

Universidad Complutense de Madrid

Facultad de Matemáticas

Departamento de Geometría y Topología

**POLIEDROS DE DIRICHLET
DE 3-VARIEDADES CÓNICAS
Y SUS DEFORMACIONES**

Tesis dirigida por el catedrático D. José María Montesinos Amilibia
de la Universidad Complutense de Madrid

y presentada por

EVA SUÁREZ PEIRÓ

para optar al grado de Doctor en Matemáticas
por la Universidad Complutense de Madrid

Madrid, marzo de 1998



ARCHIVO

22.603

Dedico este trabajo a mis padres.



* 5 3 0 9 8 4 2 3 6 4 *

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

Agradecimientos

Quiero dar las gracias en primer lugar a José María Montesinos, director de esta tesis, por haberme introducido y guiado en el fascinante mundo de la topología de dimensión tres y la geometría hiperbólica. El me propuso el tema de la tesis, me dio al principio las ideas fundamentales para abordarlo, y me ayudó durante todo el camino dándome numerosas ideas e intuiciones, que me permitieron continuar adelante cuando no veía cómo seguir. Su constante apoyo, sus valiosos consejos, sugerencias e ideas, y la confianza que me ha infundido en mi trabajo, han sido esenciales en todo momento. Gracias a él he aprendido también la utilidad que pueden tener los ordenadores como fuente de ejemplos e intuiciones matemáticas. Finalmente, el enorme esfuerzo que ha hecho para corregir la redacción de la tesis ha mejorado considerablemente su legibilidad.

Doy también las gracias a los profesores que con sus clases, sus conversaciones o sus comentarios me han ayudado en la elaboración de la tesis, especialmente a Mike Hilden, María Teresa Lozano, Michel Boileau, Francis Bonahon y Michael Heusener. Agradezco en especial a Joan Porti el interés que ha mostrado por mi trabajo y el ánimo que me ha dado siempre, así como la paciencia con que ha contestado a mis preguntas; él me ha proporcionado muchas de las referencias y el programa Adobe Illustrator con que he hecho los dibujos. Agradezco al IHP de París y al Departamento de Matemáticas de la Universidad Paul Sabatier de Toulouse por su hospitalidad durante mis estancias allí.

Agradezco a todos mis compañeros de la facultad por su compañía diaria y por contribuir, con diversos seminarios, a crear un ambiente más comunicativo. Doy gracias especialmente a Raquel Díaz, por animarme y aconsejarme en momentos de desaliento, y por estar dispuesta a ayudarme siempre que ha sido necesario. Doy también gracias a Elena Martín Peinador, que ha compartido conmigo el despacho durante estos años y ha contribuido con sus acertadas sugerencias a mejorar la redacción de la introducción.

Agradezco profundamente a mi familia y a las personas que me son más queridas, por su cariño y apoyo constantes y por haber impulsado siempre mi trabajo, liberándome de toda otra preocupación. Sin ellos nada habría sido posible.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
I. UN NUEVO MÉTODO DE CONSTRUCCIÓN DE ESTRUCTURAS CÓNICAS EN NUDOS O ENLACES DE DOS PUENTES	15
Introducción	15
1. El espacio de caracteres de representaciones en $SL(2, \mathbb{C})$ del grupo de un nudo o enlace de dos puentes	21
2. Cálculo explícito de una representación del grupo de un nudo o enlace de dos puentes en $SL(2, \mathbb{C})$, a partir de la curva de trazas	27
3. Paso al modelo de Klein del espacio hiperbólico	33
4. La transición de holonomías hiperbólicas a holonomías esféricas a través de una holonomía euclídea	36
5. La estructura de orbiforma esférica en S^3 con singularidad de ángulo π en un nudo o enlace racional	47
6. Un algoritmo de construcción de los poliedros de Dirichlet	51
II. ALGUNOS EJEMPLOS	65
Introducción	65
1. Ejemplo 1: estructuras cónicas en el nudo de a ocho	67
2. Ejemplo 2: cirugía cero en el nudo de a ocho	78
3. Un modelo proyectivo de la geometría Sol, que muestra la degeneración del ejemplo 2	86
4. Ejemplo 3: estructuras cónicas en el enlace de Whitehead, con el mismo ángulo cónico en ambas componentes	93
5. Ejemplo 4: estructuras esféricas cónicas en el enlace de Whitehead, con uno de los dos ángulos cónicos constantemente igual a 180°	101
6. Un modelo afín de la geometría Nil, que muestra la degeneración del ejemplo 4	112
III. POLIEDROS DE DIRICHLET DE 3-VARIEDADES CÓNICAS	123
Introducción	123
1. Fractura o “cut-locus” de una variedad cónica	125

2. Poliedro de Dirichlet de una 3-variedad cónica hiperbólica con ángulos cónicos menores que 2π	129
3. Poliedro de Dirichlet de una 3-variedad cónica hiperbólica con ángulos cónicos menores que π	141
4. Una descripción local del poliedro de Dirichlet cuando todos los ángulos cónicos son menores que 2π	145
5. Una presentación del grupo fundamental del complemento de la singularidad, a partir del poliedro de Dirichlet	146
6. La estructura de orbiforma esférica en S^3 con singularidad un nudo o enlace racional y ángulo 180°	147
7. Simetrías del poliedro de Dirichlet	150
IV. DEFORMACIONES DE ESTRUCTURAS HIPERBÓLICAS CÓNICAS	153
Introducción	147
1. La topología cuasi-isométrica en el espacio de deformaciones de una estructura hiperbólica cónica	157
2. Variación local del poliedro de Dirichlet fuera de un entorno de la singularidad, al deformar una estructura hiperbólica cónica	160
3. Variación local del poliedro de Dirichlet dentro de un entorno de la singularidad, al deformar una estructura hiperbólica cónica	165
4. Algoritmo de construcción de deformaciones locales a partir de la representación de holonomía	174
V. NUEVAS ESTRUCTURAS CON HOLONOMÍA SEMI-RIEMANNIANA, Y UNA FÓRMULA DE SCHLÄFLI EN HIPERCUÁDRICAS SEMI-RIEMANNIANAS	189
Introducción	189
1. Holonomías semi-riemannianas para el nudo de a ocho	191
2. Estructuras proyectivas con holonomía semi-riemanniana, singulares en el nudo de a ocho	199
3. Una fórmula diferencial de Schläfli para simples en hipercuádricas semi-riemannianas	209
4. Aplicación 1: volumen dual de un tetraedro hiperbólico en dimensión 3	223
5. Aplicación 2: fórmulas de Gauss-Bonnet en la esfera de de Sitter, para simples con todas las caras riemannianas	230
6. Aplicación 3: volumen dual de un n -simplex hiperbólico. (Generalización de una fórmula de Santaló)	237
BIBLIOGRAFÍA	243

INTRODUCCIÓN

El contexto general en que se encuadra esta tesis es la geometrización de variedades cerradas de dimensión 3, que es una parte de la topología de dimensión baja. Su inicio se remonta a 1976, cuando W.P. Thurston observó la conveniencia de imponer sobre una variedad diferenciable una estructura geométrica adicional (por ejemplo, una métrica riemanniana), para conseguir nueva información sobre las propiedades puramente topológicas de la variedad. En dimensión 2 es un resultado clásico de Riemann (Koebe y Caratheodory) que toda superficie cerrada admite una métrica de curvatura constante. La genial aportación de Thurston fue observar que también en dimensión 3 es posible geometrizar las 3-variedades de manera muy general. Toda 3-variedad cerrada se puede descomponer de modo canónico en un número finito de piezas, según un resultado obtenido independientemente por Jaco-Shalen y Johannson en 1976. La Conjetura de Geometrización de Thurston afirma que todas las piezas de esta descomposición canónica admiten una métrica completa y localmente homogénea (ver, por ejemplo, [Ot]). En dimensión 3 existen exactamente ocho modelos posibles para tales estructuras geométricas, tres de los cuales (los únicos de curvatura seccional constante) son los espacios hiperbólico, euclídeo y esférico (cf. [Sc], compárese por ejemplo con [Bi]). El de mayor interés es el espacio hiperbólico, ya que las 3-variedades que se pueden modelar en cualquiera de las otras siete geometrías están totalmente clasificadas (cf. [Sc]).

Una clase más amplia de estructuras geométricas que, como veremos enseguida, interesa considerar en una 3-variedad, es la formada por las estructuras geométricas cónicas. Diremos que una 3-variedad cerrada M tiene una estructura geométrica cónica si admite una métrica de curvatura seccional constante, que es singular a lo largo de un nudo o enlace $\Sigma \subset M$ (aunque existen definiciones más generales, que admiten la posibilidad de que Σ sea un grafo). Con más precisión, diremos aquí que M es una 3-variedad hiperbólica cónica con singularidad un nudo Σ y ángulo cónico $\alpha < 2\pi$, si cada punto del complemento de Σ tiene un entorno isométrico a una bola en el espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 , y cada punto de Σ tiene un entorno isométrico a un abierto del espacio obtenido identificando por rotación los lados de un diedro de ángulo α en \mathbb{H}^3 (ver figura 1). Denotaremos esta variedad cónica por (M, Σ, α) .

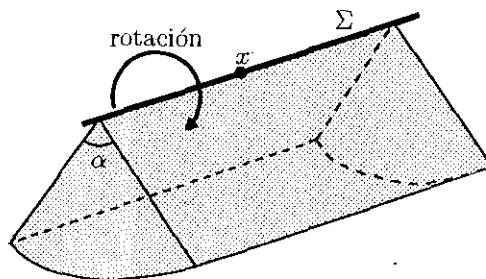


Figura 1

Si la singularidad es un enlace (con más de una componente conexa), entonces los ángulos cónicos pueden ser distintos en las diferentes componentes, pero la definición es análoga. Por comodidad, en esta introducción supondremos siempre que la singularidad es un nudo. Las definiciones de variedad esférica cónica y variedad euclídea cónica son también análogas.

La ventaja que presentan las estructuras cónicas con respecto a las estructuras geométricas no singulares, es que son más flexibles: haciendo variar el ángulo cónico, se las puede deformar de manera continua. Esta propiedad las hace útiles para construir estructuras geométricas (no singulares) en 3-variedades cerradas y en orbiformas (“orbifolds” en inglés). Supongamos que una 3-variedad cerrada y orientable M contiene un nudo Σ tal que su complemento $M \setminus \Sigma$ admite una estructura hiperbólica completa de volumen finito. Se puede intentar deformar esta estructura, para pasar a estructuras hiperbólicas cónicas en la variedad M , con singularidad el nudo Σ y ángulo cónico cada vez mayor. Si se puede aumentar el ángulo cónico hasta llegar a $2\pi/d$, entonces se obtiene una estructura hiperbólica en la orbiforma M con singularidad Σ e isotropía cíclica de orden d . Las cubiertas de M virtualmente regulares ramificadas sobre Σ ([LS]) con índice de ramificación d , si existen, son variedades hiperbólicas (cf. [HLM₆], por ejemplo). En particular, si $d = 1$, entonces la propia variedad M tiene una estructura hiperbólica (no singular).

Por otra parte, al realizar una deformación de variedades hiperbólicas cónicas, puede ocurrir que exista un valor crítico del ángulo cónico, para el cual las estructuras hiperbólicas cónicas degeneran. Tiene mucho interés comprender de qué maneras se puede producir la degeneración. Así por ejemplo, el análisis de los tipos de degeneraciones posibles para ángulo menor que π es una parte esencial de la anunciada demostración del Teorema de los Orbifolds (cf. [BP], [Ho₂], [SOK], [Zh]). El caso de ángulo cónico $> \pi$ es más difícil, pues podrán aparecer fenómenos nuevos que no ocurren para ángulos cónicos $\leq \pi$: por ejemplo, que el nudo singular se corte a sí mismo, convirtiéndose en un grafo, o que sólo se produzca degeneración en una parte de la variedad cónica. Las variedades cónicas de ángulo $> \pi$ están aún completamente inexploradas y son de por sí un objeto interesante de estudio.

Es, pues, muy importante conocer ejemplos concretos de familias de variedades cónicas que degeneren de diversos modos. Algunos ejemplos se pueden encontrar en las notas de Thurston ([Thu₁]), en la tesis de Hodgson ([Ho₁]), y en los artículos de Hilden, Lozano y Montesinos ([HLM₁], [HLM₂]), donde se realizan construcciones especialmente detalladas y explícitas. Precisamente el artículo de Hilden, Lozano y Montesinos, *On a remarkable polyhedron geometrizing the figure eight knot cone-manifolds* ([HLM₁]), sirvió de punto de arranque para esta tesis.

* * * * *

El objetivo del presente trabajo es ofrecer un método general para construir familias continuas de variedades cónicas con ángulos cónicos $< 2\pi$. En el primer capítulo se describe el método; en los capítulos tercero y cuarto se demuestra; y en el capítulo segundo se aplica a algunos ejemplos particulares. El método consiste en obtener explícitamente poliedros de Dirichlet para las estructuras cónicas buscadas, una vez conocidas las correspondientes representaciones de holonomía. A continuación explicamos el significado y el alcance de esta frase.

Supongamos que M es una 3-variedad hiperbólica cónica con singularidad un nudo $\Sigma \subset M$ y ángulo cónico $\alpha < 2\pi$, y sea $x_0 \in M \setminus \Sigma$ un punto base cualquiera. El complemento del nudo singular, $M \setminus \Sigma$, es, pues, una variedad hiperbólica, y se puede “desarrollar” en \mathbf{H}^3 como sigue. Consideremos su cubierta universal $\widetilde{M \setminus \Sigma}$, que hereda una estructura de variedad hiperbólica, mediante levantamiento de las cartas de un atlas hiperbólico de $M \setminus \Sigma$. Por ser $\widetilde{M \setminus \Sigma}$ simplemente conexa, su estructura hiperbólica se puede describir globalmente, mediante una isometría local $D : \widetilde{M \setminus \Sigma} \rightarrow \mathbf{H}^3$, que se llama *aplicación desarrolladora*. En efecto, las restricciones de D a abiertos suficientemente pequeños de $\widetilde{M \setminus \Sigma}$ son cartas de un atlas hiperbólico de $\widetilde{M \setminus \Sigma}$. Entonces las transformaciones cubrientes de la cubierta $\widetilde{M \setminus \Sigma}$ se transforman mediante D en isometrías de \mathbf{H}^3 , y esto define un *homomorfismo o representación de holonomía* $\rho : \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0) \rightarrow \text{Iso}(\mathbf{H}^3)$. El par formado por la aplicación desarrolladora D y el homomorfismo de holonomía ρ es único a menos de la acción de $\text{Iso}(\mathbf{H}^3)$ por composición y conjugación, respectivamente. La imagen de ρ , $\rho(\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)) \subset \text{Iso}(\mathbf{H}^3)$, se llama *grupo de holonomía* de $M \setminus \Sigma$. Como M es una variedad cónica de singularidad Σ y ángulo cónico α , se tiene que la imagen por ρ de cualquier meridiano de Σ es una rotación de ángulo α .

Si el ángulo cónico es de la forma $2\pi/n$ con $n \in \mathbf{N}$, entonces el grupo de holonomía $G = \rho(\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0))$ es un subgrupo discreto de $\text{Iso}(\mathbf{H}^3)$, y la variedad cónica M es isométrica al cociente de \mathbf{H}^3 por la acción de G (M es una *orbiforma hiperbólica*, véase por ejemplo [MM]). Si se elige cualquier punto O de \mathbf{H}^3 que no quede fijo por ningún elemento de G , entonces se puede definir el dominio de Dirichlet para G centrado en O , como el conjunto de puntos de \mathbf{H}^3 que distan menos del punto base O que de cualquiera de sus imágenes por elementos de G :

$$\mathcal{P} = \{ x \in \mathbf{H}^3 \mid d(x, O) \leq d(x, \rho\gamma(O)) \text{ , para todo } \gamma \in \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0) \}$$

Este dominio de Dirichlet \mathcal{P} es un poliedro compacto y convexo de \mathbf{H}^3 , que es un dominio fundamental para la acción del grupo de holonomía G . Sus caras se pueden identificar dos a dos mediante isometrías de G , dando como resultado la variedad cónica $M \cong \mathbf{H}^3/G$.

Si el ángulo cónico α no es de la forma $2\pi/n$, entonces incluso aunque el grupo G fuera discreto (algo imposible si α es una fracción irracional de π , y problemático si α es una fracción racional de π

pero no de la forma $2\pi/n$), no tendría sentido hablar de dominios fundamentales para la variedad cónica M , ya que M no sería isométrica al cociente de \mathbf{H}^3 por la acción de G . Sin embargo, en el capítulo III de esta tesis se prueba que si M es cualquier variedad hiperbólica cónica compacta con ángulo cónico $< 2\pi$, entonces existe un poliedro hiperbólico compacto \mathcal{P} , estrellado en un cierto punto base $O \in \mathbf{H}^3$, cuyas caras (en número finito) se identifican dos a dos mediante isometrías hiperbólicas para dar lugar a la variedad cónica M . Existe un subconjunto finito Γ de $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$ tal que cada cara de \mathcal{P} está contenida en un plano bisector de la forma

$$H_\gamma = \{ x \in \mathbf{H}^3 \mid d(x, O) = d(x, \rho\gamma(O)) \}$$

donde $\gamma \in \Gamma$. Llamaremos a los elementos de Γ , *facetas propias* del poliedro \mathcal{P} . Además, si el ángulo cónico es $\leq \pi$, entonces el poliedro \mathcal{P} es convexo y se puede escribir de la forma

$$\mathcal{P} = \{ x \in \mathbf{H}^3 \mid d(x, O) \leq d(x, \rho\gamma(O)) \text{ para todo } \gamma \in \Gamma \}$$

Así pues, este poliedro \mathcal{P} es una generalización del dominio de Dirichlet de una orbiforma hiperbólica, y se llamará *poliedro de Dirichlet* de la variedad hiperbólica cónica M , con centro en el punto O . Los puntos de \mathcal{P} que (tras realizar los pegados de las caras) constituyen el nudo singular Σ , se llaman “puntos singulares” del poliedro de Dirichlet \mathcal{P} ; son una unión de segmentos disjuntos (y posiblemente algunos puntos aislados) en el borde de \mathcal{P} .

Un teorema de existencia de poliedros de Dirichlet para variedades hiperbólicas cónicas ha sido ya enunciado y utilizado (sin dar ninguna demostración completa) por Hodgson ([Ho₂]), Kojima ([Ko]) y Zhou ([Zh]). El poliedro de Dirichlet se define, tanto en esos trabajos como en esta tesis, desarrollando en \mathbf{H}^3 el complemento en M de la fractura (“cut-locus” en inglés) con respecto a un punto base dado, es decir, el conjunto de puntos x de M que se pueden unir con el punto base x_0 por una única geodésica que minimice la distancia entre x y x_0 . El capítulo III de esta tesis está dedicado a demostrar con detalle que de ese modo se obtiene un poliedro compacto con un número *finito* de caras, que es un poliedro de Dirichlet. Aunque la idea no es nueva, la demostración no ha sido nunca escrita con detalle. La demostración que damos aquí tiene la ventaja adicional de proporcionar además una descripción completa del poliedro de Dirichlet, que permite construirlo explícitamente en casos concretos. En el mismo capítulo III veremos que también existen poliedros de Dirichlet para variedades euclídeas y esféricas cónicas compactas con ángulo cónico $< 2\pi$. Todo esto justifica la detallada demostración que ofrecemos aquí.

Dada una variedad cónica (M, Σ, α) , nos planteamos el problema de encontrar un poliedro de Dirichlet para ella. Para resolver este problema se procede en dos pasos. En primer lugar, se ha de determinar la representación de holonomía ρ de (M, Σ, α) . La vertiente general de este primer problema

es el objeto de estudio de varios autores ([CS], [GM] entre otros), y su aspecto computacional aparece por ejemplo en [Bu], [He], [HLM₂], [KI] o [Ri₃]. Puede considerarse que el problema está resuelto y que sólo falta un procedimiento general de cálculo. En esta tesis construiremos poliedros de Dirichlet de variedades cónicas $(\mathbf{S}^3, \Sigma, \alpha)$ para las que ya se conozca la representación de holonomía como resultado del estudio de estos autores. El segundo paso para obtener el poliedro de Dirichlet de (M, Σ, α) , es determinar el conjunto finito Γ de facetas propias. Este es precisamente el problema que se aborda en esta tesis.

El **objetivo ideal** sería el siguiente: a partir de la representación de holonomía de una variedad cónica dada M , determinar (o al menos acotar) el conjunto Γ de facetas propias de su poliedro de Dirichlet \mathcal{P} centrado en un cierto punto base. Sin embargo, éste es un problema extremadamente difícil, abierto incluso en el caso de que M sea una orbiforma.

El **problema que se resuelve** en el capítulo IV de esta tesis es menos ambicioso. Supongamos que conocemos una familia uniparamétrica de representaciones $\rho_t : \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0) \rightarrow \text{Iso}(\mathbf{H}^3)$, $t \in [0, \epsilon)$, que envían los meridianos de Σ a rotaciones de ángulo α_t . Supongamos además que ρ_0 es la holonomía de una estructura hiperbólica cónica en M con singularidad Σ , de la cual conocemos ya su poliedro de Dirichlet \mathcal{P}_0 centrado en un cierto punto base O . Se trata entonces de “deformar” este poliedro \mathcal{P}_0 para obtener poliedros de Dirichlet \mathcal{P}_t de otras estructuras cónicas próximas, con holonomía ρ_t . (Este es el procedimiento utilizado en el artículo [HLM₁] para un ejemplo concreto.)

Una **pregunta básica** que se plantea, es si existirán realmente tales estructuras cónicas próximas. La respuesta es afirmativa, y se deduce del Teorema de Cirugía Hiperbólica de Thurston ([Thu₁]), demostrado en [CEG] o [Go₁], por ejemplo. Partiremos, pues, de la hipótesis de que estas estructuras existen, y estudiaremos de qué manera varían sus poliedros de Dirichlet \mathcal{P}_t .

Un problema paralelo (que se puede estudiar como un caso particular de éste, pero que tiene interés por sí mismo) es el de averiguar cómo varía el poliedro de Dirichlet de una variedad hiperbólica cónica cuando se cambia la posición del punto base. Decimos que éste es un caso particular del problema de hallar poliedros de Dirichlet para holonomías próximas a una dada, por el siguiente motivo. Desplazar el punto base (sin modificar la holonomía) es equivalente a conjugar la representación de holonomía por una cierta isometría hiperbólica (manteniendo fijo el punto base). Por tanto, la variación del punto base se puede interpretar como una deformación trivial de la estructura cónica.

La **dificultad** del problema está en que, en general, los poliedros deformados \mathcal{P}_t pueden tener distinto tipo combinatorio que el poliedro inicial \mathcal{P}_0 (al contrario de lo que ocurre en el ejemplo, muy peculiar, del artículo [HLM₁]). Es decir, si bien toda faceta propia de \mathcal{P}_0 seguirá siendo faceta propia de \mathcal{P}_t para t suficientemente próximo a 0, puede ocurrir que \mathcal{P}_t tenga más facetas propias que \mathcal{P}_0 .

Veamos un ejemplo en dimensión 2 . En la figura 2 se muestran dos teselaciones del plano euclideo por los dominios de Dirichlet correspondientes a dos estructuras euclideas (no singulares) en el toro T^2 . En la primera, el grupo de holonomía está generado por dos traslaciones en direcciones perpendiculares: $\tau_1(x, y) = (x + 1, y)$, $\tau_2(x, y) = (x, y + 1)$. En la segunda, el grupo de holonomía está generado por las traslaciones $\tau_1(x, y) = (x + 1, y)$ y $\tau_2(x, y) = (x + t, y + 1)$, donde $t > 0$ es pequeño. Se observa que los polígonos de Dirichlet pasan de ser cuadrados a ser hexágonos, es decir, aparecen dos nuevas facetas propias.

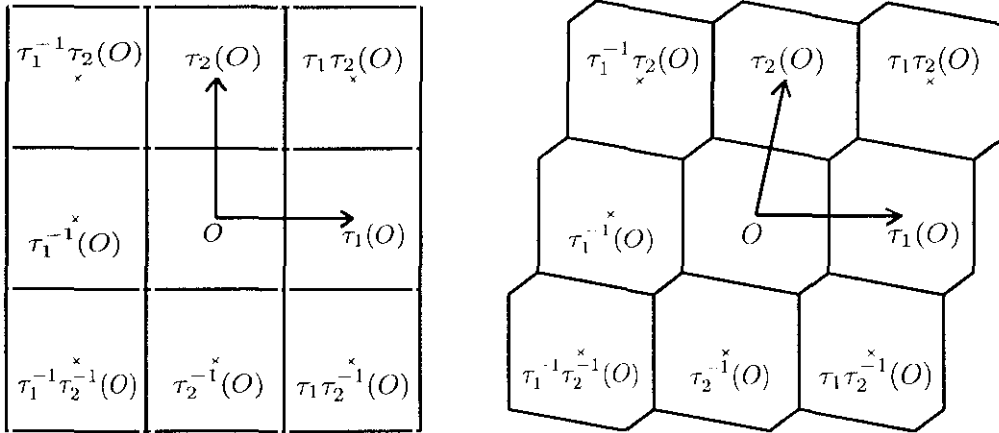


Figura 2

Para solucionar este problema, le asociaremos al poliedro de Dirichlet inicial \mathcal{P}_0 otro subconjunto finito $\bar{\Gamma}_0$ de $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$, algo más grande que el conjunto Γ_0 de facetas propias. Incluiremos ahora aquellos $\gamma \in \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$ tales que el plano bisector $H_\gamma(O) = \{x \in \mathbb{H}^3 \mid d(x, O) = d(x, \rho_0 \gamma(O))\}$ no determine necesariamente una cara de \mathcal{P}_0 , sino que “bascule” sobre una arista o un vértice *no singular* de \mathcal{P}_0 (en ese caso diremos que γ es una *faceta fantasma* de \mathcal{P}_0). Llamaremos a los elementos de $\bar{\Gamma}_0$, *facetas generales* de \mathcal{P}_0 .

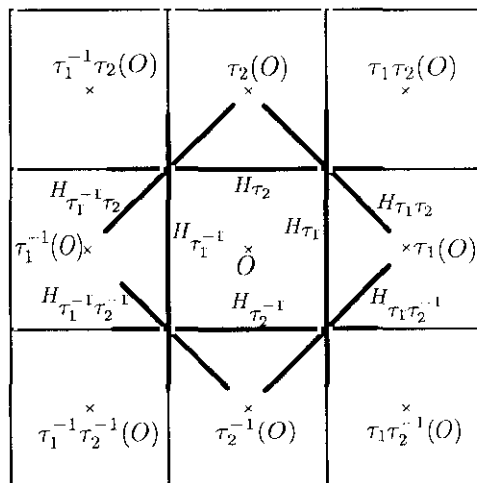


Figura 3 : Las facetas generales son: τ_1 , τ_1^{-1} , τ_2 , τ_2^{-1} , $\tau_1 \tau_2$, $\tau_1 \tau_2^{-1}$, $\tau_1^{-1} \tau_2$, $\tau_1^{-1} \tau_2^{-1}$.

Pues bien, si fijamos un pequeño entorno U de los puntos singulares de \mathcal{P}_0 , entonces **fuera de ese entorno** el conjunto de facetas *propias* de \mathcal{P}_t está contenido en el conjunto de facetas *generales* de \mathcal{P}_0 , si t está suficientemente próximo a cero (el grado de proximidad necesario depende del entorno U elegido), cf. teorema IV.2.3. Sin embargo, puede que \mathcal{P}_t tenga todavía más facetas propias, que correspondan a pequeñas caras contenidas **dentro del entorno U** . Veamos otro ejemplo en dimensión 2. Pensemos en la orbiforma euclídea cuyo espacio subyacente es la esfera S^2 , con tres puntos cónicos de ángulos $2\pi/3$, $2\pi/3$, $2\pi/3$ (ver figura 4a). El grupo de holonomía está generado por dos rotaciones ρ_1, ρ_2 de ángulo $2\pi/3$. En la figura 4b se muestra una teselación del plano euclídeo por el dominio de Dirichlet \mathcal{P} centrado en el punto medio O entre los puntos fijos de ρ_1 y ρ_2 , y todos sus trasladados. **Todos los vértices de la teselación son puntos singulares.** En este caso las facetas propias coinciden con las facetas generales (y son $\rho_1, \rho_2, \rho_1^{-1}$ y ρ_2^{-1}), pues recordemos que hemos definido como *facetas fantasma* las que basculan sobre vértices **no singulares**. (Ciertamente se pueden también considerar en este caso facetas “fantasma” que basculan sobre vértices singulares, véase la figura 6 más abajo; enseguida comentaremos la dificultad que plantea el considerar ese tipo de facetas “fantasma” en general.)

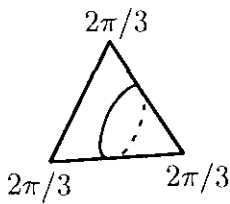


Figura 4a

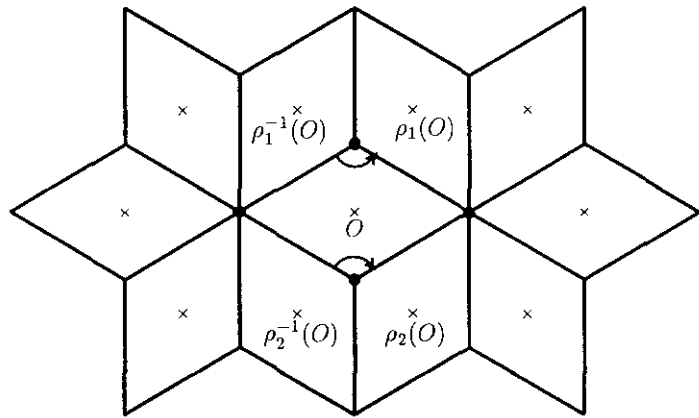


Figura 4b

Vamos ahora a desplazar ligeramente el punto base O , de modo que ya no esté en el segmento que une los puntos fijos de ρ_1 y ρ_2 . Como ya hemos dicho, esto se puede interpretar como una deformación trivial de la estructura cónica (la holonomía queda conjugada por una pequeña traslación). En la figura 5 se muestra la nueva teselación del plano euclídeo por los correspondientes dominios de Dirichlet. Se observa que han aparecido dos caras nuevas cerca de un vértice singular, que no corresponden a ninguna faceta general del dominio inicial (aunque corresponden a facetas “fantasma” que basculan sobre ese vértice singular).

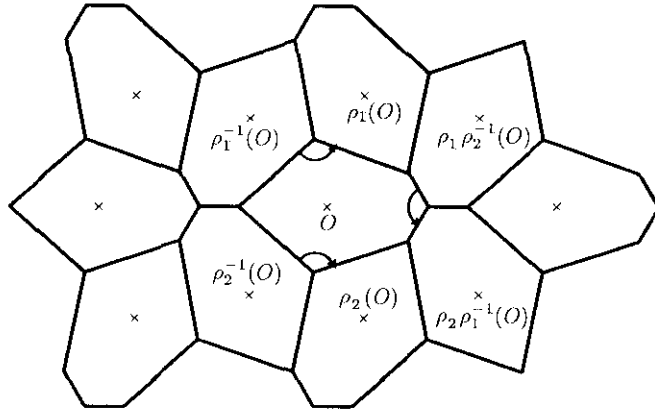


Figura 5

Lo natural sería, pues, ampliar aún más el conjunto de facetas generales de \mathcal{P}_0 , añadiéndole **todas** las facetas “fantasma” que basculan sobre aristas o vértices **singulares**. Si el ángulo cónico es de la forma $2\pi/n$ (como en este ejemplo), entonces hay una cantidad finita de planos bisectores que basculan sobre un punto singular. Sin embargo, en general existen **infinitos**; por ejemplo cuando el ángulo cónico es una fracción irracional de π (no está claro qué ocurre cuando el ángulo cónico es una fracción racional de π). Por ello, no se deben considerar todas las facetas “fantasma”, sino seleccionar **un subconjunto finito bien definido de ellas**, que llamaremos *facetas singulares*. Este conjunto finito de facetas singulares se puede calcular de manera efectiva a partir del poliedro \mathcal{P}_0 .

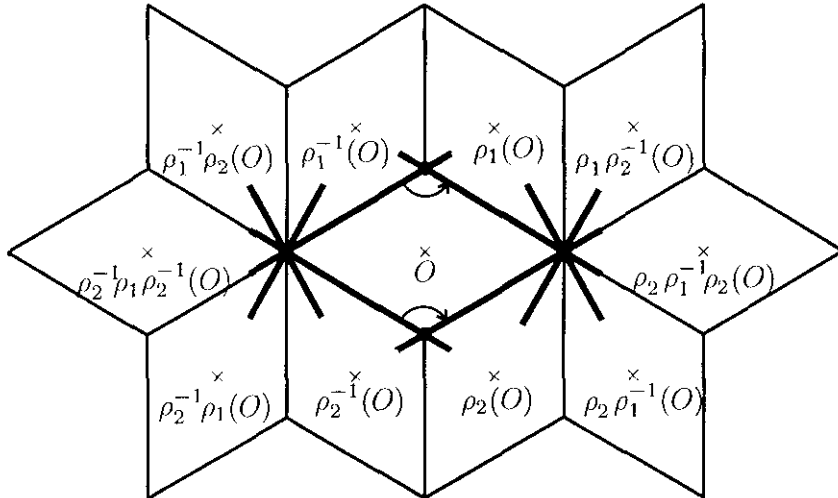


Figura 6 : Las facetas singulares son: ρ_1 , ρ_1^{-1} , ρ_2 , ρ_2^{-1} , $\rho_1 \rho_2^{-1}$, $\rho_2 \rho_1^{-1}$, $\rho_1^{-1} \rho_2$, $\rho_2^{-1} \rho_1$.

