \, \beta_j^{k+1} \, t^k f(\beta_j t) \, dt.$$

Los caminos γ_i están acotados y la segunda integral es uniformemente convergente. Por lo tanto, $F_k(y)$ es una función analítica en la región Re y > 0. Además,

$$(-1)^n F_k^{(n}(y) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \int_{\gamma_i} z^{n(s-N+1)} z^k f(z) \exp(-y \, z^{s-N+1}) \, dz +$$

$$+\int_0^\infty t^{n(s-N+1)} \exp(-y\, t^{s-N+1}) \sum_{j=1}^{s-N+1} \hat{\lambda}_j\, \beta_j^{k+1}\, t^k f(\beta_j t)\, dt,$$

y la ecuación (3.1) implica que $F_k^{(n}(1) = 0$ para $n=0,1,\ldots$. Entonces $F_k(y) = 0$ cuando $k = 0,1,\ldots,s-N$, y por consiguiente

$$0 = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \int_{\gamma_i} z^k f(z) \exp(-y\, z^{s-N+1})\, dz + \int_0^\infty \exp(-y\, t^{s-N+1}) \sum_{j=1}^{s-N+1} \hat{\lambda}_j \beta_j^{k+1}\, t^k f(\beta_j t)\, dt$$

Haciendo la sustitución $z^{s-N+1} = \xi$ en cada γ_i y $t^{s-N+1} = x$ en (o,∞), se obtiene

$$0 = F_k(y) = \frac{1}{s-N+1} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \int_{\gamma_i^*} \xi^{\frac{k}{s-N+1}} f(\xi^{\frac{1}{s-N+1}}) \exp(-y\xi)\, \xi^{-\frac{s-N}{s-N+1}}\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{s-N+1} \int_0^\infty \exp(-yx) \sum_{j=1}^{s-N+1} \hat{\lambda}_j\, \beta_j^{k+1}\, x^{\frac{k}{s-N+1}} f(\beta_j x^{\frac{1}{s-N+1}})\, x^{-\frac{s-N}{s-N+1}}\, dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \int_{\gamma_i^*} f_k(\xi) \exp(-y\, \xi)\, d\xi + \int_0^\infty \exp(-yx)\, \hat{f}_k(x)\, dx.$$

Sea

$$f_{ki}(\xi) = \begin{cases} f_k(\xi) & \text{cuando } \xi \in \gamma_i^* \\ 0 & \text{cuando } \xi \notin \gamma_i^* \end{cases}$$

y sea γ^* la union de las curvas γ_i^*. Entonces

$$0 = \int_{\gamma^*} \exp(-y\, \xi) \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\, f_{ki}(\xi)\, d\xi + \int_0^\infty \exp(-yx)\, \hat{f}_k(x)\, dx.$$

La igualdad $F_k(y) = 0$ implica en particular que $F_k(n/T) = 0$ cuando $n=1,2,\ldots$ y para todo T real, de lo que se deduce que

$$0 = \int_{\gamma^*} \exp\left(- \frac{\xi\ n}{T}\right) \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\ f_{ki}\ (\xi)\ d\xi + \int_0^\infty \exp\left(- \frac{x\ n}{T}\right) \hat{f}_k(x)\ dx.$$

Puesto que γ^* pertenece a una región acotada én el plano complejo, se puede elegir $T > 0$ suficientemente grande para que la función $\exp(-\xi\ /\ T)$ sea inyectiva en esta región. Haciendo la sustitución $\exp\ (-\xi\ /\ T) = u$,

$$0 = \int_{\bar{\gamma}^*} u^n \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\ \bar{f}_{ki}\ (u)\ du + \int_0^1 u^n\ f_k^*(u)\ du,$$

y el Lema 3.1 muestra que $f_k^*(u) = 0$ cuando u está próximo a cero. Por lo tanto $\hat{f}_k(x) = 0$ cuando x es suficientemente grande.

La fórmula anterior se verifica para $k = 0,1,\ldots,s\text{-}N$, por lo que se tiene un sistema con s-N+1 ecuaciones cuyo determinante es

$$f(\beta_1 x)\ldots f(\beta_{s\text{-}N+1} x)\ \beta_1\ldots\beta_{s\text{-}N+1} \begin{vmatrix} 1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \\ \beta_1 x & \ldots\ldots\ldots\ldots & \beta_{s\text{-}N+1} x \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ (\beta_1 x)^{s\text{-}N} & \ldots\ldots\ldots\ldots & (\beta_{s\text{-}N+1} x)^{s\text{-}N} \end{vmatrix}$$

que es distinto de cero. Entonces $\hat{\lambda}_j = 0$ para $j = 1,\ldots,s\text{-}N+1$ ∎

Caso *($B_{2.2}$)*. Regularización Semiclásica.

Cuando Re $\alpha_i \leq -1$ para algún valor de i, se necesita un proceso de regularización. Este proceso se hace de forma recurrente sobre la parte entera de la parte real de α_i.

Dada la ecuación $D\ (\phi\ L) + \psi\ L = 0$, si a es una raiz de ϕ, se denota

$$\phi(x) = (x\text{-}a)\ \phi_a(x)$$
$$\psi(x) = (x\text{-}a)\ \psi_a(x) + \psi(a)$$

Proposición 3.2

Sea a una raíz de $\phi(x)$ tal que $\psi(a) \neq 0$. Si $\{L_1,...L_{s+1}\}$ es un S.F.S. de la ecuación de clase s y de tipo *(B)* $D(\phi\ L) + (\psi - \phi_a)\ L = 0$ entonces

$$\left\{(x-a)^{-1}\ L_1 + M_1\ \delta(x-a),\ldots.,\ (x-a)^{-1}\ L_{s+1} + M_{s+1}\ \delta(x-a)\right\},$$

donde $M_i = \dfrac{-< L_i,\ \psi_a(x) >}{\psi(a)}$, es un S.F.S. de la ecuación de clase s $D(\phi\ L) + \psi\ L = 0$.

Demostración

Sea $L_i^* = (x-a)^{-1}L_i + M_i\ \delta(x-a)$. Entonces $L_i = (x-a)\ L_i^*$. Además,

$$D((x-a)^2\ \phi_a\ L_i^*) = D((x-a)\ \phi_a\ L_i) = -(\psi - \phi_a)\ L_i = -(\psi - \phi_a)\ (x-a)\ L_i^*,$$

y por lo tanto, $D((x-a)^2\ \phi_a\ L_i^*) + (x-a)\ (\psi - \phi_a)\ L_i^* = 0$. Derivando se obtiene

$$0 = (x-a)\ (D\ (\phi\ L_i^*) + \psi\ L_i^*) = D\ (\phi\ L_i^*) + \psi\ L_i^* = < L_i^*,\ \psi(x) > \delta(x-a).$$

Pero

$$< L_i^*,\ \psi(x) > = < L_i,\ \frac{\psi(x) - \psi(a)}{x-a} > + M_i < \delta(x-a),\ \psi(x) > =$$

$$= < L_i,\ \psi_a(x) > + M_i\ \psi(a) = 0$$

por la definición de M_i. Entonces $D(\phi\ L_i^*) + \psi\ L_i^* = 0$. Además

$$\begin{vmatrix} < L_1^*, 1 > ,\ldots\ldots, < L_1^*, 1 > \\ < L_1^*, x-a >,\ldots\ldots, < L_{s+1}^*, x-a > \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ < L_1^*,(x-a)^s>,\ldots\ldots, < L_{s+1}^*,(x-a)^s> \end{vmatrix} =$$

$$
= \begin{vmatrix} M_1 \;, \ldots\ldots\ldots, & M_{s+1} \\ <L_1, 1> \;,\ldots\ldots, & <L_{s+1}, 1> \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ <L_1, (x-a)^{s-1}>, \ldots\ldots, & <L_{s+1}, (x-a)^{s-1}> \end{vmatrix} =
$$

$$
= - \frac{K}{\psi(a)} \begin{vmatrix} <L_1, (x-a)^s>, \ldots\ldots, & <L_{s+1}, (x-a)^s> \\ <L_1, 1>, \ldots\ldots, & <L_{s+1}, 1> \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ <L_1, (x-a)^{s-1}>, \ldots\ldots, & <L_{s+1}, (x-a)^{s-1}> \end{vmatrix}
$$

donde K es el coeficiente de grado s+1 de $\psi(x)$ y por tanto distinto de 0. La última igualdad se debe a que los demás términos de la primera fila son una combinación lineal de las filas restantes. Esto prueba que $\{L_1^*,\ldots,L_{s+1}^*\}$ es un sistema libre porque por hipótesis $\{L_1,\ldots, L_{s+1}\}$ es un S.F.S. y, por la Proposición 2.2 del Capítulo III, el último determinante es no nulo. En consecuencia $\{L_1^*,\ldots,L_{s+1}^*\}$ es un S.F.S. de la ecuación $D(\phi\, L) + \psi\, L = 0$ ∎

