UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACION

INICIACIÓN AL CÁLCULO ARITMÉTICO CON ALUMNOS CIEGOS Y DEFICIENTES VISUALES. ALGUNAS APLICABILIDADES DIDÁCTICAS DEL "MULTIÁBACO ABIERTO MÓVIL DE CAPACIDAD LIMITADA".

José Enrique Fernández del Campo y Sánchez

Director: Dr. D. Félix E. González Jiménez
Prof. Titular Universidad Complutense de Madrid.

INDICE

PRESENTACIÓN

DEL "FRACASO" Y DEL "CONFORMISMO"

Más que en ninguna otra cosa, fracasar en aritmética puede significar fracasar en la escuela y en la vida. (H. Freudenthal, 1981)

Ante todo, fracasar en Aritmética supone fracasar en la formación Matemática, con sus consecuencias negativas para numerosas disciplinas científicas. Algo preocupante, por su frecuencia. Como preocupante es el creciente fracaso escolar, que siempre incluye a los anteriores.

En una sociedad como la nuestra, que pretenciosa se dice a sí misma *desarrollada*, podemos afirmar sin excesivo riesgo que la Matemática es un instrumento imprescindible, si el ciudadano no quiere tropezar con graves dificultades en el mundo laboral, económico, social y aun cultural. nuestra civilización contemporánea exige de todos un mínimo de formación matemática bajo pena de inadaptación al mundo moderno. (MIALARET, 1984, 8).

La Matemática no es todo, pero está por todas partes. Lo cuantitativo invade la vida entera del hombre y la mujer de nuestros días; el lenguaje matemático, en sus formas natural, gráfica y simbólica propia, es vehículo ordinario de comunicación; los modos matemáticos de razonar, investigar y expresarse se consideran hoy como garantes de cientificidad y seriedad argumental. La Matemática ha dejado de ser patrimonio exclusivo de especialistas, para convertirse en una necesidad social:

En los países llamados *occidentales*, hace tiempo que la alfabetización dejó de ser un problema de primer orden; por el contrario, empieza a tomarse conciencia de una forma de *analfabetismo matemático,* cuya nota principal sería el conocimiento y destreza insuficientes en el orden de *lo numérico*: escribir e interpretar cantidades, y saber operar con ellas (ALSINA y OTROS, 1996, 29). Y así como en el primer caso la preocupación se orienta ahora hacia el *analfabetismo funcional* -no basta "*saberleer*" y "*escribir*": hay que "*comprender*" y "*expresarse*"-, las exigencias en el plano matemático se amplían a *saber resolver problemas, saber razonar, emplear adecuadamente los lenguajes matemáticos* en las variadísimas circunstancias de la vida cotidiana. *Lo instrumental*, de poco sirve sin *lo funcional*; pero sin lo primero, es inútil intentar lo segundo.

La autoridad educativa parece no ser ajena a estas preocupaciones: el escolar toma contacto con Pre-Cálculo ya a sus tres o cuatro años, y no se verá libre -empleamos el término adrede-, cuanto menos, antes de los dieciséis... ¿Con qué resultados?: fracaso mayoritario -basta consultar cualquiera de los estudios que se realizan de continuo-, sensación de incapacidad, desmotivación. La situación es tanto más grave, por cuanto afecta no sólo a los alumnos; aun sin repercusiones profesionales, profesores y padres se sienten afectados por un estado anímico semejante: nuestros alumnos o hijos "*no pueden* *con las Matemáticas"*; llega a tal punto, que se acepta como *normal*, casi como mal endémico.

Pero el fracaso no puede atribuirse ni a dificultad intrínseca de la Aritmética, ni a una falta de capacidad general en los alumnos, ni a inadecuación en la exigencia curricular. Si así fuera, muy pocos la superarían, y, venturosamente, tampoco es raro encontrar grupos de alumnos que casi en su totalidad dominan con soltura las técnicas de cálculo y sus aplicaciones.

> El hecho de que unas relaciones matemáticas puedan ser descubiertas y comunicadas de tan diversas maneras, es lo que sitúa a las Matemáticas al alcance de niños y adultos de todas las capacidades. (Curriculum Bouletin of Schools Council, nº 1, 1965).

Aun concediendo a los aspectos citados su parte como causa u origen en el creciente fracaso aritmético, la parte principal hay que buscarla ante todo en aspectos de orden pedagógico: organización del curriculum, métodos, materiales, quehacer didáctico; todos ellos modificables, pero condicionados fuertemente por un factor decisivo: el profesor y su formación.

Las sucesivas reformas educativas intentan hacer frente a tan penoso panorama, buscando salidas de alcance general. Por un tiempo, se prestó mayor atención a fundamentos lógicos y propiamente matemáticos, buscando apoyaturas de escuelas psicopedagógicas. Actitudes de tinte exclusivista lograron incorporar estos enfoques a los programas obligatorios, confiriéndoles una estructura peculiar. Con ello, la Aritmética más que tornarse asequible se veía desplazada, al no comprenderse con claridad en qué medidase hallaba ligada a los nuevos conceptos y técnicas. Además, los programas se ampliaban y desviaban hacia generalidades y campos abstractos que poco o nada interesaban a alumnos y profesores.

Paulatinamente, se *asume* lo equivocado del enfoque. Se admite que las *cuestiones de fundamentos* son buenas para especialistas, pero que al alumno, futuro ciudadano, le basta con una comprensión *suficiente* y *práctica*. Reconocido como imposible, serenuncia al rigor absoluto; pero esta renuncia a exigencias en la Matemática como ciencia, en la escuela arrastra consigo a rebajas en las exigencias educativas, dudando de la posibilidad incluso de fijar *niveles mínimos* en Aritmética y Cálculo. Y el escepticismo docente sobre la necesidad de una fundamentación lógico-matemática profunda y coherente se extiende lentamente al carácter básico de *lo numérico*. La Aritmética parece perder personalidad e importancia en el curriculum -una parte más del área matemática-, devaluándose sus repercusiones formativas.

Al mismo tiempo, satisfechos los anhelos de universalidad en las oportunidades de escolarización, y junto a otras razones de índole socio-laboral, se amplía la obligatoriedad -en España, hasta los 16 años para el curso 1999-2000-; la Matemática, omnipresente. Cosa muy distinta es el aprovechamiento escolar de esa permanencia obligada en la escuela; mas poco importa: el fracaso se enmascara por la *promoción automática*.

La Reforma en curso en España incorpora un aspecto novedoso en el Área Matemática: las Orientaciones Didácticas como parte esencial del curriculum (véase: Diseño Curricular Base, M.E.C., 1991). Se interesa por la dimensión aplicativa de Conocimientos y Destrezas, por la adecuación en los Objetivos y Actividades a las características de los alumnos, por una evaluación conforme al quehacer de aula. Pero poco o nada se concretan los "*niveles mínimos de exigencia*": parece como si se rehuyera el reto de clarificar el papel de la Aritmética -y de aspecto alguno de la Matemática-, su función básica, su proyección, su condición de requisito para un desarrollo formativo integral.

En el futuro próximo será difícil hablar de *fracaso* o *éxito* en Cálculo y Aritmética; sólo quienes se aventuren a una investigación extensiva en campos muy determinados. Y difícil será también que los resultados didácticos generen tensión o satisfacción profesional en el educador por modificar, investigar y difundir su forma de actuar. Tal vez se alivien las zozobras de alumnos y padres en los niveles obligatorios de la educación; tal vez el *profe de Mat* deje de ser el *ogro*, que suspende e impide promocionar de nivel; tal vez, incluso, se reduzca el rechazo apriorístico a nuestra ciencia... Pero, "¿a qué precio?"; "¿con qué repercusiones instrumentales y formativas a largo plazo?"; "¿no se corre el riesgo de un *fracaso en el fondo*, proyectivo aunque ulterior, por eludir un *fracaso en la forma*, inmediato y notorio?".

Las Reformas se suceden. Cada diez o quince años se modifican, en parte al menos, contenidos y enfoques de la enseñanza de la Matemática, de la Aritmética. Pero las Disposiciones, los programas, los textos, de poco o nada sirven sin la vida que fluye díaa día en el aula.

Toda Reforma educativa se resume en un profesor y su grupo de alumnos

La libertad, el gusto y el estilo personal del profesor ni pueden ni deben ser soslayados. Debe ser él quien decida sobre las situaciones de aprendizaje que le permitan desarrollar las capacidades de sus alumnos, asumiendo la responsabilidad de su clase con todas sus consecuencias (...) Su ingenio y el de sus alumnos condicionarán el desarrollo de la clase de modo imprevisible. Afortunadamente, porque ello significará que se está educando en matemáticas y que no se pierde de vista quién es el verdaderoprotagonista de la clase. (GÓMEZ, 1988, 11-12).

En el pensamiento de muchos profesores persiste la convicción de su carácter instrumental imprescindible, de la utilidad próxima de sus aplicaciones y la proyección formativa de sus procedimientos; la persuasión de su asequibilidad universal, reacios a aceptar el *fracaso numérico escolar* como inevitable; convencidos de que *todo problema tiene solución, al menos parcial, si se buscan y aplican los remedios oportunos.*

La enseñanza de la Aritmética sigue siendo un desafío didáctico.

DEL "ENSEÑAR" Y DEL "APRENDER"

¿Cómo se debe aprender y por lo tanto enseñar Matemáticas? Ésta es la gran cuestión educativa. (ALSINA y OTROS, 1996, 9).

La respuesta no es única; ni se cuenta con respuesta alguna globalmente satisfactoria o con validez universal:

Evidentemente, no existe ninguna teoría del aprendizaje de las Matemáticas que obtenga una aprobación universal, ni hay teoría general alguna del aprendizaje que sea enteramente aceptada como satisfactoria en términos de explicación y de predicción, y que incorpore todos los detalles que cabría esperar. (ORTON, 1990, 191).

A los dos elementos esenciales del *aprendizaje*, alumno y Aritmética, hay que adjuntar, también de forma esencial un tercero, decisivo: el profesor (aun disfrazado de libro de texto, guía de trabajo individual o cooperativo, asistencia por ordenador...); que tiñe al proceso educativo de *enseñanza*. Son dos facetas inseparables, cual caras de una misma moneda. No es extraño, pues, que prefiramos hoy hablar de *enseñanza-aprendizaje*.

Estos tres protagonistas se reúnen en el escenario del acto didáctico: la situación de enseñanza-aprendizaje. Con todos sus factores ambientales y circunstanciales, momento, recursos, organización... El profesor, como sujeto activo, diseñador de la situación; el alumno, del que también se espera su condición de sujeto activo; el objetivo matemático, pronto a ser aprehendido y empleado.

Tal entramado de personas, medios y circunstancias modificativas, hacen de la investigación didáctica una tarea en extremo compleja.

Las consecuencias son esperables: las conclusiones raras veces son coincidentes.

Y no es que falten intentos. Desde el trabajo pionero de BRANFORD (1908) -curiosamente, incluyendo un capítulo sobre "Algunos experimentos para enseñar Geometría a niños ciegos"-, y la primera memoria de grado, leída en 1910 por W. McCLELLAND en la Universidad de Edimburgo, y que -versaba sobre *Un estudio experimental de los diferentes métodos de sustracción*-; hasta los miles de artículos que cada mes aparecen en los cientos de revistas especializadas. BEGLE, en una publicación de 1979, reseñaba más de 7000 trabajos de investigación en educación matemática, buena parte de los cuales se refiere a enseñanza-aprendizaje de la Aritmética; puede aventurarse que en estos veinte años el total se habrá elevado a docenas de millares. La iniciativa y posición preponderante ha correspondido casi siempre a investigadores norteamericanos, aunque empiezan a menudear las aportaciones de autores europeos (cfr.: KILPATRICK, 1991).

Pero la incertidumbre persiste: la variedad personal y de situaciones hace imposible una respuesta única -ni siquiera sectorial- al *mejor* modo de enseñar-aprender un tópico matemático determinado; a lo sumo, aproximaciones, sugerencias, líneas de trabajo estimadas como útiles.

Para intentar una enseñanza eficaz de la Aritmética, es preciso ahondar antes en los procesos de aprendizaje. De difícil -por no decir imposible- observación y experimentación, como todo aquello que se refiere al quehacer intelectual del ser humano: es preciso contar siempre con la libertad personal, amén del mundo interior irrepetible, con sus inclinaciones y afectos, inquietudes e intereses, experiencias, espectativas...

Si no hay dos alumnos iguales ni que se encuentren en idénticas circunstancias, tampoco es de esperar que existan modos únicos -ni homogéneos siquiera- de abordar un objeto de conocimiento; a lo sumo, cabe esperar difusos modelos de estrategias didácticas, que será necesario seleccionar y adaptar en cada caso. Sin negar el valor orientador de la Psicopedagogía, un sano -ahora sí- escepticismo lleva a dudar de afirmaciones categóricas de escuela, y a valorar en mucho los aspectos situacionales.

> Si hay un aspecto realmente atractivo en educación en general y en matematicas en particular, es la posibilidad de introducir cambios muy grandes en las estrategias de actuación. Los conceptos y los resultados son atemporales y universales, pero la educación es un proceso vivo y activo y completamente contextual. En todos los niveles y en todos los sitios. (ALSINA y OTROS, 1996, 30-31).

Sea cual fuere la edad, capacidad y condición del que aprende, se espera de él curiosidad e interés por descubrir y esfuerzo en poner medios para la adquisición y desarrollo de los conocimientos y habilidades que se le proponen. O, lo que es lo mismo: una actitud receptiva (*querer aprender*), una actividad específica (*participar efectivamente en la situación de enseñanza-aprendizaje*) y un esfuerzo intelectual y aun físico por asimilar *novedades.*

Al docente se le pide ciencia y arte; la ciencia del método, de conocer la meta y algunos de los caminos y vehículos que a ella llevan, y el arte de lograr en el alumno el querer, el participar y el esforzarse con ilusión en la aventura que es todo aprendizaje. No bastan los conocimientos matemáticos (sólo indican la meta y los caminos que a ella conducen), ni la información en teorías psicopedagógicas (caminos más transitables), ni la experiencia en recursos didácticos (vehículos); es precisa la sensibilidad y experiencia que vislumbre el camino y medio mejor para sus alumnos en cada momento, y atempere el ritmo de la marcha, sugiera atajos, aliente a adoptar resoluciones.

Aceptamos las recomendaciones de C. ALSINA, sobre la actitud didáctica del profesor en enunciado bipolar: Buscar menos respuestas y fomentar mas preguntas, planificarse menos horizontal y más verticalmente, evitar la monotonía y abrirse al enfoque imaginativo, apartar los mecanismos y desarrollar más las ideas. (ALSINA y OTROS, 1996, 10). Con un acercamiento a la Matemática en la que ésta aparezca como más breve y mas profunda, menos estática y más dinámica, menos ejercicios y más problemas, menos memoria y más conocimiento, menos abstracción y más experimentación previa, menos rigor absurdo y más conocimiento viable. (ibidem). En un intento de que la matemática sea útil, comprensible y divertida (ibidem, 36); aunque no por ello deje de ser abstracta, difícil, costosa.: *cualidades* tales pueden *dulcificarse* con una presentación y actividad adecuadas.

Hoy en la educación matemática hay muchos elementos didácticos, muchos materiales, muchas propuestas que son ya un hecho pero que hace falta **□unir□ adecuadamente para configurar un** instrumento pedagógico potente. Ahora ya nadie cree que a la educación matemática le convengan revoluciones absolutas, métodos infalibles, materiales definitivos. Críticos con las soluciones radicales, hemos ido pasando de la "propuesta mágica" al "realismo ecléctico" . (ibidem, 10).

Además de ciencia y arte, al profesor se le pide algo más: insatisfacción consigo mismo; dicho en positivo: sano inconformismo, espíritu de perfeccionamiento, búsqueda de nuevas formas, enriquecimiento personal y didáctico. No basta con descansar en *una solución*: hay que intentar encontrar *otra mejor*, más eficiente., más adecuada a los Objetivos matemático-educativos y a las necesidades específicas de sus alumnos concretos. Entendemos que el optimismo es una cualidad inherente a la profesión docente en su dimensión vocacional. Espíritu de perfeccionamiento que comporta dos actitudes básicas: receptividad hacia las innovaciones y entusiasmo sostenido.

Una *actitud receptiva hacia las innovaciones* supone aceptar como perfectibles los actuales modos de hacer, estar dispuesto a modificarlos y ser sensible a toda información y sugerencia, provenga de donde provenga; en particular, saber captar en las formas de trabajar de los alumnos cuanto pueda haber -es mucho- de aprovechable y sugerente, de respuesta evaluadora, de estímulo y de crítica: estar dispuesto a "*aprender de los alumnos*". Algo más que la afirmación de SKEMP: Los mejores profesores son aquellos que todavía se consideran aprendices en activo. (SKEMP, 1980, 72).

El "*entusiasmo didáctico*" supone compromiso; con los alumnos, consigo mismo y con la innovación. El entusiasmo es capacidad de vibrar al son de una innovación didáctica, sea en el método, en los recursos o en las situaciones que se diseñen, aceptándola como posiblemente útil, tomándola como algo propio. El entusiasmo es contagioso. Con él, se aceptan los retos, no importan los esfuerzos, se agradecen las ayudas y se minusvaloran los obstáculos; sin él, difícil será que se desencadene el espíritu de aventura por aprender en los alumnos y procurar así su más eficiente formación matemática y personal. El entusiasmo conduce al convencimiento de que el éxito es enriquecimiento personal para todos; la experiencia negativa, aprovechable. Pero es necesarioque sea *sostenido*, para no quedar cautivado por el éxito ni dejarse paralizar por una actuación aparentemente estéril.

Se nos confían niños; nosotros somos responsables de su educación. Traicionamos nuestra función humana si no nos esforzamos en desarrollar al máximo las posibilidades que lleva cada niño. Debemos mantener una inquietud constante y debemos responder con todas nuestras capacidades, todos nuestros métodos científicos de estudio y de investigación, ... nuestra total devoción a nuestra bella misión formativa. (MIALARET, 1984, 174).

Vivir una cosa quiere decir ser activo, participativo, disfrutarla, tomarla como algo propio. En este sentido se "viven" instantes, aventuras, excursiones, diálogos, debates, etc., y en este sentido también deberíamos hacer posible que el acto educativo matemático fuese una vivencia. La contemplación del maestro o la maestra ante la pizarra, la lectura del libro de texto o la visualización de unas fotografías son actos pasivos que si no van acompañados de una interiorización o una vivencia personal pueden causar admiración pero no aprendizaje. Y este "vivir" la matemática no depende del programa o los contenidos (...) Se trata, en definitiva, de realizar el aprendizaje matemático dibujando, riendo, llorando, sudando en una excursión o montados en un barco. Tal como se vive cualquier aspecto de nuestra vida. (ALSINA y OTROS, 1996, 31).

De esta forma, con estas actitudes, la clase pasa a ser un convenio en el espacio y en el tiempo donde los educadores y los discípulos llevan a cabo la aventura compartida de enseñar y aprender: la clase es la dinámica. (ibidem, 33). La clase de Matemáticas puede pasar de ser una penosa obligación a ser una invitación permanente a explorar nuevos dominios del conocimiento, para el descubrimiento, la investigación.

Actitud receptiva y entusiasmo por la tarea educativa conforman un *estilo docente* que supera el fugaz acto didáctico para prolongarse en una dimensión más del papel del profesor: la *investigación en la acción* (CARR y KEMMIS, 1985), que se realiza tanto para mejorar la práctica como para implicar a los participantes en esta mejora. *Investigación en la acción* que, por cuanto comporta de autoevaluación y espíritu de perfeccionamiento -*reflexión en la práctica*-, conduce a una auténtica y eficiente *formación permanente del profesorado*, talón de Aquiles del desarrollo de una Reforma educativa -máxime cuando consigna *programas abiertos* -como la actualmente en vías de implantación en España--, y que tantos quebraderos de cabeza causa en los administradores. A fin de cuentas, un aprovechamiento integral de la observación del clásico: *los hombres enseñando aprenden* [1].

A la profesión mímala como tu sabrás hacerlo, ella se merece todos tus sacrificios porque te será una fuente llena de emociones y de experiencias".. (P. PUIG ADAM).

UN PROBLEMA MÁS, UN PROBLEMA MAYOR

Infectados del escepticismo al que nos referíamos más arriba, peligra otra gran preocupación didáctica, social y aun política de las Reformas en curso en España y en todos los países culturalmente próximos: la atención diferenciada a los "*alumnos con necesidades educativas especiales*". Entendiendo por tales no sólo a los afectados de alguna minusvalía ostensible que, por razones diversas, se hallen escolarizados en *Centros Ordinarios -educación en integración-*; sino el lamentablemente cada vez más numeroso contingente de alumnos que padecen trastornos afectivos o de personalidad y aquellos otros con carencias curriculares importantes.

Entre los primeros, se cuentan quienes padecen ceguera o sordera total, deficiencia visual o auditiva grave, trastornos motóricos importantes, ciertas deficiencias neurológicas (clasificadas con frecuencia como *de orden psíquico*). Entre los segundos, alumnos que, sin tener una limitación personal, presentan una historia de aprendizaje repleta de fracasos y malas experiencias, y como resultado de lo cual muchas veces no han adquirido en el grado necesario los contenidos instrumentales básicos, arrastrando *lagunas* que a su vez les impiden aprender nuevos contenidos, y generando todo ello una espiral creciente de desmotivación y desinterés por la vida escolar. (CDC-MEC, 1991, 17).

En el Área Matemática, todo parece indicar que el total de estos alumnos con dificultades se incrementa acumulativamente a lo largo de la Educación Obligatoria, estimándose hoy ya en un tercio de la población al término de la Secundaria... No es que un alumno sujeto de tales necesidades lo sea de forma irreversible -salvo que se trate de minusvalía sensorial, motórica o neurológica permanente-, sino que raras veces se aplican *fórmulas de remediación*, o éstas no surten los deseados efectos en la inmensa mayoría de los casos.

[1]Mateo Alemán, en "El pícaro Guzmán de Alfarache", Capítulo VIII, poniendo en boca de Ozmín las palabras de Séneca en su Epístola VII, 8).

La presencia en el aula de algún alumno con necesidades educativas especiales -cosa más que probable- puede, a su vez, desencadenar perturbaciones didácticas que repercuten en todo el grupo:

No es infrecuente que surjan entonces una serie de hechos que hacen difícil la tarea del profesorado. En primer lugar, obviamente aparece un *desfase*, la mayor parte de las veces creciente, entre la *competencia curricular* de esos alumnos (lo que son capaces de hacer respecto a objetivos y contenidos de las distintas áreas curriculares) y la de sus compañeros, haciendo cada vez menos sencilla la propuesta de una respuesta equilibrada en términos de lo que están haciendo sus iguales y lo que ellos precisarían individualmente. En segundo lugar, no es extraño que algunos de esos alumnos muestren comportamientos problemáticos, en términos de conducta y adaptación escolar, en respuesta a situaciones que no se ajustan a sus necesidades y que muchas veces afectan a su autoconcepto y en general dejan de ser motivadoras o interesantes para ellos. Y, por último, también es evidente que tales situaciones hacen que el profesorado esté más preocupado y que viva su trabajo con más tensión. (CDC-MEC, 1991, 18).

Aunque estos problemas son también relativos, ya que no todos los profesores reaccionan igual ante tales dificultades, no todos los centros escolares tienen los mismos recursos y experiencia en el trabajo con los alumnos con mayores dificultades, ni todas las dificultades son idénticas. (ibidem).

Aparece así un desafío peculiar y ya ineludible, dentro de la Didáctica de la Aritmética: incorporar a la marcha *normal* del aula a los *alumnos con necesidades matemático-educativas especiales*. Actuación docente incluida en la dimensión pedagógica de *atención a la diversidad*: cada alumno es merecedor de una atención adecuada a sus características y necesidades personales. Algo hermoso de enunciar, pero sumamente complejo de llevar a la práctica.

Partimos del supuesto de que el profesor intenta, inicialmente al menos, una *atención a la diversidad*. Pero una apreciación *a priori* de dificultad didáctica extrema -quizás por un exceso de afán perfeccionista, muy propia de la mentalidad matemática-, pone en trance de resolverla en *uniformidad* o *sacrificio de horizontes educativos*: *la homogeneidad es facilidad y eficacia; cerremos, pues, los ojos a la diversidad*; eficacia didáctica pero no formativa.

Este *sacrificio de Objetivos* puede tomar dos formas: *reducción del curriculum general* -que afecta a todos los alumnos del grupo, en perjuicio de *los menos necesitados*-, o por *exención relativa* de los curricula de los alumnos en cuestión -confundiendo *adaptaciones de acceso* con *adaptaciones curriculares no significativas*, y éstas con *adaptaciones curriculares significativas*-.

Pero la Aritmética Elemental no puede ser "*moneda de cambio*": "¿cómo sacrificar lo instrumental, defraudando a un alumno o a todos?" "¿Acaso la *Atención a la Diversidad* puede ser un pretexto para ignorar el derecho de alguien a una educación básica?".

No es entonces malintencionado sospechar que la deseada *homogeneidad facilitadora* es una forma encubierta de *comodidad*:

"*¿Por qué preocuparse en exceso, si no es fácil determinar qué es lo básico; y, al fin y al cabo, tampoco será imposible que estos alumnos promocionen de nivel?*"

Los Objetivos y Contenidos conceptuales y procedimentales previstos en un principio para ese nivel son *inexcusables*. Deberán *adaptarse* los Medios y Actividades, la orientación y atención didáctica; organizando tal vez "*actividades de remediación* o *compensatorias"*. Definir los rasgos de estos elementos en cada grupo específico -y en cada caso personal, incluso-, más que una carga penosa, se convierte en una ilusionante tarea diaria para el profesor implicado -es difícil excluir a ninguno-: conservando la meta, buscar los caminos más accesibles y conseguir de cada uno de sus alumnos que emprenda alguno, lo prosiga y culmine briosamente.

Esto requiere sensibilidad hacia la situación y los problemas específicos y aun personales de cada alumno, información y orientación especializadas, disponibilidad de medios y tiempo.

Se equivoca la Administración Educativa cuando intenta *computar la atención exigida por un alumno minusválido a la calculada para X válidos.* el problema menor es la atención personal en el aula; lo de más, la formación e información previas, diseño de Actividades adecuadas, obtener o adaptar los materiales... Con independencia de la diversificación atencional y consiguiente tensión, las *necesidades educativas especiales* de un alumno se traducen, para el profesor, en *necesidades de formación y disponibilidad de tiempo, medios y materiales adaptados.*

Sin embargo, los inconvenientes y las sobrecargas tienen una remuneración casi inmediata.

Los esfuerzos por lograr una atención adecuada a tales alumnos lleva insensiblemente a una profundización matemática, psicopedagógica y didáctica. Desde determinar cuáles son los Objetivos y Contenidos en verdad esenciales para ese nivel educativo, hasta analizar críticamente la calidad de Actividades y Medios y estudiar su mejor adaptación. Esto supone profundizar en el entramado de conceptos y destrezas matemáticos, fundamentación teórica y metodológica, principios didácticos, aspectos relacionados con la disfunción padecida por el alumno, modos de soslayar las dificultades derivadas, etc. Es decir: adquirir o perfeccionar la formación personal previa en *Ciencia Básica* y *Ciencia Práctica*: provocar, en suma, una fórmula de *formación permanente.*

A su vez, esta formación específica adquirida, puesta en práctica en el aula con ese alumno concreto, recibirá una sanción positiva o negativa. Al aplicar una adaptación y comprobar su eficacia, se está desarrollando -quizás de forma inconsciente- una *investigación en la acción* a la que nos referíamos más arriba; muy posiblemente, sin oportunidades de confrontarla con otros colegas, pero con sabor a *experiencia irrepetible*, útil por demás.

No son utopías:

> Hay muchos casos en los que el estudio psicológico ha iluminado problemas concretos de comprensión o uso de una técnica o un bloque conceptual limitados: dificultades de cálculo, de lectura, dificultades de representación, etc. (ALSINA y OTROS, 1996, 30).

> Quizá la reeducación esté en mejores condiciones para localizar de forma aproximativa los obstáculos con los que pueden tropezar los esfuerzos pedagógicos cuando se dirigen a niños normales. Parece que los obstáculos que deben sortear unos y otros son los mismos, independientemente de que los primeros los salven de un salto y los demás queden muy rezagados. (JAULIN-MANNONI, 1980, 170).

Y no será extraño que se conciban itinerarios y diseñen situaciones o materiales de validez para todo el grupo, con independencia de necesitar o no atención especializada. Se logra así el *desideratum*:

> Es necesario dar oportunidades y presentar los contenidos y las actividades de manera que no se potencien sólo los que tienen unas características determinadas, sino toda la diversidad que se pueda presentar. (ALSINA y OTROS, 1996, 69).

Entre estas *necesidades educativas especiales*, algunas destacan como generadoras potenciales de mayores dificultades. En un mundo de la imagen visual, la carencia grave de visión quizás sea la más llamativa.

En Didáctica de la Aritmética -y de la Matemática en general-, a partir de los años 60 se ha observado una proliferación de medios eminentemente visuales, que está alcanzando su cumbre en el *software educativo*. No existirá unanimidad en las estrategias y aproximaciones, pero crece geométricamente la oferta de Actividades, materiales en soporte diverso, fórmulas de intervención y líneas de trabajo.

Mientras, y en lo que se refiere a la *educación especial de ciegos*, apenas si se cuentan con los dedos de una mano los progresos técnico-instrumentales -máquina de escribir *de punto positivo*, *calculadoras parlantes* (de escasa implantación en las aulas)- y algunas iniciativas de carácter personal, sin apenas reflejo en la literatura. Tal vez *no sean precisas innovaciones...*; por el contrario, parece más bien que *se echan en falta*, pero difícilmente llegarán sin estudio, ensayos, dedicación, asignación de tiempo y recursos...

EN BUSCA DE SOLUCIONES

Al profesor de Educación Primaria en un centro ordinario que le llega a su aula un alumno ciego o deficiente visual, es natural que le asalten un sinnúmero de cuestiones:

"¿Cómo seguirá este alumno el desarrollo de la clase, si no puede ver el tablero?" "¿Cómo dibujará, o, simplemente, cómo podrá observar un grabado, una transparencia, un vídeo, un diagrama?"; "¿Podrán escribirse las Matemáticas en Braille?"; "¿y las operaciones aritméticas?";"¿Cómo efectuará los cálculos de una cierta complejidad?" "¿Podrá intervenir en "juegos matemáticos" con sus compañeros?"; "¿y en qué juegos?" "¿Podrá manejar el ordenador?"; "¿Existirá material adaptado para él?"; "¿dónde conseguirlo o cómo producirlo?..."

En principio, es un problema de información y documentación, aunque nada fácil de resolver.

Una búsqueda mediante *Internet* apenas proporciona referencias sobre *enseñanza-aprendizaje del Cálculo Aritmético a alumnos ciegos y deficientes visuales*; la práctica totalidad de ellas son genéricas -Centros Educativos o Servicios de Orientación en el ámbito U.S.A.- y consultas sobre empleo de ciertos útiles -códigos Braille y programas de conversión, "*calculadoras parlantes* y *ábaco chino-japonés*"-, pero con ausencia total de referencias sobre Orientaciones Didácticas y materiales de iniciación.

Para España, los *Equipos de Apoyo a la Enseñanza Integrada*, dependientes de la O.N.C.E. o concertados con la Administración Educativa correspondiente, cuentan con prácticamente toda la información, documentación y materiales disponibles. Pero, como se advertía más arriba, éstos son escasos, casi inexistentes.

En cualquier caso, no basta con disponer de documentación o material: la *formación del profesor de aula* reclama una *orientación personal y especializada en Didáctica de la Aritmética*. En este punto, confluyen las preocupaciones del profesor de un *centro ordinario*, con un alumno ciego o deficiente visual en su aula, y el profesor de *centro específico* para este tipo de alumnos.

Con información o sin ella, la responsabilidad docente lleva a plantearse nuevas cuestiones, cada vez menos específicas, aunque siempre con la preocupación puesta en el alumno-problema:

"¿Qué materiales y útiles generales existen para la enseñanza-aprendizaje de la Aritmética?"; "¿Cuál es su finalidad -Objetivos fundamentales- y cuál su eficacia relativa?"; "¿por qué?"... "¿Cómo se aprende la Aritmética?"; "¿qué aspectos o factores intervienen?"; "¿Qué Metodologías y Didácticas se conocen/aplican para enseñar/aprender la Aritmética?"... "¿En qué medida es necesaria la visión?"; "¿qué hacer cuando ésta falta?" "¿Cuáles de entre los métodos y materiales serían los más adecuados al alumno ciego?"; "¿por qué?"; "¿Cuáles son las características de la percepción táctil (sentido "háptico")?"; en consecuencia, "¿qué características deben poseer el método y material que se eligieran?" "¿Podrían adaptarse, mejorarse o incluso diseñarse otros?..."

Insensiblemente, se camina de la investigación documental a la investigación didáctica propiamente dicha; del problema concreto al genérico, buscando fundamentos teóricos que sustenten soluciones prácticas coherentes; tal vez se estén abriendo horizontes para el diseño de soluciones innovadoras, más adecuadas en cualquier caso...

- Del problema-situación particular se asciende a otros genéricos relacionados con él, mediante el aislamiento conceptual de variables involucradas;

- se configuran criterios coherentes de evaluación que orienten la selección/diseño de respuestas convenientes al problema inicial;

- se seleccionan las respuestas más adecuadas a la luz de tales criterios;

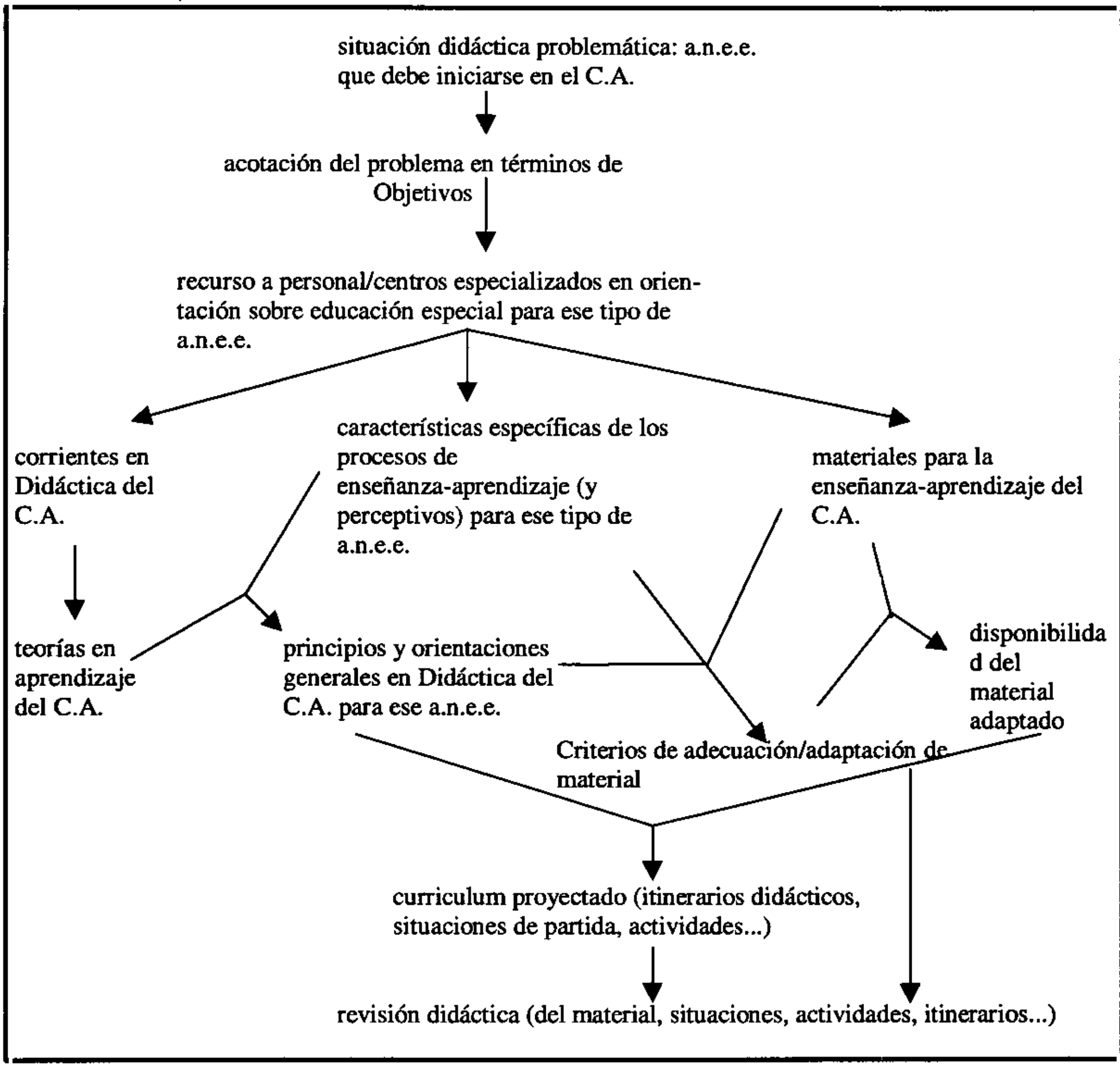
- se intenta un perfeccionamiento de la/s respuesta/s preseleccionada/s, o se diseña otra, que se entiende como *más adecuada*;

- se aplica la solución final a la situación-problema de aula"

- se revisan algunos de los aspectos de la adaptación, en función de los resultados observados; si no para una aplicación inmediata, para transmitir la información recogida a otros colegas y para posibles contrastaciones o aplicaciones ulteriores...

Cuadro 0.- Esquema de proceso de *investigación en la acción* para la adaptación de situaciones de enseñanza-aprendizaje del Cálculo Aritmético a un alumno ciego o deficiente visual.

(Por "situaciones de enseñanza-aprendizaje" debe entenderse también el material empleado, la Actividad propuesta, el itinerario conformado por una cadena de tales "situaciones".)



C.A.: Cálculo Aritmético

a.n.e.e.: alumno/s con necesidades educativas especiales; en nuestro caso: alumno ciego o deficiente visual

Como se indica, el "*alumno con necesidades educativas especiales*" es, en nuestro caso, "*un alumno ciego o deficiente visual*"; el objeto de investigación son los procesos de enseñanza-aprendizaje del Cálculo Aritmético, con su cohorte de *situaciones de partida*, material empleado -en su caso-, itinerarios didácticos, Actividades para la ejercitación o fijación...

En el proceso investigador se entrelazan generalización y concreción. Con la primera, se pretende ahondar en los principios didácticos que guíen el proceso de enseñanza-aprendizaje y, en particular, la selección de situaciones y material matemática y didácticamente idóneos. Con la segunda, se rectifica continuamente el rumbo del trabajo, buscando atender más adecuadamente las necesidades específicas de la dificultad, en general, y de ese alumno, en particular.

Podemos considerarla una *radiografía sintética* del proceso que ha cristalizado en el presente trabajo.

1º) La *situación alumno-problema* se presentaría con ocasión del asesoramiento a un *padre-profesor*: Rodolfo Robles (*senior*), padre y *profesor particular* de Rodolfo Robles (*junior*), que cursaba sus estudios de *Educación Primaria* en España (la familia Robles se había trasladado a nuestro país desde Argentina, precisamente buscando orientaciones para una adecuada escolarización de su hijo ciego).

La condición de profesor de Matemáticas en Argentina del Sr. Robles le había llevado a diseñar un material que permitiera a su hijo realizar los cálculos aritméticos sin necesidad de emplear la vista -que perdía de forma acelerada- ni el Sistema Braille -cuya utilidad aritmética aún desconocía-. Consistía en una serie de *ábacos abiertos* que se deslizaban sobre una base común; lo que en este trabajo se designa por *conjunto de ábacos abiertos desplazables*, en su versión primitiva.

Se trataba, pues, de evaluar la adecuación de dicho material, e intentar posibles mejoras de diseño. De hecho, cabía calificarlo *a priori* como susceptible de competir con los disponibles, poco satisfactorios (según parecer feneral de profesorado en relación con la educación especial de ciegos).

2º) Las ostensibles dificultades de los alumnos ciegos totales para la ejecución de cálculos aritméticos, provocó un análisis de cuáles eran las estrategias didácticas y los materiales habitualmente empleados, tanto para la propia práctica como para la iniciación. Así pues, se ampliaba el problema objeto inicial de la investigación: del *instrumental de Cálculo Aritmético para ciegos*, se pasaba a considerar también el *material de iniciación*; de la práctica del Cálculo, era preciso remontarse a sus procesos de enseñanza-aprendizaje..

Como se indicaba más arriba, la casi total ausencia de información documental puso al descubierto una penuria de medios y falta de orientaciones específicas. Algún vestigio de los escasos resultados obtenidos en esta búsqueda pueden encontrarse en la Sección 6.3 y Apartado 7.4.2.

El panorama podía parecer desolador, pero también revelaba la *necesidad/utilidad* de una tal investigación; el "*optimismo didáctico*" llevaba a pensar en su *posibilidad*: cuanto menos, a una *puesta a punto* en forma de *principios* o *criterios de adaptación*, tanto curricular como del material.

3º) La carencia observada obligaba a generalizar el dominio del estudio. Fue preciso adentrarse en las corrientes didácticas sobre *procesos de enseñanza-aprendizaje de la Aritmética*, primero, y las teorías psicopedagógicas en las que se apoyan, después; con independencia de la consideración del déficit visual.

Este ejercicio informativo fue mostrando, a su vez, una preocupación generalizada en los autores, que se agudiza en los últimos veinte años: el fracaso creciente en Aritmética, en lo que se refiere a la *práctica calculatoria* y, lo que es más grave, en *resolución de problemas.*

El primer paso para la búsqueda de soluciones prácticas exigía remontarse a sus posibles causas. El "*fracaso a largo plazo*" se ve precedido del "*fracaso a corto plazo*" o "*fracaso inmediato*" que es el *error calculatorio*; más sencillo de detectar en su manifestación, no tanto en la determinación de trastornos y relaciones causales. El acercamiento a estas cuestiones constituirá el objeto del Capítulo 1.

Como síntesis del trabajo documental, se intenta en el Capítulo 2 una presentación estructurada de las teorías de aprendizaje de la Matemática más difundidas, sus *lugares comunes* y el pragmatismo situacional hacia el que parecen encaminarse. El Capítulo 3 contemplará algunos de los aspectos que se estimaron como más relevantes en los *procesos de enseñanza-aprendizaje*; con especial atención hacia los *estímulos motivacionales* y a los que se dio en llamar "*gérmenes de desmotivación*".

Apenas si aparecieron alusiones marginales a las dificultades que al alumno ciego se le presentan en estos dominios. Menos aún se contemplaban las posibles dificultades con origen en una *visión deficiente*. El problema objeto de la investigación, por consiguiente, a la par que se ensanchaba, se mostraba *inexplorado*.

Al mismo tiempo, se observó que los modernos enfoques en Didáctica de la Aritmética parecían hacer converger hacia un único objeto los dos genéricos origen del estudio teórico (iniciación al Cálculo Aritmético, y su aplicación en la resolución de problemas).

- La *iniciación al Cálculo* es un itinerario cuyo punto de partida deben ser *situaciones de enseñanza-aprendizaje*, suficientemente *ricas* y *motivantes*, que provoquen y permitan al alumno descubrir por sí mismo conceptos y técnicas aritméticos.

- La *práctica del Cálculo* cobra sentido en su *aplicabilidad*, como procedimiento eficiente: "*sin problemas que resolver, ¿para qué calcular?...*"

Es decir: las situaciones problemáticas se declaraban como el *alfa* y el *omega* de la Didáctica del Cálculo. Era, pues, evidente que estábamos ante un punto crucial, merecedor de un análisis cuidadoso, del que podrían concluirse indicaciones prácticas de gran valor.

Se distinguieron dos aspectos fundamentales: el *enunciado* o *presentación del problema* y el *proceso de resolución* -que pasaba a tomar forma de *itinerario didáctico de introducción a un concepto o técnica*-. Era evidente que un déficit visual incidiría en ellos de forma determinante, resaltando dificultades y dando ocasión para proponer orientaciones que las superasen. El estudio de *enunciados* se aborda en el Capítulo 4, y desemboca en un análisis de *tipologías*, que nos sería de gran utilidad a la hora de detectar *a priori* dificultades relacionadas con la falta total o parcial de visión; no obstante, el tratamiento de éstas se pospone al Capítulo 5, dedicado al estudio del *proceso de resolución* o *itinerario de introducción* en sus diferentes etapas.

Siguiendo una línea de trabajo ya manifestada por el autor en otros lugares (FERNÁNDEZ DEL CAMPO, 1996[2], 1997), se presta especial atención al concurso de los *cuatro lenguajes* básicos en la Didáctica de la Matemática: lengua natural (hablada y escrita), lenguaje simbólico-matemático ordinario, lenguaje gráfico-geométrico y lenguaje de comportamientos físicos (manipulación de materiales, gestuación, etc.); como materialización de los *esquemas* y *representaciones* de la Psicopedagogía.

Conforme al dominio de investigación, se restringe el estudio a las situaciones problemáticas *de una etapa*; es decir: aquellos problemas o situaciones resolubles mediante *una única operación aritmética entre dos operandos* -objeto de iniciación ella misma o una técnica algorítmica suya- o como ocasión para el ejercicio/desarrollo de destrezas operatorias.

4°) Se aborda, por fin, el estudio del papel jugado por los materiales en cada uno de los dos objetos de la investigación, y las consecuencias de un déficit visual respecto de su adecuación y disponibilidad.

El Capítulo 6 se dedica a las dificultades/soluciones en relación con la práctica del cálculo por el alumno ciego -apenas si cabe diferenciar la forma de calcular entre el alumno vidente y el deficiente visual con un resto aprovechable de visión-. Se configura el que hemos dado en llamar *triángulo de destrezas calculatorias básicas*: Cálculo mental, escrito y por calculadora. Con especial incidencia en el primero, por el interés que parece despertar en las corrientes didácticas actuales, y por considerarse como un *instrumento* de utilidad manifiesta para el alumno ciego total; la Sección 6.2 puede calificarse de *pequeño tratado sobre el Cálculo Mental en la escuela*, aunque susceptible de una mayor ilustración en Situaciones o Actividades que ejemplificaran los *criterios de adaptación* que se aportan.

Quedaría así cubierto el primero de nuestros objetos de investigación: las *necesidades especiales del alumno ciego en la práctica del Cálculo Aritmético*, dificultades, orientaciones didácticas y propuestas de solución. Pero con un desenlace en principio negativo para el material que se pretendía enjuiciar, así como para cualquier otro *instrumental específico*, distinto de la *máquina de escribir Braille en punto positivo* (v.gr.: *máquina Perkins*) o la *calculadora parlante* o *con display Braille*.

[2] "La enseñanza de la Matemática a los ciegos", O.N.C.E., Madrid-1997; 2ª edición, revisada y ampliada. Coincide esencialmente con la 1ª edición, publicada en 1985. en lo relativo a la consideración de estos "cuatro lenguajes básicos en la Didáctica dela Matemática".

Por este motivo -así como por la bibliografía existente al respecto-, se elude la consideración del *ábaco chino-japonés* o *Sorobán*, que tanto predicamento parece alcanzar en la enseñanza de ciegos de diversos países, y que también empieza a estimarse en el nuestro. No se trata de un juicio negativo, sino de una *declaración de superación* por la "*calculadora parlante*". Tampoco se dedica especial atención a esta última, por cuanto su Didáctica sería idéntica a la dirigida a alumnos videntes.

5º) Al pretender afrontar la parte concerniente a la *iniciación al Cálculo* y la adaptación/disponibilidad del material utilizable, fue imprescindible desdoblar de nuevo el objeto del trabajo: *introducción a la escritura numérica* -primordialmente, en forma decimal- e *iniciación a las operaciones aritméticas.*

El problema didáctico fundamental de la *numeración* constituirá el contenido del Capítulo 7. Desde los *procesos de simbolización/representación* y sus formas, hasta el aprovechamiento y limitaciones de los mencionados *cuatro lenguajes* y sus variantesmás notables, y las dificultades que plantean al alumno ciego. Se ve reforzada la convicción sobre la *necesidad de un material manipulativo adecuado a la exploración háptica.*

En concordancia con los principios didácticos que se han ido destilando y las exigencias de la exploración/manipulación háptica, se diseña un *cuadro de criterios de idoneidad* para este material. Evaluados los más usuales, se denuncia su insuficiencia yponen de relieve una vez más la necesidad de adaptaciones o diseño *ex proceso.*

6º) Se llega de este modo a una *propuesta de material adaptado*: "*TINKUNAKO*", *multiábaco abierto móvil de capacidad limitada. Material de iniciación*, tanto a la numeración decimal como a las cuatro operaciones aritméticas, con sencilla traducción a la escritura decimal; y adaptado plenamente a las necesidades del alumno ciego, ya que su diseño se realizó bajo la guía de los *criterios de idoneidad* del Capítulo 7.

En el Capítulo 8, tras un breve repaso justificativo del itinerario que modificaría el modelo original (*conjunto de ábacos abiertos desplazables*) hasta llegar al definitivo, se muestra el amplio horizonte de aplicabilidades, potencialidades y atractivos didácticos. En particular, se le valora como *un verdadero instrumento de integración escolar*, eficaz desde los puntos de vista matemático, psicomotriz y didáctico, válido para cualquier tipo de alumno, padezca o no deficiencia visual o de cualquier otro tipo: para su empleo, basta un mínimo de motricidad manual y orientación espacial.

Se analizan asimismo los procesos de *traducción* entre *TINKUNAKO* y las diferentes formas de lenguaje y las destrezas consideradas como básicas para afrontar con éxito el proceso de iniciación aritmética y algorítmica, tanto en el dispositivo como por escrito.

Finalmente, se hace una descripción esquemática y justificada de los modelos de *Itinerarios Didácticos* de introducción a la numeración decimal y las operaciones aritméticas que informaron la aplicación experimental, y que se adjuntan bajo la forma de *Guías* en los Anexos.

Es de destacar que con *TINKUNAKO* es posible un completo desarrollo de los conceptos y técnicas operatorias de la Aritmética totalmente independiente de la *escritura en papel*; esta pasa a ser una forma alternativa *para cuando no se disponga del dispositivo.* Puede afirmarse en verdad que en este trabajo se ofrece una versión de

La Aritmética sin cifras

Al mismo tiempo, al reflejarse manipulativamente en *TINKUNAKO* las acciones reales, modelos físicos de las operaciones aritméticas elementales, se respeta el principio.

Partir de la vida para llegar a la Aritmética

Y en concordancia con la propuesta de los *itinerarios Didácticos* como *procesos de resolución de situaciones problemáticas* asequibles al alumno, se intenta

Provocar la búsqueda de soluciones mediante una presentación en forma de *desafío* o *juego* puramente manipulativo.

Según los Objetivos de formalización y estructuración que se persigan,

Diseñar el Itinerario de desarrollo didáctico, orientando sus actividades y situaciones hacia los correspondientes aspectos formales.

JUSTIFICACIÓN METODOLÓGICA

La investigación didáctica hace tiempo que ha abandonado los caminos de la ciencia empírica (KILPATRICK, 1988A, 1988B), con todo su bagaje de análisis estadísticos y conclusiones con pretensión de validez universal; prima la *situación* (enfoques *interpretativo* y *socio-crítico*; ibidem), en la que "*un profesor concreto* con *un grupo determinado de alumnos, diversos entre sí*" obligan a una aplicación modulada de principios y orientaciones.

> Nuestro estudio es ciertamente menos <puro>, ya que nosotros abordamos el problema con un número infinitamente mayor de coordenadas: estudiamos al alumno en clase, en el momento en que afronta las dificultades e intenta superarlas con la ayuda del maestro. Nuestro punto de vista, más general, gana en realismo lo que pierde en precisión y rigor. (MIALARET, 1984, 7).

Es inútil pretender aislar variables como en un laboratorio estéril (cfr.: BROWNELL, 1948). Esto impide la formulación de *conclusiones universales*, independientes del contexto educativo.

En nuestro caso, además, no sólo varía la *situación de enseñanza-aprendizaje*: el que -simplificando- designamos por *alumno ciego o deficiente visual* abarca toda una serie de circunstancias personales que se mencionan de forma tangencial a lo largo del trabajo:

- ceguera total o con resto visual educativamente aprovechable -con una diversidad casi ilimitada de casos, no siempre estacionarios-;

- *centro de educación especial de ciegos* (grupo de alumnos todos ellos con problemas graves de visión), o centro ordinario (*educación en integración*);
- tiempo transcurrido desde que se produjo la pérdida apreciable de visión (si tal ocurrió);

- grado de aceptación de la discapacidad y consecuencias en la comunicación alumno-alumno, alumno-profesor y empleo del *instrumental específico de trabajo*;

- nivel de aplicación/aprovechamiento de las destrezas hápticas o propias del resto visual, en su caso;

- nivel de destreza en la utilización del *instrumental específico de trabajo* y disponibilidad de éste;

- historial escolar y atención especializada recibida;

- implicación de la familia en el proceso educativo y grado de preparación específica;

- influjo en la formación aritmética del contexto sociofamiliar; etc.

A la hora de plantear una experimentación extensiva, conviene no olvidar otros aspectos que incrementan su dificultad:

- escaso número relativo de alumnos en el nivel de Iniciación a la Aritmética y consiguiente dispersión geográfica;

- necesidad de incorporación activa del profesorado a la experiencia (si no se quiere interferir con otras vías didácticas).

Nos hemos acogido, pues, a la concepción de KILPATRICK de que la investigación en educación matemática es una interrogación disciplinada acerca de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. (KILPATRICK y OTROS, 1991, 9); concretando la ya clásica propuesta de CRONBACH y SUPPES (1969),, que entendían la investigación como *indagación metódica*, y admitiendo que ésta no necesita ser *científica*, si esto se entiende en el sentido de estar basada sobre hipótesis que han sido verificadas empíricamente sino que, como cualquier buen trabajo científico, debe ser erudito, público y abierto a la crítica y a una posible refutación. (ibidem).

De no hacerlo así, habría que rechazar de inmediato la inmensa mayoría de los trabajos que sobre Didáctica de la Matemática en general -y de la Aritmética, en particular-se han publicado hasta nuestros días (cfr.: SUYDAM, 1977; HOWSON, 1988).

En sus aspectos más directamente aritméticos, el trabajo se ha sometido a una aplicación experimental, teniendo como sujeto directo a Rodolfo Robles (*junior*). Como elemento validador de las observaciones y principios didácticos que aparecen por doquier, es inevitable aludir a los treinta años de experiencia docente del autor en enseñanza de la Matemática -ciego él mismo-, con todos los niveles y tipos de alumnos: desde la Escuela Primaria a la Universidad y actividades en Formación del Profesorado; con alumnos ciegos totales, deficientes visuales y videntes; de forma individualizada o con grupos que sobrepasaban el centenar.

Sin quedarse en un mero ejercicio teorético, que pudiera rayar en el diletantismo intelectual, de principio a fin se pretende resolver un problema real, específico y bien definido, aunque haya adquirido sus perfiles nítidos a lo largo de la investigación:

Dificultades del alumno ciego o deficiente visual respecto del aprendizaje y práctica del Cálculo Aritmético

Problema que de inmediato induce su dual:

Dificultades del profesor respecto de una adecuada atención didáctica a alumnos ciegos o deficientes visuales en los procesos de enseñanza-aprendizaje y práctica del Cálculo Aritmético

En lo relativo al contenido, se ha intentado respaldar las afirmaciones y observaciones con opiniones de autores diversos. En lo referente a los procesos y materiales para la enseñanza-aprendizaje de la Aritmética, la selección no es ciertamente exhaustiva; se acude con preferencia a documentación estadounidense, parte de la cual se halla disponible en castellano. Los autores españoles citados no son numerosos, aunque creemos que sí están los más representativos en la materia; sus menciones, no obstante, son frecuentes -puede parecer incluso que en exceso-, pero nos sentimos identificados plenamente con sus planteamientos.

No ocurre lo mismo con las referencias a la educación especial de ciegos. Como se indica páginas atrás, escasean los trabajos, y muchos de ellos nos han parecido reiterativos o superficiales.

Se tiende a presentar los resultados de los análisis y observaciones bajo la forma resumen de *cuadros sinópticos* y *mapas conceptuales* o *diagramas*, en la pretensión de facilitar una visión panorámica de la mayoría de los temas tratados: pueden encontrarse más de 50 de ellos en el conjunto de la obra. Pero no debe olvidarse que esta finalidad didáctica es, con frecuencia, parcial y esquemática en demasía; máxime, cuanto que muchas de las relaciones que se intentan representar son aproximacionesno comprobadas o incomprobables en sí mismas.

La intención última de este trabajo es, pues, didáctica. Está destinado al profesorado:

Respecto del aprendizaje y práctica del Cálculo Aritmético,

- poner a disposición del profesor que cuente con alumnos ciegos o deficientes visuales en su aula

- orientaciones, sugerencias, principios e incluso un material,

- adaptados a las necesidades específicas de aquéllos

Pretende ser un medio de información específica. Esperamos que también sugeridor de nuevas investigaciones.

INICIACIÓN AL CÁLCULO ARITMÉTICO CON ALUMNOS CIEGOS Y DEFICIENTES VISUALES

ALGUNAS APLICABILIDADES DIDÁCTICAS DEL "MULTIABÁCO MÓVIL DE CAPACIDAD LIMITADA"

1 ARITMÉTICA Y FRACASO ESCOLAR

Los términos *Matemática* y *Educación*, al citarlos conjuntamente, parecen evocar de inmediato la idea de *fracaso escolar*: es incontestable que es en el área matemática donde más dificultades se les plantea a la inmensa mayoría de alumnos, de todos los niveles y contextos.

1.1 REFORMAS PARA EL FRACASO.

Las Reformas educativas se suceden, se revisan los curricula, los enfoques, la organización..., pero el Area Matemática subsiste como *piedra de tropiezo* general.

La discusión entre psicólogos, pedagogos y matemáticos parece no tener fin: la dificultad básica, ¿estriba en el diseño del curriculum -contenidos, objetivos, enfoque de la evaluación-...?, ¿o en la Didáctica, los métodos, las cotidianas actividades de aula...?

Basta un somero análisis de los curricula de educación matemática elemental que se han sucedido -en España y en el mundo- a lo largo del siglo XX, para darse cuenta de dos hechos relevantes: su enorme variabilidad de objetivos, orientaciones y aun contenidos, y, no obstante, la pervivencia de un bloque de conocimientos y destrezas básicas relativos a *los números*: la Aritmética.

La Aritmética es, sin duda, la disciplina más propiamente matemática, si no la Matemática misma. Históricamente, podríamos decir con Freudenthal que *se desconoce qué inventó primero el hombre, si la escritura o la aritmética.*

Como primer efecto del encuentro del entendimiento con la cantidad, la comparación sigue inmediatamente a la distinción de partes; precedida quizás y tan sólo por los conceptos conjuntistas y relacionales. En consecuencia, la *cuantificación* en su expresión numérica, sea cual fuere el código.

Y, lo que es más importante: la necesidad comunicativa de la vida en sociedad, que engendra para estas conceptualizaciones, la numeración -en sentido general- y las operaciones. Han tenido y tienen una vigencia en el multiforme quehacer humano de todas las épocas y culturas, expresada en forma simbólica variadísima.

La Aritmética forma parte del conocimiento a transmitir mediante la educación. Más aún, constituye uno de los datos iniciales con los que debe contar toda educación, puesto que, en nuestra sociedad actual, el niño -aún el de corta edad- ya ha realizado cierto aprendizaje de conceptos numéricos. Al encontrarse con números en distintos contextos el niño ha desarrollado su propio pensamiento, incorporando información numérica, y ha elaborado cierto conocimiento al respecto. (CASTRO, RICO Y CASTRO, 1996, 45).

El alcance de *lo numérico* impregna la Matemática toda. Incluso como modelo de representación y descripción de la realidad física inmediata (geometría), y como modelo de comparación y cuantificación de las magnitudes (medida). (ALSINA y otros, 1996, 9). Conscientes de que toda fórmula geométrica presupone la aritmética y, por lo tanto, una pequeña deficiencia en la técnica de calcular puede anular cualquier meta posterior. (ibidem., 15)

El puesto preeminente de la Aritmética en el curriculum educativo parece, pues, sobradamente justificado. Tanto por su carácter fundante, como por los requisitos de orden psicológico y la propia demanda social y tecnológica.

Sean cuales sean las condiciones que se impongan para que un determinado conocimiento forme parte de la enseñanza básica, la Aritmética reúne todos los requisitos necesarios para ser uno de los elementos esenciales del currículo escolar. (CASTRO, RICO Y CASTRO, 1996, 97).

Su valor formativo no se restringe al exclusivo manejo de los números: Los grandes conceptos de la Aritmética forman parte del equipo de instrumentos que sirven para pensar, lo cual es evidente en nuestra sociedad, lo pongan o no de manifiesto los programas (ibidem.). Una incursión a la búsqueda de conjeturas, explicaciones, analogías, extensiones y generalizaciones, hará ver que la Aritmética no sólo es cálculo, también es matemáticas. (GÓMEZ, 1988, 14).

No parece, pues, fútil preguntarse acerca de la realidad, características y causas del bajo rendimiento escolar, percibido como *fracaso*; centrándonos en la Aritmética misma, más que en el área matemática en general.

Nuestros alumnos parecen saber cada vez menos aritmética, y la que saben está peor aprendida, sin hábitos bien adquiridos, con dificultades crecientes en su aplicación práctica, y un bajo dominio en el empleo de las nuevas tecnologías. (CASTRO, RICO Y CASTRO, 1996, 18). Los resultados no han sido todo lo buenos que se esperaban y las estadísticas sobre analfabetos funcionales en la edad adulta, en donde se incluye la incompetencia numérica funcional, reflejan que en la actualidad sigue habiendo un alto porcentaje de adultos que son incapaces de utilizar los conocimientos elementales de cálculo, lo que ha dado lugar a que esta materia forme parte de los Programas de Formación de Adultos. (ibidem., 31).

El primer intento constatado de analizar y afrontar las dificultades de Cálculo Aritmético data de principios de siglo, plasmado en los trabajos sistemáticos de THORNDIKE (1922). Desde entonces, puede decirse que no ha cesado este interés, con enfoques y propuestas bien distintas; contradictorias, incluso. En los últimos 30 años la preocupación por el tema ha llevado a no pocos investigadores a efectuar estudios de campo con amplitud y objeto bien distintos.

Hay que advertir que la omnipresencia de la Aritmética requeriría investigaciones que cubrieran todo el curriculum educativo, desde los niveles de Preescolar hasta los estadios universitarios y profesionales. En rigor, serían precisas macroencuestas -de seguimiento, con preferencia- que pusieran de manifiesto la estabilidad de los conocimientos y destrezas adquiridos. En consecuencia, la limitación es obligada.

En la literatura, se pueden encontrar trabajos que van desde los estudios con los alumnos de un aula de 4° grado (9-10 años), hasta estudios longitudinales con centenares y aun millares de alumnos. Un buen ejemplo de estos últimos lo encontramos en los MITSS llevados a cabo por la IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) que superan los 500.000 alumnos de más de 15.000 escuelas en 45 países para el período 1995-96; si bien su objeto, (en esencia: estudio comparativo de curricula) era mucho más genérico que la simple determinación de niveles de dominio de los conceptos y técnicas de Cálculo Aritmético.

Por otra parte, la gran variedad de situaciones numéricas reclama pruebas que, de pretender una cobertura suficiente, se tornan extensas y de costosa realización, si no quieren convertirse en sesiones fatigantes y tediosas. Aunque se cuenta con una ventaja taxonómica: puede llegarse a una descripción exhaustiva de situaciones y dificultades objeto de estudio.

Así, nos encontramos desde estudios que contemplan la noción de cantidad y escritura de cifras individuales para alumnos de 9 años. (GARCÍA YAGÜE, 1981; España), o el dictado de cantidades -con la omisión o adición de ceros intermedios-, determinación de números anteriores y posteriores. (BRITO, 1976; Argentina), también con niños de 9 años, hasta los trabajos sobre el dominio de la multiplicación y división con alumnos de 10-12 años. (O'MAGNE, 1978, Suecia; MIALARET, 1966, Francia), o los más complejos del "First International Mathematics Study" (1964) y sucesivos estudios de la IEA. Sin contar con los que sobre resolución de problemas han menudeado a partir de 1980, encaminados esencialmente a determinar niveles de dificultad en los diversos tipos que configuran cada operación.

En cualquier caso, se observa:

a) Los alumnos que superan satisfactoriamente las técnicas de expresión numérica y cálculo previstos para cada nivel integran un porcentaje en principio reducido, pero creciente al compás de la escolaridad. Porcentajes que parecen, no obstante, suficientes para confirmar la adecuación de los objetivos propuestos a la edad y nivel madurativo de los escolares.

b) Desigual distribución de los errores de cálculo, con elevados porcentajes para algunos de ellos (70-80%), que van reduciéndose a medida que la escolaridad favorece la corrección o autocorrección, presumiblemente, por la simple práctica cotidiana.

c) Persistencia de ciertos errores en los algoritmos escritos, quizás ligados al carácter convencional de las reglas y fruto de una escasa o nula comprensión del significado de éstas. Podría resumirse en: *se sabe como operar -restar, por ejemplo-, pero no se sabe por qué hacerlo así*; es el caso típico de la técnica de *llevar* en la resta.

d) Desvinculación entre el significado matemático y físico y las técnicas expresivas y operatorias, quedando éstas reducidas a simples formalismos -manipulación de símbolos- para la inmensa mayoría de los alumnos.

Precisamente, esta última lacra ha movido a numerosos investigadores a replantear la cuestión del *significado* a partir de los años 80, retomando la polémica Brownell-Thornedike del primer tercio de siglo; con un florecimiento de los estudios relativos al papel de los *problemas* en la escuela; en especial, de los *problemas aritméticos de enunciado verbal.* (PAEV).

Conviene, sin embargo, delimitar cuestiones. Ya anticipaba JAULIN-MANNONI en 1965:

> En los cursos de primaria, la nota obtenida por el niño en aritmética está en función, tanto del resultado de las operaciones, como de la comprensión del problema; nos parece un error grave, y no porque la facilidad de cálculo sea una facultad menor que no deba tenerse en cuenta, sino porque se trata de materias distintas que deberían evaluarse separadamente. (JAULIN-MANNONI, 1980, 84).

El esfuerzo por hacer frente al *fracaso* ha llevado paulatinamente a acotar grandes grupos en las dificultades de contenidos y técnicas fundamentales: nociones básicas (relativas a la percepción del espacio y el tiempo y la función comunicativa), numeración, operaciones, resolución de problemas, otras nociones (véase: FERNÁNDEZ, LLOPIS y DE PABLO, 1991, 32).

1.2 DE LOS ERRORES A LAS CAUSAS

Como en todo estudio estadístico de población, los errores y fracasos aritméticos tratados se manifiestan como *relativos* al grupo considerado. No obstante, también cabe subjetivizarlos, en relación con otras áreas del curriculum:

> Puede afirmarse que tienen dificultades para aprender matemáticas los alumnos que, escolarmente y de forma global, están por debajo de la media de su grupo, por un lado, y por otro, los que, en un aspecto concreto, están por debajo de su propia media de rendimiento. (FERNÁNDEZ, LLOPIS y DE PABLO, 1991, 16).

Aun a riesgo de caer en relativismos esterilizantes -e incluso escepticismo-, podríamos apuntar hacia el criterio de que *sólo cabe hablar de* **fracaso** *considerando el curriculum individualizado del alumno y los rendimientos observados; extensible a todas las áreas curriculares.* Lo que conduciría, una vez más, a las cuestiones de orden didáctico, y, en especial, a la importancia de la evaluación, sus instrumentos y baremación.

Pero la Aritmética parece reclamar, en su objetividad y exactitud esenciales, un tratamiento independiente de criterios subjetivos, estadísticos e interpretativos. ¿Puede hablarse, pues, de errores sistemáticos y dificultades individuales objetivas en el Cálculo Aritmético?

Para las sumas y restas elementales, KNICHT y BEHRENS (1928) estudian el número de errores cometidos, el número de veces que se tenía que presentar una combinación para ser aprendida, el tiempo que se tarda en resolver una combinación en cada caso, y la cantidad de práctica necesaria para lograr una eficacia del 100%. Confeccionan así una lista completa de todas las relaciones de suma y resta en orden de dificultad, de la que se podía deducir la práctica que debía aplicar el profesor a cada una. Por ejemplo, descubren que, para dominar la combinación más difícil (15-6), los niños necesitaban por término medio 26 ejercicios, con 7,4 segundos por intento y 20 errores. Esta forma de investigación de errores se ha proseguido a lo largo del tiempo, viéndose impulsada recientemente gracias al empleo del ordenador. Se ha extendido asimismo al estudio de errores en la resolución de problemas. (LOFTUS Y SUPPES, 1972).

JACOBSON (1975) observa que cuando la precisión alcanza un nivel de entre 90 y 95%, la práctica ulterior parecía no redundar en progresos significativos (frente a los niveles de 99,5-99,7% que presuponía THORNDIKE).

> Estos estudios parecen indicar que quizá nunca se pueda conseguir una precisión total, por lo menos en los niños. Por lo tanto, los profesores y los planificadores de la enseñanza deben ser capaces de detectar el nivel a partir del cual los ejercicios suplementarios no tienen valor determinado. (RESNICK Y FORD, 1981, 46).

¿Es que la Aritmética elemental no es para todos? ¿O es que los métodos aplicados no garantizan el éxito a todos? ¿Nos encontramos ante un problema de dificultad intrínseca, de selección de Objetivos pedagógicos, de métodos, de medios...? ¿O de un entramado de factores sumamente complejo?

El quehacer matemático es *algo* más que *llegar a unos resultados a partir de unos datos o materiales de partida*. Al realizarse en el tiempo, por reducido que sea el intervalo, es *un proceso*. Por tanto, debe atenderse -en Aritmética, al menos- no sólo al *resultado* de la operación (aspecto *cuantitativo*), sino también a *cómo se obtiene* (aspecto que podríamos llamar *cualitativo* o *procesual*).

Obsérvese la siguiente suma errónea:

$$\begin{array}{r} 27 \\ 79 \\ +\,86 \\ \hline 172 \end{array}$$

El alumno pudo:

a) Efectuar primero la suma de la columna de la izquierda -decenas- (17); y, tras efectuar la suma de unidades -columna de la derecha- (22), no incorporar las 2 nuevas decenas de este resultado parcial.

b) Efectuar primero la suma de unidades -columna de la derecha-, y escribir las 2 unidades de la suma parcial; ignorando que las 2 decenas resultantes debe añadirlas a la columna de éstas, efectuó la suma de la columna de la izquierda.

c) Con este mismo procedimiento, *olvidó* la adición de las 2 decenas. Por *simple olvido*, por interrupción momentánea de la tarea -por estímulo externo, desatención o trastorno interior-.

d) Sabía que debía añadir estas 2 decenas, y lo intentó. Pero, al iniciar la suma en la columna de la izquierda, superpuso el *2* en imagen mental con el *2* de las decenas de la primera cantidad (27).

e) Inició correctamente la suma en esta columna, pero con error en alguna de las sumas parciales subsiguientes efectuadas en cálculo mental: 2+2=4, 4+7=9, 9+8=17; o: 2+2=4, 4+7=11, 11+8=17.

f) Inicia correctamente la suma en esta columna de decenas, pero procediendo de abajo hacia arriba, no la finaliza: 2+8+7... (olvida la suma con las 2 decenas de 27). Por inadvertencia o error perceptivo.

g) Efectuó correctamente esta adición *con llevada*, pero por inadvertencia escribe 17 en vez de 19.

h) Por error perceptivo, lee *6* en lugar de *8* en las decenas de 86, y efectúa correctamente la suma conforme a esta lectura.

i) No existe error perceptivo, pero por causa de alguna fijación o perturbación externa o interna, interpreta *-lee-* incorrectamente o sustituye alguna o varias de las cifras de las decenas.

j) Por perturbación interna de cualquier tipo, no efectúa la suma en la columna de decenas, llevando o no, y escribe un resultado al azar...

Fallas que pueden concurrir, dos o más de ellas, en la misma situación.

Para colmo, pudo suceder que el alumno diera la respuesta correcta, y, sin embargo, quedar encubierto algún o algunos de los errores citados. Espejismo que quedaría al descubierto, muy posiblemente, proponiéndole varios ejercicios análogos.

Por consiguiente, la evaluación para la correcta detección de errores, dificultades y causas de fracaso en Aritmética, no puede restringirse a la simple presentación de pruebas, ejercicios o problemas, sin reparar en *cómo* se efectúan los cálculos. El problema no es tanto de *instrumentos de evaluación*, como de *registro de comportamientos durante el proceso de cálculo*: filmaciones, grabaciones, anotaciones del observador, etc.

Es decir: la fórmula de evaluación más adecuada parece ser la de *entrevista clínica*, con soporte en pruebas que abarquen una variedad suficiente de situaciones aritméticas. En especial, forzando al sujeto de observación a verbalizar los cálculos mentales y pasos del algoritmo -aunque deban analizarse críticamente (cfr.: RESNICK y FORD, 1981, 108)-, registrando asimismo mediante filmación sus actitudes y movimientos (oculares, incluso).

El método de *entrevista clínica* y análisis de *protocolos de registro* se debe en buena parte a Piaget; sin duda, su más importante aportación a la investigación psicopedagógica. Un ejemplo de aplicación al estudio de comportamientos en cálculo aritmético lo encontramos en el trabajo efectuado por LANKFORD (1972, 1973; véase: RESNICK y FORD, 1981, 109-110). Otro ejemplo ilustrativo se encuentra en los trabajos de JAULIN-MANNONI (1965), BROWNELL Y MOSER (1949).

Sin embargo, los métodos que la investigación psicopedagógica venía empleando han sufrido en los últimos lustros una pérdida progresiva de credibilidad. Se va abriendo camino la idea de *validez ecológica de la observación*, según la cual el estudio de comportamientos respecto de modelos ajenos a la realidad escolar, la inevitable artificiosidad de la situación experimental y sus instrumentos, hacen peligrar las conclusiones. Por otra parte, la finalidad de soslayar la influencia de variables socio-culturales, junto con ser un mero ejercicio voluntarista, se considera hoy como un miope enfoque de las Ciencias Sociales. Críticas que ya había adelantado la escuela de Moscú, con VYGOTSKY a la cabeza (véase: RIVIÉRE, 1994, 53).

Para la evaluación de las capacidades y eficacia calculatorias del alumno -o, lo que es lo mismo: de sus dificultades-, y especialmente en los primeros niveles de enseñanza, se cuenta con dos instrumentos básicos: la observación del quehacer en el aula y su plasmación en tareas personales escritas o gráficas.

La observación debe extenderse a reacciones e iniciativas bien diversas, indicios de la auténtica cantidad y calidad de conocimientos, destrezas y desarrollo de capacidades difícilmente alcanzables por pruebas concretas y predeterminadas. Campos posibles serían:

- Cómo trabaja cada alumno individualmente.

- Cómo se comunica con los compañeros durante el trabajo en grupo.

- Qué preguntas plantea.

- Disposición, aciertos y errores al responder dichas cuestiones.

- Cómo defiende sus ideas...

Todo ello, sin la formalidad de una prueba o examen.

> La expresión oral y las actividades manipulativas dan muchísima información sobre el escolar y más rápidamente. (ALSINA y OTROS, 1996, 141).

Pero las conclusiones no pueden ser definitivas: las hipótesis se reformulan constantemente, y no sólo porque el profesor-investigador modifique sus concepciones, sino porque la observación no puede abarcar ni a todos los alumnos ni a todos los aspectos concernientes.

Asimismo, la revisión del trabajo realizado por el alumno no puede ser exhaustiva.

> Queda muy bien decir que hay que reflexionar sobre el trabajo de cada escolar para captar lo que no ha entendido y después sobre el conjunto de la clase, sin embargo esto no es posible. (...) Se puede combinar una revisión global y un análisis más detallado de uno de los puntos o ejercicios que antes se haya escogido como significativo. Si de los trabajos normales que se hacen para desarrollar un tema se tiene claro *a priori* qué parte nos puede servir de diagnóstico, sólo hace falta preparar pruebas escritas en los casos excepcionales. Tendremos entonces mucho cuidado de incluirlas en la programación normal, y no es necesario decir al alumno que se trata de un examen. (ibidem.).

Por consiguiente, debemos conformarnos con una detección superficial de errores, puntuales o habituales, de los que puedan inducirse dificultades a nivel interno. La aplicación de tareas ordinarias de aula -a título más de problemas o ejercicios de fijación que de *programas de remediación*- y las respuestas que vayan observándose en el alumno puede que nos confirmen o desmientan las apreciaciones iniciales.

No es de extrañar, pues, que los estudios sobre dificultades de cálculo aritmético queden restringidos a muy escaso número de sujetos o sean poco elocuentes. *Poco fiables*, si nos atenemos a los ordinarios criterios de tamaño y representatividad de la muestra, adecuación de los instrumentos y registros y carácter evolutivo del estudio (seguimiento en el tiempo de los mismos sujetos).

1.3 EN BUSCA DE UNA CLASIFICACIÓN

El propósito de plantar cara al fracaso en cálculo aritmético llevó a los investigadores, como primera medida para un abordaje sistemático del problema, a intentar una clasificación de los tipos de errores esperables u observados en la práctica.

Una simple aproximación al enunciado de errores posibles *a priori*, no es difícil: se ha esbozado un ejemplo en la Sección 1.2. Basta una reflexión teórica meticulosa, cuidándose de seleccionar situaciones representativas. Pero esto sólo conduce a un catálogo informe; tal vez, matemáticamente bien estructurado. Lo que de verdad importa es el comportamiento real de los alumnos y la forma de corregir sus fallos. Desde principios de los años 70 se tiende a registrar tales errores (ASHLOCK, 1972; LANKFORD, 1972), con fines no sólo clasificatorios: estudiar analogías y divergencias entre buenos y malos calculistas, proyectar hipótesis causales y proponer fórmulas de remediación.

La sospecha de que las insuficiencias -sobre todo en la ejecución de algoritmos- podrían agruparse conforme a ciertos criterios que, a su vez, aportaran indicios sobre orígenes comunes, desembocaría en la "*teoría de **bugs***" (BROWN y BURTON, 1978; BACKMAN, 1978). (*Bug*: pequeña modificación o perturbación en el desarrollo de un procedimiento -es el caso de un algoritmo- que tiene por característica fundamental su presencia sistemática al usarse dicho procedimiento.) El principio fundamental de la *teoría de bugs* es que en la raíz de todo error algorítmico se encuentra la omisión de un paso o acción elemental. Sin duda, responde a una concepción conductista del aprendizaje.

El análisis de la *teoría de bugs* parece detenerse en la pura mecánica ejecutoria, mientras que la cuestión, sin embargo, se revela mucho más compleja y profunda. Un mismo *bug* puede deberse a razones bien distintas: ignorancia, olvido, dificultad disléxica o aritmética, perturbación perceptiva, atencional, emocional...

GIORDANO (1974), tras considerar tres causas *fundamentales* en la discalculia -la lingüística, la psiquiátrica y la genética-, estima una cuarta *determinante*: la pedagógica fallas de las funciones de maduración neurológica, inmadurez o problemas en lecto-escritura. (cfr.: EGEA, 1994, 28-29)

> Junto a la acalculia primaria existe otra secundaria, no total, o discalculia, que sí interesa desde el punto de vista pedagógico porque repercute directamente en el aprendizaje de las matemáticas y se presta a intervenciones educativas. (FERNÁNDEZ, LLOPIS y DE PABLO, 1991, 52).

> En la mayoría de los casos que nos hemos visto obligados a reeducar niños con dificultades en el aprendizaje del cálculo los motivos han sido muy diversos: deficiente adecuación de los conceptos impartidos al desarrollo mental del niño, irregularidades en la escolarización del niño y en algunos casos, dificultades perceptivas Junto a ello tampoco podemos olvidar el factor determinante desempeñado por el docente en cuanto que en sus manos está la utilización o no de ayudas de prevención y de apoyo a los niños a los que se les ha detectado algunas deficiencias en su aprendizaje. (EGEA, 1994, 12)

Los bloqueos en cálculo son, en su mayor parte, consecuencia de una enseñanza prematura y mal aceptada y una excesiva presión familiar y/o escolar. (STAMBACK; cit. por LUCEÑO, 1993, 144). Asociados a trastornos afectivos y de la personalidad, desembocan en una inhibición manifestada bien en un bloqueo verbal o en un bloqueo ejecutivo, psicóticos, inestables, fóbicos hacia el cálculo como canalización de su agresividad u oposición hacia el medio escolar o familiar, etc. (ibidem., 143). No es el caso general, pero sí el más frecuente, a juicio del autor de estas últimas citas. Bien es verdad, que sus observaciones lo son a propósito de trabajos realizados en el hospital *Henri Rouselle* de París; contextualizados, por tanto, a niños o adolescentes con síntomas de perturbación psíquica o neurológica. Considera, asimismo, los casos asociados a disarmonía en la evolución de la actividad cognoscitiva, con trastornos en la orientación espacial y temporal .(ibidem.).

Con frecuencia, un fracaso en habilidades operatorias tiene su raíz en una mala generación o adquisición del fundamento conceptual; en consecuencia, aparecen deficiencias en el momento de reconocer la oportunidad de la operación:

"*se sabe cómo sumar, pero no se sabe cuándo o por qué sumar*". O, lo que es más habitual aún: la razón de "*por qué se suma así*"... Algunas de nuestras escuelas se han preocupado más por comprobar que el niño podía sumar que en saber cómo y por qué se efectuaban las operaciones.(EGEA, 1994, 20).

Para los escolares, los especialistas distinguen, en general, dos órdenes de factores: los referentes a la capacidad individual del alumno -orden cognitivo- y los relacionados con los procesos de enseñanza-aprendizaje -orden didáctico-. Los primeros, en principio, difícilmente modificables; no así los segundos (MAZA, 1991, 127; FERNANDEZ, LLOPIS Y DE PABLO 1991, 52; LUCEÑO, 1993, 143-144; EGEA, 1994, 12, 28-29). Claro está, que el problema se traslada ahora a la distinción entre ambos niveles; es decir: separar capacidad natural y su desarrollo fruto de un aprendizaje.

En los adultos, la *incompetencia numérica* se presenta asociada en ocasiones con problemas de orden neurológico -que también se admiten para los niños- (LURIA, 1982), y aparecen con frecuencia factores de orden actitudinal (COCKCROFT, 1986; Castro, Rico y Castro, 1996, 31-32).

Las dificultades suelen agruparse en disfunciones que van desde la *acalculia* (HENSCHEN, 1920; y los estudios consecutivos de GERTSMANN, STRAUSS Y WERNER, CRITCHLEY, LURIA; cfr.: FERNÁNDEZ, LLOPIS y DE PABLO, 1991, 51-52), hasta distintas formas de *discalculia* y *anarítmia*, ya sean persistentes o efímeras, reducibles a lo largo del proceso de enseñanza-aprendizaje, atribuibles más bien a lacras madurativas o didácticas.

No es unánime el criterio de clasificación de estas disfunciones y sus supuestas causas. Es de temer que los análisis se hallen condicionados por la concepción psicopedagógica subyacente. Se intenta aquí, no obstante, un esquema de aproximación a las dificultades en el Cálculo Aritmético que aparecen en la literatura consultada, que no debe considerarse como rígido ni cerrado:

DIFICULTADES EN EL CALCULO ARITMETICO

1 De orden neurológico:

Atribuibles a lesiones en el lóbulo occipital (LURIA,)

a) Dificultades para el cálculo mental.

b) Dificultades para el planteamiento de problemas.

c) Dificultades para la numeración y las operaciones escritas.

2 De orden perceptivo y grafo-motriz (FELDINAN, 1980; FERNANDEZ, LLOPIS Y DE PABLO 1991):

2.1 Trastornos en la percepción y coordinación espacial:

a) Reconocimiento de cifras (asociado a problemas de lateralidad) -"agrafia de cifras de forma apróxico-ideocinética" (LUCEÑO, 1993).

b) Reconocimiento y reproducción de cantidades (transposiciones y permutaciones) -"agrafia de cifras de forma apróxico-constructiva"- (LUCEÑO, 1993).

c) Desórdenes en la disposición espacial de operaciones. Dificultad para ordenar los números de acuerdo con una estructura espacial (*discalculia espacial*; Se conserva el principio del cálculo) (HECAEN, ; cfr.: LUCEÑO, 1993)

2.2 Trastornos en la percepción y ordenación temporal.

a) Errores en la apreciación de estados y variaciones de cantidades en problemas.

b) Errores en la ordenación temporal de pasos de algoritmos.

3 De orden cognitivo:

3.1 Fallas de pensamiento operatorio (FELDINAN, 1980; cfr.: LUCEÑO, 1993; con referencia a J. Piaget).

a) Carencias en la noción de *clasificación*.

b) Carencias en la noción de *correspondencia* y sus derivadas -conservación, equivalencia, mayor que, menor que, etc.-.

c) Carencias en la noción de *reversibilidad*.

d) Carencias en la noción de *seriación* y operaciones de *ordenación*.

e) Carencias en la noción de *inclusión* y sus derivadas -distinción y relación parte/todo, etc.- (*acalculia de KLEIST*).

3.2 Trastornos en el proceso de simbolización (BORRELL-MAISONNY, MIALARET; cit. por FERNÁNDEZ, LLOPIS y DE PABLO, 1991).

a) Dependencia absoluta de la concretización manipulativa -contar con los dedos, efectuar marcas, etc.- (LUCEÑO, 1993).

3.3 Trastornos en los procesos de interpretación simbólica.

a) Errores en la apreciación del valor simbólico y cualitativo -orden- de los números (BENTON, 1971).

3.4 Dificultades de comprensión oral -respecto de términos cuantitativos y de acción- (BENTON, 1971).

3.5 Dificultades para el establecimiento de relaciones matemáticas.

a) Discriminación de datos o información significativa/superflua en enunciados de problemas.

b) Dificultades para el establecimiento de relaciones semántico-matemáticas (BENTON, 1971; cfr.: LUCEÑO, 1993).

c) Idem. relaciones entre las operaciones matemáticas -reversibilidad suma/resta y multiplicación/división, relación suma/multiplicación, etc.- (LUCEÑO, 1993).

3.6 Insuficiente asimilación y/o fijación de conocimientos y destrezas (FERNANDEZ, LLOPIS y DE PABLO, 1991).

a) Insuficiencias de conocimientos y destrezas previos.

b) Insuficiencias de itinerario.

c) Insuficiencias de interiorización.

d) Insuficiencias de comprensión.

e) Insuficiencias de fijación.

3.7 Dificultades para la adquisición de automatismos.

Anaritmia. Errores varios en relación con los algoritmos de cálculo (BENTON, 1971; Hecaen, ; cfr.: LUCEÑO, 1993; FERNÁNDEZ, LLOPIS y DE PABLO, 1991).

4 De orden mnésico:

4.1 Dificultades para la memorización de *hechos operatorios básicos -tablas de operación-* (BENTON, 1971).

4.2 Dificultades para la memorización de algoritmos (BENTON, 1971).

a) Inadecuada disposición espacial y/o temporal de términos (FERNANDEZ, LLOPIS y DE PABLO, 1991).

b) Persistencia en la omisión de un paso determinado en un algoritmo.

c) Persistencia en la transposición de ciertos pasos en un algoritmo.

d) Olvido persistente de resultados parciales *-llevar-*.

4.3 Dificultades en retener enunciados verbales.

4.4 Dificultades en retener enunciados escritos.

5 Fallas atencionales:

5.1 Dificultades figura/fondo (FELDINAN, 1980; LUCEÑO, 1993).

a) Confusión entre operaciones simétricas -suma/resta, multiplicación/división, etc.- en la resolución de problemas.

b) Inadecuada disposición espacial y/o temporal de términos, con carácter ocasional (FERNANDEZ, LLOPIS y DE PABLO, 1991).

c) Omisión ocasional de pasos en un algoritmo.

d) Transposición ocasional de pasos en un algoritmo.

e) Olvido ocasional de resultados parciales *-llevar-*.

f) Reiteración de un paso u operación en un algoritmo.

g) Respuestas irreflexivas, incoherentes o al azar (FERNANDEZ, LLOPIS y DE PABLO, 1991).

h) Interrupciones y/o abandonos de la tarea (FERNANDEZ, LLOPIS y DE PABLO, 1991).

5.2 Sobrecargas (LUCEÑO, 1993).

5.3 Sobreestimulación (LUCEÑO, 1993).

6 De orden lingüístico:

6.1 Trastornos de orden semántico o en la relación significante-significado (CAZENAVE, 1972).

6.2 Trastornos en procesos generales de traducción/interpretación (BORRELL-MAISONNY, MIALARET; cit. por FERNÁNDEZ, LLOPIS y DE PABLO, 1991).

a) Confusión de términos espacio-temporales opuestos (FERNANDEZ, LLOPIS y DE PABLO, 1991).

b) Dificultades lectoras (FERNANDEZ, LLOPIS y DE PABLO, 1991).

6.3 Trastornos en procesos específicos de traducción/interpretación:

a) Alexia y agrafia de cifras (BENTON, 1971; HECAEN, ; cfr.: LUCEÑO, 1993).

b) Errores en la lecto-escritura de números (BENTON, 1971).

c) Errores en la interpretación de los términos de un problema (CAZENAVE, 1972; cit. por LUCEÑO, 1993).

7 Trastornos madurativos (FERNANDEZ, LLOPIS y DE PABLO, 1991; STAMBACK; cit. por LUCEÑO, 1993).

7.1 Trastornos en la orientación espacial.

7.2 Trastornos en la orientación temporal.

7.3 Fallas del pensamiento operatorio (LUCEÑO, 1993).

8 Trastornos asociados a problemas afectivos y de la personalidad (STAMBACK; cit. por LUCEÑO, 1993):

a) Bloqueos verbales.

b) Bloqueos ejecutivos.

c) Interrupciones o abandonos momentáneos de la tarea. Alteraciones del ritmo.

Cuadro 1.3A.- Discalculia: manifestaciones, trastornos y posibles causas.

MANIFESTACIONES	TRASTORNOS	CAUSAS
- Dificultades para el cálculo mental - Dificultades para el planteamiento de problemas - Dificultades para la numeración y las operaciones escritas	- No hay trastorno asociado.	- De orden neurológico (atribuibles a lesiones en el lóbulo occipital)
- Reconocimiento de cifras (asociado a problemas de lateralidad) - Reconocimiento y reproducción de cantidades (transposiciones y permutaciones) - Desórdenes en la disposición espacial de operaciones	- Trastornos en la percepción y coordinación espacial	- De orden perceptivo y grafo-motriz
- Errores en la apreciación de estados y variaciones de cantidades en problemas - Errores en la ordenación temporal de pasos de algoritmos	- Trastornos en la percepción y ordenación temporal	
- Carencias en la noción de "clasificación" - Carencias en la noción de "correspondencia" y sus derivadas - Carencias en la noción de "reversibilidad" - Carencias en la noción de "seriación" y operaciones de "ordenación" - Carencias en la noción de "inclusión" y sus derivadas (distinción y relación parte/todo, etc.)	- Fallas de pensamiento operatorio	- De orden cognitivo

- Dependencia absoluta de la concretización manipulativa	- Trastornos en el proceso de simbolización	
- Errores en la apreciación del valor simbólico y cualitativo (orden) de los números - Dificultades de comprensión oral (respecto de términos cuantitativos y de acción)	- Trastornos en los procesos de interpretación simbólica	
- Discriminación de datos o información significativa/superflua en enunciados de problemas - Dificultades para el establecimiento de relaciones semántico-matemáticas - Dificultades para el establecimiento de relaciones entre las operaciones matemáticas (reversibilidad suma/resta y multiplicación/división, relación suma/multiplicación, etc.)	- Dificultades para el establecimiento de relaciones matemáticas	- De orden cognitivo
- Insuficiencias de conocimientos y destrezas previos - Insuficiencias de itinerario - Insuficiencias de interiorización - Insuficiencias de comprensión - Insuficiencias de fijación	- Insuficiente asimilación y/o fijación de conocimientos y destrezas	
- Dificultades para la adquisición de automatismos (Anaritmia: Errores varios en relación con los algoritmos de cálculo)		

- Dificultades para la memorización de "hechos operatorios básicos" ("tablas de operación")	- No hay trastorno asociado.	
- Inadecuada disposición espacial y/o temporal de términos - Persistencia en la omisión de un paso determinado en un algoritmo - Persistencia en la transposición de ciertos pasos en un algoritmo - Olvido persistente de resultados parciales ("llevar")	- Dificultades para la memorización de algoritmos	- De orden mnésico
- Dificultades en retener enunciados verbales - Dificultades en retener enunciados escritos	- No hay trastorno asociado.	
- Confusión entre operaciones simétricas (suma/resta, multiplicación/división, etc.) en la resolución de problemas - Inadecuada disposición espacial y/o temporal de términos, con carácter ocasional - Omisión ocasional de pasos en un algoritmo - Transposición ocasional de pasos en un algoritmo - Olvido ocasional de resultados parciales ("llevar") - Reiteración de un paso u operación en un algoritmo - Respuestas irreflexivas, incoherentes o al azar - Interrupciones y/o abandonos de la tarea	- Dificultades figura/fondo	- Fallas atencionales
- No hay manifestación.	- Sobrecargas - Sobreestimulación	

- No hay manifestación. - Confusión de términos espacio-temporales opuestos - Dificultades lectoras - Alexia y agrafia de cifras - Errores en la lecto-escritura de números - Errores en la interpretación de los términos de un problema	- Trastornos de orden semántico o en la relación significante-significado - Trastornos en procesos generales de traducción/interpretación - Trastornos en procesos específicos de traducción/interpretación	- De orden lingüístico
- No hay manifestación.	- Trastornos en la orientación espacial - Trastornos en la orientación temporal - Fallas del pensamiento operatorio	- De orden madurativo
- Bloqueos verbales - Bloqueos ejecutivos - Interrupciones o abandonos momentáneos de la tarea. Alteraciones del ritmo.	- No hay trastorno asociado.	- Con origen en problemas afectivos y de la personalidad

Obsérvese que no se hace referencia a fallas derivadas o en conexión con trastornos perceptivos. La razón es bien simple: prácticamente todas las evaluaciones y experiencias que se han efectuado lo fueron sobre pruebas escritas; con enunciados de problemas en forma verbal, a lo sumo. No constan trabajos sobre situaciones gráfico-geométricas ni manipulativas propiamente de cálculo. Tampoco aparecen trabajos referidos a estudiantes ciegos y deficientes visuales, objeto final de nuestro trabajo.

Se propone, no obstante, un análisis más fino de manifestaciones de discalculia y de tipos de trastornos de orden psicopedagógico, aunque no se establezca la relación que entre unas y otros pueda existir, ya que sería función de un modelo cognitivo concreto..

Cuadro 1.3B.- DISCALCULIA: MANIFESTACIONES.

- Dificultades para el establecimiento de relaciones semántico-matemáticas (verbales/manipulativas)	- confusión entre términos cuantitativos generales (muchos, pocos, uno, grande, pequeño, más, menos, igual, mayor, menor)	
	- espaciales (arriba/abajo, derecha/izquierda, dentro/fuera)	
	- temporales (antes/después, primero/segundo/último)	
	- recuentos	- expresión
		- ejecución
		- comparación
	- significación de operaciones	- reconocimiento
		- reificación
- Carencias en expresión de nociones conjuntistas	- "clasificación"	
	- "inclusión" y sus derivadas (distinción y relación parte/todo, etc.)	
	- "correspondencia" y sus derivadas (conservación, equivalencia, mayor que, menor que, etc.)	
	- "reversibilidad" operatoria	
	- "seriación" y operaciones de "ordenación"	
- Dificultades para el cálculo mental	- Dependencia de apoyaturas manipulativas	
	- olvido de hechos numéricos	
	- Dificultades para el establecimiento de relaciones entre las operaciones aritméticas (reversibilidad suma/resta y multiplicación/división, relación suma/multiplicación, etc.)	
	- estrategias	- dificultades para el reconocimiento y distinción
		- dificultades para la generalización
		- dificultades para la aplicación

- Insuficiencias de conocimientos/destrezas previos
  - de lectura
    - Errores en el reconocimiento de cifras (asociado a problemas de lateralidad)
    - errores en lectura de cifras
    - reconocimiento de cantidades (transposiciones y permutaciones)
    - lectura de cantidades
  - de escritura simbólica
    - de cifras
    - reproducción de cantidades (transposiciones y permutaciones)
    - escritura de cantidades
  - Errores en la apreciación del valor simbólico y cualitativo (ordenación) de los números
  - Desórdenes en la disposición espacial de operaciones. Dificultad para ordenar los números de acuerdo con una estructura espacial (Se conserva el principio del cálculo)
- Dificultades para el planteamiento de problemas
  - Dificultades lectoras generales
  - Errores en la interpretación de los términos
  - Confusión de información significativa/superflua en un enunciado
  - Errores en la apreciación de estados y variaciones de cantidades
  - Confusión de términos espacio-temporales opuestos
  - Confusión entre operaciones simétricas (suma/resta, multiplicación/división, etc.)

- Errores en algoritmos escritos	- Insuficiencias de interiorización		- comprensión - itinerario - ordenación temporal de pasos - fijación
	- errores de ejecución	- ocasionales	- Inadecuada disposición espacial de términos - Omisión de pasos - Transposición de pasos - errores de cálculo mental - Olvido de resultados parciales ("llevar") - Reiteración innecesaria de un paso
		- persistentes	- Inadecuada disposición espacial de términos - omisión de un paso determinado - reiteración innecesaria de un paso determinado - transposición de ciertos pasos - errores de cálculo mental - Olvido de resultados parciales ("llevar")
Discontinuidades ejecutorias	- Interrupciones o abandonos momentáneos de la tarea. Alteraciones del ritmo - Bloqueos ejecutivos - Bloqueos verbales - Respuestas irreflexivas, incoherentes o al azar - Abandonos de la tarea		

Cuadro 1.3C.- DISCALCULIA: TIPOS DE TRASTORNO.

- Trastornos de procesos perceptivos	- espaciales (en el "espacio próximo") - temporales (ordenación de acontecimientos) - percepción de formas
- Trastornos en procesos semánticos y simbólicos	- generales - comprensión oral de términos cuantitativos y de acción - interpretación simbólica - expresión simbólica
- Trastornos en captación de relaciones cuantitativas	- establecimiento de relaciones matemáticas - memorización de "hechos numéricos ("tablas de operaciones")
- Trastornos en procedimientos y destrezas generales	- para comprender/retener enunciados verbales - para comprender/retener enunciados escritos - dificultades figura/fondo
- Trastornos específicos en procedimientos y destrezas aritméticas	- fallas de pensamiento operatorio - insuficiente asimilación y/o fijación de conocimientos y destrezas - dificultades para la memorización de procesos algorítmicos generales
- Trastornos en estados procesuales	- sobrecargas - sobreestimulación

Pero no basta con detectar los errores objetivos y pormenorizados, como posibles nutrientes -por acumulación- del *fracaso.*

Ni siquiera es suficiente inferir las causas de dichos errores:

Es preciso atajar aquéllos, remediar éstas en la medida de lo posible mediante la aplicación de tratamientos psicopedagógicos adecuados.

La evaluación, por tanto, debe superar las dimensiones diagnósticas y pronósticas, para tornarse *evaluación formativa* (ALLAN, 1980) que oriente la oportuna *Didáctica de remediación*. O mejor: que, anticipándose a la aparición de los errores, informe una Didáctica del Cálculo Aritmético adecuada a las posibilidades del alumno, a las características de esta rama de la Matemática y a las previsiones curriculares y demandas sociales.

Por encima de los errores y dificultades, de los fracasos y posibles bloqueos subsiguientes; antecediéndolos y tal vez en su raíz; como aspectos didácticos de primera magnitud en los procesos de enseñanza-aprendizaje y factores desencadenantes de actitudes positivas: la motivación y la adecuación en los itinerarios propuestos al alumno. En especial, los de iniciación a cada operación aritmética.

Adecuación y motivación en los itinerarios didácticos. Es el común pensar y sentir de cuantos han prestado atención a las dificultades del Cálculo Aritmético en la escuela, a sus contrarias –indecuación y desmotivación- llegando a considerar como verdaderas e incluso únicas *causas* de los errores, disfunciones y fracasos. La dificultad se traslada al docente: ¿cómo lograrlas?

2 PSICOPEDAGOGÍA Y ARITMÉTICA

2.1 PANORAMA HISTÓRICO

Hasta fechas bien recientes -podemos fijar los años 60-, la Matemática jugaba en el curriculum educativo general un doble papel bien definido:

- Valor selectivo.

Independiente de la voluntad y el esfuerzo de los profesores, ya que los objetivos y conocimientos considerados básicos no siempre son conseguidos por la generalidad de los alumnos. Habitualmente se atribuye dicho fracaso tanto al carácter de la matemática misma, como ciencia prestigiosa, exacta y llena de abstracciones, como al talante y caracteres de los sujetos que han de aprenderla (incapacidad para aprender, falta de interés y rigor en el estudio, etc.). (Diseño Curricular Matemáticas Secundaria. Junta Andalucía; 1989; pp. 9-10; cit. en KILPATRICK, RICO y SIERRA, 1991, 200).

- Valor instructivo. En el que predominaban la memorización de *hechos* y ejercitación de *destrezas*; a lo sumo, su *aplicabilidad* en la resolución de problemas, pero como Objetivo terminal.

Los años 50 generalizan una nueva concepción de la Matemática, que se incorpora como Objetivo de los programas educativos de los niveles elementales y medios en la década de los 60:

- Valor formativo de estructuración mental. Dominio de las estructuras conceptuales; con un multiforme panorama de relaciones internas.

Se abre paso, al mismo tiempo, una revalorización cultural de la Matemática, que pasa a ser considerada como uno de los elementos esenciales de la cultura de nuestra época. En consecuencia, se produce una auténtica invasión del curriculum académico general, figurando el área matemática como inexcusable *desde la Maternal a la Universidad*, como rezaba el subtítulo del Boletín de la Asociación de Profesores de Matemáticas de la Enseñanza Pública en Francia.

Con ello -o por ello- se intenta justificar esta omnipresencia curricular de la Matemática, aprovechándola -sea por convicción, tenue constatación o como simple respuesta- para una función educativa mucho más amplia, en la que el conocimiento matemático no se considera aislado del medio cultural ni de los intereses y la afectividad del niño y del joven. En particular, se estima una interrelación entre las características del quehacer matemático de aula y el desarrollo de capacidades en el estudiante, tomándose en consideración desde finales de los años 60 nuevos Objetivos educacionales:

- Valor instrumental, de desarrollo en ciertas capacidades. Adquisición de procedimientos y estrategias de pensamiento (matemático); que abren la puerta a la creatividad, intuición y pensamiento divergente, y no sólo al razonamiento deductivo y abstracto contemplados por la Metodología tradicional.

- Valor de adiestramiento en técnicas de trabajo. Ejercitación en nuevas técnicas de trabajo y materiales específicos; tendentes, tanto a cultivar los nuevos Objetivos, como a paliar los fracasos que seguían observándose en los órdenes instrumental y conceptual, anteriores o posteriores a los recientes enfoques.

No cesa el avance de impregnar de la vida social por lo matemático. El mundo de la comunicación, una sociedad tecnificada y tecnificante, la generalización de las técnicas de prospección y proyección, se sirven insistentemente de la polivalente ciencia abstracta, a la par que reclaman de ésta una atención a aspectos considerados como casi marginales hasta tiempos bien cercanos.

La Matemática, con su pluralidad de lenguajes y adaptabilidad a todos los campos del saber -aquejados, quizás, de epidemia cuantitativa-, se estima como una de las formas básicas de expresión en sí misma, que permiten comunicar, interpretar, predecir y conjeturar.

Y nuevo despliegue en los Objetivos educativos:

- Valor comunicativo y de interpretación/tratamiento de la realidad. Atención a los lenguajes de la Matemática, los fenómenos aleatorios, el tratamiento de la información, adecuado aprovechamiento de los instrumentos de Cálculo electrónico...

Y se produce el milagro: se restablece la perdida concordia entre Matemática y realidad, entre quehacer matemático y vida. Aspectos que no pueden tampoco estar ausentes del aula:

> Las matemáticas no son sólo una disciplina formal que se construye lejos de nosotros y de nuestros intereses, antes bien aparecen en todas las formas de expresión humana. (...) Por lo tanto, al considerar las matemáticas como un elemento de la cultura de nuestra sociedad, importante pero uno más, se deja de concebir las matemáticas como un objeto ya construido que hay que dominar, y se comienza a considerarlas como una forma de pensamiento abierto con margen para la creatividad, cuya ejercitación hay que desarrollar, respetando la autonomía y ritmo en cada persona. (Rico, 1990).

Esta evolución en los objetivos educativos o papel de la Matemática en el curriculum parece tener su origen, ante todo, en una preocupación: la función social. Ya fuera la de acomodar los nuevos programas a las posibilidades de un número mayor de alumnos. Ya fuera mejorar la aplicabilidad ulterior de los conocimientos y destrezas adquiridos -inclúyanse *reglas de pensamiento-*.

Es muy discutible que se hayan satisfecho tan loables propósitos. Las reformas parecen haber llegado siempre tarde-, al surgir y aplicarse a remolque de las demandas sociales, con un inevitable desfase entre aparición de necesidades, su detección, estudio, propuesta y promulgación de medidas. Y el fracaso en el área matemática -envés de la mencionada *función selectiva-* parece haber ido incluso en aumento, aunque el sistema educativo intentara paliarlo so capa de *promoción automática* o *adaptación curricular*, encubridoras de verdadero fracaso escolar.

2.2 ESFUERZOS DE SISTEMATIZACIÓN PSICOPEDAGÓGICA

Desde principios del siglo XX, puede decirse, se intenta la mejora de la enseñanza de la Matemática por dos vías fundamentales: la reflexión de los matemáticos y el trabajo de los psicólogos; grupos profesionales con objeto bien definido ya entonces. Los primeros, orientados eminentemente hacia la consideración de los contenidos, su coherencia, completitud y continuidad, con rasgos de valoración teórica. Los segundos, atendiendo al comportamiento del alumno en lo referente a la comprensión, asimilación y aplicabilidad de las Matemáticas, procurando servirse de métodos propios de una disciplina experimental.

Pero estas dos líneas de trabajo tardarían medio siglo en confluir en su objeto -en los resultados, tal vez no se haya logrado jamás-. Lo dificultaría la escasa formación psicopedagógica de los profesores de Matemáticas, la superficialidad de los conocimientos matemáticos de los psicólogos y, sobre todo, la falta de cooperación multidisciplinar.

La tarea llevada a cabo por los matemáticos en este tiempo podría resumirse, a grandes rasgos:

- Motivación.

La preocupación acerca de la preparación inadecuada en la escuela elemental, los fracasos en el seguimiento de cursos avanzados, la erosión potencial de las matemáticas como materia escolar y las amenazas al estatus de la nación. La curiosidad sobre cómo se crean las matemáticas. (KILPATRICK, RICO y SIERRA, 1991, 11).

- Método.

La introspección, observando sus propios procesos de razonamiento, y a intentar enseñar estos procesos a otros. Las observaciones de los trabajos y el pensamiento matemático de sus hijos o nietos han animado a algunos matemáticos a desarrollar análisis detallados de estos pensamientos o bien programas para su mejora. (ibidem.).

- Deficiencias. Ocasionalidad y discontinuidad, falta de objetivos claros, escaso contraste y poca difusión.

Por su parte, los psicólogos harían aún más difíciles las cosas.

Hay que atribuir a E. L. THORNDIKE, con su obra *Psicología de la Aritmética* (1922) el primer trabajo sistemático y de amplia difusión relativa a principios del aprendizaje matemático. Pero la Psicología *Aplicada* o *Educativa* se apartaría de la Psicología *Experimental* o *académica* en el transcurso de los años 30. (conf. RESNICK y FORD, 1981, 13), perdiendo consistencia y profundidad la primera, aplicabilidad y sentido realista la segunda. La preocupación por los contenidos matemáticos, en consecuencia, decayó.

Buena muestra de este último alejamiento -quizás en su origen- fue la temprana controversia entre los seguidores del *asociacionismo* o *Teoría de vínculos* de THORNDIKE, y los seguidores de *Teoría del aprendizaje significativo* de BROWNELL (1931). Los primeros, sostienen como forma esencial de aprendizaje la generación de *vínculos*: a la terna (suma, 3, 2) se le une el valor *5*, para integrar la cuaterna (suma, 3, 2, 5), expresada como 3+2=5. Mientras que para los segundos, sería preciso dotar de *significado* al valor *3* -concretado en objetos conocidos-, al valor *2* y a la operación de sumar, si se quiere asegurar la comprensión y asimilación del resultado *5*, recognoscible físicamente.

Este enfrentamiento parece no haber concluido. Antes bien, las posturas han buscado un mayor afianzamiento, dando lugar a profundizaciones y diversificaciones. Al mismo tiempo, se ha intentado la integración con otras corrientes como la *gestalt* (Köhler, 1925; Koffka, 1924), los inicios *cognitivistas* de BARTLETT (1932), y el *constructivismo* de PIAGET (1941/ 1952); que si bien no nacieron con interés por el aprendizaje de la Matemática, pronto se intentaría su aplicabilidad en este dominio.

Algunos de los autores más conocidos son difíciles de encuadrar, sea por la variabilidad de sus hipótesis, sea por la indefinición de su pensamiento o por su intención ecléctica. Nos proponemos, no obstante, presentar un panorama esquemático de las corrientes psicopedagógicas más importantes.

2.2.1 TEORÍAS DEL "A POSTERIORI COGNOSCITIVO".

Con una clara evolución histórica, que, aunque tornándola más compleja en su concepción, responde a una común raíz empirista: el conocimiento humano como causado exclusivamente, en principio, por la asociación de sensaciones o estímulos externos al sujeto.

A) Teoría de vínculos estímulo-respuesta (THORNDIKE, 1922). Con claro sabor a las hipótesis del *reflejo condicionado* de Paulov para la explicación de ciertos comportamientos animales.

B) Conductismo. (WATSON,). (SKINNER,). El aprendizaje se produce a partir de una secuencia determinada de estímulos-respuesta. El proceso de aprendizaje puede iniciarse por medio de un programa cuidadosamente elaborado de estímulos y respuestas, con refuerzo inmediato. Los resultados del proceso pueden objetivarse como cambios de conducta observables en el sujeto que aprende.

C) Teoría del aprendizaje acumulativo. Toda tarea u objetivo del currículum se puede descomponer en otros más sencillos, que pueden organizarse en *dependencias jerárquicas* (GAGNÉ, 1962, 1970), con una transferencia esperable de aprendizaje desde los niveles inferiores de la jerarquía a los superiores (FLAVELL, 1972).

El aprendizaje matemático se concibe como una acumulación y estructuración de elementos cada vez más complejos, que parte de conexiones o vínculos sencillos estímulo-respuesta, pasa por conceptos y reglas, y llega a la resolución de problemas de orden superior y al razonamiento abstracto. RESNICK, WANG y KAPLAN (1973) diseñaron un currículo de introducción a las matemáticas según estos principios.

D) Teoría de la información (NEWELL y SIMON, 1972). Redes semánticas y redes de procedimientos (BROWN y BURTON, 1978,; GREENO, 1978b.). Mapas conceptuales (NOVAK, 1988). El desarrollo cognitivo como *tratamiento de la información* (GROSS, 1985).

> El sistema humano de conocimiento debe considerarse como un sistema de procesamiento de la información. El sistema consta de un conjunto de memorias, receptores y efectores, y procesos para actuar sobre ellos. Las memorias contienen datos (información) y programas de procesos de información. El estado del sistema en un momento dado de tiempo se determina por los datos y programas contenidos en esas memorias, junto con los estímulos que se presentan a los receptores. (SIMON, 1978).

En esencia, el sistema de *memoria* está integrado por tres niveles:

. *Buffer sensorial* o *memoria icónica*. De gran capacidad, depositaria de información sensorial aferente -visual, háptica, auditiva, etc.-; volátil, con aproximadamente 1 segundo de persistencia. Su información, accesible gracias a la *memoria de trabajo*, puede *renovarse* tanto por la aplicación atencional de ésta como por la entrada de nuevos estímulos sensoriales.

. *Memoria de trabajo, inmediata* o *a corto plazo.* De capacidad muy limitada -5-9 elementos (MILLER, 1956)- y estabilidad prácticamente ilimitada; Es donde se realiza verdaderamente el proceso de pensar, es decir, donde se llevan a cabo las operaciones sobre la información procedente del *buffer sensorial* -su codificación, en primer lugar- y/o de la *memoria a largo plazo,* siendo paso obligado entre una y otra.

La práctica no aumenta su capacidad, pero puede mejorar su eficacia de procesamiento, e incluso aquélla, organizando la información por *bloques* (cfr.: RESNICK y FORD, 1981, 48). *Otra manera de aumentar la capacidad de la memoria de trabajo es desarrollar el automatismo de la respuesta* (Ibidem,, 49).

. *Memoria a largo plazo.* Verdadero almacén personal de información y productos de la *memoria de trabajo.* Capacidad prácticamente ilimitada. Los elementos de información almacenados -codificados- pueden deteriorarse por efecto del fenómeno del *olvido.* Sería un depósito inerte sin el concurso de la *memoria de trabajo,* a quien corresponde la alimentación y recuperación de elementos, así como la *decodificación* para su transformación en órdenes motoras. Por la estructuración interna de sus contenidos, y por la aparente capacidad de conferir relieve o *mayor significado* a ciertos valores, ha dado en ser llamada también *memoria semántica.*

> Parece claro que debemos concebir nuestras memorias (nuestros almacenes de conocimiento) como organizadas y estructuradas. Y, por lo tanto, aunque existe una serie de teorías o modelos diferentes de la memoria semántica, todos ellos describen el conocimiento humano como estructurado y organizado. Se parecen en este sentido al modelo gestáltico de la mente humana. Pero en otros aspectos, los modelos actuales de procesamiento de la información parecen más similares a las concepciones asociacionistas. (RESNICK y FORD, 1981, 235-236).

La observación sobre la repercusión en eficacia que tiene la generación de *automatismos* o *vínculos estímulo-respuesta* de carácter *fuerte,* tornándolos prácticamente reflejos, será decisiva como orientación pedagógica para la adquisición y desarrollo de destrezas aritméticas. Al liberar a la *memoria de trabajo* de operaciones de búsqueda en la *memoria semántica* de conocimientos básicos o de uso frecuente -tanto para valores concretos (hechos numéricos) como para procedimientos (algoritmos)-, la atención podrá volcarse en otros procesos de más alto nivel -resolución de problemas-.

La *teoría de la información,* al considerar el ordenador como modelo de la mente humana, está considerando también la memoria como clave del aprendizaje, puesto que el objetivo es el almacenamiento en el seno de la *memoria semántica* y su recuperación inmediata. Pero es innegable que el artificio -o su paradigma objetivo final- no agota la realidad del artífice, ni siquiera en el aspecto parcial objeto del diseño. De hecho, existe acuerdo en que la mente humana es una *registradora activa,* no pasiva, de las asociaciones externas, dando lugar en ciertos momentos a *estructuras de formas significativas,* posibilitando la deducción y el descubrimiento de nuevas relaciones o conceptos antes no presentes (cfr.: RESNICK y FORD, 1981, 237-238).

Por otra parte, no hay por qué oponer *memoria* a *reflexión* (en el sentido constructivista) (RICHARD, 1982). La red semántica se concibe como *plástica* y *dinámica,* cambiante por sí misma; conforme a la entrada de nuevas informaciones -que obligan a *acomodaciones de la red* según leyes de economía- y refuerzo y aún generación de nuevos vínculos por efecto de la activación.

No puede decirse que la escuela asociacionista -en ninguna de sus modalidades- se despreocupe completamente del *aprendizaje significativo*, sino que estiman éste y las situaciones que lo comportan (problemas) como elementos de refuerzo de los propios vínculos, aunque no esenciales para su aparición y consolidación (cfr.: RESNICK y FORD, 1981, 32). Los vínculos, aunque considerados como contenido de la mente, no son todos tratados de la misma manera: cada conexión supone una relación particular, y a su vez estas relaciones implican formas diferentes de utilizar la conexión. Los ítems de la memoria están conectados entre sí de forma múltiple y definible -como *nudos* de una red-, con calificación de las conexiones internas-, y, por tanto, significativa. En este sentido, se aproxima a las teorías ausubelianas.

Para este grupo de autores, el aprendizaje de la Aritmética tiene como objetivos esenciales la prontitud y seguridad -automatización- en la recuperación de *hechos numéricos*, aplicación de *estrategias* y *algoritmos* a situaciones concretas previstas. Pero su aparición e incorporación a la red semántica -asimilación- es fruto, ante todo, de la frecuencia, tanto de presentación como de uso. O, lo que es lo mismo: el aprendizaje es consecuencia de la práctica reiterada, tendente a generar y reforzar vínculos, bajo la forma de sobreestimulación, ejercicios o resolución de problemas.

2.2.2 TEORÍAS DEL "A PRIORI COGNOSCITIVO".

El conocimiento humano es causado eminentemente por la actividad del propio intelecto, capaz de organizar autónomamente la información que le llega del exterior o a partir de sus conocimientos anteriores. Estas *formas* o *estructuras* organizativas, constitutivas del entendimiento, se entienden -según los casos- como preorganizadas -innatas- o a desarrollar -por un proceso evolutivo-; se distinguen así dos líneas de pensamiento psicopedagógico:

A) Estructuralismo. Teoría de la forma o *gestalt* (KOFFKA, 1924). Teoría del *insight* (KÖHLER, 1925). Sistemas perceptivos integrados (RÉvÉsz, 1934, 1950; GIBSON, 1962, 1966). Teoría del *pensamiento productivo* y *estructuras matemáticas de fondo* (WERTHEIMER, 1940/1959). Procesamientos arriba-abajo y abajo-arriba (DUNCKER, 1945). Comprensión y transferencia de estructuras (KATONA, 1940/1967).

Tiene como *a priori* la tendencia humana a imponer estructuras al pensamiento y a la percepción (de buscar buenas *gestalts* o *insigts*). La mente trata de interpretar las sensaciones y experiencias como un conjunto organizado, y no como una colección de datos separados. Además, la percepción de la estructura subyacente como significativa, impele compulsivamente a proseguir hasta la explicitación de las partes o solución del problema.

Inicialmente, su objeto de estudio prioritario fue la percepción en sus modalidades (RÉVÉSZ, 1934, 1950), extendido posteriormente a la percepción como sistema integrado e integrador (GIBSON, 1962, 1966). Se interesa, no obstante, desde el primer momento por los problemas figura-fondo y de contorno, relaciones entre imágenes perceptivas y formación de conceptos, individuación de formas o estructuras (*gestalts*, que dará nombre a la escuela), etc. (KOFFKA, 1924, 1935).

Su aplicabilidad didáctica apenas si ha rozado los niveles elementales de enseñanza, aunque informara el fecundo pensamiento y las técnicas de trabajo para la resolución de problemas en los niveles medio y superior propugnadas por G. POLYA (1945, 1966). A partir de los años 80 parece resurgir, extendiendo su influjo hasta los procesos de enseñanza-aprendizaje de la Aritmética, concretado en el análisis semántico global de los PAEV (NESHER, 1980, 1982) o las técnicas de aproximación al proceso resolutorio (cfr.: PUIG y CERDÁN, 1988).

RESNICK y FORD entienden que orientan las recomendaciones metodológicas de las Conferencias de Cambridge y Woods Hole. (RESNICK y FORD, 1981, 178), y también puede rastrearse su influjo en las críticas de M. KLINE a la reforma provocada por la invasión de la llamada Matemática Moderna (KLINE, 1973), y los documentos del National Council of Mathematic's Teachers..

B) Escuelas constructivistas.- Nacidas como escuelas psicopedagógicas de carácter general, han intentado aplicarse con posterioridad a la explicación de los procesos de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Aunque con principios comunes, se diferencian corrientes, según el nivel del proceso en el que se haga hincapié.

a) Aprendizaje significativo (BROWNELL, 1928; AUSUBEL, 1968).

Proceso a través del cual se asimila un nuevo conocimiento relacionándolo con algún aspecto relevante y ya existente de la estructura cognitiva individual. Si no existieran aún en la mente conceptos básicos a los que pudiera ligarse, tendría que aprenderse de memoria y almacenarse de un modo arbitrario y desconectado. Si fuera asimilado dentro de la estructura cognitiva existente como una unidad ligada, y si tuviera lugar una apropiada modificación del conocimiento previo *-acomodación-*, el resultado sería un *aprendizaje significativo.*

Para practicar con éxito el pensamiento cuantitativo, hay que disponer de un fondo de significados, no de una gran colección de *respuestas automáticas...* Los ejercicios no sirven para desarrollar los significados. La repetición no lleva a la *comprensión* (BROWNELL, 1935, 10).

b) Psicología Genética.- Innatismo, interiorización de experiencias, reflexión sobre las propias acciones, desarrollo por etapas (PIAGET, 1953). Interpretación reflexiva (KELLY, 1955). Proyección y previsión (JAGGER, 1985).

"Comprender es inventar", es construir uno mismo. Aunque se puede ayudar a los niños a adquirir conceptos matemáticos por medio de materiales especiales y de preguntas de los profesores, sólo por su propio esfuerzo pueden comprender verdaderamente. Por lo tanto, el aprendizaje constructivo supone una actividad por parte del estudiante, una actividad de un tipo especial, inherente a la propia naturaleza del pensamiento; esencialmente, una *reflexión sobre las propias acciones* (*experiencias lógico-matemáticas*) (véase: PIAGET, 1970).

Dicha capacidad de reflexión, así como todas las *funciones superiores* y su desarrollo, se conciben en el ser humano en analogía al mundo biológico: surgentes de forma progresiva -evolutiva-, diferenciándose *etapas*: 1) etapa senso-motriz, 2) etapa preoperativa (preoperativa e intuitiva), 3) etapa de operaciones concretas (previa y posterior; inclusión en clases, reversibilidad, combinación y separación, ordenación y posición relativa), 4) etapa de operaciones formales (previa y posterior).

En un intento por huir del innatismo y del asociacionismo, PIAGET entiende que los conceptos lógicos se desarrollan por medio de las fuerzas biológicas y están limitados por conjuntos de techos impuestos por dichas fuerzas. La *comprensión* en sí misma tiene un tinte biológico y cuantitativo: fruto de la *equilibración*, desplegada en *asimilación* y *acomodación.* (Obsérvese el paralelismo con las funciones nutritivas y relacionales en los seres vivos unicelulares).

El objetivo explícito de PIAGET fue aplicar la lógica simbólica formal a la psicología como un método de análisis (PIAGET, 1953). Resultó innovador y condujo a nuevos paradigmas empíricos interesantes. La asombrosa fertilidad del paradigma de PIAGET se debe, al menos en parte, a la intención de producir problemas concretos que sólo pudieran resolverse correctamente aplicando principios lógicos. (...)

Pero PIAGET fue todavía más lejos. Supuso que si la conducta de un niño viola de manera consistente el concepto lógico que la instancia concreta ejemplifica, puede asumirse no sólo que el niño o la niña no usó el concepto, sino también que no posee el concepto. Esto no es una inferencia lógicamente justificada. (MILLAR, 1997, 40). En cualquier caso, conduce a un pesimismo pedagógico, al subordinar aprendizaje a desarrollo cognitivo, de difícil o imposible intervención.

Aunque se han desestimado teórica y experimentalmente la mayoría de las rígidas concepciones psicopedagógicas de PIAGET, han dejado una profunda huella en las orientaciones didácticas de la Aritmética; en especial, al coincidir históricamente en ser el primero en conferir importancia decisiva a las situaciones que implican participación psicomotriz del alumno. Provocaron un interés inusitado por las actividades y materiales manipulativos, considerados hoy como imprescindibles en Didáctica de la Matemática. Asimismo, ha quedado resaltado de forma definitiva el carácter inevitablemente personalizado del aprendizaje.

c) Teoría de las representaciones (BRUNER, GOODNOW y AUSTIN, 1956). BRUNER, OLVER y GREENFIELD, 1966).

Ciertos principios psicopedagógicos que se atribuyen a PIAGET, como son el aprendizaje constructivo y el empleo de representaciones concretas de los conceptos, no parece que se deduzcan exclusivamente de sus teorías. (cfr.: RESNICK y FORD, 1981, 225). La más completa y coherente exposición acerca de la naturaleza y papel instructivo de las *representaciones* se debe a BRUNER y sus colaboradores.

BRUNER entiende por *representación* el producto final del sistema de codificación y procesamiento de la experiencia anterior, en formato tal que le hace relevante y utilizable cuando se necesita. Se corresponderían con *regularidades* presentes en experiencias particulares, pero dependientes de la elaboración subjetiva. Admite tres planos o tipos de representación interior:

. Representación enactiva. Referente a acciones físicas o manipulativas; se corresponden con *esquemas piagetianos de acción.*

. Representación icónica. Referente a objetos.

. Representación simbólica. Referente a ideas abstractas.

A su vez, se podría contar con formas de representación física de los contenidos, que se aproximarían en sus relaciones a las engendradas por las representaciones interiores, y que se supone facilitarían la comprensión. Ya que, en la línea de una Epistemología genética, se admite apriorísticamente que el intelecto se desarrolla conforme a este mismo itinerario o gradación formal enactivo-icónico-simbólica.

Los planteamientos constructivistas han enriquecido y diversificado espectacularmente los medios y materiales de presentación didáctica de la Aritmética y de la Matemática en general, sembrándola de situaciones, materiales estructurados y fórmulas expresivas gráficas de muy variada índole. Véanse, por ejemplo, los trabajos de DIENES (1960), GATTEGNO (1964), PAPY (1969), etc., quiérase o no entroncados con esta concepción psicopedagógica. Pero su influjo apenas si se extiende a los niveles de Preescolar o comienzos de la Primaria. (CASTRO, RICO y CASTRO, 1996, 66).

En términos generales, las teorías del *a priori cognoscitivo* se han calificado de *estructuralismos*, en cuanto se refieren a alguna representación interior de la *estructura matemática*, contenido o situación problemática que refleja las relaciones de las partes con el todo. Sin embargo, para la *gestalt*, la *estructura* es algo que se percibe por una tendencia a reconocer conjuntos globales organizados en el entorno; mientras que la *estructura* de los constructivistas *es construida* activamente por la mente, resultando así que la comprensión obtenida es una creación humana, con las consiguientes variaciones y fluctuaciones temporales. En frase de PIAGET (1970): *la psicología de la Gestalt se ocupa de un sistema estructurado; la psicología piagetiana se ocupa de un sistema estructurante.*

Ambas conciben al que aprende como organizador de percepciones y de experiencias, incluso cuando se trata de objetos abstractos, originando una representación interior. Con prevalencia de los procesos de análisis para los gestaltistas, de síntesis para los constructivistas -tómese como una simplificación-; estos últimos, en particular, tienden a fundamentar sus construcciones en las acciones perceptivas previas o su simulación.

En cualquier caso, permiten suponer una acción completiva de la mente sobre la percepción, presente o recuperada, dotándola de significado. Es decir: admiten la posibilidad del *descubrimiento* por el sujeto, sea por vía abstractiva, inductiva, analógica o hipotética -*abducción*, para PEIRCE-. Pasando la heurística a jugar un papel didáctico de primer orden, en especial para los defensores de la *gestalt*..

Al mismo tiempo, el trabajo con situaciones y materiales convenientemente *estructurados* -denunciadores de la *estructura matemática*-, facilita el descubrimiento de principios básicos. Haciendo, además, posible la presentación parcial de estructuras matemáticas más amplias, en una concepción cíclica del curriculum, en la confianza de que el alumno las sistematizará y completará, tarde o temprano; a condición de que dicha presentación goce del conveniente *significado* o *forma* asequible. Posibilidad y asequibilidad prácticamente ilimitadas para los gestaltistas, pero confinadas al nivel de desarrollo madurativo y gradación representativa para los constructivistas; determinantes, en particular -e incluso determinables, para la escuela piagetiana-.

