VARIEDADES DE DEFECTO POSITIVO

ROBERTO MUÑOZ IZQUIERDO
Universidad Complutense de Madrid
Madrid, enero de 1999

Universidad Complutense de Madrid

Facultad de Matemáticas

Departamento de Álgebra

VARIEDADES DE DEFECTO POSITIVO

Resultados de clasificación de variedades con dual degenerada

Memoria presentada por

ROBERTO MUÑOZ IZQUIERDO

para optar al grado de

Doctor en Matemáticas

por la Universidad Complutense de Madrid

Madrid, enero de 1999

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a mi directora de tesis Raquel Mallavibarrena el tiempo y dedicación empleados para la consecución final de este trabajo.

Quiero también agradecer a otros matemáticos como los profesores F.L. Zak, E. Arrondo, L. Giraldo, J. Gallego, A. Lanteri, R. M. Miró la atención prestada y los comentarios e interesantes respuestas a mis cuestiones y dudas. Así como al Departamento de Álgebra de la Universidad Complutense de Madrid, y a los diferentes proyectos de la CICYT dirigidos por I. Sols por proporcionarme los medios materiales y humanos para desarrollar esta investigación.

Dar las gracias a A. Lopez y C. Ciliberto por su hospitalidad durante mi estancia en Roma y al primero por introducirme en problemas diferentes de geometría proyectiva.

A mis compañeros de *la tertulia* J. Escribano, L. Pozo, J. I. Cogolludo, V. Muñoz, V. M. Sánchez de los Reyes, M.A. Abánades y N. Joglar por compartir el día a día de trabajo, ánimo y frustración. Y a todos los que, de uno u otro modo, han convivido conmigo en estos años de estudio.

A la Universidad Antonio de Nebrija por darme la oportunidad de colaborar con ellos en este último curso y a mis compañeros y alumnos allí.

A mis amigos y a mi familia: mis padres, mis hermanos y mi mujer, Amparo, que han estado apoyándome siempre.

Y a Dios, de quien, en definitiva, todo viene y al que todo debemos.

La verdad científica se caracteriza por la exactitud y el rigor de sus previsiones. Pero estas admirables cualidades son conquistadas por la ciencia experimental a cambio de mantenerse en el plano de problemas secundarios, dejando intactas las últimas, las decisivas cuestiones. De esta renuncia hace su virtud esencial, y no sería necesario recalcar que por eso sólo merece aplausos. Pero la ciencia experimental es sólo una exigua porción de la mente y el organismo humanos. Donde ella se para, no se para el hombre.

(J. Ortega y Gasset. *Qué es filosofía.* Obras, VII. Alianza Ed. Madrid, 1983, pág. 310)

Sé lo que debo hacer. Si hay algo que ver, tengo necesidad de verlo. Así sabré, quizás, si este fantasma que soy para mí mismo, con este mundo que llevo en mi mirada, con la ciencia y su magia, con el extraño sueño de la conciencia tiene verdaderamente alguna solidez o no. Descubriré sin duda lo que se oculta en mis actos, en ese fondo último en que, sin mí, a mi pesar, sufro el ser y al mismo tiempo me adhiero a él. Sabré si tengo un conocimiento y una voluntad suficientes sobre el presente y el futuro, de modo que, sean ellos como fueren, nunca experimente su tiranía.

(M. Blondel. *La Acción. Ensayo de una crítica de la vida y de una ciencia de la práctica* B.A.C. Madrid 1996, pág 3.)

Índice

Convenios y notaciones

En todo este trabajo con el término *variedad proyectiva* X indicaremos un subesquema reducido e irreducible de un espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}^N$.

Supondremos siempre que la inmersión de la variedad proyectiva X en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^N$ es no degenerada, es decir, no existe ningún hiperplano $H = \mathbb{P}^{N-1}$ del espacio proyectivo ambiente $H \subset \mathbb{P}^N$, de modo que se tenga la inclusión $X \subset H \subset \mathbb{P}^N$.

Adoptaremos el convenio por el que el espacio proyectivo $\mathbb{P}^N$ es el esquema asociado al espacio de direcciones de un $\mathbb{C}$-espacio vectorial V de dimensión $N+1$ y lo denotaremos $\mathbb{P}^N = P(V)$.

Coherentemente con la elección anterior, $G(n, N)$ denotará la grassmanniana de espacios proyectivos de dimensión n en $\mathbb{P}^N = P(V)$ que es el esquema asociado al conjunto de clases de equivalencia de vectores descomponibles del producto exterior $\wedge^{n+1}(V)$. Los puntos de una grassmaniana serán denotados con letras minúsculas, $l \in G(n, N)$, mientras que los espacios lineales asociados se denotarán con mayúsculas, $L = \mathbb{P}^n$.

El espacio tangente de Zariski a X en x se representará por TX_x.

Escribiremos $Sing(X)$ para denotar el subconjunto de puntos singulares de la variedad X.

El haz invertible sobre X que produce la inmersión de X en $\mathbb{P}^N$ será $\mathcal{O}_X(1)$; $\mathcal{O}_X(m)$ el producto tensorial $\mathcal{O}_X(1)^{\otimes m}$ y $\mathcal{O}_X(-m)$ el haz dual de $\mathcal{O}_X(m)$, es decir, $\mathcal{O}_X(-m) := \mathcal{O}_X(m)^*$.

Representaremos por U el fibrado universal sobre la grassmanniana $G(n, N)$, es decir, el fibrado vectorial sobre $G(n, N)$ cuya fibra en cada punto $l \in G(n, N)$, U_l, es el espacio vectorial que al tomar el espacio proyectivo de direcciones produce el espacio proyectivo $L = \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^N$.

Sea F un haz sobre X, denotaremos por $H^i(F)$ el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de cohomología i-ésima $H^i(X, F)$, prescindiendo de escribir la variedad X. Denotaremos por $h^i(F)$ la dimensión de $H^i(F)$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

Adoptaremos habitualmente un punto de vista clásico, en el que las variedades serán los puntos donde se anula un conjunto de polinomios homogéneos en $N+1$ variables. El functor t definido en [19, II.2.6.] permitirá pasar de este lenguaje clásico al lenguaje de esquemas.

Por otro lado también adoptaremos en algunas ocasiones un punto de vista analítico en el estudio de cuestiones relativas a variedades lisas. Las habituales transformaciones tipo

GAGA de una categoría en otra permiten efectuar estos cambios de punto de vista [19, Append. B].

Capítulo 0

Introducción

0.1 Enunciado del problema

Podemos empezar la introducción de esta memoria con las siguientes palabras de Zak extraídas de la introducción a su libro *Tangents and secants of algebraic varieties* [52], en las que se señala la recuperación del interés por los temas de la geometría algebraica inmersa:

> During the last twenty years algebraic geometry has been experiencing a remarkable shift of interest from development of abstract theories to investigation of concrete properties of projective varieties. Many problems of classical algebraic geometry concentrated around the notions of linear systems, projections, (embedded) tangent spaces, etc. By using modern techniques it has lately become possible to make considerable progress towards the solution of some of these problems.

En particular, en esta vuelta al estudio de los temas clásicos de la Geometría Algebraica Proyectiva se enmarca el problema que abordamos en este trabajo, que es el de establecer resultados de clasificación para variedades proyectivas lisas inmersas en un espacio proyectivo de forma no degenerada, cuya variedad dual, subvariedad del espacio proyectivo dual, tiene dimensión menor que la esperada.

Problema: Clasificar las variedades proyectivas lisas $X \subset \mathbb{P}^N$ no degeneradas cuya variedad dual $X^* \subset \mathbb{P}^{N*}$ no es una hipersuperficie, es decir, $dim(X^*) < N - 1$.

La variedad dual $X^* \subset \mathbb{P}^{N*}$ de una variedad $X \subset \mathbb{P}^N$ se define como el conjunto de hiperplanos tangentes (en el sentido de que contienen el espacio tangente proyectivo en algún punto de X) a la variedad X. Esta variedad es una hipersuperficie del espacio proyectivo dual para la mayoría de las variedades, y se trata de clasificar aquellos ejemplos de variedades lisas en que la dimensión de la variedad dual es estrictamente menor que $N-1$. A estas variedades las llamaremos *variedades con dual degenerada* o, si denominamos *defecto de* X a la diferencia $N-1-dim(X^*)$, *variedades de defecto positivo*. Observamos que con el término variedad dual degenerada no nos referimos a que la variedad dual esté contenida en un hiperplano del espacio proyectivo dual sino a que la dimensión es menor que la esperada.

0.2 Antecedentes históricos

Podemos empezar por los trabajos de Bertini y B. Segre [48] como una primera referencia donde la variedad dual se demuestra como un objeto interesante. La preocupación fundamental en ese momento era encontrar una variedad que parametrizara el conjunto de variedades de una cierta dimensión y grado fijados en un espacio proyectivo también predeterminado. La idea de Bertini, que recupera B. Segre, es asociar a cada variedad $X \subset \mathbb{P}^N$ su variedad dual $X^* \subset \mathbb{P}^{N*}$ que es, en general, una hipersuperficie del espacio proyectivo dual. Si fijamos la clase (el grado de la variedad dual) de X en lugar del grado, la mayoría de las variedades de clase s y dimensión n en $\mathbb{P}^N$ quedarían parametrizadas por un subconjunto de los polinomios homogéneos de grado s en $N+1$ variables.
El problema es entonces estudiar aquellas variedades cuya dual no es una hipersuperficie. Bertini propone en tal caso hacer la siguiente construcción. Observa primero que el lugar en que un hiperplano general $h \in X^*$ es tangente a X es un espacio lineal de una cierta dimensión k (de modo que $dim(X^*) = N - 1 - k$) que denominamos *lugar de contacto de X y el hiperplano H*. Por tanto se puede construir una aplicación a la correspondiente grassmanniana:

$$G : U \subset X^* \to G(k, N)$$

que asigna a cada hiperplano tangente general (en el abierto U de X^*) una subvariedad lineal de dimensión k de $\mathbb{P}^N$ y de este modo un punto en la grassmanniana $G(k, N)$.
Podemos entonces construir la variedad dual de la inmersión de Plücker de $\overline{G(U)}$ en su correspondiente espacio proyectivo $\overline{G(U)} \hookrightarrow \mathbb{P}^M$ donde $M = \binom{N+1}{k+1} - 1$.
Si esta variedad dual es una hipersuperficie el proceso concluye; si no, su propuesta es repetir este proceso iterativamente hasta obtener una hipersuperficie.
Estos primeros artículos dan lugar a una línea de trabajo en la que se estudia este proceso iterativo, conocido como *serie de Bertini* y se estudia cuándo es un proceso finito, cuándo no lo es (precisión que parece que se escapó a los autores Bertini y B. Segre)... En este círculo de ideas ha trabajado Rogora y se pueden consultar sus trabajos [43], [44], [45] para más información acerca de estos temas.

Un segundo contexto en el que cobra interés el estudio de las variedades proyectivas con dual degenerada es el que se dio en llamar *conjetura generalizada de la pureza del lugar de ramificación*. Esta conjetura establece lo siguiente [42]:

Sea $f : X \to Y$ una aplicación propia entre X, variedad lisa de dimensión n, e Y variedad lisa de dimensión m, de modo que todas las fibras tengan dimensión $n - m$. Entonces:

$$dim(Y) - dim(\{y \in Y : \ f^{-1}(y) \ singular\}) = 1.$$

El resultado es cierto para $n = m$ (conjetura de la pureza del lugar de ramificación) y para $n = m + 1$ [42], [4], [50]. En el caso siguiente, $n = m + 2$, Ramanujam y Mumford establecen en [42] un contraejemplo. Posteriormente, en el libro homenaje a

Ramanujam, [37], Mumford señala cómo las variedades con dual degenerada son también un contraejemplo a esta conjetura.
En efecto, tomando la variedad de incidencia siguiente:

$$I := \{(x, H) : x \in H\} \subset X \times \mathbb{P}^{N*}$$

y la proyección

$$p : I \to \mathbb{P}^{N*},$$

tenemos una aplicación en las hipótesis de la conjetura. El conjunto de puntos de $\mathbb{P}^{N*}$ en los que la fibra de p es singular es justamente la variedad dual X^*, lo que muestra que las variedades con dual degenerada, en las que la dimensión cae más de lo esperado, son un contraejemplo a dicha conjetura.

En este mismo trabajo Mumford, tras presentar las variedades con dual degenerada como contraejemplos a la *conjetura generalizada de la pureza*, aporta el único ejemplo de una variedad con dual degenerada que conocía en aquel momento, las **grassmannianas de rectas en un espacio proyectivo de dimensión par**, con una aproximación algebraica a tal hecho que reproduciremos en el capítulo 1. Pero en una nota a pie de página comenta que Reid le ha sugerido algunos otros ejemplos, en concreto ciertas **variedades regladas** (con algunas condiciones sobre la comparación entre la dimensión de la fibra y la base) como otras variedades con dual degenerada.

Estos han sido los primeros pasos de este problema de clasificación. De ahora en adelante nos centraremos en el estudio de las distintas maneras de afrontar esta cuestión. Pero entendemos conveniente terminar esta sección de antecedentes históricos citando otros autores que han trabajado sobre variedades duales, abordando distintos problemas relacionados con este objeto. Kleiman, Hefez, Turrini, Piene, Weyman y Zelevinsky, Ballico, Holme, Zak...

0.3 Aproximaciones al problema de clasificación

La **geometría diferencial proyectiva** es un primer punto de vista que se puede adoptar para abordar este problema. En su renombrado artículo [16] Griffiths y Harris dan resultados de caracterización de estas variedades, presentándolas como aquellas variedades para las que, en el punto general, cada cuádrica de la segunda forma fundamental es singular. Aparecen las grassmannianas de rectas en un espacio de dimensión par como ejemplos y se comprueba que la variedad dual del resto de grassmanianas es siempre una hipersuperficie. Y además se exponen ciertas caracterizaciones de las variedades regladas. Esta línea argumental ha sido seguida por Landsberg [27], [28], que en sus últimos trabajos caracteriza algunas variedades (muchos de los ejemplos de variedades con dual degenerada) por su segunda forma fundamental en un punto general, i.e., demuestra resultados del tipo: "si X es una variedad de modo que en el punto general el sistema lineal de cuádricas que determina la segunda forma fundamental es el mismo que el de ciertas variedades Y

(algunas grassmannianas, algunas inmersiones de Segre de ciertos productos...), entonces X es isomorfa a Y".

Otros autores han dado resultados de clasificación desde el estudio de la **topología** y de la **teoría de adjunción**. Así podemos citar la clasificación de Lanteri y Struppa de variedades con dual degenerada y dimensión menor o igual que 7 [32]. La idea clave desde el punto de vista topológico es que la topología de una variedad con dual degenerada está fuertemente reflejada en la de una sección hiperplana general, los teoremas tipo Lefschetz van más allá de lo esperado [30], [31]. Esto hace que de la *fórmula de la clase* de Landman [32] se puedan extraer restrictivas condiciones.
La teoría de adjunción aporta el crucial trabajo conjunto de los autores Beltrametti, Fania y Sommese [3] en el que se presentan resultados de clasificación de variedades de defecto positivo para dimensión menor o igual que 10 y un teorema de estructura de dichas variedades, consecuencia del estudio de su morfismo *nef*, por el que las variedades con dual degenerada son variedades de Fano o fibraciones sobre variedades de Fano. Esto muestra que la clasificación que buscamos debe centrarse sobre todo en las variedades de Fano con dual degenerada.

Finalmente, no en sentido cronológico, en dos artículos sobre este tema [7], [8], Ein propone otro tipo de técnicas para aproximarse a este problema de clasificación. Los argumentos centrales de estos trabajos de Ein se refieren al estudio de las variedades lineales de dimensión k (los lugares de contacto) en los que el hiperplano general de X^* es tangente a la variedad X. Para el estudio de la disposición de estos espacios lineales en la variedad X resulta un instrumento adecuado el fibrado normal al lugar de contacto general L en la variedad X denotado $\mathcal{N}_{L/X}$. Hay varios hechos básicos que van imponiendo fuertes condiciones sobre dicho fibrado:

i) el lugar de contacto es un espacio lineal,
ii) hay un hiperplano tangente que es tangente a lo largo del lugar de contacto,
iii) se pueden estudiar las familias de espacios lineales de dimensión k en X, es decir, el esquema de Hilbert de $\mathbb{P}^k$'s en X.

Estas ideas geométricas se pueden ir traduciendo en informaciones sobre dicho fibrado. Ein ha estudiado algunas de estas traducciones y ha podido dar teoremas de anulación de cohomología de los *twists* del fibrado, así como un resultado fundamental sobre la estructura de la restricción de este fibrado a una recta cualquiera en L:

el fibrado $\mathcal{N}^*_{L/X}$ es un fibrado uniforme de tipo de escisión $(0, 0, 0, ..., -1, -1, -1)$ *donde el número de ceros es igual al número de valores -1.*

Con estas propiedades del fibrado, Ein establece en [8] la clasificación de variedades en que se tiene la igualdad $dim(X) = dim(X^*)$ con la condición adicional $n \leq 2N/3$. Estas variedades son o bien inmersiones de Segre de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{P}^{2n-1}$, o la inmersión de Plücker de la grassmanniana $G(1,4) \subset \mathbb{P}^9$, o la **variedad espinorial** $S_4 \subset \mathbb{P}^{15}$ de dimensión 10 que parametriza los espacios lineales de dimensión 4 en una cuádrica lisa de $\mathbb{P}^9$.

La condición $n \leq 2N/3$ no es, en principio, una condición demasiado restrictiva porque la plausibilidad de la conjetura de Hartshorne de intersecciones completas [18] (si $n > 2N/3$

entonces X es una intersección completa) aconseja esta región como adecuada para establecer resultados de clasificación de variedades con dual degenerada ya que las intersecciones completas tienen defecto cero.

Estos trabajos de Ein y los estudios del fibrado $\mathcal{N}_{L/X}$ son el punto de partida de nuestra investigación.

El teorema de las tangencias de Zak [52] se puede aplicar para determinar la desigualdad

$$dim(X^*) \geq dim(X)$$

lo que sugiere agrupar las variedades con dual degenerada en conjuntos $\mathcal{S}_p$ en los que $dim(X^*) - dim(X) = p$ donde p toma valores en los números naturales. Ein ha clasificado el caso $p = 0$.

En una conversación con el profesor Zak durante una estancia suya en Madrid, sugirió la posibilidad de demostrar que en el conjunto $\mathcal{S}_1$ sólo hay variedades regladas o secciones hiperplanas de las variedades clasificadas por Ein. Abordamos este problema con éxito extendiendo el estudio del fibrado $\mathcal{N}_{L/X}$ y además obtenemos otros resultados muy interesantes de clasificación de variedades con dual degenerada.

Esto determina la estructura de la memoria.

0.4 Estructura de la memoria

Comenzamos en el **capítulo primero** definiendo con precisión todos los conceptos que van a ser necesarios: *variedad conormal, variedad dual, aplicaciones de Gauss, variedad con dual degenerada, defecto, lugar de contacto...* y presentando una colección de ejemplos (a la postre todos los conocidos) de variedades con dual degenerada. En este capítulo todos los resultados habían sido establecidos anteriormente, salvo la presentación geométrica que se hace en los ejemplos (1.23) y (1.26).

El **segundo capítulo** está dedicado íntegramente al estudio del objeto central de toda esta teoría, el fibrado normal al lugar de contacto general. Ein ha construido, por medio de una sección global del fibrado $S^2(\mathcal{N}^*_{L/X})(1)$, un isomorfismo entre dicho fibrado normal, $\mathcal{N}_{L/X}$, y el fibrado $\mathcal{N}^*_{L/X}(-1)$. Esto permite conocer la restricción de $\mathcal{N}_{L/X}$ a una recta general de L. Observaremos qué condiciones impone este isomorfismo, lo que nos permitirá excluir ciertos fibrados sobre el espacio proyectivo como candidatos a $\mathcal{N}_{L/X}$.
En el final de este capítulo, sección (2.5), y gracias a una traducción sobre el fibrado de ciertas condiciones geométricas sobre el lugar de contacto, sección (2.4), nosotros somos capaces de establecer un teorema de estructura de la restricción de $\mathcal{N}_{L/X}$ a un plano general de L. Además presentamos en el lema (2.20) una manera muy productiva de extraer toda la información de los resultados de anulación de la cohomología del fibrado $\mathcal{N}_{L/X}$ y sus diferentes *twists* $\mathcal{N}_{L/X}(a)$.
El capítulo termina con una clasificación de los fibrados de rango menor o igual que 10 sobre un plano que pueden ser la restricción a un plano general de un fibrado $\mathcal{N}_{L/X}$.

Todo este estudio del fibrado normal conduce a resultados de clasificación nuevos, demostrados en los tres últimos capítulos.

En los capítulos anteriores se comenta cómo se pueden construir variedades de defecto positivo a través de otros ejemplos conocidos: tomando secciones hiperplanas o haciendo el producto de una variedad con defecto positivo y otra variedad, donde el defecto de la primera es mayor que la dimensión de la segunda. En el **capítulo tercero** estudiamos cómo el fibrado $\mathcal{N}_{L/X}$ refleja en su estructura el hecho de que la variedad X sea el resultado de efectuar uno de estos procesos.
En particular se caracterizan las variedades regladas como aquéllas en las que el fibrado $\mathcal{N}_{L/X}$ escinde como suma de fibrados de línea. Este resultado es esencialmente el probado por Ein en [7, thm. 4.1]. Simplificamos su demostración por la inclusión de ciertas caracterizaciones de los espacios lineales [43]. Remarcamos sobre todo la estructura de $\mathcal{N}_{L/X}$ a diferencia del trabajo de Ein donde lo importante es que el defecto es grande en comparación con la dimensión de la variedad.
Quedan también caracterizados los fibrados normales de secciones hiperplanas o productos, y demostramos algunos interesantes resultados de no extendibilidad. Es, desde nuestro punto de vista, particularmente sugerente (por la utilización que hace de muchos de los resultados que probamos previamente) el resultado en el que demostramos que una extensión de una variedad con dual degenerada es necesariamente una variedad con dual degenerada y los lugares de contacto respectivos se relacionan porque el lugar de contacto de la variedad de partida es la sección hiperplana correspondiente del lugar de contacto de la extensión. Notamos que el recíproco era bien conocido.

El **capítulo cuarto** es, a nuestro entender, el que contiene los resultados más interesantes de la memoria. En él extendemos los resultados de clasificación de variedades con dual degenerada al caso en que $dim(X^*) = dim(X) + 1$. En concreto demostramos que las únicas variedades con esa igualdad de dimensiones, $n \leq 2N/3$ y defecto positivo son ciertas variedades regladas y secciones hiperplanas de las variedades clasificadas por Ein. Esta clasificación ha aparecido publicada en nuestro trabajo [38].

En la demostración resulta fundamental el lema (2.20) que permite plantear, gracias a los teoremas de anulación y a la forma del término primero de la sucesión espectral de Beilinson del fibrado $\mathcal{N}^*_{L/X}$, una ecuación diofántica que involucra al rango del fibrado normal y cuyos coeficientes son ciertos números combinatorios. Un poco de teoría básica de distribución de números primos permitirá concluir la no existencia de soluciones de esta ecuación. La idea central de la demostración es entonces observar que las condiciones sobre el fibrado $\mathcal{N}_{L/X}$ señaladas en los capítulos anteriores lo determinan completamente, no existiendo en la mayoría de las ocasiones. Si el fibrado no puede existir tampoco lo puede hacer la variedad. En otros casos donde la técnica no es tan potente, los candidatos a fibrado normal son una cantidad pequeña (lista del capítulo 2) y se pueden desarrollar razonamientos ad hoc para clasificar la posible variedad. Son fundamentales las clasificaciones de las variedades de Del Pezzo [14], [15] y Mukai [35], [36] para determinar la lista de variedades de defecto positivo y $dim(X) = dim(X^*) + 1$.
También se prueba en este capítulo un resultado de finitud para las ternas (N, n, k), donde N es la dimensión del espacio proyectivo ambiente, n es la dimensión de la variedad y k

el defecto, de variedades para las que se tiene la igualdad de dimensiones

$$dim(X^*) = dim(X) + p$$

que no sean regladas, siempre con la hipótesis adicional $n \leq 2N/3$. Llamamos S_p al conjunto de dichas variedades. Este resultado se demuestra de forma natural aplicando el mismo círculo de argumentos que en el caso $dim(X^*) = dim(X) + 1$.

Como aplicación de estos resultados de finitud presentamos el caso $p = 2$, es decir donde $dim(X^*) = dim(X) + 2$. En este grupo la clasificación no será completa pero ilustrará el funcionamiento de nuestras técnicas, que producen:

i) un teorema de finitud obtenido de una familia de ecuaciones diofánticas que elimina casi todas las posibilidades de las ternas (N, n, k) en S_2;

ii) unos casos restantes en los que las clasificaciones de los fibrados del capítulo 2 servirán para eliminar algunos de ellos.

En este grupo S_2 permanecen algunas variedades sobre las que nuestras técnicas no aportan resultados clasificatorios. En el final del capítulo en cuestión señalaremos las razones que impiden en estas variedades concluir con nuestros argumentos.

En el **capítulo quinto** vamos a responder a algunas cuestiones presentadas en el trabajo de Beltrametti, Fania y Sommese [3]. En este artículo se presenta un resultado central sobre la estructura de las variedades con dual degenerada: son fibraciones cuyas fibras son variedades de Fano de defecto positivo. De alguna manera se está indicando que los resultados de clasificación de variedades con dual degenerada deben centrarse en el estudio de las variedades de Fano con dual degenerada.

En esta línea se presenta otra agrupación de las variedades con dual degenerada, en función del índice de Fano. Los grupos van a ser ahora variedades donde se tiene

$$def(X) = dim(X) - 2m$$

con m un número natural.

Nosotros presentamos aproximaciones distintas, más geométricas, a los casos conocidos $m = 1$ y $m = 2$ y resultados de clasificación en el caso $m = 3$.

En los siguientes casos $m \geq 4$ Beltrametti, Fania y Sommese se preguntan sobre la existencia de ejemplos de variedades de Fano con defecto positivo. En particular, se cuestionan la posible existencia de dos variedades donde la dimensión, según las cotas que pueden establecer dichos autores, sería máxima: dimensión 13 y $k = 5$ y dimensión 17 y $k = 7$. Podremos afirmar, usando adecuadamente las clasificaciones del capítulo dos, la no existencia de las variedades involucradas en estas dos preguntas e incluso afirmar cotas mejores para sus dimensiones.

Finalmente podemos terminar esta introducción presentando algunas posibles perspectivas que nuestros resultados de clasificación de variedades con dual degenerada y nuestras técnicas sugieren.

0.5 Perspectivas

La meta fundamental en este tema es concluir una clasificación total de este tipo de variedades. Parece natural pensar que no existen más ejemplo que los conocidos.

Un primer resultado que es posible conjeturar a partir del estudio de los ejemplos y de los resultados de estructura del fibrado conormal, es que dicho fibrado es *diagonal*. Esto quiere decir que el término primero en la sucesión espectral de Beilinson sólo tiene elementos no nulos en la diagonal $p+q=0$, con lo que la sucesión espectral estaciona en el primer paso y se puede establecer que dicho fibrado es:

$$\mathcal{N}^*_{L/X} = \oplus_{i=1}^k(\Omega^i_L(i)).$$

Este resultado permitiría avanzar en la clasificación de las variedades con dual degenerada. En el caso particular de la restricción a un plano, o equivalentemente defecto igual a dos, la diagonalidad del fibrado conormal es equivalente al siguiente hecho geométrico. Fijamos un punto p general en X y una recta general en un plano general de contacto que pasa por dicho punto. Por un lado coleccionamos todos los lugares de contacto que pasan por p, que es una variedad irreducible en la grassmanniana de planos y construimos la familia de rectas por dicho punto contenidas en uno de estos planos. Por otro lado construimos el esquema de Hilbert de rectas que pasan por p en X. Si estas dos familias, entre las que se da un claro contenido, son iguales, se tiene que el fibrado conormal restringido a un plano general es de la forma esperada

$$\mathcal{N}^*_{L/X}|_{\mathbb{P}^2} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^{\oplus h^0(\mathcal{N}^*_{L/X}|_{\mathbb{P}^2})} \oplus \Omega_{\mathbb{P}^2}(1)^{\oplus h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_{\mathbb{P}^2})} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^{\oplus h^0(\mathcal{N}^*_{L/X}|_{\mathbb{P}^2})}.$$

En otro caso, deberían existir muchas rectas en X que pasan por p que no están contenidas en un plano de contacto y en la misma componente irreducible que L. Esta situación no ocurre en ninguno de los ejemplos.

Esto permitiría preguntarnos sobre la información geométrica contenida en cada uno de los sumandos del fibrado normal. Posiblemente relacionada con la estructura de las variedades con dual degenerada que se describe en [3].

En el desarrollo de nuestra investigación tratamos de demostrar un teorema similar al de la caracterización de variedades regladas en términos de su fibrado normal que vendría a decir que si $\mathcal{N}^*_{L/X} = \Omega_{\mathbb{P}^2}(1)^{\oplus a}$ entonces X es una grassmanniana de rectas. De forma colateral aparece el problema de las caracterizaciones de las grassmannianas. Se podría tratar de probar algún resultado del tipo de los existentes para la caracterización de espacios lineales. Esto es, dada una variedad lisa X de dimensión $2n+1$ conteniendo tantas grassmannianas de rectas en $\mathbb{P}^{n-1}$ como si fuera la propia $G(1,n)$, demostrar que X es $G(1,n)$ o alguna variedad con muchos espacios lineales, por ejemplo, una variedad reglada.

Finalmente observar que existen variedades con dual degenerada distintas con el mismo defecto y el mismo fibrado $\mathcal{N}_{L/X}$ para el lugar de contacto general. Esto indica que solamente el fibrado normal no sirve para recuperar la variedad. Sería interesante saber qué informaciones adicionales se necesitan para poder determinar, en función del fibrado normal, la variedad.

Capítulo 1

Variedades con dual degenerada

En este primer capítulo hacemos una presentación de las definiciones y notaciones de los objetos de estudio: espacios tangentes proyectivos inmersos, aplicaciones de Gauss, variedades de tangentes, variedades duales... Daremos una noción de *dimensión esperada* para la variedad dual a una variedad proyectiva lisa y entenderemos como variedad con dual degenerada aquella variedad para la cual la dimensión de su variedad dual es menor que la dimensión esperada.
Definiremos el lugar de contacto entre un hiperplano tangente general y la variedad como el conjunto de puntos de la variedad en los que dicho hiperplano es tangente. La linealidad del lugar de contacto supone una de las características geométricas más sobresalientes de las variedades con dual degenerada. Son por tanto variedades *barridas* por espacios lineales, en el sentido de que por el punto general pasa un espacio lineal de contacto.
Terminaremos el capítulo proporcionando una lista de ejemplos de variedades con dual degenerada, que va a recoger todos las variedades de este tipo conocidas.