A continuación se explica el proceso recurrente para resolver $(B_{2.2})$:

Supongamos inicialmente que solamente un α_i tiene su parte real menor o igual que -1 y que $\alpha_i \neq -1, -2, ..$ Si $-2 < \mathrm{Re}\ \alpha_i \leq -1$, entonces la ecuación $D(\phi\, L)+(\psi - \phi_{a_i})L = 0$ es de tipo $(B_{2.1})$ puesto que

$$
\frac{\omega'(x)}{\omega(x)} = - \frac{\psi(x)-\phi_{a_i}(x) + \phi'(x)}{\phi(x)} = - \frac{\psi(x) + \phi'(x)}{\phi(x)} + \frac{1}{x - a_i}
$$

y aplicando la Proposición 3.2 se obtiene la solución de $D(\phi L) + \psi L = 0$ a partir de la anterior.

Para poder aplicar la Proposición 3.2 es necesario que $\psi(a_i) \neq 0$, pero esto es equivalente a que $\alpha_i \neq -1$ ya que $\phi(x)$ tiene sólo raices simples.

Repitiendo el proceso tantas veces como indique la parte entera de Re α_i, se obtiene la solución para el caso Re $\alpha_i \leq -1$ siempre que $\alpha_i \neq -1, -2, \ldots$

Finalmente se resuelve el caso $\alpha_i = -1$ a partir del cual, de nuevo por la Proposición 3.2, se halla la solución para $\alpha_i = -2, -3, \ldots$

Proposición 3.3

Dada la ecuación $D(\phi L) + \psi L = 0$, supongamos que para alguna raíz a de $\phi(x)$ se cumple que $\psi(a) = 0$. Sea $\{L_1,\ldots,L_s\}$ un S.F.S. de la ecuación $D(\phi_a L) + \psi_a L = 0$. Entonces

$$\{\ \delta(x-a),\ (x-a)^{-1}L_1,\ldots,\ (x-a)^{-1}L_s\}$$

es un S.F.S. de la ecuación $D(\phi L) + \psi L = 0$.

Demostración.

Claramente $\delta(x-a)$ es una solución. Sea $L_i^* = (x-a)^{-1}L_i$. Entonces $L_i = (x-a)\ L_i$, y así

$$D((x-a)\ \phi_a\ L_i^*) = D(\phi_a\ L_i) = -\psi_a\ L_i = -\ (x-a)\ \psi_a\ L_i^* = -\psi\ L_i^*.$$

Por lo tanto $D(\phi\ L_i^*) + \psi\ L_i^* = 0$. Además,

$$\begin{vmatrix} <\delta(x-a), 1> & <L_1^*, 1> & \ldots\ldots <L_s^*, 1> \\ <\delta(x-a), x-a> & <L_1^*, x-a> & \ldots\ldots <L_s^*, x-a> \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ <\delta(x-a), (x-a)^s> & <L_1^*, (x-a)^s> & \ldots\ldots <L_s^*, (x-a)^s> \end{vmatrix} =$$

$$
= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & \langle L_1, 1 \rangle & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \langle L_s, 1 \rangle \\ & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & \langle L_1, (x-a)^{s-1} \rangle & \ldots\ldots\ldots & \langle L_s, (x-a)^{s-1} \rangle \end{vmatrix} \neq 0
$$

puesto que $\{L_1, \ldots, L_s\}$ es un S.F.S.∎

Si la ecuación $D(\phi\, L) + \psi\, L = 0$ es de clase s como en la Proposición 3.3 entonces $D(\phi_a L) + \psi_a L = 0$ es de clase s-1, y para esta ecuación se presentan las posibilidades siguientes:

i) $D\, L + K\, L = 0$, donde K es una constante.
ii) Es de tipo *(B_1)*.
iii) Es de tipo *($B_{2.1}$)*.

En los casos ii) y iii) las soluciones son conocidas. En cuanto al caso i), la única solución es $L = 0$ puesto que esta ecuación es equivalente a

$$
\begin{cases} \mu_o\, K = 0 \\ -n\, \mu_{n-1} + \mu_n\, K = 0, \qquad n \geq 1, \end{cases}
$$

de donde se deduce que $\mu_n = 0$ para $n \geq 0$.

De esta forma la ecuación *($B_{2.2}$)* está resuelta cuando solamente un α_i tiene su parte real menor o igual que -1. Si hubiese más de uno, sería suficiente aplicar de nuevo las Proposiciones 3.2 y 3.3 para reducir este caso al anterior.

Ejemplo (Polinomios Generalizados de Laguerre)

$$
D(x\, L) + (\, x - (\alpha+1)\,)\, L = 0 \qquad (\alpha \in \mathbb{R})
$$

Por las condiciones C-1 y C-2, las soluciones de esta ecuación para $\alpha > -1$ son

$$< L^{(\alpha)}, p(x) > = \int_0^{\infty} p(x)\, x^{\alpha}\, e^{-x}\, dx, \qquad \alpha > -1$$

Cuando α es un entero negativo

$$L^{(-1)} = \delta(x) \qquad \text{(Proposición 3.3)}$$

$$L^{(-k-1)} = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^k}{i!(k-i)!}\, \delta^{(i)}(x) \qquad \text{(Proposición 3.2)}$$

Cuando $\alpha < -1$ y no es entero $\quad (\alpha = -k + \varepsilon;\ -1 < \varepsilon < 0)$

$$L^{(-1+\varepsilon)} = x^{-1}L^{(\varepsilon)} + M_1\, \delta(x)$$

$$L^{(-2+\varepsilon)} = x^{-1}L^{(-1+\varepsilon)} + M_2\delta(x) = x^{-2}L^{(\varepsilon)} - M_1\delta'(x) + M_2\delta(x)$$

....

$$L^{(-k+\varepsilon)} = x^{-k}L^{(\varepsilon)} + \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{k-j}}{(k-j)!} M_j\, \delta^{(k-j)}(x),$$

donde $M_j = \dfrac{< L^{(\varepsilon)}, 1 >}{\varepsilon(\varepsilon-1)\ldots(\varepsilon-j+1)}$. Entonces

$$< L^{(\alpha)}, p(x) > =$$

$$\boxed{\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} \left\{ p(x) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{p^{(j)}(0)}{j!}\, x^j + \sum_{j=1}^{k} \frac{p^{(k-j)}(0)}{(k-j)!\ \varepsilon(\varepsilon-1)..(\varepsilon-j+1)}\, x^k \right\} dx}$$

§ 4. El polinomio $\phi(x)$ tiene raices múltiples. Ecuación *(B_3)*.

Con objeto de facilitar la lectura se comienza estudiando la ecuación *(B_3)* cuando $\phi(x)$ tiene solamente una raíz. Simplemente es un caso particular pero presenta todos los elementos del caso general.

Ecuación *($B_{3.1}$)*

$$D(x^{N+1}\, L) + \psi(x)\, L = 0, \quad \psi(x) = (s-N+1)\, x^{s+1} + \ldots, \quad 1 \le N \le s,\ s \ge 1.$$

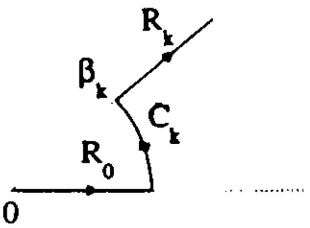
Según la Proposición 3.3 será suficiente resolver la ecuación cuando $\psi(0) \neq 0$. La condición C-1 en este caso es $(x^{N+1}\, w(x))' + \psi(x)\, w(x) = 0$, de lo que se deduce que

$$w(x) = x^{\alpha} \exp(-x^{s-N+1} + ..) \exp(A\, x^{-N} + \ldots), \tag{4.1}$$

donde α y A son constantes complejas con $A \neq 0$ porque $\psi(0)$ es no nulo.