En este marco psicopedagógico puede emplazarse la corriente llamada del *Aprendizaje por descubrimiento*, con autores tales como SHULMAN (1970), BRUNER (1960A), DAVIS (1966), NUFFIELD (1967A), BIGGES (1972).Sus formulaciones didácticas son, en principio, vagas e inconexas, aunque abren horizontes de dinamismo en la actividad de aula.

En la misma línea, Z. DIENES pretendé formalizar la aplicación didáctica de las escuelas constructivistas y representacionistas, junto con investigaciones propias. Preocupado especialmente por la adquisición de los conceptos fundamentales, diseña materiales diversos, en un intento de *materializar las estructuras matemáticas* y acercarlas al campo de la experiencia concreta; como son la iniciación a la Teoría de Conjuntos (*bloques lógicos*) y la Aritmética (*bloques multibase, máquinas de calcular*), que han alcanzado gran popularidad en las escuelas de todo el mundo. Su pensamiento, tendente a combinar los principios psicológicos y matemáticos en la enseñanza basada en la estructura, se sintetiza en cuatro puntos básicos: principio dinámico, principio constructivo, de variabilidad matemática y de variabilidad perceptiva.

Aunque ha sido objeto de numerosas críticas, y puede decirse que ha pasado el momento de culto a las estructuras matemáticas formales, es innegable que este interés por la presentación asequible de contenidos -aun los más elevados y formales- y la confianza en la capacidad investigadora del niño han marcado profundamente las inquietudes de psicopedagogos y educadores a partir de BRUNER y DIENES.

Para las escuelas del *a priori* cognoscitivo, y en lo relativo a la Aritmética, importa ante todo la comprensión y descubrimiento por el alumno de los *hechos numéricos*, el desarrollo de *estrategias personales de cálculo*, la construcción y descubrimiento por el alumno de los *algoritmos*. La memorización y automatización -fluidez- es fruto, ante todo, de la comprensión -significatividad-. La práctica pasa a un segundo plano, sólo admisible como aplicación significativa.

Las teorías del *a priori* y del *a posteriori* cognoscitivo han evolucionado notablemente desde sus primeras formulaciones, tendiendo a converger hacia una concepción de las capacidades cognoscitivas como una *matriz* en la que se genera una *estructura* o *red* de conocimientos, coincidiendo en su funcionamiento y aplicabilidades, pero divergiendo notablemente en su génesis. Básicamente, siguen diferenciándose las dos corrientes psicopedagógicas, hijas del empirismo y del racionalismo filosóficos, nietas del inmanentismo como opción intelectual.

2.2.3 TEORÍAS "DIALÉCTICAS"

Pretenden superar el enfrentamiento entre los dos grupos precedentes. En particular, afirman la interdependencia entre aprendizaje o situación estimulativa -como factor objetivo- y desarrollo cognitivo -como factor subjetivo-. El progreso educacional se concibe como fruto dialéctico o síntesis de ambos; inevitable, por otra parte, aunque susceptible de orientación intencional.

A) Dialéctica desarrollo-aprendizaje (VYGOTSKY, 1930, 1934). El lenguaje como *herramienta de interacción social.* Teoría de las *zonas de influencia,* programables cristalizadamente *-físicamente-*. Teoría de la evolución genética.

En una crítica precoz (1930), VYGOTSKY reduce el enfrentamiento de las teorías objetivistas (asociacionismo, conductismo) e innatistas (estructuralismo, constructivismo) arriba esbozadas a un esquema de alternativa entre aprendizaje y desarrollo. Al analizar la génesis y despliegue de las *funciones superiores* frente a los comportamientos orgánicos, concluye que ambas presuponen formas de aislamiento del sujeto. Pero como consecuencia diferenciadora -de suma importancia educativa-, para la primera se identifican aprendizaje y desarrollo -coincidiendo, pues, en el tiempo-; mientras que para la segunda los ciclos evolutivos de desarrollo anteceden necesariamente a las posibilidades de aprendizaje; admitiéndose concepciones intermedias. Pero, en cualquier caso, los cambios serían de carácter cuantitativo, no cualitativo (véase: RIVIÈRE, 1994, 57-58).

> Nuestro concepto del desarrollo implica un rechazo de la opinión generalmente sostenida de que el desarrollo cognoscitivo resulta de la acumulación gradual de cambios independientes. Por el contrario, nosotros creemos que el desarrollo del niño es un proceso dialéctico complejo, caracterizado por la periodicidad, la irregularidad en el desarrollo de las distintas funciones, la metamorfosis o transformación cualitativa de una forma a otra, la interrelación de factores externos e internos y los procesos adaptativos que superan y vencen los obstáculos con los que se cruza el pequeño. Muchos estudiosos de la psicología infantil, enfrascados en la noción del cambio evolutivo, ignoran estos puntos decisivos, esas transformaciones revolucionarias y espasmódicas tan frecuentes en la historia del desarrollo del niño. (VYGOTSKY, 1930, 116).

Desde la perspectiva de VYGOTSKY, el aprendizaje sería una condición necesaria para el desarrollo cualitativo desde las funciones reflejas más elementales a los procesos superiores. En el caso de las funciones superiores, el aprendizaje (...) sería condición previa al proceso de desarrollo. La razón es evidente: el desarrollo de las funciones superiores exigiría la apropiación e internalización de instrumentos y signos en un contexto de interacción. Y esto es aprendizaje. Sólo que, como decía también VYGOTSKY: El aprendizaje humano presupone una naturaleza social específica y un proceso mediante el cual los niños acceden a la vida intelectual de aquellos que les rodean (Ibidem. 136) (...).

Algunos de los puntos básicos sobre los que pivota su pensamiento, serían:

- *El lenguaje como herramienta esencial de aprendizaje-desarrollo personal.* Considerando como esencial el problema de la naturaleza, génesis y estructura de los signos, y la orientación semiótica del pensamiento -según el análisis de SCHEDROVITSKY (1982); cit. por RIVIÈRE, 1994, 17-.

En concordancia con lo que decenios más tarde serían concepciones de las teorías de la representación, concibe que las funciones superiores implican la combinación de herramientas y signos en la actividad psicológica. Siendo los signos, a su vez, como condensación de actividades, aunque concebidos como medios para regular la conducta de otros sujetos.

Y, conforme a un concepto general de lenguaje, entiende que La transformación de lo instrumental en significativo está mediada y permitida por la relación con los demás. (ibidem.). Que equivale al valor del signo *como convenio social*: La cultura proporciona las herramientas simbólicas necesarias para la construcción de la conciencia y las funciones superiores (fundamentalmente los símbolos lingüísticos). (ibidem.) (Sin duda, en este punto, identifica facultad con producto.).

Ahora bien, el aprendizaje sólo se produce cuando los utensilios, signos, símbolos y pautas del compañero de interacción son incorporables por el niño en función de su grado de desarrollo previo. Lo que obliga a una verdadera y eficaz *gestión didáctica de los sistemas simbólicos.* (BRISSIAUD, 1993, 225).

- *Papel decisivo de la interacción social.* El proceso de *desarrollo* de las conductas superiores consiste precisamente en la incorporación e internalización de pautas y herramientas de relación con los demás. Sólo es posible porque el niño vive en grupos y estructuras sociales, y porque puede aprender de los otros, a través de su relación con ellos (...) La humanización se realiza en contextos interactivos en los cuales las personas que rodean al niño no son objetos pasivos o simples jueces de su desarrollo, sino compañeros activos que guían, planifican, regulan, comienzan, terminan, etc., las conductas del niño. Son agentes del desarrollo (RIVIÉRE, 1994, 59-60).

De forma más contundente, en coherencia con su confesión materialista, marxista y evolucionista:

> El desarrollo no consiste esencialmente en la progresiva socialización de un individuo primordialmente "*robinsoniano*" y "*autista*", sino en *la individualización de un organismo básicamente social desde el principio.* Podríamos decir que el individuo, como organización consciente de procesos y funciones internas con signos (que posibilitan la actividad voluntaria y el control autorregulatorio) es un destilado de la relación social. Funciones que tienen su origen en la historia social, no en el despliegue de las potencialidades del espíritu o de las conexiones cerebrales. (véase: RIVIÉRE, 1994, 44).

- Noción de *Zona de desarrollo proximal* (nota 1). Entendida como:

> La distancia entre el nivel actual de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz. (VYGOTSKY, 1930, 133).[1]

[1] Entendemos preferible el calificativo *proximal*, como *próximo* o *inmediato*, en lugar de *potencial* (término que ordinariamente se emplea en las traducciones al español), para subrayar la diferencia con el *nivel de desarrollo potencial*; ya que, según la idea de VYGOTSKY, aquélla es quien separa los niveles *actual* y *potencial* del desarrollo infantil. El Diccionario de la Lengua Española admite el término como propio en anatomía; aquí se emplea en sentido analógico, como "próximo", a la par que "orientado".

Sintetiza la concepción del desarrollo como apropiación e internalización de instrumentos proporcionados por agentes culturales de interacción. Define las funciones que aún no han madurado, pero están en proceso de hacerlo. A diferencia del nivel de desarrollo actual, que permite una caracterización retrospectiva del desarrollo, posibilita una definición prospectiva.

Es decisiva para analizar el papel de la imitación y el juego en el desarrollo del niño. Podemos decir que aquélla permite la transformación del desarrollo potencial en desarrollo actual, mientras que el juego crea una zona de desarrollo próximo en el niño (VYGOTSKY, 1934, 116), que se sitúa normalmente por encima de su edad y posibilidades de acción actual, e incorpora como potenciales los instrumentos, signos y pautas de conducta de su cultura. (RIVIÉRE, 1994, 60-61)

En consecuencia: *el buen aprendizaje* es sólo aquel que precede al desarrollo" (VYGOTSKY, 1934, 138), si no quiere caerse en una enseñanza *conservadora*, limitada por el nivel de desarrollo actual -contra el constructivismo-, o verse engañados por los tests que evaluarían únicamente los objetivos alcanzables en el *nivel de desarrollo actual* -contra el objetivismo-. Pero será imprescindible que la tarea objeto de aprendizaje se sitúe en la *zona de desarrollo proximal*, como enriquecedora -por *encima* del *nivel de desarrollo actual-* y accesible -por *debajo* del *nivel de desarrollo potencial-*.

Las teorías vygotskianas parecen abrir nuevos horizontes a los estudios en Psicopedagogía de la Matemática. Lamentablemente, su temprana desaparición -a los 34 años- y el práctico silencio a que fueron sometidas sus hipótesis en la Unión Soviética, apenas han permitido un desarrollo en profundidad ni aplicación a soluciones concretas, ni someterlas a una crítica y contraste adecuados. Será preciso, por otra parte, liberarlas del radicalismo ideológico que, aun profesado como conjunto de principios directores, son innecesarios para justificar sus concepciones en Psicología.

B) Teorías de la *anticipación pedagógica.- Conflicto cognitivo* y *organizaciones del entorno* (HUNT, 1961, 1969; LOVELL, 1971).

Mientras que VYGOTSKY propone una superación del dualismo empirista-innatista en su raíz, por vía de crítica eminentemente teórica, este grupo de autores buscan una vía alternativa, conciliadora de ambas, con base en la observación de la práctica didáctica. Es más una propuesta metodológica que un sistema doctrinal.

El conflicto cognitivo es lo que suele acabar impulsando a los individuos a adoptar formas de pensamiento nuevas y más poderosas. Algunas formas de enseñanza (definidas como organizaciones del entorno de forma que éste plantee exigencias nuevas, pero posibles) pueden fomentar la reorganización estructural, y contribuir así tanto al aprendizaje de nueva información determinada como al desarrollo cognitivo general. (véase: RESNICK y FORD, 1981, 225).

No sugiero en modo alguno que el niño siempre tenga que estar ~dispuesto~ para una idea determinada antes de que la presente el profesor. (...) Cuando un niño está casi preparado para una idea la situación de aprendizaje que le plantea el profesor bien puede "precipitar" la comprensión de dicha idea por parte del niño. (LOVELL, 1971, 17).

Como puede observarse, reaparece la *teoría de la acomodación o adaptación* de PIAGET, pero concediendo un mayor protagonismo -decisivo- a la acción del entorno o situación de aprendizaje; es decir: reconociendo a los estímulos externos un carácter próximo al de *concausa del aprendizaje*, pero condicionándolo al *estado mental*.

Y, concretado al proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática para los primeros niveles, las situaciones conflictivas -porque son desconocidas o porque chocan con las concepciones previas del niño suelen provocar el interés de los alumnos por su novedad y por el desafío que representa su resolución. Con frecuencia resulta un salto cualitativo en su conocimiento. Muy pocas veces será imprescindible una enseñanza escalonada -una división en pasos cortos y secuenciales de las ideas a elaborar. (GRUPO 0, 1997, 2, 13). Que supone una contravención radical de las metodologías derivadas tanto del asociacionismo como del constructivismo, y aun del estructuralismo.

Resumamos en un cuadro esquemático este conjunto de teorías o corrientes.

CUADRO 2.2.- Teorías en Psicopedagogía de la Matemática.

- Teorías del "A posteriori cognoscitivo"
  - - Teoría de vínculos estímulo-respuesta.
  - - Conductismo.
  - - Teoría del aprendizaje acumulativo.
    - - Dependencias jerárquicas.
    - - transferencia del aprendizaje.
  - - Teoría de la información.
    - - Redes semánticas y redes de procedimientos.
    - - Mapas conceptuales.
    - - El desarrollo cognitivo como "tratamiento de la información
- Teorías del "a priori cognoscitivo"
  - - Estructuralismo.
    - - Teoría del "insight".
    - - Teoría de la forma o "gestalt".
    - - Sistemas perceptivos integrados.
    - - Teoría del "pensamiento productivo" y "estructuras matemáticas de fondo".
    - - Procesamientos arriba-abajo y abajo-arriba.
    - - Comprensión y transferencia de estructuras.
- Teorías del "a priori cognoscitivo"
  - - Escuelas constructivistas.
    - - Aprendizaje significativo.
    - - Psicología Genética.
      - - Innatismo, interiorización de experiencias, reflexión sobre las propias acciones, desarrollo por etapas.
      - - Interpretación reflexiva.
      - - Proyección y previsión.
    - - Teoría de las representaciones.
- Teorías dialécticas.
  - - Dialéctica desarrollo-aprendizaje. El lenguaje como "herramienta de interacción social". Teoría de las "zonas de influencia", "programables" cristalizadamente -"físicamente"-. Teoría de la evolución genética.
  - - Teorías de la "anticipación pedagógica". "Conflicto cognitivo" y "organizaciones del entorno.

En la actualidad se tiende a compatibilizar los legados gestaltistas, piagetianos y de Teoría de la Información, en un intento de superación pragmática. A favor de los primeros cuenta su vocación unificante, al conceder a la mente la capacidad o tendencia general de la percepción y el pensamiento a organizarse en agregados funcionales que dominan los elementos objetivos de la experiencia; aunque se cuestiona el determinismo de sus interrelaciones. La concepción logicista de Piaget se haya prácticamente descartada, por el vicio de origen en tomar como modelo de funcionamiento mental la propia lógica matemática, limitativa y condicionante; aunque se admite que el desarrollo de dichas estructuras puede depender de las interacciones activas del alumno con el entorno. Algo semejante ocurre con la Teoría de la Información, ya que toma como modelo funcional una creación de la propia mente humana (el ordenador).

Las perspectivas del trabajo futuro en Psicopedagogía de la Matemática deberá tener en cuenta inexcusablemente:

- La reconocida igualdad de la naturaleza humana y su capacidad para el trabajo con *lo abstracto*.

- La diversidad individual. Innegable en lo perceptivo, quedan por determinar sus consecuencias en los procesos de aprendizaje y desarrollo. Parece apuntarse un modelo de carácter vectorial, que perfilaría una *capacidad matemática general*; pensamos, no obstante, que estaría relativizada por los métodos o situaciones de enseñanza-aprendizaje.

- La naturaleza, características e influencia de las situaciones de enseñanza-aprendizaje. Tomando buena nota de las inherentes al contexto socio-familiar.

- La motivación como factor dinamizador -y aun desencadenante- de los procesos de aprendizaje.

2.3 LUGARES COMUNES EN PSICOPEDAGOGÍA DE LA MATEMÁTICA

El último cuarto de siglo ha visto incorporarse al debate de la educación matemática no pocas cuestiones de carácter práctico, tanto en el orden de la Matemática a aprender o enseñar como en el de los procesos psicopedagógicos que lo hacen posible.

En primer lugar, los contenidos matemáticos a tratar en el curriculum, varían notablemente. Parece mitigarse la pasión por las estructuras formales y la corrección lógico-deductiva y axiomática que, de la mano de la llamada Matemática Moderna, plagó los programas de coherencia y completitud interna.

A cambio, se acrecienta el interés por la Matemática viva, de lo cotidiano, de la calle, de los medios de comunicación. Más que perfección lógico-demostrativa, nos conformamos con pruebas intuitivas, bocetos deductivos, comprobaciones con visos de generalidad. Se hurtan teoremas y capítulos enteros, monumentos sin duda del ingenio humano, para sacrificarlos en las aras de la utilidad práctica y de la premura de tiempo; huyendo también de la dificultad, madre del fracaso. Se evitan los programas únicos, abriendo la puerta a la variedad de curricula, en función de análisis de necesidades y posibilidades de los alumnos concretos.

Tal actitud es tildada por unos de frivolidad irresponsable; por otros, de acierto pedagógico y social. La sanción histórica de los resultados formativos a largo plazo deberá esperar no menos de una generación.

De los pasados lustros de formalismo y esfuerzo por *renovar* contenidos en los niveles elementales ha quedado, no obstante, una doble herencia perdurable: el concepto de *estructura matemática* y el aprecio por la *expresión gráfico-geométrica o bidimensional*. Paralelamente, podemos entresacar otros dos principios epistemológicos: los *esquemas cognoscitivos* y las *representaciones interiores*; comunes a la práctica totalidad de las escuelas psicopedagógicas, aunque éstas difieran en su génesis y desarrollo -incluso en su concepto-.

2.3.1 ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS Y ESQUEMAS COGNOSCITIVOS

Perteneciente a la Matemática de siempre, el siglo XIX fue poniendo de relieve la dimensión u organización estructural de los conceptos matemáticos, desde GALOIS a CANTOR y KLEIN; la primera mitad del siglo XX, la extendió hasta los últimos rincones de la Matemática; la segunda mitad, la introdujo en la educación a todos los niveles y la proyectó a prácticamente todas las ramas del saber, cual nueva fiebre pitagórica.

El enfoque estructural es totalitario:

> Por su verdadera naturaleza, cada concepto individual está incorporado en una estructura de otros conceptos. Cada uno de ellos (excepto los conceptos primarios) se deduce de otros conceptos, y contribuye a la formación de otros; por tanto, es parte de una jerarquía. Pero en cada nivel son posibles clasificaciones alternativas, que conducen a jerarquías diferentes. (SKEMP, 1980, 41).

Por *estructura matemática* entendemos *la forma en que los conceptos matemáticos se relacionan*; esto es: la explicitación de inclusiones o dependencias lógicas, de una parte, y, en un sentido más general todavía, la forma en que los contenidos matemáticos se organizan según unas ciertas semejanzas o concomitancias de objetos y comportamientos (en ocasiones, de forma manifiesta -formalizable- y sorprendente, como puso de relieve la Teoría de Categorías, en la que los *objetos* y *morfismos* eran *sustituibles*, en virtud de *functores* -verdaderos *prismas* u *observatorios*-).

(Evidentemente, nos estamos refiriendo a algo distinto de las *estructuras algebraicas*, *topológicas*, *relaciones de equivalencia* y *orden*, etc., que vendrían a ser casos particulares.)

Este concepto de *estructura matemática* no es, en principio, *creativo*: no supone la generación o descubrimiento directo de nuevos objetos matemáticos; simplemente *ordena* los ya conocidos, proporcionando una panorámica, parcial o total. Sin embargo, puede que ponga al descubierto "huecos", que induzcan al estudio o búsqueda tendente a completarlos; surgiendo entonces los elementos que *perfeccionen* el conjunto -la *estructura*-. Puede también revelar semejanzas entre comportamientos de familias o clases -entre *estructuras* análogas-, moviendo entonces a profundizar en dichas regularidades o semejanzas, o poner en evidencia irregularidades o disemejanzas. En ambos casos, se desarrolla una actividad de análisis-síntesis.

Dos conceptos matemáticos pueden hallarse relacionados o no depender el primero del segundo -implicarse-, o viceversa; ser equivalentes y aun análogos. Relación que se aplica inmediatamente a los objetos que los sustentan.

Un ejemplo típico es el de las *estructuras algebraicas*, de las que son un caso particular las aritméticas. Definida una *ley de composición* u *operación*, pueden estudiarse ciertas *propiedades* (interna, conmutativa, asociativa, cancelativa, existencia de elemento neutro, existencia de simétricos, etc.); es decir: si tal conjunto dotado de tal operación está relacionado positivamente con los conceptos portadores de tales propiedades -las satisfacen-, o negativamente -no las satisfacen-.

El conjunto parece quedar *vertebrado*, al ligarse sus elementos en *ternas definidoras de la operación*. Es el caso, para la adición en el conjunto N de los números naturales de 3+4=7, integrantes de la terna (3, 4, 7) -o (7, 3, 4)-, que, gracias a cumplir la propiedad conmutativa, implica la existencia de la terna (4, 3, 7) -o (7, 4, 3), respectivamente-. O el valor de neutro del *0*, expresable en que todas las ternas de la forma (x, 0, y) sólo pueden ser (x, 0, x), y que las (0, x, y) son (0, x,x) -véase: (y, x, 0) como (x, x, 0), y (y, 0, x) como (x, 0, x)-.

El cumplimiento de ciertas propiedades ha llevado a los matemáticos, incluso, a buscar denominaciones específicas para los pares integrados por un conjunto y una operación que observan dichos comportamientos (grupoide, semigrupo, grupo, grupo conmutativo, etc.), conocidos genéricamente como *estructuras algebraicas de una operación*. A su vez, el cumplimiento de alguna o algunas de las mencionadas propiedades -u otras-, determina una relación entre estructuras; por ejemplo: todo semigrupo es grupoide, o todo grupo es semigrupo cancelativo, etc. O, en caso de no cumplirse una propiedad de forma general entre los elementos del conjunto, puede considerarse el subconjunto de aquéllos que sí la cumplen (núcleo, elementos regulares, etc.); dando lugar a *configuraciones internas* o *subestructuras*.

Es decir: el estudio puede orientarse tanto en sentido *ascendente* -relación entre *estructuras algebraicas*-, como *descendente* -reducido al ámbito de la *estructura* original-. Lo que parece exigir actividades preponderantes de síntesis o de análisis, precedidas y seguidas de aplicaciones hipotético-deductivas.

Es innegable -si no quiere caerse en un mecanicismo extremo- e irracional -en el sentido de puro *reflejo condicionado* a lo PAULOV-, que para comprender las estructuras de las matemáticas, hay que comprender en consecuencia tanto las interrelaciones entre los conceptos y las operaciones como las reglas por las que se pueden manipular y reorganizar para descubrir nuevos patrones y propiedades. (RESNICK y FORD, 1981, 132).

Desde finales de los años 50, los especialistas en educación matemática están conformes, de una u otra forma, en que el enfoque estructural es clave para la comprensión de las bases conceptuales del aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas. (Ibidem, 126). Pero esta afirmación, lugar común de la psicopedagogía de la Matemática está íntimamente ligada a las concepciones epistemológicas: éstas tienen como concepto básico el de *esquema*, correlato psíquico del de *estructura*.

Por *esquema* se entienden no sólo los relacionados con estructuras conceptuales de las Matemáticas, sino también con las estructuras que coordinan la actividad sensomotora. Unos y otros varían desde lo más simple -relación parte-todo, tomar una ficha con dos dedos, etc.- hasta los más complejos -idea de *espacio vectorial*, algoritmo de la división por varias cifras; beber un vaso de agua, conducir una bicicleta, etc.-.

> Estos conceptos tienen sus orígenes en la experiencia sensorial del mundo exterior y en la actividad motora hacia el mismo. Pero pronto se hacen separables de sus orígenes, y su posterior desarrollo tiene lugar por interacción con otros y entre sí. (SKEMP, 1980, 43).

Concepción de carácter dinámico, cambiante, por cuanto supone una variación, efecto de experiencias externas o interacciones interiores. Sin embargo, también se concibe como un equilibrio que es una adaptación recíproca de la forma y la materia: el esquema varía de período a período, pero en cada uno de ellos permanece relativamente fijo y las imágenes se deben adaptar a él. (BERGSON: 1947, 182).

En la concepción dinámica del *esquema*, se rastrean las huellas de las teorías del *a posteriori* cognoscitivo y representacionistas; en la segunda, las del *a priori* cognoscitivo, en general, llámese *esquema genético*, *proyección reflexiva*, *aprendizaje significativo* o el *insight* de los gestálticos. En cualquier caso, aparecen las dos funciones esenciales reconocidas a los *esquemas*: Integrar conocimiento existente e instrumento mental para la adquisición de nuevo conocimiento. (SKEMP, 1980, 43)

Algunos autores, subrayando una dimensión temporal en el esquema, llegarán a definirlo como una sucesión de acciones que tienen una organización y que son susceptibles de repetirse en situaciones semejantes. (DELVAL, 1983). Pero esto equivale a identificar *esquema* y *algoritmo.*

Algoritmo.- *Un procedimiento para realizar un problema. Por lo común, a base de repetir pasos enormemente aburridos, a menos que un ordenador los realice por usted* (véase: GADNER, 1984).

Algoritmo.- Regla (o conjunto finito de reglas) que, para todo problema de una clase dada con anterioridad, permite en un número finito de pasos conducir a una solución, si existe una, o, dado el caso, mostrar que no existe (véase, p. ej.: HIEBERT y LEFEVRE, 1986).

O, de forma más general:

Algoritmo.- *Serie finita de reglas a aplicar en un determinado orden a un número finito de datos, para llegar con certeza (es decir, sin indeterminación ni ambigüedades) en un número finito de etapas a cierto resultado, y esto independientemente de los datos* (véase: BOUVIER y GEORGE, 1984).

La noción de *algoritmo* se concibe hoy con mucha mayor extensión y riqueza que tradicionalmente (simple *algoritmo de Cálculo Aritmético*). Se le concede doble naturaleza: como procedimiento y como objeto de comprensión y construcción racional.

La vida cotidiana exige algoritmos que se aplican sin comprender realmente su fundamento, como secuencia lineal de acciones o reglas elementales -que se suponen conocidas- que deben ser ejecutadas (manejo del teléfono, electrodomésticos, automóvil, ordenador, etc.); la comprensión es entonces de carácter *global*: la estructuración de sus elementos, en cuanto ordenados a un fin, con independencia de la repercusión. Sería un conocimiento de carácter *instrumental* (SKEMP, 1980).

La comprensión/construcción supone tomar conciencia del por qué de cada elemento, sus relaciones y participación esencial en el fin. La comprensión es de carácter *relacional* (SKEMP, 1980), y aun *esencial* (SAUMELLS, 1964). *Comprender un algoritmo no es necesario para su utilización pero sí es imprescindible para su re-construcción* (MAZA, 1991, 107).

Así pues, un algoritmo puede reducirse a un *esquema* en el que:

- sus notas o elementos tienen carácter de *acciones*,

- la relación conceptual y/o dependencia lógica define un preorden temporal,

- existe una finalidad operativa, o acción directora: *viene a resolver un problema* (MAZA, 1991, 106)

(HIEBERT y LEFEVRE (1986) distinguen, a este propósito entre *conocimiento procedimental* (algoritmos) y *conocimiento conceptual*. Para C. MAZA (1991), la diferencia sustancial estriba entre *transformar elementos de nuestra vida* y *organizarlos*.)

La noción de *esquema* implica *partes o notas organizadas* y *capacidad de comparación o aplicación a situaciones singulares* (se evita el calificativo *concreto*, ya que el otro término de la comparación/aplicación puede ser una situación sensible o inteligible -otro esquema, incluso-). La diferencia con los *conceptos compuestos* estribaría en su contenido de *organización* de las partes o notas; lo que lleva inmediatamente al carácter espacio-temporal -extensivo, en suma-, adecuado a los contenidos matemáticos (cuantitativos, por esencia, en sentido general: *partes extra partes*).

Algunas Epistemologías, niegan o dudan de la existencia de conceptos simples; excepción hecha de ciertas nociones elementales, en número muy reducido, indefinibles para unos, postulables para otros. Los conceptos, pues, serían en su práctica totalidad de carácter *compuesto*, recognoscibles entonces como *esquemas*.

Para el aprendizaje de la Matemática resulta importante disponer de una concepción epistemológica que dé respuesta a cuestiones tales como cuál es el origen de los *esquemas*, cómo surgen, cómo se desarrollan en la mente del alumno, qué factores los favorecen y dificultan. Pero esto es inseparable de la concepción psicológica general: las propias concepciones de escuela sobre el conocimiento y pensamiento humano, y sus posibles cambios a lo largo de la vida; cuestiones de índole filosófica que nos alejan en exceso de nuestro propósito.

La estrecha relación entre *estructuras matemáticas* y *esquemas de conocimiento* plantea un amplio horizonte de trabajo, de carácter curricular y didáctica:

- Reducir los contenidos al mínimo de estructuras. Debiendo ser éstas de máxima simplicidad y aplicabilidad en situaciones singulares. Teniendo en cuenta que aunque los primeros principios del aprendizaje de las matemáticas son objetivos, el comunicador de las ideas matemáticas y no el receptor es quien más necesita conocerlos y aunque son bastante simples en sí mismos, sus aplicaciones matemáticas implican muchísima reflexión. (SKEMP, 1980, 36).

- Reducir a algoritmos los procedimientos y técnicas, que muestren la ordenación temporal de acciones simples y evidentes -asequibles a la capacidad presumible en el alumno-. Lo que no implicaría necesariamente la expresión formal y pormenorizada, sino, ante todo, su aceptación experiencial.

Entendiendo por *algoritmos* -como ya se ha indicado- no sólo los tradicionales para el Cálculo Aritmético, sino los explicitadores de técnicas habituales a aplicar en situaciones frecuentes (técnicas de cálculo mental, aproximación y estimación, resolución de problemas en general, planteamiento y resolución de ecuaciones, etc.).

SKEMP (1980), considera una serie de puntos para explotar ventajosamente el *aprendizaje por esquemas*:

- Los esquemas que se construyan en el curso del primer aprendizaje de una materia serán cruciales para la eficacia del aprendizaje ulterior.

- Se prepara un verdadero instrumento mental para aplicarlo en tareas futuras.

- Al aplicar adecuadamente un esquema, se consolida su primer contenido.

Y como inconvenientes, que deberían guiar la prudencia didáctica:

- Un esquema, incluso más que un concepto, reduce en gran manera la fatiga cognoscitiva, sobre todo en tareas de aplicación o aprendizaje de esquemas relacionados. Sin embargo, si se considera una tarea aislada, el aprendizaje esquemático puede necesitar más tiempo.

- Un esquema posee un efecto altamente selectivo sobre nuestra experiencia. Todo aquello que no se ajusta en él fácilmente no se aprende en absoluto, y lo que se aprende de manera temporal pronto es olvidado. Para el aprendizaje futuro, un esquema puede ser tan poderoso como obstaculizador -si llega a ser inadecuado- (véase: SKEMP, 1980, 48).

Los esquemas admiten un desarrollo en complejidad creciente, tanto extensiva o *vegetativa* (número de elementos y relaciones) como intensiva o *vertical* (significación de los elementos y aplicabilidad a pluralidad de situaciones u objetos). De ahí la importancia de los *primeros esquemas*, en cuanto susceptibles de *crecimiento natural*, sencillo y multidireccional.

2.3.2 LENGUAJE GRÁFICO Y REPRESENTACIONES INTERIORES

En la investigación matemática -al decir de notables matemáticos; véase: POINCARÉ (1948), por ejemplo- parece destacar una fase de *generación de combinaciones* entre los conceptos involucrados, próximos -susceptibles de comparación lógica- o análogos. Actividad que suele iniciarse de forma consciente y controlada -sistemática, incluso-, pero que no raras veces se prolonga sin pautas fijas -al azar- y en forma inconsciente o semiconsciente -actividad subliminal-, mantenida en ocasiones en períodos de distensión mental. A la *fibra matemática* o *intuición* correspondería reconocer una *buena combinación*, sea la buscada u otra que llama nuestra *atención*.

Esto nos muestra la actividad investigadora cual juego con piezas de rompecabezas; cada una de las cuales tiene un significado propio, más o menos evidente y abarcable. Pero sin saber *a priori* si sobran o faltan piezas: bien es cierto que pueden desecharse unas, momentánea o definitivamente, o reclamarse otras del acervo de conocimientos propios.

¿Cuál es la naturaleza de esas *piezas*, para hacerlas comparables, componibles de forma que pueda juzgarse sobre la coherencia y bondad de su conjunción o separación? ¿Cómo se lleva a cabo tal juicio de *coherencia* o *bondad*?

> Observar es algo más que percibir: es establecer relaciones entre aspectos graduados de un mismo objeto, buscar correspondencias entre intensidades diferentes; es constatar sucesiones, relaciones espaciales y temporales; es hacer comparaciones, anotar diferencias y semejanzas en bloque o en detalle (análisis); es establecer un puente entre el mundo y el pensamiento. (Decroly; cit. por FERNÁNDEZ, LLOPIS y DE PABLO, 1991, 122).

> El análisis racional consiste siempre en definir rigurosamente las diferentes clases de transformaciones y los invariantes cualitativos, cuantitativos y relacionales que están asociados a esas clases. Toda la historia de las ciencias está jalonada de descubrimientos de nuevas transformaciones y nuevos invariantes. Puede decirse que la noción de invariante es el núcleo más sólido que se pueda encontrar en el análisis de la noción de concepto. (VERGNAUD, 1991, 257).

El juicio, sin duda, es de carácter lógico; pero sin restringir el horizonte a la *Lógica Deductiva.* Cabe, en un primer momento de la comparación, el recurso a argumentos de plausibilidad (POLYA, 1978), de *Lógica Inductiva* y *Abductiva* o *Hipotética.* Precisamente en nuestros días se profundiza en aspectos de una *Lógica Triádica*, redescubiertos los trabajos de C. S. PEIRCE (véase: PEIRCE, 1988).

Los conceptos, en su abstracción, son *inmanejables*: formas puras, inextensas, inespaciales, no asibles. Exigen de una expresión vicaria, merced a *signos* o formas lingüísticas; o de las imágenes reales que los originaron, en caso de responder a referente físico. Si se negara el carácter abstracto -forma pura- de los conceptos, reduciéndolos a patrones, notas comunes o esquemas de conocimiento, las consecuencias serían aún más evidentes, ya que ellos mismos actuarían como *signos* sujeto de combinación, tal vez mediando análisis.

Así consideradas las cosas, los juicios lógicos comportan un juicio de sustrato semántico: reconocer un *sentido* o *significado* a la conjunción o separación de dos términos lingüísticos, cada uno de los cuales goza de un grado inicial de significación, que será enriquecido por el nuevo significado conferido/descubierto. Mecanismo idéntico al de comprensión de un texto, problemático o descriptivo (en una concepción de *Semántica Pragmática*). (Entiéndase que *término lingüístico* se toma en su más amplia acepción, de *representación interior.* subjetiva y potencial del *signo lingüístico* exteriorizable y socialmente aceptado, con independencia del ámbito.)

El lenguaje no agota los conceptos -las ideas-; como tampoco éstos -el conocimiento, en general- no agotan la realidad. Pero el pensamiento precisa del lenguaje para su discurso; la forma es irrelevante -imágenes gestuales o físicas, visualización fonética, de grafismos usuales, simbólico-matemáticos, formas gráfico-geométricas-, o si esta apoyatura es consciente, semiconsciente o inadvertida. La expresión aristotélica para designar el lenguaje como *logos semantikon* -pensamiento/verbo significativo- comporta una fuerte carga lógica y psicológica, a la par que una referencia inexcusable a la realidad -valor de significación-; de hecho, llega a afirmar que: *sin lenguaje, no hay pensamiento.*

El conocimiento, dominio y aplicación de las propiedades matemáticas -adquisición, asimilación y aplicación de los correspondientes conceptos- no puede decirse que dependa del empleo de la terminología técnica. Quizás su exceso haya sido uno de los cánceres que acompañó la incorporación de la Matemática de Estructuras y Teoría de Conjuntos a los curricula reformados de los años 60, responsable no pequeño de su fracaso formal.

En un cierto nivel, la terminología específica puede que simplifique la comunicación, o facilite incluso la representabilidad gráfica de las relaciones entre objetos o conceptos. Pero la comprensión puede mantenerse en un plano de representaciones interiores, no convencionales, de uso personal, eficaz y suficiente: un a modo de *lenguaje interior*. Expresión de "puertas adentro", que se serviría de imágenes de la grafía de los términos del habla común, símbolos geométricos o diagramáticos, imágenes icónicas peculiares, indefinidas y aun indefinibles, etc.

Sin embargo, el conocimiento alcanza su cumbre y se enriquece gracias a la comunicación interpersonal. Es preciso para ello disponer de un código o lenguaje, fruto de convenios sociales: aceptar un lenguaje; en última instancia, modificándolo. Mediante él, se pone a nuestra disposición buena parte del legado cultural y científico que caracteriza al grupo del que formamos parte, poniéndonos en condiciones de aprovecharnos de sus logros y contribuir a su crecimiento.

Por *lenguaje* debe entenderse no sólo el *habla común* o *lengua natural*, hablada o escrita, sino todo *sistema de signos susceptible de transmitir ideas* (COSERIU, 1971). Se da cabida, así, al lenguaje simbólico-matemático, gestual, gráfico-geométrico, de comportamientos físicos propio de una actividad o ámbito profesional (trabajo con un material específico, códigos varios, lenguaje de banderas, etc.), que tan útiles resultarán en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

Por su naturaleza formal (código convenido) y material (transmisor o portador de ideas), el lenguaje exige del concurso de la inteligencia. Es la propia inteligencia como facultad superior la que aprende, usa y crea el lenguaje, aunque los signos físicos que le sirven de vehículo sean objeto de la percepción sensorial externa.

El lenguaje es una ayuda inestimable en la educación:

> Sin el lenguaje, cada individuo ha de formar sus propios conceptos directamente desde el entorno. Sin lenguaje, estos conceptos primarios no pueden reunirse para formar conceptos de orden más elevado. Mediante el lenguaje, sin embargo, el primer proceso puede acelerarse y el segundo se hace posible. Además, los conceptos del pasado, trabajosamente abstraídos y acumulados lentamente por generaciones sucesivas, se aprovechan para ayudar a cada nuevo individuo a formar su propio sistema conceptual. (SKEMP, 1980, 32-33).

Aunque preferimos mitigar la radicalidad de SKEMP en lo referente a la *posibilidad*: si bien *conceptos* y *términos lingüísticos* son intercambiables en el orden lógico -*valor de sustitución*-, los primeros preceden a los segundos lógica y temporalmente.

Pero estos *signos*, lingüísticos -convenciones sociales- o representaciones subjetivas, ya están dotados de una cierta *espacialidad*, reflejo de su potencial plasmación exterior -física-, independiente del sujeto, y que permitirá ordenaciones varias -también espaciales-, y la aparición de configuraciones en cierto modo *visibles* en el espacio interior. Configuraciones que, a su vez, pueden plasmarse físicamente, como expresiones lingüísticas, si es el caso.

El lenguaje usual y el lenguaje simbólico se constriñen a la linealidad. Estricta, para la expresión oral, se refleja en la forma escrita, dada su vocación de reproducir aquélla fielmente; y en la simbólica, por su inicial carácter de apócope de las anteriores.

Las representaciones de objetos físicos, requieren la figuración o expresión manipulativa o gestual. Menos convencional; menos practicable, también.

Las configuraciones correspondientes a ordenaciones espaciales de signos admiten una expresión simplificada, esquemática, en forma de representaciones gráfico-geométricas. Bidimensionales, con mayor grado de libertad -que es tanto como decir potencialidad- que las primeras, aunque menos explícitas -más convencionales- que las segundas.

Cabría pensar en representaciones también gráfico-geométricas que multiplicaran las posibilidades expresivas: planos superpuestos, cada uno de ellos dotado de distinto valor, evocador de determinado aspecto. En alguna medida, se intenta en ciertos *mapas conceptuales*, donde se representan diferentes tipos de objetos y relaciones mediante formas o trazados diferentes. En este sentido, el color cobra una importancia destacada.

Es evidente que a mayor grado de libertad espacial, mayor posibilidad combinatoria. Además, la bidimensionalidad permite el juego del tamaño las formas geométricas, el trazo o textura, juego de fondos, resaltes, etc.

Surge así el a nuestro juicio segundo gran legado de la reciente época en la presentación de la Matemática: la generación y florecimiento de lenguajes que se adecuaran a tales *representaciones interiores*, y que pusieran de relieve más claramente las relaciones entre conceptos o entidades. Un esfuerzo por exteriorizar ese *lenguaje interior* de imágenes, convirtiéndolo en verdadero instrumento de comunicación interpersonal.

En concreto, cristaliza lentamente un lenguaje idóneo y -en principio- peculiar: el de las expresiones gráfico-geométricas. Ampliación del lenguaje geométrico y analítico y las propuestas de EULER para proposiciones lógicas, es fruto innegable del esfuerzo por hacer asequibles *-visibles-* los conceptos y relaciones propias de los enfoques conjuntistas. Hoy día es ya un instrumento de primer orden para la presentación de cualquier situación, matemática o no.

Se profundiza en formas de expresión ya antiguas (representaciones geométricas y cartesianas, cuadros sinópticos, tablas), en los que al valor simbólico o esquemático se añade por la disposición el valor de *índice* -Peirce-; se integran nuevos símbolos y relaciones espaciales (diagramas de VENN y KARNAUGH) y espacio-temporales (diagramas de flechas, mapas conceptuales, etc.). Lo que empieza siendo un convenio local, válido sólo en el contexto de una obra o aula, se extiende y acepta por comunidades cada vez más amplias, hasta cobrar carácter universal (en esto, no se diferencia de la forma en que nace y se implanta el *habla* común).

El lenguaje gráfico de nuestros días aspira a algo más que la representación esquemática de la realidad física visible o detectable; cual era el caso de lo estático -geometría de las formas o cuerpos- o de lo dinámico -geometría de trayectorias-. Sobrepasa la expresión plástica de relaciones cuantitativas numéricas propias de la Geometría Analítica, expresadas por las representaciones cartesianas. Pretende plasmar relaciones abstractas, de lo cuantitativo no numérico y general, de *partes extra partes*, de *partes con el todo* -diagramas de VENN-, de implicaciones, relaciones lógicas y funcionales -diagramas de flechas-, etc.

Nacen, eso sí, con vocación de totalidad, de amplio espectro de aplicación, y buscando emplear un mínimo de elementos morfológicos y reglas sintácticas. Aunque su juventud de algo más de un siglo de existencia ponga al descubierto sus limitaciones e inmadurez.

Al igual que las estructuras, las expresiones gráfico-geométricas carecen de valor matemático en sí mismas, pero juegan un importante papel en la comunicación y comprensibilidad a la par que facilitan el trabajo de investigación, cual instrumento de pseudodiálogo reflexivo. Con independencia de su *promulgación* o difusión, ¿quién puede asegurar que no sirvieron individualmente a estudiosos e investigadores de la Matemática de tiempos pasados, plasmadas físicamente o confinadas al ámbito de las imágenes?

En el orden psicológico, la representación interior de sus expresiones suponen algo más que un escalón en el itinerario enactivo-icónico-simbólico de BRUNER (1956). Por su bajo nivel convencional, se aproximan a las *representaciones icónicas,* pero gozando de la sistematicidad *gramatical* y elevada capacidad combinatoria de las *representaciones simbólicas* de doble grado de libertad.

Su potencialidad psicopedagógica es todavía más intensa. Algunos autores llegan a identificar *esquema* y *representación*: DAVIS (1984) entiende el *esquema* como *una estructura para representar información identificable explícitamente*; bien que, en forma reductiva, considera tal *información identificable* como el conjunto de *propiedades o rasgos comunes a situaciones diversas.*

Incluso para el conocimiento sensible, y de forma radical, SKEMP confiere importancia capital a las representaciones esquemáticas, al afirmar que reconocemos objetos concretos gracias a que abstraemos ciertas propiedades invariantes que persisten en la memoria más tiempo que el recuerdo de una particular presentación del objeto (SKEMP, 1980, 24); dado que no hay dos ocasiones en que los datos sensoriales (visibles) sean, en verdad, exactamente iguales, debido a variaciones de distancia, iluminación, perspectiva, etc. (ibidem.).

La elaboración de las invariantes es el instrumento decisivo en la construcción de la representación son las invariantes las que aseguran a la representación su eficacia; permitiéndole cumplir su doble función: reflejar la realidad y prestarse a un cálculo relacional. Son los invariantes los que dan a la representación su carácter operatorio. (VERGNAUD, 1991, 258)

A propósito del *almacenamiento* del conocimiento, KOSSLYN (1980, 1981) postuló que los sistemas de memoria incluyen un almacén de memoria visual, que funcionaría como en un espacio de coordenadas, realizando conversiones analógicas -no digitalizadas-; es decir: más como juego con iconos que con símbolos de un sistema lineal con referencias a *marcas de direcciones.*

S.MILLAR (1997), (271-273) ofrece un recorrido histórico de la controversia entre *pensamiento con imágenes* y *pensamiento sin imágenes (o abstracto puro)*; desde TITCHENER (1909) CONRAD (1964-1971), REESE (1970), ROWHER (1970), PAIVIO (1971) y MILLAR (1972C, 1975B,C), adscritos a la primera corriente, hasta los partidarios de la segunda, que arranca de la escuela de WURZBURG, de principios de siglo, y se prolonga hasta CLARKE y otros (1973), KINTSCH (1977), PHYLYSHYN (1973, 1981). La cuestión es tanto más atrayente para nosotros, cuanto que MILLAR se interesa en especial por la codificación de conceptos espaciales, la percepción háptica y formas de conocimiento en los ciegos.

Ahora bien, estas *representaciones* o *imágenes* no son de carácter o modalidad estrictamente *visual.* El problema de la *transferencia modal* ha provocado más de medio siglo de discusiones y experiencias contradictorias; desde los partidarios de la diferenciación viso-táctil, hasta los que la admiten sin reservas su condición coincidente (RÉVÉSZ, 1950; GIBSON, J.J., 1962, 1966; ABRAVANEL, 1970, 1971A, 1971B, 1972A, 1972B, 1973A, 1973B). Para PIAGET (1947), podrían concebirse como *proyecciones en el espacio interior* de *experiencias lógico-matemáticas* adquiridas por no importa qué vía sensorial, con matices diferenciadores en el modo y grado de desarrollo.

Para MILLAR (1997) *imagen mental no es lo mismo que percepción visual ni háptica o táctil:* Incluso las imágenes *eidéticas* muy vívidas, que dicen tener algunas personas, dependen de la memoria, y no se deben simplemente a la persistencia de la estimulación perceptiva rea.l (Ibíd., 275). Llega incluso a formular la noción de *conocimiento tácito,* como clase más general del expresado en y por imágenes mentales, y no necesariamente abierto a la inspección consciente -que no excedería del nivel de dichas imágenes-. Superándose el problema de la *transferencia modal* mediante las *imágenes mentales* -los *constructos,* en algunas concepciones psicosensoriales-, independientes ya de la modalidad (visual, háptica, auditiva, etc.), tal como habían propuesto RÉVÉSZ (1950) y GIBSON (1962, 1966).

Con G. VERGNAUD, defendemos que *las actividades simbólicas no son únicamente reflejos del pensamiento, sino también ayudas al pensamiento* (cit. por BRISSIAUD, 1993, 219); entendiendo por *símbolos* no sólo los *matemáticos,* sino los de carácter lingüístico en general, en cuanto que éstos *están en lugar de los objetos o las ideas que representan,* sea mediando convenio social previo -lenguaje, como tal-, sea por decisión personal.

> Nada es mas fecundo, en el plano pedagógico, que los ejercicios de tránsito de un material a otro o de una representación a otra. Pasar de un material a número escrito correspondiente, en forma recíproca, pasar de un dibujo de conjuntos a un material A, de un material A a un material B, de un material B al número escrito, y del número escrito a un dibujo de conjuntos, es un medio seguro para hacer entender sin dificultad a los niños el sistema de numeración. (VERGNAUD, 1991, 141-142).

La recomendación didáctica es inmediata: cultivar todas aquellas destrezas que tienen que ver con manipular, ver e imaginar, y realizar operaciones simbólicas (véase: PUIG y CERDÁN, 1988, 187); que es tanto como decir: *juegos en el mundo de las representaciones,* o de tenor expresivo y *traducción* entre los diferentes lenguajes.

2.4 LA REALIDAD DEL AULA

El último cuarto de siglo puede decirse que ha supuesto un duro golpe para las escuelas psicopedagógicas.

No es que los profesionales de la educación matemática se hayan dejado vencer por el escepticismo, fruto merecido del enfrentamiento de casi un siglo. Hemos intentado mostrar cómo todo parece converger hacia una solución de síntesis o compromiso, atenuadora de las iniciales posturas radicales; aunque los presupuestos filosóficos sean irreconciliables. Afortunadamente -y no es contrasentido- la desdichada escasa formación psicopedagógica de los educadores no se ha visto alcanzada por las polémicas, de otra parte, con poca resonancia académica.

Más bien parecería que son los propios psicólogos quienes han perdido un tanto la esperanza de contar con garantías para llegar a plasmar en un sistema nítido y definitivo el modo de actuar de la mente humana en los procesos de aprendizaje de la Matemática, y su relación con la edad o las experiencias educativas.

Puede, también, que hayan sido los propios cambios de enfoque en los contenidos matemáticos introducidos recientemente quienes hayan acabado por desorientar a los psicopedagogos en el objeto de su tarea: ¿producto, o proceso?; ¿estructura formal, o solución práctica?; ¿rigor, o intuición?; ¿conocimientos, o técnicas e iniciativa personal?...

En última instancia, la decisión sobre cuestiones relacionadas con el aprendizaje de la Matemática -y de la Aritmética, en particular- parecen quedar emplazadas a su lugar natural: el aula, ante un grupo concreto de alumnos, con cada alumno, y cooperando un profesor determinado. Es decir: se persiguen las dificultades y soluciones vinculadas a la situación, no las concreciones deducidas de *planteamientos doctrinales*.

- Desde la controvertida teoría de PIAGET sobre las *etapas de desarrollo psicológico en relación con los contenidos matemáticos*. Hoy, prácticamente abandonada, debido a los numerosos contraexperimentos que condicionan aquellas hipótesis a las situaciones lingüístico-culturales de los sujetos ...

- Hasta los excesos uniformistas:

> La epistemología de los fundamentos del hacer matemático es la misma para cualquier edad en el curso del aprendizaje, como son los mismos los principios que la constituyen en la mente del alumno y los parámetros que definen la estructura de sus ejes directores. Lo que cambia, sintonizando con la capacidad intelectual, son las situaciones, los modelos y los instrumentos. La matemática o se hace, o no se hace; independientemente de la edad o el contenido expresado. (FERNÁNDEZ BRAVO, 1995, 11).

- O el optimismo psicológico:

> Lo que podemos asumir, sin ninguna investigación especial, es que los niños tienen el potencial necesario para comprender los conceptos lógicos, lo mismo que poseen el potencial para el procesamiento simbólico. (MILLAR, 1997, 46).

- O pedagógico, como cuando DIENES (1960) afirmaba que cualquier contenido puede ser enseñado, con tal de disponer de situaciones y materiales adecuados al nivel intelectual del alumno.

Las cuestiones de enseñanza-aprendizaje de la Aritmética parecen orientarse por caminos de pragmatismo relativista, convencidos de que no hay ninguna corriente psicológica que explique todos los aspectos del aprendizaje ni escuela pedagógica que resuelva la mayoría de problemas de la enseñanza, especialmente en el caso de las matemáticas. (ALSINA y OTROS, 1996, 86).

Se ocupa de ello la Didáctica, concebida hoy más como *arte* de solventar situaciones, que como *instrumento universal* -según la definición de COMMENIUS-. Aunque, eso sí, con vocación de ciencia: buscando criterios generalizables y fundamentaciones coherentes que iluminen en forma comprensiva y sistemática todos los fenómenos. Su historia no se remonta más allá de un cuarto de siglo, en la que apenas han aparecido un manojo de teorías balbucientes.

Para G. BROUSSEAU, cuatro son los factores que intervienen decisivamente en una *situación didáctica*: el alumno, el maestro, el contenido matemático y la escuela -como condicionante de la actividad-; la Didáctica seguida vendría definida de las interacciones entre ellos.

> La noción de complejidad no es la misma para el matemático que para el maestro, ya que el primero busca los axiomas más generales y de mayor alcance, mientras que el segundo busca las nociones y las relaciones más simples para el niño, las que, por otro lado, no son comprendidas de entrada con todas sus propiedades. (VERGNAUD, 1991, 10).

Habría que precisar aún más: para los niños que el maestro tiene delante, *para cada niño*.

Es decir: las dificultades no provienen tan sólo de la Matemática en sí, sino que se encuentran, sobre todo, en el camino que cada alumno recorre en su personal proceso de aprendizaje. Esta complejidad alcanza su culmen cuando se llega a la individualización plena. Cada alumno es un mundo de características psicosomáticas, de cambiantes contenidos intramentales, de circunstancias socio-familiares; con una historia cultural y de experiencias de aprendizaje, institucional y ambiental, provocado y espontáneo, que hace imposible una determinación *a priori*.

Dado el objetivo último de este trabajo, se presta atención preferente a los estados perceptivos, curriculares o afectivos del alumno que, de ser persistentes, originan *necesidades educativas especiales*.

A nuestro entender, una actuación didáctica debe tomar en consideración aspectos varios:

CUADRO 2.4.A- Características de los alumnos (de cada alumno) que condicionan la "actuación didáctica" en una situación de enseñanza-aprendizaje.

- Características de los alumnos (de cada alumno)
  - Estado de capacidades perceptivas.
    - Nivel fisiológico
    - Desarrollo de destrezas perceptivas
      - Exploratorias
      - Discriminativas
      - Constructivas
      - Memoria perceptiva
  - Nivel de desarrollo en destrezas manipulativas y de expresión corporal
    - Reproductoras (imitativas)
    - Constructivas
      - Dirigidas
      - Creativas o libres
  - Formación anterior
    - Derivada del curriculum (lo que ha aprendido)
    - Derivada del contexto socio-familiar
    - Influjo de los medios de comunicación
  - Nivel de desarrollo en destrezas comunicativas (lingüísticas)
    - Interpretativas (comprensivas)
    - Expresivas
    - Lengua natural hablada
    - Lengua natural escrita
    - Lenguaje simbólico-matemático
    - Lenguaje gráfico-geométrico (y sus variantes)
    - Lenguaje de comportamientos físicos (y sus variantes)

Características de los alumnos (de cada alumno)	- Familiaridad con las situaciones de enseñanza-aprendizaje previstas	- Respecto de la metodología del profesor	
		- Respecto del material específico	
		- Respecto de la organización de la actividad	-Trabajo individual
			- Trabajo cooperativo (en "pequeño grupo")
			- Trabajo en "grupo coloquial"
			- Trabajo en "gran grupo"
	- Caso de "alumno con necesidades educativas especiales"	-Alumno con dificultades de orden perceptivo y/o psicomotor	- Naturaleza de la/s dificultad/es
			- Dominio del instrumental específico
			- Dominio de las técnicas específicas de trabajo
		-Alumno con carencias curriculares	- Naturaleza de la/s carencia/s
			-Fórmulas de "remediación" que se están siguiendo
			- Previsión de Actividades
			- tiempos de aplicación
			- Fórmulas de evaluación
		- Alumno con trastornos afectivos o de personalidad	- Naturaleza de los trastornos
			- Hipótesis causales
			- Efectos observados
			- Hipótesis/constataciones estímulo/respuesta

Conviene hacer algunas observaciones que justifiquen esta propuesta de análisis situacional.

1ª) Sin referencia a la edad ni al *nivel madurativo* del alumno.-

La edad no supone una determinación en el grado de desarrollo psicofísico; ya que, en buena medida, éste se halla vinculado a factores ligados al grupo étnico, calidad de vida -alimentación, higiene, atención médica, estimulación precoz y actividades en las que ha participado, etc.- y a la forma de vida y ambiente socio-familiar -integración en actividades domésticas, laborales o de otro tipo, nivel cultural familiar, integración social y cualificación de estas relaciones, etc.-.

Por otra parte, los instrumentos que de ordinario se emplean para evaluar el nivel madurativo con frecuencia son dependientes de formas de lenguaje que pueden falsear los resultados. Baste, como muestra, las críticas a los experimentos de PIAGET por parte de algunos grupos ingleses y norteamericanos.

No faltan autores que sostengan la independencia entre *edad* o *nivel madurativo* y *contenidos matemáticos*, estableciendo -eso sí- relaciones con el curriculum general anterior. Debiera, mejor, hablarse de *edad mental respecto de los contenidos curriculares previstos inicialmente* y *con relación a la media del grupo de alumnos*, que deberá aproximarse merced a observación de comportamientos.

2ª) Estado perceptivo y/o psicomotor del alumno.-

La actividad de aula exige, con frecuencia, un empleo meticuloso de tales capacidades. Esta explotación exhaustiva de recursos naturales se hace tanto más exigente en la Matemática, por el carácter habitualmente conciso y preciso de la información manejada; siendo por ello más frecuentes los errores provenientes de un déficit sensorial o sensorio-motor, aunque éste pase inadvertido a la simple observación. Es de temer que buena parte de los fracasos escolares se deban a la existencia de tales déficits no descubiertos o no asistidos adecuadamente.

En el caso particular de la deficiencia visual, podría calificarse de *espectacular* el crecimiento del número de casos detectados en España en los últimos 20 años. La población estudiantil afectada por un déficit visual con resto aprovechable se ha incrementado en cerca de un 1000%. La preocupación de padres, profesores y oftalmólogos, de una parte, y la atención prestada por la Organización Nacional de Ciegos Españoles (O.N.C.E.), por otra, han permitido el diagnóstico eficaz de muchas deficiencias visuales antes menospreciadas o inclasificables, y que quedaban enmascaradas bajo la forma de *falta de atención, inconstancia para el estudio* o, simplemente, *dificultad para aprender Matemáticas*. Algunas observaciones al respecto pueden encontrarse en ROSICH, NÚÑEZ y FERNÁNDEZ DEL CAMPO (1996).

3ª) Formación anterior.-

Como algo muy distinto de *curriculum anterior*: se trata de partir de *lo que el alumno ha aprendido*, no de *lo que se le ha enseñado* o de *lo que se supone debe saber* por su nivel de escolaridad.

Teniendo presente el fenómeno del *olvido* y los bruscos cambios aptitudinales y actitudinales que se producen a lo largo del período escolar, conviene desconfiar de las valoraciones de niveles precedentes. Servirán de *referencia inicial y puntual*, meramente indicativa, salvo que contengan análisis de orientaciones continuadas.

La determinación de dicho nivel formativo es objeto de la *evaluación inicial*. Pero extendida tanto a Contenidos conceptuales y procedimentales como a técnicas específicas, nivel interpretativo y expresivo en los diferentes lenguajes, técnicas de trabajo personal y en grupos de diferentes dimensiones, etc.; debiendo servirse para ello no sólo de instrumentos estereotipados -pruebas, tests, cuestionarios, etc.-, sino sobre todo de la observación sistemática durante un período apreciable de tiempo (2-3 semanas).

4ª) Caso de *alumno con necesidades educativas especiales*.-

> Nos encontramos ante un nuevo término que, lejos de ser un eufemismo más para denominar a los alumnos y alumnas hasta ahora llamados deficientes, minusválidos, discapacitados.., implica un cambio conceptual importante a la hora de plantear la educación que estos y otros alumnos necesitan (...).
>
> Los grandes fines de la educación (proporcionar toda la independencia posible, aumentar el conocimiento del mundo que les -rodea, participar activamente en la sociedad..) deben ser los mismos para todos los alumnos, aunque el grado en que cada alumno o alumna alcance esos grandes fines sea distinto, así como el tipo de ayuda que necesite para alcanzarlos. (MEC-CDC, 1991, 19).

Como puede observarse, se ha seguido el criterio tradicional de considerar tres grandes grupos, no excluyentes:

a) Alumno con dificultades de orden perceptivo y/o psicomotor.- Que, a su vez, cabría subdividir según discapacidades, fueran de orden fisiológico o funcional, con o sin ayudas, que hubiera seguido o no ejercicios de adiestramiento.

b) Alumno con carencias curriculares.- Debiendo determinarse si éstas se hallan ligadas o no a otras dificultades, y si se han intentado fórmulas de remediación y resultados obtenidos.

c) Alumno con trastornos afectivos o de personalidad.- Con indicación de hipotéticas causas, manifestaciones específicas (en el aula de Matemáticas) y consecuencias observadas. Asimismo, reacciones estímulo-respuesta más frecuentes.

No se considera el caso de *alumnos afectados por deficiencia psíquica*. En primer lugar, por la dificultad en diferenciarlo todavía hoy de otros grupos de déficits; en el aula se detectan necesidades o dificultades: remontarse de los efectos a las causas en este dominio es tarea altamente especializada, ardua y no siempre bien resuelta. También, por su manifestación inmediata como carencia curricular, al menos en Matemáticas. Ya se mencionaba al final del Apartado 2.3.1 que apenas si se han iniciado los estudios sobre capacidades general y específicas para el aprendizaje eficaz de la Matemática.

Sin embargo, hay que cambiar el punto de mira y traducir el déficit en necesidades educativas: qué necesita aprender, cómo, en que momento, qué se debe evaluar, cómo, en qué momento, y qué recursos van a ser necesarios para el desarrollo de su proceso de enseñanza-aprendizaje (Ibíd., 20). Es decir: saber qué contenidos escolares son adecuados y prioritarios para ese alumnado, cómo enfrentarse a la tarea de enseñárselos, qué materiales son los más adecuados o qué tipo de apoyo precisa (ibidem.). Orientaciones que pueden incluso cristalizar como uno de los aspectos de *Matemática para la Diferencia*, dentro de la "*Atención a la Diversidad*".

El diagnóstico y tratamiento didáctico de tales carencias requieren, de ordinario, el concurso de profesionales especializados: servicios psicopedagógicos, de orientación, profesores especialistas, etc.; integrados en el Centro o pertenecientes a Equipos de Apoyo. Pero sin olvidar que, mientras el contacto del alumno con estos Servicios es ocasional y extraordinario, las dificultades, su manifestación y oportunidad de intervención son propias del aula, en número, intensidad y consecuencias prácticas.

Así pues, no resulta fácil concretar el término de *alumno con necesidades educativas especiales* respecto de la Matemática. Las *necesidades* o *dificultades* pueden venir *definidas* o *medidas* desde tres perspectivas:

- Dificultades internas; o del propio alumno, respecto de *criterios de normalidad*, no siempre unánimes ni siquiera objetivables en forma absoluta.

- Estado o nivel relativo de capacidades, conocimientos y destrezas respecto del grupo en que se halle encuadrado el alumno. Sus dificultades -objetivas- pueden agudizarse o mitigarse -incluso desvanecerse-, diversificando el grado de ayuda (adaptaciones *de acceso* o *no significativas*) o el nivel de exigencia (adaptaciones *significativas*).

- Características de la actividad didáctico-metodológica. De tenor eminentemente local -tema de estudio, Actividad, tarea, etc.-, depende esencialmente de la actuación del profesor. Como en el caso anterior, se agravan o palian las dificultades/necesidades de un alumno (o de todo el grupo de alumnos), según las situaciones que se diseñen, material a emplear, profundidad, ritmo, etc.

CUADRO 2.4.B- Características del profesor que condicionan la "actuación didáctica" en una situación de enseñanza-aprendizaje.

Características del profesor responsable.	- Formación matemática.	- Conocimiento de los fundamentos del contenido a tratar
		- Conocimiento de la proyección del contenido a tratar
		- Conocimientos acerca de estructuras relacionadas, etc.
	-Información didáctica.	-Relativa a métodos,
		- Relativa a material,
		- Relativa a situaciones de enseñanza-aprendizaje
		- Relativa a estrategias particulares, etc.
	- Información psicopedagógica.	- Relativa a las características generales presumibles en los alumnos
		-Relativa a las necesidades de los alumnos respecto de los Contenidos y Objetivos matemáticos a tratar.
	- Experiencia docente.	- Relativa al nivel curricular
		- Relativa al tipo general de alumnos,
		- Relativa a los objetivos y contenidos,
		- Relativa a los materiales disponibles,
		-Relativa a las dificultades y facilitadores más frecuentes, etc.

Características del profesor responsable.	- En caso de atender en el aula a algún "alumno con necesidades educativas especiales"	-Alumno con dificultades de orden perceptivo y/o psicomotor	-Información/formación.	- Conocimiento del instrumental.
				- Técnicas específicas de trabajo.
				- Destrezas a desarrollar.
				- Aspectos de la atención coyuntural diferenciada, etc
			- Confección y aplicación de "adaptaciones curriculares"	- De acceso.
				- No significativas.
				- Significativas.
			-Concepción y adaptación de materiales específicos.	- Para situaciones de enseñanza aprendizaje.
				- De actividades.
				- De evaluación.
			-Experiencia docente con alumnos afectados por ese déficit.	
		- Alumno con carencias curriculares	- Detección de carencias	
			- Conocimiento y diseño de fórmulas de "remediación"	
		- Alumno con trastornos afectivos o de personalidad	- Conocimiento de:	- manifestaciones
				- hipótesis estímulo/respuesta.
				- tratamientos habituales y coyunturales, etc. (de tipo general)
			- Experiencia docente con alumnos afectados por trastornos análogos	

CUADRO 2.4.C- Objetivos curriculares previstos que condicionan "actuación didáctica" en una situación de enseñanza-aprendizaje.

- Objetivos curriculares previstos.
  - - Conceptos o conocimientos
    - - Adquisición de nuevos conceptos o conocimientos
    - - Engarce esquemático con otros anteriores
    - -Fijación/consolidación de conceptos
  - - Procedimientos, destrezas y técnicas.
    - - Adquisición (generación de algoritmos
    - - Fijación/consolidación de técnicas o procedimientos.
      - - Anteriores.
      - - De nueva adquisición
  - - Desarrollo de capacidades.
    - -Comunicativas (lingüísticas)
      - - interpretativas (comprensivas)
      - - expresivas
      - - Lengua natural hablada
      - - Lengua natural escrita
      - - Lenguaje simbólico-matemático
      - - Lenguaje gráfico-geométrico (y sus variantes)
      - - Lenguaje de comportamientos físicos (y sus variantes)
    - - de sistematización,
    - - iniciativa personal,
    - - metodológicas
    - - técnicas de trabajo
    - - para el trabajo cooperativo, etc.
  - Caso de "alumno con necesidades educativas especiales"
    - - Alumno con dificultades de orden perceptivo y/o psicomotor
      - -Dominio del instrumental específico y técnicas de trabajo
      - - Objetivos curriculares específicos
    - - Alumno con carencias curriculares (determinación de Objetivos de remediación)
    - - Alumno con trastornos afectivos o de personalidad (determinación de Objetivos específicos)

5ª) Objetivos curriculares (caso general).-

Es lugar común que la diferencia esencial entre el área matemática y las restantes áreas curriculares estriba en un mayor esfuerzo de comprensión por parte de aquélla, a la par que una menor exigencia cuantitativa y cualitativa de memoria -tanto a corto como a largo plazo-: comprender, más que recordar; y comprender para aplicar.

Pero tal vez se margine así el objetivo fundamental de las actividades de enseñanza-aprendizaje: aprender; es decir: *aprehender, apropiarse, integrar, fijar,* hacer posible la recuperación eficaz en situaciones de aplicación. Si bien es dudosa esta meta terminal sin la etapa inicial de la comprensión o *aprendizaje significativo.*

El problema se plantea, pues, en términos de eficiencia didáctica, no de posibilidad psíquica. Bajo esta perspectiva podría resolverse el antagonismo originario THORNE-DIKE-BROWNELL, asociacionismo-aprendizaje significativo, conductismo-constructivismo, etc.

KATONA llega a distinguir dos tipos de aprendizaje, concediéndoles, eso sí, importancia a cada uno de ellos, y reconociendo procesos diferentes:

- El aprendizaje por memorización es un proceso diferente del aprendizaje por comprensión.
- El aprendizaje por comprensión supone un proceso fundamentalmente igual al de la resolución de problemas: el descubrimiento de un principio.
- Tanto la resolución de problemas como el aprendizaje significativo se basan en un cambio o reorganización del material. El papel de la organización es establecer, descubrir o comprender una relación intrínseca. (Katona, 1940/1967, 53-54).

Sin embargo,

> La mayoría de los psicólogos de hoy día reconocen que no está clara la existencia de una dicotomía extrema entre el aprendizaje mecánico y el significativo, que la memorización no es necesariamente una alternativa a la comprensión. De hecho, los últimos trabajos sobre la memoria ponen de manifiesto que la memorización es un proceso activo, que depende de principios organizativos. (RESNICK y FORD, 1981, 175).

KREUTZER, LEONARD y FLAVELL (1975) comprueban que la edad -dentro de unos límites- guarda una estrecha relación con la eficacia memorística, generándose una cierta tendencia a organizar la información, como medio consciente para lograr aquélla. RESNICK y FORD (1981) justifican esta mayor eficacia *en parte* porque rebaja el número de elementos de información independientes que se deben retener. Y la organización por líneas estructurales, dictada en parte por la estructura del contenido (RESNICK y FORD, 1981, 175); lo que implica una actividad consciente y voluntaria -no mecánica- de selección y relación.

Por consiguiente, no pueden reducirse los objetivos educacionales en Matemática a la simple comprensión y aplicación inmediatas, sin esfuerzos mi más logros memorísticos que el simple sedimento natural. Cual primoroso "arar en el mar". La memorización de *Tablas* y *Algoritmos* en Aritmética, por ejemplo, se nos muestra como inexcusable; aunque su confección/construcción deba tener carácter comprensivo/significativo, estructural y aun creativo.

Para España, un documento del Centro de Desarrollo Curricular del Ministerio de Educación y Ciencia ya citado -precisamente: a propósito de los *alumnos con necesidades educativas especiales*-, sugiere criterios para el reconocimiento de *aprendizajes esenciales o nucleares*:

- Tienen un carácter más general y se aplican a mayor número de situaciones.
- Son necesarios para aprender otros contenidos y seguir progresando en el conocimiento de cada área curricular.
- Tienen una mayor aplicación en la vida social.
- Los criterios de evaluación determinados por la Administración educativa, ya que en ellos se recogen aspectos que, de no conseguirse, bloquearían el aprendizaje de los alumnos. (MEC-CDC, 1991, 28).

Mas queda patente su inconcreción. Al carecerse en la práctica de *niveles mínimos*, deberán ser definidos por el profesor de aula, asumidos vagamente por los *proyectos curriculares* de Nivel, Ciclo, Etapa y Centro.

6ª) Objetivos, en el caso de *alumno con necesidades educativas especiales*.-

El principio básico en la atención de alumnos con n.e.e. es el de *normalización*; complementariamente, la práctica de la *adaptación curricular*. Pero conviene determinar su alcance y realización, concretando su repercusión en todas las dimensiones del curriculum proyectado: Objetivos, Contenidos, Actividades, Evaluación, etc. De otro modo, se corre el peligro de traducirlos en *uniformidad*, el primero, y *reducción*, el segundo; *traducción ramplona*, a fin de cuentas.

En términos generales -aunque sea arriesgado e incluso peligroso-, puede afirmarse que:

- Las perturbaciones de orden perceptivo y afectivo no implican alteración de Objetivos curriculares, manteniéndose los Contenidos y niveles de exigencia evaluativa. Bien es cierto que, según el déficit y curriculum anterior del alumno, se hará precisa una adaptación conveniente de las Actividades a proponer y fórmulas de Evaluación a seguir.

- Según los casos, puede ser recomendable incluir Objetivos específicos tendentes a desarrollar destrezas y actitudes aceptadas como necesarias o convenientes.

Situación muy diferente es el de los alumnos con déficit curricular. Deberán considerarse Objetivos prioritarios la cobertura de aquéllos que se estimen como imprescindibles para acceder a los previstos de forma general en el correspondiente nivel educativo. Con ellos o por ellos, las Actividades deberán hacer hincapié en los aspectos más directamente relacionados con los déficits observados, programadas si fuera posible con preferencia y antelación temporal. Si las carencias fueran suficientemente graves, podría pensarse en una *adaptación curricular* incluso *significativa* en parte, que mitigara el nivel de exigencia en alguno o algunos de los Objetivos propios del nivel.

Los oportunos Objetivos, Actividades y aun Contenidos que pudieran programarse para estos alumnos con n.e.e. no tendrían por qué afectar al curriculum de los restantes alumnos del grupo. Pero pudiera también ocurrir que se estimara conveniente incluir alguno de ellos en la programación general, o, más concretamente, diseñar Actividades comunes; por entender que dicha adaptación más que *perturbadora* para la marcha general del grupo es ampliadora y reforzante, tanto en su dimensión de favorecer la integración de los primeros como en la de enriquecimiento mutuo, al cultivar la educación en y para la diversidad y la apertura de nuevos horizontes comunicativos o técnicos.

CUADRO 2.4.D- Disponibilidad de tiempo y elementos que condicionan la "actuación didáctica" en una situación de enseñanza-aprendizaje.

- Disponibilidades de tiempo y elementos.
  - Disponibilidad de elementos.
    - Propuestas de situaciones problemáticas o de partida,
    - itinerarios didácticos,
    - materiales,
    - situaciones de fijación, desarrollo y remediación,
    - instrumentos de evaluación, etc.
  - Disponibilidades de tiempo
    - diseño (confección, en su caso)
      - Itinerario didáctico
      - Situaciones y material,
      - Instrumentos de evaluación formativa,
      - Actividades de fijación, desarrollo y remediación, etc.
    - previsión/anticipación
      - Organización de la actividad
      - Variantes del itinerario didáctico
      - riesgos y bloqueos,
      - motivaciones
      - facilitadores.
  - Disponibilidad de tiempos de aplicación.
    - Desarrollo de los itinerarios didácticos.
    - Aplicación de los instrumentos de evaluación y su análisis conclusivo,
    - Desarrollo de actividades complementarias.
      - De fijación.
      - Complementarias.
      - De remediación.
    - Posibilitación de "reflexión en la práctica", registro de experiencias, etc.
- Disponibilidades de tiempo y elementos.
  - En caso de atender en el aula a algún "alumno con necesidades educativas especiales":
    - diseño/confección de elementos adaptados.
    - Previsiones.
    - Aplicación.
    - Atención diferencial.

7ª) Disponibilidad de elementos materiales y temporales.-

No se aprende *una Matemática* de una vez por todas. Como tampoco *se aprende a enseñar* de forma perfecta y definitiva.

La formación del profesor siempre está inacabada, en todos los órdenes.

La calidad de la enseñanza siempre puede crecer, mejorar.

Dos asertos que, lejos de conducir al pesimismo y a la desesperanza, deben animar al sano inconformismo y a fomentar el espíritu de superación. También en lo profesional, la docencia es un *seguro de juventud.*

En su dimensión científico-matemática, puede argüirse que la Matemática es la misma ayer que hoy. No. Puntualicemos: la Matemática que se precisa en la vida laboral, económica, social, es cambiante; si no tanto en los contenidos absolutos, sí en cuáles de entre ellos resultan más relevantes, más frecuentes en su uso, más útiles. Observación que es aún más evidente para los métodos, incluso aritméticos: cálculo escrito, mental, aproximado, empleo de calculadoras, de ordenadores... Sin olvidar los variantes enfoques globales, estructuración e interrelación de conocimientos, formas expresivas, etc.

En su dimensión más directamente didáctica y metodológica, el cambio se muestra todavía más claramente agresivo. No es tan sólo fruto de los progresos -contrastados o hipotéticos, consolidados o balbucientes- en un mejor conocimiento de los procesos de aprendizaje, medios, material, itinerarios, situaciones. Son las sucesivas oleadas de nuevos alumnos que cada año ocupan los asientos en el aula: nuevos alumnos, nuevos intereses e inquietudes, formación anterior, medios, ambientes socio-familiares... Tal vez el cambio sea insensible de un año a otro; pero ostensible en un lapso de cinco o diez años. Y no hay dos alumnos idénticos, ni en su forma de ser, ni de comportarse, ni de reaccionar.

Finalmente, los cambios tecnológicos. Acelerados en los últimos decenios, en ritmo vertiginoso, abrumador.

Estos cambios deben ser: a) conocidos, b) fundados, c) asimilados, d) aplicados al quehacer cotidiano del aula. Lo que implica: a) información, b) profundización científica, c) estudio y reflexión, d) información de experiencias, diseño, ensayo, nueva reflexión...

Pero la formación permanente y la mejora didáctica requieren algo más que buenas disposiciones; elementos que los faciliten/posibiliten: medios y tiempo.

Puede profesarse que *el mejor libro del que dispone el profesor son sus propios alumnos*; que la mejor fuente de información son la conducta y el diálogo con sus alumnos y colegas; que no hay mejor laboratorio ni centro de investigación didáctica que el aula de clase. Y como actitud esencial, es incontestable. De hecho, los más notorios progresos en Didáctica Especial, medios y propuestas, han surgido de profesores aislados -en principio-, de un quehacer cotidiano, aparentemente intrascendente; hurtándose quizás tiempo al descanso o a otros proyectos personales.

También es cierto que a mayor información, contraste, equipo, medios y tiempo, mayores frutos y más tempranos y seguros. Medios y tiempo: organización y planificación.

El problema de medios y tiempo se agudiza cuando en el aula se encuentre un alumno con necesidades educativas especiales. Se precisa entonces de la consulta de fuentes y disponibilidad de recursos especializados y de orientaciones adecuadas.

Con frecuencia, se exige incluso del profesor un auténtico *cambio de actitud*. La perplejidad y desconcierto iniciales -hijos generalmente de una información escasa y sentimiento de falta de preparación específica-, no es raro que vayan acompañados de una actitud negativa, de rechazo: más tiempo a dedicar a ese alumno, acrecentamiento de la responsabilidad por no rebajar la atención al resto de alumnos *normales*, consciencia de la propia falta de formación, desconocimiento de los medios y procedimientos específicos, mayor exigencia profesional, alteración de hábitos metodológicos estimados como idóneos, menos tiempo, más trabajo, mayor esfuerzo... Ansiedad, inseguridad, sensación anticipada de desasistencia, cansancio y fracaso.

Sólo la información y la disponibilidad de experiencias, medios y orientación suficientes -estimados subjetivamente como *suficientes*- pueden romper este torbellino de rechazo solapado. La organización de centros especializados de documentación, el contacto con colegas que han pasado por situaciones análogas y el apoyo efectivo y asequible de profesionales especializados en la dificultad o déficit padecido por el alumno en cuestión. Facilitarle, en suma, la apertura a la formación permanente, -quizás quasi-inicial- en un aspecto muy concreto; que el reto diario de colaborar con ese alumno irá madurando y profundizando.

La calidad es costosa; no cara: se trata de una auténtica y fructífera inversión personal y social.

3 ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA ARITMÉTICA

En su obra *Numeración y Cálculo*, B. GÓMEZ (1988) recoge dos definiciones clásicas de Aritmética:

> ¿Qué es Aritmética? La ciencia que trata de averiguar las relaciones y propiedades de los números. (M. J. VALLEJO : Aritmética de niños, para uso de las Escuelas del Reino, 1798).

> ¿Qué es Aritmética? El arte de contar o la ciencia de los números que considera su naturaleza y propiedades, y suministra medios fáciles para expresarlos, componerlos y resolverlos, que es lo que llamamos calcular. (TORCUATO TORÍO DE LA RIVA Y HERRERO: "Principios de Aritmética", 1789).

En la escuela, la Matemática comprende desde hace un par de siglos las que hoy podríamos llamar *ramas tradicionales*: Aritmética, Geometría y Algebra.; esta última, más propia de la etapa de Secundaria. La afirmación es válida para la enseñanza en el mundo occidental y el vasto ámbito de su influjo institucional.

3.1 LA ARITMÉTICA EN EL CURRICULUM

> Tradicionalmente, la prioridad en las matemáticas escolares eran las cuatro reglas y sus aplicaciones a los problemas de pesas y medidas. Esta era la referencia para considerar a alguien "educado". Cálculo era sinónimo de matemáticas. Los padres se sentían satisfechos: entendían los manuales que sus hijos estudiaban, y lo que un día fue bueno para ellos era bueno para sus vástagos. (GÓMEZ, 1988, 106).

Como se ha indicado en la Sección 2.1, la segunda mitad del siglo XX ha sido escenario de conmociones varias en el dominio de la educación matemática; algunas de ellas, ciertamente notables. La Aritmética y las destrezas calculatorias correrían análoga suerte en el seno de tal torbellino.

La Teoría de Conjuntos y la Matemática de Estructuras, llegaron a invadir y condicionar los curricula incluso en los niveles más elementales, ámbito preferente para la iniciación aritmética; si bien parece remitir la fiebre que despertaran en los años 60. Matemáticos y psicólogos -sobre todo estos últimos- clamaban por que se adecuaran los Objetivos, Actividades, y Medios a sus concepciones de los procesos de aprendizaje; exigiendo ante todo *comprensión*, y, por ello, recurso a los fundamentos, lógica estricta, profundas transformaciones de los programas y enfoques más *formativos*.

La llamada *Matemática Moderna* y ciertas corrientes en Psicología -especialmente, la *escuela de Ginebra*, encarnada por Piaget y sus discípulos- han llevado a una verdadera *crisis de fundamentos*. La Aritmética parecía precisar de unos preámbulos de Teoría de Conjuntos y Álgebra Estructural, sin los cuales era imposible su comprensión efectiva. La *coherencia*, exigida por unos, y la correlación entre estructuras *matemáticas* y operaciones psíquicas, predicada por otros, ponían las bases del aprendizaje poco menos que en el centro de la Tierra.

> Los reformistas pensaban que si se dedicaba un tiempo y una atención suficiente a enseñar a los niños las estructuras subyacentes en las matemáticas, la destreza de cálculo aparecería con gran facilidad. Suponían que se podía desarrollar la destreza de cálculo sin dedicar mucho tiempo al cálculo en sí. A pesar de los cambios en el curriculum, no cabe duda de que los cálculos siguen conformando la mayor parte de las matemáticas de la escuela primaria que recibe el niño. (RESNICK y FORD, 1981, 26).

Pronto se cuestionan los Contenidos, por influjo de las florecidas escuelas psicopedagógicas, de una parte, y, de otra, por presiones de las demandas sociales y tecnológicas. La *crisis* es mucho más profunda, alcanzando al propio concepto de Aritmética, y no sólo a su papel en el curriculum.

El número pierde sustancia y protagonismo: expresión formal para unos, y simple ocasión de desarrollo de destrezas instrumentales para otros. Que la matemática no es el arte de calcular sino el arte de comprender, que no se trata de calcular con la mayor precisión en el menor tiempo posible sino de calcular con el mejor entendimiento en el tiempo que marque la capacidad del niño. (FERNÁNDEZ BRAVO, 1995, 11). O radicalizar la conocida sentencia de Lejeune y Dirichlet: Sustituir el cálculo por las ideas.

Aparecen fenómenos tales como la pérdida progresiva de destreza del alumnado en cuestiones numéricas y algorítmicas (cfr.: MAZA, 1991). No puede decirse que fuera inesperada; pues buena parte del profesorado la temió como previsible con la introducción del nuevo curriculum.

Corrientes posteriores, todavía en plena efervescencia, llaman la atención sobre nuevos Conocimientos y Destrezas, que consideran de interés para la vida social, laboral, económica... Amplían los programas o sustituyen tópicos en vías de incorporación al curriculum en diverso grado: la Probabilidad, el Tratamiento de la Información, el Análisis, los lenguajes como parte esencial de la Matemática, las calculadoras y ordenadores como medios inexcusables...

No es arriesgado afirmar que se vive una verdadera revolución en los Objetivos educacionales y matemáticos en general, y aritméticos en particular.

> Podemos distinguir un enfoque que se preocupa menos del contenido de las matemáticas que de las matemáticas como forma de pensar y de razonar. Si se entienden las matemáticas como forma de pensar~ la consecuencia es que se concibe la resolución y el descubrimiento de los problemas no sólo como medio de enseñar los conceptos matemáticos, sino como objetivo fundamental de la enseñanza matemática. (RESNICK y FORD, 1981, 14).

En Aritmética, el interés pedagógico se desplaza de las destrezas de cálculo -simples o algorítmicas- a otros aspectos de la matematización: la abstracción y reificación aplicativa o ejemplificativa. Paralelamente, la importancia creciente que los lenguajes van adquiriendo, como vehículo para el empleo de la Matemática en otros dominios de la ciencia.

La formación aritmética y matemática deja de tener como referencia exclusiva la adquisición de conceptos y técnicas, para contemplar aspectos mucho más amplios: Conocimientos, Procedimientos y Destrezas, Actitudes, Valores...

Pero los movimientos pendulares tienen sus riesgos. Ya en 1976 Skemp advertía del peligro en menospreciar las destrezas de cálculo en sentido estricto, ante la tentación de primar las actividades más netamente matemáticas y de abstracción activa: A cualquier nivel podemos también distinguir entre manipulaciones rutinarias y actividad de resolución de problemas; y a menos que las primeras puedan hacerse con una atención mínima, no es posible concentrarse con éxito sobre las dificultades. Esto es válido para cualquier destreza. (SKEMP, 1980, 95).

Por fortuna, la crisis tiene un alcance trascendente: Un nuevo dominio de las Ciencias de la Educación se abre paso en el último cuarto de siglo, recogiendo una tradición secular, pero ahora con visos de sistematización científica: la Didáctica de la Matemática.

El término *enseñar* parece postrarse ante el término *aprender. Enseñar* se transforma en *ayudar a aprender*; *mostrar* se torna *incitar al aprendizaje, práctico y duradero;* transmitir *Conocimientos y Destrezas, crear situaciones de enseñanza-aprendizaje* que los provoquen y conduzcan a ellos de forma natural.

Así, importan como dimensiones del curriculum no sólo los Contenidos -ya sean conceptuales o procedimentales-, sino -y de forma especial- los Procesos y Situaciones que les atañen o en los que puedan involucrarse (CASTRO, RICO y CASTRO, 1996, 85); éstas últimas, sobre todo, por su componente motivacional.

En la nueva concepción se da preeminencia a la actividad didáctica: el alumno en acto de aprender, con la responsabilidad del profesor de dirigir u orientar la actividad de aula. La Matemática, en cuanto Contenido y las teorías/hipótesis psicológicas están al servicio de la formación integral del alumno, sujeto primero y último de la educación; sabiendo que los estereotipos son modelos aproximativos, nunca exactos.

Al centrarnos en la intención docente y su influjo directivo en el proceso de aprendizaje por parte del alumno, hemos preferido aquí resaltar cuatro puntos cardinales que guíen el quehacer didáctico: la proyección de la actividad a desarrollar, el itinerario o proceso didáctico y la motivación que lo impregna y dinamiza, junto con la prevención ante los agentes de desmotivación..

3.2 PROYECCIÓN DE LA TAREA

Sólo el desconocimiento pudo llevar al optimismo excesivo, haciendo pensar a algunos que el cálculo es tarea superficial y poco merecedora de atención, esfuerzo y espacio en la escuela.

La mayoría de los autores están de acuerdo: La apropiación del cálculo, y por tanto la del número, nunca terminan. (...) Del mismo modo que nunca acabamos de aprender a leer (por ejemplo, el estudiante de psicología se convierte de modo progresivo en un mejor lector de textos de psicología), nunca acabamos de aprender el número. (BRISSIAUD, 1993, 210)

Dotar de significado una operación aritmética es una tarea compleja que puede darse por terminada en muy pocas ocasiones. El significado de cualquier operación se construye durante un dilatado periodo temporal, con aportaciones muy variadas: situación es para plantear o resolver problemas, exploración de las propiedades de cada operación, relaciones entre las distintas operaciones, efectos que produce cada operación con distintos números, modelos que permiten representarlas. (GRUPO 0, 1997, 1, 67-68).

Sin caer en el pesimismo pedagógico, y cuidándose de no transmitir una cierta sensación de desaliento ante lo permanentemente inacabado, debe estarse advertido de que:

> La creencia de que uno ya comprende totalmente constituye un obstáculo para el incremento de la comprensión ulterior. (SKEMP, 1980, 51). Si bien este sentimiento subjetivo de que entendemos algo, aunque abierto al error que puede producirse, es, en general, un signo de que somos capaces de conducirnos adecuadamente ante una nueva clase de situaciones. (ibidem.).

Esta proyección en profundidad reclama una continua reflexión en el docente: Para hacer frente a la solución de los problemas aritméticos conviene plantearse una aproximación a N, distinta de las dos matemáticamente ortodoxas (CANTOR y PEANO) y que dote a las operaciones de un conjunto de significados que contenga al menos los significados asociados con ellas. (PUIG y CERDÁN, 1988, 68). Aunque esto no implique su explicitación en el curriculum.

La persistencia en el interés por la Aritmética y el Cálculo Aritmético es algo más que inercia pasiva o auténtica demanda práctica: Una de las formas posibles de definir las matemáticas es como conjunto de reglas y procedimientos para realizar cálculos. (...) De hecho, es una definición que domina casi toda la enseñanza matemática de nuestras escuelas primarias. (...) La realización de cálculos domina las matemáticas de la escuela elemental, y la destreza en los cálculos sigue siendo un objetivo de primer orden en la enseñanza, a pesar de los intentos de reformar el currículo de matemáticas en los años 60. (RESNICK y FORD, 1981, 26).

Por otra parte, en su elementariedad, la Aritmética ofrece modelos de pensamiento, razonamiento y destrezas, que muy bien pueden transplantarse a todos los ámbitos de la Matemática. No es casual que el Algebra originariamente recibiera el título de *Aritmética General*, ni que el término *Cálculo* se vea acompañado frecuentemente por determinaciones varias: *Algebraico, Analítico, Vectorial, Diferencial, Integral*, etc.

A partir de los años 80 se extiende entre los profesores de Matemáticas una progresiva preocupación: sembrar el curriculum de problemas y situaciones problemáticas. No es simple moda ni tiene una finalidad exclusiva de introducir motivación y variedad. Es cuestión de eficacia: el problema de la didáctica de las operaciones dejando aparte los algoritmos es un problema de aplicación. (FREUDENTHAL, 1983, 69).

La Didáctica de la Matemática, en términos generales, tiende a centrarse en la resolución de problemas, lugar privilegiado para la producción de aprendizajes significativos. Convencidos de que las características esenciales de la actividad matemática se manifiestan mientras se resuelven problemas. (PUIG y CERDÁN, 1988, 210).

Existen razones económicas y sociales que reclaman de la institución escolar que el alumno termine la escolaridad -obligatoria, cuanto menos- sabiendo resolver y plantearse problemas. Son innegables las actuales carencias observadas en la transferencia de conocimientos conceptuales a la práctica y de escasa iniciativa personal. Sin embargo, tal visión de la resolución de problemas parece estar lejos de las propuestas de los responsables educativos y, sobre todo, ha encontrado poco eco en las prácticas usuales en el sistema escolar. (ibidem., 38).

Esta actividad sobrepasa los límites del mero recurso didáctico. Incluso más allá del área matemática: En el transcurso de la tarea se invocan, se ponen de manifiesto y se ejercitan destrezas y procesos cognitivos generales difícilmente requeridos por cualquier otra tarea escolar. (ibidem., 37). KUBN (1962), desde el marco de las teorías de la ciencia, llega a comparar al científico normal con un "experto en resolución de problemas".

> Por definición, un problema propiamente dicho exige una búsqueda de soluciones posibles porque no existe ninguna solución obvia. Esto implica que hay que aplicar alguna estrategia para determinar la meta del problema, la información de que disponen los estudiantes, y cuál es la información que falta y que permitiría o bien que se aplicase una estrategia de resolución conocida o bien que se inventase una nueva solución. (RESNICK y FORD, 1981, 179-180)

Por otra parte, si la escuela ha de preparar a los niños para enfrentarse a su vida presente y futura, ¿qué mejor palestra de entrenamiento que los inocentes problemas aritméticos con referencia a la vida cotidiana? En ellos pueden encontrarse situaciones tales como la determinación de objetivos, la gestación y valoración de itinerarios y estrategias, la selección de medios, el recurso a informaciones o ayudas complementarias, etc.

Aún hay más: cuando la enseñanza-aprendizaje de la Aritmética está teñida, desde sus orígenes o aunque sólo fuera en su desarrollo, del trabajo con problemas convenientemente explotados, se reclama el cultivo de múltiples destrezas instrumentales, no exclusivamente matemáticas.

Es el caso de las destrezas lingüísticas, tanto interpretativas como expresivas. Y al decir *lenguaje*, no podemos restringirnos a la lengua usual o natural, sea hablada o escrita.

La Matemática ha dispuesto desde siempre de un código propio: el numérico, primero, el algebraico y el simbólico general, después. Sea por mimetismo, sea por afán de síntesis, el *lenguaje simbólico* se extiende hoy a todas las ramas del saber; no ya la Física y Química y sus relacionadas, que bien pronto lo adoptaron: algunas aparentemente tan alejadas de la Matemática como la Biología, la Lingüística, la Psicología...

La Geometría, por su parte, pudo incluso entenderse como un lenguaje de esquematización de la realidad física. Tras el nexo Geometría-Álgebra que supuso la Geometría Analítica, merced a las representaciones cartesianas, y los diagramas de cuerdas y flechas, apoyo didáctico de la Teoría de Conjuntos, el siglo XX ha visto florecer toda una gama diversísima de representaciones planas. Aunque insuficientemente sistematizado, puede hoy hablarse de un auténtico *lenguaje gráfico-geométrico*, con morfología y sintaxis propias. La Didáctica de la Aritmética cuenta cada vez más con estos recursos gráficos (véase: VERGNAUD, 1991).

Y la Aritmética se ha servido también desde muy pronto de materiales manipulativos específicos; y de materiales generales, empleados de forma particular. Deben considerarse todo el juego de dramatización y gestuación que acompaña o simula las representaciones numéricas y operativas con dichos materiales (véase: JAULIN-MANNONI, 1980). Se apunta, en suma, un sistema convencional de signos portadores de ideas matemáticas: un *lenguaje de comportamientos físicos* o *lenguaje de manipulaciones*, nada desdeñable.

A su vez, la expresión en estos lenguajes exige un esfuerzo representativo interior, previo a su plasmación; labores de interpretación o *lectura*; de *traducción* entre las diferentes formas, ejercicio de la originalidad, del gusto formal, etc. Un problema permite su representación, real o imaginativa, en todas las formas señaladas, e incluso en versiones diferentes; con la ejercitación mental -no exclusivamente aritmética- que esto conlleva.

Por otra parte, el mundo de los problemas se ha ensanchado, en su complejidad, al de las llamadas *situaciones problemáticas*, que exigirán del alumno una multiforme actividad lógica y semántica. No se trata tan sólo de comprender, representarse, traducir un enunciado a diversos lenguajes, resolver una cuestión numérica. Se trata también de construir enunciados, transformarlos, buscar problemas paralelos con otros datos o datos imposibles, inventar preguntas para una descripción, etc. Todo, a propósito de la Aritmética.

Profundizar en el concepto de número y operación aritmética, siempre incompletos, quizás inabarcables. Exigencia de reflexión matemática y didáctica en el docente. Prever su valor modélico, como trasunto arquitectónico de la Matemática toda. Ocasión para el cultivo de destrezas representativas internas y expresivas de todo género. Necesidad práctica y conveniencia formativa de los problemas aritméticos, campo abonado para el desarrollo de actitudes y destrezas sin fin...

La Aritmética reclama merecidamente atención preferente en el curriculum escolar. Su aprovechamiento didáctico, previsión del valor proyectivo de las tareas y sabio diseño de Objetivos y Actividades, de itinerarios y recursos; formación matemática y didáctica del profesor, en última instancia.

3.3 ITINERARIOS DIDÁCTICOS

En el proceso de enseñanza-aprendizaje del Cálculo hay que distinguir dos estadios o momentos bien diferenciados:

1° Introducción a la operación y su formalización (en cada uno de los lenguajes).

2° Práctica automatizada; con preferencia, de aplicación en situaciones problemáticas.

El primero es el que merece más propiamente el carácter de actividad matematizante, requeridor de la puesta en juego de capacidades abstractivas, manipulativas, procesos de simbolización, etc. Mientras que el segundo suele resumirse en una serie de reglas o automatismos, adquiribles por mera repetición y ejecutables sin conciencia obligada de su justificación.

> La ejercitación no es ya la vía para el aprendizaje, sino la vía para la consolidación. Se desea que los niños practiquen las manipulaciones necesarias hasta que puedan llevarlas a cabo con el suficiente automatismo. (B. GÓMEZ, 1988, 110).

Un análisis de las tareas aritméticas desde el punto de vista del objeto formal distinguiría entre elección de la operación aritmética y realización de los cálculos oportunos. La primera tiene el carácter de una decisión, aplicada sobre la comprensión de un enunciado o situación. La segunda, mucho más compleja, aunque también más superficial y automatizable, incluye decisiones estratégicas, ejercicios combinatorios, exteriorizaciones expresivas, etc. Una y otra, suponen aplicaciones perceptivas y representativas de índole y nivel varios.

Bajo la perspectiva de la complejidad o contenido cuantitativo, pueden distinguirse: *hechos numéricos* o asociaciones elementales -integrantes de las *tablas* de operaciones- y procedimientos complejos en los que se debe realizar una secuencia fija de operaciones -algoritmos-; ligados estos últimos, en principio, a la representación numérica y al cálculo mental. Unos y otros acabarán siendo memorizados -*¿automatizados*?-; pero su introducción se produce, ordinariamente, en el contexto de problemas sencillos que se plantean verbalmente, llamados *problemas aritméticos de enunciado verbal* (PAEV) o *problemas-relato.*

> Los problemas relato o de enunciado exigen de los niños que éstos interpreten las palabras del problema, que preparen un cálculo matemático equivalente y seguidamente apliquen los procedimientos relevantes. (RESNICK y FORD, 1981, 26).

Teniendo presente que *relevante* no es equivalente a *evocación de hechos numéricos*, ni mucho menos *algoritmo escrito*: cabe acudir a técnicas elementales de cálculo (recuento de colecciones de muestra o situaciones gráficas, conteo, manipulación de material, etc.).

Se hallan implicados en este último nivel factores de interpretación matemático-semántica, representación, combinatoria, alguna forma de simbolización, etc. Lo que supone, a efectos de enseñanza-aprendizaje, un género de dificultad diferente a los otros dos.

En el itinerario didáctico, puede asignársele el tercer lugar procesual *-aplicación-* o el primero *-situación de partida-*, tal como se propugna de los años 80 a esta parte, en función de los estilos curriculares, que dependen de los intereses sociales, de las teorías del aprendizaje subyacentes, e incluso de las modas imperantes. (PUIG y CERDÁN, 1988, 209)

Los planos de la tarea de enseñanza-aprendizaje van quedando hoy mejor definidos, así como las tareas de transición de uno a otro: Primero, aprendemos a manipular conceptos en lugar de objetos reales; entonces, habiendo etiquetado los conceptos, manipulamos en su lugar las etiquetas. (Y si las manipulaciones pueden reducirse a un proceso mecánico, podemos incluso programar una computadora para que actúe en nuestro lugar.) Finalmente, quizá, invertimos el proceso reasignando los conceptos a los símbolos, y reincorporando los conceptos en las acciones reales con objetos reales de los cuales fueron abstraídos al principio. (SKEMP, 1980, 95-96).

En ayuda de esta transición entre planos, se presta atención creciente a útiles didácticos en forma de *materiales para el aprendizaje de la Aritmética*; con precedentes ya en los primitivos *cálculos* -piedrecitas- de uso secular. Y una forma expresiva que se revela de eficacia probada: la representación gráfica o *gráfico-geométrica* de situaciones manipulables, primer resultado abstractivo y simbólico.

Llegamos así a distinguir cuatro estadios o aspectos manipulativos:

- manipulación de objetos físicos,

- manipulación de representaciones gráficas,

- manipulación de guarismos o símbolos escritos,

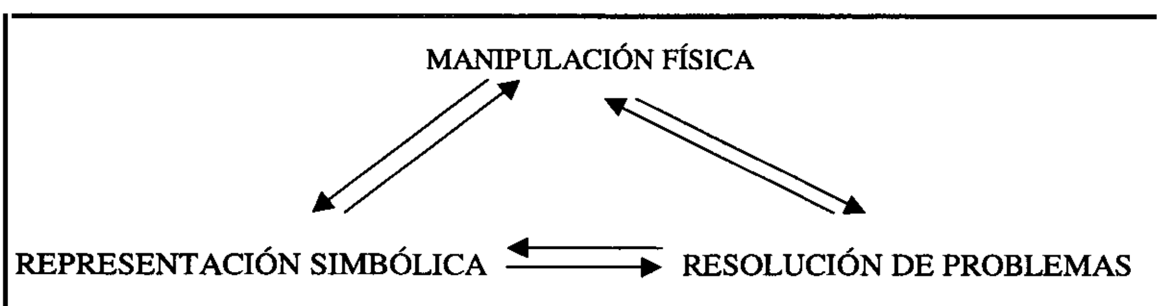
- manipulación conceptual y verbal en resolución de problemas.

Confiriendo al término *manipulación* el sentido lato que cada dominio reclama. Incluso los tres primeros pueden verse sustituidos por la *manipulación* de sus representaciones interiores, en el ámbito de la imaginación.

En forma lineal, un itinerario didáctico tradicional podría esquematizarse:

MANIP. FISICA => REPRES. SIMBOLICA => RESOL. PROBLEMAS

Aunque era habitual que la estructura del itinerario tomara forma triangular, pasando frecuentemente de uno a otro estadio.



La carencia de *material específico* o el intento de ahorro de tiempo, llevaba -y lleva- a sustituir la manipulación con objetos físicos por el alumno al empleo por el profesor de representaciones gráficas simples sobre el tablero:

REPRES. GRAFICA => REPRES. SIMBOLICA => RESOL. PROBLEMAS

Lamentablemente, tampoco era infrecuente tropezar con formas de enseñanza empobrecidas, en las que el recitado y aprendizaje memorístico precedía a otras tareas:

REPRES. SIMBOLICA => MANIP. FISICA => RESOL. PROBLEMAS

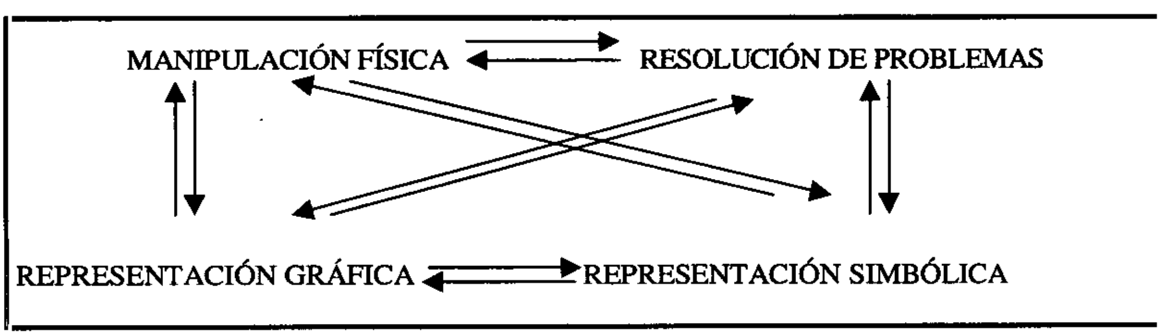
REPRES. SIMBOLICA => RESOL. PROBLEMAS

Pero la manipulación no es un ejercicio previo a la resolución de un problema sino la primera respuesta infantil al planteamiento de un problema. Las distintas representaciones no son instrumentos que deben preceder a un problema sino que son las primeras formas de expresión abstracta de los elementos y relaciones implícitas en un problema. (MAZA, 1992A, 20).

Si el aprendizaje de una operación significa aprender a transformar unos elementos en otros y, además, se precisa que se ejerzan acciones sobre los elementos originales, la mejor forma de motivar internamente esta actividad es plantear un problema que haya de resolverse, una situación que el alumno tenga que cambiar, que necesite cambiar. La resolución de problemas no es, pues, el objetivo terminal de la enseñanza de las operaciones sino el punto de arranque y el elemento que caracteriza todo el proceso de enseñanza. (Ibidem).

MANIP., FISICA => RESOL. PROBLEMAS => REPRES. GRAFICA => REPRES. SIMBOLICA

El itinerario adecuado, no obstante, entendemos debe gozar de un carácter más flexible. Rompiendo la configuración lineal, permite el paso incesante de un nivel a otro, según conveniencias del alumno y del momento de enseñanza-aprendizaje: Resultaría el esquema:



Que, con anterioridad a su expresión física -exterior-, tiene una realización interior, en el plano de las representaciones imaginativas -visualizaciones interiores-.

> No debemos olvidar que las matemáticas son, ante todo, una actividad mental. La utilización de números y signos sobre papel es sólo una ayuda para realizar las operaciones mentales de la misma forma que el niño poco hábil cuenta con los dedos o dibuja palitos junto a las sumas. De aquí se deduce que lo que interesa en primer lugar es la actividad mental: la formación del concepto de cantidad y de número y el desarrollo del pensamiento operatorio. (FERNÁNDEZ, LLOPIS y DE PABLO, 1991, 17).

El itinerario didáctico de iniciación a una operación será, de ordinario, previsto de antemano por el profesor; calculado, incluso, en sus dificultades y posibles bloqueos. Cuenta aquí en gran medida la experiencia recogida con alumnos de ese nivel y la información didáctica -experiencia ajena- que haya podido consultarse y madurarse.

Pero tampoco será raro, si existe disponibilidad para ello, que sean los propios alumnos los que *tomen las riendas* del proceso, y propongan métodos, casos, soluciones, aplicaciones y generalizaciones no previstas. Es el juego entre la directividad del profesor y la iniciativa del alumno. Es la diferencia entre *enseñar* y *aprender*; o, mejor: entre un desnudo *enseñar* y *enseñar a aprender*, que, por la reflexión en la práctica, puede muy bien acabar en un *aprender a enseñar* -no es un ramplón juego de palabras-.

Para los tres niveles de complejidad arriba mencionados -hechos numéricos, algoritmos y problemas aritméticos de enunciado verbal-, ordinariamente los algoritmos vienen ocupando el tercer lugar en los itinerarios de enseñanza-aprendizaje:

APRENCIZAJE DE "HECHOS NUMÉRICOS/TABLAS" ⇄ RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

↕

CONSTRUCCIÓN/APRENDIZAJE DE ALGORÍTMOS

Pero no necesariamente: baste analizar las experiencias que, desde ópticas psicopedagógicas bien diferentes, describen BRISSIAUD (1993), KAMII (1995) y, sobre todo, los trabajos desarrollados por el grupo WISKOBAS de Holanda, -véase: MAZA (1990B) y GÓMEZ (1988), por ejemplo-, para observar formas de acceso a las operaciones (fundamentalmente, la multiplicación y división), en las que van apareciendo los distintos algoritmos, usuales o no, sin necesidad de proveer a la construcción completa y aprendizaje de las *tablas* tradicionales.

Algunas posturas rechazan -incluso como perjudiciales- la enseñanza-aprendizaje de algoritmos escritos (véase KAMII, 1995, 49). Pero la realidad está ahí: la demanda socio-económica, la preocupación de padres y de la inmensa mayoría de profesores de que los niños *aprendan a calcular por escrito* (que no se cambia de la noche a la mañana, si es que debe cambiarse) y el valor proyectivo de los algoritmos como técnica general en Matemáticas y aun en otras ciencias.

Habría que distinguir -una vez más- entre el objeto y el método, y no extender la crítica didáctica a una crítica del contenido matemático. La introducción a los algoritmos era tan breve, que casi no existía. Prácticamente se reducía a la propia manera de ejecutarlos. Aprendizaje era sinónimo de ejercitación, de entrenamiento. Los niños eran adiestrados, más que enseñados: repetir, repetir, repetir. (GÓMEZ, 1988, 107).

Los últimos diez años han conocido una reacción, que insiste en los procedimientos, aunque en conexión con la teoría de conjuntos. Pero se recomienda expresamente la automatización de las operaciones a través del conocimiento de sus algoritmos. Puede decirse que se persigue una armonía entre la comprensión del algoritmo y su concepción como herramienta de resolución de problemas.

Ciertos materiales específicos -que se estudian más adelante- permiten la realización de verdaderas operaciones aritméticas complejas mediante simple manipulación física. Bien es verdad, que estos procesos manipulativos adquieren el carácter de auténticos *algoritmos*, pero independientes del cálculo escrito y, en última instancia, del empleo de *hechos numéricos* o *tablas* en el cálculo mental que éste comporta.

Precisamente, esta dimensión de *ruptura con los itinerarios tradicionales* es uno de los aspectos esenciales del presente trabajo y del material concreto que finalmente se propone.

El papel que se confiera a los algoritmos en el proceso de enseñanza-aprendizaje puede venir afectado por concepciones de índole psicopedagógica, o afectar y venir afectado a su vez por concepciones de la propia Aritmética. Frente a la definición de Cálculo del equipo de investigación del Instituto Nacional de Investigación Pedagógica (INIP, 1987), como todo procedimiento en que el niño haga uso de resultados memorizados, encontramos el enunciado por Brissiaud: el resultado de un proceso, en vez de como un estado. (BRISSIAUD, 1993, 210).

Como Objetivo último, la automatización -aunque hay quien prefiere hablar de fluidez; mejor fluidez que automatismo, ya que automatismo denota aprendizaje maquinal. (GÓMEZ, 1988, 110)-. Es decir: la asimilación de *hechos numéricos* y *algoritmos*, hasta el punto de dominarlos como recurso siempre disponibles -memorizados, y de recuperación inmediata-, prontos a ser aplicados en situaciones nuevas.

En cierta medida, puede hablarse también de *automatización en la resolución de problemas*: la generación de a modo de *algoritmos generales*, *estrategias* o *esquemas de pensamiento*.

La velocidad y la precisión son dos criterios ampliamente aceptados para medir la destreza en el cálculo. (RESNICK y FORD, 1981, 29). Incluso un tercer criterio: la seguridad; de carácter más bien subjetivo, difícil de objetivar y evaluar.

La automatización tiene una vía clara: la práctica. La perfección se alcanza con la práctica; en cálculo, como en cualquier otra destreza. La *ejercitación*, pero no de forma mecánica o irreflexiva, sino de forma comprensiva -sabiendo el *porqué*-, graduada -paralela a la conquista de conceptos- y aplicada a situaciones cotidianas.

***

Al considerar estas cuestiones en el ámbito de la educación de alumnos ciegos y deficientes visuales, los problemas se multiplican.

Partimos del principio:

La carencia de visión, en cualquier grado, no impide la adquisición de los conceptos, técnicas y automatismos de Cálculo Aritmético

Por consiguiente:

Deberán quedar intactos los objetivos y contenidos previstos para cada nivel educativo

Dos son las fuentes incontestables que avalan este aserto. La primera, de carácter histórico: la pléyade de matemáticos ciegos y deficientes visuales que durante siglos han florecido en prácticamente todas las culturas, aun sin medios específicos de expresión escrita o gráfica. La segunda, la experiencia reciente de los centenares de alumnos que, curso tras curso, superan los niveles generales previstos en todas las etapas educativas, a pesar del creciente fracaso.

Pero sí va a condicionar, y notablemente, el material e instrumental a utilizar en el proceso, tanto adquisitivo como de aplicación.

En consecuencia:

Pueden verse alterados los requerimientos de tiempo, ritmos, actividades, actuación docente, fórmulas de evaluación

O, lo que es lo mismo:

La carencia de visión, en cualquier grado, reclama un tratamiento didáctico específico una Didáctica Especial

3.4 MOTIVACIÓN

El alumno, por joven que sea, es una persona; no una *máquina de aprender.*

> El adulto puede enfocar voluntariamente su atención al campo que él determine o que el entorno le demande. Por el contrario, la atención del niño no es voluntaria. Sigue a sus gustos y sus aficiones, cambia de dirección con frecuencia y es difícil de mantener. Es una atención selectiva, que elige su objeto y permanece fija en él en función del interés que le ofrece. (FERNÁNDEZ, LLOPIS y DE PABLO, 1991, 28)

La dimensión afectiva incide en los procesos didácticos: en su inicio, en su ritmo, en la receptividad y fijación de aprendizajes, en su explotación aplicativa. La motivación misma, en su dimensión subjetiva -como atención-, puede entenderse como una respuesta esperable pero no totalmente controlada a estímulos que debieran provocar una afección positiva hacia el objeto de aprendizaje.

Para LESTER (1980), la motivación es una dimensión afectiva más, junto con el interés, la confianza, la perseverancia y la complacencia en aceptar riesgos. Pero mientras aquélla -en su dimensión objetiva- tiene carácter externo, las restantes son manifestaciones actitudinales, de difícil intervención, susceptibles de ser despertadas y alimentadas a partir de la primera. Es por esta razón que distinguiremos entre *motivación extrínseca* -objetiva-, en cuanto manifiesta mediante un estímulo o conjunto de estímulos externos, y *motivación intrínseca* -subjetiva-, con origen o no en aquélla.

En el aprendizaje de la Aritmética -ni en el de disciplina alguna- no deben confundirse *aspectos lúdicos o atrayentes* de la *actividad* en primera instancia con *aspectos motivantes.* Es ésta una reducción empobrecedora, que sólo proporcionaría satisfacciones efímeras. Quedaría en un mero disfrute sensible y motriz, que no alcance al *placer intelectual* y de *contemplación* propios de la actividad inteligente. Lo que no significa necesariamente que deban excluirse: las primeras pueden muy bien servir de escalón y atrio para las segundas.

La auténtica *motivación* tiende a instalarse en las concepciones del alumno, orientando sus tendencias más profundas y duraderas. Le capacita para trascender la tarea concreta, valorando aspectos universales -más generales, al menos-, hacia los que tiende de forma consciente y voluntaria, primero, y espontáneamente, después, una vez incorporada como *hábito intelectual.*

El proceso didáctico tiene por objeto, entre otros, generar *motivaciones intrínsecas* -asumidas libremente y asentadas en el espíritu-, a partir de *motivaciones extrínsecas* -que recurren a resortes inconscientes o semiconscientes del aprendiz-. Es decir: servirse de las *motivaciones extrínsecas* en forma de *atractivos sensibles* y *dinamismos* liberadores de energía -reclamos seguros para la atención y fuente de satisfacciones inmediatas-, para cultivar Actitudes y Valores conscientes que reverberen en las más íntimas y permanentes fibras de la personalidad del alumno -que forjen y fortalezcan su inclinación hacia la Verdad y aprecio por el Bien-.

> Debemos tener en cuenta que todos poseemos una capacidad mayor de aprendizaje cuando realmente queremos aprender: no podemos ignorar los efectos que en la calidad del aprendizaje tienen la motivación, el interés, la determinación y el deseo de triunfar. La búsqueda estriba continuamente en encontrar los medios que hagan más atrayentes e interesantes, más relevantes y útiles, las Matemáticas escolares; porque sabemos que los niños aprenden mejor bajo tales circunstancias. (ORTON, 1990, 21).

Uno de los grandes retos educativos de nuestros días parece centrarse en el arte de conjugar motivación y conveniencia didáctica. Cualquiera que sea el área de estudio, cualquiera que sea la situación de enseñanza-aprendizaje que se organice o aborde, cualquiera que sea la racionalidad o teoría del curriculum que se profese -manifiesta u ocultamente-, el profesor se halla ante el desafío de tornar la conveniencia didáctica de un objetivo o grupo de objetivos en meta deseable por sus alumnos.

La motivación no será tal mientras no sea asumida por el alumno como motivación intrínseca, apreciada positivamente en el código de valores personales y/o sociales -personales, al fin y al cabo- que en él se haya ido forjando hasta el momento.

Pero es difícil que pueda generarse y alimentarse activamente esta motivación del alumno si, con anterioridad y deliberación, no se halla persuadido el profesor de su conveniencia -motivaciones o exigencias sociales, de estructura curricular y aun de convicción personal, didáctica o no-.

La carencia de visión o una pérdida grave pueden condicionar la validez o eficacia de algunos de estos estímulos motivacionales. Al analizarlos en las páginas que siguen, se comentará en qué medida podrían quedar afectados -relativizados siempre al alumno particular y a la situación concreta-, y se formularán algunas sugerencias de adaptación específica.

Empecemos por considerar aspectos tan primarios como:

I Atractivo y riqueza de estímulos sensoriales.

Entre los que se encuentran el color, el mismo sonido, el dinamismo y la manipulación en el material y situaciones presentadas a los alumnos.

La falta de visión puede llegar a ser decisiva. El color carece de sentido como elemento motivador; incluso de significado -prácticamente- si el alumno padece la ceguera total desde edad temprana -menos de 3-4 años-. Es posible, no obstante, la adaptación a formas táctiles -rugosidad, marcas, etc.-, que puedan suplir la inutilidad de aquél; pero más a efectos informativos que motivacionales.

Análogamente, el carácter dinámico de una situación puede hacerla imperceptible al sentido háptico (tacto-cinestésico) de un ciego total, o difícil de observar y controlar por una visión deficiente. La adaptación a situaciones estáticas -más adecuadas- tal vez mantenga el contenido matemático, pero perderá en el camino de la transformación sus ingredientes motivacionales.

Por el contrario, la manipulación de objetos o gráficas es motivante en alto grado, aunque esta manipulación sea más lenta y trabajosa.

II Sencillez física de las tareas.

Que reduzca las posibilidades de error o confusión y alejen la aparición de la fatiga.

Este aspecto cobra especial importancia en el caso del alumno con déficit de visión. La dificultad y lentitud propias de la percepción háptica -caso del ciego total- o de la exploración ocular -alumno con resto visual-, reclaman la máxima sencillez de elementos materiales, reglas, etc. definitorias de la situación. Se evita de este modo la fatiga inicial de apropiación y la ulterior de control de la tarea.

Conviene recordar que la *traducción* de una situación a formas verbales es adecuada a las posibilidades del alumno ciego total, aunque se corre riesgo -frecuente- de caer en verbalismos -descriptivos o de planteamiento-, que, a largo plazo, pueden engendrar pasividad exploratoria o manipulativa.

III Ambiente de trabajo agradable.

Teñido de alegría, confianza y espíritu cooperativo y de servicio mutuos, relajante informalidad, etc.

El alumno ciego precisa de la ayuda o cooperación del profesor y compañeros en mayor grado que el alumno vidente: descripciones de objetos fuera de su alcance, reproducciones o simulación de acciones, resultados sobre el tablero, indicaciones de manipulación, correcciones de dibujos propios, etc. Sólo un clima de confianza reduce la timidez que pudiera cohibir la demanda de auxilio, sin miedo a interrumpir o molestar.

IV Variedad en las actividades.

Referida a las situaciones problemáticas, material, organización de la actividad, formas expresivas, espacios, etc.

De nuevo aparecen condicionantes para el caso de alumnos deficientes visuales. Sus dificultades exigen un mayor tiempo de acomodación y actuación, sea por las características perceptivas, sea por la naturaleza del instrumental a utilizar. En consecuencia, no siempre *variedad* es sinónimo de *motivación*: con mayor facilidad, puede serlo aquí de fatiga o dispersión; exigiendo entonces un esfuerzo por buscar el equilibrio entre monotonía tediosa y variedad desestabilizadora o dispersante.

CASTRO, RICO y CASTRO (1996) comentan el documento "Matemáticas desde los 5 a los 16", elaborado en 1985 por el Equipo de Inspección Inglés. Aunque se presente como elenco de *metas de la formación matemática*, se subsumen fácilmente como *aspectos motivantes en la tarea didáctica* en relación con la enseñanza-aprendizaje de la Aritmética. He aquí un resumen de sus consideraciones.

V La Matemática como elemento esencial de comunicación.

Las matemáticas pueden utilizarse para describir, ilustrar, interpretar, predecir, explicar. Gran parte de la información que se transmite tiene un componente numérico, algunas veces destacado. (Ibidem, 71).

La expresión numérica impregna hoy la vida social y aun personal toda. En consecuencia, la Aritmética ocupa un merecido lugar preferente en el curriculum, dado su valor comunicativo, apreciable de inmediato por el alumno: informaciones deportivas y de interés general en los medios de comunicación, precios, juegos, datos numéricos y combinaciones ilustrativas de otras ramas del saber, etc.

Convendrá tener presente que el alumno ciego y deficiente visual es insensible a buena parte de esta información numérica con que el vidente es bombardeado de continuo: carteles, etiquetas, indicadores, prensa y revistas infantiles y juveniles, medios de comunicación en general; por la fugacidad del estímulo o por falta de *traducción*. Se hará entonces necesario un mayor esfuerzo por resaltar la presencia de estas informaciones, buscar ejemplos y ponerlos a su alcance -crearlos, incluso-.

VI La Matemática, herramienta potente

La Aritmética está repleta de aspectos técnicos, tales como multiplicar un número por otro, hacer la media de varios datos, localizar el número mayor dentro de una serie de datos; pero se trata de técnicas que no son--no deben ser--fines en sí mismas. Sólo tienen interés si se emplean en actividades con finalidad bien definida. (ibidem.). Y no es difícil encontrar cauce a esta aplicabilidad próxima al alumno: puntuaciones deportivas o de juegos, compras, repartos o aportaciones a escote, etc.

Deben también incluirse aquí el carácter de herramienta que tienen algoritmos y reglas, facilitadores poderosos del cálculo. Y el acercamiento a calculadoras y ordenadores, resaltando su relación de origen e instrumental con la Matemática.

VII Apreciar las relaciones internas dentro de la matemática

La matemática no es una colección de temas desconectados, sino una estructura coherente, cuyas partes están relacionadas. (ibidem.). La relación entre operaciones, las propiedades estructurales, las analogías de comportamiento con otros objetos, incluso la equivocidad de enunciados de problemas, pueden servir de ejemplos. La comprensión local se ve retribuida pronto, en analogías, generalizaciones y casos particulares que surgen por doquier.

VIII Actividad fascinante.

Baste observar la segura respuesta de atención e interés sostenido que despiertan los *juegos* y *pasatiempos* matemáticos: ¿por qué no incorporarlos como Actividades propias del quehacer habitual en el aula?; en vez de arrinconarlos a los tiempos residuales o días de epidemia de gripe.

El interés puede proceder del sentimiento de orden, la apreciación de regularidades, una relación interesante, la potencia de una fórmula, la simplicidad de una generalización, un resultado curioso o inesperado o la elegancia de una demostración. Las posibilidades que presenta la Aritmética en este aspecto nos parece que aún están por explorar y explotar en nuestra escuela de cada día. (ibidem.).

IX Fomentar la imaginación, iniciativa y flexibilidad de la mente.

Hay que estimular a los alumnos a que encuentren su propio método de resolución cuando se enfrentan con un problema. Esto es especialmente importante en el caso de la Aritmética, en donde hay técnicas canónicas, pero en donde los alumnos y los adultos suelen emplear métodos propios que comprenden y en los que tienen confianza. Imponer como único método el más rápido y preciso, sin dar tiempo a que los alumnos maduren a partir de sus propias intuiciones, puede conducir a una separación entre lo que se practica y entiende y lo que se enseña en la escuela. (ibidem.).

X Trabajar de modo sistemático.

La Aritmética, con su bagaje de algoritmos, parece desembocar necesariamente en formas sistemáticas, rígidas en apariencia. Terminadas, codificadas y comprobadas, proporcionan una íntima satisfacción, anunciadora de ahorros de tiempo y energías.

El método sistemático, sin embargo, supone más que eso. Supone elementos de valoración y revisión tanto como la ejecución de tareas. Los alumnos deben pensar claramente y reflexionar sobre lo que su acción acarrea y considerar qué estrategias son posibles. | También debe hacerse una consideración cuidadosa del resultado final, lo que puede implicar valorar el trabajo, hacer una estimación para ver si el resultado es razonable, dar una interpretación que pueda necesitarse o bien extender un resultado según varios caminos (ibidem.). *Trabajo sistemático* es complementario a *trabajo imaginativo, flexible y con iniciativa*; en alguna manera, es su culmen.

No se han formulado observaciones específicas en estos últimos grupos de estímulos motivacionales para el caso de alumnos ciegos y deficientes visuales. La razón es bien simple: una vez interiorizada la situación, el *diálogo* Matemática-alumno no precisa esencialmente del sentido de la vista. La actividad que exige la Matemática y su dinámica motivacional se desarrollan en un nivel puramente mental, con independencia de las vías sensoriales de ingreso de información; las actividades de exteriorización son apoyatura prescindible.

XI Trabajar independientemente.

Plantear cuestiones es, con frecuencia, más importante y difícil que resolverlas; quizás ocurra así por insuficiencias formativas. Hay un fracaso cuando los alumnos creen, erróneamente, que la Aritmética tiene su principal aplicación en responder a las cuestiones que plantean los libros. Los alumnos están bien formados cuando ellos mismos se plantean y responden cuestiones. (ibidem.).

Como se ha indicado más arriba, el alumno con déficit visual precisará con mayor frecuencia y necesidad real de la ayuda cooperativa de profesor y compañeros. O, lo que es lo mismo: el trabajo independiente se le hará más costoso y lento -si no imposible-, salvo que la situación de enseñanza-aprendizaje en la que se halle inmerso se adapte por completo a sus características perceptivas y expresivas. Es el ideal de adaptación: permitir la autonomía plena, aunque no sea imprescindible.

XII Trabajar cooperativamente.

La iniciativa personal y la independencia no sólo no están reñidas con el *trabajo cooperativo*, sino que éste es de ordinario un buen ámbito de desarrollo para aquél: fomenta la evolución matemática de los alumnos a través del pensamiento, discusión y refinamiento interno de ideas. Se enfatiza así la naturaleza interactiva de la matemática. (ibidem.). Y se aprecian en la práctica los beneficios de intercambiar puntos de vista con seriedad, desde el imperio de la lógica, el orden en la discusión, el respeto y la responsabilidad.

Cuando de un grupo o equipo de alumnos forma parte alguno con problemas visuales graves, el funcionamiento de aquél puede verse alterado en mayor o menor medida, salvo que todos los integrantes padezcan la misma dificultad. Entiéndase que esta alteración, provocada por circunstancias distintas de las *ordinarias* no tiene por qué repercutir en la marcha del grupo de forma indefectiblemente negativa: la necesidad de ayuda al disminuido puede, a su vez, favorecer el desarrollo de capacidades y actitudes positivas para el resto de compañeros. La heterogeneidad es un acicate para la apertura de mente y buenas disposiciones cooperativas.

Sin embargo, es innegable que tal demanda permanente de ayuda -si la participación es real y equiparable-, supone un acomodar el ritmo de trabajo y las formas de comunicación a aquél de sus miembros más lento o limitado. Lo cual puede ser humano y técnicamente enriquecedor, pero es muy posible que disminuya los logros en objetivos estrictamente matemáticos o de aprendizaje específico.

Hay, no obstante, una vía para garantizar la eficacia de aprendizaje del grupo como tal: que la actividad, en su diseño, medios y plazos se adecue a las necesidades del alumno ciego, a la par que sea suficientemente potente como situación de enseñanza-aprendizaje para los alumnos videntes. Cosa no imposible, aunque costosa en tiempo de preparación.