1.1 Aplicaciones de Gauss y variedades de tangentes

El concepto fundamental en nuestro estudio de la geometría inmersa de una variedad proyectiva X en las condiciones establecidas en los preliminares es el de *espacio tangente proyectivo a* X *en un punto liso* $x \in X$.
En términos clásicos, es decir, considerando X como el conjunto de ceros de un conjunto de polinomios homogéneos en $N+1$-variables, este espacio proyectivo va a ser:

Definición 1.1 *Sea* $X \subset \mathbb{P}^N$ *una variedad proyectiva de dimensión* n *y sea* $x = (x_0 : ... : x_N)$ *un punto liso de* X. *Tomamos* $\{F_1, ..., F_r\} \subset \mathbb{C}[X_0, ..., X_N]$ *generadores del ideal de* X. *Se define el* espacio tangente proyectivo inmerso a X en el punto x *(que denotaremos* $T_{X,x}$*) como el lugar de ceros determinado por las ecuaciones lineales* $\{\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial F_j(x)}{\partial X_i} X_i : i = 0, ..., N,\ j = 1, ..., r\}$.

Este espacio tangente $T_{X,x}$ es un espacio proyectivo de dimensión n. Geométricamente no es más que tomar A el complementario de una sección hiperplana de X que no pasa por x, de manera que A es una variedad afín y el espacio tangente afín en x completado con

los correspondientes puntos del infinito es el espacio tangente proyectivo inmerso a X en x.
Usaremos a menudo que las direcciones de este espacio tangente afín están generadas por los vectores tangentes a arcos analíticos $x(t) \subset X$ tales que $x(0) = x$.

Otra definición equivalente de este espacio, de corte muy geométrico, es la siguiente. Definimos la aplicación $S : X - \{x\} \to G(1, N)$ que asigna a cada punto p de $X - \{x\}$ la recta que lo une con x, esto es $S(p) = l$, con l el punto de la grassmanniana de rectas correspondiente a la recta L que une p y x.
Podemos tomar ahora la clausura en $G(1, N)$ de la imagen de S, y obtenemos una subvariedad de la grassmanniana $S_x := \overline{S(X - \{x\})} \subset G(1, N)$.
Construimos como es habitual la variedad de incidencia:

$$I = \{(q, l) : \; q \in L, \quad l \in S_x\} \subset \mathbb{P}^N \times G(1, N)$$

con sus dos proyecciones, respectivamente p_1 y p_2.

Entonces definimos el espacio tangente proyectivo inmerso de X en x como

$$T_{X,x} := p_1 p_2^{-1}(S_x - S(X - \{x\})).$$

Y se puede comprobar que las distintas aproximaciones al concepto de *espacio tangente proyectivo inmerso* son equivalentes [17].

Desde el punto de vista del estudio de la geometría proyectiva de la variedad X es interesante preguntarse sobre la *disposición* de los espacios tangentes proyectivos en los diferentes puntos de X, es decir, construir y analizar variedades que parametricen los espacios tangentes, o variedades auxiliares que parametricen los espacios lineales que contienen a dichos espacios tangentes y nos permitan describir esta disposición [52].
Desde el punto de vista de geometría diferencial proyectiva, interesa el *movimiento* de dichos espacios, y aparecen instrumentos como las formas fundamentales, [16], [27] que miden dichos movimientos de los espacios tangentes en direcciones concretas.

Nuestro trabajo va a utilizar el primer enfoque donde se pueden establecer las siguientes definiciones:

Definición 1.2 *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ variedad proyectiva de dimensión n, definimos la* aplicación de Gauss *como la aplicación $\gamma_X : X - Sing(X) \to G(n, N)$ que asigna cada punto x en la parte no singular de la variedad X el punto de la grassmanniana correspondiente al espacio tangente proyectivo inmerso en dicho punto $T_{X,x}$, esto es,*

$$\begin{array}{rccc} \gamma_X : & X - Sing(X) & \to & G(n, N) \\ & x & \mapsto & \gamma_X(x) = T_{X,x} \end{array}$$

Definición 1.3 *Llamaremos* variedad de tangentes a la variedad X *y la denotamos X_n^* a la clausura en la topología de Zariski de la imagen en la grassmanniana de la aplicación de Gauss. Es decir,*

$$X_n^* := \overline{\gamma_X(X - Sing(X))} \subset G(n, N).$$

De esta manera estamos coleccionando todos los espacios tangentes proyectivos y sus posiciones límite, considerándolos como subvariedad de la grassmanniana $G(n, N)$.

También se pueden coleccionar todos aquellos espacios lineales de una cierta dimensión fijada r en la correspondiente grassmanniana $G(r, N)$ que contienen algún espacio tangente a X y sus posiciones límite.

Definición 1.4 *En estas construcciones diremos que un espacio lineal L de dimensión r con $n \leq r \leq N-1$ es* tangente *a X si existe un punto $x \in X$ de modo que $T_{X,x} \subset L$.*

Definición 1.5 *Llamamos* variedad conormal de orden r, $n \leq r \leq N-1$ de X, *y la denotamos como $\mathcal{P}_X^r$, a la siguiente subvariedad del producto $X \times G(r, N)$:*

$$\mathcal{P}_X^r = \overline{\{(x,l) : \ x \in X - Sing(X), \ l \in G(r,N), \ T_{X,x} \subset L\}} \subset X \times G(r,N)$$

Definiciones 1.6 *Definimos la* aplicación de Gauss r-ésima $\gamma_X^r : \mathcal{P}_X^r \to G(r, N)$ *como la proyección de la variedad conormal r-ésima sobre la grassmanniana de r-planos del espacio proyectivo $\mathbb{P}^N$.*

Definimos la variedad de r-espacios tangentes a X, *que denotamos X_r^*, como la imagen de la aplicación de Gauss r-ésima, i.e.,*

$$X_r^* := \gamma_X^r(\mathcal{P}_X^r).$$

La definición de aplicación de Gauss r-ésima engloba la definición de aplicación de Gauss en el caso particular $r = n$. En el otro extremo está el caso $r = N-1$, es decir, la colección de hiperplanos tangentes a X, y sus posiciones límite. Este último va a ser el objeto fundamental de estudio en nuestro trabajo. Se puede consultar el libro de Zak [52] para más información sobre aplicaciones de Gauss de otros órdenes.

Si interpretamos la grassmanniana de hiperplanos de $\mathbb{P}^N$, $G(N-1, N)$, como el espacio proyectivo dual $\mathbb{P}^{N*}$ podemos dar las siguientes definiciones:

Definiciones 1.7 *Llamaremos* variedad conormal *a X y la denotaremos $\mathcal{P}_X$ a la variedad conormal de orden $N-1$.*

Definimos la variedad dual de X, *que escribiremos X^*, como la variedad de $N-1$-espacios tangentes a X.*

Notaciones 1.8 *El diagrama de definición de la variedad dual con sus proyecciones va a ser:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_X & \xrightarrow{p_1} & X \subset \mathbb{P}^N \\ \downarrow{\scriptstyle p_2} & & \\ X^* & \subset \mathbb{P}^{N*} & \end{array}$$

Observación 1.9 *El nombre de variedad conormal no es arbitrario. Responde, en el caso de variedades lisas, a que la variedad conormal tiene estructura de fibrado proyectivo, asociado al fibrado conormal a la variedad X en $\mathbb{P}^N$, esto es, $\mathcal{P}_X = P(\mathcal{N}^*_{X/\mathbb{P}^N}(1))$.*

Para convencerse de la veracidad de la observación anterior, y porque las sucesiones exactas que van a aparecer serán útiles más adelante, en concreto para demostrar un teorema que extiende la observación anterior, escribimos el siguiente diagrama, válido para una variedad lisa $X \subset \mathbb{P}^N = P(V)$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{O}_X(-1) & \to & G_X & \to & TX(-1) & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle =} & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{O}_X(-1) & \to & \mathcal{O}_X \otimes V & \to & T\mathbb{P}^N|_X(-1) & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & \mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^N}(-1) & \xrightarrow{=} & \mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^N}(-1) & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array} \qquad (1.a)$$

donde G_X es el *pull-back* por la aplicación de Gauss γ_X del fibrado universal U sobre $G(n, N)$, es decir el fibrado tal que la fibra sobre cada punto es el espacio vectorial cuyo espacio proyectivo de direcciones es el tangente proyectivo inmerso en dicho punto:

$$P(G_{X,x}) = T_{X,x}.$$

Todas las sucesiones exactas del diagrama contienen una interesante información:

La primera sucesión horizontal muestra la relación entre el tangente proyectivo y el tangente de Zariski, en cada punto $x \in X$ se tiene la descomposición de $G_{X,x}$ en suma directa del espacio vectorial que describe el propio punto x y el tangente de Zariski en dicho punto.

La sucesión dual de la sucesión vertical del medio permite ver la variedad conormal como el fibrado proyectivo asociado al fibrado vectorial $\mathcal{N}^*_{X/\mathbb{P}^N}(1)$. Al dualizar se tienen la inclusión de $\mathcal{N}^*_{X/\mathbb{P}^N}(1)$ en $\mathcal{O}_X \otimes V^*$, esto nos permite ver $P(\mathcal{N}^*_{X/\mathbb{P}^N}(1))$ como hiperplanos que contienen algún tangente proyectivo.

La sucesión vertical final es el producto tensorial por $\mathcal{O}_X(-1)$ de la sucesión de definición del fibrado normal de X en $\mathbb{P}^N$, que hemos denotado $\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^N}$.

Además se muestra que el fibrado $\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^N}(-1)$ es un fibrado generado por secciones globales, por la composición

$$\mathcal{O}_X \otimes V \to T\mathbb{P}^N|_X(-1) \to \mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^N}(-1).$$

1.2 Variedades con dual degenerada

El primer invariante numérico que podemos estudiar en la variedad dual X^* es su dimensión. Es un proceso habitual en geometría algebraica tratar de buscar un concepto

de *dimensión esperada*, en este caso para la variedad dual a una variedad lisa, es decir, una dimensión que se tiene para la mayoría de las situaciones e intentar clasificar aquellas variedades en las que no se alcanza dicha dimensión.
Observaremos que la dimensión esperada va a ser $dim(X^*) = N - 1$, es decir, la variedad dual es habitualmente una hipersuperficie del espacio proyectivo dual, y nuestro objetivo es clasificar aquellas variedades lisas cuya variedad dual tiene dimensión estrictamente menor que $N - 1$.

Calculemos la dimensión de la variedad conormal.
Como la fibra por la primera proyección $p_1 : \mathcal{P}_X \to X$ de un punto general $x \in X$ es el conjunto de hiperplanos tangentes a X en x, entonces $p_1^{-1}(x)$ es isomorfo a un espacio lineal de dimensión $N - 1 - n$, el conjunto de los hiperplanos de $\mathbb{P}^N$ que contienen a dicho espacio tangente $T_{X,x}$.
Por tanto la dimensión de la variedad conormal verifica

$$dim(\mathcal{P}_X) = n + (N - n - 1) = N - 1. \tag{1.b}$$

Para la mayoría de las variedades lisas la variedad dual X^* es una hipersuperficie del espacio proyectivo dual $\mathbb{P}^{N*}$.
Parece natural pensar que ésta es la situación más habitual: un hiperplano tangente general $h \in X^*$ lo es en un sólo punto, es decir la proyección p_2 es genéricamente una aplicación 1 a 1. Si este no es el caso, al imponer a un hiperplano la condición de ser tangente en un punto, automáticamente se obtiene tangencia a lo largo de toda una subvariedad de dimensión positiva (o de una cantidad finita de puntos, aunque en esta segunda posibilidad también $dim(X^*) = N - 1$).

De alguna manera las variedades para las que su dual no es una hipersuperficie son especiales. Podemos citar a Mumford [37] que señala, refiriéndose al hecho de que X^* sea siempre una hipersuperficie:

> "I claim this is false, although I feel sure it can only be false in very rare cicumstances."

Nuestro objetivo es explicar lo más exhaustivamente posible en qué consisten dichas *extrañas circunstancias* señaladas por Mumford, presentar los ejemplos conocidos de las variedades para las que $dim(X^*) < N - 1$ y aportar resultados clasificatorios para estas variedades.

En este contexto definimos:

Definición 1.10 *Una variedad proyectiva lisa* $X \subset \mathbb{P}^N$ *tiene* variedad dual degenerada *si la dimensión de su variedad dual es estrictamente menor que* $N - 1$.

Definición 1.11 *Llamamos* defecto de X *y lo denotamos* $def(X) := k$ *a la diferencia* $k := N - 1 - dim(X^*)$.

Hablaremos entonces indistintamente de variedades *con dual degenerada* o variedades *de defecto positivo* $k > 0$.

1.3 El lugar de contacto

Las variedades con dual degenerada son variedades en las que se tiene que la fibra de la aplicación p_2 del diagrama (1.8) es de dimensión positiva. Estamos entonces diciendo que cada hiperplano tangente $h \in X^*$ lo es a lo largo de una subvariedad de X de dimensión positiva L_H. Nos gustaría estudiar dicha subvariedad, de la que, en principio, sólo conocemos que su dimensión es mayor o igual que k, y exactamente k cuando tomamos H general en X^*.

Definición 1.12 *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ variedad lisa, h un punto de X^*. Definimos el* lugar de contacto *de X y H como la fibra sobre h de p_2, es decir $L_H := p_1 p_2^{-1}(h)$.*

Para recopilar información acerca del lugar de contacto a un hiperplano general es conveniente recordar el siguiente teorema sobre la variedad dual. Suele ser conocido como *Teorema de bidualidad.* Aportamos también una prueba sencilla de dicho teorema para mejor comprensión del tema, debida a Kleiman [25], [41], que recoge ideas de C. Segre [49].

Teorema 1.13 *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ variedad proyectiva y la identificación canónica entre $\mathbb{P}^N$ y $\mathbb{P}^{N**}$, entonces, con esta identificación, se tiene que $\mathcal{P}_X = \mathcal{P}_{X^*}$, lo que en particular muestra la igualdad $X = X^{**}$.*

Demostración
Sea $h \in X^*$ un punto general ($h \in X^* - Sing(X^*)$) y sean los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_X & \xrightarrow{p_1} & X \subset \mathbb{P}^N \\ \downarrow{\scriptstyle p_2} & & \\ X^* & \subset \mathbb{P}^{N*} & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{X^*} & \xrightarrow{p_2^*} & X^{**} \subset \mathbb{P}^{N**} \\ \downarrow{\scriptstyle p_1^*} & & \\ X^* & \subset \mathbb{P}^{N*} & \end{array}$$

Demostraremos que la fibra de h para las aplicaciones p_2 y p_1^* coincide.
Tomamos la variedad siguiente

$$(p_1{}^*)^{-1}(h) = \{h\} \times \{\textit{hiperplanos de } (\mathbb{P}^N)^{**} \simeq \mathbb{P}^N \textit{que contienen a } T_{X^*,h}\} =: \{h\} \times T^*_{X^*,h}.$$

Si $s = dim\ X^*$ se tiene que $dim\ T^*_{X^*,h} = N - 1 - s = dim\ \mathcal{P}_X - dim\ X^* = dim\ p_2^{-1}(h)$.
Por tanto $dim\ (p_1^*)^{-1}(h) = dim\ p_2^{-1}(h)$ y, como $T^*_{X^*,h}$ es una variedad irreducible, será suficiente probar que $p_2^{-1}(h) \subset \{h\} \times T^*_{X^*,h}$, es decir, que dado $(x, h) \in p_2^{-1}(h)$ general, x es un elemento de $T^*_{X^*,h}$, i.e., $x \cdot \tau = 0$ para todo $\tau \in T_{X^*,h}$.

Necesitamos ahora el siguiente conocido lema que enunciaremos sin demostración [17, pág. 176]:

Lema 1.14 *Sea $f : X \to Y$ una aplicación regular sobreyectiva de variedades definidas sobre un cuerpo K de característica 0. Entonces existe $U \subset Y$ abierto no vacío tal que para todo p elemento de $f^{-1}(U) \cap Sm(X)$ la aplicación df_p es sobreyectiva.*

Tomemos $\tau \in T_{X^*,h}$
Aplicando el lema anterior a p_2, podemos tomar $(x,h) \in \mathcal{P}_X$ y un arco $(x(t),h(t)) \subset \mathcal{P}_X$ que tiende a (x,h), i.e., $(x(0),y(0)) = (x,h)$, con $h'(0) = \tau$.
Del hecho de que dicho arco esté contenido en la variedad conormal, $(x(t),h(t)) \in \mathcal{P}_X$, se tiene

$$x(t)h(t) = 0.$$

Podemos entonces derivar esta expresión para obtener

$$d(x(t)h(t))|_{t=0} = x'(0)h(0) + x(0)h'(0) = 0.$$

Ahora bien, $x'(0) \in T_{X,x} \subset H$, por lo que $x'(0)h(0) = 0$ y, de este modo,

$$x(0)h'(0) = x \cdot \tau = 0,$$

como queríamos demostrar.

Nótese que el resultado del lema (1.14) no es siempre válido sobre cuerpos de característica distinta de cero.
En efecto, sea X la curva plana afín de ecuación $y - x^p = 0$, $X \subset A^2$, donde A^2 es el plano afín sobre el cuerpo K de característica p. Sea $Y \simeq A^1$ la recta de ecuación $x = 0$. Definimos la aplicación $f : X \to Y$ como la proyección en la segunda coordenada $f(x,y) = y$. Entonces, X e Y son variedades lisas, f es una aplicación sobreyectiva, y sin embargo la diferencial de f, df_q, es nula para todo punto q de X.

Si el lema es falso, también lo es el teorema de bidualidad.
En efecto, tomamos el conocido ejemplo de una cónica plana de ecuación $yz = x^2$ sobre un cuerpo de característica dos. Todas las rectas tangentes a dicha cónica pasan por el punto $(1:0:0)$. De este modo la curva dual es una recta y esto contradice el teorema de bidualidad, pues la dual de la recta es un único punto.
Resaltamos también en este ejemplo que las cónicas en característica 2 son el único caso de las curvas que se han dado en llamar *curvas extrañas*, i.e., curvas proyectivas lisas de grado mayor o igual que dos, tal que todas sus tangentes pasan por un punto [19, pág. 312].

El estudio de variedades duales en característica positiva es, en este sentido, particularmente difícil: trata de determinar condiciones para las variedades en las que se verifica la bidualidad, conocidas como *variedades reflexivas* [20].

Volviendo al cuerpo de los números complejos, el teorema de bidualidad nos va a dar entonces la información que estábamos buscando acerca del lugar de contacto de X con un hiperplano $H \in X^*$ general.

Proposición 1.15 *El lugar de contacto de una variedad proyectiva lisa $X \subset \mathbb{P}^N$ y un hiperplano tangente general $h \in X^*$ es un espacio lineal de dimensión $N - 1 - dim\ X^*$.*

Demostración.
Recordamos que, por definición, el lugar de contacto es

$$L_H = p_1 {p_2}^{-1}(h),$$

es decir, el conjunto de puntos de X cuyo tangente está contenido en H.
Aplicando el teorema de bidualidad, podemos interpretar L_H como el conjunto de hiperplanos de $(\mathbb{P}^N)^{**} \simeq \mathbb{P}^N$ que contienen al espacio lineal $T_{X^*,h}$ que es, por tanto, un espacio lineal de dimensión $N - 1 - dim\ X^*$.

Observación 1.16 *Como estamos trabajando con X variedad lisa, el lugar de contacto de X y H, con h un punto de X^*, es el conjunto de puntos de la intersección de dos variedades lisas en los que sus tangentes no se cortan transversalmente, por tanto L_H es el conjunto de puntos singulares de $X \cap H$,*

$$L_H = Sing(X \cap H),$$

a menos que H sea tangente a X en todos los puntos de la intersección.

Podría ocurrir que un hiperplano H fuera tangente a X a lo largo de toda su intersección con la variedad (siendo esta intersección lisa). Por ejemplo, si tomamos la superficie de Veronese $v_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$, la sección hiperplana genérica corresponde a una cónica plana lisa, y en el caso de que el hiperplano sea tangente, una cónica degenerada, que puede ser una recta doble [17, pág 196]. En lenguaje de esquemas, la sección sale no reducida.

Y una vez conocido el lugar de contacto para un hiperplano tangente general, en el resto de los casos podemos citar el resultado recogido en [3], Lema 0.8:

Proposición 1.17 *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ lisa, entonces cada hiperplano tangente $h \in X^*$ es tangente a X a lo largo de una unión de espacios lineales de dimensión k.*

Podemos observar que la proposición anterior es una consecuencia directa del teorema de bidualidad.
En efecto, los puntos en que un hiperplano H es tangente a X son los puntos del conjunto $p_1 p_2^{-1}(h)$, que por el teorema de bidualidad es igual (por medio de la identificación canónica entre $\mathbb{P}^N$ y $\mathbb{P}^{N**}$) al conjunto $p_2^* {p_1^*}^{-1}(h)$. Por tanto, dada esta identificación, estamos buscando los hiperplanos de $\mathbb{P}^{N*}$ tangentes a X^* en el punto h. Si h es un punto liso de X^* hemos razonado antes que conforman un espacio lineal de dimensión igual al defecto. Si no, lo que estamos haciendo es tomar los hiperplanos que contienen a un espacio proyectivo de dimensión n que es una posición límite de espacios tangentes a puntos lisos de X^* cuando dichos puntos tienden al punto h. Por tanto el lugar de contacto de X y H es una familia de espacios lineales de dimensión k.
Si queremos escribirlo formalmente, tenemos la aplicación de Gauss:

$$\gamma : X^* - Sing(X^*) \to G(n^*, N)$$

y definimos la clausura de la imagen $T(X^*) := \overline{\gamma(X^* - Sing(X^*))} \subset G(n^*, N)$. Entonces, por el teorema de bidualidad, la variedad X puede verse como la imagen por la proyección correspondiente de la variedad

$$\{(l,m) : L \subset M\} \subset T(X^*) \times \mathbb{P}^{N**}$$

lo que prueba el resultado.

Podemos hacer dos observaciones a este respecto:

i) Aluffi prueba en su trabajo [1] que si un hiperplano H es tangente a una variedad lisa $X \subset \mathbb{P}^N$ a lo largo de un espacio lineal, entonces el punto $h \in X^*$ es un punto liso de la variedad dual y la dimensión de dicho espacio lineal da el defecto de X. Por tanto, la unión de dichos espacios lineales de dimensión k puede ser una variedad de dimensión superior a k, pero en ningún caso lineal.

ii) La existencia de espacios lineales de dimensión k contenidos en la variedad X resulta ser la característica geométrica más relevante de las variedades de defecto positivo $k > 0$. Dichas variedades contienen una gran cantidad de espacios lineales de dimensión k, pasando al menos uno por el punto general x de X; y de manera que cuando se impone sobre el hiperplano general la condición de tangencia a X en un punto, automáticamente se obtiene tangencia a lo largo de todo un espacio lineal de dimensión k.

Nuestros resultados de clasificación van a ser obtenidos a través de un estudio cuidadoso de la posición de estos espacios lineales de dimensión k en X. Desarrollaremos esto en los próximos capítulos, usando el fibrado normal al lugar de contacto general en X como instrumento principal de estudio de esta configuración de espacios lineales en nuestra variedad X.

Ahora es interesante poner algunos ejemplos de variedades con duales degeneradas y otros que no lo son que ilustren las definiciones explicadas y motiven para iniciar un trabajo de clasificación.

1.4 Ejemplos

Ejemplo 1.18 *Sea $C \subset \mathbb{P}^N$ una curva lisa e irreducible. El defecto de C es cero.*

Se trata de buscar, según la interpretación de (1.16), la dimensión de la parte singular de una sección hiperplana tangente general. Como en el caso de curvas dicha sección está formada por una cantidad finita de puntos, su dimensión es cero.

Ejemplo 1.19 *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una intersección completa lisa. El defecto de X es cero.*

Como señalamos en la observación (1.9) se puede identificar la variedad conormal $\mathcal{P}_X$ con el fibrado proyectivo $P(\mathcal{N}^*_{X/\mathbb{P}^N}(1))$.
Observamos que el *pull back* por la aplicación p_2 del fibrado lineal $\mathcal{O}_{X^*}(-1)$ es el fibrado tautológico para $P(\mathcal{N}^*_{X/\mathbb{P}^N}(1))$. Como X es una intersección completa no degenerada, el fibrado $\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^N}(-1)$ (que escinde como suma de fibrados de línea) es amplio, lo que concluye que p_2 es finita o equivalentemente que X tiene defecto cero, como queríamos demostrar.

Nos gustaría hacer mención aquí de la existencia de otra demostración de este mismo resultado, debida a S. Ishii, con métodos simples y que resulta bastante ilustrativa [24].

Definición 1.20 *Una terna $(Y, P_Y(E), \mathcal{L})$ formada por una variedad proyectiva Y, un fibrado proyectivo sobre Y, $P_Y(E) \xrightarrow{p} Y$, y una inmersión definida por el fibrado de línea $\mathcal{L}$, $P_Y(E) \subset \mathbb{P}^N$ forman una* variedad reglada sobre *Y si las fibras de p están inmersas en $\mathbb{P}^N$ como espacios lineales por la inmersión que produce el fibrado de línea $\mathcal{L}$.*

Ejemplo 1.21 *Sea ahora $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad reglada sobre una curva C lisa e irreducible:*

$$X = P_C(E) \xrightarrow{p} C.$$

El defecto de X es mayor o igual que $n-2$.

Fijamos puntos generales $x \in X$ y $h \in X^*$ tangente a X en x, esto es, $T_{X,x} \subset H$. Como la fibra $p^{-1}p(x) = F_x$ es un espacio lineal de dimensión $n-1$ contenido en X y que contiene a x, está necesariamente contenida en el espacio tangente $T_{X,x}$ y por tanto en H, $F_x \subset T_{X,x} \subset H$; es decir, el hiperplano tangente general contiene a una fibra.
Debemos estudiar ahora la intersección $X \cap H$. Se tienen los dos hechos básicos siguientes:
 i) la inclusión $F_x \subset X \cap H$,
 ii) H corta a la fibra general de p, $F_y = \mathbb{P}^{n-1}$, en un hiperplano $f_y = \mathbb{P}^{n-2} \subset F_y$ de la fibra, por ser la inmersión $X \subset \mathbb{P}^N$ no degenerada.
Si ahora tomamos el límite en la fibra F_x de dichos f_y's, es decir,

$$\overline{(X \cap H) - F_x} \cap F_x := f_x,$$

obtenemos un espacio lineal $f_x = \mathbb{P}^{n-2}$.
Entonces $f_x \subset Sing(X \cap H)$ ya que en esos puntos el espacio tangente está generado por vectores tangentes a arcos analíticos contenidos en H, y por tanto $k \geq n-2$.
Más adelante comprobaremos que se tiene la igualdad siempre que $n-2$ sea positivo.

Señalemos una primera manera de construir variedades de defecto positivo por medio de otras variedades de defecto positivo conocidas.

Ejemplo 1.22 *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad proyectiva con defecto positivo $k_X > 1$. Si tomamos una sección hiperplana general $Y = X \cap G \subset G = \mathbb{P}^{N-1}$ entonces $k_Y = k_X - 1$.*

Para demostrar esta afirmación basta asumir la interpretación de la observación (1.16) del lugar de contacto L_H para un hiperplano $h \in X^*$ general como el lugar singular de la intersección de X y H, $L_H = Sing(X \cap H)$. Por tanto, como Y es una sección hiperplana general de X, $Y = X \cap G$, entonces el lugar de contacto $L_{H \cap G}$ va a ser el lugar singular de la intersección $X \cap G \cap H$ y así la intersección $Sing(X \cap H) \cap G$ que es un espacio lineal de dimensión $k_X - 1$. Concluimos entonces que $k_Y = k_X - 1$, como queríamos demostrar; y además que los lugares de contacto generales para Y son secciones hiperplanas por G de lugares de contacto generales para X.

Ejemplo 1.23 *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad reglada sobre una variedad Y lisa de dimensión m:*

$$X = P_Y(E) \xrightarrow{p} Y$$

Se verifica $k \geq n - 2m$.

Fijamos como siempre $x \in X$ general y $h \in X^*$ general con $T_{X,x} \subset H$. Como en el ejemplo (1.21) la fibra $p^{-1}p(x) := F_x$ es un espacio lineal de dimensión $n - m$ que pasa por x y debe estar entonces contenida en H.
Puedo elegir ahora m arcos analíticos $y_i(t)$ en Y centrados en $p(x)$ tales que sus vectores tangentes generen el espacio vectorial $TY_{p(x)}$. Esto da lugar a m familias uniparamétricas $\{F_t^i : i = 1...m\}$ de fibras ($F^i = \mathbb{P}^{n-m}$) de tal manera que en cada punto y de la fibra sobre $p(x)$ cualquier elección de arcos analíticos $\alpha^i(t) \in F_t^i$ centrados en y verifica que los vectores tangentes en el origen $(\alpha^i)'(0)$ son linealmente independientes.
El hiperplano H corta al miembro general de cada una de estas m-familias en un espacio lineal G_t^i de codimensión menor o igual que 1 en F_t^i. Las posiciones límite sobre la fibra F_x de las familias G_t^i son m espacios lineales f^i de codimensión menor o igual que 1 en F_x.
Como en el ejemplo (1.21) el lugar de contacto debe contener a la intersección $\cap_{i=1}^m f^i$ que es un espacio lineal de dimensión mayor o igual que $n - m - m = n - 2m$. Así se tiene la desigualdad $k \geq n - 2m$.
Comprobaremos más adelante que se tiene la igualdad, siempre que $n - 2m$ sea positivo.

