



TI-1997/6

NUDOS ELECTROMAGNETICOS

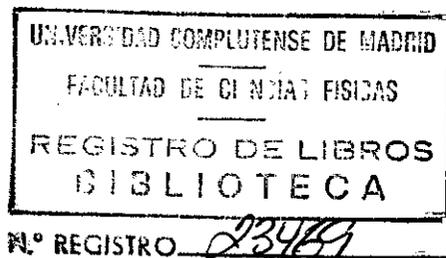
Memoria de Tesis Doctoral
presentada por

José Luis Trueba Santander

Dirigida por

Antonio Fernández-Rañada Menéndez de Luarca

Mayo de 1997



*A la memoria de mi padre
y de mis tías Dolores y Asunción*

Presentación

Una de las decisiones más difíciles de las que han de tomarse a la hora de escribir una memoria de Tesis Doctoral es cómo estructurarla. Al final he decidido hacerlo tal como a mí me gusta que esté edificado cualquier texto o libro científico que deba leer, esto es, construyendo los resultados, más que citándolos para luego demostrarlos. No sé si una memoria de Tesis Doctoral ha de tener valores pedagógicos, pero sí que ha de ser lo más clara posible. Esta ha sido mi intención en todo el proceso de escritura. Con este objetivo, que espero haber rozado al menos, la disposición de los contenidos es como sigue.

El primer capítulo es una breve introducción histórica, centrada sobre todo en los inicios de la utilización de métodos topológicos en física. Algunos de los problemas que se plantearon, hace más de un siglo, científicos de la talla de Kelvin, Maxwell, Faraday o Tait aún siguen abiertos, y el presente trabajo de investigación puede encuadrarse en este contexto.

En el segundo capítulo se presenta una cantidad física, definida para todo campo vectorial solenoidal, y llamada helicidad, que da cuenta de la topología de las líneas de fuerza de tal campo. Se repasará su significado y sus aplicaciones, dado que será utilizada en el resto de la memoria.

El capítulo tercero desarrolla la investigación respecto a la helicidad en el contexto de la teoría de Maxwell en el vacío. El resultado fundamental de este capítulo es una relación entre los aspectos topológico y corpuscular de la teoría.

En el cuarto capítulo, como eje central de la memoria, se introducen los nudos electromagnéticos y el modelo topológico del electromagnetismo basado en ellos. La ventaja fundamental de este modelo

sobre la teoría de Maxwell estándar es la aparición de reglas de cuantización topológica para la helicidad y la carga.

El capítulo quinto está dedicado a la obtención y estudio de algunos nudos electromagnéticos explícitos. Este trabajo exige trabajar con técnicas de teoría de grupos y fibraciones no triviales, que serán, por tanto, introducidas aquí.

En el capítulo seis se aplican las ideas de los capítulos anteriores para proponer un modelo teórico que explica el fenómeno natural conocido como rayo bola. Esta aplicación se presenta como un ejemplo de la posible utilización de los nudos electromagnéticos en problemas de la física macroscópica.

En el último capítulo, el séptimo, se resumen las conclusiones de la memoria, y también se hace un listado de algunos de los problemas abiertos, a los que espero poder dedicar tiempo a partir de ahora.

Madrid, 9 de Mayo de 1997.

Agradecimientos

Es muy grande el número de personas que participan, de un modo u otro, en los aspectos personal, formativo y meramente científico de cualquier estudiante de Doctorado, y sobre todo durante los meses de escritura de una Tesis Doctoral. Sin duda, esto ha sido así en mi caso. Es de justicia, por tanto, que exponga públicamente mi agradecimiento, al menos hasta donde me permita la memoria.

En primer lugar quiero citar a mi Director de Tesis, el profesor Antonio Fernández-Rañada. A lo largo de todos estos meses, él ha sido el eje central de mi formación como investigador, a la que ha dedicado su enseñanza y su ejemplo, con especial cuidado en la corrección de los típicos defectos de muchos principiantes, como son la prisa y el descuido. Gracias a sus consejos, ha resultado mucho más fácil escribir estas páginas, en las que, siguiéndolos, he tratado de “hacer las cosas bien, aunque cueste mucho más que hacerlas casi bien”.

Agradezco también a los profesores Alberto Ibort y Antonio Dobado sus valiosos comentarios respecto a algunas cuestiones que aparecen en estas páginas. En este contexto, me he beneficiado de las conversaciones de otros excelentes científicos con mi Director de Tesis, entre los que quiero citar a Mario Soler, Michael Berry, José María Montesinos, Eloísa López, Alfredo Tiemblo, José Luis Vicent y Claudio Aroca.

Muchas personas integrantes del Departamento de Física Teórica I de la Universidad Complutense también pusieron su “granito de arena”, por su disposición y su apoyo. Especialmente, no puedo olvidar la ayuda, siempre que la he necesitado, de compañeros como Domingo Sánchez, Antonio López y José Ramón Peláez.

Algunos amigos fuera del ambiente de la Universidad me han hecho críticas y comentarios muy certeros sobre algunas cuestiones, o me han

iv

ayudado con la edición o las gráficas. Me gustaría destacar a Marisa Ventas, Juan Ignacio Trueba, Enrique Nell y Javier Valín.

Pero ningún trabajo científico, o de cualquier tipo, tendría sentido sin la existencia de mi familia y mis amigos. A ellos les debo el apoyo incondicional, la comprensión y el cariño necesarios para poder terminar la redacción de estas páginas.

Muchísimas gracias a todos.

Madrid, 9 de Mayo de 1997.

Indice

1	Introducción	1
1.1	Sobre los orígenes de la interrelación entre topología y física	1
1.2	La topología del electromagnetismo: líneas de campo . . .	3
1.3	Modelos topológicos	5
2	La helicidad de un campo vectorial	7
2.1	Introducción. Objetivos del capítulo	7
2.2	Definición de la helicidad	8
2.2.1	Definición	8
2.2.2	La helicidad magnética: condiciones de invariancia temporal	11
2.2.3	La helicidad magnética: condiciones de invariancia "gauge"	16
2.3	Helicidad y topología de las líneas de campo	21
2.3.1	Curvas espaciales cerradas	21
2.3.2	La helicidad de dos tubos filamentosales enlazados y la fórmula de Gauss	25
2.3.3	La helicidad de un tubo filamental autoenlazado y el teorema de Calugareanu	30
2.3.4	Distribuciones continuas de líneas cerradas	36
2.3.5	La helicidad de dos líneas magnéticas no cerradas y el número de enlace asintótico	37
2.4	Algunas aplicaciones de la helicidad a problemas físicos	40
2.4.1	Dinámica de fluidos	41
2.4.2	Magnetohidrodinámica	44
2.4.3	Teoría de la dinamo	50

3	La helicidad electromagnética	53
3.1	Introducción. Objetivos del capítulo	53
3.2	Las helicidad de un campo electromagnético en el vacío	54
3.2.1	La teoría de Maxwell en el vacío. Dualidad electromagnética	54
3.2.2	Helicidades magnética y eléctrica: condiciones de contorno de los campos, cuadricorrientes e invariancia temporal	59
3.2.3	La helicidad en física de partículas	62
3.3	La helicidad electromagnética y su significado	66
3.3.1	Definición y conservación de la helicidad	66
3.3.2	El significado de la helicidad	68
3.3.3	La helicidad de los campos singulares	73
4	Un modelo topológico del electromagnetismo	75
4.1	Introducción. Objetivos del capítulo	75
4.2	Los nudos electromagnéticos	76
4.2.1	Sobre la concepción de Faraday del electromagnetismo	76
4.2.2	El invariante de Hopf	79
4.2.3	Definición de nudo electromagnético	86
4.3	El modelo topológico de los nudos	93
4.3.1	Equivalencia local de los nudos y los campos estándar	94
4.3.2	Formalismo lagrangiano del modelo	105
4.3.3	Las condiciones de Cauchy	107
4.3.4	No linealidad escondida	109
4.4	Cuantización topológica	110
4.4.1	Cuantización topológica de la helicidad y normalización de los nudos	110
4.4.2	El problema de la carga eléctrica	113
4.4.3	Cargas puntuales en el modelo de nudos	118
5	Estudio de algunos nudos electromagnéticos en el vacío	123
5.1	Introducción. Objetivos del capítulo	123
5.2	Condiciones de Cauchy de una familia de nudos de clase C_1	124

5.2.1	Planteamiento del problema	124
5.2.2	El método de teoría de grupos para encontrar aplicaciones $S^3 \rightarrow S^2$	126
5.2.3	La fibración de Hopf y sus fibraciones ortogonales	132
5.2.4	Condiciones de Cauchy de los nudos basados en la fibración de Hopf	139
5.3	Condiciones de Cauchy de una familia de nudos de clases $C_{\pm n^2}$	144
5.3.1	Obtención de las clases C_{n^2}	144
5.3.2	Obtención de las clases C_{-n^2}	147
5.3.3	Propiedades invariantes de estos nudos	149
5.4	Evolución temporal de los nudos	151
5.4.1	El método de Fourier en electromagnetismo	151
5.4.2	Nudos de clases C_{n^2}	152
5.4.3	Nudos de clases C_{-n^2}	154
5.4.4	Evolución temporal de los campos básicos	156
6	Un modelo de rayo bola basado en los nudos	163
6.1	Introducción. Objetivos del capítulo	163
6.2	Fenomenología de los rayos bola	164
6.3	Un modelo para los rayos bola	165
6.3.1	Formación del rayo bola	165
6.3.2	El nudo magnético de la fibración de Seifert	167
6.3.3	Estabilidad del rayo bola	168
7	Conclusiones y vías de ampliación	173
7.1	Conclusiones	173
7.2	Vías de ampliación	175

Capítulo 1

Introducción

1.1 Sobre los orígenes de la interrelación entre topología y física

La conexión profunda que existe entre geometría y física está bien establecida desde las teorías del campo electromagnético de James Clerk Maxwell, en 1873, y del campo gravitatorio de Albert Einstein, en 1916. El paso siguiente es una conexión entre topología y física, algo que no debe resultar excesivamente sorprendente pues, en palabras de Michael Atiyah, “tanto la topología como la física cuántica van desde lo continuo hacia lo discreto” [1]. Realmente, la idea de aplicar los métodos topológicos en física es tan vieja como la propia topología [2, 3].

Ya en 1833, en una nota breve, Karl Friedrich Gauss, además de lamentar la falta de progresos en la “geometría de la posición” (esto es, la *geometria situs*, como entonces era llamada la topología), propuso un ejemplo de la relación entre topología y cantidades físicas observables, en este caso las corrientes eléctricas [4]. En su ejemplo, Gauss considera dos circuitos de corriente inseparablemente enlazados, cada uno de ellos formado por un alambre de cobre con los extremos unidos, y relaciona la acción magnética inducida por las corrientes con un número entero que depende sólo del tipo de enlace. Este número entero es el invariante topológico que hoy conocemos como *número de enlace*. La fórmula de Gauss, así como los primeros estudios en topología, realizados por Johann Benedict Listing en 1847, motivaron a científicos tan

importantes como Lord Kelvin (por aquel entonces, aún conocido por su verdadero nombre, William Thomson), James Clerk Maxwell y Peter Guthrie Tait. Además, el trabajo de Hermann Helmholtz, en 1858, sobre el movimiento de las líneas de vorticidad, hizo posible aplicar las nuevas ideas topológicas a la mecánica de fluidos. Helmholtz estableció que, en un fluido ideal (sin viscosidad), dos anillos cerrados de vorticidad que estén enlazados seguirán siempre enlazados.

Lord Kelvin, como muchos otros, estaba buscando una teoría de la materia elemental. La traducción de Tait del trabajo de Helmholtz sobre la vorticidad le supuso una poderosa inspiración. En 1868, propuso un modelo [5] en el cual los átomos eran nudos o enlaces de las líneas de vorticidad del “éter”, un medio fluido ideal elástico en el cual se suponía que estaba “sumergido” el Universo, a los que aplicó los teoremas de Helmholtz. Kelvin comprendió, en una combinación considerable de perspicacia matemática e intuición física, que tales nudos y enlaces debían ser extremadamente estables, como lo es la materia. Por otro lado, las múltiples formas en que las curvas se pueden enlazar unas con otras, o bien autoenlazarse (anudarse), ofrecían una explicación para la gran variedad de elementos químicos. Incluso el éter, que rodeaba a estas líneas de vorticidad, podría tener una topología compleja, con agujeros vacíos y canales cerrados inaccesibles. Kelvin escribía sobre esto con un entusiasmo increíble, describiendo en gran detalle las implicaciones físicas que tendría un éter topológicamente complejo [6, 7]. Desde nuestra actual perspectiva, podemos añadir a la estabilidad y la variedad otras dos importantes cualidades de la materia, no conocidas en el tiempo de Kelvin. Una es la transmutabilidad, la habilidad de los átomos para formar otros de tipo diferente por efecto de reacciones nucleares, que podría relacionarse con la ruptura y reconexión de las líneas de vorticidad. La segunda es el espectro discreto de la energía atómica, que es una característica de las configuraciones no triviales de los campos vectoriales.

La idea revolucionaria de Kelvin, es decir, la descripción de la física fundamental a través de propiedades topológicas, no sólo motivó los primeros estudios sobre la existencia y estabilidad de los enlaces de las líneas de vorticidad, sino estimuló el interés de muchos de sus distinguidos colegas y amigos. Aunque Tait no tuvo éxito en la búsqueda experimental de anillos de vorticidad enlazados, el modelo de Kelvin

le impulsó a escribir la primera tabla de nudos y enlaces, similar a la moderna tabla periódica de los elementos. Su clasificación, repleta de belleza e intuición, es una de las piedras angulares del nacimiento de la topología moderna [8]. Incluso, influido por el interés de Maxwell en los trabajos de Gauss y Listing, Tait trató, en 1876, de medir por medios electromagnéticos algunas propiedades topológicas, como el número de enlace. Algunas de las conjeturas de Tait respecto a las propiedades de los nudos y los enlaces fueron, mucho tiempo después, rigurosamente refrendadas. Sin embargo, a pesar de su interés científico, el estudio de los nudos y los enlaces cayó en el olvido por mucho tiempo. Ha sido, de nuevo, su interrelación con la física lo que ha relanzado esta rama de las matemáticas. Entre estas nuevas aplicaciones de la topología, por su importancia ha de destacarse la construcción de lo que se conoce como teorías cuánticas de campos topológicas [9]-[15], como, entre otros, ha propuesto Edward Witten, que puede abrir el camino a una comprensión más profunda de la física cuántica.

Aunque el sueño de Kelvin no tuvo continuidad, seguramente en gran parte debido a la falta de desarrollo tanto de la topología como de la fenomenología atómica (no obstante, existen importantes analogías con la moderna teoría de cuerdas), su trabajo fue básico en el desarrollo de los métodos topológicos en mecánica de fluidos [16]. En 1969, un artículo de Henry Keith Moffatt [17] estableció nuevas conexiones entre fluidos ideales y topología, basándose en la interpretación, en función de nudos y enlaces de las líneas de vorticidad del fluido, de un nuevo invariante del movimiento del fluido ideal, conocido como *helicidad*, y que se define como la integral del producto escalar de la velocidad y la vorticidad. De este invariante, y especialmente de sus aspectos electromagnéticos, se hablará en los capítulos 2 y 3 de esta memoria.

1.2 La topología del electromagnetismo: líneas de campo

Las líneas de fuerza, tanto eléctricas como magnéticas, eran muy reales para Michael Faraday, el científico que propuso por primera vez la idea de campo. Desde su punto de vista, forjado en muchas horas de trabajo

en el laboratorio, estas líneas tenían que ser tangibles y concretas, pues los experimentos indicaban claramente que algo muy especial ocurría a lo largo de ellas, un tipo de perturbación del espacio de una naturaleza que aún había de ser comprendida [18]. El punto de vista de Faraday se mantuvo durante una buena parte del Siglo XIX, como puede comprobarse por los muchos intentos de explicar las líneas de fuerza en términos de las líneas de velocidad y de vorticidad del éter. Durante un largo tiempo, los fenómenos electromagnéticos se supusieron manifestaciones del movimiento del éter, que podría ser eventualmente comprendido gracias a los avances en mecánica de fluidos que hemos comentado en la sección anterior. De acuerdo con esta opinión, las líneas de fuerza estaban asociadas a partículas del éter, y tenían, por tanto, la realidad de la sustancia material, aunque ésta era de una clase muy especial.

El propio James Clerk Maxwell estuvo de acuerdo con esta interpretación de las líneas eléctricas y magnéticas [19, 20, 21] (y, como ya se ha comentado, con el modelo del átomo de Kelvin), pero luego cambió de opinión, al escribir su monumental *Treatise on Electricity and Magnetism* [22], tras el cual, debido al desarrollo del álgebra y la geometría diferencial, las líneas de fuerza fueron relegadas a segundo plano, siempre por detrás de los conceptos de tensor electromagnético y cuadripotencial vector. Sin embargo, más que ningún otro, Maxwell percibió las implicaciones físicas de la topología. El mismo prólogo de su *Tratado* está empapado de ideas topológicas, y de reconocimiento al trabajo de Faraday:

“...Faraday visualizaba líneas de fuerza que atravesaban todo el espacio donde los matemáticos sólo veían centros de fuerza que actuaban a distancia; Faraday veía un medio donde ellos sólo veían distancia; Faraday buscó la fuente de los fenómenos a partir de acciones reales que se llevaban a cabo en el medio, mientras aquéllos quedaron satisfechos con haberla encontrado en el poder de acción a distancia presente en los fluidos eléctricos.”

Maxwell desarrolló las ideas originales de Listing respecto a las regiones múltiplemente conexas, para estudiar la relación de la electricidad y el magnetismo con las fuerzas y los potenciales. Se dió cuenta de que, si expresaba una fuerza localmente conservativa como el gradiente de una función potencial, entonces esa función estaría bien definida

(sería univaluada) sólomente dentro de una región simplemente conexa. Además, por otro lado, ofreció un excelente ejemplo sobre un caso particular de la fórmula de enlace de Gauss para tubos magnéticos enlazados, en el capítulo dedicado al magnetismo.

Actualmente, es una opinión generalizada que el estudio del campo electromagnético requiere consideraciones topológicas, espacialmente para esclarecer ciertas propiedades que se observan en los experimentos. Algunos ejemplos de este hecho son el *efecto Aharonov-Bohm* [23, 24] y el *efecto Hall cuántico* [25, 26]. Aún así, la riqueza de la topología de las líneas de campo, en función de sus posibles nudos y enlaces, está, en gran parte, por explorar.

1.3 Modelos topológicos

También es considerable la creciente aparición de modelos con leyes de conservación de origen topológico. El motivo que subyace en muchos de estas tentativas maneras de estudio de los campos físicos está en la posible eliminación de algunos de los problemas existentes en la física cuántica a través de la no linealidad de las ecuaciones clásicas, necesaria para tener cargas topológicas. El más simple de estos modelos es la ecuación *seno-Gordon*, en donde la ley de conservación topológica se basa en el *grado de una aplicación* de la circunferencia S^1 en sí misma, que es siempre un número entero. La extensión del mecanismo de obtención de cargas topológicas de la ecuación *seno-Gordon* a tres dimensiones permitió la construcción del llamado *modelo de Skyrme* [27, 28, 29, 30], en el cual existen solitones topológicos y corriente conservada, cuya carga toma valores enteros iguales al grado de una aplicación entre esferas tridimensionales. Como el propio Skyrme explica [31], tenía tres motivos para proponer tal modelo: unificación, renormalización, y lo que llama “problema de los fermiones”. Su *skyrmion*, es decir, el solitón básico del modelo, sería un bosón fundamental a partir del cual se formarían todas las partículas, y, ya que toda teoría topológica ha de ser no lineal, existiría la posibilidad de eliminar los infinitos de la teoría cuántica.

En este contexto se enmarca la aparición, en 1989, de un modelo topológico para el electromagnetismo, debido a Antonio Fernández-

Rañada, basado en la dinámica de las líneas de campo eléctricas y magnéticas, y cuyas cantidades básicas son dos campos escalares complejos, a los que se les suministra contenido topológico a través de las compactificaciones de sus espacios de partida y de llegada, y también de las ecuaciones no lineales que obedecen. El estudio del electromagnetismo a través de este modelo pone de manifiesto ciertas propiedades topológicas de las ecuaciones de Maxwell en el vacío, que pueden resultar interesantes para la mayor comprensión de algunos aspectos de la cuantización del campo electromagnético.

Capítulo 2

La helicidad de un campo vectorial

2.1 Introducción. Objetivos del capítulo

En este capítulo quiero recopilar los resultados sobre la helicidad que luego se necesitarán a lo largo de esta memoria. Responde esto a que, tanto en el modelo topológico que se presenta en los capítulos 4 y 5, como en sus aplicaciones a la física macroscópica, que veremos en el capítulo 6, aparece la helicidad como protagonista inesperada, en el primer caso como carga topológicamente conservada del modelo y en el segundo como responsable de la efectividad de la botella magnética que mantiene el plasma confinado.

Pero la helicidad de un campo vectorial solenoidal no es, ni mucho menos, una cantidad nueva en física. Fue usada por primera vez por Woltjer, en 1958 [32], en relación con plasmas astrofísicos. Moreau [33] (ver también [34]) probó la conservación de esta cantidad para ciertos flujos en dinámica de fluidos, y percibió, en una nota a pie de página, su significado topológico, pero fue Moffatt [17] quien acuñó el término helicidad y reconoció por primera vez este significado. Desde aquel momento, la helicidad ha estado presente en todo tipo de contribuciones sobre plasmas, dinámica de fluidos y electromagnetismo, además de artículos más matemáticos referidos a su significado topológico.

Esta cantidad de información, en contextos a menudo tan diferentes,

hace necesaria una unificación de las notaciones y los resultados, de manera que se clarifiquen para su uso posterior. Este es el objetivo de las secciones 2.2, 2.3 y 2.4 de este capítulo. En la sección 2.2 presento la helicidad de un campo vectorial sin divergencia y estudio, de manera especial, la invariancia “gauge” y temporal de la helicidad magnética. Los resultados sobre las condiciones de invariancia “gauge” motivan la sección 2.3, dedicada a la relación entre helicidad y topología, el aspecto que más pretendo resaltar en la parte recopilatoria del capítulo (y que menos claro me parece en muchas de las referencias, debido sin duda a que autores diferentes usan diferentes nombres para el mismo concepto, y a veces el mismo nombre significa cosas distintas para cada cual). La sección 2.4, sobre las aplicaciones físicas de la helicidad, responde al doble objetivo de dar un breve vistazo a aspectos que no volveré a tocar y de establecer cierto nexo con el capítulo 6.

2.2 Definición de la helicidad

En esta sección se introduce la helicidad en el sentido general, para todo campo vectorial sin divergencia. Los ejemplos físicos más usuales son el campo de vorticidad de un fluido y el campo magnético en la teoría de Maxwell. El primero nos da una visión intuitiva del contenido dinámico de la helicidad a través del teorema de Chasles, pero nuestro interés está en el segundo. Tras introducir las unidades y notaciones que usaremos para el campo electromagnético, nos centraremos en dos cuestiones: la invariancia temporal y la invariancia “gauge” de la helicidad magnética. El problema de las transformaciones “gauge” en dominios múltiplemente conexos, que será brevemente visitado a través de un ejemplo, nos indicará la necesidad de estudiar con más profundidad la topología de las líneas de campo y su relación con la helicidad, motivando lo que será la sección 2.3.

2.2.1 Definición

Sea $\mathbf{X}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in D$, un campo vectorial real, definido en una variedad tridimensional D , es decir, \mathbf{X} es una aplicación

$$\mathbf{X} : D \rightarrow R^3 . \quad (2.1)$$

Decimos que \mathbf{X} es un campo solenoidal o sin divergencia cuando se cumple que $\nabla \cdot \mathbf{X} = 0$. En tal caso existe, al menos localmente, otro campo vectorial en D , llamado potencial vector $\mathbf{Y}(\mathbf{r})$, de tal manera que $\mathbf{X} = \nabla \times \mathbf{Y}$.

Para ver si el potencial vector está definido globalmente en D , hemos de visitar la *cohomología* real de las variedades en las que está definido el campo vectorial solenoidal [35, 36, 37]. Los resultados sobre los grupos de cohomología serán utilizados a lo largo de toda la memoria, así que es conveniente resumirlos aquí.

Asociamos a \mathbf{X} una 2-forma diferencial real X , definida en D . En este contexto, \mathbf{X} es solenoidal cuando la derivada exterior de X es cero, $dX = 0$, o lo que es igual, X es una forma cerrada. La igualdad $\mathbf{X} = \nabla \times \mathbf{Y}$ es equivalente a que X sea una forma exacta $X = dY$, donde Y es una 1-forma en D . Sea $Z^r(D)$ el espacio de las r -formas cerradas en D , y $B^r(D)$ el espacio de las r -formas exactas. Claramente, todas las formas exactas son cerradas ($dd = 0$), así que $B^r(D) \subset Z^r(D)$, pero el recíproco no es cierto en general. El espacio cociente $H^r(D) = Z^r(D)/B^r(D)$ se llama r -grupo de cohomología de la variedad D . Por tanto, para que toda r -forma cerrada sea exacta se ha de cumplir que $H^r(D) = 0$. Esto es cierto cuando se cumplen las condiciones establecidas por el *lema de Poincaré*, basado en el más general *teorema de De Rham*. Aunque no entremos en ello, podemos dar el resultado para las formas que nos interesan. Es el siguiente.

i) Si $r = 1$ y D es una variedad simplemente conexa, entonces $H^1(D) = 0$. Una buena regla, aunque sólo intuitiva, para calcular el primer grupo de cohomología de una variedad D es pensar en la dimensión de $H^1(D)$ como el número de "agujeros" de la variedad, pero hay que clarificar lo que se entiende aquí por "agujero". Por ejemplo, si $D = \mathbb{R}^2 - \{0\}$, es decir, D es el plano real al que le quitamos el origen, ocurre que $H^1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) = \mathbb{R}$, que tiene dimensión 1. Sin embargo, $H^1(\mathbb{R}^3 - \{0\}) = 0$. En el primer caso, al quitar el origen del plano \mathbb{R}^2 , toda curva cerrada que rodee al origen no se puede contraer de manera continua a un sólo punto, porque hay un agujero. En el segundo caso, dado que estamos en \mathbb{R}^3 , podemos "saltar" el origen al contraer la curva cerrada, así que un sólo punto no es un agujero para \mathbb{R}^3 en este contexto, sino que se requiere, al menos, eliminar toda una línea cerrada para tener un agujero de \mathbb{R}^3 .

ii) Si $r = 2$ y toda superficie esférica interior a D se puede contraer de manera continua a un punto, entonces $H^2(D) = 0$. Para $r > 1$ es muy útil la fórmula de recurrencia $H^r(S^n) = H^{r-1}(R^n - \{0\}) = H^{r-1}(S^{n-1})$. Por ejemplo, $H^2(S^2) = H^1(S^1) = R$.

iii) En los casos de uso más corriente en los que D es R^n o S^n , tenemos que $H^r(R^n) = 0$ para $r \neq 0$, y $H^r(S^n) = 0$ para $1 \leq r < n$.

Se define la *helicidad* del campo sin divergencia $\mathbf{X}(\mathbf{r})$ en D como la integral

$$h(\mathbf{X}, D) = \int_D \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} \, d^3r \quad (2.2)$$

En lo que sigue, a menudo escribiremos $h(\mathbf{X})$, o simplemente h , siempre que no exista posibilidad de confusión.

Tal como está, la definición (2.2) de la helicidad de \mathbf{X} depende explícitamente de la elección del potencial \mathbf{Y} . Si \mathbf{Y} es un potencial vector del campo sin divergencia \mathbf{X} , entonces el potencial $\mathbf{Y} + \nabla f$ es también posible, dado que $\nabla \times \nabla f = 0$. Las condiciones bajo las cuales la helicidad es invariante "gauge", es decir, no cambia frente a estas posibilidades de elección del potencial vector, serán investigadas al final de esta sección. Otra cuestión a señalar es la posibilidad de que el campo vectorial real \mathbf{X} dependa del tiempo. En este caso la aplicación (2.1) se puede tomar como

$$\mathbf{X} : D \times R \rightarrow R^3, \quad (2.3)$$

y, en general, la helicidad (2.2) dependerá del tiempo. Evidentemente, en los casos más útiles las ecuaciones de movimiento de \mathbf{X} implican, como veremos, que no se dé esta dependencia de la helicidad con el tiempo.

Existen dos contextos físicos, a menudo relacionados entre sí, en los cuales la helicidad (2.2) ha resultado especialmente útil:

i) En mecánica de fluidos, si identificamos \mathbf{Y} con la velocidad del fluido $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, y \mathbf{X} con la vorticidad $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v}$, tenemos

$$h(\mathbf{w}, D) = \int_D \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \, d^3r, \quad (2.4)$$

llamada *helicidad de vórtices*.

ii) En física del plasma y, en general, en electromagnetismo, es muy común la *helicidad magnética*

$$h(\mathbf{B}, D) = \int_D \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, d^3r . \quad (2.5)$$

Si bien es necesario especificar que el significado de la helicidad (2.2) está íntimamente ligado a la topología de las líneas de campo de \mathbf{X} , cuestión que trataremos en la sección 2.3 de este capítulo, no es menos cierto que ya podemos establecer algunas pistas que motiven su posterior estudio. Por ejemplo, es conocido que el rotacional de un vector mide su rotación alrededor de cada punto, de modo que la cantidad $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$ es una medida de la rotación de \mathbf{Y} alrededor de sí mismo y, por tanto, la helicidad de \mathbf{X} da cuenta del trenzamiento o rizamiento relativo de las líneas de campo de \mathbf{X} y de \mathbf{Y} [38].

Para explicar esto mejor, es útil mirar desde el punto de vista de la helicidad de vórtices (2.4). El movimiento de algún elemento de volumen dV de un fluido es una superposición de una deformación pura, una traslación uniforme de velocidad \mathbf{v} y una rotación de tipo sólido rígido cuya velocidad angular está relacionada con la vorticidad, pues es $\mathbf{w}/2$ [39]. En el movimiento tipo sólido rígido podemos aplicar el teorema de Chasles [40, 41, 42]. Este nos dice que este movimiento se puede ver como una traslación seguida de una rotación, de manera que el eje de rotación sea paralelo a la traslación. Como resultado, el movimiento es de tipo helicoidal o de tornillo. La cantidad $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ es constante en los puntos del elemento de volumen dV , y mide este atornillamiento del movimiento. En consecuencia, la cantidad (2.4) es la suma del atornillamiento de todos los elementos de volumen del fluido.

2.2.2 La helicidad magnética: condiciones de invariancia temporal

La teoría de Maxwell del electromagnetismo se define en un espacio cuadridimensional de tipo minkowskiano $D \times R$, donde D será una variedad tridimensional, que tomaremos como R^3 o algún subconjunto de R^3 . Antes de entrar en cuestiones sobre la helicidad, repasemos las unidades y notaciones que se utilizarán.

Emplearemos las convenciones [43]

$$v^\mu = (v^0, \mathbf{v}) = g^{\mu\nu} v_\nu, \quad v_\mu = (v^0, -\mathbf{v}) = g_{\mu\nu} v^\nu, \quad (2.6)$$

para todo cuadrivector v^μ en el espacio de Minkowski, donde el tensor métrico $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ es la matriz diagonal con elementos no nulos $(1, -1, -1, -1)$. Para las derivadas con respecto al cuadrivector de posición $x^\mu = (ct, \mathbf{r})$, usaremos la notación

$$\partial_\mu f = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}, \quad \partial^\mu f = \frac{\partial f}{\partial x_\mu}. \quad (2.7)$$

Aquí, c es la velocidad de la luz, de manera que todas las x^μ tienen dimensiones de longitud. Generalmente, se usarán letras griegas para los índices espaciotemporales $(0, 1, 2, 3)$, y letras latinas para los índices puramente espaciales $(1, 2, 3)$. Además, excepto donde se especifique explícitamente lo contrario, se empleará la convención de suma de índices repetidos. Como unidad de acción, tomaremos la constante de Planck normalizada \hbar , tan buena como cualquier otra para una teoría clásica de campos. Con estas especificaciones, podemos ya definir las unidades naturales, que se emplearán en esta memoria, como aquellas en las cuales $\hbar = c = \mu_0 = \epsilon_0 = 1$, donde μ_0 y ϵ_0 son, respectivamente, la permeabilidad magnética y la constante dieléctrica del vacío.

En términos del cuadripotencial vector $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$, la acción de Maxwell-Lorentz para la electrodinámica en presencia de un cuadrivector corriente eléctrica $j^\mu(x)$ se escribe

$$\mathcal{A}_{elm} = \int \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + A_\mu(x) j^\mu(x) \right) d^4x, \quad (2.8)$$

donde el tensor antisimétrico de intensidad del campo electromagnético $F_{\mu\nu}$ está definido a partir del cuadripotencial A^μ como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2.9)$$

(la convención de signos no es universal). Las ecuaciones de movimiento de Lagrange para la acción (2.8) son

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (2.10)$$

y, además, se satisface idénticamente la igualdad

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0 , \quad (2.11)$$

sin más que introducir A^μ . La cantidad $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ es el tensor totalmente antisimétrico, que definimos a partir de la condición $\varepsilon_{0123} = 1$, y cuyos índices suben o bajan con la métrica del espacio de Minkowski $g^{\mu\nu}$, así que, por ejemplo, $\varepsilon^{0123} = -1$. Las ecuaciones anteriores tienen una contrapartida en función de cantidades tridimensionales, que denotaremos con letras en negrita. Así, se definen los campos vectoriales tridimensionales eléctrico, $\mathbf{E}_i = F^{i0}$, y magnético, $\mathbf{B}_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^{jk}$, donde $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk}$ es el tensor completamente antisimétrico en la variedad espacial tridimensional D , con métrica euclídea (nótese la diferencia con $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$). En función de $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla A^0 , \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} , \end{aligned} \quad (2.12)$$

de forma que las ecuaciones (2.10) quedan

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= j^0 , \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mathbf{j} , \end{aligned} \quad (2.13)$$

y las identidades (2.11) son

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 , \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 . \end{aligned} \quad (2.14)$$

Los campos electromagnéticos definidos con esta normalización se dice que están medidos en las unidades de Heaviside-Lorentz [44]. Las expresiones de los campos eléctrico y magnético (2.12) son invariantes frente a las transformaciones "gauge"

$$A_\mu(\mathbf{r}, t) \mapsto A_\mu(\mathbf{r}, t) + \partial_\mu \Lambda(\mathbf{r}, t) , \quad (2.15)$$

para cualquier función Λ definida en $D \times R$.

Dado que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, se define la helicidad magnética como

$$h_m = \int_D \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, d^3r . \quad (2.16)$$

Si usamos las derivadas temporales de los campos \mathbf{A} y \mathbf{B} que, a partir de (2.12) y (2.14) son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= -\mathbf{E} - \nabla A^0 , \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \mathbf{E} , \end{aligned} \quad (2.17)$$

encontramos la evolución temporal de la helicidad magnética (2.16), dada por la expresión

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_D \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, d^3r = -2 \int_D \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \, d^3r - \int_{\partial D} (A^0 \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, dS , \quad (2.18)$$

donde \mathbf{n} es un vector unitario normal exterior a la superficie ∂D frontera de D , y dS es el elemento de área de esa superficie. Analicemos las condiciones de invariancia temporal de la helicidad. En primer lugar, que la integral superficial del lado derecho de (2.18) se anule depende de las condiciones de contorno de los campos. Por un lado, es norma común tomar $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ en ∂D , lo que indica que el campo magnético no escapa del dominio en que estamos calculando su helicidad. Esto es lógico, ya que, como se verá, la helicidad tiene que ver con la topología de las líneas magnéticas, así que no queremos que se “escapen” de la zona de cálculo. Por otro lado, se pide que el sistema sea cerrado (esto es, $\mathbf{E} = 0$ en ∂D , ninguna acción atraviesa la frontera de D) como ocurre, por ejemplo, cuando ∂D es un conductor perfecto en equilibrio con la radiación, o cuando D es todo el espacio real tridimensional, cuya frontera se toma idealmente como alguna superficie bidimensional en el infinito (por ejemplo, un cubo de lado infinito, una esfera de radio infinito, o un cilindro de altura y radio infinitos), y exigimos a los campos que la energía total sea finita, es decir, se escogen campos tales que se anulan en ∂D . Esto significa que D es un *dominio compacto*, pues todos los puntos del infinito de D , dominio de definición del campo magnético, se aplican en un sólo valor de \mathbf{B} , que es el cero. Cuando se

necesite, se hablará más de este aspecto. En estas condiciones, el único requerimiento para la conservación de la helicidad magnética es

$$\int_D \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \, d^3r = 0 \Rightarrow \frac{\partial h_m}{\partial t} = 0 . \quad (2.19)$$

La condición $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ es una ecuación invariante Lorentz, es decir, el valor de la cantidad $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$, en un campo electromagnético, no cambia frente al conjunto de transformaciones que constituyen el llamado grupo propio de Lorentz. Los campos electromagnéticos que la cumplen se llaman *campos singulares*, pues en ellos la matriz $F_{\mu\nu}$ es singular, en el sentido que

$$\text{Det}(F_{\mu\nu}) = 0 . \quad (2.20)$$

En muchas referencias matemáticas, estos campos se conocen como degenerados (esto se debe al teorema de Darboux, del que hablaremos en el capítulo 4), y en física es muy común el nombre de campos de radiación para ellos. A lo largo de esta memoria, me referiré a campos singulares como aquellos que cumplen (2.20).

La condición (2.19) es más débil que $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$. De hecho, existe un ejemplo muy importante de conservación de la helicidad en campos no necesariamente singulares, que es el caso de las *superficies magnéticas* [45, 46, 47]. Las líneas de campo magnéticas se definen como las trayectorias $x_i = x_i(\tau)$ del sistema dinámico

$$\frac{d\mathbf{r}(\tau)}{d\tau} = \mathbf{B}(\mathbf{r}(\tau), t) , \quad (2.21)$$

para cada instante t . Respecto al sistema dinámico (2.21), caben dos posibilidades: que no tenga ninguna cantidad conservada, en cuyo caso es no integrable, o bien que tenga dos cantidades conservadas, en cuyo caso es integrable. Se puede demostrar que, si tiene una cantidad conservada, entonces tiene una segunda. Supongamos que el sistema (2.21) es integrable, así que tiene dos cantidades conservadas, $\alpha(\mathbf{r}, t)$ y $\beta(\mathbf{r}, t)$, y las líneas magnéticas son las intersecciones de las familias de superficies $\alpha(\mathbf{r}, t) = \text{constante}$, $\beta(\mathbf{r}, t) = \text{constante}$, que estas cantidades definen. Estas superficies se llaman superficies magnéticas del campo \mathbf{B} , y, como se ha dicho, se pueden definir siempre que el sistema dinámico

(2.21) sea integrable. Por ser α una constante de movimiento, se tiene que

$$0 = \frac{d\alpha}{d\tau} = \frac{\partial\alpha}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\tau} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \alpha . \quad (2.22)$$

y análogamente para β . De aquí se sigue que \mathbf{B} es ortogonal a los gradientes de las cantidades α y β , así que se puede escribir

$$\mathbf{B} = F(\mathbf{r}, t) \nabla\beta \times \nabla\alpha . \quad (2.23)$$

Aplicando la condición solenoidal de \mathbf{B} , se obtiene entonces

$$\mathbf{B} = F(\alpha, \beta) \nabla\beta \times \nabla\alpha . \quad (2.24)$$

El campo magnético define las componentes F_{ij} del tensor $F_{\mu\nu}$. La covariancia de este tensor obliga al campo eléctrico a tener la forma

$$\mathbf{E} = F(\alpha, \beta) \left(\frac{\partial\alpha}{\partial t} \nabla\beta - \frac{\partial\beta}{\partial t} \nabla\alpha \right) - \nabla A^0 , \quad (2.25)$$

para alguna función A^0 de las coordenadas del espacio que no depende del tiempo. La integral de $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ resulta, entonces,

$$\int_D \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \, d^3r = - \int_D \nabla(A^0 \mathbf{B}) \, d^3r = - \int_{\partial D} A^0 \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 . \quad (2.26)$$

Nótese que $A^0(\mathbf{r})$ ha de ser una función univaluada para que se pueda aplicar el teorema de Stokes en el último paso de (2.26). Además, es necesaria la condición $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ en ∂D , lo cual indica que la superficie ∂D es, de hecho, una superficie magnética. En el capítulo 4, se hablará más sobre las superficies magnéticas.

2.2.3 La helicidad magnética: condiciones de invariancia “gauge”

El significado de las transformaciones “gauge” en la helicidad ha sido estudiado recientemente por Marsh [48, 49, 50, 51], demostrando la importancia de las consideraciones topológicas al tratar con campos vectoriales. En este apartado se resumen las características básicas de este estudio a través de un ejemplo.

La helicidad magnética introducida por una transformación de tipo $\delta \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \Lambda(\mathbf{r}, t)$ es

$$\delta h_m = - \int_D \nabla \Lambda \cdot \mathbf{B} \, d^3r = - \int_D \nabla \cdot (\Lambda \mathbf{B}) \, d^3r . \quad (2.27)$$

Supongamos primero que D es un dominio simplemente conexo. En este caso, recordando lo que hemos visto sobre el lema de Poincaré al principio de esta sección, el grupo de cohomología $H^1(D)$ es trivial y, consecuentemente, dado que $\nabla \times \nabla \Lambda = 0$, ocurre que Λ está definida en D de forma global (es una función univaluada). Por tanto, se puede aplicar el teorema de Stokes a la última integral de (2.27), y resulta

$$\delta h_m = - \int_{\partial D} \Lambda \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 , \quad (2.28)$$

Es decir, la helicidad magnética es un invariante “gauge”, con las condiciones de contorno usuales, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ en ∂D , para dominios simplemente conexos.

Pero, ¿y si el dominio espacial D no es simplemente conexo? Las consecuencias de este hecho pueden extraerse a partir de un ejemplo. Sea D el espacio interior de un toro, de tal manera que ∂D , la superficie del toro, es una superficie magnética. Como existen líneas cerradas que recorren el interior de un toro tales que no se pueden contraer a un punto (todas aquellas paralelas al eje del toro, por ejemplo), D no es un dominio simplemente conexo en este caso, y esto se refleja en que, al aplicar a (2.27) el teorema de Stokes, hemos de contar con un término de “corrección”. Así, (2.28) cambia a

$$\delta h_m = - \int_{\partial D} \Lambda \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS - \int_{S_1} [\Lambda] \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS , \quad (2.29)$$

donde S_1 es la superficie de corte del toro que se necesita para que f sea univaluada (figura 2.1), y $[\Lambda]$ es el “salto” de Λ en S_1 , es decir, si el valor de Λ en cada cara de la superficie de corte S_1 es $\Lambda(+)$ y $\Lambda(-)$, entonces $[\Lambda] = \Lambda(+)-\Lambda(-)$. Si eliminamos la superficie S_1 , entonces nuestro volumen es topológicamente equivalente al volumen interior de un cilindro. En este cilindro, la integral de $\nabla \Lambda$ a lo largo de cualquier curva cerrada es cero, de manera que Λ es univaluada en el cilindro. De esta manera, todas las “patologías” introducidas por la condición

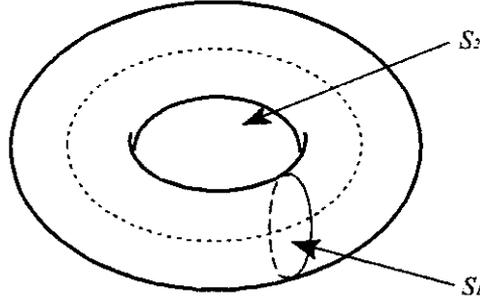


Figura 2.1: El volumen del toro D , con la sección de corte necesaria para que Λ sea univaluada, y una trayectoria cualquiera para el cálculo de $[\Lambda]$.

multivaluada de Λ quedan atrapadas en la superficie S_1 y el valor de $[\Lambda]$. Dado que ∂D es una superficie magnética, la primera integral del lado derecho de (2.29) es nula, o sea que nos queda

$$\delta h_m = - \int_{S_1} [\Lambda] \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS . \quad (2.30)$$

Veamos cómo calcular esta integral [52]. Para calcular $[\Lambda]$, necesitamos una trayectoria de integración que recorra el toro, tal como C en la figura 2.1, y que corte a S_1 . En general, para dos puntos p_1 y p_2 en D , la diferencia en el valor de la función Λ es

$$\Lambda(p_2) - \Lambda(p_1) = \int_{p_1}^{p_2} \nabla \Lambda \cdot d\mathbf{r} . \quad (2.31)$$

Si la trayectoria de integración es cerrada y no corta a la superficie S_1 , (2.31) es cero, con $p_1 = p_2$, como hemos explicado algo más arriba, pero si la trayectoria corta a S_1 , como es nuestro caso, tenemos

$$[\Lambda] = \oint_C \nabla \Lambda \cdot d\mathbf{r} = \Lambda(+)-\Lambda(-) \neq 0 . \quad (2.32)$$

Demostremos ahora que $[\Lambda]$ es constante en S_1 , es decir, que podemos tomar cualquier trayectoria C y sacar $[\Lambda]$ fuera de la integral (2.30).

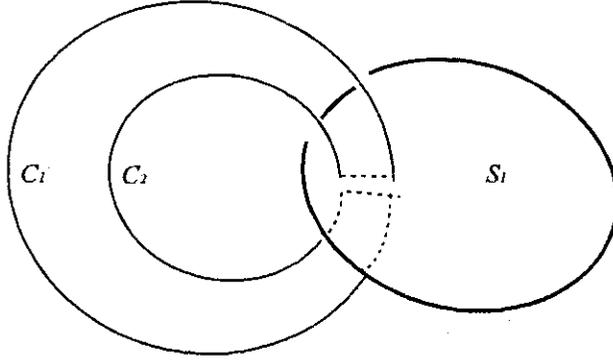


Figura 2.2: El circuito usado para demostrar que $[\Lambda]$ es constante en la superficie de corte S_1 .

Para ello, tomemos dos curvas C_1, C_2 que recorran el interior del toro una vez, cortando la superficie S_1 , y dos arcos que conecten estas dos curvas por encima y por debajo de S_1 , a una distancia infinitesimal de esta superficie (figura 2.2). Vamos a integrar $\nabla\Lambda$ a lo largo de la trayectoria cerrada resultante. Las contribuciones de las conexiones en cada cara de S_1 se cancelan, de forma que, por el teorema de Stokes (aplicable fuera de S_1), podemos reemplazar la integral en esta trayectoria por la integral de $\nabla \times (\nabla\Lambda)$ sobre la superficie encerrada por $C_1 - C_2$, que es nula. De aquí, la integral de $\nabla\Lambda$ en C_1 es igual a la de C_2 , y por tanto $[\Lambda]$ es constante en S_1 , esto es, $\Lambda(+)-\Lambda(-)$ no depende del punto en que se calcula.

Así, (2.30) nos queda

$$\delta h_m = -[\Lambda] \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = -[\Lambda] \Phi_T, \quad (2.33)$$

donde Φ_T es el flujo magnético a través del interior del toro, que es independiente de la sección S_1 usada para calcularlo porque ∂D , la superficie del toro, es una superficie magnética ($\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ en ∂D). Dado que podemos escoger cualquier trayectoria de integración para calcular $[\Lambda]$, tomemos para C la frontera de S_2 , que es el agujero del

“donut”. El resultado es

$$\delta h_m = -\Phi_T \oint_{\partial S_2} \nabla \Lambda \cdot dr . \quad (2.34)$$

El resultado (2.34) indica que la no trivialidad del dominio espacial de definición del campo magnético causa no trivialidad en la helicidad introducida por una transformación “gauge”. Para comprender el significado físico de este resultado hay que tener en cuenta lo que ocurre fuera del toro.

Supongamos que existe un campo magnético \mathbf{B}_{ext} que es no nulo sólomente fuera del toro D , es decir, en $R^3 - D$ (un estudio de las condiciones bajo las cuales esta elección es posible se da en [53]). Dentro del toro D , ocurre que $\mathbf{B}_{ext} = 0$, de modo que podemos escribir $\mathbf{B}_{ext} = -\nabla \times \nabla \Lambda$, en D . El flujo magnético del campo \mathbf{B}_{ext} a través del agujero del donut es

$$\Phi_2 = \int_{S_2} \mathbf{B}_{ext} \cdot \mathbf{n} \, dS , \quad (2.35)$$

que no es nulo porque, de hecho, existe el campo \mathbf{B}_{ext} fuera del toro. Pero, según el teorema de Stokes, el flujo (2.35) es igual a la circulación del potencial vector a lo largo de la curva cerrada que acota S_2 , es decir,

$$\Phi_2 = - \oint_{\partial S_2} \nabla \Lambda \cdot dr . \quad (2.36)$$

Dado que el flujo Φ_2 no es cero, la única salida es que Λ no sea una función univaluada en D . La ecuación (2.36) define una función Λ a partir del flujo Φ_2 .

Consideremos ahora que existe también un campo interior a D , que llamaremos \mathbf{B} , tal que se anula fuera de D , y sea ∂D una superficie magnética. En todo el espacio R^3 , existe un campo $\mathbf{B}_{tot} = \mathbf{B}_{ext} + \mathbf{B}$, donde \mathbf{B}_{ext} se anula en D , y \mathbf{B} se anula fuera de D . La helicidad magnética del campo \mathbf{B}_{tot} , calculada sólo dentro del toro, es igual a la helicidad del campo interior \mathbf{B} mas un término que, desde el punto de vista del interior del toro, se debe a una transformación “gauge” de función Λ multivaluada, definida por la condición (2.36). Según nuestro estudio de este término “gauge”, la helicidad introducida por la transformación “gauge” era (2.34), que, usando la expresión (2.36) se puede escribir como

$$\delta h_m = \Phi_T(\mathbf{B}) \Phi_2(\mathbf{B}_{ext}) = \Phi_T(\mathbf{B}_{tot}) \Phi_2(\mathbf{B}_{tot}) . \quad (2.37)$$

El equívoco está, entonces, en la suposición de que el campo magnético exterior a D no influye en la helicidad dentro del toro, y es precisamente la ecuación (2.37) la que nos abre los ojos: la helicidad puede ser, en este sentido, no “localizable”. Por tanto, para obtener el resultado correcto sin considerar el comportamiento en la frontera, debemos tener en cuenta el campo exterior al toro. Si así lo hacemos, el dominio deja de ser múltiplemente conexo, aunque estemos calculando sólo la contribución del interior del toro (es decir, hacemos la integral en la región interior). La noción de “enlace de flujos” que así aparece la volveremos a ver en la sección siguiente, al estudiar la topología asociada a la helicidad.