Pues bien, si t está suficientemente próximo a 0, entonces el conjunto de facetas propias de \mathcal{P}_t está contenido en la unión de los conjuntos de facetas generales y singulares de \mathcal{P}_0 , cf. teorema IV.3.2. Como hemos dicho antes, estos conjuntos son calculables de modo efectivo a partir del poliedro \mathcal{P}_0 . Por tanto, este resultado permite acotar el conjunto de planos bisectores que se necesita considerar para

construir los poliedros de Dirichlet de estructuras cónicas próximas a una dada.

* * * * *

De hecho, todos estos resultados proporcionan (en la sección 4 del capítulo IV) un algoritmo efectivo para construir poliedros de Dirichlet correspondientes a representaciones de holonomía suficientemente próximas a una dada (aunque el algoritmo no determina de manera explícita el grado de proximidad). Como consecuencia se obtiene además una demostración constructiva, para este caso particular, del teorema más general que afirma (hablando vagamente) que *toda representación próxima a la representación de holonomía de una estructura geométrica, es también la holonomía de alguna estructura geométrica*. Este teorema fue enunciado en su mayor generalidad por Thurston ([Thu₁], §5.3.1) y demostrado de diferentes maneras por Canary-Epstein-Green ([CEG]) y Goldman ([Go₁]) entre otros (véase [Go₁] para una lista más completa de referencias).

En efecto, supongamos que M es una 3-variedad cerrada y Σ es un nudo contenido en M , y supongamos que tenemos una familia continua de representaciones ρ_t de $\pi_1(M \setminus \Sigma)$ en $\text{Iso}(\mathbb{H}^3)$, tal que ρ_0 es la holonomía de una estructura hiperbólica cónica (M, Σ, α_0) , y tal que ρ_t envía los meridianos de Σ a rotaciones de ángulo α_t . Queremos ver que existen estructuras hiperbólicas cónicas (M, Σ, α_t) con holonomía ρ_t , y hallar poliedros de Dirichlet \mathcal{P}_t para ellas. Esto se consigue con el siguiente algoritmo:

Fase 1:

- (1) Se parte de un poliedro de Dirichlet \mathcal{P}_0 para la estructura hiperbólica cónica inicial de holonomía ρ_0 , y se calculan sus facetas generales y singulares.
- (2) Para t suficientemente próximo a 0, se determinan los planos bisectores correspondientes a las facetas generales de \mathcal{P}_0 . Con ellos, se construye de manera explícita un poliedro $\widehat{\mathcal{P}}_t$. (Si el ángulo cónico es $< \pi$, $\widehat{\mathcal{P}}_t$ no es más que la intersección de todos los semiespacios correspondientes a las facetas generales de \mathcal{P}_0 .)
- (3) Se truncan algunos vértices o aristas de $\widehat{\mathcal{P}}_t$. Este truncamiento es canónico al prescribir que las caras del poliedro truncado \mathcal{Q}_t se han de identificar dos a dos mediante isometrías hiperbólicas, para dar lugar a una estructura hiperbólica en el complemento de un entorno tubular U de la singularidad (el borde de U está formado por las nuevas caras aparecidas en \mathcal{Q}_t al realizar el truncamiento).

Con esto se ha probado ya, de manera constructiva, que ρ_t es la holonomía de una estructura hiperbólica en $M \setminus U$. Esto es un caso particular del teorema general antes mencionado (“representaciones próximas a una holonomía son también holonomías”), y constituye una parte del Teorema de Cirugía Hiperbólica de Thurston.

Un argumento idéntico al empleado por Thurston en su Teorema de Cirugía Hiperbólica, demuestra que existe una estructura hiperbólica cónica (M, Σ, α_t) que extiende a la estructura hiperbólica en $M \setminus U$ definida por el poliedro truncado \mathcal{Q}_t . Conocida, pues, la existencia de esta estructura cónica, veamos cómo construirla mediante el algoritmo. Denotemos por \mathcal{P}_t el poliedro de Dirichlet de esta estructura cónica. Lógicamente \mathcal{P}_t es una extensión de \mathcal{Q}_t . Por tanto, \mathcal{P}_t se obtiene reemplazando las pirámides y prismas antes truncados de $\widehat{\mathcal{P}}_t$, por otros poliedros que, pegados entre sí unos con otros por isometrías, producen el entorno U de la singularidad que antes faltaba. Las nuevas caras de estos poliedros añadidos, necesariamente corresponden a facetas singulares de \mathcal{P}_0 ¹. Por tanto, \mathcal{P}_t se ha de obtener a partir de $\widehat{\mathcal{P}}_t$ truncándolo por ciertas facetas singulares. Como no sabemos exactamente por cuáles, la segunda fase del algoritmo para construir \mathcal{P}_t consiste en probar todas las posibilidades:

Fase 2:

- (4) Se trunca el poliedro $\widehat{\mathcal{P}}_t$ de todas las maneras posibles por planos bisectores correspondientes a facetas singulares de \mathcal{P}_0 . Como en total hay un número finito de facetas singulares, sólo existe un número finito de posibilidades.
- (5) Se obtiene así un número finito de poliedros. Para cada uno de ellos, se comprueba si sus caras se identifican dos a dos mediante isometrías hiperbólicas para dar lugar a la estructura cónica (M, Σ, α_t) deseada. Ya sabemos (por el argumento de Thurston antes mencionado) que ha de existir uno que verifique esta condición, y éste es el poliedro de Dirichlet buscado \mathcal{P}_t . (Según un teorema de Hodgson-Kerckhoff [HK] sobre rigidez de variedades hiperbólicas cónicas, será además único.)

En ejemplos concretos, el algoritmo se simplifica si se dispone de información adicional sobre los poliedros de Dirichlet (por ejemplo, sobre sus simetrías), y por inspección directa de los poliedros.

El mismo algoritmo sirve también para deformar una estructura esférica cónica a estructuras esféricas cónicas próximas, o para deformar una estructura euclídea cónica a estructuras euclídeas, hiperbólicas o esféricas próximas (partiendo siempre de la hipótesis de que se pueda deformar, a nivel puramente algebraico, la representación de holonomía). Este último resultado es una parte del teorema de regeneración de estructuras euclídeas cónicas demostrado por Porti ([Po]); aquí se hace de modo constructivo.

Este procedimiento se aplica en el capítulo II de la tesis, para construir algunos ejemplos concretos en los que la variedad cónica es la esfera S^3 y la singularidad es un nudo o enlace de dos puentes. Se dice que un nudo o enlace $\Sigma \subset S^3$ es de dos puentes (o racional) si admite una proyección que sólo tiene dos máximos locales y dos mínimos locales (ver figura 7).

¹ Aquí es necesario hacer una cierta matización; véase la observación IV.4.3

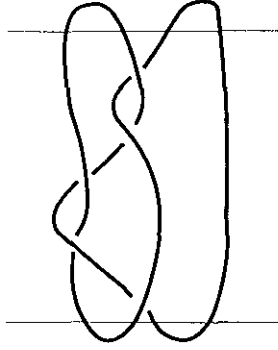


Figura 7 : un nudo de dos puentes.

En particular, los enlaces de dos puentes tienen exactamente dos componentes. Estos nudos y enlaces han sido estudiados y clasificados completamente por Schubert ([Sb]). Se llaman también nudos o enlaces racionales, porque se puede asociar a cada número racional p/q un nudo o enlace de dos puentes, representado como muestra la figura 8.

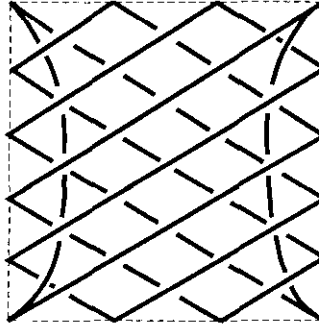


Figura 8 : el nudo racional $[5/3]$.

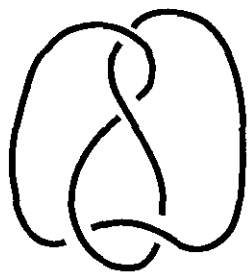
Denotaremos por $[p/q]$ el nudo o enlace racional asociado al número p/q ; $[p/q]$ es un nudo si p es impar, y un enlace si p es par. La clasificación de Schubert dice que $[p/q]$ y $[p'/q']$ coinciden (como nudos o enlaces no orientados) si y sólo si $p = p'$ y $q^{\pm 1} \equiv q' \pmod{p}$.

El amplio conocimiento que se posee sobre los nudos y enlaces de dos puentes, facilita en gran medida el estudio de las estructuras cónicas en S^3 que tienen como singularidad uno de estos nudos o enlaces. Por una parte, el espacio de representaciones del grupo fundamental de su complemento, $\pi_1(S^3 \setminus [p/q])$, en $PSL(2, C) \cong Iso^+(H^3)$, es bien conocido y computable en la práctica (cf. [Bu], [HLM₂]). Por otra parte, se sabe que siempre existe una estructura de orbiforma esférica en S^3 con singularidad cualquier nudo o enlace racional y ángulo cónico igual a π (cf. [Sb]). Esta estructura se conoce bien y posee un dominio de Dirichlet muy sencillo. Por tanto, siempre se tiene asegurado un punto de partida para comenzar la construcción de poliedros de Dirichlet deformados. Además, ya para un enlace tan simple como el enlace de Whitehead (o enlace racional $[8/3]$, ver figura 9), se producen

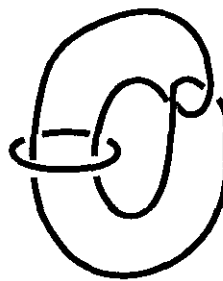
muchos tipos distintos de degeneraciones interesantes. Sin embargo, si bien el método es potencialmente aplicable a cualquier nudo o enlace racional, las dificultades computacionales que aparecen en la práctica son insuperables salvo en los casos más sencillos.

De los ejemplos que se construyen con este procedimiento en el capítulo II de esta tesis, destacamos aquí los dos en que se producen degeneraciones en estructuras geométricas no euclídeas:

- Una familia de estructuras hiperbólicas cónicas en la variedad obtenida por cirugía de Dehn de tipo 0 en el nudo de a ocho, con singularidad el ánima de la cirugía y ángulo cónico que varía entre 0 y 2π . Cuando el ángulo cónico se hace igual a 2π , se produce una degeneración en una geometría de tipo Sol.
- Una familia de estructuras esféricas cónicas en S^3 , con singularidad el enlace de Whitehead y ángulo cónico constantemente igual a π en una de las componentes del enlace. El ángulo cónico α en la otra componente varía entre π y $\pi/2$, y cuando α se hace igual a $\pi/2$ se produce una degeneración en una orbiforma Nil.



El nudo de a ocho



El enlace de Whitehead

Figura 9

Aparecen además de manera natural nuevos modelos para las geometrías Sol y Nil (también encontrados independientemente por E. Molnár [Mol] y por B. Thiel [Thi]), que permiten pasar con continuidad de cada una de estas familias de estructuras cónicas a la estructura geométrica límite (Sol o Nil, respectivamente), mediante un adecuado cambio de escala.

Para construir estos ejemplos ha sido imprescindible utilizar el programa Mathematica, debido a la magnitud y complicación de los cálculos involucrados.

Finalmente, en las secciones 1 y 2 del capítulo V de la tesis se estudian otras estructuras singulares en el nudo de a ocho, que aparecen de modo natural, pero no se conocen bien y son nuevas en la literatura. Se trata de estructuras proyectivas reales en S^3 , singulares en el nudo de a ocho, cuyo grupo de holonomía está contenido en $PSO(2, 2)$, el grupo de transformaciones proyectivas de RP^3 que preservan la forma

cuadrática $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$. Ahora bien, el grupo ortogonal $SO(2, 2)$ es el grupo de isometrías de la pseudoesfera $S_2^3 = \{ (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^4 \mid x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = -1 \}$, que es una variedad de Lorentz de curvatura constante (cf. [O’N]). Por tanto, se puede dar otra interpretación distinta a las estructuras proyectivas reales antes mencionadas, en términos de métricas de Lorentz. Concretamente, se puede descomponer S^3 en dos bolas, tales que en el interior de cada una de ellas está definida una métrica de Lorentz de curvatura constante, que tiene una “singularidad” (análoga a la de una variedad riemanniana cónica) en los arcos del nudo de a ocho contenidos dentro de cada bola.

El hecho de que aparezcan de modo natural, además de las ocho geometrías de Thurston, otras geometrías semi-riemannianas, motivó la búsqueda de una fórmula de Schläfli para calcular el volumen de poliedros contenidos en hipercuádricas semi-riemannianas (tales como la pseudoesfera S_2^3). En la sección 3 del capítulo V se obtiene esta fórmula y en las secciones 4, 5 y 6 se muestran otras aplicaciones de ella en contextos diferentes.

Resumiendo, los principales resultados obtenidos en esta tesis son los siguientes:

- Se da una demostración completa de la existencia de poliedros de Dirichlet para variedades cónicas (hiperbólicas, esféricas o euclídeas) con ángulos cónicos $< 2\pi$.
- Se describe de modo general la variación de los poliedros de Dirichlet cuando se deforma una estructura cónica dada.
- Como consecuencia, se obtiene un algoritmo general para construir familias continuas de estructuras cónicas (con ángulos $< 2\pi$) en una 3-variedad, una vez conocidas las correspondientes representaciones de holonomía, y conocido un poliedro de Dirichlet para un valor concreto del ángulo cónico.
- Se aplica este método a varios ejemplos particulares, que permiten visualizar degeneraciones de estructuras hiperbólicas o esféricas cónicas en otras estructuras geométricas de distinto tipo (Sol o Nil).
- Se observa la aparición, de manera natural, de nuevas estructuras geométricas con holonomía semi-riemanniana, lo cual lleva a demostrar una fórmula de Schläfli para el volumen de poliedros en hipercuádricas semi-riemannianas.

Otros ejemplos interesantes que se espera poder estudiar en un futuro próximo, con las técnicas desarrolladas en la tesis, son:

- una familia de estructuras hiperbólicas cónicas en S^3 con singularidad el enlace de Whitehead, que degeneran en una estructura $PSL(\widetilde{2}, \mathbf{R})$;
- una familia de estructuras esféricas cónicas en S^3 con singularidad el nudo de a ocho y *ángulo cónico mayor que π* . (Se espera que ocurra algún tipo especial de degeneración cuando el ángulo

cónico se haga igual a $4\pi/3$, y sería muy interesante poder comprenderla).

Quedan abiertos los siguientes problemas, más difíciles:

- Describir de modo general el poliedro de Dirichlet de una variedad cónica directamente a partir de su holonomía, sin necesidad de realizar deformaciones.
- A la vista de los ejemplos de degeneraciones que se estudian en esta tesis, abordar el problema inverso, de “regeneración” de estructuras Sol, Nil o $PSL(2, \mathbf{R})$ (cf. [Ho₁]). Es decir, partiendo de una de estas estructuras geométricas, estudiar la posibilidad de aproximarla por estructuras hiperbólicas cónicas. Para ello, se espera que puedan ser útiles los modelos de Sol y Nil que aparecen en la tesis, y que la regeneración de las estructuras Sol y Nil se pueda hacer de modo análogo a la regeneración de estructuras euclídeas vista aquí.

Para finalizar, comentamos brevemente la estructuración de la tesis. En el capítulo I se exponen algunos resultados conocidos sobre estructuras cónicas en la esfera S^3 con singularidad un nudo o enlace de dos puentes, y se describe el procedimiento de construcción de poliedros de Dirichlet para familias continuas de estructuras cónicas. En el capítulo II se muestran los ejemplos concretos construidos mediante este procedimiento. En el capítulo III se demuestra la existencia de poliedros de Dirichlet para variedades cónicas con ángulos $< 2\pi$. En el capítulo IV se estudia la variación de un poliedro de Dirichlet dado, al realizar deformaciones, y se demuestra la generalidad del procedimiento descrito en el capítulo I. Por último, en el capítulo V se describen las nuevas estructuras con holonomía semi-riemanniana, y se prueba la fórmula de Schläfli para hipercuádricas semi-riemannianas.

Capítulo I

UN NUEVO MÉTODO DE CONSTRUCCIÓN DE ESTRUCTURAS CÓNICAS EN NUDOS O ENLACES DE DOS PUENTES

INTRODUCCIÓN

En este primer capítulo se exponen algunos resultados conocidos sobre estructuras cónicas (hiperbólicas, euclídeas o esféricas) en la esfera S^3 , con singularidad un nudo o enlace de dos puentes y ángulo cónico $\alpha < \pi$, y se describe de modo general el nuevo método que se usará en el capítulo siguiente para construir explícitamente algunos ejemplos concretos de dichas estructuras cónicas.

Dado un nudo o enlace racional no toroidal $[p/q]$, se conjetura que existe un cierto valor $\alpha_h \in [\frac{2\pi}{3}, \pi)$ (que depende del nudo o enlace), tal que S^3 tiene una estructura de variedad cónica con singularidad $[p/q]$ y ángulo cónico α (igual en ambas componentes, si $[p/q]$ es un enlace), que es:

- hiperbólica si $0 < \alpha < \alpha_h$;
- euclídea si $\alpha = \alpha_h$; y
- esférica si $\alpha_h < \alpha \leq \pi$.

De hecho, del estudio de las representaciones de $\pi_1(S^3 \setminus [p/q])$ en $SL(2, \mathbb{C})$ (cf. [Bu], [HLM₂]), se deduce que, fijado un nudo o enlace $[p/q]$, no pueden existir estructuras hiperbólicas cónicas en S^3 con singularidad $[p/q]$ y ángulo cónico arbitrariamente próximo a π . Los argumentos utilizados en la demostración del Teorema de los Orbifolds (cf. [BP], [Ho₂], [Zh]) llevan entonces a la conclusión de que existe $\alpha_h \in [\frac{2\pi}{3}, \pi)$ (dependiente del nudo o enlace $[p/q]$) tal que para cada $\alpha \in (0, \alpha_h]$, S^3 admite una estructura de variedad cónica con singularidad $[p/q]$ y ángulo cónico α , que es hiperbólica si $0 < \alpha < \alpha_h$ y euclídea si $\alpha = \alpha_h$. Además, existe un $\epsilon > 0$ (también dependiente de $[p/q]$) tal que para todo $\alpha \in (\alpha_h, \alpha_h + \epsilon)$, S^3 tiene una estructura esférica cónica con singularidad $[p/q]$ y ángulo cónico α (cf. [Po]). También se sabe que S^3 siempre tiene estructura de orbiforma esférica (“orbifold” en inglés), con singularidad de ángulo π en cualquier nudo o enlace racional ([Sb]; comparar [Con], [Mo₂]). Por otra parte, hasta ahora la única construcción explícita de una de estas familias uniparamétricas de estructuras cónicas en un nudo racional, es la contenida en el artículo de Hilden, Lozano y Montesinos, “On a remarkable polyhedron geometrizing the figure eight knot cone-manifolds” ([HLM₁]), del que

arranca esta tesis. En ese artículo se describen, mediante poliedros concretos, las estructuras geométricas cónicas en el nudo de a ocho, con ángulo cónico entre 0 y π .

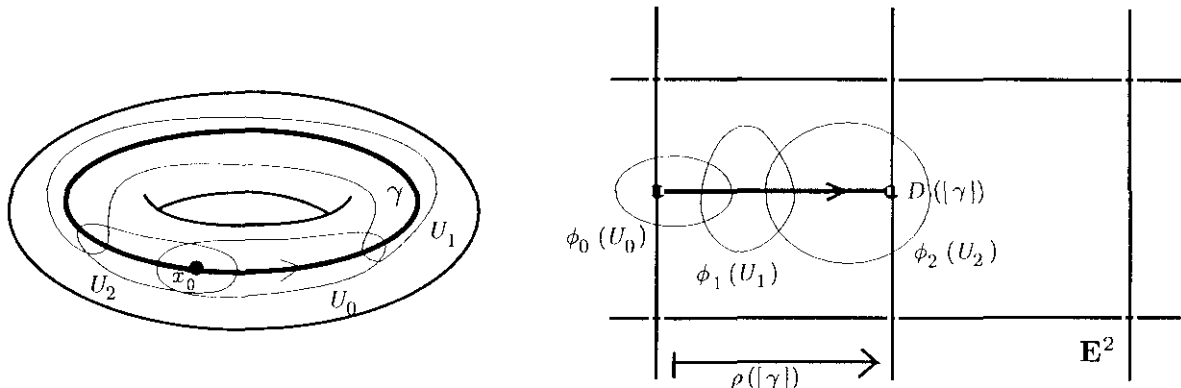
El objetivo de este capítulo es proponer un método distinto para construir estas estructuras cónicas en nudos o enlaces racionales, que presenta la ventaja de ser aplicable con mayor generalidad. Con este nuevo método, en el capítulo II realizaremos de nuevo, desde el principio, la construcción antes mencionada del artículo [HLM₁], y construiremos además otros ejemplos de estructuras cónicas en el enlace de Whitehead (o enlace racional [8/3]) para diversas familias de ángulos cónicos. El método es general, y potencialmente aplicable a todos los nudos o enlaces de dos puentes. Sin embargo, en casos más complicados que los descritos en el próximo capítulo, las dificultades computacionales son *prácticamente insuperables*.

El método consiste en construir explícitamente poliedros de Dirichlet para las estructuras cónicas que se buscan, a partir de las correspondientes representaciones de holonomía.

Para explicar esta frase, vamos a pensar primero sólo en las estructuras hiperbólicas cónicas. Recordemos primero algunas definiciones preliminares, bien conocidas (cf. [MM] o [Thu₂]). Supongamos que M es una 3-variedad hiperbólica cónica con singularidad un cierto enlace $\Sigma \subset M$ y ángulo cónico $\alpha < 2\pi$. Entonces el complemento del enlace singular, $M \setminus \Sigma$, es una variedad hiperbólica. Se puede encontrar, pues, un atlas modelado en \mathbf{H}^3 , formado por cartas $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbf{H}^3$ cuyos dominios recubren $M \setminus \Sigma$, tales que el cambio de coordenadas $\phi_j \phi_i^{-1}$ entre dos cartas cualesquiera es la restricción de una isometría hiperbólica. Si pensamos en la cubierta universal de $M \setminus \Sigma$, $\widetilde{M \setminus \Sigma}$, como el espacio de clases de homotopía de caminos en $M \setminus \Sigma$ que comienzan en un punto base dado x_0 , entonces podemos definir una aplicación $D : \widetilde{M \setminus \Sigma} \rightarrow \mathbf{H}^3$ como sigue. Fijamos primero una carta inicial $\phi_0 : U_0 \rightarrow \mathbf{H}^3$ que contenga al punto base x_0 . Dado un camino γ en $M \setminus \Sigma$ que empieza en x_0 , lo recubrimos por una cantidad finita de cartas U_0, \dots, U_n , comenzando siempre por la carta inicial fijada, y de manera que cada carta se solape con la siguiente. Podemos “ajustar” la segunda carta $\phi_1 : U_1 \rightarrow \mathbf{H}^3$, componiéndola con una isometría de \mathbf{H}^3 , de modo que coincida con la primera carta en la intersección de sus dominios. Repitiendo el proceso sucesivamente para las restantes cartas, podemos “prolongar analíticamente” la carta inicial ϕ_0 a lo largo del camino γ , hasta llegar a una última carta ϕ_n . Definimos entonces la aplicación $D : \widetilde{M \setminus \Sigma} \rightarrow \mathbf{H}^3$ de modo que la imagen por D de la clase de homotopía del camino γ , coincida con la imagen del extremo de γ por la carta final ϕ_n . Se puede probar que D está bien definida y es un homeomorfismo local. Se llama *aplicación desarrolladora* de la variedad hiperbólica $M \setminus \Sigma$, y está definida a menos de composición con una isometría de \mathbf{H}^3 (dependiendo de la carta inicial elegida).

En particular, si el camino γ es cerrado, entonces tanto la carta inicial $\phi_0 : U_0 \rightarrow \mathbf{H}^3$ como la carta final $\phi_n : U_n \rightarrow \mathbf{H}^3$ contienen al punto base x_0 . El cambio de coordenadas $\phi_n \phi_0^{-1}$ es restricción de una

isometría hiperbólica φ_γ . La aplicación $\rho : \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0) \rightarrow \text{Iso}(\mathbf{H}^3)$ que a la clase de homotopía de γ le asocia la isometría φ_γ , es un homomorfismo bien definido y se llama *homomorfismo de holonomía* de la variedad $M \setminus \Sigma$. Está definido a menos de conjugación por una isometría de \mathbf{H}^3 . Su imagen $\rho(\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)) \subset \text{Iso}(\mathbf{H}^3)$ se llama *grupo de holonomía* de $M \setminus \Sigma$. El hecho de que M sea una variedad cónica con singularidad Σ , implica que ρ envía los meridianos de las componentes de Σ a rotaciones de \mathbf{H}^3 , cuyos ángulos son los correspondientes ángulos cónicos.



Ejemplo: aplicación desarrolladora para un toro euclídeo.

Si todos los ángulos cónicos son de la forma $\frac{2\pi}{n}$ con $n \in \mathbf{N}$, entonces el grupo de holonomía $G = \rho(\pi_1(M \setminus \Sigma))$ es un subgrupo discreto de $\text{Iso}^+(\mathbf{H}^3)$, y la variedad cónica M es de hecho una orbiforma hiperbólica, isométrica al cociente de \mathbf{H}^3 por la acción de G (cf. [MM]). Si se elige cualquier punto O de \mathbf{H}^3 que no quede fijo por ningún elemento de G , entonces se puede definir el dominio de Dirichlet para G centrado en O ,

$$\mathcal{P} = \{ x \in \mathbf{H}^3 \mid d(x, O) \leq d(x, g(O)) \text{ para todo } g \in G \}$$

Este dominio de Dirichlet \mathcal{P} es un poliedro compacto y convexo de \mathbf{H}^3 , que es un dominio fundamental para la acción del grupo de holonomía G . Sus caras se pueden identificar dos a dos mediante isometrías de G , dando como resultado la variedad cónica $M \cong \mathbf{H}^3/G$.

Ahora bien, en el capítulo III probaremos que para cualquier variedad hiperbólica cónica compacta M cuyos ángulos cónicos sean todos $< 2\pi$, se puede encontrar un poliedro hiperbólico compacto \mathcal{P} (con un número finito de caras), cuyas caras se identifican dos a dos mediante isometrías hiperbólicas para dar lugar a la variedad cónica M . Este poliedro se define desarrollando en \mathbf{H}^3 el complemento en M de la *fractura* (“cut-locus” en inglés) con respecto a un punto base dado. Además, si todos los ángulos cónicos son $\leq \pi$, entonces el poliedro \mathcal{P} es convexo y se puede escribir de la forma

$$\mathcal{P} = \{ x \in \mathbf{H}^3 \mid d(x, O) \leq d(x, \rho g(O)) \text{ para todo } g \in \Gamma \}$$

donde $O \in \mathbf{H}^3$ es el punto base de \mathcal{P} , Γ es un cierto subconjunto finito de $\pi_1(M \setminus \Sigma)$ y ρ es la holonomía de $M \setminus \Sigma$. Por tanto, este poliedro \mathcal{P} es una generalización del dominio de Dirichlet de una orbiforma hiperbólica, y se llamará *poliedro de Dirichlet* de la variedad hiperbólica cónica M , con centro en el punto O .

Un teorema de existencia de poliedros de Dirichlet para variedades hiperbólicas cónicas ha sido ya enunciado y utilizado (sin dar ninguna demostración completa) por Hodgson ([Ho₂]), Kojima ([Ko]) y Zhou ([Zh]). Como hemos dicho antes, el poliedro de Dirichlet se define, tanto en esos trabajos como en el capítulo III de esta tesis, desarrollando en \mathbf{H}^3 el complemento en M de la fractura o “cut-locus” con respecto a un punto base dado. El capítulo III de esta tesis está dedicado a demostrar con detalle que de ese modo se obtiene un poliedro compacto con un número *finito* de caras, que es un poliedro de Dirichlet. Aunque la idea no es nueva, la demostración no ha sido escrita nunca con detalle. La demostración que damos aquí tiene la ventaja adicional de proporcionar además una descripción completa del poliedro de Dirichlet, que permite construirlo explícitamente en casos concretos. En el capítulo III veremos también que existen poliedros de Dirichlet para variedades euclídeas y esféricas cónicas compactas con todos los ángulos cónicos $< 2\pi$. Todo esto justifica la detallada demostración que ofrecemos aquí.

El poliedro de Dirichlet \mathcal{P} es, pues, el conjunto de puntos que distan del punto base O menos que de cualquiera de sus imágenes $\rho\gamma(O)$ por un cierto subconjunto *finito* Γ de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [p/q])$. En la hipótesis de que exista una estructura geométrica cónica en \mathbf{S}^3 con singularidad $[p/q]$, nos planteamos el problema de encontrar un poliedro de Dirichlet \mathcal{P} para ella. El primer paso es determinar la representación de holonomía de la hipotética estructura geométrica cónica. El segundo paso es determinar el subconjunto finito Γ de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [p/q])$ que se va a utilizar para definir el poliedro \mathcal{P} . Vamos a examinar a continuación cada uno de estos dos pasos.

Determinación de la representación de holonomía.

Supongamos en general que M es una 3-variedad orientable con una estructura cónica hiperbólica, euclídea o esférica, de singularidad un enlace $\Sigma \subset M$, y denotemos por X el espacio modelador \mathbf{H}^3 , \mathbf{E}^3 o \mathbf{S}^3 , respectivamente. Denotemos por $\text{Iso}^+(X)$ el grupo de las isometrías que preservan la orientación, es decir, $\text{Iso}^+(\mathbf{H}^3) \cong \text{PSL}(2, \mathbf{C})$, $\text{Iso}^+(\mathbf{E}^3) \cong \mathbf{R}^3 \ltimes \text{SO}(3)$, y $\text{Iso}^+(\mathbf{S}^3) \cong \text{SO}(4)$. Denotemos por $\widetilde{\text{Iso}}^+(X)$ su cubierta universal, es decir, $\widetilde{\text{Iso}}^+(\mathbf{H}^3) \cong \text{SL}(2, \mathbf{C})$, $\widetilde{\text{Iso}}^+(\mathbf{E}^3) \cong \mathbf{R}^3 \ltimes \text{SU}(2)$, y $\widetilde{\text{Iso}}^+(\mathbf{S}^3) \cong \text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$. Entonces el homomorfismo de holonomía de $M \setminus \Sigma$, $\rho: \pi_1(M \setminus \Sigma) \rightarrow \text{Iso}^+(X)$, se levanta a una representación $\widehat{\rho}: \pi_1(M \setminus \Sigma) \rightarrow \widetilde{\text{Iso}}^+(X)$ ([Cu], ver también [GM]). Por tanto, en el caso euclídeo, el homomorfismo $\widehat{\rho}: \pi_1(M \setminus \Sigma) \rightarrow \widetilde{\text{Iso}}^+(\mathbf{E}^3)$ tiene asociada una representación de $\pi_1(M \setminus \Sigma)$ en $\text{SU}(2) < \text{SL}(2, \mathbf{C})$. En el caso esférico, el homomorfismo $\widehat{\rho}: \pi_1(M \setminus \Sigma) \rightarrow \widetilde{\text{Iso}}^+(\mathbf{S}^3)$

da lugar a un par de representaciones (ρ_1, ρ_2) de $\pi_1(M \setminus \Sigma)$ en $SU(2) < SL(2, \mathbb{C})$. En resumen, las holonomías de las hipotéticas estructuras hiperbólicas, euclídeas y esféricas se pueden detectar todas ellas dentro del espacio de representaciones de $\pi_1(M \setminus \Sigma)$ en $SL(2, \mathbb{C})$. Esta es una idea de Hilden, Lozano y Montesinos ([HLM₄]), empleada por Porti en [Po].

En consecuencia, para encontrar el homomorfismo de holonomía ρ , es útil poder determinar el espacio de representaciones del grupo fundamental del complemento de la singularidad, $\pi_1(M \setminus \Sigma)$, en $SL(2, \mathbb{C})$ (a menos de conjugación). Este espacio está a su vez íntimamente ligado al llamado “espacio de caracteres” de representaciones de $\pi_1(M \setminus \Sigma)$ en $SL(2, \mathbb{C})$. De hecho, “casi” existe una biyección entre ambos: en muchos casos un punto del espacio de caracteres determina una única representación de $\pi_1(M \setminus \Sigma)$ en $SL(2, \mathbb{C})$, a menos de conjugación (cf. §1 más abajo). Una vez elegido un conjunto finito de generadores de $\pi_1(M \setminus \Sigma)$, el espacio de caracteres se puede identificar con un conjunto algebraico cerrado dentro de un cierto \mathbb{C}^m (cf. [CS]; véase también una construcción explícita en [GM]).

Para el caso en que $M = S^3$ y Σ es un nudo o enlace racional $[p/q]$, el espacio de caracteres de representaciones de $\pi_1(S^3 \setminus [p/q])$ en $SL(2, \mathbb{C})$ es bien conocido (cf. [Bu] y [HLM₂]), y se puede determinar mediante un proceso recursivo descrito en [Bu] y [HLM₂], e implementado ya en un programa de ordenador por Hilden, Lozano y Montesinos. En la sección 1 de este capítulo se hace un resumen de algunos resultados conocidos sobre el espacio de caracteres de un nudo o enlace racional.