XIII Profundizar en el estudio de la matemática.

La experiencia matemática de la mayor parte de los niños suele estar muy fragmentada, ya que trabajan en cuestiones puntuales muy breves, pasando de una a otra en rápida sucesión. Sin embargo, seleccionando adecuadamente los tópicos, es posible estimular a los niños a realizar estudios más en profundidad. (ibidem.).

XIV. Conseguir la confianza del alumno en sus habilidades numéricas.

Rechacemos la prevención generalizada de que la Matemática y la Aritmética en particular son ocasión próxima de fracaso. Deben proporcionar un desafío y una posibilidad de éxito para todos los alumnos. (...) Los cuestionarios deben reducirse para la mayor parte de los niños, y volver a diseñarse de modo que puedan cubrirse en profundidad. (ibidem.).

Lo que no implica necesariamente la reducción de objetivos ni la degradación de niveles de exigencia, sino la selección de tópicos e itinerarios, respeto a las técnicas individuales de cálculo, primar los aspectos prácticos y materiales sobre los puramente formales, etc.: que cada alumno haga su Matemática, o suya la Matemática -que es lo mismo-.

En el propio proceso, siempre es posible contagiar el gusto por disfrutar pensando, incluso cuando no se consigan resultados completamente satisfactorios, y confianza en que el pensamiento produce resultados. Actitudes accesibles a todos, por pequeños que sean. (GRUPO 0, 1997, 1, 15-16).

Y algo muy importante: inculcar en el alumno la conciencia de ser piloto en su propio proceso de aprendizaje. Lo que se consigue transfiriendo la función evaluadora, hasta generar el hábito de la autoevaluación; en dos direcciones: evaluación de procesos matemáticos y evaluación del propio proceso formativo.

La capacidad evaluadora de procesos matemáticos está en estrecha relación con el sentido crítico: la aceptación definitiva de la validez de un resultado o técnica obtenido por el alumno, la confianza y seguridad en su propio trabajo, queda suspendida en espera de una corroboración. Si ésta es externa, ofrecida gratuitamente por un adulto, se suspende inconscientemente el pensamiento autónomo: recibirá una satisfacción efímera, y no adquirirá el hábito de pensar por sí mismo en este aspecto crucial.

La comunicación al alumnado de los resultados de las evaluaciones se han de hacer de manera informal y enfocándola positivamente, haciéndole ver en qué ha avanzado y no qué es lo que no sabe. Después del enseñante el destinatario principal de la evaluación es el propio escolar, y le ha de servir para darle soporte en su aprendizaje. Por un lado está la valoración de su esfuerzo y por otro los resultados conseguidos, la primera le ayuda moralmente pero los segundos le dan la capacidad de llegar a dirigir su propio aprendizaje usando aquel los conocimientos que es consciente que domina. (ALSINA y OTROS, 1996, 141).

Cuadro 3.4.- Grupos de estímulos motivacionales.

Con prevalencia de los estímulos externos	- Atractivo y riqueza de estímulos sensoriales. - Sencillez física de las tareas. - Ambiente de trabajo agradable. - Variedad en las actividades.
Con instrumentalización del valor matemático de la tarea	- La Matemática como elemento esencial de comunicación. - La Matemática, herramienta potente - Apreciar las relaciones internas dentro de la matemática. - Actividad fascinante.
Con recurso a resortes psicológicos de carácter general	- Fomentar la imaginación, iniciativa y flexibilidad de la mente. - Trabajar de modo sistemático. - Trabajar independientemente. - Trabajar cooperativamente. - Profundizar en el estudio de la matemática. - Conseguir la confianza del alumno en sus habilidades numéricas.

La motivación *no aparece sola*. Es fruto del encuentro entre estímulos externos al aprendiz -*estímulos motivacionales*- y una Actitud primaria de receptividad. NICHOLLS (1983) entiende, no obstante, que es precisa la concurrencia de tres factores: una fuente externa, la misma tarea matemática y el propio yo del alumno. Éste ha sido también el esquema de ordenación en la enumeración presentada: el argumento dominante en el estímulo motivacional. . En los grupos I a IV prevalece el *estímulo externo*; en los grupos V a VIII, la Matemática en sí misma y sus aplicaciones; del IX al XIV, se acude a resortes psicológicos menos específicos, comunes a la mayoría de las tareas educativas.

La aplicación de *estímulos motivadores* que impregnen los itinerarios didácticos es no sólo conveniente sino muy recomendable. Pero huyamos de la utopía de intentar incorporar todos los aspectos mencionados; lo impiden la propia naturaleza de un determinado objetivo didáctico-matemático, escasa formación del profesor, carencia de información o modelos adecuados, falta de tiempo, de sensibilidad o formación inicial en el alumno, aspectos contextuales, etc. Surge entonces la necesidad de *elegir*.

3.5 GÉRMENES DE DESMOTIVACIÓN

En Didáctica de la Matemática, la motivación -de cualquier tipo- es ciertamente un elemento dinamizador de la actividad del alumno. Un a modo de *motor* que impulsa la marcha de aprendizaje por el camino que describe el itinerario didáctico, previsto o no.

Sin embargo, puede ocurrir que la dificultad sea anterior: un bloqueo o desmotivación global que paraliza la actividad incluso antes de iniciarla; un rechazo o *freno* que impermeabiliza la mente del alumno, haciéndola insensible a cualquier estímulo positivo, devaluándolo consciente o inconscientemente.

Podemos entonces hablar de *gérmenes de desmotivación*, ocasión para el desarrollo de *actitudes pasivas o negativas* que pronto desembocarán en paralización temporal o definitiva de la actividad de aprendizaje, preámbulo del *fracaso.*

Bien es cierto que no pocas veces un estímulo tendente a una determinada motivación es *capaz* de desbloquear ese estado de apatía o rechazo, desencadenando los mecanismos de atención e interés sostenido que empujen al esfuerzo de aprendizaje. Pero también es cierto que, otras muchas, por muy *a fondo que se pise el acelerador*, cuando el problema no es el *freno de mano* sino el *embrague*, el *motor de arranque*, e incluso el *contacto*, serán inútiles tales intentos.

Existen diferencias notables entre la forma de actuar y las respuestas que provocan los estímulos motivacionales y los que hemos dado en llamar *gérmenes de desmotivación.*

Una motivación suele ser *ocasional en su aplicación* -estímulo motivacional-, pero sus efectos son reflejos, quasi-automáticos en primera instancia; y acumulativos a largo plazo, conscientes, con vocación de Actitud.

Nuestros *gérmenes de desmotivación*, por el contrario, suelen ser conscientes en el alumno desde el primer momento; tal vez sin individuar. Pero exigen una *complicidad* interior: precisan de una *aceptación* o *alimentación* en forma de rechazo; voluntario, en un primer momento, que pronto cobra cuerpo de alud incontrolable, inconsciente o semi-consciente.

En símil biológico: las motivaciones actúan cual *vitaminas* para la actividad de aprendizaje, catalizándola; los *gérmenes de desmotivación* la ponen en peligro, actuando como *virus* nocivos. Aquéllas, no son fáciles de encontrar y suministrar. Éstos, surgen casi inesperadamente, invisibles, contagiosos; pero también como los virus, pueden ser rechazados o vencidos, aunque a costa de esfuerzo, voluntad y gasto de energías.

Sin profundizar en exceso, se distinguen grados en la desafección hacia la Matemática, la Aritmética o el Cálculo en particular:

- Desmotivación simple; o pasividad. Supone una aminoración en la respuesta a los estímulos motivantes, manifestada en falta de interés sostenido o dificultades de fijación, pero permaneciendo viva la atención puntual o primaria. Suele ser no consciente en el sujeto que la padece, llegando a negar tal estado..

- Desmotivación reactiva; o actitud negativa. Se manifiesta en rechazos antecedentes a la tarea de aprendizaje, en su inicio mismo. Suele tener sus raíces en estructuras profundas de la personalidad o de la afectividad. La actividad didáctica provoca estados de malestar e incluso agresividad.

Como es natural, estos dos grandes grupos admiten todo un *continuum* intensivo.

Asimismo, según su persistencia, podría hablarse de desmotivación transitoria, recurrente o irregular, permanente, etc. O, según el momento del proceso en que aparece: desmotivación de inicio, de prosecución, aplicativa, extensiva, etc.

Mucho nos tememos que uno de los factores determinantes del sentimiento de fracaso de los estudiantes está causado por un enfoque falto de acierto por parte de los enseñantes. Un escolar convencido de que no es suficientemente inteligente para hacer matemáticas se retrae y prefiere ser tenido por poco trabajador o desinteresado. Es muy difícil que esta persona llegue a valorar las matemáticas como útiles y divertidas. (ALSINA y OTROS, 1996, 120)

En la Sección 1 nos hemos referido al *factor pedagógico* como principal generador de *discalculias* y *fracasos*. Un análisis en busca de *causas de desmotivación en el alumno* quizá nos muestre el reverso de la moneda en el aprendizaje de la Aritmética, y aunque deje un poso de negatividad en nuestro discurso, bueno será tenerlas presentes para aplicar los oportunos antídotos, estímulos motivacionales más directamente relacionados.

1 Dificultad de comprensión.

Quizás sea éste el punto que más ha interesado a psicólogos y psicopedagogos hasta hace una veintena de años. En buena medida, sigue siendo una preocupación preeminente de quienes se dedican a la enseñanza y su investigación.

Los objetos matemáticos, en última instancia, son abstractos. Exigen, por tanto, un esfuerzo abstractivo que rebasa la simple observación o manipulación físicas. Obligan a desprenderse de las propias percepciones -e incluso concepciones- para adentrarse en un mundo broceloso -por no decir *tenebroso*-: el mundo de las ideas sólo asequibles al intelecto, en el que la imaginación es mero auxiliar, útil -tal vez imprescindible- pero insuficiente.

Por otra parte, el carácter estructural de la Matemática, como cuerpo de doctrina, da lugar a una interrelación entre conceptos, fuente simultánea de ayuda aprehensora y complejidad.

De ayuda, en cuanto que la comprensibilidad de un concepto u objeto matemático se ve potenciada por la relación mutua con otros ya adquiridos. Hasta el punto de que algunos psicólogos la considerarán esencia de su significado. Tampoco faltarán matemáticos que conciban la Matemática como un puro entramado de conceptos, cuya entidad sea tan sólo el lugar relativo que ocupa en dicha trama.

Aparece de este modo una complicación ilimitada: ¿cuándo se adquiere efectivamente un concepto? ¿Cuándo se *completan* las relaciones con otros conceptos? No habría, pues, garantías de *comprensibilidad* mientras no se verifiquen dichas relaciones, o un mínimo de ellas. Pero, ¿cuáles son las relaciones esenciales para un concepto dado?; ¿quién es el osado que arriesga una respuesta, al menos para los conceptos aritméticos básicos?; ¿quién puede afirmar que un alumno, en un cierto momento, ha adquirido *completamente* el concepto de división?, o el simple ¿¡número natural!?...

Ventaja e inconveniente de la naturaleza estructural y relacional de los conceptos matemáticos.

Paradójicamente, aspecto tranquilizador: a fin de cuentas, los conceptos aritméticos son inabarcables en su complejidad, debiéndonos conformar con una *comprensión que, aunque incompleta, sea suficiente a los propósitos del momento curricular*, concretados en los *Objetivos del Nivel.*

La posibilidad de incomprensión en Matemáticas tiene, por consiguiente, dos raíces fundamentales: la débil *comprensibilidad intrínseca* del concepto -ligada a su complejidad abstractiva y relacional- y la baja *capacidad* o *receptividad matemática* del alumno. Aspectos nunca generales ni generalizables: circunscritos a un concepto determinado y un determinado alumno en un determinado momento madurativo y formativo, difícilmente evaluables con precisión.

> Una noción presentada demasiado pronto no tiene solamente un valor "neutro"; si es demasiado difícil acarrea las consecuencias de todo fracaso y hace perder al niño confianza en sí mismo. Sensibiliza, además, al alumno ante cualquier problema que toque el tema y alimenta la actitud antimatemática. Cuando varios años más tarde, Se vuelve sobre estas cuestiones no asimiladas se hace mucho peor que comenzando con alumnos para los que se trata de nociones nuevas. (MIALARET, 1984, 160).

J. L. LUCEÑO advierte, entre otros, de algunos errores didácticos que pueden convertirse en causas de fracaso y discalculia: Cuando las estructuras matemáticas que se pretenden enseñar no se adecuan al desarrollo de las estructuras operatorias mentales... Cuando se sobrevalora la automatización del cálculo frente a una auténtica comprensión de sus mecanismos y la falta de secuencialización en la consecución de los objetivos que da lugar a lagunas y solapamientos en la construcción del edificio aritmético. (LUCEÑO, 1993, 144).

La *desmotivación por incomprensión* sólo es abordable mediante la prudencia didáctica: huir tanto de la frivolidad de esperar que el tiempo y la práctica vayan cuajando en relaciones conceptuales, como de los excesos de ahondar en los abismos de los fundamentos teóricos. Es decir: determinar claramente los Objetivos mínimos requeridos por el nivel y las exigencias ulteriores, y recorrer el o los itinerarios didácticos precisados por ese alumno hasta alcanzarlos. Delimitación y personalización.

Con dos advertencias de primer orden: tiempo y paciencia. O, lo que es lo mismo: gradación en los objetivos intermedios y ritmo adecuado. Aunque el itinerario didáctico se torne *tratamiento psicopedagógico o remediación individualizada de las deficiencias de cálculo*, a lo JAULIN-MANNONI.

En imagen de Puig Adam: la comprensión de las ideas matemáticas se asemeja al ascenso a una montaña. Podremos procurar una ascensión en suavidad, mediante vueltas y revueltas, evitando áridos atajos y bruscas subidas; hacerla amable e incluso agradable y divertida, ornándola de árboles y fuentes, reposarla con asientos y frescas umbrías. Pero la ascensión es inexcusable. La altura ha de coronarse, tarde o temprano, salvando el desnivel que separa la base de la cima. Allí, nos felicitaremos por la meta conquistada y gozaremos de la contemplación del paisaje.

Posiblemente la *incomprensión* sea la fuente más importante de desmotivación y consiguientes fracasos. La primera consecuencia reactiva es una pérdida de seguridad, si no la interrupción de la tarea. De continuar ésta, el alumno lo hace de forma tambaleante, mecánica, depositando en la memoria un cúmulo de términos o relaciones mal aprehendidas, confiado tal vez en que "más adelante lo entenderé mejor". La atención se debilita; los elementos distractores cobran mayor eficacia; a una incomprensión sucede otra...

Su complejidad y profundidad obliga a la consideración de cuantos aspectos se relacionen con ella, en busca de salvar tropiezos y escollos que la alimenten; más simples, más superficiales o formales quizás, pero de cuya superación puede depender la comprensión efectiva.

2 Mal entendido carácter abstracto de la Aritmética y de la Matemática en general.

"Y esto, ¿para qué sirve?"

Nos hemos referido en otro lugar (FERNÁNDEZ DEL CAMPO, 1997) a esta pregunta que, frecuente en los niños sometidos a tratamientos a base de símbolos, conceptos abstractos y situaciones alejadas de sus intereses personales, se amortigua a lo largo del curriculum, a medida que crece la resignación -y el rechazo-.

Que la Matemática sea abstracta en sí misma -en sus productos últimos-, no implica necesariamente que se halle alejada de la realidad física, tangible y aun próxima: es ahí donde se encuentra, descubre y rentabiliza.

Los grupos de motivaciones "V", "VI", "VIII" y "X" antes mencionados proporcionan adecuadas vías de desbloqueo a estados anímicos con posible raíz en esta falsa concepción.

3 Excesos en las exigencias estructurales; o *globalización exclusivamente endogámica.*

La preocupación docente por ahondar en el engranaje relacional de los conceptos matemáticos puede acarrear, por exceso, un menoscabo de las dimensiones aplicativas y prácticas de objeto concreto. Alcanzado el nivel abstractivo, un extraño magnetismo parece retener la atención y esfuerzo en *definir* exhaustivamente las características del objeto matemático y sus relaciones con otros más o menos *próximos...*

Esta atracción, disculpable e incluso fecunda en el erudito y en el investigador, no es esperable en el alumno *normal.* La insistencia en las presentaciones formales más bien despierta tedio, hastío y enojo; desmotivación y repulsa. El cálculo operatorio tiene que simultanearse desde el primer momento con la resolución de problemas, ya que su significado último se alcanza cuando el alumno lo aplica a cuestiones concretas y reales que tiene interés en solucionar. Esto proporciona un sentido práctico y útil a sus operaciones numéricas. (FERNÁNDEZ, LLOPIS y DE PABLO, 1991, 202).

El límite de insistencia de los Objetivos o grupos de estímulos "VII", "X" y "XIII" debe venir dado por la utilidad didáctica de las relaciones a descubrir. Utilidad, medida por una mejor comprensión del nuevo concepto y de sus relacionados, manifestada en el interés y acierto del alumno; y por una multiplicación en la aplicabilidad a situaciones variadas. En este sentido, deben equilibrarse con la intensificación de las motivaciones en los grupos "IV" -especialmente-, así como los "V", "VI" "VIII" y "IX".

En sentido positivo: abundar en la resolución de problemas, funcionales y convenientemente contextualizados, en los que el alumno pueda ejercitarse en procesos de inducción, analogía y análisis/síntesis.

4 Monotonía didáctica.

El cálculo operatorio necesita ejercitación, sin llegar al cansancio o a la monotonía; para ello hay que procurar realizar actividades y juegos matemáticos variados, tanto verbales como escritos y mentales, que favorezcan el cálculo a la vez que mantengan la motivación. (FERNÁNDEZ, LLOPIS y DE PABLO, 1991, 202).

Se reiteran aquí los comentarios del punto anterior, extendidos a todos los estímulos motivacionales y Objetivos propuestos. Es decir: deben hallarse integrados y equilibrados, sensibles a los asomos de desmotivación del alumno, por puntual que ésta parezca.

De modo muy particular, conviene atender a los grupos de motivación "I", "II", "IV" y "V", y a las formas comunicativas o lenguajes, que se consideran a continuación.

5 Pobreza en los lenguajes.

El lenguaje es no sólo el medio de intercambio, sino el instrumento que suele emplear el que aprende para ordenar el entorno. (BRUNER, 1966; cit. por ORTON, 1990, 169), y hace que los procesos del conocimiento y del pensamiento sean inmediatamente accesibles a la introspección y a la revisión. (BURNS, 1976; ibidem.). Extensivo a todas sus modalidades, es objeto reiterado de consideración a lo largo de este trabajo. No obstante, anticipemos algunas de las formas más frecuentes de degeneración manifiesta.

- Lenguaje simbólico-matemático; por *exceso*, fatigante, monótono y desmotivante. En nuestro caso: restringir la Aritmética y sus cálculos a pura cabalgata de guarismos. Pudiendo llegar a parecer que sólo fuera aritmético y comprensible lo expresable numéricamente.

- Lengua natural, hablada o escrita. Pudiendo oscilar entre la concisión suprema, no raras veces acompañada de léxico manido o pedante, sintaxis errónea, equívoca o complicada, puntuación o entonación inadecuada...; y la verborrea expositiva, con redundancias y reiteraciones, datos o alusiones superfluas, esfuerzos innecesarios de precisión y acotación en planteamientos y descripciones, etc.

En los textos escritos, requiere la lectura cuidadosa -si no su repetición-, desviadora de la atención, primero, y generadora de enojo y tedio, después.

En la comunicación oral, es un caldo de cultivo apropiado para las distracciones y pérdidas de interés, pudiendo caerse fácilmente en el *verbalismo*: reduccionismo didáctico que consiste en favorecer la definición de las palabras en menoscabo de la construcción operativa de los respectivos conceptos. (LUCEÑO, 1993, 144).

- Lenguaje gráfico-geométrico. Su manifestación ,más frecuente como factor desmotivador es *por defecto*: la ausencia o uso marginal, olvidando su facilidad comunicativa, adecuación didáctico-matemática y empleo generalizado en todos los ámbitos de la ciencia y de la vida social.

- Lenguajes de comportamientos físicos; desde la manipulación de material específico hasta la expresión gestual y corporal, distribución de personas, espacios y objetos en juegos, etc.

Ya en los más remotos tiempos se buscaba reproducir situaciones físicas que favorecieran los procesos abstractivos; hoy buscan *concretizar lo abstracto*, de forma estructurada y programable. Al tiempo que *dulcifican* los esfuerzos por descubrir y extraer *lo matemático* en la realidad, son un permanente lugar para motivaciones de toda índole. Han alcanzado un desarrollo notable, especialmente a partir de finales del pasado siglo, considerándose inexcusables en un planteamiento moderno de Didáctica del Cálculo. No obstante, es de lamentar su ausencia generalizada en la mayoría de las aulas.

La expresión corporal y gestual permiten producir situaciones análogas; por ejemplo,: dedos, como *colecciones de muestras*. O simular las acciones que responden a operaciones aritméticas: juntar, añadir, reunir, separar, quitar, poner, reiterar, repartir... Tienen unas posibilidades limitadas como instrumento o vía de comunicación, pero son innegables su frecuencia de uso y eficacia fijadora.

Todas las formas de lenguaje son convenientes, e incluso necesarias. Es evidente, por otra parte, que contribuyen al desarrollo de las capacidades comunicativas, a la par que muestran la multiforme realidad y omnipresencia de la Aritmética y su conexión con lo cotidiano y próximo; es campo para el despliegue de la originalidad, reforzadora de la personalidad en la comunicación interpersonal.

Sin embargo, este desarrollo comunicativo exige un aprendizaje y ejercitación. La diferente frecuencia de uso -convencionalismos y especificidad- comporta grados de dificultad. Ello implica prudencia en asegurar la eficacia en la comunicación y evitar la sobrecarga de esfuerzo interpretativo y expresivo, acorde con el nivel escolar. Es lugar común en psicodidáctica del cálculo que se respeten las fases manipulativas, figurativas y simbólicas, sin forzar a una abstracción precipitada o titubeante, no merecedora de tal nombre.

La *desmotivación* puede aparecer tanto por la pobreza o inadecuación expresiva como por la desproporción en el empleo de alguno de estos lenguajes, en función del nivel de los alumnos. Para combatirla, basta tener presentes y cuidar la expresión en las diferentes formas a la hora de aplicar los grupos de motivaciones "I", "IV", "V", IX" y "XII", especialmente.

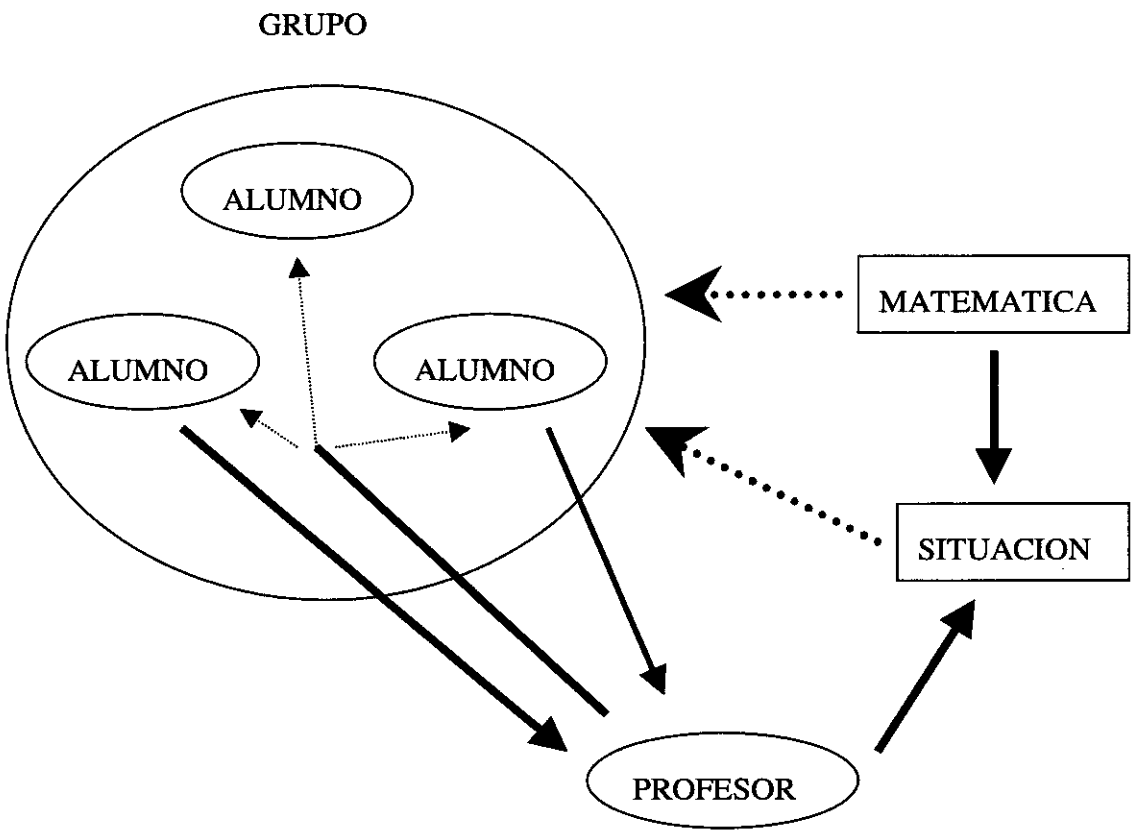
Hasta ahora no se ha aludido en qué medida el alumno ciego se hallaría más propenso a padecer la desmotivación en Aritmética. Mientras nos mantengamos en consideraciones sobre la actividad exclusivamente mental, el riesgo es análogo, dispóngase o no de visión. Tal era el caso de la incomprensión conceptual o técnica, el carácter abstracto de la tarea, los excesos estructurales o la monotonía didáctica. Las diferencias se manifestarán claramente cuando los medios didácticos puedan quedar empobrecidos por la reducción sensorial, como sucedería con la limitación en las actividades a desarrollar, o con el uso de los diferentes lenguajes o las dificultades instrumentales que conlleva su empleo.

Al alumno ciego total le estaría vedada la información y estímulos transmitidos a través de lenguaje gestual y actitudes corporales -no así al que dispusiera de resto visual apreciable-. La traducción o sustitución se torna harto dificultosa, por el carácter impresionista y personal que impregna este tipo de comportamientos.

Otro tanto sucedería, en principio, con la manipulación de objetos o expresiones gráficas o escritas en el tablero y cuadernos de compañeros próximos. Sin embargo, es posible ahora poner a disposición del alumno la información que se pretende transmitir, mediante *adaptación* a formas hápticas -material manipulable individualizado, dibujo en relieve, Braille, etc.-, o *traducción descriptiva* -generalmente: descripción o lectura oral-, aunque esta segunda solución exija la reconstrucción interior de la situación originante.

6 Comunicación y participación insuficientes.

En otro lugar hemos analizado con detalle la importancia, variedad y características de la comunicación en el acto didáctico (FERNÁNDEZ DEL CAMPO, 1997). Esquemáticamente, y como tendencia ideal:

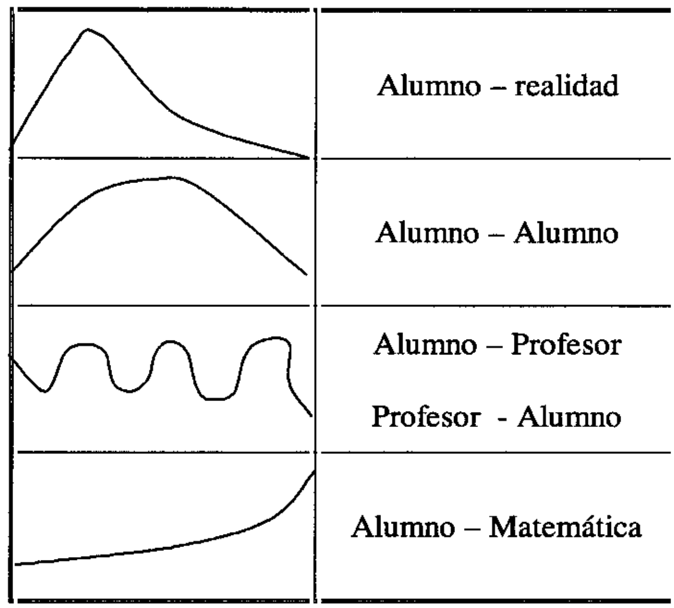


- Comunicación Alumno-profesor y Profesor-Grupo. Deseable como bidireccional y de intensidad decreciente en el transcurso de la sesión. Median todos los lenguajes, con preponderancia del oral, actitudinal y gestual.

- Comunicación Alumno-Alumno y Alumno-Grupo. Con un perfil de intensidad sinusoidal o irregular en el transcurso de la sesión; median todos los lenguajes, también en proporción varia.

- Comunicación Alumno-Matemática. Evidentemente, en sentido metafórico. Casi exclusivamente unidireccional, de intensidad creciente en el transcurso de la sesión. Manifestado con preferencia a través de los lenguajes simbólico y gráfico, sin olvidar la mediación del material manipulativo (lenguaje de comportamientos físicos).

Curvas de intensidad de diferentes corrientes de comunicación.



Cada uno de estos canales debe hallarse en servicio del o de los posteriores, modulándolos

Las insuficiencias comunicativas conducen a la insensibilidad o inadecuación de respuesta, con todas sus consecuencias de superficialidad y atención dispersa.

Los excesos en la emisión de mensajes Profesor-Alumno o Profesor-Grupo (*clase expositiva*, bajo no importa qué formas de lenguaje) generan dependencia, falta de iniciativa y escasa participación, actitud pasiva. Las perturbaciones provenientes de la comunicación Alumno-Alumno y Alumno-Grupo se producen más bien por disarmonías o desórdenes, no por intensidad o frecuencia de mensajes.

La participación puede entenderse tanto en el aspecto formal de intervención en las tareas de grupo o seguimiento del itinerario didáctico, como en el más profundo de *participación en los logros matemáticos*. Para que la psicodidáctica del cálculo no sea, exclusivamente, una enseñanza, una actuación desde fuera impuesta por el profesor, más que un proceso de construcción del propio alumno. (LUCEÑO, 1993, 144).

Claro es que esta segunda acepción implica un planteamiento del itinerario didáctico como auténtica *investigación*; o, cuanto menos, como *investigación dirigida*. Es decir: con aplicación de estrategias didácticas heurísticas.

La apropiación de resultados matemáticos es tanto más eficaz cuanto éstos conllevan tintes de *descubrimiento*; sobre todo, de *descubrimiento por el propio alumno*. Se establece entonces una relación de aprecio -de *paternidad científica*- que se asienta como *cosa propia* desde el primer momento. El conocimiento que se valora por su significación no es el conocimiento transmitido, sino el conocimiento producido por el que está en situación de aprender. (PUIG y CERDÁN, 1988, 20).

> Los niños de enseñanza primaria que se sienten orgullosos y excitados por sus invenciones no necesitan ninguna recompensa artificial. (...) Tratar de manipular el razonamiento de los niños con recompensas tampoco cambia el hecho de que algo tenga o no sentido para ellos. (KAMII, 1995, 74-75).

Es el mejor antídoto contra la desmotivación. Aunque de efecto limitado, revive por simple evocación. Se fomenta mediante los grupos de estímulos "IV", "VIII", "IX", "XI" y "XIV.

Poner al alcance del alumno ciego la información que se está produciendo por los distintos emisores del aula, resuelve uno de los dos aspectos de la comunicación: recepción de mensajes. Pero la comunicación es -debe ser- bidireccional: junto con la recepción, la emisión. Es decir: debe asegurarse la posibilidad de que el alumno con déficit visual exprese sus ideas, contribuyendo también eficazmente a las tareas de grupo.

Esto implica, en primer lugar, un dominio de las técnicas expresivas en los diferentes lenguajes; lo que también es necesario para el alumno vidente. Pero cuando falta la visión se precisa algo más: mayor destreza manipulativa y uso adecuado del instrumental específico (piénsese, por ejemplo, en el dibujo sobre la *lámina de caucho*, la *máquina Perkins*, etc.), y una mayor capacidad expresiva y reconstructora para *traducir* descriptivamente productos personales (dictado de expresiones simbólicas tinta-Braille y Braille-tinta, manipulaciones y gestuaciones vidente-ciego y ciego-vidente, etc.). Todo ello, con apenas posibilidad de contrastación; de autoevaluación, por consiguiente.

7 Exactitud, rigidez e intransigencia.

Las Matemáticas son exactas. Es muy discutible: ¿habrá que negar el valor matemático a la Teoría de Errores, e incluso al Análisis? ¿Es que no son matemáticos los cálculos por aproximación, el tanteo, la estimación? En todo caso: será exacta *la Aritmética de números enteros*; y, para eso, bajo una cierta concepción.

Al alumno no le desmoraliza ni le desmotiva la exactitud, sino sus errores reiterados: la exactitud inalcanzada y quizás inalcanzable.

Al alumno no le repugna *lo exacto*, sino *lo rígido*: las *vías únicas*, que impiden cualquier posibilidad de originalidad, de iniciativa personal. Aun de forma inconsciente, el alumno percibe en la intransigencia en el método -etimológicamente: *camino hacia la meta*- y en las formas expresivas un cierto *encarcelamiento de la imaginación.*

Tal vez no haya nada tan demoledor como reprensiones del tenor: "*Así no: hay que hacerlo como se ha dicho, como te he enseñado, como lo hacemos en clase, como...*" Volver a intentarlo es síntoma de heroísmo -o masoquismo-; exigirlo sistemáticamente, deformante y cruel en ocasiones.

La exactitud, el orden y sistematicidad son aspectos virtuosos de la actividad matemática; del quehacer del alumno, por tanto. Pero son Objetivos-tendencia, no requisitos ineludibles. El alumno debe descubrirlos como ventajosos, no temerlos como imposiciones superfluas o manías estériles. La exactitud, la sistematicidad y el orden matemáticos están al servicio del aprender, del que aprende, no son ritos idolátricos.

Los estímulos motivantes de los grupos "IX", "XI" y "XII" antes mencionados, de una parte, y ciertos rasgos de los grupos "II" y "VIII", de otra, pueden contribuir al desvanecimiento de estas falsas creencias.

8 Excesiva complejidad de la tarea

En un doble sentido: la diversidad de tareas parciales y su prolongación en el tiempo.

Con independencia de las destrezas que requieran las tareas parciales y el nivel alcanzado por el alumno para su realización, el continuo cambio de actividad, manteniendo la atención y la intención en un objetivo final, exige un esfuerzo suplementario. Se acelera así la aparición de la fatiga; cuando no desvía la atención, sea hacia objetos más placenteros y motivantes, sea hacia aspectos marginales de la tarea central -incapaz de mantener la mirada puesta en la meta-.

Otro tanto puede advertirse para una actividad que se alarga más allá de unos determinados límites de tiempo. Cabe asimilar la situación a una especie de *monotonía didáctica*, esta vez en el contenido matemático.

Ciertamente, estos dos aspectos, intensivo y extensivo de la complejidad en las tareas a desarrollar por el alumno, tienen unos márgenes de prudencia por exceso y por defecto, que son función evidente de la edad, nivel madurativo y formativo del alumno -de cada alumno-.

Los grupos de motivaciones II, de una parte, y X y XIII, por otra, pueden ayudar a regular el tamaño y variedad intrínseca de los itinerarios didácticos. Recordemos que se ha hablado más arriba de *equilibrio*, también para las motivaciones a aplicar.

Conviene también recordar que la unidad de objetivo puede tener carácter intencional, no explícito inicialmente para el alumno, sí para el profesor. Con esta argucia didáctica, las *tareas parciales* pueden tomar la apariencia de itinerarios independientes, de longitud y variedad adecuadas, más fácilmente controlables. El cultivo de los grupos de motivaciones X y XIII antes aludidos generarán el *hilo conductor* o unidad última perseguida.

La falta de visión exige, por lo general, un ritmo de trabajo más lento. Por dos razones:

- Mayor complejidad -y consiguiente lentitud- de la exploración y percepción háptica o del resto visual, en su caso.

- Mayor lentitud de los medios instrumentales empleados (Sistema Braille, *lámina de caucho*; empleo de ayudas ópticas, tamaño de los caracteres y tipo de trazo, cuando la visión es deficiente).

Se acentúa, sin duda, el riesgo de fatiga física. Pero crece especialmente la demanda atencional -simultanear tareas expresivas y de participación en la tarea de grupo- y el esfuerzo por simplificar la expresión de resultados, a fin de reducir el trabajo con los útiles propios.

Por consiguiente, la tarea de aprendizaje se complejiza para el alumno con dificultades visuales, con independencia de la actividad o de su objeto matemático. La primera se resuelve por vía de destrezas del alumno, pero tiene un límite de complejidad mínima inevitable. La aminoración en la complejidad global deberá hacerse, pues, a costa de reducir el tamaño y alcance de la actividad, si no quiere mermarse la eficacia formativa matemática (véase: FERNÁNDEZ DEL CAMPO, 1996).

Consideraciones éstas que también deben tenerse en cuenta a propósito del punto siguiente.

9 Sensación de prisa.

El ritmo excesivamente lento puede, en efecto, generar tedio. Pero éste desaparece en cuanto se reanuda una marcha vigorosa. Sin embargo, *las prisas enervan* y engendran desasosiego.

La precipitación puede dificultar una comprensión profunda de conceptos y técnicas, o impedir su fijación adecuada, reificativa y duradera. Es incompatible con la práctica totalidad de los estímulos motivacionales.

La *sensación de prisa* es un estado de ánimo, un ambiente de trabajo, transmitido tal vez de forma no constatable. Y sólo apreciable subjetivamente: alumnos distintos, reaccionan de forma diferente ante el mismo ritmo.

Con un único alumno -*enseñanza individualizada*, en sentido estricto-, una adecuada comunicación Alumno-Profesor -sobre todo: una aguda receptividad por parte del segundo- puede ser suficiente para atajar de inmediato los atisbos de desmotivación por esta causa. Basta acomodar el ritmo en forma tal que los tiempos de reposo, suave avance o sana dispersión se alternen con los movimientos en profundidad y avance rápido, en la medida que lo reclamen las señales de fatiga, incomprensión, receptividad o confianza en los propios resultados por parte del alumno.

La actuación se hace tanto más compleja y difícil a medida que aumenta el número y heterogeneidad de los alumnos integrantes de un grupo. Es por ello que cobran especial relieve las tareas individualizadas y en pequeño grupo, convenientemente orientadas y estimuladas. Y aunque parezca una herejía pedagógica, los pequeños grupos homogéneos -en especial, respecto del ritmo de trabajo- resultan ser los más eficaces.

> La enseñanza se hará dinámica y se utilizarán todos los medios manipulativos, experienciales y gráficos de forma paralela a los procesos operatorios numéricos, lo que no supone un retraso en las adquisiciones, sino, por el contrario, un avance seguro y más consistente. (FERNÁNDEZ, LLOPIS y DE PABLO, 1991, 202).

10 Otros factores emocionales

No pueden olvidarse los estados emocionales del alumno que nada o poco tienen que ver con la Matemática. Un acontecimiento personal o familiar sea agradable o, sobre todo, desagradable que le haya impresionado fuertemente incidirá de forma negativa en su rendimiento. Es natural que afloren en bloqueos y pérdidas continuas de atención.

En este mismo orden, conviene tener presentes las *fobias* y rechazos puramente personales. Sean en la relación Alumno-Profesor, sean en las relaciones en el seno de un grupo. Aparecen en Matemáticas como en cualquier otro área del curriculum, distorsionando la comunicación, enrareciendo el ambiente de trabajo y alimentando tensiones subjetivas que invaden y enturbian la imaginación, y aun el propio intelecto y la voluntad.

La solución difícilmente provendrá del enfoque didáctico o en los estímulos relacionados con la Matemática. Cae más bien en el ámbito de lo terapéutico; o, mejor, de la comunicación personal que devuelvan y alimenten el sosiego necesario para iniciar o reemprender la marcha de aprendizaje.

Es innegable que el alumno ciego o deficiente visual se halla expuesto a alteraciones emocionales relacionadas directamente con su minusvalía. Las manifestaciones más frecuentes de tales perturbaciones suelen ser:

- Renuncia a demandar en el aula la ayuda que facilitaría la comunicación o expresión necesarias. O su contraria: exigencia permanente e imperiosa de tal ayuda.

- Rechazo al empleo habitual del instrumental específico de trabajo. Sistema Braille, lámina de caucho para dibujo, etc.; o gafas especiales, catalejos, lupas y flexos, cuando el alumno cuenta con resto visual.

- Cierta repugnancia ante el material manipulable adaptado. Láminas en relieve, material pedagógico con marcas o rugosidades, macrotipos, etc.). O ante las adaptaciones que pudieran hacerse de actividades individualizadas o de grupo.

- Pasividad o inhibición en las actividades grupales. O su contraria: pretensión de ocupar el centro de atención.

- Renuncia –o insistencia excesiva- a la demanda de ayuda complementaria fuera del aula.

En su raíz, se encuentra una actitud de encubrimiento inconsciente de las limitaciones; que conlleva la falta de visión. Con otras palabras: la *no aceptación de la ceguera*; llámese *inadaptación*, *disgregación interior*, *leve esquizofrenia*.

Conviene, sin embargo, hacer algunas puntualizaciones a propósito del momento de aparición de la ceguera y comportamiento del entorno socio-familiar y escolar.

En primer lugar, no son equiparables las repercusiones provenientes de una pérdida reciente y súbita de la visión con las que se originan durante la fase de pérdida progresiva, si ésta es poco apreciable. Tampoco pueden compararse ninguno de estos estados anímicos, transitorios y vívidos, con los residuales que pudieran instalarse tras un período de tiempo de varios años desde que se produjo la ceguera en su grado definitivo. Forma de aparición de la ceguera y tiempo transcurrido desde que culminó el proceso de pérdida: dos variables de relieve.

La adaptación emocional y material a la nueva circunstancia exige de ordinario cambios de forma de vida, comportamientos sociales, aficiones, formas de relación social, comunicación, etc., que poco parecen tener que ver con la Matemática; y otros que pueden estar más relacionados con el trabajo de aula: reducción de la autonomía personal, nuevas formas de trabajo, útiles específicos, recurso a destrezas antes innecesarias, etc.

Asumir esta nueva situación y acomodarse al empleo de recursos distintos a los anteriormente empleados requiere ante todo aceptación y voluntad de lucha, valores y actitudes de superación, convicciones y estímulos externos, tiempo y esfuerzo. No cabe el diagnóstico generalizado, como tampoco la terapia única: las circunstancias personales y socio-familiares serán, sin duda, decisivas en esta etapa de aceptación de la ceguera y sus limitaciones. Pero exige un plazo y un gradiente de acomodación; más asequible si se trata de una pérdida continua, que hace posible, al mismo tiempo, el aprovechamiento del remanente visual.

Se apunta así un segundo aspecto, aún más importante: la colaboración familiar y del entorno social, del que el centro educativo es parte esencial en la edad escolar. Aunque los estímulos puedan parecer meramente externos, son interiorizables con facilidad, merced a los lazos afectivos que los sustentan. Están muy por encima, en su valor rehabilitador emocional, de las ayudas de orden técnico (médico/oftalmólogo, psicólogo, asistente social, rehabilitadores profesionales, etc.).

En las personas del entorno, dos actitudes gozan de eficacia probada: la naturalidad y la exigencia. Si cambian las circunstancias, la persona queda intacta en sus relaciones familiares, *donde se aprecia a la persona "por lo que es, no por lo que tiene"*. Tampoco deberían verse afectadas las relaciones profundas de amistad, aunque la disminución de autonomía o alteración de aficiones o hábitos atenten contra su continuidad; algo que, si bien puede apuntalarse en el ámbito puramente escolar, se resiente de ordinario una vez finalizada la jornada de clases, máxime en los niveles inferiores de enseñanza.

El profesor, en su papel directivo, puede encauzar las actividades de forma que favorezcan el mantenimiento y cultivo de estas relaciones sociales *a propósito de la Matemática*. Y debe, sobre todo, ejercitar las mencionadas *naturalidad* y *exigencia* sin aparentes concesiones (otra forma de la *naturalidad*), que fragüen en ese alumno la convicción de estar siendo tratado *como uno más*, de *ser uno más*; aceptándose y siendo aceptado *con sus limitaciones*.

Conviene tener presente el riesgo de *superprotección*, como principal enemigo del desarrollo personal en cualquier minusvalía: paraliza el proceso de asunción de ésta y el desarrollo de capacidades subsidiarias. Por ello mismo, tiene mayor trascendencia la actuación del entorno socio-familiar y escolar en los momentos iniciales de la pérdida -o en la fase misma de pérdida- que las reacciones *a posteriori*, cuando quizás ya hayan cristalizado en actitudes irreductibles, de difícil *tratamiento*.

En tercer lugar, la edad del alumno. Recordemos que se está hablando de la enseñanza-aprendizaje de la Aritmética; debemos situarnos, por tanto, en la Escuela Infantil o Primaria.

A menor edad, menor consciencia de las repercusiones de la pérdida sobrevenida de visión. Y menor posibilidad de ayuda eficaz entre compañeros -excepto la *naturalidad*-, y mayor riesgo de quebranto emocional en el trato cotidiano: es sabida la espontánea e inconsciente crueldad infantil. Aspectos por los que deberá velarse, pero a sabiendas que los efectos son siempre limitados en el tiempo: tal como se causa la herida - y salvo que se reitere-, cicatriza en pocas horas o días.

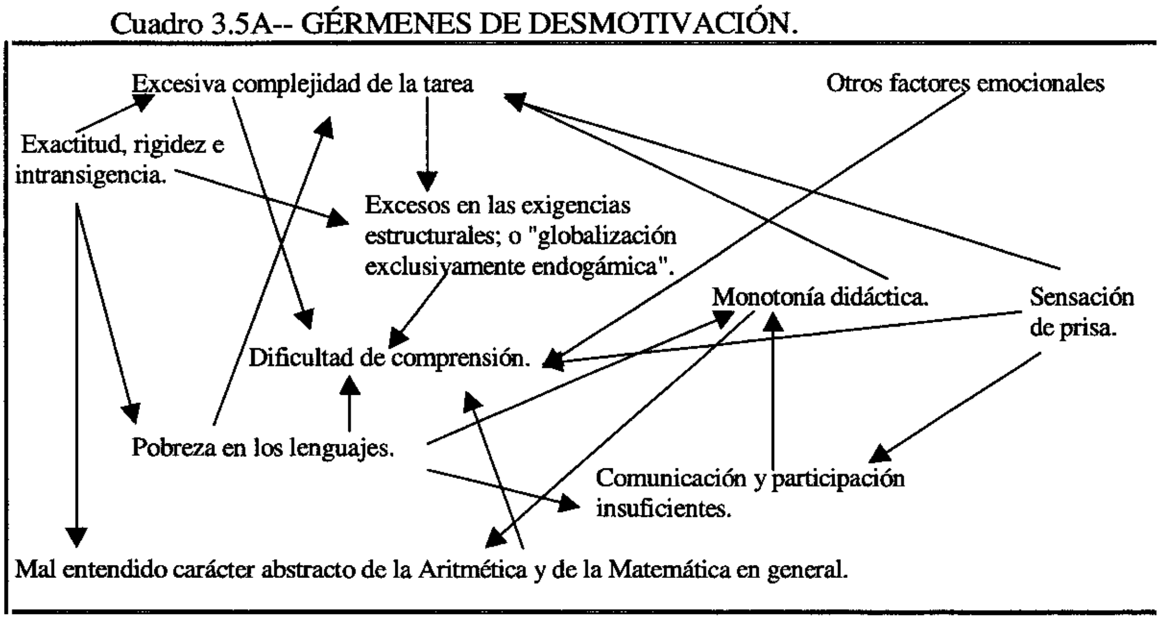
Por último, recordar que los Servicios de Orientación de los Centros y los especialistas externos pueden cooperar eficazmente en la superación de los trastornos afectivos derivados de la pérdida o falta de visión, incidiendo en el proceso rehabilitador o de desarrollo. Pero no se tratará tanto de una acción directa sobre el alumno, como mediante la orientación y asesoramiento a quienes más habitualmente conviven con él: familia, compañeros de clase, profesores, etc.

Existen, sin embargo, dos vías de actuación directa para esta acción rehabilitadora externa: el *profesor especialista*, a quien corresponderá, en buena medida, el adiestramiento en el manejo del instrumental específico, técnicas de trabajo, orientación para el desarrollo de destrezas, etc. Y el contacto con otros alumnos deficientes visuales -trato entre iguales-, con los que pueda compartir tanto inquietudes como actitudes, transmitirse experiencias, consultar problemas y soluciones.

Cuando la pérdida de visión se produjo tiempo atrás, los estados emocionales apenas si intervendrán como factores perturbadores del proceso de aprendizaje. Puede, no obstante, que se reaviven a propósito de un cambio de centro, de grupo de compañeros o incluso de profesor. Convendrá, pues, estar atento a sus manifestaciones iniciales.

Estas observaciones van dirigidas especialmente al caso del *alumno en Centro ordinario -educación en integración-*. Si los estudios los lleva a cabo en un Centro Especializado *-Educación Especial de Ciegos-*, como los que en España regenta la O.N.C.E., la formación y habituación del personal docente y técnico facilita *a radice* la tarea, junto a producirse de forma permanente el contacto con Profesores Especialistas -todos los Profesores pueden en verdad calificarse de *Especialistas*- y hallarse el conjunto de compañeros en análoga situación.

Cuadro 3.5A-- GÉRMENES DE DESMOTIVACIÓN.



Cuadro 3.5B.- Motivación y desmotivación en Matemática.

- La Matemática como elemento esencial de comunicación. - La Matemática, herramienta potente. - Actividad fascinante. - Trabajar de modo sistemático.	- Mal entendido carácter abstracto de la Aritmética y de la Matemática en general.
- Variedad en las actividades. - La Matemática como elemento esencial de comunicación. - La Matemática, herramienta potente - Actividad fascinante. - Fomentar la imaginación, iniciativa y flexibilidad de la mente.	- Excesos en las exigencias estructurales; o "globalización exclusivamente endogámica".
- Atractivo y riqueza de estímulos sensibles. - Sencillez física de las tareas. - Variedad en las actividades. - La Matemática como elemento esencial de comunicación.	- Monotonía didáctica.
- Atractivo y riqueza de estímulos sensibles. - Variedad en las actividades. - La Matemática como elemento esencial de comunicación. - Fomentar la imaginación, iniciativa y flexibilidad de la mente. - Trabajar cooperativamente.	- Pobreza en los lenguajes.
- Variedad en las actividades. - Actividad fascinante. - Fomentar la imaginación, iniciativa y flexibilidad de la mente. - Trabajar independientemente. - Conseguir la confianza del alumno en sus habilidades numéricas.	- Comunicación y participación insuficientes.
- Sencillez física de las tareas. - Actividad fascinante. - Fomentar la imaginación, iniciativa y flexibilidad de la mente. - Trabajar independientemente. - Trabajar cooperativamente.	- Exactitud, rigidez e intransigencia.
- Sencillez física de las tareas. - Trabajar de modo sistemático. - Profundizar en el estudio de la matemática.	- Excesiva complejidad de la tarea

Nos hemos extendido en estas consideraciones. Se debe a que no es frecuente abordarlas en profundidad. Si alguna de ellas se menciona en la bibliografía -salvo muy raras excepciones-, es ocasional y aisladamente.

Obsérvese que apenas se hace referencia a la Aritmética o al Cálculo en particular. Pero nos han servido de guía en el diseño de los itinerarios didácticos que se propondrán en su momento.

4 LOS PROBLEMAS ARITMÉTICOS COMO "SITUACIONES DE PARTIDA" EN LOS PROCESOS DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

> Algunas personas piensan que la *resolución de problemas* es la esencia de las Matemáticas. Incluso hasta el punto de estimar que el *cuerpo de conocimientos* que otros juzgan como *Matemáticas*, es simplemente *la serie de instrumentos existentes para el proceso activo de la resolución de problemas.* (ORTON, 1990, 119).

Tradicionalmente, la resolución de problemas en la escuela se estimaba como medio para la consolidación de conocimientos y técnicas ya adquiridos; o como ocasión para demostrar esta adquisición en la aplicación a situaciones concretas, contextualizadas.

Pero este punto de vista ha cambiado radicalmente: La resolución de problemas como procedimiento tiene la finalidad de aprender matemáticas a partir de la investigación y también de aplicar y conectar las matemáticas que se conocen. (ALSINA y OTROS, 1996, 110). Enfoques que se extienden progresivamente a todos los niveles de enseñanza, también a los más elementales.

4.1 UN GIRO EN LA DIDÁCTICA DE LA ARITMÉTICA

Es preciso esperar al segundo tercio del siglo XX para encontrar los primeros esfuerzos sistemáticos por valorar la resolución de problemas como medio didáctico de adquisición y desarrollo de conocimiento. Su principal adalid sería G. POLYA (*Cómo plantear y resolver problemas*, 1945/1967). En España, no puede olvidarse la labor inestimable de P. PUIG ADAM (*Didáctica Matemática Eurística*). Lo que no significa que desde tiempo inmemorial hubiera maestros y profesores que desarrollaran métodos esencialmente heurísticos y mayéuticos, que se sirvieran de problemas como puntos de partida.

Sería a finales de los años 70 que el interés por este dominio, a la par que enfoque didáctico, se abriera camino de forma decidida. Concurren para ello diversas causas:

- Creciente influjo del pensamiento de POLYA en las generaciones de profesores de Matemáticas de Estados Unidos, agrupados mayoritariamente en el *National Council of the Mathematics' Teachers*. Y la traducción de sus obras a numerosos idiomas.

- Tendencia a la baja de las corrientes conductistas en Psicología, junto con alza de los planteamientos de corte cognitivista de las escuelas del ámbito alemán y norteamericano; que podemos situar en el transcurso de los años 70 y comienzos de los 80. Aparecen conceptos tales como *pensamiento divergente*, *metacognición*, etc., y se confiere importancia creciente a la motivación, iniciativa y creatividad.

- Reacción ante el *fracaso de la Matemática Moderna* (véase: KLINE, 1968), evidenciado por el descenso en destrezas aritméticas, y denunciado en todos los foros a finales de los años 70.

- Cristalización de la Didáctica de la Matemática y de la investigación en educación matemática como campos de estudio específico. Que irrumpirán con fuerza y aceptación universal a mediados de los años 70 en la mayoría de los países occidentales, llegando a su reconocimiento como disciplinas de rango universitario en el discurrir de los 80.

- Incidencia de la *revolución tecnológica*; de modo significativo, el empleo generalizado de calculadoras y ordenadores por los escolares, aunque con apenas reflejo en la propia institución escolar y en el curriculum oficial. Que parece relegar los aspectos calculatorios -no sólo en Aritmética- al rincón de lo mecánico y rutinario, propio de las máquinas; con valoración creciente de las estrategias aplicables en la resolución de problemas, lejana todavía la fiabilidad de los medios automáticos para la interpretación semántica.

La razón de ser de la enseñanza, al menos de la enseñanza institucional, es que *el alumno aprenda cosas*; y, a ser posible, *cosas útiles*. Sean conceptos y términos, técnicas y estrategias, adquiera destrezas, actitudes consideradas como *positivas*, buenas disposiciones, enfoques, valores... La razón de ser de la Didáctica, es emplazar al alumno en condiciones en las que esa tarea le resulte asequible. De la Metodología, orientar la labor del profesor en una dirección de optimización de resultados.

En el quehacer de aula, la Metodología y la Didáctica aplicadas responden esencialmente a dos concepciones de las relaciones entre lo institucional y lo contextual: proporcionar al alumno algo complementario y distinto de lo que se supone adquiere por ósmosis del contexto familiar y social o fruto de un teórico progreso *natural* y *espontáneo*-, o explotar aptitudes, destrezas y conocimientos previos. Admitamos que los objetivos finales y procesuales coinciden: fomentar un desarrollo intencional y sistemático.

Como toda simplificación, es grosera y criticable. El alumno llega a la escuela -y no sólo al inicio: cada día- con un bagaje cultural que sustentará su aprendizaje de aula; aunque exclusivamente fuera la lengua materna, que actuará como *metalenguaje*. Allí adquirirá, cuanto menos, formulaciones, léxico y organización del conocimiento, que difícilmente puede esperarse alcanzara por sí o recibiera de su contexto socio-familiar. Pero las consecuencias de una y otra concepción son trascendentes.

Si se confía preferentemente en las aportaciones escolares, se origina una tendencia a proporcionar al alumno de forma gratuita elementos y herramientas, caminos y órdenes; medios y formas de trabajo. El tiempo acucia, y no puede esperarse al descubrimiento *ex novo*; a lo sumo, se dan indicaciones de cómo y dónde encontrar los objetos de aprendizaje, facilitar esa adquisición -hacer fácil: con menos esfuerzo y *pérdida de tiempo*-. La originalidad está en la forma, en la organización, en el ritmo. Se ofrecen -se *exponen*- logros ajenos, con la esperanza de que el alumno se los apropie.

En el segundo caso, se procura poner al alumno en situación de verdadero *descubrimiento*. Los logros son suyos en cuanto aparecen; con independencia de ser el primer mortal conocido que los haya alcanzado. Importa muy mucho la sensación de *ser protagonista* del quehacer educativo, que puede estar traspasado por visos de auténtica aventura. Se cultiva el *conflicto psicológico*, la pregunta sistemática, la actitud abierta e inquisitiva: se pregunta al alumno, para que se plantee preguntas capaces de ser respondidas con los medios por él disponibles, y para que *aprenda* a plantearse cuestiones. Lo que otros han logrado, ¿por qué no él? Aunque suponga tiempo y esfuerzos difíciles de prever en un principio.

Estas dos actitudes, polarizadas en la transmisión o en el descubrimiento, son conocidas desde finales de los años 70 como *racionalidades o teorías del curriculum*: *transmisora-reproductora*, la primera, y de carácter *práctico*, *socio-práctico* y a un *socio-crítico*, la segunda.(Véase CARR Y KEMIS 1985). En nuestro análisis, bascularían entre una desigual confianza en las posibilidades formativas de la escuela institucional y las capacidades del alumno para ser protagonista de su propia formación, sea individual o colectivamente, contando con el influjo de su entorno natural. Lo que no desmerece del papel del profesor, responsable indiscutible de la actividad en el aula y del itinerario educativo en su globalidad.

Parece como si, en última instancia, el quehacer pedagógico pudiera reducirse a dos formas básicas: una *de exposición* -unidireccional-; y otra *de investigación*. La primera, basada en el ejercicio de *afirmar* y *confirmar*; la segunda, en el de *interrogar*. En Matemáticas, se manifiestan mucho más claramente.

Un dúo Metodología-Didáctica de tenor expositivo, muestra al alumno contenidos, técnicas, formas de razonar y resolver situaciones. Procura ponerlas a su alcance, hacérselas comprensibles y aplicables. Se le proporciona el *cómo es* y *cómo se hace*, de la forma supuestamente más asequible, segura, rápida, económica. De él se espera esfuerzo por seguir el discurso y por asimilar resultados; sin duda, algo más que memorizar.

Sin embargo, a pesar del espejismo mecanicista, el aprendizaje no es gratuito: el alumno debe poner un esfuerzo de comprensión y adquirir destrezas, que, por su carácter eminentemente abstracto -estamos hablando de Matemática- exigen un recurso a la intelección activa; una apropiación más o menos costosa.

Se corre así el riesgo de desperdiciar el bagaje formativo anterior, mostrado aun por los niños más pequeños: capacidad para resolver sencillos problemas aritméticos de tipo verbal -incluso antes de la toma de contacto con su expresión formal-, y una amplia y original variedad de estrategias de resolución -y que no suelen corresponderse con las que se enseñan en la escuela (MAZA, 1989, 18). Ignorando también las aportaciones matemáticas de orden socio-cultural, estudiadas hoy por la llamada *Etnomatemática*.

Un enfoque *de investigación* implica un tanto de Metodología mayéutica -método socrático- y Didáctica heurística -descubrimiento dirigido en mayor o menor medida, según pericia del profesor y hábitos en el alumno. Se le pregunta, primero, reclamando una respuesta a la que pueda llegar *por sí mismo*; con la ejercitación, también se confía en que sepa *plantear la pregunta*. Una y otra, condicionadas por la situación de enseñanza-aprendizaje presentada. Con la práctica -discurrir del curriculum-, las propias situaciones son configuradas por el alumno a partir de elementos mínimos -material, información contextual, necesidades próximas-.

En consecuencia, los problemas y situaciones problemáticas pasan de ser una prueba comprobatoria del nivel formativo a convertirse en el verdadero *punto de partida* y *nicho ecológico* de generación del conocimiento (nos resistimos a hablar de *construcción* o de *creación*). Es más: con una formación conveniente, la misma pedagogía expositiva puede ser aprovechada por el sujeto como situación problemática, anticipándose al discurso o criticando su adecuación y posibilidades; aunque hurtándosele los estadios más creativos y fructíferos del proceso.

En esta línea, se va desarrollando una atención especial a aquellos aspectos de la resolución de problemas que tienen que ver con la producción de conocimientos significativos para el que aprende. Esto tiene una implicación curricular clara: el núcleo del currículo no viene determinado por los conocimientos que hay que transmitir, sino por los procesos de producción de conocimiento. La atención es para el proceso, no para los conocimientos (...). La tarea de resolver problemas es una tarea privilegiada para el aprendizaje. (PUIG y CERDÁN, 1988, 20).

> La respuesta que ha dado la Educación Matemática en los años ochenta a esta cuestión es la de que un alumno entrará en actividad cuando se enfrente a un problema. Este no es entendido de una forma rutinaria, claro está. El problema es un deseo de pasar de una situación a otra y las acciones que se ejercen para ello. En un problema existe una situación actual, una situación a la que se quiere llegar y un motivo para llegar a ella. La resolución de un problema consiste, entonces, en las acciones que se ejercen para el paso de una situación a otra. (MAZA, 1990A, 19).

Simultáneamente, se presta más interés a los aspectos lingüísticos y lógicos del proceso de respuesta ante los problemas y *situaciones conflictivas* o *problemáticas*, esperando hallar indicios sobre los procesos psicológicos de aprendizaje de la Matemática. Desconfiando, tal vez, de la experimentación basada en pruebas aplicadas en contextos artificiosos, y confiando más en las actividades ordinarias de aula.

En concordancia con estas inquietudes, se busca diversificar las situaciones de enseñanza-aprendizaje. Las *situaciones problemáticas* amplían su horizonte de posibilidades educativas. De los tradicionales *problemas* con enunciado claro y completo, se pasa a formulaciones de variada presentación y objeto aún más dispar. De la mera resolución, ocasión para mostrar habilidades adquiridas, pasan a ser *situaciones de partida* del itinerario didáctico.

Al interesarse por el proceso más que por el resultado, estos nuevos *problemas* son tan sólo el comienzo o pretexto del camino a emprender. Se pretende así desterrar la actitud pasiva en el alumno, buscando asegurar una participación permanente en el quehacer matemático del aula. La clase expositiva se juzga entonces como un caso particularmente pobre de actividad didáctica.

No sería, pues, arriesgado referirse a una *Didáctica de la Matemática basada en las situaciones problemáticas*. Incluso ha habido intentos de diseñar curricula con referencia en los problemas (BURNES, 1987); aunque parece más oportuno hablar de *estrategias globales*, *locales* y *puntuales* (PUIG y CERDÁN, 1988, 182), adaptables a las características del curriculum oficial y de los alumnos destinatarios.

De forma contundente: La enseñanza de una operación, por tanto, debe comenzar con problemas, seguir con la interpretación de problemas y culminar con la aplicación de las técnicas descubiertas a la resolución de problemas. (MAZA, 1989, 18).

4.2 AMPLIANDO EL CONCEPTO DE "PROBLEMA"

Por *problema* podemos entender cuestión o dificultad que hay que aclarar o resolver. Deberíamos recuperar parte de este significado para la actividad de resolución de problemas en la escuela. (ALSINA y OTROS, 1996, 110).

En su concepto tradicional, un *problema* se reconocía inmediatamente: una parte informativa, conteniendo unos datos numéricos, y una pregunta clara y concreta; ambas, bien definidas y ordenadas. Otra cosa habría sido tomada como una aberración. Como aberrante hubiera sido el enunciado de problemas sin solución, pluralidad no advertida de soluciones, cuestión equívoca o vaga.: un problema matemático, para merecer tal nombre, debía tener solución única, o avisar -y reclamar- un conjunto definido de ellas.

Pero, ¿es que no puede aprovecharse educativamente una simple información, y provocar al alumno a que plantee al respecto? ¿Y discernir si estas cuestiones son o no respondibles con la información dada? ¿Y el analizar si tal información es redundante, coherente, adecuada?

Un problema, ¿debe plantearse necesariamente en términos de lengua materna? ¿Acaso los dibujos e ilustraciones no pueden considerarse como parte esencial en una proposición o enunciado? ¿Pueden darse situaciones problemáticas *sin palabras*?

¿No es un buen ejercicio *buscar un enunciado para una solución*? ¿Y *cambiar los datos numéricos*? ¿Y *cambiar los agentes protagonistas*?

¿Es que todos los problemas y ejercicios aritméticos deben incluir datos numéricos?

¿No se estará estrechando involuntariamente el campo de los problemas, de la Aritmética, de la Matemática?

Al alumno se le considera un *resolutor en potencia* [1]. Siguiendo la concepción tradicional, se esperaba de él una respuesta exacta, que satisficiera la cuestión en los términos en que ésta fuera planteada.

¿Y si el *problema* no tuviera *solución*? ¿O si no hubiera tal cuestión?

Estamos hablando de Matemática; de una actividad intelectual, por tanto. Si la respuesta esperada fuera mecánica, automática, se confundiría al alumno/resolutor con una máquina. La respuesta debiera ser reflexiva, exigir un trabajo intelectual de comprensión de la información recibida, cuestión planteada o planteable, vías y formas de respuesta, etc.

---

[1] En este trabajo se entiende por *resolutor a quien corresponde hallar la solución a un problema*. El término no está oficialmente aceptado en español (véase: *Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española*), y comporta un cierto tinte de *automático* o *mecánico*; sin embargo, es el corrientemente empleado en traducciones del inglés y en numerosas obras especializadas en español.

Términos idóneos podrían ser *solvente* o *solventador* -según que la cualidad se estimara en acto o potencia actualizable de inmediato-, pero que tienen otras connotaciones muy alejadas del campo de la Matemática.

En este mismo sentido, se emplean *resolutorio* y *resolutivo*, a propósito del *proceso de resolución* o *búsqueda y obtención de la solución*. De hecho, en el habla común parece imponerse el término *resolver* sobre *solucionar* o *solventar*.

La importancia del pensamiento se pone de manifiesto en toda actividad del ser humano. Para realizar cualquier acción que no sea vegetativa o refleja estamos obligados a pensar, a veces con detenimiento, para resolver una cuestión delicada; otras, rápidamente porque la actuación no se hace esperar, y en la mayoría de los casos simplemente pensar para resolver un problema de la vida práctica. Pero cuando más se obliga la mente es cuando se encuentra ante una tarea para la cual no se tienen hábitos y destrezas adquiridos. (CASTRO, RICO y CASTRO, 1996, 46).

Del resolutor/alumno, ante todo, se espera reflexión. Y una reflexión provocada por los estímulos e informaciones que configuran la situación planteada.

El resolutor siempre pretende obtener la solución. De paso, aprende cosas. La finalidad del profesor o del que ha hecho el desarrollo curricular dentro del que está inmersa la tarea, puede ser otra: no tanto que se encuentre la solución, como que se aprenda. El resolutor sólo se da cuenta de que ha aprendido después de haber realizado la tarea. (PUIG y CERDÁN, 1988, 23).

El *proceso* resolutorio puede decirse que es un acto creativo de pugna por un objetivo específico, basado en *el descubrimiento de nuevos modos de combinar las reglas existentes* -conocimiento-. (ORTON, 1990, 119). Pero esto implica una dimensión de compromiso personal con la tarea, una motivación; sea llamada a la curiosidad, a la cooperación desinteresada o a la competición, reclamo para la actividad -abandono de la inacción-: desafío, en cualquier caso.

"*¿Qué es un problema?*" -se interroga GLAESER; y se responde con la Enciclopedia Larrouse-: *"es una pregunta que es preciso responder por procedimientos científicos"*. Esta definición pone el acento sobre el contenido y el objeto del enunciado. Y olvida el compromiso del investigador, que supone un impulso de curiosidad, una movilización afectiva de la inteligencia: ¡Un problema es una aventura humana!. (GLAESER; 1973, 18)..

Este interés despertado por superar una dificultad, moviliza -debe ser capaz de movilizar- todos los recursos disponibles: Cuando alguien tiene un problema lo lleva en la cabeza y le da vueltas sopesando posibles soluciones y valorando las que se obtienen. (ALSINA y OTROS, 1996, 110).

El concepto tradicional de *problema* se nos queda corto. A no ser que lo extendamos, hasta el punto de permitirnos incluir todas las posibilidades educativas que permitan convertirlo en *ocasión o situación de enseñanza-aprendizaje*, en su más amplia acepción.

Por *situación de enseñanza-aprendizaje*, en Matemática o en no importa qué área del curriculum, se entiende las circunstancias en las que se emplaza al alumno para iniciar a partir de ellas -tomando ocasión de ellas- un proceso educativo, determinado e intencional en principio.

En sentido amplio, no debiéramos circunscribirnos a las concretas coordenadas espacio-temporales de un momento en la clase de Matemáticas. Influyen también, quizás decisivamente, las aptitudes, conocimientos, destrezas y actitudes del alumno, y los contenidos curriculares próximos, de Matemática y de las otras áreas. Pero, o las soslayamos, o sería interminable, antes de avanzar en nuestro propósito descriptivo.

Para nosotros, una situación de partida en la clase de Matemáticas estará configurada por aquellas circunstancias concretas, capaces de atraer la atención del alumno y encaminarle hacia un objetivo predeterminado -de índole matemática-: el *principio de un camino previsto por el profesor*. De aquí la denominación: *punto de partida*.

Tiene, pues, ante todo un carácter de *estímulo externo*; que, una vez interiorizado, facilitará -debería facilitar- la puesta en funcionamiento de los *mecanismos* cognitivos y aptitudinales del alumno. Con objetivos predeterminados -al menos en sus rasgos esenciales-, y reclamando su participación voluntaria.

La condición de *externo* puede muy bien asimilarse a la de *sensible*. El espíritu de una Didáctica activa, de *comunicación y participación*, induce una gradación intensiva del lenguaje principal:

- La acción sobre material manipulable, con preferencia sobre la simple representación gráfico-geométrica; de ésta, sobre la lengua natural; la hablada sobre la escrita; la lengua natural por encima del lenguaje simbólico-matemático. Dando por supuesto que la lengua natural hablada actúa como *metalenguaje*, clarificando y concretando la situación.

- Para cada forma de lenguaje, se preferirá la ejecución o expresión autónoma sobre la simple observación; con mayores garantías de completitud e interiorización de los mensajes a recibir.

La manipulación de material es recomendable en la presentación de situaciones, pero no indispensable. Basta que la descripción o relato sea *evocador*, *incitante* a la manipulación gestual, de dibujo o escrita, o a su representación interior, cuanto menos.

Toda *situación de hecho* podría ser considerada situación de partida, en la enseñanza de la Matemática; aunque en relación a un concepto o problema matemático indeterminado.

Cierto que cualquier situación, por formal que parezca, puede ser contemplada en sus partes por no importa quién con mentalidad en actitud al menos, matemática. En la clase, toda *situación de hecho* puede convertirse en *situación de partida*, -de enseñanza-aprendizaje-. Pero, ¿de partida hacia dónde?.

Un objeto o situación expresado en cualquiera de los lenguajes, presente en los sentidos o representado interiormente, puede ser estudiado en forma matemática y extraer de él un concepto o una relación. Pero habría que observarlo con mentalidad matemática, estudiando el comportamiento de sus partes reales o de razón, intentando descubrir alguna parte encubierta o denunciada por otras, etc. En cualquier objeto o situación pueden estudiarse las relaciones que ligan sus partes, su cantidad.

Iniciar este estudio requiere algo más que contemplar un objeto o grupo de objetos, fijos o móviles. La simple observación de objetos materiales no basta para hacer Matemática.

Hay dos formas muy diferentes de experiencias ligadas a las acciones materiales de los sujetos. Hay, en primer lugar, experiencias físicas, en el sentido amplio de la palabra, consistentes en actuar sobre los objetos a fin de descubrir propiedades que éstos ya poseían antes de su manipulación por el sujeto; como por ejemplo, la comparación de pesos, densidades, etc. Pero existen también, cosa generalmente ignorada, lo que podríamos llamar experiencias lógico-matemáticas, debido a que la información no se obtiene a partir de los objetos particulares en tanto que objetos físicos, sino a partir de las propias acciones o, más exactamente, de sus coordinaciones, que el sujeto ejerce sobre ellos; lo que no es precisamente lo mismo. (PIAGET; 1978, 221). Es que toda acción que determine partes supone movimiento, externo o simulado interiormente.

Entendemos, no obstante, que ni siquiera las *experiencias lógico-matemáticas* son suficientes para hacer Matemática a partir de una *situación de hecho*, estática o dinámica. PIAGET considera que en el acto de contemplación imaginativa hay una reproducción de las acciones psicomotrices que originaron la percepción. Omite, tal vez, la necesidad de un componente intencional; o lo incluye en la propia naturaleza de las *experiencias lógico-matemáticas*, que no serían tales sin él -quedarían en mera *observación pasiva*-.

Para estudiar una *situación de hecho* en sus partes hay que *querer hacerlo*. No es una perogrullada. Para estudiar algo hay que preguntarse por ese algo; y para estudiarlo matemáticamente hay que formularse preguntas de índole matemática: *¿De qué partes consta? ¿Cómo se distribuyen espacial y temporalmente? ¿Por qué así, y no de otra forma? ¿Hay cambios? ¿Qué les ocurre a estos movimientos o cambios si los consideramos separadamente? ¿Y en conjunto?...* Es el salto del cómo al por qué, lugar común en la ciencia moderna (que diría POLYA, atribuyendo a GALILEO el primer paso en este sentido).

Una *situación de hecho* cualquiera pasa a ser, intencionalmente, una situación de partida -en Matemática o en otra ciencia-, relativa al comportamiento de sus partes. Una situación de partida comprende un *problema matemático*.

Pero no toda situación de partida es útil ni conveniente en la Enseñanza. Al menos en la Enseñanza Elemental y Media. Los programas están ahí; hay que cubrirlos, por poco que nos satisfagan. Los objetivos hay que alcanzarlos; los alumnos tienen que llegar a dominar técnicas y conceptos prefijados. La principal dificultad pedagógica, a nuestro juicio, estriba en la disponibilidad de series completas de *situaciones de partida adecuadas*.

Cualquiera que haya tratado con niños o adolescentes sabe que tienen la curiosidad a flor de piel. Si se va debilitando paulatinamente es por causa de las *frustraciones* sucesivas -que diríamos hoy-: por curiosidad insatisfecha. Basta con provocarla con una leve indicación, para que el alumno ponga en juego todos sus recursos; acepta inmediatamente el reto a desentrañar la situación que tiene ante él, y le pregunta -se pregunta- "¿qué está ocurriendo allí?."

Sin embargo, los efectos de una formación inadecuada pueden llegar a ser nefastos. Para muchos niños, la palabra "problema" está asociada a la idea de número y no a la idea de búsqueda; para ellos, resolverlo no es reflexionar, sino combinar números sin saber cómo ni por qué, tan sólo porque es una costumbre que hay que seguir. (JAULIN-MANNONI, 1980A, 53).

No es extraño que esta enteca concepción de *problema* también afecte a no pocos profesores. Les parece imprescindible que exista un enunciado, con unos datos numéricos, suficientes y no contradictorios, y una pregunta bien formulada.

Conviene, pues, liberarse de las limitaciones que puedan empobrecer *a priori* los procesos de enseñanza-aprendizaje de la Aritmética. Entendemos, que en pluralidad de direcciones:

1º) Cabe hablar de *problemas aritméticos*, aunque no figuren ni se exijan valores numéricos.

Desde el *"Tenía un rotulador rojo, otro verde y otro azul, y un lápiz. Le he prestado el rotulador verde a Quico y el lápiz no sé qué he hecho de él. ¿Qué me queda ahora?"*; hasta *Inventa una historia con una pregunta, que tenga que ver con: 3+5=8* (o con un grabado o gráfico de puntos).

2º) Los *enunciados* o *situaciones presentadas* pueden ser incompletas, equívocas o con datos insuficientes, redundantes o con informaciones superfluas, incorrectas o con datos contradictorios, etc.

> Sí se sigue la tradición o se tiene detrás una teoría del aprendizaje conductista en la que el niño aprende por imitación de la conducta del profesor a través de una secuencia de tareas jerárquicamente estructuradas, prevalecerá la idea de no exponer a los alumnos al riesgo de caer en el error y ni siquiera cabrá plantearse más enunciados de problemas que aquellos que tengan un conjunto de datos suficiente.
>
> Ahora bien, si uno piensa que una de las tareas de la resolución de problemas consiste precisamente en distinguir entre lo razonable y lo absurdo, lo lógico y lo ilógico, entonces hay razones para plantearse el uso de problemas con todos los tipos de datos. (PUIG y CERDÁN, 1988, 198-199).

Es decir: uno de los objetivos en un problema puede ser el de *despertar la actitud crítica ante los enunciados o relatos, y mover a la búsqueda o clarificación de la información esencial.*

3º) La cuestión a plantear puede ser formulada explícitamente por el profesor, con claridad o confusión; o suscitar en los alumnos su planteamiento y formulación.

Un montón de fichas y dos cubiletes o vasos pueden bastar para *plantear un problema*: "*¿Qué puedo hacer?...*" La fórmula: "*Inventa una historia para 3x5=15* puede también presentarse como: *Elige el problema que se resuelva con esa operación*", a elegir entre un conjunto de respuestas.

> Parece estar comprobado que los buenos resolutores de problemas muestran habilidad para formular preguntas sobre una historia que se les ofrece y reformular problemas con distintos tipos de datos a partir de uno dado (KRUTETSKLI, 1976). Lo que también puede considerarse como un argumento favorable a la diversificación de enunciados, datos, posibilidad de solución, métodos resolutorios (cfr.: ALSINA y OTROS, 1996, 111).

La opción, como es lógico, estará en función del nivel de desarrollo de las capacidades del alumno o grupo de alumnos, ítems recientes del *curriculum en acción*, etc. Sin olvidar que hemos considerado la *variedad* como factor motivante, antídoto de la *monotonía*.

La curiosidad empuja a buscar apoyo en los propios conocimientos y en los ajenos. Basta *entreabrir la puerta* de comunicación con la realidad a través de un problema para que el alumno *intente abrirla de par en par*, así como las que dan acceso a la comunicación con el profesor y con los otros compañeros. Una *situación de partida*, un problema con presentación adecuada, desencadena la actividad toda en el alumno, generando la actitud propia del investigador.

Llámese *problema, situación problemática, situación de enseñanza-aprendizaje, situación de partida*. No discutamos por los nombres: lo que importa es la Didáctica empleada, la actitud que se fomente en el alumno. Existe una cierta vaguedad en torno a términos como "descubrimiento", "investigación" y "resolución de problemas", que realmente es intrascendente. Lo que en verdad cuenta, lo que ahora importa, es el espíritu de la educación activa frente a la pasiva, no la definición exacta de ciertas palabras en uso. (ORTON, 1990, 108).

Bueno será, no obstante, profundizar en la concepción, por vía de su manifestación multiforme y los comportamientos esperables en el alumno/resolutor/investigador.

4.3 TIPOLOGÍAS

Los problemas aritméticos en cuanto *situaciones de partida*, como cualquier objeto de estudio, se resisten a una clasificación cerrada. Según el aspecto a considerar se obtienen *tipos*, que, como se verá, tampoco establecen clasificaciones nítidas.

El primer intento de clasificación se debe a POLYA (1947); centrándose en problemas más bien de los niveles de Enseñanza Media, distingue entre *problemas de encontrar* y *problemas de probar*. Toma como referencia, sin duda, la cuestión planteada y la técnica de resolución a aplicar. Sin embargo, algunos enunciados no son fácil de encuadrar.

Según el grado de creatividad, BUTTS (1980) propone: ejercicios de reconocimiento, ejercicios algorítmicos, problemas de aplicación, problemas de búsqueda y situaciones problemáticas. Parece apuntar que el esfuerzo creativo preciso fuera función del nivel formativo del alumno.

La mayoría de los autores consideran la división en *problemas de una etapa* y *problemas de más de una etapa*, según sean precisas una o más operaciones aritméticas para alcanzar la solución. Una vez más, la forma de actuar del alumno -sobre todo en los niveles inferiores- puede dar al traste con esta clasificación: 5+7=5+5+2, 8+3=8+1+1+1, 6*3=6+6+6...

Así pues, en lugar de *clasificaciones* en sentido estricto -estamos tratando de Matemáticas, ¿no?-, deberíamos hablar de *tipologías*; término mucho más flexible, y abierto al juicio de quien realiza el estudio.

Las anteriores menciones sugieren, no obstante, algunos criterios de tipificación. Y las críticas, uno de carácter general: es sumamente difícil intentar encuadrar *a priori* un *problema* o *situación de partida* en uno u otro tipo, conforme a un criterio o aspecto, sin esperar a que el alumno realice su tarea. Es decir: apenas si es posible un análisis *a priori* del enunciado o presentación del problema aislado, de carácter *formal*. El análisis y tipificación *material* queda a merced de las circunstancias situacionales y curriculares, las respuestas de los alumnos y la intervención del profesor. Tomará, muy posiblemente, un valor estadístico, de aproximación.

La repercusión que cada uno de los tipos pudiera tener en el proceso de resolución se comentará a propósito de los diferentes aspectos de éste, en el próximo Capítulo. Asimismo, se harán entonces las observaciones pertinentes respecto del hecho que el alumno-resolutor pudiera padecer deficiencia visual.

(En aras de la brevedad, se prescinde de ejemplos.)

1 Según el lenguaje o forma de presentación

a) Pura: formulación oral o escrita (PAEV), situación gráfica, situación figurativa (grabados, viñetas, etc.), manipulación de material o de elementos corporales (dedos), expresión simbólica

b) Mixta. Salvo en el caso de los PAEV orales y los enunciados exclusivamente en lengua escrita, viñetas o ciertas dramatizaciones mudas, la mayoría de los problemas planteados bajo las restantes formas tienen carácter híbrido; sea como información esencial o como ilustración. Aunque es cierto que, por lo general, prevalecerá alguno de los lenguajes; es más: es imposible pretender un equilibrio pleno, que tampoco sería aconsejable conforme al nivel escolar. Pero hay que hacer una distinción importante.

En unos casos, los términos o expresiones en el que podríamos llamar *lenguaje secundario* -respecto del *dominante* o *principal*- son parte esencial del enunciado: sin ellos, se modificaría el propio contenido u objeto de la *situación problemática.* No admitirían una *traducción* fiel y clara al *lenguaje dominante*: son *irreducibles.* Es el caso de las instrucciones o preguntas formuladas sobre una situación gráfica, figurativa, manipulativa, etc.

En otros, tienen un carácter *ilustrativo,* redundante respecto del mensaje expresado en el *lenguaje principal,* con finalidad facilitadora de la comprensión: podrían suprimirse, sin merma de integridad informativa.

Cuadro 4.3A.- TIPOLOGÍAS DE SITUACIONES PROBLEMÁTICAS SEGÛN EL LENGUAJE O FORMA DE PRESENTACIÓN

- Pura:
  - Formulación oral (PAEV oral)
  - formulación escrita (PAEV escrito)
  - Situación gráfica (esquema, diagrama, etc.)
  - Situación figurativa (grabado, viñetas, etc.)
  - Manipulación de material
  - Expresión simbólica
- Mixta
  - irreducible o pertinente
  - reducible o redundante
  - binaria
  - ternaria
  - múltiple
  - con lenguaje dominante
    - oral
    - escrito
    - gráfico-geométrico
    - figurativo
    - manipulativo (con material)
    - simbólico
  - equilibrada

2 Según el contexto temático o escenario-marco

a) Descontextualizado. Ejercicios, expresiones simbólicas, esquemas, etc.

b) Real no familiar.

c) Familiar o próximo a la experiencia del alumno.

d) Fantástico (o no convencional).

Si bien el criterio de *proximidad* es relativo a la experiencia del resolutor, puede anticiparse una valoración a la vista de la información disponible sobre el contexto socio-económico y cultural de aquél y los intereses propios de su edad y nivel madurativo.

Cuadro 4.3B.- TIPOLOGÍAS DE SITUACIONES PROBLEMÁTICAS SEGÛN EL CONTEXTO TEMÁTICO O ESCENARIO-MARCO

	- Ejercicios
- Descontextualizado	- expresiones simbólicas
	- esquemas, etc.
- Real no familiar	
- Familiar o próximo a la experiencia del alumno	
- Fantástico (o no convencional).	

3 Según la cuestión o demanda de respuesta.

Tal vez sea en este aspecto donde más se han diversificado los tipos de problemas en los últimos lustros. Los libros de texto nos tenían acostumbrados a muy escasos modelos. El más frecuente: una parte informativa, conteniendo los datos imprescindibles, y una pregunta concreta, prácticamente siempre de tipo numérico, cuantitativo al menos. Para niveles medios o superiores de la enseñanza, tampoco faltaban, es cierto, los ejercicios y cuestiones de tipo teórico (*problemas de probar*, que diría Polya). En otro caso, se consideraban *irregulares*, *equívocos*, *marginales*.

Al ampliarse el horizonte de los objetos matemáticos y de los objetivos formativos, de una parte, y, de otra, al comprobarse la ligereza con la que la mayoría de los alumnos se enfrentaban a los enunciados -menospreciando aspectos lógicos y semánticos esenciales, decisivos para su comprensión-, han ido surgiendo multitud de modelos. No puede decirse que sean *nuevos*: lo parecen, por la infrecuencia anterior.

No es de extrañar que para muchos profesionales la clasificación como *problemas* y aún como *situaciones problemáticas* sea inmerecida, ya que apenas si rozan el tratamiento numérico o cuantitativo; Estamos seguros, sin embargo, que están llamados a jugar un papel trascendente en la Didáctica de la Aritmética y de la Matemática en general, incluso para los niveles más elementales de la educación.

a) Según el metamodelo de demanda (FERNÁNDEZ BRAVO, 1997)

Es decir: respecto del Objetivo formativo o de la actividad mental exigible/esperable en la realización de la tarea.

- Generaciones. Tienen por objeto la generación de ideas y el razonamiento lógico. La operación y el número quedan subordinados a la idea o estrategia como vía de solución.

- Estructuraciones. Tienen por objeto la estructuración mental de las partes que componen el problema: Enunciado, parte informativa, pregunta, resolución, solución, su importancia, relación y dependencia mutua.

- Enlaces. Tienen por objeto la concordancia lógica entre enunciado-pregunta-solución, resaltando la significatividad de los datos y la relativa independencia de la asociación de formas lingüísticas con la aplicación de operaciones.

- Transformaciones. Tienen por objeto el dinamismo de relaciones mentales que implican el desarrollo de un pensamiento matemático, mediante la utilización de diversidad de enfoques y pluralidad de alternativas.

- Composiciones. Tienen por objeto la comprensión global de la situación, mediante la emisión de juicios a partir de relaciones múltiples entre los elementos de presentación (enunciado).

- Interconexiones. Tienen por objeto la extensión de las ideas, mediante la apertura en la aplicación de los conceptos y operaciones.

b) Según el grado de determinación de la respuesta.

- De respuesta determinada. Reclaman un resultado (único, sea exacto o aproximado; o variedad de resultados).

- De respuesta indeterminada. Se encuadran aquí los *problemas a completar con pregunta*, las *construcciones de enunciados* que se correspondan con una fórmula aritmética o con ciertos datos, etc.

c) Según la condición de resolución

- Condicionante. Fija la vía o técnica de resolución, operación a realizar o técnica a emplear, etc. Es el caso de los *ejercicios*.

- Libre.

Aunque esta tipificación es relativa al contexto de trabajo. En el primer caso puede darse, incluso, una variedad de técnicas aplicables; en el segundo, su integración en una serie adjunta a un contenido puede determinar implícitamente la condición.

Cuadro 4.3C.- TIPOLOGÍAS DE SITUACIONES PROBLEMÁTICAS SEGÛN LA CUESTIÓN O DEMANDA DE RESPUESTA

Según el meta modelo de demanda (o respecto de la actividad mental exigible/esperable en la realización de la tarea)	- Generaciones - Estructuraciones - Enlaces - Transformaciones - Composiciones - Interconexiones
Según el grado de determinación	- De respuesta determinada - De respuesta indeterminada
Según la condición de resolución	- Condicionante - "Ejercicios" - Con indicación de operación o técnica - Libre

4 Según los datos

a) Según la forma de los datos. Con datos -generalmente, numéricos- explícitos o no (vacío de datos, forma literal, a concretar, etc.).

b) Según la coherencia. Con datos consistentes/contradictorios. Si la proposición que conforman es lógica o absurda, haciendo posible o imposible una respuesta -salvo la denuncia de incoherencia-.

c) Según la potencia resolutoria. Con datos suficientes/insuficientes. Si la respuesta permisible es determinada o indeterminada.

d) Según la pertinencia. Con datos pertinentes / no pertinentes. Cuando tienen o no repercusión (directa o indirecta) en la resolución.

e) Según la redundancia. Con datos redundantes/ajustados. Si alguno/s de ellos son o no prescindibles en función de otros.

(Véase: PUIG y CERDÁN, 1988, 195-196)

Precisamente los enunciados con *desajustes* en los datos (contradictorios, insuficientes, no pertinentes, redundantes, etc.) son un campo excelente para el desarrollo de capacidades críticas e interpretativas. Es de lamentar que sean muy poco empleados en la enseñanza de nuestras escuelas, tildándose con frecuencia de *enunciados erróneos* o *desorientadores.*

f) Según las unidades o categorías mencionadas

Por lo normal, el contexto temático delimita el campo de unidades o razones físicas que determinan los datos numéricos, en su caso; o viceversa. Dentro de la variedad, pueden darse:

- Enunciados intracategoriales o referidos a unidades homogéneas.

- Enunciados intercategoriales o referidos a unidades heterogéneas.

- Enunciados abstractos o referidos a unidades elididas o neutras.

(La terminología de *homogéneas* y *heterogéneas* se considera anticuada.)

Puede aún complicarse, conforme que la alusión lo sea tan sólo a los datos, o a éstos y al resultado.

Cuadro 4.3D.- TIPOLOGÍAS DE SITUACIONES PROBLEMÁTICAS SEGÛN LOS DATOS

Según la forma	- Con datos	- explícitos
		- implícitos
		- forma literal
		- a concretar, etc.
	- vacío de datos	
Según su coherencia	- Con datos consistentes	
	- Con datos contradictorios	
Según potencia resolutoria	- Con datos suficientes	
	- Con datos insuficientes	
Según la pertinencia	- Con datos pertinentes	
	- Con datos no pertinentes	
Según la redundancia	- Con datos redundantes	
	- Con datos ajustados	
Según las unidades o categorías mencionadas	- Enunciados intracategoriales (referidos a unidades homogéneas)	
	- Enunciados intercategoriales (referidos a unidades heterogéneas)	
	- Enunciados abstractos (referidos a unidades elididas o neutras)	

Todos estos criterios clasificatorios se incluirían dentro de las *variables independientes de la tarea*, según el estudio de KILPATRICK (1978), pero en un sentido mucho más restrictivo.

A simple título informativo, se agregan otros criterios y consiguientes tipologías, frecuentes al tratar de problemas aritméticos. Entendemos que, si bien recogen la intención del proponente, pueden verse no correspondidos de forma general en el proceso de resolución.

La mayoría de estudios se centran en los PAEV, orales, o su expresión escrita. De hecho, son los más frecuentes en la Escuela Primaria, siendo también los más conocidos por el profesorado de este nivel. Otras formas lingüísticas de presentación -manipulativa, gráfico-geométrica y simbólica- apenas si han sido contempladas en la literatura; siendo muy escasos y limitados, por otra parte, los estudios sobre sus aspectos morfológicos, sintácticos y semánticos.

5 Según el contenido matemático

a) Operaciones implicadas.

LOFTUS y SUPPES (1972), encuadran este aspecto entre las *variables estructurales*. Los problemas aritméticos clásicos abocan al manejo de números y operaciones:

- Problemas de una etapa. Aditivos, multiplicativos, modelos de aspectos conceptuales de las operaciones aritméticas.

- Problemas de más de una etapa. Híbridos, iterados, problemas-cadena, de varias operaciones combinadas, etc. (Véase: PUIG y CERDÁN, 1988, 213-215).

Pero también deben considerarse aquellos otros que, según el *metamodelo de demanda*, impliquen una actividad mental de ejercicios combinatorios, lingüístico-conceptuales, creativos y de juicio lógico en grado diverso. En tales casos, los datos o resultados no son estrictamente numéricos, sino conceptos, términos, expresiones, relaciones lógicas, etc.

b) Naturaleza numérica de datos y respuesta.

Pudiendo tenerse en cuenta tanto el dominio (natural, entero, decimal, fraccionario, etc.) como el tamaño o número de cifras.

Evidentemente, *un metro* puede ser entendido -según el nivel- como 1,0m o 1,00m, 100cm, etc; o *un cuarto de hora* se interpreta más comúnmente como *quince minutos*, antes que como *¼ de hora.*

c) Unidades o categorías de respuesta; explicitadas o no por la demanda.

Las tipologías se corresponden con las de contexto temático y según las unidades mencionadas en el enunciado; pero, con frecuencia, éstas no determinan la unidad de la respuesta, salvo que se demande explícitamente. El fenómeno es tanto más relevante en los problemas de ámbito multiplicativo, por la consideración de *unidades extensivas*, *intensivas*, *razones adimensionales*, etc.

Cuadro 4.3E.- TIPOLOGÍAS DE SITUACIONES PROBLEMÁTICAS SEGÛN EL CONTENIDO MATEMÁTICO

- Según las operaciones implicadas
  - Problemas numéricos
    - de una etapa
      - Aditivo-sustractivos
      - multiplicativos
      - modelos de aspectos conceptuales de las operaciones aritméticas
    - Problemas numéricos de más de una etapa.
      - Híbridos
      - iterados
      - problemas-cadena
      - de varias operaciones combinadas; etc.
  - problemas no numéricos
- Según la naturaleza numérica de datos y respuesta
  - Según el dominio
    - Números naturales
    - Números enteros
    - Números decimales
    - Números fraccionarios
    - Variedad aparente de dominios, etc.
  - Según el tamaño o número de cifras
    - de los datos
    - de la respuesta
- Según las "unidades de respuesta"
  - explicitadas en la demanda
  - no explicitadas en la demanda
  - homogéneas con las de los datos
  - heterogéneas con las de los datos

6 Según las *variables sintácticas*

Se entiende por variable sintáctica cualquier característica del problema que tiene que ver con el orden y las relaciones de las palabras y símbolos que contiene el enunciado del problema. Desde este punto de vista, palabras, grupos de palabras, símbolos y relaciones entre ellos se consideran al margen de cualquier referencia a su contenido. (PUIG y CERDÁN, 1988, 31).

Como ejemplos de grupos de variables sintácticas generadores de tipos, se citan corrientemente:

a) Tamaño del enunciado. Número de caracteres, palabras o sentencias.

b) Complejidad morfológica. Referente al número absoluto y proporción de sustantivos, calificativos, verbos, pronombres, etc..

c) Complejidad léxica. Relativa a la familiaridad de las expresiones y términos empleados. En particular:

d) Expresión de los datos. Números, símbolos o palabras.

e) Complejidad sintáctica (propiamente dicha). Relativa a las oraciones que integran el texto: coordinadas, subordinadas y tipos.

LOFTUS y SUPPES (1972) asumían estos tres últimos grupos de variables en el epígrafe de *profundidad del enunciado* -complejidad gramatical-, dentro de las *variables estructurales.*

f) Orden de presentación de los datos. En especial, si el orden en que aparecen en el texto del problema se corresponde con el acontecer temporal de los hechos narrados o el orden en que éstos serán considerados previsiblemente al efectuar la o las operaciones necesarias para su resolución. Asimismo, repercute la distribución espacio-temporal de las oraciones que contienen los datos y la demanda o pregunta (separación por silencios o en líneas o períodos diferentes).

g) Estilo literario. Narrativo, telegráfico, combinado de palabras y dibujos, etc.; y el consecuente con la presencia y adecuación de los signos de puntuación.

Pueden incluirse entre estas últimas variables las que configuran la significación sintáctica -enunciativa, interrogativa, exclamativa, dubitativa...-, y sus numerosas combinaciones.

Obsérvese que la diferencia entre la forma oral y escrita puede llegar a ser abismal, mediante el empleo de énfasis, silencios, ritmos, etc., e incluso por efecto de la actitud y gestuación del *presentador.*

Estaríamos tentados a admitir que, en forma oral, *un mismo problema no puede enunciarse dos veces de la misma forma* -salvo filmación-; lo que haría imposible un análisis objetivo y absurdo tal propósito. Esto nos reporta indicios de que *no todos los aspectos tendrán el mismo peso en la valoración de enunciados*; que es tanto como decir que *existe una jerarquía de dificultad/facilidad comprensiva.* Algo muy importante cuando se estudien las *dificultades en el proceso de resolución.*

Cuadro 4.3F.- TIPOLOGÍAS DE SITUACIONES PROBLEMÁTICAS SEGÛN LAS "VARIABLES SINTÁCTICAS"

Según el tamaño del enunciado	- Número de caracteres - Número de palabras - Número de oraciones
Complejidad morfológica	- número absoluto de sustantivos - número absoluto de calificativos - número absoluto de verbos - número absoluto de pronombres, etc.
	- Proporción de sustantivos - Proporción de calificativos - Proporción de verbos - Proporción de pronombres, etc.

- Complejidad léxica (Relativa a la familiaridad de los términos empleados
  - de los términos contextuales
  - Según la expresión de los datos
    - Números
    - Símbolos
    - Palabras
- Complejidad
  - Número de oraciones coordinadas
  - Número de oraciones subordinadas y tipos
  - Proporción de oraciones coordinadas
  - Proporción de oraciones subordinadas y tipos
- Orden de presentación de los datos
  - Respecto del acontecer temporal de los hechos narrados
  - Respecto del orden de empleo en la resolución
  - Estructuración espacio-temporal
  - Ubicación de la demanda o pregunta
- Complejidad respecto de las significaciones sintácticas
  - Enunciativa
  - Interrogativa
    - directa
    - indirecta
  - Enunciativo-interrogativa
    - directa
    - indirecta
  - Otras
- Estilo literario
  - Narrativo
  - Telegráfico
  - Combinado de palabras y dibujos, etc.

7 Según los aspectos semánticos.

La persuasión de que *un mismo enunciado -bajo cualquier forma de presentación- no es asimilado de igual manera por resolutores distintos, e incluso por el mismo resolutor en momentos diferentes -aunque fueran consecutivos-* haría inútil intentar un estudio semántico objetivo.

Sin embargo, el florecimiento de los estudios semánticos y semióticos de los últimos 30 años ha alcanzado también a los enunciados de problemas aritméticos; sobre todo a partir de NESHER (1982).

Desde una óptica de Semántica Pragmática, un enunciado debe ser interpretado en el *contexto de la obra*. Por consiguiente, es precisa la percepción completa del problema o situación (audición, lectura, visualización, etc.).

Pero también es posible la apreciación de ciertos aspectos con sólo la percepción de *una parte del enunciado*. Puede bastar una palabra de fuerte carga semántico-matemática: "*¿cuántos...?*", "*calcula...*" Es más: esta *interpretación a trozos* o *afección de significados locales* es imprescindible para la afección de sentido pleno, sin necesidad de ultimar la percepción de la obra o enunciado completo, al igual que en el texto literario.

En nuestro caso, además, la obra -problema/situación- está condicionada -contextualizada- al menos por la situación de enseñanza-aprendizaje superior más próxima: la sesión de clase y el contexto curricular. La ubicación de un problema cuando se acaba de tratar la multiplicación, insinúa, de por sí, cuál será con gran probabilidad la operación a emplear. LOFTUS y SUPPES (1972), hablaban de *tendencia*, si un problema se resolvía por medio de las mismas operaciones y en el mismo orden que el anterior.

Distinguiremos tres grupos principales de variables o aspectos semántico-matemáticos, que darán lugar a tipos o categorías no siempre bien diferenciables:

a) Evidencia como problema. O aprehensibilidad de la estructura de un texto como problema. Que tiene implicaciones varias en el receptor o resolutor potencial:

- Aprehensión de la situación o expresión como de carácter matemático (cuantitativo, en sentido amplio: distinción de partes).

- Aprehensión de la situación como *problemática* o *incompleta*. Evidenciada, generalmente, gracias a la significación local de una pregunta directa o indirecta.

- Aprehensión de la situación como *completable*, o susceptible de ser *resuelta*. Es decir: aprehensión de la relación que vincula al *espectador* como *potencial resolutor*.

Se advertía al tratar de las *situaciones de partida* que *no basta una situación de hecho: es precisa una pregunta de índole matemática*. La explicitud de tal pregunta y su claridad determinan en buena medida esta *aprehensibilidad del enunciado como problema*.

Aunque los PAEV se presenten generalmente como textos que parecen tener las características propias de los textos narrativos, sin embargo, su interpretación semántica está moldeada por el juego de lenguaje de la instrucción y no por el del mundo de experiencias de los niños. (PUIG y CERDÁN, 1988, 43).

El contexto del aula o de un texto matemático, sección de pasatiempos de un diario, revista o almanaque confieren de suyo este carácter a un texto o narración. Pero resalta tanto más cuanto aparecen explícitos los aspectos cuantitativos y, sobre todo, la demanda o pregunta. Los "enunciados sin pregunta" y el conocido como "*edad del capitán*" ofrecen buenos ejemplos extremos al respecto.

Los tipos posibles resultan de lo explícito que aparezcan los aspectos de aprehensibilidad antes mencionados, regidos en última instancia por la demanda, su carácter, completitud y formulación. De no existir ésta, quedan condicionados por el contexto y la actitud -tendencia- del resolutor.

b) Conjunto de significados locales

El contenido semántico de un PAEV puede ser analizado a trozos atendiendo a los diversos modos de codificar lingüísticamente las relaciones lógicas entre las tres proposiciones básicas del problema, o bien globalmente atendiendo a la naturaleza y el sentido del texto como un todo. (PUIG y CERDÁN, 1988, 98).

El *significado local* es afecto a cada término, en primer lugar y de modo elemental. No se entra en disquisiciones sobre el sentido autónomo del término y el sentido conferido, ni en la confluencia de los planos real y psicológico.

Al hablar de *término*, debe entenderse *elemento de lenguaje susceptible de sustentar un significado.* Que nos permite extenderlo desde la lengua natural -tanto oral como escrita- a las formas simbólico-matemática, gráfico-geométrica y de comportamientos físicos y corporales. Así, tan *término* puede ser la palabra *tres* -dicha o escrita-, como la cifra *3*, un dibujo de tres claveles, tres puntos, tres palmadas, mostrar tres fichas, los tres dedos centrales de una mano, etc.

En forma analítica, sintética o analítico-sintética -según las escuelas lingüísticas-, se accede/confiere significado a construcciones gramaticales de dimensión creciente. En este proceso, el sentido de la construcción más extensa inhiere en el sentido anterior de cada uno de los términos integrantes por separado, a la vez que éstos contribuyen decisivamente al sentido de la nueva estructura.

La forma semánticamente más asequible como problema es aquélla en que se distinguen con claridad la *parte informativa*, conteniendo los *datos* explícitos, y la *pregunta* precisa, portadora de la *incógnita* y la *condición* que liga ésta con aquéllos, ambas también explícitas.

En su formato más elemental *-problemas de una etapa-*, los *datos* se reducen a dos cantidades; la incógnita, a una. La *condición* determina, de ordinario, la operación aritmética que responde a la *pregunta*. Así pues, constaría de tres proposiciones: dos informativas -enunciativas- y una tercera comprensora de la pregunta -interrogativa-.

Para los PAEV, NESHER (1982) clasifica en siete tipos las palabras responsables de la dependencia semántica entre las tres proposiciones del texto:

- Argumentos. Dependencia semántica entre los argumentos cuantificados numéricamente que aparecen en las proposiciones que subyacen al texto del problema.

- Adjetivos. Dependencia semántica debida a adjetivos que califican los argumentos cuantificados.

- Agentes. Dependencia semántica debida a los agentes a los que se hace referencia en el texto.

- Localización. Dependencia semántica debida a la relación espacial entre objetos.

- Tiempo. Dependencia semántica debida a la relación temporal entre los acontecimientos a los que hace referencia el texto.

- Verbos. Dependencia semántica que se expresa mediante los verbos que aparecen en el texto.

- Términos relacionales. Dependencia semántica debida a términos relacionales que afectan a dos argumentos cuantificados dados. (NESHER, 1982, 31-32).

c) Significado global

Proveniente de la apreciación de la naturaleza y el sentido del texto como un todo.

> El análisis global del significado del texto del problema ha demostrado ser mucho más importante que el análisis efectuado a trozos. Su importancia se ha puesto de manifiesto sobre todo a la hora de comprender los procesos utilizados por los niños para resolver los problemas. (PUIG y CERDÁN, 1988, 99).

Numerosos grupos de investigadores convienen en que cabe una aproximación semántico-matemática independiente del proceso de resolución, del resolutor mismo. Pero no podemos dejar de ser sensibles a la crítica de que las categorías semánticas propuestas están inducidas por *profesionales de la Matemática* a partir del análisis estadístico de *dificultades observadas en la resolución*.

Un proceso perceptivo correcto no tiene por qué determinar -ni siquiera influir- en el sentido global o final de una construcción gramatical para el sujeto. Sin embargo, el factor espacio-temporal esencial al lenguaje puede afectar la adscripción de significado algo más que en el plano subjetivo. Tal vez las concepciones estén condicionadas en extremo por la lengua natural; a fin de cuentas, ha sido el modelo lingüístico de referencia.

La comprensión -afección de sentido- de expresiones en lengua hablada -a través de la audición- tiene carácter irreversiblemente lineal, derivado del carácter sucesivo temporal de los fonemas que las integran. ¿Quién puede entender una grabación magnetofónica en sentido inverso?; a lo sumo, algunos términos, tras un notable esfuerzo reconstructivo.

La lengua escrita, con su lectura generalmente lineal -en su propósito de correlato de la lengua hablada-, apenas si admite imaginar variantes de significado al modificar la dirección de lectura: salvo casos excepcionales, sería incomprensible leer todo un texto español de abajo a arriba, y de derecha a izquierda.

Sin embargo, las expresiones simbólicas ya apuntan algún género de variación. Por ejemplo: la igualdad 3+2=5 induce la idea de *composición*; mientras que 5=2+3 -que podría resultar de la lectura nada difícil de derecha a izquierda, inversa a la ordinaria- induce la idea de *descomposición*. Ambas están integradas por los términos *3*, *2*, *5*, + y =. En correspondencia con una situación conjuntista, la primera de estas expresiones se refiere -de alguna forma- al sentido *unión de clases*, mientras que la segunda se refiere al sentido de *partición en subclases*.

Las expresiones gráfico-geométricas exigen, por lo general, una percepción completa del grabado o composición. El sentido de cada término es deudor del sentido global, quizás en mucha mayor medida que en otros lenguajes. Véase, por ejemplo, el significado de un punto en un diagrama de Venn. Su condición de representar un elemento o clase, está claro -por convenio-; pero su condición de pertenencia a un determinado conjunto o clase, es función de la posición dentro de la cuerda que representa a este segundo.

El caso del lenguaje de comportamientos físicos puede ser aún más elocuente. La operación compuesta de depositar sucesivamente tres y dos fichas en un vaso vacío, apenas parece tener nada que ver con la de tomar consecutivamente dos y tres fichas de un vaso que contiene cinco fichas. Serían las dos expresiones de la misma situación, filmada y reproducida en ambos sentidos.

Por consiguiente: no basta una correcta interpretación local de los términos; es precisa una interpretación de carácter global, sentido último del enunciado o situación.

Tradicionalmente, los problemas aritméticos se han clasificado como *problemas de sumar*, *restar*, *multiplicar* y *dividir*. Significativamente, se corresponden con las acciones básicas de *agregar*, *separar*, *reiterar* y *repartir* (CASTRO, RICO y CASTRO, 1996, 28).

Con el enfoque estructural de la Matemática, se agruparon los dos primeros como relativos a la *estructura aditiva de cantidades*, y los dos últimos como relativos a su *estructura multiplicativa*. Cuenta con el apoyo de las teorías psicológicas de las *operaciones lógico-matemáticas inversas* (PIAGET y COL.); por las que podrían identificarse suma y resta, de una parte, y multiplicación y división, de otra.

Desde NESHER (1982) se tiende a un ajuste más fino de esta *clasificación*. Por ejemplo, parece general el acuerdo en modelizar hoy los PAEV aditivo-sustractivos de una etapa en cuatro grandes categorías: *cambio*, *combinación*, *comparación* e *igualación*; e incluso una quinta categoría: *híbridos*, de difícil equiparación a alguna de las anteriores, por su ambigüedad..

Tanto los tipos correspondientes a estructuras aditivas como a las multiplicativas se estudian con detalle al tratar de cada uno de los pares de operaciones aritméticas (suma/resta y multiplicación/división), aunque puede afirmarse que, todavía hoy, es un *tema abierto*.

Cuadro 4.3G.- TIPOLOGÍAS DE SITUACIONES PROBLEMÁTICAS SEGÛN LOS ASPECTOS SEMÁNTICOS

- Evidencia como problema
  - Matematicidad
    - Cuantitativos explícitos
    - Cuantitativos implícitos
    - Indefinidos
  - Incompletitud
    - Con demanda explícita
    - Con demanda implícita o encubierta
    - Sin demanda
  - Resolubilidad
    - Exigente
    - Insinuante
    - Neutra
- Según los significados locales
  - Según el número absoluto
  - Según la proporción
  - Según la explicitud
  - Argumentos.
  - Adjetivos
  - Agentes
  - Localización
  - Tiempo
  - Verbos
  - B2.7 Términos relacionales

Según el significado global	- De estructura aditiva	- De suma - De resta
		- Cambio - Combinación - Comparación - Igualación - Híbridos
	- De estructura multiplicativa	- De multiplicación - De división
	- De varias operaciones	

4.4 ESTILOS DOCENTES

Un problema o situación problemática será, para nosotros, *un punto de partida* de un itinerario didáctico-matemático. Éste viene siendo el estribillo a lo largo del presente Capítulo. Pero será el profesor que tenga a su cargo ese grupo de alumnos beneficiarios de la actividad el artífice y responsable último, tanto de diseñar y presentar tal *situación de partida*, como de configurar la situación de enseñanza-aprendizaje en su conjunto, y de su explotación formativa.

En la actividad didáctica -no importa el objeto- suelen distinguirse tres aspectos:

- La planificación educativa (*curriculum proyectado*), referente anticipado del quehacer de aula. Debe incluir previsiones de Objetivos -instruccionales y formativos en general-, Contenidos -tanto de conocimiento como procedimentales-, Medios, Actividades... Más o menos pormenorizada y segmentada, con las oportunas indicaciones o adaptaciones curriculares.

- La práctica didáctica propiamente dicha (*curriculum en acción*). Si bien debe venir informada por la planificación, se verá sometida a los avatares del día a día, las circunstancias contextuales y personales de cada uno de los protagonistas: profesor y alumnos.

- El pensamiento del profesor (*curriculum oculto*, consciente o no); y que quizás no tenga reflejo fácilmente contrastable en las dos anteriores.

Estas dimensiones estrechamente relacionadas configuran lo que podría llamarse el *estilo docente* de cada *profesor*, es decir:

- la forma peculiar de elaborar el programa;

- la forma de llevarlo a la práctica;

- la forma de organizar la actividad en el aula; y

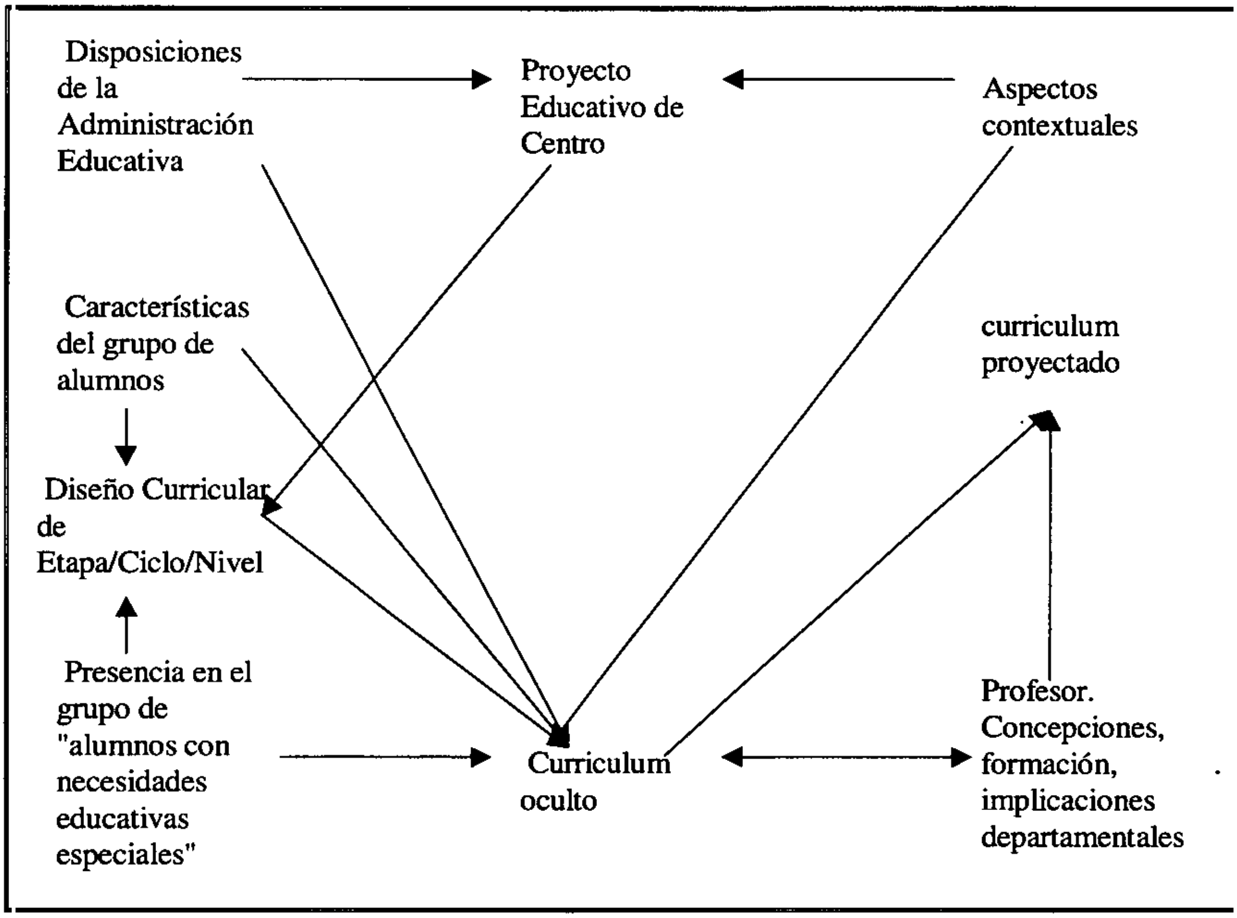
- la forma peculiar de relacionarse con los alumnos (cfr.: CDC-MEC, 1991, 127).

Algunos de estos aspectos se toman con frecuencia como elementos evaluables de la función docente. Pero, con independencia de la dificultad de su evaluación objetiva, no parece existir acuerdo sobre cuál sería *el mejor estilo docente.*

4.4.1 ANTES

No nos extenderemos en describir los factores y dinámica que, de ordinario, conducen al diseño del *curriculum proyectado* o *programación* que guiará la actividad en la clase. De forma indicativa, baste el esquema 4.4.1A.

Cuadro 4.4.1A.- Factores que condicionan la confección del *curriculum proyectado* o *programación de aula.*



El factor *profesor*, en esta fase tan sólo, debe extenderse al Departamento del Área Matemática, con todas sus implicaciones de *programación vertical* (niveles anteriores y posteriores). El *curriculum oculto* ejerce su influjo, entre otros canales, a través de la condición del profesor como miembro del Departamento; pero no en exclusiva: la confección del *curriculum proyectado* es de carácter personal, aunque reciba orientaciones y supervisión departamental. Es posible, incluso, que el *curriculum oculto* deje *claves* o *vestigios* que más tarde provocarán su afloramiento en la práctica.

Los factores *grupo de alumnos* y *presencia de alumnos con necesidades educativas especiales* -caso particular: alumno ciego o deficiente visual- comprenden un componente histórico de carácter curricular, aptitudes y actitudes conocidas hasta la fecha.

Este *curriculum proyectado* para un grupo de alumnos de un cierto nivel del que es responsable un determinado profesor, se desplegará, de manera más o menos pormenorizada, en un abanico de previsiones didácticas:

- Objetivos. Generales; específicos; temáticos; individualizaciones.

- Contenidos. De carácter primordialmente matemático. Divididos en *Bloques Temáticos*, incluyen aspectos *de conocimiento* y *procedimentales*.

- Actividades e itinerarios didácticos. Aspectos metodológicos y didácticos. Medios. Temporización.

Precisamente en este punto es donde deben diseñarse -*grosso modo*, al menos- las *situaciones de partida* de las que arrancarán los *itinerarios didácticos*. Se reclama una más minuciosa estructuración temporal de los Contenidos y medios, y, sobre todo, una previsión de cómo organizar dichas Actividades en el aula. Aunque no quede plasmada por escrito, se vislumbra cuál será la actuación del profesor y su grado de intervención.

- Evaluación. Objeto; estructura temporal; fórmulas; orientación. Debiendo contemplarse la participación, en su caso, del propio alumno (autoevaluación), de los compañeros y del profesor, y sus repercusiones.

Cuadro 4.4.1B.- Aspectos de la *programación de aula.*

- Objetivos
  - generales
  - específicos
  - temáticos
  - individualizaciones
- Contenidos
  - de conocimiento
  - procedimentales
    - procedimientos generales
    - técnicas específicas
    - técnicas de estudio y trabajo personal
- Actividades
  - itinerarios matemáticos
  - situaciones de enseñanza-aprendizaje
    - de introducción o presentación (situaciones de partida)
    - de aplicación/consolidación
    - de ampliación
    - de remediación
    - en el aula
    - fuera del aula
    - dirigida personalmente
    - sin acompañamiento
  - organización de la actividad
    - individuales
    - de pequeño grupo
    - en grupo coloquial
    - en gran grupo
  - medios
  - temporización

Evaluación

- objeto
- orientación
  - inicial o diagnóstica
  - formativa
  - sumativa
  - evaluación por el profesor
  - evaluación por los compañeros
  - autoevaluación
  - combinada...
- fórmulas
  - observación de la actividad
  - análisis de trabajos
    - realizados en el aula
    - realizados fuera del aula
  - pruebas
    - orales
    - escritas/gráficas
    - producción de materiales/situaciones
- estructura temporal

El término *curriculum proyectado*, aun restringiéndonos al Área matemática, debe entenderse en tanto en cuanto que los diferentes aspectos de la *programación de aula*, supuesta llevada a la práctica, tienen consecuencias directas o indirectas en la formación integral del alumno.

Ciertamente, en su formación general. Todas y cada una de las situaciones en las que se encontrará inmerso el alumno serán ocasión para su desarrollo personal, tanto individual como socialmente considerado: oportunidades de ensanchar y profundizar su bagaje de conocimientos, formas de pensar y actuar, comportamientos, actitudes, valores.

En la clase de Matemáticas, se hace algo más que *aprender Matemáticas*. Un enfoque auténticamente formativo debe llevarnos a *instrumentalizar* los tópicos y actividades matemáticas, tornándolas pretexto -aprovechándolas- para la formación integral de la persona que es el alumno, cada alumno. *Enseñar Matemáticas* y *formar personas* son objetivos compatibles; o, mejor: *ayudar a aprender Matemáticas* y *cooperar en el desarrollo integral de la persona del alumno*. Sin este optimismo pedagógico, podría sustituir al profesor por una máquina.

Siguiendo las reflexiones que encabezaban este Capítulo, todo parece apuntar hacia un *estilo de enseñanza* que se asiente, entre otros, sobre los siguientes pilares:

1°) Adecuación de las previsiones curriculares -programación de Objetivos, Contenidos y Evaluación- a las necesidades y posibilidades específicas de los alumnos del grupo, con atención a las diferencias interpersonales.

Existe acuerdo general en que las *"Matemáticas son difíciles; de aprender... y de enseñar"* (basta ver el nivel de fracaso escolar). Por ello, la elaboración del currículo debe tener muy en cuenta cómo los niños aprenden. Elaborar un currículo en el que los niños sean incapaces de comprender y asimilar las matemáticas que contiene, resulta perfectamente inútil. (CASTRO, RICO y CASTRO, 1996, 93). Se precisa, pues, un mayor esfuerzo de diseño curricular, que atienda a esta dificultad manifiesta y responda a la importancia social y económica que se confiere a la Aritmética.

Conviene apercibir del riesgo de extremismos al apreciar las capacidades del alumno: minusvaloración o sobrevaloración; tanto del estado inicial como del horizonte de desarrollo, instruccional y cognitivo. La primera, podría coartar un aprovechamiento óptimo de potencialidades; la segunda, provocar el desaliento y desmotivación, tanto de los alumnos como del propio profesor. A este respecto, recuérdese el concepto de *zona de desarrollo proximal* de VYGOTSKY.

Junto con los dos grupos de pretensiones matemáticas -coherencia y completitud- y psicopedagógicas -adecuación y gradación-, recordemos aquí cuanto se dijo en la Sección 3.2. Al seleccionar Objetivos y Contenidos -y al configurar Actividades y Situaciones-, debe tenerse presente una perspectiva de hondo calado: su ulterior proyección conceptual y metodológica.

Sin olvidar el carácter instrumental de las Matemáticas, que deben servir para algo comprobable de inmediato: para estudiar otras asignaturas, resolver problemas de la vida cotidiana dentro y fuera de la escuela que se presentan en su entorno socio-familiar, en los medios de comunicación, etc.; cuidando, al mismo tiempo, la calidad de las Actividades y la función que se les atribuye.(ALSINA Y COL. 1996). Son un medio ordenado a un fin, no un adorno didáctico.

2°) En particular, adecuación de las Actividades, Medios y Organización de la actividad a las características de los alumnos y posibilidades materiales y temporales. Lo que podríamos denominar *realismo pedagógico.* Con especial incidencia en las *adaptaciones curriculares -atención a la diversidad, alumnos con necesidades educativas especiales-.*

Con frecuencia, una planificación al ser puesta en práctica queda truncada por excesos de optimismo. Se cuenta con medios que después no están disponibles en su momento; las actividades requieren más tiempo de realización del previsto; muchos de los alumnos carecen del material imprescindible o desconocen ciertas técnicas; surgen problemas de espacio, de mobiliario, de organización de actividades para escolares; etc.

La presencia de alumnos con dificultades de visión -o de cualquier otro tipo- exige de las Actividades unas determinadas características que las hagan asequibles a dichos alumnos, en igualdad de oportunidades didácticas con relación al resto de compañeros. Es el momento de las *adaptaciones de acceso*. Esta *adaptación curricular* podríamos decir que es el objeto de la Didáctica Especial de la Matemática para ciegos y deficientes visuales.

Como se advertía al final de la Sección 3.3, la deficiencia visual no implicará, en principio, *adaptaciones significativas* del curriculum: quedan intactos Objetivos y Contenidos generales previstos para el nivel; quizás incrementados o ligeramente adaptados en sus aspectos instrumentales, no propiamente matemáticos. Puede que tal deficiencia haya sido ocasión de que, en este momento, se detecten carencias curriculares; pero no deben contemplarse como *causadas por la ceguera*, sino efecto de una atención inadecuada y objeto ahora de remediación.

Esta *adaptación de acceso* se manifestará de forma especial en el diseño de las Actividades, que deberán ser apropiadas para sus posibilidades perceptivas y comunicativas; en la previsión de medios instrumentales, contemplándose los específicos de su forma de trabajo- y de tiempo de realización -por lo general, superior al de los alumnos videntes-; en la orientación integradora...

3°) Tendencia a promover estrategias participativas de aprendizaje. En el doble sentido: participación en tareas cooperativas de pequeño grupo y de grupo coloquial, y posibilidad de aportación autónoma en los procesos constructivos y de descubrimiento.

En la clase de Matemáticas suelen distinguirse tres formas básicas de organización de la actividad:

- Trabajo individual.

- Trabajo en equipo o *pequeño grupo*; que puede oscilar de 2 a 5 alumnos.

- Trabajo en *grupo coloquial*; hasta 25 o 30 alumnos, si bien el tamaño ideal no debe exceder de 12-15.

> Los grupos producen más hipótesis, y por eso es probable que logren más soluciones que una persona aislada; aunque en realidad les lleve más tiempo. Las soluciones alcanzadas suelen poseer una calidad superior. En un grupo existe también con frecuencia un nivel superior de crítica de las hipótesis y de las soluciones (WALL, 1965).

Sin embargo, es importante no sacralizar una forma de trabajo en exclusiva. Cada una de ellas tiene sus ventajas e inconvenientes, es terreno adecuado para el desarrollo de unas u otras destrezas y capacidades. Su recomendabilidad es función de las características de los alumnos, del objeto de la tarea, del momento curricular e incluso de las circunstancias ambientales. Otro tanto puede objetarse acerca de la combinación y proporción entre las diferentes formas, en el contexto de un tema o contenido. Sin duda, es una buena manifestación del *estilo docente*.

El trabajo individual, en una primera fase, suele favorecer la iniciativa, el compromiso con la tarea, la explotación autónoma de recursos, que cada uno acumule ideas propias que aportar a la discusión posterior... Asegurando el acceso y posibilidad de trabajo personal real, mediante una ficha o un guión escrito que pueda comprender por si mismo. Puede tratarse de un trabajo de práctica, de aplicación de un concepto, de exploración, de problemas sencillos (ALSINA y OTROS, 1996, 121).

Tanto el trabajo individual como en *pequeño grupo* son el ámbito más propio de las Actividades que más nos interesan en este trabajo: la resolución de problemas y la investigación a partir de materiales didácticos

Los grupos de cualquier dimensión son adecuados para actividades de comunicación oral, gráfica o escrita destinadas a expresar relaciones, resultados de investigaciones, a debatir posibilidades, a entender información proporcionada por los compañeros y las compañeras o por el enseñante, a mejorar definiciones, a leer textos que contengan información matemática (periódicos, folletos publicitarios, facturas, instrucciones), adquisición de vocabulario, etc. (ibidem.).

Sería un error desterrar la *clase expositiva* como algo nocivo. Tiene su lugar también en Matemáticas, sus características y objeto: de corta duración y con el lenguaje adecuado, puede usarse para introducir un tema nuevo, para sintetizar diversas actividades realizadas con un tema en común, para introducir símbolos, etc. (ibidem.). Pero sabiendo teñir estas intervenciones de amenidad, empleo de medios auxiliares, despliegues técnicos espectaculares, incluso.

Es cierto que puede improvisarse la organización de la actividad en el aula o modificar una ya prevista, si lo hacen aconsejable las circunstancias o la intuición del profesor (¿por qué no?). Pero las cosas se complican cuando se precisan materiales que no se hallan en la clase -o no en ejemplares suficientes-, se redactan precipitadamente enunciados o guías de trabajo, se requieren distribuciones de espacio o medios técnicos... Sin coartar la flexibilidad que exigirá la práctica, entendemos que la previsión resuelve problemas por sí misma, y la razón por la que las Actividades y la organización que configuran deben quedar reflejadas en la programación.