Ejemplo 1.24 *Consideramos ahora la grassmanniana de rectas en un espacio proyectivo de dimensión par, $G(1, 2r)$, inmersa en $\mathbb{P}^N$ con $N = r(2r+1) - 1$ por la inmersión de Plücker. Estas variedades tienen defecto igual a dos.*

Para ver esto vamos a interpretarlo en los términos siguientes sgún el trabajo de Mumford [37].
Sea $\mathbb{P}^{2r} = P(V)$ con V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión $2r + 1$, podemos entender la grassmanniana $G(1, 2r)$ como el conjunto de subespacios vectoriales de V de dimensión 2 (los denotamos $W_2 \subset V$).
Así el espacio de llegada de la inmersión de Plücker es $\mathbb{P}^{r(2r+1)-1} = P(\bigwedge^2 V)$ y el espacio proyectivo dual donde está inmersa la variedad dual es $\mathbb{P}^{(r(2r+1)-1)*} = P(\wedge^2 V^*)$.
Identificamos el espacio vectorial $\bigwedge^2 V^*$ con las dos formas antisimétricas definidas sobre V, $A : V \times V \to \mathbb{C}$.
Si denotamos con i la inmersión de Plücker, entonces, dado $W_2 \subset V$, su inmersión $i(W_2)$ estará contenida en un hiperplano H_A (el hiperplano asociado a la dos forma $A \in \bigwedge^2 V^*$) si y solamente si $A(v, w) = 0$ para toda pareja de vectores $v, w \in W_2$.
Queremos determinar cuándo $T_{G(1,2r),W_2} \subset H_A$. Para esto hay que ver cuando se da la inclusión $di_{W_2}(TG(1, 2r)_{W_2}) \subset TH_{A\, i(W_2)}$.
Tomemos $\{v_1, v_2\}$ una base para W_2 y una deformación de W_2 por medio de $v_1 + \epsilon v_1'$, $v_2 + \epsilon v_2'$ que dan una base de W_2' subespacio de $V \otimes \mathbb{C}[\epsilon]$ (donde $\mathbb{C}[\epsilon] := \mathbb{C}[x]/(x^2)$). De esta forma W_2' da un vector tangente $t \in TG(1, 2r)_{W_2}$. Y entonces $di_{W_2}(t) \in TH_{A\, i(W_2)}$

si y solamente si $A(v_1 + \epsilon v_1', v_2 + \epsilon v_2') = 0$ y como $\epsilon^2 = 0$ esto ocurre si y solamente si $A(v_1', v_2) + A(v_1, v_2') = 0$.
Por tanto $di_{W_2}(TG(1,2r)_{W_2}) \subset TH_{A\, i(W_2)}$ si y solamente si $A(v_1', v_2) + A(v_1, v_2') = 0$ para toda pareja $v_1', v_2' \in V$, es decir si y solamente si W_2 está contenido en el espacio anulador de la forma A (el subespacio de los vectores $v \in V$ tales que $A(v, w) = 0$ para todo $w \in V$).
De esta manera $H_A \in G(1,2r)^*$ si y solamente si la dimensión del espacio anulador de A es mayor o igual que dos.
Pero la dimensión de dicho espacio anulador es impar porque el determinante de una matriz antisimétrica de orden impar es nulo, así en general será 3.
Terminamos con un sencillo cálculo de la dimensión de $G(1,2r)^*$:

$$dim(G(1,2r)^*) =$$

$$= dim(espacio\ de\ formas\ A\ t.q.\ dim(Ann(A)) = 3) =$$

$$= dim(G(2,2r)) + dim(\wedge^2(\mathbb{C}^{\oplus 2r-2})) = N - 3,$$

como queríamos demostrar.

Propiedad general. Se muestra en este ejemplo la propiedad general que configura a una variedad como variedad con dual degenerada:

Se impone la condición de tangencia en un punto (que en este caso se traduce al lenguaje algebraico en que la dimensión del espacio anulador sea mayor o igual que 2) y automáticamente se obtienen tangencias en más puntos, en toda una variedad de dimensión positiva (los siguientes menores, de orden impar, son automáticamente nulos).

Ejemplo 1.25 *La variedad espinorial S_4 que parametriza los espacios lineales de dimensión 4 en una cuádrica lisa de $\mathbb{P}^9$ es una variedad de dimensión 10 que admite una inmersión en $\mathbb{P}^{15}$ y que tiene defecto 4.*

Podemos referir a [33] y a [46] para más información sobre esta variedad.

Terminamos los ejemplos con una segunda manera de construir variedades de defecto positivo a partir de otras variedades de defecto positivo conocidas.

Ejemplo 1.26 *Tenemos una variedad de defecto positivo $X_1 \subset \mathbb{P}^{N_1}$ con dimensión n_1 y defecto k_1. Tomamos $X_2 \subset \mathbb{P}^{N_2}$ con dimensión n_2 tal que $k_1 > n_2$, entonces la inmersión de Segre de $X = X_1 \times X_2$ en $\mathbb{P}^N$ tiene defecto $k \geq k_1 - n_2$.*

Tomamos un punto general $x = (x_1, x_2)$ en el producto $X := X_1 \times X_2$. En dicho punto el espacio tangente $T_{X,x}$ es el espacio lineal generado por las imágenes en $\mathbb{P}^N$ de los respectivos tangentes, T_{X_1,x_1} y T_{X_2,x_2}.
Sea π_i con $i = 1, 2$ la restricción a $X := X_1 \times X_2$ de la proyeción Π_i de $\mathbb{P}^{N_1} \times \mathbb{P}^{N_2}$ sobre el factor correspondiente y H un hiperplano tangente general.
A diferencia de los ejemplos de las variedades regladas, el hiperplano H escogido no tiene necesariamente que contener a la fibra $\pi_2^{-1}(x_2)$, ya que ésta no es lineal.

El hiperplano H corta a la fibra $\Pi_2^{-1}(x_2)$, que es un espacio lineal de dimensión N_1 que contiene a $\pi_2^{-1}(x_2)$, en un espacio lineal de dimensión $N_1 - 1$ que llamamos H_1. Como X_1 es una variedad de defecto positivo, si H_1 es general en X_1^* entonces es tangente a lo largo de un $\mathbb{P}^{k_1} =: L_1$.
Tomamos ahora n_2 arcos analíticos centrados en x_2 de manera que sus vectores tangentes generen el espacio vectorial $TX_{2\,x_2}$. Aparecen entonces n_2 familias uniparamétricas de fibras por π_2 de manera que el espacio tangente en un punto (y_1, x_2) de L_1 está generado por el T_{X_1, y_1} y las direcciones tangentes a arcos contenidos en esas familias.
Para cada una de estas familias, el hiperplano H interseca su elemento general en una subvariedad de codimensión menor o igual que 1. Por tanto tomando el límite de estas subvariedades sobre L_1 se observa que $k \geq k_1 - n_2$.
Comprobaremos más adelante que se tiene la igualdad.

Podemos referir a [3] para otra prueba distinta de este hecho, desde la teoría de adjunción.

Esta es la relación completa de ejemplos de variedades con dual degenerada conocidos. Se han presentado los que podemos decir *ejemplos básicos*: las inmersiones de Plücker de las grassmannianas de rectas $G(1, 2r)$, la variedad espinorial $S_4 \subset \mathbb{P}^{15}$, variedades regladas, y las maneras de construir nuevas variedades con dual degenerada a través de ellos, a saber, por medio de secciones hiperplanas y por medio de de productos.

Desde la observación de esta lista parece lógico que cualquier resultado de clasificación debe aportar instrumentos para reconocer los procesos de construcción señalados y llegar al ejemplo básico que subyace. Por último debe aportar resultados de clasificación de estos ejemplos básicos.

Esto es lo que vamos a hacer en este trabajo, estudiando ciertos fibrados sobre los lugares de contacto vamos a ver cómo podemos caracterizar, en términos de dichos fibrados, los procesos de construcción de nuevos ejemplos, y como podemos clasificar ejemplos básicos, bien garantizando la no posible existencia del fibrado (por tanto la variedad no puede existir), bien conociendo exactamente el fibrado y tratando de determinar la variedad.

Capítulo 2

El fibrado normal al lugar de contacto

Como señalamos en el capítulo anterior, la propiedad geométrica más reseñable de las variedades con dual degenerada es el hecho de que por el punto general de X pasa un espacio lineal de dimensión k, que es además un lugar de contacto.
Un instrumento natural para estudiar la posición de esos espacios lineales en X es el fibrado normal al lugar de contacto general, L, en la variedad X, que denotaremos $\mathcal{N}_{L/X}$.
El objetivo del capítulo que comenzamos es estudiar dicho fibrado normal, analizando primero las consecuencias del hecho de ser el lugar de contacto un espacio lineal y después las consecuencias de la existencia de un hiperplano tangente a X a lo largo de L.
Las propiedades que se deducen sobre el fibrado $\mathcal{N}_{L/X}$ de los hechos anteriores nos van a permitir estudiar la estructura de la restricción de dicho fibrado a una recta general de L primero y a un plano general de L después y dar resultados clasificatorios sobre dicho fibrado para rangos pequeños. Estos resultados servirán para clasificar variedades con dual degenerada.
Abordaremos para esto el estudio de la cohomología de los fibrados $\mathcal{N}_{L/X}(a)$, a un número entero, recordando resultados de Ein y probando algunos resultados nuevos, basados sobre todo en aspectos geométricos asociados.

2.1 Restricciones sobre el fibrado normal al lugar de contacto

Recordemos la definición de fibrado normal a una subvariedad lisa Y de una variedad lisa X.

Definición 2.1 *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad lisa y sea Y una subvariedad lisa de X, llamaremos* fibrado normal de Y en X *al fibrado definido en la sucesión exacta:*

$$0 \to TY \to TX|_Y \to \mathcal{N}_{Y/X} \to 0$$

donde la primera aplicación es la diferencial de la inmersión de Y en X.

En nuestro caso la vamos a utilizar para la subvariedad de X determinada por el espacio lineal de dimensión k, $\mathbb{P}^k = L \subset X$, lugar de contacto de un hiperplano general $h \in X^*$ y X.

Observación 2.2 *Si tomamos X variedad con dual degenerada, $h \in X^*$ un hiperplano tangente general y L el lugar de contacto de X y H, podemos construir según la anterior definición el fibrado normal al lugar de contacto, que denotamos $\mathcal{N}_{L/X}$, por la sucesión exacta:*

$$0 \to TL \to TX|_L \to \mathcal{N}_{L/X} \to 0.$$

Las primeras consecuencias sobre $\mathcal{N}_{L/X}$ del hecho de que L sea un lugar de contacto se deducen de que L es lineal. La variedad X está contenida en $\mathbb{P}^N = P(V)$ y el lugar de contacto L es $P(W)$ con W un subespacio vectorial $W \subset V$ de dimensión $k+1$.
De este modo el fibrado normal de L en $\mathbb{P}^N$ es el producto tensorial $V/W \otimes \mathcal{O}_L(1)$,

$$\mathcal{N}_{L/\mathbb{P}^N} = V/W \otimes \mathcal{O}_L(1).$$

Se tiene entonces la siguiente sucesión exacta de fibrados normales:

$$0 \to \mathcal{N}_{L/X} \to V/W \otimes \mathcal{O}_L(1) \to \mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^N}|_L \to 0 \tag{2.a}$$

Observación 2.3 *Estudiando la sucesión (2.a), su dual y sus sucesiones largas de cohomología, se obtiene:*

i) El fibrado $\mathcal{N}_{L/X}(-1)$ es un subfibrado del fibrado trivial $V/W \otimes \mathcal{O}_L$ (tomando sencillamente el producto de la sucesión por $\mathcal{O}_L(-1)$).

ii) El fibrado $\mathcal{N}^*_{L/X}(1)$ es generado por secciones globales (tomando la sucesión dual de la sucesión de i)).

Y los resultados de anulación:

iii) $H^0(\mathcal{N}_{L/X}(a)) = 0$ para todo $a \leq -2$ (con la sucesión larga de cohomología del producto de la sucesión (2.a) por $\mathcal{O}_L(a)$).

iv) $H^k(\mathcal{N}^*_{L/X}(a)) = 0$ para todo $a \geq -k+1$ (consecuencia directa del teorema de dualidad de Serre).

Estas propiedades del fibrado normal al lugar de contacto establecidas en la observación (2.3) se han deducido como decíamos del hecho de que L es un espacio lineal contenido en una variedad proyectiva X, de la sucesión exacta (2.a).

El segundo hecho que debemos utilizar es la existencia de un hiperplano tangente a la variedad X a lo largo de L, es decir, L es un lugar de contacto general. Reproducimos los argumentos de Ein [8] que extraen consecuencias muy interesantes de este fenómeno.

Tomamos h general en X^* y sea x general en el lugar de contacto $L = \mathbb{P}^k$ de X y H. Tomamos la sección $s \in H^0(\mathcal{O}_X(1))$ que define el hiperplano H. Entonces el morfismo que determina s,

$$s : \mathcal{O}_X(-1) \to \mathcal{O}_X,$$

factoriza por el cuadrado del haz de ideales de L en X, esto es,

$$s : \mathcal{O}_X(-1) \to \mathcal{I}^2_{L/X}.$$

Por tanto s define una sección global de dicho haz, $s \in H^0(\mathcal{I}^2_{L/X}(1))$. Tomando el cociente $\mathcal{I}^2_{L/X}/\mathcal{I}^3_{L/X}$, se puede construir por medio de s una sección global del fibrado de potencias simétricas $S^2(\mathcal{N}^*_{L/X})(1)$, que sobre cada punto es una forma cuadrática de rango máximo. Los detalles de esta demostración se pueden consultar en [8, thm. 2.1]

Una de las principales consecuencias que tiene el hecho de que un espacio vectorial venga dotado de una forma bilineal simétrica y no degenerada es la identificación canónica que se establece entre dicho espacio vectorial y su espacio vectorial dual:

Teorema 2.4 ([8]) *Se puede establecer un isomofismo simétrico entre los fibrados $\mathcal{N}_{L/X}$ y $\mathcal{N}^*_{L/X}(1)$, esto es:*

$$\mathcal{N}_{L/X} \simeq \mathcal{N}^*_{L/X}(1)$$

Observación 2.5 *El isomorfismo del teorema (2.4) va a ser fundamental para nuestros resultados clasificatorios, y contiene una doble información:*

i) El propio isomorfismo.

ii) El hecho de que el isomorfismo es simétrico, es decir, viene definido por una sección global $s \in H^0(S^2(\mathcal{N}^*_{L/X})(1))$.

Para ilustrar el hecho de que ambas informaciones, (2.5.i) y (2.5.ii), son relevantes podemos poner un ejemplo de un fibrado que verifica (2.5.i) pero para el que ninguno de los isomorfismos que se pueden establece entre $\mathcal{N}_{L/X}$ y $\mathcal{N}^*_{L/X}(1)$ verifican (2.5.ii) y que, por tanto, no podrá ser el fibrado normal al lugar de contacto de una variedad con dual degenerada.

Antes damos la siguiente definición.

Definición 2.6 *Un fibrado vectorial E sobre una variedad X se dice simple si no tiene más endomorfismos que las homotecias, es decir, si $h^0(E \otimes E^*) = 1$.*

Ejemplo 2.7 *El producto tensorial del fibrado de 1-formas en el plano proyectivo y el dual del tautológico, $\Omega_{\mathbb{P}^2}(1)$, es un ejemplo de fibrado con un único isomorfismo (salvo producto por un número complejo no nulo) como en (2.4) y tal que $h^0(S^2(\Omega_{\mathbb{P}^2}(1))(1)) = 0$.*

Demostración.
El fibrado $\Omega_{\mathbb{P}^2}(2)$ es isomorfo a $\Omega_{\mathbb{P}^2}(1)^*$ por el isomorfismo habitual de multiplicación [19, pág. 127].
Por otro lado $\Omega_{\mathbb{P}^2}(1)$ es un fibrado simple [40]. Por tanto, se tiene que

$$h^0(\Omega_{\mathbb{P}^2}(1) \otimes (\Omega_{\mathbb{P}^2}(1))^*) = h^0(\Omega_{\mathbb{P}^2}(1) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^2}(2)) = 1$$

Y con la habitual descomposición como suma directa de formas simétricas y alternadas:

$$1 = h^0(S^2(\Omega_{\mathbb{P}^2}(1))(1)) + h^0(\bigwedge^2(\Omega_{\mathbb{P}^2}(1))(1)).$$

Como el fibrado $\bigwedge^2(\Omega_{\mathbb{P}^2}(1))(1)$ es un haz invertible trivial, se concluye

$$h^0(S^2(\Omega_{\mathbb{P}^2}(1))(1)) = 0,$$

como queríamos demostrar.

Este ejemplo lo podemos generalizar de la siguiente manera.

Lema 2.8 *Sea n un número par, entonces el fibrado $\bigwedge^{n/2}\Omega_{\mathbb{P}^n}(n/2) =: \Omega^{n/2}_{\mathbb{P}^n}(n/2)$ es un fibrado simple.*

Demostración.
Tomamos la sucesión tipo Euler [40, pág. 73]:

$$0 \to \Omega^{n/2+1}_{\mathbb{P}^n}(n/2+1) \to \mathcal{O}^{\oplus\alpha_1}_{\mathbb{P}^n} \to \Omega^{n/2}_{\mathbb{P}^n}(n/2+1) \to 0$$

donde α_1 es el número combinatorio $\alpha_1 = \begin{pmatrix} n+1 \\ n/2+1 \end{pmatrix}$.

Haciendo el producto tensorial de esta sucesión por $\Omega^{n/2}_{\mathbb{P}^n}(n/2)$ se obtiene la sucesión exacta:

$$0 \to \Omega^{n/2+1}_{\mathbb{P}^n}(n/2+1) \otimes \Omega^{n/2}_{\mathbb{P}^n}(n/2) \to \Omega^{n/2}_{\mathbb{P}^n}(n/2)^{\oplus\alpha_1} \to \Omega^{n/2}_{\mathbb{P}^n}(n/2+1) \otimes \Omega^{n/2}_{\mathbb{P}^n}(n/2) \to 0$$

Por las fórmulas de Bott [40] se tiene que

$$h^0(\Omega^{n/2}_{\mathbb{P}^n}(n/2+1) \otimes \Omega^{n/2}_{\mathbb{P}^n}(n/2)) = h^1(\Omega^{n/2+1}_{\mathbb{P}^n}(n/2+2) \otimes \Omega^{n/2}_{\mathbb{P}^n}(n/2-1))$$

Repitiendo de forma iterada este proceso con las sucesiones correspondientes tipo Euler de generación por secciones globales de los fibrados $\Omega^{n/2+s}_{\mathbb{P}^n}(n/2+s+1)$ para sucesivos valores de s obtenemos que :

$$h^0(\Omega^{n/2}_{\mathbb{P}^n}(n/2+1) \otimes \Omega^{n/2}_{\mathbb{P}^n}(n/2)) = h^s(\Omega^{n/2+s}_{\mathbb{P}^n}(n/2+s+1) \otimes \Omega^{n/2}_{\mathbb{P}^n}(n/2-s)) = h^{n/2}(\Omega^{n/2}_{\mathbb{P}^n}) = 1.$$

Y de esta forma se concluye aplicando el isomorfismo habitual entre los fibrados $\Omega^{n/2}_{\mathbb{P}^n}(n/2)^*$ y $\Omega^{n/2}_{\mathbb{P}^n}(n/2+1)$.

Observación 2.9 *Para el fibrado del lema anterior $\Omega^{n/2}_{\mathbb{P}^n}(n/2)$ hemos comprobado que el isomorfismo entre $\Omega^{n/2}_{\mathbb{P}^n}(n/2)^*$ y $\Omega^{n/2}_{\mathbb{P}^n}(n/2+1)$ es único (siempre salvo producto por un número complejo no nulo) y viene definido por el morfismo de multiplicación*

$$\Omega^{n/2}_{\mathbb{P}^n} \otimes \Omega^{n/2}_{\mathbb{P}^n} \to \Omega^{n}_{\mathbb{P}^n}$$

que es alternado cuando $n/2$ es impar.

Por tanto los fibrados del tipo $\Omega^{2r+1}_{\mathbb{P}^{4r+2}}(2r+1)$, donde r es un número natural, no pueden ser el fibrado dual al fibrado normal a un lugar de contacto en una variedad de defecto positivo.

Hemos comprobado en (2.7) que el fibrado $\Omega_{\mathbb{P}^2}(1)$ no verificaba (2.5.ii) aunque sí existía un isomorfismo entre $\Omega_{\mathbb{P}^2}(1)$ y $\Omega_{\mathbb{P}^2}(1)^*(-1)$. Sin embargo, si tomamos la suma directa de dos copias de este fibrado, $\Omega_{\mathbb{P}^2}(1) \oplus \Omega_{\mathbb{P}^2}(1)$, podemos garantizar la existencia de un *isomorfismo simétrico*, pues podemos tomar el isomorfismo que permuta los sumandos, es decir, que su matriz en un punto x de $\mathbb{P}^2$ es de la forma

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Este ejemplo tenía que cumplir todas las propiedades para ser el fibrado normal al lugar de contacto porque, como veremos más adelante, es el fibrado $\mathcal{N}^*_{L/X}$ al lugar de contacto general $L = \mathbb{P}^2$ de la grassmanniana de rectas en $\mathbb{P}^4$.
Y además observamos que este tipo de construcción se va a poder hacer siempre que tengamos un número par de copias del fibrado $\Omega_{\mathbb{P}^2}(1)$, es decir fibrados de la forma $\Omega_{\mathbb{P}^2}(1)^{\oplus 2r}$, con r un número natural (corresponderá, como se señala en la tabla final del capítulo 3, a las grassmannianas de rectas de un espacio proyectivo de dimensión par).

Sin embargo, en el caso que tengamos una cantidad impar de copias del fibrado $\Omega_{\mathbb{P}^2}(1)$, es decir, $\Omega_{\mathbb{P}^2}(1)^{\oplus 2r+1}$, *vamos a ver que no podemos construir una dos forma simétrica.*

En efecto, en un punto x de $\mathbb{P}^2$ la matriz debe tener el aspecto siguiente:

$$M := \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1(2r+1)} \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ M_{(2r+1)1} & M_{(2r+1)2} & \dots & M_{2r+1(2r+1)} \end{pmatrix}$$

donde M_{ii} es una matriz 2×2 formada por ceros y $M_{ij} = -M_{ji}$ con $i \neq j$ contiene ceros en la diagonal principal y un número complejo y su opuesto en la otra diagonal.

En estas circunstancias se puede afirmar que el determinante de M es nulo.

En efecto, llamamos v_{i1} al vector que tiene por coordenadas las entradas de la columna $2i-1$-ésima y v_{i2} al vector que tiene por coordenadas las entradas de la columna $2i$-ésima, y tomamos una combinación lineal igualada a 0:

$$\sum_{i,j=1}^{2r+1,2} \lambda_{ij} v_{ij} = 0.$$

Dada la forma de las matrices M_{ij} esta combinación lineal se convierte en dos:

$$\sum_{i=1}^{2r+1} \lambda_{i1} v_{i1} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{2r+1} \lambda_{i2} v_{i2} = 0$$

la primera involucra solamente a las coordenadas pares y la segunda a las coordenadas impares.
Finalmente tenemos dos sistemas de ecuaciones homogéneos de modo que para cada uno de ellos su matriz de coeficientes es alternada y de orden impar, por tanto con solución no trivial.

De esta manera el fibrado $\Omega_{\mathbb{P}^2}(1)^{\oplus 2r+1}$ no es candidato para ser el fibrado dual al fibrado normal al lugar de contacto de una variedad con dual degenerada.

Observamos que esta prueba se puede generalizar a los fibrados del tipo $(\Omega_{\mathbb{P}^n}^{n/2}(n/2))^{\oplus 2r+1}$ con $n/2$ un número impar.

Resumimos en la siguiente proposición los candidatos incluidos o excluidos para ser fibrado normal de esta primera serie de ejemplos.

Proposición 2.10 *Dado r un número natural:*

i) Los fibrados $\Omega_{\mathbb{P}^n}^{n/2}(n/2)^{\oplus 2r}$ verifican las dos condiciones de (2.5).

ii) Los fibrados $\Omega_{\mathbb{P}^n}^{n/2}(n/2)^{\oplus 2r+1}$ verifican la condición (2.5.i) pero no la condición (2.5.ii) cuando $n/2$ es un número impar.

Y por tanto los fibrados de ii) no pueden ser el fibrado dual al fibrado normal al lugar de contacto general para una variedad de defecto positivo.

El isomorfismo de (2.4) está recogiendo información proveniente del hecho de que L es un lugar de contacto, es decir, que existe un hiperplano tangente a X a lo largo de L. En la siguiente sección vamos a extraer de forma sencilla algunas consecuencias muy restrictivas que se derivan de (2.4) y de las observaciones de (2.3) y que van a permitir reducir mucho los posibles candidatos a fibrados normales al lugar de contacto en una variedad con dual degenerada.

2.2 Estructura de la restricción a una recta general

Tomamos $h \in X^*$ general, L el lugar de contacto de X y H, así como el fibrado normal a dicho lugar de contacto en la variedad X, $\mathcal{N}_{L/X}$.

Sea T una recta contenida en L, $\mathbb{P}^1 = T \subset L$. Por el teorema de Grothendieck la restricción del fibrado normal a T escinde completamente como suma directa de haces invertibles, a saber:

$$\mathcal{N}^*_{L/X}|_T = \oplus_{i=1}^{n-k} \mathcal{O}_T(a_i^T) \quad a_1^T \leq a_2^T \leq \ldots \leq a_{n-k}^T.$$

Definición 2.11 *A la $n-k$-upla $(a_1^T, \ldots, a_{n-k}^T)$ se le denomina tipo de escisión del fibrado $\mathcal{N}^*_{L/X}$ en la recta T.*

Como el fibrado $\mathcal{N}^*_{L/X}$ es un subfibrado de un fibrado trivial, se tiene que para cualquier recta $T \subset L$ los valores a_i^T de su tipo de escisión verifican $a_i^T \leq 0$ para todo i.
Por otro lado, también para cada recta $T \subset L$, (2.3.ii) garantiza que $a_i^T + 1 \geq 0$ para todo valor de i entre 1 y $n-k$.
Por tanto $a_i^T \in \{-1, 0\}$ para todo i. Y como el isomorfismo de (2.4) se mantiene al restringir el fibrado a cualquier recta $T \subset L$, entonces la $n-k$-upla $(a_1^T, ..., a_{n-k}^T)$ está formada por $\frac{n-k}{2}$ ceros y la misma cantidad de -1's para toda recta $T \subset L$.

Definición 2.12 *Sea E un fibrado vectorial sobre un espacio proyectivo $\mathbb{P}^k$. Se dice que E es un* fibrado uniforme *si el tipo de escisión de E en T es constante para toda recta $T \subset \mathbb{P}^k$.*

Por tanto se tiene el siguiente lema, donde el apartado iii) es un uso directo de la fórmula de adjunción:

Lema 2.13 ([8]) *De la construcción del principio de la sección podemos deducir:*

i) El fibrado $\mathcal{N}^*_{L/X}$ es un fibrado uniforme y su tipo de escisión es, para toda recta T en L, la $n-k$-upla $(-1, -1, ... -1, 0, ..., 0, 0)$ con $\frac{n-k}{2}$ ceros y el mismo número de -1's.

ii) La dimensión de X es congruente con el defecto módulo 2 para que $\frac{n-k}{2}$ sea un número entero. Esto se conoce habitualmente como teorema de paridad.

iii) Si denotamos como K_X el haz invertible canónico, se verifica:

$$K_X|_L = \mathcal{O}_L(\frac{-n-k-2}{2}).$$

Aparecen aquí algunas consecuencias geométricas:

Corolario 2.14 *Sea X una variedad reglada sobre una curva, entonces $k_X = n-2$.*

Demostración.
Habíamos demostrado en el ejemplo (1.21) que $k_X \geq n-2$. Como la variedad es no degenerada y el lugar de contacto se puede interpretar como la parte singular de una sección hiperplana se tiene que $k_X \leq n-1$. Finalmente como la igualdad $k_X = n-1$ contradice el teorema de paridad se tiene $k_X = n-2$.

Corolario 2.15 *Las superficies tienen defecto cero.*

Demostración.
Como $k \leq dim(X) - 1$ entonces $k = 0$ ó $k = 1$, concluimos por el teorema de paridad.

Existía una prueba anterior a la de Ein del teorema de paridad, debida a Landman, basada en fórmulas topológicas de la variedad X. También han demostrado previamente que las superficies tienen defecto cero Griffiths y Harris [16] y Marchionna [34] (y por supuesto el propio Ein).

Existe una abundante literatura de clasificación de fibrados uniformes. Podemos citar trabajos de Elencwagj [9], [10], [12]; Ellia [13]; Drezet [5], [6]... Nos apoyaremos cuando podamos en ella para determinar completamente el fibrado normal al lugar de contacto.

Finalizamos esta sección con una observación sobre la estructura del fibrado $\mathcal{N}_{L/X}$.

Proposición 2.16 *El fibrado $\mathcal{N}^*_{L/X}$ se puede descomponer como:*

$$\mathcal{N}^*_{L/X} = \mathcal{O}_L^{\oplus h^0(\mathcal{N}^*_{L/X})} \oplus F \oplus \mathcal{O}_L(-1)^{\oplus h^0(\mathcal{N}^*_{L/X})}$$

donde F es un fibrado vectorial de modo que $h^0(F) = 0$ y $F \simeq F^*(-1)$ por un isomorfismo simétrico.

Demostración.
Sabemos por (2.3) que $\mathcal{N}^*_{L/X}(1)$ es un fibrado generado por secciones globales. Del isomorfismo de (2.4) obtenemos que $\mathcal{N}_{L/X}$ es un fibrado generado por secciones globales.
Si $H^0(\mathcal{N}^*_{L/X}) = 0$ la proposición no dice nada.
Sea $s \in H^0(\mathcal{N}^*_{L/X})$ una sección no nula. Dicha sección s determina entonces un morfismo inyectivo

$$O \to \mathcal{O}_L \to \mathcal{N}^*_{L/X}.$$

Dualizando tenemos un morfismo sobreyectivo

$$\mathcal{N}_{L/X} \to \mathcal{O}_L \to 0.$$

Por tanto tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & G_1 & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{N}^*_{X/\mathbb{P}^N}(1)|_L & \to & \mathcal{O}_L^{N-k} & \to & \mathcal{N}_{L/X} & \to & 0 \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & \mathcal{O}_L & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

se observa que la sucesión vertical es escindida y por tanto el fibrado $\mathcal{N}_{L/X}$ escinde

$$\mathcal{N}_{L/X} = \mathcal{O}_L \oplus G_1$$

con G_1 un fibrado sobre L.
Por otro lado por el isomorfismo de (2.4) se tiene que

$$\mathcal{N}_{L/X} \simeq \mathcal{N}^*_{L/X}(1) \simeq \mathcal{O}_L(1) \oplus G_1^*(1).$$

Como la descomposición de un fibrado como suma de fibrados indescomponibles es única, entonces se debe tener la descomposición

$$\mathcal{N}_{L/X} = \mathcal{O}_L(1) \oplus G_2 \oplus \mathcal{O}_L$$

donde G_2 es globalmente generado y $G_2 \simeq G_2^*(-1)$.