2.3 Helicidad y topología de las líneas de campo

El objetivo de esta sección es demostrar que la helicidad de un campo solenoidal está directamente relacionada con la topología de las líneas de campo, de tal forma que sólo una topología no trivial de estas líneas, en función del concepto de enlace, puede provocar una helicidad no nula. En primer lugar consideraré el caso de configuraciones de campo sencillas, como son los llamados tubos filamentosales cerrados. Para su estudio es indispensable un conocimiento a nivel básico de la topología de las curvas espaciales en R^3 , es decir, de teoría de nudos, y en especial del invariante topológico de enlace. Después de introducir brevemente estos temas, separaré el estudio de las configuraciones de campo en varios casos, relacionándolos con diferentes maneras de escribir el invariante de enlace.

2.3.1 Curvas espaciales cerradas

Un *nudo orientado* en R^3 es una curva diferenciable cerrada, que no se interseca a sí misma y que admite, en cada punto, un vector tangente no nulo [54], cuyo sentido nos da la orientación del nudo. Tales curvas se pueden expresar a través de ecuaciones paramétricas $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t_0 \leq$

$t \leq t_1$, de donde la longitud l del nudo es

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt . \quad (2.38)$$

Por $\| \cdot \|$ denotaré la norma euclídea en R^3 , $\|\mathbf{X}\| = \sqrt{\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}}$. Definimos el parámetro natural s como aquel en el cual el vector tangente tiene módulo unidad, es decir, satisface la siguiente ecuación diferencial, que lo define en función de cualquier otro parámetro t ,

$$ds = dt \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| . \quad (2.39)$$

Sea dado el nudo en función del parámetro natural, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, $0 \leq s \leq l$. En cada punto de la curva se puede elegir un triedro ortonormal [55], formado por el vector tangente $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/ds$ (que tiene módulo 1), el vector normal principal \mathbf{n} , definido como el vector aceleración normalizado (que es ortogonal al vector tangente si el parámetro de la curva es el natural), y el vector binormal $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$. Estos tres vectores satisfacen las *ecuaciones de Frenet*,

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = c\mathbf{n} , \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -c\mathbf{t} - \tau\mathbf{b} , \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau\mathbf{n} , \quad (2.40)$$

donde $c(s)$ y $\tau(s)$ son, respectivamente, la *curvatura* y la *torsión* de la curva. Especial cuidado se ha de tener con los puntos de inflexión (aquellos que tienen curvatura nula), ya que, si $c(s_0) = 0$, pueden no estar definidas las cantidades $\tau(s_0)$, $\mathbf{n}(s_0)$, $\mathbf{b}(s_0)$.

Una *cadena* (orientada) en R^3 es un conjunto de dos o más nudos sin puntos en común, esto es, tales que su intersección dos a dos es nula, pero que pueden estar enlazados.

En teoría de nudos [56, 57, 58], se representan las curvas espaciales mediante *diagramas planos*, que son proyecciones en el plano del papel. Es claro que un nudo o una cadena tienen infinitos diagramas planos posibles, dependiendo de la dirección de proyección. En general, en un diagrama plano, existirán cruces de curvas, que se llaman *vértices*. Para diferenciar el segmento que pasa por encima del que pasa por debajo en un vértice de un diagrama plano se usa la típica técnica de "cortar" el de debajo.

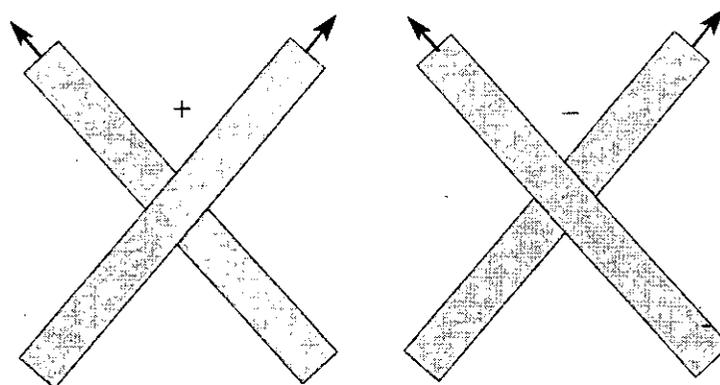


Figura 2.3: Regla de signos en los puntos de cruce de los diagramas planos de los nudos y cadenas.

Las orientaciones de las curvas en los diagramas planos vienen dadas por flechas. De la misma manera, cada vértice p en el diagrama tiene una orientación determinada por un signo $\sigma(p)$ que se calcula con la regla de la mano derecha (figura 2.3).

Dado un diagrama plano, se define su *número de cruce* W como la suma de las orientaciones de sus vértices,

$$W = \sum_p \sigma(p) . \quad (2.41)$$

Dada una cadena formada por dos nudos C_1 y C_2 , se define su *número de enlace* $L(C_1, C_2)$ como la semisuma de las orientaciones de los vértices que son cruces de C_1 y C_2 (no se cuentan los vértices de los autocruces),

$$L(C_1, C_2) = \frac{1}{2} \sum_{p_{12}} \sigma(p_{12}) , \quad (2.42)$$

En la figura 2.4 se ven los diagramas planos de algunos nudos y cadenas, junto con sus números de cruce y enlace (si procede). Nótese que la ausencia de enlace implica que el número de enlace se anula, pero el recíproco no es cierto, como ilustra la cadena de Whitehead o los anillos borromeos que, aunque enlazados en conjunto, no lo están dos a dos [50]. Conviene tener cuidado con esto.

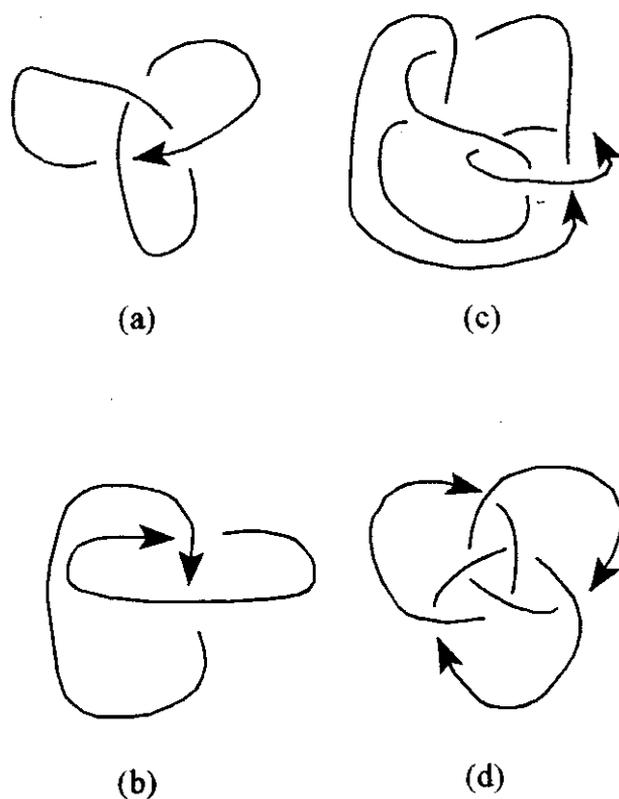


Figura 2.4: Algunos diagramas planos. (a) Nudo trébol, $W = 3$; (b) Cadena de Hopf, $W = 2$, $L(X, Y) = 1$; (c) Cadena de Whitehead, $W = 2$, $L(X, Y) = 0$; (d) Anillos borromeos, $W = 0$, $L(X_i, X_j) = 0$.

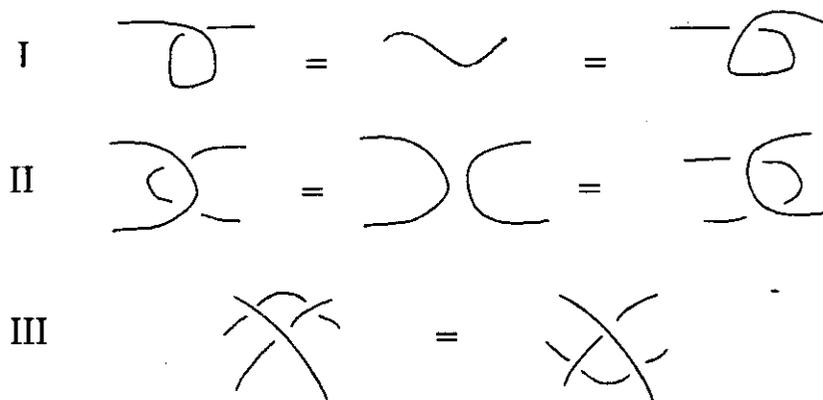


Figura 2.5: Los tres movimientos de Reidemeister.

En uno de los logros más notables de la teoría de nudos, Reidemeister [59] llevó la equivalencia topológica de las curvas en R^3 (dos nudos o cadenas son topológicamente equivalentes cuando se pueden deformar uno en otro de manera continua) a los diagramas planos. Demostró que la equivalencia topológica de nudos y cadenas es igual a la *isotopía ambiental* de diagramas planos, que es la relación de equivalencia definida así: dos diagramas planos son ambientalmente isotópicos si y sólo si se pueden transformar uno en otro a través de una secuencia de *movimientos de Reidemeister* (figura 2.5). Gracias al teorema de Reidemeister, podemos ver que el número de cruce W , definido en (2.41) no es invariante topológico (porque no se conserva en el movimiento I de Reidemeister), pero sí lo es el número de enlace $L(C_1, C_2)$ tal como hemos definido en (2.42).

2.3.2 La helicidad de dos tubos filamentosales enlazados y la fórmula de Gauss

Para nuestro estudio de la topología asociada a la helicidad serán útiles las nociones de tubo magnético y tubo filamental. Consideremos una pequeña curva cerrada circular C . Se define su *tubo magnético* [38] como el conjunto de todas las líneas magnéticas que intersecan C (figura 2.6). Sea S_1 una superficie cuya frontera es la curva C , es decir $\partial S_1 = C$, y

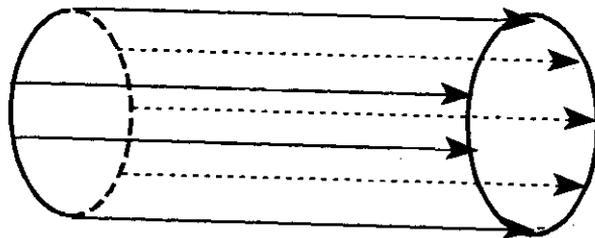


Figura 2.6: Un tubo magnético.

sea Φ_C el flujo magnético a través de S_1 ,

$$\Phi_C = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} . \quad (2.43)$$

Ahora, sea S_2 otra sección del tubo magnético asociado a C . El flujo a través de la superficie cerrada formada por S_1 , S_2 y las paredes del tubo es cero porque $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, y el flujo a través de las paredes del tubo es nulo por la definición de tubo magnético. Por tanto, se demuestra que el flujo interior a un tubo magnético no depende de la sección usada para calcularlo. Se define la *intensidad* de un tubo magnético como el flujo a través de una cualquiera de sus secciones.

Un *tubo filamental* es un tubo magnético de sección tan pequeña que se confunde con un filamento, esto es, que tiende a una sólo línea magnética, pero con intensidad finita. Es, pues, un objeto no real que nos servirá para estudiar las configuraciones de helicidad de un modo sencillo y gráfico, utilizando las nociones de teoría de nudos que hemos presentado.

En el primer artículo sobre el significado topológico de la helicidad, Moffatt [17] consideró tubos filamentosales cerrados no autoenlazados. Por simplicidad en las fórmulas, no se escribirá explícitamente la dependencia temporal de \mathbf{A} y \mathbf{B} . Supongamos que D , la región donde está definido el campo \mathbf{B} solenoidal (en lo que sigue, se supondrá que \mathbf{B} es el campo magnético, pero podríamos aplicar los resultados

a cualquier campo sin divergencia), es un dominio simplemente conexo. Entonces, como hemos visto en el apartado 2.2.3, la helicidad es invariante "gauge", y podemos escoger el potencial vector dado por la condición de Coulomb, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. En este caso, por el teorema de Helmholtz [60], se puede escribir

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \mathbf{B}(\mathbf{r}')}{R} d^3 r' , \quad (2.44)$$

donde $\nabla' = (\partial/\partial x', \dots)$, $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ y $R = \|\mathbf{R}\|$. Tras manipulaciones sencillas y aplicando como condiciones de contorno las usuales, $\mathbf{B} = 0$ en ∂D , la ecuación (2.44) resulta

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} d^3 r' . \quad (2.45)$$

La helicidad magnética es, por tanto,

$$\begin{aligned} h_m &= \frac{1}{4\pi} \int \int \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} d^3 r' d^3 r = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \int (\mathbf{B}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}')) \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3} d^3 r' d^3 r . \end{aligned} \quad (2.46)$$

Consideremos ahora la especial situación en la cual \mathbf{B} es cero excepto en dos tubos filamentosales centrados en dos líneas magnéticas cerradas orientadas no autoenlazadas C y C' , que sí pueden estar enlazadas entre sí (figura 2.7). Las secciones de los tubos filamentosales tienden a cero, pero tienen intensidades no nulas $\delta\Phi$, $\delta\Phi'$, respectivamente. Además, debemos suponer que, dentro de cada tubo filamental, las líneas magnéticas son curvas que se cierran después de dar una vuelta al tubo y corren paralelas a C y C' , respectivamente. En este caso, para cada uno de los campos magnéticos de (2.46) se tiene $\mathbf{B}(\mathbf{r}) d^3 r = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS) dr = d\Phi dr$, de forma que la helicidad resulta (recordando que podemos tener las dos situaciones $\mathbf{r} \in C$, $\mathbf{r}' \in C'$ o bien $\mathbf{r} \in C'$, $\mathbf{r}' \in C$, lo cual genera un factor 2)

$$h_m = 2 \delta\Phi \delta\Phi' \left(\frac{1}{4\pi} \oint_C \oint_{C'} (d\mathbf{r} \times d\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \right) , \quad (2.47)$$

donde la integral entre paréntesis en (2.47) se conoce como *integral de Gauss*.

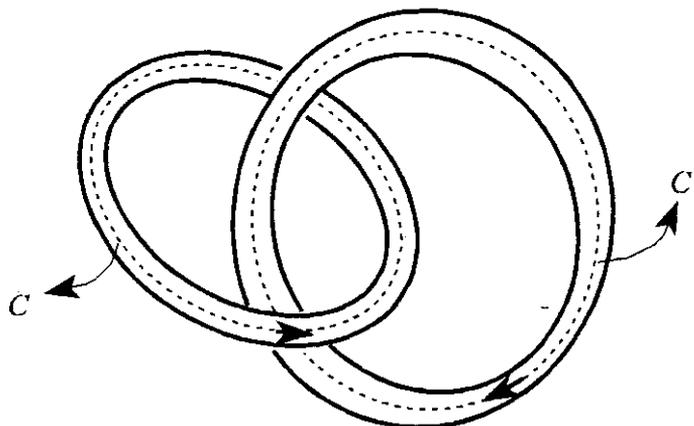


Figura 2.7: Tubos filamentosales orientados, enlazados pero sin autoenlaces, que no presentan contribución interna a la helicidad.

Se puede ver que la integral (2.47) coincide con la definición de número de enlace (2.42), y es por tanto un entero [54, 35]. Para ello, consideremos la superficie cerrada orientada en R^6 dada por

$$C \times C' : (s, s') \mapsto (\mathbf{r}(s), \mathbf{r}'(s')) . \quad (2.48)$$

Sea ahora la aplicación

$$\begin{aligned} f : C \times C' &\rightarrow S^2 \\ (s, s') &\mapsto f(s, s') = \frac{\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}'(s')}{\|\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}'(s')\|} \end{aligned} \quad (2.49)$$

que no se anula porque C y C' no tienen puntos comunes. Entonces, el grado de f , que es igual al número de enlace $L(C, C')$ por la construcción (2.49), y que se define como el número de imágenes inversas de cada punto de la variedad imagen (en este caso, S^2) es un número entero dado por la integral de Gauss.

En consecuencia, la helicidad de dos tubos filamentosales es, según la ecuación (2.47),

$$h_m = 2L(C, C') \delta\Phi \delta\Phi' . \quad (2.50)$$

En este cálculo es imprescindible que cada tubo filamental tenga helicidad nula por sí mismo, y esto está asegurado siempre que, como hemos

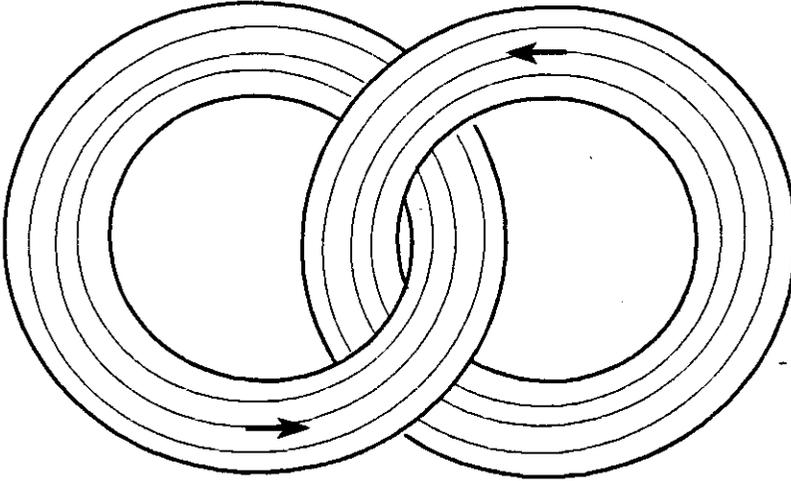


Figura 2.8: Dos tubos magnéticos enlazados, cada uno de los cuales fabricado con tubos filamentosales no enlazados.

dicho, las líneas magnéticas en cada tubo no estén enlazadas. En el caso de tener varios tubos filamentosales cerrados, la helicidad total será

$$h_m = \sum_i \sum_{j \neq i} L(C_i, C_j) \delta\Phi_i \delta\Phi_j , \quad (2.51)$$

$L(C_i, C_j)$ es aquí el número de enlace de los filamentos C_i, C_j .

El resultado (2.50) se puede ampliar a tubos magnéticos de sección finita con la condición de que, en cada uno de ellos, las líneas magnéticas no estén enlazadas, y que los mismos tubos no estén autoenlazados (ver la figura 2.8). Podemos considerar entonces que cada tubo magnético está formado por un gran número de tubos filamentosales de sección infinitesimal. Así, cada par de tubos filamentosales (uno de cada tubo magnético) contribuye a la helicidad total en una cantidad dada por (2.50), y al sumar sobre todos los pares resulta

$$h_m = 2L(C_1, C_2)\Phi_1\Phi_2 , \quad (2.52)$$

donde Φ_1, Φ_2 son, respectivamente, las intensidades totales de los dos tubos magnéticos, y $L(C_1, C_2)$ es el número de enlace de dos tubos filamentosales representantes de cada tubo magnético.

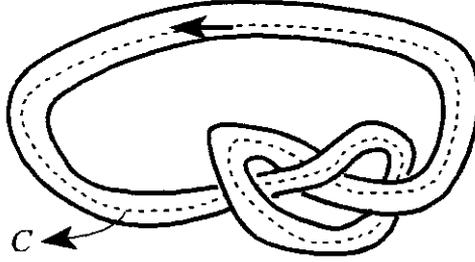


Figura 2.9: Un tubo filamental cuyo eje es el nudo trébol.

2.3.3 La helicidad de un tubo filamental autoenlazado y el teorema de Calugareanu

La relación entre el invariante de enlace y la helicidad en un tubo filamental autoenlazado ha sido estudiada por Moffatt y Ricca [61, 62, 63, 64], y Berger y Field [65], usando para el tubo filamental un modelo de cinta.

Buscamos una expresión para la helicidad en un tubo filamental T construido alrededor de una línea magnética C cerrada. Si el tubo T presenta autoenlaces (ver la figura 2.9), entonces su eje C presenta necesariamente una torsión no nula, y tampoco podemos evitar tener en cuenta el torcimiento de las líneas magnéticas dentro del tubo. Descomponemos el campo magnético en sus contribuciones paralela \mathbf{B}_a y perpendicular \mathbf{B}_b a C en cada punto, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_a + \mathbf{B}_b$. Cuando la sección de T tiende a cero (de aquí la importancia de considerar tubos filamentosales) podemos adoptar un sistema de coordenadas cilíndrico (ρ, θ, z) cuyo eje z coincida con el nudo C en cada punto, y suponer que los campos son de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_a &= B_z(\rho) \hat{\mathbf{z}} , \\ \mathbf{B}_b &= B_\theta(\rho) \hat{\boldsymbol{\theta}} . \end{aligned} \tag{2.53}$$

Evidentemente, $\nabla \cdot \mathbf{B}_a = \nabla \cdot \mathbf{B}_b = 0$, así que podemos introducir

potenciales vectores separados, $\mathbf{B}_a = \nabla \times \mathbf{A}_a$, $\mathbf{B}_b = \nabla \times \mathbf{A}_b$, que escogemos en el "gauge" de Coulomb, $\nabla \cdot \mathbf{A}_a = \nabla \cdot \mathbf{A}_b = 0$. Las líneas magnéticas de \mathbf{B}_b son círculos no enlazados, así que, por nuestro estudio previo (apartado 2.3.2)

$$\int_T \mathbf{A}_b \cdot \mathbf{B}_b d^3r = 0, \quad (2.54)$$

y la helicidad total en el tubo filamental es

$$h_m = \int_T \mathbf{A}_a \cdot \mathbf{B}_a d^3r + 2 \int_T \mathbf{A}_a \cdot \mathbf{B}_b d^3r. \quad (2.55)$$

Veamos primero la contribución axial h_a (la primera integral del lado derecho de (2.55), que sólo depende del campo axial). Formalmente, es igual al caso de dos tubos filamentosales enlazados, que ya hemos visto, pero con un sólo tubo. Teniendo esto en cuenta, obtenemos la expresión límite

$$h_a = \frac{(\delta\Phi)^2}{4\pi} \oint_C \oint_C \frac{(d\mathbf{r} \times d\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} = (\delta\Phi)^2 \mathcal{W}, \quad (2.56)$$

es decir, la contribución axial a la helicidad es igual al cuadrado de la intensidad del tubo filamental por el límite de la integral de Gauss cuando las dos curvas tienden a una, límite que denotamos por \mathcal{W} .

Consideremos ahora la otra contribución de (2.55), que es

$$h_b = 2 \int_T \mathbf{A}_a \cdot \mathbf{B}_b d^3r = 2 \int_T A_\theta(\rho) B_\theta(\rho) d^3r, \quad (2.57)$$

pues, de las ecuaciones (2.53), $\mathbf{A}_a = A_\theta(\rho) \hat{\theta}$, donde

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho A_\theta) = B_z(\rho). \quad (2.58)$$

Estudiando el cambio en h_b bajo un desplazamiento virtual $\delta\mathbf{T}(s)$ del tubo filamental como consecuencia de variaciones $\delta c(s)$, $\delta\tau(s)$ en la curvatura y torsión de C [66], se puede demostrar que (el cálculo es largo, y no considero necesario reproducirlo aquí, pero está hecho con todo detalle en [62])

$$h_b = (\delta\Phi)^2 (T + T_0), \quad (2.59)$$

donde \mathcal{T} es la *torsión total* de C , normalizada a 2π , y definida por

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2\pi} \oint_C \tau(s) ds , \quad (2.60)$$

y \mathcal{T}_0 es el número de vueltas que cualquier línea magnética que recorra la superficie del tubo T realiza alrededor del eje C . Este número se conoce con el nombre de *número de tuerca intrínseco* del tubo T (he traducido por “tuerca” la palabra inglesa “twist”). En conclusión, la helicidad del tubo magnético es la suma de las contribuciones (2.56) y (2.59), esto es,

$$h_m = (\delta\Phi)^2 (\mathcal{W} + \mathcal{T} + \mathcal{T}_0) . \quad (2.61)$$

Para conocer la interpretación del resultado (2.61) hemos de ir a las matemáticas, a conocer el teorema de Calugareanu [67, 68, 69, 70, 71].

Sea C una curva diferenciable cerrada en R^3 , que no se interseca a sí misma, y supongamos que no tiene puntos de inflexión (puntos de curvatura nula). Sea \mathbf{N} un vector unitario normal a C , expresable en función de los vectores normal \mathbf{n} y binormal \mathbf{b} de la curva C (2.40) como

$$\mathbf{N} = \mathbf{n} \cos \alpha + \mathbf{b} \sin \alpha . \quad (2.62)$$

Definimos los puntos de una curva C_N paralela a C como $\mathbf{r}_N = \mathbf{r} + \epsilon\mathbf{N}$, donde \mathbf{r} da los puntos de C y $0 < \epsilon \ll 1$. Así, podemos tomar C y C_N como los lados de una cinta cerrada muy estrecha. El *teorema de Calugareanu* (o teorema de White, en muchos textos) dice que el número de enlace de las curvas C y C_N se puede escribir como suma de tres términos no invariantes topológicos, pero con un significado geométrico claro,

$$L(C, C_N) = \mathcal{W}(C) + \mathcal{T}(C) + \mathcal{T}_0(C, \mathbf{N}) , \quad (2.63)$$

donde:

i) $\mathcal{W}(C)$ es el *número de cruce espacial*, en general un número real, definido por la forma límite de la integral de Gauss

$$\mathcal{W}(C) = \frac{1}{4\pi} \oint_C \oint_C \frac{(d\mathbf{r} \times d\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} . \quad (2.64)$$

El integrando de (2.64) no diverge, debido a que el límite

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} = \mathbf{t} , \quad (2.65)$$

está bien definido. Las características principales de la integral (2.64) son: depende sólo de la geometría de la curva C ; es invariante conforme (bajo movimientos rígidos o dilataciones del espacio que contiene a la cinta), pero su signo cambia bajo reflexión; si se pasa desde un cruce por debajo a un cruce por arriba en algún diagrama plano de C , su valor cambia en $+2$. Fuller [70] demostró que $\mathcal{W}(C)$ se puede escribir como el promedio del número de cruce $W(C)$ "plano", dado por (2.41), sobre todos los posibles diagramas planos de C ,

$$\mathcal{W} = \langle W \rangle . \quad (2.66)$$

Es sencillo verificar, desde esta expresión, que, si C es una curva contenida en un plano, excepto por pequeños saltos en sus cruces, entonces $\mathcal{W} = W$, calculando W en el plano de la curva, pero es importante notar que ésta es una situación muy especial, no generalizable.

ii) $\mathcal{T}(C)$ es la torsión total de la curva,

$$\mathcal{T}(C) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \tau(s) ds . \quad (2.67)$$

De esta fórmula, es claro que la torsión total no es un número entero.

iii) $\mathcal{T}_0(C, \mathbf{N})$ es el número de tuerca intrínseco o número (entero) de rotaciones que sufre el vector \mathbf{N} en una vuelta a C

$$\mathcal{T}_0(C, \mathbf{N}) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{d\alpha}{ds} ds . \quad (2.68)$$

Remarquemos ahora dos cuestiones. Primero, el único número entero de estos tres es el número de tuerca intrínseco, y ninguno de ellos es un invariante topológico, sólo lo es su suma, que también es un entero (el número de enlace). Por tanto, los valores de estas contribuciones se intercambian durante una deformación continua de la cinta, de tal manera que su suma sea constante. Tanto el número de cruce espacial como la torsión total varían de forma continua bajo deformaciones continuas de la cinta generada por C y C_N , siempre que no pasemos por

una configuración “degenerada” en el sentido de la existencia en ella de un punto de inflexión, que hemos definido al comienzo de esta sección como aquel que tiene curvatura nula. Si pasamos por una configuración degenerada, el entero \mathcal{T}_0 salta en ± 1 , pero también lo hace el entero $\mathcal{W} + \mathcal{T}$ en ∓ 1 , manteniéndose L constante. Este comportamiento está asociado al Movimiento I de Reidemeister [62], tal como aparece en la figura 2.5. Segundo, el teorema de Calugareanu tiene sentido siempre que la anchura de la cinta, que hemos llamado ϵ , sea muy cercana a cero pero constante, de manera se pueda tomar el límite a una sola curva C con un vector normal \mathbf{N} definido en ella (nótese que, de hecho, el número de enlace no depende de ϵ). Por tanto, no intentemos aplicar estas expresiones a otras configuraciones más generales.

La suma $\mathcal{T} + \mathcal{T}_0$ se conoce como *tuerca total*, denotada por T_W , y tiene la siguiente representación integral,

$$T_W = \frac{1}{2\pi} \oint_C (\mathbf{N} \times \mathbf{t}) \cdot d\mathbf{N} , \quad (2.69)$$

donde podemos ver explícitamente cómo depende de la elección de \mathbf{N} [72]. La tuerca total tiene las siguientes propiedades: es una función continua de C ; es invariante conforme, pero su signo cambia bajo reflexión; es aditivo, es decir, $T_W(A + B) = T_W(A) + T_W(B)$, donde A y B son dos trozos contiguos de la cinta $A + B$.

Gracias al teorema de Calugareanu, se llega a que la helicidad magnética en un tubo filamental T , cuyo eje es una curva cerrada C con autoenlaces, viene dada por

$$h_m = (\delta\Phi)^2 L(C, T) , \quad (2.70)$$

donde $L(C, T)$ es el número de enlace del eje C con cualquier línea magnética que recorra la superficie del tubo T .

Para acabar este apartado, damos en la figura 2.10 una imagen gráfica del significado de los tres sumandos del teorema de Calugareanu, y cómo se pueden transformar uno en otro, por deformaciones continuas, usando una cinta delgada. Estos intercambios corresponden a transformaciones entre sus contribuciones a la helicidad, que ocurren en la evolución temporal del campo magnético.

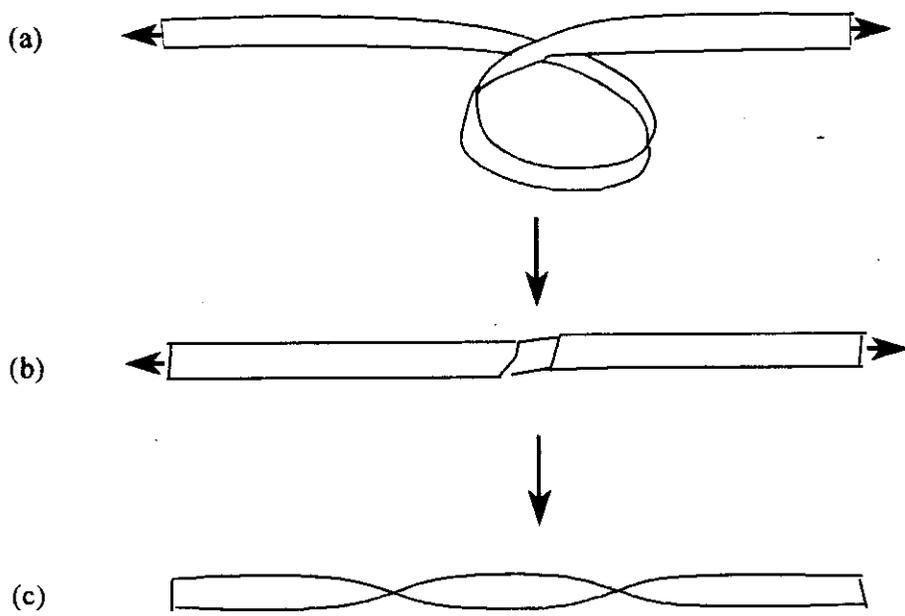


Figura 2.10: Contribuciones de cruce (a), torsión (b) y tuerca intrínseca (c) de una cinta al número de enlace.

2.3.4 Distribuciones continuas de líneas cerradas

El siguiente paso en la caracterización topológica de la helicidad es considerar una distribución continua. Rañada [38] tomó un dominio simplemente conexo D , y un campo \mathbf{B} sujeto a las condiciones:

- i) \mathbf{B} es regular y no se anula en el interior de D .
- ii) Las líneas magnéticas son curvas cerradas.

Bajo estas circunstancias es fácil ver que el número de enlace de dos cualesquiera líneas magnéticas no puede depender de las líneas que escojamos para calcularlo, pues dos curvas cerradas no pueden atarse ni desatarse bajo deformación continua. Por tanto, es una propiedad del propio campo, y lo denotaremos por $L(\mathbf{B})$ (en las circunstancias dadas por las condiciones (i) y (ii) anteriores). El número de enlace es invariante bajo deformación continua del propio campo y, en particular, es constante en el tiempo. De la misma manera, los campos magnéticos en un dominio D que satisfacen las condiciones (i) y (ii) se pueden clasificar en clases de homotopía, caracterizadas por su número de enlace.

Descomponemos el dominio D en una infinidad de tubos filamentosales con intensidades $\delta\Phi_i$, de tal forma que llenan por completo la región D . Por lo que hemos aprendido en los últimos dos apartados, y teniendo en cuenta que el número de enlace es invariante, la helicidad magnética en D resulta

$$\begin{aligned} h_m &= L(\mathbf{B}) \left(\sum_i \sum_{j \neq i} 2 \delta\Phi_i \delta\Phi_j + \sum_i (\delta\Phi_i)^2 \right) \\ &= L(\mathbf{B}) \left(\sum_i \delta\Phi_i \right)^2 = L(\mathbf{B}) \Phi^2, \end{aligned} \quad (2.71)$$

donde Φ es la intensidad total del campo magnético (la suma de las intensidades de todos los tubos que llenan D).

La demostración original empieza calculando el flujo magnético a través de una superficie S acotada por una línea magnética. Dado que todas las líneas magnéticas han de estar enlazadas con ella, con el mismo número de enlace $L(\mathbf{B})$, se obtiene que

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = L(\mathbf{B}) \Phi, \quad (2.72)$$

donde Φ es la intensidad total del campo. Ahora, tomemos un tubo filamental T cuyo eje es una línea magnética C , y escojamos una sección cualquiera S_T del tubo. La helicidad es, siguiendo el mismo método que en el apartado 2.3.2,

$$h_m(T) = \int_T \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, d^3r = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \int_{S_T} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS . \quad (2.73)$$

Aplicando ahora el resultado (2.72), esto es igual a

$$h_m(T) = L(\mathbf{B})\Phi \delta\Phi_T , \quad (2.74)$$

siendo $\delta\Phi_T$ la intensidad del tubo filamental T . Si sumamos ahora la contribución de todos los tubos, obtenemos el resultado (2.71),

$$h_m = L(\mathbf{B})\Phi^2 . \quad (2.75)$$

2.3.5 La helicidad de dos líneas magnéticas no cerradas y el número de enlace asintótico

En los tres apartados anteriores se ha visto que la contribución a la helicidad de configuraciones de campo sencillas, en las cuales las líneas magnéticas están enlazadas, depende del invariante de enlace de estas líneas. Sin embargo, son posibles configuraciones en las cuales las líneas de campo no se cierran, sino que evolucionan indefinidamente, llenando densamente una determinada superficie. El número de enlace que hemos definido no tiene sentido en este caso, de manera que es difícil evaluar el significado de la helicidad relativa a la topología de estas líneas. El método de estudio de estos casos de líneas no cerradas se debe a Arnold [73], que usó el lenguaje de los sistemas dinámicos para definir el invariante de enlace del problema. En este apartado se resume el resultado de Arnold simplificando al máximo sus argumentos, por cuestiones de claridad.

Sea D una variedad tridimensional compacta y simplemente conexa. Dado un campo magnético en D , sus líneas de fuerza son las trayectorias del sistema dinámico $x(t)$ cuya velocidad es

$$v(x(t)) = \frac{d}{dt} x(t) , \quad (2.76)$$

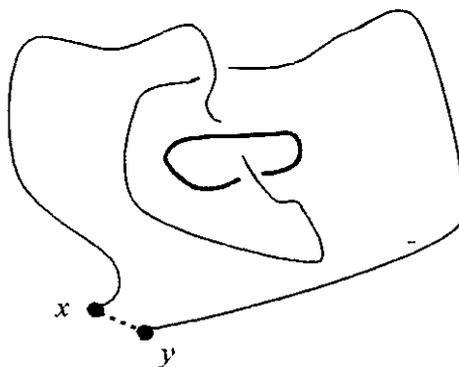


Figura 2.11: El enlace del segmento de trayectoria con una curva cerrada, usando un arco.

es decir, \mathbf{B} es el campo de velocidades (2.76), donde, durante este apartado, t no es el tiempo (que no escribimos), sino el parámetro de evolución de la línea magnética con inicio en $x(0) = x \in D$. Las líneas magnéticas se suponen no cerradas.

Sea $x \in D$ el punto inicial de una línea magnética $x(t)$. En primer lugar, Arnold definió el número de enlace asintótico de un segmento muy grande de esta trayectoria con una curva cerrada γ . Para ello se define una familia de “arcos” $\Delta(x, y)$ que se usan para unir pares de puntos $x, y \in D$. Se debe asumir que, si x, y no pertenecen a γ , entonces Δ no interseca γ . Como vemos en la figura 2.11, se utiliza un $\Delta(x, y)$ particular, con $x(0) = x$, $x(T) = y$, para formar una curva cerrada $\Gamma_T(x)$ a partir del segmento de trayectoria $x(t)$ correspondiente a $0 \leq t \leq T$. Se debe suponer que T es muy grande para que el segmento de trayectoria sea mucho mayor que Δ . Sea $L_T(x)$ el número de enlace de las curvas cerradas $\Gamma_T(x)$ y γ . Se define el *número de enlace asintótico* de la trayectoria $x(t)$ con la curva γ como

$$\lambda(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{L_T(x)}{T} . \quad (2.77)$$

El siguiente paso es generalizar (2.77) para el caso de dos trayectorias. Sean $x_1, x_2 \in D$ los puntos iniciales de dos líneas de campo $x_i(t_i)$,

con $i = 1, 2$. Introduzcamos, por el método del párrafo anterior, arcos $\Delta(x_i(T), x_i)$ para cerrar los segmentos de trayectoria $x_i(t)$, $0 \leq t_i \leq T_i$. Si $L_{T_1 T_2}(x_1, x_2)$ es el número de enlace de las curvas cerradas resultantes, se define el número de enlace asintótico de las líneas magnéticas $x_1(t_1)$ y $x_2(t_2)$ como

$$\lambda(x_1, x_2) = \lim_{T_1, T_2 \rightarrow \infty} \frac{L_{T_1 T_2}(x_1, x_2)}{T_1 T_2}; \quad (2.78)$$

donde se asume que los parámetros T_i varían de manera que las curvas cerradas no se intersecan.

Para acercarnos a la expresión de la helicidad, introducimos en L una expresión análoga a la integral de Gauss, es decir, definimos otro número de enlace asintótico de las trayectorias $x_1(t_1)$ y $x_2(t_2)$, dado por

$$\lambda'(x_1, x_2) = \lim_{T_1, T_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi T_1 T_2} \int_0^{T_1} dt_1 \int_0^{T_2} dt_2 (v_1 \times v_2) \cdot \frac{x_1(t_1) - x_2(t_2)}{\|x_1(t_1) - x_2(t_2)\|^3}, \quad (2.79)$$

donde v_i son las velocidades de las trayectorias $x_i(t_i)$, es decir, los campos magnéticos que las definen. Arnold demuestra que, en el límite $T_1, T_2 \rightarrow \infty$, la diferencia $\lambda - \lambda'$ es cero, y que el número de enlace asintótico es independiente del sistema de arcos Δ utilizados para definirlo.

Ahora, se define el valor medio del número de enlace asintótico $\lambda(x_1, x_2)$ como la integral de (2.79) a todos los puntos $x \in D$. Para ello, se hace uso del *teorema ergódico* de Birkhoff [74], que permite dar una medida de integración apropiada, y demostrar que el resultado para el valor medio de (2.79) es (introduciendo ya notación vectorial, y cambiando la velocidad por el campo magnético)

$$\lambda = \frac{1}{4\pi} \int_D \mu_1 \int_D \mu_2 (\mathbf{B}(r_1) \times \mathbf{B}(r_2)) \cdot \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3}, \quad (2.80)$$

donde μ es la medida ergódica. La integral (2.80) es la expresión para la helicidad magnética que vimos en (2.46). Por tanto, el resultado es que *la helicidad magnética es igual al valor medio del número de enlace asintótico de un par de líneas magnéticas*. Si las líneas están cerradas, el número de enlace asintótico coincide con el número de enlace clásico, de manera que el resultado (2.80) es general. Otra cuestión a resaltar es que no aparecen flujos en la helicidad de un par de líneas magnéticas

(2.79). Esto ocurre porque las unidades de flujo magnético ya están introducidas en las líneas magnéticas cuando igualamos campo magnético y velocidad de las trayectorias.

La conclusión de todo lo estudiado en esta sección es que la helicidad de un campo vectorial solenoidal es una medida del enlace de las líneas del campo. Incluso si estas líneas no son líneas cerradas, tiene sentido la noción de enlace, pues se puede definir un valor medio del número de enlace asintótico, que coincide con la helicidad. Por tanto, en el estudio topológico de cualquier campo vectorial con divergencia nula, la helicidad de este campo será una cantidad distinguida.

2.4 Algunas aplicaciones de la helicidad a problemas físicos

Después de haber escrito sobre algunas de las principales características dinámicas y topológicas de la helicidad, en esta sección quiero comentar brevemente las aplicaciones que han provocado el interés de los físicos por su estudio. Tras lo visto en las secciones anteriores, parece claro que, al utilizar la helicidad en estas aplicaciones, se está introduciendo la información topológica de los campos vectoriales que están presentes en cada uno de estos problemas físicos.

En primer lugar, la helicidad es una cantidad importante para el análisis de ciertos aspectos topológicos de los campos electromagnéticos en el vacío. Quizá sea éste el contexto en que más ha tardado en aparecer esta cantidad, y de todos modos a él están dedicados los siguientes tres capítulos de esta memoria. Dejaré, pues, las aplicaciones a este campo para entonces.

El concepto de helicidad de un campo vectorial solenoidal, y sus por el momento más cruciales aplicaciones, nacieron en otras áreas de la física, como son la mecánica de fluidos, la física del plasma y la llamada teoría de la dinamo magnética. El objetivo de esta sección es dar un breve vistazo a estos resultados a la luz de nuestro actual conocimiento del contenido dinámico y topológico de esta cantidad. Por otro lado, requeriremos, cuando se llegue el capítulo 6, cierta familiaridad con conceptos básicos de alguna de estas disciplinas, como la aproximación

magnetohidrodinámica en plasmas. Es éste un buen momento para introducirlos.

2.4.1 Dinámica de fluidos

Como hemos apuntado en el apartado 2.2.1, en dinámica de fluidos ha recibido mucha atención la helicidad de vórtices, que denotaremos por

$$h_v = \int_D \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \, d^3r , \quad (2.81)$$

donde $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ es el campo de velocidad del fluido, $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v}$ es la vorticidad, y D es un volumen de fluido que se mueve con el flujo, y que supondremos compacto y simplemente conexo. Por lo comentado en la sección 2.3, ya sabemos que la helicidad de vórtices (2.81) se interpreta topológicamente en función del concepto de enlace de las líneas de vorticidad del flujo. Ahora, en primer lugar veamos cómo se conserva en el tiempo para ciertas clases de fluidos.

La primera referencia sobre esta cuestión es de Moffatt [17], en 1969. El consideró un flujo ideal, sin efectos viscosos, y tal que la presión $p(\mathbf{r}, t)$ es función únicamente de la densidad $\rho(\mathbf{r}, t)$, esto es, $p = p(\rho)$, el proceso termodinámico es isotérmico. En estas condiciones, la ecuación de movimiento del flujo es el siguiente caso particular de la llamada *ecuación de Navier-Stokes*,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla(h + U) , \quad (2.82)$$

donde U es un potencial para las fuerzas exteriores por unidad de masa del fluido (por tanto, las supondremos fuerzas conservativas), h es la integral $h = \int dp/\rho$, y se define la derivada convectiva o derivada de Stokes de una cantidad que depende sólo de la posición y el tiempo, a partir de la regla de la cadena, como

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) . \quad (2.83)$$

Además, tenemos la ecuación de continuidad para la densidad de masa del fluido, ecuación que se puede escribir como

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 . \quad (2.84)$$

A partir de la definición de la vorticidad como el rotacional de la velocidad, y usando relaciones básicas del cálculo vectorial, tenemos que la ecuación (2.82) implica

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} - (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{w} . \quad (2.85)$$

Si despejamos ahora la divergencia de la velocidad en la ecuación de continuidad (2.84), se llega a la importante ecuación

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{w}}{\rho} \right) = \left(\frac{\mathbf{w}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} . \quad (2.86)$$

Consideremos una línea de flujo, esto es, una línea de partículas del fluido que se mueve con él, y sea $\delta \mathbf{r}$ un elemento de longitud de esa línea. Si \mathbf{v} es la velocidad del fluido en un extremo del elemento de longitud, la velocidad en el otro extremo será $\mathbf{v} + (\delta \mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v}$, de manera que $d(\delta \mathbf{r})/dt = (\delta \mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v}$, que es la misma razón de cambio que la presentada por el vector \mathbf{w}/ρ en (2.86). Por tanto, se sigue que, si estos dos vectores están inicialmente en la misma dirección, entonces seguirán siempre paralelos y sus módulos mantendrán la misma proporción. En otras palabras, si dos partículas de fluido están muy cerca entre sí y pertenecen a la misma línea del campo \mathbf{w}/ρ en algún instante, entonces siempre pertenecerán a la misma línea de campo, y el valor de la cantidad w/ρ será proporcional a la distancia entre partículas. La conclusión es que las líneas del campo \mathbf{w}/ρ se mueven con las partículas de fluido que están en ella y son líneas materiales, lo que se conoce como que están “congeladas” en el fluido. El caso particular de un fluido incompresible es especialmente claro: un fluido incompresible cumple que $d\rho/dt = 0$ (por tanto, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ también, por la ecuación de continuidad), de modo que las líneas de vorticidad son líneas materiales, su topología y sus enlaces se mantienen constantes por esto, y así ha de ser la helicidad de vórtices, que sabemos que da cuenta de estos enlaces. De aquí la importancia de la helicidad en la clasificación topológica de flujos [75, 76, 77, 78].

De (2.82) y (2.86) se obtiene que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\rho} \right) = \frac{\mathbf{w}}{\rho} \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} - h - U \right) , \quad (2.87)$$

donde $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$. Ahora es fácil probar que

$$\begin{aligned} \frac{dh_v}{dt} &= \int_D \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\rho} \right) \rho \, d^3r = \\ &= \int_{\partial D} \left(\frac{v^2}{2} - h - U \right) \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0, \end{aligned} \quad (2.88)$$

con la necesaria condición $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0$ en la superficie convectiva ∂D .

La invariancia de la helicidad de vórtices con el tiempo, para este tipo de flujos, también se puede establecer desde un punto de vista cercano al usual en teoría clásica de campos, usando el teorema de Noether y técnicas de teoría de grupos [79, 80, 81, 82]. Es éste un ejemplo del creciente acercamiento de las herramientas típicas de la teoría de campos a la dinámica de fluidos.

En el contexto de la dinámica de fluidos, la helicidad, así como la energía, se conserva sólo para flujos ideales y, en general, no se conserva en presencia de efectos viscosos. Este comportamiento de la helicidad está asociado a la ruptura y reconexión de las líneas de vorticidad, es decir, al cambio de su topología [83]. Pero, mientras que la viscosidad conlleva siempre una disipación de la energía, puede ser responsable de la producción o la destrucción de helicidad. Un ejemplo visual prototipo es la interacción de dos anillos de vorticidad (pensemos en anillos de humo de un cigarrillo), en el cual la evolución de la helicidad total con el tiempo es un indicador de la interacción viscosa y de los efectos de ruptura y reconexión de las líneas de vorticidad.

Otro problema en que la helicidad tiene algo que decir es el de los fenómenos turbulentos en fluidos [84] que, como es conocido, traen consigo una cascada de energía, que pasa desde las escalas grandes a las escalas pequeñas (hasta llegar a las moléculas del fluido), donde por escala entendemos aquí el orden de magnitud de las distancias sobre las cuales la velocidad varía apreciablemente con respecto a la velocidad media. ¿Qué influencia tiene una helicidad media no nula en estos fenómenos de cascada? Si los afecta, hemos de comprender por qué, pero si no los afecta, también hemos de saber cómo se comporta el fluido para respetar un invariante del caso no viscoso (la energía) pero ignorar otro (la helicidad).

En el caso de los fluidos incompresibles sin viscosidad, el concepto de helicidad de vórtices se ha generalizado a variedades de dimensión

mayor que tres. Se ha demostrado que existe al menos una helicidad generalizada si la variedad es de dimensión impar, como veremos ahora mismo, y hay un número infinito de invariantes integrales de tipo helicidad si la variedad es de dimensión par. Tomando el rotacional en ambos lados de (2.82), Olver [85] demostró que esta ecuación tiene una estructura hamiltoniana (ver, por ejemplo, el clásico de Arnold [86]), y que las degeneraciones del operador hamiltoniano conducen a la conservación de la helicidad. Este resultado fue generalizado por Serre [87] a espacios R^n , y más tarde por Khesin y Chekanov [88] a variedades arbitrarias de dimensión impar. En este último caso, el invariante es

$$\int_M V \wedge (dV)^m, \quad (2.89)$$

donde M es una variedad de dimensión $n = 2m + 1$, la velocidad del fluido viene escrita en función de la 1-forma V , y dV es la vorticidad. Para $m = 1$ se recupera la helicidad de vórtices.