Una vez más, la advertencia, se torna grave en el caso de alumnos ciegos o deficientes visuales. Si se persigue su equiparación didáctica, supone asegurarles la comunicación interpersonal y la disponibilidad de material adaptado y acceso a los resultados procesuales. Esto implica que el profesor deberá informarse, asesorarse, adaptar y, no pocas veces, confeccionar material especial. Es decir: tiempo y elementos, previsión. Si no se recoge pormenorizadamente en la programación, debe figurar cuanto menos el aviso anticipado de estudiar tal necesidad.

4º) En concreto: diseño de situaciones de enseñanza-aprendizaje coherentes con los puntos anteriores.

Al entender que la *situación de enseñanza-aprendizaje* es el punto de partida para el itinerario didáctico que conduce a la conquista de los Objetivos previstos, de su riqueza y proyección, de su carácter motivante y posibilidades de explotación didáctica, depende buena parte del éxito en la empresa. La *situación de partida* es la materia con que se elaborará el producto educativo; al profesor se le pide que ayude a sus alumnos a aprovechar y transformar esa materia de forma natural, no que haga juegos malabares.

4.4.2 DURANTE

Toda acción educativa programada -y toda Reforma- se resume en un profesor con un grupo de alumnos... Una planificación puede quedar reducida a un bello monumento de papel... La sesión de clase es quien da vida a una programación; sin aquélla, ésta es letra muerta...

No son pasajes de una loa a la figura del profesor, ni de un manifiesto en su defensa contra la concepción rutinaria de la enseñanza. Son convicciones que se destilan de la experiencia docente, frente al alejamiento burocrático de la realidad de aula.

Las *programaciones*, los *curricula proyectados*, pueden transformarse fácilmente de un año a otro, con escasas modificaciones; casi estamos tentados a decir que *se pueden fabricar en serie*. El *curriculum en acción*, no: cada momento de clase es irrepetible, como irrepetible es la persona -cada alumno, ese profesor- o irrecuperable cada instante.

Existen dos grupos de razones para afirmar que el *curriculum en acción* diferirá necesariamente del *curriculum proyectado*:

a) Las cambiantes condiciones en que se desarrolla la actividad de aula respecto de las previsiones que informaron la programación. En el doble aspecto de las circunstancias contextuales y la evolución de los alumnos a lo largo del curso.

b) La influencia de un *curriculum oculto* en el profesor.

Un acontecimiento social o escolar, una manifestación deportiva o cultural, un suceso próximo, pueden ser ocasión para alterar el orden programado en abordar los Contenidos, suscitar una Actividad concreta dentro o fuera de la escuela, etc.

El comportamiento didáctico de los alumnos -de uno en concreto, de varios o del grupo como tal- no siempre es previsible: cambia de un curso a otro, a veces de forma inexplicable. Una carencia generalizada, o, por el contrario, una rápida adquisición de Destrezas o Procedimientos que se estimaban más difíciles de lo que resultaron en realidad. Conceptos mal asimilados que obligan a retroceder en el curriculum general, u otros anticipados sin saber cómo ni por qué. Cambios bruscos de la personalidad en desarrollo de un escolar, que lo torna introvertido o extrovertido, pronto a la cooperación o retraído, etc. Dificultades inesperadas en la relación entre ciertos alumnos, o entre éstos y el profesor. Problemas con la disponibilidad de material y medios técnicos, en el inmueble, en las instalaciones o el mobiliario. Problemas de salud...

> Las necesidades especiales de un alumno o alumna no pueden establecerse ni con carácter definitivo ni de una forma determinante, sino que, por el contrario, van a ser en cierta medida cambiantes, en función de las condiciones y oportunidades que le ofrezca el contexto de enseñanza-aprendizaje. (MEC-CDC, 1991, 23).

La autonomía del alumno en todos los aspectos como Objetivo esencial de la educación -también en Matemáticas-, se traduce, en tareas concretas, por *conseguir que lo haga él solo, que lo haga bien, y que sepa que está bien hecho.*

La Didáctica pretende, sin duda, alcanzar este Objetivo de la forma más eficaz posible. Una Didáctica Activa tendrá como norma: *que lo haga él solo*; pero -pasado el romanticismo naturalista-, es impensable que *lo consiga él solo*: precisa ayudas que, desarrollando su autonomía, le conduzcan al fin deseado.

La programación, los materiales pedagógicos, el diseño de Actividades y Situaciones, la organización del trabajo del alumno, los grupos, las fórmulas de participación en la evaluación..., son, precisamente, los medios que configuran una Didáctica Activa. En Matemáticas, de forma eminente, los problemas como situaciones de partida y la forma de abordar su resolución.

Lograr una participación efectiva del alumno en su proceso de aprendizaje/formación guarda una estrecha relación con la forma en que el profesor *guía* este proceso. O, lo que es lo mismo: su grado y modos de intervención didáctica.

Surgen varias recomendaciones para el profesor, que puede se hallen ya integradas en su *curriculum oculto*, como Actitudes e incluso Valores:

5º) Modificación ocasional del *curriculum proyectado* al contexto diario.

Que no debe entenderse como subsanación de errores en el *curriculum proyectado*, sino como aplicación de la flexibilidad y adaptación, movidos por la riqueza de *la vida* frente a la frialdad de *la "letra"*.

6º) Actitud de limitación en la intervención didáctica.

Que nace de la confianza en la capacidad del alumno de aprender por sí mismo y en cooperación con sus iguales. C. ALSINA y COL. nos concretan mejor:

> No tener prisa. No se deben buscar aprendizajes rápidos que después se olviden en seguida, los procedimientos son el elemento más importante en el autoaprendizaje presente y futuro del escolar, y se necesita tiempo para aprenderlos y convertirlos en una norma de conducta. En cuanto a los conceptos, sólo una comprensión adecuada posibilita su aplicación. (...).
>
> Los alumnos se sienten motivados para hacer conjeturas y razonarlas lo cual los conduce a valorar lo que hacen los compañeros y las compañeras potenciando la reflexión critica previa a la resolución, anticipando problemas y consecuencias de las ideas expresadas. Por eso hay que tener cuidado en no juzgar continuamente sus ideas y frustrar las participaciones en futuras discusiones. Por otra parte, ésta es una manera de llegar a representaciones matemáticas diversas de los conceptos y dar sentido a los cambios de representación o a la elección de la más adecuada para resolver o explicar una situación. (ALSINA y OTROS, 1996, 89).

7º) Estimular la comunicación en todas sus formas.

Tanto en lo que se refiere a lenguajes, como a los ámbitos y objeto: trabajos de investigación, debates, puestas en común; en pequeño grupo como en grupo coloquial.

8º) Aplicación previsora de *estímulos motivacionales* de la tarea, y atención permanente a la posible aparición de *gérmenes de desmotivación*.

9º) Actitud permanente de *reflexión en la práctica*.

Al igual que el alumno, el profesor debe resolver *problemas*; cientos de ellos cada día: conducir la actividad de cada uno de sus alumnos hacia las metas previstas.

El profesor no es un mero espectador del quehacer de aula, o un agente-autómata que da respuesta mecánica a las situaciones que se plantean, esperables o no, conforme a un frío esquema prefijado. He aquí algunos de los rasgos del *estilo docente* que deseamos ver reflejado en la Actitud del profesor:

- Es sensible al comportamiento didáctico de sus alumnos: hechos y actitudes, bloqueos, errores y aciertos, desviaciones y sugerencias, inquietudes de todo género. Para él, no cabe pensar en *dos alumnos iguales.*

- Mantiene una Actitud evaluadora de dichos comportamientos respecto de los Objetivos a corto y largo plazo.

- Adopta decisiones de intervención individualizada o grupal. Si es preciso motiva, dinamiza y modera, reorganiza, reconduce.

- Con una Actitud autocrítica -autoevaluadora-, analiza las consecuencias de sus intervenciones e inhibiciones. Quiere *aprender de sus alumnos.*

- Considera la programación y el desarrollo de las clases y Actividades como algo perfectible. Como una experiencia viva, que incidirá en futuras programaciones e intervenciones.

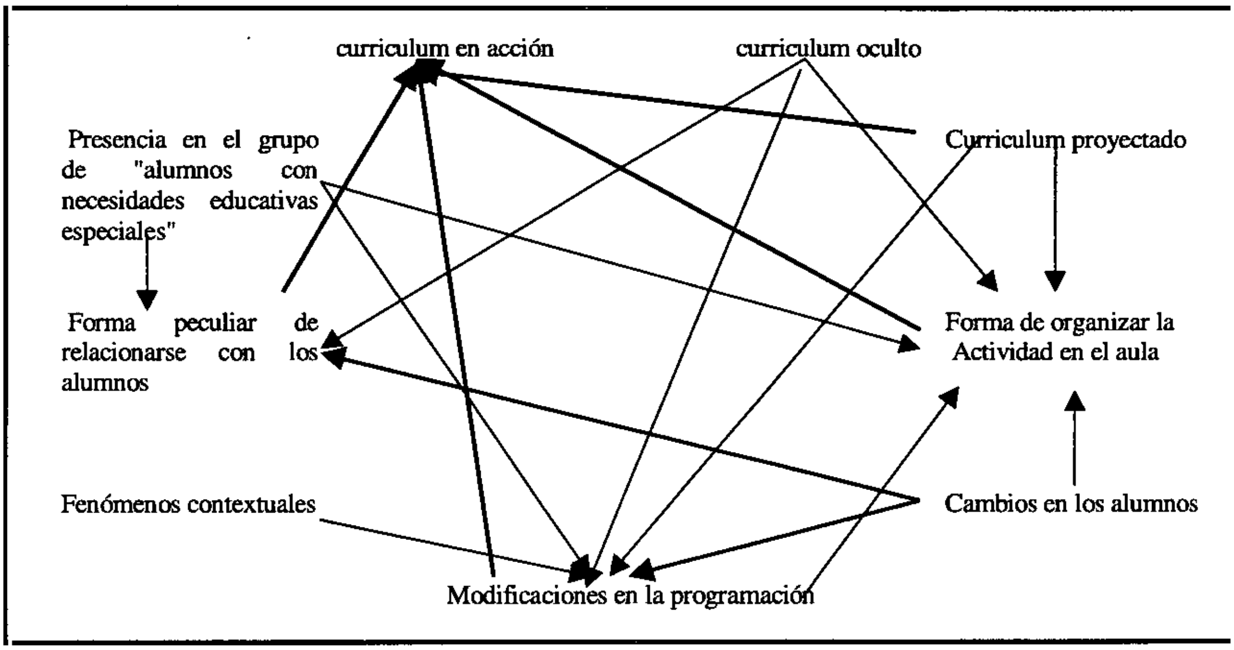
- El quehacer de aula se torna verdadera *investigación en la acción.* Abierto a innovaciones, sin papanatismos ni obcecaciones, desea aprender de sus compañeros profesores, como desea dar a conocer sus observaciones, propuestas y logros.

En la línea de este trabajo, no podemos marginar un caso que se repite año tras año en numerosas aulas: la presencia/aparición de un alumno deficiente visual, con un profesor que carece de experiencia -y de formación- para enfrentarse a tal situación.

Si existe conocimiento previo, puede reflejarse de algún modo en la programación. Pero, cuando faltan experiencia y formación, no es exagerado afirmar que "todo parece tambalearse": "¿cómo trabaja este alumno?", "¿qué medios emplea?"; "¿cómo seguirá la marcha de la clase?", "¿cómo conseguir que esté informado de lo que se escriba en el tablero?"; "¿qué tipo de Actividades puede realizar, y cuáles no?"; "¿habrá material adaptado para él?"; si no, "¿cómo confeccionarlo"?; "¿cómo evaluarle?"; "¿cómo serán las relaciones entre compañeros?", "¿cómo integrarlo en un grupo?...".

La deseable y auténtica *adaptación curricular* puede decirse que se configura día a día, como resultante del *curriculum proyectado* general o individualizado *a priori*, de las intuiciones, información y asesoramientos que va acumulando el profesor, y, especialmente, de la interacción profesor-alumno en el aula. Se confunden *adaptación curricular* y *curriculum en acción.*

Cuadro 4.4.2.- Configuración del *curriculum en acción*.



5 EN LOS PROCESOS DE RESPUESTA

Resolver un problema es dar respuesta a la cuestión planteada.

¿Y si no es explícita tal cuestión?

¿Es que no pueden plantearse otras preguntas a propósito de la misma situación?

¿No puede preguntarse acerca de situaciones equivalentes, próximas o análogas?

Con frecuencia se distingue entre *problema* y *situación* por el simple análisis de su enunciado. La distancia que marcaría esta distinción sería la misma que separa el contexto escolar ordinario del mundo real: la presencia en el enunciado de la pregunta o cuestión concreta a responder.

Todo *problema* puede ser considerado como el principio de un camino, de un itinerario que se alargue y ramifique. Como *situación de partida*, susceptible de ser explotada en generalizaciones, analogías, justificaciones... Precisamente ésta es la diferencia esencial entre un *problema* y una *situación de partida*: la respuesta da satisfacción definitiva al *problema*; pero sólo es respuesta parcial, para un *caso particular* o hecho puntual, cuando se concibe como *situación de partida*.

Cierto que un problema ramplón, por obra y arte de un buen quehacer didáctico, es explotable ilimitadamente, dando origen a multitud de variantes que conducen a campos diversísimos de estudio y práctica; buenos ejemplos de ello nos han legado EULER, POLYA y el mismo PUIG ADAM. Así pues, la distinción entre *problema* y *situación de partida* es funcional; no real. Por consiguiente, y dado que venimos ampliando el concepto usual de *problema*, lo que sigue deberá interpretarse a la luz de esta identificación enunciativa.

5.1 EL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE SITUACIONES PROBLEMÁTICAS

El proceso de resolución de problemas como dominio específico no se revela hasta POLYA; especialmente, con la publicación de su obra "Cómo plantear y resolver problemas" (1945). Aunque, cierto, en los años 30 había preocupado ya como tópico matemático (BROWNELL, 1928, 1935; BROWNELL y STRETCH, 1931; HYDLE y CLAPP, 1927; KRAMER, 1933; WERTHEIMER, 1945, 1959), o, con anterioridad, como estrategias de razonamiento general (DEWEY, 1910).

Ya se ha indicado repetidamente que es a partir de los años 80 que se acentúa el interés por los procesos de resolución de problemas, confiriéndoles nuevos enfoques. Deja de importar la resolución como término, para considerarla como punto de arranque de un itinerario -como *situación de partida*-, y estimar el ejercicio resolutorio como proceso formativo en sí mismo, independientemente del éxito o validez de la solución.

> Se entiende por proceso de resolución de un problema la actividad mental desplegada por el resolutor desde el momento en que, siéndole presentado un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y -quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea. (PUIG y CERDÁN, 1988, 21)

Así pues, interesan:

a) el proceso y sus etapas,

b) las dificultades que puedan surgir,

c) las ayudas y recursos a emplear, y

d) el desarrollo de estrategias generales como reglas del pensamiento matemático.

El análisis del proceso de resolución puede oscilar desde el *nivel macroscópico* o *global*, hasta el *nivel microscópico*, o conjunto de aspectos locales en cuanto individualizados.

En el nivel microscópico, se observarían conductas puntuales. Podríamos encontrar al resolutor: buscando una información proporcionada en el texto del problema, utilizando un algoritmo para una operación que considera imprescindible realizar, tratando de recordar un problema parecido que resolvió alguna vez, decidiendo qué alternativa seguir ante dos vías de solución que considera razonables...; o, simplemente, atascado, esto es, no sabiendo qué hacer, pero siendo consciente de ello; o, por acabar esta e-numeración, no desplegando actividad mental alguna. (PUIG y CERDÁN, 1988, 22).

El *nivel macroscópico* último interpreta la totalidad del proceso, buscando atribuir sentido al conjunto de conductas respecto de la finalidad última que el resolutor ha dado a la tarea de resolución.

Entre ambos extremos, caben multitud de enfoques de *globalización e interpretación local*, tendentes a agrupar tareas puntuales como *etapas* o *fases*, ordenadas por lo general en forma de sucesión temporal.

Una de las parcelaciones más conocida se debe a DEWEY (1910), propuesta para cualquier tipo de *problema* o *situación problemática*, matemática o no.

1º Presentación y reconocimiento de la situación como *problemática*.

2º Definir el problema con precisión (en términos de, por ejemplo, los rasgos esenciales característicos).

3º Análisis medios-fines. Plan de solución (formulación de una hipótesis).

4º Ejecución del plan (Ensayo de la hipótesis).

5º Asunción de las consecuencias (comprobación de la hipótesis).

6º Evaluar la solución. Supervisión. Generalización. (Cfr.: PUIG y CERDÁN, 1988, 23).

Cuadro 5.1A.- El proceso de resolución de situaciones problemáticas según DEWEY (1910).

Presentación de la situación →		Reconocimiento de su carácter "problemático"
Definición precisa del problema		
Análisis medios-fines →	Plan de solución →	formulación de una hipótesis
Ejecución del plan ↔		Ensayo de la hipótesis
Asunción de las consecuencias →		Comprobación de la hipótesis
Evaluar la solución →	Supervisión →	Generalización

Al analizar el proceso de resolución de problemas matemáticos, POLYA (1945/1967) revisa este modelo, ofreciendo una visión o estrategia general configurada en cuatro fases principales.

1° comprensión del problema. Que puede incluir actividades tales como: trazado de un diagrama, introducción de la notación adecuada, consideraciones sobre suficiencia y redundancias de la información proporcionada.

2° Concepción de un plan.

3° Realización del plan.

4° Examen retrospectivo. Puede incluir: comprobación final, consideraciones sobre generalización del resultado y del proceso, y sobre posibilidad de soluciones alternativas y su valoración.

Cuadro 5.1B.- El proceso de resolución de problemas matemáticos según POLYA.

Comprensión del problema	- trazado de un diagrama - introducción de la notación adecuada - consideraciones sobre suficiencia y redundancias de la información proporcionada
Concepción de un plan	
Realización del plan	
Examen retrospectivo	- Comprobación final - Consideraciones sobre generalización del resultado - Consideraciones sobre generalización del proceso - Consideraciones sobre posibilidad de soluciones alternativas y su valoración.

Obsérvese que, al dar por supuesto que el resolutor se halla ante un *problema*, y no ante una *situación problemática* en pensamiento de DEWEY, POLYA obvia las fases iniciales de *exploración* -o *análisis*- y *definición*.

En los 50 años transcurridos apenas si se han propuesto modificaciones a este esquema. No obstante, POLYA parecía interesado más directamente por los problemas de niveles medios de enseñanza. Para los problemas aritméticos, propios de niveles elementales, se hace preciso un análisis mucho más cuidadoso.

PUIG y CERDÁN (1988) proponen un modelo, refinamiento del de POLYA, tendente sobre todo a facilitar el descubrimiento de las dificultades que con mayor frecuencia se presentan a los escolares en los PAEV:

1º Lectura.

2º Comprensión.

3º Traducción.

4º Cálculo.

5º Solución.

6º Revisión. Comprobación (PUIG y CERDÁN, 1988, 25).

Cuadro 5.1C.- El proceso de resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal (PAEV) según L. PUIG ESPINOSA y F. CERDÁN PÉREZ (1988).

- Lectura
- Comprensión
- Traducción
- Cálculo
- Solución
- Revisión $\longleftrightarrow$ Comprobación

Como es natural, en las visiones del currículum o los estilos de enseñanza en que se pone el énfasis en acercar las situaciones escolares a las situaciones del mundo real, se comienza por fases similares a las dos primeras del modelo de DEWEY.

Transcribamos algunas puntualizaciones de los autores, tendentes a la justificación didáctica de este modelo metodológico:

a) Las fases lectura y comprensión de un PAEV constituyen una subdivisión de la fase comprensión del modelo de POLYA. Esta división se ha hecho para acentuar el cuidado que debe ponerse en la lectura del problema en las primeras etapas de instrucción en resolución de problemas en el comienzo del currículo escolar. No se puede olvidar que en este nivel educativo inicial los niños están, a la vez, aprendiendo a leer, y que, por tanto, la complejidad sintáctica del problema y la familiaridad con las palabras que aparecen en los enunciados pueden ser una de las causas que imposibiliten la comprensión y, como consecuencia, la resolución del problema. (...).

Aunque hayamos querido separar lectura y comprensión con la finalidad indicada, la línea divisoria entre ambas no se puede trazar con un cuchillo: son aspectos de una misma operación. Del lado de la comprensión hemos dejado las transformaciones que el que lee realiza sobre la base del texto usando los esquemas o modelos conceptuales que le parecen pertinentes con el fin de dotarlo de sentido. Estas transformaciones pueden materializarse en ocasiones mediante el uso de representaciones o de estrategias que son reflejo de acciones. (ibidem, 26).

La observación se mantiene aunque el enunciado se formule verbalmente o en cualquier otra forma de lenguaje, por los requisitos de atención mantenida e interpretación lingüística que exige.

b) La fase "elaboración de un plan" de POLYA se ha denominado traducción. Esta etapa crucial en la resolución de cualquier problema consiste en los problemas aritméticos en el paso del enunciado verbal a la expresión aritmética correspondiente (...). Vale la pena señalar que esta fase es percibida por los alumnos casi de forma explícita cuando éstos identifican los problemas con la decisión que han de tomar para resolverlos y los clasifican en consecuencia: "es de sumar", "es de restar", etc. (Ibidem, 27).

La comprensión de este proceso y la posibilidad de que se realice en un sujeto individual depende, de hecho, en primer lugar de la comprensión que el sujeto tenga de los lenguajes entre los que se lleva a cabo la traducción; esto es, el lenguaje vernáculo y el lenguaje aritmético. En segundo lugar, depende de la comprensión de las correspondencias e isomorfismos que existen entre ellos. (Ibidem, 114-115).

Las palabras clave pueden desempeñar un papel fundamental en la traducción, pero ésta sólo puede realizarse correctamente si la comprensión del enunciado del problema se realiza de forma global y no local. (Ibidem).

c) La fase cálculo corresponde a la fase "ejecución del plan" de POLYA, y se ha calificado como de cálculo, porque ésa es la naturaleza de la tarea que suele predominar en esta fase. Es importante además señalar que la ejecución del plan consiste en la realización de un cálculo porque en ella no intervienen las destrezas traductoras de los alumnos, sino sus destrezas algorítmicas (o de cálculo mental, si es el caso). (Ibidem, 27)

Y otras dos observaciones importantes:

d) Naturalmente, éste es un modelo para el estudio del proceso y no tienen por qué darse todas las fases en la resolución particular de cada problema por cada resolutor individual. (Ibidem, 26).

e) Los mejores resolutores o los resolutores expertos se caracterizan más que por un recorrido secuencial de las fases del modelo de POLYA, por un rápido zigzagueo entre episodios. (Ibidem).

Para los problemas aritméticos más sencillos, C. MAZA (1990B) simplifica aún más el proceso:

1° Análisis.

2° Representación.

3° Planificación.

4° Ejecución. (MAZA, 1990B, 43).

Cuadro 5.1D.- El proceso de resolución de PAEV según C. MAZA GÓMEZ (1990B).

- Análisis
- Representación
- Planificación
- Ejecución

Los autores integrados en el *GRUPO 0* (1997) consideran cuatro fases generales:

1° Fase introductoria. Entrar en el problema y comprenderlo.

2° Fase exploratoria. Se emplean la mayoría de las heurísticas; las decisiones ejecutivas son de importancia capital; suele sugerir un plan (que puede o no llevar a la resolución).

3° Fase de resolución propiamente dicha. Desarrollo del plan de solución.

4° Fase de vuelta atrás. Verificar la solución; formarse un juicio de lo que uno ha hecho; revisar el plan si hay algo que falla). Tiene la particularidad de ser una de las más apropiadas para conferir confianza e independencia al alumno. (GRUPO 0, 1997,1, 35-37).

> Estas fases no se producen una a continuación de otra, ni de forma independiente, ni tienen perfiles definidos, pero constituyen un buen instrumento para el análisis de los procesos y el diseño de algunas formas de intervención en la clase. (Ibidem).

El análisis se extiende a posibles fases de ampliación, propias más bien de cursos superiores al ciclo 6-8 años contemplado por los autores:

- *Analizar las posibilidades.*

- *Buscar regularidades.*

- *Generalizar.*

- *Utilizar modelos.*

- *Conjeturar y verificar.*

- *Explotar un problema análogo (Ibidem).*

Cuadro 5.1E.- El proceso de resolución de PAEV según GRUPO 0 (1997).

Fase introductoria
- Entrar en el problema
- comprenderlo

Fase exploratoria
→ Empleo de heurísticas
→ Importancia de las decisiones ejecutivas
→ Sugerencia de un plan (que puede o no llevar a la resolución)

Fase de resolución propiamente dicha → Desarrollo del plan de solución

Fase de vuelta atrás
- Verificar la solución
- Formarse un juicio de lo que se ha hecho
- Revisar el plan

Fase de ampliación
- Analizar las posibilidades
- Buscar regularidades
- Generalizar
- Utilizar modelos
- Conjeturar y verificar
- Explotar un problema análogo

5.2 ACTIVIDAD MENTAL, DESTREZAS Y CONTROL DEL PROCESO

> Hay que combatir la idea que se hacen los alumnos de hallazgo repentino y arbitrario de la línea a trazar para encontrar la solución de un problema. La intuición existe y es la consecuencia de una forma de imaginación. Pero también es el resultado de conocimientos precisos perfectamente asimilados y de numerosas asociaciones nacidas durante el aprendizaje, asociaciones que por otra parte pueden aplicarse a las mismas propiedades o a los métodos a utilizar. Por esta razón al comienzo del aprendizaje no deben prodigarse *artificios* o *astucias* que inducen al neófito a pensar que el matemático posee el don maravilloso del descubrimiento. (MIALARET, 1984, 150).

La resolución de un problema o el aprovechamiento didáctico de una situación es un proceso mental, consciente. Se trata, por tanto, de una serie de actos atencionales desarrollados en el tiempo. Pero la atención es unifocal, de objeto único en cada momento; aunque pueda cambiar de objeto con gran rapidez, según la práctica y capacidades del sujeto, llegando incluso a provocar una *sensación de simultaneidad.*

Los actos atencionales que integran el proceso están, pues, ordenados en el tiempo, conformando una *cadena* (orden total). Lo que no significa que el resolutor *no pase dos veces por el mismo punto*, desplegando análoga actividad, aunque sobre contenidos diferentes.

En sentido estricto, el paso por un mismo hito no se hace en las mismas condiciones la segunda vez que la primera: se ha acumulado mayor comprensión, seguridad o inseguridad en las hipótesis, construcciones o cálculos. Todo apunta a que *no nos bañamos dos veces en el mismo río*; al menos, *en las mismas aguas.*

Sin embargo, mantengamos nuestro análisis en el nivel formal de la actividad mental resolutoria, con independencia de los contenidos y estados profundos de actitud y ánimo en el resolutor. Aunque las aguas pasen, nos bañamos, quizás con similares movimientos, en aguas de origen semejante.

La *visión global -insight,* forma, comprensión, planteamiento- es un objeto diferente de la descripción de la situación o enunciado. Los términos y expresiones que integran el enunciado, agentes y argumentos -datos-, operación implicada, etc., juegan el papel de *partes* en un *todo.* Como se indicaba a propósito de los *significados locales* y *global,* éstos se interaccionan en un doble juego de construcción y participación. La distinción de las *partes* -análisis- no equivale a la contemplación del *todo* -síntesis-..

La observación somera de cómo actúa un niño o joven al intentar resolver un problema, al igual que una simple reflexión, evidencia una marcha de avance y retroceso. Puede rehacerse una etapa o fase para confirmarse en la idoneidad del camino, buscando descubrir algún posible error, corregirlo, retomar el itinerario pasos atrás, para diseñar otra estrategia o ensayarla, etc. El retorno puede llevarnos a un punto inmediato, alejado, al inicio mismo, volviendo a leer el enunciado o solicitando alguna aclaración. Es el *zigzagueo* del que hablan PUIG y CERDÁN o el GRUPO 0.

- En cuanto a las actividades mentales, el proceso resolutivo raras veces toma la forma de *cadena* (orden total) de etapas o subprocesos irrepetibles. Antes bien, se lleva a cabo bajo la forma de *sucesión de subprocesos parciales* que, de alguna manera, son susceptibles de ser *repetidos* a lo largo del proceso global.

Tales subprocesos están integrados por alguno o varios de los estadios descritos en la Sección anterior (no importa en qué modelo); pero contiguos, constituyendo *bloques conexos*, de ordinario irregulares y cambiantes, dependientes tanto de la naturaleza del problema o situación como de las características personales del sujeto, su aprendizaje y entrenamiento, práctica, etc.

- Estos *subprocesos* pueden reiterarse en forma cíclica, total o parcialmente.

Cual *bucles*, en Teoría de la Información, bajo la forma de reconstrucción en paralelo, empleando un lenguaje o términos distintos, alterando los datos, ampliando o reduciendo aparentemente el ámbito de estadios integrantes.

La reincidencia en uno de estos subprocesos es irreducible a un esquema rígido. A la variedad de situaciones problemáticas hay que anteponer las características y circunstancias del resolutor y de la tarea.

Las dos observaciones hasta aquí formuladas pueden sintetizarse:

1°) La serie de acciones ejecutadas a lo largo del proceso de resolución o explotación didáctica de una situación problemática se configura como una estructura -esquema- de subprocesos o etapas, ordenada en el tiempo, en la que pueden darse reincidencias y repeticiones.

La distinción de subprocesos -etapas, fases o pasos, como quiera llamárseles-, y su realización en el tiempo, permiten una ordenación espacial. Una *representación*, por tanto, que muy bien puede expresarse mediante un diagrama; si no lineal -por razón de las reiteraciones-, bidimensional; o tridimensional -si se distinguen planos de actividad-. Son los *diagramas de flujo lógico*, que tan útiles resultan para fijar técnicas y algoritmos. Aunque no se plasmen necesariamente en representaciones exteriorizables; de llevarse a cabo, el lenguaje gráfico-geométrico parece ser el más adecuado.

El análisis de subprocesos, etapas y estadios nos devuelve al nivel atencional. Nos aleja del estudio comprensivo del proceso de resolución y sus estrategias; pero pondrá más fácilmente al descubierto las dificultades que pudieran suscitarse, objeto del presente capítulo.

2°) El paso de un subproceso a otro -posterior; o él mismo, reconstruido- exige la adopción de una *decisión* de carácter lógico, de aceptación o de rechazo.

La aceptación se produce al reconocer la adecuación y suficiencia; tanto de un paso u operación de cálculo o traducción, como de afección de significados, síntesis, etc.-. El rechazo, por declaración de inadecuación o insuficiencia; que obligue a un retorno, análisis y reconstrucción, traducción, etc.

Los términos *avance* y *retroceso* son impropios, así como para un paso los calificativos de *adecuado* -o *acertado*- y de *inadecuado*, según nos acerque o aleje de la solución. Deberá esperarse al final del trayecto para poder juzgar de la bondad o inutilidad de una decisión o acción. Con dos excepciones: su valor lógico y su beneficio didáctico.

Un juicio lógico, tan sólo es *acertado* o *erróneo*. Aunque, desde el punto de vista metodológico o didáctico, puedan estimarse *grados en el error*, según su trascendencia en orden a desviarnos de la meta del proceso -determinable *a posteriori*-, o por el defecto de conocimiento que implica.

Un juicio lógico acertado de aceptación de un paso no implica necesariamente que éste resulte *adecuado*: por efecto de un error o inadecuación anterior, tal vez nos aleje de la meta. Puede suceder también que una aceptación lógica ponga al descubierto inadecuaciones anteriores, obligando a *retroceder*; mas esto sería un *avance* en sentido práctico: impide que nos sigamos desviando del camino *adecuado* -en sentido global-; en lógica deductiva, sería la *reducción al absurdo*. En el polo opuesto, la casualidad -sólo ella- puede *conducir* al buen destino a través del error: *ex nihilo, sequitur quod libet.*

En el plano didáctico, la bondad o inutilidad es relativa al aprovechamiento que se haga de tal juicio, en orden al aprendizaje del alumno. Un problema, puede no ser resuelto; pero tal vez haya servido para profundizar en conceptos, ejercitarse en tareas de *traducción*, cálculo, etc. Algo análogo puede predicarse para un paso o juicio concreto: el camino por el que nos lleve tal vez exija la puesta en práctica de destrezas o conocimientos, de otra forma innecesarios, o abra horizontes inusitados. *El error y la casualidad son dos fuentes inagotables de investigación matemática*; mas no por sí mismos, sino por la explotación didáctica que de ellos pudiera hacerse.

3°) Con frecuencia el avance/retorno en el esquema de proceso se efectúa en niveles de *representaciones o construcciones interiores*, sin reflejo en acciones externas.

El control de estas operaciones queda reservado en exclusiva a la percepción interna y decisión lógica del resolutor. Como en toda actividad intelectual consciente:

4°) Se desarrolla una continua labor semántica de asignación de significados; o sentidos.

Tanto de carácter local, que atañe a términos, expresiones, formas, diagramas, etc.-, como de carácter global, directora de la tarea.

Ciertamente, puede tornarse *mecánica* o *refleja*, tal como ocurre en la comunicación oral ordinaria. A su vez:

5°) Esta actividad semántica exige una actividad combinatoria, previa a la elección de significado, y mediando decisión lógica de adecuación/inadecuación.

Así pues, el proceso de resolución o aprovechamiento didáctico de situaciones problemáticas, reclama del resolutor el despliegue de una multiforme actividad psicológica, que entendemos alcanza a aspectos tales como:

a) Actividad lingüístico/representativa: traducciones y representaciones en los diferentes lenguajes.

b) Actividad operatorio/combinatoria: estimaciones y cálculos en dichos lenguajes y para las representaciones elaboradas.

Pero de nada valdrían las operaciones formales, laborando sobre elementos de lenguaje -representaciones incluidas-, si no se actuara simultáneamente con y por los significados que comportan. Lo contrario sería reducir el proceso resolutivo a pura mecánica al margen de los significados. La actividad semántica es su manifestación más próxima, implicando una actividad lógica de aceptación o rechazo de significados propuestos.

c) Actividad semántica: adscripción, construcción y modificación de significados asignables a elementos de lenguaje, y de sentidos conferibles a acciones.

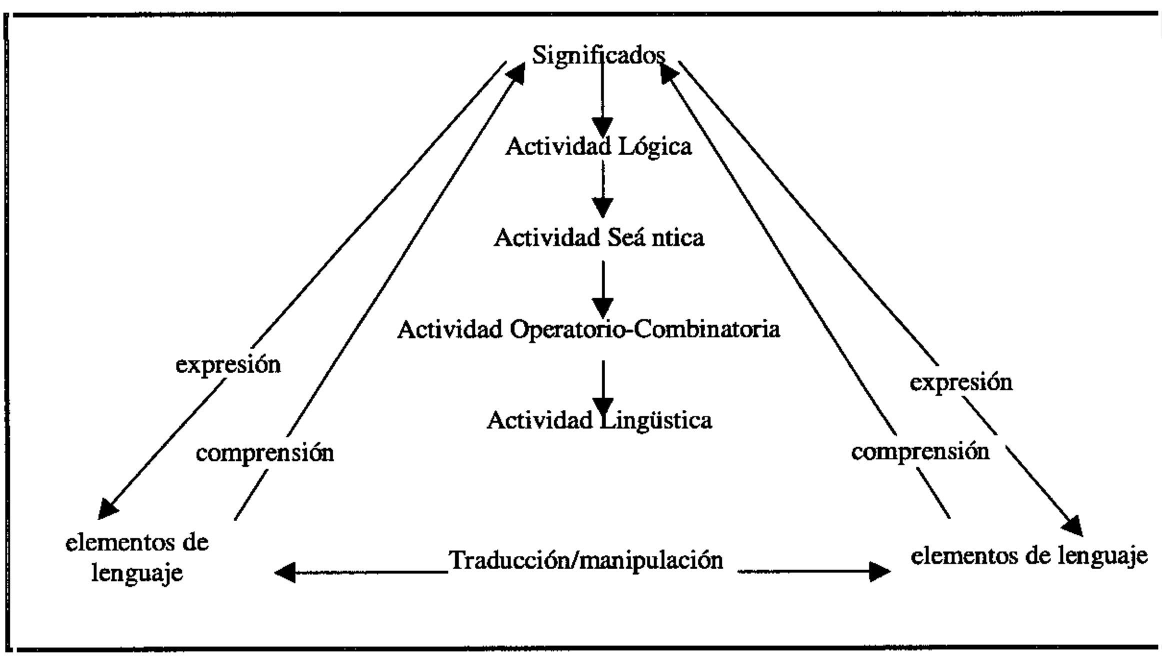
d) Actividad lógica: adopción de decisiones de adecuación/inadecuación.

Lo que no implica una conciencia explícita del ejercicio de tales facultades, como tampoco de su coherencia ni exigencia de requisitos mínimos:

> Las personas pueden actuar, y normalmente lo hacen, basándose en eventos definidos imperfectamente. La deducción lógica estricta, basada en identidades proposicionales necesarias, es un caso aislado. Las proposiciones definidas a priori en un sistema simbólico (matemático, algebraico, geométrico) pueden aplicarse al "mundo real". Pero niños y adultos pueden resolver problemas de la vida cotidiana de manera perfectamente razonable por analogías que no están estrictamente implicadas por los eventos y sobre expectativas de la experiencia que pueden ser falseadas. (MILLAR, 1997, 47).

Intentemos plasmar en un esquema la forma en que se hallan relacionadas estas actividades mentales previsibles (aunque la bidimensionalidad resulta un tanto insuficiente):

Cuadro 5.2A.- Relación entre las actividades mentales en la resolución de situaciones problemáticas.



SCHOENFELD (1985) subraya cuatro aspectos básicos: recursos que hay que traer a colación, procedimientos que se utilizan en el proceso, mecanismos de control para dirigirlo y sistemas de creencias sobre la naturaleza de las matemáticas y la tarea de resolver problemas en general y en el contexto escolar en particular. (cfr.: PUIG y CERDÁN, 1988, 118).

Desde WERTHEIMER y POLYA hasta nuestros días, el proceso de resolución de problemas se concibe mayoritariamente como la búsqueda/construcción de un *insight* o *descubrimiento de las estructuras subyacentes en la situación* (en el sentido gestáltico). Para ello, se hace precisa la disponibilidad de *insights locales*, que exigen con frecuencia -por no decir siempre- la aplicación o explotación de *recursos disponibles por el resolutor.* Recursos que se concretan en *conocimientos previos* y *destrezas* (*competencias*):

- Destrezas de orden lingüístico -interpretativas y expresivas- para la comprensión y traducción de situaciones. En particular:

- Dominio del léxico y sintaxis empleados en el enunciado o situación.

- Destrezas de orden calculatorio; sean aritméticas, geométricas, algebraicas en su caso, que permitan un rápido avance mediante estimación de las propuestas de solución y en la ejecución efectiva o cálculo y revisión.

- Destrezas de orden combinatorio; proporcionando composiciones y reconstrucciones, que se ofrecen como materia a las decisiones semánticas y lógicas.

- Destrezas de orden interpretativo (o semántico); para el reconocimiento y adscripción de significados y concordancias de sentido en pasajes del proceso. En particular:

- Dominio de los conceptos involucrados en el enunciado del problema;

- Dominio de otros conceptos relacionados estructuralmente, de uso potencial en la resolución.

En cualquier caso, al darse una *manipulación* aplicada a imágenes y conceptos, en el ámbito mental, son necesarios:

- Recursos atencionales y de memoria a corto y largo plazo.

Que se verán potenciados de forma muchas veces insustituible por las ayudas de manipulación sobre materiales físicos y empleo de medios gráficos. Serán también precisas por tanto,

- Destrezas manipulativas y expresivas, en el orden lingüístico representativo de los diferentes lenguajes.

Por encima de todas ellas:

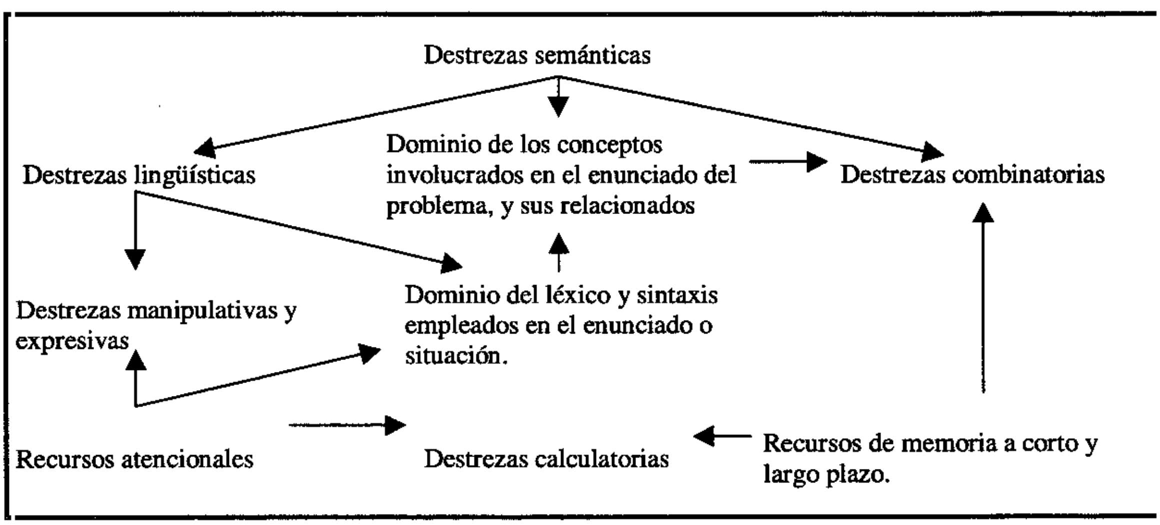
- Capacidad de decisión lógica.

Sin la cual la aceptación o rechazo de la validez de un paso o adscripción de significado carecería de sentido en sí misma.

Cuadro 5.2B.- Destrezas en la resolución de situaciones problemáticas.

Capacidad de decisión lógica	-Aceptación - Rechazo
Destrezas Semánticas	- Dominio de conceptos directamente involucrados - Dominio de otros conceptos relacionados
Destrezas Lingüísticas	- Dominio del léxico y sintaxis empleados en el enunciado o situación. - Destrezas interpretativas - Destrezas manipulativas y expresivas
Destrezas Calculatorias	- Estimación - Ejecución - Revisión
Destrezas Combinatorias	- Composición de representaciones y expresiones - Reconstrucción de representaciones y expresiones
Recursos atencionales	
Recursos de memoria	- A corto plazo - largo plazo

Cuadro 5.2C.- Dependencia instrumental entre destrezas para la resolución de situaciones problemáticas.



La suposición de que pueda ser optimizada la *explotación* de los recursos y competencias disponibles por un resolutor en un momento determinado, ha llevado a algunos autores a elevar el plano de la actividad mental hasta un nivel de *metacompetencias* o *funciones metacognitivas* directoras del proceso. Tal es el caso de BROWN y otros (1983), quienes concretan y agrupan estos *procesos* de nivel superior en la forma siguiente:

- Planificación de actividades orientadas conforme a la comprensión del problema; Que puede incluir aspectos tales como: predicción de resultados, estrategias de listado de posibilidades, capacidad de distinguir submetas, etc.

- Control de actividades durante el aprendizaje/resolución; como pueden ser: revisión, valoración de lo aprehendido, etc.

-. Evaluación general de resultados y procesos; cual sería la evaluación conforme a criterios de economía de tiempo y riesgos de error, potencialidad generalizadora, etc.

Estas *metacompetencias* o *capacidades metacognitivas*, parecen despertar un interés sobresaliente entre los especialistas en Psicopedagogía de unos años a esta parte, no restringiéndolas al dominio de la resolución de problemas. El método general empleado es el de analizar y comparar las formas de actuación exteriorizadas por los *expertos* o alumnos que más éxito relativo muestran en los procesos de respuesta. Pero no es fácil reconocer estas capacidades como específicas, separadas de una aplicación correcta, extensiva y hábil de las *competencias* arriba mencionadas, fruto tal vez de la práctica consciente.

Sin embargo, no faltan quienes las consideran como esenciales (LESTER, 1985; SCHOENFELD, 1985; SILVER, 1987). En consecuencia, si se persigue una función de aprendizaje en la resolución de problemas, es razonable adjuntar a los cuatro grupos de actividades mentales arriba indicadas:

e) Actividad de *reflexión en la práctica.*

Aplicable no sólo en la evaluación de resultados, sino como actitud permanente, evaluadora y orientadora del proceso en todas sus fases: desde la comprensión local o asignación de significado de los términos y expresiones del enunciado -control de la actividad semántica- (MAZA, 1991, 70), hasta el significado y consecuencias de cada una de las actividades que se desarrollan -control de las actividades lógica y semántica, lingüísticas, etc.

Guarda, sin duda, una estrecha relación con los *insights* gestálticos, tanto locales como el global director del proceso resolutivo. Con un doble efecto de ajuste: el primero -por lo general, de carácter local-, de adecuar los pasos y ensayos resolutorios al propósito modélico o *insight*; el segundo, modificar éste, como consecuencia de evidencias parciales (sean resultados, clarificación de conceptos, sugerencias de analogías, etc.).

Deseable como aspecto dinamizador de la función didáctica del profesor -y desencadenante de su formación permanente-, se proyecta en la condición de Objetivo actitudinal para el alumno.

> El resolutor-alumno, `mientras resuelve problemas aritméticos, tiene que tomar conciencia de que, cuando resuelve un problema, pasa por momentos diferentes en los que su conducta debe ser de naturaleza distinta -comprender, planificar, ejecutar y revisar y que esto puede servirle para comenzar a controlar-gestionar la actividad que despliega. (PUIG y CERDÁN, 1988, 215).

5.3 DIFICULTADES

La referencia a las actividades previsibles y las destrezas a aplicar a lo largo del proceso de resolución, nos permiten una primera aproximación a los géneros de dificultades más frecuentes.

Algunas de ellas han sido constatadas por vía de observación y experimentación. Otras, son difícilmente detectables: tan sólo como hipótesis explicativas de errores, pausas y bloqueos resolutorios.

El método habitual para señalar estas dificultades ha sido el de comparar los resultados obtenidos -y aun las estrategias seguidas- por poblaciones más o menos amplias ante problemas de distinta tipología, pero sólo con relación a un número muy limitado de variables; en términos generales, los estudios se restringen casi exclusivamente a PAEV escritos.

Se tomó como esquema modélico de resolución el de carácter *lineal*, en alguno de los recogidos en la Sección 5.1, más o menos pormenorizado. Pero no parece haberse analizado la posible relación entre los errores o fallos cometidos y los contextos individuales o el nivel madurativo y formativo de cada sujeto respecto de las supuestas destrezas específicas.

En lo que sigue se analizan las dificultades en la resolución de un problema en función de dos polos: la tipología del problema y el nivel de destrezas del resolutor; ambas, a prever por inducción aproximativa a partir del enunciado, o según experiencias recogidas en la literatura.

5.3.1 INCIDENCIA DEL LENGUAJE DE PRESENTACIÓN

En la resolución de un problema o situación problemática, el primer paso consiste en el conocimiento de la situación; del hecho o cadena de hechos que la conforman. En el caso de un *problema convencional* (PAEV), conocer/comprender su enunciado verbal, oral o escrito.

Pueden ya surgir las primeras dificultades: por parte del emisor, de la transmisión o del receptor (resolutor); como en todo fenómeno de comunicación. Dificultades derivadas de las características físicas del estímulo, del medio o de las condiciones de percepción. Todo ello, independientemente de la estructura y contenido del mensaje. La observación no es fútil.

Piénsese, por ejemplo, en los escollos receptores de un alumno con dificultades auditivas ante un enunciado oral, sea por la intensidad o tono de voz del emisor, pronunciación oscura o poco definida, velocidad, distancia, ruidos ambientales, imposibilidad de control visual de la verbalización, etc.

En los enunciados orales, no tienen por qué presentársele dificultades especiales a un alumno con déficits de visión, pero sí en otras formas de lenguaje:

Forma escrita.- Para un alumno ciego total, podría ser fatigante o distractivo un texto en Braille excesivamente extenso, de impresión o composición defectuosa; por no decir errónea, si contiene defectos de transcripción. Asimismo, un alumno deficiente visual puede tropezar con perturbaciones para la correcta lectura de un *relato*, cuando la iluminación ambiental-, una tipografía reducida en exceso o borrosa sean inadecuadas a las características de su resto de visión.

Forma gráfica.- Un alumno ciego total encontrará dificultades innegables ante un enunciado que implique la exploración de un esquema en relieve poco adecuado a su percepción háptica, con exceso de detalles, relieve insuficiente, etc.; mucho más ante una representación de carácter figurativo. La exploración de dibujos o gráficos complejos puede también presentar dificultades al alumno que, disponiendo de resto visual, no se ajuste a sus características (por la intensidad del trazo, contraste, tonos, tamaño inapropiado, etc.).

Manipulación o comportamientos físicos.- Si el alumno carece por completo de visión, le resultará inútil una *demostración* a distancia: precisará de una *traducción* a lenguaje oral, o simularle los festos. El material manipulativo exige unas características de tamaño y estabilidad. Sin embargo, apenas supondrá dificultad para aquel alumno que disponga de un resto visual suficiente, con unas condiciones de distancia e iluminación adecuadas.

Junto con las dificultades ligadas a una deficiencia sensorial o a distorsiones de emisión/transmisión, hay que contar con las perturbaciones atencionales con origen cualquiera.

ORTON (1990) nos advierte de la importancia que la atención orientada a la comprensión tiene en el proceso, aunque se refiera exclusivamente a enunciados o textos en lengua usual preponderante: En general, el material que no es de ficción no puede ser leído de un modo superficial, perdiendo detalles que podrían ser esenciales, y los textos matemáticos entran en esta categoría. Normalmente, no es posible leer con rapidez un texto matemático, porque cada palabra podría ser crucial y cada símbolo esencial para la captación del sentido. (ORTON, 1990, 162).

Conviene recordar que un *enunciado* o *descripción* suele incluir en mayor o menor medida elementos de los diferentes lenguajes; con sus correspondientes matices, factores de perturbación o *ruidos*, etc.

Por consiguiente, encontramos un primer par conjugado de dificultades:

Deficiencias en la forma de presentación - Deficiencias perceptivas para la recepción de la expresión del enunciado

Las deficiencias perceptivas en el receptor pueden ser suplidas, en algunos casos, mediante:

- aplicación atencional intensiva,

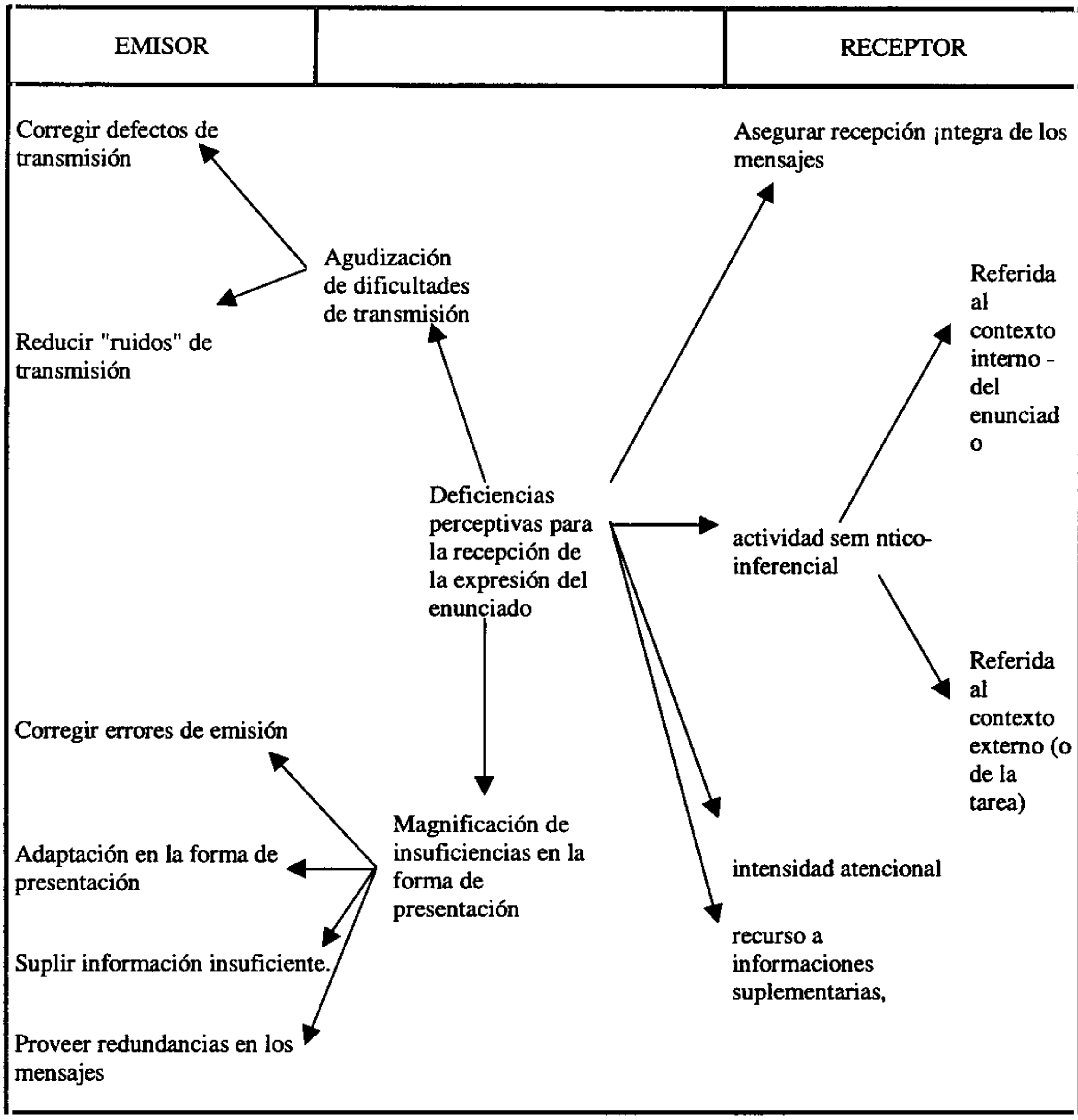
- recurso a informaciones complementarias,

- actividad semántico-inferencial (por lo general, referida al contexto interno -del enunciado- o externo -de la tarea-).

Encuadrables en el marco más general de *destrezas lingüístico-interpretativas.*

Una correcta actuación didáctica debe asegurar con prioridad que *los mensajes* se reciben en su integridad; corrigiendo progresivamente los defectos de emisión/transmisión o supliendo la información insuficiente, conforme a las deficiencias perceptivas observadas (adviértase que la percepción cuenta con un componente atencional, de selección y resalte de estímulos). Puede implicar incluso la traducción o sustitución del lenguaje de presentación (esto es lo que se hace al leer el profesor un enunciado que se entrega por escrito a los alumnos, subrayando quizás algunas de sus expresiones).

Cuadro 5.3.1.- Factores que magnifican y aminoran las dificultades de recepción de mensajes.



Como medios para detectar y corregir errores en la transmisión de mensajes o pérdidas por atención insuficiente o dispersa, disponemos la interacción alumno-alumno y alumno-profesor: el diálogo o planteamiento de preguntas respecto de los hechos y datos enunciados, al estilo propugnado por KALMYKOVA (1975) o PUCHALSKA y SEMADENI, (1987). Si bien hay que separar los aspectos puramente perceptivos y atencionales de los mnésicos y comprensivos. Tarea que puede llevarse a cabo tanto con enunciados problemáticos, como con otros simplemente descriptivos.

5.3.2 COMPRENSIÓN DEL ENUNCIADO

La comprensión de un enunciado, sea descriptivo, narrativo o problemático, y no importa en qué forma de lenguaje, conlleva una compleja gama de aspectos o actos parciales interdependientes. Entre los más importantes, se cuentan:

a) Decodificación de mensajes.

b) Comprensión de los términos.

c) Distinción y comprensión de las sentencias integrantes (descriptivas de hechos independientes o con un primer sentido propio de acción o estado).

d) Determinación de *significados locales* (ver Apartado 4.3, 7b).

e) Ordenación lógica, temporal y/o espacial en su caso, de los hechos descritos.

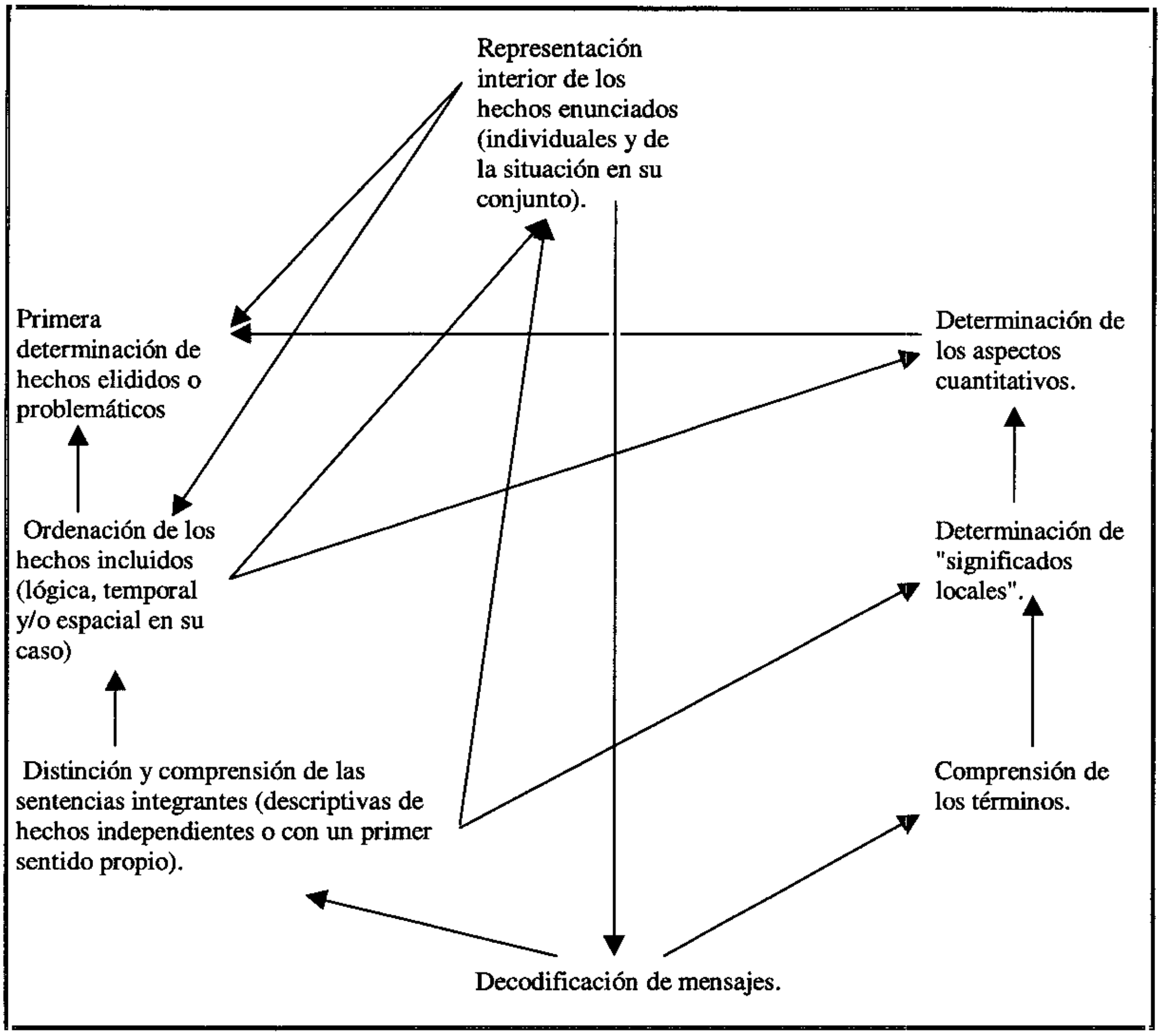
f) Determinación de los aspectos cuantitativos.

g) Primera determinación de hechos elididos o problemáticos (en el caso de enunciados con demanda; de lo contrario, entraríamos en el proceso de respuesta/resolución).

h) Representación interior de los hechos enunciados (individuales y de la situación en su conjunto).

Todos ellos implican una actividad de asignación de significados, con carácter semántico local y global, relativa al contexto (de nuevo, interno y externo). En esencia, coincide con el proceso de *lectura comprensiva*, aunque resaltándose el paso e), para los contenidos cuantitativos, inducido por el contexto de actividad matemática.

Cuadro 5.3.2A.- Fases o aspectos parciales en la comprensión de un enunciado.



En el diagrama se sugiere una relación de dependencia en el flujo de actividad interpretativo-constructiva de ordinario no responde a una secuencia temporal, ni es recorrida ordenadamente, pudiendo obviarse estadios en función del flujo perceptivo de entrada de mensajes, asignación de significados, construcción de la representación, etc. Este tipo de análisis, tanto en la distinción de fases como en su estructura, se efectúa mediante introspección, interrupción de mensajes, verbalización de contenidos mentales, etc., de dudoso control externo.

Para que haya comprensión se requiere un ejercicio inevitable de análisis que descomponga la masa en principio informe de estímulos, y permita descubrir, mediante síntesis, al menos de quién se habla, qué se dice y qué se desea saber: apropiarse la situación descrita. El análisis y la síntesis están presentes desde el primer momento, pero actuando sobre objetos de conocimiento, sobre significados. Es decir: la actividad semántica informa y dirige permanentemente el proceso comprensivo.

El proceso de comprensión puede muy bien asemejarse a la construcción de un rompecabezas, en el que el receptor, por vía atencional, va examinando piezas a medida que su necesidad comprensora lo reclama. Para ello, toma o rechaza -momentáneamente- (véase Apartado 2.2.1D):

- elementos percibidos, presentes en la *memoria icónica*;

- elementos retenidos en la *memoria inmediata*;

- elementos extraídos de la *memoria a largo plazo* (*léxico interno*).

Se considera *elementos*, a las *unidades representativas o lingüísticas*: términos, expresiones, oraciones de todo tipo y forma de lenguaje. Pero conjugando los planos perceptivo, representativo y aun intelectivo, propios de la actividad lingüístico-interpretativa.

Conviene tener presente que entendemos por lenguaje -en cualquiera de sus formas- *un sistema convencional de signos sensibles susceptible de transmitir ideas.*

Las primeras tareas consisten, pues, en aislar de la *cadena* o *paisaje* de perceptos aquéllos específicos del lenguaje de referencia, primero, y segmentar (fragmentar), después, porciones candidatas a elementos del correspondiente lenguaje. Tareas, sin duda, intencionales y conscientes, aunque la destreza adquirida las torne automáticas. Muy posiblemente, se producen a medida que se asignan significados a las porciones retenidas en la *memoria inmediata o de trabajo.* Labor que recibe la denominación genérica de *decodificación*: conferir valor lingüístico a un signo sensible, aun prescindiendo del significado.

Esto implica un dominio de los signos sensibles propios de cada lenguaje, de los *códigos* de referencia. Debido al carácter rector de la comprensión -finalidad última-, esta actividad lingüística se solapa tanto con la de carácter semántico como con la puramente perceptiva, receptora de mensajes.

La presentación de un problema o situación en el que figuran términos en varios lenguajes (Apartado 4.3, 1b) exige *cambios de código*, con los consiguientes esfuerzos combinatorios, de búsqueda en los léxicos internos, etc. Si sus contenidos son esenciales, exigen intensidad atencional; si su finalidad es ilustrativa, no eximen del esfuerzo decodificador, aunque se reduzca la tensión interpretativa, y se refuerce la comprensión global. Para los niveles educativos elementales, parecen resultar más sencillos los enunciados verbales ilustrados mediante grabados, dibujos o materiales concretos, si bien la conclusión no es proyectable a niveles medios y superiores (cfr.: NESHER 1982).

La variedad de lenguajes, en un primer momento, puede complicar la decodificación y comprensión de un problema. Sin embargo conviene no olvidar que existe una gradación del esfuerzo decodificador o interpretativo para los diferentes lenguajes; de mayor a menor complejidad: lenguaje simbólico, lengua natural escrita, lengua hablada, lenguaje gráfico-geométrico, figurativo y de comportamientos físico-manipulativos (véase: NESHER, 1982). Aunque la facilidad decodificadora y comprensiva para un determinado lenguaje está subordinada a la destreza que se haya adquirido por la práctica. Destreza que debe entenderse no sólo en sentido general, sino también relativa a su aplicación en los procesos matemáticos.

Pero este esquema puede verse alterado notablemente si el alumno padece una deficiencia visual. Para un alumno con baja visión, la gradación sería análoga a la indicada para el alumno libre de este déficit, aunque condicionada por las características de su resto visual. Para un alumno ciego total, en principio, la gradación de dificultad sería:

- lenguaje de expresiones corporales (prácticamente inaccesible, al no recibir los mensajes);

- Lenguaje de representaciones figurativas (evidentemente: proporcionadas en maquetas o relieves);

- lenguaje simbólico-matemático Braille;

- lengua natural escrita (Braille);

- lenguaje gráfico-geométrico (supuesto que las representaciones se adecuaran a las características de la exploración háptica);

- lenguaje de manipulaciones con material (adaptado a las características de la manipulación exclusivamente háptica);

- lengua natural hablada.

Cuadro 5.3.2B.- Grados de dificultad decodificadora-comprensiva para los diferentes lenguajes.

Alumno vidente	Nivel de dificultad	Alumno ciego total
- Lenguaje simbólico-matemático	Máxima	- Lenguaje de expresiones corporales (hecho accesible mediante contacto) - Lenguaje de representaciones figurativas (en maquetas o relieves); - Lenguaje simbólico matemático Braille; - Lengua natural escrita (Braille);
- Lengua natural escrita - Lengua natural hablada	Media	- Lenguaje gr fico-geométrico (siempre que las representaciones se adecuen a las características de la exploración háptica). - Lenguaje de manipulaciones con material (adaptado a las características de la manipulación exclusivamente h ptica);
- lenguaje gráfico-geométrico - lenguaje de representaciones figurativas - lenguaje de manipulaciones con material - lenguaje de expresiones corporales	Mínima	- Lengua natural hablada.

Conviene advertir que existe una cierta diferencia entre *expresión* y *reconocimiento* o *lectura*. MILLAR (1997) recoge y justifica experiencias en las que el alumno ciego total, sirviéndose de la vía háptica -tacto en movimiento-, altera esta gradación de dificultad para los casos de las expresiones gráfico-figurativa y gráfico-geométrica: *producir* es más seguro que *reconocer*, ya que el *plan de producción/reconocimiento* en la expresión está alimentado por un cierto factor cognitivo *hacia adelante* y *hacia atrás*, que delimita el campo de los objetos y dirige la acción exploratoria (véase: MILLAR, 1997, 296-297).

Una situación problemática -por su carácter compulsivo- es, al mismo tiempo, una excelente ocasión para exigir del alumno el cultivo de destrezas interpretativas, poniendo de relieve su valor instrumental. Como tantas otras veces, nos hallamos ante un dilema didáctico: ¿qué Objetivo hacer prevalecer, la práctica lingüística o la resolución de problemas?

* * *

En claro paralelismo con el subproceso de *decodificación* tienen lugar los de *comprensión lingüística* propiamente dicha: asignación de significados a términos/expresiones y oraciones -independientes o con un primer sentido propio-; y la progresiva *construcción de representaciones interiores* que respondan a la información captada.

Se deduce toda una gama de juicios de dificultad en el enunciado y los correspondientes a carencias lingüísticas en el resolutor potencial. Están relacionadas con algunas de las que en la Sección 4.3 llamamos *variables sintácticas* (Apartado 4.3, 6):

- Dificultad léxica. Presencia de términos inusuales y expresiones poco conocidas por el resolutor (LUCEÑO, 1993, 134; ALSINA y OTROS, 1996, 112). Que exigirían un mayor esfuerzo de búsqueda en el *léxico interno* o interpretación contextual *a posteriori*; incluso desconocimiento total del significado (PUIG y CERDÁN, 1988, 93). Asimismo, pueden tener un efecto distractivo, generación de inseguridad, bloqueos.

- Elevada complejidad morfológica. Con número absoluto o alta proporción de pronombres (LUCEÑO, 1993, 134), calificativos, determinativos, etc.

- Elevada complejidad sintáctica. Presencia de oraciones subordinadas, períodos largos, etc.

- Variedad de significaciones sintácticas. Presencia de oraciones dubitativas, exclamativas, pluralidad de interrogativas directas e indirectas, etc. Que pueden inducir a inseguridad interpretativa, a la par que actuar como distractores. El objetivo no es tratar que el alumno realice un comentario de texto o un ejercicio de lectura comprensiva (LUCEÑO, 1993, 134)

- Número elevado de términos. Respecto de la capacidad de *memoria a corto plazo* del resolutor.

- Estilo literario deficiente. Uso impropio de los signos de puntuación; descripciones incorrectas o equívocas; excesos y redundancias; textos muy sintéticos que acumulen mucha información en pocos términos (ALSINA y OTROS, 1996, 112); etc.

- Contexto temático inadecuado a los intereses, experiencias y nivel madurativo del alumno. Por orden de dificultad: problemas abstractos o descontextualizados real no próximo, familiar, motivante y de fácil representación imaginativa.

En el extremo de configuración de contextos temáticos ajenos a los intereses de los alumnos, se corre incluso el riesgo de un bloqueo momentáneo en la tarea, desmotivación cuanto menos: Sí -el resolutor- rehúsa entrar en el problema, quizá se deba a que no encuentra familiar el contexto o los objetos invocados y es incapaz, por tanto, de dotar de sentido a la situación descrita en el enunciado. (PUIG y CERDÁN, 1988, 93).

A este respecto, C. Kamii transmite su experiencia personal sobre los tipos de problemas que más parecen interesar a los escolares de entre 6 y 9 años: situaciones de la vida diaria dentro y fuera de la escuela, la vida personal del enseñante, problemas elaborados por los propios niños y situaciones que se plantean en otras áreas del currículo. Las festividades como la -Navidad inspiran problemas atractivos y la vida personal del enseñante parece ser una fuente inagotable de interés entre festividades. Mientras que los problemas -de los libros de texto son meras excusas para practicar una operación aritmética. A la vez, los problemas hechos por el enseñante hacen que las matemáticas parezcan mucho más variadas, más prácticas y más interesantes para los niños. (Kamii, 1995, 117).

Estas sugerencias son concordes con los argumentos que NESHER (1980) aporta para negar la posibilidad de *enunciados de verdaderos problemas aritméticos de aula, reales o con referencia a la realidad cotidiana.* En este sentido, un *problema enunciado* se opone a una *situación problemática*; aquél, sería la formulación cristalizada de ésta, hurtándole las fases quizás más creativas y motivantes: observación de la situación real, traducción a los diferentes lenguajes enunciativos, planteamiento de cuestiones, etc. Es decir: un *problema enunciado completamente* empobrece sus posibilidades como *situación de partida*, amén de generar un contexto inevitablemente ficticio (véase: PUIG y CERDÁN, 1988, 44).

La marcha hacia la comprensión global de la situación problemática no es un simple quehacer aditivo de significados locales conferidos a los términos integrantes -expresiones u oraciones- en distintos lenguajes.

Un enunciado puede constar tan sólo de una proposición: "*El día de mi cumpleaños, me gustaría invitar a un helado a mis compañeros de clase...*" (Aunque tal situación de aprendizaje pudiera escandalizar a los puritanos, partidarios de enunciados estructurados y completos. ¿Qué pensarían, entonces, de: "*Mi reino por un caballo*"; como cuestión de examen de Economía Política en una cátedra universitaria de Madrid?)

Lo ordinario, no obstante, será que el enunciado conste de varias oraciones. Pero también será frecuente que éstas no se hallen ordenadas temporalmente; ni se respete un orden lógico en la presentación de los datos, si es que son explícitos.

Deben, pues, tomarse en consideración otras variables sintácticas:

- Falta de biunivocidad entre sentencias del enunciado y hechos descritos.

Las dificultades pueden tener origen tanto por exceso -redundancias- como por defecto -elipsis, presuposiciones, información contextual externa, etc.-. Las primeras no repercutirán directamente en la comprensión, aunque pueden ser causa de sobrecargas por información superflua y exigir una mayor atención para valorar adecuadamente su significatividad; serán desalojadas intencionalmente de la *memoria a corto plazo.* Las omisiones de información acerca de hechos o estados deberán resolverse mediante análisis *a posteriori*, respecto de la comprensión global y, tal vez, merced a la representación de la situación; esta información ausente y valorada como conveniente deberá buscarse en la *memoria a largo plazo* u obtenerse mediante procesos complementarios a partir de la información disponible.

En el resolutor, se hacen necesarios la presencia y el ejercicio de capacidades para el análisis de la información; es decir: destrezas para la emisión de juicios semánticos y decisiones lógicas sobre la significatividad de la información respecto del objeto de la actividad, así como destrezas interpretativo-lingüísticas –respecto de los lenguajes del enunciado- y representativas internas.

- Falta de correspondencia espacio-temporal entre sentencias del enunciado y hechos descritos (LOFTUS 1970, JERMAN 1971, JERMAN y REES 1972, LUCEÑO 1993, ALSINA y OTROS, 1996). Que repercutirán notablemente en la conformación de la representación interna, y, previsiblemente, en la mayor o menor facilidad de comprensión global.

Los clásicos tienen razón: la *descolocación* en el orden de la información obliga a un mayor esfuerzo comprensivo. Algo así como el hipérbaton en la oración, elevado al plano del período enunciativo. A mayor desorden, mayor dificultad.

El lector/resolutor se verá obligado a un ejercicio combinatorio de imágenes y sentidos, en busca de la configuración *más significativa*; que, a su vez, reclama un más fino análisis lingüístico -significados local- es o dependencias semánticas de tiempos y localizaciones, verbos y términos relacionales. Por consiguiente, un adecuado desarrollo de las capacidades lingüístico-interpretativas, combinatorias y semánticas.

> De una manera general, un problema se puede complicar seriamente si se invierte el orden de las informaciones pertinentes, o si se presentan en desorden, y más todavía si están sumergidas dentro de otras informaciones. (VERGNAUD, 1991, 175)

La representación interior y los determinativos lógicos y espacio-temporales del enunciado pueden impeler a una *reordenación interior* o *comprensiva* de la información de hechos y estados, diferente del orden transmisor-perceptivo. Habría, por tanto, una *reelaboración del enunciado primitivo*: el resolutor lo *acondiciona* a sus capacidades y experiencia resolutiva mediante un ejercicio combinatorio y semántico. En alguna medida, se ha iniciado el proceso de resolución.

Cuadro 5.3.2C.- Factores que magnifican y aminoran las dificultades interpretativas.

Factores que magnifican las dificultades lingüístico-			Factores que y aminoran las dificultades lingüístico-		
Variedad de lenguajes en los enunciados	- para contenidos esenciales		Evitar variedad de lenguajes para contenidos esenciales	simplificar decodificación	facilitar interpretabilidad de los mensajes
	- como elementos de información redundante (ilustrativa)		Moderación ilustrativa		
Presencia de Términos o expresiones con dificultad decodificativa	- incorrectos	"fonéticamente	"fonéticamente	empleo de términos y expresiones correctas	
		gramaticalmente	gramaticalmente		
		sintácticamente	sintácticamente		
	- equívocos		Empleo de términos y expresiones claras	facilitar decodificación material	
	- inusuales		Empleo de términos y expresiones familiares		

(La corrección/incorrección de orden "fonético", "gramatical" y "sintáctico" debe entenderse por analogía con la lengua natural hablada.)

Los términos cuantitativos jugarán, de ordinario, un papel decisivo en la resolución. No se restringen a los *argumentos*: algunos *verbos*, *agentes* y aun *términos relacionales* participan del aspecto de *cantidad*; los *adjetivos*, raras veces (los *numerales*, adjetivos o pronombres -como quiera entenderse- son *per se* sujetos de aspectos cuantitativos).

Formalmente, los destinados a jugar un papel de *argumento* son fáciles de descubrir y comprender, por su forma *numeral*, distinción de partes, símbolos numéricos, etc. Algo más compleja resulta la distinción-comprensión como términos cuantitativos de aquellos otros que se presentan como formas verbales, adverbios y expresiones adverbiales, conjunciones, etc., para los enunciados en lengua natural, o sus correspondientes en los demás lenguajes.

Pero el valor semántico en el enunciado es más profundo: puede ser *significativo* o no, respecto de la demanda o pregunta; es decir: intervendrán o no en el proceso de resolución. Lo que afecta tanto a los auténticos *argumentos* como algunos de los otros significados locales.

La presencia en el enunciado de términos cuantitativos *ornamentales* o como *datos redundantes* o *no pertinentes* incrementa la dificultad de resolución. Pero, en general, no influye en la comprensión, a no ser por el incremento de información a retener y combinar.

* * *

Algunos autores descomponen el proceso en dos segmentos: *lectura* y *comprensión*; pero reconociendo que la separación es artificiosa. Se pretende apercibir así al profesor de las dificultades lectoras específicas -quizás también perceptivas-, suponiendo que se hable de problemas de enunciado escrito. Y una finalidad metodológica, extensible a todos los lenguajes: De la misma manera que los niños están experimentando por primera vez qué es un texto narrativo, descriptivo, etc., también están tomando contacto con la estructura del texto de un problema y aprendiendo a reconocer que un texto presentado de una manera determinada es un problema. (PUIG y CERDÁN, 1988, 26).

En lo referente a la capacidad interpretativa del resolutor, MUTH (1984) observa experimentalmente una correlación positiva entre el desarrollo de la lecto-escritura y la facilidad de resolución de problemas aritméticos. En concordancia con las constataciones de LOFTUS (1970), LOFTUS y SUPPES (1972), JERMAN (1971), JERMAN y REES (1972), quienes prevén una mayor facilidad de resolución para los problemas de enunciado breve y simplicidad gramatical. No obstante, todavía falta por aclarar cómo están interrelacionadas estas variables (MAZA, 1989, 24); tal vez se atiende tan sólo a aspectos muy generales.

Es opinión unánime en la literatura que la comprensión del enunciado está en función directa de las destrezas *lectoras* (comprensivas, se entiende) del alumno; añadiremos: para los correspondientes lenguajes. Las carencias en este terreno repercutirán, de seguro, en la tarea resolutoria y en la comprensión de los aspectos matemáticos derivados.

Son innumerables las opiniones -incluso constataciones- acerca de una estrecha relación general entre el aprendizaje de la Lengua y la Matemática. La interconexión quizás no sea tanto de carácter estructural y psicológico, como de acceso. Las situaciones de enseñanza-aprendizaje, sean expositivas o problemáticas, incluyen una descripción o enunciado; por lo general, en lengua natural hablada o escrita. Las carencias en destrezas decodificadoras -también perceptivas- y fallas comprensivas en este primer estadio hacen inútiles los esfuerzos por un avance seguro en la comprensión de conceptos y técnicas en el nivel más abstracto y específico de lo matemático.

Con mayor frecuencia aún se excluye de la comprensión el aspecto de *representación interior.* Pese a aceptar que ésta es muy útil para la comprensión global del enunciado, y que su construcción tiene lugar durante el mismo proceso: Sin embargo, la comprensión del enunciado o situación parece reclamar como apoyo esencial la *representación* interior; no necesariamente figurativa: Los estudios sobre el aprendizaje significativo y de descubrimiento ponen de manifiesto la necesidad de unas representaciones adecuadas de los problemas y de sus estructuras matemáticas subyacentes. (RESNICK y FORD, 1981, 179).

5.3.3 REPRESENTACIÓN INTERIOR DEL ENUNCIADO

Resulta imprescindible que el niño sepa representarse mentalmente de manera adecuada las relaciones y las acciones que caracterizan el problema. La comprensión es vista como un proceso de creación de una representación del problema Esta representación media entre el texto del problema y su solución. (HELLER y HUNGATE, 1985, 89).

Es más: SIMON y SIMON (1978), aunque refiriéndose a problemas de Física, entienden que la planificación resolutiva es deudora de una adecuada representación del problema. Según ellos, los *expertos* parten del enunciado para construir una representación interna del mismo que les guíe en la generación y aplicación de las operaciones oportunas.

La contribución que una representación interior presta a la comprensión del enunciado, primero, y a la resolución, después, es algo que ha interesado desde muy pronto a los especialistas en Didáctica de la Aritmética. Desde HYDLE y CLAPP (1927), quienes concluyeron de sus experiencias que presentan menos dificultades de resolución los problemas verbales basados en situaciones familiares, fácilmente visualizables por los niños; hasta los trabajos de FISCHBEIN (1977, 1985, 1987),RILEY, GREENO y HELLER (1983), BRIARS y LARKIN (1984), KINTSCH y GREENO (1985), CARPENTER y MOSER (1985), GREENO (1987), orientados a establecer modelos que simulen las proposiciones y procesos implícitos en la representación mental de los diferentes tipos de problemas.

Precisamente, suele reconocerse como uno de los rasgos distintivos de un *buen resolutor* la capacidad manifiesta para el uso flexible de las representaciones de un mismo problema (DUFOUR-JANVIER y OTROS, 1987). Bien sea mediante *transposiciones* o representaciones de un mismo género lingüístico o nivel (en el sentido de BRUNER), bien mediante *traslaciones* correspondientes a formas expresivas diferentes.

Reflexionemos un instante sobre la importancia de los escenarios-marco o contextos temáticos conformados, evocados o aludidos por los enunciados de los problemas aritméticos escolares.

En el trabajo con niños conviene recordar que para la fantasía infantil es poco menos que imposible separar realidad de ficción. Con gran facilidad, se incorporan al mundo de sus imágenes como protagonistas. Participan de buen grado en las acciones que allí se desarrollan, padeciendo y gozando en las inquietudes y éxitos de los personajes que les resulten afectos. Aceptan como natural la personificación y animación de animales, cosas, entes abstractos incluso -números, símbolos-; basta una sugerencia para que se la confieran ellos mismos, y ese universo, mudo o inanimado, pasará a disfrutar de vida propia. Recordemos los trabajos de F. PAPY en *cuentos matemáticos* destinados a la introducción y tareas elementales con grafos y números.

En la clase de Matemáticas, la aseveración alcanza incluso a los adolescentes, aun cuando ya no exista el riesgo de confusión entre realidad y ficción; ni se tiña de emotividad el éxito o fracaso de los protagonistas; ahora se aprecian la satisfacción e insatisfacción intelectuales. Les resulta más asequible el ingenuo juego -quasi-pueril- en un mundo imaginario aceptado libremente, que la fría y áspera abstracción matemática. Intercalada en los contextos familiares y prácticos, no es huida de la realidad: es refrescante paseo por los ámbitos de la fantasía creativa. Y una dosificación adecuada permite mantener a buen recaudo el nexo entre realidad y Matemática.

Los mensajes integrantes del enunciado, si son idóneos, suscitan -o debieran suscitar- en la imaginación del niño una colección de imágenes, una *representación*; un pequeño filme, una fotografía, cuanto menos.

Los *personajes* o *protagonistas*, estarán representados por los *agentes*, determinados en labor semántica por asignación de significados locales. Los adjetivos -en sentido gramatical, no semántico- contribuirán, sobre todo, a su representabilidad y a perfilar su personalidad, aunque su papel sea irrelevante a efectos resolutorios.

Van descubriéndose actitudes y acciones, gracias a los otros significados locales: *localización* y *tiempo*, *verbos* y *términos relacionales*. Puede observarse que estamos siguiendo la terminología introducida en el Apartado 4.3, 7b, para designar dependencias semánticas según Nesher (1982); (pero no es decisoria ni exclusiva.)

En esta imaginaria pieza dramática, a los *argumentos* cuantitativos les corresponde el verdadero *argumento de la acción* -Nesher acertaba en la denominación-. Los *adjetivos* -ahora sí, en cuanto a relación semántica- subrayan dichos valores, pudiendo condicionar el desenlace resolutorio (piénsese, por ejemplo, en los problemas de tipo multiplicativo).

La representabilidad de la situación problemática en el alumno estará, como es evidente, en función de las características propias de las dos concausas:

a) La intensidad estimulativa de los elementos de lenguaje integrantes del enunciado. Es decir: su personalización, rasgos distintivos, número reducido, ordenación.

Junto con la actividad lingüístico-interpretativa -o como parte de ella-, se despliega una actividad de carácter combinatorio, de reordenación de elementos disponibles; de carácter lógico, aceptando o rechazando composiciones y significados; de carácter semántico, en definitiva, adhiriendo sentidos.

Por ello, deben considerarse como factores que dificulten la representabilidad:

- Número elevado de *acontecimientos* y *personajes* afectados de aspectos cuantitativos.
- El recurso en el enunciado a elipsis y términos de sustitución, como son los pronombres (LUCEÑO, 1993, 134).

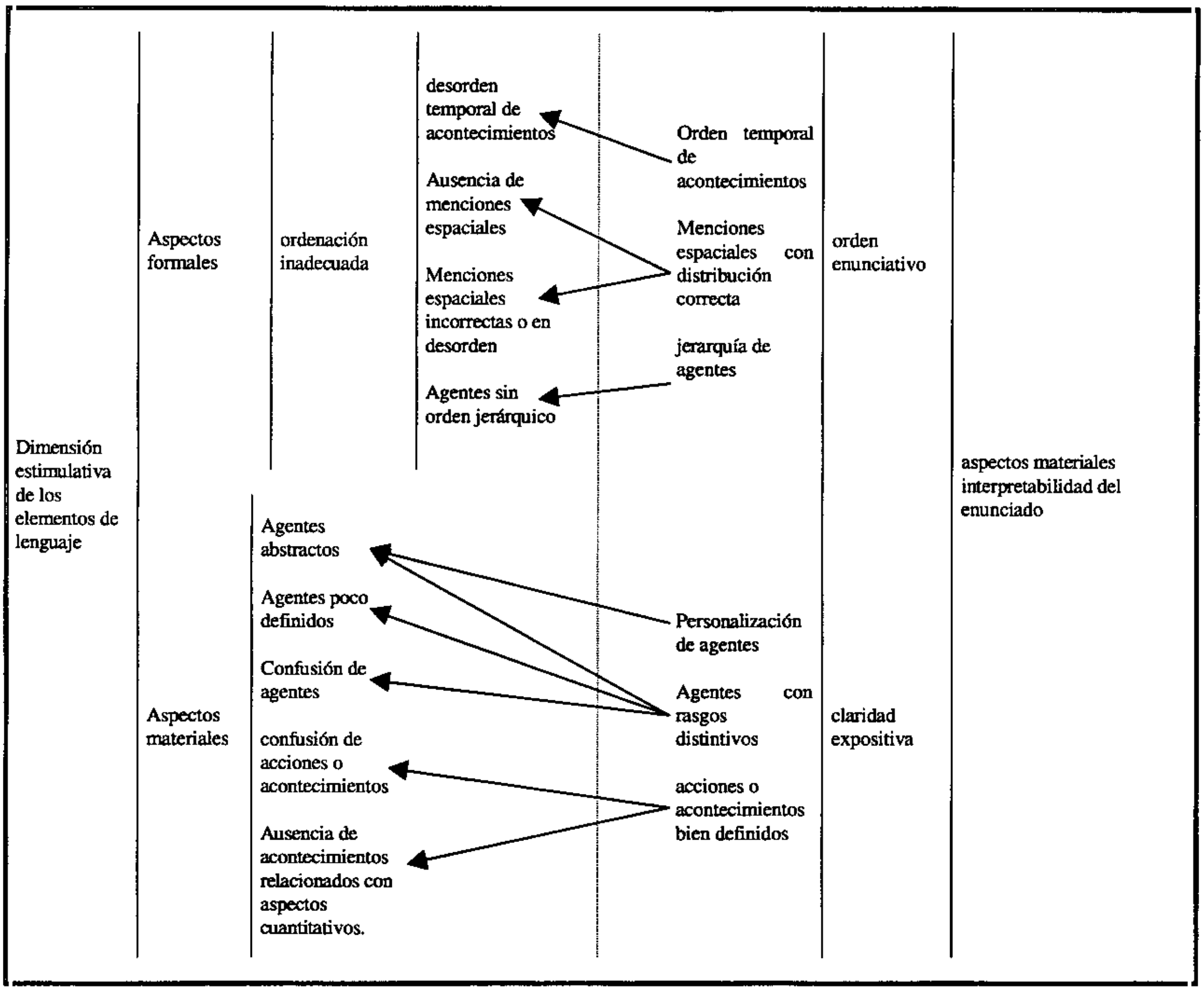
- la distribución de oraciones en el enunciado en orden diferente al cronológico de los hechos narrados (LUCEÑO, 1993, 135; ALSINA y OTROS, 1996, 112).

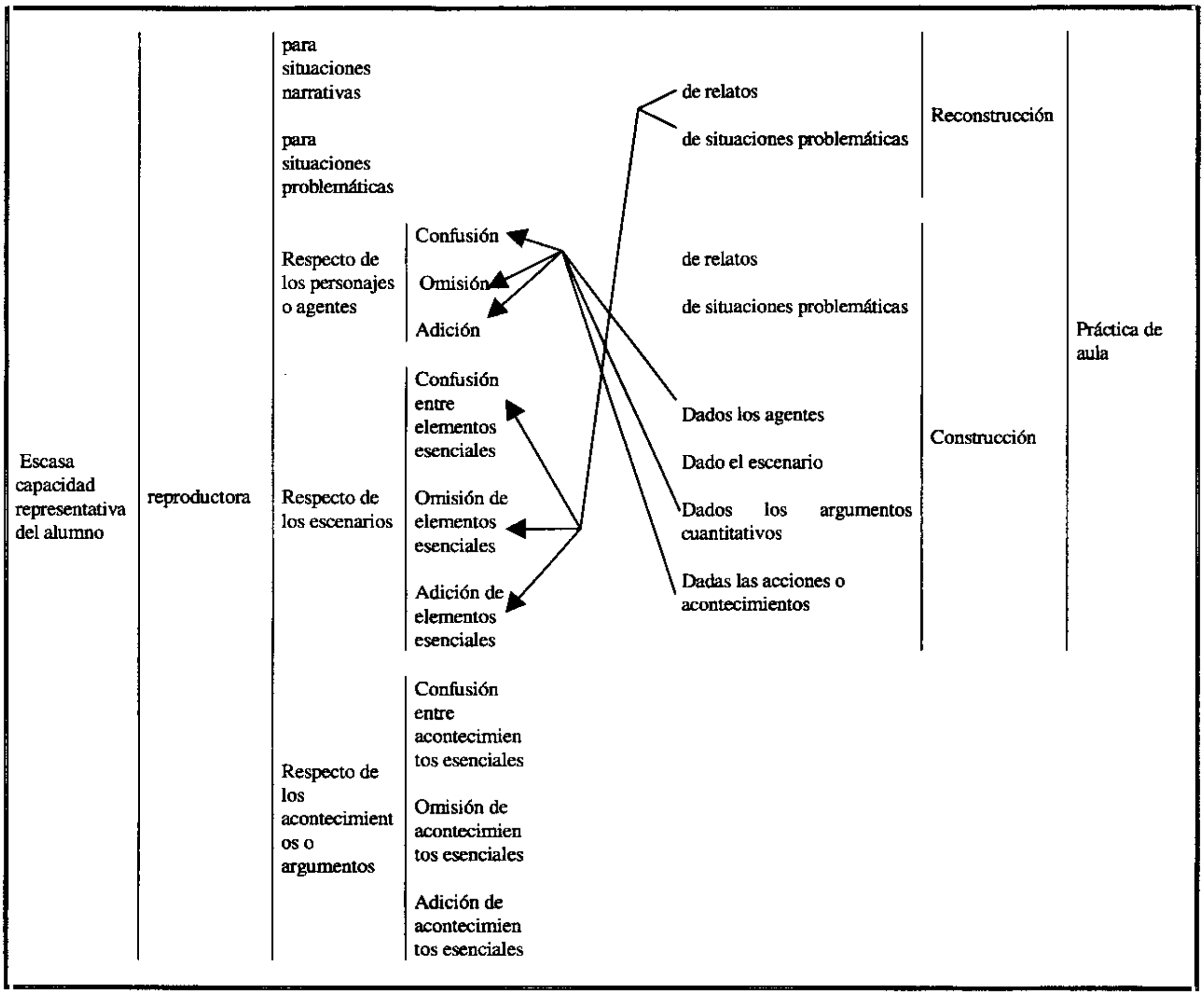
- Presentación de los *agentes* y *argumentos* en desorden espacial (VERGNAUD, 1991, 175). Algo que las ilustraciones o los enunciados con soporte gráfico o manipulativo solventan por sí mismos; de aquí su facilidad comprensivo-representativa (NESHER 1982).

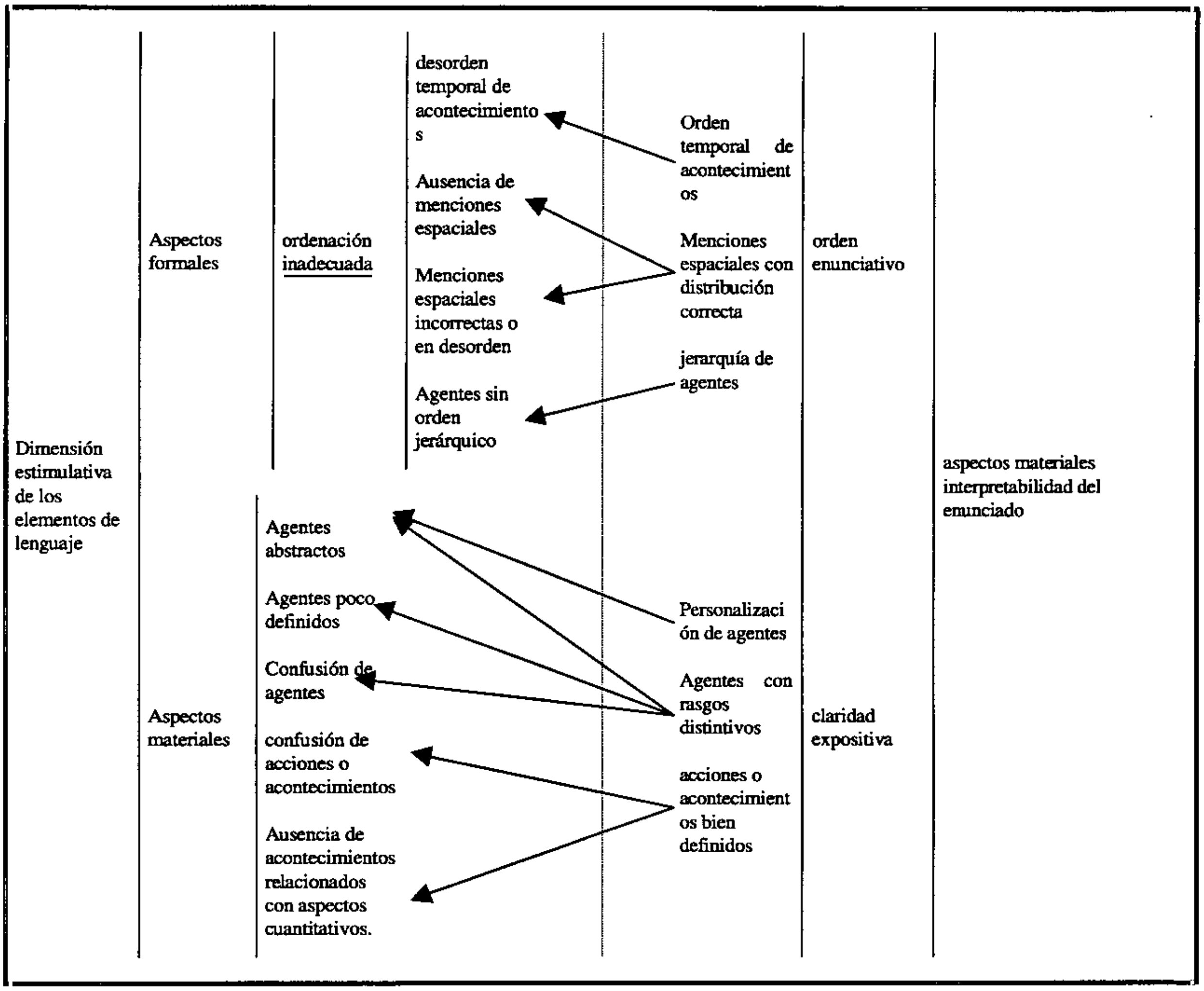
b) La capacidad específica del alumno para representarse situaciones, sean narrativas o problemáticas, respecto de los lenguajes del enunciado. Capacidad que responde a características personales, pero que es susceptible de desarrollo intencional.

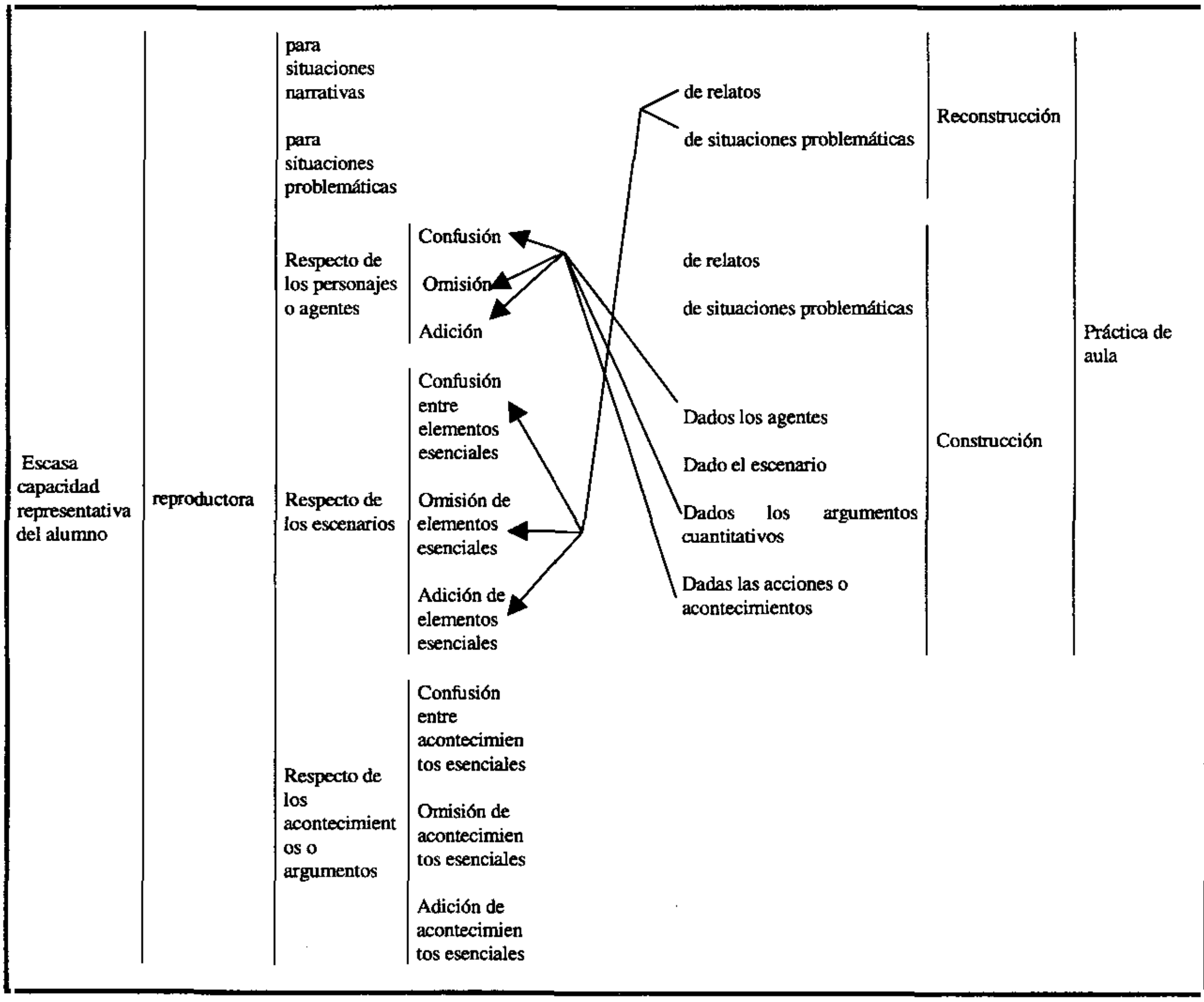
Cuadro 5.3.3.- Factores que magnifican y aminoran las dificultades en la representabilidad interior de un enunciado.

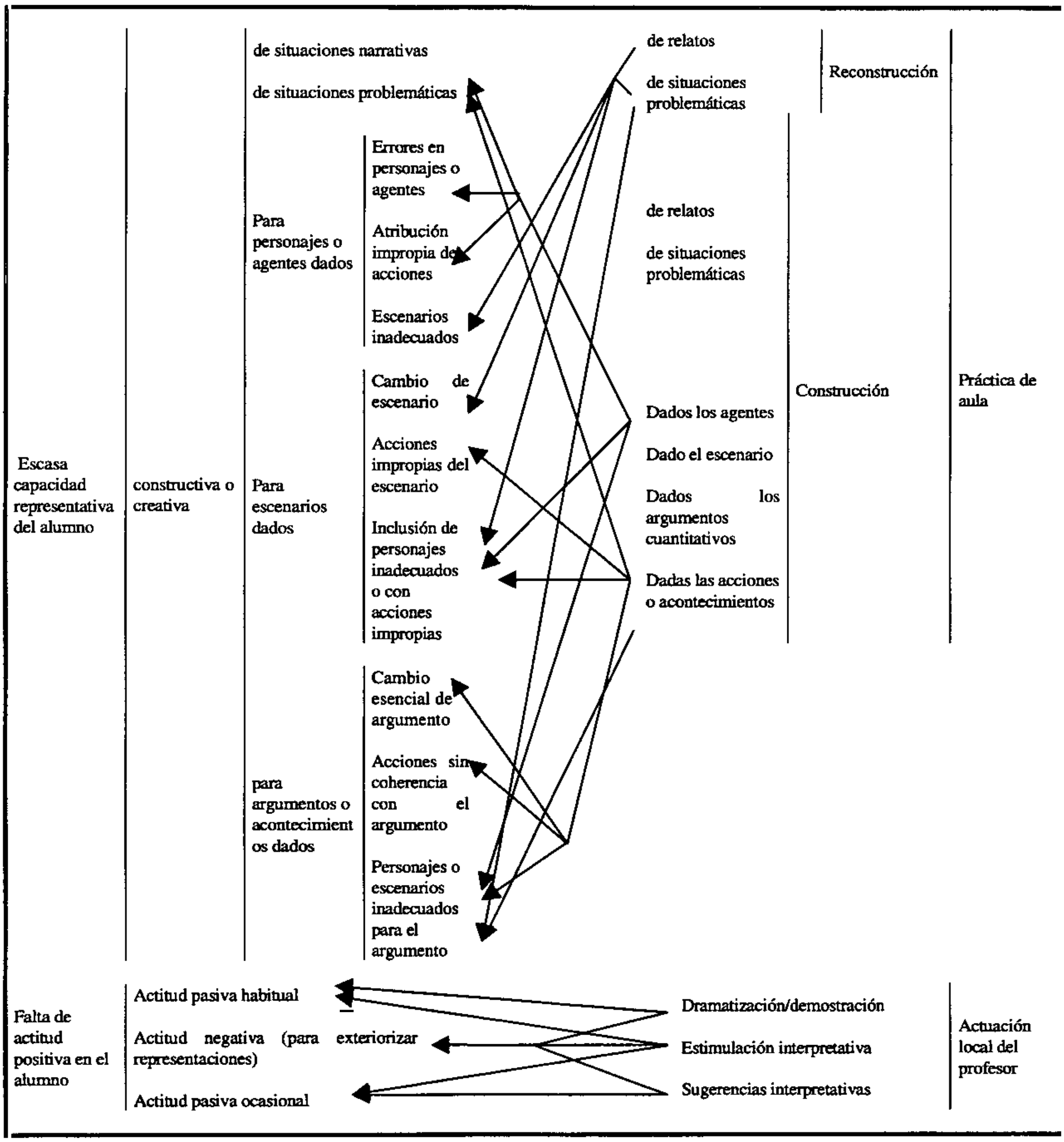
Factores que magnifican las dificultades en la representabilidad interior de un enunciado			Factores que aminoran las dificultades en la representabilidad interior de un enunciado.			
		Número elevado de agentes o "personajes" afectados de aspectos cuantitativos.				
	Número excesivo	Presencia de agentes o "personajes" superfluos afectados de aspectos cuantitativos.	Número reducido de agentes	sencillez expositiva		
		Número elevado de acontecimientos relacionados o no con aspectos cuantitativos.	Número reducido de acontecimientos			
Dimensión estimulativa de los elementos de lenguaje Aspectos formales		Elipsis de agentes			aspectos formales	interpretabilidad del enunciado
	otros elementos de confusión	Empleo de sustitutivos (pronombres) para la designación de agentes afectados de aspectos cuantitativos.	agentes o personajes explícitos	completitud		
		elipsis de acontecimientos o acciones	acciones o acontecimientos explícitos			
		Mención de acontecimientos superfluos relacionados con aspectos cuantitativos.				


Dimensión estimulativa de los elementos de lenguaje
Aspectos formales
ordenación inadecuada
desorden temporal de acontecimientos
Ausencia de menciones espaciales
Menciones espaciales incorrectas o en desorden
Agentes sin orden jerárquico
Orden temporal de acontecimientos
Menciones espaciales con distribución correcta
jerarquía de agentes
orden enunciativo
aspectos materiales interpretabilidad del enunciado
Aspectos materiales
Agentes abstractos
Agentes poco definidos
Confusión de agentes
confusión de acciones o acontecimientos
Ausencia de acontecimientos relacionados con aspectos cuantitativos.
Personalización de agentes
Agentes con rasgos distintivos
acciones o acontecimientos bien definidos
claridad expositiva


Escasa capacidad representativa del alumno
reproductora
para situaciones narrativas
para situaciones problemáticas
Respecto de los personajes o agentes
Confusión
Omisión
Adición
Respecto de los escenarios
Confusión entre elementos esenciales
Omisión de elementos esenciales
Adición de elementos esenciales
Respecto de los acontecimientos o argumentos
Confusión entre acontecimientos esenciales
Omisión de acontecimientos esenciales
Adición de acontecimientos esenciales
de relatos
de situaciones problemáticas
Reconstrucción
de relatos
de situaciones problemáticas
Dados los agentes
Dado el escenario
Dados los argumentos cuantitativos
Dadas las acciones o acontecimientos
Construcción
Práctica de aula


Dimensión estimulativa de los elementos de lenguaje
Aspectos formales
ordenación inadecuada
desorden temporal de acontecimiento s
Ausencia de menciones espaciales
Menciones espaciales incorrectas o en desorden
Agentes sin orden jerárquico
Orden temporal de acontecimient os
Menciones espaciales con distribución correcta
jerarquía de agentes
orden enunciativo
aspectos materiales interpretabilidad del enunciado
Aspectos materiales
Agentes abstractos
Agentes poco definidos
Confusión de agentes
confusión de acciones o acontecimientos
Ausencia de acontecimientos relacionados con aspectos cuantitativos.
Personalizaci ón de agentes
Agentes con rasgos distintivos
acciones o acontecimient os bien definidos
claridad expositiva


Escasa capacidad representativa del alumno
reproductora
para situaciones narrativas
para situaciones problemáticas
Respecto de los personajes o agentes
Confusión
Omisión
Adición
Respecto de los escenarios
Confusión entre elementos esenciales
Omisión de elementos esenciales
Adición de elementos esenciales
Respecto de los acontecimientos o argumentos
Confusión entre acontecimientos esenciales
Omisión de acontecimientos esenciales
Adición de acontecimientos esenciales
de relatos
de situaciones problemáticas
Reconstrucción
de relatos
de situaciones problemáticas
Dados los agentes
Dado el escenario
Dados los argumentos cuantitativos
Dadas las acciones o acontecimientos
Construcción
Práctica de aula


de situaciones narrativas
de situaciones problemáticas
Errores en personajes o agentes
Para personajes o agentes dados
Atribución impropia de acciones
Escenarios inadecuados
Cambio de escenario
Acciones impropias del escenario
Escasa capacidad representativa del alumno
constructiva o creativa
Para escenarios dados
Inclusión de personajes inadecuados o con acciones impropias
Cambio esencial de argumento
Acciones sin coherencia con el argumento
para argumentos o acontecimientos dados
Personajes o escenarios inadecuados para el argumento
de relatos
de situaciones problemáticas
Reconstrucción
de relatos
de situaciones problemáticas
Dados los agentes
Dado el escenario
Dados los argumentos cuantitativos
Dadas las acciones o acontecimientos
Construcción
Práctica de aula
Falta de actitud positiva en el alumno
Actitud pasiva habitual
Actitud negativa (para exteriorizar representaciones)
Actitud pasiva ocasional
Dramatización/demostración
Estimulación interpretativa
Sugerencias interpretativas
Actuación local del profesor

¿Acaso es irresponsable excitar la imaginación del niño hacia una *realidad virtual* que sirva de escenario a la actividad educativa? ¿Qué decir, entonces, del continuo bombardeo de medios audiovisuales -de dudoso contenido formativo y eficacia pasivizante- cuya objetividad y realismo no son otros que los decididos por el realizador o productor?

Convengamos en que la finalidad del escenario-marco evocado -provocado- por el enunciado de un problema es facilitar al alumno su comprensión. Y ésta no se agota en sí misma: a partir de ella, se espera desencadenar las acciones que implican el proceso de resolución del problema, o itinerario didáctico con objetivos varios que lo tienen como *situación de partida.*

El escenario-marco del problema, por tanto, no se limita a ser el simple *marco* para una operación aritmética; que sería su valor de comprensibilidad. Debe también tenerse en cuenta su posible valor motivante y de ayuda general al progreso en el proceso de resolución o de aprendizaje.

Los intereses de un alumno no tienen por qué coincidir con los de la inmensa mayoría de los adultos -incluido el profesor-, ni con las demandas aritméticas del contexto social. Ante todo, son momentáneos y volátiles, como su imaginación. Y serán *sus intereses*: *suyos*, por concretos y próximos, aceptados como propios de forma compulsiva: no exijamos a un niño que se comporte reflexivamente ante sus efímeras fantasías cambiantes -que eso son los escenarios-marco para él-.

Ahora bien, *interesarse* es *sentirse comprometido*, *involucrado*. Tener interés en algo, es sentirse alcanzado por las consecuencias, positivas o negativas. Ser un personaje de la acción, o sentirse identificado con alguno de los protagonistas, con el que puede colaborar eficazmente. Las satisfacciones o decepciones, los perjuicios o beneficios, serán tan imaginarios como el escenario y la acción. Pero la película *ha interesado.*

El valor motivante que comporta un enunciado para desencadenar el proceso resolutivo estará, pues, en función directa de su potencial estimulador para que el alumno construya una representación animada o susceptible de fácil animación, capaz de captar su interés o verdadero deseo de *entrar en escena.*

Como en el caso de la comprensibilidad, el *valor motivante* no admite *juicio a priori.* En cuanto estímulo, depende de la representabilidad de los argumentos (potenciales protagonistas aritméticos) y de las acciones descritas, destaca o se pierde en el contexto de la actividad en la que se halle integrado el problema, la *dramaturgia* con que lo impregne el profesor (Glaeser, 1973), etc. En cuanto a la respuesta, es función de la receptividad del resolutor potencial, su capacidad de representación imaginativa y de proyección dramática, formación anterior, etc.

Su valor de ayuda general para el proceso de resolución se deriva de la capacidad para inducir una fácil traducción de las acciones o situaciones representables a términos más estrictamente matemáticos, con independencia de los *agentes* y *argumentos.* Es decir: estriba en el significado global que configura, merced al sentido inferido por ciertos significados locales, preferentemente los inducidos por *verbos* y *términos relacionales.*

En última instancia, se apela a los valores semánticos, tanto locales como global. Es decir: la *motivación*, primero, y el *valor de ayuda general*, después, entroncan directamente con la comprensibilidad. De ella arrancan, pero también a ella conducen y alimentan: no interesa ni mueve lo que no se comprende -al menos en parte-, y más necesidad de conocer -comprender- despierta lo que atrae y empieza a parecer dominable -resoluble-.

El receptor/resolutor busca obtener significados (o *insights*) locales, volviendo a recorrer segmentos del itinerario: recordando partes del enunciado, recomponiendo, soslayando, *releyendo*, si es preciso. No quedará satisfecho -no debe quedar satisfecho- mientras no disponga de un *significado (o* insight*) global*; pero, muy posiblemente, entraría ya en el diseño de una *conjetura* o de un *plan de resolución*.

5.3.4 LA PREGUNTA O DEMANDA

En un *problema* en el sentido tradicional, la representación interior generada por el enunciado es incompleta; la pregunta resalta esta incompletitud, y reclama el o los elementos ausentes. Al resolutor toca ingeniárselas para obtenerlos y situarlos en tal representación. El *fotograma final de la película* está a falta del *argumento* solución-desenlace.

En las *situaciones problemáticas* en que no es explícita la pregunta, se exige del resolutor un análisis cuidadoso. El *fotograma final* falta en su totalidad. Se reclama del resolutor/espectador:

- que se pregunte *sobre qué preguntarse*,

- que formule la *cuestión* en términos acordes con la situación,

- que *acepte la cuestión como respondible* con los elementos comprendidos; es decir: que vislumbre o anticipe un nexo lógico entre los hechos descritos y el desenlace o respuesta.

En uno y otro caso, se perfilan con mayor nitidez las dependencias semánticas locales; en especial, los *argumentos* o aspectos cuantitativos ligados a la demanda. Asimismo, el *significado global*, término y origen a la vez de los *nuevos significados locales*, emerge de forma *momentáneamente definitiva* -el proceso resolutivo puede contradecirlo, invitando a una reelaboración-.

De aquí que una correcta comprensión de la demanda o pregunta sea decisiva para el proceso de resolución o inicio del camino de aprendizaje previsto. Algo imprescindible, antes de proseguir la marcha: *saber adónde quiero llegar*; y aceptar el reto: *saber que puedo llegar, aunque aún no sepa cómo*; inmediatamente, el *saber dónde estoy*. Nos hallamos, pues, ante el más poderoso de los condicionantes, director a su vez del proceso de resolución.

No es de extrañar, entonces, que todos los tratadistas coincidan en un punto: el alumno debe plantearse en un cierto momento: "*¿qué me piden?*", o "*¿qué debo calcular?*"O, mejor: "*¿qué busco?*", o "*¿qué quiero encontrar?*" Hacer suyo el problema. (POLYA).

El resolutor busca *pistas*; antes aún, busca conocer la meta, indicios para eliminar al menos aquellas rutas que le apartarían de ella, por dónde no encaminar sus esfuerzos. Teme la inseguridad, la indefinición. Confía en sus habilidades operatorias -por mecánicas y comprobables-, pero vacila ante las ejercitaciones lógicas y semánticas -por su mayor nivel de exigencia intelectiva y difícil contrastación; quizás, también, por su escasa práctica-. Pesa el *miedo al fracaso*, como pesa el *miedo a la libertad*, asfixiando el *espíritu de riesgo* y la *asunción de responsabilidades derivadas de las propias decisiones*.

Consecuentemente, los metamodelos de los tipos *estructuraciones*, *enlaces*, *transformaciones* y *composiciones* (Apartado 4.3, 3a) resultan *a priori* -y por este orden- de una mayor dificultad. Aunque también se hallen al alcance de los más pequeños, si se cuidan las variables lingüísticas señaladas páginas atrás.

En particular, los enunciados o situaciones con menor grado de determinación en la demanda (Apartado 4.3 3b) y menor condicionamiento (Apartado 4.3 3c) se suponen más dificultosos. Pero habría que distinguir: no tanto en la comprensión, como en la resolución. Sin embargo, la perplejidad que suele desencadenar la oferta de libertad, con frecuencia se proyecta en un desconcierto o conflicto psicológico, que pone en entredicho la seguridad subjetiva en la misma comprensión del enunciado.

Especial atención merece el *lugar que ocupa la pregunta en el enunciado.*

La pregunta o demanda tiene un valor doblemente decisorio: *fija la meta* -con incidencia en el significado global- y *asigna papeles* a los términos del enunciado; en particular, perfila definitivamente las dependencias semánticas de *argumentos*, *agentes* y *verbos.*

Si se halla ubicada en el cierre o final del enunciado, así como en el caso de no explicitarse, hay que suponer que la asignación de dependencias semánticas se efectúa sobre la representación que se ha ido configurando, contribuyendo a resaltar los valores de los elementos representados; debe dejar al descubierto las omisiones y términos superfluos. Si se halla al inicio, la tarea semántica local se puede efectuar quasi simultáneamente con la *lectura.* Si intercalada, participa de ambas funciones respecto de la información percibida antes y después.

CUADRO 5.3.4.- GRADOS DE DIFICULTAD EN FUNCIÓN DE LA FORMA PROBLEMÁTICA DE UN ENUNCIADO.

Nivel de dificultad	Demanda	Posición	Proceso	Respuesta
Máxima	libre	---	Estructuración	Indeterminada
Máxima	libre	---	Enlace	Indeterminada
Máxima	libre	Central	Estructuración	Determinada
Máxima	libre	Central	Enlace	Determinada
		....		
Media	condicionante	Inicial	Composición	Indeterminada
Media	condicionante	Inicial	Composición	Determinada
		....		
Mínima	condicionante	Final	Interconexión	Determinada
Mínima	condicionante	Final	Generación	Determinada

Un análisis en profundidad de las relaciones entre la demanda y los aspectos de comprensibilidad y representabilidad del enunciado nos llevaría a considerar de forma pormenorizada los diferentes modelos de problemas y situaciones problemáticas; sin omitir, tampoco, la influencia contextual en que se inserte cada situación -lo que LOFTUS y SUPPES (1972) designaron por *tendencia del problema-*. Algo materialmente imposible para la dimensión de este trabajo.

En cuanto a su valor formativo, es preferible la ausencia de demanda, la máxima indeterminación y falta de condicionamientos. El emplazamiento final obliga a forjar la representación interior, al ejercicio combinatorio para la asignación provisional de dependencias semánticas y el intento permanente de búsqueda o construcción del significado global.

Es lo más formativo, sin duda; y lo más dificultoso, también. Como *situación de partida*, de auténtico aprendizaje, enriquecedora y aprovechable. Pero no debe exponerse prematuramente al alumno al riesgo de verse privado de la sensación de éxito que engendra la resolución plena, la respuesta concreta a una pregunta precisa, la conquista de una meta clara y constatable.

Si el alumno padece deficiencia visual, el grado de dificultad se verá incrementado por un aspecto formal que parece ajeno a la propia demanda: el tamaño de las expresiones que conforman las partes involucradas; tanto las informativas o elementos a combinar como la cuestión, si se incluye.

La situación puede asemejarse al desconcierto o desasosiego que en un alumno vidente genera un enunciado oral excesivamente largo. Los elementos informativos deben ser combinados en el nivel de la exclusiva representación interior, sin posibilidad de contraste visual inmediato, de *refrescar* los estímulos informativos. La comprensión tanto de la situación global como de la demanda en particular parece insuficientemente aprehendida. Se le exige un mayor esfuerzo atencional y representativo, con riesgo de sobrecarga de memoria.

Para un alumno cuya vía de recepción de mensajes sea la háptica -ciego total- o la combinación de visual y cinestésica -baja visión-, el esfuerzo de retención y composición de estímulos se complejiza. Se dificulta, por tanto, la posibilidad de distinguir o subrayar la demanda y sus elementos relevantes. Habría que incorporar como un factor más de dificultad -ahora en el caso específico de la pregunta o demanda- la gradación de dificultad decodificadora-comprensiva para los diferentes lenguajes de presentación (ver cuadro 5.3.2B).

* * *

En cuanto al valor orientador del proceso de resolución, la pregunta suele incluir la *instrucción* o condición que avisa del camino a recorrer. O, si se prefiere: suele contener la *clave* para fijar los *argumentos* y otros términos cuantitativos que determinan el *significado global*.

Cobran especial importancia ciertos términos no *argumentales* que determinan la *operación* solventadora, cruciales a la hora de establecer la conexión existente entre la incógnita y los datos. (PUIG y CERDÁN, 1988, 93). Se han designado por *palabras clave*, sean palabras, expresiones e incluso oraciones completas.

La pregunta contiene al principal de estos *términos clave*; es más: la función esencial de la pregunta es presentarlo, pudiendo decirse que está vertebrada por él. A su vez, otros términos no *argumentales* de la parte informativa pueden ser *denunciados* o subrayados en su contenido cuantitativo; vinculados o separados, por tanto, en alguna forma a la respuesta/solución.

En las situaciones sin demanda, el proceso es, precisamente, inverso: a partir de términos considerados *a priori* como cuantitativos, se selecciona por vía combinatoria y semántica en el acervo de informaciones y analogías disponibles -fruto de actividades anteriores- un concepto que pueda vincularse por vía lógica a los previamente separados. Buscar un término adecuado, construir una pregunta y expresarla, completa el proceso.

En los PAEV, los *términos o palabras clave* más frecuentes son:

- Verbos y adjetivos derivados. Es el caso de *juntar, reunir, añadir, agregar, sumar*, para la suma; *quitar, retirar, separar, poner*, para la resta; *reiterar, repetir*, para la multiplicación; *repartir, distribuir, dividir*, para la división; etc.

- Preposiciones. Como *desde* y *sin*, para la resta; *con*, para la suma; *entre*, para la suma, la resta o la división, etc.

- Adverbios o expresiones adverbiales. *Más que* o *menos que*, para la resta; *tantas veces;* para la multiplicación o división; etc.

- Conjunciones. Como *y* para la suma.

La dificultad surge no tanto en la simple comprensión de los términos -lo que importa es su carácter de usual o extraño al léxico del resolutor-, como la aprehensión de su valor matemático en el contexto del enunciado o situación. Es decir: la correspondencia y grado de univocidad entre los significados usual y matemático.

Por ser realmente *claves* para la resolución -para la determinación de la operación matemática a que deberán someterse los *valores argumentales*-, han reclamado desde antiguo el interés de tratadistas y profesores. Parece como si todo el proceso resolutivo se centrara en localizar y *traducir* la *palabra clave*, que es de esperar forme parte de la pregunta, para hacer pivotar sobre ella todo el significado global del enunciado. Sin embargo, no existe unanimidad sobre la trascendencia resolutoria de las *palabras clave* (véase: RESNICK y FORD, 1981, 39; PUIG y CERDÁN, 1988, 115).

Entendemos que se trata de una estrategia particular; útil, sin duda, en algunas situaciones, pero que puede inducir al error de generalización inconsciente. Se corre el riesgo de un *verbalismo* limitante: ¿qué hacer ante las situaciones expresadas preferentemente en forma gráfica o de comportamientos físicos? ¿Es que puede agotarse el listado de términos con valor matemático sinónimo? ¿Y si se trata de términos polisémicos o equívocos, como algunos de los apuntados más arriba?

Las *palabras clave* de los PAEV no pasan de ser *indicios útiles, pistas* para la resolución. Pero no siempre eficaces, si no equívocos. Su utilidad está supeditada a la *significación global* del problema, no se desprende inmediatamente de su *significado local* (véase: PUIG y CERDÁN, 1988, 115).

Aunque -siempre es peligroso generalizar- pueden darse enunciados en los que el significado de la operación aritmética dependa del contexto definido por *los códigos numéricos*, no por el *escenario-marco* (CASTRO, RICO y CASTRO, 1996, 28). Es el caso de: "*¿Cuánto suman los números de los botones del ascensor de tu casa?*"Entonces -no hemos hallado contraejemplo- la operación viene definida unívocamente por la *palabra clave*, de contenido matemático explícito: el recurso a la representación es marginal.

5.3.5 TRADUCCIÓN

El problema de la traducción es de una importancia capital tanto en lo que se refiere a las matemáticas como en lo que concierne al conjunto de la evolución intelectual (...). En todas las etapas de la vida psíquica nos podemos encontrar ante una <traducción> particular. (MIALARET, 1984, 112).

Los contextos numéricos se ven afectados por las cuatro acciones básicas correspondientes a estas operaciones: agregar, separar, reiterar y repartir. (CASTRO, RICO y CASTRO, 1996, 28). Parece, pues, conveniente cultivar sus modelos intuitivos (MAZA, 1991, 41) y descripciones de las situaciones en versiones paralelas y variadas de los diferentes lenguajes (ALSINA y OTROS, 1996, 112).

Lo realmente importante es captar el concepto de la acción a la que se hace referencia. Porque la dificultad no estriba tan sólo en la primera comprensión de la *palabra clave* integrada en la pregunta, sino en determinar las otras *palabras clave* ligadas a ella -si es que existen explícitamente-, y el valor resolutivo integral. Algo que resulta mucho más sencillo en el plano de la representación que en el imprescindible del análisis y comprensión lingüística (cfr. RESNICK y FORD, 1981, 113).

Bueno será, pues, resaltar y ahondar en el común valor o significado matemático entre realidad manipulativa, lenguaje gráfico, lengua usual y expresión simbólica, las sinonimias internas de cada forma de lenguaje y sus traducciones. Es decir: adiestrar al alumno en la práctica de traducción entre los diferentes lenguajes. Para no encadenarle a estrategias exclusivas de resolución, que desembocan en aprendizajes mecánicos y limitados.

Un efecto inmediato es el refuerzo y completación de la imagen representativa de la situación, el *retorno a la realidad*, donde el alumno sea capaz de desarrollar todas sus potencialidades resolutorias. En general, los efectos son o pueden ser de tres órdenes:

1°) Salvar, a fin de cuentas, el escalón entre los planos de la formulación del problema -enunciado- y lo concreto -vale *imaginado*-, denunciado por NESHER (1980).

Aunque los PAEV parezcan hablar del mundo porque las situaciones que en ellos aparecen corresponden a contextos cotidianos, el lenguaje con que están enunciados no es, estrictamente hablando, el lenguaje vernáculo, sino el lenguaje particular de la instrucción aritmética, y que, por tanto, el mundo de experiencias que expresan no es el mundo de experiencias del niño en general, sino el mundo particular de sus experiencias escolares. Esta pérdida de realidad del enunciado de los problemas o su pertenencia a una realidad al margen es particularmente importante cuando se compara el proceso de resolución de un problema aritmético escolar con el de un problema cuantitativo real. (PUIG y CERDÁN, 1988, 44; comentando a NESHER, 1980).

2°) Posibilitar al alumno la aplicación de *estrategias locales* como simulación de las acciones o uso de representaciones (PUIG y CERDÁN, 1988, 183) -útiles tanto para la plena comprensión del enunciado como para iniciar el proceso de resolución-

En un problema cuantitativo real el proceso se desarrolla siguiendo los procesos internos, mientras que en un PAEV la guía del proceso no es las transformaciones de los objetos y relaciones reales y sus equivalentes objetos y relaciones matemáticas, sino la presencia en el texto del problema de números y palabras clave que se combinan mecánicamente según reglas del juego pertenecientes a la realidad del aula. Además, en el caso de los PAEV han desaparecido dos fases cruciales que sí que están presentes en los problemas cuantitativos reales: las preguntas cualitativas que conducen a la decisión sobre qué dimensiones están implicadas, y las preguntas cuantitativas que construyen el dominio de objetos y dimensiones cuantificadas. (PUIG y CERDÁN, 1988, 44; comentando a NESHER, 1980).

Es decir, una doble acción: implementar la comprensión del enunciado original, pudiendo reclamar un análisis más cuidadoso y profundo; y presentar soportes para posibles vías de solución, sea por recurso al *caso particular*, ensayo, analogía, generalización, etc.

Para los problemas aritméticos de una etapa, parece como si el *plan de resolución* se redujera a seleccionar los *datos suficientes y pertinentes*, y decidir qué operación aplicarles; en qué orden, en todo caso, si ésta no es conmutativa. Pero las decisiones semánticas y lógicas son muy distintas, según se actúe en el dominio de las representaciones de la realidad evocada o en el de los elementos simbólicos.