Por tanto estamos de nuevo en las condiciones del comienzo: si G_2^* no tiene secciones no nulas el proceso finaliza y si tiene secciones no nulas, podemos iterar dicho proceso hasta llegar al momento en que

$$\mathcal{N}^*_{L/X} = \mathcal{O}_L^{\oplus h^0(\mathcal{N}^*_{L/X})} \oplus F \oplus \mathcal{O}_L(-1)^{\oplus h^0(\mathcal{N}^*_{L/X})}$$

y $h^0(F) = 0$.
Se tiene finalmente que $F \simeq F^*(-1)$ por la unicidad de la descomposición y el isomorfismo es simétrico porque es la restricción del isomorfismo de partida.

Pasamos en la próxima sección, a estudiar la cohomología de los productos tensoriales del fibrado $\mathcal{N}^*_{L/X}$ por los haces invertibles $\mathcal{O}_L(a)$ con a un número entero.

2.3 La Cohomología del fibrado normal y sus twists

El fibrado que estamos estudiando, $\mathcal{N}^*_{L/X}$, es un fibrado definido sobre un espacio proyectivo de dimensión k. Para el estudio de los fibrados vectoriales sobre un espacio proyectivo resulta muy útil conocer las dimensiones de los $\mathbb{C}$-espacios vectoriales de cohomología de los distintos *twists*[1] de $\mathcal{N}^*_{L/X}$, es decir, $h^i(\mathcal{N}^*_{L/X}(j))$ con $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.

La sucesión espectral de Beilinson [40], de ahora en adelante BSS, es el instrumento fundamental que vamos a usar para traducir esta información de la cohomología del fibrado en condiciones que permitan estudiar la posibilidad de existencia del fibrado y determinarlo completamente en algunas ocasiones.

Recordamos el teorema de Beilinson:

Teorema 2.17 (Beilinson) *Sea E un fibrado vectorial de rango r sobre $\mathbb{P}^k$. Entonces hay una sucesión espectral $E_t^{p,q}$ cuyo primer término es:*

$$E_1^{p,q} = H^q(E(p)) \otimes \Omega^{-p}_{\mathbb{P}^k}(-p)$$

que converge a :

$$E^i = \begin{cases} E & si \quad i = 0 \\ 0 & si \quad i \neq 0 \end{cases}$$

en el sentido de que $E_\infty^{p,q} = 0$ si $p+q \neq 0$ y de que $\oplus_{i=0}^k E_\infty^{-p,p}$ es el haz graduado asociado a una filtración de E.

Nos gustaría entonces conocer el aspecto de $E_1^{p,q}$ en el caso en que el fibrado que estamos estudiando sea el fibrado conormal a un lugar de contacto general $\mathcal{N}^*_{L/X}$.

Observación 2.18 *Aplicando el teorema de dualidad de Serre para calcular la dimensión $h^i(\mathcal{N}^*_{L/X}(j))$ obtenemos:*

[1]Preferimos la palabra *twist* a su posible traducción como *retorcimiento* cuando nos referimos a los productos tensoriales por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^K}(a)$

$$h^i(\mathcal{N}^*_{L/X}(j)) = h^{k-i}(\mathcal{N}_{L/X}(-j-k-1)) = h^{k-i}(\mathcal{N}^*_{L/X}(-j-k))$$

por tanto el término $E_1^{p,q}$ de la BSS del fibrado $\mathcal{N}^*_{L/X}$ tiene un aspecto bastante simétrico. De hecho, si coleccionamos en un cuadrado $k \times k$ los números correspondientes a las dimensiones $h^p(\mathcal{N}^*_{L/X}(q))$, con $(p,q) \in [0,p] \times [-k,0] \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, que aparecen en $E_1^{p,q}$, se tiene que dicho cuadrado permanece igual tras hacer la composición de la simetría con respecto a la diagonal $p+q=-k$ y la simetría con respecto a la diagonal $p+q=0$.

En uno de sus trabajos sobre variedades con dual degenerada, [8], Ein ha estudiado las propiedades de la proyección de $X - L$ desde un lugar de contacto general L sobre un espacio lineal de dimensión complementaria. Para extender a toda la variedad esta aplicación hay que efectuar una explosión de X a lo largo del lugar de contacto (que por el teorema de paridad siempre tiene codimensión mayor o igual que 2). En esta explosión aparece de forma natural el fibrado $\mathcal{N}_{L/X}$ como el fibrado vectorial cuyo fibrado proyectivo asociado da el divisor excepcional de la explosión. En este estudio, para algunas variedades de defecto positivo, se puede dar un resultado de anulación de la cohomología del fibrado normal, apoyado en resultados de relación de las cohomologías de variedades birracionalmente equivalentes.

El resultado es el siguiente:

Teorema 2.19 ([8]) *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ variedad proyectiva lisa con dimensión n y defecto k, tal que el haz invertible canónico K_X es $\mathcal{O}_X(b)$, b un número entero y de manera que se da la desigualdad $\frac{n-3k-2}{2} \le 0$. Podemos afirmar:*

i) $H^0(\mathcal{N}^*_{L/X}(a)) = 0$ *para todo* $a \le 0$.
ii) $H^k(\mathcal{N}^*_{L/X}(a)) = 0$ *para todo* $a \ge -k$.
iii) $H^i(\mathcal{N}^*_{L/X}(a)) = 0$ *si* $0 < i < k$ *y para todo* $a \ge \frac{n-3k}{2}$.
iv) $H^i(\mathcal{N}^*_{L/X}(a)) = 0$ *si* $0 < i < k$ *y para todo* $a \le \frac{k-n}{2}$.

Este teorema de Ein nos da, bajo ciertas condiciones, la anulación de la cohomología de distintos *twists* del fibrado conormal. Está señalando que la BSS en estos casos sólo va a tener una cantidad pequeña de columnas con elementos no nulos en su correspondiente término $E_1^{p,q}$, que necesariamente, por la simetría de $E_1^{p,q}$ señalada en la observación anterior, ha de corresponder a las columnas centrales.

Nos gustaría señalar que el teorema de Ein tal y como está escrito en [8] es incorrecto presentando algunos problemas en el caso $(n-3k-2)/2 = 0$.
En efecto, en la demostración que en el trabajo de Ein se propone hay una imprecisión pues la anulación de $h^0(\mathcal{N}^*_{L/X})$ se garantiza por ser menor o igual que la suma de otras dos cantidades, que no necesariamente son ambas nulas (con la notación allí sugerida, $h^1(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(0,2))$ no es necesariamente nulo) [8, lemma 4.3].
De hecho la sección por dos hiperplanos de la variedad espinorial S_4 (como se puede ver en la lista del final del capítulo 3) tiene dimensión 8, defecto 2, y $h^0(\mathcal{N}^*_{L/X}) = 1$.

El lema siguiente se demostrará como un instrumento muy útil para traducir esta información en los resultados de clasificación:

Lema 2.20 *Sea E un fibrado vectorial sobre $\mathbb{P}^k$ y P su polinomio de Hilbert, es decir $P(m) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j h^j(E(m))$, entonces se sigue que:*

$$rk(E) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{j+k}\binom{k}{j}P(-k+j)$$

donde $rk(E)$ es el rango de E.

Demostración.
Por la convergencia de la sucesión espectral de Beilinson de E, y del hecho de que $E_{k+1}^{p,q} = E_{\infty}^{p,q}$, ya que en $E_{k+1}^{p,q}$ todas las aplicaciones son nulas, se tiene la siguiente igualdad para el rango de E:

$$rk(E) = \sum_{-p=0}^{k}\sum_{q=0}^{k}(-1)^{p+q} rk(E_{k+1}^{p,q}).$$

Como cada término de la sucesión espectral de Beilinson se construye del anterior tomando cohomología, entonces:

$$\sum_{-p=0}^{k}\sum_{q=0}^{k}(-1)^{p+q} rk(E_{j+1}^{p,q}) = \sum_{-p=0}^{k}\sum_{q=0}^{k}(-1)^{p+q} rk(E_{j}^{p,q})$$

para todo entero positivo j.
Aplicando recursivamente esta igualdad desde $j = 1$ hasta $k+1$ y observando que en el término $E_1^{p,q}$ de la sucesión espectral de Beilinson se tiene la igualdad:

$$rk(E_1^{p,q}) = \binom{k}{-p} h^q(E(p))$$

con lo que se concluye la igualdad del enunciado.

Otra sencilla prueba del lema se puede hacer tomando restricciones consecutivas de $E(m)$ a los diferentes subespacios lineales de $\mathbb{P}^k$, esto es, $\mathbb{P}^{k-1}$, $\mathbb{P}^{k-2}$, ..., $\mathbb{P}^0$ y calculando el polinomio de Hilbert por medio de las correspondientes sucesiones exactas:

$$0 \to E(a-1)|_{\mathbb{P}^s} \to E(a)|_{\mathbb{P}^s} \to E(a)|_{\mathbb{P}^{s-1}} \to 0.$$

La forma de usar este lema será convertir los resultados de anulación de (2.19) en una ecuación diofántica que involucra al rango del fibrado normal y a unos ciertos números combinatorios. Si podemos demostrar la no existencia de soluciones de dicha ecuación estaremos ante la imposibilidad de existencia del fibrado que tratamos de estudiar.

Profundizaremos en la siguiente sección en las informaciones geométricas acerca de las variedades con dual degenerada que se pueden extraer de la cohomología del fibrado $\mathcal{N}_{L/X}$ (y viceversa).

2.4 Geometría y cohomología

En esta sección vamos, en primer lugar, a extender los resultados de la proposición (1.2) del trabajo [7] que permiten conocer información sobre el número de hiperplanos tangentes a una cierta subvariedad cerrada, conexa y reducida $Y \subset X$, a partir del número de secciones globales de la restricción a dicha variedad Y del fibrado normal de X en el espacio proyectivo ambiente.

Necesitamos la siguientes definiciones:

Definición 2.21 *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad proyectiva lisa de dimensión n e $Y \subset X$ una subvariedad de X. Definimos la* variedad de tangentes a X relativos a Y *y la denotamos $T(Y,X)$ a la colección de todos los espacios tangentes proyectivos inmersos a X en algún punto $y \in Y$, es decir,*

$$T(Y,X) = \bigcup_{y \in Y} T_{X,y}.$$

Definición 2.22 *Sea $\Delta_Y = \{(y,y) : y \in Y\} \subset Y \times X$ la diagonal relativa de Y en X. En las mismas condiciones de la definición anterior se define la variedad de* secantes a X relativas a Y *y se denota $S(Y,X)$ a la colección de todas las rectas secantes a X, esto es, rectas que unen un punto de X y otro punto de Y, es decir,*

$$S(Y,X) = \overline{\bigcup_{(x,y) \in X \times Y - \Delta_Y} < x, y >},$$

donde $< x, y >$ denota la recta que une x con y.

El resultado que anunciábamos al inicio de la sección es el siguiente:

Proposición 2.23 *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad proyectiva lisa de dimensión n e $Y \subset X$ una subvariedad, conexa y cerrada. Son equivalentes:*

i) $dim(< T(Y,X) >) = N - s$
ii) $h^0(\mathcal{N}^*_{X/\mathbb{P}^N}|_Y(1)) = s$
iii) $\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^N}|_Y(-1) = \mathcal{O}_Y^s \oplus F$, con F un fibrado de rango $N - n - s$ y $h^0(F^*) = 0$.

Demostración.
Extraemos del diagrama (1.a) la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to G_X \to \mathcal{O}_X \otimes V \to \mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^N}(-1) \to 0$$

Por tanto $\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^N}(-1)$ es un fibrado generado por secciones globales. Los argumentos de (2.16) dan la equivalencia entre ii) y iii).

Sea el espacio lineal $< T(Y,X) >$ el espacio de direcciones del espacio vectorial W, es decir $P(W) =< T(Y,X) > \subset \mathbb{P}^N = P(V)$. Podemos escribir el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & G_X|_Y & \to & \mathcal{O}_Y \otimes W & \to & F & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & G_X|_Y & \to & \mathcal{O}_Y \otimes V & \to & \mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^N}(-1)|_Y & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & \mathcal{O}_Y \otimes V/W & = & \mathcal{O}_Y \otimes V/W & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Por tanto el fibrado $\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^N}(-1)|_Y$ escinde como suma de F y $\mathcal{O}_Y \otimes V/W$, lo que demuestra que $h^0(\mathcal{N}^*_{X/\mathbb{P}^N}(1)|_Y) \geq N - dim(< T(Y,X) >)$.

Como hay una aplicación inyectiva $\mathcal{N}^*_{X/\mathbb{P}^N}(1)|_Y \hookrightarrow \mathcal{O}_Y \otimes V^*$ entonces el espacio de secciones globales de $\mathcal{N}^*_{X/\mathbb{P}^N}(1)|_Y$ se puede ver como un subespacio U^* de V^* que da una sucesión escindida:

$$0 \to F_1 \to \mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^N}(-1)|_Y \to U \otimes \mathcal{O}_Y \to 0$$

que permite construir un diagrama como el anterior, demostrando la inclusión

$$< T(Y,X) > \subset P(ker(V \to U))$$

y por tanto la desigualdad de dimensiones

$$dim(< T(Y,X) >) \leq N - h^0(\mathcal{N}^*_{X/\mathbb{P}^N}(1)|_Y).$$

Esto demuestra la equivalencia entre i) y ii).

Analicemos las consecuencias que tiene esta proposición sobre el número de secciones globales del fibrado $\mathcal{N}_{L/X}$. Para esto recordamos el lema de Terracini, que afirma lo siguiente [52]:

Lema 2.24 *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad proyectiva lisa y sea $Y \subset X$ una subvariedad irreducible de dimensión r. Entonces se tiene una de las siguientes condiciones:*

i) $dim(T(Y,X)) = r + n$ y $dim(S(Y,X)) = r + n + 1$;
ii) $T(Y,X) = S(Y,X)$

Este lema se puede aplicar en nuestro caso de forma muy simple. Tomamos X, H, L como siempre y estudiamos $T(L,X)$: si se verifica ii) en el lema de Terracini, entonces se tiene la inclusión

$$X \subset S(L,X) = T(L,X) \subset H$$

lo que contradice que X sea no degenerada.
Por tanto estamos en el caso i) y hemos demostrado:

Lema 2.25 *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ variedad de defecto positivo y H y L como siempre, entonces se verifica:*

$$dim(T(L, X)) = n + k.$$

Esta conclusión del lema de Terracini tiene consecuencias sobre el número de secciones globales de $\mathcal{N}_{L/X}$.

Lema 2.26 *La dimensión del espacio de secciones globales del fibrado $\mathcal{N}_{L/X}$ verifica la desigualdad*

$$h^0(\mathcal{N}_{L/X}) \geq n.$$

Demostración.
De la sucesión exacta:

$$0 \to \mathcal{N}^*_{X/\mathbb{P}^N}(1)|_L \to \mathcal{O}_L^{\oplus N-k} \to \mathcal{N}_{L/X} \to 0$$

se obtiene la desigualdad

$$h^0(\mathcal{N}^*_{X/\mathbb{P}^N}(1)|_L) \geq N - k - h^0(\mathcal{N}_{L/X})$$

Y como de la proposición (2.23) se tiene que $h^0(\mathcal{N}^*_{X/\mathbb{P}^N}(1)|_L) = N - dim(< T(L, X) >)$, entonces, aplicando el lema de Terracini:

$$h^0(\mathcal{N}_{L/X}) \geq dim(< T(L, X) >) - k \geq n + k - k = n \qquad (2.b)$$

como queríamos demostrar.

Corolario 2.27 *Si $h^0(\mathcal{N}_{L/X}) = n$ entonces $T(L, X)$ es un espacio lineal de dimensión $n + k$.*

Demostración.
Basta observar que en las hipótesis del corolario las desigualdades de (2.b) se convierten en igualdades.

Observación 2.28 *La cota sobre el número de secciones globales es fina. Se alcanza, como veremos más adelante, en todos los ejemplos en los que $dim(X) = dim(X^*)$, como la inmersión de Plücker $G(1, 4) \subset \mathbb{P}^9$, la variedad espinorial $S_4 \subset \mathbb{P}^{15}$ y la inmersión de Segre $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^{2n-1}$.*
Además en estos casos se tiene un recíproco en cierto sentido. El primer dato que conocemos en estas variedades es que $n + k = N - 1$ y por tanto necesariamente la variedad de tangentes a lo largo de un lugar de contacto ha de ser lineal, pues está contenido en un hiperplano, $T(L, X) = \mathbb{P}^{n+k}$, a posteriori obtenemos que $h^0(\mathcal{N}_{L/X}) = n$.

Podemos lanzar la siguiente pregunta:

Pregunta: *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad de defecto positivo, $h \in X^*$ un punto general y $L = \mathbb{P}^k$ el lugar de contacto de X y H.*

¿Si $T(L, X)$ es un espacio lineal, esto es, $T(L, X) = \mathbb{P}^{n+k}$, entonces necesariamente $h^0(\mathcal{N}_{L/X}) = n$?

¿Y debe ser $n + k = N - 1$?

2.5 Estructura de la restricción a un plano general

Hemos estudiado en secciones anteriores la restricción del fibrado normal a un lugar de contacto a una recta, dando interesantes resultados sobre dicho fibrado. Vamos ahora a estudiar la restricción a un plano general $R = \mathbb{P}^2$ de L para lo que necesitamos que $k \geq 2$. El objetivo fundamental será usar dicha descripción de la estructura de la restricción a un plano general de $\mathcal{N}_{L/X}$ y los datos geométricos y algebraicos referidos a dicho fibrado para eliminar un gran número de posibles variedades de defecto positivo, dada la imposible existencia del fibrado $\mathcal{N}_{L/X}$ asociado.

Antes de comenzar este estudio necesitamos las siguientes definiciones:

Definiciones 2.29 ([40]) *Una* mónada sobre $\mathbb{P}^k$ *es un complejo:*

$$0 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \to 0$$

de fibrados vectoriales sobre $\mathbb{P}^k$ tal que la sucesión es exacta en A y en C y tal que $Im(a)$ es un subfibrado de B.

El fibrado vectorial:

$$E = ker(b)/Im(a)$$

es la cohomología de la mónada.

Teorema 2.30 *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad de defecto positivo $k \geq 2$, $h \in X^*$ un hiperplano tangente general y L el lugar de contacto de X y H. Sea $R \subset L$ un plano general en L, entonces el fibrado $\mathcal{N}_{L/X}|_R$ tiene la siguiente estructura:*

$$\mathcal{N}^*_{L/X}|_R = \mathcal{O}_R(-1)^{\oplus h^0(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R)} \oplus \mathcal{M} \oplus \mathcal{O}_R^{\oplus h^0(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R)}$$

donde $\mathcal{M}$ es la cohomología de una mónada del tipo:

$$\mathcal{O}_R(-1)^{\oplus h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R)} \xrightarrow{f} \Omega_R(1)^{\oplus h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R(-1))} \xrightarrow{g} \mathcal{O}_R^{\oplus h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R)}$$

Demostración

El isomorfismo entre $\mathcal{N}_{L/X} \simeq \mathcal{N}^*_{L/X}(-1)$ provenía de una sección de $S^2(\mathcal{N}^*_{L/X})(1)$ de rango máximo en cada punto. Por tanto la restricción a R de esa sección reproduce el isomorfismo, que naturalmente también es simétrico:

$$\mathcal{N}^*_{L/X}|_R \simeq \mathcal{N}_{L/X}(1)|_R.$$

Por otro lado el fibrado $\mathcal{N}^*_{L/X}|_R$ es globalmente generado por lo que razonando como en (2.16) se tiene que el fibrado escinde como suma de:

$$\mathcal{N}^*_{L/X}|_R = \mathcal{O}_R(-1)^{\oplus h^0(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R)} \oplus \mathcal{M} \oplus \mathcal{O}_R^{\oplus h^0(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R)}.$$

Estudiamos la BSS del fibrado $\mathcal{M}$, que tiene en su primer paso el siguiente aspecto:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & 0 & \to & 0 \\ \mathcal{O}_R(-1)^{\oplus h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R)} & \xrightarrow{f} & \Omega_R(1)^{\oplus h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R(-1))} & \xrightarrow{g} & \mathcal{O}_R^{\oplus h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R)} \\ 0 & \to & 0 & \to & 0 \end{array}$$

Y que por tanto estaciona en el segundo paso. Por la convergencia del teorema de Beilinson se tiene el resultado.

Podemos dar alguna información adicional de dicha mónada.

Proposición 2.31 *La mónada del teorema anterior se puede escribir:*

$$\mathcal{O}_R(-1)^{\oplus h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R)} \xrightarrow{f} \underline{\Omega}_R(1)^{\oplus h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R(-1))} \xrightarrow[\ \overline{\ \ }\ ]{f^t} \mathcal{O}_R^{\oplus h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R)}$$

es decir,

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_R(-1)^{\oplus h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R)} & \xrightarrow{f} & \Omega_R(1)^{\oplus h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R(-1))} & & \\ & & \downarrow \simeq & & \\ & & (\Omega_R(1)^{\oplus h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R(-1))})^*(-1) & \xrightarrow{f^t} & \mathcal{O}_R^{\oplus h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R)} \end{array}$$

Demostración.
Por el teorema anterior $\mathcal{M}$ es la cohomología de la mónada

$$\mathcal{O}_R(-1)^{\oplus h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R)} \xrightarrow{f} \Omega_R(1)^{\oplus h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R(-1))} \xrightarrow{g} \mathcal{O}_R^{\oplus h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R)}$$

y $\mathcal{M}^*(-1)$ es isomorfo a $\mathcal{M}$ por la unicidad de la descomposición.
Este fibrado $\mathcal{M}^*(-1)$ es la cohomología de la mónada resultante de dualizar y multiplicar tensorialmente por $\mathcal{O}_R(-1)$ la mónada anterior:

$$\mathcal{O}_R(-1)^{\oplus h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R)} \xrightarrow{f^t} (\Omega_R(1)^{\oplus h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R(-1))})^*(-1) \xrightarrow{g^t} \mathcal{O}_R^{\oplus h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R)}.$$

Aplicamos la proposición 4 de [2] y el isomorfismo entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^*(-1)$,

$$h : \mathcal{M} \to \mathcal{M}^*(-1)$$

extiende a un morfismo entre las mónadas, único salvo

$$Hom(\Omega_R(1)^{\oplus h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R(-1))}, \mathcal{O}_R(-1)^{\oplus h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R)}) = 0$$

y salvo

$$Hom(\mathcal{O}_R^{\oplus h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R)}, \Omega_R(1)^{\oplus h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R(-1))}) = 0.$$

Por tanto la extensión a la mónada es única.
Lo mismo se puede aplicar a h^{-1} lo que nos permite concluir el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}_R(-1)^{\oplus h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R)} & \xrightarrow{f} & \Omega_R(1)^{\oplus h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R(-1))} & \xrightarrow{g} & \mathcal{O}_R^{\oplus h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R)} \\
\downarrow & & \downarrow H & & \downarrow \\
\mathcal{O}_R(-1)^{\oplus h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R)} & \xrightarrow{f^t} & (\Omega_R(1)^{\oplus h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R(-1))})^*(-1) & \xrightarrow{g^t} & \mathcal{O}_R^{\oplus h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R)}
\end{array}$$

Y se concluye por la proposición 5 de [2] que indica que el isomorfismo H es simétrico.

Y entonces, por (2.10), se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.32 *Como H es un isomorfismo simétrico $h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_R(-1))$ es un número par.*

2.6 Clasificación hasta rango 10

El estudio que hemos hecho de la restricción a un plano general del fibrado normal $\mathcal{N}_{L/X}$ permite dar unos resultados de clasificación para rangos pequeños que serán luego fundamentales para establecer resultados de clasificación de variedades con dual degenerada.

Notación 2.33 *Para simplificar las notaciones entenderemos que el fibrado vectorial E es la restricción del fibrado conormal al lugar de contacto L de X y H (h general en X^*) a un plano general $R \subset L$, es decir:*

$$E = \mathcal{N}^*_{L/X}|_R$$

La siguiente observación es una consecuencia directa del tipo de escisión de E y de la sucesión:

$$0 \to E \to E(1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{rk(E)/2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{rk(E)/2}(1) \to 0.$$

Observación 2.34 *Si $H^0(E) = 0$ se tiene que $h^0(E(1)) \leq 3rk(E)/2$*

Por otro lado, si $h^0(E) = 0$, en la sucesión exacta de evaluación de las secciones globales:

$$0 \to K \to H^0(E(1)) \otimes \mathcal{O}_R \to E(1) \to 0$$

se observa que $h^0(K) = h^1(K) = 0$.
Tomando entonces la sucesión de restricción a T una recta en R, $T \subset R$, se obtiene:

$$0 \to K \to K(1) \to K(1)|_T \to 0$$

lo que implica

$$h^0(K(1)) = h^0(K(1)|_T).$$

Que viene a decir que el número de -1's en el tipo de escisión de K en T no depende de la recta T, lo que permite sacar algunos interesantes resultados:

Lema 2.35 *Si* $H^0(E) = 0$ *se tiene que:*

i) Si $h^0(E(1)) = 3rk(E)/2$ *entonces* $E = \Omega_R(1)^{\oplus rk(E)/2}$
ii) Si $h^0(E(1)) = 3rk(E/2) - 1$ *entonces* E *aparece en una sucesión exacta del tipo:*

$$0 \to E \to \mathcal{O}_R^{\oplus 3rk(E)/2-1} \to \mathcal{O}_R^{\oplus rk(E)/2-2}(1) \oplus \mathcal{O}_R(2) \to 0$$

Demostración.
De la sucesión de evaluación de secciones globales

$$0 \to K \to H^0(E(1)) \otimes \mathcal{O}_R \to E(1) \to 0$$

obtenemos

$$h^0(K) = h^1(K) = h^0(K(-1)) = h^1(K(-1)) = 0.$$

Por tanto, para cada recta $T \subset R$, se tiene que $h^0(K|_T) = 0$. De modo que $K|_T$ es un fibrado de rango igual a $rk(E)/2$, y el tipo de escisión verifica:

i) $a_i^T < 0$ para todo i
ii) $\Sigma a_i^t = rk(E)/2$

Por tanto K es uniforme de tipo $(-1, -1, -1, ..., -1)$ y de la clasificación de dichos fibrados [10] se concluye que es necesariamente escindido como suma de haces invertibles:

$$F = \mathcal{O}_R(-1)^{rk(E)/2}.$$

Entonces la sucesión exacta de evaluación es:

$$0 \to \mathcal{O}_R(-1)^{\oplus rk(E)/2} \to H^0(E(1)) \otimes \mathcal{O}_R \to E(1) \to 0$$

De modo que $h^1(E) = 0$ y por tanto la BSS es, en su primer término:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \to & 0 & \to 0 \\ 0 & \to & \Omega_R(1)^{\oplus rk(E)/2} & \to 0 \\ 0 & \to & 0 & \to 0 \end{array}$$

concluyéndose el resultado i).

Para ver ii) basta notar que el fibrado K es ahora uniforme de tipo $(-2, -1, -1, .., -1)$ lo que apelando de nuevo a los resultados de clasificación de fibrados uniformes [10] indica que el fibrado K es uno de los siguientes:

$$K = \begin{cases} \mathcal{O}_R(-1)^{\oplus rk(E)/2-2} \oplus \mathcal{O}_R(-2) \\ \mathcal{O}_R(-1)^{\oplus rk(E)/2-3} \oplus \Omega_R \end{cases}$$

Como $H^1(K) = 0$, entonces necesariamente K debe ser totalmente escindido. Dualizando la sucesión y aplicando el isomorfismo entre E y $E^*(-1)$ se concluye ii).

Y ya estamos en condiciones de dar resultados clasificatorios para los fibrados E de rango menor o igual que 10.

• **Rango 2.** En este caso se aplica la clasificación de fibrados uniformes y obtenemos dos posibilidades

$$E = \begin{cases} \mathcal{O}_R(-1) \oplus \mathcal{O}_R \\ \Omega_R(1) \end{cases}$$

Y como ya señalamos el segundo caso no es posible, por tanto necesariamente el fibrado es escindido.

• **Rango 4.** Entonces podemos tener:

$$h^0(E) = \begin{cases} 2 & E = \mathcal{O}_R(-1)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_R^{\oplus 2} \\ 1 & E = \mathcal{O}_R(-1) \oplus \Omega_R(1) \oplus \mathcal{O}_R \\ 0 & h^0(E(1)) = 6 \qquad\qquad E = \Omega_R(1)^{\oplus 2} \end{cases}$$

La segunda posiblididad no es válida, por tanto

$$E = \begin{cases} \mathcal{O}_R(-1)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_R^{\oplus 2} \\ \Omega_R(1)^{\oplus 2} \end{cases}$$

• **Rango 6.** Entonces podemos tener:

$$h^0(E) = \begin{cases} 3 & E = \mathcal{O}_R(-1)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}_R^{\oplus 3} \\ 2 & E = \mathcal{O}_R(-1)^{\oplus 2} \oplus \Omega_R(1) \oplus \mathcal{O}_R^{\oplus 2} \\ 1 & E = \mathcal{O}_R(-1) \oplus \Omega_R(1)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_R \\ 0 & 8 \leq h^0(E(1)) \leq 9 \end{cases}$$

Considerando las posibilidades válidas tenemos:

$$E = \begin{cases} \mathcal{O}_R(-1)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}_R^{\oplus 3} \\ \mathcal{O}_R(-1) \oplus \Omega_R(1)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_R \\ E_3 \end{cases}$$

Donde E_3 aparece como núcleo en la sucesión:

$$0 \to E_3 \to \mathcal{O}_R^{\oplus 8} \to \mathcal{O}_R(1) \oplus \mathcal{O}_R(2) \to 0.$$

Y hasta donde estos métodos van sirviendo obtenemos los siguientes resultados:

• **Rango 8.** Donde se puede tener:

$$h^0(E) = \begin{cases} 4 & E = \mathcal{O}_R(-1)^{\oplus 4} \oplus \mathcal{O}_R^{\oplus 4} \\ 3 & E = \mathcal{O}_R(-1)^{\oplus 3} \oplus \Omega_R(1) \oplus \mathcal{O}_R^{\oplus 3} \\ 2 & E = \mathcal{O}_R(-1)^{\oplus 2} \oplus \Omega_R(1)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_R^{\oplus 2} \\ 1 & E = \mathcal{O}_R(-1) \oplus \Omega_R(1)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}_R \\ 1 & E = \mathcal{O}_R(-1) \oplus E_3 \oplus \mathcal{O}_R \\ 0 & 10 \leq h^0(E(1)) \leq 12 \end{cases}$$

Si $h^0(E) = 12$ tenemos el fibrado $\Omega_R(1)^{\oplus 4}$.