Se resolverá la ecuación cuando $A = -1$. En otro caso, un giro apropiado alrededor del origen de los caminos Γ_{0j} que a continuación se definen resuelve el problema.

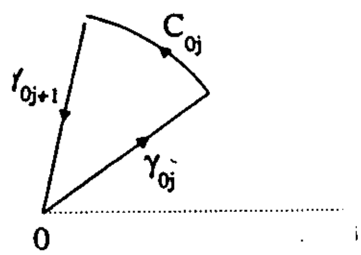
Para cada $k=1,\ldots,s-N+1$ se define:



1.- β_k es una raiz de orden $s-N+1$ de la unidad.
2.- R_0 el intervalo $[0, 1]$.
3.- C_k el arco de la circunferencia unidad con extremos 1 y β_k.
4.- R_k la recta en la dirección de β_k correspondiente a $1 \le |z| < \infty$.

Fig. 1

Para $j=1,\ldots,N$ se considera



1.- $\beta_{0,j}$ las raices de la unidad de orden N y $\beta_{0,N+1} = e^{2\pi i}$.
2.- $\gamma_{0,j}$ el segmento en la dirección de $\beta_{0,j}$ que corresponde a $0 \le |z| \le 1$.
3.- $C_{0,j}$ los arcos de la circunferencia unidad con extremos $\beta_{0,j}$ y $\beta_{0,j+1}$.

Fig. 2

Sean ahora

$$\Gamma_k = R_0 \cup C_k \cup R_k, \quad k = 1, ..., s\text{-}N+1$$

$$\Gamma_{0,j} = \gamma_{0,j} \cup C_{0,j} \cup (-\gamma_{0,j+1}), \quad j = 1, ..., N$$

y los correspondientes funcionales

$$(4.2) \qquad < L_k, p(x) > = \int_{\Gamma_k} w(z)\, p(z)\, dz$$

$$(4.3) \qquad < L_{0,j}, p(x) > = \int_{\Gamma_{0,j}} w(z)\, p(z)\, dz$$

De esta forma se tienen s+1 funcionales que verifican la ecuación $(B_{3,1})$. Para probar que son linealmente independientes se hará uso del siguiente resultado:

Lema 4.1

Sea $\pi(x) = -x^n + \sum_{k=1}^{n} b_k\, x^{n-k}$ con $b_k \in \mathbb{C}$. Sea f(x) una función localmente integrable y acotada en $[0, \infty]$. Sea $H(\alpha)$ la función

$$H(\alpha) = \int_0^\infty x^\alpha\, e^{\pi(x)}\, dx \qquad \text{donde} \qquad \mathrm{Re}\, \alpha > -1$$

y, para cada α fijo, sea F(t) la función

$$F(t) = \int_0^\infty x^\alpha\, e^{\pi(tx)}\, f(x)\, dx \qquad \text{para } t > 0.$$

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ entonces $\lim_{x\to 0^+} t^{\alpha+1}\, F(t) = A\, H(\alpha)$.

Demostración

$$H(\alpha) = \int_0^\infty x^\alpha\, e^{\pi(x)}\, dx = \int_0^\infty (tx)^\alpha\, e^{\pi(tx)}\, t\, dx.$$

Por otra parte, para cada $\varepsilon > 0$, sea T tal que $|f(x) - A| < \varepsilon$ cuando $x > T$. Entonces

$$|t^{\alpha+1} F(t) - A\, H(\alpha)| = \left| t^{\alpha+1} \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{\pi(tx)} (f(x) - A)\, dx \right| \leq$$

$$\leq |t^{\alpha+1}| \int_0^{T} |x^{\alpha} e^{\pi(tx)}|\, |f(x) - A|\, dx + \varepsilon \int_T^{\infty} |x^{\alpha} e^{\pi(tx)} t^{\alpha+1}|\, dx \leq$$

$$\leq |t^{\alpha+1}|\, T\, M + \varepsilon \int_0^{\infty} |x^{\alpha}|\, e^{\mathrm{Re}\,\pi(x)}\, dx$$

siendo M una cota superior para la función $|x^{\alpha} e^{\pi(tx)}|\, |f(x) - A|$ cuando $x \in [0, T]$ y cuando $t \in [0, t_0]$ para algún t_0 fijo. Entonces

$$\lim_{t\to 0^+} |t^{\alpha+1} F(t) - A\, H(\alpha)| \leq \varepsilon \int_0^{\infty} |x^{\alpha}|\, e^{\mathrm{Re}\,\pi(x)}\, dx,$$

y así $\lim_{t\to 0^+} t^{\alpha+1} F(t) = A\, H(\alpha)$ ∎

Proposición 4.1

El conjunto de funcionales $\{ L_1, \ldots, L_{s-N+1}, L_{0,1}, \ldots, L_{0,N} \}$ definido en (4.2) y en (4.3) es un S.F.S. de la ecuación $(B_{3.1})$.

Demostración

Será suficiente demostrar que los funcionales son linealmente independientes. Supongamos que

$$(4.4) \qquad \sum_{k=1}^{s-N+1} \lambda_k L_k + \sum_{j=1}^{N} \lambda_{0,j} L_{0,j} = 0$$

y escribamos w(z), definida en (4.1), en la forma $w(z) = z^{\alpha} e^{\pi(z) + q(1/z)}$. En una primera etapa se probará que los coeficientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_{s-N+1}$ son todos nulos.

Sea μ un entero tal que $\operatorname{Re}(\mu+\alpha) > -1$. De la ecuación (4.4) se sigue que

$$0 = < \sum_{k=1}^{s-N+1} \lambda_k L_k + \sum_{j=1}^{N} \lambda_{0,j} L_{0,j}, x^{\mu} p(x) >$$

para todo polinomio $p(x)$. Entonces

$$(4.5) \qquad \sum_{k=1}^{s-N+1} \lambda_k \left\{ \int_{R_0} w(z) z^{\mu} p(z)\, dz + \int_{C_k} w(z) z^{\mu} p(z)\, dz + \int_{R_k} w(z) z^{\mu} p(z)\, dz \right\} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \lambda_{0,j} \int_{\Gamma_{0,j}} w(z) z^{\mu} p(z)\, dz = 0.$$

Para $m=0,1,\dots,s-N$, y cuando $\operatorname{Re}(t) > 0$, se consideran las funciones

$$F_m(t) = \sum_{k=1}^{s-N+1} \lambda_k \int_{R_k} z^{m+\mu+\alpha} e^{\pi(tz)+q(1/z)}\, dz$$

$$G_m(t) = -\sum_{k=1}^{s-N+1} \lambda_k \left\{ \int_{C_k} z^{m+\mu+\alpha} e^{\pi(tz)+q(1/z)}\, dz + \int_{R_0} z^{m+\mu+\alpha} e^{\pi(tz)+q(1/z)}\, dz \right\} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \lambda_{0,j} \int_{\Gamma_{0,j}} z^{m+\mu+\alpha} e^{\pi(tz)+q(1/z)}\, dz$$

La igualdad (4.5) implica que $F_m^{(n}(1) = G_m^{(n}(1)$ para $n=0,1\dots$ y para $m=0,1,\dots,s-N$. Como consecuencia, $F_m(t) = G_m(t)$ en la región $\operatorname{Re}(t) > 0$. Puesto que $G_m(t)$ es analítica en todo el plano complejo, la función $F_m(t)$ tiene una prolongación analítica. Por lo tanto debe de existir $\lim_{t\to 0^+} F_m(t)$. Entonces

$$(4.6) \qquad \lim_{t\to 0^+} t^{m+\mu+\alpha+1} F_m(t) = 0 \quad \text{para} \quad m=0,1,\dots,s-N$$