2.4.2 Magnetohidrodinámica

En meteorología y física del plasma, un problema teórico básico es el de un fluido conductor en presencia de un campo magnético. Evidentemente, se inducen campos eléctricos y flujos de corriente. Las corrientes modifican el campo magnético y a la inversa, resultando una interacción compleja de los fenómenos magnéticos y de dinámica de fluidos. Como veremos ahora, el concepto de helicidad tiene una interpretación muy interesante en el caso de la aproximación magnetohidrodinámica, que es la aproximación de conductividad infinita del fluido, y que se usa en especial en plasmas astrofísicos y física solar (como ejemplos del uso de la magnetohidrodinámica en estos contextos, ver las referencias [89]-[102]).

Es conveniente repasar brevemente, en primer lugar, cómo se llega a estas ecuaciones [103]. Supondremos que el fluido es un medio magnéticamente homogéneo, isótropo y lineal, de manera que la permeabilidad magnética μ es constante. Además, si el periodo de variación del campo magnético, dado por la inversa de la frecuencia de Larmor eB/m_e , donde e y m_e son respectivamente la carga y la masa del electrón, es mucho mayor que el tiempo libre medio de los electrones de conducción,

podemos despreñar de las ecuaciones de Maxwell la derivada temporal del campo eléctrico, y suponer que la conductividad del fluido σ es constante. Este es el caso ideal de un plasma, un gas de partículas con baja densidad. Las ecuaciones de Maxwell se escriben entonces, en función del campo magnético solenoidal \mathbf{B} ,

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} = \sigma\mu(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) , \quad (2.90)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} . \quad (2.91)$$

Si despejamos el campo eléctrico de la primera de estas ecuaciones y lo sustituimos en la segunda, se llega a

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\sigma\mu} \Delta \mathbf{B} . \quad (2.92)$$

Por otro lado, hay que tener en cuenta el movimiento del fluido. Además de la ecuación de continuidad (2.84), éste está dado por la ecuación de Navier-Stokes (2.82) en las condiciones conocidas de fluido sin viscosidad y tal que la presión es función únicamente de la densidad (ver el apartado anterior), pero hemos de añadir ahora el efecto del campo magnético. Resulta entonces

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla(h + U) + \frac{\mathbf{f}}{\rho} , \quad (2.93)$$

donde $\mathbf{f} = (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$ es la fuerza magnética.

En la *aproximación magnetohidrodinámica* se toma la conductividad del fluido como infinita, es decir, se supone que el plasma es un conductor perfecto. Así mismo, por la ecuación (2.90) esto ha de ser complementado por la condición sobre el campo eléctrico

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{v} , \quad (2.94)$$

que lo elimina así de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica ideal. En resumen, estas ecuaciones son

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \nabla A^0 ,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) , & (2.95) \\
\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla(h + U) + \frac{1}{\rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} , \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \rho \nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \rho .
\end{aligned}$$

La ecuación de variación temporal del campo eléctrico se puede escribir también, con ayuda de la ecuación de continuidad, como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) = \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} . \quad (2.96)$$

Esta ecuación es formalmente igual a la hallada en (2.86) para la vorticidad del fluido, de modo que la discusión que se hizo entonces para las líneas de vorticidad es igualmente válida para las líneas magnéticas en este caso. Como consecuencia, las líneas magnéticas (o, mejor dicho, las líneas del campo \mathbf{B}/ρ) están “congeladas” en el fluido, y son, de hecho, líneas de partículas materiales. Parece, por tanto, natural, que la helicidad magnética se conserve en el tiempo para la magnetohidrodinámica ideal, ya que tiene que ver con la topología de las líneas de partículas materiales. Teniendo en cuenta las variaciones temporales de \mathbf{A} y \mathbf{B} dadas en (2.95), se obtiene

$$\frac{dh_m}{dt} = - \int_{\partial D} \left((A^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \right) dS = 0 , \quad (2.97)$$

suponiendo que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ y $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$ son cero en la superficie convectiva ∂D , frontera del dominio simplemente conexo D .

Por otro lado, es también sencillo verificar, para la aproximación magnetohidrodinámica, que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}}{\rho} \right) = \frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} - h - U \right) , \quad (2.98)$$

de manera que la cantidad

$$\int_D \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} \, d^3r \quad (2.99)$$

es otra constante del movimiento [17], si $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ en ∂D (la demostración es completamente análoga a la que se hizo en el apartado anterior para la helicidad de vórtices). La helicidad magnética y la cantidad (2.99) forman parte de un conjunto de invariantes magneto-hidrodinámicos, que se suelen llamar invariantes de Woltjer [104, 105]. El concepto de helicidad nació en este contexto y, como veremos, sus aplicaciones dentro de él son muy numerosas, así como su significado topológico es especialmente claro en función del enlace de líneas materiales.

La helicidad magnética juega un papel muy importante en el estudio de los *campos sin fuerza* [106, 107, 32, 104, 50], así llamados porque la fuerza magnética producida por el campo es cero, debido a que

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = 0, \quad (2.100)$$

es decir, si nos situamos en el caso magnetohidrodinámico, vemos que el término magnético no aparece en la ecuación de Navier-Stokes para el fluido (2.93). La introducción, en 1954, de este concepto [106] vino motivada por sus aplicaciones en el estudio de plasmas astrofísicos, especialmente en física solar [108]-[118]. Se define un campo sin fuerza como uno tal que satisface la condición

$$\nabla \times \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B}, \quad (2.101)$$

donde λ es un escalar, en general función de la posición y del tiempo. Como veremos, en un sistema en que las fuerzas magnéticas son dominantes y que posee algún mecanismo para la disipación del movimiento del fluido, los campos sin fuerza son las configuraciones finales naturales. Esto se comprende bien desde un punto de vista intuitivo, dado que, cuando la energía es mínima no puede transferirse al plasma, hecho reflejado en la ecuación (2.100) de la magnetohidrodinámica.

El caso en que λ es una constante es especialmente interesante [119, 120, 121], sobre todo en el estudio de la energía magnética contenida en los campos sin fuerza [122]. En el contexto de la magnetohidrodinámica ideal, que hemos tratado más arriba y que supone una conductividad infinita del plasma, Woltjer [32], al minimizar la energía magnética total con la ligadura de la conservación de la helicidad, introdujo un escalar

λ como multiplicador de Lagrange del problema variacional

$$\delta \int_D [\|\nabla \times \mathbf{A}\|^2 - \lambda \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})] d^3r = 0, \quad (2.102)$$

y encontró como solución la ecuación (2.101) con λ constante [123, 124, 125]. De esta manera, y de nuevo usando la helicidad magnética, Woltjer consiguió establecer lo que acabamos de comentar, es decir, que los campos sin fuerza, con λ constante, corresponden al estado de energía mínima de un sistema magnetohidrodinámico ideal. Posteriormente, Arnold [73], a través de una combinación de las desigualdades de Schwarz y Poincaré, y utilizando la invariancia de la helicidad, encontró que la energía magnética está acotada por debajo por una constante positiva cuando la helicidad total es no nula, y Freedman [126] vio que también lo está si la helicidad es cero, pero sin dar la cota inferior. De este modo, el trabajo de Woltjer indica que, en muchos sistemas magnetohidrodinámicos ideales, el estado fundamental de energía mínima con λ constante es topológicamente inaccesible, debido a la interpretación topológica de la helicidad y a que no existe disipación en la magnetohidrodinámica ideal, así que ¿cómo se pueden romper las líneas magnéticas, que son líneas de partículas materiales?

El siguiente paso lo dio Taylor en 1974 (ver las referencias [127, 124, 128, 129]), quien también usó el concepto de helicidad y conjeturó que, a través de un proceso de relajación del campo magnético, se consigue llegar al estado de energía mínima, que es un campo sin fuerza. Taylor usó un plasma con geometría toroidal, inicialmente en la aproximación magnetohidrodinámica. En tal caso, la conductividad es infinita, y se conserva no solo la helicidad total, sino también la helicidad en todo tubo magnético (en realidad, en todo dominio interior al plasma y tal que su frontera es paralela al campo). Ahora, permite al plasma que se produzcan efectos finitos de difusividad, es decir, el plasma no se mantiene en conductividad infinita [130], de manera que algunas líneas magnéticas pueden romperse y reconectarse [131, 132, 133, 134], y la helicidad en cada tubo magnético pierde su significado. La conjetura de Taylor es que la helicidad total, en el proceso de relajación, decae en una escala de tiempo mucho mayor que la de la energía magnética y el resto de invariantes de helicidad parciales. Por lo tanto, se puede tomar la helicidad total como constante durante el proceso de relajación, y

seguir un procedimiento análogo al de Woltjer. El resultado es que el estado final de energía mínima es accesible, y está unívocamente determinado, de tal manera que sólo depende de la cantidad h_m/Φ , donde h_m es la helicidad total y Φ es el flujo magnético toroidal (a través de una sección cualquiera del toro), que también se conserva en el proceso [135, 136]. Este estado final es un campo sin fuerza (2.101), pero ahora λ depende de la posición, aunque es constante en cada superficie magnética. La hipótesis de Taylor parece estar apoyada por los experimentos de confinamiento [50], pero ciertamente conlleva un problema teórico fundamental: si los invariantes de helicidad en cada tubo magnético interior al plasma pueden cambiar de manera que sea posible la relajación, ¿cómo puede conservarse la helicidad total?. Esta cuestión, a pesar de haber recibido mucha atención [137, 138, 139], no está completamente resuelta.

Por ejemplo, para un plasma toroidal ideal se ha establecido [140, 141] la existencia de un conjunto infinito de invariantes dados en la forma

$$h_\alpha = \frac{1}{2} \int_D \chi^\alpha \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, d^3r \, , \quad (2.103)$$

constantes frente a cierta clase de variaciones ideales de los flujos magnéticos toroidal Φ y poloidal Ψ , donde el flujo toroidal se calcula, como hemos dicho antes, a través de una sección del toro, y el flujo poloidal es el flujo magnético a través de una cinta cerrada que recorre el toro, siendo uno de sus ejes el eje del toro, y el otro cualquier curva paralela a la anterior y que recorra la superficie del toro por el camino "largo". El escalar χ es el flujo helicoidal, definido como $\chi = q\Psi - \Phi$, donde q es un número racional, que determina la pendiente de la hélice. El argumento se basa en suponer que las variaciones respetan la simetría helicoidal, de manera que sólo la helicidad magnética h_0 , que es independiente de la pendiente q , se conservará cuando se presenten variaciones de esta pendiente.

El problema de la posible destrucción de otros invariantes de tipo topológico, aparte de la helicidad, en el proceso de relajación, ha sido tratado por Freedman y Berger [142]. Sus resultados son, en general, consistentes con la conjetura de Taylor de la relajación, pero sugieren que la estabilidad de ciertos tubos magnéticos podría impedir al campo magnético llegar al estado de energía mínima.

2.4.3 Teoría de la dinamo

Por último, me gustaría resaltar que la helicidad tiene un significado relevante en el contexto de la *teoría de la dinamo*, que es la teoría del crecimiento espontáneo de campos magnéticos en fluidos conductores [83]. Centrémonos en la dinamo magnetohidrodinámica [143]. El movimiento turbulento del fluido conductor puede conducir a la generación de un campo magnético o, con mayor precisión, a su amplificación, y también a su reorientación. Como vimos en el apartado 2.4.2, la variación con el tiempo del campo magnético es

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu\sigma} \Delta \mathbf{B} . \quad (2.104)$$

Según la teoría del campo medio, introducimos la turbulencia a través del cambio

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} + \delta \mathbf{v} , \quad (2.105)$$

donde el valor medio de $\delta \mathbf{v}$ es cero. El campo magnético medio responde con un incremento $\delta \mathbf{B}$, que también es nulo en promedio. Pero, al introducir los valores transformados de la velocidad y el campo magnético en (2.104), aparece un término nuevo en el lado derecho, que está dado por

$$\nabla \times (\delta \mathbf{v} \times \delta \mathbf{B}) , \quad (2.106)$$

y este término no tiene promedio nulo. La conclusión es que ha surgido un campo eléctrico efectivo, que puede desarrollarse en función del campo magnético medio y su rotacional, como

$$\mathcal{E} = \alpha \mathbf{B} - \beta \nabla \times \mathbf{B} , \quad (2.107)$$

cuyos coeficientes α y β están determinados exclusivamente por las propiedades estadísticas de la turbulencia y por las propiedades físicas del fluido. La ecuación (2.104) para el campo magnético medio toma la forma

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \alpha \nabla \times \mathbf{B} + \frac{1}{\mu\sigma_T} \nabla^2 \mathbf{B} , \quad (2.108)$$

donde la conductividad efectiva σ_T es

$$\sigma_T = \frac{\sigma}{1 + \mu\beta\sigma} . \quad (2.109)$$

De esta manera, el coeficiente β sirve para reducir el valor de la conductividad. Pero el coeficiente principal α es de vital importancia, pues da lugar a la inestabilidad de la dinamo [144, 145, 146]. Si α es no nulo, es posible el proceso de generación de campo magnético.

La helicidad magnética no se conserva en la dinamo α porque σ_T no es infinita. Por tanto, podemos hacer su transformada de Fourier,

$$h(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} h_m(t) . \quad (2.110)$$

En el límite de $\mu\sigma_T$ pequeño, el coeficiente α es expresable a través de la siguiente expresión, que lo relaciona, de este modo, con la integral del espectro de la helicidad,

$$\alpha = \frac{-\mu\sigma_T}{3} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2} h(\omega) . \quad (2.111)$$

En estas condiciones, la ecuación (2.108) tiene solución del tipo campo sin fuerza $\nabla \times \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B}$ si se cumple que $|\alpha\lambda| > 1/\mu\sigma_T$.

Para terminar, digamos que, en el otro límite, cuando $\mu\sigma_T$ tiende a infinito, la teoría del campo medio tiene muchas dificultades, aún no resueltas. Este límite es muy importante en contextos astrofísicos, donde es usual suponer que, tanto α como β , están dados, en orden de magnitud, por las escalas de velocidad y de longitud de la turbulencia (v_0, l_0) , y son independientes del valor de $\mu\sigma_T$,

$$\alpha = kv_0 , \quad \beta = k'v_0l_0 . \quad (2.112)$$

El crecimiento máximo del campo magnético medio ocurre en una escala de longitud de orden β/α , pero, si la estimación (2.112) es correcta, entonces la inestabilidad del campo medio progresará con mayor eficacia en la escala l_0 de la propia turbulencia, lo cual entra en contradicción con la filosofía de la teoría del campo medio, que separa las escalas de las cantidades medias de las de las cantidades de fluctuación.

Capítulo 3

La helicidad electromagnética

3.1 Introducción. Objetivos del capítulo

En el capítulo anterior se han resumido los principales resultados sobre la helicidad, especialmente su contenido topológico, en función del concepto de enlace de las líneas de campo, y se han mencionado algunos de los contextos en los cuales esta cantidad tiene importantes aplicaciones. En particular, se ha analizado la helicidad magnética, que es la helicidad natural que aparece en la teoría clásica de Maxwell. Además, como se mencionó en la sección 2.4, la helicidad es también importante cuando nos restringimos a los campos electromagnéticos en el vacío, aunque su estudio en este contexto sea muy reciente. En este caso, las ecuaciones de Maxwell son especialmente simétricas, y esto se refleja en algunas propiedades especiales de la helicidad. El objetivo de este capítulo es el estudio de estas propiedades. Lo que sigue está basado en nuestras aportaciones a este tema.

En la sección 3.2 se verá que, debido a la dualidad de las ecuaciones de Maxwell en el vacío, podemos definir una helicidad eléctrica, que complementa a la helicidad magnética y tiene sus mismas propiedades. La sección 3.3 está dedicada a la helicidad electromagnética, que se define como la suma de las helicidad magnética y eléctrica de un campo de Maxwell en el vacío. Veremos que esta cantidad tiene un con-

tenido microscópico muy importante, que complementa a su contenido topológico. De hecho, se demostrará que la helicidad electromagnética es la cantidad clásica formalmente equivalente al operador cuántico de helicidad, definido como el operador que, al actuar sobre un estado fotónico, cuenta el número de fotones con polarización dextrógira y lo resta del número de fotones con polarización levógira.

3.2 Las helicidades de un campo electromagnético en el vacío

La teoría de Maxwell en el vacío es muy especial porque presenta una simetría llamada dualidad, que se puede resumir diciendo que toda solución (\mathbf{E}, \mathbf{B}) de sus ecuaciones define otra solución, dada por el par $(-\mathbf{B}, \mathbf{E})$. Esto indica que los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} juegan un papel similar en la teoría, y podemos definirlos a través de dos cuadripotenciales simultáneamente, que han de cumplir las ecuaciones de dualidad. En relación con esto, es positivo recordar que son los campos eléctrico y magnético, y no los potenciales, los observables de la teoría clásica, debido a que los últimos están definidos excepto una transformación "gauge". En particular, existe una helicidad eléctrica análoga a la helicidad magnética que ya hemos estudiado y que, como veremos, satisface las mismas propiedades. Por otra parte, como un primer acercamiento al resultado central de este capítulo, que se verá en la siguiente sección, nos preguntaremos en qué condiciones las helicidades eléctrica y/o magnética son iguales a la proyección del momento angular total en la dirección del movimiento del campo.

Los contenidos de esta sección están basados principalmente en los trabajos [38, 147].

3.2.1 La teoría de Maxwell en el vacío. Dualidad electromagnética

En un espacio vacío, donde no hay cargas ni corrientes eléctricas, es decir $j^\mu(x) = 0$, las ecuaciones de Maxwell para los campos eléctrico y magnético, medidos en unidades de Heaviside-Lorentz naturales, se

reducen a

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \quad (3.2)$$

donde \mathbf{E} y \mathbf{B} se pueden escribir en función de un cuadripotencial vector $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$ como

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla A^0, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (3.3)$$

Es sencillo verificar que, dadas las definiciones (3.3), las dos primeras ecuaciones de Maxwell (3.1) son simplemente identidades. En efecto, sustituyendo (3.3) en (3.1) obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 & (3.4) \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \times (\nabla A^0) + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} = 0 \end{aligned}$$

de manera que sólo hay dos ecuaciones dinámicas, que son (3.2). Esto se ve mejor en el lenguaje de las formas diferenciales en nuestro espacio de Minkowski. El potencial vector se puede escribir como una 1-forma,

$$A = A_\mu dx^\mu, \quad (3.5)$$

y el tensor electromagnético $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, que se corresponde con las definiciones (3.3) a través de las identidades $\mathbf{E}_i = F^{i0}$, $\mathbf{B}_i = -1/2 \varepsilon_{ijk} F^{jk}$, se puede dar como la llamada *2-forma de Faraday*,

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (3.6)$$

La derivada exterior de la forma potencial es la forma de Faraday, como vemos,

$$dA = \partial_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = F. \quad (3.7)$$

Ahora, y dada la propiedad $d^2 = 0$ de la derivada exterior,

$$dF = d^2 A = 0 \Rightarrow \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0, \quad (3.8)$$

de la cual se obtienen (3.1). Por tanto, estas ecuaciones son identidades geométricas (o cinemáticas) y no tienen contenido dinámico. La ecuación (3.8) se conoce, en términos geométricos, como *identidad de Bianchi* [37].

La dinámica del campo electromagnético en el vacío viene dada por las ecuaciones de Euler-Lagrange que surgen al minimizar la acción de Maxwell-Lorentz,

$$\mathcal{A}_{elm} = \frac{-1}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x, \quad (3.9)$$

donde la integral se efectúa en el espacio de Minkowski, y son

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (3.10)$$

lo que es análogo a las ecuaciones (3.2) si utilizamos vectores tridimensionales. Es muy interesante dar la expresión (3.10) en función de formas diferenciales, siguiendo los pasos de la ecuación (3.8). Para ello es necesario introducir el *operador de dualidad o estrella de Hodge* $*$.

Dada una variedad diferenciable M de dimensión n , existe un isomorfismo entre el espacio de r -formas en M , llamado $\Omega^r(M)$, y el espacio de $(m - r)$ -formas $\Omega^{m-r}(M)$. Si la variedad M está provista de una métrica $g_{\mu\nu}$, el isomorfismo natural entre estos dos espacios viene dado por la aplicación

$$* : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{m-r}(M) \quad (3.11)$$

cuya acción sobre una base de $\Omega^r(M)$ es

$$*(dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}) = \frac{\sqrt{|g|}}{(m-r)!} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_r \nu_{r+1} \dots \nu_m} dx_{\nu_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx_{\nu_m}, \quad (3.12)$$

donde $g = \text{Det}(g_{\mu\nu})$. Por ejemplo, para la r -forma

$$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \quad (3.13)$$

tenemos que su forma dual es

$$*\omega = \frac{\sqrt{|g|}}{r!(m-r)!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_r \nu_{r+1} \dots \nu_m} dx_{\nu_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx_{\nu_m}. \quad (3.14)$$

Si particularizamos para el espacio de Minkowski, tenemos que $g = -1$ y que $m = 4$. Si, además, estamos interesados en la forma de Faraday, entonces $r = 2$. Así, la ecuación (3.14) define la dual de la forma de Faraday, que llamaremos *forma de Maxwell*, como

$$G = *F = \frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} dx^\alpha \wedge dx^\beta, \quad (3.15)$$

donde se había escogido el tensor de cuarto orden completamente antisimétrico $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ de manera que $\varepsilon_{0123} = 1$. En función de las componentes de la forma de Maxwell

$$G = *F = \frac{1}{2} G_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta, \quad (3.16)$$

la ecuación (3.15) se escribe

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu}. \quad (3.17)$$

Con estas expresiones, ya estamos preparados para ver inmediatamente que las ecuaciones dinámicas (3.10) se pueden escribir en función de la forma de Maxwell como

$$dG = 0, \quad (3.18)$$

y que el lagrangiano de Maxwell-Lorentz del campo electromagnético en el vacío es, simplemente,

$$\mathcal{L}_{elm} = \frac{-1}{2} F \wedge *F. \quad (3.19)$$

En resumen, el electromagnetismo en el vacío está definido por una 2-forma cerrada F en el espacio de Minkowski, llamada forma de Faraday (que, dado que el segundo grupo de cohomología es trivial, es también exacta) sujeta a la ecuación dinámica $d*F = 0$.

Podemos dar la vuelta a esta interpretación utilizando la noción de *dualidad* de las ecuaciones de campo [148]. Esta propiedad surge de manera natural en las ecuaciones de Maxwell en el vacío al notar que éstas son invariantes bajo el cambio del par de campos (\mathbf{E}, \mathbf{B}) por el par $(-\mathbf{B}, \mathbf{E})$. Tan sencillo nacimiento esconde una creciente importancia de la noción de dualidad, tanto en teoría de campos clásica y cuántica

(como ejemplos, ver [149, 150, 151, 152, 153]) como en teoría de cuerdas [154].

Volviendo al electromagnetismo, consideremos el comentario tras (3.19). La ecuación dinámica $d*F = 0$ implica que $*F$ es una 2-forma cerrada. Por tanto, como hemos comentado antes, es exacta, y se puede escribir $*F = dC$, donde C es una 1-forma potencial en el espacio de Minkowski. De esta manera, la ecuación dinámica $d*F = 0$ pasa a ser $d^2C = 0$, que es una identidad de Bianchi. Para ver mejor cómo funciona la dualidad, tengamos en cuenta que la dual de la forma de Maxwell $G = *F$ es

$$*G = **F = -F . \quad (3.20)$$

Por tanto, el lagrangiano (3.19) se puede escribir también como

$$\mathcal{L}_{elm} = \frac{-1}{2} (-*G) \wedge G = \frac{1}{2} G \wedge *G , \quad (3.21)$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange que surgen al minimizar la acción son

$$d*G = 0 \Rightarrow dF = 0 . \quad (3.22)$$

En resumen, en la manera “dual” de ver las cosas, la ecuación dinámica $d*F = 0$ pasa a ser una identidad de Bianchi, y la identidad $dF = 0$ pasa a ser una ecuación dinámica. En el vacío no hay nada que distinga ambas formulaciones, como ya apuntó Stratton [155].

Desde el punto de vista de la forma dual G , existe globalmente una 1-forma potencial C tal que $G = dC$ o, escrito en componentes,

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu . \quad (3.23)$$

La ecuación $G = *F$ obliga a expresar los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} a través de las ecuaciones $\mathbf{B}_i = G^{0i}$, $\mathbf{E}_i = -1/2 \varepsilon_{ijk} G^{jk}$. Por tanto, tenemos definidas las componentes del cuadripotencial de Stratton $C^\mu = (C^0, \mathbf{C})$ como

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + \nabla C^0 , \quad (3.24)$$

$$\mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{C} . \quad (3.25)$$

La identidad $dG = 0$, escrita en función de \mathbf{E} y \mathbf{B} da lugar ahora a las ecuaciones (3.2), y la ecuación de movimiento $d*G = 0$ da lugar a las ecuaciones (3.1).

La consecuencia de todo esto es que, en el vacío, coexisten dos maneras de describir el campo electromagnético, en función de la forma de Faraday y en función de la forma de Maxwell, o bien en función de A^μ y de C^μ , respectivamente. Usando ambas representaciones, las ecuaciones de Maxwell sólo son identidades de Bianchi y, por tanto, no poseen dinámica. Toda la información sobre esta última se inscribe en la ecuación de dualidad $G = *F$ que, escrita en función de potenciales, viene dada por las expresiones vectoriales

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + \nabla C^0, \quad (3.26)$$

$$\nabla \times \mathbf{C} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla A^0. \quad (3.27)$$

En relación a esto conviene destacar que existen ciertas configuraciones no triviales de dipolos eléctricos para las cuales la descripción en términos del potencial C^μ es más adecuada que la del potencial A^μ [156]. También es importante notar que las ecuaciones (3.26) y (3.27) son invariantes "gauge". Para verlo, consideremos una transformación

$$\begin{aligned} A_\mu &\mapsto A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \\ C_\mu &\mapsto C_\mu + \partial_\mu \Gamma. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Por ejemplo, para la ecuación (3.26) tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{A} - \nabla \Lambda) &= \nabla \times \mathbf{A}, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{C} - \nabla \Gamma) + \nabla \left(C^0 + \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right) &= \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + \nabla C^0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

y lo mismo para (3.27).

3.2.2 Helicidades magnética y eléctrica: condiciones de contorno de los campos, cuadri-corrientes e invariancia temporal

Como se acaba de ver, los campos eléctrico y magnético son duales y tienen las mismas propiedades en la teoría de Maxwell en el vacío. Dado el campo solenoidal \mathbf{B} , se define la helicidad magnética como

$$h_m = \int_{R^3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, d^3r, \quad (3.30)$$

donde $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Se ha visto en el capítulo anterior que la helicidad magnética es proporcional al número de enlace de las líneas magnéticas.

De manera análoga, en el vacío, dado el campo solenoidal \mathbf{E} , se puede definir una *helicidad eléctrica* a través de

$$h_e = \int_{R^3} \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} \, d^3r , \quad (3.31)$$

donde $\mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{C}$. Por analogía con el caso magnético, la helicidad eléctrica es proporcional al número de enlace de las líneas eléctricas.

Antes de seguir es conveniente especificar las condiciones de contorno de los campos, que tomaremos de manera que las helicidades (y la energía) sean cantidades finitas. El dominio de definición de los campos, que aparece como dominio de integración, será todo el espacio real tridimensional, y su frontera se tomará como una superficie en el infinito, en donde se anulan los campos. Por tanto, y en la notación usada en el capítulo anterior, el dominio D es R^3 compactificado, que, además, es simplemente conexo. Por inspección de las ecuaciones (3.30) y (3.31), la condición de que las helicidades sean finitas se traduce en que los campos magnético y eléctrico decrezcan más deprisa que r^{-2} en la superficie $r \rightarrow \infty$. Esto implica que los potenciales A^μ y C^μ han de decrecer más rápido que r^{-1} cuando $r \rightarrow \infty$. Asumiremos estas condiciones en el resto de la memoria, que además permiten que la energía del campo sea finita.

De aquí se obtiene un primer resultado: las helicidades magnética y eléctrica de un campo de Maxwell en el vacío, dadas por las ecuaciones (3.30) y (3.31), son invariantes bajo las transformaciones "gauge" dadas por (3.28). Recordando el estudio que, a este respecto, se hizo en el capítulo anterior para dominios simplemente conexos, tenemos que la helicidad eléctrica introducida por la transformación es

$$\delta h_e = - \int_S \Gamma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS , \quad (3.32)$$

donde S es la superficie esférica de radio infinito y \mathbf{n} es su vector normal unitario exterior. Ahora, dado que \mathbf{C} va más rápido que r^{-1} en S , resulta que Γ se anula en esa superficie, es decir, $\Gamma \mathbf{E}$ va más rápido que r^{-2} en S , lo cual asegura que la integral de superficie (3.32) es cero, haciendo que la helicidad eléctrica sea invariante "gauge". Por supuesto, el caso de la helicidad magnética es completamente análogo.

La cuestión de la invariancia temporal de las helicidad eléctrica y magnética se puede estudiar, bien derivando con respecto al tiempo las integrales (3.30) y (3.31) directamente y aplicando las ecuaciones de Maxwell, bien construyendo una cuadricorriente de helicidad al modo del teorema de Noether. Este último es el método preferido por los físicos en teorías de campo, debido a la cuestión de la covariancia, y es el que aquí usaré. Básicamente, dada una cuadricorriente $j^\mu(x) = (j^0(\mathbf{r}, t), \mathbf{j}(\mathbf{r}, t))$ que cumple $\partial_\mu j^\mu(x) = \Theta(x)$, podemos integrar en el espacio tridimensional de posiciones R^3 (cada vez que se pasa del espacio de Minkowski al espacio euclídeo "de posiciones" se está escogiendo un sistema de referencia de Lorentz), obteniendo

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{R^3} j^0 d^3r = \int_{R^3} \Theta d^3r - \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS . \quad (3.33)$$

Escogiendo las condiciones de contorno adecuadas, la última integral de (3.33) es cero en la superficie del infinito S , de manera que j^0 es una carga conservada si $\Theta = 0$. En el caso de las helicidad, Rañada introdujo en [38] una cuadricorriente de helicidad magnética,

$$\mathcal{H}_m^\mu = A_\nu G^{\nu\mu} , \quad (3.34)$$

donde $G^{\mu\nu}$ son las componentes de la forma de Maxwell. Basándose en (3.34), se puede dar una cuadricorriente de helicidad eléctrica, como hicieron Afanasiev y Stepanovsky en [157],

$$\mathcal{H}_e^\mu = C_\nu F^{\mu\nu} . \quad (3.35)$$

La derivada de ambas corrientes, usando las ecuaciones de Maxwell, nos proporciona su ley de movimiento,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \mathcal{H}_m^\mu &= \frac{-1}{2} F_{\mu\nu} G^{\mu\nu} = -2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} , \\ \partial_\mu \mathcal{H}_e^\mu &= \frac{1}{2} G_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} . \end{aligned} \quad (3.36)$$

Es necesario destacar que la cantidad $F_{\mu\nu} G^{\mu\nu}$ dada en (3.36) es ya covariante, dando así sentido relativista a estas leyes de conservación. Por otro lado, la parte espacial de ambas corrientes es

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_m &= A^0 \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{A} , \\ \mathcal{H}_e &= C^0 \mathbf{E} - \mathbf{B} \times \mathbf{C} , \end{aligned} \quad (3.37)$$

cantidades que, con las condiciones de contorno que hemos elegido, tienen integral cero en la superficie del infinito S . Como consecuencia de esto y de las ecuaciones (3.36) llegamos a que las helicidad magnética (3.30) y eléctrica (3.31) de un campo de Maxwell en el vacío son invariantes bajo evolución temporal para campos singulares $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ y, en general, si la integral en el espacio de $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ se anula.

Por último, en este apartado voy a escribir otra particularidad de las helicidad, que se puede interpretar como un primer indicio de la relación entre ellas. Dado el significado de la helicidad en función de la topología de las líneas de campo tenemos

$$\begin{aligned} \text{signo}(h_m) &= \text{signo} \int_{R^3} \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) d^3r , \\ \text{signo}(h_e) &= \text{signo} \int_{R^3} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) d^3r . \end{aligned} \quad (3.38)$$

Esto implica la siguiente propiedad: sea un campo electromagnético en el vacío tal que

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = f(\mathbf{r}) , \quad (3.39)$$

donde f no depende del tiempo; entonces las helicidad magnética y eléctrica tienen el mismo signo. Para verlo, derivamos (3.39) con respecto al tiempo y usamos ecuaciones de Maxwell, obteniendo

$$\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) . \quad (3.40)$$

Ahora integramos en el espacio R^3 y aplicamos (3.38), con lo cual

$$\text{signo}(h_e) = \text{signo}(h_m) . \quad (3.41)$$

Esto no implica que $h_e = h_m$, pero sí que la orientación relativa del enlace de las líneas eléctricas está dado por el de las líneas magnéticas, y viceversa, para campos singulares, en particular. A pesar de su sencillez, fue este resultado el que nos indicó el camino para el estudio de los campos singulares que veremos en la sección 3.3 de este capítulo.

3.2.3 La helicidad en física de partículas

En principio podría parecer descabellado relacionar las helicidad magnética y eléctrica de un campo en el vacío con la helicidad que se usa

en física de partículas. En el primer caso, la palabra "helicidad" fue introducida por Moffatt, en 1969, para definir la integral del producto de la velocidad de un fluido por su rotacional, la vorticidad; en el segundo caso, tenemos que la helicidad de un fotón, en electrodinámica cuántica, es igual a la proyección del espín del fotón en la dirección de su momento lineal. Por tanto, pretender relacionar ambas parece más una cuestión de casualidad sintáctica que de intuición física. La realidad es que no es así, por sorprendente que parezca, y lo veremos en la siguiente sección de este capítulo.

En el caso de un campo electromagnético clásico, como en cualquier teoría clásica de campos, se usa la invariancia de la acción bajo ciertas transformaciones de las coordenadas y/o de los campos para, según el teorema de Noether, especificar cantidades conservadas [158]. Por ejemplo, la invariancia de la acción (3.9) bajo traslaciones conduce a la conservación del *tensor de energía-momento* del campo

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 , \quad (3.42)$$

donde escogemos (sumando un término sin contribución) para $T^{\mu\nu}$ el tensor simétrico

$$T^{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} F^{\mu\alpha} F^{\beta\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} . \quad (3.43)$$

La ley de conservación (3.42) nos lleva, por lo que hemos comentado en el apartado anterior, a la invariancia temporal del cuadrivector de momento lineal del campo

$$\partial_0 p^\mu = 0 , \quad p^\mu = \int_{R^3} T^{\mu 0} d^3 r . \quad (3.44)$$

De manera análoga, la invariancia de la acción bajo transformaciones de Lorentz es la causa de la conservación del *tensor de momento angular* del campo electromagnético,

$$\partial_\alpha M^{\alpha\mu\nu} = 0 , \quad (3.45)$$

donde

$$M^{\alpha\mu\nu} = x^\mu T^{\alpha\nu} - x^\nu T^{\alpha\mu} . \quad (3.46)$$

La carga de Noether asociada a (3.45) es

$$\partial_0 J^{\mu\nu} = 0, \quad J^{\mu\nu} = \int_{R^3} M^{0\mu\nu} d^3r. \quad (3.47)$$

Como consecuencia de (3.44), la energía p^0 y el momento lineal \mathbf{p} del campo electromagnético se pueden tomar como las integrales en el espacio euclídeo R^3 de sus respectivas densidades,

$$p^0 = \int_{R^3} P^0 d^3r = \int_{R^3} \left(\frac{E^2 + B^2}{2} \right) d^3r, \quad (3.48)$$

$$\mathbf{p} = \int_{R^3} \mathbf{P} d^3r = \int_{R^3} \mathbf{E} \times \mathbf{B} d^3r, \quad (3.49)$$

donde P^0 es la densidad de energía y \mathbf{P} es conocido como *vector de Poynting*, que es una densidad de flujo de energía, como es fácil ver a partir de la ley de conservación (3.42),

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2 + B^2}{2} \right) = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (3.50)$$

Respecto al momento angular, se define el trivector $\mathbf{J}_i = 1/2 \epsilon_{ijk} J^{jk}$, con J^{jk} dado por (3.47) y se le asocia con el trivector de *momento angular total* del campo, que resulta

$$\mathbf{J} = \int_{R^3} \mathbf{r} \times \mathbf{P} d^3r. \quad (3.51)$$

Con estas definiciones, y dados los comentarios sobre la helicidad del fotón que he hecho más arriba, parecería natural definir la "helicidad tipo física de partículas" h' del campo electromagnético como

$$h' = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}, \quad (3.52)$$

donde \mathbf{J} está dado por (3.51) y \mathbf{n} es el vector unitario definido por

$$\mathbf{n} = \mathbf{p}/p. \quad (3.53)$$

Dado que \mathbf{p} no depende del tiempo por ser una carga de Noether, el vector \mathbf{n} es constante. La helicidad h' , tras operar en (3.52), se puede escribir como

$$h' = \int_{R^3} [(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{E} \cdot \mathbf{r})] d^3r. \quad (3.54)$$

Como una primera aproximación a la interpretación de las helicidadades nos preguntamos cuándo la cantidad (3.54) se puede identificar con las helicidadades magnética y eléctrica. La respuesta está dada por la siguiente propiedad [147, 2] :

a) Si los campos eléctrico y magnético satisfacen

$$\mathbf{B} = k(-i\mathcal{J} \cdot \mathbf{n})\mathbf{E} , \quad (3.55)$$

donde k es un número real y \mathcal{J} es el operador de momento angular en la representación vectorial del álgebra de Lorentz, entonces $h_m = kh'$.

b) Análogamente, si

$$\mathbf{E} = k'(-i\mathcal{J} \cdot \mathbf{n})\mathbf{B} , \quad (3.56)$$

entonces $h_e = k'h'$.

Demostremos la propiedad (a). El operador \mathcal{J} actúa sobre una componente del campo eléctrico como sigue,

$$\mathcal{J}_k(\mathbf{E}_l) = -i \varepsilon_{kmn} x_m \partial_n \mathbf{E}_l - i \varepsilon_{klm} \mathbf{E}_m , \quad (3.57)$$

por lo que se tiene

$$(-i\mathcal{J} \cdot \mathbf{n})\mathbf{E} = ((\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \cdot \nabla) \mathbf{E} + \mathbf{n} \times \mathbf{E} . \quad (3.58)$$

Supongamos ahora que se cumple la ecuación (3.55). Entonces, el campo magnético satisface, según (3.58),

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= k [((\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \cdot \nabla) \mathbf{E} + \mathbf{n} \times \mathbf{E}] \\ &= k \nabla \times [(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})\mathbf{r} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n}] , \end{aligned} \quad (3.59)$$

de manera que se puede escoger

$$\mathbf{A} = k [(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})\mathbf{r} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n}] . \quad (3.60)$$

Si ahora se calcula la helicidad magnética con el potencial vector dado por (3.60), la conclusión es

$$\begin{aligned} h_m &= \int_{R^3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, d^3r \\ &= k \int_{R^3} [(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{E} \cdot \mathbf{r})] \, d^3r \\ &= kh' . \end{aligned} \quad (3.61)$$

La propiedad (b) se demuestra de un modo completamente análogo. Aún así, esto no nos aclara la relación que tienen las helicidades eléctrica y magnética con la helicidad de los fotones del campo. La respuesta general a esto está en la siguiente sección.

3.3 La helicidad electromagnética y su significado

La helicidad electromagnética, definida como la suma de las helicidades magnética y eléctrica de un campo de Maxwell en el vacío, es constante en la dinámica del campo. Se demuestra que esta helicidad es la cantidad clásica que se corresponde con el operador cuántico de helicidad, es decir, el operador $N_R - N_L$, donde N_R es el número de fotones con polarización dextrógira y N_L es el número de fotones con polarización levógira. Esta igualdad se puede entender como una relación entre los aspectos de onda y partícula de la helicidad, debido a que la suma de las helicidades magnética y eléctrica tiene que ver con el enlace de las líneas de campo (capítulo anterior), de manera que es una cantidad referida a la topología de estas líneas, y la cantidad $N_R - N_L$ es el límite clásico del operador cuántico que resta los fotones dextrógiros y levógiros.

Por último, se hará una particularización del concepto de helicidad aplicado a los campos singulares, es decir, aquellos campos electromagnéticos que satisfacen $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$. En este caso, las helicidades magnética y eléctrica son iguales.

Los contenidos de esta sección corresponden a resultados incluidos en nuestros trabajos [159, 160, 161, 147, 162].

3.3.1 Definición y conservación de la helicidad

Sea $F^{\mu\nu}$ un campo de Maxwell en el vacío. Definimos el cuadrivector *densidad de helicidad electromagnética*, \mathcal{H}^μ , como la suma de los cuadrivectores de densidad de helicidad eléctrica y magnética, dados en el apartado 3.2.2 por las ecuaciones (3.34) y (3.35), es decir,

$$\mathcal{H}^\mu = F^{\mu\nu} C_\nu - G^{\mu\nu} A_\nu , \quad (3.62)$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor de componentes de la forma de Faraday, y $G_{\mu\nu} = \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu$ es el tensor de componentes de la forma de Maxwell $G = *F$.

Por su construcción, y teniendo en cuenta las leyes de conservación de sus componentes eléctrica y magnética (3.36), la densidad de helicidad electromagnética es una corriente conservada de las ecuaciones de Maxwell en el vacío

$$\partial_\mu \mathcal{H}^\mu = 0 . \quad (3.63)$$

De aquí obtenemos que la cantidad

$$h = \int_{R^3} \mathcal{H}^0 d^3r = \int_{R^3} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}) d^3r , \quad (3.64)$$

es una constante del movimiento,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = 0 . \quad (3.65)$$

Esta constante del movimiento se llama *helicidad electromagnética*. Por el estudio realizado en la sección anterior, resulta que la helicidad electromagnética es invariante “gauge” además de ser invariante temporal. A partir de este momento, me referiré a (3.64) como helicidad a secas, y a (3.62) como cuadridensidad de helicidad, dejando los adjetivos para los casos magnético y eléctrico.

El carácter constante de la helicidad ha sido estudiado también por Anderson y Arthurs [163, 164, 165], Afanasiev y Stepanovsky [157] y Evans [166]. Los dos primeros grupos han relacionado esta propiedad con otros invariantes del campo electromagnético [167, 168, 169, 170], llamados invariantes de Lipkin, mientras que el tercero investiga las consecuencias de la helicidad en la construcción de una nueva teoría “gauge” no abeliana, con grupo $SO(3)$, para la electrodinámica cuántica [171, 172, 173, 174].

Es interesante escribir claramente la ley de conservación que hemos encontrado, que es

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}) = -\nabla \cdot (\mathbf{A}^0 \mathbf{B} + \mathbf{C}^0 \mathbf{E} - \mathbf{A} \times \mathbf{E} + \mathbf{C} \times \mathbf{B}) . \quad (3.66)$$

Podemos interpretar, pues, la cantidad \mathcal{H}^0 como una densidad de helicidad, y \mathcal{H}^i como una densidad de flujo de helicidad, análogamente a lo que ocurre con la densidad de energía y el vector de Poynting (3.50).

3.3.2 El significado de la helicidad

Dado que la helicidad es invariante “gauge”, para informarnos sobre su significado podemos usar un “gauge” determinado. El más apropiado es el “gauge” de Coulomb. En él, como se deduce fácilmente de lo visto en el apartado 3.2.1, los campos \mathbf{A} y \mathbf{C} satisfacen las ecuaciones de Maxwell,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= 0, \quad \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{C} &= 0, \quad \nabla \times \mathbf{C} = -\frac{\partial \bar{\mathbf{A}}}{\partial t}.\end{aligned}\quad (3.67)$$

De estas ecuaciones resulta que, tanto \mathbf{A} como \mathbf{C} , satisfacen la ecuación de d'Alembert. Para \mathbf{A} , esta ecuación se escribe

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \quad (3.68)$$

cuyas soluciones se pueden escribir en forma de transformadas de Fourier tridimensionales [175, 176], del tipo

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} \left(\mathbf{a}(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x} + \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{k})e^{ik \cdot x} \right), \quad (3.69)$$

donde $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$ es un cuadrivector nulo ($k^\mu k_\mu = \omega^2 - \mathbf{k}^2 = 0$) y el producto escalar de cuadrivectores en el espacio de Minkowski es $k \cdot x = k^\mu x_\mu = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$. El factor $1/\sqrt{2\omega}$ es una normalización que permite que la medida de integración sea invariante Lorentz. En (3.69), y en el resto de esta memoria, para el complejo conjugado de una cantidad z utilizo la notación \bar{z} , básicamente para que no exista confusión con otras operaciones, como “pull-backs” o estrellas de Hodge, que aparecerán con mucha asiduidad.

La condición solenoidal del potencial vector \mathbf{A} cuando estamos en el “gauge” de Coulomb se traduce en el carácter transversal del vector complejo $\mathbf{a}(\mathbf{k})$, es decir $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{k}) = 0$. Por tanto, para cada valor del vector \mathbf{k} se puede escoger un triedro ortonormal, formado por los vectores reales \mathbf{k}/ω , $\mathbf{e}_1(\mathbf{k})$ y $\mathbf{e}_2(\mathbf{k})$, y representar el campo \mathbf{a} como

$$\mathbf{a}(\mathbf{k}) = a_1(\mathbf{k})\mathbf{e}_1(\mathbf{k}) + a_2(\mathbf{k})\mathbf{e}_2(\mathbf{k}), \quad (3.70)$$

donde

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{k}}{\omega}, \quad \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2, \quad \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1. \quad (3.71)$$

Por conveniencia, se completa la definición del triedro ortonormal con las elecciones

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1(-\mathbf{k}) &= -\mathbf{e}_1(\mathbf{k}), \\ \mathbf{e}_2(-\mathbf{k}) &= \mathbf{e}_2(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (3.72)$$

De esta manera, el campo \mathbf{A} se ha escrito como superposición de ondas planas. Para nuestros propósitos, sin embargo, conviene representar los potenciales en función de ondas con polarización circular, a la manera que se hace en electrodinámica cuántica [177, 43], así que definimos las componentes dextrógira (R) y levógira (L), es decir, con polarización a derechas y a izquierdas, según las relaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_R(\mathbf{k}) &= \frac{\mathbf{e}_1(\mathbf{k}) + i\mathbf{e}_2(\mathbf{k})}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{e}_L(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{e}_1(\mathbf{k}) - i\mathbf{e}_2(\mathbf{k})}{\sqrt{2}}, \\ a_R(\mathbf{k}) &= \frac{a_1(\mathbf{k}) - ia_2(\mathbf{k})}{\sqrt{2}}, \quad a_L(\mathbf{k}) = \frac{a_1(\mathbf{k}) + ia_2(\mathbf{k})}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Con estas definiciones, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_R &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_L = 0, \quad \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{e}_R = \mathbf{e}_L \cdot \mathbf{e}_L = 0, \\ \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{e}_L &= 1, \quad \mathbf{e}_R \times \mathbf{e}_R = \mathbf{e}_L \times \mathbf{e}_L = 0, \\ \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{e}_R &= -i\mathbf{e}_R, \quad \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{e}_L = i\mathbf{e}_L, \quad \mathbf{e}_R \times \mathbf{e}_L = -i\frac{\mathbf{k}}{\omega}, \end{aligned} \quad (3.74)$$

y, además, para los vectores de argumento opuesto,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_R(-\mathbf{k}) &= -\mathbf{e}_L(\mathbf{k}), \\ \mathbf{e}_L(-\mathbf{k}) &= -\mathbf{e}_R(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (3.75)$$

En consecuencia, el potencial vector \mathbf{A} , en el "gauge" de Coulomb, se escribe como una superposición de ondas con polarización circular. Si, para simplificar las fórmulas, omitimos el argumento \mathbf{k} en las cantidades $\mathbf{e}(\mathbf{k})$ y $a(\mathbf{k})$, se concluye que

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} \left((\mathbf{e}_R a_R + \mathbf{e}_L a_L) e^{-ik \cdot x} + (\mathbf{e}_L \bar{a}_R + \mathbf{e}_R \bar{a}_L) e^{ik \cdot x} \right). \quad (3.76)$$

Las componentes de Fourier a_R y a_L son, en la expresión (3.76), funciones del vector \mathbf{k} . Cuando se hace la segunda cuantización del campo electromagnético, $a_R(\mathbf{k})$ se interpreta como un operador que destruye un estado fotónico de energía ω , momento lineal \mathbf{k} y espín \mathbf{k}/ω , mientras que la función \bar{a}_R pasa a ser el operador a_R^\dagger que crea tal estado. Análogamente, $a_L(\mathbf{k})$ destruye un estado fotónico de energía ω , momento \mathbf{k} y espín $-\mathbf{k}/\omega$, y a_L^\dagger lo crea [177].