Si $h^0(E) = 11$ tenemos el fibrado que aparece en una sucesión

$$0 \to E_4^1 \to \mathcal{O}_R^{\oplus 11} \to \mathcal{O}_R(1)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_R(1) \to 0.$$

Si $h^0(E) = 10$ tenemos dos posibilidades

$$0 \to E_4^2 \to \mathcal{O}_R^{\oplus 10} \to \mathcal{O}_R(2) \oplus \mathcal{O}_R(2) \to 0.$$

$$0 \to E_4^3 \to \mathcal{O}_R^{\oplus 10} \to \mathcal{O}_R(3) \oplus \mathcal{O}_R(1) \to 0$$

Considerando las posibilidades válidas:

$$E = \begin{cases} \mathcal{O}_R(-1)^{\oplus 4} \oplus \mathcal{O}_R^{\oplus 4} \\ \mathcal{O}_R(-1)^{\oplus 2} \oplus \Omega_R(1)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_R^{\oplus 2} \\ \mathcal{O}_R(-1) \oplus E_3 \oplus \mathcal{O}_R \\ E_4^2 \\ \Omega_R(1)^{\oplus 4} \end{cases}$$

- **Rango 10.** En este caso se tiene:

$$h^0(E) = \begin{cases} 5 & E = \mathcal{O}_R(-1)^{\oplus 5} \oplus \mathcal{O}_R^{\oplus 5} \\ 4 & E = \mathcal{O}_R(-1)^{\oplus 4} \oplus \Omega_R(1) \oplus \mathcal{O}_R^{\oplus 4} \\ 3 & E = \mathcal{O}_R(-1)^{\oplus 3} \oplus \Omega_R(1)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_R^{\oplus 3} \\ 2 & E = \mathcal{O}_R(-1)^{\oplus 2} \oplus \Omega_R(1)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}_R^{\oplus 2} \\ 2 & E = \mathcal{O}_R(-1)^{\oplus 2} \oplus E_3 \oplus \mathcal{O}_R^{\oplus 2} \\ 1 & E = \mathcal{O}_R(-1) \oplus \Omega_R(1)^{\oplus 4} \oplus \mathcal{O}_R \\ 1 & E = \mathcal{O}_R(-1) \oplus E_4^i \oplus \mathcal{O}_R \\ 0 & 12 \leq h^0(E(1)) \leq 15 \end{cases}$$

Si $h^0(E(1)) = 15$, entonces $E = \Omega_R(1)^{\oplus 5}$.

Si $h^0(E(1)) = 14$, entonces

$$0 \to E_5^1 \to \mathcal{O}_R^{\oplus 14} \to \mathcal{O}_R(2) \oplus \mathcal{O}_R(1)^{\oplus 3} \to 0.$$

Si $h^0(E(1)) = 13$, entonces dos posiblidades:

$$0 \to E_5^2 \to \mathcal{O}_R^{\oplus 13} \to \mathcal{O}_R(3) \oplus \mathcal{O}_R(1)^{\oplus 2} \to 0.$$

$$0 \to E_5^3 \to \mathcal{O}_R^{\oplus 13} \to \mathcal{O}_R(1) \oplus \mathcal{O}_R(2)^{\oplus 2} \to 0.$$

Si $h^0(E(1)) = 12$, entonces tres posibilidades:

$$0 \to E_5^4 \to \mathcal{O}_R^{\oplus 12} \to \mathcal{O}_R(1) \oplus \mathcal{O}_R(4) \to 0.$$

$$0 \to E_5^5 \to \mathcal{O}_R^{\oplus 12} \to \mathcal{O}_R(2) \oplus \mathcal{O}_R(3) \to 0.$$

$$0 \to E_5^6 \to \mathcal{O}_R^{\oplus 12} \to \Omega_R(4) \to 0.$$

Por tanto se tiene que

$$E = \begin{cases} \mathcal{O}_R(-1)^{\oplus 5} \oplus \mathcal{O}_R^{\oplus 5} \\ \mathcal{O}_R(-1)^{\oplus 3} \oplus \Omega_R(1)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_R^{\oplus 3} \\ \mathcal{O}_R(-1) \oplus \Omega_R(1)^{\oplus 4} \oplus \mathcal{O}_R \\ \mathcal{O}_R(-1)^{\oplus 2} \oplus E_3 \oplus \mathcal{O}_R^{\oplus 2} \\ \mathcal{O}_R(-1) \oplus E_4^2 \oplus \mathcal{O}_R \\ E_5^i \quad i = 1, 2, 6 \end{cases}$$

En las próximas secciones utilizaremos estas listas de fibrados para dar resultados de clasificación de variedades con dual degenerada.

La técnica de clasificación de variedades con dual degenerada que vamos a desarrollar a continuación consistirá primeramente en fijar n y k y por tanto el rango del fibrado normal y la dimensión del espacio proyectivo sobre el que se define.

Con dichos elementos fijados podemos usar:

i) el hecho de que este fibrado es uniforme y conocemos su tipo de escisión;

ii) si $k \geq 2$ las clasificaciones que hemos establecido hasta rango 10 de la restricción de $\mathcal{N}_{L/X}^*$ a un plano general;

iii) los teoremas de anulación de la cohomología de los *twists* del fibrado $\mathcal{N}_{L/X}^*$ contenidos en (2.19) y las condiciones que establecen por medio de (2.20) y de la BSS (planteamiento de una ecuación diofántica);

iv) consideraciones geométricas propias de las variedades con dual degenerada traducidas en condiciones sobre la cohomología del fibrado $\mathcal{N}_{L/X}$, como por ejemplo (2.26);

e intentar establecer la no posible existencia del fibrado en cuestión (por tanto no existe la variedad) o determinarlo completamente y tratar de dar información adicional sobre la posible variedad.

Capítulo 3

Variedades regladas, secciones hiperplanas y productos

En el capítulo que comenzamos vamos a describir el fibrado normal al lugar de contacto general de variedades con dual degenerada construídas a través de otros ejemplos de variedades con defecto positivo, a saber, secciones hiperplanas generales de variedades con dual degenerada, productos de variedades, una de las cuales tiene defecto positivo y mayor que la dimensión de la otra, o variedades regladas. En particular caracterizaremos totalmente las variedades regladas en términos de su fibrado normal como las variedades de defecto positivo y estrictamente mayor que 1 cuyo fibrado $\mathcal{N}^*_{L/X}$ escinde totalmente como suma de haces invertibles.
Finalmente podremos presentar la tabla de todos los fibrados normales al lugar de contacto de X y H hiperplano tangente general para la lista de variedades con dual degenerada conocidos.

3.1 Caracterización de las variedades regladas

Como ya señalábamos al hablar de cómo debería ser un resultado de clasificación de variedades con dual degenerada, éste debe reconocer las variedades regladas, que son ejemplos que van a aparecer para cualquier dimensión y defecto.
Éste es el resultado central de esta sección: caracterizar las variedades regladas como aquellas variedades de dual degenerada cuyo fibrado normal al lugar de contacto escinde completamente como suma de fibrados de línea, siempre en el caso de que el defecto sea mayor o igual que dos, ya que el teorema de Grothendieck asegura esta escisión en el caso de fibrados sobre una recta.
La demostración de este teorema es esencialmente la propuesta por Ein en su trabajo [7]. Señalar que la hemos simplificado introduciendo la caracterización de los espacios lineales [47], [43] como aquellas variedades que contienen una familia de dimensión alta de espacios lineales. Queremos acentuar el papel fundamental en la demostración de la estructura del fibrado normal al lugar de contacto general $\mathcal{N}_{L/X}$, en la línea del enfoque escogido para toda la memoria. El trabajo de Ein remarca más bien que, si el defecto de la variedad es grande en comparación con su dimensión, la variedad ha de ser reglada;

basado en la estructura de los fibrados uniformes sobre un espacio proyectivo de rango menor que la dimensión del espacio.

Teorema 3.1 *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad de defecto positivo $k \geq 2$, $H \in X^*$ general y L el lugar de contacto entre X y H. En estas condiciones son equivalentes:*

i) X es una variedad reglada.

ii) El fibrado $\mathcal{N}_{L/X}$ escinde completamente como suma de fibrados de línea, es decir, $\mathcal{N}_{L/X} = \mathcal{O}_L(1)^{\oplus n-k/2} \oplus \mathcal{O}_L^{\oplus n-k/2}$.

Demostración.
Para ver la implicación de i) a ii), recordamos del ejemplo (1.23) que el lugar de contacto general L está contenido en una fibra F, que es un espacio lineal de dimensión $n-m$, $F = \mathbb{P}^{n-m}$. Entonces se tiene la sucesión exacta:

$$0 \to \mathcal{N}_{L/F} \to \mathcal{N}_{L/X} \to \mathcal{N}_{F/X} \to 0$$

que se puede escribir:

$$0 \to \mathcal{O}_L(1)^{\oplus n-m-k} \to \mathcal{N}_{L/X} \to \mathcal{O}_L^{\oplus m} \to 0$$

Como $h^1(\mathcal{O}_L(1)) = 0$ esta sucesión es escindida con lo cual:

$$\mathcal{N}_{L/X} = \mathcal{O}_L(1)^{\oplus n-m-k} \oplus \mathcal{O}_L^{\oplus m} \tag{3.a}$$

lo que garantiza la implicación de i) a ii).

Antes de demostrar la implicación de ii) a i) vamos a incluir aquí el siguiente corolario, consecuencia directa de la igualdad (3.a).

Corolario 3.2 *Si X es reglada sobre Y y $dim(Y) = m$ entonces $k = max\{0, n-2m\}$.*

Demostración.
En efecto, recordamos que $\mathcal{N}_{L/X}$ es un fibrado uniforme cuyo tipo de escisión es $(0, 0, ..., 1, 1)$ donde hay $(n-k)/2$ ceros y el mismo número de unos. Entonces por la descomposición que señala $(3.a)$ se tiene que $n-m-k = (n-k)/2$ lo que concluye que $k = n-2m$.

Demostramos la otra implicación.

Tomamos $x \in L$ general y vamos a estudiar el esquema de Hilbert $\mathcal{H}_x$ que parametriza los espacios lineales S de dimensión k en X que pasan por x. Como la cohomología del fibrado normal de L en X verifica:

$$h^0(\mathcal{N}_{L/X} \otimes \mathcal{I}_x) = km$$

$$h^1(\mathcal{N}_{L/X} \otimes \mathcal{I}_x) = 0$$

donde $m = \frac{n-k}{2}$, entonces el punto l correspondiente a L en $\mathcal{H}_x$ es un punto liso del esquema de Hilbert $\mathcal{H}_x$. Tomamos entonces la única componente irreducible de $\mathcal{H}_x$ que contiene a l y la denotamos $\mathcal{H}_x^0$.

Construimos ahora la siguiente variedad de incidencia:

$$I := \{(y, s) \in X \times \mathcal{H}_x^0 : \ y \in S \ s \in \mathcal{H}_x^0\} \xrightarrow{p} X$$

Y la dimensión de $p(I)$ será, con y general en la imagen:

$$dim(p(I)) = km + k - dim(p^{-1}(y))$$

Ahora bien, la fibra general de p es

$$p^{-1}(y) = \{s \in \mathcal{H}_x^0 : \ \overline{xy} \subset S\}$$

es decir el conjunto de espacios lineales de dimensión k de la familia que contienen a la recta que une x e y.
Como para S general en $\mathcal{H}_x^0$ el fibrado normal vuelve a escindir de la misma manera, se tiene que, si $\overline{xy} \subset S$ entonces:

$$h^0(\mathcal{N}_{S/X} \otimes \mathcal{I}_{\overline{xy}}) = (k-1)$$

$$h^1(\mathcal{N}_{S/X} \otimes \mathcal{I}_{\overline{xy}}) = 0$$

Por tanto tenemos $dim(p(I)) = k(m+1) - (k-1)m = k + m$.

La variedad $p(I)$ es entonces una variedad de dimensión $k+m$ que contiene una familia de dimensión km de k-planos por un punto. Tomando una sección hiperplana general $M \cap p(I)$, que evite a x, $x \notin M$, se tiene una variedad de dimensión $k+m-1$, $p(I) \cap M$, con una familia de dimensión km de $k-1$-planos. Como la dimensión de la grassmanniana $G(k-1, k+m-1)$ es km, entonces por la caracterización de los espacios lineales de [48] se tiene que $p(I) \cap M$ es lineal y por tanto también lo es $p(I)$.

Finalmente tomamos la sucesión

$$0 \to \mathcal{N}_{L/p(I)} \to \mathcal{N}_{L/X} \to \mathcal{N}_{p(I)/X}|_L \to 0$$

que se puede escribir

$$0 \to \mathcal{O}_L(1)^{\oplus m} \to \mathcal{O}_L(1)^{\oplus m} \oplus \mathcal{O}_L^{\oplus m} \to \mathcal{N}_{p(I)/X}|_L \to 0$$

De esta manera $\mathcal{N}_{p(I)/X}|_L$ es trivial y como por hipótesis la dimensión de L es mayor o igual que 2 se tiene [40, thm. 2.3.2] que $\mathcal{N}_{p(I)/X}$ es trivial.

Por tanto existe un espacio lineal, $p(I)$, de dimensión $k+m$ en X de modo que $\mathcal{N}_{p(I)/X}$ es trivial, y así X es reglada por [8, thm. 1.7], ya que $n \leq 2(k+m) - 1$ es equivalente a $n - 2m - 1 > 0$ y a $k > 1$.

Y se puede observar en general, para variedades que contienen espacios lineales cuyo fibrado normal tiene una estructura especial, el siguiente corolario.

Corolario 3.3 *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ variedad lisa de dimensión n que contiene un espacio lineal $L \subset X$ de dimensión k de modo que $\mathcal{N}_{L/X} = \mathcal{O}_L^{\oplus m} \oplus \mathcal{O}_L(1)^{\oplus n}$ y con $n - 2m - 1 > 0$ entonces X es una variedad reglada.*

Demostración.
Basta observar que la construcción que hemos realizado en la demostración de ii) a i) no ha utilizado más que la escisión del fibrado $\mathcal{N}_{L/X}$.

Una vez caracterizadas las variedades regladas en términos de su fibrado normal, conviene distinguir en dicho fibrado los dos procesos que hemos señalado de construcción de nuevos ejemplos, esto es, las secciones hiperplanas y los productos.

3.2 Secciones hiperplanas

En esta sección vamos a ver cómo se construye el fibrado $\mathcal{N}_{L/X}$ en el caso de la toma de secciones hiperplanas de variedades de defecto positivo . Buscamos maneras de reconocer este proceso en el fibrado normal al lugar de contacto general, para encontrar la variedad básica que produce el nuevo ejemplo, que será la que intentaremos clasificar.

El resultado básico para esta primera parte es la siguiente proposición que sirve para establecer condiciones sobre una variedad de dual degenerada para poder ser una sección hiperplana general de otra variedad de defecto positivo.

Proposición 3.4 *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ y $h \in \mathbb{P}^{N*}$ un hiperplano general. Denotamos por Y la sección hiperplana $X \cap H = Y$. Sea $h_1 \in X^*$ un hiperplano tangente general y L_1 el lugar de contacto de X y H_1. Y sea $L = L_1 \cap H$ el lugar de contacto de Y y $H \cap H_1$. En estas condiciones se tiene el isomorfismo*

$$\mathcal{N}_{L_1/X}|_L \simeq \mathcal{N}_{L/Y}$$

Demostración.
Tomamos el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & TY & \to & T\mathbb{P}^{N-1}|_Y & \to & \mathcal{N}_{Y/\mathbb{P}^{N-1}} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f & & \\
0 & \to & TX|_Y & \to & T\mathbb{P}^N|_Y & \to & \mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^N}|_Y & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & \mathcal{O}_Y(1) & = & \mathcal{O}_Y(1) & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Por tanto los isomorfismos:

$$\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^N}|_Y \xrightarrow{f^{-1}} \mathcal{N}_{Y/\mathbb{P}^{N-1}} \qquad \mathcal{N}_{L_1/\mathbb{P}^N}|_L \xrightarrow{g} \mathcal{N}_{L/\mathbb{P}^{N-1}}$$

nos permiten concluir con el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{N}_{L/Y} & \rightarrow & \mathcal{N}_{L/\mathbb{P}^{N-1}} & \rightarrow & \mathcal{N}_{Y/\mathbb{P}^{N-1}}|_L & \rightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow g & & \uparrow f^{-1} & & \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{N}_{L_1/X}|_L & \rightarrow & \mathcal{N}_{L_1/\mathbb{P}^N}|_L & \rightarrow & \mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^N}|_L & \rightarrow & 0 \end{array}$$

que muestra el isomorfismo entre $\mathcal{N}_{L/Y}$ y $\mathcal{N}_{L_1/X}|_L$.

Por tanto esta proposición muestra que el fibrado $\mathcal{N}_{L/Y}$, en el caso en que Y es una sección hiperplana de otra variedad con defecto positivo, es restricción de un fibrado sobre un espacio proyectivo de dimensión una unidad mayor al defecto de Y que cumple todas las condiciones que se le pueden poner al fibrado normal al lugar de contacto de una variedad con defecto positivo.

Definición 3.5 *Diremos que $Y \subset \mathbb{P}^{N-1}$ es* extendible (de forma lisa) *si existe $X \subset \mathbb{P}^N$ (lisa) que no es un cono sobre Y y un hiperplano $G = \mathbb{P}^{N-1} \subset \mathbb{P}^N$ de modo que $Y = X \cap G$. En estas condiciones X es una* extensión (lisa) *de Y.*

Una vez establecido el resultado para secciones hiperplanas generales, debemos tratar de establecer un recíproco, en el sentido de preguntarnos cómo son las extensiones lisas de variedades con duales degeneradas. Cuestionarnos si a su vez dichas extensiones tienen defecto positivo y si los fibrados normales son entonces extensión de un fibrado sobre un espacio proyectivo de dimensión igual al defecto de la variedad de partida a un espacio proyectivo de dimensión una unidad mayor, con las condiciones del fibrado normal al lugar de contacto.

Proposición 3.6 *Sea $Y \subset \mathbb{P}^{N-1}$ una variedad de defecto positivo k_Y, $H \in Y^*$ un hiperplano tangente general y L el lugar de contacto entre Y y H. Si existe una extensión lisa $X \subset \mathbb{P}^N$ de Y de modo que $X \cap G = Y$, con G un hiperplano de $\mathbb{P}^N$ entonces:*

i) $k_X = k_Y + 1$,

ii) el lugar de contacto general L es sección por G de un lugar de contacto de X,

iii) el fibrado $\mathcal{N}_{L/X}$ es la restricción de un fibrado sobre $\mathbb{P}^{k_Y+1}$ que cumple todas las condiciones que se puedan poner al fibrado normal a un lugar de contacto general en una variedad de dual degenerada.

Demostración.

Supongamos primeramente que $def(X) > 0$.

Siguiendo el razonamiento de Holme [21] tomamos la proyección $\Pi_G : \mathbb{P}^{N*} - G \rightarrow \mathbb{P}^{(N-1)*}$ que asocia a cada hiperplano H del espacio $\mathbb{P}^N$ el hiperplano de G resultante de tomar la intersección $H \cap G$.

Afirmamos que se tiene una aplicación genéricamente uno a uno $\Pi_G : X^* \rightarrow Y^*$.

En efecto, comprobemos en primer lugar que la imagen $\Pi_G(X^*)$ esta contenida en Y^*. Sea un hiperplano general h_1 en X^*. Como k_X es positivo se tiene que el lugar de contacto de H_1 y X es un espacio lineal L_1 de dimensión positiva. Por tanto este espacio corta a Y, con lo que H_1 es tangente a X en un punto y de Y y por tanto $H_1 \cap G$ es tangente a la variedad Y en el punto y.

Veamos ahora que $\Pi_G : X^* \to Y^*$ es sobreyectiva.
Tomamos H en Y^* y por tanto H es tangente a Y en algún punto y de Y (recordar que todos los puntos de Y^* son tangentes a Y, si son puntos lisos, a lo largo de un espacio lineal de dimensión igual al defecto, y si son singulares en una unión de espacios lineales de dicha dimensión). Tomando el hiperplano $H_1 =< H, T_{X,y} >$ se tiene la anteimagen buscada.
Veamos finalmente que es genéricamente inyectiva.
Sea h general en Y^* y L el lugar de contacto de H e Y. Supongamos la existencia de h_1 y h_2 puntos de X^* de modo que se verifique $H_1 \cap G = H_2 \cap G = H$. Por la proposición (2.23) sabemos que:

$$dim(< T(L,Y) >) = N - 1 - h^0(\mathcal{N}^*_{X/\mathbb{P}^N}|_L(1)) = dim(< T(L,X) >) - 1,$$

por lo que se tiene que $< T(L,X) >=< T(L,Y), T_{X,y} >$ para cualquier punto y de L. En cualquier caso, como vimos en párrafos anteriores, tanto H_1 como H_2 son tangentes a X en algún punto y_1 e y_2 de L. Por tanto

$$H_1 =< H, T_{X,y_1} >=< H, T_{X,y_2} >= H_2.$$

De este modo hemos comprobado que $dim(X^*) = dim(Y^*)$ y por tanto que $k_Y = k_X - 1$. Y además que el lugar de contacto general en Y es la sección hiperplana de un lugar de contacto en X.

Supongamos ahora que $k_X = 0$.
Debemos evitar la posibilidad de que una sección hiperplana lisa de una variedad cuya variedad dual es una hipersuperficie tenga defecto positivo.
Tomo el divisor siguiente de la variedad conormal:

$$\mathcal{P}_X|_Y = \{(y, H_1) \subset \mathcal{P}_X : \ y \in Y\}$$

de modo que es un divisor del sistema lineal $|p_1^*(\mathcal{O}_X(1))|$, donde p_1^* está denotando el *pull-back* por la aplicación p_1.
Afirmamos que $\mathcal{P}_X|_Y$ está contenido en el subconjunto de puntos a de $\mathcal{P}_X$ de modo que la dimensión de $p_2^{-1}p_2(a)$ es positiva. Recordemos que, como $k_X = 0$, p_2 es genéricamente uno a uno.
En efecto, si tomamos $(y, H_1) \in \mathcal{P}_X|_Y$ se tiene que H_1 es tangente a X en el punto y. Por tanto $H_1 \cap G$ es tangente a Y en y. Como el defecto de Y es positivo $H_1 \cap G$ es tangente a Y a lo largo de una subvariedad L' de dimensión positiva, de la que podemos escoger un espacio lineal L de dimensión k_Y. Pero como vimos antes

$$< T(L,X) >=< T(L,Y), T_{X,y} >,$$

y por tanto H_1 es tangente a X a lo largo de L.
Tomamos la imagen por p_2 de $\mathcal{P}_X|_Y$, que tiene dimensión:

$$dim(p_2(\mathcal{P}_X|_Y)) = N - 2 - dim(p_2^{-1}(F))$$

con F un punto general de la imagen. Por tanto, por lo señalado en el párrafo anterior:

$$dim(p_2(\mathcal{P}_X|_Y)) \leq N - 2 - k_Y.$$

Por otro lado si un punto h_1 de X^* es tal que el lugar de contacto de H_1 y X tiene dimensión positiva, entonces dicho lugar de contacto corta a Y y entonces se tiene que

$$h_1 \in p_2(\mathcal{P}_X|_Y)$$

.

Elegimos entonces una curva C en $p_2(\mathcal{P}_X)$ que no toque a $p_2(\mathcal{P}_X|_Y)$. Esto lo podemos hacer, ya que podemos elegir un espacio lineal de dimensión $k_Y + 2$ que corte a lo más en puntos a $p_2(\mathcal{P}_X|_Y)$ y eligiendo un hiperplano que no contenga a estos puntos, se tiene una sección lineal con un espacio de dimensión $k_Y + 1$ que no toca a $p_2(\mathcal{P}_X|_Y)$. Y como $k_Y \geq 1$ esta sección contiene una curva.
Entonces tenemos la siguiente intersección:

$$\mathcal{P}_X|_Y \cap p_2^{-1}(C) = \emptyset$$

lo que indica la anulación del siguiente producto de intersección:

$$p_1^*(\mathcal{O}_X(1)) \cdot p_2^{-1}(C) = 0$$

Podemos aplicar la fórmula de proyección:

$$p_{1*}p_2^{-1}(C) \cdot (\mathcal{O}_X(1)) = 0$$

y obtener una contradicción.

Corolario 3.7 *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad reglada de defecto positivo $k \geq 2$. Si Y es una extensión de X, entonces Y es una variedad reglada de defecto positivo.*

Demostración.
Basta observar que si un fibrado sobre un espacio proyectivo $\mathbb{P}^k$ con $k \geq 2$ restringe un fibrado escindido como suma de fibrados de línea sobre un plano de $\mathbb{P}^k$ entonces es escindido [40, thm. 2.3.2].

Podemos aportar un teorema de extendibilidad que se deduce de esta proposición.

Proposición 3.8 *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad de defecto positivo y tal que el lugar de contacto general verifica $dim(L) \geq 2$. Supongamos ademas que $h^0(\mathcal{N}_{L/X})) = n + a$ y $h^0(\mathcal{N}_{L/X}(-1)) = 0$. Entonces X no puede ser la sección por a hiperplanos generales de $X_a \subset \mathbb{P}^{N+a}$.*

Demostración.
Si existe tal X_a, por la proposición anterior, es una variedad de defecto positivo $k_{X_a} = k_X + a$.

Tomamos L_a el lugar de contacto general. Si $h^0(\mathcal{N}_{L_a/X_a}(-1)) \neq 0$ entonces por (2.16) el fibrado normal $\mathcal{N}_{L_a/X_a}$ admite una descomposición como:

$$\mathcal{N}_{L_a/X_a} = \mathcal{O}_{L_a} \oplus F \oplus \mathcal{O}_{L_a}(1),$$

por tanto el fibrado $\mathcal{N}_{L/X}(-1) = \mathcal{N}_{L_a/X_a}(-1)|_L$ tendría secciones globales, en contradicción con la hipótesis.
De esta forma se tiene la anulación $h^0(\mathcal{N}_{L_a/X_a}(-1)) = 0$.

Tomamos ahora la sucesión:

$$0 \to \mathcal{N}_{L_a/X_a}(-1) \to \mathcal{N}_{L_a/X_a} \to \mathcal{N}_{L_{a-1}/X_{a-1}} \to 0$$

donde X_{a-1} es una sección de X_a por uno de los hiperplanos que finalmente producirán, por secciones hiperplanas sucesivas, la variedad X.
Tomando la sucesión larga de cohomología podemos afirmar

$$h^0(\mathcal{N}_{L_a/X_a}) \leq h^0(\mathcal{N}_{L_{a-1}/X_{a-1}}).$$

Pero este razonamiento se puede iterar tomando sucesivas secciones hiperplanas para obtener:

$$h^0(\mathcal{N}_{L_a/X_a}) \leq h^0(\mathcal{N}_{L/X}) = n + a - 1$$

en contradicción con (2.26).

Esto muestra, mirando a la tabla de fibrados normales del final de la sección que los siguientes ejemplos son no extendibles.

Ejemplo 3.9 *La inmersión de Plücker de la grassmannniana $G(1,4)$ en $\mathbb{P}^9$ y la variedad espinorial $S_4 \subset \mathbb{P}^{15}$ son variedades no extendibles de forma lisa.*

Por otro lado también se puede ver su no extendibilidad de forma lisa como consecuencia del teorema de las tangencias de Zak, ya que una extensión suya debiera tener defecto positivo y una unidad mayor.

Esto en lo que respecta a las secciones hiperplanas. Debemos abordar también la cuestión de los productos de variedades con dual degenerada, que era la otra manera se construir variedades de dual degenerada a partir de otras conocidas.

3.3 Productos de variedades con dual degenerada

Comenzamos con un lema que es una consecuencia geométrica de la proposición (2.16). Como señalábamos en el ejemplo (1.26) el lugar de contacto de variedades con dual degenerada construídas como productos está entonces contenido en un espacio lineal, que es un lugar de contacto a la fibra general.

Lema 3.10 *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad con dual degenerada, sea un hiperplano tangente H general y L el lugar de contacto que define; si existe un espacio lineal M de dimensión m de modo que $L \subset M \subset X$ entonces se tiene la descomposición*

$$\mathcal{N}_{L/X} = \mathcal{O}_L^{\oplus m-k} \oplus F \oplus \mathcal{O}_L(1)^{\oplus m-k}$$

donde F es un fibrado vectorial tal que $F \simeq F^*(1)$.

Demostración.
De la sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{N}_{L/M}(-1) \to \mathcal{N}_{L/X}(-1) \to \mathcal{N}_{M/X}|_L(-1) \to 0$$

se puede ver, tomando la sucesión exacta larga de cohomología, el espacio vectorial $H^0(\mathcal{N}_{L/M}(-1))$ como un subespacio de dimensión $m-k$ de las secciones globales de $\mathcal{N}_{L/X}(-1)$,

$$\mathbb{C}^{m-k} \simeq H^0(\mathcal{N}_{L/M}(-1)) \hookrightarrow H^0(\mathcal{N}_{L/X}(-1)).$$

Se concluye entonces aplicando la proposición (2.16).

Podemos ahora describir la estructura del fibrado normal al lugar de contacto, que permita determinar si la variedad en cuestión puede ser un producto de variedades una de las cuales es una variedad de defecto positivo.