Una vez calculado el espacio de caracteres, todavía hay que decidir qué puntos corresponderán a las holonomías de las estructuras cónicas buscadas. Por una parte, se sabe que la holonomía de una estructura cónica envía los meridianos del nudo o enlace singular a rotaciones, de ángulos los correspondientes ángulos cónicos. Por otra parte, la estructura de orbiforma esférica de ángulo π en cualquier nudo o enlace racional es bien conocida, y se puede determinar el par de representaciones de $\pi_1(S^3 \setminus [p/q])$ en $SU(2)$ que le corresponden. Con esta información es posible detectar fácilmente los puntos del espacio de caracteres que corresponden a representaciones de holonomía de hipotéticas estructuras cónicas, siguiendo una idea de Hilden, Lozano y Montesinos ([HLM₄]). (Un procedimiento más general, pero menos práctico en el caso de dos puentes, es el desarrollado en 1982 por Riley ([Ri₂]), y empleado en [HLM₂] con el nombre de “test de Shimizu”). En el caso de un nudo racional, el espacio de caracteres es una curva algebraica afin en \mathbb{C}^2 , y los puntos que corresponden a hipotéticas holonomías forman una “rama” de esta curva, que denominamos “rama excelente” (cf. [HLM₂], [Ri₂]). Cada valor del ángulo cónico α entre 0 y π tiene asociado un par de puntos de esta rama. Existe un valor $\alpha_h \in [\frac{2\pi}{3}, \pi)$ tal que:

- si $0 < \alpha < \alpha_h$, los puntos del par asociado a α son conjugados, y corresponden a dos representaciones conjugadas en $SL(2, \mathbb{C})$ (que son las holonomías de dos hipotéticas estructuras hiperbólicas cónicas que sólo difieren en la orientación);

- si $\alpha = \alpha_h$, los puntos del par asociado a α coinciden, y corresponden a una representación en $SU(2)$ (que es la parte de rotación de la holonomía de una hipotética estructura euclídea cónica);
- si $\alpha_h < \alpha \leq \pi$, los puntos del par asociado a α son reales y distintos, y corresponden a dos representaciones en $SU(2)$. Ordenándolas de las dos maneras posibles, se obtienen dos representaciones en $SU(2) \times SU(2)$ (que son las holonomías de dos hipotéticas estructuras esféricas cónicas que sólo difieren en la orientación).

Finalmente, tenemos que pasar de puntos del espacio de caracteres a representaciones de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [p/q])$ en $SL(2, \mathbf{C})$. Esto se hace en la sección 2 de este capítulo. Ahora bien, en el caso hiperbólico (es decir, cuando $0 < \alpha < \alpha_h$), nos interesa construir los poliedros de Dirichlet hiperbólicos dentro del modelo proyectivo (de Klein) de \mathbf{H}^3 , el más cómodo para este fin porque en él los planos hiperbólicos se ven como planos euclídeos. Por ello, en la sección 3 expresamos las holonomías hiperbólicas calculadas en la sección 2, como representaciones en la componente de la identidad del grupo $SO(3, 1)$.

Más en general, para cualquier valor α del ángulo cónico entre 0 y π , nos interesa expresar la hipotética holonomía correspondiente, como una representación de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [p/q])$ en un subgrupo de $GL(4, \mathbf{R})$: en la componente de la identidad del grupo $SO(3, 1)$ si $0 < \alpha < \alpha_h$; en el grupo de isometrías euclídeas si $\alpha = \alpha_h$; y en $SO(4)$ si $\alpha_h < \alpha \leq \pi$. En la sección 4 de este capítulo se explica cómo hacer esto de manera automática.

Determinación del poliedro de Dirichlet.

El estudio de este punto, en un contexto general, se realiza en los capítulos III y IV de esta tesis. En la sección 6 de este capítulo se anticipan y explican algunos de los resultados que se probarán más tarde, ilustrándolos con ejemplos. En general, a partir de la holonomía de una variedad cónica compacta concreta, no podremos determinar el subconjunto finito $\Gamma \subset \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$ que proporciona el poliedro de Dirichlet \mathcal{P} con centro en un punto dado O (éste es un problema abierto muy interesante, pero difícil). Sin embargo, partiendo de una holonomía con un poliedro de Dirichlet conocido, podremos “deformar” ese poliedro para obtener poliedros de Dirichlet para otras holonomías próximas. En el caso de un nudo o enlace de dos puentes, tenemos asegurado un punto de partida: el dominio de Dirichlet para la estructura de orbiforma esférica de ángulo π que se describe en la sección 5, y que seguramente era conocido ya por los primeros geómetras que trataron estos temas: Tietze, Reidemeister, Seifert, Threlfall, etc. (véase por ejemplo la sección dedicada a los espacios lente en el libro [ST]).

Finalmente, en la sección 6 se enuncian algunas propiedades útiles de los poliedros de Dirichlet, relacionadas con sus simetrías y con las identificaciones de sus vértices y aristas, que facilitarán las construcciones del capítulo II.

1. EL ESPACIO DE CARACTERES DE REPRESENTACIONES EN $SL(2, \mathbb{C})$ DEL GRUPO DE UN NUDO O ENLACE DE DOS PUENTES

Vamos a comenzar enunciando algunos resultados generales sobre el espacio de representaciones de un grupo finitamente generado Π en $SL(2, \mathbb{C})$, que se pueden encontrar en el artículo de Culler y Shalen [CS]. Nada de lo expuesto en esta sección es novedoso.

Denotemos por $R(\Pi) = \text{Hom}(\Pi, SL(2, \mathbb{C}))$ el espacio de todas las representaciones de Π en $SL(2, \mathbb{C})$. Si g_1, \dots, g_n es un conjunto finito de generadores de Π , entonces $R(\Pi)$ se puede ver como un conjunto algebraico afin en \mathbb{C}^{4n} .

Se define el *carácter* de una representación $\rho \in R(\Pi)$ como la función $\chi_\rho : \Pi \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\chi_\rho(g) = \text{tr}(\rho(g))$. Evidentemente, representaciones conjugadas tienen el mismo carácter.

La propiedad importante es que los caracteres de representaciones de Π en $SL(2, \mathbb{C})$ se pueden identificar con los puntos de un conjunto algebraico. En efecto, definamos para cada $g \in \Pi$ una aplicación $\tau_g : R(\Pi) \rightarrow \mathbb{C}$ por $\tau_g(\rho) = \text{tr}(\rho(g))$. Sea T el anillo generado por todas las funciones τ_g , $g \in \Pi$. Entonces el anillo T está finitamente generado ([CS], Prop. 1.4.1). De hecho, si g_1, \dots, g_n es cualquier conjunto finito de generadores de Π , entonces toda τ_g se puede escribir como un polinomio con coeficientes racionales en las variables τ_{g_i} , $1 \leq i \leq n$; $\tau_{g_i g_j}$, $1 \leq i < j \leq n$; y $\tau_{g_i g_j g_k}$, $1 \leq i < j < k \leq n$ ([HLM₂]). Sea ahora h_1, \dots, h_m un conjunto finito de elementos de Π tales que $\tau_{h_1}, \dots, \tau_{h_m}$ generan T (por ejemplo, h_1, \dots, h_m pueden ser todos los productos de hasta tres generadores distintos de Π). Definamos una aplicación $t : R(\Pi) \rightarrow \mathbb{C}^m$ por $t(\rho) = (\text{tr}(\rho(h_1)), \dots, \text{tr}(\rho(h_m)))$, y sea $X(\Pi) = t(R(\Pi))$ su imagen. Entonces $X(\Pi) \subset \mathbb{C}^m$ es un conjunto algebraico cerrado ([CS], Cor. 1.4.5), y existe una biyección natural entre $X(\Pi)$ y el espacio de caracteres de representaciones de Π en $SL(2, \mathbb{C})$. Aunque $X(\Pi)$ depende de la elección de los elementos h_1, \dots, h_m tales que $\tau_{h_1}, \dots, \tau_{h_m}$ generan T , la biyección natural entre los $X(\Pi)$ correspondientes a dos familias distintas de tales elementos, es un isomorfismo de conjuntos algebraicos. Por tanto, $X(\Pi)$ está bien definido a menos de isomorfismo canónico, y se llamará *espacio de caracteres del grupo Π* .

Como representaciones conjugadas tienen el mismo carácter, la aplicación $t : R(\Pi) \rightarrow X(\Pi) \subset \mathbb{C}^m$ induce una aplicación \bar{t} del espacio de clases de conjugación de representaciones de Π en $SL(2, \mathbb{C})$ (que denotaremos $\bar{R}(\Pi) = R(\Pi)/SL(2, \mathbb{C})$) en el espacio de caracteres $X(\Pi)$. Aunque esta aplicación no es inyectiva, su restricción al subconjunto de las representaciones irreducibles lo es. (Una representación $\rho \in R(\Pi)$ es *reducible* si todos los elementos de $\rho(\Pi)$ tienen un autovector común. En particular, toda representación abeliana es reducible). Pues bien, si ρ y ρ' son dos representaciones de Π en $SL(2, \mathbb{C})$ con el mismo carácter $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$, y si ρ es irreducible, entonces ρ y ρ' son conjugadas ([CS], Prop.

1.5.2).

Por otra parte, $\rho \in R(\Pi)$ es una representación reducible si y sólo si $\text{tr}(\rho(g)) = 2$ para todo elemento g del subgrupo de conmutadores $[\Pi, \Pi]$ ([CS], Cor. 1.2.2). En consecuencia, la imagen por $t : R(\Pi) \rightarrow X(\Pi) \subset \mathbb{C}^m$ de las representaciones reducibles, es una subvariedad algebraica de $X(\Pi)$.

Supongamos que $\rho \in R(\Pi)$ es una representación reducible. Entonces ρ es conjugada a una representación por matrices triangulares superiores. Pero ahora ρ' tiene el mismo carácter que la representación ρ'' definida por $\rho''(g) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ si $\rho'(g) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ (cf. [CS], Cor. 1.4.5). Por tanto, dada cualquier representación reducible ρ , existe una representación abeliana con el mismo carácter que ρ .

En resumen, si denotamos por $\overline{\text{irred}}(\Pi)$ las clases de conjugación de representaciones irreducibles de Π en $SL(2, \mathbb{C})$, por $\overline{\text{red}}(\Pi)$ las clases de representaciones reducibles, y por $\overline{\text{abel}}(\Pi)$ las clases de representaciones abelianas, entonces:

- $\bar{t} : \overline{\text{irred}}(\Pi) \rightarrow X(\Pi)$ es una biyección sobre su imagen, y $t^{-1}(\bar{t}(\overline{\text{irred}}(\Pi))) = \overline{\text{irred}}(\Pi)$.
- $\bar{t}(\overline{\text{red}}(\Pi)) = \bar{t}(\overline{\text{abel}}(\Pi))$ es una subvariedad algebraica cerrada de $X(\Pi)$.

Caso particular: el espacio de caracteres del grupo de un nudo o enlace racional

Supongamos ahora que $[p/q]$ es un nudo o enlace racional en S^3 . Recordemos la clasificación de Schubert de estos nudos o enlaces ([Sb]): $[p/q] = [p'/q']$ si y sólo si $p = p'$ y ó bien $q \equiv \pm q' \pmod{p}$, ó bien $qq' \equiv \pm 1 \pmod{p}$. Siempre supondremos, sin pérdida de generalidad, que q es impar y $1 \leq q < p$. Aun así puede haber varios representantes del mismo nudo. Por ejemplo, $[11/3]$ y $[11/7]$ son iguales, pues $3 \cdot 7 \equiv -1 \pmod{11}$.

Sea $\Pi = \pi_1(S^3 \setminus [p/q])$ el grupo fundamental del complemento de $[p/q]$ en S^3 . Entonces Π admite una presentación con dos generadores a, b (que corresponden a dos meridianos del nudo o enlace) y una única relación (cf. [BZ]).

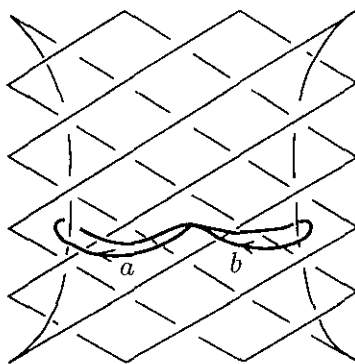


Figura 1

Si $[p/q]$ es un nudo (resp. un enlace), entonces p es impar (resp. par), y

$$\Pi = |a, b : aw = wb| \quad (\text{resp. } \Pi = |a, b : aw = wa|)$$

donde $w = \underline{b^{e_1} a^{e_2} \dots a^{e_{p-3}} b^{e_{p-2}} a^{e_{p-1}}}$ (resp. $w = b^{e_1} a^{e_2} \dots b^{e_{p-3}} a^{e_{p-2}} b^{e_{p-1}}$), siendo $e_i \in \{\pm 1\}$ el signo de iq reducido módulo $2p$ en el intervalo $(-p, p)$. Llamaremos a esta presentación, la *presentación estándar* del grupo $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [p/q])$, para el representante p/q del nudo o enlace $[p/q]$. Así por ejemplo, para el nudo $11/3$ se tiene:

$$\begin{array}{l} \text{múltiplos de 11 :} \\ \text{múltiplos de 3 :} \\ \text{signos } e_i \end{array} \begin{array}{ccccc} & & 11 & & \\ : & 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ : & + & + & + & - & - \end{array} \left| \begin{array}{ccccc} & & & & 22 \\ 18 & 21 & 24 & 27 & 30 \\ - & - & + & + & + \end{array} \right.$$

y por tanto $w = baba^{-1}b^{-1}a^{-1}b^{-1}aba$. En cambio, para el nudo $11/7$ se tiene:

$$\begin{array}{l} \text{múltiplos de 11 :} \\ \text{múltiplos de 7 :} \\ \text{signos } e_i \end{array} \begin{array}{ccccc} & & 11 & & 22 & 33 \\ : & 7 & 14 & 21 & 28 & 35 \\ : & + & - & - & + & - \end{array} \left| \begin{array}{ccccc} 44 & 55 & & & 66 \\ 42 & 49 & 56 & 63 & 70 \\ - & + & - & - & + \end{array} \right.$$

y por tanto $w = ba^{-1}b^{-1}ab^{-1}a^{-1}ba^{-1}b^{-1}a$. Por tanto, hay dos presentaciones estándar distintas para el mismo nudo $[11/3] = [11/7]$ (la presentación estándar no es un invariante del nudo).

Denotemos por $R[p/q]$ el espacio de representaciones de $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [p/q])$ en $SL(2, \mathbb{C})$, y por $X[p/q]$ el espacio de caracteres. Por lo visto anteriormente, $X[p/q]$ es la imagen de la aplicación

$$\begin{array}{l} t : R[p/q] \\ \rho \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} \mathbb{C}^3 \\ (\text{tr}(\rho(a)), \text{tr}(\rho(b)), \text{tr}(\rho(ab))) \end{array}$$

Si $[p/q]$ es un nudo, entonces los meridianos a y b son conjugados en $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [p/q])$, y por tanto $\text{tr}(\rho(a)) = \text{tr}(\rho(b))$ para toda ρ . Si ρ es una representación reducible, entonces tiene el mismo carácter que una representación ρ' por matrices diagonales, para la cual necesariamente es $\rho'(a) = \rho'(b)$. En consecuencia, $\text{tr}(\rho(ab)) = \text{tr}(\rho'(ab)) = \text{tr}(\rho'(a^2)) = \text{tr}(\rho'(a))^2 - 2 = \text{tr}(\rho(a))^2 - 2$. Por tanto, si en \mathbb{C}^2 consideramos coordenadas $(\hat{x} = \text{tr}(\rho(a)), \hat{z} = \text{tr}(\rho(ab)))$ y definimos la aplicación

$$\begin{array}{l} t : R[p/q] \\ \rho \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \begin{array}{l} \mathbb{C}^2 \\ (\hat{x} = \text{tr}(\rho(a)), \hat{z} = \text{tr}(\rho(ab))) \end{array}$$

entonces la imagen de las representaciones reducibles es la parábola $\hat{z} = \hat{x}^2 - 2$. Se puede probar que la imagen de las representaciones no abelianas es una curva algebraica afín $C[p/q]$, que viene dada por una ecuación polinómica en \hat{z} y \hat{x}^2 que es mónica de grado $(p-1)/2$ en la variable \hat{z} y tiene grado

$(q-1)/2$ en la variable \hat{x}^2 . (El hecho de que la variable \hat{x} aparezca siempre al cuadrado se debe a la siguiente razón: si $\rho \in R[p/q]$, entonces $-\rho$ también es una representación de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [p/q])$ en $SL(2, \mathbf{C})$, porque la relación $aub^{-1}w^{-1}$ es de longitud par). Además, la curva $C[p/q]$ corta a la recta $\hat{x} = 0$ en los $(p-1)/2$ puntos reales distintos $(0, -2 \cos(\frac{2\pi\nu}{p}))$, $\nu = 1, \dots, \frac{p-1}{2}$ (cf. [Bu] y [HLM₂]).

La intersección de $C[p/q]$ con la parábola $\hat{z} = \hat{x}^2 - 2$ corresponde a las representaciones reducibles no abelianas (que siempre son metabelianas), cf. [GM] y [HLM₂].

Se tiene un resultado análogo en el caso de un *enlace* racional $[p/q]$, si nos restringimos a las representaciones $\rho : \pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [p/q]) \rightarrow SL(2, \mathbf{C})$ tales que $\text{tr}(\rho(a)) = \text{tr}(\rho(b))$. La imagen de las representaciones no abelianas que verifican esta condición adicional, es entonces una curva afin $C[p/q] \subset \mathbf{C}^2$ dada por una ecuación polinómica en las variables $\hat{x}^2 = \text{tr}(\rho(a))^2$ y $\hat{z} = \text{tr}(\rho(ab))$, que es mónica de grado $(p-2)/2$ en la variable \hat{z} . Además, $C[p/q]$ corta a la recta $\hat{x} = 0$ en los $(p-2)/2$ puntos reales distintos $(0, -2 \cos(\frac{2\pi\nu}{p}))$, $\nu = 1, \dots, \frac{p-2}{2}$ (cf. [Bu] y [HLM₂]).

Llamaremos a la curva $C[p/q]$, *curva de trazas* del nudo o enlace racional $[p/q]$ asociada al representante p/q . Así por ejemplo, $C[11/3]$ tiene ecuación $1 - 3\hat{z} + \hat{z}^2 + 2\hat{x}^2\hat{z}^2 - 2\hat{z}^3 - 3\hat{x}^2\hat{z}^3 + 3\hat{z}^4 + \hat{x}^2\hat{z}^4 - \hat{z}^5 = 0$, mientras que $C[11/7]$ tiene ecuación $1 + 12\hat{x}^2 + 14\hat{x}^4 + 4\hat{x}^6 - 15\hat{z} - 40\hat{x}^2\hat{z} - 25\hat{x}^4\hat{z} - 4\hat{x}^6\hat{z} + 27\hat{z}^2 + 41\hat{x}^2\hat{z}^2 + 15\hat{x}^4\hat{z}^2 + \hat{x}^6\hat{z}^2 - 20\hat{z}^3 - 18\hat{x}^2\hat{z}^3 - 3\hat{x}^4\hat{z}^3 + 7\hat{z}^4 + 3\hat{x}^2\hat{z}^4 - \hat{z}^5$ (Si bien la curva algebraica es un invariante del nudo, su ecuación no lo es). La curva de trazas se puede calcular mediante un proceso de recursión que se describe en los artículos [Bu] y [HLM₂], y que ha sido implementado en un programa de ordenador por Hilden, Lozano y Montesinos.

Si $[p/q]$ es un enlace racional y no imponemos ninguna condición adicional sobre las representaciones de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [p/q])$ en $SL(2, \mathbf{C})$, entonces el espacio de caracteres es una superficie algebraica afin, que es la imagen de la aplicación

$$\begin{array}{ccc} t : R[p/q] & \longrightarrow & \mathbf{C}^3 \\ \rho & \longrightarrow & (\hat{x} = \text{tr}(\rho(a)), \hat{y} = \text{tr}(\rho(b)), \hat{z} = \text{tr}(\rho(ab))) \end{array}$$

Si ρ es una representación reducible, entonces tiene el mismo carácter que una representación abeliana ρ' , para la cual es $\hat{z}^2 - 2 = \text{tr}(\rho'(ab)^2) = \text{tr}(\rho'(a)\rho'(ab^2)) = \text{tr}(\rho'(a)) \cdot (\text{tr}(\rho'(b)) \text{tr}(\rho'(ab)) - \text{tr}(\rho'(a))) - \text{tr}(\rho'(b^2)) = \hat{x}\hat{y}\hat{z} - \hat{x}^2 - \hat{y}^2 + 2$. Por tanto, la imagen de las representaciones reducibles es la superficie $\hat{z}^2 - \hat{x}\hat{y}\hat{z} + \hat{x}^2 + \hat{y}^2 - 4 = 0$. Se puede probar que la imagen de las representaciones no abelianas es una superficie algebraica afin $\mathcal{S}[p/q]$, que viene dada por una ecuación polinómica en \hat{x} , \hat{y} y \hat{z} que es mónica de grado $(p-2)/2$ en la variable \hat{z} . Existe también un procedimiento recursivo para calcular esta *superficie de trazas* $\mathcal{S}[p/q]$, descrito en [HLM₂] e implementado en el ordenador por Hilden, Lozano y Montesinos.

Supongamos ahora que el nudo o enlace racional $[p/q]$ no es toroidal, o lo que es lo mismo, que $q > 1$. Entonces se sabe (cf. [Thu]) que $[p/q]$ es hiperbólico, es decir, su complemento $S^3 \setminus [p/q]$ admite una estructura hiperbólica completa de volumen finito. La holonomía de esta estructura hiperbólica completa se levanta a una representación $\rho_0 : \pi_1(S^3 \setminus [p/q]) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$, que es fiel, discreta e irreducible (y en particular, no abeliana). Los meridianos del nudo o enlace corresponden mediante la representación ρ_0 a elementos parabólicos, luego $\text{tr}(\rho_0(a)) = \text{tr}(\rho_0(b)) = \pm 2$. Cambiando ρ_0 por su opuesta $-\rho_0$ si es preciso, podemos suponer que $\widehat{x}_0 = \text{tr}(\rho_0(a)) = \text{tr}(\rho_0(b)) = 2$. Se tiene entonces que el punto $(2, \widehat{z}_0)$ pertenece a la curva de trazas $C[p/q]$. Como ρ_0 es la holonomía de una estructura hiperbólica de volumen finito, $\widehat{z}_0 = \text{tr}(\rho_0(ab)) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Siguiendo a Riley ([Ri₂]), llamaremos *componente excelente* de la curva $C[p/q]$ a la componente algebraica $\mathcal{E}[p/q]$ que contiene al punto $(2, \widehat{z}_0)$, correspondiente a la holonomía de la estructura hiperbólica completa de volumen finito de $S^3 \setminus [p/q]$. (Obsérvese que la estructura hiperbólica completa de volumen finito de $S^3 \setminus [p/q]$ es única a menos de isometría, por el Teorema de Rigidez de Mostow. Por ello, sólo hay (a menos de cambio de signo) dos representaciones $\rho_0, \bar{\rho}_0$ de $\pi_1(S^3 \setminus [p/q])$ en $SL(2, \mathbb{C})$ que correspondan a holonomías de estructuras hiperbólicas completas de volumen finito en $S^3 \setminus [p/q]$: $\bar{\rho}_0$ es conjugada de ρ_0 mediante una isometría de \mathbb{H}^3 que *invierte* la orientación, y $\text{tr}(\bar{\rho}_0(ab)) = \overline{\text{tr}(\rho_0(ab))}$).

Por otra parte, se sabe (cf. [Sb]) que la cubierta doble de S^3 ramificada en el nudo o enlace $[p/q]$, es el espacio lente $L(p, q)$, que tiene una estructura esférica (cf. [ST]). En consecuencia, S^3 es una orbiforma esférica con singularidad $[p/q]$ de ángulo π . La holonomía de esta orbiforma esférica se levanta a una representación $\rho_\pi : \pi_1(S^3 \setminus [p/q]) \rightarrow SU(2) \times SU(2) \cong \widetilde{SO}(4)$ (cf. [Cu]). En la sección 5 de este capítulo se describirá esta estructura de orbiforma esférica con más detalle, y se verá que ρ_π corresponde a un par de representaciones ρ_π^1, ρ_π^2 de $\pi_1(S^3 \setminus [p/q])$ en $SU(2)$, para las cuales es

$$\text{tr}(\rho_\pi^1(a)) = \text{tr}(\rho_\pi^1(b)) = 0, \quad \text{tr}(\rho_\pi^1(ab)) = -2 \cos \frac{(q+1)\pi}{p}$$

$$\text{tr}(\rho_\pi^2(a)) = \text{tr}(\rho_\pi^2(b)) = 0, \quad \text{tr}(\rho_\pi^2(ab)) = -2 \cos \frac{(q-1)\pi}{p}$$

Es decir, ρ_π corresponde al par de puntos $(0, -2 \cos \frac{(q+1)\pi}{p}), (0, -2 \cos \frac{(q-1)\pi}{p})$ de la curva de trazas $C[p/q]$ (cf. [HLM₄]).

Ahora bien, existe la siguiente conjetura sobre las estructuras geométricas cónicas en S^3 con singularidad un nudo o enlace de dos puentes $[p/q]$ no toroidal.

Conjetura. Para cualquier nudo o enlace racional no toroidal $[p/q]$, existe un valor $\alpha_k \in [\frac{2\pi}{3}, \pi)$ tal que S^3 es una variedad cónica con singularidad $[p/q]$ y ángulo cónico α (igual en ambas componentes, si $[p/q]$ es un enlace), que es:

- hiperbólica si $0 < \alpha < \alpha_h$;
- euclídea si $\alpha = \alpha_h$; y
- esférica si $\alpha_h < \alpha \leq \pi$.

Esta conjetura ha sido comprobada en casos particulares (cf. [HLM₁] y esta misma tesis), y en el artículo [HLM₄] se supone implícitamente que es cierta. Por los trabajos de Boileau-Porti ([BP]), Burde([Bu]), Hodgson ([Ho₂]), Porti ([Po]) y Zhou ([Zh]) se sabe que existen $\alpha_h \in [\frac{2\pi}{3}, \pi)$ y $\epsilon > 0$ tales que S^3 es una variedad cónica con singularidad $[p/q]$ y ángulo cónico α , que es hiperbólica si $0 < \alpha < \alpha_h$, euclídea si $\alpha = \alpha_h$, y esférica si $\alpha_h < \alpha < \alpha_h + \epsilon$ (véase la introducción a este capítulo).

De esta conjetura se deducen las siguientes conclusiones sobre la curva de trazas. Consideremos la proyección $g(\hat{x}, \hat{z}) = \hat{x}$, restringida a la componente excelente $\mathcal{E}[p/q]$ de la curva de trazas. Denotemos por $\mathcal{H}[p/q]$ la componente conexa de $\mathcal{E}[p/q] \cap g^{-1}([0, 2])$ que contiene al punto $(2, \hat{z}_0)$ (correspondiente a la estructura hiperbólica completa de volumen finito). Llamaremos a $\mathcal{H}[p/q]$ “rama excelente” de la curva de trazas (cf. [HLM₂], [Ri₂]). Entonces todos los puntos (\hat{x}, \hat{z}) de $\mathcal{H}[p/q]$ corresponden a la holonomía de una estructura cónica (hiperbólica, euclídea o esférica) de S^3 con singularidad $[p/q]$ y ángulo cónico $\alpha = 2 \arccos \frac{\hat{x}}{2}$. Denotaremos por $(S^3, [p/q], \alpha)$ dicha estructura cónica. Entonces (por [CZ], ver también [Sb] y [Bo]), $(S^3, [p/q], \pi)$ necesariamente es la orbiforma esférica antes mencionada, cuya cubierta doble es el espacio lente $L(p, q)$ con su estructura esférica estándar. En consecuencia, $\mathcal{H}[p/q]$ también es la componente conexa que contiene a los puntos $(0, -2 \cos \frac{(q+1)\pi}{p})$ y $(0, -2 \cos \frac{(q-1)\pi}{p})$ (cf. [HLM₄]). Topológicamente, $\mathcal{H}[p/q]$ coincide con el resultado de pegar dos copias del intervalo $[0, 2]$ por el punto $2 \cos \frac{\alpha_h}{2}$ (correspondiente a la holonomía euclídea). De hecho, para cada $\hat{x} \in [0, 2]$, los puntos de $\mathcal{H}[p/q]$ cuya primera coordenada es \hat{x} , son $(\hat{x}, \hat{z}_1(\hat{x}))$ y $(\hat{x}, \hat{z}_2(\hat{x}))$, donde:

- $\hat{z}_1(\hat{x})$ y $\hat{z}_2(\hat{x})$ son complejos conjugados, si $2 \cos \frac{\alpha_h}{2} < \hat{x} \leq 2$;
- $\hat{z}_1(\hat{x}) = \hat{z}_2(\hat{x}) \in \mathbf{R}$ si $\hat{x} = 2 \cos \frac{\alpha_h}{2}$; y
- $\hat{z}_1(\hat{x})$ y $\hat{z}_2(\hat{x})$ son dos números reales distintos, si $0 \leq \hat{x} < 2 \cos \frac{\alpha_h}{2}$.

(Ver figura 2).

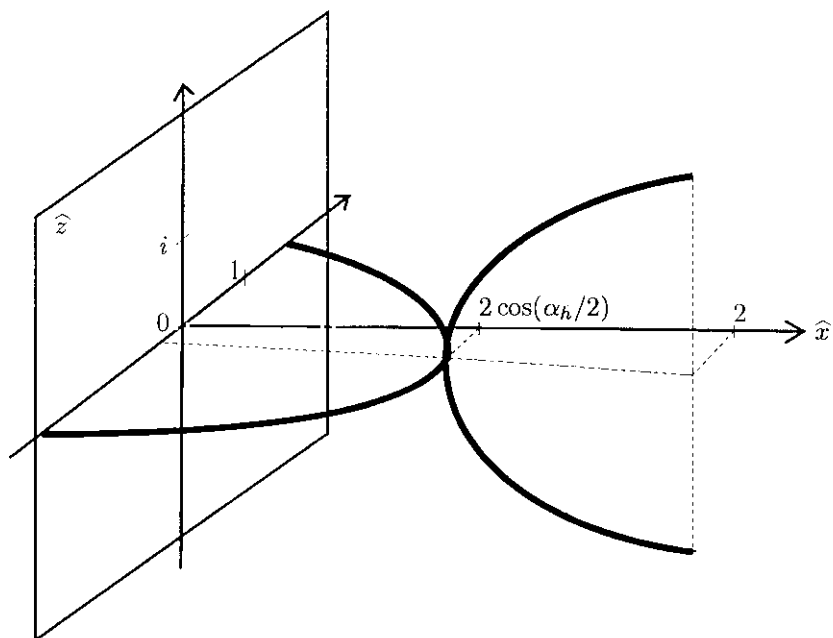


Figura 2

2. CALCULO EXPLÍCITO DE UNA REPRESENTACIÓN DEL GRUPO DE UN NUDO O ENLACE DE DOS PUENTES EN $SL(2, \mathbb{C})$, A PARTIR DE LA CURVA DE TRAZAS

Supongamos que $\rho : \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [p/q]) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ es una representación irreducible, que corresponde a la holonomía de una estructura hiperbólica cónica en \mathbb{S}^3 con singularidad $[p/q]$. Si a y b son los dos generadores de la presentación estándar de $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [p/q])$ (que corresponden a dos meridianos del nudo o enlace), entonces el grupo de holonomía $G = \rho(\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [p/q]))$ está generado por $\rho(a) = A$ y $\rho(b) = B$. Estas dos isometrías A y B son dos rotaciones de \mathbb{H}^3 , de ejes l_A, l_B disjuntos y ángulos α, β menores que π . (En principio supondremos que puede ser $\alpha \neq \beta$ en el caso de un enlace).

Estamos interesados en construir un poliedro de Dirichlet para esta estructura hiperbólica cónica, dentro del modelo de Klein de \mathbb{H}^3 (que en este caso es el más cómodo, porque en él los planos hiperbólicos se ven como planos euclídeos). Para ello, siguiendo el ejemplo del artículo [HLM₁], nos interesa encontrar una representación conjugada de ρ de manera que, al pasar al modelo de Klein de \mathbb{H}^3 , los ejes de las rotaciones A y B equidisten del origen de coordenadas, sean paralelos al plano $z = 0$, y sus proyecciones sobre el plano $z = 0$ tengan al eje x como bisectriz (ver figura 3). Geométricamente es claro que esto

siempre se puede conseguir.

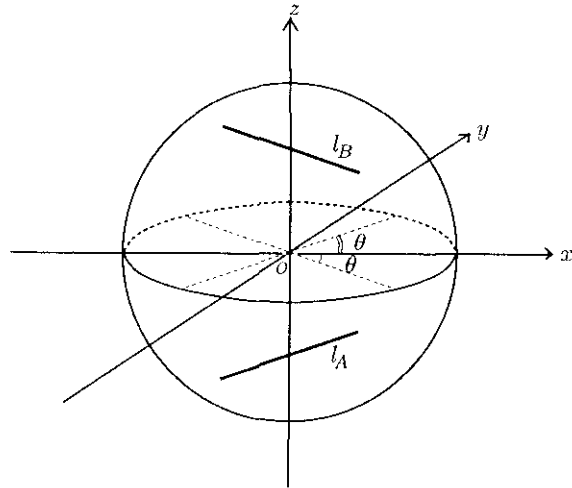


Figura 3

De esta manera, si A y B son rotaciones del mismo ángulo, entonces las tres rotaciones de 180° en torno a los ejes coordenados pertenecen al normalizador del grupo de holonomía, generado por A y B . En consecuencia, serían simetrías de un poliedro de Dirichlet de la variedad cónica dada, centrado en el origen de coordenadas. (Obsérvese a este respecto, que cualquier nudo o enlace racional se puede colocar en \mathbb{R}^3 de tal manera que las tres rotaciones de 180° en torno a los ejes coordenados sean simetrías del nudo o enlace (ver figura 4)). Incluso aunque A y B sean rotaciones de ángulos distintos, la rotación de 180° en torno al eje z siempre pertenece al normalizador del grupo de holonomía.