Podemos jugar el mismo juego con el potencial vector \mathbf{C} . En tal caso, se llega a representar \mathbf{C} en la forma (3.76), pero con otras funciones c_R y c_L sustituyendo a a_R y a_L . Ahora hay que cumplir las relaciones (3.67). Al imponerlas, aparecen las igualdades

$$\begin{aligned} \frac{-\mathbf{k}}{\omega} \times (\mathbf{e}_R a_R + \mathbf{e}_L a_L) &= \mathbf{e}_R c_R + \mathbf{e}_L c_L, \\ \mathbf{e}_R a_R + \mathbf{e}_L a_L &= \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times (\mathbf{e}_R c_R + \mathbf{e}_L c_L), \end{aligned} \quad (3.77)$$

teniendo en cuenta las relaciones (3.74) para los rotacionales, que se reducen a las identificaciones siguientes

$$\begin{aligned} c_R(\mathbf{k}) &= i a_R(\mathbf{k}), \\ c_L(\mathbf{k}) &= -i a_L(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (3.78)$$

con lo que el potencial vector \mathbf{C} resulta dado por

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega}} \left((\mathbf{e}_R a_R - \mathbf{e}_L a_L) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - (\mathbf{e}_L \bar{a}_R - \mathbf{e}_R \bar{a}_L) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right). \quad (3.79)$$

La helicidad se puede escribir, en el "gauge" de Coulomb, usando las ecuaciones de Maxwell (3.67), como

$$h = \int_{R^3} \left(\mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} - \mathbf{C} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) d^3 r. \quad (3.80)$$

Si se introducen las expresiones (3.76) y (3.79) en la ecuación (3.80), teniendo en cuenta la conocida fórmula de la función delta de Dirac tridimensional

$$\int_{R^3} \frac{d^3 r}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \delta^{(3)}(\mathbf{k}), \quad (3.81)$$

se obtiene la expresión

$$h = 2 \int (\bar{a}_R(\mathbf{k})a_R(\mathbf{k}) - \bar{a}_L(\mathbf{k})a_L(\mathbf{k})) d^3k . \quad (3.82)$$

Esto es lo que queríamos. En electrodinámica cuántica, la parte derecha de la ecuación (3.82) se interpreta, tras cuantizar, como el doble del operador "helicidad", es decir, el operador que resta el número de fotones con polarización (o helicidad) a derechas del número de fotones con polarización a izquierdas. Escribiendo éstos con la notación típica

$$\begin{aligned} N_R &= \int \bar{a}_R(\mathbf{k})a_R(\mathbf{k}) d^3k , \\ N_L &= \int \bar{a}_L(\mathbf{k})a_L(\mathbf{k}) d^3k , \end{aligned} \quad (3.83)$$

la ecuación (3.82) se escribe

$$h = 2(N_R - N_L) . \quad (3.84)$$

Por tanto, excepto un factor 2, *la helicidad que hemos estado estudiando, y no la cantidad h' del apartado 3.2.3, es el límite clásico de la diferencia de fotones polarizados a derechas y a izquierdas* [159, 160, 161, 147, 162]. Es decir, la expresión clásica $h/2$ corresponde, al hacer la segunda cuantización del campo electromagnético, con el operador cuántico de helicidad, que suma las proyecciones del espín de cada partícula en la dirección de propagación. Nótese que, si hubiéramos usado unidades "físicas" (esto es, con $\hbar \neq 1$ y $c \neq 1$), la ecuación (3.84) se escribiría

$$h = 2\hbar c (N_R - N_L) . \quad (3.85)$$

Realmente, en este sentido Moffatt estuvo inspirado al bautizar con la palabra helicidad la integral de un campo vectorial por su rotacional.

Pero la ecuación (3.84) tiene más lecturas, en particular la relación entre los aspectos topológico y corpuscular del campo electromagnético en el vacío. En su parte izquierda, la helicidad de la onda: la suma de las helicidades eléctrica y magnética, que caracteriza la topología de las líneas de campo, en función de sus enlaces. En la parte derecha, el límite clásico de la helicidad de los fotones. Por tanto, si tenemos un campo electromagnético con una configuración trivial de sus líneas

de fuerza (es decir, sin enlaces), entonces sabremos que la expresión clásica para el número de fotones dextrógiros es igual que la de los levógiros, pero si observamos líneas enlazadas estos dos números serán diferentes. Tenemos aquí la dualidad onda-partícula de la helicidad [147]. Hay que decir que el resultado (3.84) ha sido obtenido también, con posterioridad, por Afanasiev y Stepanovsky [157], aunque de manera independiente.

¿Qué hay de las otras componentes de la cuadridensidad de helicidad? En el "gauge" de Coulomb, éstas forman el vector $\mathcal{H} = -\mathbf{A} \times \mathbf{E} + \mathbf{C} \times \mathbf{B}$, pero en general la integral espacial de este vector no es una expresión invariante "gauge", de manera que no se le puede tratar como observable. Aún así, quizá sea útil dar su expresión para la condición de Coulomb. De manera completamente análoga al caso de la helicidad escalar, la cantidad trivectorial \mathbf{h} , correspondiente a la integral espacial de las componentes \mathcal{H}^j de la cuadridensidad de helicidad, que en el "gauge" de Coulomb se puede escribir

$$\mathbf{h} = \int_{R^3} \mathcal{H} d^3r = \int_{R^3} \left(\mathbf{A} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{C} \times \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} \right) d^3r , \quad (3.86)$$

satisface, usando las representaciones (3.76) y (3.79) para los potenciales \mathbf{A} y \mathbf{C} , respectivamente,

$$\mathbf{h} = \int \frac{2\mathbf{k}}{\omega} (\bar{a}_R(\mathbf{k})a_R(\mathbf{k}) - \bar{a}_L(\mathbf{k})a_L(\mathbf{k})) d^3k , \quad (3.87)$$

es decir, \mathbf{h} es igual a 2 veces el espín total del campo,

$$\mathbf{h} = 2 \mathbf{s} . \quad (3.88)$$

Este resultado complementa la interpretación de la helicidad y motiva su estudio, más si tenemos en cuenta que, según acabamos de ver, la helicidad escalar y el espín del campo forman una cuadricorriente conservada. La densidad de helicidad y la densidad de espín están en la misma relación que la densidad de energía y el vector de Poynting, con una particularidad: la ley de conservación que se ha encontrado no nos dice nada sobre la invariancia temporal del espín, y además éste no es claramente invariante "gauge". Esto puede sugerir que quizá falten componentes a la corriente conservada, puede ser que ésta sea

parte de un tensor análogo al tensor de energía-momento. Todas estas cuestiones, así como su relación con la dualidad electromagnética, no tienen respuesta por ahora.

3.3.3 La helicidad de los campos singulares

En el capítulo anterior se han definido los campos singulares como aquellos que cumplen $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$. Consideremos ahora el caso de campos singulares en el vacío que satisfacen las condiciones de contorno que se han especificado en el apartado 3.2.2, que se pueden resumir diciendo que la helicidad es una cantidad finita. En este caso, las componentes de Fourier a_R y a_L han de ser menos singulares que $\omega^{-3/2}$ cuando $\omega \rightarrow 0$ y han de decrecer más rápido que ω^{-2} cuando $\omega \rightarrow \infty$. Este comportamiento nos va a permitir probar de manera muy simple la siguiente propiedad [162]:

Las helicidad eléctrica y magnética de un campo singular en el vacío son iguales.

Para la demostración, usamos las representaciones de \mathbf{A} y \mathbf{C} del apartado anterior. Con ellas es fácil obtener la siguiente expresión para la diferencia entre las helicidad magnética y eléctrica,

$$h_m - h_e = \int d^3k \left[(a_L(\mathbf{k})a_L(-\mathbf{k}) - a_R(\mathbf{k})a_R(-\mathbf{k})) e^{-i\omega\tau} + cc \right], \quad (3.89)$$

donde cc significa que hay que añadir el complejo conjugado y $\tau = 2t$. Hagamos la integral en los ángulos de las coordenadas esféricas del espacio de vectores \mathbf{k} . El resultado lo llamamos $F(\omega)$, es decir, tomemos

$$F(\omega) = \omega^2 \int d\Omega [a_L(\mathbf{k})a_L(-\mathbf{k}) - a_R(\mathbf{k})a_R(-\mathbf{k})], \quad (3.90)$$

siendo Ω el ángulo sólido, y $F(\omega) = F(-\omega)$. La diferencia de helicidad se escribe ahora

$$h_m - h_e = \int_0^\infty d\omega \left[F(\omega)e^{-i\omega\tau} + F(-\omega)e^{i\omega\tau} \right]. \quad (3.91)$$

Por el comportamiento comentado de a_R y a_L , y mirando la definición (3.90), se ve que $F(\omega)$ es una función de cuadrado integrable, y que

$$h_m - h_e = f(\tau) + \bar{f}(\tau), \quad (3.92)$$

donde $f(\tau)$ es la transformada de Fourier de $F(\omega)$. Por otro lado, conocemos por el apartado 3.2.2 que

$$\frac{d}{dt}(h_m - h_e) = -4 \int_{R^3} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} d^3r , \quad (3.93)$$

de manera que, como estamos en la suposición de campo singular, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ y $h_m - h_e$ es una constante de movimiento. Por tanto, la ecuación (3.92) implica que la parte real de $f(\tau)$ no depende de τ . Si recordamos ahora que es una función de cuadrado integrable, resulta que sólo puede ser cero. En consecuencia, $h_m - h_e = 0$ para campos singulares en el vacío.

La conclusión (3.84) para campos singulares es

$$h = 2h_m = 2h_e = 2(N_R - N_L) , \quad (3.94)$$

que será importante a partir del siguiente capítulo. Por otro lado, el resultado de éste apartado es curioso: la condición de campo singular obliga a las líneas de fuerza a comportarse de tal modo que las heliidades magnética y eléctrica son iguales, esto es, los enlaces de las líneas magnéticas dan información sobre los de las eléctricas y viceversa. Esto es más acusado si recordamos que la condición $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ es invariante Lorentz.

Capítulo 4

Un modelo topológico del electromagnetismo

4.1 Introducción. Objetivos del capítulo

En el presente capítulo de esta memoria se van a indicar algunas de las principales características de un modelo para el electromagnetismo clásico con contenido topológico explícito, que ha sido concebido y desarrollado por Rañada desde 1989, y en el cual he colaborado desde 1994 [178, 179, 180, 181, 2, 159, 160, 161, 162]. Este modelo es localmente equivalente a la teoría estándar de Maxwell para el vacío, pero tiene la ventaja de poseer cargas topológicas, esto es, cantidades conservadas con significado topológico. En particular, las helicidades eléctrica y magnética, de las cuales se ha hablado mucho hasta ahora, son iguales entre sí, y, excepto una constante, son números enteros, cuyo significado es el de invariantes de Hopf de las funciones complejas de las coordenadas a partir de las cuales se obtienen los campos. Además, el modelo admite cargas eléctricas y magnéticas puntuales, cuyo valor está también cuantizado por motivos topológicos. En consecuencia, este modelo posee ventajas respecto a la teoría estándar que podrían ser útiles para entender mejor el proceso de cuantización del electromagnetismo.

En la sección 4.2, se presentan los “ladrillos” del modelo, llamados nudos electromagnéticos, y se introduce su significado topológico. En la

sección 4.3 se demuestra que los nudos generan localmente toda la teoría de Maxwell para el vacío. La sección 4.4 está dedicada a establecer cómo es el electromagnetismo en presencia de cargas puntuales para este modelo; en este caso, las cantidades topológicamente cuantizadas serán los valores de esas cargas puntuales.

4.2 Los nudos electromagnéticos

Vamos a introducir los protagonistas del modelo topológico del electromagnetismo que se presenta en esta memoria, llamados nudos electromagnéticos. Estos son soluciones de las ecuaciones de Maxwell en el vacío que tienen la propiedad de cuantización topológica de las heliidades magnética y eléctrica, es decir, el valor de estas cantidades, relacionado con el número de enlace de las líneas magnéticas y de las eléctricas, es proporcional a un número entero con significado topológico, llamado invariante de Hopf de las aplicaciones a partir de las cuales se construyen los nudos electromagnéticos.

La construcción de estos nudos tiene mucho que ver con la idea de línea de campo, más que con la de cuadripotencial, llevándonos de vuelta a la filosofía de Faraday respecto al electromagnetismo. La noción de invariante de Hopf de las aplicaciones entre esferas, y su aplicación a la construcción de los nudos, introducen la cuantización topológica, y la clasificación en clases de homotopía, de los campos electromagnéticos. Los contenidos de esta sección están basados principalmente en los trabajos [2, 159, 162].

4.2.1 Sobre la concepción de Faraday del electromagnetismo

Como he recordado en el primer capítulo de esta memoria, las líneas de fuerza eléctricas y magnéticas eran muy reales para Faraday, debido a que él las asociaba con líneas materiales formadas por las partículas del éter, de la misma manera que las líneas magnéticas pueden asociarse a líneas de partículas de un fluido en la aproximación magnetohidrodinámica (ver los apartados 2.4.1 y 2.4.2 del segundo capítulo). Esta idea fue relegada a un segundo plano a partir de la publicación de la

teoría de Maxwell para el electromagnetismo, basada en la noción de campo. Desde entonces, los conceptos básicos son el tensor electromagnético $F^{\mu\nu}$ y el cuadripotencial vector A^μ , y las líneas de fuerza (o líneas de campo) son elementos secundarios, que siempre pueden obtenerse de $F^{\mu\nu}$ como líneas integrales de los campos vectoriales \mathbf{E} y \mathbf{B} . Pero, como se va a ver inmediatamente, ambos métodos de estudio son equivalentes para la teoría clásica.

Merece la pena recordar cómo se obtienen las líneas de campo. Un sistema dinámico consta de un espacio D y una aplicación uniparamétrica $g^\tau x$ del espacio D en sí mismo. Si se cumplen las condiciones: (i) $g^0 x = x$, (ii) $g^{\tau_1} g^{\tau_2} x = g^{\tau_2} g^{\tau_1} x = g^{\tau_1 + \tau_2} x$, entonces g^τ define un semiflujo en D . Si, además, la inversa $g^{-\tau} x$ está definida unívocamente para todo $x \in D$, entonces g^τ define un flujo, en el cual tanto el pasado como el futuro del sistema (con respecto al parámetro τ) están determinados por el estado actual. Sea g^τ un flujo en D , y sea D una variedad diferenciable tridimensional simplemente conexa. La velocidad de fase en el punto $x \in D$ se define como

$$v(x) = \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} g^\tau x . \quad (4.1)$$

Nótese que esto implica que

$$v(g^{\tau_0} x) = \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_0} g^\tau x . \quad (4.2)$$

Ahora, tengamos en cuenta el siguiente teorema: todo campo vectorial sobre una variedad compacta es el campo de velocidades de fase de un grupo uniparamétrico de difeomorfismos. Con este resultado, y dado que, en nuestro caso, D es R^3 compactificado, por tener un sólo punto del infinito, donde se anulan los campos, obtenemos que todo campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ satisface

$$\mathbf{B}(g^\tau \mathbf{r}, t) = \frac{d}{d\tau} g^\tau \mathbf{r} , \quad (4.3)$$

para cada instante t . La ecuación (4.3) se puede escribir en la forma que ya vimos en el segundo capítulo,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}(\tau), t) = \frac{d\mathbf{r}(\tau)}{d\tau} , \quad (4.4)$$

que da las líneas de fuerza del campo \mathbf{B} en cada instante t .

Pero es claro que el procedimiento puede invertirse, según el teorema que se ha mencionado: dadas las líneas magnéticas en cada instante, el campo vectorial queda definido por ellas. Este punto de vista está cerca de la idea de Faraday. Vamos a profundizar un poco en él. Como se dijo en el apartado 2.2.2, si el sistema dinámico (4.4) es integrable, entonces tiene dos cantidades conservadas, $\phi_1(\mathbf{r}, t)$ y $\phi_2(\mathbf{r}, t)$, y las líneas magnéticas son las intersecciones de las familias de superficies $\phi_1 = k_1$ y $\phi_2 = k_2$, donde k_1 y k_2 son constantes. De manera alternativa, y completamente equivalente, podemos suponer que las líneas magnéticas son las curvas de nivel de una función compleja $\phi(\mathbf{r}, t) = \phi_1 + i\phi_2$, que asumiremos suave. En este caso, el campo magnético queda definido, a partir de la ecuación (4.4) como

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t) \nabla \bar{\phi} \times \nabla \phi, \quad (4.5)$$

donde f es una función de las coordenadas. Pero, dado que \mathbf{B} es un campo solenoidal, la condición $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ implica que f depende de (\mathbf{r}, t) sólo a través de ϕ y $\bar{\phi}$ (o, alternativamente, de ϕ_1 y ϕ_2), es decir, será de la forma

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = f(\phi, \bar{\phi}) \nabla \bar{\phi} \times \nabla \phi, \quad (4.6)$$

lo cual también se puede escribir

$$\mathbf{B}_i = \frac{-1}{2} \varepsilon_{ijk} F^{jk} \quad (4.7)$$

sin más que tomar para F_{jk} el valor

$$F_{jk} = -f(\phi, \bar{\phi}) \left(\partial_j \bar{\phi} \partial_k \phi - \partial_k \bar{\phi} \partial_j \phi \right). \quad (4.8)$$

Dado que estamos en el espacio de Minkowski, y queremos formar un tensor, hemos de completar la expresión (4.8) de la siguiente manera:

$$F_{\mu\nu} = -f(\phi, \bar{\phi}) \left(\partial_\mu \bar{\phi} \partial_\nu \phi - \partial_\nu \bar{\phi} \partial_\mu \phi \right), \quad (4.9)$$

lo que define el campo eléctrico como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = f(\phi, \bar{\phi}) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \bar{\phi} - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} \nabla \phi \right). \quad (4.10)$$

En consecuencia, de la identificación de las líneas magnéticas con las curvas de nivel de una función compleja $\phi(\mathbf{r}, t)$ se ha obtenido un campo electromagnético cuya 2-forma de Faraday viene dada por

$$F = f(\phi, \bar{\phi}) d\phi \wedge d\bar{\phi} . \quad (4.11)$$

Evidentemente, a la forma (4.11) se le debe imponer la ecuación de movimiento $d*F = 0$ (estamos en el caso de la teoría de Maxwell en el vacío). Por otro lado, es claro por las expresiones (4.6) y (4.10) que la solución de estas ecuaciones será un campo de tipo singular, es decir, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$.

Queda también la cuestión de las condiciones de contorno, de la cual ya se puede adelantar algo. Si queremos que los campos eléctrico y magnético se anulen en el límite $r \rightarrow \infty$, una condición suficiente es que el valor de ϕ en ese límite sea un único valor, esto es, que no dependa de la dirección. Esto implica que la parte espacial del dominio de definición de ϕ puede tomarse como S^3 , la superficie de la esfera de tres dimensiones, tras identificar, por proyección estereográfica, $R^3 \cup \{\infty\}$ con S^3 (veremos cómo se hace esto en el siguiente apartado). De la misma manera, asumimos que el espacio imagen de la aplicación ϕ es el plano complejo compactificado $C \cup \{\infty\}$, que se puede identificar con S^2 . La conclusión es que ϕ es una aplicación

$$\phi : S^3 \times R \rightarrow S^2 . \quad (4.12)$$

En resumen, dada una aplicación ϕ del tipo (4.12), la suposición de que sus curvas de nivel (tras hacer las dos proyecciones estereográficas correspondientes) son líneas de fuerza de algún campo magnético conduce a la obtención de un campo electromagnético en el vacío, de tipo singular, cuya forma de Faraday está dada por (4.11), si se cumplen las ecuaciones de Maxwell, $d*F = 0$.

4.2.2 El invariante de Hopf

Para avanzar en este estudio necesitamos pistas sobre la forma de la función $f(\phi, \bar{\phi})$. Es el momento de presentar a otro "protagonista": el invariante de Hopf [182]. Con esta información podremos resolver la ecuación de movimiento, lo que se hará en el apartado siguiente.

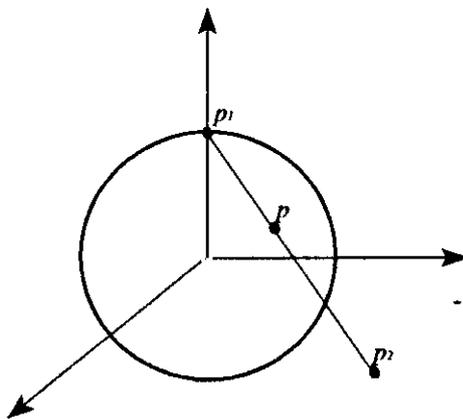


Figura 4.1: Esquema de la proyección estereográfica del plano complejo.

Existen casi tantas maneras de introducir el invariante de Hopf [183, 184, 36, 2, 50] como aplicaciones en donde se ha usado [185, 186, 187, 188, 189, 190], además de la que se presenta en esta memoria. Por conveniencia, escogeré hablar primero de la aplicación de Hopf, incluyendo las transformaciones de las proyecciones estereográficas que se han mencionado en el apartado anterior, y después se definirá el invariante de Hopf de esta aplicación, lo cual nos ofrece una buena imagen geométrica.

Queremos hablar de una aplicación entre S^3 y S^2 . La variedad S^2 se define como el conjunto de puntos (n_1, n_2, n_3) de R^3 tales que $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$. Muchas veces es más cómodo usar coordenadas complejas, lo que se puede hacer debido a que S^2 es la compactificación del plano complejo, $S^2 = C \cup \{\infty\}$. La transformación de unas coordenadas a otras se llama *proyección estereográfica*. Con referencia a la figura 4.1, consideremos R^3 y un sistema de ejes cuyo origen es el centro de una esfera de radio unidad. Las coordenadas de un punto $p \in R^3$ sobre el segmento determinado por dos puntos p_1 y p_2 vienen dadas por la ecuación $p = (1 - \lambda)p_1 + \lambda p_2$, donde λ es el parámetro real de evolución del segmento. Sean $p_1 = (0, 0, 1)$ el Polo Norte de S^2 , y $p_2 = (\text{Re } \chi, \text{Im } \chi, 0)$ el punto que determina un número complejo $\chi = \text{Re } \chi + i \text{Im } \chi$ que nos dará la coordenada compleja asociada a un punto de la esfera. Si $p = (n_1, n_2, n_3)$ es un punto de S^2 , tenemos que

viene dado por

$$n_1 = \lambda \operatorname{Re} \chi, \quad n_2 = \lambda \operatorname{Im} \chi, \quad n_3 = 1 - \lambda. \quad (4.13)$$

La condición $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ define λ como $\lambda = 2/(1 + \bar{\chi}\chi)$, de forma que la proyección estereográfica desde el Polo Norte resulta

$$n_1 = \frac{2\operatorname{Re}\chi}{\bar{\chi}\chi + 1}, \quad n_2 = \frac{2\operatorname{Im}\chi}{\bar{\chi}\chi + 1}, \quad n_3 = \frac{\bar{\chi}\chi - 1}{\bar{\chi}\chi + 1}, \quad (4.14)$$

o bien la transformación inversa,

$$\chi = \frac{n_1 + i n_2}{1 - n_3}, \quad (4.15)$$

es decir, cada punto de la esfera S^2 se puede caracterizar por tres números reales (n_1, n_2, n_3) , con $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, o bien por el número complejo χ , relacionado con los anteriores por la ecuación (4.15).

La esfera S^3 se puede dar por las coordenadas reales (u_1, u_2, u_3, u_4) en R^4 tales que $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 1$, o bien, tomando los números complejos $z_1 = u_1 + iu_2$ y $z_2 = u_3 + iu_4$,

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in C^2 / \bar{z}_1 z_1 + \bar{z}_2 z_2 = 1\}. \quad (4.16)$$

La *aplicación de Hopf* se define como

$$\begin{aligned} \Pi : S^3 &\rightarrow S^2 \\ (z_1, z_2) &\mapsto \Pi(z_1, z_2) = \frac{z_1}{z_2} \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde, de (4.14), con $\chi = z_1/z_2$, se obtiene

$$n_1 + in_2 = 2z_1\bar{z}_2, \quad n_3 = \bar{z}_1 z_1 - \bar{z}_2 z_2, \quad (4.18)$$

Así, tenemos que la aplicación de Hopf es

$$\Pi(z_1, z_2) = (2 \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2), 2 \operatorname{Im}(z_1\bar{z}_2), \bar{z}_1 z_1 - \bar{z}_2 z_2) \in S^2. \quad (4.19)$$

Sea $z_0 = e^{i\zeta}$ un número complejo de módulo unidad, con $0 \leq \zeta \leq 2\pi$. De (4.19) es claro que

$$\Pi(z_0 z_1, z_0 z_2) = \Pi(z_1, z_2). \quad (4.20)$$

Por tanto, $\Pi^{-1}(a) = S^1$ para todo punto $a \in S^2$, es decir, la imagen inversa de todo punto de S^2 por la aplicación de Hopf es una curva cerrada en S^3 . Dados dos puntos $a, b \in S^2$, las curvas cerradas en S^3 dadas por $\Pi^{-1}(a)$ y $\Pi^{-1}(b)$ son disjuntas si $a \neq b$, y están enlazadas. Por ejemplo, si $a = (1, 0, 0)$ y $b = (-1, 0, 0)$, usando (4.19) obtenemos las relaciones $z_1 \bar{z}_2 = 1/2$ para a , y $z_1 \bar{z}_2 = -1/2$ para b , satisfechas respectivamente por las dos curvas cerradas siguientes de S^3 ,

$$z_1 = z_2 = \frac{e^{i\zeta}}{\sqrt{2}}, \quad z_1 = -z_2 = \frac{e^{i\zeta}}{\sqrt{2}}. \quad (4.21)$$

Para visualizar el enlace es de mucha ayuda la proyección estereográfica $S^3 = R^3 \cup \{\infty\}$. El procedimiento es completamente análogo al caso de S^2 , con puntos de R^4 esta vez. Tomemos $p_1 = (0, 0, 0, 1)$ como el Polo Norte, y sea $p_2 = (x, y, z, 0)$ el punto que nos da la coordenada en $R^3 \cup \{\infty\}$. Si $p = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ pertenece a S^3 , ha de cumplirse que $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 1$, con lo que se obtiene

$$u_1 = \frac{2x}{r^2 + 1}, \quad u_2 = \frac{2y}{r^2 + 1}, \quad u_3 = \frac{2z}{r^2 + 1}, \quad u_4 = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}, \quad (4.22)$$

o bien la transformación inversa, —

$$x = \frac{u_1}{1 - u_4}, \quad y = \frac{u_2}{1 - u_4}, \quad z = \frac{u_3}{1 - u_4}, \quad (4.23)$$

es decir, un punto de S^3 se puede dar por las cuatro coordenadas reales (u_1, u_2, u_3, u_4) , tales que $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 1$ (o las dos coordenadas complejas z_i , con $z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 = 1$), o bien por tres números reales (x, y, z) que pertenecen a $R^3 \cup \{\infty\}$, dados por la ecuación (4.23).

Para las curvas de S^3 dadas por (4.21), las expresiones (4.23) nos dan las siguientes curvas en R^3 ,

$$\begin{aligned} \Pi^{-1}(a) & : \quad x = z = \frac{\cos \zeta}{\sqrt{2} - \sin \zeta}, \quad y = \frac{\sin \zeta}{\sqrt{2} - \sin \zeta} \\ \Pi^{-1}(b) & : \quad x = -z = \frac{\cos \zeta}{\sqrt{2} + \sin \zeta}, \quad y = \frac{-\sin \zeta}{\sqrt{2} + \sin \zeta} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Estas curvas [191], pintadas en función del parámetro ζ , son dos elipses disjuntas y con número de enlace $L(\Pi^{-1}(a), \Pi^{-1}(b)) = 1$, como vemos

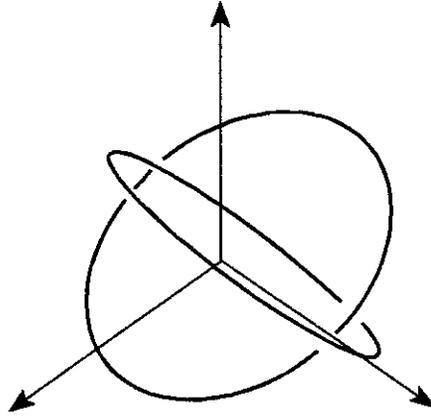


Figura 4.2: El índice de Hopf de la aplicación de Hopf, visto como número de enlace.

en la figura 4.2. Este número de enlace no depende del par de puntos particular (a, b) que hemos usado para calcularlo, pues, si nos movemos de manera continua a otro par (a', b') , las imágenes inversas Π^{-1} no pueden atarse ni desatarse (si lo hicieran, existiría un punto, común a ambas, con dos imágenes diferentes). Por tanto, el invariante de Hopf de la aplicación de Hopf $\Pi : S^3 \rightarrow S^2$, definido como el número de enlace de cualesquiera dos imágenes inversas, vale 1.

La aplicación de Hopf se puede considerar como la proyección del fibrado de Hopf, es decir, del espacio fibrado localmente trivial cuyo espacio total S^3 tiene como base a S^2 y como fibra a S^1 [183, 184]. En el siguiente capítulo de esta memoria se retomará la discusión sobre la aplicación de Hopf. Entre otras cosas, se indicará una técnica para la obtención de todas las fibras de esta aplicación, y también de algunas aplicaciones “hermanas” de ella. Ahora, tras esta introducción, que se espera sea iluminadora, ya se puede generalizar la definición del invariante.

Sea una aplicación suave $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$, con $n \geq 2$. Si a y b son dos puntos disjuntos de S^n , entonces $f^{-1}(a)$ y $f^{-1}(b)$ son dos $(n-1)$ -subvariedades disjuntas en S^{2n-1} , de modo análogo al caso de la aplicación de Hopf. Se define el *invariante de Hopf* como el número de enlace $L(f^{-1}(a), f^{-1}(b))$ de esas dos subvariedades. Es, por tanto,

un número entero, y no depende de la elección de los puntos $a, b \in S^n$, como se acaba de ver para el caso de la aplicación de Hopf. Por tanto, la definición del invariante de Hopf como número de enlace es

$$H(f) = L(f^{-1}(a), f^{-1}(b)) \quad , \forall a \neq b \in S^n \quad . \quad (4.25)$$

Además, si la aplicación f evoluciona de manera continua con respecto a cierto parámetro temporal t , entonces el invariante de Hopf no depende de t (es decir, se mantiene constante), debido a la misma razón por la que no dependía del par de puntos usado para calcularlo [2], es decir, existiría al menos un instante crítico t_0 en el cual habría intersecciones entre las distintas $(n-1)$ -subvariedades definidas como imágenes inversas de puntos de S^n . Por tanto, es un invariante topológico, y el conjunto de aplicaciones $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$ puede clasificarse en clases de homotopía, caracterizadas por un entero, que es el invariante de Hopf. Vamos a escribir otras dos definiciones de este invariante, todas equivalentes.

Si usamos conceptos básicos de topología algebraica, podemos dar una definición más formal [192]. Veámoslo brevemente. En el espacio R^r se define un r -símplice estándar como $\sigma_r = \{(x^1, \dots, x^r), x^\mu \geq 0, \sum_{\mu=1}^r x^\mu \leq 1\}$. Ahora, un r -símplice singular en una variedad n -dimensional M es una aplicación suave $s_r : \sigma_r \rightarrow M$ (estos símplices se llaman singulares porque, en general, no darán una triangulación de M). Si $\{s_{r,i}\}$ es el conjunto de r -símplices de M , se define una r -cadena en M como una suma formal de r -símplices con coeficientes enteros. Un r -ciclo es una r -cadena sin frontera, y un r -ciclo fundamental es uno tal que no es múltiplo de ningún otro.

Sean $a, b \in S^n$ dos puntos contenidos en n -símplices diferentes (figura 4.3). Si C_n es la n -cadena de S^{2n-1} acotada por la $(n-1)$ -cadena $f^{-1}(a)$, entonces $f(C_n)$ es un n -ciclo en S^n . Si designamos por S al n -ciclo fundamental de S^n , entonces $f(C_n) = H(f)S$, donde $H(f)$ es el invariante de Hopf, que nos dice el número algebraico de veces que $f(C_n)$ cubre al punto b . Para entender mejor esta definición es útil colocarse en el caso $n = 2$. Sea una aplicación $f : S^3 \rightarrow S^2$. Si $a \in S^2$, entonces $f^{-1}(a)$ es una curva cerrada en S^3 . Consideremos la superficie bidimensional C_2 en S^3 acotada por la curva $f^{-1}(a)$. Es claro que $f(C_2)$ es un número entero de veces S^2 , y cubre a un punto $b \neq a \in S^2$ ese número entero de veces, que es el invariante de Hopf $H(f)$.

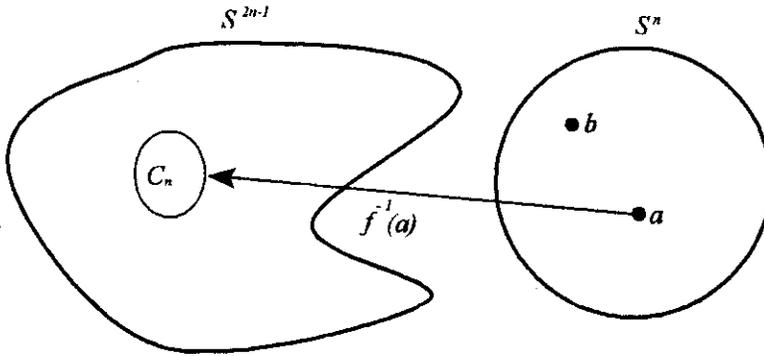


Figura 4.3: La aplicación f entre esferas, y una visión algebraica del invariante de Hopf.

Podemos dar una tercera definición equivalente, que será muy usada en el futuro. Tomemos las imágenes inversas de dos puntos a, b de S^n . Como éstas son $(n - 1)$ -variedades cerradas disjuntas, el número de enlace de ambas (el invariante de Hopf) es igual al número de veces que una de ellas, por ejemplo $f^{-1}(b)$, corta a una n -variedad S_a cuya frontera es $f^{-1}(a)$, y este número es igual al grado de la aplicación f restringida a S_a , pues cada punto de S^n tiene $H(f)$ imágenes inversas en esa variedad S_a (esto es, básicamente, la definición del párrafo anterior). El grado de tal aplicación es igual a la integral sobre S_a de la forma de volumen de S^n . Esto permitió a Whitehead [193, 194] demostrar que el invariante de Hopf se puede expresar como una integral de volumen. Sea σ una n -forma en S^n tal que

$$\int_{S^n} \sigma = 1, \quad (4.26)$$

esto es, σ es una forma de volumen. Consideremos el “pull-back” de $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$, denotado por f^* , que es la aplicación inducida de manera natural que trae n -formas en S^n a n -formas en S^{2n-1} . La forma $f^*\sigma$ es cerrada,

$$d(f^*\sigma) = f^*(d\sigma) = 0, \quad (4.27)$$

pues $d\sigma = 0$ ya que no hay $(n+1)$ -formas en S^n . Por otro lado, el grupo de cohomología $H^n(S^{2n-1})$, con $n \geq 2$ es trivial, como vimos al inicio

del apartado 2.2.1, de manera que $f^*\sigma$ es también exacta: existe una $(n-1)$ -forma en S^{2n-1} , que denotaremos por ω , tal que, globalmente,

$$d\omega = f^*\sigma . \quad (4.28)$$

El invariante de Hopf se escribe en estos términos como la integral en la variedad de partida de la $(2n-1)$ -forma $\omega \wedge d\omega$, esto es,

$$H(f) = \int_{S^{2n-1}} \omega \wedge d\omega . \quad (4.29)$$

A partir de esta expresión, se puede demostrar directamente [184] que:

- i) $H(f)$ es independiente de ω .
- ii) Si n es impar, entonces $H(f) = 0$.
- iii) $H(f)$ es invariante homotópico para $n = 2m$.

Por lo tanto, el conjunto de todas las aplicaciones suaves $f : S^{4m-1} \rightarrow S^{2m}$, con $m \geq 1$, puede clasificarse en clases de homotopía, cada una de ellas identificada por un entero llamado invariante de Hopf.

4.2.3 Definición de nudo electromagnético

La definición de Whitehead del invariante de Hopf (4.29) nos va a permitir resolver la ecuación $d*F = 0$ para campos electromagnéticos cuya forma de Faraday está dada por una ecuación tipo (4.11). Sea $\phi(\mathbf{r}, t)$ una función compleja de las coordenadas del espacio de Minkowski. Dadas las condiciones de contorno que se han escogido, esto es, que ϕ sea constante en la superficie de frontera $r \rightarrow \infty$ y que el espacio de llegada sea la compactificación del plano complejo, se puede tomar esta función como una aplicación suave

$$\phi_t : S^3 \rightarrow S^2 , \quad (4.30)$$

para cada instante t .

Consideremos la 2-forma de volumen de S^2 , que, en las coordenadas (n_1, n_2, n_3) de R^3 , tales que $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, se puede escribir [184]

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \frac{dn_1 \wedge dn_2}{n_3} . \quad (4.31)$$

También podemos identificar todo punto de S^2 por medio de una coordenada compleja χ , relacionada con los n_i a través de las ecuaciones (4.14) y (4.15) de la proyección estereográfica. En función de esta coordenada compleja, la forma (4.31) es

$$\sigma = \frac{1}{2\pi i} \frac{d\chi \wedge d\bar{\chi}}{(1 + \bar{\chi}\chi)^2} . \quad (4.32)$$

Consideremos ahora el "pull-back" de la 2-forma de volumen de S^2 por la aplicación $\phi_t(\mathbf{r})$, que es la siguiente 2-forma definida en la variedad $S^3 = R^3 \cup \{\infty\}$,

$$\phi_t^* \sigma = \frac{1}{2\pi i} \frac{d\phi_t(\mathbf{r}) \wedge d\bar{\phi}_t(\mathbf{r})}{(1 + \bar{\phi}_t(\mathbf{r})\phi_t(\mathbf{r}))^2} . \quad (4.33)$$

En la ecuación (4.33) he mantenido la notación $\phi_t(\mathbf{r})$ para diferenciarla del caso de la ecuación (4.32). En esta última expresión, χ es la coordenada compleja que recorre los puntos de S^2 , pero, en (4.33), ϕ_t es una función compleja de las coordenadas reales x^j , de manera que la derivada exterior de ϕ_t es

$$d\phi_t = \partial_j \phi_t dx^j , \quad (4.34)$$

es decir, la forma (4.33) se puede escribir como

$$\phi_t^* \sigma = \frac{1}{4\pi i} \frac{\partial_j \phi_t \partial_k \bar{\phi}_t - \partial_j \bar{\phi}_t \partial_k \phi_t}{(1 + \bar{\phi}_t \phi_t)^2} dx^j \wedge dx^k . \quad (4.35)$$

Según se ha dicho en el apartado anterior, (4.35) es una 2-forma cerrada en S^3 , lo cual se puede verificar directamente derivando la expresión anterior, o notando que $d\phi_t^* \sigma = \phi_t^* d\sigma = 0$. Además es exacta, por las propiedades de la cohomología de S^3 , de manera que existe una 1-forma

$$\omega(\phi_t) = \omega_j dx^j \quad (4.36)$$

tal que $\phi_t^* \sigma = d\omega(\phi_t)$, y con la propiedad de que el invariante de Hopf de la aplicación $\phi_t : S^3 \rightarrow S^2$ se escribe como la integral

$$H(\phi_t) = \int_{S^3} \omega(\phi_t) \wedge \phi_t^* \sigma . \quad (4.37)$$

Para reconocer mejor y sacar partido de estos hechos es conveniente cambiar la notación y hacerla más familiar. Con este objetivo, escribimos la forma (4.35) como

$$\phi_t^* \sigma = \frac{1}{2} f_{jk} dx^j \wedge dx^k, \quad (4.38)$$

donde el tensor antisimétrico f_{jk} es

$$f_{jk} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial_j \phi_t \partial_k \bar{\phi}_t - \partial_j \bar{\phi}_t \partial_k \phi_t}{(1 + \bar{\phi}_t \phi_t)^2}. \quad (4.39)$$

Pero todo tensor antisimétrico f_{jk} en el espacio tridimensional se puede escribir como un vector de tres componentes, cada una de las cuales dada por la expresión

$$\mathbf{b}_i(\mathbf{r}) = \frac{-1}{2} \varepsilon_{ijk} f^{jk}, \quad (4.40)$$

y la afirmación de que $\phi_t^* \sigma$ es una forma cerrada corresponde a decir que el vector \mathbf{b} es solenoidal, $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$. Análogamente, que $\phi_t^* \sigma = d\omega(\phi_t)$ significa que $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}$, donde \mathbf{a} es un vector, relacionado con la 1-forma ω a través de

$$\omega(\phi_t) = -\mathbf{a}_j dx^j. \quad (4.41)$$

Es claro que el vector \mathbf{b} es siempre tangente a las curvas de nivel de la aplicación ϕ_t , que son sus líneas de campo. El campo vectorial \mathbf{b} se conoce con el nombre de *vector de Whitehead* de ϕ_t . En función de estos vectores, el invariante de Hopf de la aplicación ϕ_t resulta, a partir de la fórmula (4.37),

$$H(\phi_t) = \int_{R^3} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} d^3r, \quad (4.42)$$

que es la expresión de la helicidad del campo vectorial solenoidal \mathbf{b} que tanto se ha estudiado hasta ahora en esta memoria.

Recordemos que el índice de Hopf es un invariante homotópico. Esto quiere decir que, si ϕ_t evoluciona de manera suave con el parámetro temporal t , entonces $H(\phi_t)$ no depende de este parámetro. Evidentemente, esto nos permite generalizar el estudio realizado hasta ahora al

espacio de Minkowski. Para ello, tomamos el “pull-back” de la forma de volumen de S^2 por la aplicación a todo tiempo $t \in R$

$$\phi : S^3 \times R \rightarrow S^2 , \quad (4.43)$$

que se puede escribir como

$$\phi^* \sigma = \frac{1}{2\pi i} \frac{d\phi \wedge d\bar{\phi}}{(1 + \phi\bar{\phi})^2} , \quad (4.44)$$

es decir,

$$\phi^* \sigma = \frac{1}{4\pi i} \frac{\partial_\mu \phi \partial_\nu \bar{\phi} - \partial_\mu \bar{\phi} \partial_\nu \phi}{(1 + \phi\bar{\phi})^2} dx^\mu \wedge dx^\nu . \quad (4.45)$$

La forma (4.45) se puede identificar con la forma de Faraday de un campo electromagnético sin más que adaptarla de manera que tenga las dimensiones adecuadas. Dado que estamos trabajando en unidades de Heaviside-Lorentz, y suponiendo que ϕ es una cantidad adimensional, se requiere multiplicar la forma (4.45) por una constante con dimensiones de la raíz cuadrada de acción por velocidad. Como ya se dijo en el segundo capítulo, la unidad de acción será \hbar , y la unidad de velocidad será c . En conclusión, definimos una forma de Maxwell como

$$F = -\sqrt{a} \phi^* \sigma = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu , \quad (4.46)$$

donde a es un múltiplo real de la cantidad $\hbar c$, y se ha escogido el signo menos, que no varía el valor del invariante de Hopf, por conveniencia. Si ahora tomamos unidades naturales, $\hbar = c = 1$, entonces a es un número real positivo. El tensor $F_{\mu\nu}$ es, simplemente,

$$F_{\mu\nu} = \frac{-\sqrt{a}}{2\pi i} \frac{\partial_\mu \phi \partial_\nu \bar{\phi} - \partial_\mu \bar{\phi} \partial_\nu \phi}{(1 + \phi\bar{\phi})^2} . \quad (4.47)$$

Siguiendo los pasos que se han dado para el caso tridimensional, la forma F es cerrada y exacta, de manera que existe una 1-forma potencial $A = A_\mu dx^\mu$ tal que $F = dA$. La helicidad magnética de este campo electromagnético es, por la ecuación (4.42) y el estudio que la precedió,

$$h_m = \int_{R^3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} d^3r = a H(\phi) , \quad (4.48)$$

es decir, es proporcional al invariante de Hopf de la aplicación a partir de la cual ha sido construido el campo, y este invariante de Hopf es un número entero y es un invariante topológico. Esto quiere decir que el conjunto de campos electromagnéticos cuya forma de Maxwell se puede escribir como (4.46) se clasifican en clases de homotopía, cada clase caracterizada por un número entero, que es el invariante de Hopf de la aplicación a partir de la cual se construye el campo, y que se relaciona con la helicidad magnética por la expresión $h_m = aH(\phi)$.

Volvamos al apartado 4.2.1, para recapitular. Habíamos encontrado que la identificación de las líneas magnéticas como curvas de nivel de una función compleja $\phi(\mathbf{r}, t)$ conducía a una 2-forma de Faraday de tipo $F = f(\phi, \bar{\phi}) d\phi \wedge d\bar{\phi}$. Ahora, acabamos de ver que, si escogemos para la función f la expresión

$$f(\phi, \bar{\phi}) = \frac{-\sqrt{a}}{2\pi i} \frac{1}{(1 + \bar{\phi}\phi)^2}, \quad (4.49)$$

entonces se obtiene el importante resultado (4.48), que significa que *la helicidad magnética está topológicamente cuantizada* por el valor del invariante de Hopf de ϕ .

Pero no se puede hablar de que las 2-formas que hemos obtenido sean formas de Faraday de campos electromagnéticos si no cumplen las ecuaciones de Maxwell $d*F = 0$. No parece que hayamos avanzado mucho en esta cuestión, pero tenemos la solución delante de los ojos. Lo que hemos hecho con las líneas magnéticas se puede hacer con las eléctricas. Para ello, sea $\theta(\mathbf{r}, t)$ una función compleja, tal que cumple los mismos requerimientos que ϕ en el infinito, de manera que se puede considerar

$$\theta : S^3 \times R \rightarrow S^2, \quad (4.50)$$

Sea la forma de Maxwell $G = *F$ de un campo electromagnético dada a través del "pull-back" de la forma de volumen de S^2 , por la aplicación θ , al espacio de Minkowski,

$$G = \sqrt{a} \theta^* \sigma, \quad (4.51)$$

que define el tensor $G_{\mu\nu}$ como

$$G_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{a}}{2\pi i} \frac{\partial_\mu \theta \partial_\nu \bar{\theta} - \partial_\mu \bar{\theta} \partial_\nu \theta}{(1 + \theta\bar{\theta})^2}. \quad (4.52)$$

De nuevo, la forma de Maxwell dada por (4.52) es cerrada (el argumento de siempre de conmutatividad de las operaciones de derivada exterior y "pull-back") y exacta (por la cohomología), así que se puede escribir $G = dC$, donde $C = C_\mu dx^\mu$ es la 1-forma que corresponde al cuadripotencial de Stratton, del que se habló en el capítulo anterior. Como consecuencia, la helicidad eléctrica

$$h_e = \int_{R^3} \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} d^3r = a H(\theta) \quad (4.53)$$

está topológicamente cuantizada por el invariante de Hopf de la aplicación θ . Recordemos que el potencial de Stratton se escoge tal que $\mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{C}$.

Ahora, para que las formas (4.46) y (4.52) den un campo electromagnético, se ha de cumplir la ecuación de dualidad $G = *F$, es decir,

$$\theta^* \sigma = -*(\phi^* \sigma) . \quad (4.54)$$

Para ver mejor el contenido de la ecuación de dualidad (4.54), es conveniente expresar el campo en función de los vectores tridimensionales \mathbf{B} y \mathbf{E} . A partir de la forma $F = -\sqrt{a}\phi^* \sigma$, el campo magnético $\mathbf{B}_i = -1/2 \varepsilon_{ijk} F^{jk}$ y el campo eléctrico $\mathbf{E}_i = F_{0i}$ son

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\sqrt{a}}{2\pi i (1 + \bar{\phi}\phi)^2} \nabla \phi \times \nabla \bar{\phi} , \\ \mathbf{E} &= \frac{\sqrt{a}}{2\pi i (1 + \bar{\phi}\phi)^2} \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} \nabla \phi - \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \bar{\phi} \right) . \end{aligned} \quad (4.55)$$

Análogamente, a partir de la forma $G = \sqrt{a}\phi^* \sigma$, el campo eléctrico $\mathbf{E}_i = -1/2 \varepsilon_{ijk} G^{jk}$ y el campo magnético $\mathbf{B}_i = G_{i0}$ son

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\sqrt{a}}{2\pi i (1 + \bar{\theta}\theta)^2} \nabla \bar{\theta} \times \nabla \theta , \\ \mathbf{B} &= \frac{\sqrt{a}}{2\pi i (1 + \bar{\theta}\theta)^2} \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} \nabla \theta - \frac{\partial \theta}{\partial t} \nabla \bar{\theta} \right) . \end{aligned} \quad (4.56)$$

La ecuación de dualidad (4.54) indica simplemente que el campo magnético dado por (4.55) es igual que el dado por (4.56), y lo mismo para

el campo eléctrico, esto es, la ecuación (4.54) se expresa como las dos ecuaciones vectoriales siguientes

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 + \bar{\phi}\phi)^2} \nabla\phi \times \nabla\bar{\phi} &= \frac{1}{(1 + \bar{\theta}\theta)^2} \left(\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial t} \nabla\theta - \frac{\partial\theta}{\partial t} \nabla\bar{\theta} \right), \\ \frac{1}{(1 + \bar{\theta}\theta)^2} \nabla\bar{\theta} \times \nabla\theta &= \frac{1}{(1 + \bar{\phi}\phi)^2} \left(\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial t} \nabla\phi - \frac{\partial\phi}{\partial t} \nabla\bar{\phi} \right). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Estas son las ecuaciones (no lineales) que deben cumplir las aplicaciones ϕ y θ para que las 2-formas que definen sean un campo electromagnético en el vacío. En la sección siguiente veremos cómo resolver estas ecuaciones, lo cual es mucho más sencillo que resolver las ecuaciones de Maxwell.

A partir de las expresiones (4.55) o (4.56), se ve fácilmente que $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$, es decir, los campos que hemos definido son campos singulares. Para sacar partido de esta circunstancia conviene volver a las condiciones de contorno de los campos eléctrico y magnético. Como se recordará, en el capítulo anterior se exigió que los campos eléctrico y magnético decrecieran más rápido que r^{-2} en la superficie de frontera $r \rightarrow \infty$. Además, en la sección 4.2.1 hemos escogido aplicaciones ϕ y θ tales que son constantes en esa frontera, es decir, sus respectivos límites en el infinito no dependen de la dirección. Si tenemos en cuenta las expresiones (4.55) y (4.56), resulta que las dos condiciones son una y la misma para estos campos, es decir, si tanto ϕ como θ son dos aplicaciones suaves, constantes en la superficie $r \rightarrow \infty$, entonces los campos magnético y eléctrico decrecen más rápido que r^{-2} en esa superficie. En estas circunstancias, podemos aplicar el resultado de la sección 3.3.3 respecto a las helicidades de los campos singulares, esto es, la helicidad magnética y la helicidad eléctrica de un campo singular en el vacío son iguales. Por tanto, se ha obtenido un resultado sobre el invariante de Hopf de dos aplicaciones $\phi, \theta : S^3 \rightarrow S^2$, a saber, si éstas están relacionadas mediante la ecuación de dualidad $\theta^*\sigma = -*(\phi^*\sigma)$, entonces pertenecen a la misma clase de homotopía (tienen el mismo invariante de Hopf), con las condiciones de contorno especificadas. Este resultado se refleja, al mismo tiempo, en la igualdad del número de enlace de las líneas magnéticas y eléctricas de los campos obtenidos a partir de las ecuaciones (4.55) y (4.56), lo cual indica que estos campos

están clasificados en clases de homotopía, caracterizadas por el valor común de las helicidades magnética y eléctrica. Todas estas cuestiones están resumidas en la siguiente definición de un nudo electromagnético.