3º) En particular, posibilitar el intento de búsqueda de *soluciones prácticas de referencia* (BRISSIAUD, 1993, 128), o formas de actuar sobre objetos -concretos o imaginados- que guarden una relación estrecha con la situación enunciada, o incluso que se correspondan exactamente con ésta. Que, a su vez, abre la puerta a métodos de *ensayo y error*, *tanteo*, *aproximación*, etc.

PUIG y CERDÁN (1988), consideran que la fase *elaboración de un plan* de POLYA (1945) se identifica con la tarea de *traducción*: Tras las fases de lectura y comprensión del enunciado, se entra en la fase crucial del proceso: la traducción. Esto es, en el punto del proceso en el que se decide cuál es la operación aritmética que hay que realizar. (PUIG Y CERDÁN, 1988, 114).

Aunque el término parece más adecuado en los problemas aritméticos de una etapa, no hay objeción para extenderlo al caso general: como un proceso más complejo, que tiene al menos tres componentes: qué operaciones hay que realizar, entre qué datos y en qué orden. (Ibidem).

Entendemos, no obstante, que la llamada fase de *comprensión*, precisamente por desembocar en una construcción representativa, lleva implícita una incoación de este tránsito entre lenguajes, según la inclinación del alumno/resolutor.

Por otra parte, consideramos preferible hablar de *expresión en los diversos lenguajes*, en lugar de simple *traducción*. A fin de cuentas, se trataría de una *traducción múltiple*: del lenguaje enunciativo de la situación a otros; eventualmente, al aritmético (simbólico-matemático).

Así pues, más que conveniente, se estima imprescindible una cierta labor de traducción: trasladar términos -expresiones- y componerlos, manteniendo el sentido entre el enunciado y la forma simbólica -si fuera precisa-. Como posibles lenguajes intermediarios: las formas manipulativas, con ayuda o no de material específico, y el gráfico-geométrico (estamos aludiendo, preferentemente, a los PAEV). Y, siempre, con referencia al mundo de las representaciones interiores.

Su posibilidad de realización y garantías de concordancia dependerán:

a) De la comprensión que el sujeto tenga de los lenguajes entre los que se lleva a cabo la traducción. (PUIG y CERDÁN, 1988, 115). Que sustenta las destrezas interpretativas y expresivas.

b) De la comprensión de las correspondencias e isomorfismos que existen entre tales lenguajes.. (Ibidem). Que puede calificarse como *capacidad traductora literal o mecánica.*

c) De las *pistas* o *indicios*, que sugieren al *traductor* expresiones o modelos básicos, en torno a los cuales pueda forjarse la operación traductora. Su carácter es eminentemente subjetivo, aunque la reiteración pueda engendrar hábito interpretativo y traslatorio. Aquí tienen cabida las famosas *palabras clave* de que venimos hablando de tanto en cuanto.

d) De la tendencia; por la que quedan seleccionados términos o modelos en cada lenguaje -en particular, los empleados en recientes problemas-.

e) De sus destrezas expresivas; en principio, en el nivel de las representaciones internas, antesala obligada para la plasmación o articulación exterior. Lo que incluye riqueza terminológica y sintáctica, práctica representativa y expresiva, etc.

Cuadro 5.3.5A.- Capacidades/destrezas favorecedoras de la traducción entre los diferentes lenguajes.

traducción

lenguaje de partida A ⟶ B lenguaje de llegada

- Capacidad interpretativa general para A y B
- Capacidad traductora literal o mec nica de A a B
  - de términos aislados
  - de expresiones "canónicas" o "bien estructuradas"
- Práctica en el reconocimiento de *pistas* o *indicios* (expresiones axiales en A de traducción inmediata a B)
- Destreza expresiva en B
  - Práctica representativa interior
    - respecto de términos
    - respecto de expresiones
  - Destreza expresiva exteriorizada
    - de términos
    - de expresiones
- Práctica de traducción entre A y B
  - de A en B
    - Incluyendo términos o expresiones del enunciado actual
      - Habitual
      - Reciente
    - General
      - Habitual
      - Reciente
  - de B en A
    - Incluyendo expresiones o términos inversos a los del enunciado actual
      - Habitual
      - Reciente
    - General
      - Habitual
      - Reciente

La *traducción* a cada uno de los distintos lenguajes puede mantenerse sin exteriorizar; es decir: en el nivel de representaciones, con o sin moción articulatoria. La plasmación material es importante, sin embargo, a fin de permitir tanto el contraste evaluatorio -autocorrección, incluso-, la diversificación y el refuerzo imaginativo.

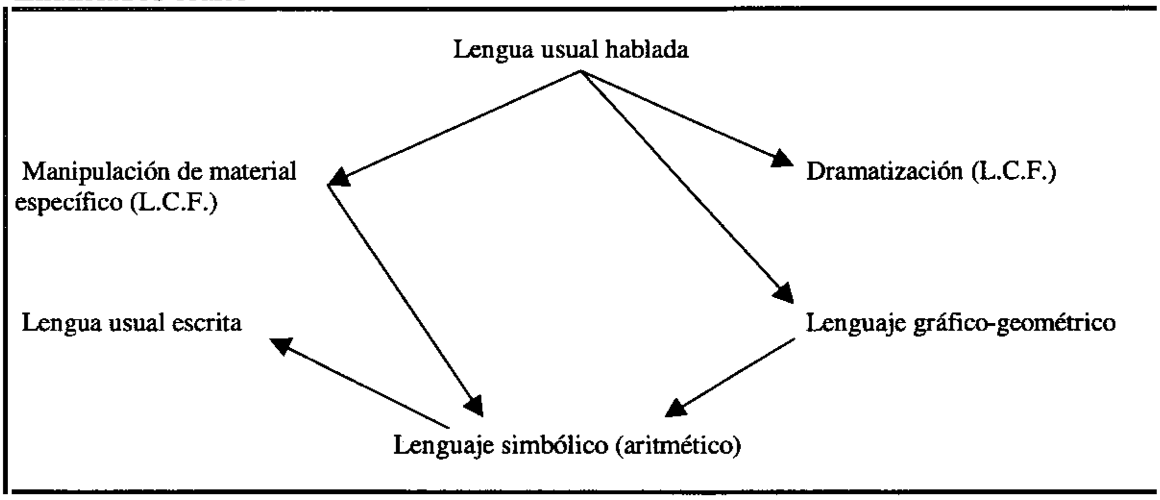
El paso a expresiones gráficas y simbólicas es de eficacia probada en niveles medios y superiores, y lo mismo puede decirse de la manipulación y verbalización en niveles elementales; tanto del enunciado como del proceso que se está siguiendo. Se recomiendan insistentemente: la ayuda de *trazado de un diagrama* (POLYA, 1945), o de reproducción de acciones externas (JAULIN-MANNONI, 1966), expresión en términos usuales *no matemáticos* (ALSINA y OTROS, 1996), etc.

En el caso del alumno ciego, que debe servirse del tacto en movimiento, MILLAR llega a comprobar que la codificación de formas y conceptos espaciales se refuerza -es superior- cuando se expresa -manipula, dibuja, produce símbolos- que cuando simplemente reconoce mediante exploración háptica: el reconocimiento táctil depende de la información previa que se proporcione al niño y de que los planes de producción pueden actuar como señales de recuperación para el reconocimiento. (MILLAR, 1997, 297). Hasta el extremo de que los niños ciegos fueron mejores para producir dibujos de la figura humana que para reconocerla a través del tacto. (MILLAR, -1986B, 1989A, 1991).

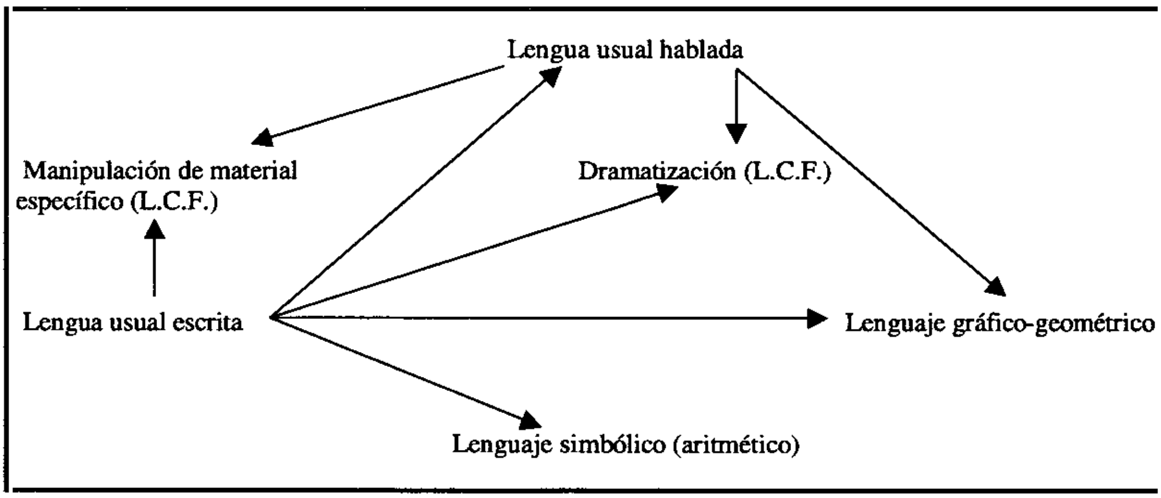
Es poco menos que imposible declarar un orden de preferencia en esta red de *traducciones* entre los diferentes lenguajes. Pero, siguiendo las recomendaciones formuladas para los tipos de situaciones más asequibles a los alumnos -y más habituales en su vida cotidiana y en el curriculum general-, los esquemas esperables podrían ser los siguientes:

Cuadro 5.3.5B.- Itinerarios más frecuentes para expresión en los diferentes lenguajes.

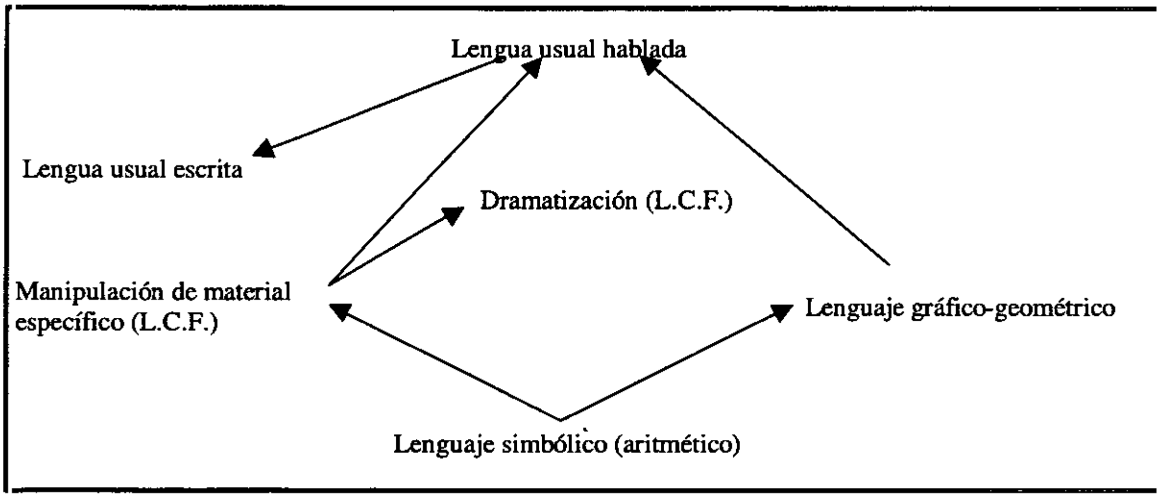
Enunciados orales



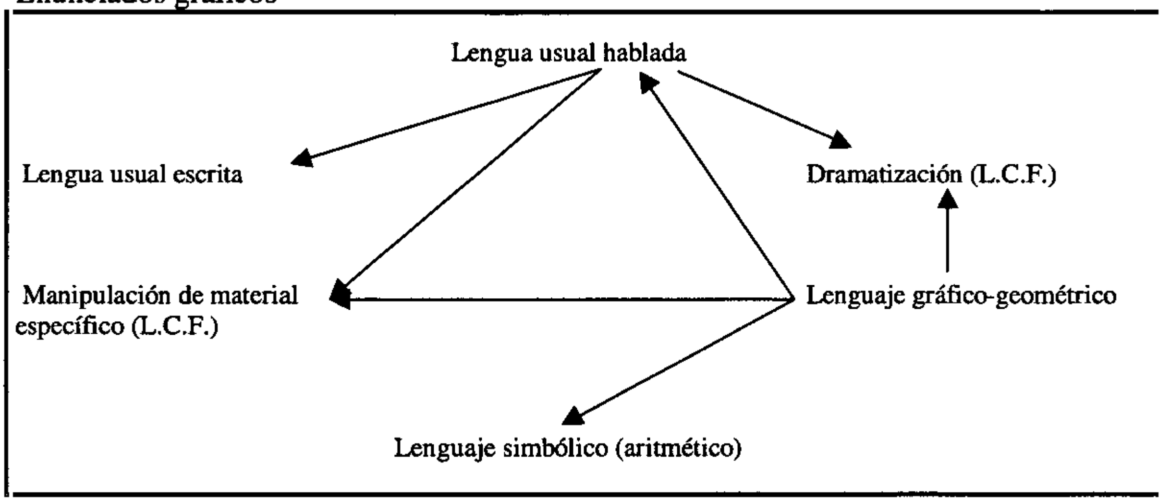
Enunciados escritos



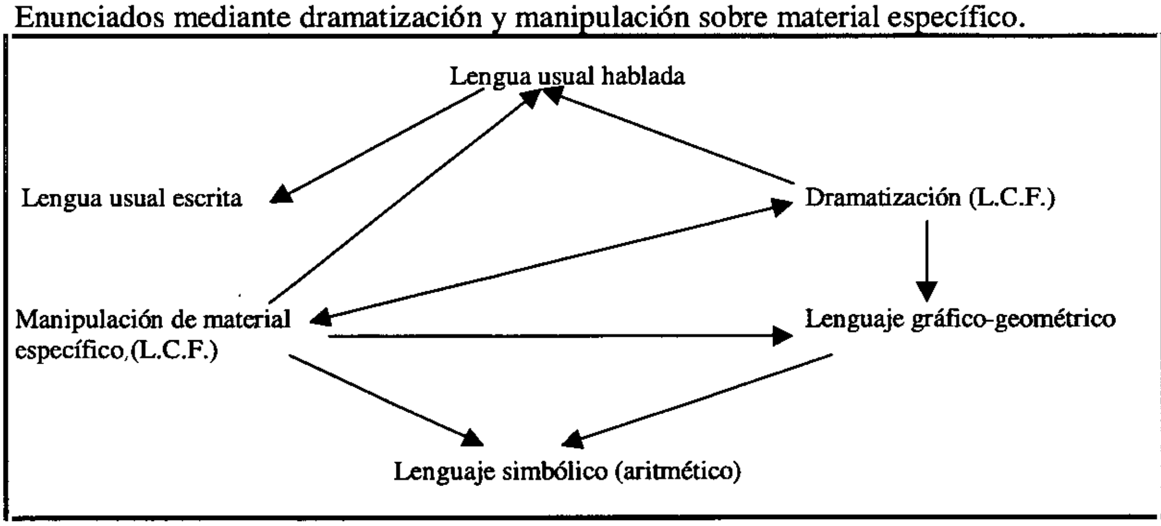
Enunciados simbólicos



Enunciados gráficos



Enunciados mediante dramatización y manipulación sobre material específico.



Además de adquirir los diversos lenguajes también es necesario ser capaz de establecer conexiones entre las diferentes representaciones de los conceptos matemáticos, es decir, unir objetos, gráficos, dibujos, símbolos y términos que estén asociados por su significado matemático. Para las dos cosas hace falta seguir un proceso correcto y completo que lleve de las intuiciones fabricadas a partir de las situaciones concretas hasta la introducción y el uso de los lenguajes. (ALSINA y OTROS, 1996, 109).

No hay verdadera *traducción* sin asignación de significados; de otra forma, sería un ejercicio puramente mecánico, irrelevante a efectos formativo-matemáticos o resolutorios.

La diversificación expresiva se realiza esencialmente con base en la *representación interior*, que sustenta o está sustentada por algún *modelo concreto*; lo que no implica que éste sea físico. Modelo que patentiza una operación sobre objetos: una situación dinámica, de cambio. Pues sin cambio no hay problema; contemplación, tan sólo, pero sin reclamar intervención ni acción solventadora. Con dos posibilidades o tipos genéricos de problemas:

- cambio por efectuar; o

- cambio efectuado y paso o pasos omitidos que hay que cubrir.

En ambos casos:

- cambio o cambios que hay que describir. Que expresar, por tanto, en alguno o varios de los lenguajes disponibles.

Aunque la comunicación quede incoada, en niveles representativos internos. Pero si no se exterioriza -expresada en alguna de las formas lingüísticas-, no sabremos si hay verdadera resolución, ni podrá ser controlada.

El plan de resolución, determinar la operación a realizar y su ejecución misma, exigen un ejercicio de *traducción* entre lenguajes de expresión matemática, interna cuanto menos. Algunos autores (JAULIN-MANNONI, LUCEÑO, EGEA), con la mirada puesta en la rehabilitación o remediación de alumnos que padecen retraso o fracaso escolar, fijan taxativamente los estadios del proceso de matematización:

a) Fase manipulativa. En comparación con la acción de escribir, las acciones físicas con guijarros y cuentas están relacionadas mucho más directamente con acciones mentales (pensar). De hecho, las acciones mentales son representadas directamente por estas acciones físicas. Por ejemplo, empujar dos cuentas hacia arriba para sumar dos es una representación directa de la acción mental, pero escribir "+2" no lo es. (KAMII, 1995, 40)

b) Fase verbal (conducta del relato).

c) Fase de representación gráfica (mediante esquemas, diagramas, etc.).

d) Fase de simbolización numérica.

En la realización de problemas tiene lugar un avance continuo de la manipulación a la verbalización, al dibujo representativo y al símbolo matemático; pero en ocasiones se produce una vuelta atrás en este proceso, no sólo para retomar o reforzar aprendizajes poco sólidos, sino también por la misma esencia de la resolución de problemas. Se intenta que el alumno aprenda a enfrentarse con situaciones problemáticas, sean numéricas o no, a analizarlas y a buscarles solución razonada. Y tanto la situación como la solución pueden producirse en el plano de la acción, del lenguaje o de los números. (FERNÁNDEZ, LLOPIS y DE PABLO, 1991, 244).

La deficiencia visual grave lleva consigo alteraciones en los itinerarios sugeridos más arriba. Debidas no a la falta de visión en sí, sino a las dificultades inherentes al empleo del correspondiente instrumental o al estado de pasividad que la inhibición reiterada pudiera engendrar. En particular, el alumno ciego total suele tender a:

1°) Empleo casi exclusivo de la expresión oral. La preponderancia se justifica por razones de comodidad, rapidez y comunicabilidad con el profesor y los compañeros.

2°) El trabajo con materiales manipulativos, a pesar de su adecuación, tiende a ser abandonado muy pronto. Permite un control inmediato de las configuraciones obtenidas, además de las posibilidades operativas y apoyo a la representación interior. Pero es frecuente que se sustituya por estas últimas, debido a razones de comodidad o la mencionada pasividad, sedimento de inacción reiterada, falto el alumno de una exigencia permanente y de la posibilidad de contrastar sus manipulaciones con las de los compañeros.

3°) La expresión en lenguaje simbólico y lengua usual escrita se reserva para la plasmación de resultados y esbozos de planteamientos; en cualquier caso, si así se le requiere; no por propia iniciativa. El Sistema Braille es lento y trabajoso en comparación con la expresión en tinta; dificultándose además la comunicación interpersonal -perdiéndose, con el compañero vidente-.

4°) El lenguaje gráfico-geométrico apenas si es forma expresiva en los niveles elementales de enseñanza. Por desconocimiento de las posibilidades del instrumental -en buena parte, desconocimiento del profesorado-, bajo nivel de desarrollo de destrezas específicas, dificultades de construcción a partir de exploraciones complejas, relativo valor comunicativo para el alumno ciego, etc.

5°) La dramatización, como se indicó páginas atrás, sólo tiene valor expresivo, no informativo. Pero esta unidireccionalidad conduce necesariamente al abandono de su práctica, también como forma expresiva.

Una vez más, es preciso optar: eficacia resolutiva o práctica formativo-lingüística general: Aprender matemáticas es en gran parte aprender y utilizar sus lenguajes. En la actualidad los lenguajes matemáticos se encuentran presentes en casi todos los ámbitos y las ciencias del conocimiento. Por eso, el hecho de dominarlos constituye un saber necesario a nivel cotidiano. (ALSINA y OTROS, 1996, 108).

Al profesor corresponde conjugar uno y otro objetivos, sin olvidar que, si bien los lenguajes -cada lenguaje- tiene un valor meramente instrumental, las destrezas lingüísticas, interpretativas y expresivas, facilitan y potencian las capacidades específicas de matematización, desarrollo de estrategias y aplicación matemática a situaciones concretas. Por ello, cobra importancia la significatividad y variedad de situaciones a resolver, que exijan la introducción y ejercitación equilibrada de cada una de las formas expresivas, que aquí serán también medios calculatorios.

5.3.6 LOS DATOS SUJETO DE LA OPERACIÓN

Para la mayoría de los autores, la *traducción* del enunciado estaría claramente separada de la *ejecución calculatoria*, merced a la construcción/apropiación de los modelos e interpretaciones de números y operaciones y los significados que comportan, que se suponen determinados -sugeridos, cuanto menos- por el enunciado (véase: PUIG y CERDÁN, 1988, 51). Y NESHER (1985) afirma ser independientes las destrezas traductoras y calculatorias -más concretamente-, las algorítmicas.

POLYA (1945) designará esta fase como *ejecución del plan*; PUIG y CERDÁN (1988), simplemente *cálculo*, por ser ésta la naturaleza de la tarea predominante en los PAEV.

Bien es cierto que, supuesto el enunciado suficientemente comprendido, conformada una representación interior, contando con expresiones en diferentes lenguajes, y decidida la operación o camino algorítmico -en sentido amplio- a seguir, es necesario algo más: tener determinados los *datos pertinentes y suficientes* que intervendrán como sujetos de la operación para alcanzar la respuesta pedida. Labor que, en el caso específico de las situaciones o problemas aritméticos de una etapa, puede implicar el tener que seleccionar entre los datos disponibles, o planes subsidiarios para conseguir aquéllos; esto es: debe existir una estrategia para identificar lo que se conoce y lo que se debe descubrir. (RESNICK y FORD, 1981, 113).

La determinación de los *datos pertinentes y suficientes* es fruto (en orden quasi-temporal) de:

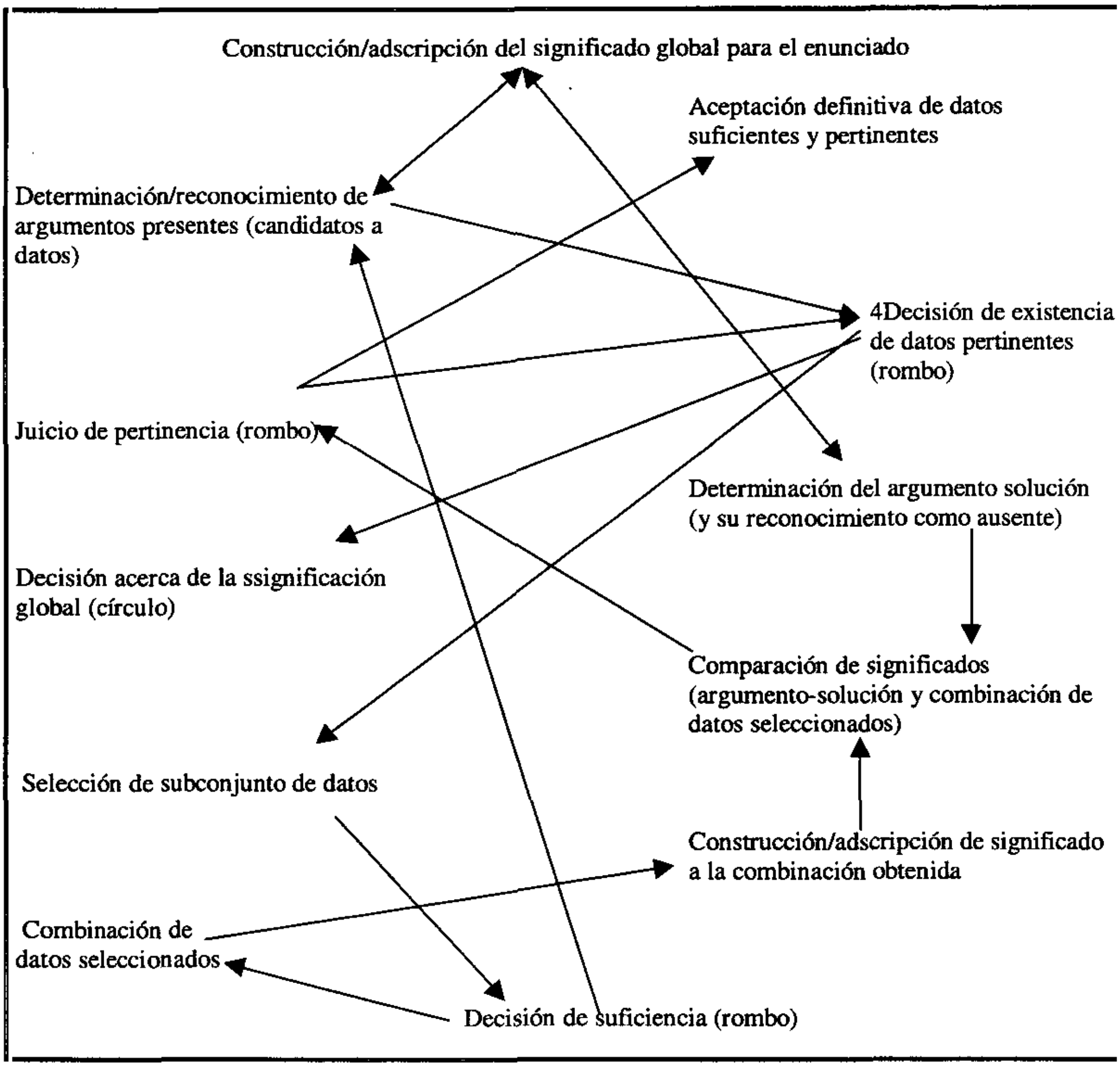
a) El *significado global*: en concreto, de la cantidad o forma que completa el *significado global incompleto* descrito por el enunciado o situación.

b) Determinación de términos *candidatos a argumentos* en el enunciado.

c) Un ejercicio combinatorio, aplicado a *candidatos a argumentos*; en su totalidad, o a subconjuntos de ellos.

d) Un ejercicio semántico, que acepta como concorde una de tales combinaciones con el *significado global* obtenido para/por el enunciado.

Cuadro 5.3.6.- Determinación de los datos pertinentes y suficientes en un problema o situación aritmética de una etapa.



Un análisis más fino nos llevaría a distinguir las combinaciones que pueden efectuarse sobre un mismo subconjunto de datos estimados como suficientes. De hecho, las configuraciones que se obtuvieran serían diferentes: piénsese en la resta o división. Tampoco podemos aceptar *a priori* la conmutatividad de la suma o multiplicación, que es un juicio de equivalencia, aceptado como *conocimiento previo* -sea transmitido, sea adquirido experimentalmente-.

El proceso puede finalizar sin decisión de pertinencia/suficiencia; ya sea por no reconocimiento de los datos como candidatos a pertinentes, ya sea por agotamiento de éstos, olvido, etc. Deberá adoptarse entonces una decisión acerca de la significatividad o coherencia del enunciado. Tal decisión puede conducir a otras:

- declarar insoluble el problema (la más frecuente, por comodidad),

- necesidad de una profundización/alteración en los significados locales del enunciado (en particular: en la determinación de *candidatos a argumentos*),

- producción de nuevos *candidatos a argumentos/datos* a partir de los términos cuantitativos presentes,

- necesidad de una profundización/alteración en el significado global del enunciado, etc.

En ocasiones, el resolutor traspasa los límites de este itinerario conceptual, para adentrarse en el campo de la ejecución operatoria (NESHER, 1982): confunde entonces el plano conceptual -papel de los datos- con el relativamente concreto de su expresión operatoria, más próximo -cálculo mental, por escrito o calculadora- y susceptible de control -comprobación calculatoria-.

Las dificultades en esta fase pueden venir inducidas por:

- Incorrecta comprensión del enunciado; en particular: indeterminación en la cantidad o forma de la solución. Que nos devuelve a la dificultad de enunciados sin pregunta o con pregunta de amplio grado de libertad (Apartado 4.3, 3), que exigen una decisión previa para dilucidar el tipo de meta a alcanzar y la meta misma.

- Presencia de *datos superfluos, no pertinentes* o *redundantes* (Apartado 4.3, 4c, d y e). Que obliga a diversificar las combinaciones y, por tanto, el riesgo de decisiones semánticas incorrectas. Se corresponde con una comprensión inadecuada -superficial- del enunciado, pues ésta debe concluir una acertada calificación de los datos.

- Ausencia de datos; o, en menor grado: presencia de datos en forma *literal* (Apartado 4.3, 4a). Que parece obligar a una concreción relativa -ejemplificación-, susceptible de cálculo ulterior. Lo que supone un ejercicio creativo y de memoria a corto plazo, que complete el soporte representativo.

- Presencia de *datos contradictorios* (Apartado 4.3, 4b). Que pueden llevar a decisiones semánticas precipitadas. El alumno tiende a aceptar como coherente una combinación errónea, antes que admitir la imposibilidad de solución; en su fuero interno, sospecha que *un error* es menos oneroso que una *declaración de incapacidad*. Todo, por una falta de ejercicio crítico respecto de la *calidad* de su comprensión del enunciado.

En este último grupo puede incluirse la dificultad observada por NESHER (1982) de la aparición en el enunciado de los datos -aunque consistentes y pertinentes- en orden distinto al exigido por una operación no conmutativa -resta, división-; que parece inducir al alumno a aplicar su inversa. O la hipótesis de FISCHBEIN (FISCHBEIN y OTROS, 1985) de la dificultad en contrariar modelos implícitos de las operaciones que desarrollan los niños, y que integran conocimientos tácitos o auténticas creencias –por ejemplo: que la multiplicación siempre hace más grande el número sobre el que actúa, que la división lo hace más pequeño, etc.-, y que obstaculiza la ampliación del campo numérico (véase: PUIG y CERDÁN, 1988, 88).

- Enunciado intercategorial (Apartados 4.3, 4f y 5C). Que obliga a un trabajo combinatorio complementario, casi exclusivamente conceptual, de relación entre las categorías de los datos, entre sí y de éstos con la correspondiente a la demanda (explícita o no). BROWN (1983) observó experimentalmente la dificultad que presentaba la confección de enunciados a partir de expresiones aritméticas, cuando se proponía emplear unidades de distinto tipo.

Se ha decidido qué cambio o acción debe obrarse -operación aritmética-, y sobre qué valores o argumentos -datos-. Éstos son los protagonistas pasivos del proceso; el protagonista activo es el resolutor, a quien corresponde la responsabilidad ahora de realizar la operación que conduzca a la meta. Llega el momento crucial de efectuar el cálculo aritmético, objeto de nuestro interés.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN Y SITUACIONES DE PARTIDA

Ambas son *situaciones* de enseñanza-aprendizaje. Pero, al ser distintos sus objetivos, conviene evitar los riesgos que desvíen la atención y esfuerzos del alumno de la meta a lograr.

Cuando se pretende iniciar un itinerario que termine en la introducción de un concepto o técnica, el problema de partida no suele enunciarse o presentarse en forma cerrada, definitiva. Sobre todo cuando se trata de alumnos muy pequeños, es frecuente mantener con ellos un diálogo a propósito del contexto temático, de los términos, datos, cuestiones planteables, etc. Se multiplican las formas de presentación, se consume tiempo y energías en alimentar representaciones internas y culminar expresiones en los diferentes lenguajes. No importa la redundancia.

Lo que no significa que esta tarea de diversificar la presentación y avanzar en la comprensión y traducción del enunciado inicial deba ser gratuita para el alumno. Puede tomar la forma de una sucesión de *situaciones problemáticas locales*, subsidiarias del objetivo comprensivo de la situación.

La finalidad es clara: asegurar la comprensión del *enunciado*, dejando expedito el camino a la tarea de introducir o descubrir el concepto o técnica objetivo didáctico.

- La expresión en los diferentes lenguajes, tal vez innecesaria o sobreabundante para responder adecuadamente a la demanda, facilitará en su momento las diferentes versiones del objetivo último y su representabilidad.

- La búsqueda de situaciones análogas, manteniendo la demanda, anticipa la comprensión del objetivo y su versatilidad aplicativa.

- En concreto, la búsqueda de sinonimias matemáticas en cada lenguaje, alimenta la profundización en la comprensión de términos que puedan, en su momento, relacionarse con el objetivo (*palabras-clave*). Para la lengua natural: si ahora queda claro que *juntar, unir, reunir, amontonar, pegar, añadir, agregar, poner juntos...* pueden sustituirse en el enunciado actual, más tarde *sumar* habrá quedado ligado a esos términos de forma inseparable.

- Las variaciones del enunciado inicial, alterando cláusulas y términos argumentales, dejará abierto el camino a ulteriores generalizaciones, a la par que resaltarán los *datos pertinentes y suficientes.*

- El planteamiento de cuestiones distintas de la específica del enunciado, referidas a la misma situación, favorece la separación entre otros conceptos y el perseguido.

Todo esto tiene un sabor a algo ya mencionado: son verdaderos problemas en sí mismos, según el *metamodelo de demanda.* Pero no se busca la perfección, la respuesta exacta o adecuada: se busca -digámoslo una vez más- asegurar la comprensión del enunciado, para sembrar comprensibilidad del objetivo didáctico.

Quizás sea la inversión -no simple consumo- de tiempo más fecunda en Didáctica del cálculo. Quizás también esté aquí la clave de la facilidad o dificultad en la aplicabilidad de los conceptos Tal vez sea éste el camino para terminar con la tragedia de *saber sumar, pero no saber cuándo ni por qué sumar.*

Los caminos empiezan a separarse. La divergencia definitiva se produce a partir de la ejecución calculatoria.

En las actividades-problemas de aplicación y consolidación, se suponen conocidos el correspondiente concepto (operación aritmética) y sus técnicas operatorias. Cuando se trata de un itinerario didáctico de introducción/iniciación, no: precisamente son el objetivo principal. En ambos casos se efectúa la operación, se resuelve el problema inicial; y quizás sea éste el mayor aliciente para el alumno-resolutor, y tal vez lo único apreciable de modo inmediato. Pero habrá aprendido -descubierto- mucho más.

6 LA PRÁCTICA DEL CÁLCULO

Calcular es obtener números nuevos a partir de otros dados utilizando las operaciones aritméticas.

La adquisición de técnicas de cálculo debe permitir resolver problemas y también aumentar y profundizar en el conocimiento de los números y de las operaciones. Este conocimiento debe favorecer la flexibilidad y también la creación de rutinas de cálculo personal adaptadas a la neutralidad y a los conocimientos previos del alumnado

Calcular responde a una necesidad de resolución, la práctica sistemática fuera de contexto acaba perdiendo sentido y no se logra ninguno de los objetivos. (ALSINA y OTROS, 1996, 113).

6.1 EL CÁLCULO EN LA RESOLUCIÓN DE SITUACIONES PROBLEMÁTICAS

Una vez determinados los *argumentos* -datos pertinentes y suficientes-, la ejecución del plan supone efectuar los cálculos, para obtener la cantidad resultado/solución.

Los cálculos pueden efectuarse:

a) Con ayudas manipulativas. Sean los propios dedos, material general (cuentas, botones, legumbres, palillos, etc.) o específico (bloques multibase, ciertos ábacos, *TINKUNAKO*, etc.).

b) Con ayudas gráficas. Que oscila desde simples colecciones de trazos, constelaciones de puntos, figuras diversas, hasta diagramas varios, ábacos gráficos, etc.

c) Mentalmente.

d) Con ayuda de escritura simbólica (guarismos). Entre las que se encuentran los algoritmos tradicionales.

e) Con ayuda de instrumental específico: electrónico o mecánico (calculadoras, ábaco chino-japonés, *TINKUNAKO*).

Cuadro 6.1A.- Ayudas o soportes calculatorios.

- Ayudas manipulativas
  - dedos
  - material general
  - material específico
- Ayudas gráficas
  - no estructurado
    - trazos
    - puntos
    - figuras varias
  - estructurado
    - constelaciones de puntos
    - combinaciones regladas de trazos
    - diagramas
- Mental puro
  - inmediato o automatizado
  - pensado (con soporte de representaciones)
    - situaciones físicas imaginadas
    - situaciones manipulativas imaginadas
    - situaciones gráficas imaginadas
    - escritura simbólica imaginada
    - verbalización interiorizada
    - mixtas
- Ayuda de escritura simbólica (algoritmos escritos)
- Ayuda de instrumental específico
  - manual (ábacos)
  - mecánico (calculadoras manuales)
  - electrónico (calculadoras electrónicas)

La elección de una u otra forma calculatoria viene condicionada por factores varios:

- Disponibilidad del material o instrumental adecuado; incluido el de escritura/dibujo para procedimientos escritos o gráficos.

- La *tendencia* -cómo se vienen realizando los cálculos en situaciones inmediatas anteriores-.

- La naturaleza de los datos. Salvo una destreza notable en cálculo mental o artificios muy determinados de cálculo manipulativo o gráfico, las cantidades de tamaño *grande* (según el nivel), las expresiones decimales y fraccionarias exigen el empleo de calculadora o algoritmos escritos.

- La vía marcada o sugerida por la representación interior de la situación, que, a su vez, es fruto de la *tendencia* en la actividad representativa.

- La confianza del resolutor en cada una de las formas de cálculo personal.

- La condición señalada, en su caso, por la demanda: "*Mediante cálculo mental..., Ayudándote de los bloques multibase,...del ábaco..., por escrito...* ", etc.

Lo que no significa que la ejecución se realice necesariamente en una determinada forma: se inicia el camino por una de ellas, pero puede revocarse, para elegir otra que apunta como más cómoda o segura; con independencia, incluso, de la condición de demanda: "*ya se traducirá, si es posible y necesari*".

A mayor libertad de elección -a mayor nivel de destrezas en las diferentes formas de cálculo-, mayores posibilidades de avanzar y culminar con éxito -subjetivo, al menos- el proceso de solución. Esto implica:

- Capacidad para traducir la situación a términos del lenguaje operativo. En última instancia:

- Capacidad para traducir expresiones entre lenguajes operatorios.

- capacidad operatoria real en dicho lenguaje.

Aparece así toda una gama de destrezas calculatorias, verdaderos objetivos didácticos.

La anunciada divergencia entre los procesos de resolución de situaciones problemáticas, según tengan carácter de aplicación/fijación o con aprovechamiento didáctico para la introducción a conceptos y técnicas calculatorias, se manifiesta en la selección y aprovechamiento de unos u otros recursos y la apertura de nuevos horizontes en su panorama de posibilidades.

Como es obvio, si se trata de introducir el concepto de *adición*, carecería de sentido acudir a la escritura numérica, o al cálculo mental de la suma directa. En cambio, pueden efectuarse sumas para valores pequeños -antes incluso de denominarlas *sumas*-, sirviéndose de recuento de dedos u otros objetos, material diverso, recursos gráficos, conteo mental o sus combinaciones.

Por el contrario, la introducción de una determinada técnica de cálculo mental puede partir de la observación de descomposiciones en cálculo escrito, resultados obtenidos por calculadora, etc. La confección de las *tablas* de hechos numéricos se efectúa por lo general mediante cálculo mental o manipulación física o gráfica...

Es decir: en los itinerarios didácticos de iniciación se aprovechan *sinergias* entre las diferentes destrezas: importan las *traducciones* entre los diferentes lenguajes o transformaciones; mucho más que en la pura resolución de problemas, donde éstas son refuerzos o comprobaciones.

UN "TRIÁNGULO DE DESTREZAS CALCULATORIAS BÁSICAS"

Hasta fecha bien reciente, en las Disposiciones Oficiales sólo se hacía referencia al Cálculo Aritmético; se sobreentendía *por escrito, en base 10.* Es decir: los algoritmos tradicionales, u otros análogos -que pocos o nadie sabían si existían o habían existido-.

De una decena de años a esta parte, parece abrirse camino el interés por el cálculo mental. Incluso por la *aproximación* y *estimación* como formas de cálculo. En España, ha llegado a plasmarse como verdadero objetivo curricular (véase: Diseño Curricular Base, Ministerio de Educación y Ciencia, 1991, 399). Su expresión y control más inmediatos son la verbalización de resultados.

Por último: la calculadora. Ha dejado de ser considerada como *cómplice* y *encubridora de impericias calculatorias del alumno*, para apreciarla como *aliada didáctica*. Es hoy un instrumento que hay que conocer y saber utilizar, alcanzando la categoría también de Objetivo Curricular (ibidem.). E incluso como material de enseñanza-aprendizaje del cálculo en sus estadios más elementales (véase, por ejemplo: ALSINA y OTROS, 1996; GRUPO 0, 1997).

Se configura así un *Triángulo de Destrezas calculatorias*: Cálculo Escrito, Cálculo Mental y Cálculo por Calculadora. En esta última pueden considerarse incluidas las técnicas que se sirven de artefactos o dispositivos, manuales o mecánicos, que reducen la operatoria de cálculo a simples ejercicios dígito-manuales, conforme a reglas o normas de ejecución (ábaco chino-japonés, por ejemplo).

Esta terna de destrezas está presente en la vida toda -no sólo escolar- de nuestros alumnos, tanto de Secundaria como de Primaria, y estamos persuadidos que seguirá creciendo en los próximos años. El interés didáctico se orienta en determinar el orden de aparición, dimensiones y ritmo de desarrollo de cada uno de los vértices y lados de este triángulo.

Cierto, que tradicionalmente no se ha tenido conciencia de tal triángulo. Incluso en numerosos ambientes, ni siquiera era posible (¿de cuándo acá la calculadora?; ¿acaso no se efectuaban -y efectúan- cálculos aritméticos por personas y poblaciones -¡civilizaciones enteras!- no alfabetizadas o carentes de instrumental específico de cálculo?)

Así pues, este *triángulo* puede hallarse degenerado:

a) En un segmento. Por atrofia de una de las formas; sea la *calculadora* -por su no disponibilidad o prohibición-, sea el cálculo escrito -por abandono voluntario (algo hoy frecuente) o imposibilidad instrumental-. Como veremos más adelante, el cálculo mental es irrenunciable, aunque sea en sus formas más rudimentarias (recuento y conteo, cálculo mecánico, etc.).

b) En un punto o porción angular. Cuando sólo se cultiva o admite una forma. Lo que suele ocurrir con el cálculo mental -si se carece o es imposible el empleo de medios instrumentales, de escritura o específicos de cálculo. Éste ha sido la situación tradicional para la inmensa mayoría de los ciegos del mundo occidental, hasta el siglo XIX..

6.2 EL CÁLCULO MENTAL

"¿Para qué fatigar la mente con prácticas que la calculadora resuelve sin esfuerzo?"

Tal pregunta es anacrónica e irreflexiva. Anacrónica, porque análoga cuestión podrían haberse planteado profesores y estudiantes de todos los niveles tras generalizarse a partir del siglo XV la escritura numérica decimal: bastaba una tiza o carboncillo para realizar operaciones aritméticas cómoda y seguramente. Irreflexiva, porque entraña una aplicabilidad desproporcionada: "*cañones para derribar muros y matar moscas*". En el fondo, se trasluce un desconocimiento de la realidad cotidiana y de las posibilidades intelectuales más elementales.

El desarrollo del cálculo mental puede considerarse como el objetivo último en el aprendizaje de las cuatro operaciones fundamentales. (FERNÁNDEZ, LLOPIS y DE PABLO, 1991, 201).

La afirmación puede juzgarse un tanto maximalista. Pero no olvidemos que uno de los fines prioritarios de la educación es cooperar en el desarrollo de la autonomía personal del alumno. Autonomía que -para el Cálculo Aritmético- llega a su culmen en el Cálculo Mental, independiente de medios físicos, por simples que sean, como lápiz y papel, tiza o arena (por no decir calculadoras).

Por otra parte, su marginación -consciente o inconsciente- tiene efectos negativos. Es algo más que parcialidad: es opinión general, como se advierte en el prestigioso y realista Informe COCKROFF: Creemos que la decadencia del trabajo oral y mental en las clases de Matemáticas son consecuencia de la falta de reconocimiento y la importancia que el cálculo mental tiene en esta asignatura; incluso los métodos de cálculo sobre papel utilizados tradicionalmente se basan en la realización mental de determinadas operaciones. (COCKROFF, 1982, 92).

Bueno será recordar algunas de las aplicaciones más palmarias, aceptadas y eficaces, y, por ello, fuentes de contagiosa motivación para el alumno.

6.2.1 UN AMPLIO PANORAMA MOTIVACIONAL

Basta una simple reflexión para aflorar multitud de aplicaciones prácticas del Cálculo Mental. Algunas de ellas revisten el carácter inmediato de *estímulos motivacionales* -conforme al análisis presentado en la Sección 3.4-. Otras, lo adquieren con el uso habitual. Otras más por último, escapan a la percepción inmediata del alumno; pero su valor didáctico y formativo confieren dimensiones tal vez impensadas a esta forma de cálculo, sobrepasando el carácter de pura destreza para tornarse medio de intervención pedagógica.

Consideraremos cuatro grandes grupos de argumentos educacionales:

- proximidad para el alumno de las situaciones de aplicación,

- ventajas didácticas específicas,

- efectos didácticos generales,

- efectos psicológicos y comportamentales.

Se pormenorizan a continuación.

a) Cotidianidad.

Cualquiera de nosotros, ya ha ejercitado a media mañana una buena decena de veces su capacidad de cálculo mental, si no directamente, al menos como elemento corrector o de aproximación.

Y así, calcula exacta o aproximadamente los minutos que median entre la hora que marca su reloj digital y el comienzo o final de la clase; el importe de las consumiciones del grupo de compañeros en la cafetería, y las vueltas correctas; las páginas de un capítulo, sin más que mirar el índice; la cuantía absoluta de la subida de sueldo o el anunciado incremento del precio de un servicio; la repercusión efectiva del descuento prometido en un escaparate; etc.

La vida corriente de un ciudadano no importa de qué edad o condición está plagada de oportunidades para ejercitar el cálculo mental en provecho propio y ajeno. Las ocasiones, por repentinas y frecuentes, apenas si dan tiempo -ni falta que hace- al uso del lápiz y el papel o la calculadora.

El alumno tal vez no se enfrente a las mismas situaciones cotidianas que un adulto para ejercitar el Cálculo Mental (tampoco coincidirán para dos adultos); pero sí con otras muchas análogas. Situaciones de compra-venta, puntuaciones deportivas o de juegos, paginaciones, tiempos, previsiones de gasto, etc.

b) Empleo interdisciplinar.

Y no sólo en las áreas más propiamente físico-matemáticas. Desde la determinación de los años de vida que disfrutó un rey, artista o personaje histórico de relieve, dadas sus fechas de nacimiento y muerte, hasta el tamaño relativo de un país respecto del nuestro, su densidad media, riqueza o producciones. Tal vez sea consecuencia de la creciente matematización cuantitativa que padecen todos los dominios del saber, pero es innegable la abundancia de cifras que *adornan* cualquier manual o documento de uso en los estudios secundarios o superiores.

A fin de cuentas, es una restricción de las situaciones de la *vida diaria*, concretadas a los campos del estudio y la cultura.

c) Valor instrumental; en las Ciencias Físico-matemáticas.

Aún más específico; mucho más frecuente en estos ámbitos, también.

Las primeras y más importantes situaciones las proporciona la resolución de problemas; sea como ensayo, estimación o cálculo efectivo. Pero, a medida que se progresa en el curriculum, ascendiendo de niveles educativos, la diversificación en las áreas experimentales multiplica las necesidades calculatorias, allí donde la Matemática cobra un papel instrumental más claro.

En la Educación Secundaria es de uso permanente. Al margen de los tópicos más estrechamente relacionados con el Cálculo: fracciones y proporciones, ecuaciones e inecuaciones, cálculos geométricos, polinomios, etc. La Física y la Química se ven forzadas al recurso al cálculo aritmético, facilitado o anticipado por el cálculo mental; especialmente, si la astucia y pericia del profesor o autor de las situaciones problemáticas propuestas así lo permiten, gracias a la sencillez de los datos. Y, en cualquier caso, como cálculo comprobatorio por estimación.

Estos tres grupos de situaciones o motivaciones surgen espontáneamente: ni siquiera es preciso crearlas; son tan frecuentes y próximas, que basta su mención para que sean aprovechadas como situaciones problemáticas. En cuanto a la sensibilización en el ejercicio del Cálculo Mental, toca al profesor advertir de su existencia, resaltándolas cuando surjan. Tal como la *fotografía matemática* invita a descubrir formas geométricas, las *agencias de detectives* y *reporteros matemáticos* descubren situaciones de Cálculo Mental en la vida corriente, dentro o fuera del aula.

d) Variedad de situaciones didácticas para su cultivo.

Sean como unos *minutos diarios de precalentamiento* -al inicio de cada clase- o las *competiciones de cálculo*; sean como ejercitaciones ocasionales en el transcurso de la resolución de problemas -ensayo, estimación o cálculo efectivo-.

En especial, conviene recordar todo género de juegos y actividades propias de la *Matemática Recreativa* con base en el Cálculo. Desde los *solitarios* de programas informáticos, hasta los juegos de pequeño o gran grupo; verbales, con material ordinario, tableros, fichas y tarjetas peculiares, etc., que cada día proliferan más en las aulas y en el mercado.

e) Graduabilidad.

En un triple sentido. Por una parte, Consiste en un conjunto limitado de hechos numéricos. (GÓMEZ, 1988, 65). Por otra, pueden hacerse aparecer y tratarse métodos relativamente sofisticados como: compensación, descomposición, factorización, etc., incluso con combinaciones numéricas muy sencillas. (COCKCROFF, 1982, 114). Finalmente, la dificultad de los cálculos es graduable por el tipo y tamaño de las cantidades involucradas.

Todo ello permite adaptar el nivel de dificultad a las posibilidades, curriculum y adiestramiento del alumno. Haciendo asequible el éxito, fomentando la seguridad en sí mismo y alejando el riesgo de fracaso sistemático.

f) Comodidad y rapidez.

Puede parecer una futilidad: libra del esfuerzo de escribir, (ALSINA y OTROS, 1996, 114) o de la tensión de acertar las teclas de la calculadora. Pero si se contempla bajo la perspectiva de la educación de los más pequeños o con problemas de motricidad dígito-manual, la observación está más que justificada. Y, dentro de los márgenes de destreza personal -allí donde está prescrito-, el cálculo mental supera en velocidad incluso al logrado mediante el empleo de la calculadora.

Otras aplicaciones no serán tan motivantes para el alumno, pero tienen un valor didáctico innegable:

g) Valor de consolidación de los *hechos numéricos elementales* y destrezas básicas.

El Cálculo Mental se basa en la continua aplicación de resultados elementales; dicho de otra forma: evocación -consciente y orientada- de las *tablas de operaciones* o *hechos numéricos*. Pero no sólo esto: requiere ciertas habilidades -conteos, recolocaciones, compensaciones, descomposiciones, redistribuciones, etc.-, buscando sustituir o alterar los datos iniciales para trabajar con otros más cómodos, o más fáciles de calcular. (GÓMEZ, 1988, 65)

h) Fundamento de los algoritmos escritos.

Habría que invertir los papeles: el Cálculo Escrito es una ampliación y ayuda al Cálculo Mental. Sin éste, aquél sería poco menos que inviable.

i) Detección de errores en cálculos efectuados por calculadora.

Con tres detectores principales: cifra de las unidades de menor orden, resultado entre las de orden mayor y estimación global.

Si al multiplicar por calculadora 437x1898 el resultado que apareciera fuese 823732, está claro que algo falla: en la cifra de las unidades debiera aparecer un *6* -fruto de *7x8=56*-; nunca un *2*.

En otros casos, pueden ser las cifras correspondientes a las órdenes mayores las que denuncien el error. Sería un tanto extraño que 283x5469 nos diera 981727: al multiplicar 2x5, por muchas unidades del orden anterior que debiéramos añadir, nunca aparecería un 9... (tal vez se pulsó un *3* en lugar del *5* para *5469*...)

Asimismo, si multiplicando 1248x3579 la respuesta fuese 43835592, en alguna parte nos hemos equivocado: "*mil y pico, por tres mil y pico*" andaría entre "*tres millones* y *ocho millones*", jamás por los "*cuarenta y pico millones*". (Obsérvese que aquí sí parecen satisfacerse los criterios de las *cifras extremas*.)

j) Manifestación y ejercitación de aspectos estructurales.

Al efectuar un cálculo mental -también escrito, aunque encubiertamente- se aplican propiedades definitorias de la correspondiente estructura algebraica -propiedades conmutativa, asociativa, distributiva, etc.-; mostrando, a su vez, la proximidad práctica de éstas: son algo más que hueros formalismos. Es decir, se alimenta una motivación recíproca entre estructura y aplicabilidad.

Así, al operar 12x37, podemos descomponer:

$(4x3)x37 = 4x(3x37) = 4x111 = 444$,

aplicando fructíferamente la propiedad asociativa; además, al efectuar 3x37 estamos empleando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición:

$3x37 = 3x(30+7) = 3x30+3x7 = 90+21 = (90+20)+1 = 110+1 = 111$,

junto con la asociatividad de la suma.

Técnica habitual para reducir cantidades mayores a menores o buscar operandos más sencillos o familiares es la *descomposición*:

$12 \text{ x } 37 = (4 \text{ x } 3) \text{ x } 37$

$3 \text{ x } 37 = 3 \text{ x } (30 + 7)$

que algo o mucho tiene que ver con la propiedad asociativa en sentido inverso (propiedad *disociativa*), el primer caso, o como paso intermedio de la propiedad distributiva, el segundo.

k) Familiarización con los números, su combinación, sus relaciones.

Como afirmaría MIALARET, tras una experiencia de tres meses: Hemos podido asistir a una especie de desarrollo de la imaginación numérica que nos ha sorprendido grandemente. Los alumnos no solamente calculaban deprisa y bien, sino que no vacilaban en recurrir a combinaciones cada vez menos corrientes. (MIALARET, 1984, 59).

Algunos autores (SOWDER, 1990) hablan de un tratamiento *holístico* preferente de la operación y operandos. Lo que implica en general un conocimiento en profundidad de la naturaleza y características de operaciones y cantidades, más que de su expresión numeral o algorítmica. En el origen de este comportamiento se halla la diversidad de situaciones y estrategias aplicables a cada una: para un mismo número, y según el caso, se manejan números contiguos, descomposiciones aditivas y factoriales varias, su doble o mitad, etc.

También debe tenerse en cuenta otro grupo nada despreciable de motivaciones, de las que raramente se hace mención. Son, es cierto, menos claras en su aceptación generalizada, incluso en su valor didáctico, quizás por la no inmediatez de sus efectos y la consiguiente dificultad de comprobación objetiva.

l) Ocasión para ejercitar la creatividad e iniciativa personal.

Una operación aritmética efectuada mentalmente no tiene, por lo general, una única vía de cálculo. Un sencillo ejemplo:

$7 + 5 = 7 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 12$ (con ayuda de representación interior o física de recuento de dedos)

$7 + 5 = (5 + 2) +5 = 5 + (2 + 5) = (5 + 5) + 2 = 10 + 2 = 12$

$7 + 5 = (2 + 5) + 5 = 2 + (5 + 5) = 2 + 10 = 12$

$7 + 5 = 5 + 7 = 5 + (5 + 2) = (5 + 5) + 2 = 10 + 2 = 12$

$7 + 5 = 7 + (3 + 2) = (7 + 3) + 2 = 10 + 2 = 12$

$7 + 5 = 7 + (1 + 4) = (7 + 1) + 4 = 8 + 4 = 8 + (2 + 2) = (8 +2) + 2 = 10 + 2 = 12$

$7 + 5 = (6 + 1) + 5 = 6 + (1 + 5) = 6 + 6 = 6 \times 2 = 12$

Tal vez el lector tenga otras. Pero, lo que es más importante: *"¿qué modelos de representación se están utilizando?"; "¿son útiles a otras operaciones?"; "¿a cuáles sí, y a cuáles no?"...*

> A poco que se reflexione, sorprende la variedad de enfoques posibles. Explorarlos, inspeccionar todas las posibilidades, optar por una de ellas, determinar el orden de actuación, estudiar las transformaciones más apropiadas, valorar el resultado, etc., convierte el cálculo a secas en cálculo pensado. Es un pequeño desafío, una labor inteligente, divertida personal. (GÓMEZ, 1988, 67).

m) Ocasión para el desarrollo de estrategias de pensamiento.

Continuando con el ejemplo anterior: *"¿son las únicas vías?"; "¿cuál es la mejor de todas?"; "¿por qué?".*

Estas cuestiones encierran todo un plan de investigación situacional: análisis de las cantidades involucradas, estrategias posibles de cálculo, análisis de dificultades, ventajas e inconvenientes, elección, optimización, decisión, transferencia a situaciones análogas, diseño de patrones o estrategias generalizables...

Poco a poco se va conformando en la mente del alumno un programa completo de estudio de situaciones problemáticas. Que, si bien se circunscribe en principio al campo de lo aritmético, pronto puede servir de matriz para esquemas más generales y formativos.

SOWDER (1990) señala una serie de características del Cálculo Mental, que se orientan claramente a la formación en estrategias del pensamiento:

- Empleo de procedimientos constructivos. Ya que la obtención del resultado es el objetivo único, director y selector de estrategias y operaciones.

- Empleo de procedimientos no uniformes; variables y flexibles. Basta observar el ejemplo de *7 + 5*, para comprender que la diversidad de actuaciones es amplísima, influidas por variables objetivas -operación aritmética, naturaleza y tamaño de los operandos, finalidad del cálculo- y subjetivas -técnicas conocidas, recursos de memoria, soporte imaginativo, tensión, etc.-; diversificándose, al mismo tiempo, las técnicas aplicables.

- Empleo de procedimientos activos. Con un mayor control del método utilizado en cada situación. Debido, fundamentalmente, a la variedad de situaciones y la consiguiente variabilidad y flexibilidad de estrategias aplicables. Se aleja así el riesgo de rutina y memorización mecánica.

n) Desarrollo de la memoria inmediata.

Al operar mentalmente se ponen en juego registros de memoria en los que se almacenan datos sencillos -o no tan sencillos-, a recuperar en momentos inmediatos posteriores.

Basta un simple ejemplo. Al calcular 42+35, *"puedo muy bien marginar momentáneamente el 2 y el 5, en espera de calcular 40+30; retengo ahora el 70, y busco en los registros de memoria ocupados: hallo el 2, luego 70+2=72; busco después: hallo el 5, luego 72+5=77"*. (Que nadie piense que el itinerario es único: ni en el soporte ni en la estrategia.)

La limitación natural de la capacidad de memoria incita incluso al diseño de estrategias de cálculo que, a su vez, engendran técnicas para una *mejor gestión de los recursos de memoria* (otra aportación a las *estrategias de pensamiento*).

Y así, es frecuente que las operaciones se inicien por las unidades de mayor orden, acumulándose resultados sucesivos. Junto con ser una estrategia minimizadora de errores relativos, permite a la memoria verbal mantener buena parte del resultado acumulativo (hablamos del español, y de las lenguas latinas en general.).

Calculistas famosos -como Jaime García Flores (1989)- llevan al extremo esta interrelación entre memoria y cálculo mental, reduciéndolo prácticamente a la localización y traducción de valores en tablas icónicas o simbólicas puras.

ñ) Ejercitación de la capacidad de concentración.

Estrechamente relacionada con el aspecto anterior, un ejercicio mental abstracto favorece el aislamiento de los estímulos externos -en alguna medida, la inhibición sensorial-, el ejercicio operativo de funciones mentales diversas -representación, memoria inmediata, mediata (reglas y automatismos), combinatoria, etc.- y orientar la atención hacia objetos predefinidos. En suma: preparar y ejercitar moderadamente un buen cúmulo de funciones cognitivas, predisponiéndolas para más duras tareas abstractas.

No en vano, los expertos en Técnicas de Estudio -una de esas *Transversales*, estrellas de la reforma educativa en curso en España para la Secundaria- proponen como *ejercicios de concentración*, previos a la sesión de estudio, la realización de cálculos mentales sencillos: adiciones o sustracciones en iteración, permutaciones de cifras y ordenaciones numéricas, sustituciones, etc.; que si no son cálculo mental en sentido estricto, mucho se le parecen en las operaciones y procesos elementales: son un a modo de precalentamiento para el deporte intelectual.

o) Ocasión para el desarrollo de la atención y agilidad mental.

En las actividades que se desarrollan de forma organizada, se exige del participante una orientación de la atención y una flexibilidad y prontitud de respuesta, comprobables inmediatamente por el propio sujeto y, en su caso, por los otros participantes -quienes, a su vez, se ven obligados a efectuar interiormente las operaciones y comparar sus resultados con las respuestas ajenas-.

Esto, que podría predicarse de cualquier actividad, resalta especialmente en las que tienen como objeto el cálculo mental, por la precisión de las respuestas, la mencionada inmediatez, la sucesión o encadenamiento, la posibilidad de variantes, etc. No se trata simplemente del aprovechamiento y cultivo de la sana competencia: es una llamada permanente a la propia superación, tal como el atletismo reclama el esfuerzo continuado por mejorar los resultados personales, aquí fácilmente comprobables.

Por último, un grupo de consecuencias de la práctica del Cálculo Mental, teñidas por el tinte de lo discutible -y aún de lo inconfesable- de la apreciación subjetiva. Los técnicos -psicopedagogos-, de una parte, y la experiencia didáctica del profesor y la propia de los alumnos, de otra, las avaloran como resortes educativos útiles, como auténticas motivaciones.

p) Ocasión para el ejercicio de la flexibilidad y apertura de mente.

Conocida la diversidad de estrategias aplicables para un determinado cálculo, cabe plantearse *cuál de ellas es preferible y por qué*. Pero esto supone, cuanto menos, la aceptación de esa pluralidad y su validez, previa a la controversia en busca de *la mejor solución*; si es que existe: lo más probable es que la decisión de optimización quede en suspenso, como variedad de opciones personales.

Una sencilla y fructífera situación de enseñanza-aprendizaje para la discusión en grupo: con alternativas todas ellas válidas, ocasión para conocer y aceptar aportaciones diferentes de la propia, respetarlas, argumentar convenientemente la postura personal, etc.

q) Prestigio social.

Tal vez suene a presuntuoso afirmar que las Matemáticas despiertan admiración. Pero es innegable que la mayoría de la gente se admira -nos admiramos- de quienes efectúan cálculos a velocidades vertiginosas, sin error, y con una seguridad pasmosa; en ocasiones, desafiando a las calculadoras, anticipando resultados o corrigiendo errores de manipulación.

Las *Matemáticas útiles* despiertan admiración e inocente envidia; o no tan inocente: el desprecio que algunos hacen de la Matemática -y aun de los matemáticos- parece traducir un género de impotencia, de rechazo a aquello que no se le somete, que le supera. Y los adolescentes -también los niños- son muy sensibles a los estímulos de la consideración social.

r) Prestación social.

No faltan los errores al calcular mentalmente. Y, por fortuna, al exteriorizarlos, tampoco falta una voz o mano amiga que los corrija.

Arriba nos hemos referido al movimiento de admiración y posible repunte de pequeña envidia o dolor de orgullo herido. Pero es más natural el agradecimiento por el servicio prestado; y más eficaz como motivación la satisfacción cuando se tiene la oportunidad de resolver un problema a alguien. Llámese *prestación o contribución social, trabajo cooperativo, práctica del compañerismo* o como se quiera: anhelo de prestar un servicio a los demás, deseo y realidad de ser útil en beneficio de otros; despliegue de potencialidades de la persona en su dimensión social.

s) Autosatisfacción.

En esta misma línea, pero en plano bien diferente, no podemos olvidar la satisfacción que produce el comprobar que toda una legión de entes -los números- nos *están sometidos*. Desde el "*¡ya se sumar!*" O "*¡ya sé dividir!*" de un escolar de Primaria, ingenuamente exteriorizado al llegar a casa, hasta el silencioso "*¡no hay integral que se me resista!*" -más ingenua, por ignorante- de un universitario principiante.

Es una forma del placer intelectual que generan el conocimiento y práctica de destrezas intelectuales, pero ahora con la posibilidad de ejercitarlas habitualmente, en servicio propio o ajeno. Además, el ámbito de este poder se encuentra casi perfectamente determinado en cada momento: qué operaciones, con qué tipo de números -conjunto, tamaño, etc.-, en qué tiempos, seguridad...

Ésta es sin duda también la motivación en la que hunde sus raíces la satisfacción del *cálculo por el cálculo* -no necesariamente mental- que algunos escolares experimentan, y que alcanza en ocasiones niveles enfermizos.

Un extraño fenómeno que los profesores nos tropezamos con frecuencia son aquellos alumnos que, arrastrando toda una historia personal de fracasos y rechazos hacia el estudio en general y la Matemática en particular, se sienten atraídos y motivados hasta la excitación por las actividades en relación con el cálculo mental. "*Esto sirve para algo*; *esto es mucho más divertido -esto mola*", en argot-; "*ojalá fuera así todo*"...: observaciones de estos muchachos que llevan a considerar que

El Cálculo Mental es motivante en sí mismo.

Útil para recabar atención, predisponer al esfuerzo de matematización y, convenientemente graduado, regalo para el caminante fatigado de lo arduo y abstracto.

Cuadro 6.2.1.- Del Cálculo Mental: motivaciones, justificaciones y sugerencias.

- Proximidad
  - Cotidianidad
  - Empleo interdisciplinar
  - Valor instrumental; en las Ciencias Físico-matemáticas
- Ventajas didácticas específicas
  - Variedad de situaciones didácticas para su cultivo
    - Regladas
      - minutos de precalentamiento
      - resolución de problemas
        - estimación
        - ensayo
        - cálculo efectivo
    - Recreativas
      - Solitarios
      - Juegos de pequeño grupo
      - Juegos de gran grupo
      - Juegos no competitivos
      - Juegos competitivos
      - verbales
      - con lápiz y papel
      - de tablero
      - de calculadora
      - informáticos y electrónicos
      - híbridos; etc.

Ventajas didácticas específicas	- Graduabilidad	- adecuabilidad del tamaño de las cantidades	
		- adecuabilidad del tipo de cantidades	- números naturales
			- números enteros
			- fracciones
			- números decimales
		- de las operaciones presentadas	- adición
			- sustracción
			- multiplicación
			- división
			- otras
	- Comodidad y rapidez		
	- Detección de errores en cálculos efectuados por otros medios	- revisión local (cifras extremas)	
		- revisión global (tamaño de cantidades)	

- Efectos didácticos
  - - Valor de consolidación
    - - de los "hechos numéricos elementales"
    - - de las destrezas básicas
  - - Fundamento de los algoritmos escritos
  - - Manifestación y ejercitación de aspectos estructurales
    - - propiedad conmutativa
    - - propiedad asociativa (ordinaria)
    - -disociatividad (asociativa, en descomposición)
    - - propiedad distributiva
    - - recurso al simétrico y elemento neutro
  - - Familiarización con los números, su combinación, sus relaciones
  - - Desarrollo de la creatividad e iniciativa personal
  - -Desarrollo de estrategias de pensamiento
    - - procedimientos constructivos
    - - variedad de estrategias
    - - aplicación flexible
    - - gestión de los recursos de memoria
  - - Desarrollo de la memoria inmediata
  - - Desarrollo de la capacidad de concentración
  - - Desarrollo de la atención y agilidad mental
- Efectos psicológicos y comportamentales
  - -Autosatisfacción
  - - Utilidad social y servicio
  - - Incremento del prestigio social
  - - Flexibilidad y apertura de pensamiento

6.2.2 DE LAS DIFICULTADES E INCONVENIENTES

Pero no todo son laureles. Como en cualquier actividad, y más en las matemáticas, el cálculo mental conlleva dificultades e inconvenientes; sobre todo, de orden didáctico.

a) Exige unos niveles mínimos de desarrollo de ciertas aptitudes específicas. En particular: atención, concentración mental y recursos de memoria.

HOPE (1985), desde una óptica de análisis de factores favorecedores del Cálculo Mental, considera cuatro de ellos: concentración, hábito, atención e interés (HOPE, 1985, 372). Entendemos que el *hábito* guarda una estrecha relación con la explotación y aplicación de los *recursos de memoria*; en cuanto al interés, se contempla a continuación en forma ampliada.

Contrariamente a lo que pudiera pensarse- no precisa, en principio, ni de memorización de hechos numéricos básicos -tablas- ni estrategias predefinidas. Su desconocimiento u olvido puede lentificar un cálculo concreto, condicionarlo incluso, pero no impedirlo absolutamente -salvo que provoque bloqueo-.

Sin embargo, la automatización de hechos numéricos elementales e incluso de ciertas estrategias estereotipadas favorece la agilidad y seguridad en los cálculos. De otro modo, obliga al alumno a recurrir a procedimientos extremadamente rudimentarios (recuentos ascendentes o descendentes -véase el ejemplo de $7 + 5$ de páginas atrás-, sumas reiteradas, etc.), propios de estadios iniciales, o al empleo sistemático de imágenes de situaciones físicas o manipulativas (dedos, trazos, materiales estructurados, algoritmos escritos, etc.); que, si bien son acreedores al título de *cálculo pensado*, pueden tornarlo lento y trabajoso. Pero sin olvidar que el uso de estrategias puede acabar en memorización de resultados, pero la memorización de resultados no sólo no conduce al diseño de estrategias sino que las obstruye. (HEEGE, 1985).

b) Un cierto nivel de comprensión de la situación y destrezas aritméticas relacionadas con ella. En tres aspectos:

- Asimilación de la operación presentada. Que se extiende más allá de la mera interpretación simbólica del signo lingüístico que la representa (verbal, simbólico-matemático, escrito o convencional), ya que condiciona las estrategias aplicables.

- Dominio de la estructura numérica y sus representaciones en los diferentes lenguajes; o, más concretamente, en el universo de representaciones interiores del lenguaje operatorio. Tal vez sea esta destreza la que condiciona más fuertemente el dominio numérico -el paso de números naturales a enteros, fraccionarios o decimales- y el rango o tamaño de operandos y resultado -operandos de una, dos o más cifras-. Piénsese, por ejemplo, en el soporte imaginativo de la *escalera* o la *recta numérica* para la adición de enteros, o en la aplicación reiterada de la propiedad distributiva para la multiplicación de números de varias cifras en expresión decimal.

- Naturaleza de las cantidades intervinientes; tanto de los operandos como del resultado. Que favorecen la selección de estrategias particulares y estimación del resultado.

c) Fuerte influjo de los intereses personales del alumno y del contexto socio-familiar.

Que, si bien pueden ser un estímulo positivo, también pueden actuar negativamente, debilitando no pocos de los valores antes apuntados.

Se incluyen en este grupo el conflicto provocado por el empleo irregular de instrumentos de cálculo tales como calculadora, ábaco, etc.; o del mismo cálculo escrito. Subráyese el calificativo de *irregular*, sea por la concreta situación aritmética o por la circunstancia de empleo.

La actuación pedagógica podría inducir entonces un enfrentamiento que desorientara al alumno o que provocara su pasividad reactiva (estamos tratando, esencialmente, de alumnos en los primeros niveles de escolaridad). Sin embargo, la acción institucional no debe limitarse a un mal entendido respeto de supuestas escalas de valores y actitudes, considerándolas intocables. ¿Vamos a renunciar a los *estímulos motivacionales* -y aun a la propia acción institucional- como algo conveniente a la formación integral del alumno?

Una adecuada intervención didáctica mediante el diseño de actividades y *reglas de juego* debe acabar por rectificar estas actitudes *desviadas*. Conviene no exagerar la importancia de tales carencias cognitivas, curriculares o actitudinales como decisivas. Más bien son circunstancias personales o contextuales que inciden en un desarrollo del Cálculo Mental, su aprecio, aprendizaje de técnicas peculiares, eficacia y progreso. Pero son claramente modificables por medio de prácticas y actuaciones didácticas oportunas.

d) Heterogeneidad en los niveles de destreza entre alumnos de un mismo grupo.

Al inicio de la escolaridad o en sus primeros años, es poco menos que impredecible el nivel de un *alumno medio*. Los conocimientos y destrezas adquiridos extraescolarmente son de origen bien variado: ambiente familiar, contexto cultural, medios de comunicación, curiosidad y oportunidades personales, etc.

Junto con ello, las capacidades específicas de cada alumno para captar, retener y aplicar hechos y técnicas. Mientras algunos alumnos les basta una observación o comprobación de un determinado hecho numérico, otros precisarán de una veintena de oportunidades. Para unos la conmutatividad es evidente; para otros, exigirá una comprobación reiterada y casi exhaustiva de casos puntuales.

La consecuencia didáctica es clara: se dificulta gravemente el diseño y aplicación de actividades dirigidas a grupos de alumnos. Se corre el riesgo de hacer imposible una participación equilibrada -provechosa, por tanto- de todos ellos: lo que serían simplezas para unos, quedarían inaccesibles o sin posibilidad de éxito para otros. Como de costumbre, los grupos homogéneos facilitan la intervención didáctica intensiva, que permite una mayor especificidad en las situaciones y objetivos a proponer, adecuados a todos sus miembros.

e) Evaluación difícil y costosa.

En el Cálculo Mental pueden distinguirse variedad de aspectos a evaluar:

- Tiempo invertido. Para ser exactos: tiempo transcurrido entre la percepción del cálculo a realizar -con sus propias dificultades de determinación del instante preciso- y momento de obtención del resultado -que no debe confundirse con el momento de verbalización o aparición de indicios exteriorizados-; condicionado el primero por capacidades perceptivas, y expresivas el segundo.

- Estrategia utilizada. Que sólo puede observarse si media verbalización, manipulación o relato inmediato, supuesto que el proceso sea consciente y pormenorizable en todos sus detalles.

- Exactitud o aproximación; según se trate de cálculo o estimación de resultados. Pero, ¿qué baremo adoptar para evaluar errores?; ¿importa sólo el resultado, o también deben considerarse aspectos procesuales?

- Seguridad. ¿Absoluta, o relativa a la confianza general del alumno en sí mismo? ¿No estará ligada a la tensión situacional, de repercusión del éxito o fracaso? ¿Debe penalizarse acaso la precaución de verificar el proceso o el resultado, difiriendo la respuesta?

Todo ello, respecto de dominios o variables predefinidas:

- Dominio de operadores. Que incluye tanto el campo numérico (naturales, enteros, fracciones, etc.) como el rango en el que se contienen operandos y resultado.

- Operación presentada. Que no debe confundirse con el método o estrategia operatoria seguida en la resolución. Así, una multiplicación puede tornarla suma el ejecutante; una división, resta; una adición o sustracción, conteo; etc.

Sin olvidar las inevitables variables personales:

- Edad.

- Nivel educativo.

- Trayectoria curricular en Cálculo Mental.

Se deduce de todo ello que:

1º) Deben emplearse metodologías de evaluación del tipo de la *entrevista clínica* (entiéndase: en sus características, no en sus fines exploratorios de patologías). Lo que implica individualización y prolongado tiempo de aplicación; y, si no quieren perturbarse los resultados de la observación, contextos naturales de aula.

2º) Deben establecerse *escalas* o *criterios* de valoración de las características o variables a evaluar. Lo que podría atentar en su raíz a la flexibilidad y estrategias personales que tantos elogios merece.

No es imposible. Pero poco menos que inviable en las condiciones ordinarias del contexto escolar. Conformémonos con apreciaciones o valoraciones parciales.

f) Exigencias de una formación específica en el profesor.

Que nos devuelve a las consideraciones recogidas en el análisis situacional de la Sección 2.4.

En su dimensión matemática es bien concreta: Hay un número limitado de reglas, estrategias y caminos que facilitan la tarea. Lo que ocurre es que muchos maestros y profesores no tienen ellos mismos consciencia de los procesos que aplican cuando calculan mentalmente, y nunca se han parado a analizarlos -sobre un papel-, con la finalidad de enseñárselos a sus alumnos. (GÓMEZ, 1988, 69). A tal fin, y aunque pudiera entenderse como exceso en el marco del presente trabajo, se ha intentado recoger en la próxima Sección un abanico -no exhaustivo- de técnicas para el cálculo mental de las cuatro operaciones aritméticas con números enteros.

Es cierto que no abundan las monografías sobre el tema. Es preciso espigar técnicas y sugerencias incluidas en manuales de Cálculo Aritmético y su Didáctica. No obstante, en los últimos años se viene gestando un movimiento de aproximación al tema (véase, por ejemplo: GÓMEZ, 1988; GIMÉNEZ, 1989).

En particular, hay que destacar el ingente esfuerzo que se está realizando por desarrollar actividades y materiales específicos para la ejercitación; como son: dominós, bingos y loterías, juegos de tablero, programas informáticos, etc. Un buen repertorio de estos materiales y juegos puede encontrarse en las obras de KAMII y (1986, 1988, 1991; existe versión española).

Como ejemplo de orientaciones didácticas para un desarrollo de técnicas o estrategias de cálculo mental, podemos citar en esquema las propuestas del GRUPO 0 (1997), dirigidas a alumnos entre 6 y 12 años:

- El profesor debe conocer los *procedimientos-tipo* más usuales en cálculo mental.

- Es preciso diseñar una planificación detallada y ajustada a los previsibles avances de los alumnos en la clase.

- Han de anticiparse los puntos delicados, cómo y en qué momento abordarlos y tener previstas cuestiones de procedimiento.

- Los algoritmos mentales se practicarán oralmente, sin ayuda de material.

- Debe realizarse diariamente, en sesiones cortas (no más de 10 minutos), por el considerable esfuerzo y atención que requiere esta actividad. Unas veces dirigida a grupos pequeños de alumnos (6 ó 7), otras a toda la clase.

- Los ejercicios que se propongan deberán estar cuidadosamente dosificados y en orden creciente de dificultad.

- La actitud favorable por parte de los niños se conseguirá con la forma de llevar la actividad, adecuándose a su ritmo.

- El profesor no tiene que decir las técnicas que él utiliza, sino que estará atento a las que utilizan los alumnos y a conocer sus dificultades concretas. En consecuencia:

- Que cada alumno exprese cuál es el número que corresponde a la propuesta que se le hace y tenga la oportunidad de explicar cómo lo ha calculado.

- La discusión y el análisis, con todo el grupo, de los procedimientos empleados por los alumnos, es imprescindible para ampliar su catálogo de estrategias de cálculo mental y su conocimiento del significado y propiedades de las operaciones utilizadas, así como para evaluar los logros alcanzados y las dificultades que persisten.

- En otra sesión diferente, que no debería ser consecutiva, se puede trabajar la generalización de una estrategia de cálculo, utilizada en una operación determinada, para operar con números de la misma familia.

- En ningún caso se pedirá a los alumnos que formalicen sus respuestas.

- Realizar una evaluación continua.

Cuadro 6.2.2.- Factores que dificultan/favorecen la práctica didáctica del Cálculo Mental.

Subjetivos (del alumno)	- Niveles mínimos de desarrollo de abtitudes específicas	- atención
		- concentración
		- recursos de memoria.
	- Nivel de asimilación de los conceptos aritméticos	- de la naturaleza de las cantidades intervinientes
		- de la estructura numérica y su representación libre
		- de la naturaleza de la operación presentada
	- Actitud específica	- del alumno
		- del contexto socio-familiar
Niveles heterogéneos entre alumnos de un mismo grupo	- con origen en diferencias individuales	- para captar hechos o técnicas.
		- para retener hechos o técnicas.
		- para aplicar técnicas o recursos específicos.
		- de receptividad hacia los estímulos motivacionales.
	- con origen en los contextos socio-familiares	- conocimientos previos de hechos y técnicas.
		- práctica en la aplicación de técnicas o recursos específicos.

- Complejidad evaluatoria
  - pluralidad de variables
    - objetivas
      - operación presentada
      - naturaleza de los operandos
      - tamaño de los operandos y del resultado
    - subjetivas
      - edad del alumno
      - nivel curricular
        - conocimiento de hechos numéricos
        - conocimiento de técnicas y estrategias
      - trayectoria curricular en Cálculo Mental
        - conocimientos y destrezas previas
        - práctica acumulada
  - dificultades de control/medición
    - tiempo real de cálculo
    - estrategia empleada
    - grado de exactitud/aproximación
    - seguridad
      - en el proceso o estrategia
      - en el resultado obtenido
    - indefinición de objetivos curriculares
    - escasez de pruebas y escalas

Formación específica del profesor	- Formación matemática	- Conocimiento de los fundamentos del contenido a tratar
		- Conocimiento de la proyección del contenido a tratar
		- Conocimientos acerca de estructuras relacionadas, etc.
	- Información didáctica	-Relativa a métodos
		- Relativa a material
		- Relativa a situaciones de enseñanza-aprendizaje
		- Relativa a estrategias particulares
		- relativa a instrumentos de evaluación, etc.
	- Información psicopedagógica	- Relativa a las características generales presumibles en los alumnos
		- Relativa a las necesidades de los alumnos respecto de los Contenidos y Objetivos matemáticos a tratar
	- Experiencia docente	- Relativa al nivel curricular
		- Relativa al tipo general de alumnos
		- Relativa a los objetivos y contenidos previstos
		- Relativa a los materiales disponibles
		- Relativa a las dificultades y facilitadores más frecuentes, etc.

Formación específica del profesor	En caso de atender en el aula a algún "alumno con necesidades educativas especiales"	- Alumno con dificultades de orden perceptivo y/o psicomotor	- Información/formación	
			- afectados por trastornos análogos	
			- Confección y adaptación de materiales específicos	- para situaciones de enseñanza-aprendizaje
				- de actividades
				- de evaluación
			- Experiencia docente con alumnos afectados por ese déficit	
		- Alumno con carencias curriculares	- Detección de carencias	
			- Conocimiento y diseño de fórmulas de "remediación"	
			- Experiencia docente con alumnos afectados por carencias análogas	
		- Alumno con trastornos afectivos o de personalidad	- Conocimiento de manifestaciones, hipótesis estímulo/respuesta, tratamientos habituales y coyunturales, etc. (de tipo general)	
			- Experiencia docente con alumnos	

6.2.3 TÉCNICAS Y ESTRATEGIAS

Como se adelantaba en el cuadro 6.1, al comienzo de este Capítulo, pueden distinguirse dos formas fundamentales de cálculo mental: el *inmediato* o *automatizado* y el *pensado*. La diferenciación, por extraño que parezca, no es sencilla.

Salvo que aceptemos las teorías asociacionistas en su formulación más radical, el cálculo mental suele apoyarse en representaciones varias: situaciones físicas, manipulativas o gráficas, la propia verbalización, la escritura simbólica imaginada. Es decir: el cálculo se efectúa en el nivel de representaciones interiores. Por esta razón, suele designarse como *cálculo pensado*, cuando supone la mediación de un ejercicio mental efectivo sobre imágenes, y que implica toma de decisiones y elección de estrategias.

La propia elección de forma representativa ya tendría el carácter de una decisión o estrategia: elegir el ámbito de imágenes/símbolos en el que el calculista *se siente más seguro*, o que *le viene resultando más eficaz*.

En contraposición a este modo de proceder, se hallarían las *respuestas inmediatas*, sin mediar reflexión ni combinatoria representativa. Se ajustarían al esquema estímulo-respuesta del *cálculo mental mecánico* o *inmediato*, y que es típico de la memorización de las *tablas*, aunque no se restringe a los *hechos numéricos básicos* (operaciones con números de una cifra, en escritura decimal): es frecuente en actividades mercantiles memorizar los múltiplos y fracciones de un cierto valor, sin recurrir a cálculo alguno.

Tal vez aún perviva en la memoria la estampa de un grupo de niños *cantando la tabla de multiplicar*. Retahíla mecánica; vacía en principio de contenido real; ignorante de las propiedades de los números y operaciones; a la espera de *ser aplicada* o hacer corresponder una situación física a cada *hecho* que le confiera *sentido práctico*.

Pero también puede hacerse presente la imagen de un niño que, gracias a la aplicación de estrategias concretas -manipulativas, gráficas o verbales-, construya cada resultado. La aplicación reiterada en situaciones diversas le lleve a su memorización, y, prescindiendo del proceso de obtención, acabe por automatizar tal relación numérica. Que ordene, después, y sea capaz de memorizar la lista completa de múltiplos de un número, de ciertos números. Por último, los *hechos* se independizan de listas y órdenes parciales, quedando prestos para la recuperación inmediata de la respuesta, libres de procesos de construcción y ordenación estructural.

En el segundo caso, ¿puede asegurarse que no quedan vestigios del proceso constructivo en la evocación de un cierto *hecho numérico*? ¿Puede afirmarse lo contrario: que toda evocación de un *hecho numérico* implica su reconstrucción, al menos esquemática? ¿Acaso las representaciones se contraen y desvanecen progresivamente, hasta establecer nexos inmediatos?

¿Existen representaciones que eximan de un verdadero proceso constructivo, suministrando situaciones de percepción global -*subidización*-?

De ser así: ¿qué dimensiones son abarcables por una tal *subidización*?; ¿qué generalidad tienen estas dimensiones?; ¿de qué variables depende?

¿Cuál es la frontera entre *inmediatez* y *construcción*?

Nos deslizamos hacia los espacios de iniciación al Cálculo, alejándonos del propósito de estudiar las técnicas o estrategias de Cálculo Mental. Quizás estemos ya adelantando declaraciones de principios didácticos:

El Cálculo pensado es la vía más segura para la automatización y aplicación eficaz del Cálculo Aritmético

Y su complemento:

El cálculo pensado es un recurso siempre disponible en el cálculo automatizado

Sin embargo:

Cálculo automatizado -o inmediato- y cálculo pensado son independientes pero se potencian y apoyan mutuamente

Ya que, sin la automatización de *hechos numéricos*, el cálculo pensado con cantidades de una cierta dimensión -números de varias cifras, en escritura decimal- se vería reducido a rutinas tan sumamente elementales, que lo lentificarían y harían despreciable.

En resumen, formulemos un principio general, con carácter de opción didáctica:

El cálculo automatizado es el objetivo; el cálculo pensado, la vía más segura para alcanzarlo. Los límites del primero vienen perfilados por las necesidades prácticas del alumno; los del segundo, son libres.

Intentemos, por fin, una descripción de las técnicas y estrategias más frecuentes en el *cálculo pensado*. Se toma como esquema general de clasificación las operaciones aritméticas con números naturales, aunque no faltarán las referencias a otros dominios numéricos. Las subdivisiones siguen un supuesto orden de complejidad lógico-operatoria.

A) ESTRATEGIAS PARA LA ADICIÓN.

1) Recuentos o conteos unidad a unidad.- No podemos desdeñar algunas de ellas tan elementales como las basadas en el *conteo* o *recuento* en la sucesión numérica, propias de los primeros estadios de aprendizaje. Pero incluso en este nivel tan bajo, se han encontrado procedimientos varios:

1.1) Por recuento total

Propias de adiciones de números naturales. Se parte de la unidad, superponiendo en sucesión ambas cantidades-operandos:

5 + 7 = {1, 2..., (5 pasos)..., 5; 6, 7, 8, 9..., (7 pasos)} 12

1.2) Por recuento parcial. Se elude el recuento para uno de los sumandos. Con dos formas, no universales.

1.2.1) Con origen predeterminado por la presentación.- Partiendo de la cantidad enunciada en primer lugar, se prosigue el recuento conforme al segundo sumando:_

5 + 7 = {5; 6, 7, 8..., (7 pasos)} 12

No es exclusiva de los más jóvenes, ni de operandos necesariamente ambos *pequeños*:

45 + 7 = {45; 46, 47..., (7 pasos)} 52

Incluso en niveles medios o superiores, cuando se trata de la adición de números enteros, siendo negativo el primero de ellos, se encuentran ejemplos de esta forma de proceder:

-3 + 5 = {-3; -2, -1, 0, 1} 2

1.2.2) Con estrategia de elección del origen.- Se toma como punto de partida para el recuento el sumando mayor:

5 + 7 = {7; 8, 9, 10..., (5 pasos)} 12

Se trata de la primera estrategia compleja, ya que, en realidad, es combinación -inconsciente, tal vez- de otras dos: la propiedad conmutativa, para transformar la expresión en su permutada, y seguir la técnica precedente.

2) Permuta previa. O aplicación de la propiedad conmutativa.

Puede parecer una simpleza, pero está demostrado ampliamente que resultan más sencillas -mayor rapidez y frecuencia de éxito- aquellas adiciones en las que el primer sumando supera al segundo; tanto entre números inferiores a la decena -hechos elementales-, como entre aquellos otros superiores. La causa que explicaría esta actitud generalizada no está clara.

- Empleo encubierto de una técnica de recuento unidad a unidad -en concreto: *recuento con elección del origen* (1.1.2.2)-, por razones de confianza.

$5 + 8 = 8 + 5 = \{8; 9, 10... (5 \text{ pasos})\}$ 13

- Rememoración encubierta del *listado* o *tabla*, seleccionando el *camino temporalmente más corto*:

$5 + 8 = 8 + 5 = \{8; 8+1=9, 8+2=10, 8+3=11..., 8+5=\}$ 13

En esencia, coincide con el anterior. Pero mientras aquél parece recurrir a alguna forma de representación no verbal (dedos, tira o tabla numérica, etc.), éste recuerda quizás un aprendizaje verbalista de la "*tabla de sumar: Ocho más una, nueve. Ocho más dos, diez*"...

La elección de la *tabla del 8* en lugar de la *tabla del 5* implica un recurso local de mejor administración o gestión del esfuerzo de búsqueda, fruto tal vez de la experiencia acumulada.

- Aplicación de una técnica general para la mejor gestión de los recursos de memoria, que reduciría a la mitad los *hechos numéricos elementales* a recordar. Directamente:

$5 + 8 = 8 + 5 =13$

Evidentemente, esta última motivación es mucho más rica estructural y psicológicamente, y conduce a un dominio proyectivo de los *hechos numéricos elementales*. Bastaría, entonces, recordar la mitad inferior izquierda de la *tabla de sumar*.

En cualquier caso, la aplicación de la técnica conmutativa es general en las adiciones con números superiores a la decena:

$7 + 56 = 56 + 7 = 63$

que puede ser fruto tanto de una técnica de recuento:

$56 + 7 = \{56; 57, 58, 59... (7 \text{ pasos})\}$ 63

O, -se verá más adelante- de una técnica de descomposición y recurso al *hecho numérico elemental* 6+7=13 (o 7+6=13):

$56 + 7 = (50 + 6) + 7 = 50 + (6 + 7) = 50 + 13 = 50 + (10 + 3) = (50 + 10) + 3 = 60 + 3 = 63$

U otras estrategias aditivas.

3) Descomposición.-

Este grupo de técnicas tienen como aspecto común un dominio de la descomposición de una cantidad en otras dos, por vía exclusivamente aditiva o aditivo-sustractiva.

Dado que las descomposiciones posibles son múltiples, supone, a su vez, una capacidad de elección de *la mejor*. Elección que no tiene por qué ser universal: responderá a estrategias personales, más o menos desarrolladas o según el nivel de práctica que se haya alcanzado.

3.1) Descomposición aditiva. O mediante adición de partes o cantidades; se entiende: *no unitarias*, ya que se reduciría a una estrategia de recuento.

3.1.1) Descomposición de uno de los sumandos en dos partes arbitrarias.

Se aplica incluso en casos elementales:

$6 + 7 = 6 + (4 + 3) = (6 + 4) + 3 = 10 + 3 = 13$

Así como:

$6 + 7 = 6 + (6 +1) = (6 + 6) + 1 = 12 + 1 = 13$

(Se ha observado que las sumas del tipo *doble* -2+2, 3+3, 6+6, etc.- son aprendidas por los niños con gran rapidez y firmeza.)

Dicho de otra forma: implican un dominio de los *hechos aditivos elementales* en sentido inverso a la correspondencia ordinaria, aunque no sea necesariamente consciente. Es decir: junto al recuerdo del hecho *4+3=7* se considera *7=4+3*; que, aun siendo admitido sin reservas por quienes aceptan el primero, no lo recuperan tan rápidamente ni son siempre conscientes de su aplicabilidad.

Precisamente en los dos ejemplos ofrecidos aparecen las dos descomposiciones más frecuentes -aunque no sean las únicas-:

- la que permite al primer sumando *alcanzar* la decena, y

- la que le hace presente como parte del segundo sumando.

Es evidente que, merced a la propiedad conmutativa, cuanto se ha observado respecto del segundo sumando puede trasladarse a la descomposición del primero. No obstante, aquélla parece ser más corriente. De hecho, ya KNICHT y BEHRENS (1928) observaron que las adiciones elementales cuyo primer sumando era mayor que el segundo resultaban más sencillas y fáciles de retener.

La generalización a casos en uno de cuyos números supera la decena es inmediata:

$79 + 8 = 79 + (1 + 7) = (79 + 1) + 7 = 80 + 7 = 87$

Obsérvese que la estructura numérica decimal empieza a cobrar importancia. Lo que sugiere que no pocas estrategias del *cálculo pensado* -las que aquí se describen y se emplean más a menudo por niños y adultos- tal vez estén ligadas a dos soportes fundamentales:

- Soporte verbal. Ya que la mayoría de las nomenclaturas verbales de las cantidades responden a la estructura decimal: "*diec-i-séis, veint-i-cuatro, ciento - cuarenta y dos*", etc.

- Soporte de escritura simbólica imaginada; por preponderancia en nuestra cultura de la escritura decimal.

Cabría preguntarse, por tanto, en qué medida las estrategias del *cálculo pensado* dependen de la lengua hablada, de la forma escrita o del itinerario didáctico seguido para su adquisición y cultivo. Como se verá, los más importantes materiales para aprendizaje del cálculo aritmético persiguen la correspondencia con la escritura posicional.

La escritura y verbalización de cantidades en forma decimal -polinómica o posicional-, abre un campo casi ilimitado de estrategias.

3.1.2) Por órdenes de unidades.-

Su referente común es la descomposición decimal:

$34 = 30 + 4 = 4 + 30$

$248 = 200 + 40 + 8 = 8 + 40 + 200$

Su campo de aplicación, por tanto, las sumas cuyos sumandos -uno, al menos- superan la decena. En cualquier caso, exigen -estructuralmente- la aplicación de las propiedades asociativa y conmutativa de la adición.

3.1.2.1) Procediendo por órdenes descendentes.

Es, sin duda, la técnica más fecunda en la adición de números de un cierto tamaño mediante *cálculo pensado*:

$38 + 6 = (30 + 8) + 6 = 30 + (8 + 6) = 30 + 14 = 30 + (10 + 4) = (30 + 10) + 4 = 40 + 4 = 44$

$317 + 468 = (300+17) + (400+68) = 300+400 + (17+68) = 700 + (10+7 + 60+8) = 700 + (10+60) + 7+8 = 700 + 70 + 15 = 770 + (10+5) = (770+10) + 5 = 780 + 5 = 785$

En español, se corresponde con la lectura verbal de las cantidades. Por tanto, supone un ahorro -mejor gestión- de recursos de memoria. Pero los espacios de *memoria de trabajo* o *memoria inmediata* deben contener elementos indivisibles; es decir: términos. De otro modo -representación simbólica-, el esfuerzo de memoria se complica.

(La observación es aplicable a las lenguas cuyo enunciado numérico sea *decreciente*: español, francés, inglés, italiano. Para aquellas que inviertan el orden -alemán, neerlandés-, al trastocarse este orden entre 20 y 99, se precisa una estrategia algo diferente; que también atañe al inglés entre 13 y 19.)

3.1.2.2) Procediendo por órdenes ascendentes.

En realidad, es una versión verbalizada del algoritmo escrito usual, ahora sin lápiz ni papel, con recurso a la imagen escrita de aquél:

317 + 468 = (7+310) + (8+460) = (7+8) + (310+460) = 15 + (10+300 + 60+400) = 15 + (10+60) + (300+400) = 15 + 70 + (300+400) = 5 + 10 + 70 + (300+400) = 85 + (300+400) = 85 + 700 = 785

Compite en frecuencia con el anterior para la adición de números superiores a la decena; pero tanto los recursos de memoria como el esfuerzo de atención son muy superiores aquí. Parece estar ligado a estilos de gestión de recursos por modalidad visual, más que auditiva o verbal.

3.1.2.3) Procediendo sin secuencia estricta de órdenes de unidades.-

317 + 468 = (300+17) + (400+68) = 300+400 + (17+68) = 700 + (10+7) + (60+8) = 700 + (10+60) + (7+8) = 700 + (10+60) + 15 = 700 + (10+60) + (10+5) = 700 + (10+60+10) + 5 = 700 + 80 + 5 = 785

Como se indicaba más arriba, parece apoyarse en recursos de memoria verbal. De muy escasa aplicación en el área cultural española o hispano-parlante.

3.1.3) Descomposiciones para la aparición reiterada de un sumando arbitrario.

En algunos ambientes mercantiles es usual el cálculo de cantidades como múltiplos de otra bien determinada; la docena, por ejemplo. Se tiende entonces a descomponer los números en sumas reiteradas de dicha cantidad-base y sus restos:

38 + 27 = (12+12+12+2) + (12+12+3) = (12+12+12+12+12) + (2+3) = 60 + (2+3) = 60 + 5 = 65

Puede considerarse como generalización de la *suma por duplicación de un sumando*, que se contemplaba en 3.1.1.2. Asimismo, tiene un cierto sabor de cálculo en base no decimal.

3.2) Descomposiciones aditivo-sustractivas.

Uno de los sumandos se descompone como sustracción. Por lo general, aparecen como minuendo decenas completas, facilitándose así la adición. Es muy frecuente con sumandos que cuentan con 8 ó 9 unidades:

$4 + 9 = 4 + (10 - 1) = (4 + 10) - 1 = 14 - 1 = 13$

$73 + 9 = 73 + (10 - 1) = (73 + 10) - 1 = 83 - 1 = 82$

$73 + 28 = 73 + (30 - 2) = (73 + 30) - 2 = 103 - 2 = 101$

$282 + 89 = 282 + (90 - 1) = 282 + (100 - 10 - 1) = (282 + 100) - 10 - 1 = 382 - 10 - 1 = 372 - 1 = 371$

Como se ve, tiene un amplio campo de aplicación: desde los *hechos numéricos elementales* hasta cantidades importantes. Antes que cálculo por sustracción efectiva, parece proceder por *recuento descendente* -ver más abajo-, pues el sujeto calculista no parece servirse en ningún caso del algoritmo escrito imaginado.

4) mediante representación interior

El control del proceso calculatorio, como se indicó páginas atrás, no es ni sencillo ni definitivo. Tres son las fuentes principales:

- Observación ecológica de acciones en el sujeto-calculista. Por la que pueden detectarse recuentos de dedos, movimientos de labios e incluso verbalizaciones espontáneas.

- Verbalización solicitada. Por la que el sujeto-calculista describe en voz alta las operaciones que realiza.

- Relato *a posteriori*. Análogo al anterior, pero una vez obtenido el resultado, como descripción introspectiva.

Se han obtenido así tres grupos de representaciones; por orden de frecuencia:

a) Representación simbólica gráfica, o de algoritmos escritos (no necesariamente el *canónico*).

b) Representación de acciones sobre material manipulativo. Por lo general, aquél que le resulta más familiar: regletas de Gategno, bloques multibase, ábacos, etc.

c) Representación de situaciones gráficas. Sean puntos, trazos, etc.

Como fórmula mixta, se encuentra la representación de la *tira numérica* o sucesión de números en forma simbólica ordenados espacialmente. Debiera esperarse que dicha ordenación tomara una configuración de línea recta; pero ésta sólo aparece en niveles muy elementales. Pronto -quizás al superarse la veintena- se desplaza en zig-zag, espiral, tabla bidimensional; tal vez en función de la experiencia manipulativa o representativa: cinta métrica, calendario, paneles, etc.

En sentido estricto, esta forma de proceder por vía imaginativa no debería merecer el título de *cálculo pensado*, ya que el esfuerzo de acción propiamente numérica y aplicación de estrategias es casi inexistente. Sin embargo, es difícil asegurar que no se aplica alguna de estas características en un paso determinado, o si la misma elección de representaciones no es ya una estrategia adecuada a las posibilidades y hábitos del sujeto-calculista.

Las dudas subsistirán de forma insoluble. Si se trata de niveles iniciales, ¿cómo separar representación de reproducción interior de las acciones físicas que conllevaría dicho cálculo ejecutado manipulativamente?; sobre todo, si se aplican estrategias de recuento. O, en el extremo opuesto: si la estrategia seguida es la descomposición por órdenes de unidades, ¿puede garantizarse la *subidización* en la obtención de los resultados parciales y en la *lectura* del resultado global?

Cuadro 6.2.3A.- Estrategias o técnicas para el cálculo pensado de adiciones.

- Aditivas
  - mediante recuento (o adición unidad a unidad)
    - Por recuento total
    - Por recuento parcial
      - con origen predeterminado por la presentación
      - con estrategia de elección del origen
  - permuta previa.
  - descomposición
    - -descomposición aditiva
      - uno de los sumandos en otros dos arbitrarios
        - para completar decenas
        - para repetir sumando
      - por órdenes de unidades
        - órdenes descendentes
        - órdenes ascendentes
        - sin secuencia estricta de órdenes
      - -para la aparición reiterada de un sumando arbitrario
    - descomposiciones aditivo-sustractivas
  - mediante representación interior
    - de algoritmos escritos
    - de acciones sobre material manipulativo
    - de situaciones gráficas

B) ESTRATEGIAS PARA LA SUSTRACCIÓN.

En razón de la estructura algebraica aditiva de grupo, y según las teorías psicopedagógicas, la sustracción es inseparable de la adición. Por más que el algoritmo escrito las haya alejado formalmente. Es, pues, de esperar que sean paralelas o análogas las estrategias empleadas en una y otra por el *cálculo pensado*.

1) Recuentos. o conteos, mediante operación unidad a unidad.

1.1) Recuento ascendente o de conversión aditiva.

Partiendo de la cantidad sustraendo, se asciende por recuento hasta el minuendo:

12 - 7 = {7; 8, 9, 10..., (5 pasos)} 12

1.2) Descendente.

12 - 7 = {12; 11, 10..., (5 pasos)} 7

Ciertamente, es menos frecuente que la primera, y mucho más difícil: lenta, con tropiezos y errores, inseguridad manifiesta, etc. Pero es que el enunciado descendente de la serie numérica también lo es. Y es cierto asimismo que apenas se ejercita en el aula.

No obstante, son habituales para cantidades importantes:

92 - 87 = {87; 88, 89..., (5 pasos)} 92

92 - 87 = {92; 91, 90..., (5 pasos)} 87

Obsérvese que en estas técnicas sustractivas el resultado no se verbaliza con la serie numérica: es fruto de un recuento ajeno a dicha serie, que puede ayudarse de refuerzos físicos -dedos, golpes, representaciones interiores-.

2) Permuta previa; o reducción al contrario.

Se ha observado que la adición de enteros de distinto signo se reduce, normalmente, a *sustracción de naturales*, identificada a la *sustracción de enteros positivos*. Se sigue entonces uno de los procesos siguientes:

a) Primer sumando positivo y segundo negativo. Con dos situaciones:

I) Primer sumando mayor que el valor absoluto del segundo. Equivale a una resta posible y ordinaria entre naturales:

+7 + -5 = 7 - 5 = 2 = +2

II) Primer sumando menor que el valor absoluto del segundo. Equivale a una sustracción imposible entre naturales. La operación se facilita mediante un doble paso a los contrarios: *el contrario de la suma de contrarios*; que devuelve, operatoriamente, a la situación anterior:

+5 + -7 = -(7 + -5) = -(+7 + -5) = -(7 - 5) = -(2) = -2

b) Primer sumando negativo y segundo positivo. Asimismo, con dos situaciones:

III) Valor absoluto del primero menor que el del segundo. La permuta en la suma lleva, de nuevo a la situación I) de resta posible y ordinaria entre naturales:

-5 + +7 = +7 + -5 = 7 - 5 = 2 = +2

IV) Valor absoluto del primero mayor que el del segundo. La permuta de la suma conduce a la situación II), que sería reducida a la I):

-7 + +5 = -(+7 + -5) = -(7 - 5) = -(2) = -2

(Los números enteros van afectados del correspondiente signo, que indica si es positivo o negativo.)

Obsérvese el cambio alternativo entre dominios numéricos:

- contemplación de la suma de números enteros de distinto signo como resta de naturales,

- operación de resta entre naturales,

- retorno al dominio de números enteros.

Aunque las operaciones entre números enteros o *con signo* suelan ser más propias de niveles posteriores a los de simple iniciación aritmética, se han incluido aquí para completar este cuadro de estrategias, al menos hasta el dominio de números enteros, tanto positivos como negativos.

Las estrategias aditivas para dos números enteros *de igual signo* son idénticas a las empleadas para naturales. Si ambos son positivos, por la coincidencia estructural. Si negativos, mediante el paso a los contrarios, como en II).

3) Operaciones sobre partes o cantidades no unitarias.-

3.1) Descomposición. Consistente en descomponer aditivamente el sustraendo en partes -por supuesto, no unidades simples, que lo reduciría al tipo *recuentos*-. En alguna medida, también puede implicar la descomposición aditiva del minuendo.

Aunque solapadamente, su fundamento estructural es la propiedad de que *el contrario de una suma es la suma de contrarios*:

-(a + b + c) = -a + -b + -c,

tal como se ha visto en la estrategia de *permuta previa*. Pero, mientras que allí se orientaba al objetivo de operaciones entre números enteros, aquí pretende resolver la sustracción entre naturales, según el esquema clásico de las *cuatro operaciones*.

De esta forma, una sustracción (posible) se transforma en una serie de dos o más sustracciones de minuendos más sencillos. Según sea esta descomposición se observan diferentes tipos:

3.1.1) Descomposición por órdenes de unidades. El sustraendo se contempla en su forma polinómica, como suma de unidades, decenas, centenas, etc. Las restas sucesivas se reducen a operaciones entre unidades del mismo orden, con reserva en memoria de los resultados parciales (acumulados o no); lo que supone, a su vez, la descomposición polinómica del minuendo.

3.1.1.1) Órdenes descendentes.

El caso general se refiere a cantidades que superan la decena:

57 - 25 = 57 - (20 + 5) = 57 - 20 - 5 = (57 - 20) - 5 = 37 - 5 = 32

Aunque es muy frecuente la doble descomposición -que tal vez subyace inconscientemente en el paso intermedio anterior-, seguida de una reordenación en restas parciales entre unidades de igual orden:

57 - 25 = (50 + 7) - (20 + 5) = 50 + 7 - 20 - 5 = (50 - 20) + (7 - 5) = 30 + 2 = 32

Cuando una de las restas parciales es imposible, se reforma la expresión del resultado acumulado, dando lugar a otra *no canónica*:

55 - 27 = (50 + 5) - (20 + 7) = 50 + 5 - 20 - 7 = (50 - 20) + (5 - 7) = 30 + (5 - 7) = 30 + 5 - 7 = (20 + 10) + 5 - 7 = 20 + (10 + 5) - 7 = 20 + 15 - 7 = 20 + 8 = 28

Si el sustraendo es elemental (inferior a la decena), se obtiene un *hecho básico* de la sustracción; pero que, en el fondo, corresponde a esta estrategia:

43 - 7 = (40 + 3) - 7 = 40 + 3 - 7 = 40 + (3 - 7)... = ((30 + 10)) + 5) - 7 = 30 + 10 + 3 - 7 = 30 + (10 + 3) - 7 = 30 + 13 - 7 = 30 + (13 - 7) = 30 + 6 = 36

3.1.1.2) órdenes ascendentes. Descompuestos uno o ambos términos, se procede como en el caso anterior, pero respetando el orden inverso de unidades:

57 - 25 = (7 + 50) - (5 + 20) = 7 + 50 - 5 - 20 = (7 - 5) + (50 - 20) = 2 + (50 - 20) = 2 + 30 = 32

La imposibilidad de sustracción natural en uno de los resultados parciales, conduce a una situación en todo semejante al algoritmo escrito:

$55 - 27 = (5 + 50) - (7 + 20) = 5 + 50 - 7 - 20 = (5 - 7) + (50 - 20)... = 5 - 7 + 10 + 40 - 20 = (10 + 5) - 7 + 40 - 20 = 15 - 7 + 40 - 20 = 8 + (40 - 20) = 8 + 20 = 28$

La estrategia de órdenes descendentes es mucho más frecuente que ésta de órdenes ascendentes. La razón es bien simple (al menos, en las lenguas latinas): el soporte verbal; que permite prácticamente ir verbalizando el resultado -aunque sea preciso rectificarlo, en caso de superar las unidades del sustraendo en el correspondiente orden a las del minuendo-, con el consiguiente refuerzo y fijación en memoria del resultado parcial. La estrategia en orden ascendente, en cambio, se ve sustituida por el soporte de representación gráfico-simbólica del algoritmo tradicional.

3.1.2) Descomposición en partes arbitrarias.-

Suelen producirse respecto de una cantidad o *base* determinada, ligada sin duda a la práctica cotidiana: decenas, docenas, grupos de 6 unidades (medias docenas) o de siete unidades (semanas), etc.

En este caso, el sustraendo mengua a medida que se resta la *base* del minuendo; sin embargo, no parece producirse una mengua paralela en el sustraendo, sino que aparece una *cuenta auxiliar* que aumenta hasta alcanzarle por defecto:

$55 - 27 = 55 - 12 + 12 - 27 = (55 - 12) + 12 - 27 = 43 + 12 - 27 = 43 - 12 + 12 + 12 - 27 = (43 - 12) + 24 - 27 = 31 + 24 - 27 = 31 - (27 - 24) = 31 - 3 = 28$

El fundamento algorítmico es la colección de múltiplos de la *base* (12, en este caso), con una doble operación de descenso para el minuendo {55, 43, 31} y de ascenso hacia el sustraendo {12, 24}. Por último, se procede a la resta con la diferencia de ascenso {31 - (27 - 24)}.

En otras ocasiones, se reduce simultáneamente la misma cantidad en minuendo y sustraendo, buscando expresiones sencillas (*con 0*):

$55 - 28 = (50 + 5) - (28 - 5) = 50 - 23 = 50 - (20 + 3) = 50 - 20 - 3 = (50 - 20) - 3 = 30 - 3 = 27$

o, bien:

$55 - 28 = (50 + 5) - (23 + 5) = 50 - 23 = 50 - (20 + 3) = 50 - 3 - 20 = (50 - 3) - 20 = 47 - 20 = 27$

3.2) Estrategias sustractivo-aditivas.-

La forma más normal consiste en sustituir el sustraendo por la diferencia entre su redondeo y lo que le falta para éste; aplicando el principio del contrario, la resta original se convierte en una suma algebraica alternativa:

$55 - 27 = 55 - (30 - 3) = 55 - 30 + 3 = (55 - 30) + 3 = 25 + 3 = 28$

No es exclusiva de *grandes números*; es frecuente su aparición para calcular los *hechos sustractivos básicos*:

$17 - 9 = 17 - (10 - 1) = 17 - 10 + 1 = (17 - 10) + 1 = 7 + 1 = 8$

Las estrategias sustractivas de representación interior tienen los mismos fundamentos y formas que para la adición.

Cuadro 6.2.3B.- Estrategias o técnicas para el cálculo pensado de sustracciones.

- Sustractivas
  - - mediante recuento
    - - Ascendente o de conversión aditiva
    - - Descendente
  - - permuta previa (o reducción al contrario)
  - - mediante operación sobre partes o cantidades no unitarias
    - - descomposición (sustracciones sucesivas)
      - - por órdenes de unidades
        - - órdenes descendentes
        - - órdenes ascendentes
        - - otros
      - - en partes arbitrarias
    - - sustractivo-aditivas
  - - mediante representación interior
    - - de algoritmos escritos
    - - de acciones sobre material manipulativo
    - - de situaciones gráficas

C) ESTRATEGIAS PARA LA MULTIPLICACIÓN.

1) Permuta previa.- O aplicación de la propiedad conmutativa.

En general, relativo incluso a los *hechos numéricos básicos*, parecen más sencillas las multiplicaciones cuyo primer factor -multiplicando- es mayor que el segundo -multiplicador-. La respuesta a esta situación tal vez se halle en la aplicación de otras técnicas, respecto de las cuales la permuta de operandos sea tan sólo una fase preparatoria.

$3 \times 7 = 7 \times 3 = 7 + 7 + 7 = \{7, 14\}\ 21$

$6 \times 8 = 8 \times 6 = 8 \times (5 + 1) = (8 \times 5) + 8 = 40 + 8 = 48$

$4 \times 9 = 9 \times 4 = 9 \times (2 \times 2) = (9 \times 2) \times 2 = 18 \times 2 = 18 + 18 = 36$

En cualquiera de estos ejemplos, la *permuta previa* reduce sensiblemente el itinerario seguido. Pero no tiene por qué ser así necesariamente:

$4 \times 9 = 4 \times (10 - 1) = (4 \times 10) - (4 \times 1) = 40 - 4 = 36$

Sin embargo, fue preciso el recurso a la sustracción, mientras que en aquéllos sólo aparecieron multiplicaciones más sencillas y adiciones. En cualquier caso, conviene no olvidar que las estrategias tienen un carácter preferentemente personal, ligadas a la familiaridad y confianza del sujeto.

2) Reducción aditiva. Entendiendo por tales estrategias las que reducen las multiplicaciones a puras sumas de factores iguales:

8 x 4 = 8 + 8 + 8 + 8 = {8; 16, 24... (4 pasos)} 32

Recuerdan, por una parte, el conteo aditivo unidad a unidad, tomando aquí como *unidad* la *base* del primer factor. Por otra, recuerda la cantilena tradicional: *ocho: por una, es ocho; ocho: por dos, dieciséis; ocho: por tres...*, con su apoyatura rítmico-musical. (¿Quién podría no asegurar que, una vez comprendida la *tabla*, no se torna argucia para disimular las sumas paralelas?)

3) Estrategias de distribución.-

Basadas en la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición, recurren a la descomposición aditiva o sustractiva de uno o ambos factores, reduciendo la operación global a sumas/sustracciones de productos más simples, análogos a los *hechos multiplicativos básicos* de factores inferiores a la decena.

3.1) Estrategias multiplicativo-aditivas.

3.1.1) Descomposición según órdenes de unidades

3.1.1.1) Según órdenes descendentes. Tal vez sea la forma más habitual de multiplicación mental:

48 x 6 = (40 + 8) x 6 = (40 x 6) + (8 x 6) = (4 x 10 x 6) + (8 x 6) = (4 x 6 x 10) + (8 x 6) = ((4 x 6) x 10) + (8 + 6) = (24 x 10) + (8 x 6) = 240 + (8 x 6) = 240 + 48 = 240 + 40 + 8 = 280 + 8 = 288

Obsérvese la aplicación sistemática de las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación y adición, así como la adición por descomposición.

Sin otro esfuerzo que velar por la permanencia de resultados o valores de descomposición en registros de memoria, se generaliza a factores de tres cifras decimales.

8 x 621 = 8 x (600 + 21) = (8 x 600) + (8 x 21) = (8 x 6 x 100) + (8 x 21) = (48 x 100) + (8 x 21) = 4800 + (8 x 21) = 4800 + (8 x (20 + 1)) = 4800 + (8 x 20) + (8 x 1) = 4800 + (8 x 2 x 10) + (8 x 1) = 4800 + (16 x 10) + (8 x 1) = 4800 + 160 + (8 x 1) =4800 + 100 + 60 + (8 x 1) = 4900 + 60 + (8 x 1) = 4960 + (8 x 1) = 4960 + 8 = 4968

La doble descomposición, permite abordar productos cuyos dos factores tengan varias cifras en base 10:

36 x 54 = (30 + 6) x 54 = (30 x 54) + (6 x 54) = (3 x 10 x 54) + (6 x 54) = (3 x 54 x 10) + (6 x 54) = (3 x (50 + 4) x 10) + (6 x 54) = ((3 x 50) + (3 x 4) x 10) + (6 x 54) = ((150 + 12) x 10) + (6 x 54) = (162 x 10) + (6 x 54) = 1620 + (6 x 54) = 1620 +(6 x (50 + 4)) = 1620 + (6 x 50) + (6 x 4) = 1620 + 300 + (6 x 4) = 1920 + (6 x 4) = 1920 + 24 = 1944

3.1.1.2) Según órdenes ascendentes. En todo análoga a la anterior, pero iniciando los productos por las unidades de menor orden en el factor descompuesto:

48 x 6 = (40 + 8) x 6 = (8 + 40) x 6 = (8 x 6) + (40 x 6) = 48 + (40 x 6) = 48 + (4 x 10 x 6) = 48 + (4 x 6 x 10) = 48 + (24 x 10) = 48 + 240 = 240 + 48 = 240 + 40 + 8 = 280 + 8 = 288

Aunque suele ser más frecuente la permuta previa:

48 x 6 = 6 x 48 = 6 x (8 + 40) = (6 x 8) + (6 x 40) = 48 + (6 x 40) = 48 + (6 x 4 x 10) = 48 + (24 x 10) = 48 + 240 = 48 + 40 + 200 = 88 + 200 = 288

3.1.2) Otras descomposiciones aditivas.

La descomposición aditiva de un número no tiene por qué seguir necesariamente la forma polinómica decimal, correspondiente a nuestro sistema de escritura numérica. Razones culturales o socio-profesionales (contextuales, quizás, para el alumno) pueden hacer muy familiares otras descomposiciones aditivas con base distinta de 10. Es el caso del *12*, por la persistencia en el empleo de la *docena*:

27 x 4 = (12 + 12 + 3) x 4 = (12 x 4) + (12 x 4) + (3 x 4) = 48 + 48 + (3 x 4) = 96 + (3 x 4) = 96 + 12 = 108

Un uso muy extendido es el del *5*, que presenta además la ventaja de dar productos sin unidades del correspondiente orden superior al multiplicar por números pares (terminan en *0*):

8 x 17 = 8 x (5 + 5 + 5 + 2) = (8 x 5) + (8 x 5) + (8 x 5) + (8 x 2) = 40 + 40 + 40 + (8 x 2) = 120 + (8 x 2) = 120 + 16 = 120 + 10 + 6 = 130 + 6 = 136

La multiplicación sistemática por *2* tiene orígenes antiquísimos. Al poder descomponerse cualquier número en suma de potencias de 2, basta doblar sucesivamente el otro factor, y sumar los productos convenientes -incluido el propio factor, si el número descompuesto es impar-. En la práctica, se va doblando el factor no descompuesto, a la par que se va reduciendo el descompuesto en función de la potencia sustraída; es decir, la descomposición tendría carácter descendente:

9 x 17 = 9 x ((2 x 8) + 1) = ((9 x 2) x 8) + (9 x 1) = (18 x 8) + 9 = (18 x (2 x 4)) + 9 = ((18 x 2) x 4) + 9 = (36 x 4) + 9 = (36 x (2 x 2)) + 9 = ((36 x 2) x 2) + 9 = (72 x 2) + 9 = 144 + 9 = 153

O, bien:

9 x 17 = ((2 x 4) + 1) x 17 = ((2 x 4) x 17) + (1 x 17) = (17 x (2 x 4)) + 17 = ((17 x 2) x 4) + 17 = (34 x 4) + 17 = (34 x (2 x 2)) + 17 = ((34 x 2) x 2) + 17 = (68 x 2) + 17 = 136 + 17 = 136 + 10 + 7 = 146 + 7 = 153

Estas técnicas implican un dominio *sui generis* de productos particulares. Excepción hecha de la descomposición por el *5*, parecen no tener predicamento didáctico, salvo que -como se ha indicado- lo aconsejen razones contextuales.

3.2) Estrategias multiplicativo-sustractivas. En las que uno -o ambos- de los factores se descompone según una diferencia.

Es muy frecuente que esta descomposición responda al *redondeo* a decenas, centenas, etc., provocadora de la aminoración inmediata del factor sustituido:

14 x 9 = 14 x (10 - 1) = (14 x 10) - (14 x 1) = 140 - 14 = 140 - 10 - 4 = 130 - 4 = 126

4 x 189 = 4 x (190 - 1) = (4 x 190) - (4 x 1) = (4 x 19 x 10) - (4 x 1) = ((4 x (20 - 1)) x 10) - (4 x 1) = ((4 x 20) - (4 - 1)) x 10) - (4 x 1) = ((80 - 4) x 10) - (4 x 1) = (76 x 10) - (4 x 1) = 760 - 4 = 756

Aparece la distributividad de la multiplicación respecto de la resta; o, si se prefiere, en el dominio de los números enteros: *el producto de un número por el contrario de otro es igual al contrario del producto de dichos números.*

4) Estrategias basadas en la factorización de alguno de los términos.-

Bajo el prisma estructural, resultarían paralelas a las estrategias de descomposición para la adición o sustracción. Entonces, la descomposición se efectuaba en sumandos; ahora, en factores convenientes a los usos del sujeto-calculista. Tal como allí aparecían sumas/restas, aquí pueden involucrarse multiplicaciones/divisiones; deberían, en alguna forma, considerarse en el apartado siguiente; pero se está siguiendo una clasificación por objetivos, no según itinerarios.

4.1) Factorización sobre el *10*.

El caso más simple y de aplicación general es la multiplicación en que uno de los factores es múltiplo de la decena:

40 x 7 = (4 x 10) x 7 = 4 x (10 x 7) = 4 x (7 x 10) = (4 x 7) x 10 = 28 x 10 = 280

Basta multiplicar el número de decenas por el otro factor, y "añadir un cero" -multiplicar por 10 el resultado-. Operación que habitualmente se realiza *visualizando* la situación gráfico-simbólica: "*añadir un cero*"; o dos, si se trata de multiplicación por un número entero de centenas.

Esta estrategia es imprescindible para la aplicación de la mayoría de las técnicas de cálculo mental en las que uno de los factores supera la decena. El cálculo escrito la suple por vía de bidimensionalidad, reduciendo todas las operaciones a *hechos numéricos básicos*. Siguiendo un orden lógico, debería haberse situado con antelación al grupo 2 de *estrategias de distribución*; tal como se aplica en los "Itinerarios Didácticos de Introducción a la Multiplicación por varias cifras"; pero por razones de índole matemática (aplicación de la propiedad asociativa) nos han movido a incluirlo en este grupo y lugar.

Pero no es imprescindible la apoyatura gráfico-simbólica imaginada: ciertos materiales de cálculo, como se verá, sustituyen la incorporación del *0* por el valor de pura posición en el conjunto de la situación física, trasladable luego a la representación mental.

4.2) Factorización general. Consistente en descomponer uno o ambos factores en otros más simples, no necesariamente primos. Su fundamento estructural es la propiedad asociativa de la multiplicación; ocasionalmente, se acude a la propiedad conmutativa.

57 x 36 = 57 x (9 x 4) = (57 x 9) x 4 = ((50 + 7) x 9) x 4 = ((50 x 9) + (7 x 9)) x 4 = (450 + 63) x 4 = 513 x 4 = (500 + 10 + 3) x 4 = (500 x 4) + (10 x 4) + (3 x 4) = 2000 + 40 + 12 = 2000 + 52 = 2052

Por doble factorización:

60 x 90 = (6 x 10) x (9 x 10) = (6 x 9) x (10 x 10) = 54 x 100 = 5400

4.3) Factorización por partes alícuotas. O *multiplicación-división.*

Un caso muy particular y útil es aquél en que uno de sus factores es múltiplo de *5* y el otro de *2*; o bien: uno de ellos de 25, y el otro de 4; etc.

35 x 8 = (7 x 5) x (2 x 4) = 7 x (5 x 2) x 4 = 7 x 10 x 4 = (7 x 4) x 10 = 28 x 10 = 280

75 x 8 = (3 x 25) x (4 x 2) = 3 x (25 x 4) x 2 = 3 x 100 x 2 = (3 x 2) x 100 = 6 x 100 = 600

35 x 56 = (7 x 5) x (8 x 7) = (5 x 8) x (7 x 7) = 40 x 49 = 40 x (50 - 1) = (40 x 50) - (40 x 1) = (20 x 100) - 40 = 2000 - 40 = 1960

Como puede observarse, toda factorización implica una división: una búsqueda de factores exactos. Los cocientes obtenidos -partes alícuotas- dan nombre al procedimiento.

4.4) *Mitad y doble.* Sería un caso particular de descomposición aditiva en base *2*:

27 x 16 = 27 x (2 x 8) = (27 x 2) x 8 = 54 x 8 = 54 x (2 x 4) = (54 x 2) x 4 = 108 x 4 = 108 x 2 x 2) = (108 x 2) x 2 = 216 x 2 = 432

De hecho, la obtención mental de dobles y mitades parece ser muy ágil y segura.

5) Estrategias de representación interior.-

Nada habría que añadir respecto de lo ya apuntado en este terreno para la estructura aditiva, salvo ciertas situaciones a caballo entre lo manipulativo y gráfico.

Se trata del aprovechamiento del paralelismo entre el producto de dos factores y el cálculo del área de un rectángulo. La papiroflexia o la descomposición en regiones de un rectángulo, permiten, a su vez, reducir productos complejos a sumas de otros más simples. (Como ilustración, ver, p. ej.: FERNÁNDEZ DEL CAMPO, 1997.)

6) Técnicas singulares.-

El Álgebra proporciona no pocas fórmulas que, aplicadas a la descomposición polinómica de los números en base 10, permiten una simplificación de cálculos, hasta reducir a sencillas reglas cálculos que, con otras estrategias, serían sin duda más complejos.

6.1 Cuadrado de un número.

6.1.1 Como cuadrado de una suma. Para un número de dos cifras, tendríamos que su expresión polinómica en base 10 sería: 10a+b; luego:

$(10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$

$63 \text{ x } 63 = 63^2 = (60 + 3)^2 = 100\text{x}36 + 10\text{x}12\text{x}3 + 9 = 3600 + 360 + 9 = 3969$

$405 \text{ x } 405 = 4052 = (400 + 5)^2 = 100^2\text{x}4^2 + 200\text{x}4\text{x}5 + 5^2 = 160000 + 4000 + 25 = 164025$

6.1.2 Como cuadrado de una diferencia. Muy útil, cuando la cifra de las unidades es un 9 ó un 8:

$(10a - b)^2 = 100a^2 - 20ab + b^2$

$39\text{x}39 = 39^2 = (40 - 1)^2 = 100\text{x}4^2 - 20\text{x}4\text{x}1 + 1^2 = 1600 - 80 + 1 = 1521$

6.1.3) Como cuadrados de números con 5 en las unidades.

La base 10 proporciona un hecho curioso y muy práctico:

$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 20\text{xax}5 + 5^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100\text{xax}(a+1) + 25$

Que, en la práctica, consiste en multiplicar la cifra o cantidad que indica las decenas por su inmediata superior, y posponerle *25*:

$45^2 = 100\text{x}4\text{x}5 + 25 = 2025$

pasando directamente al resultado, sin desarrollo alguno.

$405 \times 405 = 405^2 = 40 \times 41 \times 100 + 25 = 1640 \times 100 + 25 = 164025$

6.2) Como *suma por diferencia*. Según la conocida expresión de *diferencia de cuadrados*:

$(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2$

6.2.1) Producto de números simétricos respecto de la decena.