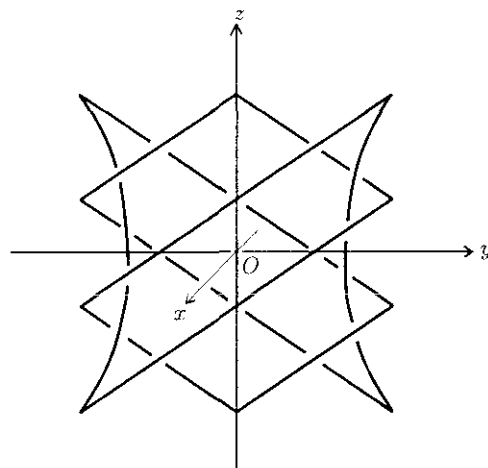


Figura 4

Antes de pasar al modelo de Klein, vamos a conjugar ρ en $SL(2, \mathbb{C})$. Para ello, necesitamos traducir al modelo del semiespacio superior de \mathbb{H}^3 , las condiciones de simetría enunciadas antes en el modelo de Klein. Al pasar del modelo del semiespacio al modelo de Klein, el plano fronterizo del semiespacio se transforma en la esfera fronteriza del modelo de Klein por proyección estereográfica desde el polo sur

de la esfera, y el punto $k = (0, 0, 1)$ del semiespacio superior, se transforma en el origen de coordenadas en el modelo de Klein (ver figura 5).

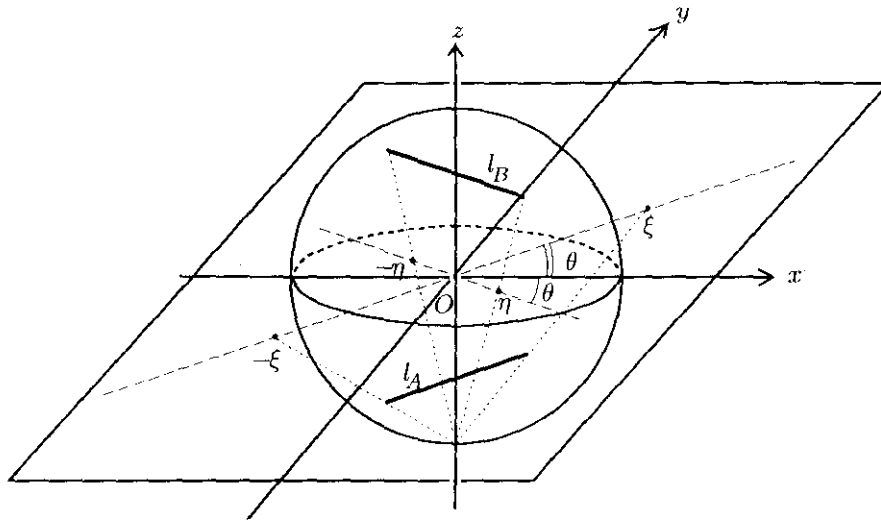


Figura 5

Por tanto, lo que buscamos es conjugar la representación ρ de modo que los ejes de las rotaciones A y B se vean en el semiespacio superior como dos semicírculos colocados como muestra la figura 6. Es decir, las matrices $A, B \in SL(2, \mathbb{C})$ deben corresponder a dos transformaciones de Möbius cuyos puntos fijos sean de la forma $\{\xi, -\xi\}$ y $\{\eta, -\eta\}$, respectivamente, y además $\eta = \lambda \bar{\xi}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Queremos además que el punto $k = (0, 0, 1)$ del semiespacio, sea el punto medio entre los ejes de A y B . Como la distancia entre k y un punto $(0, 0, z)$ es $\log |z|$, ha de ser $|\eta| = 1/|\xi|$. Pero como $\eta = \lambda \bar{\xi}$, de aquí se deduce que de hecho $\eta = 1/\xi$.

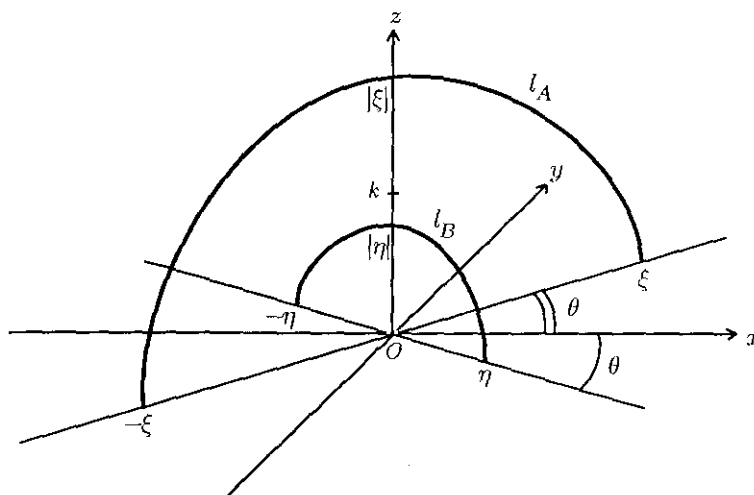


Figura 6

Como los puntos fijos de la transformación de Möbius $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$ son las soluciones de la ecuación cuadrática $cz^2 + (d-a)z - b = 0$, resulta que los puntos fijos serán de la forma $\xi, -\xi$ si y sólo si $a = d$ y $c \neq 0$. Por otra parte, como A y B son rotaciones de ángulo α y β , respectivamente, se tiene que $\text{tr}(A) = 2 \cos \frac{\alpha}{2}$ y $\text{tr}(B) = 2 \cos \frac{\beta}{2}$. Por tanto, queremos conjugar las matrices A y B simultáneamente por una matriz de $SL(2, \mathbb{C})$ de modo que sean de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & i\xi \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \\ \frac{i}{\xi} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & \frac{i}{\xi} \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \\ i\xi \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

donde $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Geoméricamente es bastante claro que esto se puede conseguir siempre que A y B no tengan ningún punto fijo común, es decir, siempre que la representación ρ sea irreducible, como suponíamos en las hipótesis iniciales. Sin embargo, vamos a ver también una demostración algebraica (que puede pasarse por alto si se quiere). Podemos partir ya de que las matrices A y B son de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & -\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \\ \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

donde $a + d = 2 \cos \frac{\beta}{2}$ y $ad - bc = 1$. Primero vamos a conjugar A y B simultáneamente de modo que ambas tengan las dos entradas de la diagonal iguales. Si ya es $a = d$, entonces no hay que hacer nada. Supongamos que $a \neq d$. Al conjugar A por matrices del tipo $T = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\operatorname{sen} \phi \\ \operatorname{sen} \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$, no varía. Por otra parte, la matriz TBT^{-1} tiene las dos entradas de la diagonal iguales si y sólo si $a \cos^2 \phi + d \operatorname{sen}^2 \phi - (b+c) \operatorname{sen} \phi \cos \phi = a \operatorname{sen}^2 \phi + d \cos^2 \phi + (b+c) \operatorname{sen} \phi \cos \phi$, es decir, si y sólo si $\cot(2\phi) = \frac{b+c}{a-d}$. La condición necesaria y suficiente para que exista un tal ϕ es que $\frac{b+c}{a-d} \notin \{\pm i\}$, es decir, que ni i ni $-i$ sean puntos fijos de la transformación de Möbius B . Dicho de otra forma, que B no comparta ningún punto fijo con A . Si la representación ρ es irreducible, esta condición se cumple, y por tanto podemos suponer que A y B son de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & -\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \\ \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & -\frac{1}{\mu} \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \\ \mu \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

donde $\mu \in \mathbb{C}$, $\mu \neq 0$. Conjugando ahora ambas matrices por $\begin{pmatrix} \sqrt{\xi/i} & 0 \\ 0 & \sqrt{i/\xi} \end{pmatrix}$, donde $\xi^2 = \mu$, se

obtienen finalmente

$$A = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & i\xi \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \\ \frac{i}{\xi} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & \frac{i}{\xi} \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \\ i\xi \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

donde $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, como queríamos.

Resulta conveniente escribir ξ en la forma $\xi = e^{d+i\theta}$, donde siempre podemos suponer $d > 0$ y $0 \leq \theta < \pi/2$. Los parámetros d y θ tienen un significado geométrico claro: $2\theta = 2\arg(\xi)$ es el ángulo que forman los ejes de A y B , y $2d = 2\log|\xi|$ es la distancia entre los ejes de A y B . Así pues,

$$A = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & ie^{d+i\theta} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \\ ie^{-(d+i\theta)} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & ie^{-(d+i\theta)} \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \\ ie^{d+i\theta} \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

donde d es la mitad de la distancia entre los dos ejes de rotación, y θ es la mitad del ángulo entre los dos ejes. Obsérvese que cuando $\alpha = \beta$, B es la traspuesta de A .

Determinación de α , d y θ a partir de la curva de trazas, cuando $\alpha = \beta$

Si $\alpha = \beta$, entonces la representación ρ corresponde a un punto de la curva de trazas $C[p/q]$, concretamente al punto $(\hat{x} = \operatorname{tr}(A) = 2\cos(\alpha/2), \hat{z} = \operatorname{tr}(AB))$. Como lo que conocemos en principio es la ecuación de la curva de trazas en las variables \hat{x} y \hat{z} , nos interesa expresar α , d y θ en términos de \hat{x} y \hat{z} . En realidad, en vez de \hat{x} y \hat{z} es más conveniente utilizar las variables

$$x = \hat{x}^2 - 4 = \operatorname{tr}(A^2) - 2 = -4\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$z = \hat{z} - 2 = \operatorname{tr}(AB) - 2$$

(Recuérdese que la variable \hat{x} siempre aparece al cuadrado en la ecuación de la curva de trazas).

La relación del ángulo α con la variable x es obvia. Por otra parte, teniendo en cuenta la forma de las matrices A y B , resulta que

$$\begin{aligned} z &= \operatorname{tr}(AB) - 2 \\ &= \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - e^{2(d+i\theta)} \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \right) + \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - e^{-2(d+i\theta)} \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \right) - 2 \\ &= 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 - 2\cosh(2(d+i\theta)) \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \\ &= -2\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} (1 + \cosh(2(d+i\theta))) \\ &= -4\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \cosh^2(d+i\theta) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$z = x \cosh^2(d + i\theta)$$

A partir de aquí se pueden obtener fórmulas explícitas para $\cosh(2d)$ y $\cos(2\theta)$ en términos de x y z , como sigue. Tomando la parte real de ambos miembros de la igualdad $2 \cosh^2(d + i\theta) = \frac{2z}{x}$, resulta que

$$\cosh(2d) \cos(2\theta) = \frac{2\operatorname{Re}(z)}{x} - 1$$

Tomando el módulo de los dos miembros (y recordando que $x < 0$), se obtiene que

$$\cosh(2d) + \cos(2\theta) = -\frac{2|z|}{x}$$

Por tanto, $\cosh(2d)$ y $\cos(2\theta)$ son las soluciones de la siguiente ecuación cuadrática en t :

$$x t^2 + 2|z|t + 2\operatorname{Re}(z) - x = 0$$

Las soluciones a esta ecuación son

$$\frac{-|z| \pm \sqrt{|z|^2 - 2x \operatorname{Re}(z) + x^2}}{x} = \frac{-|z| \pm \sqrt{(z-x)(\bar{z}-x)}}{x} = \frac{-|z| \pm |z-x|}{x}$$

Teniendo en cuenta que $\cos(2\theta) \leq 1 \leq \cosh(2d)$ y que $x < 0$, se deduce que

$$\begin{aligned} \cosh(2d) &= \frac{-|z| - |z-x|}{x} \\ \cos(2\theta) &= \frac{-|z| + |z-x|}{x} \end{aligned}$$

En realidad, lo que interesaría es expresar α , θ y d en términos de un único parámetro real, que variase con el ángulo cónico. La experiencia del ejemplo de [HLM₁] y de los ejemplos hechos en esta tesis, muestra que los cálculos se simplifican enormemente si se elige como parámetro $u = \cot(\theta)$. Sin embargo, el escribir explícitamente α y d en función de u involucra en general la resolución de ecuaciones polinómicas de grado muy alto, por lo cual sólo es posible en casos especialmente simples. Aun así, veremos que aparecen expresiones relativamente complicadas incluso en los ejemplos sencillos que se van a mostrar en el capítulo siguiente. En casos más generales solamente se pueden hacer cálculos aproximados.

3. PASO AL MODELO DE KLEIN DEL ESPACIO HIPERBÓLICO

Para pasar del modelo del semiespacio superior al modelo de Klein de \mathbf{H}^3 , es conveniente considerar el llamado *modelo intermedio*, utilizado por Hilden, Lozano y Montesinos ([HLM₅], ver también [F]). Este modelo está definido como el conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ \theta_3 & \theta_4 \end{bmatrix} \in \mathbf{CP}^3 \mid \theta_1\theta_4 - \theta_2\theta_3 > 0 ; \theta_1 \in \mathbf{C}, \theta_4 = -\bar{\theta}_1 ; \theta_2, \theta_3 \in \mathbf{C} \right\}$$

La aplicación que pasa del modelo del semiespacio al modelo intermedio, es extensión de la siguiente aplicación entre sus bordes:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{CP}^1 & \longrightarrow & \left\{ \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ \theta_3 & \theta_4 \end{bmatrix} \in \mathbf{CP}^3 \mid \theta_1\theta_4 - \theta_2\theta_3 = 0 ; \theta_1 \in \mathbf{C}, \theta_4 = -\bar{\theta}_1 ; \theta_2, \theta_3 \in \mathbf{C} \right\} \\ z & \longrightarrow & \begin{bmatrix} z & -z\bar{z} \\ 1 & -\bar{z} \end{bmatrix} \end{array}$$

Sea ϕ la isometría hiperbólica que en el modelo del semiespacio es extensión de la transformación de Möbius $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$. Entonces en el modelo intermedio, ϕ es extensión de la transformación que

envía $\begin{bmatrix} z & -z\bar{z} \\ 1 & -\bar{z} \end{bmatrix}$ a

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{az+b}{cz+d} & -\frac{az+b}{cz+d} \cdot \frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}+\bar{d}} \\ 1 & -\frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}+\bar{d}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (az+b)(\bar{c}\bar{z}+\bar{d}) & -(az+b)(\bar{a}\bar{z}+\bar{b}) \\ (cz+d)(\bar{c}\bar{z}+\bar{d}) & -(\bar{a}\bar{z}+\bar{b})(cz+d) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & -z\bar{z} \\ 1 & -\bar{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d} & -\bar{b} \\ -\bar{c} & \bar{a} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto, a la isometría $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in PSL(2, \mathbf{C})$ del modelo del semiespacio, le corresponde en el modelo intermedio la isometría

$$\begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ \theta_3 & \theta_4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ \theta_3 & \theta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d} & -\bar{b} \\ -\bar{c} & \bar{a} \end{bmatrix}$$

O bien, escribiéndola de otra forma,

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a\bar{d} & -a\bar{c} & b\bar{d} & -b\bar{c} \\ -a\bar{b} & a\bar{a} & -b\bar{b} & b\bar{a} \\ c\bar{d} & -c\bar{c} & d\bar{d} & -d\bar{c} \\ -c\bar{b} & c\bar{a} & -d\bar{b} & d\bar{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

Del modelo del semiespacio se pasa ahora al modelo de Klein (de radio 1) de \mathbf{H}^3 ,

$$\{[x, y, z, t] \in \mathbf{RP}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - t^2 < 0\}$$

mediante el cambio de coordenadas $\left(\theta_1 = \frac{x+iy}{-2-}, \theta_2 = \frac{z-t}{2}, \theta_3 = \frac{z+t}{2}, \theta_4 = \frac{-x+iy}{2}\right)$. Por

tanto, a la isometría $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in PSL(2, \mathbf{C})$ del modelo del semiespacio, le corresponde en el modelo de Klein la isometría

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \rightarrow T^{-1}MT \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

$$\text{donde } M = \begin{bmatrix} a\bar{d} & -a\bar{c} & b\bar{d} & -b\bar{c} \\ -a\bar{b} & a\bar{a} & -b\bar{b} & b\bar{a} \\ c\bar{d} & -c\bar{c} & d\bar{d} & -d\bar{c} \\ -c\bar{b} & c\bar{a} & -d\bar{b} & d\bar{a} \end{bmatrix} \text{ y } T = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & i & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Realizando todo este proceso para las matrices

$$A = \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & ie^{d+i\theta} \sin \frac{\alpha}{2} \\ ie^{-(d+i\theta)} \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & ie^{-(d+i\theta)} \sin \frac{\beta}{2} \\ ie^{d+i\theta} \sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{bmatrix}$$

resulta que en el modelo de Klein de \mathbf{H}^3 , las rotaciones A y B vienen dadas por las siguientes matrices de $SO(3, 1)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen}^2 \theta & 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta & -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \cosh d & -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} h d \\ 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta & 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \theta & \operatorname{sen} \alpha \cos \theta \cosh d & \operatorname{sen} \alpha \cos \theta \operatorname{sen} h d \\ \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \cosh d & -\operatorname{sen} \alpha \cos \theta \cosh d & 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \cosh^2 d & -2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} h d \cosh d \\ -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} h d & \operatorname{sen} \alpha \cos \theta \operatorname{sen} h d & 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} h d \cosh d & 1 + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} h^2 d \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{sen}^2 \theta & -2 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta & \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \theta \cosh d & -\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} h d \\ -2 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta & 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \theta & \operatorname{sen} \beta \cos \theta \cosh d & -\operatorname{sen} \beta \cos \theta \operatorname{sen} h d \\ -\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \theta \cosh d & -\operatorname{sen} \beta \cos \theta \cosh d & 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \cosh^2 d & 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{sen} h d \cosh d \\ -\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} h d & -\operatorname{sen} \beta \cos \theta \operatorname{sen} h d & -2 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{sen} h d \cosh d & 1 + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{sen} h^2 d \end{pmatrix}$$

Debido a la simetría en la disposición de los ejes de A y B , las inversas A^{-1} y B^{-1} son conjugadas de A y B , respectivamente, mediante la rotación de 180° en torno al eje z , que tiene matriz diagonal

$$Z = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Es decir, $A^{-1} = ZAZ$ y $B^{-1} = ZBZ$.

Si además A y B son rotaciones del mismo ángulo $\alpha = \beta$, entonces B es conjugada de A mediante la rotación de 180° en torno al eje x . Denotemos por

$$X = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

las matrices de las rotaciones de 180° en torno a los ejes x e y , respectivamente. Entonces cuando $\alpha = \beta$ se tiene que $B = XAX$ y $B^{-1} = YAY$.

Observación. Supongamos que ρ es una representación de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus \Sigma)$ en $SL(2, \mathbf{C})$ dada por

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & ie^{d+i\theta} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \\ ie^{-(d+i\theta)} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \rho(b) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & ie^{-(d+i\theta)} \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \\ ie^{d+i\theta} \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

donde α , β , d y θ son números complejos, no necesariamente reales. Consideremos el subgrupo

de $SL(4, \mathbf{C})$ formado por las matrices M tales que $M \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} M^t = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$.

Denotaremos este subgrupo por $SO(3, 1; \mathbf{C})$. Entonces existe una representación $\tilde{\rho}$ de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus \Sigma)$ en $SO(3, 1; \mathbf{C})$ asociada a ρ y definida por $\tilde{\rho}(a) = A$ y $\tilde{\rho}(b) = B$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen}^2 \theta & 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta & -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \cosh d & -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} h d \\ 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta & 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \theta & \operatorname{sen} \alpha \cos \theta \cosh d & \operatorname{sen} \alpha \cos \theta \operatorname{sen} h d \\ \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \cosh d & -\operatorname{sen} \alpha \cos \theta \cosh d & 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \cosh^2 d & -2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} h d \cosh d \\ -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} h d & \operatorname{sen} \alpha \cos \theta \operatorname{sen} h d & 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} h d \cosh d & 1 + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} h^2 d \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{sen}^2 \theta & -2 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta & \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \theta \cosh d & -\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} h d \\ -2 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta & 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \theta & \operatorname{sen} \beta \cos \theta \cosh d & -\operatorname{sen} \beta \cos \theta \operatorname{sen} h d \\ -\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \theta \cosh d & -\operatorname{sen} \beta \cos \theta \cosh d & 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \cosh^2 d & 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{sen} h d \cosh d \\ -\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} h d & -\operatorname{sen} \beta \cos \theta \operatorname{sen} h d & -2 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{sen} h d \cosh d & 1 + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{sen} h^2 d \end{pmatrix}$$

Esta observación será útil en la sección siguiente, para pasar de representaciones en $SO(3, 1)$ a representaciones en $SO(4)$ a través de una representación en $SO(3)$.

4. LA TRANSICIÓN DE HOLONOMÍAS HIPERBÓLICAS A HOLONOMÍAS ESFÉRICAS A TRAVÉS DE UNA HOLONOMÍA EUCLÍDEA

Supongamos que $[p/q]$ es un nudo o enlace racional no toroidal. Recordemos que entonces $\mathbf{S}^3 \setminus [p/q]$ admite una estructura hiperbólica completa de volumen finito, que es única a menos de isometría. Sea $\rho_0 : \pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [p/q]) \rightarrow SL(2, \mathbf{C})$ un levantamiento a $SL(2, \mathbf{C})$ de su holonomía. Entonces ρ_0 es una representación irreducible, y si a, b son los generadores de la presentación estándar de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [p/q])$, entonces $\hat{x}_0 = \text{tr}(a) = \text{tr}(b) = 2$. Sea $\hat{z}_0 = \text{tr}(ab) \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$. Entonces $(2, \hat{z}_0)$ es un punto de la curva de trazas $C[p/q]$, correspondiente a la representación ρ_0 . Siguiendo a Riley ([Ri2]), llamábamos *componente excelente* $\mathcal{E}[p/q]$ de la curva de trazas, a la componente algebraica que contiene al punto $(2, \hat{z}_0)$. Llamábamos *rama excelente* $\mathcal{H}[p/q]$, a la componente conexa de $\mathcal{E}[p/q] \cap \{(\hat{x}, \hat{z}) \mid \hat{x} \in [0, 2] \subset \mathbf{R}\}$ que contiene al punto $(2, \hat{z}_0)$.

En la sección 2, para cada punto (\hat{x}, \hat{z}) de la curva de trazas correspondiente a una representación irreducible ρ , encontramos una expresión de las matrices $\rho(a), \rho(b) \in SL(2, \mathbf{C})$ en términos de x y z . En la sección 3, a la representación ρ le asociamos una representación $\tilde{\rho}$ de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [p/q])$ en $SO(3, 1)$, en el caso en que $\hat{z} \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$. En esta sección, vamos a ver cómo, al variar \hat{x} en el intervalo $[0, 2]$, se puede pasar de una familia de representaciones $\tilde{\rho}$ en $SO(3, 1)$ a una familia de representaciones en $SO(4)$ a través de una representación en $SO(3)$.

Por lo dicho en la sección 1, sabemos que para cada $\hat{x} \in [0, 2]$, hay dos puntos (no necesariamente distintos) en $\mathcal{H}[p/q]$ cuya primera coordenada es \hat{x} . Existe $\alpha_h \in \{2\pi/3, \pi\}$ tal que estos dos puntos son de la forma $(\hat{x}, \hat{z}_1(\hat{x}))$ y $(\hat{x}, \hat{z}_2(\hat{x}))$, donde:

- $\hat{z}_1(\hat{x})$ y $\hat{z}_2(\hat{x})$ son complejos conjugados, si $2 \cos \frac{\alpha_h}{2} < \hat{x} \leq 2$;
- $\hat{z}_1(\hat{x}) = \hat{z}_2(\hat{x}) \in \mathbf{R}$ si $\hat{x} = 2 \cos \frac{\alpha_h}{2}$; y
- $\hat{z}_1(\hat{x})$ y $\hat{z}_2(\hat{x})$ son dos números reales distintos, si $0 \leq \hat{x} < 2 \cos \frac{\alpha_h}{2}$.

Cuando \hat{x} está cerca de 2 pero es distinto de 2, los puntos $(\hat{x}, \hat{z}_1(\hat{x}))$ y $(\hat{x}, \hat{z}_2(\hat{x}))$ corresponden a dos representaciones irreducibles ρ_1, ρ_2 de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [p/q])$ en $SL(2, \mathbf{C})$ que envían los generadores a y b a dos rotaciones de ángulo $\alpha = 2 \arccos(\hat{x}/2)$. Como en la sección 2, hacemos el cambio de variables $x = \hat{x}^2 - 4$ y $z = \hat{z} - 2$, y escribimos $z_1(x) = \hat{z}_1(\hat{x})$ y $z_2(x) = \hat{z}_2(\hat{x})$. Sabemos entonces que $z_1(x) = x \cosh^2(d(x) + i\theta(x))$ y $z_2(x) = x \cosh^2(d(x) - i\theta(x))$, donde $d(x)$ es la mitad de la distancia entre los ejes de las rotaciones $\rho_1(a)$ y $\rho_1(b)$, y $\theta(x)$ es la mitad del ángulo entre dichos ejes. (Cuando $x \rightarrow 0$, $d(x) \rightarrow +\infty$.)

Más en general, podemos encontrar dos funciones continuas $d(x)$, $\theta(x)$ del intervalo $[-4, 0)$ en \mathbf{C} tales que para todo $x \in [-4, 0)$,

$$z_1(x) = x \cosh^2(d(x) + i\theta(x)) \quad \text{y} \quad z_2(x) = x \cosh^2(d(x) - i\theta(x))$$

Estas funciones verifican las siguientes propiedades:

- (i) $\theta(x) \in \mathbf{R}$ para todo $x \in [-4, 0)$;
- (ii) Si denotamos $h = 4 \cos^2 \frac{\alpha h}{2} - 2 \in (-4, 0)$, entonces: $d(x) \in \mathbf{R}$ si $h < x < 0$; $d(h) = 0$; y $d(x)$ es imaginario puro si $-4 \leq x < h$. Si $r(x) = |d(x)|$ es el módulo de $d(x)$, podemos suponer que $d(x) = r(x)$ cuando $h \leq x < 0$ y $d(x) = -ir(x)$ cuando $-4 \leq x < h$.

Entonces para cada $x \in [-4, 0)$ existen dos representaciones ρ_1, ρ_2 de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [p/q])$ en $SL(2, \mathbf{C})$, definidas por:

$$\rho_1(a) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & ie^{d+i\theta} \sin \frac{\alpha}{2} \\ ie^{-(d+i\theta)} \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \quad \rho_1(b) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & ie^{-(d+i\theta)} \sin \frac{\alpha}{2} \\ ie^{d+i\theta} \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rho_2(a) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & ie^{d-i\theta} \sin \frac{\alpha}{2} \\ ie^{-(d-i\theta)} \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \quad \rho_2(b) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & ie^{-(d-i\theta)} \sin \frac{\alpha}{2} \\ ie^{d-i\theta} \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

donde $\alpha = \arccos \frac{x+2}{2}$, $d = d(x)$ y $\theta = \theta(x)$.

(En realidad sólo sabemos que existan representaciones ρ_1 y ρ_2 definidas de esta manera, cuando los puntos $(\sqrt{x+4}, z_1(x) + 2)$ y $(\sqrt{x+4}, z_2(x) + 2)$ corresponden a representaciones *irreducibles*, es decir, cuando $z_1(x) \neq x$ y $z_2(x) \neq x$. Sin embargo, como el conjunto de puntos de la curva de trazas que corresponden a representaciones reducibles es finito, por continuidad se tiene que las expresiones anteriores definen siempre dos representaciones ρ_1, ρ_2 de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [p/q])$ en $SL(2, \mathbf{C})$).

Asociadas a ρ_1 y ρ_2 hay dos representaciones de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [p/q])$ en el subgrupo de $SL(4, \mathbf{C})$

formado por las matrices M tales que $M \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} M^t = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$, que denotamos

$SO(3, 1; \mathbf{C})$. Estas dos representaciones en $SO(3, 1; \mathbf{C})$, que denotaremos $\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2$, vienen dadas por:

$$\tilde{\rho}_1(a) = \begin{pmatrix} 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \theta & 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin \theta \cos \theta & -\sin \alpha \sin \theta \cosh d & -\sin \alpha \sin \theta \sinh d \\ 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin \theta \cos \theta & 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \theta & \sin \alpha \cos \theta \cosh d & \sin \alpha \cos \theta \sinh d \\ \sin \alpha \sin \theta \cosh d & -\sin \alpha \cos \theta \cosh d & 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cosh^2 d & -2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sinh d \cosh d \\ -\sin \alpha \sin \theta \sinh d & \sin \alpha \cos \theta \sinh d & 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sinh d \cosh d & 1 + 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sinh^2 d \end{pmatrix}$$

$\tilde{\rho}_2(a)$ se obtiene cambiando θ por $-\theta$ en la expresión de $\tilde{\rho}_1(a)$, y $\tilde{\rho}_i(b)$ es la conjugada de $\tilde{\rho}_i(a)$ mediante la matriz $X = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.

A continuación vamos a analizar qué interpretación se puede dar a los pares de representaciones (ρ_1, ρ_2) y $(\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2)$ cuando x varía entre 0 y -4 , y qué relación existe entre ellos.

Cuando $h < x < 0$, d y θ son reales, luego las representaciones $\tilde{\rho}_1$ y $\tilde{\rho}_2$ en $SO(3, 1; \mathbf{C})$ son en realidad dos representaciones en la componente de la identidad del grupo de matrices reales $SO(3, 1)$, que se identifica con $\text{Iso}^+(\mathbf{H}^3)$ (en el modelo del hiperboloide o el modelo de Klein de \mathbf{H}^3). La representación $\tilde{\rho}_2$ es conjugada de $\tilde{\rho}_1$ mediante la matriz $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in O(3, 1)$ (que invierte la orientación espacial y preserva la orientación temporal del espacio de Lorentz-Minkowski \mathbf{R}_1^4 , y se identifica por tanto con una isometría hiperbólica que invierte la orientación).

Cuando $x = h$, $d = 0$, luego las representaciones $\tilde{\rho}_1$ y $\tilde{\rho}_2$ coinciden ambas con una representación de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [p/q])$ en $SO(3) \subset SO(3, 1)$:

$$\tilde{\rho}_1(a) = \tilde{\rho}_2(a) = \begin{pmatrix} 1 - 2 \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \text{sen}^2 \theta & 2 \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \text{sen} \theta \cos \theta & -\text{sen} \alpha \text{sen} \theta & 0 \\ 2 \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \text{sen} \theta \cos \theta & 1 - 2 \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \theta & \text{sen} \alpha \cos \theta & 0 \\ \text{sen} \alpha \text{sen} \theta & -\text{sen} \alpha \cos \theta & 1 - 2 \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\rho}_1(b) = \tilde{\rho}_2(b) = X \tilde{\rho}_1(a) X$$

Las representaciones ρ_1 y ρ_2 en $SL(2, \mathbf{C})$ coinciden, y son en realidad una representación en $SU(2)$ (que es la cubierta universal de $SO(3)$):

$$\rho_1(a) = \rho_2(a) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & ie^{i\theta} \text{sen} \frac{\alpha}{2} \\ ie^{-i\theta} \text{sen} \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \quad \rho_1(b) = \rho_2(b) = \rho_1(a)^t$$

Cuando $-4 \leq x < h$, d es imaginario puro, luego las representaciones ρ_1 y ρ_2 en $SL(2, \mathbf{C})$ son dos representaciones distintas de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [p/q])$ en $SU(2)$. Como hemos supuesto que $d(x) = -ir(x)$, tenemos que

$$\rho_1(a) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & ie^{i(-r+\theta)} \text{sen} \frac{\alpha}{2} \\ ie^{i(r-\theta)} \text{sen} \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \quad \rho_1(b) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & ie^{i(r-\theta)} \text{sen} \frac{\alpha}{2} \\ ie^{i(-r+\theta)} \text{sen} \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rho_2(a) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & ie^{-i(r+\theta)} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \\ ie^{i(r+\theta)} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \quad \rho_2(b) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & ie^{i(r+\theta)} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \\ ie^{-i(r+\theta)} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

Veamos de qué forma son las correspondientes representaciones $\tilde{\rho}_1$ y $\tilde{\rho}_2$. Como $\cosh d = \cosh(-ir) = \cos r$ y $\operatorname{senhd} = \operatorname{senh}(-ir) = -i \operatorname{sen} r$, resulta que $\tilde{\rho}_1$ y $\tilde{\rho}_2$ son dos representaciones de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [p/q])$ en el subgrupo \mathcal{J} de $SO(3, 1; \mathbf{C})$ formado por las matrices de la forma

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & im_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & im_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & im_{34} \\ im_{41} & im_{42} & im_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \quad \text{con } m_{ij} \in \mathbf{R}$$

Este subgrupo se identifica con el grupo ortogonal (real) $SO(4)$ mediante la conjugación por la matriz

$$T = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & i \end{pmatrix}. \quad \text{En efecto, si } M \in \mathcal{J}, \text{ entonces } TMT^{-1} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ -m_{41} & -m_{42} & -m_{43} & m_{44} \end{pmatrix}$$

pertenece a $SL(4, \mathbf{R})$, y $(TMT^{-1})^t (TMT^{-1}) = T^{-1} M^t T^2 M T^{-1} =$

$$= T^{-1} M^t \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} M T^{-1} = T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Por tanto,}$$

$TMT^{-1} \in SO(4)$.

Cuando $-4 \leq x < h$ se tienen, pues, dos representaciones $\tilde{\rho}'_1, \tilde{\rho}'_2$ de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [p/q])$ en $SO(4) \cong \operatorname{Iso}^+(\mathbf{S}^3)$, dadas por:

$$\tilde{\rho}'_1(a) = \begin{pmatrix} 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen}^2 \theta & 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta & -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \cos r & \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} r \\ 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta & 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \theta & \operatorname{sen} \alpha \cos \theta \cos r & -\operatorname{sen} \alpha \cos \theta \operatorname{sen} r \\ \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \cos r & -\operatorname{sen} \alpha \cos \theta \cos r & 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 r & 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} r \cos r \\ -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} r & \operatorname{sen} \alpha \cos \theta \operatorname{sen} r & 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} r \cos r & 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen}^2 r \end{pmatrix}$$

$\tilde{\rho}'_1(b) = X \tilde{\rho}'_1(a) X$ y $\tilde{\rho}'_2$ es conjugada de $\tilde{\rho}'_1$ mediante la matriz $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in O(4)$ (que es una

isometría esférica que invierte la orientación).