Teorema 3.11 *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad de defecto positivo k de modo que $X \subset \mathbb{P}^N$ es la inmersión de Segre de un producto de una variedad lisa Y de dimensión m y una variedad F de defecto positivo k_F con $m > k_F$. Sea $h \in X^*$ general y L el lugar de contacto de X y H; y sea L_1 el lugar de contacto de $H \cap < F >$ con F, donde $< F >$ simboliza el mínimo espacio lineal de $\mathbb{P}^N$ que contiene a F. Entonces se tiene:*

$$\mathcal{N}_{L/X} = \mathcal{O}_L^{\oplus m} \oplus \mathcal{N}_{L_1/F}|_L \oplus \mathcal{O}_L(1)^{\oplus m}$$

Demostración.
Tomamos la sucesión:

$$0 \to \mathcal{N}_{L/L_1} \to \mathcal{N}_{L/X} \to \mathcal{N}_{L_1/X}|_L \to 0$$

Como el fibrado $\mathcal{N}_{L/X}$ es generado por secciones globales, también lo es el fibrado $\mathcal{N}_{L_1/X}|_L$. De esta manera la sucesión

$$0 \to \mathcal{N}_{L_1/F}|_L \to \mathcal{N}_{L_1/X}|_L \to \mathcal{N}_{F/X}|_L \to 0$$

que se puede escribir

$$0 \to \mathcal{N}_{L_1/F}|_L \to \mathcal{N}_{L_1/X}|_L \to \mathcal{O}_L^{\oplus m} \to 0$$

es escindida y se tiene que

$$\mathcal{N}_{L_1/X}|_L = \mathcal{O}_L^{\oplus m} \oplus \mathcal{N}_{L_1/F}|_L \tag{3.b}$$

Ahora, si multiplicamos tensorialmente por $\mathcal{O}_L(1)$ la sucesión dual de la sucesión inicial

$$0 \to \mathcal{N}^*_{L_1/X}|_L(1) \to \mathcal{N}^*_{L/X}(1) \to \mathcal{O}^{\oplus k_F - k} \to 0$$

se tiene la descomposición

$$\mathcal{N}^*_{L/X}(1) = \mathcal{N}_{L_1/X}|^*_L(1) \oplus \mathcal{O}_L^{\oplus k_F - k}$$

Dualizando (3.b), multiplicando por $\mathcal{O}_L(1)$ y sustituyendo en esta última fórmula nos da

$$\mathcal{N}_{L/X} = \mathcal{O}_L^{\oplus k_F - k}(-1) \oplus \mathcal{N}_{L_1/F}|_L \oplus \mathcal{O}_L^{\oplus m}$$

Lo que concluye que $k_F - k = m$ y la escisión del enunciado.

Esto nos permite probar la igualdad del ejemplo (1.24):

Corolario 3.12 *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ la inmersión de Segre de un producto $Y \times F$, $dim(Y) = m$, de tal manera que $F \subset < F >$ es una variedad de defecto positivo k_F entonces $def(X) = max\{0, k_F - m\}$.*

Observando la demostración del teorema, la única hipótesis necesaria es que el fibrado normal de la fibra en X es trivial, por tanto, se tiene:

Corolario 3.13 *Sea X una variedad de defecto positivo de modo que un lugar de contacto general L está contenido en el lugar de contacto L_1 de una variedad Y contenida en X, de modo que el fibrado $\mathcal{N}_{Y/X}$ es trivial. Entonces se tiene:*

$$\mathcal{N}_{L/X} = \mathcal{O}_L^{\oplus dim(L) - dim(L_1)} \oplus \mathcal{N}_{L_1/Y}|_L \oplus \mathcal{O}_L(1)^{\oplus dim(L) - dim(L_1)}$$

3.4 Ejemplos

Presentamos la tabla de los fibrados duales al fibrado normal a un lugar de contacto de una variedad de defecto positivo X y un hiperplano tangente general, $\mathcal{N}^*_{L/X}$, para todos los ejemplos conocidos de variedades con dual degenerada.

• Para las variedades regladas se tiene el resultado de escisión como suma de haces invertibles demostrado.

• Para los ejemplos $G(1,4) \subset \mathbb{P}^9$ y $S_4 \subset \mathbb{P}^{15}$ se toma su BSS, y usando los resultados de anulación de cohomología del teorema (2.19), se tiene que dicha BSS sólo tiene en su primer término una columna con elementos no nulos, por lo que $E_1^{pq} = E_\infty^{pq}$ y se puede determinar completamente el fibrado $\mathcal{N}^*_{L/X}$, que es respectivamente $\Omega_{\mathbb{P}^2}(1)^{\oplus 2}$ y $\Omega^2_{\mathbb{P}^4}(2)$.

• Para las grassmannianas $G(1, 2r) \subset \mathbb{P}^N$ se puede hacer el siguiente razonamiento que concluye en que $\mathcal{N}^*_{L/X} = \Omega_{\mathbb{P}^2}(1)^{\oplus n/2}$.

Como L es un plano en $G(1,2r)$ entonces, interpretando los puntos de la grassmannniana como rectas en $\mathbb{P}^{2r}$, dicho plano, o se trata del conjunto de rectas de un plano contenido en $\mathbb{P}^{2r}$ o se trata del conjunto de rectas por un punto en un espacio proyectivo tridimensional de $\mathbb{P}^{2r}$.
Si se diera el caso segundo, entonces L estaría contenido en el espacio lineal de dimensión $2r-1$ de la grassmanniana $G(1,2r)$ formado por las rectas que pasan por un punto. Por tanto el fibrado $\mathcal{N}^*_{L/X}$ tendría $2r-3$ secciones globales linealmente independientes.
De esta forma, aplicando (3.10) se tendría la escisión:

$$\mathcal{N}^*_{L/X} = \mathcal{O}_L^{\oplus 2r-3} \oplus F \oplus \mathcal{O}_L(-1)^{\oplus 2r-3}.$$

Siendo F un fibrado de rango 2, que debe ser $\Omega_{\mathbb{P}^2}(1)$, (en otro caso $\mathcal{N}^*_{L/X}$ sería escindido) que no es un candidato válido.

Esto concluye que L está formado por las rectas de un plano.

Afirmamos que se tiene $\mathcal{N}^*_{L/X} = \Omega_{\mathbb{P}^2}(1)^{\oplus n-2/2}$.

En efecto, si tomamos la subvariedad de $G(1,2r)$ descrita por las rectas contenidas en un hiperplano de $\mathbb{P}^{2r}$, $G(1,2r-1)$, esta subvariedad se puede ver como el conjunto de ceros de una sección del fibrado cociente universal por lo que:

$$\mathcal{N}_{G(1,2r-1)/G(1,2r)}|_{G(1,2)} = \Omega_{\mathbb{P}^2}(2)$$

Tomamos la sucesión:

$$0 \to \mathcal{N}_{G(1,2)/G(1,2r-1)} \to \mathcal{N}_{G(1,2)/G(1,2r)} \to \mathcal{N}_{G(1,2r-1)/G(1,2r)}|_{G(1,2)} \to 0$$

y por inducción sobre r la podemos escribir:

$$0 \to \Omega_{\mathbb{P}^2}(2)^{\oplus 2r-3} \to \mathcal{N}_{G(1,2)/G(1,2r)} \to \Omega_{\mathbb{P}^2}(2) \to 0$$

que es escindida, lo que concluye la igualdad de la afirmación .

• Para calcular el fibrado conormal en el caso de las secciones hiperplanas de las variedades anteriores basta tomar las sucesiones

$$0 \to \mathcal{N}^*_{L/X}(a-1) \to \mathcal{N}^*_{L/X}(a) \to \mathcal{N}^*_{L/X}(a+1)|_{L\cap H} \to 0$$

y estudiar la cohomología de los diferentes *twists* del fibrado $\mathcal{N}^*_{L/X}(a+1)|_{L\cap H}$.
En cada caso la BSS determinará completamente el fibrado.

Podemos resumir en una tabla todos estos resultados:

Variedad	**Dimensión**	**Defecto**	$\mathcal{N}^*_{L/X}$
$G(1,2r)$	$2(2r-1)$	2	$\Omega_{\mathbb{P}^2}(1)^{\oplus 2r-2}$
S_4	10	4	$\Omega_{\mathbb{P}^4}(2)^2$
$S_4 \cap H$	9	3	$\Omega^2_{\mathbb{P}^3}(2) \oplus \Omega_{\mathbb{P}^3}(1)$
$S_4 \cap H \cap H'$	8	2	$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \Omega_{\mathbb{P}^2}(1)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$
$P_Y(E)$	n	$n - 2dim(Y)$	$\mathcal{O}_L(-1)^{\oplus dim(Y)} \oplus \mathcal{O}_L^{\oplus dim(Y)}$
$Y \times F$	$n = dim(Y) + dim(F)$	$k_F - dim(Y)$	$\mathcal{O}_L^{\oplus dim(Y)} \oplus \mathcal{N}_{L_F/F}\|_L \oplus \mathcal{O}_L^{\oplus dim(Y)}$
X	n	1	$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus n-k/2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus n-k/2}$

Capítulo 4

Clasificación de variedades con defecto cercano al máximo

En los capítulos que quedan vamos a mostrar como el detallado estudio que hemos hecho en las páginas anteriores acerca del fibrado normal ofrece resultados clasificatorios sobre variedades con defecto positivo.

Inspirados en el teorema de las tangencias de Zak, resulta natural agrupar las variedades con dual degenerada en conjuntos de variedades donde se verifica la igualdad de dimensiones $dim(X) = dim(X^*) - p$, con p un número entero. Dicho teorema de las tangencias muestra que $p \geq 0$ y Ein ha clasificado el caso extremo en que se tiene $p = 0$, bajo la hipótesis adicional de que $n \leq 2N/3$. Podemos decir que estas variedades tienen *defecto máximo*.
En este capítulo nosotros clasificamos las variedades con dual degenerada que verifican $dim(X) = dim(X^*) - 1$, extensión natural de los teoremas de Ein, también bajo la hipótesis adicional $n \leq 2N/3$. Llamaremos a estas variedades, variedades con defecto una unidad menor que el máximo.
De la clasificación para $p = 1$ se observa que el mismo tipo de técnicas se pueden aplicar para el caso general $dim(X^*) = dim(X) + p$. Demostraremos resultados de finitud para los posibles valores de la terna (N, n, k) en cada grupo de variedades con dual degenerada y no regladas de modo que $dim(X) = dim(X^*) + p$.
Como aplicación presentaremos el caso $p = 2$ donde la clasificación de fibrados del capítulo 2 permite excluir muchas posibilidades y determinar completamente otras. La clasificación que concluimos en este caso no será completa y en el final del capítulo se presentan las razones que lo impiden.

4.1 El teorema de las tangencias de Zak

Recordamos en este primer momento el teorema de las tangencias de Zak, que va a permitir agrupar las variedades de defecto positivo de forma natural en función de la diferencia entre la dimensión de la variedad dual y la dimensión de la propia variedad $dim(X^*) - dim(X) = p$.

Teorema 4.1 ([52]) *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad proyectiva lisa no degenerada de dimensión n. Sea H un k-plano con $N-1 \geq k \geq n$ y sea $Y = \{x \in X : T_{X,x} \subset H\}$ el conjunto de puntos donde H es tangente a X. En estas condiciones se tiene que $dim(Y) \leq k-n$.*

Podemos aplicar el teorema de las tangencias a $H \in X^*$ hiperplano tangente general a una variedad $X \subset \mathbb{P}^N$ de defecto positivo k, se muestra:

$$k \leq N - n - 1$$

lo que es equivalente al hecho

$$dim(X^*) \geq dim(X).$$

Y dada esta desigualdad, resulta natural tratar de clasificar el caso extremo en el que se tiene la igualdad $dim(X^*) = dim(X)$.
Este problema lo abordó Ein dando el siguiente resultado de clasificación, bajo la hipótesis adicional $n \leq 2N/3$.

Teorema 4.2 ([8]) *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad proyectiva lisa no degenerada de dimensión n, con $n \leq 2N/3$, y $dim(X) = dim(X^*)$. Entonces X es una de las siguientes variedades:*

i) La inmersión de Segre $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{P}^{2n-1}$.
ii) La inmersión de Plücker $G(1,4) \hookrightarrow \mathbb{P}^9$.
iii) La variedad espinorial $S_4 \hookrightarrow \mathbb{P}^{15}$.

Merece la pena resaltar que si X^* es una variedad lisa entonces, por el teorema de bidualidad, podemos aplicar el teorema de las tangencias a X^* y obtener la igualdad $dim(X) = dim(X^*)$. Por tanto esta clasificación es completa (salvo la hipótesis $n \leq 2N/3$) para las variedades de dual degenerada con variedad dual lisa.

Sobre la hipótesis $n \leq 2N/3$, cabe mencionar que está relacionada con la conjetura de Hartshorne sobre intersecciones completas, a saber,

Conjetura de Hartshorne([18]) *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad proyectiva lisa. Si $n > 2N/3$ entonces X es una intersección completa.*

Por tanto, de ser cierta la conjetura de Hartshorne, como las intersecciones completas tienen defecto cero, tanto la clasificación de Ein como las que presentaremos ahora serían completas.

En las próximas secciones extenderemos los trabajos de Ein y estudiaremos variedades en las que se da la igualdad $dim(X^*) = dim(X) + 1$ ó en general cada uno de los grupos que van dando las igualdades $dim(X^*) = dim(X) + p$, con p un entero positivo.

4.2 Variedades con defecto una unidad menor que el máximo

En esta sección clasificamos completamente las variedades donde se da la igualdad de dimensiones $dim(X) = dim(X^*) - 1$ bajo la hipótesis adicional $n \leq 2N/3$.

Como hablaremos a menudo de ellos, resultará cómodo dar la siguiente definición:

Definición 4.3 *Definimos el conjunto S_p como la colección de todas las variedades con dual degenerada verificando $dim(X^*) = dim(X) + p$.*

Como el defecto de una variedad X es la dimensión del lugar de contacto entre X y un hiperplano tangente general $H \in X^*$, que es la parte singular de una sección hiperplana tangente general, entonces $k \leq n - 1$.
Por otro lado, por el teorema de paridad no se puede dar la igualdad $k = n - 1$, con lo que se tiene:

Primera cota: $k \leq n - 2$

Aplicando esta primera cota a una variedad X de modo que $dim(X) = dim(X^*) - 1$, es decir $k = N - n - 2$, se obtiene:

Primera cota en S_1: $n \geq N/2$.

Si se da la igualdad $n = N/2$ entonces $k = n - 2$.

La siguiente proposición es bien conocida [8] y se puede demostrar con técnicas de teoría de adjunción. Con las herramientas desarrolladas en las secciones anteriores también se puede aportar una prueba, de la siguiente manera:

Proposición 4.4 *Si X es una variedad con defecto positivo y $k = n - 2$ entonces X es una variedad reglada sobre una curva.*

Demostración.
Si $k \geq 2$ entonces, por la clasificación de fibrados señalada en el capítulo 2, el fibrado $\mathcal{N}_{L/X}$, donde L es el lugar de contacto general, es suma directa de haces invertibles, con lo que X es una variedad reglada sobre una curva por la caracterización de las variedades regladas de (3.1).

Si $k = 1$ tenemos una variedad de dimensión tres que contiene una familia de dimensión tres de rectas.
En efecto, si L es una recta de contacto general el fibrado normal es

$$\mathcal{N}_{L/X} = \mathcal{O}_L \oplus \mathcal{O}_L(1).$$

De este modo la cohomología es

$$h^0(\mathcal{N}_{L/X}) = 3$$

$$h^1(\mathcal{N}_{L/X}) = 0.$$

Por tanto el punto correspondiente a L en el esquema de Hilbert de rectas contenidas en X es liso y, por los cálculos de cohomología de arriba, X contiene una familia de dimensión 3 de rectas, parametrizadas por la única componente $\mathcal{H}$ del esquema de Hilbert señalado que contiene el punto correspondiente a L.

En estas condiciones X verifica una de las siguientes dos posibilidades [43]:

i) contiene una familia de dimensión dos de planos de modo que la recta parametrizada por el punto general de $\mathcal{H}$ está contenida en un plano de dicha familia

ii) es una cuádrica de $\mathbb{P}^4$.

Como las hipersuperficies tienen defecto 0, X está en las condiciones de i).
Sea T una recta general en $\mathcal{H}$ y un plano S en dicha familia de modo que $T \subset S$.
Tomamos la sucesión

$$0 \to \mathcal{N}_{T/S} \to \mathcal{N}_{T/X} \to \mathcal{N}_{S/X}|_T \to 0$$

y se tiene que $\mathcal{N}_{S/X}$ es trivial. Por tanto X es una variedad reglada sobre una curva [7].

Hemos demostrado por tanto:

Lema 4.5 *Si $X \subset \mathbb{P}^N$ es una variedad de defecto positivo tal que $dim(X) = dim(X^*) - 1$ y $n = N/2$ entonces X es una variedad reglada sobre una curva.*

Comentemos brevemente acerca de la clasificación de variedades regladas de codimensión pequeña.

Observación 4.6 *Por el teorema de Barth [18] sabemos que para una variedad reglada de dimensión n la dimensión del espacio ambiente N deber ser $N \geq 2n - 1$. En caso contrario $Pic(X) \simeq \mathbb{Z}$ que nos da una contradicción.*
Si se tiene la igualdad $N = 2n - 1$ se puede probar (ver [26]) que la curva base debe ser racional y, por el teorema del punto doble, que finalmente es la inmersión de Segre del producto $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1}$ en el correspondiente proyectivo ambiente $\mathbb{P}^{2n-1}$.
También se ha abordado el caso siguiente, X de dimensión n en $\mathbb{P}^{2n}$ y se ha demostrado:
Si C es racional y la inmersión de X no degenerada, entonces X es una sección hiperplana de la inmersión de Segre de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{P}^{2n-1}$.
Si C es elíptica Ionescu ha construido ejemplos en todas dimensiones [22].
No se conocen ejemplos donde el género de C sea mayor que uno y se ha conjeturado que dicho género está acotado por uno [23]. Se ha podido demostrar en el caso en el que la dimensión de X es dos [29], tres [51] y cuatro [23] y permanece abierta en el resto de las dimensiones.

Podemos entonces, una vez comentado el caso $n = N/2$, abordar el paso siguiente en el que $n \geq \frac{N+1}{2}$, que por el teorema de paridad es $n \geq 1 + \frac{N}{2}$. El teorema de Barth permite concluir que el grupo de Picard de X está generado por $\mathcal{O}_X(1)$, con lo cual podemos aplicar (2.13.iii) para obtener que el haz invertible canónico de X es

$$K_X = \mathcal{O}_X(-N/2),$$

lo que implica que N es un número par.

Además del resultado sobre el haz invertible canónico también se pueden aplicar los resultados sobre la cohomología del fibrado normal de (2.19).

Como la BSS del fibrado $\mathcal{N}^*_{L/X}$ no puede tener todas sus columnas en $E_1^{p,q}$ formadas por ceros, se puede demostrar la segunda cota [8]:

Segunda cota: *Sea X una variedad de defecto positivo y tal que $K_X = \mathcal{O}_X(b)$ con b un número entero, entonces:*

$$k \leq \frac{n-k}{2}.$$

Lo que aplicado a nuestro caso da

Segunda cota en S_1: $n \geq 2(N-1)/3$.

Y unido a la hipótesis $n \leq 2N/3$ establece que:

$$2(N-1)/3 \leq n \leq 2N/3$$

Por tanto fijada N existe una única n que verifica las desigualdades de arriba. Recordando que N es un número par podemos distinguir tres grupos de variedades:

Primer grupo: $N = 6r-2$, $n = 4r-2$, $k = 2r-2$.
Segundo grupo: $N = 6r+2$, $n = 4r+1$, $k = 2r-1$.
Tercer grupo: $N = 6r$, $n = 4r$, $k = 2r-2$.

con r un entero suficientemente grande para que el defecto de la variedad, k, sea un entero positivo.

Y como describíamos al final del capítulo segundo tenemos fijados el defecto k y la dimensión n, y por tanto el rango del fibrado $\mathcal{N}^*_{L/X}$. Demostramos resultados de clasificación en cada uno de los grupos:

Teorema 4.7 *Si X es una variedad proyectiva lisa, $X \subset \mathbb{P}^N$, no degenerada, de dimensión n y defecto k, con la terna (N, n, k) en el primer grupo, $(N = 6r-2, n = 4r-2, k = 2r-2)$, entonces $r \leq 3$.*

Demostración.
Como

$$\frac{n-3k-2}{2} = \frac{4r-2-6r+6-2}{2} = \frac{-2r+2}{2} = -r+1 < 0 \ si\ r > 1,$$

estamos entonces en condiciones de aplicar (2.19) y afirmar

$$\begin{array}{llll} H^i(\mathcal{N}^*_{L/X}(a)) = 0 & si\ 0 < i < k & a \geq \frac{n-3k}{2} = -r+2 \\ H^i(\mathcal{N}^*_{L/X}(a)) = 0 & si\ 0 < i < k & a \leq \frac{k-n}{2} = -r \end{array}$$

De esta forma la sucesión espectral de Beilinson tiene el primer término $E_1^{p,q}$ con una única columna no nula correspondiente a $p = -r+1$.

En consecuencia $E_1^{p,q} = E_\infty^{p,q}$, es decir, la sucesión espectral estaciona en el primer paso con lo que

$$\mathcal{N}^*_{L/X} = H^{r-1}(\mathcal{N}^*_{L/X}(1-r)) \otimes \Omega_L^{r-1}(r-1)$$

y por tanto

$$Rango\ (\mathcal{N}^*_{L/X}) = 2r \geq \binom{2r-2}{r-1} \qquad (4.a)$$

Lo que muestra que $r \leq 3$.

Y la ecuación diofántica que se señalaba en el final del capítulo 2 es la numerada como $(4.a)$.

Teorema 4.8 *En las mismas condiciones del teorema anterior, pero con la terna (N, n, k) en el segundo grupo ($N = 6r+2$, $n = 4r+1$, $k = 2r-1$), se tiene que $r \leq 2$.*

Demostración.
En las condiciones del teorema se verifica

$$\frac{n-3k-2}{2} = \frac{4r+1-6r+3-2}{2} = -r+1 \leq 0\ si\ r \geq 2$$

con lo que estamos en condiciones de aplicar (2.19). Así

$$\begin{array}{lll} H^i(\mathcal{N}^*_{L/X}(a)) = 0 & si\ 0 < i < k & a \geq \frac{n-3k}{2} = -r+2 \\ H^i(\mathcal{N}^*_{L/X}(a)) = 0 & si\ 0 < i < k & a \leq \frac{k-n}{2} = -r-1 \end{array}$$

Por tanto la sucesión espectral de Beilinson tendría $E_1^{p,q}$ con únicamente dos columnas con elementos no nulos correspondientes a los lugares $p = -r$ y $p = -r+1$.
Por el lema (2.20) se tiene la igualdad:

$$rk(\mathcal{N}^*_{L/X}) = \binom{2r-1}{r} |P(-r) - P(-r+1)|$$

Como $rk(\mathcal{N}^*_{L/X}) = 2r+2$, se tiene la desigualdad $2r+2 \geq \binom{2r-1}{r}$ y por tanto necesariamente $r \leq 2$. □

Teorema 4.9 *Si la terna (N, n, k) es $(6r, 4r, 2r-2)$ con r un entero mayor o igual que 2, entonces $r \leq 4$.*

Demostración.
Como en los grupos anteriores se tiene la desigualdad

$$\frac{n-3k-2}{2} = -r+2 \leq 0\ si\ r \geq 2,$$

y por tanto podemos aplicar toda la información de los teoremas de Ein sobre la cohomología de $\mathcal{N}^*_{L|X}(a)$ recogidos en (2.19):

$$H^i(\mathcal{N}^*_{L/X}(a)) = 0 \qquad si\ 0 < i < k \qquad a \geq \tfrac{n-3k}{2} = -r+3$$
$$H^i(\mathcal{N}^*_{L/X}(a)) = 0 \qquad si\ 0 < i < k \qquad a \leq \tfrac{k-n}{2} = -r-1$$

Entonces la BSS del fibrado $\mathcal{N}^*_{L/X}$ tiene en su primer término sólo tres columnas con elementos no nulos correspondientes a los valores $p = -r, -r+1, -r+2$.
De la dualidad de Serre y el isomorfismo entre los fibrados $\mathcal{N}_{L/X}$ y $\mathcal{N}^*_{L/X}(1)$ se puede concluir la igualdad $P(-r) = P(-r+2)$.
Aplicando finalmente el lema (2.20)

$$2r+2 = (-1)^r(2\binom{2r-2}{r}P(-r) - \binom{2r-2}{r-1}P(-r+1))$$

De este modo si encontramos un divisor común q a los coeficientes $\binom{2r-2}{r}$ y $\binom{2r-2}{r-1}$ que no divida a $2r+2$ estaremos ante una contradicción.
Podemos utilizar un teorema de distribución de números primos debido a Nagura [39] por el que para todo $m \geq 25$ existe un primo q de modo que $m < q < (1.2)m$. Es una simple comprobación ver que para $r \geq 7$ o $r = 5$ siempre existe un primo q tal que $r+2 \leq q \leq 2r-2$.
Este q nos da la contradicción.
En efecto, $2r+2 = 2(r+1)$, por tanto q no divide a $2r+2$. Sin embargo

$$\binom{2r-2}{r} = \frac{(r-1)r(r+1)...(2r-2)}{r(r-1)(r-2)...1} \qquad \binom{2r-2}{r-1} = \frac{r(r+1)...(2r-2)}{(r-1)(r-2)...1}$$

y por tanto q los divide.

En el caso $r = 6$ se puede ver que 3 hace el papel de q y por tanto $r \leq 4$.

Se trataría ahora de abordar en cada grupo los casos restantes, dando un resultado que los clasifique.

Vamos a necesitar las siguientes definiciones:

Definiciones 4.10 *Una variedad proyectiva lisa X diremos que es una* variedad de Fano *si $K_X \simeq -iL$ con i un número natural y L un fibrado de línea amplio. Llamamos* índice *de una variedad de Fano al mayor entero tal que $K_X \simeq -iL$ con L amplio.*

Diremos que es una variedad de Del Pezzo *si $K_X = \mathcal{O}_X(-(n-1)L)$ donde n es como siempre la dimensión de la variedad.*

Diremos que es una variedad de Mukai *si $K_X = \mathcal{O}_X(-(n-2)L)$.*

Casos restantes del primer grupo.
En este grupo hemos demostrado que $r \leq 3$, como el caso $r = 1$ da defecto nulo debemos estudiar los casos 2 y 3.

• $r = 2$. Con lo cual $(N, n, k) = (10, 6, 2)$ y $K_X = \mathcal{O}_X(-5)$.
Tenemos que $h^0(X, \mathcal{O}_X(1)) = 11 + a$ con a un entero positivo ya que X es no degenerada.

Así podemos calcular el grado de la variedad con el polinomio de Hilbert P del haz invertible $\mathcal{O}_X$, para obtener que $deg\ X = 6 + a$.

Basta observar:

$h^i(X, \mathcal{O}_X(1)) = h^i(X, K_X \otimes \mathcal{O}_X(6)) = 0$ para todo $i > 0$ por el teorema de anulación de Kodaira, con lo que $P(1) = 11 + a$.

$h^0(X, \mathcal{O}_X) = 1$ y $h^i(X, \mathcal{O}_X) = h^{n-1}(X, \mathcal{O}_X(-5)) = 0$ para todo $i > 0$ por el teorema de anulación de Kodaira y por la dualidad de Serre. Por tanto obtenemos que $P(0) = 1$.

$h^i(X, \mathcal{O}_X(-t)) = h^{n-i}(X, \mathcal{O}_X(t-5))$ que es nulo si $t \leq 5$ y para todo i. De este modo $P(t) = 0$ con $t = -1, -2, -3, -4$ *y* -5.

Con estos datos podemos determinar completamente el polinomio de Hilbert de X. El grado de la variedad X es $6!$ veces el coeficiente principal de dicho polinomio P.
De esta forma podríamos concluir que la variedad $X \subset \mathbb{P}^{10}$ es la proyección isomorfa de una variedad de Del Pezzo de grado $6 + a$, que no puede existir según la clasificación de Fujita [14], [15] de estas variedades.

• $r = 3$. Con lo cual $(N, n, k) = (16, 10, 4)$ y $K_X = \mathcal{O}_X(-8)$.
Como $h^0(\mathcal{O}_X(1)) = 17 + a$, a un entero positivo, podemos calcular el grado de X como en el apartado anterior, obteniendo $deg\ X = 14 + 2a$.
Así tendríamos que $X \subset \mathbb{P}^{16}$ es la proyección isomorfa de una variedad de Mukai con $Pic\ X \simeq \mathbb{Z}$ y $g = 8 + a$.
Dicha variedad no puede existir por las clasificaciones de Mukai [35] y [36].

Casos restantes del segundo grupo.
En este segundo grupo tenemos dos posibles valores para el parámetro r, $r = 1, 2$, que debemos analizar.

Observación 4.11 *Como $n > \frac{2}{3}(N-1)$ podemos asegurar que X es linealmente normal [52].*

• $r = 1$. Con lo cual $(N, n, k) = (8, 5, 1)$, $K_X = \mathcal{O}_X(-4)$ y $deg(X) = 5$.
Entonces, repitiendo las cuentas para el cómputo del grado como en secciones anteriores, tenemos una variedad de Del Pezzo de grado 5.
Según la clasificación de Fujita debe ser necesariamente una sección hiperplana de la inmersión de Plücker de la grassmanniana de rectas de un espacio proyectivo de dimensión cuatro, $G(1, 4) \hookrightarrow \mathbb{P}^9$.

• $r = 2$. Con lo cual $(N, n, k) = (14, 9, 3)$, $K_X = \mathcal{O}_X(-7)$ y $deg(X) = 12$.
Tenemos entonces una variedad de Mukai con $Pic\ X \simeq \mathbb{Z}$ y $g = 7$ que es necesariamente [35], [36] una sección hiperplana de la inmersión de la variedad S_4 en $\mathbb{P}^{15}$.

En consecuencia, este segundo grupo aporta dos variedades de defecto positivo que son secciones hiperplanas de variedades de defecto máximo clasificadas por Ein. Esto era de esperar dada la siguiente observación, consecuencia directa del hecho que el defecto en la sección hiperplana cae una unidad.

Observación 4.12 *Las secciones hiperplanas lisas $Y \subset \mathbb{P}^{N-1}$ de una variedad $X \subset \mathbb{P}^N$ de defecto positivo y tal que $dim(X) = dim(X^*) - p$ verifican $dim(Y) = \underline{dim(Y^*) - (p+1)}$.*

Casos restantes del tercer grupo. En este grupo hemos demostrado que $r \leq 4$.

• $r = 2$. Con lo cual tenemos $(N, n, k) = (12, 8, 2)$ y $K_X = \mathcal{O}_X(-6)$.
Además, por la observación (4.11) X es linealmente normal. Por tanto tenemos una variedad de Mukai de grado 10 y género 6, que no puede existir, por la clasificación de dichas variedades.