$28 \times 32 = 32 \times 28 = (30 + 2) \times (30 - 2) = 30^2 - 2^2 = 900 - 4 = 896$

6.2.2 Producto de números simétricos respecto de otro con 5 en las unidades.- Es el caso de 42x48, 37x33, 81x89, etc. Con un curioso resultado:

$(10a + 5 + b) \times (10a + 5 - b) = (10a + 5)^2 - b^2 = a \times (a + 1) \times 100 + 25 - b^2 = a \times (a+1) \times 100 + (5 + b)(5 - b)$

La situación es análoga a la de cuadrados de números con *5* en las unidades, y del que pasaría a ser un caso particular. Queda como regla sencilla de aplicar, farragosa de expresar:

"El producto de dos números de iguales decenas y unidades simétricas respecto de 5 se obtiene multiplicando la cifra de las decenas por la inmediata superior, y adjuntándole el producto de las unidades de ambos":

$42 \times 48 = 2016 = 4 \times (4+1) \times 100 + 16$

$89 \times 81 = 7209 = 8 \times (8+1) \times 100 + 9$

Cuadro 6.2.3C.- Estrategias o técnicas para el cálculo pensado de multiplicaciones.

- Multiplicativas
  - permuta previa
  - reducción aditiva (aditiva pura o total)
  - distributivas
    - multiplicativo-aditivas
      - según órdenes de unidades
        - órdenes descendentes
        - órdenes ascendentes
      - otras descom-posiciones
        - descomposición sobre el 5
        - descomposición sobre el 2 (o según dobles)
        - otras descomposiciones
    - multiplicativo-sustractivas
  - factorización
    - factorización general
    - mediante dobles
    - en partes alícuotas (o multiplicación-división
  - mediante representación interior
    - de algoritmos escritos
    - de acciones sobre material manipulativo
    - de situaciones gráficas
  - técnicas singulares
    - cuadrados
      - cuadrado de una suma
      - cuadrado de una diferencia
      - cuadrados de números con 5 en las unidades
    - suma por diferencia
      - números simétricos respecto de la decena
      - números simétricos respecto de otro con 5 en las unidades

D) ESTRATEGIAS PARA LA DIVISIÓN

A efectos de cálculo mental, el carácter inverso de la división respecto de la multiplicación en la estructura multiplicativa muestra no pocas semejanzas con análoga simetría entre adición y sustracción en la estructura aditiva. De hecho, existe un mayor paralelismo entre sustracción y división que entre ésta y multiplicación.

Los *recuentos* o *conteos* de la sustracción, se transforman aquí como ascensos o descensos con pasos de amplitud marcada por el divisor:

1) Estrategia aditivo-multiplicativa. *Por alcance*. O de *ascenso por múltiplos*:

73 ÷ 9 = {9; 18, 27..., (8 pasos)} 72

68 ÷ 13 = {13; 26, 39..., (5 pasos)} 65

El trayecto puede acortarse:

150 ÷ 12 = {120; (10 pasos), 132..., (12 pasos)} 144

Como sucedía para la sustracción, el resultado -cociente por defecto, en este caso- viene dado por *el número de pasos* precisos para alcanzar el dividendo.

2) Estrategia sustractiva o *por reducción*. Con análogo proceso al anterior, pero tomando como punto de partida el dividendo:

53 ÷ 9 = {53; 44, 35..., (5 pasos)} 8

O, tomando *atajos*:

150 ÷ 12 = {150 - 120 = 30; (10 pasos), 18, (12 pasos)} 6

3) Estrategias de distribución del dividendo.- Como aplicación de la propiedad distributiva de una suma -resta- respecto de la multiplicación/división.

3.1) Distributivo-aditivas.

3.1.1) Según órdenes descendentes de unidades.

97 ÷ 3 = (90 + 7) ÷ 3 = (90 ÷ 3) + (7 ÷ 3) = 30 + (7 ÷ 3) = 30 + 2 + (1 ÷ 3) = 32 + (1 ÷ 3)

138 ÷ 4 = (130 + 8) ÷ 4 = (130 ÷ 4) + (8 ÷ 4) = 30 + (10 ÷ 4) + (8 ÷ 4) = 30 + ((10 + 8) ÷ 4) = 30 + (18 ÷ 4) = 30 + 4 + (2 ÷ 4) = 34 + (2 ÷ 4)

O, también:

138 ÷ 4 = (100 + 38) ÷ 4 = (100 ÷ 4) + (38 ÷ 4) = 25 + (38 ÷ 4) = 25 + 9 + (2 ÷ 4) = 34 + (2 ÷ 4)

Obsérvese que no se trata de una simple reproducción del algoritmo escrito usual, sino de un verdadero cálculo global. Su interrupción proporcionaría, cuanto menos, una aproximación del resultado; algo que viene dándose en la inmensa mayoría de las técnicas analizadas para cada operación.

3.1.2) Según otras descomposiciones. En las que suele acudirse a múltiplos evidentes del divisor como sumandos o sustraendos del dividendo:

$97 \div 3 = (30 + 30 + 30 + 7) \div 3 = (30 \div 3) + (30 \div 3) + (30 \div 3) + (7 \div 3) = 10 + 10 + 10 + (7 \div 3) = 30 + 2 + (1 \div 3) = 32 + (1 \div 3)$

$138 \div 4 = (80 + 40 + 10 + 8) \div 4 = (80 \div 4) + (40 \div 4) + (18 \div 4) = 20 + 10 + (18 \div 4) = 30 + 4 + (2 \div 4) = 34 + (2 \div 4)$

3.2) Distributivo-sustractivas.

$97 \div 3 = (100 - 3) \div 3 = (100 \div 3) - (3 \div 3) = 33 + (1 \div 3) - 1 = 32 + (1 \div 3)$

4) Factorizaciones.

4.1) Factorizar el dividendo. Empleable en muy pocos casos, pero eficaz:

$300 \div 4 = (100 \times 3) \div 4 = (100 \div 4) \times 3 = 25 \times 3 = 75$

$500 \div 12 = (100 \times 5) \div 12 = (100 \div 12) \times 5 = (8 \times (4 \div 12)) \times 5 = 40 + (20 \div 12) = 41 + (8 \div 12)$

4.2) Factorizar el divisor.

Estas estrategias se basan en la propiedad:

$c \div (a \times b) = (c \div a) \div b$

O, también, como estrategia de simplificación:

$c \div d = (c' \times a) \div (d' \div a) = c' \div d'$

Proceso que continúa, hasta poder efectuar la división por la técnica más conveniente. En cualquier caso, exige un cierto conocimiento de los *criterios de divisibilidad*, y su comprobación previa en dividendo y divisor:

4.2.1) Factorización ordinaria.-

$138 \div 12 = 138 \div (3 \times 4) = (138 \div 3) \div 4 = 46 \div 4 = 11 + (2 \div 4)$

El resto queda enmascarado; estrictamente, sería:

$138 \div 12 = 11 + (6 \div 12)$

Pero lo que interesa es, principalmente, el cociente.

4.2.2) Por *partes alícuotas*. Con referencia a la propiedad:

$c \div d = (c \div a) \div (d \div a)$

Que va reduciendo paulatinamente el tamaño de dividendo y divisor. Pero también cabe la forma:

$c \div d = (c \times a) \div (d \times a)$

que, aunque aumenta el tamaño absoluto de dividendo y divisor, manteniendo intacto el cociente, puede conducir a un divisor más cómodo.

4.2.2.1) Por división-multiplicación.

$250 \div 75 = (250 \div (75 \div 3)) \div 3 = (250 \div 25) \div 3 = 10 \div 3 = 3 + \ldots$

4.2.2.2) Por multiplicación-división.

$275 \div 25 = (275 \times 2) \div (25 \times 2) = 550 \div 50 = 55 \div 5 = 11$

La obligada *inexactitud* en la mayoría de divisiones entre números naturales y enteros, nos lleva, de la mano del cálculo mental, a la consideración de nuevos horizontes.

Cuadro 6.2.3D.- Estrategias o técnicas para el cálculo pensado de divisiones.

- Para la división
  - - aditivo-multiplicativa o "por alcance"
  - - sustractiva o "por reducción"
  - - distributivas respecto del dividendo
    - - distributivo-aditivas
      - - según órdenes descendentes de unidades
      - - según otras descomposiciones
    - - distributivo-sustractivas
  - - mediante factorización
    - - del dividendo
    - - del divisor
      - - factorización general
      - - por partes alícuotas
        - - división-multiplicación
        - - multiplicación-división
  - - mediante representación interior
    - - de algoritmos escritos
    - - de acciones sobre material manipulativo
    - - de situaciones gráficas

Cuadro 6.2.3E.- Cuadro general de estrategias o técnicas en el *cálculo pensado*.

Aditivas

- mediante recuento (o adición unidad a unidad)
  - Por recuento total
  - Por recuento parcial
    - con origen predeterminado por la presentación
    - con estrategia de elección del origen
- permuta previa.
- descomposición
  - descomposición aditiva
    - uno de los sumandos en otros dos arbitrarios
      - para completar decenas
      - para repetir sumando
    - por órdenes de unidades
      - órdenes descendentes
      - órdenes ascendentes
      - sin secuencia estricta de órdenes
    - para la aparición reiterada de un sumando arbitrario
  - descomposiciones aditivo-sustractivas
- mediante representación interior
  - de algoritmos escritos
  - de acciones sobre material manipulativo
  - de situaciones gráficas

Sustractivas	- mediante recuento	- Ascendente o de conversión aditiva		
		- Descendente		
	- permuta previa (o reducción al contrario)			
	- mediante operación sobre partes o cantidades no unitarias	- descomposición (sustracciones sucesivas)	- por órdenes de unidades	- órdenes descendentes
				- órdenes ascendentes
				- otros
			- en partes arbitrarias	
		- sustractivo-aditivas		
	- mediante representación interior	- de algoritmos escritos		
		- de acciones sobre material manipulativo		
		- de situaciones gráficas		

Multiplicativas

- permuta previa
- reducción aditiva (aditiva pura o total)
- distributivas
    - multiplicativo-aditivas
        - según órdenes de unidades
            - órdenes descendentes
            - órdenes ascendentes
        - otras descomposiciones
            - descomposición sobre el 5
            - descomposición sobre el 2 (o según dobles)
            - otras descomposiciones
    - multiplicativo-sustractivas
- factorización
    - factorización general
    - mediante dobles
    - en partes alícuotas (o multiplicación-división
- mediante representación interior
    - de algoritmos escritos
    - de acciones sobre material manipulativo
    - de situaciones gráficas
- técnicas singulares
    - cuadrados
        - cuadrado de una suma
        - cuadrado de una diferencia
        - cuadrados de números con 5 en las unidades
    - suma por diferencia
        - números simétricos respecto de la decena
        - números simétricos respecto de otro con 5 en las unidades

Para la división

- aditivo-multiplicativa o "por alcance"
- sustractiva o "por reducción"
- distributivas respecto del dividendo
  - distributivo-aditivas
    - según órdenes descendentes de unidades
    - según otras descomposiciones
  - distributivo-sustractivas
- mediante factorización
  - del dividendo
  - del divisor
    - factorización general
    - por partes alícuotas
      - división-multiplicación
      - multiplicación-división
- mediante representación interior
  - de algoritmos escritos
  - de acciones sobre material manipulativo
  - de situaciones gráficas

6.2.4 ESTIMAR, APROXIMAR

El cálculo mental o pensado tiene más aplicaciones que la respuesta exacta a una operación precisa. Debe tenerse en cuenta su versión *imperfecta*: la *estimación*. La fama de las matemáticas como ciencia exacta no justifica prescindir de aquello que es útil en la vida diaria y que, además, hace reflexionar sobre las propiedades de los números. (ALSINA y OTROS, 1996, 114)

Estimar, en matemáticas, significa *valorar una operación o una medida en función de las circunstancias de quien emite el juicio*. Lo que caracteriza la estimación es que quien hace la valoración ha de tener alguna información sobre la situación, el resultado no es necesario que sea exacto y el cálculo se hace mentalmente (con lo que esto implica, es decir, números sencillos y cálculo rápido). (ibidem., 105)

Pueden distinguirse dos aspectos aritméticos:

a) Obtención del número como recuento o medida, sin otra operación que la de comparar -medir-; conocida como *estimación* propiamente dicha.

La estimación es el ejercicio de un juicio basado sobre una experiencia propia respecto del número y la medida. Esta habilidad se consigue mediante una experiencia amplia de contar y medir. Cuando el tamaño sea un dato importante, esta estrategia es una de las primeras a utilizar. (CASTRO, RICO y CASTRO, 1996, 90).

La estrategia esencial para la estimación así entendida es la combinatoria de representaciones interiores, con presencia o no de referentes físicos. Aunque también cabe la estimación como puro juicio lógico-deductivo, por comparación numérica y juicio de posibilidad real; pero esto supone un cierto cálculo aritmético, efectuar alguna operación.

b) Obtención de un número como resultado de una operación aritmética a partir de datos análogos a los suministrados, pero conservando la operación. Conocida también por *aproximación* o *cálculo aproximado*.

Aquí, estamos ante un auténtico cálculo aritmético pensado, pero con decisiones previas: sustitución de los datos originales por otros más sencillos, juicio de adecuación para estos nuevos datos y juicio de validez del procedimiento global.

En ambos casos:

- Como procedimiento, conveniente cuando las cantidades son grandes o complejas, aporta claridad y comprensibilidad a la situación.

- *Instrumento de control* para el cálculo exacto; sea éste mental, escrito o por calculadora u otro dispositivo. Ya que anticipa márgenes de validez para el resultado obtenido por dicha vía.

- Ejercita estrategias de gran importancia en la Aritmética y en el trabajo con la medida de magnitudes. (CASTRO, RICO y CASTRO, 1996, 91).

- Contribuye a la formación matemática y, al mismo tiempo, facilita el uso de la matemática en las situaciones cotidianas. (ALSINA y OTROS, 1996, 105).

> Muchas veces nos quejamos de que el alumnado da respuestas absurdas a problemas, cálculos o medidas. La habilidad para hacer estimaciones y el contraste entre el valor estimado y el valor calculado hace desarrollar lo que llamamos sentido común. (ibidem.).

Como aplicación específica del cálculo mental, el cálculo estimativo o aproximado se enfrenta con los mismos inconvenientes que aquél. Incluso algún otro adicional:

a) Creencias contrarias.- Tanto profesores como alumnos -la *gente corriente*, en general- tienden a identificar *lo matemático* con *lo exacto*. En consecuencia, no es de extrañar una cierta repugnancia en partir de *lo aproximado* para llegar también a *lo aproximado*: ¿es aceptable, *a priori*, un error en Matemáticas?; ¿de qué dimensiones? Así pues, el cálculo aproximado deberá vencer, de ordinario, la creencia en tal identificación a ultranza.

Junto a proporcionar un mayor margen de éxito relativo en el cálculo, se abren nuevos horizontes que tendrán sentido propio en niveles superiores de enseñanza. (Conviene recordar la profunda dificultad de comprensión que presentan la *Teoría de errores* y los métodos analíticos en los que aparece el escurridizo ε de mayoración.)

b) Mayores dificultades de evaluación.- A la hora de intentarla, se complica aún más: incluso la respuesta en resultado numérico no es objetiva. Existen *grados de aproximación*, según el sujeto que efectúe el cálculo y las necesidades del caso. A menos que se complejice tal evaluación, tomando en cuenta el error relativo, *todas las respuestas -en un cierto grado- son válidas*. Pero *algunas más que otras*: precisamente el juicio acerca del *grado de validez* o *adecuación situacional* es uno de los objetivos educativos que se persigue con esta práctica.

> El grado de aproximación de los resultados nos lleva al cálculo exacto y al cálculo aproximado. La conveniencia de servirnos de uno o de otro viene dada por la situación concreta y por lo tanto es necesario, además de enseñar a calcular de manera aproximada, facilitar al alumnado la capacidad de escoger lo que más conviene en cada ocasión. (ALSINA y OTROS, 1996, 114)

El cálculo aproximado, en cuanto cálculo, se sirve de las mismas estrategias y técnicas que el cálculo mental, del cual es tributario. Pero en los actos de sustitución de los datos, y validación del resultado cuenta con técnicas propias:

1°) Técnicas de sustitución aproximativa para los datos:

a) *Truncamiento* o *redondeo inferior*. Por el que un número pierde las unidades, reduciéndose a sus decenas: 43 ¸ 40, 67 ¸ 60, 174 ¸ 170; y aun a sus centenas: 174 ¸ 100, 315 ¸ 300.

b) Redondeo superior. Análoga a la anterior, pero añadiendo cuantas unidades sean precisas para alcanzar la decena o centena superior: 43 ¸ 50, 67 ¸ 70, 174 ¸ 180; o a las centenas: 174 ¸ 200, 315 ¸ 400.

c) *Redondeo equilibrado* o *simple*. El más usual, sustituye el número por aquél formado sólo por decenas -resp.: centenas- más próximo, complementando o retirando unidades: 43 ¸ 40, 67 ¸ 70, 174 ¸ 170; o, en centenas: 174 ¸ 200, 315 ¸ 300.

Pero esta sustitución puede efectuarse sobre uno sólo de los datos -lo que ya simplificaría un tanto el cálculo posterior-, o sobre ambos. En este segundo caso, la sustitución puede hacerse independientemente para cada uno de ellos, aplicando la técnica que parezca más conveniente, o considerando ambos en conjunto:

d) *Complementación.* Afecta a ambos operandos, aplicando uno u otro redondeo a cada uno de ellos, según juicio de conveniencia relativo a la operación. Por ejemplo: 43 + 174 ¸ 40 + 180, 43 x 174 ¸ 40 x 170.

El cálculo mental con decenas se reduce a operandos inferiores en una cifra a los datos: 40 + 180 = (4 + 18) x 10, 40 x 170 ¸ (4 x 17) x 100.

Cabe también que el redondeo se realice respecto del múltiplo de 5, 50 o 500 más próximo; sobre todo, si se dominan los cálculos con operandos de este tipo (casos 4.3 y 6.1.3 de la multiplicación, 4.2.1 y 4.2.2 de la división, etc.). Como serían:

43 + 174 ¸ 45 + 175 = (4 + 17) x 10 + 10

43 x 162 ¸ 45 x 160 = 9 x 5 x 160 = 9 x 800

2º) Aproximación del resultado obtenido.

La conciencia de haber *falseado los datos* por conveniencia del cálculo mental, puede invitar a ***corregir*** el resultado así obtenido, incrementándolo o reduciéndolo en función de los datos primitivos y sustituidos, y del carácter de la operación.

Tal revisión -de producirse- supone un conocimiento en profundidad de los efectos de cada operación, en función a su vez de las características de los datos. Y, aun produciéndose internamente, no tiene por qué reflejarse en una modificación del resultado.

El proceso puede reducirse a un simple redondeo o modificación, o a ***retocar*** las sustituciones de los datos y prolongarse con una operación complementaria, o a ambas cosas a la vez.

Cuadro 6.2.4.- Técnicas específicas del *cálculo aproximado*.

- Sustitución aproximativa de los datos
  - sustitución simple o independiente
    - redondeos a la decena
      - truncamiento (redondeo inferior)
      - redondeo superior
      - redondeo equilibrado
    - redondeo al múltiplo de 5
    - otros
  - sustitución doble
    - doble redondeo a la decena
      - doble truncamiento (redondeos inferiores)
      - doble redondeo superior
      - doble redondeo equilibrado
      - complementación
  - doble redondeo al múltiplo de 5
  - mixtos
  - otros
- Aproximación del resultado
  - Redondeo
    - truncamiento (redondeo inferior)
    - redondeo superior
  - revisión simple (sin mediar operación complementaria)
    - aditiva o de complementación
    - sustractiva o reductiva
  - mediante operación complementaria
    - revisando los datos en su totalidad y rehaciendo la operación
    - modificando el resultado previamente obtenido con un resultado parcial entre complementos de los datos
    - mixta

JUSTIFICACIÓN

El análisis que aquí se recoge acerca del cálculo mental, su interés didáctico y técnicas concretas puede parecer excesivo en el marco del presente trabajo. Entendemos, no obstante, que nos asisten razones de peso que lo justifican: su aplicación en la enseñanza de alumnos ciegos y el propósito de dotar a su profesorado de información específica.

Las dificultades instrumentales para el Cálculo Escrito y la escasa difusión al día de hoy de calculadoras adaptadas, hacen del Cálculo Mental la modalidad por excelencia para el alumno ciego. La motivación de *comodidad y rapidez* lo convierten en prevalente, muy por encima de las otras dos formas. Los rangos numéricos de cálculo son, en general, muy superiores a los habituales para alumnos videntes del mismo nivel. o edad. (Aunque se carece de constatación estadística, basta una simple visita a un aula donde haya un alumno ciego para comprobarlo inmediatamente.)

Cuantas consideraciones se han hecho para el cálculo mental son válidas en toda su amplitud y profundidad para un alumno ciego o deficiente visual. Exceptuando, tal vez, dos puntos: una cierta menor cotidianidad y una limitación en la variedad de situaciones didácticas accesibles.

Las oportunidades que a diario se ofrecen al ciego o deficiente visual para el ejercicio del Cálculo Mental son distintas en su presentación y exigencia a las del vidente, y, es muy posible que menos frecuentes. Ya que al carecer o reducirse la información visual, también se perderán algunas de tales situaciones problemáticas; en especial las que se refieran a mensajes visuales de la televisión, carteles, etiquetas o reclamos publicitarios, prensa, revistas, etc. Pero no olvidemos que la comunicación interpersonal es, ante todo, de tipo oral, y que lo normal es que algunas de las informaciones señaladas le sean *traducidas* -leídas; incluso espontánea o semiconscientemente- por un compañero o familiar..

Más grave puede ser la pérdida de posibilidades de ejercitación mediante actividades lúdicas.

- Si el soporte es informático, debe adecuarse a una presentación accesible a su limitación visual. Lo que condiciona el equipo preciso, el *"entorno informático"*, la situación incluso. Así, las presentaciones gráficas figurativas y muchas bidimensionales serán de todo punto inaccesibles -e inadaptables- al alumno ciego total; en resumen: la práctica totalidad del *software* actualmente disponible.

Si se trata de un juego con tablero, fichas o tarjetas, debe asegurarse la participación en igualdad de condiciones, adaptando el material o fijando normas complementarias.

- Si intervienen elementos generadores de azar -dados, ruleta, bolas, etc.-, deben garantizarse asimismo el uso autónomo de éstos.

Las actividades de carácter verbal no sufrirán merma en absoluto (caso bien distinto del que afecta a alumnos sordos o hipoacúsicos; véase: ROSICH, NÛÑEZ y FERNÁNDEZ DEL CAMPO, 1996):

- Si los datos o información de partida se presentan en forma visual (tablero del aula, panel, bandejas, tarjetas, etc.), puede ser suficiente el leerla o suministrarla en Braille; esto último implica el prerrequisito de que el alumno posea destreza lectora en este sistema-.

(Para un análisis más exhaustivo, véase: FERNÁNDEZ DEL CAMPO, 1998.)

6.3 CÁLCULO POR ESCRITO

Nuestra cultura europea y occidental se caracteriza formalmente por su aprecio hacia la expresión escrita. No es momento de extenderse en deliberaciones históricas, culturales o antropológicas; pero sí cabe señalar que esto implica ventajas e inconvenientes.

En el dominio del cálculo, la escritura permite la conservación de resultados y buena parte de los procesos, con posibilidad de localizar y corregir errores, obtener reglas y automatismos -algoritmos- estrechamente ligados a la representación gráfico-simbólica.

El cálculo aritmético en su forma escrita se revistió de una potencia admirable con la escritura posicional de cantidades; sea en base diez, como podía haberlo sido en base veinte -caso de los mayas- doce u ocho.

Pero también esta facilidad de automatización llevó a olvidar poco a poco la razón profunda de estos algoritmos: *"¿quién ha recibido en su infancia explicación de la disposición en escalera de la multiplicación, o del bajar cifras de la división, o...?"* Se queman etapas en aras de la premura de tiempo y extensión de los programas, y se acaba, de hecho, valorando tan sólo el cálculo mental en forma implícita, encubierta y muy limitada: *"siete por ocho, cincuenta y seis; seis, y llevo cinco"*...

¿De qué características disfruta la escritura decimal en tinta, para hacerla adecuada al cálculo ordinario en la enseñanza? Dicho de otro modo: ¿qué objetivos persigue la práctica del cálculo -aritmético- en la escuela, que se cubran satisfactoriamente mediante el cálculo escrito?

Como objetivos generales del cálculo -en cualquiera de sus modalidades: mental, escrito, por calculadora-, resaltan tres:

A) rapidez/agilidad,

B) seguridad,

C) exactitud.

La escritura numérica posicional (decimal) -en tinta- posee potencialidades relacionadas directamente con estos objetivos:

a) Es reducible a cálculos elementales; según técnicas o sucesión de reglas simples -algoritmos-. Facilitada por la modalidad de representación posicional o polinómica; e íntimamente ligada al cálculo mental.

b) Permite la comprobación; merced a la estabilidad o permanencia escrita de resultados parciales en los procesos algorítmicos.

c) Permite la rectificación; variable, según la técnica o instrumental de escritura.

El cálculo escrito es, en buena medida, un mero instrumento potenciador del cálculo mental; como el cálculo mental es el soporte imprescindible del cálculo escrito. Se necesitan mutuamente: el cálculo mental es anterior, y fundamento permanente del escrito; como éste amplía las posibilidades de aquél, supliendo limitaciones de memoria y permitiendo detección y corrección de errores.

Conviene no identificar *cálculo escrito* con *algoritmos escritos*. Para ello, es necesario ir con cuidado de no repetir siempre la presentación de los ejercicios (horizontales, verticales, tablas de todo tipo, textos, adivinanzas, juegos, etc.) y que los cálculos respondan a la resolución de una situación concreta y con sentido. (ALSINA y OTROS, 1996, 115). Además, para una misma operación se han diseñado históricamente variedad de algoritmos (véase, p. ej.: KAMII, 1995).

Desde la irrupción de la Matemática de Conjuntos y Estructuras en el curriculum (años 60), los algoritmos escritos sufrieron durísimos ataques. Con la aparición de calculadoras electrónicas a bajo precio (comienzos de los años 80) parecía haber concluido definitivamente su razón de ser en la escuela.

Se multiplicaron los argumentos en contra de la enseñanza de algoritmos. Algunos provenían de la escuela constructivista piagetiana:

- "*No cabe otro conocimiento matemático que el construido a partir de las propias experiencias lógico-matemáticas.*" Que, en buena medida, cierra la puerta a la mayoría de las intervenciones escolares de *enseñanza* transmisoras de técnicas, por su condición *dirigista.*

- *El conocimiento tiene un carácter genético-evolutivo; es decir: el alumno debe recorrer itinerarios análogos a los que llevaron a las generaciones pasadas a construir/descubrir los conocimientos actuales.* Que es tanto como afirmar que la comprensión por la persona singular depende de la comprensión acumulada de no se sabe qué comunidad humana. Por este principio, se espera que los niños reconstruyan algoritmos, desde los más primarios hasta los *canónicos* actuales; en la creencia, tal vez, que esa línea histórica de creación/transformación responde a una necesidad evolutiva.

Incluso más radical, aunque en el plano didáctico y susceptible de contrastes experienciales:

> La enseñanza de algoritmos en los primeros cursos es perjudicial porque fuerzan a los niños a renunciar a su propio pensamiento numérico, "malenseñan" el valor de la posición e impiden que los niños desarrollen el sentido del número, y porque hacen que los niños dependan de la distribución espacial de las cifras (o del papel y el lápiz) y de otras personas. (KAMII, 1995, 49).

Pero más que una crítica a los algoritmos aritméticos en sí mismos, son una crítica a los métodos seguidos para su enseñanza-aprendizaje. Con enfoque positivo: una invitación a la búsqueda de vías alternativas, tanto didácticas como de las propias formas algorítmicas *oficiales* impuestas por el uso común.

La realidad es que los cálculos escritos -y los algoritmos, en particular- siguen estando presentes en los programas oficiales y en la escuela, y los padres esperan que sus hijos los aprendan; con independencia del uso real que de ellos se haga, o si las calculadoras ahorrarán tiempo, esfuerzo y errores. Los argumentos en su favor siguen vigentes:

a) El dominio de los algoritmos aritméticos garantiza la autonomía del alumno respecto de los medios tecnológicos, haciéndole depender tan sólo del instrumental de escritura, por rudimentario que fuere.

b) Los algoritmos aritméticos son un buen modelo -asequible, por ende- de procedimientos matemáticos y no matemáticos más generales.

c) Los algoritmos escritos pueden ser *reinventados* -descubiertos- por los niños, si se les proporcionan materiales, situaciones e itinerarios adecuados.

d) Estos mismos itinerarios, convenientemente explotados, reúnen cualidades formativas múltiples.

Algunas experiencias didácticas muestran, incluso, que los tiempos de aprendizaje no exceden significativamente de los precisados por los métodos tradicionales de simple imitación; sobre todo, cuando éstos pretendían justificar las *reglas operativas*. Con el *valor añadido* de lograrse un *aprendizaje por comprensión*.

Por conocidos, pasaremos por alto la descripción de las técnicas y algoritmos de cálculo aritmético escrito, así como su análisis y crítica. Pero dejando bien claro que los algoritmos hoy habituales no son ni rígidos ni definitivos: han ido perfeccionándose a lo largo de siglos, con aportaciones y modificaciones variadísimas. Quizás incluso algunas de ellas originaran formas más sencillas, seguras y rápidas que las actuales; muy posiblemente, éstas sean perfectibles. Tampoco son aceptadas universalmente: en numerosos países, la multiplicación, por ejemplo, se realiza de izquierda a derecha respecto de las cifras del multiplicador... Es posible que nos hallemos un tanto limitados por el instrumental de escritura...

Así pues, la flexibilidad en el modelo y forma de realización del cálculo escrito debe presidir la práctica de aula. Importan los objetivos de *rapidez*, *exactitud en el resultado* y *seguridad*, no el simple sometimiento a estereotipos.

La deficiencia visual va a incidir notablemente en el cálculo escrito. Más concretamente: en el trabajo con algoritmos y tablas.

Un resto visual escolarmente aprovechable permitirá emplear el instrumental ordinario de escritura, con muy pequeñas variantes: bolígrafo, lápiz o rotulador, papel de cualidad adecuada, tablero y tizas o análogos. La dificultad no surgirá en la escritura, sino en la lectura y exploración de datos o resultados parciales:

- La falta de agudeza visual, discriminación insuficiente, visión irregular o iluminación inadecuada exigen una fijación intensa y atenta para asegurar un correcto reconocimiento de los símbolos. Conviene advertir de la similitud de algunas formas: 3, 8 y 9, 1 y 7, 6 y 5, etc.

- Un campo visual reducido o irregular, o dificultades de fijación, exigen un mayor esfuerzo exploratorio, a fin de determinar las correspondencias espaciales. En especial, las correspondencias en columna- y las secuencias de lugar en las cifras de los datos cuando éstos contienen cifras contiguas repetidas.

En cualquier caso, se multiplican el esfuerzo y las posibilidades de error, se pierde agilidad y seguridad en los cálculos.

La carencia total de visión o la imposibilidad de servirse de los útiles ordinarios de lecto-escritura obligan al alumno a emplear procedimientos específicos; sea mediante el código Braille, sea mediante dispositivos peculiares para el cálculo.

En la enseñanza de ciegos, los esfuerzos se han orientado hacia la producción de *instrumentos de cálculo*. Algo que no ha ocurrido en la enseñanza de alumnos videntes: como apuntábamos más arriba, a éstos les ha bastado durante varios siglos la escritura decimal, hasta llegar a las calculadoras electrónicas. (En Extremo Oriente, el *ábaco chinojaponés* (*Sorobán*), apenas conocido en Occidente.) Las *calculadoras manuales* puede decirse que no han llegado a tener cabida como material pedagógico.

Se ha intentado reproducir la forma del cálculo escrito mediante dispositivos varios, que han merecido el calificativo de instrumental de cálculo para ciegos:

- *CAJA DE ARITMÉTICA*. Difundida en España; bajo la forma de *tipos arábigos*, desde principios de siglo; con *tipos Braille* exclusivamente, o *tipos Braille y arábigos*, desde hace unos 30 años.

Consiste en una matriz ortogonal de alvéolos rectangulares o cuadrangulares, en las que se van introduciendo elementos prismáticos en cuyas bases se encuentran en relieve los guarismos y signos matemáticos, ya sean como tipos ordinarios, Braille o uno y otro en cada base. Recuerda la composición que realizaba un *cajista* con los *tipos de imprenta*.

Al requerir tantos elementos móviles como signos, ocasionaba extrema complejidad de localización en los depósitos de aquéllos; casi tan fatigante como la *composición* de las operaciones, resulta la *redistribución* de los *tipos*. Intentó aminorarse en el *Modelo B*, con sólo tipos Braille en tres elementos, pero las supuestas exigencias de la educación en *integración* ha condenado este modelo al ostracismo.

- *CUBARITMO*; originario y empleado en los países de influencia francesa desde principios de siglo.

De nuevo, una matriz ortogonal de alvéolos, en la que se van introduciendo elementos cúbicos en cuyas caras aparecen las combinaciones de cuatro puntos Braille. El trabajo es en todo semejante al de la *caja de Aritmética*, con la ventaja de utilizar un único *elemento móvil*; con ello, la localización inicial y redistribución final son inmediatas, resultando mucho más rápido. No obstante, la forma cúbica dificulta un tanto la seguridad en la manipulación de los tipos.

- *DATTILORITMICA*; de origen italiano, y escasos 20 años de existencia.

Se trata ahora de una matriz de *tipos Braille*; con dos versiones: 6 y 4 puntos, según se desee utilizar para Braille literario o representación del cálculo aritmético escrito. Los *puntos Braille* aparecen y desaparecen individualmente, merced a un sistema de resortes que responden a la presión digital. Por tal motivo, las proporciones deben ser muy superiores a las del Braille escrito en papel, dificultándose su lectura ulterior. Asimismo, el *borrado* final se hace tedioso.

Todavía podrían mencionarse otros:

- *TAYLOR*. Difundido en los países de habla inglesa y Extremo Oriente.

Matriz de celdas octogonales, con tipos móviles prismáticos de bases cuadradas incluyendo signos convencionales. Extremada complejidad convencional, de manipulación y para la transcripción ulterior.

- *SOROBÁN. Ábaco chino-japonés*. De origen milenario, se ha difundido en la enseñanza de ciegos por Estados Unidos, Brasil, Cuba. Actualmente, reaparecen los intentos de introducción en España (MADRID y ROSA, 1996).

Una colección de alambres en paralelo (12, 15, 18) contienen fichas o *elementos móviles* en número de 5; éstas se hallan distribuidas en dos grupos de 4 y 1, respectivamente, separados entre sí por otro alambre o varilla longitudinal, común y perpendicular al conjunto anterior. Las fichas toman valor al aproximarse a la varilla de separación, desplazadas por los dedos, perdiéndolo al retirarlas. La ficha aislada toma el *valor 5*, mientras que cada una del grupo de 4 toma el *valor 1*.

Como instrumento de cálculo, y una vez adquiridas las destrezas dígito-manuales requeridas, es ciertamente rapidísimo. Pero se duda de su valor como auxiliar en las primeras etapas, debido a sus fuertes convencionalismos y complejidad manipulativa y de reconocimiento. Para la mayoría de las operaciones, debe emplearse en conjunción con la escritura Braille.

Si bien todos estos artificios pretenden paliar los inconvenientes del instrumental de escritura Braille, adolecen de una elevada complejidad manipulativa y de orientación espacial, tornándolos muy lentos en relación con el cálculo escrito en tinta. Nacieron como instrumentos complementarios, ya que los de escritura Braille no facilitaban en su momento las exigencias del cálculo escrito: continua revisión de resultados parciales, posibilidad de corregir, etc.; y aunque cubrieron una necesidad, apenas han evolucionado en su concepción.

Pero: ¿por qué el Braille escrito apenas se ha empleado para efectuar cálculos aritméticos?

Sin extenderse en este análisis, baste señalar:

1°.- Relativa *juventud* del Braille. Frente a los aproximadamente cinco siglos de popularización en Europa de la escritura numérica decimal, la incorporación generalizada y efectiva del Braille a la enseñanza de ciegos data de principios del siglo XX. Desde su invención por Louis Braille en 1825, las disputas pedagógicas lo relegaron a usos marginales, pese a su preferencia por los estudiantes ciegos.

2°.- Características del instrumental de escritura. Hasta hace no más de 30 años, la escritura mediante *punzón* y *pauta* o *regleta* exigía tornar el papel para poder leer o comprobar el texto o cantidades escritas. La posibilidad de lectura y comprobación paralela a la escritura o al proceso calculatorio aparece con las *máquinas de punto positivo*, tipo Perkins o Erica.

3°.- Imperfección o inadecuación de los instrumentos disponibles (máquina Perkins). Como son el sentido de avance del *carro*, disposición de la cabeza impresora, del texto escrito respecto del propio usuario, etc. Que dificultan un tanto la comprobación y, sobre todo, la corrección.

De hecho -o como consecuencia-, apenas se han desarrollado técnicas específicas, recomendaciones y sugerencias que promovieran el empleo del Braille en el cálculo aritmético elemental, si bien se aplica con fruto en el algebraico desde hace décadas.

En España, no obstante, parece abrirse paso una corriente en sentido favorable. A tal efecto, pueden consultarse: GRUPO ALTAI, Comunicación al *Primer Congreso Estatal de Servicios para Personas Ciegas y Deficientes Visuales*, Madrid-1995; Departamento de Ciencias y Pretecnología del C.R.E. Antonio V. Mosquete, Comunicación al *Seminario de Lecto-escritura Braille*, Madrid-1996; FERNÁNDEZ DEL CAMPO, 1996, 1997.

Siguen vigentes, sin embargo, el elevado nivel de exigencia en destrezas dígito-manuales, de reconocimiento táctil y de orientación espacial -muy superiores a las del Braille literario-, y las dificultades que implican la mediación de la máquina y la imposibilidad de simultanear escritura y lectura de símbolos.

6.4 CÁLCULO POR CALCULADORA

El carácter instrumental llega a su culmen en la calculadora electrónica. Parece preferible la expresión cálculo por calculadora, en el doble significado causal de la preposición: agente e instrumental, de mediación. La calculadora es quien efectúa realmente el cálculo, a partir de los elementos que se le introducen -operandos y operación-; pero no sería eficaz si previamente no se determinan qué operación, qué operandos y en qué orden deben suministrárseles; incluso es ajena a los errores de pulsación.

La deficiencia visual exige características especiales en las calculadoras a emplear:

- A los alumnos con resto visual aprovechable les bastará, en principio, un modelo de calculadora con *display* de tipos suficientemente grandes y distinguibles. Sin embargo, son desaconsejables los *displays de cristal líquido*, que requieren distancia mínima de observación e iluminación adecuada.

- Aquellos que sean ciegos totales o cuyo resto visual les impida la lectura cómoda de *displays* ópticos precisarán de modelos de *calculadora parlante*, cada vez más abundantes en el mercado a precio asequible. El *Braille Hablado* [1], por ejemplo, incorpora calculadora de potencia variable según versión. Las calculadoras con *display Braille*, aunque existen, son escasas y tienen un precio elevado.

Aparentemente, la calculadora ahorra los esfuerzos habituales que conlleva el cálculo escrito: ejercicio continuado del cálculo mental, representación secuencial, control y corrección de errores materiales; y tiempo. Pero no exime de la posibilidad de errores de pulsación, por inadvertencia (la elevada frecuencia de este tipo de errores nos mueve a recordarlos continuamente).

Los críticos con el empleo de la calculadora como instrumento de cálculo en la escuela alegan que *"el alumno acabará por no saber operar"*. Nos preguntamos de nuevo si con el cálculo escrito pasará del *"siete por ocho, cincuenta y seis"*; pues, en cuanto aplique el *"seis, y llevo cinco"* sin ser consciente del significado del *"llevo"* -que es algo más que *"cinco unidades de orden superior"*-, estaríamos ante un automatismo análogo al de pulsar teclas.

> Pero hay que *usar* discretamente la calculadora. Hay técnicas en el uso de la calculadora que necesitan enseñarse y aprenderse. Hoy día no basta con tolerar que los alumnos usen calculadora. Hay que planificar el uso de las calculadoras en situaciones adecuadas y dar las indicaciones convenientes para obtener el máximo beneficio de su uso. (CASTRO, RICO y CASTRO, 1996, 88).

Es preciso aprender a usar la calculadora en la escuela. Este aprendizaje no se refiere tan sólo a las *instrucciones de empleo*: valor de las teclas, orden de pulsación, borrados, registros de memoria, límites, nivel de aproximación, aplicación en cálculos iterados y diseño de algoritmos, etc. Un aspecto fundamental es el de establecer la correspondencia semiótica entre situación real de cálculo, expresión escrita o simbólica e

[1] Dispositivo electrónico con teclado Braille y *display de síntesis de voz*. Incorpora procesador de textos, calculadora, cronómetro, etc. Es susceptible de conexión a impresoras y de funcionar como periférico con ordenadores convencionales.

instrucciones o secuencias de pulsación, sus analogías y diferencias, tanto morfológicas como sintácticas.

Hay que aprender sobre todo a obtener de la calculadora el máximo rendimiento; o, lo que es lo mismo: saber distinguir las situaciones en las que es más útil que las demás formas de cálculo de aquéllas otras en las que éstas son preferibles. Es decir: superar la concepción y empleo de la calculadora como instrumento único o primordial, con riesgo de convertirse en señora y dueña de nuestras destrezas de cálculo -hasta el extremo de anularlas-, para considerarla como instrumento verdaderamente auxiliar, sometido a nuestra capacidad de control de los procesos y situaciones. Tenemos que llegar a conseguir que el escolar decida cuando conviene usarla y cuando no hace falta, por lo tanto, no se deben tener escondidas, sino accesibles y provocar su uso. (ALSINA y OTROS, 1996, 137)

Frente a cálculos aritméticos engorrosos, la calculadora ahorra tiempo, fatiga, errores y bloqueos por fobias simbólico-matemáticas. Pero sería igualmente absurdo recurrir a la calculadora para efectuar cálculos que por escrito se efectuarían con análogas garantías: 3x1955 = 5865 no tiene por qué llevar más tiempo en escribirse que en pulsar las teclas, y la operación mental-escrita es totalmente asequible sin error, con un mínimo de práctica. El recurso a calculadora o escritura es cuestión, sobre todo, del carácter de la operación y del tamaño de los operandos.

Por otra parte, el apego sistemático al cálculo por calculadora puede llegar a ser nefasto: ¿qué hacer, cuando se aborden las fracciones enteras y sus operaciones, las ecuaciones y funciones?

Respecto del cálculo escrito, la calculadora adquiere un carácter complementario. Puede ser empleada como elemento de control, para verificar la corrección de aquél. *A posteriori*, transfiere seguridad o apercibe de errores (aunque no los determine). Es por ello aconsejable anteponer el aprendizaje y primera práctica en algoritmos al empleo sistemático de la calculadora: durante la fase de comprensión del algoritmo, conviene prohibir su uso por cuanto puede ser sobreutilizada. (MAZA, 1991, 127). Y es innegable su ventaja en caso de cálculos complicados (cantidades grandes, iteraciones, decimales, etc.).

El empleo escolar de la calculadora puede tornarse también invitación al cálculo mental. Junto a los ejemplos del Apartado 6.2.1 i), como muestras del control que mediante cálculo mental pueden realizarse del efectuado por calculadora, existe toda una gama de juegos que combinan ambas formas entre sí y una y otra con la aproximación: *la tecla misteriosa, el número desconocido*, etc. Para su aplicación incluso en niveles elementales, véase, por ejemplo: ALSINA (1989), GRUPO 0 (1997).

Mediante sencillos algoritmos o convenios -*la tecla del 5 no funciona*, por ejemplo; o: *sólo funcionan la tecla del 2 y del 3*, etc.- se diseñan situaciones que invitan a la investigación numérica e introducen en dominios conceptuales diversos: múltiplos y divisores, números primos, descomposición factorial..., o en el complejo mundo de los números decimales.

Además, en el caso de alumnos con ciertas necesidades educativas especiales, la calculadora permite el progreso en Matemáticas, cuando sería imposible de otra forma, por resultarles objetivamente imposible superar sus carencias aptitudinales y aún actitudinales. Es el caso de alumnos con frágil retentiva -incapaces de memorizar los *hechos numéricos elementales* o *tablas* de operaciones-, aquellos otros con problemas para fijar la atención, dificultades para la escritura, etc. Aparece entonces como *elemento de integración* educativa y social (ALSINA y OTROS, 1996, 115).

El trabajo en el aula o por grupos impone una limitación muy conveniente: un modelo único de calculadora para todos los alumnos. De lo contrario, las posibilidades de investigación son dispares, pudiendo provocarse situaciones desorientadoras.

* * *

El itinerario de aparición de los vértices de nuestro *triángulo de destrezas calculatorias* parece claro: cálculo mental, escrito y por calculadora. Irán ubicándose cada uno con respecto a los otros, desarrollando y conformando la mayor o menor *escalenidad*, útil y dinámica, en un juego de necesidades reales y conveniencias didácticas. Siempre con referencia a la realidad cotidiana y contextual; conforme a los datos a manejar, como recursos simultáneamente disponibles, nunca excluyentes, prestándose mutuos servicios.

7 PROCESOS DE INICIACIÓN

En un cálculo aritmético hay que distinguir dos aspectos esenciales y bien diferenciados: la operación aritmética y la técnica concreta de cálculo a aplicar sobre los operandos o datos numéricos. En correspondencia con ellos, el proceso de enseñanza-aprendizaje debe comprender:

1° Introducción a la operación. Que merece más propiamente el carácter de actividad matematizante, requeridora de la puesta en juego de capacidades manipulativas, abstractivas, procesos de simbolización, etc.

2° Práctica automatizada, de aplicación en situaciones problemáticas. Su objetivo final es una serie de reglas o automatismos, susceptibles también de ser adquiridos por mera repetición y de ser ejecutados sin conciencia alguna de su justificación.

Sin embargo, ni las operaciones tendrían sentido ni el cálculo automatizado sería posible, sin los números. De hecho, los números son el objeto de la Aritmética, como la cantidad en general es el objeto propio de la Matemática.

Puede hablarse de *operaciones no numéricas de carácter aritmético*, que se corresponderían analógicamente con *operaciones conjuntistas*:

Adición	Unión disjunta
Sustracción	Diferencia de conjuntos (condicionada por la inclusión)
Multiplicación	Producto cartesiano
División	Partición equicardinal

La fácil identificación mediante isomorfismo de los tres primeros pares, movería, sin duda, a PIAGET y sus seguidores a proponer el trabajo con conjuntos como preámbulo -incluso necesario- a las tareas numéricas o propiamente aritméticas. Para base teórica serviría el concepto cantoriano de número natural, como *cardinal de conjuntos finitos* a partir de la *relación de coordinabilidad* entre conjuntos o clases... Sin embargo, varias realidades entorpecieron finalmente su proyección didáctica:

- El intento de fundamentación conjuntista era largo y excesivamente formal, cuajado de escollos conceptuales, condiciones limitativas, piruetas técnicas... En el campo de batalla del quehacer didáctico, el peor enemigo de la pretendida coherencia matemática era ella misma.

- Buena parte de las situaciones cotidianas, vividas por el alumno, se resistían a una formalización sencilla: dificultad en considerar diferentes elementos y conjuntos aparentemente *iguales*, unión de conjuntos no disjuntos, sustracción de conjuntos sin la condición de inclusión, el carácter individual de los elementos en el producto cartesiano, o el producto por conjuntos *intangibles* (*n veces*), carácter del cociente, partición con elementos residuales...

Y algo tan simple como trascendente:

- La mayoría de los niños -aun los muy pequeños- disponen ya al llegar a la escuela de un bagaje de conocimientos y técnicas operatorias numéricas, que hacían poco menos que innecesario un itinerario tan fatigante como inútil.

- El aprendizaje final de las destrezas numéricas se desvincula de no importa qué fundamentos teóricos. A largo plazo, éstos quedan *superados*, y *no dejan ni rastro*; por convenientes -imprescindibles- que los estimen matemáticos y psicopedagogos de ciertas escuelas.

Los "hechos son testarudos", dicen, y ahí están: la Didáctica de los números y la Aritmética parecen ser independientes de la Teoría de Conjuntos, la fundamentación formal, la coherencia y dependencia lógica, los esfuerzos en jerarquización de objetivos y contenidos acorde con el modelo, los despliegues de material manipulativo y medios gráficos... Por mucho que quiera descargarse la responsabilidad de un enfoque tal sobre un profesorado del momento, falto de formación matemática y psicopedagógica.

¿Por qué no aceptar que los números y las operaciones aritméticas son algo simples y *al alcance de cualquier fortuna mental*? ¿Por qué no volcar las energías didácticas en acercar el mundo de la Aritmética a los intereses y posibilidades reales de los alumnos? ¿Es que *"lo práctico"* es independiente o contrario de *"lo verdadero, lo bueno, lo bello?"*...

7.1 EL NÚMERO Y SU REPRESENTACIÓN

El número es una expresión simbólica de la cantidad.

La cantidad está en la realidad. Como *"primer accidente"*, que dirán los clásicos; como *"distinción de partes"*, sea ésta *"real* o *de razón"*, pero *"con fundamento in re"*, en cualquier caso.

El número -como idea- surge como *relación entre las partes*, por *comparación*. Considerando tan sólo la identidad distintiva -número cardinal y natural-, o tomando en consideración aspectos extensivos -como medida física-. En cualquier caso, el número es *"una cierta relación entre partes"*, un concepto objetivo, independiente del sujeto; bien que éste pueda determinar el plano o aspecto de la relación, no su efecto numérico.

Pero nos hallamos en el plano intelectivo, del conocimiento abstracto. La *"relación entre partes"* no es sensible, aunque lo sean dichas *partes* en un objeto simple o compuesto -colección separada de *partes*-, configuradas espacial y temporalmente. El número pertenece al *mundo inmaterial de los conceptos*, de las *ideas*, si bien se halla *realizado* en multitud de situaciones físicas. Quedaría confinado al acervo psicológico personal, si no contara con representaciones exteriorizables: los símbolos.

Por *símbolo*, *signo* o *representación* -en este caso- entendemos, en primer lugar, una realidad sensible portadora del concepto en sí misma. Pero también una realidad sensible que, por acuerdo de una comunidad, se asocia arbitrariamente al concepto. En ambos casos, debe existir acuerdo *-sintonía-* entre el *primer propietario* o *dador* del concepto *-emisor-* y el *perceptor -receptor-* del símbolo respecto del concepto a comunicar; de lo contrario, el símbolo o signo, con su pluralidad de aspectos, resultaría equívoco. De esta labor de *simplificación* o *reducción* se ocupa el *receptor*, gracias al contexto personal psicológico o de comunicación.

> En los humanos existe una predisposición a utilizar símbolos. Ello se sigue de la aptitud potencial para representar eventos que no están presentes lo que exige alguna forma de símbolo abierto o encubierto, o algún tipo de código. En realidad, el juego, y la tendencia a utilizar objetos como señales o símbolos que están en lugar de otra cosa, surge antes de la edad de dos años. (MILLAR, 1968).

Hay que advertir que esta autora, siguiendo a TITCHENER (1909), identifica en alguna forma *símbolo* y *representación* o *imagen*, por cuanto las imágenes son representaciones de conceptos. No son idénticas a los conceptos. En ese sentido, funcionan como lo hacen las palabras. (MILLAR, 1997, 278), dejando a salvo con MARR (1982) el diferente plano expresivo: interior -personal-, de representación en imágenes, y exterior, de símbolos sensibles, objeto de la comunicación interpersonal. Éste ha sido nuestro pensamiento en las Secciones 2.3.2 y 5.3.3. Debido a que la mayoría de los autores denominan *símbolo* o *representación* a la *representación exterior*, usaremos indistintamente estos términos a lo largo del presente Capítulo.

Dicha *predisposición natural* implica:

- Capacidad para apropiarse conceptos, formas inmateriales. Es decir: capacidad intelectiva, que es algo más que capacidad de percibir formas y esquemas, necesariamente compuestos.

- Capacidad para aceptar y aplicar convenios de representación. Lo que supone capacidad para asociar conceptos a formas sensibles convencionales y, en su caso, capacidad para asimilar y aplicar normas o reglas de composición. Con independencia de la producción de *representaciones interiores* convenientes a los extremos concepto - símbolo (representación sensible).

- Capacidad para reducir -deducir- el símbolo (representación) al concepto representado, mediante ejercicio lógico y semántico de supresión de aspectos no convenientes y resalte de aquéllos otros convenientes a la situación comunicativa.

El esquema, que es válido desde Aristóteles, ha alcanzado un desarrollo notable en el transcurso del siglo XX. Su estudio corresponde esencialmente a la *teoría de la comunicación*. El concepto representado pasa a llamarse *significado* o *referente*, y *significante* la representación, signo o símbolo. Para *mensaje* suele reservarse la forma sensible del *significante*.

La tendencia simbólica es tan natural y fuerte en el ser humano que incluso elabora representaciones a partir de otras -verbales, por ejemplo-: Los niños inventan símbolos cuando les resulta necesario, como vimos cuando discutimos el tema de los dibujos realizados por niños ciegos que no habían visto nunca. (MILLAR, 1997, 303).

La naturaleza objetiva del número posibilita una expresión simbólica convenida, que le permite saltar inmediatamente del ámbito subjetivo estricto al comunicativo social: es el *número como símbolo.* Comunicación que se realiza en cualquiera de las formas expresivas: gestual, oral, plástica, gráfica, escrita, o propiamente simbólico-matemática; comportando grados diversos de convencionalismo. Con independencia de su objetividad, de su naturaleza lógica y psicológica, la realidad del número como hecho comunicativo -como símbolo- es innegable.

En este sentido, el que hemos convenido en llamar *dos*, número de nuestros ojos u orejas, tan expresado quedaría por la palabra *dos* escrita en castellano, como pronunciada; por dos palmadas, como por la mano con los dedos índice y corazón extendidos y anular, meñique y pulgar recogidos; por dos marcas en un trozo de madera, dos trazos paralelos dibujados, dos puntos o fichas próximas; o el símbolo *2*... Evidentemente, los dos primeros y el último convienen a la comunidad hispanoparlante; el segundo, aunque no esté alfabetizada. El último, también a un sinnúmero de pueblos actuales, aunque no así a la inmensa mayoría de los chinos...

La forma de los símbolos no viene dada de manera innata, ni para palabras ni para símbolos no-verbales, aunque estos últimos dependen con frecuencia de algún parecido perceptual entre el símbolo y el referente. (ibidem.). La forma debe ser *asignada*; sea por decisión personal -construcción, innovación-, sea mediando convenio social. En este segundo caso, se considera instrumento cultural de la comunidad en que se halla inmersa la persona y que contribuye decisivamente en su formación y aun desarrollo intelectual; para VYGOTSKY (Sección 2.2.3, Apartado A), será la única vía efectiva, tanto de adopción de símbolos primarios como de aprendizaje e intervención educativa.

Siguiendo con el ejemplo de *los ojos u orejas*, podría hablarse de *parecido perceptual* en el caso de las dos fichas o dedos, las palmadas y los trazos o puntos; corresponderían a las llamadas *representaciones icónicas*, mediante material manipulable, gestuación o expresión gráfica. Mientras que la palabra *dos*, pronunciada o escrita, -representación verbal- y el *2* -representación *numérica* o *simbólico-matemática*- corresponderían a *representaciones simbólicas*, propiamente dichas (MAZA, 1990A,41).

Este *parecido perceptual* se concreta en la escuela piagetiana a la *coordinabilidad entre conjuntos*; (mismo cardinal) ya que se reflejan perceptivamente los elementos o partes del referente y de la representación. No obstante, es un término vago, difícil de objetivar: se trata más bien de un contenido cultural o experiencial que de un concepto recognoscible con independencia de los contextos situacional y psicológico.

Además, el valor comunicativo de un símbolo, su referencia al número como concepto o significado, no puede desligarse del contexto: son muchos los símbolos -incluso numéricos- que son equívocos, precisando de una interpretación, función de la situación comunicativa. Precisamente, uno de los objetivos de los sistemas simbólicos es independizar *significado* y *contexto*, en busca de la univocidad símbolo-referente. En principio, el significado de un símbolo es dependiente del *contexto comunicativo.*

La mano con los dedos índice y corazón extendidos y los restantes recogidos, no muestra el *2* de forma inequívoca: ¿acaso no se conviene también como signo de victoria o éxito? Dos trazos paralelos verticales, puede confundirse con *11* en escritura decimal; o con *tres* en sistema binario, *seis* en base *5*... Las dos marcas en un trozo de madera, quizás quieran indicar una medida...

Tampoco puede evadir el convenio social. El símbolo exteriorizado está socialmente condicionado. Algo que es evidente en nuestro ejemplo para *dos* hablado o escrito y *2* en escritura simbólico-matemática.

Por último, el símbolo, sometido a una *interpretación*, es función en el receptor de su *estado mental*. Éste es función de algo más que del contexto comunicativo: percepción del mensaje, decodificación, contenidos mentales, etc. El *receptor* debe reconstruir/extraer el significado del símbolo, en operación inversa a la del *emisor*. La decisión final de reasignar un significado a un símbolo depende, en última instancia, del *receptor*. (Véase lo que se decía en 5.3.1 y 5.3.2 a propósito de posibles dificultades de recepción de mensajes y su comprensión, y los medios para paliarlas.)

"Dos" parece inconfundible en una conversación entre hispanoparlantes; pero, ¿no es preciso distinguir el término *"dos"* del fonema *"dos"* en *"da-dos"*, o en *"veintidós, en dosel, dos mil* o *doscientos"*, etc. El pensamiento del receptor también puede desviar el fonema *"dos"* hacia *"tos"*... ¿Qué decir del valor absoluto y posicional de la cifra *2* en *2, 12, 23*...

El poder de las matemáticas es inmenso, y en todas las etapas los símbolos constituyen una contribución fundamental a este poder. Pero sin la aptitud de los matemáticos para dotarlos de significado, son inútiles. (SKEMP, 1980, 96). Estamos de acuerdo con WITTGENSTEIN cuando dice que *en matemáticas no existen símbolos matemáticos sino una interpretación matemática de los símbolos*. Es que no puede llegarse a la identificación plena entre *símbolo* y *concepto -significante* y *significado-*, sino exponer aquél a la crítica -análisis- de los contenidos contextuales y psicológicos: sólo la situación puede aportar elementos de juicio para que la función semántica distinga *"l"* como letra o como *"1"*, *"L"* y *"50"*, *"V"* como letra y como equivalente a *"5"*, *"O"* y *"0"*, etc. De aquí las graves dificultades que se les plantea a los sistemas informáticos (O.C.R.) para interpretar correctamente las formas visuales.

La función esencial de los símbolos es la comunicación. Pero debe entenderse en sentido amplio: comunicación interpersonal y comunicación *privada*, cual *lenguaje interior* -que diría VYGOTSKY-.

A su vez, esta segunda se despliega en un abanico de finalidades múltiples. Unas, de carácter conservador del sentido o significado: almacenamiento y recuperación de información y conocimiento, generación de representaciones exteriorizables, automatizar manipulaciones rutinarias (forma de expresión), explicaciones, etc. Pero existen otras de carácter constructivo: generación de nuevos conceptos y clasificaciones, actividad mental creativa, etc. (véase: SKEMP, 1980, 73). En especial, hay que destacar su intervención como *elemento* en el *diálogo reflejo*, como *lenguaje interior*, por el que se confiere a un símbolo sentido inicial o se modifica éste. En planteamientos constructivistas (Sección 2.2.2, Apartado B), también la construcción de nuevos conceptos modificaría el sentido de los empleados.

Podemos ya destilar algunos principios que nos servirán de guías didácticas:

1°) Los números son un aspecto cuantitativo de la realidad: *relaciones entre partes.*

En consecuencia, donde primero debe buscarse el número es en la realidad física y próxima; es decir: en materiales manipulables que tengan sus partes iguales y bien diferenciadas perceptivamente -por pluralidad de vías sensoriales-.

La manipulabilidad refuerza el sentido real. La variedad de vías sensoriales, favorece la percepción cuantitativa y fija la atención. La separación real de partes posibilita variar la configuración espacial y manifiestan una primera inmateriabilidad, como *"invariante"* del número. El hecho de ser *partes iguales*, por último, centra la atención en la única característica de la *entidad* de cada parte.

El trabajo tradicional con cuentas, piedrecitas -cálculos-, legumbres, palillos, botones, fichas... parece ajustarse exactamente a este principio. Su limitación es de carácter calculatorio o cara al sistema de numeración, al tratarse de *material no estructurado.*

2°) Tienen la condición de conceptos: son realidades inmateriales presentes en diversidad de objetos, de los que se obtienen por vía intelectiva, a partir de informaciones sensibles.

Las prácticas de reconocimiento y construcción manipulativa permiten asegurar la fijación de conceptos numéricos elementales. La clasificación, inclusión y coordinación de conjuntos deben verse como ejercicios de consolidación, no tanto como premisas.

3°) Por su carácter objetivo, son asequibles a todos cuantos se hallen en condiciones de observar la realidad que los contiene y elaborar abstracciones.

Las dificultades para la obtención del concepto de número -en su aspecto más elemental: el número natural- reflejan o denuncian, ante todo, dificultades perceptivas y atencionales; ya sean simples -trastornos sensoriales- o complejas -coordinación motriz, elaboración de perceptos, retentiva, etc-. La capacidad abstractiva se sirve de la percepción, y ésta deja rastro en sus productos, que sólo la práctica irá desvaneciendo; pero la abstracción, una vez obtenida, es independiente del percepto. Negarlo, sería negar la inmaterialidad del número como idea.

4°) La capacidad imaginativa y expresiva del ser humano permite asociar los números con formas sensibles: representaciones o símbolos.

La actividad didáctica debe anticiparse a esta tendencia natural. En cuanto se atisbe la posibilidad de permanencia en el reconocimiento por un alumno de un número en particular, debe proponérsele una representación simbólica; aprovechando preferentemente los símbolos de *parecido perceptual* con el material manipulado. Coincidimos esencialmente con HIEBERT (1988), cuando entiende que la meta del proceso de simbolización no es tanto la abstracción hasta la noción general de cantidad como la creación de símbolos transparentes que revelen los referentes específicos a que se refieren..

"Para introducir un término, un símbolo o un signo no es necesario esperar que el concepto correspondiente esté adquirido, pero nunca se transmitirán, en esta etapa, conceptos por definición. Hay que ver la necesidad y el alcance de una relación para precisar un término o un símbolo para representarla. Un prematuro exceso de lenguaje simbólico crea la sensación de que las matemáticas son un conocimiento críptico sólo al alcance de los iniciados" (ALSINA y OTROS, 1996, 109).

5°) Existe variedad de representaciones y expresiones simbólicas para un mismo número.

El objetivo último del aprendizaje numérico elemental es la escritura simbólico-matemática -guarismos-; pero sería lamentable que fuera ésta la única expresión. Además, dado su fuerte convencionalismo puede plantear dificultades de aprendizaje; roza el absurdo imaginarla siquiera como *única*: la lectura y la más elemental de las formas de comunicación interpersonal -la oral- imponen que se vea precedida del símbolo verbal, quien -de hecho- suele actuar como *metalenguaje*.

La representación en variedad de lenguajes y formas, procediendo de las de mayor *parecido perceptual* a las de menor, enriquece la comunicación y puede facilitar también el aprendizaje simbólico final; amén que, más adelante, puede favorecer ciertos cálculos y resolución de problemas. A su vez, el cultivo de las variantes expresivas puede facilitar vías de acceso al concepto y su reconocimiento en la realidad.

El término (oral o escrito) o una representación gráfica de un concepto son previos a los símbolos y a los signos (guarismos). La coexistencia de los tres con situaciones adecuadas ha de mantenerse el tiempo que sea necesario (que a veces es un curso o mas). En caso contrario, se irá repitiendo la situación de buenos calculadores pero que nunca resuelven un problema. (Ibidem, 109).

Existen en el mercado -o se fabrican fácilmente- materiales manipulativos que involucran varias formas de lenguaje: naipes y tarjetas, dominós, formas numéricas con puntos, etc. No olvidemos que los dados y el dominó ordinario son representaciones de puntos para ciertos números; que la baraja española y francesa suelen simultanear representaciones figurativas y simbólico-matemáticas, etc.

6°) El valor o eficacia comunicativa de estos símbolos o representaciones dependen:

a) de un convenio o acuerdo interpersonal;

b) del *contexto comunicativo externo*, o circunstancias ambientales en que ésta tiene lugar; y

c) de los contenidos de conciencia del receptor, o *contexto subjetivo de comunicación*.

Con frecuencia, las *dificultades de comprensión* de un concepto o la *dificultad para comprender* en un alumno se resumen, simplemente, en *dificultades de comunicación* profesor-alumno o alumno-alumno. Estos aspectos, junto con los perceptuales y *perturbaciones del medio*, pueden servir de indicios de causas de error en la comunicación.

7.2 EL CONJUNTO NUMÉRICO

Hasta aquí, hemos considerado el número como producto singular, abstraído, primero, y simbolizado, después, de una situación o colección de situaciones. En este sentido, el niño puede aprender y expresar números de forma independiente entre ellos, tal como hace con los colores, las formas, los sonidos, los conceptos en general.

{Aceptamos, pues, como posible y aun conveniente que los primeros números y sus símbolos (expresiones) en las diferentes formas de lenguaje sean aprendidos en orden distinto de la serie natural (1, 2, 3, 4...). En cualquier caso, el rango no alcanzará la decena.

El primer gran salto psicológico -y matemático- se manifiesta en la consideración de los números como colección. El considerar *uno, tres, dos, ninguno, muchos* como palabras-conceptos con un parentesco común, y su paso a *cuántos*: del número singular al número como concepto general. Desde ese momento, está en condiciones de hacerse con un procedimiento para *descubrir nuevos números*, aunque aún desconozca técnicas y nombres -recuento y numeración-.

Al considerarlos conjuntamente, los números reflejan la realidad cuantitativa que expresan. Ya sea una cierta *ordenación* o *estructuración natural -sucesión numérica-*, ya sea una referencia a acciones físicas -operaciones aritméticas, *estructuración algebraica-*. Y es tan *fuerte* la conexión realidad-símbolo, que estas *estructuraciones* tendrán dos consecuencias decisivas:

1°) Se refuerza la *comprensión del número*, su *contenido relacional.*

a) Por vía de *ordenación*: *6 es el siguiente a (inmediato posterior, sucesor de) 5*, o *5 es el inmediato anterior a (precedente, antecesor de) 6*; como *7 es el siguiente a (inmediato posterior, sucesor de) 6*; etc. 6 queda determinado por 5 y 7: está intercalado y contiguo a ellos, *está después de cinco y antes de siete* (*es más de cinco y menos de siete*)...

b) Por vía operativa o estructural algebraica: 6 = 5 + 1, 6 = 1 + 5, 6 = 7 - 1, 6 - 1 = 5, 6 = 3 x 2, 6 = 2 x 3, 6 ¿ 2 = 3, etc. En lengua hablada: *seis es uno más que cinco, uno menos que siete, uno más que cinco, es seis, dos veces tres, la mitad de seis es tres...*

Bien es cierto que los dos párrafos anteriores tienen sentido siempre que admitamos una serie de restricciones: se trata de *números naturales*, y confiamos en el significado comúnmente aceptado para los diferentes símbolos aritméticos y de lengua usual.

Los *órdenes naturales -menor que* y su recíproco *mayor que-* tienen un análisis diferente, según se traten en el plano matemático o didáctico.

Bajo el prisma matemático, no debe hablarse de *dos órdenes distintos*, sino de un único orden y su recíproco (inverso): *a es menor que b, si, y sólo si, b es mayor que a.*

Sin embargo, desde el punto de vista didáctico -mucho más ligado a categorías verbales, que actúan como metalenguaje-, conviene distinguirlos, antes de llegar a la explicitación de su dualidad o simetría -paralela a la antonimia verbal, mucho más difícil en el nivel conceptual y práctico-.

Así pues, conviene no abordar uno de ellos antes de haber logrado un dominio efectivo del otro. Más que un problema de madurez psicológica -adquisición de la *función de reversibilidad*, según la escuela piagetiana- es cuestión de dominio lingüístico de los términos simétricos. Por concomitancia con la *sucesión natural*, parece recomendable introducir en primer lugar el *orden ascendente*: *menor que*, *menos que*, *por debajo de*, *más pequeño que*... (obsérvese aquí el uso equívoco de *más*).

Al mismo tiempo, hay que entenderlos como generalización de la *sucesión natural* antes que una aplicación de la estructura algebraica: para el niño, es más intuitivo y aceptable *"cuatro está antes que seis"*, o *"cuatro es menor que seis"* -definición del orden basada tanto en el acervo lingüístico como en las experiencias cotidianas- que *"como cuatro más dos es seis, cuatro es menor que seis"*.

Como es obvio, no debe esperarse del niño interpretación o expresión simbólico-matemática: tan sólo verbal o manipulativa. Aquélla, a lo sumo, para la representación de números superiores en poco a la decena y en caso de ordenación: no en vano le son familiares los botones del ascensor, la numeración de las casas, el calendario, la cinta métrica...

La *ordenación natural* es mucho más rica y compleja de lo que pudiera parecer a simple vista. Respondiendo a la concepción de *"número natural como ordinal finito* o *elemento de un conjunto sucesor"* (PEANO), quizás sea la más inmediata aplicación y la primera que percibe el niño de nuestro entorno: numeración de casas, butacas o taquillas, pulsadores del ascensor, puestos de llegada en una carrera o resultados de un juego, etc. También refleja las *sumas elementales*: 1 + 1 = 2, 2 + 1 = 3, 3 + 1 = 4, etc.

Que esta *ordenación natural* se defina (matemáticamente), por lo general, en función de la estructura algebraica (2=1*=1+1, 3=2*=2+1, etc.), no quiere decir que sea la única; a lo sumo, la más habitual, y, desde luego, la más útil a efectos de aplicación ulterior. De esta forma, el cardinal -número de elementos- de una clase o conjunto es fruto del *recuento*: es -coincide con- el último número evocado en la serie numérica, enunciada al hacer corresponder elementos con números, iniciando la cuenta a partir de *uno*.

El concepto de *siguiente* o *inmediato siguiente* no es sencillo, en verdad. Implica que nos hallamos no ante un *orden vulgar* (en sentido matemático), sino ante un *buen orden*: llamamos *siguiente* al *primer elemento de todos los siguientes*. (CANTOR y PEANO están, tal vez sin saberlo, muy cerca de ZERMELO...) Algo tan simple como *contar* atañe a los fundamentos mismos de la Matemática Estructural.

No es fácil identificar ambas definiciones de número natural: como *ordinal* y como *cardinal* (¡que se lo digan a los estudiantes de Fundamentos del Álgebra!). Psicológicamente, responden a dos formas de observar la realidad. Una, analítico-sintética y con preponderancia del aspecto temporal (como ordinal); la otra, sintético-analítica o global y con preponderancia del aspecto espacial (como cardinal). Y el caso es que ambos enfoques funcionales son inseparables en la actividad perceptiva y mental.

Esta doble dimensión relacional interna de los números es indicio, a su vez, de aspectos psicológicos en conexión con el proceso de simbolización.

- Se enriquece ilimitadamente la disponibilidad de formas expresivas o simbólicas para un mismo número.

Tan válido es *6* como *5+1*, *7-1*, *siguiente a 6*, *(inmediato) anterior a 7*, *3 x 2*, *3 + 2 + 1*, *10 - 5 +1*, etc. El reconocimiento de estas equivalencias o sinonimias va ligado al reconocimiento de la situación u operación real que expresan; su reconocimiento y recuperación *automáticos* dependen de la práctica.

> Si el único soporte en el aprendizaje de los números es el orden, no solamente harán el "contar" exclusividad matemática, sino que dificultará la construcción del conocimiento al cometer importantes errores matemáticos. (FERNÁNDEZ BRAVO, 1995, 138).

- Una expresión determinada es una elección entre todas las *disponibles*. Dado que el contingente de éstas es ilimitado, hay que reducirlas a *las conocidas*, y aun *las más frecuentemente utilizadas* por el sujeto (alumno).

En este sentido, los *hechos numéricos* o *tablas de operaciones* son simples *listas de sinónimos ordenadas según ciertos criterios*. Las *prácticas de descomposición* 6 = 5+1 = 7-1 = 4+2 = 3+3 = 8-2 = 9-3 = 3+2+1... exigidas por algunos ejercicios y juegos aritméticos subrayan esta dimensión y seleccionan el dominio de expresiones *inmediatamente disponibles*.

- Dicha elección implica una decisión, que supone una estrategia de pensamiento, una respuesta a estados psicológicos o comunicativos.

Al presentar al alumno *4 5 . 7*, se le está reclamando la respuesta *6*, y no *5+1*, *seis* o un dibujo de puntos. Asimismo, en *seis = . + 2 = 8 - . = tres x .*, se diversifican las expresiones simbólicas para *6*. (Cabe, pues, hablar de una *comunicación Matemática-alumno*, como se apuntaba en la Sección 3.5, 6.) La modalidad de la práctica exige también del alumno ejercitar dichas estrategias.

- La representación interior es un puente entre pensamiento y lenguaje. El concepto de un número se refleja en variedad de representaciones simbólicas, tanto para los diferentes lenguajes como de expresiones sinónimas en cada uno de ellos; de todas, sólo una será, en principio, exteriorizada. (Una vez más, se concluye que *el pensamiento es más rico que el lenguaje*.)

- Recíprocamente, la elección simbólica orienta el pensamiento y restringe el ámbito de representaciones. Ya que, como se indicaba más arriba, la exteriorización ha supuesto una selección progresiva de representaciones simbólicas, hasta llegar a la definitiva. A partir de ella, las restantes quedan, momentáneamente, organizadas en esferas de *proximidad representativa*, que atraen en mayor o menor grado la atención del pensamiento.

VYGOTSKY resume estos dos aspectos: La estructura del lenguaje no refleja simplemente la del pensamiento; esa es la razón de que las palabras no puedan ser utilizadas por la inteligencia como si fueran ropas a medida. El pensamiento sufre muchos cambios al convertirse en lenguaje. (VYGOTSKY, 1934, 167; cfr.: Riviére, 1994, 85).

2º) La estructuración del conjunto numérico muestra la potencia combinatoria y operatoria de los números. Como símbolos eficaces, que expresan, a su vez, acciones reales.

El aprendizaje formal de la sucesión numérica de naturales graba en la mente del niño un cúmulo de relaciones; otro tanto puede decirse de los recuentos y ejercicios sobre la *tira* y *línea numérica*. Y análogas consideraciones merecen la memorización de las *tablas de operaciones* y *juegos aritméticos de ejercitación del cálculo*. Pero aprendizaje y práctica pueden ocupar lugares bien distintos en el itinerario didáctico, que responden también a concepciones psicopedagógicas e incluso de valoración simbólica y de la propia Matemática:

- La vía puramente simbólica -recordemos que pueden ser también gráficos e incluso objetos manipulativos convencionales- antecede a la práctica de operaciones reales; con el objetivo puesto en la dimensión formal y lingüística del número Suele responder a planteamientos asociacionistas (Sección 2.2.1) y de algunas escuelas constructivistas (Sección 2.2.2, Apartado B), aunque difieran en la concepción acerca de la naturaleza y génesis de las relaciones numéricas. El número, individual o estructuralmente, *tiene una realidad en sí mismo, independiente de lo físico*.

- La práctica simbólica se contempla como ejercitación fijadora y enriquecedora del contenido relacional de los números, ligándola incluso a situaciones tangibles. El aprendizaje de la ordenación y las operaciones asciende de la realidad al símbolo convencional; al efectuar/introducir la operación simbólica se procura el mantenimiento del nexo símbolo-realidad y operación simbólica-acción física, con intercambios quasi permanentes. La práctica simbólica persigue mostrar las ventajas de la manipulación simbólica sobre la física real, pero sustituye definitivamente a ésta sólo *a posteriori*. El número *expresa una realidad física independiente, de la que es tributario*.

Como es evidente, se da toda una gradación didáctica entre estas dos concepciones extremas.

Podemos extraer como conclusión, que el aprendizaje de la colección numérica y de las relaciones internas entre los números son objetivos de primer orden en la Didáctica de la Aritmética. Y dado que bastan unos pocos elementos para establecer dichas relaciones entre ellos, la tarea debe abordarse desde los primeros estadios: que el niño las descubra, y se habitúe a establecerlas entre las nuevas determinaciones numéricas, como algo inseparable de cada número, como algo *generado* y *generante*.

En otras palabras: los *pequeños problemas* pueden y deben hallarse en la base del aprendizaje numérico. Tan importante como *aprender los nombres* es *saber cómo se relacionan entre sí*, ellos (los números) y sus realizaciones (los objetos).

7.3 CUATRO LENGUAJES O FORMAS COMUNICATIVAS

El conjunto de los números es infinito. Si deseamos representar todos ellos, en no importa qué forma lingüística, debemos meditar previamente sobre qué características deben reunir estas *familias de signos*: antes de introducir o aceptar una representación o sistema de símbolos, conviene tener presente que una tarea fundamental de la didáctica consiste en el análisis de las propiedades didácticas de diversos sistemas simbólicos para comprender sus efectos. (BRISSIAUD, 1993, 219).

Intentemos concretar criterios que puedan guiar un análisis racional de las representaciones numéricas.

a) Criterios de simplicidad. Que también podríamos designar por *economía de pensamiento*. Se viene obligado a:

- Un número finito de *términos elementales* o *signos básicos* (morfemas). Conviene que coincidan con representaciones para ciertos números. Dado que, además, deberían ser aprendidos en las primeras fases, conviene asimismo que se correspondan con los números más sencillos o usuales.

- Un sistema de *reglas de composición* (morfosintaxis), que permitan obtener todas las representaciones a partir de dicho conjunto finito de términos. Deben ser claras, generales -con pocas o ninguna excepción-, reducidas en número y no alterar la representación de aquellos números que lo sean por *signos básicos*.

b) Criterio de *invariancia semántica*. Parafraseando a VERGNAUD: Es indispensable que en el curso de los cálculos relacionales las diversas formas simbólicas sigan reflejando los mismos objetos reales. En otras palabras, el criterio (semántico) implica ciertas invariancias en el funcionamiento del pensamiento; a saber, que los conceptos, las Imágenes, los signos y, de una manera general, todas las formas simbólicas, remitan a los mismos objetos. Esto se aplica a los objetos de todos los niveles lógicos (elementos, relaciones, clases, características, transformaciones, funciones, procesos, etc.).. (VERGNAUD, 1991, 254).

Puede muy bien ocurrir que el símbolo o signo (de carácter físico, sensible) mantenga un *parecido perceptual*; -conserva o refleja ciertos aspectos sensibles de la realidad significada: lo que VERGNAUD llamará *criterio semántico* (Ibidem, 253)-. Es deseable -sobre todo cuando se trabaja con niños muy pequeños-, pero no imprescindible: recordemos que el nexo *significante-significado* o *símbolo-referente* es ante todo de carácter convencional. El establecimiento de los nexos se facilita por el *parecido perceptual*, pero su consolidación definitiva es fruto de la práctica reforzadora del vínculo; si falta el primero, deberá intensificarse la segunda, por vía de reiteración intrasistema -enfoque asociacionista- o por vía de reconocimiento en situaciones multisensoriales -enfoque constructivista-.

En el orden de la composición de signos, el sistema debe hacer posible el expresar en términos de *operaciones racionales* entre signos las *operaciones reales* entre sus referentes. En alguna forma, lo que VERGNAUD designa por *criterio sintáctico*: *debe prestarse a operaciones; es decir, a un cálculo relacional* (ibidem.); bien que somete este *criterio sintáctico* al *semántico*, que nosotros devaluamos.

Deseable sería también la correspondencia inversa: que a *operaciones racionales* entre signos pudiera encontrárseles correlato real de acciones sobre objetos significados -incluido también en el *criterio sintáctico* de VERGNAUD-. Posibilitando así la investigación cuantitativa real a partir de la pura investigación simbólica -práctica habitual en Matemáticas-. Aunque sin olvidar que *la realidad es la "piedra de toque" del pensamiento*, correctora de dislates por excesos racionalistas, y no al revés: concebir la realidad conforme a las estructuras matemático-simbólicas, *"monstruos de la razón"*. Del éxito en el reconocimiento de tal correlato (natural o artificioso) depende, en buena medida, la confianza en el sistema simbólico manejado.

Sin embargo, esta *expresión de acciones reales*, o mantenimiento de la evidencia del nexo *realidad-símbolo*, está ligada a las características de la forma expresiva y aun de los casos particulares.

7.3.1 EN LA LENGUA HABLADA

Dada la pluralidad de expresiones estructurales para un mismo número, es imposible que se respeten en lengua hablada o escrita, salvo que se contara con los respectivos sinónimos.

Ni siquiera para la estructura secuencial: en general, la mayoría de las lenguas habladas contravienen esta relación para los números inferiores a la docena, aunque se muestre parcialmente en los cambios de decena: *veinte* y *veintiuno*, *cincuenta* y *cincuenta y uno*, etc..

Por ejemplo, en el español hablado, la expresión *cinco más siete* no se corresponde por evidencia con *doce*; sí para *diez más seis* con *dieciséis*. (En francés, también fallaría el segundo caso: *dix plus six* y *seize*.) Se trata de *un caso*, y muy particular: ¿qué decir de *once más cinco*, o de *doce más cuatro*?

Sin embargo, se cuenta, en general, con un aspecto sistemático decimal: *"veintiuno = veinte más uno, veintidós = veinte más dos... Ciento cincuenta y tres = cien más cincuenta más tres"*... Traslación del latín y aun lenguas anteriores, ¿cómo es que presenta una estructura decimal, que no supo reflejarse en la expresión simbólico-matemática hasta la difusión del sistema indo-arábigo?

Es de lamentar que se perdiera en castellano la nomenclatura latina para cantidades posteriores a *"diez"*. Al ser sucesiva -como en las restantes decenas-, nuestros escolares ahorrarían esfuerzo de retentiva, aumentarían su comprensión decimal y se facilitaría el cálculo mental: *"undecim, duodecim, tercidecim"*... (El japonés también goza de esta ventaja.) En el aula, por algún tiempo, se pueden admitir licencias: *"nueve, diez, diez y uno, diez y dos, diez y tres"*... Y, más tarde: *"dieciocho, diecinueve, diez y diez* o *dos diez*, o *dos veces diez"*...

Para la resta, en español, ni siquiera contamos con ejemplos. *"Dieciocho"* nada tiene que ver formalmente con *"veinte menos dos"*; aunque sí en latín: *"duo de vigint"i*; pero es un caso muy particular.

7.3.2 EL LENGUAJE SIMBÓLICO-MATEMÁTICO, O PROPIAMENTE NUMÉRICO

Los lenguajes simbólico-matemáticos nacieron, de hecho, con pretensiones de satisfacer tales necesidades estructurales. Merecen el título de *sistemas de numeración.* Veamos tres casos particulares: la numeración romana, la escritura maya y la decimal o indo-arábiga. La primera y la última, por razones de uso en nuestro ámbito cultural; la maya, por su curiosa completitud.

A) NUMERACIÓN ROMANA

Definición de *términos elementales.* Cuenta con siete signos básicos (I, V, X, L, C, D, M; que se corresponden con los números *uno, cinco, diez, cincuenta, cien, quinientos* y *mil,* respectivamente) y un signo auxiliar (la barra superior; con valor de millares).

Por lo que nos ha llegado, los símbolos carecen de *parecido perceptual.* Puede exceptuarse *I*, por su simplicidad.

Las reglas de composición morfosintáctica son claras, pero demasiadas, excesivas y algo complejas:

1°) Regla fundamental. La representación de un número se obtiene por adición de valores o yuxtaposición de signos: *dieciséis* XVI, *ocho* VIII, *doscientos treinta* CCXXX.

2°) Los signos I, X, C y M pueden yuxtaponerse hasta tres veces. V, L y D no pueden duplicarse en contigüidad, sino que deben sustituirse por el signo equivalente (X, C, M): *diez* X, y no VV; *ochenta* LXXX; *mil cien* MC, y no MLL. (¿Qué hacer cuando deban reiterarse cuatro veces *I, X* y *C*?)

3°) Los números se escriben en valor descendente de símbolos. Pero hay excepciones:

4°) Los signos I, X y C pueden afectar sustractivamente al signo de su derecha, supuesto que éste represente un valor superior: *cuatro* IV, *cuarenta y dos* XLII, *novecientos noventa y ocho* CMXCVIII. (Se resuelve, pues, el problema de la cuadruplicación, arriba planteado.) Puede evitarse -así se ha hecho con frecuencia-, ampliando la posibilidad de repetición de la Regla 2° hasta *cuatro veces*: *cuatro* IIII, *cuarenta y dos* XXXXII, *noventa y ocho* LXXXXVIII.

Debido a estas reglas, recibe el calificativo de *sistema aditivo-sustractivo.*

5°) Las cantidades superiores o iguales a *cuatro mil* se expresan mediante el correspondiente número de millares con barra horizontal superior: *cuatro mil* IV, *seis mil doscientos*: VI CC.

6°) Las cantidades superiores o iguales al millón se expresan mediante el correspondiente número de millones con barra superior: *seis millones* VI, *cuatro millones cien mil quinientos* IV CD.

Cuando queremos comprobar la correspondencia estructural *-invariancia semántica-*, descubrimos que ni siquiera se conserva la ordenación natural. La adición y sustracción, asimismo, son irrecognoscibles, salvo para un escaso número de situaciones. Las formulaciones generales de las operaciones aritméticas -reglas o algoritmos- resultan endiabladas.

El sistema de numeración romana carece de interés didáctico, aunque, por razones culturales, es inevitable su conocimiento no más tarde de la Educación Secundaria. Por contraste, contribuye a valorar el sistema ordinario.

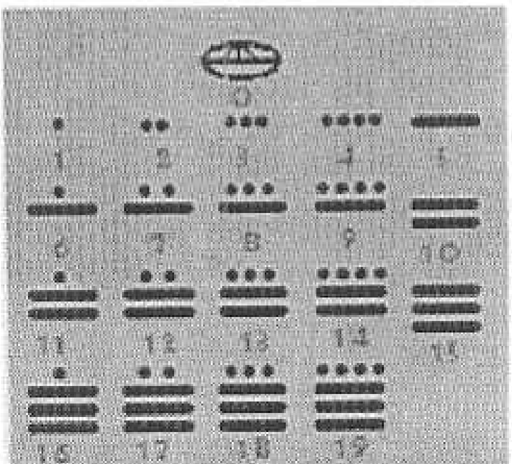
B) SISTEMA DE NUMERACIÓN MAYA

(Véase: P. IVANOV, *En el país de los mayas*, capítulo VIII; traducción de D. PRUNA, Plaza y Janés S.A., 3º ed. Barcelona-1974.)

Definición de *términos elementales*. Cuenta con dos signos básicos: *punto* y *trazo horizontal*, que corresponden a los números *uno* y *cinco* (o *mano*). Respetan, en principio, el *parecido perceptual*:

- *punto-uno* responde a la marca de un dedo punteando la arcilla o arena; *dos puntos*, marca de dos dedos, etc.

- *trazo horizontal-cinco*, resulta de intentar señalar *cinco puntos* con los dedos de una mano; la menor longitud del pulgar obliga a juntar estos, con lo que la marca resultante es la conjunción de las correspondientes marcas contiguas: un trazo continuo.

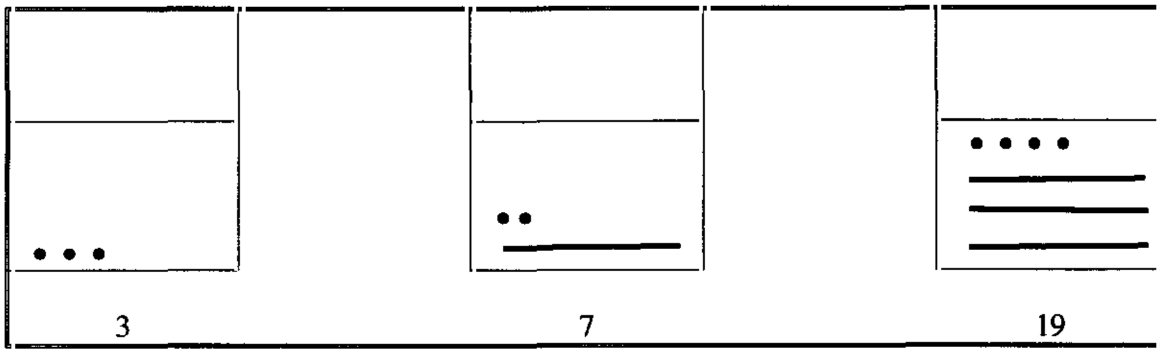


Las reglas de composición morfosintáctica son claras y simples:

1º) La representación de un número se obtiene por adición de valores.

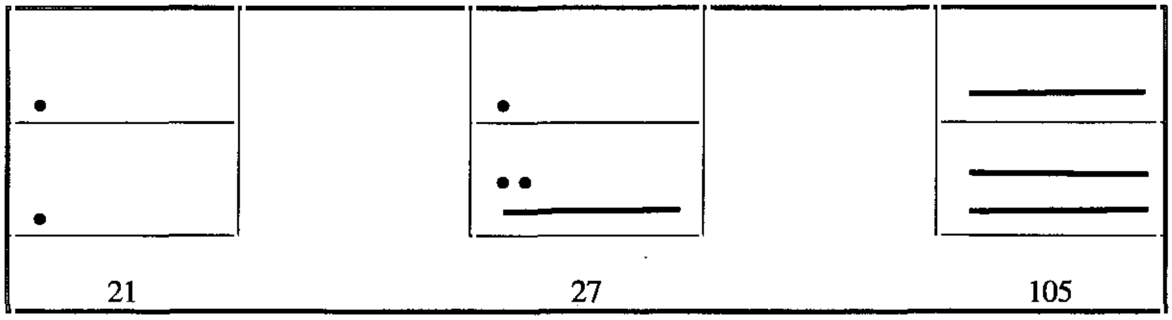
2º) Cada signo puede reiterarse en contigüidad hasta cuatro veces. *Cinco puntos* se sustituyen por un *trazo*.

3º) Los *puntos* reiterados se sitúan horizontalmente; los trazos, horizontales y en paralelo, inferiores éstos a aquéllos (fig. 7.3.3A).



(fig. 7.3.3A)

4º) *Cuatro trazos* (representando *veinte* u *hombre*), se sustituye por un *punto* en nivel superior (fig. 7.3.3B).

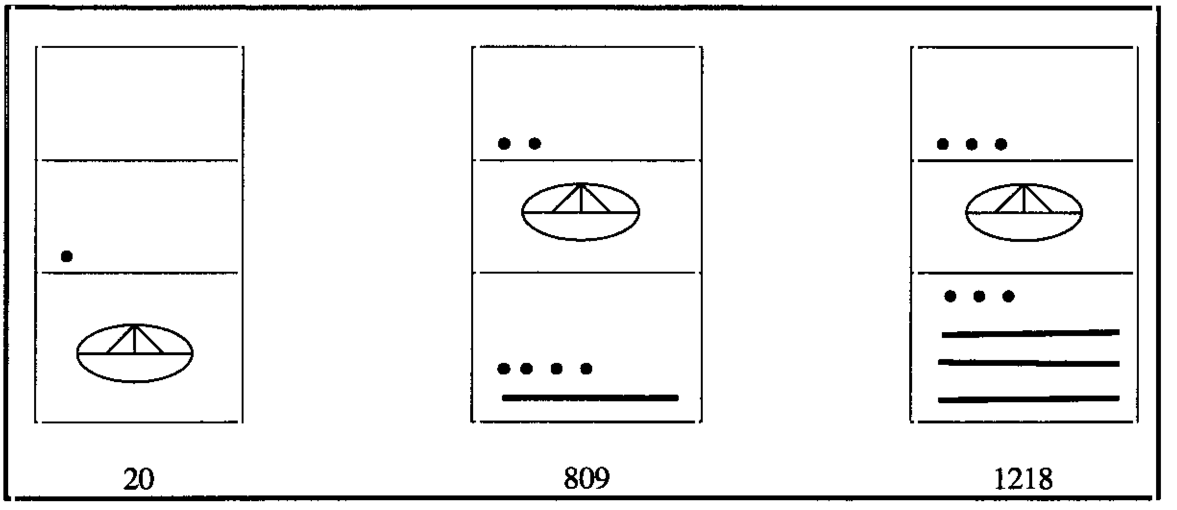


(fig. 7.3.3B)

5º) Los signos básicos toman valores en función del *nivel* o *posición* que se le asigne. *Punto*: 1, 20, 400... *Trazo*: 5, 100, 2000... Por lo cual se dice que se trata de una *escritura posicional*, con *valores absolutos* y *relativos* para sus símbolos elementales..

Como puede observarse, se trata de una escritura estrictamente aditiva para cada nivel. La multiplicación por *20* al ascender de nivel, la hace multiplicativo-aditiva. Juega tanto con la *base 5* en el paso de *puntos* a *trazos*, como en *base 20*, en los cambios de nivel.

6º) Representación del *cero*. La no aparición de *puntos* ni *trazos* en un *nivel*, se interpreta como *ausencia* de *valores relativos* en dicho nivel. Se han encontrado, no obstante, restos arqueológicos en los que el "0" cuenta con un signo propio (véase fig. 7.3.3C)



(fig. 7.3.3C)

Salvo para los *casos frontera* (20, 400, 8000), existe univocidad representativa entre números y expresiones. La ordenación natural se corresponde con la *altura* de la expresión o, en caso de coincidir, con el conjunto de *puntos y trazos superiores*. (Eludimos el análisis de correspondencia para la estructura aritmética, que ignoramos si interesaba mucho a los mayas, ya que su finalidad era eminentemene de carácter cronológico y astronómico; los últimos descubrimientos arqueológicos empiezan a alumbrar, sin embargo, que los mayas contaban con "reglas o algorítmos para los cálculos aritméticos".)

Es de destacar la existencia de *una representación para el 0*. De hecho, solamente la numeración maya y la indo-arábiga dan respuesta a esta necesidad representativa, aunque nos se conozca con exactitud su desarrollo algorítmico; y ello, quizás entre 500 y 1000 años antes que la segunda.

Se incluye aquí a título ilustrativo. En la Educación Secundaria, su conocimiento descriptivo puede contribuir a la apertura de horizontes culturales: desconfianza en las *soluciones únicas*, aprecio por civilizaciones antiguas o desaparecidas, ejercicio comparativo, importancia del *0*, etc.

C) SISTEMA DE NUMERACIÓN INDO-ARÁBIGA O DECIMAL

Aunque algunos investigadores elevan hasta los tiempos de Uhr de Caldea los antecedentes de este código numérico, lo único seguro es que su versión definitiva se sitúa en los siglos VII-VIII d. de J.C. en las fronteras del Islam con la India, atribuyendo a BRAMAGUPTA la *paternidad del 0.* A los árabes cupo la gloria de su difusión y entrada en Europa a través de España. Sería Gerberto de Aurillac (siglos IX-X; después: papa Silvestre II), quien lo descubriría para la cultura cristiana. Fibonacci, con su obra *Liber Abaci* (1202) haría una presentación sistemática, mostrando su potencia calculatoria, y las obras de Matemática Comercial de finales del siglo XV lo convertirían en tema obligado de estudio en las universidades europeas y abrirían el cauce a su popularización (cfr.: GÓMEZ, 1988, 51)

Definición de *términos elementales.* Cuenta con diez signos básicos: 0, 1, 2..., 9, que corresponden a *cero* y los recuentos naturales del *uno* al *nueve.* También son llamados *dígitos, cifras* o *guarismos.*

Algunos investigadores intentan derivar estos símbolos de letras iniciales de términos del sánscrito y lenguas locales de Divagari; con signos ideográficos, incluso. Pero para los europeos carecen por completo de *parecido perceptual.* Una introducción didáctica puede hacerlos corresponder, como puente, con representaciones gráficas de trazos o puntos.

Las reglas de composición son bien conocidas:

1º) Una cifra o símbolo aislado toma el valor convenido (*valor absoluto*).

2º) En una expresión de varios símbolos contiguos, cada lugar corresponde a *"diez veces"* el valor del lugar inmediato de la *derecha.* De derecha a izquierda: *"uno, diez, cien, mil"...* Se conocen como *órdenes de unidades*: unidades simples, decenas o *unidades de segundo orden,* centenas o *unidades de tercer orden,* millares o *unidades de cuarto orden...,* y se corresponden con lo que después se llamarán *potencias de diez.*

3º) En dichas expresiones de varios símbolos, cada uno de ellos representa unidades del orden correspondiente al lugar que ocupa (*valor relativo*). Un *2* en el lugar de la derecha, se estima con valor *dos*; en el segundo lugar (unidades de segundo orden), por *"veinte* o *dos decenas"*: 20; en el tercero (unidades de tercer orden), por *"dos centenas* o *dos cientos"*: 200... (¿Por qué no emplear esta nomenclatura en la iniciación del vocabulario numérico: *"dos cien-tos, dos diez-es, dos mil-es*?"...)

Se trata, pues, de una *escritura posicional,* aditivo-multiplicativa o polinómica; ya que: 1998 = 1x1000 + 9x100 + 9x10 + 8.

4º) El símbolo *0 -cero-* designa la inexistencia de *unidades* en el *orden* que ocupa. Se evitan así equívocos entre *2* y *20, 23* y *203,* etc. (El *espacio en blanco,* al estilo maya, introduciría discontinuidad en las expresiones, cuanto menos.)

La *invariancia semántica* apenas si se manifiesta en la ordenación de números superiores a *nueve*: como en el caso de la numeración maya, rige el tamaño -aquí, la longitud-; pero en caso de igualdad, debe acudirse a la ordenación convencional de los nueve primeros números para la cifra de la izquierda.

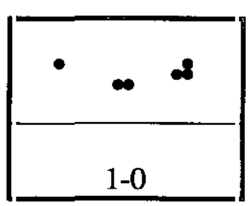
La invariancia con la estructura aritmética es -salvo para algunos casos de adición- poco menos que inexistente. Sin embargo, y en especial la adición y multiplicación siguen reglas muy sencillas a partir de los casos elementales o *hechos numéricos.*

Estas *reglas de extrapolación* o *aplicación* de los *hechos numéricos* a expresiones de varias cifras es lo que se ha dado en llamar *algoritmos aritméticos*, que tanto nos interesan aquí, y que han hecho de la representación indo-arábiga, por guarismos o decimal, el más poderoso instrumento aritmético, objeto por excelencia de su enseñanza.

La Aritmética resultante es tributaria -por no decir esclava- del *0*; analizada con detalle, sin *0* no cabría escritura posicional, ni ordenación espacial de cantidades, ni algoritmos tan simples como los que se han empleado desde hace cuatro siglos...

El Sistema Braille proporciona al ciego una representación numérica análoga a la del vidente. No plantea ni más ni menos dificultades de aprendizaje que el código alfabético (alfa-numérico). Pero, históricamente, ha tropezado con ciertos inconvenientes.

El carácter convencional dio lugar a diversidad de expresiones locales. Si bien LOUIS BRAILLE (1826) eligió como dígitos del *1* al *9* símbolos de su *cuarta serie* (símbolos de la *primera serie* -de la *a* a la *i*- incorporando el *punto 6*), distintos países y aun instituciones de o para ciegos se sirvieron de otros. En el caso de España e Hispanoamérica, emplearon el llamado *prefijo de número* (puntos 3, 4, 5 y 6), antecediendo a los signos de la *primera serie*; en caso de números de varias cifras, sólo se antepone al primer dígito. (fig. 7.3.3D).



(fig. 7.3.3D)

Aunque la mayoría de países e instituciones aceptan hoy la Notación Matemática Braille Unificada), coincidente con la española, todavía persisten las disensiones, que ni siquiera el Comité Mundial para el Bienestar Social de los Ciegos (WBWC), organismo dependiente de la UNESCO ha sido capaz de disipar.

Esta Notación Unificada ha tropezado, además, con un inconveniente no pequeño: la incorporación al *software* de los periféricos de ordenador en Braille. ¿Cómo resolver el problema de expresar mediante dos signos un único carácter ASCII? Podría resultar que una línea que incorporara números ocupara más de 80 caracteres... Debido a ello, ha sido preciso elaborar un código *Braille de 8 puntos*, utilizable sólo en dichos periféricos. Tampoco para este código existe unanimidad.

Tal vez alguien se lamente de que las representaciones numéricas Braille carezcan de *parecido perceptual* con la escritura *en tinta*, o que no reflejen una *coherencia lógico-matemática* (de tipo cardinal: 1 *un punto*, 2 *dos puntos*, 3 *tres puntos*...; o algún tipo de algoritmo binario). Sería innecesario, por no decir inútil: entendemos que el Braille se percibe como *formas táctiles*, no se analiza en sus puntos-elementos (para más información: FERNÁNDEZ DEL CAMPO, 1995).

Su aprendizaje consiste, como para el niño vidente, en la asociación simbólica o forma-concepto. El itinerario didáctico será en todo análogo, si bien el alumno precisa de un entrenamiento inicial para la percepción y reconocimiento de *formas Braille*; nada se añade, pues se supone que simultanea el aprendizaje numérico con el de la lecto-escritura de textos.

El alumno deficiente visual, en cambio, se servirá de su resto de visión para el trabajo personal con los medios ordinarios -escritura *en tinta*-, sin más que adaptarlo a las características peculiares. Las dificultades, tal vez se sitúen en el campo de la comunicación interpersonal y tareas de aula.

7.3.3 EL LENGUAJE DE REPRESENTACIONES GRÁFICO-GEOMÉTRICAS

Nos referimos, en concreto, a toda composición bidimensional: puntos, trazos, diagramas, figuras, dibujos, fotografías, etc. Deben incluirse aquí el *software* interactivo -programas informáticos y vídeo-disco- en cualquiera de sus fórmulas de presentación: bi o tridimensional, *realidad virtual*: sea mediante el *ratón*, sea mediante el teclado ordinario, *tablero de conceptos* u otro periférico, exigirán del alumno tareas cinestésicas relativas a lugares localizables en un plano.

Son en sí mismos objetos concretos, pero funcionan simbólicamente porque representan algo distinto de ellos mismos. (MILLAR, 1997, 288). Sin embargo, resalta una diferencia que da lugar a dos tipologías principales:

a) Representaciones figurativas; fotografías y cromos, dibujos, caricaturas y figuras esquemáticas.

b) Representaciones no figurativas o convencionales; puntos, trazos y líneas, figuras geométricas, diagramas y esquemas, etc.

(Fijas o animadas; caso de algunos programas informáticos.)

Sin embargo, la separación no es clara: puede bastar una ilustración significativa, para transformar una representación convencional en otra figurativa: basta poner ojos, boca y unos trazos a guisa de rayos a un círculo, para recordarnos un sol... ¿Quién distingue un círculo de la representación figurativa de una canica? ¿qué niño se rebela ante la representación de ovejas en su redil por puntos encerrados en una cuerda, cuando se está hablando de aquéllas? También hay caricaturas y dibujos que, fuera de su autor, exigen una fantasía algo más que infantil para descubrir su referente (léase: *El Principito*, de Saint-Exupéry).

Aunque refiriéndose al dibujo figurativo, MILLAR (1975c, 1990b) entiende que el principal problema que el niño tiene que resolver en el dibujo, aunque no el único, es cómo trasladar tres dimensiones a dos. Para expresar contractivamente el mundo y sus percepciones tridimensionales en un plano. Es necesaria la utilización de símbolos adecuados para representar las partes de los objetos, así como procedimientos que conecten dichas partes, e instrumentos para localizar estas partes en el espacio bidimensional. (MILLAR, 1975e). Es decir: debe adoptar un convenio representativo consigo mismo, un símbolo para cada una de las partes que quiere recoger.

> Las analogías con el lenguaje comparten ciertamente algunos aspectos pero mientras las palabras son arbitrarias, los símbolos del dibujo -habla siempre de "dibujo figurativo"- no son arbitrarios. Existe una comprensión tácita de que las producciones tienen que parecerse a las percepciones. Esto tiene un peso importante sobre los problemas que el niño tiene que solucionar en sus dibujos. (MILLAR, 1997, 292).

Esta *comprensión tácita* o condicionamiento fundamental y sus complicaciones técnicas de realización desaparecen -podríamos decir que por completo- en las representaciones no figurativas. Los elementos pictóricos o morfemas gráficos se reducen al mínimo, tanto en variedad como en dificultad de ejecución, así como su sintaxis. Por otra parte, son las que más nos interesan a efectos didácticos, por su simplicidad y eficacia comunicativa, y por su sencillez de ejecución. Persiste, en cualquier caso, el carácter simbólico, de convenio lingüístico, con la consiguiente actividad mental (cfr.: MILLAR, 1997, 311).

El diseño de un sistema simbólico simple para el conjunto de los números naturales, no es difícil; ni en la asignación de *elementos básicos*, ni en la redacción de sus *reglas de composición*. Las dificultades surgen cuando quieren respetarse las *invariancias semánticas*; en particular, las relativas a la estructura algebraica.

Algunas expresiones gráficas son concordes con la estructura secuencial o aditiva. En una representación por puntos o trazos, por ejemplo, el número *6* expresado por *6 puntos* -resp.: *trazos*- sí resultaría del número *5* (*5 puntos*) incrementado en un punto, o de *dos veces tres puntos*; aunque no como representaciones superponibles, ya que las configuraciones no coinciden, salvo que se consideren dinámicas. Pero las expresiones que incluyan la resta o división requieren soluciones artificiosas.

Matemáticos y educadores vienen en ayuda de las deficiencias expresivas en los distintos lenguajes. Bien sea haciendo propuestas concretas: los diagramas de VENN y KARNAUGH, el lenguaje de flechas, situaciones gráficas y geométricas diversas, etc.; o diseñando *materiales estructurados*. Los elementos gráficos admiten estructuraciones, algunas de ellas empleadas desde bien antiguo.

- *Constelaciones de puntos*. Al organizar o estructurar espacialmente un conjunto de puntos, se configura una forma que se graba como asociada al número, sin necesidad de recuentos. Es el caso ya mencionado de los valores de un dado o del dominó.

- *Esquemas en trazos*. Asimismo, los trazos pueden organizarse espacialmente o en formas convenidas, dando lugar a configuraciones fácilmente recognoscibles. Un caso típico es el cuadrado con una o dos diagonales.

EGEA (1994) propone diversas variantes de representación gráfica, tendentes todas ellas a introducir el sistema de numeración decimal: *barras tachadas*. (el *diez* se expresa como nueve trazos traspasados por un décimo), *haces* (diez trazos se agrupan en un *haz* o *gavilla*; su expresión más simple sería *X*), cuadrados o círculos de superficie proporcional, numeración romana simplificada, etc. (EGEA, 1994, 48-49).

Un modelo que cumple con satisfacción los requisitos deseados es la llamada *recta numérica* (semirrecta, más bien) -con independencia de la ilustración simbólica-. Responde a la estructura secuencial de orden total, y, mediante interpretación dinámica, permite visualizar expresiones sinónimas. El correlato unidad a unidad con formas manipulativas se obtiene merced a la correspondencia de distribución *elemento-segmento unitario*, semejante al *ensartado de cuentas o fichas*.

Puede considerarse como una *estructura de trazos* en prolongación. Al ser dibujada previamente, y exigir tan sólo señalamientos, estaría más próxima a la expresión manipulativa que gráfica.

A pesar de su simplicidad morfológica, implica un salto cualitativo en la simbolización: los puntos o segmentos en la recta determinan *posiciones*, que son la auténtica representación numérica, junto con los desplazamientos: una *posición* o *número* se identifica con el *desplazamiento desde el origen o 0-*. Su potencia es tal, que servirá de soporte para el estudio de los conjuntos numéricos habituales: números naturales -como semirrecta-, enteros -como recta-, racionales y reales; para estos últimos, resultará una verdadera definición (véase: PAPY, 1972), completa y adecuada al tratamiento funcional.

Todas estas representaciones son ciertamente sencillas: son formas convencionales, aunque con notable *parecido perceptual*. Son un recurso más, que introduce variedad en el quehacer de aula y que facilita la comunicación, pero de escasas posibilidades operativas: son prácticamente inmanejables para números de un cierto valor (superiores a la decena).. No hay, pues, por qué ligarse en exceso a ellas: preferible es dedicar los mejores esfuerzos a introducir y fijar los guarismos ordinarios.

El alumno con visión deficiente podrá dibujar y observar representaciones gráficas sin otra limitación que la adecuación a su resto visual: tipo de trazo y contraste de fondo, iluminación y distancia convenientes, etc. Estas características gráficas, sin embargo, es posible que dificulten -en cuanto observador- una comunicación fluida con los compañeros o el contraste con las representaciones sobre el tablero.

Por el contrario, el alumno ciego total, que deberá servirse exclusivamente de su sentido del tacto, tropezará con dificultades graves. Sus problemas estarán no tanto en la producción de expresiones gráficas -que es factible gracias a la *lámina de caucho-* como en el reconocimiento de sus formas, número y configuración. Tratándose de alumnos muy jóvenes o que hayan perdido recientemente la vista, sus destrezas hápticas -tanto exploratorias como de elaboración de perceptos- se encuentran en fase de desarrollo y consolidación, insuficientes para este tipo de tareas. El *software educativo* gráfico es absolutamente inaccesible -inexistente, deberíamos decir-.

Para él, serán un elemento motivante, que diversifican las situaciones cuantitativas y fomentan la comunicación -por la semejanza d expresión con los compañeros, si se trata de un alumno ciego en un grupo de videntes-. Cuando las representaciones son elaboradas por el alumno, también pueden estimarse incluso como elemento reforzador, -por la motricidad que comporta la exteriorización de imágenes-. En cualquier caso, lento y de muy escasa eficacia didáctica.

7.3.4 MANIPULACIÓN

Las expresiones gráfico-geométricas y manipulativas -en general- suelen encuadrarse en el grupo de los *modelos intuitivos* (FISCHBEIN, 1977) o *representaciones icónicas* (LESH, BEHR y POST, 1987; estos autores denominan *representaciones pictóricas* a lo que aquí llamamos *expresiones gráfico-geométricas*, reservando el término de *representaciones gráficas* para las simbólico-matemáticas)

Casi podría decirse que los métodos de enseñanza-aprendizaje de la Aritmética se califican dando lugar a dos grandes grupos, según que empleen o no material manipulativo. Y decir *manipulativo* es decir *manipulable por el alumno*, quien lo tiene en sus manos, lo cambia de posición y configura a su antojo, sin más limitaciones que las físicas del material, dando lugar a una variedad ilimitada de situaciones perceptivas. El *software interactivo* se ha incluido entre los recursos gráficos, precisamente por razón de su rigidez relativa.

Algunos profesores se justifican alegando que *el material "es caro y sirve para muy poco"*, "que *la premura de tiempo y la longitud de los programas impiden algo que, si bien es recomendable, no es imprescindible"*, que *"también los medios gráficos son manipulación*, que *basta con mencionar las situaciones por medio de la palabra o el dibujo para que al alumno se le hagan presentes, como si las tuviera ante sí, en sus manos"*, que...

(Pero, ¿es todo esto cierto? ¿Es así para todos los alumnos? ¿No se trasluce un deje de desconocimiento, comodidad o rutina?...)

En el extremo opuesto, se encuentran quienes piensan que La manipulación de objetos concretos forma la base del conocimiento humano y, en particular, de las matemáticas. Las acciones físicas se interiorizan y generalizan en relaciones y conceptos, a los cuales se les puede asociar símbolos. La geometría del mundo físico puede tocarse y verse; está a nuestro alrededor. El niño experimenta observándola, manejándola y alterándola. (GRUPO 0, 1997, 1, 27).

> No hay que olvidar que la manipulación, la transformación de la realidad mediante acciones y operaciones es necesaria para llegar a captar las cualidades de los objetos y las relaciones entre ellos, lo cual hace posible el desarrollo del pensamiento lógico-matemático. Sin un material sobre el que actuar -cambiando su posición o su cantidad, comparando, operando en suma- es muy difícil para el niño llegar a la comprensión y aplicación de las nociones matemáticas. (...) La mentalidad infantil es esencialmente concreta y actúa sobre cosas concretas, no sobre abstracciones o reglas formales, a las que podrá y deberá llegar más adelante siempre que se le haya proporcionado la base de actuación sobre el material que precisa. (FERNÁNDEZ BAROJA, LLOPIS y DE PABLO, 1991, 117).

En ocasiones, las críticas han llegado a ser ácidas: Si al niño no se le hace adquirir mucha práctica en combinar y disgregar conjuntos de elementos concretos, cuando está recitando combinaciones numéricas lo único que hace es emitir ruidos correctos.(BROWNELL, 1928, 211).

En el proceso de la construcción de las matemáticas, y de cualquier lenguaje, hay una evolución desde un estado manipulativo, práctico y concreto a otro simbólico, abstracto y formal. El lenguaje cotidiano es adquirido por el niño con facilidad (¡y en -un intervalo de tiempo preciso para cada uno!) en el entorno que le rodea y le proporciona infinidad de ocasiones. En el caso de las matemáticas, este ambiente es más difuso, e incluso inexistente. La escuela debería iluminarlo y proporcionarlo.

Por ello, habría que contar con abundante material, estructurado o no, y proponer situaciones en las que los niños puedan manipular objetos concretos y realizar experiencias que despierten, desarrollen y agudicen su intuición matemática. (GRUPO 0, 1997,2, 11).

GÓMEZ ALFONSO (1988) nos recordaba cómo el National Council of Mathematic's Teachers (USA) viene insistiendo sobre la importancia del material manipulativo didáctico desde los años 40, y, para subrayar la vigencia de tal recomendación, dedicaba a tal propósito un número especial de su órgano de comunicación *The teaching of Mathematics* (febrero, 1986) (cfr.: GÓMEZ, 1988, 163). En España, contamos con el ejemplo y la obra de P. PUIG ADAM, de quien puede decirse con justicia que labró un surco profundo de modelos y sugerencias (cfr.: PUIG ADAM, 1956, 1960).

Existe una poderosa razón de orden psicológico: el niño, desde los primeros meses de vida, tiende a tomar los objetos en su mano. El tacto es el sentido fundamental (...), es el que educa a la vista, debiéndole el conocimiento de las propiedades esenciales de los cuerpos (RODRÍGUEZ PLACER, 1929, 97). *El tacto es quien educa la vista, y no al revés: confirma sus percepciones, desvaneciendo ilusiones y espejismos.* Podría resumirse: *"en la escuela, mírese sólo lo que no pueda tomarse en la mano"*; como versión plástica del proverbio chino: *"Oigo, y olvido. Miro, recuerdo, hago y comprendo"* que el "School's Council Nuffield Project" tomaría como *slogan* (*"I do, and I undestand"* 1977a).

Y otra, de orden psicopedagógico: Los conceptos espaciales son muy importantes para la educación matemática: nuestros modelos de los números, de las operaciones, del sistema posicional, de los algoritmos, son invariablemente visuales y, por ello mismo, espaciales. Incluso algunas de nuestras ideas algebraicas están basadas en diagramas. Consecuentemente, una comprensión errónea de algunos conceptos numéricos, algebraicos.. va unida a una mala comprensión de los modelos geométricos que se han usado para ilustrarlos o a una carencia de estos modelos. (GRUPO 0, 1997, 1, 26).

Estos *modelos visuales* son, ante todo, *modelos espaciales*. La vía de percepción/codificación no es exclusivamente visual: las imágenes motoras pueden proporcionar la base para que se produzcan medios no-verbales, no-visuales, de codificación de la información (espacial) en la memoria temporal. (MILLAR, 1997, 318). Es más: los niños pequeños videntes necesitan información redundante en la mayor parte de los aspectos de las tareas, así como aprendizaje asistido. (ibidem.); la percepción háptica -tacto-cinestésica-, por tanto, adquiere un valor de quasi-necesidad, algo más que conveniencia de refuerzo sensible o actividad motivante.

Ante la imposibilidad del alumno ciego para la simple observación de la realidad por vía visual y sus dificultades para aprovechar eficazmente las representaciones gráficas, no podemos por menos de alinearnos con este segundo grupo, casi de forma radical.

Simplificando, los materiales manipulativos empleados en los procesos de iniciación aritmética responden a dos grandes tipos:

a) Material de simple iniciación aritmética. Sea al concepto de número, sistema de numeración, introducción a las operaciones aritméticas y conjuntistas. Se distinguen dos tipos:

- *Materiales no estructurados.* Utilizados desde tiempo inmemorial: guijarros -*cálculos*-, cuentas, legumbres, palillos, botones, fichas, etc.

Se pretende, con ellos, configurar situaciones físicas simples y cotidianas que refuercen o sirvan de soporte significativo a la transmisión de los conceptos elementales. Sus posibilidades lúdicas y de investigación son muy escasas.

Han constituido el único *material manipulativo* en Didáctica de la Aritmética hasta el siglo pasado.

Incluso pueden establecerse *grados de simplificación sensorial* -mal llamados de *grados de abstracción*-, en el empleo manipulativo de *materiales no estructurados* u objetos simples:

. *materiales reales*: los propios niños, pequeños juguetes, figuras, elementos de trabajo, etc.

. *materiales figurativos*: cromos o fotografías, etc.

. *materiales no figurativos*: fichas, cuentas, legumbres representando objetos, etc.

> La realidad queda progresivamente esquematizada y las relaciones entre las acciones sobre estos elementos y sus expresiones verbales van quedando despojadas de características irrelevantes. (MAZA, 1989, 19-20).

- *Materiales estructurados.* El ejemplo más representativo son los *Bloques lógicos* de Z. DIENES (1960).

Su propósito es el de facilitar al alumno aprehender intuitivamente el significado del número y de las estructuras aritméticas y su lenguaje, conservando los nexos realidad-términos en sus primeros resultados. Están dotados de atributos sensibles variados y motivantes, invitando al juego. Responden en esencia a una concepción de la Matemática como cuerpo de doctrina y reglas de pensamiento, más que a una Matemática como instrumento para la solución de problemas tangibles y cotidianos.

La adaptación al empleo en la enseñanza de ciegos no ha pasado del ensayo, apenas incorporados a la práctica de aula, y sin reflejo en la literatura.

Las posibilidades calculatorias de unos y otros no suelen exceder el rango numérico de la veintena. Inician al cálculo mental -con soporte verbal o físico-imaginado-, y, según itinerarios didácticos, son un medio aceptable para introducir los correspondientes simbolismos gráficos, aunque sin justificar la escritura posicional.

En un intento de ampliar el campo de aplicación del *material no estructurado*, se proponen artificios que lo *estructuren*, respecto del criterio de *agrupamiento decimal* -u otra base numérica-. Es el caso de los *haces de 10 palillos* sujetos por gomas -que propone EGEA (1994)-, las *cajas de compartimentos* (DECROLY, 1865; EGEA, 1994; etc.). Pero esta *estructuración* es sobrevenida, no intrínseca al material.

El avance decisivo en posibilidades calculatorias precisa de la representación posicional; por lo que este tipo de materiales frecuentemente no sobrepasa el papel de *material auxiliar*, con muy bajo nivel de aprovechamiento y continuidad.

b) *Material de iniciación a la escritura y cálculo posicionales.* Del que nos ocupamos en la próxima Sección.

En nuestros días, un poderoso enemigo acecha al empleo del material manipulativo: las nuevas tecnologías, con el ordenador a la cabeza. Con su riqueza de estímulos sensibles: color, música y efectos especiales, voz, animación, transportabilidad y comodidad de uso... Aunque parezca ignorarse su rigidez relativa, sus efectos condicionantes de la conducta, sus consecuencias absorbentes y aislantes..., sus riesgos de ludopatía. Los hemos calificado como *recursos gráficos*, y, además, podemos todavía hoy -y por bastantes años- olvidarnos de ellos, por cuanto se carece de investigaciones en busca de versiones accesibles al alumno ciego total.

> Además, los materiales por muy estructurados que sean, bonitos o divertidos, no realizan ninguna labor didáctica por sí mismos. Es imprescindible la actuación del profesor y ésta depende de su habilidad, información, conocimiento, estilo, gusto personal, fines que persiga y, cómo no, de las características de los alumnos. Todo ello provoca inseguridad e insatisfacción en el primer intento, haciendo que muchos abandonen con un sentimiento de fracaso. (GÓMEZ, 1988, 164).

Tal vez se encuentre aquí la clave del escaso empleo de materiales al que nos referíamos más arriba: características del material, de los alumnos y del profesor.

> Un tema muy importante es el de llegar por la vía experimental a una educación matemático-empírica, o sea, llegar a los modelos abstractos por la vía de los modelos concretos, recuperando de este modo una vía experimental que nunca se hubiera tenido que perder. Y eso no significa pasar al extremo de limitarse a las actividades de laboratorio. Hay una fase de planteamiento, resolución, discusión, etc., que va más allá de la primera aproximación sensible. (ALSINA y OTROS, 1996, 33).

El material manipulativo, por su proximidad multisensorial al alumno, por las exigencias atencionales y participativas, por su proyección y demanda inquisitiva, por su capacidad para el ensayo, por su facilidad de contraste de resultados y comunicación interpersonal, abre la puerta a la investigación activa del alumno. El material manipulativo es un buen medio para la *Matemática Experimental.*

* * *

La pluralidad de formas expresivas alcanza, como se mostraba más arriba, al mundo de los números. Cultivar estas presentaciones en todas sus formas tiene un múltiple interés didáctico:

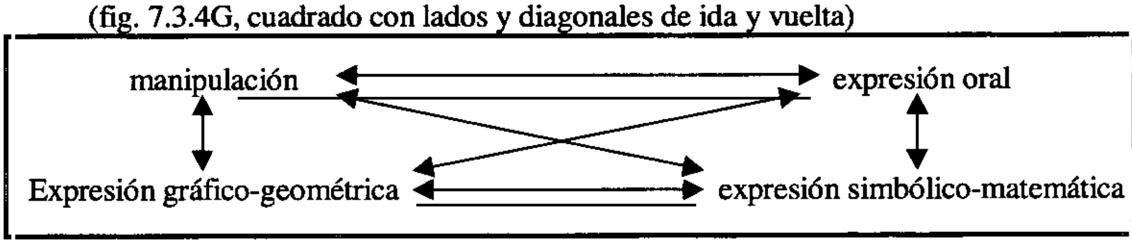
a) Contribuir a facilitar los procesos de simbolización en el alumno. Ofreciendo gradaciones en el modelo de *internalización* de acciones y paso al símbolo abstracto, propugnado por las escuelas constructivistas:

Acción → verbalización → representación (gráfica) → Símbolo abstracto (?)

Manipulación → expresión oral → expresión gráfico-geométrica → Expresión simbólico-matemática

Permitiendo también alterar esta linealidad, para ofrecer un modelo flexible, que zigzaguee de una a otra forma expresiva, en coherencia con el modelo general propuesto para los itinerarios didácticos en la Sección 3.3 (fig. 7.3.4G); conforme a las capacidades actuales del alumno, y cooperando en el desarrollo y fortalecimiento de las más endebles (recuérdese las observaciones formuladas al final de la Sección 7.3.3, a propósito de las dificultades esperables en el alumno ciego de corta edad respecto de la exploración/representación gráfica).

(fig. 7.3.4G, cuadrado con lados y diagonales de ida y vuelta)



Juego expresivo que puede aplicarse número a número, o para conjuntos reducidos de éstos, cada uno de los cuales podría ser introducido en una u otra forma de lenguaje, no necesariamente siempre la misma. El cúmulo de combinaciones es ilimitado, adaptable a las características del alumno, disponibilidades de material y conveniencias didácticas.

b) Desarrollar las capacidades comunicativas del alumno -en su doble vertiente interpretativa y expresiva-, como entrenamiento para las actuales formas de comunicación en las sociedades desarrolladas.

Llama la atención la frecuencia con que suelen coincidir las dificultades en Cálculo Aritmético y las de orden lingüístico. Así lo entienden la práctica totalidad de los autores, en especial los preocupados por problemas de *reeducación* o *remediación* de alumnos con dificultades de aprendizaje (JAULINE-MANNONI, 1965; MIALARET, 1984; BORRELL-MAISONNY, 1975; FERNÁNDEZ BAROJA, LLOPIS y DE PABLO, 1991; LUCEÑO, 1993; EGEA, 1994).

La Didáctica busca con ahínco la armonía entre percepción sensible de la realidad física -visual o háptica-, lenguaje natural -habla- y lenguaje simbólico escrito -en nuestro caso, preponderantemente, el de los guarismos. Surge así un *triángulo de iniciación* sobre el que se construirá -o mejor: debería construirse- el edificio aritmético. El cuarto pilar, la representación gráfico-geométrica en esquemas o diagramas, queda descartada en nuestro estudio dirigido a alumnos ciegos, por las dificultades que plantea en las primeras etapas educativas, tal como observábamos en el Apartado 7.3.3.

Como primeros frutos de la actividad didáctica auténticos cimientos de la labor constructiva ulterior-, la expresión/representación de cantidades que sobrepasan la decena. Con su cohorte de consecuencias u Objetivos parciales: valor absoluto de las cifras, órdenes de unidades, lectoescritura de cantidades -dentro de un cierto rango-, papel del *0*, seriaciones numéricas, comparación/ordenación de cantidades. Todo aquello que la mayoría de los autores designan bajo el epígrafe de Pre-Cálculo.

c) Facilitar la comunicación y debate entre los alumnos. En consecuencia, modificar las propias expresiones, y concepciones incluso, para hacerlas comprensibles a los demás.

d) Dotar al alumno de instrumentos operativos. Ya que cada una de las formas lingüísticas puede que sirvan -servirán, de hecho- como soporte, en cierto grado, a las diferentes operaciones aritméticas, diversificando aspectos de su significado y facilitando el cálculo efectivo y la aplicación a situaciones concretas.

La Matemática cuenta con un lenguaje propio, expresable en cualquiera de las formas comunicativas; aunque este lenguaje, de carácter instrumental, no agota su contenido conceptual ni técnico. La Aritmética, como parte suya, cobra también su parcela lingüística. Ponerlo a disposición del alumno, con métodos expositivos o reconstructivos, es misión de la Didáctica.

e) Presentar facetas diferentes del significado objetivo del número y sus nexos.

Tanto la lengua natural como el cálculo suponen *la expresión* -de una serie de conceptos- en un lenguaje específico, sin cuyo conocimiento no se puede trabajar. Las alteraciones a que se refieren no son meros trastornos funcionales o de desarrollo, sino trastornos de simbolización, más profundos. Nos aventuramos a culpar de muchos de estos trastornos al intento pedagógico de asociar la representación simbólico-matemática a la verbal; es decir: un símbolo a otro símbolo, desvinculándola de la realidad física y de una representación interior sugerente.

f) Mostrar el carácter convencional de los símbolos numéricos, y, por extensión, de todas las formas de lenguaje.

Algunos autores (DIENES) llegan a proponer la adopción provisional de símbolos numéricos -guarismos- mediante propuesta de los propios alumnos; pero está claro que: 1) los guarismos corrientes están por doquier, y la mayoría de los niños ya los conocen (aunque ignoren su significado), y 2) el ejercicio de tan pequeña libertad no compensa el despilfarro de energías de un doble aprendizaje..

7.4 MATERIAL DE INICIACIÓN AL CÁLCULO POSICIONAL

La posibilidad de pensar y representar los números con material concreto estructurado facilita la comprensión y empleo del sistema de numeración. No conviene olvidar que el aprendizaje de los números directamente sólo se realiza con los veinte primeros: el resto del aprendizaje numérico se realiza mediante el aprendizaje del sistema. (GÓMEZ, 1988, 58).

Ciertos *aparatos estructurales* han alcanzado escasa difusión, con independencia de su valor didáctico; es el caso del de TILLICH (1780-1848), FROEBEL (1782-1857), STERN (1953) -véase: ORTON, (1990)-. Otros, sin embargo, han logrado gran popularidad: las *Regletas de CUISENAIRE* (1934) -promocionadas por GATTEGNO (1963)-, los *Bloques Multibase* de DIENES (1961) y, en ciertos ambientes, el *Minicomputer* de PAPY (1970) y las *regletas con tapa* -véase: BRISSIAUD (1993)-. En España, no podemos dejar de citar las *Máquinas* de AIZPÛN, y la *calculadora posicional* de R. GARCIA SOLANO.