Ahora $\tilde{\rho}'_1(a)$ y $\tilde{\rho}'_1(b)$ son dos rotaciones en \mathbf{S}^3 de ángulo α en torno a dos ejes separados a una distancia $2r$ y que forman un ángulo 2θ . Lo mismo sucede con $\tilde{\rho}'_2(a)$ y $\tilde{\rho}'_2(b)$.

Queremos relacionar estas representaciones $\tilde{\rho}'_1$ y $\tilde{\rho}'_2$ en $SO(4)$ con el par de representaciones ρ_1 y ρ_2 en $SU(2)$, teniendo en cuenta que (como dijimos en la introducción a este capítulo) $SU(2) \times SU(2)$ es la cubierta universal de $SO(4)$. Vamos a ver ahora de manera explícita qué relación existe entre $(\tilde{\rho}'_1, \tilde{\rho}'_2)$ y (ρ_1, ρ_2) . Si identificamos $\mathbf{S}^3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}$ con

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x + iy & z + it \\ -z + it & x - iy \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1 \right\}, \text{ entonces la isometría esférica } \tilde{\rho}'_1(a)$$

corresponde a la transformación que envía $\begin{pmatrix} x + iy & z + it \\ -z + it & x - iy \end{pmatrix}$ a

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & -ie^{i(-r+\theta)} \sin \frac{\alpha}{2} \\ -ie^{i(r-\theta)} \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + iy & z + it \\ -z + it & x - iy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & ie^{-i(r+\theta)} \sin \frac{\alpha}{2} \\ ie^{i(r+\theta)} \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \\ = \rho_1(a)^{-1} \begin{pmatrix} x + iy & z + it \\ -z + it & x - iy \end{pmatrix} \rho_2(a)$$

Análogamente, $\tilde{\rho}'_1(b)$ corresponde a la transformación

$$\begin{pmatrix} x + iy & z + it \\ -z + it & x - iy \end{pmatrix} \longrightarrow \rho_1(b)^{-1} \begin{pmatrix} x + iy & z + it \\ -z + it & x - iy \end{pmatrix} \rho_2(b)$$

En cambio, la isometría esférica $\tilde{\rho}'_2(a)$ corresponde a la transformación

$$\begin{pmatrix} x + iy & z + it \\ -z + it & x - iy \end{pmatrix} \longrightarrow \rho_2(a)^{-1} \begin{pmatrix} x + iy & z + it \\ -z + it & x - iy \end{pmatrix} \rho_1(a)$$

y análogamente para $\tilde{\rho}'_2(b)$.

Es decir, si consideramos la cubierta doble $\lambda : SU(2) \times SU(2) \rightarrow SO(4)$ definida por $\lambda(A, B) \begin{pmatrix} x + iy & z + it \\ -z + it & x - iy \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x + iy & z + it \\ -z + it & x - iy \end{pmatrix} B$, entonces $\tilde{\rho}'_1 = \lambda(\rho_1, \rho_2)$, mientras que $\tilde{\rho}'_2 = \lambda(\rho_2, \rho_1)$.

Como en todos los casos $\tilde{\rho}'_2$ sólo se diferencia de $\tilde{\rho}'_1$ en un cambio de orientación, de ahora en adelante consideraremos únicamente la representación $\tilde{\rho}'_1$ y la denotaremos simplemente $\tilde{\rho}$.

Cambio de escala.

Resumiendo, para cada $x \in [-4, 0)$, tenemos una representación $\tilde{\rho}$ en $SO(3, 1; \mathbf{C})$, tal que:

- si $h < x < 0$, entonces $\tilde{\rho}$ es una representación en la componente de la identidad de $SO(3, 1)$, que se identifica con $\text{Iso}^+(\mathbf{H}^3)$;
- si $x = h$, entonces $\tilde{\rho}$ es una representación en $SO(3)$;
- si $-4 \leq x < h$, entonces $\tilde{\rho}$ se puede identificar con una representación en $SO(4)$.

La familia de representaciones $\tilde{\rho}$ resulta poco satisfactoria por varios motivos. En primer lugar, no son siempre representaciones en el grupo de matrices reales $GL(4, \mathbf{R})$. En segundo lugar, cuando $x = h$ sólo se obtiene una representación en $SO(3)$ (que corresponde a la parte de rotación de una holonomía euclídea), y cuando $-4 \leq x < h$ hace falta conjugar adecuadamente $\tilde{\rho}$ para interpretarla como una representación en $SO(4)$.

Por ello, en este apartado vamos a ver cómo se puede modificar la familia de representaciones $\tilde{\rho}$ para obtener una familia continua de representaciones en $GL(4, \mathbf{R})$, con la siguiente propiedad: para cada x , existe un modelo (no estándar) del espacio hiperbólico (si $h < x < 0$), euclídeo (si $x = h$) o esférico (si $-4 \leq x < h$), distinto para cada x , de modo que la correspondiente representación en $GL(4, \mathbf{R})$ es una representación dentro del grupo de isometrías de ese modelo no estándar. El paso del modelo estándar de \mathbf{H}^3 , \mathbf{E}^3 o \mathbf{S}^3 a cada uno de estos modelos no estándar, es mediante un “cambio de escala” de factor variable (dependiente de x). A continuación explicamos detalladamente cómo realizar este adecuado cambio de escala para ver de manera automática la transición de holonomías hiperbólicas a holonomías esféricas a través de una holonomía euclídea, siguiendo la idea del artículo [HLM₁].

(i) Modelos de Klein de radio variable para \mathbf{H}^3

Para cada $R > 0$, vamos a considerar el siguiente modelo del espacio hiperbólico \mathbf{H}^3 (ver figura 7) :

$$H_R^3 = \{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid \frac{1}{R^2}(x^2 + y^2 + z^2) - t^2 = -1, t > 0 \}$$

con la métrica inducida por la forma cuadrática $\begin{pmatrix} 1/R^2 & & & \\ & 1/R^2 & & \\ & & 1/R^2 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ de \mathbf{R}^4 .

Las isometrías son las restricciones de los automorfismos lineales de \mathbf{R}^4 que preservan H_R^3 . Es decir, los automorfismos de matriz M tal que $M^t \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -R^2 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -R^2 \end{pmatrix}$ y tal que la última coordenada de $M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es > 0 . Las geodésicas y los planos son las intersecciones con H_R^3 de planos e hiperplanos de \mathbf{R}^4 .

Si se proyecta H_R^3 desde el origen sobre el hiperplano $t = 1$, aparece el interior de una bola de radio R en \mathbf{R}^3 , que podemos considerar como un “modelo de Klein de radio R ” de \mathbf{H}^3 .

Del modelo H_R^3 se pasa al modelo del hiperboloide estándar,

$$H_1^3 = \{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = -1, t > 0 \}$$

mediante el cambio de coordenadas $x' = Rx, y' = Ry, z' = Rz, t' = t$. (Por tanto, el paso del modelo de Klein de radio R al modelo de Klein estándar, de radio 1, es por homotecia).

(ii) Degeneración en la geometría euclídea

Cuando $R \rightarrow +\infty$ (ver figura 7), los conjuntos H_R^3 se aproximan al hiperplano

$$H_\infty^3 = \{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid -t^2 = -1, t > 0 \} = \{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid t = 1 \},$$

que se puede considerar como un modelo del espacio euclídeo E^3 . Se puede comprobar que en el paso al límite se preservan los ángulos: si para cada $R > 0$ se tienen dos planos $\Pi_1(R), \Pi_2(R)$ en H_R^3 , y cuando $R \rightarrow +\infty$ los $\Pi_i(R)$ tienden a un plano $\Pi_i, i = 1, 2$, entonces el ángulo (hiperbólico) entre $\Pi_1(R)$ y $\Pi_2(R)$ en H_R^3 tiende al ángulo euclídeo entre Π_1 y Π_2 . De hecho, el grupo de isometrías de H_R^3 tiende, cuando $R \rightarrow +\infty$, al grupo de semejanzas de E^3 .

En particular, se pueden obtener isometrías euclídeas como límite de isometrías (hiperbólicas) de H_R^3 cuando $R \rightarrow +\infty$. Un ejemplo (que es el que nos interesa) es el siguiente. Supongamos que, en el modelo estándar (de radio 1) de H^3 , tenemos para cada $R > 0$ una isometría $M_R = (m_{ij}(R))$, y que

cuando $R \rightarrow +\infty$, las matrices M_R tienden a una matriz de la forma $M = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathcal{O} & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$, donde

$\mathcal{O} \in O(3)$. Supongamos además que existe $\lambda_{i4} = \lim_{R \rightarrow +\infty} R \cdot m_{i4}(R) \in \mathbf{R}$ para $i = 1, 2, 3$. Para cada

$R > 0$, vamos a pasar ahora al modelo de H^3 de radio R . En ese modelo, la isometría M_R tiene matriz

$M'_R = \begin{pmatrix} R & & & \\ & R & & \\ & & R & \\ & & & 1 \end{pmatrix} M_R \begin{pmatrix} 1/R & & & \\ & 1/R & & \\ & & 1/R & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$. Cuando $R \rightarrow +\infty$, el límite de las matrices M'_R

(que son isometrías hiperbólicas en los modelos H_R^3) es $M' = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathcal{O} & & & \lambda_{14} \\ & & & \lambda_{24} \\ & & & \lambda_{34} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$, donde $\mathcal{O} \in O(3)$.

Es decir, M' es una isometría euclídea.

(iii) Paso a la geometría esférica

Vamos ahora a admitir la posibilidad de que el parámetro R tome también valores imaginarios puros: $R = \pm i |R|$. Entonces $H_{\pm i |R|}^3$ es el semielipsoide

$$H_{\pm i |R|}^3 = \{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid -\frac{1}{|R|^2}(x^2 + y^2 + z^2) - t^2 = -1, t > 0 \}$$

(ver figura 7), con la métrica inducida por la forma cuadrática $\begin{pmatrix} -1/|R|^2 & & & \\ & -1/|R|^2 & & \\ & & -1/|R|^2 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ de \mathbf{R}^4 . Convendrá ampliar este semielipsoide al elipsoide completo

$$S_{|R|}^3 = \{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid \frac{1}{|R|^2}(x^2 + y^2 + z^2) + t^2 = 1 \}$$

con la métrica inducida también por la forma cuadrática $\begin{pmatrix} -1/|R|^2 & & & \\ & -1/|R|^2 & & \\ & & -1/|R|^2 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ de \mathbf{R}^4 .

Si hacemos el cambio de coordenadas $x' = |R|x$, $y' = |R|y$, $z' = |R|z$, $t' = t$, entonces pasamos de $S_{|R|}^3$ a la esfera de radio 1,

$$S^3 = \{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid -x^2 - y^2 - z^2 - t^2 = -1 \}$$

con su métrica esférica estándar. En consecuencia, $S_{|R|}^3$ es un modelo (no estándar) de la geometría esférica.

Las matrices M tales que $M^t \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & |R|^2 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & |R|^2 \end{pmatrix}$ y tal que la última coordenada de $M \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ es > 0 , son en particular isometrías en el modelo no estándar $S_{|R|}^3$ de la geometría esférica.

Si se proyecta $H_{\pm i|R|}^3 \subset S_{|R|}^3$ desde el origen sobre el hiperplano $t = 1$, la imagen es todo el hiperplano, que consideraremos como un modelo proyectivo del semielipsoide superior $H_{\pm i|R|}^3$ (ver figura 7).

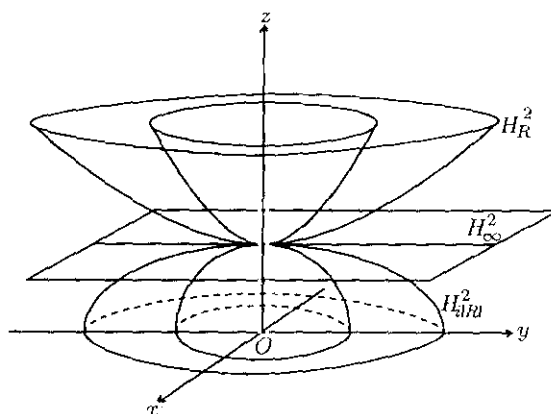


Figura 7

En resumen, introduciendo el parámetro R se puede ver la transición de la geometría hiperbólica a la esférica a través de la euclídea.

(iv) Aplicación del cambio de escala a la transición de holonomías hiperbólicas a esféricas.

Volvamos al objetivo que nos proponíamos en la primera parte de esta sección. Recordemos que para cada $x \in [-4, 0)$ habíamos escrito una representación $\tilde{\rho}$ de $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus \{p/q\})$ en el grupo $SO(3, 1; \mathbb{C}) \subset SL(4, \mathbb{C})$, que era de la siguiente forma: $\tilde{\rho}(a)$ es la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen}^2 \theta & 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta & -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \cosh d & -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \operatorname{senh} d \\ 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta & 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \theta & \operatorname{sen} \alpha \cos \theta \cosh d & \operatorname{sen} \alpha \cos \theta \operatorname{senh} d \\ \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \cosh d & -\operatorname{sen} \alpha \cos \theta \cosh d & 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \cosh^2 d & -2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{senh} d \cosh d \\ -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \operatorname{senh} d & \operatorname{sen} \alpha \cos \theta \operatorname{senh} d & 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{senh} d \cosh d & 1 + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{senh}^2 d \end{pmatrix}$$

y $B = \tilde{\rho}(b)$ es conjugada de $A = \tilde{\rho}(a)$ mediante la matriz $X = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$. Aquí, $\alpha =$

$\arccos \frac{x+2}{2}$ y $d = d(x)$ y $\theta = \theta(x)$ son dos funciones continuas del intervalo $[-4, 0)$ en \mathbb{C} , que verifican las siguientes propiedades:

- $\theta(x) \in \mathbb{R}$ para todo x , y
- $d(x) \in \mathbb{R}^+$ si $h < x < 0$; $d(h) = 0$; y $d(x) = -ir(x)$ si $-4 \leq x < h$, donde $r(x) \in \mathbb{R}^+$. En general, denotamos siempre $r(x) = |d(x)|$.

Entonces cuando $h < x < 0$, $\tilde{\rho}$ es una representación en $SO(3, 1)$; cuando $x = h$, $\tilde{\rho}$ es una representación en $SO(3)$, y cuando $-4 \leq x < h$, $\tilde{\rho}$ es conjugada (mediante la matriz $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & i \end{pmatrix}$) a una representación en $SO(4)$.

Ahora vamos a elegir una función continua $k(x)$ tal que $k(x) \in \mathbb{R}^+$ si $h < x < 0$; $k(h) = 0$, y $k(x)$ es imaginario puro si $-4 < x < h$. Para cada $x \in (-4, 0)$, vamos a considerar el modelo H_R^3 de radio $R = 1/k(x)$. Si $x \neq h$, entonces la siguiente representación conjugada de $\tilde{\rho}$,

$$\rho_k = \begin{pmatrix} 1/k & & & \\ & 1/k & & \\ & & 1/k & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tilde{\rho} \begin{pmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & k & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

es una representación en el grupo de isometrías de H_R^3 . Cuando $x = h$, $k(x) = 0$, luego la representación ρ_k no está definida en principio para $x = h$. Sin embargo, si elegimos la función $k(x)$ adecuadamente,

de modo que exista el límite de ρ_k cuando $x \rightarrow h$, entonces (por lo visto en el apartado (ii)) dicho límite es una representación en el grupo de isometrías euclideas.

En resumen, eligiendo convenientemente la función $k(x)$, se verifica que:

- cuando $h < x < 0$, ρ_k es una representación de $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [p/q])$ en el grupo de isometrías hiperbólicas que preservan la orientación, en el siguiente modelo de \mathbb{H}^3 :

$$H_{1/k}^3 = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid k^2(x^2 + y^2 + z^2) - t^2 = -1, t > 0 \}$$

(que proyectaremos con frecuencia sobre el hiperplano $t = 1$ como una bola de radio $1/k$).

- cuando $x = h$, ρ_k es una representación de $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [p/q])$ en el grupo de isometrías euclideas que preservan la orientación. Aquí estamos viendo el espacio euclídeo E^3 como el hiperplano de \mathbb{R}^4

$$H_\infty^3 = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t = 1 \}$$

- cuando $-4 < x < h$, ρ_k es una representación de $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [p/q])$ en el grupo de isometrías esféricas que preservan la orientación, en el siguiente modelo de la esfera \mathbb{S}^3 :

$$S_{1/|k|}^3 = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid -|k|^2(x^2 + y^2 + z^2) - t^2 = -1 \}$$

(que proyectaremos a veces sobre el hiperplano $t = 1$).

La elección de la función $k(x) = \sinh d(x)$ sería adecuada y natural, para obtener en el límite isometrías euclideas cuando $x = h$. Sin embargo, presenta el inconveniente de que no permite ver en el límite, cuando x tiende a 0 (y α tiende a 0), la estructura hiperbólica completa de volumen finito. En efecto, cuando $x \rightarrow 0$, $d \rightarrow +\infty$, y por tanto $k \rightarrow +\infty$. En consecuencia, los modelos $H_{1/k}^3$ (que tras proyectar sobre $t = 1$ se ven como bolas de radio $1/k$), degeneran en un punto cuando $x \rightarrow 0$. Para evitar este problema, elegiremos normalmente (siguiendo el ejemplo del artículo [HLM₁]) la función $k = (\tan(\alpha/2) \sinh d) / \cos \theta$ (cuya interpretación geométrica veremos enseguida). Esta función no tiende a cero cuando $\alpha \rightarrow 0$, por el siguiente motivo. Consideremos el modelo de Klein estándar de radio 1 de \mathbb{H}^3 , y fijemos el origen $O = (0, 0, 0)$ como punto base. Sean $A = \tilde{\rho}(a)$ y $B = \tilde{\rho}(b)$ las dos rotaciones que generan el grupo de holonomía. Sea H_α el plano bisector del segmento que une el punto base O con su imagen $A(O)$, y sea P es el punto de corte de H_α con el eje de la rotación B (ver figura 8; compárese también con la figura 3). Entonces la segunda coordenada del punto P es $(\tan(\alpha/2) \sinh d) / \cos \theta$. (La comprobación de este hecho es un ejercicio de trigonometría, que haremos con detalle a continuación). Esta función $k = (\tan(\alpha/2) \sinh d) / \cos \theta$ tiene además la ventaja de que en la práctica simplifica los cálculos. Sin embargo, presenta también un inconveniente, ahora en

el otro extremo del intervalo: cuando $x \rightarrow -4$, $\alpha \rightarrow \pi$ y $d \rightarrow -i\pi/(2p)$, y por tanto $k \rightarrow \infty$. El modelo $H_{1/k}^3$ tiende a un segmento, y en consecuencia ahora no podremos ver la estructura de orbiforma esférica de ángulo cónico π . Como cualquier otra elección de función k es mucho más complicada, lo que haremos será deshacer el cambio de escala cuando queramos ver este caso límite.

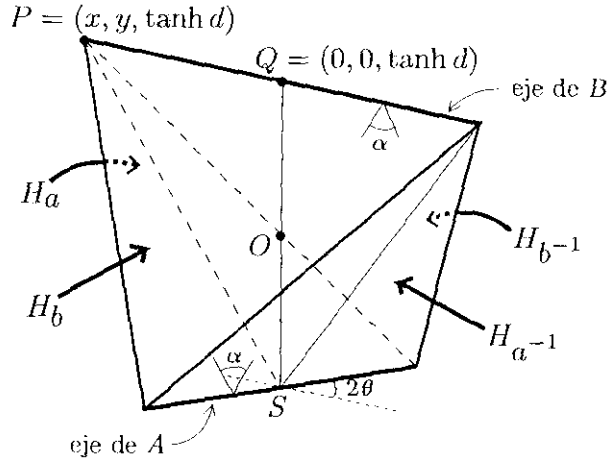


Figura 8

Cálculo de las coordenadas del punto P :

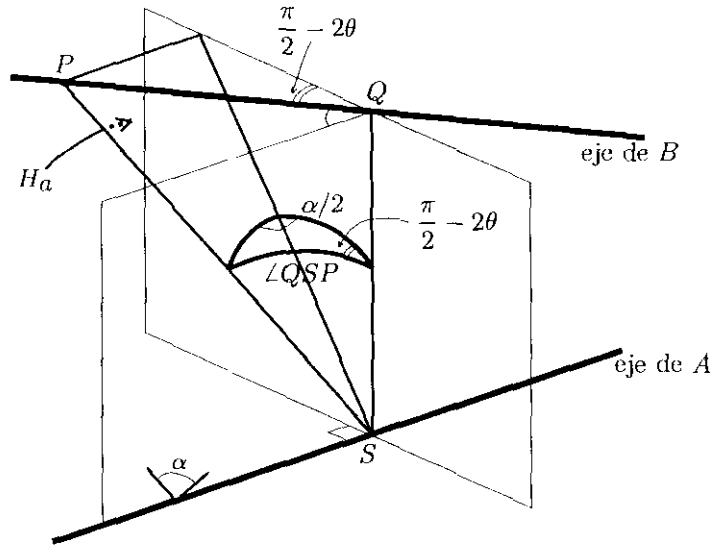
Recordemos que estamos considerando ahora el modelo de Klein de radio 1 de H^3 . Como la distancia entre los ejes de las rotaciones A y B es $2d$ y O es el punto medio entre ellos, resulta que las coordenadas del punto P son de la forma $P = (x, y, \tanh d)$. En el triángulo hiperbólico PQS de la figura 8 (que es rectángulo en Q), se verifica la fórmula trigonométrica $\tan \angle(QSP) \sinh \text{dist}(Q, S) = \tanh \text{dist}(P, Q)$. Como $Q = (0, 0, \tanh d)$ y $P = (x, y, \tanh d)$, resulta que

$$\cosh \text{dist}(P, Q) = \frac{1 - \tanh^2 d}{\sqrt{1 - \tanh^2 d} \sqrt{1 - \tanh^2 d - x^2 - y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2) \cosh^2 d}}$$

En consecuencia, $\tanh \text{dist}(P, Q) = \sqrt{x^2 + y^2} \cosh d$. Como $\text{dist}(Q, S) = 2d$, resulta que $\tan \angle(QSP) \sinh 2d = \sqrt{x^2 + y^2} \cosh d$, luego $\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \tan \angle(QSP) \sinh d$. Por otra parte (comparar figura 3), $\cot \theta = x/y$, luego $\sqrt{x^2 + y^2} = y \sqrt{\cot^2 \theta + 1} = y / (\sin \theta)$. En consecuencia,

$$y = 2 \sin \theta \sinh d \tan \angle(QSP)$$

Determinemos ahora el ángulo $\angle(QSP)$, teniendo en cuenta que los dos ejes de las rotaciones A y B forman ángulo 2θ . Tenemos la siguiente situación:



Existe, pues, un triángulo recto esférico, en el que la hipotenusa mide $\angle(QSP)$, un cateto mide $\alpha/2$, y el ángulo entre la hipotenusa y ese cateto mide $\frac{\pi}{2} - 2\theta$. Se verifica entonces la fórmula trigonométrica $\tan \angle(QSP) \cos(\frac{\pi}{2} - 2\theta) = \tan \frac{\alpha}{2}$, luego $\tan \angle(QSP) = \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\sin(2\theta)}$. Por tanto,

$$x = \frac{\sinh d \tan \frac{\alpha}{2}}{\sin \theta} \quad \text{e} \quad y = \frac{\sinh d \tan \frac{\alpha}{2}}{\cos \theta}$$

5. LA ESTRUCTURA DE ORBIFORMA ESFÉRICA EN S^3 CON SINGULARIDAD DE ÁNGULO π EN UN NUDO O ENLACE RACIONAL

Es un hecho bien conocido (cf. [Sb]; comparar [Con], [Mo₁]) que la esfera S^3 tiene una estructura de orbiforma esférica con singularidad de isotropía 2 en cualquier nudo o enlace racional $[p/q]$. Esta estructura, que denotaremos $(S^3, [p/q], \pi)$, es única a menos de isometría ([CZ], ver también [Bo] y [Sb]). Se obtiene como el cociente de S^3 bajo la acción del grupo diédrico de orden $2p$ generado por dos rotaciones A , B de ángulo π , en torno a dos ejes que están separados a una distancia de $\frac{\pi}{p}$ y forman un ángulo de $\frac{q\pi}{p}$. Un dominio fundamental para esta acción es la "lente" comprendida entre dos esferas máximas en S^3 que se cortan formando ángulo π/p (ver la figura 9). De hecho, este dominio fundamental es el dominio de Dirichlet centrado en el punto medio entre los dos ejes de rotación.

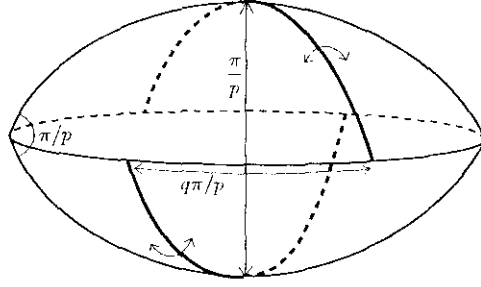


Figura 9

Identificamos, como en la sección anterior, $\mathbf{S}^3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}$ con $SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + iy & z + it \\ -z + it & x - iy \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1 \right\}$, y también con $\{(u, v) \in \mathbf{C}^2 \mid u\bar{u} + v\bar{v} = 1\}$. Por lo visto en la sección anterior, sabemos que las isometrías esféricas

$$A : \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\frac{(q-1)\pi}{2p}} \\ -ie^{i\frac{(q-1)\pi}{2p}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ie^{i\frac{(q+1)\pi}{2p}} \\ ie^{i\frac{(q+1)\pi}{2p}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$B : \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -ie^{i\frac{(q-1)\pi}{2p}} \\ -ie^{-i\frac{(q-1)\pi}{2p}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ie^{-i\frac{(q+1)\pi}{2p}} \\ ie^{-i\frac{(q+1)\pi}{2p}} & 0 \end{pmatrix}$$

son dos rotaciones de ángulo π en torno a dos ejes,

$$l_A = \{(r_1 e^{i\pi/2p}, r_2 e^{i(p-q)\pi/2p}) \mid r_1, r_2 \in \mathbf{R}, r_1^2 + r_2^2 = 1\},$$

$$l_B = \{(r_1 e^{-i\pi/2p}, r_2 e^{i(q-p)\pi/2p}) \mid r_1, r_2 \in \mathbf{R}, r_1^2 + r_2^2 = 1\},$$

que forman ángulo $\frac{q\pi}{p}$ y están a distancia $\frac{\pi}{p}$.

Conocemos, pues, la representación de holonomía $\rho_\pi : \pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [p/q]) \rightarrow SO(4)$ de la orbiforma esférica $(\mathbf{S}^3, [p/q], \pi)$ (a menos de conjugación). Si a y b son los generadores de la presentación estándar de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [p/q])$, entonces las imágenes por ρ_π de a y b son las rotaciones A y B , respectivamente.

Lo que todavía no sabemos es a qué representaciones $\tilde{\rho}_\pi$ de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [p/q])$ en $SU(2) \times SU(2) \cong \widetilde{SO}(4)$ se levanta ρ_π . Si consideramos la cubierta doble $\lambda : SU(2) \times SU(2) \rightarrow SO(4)$ definida por $\lambda(P, Q) \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} Q$, entonces existen en principio cuatro maneras posibles de levantar ρ_π a $SU(2) \times SU(2)$, dadas por:

$$\tilde{\rho}_\pi(a) = \left(\sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 & ie^{i\frac{(q-1)\pi}{2p}} \\ ie^{-i\frac{(q-1)\pi}{2p}} & 0 \end{pmatrix}, \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 & ie^{-i\frac{(q+1)\pi}{2p}} \\ ie^{i\frac{(q+1)\pi}{2p}} & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\tilde{\rho}_\pi(b) = \left(\tau \cdot \begin{pmatrix} 0 & ie^{-i\frac{(q-1)\pi}{2p}} \\ ie^{i\frac{(q-1)\pi}{2p}} & 0 \end{pmatrix}, \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 & ie^{i\frac{(q+1)\pi}{2p}} \\ ie^{-i\frac{(q+1)\pi}{2p}} & 0 \end{pmatrix} \right)$$

donde $\sigma \in \{\pm 1\}$ y $\tau \in \{\pm 1\}$.

Si $[p/q]$ es un enlace (es decir, si p es par), entonces las cuatro son de hecho representaciones de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [p/q])$ en $SU(2) \times SU(2)$, porque en la relación $awa^{-1}w^{-1} = 1$ de la presentación estándar, las letras a y b aparecen cada una (con o sin exponente) un número par de veces. Por tanto, si existe una representación que envía a a A y b a B , entonces también existen otras tres representaciones que envían a a $\pm A$ y b a $\pm B$. Así pues, cuando $[p/q]$ es un enlace, ρ_π admite cuatro levantamientos a $SU(2) \times SU(2)$.

En cambio, cuando $[p/q]$ es un nudo, en la relación $awb^{-1}w^{-1} = 1$ de la presentación estándar, las letras a y b aparecen cada una (con o sin exponente) un número impar de veces. En consecuencia, ρ_π sólo admite dos levantamientos a $SU(2) \times SU(2)$, que son *opuestos* uno del otro (es decir, si uno envía $a \rightarrow A$ y $b \rightarrow B$, entonces el otro envía $a \rightarrow -A$ y $b \rightarrow -B$). De las cuatro posibilidades antes mencionadas, queremos saber cuáles son las que corresponden a estos dos únicos levantamientos: si las correspondientes al caso $\sigma\tau = 1$ o los correspondientes a $\sigma\tau = -1$. En el primer caso, se tendrían dos representaciones ρ_1, ρ_2 de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [p/q])$ en $SU(2)$ con $\overline{\text{tr}(\rho_1(ab))} = -2 \cos \frac{(q-1)\pi}{p}$ y $\text{tr}(\rho_2(ab)) = -2 \cos \frac{(q+1)\pi}{p}$. Por tanto, los puntos $(0, -2 \cos \frac{(q-1)\pi}{p})$ y $(0, -2 \cos \frac{(q+1)\pi}{p})$ pertenecerían a la curva de trazas $C[p/q]$. En el segundo caso serían, en cambio, los puntos $(0, 2 \cos \frac{(q-1)\pi}{p})$ y $(0, 2 \cos \frac{(q+1)\pi}{p})$ los que pertenecerían a la curva de trazas.

Por otra parte, por el trabajo de Burde ([Bu]) se sabe que la curva de trazas corta a la recta $\hat{x} = 0$ en los puntos $(0, -2 \cos \frac{2\nu\pi}{p})$, $\nu = 1, \dots, \frac{p-1}{2}$. Por tanto, si $[p/q]$ es un nudo (es decir, si p es impar), entonces los puntos $(0, 2 \cos \frac{(q-1)\pi}{p})$ y $(0, 2 \cos \frac{(q+1)\pi}{p})$ no pertenecen a la curva de trazas $C[p/q]$. Así pues, cuando $[p/q]$ es un nudo, ρ_π admite dos levantamientos a $SU(2) \times SU(2)$, que son:

$$\tilde{\rho}_\pi(a) = \left(\begin{pmatrix} 0 & ie^{i\frac{(q-1)\pi}{2p}} \\ ie^{-i\frac{(q-1)\pi}{2p}} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & ie^{-i\frac{(q+1)\pi}{2p}} \\ ie^{i\frac{(q+1)\pi}{2p}} & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\tilde{\rho}_\pi(b) = \left(\begin{pmatrix} 0 & ie^{-i\frac{(q-1)\pi}{2p}} \\ ie^{i\frac{(q-1)\pi}{2p}} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & ie^{i\frac{(q+1)\pi}{2p}} \\ ie^{-i\frac{(q+1)\pi}{2p}} & 0 \end{pmatrix} \right)$$

y su opuesto. Corresponden a los puntos $(0, -2 \cos \frac{(q-1)\pi}{p})$ y $(0, -2 \cos \frac{(q+1)\pi}{p})$ de $C[p/q]$.

En el caso de un enlace, los cuatro puntos $(0, \pm 2 \cos \frac{(q-1)\pi}{p})$ y $(0, \pm 2 \cos \frac{(q+1)\pi}{p})$ pertenecen a la curva de trazas $C[p/q]$. Sin embargo, consideremos cualquier estructura esférica cónica $(S^3, [p/q], \alpha)$, de ángulo cónico α (próximo a π pero distinto de π) en ambas componentes del enlace. Su holonomía ρ_α sólo admite dos levantamientos $\tilde{\rho}_\alpha$ a $SU(2) \times SU(2)$ que verifiquen la siguiente condición: si $\tilde{\rho}_\alpha(a) = (A_1, A_2)$ y $\tilde{\rho}_\alpha(b) = (B_1, B_2)$, entonces $\text{tr}(A_i) = \text{tr}(B_i)$. Estos dos levantamientos son de la siguiente forma:

$$\tilde{\rho}_\alpha(a) = \left(\sigma \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & ie^{i(-r+\theta)} \sin \frac{\alpha}{2} \\ ie^{i(r-\theta)} \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \sigma \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & ie^{-i(r+\theta)} \sin \frac{\alpha}{2} \\ ie^{i(r+\theta)} \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \right)$$

$$\tilde{\rho}_\alpha(b) = \left(\sigma \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & ie^{i(r-\theta)} \sin \frac{\alpha}{2} \\ ie^{i(-r+\theta)} \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \sigma \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & ie^{i(r+\theta)} \sin \frac{\alpha}{2} \\ ie^{-i(r+\theta)} \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \right)$$

donde $\sigma \in \{\pm 1\}$. Cuando $\alpha \rightarrow \pi$, $r \rightarrow \pi/(2p)$ y $\theta \rightarrow q\pi/(2p)$. Por tanto, la representación $\tilde{\rho}_\pi$ de $\pi_1(S^3 \setminus [p/q])$ en $SU(2) \times SU(2)$ que aparece como límite de estos levantamientos cuando $\alpha \rightarrow \pi$ es, como antes,

$$\tilde{\rho}_\pi(a) = \left(\begin{pmatrix} 0 & ie^{i\frac{(q-1)\pi}{2p}} \\ ie^{-i\frac{(q-1)\pi}{2p}} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & ie^{-i\frac{(q+1)\pi}{2p}} \\ ie^{i\frac{(q+1)\pi}{2p}} & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\tilde{\rho}_\pi(b) = \left(\begin{pmatrix} 0 & ie^{-i\frac{(q-1)\pi}{2p}} \\ ie^{i\frac{(q-1)\pi}{2p}} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & ie^{i\frac{(q+1)\pi}{2p}} \\ ie^{-i\frac{(q+1)\pi}{2p}} & 0 \end{pmatrix} \right)$$

(De hecho, este mismo argumento sirve también para el caso de un nudo de dos puentes, sin necesidad de recurrir al resultado de Burde).