Definición de nudo electromagnético. Dadas dos funciones complejas $\phi(\mathbf{r}, t)$ y $\theta(\mathbf{r}, t)$, definimos un campo electromagnético a través de las expresiones $F = -\sqrt{a}\phi^*\sigma$ y $G = \sqrt{a}\theta^*\sigma$. Este campo satisface las ecuaciones de Maxwell si se cumple la ecuación de dualidad $G = *F$. Requiriendo que ϕ y θ se puedan considerar como aplicaciones $S^3 \times R \rightarrow S^2$, los campos así definidos tienen topológicamente cuantizados los valores de la helicidad magnética y de la helicidad eléctrica, a través de los invariantes de Hopf de las aplicaciones ϕ y θ , respectivamente. Son campos singulares, en el sentido que $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$, y por tanto las helicidades magnética y eléctrica coinciden, exigiendo que ϕ y θ se comporten adecuadamente en el infinito. Las líneas magnéticas son las curvas de nivel de ϕ , y las eléctricas son las curvas de nivel de θ , de manera que, recordando lo que se ha visto sobre el significado topológico de la helicidad, en el capítulo 2 de esta memoria, y sobre el invariante de Hopf, en el apartado anterior, se llega a la conclusión de que cada pareja de líneas magnéticas está enlazada, con un número de enlace igual al invariante de Hopf de ϕ , y que cada pareja de líneas eléctricas está enlazada, con un número de enlace igual al invariante de Hopf de θ , que es el mismo que el de ϕ . Este número de enlace es invariante topológico, así que no depende del par de líneas usado para calcularlo. Además, los campos electromagnéticos así definidos se pueden clasificar en clases de homotopía, caracterizadas por el valor común de las helicidades magnética y eléctrica, y se conocen con el nombre de *nudos electromagnéticos*.

4.3 El modelo topológico de los nudos

Los nudos electromagnéticos, que se han introducido en la sección anterior, son soluciones muy curiosas de las ecuaciones de Maxwell para el vacío debido a que el número de enlace de las líneas de campo eléctrico es igual al magnético, y este número viene dado por el invariante de Hopf de ciertas aplicaciones usadas para construir los nudos. Es-

pecialmente interesante es que el conjunto de todos los nudos electromagnéticos se puede clasificar en clases de homotopía, cada una de ellas etiquetada por el valor común de las helicidades. En el capítulo siguiente estudiaremos algunos nudos explícitos, y sus propiedades dinámicas, y en el capítulo 6 veremos una aplicación de la idea de nudo electromagnético a la física macroscópica. Pero los nudos no sólo son interesantes por eso, sino que pueden usarse para construir localmente todos los campos de Maxwell en el vacío, obteniéndose así un modelo para el electromagnetismo clásico. Este es el contenido de esta sección. Veremos que todo campo estándar (por estándar se quiere decir toda solución de la teoría de Maxwell) es localmente equivalente a la suma de un par de nudos. Luego estableceremos el formalismo lagrangiano del modelo de nudos, demostrando que da las ecuaciones correctas, y también se hablará sobre los grados de libertad del modelo y sobre la no linealidad de las ecuaciones dinámicas que satisfacen los campos básicos, que son las dos aplicaciones complejas con las cuales se construye el nudo. Las soluciones de estas ecuaciones son mucho más directas que las de las ecuaciones de Maxwell, debido a que están dadas simplemente por una condición de ortogonalidad de las condiciones de Cauchy de los campos básicos. Aunque, en toda esta memoria, se trabaja siempre a nivel clásico, en esta sección se introducen también las llamadas variables de Clebsch y su significado. Estas variables son coordenadas canónicas de los campos, y podrían ser útiles para una eventual cuantización canónica del modelo. Los contenidos de esta sección se basan principalmente en los trabajos [2, 162].

4.3.1 Equivalencia local de los nudos y los campos estándar

En principio, está claro que no todas las soluciones de las ecuaciones de Maxwell en el vacío son nudos electromagnéticos. Para empezar, estos últimos son, por definición, campos singulares, en el sentido que $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$. Además, no todos los campos singulares se pueden obtener a partir de dos aplicaciones ϕ y θ , en cuyo caso serían nudos. Sin embargo, se puede demostrar que el conjunto de los nudos electromagnéticos, con un valor dado de la constante a , genera localmente todas las soluciones

estándar de las ecuaciones de Maxwell. Para ver esto, la estrategia que se seguirá es la siguiente: primero, se demuestra que toda solución de las ecuaciones de Maxwell en el vacío es localmente igual a la suma de dos campos singulares; segundo, se ve que cada campo singular es localmente igual a un nudo electromagnético. De esta manera, el conjunto de los nudos electromagnéticos genera un modelo topológico del electromagnetismo clásico en el vacío.

Haremos uso del teorema de Darboux [195, 196, 197, 198]. Sea F una k -forma definida en una variedad diferenciable de dimensión m . Se define el *rango* de F como el número mínimo r de 1-formas linealmente independientes tales que F se puede escribir como productos exteriores de ellas. Evidentemente, $k \leq r \leq m$. Pongámonos en el caso $k = 2$, es decir, sea F una 2-forma antisimétrica sobre un espacio vectorial M de dimensión m . El teorema de Darboux asegura que F puede tener rango m sólo si m es par; si $m = 2n$ y F tiene rango $2n$, entonces se puede escribir, en una base conveniente de M ,

$$(F_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.58)$$

donde I es la matriz unidad $n \times n$. Por tanto, si F es una forma simpléctica (esto es, cerrada y de rango $2n$) sobre una variedad suave M , entonces, para todo punto $x_0 \in M$ existe un sistema de coordenadas locales en torno a x_0 en el cual los F_{ij} son constantes. Cuando M tiene dimensión finita, el teorema de Darboux nos dice que, localmente, en cada punto existen coordenadas $(x^1, \dots, x^n, y_1, \dots, y_n)$ tales que

$$F = \sum_{i=1}^n dy_i \wedge dx^i. \quad (4.59)$$

Las coordenadas $(x^1, \dots, x^n, y_1, \dots, y_n)$ que dan la representación (4.59) para la forma F se llaman *coordenadas canónicas*, y están definidas excepto ciertas transformaciones que dejan invariante la forma (4.59) y que se llaman transformaciones canónicas [41, 199].

¿Qué significa el teorema de Darboux para el electromagnetismo en el vacío? Está claro que la forma de Faraday tiene rango 4 (se necesitan al menos cuatro 1-formas para determinarla en el espacio de Minkowski), siempre que el campo electromagnético sea no singular, y

es cerrada por la identidad de Bianchi, de manera que es una 2-forma simpléctica y se puede aplicar el teorema de Darboux, para asegurar que, localmente, la forma de Faraday se puede escribir como

$$F = dq^1 \wedge dp_1 + dq^2 \wedge dp_2 , \quad (4.60)$$

donde las funciones de las coordenadas del espacio de Minkowski $q^i(\mathbf{r}, t)$, $p_i(\mathbf{r}, t)$ son las coordenadas canónicas de la teoría de Maxwell, y se denominan *variables de Clebsch* [200, 187]. Las variables de Clebsch son buenas coordenadas del campo electromagnético, y se pueden usar para el formalismo hamiltoniano de la teoría [201], incluso generalizarlas a teorías de Yang-Mills o al campo gravitatorio [202].

Una buena imagen física de la representación (4.60) es la que sigue. Sea un campo electromagnético en el vacío dado por los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} . Su forma de Faraday se escribe

$$F = \mathbf{E}_x dt \wedge dx + \mathbf{E}_y dt \wedge dy + \mathbf{E}_z dt \wedge dz - \\ - \mathbf{B}_z dx \wedge dy + \mathbf{B}_y dx \wedge dz - \mathbf{B}_x dy \wedge dz . \quad (4.61)$$

A través de una transformación de Lorentz pura [175], con parámetro de velocidad \mathbf{V} dado, en unidades naturales, por

$$\frac{\mathbf{V}}{1 + V^2} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}}{E^2 + B^2} , \quad (4.62)$$

nos situamos en un sistema de referencia en el cual los campos eléctrico y magnético son paralelos en algún punto determinado P . Ahora, por una rotación espacial, podemos tomar su dirección común paralela al eje z , es decir, en el nuevo sistema de referencia,

$$\mathbf{E} = E \hat{\mathbf{z}} , \quad \mathbf{B} = B \hat{\mathbf{z}} , \quad (4.63)$$

(no he cambiado la notación para indicar el cambio en el sistema de referencia por no emborronar mucho las fórmulas; espero que, de todas maneras, el contexto explique lo que se quiere decir). La conclusión es que, en el punto P , la forma de Faraday se escribe

$$F = dt \wedge d(zE) + dy \wedge d(xB) , \quad (4.64)$$

que es del tipo (4.60).

En el vacío, le forma de Maxwell $G = *F$ juega un papel similar. Por tanto, todo campo electromagnético en el vacío se puede dar en función de dos cuartetos de variables de Clebsch

$$\begin{aligned} F &= dq^1 \wedge dp_1 + dq^2 \wedge dp_2 , \\ G &= dv^1 \wedge du_1 + dv^2 \wedge du_2 , \end{aligned} \quad (4.65)$$

sujetas a la condición de dualidad $G = *F$, esto es, cada uno de los cuartetos (q^1, q^2, p_1, p_2) y (v^1, v^2, u_1, u_2) son un conjunto completo de coordenadas canónicas. Ya tenemos la notación que vamos a necesitar. En las expresiones (4.65) es claro que, cada pareja $dq \wedge dp$ es un campo de tipo singular, es decir $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$. De hecho, para un campo singular se tiene que

$$F \wedge F = G \wedge G = 0 , \quad (4.66)$$

esto es, tanto la forma de Faraday como la de Maxwell son degeneradas. Ocurre entonces que son de rango 2, por lo cual se pueden dar localmente como producto exterior de dos 1-formas. Consecuentemente, un campo singular tiene dos variables de Clebsch, $p(\mathbf{r}, t)$ y $q(\mathbf{r}, t)$, y se escriben sus formas como

$$\begin{aligned} F^s &= dq \wedge dp , \\ G^s &= dv \wedge du , \end{aligned} \quad (4.67)$$

donde $u(\mathbf{r}, t)$ y $v(\mathbf{r}, t)$ son otra pareja de variables de Clebsch, relacionadas con la primera por la dualidad. Se concluye que toda solución estándar de la teoría de Maxwell en el vacío es localmente equivalente a la suma de dos campos singulares, que a su vez se dan en función de dos variables de Clebsch a partir de (4.67), pero esta descomposición no será única, en general. El superíndice s en (4.67) indica campo singular.

Volviendo a la interpretación de líneas de fuerza del apartado 4.2.1, hay que decir que, si el campo es singular, la notación (4.67) indica que es integrable, en el sentido que las líneas magnéticas son las trayectorias del sistema dinámico integrable que tiene a p y q como dos integrales primeras. El campo magnético es, entonces, tangente a las superficies magnéticas definidas por las ecuaciones $p = \text{constante}$, $q = \text{constante}$, y las líneas magnéticas son las intersecciones de estas superficies, que

folian el espacio R^3 . Si las funciones $p(\mathbf{r}, t)$ y $q(\mathbf{r}, t)$ son univaluadas, entonces las líneas magnéticas no están enlazadas [187]. Veamos esto. Estamos suponiendo que la forma de Faraday de un campo singular (4.67) está definida globalmente en el espacio de Minkowski. De esta manera, y dado que el segundo grupo de cohomología de R^4 es trivial, se tiene $F = dA$, donde A es una 1-forma definida globalmente. Consideremos que las dos 1-formas de (4.67) están definidas globalmente en R^4 , además de estarlo su composición $dq \wedge dp$. Entonces, por la cohomología, resulta que p y q son funciones univaluadas, y podemos escoger para la forma A una del tipo

$$A = \lambda qdp - (1 - \lambda) pdq, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad (4.68)$$

donde λ es una constante, pues $dA = dq \wedge dp = F$. Pero, con este valor de A , la helicidad magnética es cero, porque

$$A \wedge F = \lambda qdp \wedge dq \wedge dp - (1 - \lambda) pdq \wedge dq \wedge dp = 0, \quad (4.69)$$

de manera que resulta que, si $p(\mathbf{r}, t)$ y $q(\mathbf{r}, t)$ son funciones univaluadas, entonces las líneas magnéticas del campo $\mathbf{B} = \nabla p \times \nabla q$ no están enlazadas. Supongamos ahora que una de las dos 1-formas de (4.67), por ejemplo dq , diverge en todos los puntos de alguna curva cerrada l de R^3 . Entonces, su dominio espacial de definición es $R^3 - \{l\}$, que es homeomórfico a $S^1 \times R^2$. Esta variedad no es simplemente conexa, de manera que su primer grupo de cohomología no es trivial, así que q ya no está definida globalmente (no será univaluada). En estas condiciones, la 1-forma potencial no se puede escribir como (4.68), pues ha de estar definida en todo R^3 . La generalización de la expresión (4.68) para el caso en que dq diverge en una curva cerrada, pero no dp , es

$$A = -pdq + d\chi, \quad (4.70)$$

ya que el otro término de (4.68) es muy patológico por ser q una función multivaluada. En la expresión (4.70), el término $d\chi$ se añade para corregir la posible indefinición de pdq , de manera que tampoco estará definido globalmente (si lo estuviera, sólo sería una transformación "gauge" en R^3 , que no influye en la helicidad), pero la composición (4.70) sí está bien definida. La helicidad magnética es

$$h_m = \int_{R^3} \nabla \chi \cdot (\nabla p \times \nabla q) d^3r. \quad (4.71)$$

Si todos los factores de la ecuación (4.71) estuvieran definidos en todos los puntos de R^3 , entonces se podría aplicar el teorema de Stokes a la integral (4.71) y la helicidad magnética se anularía. En consecuencia, para tener enlaces en las líneas magnéticas, una condición necesaria (aunque no suficiente) es que las variables de Clebsch, p y q , no sean funciones univaluadas en R^3 . Estos comentarios también nos previenen de escoger un potencial vector "sencillo" como el de la forma (4.68). Evidentemente, lo mismo se puede decir de las líneas eléctricas y las funciones u y v . En el caso general (no singular), la forma de Faraday es de rango 4, y no será de la forma (4.67). La consecuencia es que el campo ya no es integrable, y puede ser caótico, como se estudia en los trabajos [45, 46].

Ahora se tiene que demostrar que todo campo electromagnético singular es localmente equivalente a un nudo. Más concretamente, se va a probar la siguiente proposición. *Todo campo singular que sea solución de las ecuaciones de Maxwell en el vacío, con forma de Faraday F^s , regular en un dominio acotado del espacio de D , coincide localmente con un nudo electromagnético en torno a cada punto $P \in D$ en el siguiente sentido: existe un nudo, con forma de Faraday F^n , tal que $F^s = F^n$ en torno a P , excepto quizás en un conjunto de medida cero. Lo mismo ocurre con la forma de Maxwell.* Esto significa que la diferencia entre el conjunto de campos singulares y el conjunto de nudos no es local, sino global. En otras palabras, nudos y campos singulares son localmente iguales. Una prueba es la siguiente.

Sea la forma de Faraday de un campo singular dada por (4.67). Podemos tomar $p(\mathbf{r}, t)$ y $q(\mathbf{r}, t)$ como cantidades adimensionales, en cuyo caso aparecerá una constante con dimensiones de raíz cuadrada de acción por velocidad. Redefiniendo p y q , tomamos esta constante como \sqrt{a} , para acercarnos a la notación de los nudos (en unidades naturales, en las que \sqrt{a} es un número real, sencillamente dividimos alguna de las variables de Clebsch por este número), esto es,

$$F^s = \sqrt{a} dq \wedge dp . \quad (4.72)$$

Ahora, hacemos la transformación canónica

$$\eta = \pi (p^2 + q^2) , \quad \delta = \frac{1}{2\pi} \arctan \left(\frac{q}{p} \right) . \quad (4.73)$$

Está claro que η y δ son tan buenas variables canónicas como p y q . En función de ellas,

$$F^s = \sqrt{a} d\delta \wedge d\eta . \quad (4.74)$$

Por otro lado, un nudo electromagnético definido a partir del escalar

$$\phi = R e^{(2\pi i \gamma)} , \quad (4.75)$$

tiene por forma de Faraday $F^n = -\sqrt{a}\phi^* \sigma$ la expresión

$$F^n = \sqrt{a} d\gamma \wedge d\left(\frac{1}{1+R^2}\right) . \quad (4.76)$$

Esto significa que F^s será un nudo si existen funciones regulares $R(\mathbf{r}, t)$ y $\gamma(\mathbf{r}, t)$ tales que

$$\eta = \frac{1}{1+R^2} , \quad \delta = \gamma . \quad (4.77)$$

La segunda ecuación de (4.77) no tiene problemas, pues tanto δ como γ han sido definidas como funciones tipo fase, en (4.73) y (4.75). El estudio de la otra condición se puede dividir en dos casos, según sea η acotada o no.

i) Primero, es claro que η es una función positiva por definición (4.73). Si $\eta \leq 1$ en todos los puntos, la solución para la función R es trivial, y el campo singular dado por F^s es un nudo electromagnético. Lo mismo se puede decir si η es una función acotada. Para verlo, sea $\eta \leq K$, donde K es un número real positivo. Tomemos un número entero N tal que $K \leq N$, y hagamos la transformación canónica

$$\eta' = \frac{\eta}{N} , \quad \delta' = N\delta . \quad (4.78)$$

Cambiando ahora las variables con primas por las que no las llevan en las ecuaciones (4.77) obtenemos una solución para las funciones R y γ , dada por

$$\eta = \frac{N}{1+R^2} , \quad N\delta = \gamma . \quad (4.79)$$

En conclusión, si η es una función acotada, entonces el campo singular F^s es un nudo.

ii) Sea ahora el caso en el cual η no está acotada en el dominio D (pero $F_{\mu\nu}^s$ son funciones continuas, y la ecuación (4.74) es aún válida).

Sea Σ el conjunto tridimensional en el que η diverge, que ha de ser un conjunto de medida cero para que se pueda definir un campo electromagnético. En general, $D - \Sigma$ consta de un número n de componentes abiertas conexas. Llamemos $D_j^* \subset D_j$ a los n subconjuntos abiertos en los que η está acotada. En cada uno de ellos, se pueden definir las variables R y γ por el método dado en (i). Se sigue entonces que el campo singular es igual a un nudo en cada D_j^* . Ahora, el volumen de $D - \cup D_j^*$ se puede hacer tan pequeño como se desee porque el conjunto de puntos en los que η diverge tiene medida cero. Por tanto, el campo singular F^s se puede obtener pegando los correspondientes nudos electromagnéticos F_j^n , cada uno definido en su región D_j^* , excepto para un conjunto, tan pequeño como se requiera, que contiene a Σ . Nótese que no hay ningún problema si alguno de los D_j no es simplemente conexo. Lo mismo se puede hacer con la forma de Maxwell $*F^s$, que coincidirá con su correspondiente forma $*F^n$ excepto quizá en otro conjunto de medida cero Σ' . Esto significa que todo campo singular coincide localmente con un nudo electromagnético, excepto quizá sobre un conjunto de medida nula. En otras palabras, los campos singulares se pueden obtener pegando nudos, generados por funciones complejas ϕ_j y θ_j , cada uno definido en un dominio diferente, excepto a lo sumo en el conjunto de medida cero $\Sigma \cup \Sigma'$. Esto finaliza la demostración.

Para acabar este apartado, conviene dar algunos ejemplos del funcionamiento de la equivalencia local que se acaba de demostrar. Daremos tres: el campo de Coulomb, la onda plana y la onda estacionaria. Sean las funciones complejas

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}, t) &= R e^{2\pi i q} , \\ \theta(\mathbf{r}, t) &= S e^{2\pi i u} .\end{aligned}\tag{4.80}$$

Si definimos las variables q y v según

$$p = \frac{1}{1 + R^2} , \quad v = \frac{1}{1 + S^2} ,\tag{4.81}$$

entonces el campo electromagnético dado por $F = -\sqrt{a}\phi^*\sigma$, $G = \sqrt{a}\theta^*\sigma$ se escribe

$$\begin{aligned}F &= \sqrt{a} dq \wedge dp , \\ G &= \sqrt{a} dv \wedge du ,\end{aligned}\tag{4.82}$$

donde (q, p) es un conjunto de variables de Clebsch, y (u, v) es otro conjunto, relacionado con el primero a través de la ecuación de dualidad $G = *F$, que se puede expresar como

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \sqrt{a} \nabla p \times \nabla q = \sqrt{a} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \nabla v - \frac{\partial v}{\partial t} \nabla u \right), \\ \mathbf{E} &= \sqrt{a} \nabla u \times \nabla v = \sqrt{a} \left(\frac{\partial q}{\partial t} \nabla p - \frac{\partial p}{\partial t} \nabla q \right), \end{aligned} \quad (4.83)$$

Las variables (q, p) y (u, v) son adimensionales. Además, por construcción, q y u son funciones fase, y $0 \leq p, v \leq 1$. Veamos ahora los ejemplos.

Ejemplo 1. El campo de Coulomb provocado por una carga puntual de valor Q , situada en el origen, es, medido en unidades naturales de Heaviside-Lorentz,

$$\mathbf{E} = \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi r^3}, \quad \mathbf{B} = 0. \quad (4.84)$$

A partir de las ecuaciones (4.83) obtenemos que este campo se puede dar por las variables de Clebsch

$$\begin{aligned} p &= \frac{r^2}{r^2 + t^2}, \quad q = \frac{Q}{8\pi\sqrt{a}} \frac{(r^2 + t^2)^2}{r^3 t} \log\left(\frac{r}{r_0}\right), \\ v &= \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right), \quad u = \frac{Q\alpha}{2\pi\sqrt{a}}, \end{aligned} \quad (4.85)$$

donde r_0 es alguna longitud, y α y β son los ángulos polar y azimutal, definidos por

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad \beta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right). \quad (4.86)$$

Las funciones complejas vienen dadas por

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{t}{r} \exp\left(\frac{iQ}{4\sqrt{a}} \frac{(r^2 + t^2)^2}{r^3 t} \log\left(\frac{r}{r_0}\right)\right), \\ \theta &= \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \exp\left(i\frac{Q\alpha}{\sqrt{a}}\right). \end{aligned} \quad (4.87)$$

Como vemos, ambos escalares son regulares excepto en los puntos $r = 0$ y $r = \infty$. Parece sorprendente que el modelo nos de una solución como (4.87) para un campo de Coulomb, cuando se supone que nos restringimos a campos en el vacío. Volveremos a esta importante cuestión en la siguiente sección.

Ejemplo 2. Una onda plana que se propaga a lo largo del eje x tiene por campos eléctrico y magnético

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 \sin [\omega_0(x - t)] \hat{\mathbf{y}} , \\ \mathbf{B} &= E_0 \sin [\omega_0(x - t)] \hat{\mathbf{z}} . \end{aligned} \quad (4.88)$$

Las variables de Clebsch, en este caso, se pueden dar como

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} (1 - \cos [\omega_0(x - t)]) , \quad q = \frac{2E_0 y}{\sqrt{a\omega_0}} , \\ v &= \frac{1}{2} (1 - \cos [\omega_0(x - t)]) , \quad u = \frac{2E_0 z}{\sqrt{a\omega_0}} , \end{aligned} \quad (4.89)$$

y las funciones complejas son

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1 + \cos [\omega_0(x - t)]}{\sin [\omega_0(x - t)]} \exp \left(i \frac{4\pi E_0 y}{\sqrt{a\omega_0}} \right) , \\ \theta &= \frac{1 + \cos [\omega_0(x - t)]}{\sin [\omega_0(x - t)]} \exp \left(i \frac{4\pi E_0 z}{\sqrt{a\omega_0}} \right) . \end{aligned} \quad (4.90)$$

A partir de estas expresiones es fácil ver que ni ϕ ni θ representan aplicaciones suaves $S^3 \rightarrow S^2$ para cada instante t , debido a que no están bien definidas en el infinito. Sin embargo, hay aplicaciones suaves que coinciden con ellas en todo dominio acotado, y que sí están definidas en el infinito. El hecho de no poder expresar las ondas planas como nudos globales no ha de ser muy preocupante, ya que una onda plana extendida a todo el espacio R^3 no es una solución física, pues requiere una energía infinita.

Ejemplo 3. Una onda estacionaria, que expresa un modo en una cavidad cúbica, se escribe a través del potencial

$$\begin{aligned} A^0 &= 0 , \\ A_1 &= A_{01} \cos (k_1 x) \sin (k_2 y) \sin (k_3 z) \cos (\omega t) , \\ A_2 &= A_{02} \sin (k_1 x) \cos (k_2 y) \sin (k_3 z) \cos (\omega t) , \\ A_3 &= A_{03} \sin (k_1 x) \sin (k_2 y) \cos (k_3 z) \cos (\omega t) , \end{aligned} \quad (4.91)$$

donde $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \omega^2$. Los escalares que dan este campo se pueden tomar como

$$\phi = \sqrt{\frac{1-p}{p}} e^{2\pi i q}, \quad \theta = \sqrt{\frac{1-v}{v}} e^{2\pi i u}, \quad (4.92)$$

siendo las variables de Clebsch

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}(1 + \sin(k_1 x) \sin(k_2 y) \sin(k_3 z) \cos(\omega t)), \\ q &= \sum_{j=1}^3 \left(\frac{2A_{0j}}{\sqrt{a}k_j} \log |\sin(k_j x_j)| \right), \\ v &= \frac{1}{2}(1 + \cos(k_1 x) \cos(k_2 y) \cos(k_3 z) \sin(\omega t)), \\ u &= \sum_{j=1}^3 \left(\frac{2(\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0)_j}{\sqrt{a}\omega k_j} \log |\sin(k_j x_j)| \right). \end{aligned} \quad (4.93)$$

Las funciones escalares ϕ y θ no están bien definidas en los planos $k_1 x = n_1 \pi$, $k_2 y = n_2 \pi$, $k_3 z = n_3 \pi$, donde los n_i son números enteros, pues p y u divergen allí. Pero existen escalares $\phi_{n_1 n_2 n_3}$ y $\theta_{n_1 n_2 n_3}$, bien definidos y suaves en los dominios finitos $n_1 \pi < k_1 x < (n_1 + 1)\pi$, $n_2 \pi < k_2 y < (n_2 + 1)\pi$, $n_3 \pi < k_3 z < (n_3 + 1)\pi$, que generan los campos en cada uno de ellos. Sin embargo, éstos no pueden ser construidos a partir de aplicaciones suaves $S^3 \rightarrow S^2$ en todo el espacio. Como se dijo más arriba, los campos se pueden obtener pegando nudos definidos en dominios acotados. Desde un punto de vista local, esta onda electromagnética coincide con un nudo en torno a cada punto (excepto en un conjunto de medida nula), pero no hay un nudo que coincida con ella en todo R^3 .

Conviene hacer un último comentario sobre la equivalencia local de los nudos y los campos estándar. En la demostración hecha no se ha dicho nada sobre un valor predeterminado de la constante a . De hecho, para cada valor real positivo de a existe un conjunto de nudos electromagnéticos, y cada uno de estos conjuntos genera todas las soluciones estándar localmente. Esto quiere decir que, en lo que sigue, se tomará a como una constante del modelo de los nudos. Esta constante es la misma en todos los nudos. Su valor quedará fijado por requerimientos físicos en la sección 4.4 de este capítulo.

4.3.2 Formalismo lagrangiano del modelo

Según lo que se acaba de ver, parece posible estudiar el electromagnetismo en el vacío a través de un modelo topológico en función de dos funciones complejas ϕ y θ de las coordenadas del espacio de Minkowski. Para formalizar este modelo, usamos la integral de acción

$$\frac{-1}{4} \int (F \wedge *F - G \wedge *G) , \quad (4.94)$$

dado que es igual a la acción usual de Maxwell-Lorentz. En (4.94), la forma F viene dada en función de ϕ y de $\bar{\phi}$, y la forma G , en función de θ y $\bar{\theta}$. Evidentemente, se ha de cumplir la ecuación de dualidad $G = *F$, lo que imponemos a través del método variacional de Lagrange. En consecuencia, el lagrangiano del modelo se toma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{-1}{8} \left(F_{\mu\nu}(\phi, \bar{\phi}) F^{\mu\nu}(\phi, \bar{\phi}) - G_{\mu\nu}(\theta, \bar{\theta}) G^{\mu\nu}(\theta, \bar{\theta}) \right) \\ & + \frac{1}{2} \lambda^{\mu\nu} \left(G_{\mu\nu}(\theta, \bar{\theta}) - \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}(\phi, \bar{\phi}) \right) , \end{aligned} \quad (4.95)$$

donde $\lambda_{\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico cuyas componentes son las seis constantes que juegan el papel de multiplicadores de Lagrange. Las ecuaciones de movimiento de los campos básicos ϕ , $\bar{\phi}$, θ y $\bar{\theta}$ son las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) , \quad (4.96)$$

y análogas para los otros tres campos. Dado que \mathcal{L} sólo depende de ϕ y sus derivadas a través de $F_{\mu\nu}$, las ecuaciones (4.96) se pueden escribir como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\alpha\beta}} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial \phi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\alpha\beta}} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) . \quad (4.97)$$

Derivando funcionalmente la expresión (4.95) se obtiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\alpha\beta}} = \frac{-1}{4} (F^{\alpha\beta} + \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \lambda_{\mu\nu}) . \quad (4.98)$$

Por otro lado, el tensor $F_{\mu\nu}$, en función de ϕ y $\bar{\phi}$, era

$$F_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{a}}{2\pi i} \frac{\partial_\mu \bar{\phi} \partial_\nu \phi - \partial_\mu \phi \partial_\nu \bar{\phi}}{(1 + \bar{\phi}\phi)^2}, \quad (4.99)$$

de manera que las derivadas que necesitamos son

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial \phi} &= \frac{-2\bar{\phi}}{1 + \bar{\phi}\phi} F_{\alpha\beta}, \quad (4.100) \\ \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\rho \phi)} &= \frac{-\sqrt{a}}{2\pi i (1 + \bar{\phi}\phi)^2} (\delta_\alpha^\rho \partial_\beta \bar{\phi} - \delta_\beta^\rho \partial_\alpha \bar{\phi}). \end{aligned}$$

Introduciendo las expresiones (4.98) y (4.100) en la ecuación (4.97) se llega a las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} & (F_{\alpha\beta} + \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \lambda_{\mu\nu}) \left(\frac{\bar{\phi}}{1 + \bar{\phi}\phi} F_{\alpha\beta} + \frac{\sqrt{a}}{2\pi i} \partial_\beta \left(\frac{\partial_\alpha \bar{\phi}}{(1 + \bar{\phi}\phi)^2} \right) \right) = \\ & = \frac{\sqrt{a}}{2\pi i} \frac{\partial_\alpha \bar{\phi}}{(1 + \bar{\phi}\phi)^2} \partial_\beta F^{\alpha\beta}. \quad (4.101) \end{aligned}$$

El lado izquierdo de la ecuación (4.101), que es el que depende de los multiplicadores de Lagrange, resulta nulo si se opera teniendo en cuenta que $F_{\alpha\beta}$ y $\lambda_{\mu\nu}$ son antisimétricos, ya que la cantidad que no es directamente cero en la expresión que los multiplica es simétrica en α y β . En consecuencia, las ecuaciones de movimiento para ϕ son

$$\frac{\partial_\alpha \bar{\phi}}{(1 + \bar{\phi}\phi)^2} \partial_\beta F^{\alpha\beta} = 0. \quad (4.102)$$

Haciendo lo mismo para las otras tres variables, se llega a

$$\begin{aligned} \partial_\beta F^{\alpha\beta} \partial_\alpha \bar{\phi} &= 0, \quad \partial_\beta F^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi = 0, \\ \partial_\beta G^{\alpha\beta} \partial_\alpha \bar{\theta} &= 0, \quad \partial_\beta G^{\alpha\beta} \partial_\alpha \theta = 0, \end{aligned} \quad (4.103)$$

que, junto a la ecuación de dualidad $G = *F$, da las ecuaciones de Maxwell correctas

$$\partial_\beta F^{\alpha\beta} = 0, \quad \partial_\beta G^{\alpha\beta} = 0. \quad (4.104)$$

De hecho, ya sabíamos que estas ecuaciones se cumplían, debido a las identidades de Bianchi sobre las formas de Maxwell y de Faraday. En este sentido, (4.104) no nos dicen nada nuevo. Incluso, si sustituimos los valores de $F^{\alpha\beta}$ y $G^{\alpha\beta}$, en función de ϕ y θ , en (4.104), y utilizamos la dualidad, las ecuaciones (4.104) son identidades. Como consecuencia, el lagrangiano (4.95) no tiene más ecuaciones de movimiento para los nudos electromagnéticos que las identidades que se deducen directamente por la construcción de estos nudos. Pero es más importante haber comprobado que la ligadura no afecta a las ecuaciones de movimiento. Así, se mantiene en la evolución dinámica del sistema, esto es, si imponemos que $G = *F$ en el instante inicial, entonces esta condición se mantiene automáticamente en el movimiento. Por tanto, en el modelo topológico del electromagnetismo clásico basado en las funciones complejas ϕ y θ , la mera existencia de estas funciones y la condición de dualidad *en el instante inicial* conducen automáticamente a satisfacer las ecuaciones de Maxwell. Además, como se dijo en el apartado anterior, toda solución estándar de estas ecuaciones se puede construir localmente a través de los nudos. Por tanto, es posible el modelo topológico basado en estas dos funciones complejas, pero aún se ha de estudiar la existencia de soluciones.

4.3.3 Las condiciones de Cauchy

Para conocer si existen nudos electromagnéticos se han de caracterizar las condiciones de Cauchy. Estas son las cuatro funciones complejas

$$\begin{aligned} \phi_0(\mathbf{r}) &= \phi(\mathbf{r}, t)|_{t=0} \quad , \quad \phi_1(\mathbf{r}) = \left. \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right|_{t=0} \quad , \\ \theta_0(\mathbf{r}) &= \theta(\mathbf{r}, t)|_{t=0} \quad , \quad \theta_1(\mathbf{r}) = \left. \frac{\partial \theta(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right|_{t=0} \quad , \end{aligned} \quad (4.105)$$

es decir, las condiciones de Cauchy son ocho funciones reales. Estas funciones están sujetas a la condición de dualidad en el instante $t = 0$, como hemos visto en el apartado anterior. En la notación (4.105), la condición de dualidad se escribe en función de las siguientes seis

ecuaciones en las condiciones de Cauchy y sus derivadas espaciales:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 + \bar{\phi}_0\phi_0)^2} \nabla\phi_0 \times \nabla\bar{\phi}_0 &= \frac{1}{(1 + \bar{\theta}_0\theta_0)^2} (\bar{\theta}_1 \nabla\theta_0 - \theta_1 \nabla\bar{\theta}_0) \\ \frac{1}{(1 + \bar{\theta}_0\theta_0)^2} \nabla\bar{\theta}_0 \times \nabla\theta_0 &= \frac{1}{(1 + \bar{\phi}_0\phi_0)^2} (\bar{\phi}_1 \nabla\phi_0 - \phi_1 \nabla\bar{\phi}_0) \end{aligned} \quad (4.106)$$

La respuesta a la pregunta de la existencia de soluciones aparece ya como positiva, pues tenemos seis ecuaciones para ocho incógnitas, las condiciones de Cauchy (4.105). Podemos utilizar las ecuaciones (4.106) para eliminar incógnitas, en particular ϕ_1 y θ_1 . Para ello, notamos que los campos eléctrico y magnético son ortogonales, así que las funciones ϕ_0 y θ_0 satisfacen la condición

$$(\nabla\bar{\phi}_0 \times \nabla\phi_0) \cdot (\nabla\bar{\theta}_0 \times \nabla\theta_0) = 0, \quad (4.107)$$

que es una ecuación real en derivadas parciales para las dos funciones complejas ϕ_0 y θ_0 , y tiene infinitas soluciones. Cada una de ellas da una pareja $(\phi_0(\mathbf{r}), \theta_0(\mathbf{r}))$. Entonces, las ecuaciones (4.106) fijan las funciones ϕ_1 y θ_1 . A partir de la condición de ortogonalidad (4.107) se obtiene que existen dos funciones complejas de las coordenadas, $f(\mathbf{r})$ y $g(\mathbf{r})$, tales que

$$\begin{aligned} \nabla\theta_0 \times \nabla\bar{\theta}_0 &= f(\mathbf{r}) \nabla\bar{\phi}_0 - \bar{f}(\mathbf{r}) \nabla\phi_0, \\ \nabla\phi_0 \times \nabla\bar{\phi}_0 &= \bar{g}(\mathbf{r}) \nabla\theta_0 - g(\mathbf{r}) \nabla\bar{\theta}_0, \end{aligned} \quad (4.108)$$

así que, insertando (4.108) en (4.106), se obtienen

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{r}) &= \frac{\left(\frac{1 + \bar{\phi}_0\phi_0}{1 + \bar{\theta}_0\theta_0}\right)^2}{\left(\frac{1 + \bar{\phi}_0\phi_0}{1 + \bar{\theta}_0\theta_0}\right)^2} f(\mathbf{r}), \\ \theta_1(\mathbf{r}) &= \left(\frac{1 + \bar{\theta}_0\theta_0}{1 + \bar{\phi}_0\phi_0}\right)^2 g(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (4.109)$$

Consecuentemente, las condiciones de Cauchy son las dos funciones complejas $\phi_0(\mathbf{r})$, $\theta_0(\mathbf{r})$, sujetas a las condiciones diferenciables de ortogonalidad (4.107). Las soluciones existen, y serán nudos electromagnéticos.

4.3.4 No linealidad escondida

El modelo de los nudos electromagnéticos que se ha construido puede parecer lineal a primera vista, porque los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} obedecen ecuaciones lineales, que son las ecuaciones de Maxwell en el vacío. Sin embargo, no puede ser realmente lineal pues existen constantes topológicas del movimiento, es decir, los nudos electromagnéticos cumplen

$$h_m = h_e = a n , \quad (4.110)$$

de manera que, si el campo (\mathbf{E}, \mathbf{B}) es un nudo electromagnético y, por tanto, es solución del modelo, entonces el campo $(\lambda\mathbf{E}, \lambda\mathbf{B})$ es otro nudo, en general, sólo si λ es un número entero. En este caso, si (\mathbf{E}, \mathbf{B}) estaba construido a partir de las funciones $\phi = R \exp(2\pi i q)$ y $\theta = S \exp(2\pi i u)$, entonces el nudo $(m\mathbf{E}, m\mathbf{B})$ está construido a partir de $\phi^{(m)} = R \exp(2\pi i m q)$ y $\theta^{(m)} = S \exp(2\pi i m u)$. Así, si (\mathbf{E}, \mathbf{B}) era un nudo con helicidad $h_m = h_e = a n$, entonces el nudo $(m\mathbf{E}, m\mathbf{B})$ tiene $h_m = h_e = a n m^2$. Cuando λ no es un entero, entonces, en el caso general, $(\lambda\mathbf{E}, \lambda\mathbf{B})$ no es un nudo desde el punto de vista global, pero lo es desde un punto de vista local. La diferencia está en la manera en la que los campos se comportan en el infinito. En estos comentarios se ha especificado que, si (\mathbf{E}, \mathbf{B}) es un nudo, entonces $(\lambda\mathbf{E}, \lambda\mathbf{B})$ es también un nudo si λ es un número entero, y no lo es, globalmente, si λ no es un entero, en general. La precisión "en general" es importante porque, si el campo (\mathbf{E}, \mathbf{B}) es un nudo, pero sus aplicaciones base nunca toman los valores cero ni infinito, entonces pertenece a la clase de homotopía de helicidad nula, y, en este caso, todos los múltiplos $(\lambda\mathbf{E}, \lambda\mathbf{B})$, con λ real, son nudos con helicidad nula. Esto se puede considerar como un residuo de linealidad. Las mismas consideraciones se pueden hacer respecto a la suma de dos nudos: en general, no será un nudo global.

Todo esto es consecuencia de las ecuaciones no lineales que siguen las funciones básicas ϕ y θ . El modelo de los nudos tiene una peculiar forma de no linealidad, que puede denominarse *no linealidad escondida* [2]. Lo que ocurre es que el conjunto de los nudos electromagnéticos forma un subconjunto no lineal del espacio lineal de soluciones de las ecuaciones de Maxwell, pero puede considerarse como subconjunto lineal desde un punto de vista local. Sin embargo, el sacrificio de la

linealidad se ve recompensado por la incorporación de reglas de cuantización topológica, que van a ser desarrolladas en la siguiente sección.

4.4 Cuantización topológica

Esta sección está dedicada a la explicación de las reglas de cuantización topológica que aparecen en el modelo de los nudos electromagnéticos. Como ya se ha comentado en las secciones anteriores, este modelo tiene por campos básicos dos campos escalares complejos, definidos en el espacio de Minkowski cuya parte espacial está compactificada y, además, se considera que el espacio de llegada es el plano complejo compactificado, esto es, $\phi, \theta : S^3 \times R \rightarrow S^2$. Estos campos dan lugar localmente a la teoría de Maxwell en el vacío, con tal que sus condiciones de Cauchy $\phi(\mathbf{r}, 0)$ y $\theta(\mathbf{r}, 0)$ satisfagan una relación de ortogonalidad. Al ser S^3 una variedad no trivial (se necesitan dos cartas coordenadas para definirla), nos encontramos con que aparecen cargas topológicas, que son cantidades integrales constantes del movimiento, y cuyo valor está discretizado por motivos topológicos. Las cargas topológicas del modelo de nudos electromagnéticos tienen un significado físico especialmente claro, que vamos a tratar en esta sección, basándonos en los trabajos [2, 159, 161, 162].

En primer lugar, los nudos definidos espacialmente en S^3 tienen cuantizado el valor de las helicidades. Se relacionará esta cuestión con el estudio de la helicidad electromagnética del capítulo 3, y se obtendrá un valor fijo para la constante a del modelo. Por otro lado, se estudiarán los campos de Coulomb del modelo, que no son todos los permitidos por la teoría de Maxwell, sino que sólo pertenecen al modelo aquellos campos de Coulomb acoplados a cargas eléctricas y magnéticas puntuales cuyo valor es un múltiplo entero de una carga fundamental.

4.4.1 Cuantización topológica de la helicidad y normalización de los nudos

En el apartado 4.2.3 de este capítulo, al definir los nudos electromagnéticos, se encontró que las helicidades magnética y eléctrica estaban dadas por los invariantes de Hopf de las dos aplicaciones a partir de

las cuales se construían los campos magnético y eléctrico, esto es, en un principio parecían existir dos cargas topológicas. Sin embargo, la condición de ortogonalidad de los campos básicos obligaba a igualar el valor de ambas cargas. Como consecuencia, sólo hay un invariante de helicidad en el modelo de nudos, y sólo hay una carga topológica. Esta es una buena noticia, como se verá. Consideremos la helicidad electromagnética, definida como la suma de las helicidades magnética y eléctrica. Para un nudo electromagnético, definido a partir de los escalares (ϕ, θ) , se tiene

$$\begin{aligned} h_m &= a H(\phi) , \quad h_e = a H(\theta) , \\ H(\phi) &= H(\theta) = n , \end{aligned} \quad (4.111)$$

de modo que la helicidad electromagnética del nudo es

$$h = h_m + h_e = 2an , \quad (4.112)$$

que es la carga topológica natural asociada al nudo. Por otro lado, en la sección 3.3.2 del capítulo 3, vimos que la helicidad de todo campo electromagnético en el vacío satisface

$$h = 2\hbar c (N_R - N_L) , \quad (4.113)$$

(en este apartado usamos unidades físicas, por claridad) donde

$$N_R = \int d^3k \bar{a}_R a_R , \quad N_L = \int d^3k \bar{a}_L a_L , \quad (4.114)$$

siendo $a_R(\mathbf{k})$, $a_L(\mathbf{k})$ transformadas de Fourier del potencial vector \mathbf{A} , es decir, son campos clásicos cuyos análogos cuánticos se interpretan, en electrodinámica cuántica, como operadores de aniquilación para fotones con polarización dextrógira (helicidad +1) y levógira (helicidad -1), respectivamente, de modo que, en la teoría cuántica, N_R y N_L se interpretan como los operadores número de fotones dextrógiros y levógiros. Dado que la ecuación (4.112) es válida para todo nudo, y la ecuación (4.113) es válida para todo campo electromagnético en el vacío, igualándolas se obtiene la siguiente relación

$$h = 2an = 2\hbar c (N_R - N_L) , \quad (4.115)$$

válida para todo nudo electromagnético. En conclusión, los nudos electromagnéticos tienen cuantizada topológicamente el valor de la cantidad clásica

$$N_R - N_L = \left(\frac{a}{\hbar c} \right) n , \quad (4.116)$$

y pueden clasificarse en clases de homotopía, etiquetadas por el valor de esa cantidad. Ahora bien, se ha comentado en la sección anterior que el conjunto de nudos con un valor determinado de la constante de acción por velocidad a genera localmente toda la teoría de Maxwell en el vacío, esto es, para cada valor de a tenemos localmente toda la teoría. Con esto en cuenta, lo más simple y mejor que se puede hacer es tomar

$$a = \hbar c , \quad (4.117)$$

pues entonces se tiene la muy interesante relación

$$N_R - N_L = n , \quad (4.118)$$

es decir, *la cantidad clásica $N_R - N_L$ está topológicamente cuantizada por el valor común del invariante de Hopf de los campos escalares básicos*. Esto es expresable diciendo que, si $a = \hbar c$ (o $a = 1$ en unidades naturales), los nudos electromagnéticos son los campos clásicos con la normalización correcta para ser el límite clásico de la teoría cuántica, en la que el espectro del operador $N_R - N_L$ es el conjunto de los números enteros. Por esta razón, a partir de este momento se tomará $a = \hbar c$.

En relación con la normalización de los nudos que se ha establecido, es conveniente decir que, si multiplicamos las fases de los campos básicos ϕ y θ por un entero j , los campos \mathbf{B} y \mathbf{E} resultan multiplicados por j , y la energía y la helicidad resultan multiplicadas por j^2 . De este modo, se pueden definir nudos con cantidades dinámicas tan grandes como se desee, incluso con el pequeño valor de a que se ha encontrado, que juega el papel de unidad de helicidad. También es conveniente comentar que, en ningún momento, se pretende hablar de nociones como "fotones clásicos", sino sólo que existe una correspondencia formal entre las cantidad clásica $N_R - N_L$ y el operador cuántico de helicidad.

Según vimos en la sección 4.3, los nudos son campos singulares ($\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$), y cada campo singular es localmente equivalente a un nudo. Por otro lado, el teorema de Darboux aseguraba que todo campo electromagnético se puede escribir localmente como suma de dos campos

singulares. Consecuentemente, todo campo no singular es localmente igual a la suma de dos nudos. Consideremos un campo no singular formado por la suma de los nudos (ϕ_1, θ_1) y (ϕ_2, θ_2) , es decir

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2, \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} &= \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{B}_2 + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{B}_1 \neq 0, \end{aligned} \quad (4.119)$$

que se puede denominar *nudo compuesto*, pues cada pareja $(\mathbf{E}_a, \mathbf{B}_a)$, con $a = 1, 2$, es un nudo. La helicidad de este nudo compuesto, suponiendo que los invariantes de Hopf involucrados son $H(\phi_1) = H(\theta_1) = n_1$ y $H(\phi_2) = H(\theta_2) = n_2$, es tal que

$$N_R - N_L = n_1 + n_2 + \frac{1}{\hbar c} \int_{R^3} (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_2 + \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{E}_2) d^3r, \quad (4.120)$$

pues las ecuaciones de Maxwell implican que

$$\int_{R^3} (\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{B}_1 + \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{E}_1) d^3r = \int_{R^3} (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_2 + \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{E}_2) d^3r. \quad (4.121)$$

Por tanto, en los nudos compuestos, localmente equivalentes a todo campo electromagnético en el vacío, la cantidad clásica $N_R - N_L$ ya no será, en general, un número entero. Aparece un "término de interferencia", cuyo significado topológico (tal vez relacionado con posibles enlaces de las líneas de un nudo con otro, tal vez con la dirección relativa de dichas líneas) no ha sido encontrado por ahora. La ecuación (4.120) para un nudo compuesto hace aún más valioso el resultado (4.118), pues parece indicar que los nudos simples, convenientemente normalizados, que generan la teoría de Maxwell en el vacío por sí mismos (a través de sumas de dos de ellos, en general), son los únicos que dan un valor entero a la cantidad clásica $N_R - N_L$.

4.4.2 El problema de la carga eléctrica

Uno de los problemas físicos básicos aún sin resolver es el de la discretización de los valores posibles de una carga eléctrica. Experimentalmente se observa que los valores de todas las cargas eléctricas aisladas que aparecen en la Naturaleza son múltiplos enteros de un valor fundamental, que es el de la carga del electrón,

$$Q_e = ne, \quad e = \sqrt{4\pi\alpha_e} = 0.3028 \dots, \quad (4.122)$$

donde el valor de e en (4.122) está medido en unidades naturales [203], y α_e representa la intensidad de la interacción eléctrica entre dos cargas de valor e . Existen muchas posibles explicaciones teóricas de este hecho, pero aún no hay una que satisfaga a todo el mundo.