• $r = 3$. Con lo cual tenemos $(N, n, k) = (18, 12, 4)$ y $K_X = \mathcal{O}_X(-9)$ que vamos a demostrar que no puede existir.
Como $\mathcal{N}^*_{L|X} \simeq \mathcal{N}_{L|X}(-1)$ sus polinomios de Chern son iguales:

$$c(\mathcal{N}^*_{L|X}) = c(\mathcal{N}_{L|X}(-1))$$

de lo que se concluye que

$$c_1 = -4h \qquad c_2 = ch^2 \qquad c_3 = (14 - 3c)h^3$$

con h la clase de la sección hiperplana de L y c un entero cualquiera.

Por otro lado de (2.19) se tiene que el polinomio de Hilbert se anula en 0, $P(0) = 0$, y por tanto por el teorema de Riemann-Roch

$$c_4 = (91 - 14c + (1/2)c^2)h^4$$

lo que impone que c sea un número par.

La condición que establece (2.20)

$$6P(-2) - 8P(-3) = 8$$

se verifica automáticamente con dichos valores de las clases de Chern.
Por (2.26) se tiene que $h^0(\mathcal{N}_{L/X}) \geq 12$ con lo cual, por la anulación de cohomología que determina (2.19)

$$P(1) = h^0(\mathcal{N}^*_{L/X}(1)) = h^0(\mathcal{N}_{L/X}) \geq 12.$$

Y calculando $P(1)$ por el teorema de Riemann-Roch se obtiene que $c \leq 8$.
Por otro lado c debe ser mayor o igual que 6 [11, cor. 2.12] y la igualdad se tiene cuando $\mathcal{N}^*_{L|X}$ escinde como suma de haces invertibles, que no es el caso porque X no es reglada.

Por tanto $c = 8$.

Tomamos la restricción de $\mathcal{N}^*_{L|X}$ a un plano proyectivo general T de L y por el teorema de estructura (2.30) y la clasificación de los fibrados de rango 8 sobre $\mathbb{P}^2$ del capítulo 2 se tiene

$$\mathcal{N}^*_{L/X}|_T \simeq \mathcal{O}^{\oplus 2}_{\mathbb{P}^2} \oplus \Omega^{\oplus 2}_{\mathbb{P}^2}(1) \oplus \mathcal{O}^{\oplus 2}_{\mathbb{P}^2}(-1)$$

ya que el polinomio de Hilbert de la restricción $\mathcal{N}^*_{L/X}|_T$ vale:

$$P(0) = 2 \qquad P(-1) = -2 \qquad P(-2) = 2.$$

Tomamos ahora las sucesiones

$$0 \to \mathcal{N}^*_{L/X}|_M(a-1) \to \mathcal{N}^*_{L/X}|_M(a) \to \mathcal{N}^*_{L/X}|_T(a) \to 0$$

donde M es un espacio lineal de dimensión 3 general, tal que $T \subset M \subset L$.

Entonces se tiene:

$h^0(\mathcal{N}^*_{L/X}|_M(a)) = 0$ para todo $a \leq -1$ porque $\mathcal{N}^*_{L/X}|_M = \mathcal{N}^*_{M/Y}$ donde Y es una sección hiperplana general de X y por tanto una variedad de defecto positivo. Por dualidad de Serre:

$h^2(\mathcal{N}^*_{L/X}|_M(a)) = 0$ para todo $a \geq -3$.

Por otro lado:

$h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_M(a)) = 0$ para todo $a \leq -2$ por la anulación de $h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_T(a)) = 0$ para todo $a \leq -2$.

Por dualidad de Serre:

$h^3(\mathcal{N}^*_{L/X}|_M(a)) = 0$ para todo $a \geq -1$.

Y finalmente como el polinomio de Hilbert de la restricción a M verifica que $P(0) = 1$, se tienen dos posibilidades

$$h^0(\mathcal{N}^*_{L/X}|_M) = 1, h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_M) = 0$$
$$h^0(\mathcal{N}^*_{L/X}|_M) = 2, h^1(\mathcal{N}^*_{L/X}|_M) = 1.$$

Por tanto, o bien, el primer término de la BSS del fibrado $\mathcal{N}^*_{L/X}|_M$ sólo tiene en su primer término elementos no nulos en la diagonal, con lo cual $E_1^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ y se tiene:

$$\mathcal{N}^*_{L/X}|_M = \Omega_{\mathbb{P}^3}(1) \oplus \Omega^2_{\mathbb{P}^3}(2).$$

O bien $E_1^{p,q}$ tiene el aspecto siguiente

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)^{\oplus 2} & \to & 0 & \to & 0 & \to & 0 \\
\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) & \to & \Omega^2_{\mathbb{P}^3}(2) & \to & 0 & \to & 0 \\
0 & \to & 0 & \to & \Omega_{\mathbb{P}^3}(1) & \to & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \\
0 & \to & 0 & \to & 0 & \to & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{\oplus 2}
\end{array}$$

Ahora las sucesiones:

$$0 \to \mathcal{N}^*_{L/X}(a-1) \to \mathcal{N}^*_{L/X}(a) \to \mathcal{N}^*_{L/X}|_M(a) \to 0$$

y el mismo modo de garantizar la anulación de diferentes $\mathbb{C}$-espacios vectoriales de cohomología muestran:

$$\mathcal{N}^*_{L|X} \simeq \Omega_L(1) \oplus \Omega^3_L(3).$$

Podemos hacer ahora una explosión de X a lo largo de L. Siguiendo las notaciones de Ein [8, lemma 4.2] denotamos $p : X_L \to X$ dicha explosión y $\mathcal{O}_{X_L}(a,b)$ el haz invertible $p^*\mathcal{O}_X(a) \otimes \mathcal{O}_{X_L}(-bE)$ donde E es el divisor excepcional.

Tomamos la sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{O}_{X_L}(1,2) \to \mathcal{O}_{X_L}(1,1) \to \mathcal{O}_E(1,1) \to 0$$

Como $n - 3k/2 = 0 < 1$ entonces [8, lemma 4.2] se tiene la anulación de $H^1(\mathcal{O}_{X_L}(1,2))$. Por tanto la sucesión larga de cohomología de la sucesión de arriba nos da la desigualdad:

$$h^0(\mathcal{O}_{X_L}(1,1)) \geq h^0(\mathcal{O}_E(1,1)) = h^0(\mathcal{N}^*_{L/X}(1))$$

Y aquí tenemos la contradicción porque $h^0(\mathcal{O}_{X_L}(1,1))$ es la dimensión de los hiperplanos que contienen a L, por tanto 14, y sin embargo $h^0(\mathcal{N}^*_{L/X}(1)) = 15$.

• $r = 4$. Con lo cual tenemos $(N, n, k) = (24, 16, 6)$.
La manera de razonar en este caso es esencialmente igual al anterior, por tanto no entraremos en muchos detalles de esta demostración.
De nuevo el isomorfismo $\mathcal{N}^*_{L|X} \simeq \mathcal{N}_{L|X}(-1)$ y los resultados acerca de la cohomología permiten calcular las clases de Chern del fibrado conormal en función de un parámetro y obtener, con la misma notación de antes,

$$c_1 = -5h \quad c_2 = ch^2 \quad c_3 = (30-4c)h^3 \quad c_4 = (57 - 9c + \frac{1}{2}c^2)h^4$$
$$c_5 = (-297 + 41c - \frac{3}{2}c^2)h^5 \qquad c_6 = (\frac{802}{3}c - 2370 - \frac{17}{2}c^2 + \frac{1}{6}c^3)h^6$$

También sabemos que $c \geq \binom{5}{2} = 10$ [11, cor 2.12] y la igualdad implica que $\mathcal{N}^*_{L|X}$ escinde como suma de fibrados de línea. Como $\mathcal{N}^*_{L|X}(1)$ está generado por secciones globales c debe ser 12.
Tomamos la restricción a un plano general.
Con los mismos argumentos que en el caso $r = 3$ podemos concluir que

$$\mathcal{N}^*_{L/X}|_{\mathbb{P}^2} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{\oplus 3} \oplus \Omega_{\mathbb{P}^2}^{\oplus 2}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{\oplus 3}(-1).$$

Tomando las distintas sucesiones de restricción se puede establecer que la restricción a un $\mathbb{P}^5$ general es

$$\mathcal{N}^*_{\mathbb{P}^5} \simeq \Omega_{\mathbb{P}^5}(1) \oplus \Omega^4_{\mathbb{P}^5}(5) \qquad (**).$$

Es fácil ver que no hay ningún fibrado vectorial sobre $\mathbb{P}^6$ con las propiedades requeridas y cuya restricción a $\mathbb{P}^5$ es la señalada en (**).

Podemos resumir nuestros resultados en el siguiente teorema

Teorema 4.13 *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad proyectiva compleja lisa y no degenerada de dimensión n e inmersa en $\mathbb{P}^N$. Asumimos que $n \leq \frac{2}{3}N$, que el defecto es positivo k y que $dim(X) = dim(X^*) - 1$, entonces X debe pertenecer a uno de los siguientes grupos de variedades:*

(i) Variedades regladas sobre curvas de dimensión n en $\mathbb{P}^{2n}$.

(ii) Secciones hiperplanas de la inmersión de Plücker $G(1,4) \subset \mathbb{P}^9$ ó de la variedad espinorial $S_4 \subset \mathbb{P}^{15}$.

La demostración de este teorema muestra en qué sentido el estudio del fibrado $\mathcal{N}_{L/X}$ produce resultados de clasificación. Se trata de imponer condiciones a las variedades con dual degenerada para que el candidato a fibrado $\mathcal{N}_{L/X}$ o no exista (y por tanto no existe la variedad), o haya una cantidad finita de posibilidades, desarrollando en estos casos razonamientos ad hoc para determinar la variedad o excluir su posible existencia.

Así las condiciones de anulación de cohomología, traducidas convenientemente en condiciones numéricas por (2.20) no permiten la existencia de la mayoría de los ejemplos.

En los casos restantes del primer grupo $(N, n, k) = (10, 6, 2)$ y $(N, n, k) = (16, 10, 4)$ existen candidatos únicos a $\mathcal{N}^*_{L/X}$, respectivamente $\Omega_{\mathbb{P}^2}(1)^{\oplus 2}$ y $\Omega^2_{\mathbb{P}^4}(2)$. Dichos candidatos pueden aparecer ya que si tomamos la inmersión de plücker de la grassmaniana $G(1, 4) \subset \mathbb{P}^9$ y damos una inmersión de dicho $\mathbb{P}^9$ en un espacio lineal de dimensión 10, esta inmersión degenerada de $G(1, 4)$ contiene planos L cuyo $\mathcal{N}^*_{L/X}$ es $\Omega_{\mathbb{P}^2}(1)^{\oplus 2}$. De igual manera, para el segundo candidato podemos tomar una inmersión degenerada de la variedad espinorial S_4 en $\mathbb{P}^{16}$.

En los casos restantes del segundo grupo nos encontramos con las restricciones a un hiperplano general de los fibrados señalados arriba.

Finalmente no hay posibilidad de existencia de un fibrado candidato a $\mathcal{N}^*_{L/X}$ en los casos restantes del tercer grupo.

Esto muestra que en los grupos siguientes se podrá aplicar esta misma estrategia, al menos en lo que respecta a la eliminación, por medio de una ecuación diofántica de casi todas las posibilidades.

4.3 Clasificación para un valor general de p

Damos ahora resultados para cada conjunto $\mathcal{S}_p$. Reproduciendo el tipo de argumentos que se han hecho en la sección anterior, debemos ser capaces de demostrar que las posibilidades para la pareja (N, n) en uno de estos grupos $\mathcal{S}_p$ son finitas, siempre que estemos tratando con variedades no regladas.

Como X no es una variedad reglada, el fibrado normal no puede ser escindido con lo que $rk(\mathcal{N}_{L/X}) > k$, y por tanto aplicado a nuestro caso se obtiene:

$$n \geq 2(N - p)/3$$

Por otro lado, imponemos nuevamente que $n \leq 2N/3$ con lo cual tenemos

$$2N/3 \geq n \geq 2(N - p)/3$$

es decir, si representamos en un plano coordenado las parejas (N, n), los posibles valores de (N, n) para variedades en $\mathcal{S}_p$ que no son regladas y con $n \leq 2N/3$ están en la región B comprendida entre las rectas paralelas $n = 2N/3$ y $2(N - p)/3$.

Para poder aplicar la información de la cohomología de (2.19) necesitamos en primer lugar que el fibrado lineal canónico sea múltiplo de la sección hiperplana, lo que podemos garantizar, por el teorema de Barth, si $n \geq 1 + N/2$. La recta $n = 1 + N/2$ divide a la región B en dos subregiones y la hipótesis del teorema de Barth se cumple para todos los puntos de la región en que $N \geq 4p + 6$.

En segundo lugar necesitamos para (2.19) que se de la desigualdad

$$\frac{n - 3k - 2}{2} \leq 0,$$

lo que se traduce en $n \leq 3(N - p - 1/3)/4$. Esto se verifica siempre que $N \geq 9p + 3$.

De esta manera si $N \geqq 9p + 3$ estamos en condiciones de aplicar (2.19) y se tiene la anulación de cohomología:

$$h^i(\mathcal{N}^*_{L/X}(a)) = 0 \quad si \quad a \geq a_1 = (n - 3k)/2$$
$$h^i(\mathcal{N}^*_{L/X}(a)) = 0 \quad si \quad a \leq a_2 = (k - n)/2\ .$$

Por tanto en estas condiciones el término $E_1^{p,q}$ de la BSS sólo puede tener elementos no nulos en sus $2p$ columnas centrales ya que $a_1 - a_2 = 3n - 2N + 2(p + 1) \leq 2(p + 1)$.
Pero $k - 2p = N - 1 - n - 3p \geqq \frac{1}{3}N - 1 - 3p$ es positivo si $N \geqq 9p + 2$ y por tanto hay anulación de todos los elementos de algunas de las columnas del término $E_1^{p,q}$ de la BSS.

Ahora podemos aplicar el lema (2.20) para obtener igualdades del tipo:

$$n - k = \Sigma_{i=0}^{p} \binom{k}{\frac{k}{2}} x_i \quad k\ par\ x_i \in \mathbb{Z}$$

$$n - k = \Sigma_{i=0}^{p} \binom{k}{\frac{k+1}{2}} x_i \quad k\ impar\ x_i \in \mathbb{Z}$$

Por tanto para tener una contradicción como en la sección anterior debemos encontrar un número primo entre $\frac{k}{2} + p + 1$ y k en el caso k par y entre $\frac{k+1}{2} + p + 1$ y k en el caso k impar que no divida a $(n - k)/2$.
Como $\frac{n-k}{2} < \frac{k}{2} + p + 1$ (respectivamente $\frac{n-k}{2} < \frac{k+1}{2} + p + 1$) sólo necesitamos, para poder aplicar el resultado de distribución de primos de Nagura, que $1.2(k/2 + p + 1) < k$ (respectivamente $1.2((k + 1)/2 + p + 1) < k$). Y esto significa $k > 3p + 3$ ($k > 3p + 6$), lo que ocurre si $n < N - 4p - 4$ ($n < N - 4p - 7$). Es decir, cuando $N > 12p + 12$ ($N > 12p + 21$).

Lo que queda entonces demostrado se resume en el siguiente teorema:

Teorema 4.14 *Sea p un entero positivo fijado y el conjunto $\mathcal{S}_p$ definido anteriomente. Entonces el conjunto de pares (N, n) corespondientes a variedades con dual degenerada $X \subset \mathbb{P}^N$ de dimensión n en el conjunto $\mathcal{S}_p$ que no son variedades regladas es finito.*

Para ilustrar este teorema de finitud podemos aplicar estas técnicas al caso $p = 2$. En este caso, además es posible aplicar algunos razonamientos particulares que permiten dar resultados de no existencia más allá de un mero uso de las condiciones que impone el lema (2.20). Quedarán en este grupo, a diferencia de cuando $p = 0, 1$, algunas variedades para las que no podremos probar su no existencia.

Una de las diferencias más notables con los casos $p = 0, 1$ es la ausencia de una clasificación de variedades X tales que $K_X = \mathcal{O}_X(-(n-3))$.

4.4 Variedades con defecto dos unidades menor que el máximo

Comenzamos reproduciendo los cálculos de la primera cota.

Primera Cota: $k \leq n - 2$.

Que aplicada a nuestro caso en el que $k = N - n - 3$ da:

Primera Cota para $\mathcal{S}_2$: $n \geq \frac{N-1}{2}$.

Si se da la igualdad $n = N - 1/2$ entonces $k = n - 2$ y tenemos por la proposición (4.4) una variedad reglada sobre una curva.

El caso $n = N/2$ contradice el teorema de paridad, por lo que la siguiente posibilidad es $n = N + 1/2$, es decir $k = n - 4$.

Y de igual manera que en la sección anterior, también la siguiente proposición es conocida [32], aunque nosotros vamos a aportar una prueba que se basa en la caracterización de Segre y Rogora de variedades con muchos espacios lineales.

Proposición 4.15 *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad de defecto positivo $k = n - 4$, entonces X es una de las siguientes variedades:*

i) una variedad reglada sobre una superficie,
ii) la inmersión de Plücker de la grassmanniana $G(1, 4)$ en $\mathbb{P}^9$,
iii) una sección hiperplana de ii).

Demostración.
Tomamos $k - 1$ secciones hiperplanas generales de X y la variedad Y que construimos tiene defecto 1 y dimensión 5.

Si $k = 1$, $n = 5$ entonces tenemos la variedad Y que contiene una familia irreducible de dimensión 6 de rectas, ya que, tomando un $\mathbb{P}^1$ de contacto general se tiene

$$h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus 2}) = 6$$

$$h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus 2}) = 0$$

Por lo que el esquema de Hilbert de rectas en Y tiene una componente irreducible $\mathcal{H}$ que contiene el punto correspondiente al $\mathbb{P}^1$ elegido como punto liso. Por tanto se tienen las siguientes posibilidades [43]:

i) Y contiene una familia de dimensión 2 de espacios proyectivos de dimensión 3.
ii) Y contiene una familia uniparamétrica de cuádricas lisas de dimensión 4.

iii) Y es la sección hiperplana de la inmersión de Plücker de la grassmanniana $G(1,4)$ en $\mathbb{P}^9$.

iv) X tiene codimensión menor o igual que 2.

Podemos excluir la posibilidad iv) porque las variedades de codimensión 2 [8, thm. 3.4] tienen defecto 0.

Quedan entonces por estudiar las posibilidades i), ii) y iii).

Si se da i) tomamos la siguiente sucesión exacta para L un lugar de contacto general de X contenido en un $M = \mathbb{P}^3$ de la familia que determina i):

$$0 \to \mathcal{N}_{L/M} \to \mathcal{N}_{L/X} \to \mathcal{N}_{M/X}|_L \to 0$$

por tanto, el fibrado $\mathcal{N}_{M/X}|_L$ es un fibrado trivial de rango 2.
De este modo la segunda clase de Chern del fibrado $\mathcal{N}_{M/X}|_L$ verifica [11, cor. 2.12]:

$$c_2(\mathcal{N}_{M/X}) \geqq 0.$$

Ahora bien, dados dos espacios lineales de dimensión 3 en X, digamos M_1 y M_2 generales, la intersección de dichos espacios debe ser vacía.
En efecto, como la dimensión de X es 5, si dicha dimensión es no vacía debe ser

$$\underline{2 \geq} \, dim(M_1 \cap M_2) \geq 1.$$

Si $dim(M_1 \cap M_2) = 1$ tendríamos una recta $T = M_1 \cap M_2$ de modo que para cada $x \in T$ se verifica que $T_{X,x} =< M_1, M_2 >$, en contradicción con el teorema de las tangencias de Zak.
Si $dim(M_1 \cap M_2) = 2$ entonces la intersección es un plano $M_1 \cap M_2 = T_{12} = \mathbb{P}^2$. Tomamos un tercer espacio tridimensional de la familia, que denominamos M_3. Necesariamente $M_3 \cap M_1$ es un plano T_{13}. Se tiene que $T_{13} \neq T_{12}$, porque en caso contrario todos los espacios tridimensionales de la familia pasarían por un plano, lo que contradice el hecho de que X es lisa.
Por tanto $M_1 \cap M_2 \cap M_3$ es una recta $T_{123} = \mathbb{P}^1$.
Por otro lado es claro que M_3 no está contenido en $< M_1, M_2 >= \mathbb{P}^4$. En caso contrario toda la familia debería estar contenida en dicho $\mathbb{P}^4$. Por tanto, para cada punto $x \in T_{123}$ se tiene que $< M_1, M_2, M_3 >\subset T_{X,x}$ lo que da nuevamente una contradicción.
Por tanto, podemos encontrar dos espacios tridimensionales de la familia que no se cortan, de modo que por la fórmula de autointersección:

$$c_2(\mathcal{N}_{M/X}) \leq 0.$$

De este modo el fibrado $\mathcal{N}_{M/X}$ es tal que su segunda clase de Chern es nula y la restricción a una recta es trivial, se puede concluir entonces [11, cor 2.13] que el fibrado normal es trivial. Por tanto por el teorema de Ein, tenemos una variedad reglada sobre una superficie.

Si ocurre iii) entonces tenemos una familia unidimensional de cuádricas lisas. Tomemos la recta de contacto general L y un punto x general en L.

Tomamos la subvariedad de X^* formada por los hiperplanos de $\mathbb{P}^N$ que contienen el espacio tangente a X en x. La denotamos $T^*_{X,x}$
Tomamos la restricción a los puntos lisos de $T^*_{X,x}$ de la aplicación de Gauss de la variedad dual

$$\gamma_{X^*} : T^*_{X,x} - sing(X^*) \to G(N-2, N)$$

Y llamamos U a la imagen isomorfa en $G(1, N)$ de $\overline{\gamma_{X^*}(T^*_{X,x} - sing(X^*))}$.
Es decir estamos coleccionando los lugares de contacto determinados por hiperplanos tangentes generales a X en x. Cada una de estas rectas de contacto determinan un punto de $\mathcal{H}$ y por tanto la recta de contacto general conteniendo a x estará contenida en una cuádrica de la familia.
Un sencillo cálculo de dimensiones determina que el punto x está contenido en una cantidad finita de cuádricas de la familia.
Y como U es irreducible, la recta de contacto general para un hiperplano tangente a X en x estará contenida en una única cuádrica Q_x de la familia.
Como $< T(L, Q_x) > \subset < T(L, X) >$ cada hiperplano tangente a X en x contiene al $\mathbb{P}^5$ que expande Q_x. De esta manera $T_{X,x} =< Q_x >= \mathbb{P}^5$. Esto ocurre para el punto general de L lo que da una contradicción con el teorema de las tangencias de Zak.

Concluimos el teorema observando que las posibles extensiones lisas de las variedades regladas sobre superficies son necesariamente variedades regladas y las posibles extensiones lisas de una sección hiperplana de la inmersión de Plücker de la grassmaniana $G(1, 4)$ en $\mathbb{P}^9$ deben ser la propia $G(1, 4)$, que es inextendible de forma lisa.

Por tanto hemos demostrado, volviendo a la clasificación en S_2:

Lema 4.16 *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad de defecto positivo tal que $dim(X) = dim(X^*) - 2$. Entonces se tiene:*

i) Si $n = (N-1)/2$ entonces X es una variedad reglada sobre una curva.
ii) Si $n = (N+1)/2$ entonces X es una variedad reglada sobre una superficie.

Una vez estudiados los casos recogidos en el lema podemos suponer que $n \geq 1 + \frac{N}{2}$ y por tanto por el teorema de Barth podemos concluir que el fibrado canónico es:

$$K_X = \mathcal{O}_X(-n - k - 2/2) = \mathcal{O}_X(-(N+1)/2).$$

Por lo que necesariamente N es un número impar.

Y nuevamente aplicamos la BSS y las condiciones de (2.19) para la segunda cota.

Segunda cota en S_2: $n \geq 2(N-2)/3$.

De nuevo con la hipótesis $n \leq 2N/3$ tenemos

$$2(N-2)/3 \leq n \leq 2N/3.$$

Por tanto en este caso, fijada N, existen a lo más dos posibles valores de n que verifican las igualdades. Ahora N es un entero impar, por tanto podemos distinguir los siguientes grupos de variedades y los valores que debemos conocer para poder actuar como en el caso $p = 1$:

	Grupo 1	**Grupo 2**	**Grupo 3**	**Grupo 4**	**Grupo 5**
N	$6r-3$	$6r-3$	$6r-1$	$6r-1$	$6r+1$
n	$4r-2$	$4r-3$	$4r-2$	$4r-1$	$4r$
k	$2r-4$	$2r-3$	$2r-2$	$2r-3$	$2r-2$
$(n-3k)/2$	$-r+5$	$-r+3$	$-r+2$	$-r+4$	$-r+3$
$(k-n)/2$	$-r-1$	$-r$	$-r$	$-r-1$	$-r-1$
K_X	$\mathcal{O}(-3r+2)$	$\mathcal{O}(-3r+2)$	$\mathcal{O}(-3r+1)$	$\mathcal{O}(-3r+1)$	$\mathcal{O}(-3r)$
Cota	$r \leq 6$	$r \leq 3$	$r \leq 4$	$r \leq 3$	$r \leq 4$

Donde de nuevo las cotas señaladas son consecuencia de la aplicación de teorema de Nagura de distribución de números primos a la igualdad entera que propone el lema (2.20).
Los casos restantes son:

Grupo 1	**Grupo 2**	**Grupo 3**	**Grupo 4**	**Grupo 5**
$(15,10,2)$ $K_X = \mathcal{O}_X(-7)$	$(9,5,1)$ $K_X = \mathcal{O}_X(-4)$	$(11,6,2)$ $K_X = \mathcal{O}_X(-5)$	$(11,7,1)$ $K_X = \mathcal{O}_X(-5)$	$(13,8,2)$ $K_X = \mathcal{O}_X(-6)$
$(21,14,4)$ $K_X = \mathcal{O}_X(-10)$	$(15,9,3)$ $K_X = \mathcal{O}_X(-7)$	$(17,10,4)$ $K_X = \mathcal{O}_X(-8)$	$(17,11,3)$ $K_X = \mathcal{O}_X(-8)$	$(19,12,4)$ $K_X = \mathcal{O}_X(-9)$
$(27,18,6)$ $K_X = \mathcal{O}_X(-13)$			$(23,15,5)$ $K_X = \mathcal{O}_X(-11)$	$(25,16,6)$ $K_X = \mathcal{O}_X(-12)$
$(33,22,8)$ $K_X = \mathcal{O}_X(-16)$				

Donde las ternas representan los valores de (N, n, K).

Utilizando las clasificaciones de las variedades de Del Pezzo y de Mukai obtenemos la no existencia de las posibilidades:

Grupo 2 con $r = 2, 3$,
Grupo 3 con $r = 2, 3$,
Grupo 4 con $r = 2$.

Y además que necesariamente el caso correspondiente al Grupo 5 con $r = 2$, es decir $(N, n, k) = (13, 8, 2)$ y $K_X = \mathcal{O}_X(-6)$, se trata de una sección por dos hiperplanos de la variedad espinorial $S_4 \subset \mathbb{P}^{15}$.

En los casos restantes de los Grupos 4 y 5 observamos que el rango del fibrado normal al lugar de contacto general es 8 ó 10 por lo que podemos tratar de aplicar nuestra clasificación de dichos fibrados de la sección 2.

Si el rango del fibrado $\mathcal{N}^*_{L/X}$ es 8 entonces, al restringir a un plano general, tenemos las posibilidades señaladas en el capítulo 2 para dicha restricción.

Podemos entonces calcular las clases de Chern y obtener (ver apéndice de cálculos en Maple) tres posiblidades. Con la notación E para $\mathcal{N}^*_{L/X}$ restringido al plano escogido tenemos:

$$c(E) = \begin{cases} 1 - 4t + 8t^2 \\ 1 - 4t + 10t^2 \\ 1 - 4t + 12t^2 \end{cases}$$

Estudiemos el caso $(17, 11, 3)$ (Grupo 4, $r = 3$).
Como $\mathcal{N}^*_{L/X}$ es un fibrado de rango 8 sobre $\mathbb{P}^3$ y cuya restricción a un plano general tiene su polinomio de Chern entre las posibilidades de arriba, entonces, imponiendo la condición $\mathcal{N}^*_{L/X} \simeq \mathcal{N}_{L/X}(-1)$ sobre las clases de Chern, obtenemos:

$$c(E) = \begin{cases} 1 - 4t + 8t^2 - 10t^3 \\ 1 - 4t + 10t^2 - 16t^3 \\ 1 - 4t + 12t^2 - 22t^3 \end{cases}$$

Como $n - 3k/2 = 1$ entonces se tiene, aplicando (2.19),

$$h^i(\mathcal{N}^*_{L/X}(1)) = 0 \, para \, i > 0.$$

Por tanto el valor de $h^0(\mathcal{N}^*_{L/X}(1))$ coincide con el valor del polinomio de Hilbert del fibrado $\mathcal{N}^*_{L/X}(1)$, y lo podemos calcular por el teorema de Riemann-Roch ya que conocemos sus clases de Chern.
Entonces

$$h^0(\mathcal{N}_{L/X}) = 15, 10, 5$$

respectivamente al tomar $c(E)$ como $1-4t+8t^2-10t^3$, $1-4t+10t^2-16t^3$, $1-4t+12t^2-22t^3$.
Ahora tomando la explosión de X a lo largo del lugar de contacto L se tiene:

$$0 \to \mathcal{O}_{X_L}(1, 2) \to \mathcal{O}_{X_L}(1, 1) \to \mathcal{O}_E(1, 1) \to 0$$

Y por la anulación del teorema de Ein [8] se tiene que

$$h^0(\mathcal{O}_E(1, 1)) = h^0(\mathcal{N}_{L/X}) < h^0(\mathcal{O}_{X_L}(1, 1))$$

Ahora bien como X es linealmente normal por (4.11), $11 > 2(17 - 1)/3$, entonces $h^0(\mathcal{O}_{X_L}(1, 1)) = 14$. Por otro lado, por (2.26), $h^0(\mathcal{N}_{L/X}) \geq 11$ que es por tanto, atendiendo a las posibilidades descritas arriba, 15. Obtenemos una contradicción.