Además, teniendo en cuenta que β_k son las raices de la unidad de orden $s-N+1$,

$$F_m(t) = \sum_{k=1}^{s-N+1} \lambda_k \int_1^{\infty} (\beta_k x)^{\mu+\alpha+m} e^{\pi(\beta_k xt)+q((\beta_k x)^{-1})} \beta_k\, dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{s-N+1} \lambda_k \int_0^{\infty} x^{\mu+\alpha+m} \beta_k^{\mu+\alpha+m+1} e^{\pi(\beta_k(xt)+q((\beta_k x)^{-1})} \chi_{[1,\infty]}(x)\, dx,$$

donde $\chi_{[1,\infty]}(x)$ denota la función característica del intervalo $[1,\infty]$. Puesto que

$$\lim_{x\to\infty} \beta_k^{\mu+\alpha+m+1} e^{q((\beta_k x)^{-1})} \chi_{[1,\infty]}(x) = e^{q(0)} \beta_k^{\mu+\alpha+m+1},$$

del Lema 4.1 y de la igualdad (4.6) se sigue que

$$\lim_{t\to 0^+} t^{\mu+\alpha+m+1} F_m(t) = \beta_k^{\mu+\alpha+n+1} H_k (\mu+\alpha+m)\, e^{q(0)} = 0$$

para m=0,...s-N, siendo H_k la función

$$H_k(\mu+\alpha+m) = \int_0^{\infty} x^{\mu+\alpha+m} e^{\pi(\beta_k x)} dx.$$

Los coeficientes $\lambda_1,...,\lambda_{s-N+1}$ satisfacen entonces el sistema

$$0 = \sum_{k=1}^{s-N+1} \lambda_k \beta_k^{\mu+\alpha+m+1} H_k(\mu+\alpha+m)\, e^{q(0)} = e^{q(0)} \sum_{k=1}^{s-N+1} \lambda_k \int_{\gamma_k} z^{m+\mu+\alpha} e^{\pi(z)} dz$$

donde γ_k es la recta $z = \beta_k x$, $0 \le x < \infty$. El deteminante de este sistema se puede escribir de la forma

$$(4.7) \qquad \det\left[< \mathcal{M}_k, x^m >\right]_{\substack{k=1,...,s-N+1\\ m=0,...,s-N}}$$

donde $\mathcal{M}_k$ es el funcional de momentos definido por

$$< \mathcal{M}_k, p(x) > = \int_{\gamma_k} p(z)\, z^{\mu+\alpha} e^{\pi(z)} dz.$$

En la Proposición 3.1 se ha probado que $\{\mathcal{M}_1,...,\mathcal{M}_{s-N+1}\}$ es un SFS de la ecuación $D(x L) - (x \pi'(x) + \mu+\alpha+1) L = 0$. De la Proposición 2.2 del Capítulo III se deduce ahora que

$$\det\left[< \mathcal{M}_k, x^m >\right]_{\substack{k=1,...,s-N+1\\ m=0,...,s-N}} \neq 0$$

y de esta forma los coeficientes $\lambda_1,\ldots,\lambda_{s-N+1}$ tienen que ser nulos.

En una segunda etapa se probará que los coeficientes $\lambda_{0,1},\ldots\ldots,\lambda_{0,N}$ son tambien iguales a cero.

La igualdad (4.4) es ahora $\sum_{j=1}^{N} \lambda_{0,j} L_{0,j}' = 0$. En consecuencia

$$(4.8) \qquad < \sum_{j=1}^{N} \lambda_{0,j} L_{0,j}, x^{Nm+k} > = 0, \quad k = 0,\ldots,N-1, \quad m = 0,1,\ldots$$

Escribiendo la función w(z) definida en (4.1) en la forma $w(z) = z^{\alpha} \exp(-z^{-N})\, g(z)$, la fórmula (4.8) es

$$0 = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{0,j} \int_{\Gamma_{0,j}} z^{Nm+k} \exp(z^{-N})\, g(z)\, z^{\alpha}\, dz =$$

$$= \int_{\Gamma_{0,1}} z^{Nm} \exp(-z^{-N}) \sum_{j=1}^{N} \lambda_{0,j} (\beta_{0,j} z)^{k+\alpha}\, g(\beta_{0,j} z)\, \beta_{0,j}\, dz$$

donde $\beta_{0,1},\ldots,\beta_{0,N}$ son las raices de la unidad de orden N. Haciendo ahora $z^N = t$,

$$(4.9) \qquad 0 = \frac{1}{N} \int_{\Gamma} t^{m + \frac{\alpha - N + 1 + k}{N}}\, e^{-1/t} \sum_{j=1}^{N} \lambda_{0,j}\, \beta_{0,j}^{k+\alpha+1}\, g(\beta_{0,j}\, t^{1/N})\, dt$$

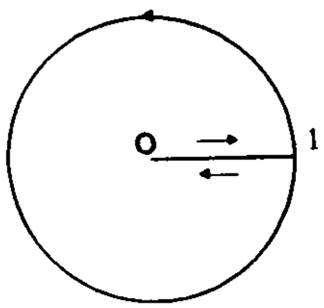


Fig. 3

para cada k=0,...,N-1 y m=0,1,..., siendo Γ la curva de la figura 3.

Se distinguen dos posibilidades:

I.- Las funciones $t^{(\alpha - N + 1 + k)/N} \sum_{j=1}^{N} \lambda_{0,j} \beta_{0,j}^{k+\alpha+1}\, g(\beta_{0,j} t^{1/N})$ son uniformes (esto ocurre por ejemplo cuando N=1 y α es un número entero):

La curva Γ es ahora $|z| = 1$ y, por la fórmula de Laurent, (4.9) implica que

$$e^{-1/t} \quad t^{(\alpha-N+1+k)/N} \sum_{j=1}^{N} \lambda_{0,j} \, \beta_{0,j}^{k+\alpha+1} \, g(\beta_{0,j} t^{1/N})$$

es una función analítica en $t = 0$. Pero esto es sólo posible cuando

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_{0,j} \, \beta_{0,j}^{k+\alpha+1} = 0,$$

de lo que se deduce que los coeficientes $\lambda_{0,1},\ldots,\lambda_{0,N}$ son nulos.

II.- Las funciones $t^{(\alpha-N+1+k)/N} \sum_{j=1}^{N} \lambda_{0,j} \, \beta_{0,j}^{k+\alpha+1} \, g(\beta_{0,j} t^{1/N})$ son multiformes.

Denotando estas funciones con $h_k(t)$, la expresión (4.9) se puede escribir como

$$(4.10) \qquad 0 = \int_{\Gamma} t^m \, e^{-1/t} \, h_k(t) \, dt$$

donde se considera $0 \leq \arg(t) \leq 2\pi$. Como consecuencia, para cada ξ tal que $|\xi| > 1$, se tiene que

$$(4.11) \qquad H_k^*(\xi) = \int_{\Gamma} \frac{e^{-1/t} \; h_k(t)}{t - \xi} \, dt = 0,$$

y por el teorema de Cauchy, $H_{k,\varepsilon}^*(\xi) = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{e^{-1/t} \; h_k(t)}{t - \xi} \, dt = 0$ cuando $|\xi| > 1$ y donde, para cada $\varepsilon > 0$, Γ_ε es la curva de la figura 4. Por lo tanto, la función $H_{k,\varepsilon}^*(\xi)$ se anula en todo punto ξ tal que $|\xi| > \varepsilon$.