Una posible explicación, en el contexto de la teoría “gauge” $U(1)$ del electromagnetismo, está en usar una representación unitaria del grupo “gauge” en la cual los parámetros de las transformaciones estén discretizados [197], pero no está muy claro el por qué de esta ligadura. Por otro lado, la posibilidad de formular las ecuaciones de Maxwell sobre cualquier variedad cuadridimensional con métrica de tipo lorentziano (a través de las formas de Faraday y de Maxwell) ha permitido algunos modelos en los que se responde la cuestión “¿qué es la carga?” con la frase “carga es topología” [204]. En esta idea se basan algunas explicaciones sobre la posibilidad de variedades en las que hay “carga sin carga”, es decir, el valor del flujo del campo eléctrico a través de ciertas superficies cerradas es no nulo aunque no existen cargas eléctricas, pero el espacio es topológicamente no trivial [205, 206]. Aunque algunos de estos métodos de comprensión del problema de la carga parezcan extraños, sin duda ilustran una opinión que está llegando a ser cada vez más convincente: en física teórica debe haber algo más que sólo ecuaciones diferenciales locales. Además, existen muchos candidatos a “teorías de todo” (modelos matemáticos que unifican todas las interacciones fundamentales y todos los posibles tipos de materia de la Naturaleza) que tienen su propio mecanismo de cuantización de la carga.

Pero quizá la más elegante de todas las explicaciones al problema de la cuantización de la carga es la introducción del monopolio magnético, es decir, cargas magnéticas puntuales, que ideó Dirac en 1931, y que ha sido tratada en sus aspectos físicos y matemáticos en infinidad de ocasiones [207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214]. Un aspecto importante de las teorías “gauge” no abelianas es que poseen soluciones con las propiedades de monopolos magnéticos [215, 216], llamados monopolos de 't Hooft-Polyakov. En este contexto, se conjetura que los monopolos asociados con la ruptura espontánea de simetría de una teoría “gauge” de gran unificación deberían ser superpesados (del orden de 10^{16} GeV), y tales objetos podrían haber escapado a la detección. La búsqueda experimental de monopolos magnéticos ha sido infructuosa hasta ahora

(una única señal positiva fue encontrada por Cabrera en 1984 [217], pero aún no se ha podido repetir). En este apartado considero conveniente recordar brevemente alguno de los aspectos relacionados con el monopolo de Dirac.

Recordemos que la teoría clásica de Maxwell en el vacío es invariante bajo una simetría llamada dualidad, que corresponde al intercambio de las formas de Faraday y Maxwell

$$F \mapsto G, \quad G \mapsto -F, \quad (4.123)$$

donde $G = *F$. Cuando existen cargas y corrientes eléctricas, esta simetría se rompe, porque las ecuaciones son

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = j_e^\nu, \quad (4.124)$$

donde la cuadricorriente $j_e^\nu(\mathbf{r}, t)$ para una carga eléctrica puntual de valor Q_e en la posición x_0^μ se define como

$$j_e^\mu = Q_e \int dx_0^\mu \delta^{(4)}(x - x_0), \quad (4.125)$$

y la integral en (4.125) se realiza a lo largo de la línea de universo de la partícula puntual. Si se quiere mantener la simetría de dualidad en las ecuaciones (4.124), habría que introducir cuadricorrientes magnéticas j_m^μ , dadas por

$$j_m^\mu = Q_m \int dx_0^\mu \delta^{(4)}(x - x_0), \quad (4.126)$$

y ecuaciones de Maxwell modificadas

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} = j_m^\nu, \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = j_e^\nu, \quad (4.127)$$

y la operación de transformación de dualidad en el caso de existencia de cargas sería

$$\begin{aligned} F &\mapsto G, & j_e^\mu &\mapsto j_m^\mu, \\ G &\mapsto -F, & j_m^\mu &\mapsto -j_e^\mu. \end{aligned} \quad (4.128)$$

De este modo, la simetría de la dualidad en la teoría clásica de Maxwell con partículas cargadas introduce monopolos magnéticos. También se

ha de decir que la máxima simetría en las ecuaciones (4.127) se encontraría si los valores mínimos de las cargas eléctricas y magnéticas fueran iguales.

A nivel clásico, por tanto, los monopolos magnéticos están al mismo nivel que las cargas eléctricas, y es extraño que los primeros no se hayan detectado en el laboratorio. Dirac demostró que, a nivel cuántico, la existencia de monopolos conduciría a la condición

$$Q_e Q_m = 2\pi n , \quad (4.129)$$

donde n es un entero. Esta expresión implica cuantización de la carga eléctrica, problema resuelto si existe un monopolo en la Naturaleza. Además, la condición de Dirac trae consigo una posible explicación de la dificultad de la observación de monopolos. Supongamos que $Q_e = n_e e$, donde e es la carga del electrón, y que $Q_m = n_m g$, donde g es el monopolo unidad, al que, según la condición de Dirac, asociaremos un valor

$$g = \frac{2\pi}{e} . \quad (4.130)$$

La intensidad de la interacción magnética entre un par monopolo-antimonopolo es

$$\alpha_m = \frac{g^2}{4\pi} = \frac{\pi}{e^2} = \frac{1}{4\alpha_e} , \quad (4.131)$$

lo cual quiere decir que es aproximadamente 5000 veces más difícil separar un par magnético que uno eléctrico. Sin embargo, aún así parece complicado que el hecho de no haberse podido detectar claramente ningún monopolo magnético se deba únicamente a esta explicación.

Por último, derivemos la condición de Dirac. Un monopolo situado en el origen crea un campo magnético que es

$$\mathbf{B} = \frac{Q_m \mathbf{r}}{4\pi r^3} . \quad (4.132)$$

Dado que, en este caso, ya no se cumple $dF = 0$ en R^4 , no podemos tomar $F = dA$ (a nivel clásico, esto no tiene mucha importancia, porque lo básico es el campo magnético, y éste es tan bueno como el campo eléctrico de Coulomb). Pero, si restringimos nuestro dominio espacial a $R^4 - \{0\} \times R$, entonces $dF = 0$ en ese espacio, donde hemos eliminado el

punto de divergencia no nula del campo magnético para cada instante (por eso “multiplicamos” el punto por el eje de tiempos real), es decir, el punto donde está situado el monopolo. Lo que ocurre ahora es que $R^4 - \{0\} \times R$ no se puede contraer suavemente a un punto, de manera que no existe globalmente una 1-forma A en ese dominio tal que $F = dA$. Pero $R^4 - \{0\} \times R$ es homeomórfico a $R^2 \times S^2$, así que, por ser R^2 contraíble, necesitaremos dos cartas coordenadas para definir el potencial A (correspondientes a S^2). El resultado es

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{-Q_m}{4\pi} (\cos\beta - 1) d\alpha, \quad \frac{\pi}{2} < \beta < \pi, \\ A_2 &= \frac{-Q_m}{4\pi} (\cos\beta + 1) d\alpha, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (4.133)$$

donde α y β son los ángulos polar y azimutal. En la zona de intersección, se pide que la diferencia entre las dos 1-formas sea una transformación “gauge”, y lo es, porque

$$A_1 - A_2 = \frac{Q_m}{2\pi} d\alpha. \quad (4.134)$$

Consideremos la ecuación de Schroedinger para una partícula de masa M , carga Q_e y función de ondas $\Psi(\mathbf{r}, t)$, que se mueve en el campo del monopolo,

$$\frac{1}{2M} (-i\nabla - Q_e \mathbf{A})^2 \Psi = \left(i \frac{\partial}{\partial t} - Q_e A^0 \right) \Psi, \quad (4.135)$$

que es invariante bajo una transformación “gauge” dada por

$$\begin{aligned} A(\mathbf{r}, t) &\mapsto A(\mathbf{r}, t) + d\Lambda(\mathbf{r}, t), \\ \Psi(\mathbf{r}, t) &\mapsto \Psi(\mathbf{r}, t) \exp(iQ_e \Lambda(\mathbf{r}, t)). \end{aligned} \quad (4.136)$$

Ahora, para que la función de ondas Ψ esté bien definida en la región de intersección de las dos cartas coordenadas, la transformación “gauge” (4.134), a través de la expresión general (4.136) debe ser una fase univaluada. Para ello, se ha de cumplir la condición

$$\exp\left(i \frac{Q_e Q_m}{2\pi} \alpha\right) = \exp(in \alpha). \quad (4.137)$$

Esta es la condición de Dirac (4.129). Es importante notar que la condición de Dirac es una condición cuántica, esto es, relativa a parámetros “vestidos” o renormalizados, y no sobre los parámetros “desnudos” o del vacío de la teoría clásica.

4.4.3 Cargas puntuales en el modelo de nudos

Aunque se han presentado los nudos electromagnéticos como soluciones de las ecuaciones de Maxwell en el vacío, el modelo del electromagnetismo clásico que definen admite cargas puntuales, cuyo valor está topológicamente cuantizado.

Resumamos. Sea $\theta(\mathbf{r}, t)$ un campo escalar perteneciente a la esfera S^2 . Si imponemos que θ sea regular en su dominio espacial, y se anule en la superficie del infinito, se le puede considerar como una aplicación $\theta : S^3 \times R \rightarrow S^2$. Durante todo este capítulo, se ha visto que parejas de estos campos escalares generan localmente todas las soluciones de las ecuaciones de Maxwell en el vacío. Al ser regulares, están etiquetados por un entero, llamado invariante de Hopf, que los clasifica en clases de homotopía.

Por otro lado, la condición de la cuantización de la carga eléctrica en el electromagnetismo se puede definir a través del teorema de Gauss: el flujo del campo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada S , a la que se pide que no corte a ninguna carga, es siempre un número entero de veces la constante e . Esto se puede escribir como una integral de la 2-forma de Maxwell $G = *F$,

$$\int_S *F = ne . \quad (4.138)$$

Vista en la forma (4.138), la cuantización de la carga recuerda mucho la definición del grado topológico de una aplicación $f : S \rightarrow S^2$, que es el número de veces que la imagen inversa de S^2 por la aplicación f cubre la superficie S . En forma integral, y siendo σ la 2-forma de volumen de S^2 , se tiene

$$\text{grado}(f) = \int_S f^* \sigma = n . \quad (4.139)$$

Parece clara la similitud entre las ecuaciones (4.138) y (4.139). Pero, en el modelo de los nudos, precisamente se define $*F = \sqrt{a} \theta^* \sigma$, donde

$\theta : S^3 \times R \rightarrow S^2$. Por tanto, el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada S interior al dominio espacial S^3 es igual a \sqrt{a} veces el grado de la restricción de la aplicación θ a la superficie S . Lo que ocurre es que el grado de esa restricción es cero porque hemos supuesto que θ es regular en $S^3 \times R$, y entonces lo es en S , por lo cual toda línea de nivel de θ que sale de S vuelve a entrar. Por otro lado, el campo definido por θ es un campo en el vacío, de manera que no hay cargas y el flujo eléctrico es cero. De modo que la analogía grado-carga se cumple en el caso trivial.

Supongamos ahora que θ es regular en $R^3 \times R$ excepto por una singularidad en un punto del espacio, que llamaremos P , en el cual convergen o divergen las curvas de nivel de θ . Como ya se dijo en el apartado anterior, el dominio de definición de θ es, entonces, homeomórfico a $S^2 \times R^2$. Si S es una superficie espacial cerrada que rodea al punto P , el flujo del campo eléctrico definido por $*F = \sqrt{a}\theta^*\sigma$ es

$$Q_e = \int_S *F = \sqrt{a}n , \quad (4.140)$$

donde n es el grado de la aplicación inducida $\theta : S \rightarrow S^2$. Como consecuencia, la carga eléctrica está cuantizada en el modelo de nudos, ya que sólo son posibles campos de Coulomb acoplados a cargas eléctricas cuyo valor está dado por (4.140). El modelo posee una carga fundamental, de valor

$$q_0 = \sqrt{a} , \quad (4.141)$$

lo cual quiere decir que sólo se admiten cargas de valor un múltiplo entero de veces la carga fundamental (4.141). Ahora, hay que recordar que, en el apartado 4.4.1, se fijó el valor de la constante a del modelo, de tal manera que $a = \hbar c$, en unidades físicas, o $a = 1$ en unidades naturales. Por tanto, la carga fundamental del modelo topológico de los nudos es

$$q_0 = 1 , \quad (4.142)$$

en unidades naturales, y el número de cargas fundamentales dentro de cualquier superficie cerrada S es igual al grado de la restricción de la aplicación θ a S .

Para clarificar estos puntos, recordemos el ejemplo 1 del apartado 4.3.1. Allí vimos que el campo de Coulomb estaba dado por la apli-

cación

$$\theta = \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \exp\left(i\frac{Q_e\alpha}{\sqrt{a}}\right), \quad (4.143)$$

donde α y β son, respectivamente, los ángulos polar y azimutal. Si $Q_e = \sqrt{a}$, entonces θ está definida en $S^2 \times R^2$, donde S^2 es la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, y R^2 es el producto cartesiano del eje r y el eje t . En este caso, (4.143) resulta

$$\theta = \frac{x + iy}{z + r}, \quad (4.144)$$

que no es regular en los puntos 0 ni ∞ . La irregularidad en el infinito impide que θ pueda ser tomada como una aplicación de $S^3 \times R \rightarrow S^2$, y la irregularidad en el punto 0 indica que hay una carga en ese punto. El valor de la carga es igual al grado de la restricción de θ a la superficie $r = 1$, que es igual a 1 para la aplicación (4.144).

Otra cuestión muy importante es que lo hecho con θ se puede hacer con ϕ . De este manera, el modelo de los nudos admite también monopolos magnéticos cuyo valor es

$$Q_m = n\sqrt{a} = n, \quad (4.145)$$

de manera que la carga eléctrica y el monopolo magnético fundamentales tienen el mismo valor, 1 en unidades naturales. El modelo es completamente simétrico en sus partes eléctrica y magnética.

Se asume que, al ser éste un modelo clásico, los valores de las cargas han de ser renormalizados. Teniendo en cuenta el valor del monopolo de Dirac, $g = 2\pi/e$, resulta

$$\begin{aligned} e = Xq_0 = X, \quad g = Yq_0 = Y, \\ \frac{X}{Y} = 2\alpha_e, \quad XY = 2\pi. \end{aligned} \quad (4.146)$$

Una imagen de cómo actuaría la renormalización de estos parámetros es la siguiente. Si el vacío es dieléctrico y paramagnético, las correcciones cuánticas debidas al mar de pares virtuales haría decrecer la carga eléctrica, pero incrementaría el valor del monopolo; en otras palabras, la carga eléctrica observada debe ser más pequeña que la del vacío, pero

con el monopolio magnético ocurre lo contrario. Sin embargo, este argumento es especulativo, y debe ser tomado con cuidado. El modelo de los nudos electromagnéticos posee, de manera natural y clásica, un mecanismo topológico para la cuantización de las cargas, pero, respecto a los valores de las cargas fundamentales en el vacío, es necesaria una mayor comprensión de los mecanismos de renormalización, y también, posiblemente, de la simetría de la dualidad y su ruptura espontánea.

Capítulo 5

Estudio de algunos nudos electromagnéticos en el vacío

5.1 Introducción. Objetivos del capítulo

De manera independiente de su importancia como base del modelo topológico del electromagnetismo que se ha presentado en el capítulo anterior, los nudos electromagnéticos son soluciones estándar de la teoría de Maxwell en el vacío con propiedades topológicas que los distinguen del resto. En particular, su helicidad está topológicamente cuantizada, de manera que $h_m = h_e = n a$, donde el número entero n tiene el significado de invariante de Hopf de las dos aplicaciones a partir de las que se construyen los campos magnético y eléctrico, lo que indica que cada par de líneas magnéticas está enlazada, con un número de enlace igual a n , y cada par de líneas eléctricas está enlazada, con el mismo número de enlace que las magnéticas. Esto permite clasificar los nudos en clases de homotopía C_n , etiquetadas por el valor n del número de enlace.

El objetivo de este capítulo es la obtención y estudio de una familia de nudos explícitos, soluciones de las ecuaciones de Maxwell en el vacío, que serán representantes de las clases de homotopía $C_{\pm n^2}$. Estas soluciones han venido siendo caracterizadas en los trabajos [218, 2, 160, 162]. En la sección 5.2 se encuentran las condiciones de Cauchy de algunos nudos de clase C_1 , basados en la llamada fibración de Hopf. El

método puede generalizarse de manera que se obtienen las condiciones de Cauchy de nudos representantes de las clases $C_{\pm n^2}$, lo que se hace en la sección 5.3. Finalmente, en la sección 5.4, se encuentran los campos para todo instante, junto con un estudio de sus propiedades dinámicas y, especialmente, de la evolución de los campos escalares básicos.

5.2 Condiciones de Cauchy de una familia de nudos de clase C_1

El problema de la búsqueda de nudos electromagnéticos triviales, es decir, pertenecientes a la clase de homotopía cero, tiene una solución muy sencilla. Sólo hay que encontrar dos aplicaciones $S^3 \rightarrow S^2$ tales que los campos vectoriales tangentes en todo punto a sus curvas de nivel sean ortogonales y que tengan índice de Hopf cero. La cuestión se complica cuando se buscan nudos representantes de clases de homotopía no triviales (ocurre lo mismo que en el caso de soluciones instantón de las teorías de Yang-Mills con número de instantón no nulo, cuya obtención implica la utilización de técnicas matemáticas refinadas, como *cuaterniones* o *twistors* [36, 219]). En el caso de los nudos, hay que trabajar con aplicaciones $S^3 \rightarrow S^2$ de índice de Hopf no nulo, pero de éstas no se conocen tantas como de las triviales. Un método elegante de enfrentamiento del problema es el basado en teoría de grupos de Lie [220], en nuestro caso el grupo $SU(2)$. A través de este método se encuentra una familia de aplicaciones $S^3 \rightarrow S^2$ no triviales, y también una manera de obtener directamente sus curvas de nivel como soluciones de un grupo uniparamétrico de difeomorfismos en el grupo $SU(2)$. Nos toparemos así con la fibración de Hopf, y las condiciones de Cauchy de nudos representantes de la clase de homotopía C_1 .

5.2.1 Planteamiento del problema

En este apartado se resume el problema de la búsqueda de las condiciones de Cauchy de un nudo electromagnético de clase C_n . En primer lugar, sea $\phi_0 : S^3 \rightarrow S^2$ una aplicación de índice de Hopf n . Por proyección estereográfica, se puede considerar que ϕ_0 es una aplicación de las coordenadas espaciales (x, y, z) en el espacio complejo compactificado.

Hecho esto, el campo magnético en $t = 0$ se define como

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi i)(1 - \bar{\phi}_0 \phi_0)^2} \nabla \phi_0 \times \nabla \bar{\phi}_0 . \quad (5.1)$$

Buscamos ahora otra aplicación $\theta_0 : S^3 \rightarrow S^2$ tal que la velocidad de sus curvas de nivel sea ortogonal en cada punto a la velocidad de las curvas de nivel de ϕ_0 , esto es,

$$(\nabla \bar{\phi}_0 \times \nabla \phi_0) \cdot (\nabla \bar{\theta}_0 \times \nabla \theta_0) = 0 , \quad (5.2)$$

con lo cual el campo eléctrico en $t = 0$ es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi i)(1 + \bar{\theta}_0 \theta_0)^2} \nabla \bar{\theta}_0 \times \nabla \theta_0 , \quad (5.3)$$

que será ortogonal a $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$ por (5.2). Para que esta condición de ortogonalidad se mantenga en todos los instantes posteriores, es necesario que, además de (5.2), se cumpla que el índice de Hopf de θ_0 sea igual que el de ϕ_0 , pues se demostró en el tercer capítulo de esta memoria que los campos singulares tienen el mismo valor de las helicidades magnética y eléctrica. Encontradas ϕ_0 y θ_0 con estos requerimientos, lo siguiente es identificar las funciones complejas $f(\mathbf{r})$ y $g(\mathbf{r})$ que satisfacen

$$\begin{aligned} \nabla \theta_0 \times \nabla \bar{\theta}_0 &= f \nabla \bar{\phi}_0 - \bar{f} \nabla \phi_0 , \\ \nabla \phi_0 \times \nabla \bar{\phi}_0 &= \bar{g} \nabla \theta_0 - g \nabla \bar{\theta}_0 , \end{aligned} \quad (5.4)$$

a partir de las cuales definimos

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \left(\frac{1 + \bar{\phi}_0 \phi_0}{1 + \bar{\theta}_0 \theta_0} \right)^2 f , \\ \theta_1 &= \left(\frac{1 + \bar{\theta}_0 \theta_0}{1 + \bar{\phi}_0 \phi_0} \right)^2 g . \end{aligned} \quad (5.5)$$

Las condiciones de Cauchy de las funciones $\phi(\mathbf{r}, t)$ y $\theta(\mathbf{r}, t)$ son entonces las dadas en la ecuación (4.105), que reproducimos,

$$\begin{aligned} \phi_0(\mathbf{r}) &= \phi(\mathbf{r}, t)|_{t=0} , \quad \phi_1(\mathbf{r}) = \left. \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right|_{t=0} , \\ \theta_0(\mathbf{r}) &= \theta(\mathbf{r}, t)|_{t=0} , \quad \theta_1(\mathbf{r}) = \left. \frac{\partial \theta(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right|_{t=0} , \end{aligned} \quad (5.6)$$

y las condiciones de Cauchy de los campos magnético y eléctrico son

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(\mathbf{r}, 0) &= \frac{\sqrt{a}}{(2\pi i)(1 + \bar{\phi}_0\phi_0)^2} \nabla\phi_0 \times \nabla\bar{\phi}_0 \\
 &= \frac{\sqrt{a}}{(2\pi i)(1 + \bar{\theta}_0\theta_0)^2} (\bar{\theta}_1 \nabla\theta_0 - \theta_1 \nabla\bar{\theta}_0) , \\
 \mathbf{E}(\mathbf{r}, 0) &= \frac{\sqrt{a}}{(2\pi i)(1 + \bar{\theta}_0\theta_0)^2} \nabla\bar{\theta}_0 \times \nabla\theta_0 \\
 &= \frac{\sqrt{a}}{(2\pi i)(1 + \bar{\phi}_0\phi_0)^2} (\bar{\phi}_1 \nabla\phi_0 - \phi_1 \nabla\bar{\phi}_0) .
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Las ecuaciones (5.7) son, precisamente, las ecuaciones de dualidad $G = *F$, en $t = 0$, de un nudo electromagnético definido como

$$F = -\sqrt{a}\phi^*\sigma , \quad G = \sqrt{a}\theta^*\sigma . \tag{5.8}$$

Dado que la dualidad se mantiene en el tiempo (lo vimos en el cuarto capítulo), se concluye que la ecuación (5.7) se mantiene durante la evolución temporal de los campos magnético y eléctrico y, por tanto, éstos definen un nudo electromagnético de clase C_n .

5.2.2 El método de teoría de grupos para encontrar aplicaciones $S^3 \rightarrow S^2$

Un método elegante para encontrar aplicaciones $S^3 \rightarrow S^2$ no triviales se basa en la identificación de las variedades S^3 y $SU(2)$. Vamos a desarrollarlo aquí, pero antes recordemos muy brevemente las nociones básicas de teoría de grupos que necesitaremos [37].

Un *grupo de Lie* \mathcal{G} es una variedad diferenciable con estructura de grupo, de tal manera que las operaciones de grupo (producto e inversa) son suaves. Por sus aplicaciones físicas, un grupo de Lie muy importante es el grupo lineal complejo $GL(n, C)$, definido como el grupo de las transformaciones lineales no singulares en el espacio complejo de n dimensiones C^n , que se pueden representar por matrices $n \times n$ con componentes complejas. Los subgrupos de $GL(n, C)$ más importantes son

$$SL(n, C) = \{g \in GL(n, C) / \text{Det } g = 1\} ,$$

$$\begin{aligned} U(n) &= \{g \in GL(n, C) / gg^+ = g^+g = 1\} , \\ SU(n) &= U(n) \cap SL(n, C) , \end{aligned} \quad (5.9)$$

donde g^+ es la matriz traspuesta conjugada de g . Los subgrupos (5.9) son, a su vez, grupos de Lie, y representan algunas de las transformaciones más importantes de los sistemas físicos. El álgebra de Lie \mathcal{LG} del grupo de Lie \mathcal{G} es el espacio vectorial tangente a la variedad \mathcal{G} en la identidad $e \in \mathcal{G}$, es decir,

$$\mathcal{LG} = T_e \mathcal{G} . \quad (5.10)$$

Por ejemplo, para los grupos de Lie dados en (5.9), sus álgebras de Lie, denotadas como el grupo pero en letras minúsculas, son

$$\begin{aligned} sl(n, C) &= \{V \in GL(n, C) / \text{Tr}(V) = 0\} , \\ u(n) &= \{V \in GL(n, C) / V + V^+ = 0\} , \\ su(n) &= u(n) \cap sl(n, C) , \end{aligned} \quad (5.11)$$

siendo $\text{Tr}(V)$ la operación que consiste en tomar la traza de la matriz. Dado el grupo de Lie \mathcal{G} , su álgebra de Lie está definida unívocamente como espacio tangente en la identidad, pero esto no se cumple a la inversa, pues puede haber varios grupos con el mismo álgebra de Lie, que serán localmente isomorfos. Más concretamente, todo álgebra de Lie es el álgebra de Lie de un único grupo de Lie simplemente conexo [221, 222]. El resto de grupos con el mismo álgebra, pero que no son simplemente conexos, están *cubiertos* por el que es simplemente conexo (una variedad conexa M cubre a otra variedad N si existe una aplicación $f : M \rightarrow N$ tal que la imagen inversa de un entorno de un punto $p \in N$ es igual a la unión disjunta de entornos abiertos de los puntos $f^{-1}(p) \in M$). Para pasar del álgebra al grupo se utiliza la función Exp , que, en nuestro caso especialmente sencillo de representaciones matriciales, coincide con la exponencial de la matriz, $\text{Exp} = \exp$. Sea \mathcal{LG} el álgebra de Lie de un grupo en representación matricial, y supongamos que todo elemento del álgebra se puede escribir como combinación lineal de unas matrices T_j , es decir,

$$V = \alpha^j T_j , \quad \forall V \in \mathcal{LG} , \quad (5.12)$$

donde los T_j son un conjunto de *generadores* del álgebra y el subíndice j va desde 1 hasta la dimensión del álgebra. En este caso, todo elemento $g \in \mathcal{G}$ del grupo se puede escribir como

$$g = \exp(\alpha^j T_j) . \quad (5.13)$$

Centrémonos en el grupo $SU(2)$, formado por las matrices unitarias 2×2 de determinante igual a 1. Aplicando estas restricciones, resulta que todo elemento $g \in SU(2)$ es del tipo

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} , \quad a\bar{a} + b\bar{b} = 1 , \quad (5.14)$$

es decir, el espacio paramétrico de $SU(2)$ tiene dimensión 3 (se necesitan 2 parámetros complejos sujetos a una condición real). En (5.14) es fácil ver que $SU(2)$ y S^3 son variedades isomorfas, de manera que hemos encontrado que $SU(2)$ es el grupo de Lie simplemente conexo correspondiente al álgebra de Lie $su(2)$ (pues sabemos que S^3 es simplemente conexa). Escogiendo convenientemente la parametrización en la ecuación (5.14), se pueden expresar todos los elementos de $SU(2)$ en función de un conjunto de matrices dadas por

$$g = \begin{pmatrix} \cos \alpha + i(\alpha_3/\alpha) \sin \alpha & ((\alpha_2 + i\alpha_1)/\alpha) \sin \alpha \\ ((-\alpha_2 + i\alpha_1)/\alpha) \sin \alpha & \cos \alpha - i(\alpha_3/\alpha) \sin \alpha \end{pmatrix} , \quad (5.15)$$

siendo α_j tres parámetros reales con $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \alpha^2$. Esto equivale a tomar los elementos g como las exponenciales

$$g = \exp(i \alpha^j \sigma_j) , \quad (5.16)$$

donde σ_j son las *matrices de Pauli*, que generan el álgebra de Lie $su(2)$,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (5.17)$$

Según la ecuación (5.16), todo elemento del álgebra de Lie, $V \in su(2)$, se puede dar como

$$V = i \alpha^j \sigma_j . \quad (5.18)$$

Por otro lado, es posible escribir las coordenadas de todo punto de la esfera S^2 en forma de matriz 2×2 , colocando las coordenadas reales (n_1, n_2, n_3) en la forma de una matriz N definida como

$$N = i n^j \sigma_j , \quad (5.19)$$

y la condición $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ es absolutamente equivalente a la restricción $\text{Det } N = 1$. Comparando las expresiones (5.18), para los elementos de $su(2)$, y (5.19), para los elementos de S^2 , se llega a la conclusión

$$S^2 = \{V \in su(2) / \text{Det } V = 1\} , \quad (5.20)$$

esto es, la variedad S^2 se puede tomar como el subconjunto del álgebra de Lie $su(2)$ formado por matrices 2×2 que tienen determinante 1. Dado que S^3 es isomorfo al grupo $SU(2)$, toda aplicación $S^3 \rightarrow S^2$ es una aplicación entre el grupo $SU(2)$ y el subconjunto de matrices de determinante unidad del álgebra $su(2)$. En teoría de grupos de Lie, algunas de las aplicaciones entre un grupo y su álgebra están bien estudiadas, lo que nos permitirá encontrar ejemplos de las aplicaciones que buscamos.

Entre las aplicaciones entre un grupo de Lie y su álgebra, se distingue la llamada aplicación adjunta. Sea \mathcal{G} un grupo de Lie y sea M una variedad diferenciable. Una acción de \mathcal{G} sobre M es una aplicación diferenciable $f : \mathcal{G} \times M \rightarrow M$ tal que

$$f(e, p) = p , \quad f(g_1, f(g_2, p)) = f(g_1 g_2, p) , \quad (5.21)$$

$\forall p \in M$, siendo e la identidad en \mathcal{G} , y $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$. La representación adjunta del grupo de Lie \mathcal{G} es una acción de \mathcal{G} en sí mismo, denotada por ad . Si $g \in \mathcal{G}$, se define la representación adjunta como

$$\begin{aligned} \text{ad}_g : \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G} \\ g' &\mapsto \text{ad}_g(g') = gg'g^{-1} . \end{aligned} \quad (5.22)$$

Dado que $\text{ad}_g(e) = e$, se puede restringir la aplicación inducida en el espacio tangente, $\text{ad}_{g*} : T_{g'}\mathcal{G} \rightarrow T_{\text{ad}_g(g')}\mathcal{G}$, al punto $g' = e$, y así se llega a una aplicación $\text{Ad}_g : T_e\mathcal{G} \rightarrow T_e\mathcal{G}$, dada por

$$\text{Ad}_g = \text{ad}_{g*}|_{T_e\mathcal{G}} . \quad (5.23)$$

Pero el espacio vectorial tangente al grupo de Lie en la identidad es, por definición, al álgebra de Lie, $T_e\mathcal{G} = \mathcal{L}\mathcal{G}$, de manera que la ecuación (5.23) es la definición de una aplicación

$$\text{Ad} : \mathcal{L}\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{L}\mathcal{G} , \quad (5.24)$$

que se denomina *aplicación adjunta*. En el caso especial en que \mathcal{G} está representado por matrices, la aplicación adjunta toma la forma de transformación de semejanza,

$$\text{Ad}_g(V) = gVg^{-1} , \quad \forall g \in \mathcal{G} , \quad \forall V \in \mathcal{L}\mathcal{G} . \quad (5.25)$$

Si fijamos V en la expresión (5.25), la aplicación adjunta que resulta es una aplicación entre el grupo de Lie matricial y su álgebra, que es lo que andamos buscando.

Apliquemos esto a $SU(2)$. Dado que se tiene que restringir la imagen de la aplicación adjunta al subconjunto de $su(2)$ formado por matrices de determinante unidad, conviene escoger V como

$$V = i k^j \sigma_j , \quad (5.26)$$

con $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 1$, y variar los k_j para obtener aplicaciones distintas. En consecuencia, se llega a un conjunto de aplicaciones $S^3 \rightarrow S^2$ dadas por la fórmula

$$n^i \sigma_i = g(k^j \sigma_j)g^{-1} , \quad (5.27)$$

donde $g \in SU(2) = S^3$, y n_i son las coordenadas de S^2 . Las aplicaciones $S^3 \rightarrow S^2$ dadas por (5.27) son, básicamente, del tipo de la aplicación de Hopf que se vió en el apartado 4.2.2. Para cerciorarse de ello, escojamos $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = -1$. Entonces, tomando para g la parametrización (5.15), resulta que la ecuación (5.27) aplica las coordenadas de S^3 , dadas por $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, en las coordenadas de S^2 dadas por (n_1, n_2, n_3) , de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} n_3 &= -1 + 2 \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{\alpha^2} \sin^2 \alpha , \\ n_1 + i n_2 &= \frac{2 \alpha_2 - i \alpha_1}{\alpha} \sin \alpha \left(\cos \alpha - i \frac{\alpha_3}{\alpha} \sin \alpha \right) , \end{aligned} \quad (5.28)$$

expresiones que son del tipo de la aplicación de Hopf (4.18). Es más fácil verlo si se hacen las proyecciones estereográficas correspondientes

a $S^2 = C \cup \{\infty\}$ y $SU(2) = S^3 = R^3 \cup \{\infty\}$, respectivamente. Para la primera, escogemos la coordenada compleja χ dada por (4.15) en el apartado 4.2.2,

$$\chi = \frac{n_1 + i n_2}{1 - n_3} . \quad (5.29)$$

Entonces, tomando los n_j como en la ecuación (5.28), se obtiene que la imagen de un punto de S^3 es el número complejo

$$\chi = \frac{\alpha_1 + i \alpha_2}{-\alpha_3 + i \alpha \cot \alpha} . \quad (5.30)$$

Para $SU(2) = S^3$, tomamos las coordenadas reales de la proyección (4.23) que, respecto a los parámetros α_j , están dadas por

$$x = \frac{\alpha_1 \tan(\alpha/2)}{\alpha} , \quad y = \frac{\alpha_2 \tan(\alpha/2)}{\alpha} , \quad z = \frac{\alpha_3 \tan(\alpha/2)}{\alpha} . \quad (5.31)$$

En las coordenadas reales (x, y, z) , la ecuación (5.30) es

$$\chi = -\frac{2x + i 2y}{2z + i (r^2 - 1)} , \quad (5.32)$$

que, salvo un signo menos global; que no afecta a los campos magnético y eléctrico que construiremos con ella, es la aplicación de Hopf. La transformación (5.31) equivale a tomar los elementos de $SU(2)$ como

$$g = \exp \left(i \frac{\alpha}{r} x^j \sigma_j \right) , \quad (5.33)$$

siendo $\alpha = 2 \arctan r$. La parametrización de $SU(2)$ por coordenadas de R^3 dada por la ecuación (5.33) se conoce como *parametrización de Skyrme*. En consecuencia, se ha obtenido que la aplicación de Hopf $\Pi : S^3 \rightarrow S^2$ se puede escribir como

$$n^i \sigma_i = \exp \left(i \frac{\alpha}{r} x^j \sigma_j \right) (-\sigma_3) \exp \left(-i \frac{\alpha}{r} x^j \sigma_j \right) , \quad (5.34)$$

y que una familia de aplicaciones del tipo de la de Hopf se obtiene cambiando el factor $-\sigma_3$ en (5.34) por el más general $k^j \sigma_j$, donde $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 1$. Estas aplicaciones son no triviales respecto a su

índice de Hopf, como se verá en los siguientes apartados, por lo que podemos plantearnos construir con ellas nudos electromagnéticos de clase de homotopía distinta de cero. Para ello, el siguiente paso será encontrar dos aplicaciones del mismo tipo de homotopía cuyas curvas de nivel tengan velocidades que sean ortogonales. El método que se acaba de presentar, basado en teoría de grupos, también funciona en este sentido.

5.2.3 La fibración de Hopf y sus fibraciones ortogonales

Sea una aplicación suave $f : S^3 \rightarrow S^2$. Sus curvas de nivel se definen como la imagen inversa de un punto $p \in S^2$, y son curvas cerradas en S^3 si el punto p es regular. En el caso de la aplicación de Hopf, ya se comentó en el apartado 4.2.2 que estas curvas de nivel son curvas cerradas enlazadas entre sí, y con número de enlace igual a 1. Sea $x(\tau)$ la curva correspondiente a un valor $p \in S^2$ por la aplicación de Hopf, es decir, $\Pi(x(\tau)) = p$. Es claro que Π aplica cada curva de nivel en un punto de S^2 , de manera que se puede considerar a la aplicación de Hopf como la proyección del espacio fibrado S^3 en su base S^2 . En este sentido, las curvas de nivel de la aplicación de Hopf se llaman *fibras*, y el conjunto de todas esas fibras se llama *fibración de Hopf*. Consideremos las aplicaciones $S^3 \rightarrow S^2$ dadas en la forma que se ha estudiado en el apartado anterior,

$$n^i \sigma_i = \exp \left(i \frac{\alpha}{r} x^j \sigma_j \right) (k^l \sigma_l) \exp \left(-i \frac{\alpha}{r} x^j \sigma_j \right) . \quad (5.35)$$

En primer lugar, buscamos la expresión general para las curvas de nivel de esta aplicación. Esto puede hacerse notando que las curvas de nivel, en $SU(2)$, son subgrupos uniparamétricos, de manera análoga a lo comentado para las líneas de campo en el apartado 4.2.1. Un subgrupo uniparamétrico es una curva $g(\tau) \in SU(2)$ tal que

$$\begin{aligned} g(0) &= g , \\ g(\tau_1 + \tau_2) &= g(\tau_1) + g(\tau_2) , \\ g(-\tau) &= g^{-1}(\tau) . \end{aligned} \quad (5.36)$$

Para encontrar el subgrupo uniparamétrico que corresponde a las curvas de nivel de una aplicación como (5.35), se ha de imponer que cada curva de nivel se aplica en el mismo punto de S^2 , es decir, se busca $g(\tau)$, con $g(0) = g$, tal que

$$g(\tau) (k^j \sigma_j) g^{-1}(\tau) = g (k^l \sigma_l) g^{-1} . \quad (5.37)$$

Multipliquemos la ecuación (5.37) por la izquierda por g^{-1} , y por la derecha por $g(\tau)$, con lo cual se llega a que la condición (5.37) implica la conmutatividad del elemento $g^{-1}g(\tau) \in SU(2)$ con la matriz $k^j \sigma_j$, esto es, se debe satisfacer

$$[g^{-1}g(\tau), k^j \sigma_j] = 0 . \quad (5.38)$$

Dado que $g^{-1}g(\tau)$ es un elemento del grupo, y que $g(\tau)$ es un subgrupo uniparamétrico, se puede tomar

$$g^{-1}g(\tau) = \exp(i\tau K^j \sigma_j) , \quad (5.39)$$

donde $K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = 1$. Escogido de esta manera, ocurre que $g(2\pi) = g(0) = g$. Además, por cada punto g pasa una curva y sólo una. Para ver esto, sean dos puntos g y g' , valores iniciales de dos curvas $g(\tau) = g \exp(\tau V)$ y $g'(\tau) = g' \exp(\tau V)$. Supongamos que estas dos curvas se cortan en un punto, correspondiente a $\tau = \tau_1$ y $\tau = \tau_2$, respectivamente. En ese caso, para el punto de corte, se satisface

$$g \exp(\tau_1 V) = g' \exp(\tau_2 V) , \quad (5.40)$$

de manera que $g' = g \exp((\tau_1 - \tau_2)V)$, lo que demuestra que g y g' están en la misma curva. Para conocer la forma explícita que tiene $V \in su(2)$ para las aplicaciones (5.35), se ha de sustituir la expresión (5.39) en la condición (5.38). Al hacerlo, aparece

$$0 = i \sin(\tau) K^j k^l [\sigma_j, \sigma_l] = -2 \sin(\tau) \varepsilon_{jlm} K^j k^l , \quad (5.41)$$

donde se han aplicado las bien conocidas propiedades de conmutación de las matrices de Pauli,

$$[\sigma_j, \sigma_l] = 2i \varepsilon_{jlm} \sigma_m . \quad (5.42)$$

La ecuación (5.41) se satisface para todo τ si $K_j = k_j$, $j = 1, 2, 3$. Hemos llegado, de esta manera, a identificar las curvas integrales de las aplicaciones (5.35) en función de los subgrupos uniparamétricos

$$g(\tau) = g \exp(i\tau k^j \sigma_j) . \quad (5.43)$$

En particular, para la aplicación de Hopf, dada por $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = -1$, la fibración de Hopf está dada por

$$g(\tau) = g \exp(-i\tau \sigma_3) . \quad (5.44)$$

Si se toma para g la parametrización de Skyrme (5.33), se obtienen las curvas de nivel de la aplicación de Hopf

$$\phi_H(x, y, z) = \frac{2x + 2iy}{2z + i(r^2 - 1)} , \quad (5.45)$$

en $R^3 \cup \{\infty\}$. Efectivamente, resolviendo (5.44) para $(x(\tau), y(\tau), z(\tau))$ se llega a las ecuaciones paramétricas de la fibración de Hopf, dadas en función de los puntos iniciales (x, y, z) y del parámetro τ , que varía entre 0 y 2π , que son

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \frac{2x \cos \tau + 2y \sin \tau}{(r^2 + 1) - (r^2 - 1) \cos \tau + 2z \sin \tau} , \\ y(\tau) &= \frac{2y \cos \tau - 2x \sin \tau}{(r^2 + 1) - (r^2 - 1) \cos \tau + 2z \sin \tau} , \\ z(\tau) &= \frac{2z \cos \tau + (r^2 - 1) \sin \tau}{(r^2 + 1) - (r^2 - 1) \cos \tau + 2z \sin \tau} . \end{aligned} \quad (5.46)$$

En la figura 5.1 se representan dos de las curvas de nivel de la aplicación de Hopf, correspondientes a los puntos iniciales $(1, 0, 0)$ y $(0, 0, 1)$. Estas dos curvas de nivel son el círculo $x^2 + y^2 = 1$ y el eje z , respectivamente, y están claramente enlazadas. Recuérdese que, al tener R^3 compactificado a un sólo punto del infinito, el extremo superior del eje z coincide con el extremo inferior.

Hasta este momento, las técnicas de teoría de grupos han resultado muy útiles al problema de las condiciones de Cauchy de nudos electromagnéticos no triviales. Concretamente, nos han permitido encontrar algunas aplicaciones $S^3 \rightarrow S^2$ de índice de Hopf aparentemente no

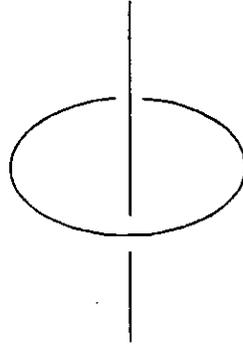


Figura 5.1: Las dos fibras de la aplicación de Hopf que pasan por los puntos $(1, 0, 0)$ y $(0, 0, 1)$, respectivamente.

nulo, entre ellas la aplicación de Hopf (que tiene índice de Hopf igual a 1), y también nos han ofrecido un método sencillo para escribir las ecuaciones paramétricas de las curvas de nivel de estas aplicaciones. Sin embargo, la solución del problema de los nudos implica a dos aplicaciones, del mismo índice de Hopf, tales que las velocidades de sus respectivas curvas de nivel sean ortogonales. Por tanto, nos falta establecer la ortogonalidad de la velocidad de las curvas de nivel en el lenguaje de teoría de grupos que se ha introducido, y comprobar que existe al menos un par de aplicaciones, del tipo que se ha encontrado, tal que satisfacen esa ortogonalidad. Se verificará que las técnicas introducidas siguen funcionando en este sentido.

Consideremos dos curvas en $SU(2)$, que se cortan en el punto g . Si utilizamos la parametrización de Skyrme de $SU(2)$ (equivalente a la proyección estereográfica de S^3), podemos escribir estas dos curvas en función de las curvas en $R^3 \cup \{\infty\}$, dadas como $x_1^j(\tau_1)$ y $x_2^j(\tau_2)$, con la condición $x_1^j(0) = x_2^j(0) = x^j$, es decir,

$$\begin{aligned} g_1(\tau_1) &= \exp \left(i \frac{\alpha_1}{r_1} x_1^j \sigma_j \right) , \quad g_1(0) = g , \\ g_2(\tau_2) &= \exp \left(i \frac{\alpha_2}{r_2} x_2^j \sigma_j \right) , \quad g_2(0) = g , \end{aligned} \quad (5.47)$$

donde $\alpha_a = 2 \arctan(r_a)$, $a = 1, 2$. El producto escalar en $SU(2)$ de los vectores tangentes a las dos curvas (5.47) en el punto de corte g está dado por

$$\dot{g}_1 \cdot \dot{g}_2 = \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\dot{g}_1^+ \dot{g}_2 \right) , \quad (5.48)$$

con la notación natural

$$\dot{g}_a = \left. \frac{d}{d\tau_a} g_a(\tau_a) \right|_{\tau_a=0} . \quad (5.49)$$

Es directo verificar que el producto escalar (5.48) en $SU(2)$ es proporcional al producto escalar en R^3 . Para ello, la derivada de $g_1(\tau_1)$ en $\tau_1 = 0$ es, tras operar,

$$\dot{g}_1 = \frac{2}{(1+r^2)^2} \left(-2(x^j \dot{x}_1^k \delta_{jk}) - 2i(x^j \dot{x}_1^k \delta_{jk})(x^j \sigma_j) + i(1+r^2)(\dot{x}_1^j \sigma_j) \right) , \quad (5.50)$$

siendo

$$\dot{x}_1^j = \left. \frac{d}{d\tau_1} x_1^j(\tau_1) \right|_{\tau_1=0} , \quad (5.51)$$

y con una expresión completamente análoga para \dot{g}_2 . Si se introducen estas expresiones en el producto escalar (5.48) y se usan las propiedades de la traza de las matrices de Pauli,

$$\text{Tr}(\sigma_j) = 0 , \quad \text{Tr}(\sigma_j \sigma_k) = 2\delta_{jk} , \quad (5.52)$$

resulta que

$$\frac{1}{2} \text{Tr} \left(\dot{g}_1^+ \dot{g}_2 \right) = \frac{4}{(1+r^2)^2} \dot{x}_1^j \dot{x}_2^k \delta_{jk} , \quad (5.53)$$

que es proporcional al producto escalar en R^3 . Por tanto, si se encuentran dos subgrupos uniparamétricos de difeomorfismos en $SU(2)$ cuyos vectores tangentes en un punto son ortogonales en el sentido del producto escalar (5.48), entonces estos vectores son ortogonales respecto al producto escalar euclídeo de R^3 . Además, si se puede escribir, como en nuestro caso,

$$\begin{aligned} g_1(\tau_1) &= g \exp(\tau_1 V_1) , \\ g_2(\tau_2) &= g \exp(\tau_2 V_2) , \end{aligned} \quad (5.54)$$

con $V_a \in su(2)$, entonces el producto escalar de los vectores tangentes a las curvas (5.54) en el punto de corte g es un producto escalar en el álgebra de Lie, pues

$$\frac{1}{2} \text{Tr} (\dot{g}_1^+ \dot{g}_2) = \frac{1}{2} \text{Tr} (V_1^+ V_2). \quad (5.55)$$

Para las aplicaciones $S^3 \rightarrow S^2$ que estamos estudiando, tenemos que

$$V_a = i(k_a^j \sigma_j), \quad (5.56)$$

así que, para tener dos fibraciones con vectores tangentes ortogonales, se ha de imponer, según (5.55) y (5.56)

$$0 = \frac{1}{2} k_1^j k_2^l \text{Tr} (\sigma_j \sigma_l) = \delta_{jl} k_1^j k_2^l. \quad (5.57)$$

En consecuencia, el método de búsqueda de nudos electromagnéticos basado en teoría de grupos también ofrece una salida sencilla para el problema de la ortogonalidad de los campos magnético y eléctrico en el instante inicial. Sea una de las aplicaciones $S^3 \rightarrow S^2$ la aplicación de Hopf, dada por $k_1^1 = k_1^2 = 0$, $k_1^3 = -1$. Entonces, según la condición (5.57), una aplicación con vector tangente a sus fibras ortogonal al vector tangente al fibrado de Hopf está dada por $k_2^3 = 0$. Por tanto, resulta claro que, a partir del producto escalar que se ha encontrado (5.57), el conjunto de las aplicaciones $S^3 \rightarrow S^2$ definidas por la expresión (5.35), esto es,

$$n^l \sigma_l = g (-\sin(\gamma) \cos(\zeta) \sigma_1 - \sin(\gamma) \sin(\zeta) \sigma_2 - \cos(\gamma) \sigma_3) g^{-1}, \quad (5.58)$$

se pueden escribir en función de tres aplicaciones con vectores tangentes mutuamente ortogonales, que forman una base de estas aplicaciones, Π_1 , Π_2 , y Π_3 , dadas por las elecciones $k^1 = -1$, $k^2 = -1$, y $k^3 = -1$, respectivamente, como

$$n^l \sigma_l = \sin(\gamma) \cos(\zeta) \Pi_1 + \sin(\gamma) \sin(\zeta) \Pi_2 + \cos(\gamma) \Pi_3, \quad (5.59)$$

donde las variables angulares γ y ζ tienen la función de "coordenadas" de las aplicaciones. En la expresión (5.59), Π_3 es la aplicación de Hopf, que se ha estado estudiando,

$$\Pi_3 : n^l \sigma_l = g (-\sigma_3) g^{-1}, \quad (5.60)$$

cuyas curvas de nivel en R^3 están dadas por las ecuaciones paramétricas (5.46); Π_1 es una aplicación dada por

$$\Pi_1 : n^l \sigma_l = g (-\sigma_1) g^{-1} , \quad (5.61)$$

tal que la velocidad de sus curvas de nivel es ortogonal a la de Π_3 ; y Π_2 es la última de las aplicaciones base, con velocidad ortogonal a las dos anteriores,

$$\Pi_2 : n^l \sigma_l = g (-\sigma_2) g^{-1} . \quad (5.62)$$

Las curvas de nivel de Π_1 , de modo absolutamente análogo al caso de Π_3 , vienen dadas en función del subgrupo uniparamétrico

$$g(\tau) = g \exp (-i\tau\sigma_1) , \quad (5.63)$$

cuyas ecuaciones paramétricas en R^3 son

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \frac{2x \cos \tau + (r^2 - 1) \sin \tau}{(r^2 + 1) - (r^2 - 1) \cos \tau + 2x \sin \tau} , \\ y(\tau) &= \frac{2y \cos \tau + 2z \sin \tau}{(r^2 + 1) - (r^2 - 1) \cos \tau + 2x \sin \tau} , \\ z(\tau) &= \frac{2z \cos \tau - 2y \sin \tau}{(r^2 + 1) - (r^2 - 1) \cos \tau + 2x \sin \tau} . \end{aligned} \quad (5.64)$$

Como es fácil comprobar, estas ecuaciones son las mismas que las de la fibración de Hopf Π_3 , dadas por (5.46) haciendo la permutación en R^3

$$(x, y, z) \mapsto (y, z, x) , \quad (5.65)$$

así que el índice de Hopf de esta aplicación coincide con el índice de Hopf de Π_3 , que es la unidad. Respecto a la tercera aplicación base, Π_2 , dada por

$$g(\tau) = g \exp (-i\tau\sigma_2) , \quad (5.66)$$

sus curvas de nivel, a partir de (5.63), con σ_2 en lugar de σ_1 , son, en paramétricas,

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \frac{2x \cos \tau - 2z \sin \tau}{(r^2 + 1) - (r^2 - 1) \cos \tau + 2y \sin \tau} , \\ y(\tau) &= \frac{2y \cos \tau + (r^2 - 1) \sin \tau}{(r^2 + 1) - (r^2 - 1) \cos \tau + 2y \sin \tau} , \\ z(\tau) &= \frac{2z \cos \tau + 2x \sin \tau}{(r^2 + 1) - (r^2 - 1) \cos \tau + 2y \sin \tau} , \end{aligned} \quad (5.67)$$

y corresponden, desde Π_3 a la permutación

$$(x, y, z) \mapsto (z, x, y) , \quad (5.68)$$

de nuevo con índice de Hopf igual a 1. En resumen, la técnica basada en la identificación $S^3 = SU(2)$ nos ha proporcionado, no dos, sino tres aplicaciones cuyos vectores tangentes a las respectivas curvas de nivel son mutuamente ortogonales. Ahora, hay que construir las condiciones de Cauchy de los nudos electromagnéticos basados en estas aplicaciones.