En resumen, supongamos que $[p/q]$ es un nudo o enlace no toroidal, y supongamos cierta la conjetura (enunciada en la sección 1) de que existe una familia de estructuras cónicas $(S^3, [p/q], \alpha)$ con α entre 0 y π , que son primero hiperbólicas, luego degeneran en una euclídea y a continuación son esféricas. Como en la sección 1, denotemos por $\mathcal{H}[p/q]$ la componente conexa del conjunto $\{(\hat{x}, \hat{z}) \in C[p/q] \mid 0 \leq \hat{x} \leq 2\}$ que contiene al punto $(2, \hat{z}_0)$ (correspondiente a la estructura hiperbólica completa de volumen finito). Entonces $\mathcal{H}[p/q]$ corta a la recta $\hat{x} = 0$ en los puntos $(0, -2 \cos \frac{(q-1)\pi}{p})$ y $(0, -2 \cos \frac{(q+1)\pi}{p})$ (cf. [HLM₄]).

6. UN ALGORITMO DE CONSTRUCCIÓN DE LOS POLIEDROS DE DIRICHLET

Supongamos ahora que M es una 3-variedad hiperbólica cónica compacta, con singularidad un enlace Σ y todos los ángulos cónicos $< 2\pi$. Sea $\rho : \pi_1(M \setminus \Sigma) \rightarrow \text{Iso}(\mathbf{H}^3)$ la representación de holonomía de M .

En el capítulo III veremos que existe un punto base $O \in \mathbf{H}^3$ y un poliedro hiperbólico compacto \mathcal{P} (con un número finito de caras) que contiene al punto O en su interior y verifica las siguientes propiedades:

- (1) \mathcal{P} es estrellado en O ;
- (2) existe un subconjunto finito $\Gamma \subset \pi_1(M \setminus \Sigma)$ tal que el borde de \mathcal{P} está contenido en la unión finita de hiperplanos

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \{x \in \mathbf{H}^3 \mid d(x, O) = d(x, \rho\gamma(O))\}$$

(en particular, O no queda fijo por ningún elemento de $\rho(\Gamma)$);

- (3) las caras de \mathcal{P} se pueden identificar dos a dos mediante isometrías hiperbólicas de la forma $\rho\gamma$ ($\gamma \in \Gamma$), dando como resultado la variedad cónica M .

El conjunto de puntos singulares de \mathcal{P} (es decir, los puntos que corresponden a puntos de Σ al hacer las identificaciones en el borde de \mathcal{P}) es una unión de segmentos disjuntos, y posiblemente algunos puntos aislados, en el borde de \mathcal{P} . En un entorno de cualquier punto no singular p del borde de \mathcal{P} , el poliedro \mathcal{P} es intersección de los semiespacios $\{x \in \mathbf{H}^3 \mid d(x, O) \leq d(x, \rho\gamma(O))\}$ tales que hay una cara de \mathcal{P} incidente en p que está contenida en el hiperplano $\{x \in \mathbf{H}^3 \mid d(x, O) = d(x, \rho\gamma(O))\}$. Es decir, el poliedro \mathcal{P} es localmente convexo fuera de la singularidad. Si todos los ángulos cónicos son $\leq \pi$, entonces el poliedro \mathcal{P} de hecho es convexo y se puede escribir de la forma

$$\mathcal{P} = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \{x \in \mathbf{H}^3 \mid d(x, O) \leq d(x, \rho\gamma(O))\}$$

Este poliedro \mathcal{P} , que generaliza el dominio de Dirichlet de una orbiforma hiperbólica, se llama *poliedro de Dirichlet de la variedad cónica M* centrado en el punto O (cf. [Ho₂], [Ko], [Zh]). También existe para variedades euclídeas y esféricas cónicas compactas con todos los ángulos cónicos $< 2\pi$. (Siempre que hablemos de una variedad cónica, se sobrentenderá que es hiperbólica, euclídea o esférica y que todos sus ángulos cónicos son $< 2\pi$.)

Si M es una variedad cónica con todos los ángulos cónicos $\leq \pi$, entonces para construir su poliedro de Dirichlet centrado en un punto base dado O , basta conocer:

- (i) la representación de holonomía ρ de $\pi_1(M \setminus \Sigma)$ en $\text{Iso}(\mathbf{H}^3)$ (resp. $\text{Iso}(\mathbf{E}^3)$ o $\text{Iso}(\mathbf{S}^3)$);

(ii) la familia finita $\Gamma \subset \pi_1(M \setminus \Sigma)$ que proporciona las caras del poliedro de Dirichlet.

Conociendo esto, el poliedro de Dirichlet \mathcal{P} no es más que la intersección finita de semiespacios

$$\mathcal{P} = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \{x \in \mathbf{H}^3 \mid d(x, O) \leq d(x, \rho\gamma(O))\}$$

Hasta ahora hemos tratado únicamente el punto (i), en el caso particular en que $M = \mathbf{S}^3$ y Σ es un nudo o enlace de dos puentes. El punto (ii) se estudiará con detalle, en un contexto general, en los capítulos III y IV. Aquí vamos a explicar la idea que guía todo ese desarrollo posterior, y vamos a exponer algunos resultados que se demostrarán más adelante. Aunque a menudo hablaremos sólo de variedades hiperbólicas cónicas, todo lo que vamos a decir es también válido en el caso euclídeo o esférico.

Sea M una 3-variedad hiperbólica cónica compacta, y sea $x_0 \in M \setminus \Sigma$ un punto base arbitrario. Consideremos la cubierta universal del complemento de la singularidad, $\widetilde{M \setminus \Sigma}$, que hereda una estructura de variedad hiperbólica (no completa). El grupo fundamental $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$ actúa en ella como un grupo discreto de isometrías, de modo que $M \setminus \Sigma$ es isométrica al cociente de $\widetilde{M \setminus \Sigma}$ bajo la acción de $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$. Si \tilde{x}_0 es un levantamiento cualquiera de x_0 a $\widetilde{M \setminus \Sigma}$, entonces podemos definir el dominio de Dirichlet con centro en \tilde{x}_0 , para esta acción discreta de $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$:

$$\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{x} \in \widetilde{M \setminus \Sigma} \mid d(\tilde{x}, \tilde{x}_0) \leq d(\tilde{x}, \gamma\tilde{x}_0) \text{ para todo } \gamma \in \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)\} \subset \widetilde{M \setminus \Sigma}$$

Aunque $\tilde{\mathcal{P}}$ no es compacto (y por tanto podría tener en principio infinitas caras), veremos en el capítulo III (lema 2.4) que de hecho sí tiene un número finito de caras. Esto se deduce de que la completación de $M \setminus \Sigma$ (que es la variedad M) sea una variedad cónica, lo cual permite controlar el comportamiento de los terminales de $\tilde{\mathcal{P}}$.

Existe, pues, un subconjunto *finito* Γ de $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$ tal que

$$\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{x} \in \widetilde{M \setminus \Sigma} \mid d(\tilde{x}, \tilde{x}_0) \leq d(\tilde{x}, \gamma\tilde{x}_0) \text{ para todo } \gamma \in \Gamma\}$$

El subconjunto Γ más pequeño que cumple esta propiedad es el que está formado por todos los $\gamma \in \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$, $\gamma \neq 1$, tales que $\tilde{\mathcal{P}} \cap \gamma\tilde{\mathcal{P}}$ tiene interior no vacío dentro del borde de $\tilde{\mathcal{P}}$ (es decir, lo que llamamos *facetas propias* de \mathcal{P}). Sin embargo, para estudiar deformaciones será útil considerar un subconjunto finito algo más grande que este Γ . Lo denotaremos por $\bar{\Gamma}$, y es el que está formado por todos los $\gamma \in \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$, $\gamma \neq 1$, tales que $\tilde{\mathcal{P}} \cap \gamma\tilde{\mathcal{P}} \neq \emptyset$ (es decir, lo que llamamos *facetas generales* de \mathcal{P}).

Sea $D : \widetilde{M \setminus \Sigma} \rightarrow \mathbf{H}^3$ una aplicación desarrolladora, $\rho : \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0) \rightarrow \text{Iso}(\mathbf{H}^3)$ la correspondiente holonomía, y sea $O = D(\tilde{x}_0)$. Entonces el poliedro de Dirichlet de M centrado en O no es más

que la completación de la imagen de $\tilde{\mathcal{P}}$ por D :

$$\mathcal{P} = \overline{D(\tilde{\mathcal{P}})}$$

Como $\widetilde{M \setminus \Sigma}$ no es completa, la aplicación desarrolladora D es una isometría local pero no una isometría. Por tanto, en principio la imagen $D(\tilde{\mathcal{P}})$ podría tener autointersecciones. Sin embargo, si todos los ángulos cónicos de M son $< 2\pi$, entonces probaremos que la restricción de D al dominio $\tilde{\mathcal{P}}$ es inyectiva, y es por tanto una isometría sobre su imagen. Si $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{P}}$ verifica que $d(\tilde{x}, \tilde{x}_0) = d(\tilde{x}, \gamma\tilde{x}_0)$, entonces $d(D(\tilde{x}), D(\tilde{x}_0)) = d(D(\tilde{x}), D(\gamma\tilde{x}_0)) = d(D(\tilde{x}), \rho\gamma(D(\tilde{x}_0)))$, luego $D(\tilde{x})$ pertenece al hiperplano $\{x \in \mathbf{H}^3 \mid d(x, O) = d(x, \rho\gamma(O))\}$. En consecuencia, $\mathcal{P} = \overline{D(\tilde{\mathcal{P}})}$ es un poliedro hiperbólico compacto cuyo borde está contenido en la unión finita de hiperplanos $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \{x \in \mathbf{H}^3 \mid d(x, O) = d(x, \rho\gamma(O))\}$.

Dada una 3-variedad hiperbólica cónica compacta M , en general no sabemos determinar el subconjunto finito $\Gamma \subset \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$ que proporciona las caras del poliedro de Dirichlet \mathcal{P} . Esto ya es un problema muy difícil en el caso de una orbiforma hiperbólica, pero lo es aún más cuando se trata de una variedad cónica general. Si M es una orbiforma hiperbólica, entonces se sabe que su poliedro de Dirichlet \mathcal{P} centrado en un punto no singular O es la intersección de *todos* los (infinitos) semiespacios $\{x \in \mathbf{H}^3 \mid d(x, O) \leq d(x, \rho\gamma(O))\}$ con $\gamma \in \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$. Por tanto, para construir \mathcal{P} basta ir intersecando familias finitas, cada vez más grandes, de estos semiespacios, con la seguridad de que este proceso terminará antes o después por proporcionar el poliedro \mathcal{P} . Sin embargo, si M es una variedad cónica pero no una orbiforma, entonces es falso que \mathcal{P} sea intersección de todos los semiespacios $\{x \in \mathbf{H}^3 \mid d(x, O) \leq d(x, \rho\gamma(O))\}$ con $\gamma \in \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$. Por tanto, es necesaria una selección muy cuidadosa de los semiespacios que se van a intersecar para definir \mathcal{P} , y a priori no se tiene ninguna información que haga posible una tal selección.

En cambio, si partimos de una cierta variedad cónica M_0 dada, para la cual conozcamos ya un poliedro de Dirichlet \mathcal{P}_0 , entonces podemos “deformar” el poliedro \mathcal{P}_0 para conseguir poliedros de Dirichlet de variedades cónicas “próximas” a M_0 (en un sentido que se precisará en el capítulo IV). Esto se hace mediante un algoritmo que se describió en la introducción de la tesis y que se demuestra en el capítulo IV.

La idea que permite deformar el poliedro de Dirichlet inicial \mathcal{P}_0 se esbozó en la introducción de la tesis, y es muy sencilla. Supongamos que en la misma variedad subyacente M_0 ponemos otra estructura hiperbólica cónica distinta, próxima a la inicial (en el sentido cuasi-isométrico que se definirá en el capítulo IV), y con la misma singularidad Σ . A la nueva variedad cónica la denotaremos por M . Entonces la cubierta universal $\widetilde{M \setminus \Sigma}$ tiene una métrica próxima a la de $\widetilde{M_0 \setminus \Sigma}$. Consideremos los dominios de Dirichlet $\tilde{\mathcal{P}}_0$ y $\tilde{\mathcal{P}}$, con centro en el punto base \tilde{x}_0 , para la acción discreta por isometrías

de $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$ en $\widetilde{M_0 \setminus \Sigma}$ y $\widetilde{M \setminus \Sigma}$, respectivamente. Vamos a quedarnos con una parte compacta de ambos dominios, por ejemplo la que se proyecta sobre el complemento en M de un pequeño entorno tubular de Σ . Por abuso de notación, llamaremos $\widetilde{\mathcal{P}}_0 \setminus N(\Sigma)$ y $\widetilde{\mathcal{P}} \setminus N(\Sigma)$ a estos dominios truncados. Hemos definido un subconjunto finito $\overline{\Gamma}_0$ de $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$, formado por los $\gamma \in \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$ tales que $\widetilde{\mathcal{P}}_0 \cap \gamma \widetilde{\mathcal{P}}_0 \neq \emptyset$. Entonces $\widetilde{\mathcal{P}}_0 \cup \left(\bigcup_{\gamma \in \overline{\Gamma}_0} \gamma \widetilde{\mathcal{P}}_0 \right)$ es un entorno de $\widetilde{\mathcal{P}}_0$ en $\widetilde{M_0 \setminus \Sigma}$. Pues bien, lo que ocurre es que, al deformar ligeramente la métrica, $\widetilde{\mathcal{P}} \cup \left(\bigcup_{\gamma \in \overline{\Gamma}_0} \gamma \widetilde{\mathcal{P}} \right)$ sigue siendo un entorno del nuevo dominio de Dirichlet truncado $\widetilde{\mathcal{P}} \setminus N(\Sigma)$ en $\widetilde{M \setminus \Sigma}$. Es decir, si $\gamma \widetilde{\mathcal{P}}$ es un trasladado que toca a $\widetilde{\mathcal{P}} \setminus N(\Sigma)$ en algún punto, entonces $\gamma \in \overline{\Gamma}_0$ (cf. capítulo IV, teorema 2.3). Por otra parte, si $\widetilde{\mathcal{P}}_0 \cap \gamma \widetilde{\mathcal{P}}_0$ tiene interior no vacío en el borde de $\widetilde{\mathcal{P}}_0$, entonces $\widetilde{\mathcal{P}} \cap \gamma \widetilde{\mathcal{P}}$ tiene también interior no vacío en el borde de $\widetilde{\mathcal{P}}$. No obstante, las relaciones de incidencia entre esta cantidad finita de trasladados de $\widetilde{\mathcal{P}}$ si pueden cambiar. Esto es lo que hace que pueda cambiar el tipo combinatorio del poliedro de Dirichlet, fuera de un entorno de la singularidad.

El siguiente ejemplo en dimensión 2, que se mostró ya en la introducción de la tesis, puede clarificar un poco lo que ocurre. En la figura 10 se muestran dos teselaciones del plano euclídeo por los dominios de Dirichlet correspondientes a dos estructuras euclídeas (no singulares) en el toro T^2 . En la primera, el grupo de holonomía está generado por dos traslaciones en direcciones perpendiculares: $\tau_1(x, y) = (x + 1, y)$, $\tau_2(x, y) = (x, y + 1)$. En la segunda, el grupo de holonomía está generado por las traslaciones $\tau_1(x, y) = (x + 1, y)$ y $\tau_2(x, y) = (x + t, y + 1)$, donde $t > 0$ es pequeño. Se observa que los polígonos de Dirichlet pasan de ser cuadrados a ser hexágonos, pero los ocho dominios que rodean a uno cualquiera dado son siempre los mismos.

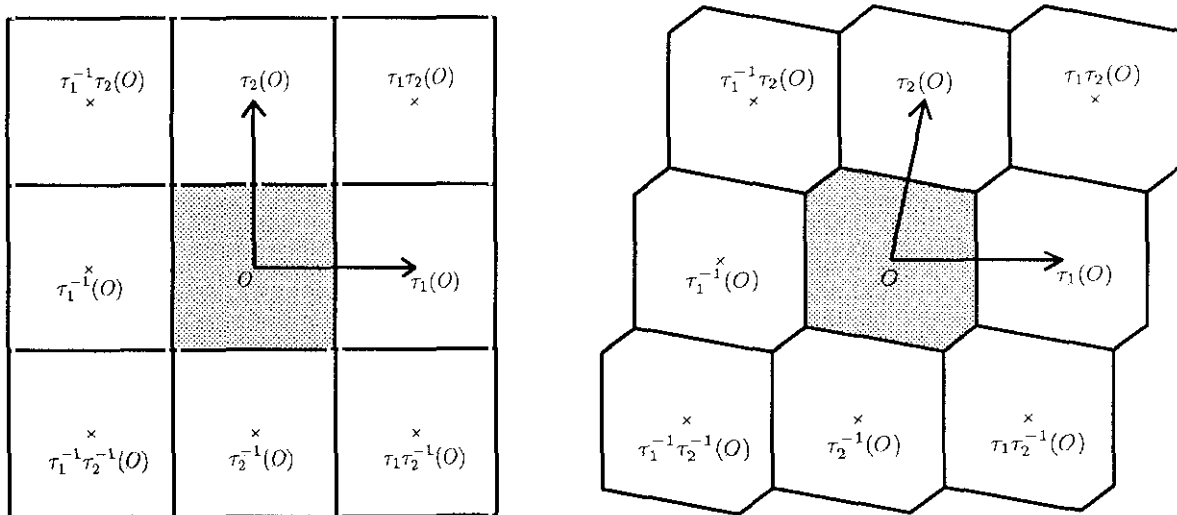


Figura 10

Obsérvese que es esencial considerar el dominio de Dirichlet *truncado* $\tilde{\mathcal{P}} \setminus N(\Sigma)$, que es compacto. En general es falso que $\tilde{\mathcal{P}} \cup \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} \gamma \tilde{\mathcal{P}} \right)$ sea un entorno de todo $\tilde{\mathcal{P}}$. Otro ejemplo en dimensión 2 (que se vio también en la introducción de la tesis), muestra lo que puede pasar. Pensemos en la orbiforma euclídea cuyo espacio subyacente es la esfera S^2 , con tres puntos cónicos de ángulos $2\pi/3$, $2\pi/3$, $2\pi/3$. El grupo de holonomía está generado por dos rotaciones ρ_1 , ρ_2 de ángulo $2\pi/3$. En la figura 11 se muestra una teselación del plano euclídeo por el dominio de Dirichlet \mathcal{P} centrado en el punto medio O entre los puntos fijos de ρ_1 y ρ_2 , y todos sus trasladados. Todos los vértices de la teselación son puntos singulares. Los polígonos sombreados son los dominios que tocan a \mathcal{P} en algún punto no singular.

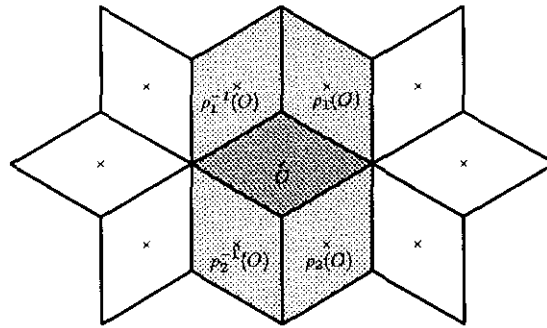


Figura 11

Vamos ahora a desplazar ligeramente el punto base O , de modo que ya no esté en el segmento que une los puntos fijos de ρ_1 y ρ_2 . Esto se puede interpretar como un tipo particular de deformación. En la figura 12 se muestra la nueva teselación del plano euclídeo. Se observa que han aparecido varias caras nuevas, correspondientes a dominios que antes sólo tocaban a \mathcal{P} en un punto singular. En la cubierta universal de S^2 menos tres puntos, esos dominios no tocaban en absoluto al correspondiente $\tilde{\mathcal{P}}$. Por otra parte, en este caso concreto en que se trata de una orbiforma, sólo hay un número finito de trasladados del dominio de Dirichlet en torno a cada punto singular. Sin embargo, para una variedad cónica general puede haber infinitos trasladados que incidan en un punto singular (hablando intuitivamente). Esto es lo que hace tan difícil controlar el comportamiento de un entorno de la singularidad al hacer deformaciones.

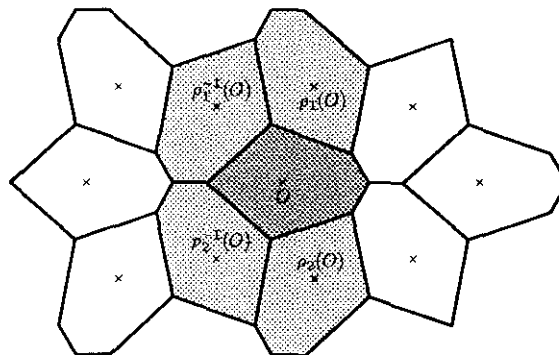


Figura 12

En relación con esto, pensemos lo que ocurre al deformar la estructura completa de volumen finito en el complemento de un nudo hiperbólico Σ en S^3 . El dominio de Dirichlet para esta estructura es un poliedro hiperbólico \mathcal{P} (no compacto) con un número finito de caras (cf. [Rat]). Quitemos de \mathcal{P} un entorno $N(\Sigma)$ de los puntos cuspidales. Por lo que hemos visto antes, el tipo combinatorio del poliedro truncado $\mathcal{P} \setminus N(\Sigma)$ sólo puede variar de una cantidad finita de maneras al hacer deformaciones pequeñas. Pero por otra parte, se sabe que cualquier variedad M obtenida por cirugía de Dehn en el nudo Σ tiene estructuras hiperbólicas cónicas con singularidad el ánimo de la cirugía y ángulo cónico arbitrariamente pequeño (cf. [Thu₁]). Por tanto, lo que cambia de una infinidad de formas distintas es el entorno $N(\Sigma)$. Según cuál sea la cirugía de Dehn aparecerán diferentes caras nuevas en el poliedro de Dirichlet de M , que estarán contenidas en un entorno de la singularidad.

Sin embargo, si tanto M_0 como su deformación M son variedades cónicas con el mismo espacio subyacente y la misma singularidad, entonces no se pueden producir fenómenos tan patológicos como el que acabamos de describir. De hecho, veremos en el capítulo IV (teorema IV.3.2) que el conjunto de caras que pueden aparecer en el poliedro de Dirichlet deformado \mathcal{P} dentro de un entorno de la singularidad, está también acotado por un conjunto finito, que llamaremos el conjunto de *facetas singulares* de \mathcal{P}_0 . Este conjunto está bien determinado y es calculable a partir del poliedro de Dirichlet inicial \mathcal{P}_0 .

Supongamos ahora que conocemos un poliedro de Dirichlet \mathcal{P}_0 (con centro en un cierto punto base O) para una estructura hiperbólica cónica M_0 con singularidad Σ . Supongamos que tenemos además una familia continua de representaciones ρ_t de $\pi_1(M \setminus \Sigma)$ en $\text{Iso}(\mathbf{H}^3)$, tal que ρ_0 es la holonomía de M_0 , y tal que ρ_t envía los meridianos de Σ a rotaciones. Entonces el siguiente algoritmo permite construir poliedros de Dirichlet para estructuras hiperbólicas cónicas en la misma variedad, con singularidad Σ y holonomía ρ_t , para t suficientemente próximo a 0 (ver la sección 4 del capítulo IV):

Fase 1:

(1) Se determinan los conjuntos de facetas generales y singulares de \mathcal{P}_0 .

– Determinación del conjunto $\bar{\Gamma}$ de facetas generales, a partir del poliedro:

Se verifica que $\gamma \in \bar{\Gamma}$ si y sólo si existen dos puntos no singulares x, y en el borde de \mathcal{P}_0 tales que x se identifica con y , y el segmento que une el punto base O con x , seguido del segmento que une y con O , es un lazo homótopo a γ en $M_0 \setminus \Sigma$.

– Determinación del conjunto Γ_{sing} de facetas singulares, a partir del poliedro:

La descripción de las facetas singulares es más complicada. Hay que considerar todos los pares de puntos singulares x, y en el borde de \mathcal{P}_0 , tales que x se identifica con y . Se consideran los segmentos que unen el punto base O con x e y , respectivamente, y se elige un pequeño meridiano μ de la singularidad Σ , que corte a estos dos segmentos en sendos puntos. La clase

de homotopía de cualquier curva cerrada simple, contenida en el grafo que determinan los dos segmentos y el meridiano μ , es una faceta singular.

(2) Para t suficientemente próximo a 0, se calculan los planos bisectores correspondientes a las facetas generales de \mathcal{P}_0 , $H_\gamma(t) = \{x \in \mathbf{H}^3 \mid d(x, O) = d(x, \rho_t \gamma(O))\}$, $\gamma \in \bar{\Gamma}$. Con ellos, se construye de manera explícita un poliedro $\widehat{\mathcal{P}}_t$.

– Si los ángulos cónicos de \mathcal{P}_0 son $< \pi$, $\widehat{\mathcal{P}}_t$ no es más que la intersección de todos los semiespacios correspondientes a las facetas generales de \mathcal{P}_0 :

$$\widehat{\mathcal{P}}_t = \{x \in \mathbf{H}^3 \mid d(x, O) \leq d(x, \rho_t \gamma(O)) \text{ para todo } \gamma \in \bar{\Gamma}\}$$

– Si \mathcal{P}_0 tiene algún ángulo cónico $\geq \pi$, entonces la definición de $\widehat{\mathcal{P}}_t$ es algo distinta. Ahora hay que determinar, para cada punto no singular x del borde de \mathcal{P}_0 , el subconjunto finito $\bar{\Gamma}(x) \subset \pi_1(M_0 \setminus \Sigma)$ formado por los elementos γ tales que $\tilde{\mathcal{P}}_0 \cap \gamma \tilde{\mathcal{P}}_0 = \tilde{x}$ en $M_0 \setminus \Sigma$ (donde $x = D(\tilde{x})$). De hecho, $\gamma \in \bar{\Gamma}(x)$ si y sólo si existe otro punto no singular y en el borde de $\tilde{\mathcal{P}}_0$ tal que x se identifica con y , y el segmento que une el punto base O con x , seguido del segmento que une y con O , es un lazo homótopo a γ en $M_0 \setminus \Sigma$. Para cada punto no singular x del borde de \mathcal{P}_0 , elegimos un pequeño entorno abierto U_x de x en \mathbf{H}^3 , tal que

$$U_x \cap \mathcal{P}_0 = \{z \in U_x \mid d(z, O) \leq d(z, \rho_0 \gamma(O)) \text{ para todo } \gamma \in \bar{\Gamma}(x)\}$$

Quitamos de \mathcal{P}_0 un pequeño entorno $N(\Sigma)$ de la singularidad, y recubrimos $\mathcal{P}_0 \setminus N(\Sigma)$ por una cantidad finita de abiertos U_{x_1}, \dots, U_{x_n} . Entonces $\widehat{\mathcal{P}}_t$ es un poliedro (en general no convexo), con todas sus caras contenidas en la unión de planos bisectores $H_\gamma(t)$, $\gamma \in \bar{\Gamma}$, y tal que

$$U_{x_i} \cap \widehat{\mathcal{P}}_t = \{z \in U_{x_i} \mid d(z, O) \leq d(z, \rho_t \gamma(O)) \text{ para todo } \gamma \in \bar{\Gamma}(x_i)\} \quad \text{para } i = 1, \dots, n$$

(3) Se truncan algunos vértices o aristas de $\widehat{\mathcal{P}}_t$ de modo canónico, de tal forma que las caras del poliedro truncado \mathcal{Q}_t se identifiquen dos a dos mediante isometrías hiperbólicas, para dar lugar a una estructura hiperbólica en el complemento de un entorno tubular $N(\Sigma)$ de la singularidad (el borde de $N(\Sigma)$ está formado por las nuevas caras aparecidas en \mathcal{Q}_t al realizar el truncamiento).

Fase 2:

(3) Se construyen *todos* los posibles poliedros que son extensión de \mathcal{Q}_t y tienen todas sus caras contenidas en la unión finita de planos bisectores $H_\gamma(t)$, donde γ recorre todas las facetas generales y singulares de \mathcal{P}_0 . Existe un número finito de tales poliedros.

(4) Para cada uno de ellos, se comprueba si sus caras se identifican dos a dos mediante isometrías hiperbólicas para dar lugar a la estructura cónica M_t . Por el Teorema de Cirugía Hiperbólica

de Thurston, sabemos que ha de existir uno que verifique esta condición, y ése es el poliedro de Dirichlet buscado \mathcal{P}_t . (Según un teorema de Hodgson-Kerckhoff [HK] sobre rigidez de variedades hiperbólicas cónicas, debe ser además único.)

El algoritmo es análogo en los casos euclídeo y esférico.

Ejemplo: la orbiforma esférica $(S^3, [p/q], \pi)$

Denotemos por M_π la orbiforma esférica de espacio subyacente S^3 , con singularidad un nudo o enlace de dos puentes $[p/q]$ y ángulo cónico π . Entonces M_π tiene un dominio de Dirichlet \mathcal{P}_π que es la “lente” comprendida entre dos esferas máximas en S^3 que se cortan formando ángulo π/p . La singularidad son dos arcos de círculos máximos situados en cada una de estas dos esferas formando ángulo $q\pi/p$, y $2p$ puntos sobre el ecuador de la lente, situados a igual distancia cada uno del siguiente (ver la figura 13).

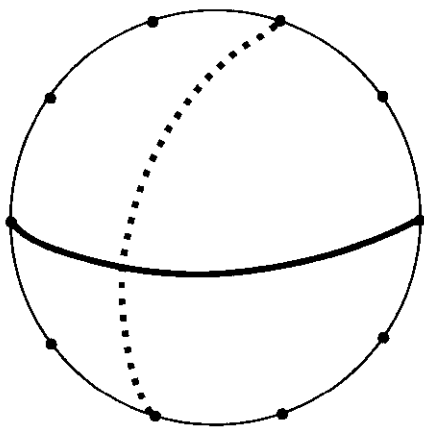


Figura 13. El dominio \mathcal{P}_π para el nudo $[5/3]$

Veremos en la sección 6 del capítulo III, que el conjunto $\bar{\Gamma}$ está formado en este caso por todas las palabras $g(a, b)$ en el alfabeto $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ formado por los generadores a, b y sus inversos a^{-1}, b^{-1} , tales que alguna permutación cíclica de la palabra $awb^{-1}w^{-1}$, también escrita en el alfabeto $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$, comienza por $g(a, b)$. Es decir, $g(a, b)$ ha de ser un segmento inicial de alguna permutación cíclica de la relación $awb^{-1}w^{-1}$ (resp. $awa^{-1}w^{-1}$ si $[p/q]$ es un enlace). En particular, usando que $awb^{-1}w^{-1} = 1$, siempre se puede suponer que la palabra $g(a, b)$ tiene como mucho longitud p . De hecho, cada uno de los $2p$ segmentos en que el ecuador de la lente \mathcal{P}_π queda dividido por los $2p$ puntos singulares, tiene asociada una permutación cíclica $\sigma(awb^{-1}w^{-1})$ de la relación, de modo que para todo punto no singular x contenido en ese segmento, $g(a, b) \in \bar{\Gamma}(x)$ si y sólo si $\sigma(awb^{-1}w^{-1})$ empieza por $g(a, b)$. (En particular, cada $\bar{\Gamma}(x)$ tiene $2p - 1$ elementos). Por ejemplo, para el nudo $[5/3]$ o nudo de a ocho, se tiene:

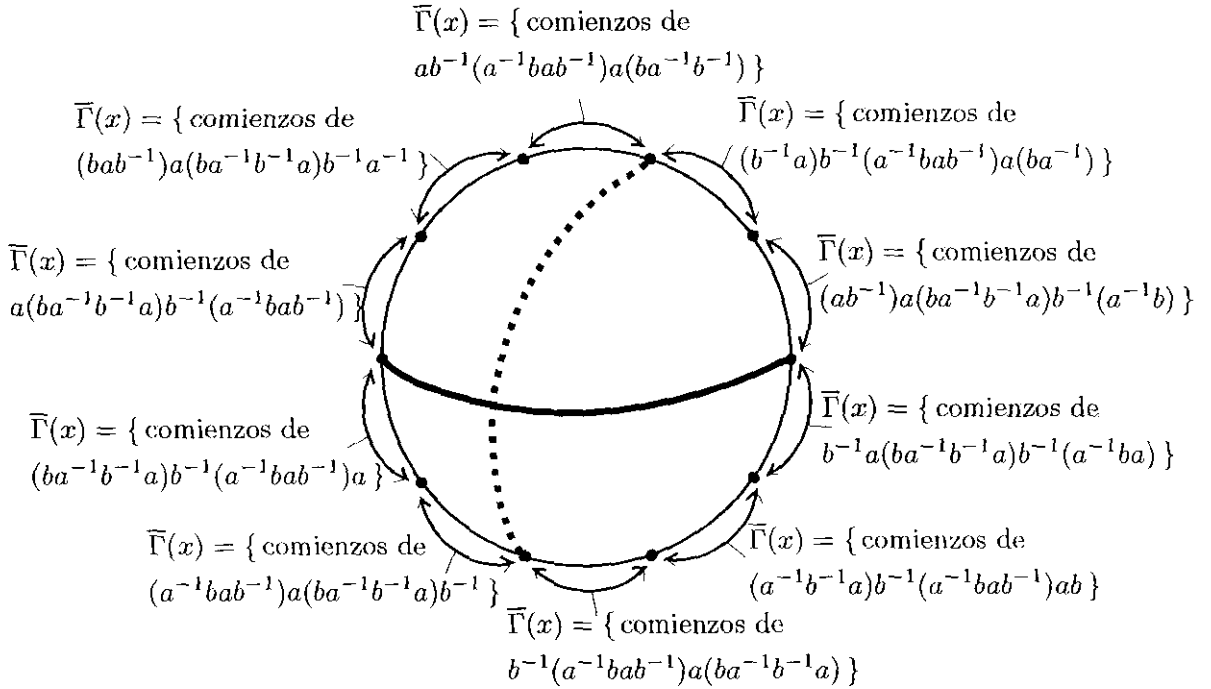


Figura 14

Además, las facetas singulares coinciden con las facetas generales (cf. observación IV.3.2). Por tanto, basta aplicar la fase 1 del algoritmo anterior, para construir poliedros de Dirichlet de estructuras esféricas cónicas en $(S^3, [p/q])$ con ángulo cónico próximo a π . Es conveniente elegir siempre como punto base el punto medio entre los ejes de las dos rotaciones $\rho(a)$, $\rho(b)$ que generan el grupo de holonomía.