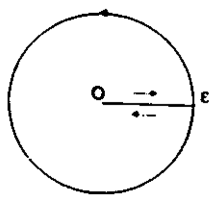


Fig. 4

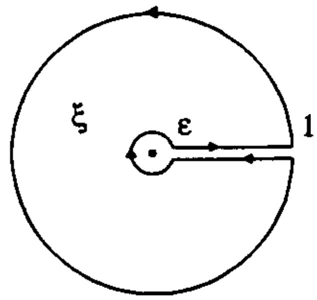


Fig. 5

Sea ξ tal que $\varepsilon < |\xi| < 1$ y tal que $\xi \notin [0,1]$. De nuevo del Teorema de Cauchy se deduce que

$$2\pi i \, e^{-1/t} \, h_k(\xi) = \int_{C} \frac{e^{-1/t} \, h_k(t)}{t - \xi} \, dt$$

siendo C la curva de la figura 5. Por lo tanto

$$(4.12) \qquad 2\pi i\, e^{-1/\xi}\, h_k(\xi) = H_k^*(\xi) - H_{k,\varepsilon}^*(\xi) = H_k^*(\xi), \quad 0 < |\xi| < 1, \quad \xi \notin [0,1].$$

Sea ξ un punto perteneciente al intervalo $(-\frac{1}{2}, 0)$ y sean $M_{k,1}$, $M_{k,2}$, $M_{k,3}$ números reales y positivos tales que, para $k = 0,1,\dots,N-1$,

$$|e^{-1/t}\, h_k(t)| \le M_{k,1} \qquad \text{cuando} \quad |t| = 1$$

$$\left| \frac{e^{-1/t}\, h_k(t)}{t} \right| \le M_{k,2} \qquad \text{para} \quad 0 \le t \le 1$$

$$\left| \frac{e^{-1/t}\, h_k(t\, e^{2\pi i})}{t} \right| \le M_{k,3} \quad \text{si} \quad 0 \le t \le 1.$$

Como $\xi \in (\frac{-1}{2}, 0)$, se tiene que $|t - \xi| \ge 2^{-1}$ cuando $|t| = 1$ y también que $|t - \xi| \ge t$ para $0 \le t \le 1$. Entonces $|H_k^*(\xi)| \le 4\pi\, M_{k,1} + M_{k,2} + M_{k,2} + M_{k,3}$ para cada k y para todo punto ξ que pertenezca al intervalo $(2^{-1}, 0)$. En consecuencia, la igualdad (4.12) es sólo posible cuando $h_k(\xi) = 0$. Ha de verificarse entonces que

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_{0,j}\, \beta_{0,j}^{k+\alpha+1} = 0, \quad k = 0,1,\dots,N-1,$$

de donde se deduce que $\lambda_{0,1},\dots,\lambda_{0,N}$ tienen que ser nulos ■

Observación

Si se considera la ecuación de los funcionales de Bessel

$$(4.13) \qquad D(x^2\, L) + ((a-2)\, x + b)\, L = 0,$$

la función $w(z) = z^{-a}\, e^{b/z}$ es una solución de la ecuación dada por la condición C-1 $(x^2\, w(x))' + ((a-2)\, x + b)\, w(x) = 0$ y además, se anula en los extremos de la curva de la figura 6. Por consiguiente, el funcional dado por

$$< L, p(x) > = \int_\Gamma p(z)\, z^{-a}\, e^{b/z}\, dz$$

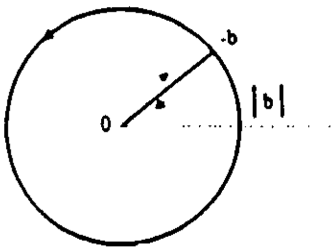


Fig. 6

es una solución de la ecuación (4.13). Además, teniendo en cuenta el razonamiento de la Proposición anterior, L es distinto de cero. De esta forma se tiene otra representación integral de los polinomios de Bessel. La misma técnica podría utilizarse para obtener nuevas representaciones de cualquier otro *(A)*-funcional.

Ecuación *(B_3)*

La ecuación canónica en este caso es

$$D(\phi(x)\, L) + \psi(x)\, L = 0, \quad \phi(x) = x^{r_0+1}\prod_{k=1}^{M}(x-a_k)^{r_k+1}\ ;\ \sum_{k=0}^{M}(r_k+1) = N+1 \le s+1$$

$$\psi(x) = (s\text{-}N+1)\, x^{s+1} + \dots$$

Se supone que al menos la raiz $0 = a_0$ del polinomio $\phi(x)$ es múltiple, o lo que es lo mismo, que r_0 es mayor que cero.

Resolviendo la ecuación $(\phi\, w)' + \psi\, w = 0$ se obtiene

$$(4.14) \qquad w(z) = z^{\alpha_0}\prod_{k=1}^{M}(z-a_k)^{\alpha_k}\exp(-z^{s-n+1}+\dots)\exp\left[\frac{A_0}{z^{r_0}} + \sum_{k=1}^{M}\frac{A_k}{(z-a_k)^{r_k}}\right]$$

$$\cdot \exp\left(\frac{Q(z)}{R(z)}\right)$$

donde Q(z) y R(z) son polinomios tales que el grado de Q(z) es menor que el grado de R(z) y de forma que, en la descomposición de Q(z)/R(z) en fracciones simples, las potencias de los términos correspondientes a cada raiz a_k son menores que r_k.

Sin pérdida de generalidad se supone que $\phi(x)$ y $\psi(x)$ no tienen ninguna raíz en común; en otro caso la Proposición 3.3 nos daría la solución. También se supone que si algún a_k es una raíz simple, la correspondiente potencia α_k tiene la parte real mayor que -1. Finalmente, se supone que los coeficientes A_k son todos iguales a -1; bastaría efectuar un giro adecuado alrededor de la raiz a_k del camino $\Gamma_{k,j}$ que se definirá más tarde para resolver el caso general.

Para cada raíz a_k que sea múltiple y para cada $j=1,\dots,r_k$, se definen los siguientes caminos:

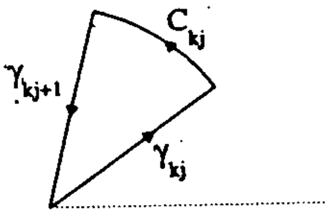


Fig. 7

1.- $\beta_{k,j}$ las raices de la unidad de orden r_k y $\beta_{k,r_k+1} = e^{2\pi i}$.

2.- l_k es un número real y positivo cuya longitud se definirá más tarde.

3.- $\gamma_{k,j}$ es el segmento desde a_k en la dirección $\beta_{k,j}$ y de longitud l_k.

4.- $C_{k,j}$ es el arco de circunferencia de radio l_k y centro en a_k desde el argumento de $\beta_{k,j}$ hasta el argumento de $\beta_{k,j+1}$.

Para cada k se considera l_k suficientemente pequeño de manera que los arcos $C_{k,j}$ correspondientes a raices distintas no tengan ningún punto en común.

Ahora se definen los caminos desde $a_0 = 0$ hasta cada raiz a_k:

5.- Para $k = 1,\dots,M$, E_k es cualquier curva simple saliendo del origen por cualquier dirección d_k tal que, cuando $z \in d_k$ se cumple que $\lim_{z\to 0} \exp(-1/z^{r_0}) = 0$, llega al punto a_k por la dirección $\beta_{k,1}$ cuando a_k es una raíz múltiple o a través de cualquier dirección cuando a_k es simple, de forma que, evitando los puntos a_j si $j \neq k$, dos E_k diferentes no tengan más punto en común que el origen.

Finalmente, para $m = 1,\dots,s-N+1$, se definen los caminos que unen el 0 y el punto del infinito:

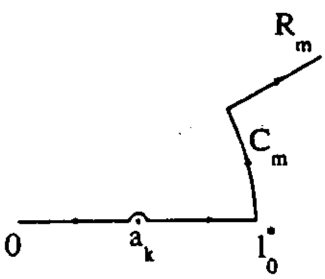


fig.8

6.- β_m son las raices de la unidad de orden $s-N+1$.

7.- l_0^* es un número real y positivo tal que cada camino anterior esta dentro del círculo centrado en el origen de radio l_0^*.

8.- R_0 es un arco uniendo 0 y l_0^* a través de la recta real y evitando los puntos a_k si alguno de ellos está en la recta.

9.- C_m es el arco de la circunferencia centrada en el origen de radio l_0^* desde argumento 0 hasta el argumento de β_m

10.- R_m es la recta en la dirección de β_m correspondiente a $l_0^* \le |z| < \infty$.

Sean ahora

i) $\Gamma_m = R_0 \cup C_m \cup R_m$, $m = 1,\dots,s\text{-}N+1$.

ii) $\Gamma_{k,j} = \gamma_{k,j} \cup C_{k,j} \cup (-\gamma_{k,j+1})$, $j = 1,\dots,r_k$, $k=0,1,\dots,M$.