5.2.4 Condiciones de Cauchy de los nudos basados en la fibración de Hopf

En los apartados anteriores, mediante el método basado en teoría de grupos, se han encontrado tres aplicaciones $\Pi_m : S^3 \rightarrow S^2$, $m = 1, 2, 3$, de índice de Hopf igual a 1, tales que sus vectores tangentes son mutuamente ortogonales en cada punto. Es conveniente escoger estas aplicaciones de manera que sean adimensionales. Para ello, tras tomar tres coordenadas reales para S^3 y una coordenada compleja para S^2 , utilizando las proyecciones estereográficas ya conocidas, se requiere que las tres coordenadas reales sean adimensionales. Si se asume que las coordenadas del espacio de Minkowski (x, y, z, t) , tienen dimensiones de longitud (serán coordenadas físicas del espacio), definimos las coordenadas adimensionales (X, Y, Z, T) (coordenadas matemáticas de $S^3 \times R$) como

$$(X, Y, Z, T) = \lambda (x, y, z, t) , \quad (5.69)$$

y $\lambda^2 r^2 = \lambda^2(x^2 + y^2 + z^2) = X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2$, siendo λ una constante con dimensiones de inversa de longitud. Las imágenes de las tres aplicaciones Π_m , con estas especificaciones, son

$$\begin{aligned} \Pi_3(X, Y, Z) &= \frac{2(X + iY)}{2Z + i(R^2 - 1)} , \\ \Pi_1(X, Y, Z) &= \frac{2(Y + iZ)}{2X + i(R^2 - 1)} , \\ \Pi_2(X, Y, Z) &= \frac{2(Z + iX)}{2Y + i(R^2 - 1)} , \end{aligned} \quad (5.70)$$

donde Π_3 es la conocida aplicación de Hopf. Evidentemente, observando (5.70), las tres aplicaciones tienen el mismo índice de Hopf, pues

$$\begin{aligned}\Pi_1(X, Y, Z) &= \Pi_3(Y, Z, X) , \\ \Pi_2(X, Y, Z) &= \Pi_3(Z, X, Y) .\end{aligned}\quad (5.71)$$

Esto se puede comprobar explícitamente construyendo los vectores de Whitehead de las aplicaciones Π_m . Como se vió en el apartado 4.2.3, estos vectores son, con notación \mathbf{b}_m para la aplicación Π_m , los dados por

$$\mathbf{b}_m^j(X, Y, Z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(1 + \bar{\Pi}_m \Pi_m)^2} \varepsilon^{jlk} \frac{\partial \bar{\Pi}_m}{\partial X^l} \frac{\partial \Pi_m}{\partial X^k} , \quad (5.72)$$

en donde las derivadas se hacen respecto a las coordenadas adimensionales X_i , que dan lugar, por (5.70) a

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_3 &= \frac{4}{\pi(1 + R^2)^3} \\ &\quad \left(2(-Y + XZ), 2(X + YZ), 1 + Z^2 - X^2 - Y^2 \right) \\ \mathbf{b}_1 &= \frac{4}{\pi(1 + R^2)^3} \\ &\quad \left(1 + X^2 - Y^2 - Z^2, 2(-Z + XY), 2(Y + XZ) \right) \\ \mathbf{b}_2 &= \frac{4}{\pi(1 + R^2)^3} \\ &\quad \left(2(Z + XY), 1 + Y^2 - X^2 - Z^2, 2(-X + YZ) \right)\end{aligned}\quad (5.73)$$

Por las expresiones (5.73), es fácil recuperar el resultado del apartado anterior respecto a la ortogonalidad de los vectores tangentes (los vectores de Whitehead) de las tres aplicaciones. También se verifica que los campos (5.73) tienen divergencia nula,

$$\frac{\partial \mathbf{b}_m^j}{\partial X^j} = 0 , \quad (5.74)$$

así que existen los tres campos vectoriales $\mathbf{a}_m(X, Y, Z)$, tales que

$$\mathbf{b}_m^j = \varepsilon^{jkl} \frac{\partial \mathbf{a}_m^l}{\partial X^k} , \quad (5.75)$$

que se pueden escoger dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_3 &= \frac{2}{\pi(1+R^2)^2} (-Y, X, 1) , \\ \mathbf{a}_1 &= \frac{2}{\pi(1+R^2)^2} (1, -Z, Y) , \\ \mathbf{a}_2 &= \frac{2}{\pi(1+R^2)^2} (Z, 1, -X) . \end{aligned} \quad (5.76)$$

Ahora, para calcular el invariante de Hopf de las aplicaciones Π_m , se deben hacer los productos escalares $\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{b}_m$ (no hay suma en m), que dan el resultado

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 = \frac{8}{\pi^2(1+R^2)^4} , \quad (5.77)$$

de donde los índices de Hopf son

$$H(\Pi_1) = H(\Pi_2) = H(\Pi_3) = \int_{R^3} dX dY dZ \frac{8}{\pi^2(1+R^2)^4} = 1 . \quad (5.78)$$

Pasemos todo esto al lenguaje físico de los nudos electromagnéticos. Tenemos tres posibilidades para elegir las condiciones de Cauchy ϕ_0 y θ_0 , correspondientes a las tres posibles parejas (Π_m, Π_n) que, claramente, dan lugar a campos electromagnéticos girados unos de otros. Se tomarán, por motivos históricos (dando preferencia a la aplicación de Hopf), Π_3 y Π_1 . En las coordenadas (X, Y, Z) , que usaremos siempre por comodidad, éstas son las funciones adimensionales

$$\begin{aligned} \phi_0(\mathbf{r}) &= \phi(\mathbf{r}, t=0) = \frac{2(X+iY)}{2Z+i(R^2-1)} , \\ \theta_0(\mathbf{r}) &= \theta(\mathbf{r}, t=0) = \frac{2(Y+iZ)}{2X+i(R^2-1)} , \end{aligned} \quad (5.79)$$

que cumplen las dos condiciones que se especificaron en el apartado 5.2.1, esto es, sus vectores tangentes en cada punto son ortogonales (ver la ecuación (5.73)), y sus invariantes de Hopf son iguales (ver (5.78)), así que pertenecen a la misma clase de homotopía. El siguiente paso era encontrar las funciones $\phi_1(\mathbf{r})$ y $\theta_1(\mathbf{r})$, que proporcionan las derivadas

temporales de $\phi(\mathbf{r}, t)$ y $\theta(\mathbf{r}, t)$ en $t = 0$. A partir de ϕ_0 y θ_0 , y según el método explicado en el apartado 5.2.1, éstas son

$$\begin{aligned}\phi_1(\mathbf{r}) &= \left. \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{-2\lambda(R^2 + 1)}{(2Z + i(R^2 - 1))^2}, \\ \theta_1(\mathbf{r}) &= \left. \frac{\partial \theta(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{2i\lambda(R^2 + 1)}{(2X + i(R^2 - 1))^2},\end{aligned}\quad (5.80)$$

con lo cual las condiciones de Cauchy de los campos básicos ϕ y θ son las dadas por las ecuaciones (5.79) y (5.80).

En consecuencia, se han encontrado las condiciones iniciales de un nudo electromagnético de clase C_1 , construido a partir del par de campos básicos (ϕ, θ) . Los campos magnético y eléctrico de este nudo electromagnético en $t = 0$ son, según las ecuaciones (5.7), los correspondientes a los vectores de Whitehead \mathbf{b}_3 y \mathbf{b}_1 de (5.73), pero haciendo las derivadas con respecto a las coordenadas físicas (x, y, z, t) , e introduciendo la constante dimensional a , y un signo menos en el campo magnético. Usando que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \lambda \frac{\partial}{\partial X}, \quad (5.81)$$

se llega a que la relación entre el vector de Whitehead \mathbf{b}_m , que es adimensional, y el campo magnético \mathbf{B} , es

$$\mathbf{B} = -\sqrt{a}\lambda^2 \mathbf{b}_m, \quad (5.82)$$

mientras que, para el campo eléctrico y su vector de Whitehead,

$$\mathbf{E} = \sqrt{a}\lambda^2 \mathbf{b}_n. \quad (5.83)$$

Estas sencillas reglas nos permitirán pasar de unos a otros sin hacer más operaciones. En concreto, para nuestro nudo electromagnético de clase C_1 , con vectores de Whitehead \mathbf{b}_3 y \mathbf{b}_1 , se obtienen los campos

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0) &= \frac{4\sqrt{a}\lambda^2}{\pi(1 + R^2)^3} \\ &\quad \left(2(Y - XZ), -2(X + YZ), -1 - Z^2 + X^2 + Y^2 \right) \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, 0) &= \frac{4\sqrt{a}\lambda^2}{\pi(1 + R^2)^3} \\ &\quad \left(1 + X^2 - Y^2 - Z^2, 2(-Z + XY), 2(Y + XZ) \right)\end{aligned}\quad (5.84)$$

donde, como se vió en el capítulo anterior, $a = 1$ en unidades naturales (o bien, $a = \hbar c$ en unidades físicas), y las coordenadas adimensionales (X, Y, Z) se relacionan con las coordenadas del espacio de Minkowski (x, y, z) por (5.69). De manera análoga, se pueden tomar los potenciales vectores correspondientes a (5.76), con la relación entre vectores \mathbf{a} adimensionales y potenciales vectores \mathbf{A} (o \mathbf{C}) dada por

$$\mathbf{A} = -\sqrt{a}\lambda \mathbf{a}_m, \quad \mathbf{C} = \sqrt{a}\lambda \mathbf{a}_n, \quad (5.85)$$

esto es,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t = 0) &= \frac{2\sqrt{a}\lambda}{\pi(1+R^2)^2} (Y, -X, -1), \\ \mathbf{C}(\mathbf{r}, t = 0) &= \frac{2\sqrt{a}\lambda}{\pi(1+R^2)^2} (1, -Z, Y), \end{aligned} \quad (5.86)$$

y las helicidad magnética y eléctrica son

$$h_m = \int_{R^3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, d^3r = h_e = \int_{R^3} \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} \, d^3r = a, \quad (5.87)$$

en perfecto acuerdo con (5.78), ya que el factor extra L^3 que aparece en el denominador se cancela con el jacobiano de la transformación $x^j \mapsto X^j$. Por tanto, para este nudo,

$$N_R - N_L = 1. \quad (5.88)$$

Otro aspecto interesante de este nudo electromagnético particular, construido a partir de la fibración de Hopf (y de todos los representantes que se considerarán en este capítulo), es la existencia del "tercer campo", dado por la aplicación que corresponde a Π_2 ,

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \frac{2(Z + iX)}{2Y + i(R^2 - 1)}. \quad (5.89)$$

Se puede asignar a ψ_0 un campo vectorial \mathbf{S} , construido de manera análoga a los campos magnético (desde ϕ_0) y eléctrico (desde θ_0), esto es,

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t = 0) = \frac{\sqrt{a}}{2\pi i(1 + \bar{\psi}_0\psi_0)^2} \nabla \bar{\psi}_0 \times \nabla \psi_0, \quad (5.90)$$

que, con la aplicación (5.89), tiene por resultado

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, 0) = \frac{4\sqrt{a}\lambda^2}{\pi(1+R^2)^3} \left(2(Z + XY), 1 + Y^2 - X^2 - Z^2, 2(-X + YZ) \right) \quad (5.91)$$

Este tercer campo da la dirección de movimiento del nudo electromagnético (5.84). Efectivamente, se relaciona con el vector de Poynting $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ a través de

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, 0) = V(\mathbf{r}, 0) \mathbf{S}(\mathbf{r}, 0) , \quad (5.92)$$

donde V es el módulo común de los campos eléctrico y magnético en el instante inicial,

$$V(\mathbf{r}, 0) = E(\mathbf{r}, 0) = B(\mathbf{r}, 0) . \quad (5.93)$$

5.3 Condiciones de Cauchy de una familia de nudos de clases $C_{\pm n^2}$

El estudio de la sección anterior nos ha permitido obtener los datos iniciales de un nudo electromagnético de clase C_1 . Estas condiciones de Cauchy pueden ser generalizadas de manera sencilla para conseguir representantes de las clases de homotopía C_{n^2} , utilizando algunas propiedades sencillas del invariante de Hopf. También, mediante cambios menores, se consiguen los valores iniciales de nudos electromagnéticos de clases C_{-n^2} . Algunas cantidades asociadas a los nudos (y, en general, a todos los campos electromagnéticos), como la energía, el momento lineal y el momento angular, no dependen del tiempo, así que se pueden estudiar estos invariantes dinámicos de los representantes particulares de las distintas clases de homotopía que se obtendrán.

5.3.1 Obtención de las clases C_{n^2}

En la sección 5.2 ha quedado claro que el invariante de Hopf, esto es, el número de enlace de las imágenes inversas de dos puntos distintos,

de la aplicación de Hopf

$$\phi_H = \frac{2(X + iY)}{2Z + i(R^2 - 1)}, \quad (5.94)$$

es igual a 1. Considérese, teniendo esto en cuenta, la aplicación $S^3 \rightarrow S^2$ dada por la potencia n -ésima de la aplicación (5.94), es decir,

$$(\phi_H)^n = \left(\frac{2(X + iY)}{2Z + i(R^2 - 1)} \right)^n. \quad (5.95)$$

¿Cuál es el índice de Hopf de esta aplicación? Sea $p \in S^2$, y sea una aplicación cualquiera $f : S^3 \rightarrow S^2$. Se llama fibra a la curva cerrada en S^3 definida por la imagen inversa $f^{-1}(p)$, y se llama *multiplicidad* de la fibra $f^{-1}(p)$ al número de sus componentes conexas. Para la aplicación de Hopf (5.94), cada una de sus fibras tiene multiplicidad 1 (las curvas que las forman se cierran tras dar una sola vuelta), y el número de enlace de dos fibras cualesquiera también es 1. De ahí que el invariante de Hopf de la aplicación (5.94) sea la unidad. Pero, en el caso de la aplicación (5.95), la situación es algo distinta. El número de enlace de las curvas cerradas que forman las fibras de (5.95) es igual que el de la aplicación de Hopf, porque son las mismas curvas. Sin embargo, la multiplicidad de cada fibra cambia de 1 a n (las curvas dan n vueltas). Por tanto, el número de enlace de dos de las fibras de la aplicación (5.95) es n^2 . El resultado se puede generalizar a toda aplicación suave $f : S^3 \rightarrow S^2$, llegándose a la siguiente propiedad del invariante de Hopf,

$$H(f^n) = n^2 H(f). \quad (5.96)$$

Por la proyección estereográfica $S^2 = C \cup \{\infty\}$, los puntos de S^2 se pueden dar por números complejos. Por ejemplo, la imagen de la aplicación f se puede escribir

$$f = P e^{i\xi}, \quad (5.97)$$

donde P y ξ son, respectivamente, el módulo y la fase de f . Esta notación permite definir fácilmente, desde f , la aplicación

$$f^{(n)} = P e^{in\xi}, \quad (5.98)$$

que deja invariante el módulo de f , pero multiplica por el entero n su fase. Nótese que n ha de ser un número entero para que (5.98) esté bien definida. Por la construcción de los vectores de Whitehead (ver los apartados 4.2.3 y 5.2.4), es obvio que se cumple

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(f^{(n)}) &= n \mathbf{b}(f) , \\ \mathbf{a}(f^{(n)}) &= n \mathbf{a}(f) , \end{aligned} \quad (5.99)$$

y, por la fórmula integral del mismo Whitehead, obtenemos

$$H(f^{(n)}) = n^2 H(f) . \quad (5.100)$$

Por tanto, las aplicaciones f^n y $f^{(n)}$ son homotópicas. Esta propiedad permite obtener representantes de las clases de homotopía C_{n^2} de los nudos. Por simplicidad, se utilizarán los representantes $f^{(n)}$, pero el resultado no varía mucho.

Generalizamos las aplicaciones (5.79), mediante el método (5.98), es decir, definimos las aplicaciones

$$\begin{aligned} \phi^{(n)}(\mathbf{r}, t=0) &= \phi_0^{(n)}(\mathbf{r}) , \\ \theta^{(n)}(\mathbf{r}, t=0) &= \theta_0^{(n)}(\mathbf{r}) , \end{aligned} \quad (5.101)$$

que, por la propiedad (5.100), tienen índice de Hopf igual a n^2 . Repitiendo ahora el método que se trató en el apartado 5.2.4 para el caso $n = 1$, se obtienen los campos magnético y eléctrico en $t = 0$, que son los mismos que los de $n = 1$, pero multiplicados por n ,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(n^2)}(\mathbf{r}, 0) &= \frac{4n\sqrt{a}\lambda^2}{\pi(1+R^2)^3} \\ &\quad \left(2(Y - XZ), -2(X + YZ), -1 - Z^2 + X^2 + Y^2 \right) \\ \mathbf{E}^{(n^2)}(\mathbf{r}, 0) &= \frac{4n\sqrt{a}\lambda^2}{\pi(1+R^2)^3} \\ &\quad \left(1 + X^2 - Y^2 - Z^2, 2(-Z + XY), 2(Y + XZ) \right) \end{aligned} \quad (5.102)$$

La notación del superíndice (n^2) en los campos indica su clase de homotopía, pues, evidentemente, las helicidades magnética y eléctrica son

$$h_m = \int_{R^3} \mathbf{A}^{(n^2)} \cdot \mathbf{B}^{(n^2)} d^3r = h_e = \int_{R^3} \mathbf{C}^{(n^2)} \cdot \mathbf{E}^{(n^2)} d^3r = an^2 , \quad (5.103)$$

es decir, el valor de la carga topológica de estos nudos es

$$N_R - N_L = n^2, \quad (5.104)$$

obteniéndose así representantes de las clases C_{n^2} .

5.3.2 Obtención de las clases C_{-n^2}

Para obtener una aplicación de índice de Hopf negativo, a partir de las aplicaciones que se están usando, lo más sencillo es darse cuenta de que, si se cambia el signo de una de las coordenadas de S^3 en la aplicación de Hopf, entonces el índice de Hopf de la aplicación resultante es igual a -1 . Vamos a comprobar esta afirmación. Por cuestiones de simetría entre las aplicaciones ϕ y θ , de las cuatro posibilidades se elegirá cambiar el signo de la última coordenada, que aparece como parte imaginaria del denominador de la aplicación de Hopf, esto es, se consideran las aplicaciones $\phi_0^{(-)} : S^3 \rightarrow S^2$, y $\theta_0^{(-)} : S^3 \rightarrow S^2$ dadas por

$$\begin{aligned} \phi_0^{(-)} &= \frac{2(X + iY)}{2Z - i(R^2 - 1)}, \\ \theta_0^{(-)} &= \frac{2(Y + iZ)}{2X - i(R^2 - 1)}. \end{aligned} \quad (5.105)$$

Estas dos aplicaciones cumplen la condición de ortogonalidad de los vectores tangentes a sus curvas de nivel en cada punto. Por otro lado, también tienen el mismo índice de Hopf, por analogía con el caso de la clase C_1 . En consecuencia, es posible obtener de ellas las condiciones de Cauchy de un nudo. Las derivadas temporales de las aplicaciones $\phi^{(-)}$ y $\theta^{(-)}$ en $t = 0$ se calculan a partir de los valores iniciales (5.105), con el método del apartado 5.2.1, y resultan

$$\begin{aligned} \phi_1^{(-)}(\mathbf{r}) &= \left. \frac{\partial \phi^{(-)}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{2\lambda(R^2 + 1)}{(2Z - i(R^2 - 1))^2}, \\ \theta_1^{(-)}(\mathbf{r}) &= \left. \frac{\partial \theta^{(-)}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{-2i\lambda(R^2 + 1)}{(2X - i(R^2 - 1))^2}, \end{aligned} \quad (5.106)$$

muy parecidas a las del caso C_1 , en (5.80). Las condiciones de Cauchy de los campos básicos $\phi^{(-)}(\mathbf{r}, t)$ y $\theta^{(-)}(\mathbf{r}, t)$ son, pues, las expresiones

(5.105) y (5.106). Ahora, los campos magnético y eléctrico, en $t = 0$, contruidos con estas condiciones, son

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(-1)}(\mathbf{r}, 0) &= \frac{4\sqrt{a}\lambda^2}{\pi(1+R^2)^3} \\ &\quad \left(-2(Y+XZ), 2(X-YZ), -1-Z^2+X^2+Y^2 \right) \\ \mathbf{E}^{(-1)}(\mathbf{r}, 0) &= \frac{4\sqrt{a}\lambda^2}{\pi(1+R^2)^3} \\ &\quad \left(1+X^2-Y^2-Z^2, 2(Z+XY), 2(-Y+XZ) \right) \end{aligned} \quad (5.107)$$

es decir, se verifica la relación

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(-1)}(\mathbf{r}, 0) &= \mathbf{B}^{(1)}(-\mathbf{r}, 0) , \\ \mathbf{E}^{(-1)}(\mathbf{r}, 0) &= \mathbf{E}^{(1)}(-\mathbf{r}, 0) , \end{aligned} \quad (5.108)$$

respecto a los campos de clase C_1 de la ecuación (5.84). Es fácil comprobar en (5.107) que estos dos campos vectoriales son ortogonales, si no estaba claro por la construcción. Por otro lado, dos posibles potenciales vectores para ellos están dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(-1)}(\mathbf{r}, t=0) &= \frac{2\sqrt{a}\lambda}{\pi(1+R^2)^2} (Y, -X, 1) , \\ \mathbf{C}^{(-1)}(\mathbf{r}, t=0) &= \frac{2\sqrt{a}\lambda}{\pi(1+R^2)^2} (-1, -Z, Y) , \end{aligned} \quad (5.109)$$

de manera que los productos escalares necesarios para el cálculo de las helicidad magnética y eléctrica son

$$\mathbf{A}^{(-1)} \cdot \mathbf{B}^{(-1)} = \mathbf{C}^{(-1)} \cdot \mathbf{E}^{(-1)} = \frac{-8a}{\pi^2 L^3 (1+R^2)^4} , \quad (5.110)$$

de donde se demuestra que

$$h_m = h_e = -a , \quad (5.111)$$

y la clase de homotopía de estos nudos es -1 , pues

$$N_R - N_L = -1 . \quad (5.112)$$

Por tanto, un mínimo cambio en las aplicaciones básicas ϕ y θ nos da condiciones de Cauchy de nudos electromagnéticos de la clase de homotopía C_{-1} . Ahora, utilizando la misma técnica que para el caso de las clases C_{n^2} , podemos obtener representantes de las clases negativas C_{-n^2} . Para ello, considérense las aplicaciones que se construyen a partir de las básicas (5.105), dejando el módulo invariable pero multiplicando la fase por el número entero n , es decir,

$$\begin{aligned}\phi^{(-,n)}(\mathbf{r}, 0) &= \left(\phi_0^{(-)}\right)^{(n)}, \\ \theta^{(-,n)}(\mathbf{r}, 0) &= \left(\theta_0^{(-)}\right)^{(n)}.\end{aligned}\quad (5.113)$$

Los campos magnético y eléctrico contruidos, respectivamente, con $\phi^{(-,n)}$ y $\theta^{(-,n)}$ son los mismos que los correspondientes a $n = 1$, dados en (5.107), pero multiplicados por el número entero n . De esta manera, se obtienen

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^{(-n^2)}(\mathbf{r}, 0) &= n \mathbf{B}^{(-1)}(\mathbf{r}, 0), \\ \mathbf{E}^{(-n^2)}(\mathbf{r}, 0) &= n \mathbf{E}^{(-1)}(\mathbf{r}, 0),\end{aligned}\quad (5.114)$$

que, al calcular sus helicidades magnética y eléctrica, cumplen, por (5.110) y (5.114),

$$h_m = h_e = -an^2, \quad (5.115)$$

y, evidentemente, son de clase C_{-n^2} , con

$$N_R - N_L = -n^2. \quad (5.116)$$

Así se obtienen representantes de las clases C_{-n^2} , por inversión espacial, $\mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}$, de los representantes de las clases C_{n^2} .

5.3.3 Propiedades invariantes de estos nudos

Además de las helicidades magnética y eléctrica, los nudos electromagnéticos poseen algunas propiedades que no dependen del tiempo, como el resto de las soluciones estándar de las ecuaciones de Maxwell en el vacío. Estas son la energía, el momento lineal y el momento angular total, que se van a estudiar ahora para los representantes particulares

que se han obtenido. Nótese, sin embargo, que existe una diferencia fundamental entre la helicidad y el resto de invariantes: la primera no depende de los representantes, porque es una característica topológica de toda la clase de homotopía, mientras que el resto son cantidades conservadas asignadas a cada campo, que no caracterizan de ninguna manera a sus compañeros de clase de homotopía.

Para los representantes, obtenidos en el apartado 5.3.1, de las clases de homotopía C_{n^2} , la energía es

$$p^0(n^2) = \int_{R^3} \left(\frac{E^{(n^2)} + B^{(n^2)}}{2} \right) d^3r = 2n^2 a \lambda . \quad (5.117)$$

Por otro lado, para calcular el resto de invariantes se necesita el vector de Poynting, que resulta, en $t = 0$,

$$\mathbf{P}^{(n^2)}(\mathbf{r}, 0) = \frac{4n^2 \sqrt{a} \lambda^2}{\pi(1 + R^2)^2} \mathbf{S}(\mathbf{r}, 0) , \quad (5.118)$$

donde \mathbf{S} es el campo de la tercera fibrición de la clase C_1 , dado por la ecuación (5.91). De este modo, el momento lineal de los representantes de las clases C_{n^2} es

$$\mathbf{p}^{(n^2)} = \int_{R^3} \mathbf{P}^{(n^2)} d^3r = n^2 a \lambda \hat{\mathbf{y}} , \quad (5.119)$$

lo que significa que estos nudos se mueven a lo largo del eje y . El momento angular es

$$\mathbf{J}^{(n^2)} = \int_{R^3} \mathbf{r} \times \mathbf{P}^{(n^2)} d^3r = n^2 a \hat{\mathbf{y}} , \quad (5.120)$$

así que el momento angular está en la dirección del movimiento.

Pasemos a los representantes de las clases de homotopía negativas C_{-n^2} , obtenidos en el apartado 5.3.2. Su energía no varía respecto a la de las clases positivas, esto es,

$$p^0(-n^2) = p^0(n^2) = 2n^2 a \lambda , \quad (5.121)$$

y, para el momento lineal y el momento angular total, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{(-n^2)} &= \mathbf{p}^{(n^2)} = n^2 a \lambda \hat{\mathbf{y}} , \\ \mathbf{J}^{(-n^2)} &= -\mathbf{J}^{(n^2)} = -n^2 a \hat{\mathbf{y}} , \end{aligned} \quad (5.122)$$

es decir, el momento lineal se mantiene igual, pero el momento angular cambia de signo. La razón de estos cambios es muy clara: los representantes de clase negativa que estamos estudiando se consiguen por inversión espacial de los representantes de clase positiva. Las ecuaciones (5.122) simplemente reflejan el comportamiento normal del momento lineal y del momento angular frente a una inversión espacial.

5.4 Evolución temporal de los nudos

A través del método de Fourier, se pueden hallar las expresiones de los nudos electromagnéticos en todo instante. Esto permite estudiar la evolución dinámica de los representantes que se han encontrado, así como visualizar cantidades que describen cómo se mueven, especialmente el módulo de los campos y su vector de Poynting. El siguiente paso es, entonces, encontrar la evolución temporal de los campos básicos ϕ y θ . Lo más interesante de estas expresiones es la verificación de la invariabilidad del número de enlace de sus curvas de nivel a través del tiempo. De esta manera, aunque los campos magnético y eléctrico vayan asintóticamente a cero, nunca serán equivalentes a campos nulos, pues los separa de estos últimos el número de enlace de sus líneas de fuerza.

5.4.1 El método de Fourier en electromagnetismo

Con el fin de concretar la notación, hagamos un breve repaso de la técnica de Fourier para resolver las ecuaciones de Maxwell en el vacío. Debido a éstas, tanto el campo magnético como el campo eléctrico satisfacen la ecuación de d'Alembert,

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{B} , \quad (5.123)$$

y análogamente para \mathbf{E} . Por tanto, se puede actuar como ya se hizo en el apartado 3.3.2 para los potenciales vectores. La conclusión es que se pueden escribir los campos magnético y eléctrico como integrales de

Fourier, para las que elegimos la notación

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \left(\frac{\mathbf{R}_1 + i\mathbf{R}_2}{2} e^{ik \cdot x} + \frac{\mathbf{R}_1 - i\mathbf{R}_2}{2} e^{-ik \cdot x} \right) \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \left(\frac{\mathbf{R}_2 - i\mathbf{R}_1}{2} e^{ik \cdot x} + \frac{\mathbf{R}_2 + i\mathbf{R}_1}{2} e^{-ik \cdot x} \right) \end{aligned} \quad (5.124)$$

donde $k \cdot x = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$, $\omega^2 = \mathbf{k}^2$, y los vectores reales $\mathbf{R}_1(\mathbf{k})$ y $\mathbf{R}_2(\mathbf{k})$ han de cumplir, para que se satisfagan las ecuaciones de Maxwell, las relaciones vectoriales

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_1 &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2 = 0, \\ \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{R}_2 &= \mathbf{R}_1, \quad \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{R}_1 = -\mathbf{R}_2. \end{aligned} \quad (5.125)$$

Es una medida que ahorra tiempo el uso del campo complejo

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + i\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (5.126)$$

ya que su transformada de Fourier es, con (5.124),

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k (\mathbf{R}_1 + i\mathbf{R}_2) e^{ik \cdot x}. \quad (5.127)$$

Lo más importante de el método de Fourier es que los vectores \mathbf{R}_1 y \mathbf{R}_2 se calculan a partir de los campos magnético y eléctrico en el instante inicial, pues

$$\mathbf{R}_1(\mathbf{k}) + i\mathbf{R}_2(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3r \mathbf{F}(\mathbf{r}, 0) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (5.128)$$

Estas serán las fórmulas que vamos a utilizar para hallar los nudos electromagnéticos a todo tiempo, pues ya conocemos sus valores iniciales.

5.4.2 Nudos de clases C_{n^2}

Si se introducen en la expresión (5.128) los campos magnético y eléctrico, en $t = 0$, correspondientes a los nudos representantes de las clases

C_{n^2} , dados en la ecuación (5.102), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= \frac{n\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi\lambda^2}} \frac{e^{-\omega/\lambda}}{\omega} \left(k_1 k_3, \omega k_3 + k_2 k_3, -\omega k_2 - k_1^2 - k_2^2 \right) \\ \mathbf{R}_2 &= \frac{n\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi\lambda^2}} \frac{e^{-\omega/\lambda}}{\omega} \left(\omega k_2 + k_2^2 + k_3^2, -\omega k_1 - k_1 k_2, -k_1 k_3 \right) \end{aligned} \quad (5.129)$$

Estas expresiones se introducen en las ecuaciones (5.124), y así se llega a la forma del nudo electromagnético de clase C_{n^2} para todo tiempo. Recordando que $\lambda(x, y, z, t) = (X, Y, Z, T)$, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(n^2)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{n\sqrt{a}\lambda^2}{\pi(A^2 + T^2)^3} (Q\mathbf{H}_1 + P\mathbf{H}_2) , \\ \mathbf{E}^{(n^2)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{n\sqrt{a}\lambda^2}{\pi(A^2 + T^2)^3} (Q\mathbf{H}_2 - P\mathbf{H}_1) , \end{aligned} \quad (5.130)$$

donde se definen las cantidades A , P y Q como

$$\begin{aligned} A &= \frac{R^2 - T^2 + 1}{2} , \\ P &= T(T^2 - 3A^2) , \quad Q = A(A^2 - 3T^2) , \end{aligned} \quad (5.131)$$

y los vectores \mathbf{H}_1 y \mathbf{H}_2 son

$$\mathbf{H}_1 = \left((Y + T) - XZ, -X - (Y + T)Z, \frac{-1 - Z^2 + X^2 + (Y + T)^2}{2} \right) \quad (5.132)$$

$$\mathbf{H}_2 = \left(\frac{1 + X^2 - (Y + T)^2 + Z^2}{2}, -Z + X(Y + T), (Y + T) + XZ \right) \quad (5.133)$$

Es claro, por las expresiones anteriores, que $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ (necesario para ser siempre un nudo electromagnético) y que, además, $E^2 = B^2$. Para estudiar cómo evoluciona el nudo, un aspecto interesante es mirar a la densidad de energía, que tiene el valor

$$P^0(\mathbf{r}, t) = \frac{E^2 + B^2}{2} = \frac{an^2\lambda^4}{4\pi^2} \frac{(1 + X^2 + (Y + T)^2 + Z^2)^2}{(A^2 + T^2)^3} . \quad (5.134)$$

En las figuras 5.2 y 5.3, se observa cómo evoluciona la densidad de energía del nudo C_1 desde varios puntos de vista, teniendo en cuenta la

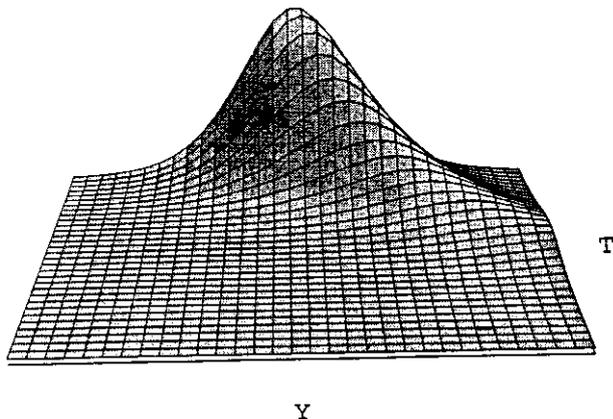


Figura 5.2: Densidad de energía del nudo de clase 1 frente a Y (el eje de propagación) y T , para $X = Z = 0$.

simetría cilíndrica de P^0 . Puede verse cómo el nudo se extiende, y su densidad de energía va a cero. Existe un máximo de ésta cercano a $Y = T$, y, para tiempos posteriores, aparece otro máximo (casi ilocalizable) en $Y = -T$.

5.4.3 Nudos de clases C_{-n^2}

En el caso de las clases de homotopía C_{-n^2} , con valores iniciales de los campos dados por (5.114), se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= \frac{n\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi}\lambda^2} \frac{e^{-\omega/\lambda}}{\omega} \left(k_1 k_3, -\omega k_3 + k_2 k_3, \omega k_2 - k_1^2 - k_2^2 \right) \\ \mathbf{R}_2 &= \frac{n\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi}\lambda^2} \frac{e^{-\omega/\lambda}}{\omega} \left(-\omega k_2 + k_2^2 + k_3^2, \omega k_1 - k_1 k_2, -k_1 k_3 \right) \end{aligned} \quad (5.135)$$

y los campos a todo tiempo, introduciendo las expresiones (5.135) e integrando, son

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(-n^2)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{n\sqrt{a}\lambda^2}{\pi(A^2 + T^2)^3} (QH_{-1} - PH_{-2}) , \\ \mathbf{E}^{(-n^2)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{n\sqrt{a}\lambda^2}{\pi(A^2 + T^2)^3} (QH_{-2} + PH_{-1}) , \end{aligned} \quad (5.136)$$

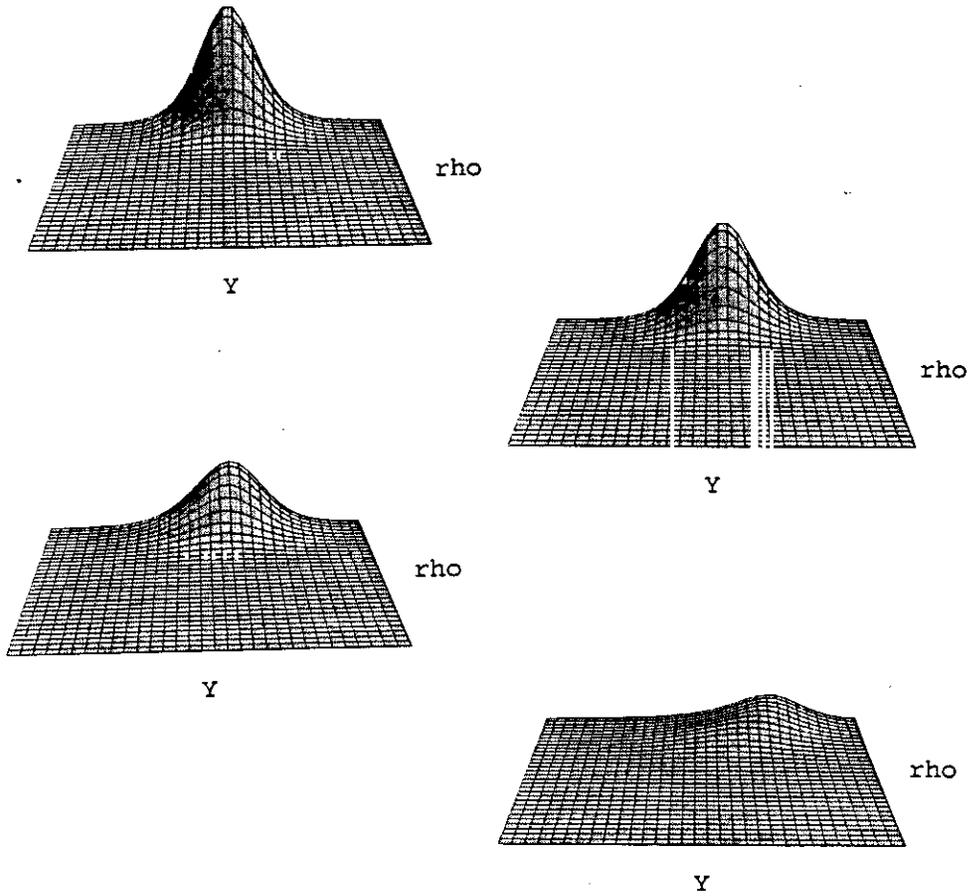


Figura 5.3: Densidad de energía del nudo de clase 1 frente a Y y $\rho = (X^2 + Z^2)^{1/2}$, para los instantes $T = 0$, $T = 0.25$, $T = 0.5$ y $T = 1$.

es decir, los nudos electromagnéticos de clases C_{-n^2} tienen parecidas expresiones que los de clases C_{n^2} (5.130), con las mismas cantidades A , P y Q (5.131), pero difieren en los vectores \mathbf{H}_{-1} y \mathbf{H}_{-2} , que son, en este caso,

$$\mathbf{H}_{-1} = \left(-(Y+T) - XZ, X - (Y+T)Z, \frac{-1 - Z^2 + X^2 + (Y+T)^2}{2} \right) \quad (5.137)$$

$$\mathbf{H}_{-2} = \left(\frac{1 + X^2 - (Y+T)^2 - Z^2}{2}, Z + X(Y+T), -(Y+T) + XZ \right) \quad (5.138)$$

es decir, se comprueba fácilmente que se sigue cumpliendo, para estos representantes particulares,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(-n^2)}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}^{(n^2)}(-\mathbf{r}, -t), \\ \mathbf{E}^{(-n^2)}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}^{(n^2)}(-\mathbf{r}, -t). \end{aligned} \quad (5.139)$$

También la densidad de energía de los campos (5.136) está muy relacionada con la de los campos (5.130), ya que se tiene

$$P^0(\mathbf{r}, t) = \frac{an^2\lambda^4}{4\pi^2} \frac{(1 + X^2 + (Y+T)^2 + Z^2)^2}{(A^2 + T^2)^3}, \quad (5.140)$$

que no varía respecto a la expresión (5.134). Por tanto, los diagramas 5.2 y 5.3 son también válidos en este caso.

5.4.4 Evolución temporal de los campos básicos

En el capítulo 4 se apuntó la hipótesis de la posibilidad de estudiar el electromagnetismo clásico a través de dos campos con valores en la esfera S^2 , llamados ϕ y θ , en lugar de los conocidos cuadripotenciales. Siguiendo esta idea, en este capítulo se han obtenido soluciones explícitas de las ecuaciones de Maxwell en el vacío construidas de esta manera. La estrategia ha sido encontrar primero los campos ϕ y θ en $t = 0$, que satisficieran las condiciones necesarias para formar nudos electromagnéticos; con estos campos, que se han denominado ϕ_0 y θ_0 , se han edificado los campos magnético y eléctrico en es instante inicial, y se han dejado

evolucionar a través del método de Fourier. Evidentemente, la consistencia del modelo requiere encontrar también los campos básicos ϕ y θ en todos los instantes t . La dificultad de este último paso se encuentra en que estos campos satisfacen ecuaciones de movimiento no lineales, las ecuaciones de dualidad,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\sqrt{a}}{2\pi i(1 + \bar{\phi}\phi)^2} \nabla\phi \times \nabla\bar{\phi} \\ &= \frac{\sqrt{a}}{2\pi i(1 + \bar{\theta}\theta)^2} \left(\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial t} \nabla\theta - \frac{\partial\theta}{\partial t} \nabla\bar{\theta} \right), \\ \mathbf{E} &= \frac{\sqrt{a}}{2\pi i(1 + \bar{\theta}\theta)^2} \nabla\bar{\theta} \times \nabla\theta \\ &= \frac{\sqrt{a}}{2\pi i(1 + \bar{\phi}\phi)^2} \left(\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial t} \nabla\phi - \frac{\partial\phi}{\partial t} \nabla\bar{\phi} \right), \end{aligned} \quad (5.141)$$

con las condiciones de Cauchy

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t)|_{t=0} &= \phi_0(\mathbf{r}), \quad \left. \frac{\partial\phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \phi_1(\mathbf{r}), \\ \theta(\mathbf{r}, t)|_{t=0} &= \theta_0(\mathbf{r}), \quad \left. \frac{\partial\theta(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \theta_1(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (5.142)$$

Sin embargo, a pesar de la aparente complicación de estas ecuaciones, los campos básicos tienen una propiedad muy importante que permite resolverlas: sus curvas de nivel evolucionan con el tiempo de tal manera que su número de enlace permanece constante. Esta es una condición de estabilidad que da pistas sobre la forma de los campos básicos.

Volvamos a los nudos electromagnéticos de clase de homotopía C_1 que se han encontrado. Las condiciones (5.142), en este caso, las vimos en el apartado 5.2.4,

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \frac{2(X + iY)}{2Z + i(R^2 - 1)}, & \phi_1 &= \frac{-2\lambda(R^2 + 1)}{(2Z + i(R^2 - 1))^2}, \\ \theta_0 &= \frac{2(Y + iZ)}{2X + i(R^2 - 1)}, & \theta_1 &= \frac{2i\lambda(R^2 + 1)}{(2X + i(R^2 - 1))^2}, \end{aligned} \quad (5.143)$$

y los campos a todo tiempo \mathbf{B} y \mathbf{E} son los campos (5.130), escogiendo $n = 1$. La solución de las ecuaciones (5.141) con campos \mathbf{E} y \mathbf{B} dados

por (5.130) y condiciones de Cauchy dadas por (5.143) es

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{(AX - TZ) + i(AY + T(A - 1))}{(AZ + TX) + i(A(A - 1) - TY)} , \\ \theta(\mathbf{r}, t) &= \frac{(AY + T(A - 1)) + i(AZ + TX)}{(AX - TZ) + i(A(A - 1) - TY)} .\end{aligned}\tag{5.144}$$

Una manera sencilla de visualizar la evolución temporal de estos escalares es por la evolución de sus curvas de nivel. Es claro, por supuesto, que el número de enlace de cualesquiera dos fibras de la aplicación ϕ ha de ser igual a uno, pues este número es igual al invariante de Hopf de la aplicación. Veamos cómo se comportan dos fibras típicas de $\phi(\mathbf{r}, t)$, por ejemplo, las dadas por los valores $\phi^{-1}(0)$ y $\phi^{-1}(\infty)$, para distintos valores de T .

La fibra $\phi^{-1}(0)$ corresponde a la solución del sistema

$$\begin{aligned}AX - TZ &= 0 , \\ AY + T(A - 1) &= 0 ,\end{aligned}\tag{5.145}$$

que es la curva de R^3 dada por las ecuaciones paramétricas, en función de $0 \leq \zeta \leq 2\pi$,

$$\begin{aligned}X(\zeta) &= T \cos \zeta , \\ Y(\zeta) &= T \sin \zeta , \\ Z(\zeta) &= \frac{\cos \zeta}{1 + \sin \zeta} ,\end{aligned}\tag{5.146}$$

donde se verifica fácilmente que, para $T = 0$, la curva (5.146) es el eje Z , como se apuntó más arriba.

Por su parte, la fibra $\phi^{-1}(\infty)$ es la solución del sistema

$$\begin{aligned}AZ + TX &= 0 , \\ A(A - 1) - TY &= 0 ,\end{aligned}\tag{5.147}$$

dada, en paramétricas, por las ecuaciones

$$\begin{aligned}X(\zeta) &= (1 + T \sin \zeta) \cos \zeta , \\ Y(\zeta) &= (1 + T \sin \zeta) \sin \zeta , \\ Z(\zeta) &= -T \cos \zeta ,\end{aligned}\tag{5.148}$$

que, en $T = 0$, es la circunferencia $X^2 + Y^2 = 1$.

A partir de las expresiones (5.146) y (5.148), es fácil comprobar que ambas fibras evolucionan de manera suave con respecto al parámetro temporal T . Como consecuencia de la benevolencia de esta evolución dinámica, además del hecho de ser el número de enlace un invariante topológico de las curvas espaciales en S^3 , ocurre que el número de enlace de las fibras (5.146) y (5.148) no depende de T . Dado que este número es igual a 1 para $T = 0$, es evidente entonces que es igual a 1 para todo instante T . Si se quiere, se puede hallar explícitamente este número de enlace a través de la integral de Gauss, que vimos en el segundo capítulo, para $T = 1$, que es una elección sencilla. El cálculo numérico de esta integral doble verifica que el enlace se mantiene en el tiempo.

Con respecto a la aplicación $\theta(r, t)$ de (5.144), también se pueden estudiar sus fibras $\theta^{-1}(0)$ y $\theta^{-1}(\infty)$. Para $\theta^{-1}(0)$, el sistema a resolver es

$$\begin{aligned} AY + T(A - 1) &= 0, \\ AZ + TX &= 0, \end{aligned} \quad (5.149)$$

con solución

$$\begin{aligned} X(\zeta) &= \frac{\cos \zeta}{1 + \sin \zeta}, \\ Y(\zeta) &= T \sin \zeta, \\ Z(\zeta) &= -T \cos \zeta, \end{aligned} \quad (5.150)$$

que, en $T = 0$, es el eje X .

Para la fibra $\theta^{-1}(\infty)$, se tiene

$$\begin{aligned} AX - TZ &= 0, \\ A(A - 1) - TY &= 0, \end{aligned} \quad (5.151)$$

y la solución es

$$\begin{aligned} X(\zeta) &= T \cos \zeta, \\ Y(\zeta) &= (1 + T \sin \zeta) \sin \zeta, \\ Z(\zeta) &= (1 + T \sin \zeta) \cos \zeta, \end{aligned} \quad (5.152)$$

es decir, la circunferencia $Y^2 + Z^2 = 1$ en $T = 0$.