De esta manera podemos desplazarnos a lo largo de un camino continuo de holonomías, construyendo las correspondientes estructuras cónicas, hasta que se produzca un cambio de tipo combinatorio o una degeneración. Si se produce un cambio de tipo combinatorio, entonces podemos proseguir más allá, pues basta repetir el proceso para deformar el último poliedro obtenido, y así sucesivamente. Sabemos que mientras exista una familia uniparamétrica continua de estructuras esféricas cónicas en $(S^3, [p/q])$, con ángulos cónicos que varían en un intervalo compacto, el tipo combinatorio de los poliedros de Dirichlet no puede cambiar infinitas veces (ver observación IV.4.4). Por tanto, de este modo podemos aproximarnos hasta la primera degeneración que se produzca a lo largo de este camino de holonomías. Si se trata de una degeneración euclídea, entonces podemos pasar a través de ella para continuar con una familia de estructuras hiperbólicas cónicas, mediante el procedimiento de cambio de escala (cf. [Po]).

Aunque desde el punto de vista teórico, la estructura de orbiforma esférica $(S^3, [p/q], \pi)$ es un punto de partida asegurado para comenzar las deformaciones, en la práctica es más cómodo empezar desde una

orbiforma (euclídea o hiperbólica) $(\mathbf{S}^3, [p/q], 2\pi/n)$, donde $n \geq 3$. El motivo es que, como hemos visto, la fase 1 del algoritmo es más fácil si se comienza con ángulos cónicos $< \pi$. Esto es lo que se hizo en realidad en los ejemplos del capítulo II; la experiencia conseguida con el artículo [HLM₁] y con otros ejemplos facilitó en esos casos la construcción de dominios de Dirichlet para orbiformas del tipo $(\mathbf{S}^3, [p/q], 2\pi/n)$.

Para poder construir los poliedros de Dirichlet sólo nos falta, pues, saber la expresión explícita para el plano bisector de un segmento en \mathbf{H}^3 , \mathbf{E}^3 o \mathbf{S}^3 . También serán muy útiles algunas observaciones sobre las identificaciones de las caras y aristas de los poliedros de Dirichlet, y sobre sus propiedades de simetría.

Ecuaciones de los planos bisectores

Para construir los poliedros de Dirichlet siempre vamos a elegir como punto base el origen de coordenadas, ya sea en el modelo de Klein de \mathbf{H}^3 , o en el espacio euclideo \mathbf{E}^3 , o en el modelo proyectivo de la semiesfera superior \mathbf{S}_+^3 . Por tanto, nos interesa calcular los planos bisectores de segmentos que unen el punto base $O = [0 : 0 : 0 : 1] \in \mathbf{R}P^3$ con otro punto $P = [a : b : c : d] \in \mathbf{R}P^3$.

(1) Caso hiperbólico:

Si estamos en el modelo de Klein de \mathbf{H}^3 , entonces P será imagen de O mediante un elemento $g \in SO(3, 1)$, y por tanto podemos suponer que $a^2 + b^2 + c^2 - d^2 = -1$. La ecuación del plano bisector del segmento OP es, entonces,

$$ax + by + cz = d - 1$$

(En efecto, consideremos el modelo del hiperboloide $\mathbf{H}^3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}_1^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = -1, t > 0\}$. Sean \mathbf{u}, \mathbf{v} los vectores posición de dos puntos en \mathbf{H}^3 , y sea Π el hiperplano vectorial de \mathbf{R}_1^4 que corta a \mathbf{H}^3 en el plano bisector del segmento que une los puntos \mathbf{u} y \mathbf{v} . Sea \mathbf{w} un vector ortogonal a Π (para el producto escalar de Minkowski de \mathbf{R}_1^4). Entonces:

- (i) \mathbf{w} es combinación lineal de \mathbf{u} y \mathbf{v} ;
- (ii) si denotamos por $d(\mathbf{u}, \Pi)$ la distancia del punto \mathbf{u} al plano Π en \mathbf{H}^3 , y denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar de Minkowski en \mathbf{R}_1^4 , entonces $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \pm |\mathbf{w}| \cdot \sinh d(\mathbf{u}, \Pi)$, donde el signo es positivo o negativo según que \mathbf{u} y \mathbf{w} estén o no al mismo lado de Π . Como \mathbf{u} y \mathbf{v} equidistan de Π y están a lados opuestos de él, resulta que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

Como $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = -1$, podemos suponer entonces que $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$. En particular, si $\mathbf{u} = (0, 0, 0, 1)$ y $\mathbf{v} = (a, b, c, d)$, entonces $\mathbf{w} = (a, b, c, d - 1)$, y Π tiene ecuación $ax + by + cz - (d - 1)t = 0$. Al

proyectar sobre el hiperplano $t = 1$ desde el origen de \mathbf{R}^4 , para pasar al modelo de Klein, se obtiene la ecuación $ax + by + cz = d - 1$ para el plano bisector).

(2) Caso esférico:

Análogamente, si estamos en \mathbf{S}^3 , entonces P será imagen de O mediante un elemento $g \in SO(4)$, y podemos suponer que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Por los mismos argumentos, el plano bisector del segmento que une O con P en \mathbf{S}^3 , es la intersección con \mathbf{S}^3 del hiperplano vectorial de \mathbf{R}^4 ortogonal al vector $(a, b, c, d-1)$, es decir, el hiperplano $ax + by + cz + (d-1)t = 0$. En consecuencia, si se proyecta desde el origen de \mathbf{R}^4 sobre el hiperplano $t = 1$, resulta que el plano bisector de $O = [0 : 0 : 0 : 1]$ y $P = [a : b : c : d]$ es

$$ax + by + cz = 1 - d$$

(Suponemos que $d \neq \pm 1$).

(3) Caso euclídeo:

Si estamos en \mathbf{E}^3 , entonces P es imagen de O por una afinidad de \mathbf{R}^3 , luego podemos suponer que $d = 1$. Entonces la ecuación del plano bisector es

$$ax + by + cz = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

(4) Transición automática de la geometría hiperbólica a la esférica por cambio de escala:

Supongamos que para cada $R \in \mathbf{R}$ tenemos una matriz $g_R \in SL(4, \mathbf{C})$ que depende de manera continua de R y verifica que:

- si $R \neq 0$, entonces g_R preserva la forma cuadrática de \mathbf{R}^4 de matriz $\begin{pmatrix} R & & & \\ & R & & \\ & & R & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$.
- cuando $R = 0$, g_R preserva el hiperplano $t = 1$ de \mathbf{R}^4 , y actúa en él como una isometría euclídea.

(Recordemos que ésta era la situación que teníamos en la sección 4 (iv)).

Denotemos por $P = (a, b, c, d)$ la imagen del punto $O = (0, 0, 0, 1)$ mediante g_R , donde a, b, c, d son funciones continuas de R . Se verifica que $Ra^2 + Rb^2 + Rc^2 - d^2 = -1$, y además $d = 1$ si $R = 0$. Vamos a suponer además que $d > 0$ si $R > 0$ y $d \neq -1$ para todo R .

- (i) Si $R > 0$, entonces g_R es una isometría hiperbólica en el siguiente modelo de \mathbf{H}^3 , que vimos en la sección 4:

$$H^3_{\frac{1}{\sqrt{R}}} = \{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid R(x^2 + y^2 + z^2) - t^2 = -1, t > 0 \}$$

Si hacemos el cambio de coordenadas $x' = \sqrt{R}x$, $y' = \sqrt{R}y$, $z' = \sqrt{R}z$, $t' = t$, entonces pasamos al modelo estándar del hiperboloide de \mathbf{H}^3 . En consecuencia, el plano bisector de los puntos $O = (0, 0, 0, 1)$ y $P = (a, b, c, d)$ en el modelo $H^3_{\frac{1}{\sqrt{R}}}$ tiene ecuación

$$ax + by + cz = \frac{d-1}{-R} t$$

Como $Ra^2 + Rb^2 + Rc^2 - d^2 = -1$, resulta que $\frac{d-1}{R} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{d+1}$, y en consecuencia podemos escribir la ecuación del plano bisector como

$$ax + by + cz = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{d+1} t$$

O bien, si proyectamos desde el origen de \mathbf{R}^4 sobre el hiperplano $t = 1$ para pasar a un modelo proyectivo,

$$ax + by + cz = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{d+1}$$

- (ii) Si $R = 0$, entonces la restricción de g_R al hiperplano $t = 1$ es una isometría euclídea, por hipótesis. Por tanto, $d = 1$, y la ecuación del plano bisector de los puntos $O = (0, 0, 0, 1)$ y $P = (a, b, c, d)$ es

$$ax + by + cz = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{d+1}$$

- (iii) Si $R < 0$, entonces g_R es una isometría esférica en el siguiente modelo de \mathbf{S}^3 , que vimos en la sección 4:

$$S^3_{\frac{1}{\sqrt{|R|}}} = \{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid -|R|(x^2 + y^2 + z^2) - t^2 = -1 \}$$

Si hacemos el cambio de coordenadas $x' = \sqrt{|R|x}$, $y' = \sqrt{|R|}y$, $z' = \sqrt{|R|}z$, $t' = t$, entonces pasamos a la esfera unidad estándar \mathbf{S}^3 . En consecuencia, el plano bisector de los puntos $O = (0, 0, 0, 1)$ y $P = (a, b, c, d)$ en el modelo $S^3_{\frac{1}{\sqrt{|R|}}}$ es

$$ax + by + cz = \frac{1-d}{|R|} t = \frac{d-1}{R} t$$

O bien, proyectando sobre el hiperplano $t = 1$ y teniendo en cuenta que $d \neq -1$ por hipótesis,

$$ax + by + cz = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{d+1}$$

En resumen, en los tres casos los planos bisectores quedan determinados por la misma fórmula:

$$ax + by + cz = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{d+1}$$

Algunas propiedades de los poliedros de Dirichlet

Supongamos que M es una 3-variedad cónica hiperbólica, euclídea o esférica con todos los ángulos cónicos $< \pi$. Entonces existe un subconjunto finito $\Gamma \subset \pi_1(M \setminus \Sigma)$ tal que el poliedro

$$\mathcal{P} = \{ x \in X \mid d(x, O) \leq d(x, \rho\gamma(O)) \text{ para todo } \gamma \in \Gamma \}$$

es un poliedro de Dirichlet para M . (Aquí X denota el espacio modelador \mathbf{H}^3 , \mathbf{E}^3 ó \mathbf{S}^3 , y ρ denota la holonomía de M).

Para cada $\gamma \in \pi_1(M \setminus \Sigma)$, denotaremos por H_γ el hiperplano

$$H_\gamma = \{ x \in X \mid d(x, O) = d(x, \rho\gamma(O)) \}$$

Podemos suponer que $H_\gamma \cap \mathcal{P}$ tiene interior no vacío en el borde de \mathcal{P} para todo $\gamma \in \Gamma$. Denotaremos entonces $\mathcal{F}_\gamma = H_\gamma \cap \mathcal{P}$ y diremos que \mathcal{F}_γ es una “cara” de \mathcal{P} .

Se verifican entonces las siguientes propiedades:

- (1) Si $\gamma \in \Gamma$, entonces también $\gamma^{-1} \in \Gamma$, y la cara \mathcal{F}_γ se identifica con la cara $\mathcal{F}_{\gamma^{-1}}$ mediante la isometría $\rho\gamma^{-1}$.
- (2) Si $\mathcal{E} = \mathcal{F}_{\gamma_1} \cap \mathcal{F}_{\gamma_2}$ es una arista de \mathcal{P} , entonces \mathcal{E} se identifica mediante la isometría $\rho\gamma_1^{-1}$ con la arista $\mathcal{F}_{\gamma_1^{-1}} \cap H_{\gamma_1^{-1}\gamma_2}$. (Obsérvese que $H_{\gamma_1^{-1}\gamma_2} \cap \mathcal{P}$ puede tener interior vacío en el borde de \mathcal{P} ; por eso no escribimos $\mathcal{F}_{\gamma_1^{-1}\gamma_2}$).
- (3) Si $v = \mathcal{F}_{\gamma_1} \cap \mathcal{F}_{\gamma_2} \cap \mathcal{F}_{\gamma_3}$ es un vértice de \mathcal{P} , entonces v se identifica mediante la isometría $\rho\gamma_1^{-1}$ con el vértice $\mathcal{F}_{\gamma_1^{-1}} \cap H_{\gamma_1^{-1}\gamma_2} \cap H_{\gamma_1^{-1}\gamma_3}$. (De nuevo, puede ocurrir que $H_{\gamma_1^{-1}\gamma_2} \cap \mathcal{P}$ o $H_{\gamma_1^{-1}\gamma_3} \cap \mathcal{P}$ tengan interior vacío en el borde de \mathcal{P}).

Estas propiedades son fáciles de comprobar cuando M es una orbiforma (es decir, cuando el grupo de holonomía $G = \rho(\pi_1(M \setminus \Sigma))$ es un grupo discreto de isometrías de X y M es el cociente X/G), y se demuestran en general para variedades cónicas en el capítulo III. Facilitan en gran medida la comprobación de los pegados de las caras del poliedro de Dirichlet.

Otra propiedad muy útil es la siguiente. Supongamos que $\psi : M \rightarrow M$ es una isometría de M que deja fijo el punto base elegido para el poliedro de Dirichlet. Entonces existe una isometría φ del espacio modelador X que deja fijo el punto base O y es una simetría del poliedro de Dirichlet \mathcal{P} centrado en O (cf. sección 7 del capítulo III). En particular, φ pertenece al normalizador del grupo de holonomía $\rho(\pi_1(M \setminus \Sigma))$ dentro de $\text{Iso}(X)$. Denotemos por ψ_* el isomorfismo de $\pi_1(M \setminus \Sigma)$ inducido por ψ . Si \mathcal{F}_γ es una cara de \mathcal{P} , entonces $\mathcal{F}_{\psi_*\gamma}$ también es una cara de \mathcal{P} , y $\mathcal{F}_{\psi_*\gamma} = \varphi(\mathcal{F}_\gamma)$.

Por otra parte, supongamos que M_0 es una orbiforma, con holonomía ρ_0 , y supongamos que φ pertenece al normalizador del grupo de holonomía $\rho_0(\pi_1(M \setminus \Sigma))$ en $\text{Iso}(X)$, y además fija el punto base O . Entonces es fácil comprobar que φ es una simetría del poliedro de Dirichlet \mathcal{P}_0 centrado en O . Supongamos ahora que M es una variedad cónica con el mismo espacio subyacente que M_0 y con holonomía ρ próxima a ρ_0 . Si φ también pertenece al normalizador de $\rho(\pi_1(M \setminus \Sigma))$ en $\text{Iso}(X)$, entonces φ es también una simetría del poliedro de Dirichlet \mathcal{P} de M centrado en O .

El caso particular que nos interesa es el de las estructuras cónicas en \mathbb{S}^3 con singularidad un nudo o enlace de dos puentes $[p/q]$. El grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [p/q])$ está generado por dos meridianos a , b , y por tanto el grupo de holonomía está siempre generado por dos rotaciones A y B en torno a dos ejes disjuntos. Tomemos como punto base O el punto medio entre los dos ejes. La rotación Z de ángulo π en torno a la perpendicular común a los ejes de A y B , siempre es una simetría del poliedro de Dirichlet \mathcal{P} centrado en O . Si además A y B son rotaciones del mismo ángulo (como ocurre siempre en el caso de un nudo), entonces las rotaciones X , Y de ángulo π en torno a las dos "bisectrices" de los ejes de A y B que pasan por O , son también simetrías del poliedro \mathcal{P} . El isomorfismo ψ_Z de $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [p/q])$ inducido por Z envía $a \rightarrow a^{-1}$ y $b \rightarrow b^{-1}$. El isomorfismo ψ_X de $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [p/q])$ inducido por X envía $a \rightarrow b$ y $b \rightarrow a$, y el isomorfismo ψ_Y inducido por Y envía $a \rightarrow b^{-1}$ y $b \rightarrow a^{-1}$.

Capítulo II

ALGUNOS EJEMPLOS

INTRODUCCIÓN

En este capítulo vamos a mostrar ejemplos concretos de estructuras cónicas hiperbólicas, euclídeas y esféricas en S^3 con singularidad algunos nudos o enlaces de dos puentes, que se han podido construir explícitamente con la ayuda del programa Mathematica.

Concretamente, se van a exponer los siguientes ejemplos:

- (1) Una familia de estructuras hiperbólicas cónicas en S^3 , con singularidad el nudo de a ocho (o nudo racional $[5/3]$) y ángulo cónico α que varía entre 0 y $\frac{2\pi}{3}$. Cuando el ángulo cónico es 0, se tiene la estructura hiperbólica completa de volumen finito en el complemento del nudo de a ocho. Cuando α se hace igual a $\frac{2\pi}{3}$, la familia de estructuras hiperbólicas cónicas degenera en una estructura euclídea cónica, y a continuación se transforma en una familia de estructuras esféricas cónicas, hasta que el ángulo cónico se hace igual a π .
- (2) Una familia de estructuras hiperbólicas cónicas en la variedad obtenida por cirugía de Dehn de tipo 0 en el nudo de a ocho, con singularidad el ánima de la cirugía y ángulo cónico que varía entre 0 y 2π . Cuando el ángulo cónico se hace igual a 2π , se produce una degeneración en una geometría de tipo Sol. En la sección 3 se describe un nuevo modelo de Sol (encontrado también independientemente por E. Molnár [Mol] y por B. Thiel [Thi]), que permite pasar con continuidad de esta familia de estructuras hiperbólicas cónicas a la estructura Sol límite mediante un adecuado cambio de escala.
- (3) Una familia de estructuras hiperbólicas cónicas en S^3 , con singularidad el enlace de Whitehead (o enlace racional $[8/3]$) y el mismo ángulo cónico α en las dos componentes, que varía entre 0 y un cierto valor α_0 . Como en el primer ejemplo, cuando $\alpha = \alpha_0$ la familia degenera en una estructura euclídea cónica y se convierte a continuación en una familia de estructuras esféricas cónicas, hasta que el ángulo cónico se hace igual a π .
- (4) Una familia de estructuras esféricas cónicas en S^3 , con singularidad el enlace de Whitehead y ángulo cónico constantemente igual a π en una de las componentes del enlace. El ángulo cónico α en la otra componente varía entre π y $\pi/2$, y cuando α se hace igual a $\pi/2$ se produce una degeneración

en una orbiforma Nil. En la sección 6 se describe un nuevo modelo de Nil (también descubierto independientemente por E. Molnár [Mol] y por Thiel [Thi]), que permite pasar con continuidad de esta familia de estructuras esféricas cónicas a la estructura Nil límite mediante un adecuado cambio de escala.

Estos ejemplos se han construido siguiendo el procedimiento descrito en el capítulo I, es decir, determinando poliedros de Dirichlet para las distintas estructuras cónicas. La construcción se realiza en tres pasos:

- (1) Partiendo de la curva de trazas del nudo o enlace racional considerado, se calculan las representaciones de holonomía para la familia de estructuras cónicas buscadas. El grupo de holonomía está siempre generado por dos matrices de $GL(4, \mathbf{R})$ cuyas entradas son funciones de un parámetro real u , que se pueden escribir explícitamente.
- (2) Para un valor concreto del parámetro u (elegido arbitrariamente), se construye “a mano” un poliedro de Dirichlet \mathcal{P} para la representación de holonomía correspondiente. Para ello son muy útiles las observaciones expuestas en la sección 6 del capítulo I. Este paso, que sólo involucra cálculos aproximados, se puede realizar para cualquier nudo o enlace racional $[p/q]$, para obtener un poliedro de Dirichlet (aproximado) de cualquier estructura cónica $(S^3, [p/q], \alpha)$ con $\alpha < \pi$. Las verdaderas dificultades computacionales aparecen en el siguiente paso.
- (3) Se determinan expresiones simbólicas, en términos del parámetro u , para los vértices del poliedro de Dirichlet \mathcal{P} obtenido en el paso anterior. A menos que ocurra algún cambio de tipo combinatorio, esto define ya una familia uniparamétrica de poliedros de Dirichlet para las estructuras cónicas buscadas. Si se produce algún cambio de tipo combinatorio, hay que volver al paso 2 con otro valor concreto del parámetro, y repetir el proceso. Este tercer paso involucra la multiplicación de matrices 4×4 cuyas entradas son funciones del parámetro u , y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales que dependen de ese parámetro. Por ello sólo se puede realizar en casos especialmente simples.

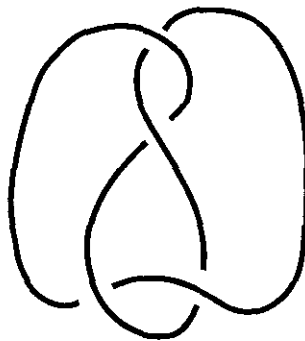
De hecho, la utilización del programa Mathematica es imprescindible debido a la magnitud y complejidad de los cálculos que hay que realizar. Por este mismo motivo, en este capítulo sólo damos las expresiones explícitas de los resultados para los dos primeros ejemplos, que aún son relativamente sencillos. (Esos dos ejemplos están ya hechos con detalle en el artículo [HLM₁] por un procedimiento distinto). Para los dos últimos ejemplos únicamente explicamos cómo se han realizado los cálculos correspondientes al primer paso de la construcción, y mostramos los dibujos de los poliedros obtenidos finalmente, describiéndolos de manera general.

La finalidad de los ejemplos expuestos aquí es, pues, puramente ilustrativa, y no se pretende demostrar nada con ellos. No obstante, me parece oportuno dedicarles un capítulo entero, de carácter computacional, por los siguientes motivos:

- En primer lugar, estos ejemplos sugirieron cuáles debían ser los enunciados y las demostraciones sobre existencia y deformación de poliedros de Dirichlet que constituyen los capítulos III y IV de esta tesis. Por tanto, los ejemplos sirven para iluminar lo que se hace en esos capítulos posteriores, y al lector puede resultarle útil visualizar en casos concretos los fenómenos que aparecen, para comprender qué dificultades existen en una demostración general.
- En segundo lugar, los ejemplos 2 y 4 dieron la clave para encontrar los nuevos modelos de las geometrías Sol y Nil que se describen también en este capítulo. Estos modelos tienen la ventaja de que aparecen de manera natural como límite de modelos del espacio hiperbólico o esférico, respectivamente, como ilustran precisamente los ejemplos 2 y 4. Por ello, se espera que sean de utilidad para estudiar la regeneración de estructuras Sol y Nil, en la línea de los trabajos de Hodgson ([Ho]) y Porti ([Po]).

1. EJEMPLO 1: ESTRUCTURAS CÓNICAS EN EL NUDO DE A OCHO

Consideremos el nudo racional $[5/3]$ o nudo de a ocho:



El grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [5/3])$ admite la presentación $\langle a, b : aw = wb \rangle$, donde $w = ba^{-1}b^{-1}a$. La ecuación de la curva de trazas, en las coordenadas $x = \text{tr}(\rho(a)^2) - 2$, $z = \text{tr}(\rho(ab)) - 2$, es:

$$z^2 - (1 + x)z + 1 = 0$$

Es decir, si $\rho : \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [5/3]) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ es una representación no abeliana, entonces los valores $x = \text{tr}(\rho(a)^2) - 2$ y $z = \text{tr}(\rho(ab)) - 2$ satisfacen la relación $z^2 - (1 + x)z + 1 = 0$. Si ρ es la holonomía

de una estructura hiperbólica cónica, entonces $z \in \mathbb{C}$ y $\operatorname{Re}(z) = \frac{1+x}{2}$, $|z| = 1$. En la sección 2 vimos que $A = \rho(a)$ y $B = \rho(b)$ son dos rotaciones de ángulo $\alpha = \arccos \frac{x+2}{2}$ en torno a dos ejes que forman ángulo 2θ y están separados a distancia $2d$, donde $\cosh(2d)$ y $\cos(2\theta)$ son las soluciones de la siguiente ecuación cuadrática en t :

$$xt^2 + 2|z|t + 2\operatorname{Re}(z) - x = 0$$

En nuestro caso, esta ecuación cuadrática es $xt^2 + 2t + 1 = 0$, y sus soluciones son $\frac{-1 \pm \sqrt{1-x}}{x}$.

Por tanto,

$$\cosh(2d) = \frac{-1 - \sqrt{1-x}}{x} \quad \text{y} \quad \cos(2\theta) = \frac{-1 + \sqrt{1-x}}{x}$$

Siguiendo el ejemplo del artículo [HLM₁], vamos a elegir como parámetro $u = \cot \theta$ en vez de x .

Tenemos que

$$u^2 = \frac{1 + \cos(2\theta)}{1 - \cos(2\theta)} = \frac{x - 1 + \sqrt{1-x}}{x - 1 - \sqrt{1-x}} = \frac{x - 1 + 2\sqrt{1-x}}{x + 3}$$

Se verifica que u^2 es una función monótona creciente de x , y cuando $-4 < x \leq 0$, $\frac{1}{3} < u^2 \leq 5 - 2\sqrt{5}$.

Expresando x en términos de u , obtenemos que

$$x = \frac{(1 - 3u^2)(u^2 + 1)}{(u^2 - 1)^2}$$

De aquí se deduce que

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{3 - 6u^2 - u^4}{2(u^2 - 1)^2}, & \sin \alpha &= \frac{\sqrt{3u^2 - 1}\sqrt{u^2 + 1}\sqrt{u^4 - 10u^2 + 5}}{2(u^2 - 1)^2} \\ 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{(3u^2 - 1)(u^2 + 1)}{2(u^2 - 1)^2}, & \tan \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sqrt{3u^2 - 1}\sqrt{u^2 + 1}}{\sqrt{u^4 - 10u^2 + 5}} \\ \sin \theta &= \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}}, & \cos \theta &= \frac{u}{\sqrt{u^2 + 1}} \\ \sinh d &= \frac{\sqrt{1 - 2u^2}}{\sqrt{3u^2 - 1}}, & \cosh d &= \frac{u}{\sqrt{3u^2 - 1}} \end{aligned}$$

(Cuando $u = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$, $\theta = 3\pi/10$ y $d = \pi/10$, como debe ser; cf. sección 5 del capítulo I).

Tenemos ya todos los datos necesarios para escribir las matrices de las rotaciones A y B en el modelo de Klein (de radio 1) de \mathbb{H}^3 . Recordemos la expresión que encontramos en la sección 3 del

capítulo I para estas matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen}^2 \theta & 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta & -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \cosh d & -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \operatorname{senh} d \\ 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta & 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \theta & \operatorname{sen} \alpha \cos \theta \cosh d & \operatorname{sen} \alpha \cos \theta \operatorname{senh} d \\ \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \cosh d & -\operatorname{sen} \alpha \cos \theta \cosh d & 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \cosh^2 d & -2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{senh} d \cosh d \\ -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \operatorname{senh} d & \operatorname{sen} \alpha \cos \theta \operatorname{senh} d & 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{senh} d \cosh d & 1 + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{senh}^2 d \end{pmatrix}$$

y B es la conjugada de A mediante la matriz $X = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$. Haciendo los correspondientes

cálculos se llega a que

$$A = \frac{1}{2(u^2-1)^2} \cdot \begin{pmatrix} 3-7u^2+2u^4 & u(3u^2-1) & -u\sqrt{u^4-10u^2+5} & -\sqrt{1-2u^2}\sqrt{u^4-10u^2+5} \\ u(3u^2-1) & 2-3u^2-u^4 & u^2\sqrt{u^4-10u^2+5} & u\sqrt{1-2u^2}\sqrt{u^4-10u^2+5} \\ u\sqrt{u^4-10u^2+5} & -u^2\sqrt{u^4-10u^2+5} & 2-5u^2+u^4 & -u\sqrt{1-2u^2}(1+u^2) \\ -\sqrt{1-2u^2}\sqrt{u^4-10u^2+5} & u\sqrt{1-2u^2}\sqrt{u^4-10u^2+5} & u\sqrt{1-2u^2}(1+u^2) & 3-5u^2 \end{pmatrix}$$

Se observa que $\operatorname{senh} d \in \mathbf{R}$ si $\frac{1}{\sqrt{3}} < u < \frac{1}{\sqrt{2}}$; cuando $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{senh} d = 0$, y cuando $\frac{1}{\sqrt{2}} < u < \sqrt{5-2\sqrt{5}}$, $\operatorname{senh} d$ se hace imaginario puro. Todas las demás variables son siempre reales cuando $\frac{1}{\sqrt{3}} < u < \sqrt{5-2\sqrt{5}}$. Por tanto, estamos en la situación descrita en la sección 4 del capítulo I: cuando $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$ se va a producir una degeneración euclídea, y entre $\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ habrá estructuras esféricas cónicas. Para ver automáticamente esta transición, hacemos un cambio de escala de factor $\cos \theta / (\tan(\alpha/2) \operatorname{senh} d)$ (cf. sección I.4). Así pues, cuando $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq u < \frac{1}{\sqrt{2}}$, estaremos en cada instante en un modelo de Klein de \mathbf{H}^3 de radio

$$R = \frac{u\sqrt{u^4-10u^2+5}}{(1+u^2)\sqrt{1-2u^2}}$$

(Cuando $u = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$, $R = 0$, luego no podremos ver así la estructura esférica cónica de ángulo π).

Podemos construir ahora el poliedro de Dirichlet \mathcal{P}_u centrado en $O = (0, 0, 0)$, correspondiente a esta representación de holonomía para cada $u \in (\sqrt{5-2\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, siguiendo el procedimiento descrito

en la sección 6 del capítulo I. Sabemos que las tres rotaciones de 180° en torno a los ejes coordenados,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Z = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

son simetrías del poliedro \mathcal{P}_u . Supongamos que \mathcal{F}_γ es una cara de \mathcal{P}_u correspondiente al elemento $\gamma \in \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [5/3])$, es decir, \mathcal{F}_γ está contenida en el plano bisector del segmento que une O con $\rho\gamma(O)$. Entonces $X(\mathcal{F}_\gamma)$ es también una cara de \mathcal{P}_u , correspondiente al elemento $\psi_X(\gamma)$, donde ψ_X es el isomorfismo de $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [5/3])$ que envía $a \rightarrow b$ y $b \rightarrow a$. Análogamente, $Y(\mathcal{F}_\gamma)$ es una cara de \mathcal{P}_u que corresponde al elemento $\psi_Y(\gamma)$, donde ψ_Y envía $a \rightarrow b^{-1}$ y $b \rightarrow a^{-1}$; y $Z(\mathcal{F}_\gamma)$ es una cara de \mathcal{P}_u que corresponde al elemento $\psi_Z(\gamma)$, donde ψ_Z envía $a \rightarrow a^{-1}$ y $b \rightarrow b^{-1}$. Por comodidad, utilizaremos la siguiente notación. Dada una palabra g en los generadores a y b , escribiremos $g^X = \psi_X(g)$, $g^Y = \psi_Y(g)$ y $g^Z = \psi_Z(g)$. Por ejemplo, el inverso de $w = ba^{-1}b^{-1}a$ es $w^{-1} = a^{-1}bab^{-1} = w^Y$.

Al hacer la construcción con ayuda del programa Mathematica, resulta que todos los poliedros \mathcal{P}_u tienen el mismo tipo combinatorio cuando $\frac{1}{\sqrt{3}} < u < \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$. (Esto es, como veremos, un fenómeno muy excepcional, debido a la simplicidad del nudo de a ocho). Todos los poliedros tienen doce caras, correspondientes a los siguientes elementos del grupo $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [5/3])$: a , ba^{-1} , $w = ba^{-1}b^{-1}a$, y los otros nueve que se obtienen a partir de éstos mediante ψ_X , ψ_Y y ψ_Z .