Se definen los funcionales:

$$(4.15) \qquad < L_m, p(x) > = \int_{\Gamma_m} p(z)\, w(z)\, dz, \qquad m = 1,\dots,s\text{-}N+1.$$

$$(4.16) \qquad < L_{k,j}, p(x) > = \int_{\Gamma_{k,j}} p(z)\, w(z)\, dz,\ j = 1,\dots,r_k \ \text{ y para cada k tal que } r_k > 0.$$

$$(4.17) \qquad < L_k^*, p(x) > = \int_{E_k} p(z)\, w(z)\, dz, \quad k = 1,\dots M.$$

Se tienen así $s\text{-}N+1 + r_0+\dots+ r_k + M = s+1$ soluciones de la ecuación (B_3).

Lema 4.2

Sea $\pi(x) = -x^n$ + *términos de menor grado*. Sea f(x) una función localmente integrable y acotada en $[0, \infty]$. Se considera la función

$$H(\alpha_0,\dots,\alpha_M) = \int_0^\infty x^{\alpha_0} \prod_{k=1}^{M} (x-a_k)^{\alpha_k} e^{\pi(x)}\, dx$$

donde Re $\alpha_k > -1$ para $k=0,\dots,M$. Para cada elección de $\alpha_0,\dots,\alpha_M$ se define

$$F(t) = \int_0^\infty x^{\alpha_0} e^{\pi(tx)} \prod_{k=1}^{M} (tx-a_k)^{\alpha_k} f(x)\, dx.$$

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ entonces $\lim_{t\to 0^+} t^{\alpha_0+1} F(t) = A\, H(\alpha_0,\dots,\alpha_M)$ ∎

La demostración es la misma que en el Lema 4.1.

Proposiciòn 4.2

$\{ L_1, \ldots, L_{s\text{-}N+1}, L_{0,1}, \ldots, L_{0,r_0}, \ldots, L_{M,1}, \ldots, L_{M,r_M}, L_1^*, \ldots, L_M^* \}$ es un S.F.S. de la ecuación (B_3).

Demostración

Se probará que los funcionales son linealmente independientes. Puesto que no hay cambios esenciales con respecto a la demostración de la Proposición 4.1, solamente se incluye aquí el procedimiento general.

Supongamos que

$$(4.18) \qquad \sum_{m=1}^{s+N+1} \lambda_m L_m + \sum_{k=0}^{M} \sum_{j=1}^{r_k} \lambda_{k,j} L_{k,j} + \sum_{k=1}^{M} \lambda_k^* L_k^* = 0.$$

En la primera etapa se probará que los coeficientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_{s\text{-}N+1}$ son nulos. Escribiendo la función w(z) en la forma

$$w(z) = z^{\alpha_0} \prod_{k=1}^{M} (z-a_k)^{\alpha_k} e^{\pi(z)} f(z),$$

descomponiendo Γ_m en su parte acotada $R_0 \cup C_m$ y en su parte no acotada R_m, y aplicando (4.18) al polinomio cuya forma es $p(x)\, x^{\mu_0} (x-a_1)^{\mu_1} \ldots (x-a_M)^{\mu_M}$, donde $\mu_0, \ldots, \mu_M$ son enteros positivos tales que $\mathrm{Re}\,(\alpha_k+\mu_k) > -1$, de la misma forma que en la Proposición 4.1 se tiene que las funciones

$$F_p(t) = \sum_{m=1}^{s-N+1} \lambda_m \int_{R_m} z^{p+\alpha_0+\mu_0} \prod_{k=1}^{M} (tz-a_k)^{\alpha_k+\mu_k} e^{\pi(tz)} f(z)\, dz,$$

donde $\mathrm{Re}(t) > 0$ y $p=0,1,\ldots,s\text{-}N$, han de tener una prolongación analítica en $t = 0$. Por tanto

$$\lim_{t \to 0^+} t^{p+\alpha_0+\mu_0+1} F_p(t) = 0, \quad p=0,1,\ldots,s\text{-}N,$$

y teniendo en cuenta el Lema 4.2, los coeficientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_{s\text{-}N+1}$ tienen que verificar el sistema

$$0 = \sum_{m=1}^{s-N+1} \lambda_m \, \beta_m^{\mu_0+\alpha_0+p+1} \, H_m(\mu_0+\alpha_0+p, \mu_1+\alpha_1, \ldots, \mu_M+\alpha_M)$$

donde para cada m = 1,...,s-N+1, H_m es la función

$$H_m(\mu_0+\alpha_0+p, \mu_1+\alpha_1, \ldots, \mu_M+\alpha_m) = \int_0^{\infty} x^{\mu_0+\alpha_0+p} \prod_{k=1}^{M} (\beta_m x - a_k) \, e^{\pi(\beta_m x)} \, dx.$$

De la misma forma que se ha visto en la Proposición 4.1, el determinante de este sistema es distinto de cero y como consecuencia, $\lambda_1,\ldots,\lambda_{s-N+1}$ son nulos.

En la segunda etapa se prueba que $\lambda_{k,j}$ es nulo para j = 1,...,r_k y para cada k tal que a_k es una raiz múltiple.

La expresión (4.18) ahora es

$$\sum_{k=0}^{M} \sum_{j=1}^{r_k} \lambda_{k,j} \, L_{k,j} + \sum_{k=1}^{M} \lambda_k^* \, L_k^* = 0$$

y así

$$(4.19) \qquad < \sum_{j=1}^{r_0} \lambda_{0,j} L_{0,j}, \, x^{nr_0+p} > + < \sum_{k\neq 0} \sum_{j=1}^{r_k} \lambda_{k,j} L_{k,j}, \, x^{nr_0+p} > + < \sum_{k=1}^{M} \lambda_k^* \, L_k^*, \, x^{nr_0+p} > = 0$$

para p = 0,1,...,r_0-1 y n =0,1,... Escribiendo $w(z) = z^{\alpha_0} \exp(-1/z^{r_0}) \, g(z)$ y teniendo en cuenta que $\beta_{0,1},\ldots,\beta_{0,r_0}$ son las raices de la unidad de orden r_0, se tiene que

$$< \sum_{j=1}^{r_0} \lambda_{0,j} \, L_{0,j}, \, x^{nr_0+p} > =$$

$$= \sum_{j=1}^{r_0} \lambda_{0,j} \int_{\Gamma_{0,j}} z^{nr_0+p+\alpha_0} \exp(-1/\, z^{r_0}) \, g(z) \, dz =$$

$$= \sum_{j=1}^{r_0} \lambda_{0,j} \int_{\Gamma_{0,1}} z^{nr_0+p+\alpha_0} \quad \exp(-1/\, z^{r_0}\,) \, \beta_{0,j}^{p+\alpha_0+1} \quad g(z \, \beta_{0,j}) \, dz$$

y haciendo $z^{r_0} = t$, esto es lo mismo que

$$\int_{\Gamma} t^n\, e^{-1/t}\, t^{(p+\alpha_0-r_0+1)/r_0} \sum_{j=1}^{r_0} \lambda_{0,j}\, \beta_{0,j}^{\alpha_0+p+1}\, g(t^{1/r_0}\, \beta_{0,j})\, dt$$

donde Γ es la curva de la figura 9. Por otra parte, después del cambio de variable $z^{r_0} = t$, también se tiene que