Ahora, para obtener los escalares correspondientes a los nudos C_{n^2} sólo hay que utilizar el mismo método que en el instante inicial, es decir, se hace la transformación

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}, t) &\mapsto \phi^{(n)}(\mathbf{r}, t) \\ \theta(\mathbf{r}, t) &\mapsto \theta^{(n)}(\mathbf{r}, t)\end{aligned}\quad (5.153)$$

equivalente a dejar igual el módulo de las aplicaciones (5.144), pero multiplicar la fase por el entero n . Es claro, por la construcción (5.153) que las curvas en R^3 que dan las fibras de las aplicaciones $\phi^{(n)}$ y $\theta^{(n)}$ son las mismas que las del caso $n = 1$, ejemplificadas en las ecuaciones (5.146), (5.148), (5.150) y (5.152), pero la multiplicidad de cada fibra es n , así que el número de enlace de dos cualesquiera fibras de $\phi^{(n)}$, y el número de enlace de dos cualesquiera fibras de $\theta^{(n)}$ es igual a n^2 .

Pasemos a los nudos de la clase C_{-1} . Los campos magnético y eléctrico que aparecen en (5.141) son, ahora, los dados en (5.136), con $n = 1$, y las condiciones de Cauchy de las aplicaciones ϕ y θ las vimos en el apartado 5.3.2,

$$\begin{aligned}\phi_0 &= \frac{2(X + iY)}{2Z - i(R^2 - 1)} \quad , \quad \phi_1 = \frac{2\lambda(R^2 + 1)}{(2Z - i(R^2 - 1))^2} \quad , \\ \theta_0 &= \frac{2(Y + iZ)}{2X - i(R^2 - 1)} \quad , \quad \theta_1 = \frac{-2i\lambda(R^2 + 1)}{(2X - i(R^2 - 1))^2} \quad .\end{aligned}\quad (5.154)$$

Los campos a todo tiempo resultan

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{(AX + TZ) + i(AY + T(A - 1))}{(AZ - TX) - i(A(A - 1) - TY)} \quad , \\ \theta(\mathbf{r}, t) &= \frac{(AY + T(A - 1)) + i(AZ - TX)}{(AX + TZ) - i(A(A - 1) - TY)} \quad ,\end{aligned}\quad (5.155)$$

que son muy parecidas a las soluciones (5.144) de clase C_1 . También, consecuentemente, las fibras son similares, aunque su número de enlace es -1 , esta vez. Para obtener todas las clases C_{-n^2} , se transforman los escalares (5.155) según el método (5.153), esto es, se deja su módulo invariante y se multiplica su fase por el número entero n , encontrándose así curvas cuyo número de enlace es $-n^2$.

En conclusión, se han obtenido explícitamente los campos básicos ϕ y θ que dan una familia de nudos electromagnéticos representantes de las clases de homotopía $C_{\pm n^2}$, y también se han encontrado ejemplos prototipo para estudiar la evolución temporal de las fibras de estas aplicaciones. Se ha comprobado en estos ejemplos que dicha evolución temporal es suave, de manera que el número de enlace es una constante del movimiento, tal como se dijo al presentar el modelo de los nudos electromagnéticos.

Capítulo 6

Un modelo de rayo bola basado en los nudos

6.1 Introducción. Objetivos del capítulo

A lo largo de este memoria se han estudiado, con todo detalle conocido, las propiedades de los nudos electromagnéticos. Estas soluciones de la teoría clásica de Maxwell se distinguen del resto en que están caracterizados, desde el momento de su construcción, por el número de enlace de sus líneas de campo, esto es, por su helicidad. Por otro lado, como se introdujo al final del segundo capítulo, la helicidad, como indicador del enlace de las líneas de campo, ofrece estabilidad a los sistemas de dinámica de fluidos y magnetohidrodinámica. En este capítulo, y a modo de unificación de esos dos hechos, se verá que la idea de nudo electromagnético, con un valor determinado de helicidad, podría resultar interesante en problemas de confinamiento magnético, y, para verlo, se introducirá un modelo tentativo para explicar un fenómeno natural: los rayos bola.

En la sección 6.2 se resumen las características fenomenológicas básicas respecto a los rayos bola. El modelo teórico propuesto para este fenómeno, basado en los contenidos del trabajo realizado, y publicado en la referencia [223], se desarrolla en la sección 6.3. En ella, además, se propone un dispositivo experimental para la verificación de este modelo, a partir de otros experimentos realizados.

6.2 Fenomenología de los rayos bola

Los rayos bola son extraños y bellos fenómenos naturales, asociados casi siempre a tormentas con gran aparato eléctrico (como las tormentas de verano), especialmente en zonas montañosas. Normalmente, un rayo bola parece un globo luminoso. Frecuentemente, son de color rojo, naranja, amarillo o blanco, pero también pueden ser verdes o azules. Se ha observado a veces que se acercan a los cables de alta tensión, y luego se mueven a lo largo de ellos. Su diámetro es, típicamente del orden de 10 centímetros, aunque han sido vistos algunos de muy pocos centímetros, y otros de varios metros. Su apariencia está en contraste con los rayos normales de una tormenta, pues, a menudo, se mueven en una trayectoria cercana a la superficie de la tierra a baja velocidad (algunos observadores han llegado a decir de los rayos bola que son “majestuosos” en su movimiento), y pueden permanecer estáticos momentáneamente, o cambiar repentinamente de dirección en el transcurso de su movimiento. Contrariamente a lo que ocurre con los rayos normales, los rayos bola existen durante un tiempo prolongado, que va desde pocos segundos hasta incluso minutos. En algunos casos, su trayectoria es descendente, pasando ocasionalmente muy cerca del observador, incluso han llegado a entrar y salir de alguna vivienda a través de ventanas o chimeneas. Respecto al final de este fenómeno, a veces se ha notado que, aunque intensamente brillante, el rayo bola no irradia mucho calor, y desaparece repentina y silenciosamente, pero, otras veces, ocurre una gran explosión, que desplaza y daña a seres vivos y objetos.

Quizá lo más complicado de este problema, desde un punto de vista científico, son las grandes variaciones en estas características generales. Por ejemplo, no siempre el rayo bola tiene forma esférica, sino que puede tener una forma irregular, o presentar protuberancias, y puede emitir chispas. Su contorno no siempre está bien definido, puede estarlo sólo vagamente, envuelto en bruma. Algunos observadores han escuchado un sonido parecido a una descarga eléctrica, otros lo describen silencioso. Ocasionalmente, un rayo bola puede caer desde una nube hasta el suelo como un cuerpo masivo, incluso rebotar en el suelo como si fuese elástico. Pero puede ir en la dirección del viento o en la opuesta. [224, 225, 226, 227, 228].

Se han propuesto varios modelos teóricos para explicar los rayos bola, basados en microondas, combustión fractal, procesos nucleares, reacciones químicas, meteoritos de antimateria, plasmas,... Incluso que sólo son ilusiones ópticas, como se discute en la referencia [226], llegándose a la conclusión de que son reales. Sin embargo, ninguno de estos modelos está generalmente aceptado.

Otro aspecto interesante es la posible relación de los rayos bola con el problema fundamental del confinamiento magnético de plasmas. La pregunta, en este sentido, sería si son los rayos bola un fenómeno natural de confinamiento, cuyo estudio puede enseñarnos muchas cosas respecto a este importantísimo tema.

6.3 Un modelo para los rayos bola

La idea de usar los nudos electromagnéticos para explicar la estabilidad de los rayos bola surgió en el verano de 1995. Durante el curso de verano de la Universidad Complutense, en El Escorial, dedicado a problemas fundamentales de la física cuántica, Michael V. Berry se interesó por el modelo de los nudos, y sugirió que podrían resultar útiles para el problema de los rayos bola [229] (un campo magnético, correspondiente al de la clase C_1 del capítulo anterior, en $t = 0$, ya había sido introducido en las ecuaciones de la magnetohidrodinámica por Kamchatnov [230], que concluía que el plasma al que estaba acoplado se expandía a causa del efecto Joule). Nuestro trabajo fue comenzado en el otoño de 1995, y la versión definitiva se terminó en Abril de 1996. En esta sección se muestran los resultados de aquel trabajo [223].

6.3.1 Formación del rayo bola

Supongamos una tormenta con un fuerte aparato eléctrico. Un rayo golpea un punto del espacio, de tal modo que ioniza el aire del interior de un pequeño volumen, y crea un campo magnético que se acopla al plasma. Además, se supone que la temperatura del sistema es suficientemente alta, del orden de 30.000 K, al menos.

El sistema plasma-campo magnético, a esta temperatura, sigue las ecuaciones de la aproximación magnetohidrodinámica, que ya vimos en

el apartado 2.4.2 del segundo capítulo de esta memoria. Suponiendo que el plasma es incompresible (esto es, su densidad ρ es constante), estas ecuaciones, en función de la velocidad de las partículas del plasma $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ y del campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, son

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 , \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\sigma \mu} \nabla^2 \mathbf{B} , \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 , \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla \left(p + \frac{B^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} , \end{aligned} \tag{6.1}$$

en donde $p(\mathbf{r}, t)$ es la presión del plasma, μ es la permeabilidad magnética, que se supone constante, y se ha escrito explícitamente la dependencia en la conductividad σ , aunque ésta se suele considerar infinita en la aproximación magnetohidrodinámica.

Si la temperatura del sistema es lo suficientemente alta, de manera que la conductividad se puede tomar como infinita, una solución estacionaria (que no depende del tiempo) de estas ecuaciones viene dada por las condiciones

$$\mathbf{v} = \pm \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\rho}} , \quad p + \frac{B^2}{2} = \text{constante} . \tag{6.2}$$

Este tipo de soluciones, conocidas como ondas de Alfvén, son muy importantes, entre otras cosas porque, dado que la densidad del plasma ρ es constante, las líneas magnéticas son líneas de velocidad de las partículas materiales, así que la estabilidad de unas es un reflejo de la de las otras. La solución (6.2) da todas las cantidades de las ecuaciones (6.1) en función de un campo magnético solenoidal \mathbf{B} . Lo que ocurre es que la solución no puede ser realmente estacionaria. La temperatura irá disminuyendo, la conductividad del plasma no podrá ser considerada infinita, y el sistema se descompondrá. Es necesario un nuevo elemento para mantener la estabilidad del sistema el tiempo suficiente para que pueda ser considerado un rayo bola. Este elemento será el nudo magnético.

6.3.2 El nudo magnético de la fibración de Seifert

Las ecuaciones (6.2) tienen por solución un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ tal que satisface

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (6.3)$$

además de la condición sobre el campo eléctrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (6.4)$$

Es claro, por las ecuaciones (6.3) y (6.4), que tal campo mantiene constante la helicidad magnética,

$$h_m = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, d^3r = \text{constante}, \quad (6.5)$$

que siempre se mantiene constante en la aproximación magnetohidrodinámica, como vimos en el capítulo 2 de esta memoria. Como ejemplo del uso de la idea de nudo electromagnético en el problema del rayo bola, se usó una configuración determinada, dada por la fibración de Seifert, que es el conjunto de las curvas de nivel de la siguiente aplicación $\phi : S^3 \rightarrow S^2$, tras proyecciones estereográficas en el espacio real tridimensional compactificado y en el plano complejo, respectivamente,

$$\phi(X, Y, Z) = \frac{(2(X + iY))^n}{(2Z + i(R^2 - 1))(4(X^2 + Y^2))^{\frac{n-1}{2}}}. \quad (6.6)$$

Nótese que, para $n = 1$, se recupera la aplicación de Hopf. También aquí se han usado coordenadas adimensionales (X, Y, Z) . Estas coordenadas se relacionan con las coordenadas físicas (x, y, z) a través de la relación

$$L(X, Y, Z) = (x, y, z), \quad (6.7)$$

donde L es una cantidad con dimensiones de longitud, que, como se verá, proporciona la talla del sistema. A partir de la aplicación (6.6) se construye un nudo magnético (dado que el campo eléctrico es nulo), con el mismo método que el usado para construir nudos electromagnéticos en el vacío (ver el capítulo anterior), es decir,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\sqrt{b}}{2\pi i(1 + \bar{\phi}\phi)^2} \nabla\phi \times \nabla\bar{\phi}, \quad (6.8)$$

siendo b una constante con dimensiones de acción por velocidad, necesaria para que el campo (6.8) tenga dimensiones de campo magnético. Nótese que, al estar en una teoría diferente, esta constante no tiene nada que ver con la constante a que se vió en el caso de la teoría de Maxwell en el vacío (capítulos 4 y 5). Con (6.6), este campo resulta

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\sqrt{b}}{\pi L^2(1+R^2)^3} \left(2(Y - nXZ), -2(X + nYZ), n(X^2 + Y^2 - Z^2 - 1) \right) \quad (6.9)$$

Para calcular la helicidad del campo (6.9), se necesita un potencial vector $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, que puede ser escogido como

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{2\sqrt{b}}{\pi L(1+R^2)^2} (nY, -nX, -1) \quad , \quad (6.10)$$

así que la helicidad magnética es

$$h_m = \int_{R^3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, d^3r = nb \quad , \quad (6.11)$$

lo que quiere decir que cada par de líneas magnéticas está enlazada, con un número de enlace igual a n . Es importante también notar que la helicidad no depende de la talla L del sistema.

6.3.3 Estabilidad del rayo bola

Los estados dados por la ecuación (6.2) no pueden ser realmente estacionarios. Para ver este punto, lo mejor es calcular la energía E del sistema, que es la suma de la energía cinética del plasma y la energía magnética, esto es,

$$E = \int_{R^3} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{B^2}{2} \right) d^3r = \frac{(n^2 + 1)b}{L} \quad , \quad (6.12)$$

que, claramente, decrece al incrementarse la longitud L (contrariamente a la helicidad magnética, que no depende de L). Esta longitud es el radio cuadrático medio de la distribución, pues

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int r^2 (\rho v^2 + B^2) d^3r}{\int (\rho v^2 + B^2) d^3r} = L^2 \quad . \quad (6.13)$$

Lo que ocurre es que estamos suponiendo conductividad infinita del plasma, lo cual, como se ha comentado, implica temperatura muy alta. En estas condiciones, el sistema irradia fuertemente; supongamos que lo hace de acuerdo con la *ley de Stefan-Boltzmann*, que es la razón por la cual el rayo bola brilla y tiene ese aspecto llameante. Aunque no hay una forma definida, se puede suponer que el rayo bola irradia como una esfera de radio L , así que la pérdida de energía por unidad de tiempo es

$$\frac{dE}{dt} = -4\pi^2\sigma^*L^2T^4, \quad (6.14)$$

donde σ^* es la constante de Stefan, y T es la temperatura. Esto fuerza al rayo bola a perder energía aumentando L , de acuerdo con la ecuación (6.12). Asumiendo, por simplicidad, que la expansión es adiabática y que el plasma se comporta como un gas monoatómico ideal, su temperatura debe decrecer como

$$T = \frac{T_0L_0^2}{L^2}, \quad (6.15)$$

esto es, según la potencia $1-\gamma$ del volumen, con $\gamma = 5/3$. Introduciendo (6.15) en (6.14), se obtiene

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{b'}{L^6}, \quad (6.16)$$

con la constante b' dada por

$$b' = 4\pi^2\sigma^*T_0^4L_0^8. \quad (6.17)$$

Por otro lado, de (6.12), se tiene

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial L} \frac{dL}{dt} = -\frac{(n^2+1)b}{L^2} \frac{dL}{dt}. \quad (6.18)$$

Igualando (6.16) y (6.18), se llega a la ecuación diferencial que satisface $L(t)$, esto es,

$$\frac{dL}{dt} = \frac{b'}{b(n^2+1)L^4}, \quad (6.19)$$

cuya solución es

$$L(t) = L_0 \left(1 + \frac{t}{\tau_n}\right)^{1/5}, \quad (6.20)$$

donde el tiempo característico del sistema es

$$\tau_n = (n^2 + 1)\tau_0 = (n^2 + 1) \frac{bL_0^5}{5b'} . \quad (6.21)$$

Consecuentemente, el radio del rayo bola crece, el campo magnético va a cero, la temperatura decrece como, según (6.20) y (6.15),

$$T(t) = T_0 \left(1 + \frac{t}{\tau_n}\right)^{-2/5} , \quad (6.22)$$

el plasma se enfría y el brillo se reduce. La estabilidad de la estructura, medida por la lentitud de esta expansión, se debe a la ligadura impuesta por la conservación de la helicidad, o, equivalentemente, por el enlace de las líneas magnéticas. Intuitivamente, se puede pensar que, en la expansión, las líneas de velocidad del plasma se “estorban” unas a otras, ya que están forzadas a mantener el mismo enlace que las líneas magnéticas. Esto se confirma por el hecho de que el tiempo característico del sistema es proporcional a $n^2 + 1$. En otras palabras, a mayor número de enlace, más lenta es la expansión (ver la figura 6.1).

Se ha asumido que la temperatura inicial es suficientemente alta, del orden de 30.000 K, lo que implica conductividad infinita. Si σ se mantuviera infinita, la expansión continuaría por siempre, según las relaciones (6.20) y (6.22). Pero la conductividad decrece junto con la temperatura, dando paso así a dos nuevos efectos: (i) una pérdida de energía adicional por efecto Joule, que acelera el enfriamiento, y (ii) pérdida de la conservación de la helicidad. Estos efectos destruyen el rayo bola.

Por último, hay que hacer algún comentario sobre la posibilidad de diseñar un experimento para evaluar el modelo. En principio, esto no parece sencillo por razones obvias, pero existen dos situaciones experimentales que parecen relacionadas con este problema: plasmas con geometría toroidal, por un lado, y el dispositivo construido por Ohtsuki y Ofuruton para producir interferencia de microondas [231], por otro. En el primer caso, a veces se utiliza la idea de helicidad magnética. De hecho, se ha estudiado la inyección de helicidad como un medio de sostenimiento del plasma, introduciendo en el toro una bola de plasma que está en una configuración estable por tener una helicidad

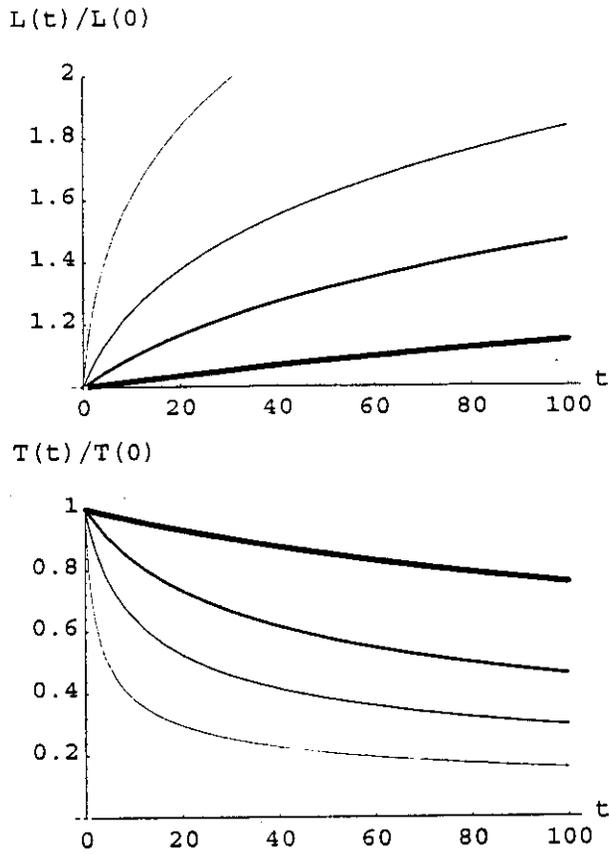


Figura 6.1: Radio $L(t)/L_0$ (a), y temperatura $T(t)/T_0$ (b), frente al tiempo (en unidades de τ_0), para conductividad infinita y para los números de enlace $n = 0, 2, 4, 10$, en orden creciente de grosor.

no nula [232, 233]. También ha sido posible estudiar las configuraciones de helicidad en un plasma toroidal usando sondas que miden el campo magnético y la densidad de corriente. Los diagramas así obtenidos [234] muestran los signos de los enlaces de las líneas magnéticas. Por otro lado, Ohtsuki y Ofuruton han producido bolas de fuego en aire, concentrando microondas en un volumen pequeño.

De esta manera, una sugerencia para probar este modelo de rayo bola es la siguiente. Con un dispositivo del tipo del de Ohtsuki y Ofuruton, se pueden crear bolas de fuego. Si esto está suplementado con la introducción de sondas, similares a las usadas por Stenzel, Urrutia y Rousculp [234] en un plasma toroidal, se podrían medir las líneas magnéticas, determinando la configuración de helicidad (los enlaces de las líneas de fuerza de la bola de fuego).

Capítulo 7

Conclusiones y vías de ampliación

7.1 Conclusiones

En esta sección se resumen las conclusiones obtenidas en las investigaciones realizadas, que han sido expuestas en los anteriores capítulos de esta memoria.

Capítulo 3. La helicidad de un campo vectorial solenoidal es una medida del enlace de las líneas de tal campo. Para la teoría de Maxwell en el vacío, debido a la dualidad entre los campos eléctrico y magnético, se pueden definir una helicidad magnética y una helicidad eléctrica. Estas cantidades son invariantes “gauge”, y también son invariantes temporales si el campo es de tipo singular, es decir, si cumple que el campo eléctrico y el campo magnético son ortogonales. La suma de las helicidad magnética y eléctrica de un campo de Maxwell en el vacío es siempre una constante del movimiento, a la que hemos llamado helicidad electromagnética. Se ha demostrado que esta cantidad es, excepto un factor 2, el límite clásico del operador cuántico de helicidad, es decir, el operador que resta el número de fotones con polarización levógira del número de fotones con polarización dextrógira, en una relación que une los aspectos topológico y corpuscular de la palabra helicidad. Por otro lado, se ha obtenido que las helicidad magnética y eléctrica de un campo de tipo singular son iguales.

Capítulo 4. Con base en la dinámica de las líneas de campo eléctricas y magnéticas, se ha construido un conjunto de soluciones de las ecuaciones de Maxwell en el vacío, los nudos electromagnéticos. Estos campos están caracterizados por el número de enlace de cada pareja de líneas magnéticas, que es igual al número de enlace de cada pareja de líneas eléctricas, y que tiene el significado de invariante de Hopf de los campos escalares complejos básicos, a partir de los cuales se construyen los campos magnético y eléctrico. Se ha demostrado que el conjunto de los nudos electromagnéticos genera localmente todas las soluciones de las ecuaciones de Maxwell en el vacío, esto es, el conjunto de los nudos electromagnéticos es localmente denso en el conjunto de las soluciones de las ecuaciones de Maxwell en el vacío, así que se puede introducir un modelo topológico basado en estos nudos. Este modelo presenta reglas de cuantización topológica, en el sentido que la helicidad electromagnética y el valor de las cargas puntuales que se pueden acoplar a los campos del modelo están topológicamente cuantizadas.

Capítulo 5. A través de un método basado en teoría de grupos de Lie, se ha encontrado una familia de aplicaciones entre la esfera tridimensional y la esfera bidimensional, sus respectivas fibraciones y la manera de establecer cuándo estas fibraciones son ortogonales. A partir de este estudio, se ha llegado a la obtención explícita de una familia de nudos electromagnéticos, representantes de las clases de homotopía $C_{\pm n^2}$, y se ha estudiado su evolución dinámica. También se han encontrado las expresiones de los campos escalares básicos, que generan tales nudos, para todo instante, comprobándose que el número de enlace de las curvas de nivel de cada uno de estos campos escalares se mantiene constante.

Capítulo 6. Se ha construido un modelo teórico para explicar el fenómeno de los rayos bola mediante la idea de nudo electromagnético. En este modelo, el rayo bola es un volumen de aire totalmente ionizado, es decir, un plasma, acoplado a un nudo magnético, de tal manera que las líneas de velocidad de las partículas del plasma están dadas por las líneas de campo del nudo magnético. La estabilidad de los enlaces de las líneas magnéticas funciona como una botella magnética que mantiene la estructura mientras la temperatura del plasma es muy alta, de tal manera que, cuanto mayor es el número de enlace de las líneas magnéticas, mayor es el tiempo en el cual el sistema se mantiene estable. Se ha

sugerido también un método experimental para comprobar la validez del modelo.

7.2 Vías de ampliación

En esta sección se hace una enumeración de algunos de los problemas en los que merece la pena profundizar, respecto a los contenidos de la presente memoria.

Capítulo 3. Sería muy interesante encontrar la relación entre la helicidad electromagnética y el espín del campo. Ya se ha comprobado que estas cantidades forman una cuatricorrente conservada, pero aún no se conoce el mecanismo de conservación del espín. Por otro lado, la forma de la cuatricorrente de helicidad sugiere una relación con la simetría de la dualidad electromagnética, quizá a través del teorema de Noether, que merece ser analizada.

Capítulo 4. Con respecto al modelo topológico de los nudos electromagnéticos, una primera ampliación sería la extensión a teorías de Yang-Mills. La forma de la carga topológica del modelo sugiere que la generalización de la helicidad magnética sería la integral de la forma de Chern-Simmons, cuestión que necesita ser investigada con profundidad. Esta generalización subrayaría la necesidad de estudiar la dinámica de las líneas de fuerza de los campos clásicos.

Por otro lado, otro camino de ampliación es la teoría cuántica del modelo de nudos. Se debe comprobar si esta teoría predice resultados iguales o diferentes que los que predice la electrodinámica cuántica estándar. Preguntas concretas son las referidas a la cuantización de las cargas topológicas, cuyas respuestas podrían ser útiles para comprender mejor algunos aspectos de la física cuántica. También sería interesante encontrar resultados nuevos en esta teoría cuántica de los nudos, fundamentalmente en el rango de altas energías.

Capítulo 5. La obtención de más soluciones explícitas del modelo de nudos, además de interesante por el aspecto de completitud, puede resultar una motivación para desarrollar nuevas técnicas de búsqueda de fibraciones ortogonales no triviales, quizá análogas a las que se han presentado en esta memoria. Seguramente, también clarificarán aspectos de los nudos y enlaces en el espacio real tridimensional.

Otra cuestión es la muy interesante aparición de la tercera fibración, en las soluciones que ya se han encontrado. El significado físico de este campo, y su generalización a tiempos finitos, podrían ser nuevos aspectos importantes del modelo.

Capítulo 6. Respecto a los rayos bola, es claro que el estudio presentado en esta memoria es casi introductorio. La dificultad de observación del fenómeno, junto con datos aparentemente contradictorios de los testigos, convierte el estudio de los rayos bola en una aventura científica "de las de otros tiempos". Ya se está trabajando en la profundización de algunos aspectos del modelo aquí presentado.

Bibliografía

- [1] M. Atiyah, *The Geometry and Physics of Knots* (Cambridge, Cambridge University Press, 1990).
- [2] A. F. Rañada, *J. Phys.* **25 A**, 1621 (1992).
- [3] R. L. Ricca y M. A. Berger, *Phys. Today*, **28** (Diciembre de 1996).
- [4] K. F. Gauss, *Werke*, vol. 5 (Leipzig-Berlin, Gottingen, 1877).
- [5] Lord Kelvin (entonces, W. Thomson), *Trans. R. Soc. Edinburgh* **25**, 217 (1868).
- [6] Lord Kelvin, *Mathematical and Physical Papers*, vol. 4 (Cambridge, Cambridge University Press, 1910).
- [7] T. Archibald, *Math. Magazine* **62**, 219 (1989).
- [8] P. G. Tait, *Scientific Papers*, vol.1 (Cambridge, Cambridge University Press, 1911).
- [9] A. S. Schwarz, *Lett. Math. Phys.* **2**, 247 (1978).
- [10] E. Witten, *J. Diff. Geom.* **17**, 661 (1982).
- [11] S. Donaldson, *J. Diff. Geom.* **30**, 207 (1983).
- [12] V. F. Jones, *Bull. Am. Math. Soc.* **12**, 103 (1985).
- [13] E. Witten, *Comm. Math. Phys.* **117**, 353 (1988).
- [14] E. Witten, *Comm. Math. Phys.* **121**, 351 (1989).

- [15] D. Birmingham, M. Blau, M. Rakowski y G. Thompson, *Phys. Rep.* **209**, 129 (1991).
- [16] J. J. Thomson, *A Treatise on the Motion of Vortex Rings* (London, MacMillan and Co., 1883).
- [17] H. K. Moffatt, *J. Fluid Mech.* **35**, 117 (1969).
- [18] E. Whittaker, *A History of the Theories of Aether and Electricity*, (New York, Humanities Press Inc., 1973).
- [19] J. C. Maxwell, *Trans. Cambridge Phys. Soc.* **10**, 27 (1864).
- [20] J. C. Maxwell, *Scientific Papers* (New York, Dover, 1973).
- [21] M. Goldman, *The Demon in the Aether. The Life of James Clerk Maxwell* (Edinburgh, Paul Harris, 1983).
- [22] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism* (London, MacMillan and Co., 1873).
- [23] Y. Aharonov y D. Bohm, *Phys. Rev.* **115**, 485 (1959).
- [24] A. Heil, A. Kersch, B. Reifenhauer y H. Vogel, *Eur. J. Phys.* **9**, 200 (1988).
- [25] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale y M. den Nijs, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 405 (1982).
- [26] G. Watson, *Cont. Phys.* **37**, 127 (1996).
- [27] T. H. R. Skyrme, *Proc. Roy. Soc. London* **247 A**, 260 (1958).
- [28] T. H. R. Skyrme, *Proc. Roy. Soc. London* **252 A**, 236 (1959).
- [29] T. H. R. Skyrme, *Proc. Roy. Soc. London* **260 A**, 127 (1961).
- [30] T. H. R. Skyrme, *J. Math. Phys.* **12**, 1735 (1971).
- [31] T. H. R. Skyrme, *Int. J. Mod. Phys.* **3 A**, 2745 (1988).
- [32] L. Woltjer, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **44**, 489 (1958).

- [33] J. J. Moreau, *C. R. Acad. Sci. Paris* **252**, 2810 (1961).
- [34] J. J. Moreau, *Seminaire d'Analyse Convexe* (Montpellier, 1977).
- [35] H. Flanders, *Differential Forms* (New York, Academic Press, 1963).
- [36] C. Nash y S. Sen, *Topology and Geometry for Physicists* (London, Academic Press, 1983).
- [37] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics* (Bristol, Adam Hilger, 1990).
- [38] A. F. Rañada, *Eur. J. Phys.* **13**, 70 (1992).
- [39] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics* (Cambridge, Cambridge University Press, 1967).
- [40] L. Meirovitch, *Methods of Analytical Dynamics* (New York, McGraw-Hill, 1970).
- [41] H. Goldstein, *Mecánica Clásica* (Barcelona, Ed. Reverté, 1988).
- [42] A. F. Rañada, *Dinámica Clásica* (Madrid, Alianza, 1990).
- [43] G. Sterman, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Cambridge, Cambridge University Press, 1993).
- [44] W. K. H. Panofsky y M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism* (Reading, Addison-Wesley, 1962).
- [45] K. Bajer y H. K. Moffatt, *J. Fluid Mech.* **212**, 337 (1990).
- [46] M. Arias, J. Estebaranz, D. García-Pablos, F. Rodriguez y A. F. Rañada, *Chaos, Solitons and Fractals* **4**, 1943 (1994).
- [47] F. G. Gascón, *Phys. Lett.* **225 A**, 269 (1996).
- [48] G. E. Marsh, *Phys. Rev.* **46 A**, 2117 (1992).
- [49] G. E. Marsh, *Phys. Rev.* **47 E**, 3607 (1993).

- [50] G. E. Marsh, *Force-Free Magnetic Fields* (Singapore, World Scientific, 1996).
- [51] G. E. Marsh, en correspondencia electrónica con J. L. Trueba (23 -1-1997 y 5-2-1997).
- [52] O. D. Kellogg, *Foundations of Potential Theory* (New York, Dover, 1953).
- [53] J. P. McKelvey, *Am. J. Phys.* **58**, 306 (1990).
- [54] B. Doubrovine, S. Novikov y A. Fomenko, *Géométrie Contemporaine*, vol. 2 (Moscou, Ed. Mir, 1982).
- [55] B. Doubrovine, S. Novikov y A. Fomenko, *Géométrie Contemporaine*, vol. 1 (Moscou, Ed. Mir, 1982).
- [56] L. H. Kauffman, *On Knots* (Princeton, Princeton University, 1987).
- [57] L. H. Kauffman, *Knots and Physics* (Singapore, World Scientific, 1991).
- [58] C. C. Adams, *The Knot Book* (New York, Freeman, 1994).
- [59] K. Reidemeister, *Knotentheorie*, (Berlin, Springer, 1932).
- [60] R. K. Wangsness, *Campos Electromagnéticos* (México D. F., Ed. Limusa, 1988).
- [61] H. K. Moffatt, *J. Fluid Mech.* **106**, 27 (1981).
- [62] H. K. Moffatt y R. L. Ricca, *Proc. R. Soc. London* **439 A**, 411 (1992).
- [63] R. L. Ricca y H. K. Moffatt, en *Topological Aspects of the Dynamics of Fluids and Plasmas*, editado por H. K. Moffatt y otros (Dordrecht, Kluwer, 1992).
- [64] R. L. Ricca, en *Poster Papers Presented at the VII European Meeting on Solar Physics*, editado por G. Belvedere y otros (Catania Astrophysical Obs., 1994).

- [65] M. A. Berger y G. B. Field, *J. Fluid Mech.* **147**, 133 (1984).
- [66] H. K. Moffatt, *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids* (Cambridge, Cambridge University Press, 1978).
- [67] G. Calugareanu, *Rev. Math. Pures Appl.* **4**, 5 (1959).
- [68] G. Calugareanu, *Czech. Math. J.* **11**, 588 (1961).
- [69] J. H. White, *Am. J. Math.* **91**, 693 (1969).
- [70] F. B. Fuller, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **68**, 815 (1971).
- [71] F. B. Fuller, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **75**, 3557 (1978).
- [72] T. H. Banchoff y J. H. White, *Math. Scand.* **36**, 254 (1975).
- [73] V. I. Arnold, *Sel. Math. Sov.* **5**, 327 (1986).
- [74] I. E. Farquhar, *Ergodic Theory in Statistical Mechanics* (London, Interscience, 1964).
- [75] H. K. Moffatt, *J. Fluid Mech.* **166**, 359 (1986).
- [76] H. K. Moffatt, *J. Fluid Mech.* **173**, 289 (1986).
- [77] H. K. Moffatt, *Phil. Trans. R. Soc.* **333 A**, 321 (1990).
- [78] H. K. Moffatt, *Nature* **347**, 367 (1990).
- [79] V. I. Arnold, *J. Mec.* **5**, 19 (1966).
- [80] D. Lynden-Bell and J. Katz, *Proc. R. Soc. London* **378 A**, 179 (1981).
- [81] F. P. Bretherton, *J. Fluid Mech.* **44**, 117 (1970).
- [82] A. Yahalom, *J. Math. Phys.* **36**, 1324 (1995).
- [83] H. K. Moffatt, en *Topological Fluid Mechanics*, editado por H. K. Moffatt y A. Tsinober (Cambridge, Cambridge University Press, 1990).

- [84] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Oxford, Pergamon Press, 1959).
- [85] P. J. Olver, *J. Math. Anal. Appl.* **89**, 233 (1982).
- [86] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (New York, Springer, 1978).
- [87] D. Serre, *C. R. Acad. Sci. Paris* **298 I**, 349 (1984).
- [88] B. Khesin y Y. V. Chekanov, *Physica* **40 D**, 119 (1989).
- [89] G. E. Backus, *Phil. Trans. R. Soc. London* **263 A**, 239 (1968).
- [90] G. E. Backus y J. L. LeMonel, *Geophys. J. R. Astr. Soc.* **85**, 617 (1986).
- [91] J. Bloxham y A. Jackson, *Rev. Geophys.* **29**, 97 (1991).
- [92] H. Ertel, *Meteorol. Z.* **59**, 271 (1942).
- [93] S. Ghosh, W. H. Matthaeus y D. Montgomery, *Phys. Fluids* **31**, 2171 (1988).
- [94] A. E. Gill, *Atmosphere-Ocean Dynamics* (New York, Academic Press, 1982).
- [95] R. Hide, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **7**, 157 (1976).
- [96] R. Hide, *Ann. Geophys.* **1**, 59 (1983).
- [97] R. Hide, *Q. J. R. Astr. Soc.* **27**, 14 (1986).
- [98] R. Hide, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **48**, 68 (1988).
- [99] R. Hide, *Geophys. J. Int.* **125**, F1 (1996).
- [100] B. J. Hoskins, M. E. McIntyre y A. W. Robertson, *Q. J. R. Met. Soc.* **111**, 877 (1985).
- [101] J. Pedlosky, *Geophysical Fluid Dynamics* (New York, Springer, 1987).

- [102] P. H. Roberts y S. Scott, *J. Geomag. Geoelectr.* **17**, 137 (1965).
- [103] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media* (Oxford, Pergamon Press, 1960).
- [104] L. Woltjer, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **44**, 833 (1958).
- [105] M. D. Kruskal y R. M. Kulsrud, *Phys. Fluids* **1**, 265 (1958).
- [106] K. Lust y A. Schluter, *Z. Astrophys.* **34**, 263 (1954).
- [107] S. Chandrasekhar, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **42**, 1 (1957).
- [108] S. Chandrasekhar y P. C. Kendall, *Astrophys. J.* **126**, 457 (1957).
- [109] T. Gold y F. Hoyle, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **120**, 89 (1960).
- [110] P. A. Sturrock, en *Plasma Astrophysics*, editado por P. A. Sturrock (New York, Academic Press, 1967).
- [111] A. D. Jette, *J. Math. Anal. Appl.* **29**, 109 (1970).
- [112] B. C. Low, *Astrophys. J.* **181**, 209 (1973).
- [113] E. R. Priest (editor), *Solar Flare Magnetohydrodynamics* (New York, Gordon and Breach, 1981).
- [114] N. A. Salingaros, *Phys. Essays* **1**, 92 (1988).
- [115] A. A. Van Ballegooijen y P. C. H. Martens, *Astrophys. J.* **343**, 971 (1989).
- [116] H. Zaghoul, *Phys. Lett.* **140 A**, 95 (1989).
- [117] P. P. Lepping, J. A. Jones y L. F. Burlaga, *J. Geophys. Res.* **95 A**, 11957 (1990).
- [118] H. Zaghoul y O. Barajas, *Am. J. Phys.* **58**, 783 (1990).
- [119] Y. Nakagawa, M. A. Raadu, D. E. Billings y D. McNamara, *Solar Phys.* **19**, 72 (1971).

- [120] C. W. Barnes y P. A. Sturrock, *Astrophys. J.* **174**, 659 (1972).
- [121] Y. Nakagawa y M. A. Raadu, *Solar Phys.* **25**, 127 (1972).
- [122] S. Chandrasekhar y L. Woltjer, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **44**, 285 (1958).
- [123] A. Konigl y A. R. Choudhuri, *Astrophys. J.* **289**, 173 (1985).
- [124] N. A. Salingaros, *Hadr. J.* **10**, 109 (1987).
- [125] P. Laurence y M. Avellaneda, *J. Math. Phys.* **32**, 1240 (1991).
- [126] M. H. Freedman, *J. Fluid Mech.* **194**, 549 (1988).
- [127] J. B. Taylor, *Phys. Rev. Lett.* **33**, 1139 (1974).
- [128] E. P. Butt, A. A. Newton y A. J. L. Verhage, en *Proceedings of the Third Topical Conference on Pulsed High-Beta Plasmas*, editado por D. E. Evans (New York, Pergamon Press, 1976).
- [129] J. B. Taylor, *Rev. Mod. Phys.* **58**, 741 (1986).
- [130] M. A. Berger, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **30**, 79 (1984).
- [131] M. V. Melander y F. Hussain, en *Topological Fluid Mechanics*, editado por H. K. Moffatt y A. Tsinober (Cambridge, Cambridge University Press, 1990).
- [132] R. M. Kerr, D. Virk y F. Hussain, en *Topological Fluid Mechanics*, editado por H. K. Moffatt y A. Tsinober (Cambridge, Cambridge University Press, 1990).
- [133] S. Kida, M. Takaoka y F. Hussain, en *Topological Fluid Mechanics*, editado por H. K. Moffatt y A. Tsinober (Cambridge, Cambridge University Press, 1990).
- [134] H. Pfister y W. Gekelman, *Am. J. Phys.* **59**, 497 (1991).
- [135] A. Janos, *Phys. Fluids* **29**, 3342 (1986).

- [136] B. B. Kadomtsev, *Com. Plasma Phys. Cont. Fus.* **11**, 153 (1987).
- [137] D. Montgomery, L. Turner y G. Vahala, *Phys. Fluids* **21**, 757 (1978).
- [138] L. Turner, *Ann. Phys.* **149**, 58 (1983).
- [139] H. K. Moffatt y A. Tsinober, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **24**, 281 (1992).
- [140] A. Bhattacharjee, R. L. Dewar y D. A. Monticello, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 347 (1980).
- [141] A. Bhattacharjee y R. L. Dewar, *Phys. Fluids* **25**, 887 (1982).
- [142] M. H. Freedman y M. A. Berger, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **73**, 91 (1993).
- [143] A. Kulakov y A. Rumiantsev, *Introducción a la Física de Procesos No Lineales* (Moscú, Ed. Mir, 1990).
- [144] E. N. Parker, *Astrophys. J.* **122**, 293 (1955).
- [145] S. I. Braginsky, *Sov. Phys. JETP* **20**, 726 (1964).
- [146] M. Steenbeck, F. Krause y K. H. Radler, *Z. Naturf.* **21 A**, 369 (1966).
- [147] J. L. Trueba y A. F. Rañada, *Eur. J. Phys.* **17**, 141 (1996).
- [148] T. Eguchi, P. B. Gilkey y A. J. Hanson, *Phys. Rep.* **66**, 213 (1980).
- [149] E. Amaldi y N. Cabibbo, en *Aspects of Quantum Theory* (Cambridge, Cambridge University Press, 1972).
- [150] N. Salingaros, *Am. J. Phys.* **55**, 352 (1987).
- [151] N. Anderson y A. M. Arthurs, *Int. J. Electr.* **69**, 575 (1990).
- [152] N. Anderson y A. M. Arthurs, *Int. J. Electr.* **73**, 805 (1992).

- [153] N. Anderson y A. M. Arthurs, *Int. J. Electr.* **74**, 635 (1993).
- [154] J. Polchinski, *Rev. Mod. Phys.* **68**, 1245 (1996).
- [155] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory* (New York, McGraw-Hill, 1941).
- [156] G. N. Afanasiev, *J. Phys.* **26 A**, 731 (1993).
- [157] G. N. Afanasiev y Y. P. Stepanovsky, *Nuovo Cim.* **109 A**, 271 (1996).
- [158] F. Rohrlich, *Classical Charged Particles* (Reading, Addison-Wesley, 1965).
- [159] A. F. Rañada, no publicado (1995).
- [160] A. F. Rañada y J. L. Trueba, *Phys. Lett.* **202 A**, 337 (1995).
- [161] A. F. Rañada, en *Fundamental Problems in Quantum Physics*, editado por M. Ferrero y A. van der Merwe (Dordrecht, Kluwer, 1995).
- [162] A. F. Rañada y J. L. Trueba, aceptado para su publicación en *Phys. Lett. A* (1997).
- [163] N. Anderson y A. M. Arthurs, *Int. J. Electr.* **56**, 571 (1984).
- [164] N. Anderson y A. M. Arthurs, *Int. J. Electr.* **60**, 527 (1986).
- [165] N. Anderson y A. M. Arthurs, *Int. J. Electr.* **64**, 679 (1988).
- [166] M. W. Evans, *Physica* **214 A**, 605 (1995).
- [167] D. M. Lipkin, *J. Math. Phys.* **5**, 696 (1964).
- [168] M. G. Calkin, *Am. J. Phys.* **33**, 958 (1965).
- [169] S. Ragusa, *Nuovo Cim.* **101**, 121 (1988).
- [170] S. Ragusa, *Nuovo Cim.* **104**, 117 (1989).
- [171] M. W. Evans, *Physica* **182 B**, 227 (1992).

- [172] M. W. Evans, *Found. Phys.* **24**, 1671 (1994).
- [173] M. W. Evans y J. P. Vigiier, *The Enigmatic Photon*, vol.1 (Dordrecht, Kluwer, 1994).
- [174] M. W. Evans, J. P. Vigiier, S. Roy y S. Jeffers, *The Enigmatic Photon*, vol. 3 (Dordrecht, Kluwer, 1996).
- [175] L. D. Landau y E. M. Lifshitz *Teoría Clásica de Campos* (Barcelona, Ed. Reverté, 1987).
- [176] A. A. Sokolov, I. M. Ternov, V. C. Zhukovski y A. V. Borisov, *Electrodinámica Cuántica* (Madrid, Ed. Mir, 1991).
- [177] B. Hatfield, *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings* (Redwood, Addison-Wesley, 1992).
- [178] A. F. Rañada, *Lett. Math. Phys.* **18**, 97 (1989).
- [179] A. F. Rañada, en *Solitons and Applications*, editado por V. G. Makhankov y otros (Singapore, World Scientific, 1990).
- [180] A. F. Rañada, en *Fundamental Problems in Classical and Quantum Dynamics*, editado por J. A. Ellison y H. Uberall (London, Gordon and Breach, 1991).
- [181] A. F. Rañada, *An. Phys. (Madrid)* **87 A**, 55 (1991).
- [182] H. Hopf, *Math. Ann.* **104**, 637 (1931).
- [183] S. T. Hu, *Homotopy Theory* (New York, Academic Press, 1959).
- [184] R. Bott y L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology* (New York, Springer, 1982).
- [185] L. D. Fadeev, *Lett. Math. Phys.* **1**, 289 (1976).
- [186] D. A. Nicole, *J. Phys.* **4 G**, 1363 (1978).
- [187] E. A. Kuznetsov y A. V. Mikhailov, *Phys. Lett.* **77 A**, 37 (1980).

- [188] A. Kundu, *Ann. Phys.* **139**, 36 (1982).
- [189] A. Kundu y Y. P. Rybakov, *J. Phys.* **15 A**, 269 (1982).
- [190] A. Kundu, *Phys. Lett.* **171 B**, 67 (1986).
- [191] G. Morandi, *The Role of Topology in Classical and Quantum Physics* (Berlin, Springer, 1992).
- [192] J. R. Munkres, *Elements of Algebraic Topology* (New York, Addison-Wesley, 1984).
- [193] J. H. C. Whitehead, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **33**, 117 (1947).
- [194] M. Kervaire, *C. R. Acad. Sci. Paris* **237**, 1486 (1953).
- [195] C. Godbillon, *Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique*, (Paris, Hermann, 1969).
- [196] G. Darboux, *Bull. Sci. Math. (2)* **6**, 14 (1982).
- [197] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette y M. Dillard-Bleick, *Analysis, Manifolds and Physics* (Amsterdam, North-Holland, 1982).
- [198] V. Guillemin y S. Sternberg, *Symplectic Techniques in Physics* (Cambridge, Cambridge University Press, 1984).
- [199] C. W. Misner, K. S. Thorne y J. A. Wheeler, *Gravitation* (San Francisco, Freeman, 1973).
- [200] H. Lamb, *Hydrodynamics* (New York, Dover, 1932).
- [201] S. Frittelli, S. Koshti, E. Newman y C. Rovelli, *Phys. Rev.* **49 D**, 6883 (1994).
- [202] E. Newman y C. Rovelli, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1300 (1992).
- [203] F. Halzen y A. D. Martin, *Quarks and Leptons* (New York, Wiley and Sons, 1984).

- [204] B. Schutz, *Geometrical Methods of Physics* (Cambridge, Cambridge University Press, 1980).
- [205] J. A. Wheeler, *Geometrodynamics* (New York, Academic Press, 1962).
- [206] R. Sorkin, *J. Phys.* **10 A**, 717 (1977).
- [207] P. A. M. Dirac, *Proc. R. Soc. London* **133 A**, 60 (1931).
- [208] P. A. M. Dirac, *Phys. Rev.* **74**, 817 (1948).
- [209] E. Lubkin, *Ann. Phys.* **23**, 233 (1963).
- [210] T. T. Wu y C. N. Yang, *Nucl. Phys.* **107 B**, 365 (1976).
- [211] C. N. Yang, *Ann. Acad. Sci. New York* **294**, 86 (1977).
- [212] P. Goddard y D. I. Olive, *Rev. Prog. Phys.* **41**, 1357 (1978).
- [213] T. P. Cheng y L. F. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics* (Oxford, Clarendon Press, 1984).
- [214] P. D. B. Collins, A. D. Martin y E. J. Squires, *Particle Physics and Cosmology* (New York, Wiley and Sons, 1989).
- [215] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **79 B**, 276 (1974).
- [216] A. M. Polyakov, *JETP Lett.* **20**, 194 (1974).
- [217] B. Cabrera, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1378 (1982).
- [218] A. F. Rañada, *J. Phys.* **23 A**, L815 (1990).
- [219] M. F. Atiyah, *The Geometry of Yang-Mills Fields* (Pisa, Lezione Fermiane, 1979).
- [220] A. Ibort, en varias conversaciones con A. F. Rañada y J. L. Trueba (1996-1997).
- [221] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. 1 (Houston, Publish or Perish, 1979).

- [222] F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups* (Dallas, Scott-Foresman, 1971).
- [223] A. F. Rañada y J. L. Trueba, *Nature* **383**, 32 (1996).
- [224] B. Pippard, *Nature* **298**, 702 (1982).
- [225] S. Singer, *The Nature of Ball Lightning* (New York, Plenum Press, 1971).
- [226] Y. H. Ohtsuki (editor), *Science of Ball Lightning* (Singapore, World Scientific, 1989).
- [227] P. Hubert, *La Recherche* **211**, 722 (1989).
- [228] S. Singer, *Nature* **350**, 108 (1991).
- [229] M. V. Berry, en conversación con A. F. Rañada (17-7-1995).
- [230] A. M. Kamchatnov, *Sov. Phys. JETP* **55**, 69 (1982).
- [231] Y. H. Ohtsuki y H. Ofuruton, *Nature* **350**, 139 (1991).
- [232] C. W. Barnes et al, *Phys. Fluids* **29**, 3415 (1986).
- [233] P. K. Browning et al, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1718 (1992).
- [234] R. L. Stenzel, J. M. Urrutia y C. L. Rousculp, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 702 (1995).