Importancia creciente tienen la familia de los *ábacos*, entre los que cabe destacar:

- el clásico *Ábaco Horizontal* de MONTESSORI (1870) -precursor, en la enseñanza occidental-,

- el multisecular *Sorobán* (*Ábaco chino-japonés*) y, por último,

- *TINKUNAKO* -Multiábaco Abierto Móvil de capacidad limitada-, que se propone en este trabajo.

7.4.1 CUALIDADES DIDÁCTICO-MATEMÁTICAS

En primer lugar, el material deberá reunir unas ciertas características, que lo hagan didácticamente adecuado. Podemos distinguir algunas de carácter general, comunes a todo el material pedagógico:

- Higiénico. Carecer de superficies angulosas o aristas cortantes y no ser tóxico.

- Facilidad de manipulación. Especialmente para los alumnos más jóvenes, debería cumplir:

• sus elementos, no ser demasiado pequeños (superiores a 1cm) ni excesivamente grandes (6-7cm), y ser fácilmente asibles;

• reducido espacio ambiental de manipulación -su configuración total, no debe superar el ámbito bimanual-;: Es en los límites de eso que hemos dado en llamar "espacio manual" que se aproxima más (el tacto) al sentido de la vista, pues en esos límites el ciego dispone de una percepción sintética relativamente precisa. (VILLEY, 1946, 137).

• sus distancias mínimas, superiores a 1cm;

• su manipulación, no exigir excesiva precisión.

En nuestro dominio -educación de alumnos ciegos-, este grupo de características tiene un particular relieve, ya que no puede ejercerse un control visual. Deben, por tanto, cuidarse otros aspectos, de adecuación a la exploración háptica:

• formas bien diferenciables por el tacto (inclúyase aquí: número reducido de formas distintas) (el criterio debe extenderse a las texturas, en caso de ser necesarias);

• densidad suficientemente alta -que permita un buen control cinestésico mediante aprovechamiento de la gravedad-;

• resistencia contra el riesgo de fractura o deformación -por caídas o golpes- y rozamientos -originados por la exploración háptica-;

• estabilidad -contra los desplazamientos involuntarios por movimientos bruscos y de exploración-,

• bajo nivel de exigencia de orientación espacial -con preferencia por las coordenadas ortogonales, siguiendo los ejes corporales antero-posterior y derecha-izquierda (referencia centrada en el *esquema corporal*);

• sencillez en las configuraciones resultantes; etc.

> Dado que el número y la variedad de las impresiones táctiles es naturalmente muy restringido, está claro que el ciego concede en sus representaciones la mayor importancia a las relaciones espaciales. Las relaciones de espacio excitan su interés en más alto grado que las otras y se fijan con más fuerza en su memoria. (VILLEY, 1946, 112).

En cualquier caso, conviene tener presente que, con un mismo material, y en un principio, el alumno ciego tendrá más dificultades de manipulación que el vidente. Obsérvese que decimos *manipulación*: no *representación interior*, ni *comprensión de reglas*. Le exigirá una mayor atención y meticulosidad exploratoria y de ejecución; un trabajo cognitivo, en suma, que no es requerido cuando existe concurso de la vista (MILLAR, 1997, 299). Después, la práctica puede llegar a equilibrar e incluso superar el déficit visual, reduciendo la tensión atencional y esfuerzo mnésico.

- Motivante. En la Sección 3.4 anticipábamos que el principal sujeto de estímulos motivacionales era la *situación* de enseñanza-aprendizaje de la que forma parte el material; no obstante, tampoco éste debe escapar a tal valor didáctico, incorporando -en la medida de lo posible- cualidades sensibles que lo hagan más apreciable por los alumnos. Es el caso del color y formas atrayentes, texturas y sonidos agradables, etc. Sin embargo, quedan supeditados a potencialidades de más elevada motivación, como son su capacidad de representación, de asignación de significados, operatividad, etc.; de utilidad didáctica, en suma.

- Coste reducido. Susceptible incluso de producción *casera*; o, mejor: fabricable por alumnos mayores, los propios alumnos con un mínimo de ayuda, etc.

- Transportable. Para facilitar su desplazamiento, entre la escuela y el domicilio, o entre diferentes emplazamientos en el aula. Junto con volumen y peso reducidos, hay que estimar la seguridad o *poca fragilidad*.

- Sencillo en sus reglas de funcionamiento o composición. Que hace conveniente su *autosuficiencia* de elementos y reglas respecto de otros referentes o situaciones significadas.

- *Multiuso*, o versátil: que permita presentar o plantear variedad de situaciones didácticas.

- Capacidad de evocación y representación mental (GÓMEZ, 1988, 164); o, en términos de FISCHBEIN (1987): corresponder a las características de procesamiento de la información propias de los humanos. Lo que implica que pueda ser fácilmente percibido (para nosotros, incluido en la *manipulabilidad* y *cualidades sensibles*), y ser representado -y operado- -en el plano imaginativo.

- Susceptible de ser empleado con un grupo numeroso de alumnos, prescindiendo habitualmente el profesor de la atención individualizada (entiéndase: cada alumno con su ejemplar, no un *ejemplar único* para *demostraciones*). En íntima relación con este aspecto:

- Con capacidad de ser descrito en términos verbales sencillos tanto sus elementos como situaciones generales. Lo que facilita la comunicación en el aula, definición de configuraciones y proyectos de solución, estrategias, etc. De suma importancia al trabajar con alumnos ciegos.

Ciertos aspectos, proporcionan seguridad al profesor:

- Suficientemente experimentado. Aunque las *experiencias* suelen comportar ingredientes situacionales y aun personales, difícilmente reproducibles.

- Contar con manuales actualizados (GÓMEZ, 1988, 164), que ofrezcan itinerarios didácticos sugerentes y ejemplos significativos.

- Adaptado e implantado en la educación especial de alumnos ciegos. Que no debe entenderse como *prevención ante las innovaciones*, sino como *certificado de garantía* que ahorre análisis previos de adecuación.

14 Uso análogo por alumnos con o sin deficiencia visual; en otras palabras: facilitador de la integración escolar del alumno ciego escolarizado en Centro ordinario. Es decir: sin merma didáctica respecto de otros materiales, a la par que esperanza de equiparación en nivel de destrezas exigibles al alumno ciego y al alumno vidente.

Algunas de estas características pueden desplegarse o concretarse, en cuanto material de uso didáctico en el aula de Matemáticas:

- Ayuda al proceso de matematización. Es decir: que favorezca el salto de lo físico, concreto y manipulable, a lo inteligible, general y abstracto. En estrecha relación:

- Suficientemente *neutro*, *informe* o *poco figurativo*, como para servir de soporte a las significaciones concretas que les pueda conferir la imaginación infantil o la información contextual. Puede plantear dilemas, en cierto sentido, respecto de la condición de *motivación sensible*.

Estaría comprendido en el *carácter generativo* que FISCHBEIN (1977) reclama para los *modelos intuitivos*: ser capaz de representar correctamente un número potencialmente ilimitado de situaciones diferentes con un número limitado de elementos y reglas.

- Capacidad de ejemplificación (o reificación). Que permita mostrar, mediante concretización en el material, conceptos y/o técnicas matemáticas.

- Valor probatorio. Que no sea sólo una herramienta para "hacer ver" sino, y esto es lo importante, una herramienta para "convencer" y "para hacer" comprender. (GÓMEZ, 1988, 164). En alguna forma, guarda relación con la *coherencia interna* y la *autonomía respecto del original* -referente- de FISCHBEIN (1977, 1987, resp.).

- Valor resolutorio: que sirva de ayuda -mediante sus reglas intrínsecas- a procesos de resolución de situaciones problemáticas. Hace falta que el modelo sea fiel al original sobre la base de un isomorfismo estructural entre ambos, para que la solución obtenida en los términos del modelo sea equivalente a una solución expresada en los términos del original. (FISCHBEIN, 1987); resumiendo: que admita una *buena traducción* de y a situaciones concretas. En términos más generales:

- Valor heurístico. Que posibilite, por tanto, la aplicación de métodos de ensayo, experimentación y analogías en procesos de descubrimiento (véase: FERNÁNDEZ, LLOPIS y DE PABLO, 1991, 117).

En nuestro ámbito específico de introducción al sistema de numeración y cálculo aritmético, aún podemos pedirle más:

- Facilitar el tránsito -traducción- a la escritura numérica posicional. En este sentido, tendrán especial importancia:

• la correspondencia entre *valor absoluto* y *valor relativo* de las respectivas representaciones para las *cifras*;

• la correspondencia entre órdenes de unidades y su significación relativa;

• en particular, la representación del *0*. El mayor escollo en el cálculo escrito, pesadilla del principiante: En una comprensión por parte del alumnado de los números como expresión de cantidades, el cero como símbolo de "nada" parece superfluo. Es decir, no se entiende propiamente como otro número hasta mucho mas adelante, en secundaria o en el bachillerato. Este hecho comporta muchas dificultades de comprensión y errores de cálculo o de apreciación durante toda la etapa. -Primaria- (ALSINA y OTROS, 1996, 90).

La facilidad de *traducción* entre los lenguajes simbólico-matemático y físico-manipulativo debe entenderse en ambas direcciones: del material a guarismos, y de guarismos al material. Sin limitarnos tampoco a la escritura en cifras: expresiones en lengua hablada, lenguaje de representaciones gráficas, incluso en otro material -y poder aplicar así el principio de *variabilidad perceptual* de DIENES-. De lo contrario, se generaría una disgregación en el sistema representativo y lingüístico del alumno, con la consiguiente debilitación de conceptos o técnicas.

Esta facilidad no debe restringirse a la representación numérica, sino que debiera extenderse a un valor comunicativo específico: observar paralelismos entre las acciones sobre el material y los términos verbales de acción (agregar, separar, reiterar, repartir).

- Versatilidad operacional. Es decir: que sea didácticamente útil en la introducción a las diferentes operaciones aritméticas (adición, sustracción, multiplicación, división).

- Capacidad operativa. Que permita efectuar/presentar cálculos con operandos de tamaño suficientemente grande, como para mostrar la diversidad de casos (mínimo: operandos de tres dígitos).

- Capacidad proyectiva. Que permita su empleo coherente -manteniendo reglas y vocabulario- en ámbitos distintos del de los números naturales en base 10:

• diversificación del dominio numérico (susceptible de ser empleado con números enteros, decimales, fraccionarios...);

• capacidad para trabajar en otras bases numéricas: *base 2*, *base 5*, etc.), que permita mostrar la convencionalidad del *sistema de numeración.*

Por último, no podemos olvidar un aspecto que, aunque puramente mecánico, hace que un material sea apreciado en algo más que *medio para la iniciación a las operaciones aritméticas*; en verdadero *instrumento de cálculo*, con vocación de *compañero inseparable* del alumno, de recurso inmediato o a través de su representación interior:

- Facilidad de ejecución/automatización calculatoria. Que subraya la importancia de la facilidad de manipulación, sencillez de elementos y reglas, correlatos lingüísticos, etc. No debe entenderse como una *cualidad resumen* del material: sería confundir la automatización del cálculo con su iniciación didáctica.

Cuando un material *satisface* todas las necesidades calculatorias de un alumno respecto de una operación o dominio numérico, aumenta su confianza en él, predisponiéndole para su continuidad de uso y acceso a otros campos operacionales de la Aritmética: *si funciona tan bien en la suma y la resta..., si la suma y la resta resultan tan fáciles con él..., ¡también resultará fácil lo que venga!...* Cuenta ahora con la ayuda segura de un amigo, que no le fallará ante las dificultades que pudieran presentarsele en nuevas aventuras.

Estos aspectos deseables o verdaderos criterios de evaluación para el material son, sin duda, discutibles: suponen una opción y orientación metodológica, no única.

Cuadro 7.4.1.- Idoneidad del material didáctico para la iniciación a la numeración posicional y cálculo aritmético con alumnos ciegos.

Características generales (comunes a todo el material pedagógico)

- físicas
  - higienicidad
  - facilidad de manipulación
    - dimensiones máximas (30'30cm)
    - distancias mínimas de 1,5cm
    - asibilidad
    - formas bien diferenciadas (y en número reducido)
    - sencillez de composición espacial
    - simplicidad en las configuraciones
    - resistencia a la fractura
    - estabilidad anti-desplazamientos
  - atractivos sensoriales
  - producción
    - comercial
      - bajo costo
      - costo elevado
    - doméstico-artesanal
    - con cooperación de los alumnos
  - transportabilidad
    - volumen
    - peso
    - fragilidad
- sencillez de funcionamiento/composición
- versatilidad didáctica
- comunicativas
  - representabilidad interior (sencillez representativa de las configuraciones)
  - empleo grupal
  - facilidad de reducción a términos verbales
- otros aspectos didáctico-metodológicos
  - contrastación experimental
  - actualización de manuales
- empleo en la educación de alumnos ciegos

- Aplicabilidad didáctico-matemática
  - Facilitador de la matematización
  - Suficientemente "neutro" o "informe"
  - Capacidad de ejemplificación
  - Capacidad como soporte probatorio
  - valor resolutorio
  - Capacidad heurística
- Aplicabilidad específica (respecto del cálculo aritmético)
  - facilidad de "traducción"
    - respecto del "sistema de numeración"
      - correspondencia "valor absoluto" - "valor relativo" para las cifras
      - correspondencia entre "órdenes de unidades" y su significación relativa;
      - representación del "0"
      - del material a escritura decimal
      - del material a lengua hablada
      - del material a lenguaje gráfico-geométrico
      - de este material a otro
      - de escritura decimal al material
      - de lengua hablada al material
      - de lenguaje gráfico-geométrico al material
      - de otro material a éste
    - paralelismos entre las acciones sobre el material y los términos verbales de acción

- Aplicabilidad específica (respecto del cálculo aritmético)
  - Versatilidad
    - respecto de las operaciones aritméticas
      - adición
      - sustracción
      - multiplicación
      - división
    - respecto del dominio numérico
      - números naturales
      - números enteros
      - números decimales
      - números fraccionarios
    - respecto de la base de numeración
- Aplicabilidad específica (respecto del cálculo aritmético)
  - Capacidad operativa (tamaño de las cantidades)
  - facilidad de ejecución/automatización calculatoria
    - facilidad de manipulación
    - sencillez de funcionamiento/composición
    - representabilidad interior
    - Suficientemente "neutro" o "informe"
    - Capacidad/facilidad de ejemplificación
    - facilidad de "traducción" (respecto del "sistema de numeración")
      - de escritura decimal al material
      - del material a escritura decimal
    - Versatilidad
      - respecto de las operaciones aritméticas
      - Capacidad operativa (tamaño de las cantidades)
      - respecto del dominio numérico
- Otras cualidades específicas del material

7.4.2 EN BUSCA DE "UN BUEN AMIGO"

Sirviéndonos del anterior análisis como *ficha de evaluación inicial*, podríamos proceder a una revisión de los materiales más frecuentes en la introducción al cálculo aritmético. Prescindiendo de un tan exhaustivo enfoque, pasemos revista somera a algunos de ellos.

A) REGLETAS CUISENAIRE - "NÛMEROS EN COLOR"

Colección de prismas cuadrangulares en madera, de sección 1cm. y longitudes entre 1cm y 10cm, variando centímetro a centímetro. Posteriormente a su creación (CUISENAIRE, 1934), fueron coloreados por tamaños según un código convencional (GATTEGNO, 1963), formato en el que se emplean en la actualidad bajo la denominación de *números en color*.

Tiene lugar una identificación longitud - color - número, fácil de aceptar y reconocer. Para GATTEGNO (1963, 103), su redescubridor, hay que *considerarlas como un modelo algebraico, más que como un aparato aritmético*, ya que puede prescindirse por completo de la referencia al número-longitud, gracias al color. Al mismo tiempo, se salva el paso de magnitudes discretas a continuas.

Gracias al método de *simple agrupación*, son empleadas para la iniciación a las operaciones aritméticas con números naturales. Sin embargo, poco aportan como material de introducción a la escritura simbólica decimal: sólo cantidades de dos cifras; aunque permiten la escritura en *base 2* (hasta 4 cifras) y *base 3* (hasta 3 cifras).

Si bien CUISENAIRE las ideó -según parece- para atender a las necesidades de alumnos ciegos, se ha diseñado una adaptación ulterior (SOTO IBORRA, y GÓMEZ ALFONSO, 1987) haciendo la sustitución color-textura y empleando elementos magnéticos -que las hacen más estables-; versión que ha sido experimentada, pero que ha alcanzado muy escasa difusión.

Es frecuente como material didáctico con alumnos que padecen algún tipo de déficit psicomotriz (SANCHEZ MARTINEZ, 1990); (FERNÁNDEZ, LLOPIS y DE PABLO, 1991).

Las *regletas con tapa* (BRISSIAUD, 1993), coinciden estructuralmente con las de CUISENAIRE: cuadrados de cartón de 2x2cm, marcados con un punto, y *regletas* planas, adición de *unidades*, entre 2 y 10; mediante *tapas*, pueden ocultarse 5 de estas unidades. Son un buen correlato de ciertas *colecciones de muestra* como son los dedos.

B) BLOQUES MULTIBASE

Se fundan en la agregación de volúmenes: *unidades*, *barras*, *placas*, *cubos*, etc.; confeccionados en madera o cualquier otro material, llevan marcadas las líneas divisorias correspondientes a las unidades, generando la sensación de *unidades múltiples* (potencias de la base). Teóricamente, y según la base de numeración, corresponden a elementos de 1x1x1cm, 1x1x10cm, 1x10x10cm, 10x10x10cm; o 1x1x1cm, 1x1x5cm, 1x5x5cm, 5x5x5cm, etc. Pueden así componerse/expresarse cantidades de hasta cuatro cifras; para órdenes mayores, sería preciso componer *barras de cubos*, *placas de cubos*, etc.

Existe completo correlato realidad física - matemática, tanto para los valores absolutos de cada orden numérico, como para los valores relativos. Los primeros, expresados en el número de elementos de cada tipo; el segundo, por el tipo mismo. No obstante, presentan dificultades en el caso de ausencia de un tipo determinado (valor 0). En especial, es de destacar la imagen que proporcionan del *tamaño* real de una cantidad.

La correspondencia posicional representación - escritura se logra mediante el convenio de ordenación de elementos de mayor a menor, de izquierda a derecha. Se hace patente el problema del *0*.

Es aplicable al dominio de los números naturales -enteros positivos-; complicando el material, mediante empleo de variedades en dos colores, se extendería a enteros, tanto positivos como negativos.

El ámbito de operaciones queda prácticamente restringido a la adición y sustracción. La multiplicación exige convenios de elevado contenido conceptual. Imposible trabajar con fracciones, decimales o enteras.

Si se presenta como material componible o adjuntable, unidad a unidad (cubos *unifix* o *policubos*), pueden armarse elementos para cálculos en diferentes bases; De lo contrario, sería necesario disponer de juegos de elementos para cada base.

No exige una psicomotricidad especial, ni orientación espacial superiores al simple reconocimiento de formas, agrupación, ordenación y ubicación en el espacio próximo. En principio, puede parecer que no sería preciso adaptarlo para su empleo por alumnos ciegos. Pero el tamaño de los elementos superiores a las *barras* resulta excesivo para su manejo exclusivamente háptico, sería preciso algún procedimiento para su fijación y estructuración espacial, resultando, en cualquier caso, configuraciones demasiado grandes.

Carecemos de referencias sobre si ha sido empleado sistemáticamente con alumnos ciegos, ya sea en la introducción de la escritura posicional, operaciones elementales o instrumento de cálculo.

C) "MINICOMPUTADORA" DE PAPY

Aparece a finales de los años 60. Su creación se debe a F. y G. Papy, del Centre Belge de Pedagogie de la Mathématique (Bruselas).

Consta de elementos-base constituídos por paneles cuadrados divididos en cuadrantes coloreados según las *regletas de Gattegno* (blanco, rosa, rojo, violeta), a los que se les asignan los valores *1*, *2*, *4* y *8*, correspondientes a los cuadrantes 4°,3°, 1° y 2°, respectivamente. Estos paneles se yuxtaponen en línea horizontal, para integrar la expresión de una cantidad. Como elementos móviles se emplean peones, que podrán ser de dos colores, cuando se trabajen los números negativos.

El valor absoluto en cada panel viene expresado por la posición de uno, dos o tres peones en cuadrantes distintos, conforme a la adición de valores. Es decir: corresponde a una expresión en base 2, que, a su vez, se refleja en forma espacial o de sencilla configuración de cuadrantes ocupados.

El valor relativo se corresponde físicamente con la posición del panel, de derecha a izquierda, creciendo en base 10; la regla de conversión o paso de un panel a otro sigue una sencilla regla aditiva o de dinámica psicomotriz. Consecuentemente, existe una correspondencia plena entre representación en el dispositivo y escritura decimal de la cantidad.

Permite trabajar con números enteros y decimales, tanto positivos como negativos; éstos últimos, merced a dos tipos de peones. Con él se introducen fácilmente las cuatro operaciones aritméticas, resultando incluso de utilidad en la práctica de la adición y sustracción.

Su formato es rígido, destinado al trabajo en base 10. No obstante, pueden imaginarse versiones para el trabajo en otras bases de numeración -desconocemos si se han realizado-.

Se efectuaron ensayos de adaptación al uso por alumnos ciegos. Pero no parecen haber tenido continuidad ni reflejo en la literatura.

D) "MÁQUINAS" DE A. AIZPÛN

Creadas por el Pr. Aizpún en el transcurso de los años 70, y difundidas desde la *Escuela de Formación del Profesorado María Díaz Jiménez* de Madrid (hoy, Facultad de Educación de la Universidad Complutense) y los *Programas de Formación y Actualización del Profesorado* de la Universidad Nacional de Educación a Distancia (U.N.E.D.).

Consta de cartones o paneles -realizables por el propio alumno-, que contienen los dibujos de huecos o casillas, que encierran los dígitos del *0* al *9*, con una cierta estructuración espacial -no determinante-; una indicación superior de *entrada*; el conjunto está rubricado por una flecha que dirige hacia la izquierda, con carácter indicador, de *orden*; o *mandato*. En caso de trabajar en otra *base de numeración distinta de 10*, se reduce el número de casillas, para recoger tan sólo a los dígitos empleables. Como unidades o elementos móviles se emplean monedas ordinarias. Se trata, pues, de una colección de *máquinas tragaperras*. Pueden incorporarse unas tarjetas o fichas de palancas, representativas de la operación a realizar.

Funciona, en efecto, como una *"máquina tragaperras"*, en la que se van introduciendo monedas por la abertura superior. Cada nueva moneda ocupa el primer lugar disponible. Si llegan a cubrirse todos, la *flecha* indica que: *deben recogerse las monedas del cartón*, y, formando una *torre*, ocupar el primer lugar vacío en el cartón de la izquierda; de no existir éste, se agrega en ese momento. La posibilidad de *derrumbamiento de la torre*, invita a sustituirla por una única moneda representativa.

Cada cartón o panel representará una cifra de la cantidad total. El *valor absoluto* señalado por las monedas o *torres* en un cartón se corresponde con el primer dígito al descubierto: *"es una máquina parlante"*. Queda representado en forma triple: número de monedas o *torres* en él contenidas, primer hueco o dígito descubierto, configuración espacial de las monedas -o de los huecos-. El *0* queda determinado como ausencia de monedas: primera casilla descubierta -propiamente, la correspondiente al *0*-:cartón en blanco o cartón vacío.

El *valor relativo* viene expresado por el número de monedas de la *torre* que ocupa cada lugar en ese cartón, o las que hicieron falta para *"llegar hasta ahí"*. Se corresponde con el lugar de orden que en el conjunto ocupa dicho cartón; existe, pues, plena correspondencia escritura - representación en el dispositivo. Una cantidad se expresa en una *fila de cartones*: tantos como cifras cuenta aquélla.

Las cuatro operaciones aritméticas se introducen intuitivamente, resultando incluso de valor práctico para el cálculo de la adición y sustracción en sus primeros estadios. Dos *filas* son suficientes para ejecutar la adición y sustracción, tres para la multiplicación y división. Con artificios o convenios muy sencillos, pueden emplearse para el tratamiento de números enteros positivos y negativos, decimales y fraccionarios, en no importa qué base de numeración.

Es importante la naturalidad con que van surgiendo los convenios de conversión de unidades y, por tanto, el *valor relativo* de las cifras. Asimismo, el concepto de *torre* proporciona una imagen ilustrativa del *tamaño* de las cantidades, relacionándola con la escritura decimal.

Sin embargo, no ofrecen una imagen sencilla o claramente representativa para cada cifra, ni configuraciones evocadoras para las cantidades.

Se ha efectuado una adaptación para su empleo con alumnos ciegos (FERNÁNDEZ DEL CAMPO, 1989), empleándose habitualmente en el C.R.E. Antonio V. Mosquete (Madrid) para el trabajo en bases de numeración no decimal (Formación Profesional). No se ha ensayado como iniciación operatoria para los niveles elementales de enseñanza de alumnos ciegos; en cualquier caso, parece no reunir condiciones a tal fin (puede ser debido a las características del diseño de adaptación):

La introducción de las monedas o elementos móviles y su manipulación resultan lentas y difíciles de controlar. Las configuraciones resultantes son excesivas para su exploración háptica, y, como se ha dicho, no parecen generar imágenes sencillas.

E) "CALCULADORA POSICIONAL" DE RICARDO GARCÍA SOLANO

Ideada por el español Ricardo García Solano, profesor de la Escuela de Formación del Profesorado de Fomento de Centros de Enseñanza (Madrid)., en transcurso de los años 80.

Consiste en una colección de casillas correspondiente a la numeración sucesiva, en principio, de 00 a 99, ordenada matricialmente por decenas en orden creciente; Cada casilla incorpora la escritura en pares de dígitos. Filas de casillas adicionales representan centenas, millares, etc. Peones o fichas de color sirven para determinar el número o casilla de la cantidad a representar; las cantidades superiores a la centena, por agregación -anteposición- de las casillas adicionales ocupadas.

El valor absoluto de cada dígito de la cantidad representada -dos cifras- se corresponde con las coordenadas -fila, columna- de la casilla. A su vez, esta correspondencia espacial también lo es dinámica o psicomotriz, a partir del origen o *0*. Para cantidades superiores a la centena, rige el valor de columna. El valor relativo lo proporciona la concomitancia posición de fila - verbalización.

Para cantidades pequeñas -hasta dos cifras-, existe identificación valor - posición - escritura. No obstante, pueden surgir dificultades para la relación de fila 0 y columna 0, si se subraya la comunicación verbal -no así en la práctica operatoria-.

Permite trabajar en el dominio completo de los números enteros -el signo se expresa mediante el color del peón-, con gran sencillez para cantidades pequeñas. Las cuatro operaciones aritméticas resultan muy accesibles, así como las cuestiones relacionadas con múltiplos, divisibilidad, etc.

El simple artificio de *ocultar una porción derecha conveniente en el cuadro* lo transforma en escenario de trabajo para otra base de numeración inferior a 10, permaneciendo invariantes las reglas operatorias.

No se ha efectuado su adaptación al uso por ciegos.

F) ÁBACOS

Como instrumento de cálculo, son, sin duda, los más antiguos que se conocen. Su empleo como material didáctico, sin embargo, no tiene lugar hasta que MONTESSORI en el último tercio del siglo pasado propone una versión tendente a poner en evidencia la escritura decimal.

En esencia, todos ellos consisten en una colección de varillas o alambres paralelos sujetos a un bastidor, en los que se contienen bolas o fichas deslizables y que pueden tener diferentes valores según los modelos. La variedad de éstos es muy numerosa, pero el prototipo es el *Sorobán.*

El *SOROBÁN,* o ábaco chino-japonés alcanza los dos mil quinientos años de antigüedad. Una varilla transversal divide perpendicularmente a todas las demás en dos segmentos; de éstos, uno contiene una única ficha, con valor *5*, y el otro cuatro fichas de valor *1*. Las fichas -biconvexas, para facilitar su manipulación de deslizamiento y reducir el ancho del dispositivo- toman valor al aproximarlas a la línea transversal; en cada varilla, por tanto, pueden obtenerse valores del *0* (todas las fichas alejadas) al *9*; correspondería al *valor absoluto*: el *valor relativo* vendría dado por el lugar de orden de la varilla.

Las configuraciones numéricas parecen generar imágenes, susceptibles incluso de manipulación intuitiva, más que lógica o numérica abstracta -según confesión de ciertos alumnos expertos e investigadores japoneses (véase: *Times Educational Supplement,* 22 de septiembre de 1995)-.

Permite realizar todas las operaciones aritméticas, pudiendo actuar sobre cantidades de gran tamaño, según el número de columnas. La velocidad operativa puede llegar a ser increíble, llegando a superar al trabajo con calculadora en operaciones simples (sumas).

Sus principales inconvenientes se hallan en el convencionalismo de sus reglas: valor adjudicado a las fichas según posición, regla de conversión a orden superior y valor relativo posicional; es decir: el funcionamiento básico del dispositivo y los propios de la escritura decimal. Por ende, no se reflejan resultados parciales, dificultándose la corrección de errores. No es extraño, pues, que se niegue su calidad didáctica como material de iniciación aritmética.

> Desde el punto de vista pedagógico, los ábacos son un material considerado de refuerzo, no de iniciación. El criterio posicional en que se apoyan debe ser aceptado por el niño sin ninguna razón que lo justifique. Una vez logrado esto, el ábaco es un modelo concreto que proporciona actuaciones paralelas y análogas a las que se hacen en el cálculo con lápiz y papel.
>
> Un poco de ejercicio con el ábaco permite apreciar su popularidad, ya que además de su gran sencillez de construcción y manejo proporciona una forma fácil y rápida de efectuar cálculos, sin necesidad de retener ningún dato o resultado parcial en la memoria. (GÓMEZ, 1988, 164).

No precisa adaptación alguna en su empleo por ciegos (HATTENDORF, 1979; DELLA BARCA y MONTENEGRO DE ROSELL, 1988; ROBLES, 1991). Se recomienda su utilización combinada con la escritura Braille, sirviéndose de la máquina Perkins (véase: MADRID y ROSA, 1996).

Tomando como antecedente el *ÁBACO RUSO* (MAZA 1990B, 88), el *ÁBACO MONTESSORI* disminuye en parte el convencionalismo de representación número-cifra, incluyendo diez bolas en cada varilla: se logra así -en parte- una identificación realidad física - número; pero se pierde la *necesidad de conversión* que impone el *Sorobán,* ya que introduce el convenio de *diez bolas en un alambre (alambre completo) se cambian por una* *bola en el alambre siguiente*. Persiste el factor de confusión que supone el conferir o no valor a las bolas en función de su emplazamiento. Los órdenes de unidades se resaltan mediante colores distintos, en busca de una identificación *color-orden-posición*.

El *Ábaco Montessori*, antaño común a la mesa de todos los maestros de Primaria, se encuentra hoy día en desuso.

El afán por buscar una aplicabilidad didáctica al ábaco ha llevado al diseño de formas verticales y abiertas, en las que el alumno va introduciendo bolas representativas de unidades (véase: GRUPO 0, 1997). Además de garantizar la participación del alumno -es él quien manipula, realizando representaciones y cálculos-, se logra la identificación realidad física - número, sin riesgos de confusión: en cada varilla sólo aparecen tantas bolas como indica el número; al mismo tiempo, se dispone de una imagen -configuración diagramática- de la cantidad (HERNÁN, 1987). Pero subsisten los problemas por el convenio de conversión y el valor posicional conferido por su lugar de orden.

Son poco recomendables con alumnos ciegos de corta edad: las bolas *se escapan* con gran facilidad, y el ensartado exige la localización táctil del orificio y un ingreso preciso en el alambre o varilla. El tamaño de las bolas influye contradictoriamente en las cualidades manipulativas del conjunto.

Para facilitar la producción, se han diseñado *ÁBACOS PLANOS* (GÓMEZ, 1988): sobre un papel, se sustituyen las varillas o alambres por *canales* verticales que contendrán monedas o fichas ordinarias. El carácter plano de éstas evita el rodamiento de las bolas, y se facilita todavía más la manipulación al no ser preciso su ensarte, como en los *ábacos verticales* (queda sustituido por deslizamientos sobre el papel). No se han realizado adaptaciones al uso por alumnos ciegos.

> El ábaco es un instrumento que facilita y enriquece el trabajo en el aula. Es un modelo del sistema posicional de los números que estimula la comprensión de los conceptos numéricos agrupación y posición. (...) Es uno de los materiales particularmente importantes a utilizar en el aula para el aprendizaje y comprensión del sistema decimal. (GRUPO 0, 1997, 2, 87-88).

Tal vez convenga llamar la atención sobre el hecho de que la mayoría de los materiales aquí traídos responde a la forma de *ábaco*: piezas móviles manipulables, con lugares limitados o asignados, que se repiten modularmente y que guardan una correspondencia posicional con los órdenes de unidades (la *Calculadora Posicional* de GARCÍA SOLANO constituye una excepción relativa). Las diferentes estructuraciones muestran distintos convenios de conversión de unidades a orden superior y orden-posición, definitorios de la escritura numérica posicional en base 10, a la par que intentan presentarlos de una forma *plástica*.

> Este trabajo de preparación al cálculo de columnas es importante por cuanto, hasta ese momento, la estructura mental aditiva del niño, no es por "paquetes": unidades con unidades, decenas con decenas, centenas con centenas, etc.; sino que es lineal, es el seguir contando en la escala numérica. Más o menos. (GÓMEZ, 1988, 166).

Es decir: los ábacos, en cualquiera de sus variantes, pretenden facilitar el paso de una estructura lineal a otra de carácter polinómico (por potencias de la base); o, si se quiere, de una estructura *escalar* a otra *vectorial* o *modular*... la escritura decimal implica una superación de las concepciones axiomáticas de PEANO y CANTOR.

Por lo expuesto, Se deduce que en la educación de alumnos ciegos nos hallamos en una situación de auténtica penuria de recursos didácticos para la iniciación al cálculo y su operatoria a nivel elemental. Del simple recuento de objetos se pasa a la presentación escrita en Braille o en dispositivos de cálculo, sin reflejo manipulativo de la operación realizada: el cálculo resulta ser en sí mismo una rutina mecánica simbólico-conceptual, desligada de la manipulación y significado físicos; en suma, mera combinatoria simbólica y abstracta.

La necesidad didáctica está clara: no se dispone de un material manipulativo, con el que el alumno ciego pueda establecer, de forma natural y participativa, la correspondencia realidad física - escritura decimal en Braille, descubra el significado real de las operaciones aritméticas y el cómo y por qué de unos algoritmos.

8 DE LA MANIPULACIÓN AL CÁLCULO EFECTIVO

"*TINKUNAKO*": UN NUEVO MATERIAL ADAPTADO AL USO POR ALUMNOS CIEGOS

No faltarán profesores que, prescindiendo de útiles de iniciación, logren que sus alumnos ciegos alcancen un notable nivel de cálculo, mental, por Braille escrito, o mediante cualquiera de los instrumentos mencionados en la Sección 7.3. No sería preciso, según esto, gastar energías ni tiempo en concebir o adaptar material pedagógico alguno, sino formular cristalizadamente tales técnicas didácticas en busca de una optimización de resultados.

La experiencia docente nos habla, no obstante, de la necesidad que algunos alumnos tienen de largos paseos por lo concreto y manipulativo, antes de zambullirse en la operatoria puramente simbólica; convenciéndonos de que el esfuerzo y espacio dedicados a los primeros, acorta y rentabiliza con creces los exigidos para el éxito posterior.

Ofrecemos una propuesta de material experimental. Consideramos que responde con un elevado nivel de satisfacción a las demandas de nuestro análisis antecedente; pero preferimos los hechos, la vida en el aula, sosteniendo que el verdadero evaluador de un material es el propio alumno, concreto, en un aula determinada, con un profesor determinado, en un momento o situación inpredecible. Una condición indispensable: la compenetración y afecto profesor - material, germen de un eficiente entusiasmo comunicativo.

8.1 *TINKUNAKO*: ALGO MÁS QUE UN ÁBACO

TINKUNAKO[1] es un dispositivo portátil de sobremesa, material didáctico para el aprendizaje y práctica de operaciones matemáticas por métodos manipulativos sencillos. Técnicamente, puede designarse por *"multiábaco abierto móvil de capacidad limitada"*.

[1] Ideado por Rodolfo Robles y José Enrique Fernández del Campo entre 1994 y 1996; de nacionalidad argentina el primero, español el segundo. La fiesta de *TINKUNAKO* o del *Niño Alcalde* tiene lugar en la ciudad de Los Santos de la Rioja, en las estribaciones de los Andes, el 31 de diciembre. Rememora un conato de enfrentamiento bélico entre españoles y quechuas en 1595, que se tornó encuentro entre culturas, gracias a la mediación de quien más tarde sería S. Francisco Solano. En quechua, *TINKUNAKO* significa *encuentro*.

Su referente histórico más próximo sería el *ábaco abierto* azteca (véase: GRUPO 0, 1997, 1, 103): conjunto de alambres o varillas sujetos a un bastidor, en los que se introducen piezas móviles -bolitas-. Pero sometido a modificaciones, procurando una mayor versatilidad didáctica y facilidad de manipulación por el estudiante con dificultades de aprendizaje, en particular por el estudiante ciego.

En principio, *TINKUNAKO* fue concebido como un *conjunto de ábacos abiertos desplazables*, que posibilitara el Cálculo Aritmético a un muchacho ciego: Rodolfo Robles (*Junior*). Se desconocían o no satisfacían otras soluciones.

Aquel diseño primitivo respondía a un propósito: representar en forma manipulativa, accesible a un alumno privado de visión y desconocedor de las aplicaciones del Braille, las operaciones aritméticas, tal como se realizan por escrito. Sin recurso al papel, podía operarse con soltura; bien que en casos simples. Se trataba de un *instrumento de cálculo elemental para ciegos.*

La observación y el trabajo comparativo con otros *instrumentos* de este tipo pronto sugirió modificaciones; y, sobre todo, su comparación posterior con *materiales de Iniciación a la Aritmética*, con independencia de la deficiencia visual.

El *conjunto de ábacos abiertos desplazables* cumplía su misión: Rodolfo progresaba en su curriculum escolar de Matemáticas sin dificultades. Pero las necesidades crecían: cálculos más complejos, demandas de mayor agilidad, nuevos conceptos...

Se buscaron reformas para el primitivo diseño de confección casera, y aplicaciones no previstas en los inicios.

Paralelamente, se empezó a pensar en la utilidad que el dispositivo podría tener en la enseñanza ordinaria: para todo tipo de alumnos, padecieran o no déficits visuales, motóricos o neuropsíquicos, y como *material de Iniciación al Cálculo.* Se traspasaba la frontera de *lo instrumental* para abrirse a *lo propiamente didáctico*; y se ampliaban los horizontes: de la educación especial de ciegos, a los casi inabarcables de la educación matemática con carácter general.

Fruto de estas preocupaciones, surgirían la concepción de limitar la longitud de los *palitos* hasta la altura de 9 fichas, el carácter modular y su acoplabilidad tanto *en paralelo* como *en serie*, adaptación a los requerimientos psicomotores del escolar ciego -o vidente-, diseño material que lo hiciera fabricable a bajo costo, transportable, etc.

8.1.1 GÉNESIS Y DESCRIPCIÓN

En primer lugar, como en el *ábaco azteca* los *alambres, varillas o palitos*, son abiertos. Es decir: las *fichas* representativas de las unidades deben ser introducidas por el usuario. En consecuencia, el bastidor que los sustenta, se ve reducido a una simple base, y aquéllos deben tener consistencia suficiente, y el conjunto estabilidad bastante como para no desequilibrarse o desplazarse con facilidad.

Si bien esta "configuración abierta" requerirá en los comienzos una manipulación más compleja, y, con ello, mayor lentitud, puede alegarse correlativamente que también contribuye al desarrollo de aptitudes manipulativas mucho más ricas -y, por tanto, fijadoras- que las precisas en los ábacos tradicionales de deslizamiento (chino-japonés, Montessori).

Pero hay una razón didáctico-matemática de suficiente peso, que hace preferibles los *ábacos abiertos* de unidades iguales (GRUPO 0, 1997, 2, 87): en cada momento, un *palito* o *varilla* contiene tantas *fichas* o unidades como representa el valor absoluto de la cifra de su orden. Es decir: para cada orden, no existen convenios posicionales o *fichas* de valor distinto a la unidad. En este sentido, puede decirse que supone una apuesta por el realismo didáctico, o correlato realidad física - realidad matemática.

Su valor representativo supera el simbolismo por convenio: el valor absoluto para un orden o *palito* determinado viene expresado por el número de *fichas* que contiene -valor físico-; con significado incluso para el valor 0 o conjunto vacío de *fichas*. Es decir: en el dispositivo, se superponen significante y significado, expresados ambos -y sólo- por las *fichas* contenidas en el *palito*. Se evitan convenios de posición de las *fichas*, y riesgos de error al principiante. En este sentido, supera a la práctica totalidad del material de iniciación al Calculo empleado en la escuela -tanto ordinaria como especial de ciegos-.

Aún más: la posición vertical de los *palito*s obliga al contacto entre *fichas*, y el número de éstas determina así una cierta altura. Se genera entonces una imagen física unitaria con valor representativo, reforzadora de la imagen de número de unidades o *fichas*. Implica, además, un primer nexo entre *cantidad continua/altura* y *cantidad discreta/número* de *fichas*. Es susceptible de ser percibida cinestésicamente, por comparación de alturas; al menos, para valores comparados y de aproximación.

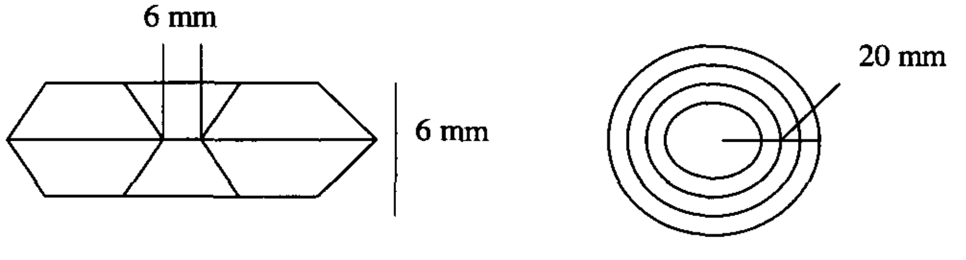
Las exigencias manipulativas de este diseño abierto, se intentan paliar por dos vías: forma de las *fichas-unidad* y tamaño adecuado de todas las piezas. Amén de la mencionada posición erguida y extremo libre redondeado para los *palito*s.

Las unidades a introducir y extraer de los *palito*s, tienen forma anular. Con ello, el tacto localiza inmediatamente los puntos de inserción o enhebrado, para su introducción por el extremo libre de aquéllos. Al mismo tiempo, la forma predominantemente plana les hace más cómodas de asir -no ruedan-, contar y transportar en la mano -menor volumen-, antes de incorporarlas al *palito* correspondiente, y menor altura o trayecto de recuento, una vez depositadas.

El tamaño viene dado por un criterio sencillo: que la mano normal de un niño normal pueda retener y manipular independientemente hasta 9 de estas *fichas-unidad*. Las distintas pruebas acabaron por sugerir los 20mm de diámetro.

La luz del orificio de inserción se estimó en algo más de 6mm, acorde con los 6mm de diámetro de los *palitos*. Una depresión central en ambas caras, facilitaría la entrada en el *palito*. La luz del orificio central no permite excesiva holgura, consiguiéndose un práctico alineamiento o superposición *en torre* de las *fichas* una vez introducidas.

El recuento de *fichas* superpuestas, formando torre en cada *palito*, se facilitaba a partir de la simple distinción entre ellas, merced al borde en bisel agudo (ver figura 8.1.1). El espesor -igual a la distancia entre bordes de *fichas* contiguas- se fijó en 6mm; muy por encima del umbral mínimo de distinción táctil.
Figura 8.1.1.



Con este grosor se perseguía no sólo facilitar desde el primer momento la distinción/recuento, sino también favorecer el separar y asir *fichas*, precisados en ciertas operaciones.

En algún momento se pensó en una señalización para informar de inmediato el número de *fichas* introducidas en los *palitos*: que éstos tuvieran sección plana, semicircular o de círculo seccionado -o biseccionado-, grabando los símbolos numéricos en la cara/s plana/s resultante/s, en serie ascendente -sentido vertical-. De esta forma, las *fichas* irían ocultando cada guarismo -al menos, visualmente-, dejando al descubierto en primer lugar la indicadora de las ya presentes: una ficha, ocultaría el *0* y aparecería el *1* como primer símbolo tangible o visible; dos *fichas*, ocultarían el *0* y el *1*, denunciando al *2*; etc.. Análogamente a como las monedas introducidas ordenadamente en las *máquinas* de A. AIZPÛN dicen el número de ellas introducidas, por el primer dígito al descubierto.

Pero pronto fue desechado este diseño. Si bien aparentaba ser útil en un primer estadio -como iniciación a la escritura simbólica-, la proximidad de otros dígitos inducía a error, y apenas aportaba rapidez; pudiendo el conjunto de las cifras descubiertas perturbar incluso la lectura de la conveniente. Además, la localización y reconocimiento táctil de estos dígitos en función contadora resultaban más lentos que el simple recuento o medición de altura por el alumno ciego. Sin entrar en valorar el encarecimiento que conllevaría la propuesta.

La separación entre *palitos* de un mismo ábaco elemental es, aproximadamente, y de eje a eje de *palito*, algo inferior al doble del diámetro de las *fichas* (unos 35mm). En principio, puede parecer excesiva; pero pronto se descubre la necesidad de intercalar ciertos signos entre columnas: *coma*, *signos de operación*, *igual*... A tales signos corresponderán *fichas* especiales, aunque serán un pequeño lujo en los niveles más elementales del curriculum.

Consideramos, sin embargo, que ni las dimensiones ofrecidas son definitivas, ni tal vez deban ajustarse a diseño único: la práctica y experimentación con alumnos que padezcan deficiencias manipulativas, tanto claramente fisiológicas como curriculares, irán sugiriendo las oportunas modificaciones. Es concebible, asimismo, un modelo a escala reducida, mucho más manejable y portátil, una vez adquiridas las destrezas manipulativas pertinentes.

No se hace referencia a color o colores en las *fichas*. No es problema de adaptación al uso por alumnos ciegos: siempre cabe el recurso a las *marcas* en los bordes, rugosidad en las caras, etc. Es pura coherencia con el modelo matemático: todas las unidades son iguales; todas las *fichas*, también. El diferente valor que puede tomar una unidad o ficha, está conferido por su posición: la columna del *palito* en que se aloje.

Se buscaron, eso sí, colores llamativos y bien distinguibles, en consideración al reclamo sensorial y los alumnos ciegos con resto visual.

Pensando en alumnos videntes, podrían concebirse de color diverso los *palito*s, con grosor y brillo suficientes; las *fichas* en material traslúcido y dispersante, tomarían el color de aquéllos. Pero no se garantiza una mayor eficacia didáctica; más bien todo lo contrario: parece probada experimentalmente la nula utilidad -incluso perturbación- del empleo del color como valor matemático (BROUSSEAU).

8.1.2 LA ESTRUCTURA MODULAR MOVIL

Uno de los numerosos problemas en los procesos de enseñanza-aprendizaje de alumnos ciegos es la voluminosidad y peso, incomodidad y difícil transporte, del material pedagógico adecuado o adaptado. No es de extrañar, pues, que se hayan tenido permanentemente en cuenta estos extremos.

De las dimensiones apuntadas, se deriva la necesidad/conveniencia de acortar los *ábacos elementales*: 6 órdenes de unidades -*palitos*- deberían ser suficientes para los cálculos esperables en la Enseñanza Primaria (21cm). Pero la Secundaria reclamará ampliar los órdenes -piénsese, por ejemplo, en los decimales-, y los métodos de trabajo en ciertas operaciones -división, fracciones, ecuaciones y polinomios- también reclamarían una longitud superior.

La respuesta fue natural: posibilidad de ensamblar *en serie* los *ábacos elementales*, uno a continuación de otro. De este modo, obteníamos un ábaco doble, triple..., multiplicando el número de órdenes disponibles. Si bien el conjunto alcanzaba unas dimensiones notables -42cm, 63cm, etc.-, se montaban/desmontaban inmediatamente, en módulos de 24cm. Anclajes antisimétricos en los extremos, posibilitaban adiciones ilimitadas.

En concordancia con la concepción didáctica del proceso de aprendizaje y automatización del cálculo, debían respetarse aspectos posicionales o espaciales: - representación de cantidades análoga a la escrita; y - posibilidad de representación bidimensional de las operaciones elementales.

El primero de estos condicionantes, equivalente al valor posicional de cifras o significantes, quedaba resuelto con la propia estructura lineal del *ábaco elemental*, fila o línea. El tamaño era ilimitado, merced a la adición de módulos.

Era intención primordial en el diseño el poder representar operaciones bidimensionales, tal como se viene haciendo en el *instrumental de cálculo para ciegos* citado en la Sección 6.3. Esto implicaba el poder disponer de varias *líneas* o *ábacos elementales*, en los que aparecerían las cantidades integrantes de la operación-algoritmo.

La representación bidimensional de operaciones, por ubicación de cantidades o líneas en paralelo, tal como se efectúa por escrito, requería el empleo de varios módulos. Bastaba, pues, colocar dos o más de éstos contiguos, simulando las líneas de escritura: nos hallábamos ante un *multiábaco*.

Las exigencias de facilidad manipulativa reclamaron mantener unidos entre sí los módulos, evitando que el alumno los desplazara al maniobrar entre ellos. Pero esta fijación suponía incrementar notablemente las dimensiones del conjunto, y podía dificultar las operaciones de introducir, extraer o transportar *fichas* de uno a otro *palito*, especialmente en los interiores.

Surge así la fórmula de *multiábaco móvil* o *deslizable: las filas o líneas* que determinan cada *ábaco elemental* deberían poder deslizarse en paralelo; bien sobre una base común, bien mediante un sistema de acoplamiento que, dificultan el deslizamiento entre módulos, los mantuviera contiguos. Se adoptó esta segunda solución, por más ligera y cómoda para el transporte.

Se obtiene, al mismo tiempo, mayor facilidad de manipulación: las posibles dificultades para operar con *fichas* en los *palitos* interiores pueden resolverse sin más que desplazar *hacia afuera* la línea correspondiente, hasta extraer dicho *palito* del bosque total, y, allí, tomar o introducir las *fichas* oportunas. No obstante, se respeta una separación mínima entre *palitos* en sentido transversal -35mm, distancia entre centros-, permitiendo el reconocimiento, recuento y extracción de *fichas* mediante exploración o asunción vertical.

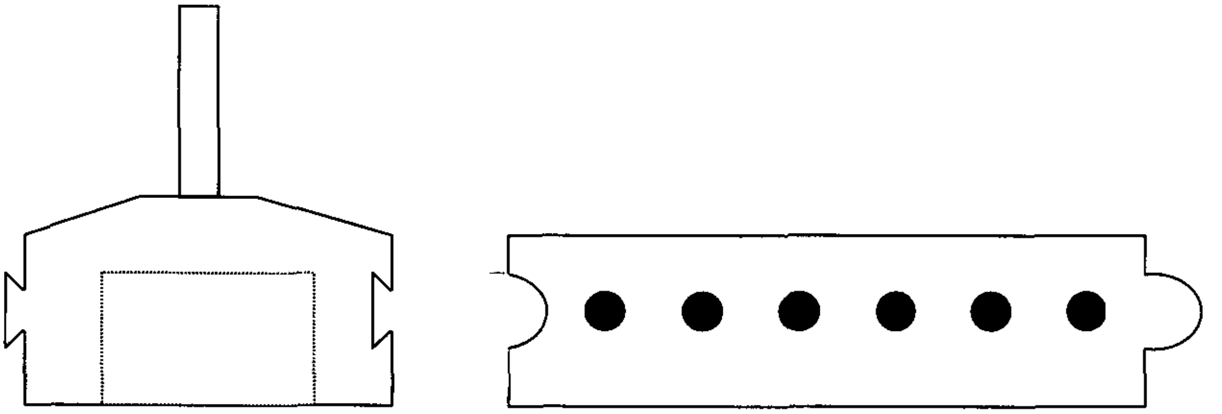
Nos hallamos, por tanto, ante un conjunto de *ábacos elementales abiertos*, cada uno con 6 *palitos* -capacidad para representar expresiones de 6 cifras-, ensamblables por sus bases, tanto en serie -solidariamente-, como en paralelo -deslizables-. Con ellos pueden organizarse de inmediato configuraciones diversas, conformes con la situación física, verbal o escrita de referencia. Nuestro *multiábaco abierto móvil* merecería también el calificativo de *modular*.

Estos módulos elementales son idénticos entre sí, con doble antisimetría plano-axial; de modo que en costados opuestos coincidan entrantes y salientes de acoplamiento. El modelo único, por ende, facilitaría y reduciría costos de diseño y producción en serie.

La producción doméstica, sin embargo, se complejizaba un tanto.

- Un módulo consta, en principio, de una *base* prismática con sección de tendencia rectangular y bordes redondeados, en la que se practican orificios para recibir los *palitos* (fig. 8.1.2A).

(fig. 8.1.2.A vista longitudinal superior y sección de base)

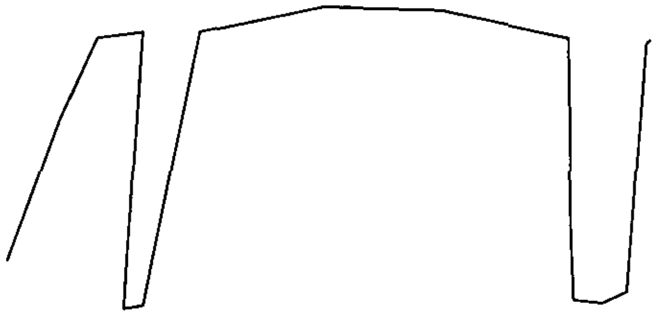


- Los *palitos* individuales -cilíndricos, con una de sus bases en casquete esférico- pueden ser sustituidos por *varillas* o *laminillas* rectangulares con uno de sus lados menores redondeados, individuales o formando un *peine* de seis *varillas* insertable conjuntamente en una ranura longitudinal.

- Los dispositivos de anclaje para unión en serie se logran mediante vaciados, o incorporando algún mecanismo de sujeción de venta en el mercado (cierres por presión para puertas de armario, por ejemplo).

- Las espigas y correspondientes canales para el ensamble en paralelo suponen una complicación técnica no pequeña; puede suplirse mediante una sección de la *base* con *doble U*, que, por superposición, mantenga contiguos los módulos y permita el deslizamiento (fig. 8.1.2B).

(fig. 8.1.2B sección de base con *doble U*)



Ciertos modelos de persianas están compuestos por listones que responden a este esquema y servirían a nuestro propósito, garantizándose el ensamble lateral. Sin embargo, el ancho de tales listones no suele hallarse comprendido entre los márgenes mínimo y máximo aceptables. El carácter plano de estos listones, a su vez, no facilita la extracción de la última ficha.

- La mayor dificultad se encuentra en la precisión que debe acompañar la instalación o diseño de ambos sistemas de ensamblaje, a fin de asegurar un deslizamiento fácil cuando se trate de un conjunto complejo (dos líneas de dos módulos cada una).

- En cualquier caso, las dimensiones de las bases y *palitos* están condicionadas por las *fichas*. Son éstas el primer problema a resolver.

Pueden sustituirse por *anillas* de venta en el mercado, pero carecerían la mayoría de las cualidades del diseño propuesto; en especial, del borde en bisel. Por otra parte, una *luz* desproporcionada para el orificio central obliga a *palitos* de diámetro también relativamente grande, con lo que se incrementan los *ruidos de fondo* en la representación mental y puede que también las operaciones de extraer *fichas* y *lectura* de cantidades en los *palitos* distintos del frontal.

8.1.3 CONVERSIÓN AUTOMÁTICA DE UNIDADES

Quedaba por resolver un aspecto didáctico de importancia: el significado del valor relativo de las cifras o *fichas* presentes en cada *palito.*

La cuestión podría haberse eludido, bien postulando el valor relativo -tal como hacen la práctica totalidad de dispositivos-, bien remitiendo al itinerario didáctico, dejándolo sin reflejo en el diseño. Pero, ¿por qué no intentar un medio facilitador de la comprensión e incluso de la automatización manipulativa?

Se buscaba una fórmula intuitiva y de fácil manipulación; a ser posible, identificadora entre valor y conversión. Una solución física, impregnada por el concepto de *base de numeración,* que dejara expedito el camino para que pudieran ser profundizadas las repercusiones de este concepto como estructurador del lenguaje escrito -y de los propios números naturales-.

Más precisamente, se perseguía crear la necesidad -manipulativa o psicológica- de la conversión a unidades de orden superior, reflejada en el hecho de que *diez fichas en un palito deberían equivaler a una ficha en el palito inmediato.*

La solución apuntaba directamente a la *longitud* o *tamaño* de los *palitos*: se pretendía evitar la conversión convencional que exigen los *ábacos abiertos ordinarios.* No podía exceder, pues, del equivalente a 10 *fichas.* Pero si bien la lógica del concepto nos invitaba a tomar *10* como factor de equivalencia, otras razones nos decidieron a fijar *9*:

1° Paralelismo escritura/representación. El número de *fichas* alojadas en cada *palito* debía corresponderse, en cada momento, con el valor absoluto de la cifra representada. Por tanto, el rango -máximo- debería ser 9. Debía intentar evitarse, además, una doble representación de un mismo número: antes y después de la conversión.

2° Coincidencia motivación-acción. La conversión a unidades de orden superior tenía lugar en el transcurso de operaciones; no en situaciones estáticas de cantidad representada. Por consiguiente, la motivación a la manipulación convertidora debería coincidir con la denuncia de conversión. Lo que ocurría si, existiendo ya 9 *fichas* en un *palito,* sobrevenía una décima que no encontraba alojamiento.

3° Simplicidad convencional. La imposibilidad de que un *palito* albergue diez *fichas* obliga a una fórmula de traslación o transformación. Dicho de otra forma: la conversión es fruto de la necesidad, no de un convencionalismo formal.

4° Simplicidad operacional. No se trataría, por consiguiente, de una operación de conversión a unidades de orden superior separada del proceso, sino que ésta quedaría integrada en la mecánica de cálculo.

Estas ventajas de la *longitud 9* sobre la *longitud 10* quedan puestas de manifiesto en los ejemplos de proceso introductorio a las diferentes operaciones. A ellas nos remitimos, más concretamente, al Pre-cálculo (Anexo I) y a la Adición (Anexo II).

La manipulación consiguiente resultaba, además, muy sencilla. Si en el transcurso de un proceso operatorio, introduciendo *fichas* en un determinado *palito*, éste se saturaba por 9 de ellas, y era preciso introducir una 10ª:

- era obligado que la nueva ficha pasara al *palito* inmediato de la izquierda;

- se vaciaba el *palito* antes completo de sus 9 *fichas*.

Operaciones que podían -casi habría que decir *deberían*- efectuarse con manos diferentes, simultánea o sucesivamente, en no importa qué orden. La disposición en torre de las *fichas* en el *palito* facilitaba tomarlas conjuntamente, y proyectarlas al exterior sin cuidado excesivo: *son fichas de desecho*.

Con espíritu analítico, se descubren en esta operación de conversión dos convenios implícitos:

- Orden o sentido de ocupación de *palitos*: derecha-izquierda. Uno de los dos posibles, que confiere, convencionalmente, mayor valor relativo a las cifras de la izquierda respecto de las de la derecha.

- Retirada de *fichas*, por hallarse representadas o contenidas en la nueva ficha de orden superior.

Uno y otro, pueden -de nuevo: deben- ser suavizados: presentados como aceptables, como intuitivos y, en cada contexto, naturales y lógicamente coherentes. Pues no se trata tan sólo de vencer la resistencia a aceptar reglas de juego -que, por lo general, es muy escasa en las primeras edades-, sino de dotar de contenido real una situación mecánica o abstracta (o, mejor: traducir a esquemas motóricos, primero, y abstractos, después, situaciones reales representadas en el dispositivo).

El primero es aceptado sin dificultad por el alumno, si en las actividades iniciales con el dispositivo el ingreso de *fichas* se efectúa por el *palito* del extremo derecho. Para provocarlo en los primeros momentos, antes de superar la decena, basta presentar girado el único módulo con que entonces se trabaje, quedando el *primer palito* como posibilidad casi exclusiva, dada su cercanía *geográfica*. Al cubrir la decena, el alumno se ve obligado a girar el módulo hasta la posición normal -paralela-, para seguir introduciendo *fichas* cómodamente en el *palito más próximo*: el segundo.

En el contexto de una situación de enseñanza-aprendizaje adecuada, el segundo criterio responde a una operación de canje, precio de trueque, equivalencia contable, valor de sustitución, etc. Más fácilmente aceptable -por concreta y razonable- que un mero convenio o imposición formal o metodológica.

Así es, por otra parte, cómo se procede de ordinario con *material no estructurado*:

- *con cada diez palillos, hago un haz; con cada diez haces, una carga...*

- *con cada diez cuentas, hago un colgante; con cada diez colgantes, un collar...*

- meto las bolas -caramelos, galletas- de diez en diez en bolsas; con cada diez bolsas, completo una caja...

Al final del apartado 8.3.1 y en las propuestas de itinerarios didácticos se ofrecen algunos contextos que pueden ilustrar estas situaciones de conversión, postulando el convenio de forma significativa -aunque persista la arbitrariedad de la agrupación respecto de la base-.

De forma definitiva, nos hallamos ante *"Multiábaco abierto móvil de capacidad limitada"*.

Algunos autores llegan a sugerir la conveniencia de ábacos de *longitud doble* (19 bolas por columna), que permitan explicitar la conversión inversa -una unidad de un orden en 10 unidades del orden inferior- (GÓMEZ, 1988, 166). *Se argumenta que, de esta forma, se posibilitaría la sustracción con llevadas.* Sugerencia satisfecha indirectamente en ***TINKUNAKO***, ya que bastaría emplear dos filas en paralelo (18 *fichas* y una más *flotante*).

La solución nos permitía, por otra parte, dar una respuesta general a la demanda de versatilidad respecto de la base de numeración: ésta quedaba determinada por la *longitud* de cada *palito*. Es decir, *palito*s de *longitud* equivalente a 4 *fichas* implicaba que la 5° no tuviera cabida en uno ya completo, debiendo pasar al siguiente, a la par que vaciábamos el repleto: trabajaríamos en *base 5*.

Esto exigirá acortar los *palito*s. Apuntaban tres soluciones:

1° Contar con juegos diversos de *ábacos elementales* o filas-módulo. Solución que multiplicaba el volumen del complejo y los costos.

Entendiendo esta *limitación* en la limitación de cada *palito* para albergar fichas (9, de ordinario; supuesto que se trabaja en base 10).

2° Contar con juegos de *palito*s de distinta longitud, que pudieran ser sustituidos sobre las bases, según el sistema de numeración en que se deseara trabajar. Pero esto suponía un sistema de sustitución que complicaba el diseño, lo hacía mecánicamente más débil y encarecía el dispositivo.

3° Disponer de *suplementos* que, instalados sobre las bases, redujeran funcionalmente la *longitud* de los palitos; es decir: elevar la base respecto del extremo libre de los *palito*s. Suplementos que podían ser macizos o huecos, que cubrieran la porción inferior de los *palito*s de cada *ábaco elemental.*

Dentro de esta tercera solución, se optó por *prismas desarrollables*: piezas planas y convenientemente perforadas, que, mediante los oportunos pliegues, se encajaban en el conjunto de los 6 *palito*s de cada módulo, reduciendo la longitud emergente de cada *palito* a la requerida por el sistema de numeración elegido.

En la práctica, no suponían incremento de peso ni volumen, pudiendo ser incluidos en la misma caja o maletín que contuviera el conjunto. Su instalación sería muy sencilla, y la capacidad de recuperación mecánica y el costo adicional dependían tan sólo de la calidad del cartón o plástico a emplear. Además, no era preciso aportar un juego completo de bases de numeración: bastaría con las más representativas, a guisa de ejemplo -bases 5 y 7-. La *base 2* resultaría al superponer los suplementos de las anteriores.

Conviene observar, no obstante, que en cierto sentido háptico sería la menos aconsejable, por cuanto supone un notable volumen global; pero este *volumen global* vendría a ser común a todas las bases de numeración.

8.1.4 AMPLIANDO LAS APLICACIONES

TINKUNAKO había nacido con intenciones bien limitadas: introducir a las operaciones aritméticas elementales, estableciendo nexos con la escritura posicional. No existía tampoco pretenciosidad en el dominio de aplicación: los números naturales -enteros positivos-. Pero en el transcurso del desarrollo de las propuestas de itinerarios didácticos de las aplicaciones previstas en un principio, fueron abriéndose nuevos horizontes.

El primero de los campos numéricos que reclamaba una posibilidad de tratamiento con *TINKUNAKO* fue el de los números decimales.

Se había optado por un único tipo de *fichas*; la porción decimal de una cantidad mixta no podía ser expresada mediante *fichas* diferentes, salvo que se complicara el dispositivo en sus elementos, y se traicionara la filosofía inicial. Esto implicaba la representación de la *coma decimal* mediante un elemento propio, convenientemente simple y manipulable: una *ficha especial para la coma*. Mas, ¿dónde ubicarla?

Se desechó la posibilidad de introducirla en los *palito*s de órdenes numéricos (aunque la solución hubiera sido válida a todos los efectos). De hecho, la *coma* separa o determina estos órdenes en una expresión; por consiguiente, su lugar estaba llamado a ser el espacio entre *palito*s, en la base de los módulos.

Las *fichas* especiales de coma no tenían por qué coincidir en diseño con las *fichas* de unidades. Es más: pareció oportuno que fueran predominantemente planas -se evitarían confusiones en el recuento de *fichas* en los *palito*s contiguos-, y una forma diferente facilitaría su localización y reconocimiento.

La sujeción se lograba mediante *muescas* semicirculares que las ajustaran a ambos *palito*s contiguos. Se evitaba de esta forma el practicar orificios u oquedades en la base del módulo, y se facilitaba su producción (no serían precisas *pestañas* ni *patillas* fijadoras). (fig. 8.1.4)

Con esta solución, las cantidades correspondientes a expresiones decimales se representaban sin dificultad ni limitación. La introducción en cada fila podía hacerse sin mover las *fichas* ya introducidas e independientemente unas líneas de otras, ya que el deslizamiento entre *ábacos* permitía la rectificación final de posiciones. Quedaba resuelto el cálculo con expresiones que incluyeran la coma; si fuera preciso, en cualquier base de numeración.

La *coma* o *punto decimal* sería la primera en la serie de etiquetas o *fichas* especiales. Inmediatamente, reclamaron su puesto los signos de operación: suma, resta, multiplicación, división.

Ninguno de estos *signos* parecía esencial; sólo un estricto paralelismo con los usos del cálculo escrito apoyaba su presencia. El contexto fijaba suficientemente la operación a realizar, pudiendo prescindirse sin riesgo del signo representativo.

Pero, en el transcurso de los desarrollos didácticos, una vez más, se abriría una vía de ampliación aplicativa que recomendaba la disponibilidad del *signo de restar* o *signo menos*: la aparición de expresiones negativas, al efectuar sustracciones de minuendo menor que el sustraendo, ambos positivos. De esta forma, no sólo se justificaba el *signo de restar*, recordatorio de la operación, sino que se marcaba el *signo menos* o *valor negativo* del resultado, redundando sobre la información espacial. El trabajo con *TINKUNAKO* abarcaba así también a los números enteros negativos; sin necesidad de recurrir al color o elementos diferenciados, como lo hacen otros materiales de iniciación al Cálculo.

Autorizada la existencia de *fichas especiales* del signo menos, se abría la puerta al *signo más* o *signo de sumar* -por simetría-, y a los *signos de multiplicar y dividir* -por completitud-. Todos ellos, en formato y modo de empleo análogos.

Se planteaba una duda por vez primera: signos en relieve, sí, pero ¿Sistema Braille, o tinta? La respuesta era sencilla, y sin mayores complicaciones técnicas: en ambos códigos.

Cubiertos los campos numéricos de los naturales, de los enteros y decimales, sólo restaban los fraccionarios enteros para completar el cuadro calculatorio elemental. El *signo de dividir* sugería una forma de representación: en una misma línea, numerador y denominador separados por el *signo de dividir*, que haría las veces de barra o trazo de fracción; suponía, al mismo tiempo, una preciosa unificación conceptual difícilmente aceptada por los escolares: que *una fracción es una división indicada*. Problema muy distinto sería agilizar y automatizar el cálculo de fracciones con *TINKUNAKO*.

Las sucesivas conquistas invitaban a intentar nuevas aplicaciones: ¿expresiones algebraicas?, ¿polinomios?, ¿ecuaciones?, ¿inecuaciones?...

TINKUNAKO era ya una pizarra en la que, por modo sólido, podrían expresarse la práctica totalidad de los conceptos matemáticos de los niveles elemental y medio de enseñanza; tal vez iniciarse en su cálculo, quizás ventajosamente respecto de la expresión escrita... Se requería, para ello, la disponibilidad de *signos de organización* -igual, paréntesis- y *de relación* -igual, de nuevo, mayor que, menor que-. Asimismo, una forma de representación de variables algebraicas y sus exponentes.

Los *signos de organización* y *de relación* siguieron suerte análoga a los de *operaciones*: etiquetas o *fichas* especiales, a emplazar en la superficie de la base, en los espacios entre *palitos*. Las *variables algebraicas* se limitaron en su variedad: bastaría con tres tipos (*X*, *Y* y *Z*). Su lugar estaría en los propios *palitos*, como *fichas* insertables en éstos, aunque diferentes en formato a las *fichas* unidad, y que las hiciera fácilmente recognoscibles.

Tampoco escaparía a la investigación la aplicabilidad a la Teoría de Conjuntos. Formas de representación de conjuntos pequeños, operaciones entre conjuntos, correspondencias... Los convenios representativos eran asequibles y simples, y apenas se requerirían elementos adicionales para la plasmación de los nuevos conceptos: *cuerdas elásticas* aplicadas a *palitos*...

Se complejizaba el dispositivo en sus elementos, pero cada nueva ficha, cada nuevo aditamento se hallaba ligado a una nueva aplicación representativa y calculatoria.

Se superaban con creces los objetivos iniciales, se sobrepasaba en extensión y profundidad inusitadas las posibilidades del material hoy disponible, y permanecía intacta la simplicidad y facilidad manipulativa del diseño primigenio.

Las etiquetas y *fichas* especiales sólo eran precisas en la medida que se deseara emplear *TINKUNAKO* en dominios progresivamente más amplios, prescindibles en los primeros estadios del curriculum académico.

* * *

El dispositivo podía muy bien haber permanecido bajo la denominación genérica de *Multiábaco abierto móvil*, o *multiábaco modular*. Pero los niños gustan de que sus objetos de trabajo y de juego posean un nombre propio; incluso los más pequeños los personifican, llegando a entablar con ellos diálogos o discusiones.

Los progenitores de *TINKUNAKO* se sintieron niños una vez más: como hacemos cuando, con ánimo abierto y sencillo nos disponemos a aprender algo que anhelamos conocer; como nos enfrentamos ante un inocente problema de Matemáticas. Y *"estos niños"* buscaron un nombre para su útil de trabajo y juguete a la vez.

TINKUNAKO empezó siendo un problema, un desafío, del que nació una relación de amistad, y *TINKUNAKO* se perfiló y desarrolló también gracias a la amistad. *TINKUNAKO* era un encuentro entre amigos que antes no se conocían.

Así fue también hace cuatro siglos. Cuando en las estribaciones argentinas de los Andes, españoles y quechuas se encontraron: primero, frente a frente, en ánimo belicoso; el mismo día, codo a codo, en franca camaradería. Un enfrentamiento que dio paso a la amistad, una batalla convertida en fiesta: la fiesta de *TINKUNAKO*, la fiesta del *ENCUENTRO*.

Además, *TINKUNAKO* es ciertamente *ENCUENTRO*: ENCUENTRO entre Matemática y realidad, entre ideas y manipulación. Y una FIESTA: la de aprender haciendo, la de descubrir jugando.

8.2 BAJO EL PRISMA DE LA DIDÁCTICA

Se ha mencionado la *compenetración profesor-material* como uno de los factores que pueden incidir favorablemente en su aprovechamiento por el alumno. Concepto que supera el simple conocimiento o dominio: contiene un tinte de aprecio, de afecto, de apoyo e influencia mutuas... Un a modo de *amistad.* Y la amistad comporta conocimiento y confianza: el conocimiento de realidades, posibilidades y limitaciones, y la confianza que genera el no defraudarse jamás. La amistad no se impone, ni se decide. Se conquista por el trato, con la generosidad, que es entrega sin esperanza de pago...

No es fácil describir las íntimas satisfacciones que da el ir descubriendo valores no pretendidos en el trabajo inicial. Parece como si la obra hubiera cobrado vida propia, y nos cautivara con encantos no imaginados. Surgen aspectos deslumbradores, que creemos superan con mucho nuestro proyecto, y que nos hacen temer que la obra no es nuestra, sino nosotros de ella... La fábula es conocida: Pigmalión.

Estamos advertidos de síndrome pigmaliónico. Pero no renunciamos a la compenetración amistosa que hemos adquirido con *TINKUNAKO,* y que estimamos deseable para cuantos a él acudan en busca de ayuda para andar airosamente los caminos del Cálculo.

Pese a que en cuestiones de aprecio y satisfacción poco cuentan las razones, intentemos comunicar algunas.

8.2.1 ATRACTIVOS DIDACTICOS

1°) Correlato realidad física - realidad matemática.

Las *fichas* de unidad son objetos tangibles, no símbolos convencionales. En una situación didáctica determinada pueden representar y sustituir a otros objetos *-concreto imaginado-*, más próximos afectivamente al alumno que unas ramplonas piezas de resina, metal o madera, con ventaja manipulativa a efectos calculatorios y ausencia de elementos distractores; en alguna forma, se corresponden con el calificativo de *transparente* que LESH (1987)aplica a ciertas representaciones o materiales: las que no contienen ni más ni menos significados que la idea que representan; mientras que las *opacas* ponen de relieve unos significados en detrimento de otros y no tienen, por tanto, el mismo contenido semántico que la idea que representan (cit. por PUIG y CERDÁN, 1988, 189).

Las operaciones matemáticas son actuaciones físicas sobre *fichas.* Se trabaja con materia, exactamente igual que si lo hiciéramos con semillas, cuentas de collar, monedas o piedrecitas -cálculos-, como desde antaño lo hicieron los maestros de todos los tiempos que más se preocupaban de resultados que de métodos.

TINKUNAKO es un lugar de encuentro entre realidad física y Matemática.

2º) Bajo nivel y escaso número de convenios representativos.

A fin de cuentas, se reducen solamente a tres; para una misma cantidad:

a) Para expresar una cantidad, las *fichas* se introducen en una misma línea; es decir: se identifica línea y cantidad individual. Como en la escritura: una cantidad viene determinada por un signo de operación o de relación, o por hallarse aislada en una línea. Sin embargo, pueden aceptarse excepciones con fines algorítmicos; tal es el caso de la disposición para la división -no en una primera fase-, ecuaciones, etc.

b) Las *fichas* se introducen de derecha a izquierda.

c) Convenio de *palito* completo: si un *palito* se halla completo -9 *fichas*-, la nueva ficha pasa al *palito* inmediato izquierdo, y se retiran las *fichas* que ocupaban aquél.

Apurando formalismos, cabe puntualizar:

d) Las *fichas* en el *TINKUNAKO* tienen el valor que les confiere el *palito* que ocupan; fuera de él, la unidad. Si transitan entre *palito*s, sólo lo hacen en la misma columna, y conservan el valor relativo.

Los primeros convenios aparecen desde los momentos iniciales, y son aceptados sin resistencia; es más: pueden tornarse intuitivos, gracias al diseño y a técnicas de presentación adecuadas. El último, subyace en las *reglas de operación*, y no es preciso enunciarlo ni aceptarlo explícitamente de forma separada.

En *TINKUNAKO* se hallan reducidas al mínimo las ataduras a convenios representativos u operacionales.

3º) Preeminencia de la manipulación sobre la actividad de combinatoria simbólica (en cualquiera de las otras formas representativas).

En otras palabras: las *reglas operatorias* se reducen -en alguna forma, incluso la intención misma, definitoria de la operación, a mera manipulación de *fichas* entre palitos. *Reglas* que se enuncian como acciones o movimientos simples y espacialmente bien determinados.

En el extremo, aún podríamos aventurar más: contrariamente a como ocurre en el cálculo por escrito, y aun en el cálculo mental ordinario,

TINKUNAKO no precisa del *cálculo mental;* ni siquiera elemental.

En este sentido, puede ser utilizado -así lo haremos para iniciar al alumno en el propio cálculo mental a bajo nivel. Para calcular, basta con comprender y aplicar las *reglas de manipulación física*, específicas de cada operación.

Exagerando: nuestras manos actúan, y *TINKUNAKO* piensa.

Entre otras, esta cualidad intrínseca abre una vía de intervención didáctica:

4°) Los progresos manipulativos, tanto en su ejecución como en su concepción, y aunque no de forma causal, repercuten favorablemente en progresos calculatorios.

Lo que permite a los alumnos con dificultades de simbolización o de trabajo con entes abstractos -como son las expresiones numéricas escritas-, superar las barreras del cálculo por medio de la simple manipulación *física* de *fichas* en el dispositivo. Análogamente a los frutos proporcionados por el empleo de calculadora en casos de bloqueo.

TINKUNAKO asimila la mecánica de símbolos a mecánica de manipulación física.

Pero no evita el esfuerzo conceptual de *cuándo hay que operar, qué operación conviene aplicar, a qué cantidades*. Es decir: no ahorra la fase más profunda y valiosa de la actividad matemática. Proporciona, en cambio, un auxilio seguro para el camino a recorrer, *"tomada conciencia de dónde estamos, adónde queremos llegar y con qué cargamento"*.

El contenido y desarrollo de técnicas manipulativas es bien conocido; mucho mejor que el de procesos de simbolización y combinatoria psíquica. En nuestro caso: asir y contar *fichas*, enhebrado en los *palitos*, orientación espacial en una fila y en el conjunto, transporte de *fichas* conservando la columna, etc. Pueden organizarse actividades previas o paralelas para la adquisición y desarrollo de estas habilidades, que repercutirán, indirectamente, en progresos calculatorios.

Es innegable que es más sencillo *aprender a hacer* -con las manos- que aprender a *pensar*, mejor controlable, más optimizable. *TINKUNAKO* favorece así el acceso y la práctica del Cálculo a nivel elemental, ofreciendo la manipulación como vía alternativa al Cálculo Mental básico y al empleo de recursos de memoria, a la par que los potencia.

5°) *TINKUNAKO* es un material cuya representación mental es inmediata -dentro de unos márgenes de complejidad de cantidades.

Cada cifra viene expresada por una *torre* o conjunto de *fichas* en contacto, contenidas en un mismo *palito*. No es arriesgado afirmar que la imagen -recuerdo- de esa cifra se asemeja en mucho a una *torre*, *bloque* vertical, *columna* cilíndrica..., lisa o segmentada. Quizás no se halle gran diferencia entre las imágenes del *4* y del *5*, pero sería relevante para *4* y *9*, *4* y *2*, e incluso *2* y *3*.

Una vez introducida una cantidad en el dispositivo, es recognoscible como una sucesión de *torres, bloques* o *columnas* -quisiéramos no confundir con este término-, que la configuran completamente. En particular, un *0* sería un *espacio en blanco*. Algo parecido a un *histograma* o *diagrama de barras*.

Es evidente que estas representaciones facilitan una evaluación y comparación de cantidades, imposible en la escritura simbólica sin una interpretación mucho más minuciosa y menos intuitiva. Muy posiblemente, se favorezca también el cálculo en una especie de *TINKUNAKO mental*, análoga a aquélla de la que hablan los buenos calculadores en *Sorobán*.

Facilidad de formarse, de reproducirse y de conservarse; he aquí las cualidades esenciales gracias a las cuales estas imágenes espaciales del ciego, por muy despojadas que sean, están llamadas a jugar un papel considerable en su vida mental. Llegan a ser el punto de unión y como el soporte de múltiples asociaciones de ideas. (VILLEY, 1946, 116).

TINKUNAKO favorece la generación de imágenes sencillas, aptas para la *manipulación mental*.

6º) *TINKUNAKO* exige menor empleo de recursos de memoria.

Y esto, en un triple sentido.

- La manipulación de *fichas* -objetos físicos- se refleja en esquemas cinestésicos, dinámicos, espaciales, que se graban como verdaderos hábitos motores y aun actos reflejos. La memoria consciente pasa a ser elemento corrector, más que director. Se reduce la fatiga psíquica. Se precisa menos esfuerzo evocador, de memoria general.

Por otra parte, ya hemos señalado en el Apartado 6.2.1 H. cómo el cálculo escrito precisa continuamente del cálculo mental. Y cálculo mental, en su etapa básica -previa a la automatización-, supone recordar relaciones triádicas: *4+5=9: 4, 5, 9*. Con estructura matricial o lineal, todo un listado de ternas numéricas, en forma simbólico-matemática, verbal o icónica.

- Con *TINKUNAKO* no se precisa tal evocación: de los datos numéricos se pasa al resultado, expresados como situación de *fichas* en *palitos*, a través de una simple manipulación conforme a la correspondiente regla operativa. Basta *leer* y manipular, evitándose las operaciones psíquicas de evocación de la relación determinante. Un nuevo ahorro mnésico, ahora de memoria específica.

- Finalmente, los algoritmos escritos exigen, por lo general, destinar registros de memoria inmediata a retener datos parciales que se emplearán a continuación: *6+7=13: 3, y llevo 1*. *TINKUNAKO* convierte esta operación mental en la manipulativa de conversión de unidades, sencilla y automatizable. Se puede prescindir, pues, de tales registros de memoria inmediata, quedando liberada la atención para ser aplicada a la ejecución y control de la mecánica dígito-manual.

TINKUNAKO permite vías alternativas que soslayan retrasos o carencias de orden psíquico.

Sin embargo, estas economías de memoria gracias al Cálculo en *TINKUNAKO* no implican que deban respetarse indefinidamente, que se dejen languidecer dichas cualidades potenciales sin intervención. De hecho, uno de los objetivos generales del proceso educativo es el desarrollo de la memoria, su estructuración y mejor gestión. Como vimos en las Secciones 6.2 y 6.3, el cálculo mental y el escrito, al exigirlo, contribuyen a dicho desarrollo; pero no debemos hacer depender el progreso en cálculo del grado de utilización que el alumno haya alcanzado en memoria inmediata, específica o general.

7º) *TINKUNAKO* facilita la generación y desarrollo de estrategias personales y de pensamiento divergente.

Tal vez no sea éste el lugar más propicio para mostrar la flexibilidad y potencialidad del dispositivo, ya que convendría referirse a situaciones manipulativas y operatorias particulares. Hágase mención, no obstante, de algunos aspectos, puntos de partida para el desarrollo de estas capacidades, tan apreciadas por la pedagogía ligada a la escuela cognitivista.

En los Anexos, tras sugerir itinerarios didácticos para las operaciones aritméticas se adjuntan observaciones en las que se analizan itinerarios alternativos y se valoran didácticamente. Desde la ramplona representación y ejecución en *TINKUNAKO* de los algoritmos tradicionales, hasta *algoritmos propios*, como ábaco, imposibles de reflejar en cálculo escrito. Más concretamente:

- La libertad de acción que se ofrece a profesor y alumno es fruto de la ausencia de rigidez en el orden de actuación sobre las columnas; no se impone preceptivamente proceder de derecha a izquierda -caso de la suma, resta o multiplicación-, ni de izquierda a derecha -caso de la división-: éstas son conveniencias o necesidades del cálculo escrito, para no rectificar continuamente lo ya estampado, tachando o borrando. Pormenor tan apreciado se trata minuciosamente en las Unidades de referencia contenidas en los Anexos.

- Análogamente, la posibilidad de configurar en forma diversa el conjunto de módulos o ábacos elementales que intervienen en una operación, puede ser ocasión para confrontar soluciones que respondan a estrategias diferentes, basadas en tales configuraciones o disposición de líneas. Con ello, puede analizarse en qué medida un resultado depende de dicho orden -propiedad conmutativa o anticonmutativa, inversos, etc.-.

- Por último, no se prescriben técnicas exclusivas de manipulación: modo de tomar, agrupar y asir *fichas* externas, de introducirlas en los *palitos*, de efectuar los recuentos, lectura de cantidades de varias cifras, transporte de *fichas*, eliminación de lotes de 9 *fichas*, etc. Como tampoco se impone -aunque se recomiende- un emplazamiento y postura del alumno frente al dispositivo.

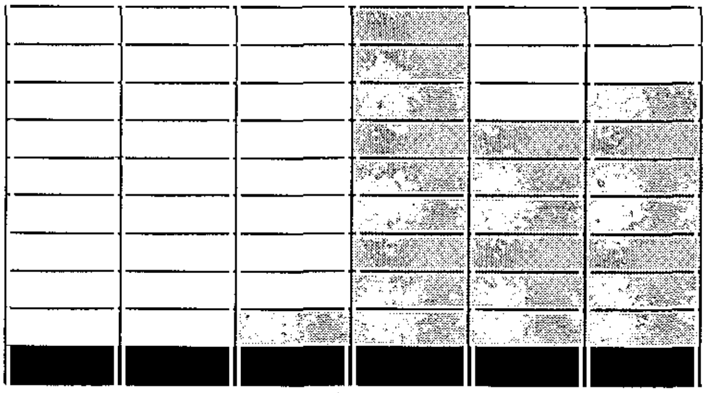
Todo un abanico de posibilidades para adquirir, desarrollar y optimizar técnicas personales, sugerencias del alumno y del profesor, etc. Todo un campo de experimentación a la espera de la iniciativa personal, que quizás nunca se agotará.

TINKUNAKO está abierto a la creatividad del alumno y del profesor.

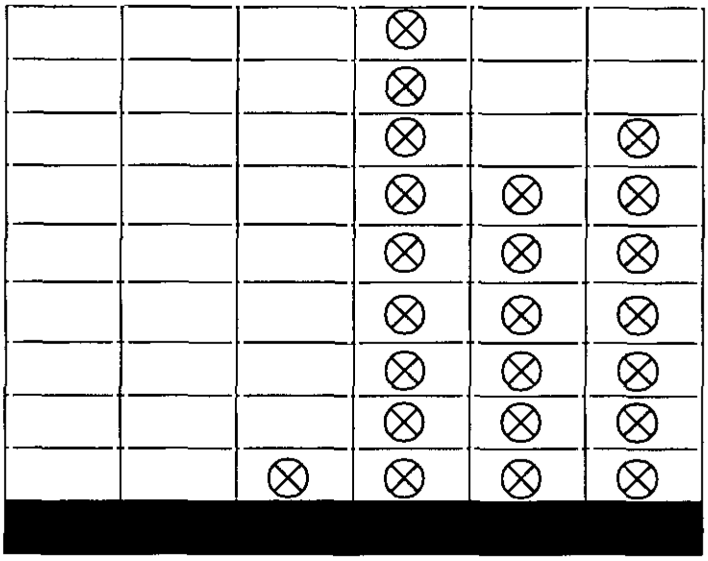
8°) Posibilidad de diseños alternativos, en forma gráfica o manipulativa.

Ha bastado el intento de ilustrar los Anexos mediante ejemplos gráficos que expresaran situaciones y procedimientos, para aflorar diseños que muy bien podrían dar lugar a versiones de aplicación en el aula.

- Modelo gráfico.- Sirviéndonos de papel cuadriculado, se cortan *tarjetas* de 6x9 cuadrículas, en las que se marca una *base* o *línea de tierra.* Puntos, trazos o cruces hacen las veces de *fichas.* En el proceso operativo, *retirar fichas* equivale a *borrar o tachar* marcas. Bien es cierto que, en procesos complejos -en los que en una misma columna (*palito*) se retiran y añaden unidades- pueden generarse situaciones confusas; inconveniente que se soslaya empleando como soporte algún tipo de plástico -*Vileda*- y rotuladores *ad hoc* para el dibujo de unidades. Aunque las *tarjetas* producidas en papel o cartulina son de vida limitada -casi efímera, reducida a una cantidad/operación-, su producción en serie es sencilla, rápida y económica.



- *TINKUNAKO* plano.- En forma análoga a la anterior, pero empleando monedas u otros elementos móviles como unidades (*fichas*, botones, legumbres, etc.). Mediante soportes que permitan una cierta inclinación, se logra el efecto de deslizamiento de tales elementos móviles hasta la *base*, que debería incluir entonces un doblez o *tope*.



- *TINKUNAKO* de *tiras*.- Sobre *tarjetas* de cartulina o plástico en las que aparece una cuadrícula de 6x9, se sustituyen los elementos móviles (unidades) por *tiras* de longitud no inferior a 9, que se *sumergen en la base*. Un simple doblez o pestaña permite deslizarlas en las direcciones arriba/abajo hasta la altura deseada, produciendo el efecto de las *torres de fichas* en *TINKUNAKO*.

Estas versiones, aunque podrían adaptarse al empleo por alumnos ciegos, resultarían poco asequibles a la exploración y manipulación háptica. El diseño vertical (*palitos* exentos enclavados en una *base*) es, bajo todos los aspectos, muy superior en manipulabilidad exclusivamente háptica.

Con alumnos videntes pueden servir como sugerencias pàra el diseño de modelos a escala grande, que, adheridos al tablero o para su empleo con retroproyector, serán adecuados para unificar las tareas de grupo o demostrativos de uso. Por último, queda todo el campo de integración con nuevas tecnologías:

- *TINKUNAKO en pantalla*. Como metáfora base de programas informáticos interactivos, que simulen itinerarios didácticos análogos a los que se sirven de *TINKUNAKO* real. Como se indicaba en el Apartado 7.3.3, gozaría más propiamente de la condición de material gráfico que manipulativo. Hoy por hoy, de imposible adaptación al uso por alumnos ciegos totales.

8.2.2 EVALUACIÓN

Si sometiéramos a *TINKUNAKO* al tamiz de un baremo tal como el recogido en el cuadro 7.4.1, cual *ficha de evaluación inicial*, se obtendría sin duda una valoración positiva, ya que actuaron como guías conscientes para el diseño, corrigiendo permanentemente el rumbo. Como se ha expuesto en la Sección anterior, el diseño pretendía responder a los aspectos deseables a priori, en el orden temporal que se relata. No obstante, puede probarse a aplicar un instrumento valorativo análogo -no lo hemos encontrado en la literatura especializada-.

En cualquier caso: ¿qué garantías ofrece una evaluación *en vacío* de un material cualquiera?

La educación es algo vivo. Y esa vida la tiene no sólo por su carácter cambiante, por su vitalidad; merece también el calificativo por su dimensión vivencial: si hay ciencia de la educación -Pedagogía, Metodología, Didáctica-, es ciencia práctica. Más próxima al arte que a la ciencia teórica.

ORTON (1990) aporta argumentos que abonan el escepticismo respecto de la evaluación objetiva en la investigación didáctica, en general, y de la eficacia de un material, en particular, al observar que Los instrumentos de medición que tenemos a nuestro alcance no son adecuados para demostrar convincentemente en qué grado pueden los "aparatos estructurales" promover el aprendizaje. (ORTON, 1990, 117).

En todo experimento, aparecen variables incontrolables que ponen en riesgo la validez de un material o método concreto. Y, lo que es más complejo aún: a mayor tamaño de la población involucrada, mayor diversificación en rango y cualidad de dichas variables. Como ejemplo, sirvan:

- imposibilidad de asegurar que los alumnos del *grupo de control* no reciben más aportación específica que las *lecciones de control* por parte del profesorado y alumnos aventajados, o provenientes del contexto socio-familiar;

- imposibilidad de desvincular experimento y *estilo docente* -por no decir *calidad de la enseñanza*-;

- influencia del grado de compenetración profesor-material, de los métodos a seguir y la *idea* directriz de la experiencia;

- influencia del "*efecto de trasferencia de entusiasmo*" por el material, entre el profesor que participa voluntariamente en una experiencia y sus alumnos;

- dificultad en diseñar pruebas de control que garanticen una comparación imparcial entre los efectos de dos experiencias muy diferentes.

Una "*declaración de validez*" de *TINKUNAKO* o de cualquier otro útil requiere su aplicación en el aula. Pueden adelantarse objeciones o votos encomiásticos, predicciones de éxito o limitaciones. Pero la *piedra de toque* definitiva es su comportamiento en el torbellino del acto didáctico. Y allí intervendrán decisivamente factores ajenos al material, intrínsecos a la situación de la que aquél forme parte.

TINKUNAKO ha *pasado el Rubicón* que separa proyecto y realidad. Durante tres años, Rodolfo Robles ha compartido su quehacer matemático con *TINKUNAKO*: entre los 9 y 11 años. Juntos aprendieron las operaciones aritméticas con números enteros y decimales; bajo la forma de un prototipo que hoy nos parece tosco e insuficiente, nada facilitador del trabajo, con relación al modelo final.

La experiencia fue bien limitada; bien alentadora también. Las situaciones fueron individualizadas, abstractas, siguiendo los algoritmos escritos tradicionales. Pero los resultados superaban aun las expectativas que la necesidad hacía deseables. *TINKUNAKO* no sólo cubría una carencia -Rodolfo no conocía el Braille-, sino que se proyectaba como un poderoso instrumento didáctico.

Ahora bien: el valor didáctico de un material no es absoluto ni cerrado. La valoración definitiva estará ligada a factores ajenos a él:

- situación de enseñanza-aprendizaje en que se inserte.

- entramado de objetivos a los que sirve;

- itinerario didáctico particular;

- grado de compenetración profesor-material;

- nivel de destrezas básicas del alumno;

- calidad de realización.

Este Capítulo pretende conformar un marco para mostrar una buena parte de la potencialidad didáctica de *TINKUNAKO*. Pasemos revista a estos factores, intentando aportar motivaciones, sugerencias o modelos que favorezcan un uso fecundo en los procesos de enseñanza-aprendizaje del cálculo en los niveles inferiores del curriculum.

Inevitablemente, responden a un modelo metodológico: el *triángulo de iniciación al cálculo*, integrado por *TINKUNAKO*, la escritura Braille y el cálculo mental. Triángulo que:

- gira en torno a *situaciones de partida* (situaciones problemáticas) con referente real -imaginado-,

- al ritmo y estrategia que sugieren un determinado itinerario didáctico,

- dinamizado por la intervención del profesor y respuestas del alumno,

- sustentado en las destrezas manipulativas básicas que se suponen ya adquiridas por el alumno.

Prescindimos de considerar la influencia de la calidad de realización del dispositivo, confiados en el buen hacer de los técnicos.

8.2.3 ÁMBITOS DE APLICACIÓN

1°) *Uso indistinto por ciegos y videntes.*

TINKUNAKO puede ser empleado por no importa qué alumno, independientemente de la discapacidad que padezca, y aun sin padecer ninguna. No está alterado por *adaptaciones esenciales*: si el diseño original se adecua a las necesidades perceptivas y manipulativas de un alumno ciego, nada impide -ni siquiera dificulta- su manejo por un alumno vidente. El color en cualquiera de sus partes o elementos no añadiría valor didáctico alguno, si no fuera un mayor atractivo o estimulación sensorial.

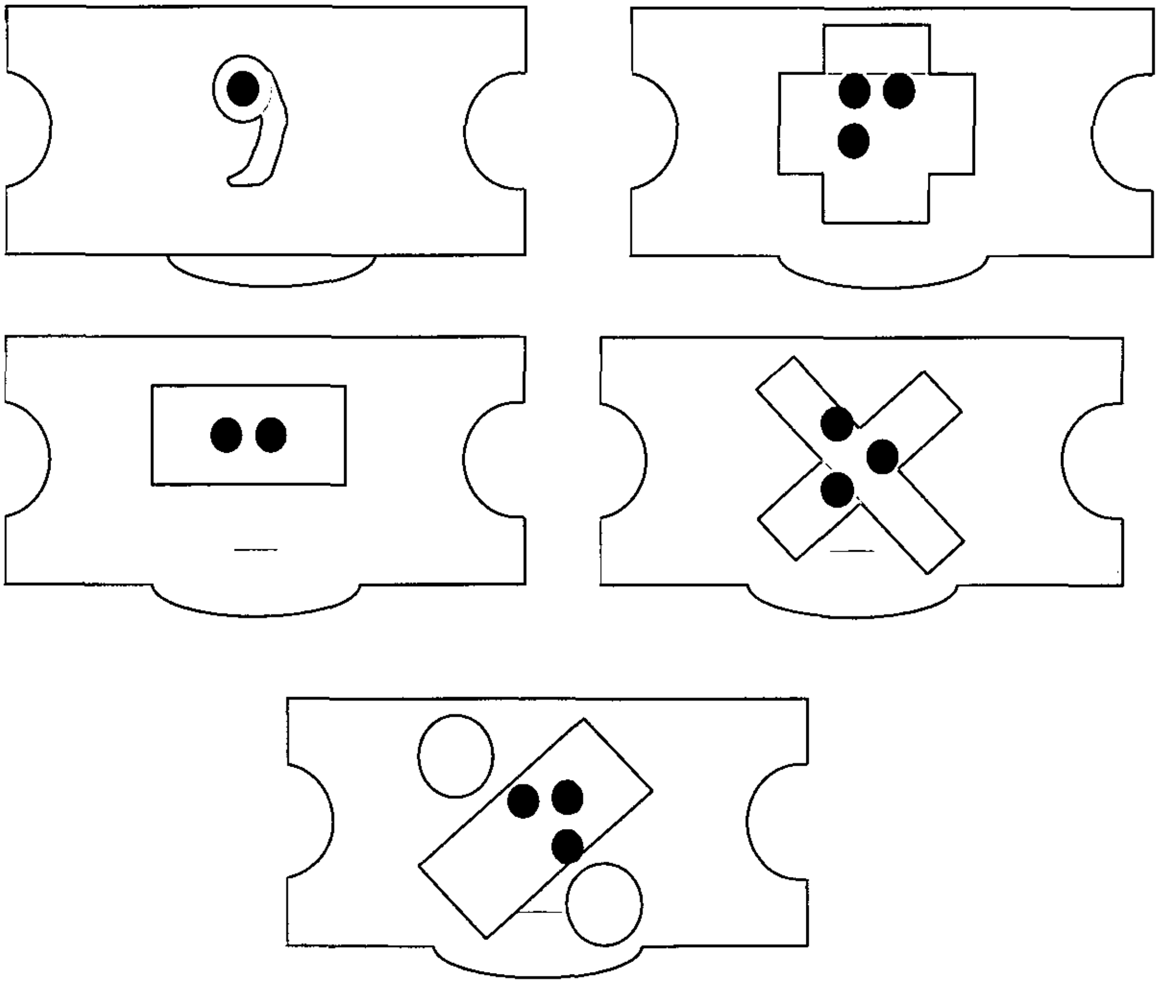
Así pues, cabe servirse de *TINKUNAKO* con todos los alumnos de un aula en la que convivieran videntes y ciegos, sin diferencias metodológicas. En las sugerencias de desarrollos didácticos que se proponen en los Anexos, podrían suprimirse las referencias al Sistema Braille, sin merma alguna. Encontramos que:

TINKUNAKO es un instrumento de verdadera integración escolar

Semejante en su uso por ciegos y videntes, donde la vista sólo refuerza, asegura y agiliza la manipulación, no la sustituye ni enriquece en absoluto. Se dispone, pues, de una respuesta idónea a un problema didáctico, fácil de plantear, nada fácil de resolver:

> Cuando el maestro elija material concreto debe tener siempre presentes las necesidades de todos los alumnos del aula, de forma que el material a utilizar favorezca a los que presentan mayores dificultades. (MEC-CDC, 1991, 103).

Llamemos la atención sobre la solución adoptada para el código de representación de las *fichas* especiales; doble: Braille y Tinta (figura 8.1.4). No fue pura inercia mimética, ni complicación ornamental. Tratándose de un material de uso previsto para alumnos ciegos, que trabajarán en Sistema Braille, ¿por qué el doble código?



Varias son las razones que lo hacían aconsejable:

- Finalidad ilustrativa. El *alumno ciego no precisará* los *signos de representación en* tinta en su quehacer educativo, ya que trabajará ordinariamente en Braille (desechemos, al servirnos de ***TINKUNAKO***, el empleo de cualquier otro instrumental de los señalados en la Sección 6.3) (excepción hecha, como es natural, de la máquina Braille). Pero puede que no le falten ocasiones de tener que reconocer esta notación en la vida doméstica: indicadores ± en mandos de regulación de aparatos diversos, rótulos, en relieve, etc.

- Finalidad comunicativa en la *educación en integración.* Así como un cierto conocimiento del Sistema Braille por parte de los compañeros videntes se considera como elemento integrador para el alumno ciego -a mayor conocimiento de las técnicas personales de trabajo, mayor aceptación y comprensión-, así también el conocimiento por el alumno ciego de las formas escritas en tinta facilita la comunicación -y consiguiente integración- escolar.

2º) El dispositivo parece reunir condiciones para *ser utilizado con alumnos que padecen deficiencias psicomotrices*, de motricidad fina en mano y dedos, e incluso deficiencias psíquicas importantes.

Esta hipótesis viene avalada por la simplicidad y reducido número de elementos y convenios, y la variedad de estrategias posibles en su manipulación. Aunque tal vez deberán revisarse en algunos casos las dimensiones y otras características de los elementos, acomodándolas a las necesidades específicas del alumno. La posibilidad de un control háptico de la manipulación, aunque no sea estrictamente necesario en estos casos -salvo que también falte la vista-, permite una complementación y redundancia de información cuyos efectos multiplicativos tienen consecuencias probablemente más allá de la simple percepción:

> La ventaja biológica de poseer varias modalidades sensoriales especializadas reside simplemente en que esto produce más cantidad de información y más precisión en la misma. El solapamiento y la redundancia de la información convergente puede añadir otra dimensión significativa, como en el caso de la visión de la profundidad a través de los dos ojos. Pero las entradas dobles pueden servir además para convencer al organismo de que la información es fiable. Por tanto, las ventajas no se deben necesariamente sólo a la coincidencia perceptiva en todas las condiciones. Es probable que se encuentren implicados elementos cognitivos, si no abiertamente, si al menos de modo encubierto. (MILLAR, 1997, 71).

> Los alumnos con necesidades educativas especiales pueden seguir en muchos casos las actividades de su grupo de referencia si cuentan con unos materiales adecuados (adaptados o específicos) (...). A la hora de seleccionar los materiales didácticos manipulativos, gráficos, textos, audiovisuales... para todos los alumnos, se han de tener en cuenta las necesidades específicas de algunos de ellos, y escoger aquellos que compensando lo más posible sus dificultades puedan ser utilizados por todos los alumnos. (CDC-MEC, 1991, 67-68).

En particular, pueden beneficiarse de él los alumnos que presenten dificultades en el proceso de simbolización o de lecto-escritura numérica: *TINKUNAKO* (se analiza más adelante) permite un desarrollo curricular completo sin necesidad de recurrir a la escritura simbólico-matemática. En este sentido, tiene menor nivel de exigencia de interpretación simbólica que la propia calculadora -que empieza a mostrarse como un instrumento de gran utilidad en la educación matemática de alumnos con deficiencias psíquicas-.

3º) Empleo como *material de entrenamiento psicomotor*, generador de situaciones para el desarrollo de destrezas hápticas y de coordinación viso-manual.

La práctica de acomodación al manejo de los elementos, puede ampliarse a ejercicios estructurados de manipulación y orientación espacial en el *espacio próximo*, tal como se sugiere en el Apartado 8.4.1. y en el Anexo I.

La amplia gama de actividades de iniciación en prácticamente todos los dominios calculatorios del curriculum, sugiere otra aplicación:

4º) El trabajo con *TINKUNAKO* *permite detectar carencias o dificultades básicas de cálculo*, y la aplicación inmediata de *fórmulas de remediación.*

Si aparece un error en un proceso de cálculo con *TINKUNAKO*, una simple repetición del procedimiento pone de relieve el punto en que se comete y cuál es su naturaleza. La posibilidad de rehacer el proceso paso a paso, analizando las manipulaciones ficha a ficha, acota definitivamente el error y permite su rectificación. No olvidemos que el origen de una buena parte de las alteraciones profundas en la comprensión de los razonamientos matemáticos se halla en la desestructuración espacio-temporal y en la confusión simbólica (cfr.: JAULIN-MANNONI, 1965).

Además, está suficientemente demostrado que determinados métodos y técnicas de enseñanza que se han considerado exclusivas para determinados alumnos y alumnas con necesidades educativas especiales son muy valiosas para el resto (técnicas de trabajo del lenguaje oral o escrito, dramatización, juego, observación dirigida, etc.). (CDC-MEC, 1991, 99).

5º) Empleo como *instrumento de cálculo* para *alumnos ciegos* (véase: Sección 6.3). Con independencia de su valor como material de iniciación, y a reservas de una experimentación extensiva y práctica adecuada, todo apunta a una mayor eficacia -seguridad y rapidez- que cualquier otro (excepción hecha, tal vez, del *Sorobán*).

8.3 LENGUAJES, CANTIDADES Y NUMERACIÓN

Cualquiera que haya trabajado con materiales diversos en la clase habrá constatado la gran riqueza de situaciones y de ideas que introducen y las apreciables diferencias con las clases en las que sólo se utiliza lápiz y papel. Unas veces actúan como herramientas, otras como recursos para un tema, otras como catalizadores de flujos de preguntas y de respuestas. Con frecuencia son un verdadero "micromundo" para una clase específica de conceptos matemáticos. (...) En todos los casos, explorar, investigar posibilidades y elegir opciones produce resultados positivos no desdeñables en la actitud de los alumnos y profesores respecto a las matemáticas.

Los materiales son una fuente de problemas y a la vez, son ricos auxiliares para resolverlos. (GRUPO 0, 1997, 1, 11).

Conviene recordar que un material es *naturaleza muerta*. Le falta la *vida matemática* que le confiere la actitud inquisitiva de un observador curioso con espíritu precisamente matemático. Como decíamos en la Sección 4.2, está a la espera de preguntas que configuren una *situación de enseñanza-aprendizaje*; preguntas que, gracias a él, esperamos sean más fáciles de responder. El material es ocasión de problemas, para los que encierra soluciones virtuales, y que lo califican didácticamente.

Capaz de sustentar preguntas relativas a él mismo, *TINKUNAKO* facilita -provoca, más bien- la generación de respuestas. Para la imaginación infantil, *responde* en su *lenguaje propio de comportamientos físicos*: está abierto a un diálogo de contenidos matemáticos, conforme a las convenciones inherentes a su estructura.

8.3.1 "ESCRIBIR" CON *TINKUNAKO*

En el tratamiento de situaciones problemáticas se ha conferido un papel relevante a la trama expresiva en los diferentes lenguajes (Sección 5.3). Convendrá, pues, analizar en qué medida las configuraciones de *fichas* en *TINKUNAKO* pueden ser estimadas verdaderas expresiones en un *lenguaje propio* de comportamientos físicos, que pudiera contribuir a su vez como intérprete en los procesos de *traducción* entre las diferentes formas expresivas.

Así pues, debe considerarse la traducción en ambos sentidos:

a) de un *lenguaje de partida* al dispositivo, y

b) del dispositivo a un *lenguaje final*.

Sin embargo, cuando el proceso resolutorio -o de matematización- se realiza sobre *TINKUNAKO* de forma primordial, sus expresiones vienen a serlo de un *lenguaje final* o *inicial*, según se parta de otro lenguaje o se trate de una situación plasmada en él. Por ello, gustamos de hablar, en un abuso de lenguaje, de:

a') *Escribir en o con TINKUNAKO*, para expresar en el dispositivo situaciones que se nos dan en otra forma lingüística; y b') *Leer en TINKUNAKO*, cuando se trate de interpretar matemáticamente configuraciones de *fichas* en el dispositivo; con posible apoyo en términos de otra forma lingüística, que podrán ser representados interiormente, e incluso exteriorizarse.

Concedemos más espacio al estudio del primero de estos procesos, por cuanto muestran más claramente la potencia del material, y porque serán los que aparecerán en primer lugar de forma natural -excepción hecha del caso de las expresiones simbólico-matemáticas-.

A) TRADUCCIÓN DE EXPRESIONES SIMBÓLICO-MATEMÁTICAS

Como es evidente, no serán éstas las primeras situaciones que se le presenten al alumno. Si se hallara en la fase de iniciarse en la numeración, serían ejercicios de consolidación; si se tratara de introducir o aplicar operaciones, formarían parte de enunciados escritos.

Las características de los productos traducidos a *TINKUNAKO*, sean expresiones aisladas o procesuales, son altamente enriquecedoras. No hay reducción simbólica, sino incremento de representatividad y realidad en todos los órdenes:

a) *Mantenimiento de significados en su integridad.* De hecho, existe un isomorfismo de códigos representativos de cantidades: más que de *traducción*, podría hablarse de *transcripción literal* -cifra a cifra-, que ni siquiera exige la *lectura global ni interpretativa* de la cantidad en escritura simbólico-matemática; basta con conocer la correspondencia entre códigos del *0* al *9*, directamente o a través de un significado.

b) *Asignación de significados por cifras*, previo convenio representativo en el dispositivo -valor de *columnas*-.

c) *Proximidad tangible*, frente a pura forma expresiva.

d) *Evidencia física*, frente a convencionalismo simbólico -en ciertos márgenes-.

Y para procesos operatorios:

e) *Manipulabilidad*, frente a combinatoria estrictamente simbólica.

f) *Continuum procesual*, frente a discontinuidad de estados.

Aunque tal aspecto tiene un inconveniente, común a todos los materiales no gráficos, y que precisamente confiere a estos últimos su utilidad básica:

g) Para estadios iniciales e intermedios, *volatilidad* frente a permanencia.

Esta pérdida hará recomendable el empleo complementario de la escritura simbólico-matemática junto con el trabajo en el dispositivo. Como veremos más adelante, la estructura/configuración de éste convierte en trivial la traducción inversa.

Todo ello equivale a decir que una situación expresada en términos simbólico-matemáticos puede traducirse cómodamente a *TINKUNAKO*, donde llevar a cabo todo género de operaciones aritméticas; dentro de los límites que permite el material, que, como se indicaba en las Secciones anteriores, no son menguados. Pero tal vez sea ésta la aplicación que menos nos interesa, aunque sustituya con creces a la práctica totalidad de los dispositivos que en la Sección 6.3 designábamos como *instrumental de cálculo para ciegos.*

B) TRADUCCIÓN DE EXPRESIONES EN LENGUA NATURAL

En las traducciones de enunciados verbales se produce un reemplazamiento simbólico, de convenios representativos, que si bien supone pérdidas de especificidad entre significantes también conlleva un cierto incremento en el grado de realidad: ahora son algo físico, tangible, manipulable -en el sentido más estricto-.

En el contexto de un problema o situación de enunciado verbal (PAEV), distinguíamos diferentes valores semánticos de *significación local* entre sus términos -Apartado 4.3 6B-. Centraremos nuestra atención en los *argumentos*, adjetivos y agentes.

- Traducción de *argumentos cuantificados*. En grandes rasgos, se aproxima en sus características a la traducción/transcripción de cantidades en escritura simbólico-matemática (guarismos). Pero conviene distinguir dos casos:

. Cantidades inferiores a la decena. Con observaciones análogas a Aa). La traducción de *cinco* puede apoyarse en la representación imaginativa de un significado físico cualquiera (objetos, colección de muestra, constelación de puntos, etc.), estableciendo la correspondencia entre los elementos de éste y las *fichas* en el *primer palito* de *TINKUNAKO*, con posibilidad de corrección inmediata. Producida aquella representación interior, el proceso traductor se asemeja en todo al de situaciones físicas (véase más abajo).

. Cantidades superiores a la decena. Aquí, el referente de traducción será, con preferencia, la estructura de la expresión verbal: para representar *treinta y cinco* en *TINKUNAKO*, puede aprovecharse la descomposición "*treinta:cinco*", como "*tres-dieces*", "*cinco*", con una reinterpretación semántica (ventajas del español, entre otras muchas lenguas); para "*cuatrocientos treinta y cinco*", "*cuatro-cientos*", "*tres-dieces*", "*cinco*"; etc. El recurso a la representación interior de significados sería poco menos que imposible o inútil, salvo que se considerara impropiamente como *significado* una representación interior en otra forma lingüística, lo que nos llevaría a los casos A) o C).

Conviene llamar la atención sobre la asignación de significados -matemáticos- a los diferentes *palitos* como *órdenes de unidades*. Tienen carácter implícito y fuertemente convencional -véase más abajo-, tal como ocurre en la expresión simbólico-matemática: cada significado es inherente al lugar de orden, de derecha a izquierda. En la expresión oral, estos significados son explícitos: omisión para unidades, "*einte/alenta*" para decenas o dieces, "*cientos*" para centenas, "*mil*" para "*miles*" o unidades de millar...

En alguna forma, una expresión verbal superior (en español) a la quincena es una expresión compleja, con una primera adjetivación para cada orden de unidades. Recuerda ciertas formas expresivas primitivas: *veinte pasos y cinco pasos*, por *veinticinco pasos*.

La práctica desemboca en una asociación del término verbal con la imagen de la representación en *TINKUNAKO*, análoga a la que se logra para las expresiones en cifras. Se cierra así un triángulo expresivo, que será básico en nuestros itinerarios didácticos: expresión oral, en *TINKUNAKO* y simbólica.

- Traducción de *adjetivos* y *agentes*. En términos generales, contribuyen a la representabilidad de un enunciado, *materializando* los *argumentos cuantitativos*; sean como objetos/unidades heterogéneos (*enunciados intercategoriales*, según los datos), sean como objetos/unidades diferenciados en el tiempo, lugar, atribución a agentes, etc. (*enunciados intracategoriales*, según los datos). Se trata, pues, de *distinguir cantidades*.

En la escritura simbólica, esta distinción se obtiene de forma espacial, respetando la *compacidad* en cada cantidad. De ordinario, y en los primeros estadios, esta compacidad individuante se resalta adjudicando una línea por cantidad; disposición bidimensional que será de gran utilidad posteriormente, cuando se introduzcan algoritmos previo el convenio de *columnación*. En algún momento, se acude a la *escritura en línea*, asegurando la *compacidad* mediante signos especiales (de operación, igualdad, orden, paréntesis, etc.).

TINKUNAKO distingue cantidades según *líneas* (módulo o grupo de módulos ensamblados *en serie*). Cada *adjetivo* o *agente* se asocia a una *línea*, en la que se recogerá la cantidad argumental siguiendo el convenio de *columnas/órdenes*. Sólo en fases avanzadas de empleo algorítmico (división, fracciones), podrá una misma línea contener dos cantidades separadas por un signo de operación.

A título meramente ilustrativo, revisemos las semejanzas y disparidades entre expresión en *TINKUNAKO* y oral:

a) *Mantenimiento de significados matemáticos -numéricos-*,

b) *Reducción de significados categoriales* a términos espaciales (como se observaba más arriba).

c) *Proximidad tangible*, frente a sucesión fónica, fugaz e inaprehensible.

d) *Estabilidad*, frente a fugacidad.

e) *Perceptibilidad global*, frente a secuencialidad (para la percepción visual; y, en alguna medida, también para la háptica).

f) *Evidencia física*, contra convencionalismo simbólico -en ciertos márgenes-.

En procesos operatorios, el *cálculo verbal* es reflejo del correspondiente *cálculo pensado*:

g) *Manipulabilidad*, frente a combinatoria lingüística (o representativa interior).

h) *Continuum procesual,* frente a -de ordinario, pero no necesariamente- discontinuidad de estados.

i) *Permanencia* frente a volatilidad en los resultados/productos finales y, en algunos casos, iniciales.

C) TRADUCCIÓN DE SITUACIONES FÍSICAS

De suyo, una expresión en *TINKUNAKO*, ofrecida directamente o previa traducción desde cualquier forma de lenguaje, es una expresión en comportamientos físicos, que define por sí sola una situación problemática o forma parte esencial de ella.

En el caso del alumno ciego se producen unos primeros efectos, de suma importancia: la accesibilidad y adecuación háptica de la información enunciativa.

De ordinario (Apartado 5.3.2), las únicas formas de percibir una situación planteada en términos de comportamientos físicos es mediante una descripción -que, supuesta adecuada, nos devuelve a la situación verbal- o siendo ejecutada por el mismo alumno. Pero en este segundo caso, es preciso que goce de unas características que la hagan ciertamente adecuada a la exploración háptica (Apartados 5.3.2 y 5.3.5). *TINKUNAKO* ha sido diseñado para satisfacer *estas exigencias de proximidad, accesibilidad y adecuación* a la exploración/manipulación háptica.

La condición suficientemente neutra de *TINKUNAKO* permite, mediante las *fichas*, significar multitud de objetos sensibles integrantes de una situación o magnitud discreta expresadas como comportamientos físicos. Se trata de una *sustitución* de significantes adjetivos, manteniendo el valor argumental, salvo *tamaño* de éste.

Los objetos deben entenderse, en la situación de partida, como significados por los estímulos perceptivos que generan. Éstos son, en principio, determinantes e inequívocos; sólo la lengua natural puede igualársele, merced a su riqueza léxica y capacidad de matización/determinación expresiva. La traducción a *TINKUNAKO* de comportamientos físicos, por tanto, se asemeja mucho a la de enunciados verbales:

a) *Asignación unívoca de significados argumentales*; que, en la práctica, equivale a su mantenimiento, al contar con un soporte de naturaleza análoga.

b) *Reducción de significados categoriales a términos espaciales.*

c) *Incremento de la proximidad tangible*, para situaciones observables no manipulables.

En procesos operatorios, el *cálculo físico* supone transformaciones espaciales o configurativas:

d) *Reproducibilidad de procesos manipulativos*, tanto en su esencia como en la continuidad.

e) *Permanencia frente a volatilidad* en los resultados/productos finales y, en algunos casos, iniciales.

* * *

Como resumen, y aplicable a las tres formas lingüísticas analizadas, podemos arriesgar:

TINKUNAKO reúne requisitos suficientes para servir de *aparato traductor* de situaciones cuantitativas y problemáticas.

Además, para las expresiones simbólico-matemáticas y verbales:

TINKUNAKO actúa como una *máquina de reificación* automática.

* * *

La vida real y el recurso a la imaginación infantil proporcionan no pocos contextos concretos que, junto con ciertos *convenios de trueque* fácilmente aceptables, son fácilmente representables en *TINKUNAKO*, tornándose situaciones numéricas y de introducción al cálculo aritmético.

En unos casos, serán situaciones fuertemente evocadoras, con predominio de acciones sobre objetos (*problemas de tiendas, rincones de trabajo, etc.); en otros, pueden bastar simples enunciados verbales que despierten la atención infantil* (*word problems*). A continuación se sugieren algunas de ellas que pueden ser de utilidad, convenientemente adaptadas a la mentalidad e intereses de cada grupo de alumnos.

A) <u>En el almacén.</u> Voy colocando las latas -o botellas en cajas, cajones, contenedores... En cada caja me caben diez latas; en cada cajón, el equivalente a diez cajas; en cada contenedor... Un *encargo* comprende contenedores, cajones, cajas, latas sueltas...

B) <u>Barcazas o piraguas,</u> con bancos para remeros. Un remero de un banco rema como diez del banco de atrás.

C) El <u>concurso.</u> Cada vez que acierto una pregunta, me dan *fichas* o puntos que voy guardando en el primer *palito*. Cuando ya no caben más, la siguiente a introducir y las nueve que ya tengo me las cambian por una en el segundo *palito*, y así no abultan tanto. Igual para las *fichas* en el segundo *palito*: cuando tenga que guardar una nueva y esté lleno, esas 10 me las cambian por una en el tercero. Y así sucesivamente. Al final, podré adquirir un regalo con todos los *puntos* o *fichas* que haya ganado.

D) El tiro al blanco en una caseta de feria, y sus premios. Cada vez que hago una diana en el *tiro al blanco*, me dan un premio del valor de la *diana*: del primer tipo, del segundo, del tercero...; representado por una ficha que voy guardando en una tabla con pinchos o *palito*s donde las coloco en orden. Pero cuando ya no caben más *fichas* en un *palito* -como máximo, caben nueve-, las que tengo en ése y la nueva me las cambia el señor por una ficha de valor superior (izquierda).

E) Los puestos de trabajo en una empresa o taller, en donde puede haber aprendices, oficiales, jefes de equipo, técnicos, ingenieros... Y donde cada oficial es capaz de hacer el trabajo (u organizarlo) de diez aprendices -y no más-; cada jefe de equipo, el de diez oficiales; cada... el de diez... O, si se quiere: en la sala de *aprendices* sólo pueden trabajar hasta 9 personas, así como en la de *oficiales*...

F) En la feria o *mercadillo* de las flores. Me van regalando flores, o las voy recogiendo por el campo: margaritas, claveles, rosas, orquídeas... Luego, en la feria, puedo cambiar unas por otras, para hacer *guirnaldas*. Pero no cuestan todas igual: un clavel vale por diez margaritas; una rosa por diez claveles... Las flores que ya tengo, las voy guardando en una *tabla* con *pinchos* o *palitos*, donde las coloco en orden de valor...

G) En su granja, don Decenio cría pollitos, gallinas, corderos, cerditos, terneros,... En el mercado, por cada 10 pollitos le dan una gallina; por cada 10 gallinas, un cordero; por cada 10... le dan un...

H) Un hotel -¡que más parece un manicomio!- se va llenando por plantas. En cada planta hay nueve habitaciones. Cuando llega un nuevo huésped a una planta que ya está completa, pasa a una habitación de la planta siguiente, pero los nueve de la planta que estaba completa van a la calle...: el dueño alega que *atender a un cliente de una planta superior da trabajo como diez veces cada uno de la planta inferior*...

La ordenación y nomenclatura alfabética tiene una única finalidad mnemotécnica: A) de *almacén*, D) de *dianas*, F) de *flores*, etc. Pero esto no implica, en absoluto, preferencia didáctica: de hecho, el ejemplo G) de *la granja de don Decenio* o el F) de *las flores* se nos antojan mucho más ricos y sugerentes que los A), B) o E).

Algunos de ellos, como el C) del *concurso*, pueden convertirse en una situación real: un verdadero *concurso* de sencillas preguntas y respuestas relativas al curriculum de los alumnos, aprovechable para fijar conocimientos en áreas diversas. Otros, como el F), de las *flores*, pueden ir precedidos de ejercicios de manualización: recorte, rizado y plegado en papel de flores que, fijadas a las *fichas*, podrán ensartarse en los *palitos*; dando así ocasión al desarrollo de capacidades manipulativas, plásticas y aun estéticas. El D) -*diana*-, es fácilmente reproducible en el aula con disparos de dardos rudimentarios elaborados por los mismos alumnos, como prueba y ejercitación de habilidad, cálculo de distancias, orientación espacial para el alumno ciego, etc.

En cualquier caso, son una oportunidad de sondear en los alumnos los conocimientos previos que poseen acerca de los conceptos y entorno de la situación seleccionada. Junto con ello, desarrollar capacidades expresivas, clarificar aspectos lingüísticos, información socio-cultural, económica...

Pero no se trata tan sólo de aprovechar la situación con fines globalizadores generales. Se logra, ante todo, resaltar el nexo entre Matemática y realidad, valorar el significado de utilidad de aquélla y preparar un marco para invitar más tarde al alumno a que intente establecer paralelismos entre situaciones concretas y matemáticas. Punto este último de gran importancia en su doble dirección:

- *abstractiva*; de descubrimiento de conceptos y operaciones matemáticas involucrados en una situación concreta-, imprescindible para la resolución de problemas; y

- *reificativa*; de búsqueda y/o construcción de situaciones concretas que respondan a una situación matemática abstracta-, de valiosa contribución para el desarrollo de capacidades de observación, expresivas, estructuradoras del pensamiento multidireccional, creativas, etc.

Es decir: escenario de *Matematización y Reificación*; aspectos frecuentemente olvidados en el curriculum, y que, junto con la *Operatoria -el Cálculo* en todas sus variedades-, constituyen la esencia de la actividad y formación matemáticas.

Los ejemplos propuestos en los Anexos no parten de situaciones contextualizadas, sino que se plantea una situación matemática abstracta, simples cantidades numéricas, pendiente de ser impregnada de la realidad -percibida o imaginada- más conforme al grupo de alumnos con los que se trabaje. La elección de escenario-marco se deja a la iniciativa del profesor.

A cambio, con cada Unidad se presenta un abanico de *Situaciones Problemáticas* que pueden servir de referencia orientadora. Por ello, deben considerarse no como Problemas a proponer a los alumnos sin más -con frecuencia, rayarían la simpleza-, sino como modelos o sugerencias para el profesor; de hecho, los datos y la cuestión propuestas son en todo análogos a alguna de las situaciones planteadas en la Unidad. Si se desea, pueden construirse verdaderos problemas, traducción de las cuestiones matemáticas desarrolladas en la Unidad, revistiendo éstas del ropaje concreto que se ofrece, o animar al alumno a que lo haga por sí mismo.

Conviene recordar cuán importante es diversificar las situaciones a proponer, tanto si lo son de partida como de fijación: variedad en el tamaño de los argumentos numéricos, contextos, significado global, etc. No debemos olvidar que son los invariantes los que dan a la representación su carácter operatorio. (VERGNAUD, 1991, 258).

8.3.2 "LEER" EN *TINKUNAKO*

Las *traducciones inversas*, desde *TINKUNAKO* a otras formas lingüísticas, reúnen dificultad dispar, según el grado de complejidad de la situación reflejada.

A) TRADUCCIÓN A LENGUA HABLADA

En la *lectura visual* de *TINKUNAKO* hay que distinguir cuatro aspectos:

a) Lectura de las *fichas* contenidas en un *palito*, considerado aisladamente. Supone la lectura de una cantidad inferior a la decena.

Se efectúa mediante recuento ficha a ficha, por grupos o globalmente, ya sea como imagen visual o por exploración háptica (ver Anexo I). Es análoga a la *lectura* de conjuntos de objetos de esas dimensiones, pero ahora con una estructura espacial *en torre*.

b) Lectura de una línea; esto es: de cantidades expresadas en varios *palitos*. Equivale a una cantidad no inferior a la decena.

Supone la *lectura* sucesiva o global (sintética) de varias *lecturas de palitos*. En el caso de exploración háptica, la *lectura globalizada* sólo tendría sentido para cantidades de no más de cuatro cifras, y adquirida mediante una práctica orientada.

La verbalización -y, muy posiblemente, la comprensión- requiere la asignación de significados a los diferentes *palitos* conforme a su posición relativa. Es decir: una interpretación semántica análoga a la lectura de expresiones simbólicas, que en *TINKUNAKO* se simplifica al quedar adscrito el orden a cada *palito* de una vez para siempre -hablamos de las fases iniciales, con números enteros y antes de mecanizar la división-, a refrescar y fijar con la práctica. La expresión verbal correcta sólo requiere una ligera transformación y el hábito/convenio de pronunciación izquierda-derecha:

"*cuatro cientos, tres dieces, cinco = cuatrocientos treinta y cinco*".

La *lectura visual* determina *inmediatamente la primera cifra de la izquierda*, por eliminación de los *palitos vacíos* anteriores; pero la *lectura háptica* comienza más frecuentemente *por la derecha*, lo que exige una reconstrucción:

"*cinco, tres dieces... =>cinco, treinta... =>cinco, treinta, cuatro cientos... =cuatrocientos treinta y cinco...*"

Una correcta postura y ubicación dígito-manual puede simplificar el proceso, hasta asemejarlo en todo a la *lectura visual* (ver, de nuevo, Anexo I).

c) Lectura del conjunto de líneas. Supone la lectura de dos o más cantidades, previa denuncia de su existencia.