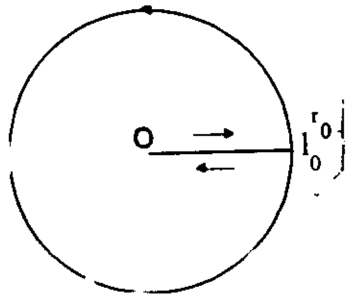


fig.9

$$< \sum_{k\neq 0} \sum_{j=1}^{r_k} \lambda_{k,j}\, L_{k,j},\, x^{nr_0+p} > =$$

$$= \sum_{k\neq 0} \sum_{j=1}^{r_k} \lambda_{k,j} \int_{\overline{\Gamma}_{k,j}} t^n\, e^{-1/t}\, t^{(p+\alpha_0-r_0+1)/r_0}\, g(t^{1/r_0})\, dt$$

donde $\overline{\Gamma}_{k,j}$ es una curva exterior al disco centrado en el origen de radio $l_0^{r_0}$. Además,

$$< \sum_{k=1}^{M} \lambda_k^*\, L_k^*,\, x^{nr_0+p} > =$$

$$= \sum_{k=1}^{M} \lambda_k^* \int_{\overline{E}_k} t^n\, e^{-1/t}\, t^{(p+\alpha_0-r_0+1)/r_0}\, g(t^{1/r_0})\, dt$$

donde $\overline{E}_k$ es una curva tal que su parte próxima a 0 está en la región $Re(t) > 0$ por lo que la correspondiente integral es convergente. De las nuevas expresiones de (4.19), y definiendo aquí $H_1(\xi)$, $H_2(\xi)$, $H_3(\xi)$, se tiene

$$H_1(\xi) + H_2(\xi) + H_3(\xi) =$$

$$= \int_{\Gamma} \frac{e^{-1/t}\, t^{(p+\alpha_0-r_0+1)/r_0}}{t-\xi} \sum_{j=1}^{r_0} \lambda_{0,j}\, \beta_{0,j}^{\alpha_0+p+1}\, g(t^{1/r_0}\, \beta_{0,j})\, dt \, +$$

$$+ \sum_{k\neq 0} \sum_{j=1}^{r_k} \lambda_{k,j} \int_{\overline{\Gamma}_{k,j}} \frac{e^{-1/t}\, t^{(p+\alpha_0-r_0+1)/r_0}}{t-\xi}\, g(t^{1/r_0})\, dt \, +$$

$$+ \sum_{k=1}^{M} \lambda_k^* \int_{\overline{E}_k} \frac{e^{-1/t}\, t^{(p+\alpha_0-r_0+1)/r_0}}{t-\xi}\, g(t^{1/r_0})\, dt$$

para cada ξ con módulo suficientemente grande.

Para cada $\varepsilon > 0$, utilizando el término $H_{1,\varepsilon}(\xi)$ para referirnos a la integral que define $H_1(\xi)$ pero ahora sobre la curva Γ_ε de la figura 10, se tiene que $H_1(\xi) = H_{1,\varepsilon}(\xi)$ cuando $|\xi|>l_0^{r_0}$. Por consiguiente, $H_{1,\varepsilon}(\xi) + H_2(\xi) + H_3(\xi) = 0$ cuando $|\xi| > \varepsilon$ y ξ no pertenece a las curvas $\Gamma_{k,j}$ y E_k.

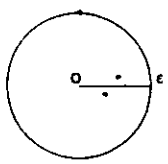


Fig. 10

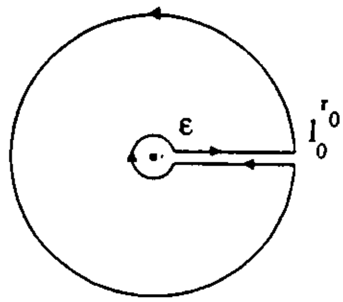


Fig. 11

Sea C la curva de la figura 11 y sea ξ un punto del intervalo $(\frac{-l_0^{r_0}}{2}, 0)$. Por el Teorema de Cauchy,

$$2\pi i \; e^{-1/\xi} \; \xi^{(p+\alpha_0-r_0+1)/r_0} \sum_{j=1}^{r_0} \lambda_{0,j} \; \beta_{0,j}^{\alpha_0+p+1} \; g(\xi^{1/r_0} \beta_{0,j}) = H_1(\xi) - H_{1,\varepsilon}(\xi) =$$

$$= H_1(\xi) + H_2(\xi) + H_3(\xi).$$

Como $H_1(\xi)$, $H_2(\xi)$, $H_3(\xi)$ son funciones acotadas cuando $\xi \in (\frac{-l_0^{r_0}}{2},0)$, la última igualdad es sólo posible si

$$\sum_{j=1}^{r_0} \lambda_{0,j} \; \beta_{0,j}^{p+1+\alpha_0} = 0, \qquad p = 0,1,\ldots,r_0-1$$

de lo que se deduce que $\lambda_{0,j}$ es nulo para cada $j = 1,\ldots,r_0$.

Análogamente se probaría que $\lambda_{k,j} = 0$ cuando $j = 1,\ldots,r_k$ para cualquier otra raíz múltiple a_k.

Finalmente, se demuestra que los coeficientes λ_k^* son también nulos. La expresión (4.19) ahora se reduce a $\sum_{k=1}^{M} \lambda_k^* L_k^* = 0$ y los caminos E_k son arcos simples que no tienen más punto en común que el origen. Podemos aplicar el Lema 3.1 para obtener que $\lambda_k^* = 0$ para cada $k = 1,\ldots,M$ ∎

REFERENCIAS

[1] AGARWAL R.P., MILOVANOVIC G.V. "A characterization of the classical orthogonal polynomials" *In Progress in Approximation Theory.* P.Nevai, A.Pinkus eds. *Academic Press* (1991), 1-4.

[2] AKHIEZER N.I. "The classical moment problem and some related questions in Analysis" *Oliver and Boyd. Edimburgh.* 1965.

[3] AL-SALAM W., CHIHARA T.S. "Another characterization of the classical orthogonal polynomials" SIAM *J. Math. Anal.* 3 (1) (1972), 65-70.

[4] BELMEHDI S. "Formes linéaires et polinômes orthogonaux semi-classiques de classe s=1. Description et classfication" *Thèse de Doctorat d'Etat. Univ. P. et M. Curie. Paris.* (1990).

[5] BELMEHDI S., MARCELLAN F. "Orthogonal polynomials associated with some modifications of a linear functional" *Appl. Analysis* 46 (1) (1992), 1-24.

[6] BOCHNER S. "Uber Sturm-Liouvillesche polynomsysteme" *Math. Zeit.* 29 (1929), 730-736.

[7] BONAN S.S., NEVAI P. "Orthogonal polynomials and their derivatives, I" *J. Approx. Theory* 40 (1984), 134-147.

[8] BONAN S.S., LUBINSKY D.S., NEVAI P. "Orthogonal polynomials and their derivatives, II" SIAM *J. Math. An.* 18 (1987), 1163-1176.

[9] BRANQUINHO A. "Polinomios Ortogonais e Funcionais de Momentos: Problemas inversos" *Tesis de Maestrado. Univ. de Coimbra* 1993.

[10] BREZINSKI C. "A direct proof of the Christoffel-Darboux identity and its equivalence to the recurrence relationship" *J. of Comp. and Appl. Math.* 32 (1-2) (1990), 17-25.

[11] CHIHARA T.S. "An introduction to orthogonal polynomials" *Gordon and Breach. New York* 1978.

[12] DELSARTE P., GENIN Y. "On the role of orthogonal polynomials on the unit circle in digital signal processing" *In Orthogonal Polynomials: Theory and Practice.* P.Nevai ed. NATO ASI Series C. 294 Kluwer. Dordrecht 1990, 115-133.

[13] DINI J. "Sur les formes linéaires et les polynômes orthogonaux de Laguerre-Hahn" *Thèse de Doctorat. Univ. P. et M. Curie. Paris VI.* 1988.

[14] DINI J., MARONI P. "La multiplication d'une forme linéaire par une fraction rationelle. Application aux formes de Laguerre-Hahn" *Ann. Polon. Math.* (1990), 175-185.

[15] DURAN A.J. "Functions with given moments and weight functions for orthogonal polynomials" *Rocky Mountain J. Math.* (en prensa)

[16] FREUD G. "Orthogonal polynomials" *Pergamon Press. Oxford.* 1971.

[17] GAUTSCHI W. "On some orthogonal polynomials of interest in theoretical Chemistry" BIT 24 (1984), 473-483.

[18] GERONIMUS J.L. "On orthogonal polynomials with respect to numerical sequences and on Hahn's theorems" *Izv. Akad. Nauk.* 4 (1940), 215-228. (en ruso)

[19] GUELFAND I.M., SHILOV G.E. "Generalized Functions" *Vol. I. Acad. Press, New York.* 1964.

[20] HAHN W. "Uber die Jacobischen Polynome und Zwei Vermandte Polynomklassen" *Math. Zeit.* 39 (1935), 634-638.