Este mismo tipo de argumentos permiten ver la no existencia del caso $(19, 12, 4)$. Para esta variedad se tiene la igualdad $n = 2(N - 1)/3$ y si no fuera linealmente normal sería una proyección de una *variedad de Severi* [52]. De la lista de dichas variedadesde se concluye que no puede existir.
Tomamos una sección hiperplana general y tenemos una variedad de defecto positivo de tipo $(18, 11, 3)$ y también linealmente normal (dada la anulación de $h^1(\mathcal{O}_X)$). Entonces, para este caso $(18, 11, 3)$, el único cambio con respecto al ejemplo anterior es que $h^0(\mathcal{O}_{X_L}(1, 1)) = 15$, que también nos da una contradicción.

El caso $(23, 15, 5)$ también lo podemos excluir.
En efecto, el fibrado $\mathcal{N}^*_{L/X}$ tiene rango 10. Entonces el polinomio de Chern de la restricción a un plano general de dicho fibrado, que denotamos E, es:

$$c(E) = \begin{cases} 1 - 5t + 12t^2 \\ 1 - 5t + 14t^2 \\ 1 - 5t + 16t^2 \\ 1 - 5t + 18t^2 \end{cases}$$

Aplicamos las condiciones del isomorfismo $\mathcal{N}_{L/X} \simeq \mathcal{N}^*_{L/X}(1)$ en la restricción a un $\mathbb{P}^3$ general para determinar c_3 y los teoremas de anulación de (2.19) y de nuevo el isomorfismo para determinar c_4 y c_5 entonces (ver apéndice de cuentas con Maple)

$$c(E) = \begin{cases} 1 - 5t + 12t^2 - 18t^3 + 21t^4 - 5t^5 \\ 1 - 5t + 14t^2 - 26t^3 + 29t^4 - 17t^5 \\ 1 - 5t + 16t^2 - 34t^3 + 41t^4 - 25t^5 \\ 1 - 5t + 18t^2 - 42t^3 + 57t^4 - 45t^5 \end{cases}.$$

Por tanto de nuevo por el teorema de Riemann-Roch se tiene que respectivamente

$$h^0(\mathcal{N}_{L/X}) = 21, 14, 7, 0.$$

Lo que da una contradicción puesto que, por la sucesión de la explosión análoga a la de arriba se tiene $h^0(\mathcal{N}_{L/X}) < 18$ (de nuevo X es linealmente norma) y por otro lado el lema (2.26) asegura que $h^0(\mathcal{N}_{L/X}) \geq 15$, en consecuencia 21.

El caso $(25, 16, 6)$ se puede abordar también así. De nuevo X es linealmente normal pues en caso contrario sería una proyección de una *variedad de Severi*, por tanto de la variedad $E_{16} \subset \mathbb{P}^{26}$ [52]. Basta tomar una sección hiperplana general y tenemos una variedad $(24, 15, 5)$. Entonces lo único que varía con respecto al caso anterior es que en la sucesión de la explosión la desigualdad que se concluye es $h^0(\mathcal{N}_{L/X}) < 20$, que también da una contradicción.

Y esto concluye la clasificación que podemos establecer. Resumimos nuestros resultados en el siguiente teorema.

Teorema 4.17 *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad de defecto positivo y dimensión n que verifica que $dim(X) = dim(X^*) - 2$ y $n \leq 2N/3$, entonces X es una de las siguientes variedades:*

i) Una variedad reglada sobre una curva.
ii) Una variedad reglada sobre una superficie.
iii) Una sección por dos hiperplanos de la variedad espinorial $S_4 \subset \mathbb{P}^{15}$.
iv) Una variedad de Fano de los tipos $(15, 10, 2)$ $K_X = \mathcal{O}_X(-7)$; $(21, 14, 4)$ $K_X = \mathcal{O}_X(-10)$; $(27, 18, 6)$ $K_X = \mathcal{O}_X(-13)$; y $(33, 22, 8)$ $K_X = \mathcal{O}_X(-16)$.

Terminamos el capítulo expresando las dificultades que nuestras técnicas encuentran para dar una clasificación completa en $\mathcal{S}_2$. Las variedades que no podemos clasificar están en el primer grupo. Aparecen tres tipos de razones:

La primera dificultad consiste en que el número de columnas con entradas posiblemente no nulas en la BSS es grande, en este caso 5, por lo que la aplicación del lema (2.20) no es en absoluto restrictiva.

La segunda dificultad proviene del hecho de que, en algunos casos, el rango del fibrado normal es grande, por ejemplo 12 ó 14, lo que nos imposibilita usar los resultados del capítulo 2.

Y la tercera proviene del hecho de que verdaderamente pueda existir un candidato a fibrado normal $\mathcal{N}_{L/X}$, por ejemplo en el caso $(15, 10, 2)$. En este caso el fibrado $\Omega_{\mathbb{P}^2}(2)^{\oplus 4}$ verifica todas las propiedades para ser $\mathcal{N}_{L/X}$ y además tiene un número adecuado de secciones globales. Si este es el caso no sabemos descartar la existencia de dicha variedad. Parece que podría ocurrir que la grassmanniana $G(1, 6) \subset \mathbb{P}^{20}$ se pueda proyectar hasta $\mathbb{P}^{15}$ de manera que la proyección es una variedad singular que contiene un plano en su parte no singular con dicho fibrado normal. Los razonamientos para poder excluir esta posibilidad deberían usar usar que la variedad está barrida por planos de este tipo y concluir de ahí su singularidad.

Capítulo 5

Resultados de clasificación para ciertas variedades de Fano

El trabajo de Beltrametti, Fania y Sommese [3] contiene un resultado central en el estudio de variedades con dual degenerada:

Teorema 5.1 *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad lisa conexa y sea $f : X \to Z$ el morfismo del valor nef de X. Sea F una fibra general de f y m la dimensión de Z. Son equivalentes:*

i) el defecto de F es estrictamente mayor que m
ii) X es una variedad de defecto positivo
iii) se tiene la igualdad $def(X) = def(F) - m > 0$

Esto muestra, citando a los propios autores del teorema anterior, que las *variedades de Fano* son los *building blocks* en la generación de variedades con dual degenerada, es decir, el morfismo *nef* describe cada variedad con dual degenerada como una fibración en la cual las fibras son variedades de Fano con dual degenerada.

Nosotros hemos mostrado en secciones anteriores cómo podemos determinar, observando $\mathcal{N}_{L/X}$, si la variedad puede o no ser una fibración, o necesariamente se trata de una variedad de Fano. El Lema (3.10) señala que si el lugar de contacto está contenido en un espacio lineal de dimensión mayor, lo que necesariamente ocurre si la variedad no es de Fano, aparecen en el fibrado $\mathcal{N}_{L/X}$ sumandos directos que son fibrados de línea triviales.

En el trabajo citado antes [3], en su último párrafo, se plantean una serie de cuestiones sobre variedades de Fano con dual degenerada, fundamentalmente en términos de su posible existencia.
En este capítulo daremos respuestas a algunas de esas preguntas, determinando dimensiones máximas para ciertos grupos de variedades de Fano.

5.1 Relación entre el índice de las variedades de Fano y el rango del fibrado normal al lugar de contacto

Sea X una variedad de defecto positivo, por el teorema de paridad podemos escribir

$$k = n - 2m.$$

Si X es una variedad de Fano entonces

$$K_X = \mathcal{O}_X(-n - k - 2/2) = \mathcal{O}_X(-(n - m + 1)).$$

De esta manera el índice de la variedad de Fano verifica

$$i(X) \geq n - m + 1.$$

Así cuando $m = 1$, es decir $k = n - 2$, ya hemos visto que necesariamente X debe ser una variedad reglada sobre una curva, por lo que no hay variedades de Fano en ese grupo.

Cuando $m = 2$, es decir $k = n-4$, ya hemos observado la clasificación de estas variedades, que son variedades regladas sobre superficies o variedades de Del Pezzo. La única variedad de Del Pezzo que aparece es la inmersión de Plücker de la grassmanniana $G(1,4)$ en $\mathbb{P}^9$ y su sección hiperplana.

Cuando $m = 3$, es decir $k = n - 6$, podemos observar lo siguiente.
El fibrado normal $\mathcal{N}_{L/X}$ tiene rango 6, por tanto podemos estudiar su restricción a un plano general y recordar los resultados del capítulo 2.
Observando los fibrados posibles de dicha clasificación e imponiendo las condiciones sobre el número de secciones globales de $\mathcal{N}_{L/X}$ y de anulación de los teoremas de Ein, se obtiene que *para las variedades de Fano, la dimensión de* X *verifica:*

$$dim(X) \leq 10$$

El fibrado $\mathcal{N}^*_{L/X}$ no puede ser escindido, y el fibrado E_3 tiene exactamente 8 secciones globales, por tanto la variedad que lo pudiera tener como fibrado conormal no puede extender a una variedad de dimensión superior (3.8).
El único fibrado que permite alcanzar dimensiones superiores a 8 es entonces:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \oplus \Omega_{\mathbb{P}^2}(1)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}.$$

El único fibrado sobre $\mathbb{P}^4$ con las condiciones necesarias y cuya restricción a un plano general es $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \oplus \Omega_{\mathbb{P}^2}(1)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ es el fibrado $\Omega^2_{\mathbb{P}^4}(2)$.
Pero este fibrado no puede extenderse a $\mathbb{P}^5$.
Usando la clasificación de variedades de Mukai se concluye que:

Proposición 5.2 *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad de defecto positivo $k = n - 6$ entonces X es una variedad de uno de los siguientes tipos:*

i) Una variedad reglada sobre una variedad de dimensión 3.

ii) Una fibración sobre una curva cuyas fibras generales son grassmannianas $G(1,4) \subset \mathbb{P}^9$

iii) Una variedad de Mukai, que necesariamente será $S_4 \subset \mathbb{P}^{15}$ o una sección por uno o por dos hiperplanos de dicha variedad.

Para los siguientes valores de m no hay resultados de clasificación conocidos, fundamentalmente porque la Teoría de Adjunción no ha ofrecido resultados en esos casos. En este contexto el trabajo [3] termina con algunas cuestiones a las que podemos dar, con nuestras técnicas, ciertas respuestas.

5.2 Cotas para la dimensión de variedades de Fano de defecto positivo en los índices siguientes

La última pregunta que se plantea en el trabajo de BFS se descompone en dos:

Pregunta 1: ¿Puede existir una variedad de Fano X con dual degenerada, dimensión 13 y defecto 5?

Pregunta 2: ¿Puede existir una variedad de Fano X con dual degenerada, dimensión 17 y defecto 7?

Que se plantea en el contexto más amplio de saber si, con excepción de la inmersión de Plücker de las grassmannianas $G(1, 2r) \subset \mathbb{P}^M$, existen variedades de Fano con defecto positivo y $m > 4$.

En esta sección podemos dar respuesta negativa a las dos preguntas planteadas e incluso ir un poco más lejos en la acotación de dimensiones que se sugiere.

Para responder a la cuestión primera supongamos que efectivamente existe tal variedad. Entonces al tomar tres secciones hiperplanas generales tenemos una variedad Y de dimensión 10 y defecto 2.
El fibrado normal a un lugar de contacto general L_Y de la variedad Y es entonces, según la clasificación del capítulo 2, excluyendo que sea escindido (Y no es reglada), una de las cuatro posibilidades que allí se señalan.
Con los razonamientos del final de la sección 4.4 se concluye que el fibrado $\mathcal{N}_{L/X}$ restringido a un $\mathbb{P}^4$ general de L es

$$\mathcal{N}_{L/X}|_{\mathbb{P}^4} = \Omega_{\mathbb{P}^4}(2) \oplus \Omega^3_{\mathbb{P}^4}(4).$$

Y no existe ningún fibrado sobre $\mathbb{P}^5$ en las condiciones que debe tener para ser fibrado normal a un lugar de contacto, que restrinja sobre $\mathbb{P}^4$ el fibrado $\Omega_{\mathbb{P}^4}(2) \oplus \Omega^3_{\mathbb{P}^4}(4)$.

La cuestión segunda se puede responder directamente como consecuencia del lema (2.20). En efecto, como

$$\frac{n-3k}{2} = -2 \qquad \frac{k-n}{2} = -5.$$

Entonces las únicas columnas que pueden tener entradas no nulas en en el prmer término de la BSS del fibrado $\mathcal{N}^*_{L/X}$ corresponden a $p = -3, -4$. Por tanto la ecuación diofántica que se plantea es

$$rk(\mathcal{N}_{L/X}) = 10 = 35P(-4) - 35P(-3) = 70P(-4).$$

Lo que resulta claramente una contradicción.

Pero aún podemos mejorar algo la cota que se puede dar para estas variedades.
Supongamos que tenemos $n = 16$, $k = 6$.
De nuevo tenemos un fibrado de rango 10 sobre $\mathbb{P}^6$. Estudiamos la restricción a un plano y tenemos las posibilidades del capítulo 2. Necesariamente la extensión de uno de estos fibrados a un $\mathbb{P}^5$ es:

$$\mathcal{N}^*_{L/X}|_{\mathbb{P}^5} = \Omega_{\mathbb{P}^5}(1) \oplus \Omega^4_{\mathbb{P}^5}(4)$$

que no se puede extender a $\mathbb{P}^6$ con las condiciones que se tienen sobre $\mathcal{N}^*_{L/X}$.

Tenemos entonces, resumiendo, el siguiente resultado:

Teorema 5.3 *Sea $X \subset \mathbb{P}^N$ una variedad de defecto positivo:*

Si $K_X = \mathcal{O}_X(-n+3)$ entonces $dim(X) \leq 12$.
Si $K_X = \mathcal{O}_X(-n+4)$ entonces $dim(X) \leq 15$.

Y además en los casos extremos, a saber, $dim(X) = 12$, $k = 4$, $K_X = \mathcal{O}_X(-9)$ y $dim(X) = 15$ $k = 5$ y $K_X = \mathcal{O}_X(-11)$ podemos determinar con precisión el fibrado normal a un lugar de contacto general, que respectivamente va a ser

$$\mathcal{N}_{L/X} = \begin{cases} \Omega_{\mathbb{P}^4}(2) \oplus \Omega^3_{\mathbb{P}^4}(4) \\ \Omega_{\mathbb{P}^5}(1) \oplus \Omega^4_{\mathbb{P}^5}(4) \end{cases}$$

Lo que nos da ciertas informaciones geométricas sobre estas variedades (dimensión del ambiente, de las familias de espacios lineales en su interior...) aunque no permiten, con nuestros conocimientos actuales, asegurar su no existencia.

Bibliografía

[1] P. Aluffi, *Singular schemes of hypersurfaces*, Duke Math. J. **80** (1995), 325–351.

[2] W. Barth y Hulek, *Monads and moduli of vector bundles*, manuscripta mathematica **25** (1978), 323–347.

[3] M.C. Beltrametti, A.J. Sommese, y L. Fania, *On the discriminant variety of a projective manifold*, Forum Math. **4** (1992), 529–547.

[4] I. Dolgachev, *On the purity of the degeneration loci of families of curves*, Inv. Math. **8** (1969).

[5] J. M. Drezet, *Fibrés uniformes de type (0,...,0,-1,...,-1)*, Crelle J. **325** (1981), 1–27.

[6] ———, *Fibrés uniformes de type (1,0,...,0,-1) sur P_2*, Ann. Inst. Fourier (1981), 99–134.

[7] L. Ein, *Varieties with small dual varieties, II*, Duke Math. J. (1985), 895–907.

[8] ———, *Varieties with small dual varieties, I*, Invent. Math. **86** (1986), 63–74.

[9] G. Elencwagj, *Des fibrés uniformes non homogenes*, Math. Ann. **239** (1979), 185–192.

[10] ———, *Fibrés uniformes de rang élevé sur P_2*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **31** (1981), N° 4, 89–114.

[11] G. Elencwagj y O. Forster, *Bounding cohomology groups of vector bundles on P_n*, Math. Annalen **246** (1980), 251–270.

[12] G. Elencwagj, A. Hirschowitz, y M. Schneider, *Les fibrés uniformes de rang au plus n sur $P_n(C)$ sont ceux qu'on croit*, Vector Bundles and Differential equations. Proceedings of the Nice conference 1979, Birkhäuser, 1980.

[13] P. Ellia, *Sur les fibrés uniformes de rang n+1 sur P_n*, Memoires de la Soc. Mat. Franc. **82** (1994), 1–60.

[14] T. Fujita, *On the structure of polarized manifolds with total deficiency I*, J. Math. Soc. Japan **32-4** (1980), 709–775.

[15] ———, *On the structure of polarized manifolds with total deficiency II*, J. Math. Soc. Japan **33-2** (1981), 414–434.

[16] P. Griffiths y J. Harris, *Algebraic geometry and local differential geometry*, Ann. scient. Ec. Normal Sup. 4 série **12** (1979), 355–432.

[17] J. Harris, *Algebraic geometry*, Springer Verlag, New York, 1992.

[18] R Hartshorne, *Varieties of small codimension in projective space*, Bull. A.M.S. **80** (1974), 1017–1032.

[19] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer Verlag, Heidelberg and New York, 1977.

[20] A. Hefez y S. Kleiman, *Notes on the duality of projective varieties*, Geometry today, atti delle giornate di geometria, Rome 1984 (Boston), Birkhäuser, 1985, pp. 143–183.

[21] A. Holme, *The geometric and numerical properties of duality in projective algebraic geometry*, manuscripta mathematica **61** (1988), 145–162.

[22] P. Ionescu, *Embedded projective varieties with small invariants III*, Algebraic Geometry, Proceedings L'Aquila 1988, Springer-Verlag LNM 1417, 1990.

[23] P. Ionescu y M. Toma, *On very ample vector bundles on curves*, Int. J. Math. (1997).

[24] S. Ishii, *A characterization of hiperplane cuts of smooth complete intersections*, Proc. Japan Acad. ser A **58** (1982), 309–311.

[25] S. Kleiman, *Concerning the dual variety*, , Prog. in Math., Cambridge Univ. Press, 1981, pp. 386–396.

[26] ———, *Plane forms and multiple points formulas*, , LNM 947, Springer-Verlag, 1982.

[27] J.M. Landsberg, *On second fundamental forms of projective varieties*, Inv. Math. **117** (1994), 303–315.

[28] ———, *On degenerate secant and tangential varieties and local differential geometry*, Duke Math. J. **85** (1996), 605–634.

[29] A. Lanteri, *On the existence of scrolls in P_4*, Lincei-Rend. Sc. Fis. Mat. y Nat. **59** (1980), 223–227.

[30] A. Lanteri y D. Struppa, *Some topological conditions for projectie algebraic manifolds with degenerate dual varieties: connections with P-bundles*, Lincei-Rend. Sc. Fis. Mat. y Nat. **5** (1984), 155–158.

[31] ———, *Projective manifolds whose topology is strongly reflected in their hyperplane sections*, Geo. Dedicata **21** (1985), 357–374.

[32] ———, *Projective 7-folds with positive defect*, Comp. Math. **61** (1987), 329–337.

[33] R. Lazarsfeld y A. Van de Ven, *Topics in the geometry of projective space. Recent work of F. L. Zak*, Birkhäuser, 1984.

[34] E. Marchionna, *Sopra una disuguaglianza tra i caratteri proettivi di una superficie algebricha*, Boll. U. Mat. It. (3) **10** (1955), 478–480.

[35] S. Mukai, *Biregular classification of fano 3-folds and manifods of coindex 3*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA (1989), 3000–3002.

[36] ______, *Fano threefolds*, Complex projective geometry (London), Cambridge University Press LNS 179, 1992, pp. 255–263.

[37] D. Mumford, *Some footnote of the work of C. P. Ramanujam*, Ramanujam, C.P., a Tribute (Berlin-Heidelberg-New York), Springer-Verlag, 1978, pp. 247–262.

[38] R. Muñoz, *Varieties with low dimensional dual variety*, manuscripta mathematica **94** (1997), 427–435.

[39] J. Nagura, *On the interval containing at least one prime number*, Proc. Japan. Acad. **2** (1952), 177–181.

[40] C. Okonek, M.Schneider, y Spindler H, *Vector bundles on complex projective spaces*, Progress in Math. 3, Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart, 1980.

[41] R. Piene, *Espacios tangentes, espacios osculadores y variedades duales*, Col. de Monog. y Mem. de Mat. Instituto Jorge Juan de Madrid **XXXV** (1984).

[42] C. P. Ramanujam, *On a certain purity theorem*, J. Indian Math. Soc. **34** (1970), 1–10.

[43] E. Rogora, *Phd thesis*, Uni. di Roma I, La Sapienza, Roma, 1993.

[44] ______, *Varieties with many lines*, manuscripta mathematica **82** (1994), 207–226.

[45] ______, *A note on a construction suggested by Eugenio Bertini*, Boll. U. Mat. It. (7) **10-b** (1996), 149–174.

[46] T. Room, *A synthesis of Clifford matrices and its generalizations*, Am J. Math. **74** (1952), 967–984.

[47] B. Segre, *Sulle V_n aventi piu di $\infty^{n-k} S_k$*, Rend. dell'accad. naz. Lincei **V** (1948), notes I and II.

[48] ______, *Bertini forms and Hessian matrices*, J. London Math. Society **26** (1951), 164–176.

[49] C. Segre, *Preliminari de una teoria delle varieta luoghi di spazi*, Rend. Circolo Mat. Palermo XXX (1910), 87–121.

[50] R.R. Simha, *Uber die kritischen Werte gewisser holomorpher Abbildungen*, manuscripta mathematica **3** (1970), N° 1, 97–104.

[51] M. Toma, *Three dimensional scrolls in P_6*, Arch. Math. **65** (1995), 444–448.

[52] F. L. Zak, *Tangents and secants of algebraic varieties*, AMS, Providence, 1993.

Apéndice de cuentas con Maple

Como ilustración del tipo de cálculos que se han hecho con el paquete Schubert del Maple presentamos dos sesiones de Maple.

La primera estudia las clases de Chern de los fibrados de rango 8 candidatos a ser el fibrado conormal a un lugar de contacto general $\mathcal{N}^*_{L/X}$. El estudio se hace de la siguiente manera:

i) toma la lista de la página 46 y calcula las clases de Chern de las posibles restricciones a un plano;
ii) la restricción a un espacio tridimensional tiene la tercera clase de Chern determinada por el isomorfismo de (2.4);
iii) al llegar a un $\mathbb{P}^4$ se imponen las diversas condiciones que hemos ido estudiando, anulación de la cohomología y número de secciones globales, para determinar la cuarta clase de Chern;
iv) esto determina completamente la restricción al plano y finalmente, analizando las posibles extensiones a espacios proyectivos de dimensión superior de dicha restricción, proporciona resultados de clasificación de variedades con defecto positivo que se han usado en el capítulo 5.

La segunda sesión hace un proceso paralelo para los fibrados de rango 10.

Sesión 1 de Maple

Fibrados de rango 8.

```
• with(schubert): #SESION 1: FIBRADOS DE RANGO 8#
```

```
• proj(2,h,all): #restricción a un plano#
```

```
• #cálculo de las clases de Chern para los fibrados posibles (lista del
capítulo 2)#
```

```
• subs(h=1,chern(2*o+2*(tensor(dual(tangentbundle(Ph)),o(1)))+2*o(-1)));
```

$$1 - 4 t + 8 t^2$$

```
• subs(h=1,chern(4*(tensor(dual(tangentbundle(Ph)),o(1)))));
```

$$1 - 4 t + 10 t^2$$

```
• subs(t^3=0,t^4=0,t^5=0,expand((1-t)*(1-t+t^2)*(1-2*t+4*t^2)));
```

$$1 - 4 t + 10 t^2$$

```
• subs(t^3=0,t^4=0,t^5=0,expand((1-2*t+4*t^2)^2));
```

$$1 - 4 t + 12 t^2$$

```
• #restricción a un espacio tridimensional#
```

```
• proj(3,h,all): B3:=bundle(8,c,Ph):
```

```
• #el isomorfismo de (2.4) determina la tercera clase de Chern (impone
condiciones sobre las clases de Chern impares)#
```

```
• C3:=solve(subs(c1=-4,h=1,t=1,chern(B3)-chern(tensor(dual(B3),o(-
1)))),c3);
```

$$C3 := 14 - 3 c2$$

```
• subs(c2=8,C3);
```

$$-10$$

```
• subs(c2=10,C3);
```

$$-16$$

```
• subs(c2=12,C3);
```

$$-22$$

```
• #sobre un espacio de dimensión 4#
```

```
• proj(4,h,all):
```

```
• B4:=bundle(8,c,Ph):
```

```
• #la anulación del teorema 2.19 determina el polinomio de Hilbert en 0,
P(0)=0#
```

```
• #Riemann-Roch#
```

```
•
P(n):=subs(h=1,coeff(expand((tensor(B4,o(n))*todd(tangentbundle(Ph)))),t^4
)):
```

```
• P(0):=subs(n=0,P(n)): #se determina la cuarta clase de Chern#
```

```
• solve(subs(c1=-4,c2=8,c3=-10,P(0)),c4);
                                      11
```

```
• solve(subs(c1=-4,c2=10,c3=-16,P(0)),c4);
                                      1
```

```
• solve(subs(c1=-4,c2=12,c3=-22,P(0)),c4);
                                      -5
```

```
• #P(1) es igual a la dimensión del espacio de secciones globales del
fibrado normal al lugar de contacto#
```

```
• P(1):=subs(n=1,P(n)):
```

```
• subs(c1=-4,c2=8,c3=-10,c4=11,P(1));
                                      15
```

```
• subs(c1=-4,c2=10,c3=-16,c4=1,P(1));
                                      10
```

```
• subs(c1=-4,c2=12,c3=-22,c4=-5,P(1));
                                      5
```

```
• #solo es válida la primera opcion P(1)=15, ya que el número de
secciones globales debe ser mayor o igual que 12#
```

```
• P(-2):=subs(n=-2,P(n)):
```

```
• subs(c1=-4,c2=8,c3=-10,c4=11,P(-2));
                                      0
```

Sesión 2 de Maple

Fibrados de rango 10.

```
• with(schubert): #SESION 2: FIBRADOS DE RANGO 10#
```

```
• proj(2,h,all): #restricción a un plano#
```

```
• #Lista de fibrados del capítulo 2#
```

```
• subs(h=1,chern(3*o+2*(tensor(dual(tangentbundle(Ph)),o(1)))+3*o(-1)));
                                             2
                              1 - 5 t + 12 t
```

```
• subs(h=1,chern(o+4*(tensor(dual(tangentbundle(Ph)),o(1)))+o(-1)));
                                             2
                              1 - 5 t + 14 t
```

```
• subs(t^3=0,t^4=0,t^5=0,t^6=0,expand((1-t)^2*(1-t+t^2)*(1-2*t+4*t^2)));
                                             2
                              1 - 5 t + 14 t
```

```
• subs(t^3=0,t^4=0,t^5=0,expand((1-t)*(1-2*t+4*t^2)^2));
                                             2
                              1 - 5 t + 16 t
```

```
• subs(t^3=0,t^4=0,t^5=0,t^6=0,t^7=0,t^8=0,expand((1-t+t^2)^3*(1-
2*t+4*t^2)));
                                             2
                              1 - 5 t + 16 t
```

```
• subs(t^3=0,t^4=0,t^5=0,t^6=0,t^7=0,t^8=0,expand((1-t+t^2)^2*(1-
3*t+9*t^2)));
                                             2
                              1 - 5 t + 18 t
```

```
• subs(t^3=0,t^4=0,t^5=0,t^6=0,t^7=0,t^8=0,expand((1+t)*(1-2*t+4*t^2)^3));
                                             2
                              1 - 5 t + 18 t
```

```
• proj(3,h,all): #restricción a un espacio tridimensional#
```

```
• B3:=bundle(10,c,Ph):
```

```
• #el isomorfismo de 2.4 determina la tercera clase de Chern#
```

```
• C3:=solve(subs(c1=-5,h=1,t=1,chern(B3)-chern(tensor(dual(B3),o(-
1)))),c3);
                              C3 := 30 - 4 c2
```

```
• subs(c2=12,C3);
                                    -18
```

```
• subs(c2=14,C3);
                                    -26
```

```
• subs(c2=16,C3);
                                   -34
```

```
• subs(c2=18,C3);
                                   -42
```

```
• proj(5,h,all): #sobre un espacio de dimensión 5#
```

```
• B5:=bundle(10,c,Ph):
```

```
• #el teorema 2.19 garantiza que P(0)=0#
```

```
• #Riemann-Roch#
```

```
•
P(n):=subs(h=1,coeff(expand((tensor(B5,o(n))*todd(tangentbundle(Ph)))),t^5
)):
```

```
• P(0):=subs(n=0,P(n)):
```

```
• #determinamos la cuarta y quinta clases de Chern#
```

```
• solve(subs(c1=-5,c2=12,c3=-18,P(0)),c4);
                              24 + 1/7 c5
```

```
• solve(subs(c1=-5,c2=14,c3=-26,P(0)),c4);
                             220/7 + 1/7 c5
```

```
• solve(subs(c1=-5,c2=16,c3=-34,P(0)),c4);
                             312/7 + 1/7 c5
```

```
• solve(subs(c1=-5,c2=18,c3=-42,P(0)),c4);
                             444/7 + 1/7 c5
```

```
• C5:=solve(subs(c1=-5,h=1,t=1,chern(B5)-chern(tensor(dual(B5),o(-
1)))),c5);
                    C5 := - 8 c3 - 3 c4 + 114 - 18 c2
```

```
• solve(c5=subs(c2=12,c3=-18,c4=24+c5/7,C5));
                                   -21
```

```
• solve(c5=subs(c2=14,c3=-26,c4=220/7+c5/7,C5));
                                   -17
```

```
• solve(c5=subs(c2=16,c3=-34,c4=312/7+c5/7,C5));
                                   -25
```

```
• solve(c5=subs(c2=18,c3=-42,c4=444/7+c5/7,C5));
```

• #P(1) es exactamente el número de secciones del fibrado normal al lugar de contacto#

```
• P(1):=subs(n=1,P(n)):
```

```
• subs(c1=-5,c2=12,c3=-18,c4=24+c5/7,c5=-21,P(1));
                                21
```

```
• subs(c1=-5,c2=14,c3=-26,c4=220/7+c5/7,c5=-17,P(1));
                                14
```

```
• subs(c1=-5,c2=16,c3=-34,c4=312/7+c5/7,c5=-25,P(1));
                                7
```

```
• subs(c1=-5,c2=18,c3=-42,c4=444/7+c5/7,c5=-45,P(1));
                                0
```

• #como dicho número debe ser mayor o igual que 15, la única opción valida es la primera#

```
• P(-2):=subs(n=-2,P(n)):
```

```
• subs(c1=-5,c2=12,c3=-18,c4=24+c5/7,c5=-21,P(-2));
                                0
```