El orden de lectura viene recomendado -incluso determinado- por el contexto manipulativo u operacional. Aunque no tiene por qué coincidir con el exploratorio. De ordinario -en especial, para la exploración háptica-, éste se realiza siguiendo un orden de proximidad: primera fila o línea anterior (más próxima), segunda fila o línea -media o posterior, según los casos-, etc.; pero el mismo contexto y la práctica en él pueden aconsejar el orden inverso, análogo al de la escritura simbólica (detrás-adelante, por arriba-abajo).

Cuando se trata de líneas distintas de la más próxima, para la lectura háptica, tanto de *palitos* individuales como de las cantidades que conforman, puede acudir a diversas técnicas:

- efectuar la exploración en sentido vertical (arrib-abajo);

- deslizar el correspondiente módulo, extrayéndolo del conjunto total, hasta dejar la expresión en posición exenta;

- desplazar el o los módulos anteriores, hasta dejar el que contiene la cantidad a leer en posición semi-exenta, apto para la exploración frontal.

d) Interpretación de manipulaciones. Es indispensable distinguir:

- Manipulaciones locales: incorporación de *fichas* a un *palito*, extracción y vaciado, transporte de *fichas* entre *palitos*, operaciones *en paralelo* (quitar o poner fichas), desplazamientos relativos entre módulos, etc. Carecerán, en principio, de significado matemático propio, teniendo un carácter meramente instrumental -de exigencia mecánica del dispositivo- o subsidiario del significado de la manipulación global.

- Manipulaciones globales: conjunto de manipulaciones locales del mismo carácter. Cuales serán: vaciado de una fila con transporte de todas sus *fichas*, idem con acciones en paralelo en la otra, acumulación o retirado de *fichas* en una línea siguiendo un modelo, etc. Configuran *juegos* o itinerarios de manipulaciones locales, que, a su vez, definen operaciones matemáticas entre los referentes de las cantidades involucradas.

B) TRADUCCIÓN A LENGUAJE SIMBÓLICO-MATEMÁTICO O DE CIFRAS

La expresión simbólico-matemática de situaciones estáticas en *TINKUNAKO* es inmediata y unívoca, como su inversa: para lograrla, basta expresar cifra a cifra cada valor de columna. La individuación de cantidades viene dada por la distinción de líneas.

Será en la manipulación -aspecto dinámico- donde puedan sobrevenir dificultades de traducción, que no serán tales si se emplea el dispositivo como medio para introducir los simbolismos aritméticos; a ellas nos referiremos al tratar de las operaciones.

8.3.3 INICIACIÓN A LA NUMERACIÓN

La traducción de situaciones físicas a expresiones en *TINKUNAKO* será trascendental en los inicios de la expresión numérica. De una colección de objetos, manipulable y numerable verbalmente, puede pasarse sin solución de continuidad a la escritura (Braille o tinta) en guarismos, merced a una simple y quasi-inmediata traducción en nuestro dispositivo.

En el progreso de representación y nomenclatura numérica, se distinguen etapas bien definidas:

1°) Práctica con cantidades inferiores a la decena en *los cuatro lenguajes*: comportamientos físicos (objetos y *fichas*), verbal, *TINKUNAKO* y simbólico-matemático.

Deben incluir tanto la *escritura* -representación- como la *lectura* -interpretación-; no importa el orden de introducción lingüística. El orden de presentación de los dígitos puede efectuarse de acuerdo con informaciones o conocimientos previos del alumno.

El proceso de representación de conjuntos de objetos físicos en *TINKUNAKO* puede refinarse en estadios, a los que convendrá prestar atención en los primeros momentos:

a) Observación de la situación física (colección de objetos). En particular: colección de *fichas* de *TINKUNAKO*; en caso contrario:

b) Reproducción de la colección mediante *fichas* de *TINKUNAKO*. En alguna forma, equivale a una composición geométrica.

Si la situación o dato fuese proporcionado en lengua hablada, se transforma en un proceso de recuento de *fichas*, a retirar del *almacén* y considerar aisladas del resto; conservadas en la mano -preferible- o en lugar aparte.

Cuando se trate de *iniciación* en su sentido más llano -numeración inferior a la decena-, sólo importan las *fichas* cual *colección de muestra*, puede ser el momento de *jugar* con diferentes configuraciones espaciales de esas *fichas*. Se precisa entonces de una superficie que aminore su deslizamiento -caucho, franela, etc.-, donde se ensayen y modifiquen agrupaciones bidimensionales. Vendrían a ser cambiantes *constelaciones de puntos*, equivalentes sólidos de las representaciones gráfico-geométricas, más adecuadas que éstas a la manipulación exclusivamente háptica.

c) Incorporación de las *fichas* al módulo.

Supone ahora a una transformación geométrica: una nueva forma de organización espacial, esta vez tridimensional, con predominio lineal. Su representación definitiva exige el empleo de un módulo, donde las *fichas* quedarán configuradas definitivamente en *torre*, una vez introducidas en *palitos*.

Es decisiva la elección del *primer palito* o *palito de la derecha* en el -por ahora- único módulo a emplear. La explicitación del convenio (restricción) se evita (encubre) presentando el módulo en posición longitudinal o *atrás-adelante*, de forma que se fuerce a la utilización casi exclusiva de dicho *primer palito*.

2°) Práctica calculatoria elemental, en el mencionado conjunto de números inferiores a la decena. Ejercicios del tipo:

- (Con cuatro *fichas*:) "*Toma tres fichas más... Júntalas con las otras... ¿Cuántas hay ahora?...*"

- "*Imagínate que tienes seis caramelos... Si me dieras dos, ¿cuántos te quedarían?... Ayúdate de TINKUNAKO.*"

La resta permite la presentación natural del *0* sobre *TINKUNAKO*, como *ninguna ficha* o *palito vacío*.

- Si colocas en el *palito* de *TINKUNAKO* cuatro *fichas* dos veces seguidas..., "¿cuántas *fichas* habría en total?..."

- Toma dos *fichas*... Si vas colocando *fichas* de dos en dos en el *palito*, "¿cuántas veces tendrás que hacerlo para llegar a tener seis?..."

Enunciables en cualquiera de las formas lingüísticas, siendo preferible la oral. Su proceso de respuesta conviene que cuente con la ejercitación sobre el dispositivo. Por el momento, no es preciso expresar la operación al papel, ni mucho menos definir sentencia simbólica alguna.

3°) Práctica verbal, con *fichas* y otros objetos de numeración -recuento, serie numérica- y calculatoria con cantidades que no superan la veintena. Se pasa de enunciados en categorías concretas (caramelos, frutas, animales, etc.) a otros en categorías no materiales (años, puntos de un concurso, días, etc.). Es bien sabido que en estas edades los medios de que dispone un niño para aprender son la manipulación y observación de su entorno y la verbalización de sus observaciones. Esto implica conceder prioridad al trabajo práctico y oral. (GRUPO 0, 1997, 2, 11).

4°) Práctica ampliada a *TINKUNAKO*, primero, y al lenguaje simbólico-matemático, después; pero en esta segunda forma tan sólo de datos y resultados (escritura bidimensional, sin símbolos de operación).

Aquí se encuentra el paso crucial a la decena: al intentar introducir doce *fichas*, por ejemplo, llega el momento de hallar colmado el *palito* de *TINKUNAKO*...

-"*¿Dónde colocar la siguiente ficha?...*"

(¡Importante!: se gira positivamente -sinextrorsum- el módulo, de forma que el *primer palito*, hasta ahora utilizado, quede a la derecha.)

-*"¿Qué ficha es ésa que tienes en la mano?... Pero, para poder colocarla en el segundo palito, hay que pagar... ¡todas las fichas que hay en el primero!... ¿Qué dice ahora TINKUNAKO?..."*

- *Sigamos. "¿Qué número de ficha es ésa que vas a darle a TINKUNAKO?... ¿Dónde la pondrás?, ¿por dónde entran siempre las fichas?..."*

Finalmente, puede transcribirse el resultado a lenguaje de guarismos. Se inicia así el trenzado de traducción entre las tres formas expresivas -verbal, *TINKUNAKO* y escritura numérica-, de cada uno de ellos a los otros dos.

Resulta curioso observar que nuestro material puede funcionar como "*contador automático*", de *fichas* o de otros objetos por ellas representados. La manipulación de más arriba podría haberse efectuado para un número indeterminado de *fichas*; una vez introducidas, sin cuidarse de hacer el recuento, la configuración final resultante es la *forma de escribir esa cantidad en TINKUNAKO*. En otras palabras:

Si se desea, en *TINKUNAKO* es posible aprender antes a *escribir* una cantidad que a *leerla*

Algo de lo que no haremos uso, pues somos conscientes que los niños tienen información y vocabulario numérico no pequeño al llegar a la escuela.

La representación de cantidades de dos cifras en *TINKUNAKO* -en especial, las comprendidas entre 10 y 30- permiten la comprobación *manual* de su lectura/significado. Será preciso para ello aplicar el *convenio de palito completo* en sentido inverso: recuperar una ficha en el *segundo palito* equivale a decir que:

- *"Si hay una ficha en el "segundo palito", es porque alguna vez estuvo lleno "el primero" y ella no cabía. Para sacarla, puesto que todas las fichas entran y salen de TINKUNAKO por el "primer palito", hay que ayudarla llenando primero el de la derecha, una vez que haya quedado vacío".*

Puede entenderse como una aplicación del principio de *reversibilidad* o *función de inversión* de PIAGET, estimada como la más difícil y tardía en su manifestación de todas las funciones psicogenéticas en la concepción del psicólogo ginebrino.

Tal aplicación inversa -*marcha atrás*- del *convenio de palito completo* implica un dominio adecuado de éste, tanto manipulativa como conceptualmente:

"Para poder introducir una ficha en el "segundo palito" hay que darle a TINKUNAKO un total de diez fichas: nueve para llenar el "primero", y la décima que pasaría al "segundo".

Estas prácticas de comprobación manual del significado de las *fichas* en el *segundo palito* -unidades de segundo orden-, pueden parecer inútiles y enojosas, una vez dominado el paso en sentido directo *-convenio de palito completo-*. Sin embargo, son el camino más seguro y eficaz para garantizar una comprensión idónea del valor posicional de las *fichas* y unidades, con independencia de su utilidad para justificar el algoritmo usual escrito de la resta y división - *TINKUNAKO* podrá servirse de otras técnicas, como, por ejemplo, la de *poner* (Anexo III)-.

5°) Práctica en *lecto-escritura* de cantidades (los *tres lenguajes*). Extensión del *convenio de palito completo* en *TINKUNAKO* al paso entre los lugares 2° y 3°, 3° y 4°, etc. Designación de los *órdenes de unidades*.

Este último punto es puramente formal: tan adecuada podría considerarse la lectura "*tres, dos, cinco*", como "*trescientos veinticinco*" (recuérdese la observación formulada a propósito de las licencias en la *lectura* de cantidades en *TINKUNAKO*, extensible sin rebozo a la de expresiones en cifras). Lo realmente importante es la orientación izquierda-derecha y el significado matemático de cada orden de unidades.

> La comunicación oral y visual es un aspecto fundamental en el progreso del conocimiento matemático. A veces una respuesta incorrecta procede de la falta de capacidad para comunicar las propias ideas. También es necesario tener en cuenta que el desarrollo de la percepción espacial se encuentra en una fase decisiva, la lateralidad, las relaciones de dirección y de situación tienen una intervención trascendental. (ALSINA y OTROS, 1996, 85).

6°) Práctica en comparación de cantidades, sirviéndose de dos *líneas* en *TINKUNAKO*. Que equivale a la de *tamaños*; o, en caso de igualdad de éstos, basta la simple comparación de la cifra o *torre de fichas* de la izquierda.

Quedaría completada de esta forma lo que la mayoría de los tratadistas designan como *Pre-Cálculo*, expedito el camino para la fase de iniciación a las operaciones aritméticas y sus algoritmos. Pero, como se indica en la fase 3°, se ha abierto la puerta al Cálculo Mental, aunque sin introducir la nomenclatura y notación simbólica de las operaciones.

El itinerario esbozado más arriba no es único, ni tiene por qué serlo:

> Rara vez, o nunca, han llegado las jerarquías a especificar de forma exacta los caminos de aprendizaje de los niños. Por tanto, las jerarquías sirven a la enseñanza para proporcionar una secuencia estructurada para el profesor y para el estudiante, pero dicha secuencia no está completamente determinada. Queda sitio para el juicio y para la adaptación a los intereses del niño y del profesor, aun en las jerarquías mejor validadas que nos ha brindado la investigación hasta la fecha. (RESNICK y FORD, 1981,73).
>
> Pero si se utilizan con prudencia y con flexibilidad, las jerarquías bien diseñadas pueden resultar útiles para asegurarse de que todos los niños, hasta los menos dotados, lleguen a dominar los principios básicos de las matemáticas escolares, sobre todo las habilidades de cálculo. (Ibidem., 78).

8.4 DESTREZAS BÁSICAS

Al compás de las traducciones y manipulaciones van surgiendo toda una serie de destrezas deseables; exigidas unas por el dispositivo, por la escritura simbólico-matemática, otras. Tienen el carácter de *destrezas manipulativas básicas*, cuyo dominio redundará en un buen aprovechamiento aritmético, al liberar al alumno de tensiones atencionales y reducir los tiempos de ejecución física.

No deben preocupar como *pre-requisitos* o *destrezas previas*: irán desarrollándose a medida que se progrese en la práctica. Si se observan carencias o desfases, podrá intensificarse la ejercitación, hasta alcanzar un nivel aceptable. Puede que se muestren más agudamente, y que la simple práctica no sea suficiente para alcanzar tal nivel subjetivo mínimo en condiciones *normales*: será preciso, entonces, abordar *programas de remediación*, tendentes a evitar la aparición de retrasos desalentadores, antesala del temido fracaso.

8.4.1 DESTREZAS EXIGIDAS POR *TINKUNAKO*

Una conveniencia previa al trabajo con cualquier material manipulativo -y más, tratándose de alumnos ciegos- es su conocimiento próximo. Lo que para DIENES supondría la fase de *juego libre*.

Los elementos de *TINKUNAKO* son bien simples: módulos y *fichas*. El objetivo inicial será, pues, la familiarización con ellos: forma, tamaño y peso, deslizabilidad, distancia y postura adecuadas de trabajo, términos orales específicos, disposición de los *palitos*. En esta fase de *primer contacto*, resaltan dos objetivos inseparables:

1º) Generación de imágenes relativas a los módulos y sus *palitos*.

El papel conferido a los *palitos* en *TINKUNAKO* es doble: estabilizar las configuraciones de *fichas* -contra la exploración háptica- y limitar a 9 -para la base 10- el número máximo de éstas. El primero es secundario: de poder emplearse la vista, bastarían -por ejemplo- superficies cónicas huecas y encajables en vez de *fichas*. Para una situación dada, obtenida una configuración, los *palitos* pasan a un segundo plano: junto con las *bases de los módulos*, constituyen el *fondo de la representación*. Como los cuadros en el ajedrez, tienen un valor neutro, aunque estructurante: el juego es desarrollado por las *fichas*.

En la medida que se obtiene una representación firme de la *estructura* o *bosque de palitos*, fondo común en una manipulación u operación, el esfuerzo representativo puede centrarse en la disposición de *fichas* y los movimientos a realizar, sean exploratorios o modificativos.

Dado que la estructura modular es creciente a lo largo del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Aritmética, conviene que la correspondiente representación sea relevante y estable desde el primer momento de cada etapa. Como apunte de complejidad creciente, adelantamos un esquema de necesidades:

Cuadro 8.4.1.- Operaciones aritméticas y complejidad modular en *TINKUNAKO*.

Dominio de conceptos aritméticos		Número de líneas (módulos)
Numeración		1
Ordenación (comparación) numérica		2 3
Adición	introducción	2
	propiedad asociativa	3
	algoritmo propio	1
Sustracción		2
Multiplicación	por 2 (iniciacíónt)	4
	por una cifra	3
	propiedades	3
	propiedades (con deslizamiento)	3
	por varias cifras (con deslizamiento)	3
	algoritmo propio (con deslizamiento)	2
División	por 2	3
	por 3	4
	por una cifra	3
	por dos cifras (con deslizamiento)	3
	general (con deslizamiento)	3
	algoritmo propio (con deslizamiento)	2

Se supone que se trabaja con expresiones naturales inferiores al millón (6 cifras). Por consiguiente, cuando se trate de una pluralidad de módulos debe entenderse que éstos se ensamblan "en paralelo".

2º) Integración entre expresiones topológicas, lugares en el dispositivo y direcciones de los movimientos.

En sentido estricto, apenas si aparecen deícticos entre las expresiones topológicas a emplear. Ya sean absolutos: *primer palito*, *segundo palito...*, *línea (fila) de delante* (resp.: *de detrás*, *del medio*), *misma columna...*; o relativos: *palito de la derecha* (resp.: *izquierda*), *primera línea* (resp.: *segunda*, *tercera*)...

No debe extrañarnos que se planteen dificultades de lateralidad o espaciales en general: confusión entre *derecha* e *izquierda*, *delante* y *detrás*, *primera* y *segunda*, *arriba* y *abajo* -en el plano-, etc. Es problema mucho más difundido de lo que se cree; pero conviene no elevarlo precipitadamente a la categoría de *trastorno espacial* o *espacio-temporal*, sobre todo en alumnos ciegos de escasa escolaridad: con frecuencia, se trata de simples confusiones terminológicas, que no pasan del nivel lingüístico. Suelen provenir de una asimilación verbal insuficiente (asignación inestable de significados) o errónea, ya que se comprueba fácilmente que no existe tal dificultad en la reproducción de movimientos (MILLAR, 1997).

Esta observación tiene una importancia capital en el caso del alumno ciego de corta edad: al carecer de la fuente de información visual, se pierden redundancias -e incluso relevancias- informativas que contribuyan a la codificación espacial (MILLAR, 1997, 341), que consoliden los nexos significante-significado en el nivel verbal. Inconveniente que se agrava cuando, por falta de estimulación o práctica orientada, no ha tenido oportunidad de cultivar eficazmente tales distinciones.

Súmese a ello el sentido relativo de ciertas expresiones topológicas -centradas en el hablante, el oyente o en otra referencia-, el valor preeminente de la referencia centrada en el cuerpo para el niño ciego total (Ibidem., 323), el esfuerzo cognitivo que exige la reconstrucción espacial interior para éste -con la consiguiente fatiga psíquica-, y la complejidad de las propias acciones verbales..., y no es extraño que los autores de la escuela piagetiana que han investigado el problema desde la óptica de la Psicología Evolutiva adviertan experimentalmente (mediante pruebas de formato verbal) un retraso en este dominio del niño ciego respecto del vidente, del que contrajo la ceguera a edad temprana respecto del que la contrajo a mayor edad, del falto de escolaridad respecto del más y *mejor* escolarizado. No es problema de desarrollo evolutivo inducido por la ceguera en sí, sino carencia histórico-curricular en su sentido más amplio.

> La principal implicación práctica, tanto para los niños con vista como para los niños ciegos, es que la descripción verbal y las demostraciones espaciales no deben tratarse como alternativas incompatibles, sino que necesitan relacionarse entre sí. El niño de más edad, y el más inteligente y con mayores conocimientos, deducirá las relaciones de forma espontánea. Para el niño más pequeño, con menos conocimientos, y en condiciones en las que la información espacial sea limitada, los lazos de unión deben hacerse explícitos y evidentes. (MILLAR, 1997, 330).

Pero esto también exige aprendizaje asistido (CRATTY y SAMS, 1968; RIESER y HEIMAN, 1982), como reclama la misma autora, con una importante puntualización:

> La conexión entre la instrucción y la acción, la actuación asistida y el animar a solucionar problemas de manera independiente puede solucionarse sólo en cada caso individual. No existe una receta general que pueda decir al padre, profesor, asistente social cuándo proporcionar el solapamiento de la información, y cuándo es suficiente "un empujón" en la dirección adecuada para que los niños realicen la conexión, analogía o inferencia crucial necesaria para que pasen de conocer "*qué*" a conocer "*cómo*", de orientarse ellos mismos en el espacio a representar ese espacio sobre el papel o mentalmente. (MILLAR, 1997, 334).

Por consiguiente, es preciso prestar especial atención individualizada, tendente a esclarecer y fijar representaciones y expresiones topológicas, tanto absolutas como relativas, antes de adentrarse en las tareas propiamente aritméticas.

TINKUNAKO permite diseñar multitud de ejercicios de orientación espacial y práctica terminológica: localizaciones, itinerarios, persecuciones, reproducciones, series, simetrías, etc. (algunos de ellos se ejemplifican en el Anexo I). Como objetivos primordiales:

a) Comprensión de la dualidad *derecha/izquierda* y localización de los respectivos *palitos contiguos*. Tendrá una importancia decisiva a la hora de:

- introducir y leer cantidades,

- comprender y aplicar correctamente el *convenio de palito completo*.

b) Comprensión de los conceptos de *abajo/arriba* (o *delante/detrás*, *cerca/lejos*, etc.) y de *columna*, y localización de *palitos en una misma columna*. Tendrá importancia decisiva para:

- aceptación implícita del concepto de *orden de unidades*,

- respeto relativo de los *órdenes de unidades* en las operaciones aritméticas,

- correcto desplazamiento lateral de los módulos en ciertas manipulaciones y operaciones.

* * *

A medida que se avanza en la tarea, surgen nuevas exigencias perceptivas y manipulativas: ingreso de *fichas* en los *palitos*, configuración de *torres*, individuales y combinadas, diferentes posiciones relativas de los módulos, variación de configuraciones, etc. Como consecuencias, generar imágenes interiores del dispositivo, sus elementos y flexibilidad casi ilimitada para configuraciones espaciales; como hemos visto mas arriba, la primera de ellas es la más decisiva.

En suma, desarrollo de destrezas motóricas, de motricidad dígito-manual fina y de orientación espacial, tomando *TINKUNAKO* como soporte referente. Lo que podríamos llamar *Psicomotricidad en TINKUNAKO*.

Tendrían enfoques análogos para alumnos ciegos y videntes: la vista y el tacto hablan la misma lengua a la consciencia, que entiende a ambas; el vidente y el ciego se comprenden realmente, no en apariencia, cuando se comunican sus ideas por medio de palabras de espacio, dimensiones, distancia y forma; que se sirven para proyectar sus imágenes de la misma extensión, con esta sola diferencia: que la extensión del vidente está siempre coloreada, mientras que la del ciego está siempre dispuesta a cambiarse por impresiones táctiles más o menos vivas. (VILLEY, 1946, 105).

Un análisis exhaustivo de las manipulaciones precisas, nos lleva a considerar:

- tomar *fichas* [2] (de una en una, de dos en dos...),

- tomar conjuntos de *fichas* en cálculo global aproximado,

- retenerlas en la mano y transportarlas en seguridad,

- soltar *fichas* una a una,

---

[2] Una pequeña advertencia de orden terminológico. En los Anexos se emplean de ordinario los verbos *tomar* e *introducir*, *depositar* o *poner*, en lugar de *coger* y *meter fichas*, más naturales y comunes éstos para los niños españoles. Como se indicaba en el Apartado 8.2.2, la aplicación experimental se llevó a cabo con Rodolfo Robles (junior), argentino, al igual que su padre Rodolfo Robles (senior), coinventor de *TINKUNAKO*. Para la mayoría de los países hispanoamericanos de habla española, los términos *coger* y *meter* tienen connotaciones procaces. Dado que, además, se pretendía desde el primer momento poner el material al alcance de alumnos ciegos y profesores de los mencionados países, se respeta en la presente redacción el léxico de la experiencia, libre de interpretaciones ambiguas.

- introducir *fichas* en los *palitos*,

- extraer *fichas* de un *palito* (una a una, de dos en dos...),

- extracción *en torre* de todas las *fichas* contenidas en un *palito* (en particular: de las 9 *fichas* de un *palito completo*),

- recuentos de *fichas* introducidas en un *palito*,

- cálculo aproximado/global de las *fichas* contenidas en un *palito*,

- comparación de las *fichas* contenidas en dos *palitos contiguos*,

- cálculo sin recuento de la diferencia de *fichas* contenidas en dos *palitos contiguos* (como diferencia de alturas)..,

Como puede observarse, algunas de ellas se solapan con actividades de numeración. Otras serán precisas en el cálculo operacional:

- ensamblado de módulos en paralelo,

- desplazamiento de módulos en paralelo con respeto de columnación final entre *palitos*.

- extracción e introducción de *fichas* para *palitos* en la línea posterior -sin y con desplazamiento de ésta-,

- ídem, en la línea media,

- transporte de *fichas* una a una entre *palitos* de la misma *columna*,

. reproducción y conformación de configuraciones de *fichas* en los *palitos* de uno o varios módulos,

- transporte *en torre* de un conjunto de *fichas* extraídas de un *palito*,

- introducción de *torres pequeñas* (2, 3, 4 *fichas*) en un *palito* en línea distinta del que se extrajeron y en la misma *columna*,

- ensamblado de módulos en serie,

La práctica totalidad de las destrezas recogidas en este listado debe extenderse a una y otra mano; como ejercicios independientes y en combinación. Las *destrezas de coordinación bimanual* permitirán, más tarde, alcanzar seguridad y velocidad, pudiendo reducirse a casi la mitad los tiempos de ejecución calculatoria.

8.4.2 DESTREZAS LECTO-ESCRITORAS

Debemos dar por supuesto que el alumno o bien tiene superada la fase de aprendizaje de la lecto-escritura literal elemental, o se halla inmerso en ella. En puridad, no sería imprescindible: un alumno puede aprender a escribir y leer cantidades, desconociendo incluso la forma de las letras ordinarias: *la introducción de los símbolos numéricos y aritméticos en general puede realizarse incluso desde las representaciones de tipo manipulativo* (MAZA, 1990A, 84); pero una tal concepción extremista nos suena a mera especulación, ni siquiera imaginable como ejercicio experimental.

En las *propuestas de itinerarios didácticos* incluidas en los Anexos se procura desde el principio la práctica simultaneidad de la escritura con la representación en *TINKUNAKO* y la expresión verbal -signo del cálculo mental-. Al ir dirigidas al trabajo con alumnos ciegos, lógicamente, se hace referencia a la escritura Braille; si bien podría sustituirse por la escritura en tinta sin alteración de objetivos ni actividades.

El instrumental de escritura Braille que se toma como básico es la *máquina Perkins*. No supone merma de generalidad: puede emplearse cualquier otra *máquina de punto positivo*: Erica, por ejemplo. De esta forma, el alumno controla de continuo los productos de su quehacer, teniendo opción de compararlos, corregirlos, o usarlos como referentes en cálculos algorítmicos.

No se ha contemplado la posibilidad de escritura en *pauta* o *regleta* Braille, por los trastornos que implica el hecho de tener que tornar la hoja de papel para leer lo escrito. Dichos instrumentos son útiles únicamente como medios para la plasmación de resultados y consiguiente valor recordatorio o de repaso; pero no como instrumento propiamente de cálculo escrito, ya que éste hace un uso continuo de las cantidades anteriores, que deberán estar permanentemente accesibles a la exploración háptica.

Se ha hecho mención a dos modalidades de la representación escrita en cálculo:

- plasmación de cantidades, términos, operaciones indicadas y resultados;

- ejecución de operaciones, propiamente dicha, en su aspecto procesual.

Se corresponden en esencia con dos formas de expresión escrita de la Aritmética:

- escritura *en línea*; *sentencias numéricas* y

- escritura *bidimensional*.

Un ejemplo sencillo:

escritura *en línea*:

$$1995+2831=4826$$

escritura *bidimensional*:

$$\begin{array}{r} 1995 \\ +2831 \\ \hline 4826 \end{array}$$

La escritura bidimensional permite servirse del algoritmo usual de la suma -suma por columnas, de derecha a izquierda- y de recursos del cálculo mental, para resolver:

- "*cinco más uno, seis*;"

- "*nueve más tres, doce: dos, y llevo uno*;"

- "*uno y nueve, diez; diez más ocho, dieciocho: ocho, y llevo uno*;"

- "*uno y uno, dos; dos más dos, cuatro*".

Pero, para esto, fue preciso disponer de la posibilidad permanente de revisar los sumandos cifra a cifra. Lo que, para el estudiante ciego, exige una "*escritura en punto positivo*", en la que los datos y resultados parciales puedan ser leídos y releídos sin necesidad de manipulaciones sobre la hoja de papel.

Una vez efectuada la operación, puede completarse la escritura en línea, expresión sintética de aquélla.

Las consecuencias son mucho más patentes en el caso de otras operaciones que dan lugar a líneas o resultados parciales, como la multiplicación o división por varias cifras:

Esta ha sido la razón por la que no se ensaya el cálculo escrito en Braille como tal -en papel-, hasta que el instrumental no permitió la aparición del *punto positivo*, susceptible de leer y escribir del *mismo lado del papel*; intentándose reproducir la fórmula mediante otros instrumentos de cálculo (véase Apartado 6.3).

En las *Propuestas de itinerarios didácticos* de los Anexos se simultanean una y otra modalidad de escritura, a fin de habituar al alumno tanto a recoger por escrito las operaciones que se realicen con *TINKUNAKO* como a iniciarle en el aprovechamiento de la bidimensionalidad. Supone el dominio de una serie de destrezas previas a su empleo calculatorio:

- Capacidad de reconocer los signos del Braille literario, y distinguirlos de otros no incluidos entre ellos. Permitirá, en su momento, reconocer y diferenciar los *signos de operación* que se irán introduciendo a medida que se avance en el proceso.

- Conocimiento de la representación Braille de los números de una cifra en base 10: *1*, *2*, *3*..., *9*. El *0* puede ser introducido en el transcurso de los ejercicios iniciales, así como la representación de números de varias cifras -véase: *Pre-Cálculo*; Anexo I, Sección 1.3- (fig. 8.4.1A).

(fig. 8.4.1A signos numéricos Braille, del 1 al 0, y otras expresiones de varias cifras)

1	⠼⠁	
2	⠼⠃	
3	⠼⠉	1948
4	⠼⠙	
5	⠼⠑	
6	⠼⠋	
7	⠼⠛	
8	⠼⠓	⠼⠁⠊⠙⠓
9	⠼⠊	
0	⠼⠚	

Implícitamente, esto supone reconocer con claridad el signo de número (puntos 3456) como forma incompleta. Es decir: más que su valor modificador de las diez primeras letras del abecedario Braille (de la *a* a la *j*): sostenemos que la percepción se efectúa globalmente, no tanto por interpretación carácter a carácter. Para las expresiones de más de una cifra, el *signo de número* actúa como aviso o *modificador*, que confiere valor numérico a los caracteres que le siguen, quienes dejan de ser signos literales -análogamente a como actúa un cambio de clave en la escritura musical en pentagrama-.

- Capacidad de seguir la línea de lectura. (Obvio.)

- Capacidad de distinguir palabras y líneas, así como el vocabulario topológico pertinente: derecha/izquierda, arriba/abajo.

- Destreza en la escritura lineal en máquina Braille -*Perkins*, o el modelo que se emplee; lo repetiremos una vez más: de *punto positivo*-. No se pide velocidad, sino corrección y seguridad.

- Destreza en la reubicación adecuada de la *cabeza de impresión* de la máquina. Que permitirá, en su momento, añadir nuevas cifras al conjunto -escritura progresiva de resultados parciales- y corrección de errores.

A su vez, esta destreza incluye otras particulares: avance/retroceso izquierda-derecha y derecha-izquierda, respeto de espacios, pasos de línea, columnación, etc. Sin duda, las operaciones psicomotrices más complejas, por lo que comportan de orientación espacial, control de los mecanismos de la máquina, desplazamientos, etc.

En los Anexos no se hace referencia a ejercicios tendentes a la adquisición y desarrollo de estos conocimientos y destrezas, por entender que corresponden más bien a la instrucción en lecto-escritura Braille ordinaria. Llamamos sin embargo la atención sobre la repercusión que un adiestramiento suficiente tendrá a la hora de alcanzar agilidad en el cálculo escrito.

Para facilitar la representación Braille del cálculo, se adoptan Criterios de carácter local. Bien es cierto que no están aceptados universalmente, pero los consideramos de gran utilidad.

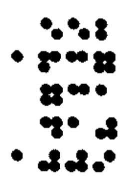
1°.- Se sigue la *Notación matemática para la Lengua Castellana*, aprobada en la *Reunión de Imprentas Braille de Habla Hispana*, celebrada en Montevideo (junio, 1987).

2°.- En los comienzos sólo se emplea el *punto de separación de grupos de cifras* (millares, millones, etc.) para cantidades superiores a cuatro cifras. Por entender que es prescindible en las cantidades menores: 1995, en vez de 1.995; y que en la Enseñanza Primaria no se opera ordinariamente con expresiones mayores; aunque sí se lean o escriban, y, llegado ese momento, se aclarará su uso.

3°.- También en los primeros momentos, los *signos de operación* o *relación* se aíslan entre espacios en blanco: +, -, x, /, =, <, >. Pero no debe insistirse en este punto, si el alumno los reconoce sin confusión, ya que pronto pasará a escribirlos en contigüidad:

4°.- En la escritura bidimensional de operaciones se prescinde del *signo de número*, y las líneas de separación son sustituidas por *líneas en blanco*. También es prescindible el signo que caracteriza la operación, al quedar determinada por el contexto (fig. 8.4.2B).

Suma:

	552 1637 731 410 1009

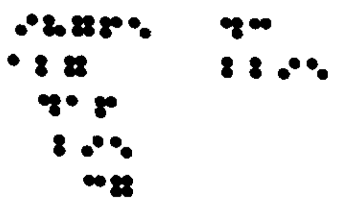
Resta:

	3579 - 1492 ---------- 2087

Multiplicación:

	723 x 54 ----------- 2892

División:

	98765 | 43 127 2296 416 295 37

(fig. 8.4.2B suma, resta, multiplicación y división Braille)

8.5 LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS

En el Capítulo 4 considerábamos cómo las orientaciones actuales en Didáctica de la Aritmética conferían a la resolución de situaciones problemáticas un lugar preeminente entre los Objetivos educacionales, y cómo, a su vez, consecuente con esta preocupación o por conveniencia metodológica, las situaciones problemáticas podían y debían convertirse en situaciones desencadenantes del proceso de enseñanza-aprendizaje; es decir, invertir el proceso: tomar como *punto de partida* el deseado *punto de llegada.*

Junto con ello, el proceso de enseñanza-aprendizaje se identificaba, en buena medida, con una versión de procesos de resolución de situaciones problemáticas (Capítulo 5). Un problema resuelto por el alumno deberíamos considerarlo algo más que la demostración de habilidades ya adquiridas: la explotación de otras no explicitadas aún, y que deberían ser aprovechadas como ocasión para abstraer, estructurar y generalizar conceptos y procedimientos previstos curricularmente.

La Matemática está en la realidad; también -ante todo- en la realidad próxima y manipulable. La matematización es una contemplación y acción sobre la realidad, considerada bajo sus aspectos cuantitativos. Los conceptos, procedimientos y técnicas que, sistematizados, configuran ese cuerpo científico que llamamos Matemática deberán ser, pues, en alguna forma, reflejo abstractivo de lo concreto real. Si no fuera así, hurtado el nexo Matemática-Realidad, tampoco debería extrañarnos que los alumnos, hastiados de formalismos vacíos -de vaciedades-, se rebelaran frente a actividades carentes de sentido para ellos: su fracaso escolar deberíamos entenderlo entonces como llamada de atención; sería *síntoma* de un fracaso *didáctico.*

Conviene que las situaciones en las que se sumerja el alumno además de reales y próximas sean efectivamente *manipulables*. Permitirán así que éste aplique no sólo sus capacidades de observación, relación y abstracción, sino también las concernientes a transformación experimental de lo físico: previsión, tanteo, ensayo, comprobación... En suma: desplegar todas o la mayor parte de sus potencialidades cognitivas y de actuación modificativa.

Al mismo tiempo, debe ser ocasión para el aprovechamiento de sus adquisiciones anteriores, contribuyendo a su consolidación y favoreciendo la incorporación de nuevos logros. "Lo *ya obtenido*" y "lo *que viene*" deben poder engarzarse en un todo compacto que se preste mutua cohesión y sentido, capaz de futuras y seguras aplicaciones y ampliaciones.

El instrumento más poderoso en Aritmética es, hoy por hoy, la escritura numérica decimal. Operaciones y numeración deberán ser, pues, para nosotros, inseparables. Las operaciones aritméticas claman por una expresión escrita en notación decimal; y ésta, a su vez, reclama un papel activo, que pueda coadyuvar a la obtención de resultados operatorios. El esfuerzo investigador, los ensayos y comprobaciones sistemáticas han dado lugar a no pocas soluciones; basta observar las diversas formas algorítmicas para la multiplicación y división (ver, por ejemplo: KAMII, 1995).

Todo ello nos conduce a la búsqueda de:

- situaciones concretas y próximas al alumno;

- que, a su vez, configuren situaciones problemáticas y motivantes,

- en estrecha relación conceptual y de acción con las vivencias del alumno;

- susceptibles de resolución manipulativa;

- que permitan su rápida expresión en forma simbólica decimal.

La descripción y primeros usos que llevamos hechos de *TINKUNAKO* nos exime de justificar su idoneidad en la mayoría de estos aspectos. Queda por mostrar cómo presentar, sirviéndonos de él, situaciones problemáticas que permitan la introducción/iniciación a las operaciones aritméticas de forma natural y motivante. Buscamos, pues, respuestas para las dos preguntas siguientes:

1°) ¿Qué acciones de la vida real, reproducibles o simulables en *TINKUNAKO*, se relacionan con las operaciones aritméticas?; o, si se quiere: ¿de qué acciones físicas son reflejo las operaciones aritméticas?

2°) ¿Cabe una presentación problemática de estas acciones, resoluble mediante manipulaciones en *TINKUNAKO*?

8.5.1 DE LAS ACCIONES Y SUS VERBOS, A LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS EN *TINKUNAKO*

A lo largo de todas estas páginas se viene insistiendo en la importancia capital de la *traducción* a los diferentes lenguajes, y su eficacia didáctica en el proceso de matematización, en general, y en la resolución de situaciones problemáticas, en particular. Así pues, debe contarse con una correspondencia entre las llamadas *operaciones aritméticas* y acciones físicas bien conocidas por el alumno, y que son expresables tanto manipulativamente como en habla natural.

Es lugar común en los diferentes enfoques de la Didáctica de la Aritmética que su Objetivo final, y a modo de resumen, es el de "*comprender el significado de las operaciones y saber aplicarlas*". No todos los profesores entendían -entienden- estos términos como sinónimos.

Para algunos, *comprender el significado de una operación* es *dominar su "tabla" y su algoritmo* (único, por supuesto). Para otros, se estrecha el concepto de *problema* a una forma típica y ramplona. Para otros, *resolver* es hallar el resultado numérico, no importa mediante qué operación o técnica...

No faltan tampoco quienes sí estimen equivalentes ambas aseveraciones anteriores, aunque de un modo superficial: *si una operación está "bien comprendida" se aplica correctamente en la resolución de problemas, y si éstos se resuelven es porque la operación está correctamente comprendida.* Olvidan que la *comprensión* en Matemáticas siempre es inacabada en alguna forma, que existen *estrategias falsamente aprendidas* por imitación mecánica o por efectos de inercia (*tendencia*), que la presentación o enunciado reúne o puede reunir dificultades nada fáciles de objetivar y salvar por un principiante, etc.

Al estar orientada la Didáctica de la Aritmética a obtener lo antes posible una expresión numérica escrita, el citado Objetivo estaba mediado por, o se concreta en:

Traducir situaciones físicas y verbales a expresiones simbólico-matemáticas

Según la Didáctica correspondiente, cabe una gradación en el *tamaño de los datos y resultado* y consiguiente dificultad ejecutoria. Puede incluso instrumentalizarse el curriculum diseñado para introducir las *tablas* y algoritmos, contraviniendo así el itinerario tradicional.

En una Didáctica orientada a la resolución de problemas, los materiales suelen contemplarse como ámbitos para ejemplos concretos, con significado propio. Pueden enunciarse situaciones problemáticas, formularse definiciones e iniciar a la práctica calculatoria dentro de sus límites. Sin embargo (véase: Sección 7.4), se aprecia en el material hasta hoy disponible una discontinuidad: sea en la representación mediante él de la realidad observada o evocada verbalmente, sea en su correlato con la escritura simbólico-matemática (traducción a situaciones numéricas).

TINKUNAKO, por su carácter manipulable neutro e isomorfismo con el mundo expresivo de la escritura numérica, permite que tal objetivo de significación/aplicación de las operaciones se simplifique a otro mucho más genérico y polivalente:

Establecer una correspondencia expresiva entre nuevas situaciones y otras ya conocidas, conservando la forma lingüística

en el amplio sentido que para nosotros tiene este término.

Hemos visto en la Sección 8.2 cómo representar argumentos numéricos en *TINKUNAKO*: como isomorfismo con la escritura simbólico-matemática posicional, o mediante traducción nada complicada de informaciones verbales o físicas. Queda por explicitar qué modelos manipulativos e intuitivos representan la operación aritmética aplicable para la resolución de una situación problemática. Podríamos así dar respuesta a la primera de las cuestiones planteadas más arriba.

Nos sujetaremos voluntariamente a sendas premisas didácticas:

A) Poder desarrollar todo el proceso con independencia de la escritura numérica; ya que la equivalencia representativa *TINKUNAKO* - escritura simbólico-matemática es trivial. Lo que no significa suprimir ésta como actividad en el proceso de iniciación; es más: permanece el Objetivo de diseñar un algoritmo escrito para cada una de las operaciones aritméticas, sirviéndonos, eso sí, del *modus operandi* en el dispositivo.

B) Prescindir de la nomenclatura aritmética específica, que pasa a ser un Objetivo-subproducto. O, lo que es lo mismo: partir de conocimientos actuales del alumno en el orden verbal y conceptual, y que sean éstos los que informen el proceso, hasta que, una vez comprendido, ceda el paso a la estructura conceptual y terminológica propia del quehacer numérico.

Si se quiere -con ropaje de titulares llamativos-, se pretende:

La Aritmética sin cifras

Partir de la vida para llegar a la Aritmética

> En el campo de las operaciones existe una estrecha relación entre las acciones efectuadas y el lenguaje que las describe. Diversas acciones pueden ser descritas por una sola palabra: "sumar". Pero también una sola acción puede nombrarse de formas distintas: "quitar", "retirar", "restar", "separar", etc. Por ello conviene que la relación acción-verbo sea profundizada desde la misma aparición de la acción infantil de forma que estas acciones no aparezcan desconectadas unas de otras sino que se reúnan en una misma expresión y, al tiempo, estas expresiones verbales se conecten con la acción correspondiente y no alcancen un valor propio ajeno a esta acción. Ello ayudará al niño posteriormente a escoger, dado un problema verbal, la operación adecuada para resolverlo estableciendo lazos flexibles de dependencia entre el verbo y la acción. (MAZA, 1989, 19).

Una primera dificultad que encontramos es la ya descrita por MIALARET en la década de los 60:

> Podríamos preguntar si hay una relación biunívoca entre las operaciones concretas y las cuatro operaciones matemáticas. Planteada así la pregunta, la respuesta es inmediatamente negativa. Podría pensarse entonces que es posible hacer corresponder las grandes categorías de las operaciones concretas con una de las cuatro operaciones elementales. Para el niño esto no es tan simple, y una gran parte `de los comienzos de la iniciación al cálculo va a consistir justamente en establecer la relación existente entre la operación concreta y la operación matemática. (MIALARET, 1984, 32)

No debe extrañarnos esta falta de correspondencia, por molesta que resulte a efectos didácticos: tampoco faltan distorsiones en la designación en lengua común. En español, como en todas las lenguas, abundan los contraejemplos, debidos a usos metafóricos o corrupción de lenguaje: que "*un edificio o negocio vuele por los aires*" nada tiene que ver con que "*las golondrinas vuelen*" -también "*por los aires*"-, y, a efectos físicos, "*un personaje hinchado*" o "*un presupuesto hinchado*" poca relación guardan con *soplar*, ni este verbo con *apuntar, delatar* o *beber*...

Además, las situaciones problemáticas no siempre vienen determinadas en su demanda o pregunta por *verbos de acción*: "*¿Cuántos ... más tiene X que Y?*" (resta)."*¿Podrán comprarse con x pts....?*", y referirse ahora a objetos de distinto valor (suma) o n objetos de igual valor (multiplicación), y una comparación ulterior...; puede incluso que se aplicara una estrategia resolutoria de división...

> El lenguaje vernáculo de los enunciados de los problemas sería la expresión de la estructura del mundo de acciones físicas del sujeto sobre los objetos de los que tiene experiencia. Y, además, de las relaciones entre los objetos o de las relaciones causales o temporales entre las acciones.
>
> El lenguaje aritmético, por su parte, corresponde al mundo de los números, las operaciones con ellos y las relaciones entre números, operaciones y hechos numéricos.
>
> La traducción se realiza entre los significados que el sujeto ha construido por su experiencia en los mundos correspondientes a uno y otro lenguaje. Como en cualquier proceso de traducción, los campos semánticos correspondientes no son isomorfos, por lo que el sujeto ha de construir el sentido en el lenguaje al que traduce, a partir del otro campo semántico. (PUIG y CERDÁN, 1988, 117).

Deberemos, pues, resignarnos a una interpretación aritmética de las *acciones* y *verbos de acción* subordinada al *significado global* de la situación (Apartado 4.3G); O, lo que es semejante: el valor relativo de los *términos-clave* (Apartado 5.3.4). Sin olvidar que el *sentido* o *comprensión de la situación* tiene, en principio, una ineludible dimensión subjetiva (Apartado 5.3.2).

Sin embargo, busquemos una salida a este relativismo desorientador, si no queremos caer en el escepticismo didáctico y arrastrar a él al alumno.

Ya que la dificultad es de orden semántico, intentemos allanar el camino partiendo de casos en los que la interpretación sea lo más simple e inequívoca posible.

¿Cuáles son las acciones físicas, próximas al alumno -escenificables en el aula- y que se relacionan *inequívocamente* con las operaciones aritméticas?

Estamos tratando, como objetivo prioritario, sobre las dificultades de aprendizaje del alumno ciego. Señalábamos en diferentes Apartados de la Sección 5.3 que los enunciados más simples de interpretar/comprender por éste son los verbales y los manipulativos; bien que los segundos difícilmente puedan darse en forma pura, sino que irán mixtificados con lengua común, al menos en funciones de *metalenguaje*. Es decir: tratándose de alumnos ciegos, la demanda y las instrucciones de especificación y resolución vendrán expuestas en forma oral (tras muchas contemplaciones, no queda más remedio que tomar los PAEV como referente básico). Reformulemos, pues, nuestra pregunta:

¿Cuáles son los *verbos de acción* más familiares al alumno que se relacionan inequívocamente con las operaciones aritméticas?

Los hemos mencionado en repetidas ocasiones:

Cuadro.- OPERACIONES ARITMÉTICAS Y VERBOS DE ACCIÓN.

Sumar	←——→	juntar, reunir
Restar	←——→	quitar (poner hasta), faltar
Multiplicar	←——→	repetir, reiterar
Dividir	←——→	repartir, distribuir, dividir

En *TINKUNAKO*, las acciones se ejecutan esencialmente sobre las *fichas*. Por consiguiente, proponer una situación problemática sobre él supone diseñar una actividad que implique cambios configurativos.

En la fase más primaria de definición de una operación aritmética, a un par de cantidades -numéricas- se le hace corresponder una tercera, que llamamos *resultado* (evitemos, por el momento, la referencia al *resto* en la *división entera*). Es el concepto de *ley de composición interna*, que si bien resulta estrecho para los números naturales y tropieza con algunas dificultades en el significado semántico de ciertos enunciados (*cambio*, por ejemplo), parece ser el más asequible para el aprendiz.

Puesto que en *TINKUNAKO* cada cantidad se expresa -en principio- en una *línea*, una operación aritmética supone pasar de una configuración de *fichas en dos líneas* a otra *en una única línea*, ya sea alguna de las anteriores u otra diferente (que debería incorporarse ahora -preferible-, o estaría ya incorporada). La operación aritmética en sí consistirá en la instrucción o instrucciones manipulativas a seguir para llegar a la configuración/cantidad final.

> Definir una operación aritmética sobre dos cantidades en *TINKUNAKO* equivale a fijar una condición manipulativa para llegar a una configuración final de *fichas* en una única línea.

El diseño de la situación problemática supone, pues, integrar los *verbos de acción* antes mencionados en un enunciado que, en términos manipulativos, tienda a lograr tal configuración final.

Sumar.-	Reunir (juntar) todas las *fichas* en una sola línea.
Restar.-	Quitar (o poner) *fichas* de la misma columna, hasta que se vacíe una de las líneas.
Multiplicar.-	Repetir la cantidad del medio en la línea de abajo tantas veces como indican las *fichas* de la fila de arriba.
Dividir.-	.- Repartir las *fichas* de la línea de arriba (*primera línea*) en tantas líneas iguales como indican las *fichas* de la *segunda línea.*

Es inevitable hacer algunas observaciones:

1º) Se trata de formulaciones indicativas y sintéticas. Se ha pretendido, tan sólo, mostrar una conexión inicial entre *verbos de acción* y posibles manipulaciones en *TINKUNAKO.* Formulación que deberá modificarse a medida que se avance en el tratamiento operatorio, desde una situación claramente accesible al alumno hasta aquéllas que presenten mayor ambigüedad aritmética.

2º) Como es lógico, esta presentación es esquemática: la que se ofrezca al alumno debe estar revestida de ciertas cualidades:

a) Contextualizada conforme a las características del alumno (Apartado 5.3.3). El contexto viene definido por el enunciado, y si bien el propio ámbito de *TINKUNAKO*, el juego de sus caminos y transporte de *fichas*, puede servir como contexto, no deja de ser artificioso: Debemos tener seguridad antecedente de que el contexto definido por el enunciado es atrayente para el alumno.

b) Carácter problemático o escenario marco, conforme a los intereses del alumno. Aunque suponga un desafío, dudamos mucho que un alumno genérico se sienta motivado por una orden escueta: "*junta las fichas de dos líneas en una sola...*" La forma del enunciado debe ser tal que el alumno-resolutor no sólo acuse recibo de la demanda, sino que, ante todo, se sienta impelido a buscar la respuesta -a efectuar cuantas manipulaciones sean precisas para conseguirla-; de no ser así, debe reformularse, en busca de la deseada incitación resolutoria.

c) Carácter lúdico. Con independencia de aspectos motivacionales, el alumno sólo conocerá que *ha aprendido realmente algo* una vez se haya culminado con éxito el proceso de descubrimiento; momento en el que se iniciará el proceso de nomenclatura, escritura y formalización simbólico-matemática. De esta forma, se favorece la adopción de decisiones y la búsqueda en pluralidad de direcciones; no importan los errores ni los fracasos momentáneos: *estamos jugando con TINKUNAKO.*

d) Formulación *suficiente* de condiciones, evitando puntualizaciones superfluas o implícitas para el alumno. En particular, debe evitarse la referencia a *respetar columnas*, salvo que se vulnere este requisito al iniciarse la ejecución (incluso puede esperarse a una rectificación posterior). Si se han efectuado suficientes ejercicios previos en la fase de Pre-Cálculo, el alumno debería haber asumido que es éste un convenio implícito -al igual que el de *palito completo-*, ya que los desplazamientos son siempre ortogonales.

Asimismo, debe tenerse especial cuidado en no mencionar condiciones innecesarias para el proyecto de resolución; cuales son, por ejemplo: "*fichas una a una*", "*empezando por la derecha (izquierda o el centro)*", u otras análogas. Es más: se pondrían en riesgo iniciativas y estrategias personales, permitidas por el dispositivo y que le hacen didácticamente más apreciable.

e) Expresión sencilla, asequible a la capacidad comprensiva del alumno. Algo que parece obvio, pero que deberá tenerse especialmente en cuenta, sobre todo si el problema/juego se plantea en términos exclusivos de *fichas*, líneas, filas...: pueden surgir dificultades de comprensión por confusiones o cambios de significado. Antes de iniciar la ejecución, debe existir certeza de que el alumno ha comprendido correctamente cuál es el objetivo a lograr.

La preocupación principal del profesor debe ser la comprensión por el alumno del enunciado, (recuérdese el comentario incluido el final del capítulo 5). A partir de este punto, debemos confiar en que, *por definición, los problemas no son rutinarios. Cada uno constituye, en mayor o menor grado, una novedad para el que aprende. Su solución eficaz depende de que el alumno no sólo posea el conocimiento y las destrezas requeridos, sino también de que sea capaz de utilizarlos y establecer una red o estructura* (ORTON, 1990, 51); para lo cual se cuenta con el *itinerario didáctico* diseñado o previsto a grandes rasgos y la intervención estimulativa o directiva, si fuera precisa.

3º) No se limita el tamaño de las cantidades. Una de las ventajas del dispositivo -como de la mayoría del *material estructurado-* es precisamente ésta, ya que las reglas que rijen la manipulación son idénticas tratándose de una o varias cifras; se exceptúan, en un primer momento, multiplicación y división por un número inferior a 10 (multiplicando o dividendo indiferente).

Recordemos que estamos en la etapa ínfima de iniciación a la operación formal. Previamente, en la fase de Pre-Cálculo, pueden haberse realizado *pequeñas operaciones informales* con cantidades no superiores a la veintena; pero ni se habrán definido como tales operaciones, se carecerá de nomenclatura, escritura y símbolos específicos, y, sobre todo, no se habrán confeccionado *tablas* sistemáticas. Con *TINKUNAKO*, puede iniciarse el proceso formal con cantidades de no importa qué dimensiones; incluso podría completarse el proceso algorítmico escrito sin necesidad de memorizar las *tablas de hechos numéricos básicos* -aunque no procederemos así en las propuestas de los Anexos-: el nexo significativo quedaría garantizado por la facilidad de traducción contexto-*TINKUNAKO*-escritura analizada en 83.1 y 8.3.3.

No obstante, conviene graduar la dificultad de las situaciones a proponer, a fin de resaltar el significado de la operación, y no empañarle con exigencias de prácticas manipulativas complejas (caso de la *resta con llevadas*, *multiplicación por números de varias cifras*, etc.; ver Anexos).

4º) El orden propuesto de introducción de las operaciones es indiferente. Aserto que puede parecer sorprendente, pero que podrá comprobarse en los Anexos. Sin embargo, anteponer la resta a la suma, la multiplicación a la suma o la división a las otras tres, impediría pasar a la etapa del algoritmo escrito. Por esta razón, en las Propuestas de Itinerarios Didácticos de los Anexos se ha seguido el orden tradicional.

5º) Los modelos manipulativos señalados son válidos, se trate de números naturales, enteros o decimales, y no importa en qué base numérica (véanse las Observaciones para cada operación, en los correspondientes Anexos.). Puede afirmarse sin exageración, que el alumno que aprende a operar en *TINKUNAKO* con números naturales en base 10, ha aprendido automáticamente a hacerlo en cualquier base de numeración y -salvo muy pequeñas puntualizaciones- en los restantes dominios numéricos. Perspectiva que nos satisface, pero que carece de interés en niveles educativos elementales.

8.5.2 PROPUESTAS DE "ITINERARIOS DIDÁCTICOS"

Hemos llegado, pues, al punto de disponer de situaciones problemáticas presentadas en *TINKUNAKO* mediante traducción o completación de enunciados verbales, preferiblemente contextualizados en escenarios-marco atrayentes y próximos para el alumno. A partirde ellas se desarrollará el auténtico *itinerario didáctico* que configurará el *proceso de enseñanza-aprendizaje.*

Como se ha señalado reiteradamente, en los Anexos se modelizan de forma somera unas *Propuestas de Itinerarios Didácticos* por operaciones; coinciden, en esencia, con los que se siguieron en la experiencia mencionada en el Apartado 8.2.2. Se trata de Unidades Temáticas indicativas de cómo puede llevarse a cabo la iniciación a las distintas operaciones aritméticas, sirviéndose del dispositivo y teniendo en cuenta las necesidades específicas del alumno ciego; Tienen un carácter de *guías* que faciliten al profesor el diseño de Actividades y trabajo de aula.

Conviene hacer algunas observaciones previas.

A) DESCRIPCIÓN

Constituyen un total de cinco Anexos:

I Primeros pasos con *TINKUNAKO* (Psicomotricidad y Pre-Cálculo).

II Adición.

III Sustracción.

IV Multiplicación.

V División.

El diseño de estas *Propuestas* responde a la metodología directriz de combinar cálculo en el dispositivo, cálculo mental y cálculo escrito. Por su objeto preeminente, atiende especialmente al trabajo con *TINKUNAKO*; aunque procuran no olvidarse los otrosdos aspectos, al menos en su fase representativa y momento de incorporación. El nivel previsto de empleo es el de *Escuela Infantil* y *Primaria*.

Salvo para el Anexo I –dirigido a la ejecución psicomotriz y Actividades de Precálculo-, cada uno de ellos se halla estructurado de la forma siguiente:

1°.- Objetivos matemáticos genéricos; que informan los alcances de la propuesta: Conocimientos y aplicación práctica de propiedades concernientes a la operación.

2°.- Reseña de *Destrezas y Conocimientos previos*. Conjunto de conocimientos, conceptuales y lingüísticos, y destrezas psicomotrices básicas, que se consideran indispensables para afrontar con garantías de éxito la iniciación a la operación matemática de referencia. Pueden agruparse en:

- Destrezas manipulativas en relación con el dispositivo.

- Destrezas de reconocimiento y expresión en *TINKUNAKO*, y su *traducción bidireccional* a lenguaje verbal y escrito.

- Destrezas lecto-escritoras (Braille o tinta) en relación con expresiones matemáticas anteriores a la operación.

- Niveles de operatividad en cálculo mental, en *TINKUNAKO* y por escrito, Calificables de prerrequisitos.

3°.- Ejemplos de *Situaciones Problemáticas*, empleables como *situaciones de partida* y *de aplicabilidad*.

4°.- *Itinerario didáctico-matemático*, propiamente dicho-, -o sucesión estructurada de situaciones numéricas, operativas y de representación -bajo las diversas formas: verbal, en *TINKUNAKO* y en escritura sobre papel-, y que son ocasión para el alumno de acceder a la operación en su casuística graduada. Se enuncian en forma abstracta, susceptibles de ser revestidas de significado real conveniente, gratuitamente o mediante proceso abstractivo previo.

5°.- *Observaciones*. En donde se proponen vías alternativas de actuación con *TINKUNAKO*, se analizan sus ventajas e inconvenientes operativos y didácticos.

6°.- Sugerencias de *optimización manipulativa*, que conduzcan a una mejora del rendimiento operativo con el dispositivo.

7°.- *Otros campos numéricos*. En el que se dan indicaciones sobre las posibilidades de *TINKUNAKO* con dominios numéricos más amplios -en particular, los decimales- o se enuncia su aplicabilidad en *bases numéricas distintas de 10*.

Para cada una de las *Guías*, la presentación incluye:

- Simulación de diálogos profesor-alumno (tendencia a la forma de *texto abierto*).

Este remedo de *diálogo vivo* padece, no obstante, todas las limitaciones expresivas de la penuria estilística de la literatura matemática.

- Observaciones y comentarios didácticos y psicomotores.

El carácter ordinariamente aseverativo se justificaría por los *argumentos de autoridad* y análisis incorporados al presente trabajo, pese a no hacerse referencia a ellos: Estas *guías* tienen finalidad ilustrativa, no doctrinal.

- Ilustraciones esquemáticas de situaciones en *TINKUNAKO*.

Pretenden reflejar los diferentes estados o pasos de manipulación, a modo de *firme matemática*. En diversos pasajes, podrían sustituir al texto escrito, pero hemos preferido que siguiera jugando su papel de apoyatura descriptiva.

- Ilustraciones de expresiones Braille.

Fieles a los principios, -había un deber de gratitud: la educación especial de ciegos-, y pensando en las necesidades del profesor de aula de un *centro ordinario* que cuenta con un alumno ciego en su aula, menudean las Representaciones Braille y las obsevaciones a propósito de la comunicación no visual con *TINKUNAKO*, hasta el punto de poder decirse que marcan el *nuevo discurso.*

B) ENFOQUE HEURÍSTICO

En cada fase -para cada situación propuesta-, se transfiere al alumno la iniciativa en el proyecto de solución, estimación, estrategia y técnicas de manipulación y obtención de conclusiones. Se aboga decididamente por una Didáctica Heurística (*aprendizaje por descubrimiento*), procurando dejar "*que el alumno ocupe el asiento del conductor*" (KAMII, 1995, 201). Es la propia KAMII quien nos da tres consejos prácticos:

- "Enseñar" planteando preguntas *plantear la pregunta adecuada en el momento oportuno* (Ibidem., 117).

- Evitar decir "*Esto está bien*" y "*Esto está mal*". *Cuando los niños cometen errores, tratamos de hacer que los corrijan ellos mismos (...) Con frecuencia se corrigen mientras tratan de explicar sus pensamientos a otra persona* (Ibidem., 202).

- *Individualizar objetivos.*

Aspectos que no son exclusivos de una Didáctica de tenor constructivista -como pretende la autora-, sino que también pueden encontrarse, en alguna medida, en actuaciones de cariz conductista. Todo dependerá de la menor o mayor proximidad del objetivo a alcanzar y de su naturaleza, del esfuerzo heurístico que se reclame al alumno y del *estilo docente* (Sección 4.4). No olvidemos que existen *grados* o *métodos* de descubrimiento: fortuito, libre y exploratorio, guiado, dirigido y programado. (BIGGES, 1972). Así pues, los dos primeros *consejos* quedan subordinados al tercero, para el cual debe tenerse en cuenta que:

> Todos los alumnos pueden aprender métodos para resolver problemas. A partir de comunicarles estrategias generales, cada uno desarrollará otras más personales y las enriquecerá progresivamente. Ninguno resolverá todos los problemas, lo más importante es que todos esten dispuestos a hacerlo sin desesperarse. Tener recursos para emprender la resolución y reconocer si la solución o las soluciones obtenidas son correctas, sin ayuda del "profe", es el objetivo prioritario. (ALSINA y OTROS, 1996, 110-111).

En nuestro caso, las *estrategias generales* están contenidas en el enunciado: "*juntar, quitar, repetir, repartir*". En suma:

> El papel del profesor consiste en despertar y hacer surgir situaciones cognitivas en las que se cree un conflicto, saber cuando puede producirse la dificultad e intervenir si su ayuda es necesaria para resolver estos conflictos, y no evitar que se produzcan. (GRUPO 0, 1997, 3, 56). (Véase Apartado 2.2.3.)

Estamos convencidos de que La contribución final del profesor excelente es reducir de manera gradual la dependencia del que aprende respecto de él. (SKEMP, 1980, 71).

C) IMPORTANCIA CONCEDIDA A LA VERBALIZACIÓN

El proceso de respuesta a una situación determinada puede completarse en absoluto silencio. Sin embargo, conviene atender a las razones y momentos que aconsejan la exteriorización verbal:

- En caso de cantidades *pequeñas* -inferiores cada una de ellas a 10-: "*¿Cuáles eran las cantidades del principio?...*" "*¿Cuál ha sido el resultado?...*" La verbalización refuerza así la fijación mental de *hechos numéricos*, gérmenes de la correspondiente *tabla.*

- En cualquier caso, para describir globalmente el proceso: "*¿Cómo podrías resumir lo que has hecho?*" Que sería una primera aproximación o formulación de lo que más tarde será el *algoritmo, manipulativo o escrito.*

- Para los seguidores de la escuela piagetiana, la verbalización comporta "*una toma de conciencia*" de las acciones realizadas, que contribuye a resaltar la *comprensión* del proceso en sus partes y, en alguna medida, en su globalidad. (Recuérdese el segundo de los consejos de KAMII, recogido más arriba.)

- Cuando las tareas se desarrollan en pequeño grupo, refuerza la comunicación y favorece el debate; en especial, si entre los alumnos se halla alguno con dificultades visuales.

- Permite detectar y corregir dificultades en la correlación entre las actuaciones manipulativas y la expresión oral de términos topológicos.

Al margen o no de la manipulación en *TINKUNAKO*, pueden incluirse algunas actividades de verbalización que, a su vez, son auténticos problemas (Apartado 4.3B, *Metamodelos*): la reformulación de la situación problemática, enunciado de situaciones análogas, sustitución por expresiones sinónimas, descripciones y definiciones, correspondencias terminológicas, etc.; así como la comunicación y debate entre los alumnos, las preguntas del tipo "*¿qué ocurriría si...?*", "*¿qué ocurriría si no...?*" Actividades de contenido eminentemente lingüístico que contribuyen a la asimilación -interrelación- conceptual. Son susceptibles, por otra parte, de ser presentadas en forma lúdica: concursos de sinónimos, emparejamientos de palabras y expresiones, *palabras prohibidas*, *palabras perdidas*, etc.; todas ellas asequibles al alumno ciego sin necesidad de una adaptación especial.

Sobresale el interés por dominar términos y expresiones sinónimos y antónimos, dada la importancia que cobra en el reconocimiento de palabras-clave y captación del *significado global* de enunciados.

D) ATENCIÓN A LAS REGULARIDADES Y PROPIEDADES ESTRUCTURALES

En el orden práctico, pero no *formal*: se evitan definiciones y léxico específico: se persigue una aplicación en situaciones de cálculo efectivo, sin necesidad de una formulación independiente.

Algunas de ellas resultarán útiles en alto grado: propiedad conmutativa de la adición y multiplicación; otras, imprescindibles para el itinerario previsto: multiplicación por 10, por 100, propiedad asociativa de la multiplicación, etc.; otras más, facilitarán el cálculo mental o escrito de ciertas situaciones: series ascendentes y descendentes con un mismo sumando o sustraendo.

> Reconocer, recordar y utilizar patrones aritméticos puede simplificar muchas tareas a todos los niveles, y por ello la búsqueda de regularidades constituye una estrategia general importante, poco cultivada hasta ahora en nuestro currículo y que merece un tratamiento sistemático. (CASTRO, RICO y CASTRO, 1996, 91).

Para la mayoría de operaciones y propiedades (véanse Anexos) se procede de forma semejante:

- la presentación -siempre en forma problemática- suele responder a sugerencias de analogía o situaciones que puedan resultar sorprendentes;

- la formulación de la hipótesis se deja al alumno;

- no se hace demostración formal: se lleva a cabo una comprobación de casos particulares -suficientemente generales y representativos-, hasta alcanzar en el alumno una convicción experiencial;

- la *comprensión* o *aceptación final* se apoya en las características del dispositivo y su funcionamiento;

- la conveniencia de su consideración curricular -inclusión en los itinerarios- se ve respaldada por las consecuencias prácticas experimentadas en el ahorro de tiempo y esfuerzo en el cálculo mental y confección de la *tabla* correspondiente;

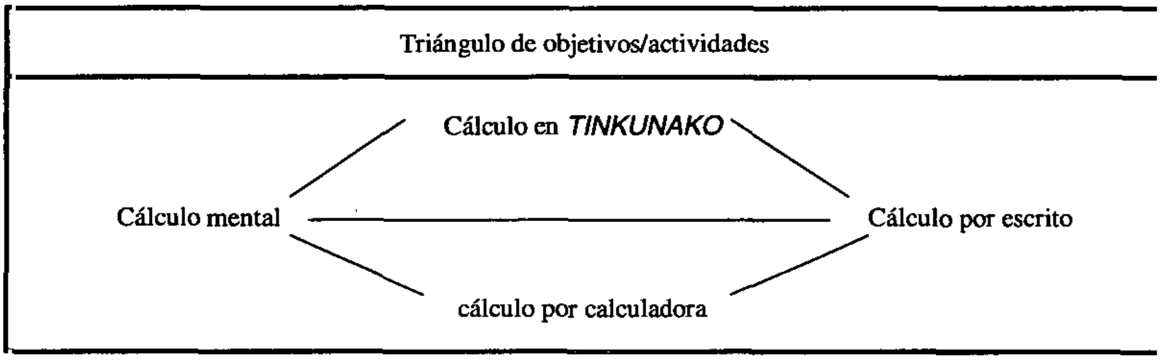
- se procura su aprecio como *regularidades que facilitan la expresión matemática de las acciones ejercidas sobre las cantidades en juego* (MAZA, 1990B, 61) y que *contribuyen a facilitar la comprensión del significado de la operación* (GRUPO 0, 1997, 3,99).

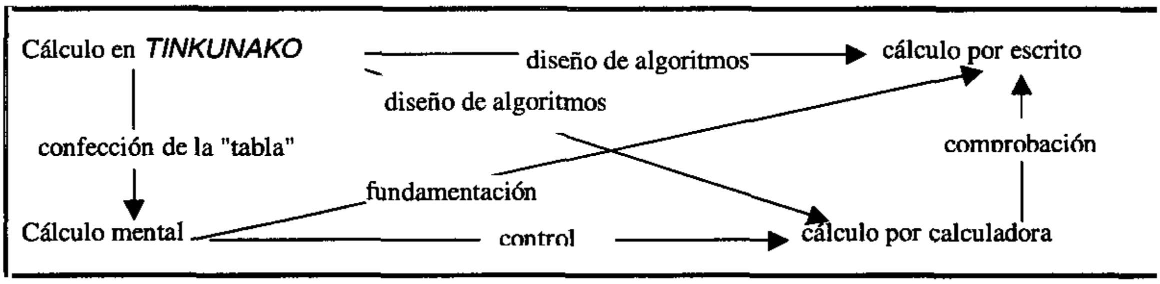
E) UN "TRIÁNGULO ANTECEDENTE DE DESTREZAS CALCULATORIAS"

En Matemáticas, el acceso a nuevos conceptos o técnicas está fiscalizado frecuentemente por destrezas calculatorias o pre-calculatorias, expresivo/representativas e incluso manipulativas. Conviene, pues, asegurar que el alumno dispone de las competencias imprescindibles para abordar con garantías la tarea que se emprende.

En el Capítulo 6 se proponía el desarrollo armónico de un *triángulo de destrezas calculatorias*: cálculo mental, cálculo por escrito, cálculo por calculadora. Transformémoslo en otro *triángulo antecedente de Objetivos/Actividades*, en el que incluímos nuestro material de iniciación: cálculo con *TINKUNAKO*, cálculo mental, cálculo por escrito. Permanecerá mientras dure esta fase de iniciación, hasta que, una vez superada, quiera reemplazarse por el definitivo.

Cuadro 8.5.2.A.- Triángulos de destrezas calculatorias.





"¿Y hasta cuando hace falta manipular?', pues, sencillamente, hasta que los alumnos dejen de hacerlo por iniciativa propia, cuando un niño puede sumar mentalmente nunca coge material -para hacerlo de una forma manipulativa, dejemos pues que utilicen los números como símbolos que representan una cantidad cuando ellos lo tengan suficientemente claro, y mientras no lo tengan es mejor que acompañen el número con una representación de la cantidad con material o dibujo con la tranquilidad que da pensar que nadie que comprenda que representa el ocho dibuja ocho *palitos*. Quien los dibuja es porque todavía no tiene la seguridad necesaria en la utilización de la cifra. (ALSINA y OTROS, 1996, 71). Para un alumno ciego, *dibujar* será también *representar en TINKUNAKO.*

En las Unidades contenidas en los Anexos, este trío irá reclamando su presencia activa. Desde un primer momento, se simultanean representación en el dispositivo y expresión escrita; el cálculo mental seguirá a ambos, por su conveniencia manifiesta: como recurso rápido y cómodo para cálculos sencillos, que irán creciendo en complejidad a medida que el alumno adquiera las oportunas estrategias.

Se da preferencia al cálculo con *TINKUNAKO* sobre el cálculo escrito. A la escritura sobre papel le corresponderá, por lo general, la representación de la operación realizada; si se ha relegado a un segundo plano, fue en consideración a que se pretendía subrayar la *Iniciación al cálculo con TINKUNAKO,* más que la *Iniciación al algoritmo escrito*: por confianza en el material y coherencia con estas páginas.

Puede argüirse que la no conservación de resultados parciales rompe la correspondencia entre operación escrita y operación ejecutada en *TINKUNAKO*. Es preciso admitir que se trata de dos formas distintas de operar: *TINKUNAKO* y escritura generan, de hecho, algoritmos propiamente matemáticos, psíquicos y psicomotrices diferentes.

El *modus operandi* sobre símbolos escritos exige un permanente ejercicio de Cálculo Mental, práctica de lecto-escritura de símbolos numéricos y memoria (*a largo plazo*, para recuperar *hechos numéricos*; e *inmediata*, caso de *llevadas*). Mientras que nuestro dispositivo requiere, esencial y casi exclusivamente, ejercicios manipulativos -bien es cierto que algo más complejos que los requeridos por la escritura-; la participación psíquica se reduce a la conversión físico-verbal cantidad de *fichas*- término hablado, *palito* a *palito* y fila en su conjunto.

Podría prescindirse del cálculo escrito o del cálculo mental, incluso de ambos. Pero la supresión de uno solo de estos objetivos/actividad conduciría más tarde a esfuerzos innecesarios y posibles perturbaciones en el proceso global, como se indicaba en el Capítulo 6. Por otra parte, se desaprovecharían los logros alcanzables por manipulación en *TINKUNAKO*, empobreciéndolos.

La presencia en un alumno de dificultades graves en alguna de las *competencias radiales* de nuestro *triángulo antecedente de destrezas calculatorias* sería posible síntoma de *discalculia parcial*, reparable o no por una ejercitación adecuada. Es el caso de *agrafias* y *dislesias numéricas*, perturbaciones en los procesos de simbolización y *fobias simbólicas*, etc.

Queda la opción nada despreciable de que tales alumnos prosigan el camino sirviéndose de las otras dos competencias, y aún de una sola; aunque se empobreciera para ellos la actividad didáctica-. No es osado esperar que el desarrollo en estas direcciones contribuya a remediar dichas carencias, cual respaldo actitudinal y recurso siempre disponible.

Las *Propuestas de itinerarios didácticos* de los Anexos no son sino *Propuestas*: no excluyentes, ni únicas, ni las mejores -eso pensamos-. Deben tomarse como lo que son: sugerencias que inviten al profesor a la reflexión práctica, a la búsqueda de mejores gradaciones de objetivos, caminos y ejemplos. Ojalá que sea así, en beneficio de sus alumnos.

EL PASO A LA ESCRITURA SIMBÓLICA

La iniciación al cálculo quedaría incompleta si los logros alcanzados, vía manipulación en el material o vía cálculo pensado, no se reflejaran en forma escrita. Es algo más que un medio de conservación y posibilidad de repaso: la representación escrita abre las puertas a un almacenamiento organizado de resultados y al progreso en técnicas específicas -algoritmos o reglas-, gracias a la expresión posicional-polinómica generada por la base de numeración.

Un peligro en la aplicación de estos procedimientos es cortar el proceso que empieza con la manipulación sin llegar a la simbolización más o menos compleja. Siempre que se realice una actividad que se base en la manipulación se debe completar, como minimo, con la expresión oral, grafica o escrita de lo que se ha encontrado. (ibíd., 100).

Renunciamos, pues, voluntariamente a nuestra posibilidad de *Una Aritmética sin cifras*, aunque siga abierta como camino viable para alumnos con dificultades graves en simbolización o en lecto-escritura numérica.

No es difícil inducir en el alumno la conveniencia de *pasar al papel* algunos aspectos de su trabajo con *TINKUNAKO*:

a) *"Levantar acta de lo que se ha hecho"*. Es una satisfacción personal poder mostrarlo a los demás -sobre todo a la familia-, incluso mostrárselo a uno mismo, sin necesidad de nuevas manipulaciones. No será el *cómo*, pero al menos es el *qué*: *"qué teníamos"* y *"qué hemos obtenido"*. En este mismo sentido:

b) *"Dejar libre a TINKUNAKO"* de la información que contiene en un determinado momento, para poder dedicarlo a otras operaciones; análogamente a cómo se actúa con una calculadora. Cuando deben realizarse varios cálculos,, comprobación de estrategias diferentes -comprobación de propiedades-, recoger resultados obtenidos en batería, para trabajos fuera del aula, etc.

c) *"Poder volver a empezar"*: posibilidad de rehacer el proceso; en caso de error, bloqueo o intento de perfeccionamiento. Esto supone tener al alcance inmediato los datos iniciales, sin necesidad de que se repita la situación problemática o cuando esto sea imposible (enunciado oral).

La primera forma de escritura simbólica -como *acta* o *recordatorio*- es la *escritura en línea*. Como se adelantaba en el Apartado 8.3.2A, la transcripción de cantidades apenas requiere esfuerzos de traducción. La transcripción a *escritura en línea* no exige, en principio, convenios de orden; tan sólo la división, o la resta si no se emplea la *ficha especial*, pero al llegar ese momento será más bien el significado adjudicado a cada término quien determine la posición sobre el papel.

Será precisamente este intento de dejar constancia de una operación realizada o por realizar, la que obliga a buscar para ella una expresión simbólica -*símbolo de la operación*-. Éste queda definido en *TINKUNAKO*:

- de forma explícita: por el símbolo de la *etiqueta especial* incorporada, en caso de emplearse;

- de forma implícita: por el *juego* o manipulación que se ha desarrollado (que será lo más frecuente).

Y al expresar el resultado, surge la necesidad de otro signo distintivo o de separación: el signo igual =. Es una convención expresiva: separa la cantidad *resultado* a la que se ha llegado en *TINKUNAKO*, de la expresión operatoria (operandos y operación).

Se intenta la sustitución del carácter temporal tradicional (datos de partida, antes; resultado, después) por otro espacial (simple separación), que permita considerar como idénticas sentencias simétricas, cultivando la doble dirección de lectura de derecha a izquierda y de izquierda a derecha; análogamente al objetivo perseguido con el equilibrio en la *balanza numérica*.

> El uso correcto de la igualdad se basa en prácticas de lectura y escritura específicas, distintas a las del lenguaje ordinario. Tampoco en este caso las igualdades numéricas deben considerarse simples transcripciones de la palabra; la posición del signo"=" es la que indica la lectura más eficaz, y, por tanto, las igualdades, incompletas no se leen forzosamente de izquierda a derecha, como en el lenguaje ordinario.

> Debido a esta autonomía, el simbolismo aritmético constituye un sistema en el que los niños desarrollan la competencia en el cálculo y son capaces de resolver igualdades incompletas como: 6 + ? = 9, a pesar de que fracasarían en la mayor parte de los problemas concretos que pueden esquematizarse mediante esta igualdad (...) El simbolismo no se limita a expresar el pensamiento: lo exige y lo hace posible. (BRISSIAUD, 1993, 188)

La disposición bidimensional de módulos ensamblados *en paralelo* anticipa la *escritura bidimensional* de dos o tres cantidades (excepcionalmente, de cuatro). En particular, el empleo de sólo dos líneas de *TINKUNAKO* para la adición y la indiferencia de la línea elegida para contener el resultado ponen en evidencia la conmutatividad, haciendo indistinta desde el primer momento el orden de escritura de los sumandos *en línea*; otro tanto puede afirmarse para la multiplicación.

Una última razón para el paso a la escritura en papel:

d) *"Por si alguna vez nos falta TINKUNAKO"*..., intentar emplear la escritura como recurso alternativo de cálculo. Que es un objetivo didáctico habitual: disponer de algoritmos para el cálculo por escrito; pero que exigirá su diseño previo.

Las pretensiones de una proyección ulterior: hacen aconsejable considerar indistintas ambas formas de escritura, *en línea* y *bidimensional*, y practicarlas desde un principio. La primera, facilitará la confección de la *tabla*; con la segunda, los algoritmos surgirán de forma natural.

EL CÁLCULO MENTAL Y LAS "TABLAS"

Sea por manipulación con el material, sea mediante cálculo pensado -recuentos y representaciones-, el alumno puede ir acumulando resultados correspondientes a operandos elementales. Diversas regularidades (propiedades) y estrategias facilitan su obtención, reduciendo el esfuerzo constructivo. Pero el problema esencial se plantea a la hora de recuperar estos valores de la *memoria a largo plazo* con la conveniente rapidez y seguridad, automáticamente, con inmediatez.

Estos resultados elementales (*hechos numéricos*) deben, pues, ser fijados en la *memoria a largo plazo* con alguna organización y facilidad de acceso desde la *memoria de trabajo* (expresado en términos de *teoría de la información*, Apartado 2.2.1D). Tal fijación se facilita mediante una adecuada *gestión de los recursos de memoria*, y se refuerza por la frecuencia de uso y el repaso. En cualquier caso, se hace casi imprescindible tener acceso a un *listado* o *tabla* de forma que pueda ser consultada y repasada de forma ágil y cómoda, hasta lograr su aprendizaje efectivo (memorización).

El procedimiento habitual es disponer de un tal *listado ordenado* o *tabla* por escrito, en la que dichos valores aparezcan conforme a algún o algunos criterios organizativos. Esta *tabla* puede ser proporcionada al alumno y adiestrarle en su consulta y aprendizaje -método tradicional-; o ser construida por el propio alumno, sugiriéndole a lo sumo indicaciones sobre el formato, consulta rápida y aprendizaje: es la línea seguida en los Anexos.

Las actuaciones son análogas para todas las operaciones, una vez adquirido su significado aritmético, resuelto con *TINKUNAKO* el cálculo en la gama completa de casos y abordado el estudio de las propiedades más importantes:

a) Se proponen pequeños problemas y ejercicios para valores sencillos, intentando anticipar el resultado mentalmente (por *cálculo pensado*). Una vez comprobado o resuelto en el dispositivo, se procura rehacer de forma sintética, verbalmente y por escrito -*en línea*- (ver más abajo). No existe en este momento pretensión sistemática.

b) La retirada momentánea de *TINKUNAKO* -o su apartamiento voluntario- pone de manifiesto la necesidad de disponer de un sistema rápido que permita recordar dichos resultados simples (*hechos numéricos*). Es decir: un listado completo y por escrito de los resultados más importantes y frecuentes.

c) Se construye paulatinamente la *Tabla de la operación* para estos valores elementales, ejemplos relevantes; que es preciso memorizar y automatizar, *si no se quiere quedar paralizado ante el menor cálculo.*

La confección corresponde exclusivamente al alumno. Se aprovechan para ello algunas de las propiedades/regularidades observadas y surgentes (ver Apartado 6.2.3): aunque supongan un cierto *desorden* en la cumplimentación de los valores, generan estrategias racionales de búsqueda -gestión de memoria- o reconstrucción a emplear cuando sean requeridos.

Para su diseño, es posible que sea necesaria una cierta intervención del profesor, orientándole o sugiriéndole modificaciones, que le guíen desde el simple listado a la disposición bidimensional y a reducciones sucesivas de símbolos y elementos repetidos. Hasta llegar a un formato sintético y cómodo: una *chuleta* o *tarjeta* -*una hoja en Braille*- que tener *"al alcance de la mano"* para poder consultar, repasar, aprender. Esta orientación será imprescindible en el caso del alumno ciego, ya que, debido a las limitaciones de la máquina Perkins y las características de la exploración háptica, difieren notablemente los formatos en tinta y en Braille.

A poco de iniciar este trabajo para la resta y la división, se observa la extraña composición de sus *tablas*. Vista su estrecha relación con la suma y el producto, respectivamente, se adoptan como *tablas* bivalentes las de estas operaciones, pero manejadas en forma inversa.

d) Desarrollo de actividades de cálculo mental. Fundamentalmente, en forma oral, por su facilidad de ejecución y participación del alumno ciego (ver *Justificación*, en la Sección 6.2).

El objetivo es la respuesta fulgurante y segura, síntoma de una fijación adecuada de los *hechos numéricos básicos* o de estrategias específicas. Pero ésta se alcanza con mayor garantía y prontitud si se halla motivada por la aplicabilidad en la resolución de PAEV, juegos, competiciones, etc. Se complementa así el *repaso* y la *organización*, que son las formas tradicionales de aprendizaje de las *tablas* (MAZA, 1991, 95-97).

e) El profesor puede diseñar actividades que permitan avanzar en grados de dificultad y desarrollo de técnicas de cálculo mental de mayor potencia. El objetivo sería ahora lograr la autonomía del alumno respecto de la ayuda de *TINKUNAKO* y del mismo cálculo escrito -en cotas accesibles-, para forzarle, suave y progresivamente, al empleo y desarrollo de los incipientes recursos y técnicas particulares. Su descripción supera los límites de los Anexos, pero se ha tratado con amplitud en la Sección 6.2.

EL "ALGORITMO ESCRITO": OBJETIVO OPCIONAL

Nuestro aprendizaje de cada una de las operaciones está tan ligado a su algoritmo que se suele confundir cada operación con el algoritmo usual que la resuelve. (GÓMEZ, 1988, 105).

El cálculo escrito es, ante todo, una manipulación simbólica. Aunque en su nivel más bajo tiene un correlato real -físico-, se accede a él por vía de convenio -como todo lenguaje, y más el escrito-. Después, al servirse de las ventajas de la representación posicional -en nuestra cultura, de escritura decimal-, genera algoritmos y reglas que se alejan cada vez más de la situaciones físicas, para convertirse en un mero automatismo mental y gráfico-simbólico, con frecuencia vacío de sentido -significado- para el estudiante: no es raro que se aprenda a operar, pero sin conocer una justificación convincente del por qué de sus reglas algorítmicas. Sin duda, se olvida -o se ignora- que los algoritmos combinan el significado de la operación, sus propiedades y el sistema de numeración. (ALSINA y OTROS, 1996, 113-114).

Somos conscientes de que el aprendizaje de los algoritmos en nuestras escuelas es un tema polémico, cuya pérdida de importancia parece ser consecuencia de los avances en la tecnología disponible en las aulas (CASTRO, RICO y CASTRO, 1996, 128).

Una cosa es reducir los algoritmos a la única forma de cálculo y atormentar a los alumnos con ejercicios kilométricos e injustificados -especialmente a los que presentan más dificultades en este dominio-; y otra muy distinta *construir*, *aprender* y *aplicar equilibradamente* diferentes procedimientos calculatorios -es más: ¡aprender a construir algoritmos generales!-.

VANLEHN (1986) distingue esencialmente tres métodos para la enseñanza-aprendizaje de los algoritmos:

- *Aprendizaje por información externa* (el profesor, el libro de texto); que suministra directamente las reglas algorítmicas, con un mínimo de participación del alumno y grados diversos de justificación comprensiva.

- *Aprendizaje por inducción* (fundamento de la mayoría del *software educativo*); basado en la práctica graduada (programada) de operaciones escritas, por la que el alumno *induce* progresivamente las reglas algorítmicas.

- *Aprendizaje por analogía*; en el que se deducen las reglas algorítmicas como transferencia de modelos observables en la resolución escrita de situaciones problemáticas, utilizando o no materiales manipulativos.

Las dos últimas tienen carácter constructivista, si bien la segunda corre riesgos de mecanicismo conductista (del que la primera es campeona). En cuanto a la dimensión *comprensiva* o *conceptual*, parece quedar garantizado en el *aprendizaje por analogía*, ya que en las dos primeras sería fruto, en su caso, del esfuerzo analítico o receptividad del alumno; razón por la que merecerían, más bien, la denominación de *aprendizajes procedimentales* (MAZA, 1989, 95). En cualquier caso, será el *estilodocente* quien determine el mayor o menor grado de respeto a la iniciativa del alumno y exigencia de comprensión conceptual.

> ¿Qué pretendemos entonces en el aula: Utilizar exclusivamente los algoritmos o reconstruirlos para su posterior utilización? La respuesta dada por cada profesor a esta pregunta es clave en el desarrollo aritmético. (MAZA, 1991, 107).

Resaltemos dos líneas de trabajo que han venido a renovar la didáctica de los algoritmos escritos desde comienzos de los años 80. En ambos casos, el itinerario se desarrolla mediante manipulación eminentemente simbólica, sirviéndose de tanteos, descomposiciones decimales espontáneas, ensayos, revisiones y reducciones; es decir: con espíritu constructivista y respeto a la iniciativa personal del alumno.

- KAMII y colaboradores (Estados Unidos). Quienes, siguiendo una línea de clara epistemología genética, condenan la enseñanza como tal de algoritmos escritos, y confían en su generación autónoma por el/los alumno/s en tareas cooperativas a partir de situaciones preferentemente conjuntistas. Entienden que, en alguna forma, el niño debe rehacer el recorrido histórico-evolutivo que ha llevado a la forma actual de los algoritmos, que puede alcanzar por sí solo.

- Grupo WISKOBAS de Holanda (véase, por ejemplo: GÓMEZ, 1988; MAZA, 1991). A caballo entre las teorías constructivistas y gestaltistas, confían en las capacidades del alumno para descubrir y experimentar técnicas de cálculo escrito, que la práctica irá esquematizando y abreviando. Si bien el objetivo final son los algoritmos tradicionales -convencidos de su validez-, rehusan fijar objetivos de obligado cumplimiento para todos los alumnos. Se concede un cierto papel instrumental a los *materiales estructurados*, aplicados a la resolución de situaciones contextualizadas, y a las *transacciones* entre los alumnos. En alguna medida, es independiente de la gradación en el tamaño de los datos.

Nuestra propuesta de iniciación a los algoritmos escritos se aproxima decididamente a esta segunda línea, pero concediendo un protagonismo esencial a *TINKUNAKO*, derivado de su capacidad para generar configuraciones bidimensionales.

Un problema importante con los algoritmos es que con frecuencia los introducimos, al parecer, antes de que los alumnos adviertan su necesidad (ORTON, 1990, 44). Al sugerir razones para provocar la escritura en papel de los frutos obtenidos en *TINKUNAKO*, planteábamos un desafío, respuesta a una necesidad: efectuar *cálculos por escrito*, ante la falta del dispositivo. Pero este reto debe formularse en una fase avanzada del proceso de práctica en la operación; en particular, una vez que se dominen los *hechos numéricos básicos*..

La conservación en papel de manipulaciones realizadas en *TINKUNAKO* veíamos más arriba que podía tomar dos formas:

- reflejar solamente datos y resultados,

- recoger todos o algunos de los estadios manipulativos.

Asimismo, cabía una *escritura en línea* y otra *bidimensional*; en principio, indistintas. Será esta segunda la que favorezca la cristalización progresiva del correspondiente algoritmo.

Una propuesta de itinerario podría comprender los siguientes subobjetivos/actividad:

1º) Se pretende reflejar sobre el papel el acontecer en *TINKUNAKO* de forma resumida.

2º) Se incorpora la intención de que esta plasmación sea suficiente y susceptible de detectar algún tipo de error: *si es necesario, se recogen pasos intermedios.*

3º) Se intentan anticipar *resultados intermedios* -mediante cálculo mental y empleo de regularidades-. Para dejar constancia de ellos, se escriben; se comprueban después en el dispositivo.

4º) Asegurada la viabilidad de estas *anticipaciones parciales*, se van ampliando progresivamente, hasta llegar a realizar la operación completa por escrito, comprobando el resultado con *TINKUNAKO*.

5º) Se intenta mejorar el procedimiento, en busca de mayor seguridad y ahorro de tiempo y esfuerzo.

6º) Finalmente, se intenta enunciar el procedimiento como conjunto ordenado de instrucciones.

Los estadios 3º a 5º no es extraño que den lugar a modificaciones en la técnica manipulativa hasta entonces empleada. Tal como es su propósito, se modificará la distribución espacial y agrupación de *resultados parciales* sobre el papel.

Aunque no forman parte estrictamente de la determinación y aprendizaje de un algoritmo, los puntos más delicados en el último estadio es confirmar la suficiencia y necesidad de todas y cada una de las instrucciones que integran la propuesta de formulación. La suficiencia podrá contrastarse mediante la aplicación a ejemplos representativos; la necesidad, intentando suprimir algún aspecto o regla. Constituyen de por sí una estrategia comprobatoria -no demostrativa- de alto nivel y honda repercusión formativa, que requerirá de la cooperación activa del profesor.

Los algoritmos así obtenidos ofrecen ciertas características:

- son *descubiertos* por el propio alumno. Si bien se hará recomendable la *cooperación* del profesor para ayudarle a llegar a otros paulatinamente más útiles.

- Es natural que en un principio aparezcan formas algorítmicas rudimentarias y *no canónicas*, que respondan a la estrategia manipulativa personal del alumno. Deben aceptarse como *útiles y mejorables.*

- Las *formas canónicas* vendrán inducidas por la *conveniencia*: una distribución espacial facilitadora de la recogida de resultados parciales -intermedios y virtuales, en *TINKUNAKO*- y de la posibilidad de recurrir al cálculo mental, comprobación, facilidad de corrección, seguridad, ahorro de tiempo, etc.; no *la costumbre, la imposición social, como forma única.* (Recordemos que existen diferentes *formas canónicas* o algoritmos prácticos para cada operación, que no deben confundirse con la *forma usual* u *oficial* en el país.)

> No en todos los casos nuestros algoritmos usuales son la versión más sencilla que puede emplearse para llegar a un resultado (por ejemplo, la multiplicación con el "método de la celosía" es evidentemente más sencilla). Sin embargo los algoritmos que empleamos en la actualidad constituyen un sistema coherente, que se ajustan a unas reglas comunes, evitando que en cada caso se sigan esquemas distintos. (GÓMEZ, 1988, 105).

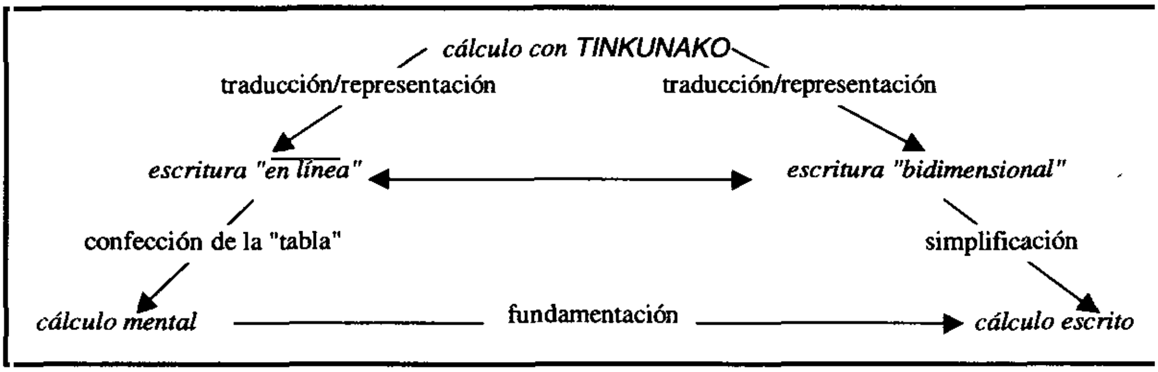
El progreso desde las formas rudimentarias iniciales a las finales es muy posible que requieran sugerencias u orientaciones. Pero éstas deben plantearse como *conflictos* a resolver por el alumno mediante hipótesis, ensayos y comprobaciones. Es por ello que los ejemplos seleccionados conviene sean *graduados* y *representativos,* y que el profesor disponga de información sobre formas algorítmicas para cada operación -ver, por ejemplo: KAMII (1995), GÓMEZ (1988), MAZA (1989, 1991)-.

- La formulación final en *pasos* del procedimiento corresponde, asimismo, al alumno. Pero evitando los formalismos enunciativos: importa más el *"saber hacer* que *saber decir cómo se hace"*, con tal que éste sea suficientemente expresivo; y procurando, al mismo tiempo, que pueda respaldarse con una justificación técnica o *comprensiva.* Se posibilitará de este modo su reconstrucción en caso de olvido y se alejará el peligro de aprendizaje mecánico.

Se trata, pues, de una iniciación conceptual (HIEBERT y LEFEVRE 1986; MAZA, 1991) a un procedimiento estimado como conveniente. Pero es imprescindible un dominio previo de los *hechos numéricos básicos* o *tabla de la operación,* que permita sustituir insensiblemente la manipulación por el cálculo mental directo. Un intento por

Pasar de la simple transmisión de conocimientos, verdades o técnicas a crear una verdadera estimulación del aprendizaje donde primen los métodos, los modelos y las estrategias sobre los contenidos concretos, donde inducir, resolver, decidir, deducir, representar, verbalizar, explorar, investigar, etc. sean verbos que marquen la nueva dinámica y jubilen antiguas costumbres como la de calcular rutinariamente. (ALSINA y OTROS, 1996, 20-21).

Cuadro 8.5.2B.- Proceso de diseño de un algoritmo escrito con *TINKUNAKO*.



En el caso de alumnos ciegos totales, el objetivo de diseño de un algoritmo escrito debe plantearse con antelación a que éste haya alcanzado destreza suficiente y haya desarrollado algoritmos específicos en *TINKUNAKO*. La dificultad y lentitud inherente al manejo de la máquina Perkins con fines calculatorios -y su condición de verdadero *mueble poco transportable*- no invitan en absoluto a prescindir del dispositivo.

* * *

TINKUNAKO es -pretende ser- un ENCUENTRO... De la realidad física con el mundo de lo abstracto. De lo manipulativo, con la operatoria mental. Del *hacer* con el *pensar*. De lo cercano y asequible, con el ilimitado horizonte numérico. Del alumno con la Matemática.

BIBLIOGRAFÍA

ABRAVANEL, E. (1970). Choice for shape versus textural matching by young children. Perceptual and Motor skills, 31, 527-533.

ABRAVANEL, E. (1971A). The synthesis of lenght within and betwen perceptual systems. Perception and Psychophysics, 9, 327-328.

ABRAVANEL, E. (1971B). Intersensory integration of selected spatial dimensions: Extension to an adult sample. Perceptual and Motor Skills, 32, 479-484.

ABRAVANEL, E. (1972A). How children combine vision and touch when perceiving the shape of objects. Perception and Psychophysics, 12, 171-175.

ABRAVANEL, E. (1972B). Short-term memory for shape information processed intra and inteermodally at three ages. Perceptual and Motor Skills, 35, 419-425.

ABRAVANEL, E. (1973A). Retention of shape information under haptic and visual acquisition. Perceptual and Motor Skills, 36, 683-690.

ABRAVANEL, E. (1973B). Division of labor betwen eye and hand when perceiving shape. Neoropsychologia, 11, 207-211.

ALLAN, L. (1990). Estrategias de evaluación formativa (concepto psicopedagógico y modalidades). Universidad de Ginebra; trad. de M. José Bordón.

ALSINA, C. (1989): La calculadora en la escuela.

ALSINA C., C. BURGUES, J. M. FORTUNY, J. GIMENEZ, M. TORRA (1996): Enseñar Matemáticas. Ed. Graó, Barcelona.

ALSINA C., C. BURGUÉS, J. M. FORTUNY, J. GIMÉNEZ, M. TORRA (1996): Enseñar Matemáticas. Ed. Graó, Barcelona.

ASHLOCK, R.B. (1972): "Error patterns in computations", Charles E. Merrill Publishing Co. Columbus, Ohio.

AUSUBEL, D. P. (1968): "Educational psycchology: A Cognitive View, Holt, Rinehart and Winston, Nueva York.

BACKMAN, C.A. (1978): "Analyzing children's work procedures", National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia.

BARTLETT (Barlett, F. C. (1932): "Remembering". Londres: Cambridge University Press.

BENTON, A. L.: "Introducción a la neuropsicología. Edit. Fontanella, Barcelona, 1971).

BERGSON, (1947): "L'energie spirituelle".

BOUVIER y GEORGE (1984): Diccionario de matemáticas. Akal Editores.

BRIARS y LARKIN (1984): "An integrated model of skills in solving elmentary word problems", Cognition and Instruction.

BRISSIAUD, R. (1993): El aprendizaje del Cálculo (Más allá de Piaget) y de la Teoría de Conjuntos). Visor-Aprendizaje, Madrid.

BRISSIAUD, R. (1993): El aprendizaje del Cálculo (Más allá de Piaget) y de la Teoría de Conjuntos). Visor-Aprendizaje, Madrid.

BROUSEAU, G. (1981): "Problèmes de didactique des décimaux". Recherches en Didactique del Mathématiques 2.1, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSEAU, G. (1983): "Les obstacles epitémologiques et les problèmes en didactique", Recherches en Didactique del Mathématiques 2.1, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSEAU, G. (1986): "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", in BRUN, J (1996): Didactique des mathématiques, Delachaux et Niestlé, Lausanne, pp.45-143.

BROUSEAU, G. (1986): " Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática", Publicaciones del Seminario García de Galdeano. Universidad de Zaragoza. (Traducción de "Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques, 7.2 la Pensée Sauvage, Grenoble.)

BROUSEAU, G. (1989): "Utilidad e interés de la didáctica para un profesor (1ª parte)", SUMA, 4, 5-12.

BROUSEAU, G. (1991): " ¿Qué pueden aportar a los enseñantes diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (2ª parte)". Enseñanza de las Ciencias, 9 (1), 10-21.

BROWN y BURTON, (1978): Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. "Cognitive Science", 2, 155-192.

BROWN y otros (1983): "Learning, remembering and understanding", en Mussen, P. H.:"Handbook of Child Psychology (Vol 3)" Willey and Sons. New York.

BROWNELL, W. A. (1928): "The development of children's number ideas in the primary grades". Chicago: The University of Chicago.

BROWNELL y STRETCH, (1931): "The effect of unfamiliar settings on prlblem solving". Durham, N. C.: Duke University.

BROWNELL, W. A. (1931): The techniques of research employed in arithmetic . In G. M. (Ed.) Report of the society's committee on Arithmetic (29 th. Year book of the National Society the Study of Education, pp 415-443). Chicago: University of Chicago Press.

BROWNELL, W. A. (1935): Psychological considerations in the learning and the teaching or arithmetic. "The teaching of arithmetic, the tenth tearbook of the National Council of Teachers of Mathematics". Nueva York: Theachers College, Columbia University.

BRUNER (1960A): The process of Education. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

BRUNER, J. (1987): "La importancia de la educación". Ed. Paidós. Barcelona.

BRUNER, GOODNOW y AUSTIN, (1956): "A study of thinking". Nueva York.

BRUNER, OLVER y GREENFIELD, (1966): "Studies in cognitive growth". Nueva York.

BUTTS, T. (1980): "Posing Problems Properly", en Krulik y Reys.

CARPENTER, T. P.; MOSER, J. M., y ROMBERO, T. A. (eds.) (1982): Addition and Subtraction.- A Cognitive Perspective. (Lawrence Erlbaum Associates, Inc.: Hillsdale, N. J.)

CARPENTER y MOSER (1985): "Learning to Add and Subtract", Lawrence Erlbaum. Hillsdale, New Jersey.

CASTRO, ENCARNACIÓN, RICO L. y CASTRO ENRIQUE (1996): Números y operaciones (Fundamentos para una Aritmética escolar). Ed. Síntesis, Madrid.

CENTRO DE DESARROLLO CURRICULAR, MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA DEL ESTADO ESPAÑOL (1991): Alumnos con necesidades educativas especiales. Adaptaciones curriculares. M.E.C. Madrid.

CHEVALLARD, Y. (1985): "La transposition dedactique. Du savoir savant au savoir enseigné. La Pensée Sauvage. Grenoble, 2ª edición 1991.

CLARK, A. H. y otros (1973): "On the meeting of semantics and perception". In W Chase (ed.) Visual Information Processing. New York: Academic Press.

COCKCROFT, W. S H. (1982): "Mathematics counts". Report of the Committee if Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools under the Chairmansship of dr W. H. Cockcroft. London, England: Her Majesty's Stationery office.

CONRAD, R. (1964): "Acoustic confusions in immediate memory", British Journal of Psychology, 55, 75-84.

CONRAD, R. (1971): "The chronology of the development of covert speech in children", Development Psychology, 5, 398-405.

DAVIDSON, P.W. (1972). The role of exploratory avtivity in haptic perception: some issues, data and hypothese. Research Bulletin of the American Foundation for the Blind, 24, 21-27.

DAVIDSON, P.W.- ABBOT, S.- GERSHENFELD, J. (1974). Influence of exploration time on haptic and visual matching of complex shape. Perception and Psychology, 15, 539-543.

DAVIDSON, P.W.- CAMBARDELLA, P.- STENERSON, S.- CARNEY, G. (1974). Influences of age and task's memory demand on matching shapes within and across vision and touch. Perceptual and Motor Skills, 39, 187-192.

DAVIS, R. (1984): "Learning Matematics: The Cognitive Science Approach to Mathematics Education. Croom Helm.

DECROLY, O. (1865): Le calcul et la mesure au prémier dégré de l'école

DELLA BARCA, Juan José ; MONTENEGRO DE ROSELL, Emma (1988). Hacia una didáctica del ábaco para estudiantes ciegos. Montevideo. Unión Latinoamericana de Ciegos, Fundación Braille del Uruguay, 54 páginas.

DEPARTAMENT OF EDUCATION AND SCIENCE (1986): "Mathematics from 5 to 16). HMI Series.

DIENES, Z. (1960): " Building up mathematics". Nueva York: Hutchinson Educational Ltd. (Trad. Cast.: Consturcción de las matemáticas, Barcelona, Vicens Vives, 1970).

DIENES, Z. (1972). La matemática moderna en la enseñanza primaria. En "Los primeros pasos en Matemáticas". Teide.

DUFOUR-JANVIER y OTROS (1987): "Pedagogical considerations concerning the problem of representation", Lawrence Erlbaum. Hillsdale, New Jersey.

DUGAS, CAZENAVE, y otros (1972): "Trastornos y aprendizaje del cálculo"; Edit. Fontanella. Barcelona.

DUNCKER, K. (1945): On problem-solving. Psychological Monographs (5, Whole Nº 270).

EGEA CANO, L. (1994): TRATAMIENTO REEDUCATIVO DE LA DISCALCULIA ESCOLAR. Ed. DISGRAFOS, 3ª reimpr. Alicante.

FELDINAN, (1980): "Aritmética en niños con problemas de lenguaje; Ed. C. M. I., Buenos Aires.

FERNÁNDEZ BAROJA F., LLOPIS PARED A., y DE PABLO MARCO C. (1991): Matemáticas Básicas. Dificultades de aprendizaje y recuperación. Ed. Santillana, Madrid.

FERNÁNDEZ BRAVO, J.A. (1995): Didáctica de la Matemática en la Educación Infantil. Ediciones Pedagógicas. Colección: Aula-Taller de Psicopedagogía. Madrid.

FERNANDEZ DEL CAMPO, J.E. (1995). El incremento de la velocidad lectora en Braille. Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Educación; trabajo de investigación (no publicado).

FERNÁNDEZ DEL CAMPO Y SÁNCHEZ, J. E. (1997): "La enseñanza de la Matemática a los ciegos" 2ª ed. O.N.C.E.-Madrid.

FERNÁNDEZ DEL CAMPO Y SÁNCHEZ, J. E. (1998): Matemática o alcance da man (Taller en "Actas de las III Xornadas de Matematica Recreativa A Coruña, junio 1998). En prensa.

FISCHBEIN, E. (1977): "Image and Concept in Learning Mathematics". Educational Studies in Mathematics. Vol. 8, págs. 153-165.

FISCHBEIN, E. (1987): Intuition in Science and Mathematics. (Reidel: Dordrecht.)

FISCHBEIN, E.; DERí, M.; NELLo, M. S., y MARINo, M. S. (1985): "The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division". Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 16, págs. 3-17.

FLAVELL, J. H. (1972): An analysis of cognitive-developmental sequences. "Genetic Psychology Monographs", 86(2), 279-350.

FREUDENTHAL, H. (1983): "Didactical Phemomenology of Mathematical Structures", D. Reidel. Dordrecht.

GADNER, M. (1984): "El carnaval matemático", Alianza Editorial, Madrid.

GAGNÉ, R. M. (1962): "The acquisitions of knowledge", Psychological Review, 62(4), 355-365.

GAGNÉ, R. M. (1970): "The conditions of learning", 2ª edición, Nueva York: Holt, Rinehart & Winston.

GATTEGNO, C. (1963): "For the theaching of elementary mathematics", Mt. Vernon, N.Y.: Cuisenaire Company of America, Inc.

GERTSMANN, STRAUSS y WERNER, CRITCHLEY, LURIA; ver Fernández Baroja y otras.

GIBSON, J.J. (1962). Observations on active touch. Psychological Review, 69, 477-491.

GIBSON, J.J. (1966). The senses considered as perceptual systems. Boston. Houghton Mifflin Company.

GLAESER, G. (1973). Mathématiques pour l'élève professeur. París. Hermann, Editeurs des Ciences et des Arts.

GÓMEZ ALFONSO, B. (1988): Numeración y Cálculo. Ed. Síntesis, Madrid.

GREENO, J. G. (1987): "Instructional Representations Based on Research about Understanding", en: Schoenfeld (ed.) (1987a).

GREENO, J. G. (1978B): Understanding and procedural knowledge in mathematics education. ¿Educational Psychologist?, 12(3), 262-283.

GRUPO 0 (Ismael Blasco y otros), (1997): Matemáticas: materiales curriculares de Enseñanza Primaria (6-12 años): 1. ESTRUCTURA Y MATERIALES; 2.- Primer Ciclo; 3.- Segundo Ciclo; 4.- Tercer Ciclo. M.E.C.-Edelvives, Valencia.

GRUPO 0 (Ismael Blasco y otros), (1997): Matemáticas: materiales curriculares de Enseñanza Primaria (6-12 años): 1. ESTRUCTURA Y MATERIALES; 2.- Primer Ciclo; 3.- Segundo Ciclo; 4.- Tercer Ciclo. M.E.C.-Edelvives, Valencia.

HATTENDORF, Janice K. (1979). The abacus way. Winnetka, Illinois. The Hadley School for the Blind, 113 páginas. Hay traducción española.

HELLER y HUNGATE, (1985): "Implications for Mathematics instruction of research on scienctific problem solving", Lawrence Erlbaum. Hillsdale. New Jersey.

HERNÁN, F. (1989): Recursos en el Aula de Matemáticas. Ed. Síntesis, Madrid.

HIDLE y CLAPP, (1927): Elements of difficulty in the interpretation on concrete problems in arithmetic. Bureau of Educational Research Bulletin nº 9. Madison. Wisconsin: Universidad de Wisconsin.

HIEBERT (1988): "A theory of developing competence with written mathematical symbols", Educational Studies in Mathematics. Vol.19, 333-356.

HIEBERT, J. y LEFEVRE, P. (1986): "Conceptual and procedural knowledge in Mathematics: An introductory analysis". En Hiebert, J.: "Conceptual and procedural knowledge: The case of Mathematics",Lawrence Erlbaum. Hillsdale, New Jersey.

HOPE, J. A. (1985): "Unraelling the Mysteries of Expert Mental Calculation. Educational Studies in Mathematics", vol. 16 (4), 355-374.

HUNT, J. M. (1961): "Inteligence and experience", Nueva York: Ronald Press.

HUNT, J. M. (1969): "The challengeof incompetence and poverty-Papers on the role of early education", Urbana: University of Illinois Press.

INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR THE EVALUATION OF THE EDUCATIONAL ACHIEVEMENT (1964): "FIRST INTERNATIONAL MATHEMATICS STUDY" (1964)

IVANOV, P. *En el país de los mayas*, capítulo VIII; traducción de D. PRUNA, Plaza y Janés S.A., 3° ed. Barcelona-1974

JACOBSON, E. (1975): "The effect of different modes of practice on number facts and computational abilities", Manuscrito inédito. Universidad de Pittsburgh. Learning Research and Development Center.

JAULIN-MANNONI, F. (1965): "Les quatre opérations base des mathématiques"; ed. Les Editios E.S.F. París. (Versión española: Pablo del Río, Editor, S.A., Madrid-1980)

JAULIN-MANNONI, F. (1965): La réeducation du raissonement mathématique. Les Editions ESF, París. Versión castellana: La reeducación del razonamiento matemático; Visor, Madrid-1980.

JERMAN y REES (1972): Predicting the relative difficulty of verbal arithmetic problems. "Educational Studies in Mathematics", 4, 306-323.

JERMAN, M. (1971): "Instruction in problem solving and an analysis of structural variables that contrubute to problem-solving difficulty", Instityte for Mathematical Studies in the Social Sciences. Stanford.

KALMYKOVA Z. L. (1975): "Processes of Analysis and Synthesis in the Solution of Arithmetic Problems", en: Kilpatrick, Wirszup, Begle y Wilson (eds.) (1975a).

KAMII, C. (1995): Reinventando la Aritmética 1 (Implicaciones de la teoría de Piaget). Visor-"Aprendizaje" Madrid.

KAMII, C. (1995): Reinventando la Aritmética 2 (Implicaciones de la teoría de Piaget). Visor-"Aprendizaje" Madrid.

KAMII, C. (1995): Reinventando la Aritmética 3 (Implicaciones de la teoría de Piaget). Visor-"Aprendizaje" Madrid.

KATONA, G. (1940): "Orgnizing and memorizing", Nueva York: Columbia University Press.

KATONA, G. (1967): "Organzing and memorizing: Studies in the psychology of learning and teaching", Nueva York: Hafner.

KILPATRICK, J., RICO, L., y SIERRA, M. (1991): Educación matemática e investigación. Síntesis, Madrid.

KILPATRICK, J. (1978): "Variables and Methodologies in Research on Problem Solving", Hatfield & Bradbard.
KINTSCH, W. (1977): "Memory and Cognition", New York, John Wiley.

KLINE, M. (1968): Versión española: El fracaso de la Matemática moderna. Siglo XXI de España editores S.A. Madrid-1973

KNIGHT, F.B. y BEHRENS, M.S. (1928): "The learning of the 100 addition combinations and the 100 subtraction combinations". Nueva York. Longmans, Green and Co.
KOFFKA, K (1924): "The growth of the mind", (R. M. Ogden, trad.), Londres: Kegan Paul, Trench, Trubner.

KÖHLER, W. (1925): "The mentality of apes", Nueva York: Harcourt, Brace & World.

KRAMER, (1933): The effect of certain factors in the verbal arithmetic problem upon children's success in the solution. The Johns Hopkins University Studies in Educational Nº 20. Baltimore. Md: The Johns Hopkins Press.

KRUTETSKLI,V.A. (1976): "The Psychology of Mathematical Abilities in School Children", The University of Chicago. Chicago.

KUHN,T.S. (1962); "The Structure os Scientific Revolutions", University of Chicago. (Trad. castellana La estructura de las revoluciones científicas. Fondo de Cultura Económica. México 1971).

LANKFORD, F. G. (1972): "Some computationalstrategies of seventh-grade pupils" (informe final, proyecto n.2-C-013). HEW/OE National Center for Educational Research and Development and Teh Center for Advanced Studies, Universidad de Virginia.

LESH, BEHR y POST (1987): "Rational number relations and proportions", Lawrence Erlbaum. Hillsdale, New Jersey.

LESTER, F. K. (1985): "Methodological considerations in research on mathematical problem-solving instructions", Lawrence Erlbaum. Hillsdale, New Jersey.

LESTER, K.K. (1980): "Research on mthematical problem solving", National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Virginia.

LOFTUS E.J. (1970): "An analysis of the structural variables that determine problem solving difficulty on a computerbased teletype", Institute for mathematical Studies in the Social Sciences. Stanford.

LOFTUS Y SUPPES, 1972): Structural variables that determine problem-solving difficulty in computer-assisted instruction. "Journal of Educational Psychology", 63(6), 531-542.

LOVELL, K. (1971): "The growth of inderstanding in mathematics: Kindergarten through grade three", Nueva York: Holt, Rinehart & Winston.

LUCEÑO, J. L. (1993): Psicopedagogía de la Aritmética (El número y las operaciones aritméficas basicas: su psicodidác~ica). Ed. Marfil, ALCOY.

LURIA (1982) ESTA EN LA PSICOLOGIA DE VIGOTSKI

M.E.C.-CENTRO DE DESARROLLO CURRICULAR (1991): Alumnos con necesidades educativas especiales. Adaptaciones curriculares. M.E.C. Madrid-1991

MADRID HERRUZO, P., y ROSA MEMBRIBES, A. (1996): Didáctica del ábaco japonés (Soroba). O.N.C.E. Madrid.
MARR, D. (1982): "Vision", San Francisco: Freeman.

MAZA GÓMEZ, C. (1989): Sumar y restar. Visor-Aprendizaje, Madrid.

MAZA GÓMEZ, C. (1990A): La enseñanza de la suma y la resta. Ed. Síntesis, Madrid.

MAZA GÓMEZ, C. (1990B): La enseñanza de la multiplicación y la división. Ed. Síntesis, Madrid.

MAZA GÓMEZ, C. (1991): Multiplicar y dividir. Visor-Aprendizaje, Madrid.

MIALARET, G. (1984): Las Matemáticas: cómo se enseñan, cómo se aprenden. Visor Aprendizaje Madrid.

MIALARET, G. (1966): Versión española: Las Matemáticas: cómo se enseñan, cómo se aprenden. Visor Aprendizaje Madrid-1984

MILLAR, S. (1968): "The Psychology of Play", London: Penguin Books.

MILLAR, S. (1972c): "Effects of instructions to visualise stimuli during delay on visual recognition by preschool children", Child Development, 43,1073-5.

MILLAR, S. (1975b): "Spatialmemory by blind and sighted children", British Journal of Psychology.

MILLAR, S (1975c): "Effectos of phonological and tactual similarity on serial object recall by blind and sighted children", Cortex, 11, 170-80.

MILLAR, S. (1975e): "Translation rules or visual experience. Drawing the human figure by blind and sighted children", Perception, 4, 363-71.

MILLAR, S. (1990b): "Imegery and blindness". In P. Hampson, D.F.Marks & J.T.E. Richardson (ed.) Imagery: Current Developments. London: Routledge & Kegan Paul.

MILLAR, S. (1997): La comprensión y la representación del espacio. O.N.C.E. Madrid.

MILLER, G.A. (1956): "The magical number seven plus or minus two: Some limits on capacity for processing information", Psychological Review, 63, 81-7.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA DEL ESTADO ESPAÑOL (1991): Díseño Curricular Base. Madrid.

NESHER P. (1980): The Stereotyped Nature of School Word Problems. For the Learning of Mathematics. Vol. 1, págs. 41-48.

NESHER P. (1982): "Levels of Description in the Analysis of Addition and Subtraction Word Problems", en: Carpenter, Moser y Romberg (1982).

NEWELL y SIMON, (1972): "Human problem solving", Englewood Cliffs, N.J.: Prenticen-Hall.
NICHOLLS, J. G.(1983): "Conceptions of ability and achievement motivation", Lawrence Erlbaum. Hillsdale, New Jersey.

NÛÑEZ, J. A., ROSICH, N., y FERNÁNDEZ DEL CAMPO, J. E. (1996): Matemática y deficiencia sensorial. Ed. Síntesis-Madrid.

ORTON, A. (1990): Didáctica de las Matemáticas (Cuestiones, teorías y práctica en el aula). Morata-M.E.C.

ORTON, A. (1990): Didáctica de las Matemáticas (Cuestiones, teorías y práctica en el aula). Morata-M.E.C.

OSTAD, Snorre A. (1989). Mathematics through the fingertips: Basic mathematics for the blind pupil. Development and empirical testing of tactile representations. Oslo. The Norwegian Institute of Special Education, 300 páginas.

PAIVIO, A. (1971): "Imagery and Verbal Processes", New York: Holt, Rinehart & Winston.

PAPY, G. (1972). Mathématique Moderne, V. Bruselas. Didier Ed.

PEIRCE, C. S. (1988). "El hombre, un signo". Ed. Crítica. Barcelona.

PIAGET, J. (1936). La naissance de l'inteligence chez l'enfant. Neuchâtel. Delachaux Niestlé.

PIAGET, J. (1937). La construction du réel chez l'enfant. Neuchâtel. Delachaux Niestlé.

PIAGET, J. (1947): "The psychology of intelligence". Patterson, N.J.: Littlefield, Adams & Co., (public. Orig. 1947). (Trad. Cast. Psicología de la inteligencia, Buenos Aires: Psiqué, 1955).

PIAGET, J. (1952): "The child's conception of number", Nueva York: Norton (Edición original francesa 1941).

PIAGET, J. (1953): "Logic an d Psychology", Manchester: Manchester University Press.

PIAGET, J. (1970): "On the natura and nurture of intelligence". Conferencia pronunciada en la Universidad de Nueva York, marzo de 1967. Citada en Elkind, K. Children and Adolescents: Interpretive essays on Jean Piaget: Nueva York: Oxford University Press. (Trad. Cast. Niños adolescentes. Vilassar de Mar, Oikos-Tau, 1978).

PIAGET, J. (1970): "Structuralism". Nueva York: Harper & Row. (Trad. Cast. El estructuralismo, Barcelona, Orbis, 1985).

PIAGET, J. (1973): "To understand is to invert: The future of education", Nueva York: Viking.

PIAGET, J. (1974B). Résuir et comprende. París. Preses Universitaires de France.

PIAGET, J. (1975). L'Equilibration des structures cognitives. París. Preses Universitaires de France.

PIAGET, J. (1978): "Recherches sur la généralisation" (Etudes d'épistémologie génétique, XXXVI). París: Presses Universitaires de France.

PIAGET, J.; CHOQUET, J.; DIEUDONNE, R.; THOM Y OTROS (1978). La enseñanza de las matemáticas modernas. Presentación de J. Hernández. Madrid. Alianza Universidad.

PIAGET, J.; INHELDER, B. (1948). La représentation de l'espace chez l'enfant. París. Preses Universitaires de France.

PIAGET, J.; INHELDER, B.; SZEMINSKA, A. (1948). La géométrie spontanée de l'enfant. París. Preses Universitaires de France.

PIAGET, J; INHELDER, B. (1966). L'image mentale chez l'enfant. París. P. U. F.

POINCARÉ, H. (1948): "La creación masemática" (arreglo editorial: J. R. NEWMAN). "Matemáticas en el mundo moderno". Blume-1974, Madrid.

POLYA, G. (1945): "Cómo plantear y resolver problemas"

POLYA, G. (1966): Mathematical Discover>', 2 vols. (John Wiley and Sons: Nueva York.)

POLYA, G. (1978). "Matemáticas y razonamiento plausible. Ed. Dossat, Madrid.

PUCHALSKA, E. y SEMADENI, Z. (1987): "Chisdren's Reactions to Verbal Arithmetical Problems with Missing, Suplus or Contradictory Data", For the learning of Mathematics. Vol. 7, págs 9-16.

PUIG ADAM, P. (1956): "Didáctica matemática Eurística", Instituto de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral.

PUIG ADAM, P. (1960): didáctica Matemática Eurística. Madrid.

PUIG ESPINOSA, L. y CERDÁN PÉREZ, F. (1988): PROBLEMAS ARITMETICOS ESCOLARES. Ed. Síntesis, Madrid.

REESE, H.W. (1970): "Imagery in children's paired associate learning", Journal of Experimantal Child Psychology, 9,174-8.

RESNICK L. B., WANG y KAPLAN (1973): "Task analysis in curriculum design: A hierarchically sequence introductory mathematics curriculum", Journal of Applied Behavior Analysis, 6, 679-710.

RESNICK, L. B. y FORD, W. W. (1981): La enseñanza de las Matemáticas y sus fundamentos psicológicos. Ed. Paidós Barcelona-Madrid-Buenos Aires-México.

RESNICK, L. B. y FORD, W. W. (1981): The psychology of Mathematics for Instruction. Versión española: La enseñanza de las Matemáticas y sus fundamentos psicológicos. Ed. Paidós 1990, Barcelona-Madrid-Buenos Aires-México.

RÉVÉSZ, G. (1934). System der optischen und haptischen Raumtaüschungen. Zeitcrift für Physiologie, 131, 296-375.

RÉVÉSZ, G. (1950). Psychologie and Art of the Blind. New York. Longmans, Green and Co. ROBLES, Ignacio L. (1991). El ábaco. México, D.F. Trillas, 57 páginas.

RICO, L. (1990): "Diseño curricular en educación matemática: una perspectiva cultural", en A. Gutiérrez (ed.) Area de conocimiento Didáctica de la Matemática. Madrid: Síntesis.

RIVIÉRE, A. (1994): La Psicología de Vygotski. Visor-Aprendizaje, 4ª ed. Madrid.

ROBLES, Ignacio L. (1991). El ábaco. México, D.F. Trillas, 57 páginas.

RODRÍGUEZ PLACER, R. (1929): Apuntes sobre Pedagogía Especial de ciegos. Imprenta del Colegio Nacional de sordomudos y de ciegos, Madrid.

ROSICH, N., NÛÑEZ, J. M., y FERNÁNDEZ DEL CAMPO, J. E. (1996): "Matemáticas y deficiencia sensorial"; Ed. Síntesis, Madrid.

ROWHER, W.D. Jr. (1970): "Images and pictures in children's learning", Psychological Bulletin, 73,393-403.

SANCHEZ MARTINEZ, Concepción (1990). La educación especial y los números en color. En: Comunidad Educativa, nº 177 , p. 10-11.

SAUMELLS, R. (1965). Fundamentos de Matemática y de Fisica. Madrid. Ediciones Rialp S.A.

SCHEDROVITSKY, G. (1982): Comentarios en "The Mozart of Psychology", en Levitin, K. (ed.) One is not born a personality. Moscú: Progress Publishers.

SCHOENFELD (1985): "Mathematical problem solving", Academic Press, New York.

SHULMAN (1970): Psychology and mathematics education. In E.G. Begle (Ed.) Mathematics education (69 th. Yearbool of the National Society for the study of Education. Pt. 1, pp 23-71). Chicago: University of Chicago Press.

SILVER (1987): "Foundations of cognitive theory and research for mathematics problem-solving instruction", Lawrence Erlbaum. Hillsdale, New Jersey.

SKEMP, R. R. (1980): Psicología del aprendizaje de las Matemáticas. Ed. Morata, Madrid

SKEMP, R. R. (1980): Psicología del aprendizaje de las Matemáticas. Ed. Morata, Madrid

SKINNER, G.F. (1977): "Ciencia y conducta humana", Fontanella. Barcelona.

SOTO IBORRA, F. ; GOMEZ ALFONSO, B. (1987). Los números en color en la educación matemática del niño ciego. En: Enseñanza de las ciencias, vol. 5, nº 2, p. 111-117.

SOWDER (1990): "Mental computation and number sense", Arithmetic Teacher. 37, 18-20.

SUPPES, P. , y MORNINGSTAR, M. (1972): " Computer-assisted introduction at Stanford, 1966-1968: Data, models, and evaluation of the arithmetic programs". Nueva York: Academic Press.

THORNDIKE, E. L. (1922): The Psychology of Arithmetic. New York: MacMillan.

TITCHENER, E.B. (1909): "Lectures on the Experimental Psychology of Thought", New York: Macmillan.

TORCUATO TORÍO DE LA RIVA Y HERRERO: "Principios de Aritmética", 1789).

VALLEJO, M. J. : ARITMÉTICA DE NIÑOS, PARA USO DE LAS ESCUELAS DEL REINO, 1798.

VERGNAUD, G. (1991): L'enfant, la mathématique et la réalité. Peter Lang S.A., Berna, Suiza, 3º ed. Versión española: Editorial Trillas, S A. México-1991.

VILLEY, P. (1946). Le monde des aveugles. Versión castellana de Antonio Bertolucci. El mundo de los ciegos. Buenos Aires. Ed. Aguilar.

VYGOTSKY, L.S., y Luria, A.R. (1934): "Etudi po istorii povedenija. Obezjana. Primitiv. Rebenok. (Estudios sobre la historia del comportamiento. El mono. El hombre primitivo. El niño). Moscú-Leningrado.

WERTHEIMER, W. A. (1945): " Productive thinking (edición aumentada). Nueva York: Harper & Row, 1959 . (Trad. Cast. El pensamiento productivo, Barcelona, Paidós, 1991).

WERTHEIMER, W. A. (1959): "How to solve problems: Elements of a theory of problems and problem solving", San Francisco: W. H. Freeman & Co.

ABRIR TOMO II