[21] HAHN W. "Uber höhere Ableitungen von Orthogonalpolynome" *Math. Zeit.* 43 (1937), 101.

[22] HAHN W. "On differential equations for orthogonal polynomials" *Funk. Ekv.* 21 (1978), 1-9.

[23] HAHN W. "Uber differentialgleichungen für orthogonalpolynome" *Monat. Math.* 95 (1983), 269-274.

[24] HENDRIKSEN E., van ROSSUM H. "Semi-classical orthogonal polynomials" *In Polynomes Orthogonaux et Applications, Proceedings, Bar-le-Duc* 1984. C.Brezinski et al. eds. *Lecture Notes in Math.* 1171 *Springer Verlag, Berlin* 1985, 354-361.

[25] HENDRIKSEN E., van ROSSUM H. "A Padé-type approach to non-classical orthogonal polynomials" *J. Math. An. Appl.*106 (1985), 237-248.

[26] INCE E.L. "Ordinary differential equations" *Dover. New York.* 1956.

[27] ISMAIL M.E.H., MASSON D.R., RAHMAN M. "Complex weight functions for classical orthogonal polynomials" *Can. J. Math. Vol.* 43 (6) (1991), 1294-1308.

[28] JAYNE J.W. "Recursively generated polynomials and Geronimus version of orthogonality on a contour" SIAM *J. Math. Anal.* 19 (3) (1988), 676-686.

[29] KIM S.S., KWON K.H. "Generalized weights for orthogonal polynomials" *Diff. and Integ. Equations.* 4 (1991), 601-608.

[30] KIM S.S., KWON K.H. "Hyperfunctional weights for orthogonal polynomials" *Results in Math.* (en prensa)

[31] KWON K.H., KIM S.S., HAN S.S. "Orthogonalizing weights of Tchebychev sets of polynomials" *Bull. London Math. Soc.* 24 (1992), 205-220.

[32] KWON K.H., EVANS W.D., EVERIT W.N., KRALL A.M., LITLEJOHN L.L. "A solution for the General Bessel moment problem" *World Scientific Series in Appl. Anal.* 1 (1992), 205-220.

[33] KRALL H.L., FRINK O. "A new class of orthogonal polynomials: The Bessel polynomials" *Trans. Amer. Math. Soc.* 65 (1949), 100-115.

[34] KRALL A.M. "Orthogonal polynomials trhough moment generating functionals" SIAM *J.Math Anal. Vol.* 9 (4) (1978), 600-602.

[35] KRALL A.M. "On complex orthogonality of Legendre and Jacobi polynomials" *Mathematica* 22 (45) 1 (1980), 59-65.

[36] KRALL A.M. "On the generalized Hermite polynomials $\{H_n^{\mu}\}_{n=0}^{\infty}$ $\mu < -1/2$" *Indiana Univ. Math. J.* 30 (1) (1981), 73-78.

[37] KRALL A.M. "The Bessel polynomial moment problem" *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 38 (1981), 105-107.

[38] KRALL A.M. "Orthogonal polynomials satisfying fourth order differential equations" *Proc. Roy. Soc. Edimburgh.* 87 A (1981), 271-288.

[39] KRALL A.M. "On the moments of orthogonal polynomials" *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.* XXVII (3) (1982), 371-373.

[40] LAGUERRE E.N. "Sur la réduction en fractions continues d'une fraction qui satisfait à une equation différentielle linéaire du premier ordre dont les coefficients sont rationnels" *J. Math. Pures et Appliquées* 1 (1885), 135-165.

[41] LESCH P.G.L., FLESSAS G.P., GORRINGE V.M. "A Rodrigues formula approach to determining closed-form solution to the Schrödinger equation for symmetric anharmonic oscillators" *J. Math. Phy.* 30 (2) (1989), 406-412.

[42] MAGNUS A.P. "Painlevé-type differential equations for the recurrence coefficients of semi-classical orthogonal polynomials" *J. Comp. and Appl. Math.* (en prensa)

[43] MANGERON D., KRALL A.M., IONITE N., CRACIUNAS P.T. " Distributional weigth functions for the Tchebycheff polinomials" *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.* XXVII (3) (1982), 371-373.

[44] MARCELLAN F., MARONI P. "Sur l'adjonction d'une masse de Dirac à une forme régulière et semi-classique" *Ann. di Mat. pura ed applicata* (IV), *Vol.* CLXII (1992), 1-22.

[45] MARCELLAN F., PETRONILHO J., BRANQUINHO A. "Classical orthogonal polynomials. A functional approach" *Acta Appl. Math.* 33 (1-2) (1993). (en prensa)

[46] MARCELLAN F., PETRONILHO J., BRANQUINHO A. "On inverse problems for orthogonal polynomials (I)" *J. of Comp. and Appl. Math.* 49 (1-2-3) (1993).

[47] MARCELLAN F., ROCHA I. A. "On semiclassical linear functionals: integral representations" *J. of Comp. and Appl. Math.* (en prensa)

[48] MARONI P. "Sur quelques espaces de distributions qui sont des formes linéaires sur l'espace vectoriel des polynômes" *In Simposium Laguerre, Bar-le Duc* (1984). *Lecture Notes in Math. Vol.*1171 *Springer Verlag, Berlin* 1985, 184-194.

[49] MARONI P. "Prolégomènes à l'étude des polynômes orthogonaux semiclassiques" *Ann.*

Mat. Pura Appl. 4 (149) (1987), 165-184.

[50] MARONI P. "Le calcul des formes linéaires et les polynômes orthogonaux semiclassiques" *In Orthogonal Polynomials and their Applications.* M.Alfaro et al. eds. *Lecture Notes in Math. Vol.* 1329 *Springer Verlag, Berlin* 1988, 279-290.

[51] MARONI P. "Sur la décomposition quadratique d'une suite de polynômes orthogonaux" *I. Revista di Matematica Pura ed Applicata.* 6 (1990), 19-53.

[52] MARONI P. "Sur la suite de polynômes orthogonaux associée à la forme $u = \delta_c + \lambda\,(x-c)^{-1} L$" *Period. Math. Hung.* 21 (3) (1990), 223-248.

[53] MARONI P. "Une théorie algébrique des polynômes orthogonaux: Applications aux polynômes orthogonaux semiclassiques" *In Orthogonal Polynomials and their Applications.* C.Brezinski et al. eds. *Annals on Computing and Applied Mathematics Vol.* 9 (1991), 98-130.

[54] MARONI P. "Variations autour des polynômes orthogonaux classiques" *C.R. Acad. Sci. Paris t.* 313. *Série* I (1991), 209-212.

[55] MARONI P. "La représentation integrale des formes de Bessel" *J. of Comp. and Appl. Math.* (en prensa)

[56] McCARTHY P.J. "Characterizations of classical polynomials" *Port. Math.* 20 (1) (1961), 47-52.

[57] MILNE-THOMSON L.M. "The calculus of finite differences" *St. Martin's Press, New York* 1965.

[58] MORTON R.D., KRALL A.M. "Distributional weight functions for orthogonal polynomials" SIAM *J.Math. Anal. Vol* 9 (4) (1978), 604-626.

[59] PETTIFOR D. G., WEAIRE D. L. ed. "The recursion Method and its Applications" *Springer Verlag, Berlin. Series in Solid-State Sciences* 58. 1985.

[60] PETRONILHO J. "Polinomios ortogonais e funcionais semiclassicas" *Tesis de Maestrado. Univ. de Coimbra* 1993.

[61] POLLACZECK F. "Familles de polynômes orthogonaux avec poids complexes" *Comptes Rendus Ac. Sc.* 232 (1951), 29-31.

[62] ROMAN S.M., ROTA G.C. "The umbral calculus" *Advances in Math.* 27 (1978), 95-188.

[63] SHOHAT J. "A differential equation for orthogonal polynomials" *Duke Math. J.* 5 (1939), 401-417.

[64] SZEGÖ G. "Orthogonal Polynomials" *Amer. Math. Soc. Colloquium Publications. Vol.*23 ed. IV, AMS *Providence R.I.* (1975).

[65] TREVES F. "Topological vector spaces, distributions and kernels" *Acad. Press* 1967.