Las ecuaciones de los correspondientes planos son:

$$\begin{aligned} H_a & : \quad \sqrt{u^4 - 10u^2 + 5}(-u - x + uy) - u(1 + u^2)z = 0 \\ H_{ba^{-1}} & : \quad \sqrt{u^4 - 10u^2 + 5}\left(-\frac{u^2(3 - u^2)}{1 + u^2} - ux - y\right) + (3u^2 - 1)z = 0 \\ H_w & : \quad u^2\sqrt{u^4 - 10u^2 + 5}(-1 - ux - y) + (2u^4 + u^2 - 1)z = 0 \end{aligned}$$

(Los demás son imagen de éstos mediante las rotaciones X , Y , Z).

Todos los poliedros \mathcal{P}_u tienen doce vértices, cuyas coordenadas son:

$$\begin{aligned} v_1 & = \left(\frac{1 - 3u^2}{u(1 + u^2)}, \frac{1 - 3u^2}{u^2(1 + u^2)}, \frac{-\sqrt{u^4 - 10u^2 + 5}}{-1 + u^2} \right) \\ v_2 & = \left(\frac{u(1 - 3u^2)}{1 + u^2}, \frac{u^2(u^2 - 3)}{1 + u^2}, \frac{-u^2\sqrt{u^4 - 10u^2 + 5}}{1 + u^2} \right) \\ v_3 & = \left(-u, -u^2, \frac{-u^2\sqrt{u^4 - 10u^2 + 5}}{(1 + u^2)} \right) \end{aligned}$$

(y los demás son imagen de éstos mediante las rotaciones X , Y , Z).

El vértice v_1 es intersección de las caras \mathcal{F}_a , $\mathcal{F}_{a^{-1}}$ y \mathcal{F}_w ; el vértice v_2 es intersección de $\mathcal{F}_{a^{-1}}$, $\mathcal{F}_{ba^{-1}}$, $\mathcal{F}_{a^{-1}b}$ y \mathcal{F}_w ; y el vértice v_3 es intersección de \mathcal{F}_a , \mathcal{F}_b , $\mathcal{F}_{ba^{-1}}$ y \mathcal{F}_w . Las caras \mathcal{F}_a , $\mathcal{F}_{a^{-1}} = Z(\mathcal{F}_a)$, $\mathcal{F}_b = X(\mathcal{F}_a)$ y $\mathcal{F}_{b^{-1}} = Y(\mathcal{F}_a)$ son pentagonales, y todas las demás son triángulos. La singularidad está formada por las aristas $\mathcal{F}_a \cap \mathcal{F}_{a^{-1}}$ (que une los vértices v_1 y Zv_1) y $\mathcal{F}_b \cap \mathcal{F}_{b^{-1}}$ (que une los vértices Xv_1 e Yv_1). Por tanto, la longitud del nudo singular es la suma de las longitudes de estas dos aristas.

A continuación mostramos un dibujo del poliedro. Cada cara está marcada con el elemento del grupo $\pi_1(S^3 \setminus \Sigma)$ que le corresponde, y las flechas en las aristas indican cómo son las identificaciones. La singularidad está marcada en grueso.

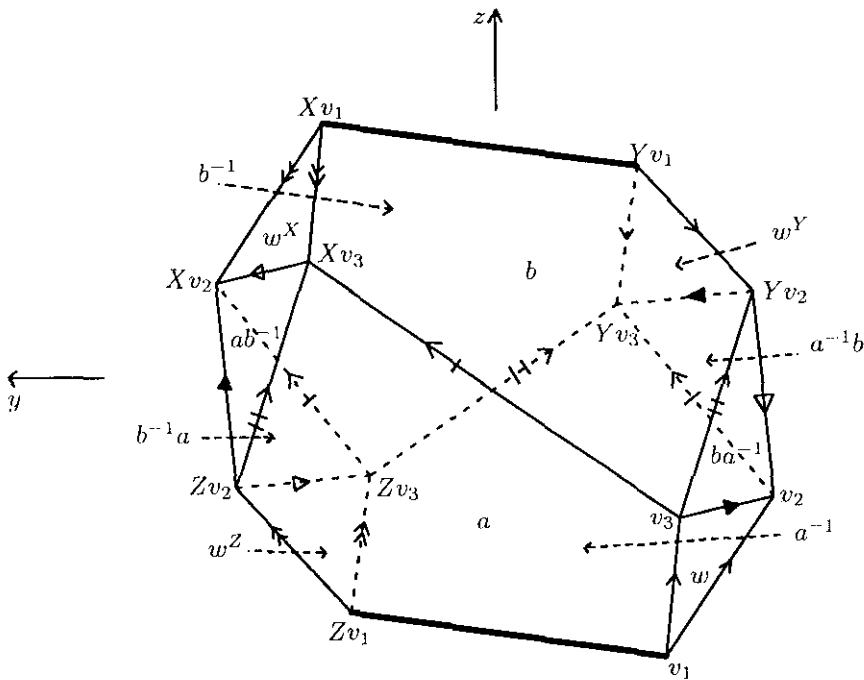


Figura 1

Para averiguar cuáles son las identificaciones de las aristas y los vértices del poliedro, aplicamos las observaciones de la sección anterior; por ejemplo, el vértice $v_3 = \mathcal{F}_{ba^{-1}} \cap \mathcal{F}_b \cap \mathcal{F}_w$ se identifica mediante la isometría AB^{-1} con $\mathcal{F}_{ab^{-1}} \cap \mathcal{F}_{ab^{-1}b} \cap \mathcal{F}_{ab^{-1}w} = \mathcal{F}_{ab^{-1}} \cap \mathcal{F}_a \cap \mathcal{F}_{a^{-1}b} = Zv_2$. Para poder realizar todas estas comprobaciones es necesario observar además que el plano H_{aw} es “tangente” al poliedro \mathcal{P}_u a lo largo de la arista $\mathcal{F}_a \cap \mathcal{F}_w$ (que une los vértices v_1 y v_3). (La razón de esto es, en último término, que el nudo $[5/3]$ es anfiqueiral, y $ww^X = (ba^{-1}b^{-1}a)(ab^{-1}a^{-1}b)$ es su longitud

canónica). Así por ejemplo, el vértice $v_2 = \mathcal{F}_{a^{-1}} \cap \mathcal{F}_{a^{-1}b} \cap \mathcal{F}_{aw}$ se identifica mediante la isometría A con $\mathcal{F}_a \cap \mathcal{F}_b \cap H_{aw} = v_3$.

Si queremos cerciorarnos de que la suma de los ángulos en torno a cualquier arista no singular es 2π , basta observar que hay un ciclo de a lo sumo cuatro aristas que se identifican con ella, y que la composición de las correspondientes isometrías de pegado es la identidad. Así por ejemplo, para la arista que une los vértices v_1 y v_3 , se tiene:

$$\mathcal{F}_a \cap \mathcal{F}_w \xrightarrow{A^{-1}} \mathcal{F}_{a^{-1}} \cap \mathcal{F}_w \xrightarrow{W^{-1}} \mathcal{F}_{b^{-1}} \cap \mathcal{F}_{wY} \xrightarrow{B} \mathcal{F}_b \cap \mathcal{F}_{wY} \xrightarrow{W} \mathcal{F}_a \cap \mathcal{F}_w$$

y $WBW^{-1}A^{-1} = 1$ debido a la relación $aw = wb$.

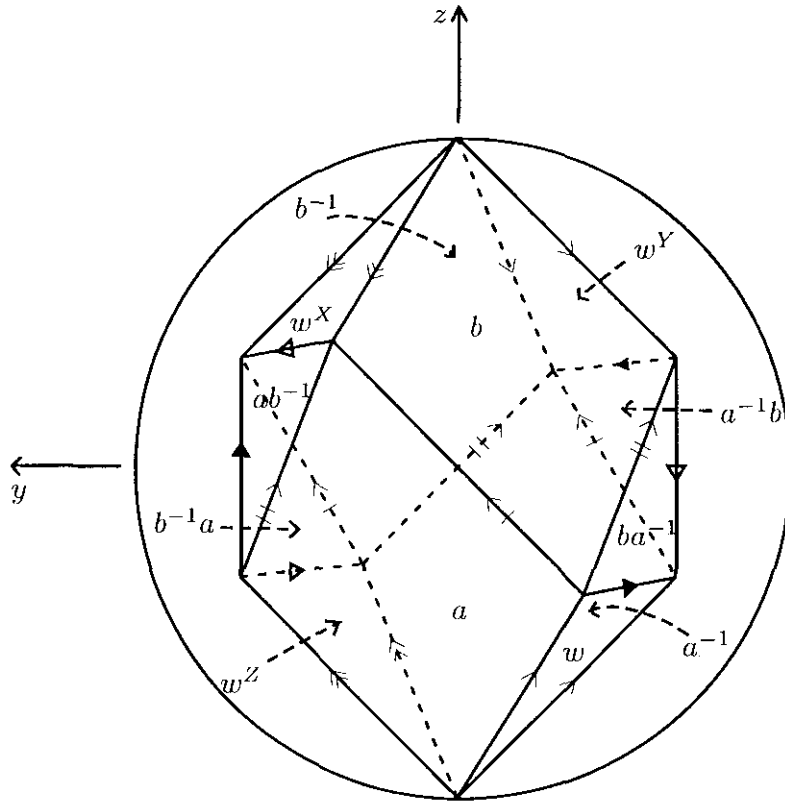
Para comprobar que al realizar las identificaciones de las caras de \mathcal{P}_u , la singularidad se convierte en una geodésica lisa, basta observar que el eje de la rotación A se transforma en el eje de la rotación B mediante la isometría W^{-1} , porque $W^{-1}AW = B$.

Finalmente, para comprobar que al realizar los pegados de las caras se obtiene efectivamente S^3 y la singularidad es el nudo $[5/3]$, se puede utilizar el siguiente argumento (cf. [Ri]). Por el teorema de Poincaré, cuando $u = 1/\sqrt{3}$ el poliedro \mathcal{P}_u es un dominio fundamental para la acción discreta de un grupo de isometrías hiperbólicas isomorfo a $\pi_1(S^3 \setminus [5/3])$. Aplicando ahora el teorema de Waldhausen sobre clasificación de variedades Haken, resulta que al pegar las caras de $\mathcal{P}_{1/\sqrt{3}}$ se obtiene de hecho $S^3 \setminus [5/3]$. Supongamos ahora que $(1/\sqrt{3}) < u < \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$, y sea M_u la variedad cónica que aparece al hacer las identificaciones en \mathcal{P}_u . Fuera de las aristas singulares, \mathcal{P}_u tiene el mismo tipo combinatorio que $\mathcal{P}_{1/\sqrt{3}}$, y los pegados de sus caras se realizan de igual manera. Por tanto, M_u menos un entorno de la singularidad es homeomorfa a $S^3 \setminus N([5/3])$ (el complemento en S^3 de un entorno tubular del nudo $[5/3]$). En consecuencia, M_u se obtiene pegando un toro sólido a $S^3 \setminus N([5/3])$, de manera que el meridiano del toro sólido se identifica con un meridiano del nudo $[5/3]$. La singularidad es el ánimo del toro sólido añadido. Por tanto, M_u es homeomorfa a S^3 y la singularidad es el nudo $[5/3]$.

A continuación se muestran algunos de los poliedros de Dirichlet \mathcal{P}_u , cuando u varía entre $\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$. Cuando $\frac{1}{\sqrt{3}} < u < \frac{1}{\sqrt{2}}$, los poliedros están en el interior de una bola de radio $R = \frac{u\sqrt{u^4 - 10u^2 + 5}}{(1 + u^2)\sqrt{1 - 2u^2}}$, que es un modelo de H^3 . Cuando $u = \frac{1}{\sqrt{3}}$, los vértices v_1 y Zv_1 coinciden y están en el borde de la bola, y lo mismo ocurre con los vértices Xv_1 e Yv_1 . Por tanto, la singularidad queda reducida a dos puntos ideales (que se identifican mediante W), y lo que obtenemos es la estructura hiperbólica completa de volumen finito en el complemento del nudo $[5/3]$. Cuando $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$, tenemos

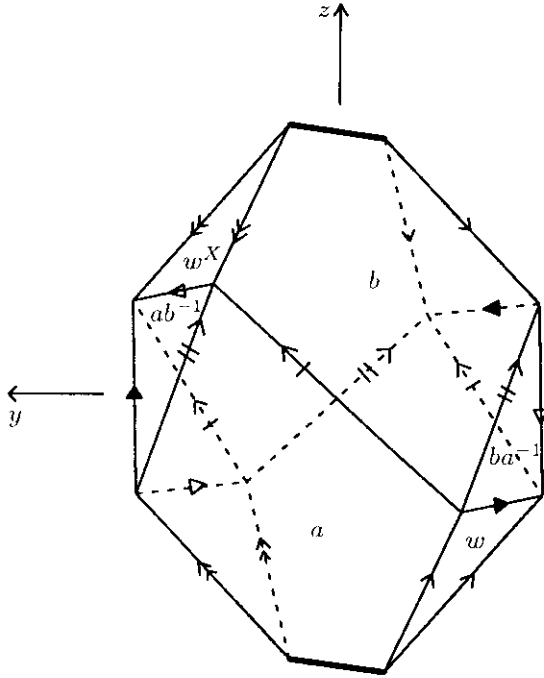
la estructura de orbiforma euclídea en S^3 con singularidad el nudo de a ocho y ángulo cónico $2\pi/3$. Cuando $\frac{1}{\sqrt{2}} < u < \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$, tenemos estructuras esféricas cónicas con ángulo entre $2\pi/3$ y π . En los dibujos, todos los poliedros están vistos desde el punto $(-3, 0, 0)$ de \mathbb{R}^3 .

Estructura hiperbólica completa de volumen finito ($u = \frac{1}{\sqrt{3}}$)

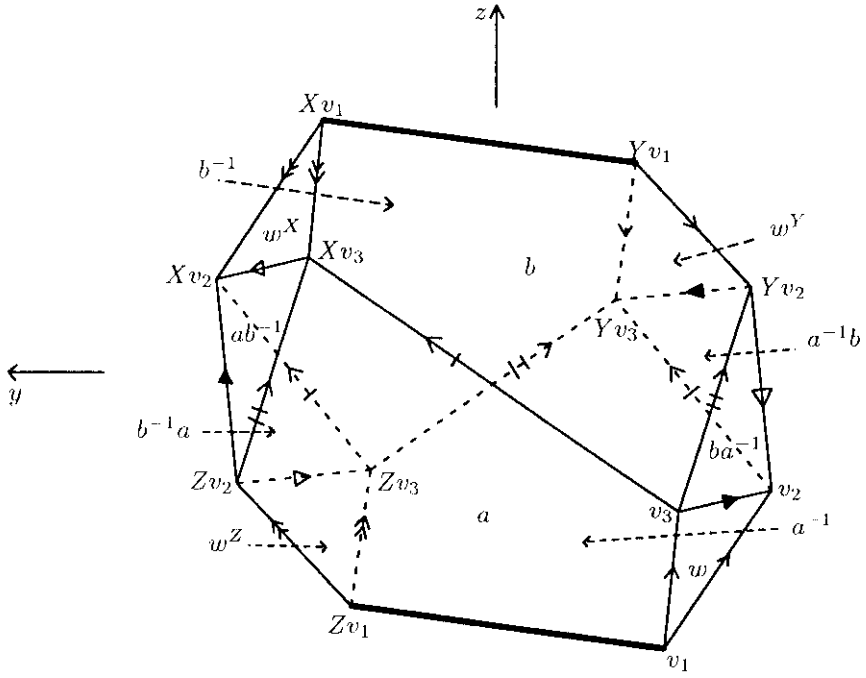


Estructuras hiperbólicas cónicas ($\frac{1}{\sqrt{3}} < u < \frac{1}{\sqrt{2}}$)

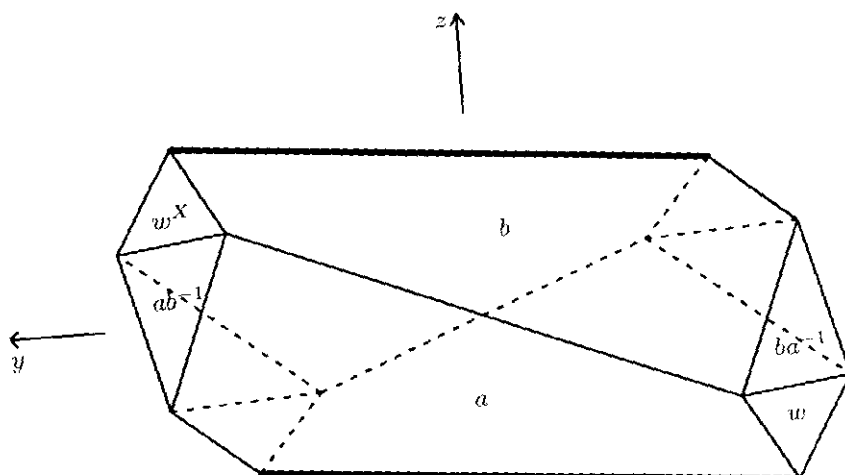
- $u = 0.6$:



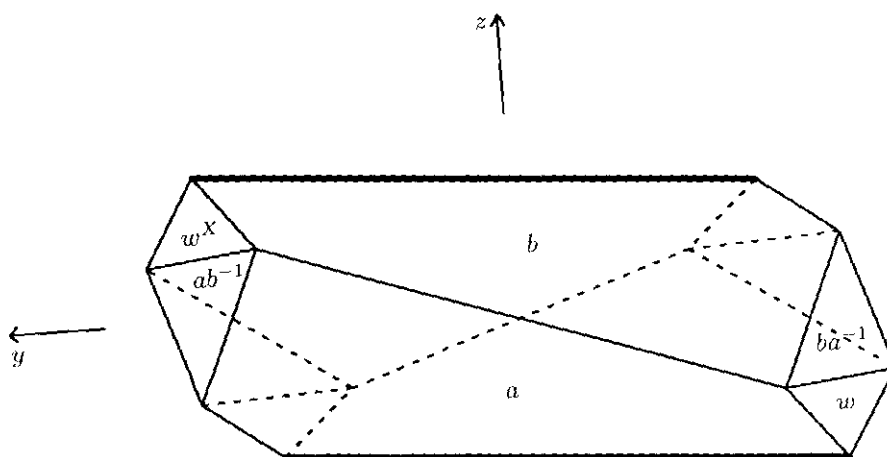
- $u = 0.65$:



• $u = 0.7$:

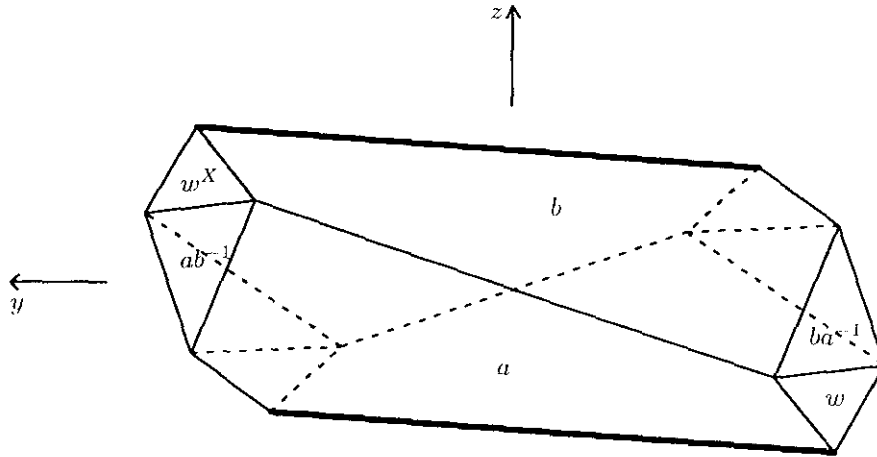


Estructura euclídea cónica ($u = \frac{1}{\sqrt{2}}$)

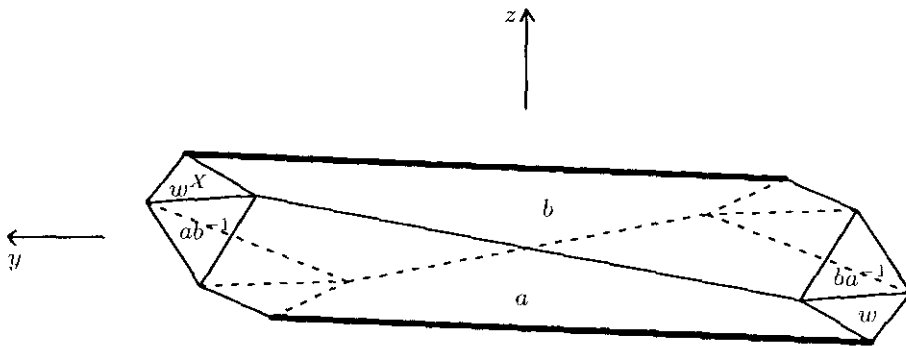


Estructuras esféricas cónicas ($\frac{1}{\sqrt{2}} < u < \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$)

- $u = 0.71$:



- $u = 0.72$:



Como ya se explicó antes, el cambio de escala que hemos hecho (de factor $\frac{u\sqrt{u^4 - 10u^2 + 5}}{(1 + u^2)\sqrt{1 - 2u^2}}$), nos impide ver la estructura de orbiforma esférica de ángulo π , cuando $u = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$. Para ver qué ocurre cuando $\alpha \rightarrow \pi$, deshacemos el cambio de escala. Entonces las nuevas coordenadas de los vértices son:

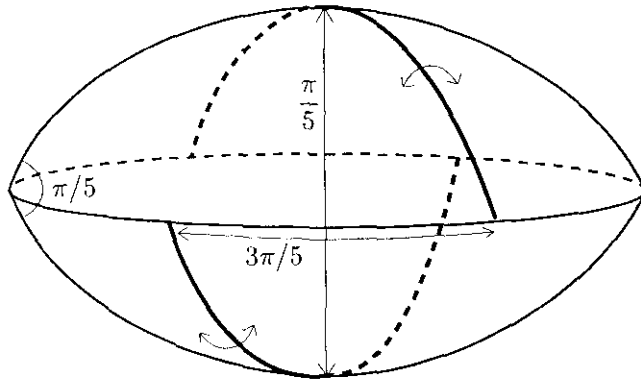
$$v_1 = \left(\frac{(1-3u^2)\sqrt{2u^2-1}}{u^2\sqrt{u^4-10u^2+5}}, \frac{(1-3u^2)\sqrt{2u^2-1}}{u^3\sqrt{u^4-10u^2+5}}, \frac{-\sqrt{2u^2-1}}{u} \right)$$

$$v_2 = \left(\frac{(1-3u^2)\sqrt{2u^2-1}}{\sqrt{u^4-10u^2+5}}, \frac{u(u^2-3)\sqrt{2u^2-1}}{\sqrt{u^4-10u^2+5}}, -u\sqrt{2u^2-1} \right)$$

$$v_3 = \left(\frac{-(1+u^2)\sqrt{2u^2-1}}{\sqrt{u^4-10u^2+5}}, \frac{-u(1+u^2)\sqrt{2u^2-1}}{\sqrt{u^4-10u^2+5}}, -u\sqrt{2u^2-1} \right)$$

(y los demás son imagen de éstos mediante las rotaciones X , Y , Z).

Cuando $u \rightarrow \sqrt{5-2\sqrt{5}}$, $\sqrt{u^4-10u^2+5} \rightarrow 0$, luego las dos primeras coordenadas de todos los vértices tienden a $\pm\infty$. El poliedro \mathcal{P}_u tiende a la “capa” infinita comprendida entre los dos planos horizontales $z = \pm\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}} = \pm\tan\frac{\pi}{10}$. La singularidad tiende a dos rectas contenidas en cada uno de estos planos, que forman ángulo $3\pi/5$. Para interpretar lo que ocurre, debemos recordar que que estamos en el modelo proyectivo de S^3 , obtenido por proyección desde el origen de \mathbb{R}^4 sobre el hiperplano $t=1$. Por tanto, los dos planos $z = \pm\tan\frac{\pi}{10}$ son dos esferas máximas en S^3 que se cortan (formando ángulo $\pi/5$) en un círculo máximo contenido en el ecuador de S^3 . Lo que aparece es, pues, la “lente”



que corresponde a la estructura de orbiforma esférica de ángulo π descrita en la sección I.5.

2. EJEMPLO 2: CIRUGÍA CERO EN EL NUDO DE A OCHO

Consideremos la misma familia uniparamétrica de representaciones ρ_u de $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [5/3])$ en $SO(3, 1)$ que vimos en el ejemplo 1. Recordemos que si $|a, b : aw = wb|$ es la presentación estándar de $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [5/3])$ (donde $w = ba^{-1}b^{-1}a$), entonces las matrices $A = \rho_u(a)$ y $B = \rho_u(b)$ vienen dadas por:

$$A = \frac{1}{2(u^2-1)^{\sharp}} \cdot \begin{pmatrix} 3-7u^2+2u^4 & u(3u^2-1) & -u\sqrt{u^4-10u^2+5} & -\sqrt{1-2u^2}\sqrt{u^4-10u^2+5} \\ u(3u^2-1) & 2-3u^2-u^4 & u^2\sqrt{u^4-10u^2+5} & u\sqrt{1-2u^2}\sqrt{u^4-10u^2+5} \\ u\sqrt{u^4-10u^2+5} & -u^2\sqrt{u^4-10u^2+5} & 2-5u^2+u^4 & -u\sqrt{1-2u^2}(1+u^2) \\ -\sqrt{1-2u^2}\sqrt{u^4-10u^2+5} & u\sqrt{1-2u^2}\sqrt{u^4-10u^2+5} & u\sqrt{1-2u^2}(1+u^2) & 3-5u^2 \end{pmatrix}$$

y B es la conjugada de A mediante la matriz $X = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.

En el ejemplo 1 vimos que cuando $\frac{1}{\sqrt{3}} < u < \frac{1}{\sqrt{2}}$, ρ_u es la holonomía de una estructura hiperbólica cónica en \mathbb{S}^3 con singularidad el nudo $[5/3]$ y ángulo cónico que varía entre 0 y $2\pi/3$. Cuando $u = \frac{1}{\sqrt{3}}$, ρ_u es la holonomía de la estructura hiperbólica completa de volumen finito en $\mathbb{S}^3 \setminus [5/3]$.

Ahora bien, cuando $0 < u < \frac{1}{\sqrt{3}}$, ρ_u sigue siendo una representación de $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [5/3])$ en $SO(3, 1)$. Por tanto ρ_u será (al menos para u próximo a 0), la holonomía de una estructura hiperbólica en el complemento de un entorno tubular del nudo $[5/3]$. Ahora A y B no son rotaciones, sino transformaciones loxodrómicas, y por tanto ρ_u no puede ser la holonomía de una estructura hiperbólica cónica en \mathbb{S}^3 con singularidad el nudo $[5/3]$. Sin embargo, vamos a ver que ρ_u es la holonomía de una estructura hiperbólica cónica en la variedad M obtenida por cirugía cero en el nudo $[5/3]$, con singularidad el ánima de la cirugía.

En efecto, consideremos el poliedro hiperbólico convexo $\widehat{\mathcal{P}}_u$ delimitado por los mismos planos bisectores que en el ejemplo 1: H_a , $H_{ba^{-1}}$, H_w , y sus imágenes mediante las tres rotaciones X , Y , Z de 180° en torno a los ejes coordenados. Como ahora las matrices A y B siempre pertenecen a $SO(3, 1)$ cuando $0 < u < 1/\sqrt{3}$, no va a ocurrir ninguna transición a estructuras esféricas cónicas, y por tanto no vamos a hacer ningún cambio de escala. Es decir, siempre estaremos en el modelo de Klein

de radio 1 de \mathbb{H}^3 . Las ecuaciones de los planos bisectores son entonces:

$$H_a : -(1+u^2)\sqrt{1-2u^2} + \sqrt{u^4-10u^2+5}(-x+uy) - u(1+u^2)z = 0$$

$$H_{ba^{-1}} : -u(3-u^2)\sqrt{1-2u^2} + \sqrt{u^4-10u^2+5}(-ux-y) + (3u^2-1)z = 0$$

$$H_w : -u(1+u^2)\sqrt{1-2u^2} + u^2\sqrt{u^4-10u^2+5}(-ux-y) + (2u^4+u^2-1)z = 0$$

Al construir los poliedros nos encontramos con que la única diferencia respecto al ejemplo anterior es que ahora las caras \mathcal{F}_a y $\mathcal{F}_{a^{-1}}$ no se cortan, mientras que las caras \mathcal{F}_w y \mathcal{F}_{wZ} se cortan a lo largo de una arista. (Y análogamente, por simetría, \mathcal{F}_b y $\mathcal{F}_{b^{-1}}$ no se cortan, y \mathcal{F}_{wX} y \mathcal{F}_{wY} se cortan en una arista). Por lo demás, el resto de las relaciones de incidencia entre las caras no varía, y todas las caras de $\widehat{\mathcal{P}}_u$ se identifican dos a dos correctamente mediante las respectivas isometrías hiperbólicas. Hay también doce vértices, cuyas coordenadas son:

$$\widehat{v}_1 = \left(\frac{3u^2-1}{\sqrt{1-2u^2}\sqrt{u^4-10u^2+5}}, \frac{u(1-3u^2)}{\sqrt{1-2u^2}\sqrt{u^4-10u^2+5}}, \frac{-u}{\sqrt{1-2u^2}} \right)$$

$$v_2 = \left(\frac{(1-3u^2)\sqrt{1-2u^2}}{\sqrt{u^4-10u^2+5}}, \frac{u(u^2-3)\sqrt{1-2u^2}}{\sqrt{u^4-10u^2+5}}, -u\sqrt{1-2u^2} \right)$$

$$v_3 = \left(\frac{-(1+u^2)\sqrt{1-2u^2}}{\sqrt{u^4-10u^2+5}}, \frac{-u(1+u^2)\sqrt{1-2u^2}}{\sqrt{u^4-10u^2+5}}, -u\sqrt{1-2u^2} \right)$$

(y los demás son imagen de éstos mediante las rotaciones X , Y , Z).

Como en el ejemplo 1, $v_2 = \mathcal{F}_{a^{-1}} \cap \mathcal{F}_{ba^{-1}} \cap \mathcal{F}_{a^{-1}b} \cap \mathcal{F}_w$ y $v_3 = \mathcal{F}_a \cap \mathcal{F}_b \cap \mathcal{F}_{ba^{-1}} \cap \mathcal{F}_w$. En cambio, ahora $\widehat{v}_1 = \mathcal{F}_a \cap \mathcal{F}_w \cap \mathcal{F}_{wZ}$. He aquí un dibujo del poliedro $\widehat{\mathcal{P}}_u$:

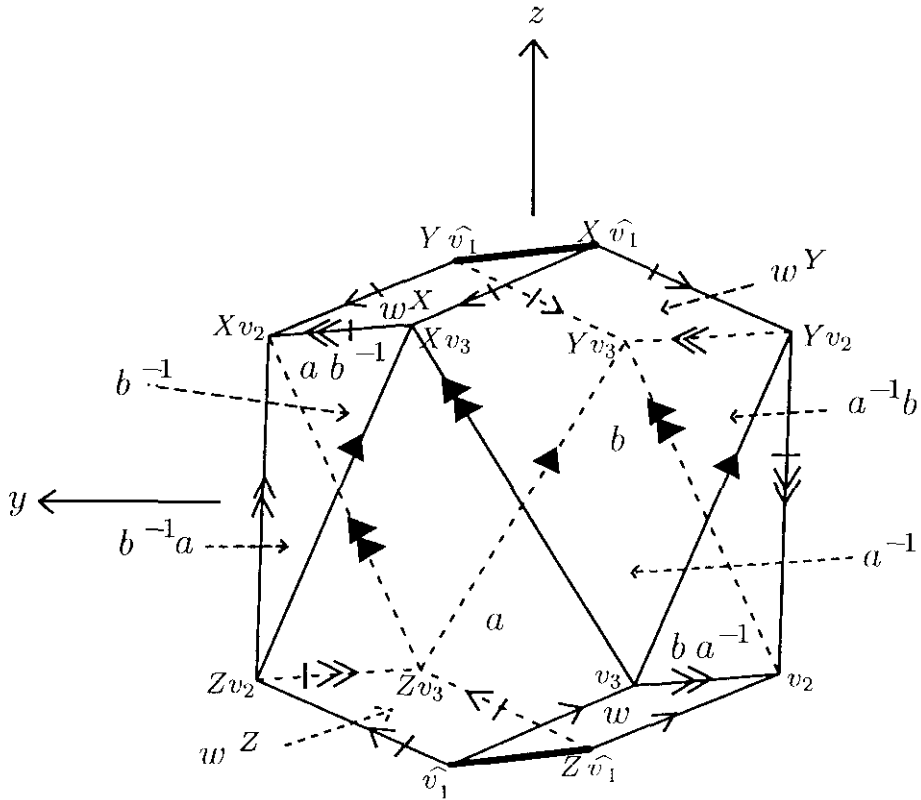


Figura 2

Como antes, se pueden comprobar las identificaciones de las aristas y los vértices usando las observaciones de la sección 1.5 y el hecho de que $\mathcal{F}_a \cap H_{aw} = \mathcal{F}_a \cap \mathcal{F}_w$. La suma de ángulos en torno a cada arista es 2π al hacer las identificaciones, excepto en las aristas $\mathcal{F}_w \cap \mathcal{F}_w^Z$ (que une los vértices \hat{v}_1 y $Z\hat{v}_1$) y $\mathcal{F}_w^X \cap \mathcal{F}_w^Y$ (que une los vértices $X\hat{v}_1$ e $Y\hat{v}_1$). Estas dos aristas se identifican una con la otra mediante la isometría W , y el producto $W W^X = (BA^{-1}B^{-1}A)(AB^{-1}A^{-1}B)$ es una rotación de eje $\mathcal{F}_w \cap \mathcal{F}_w^Z$. Al hacer las identificaciones, las dos aristas se cierran para dar lugar a una geodésica cerrada lisa, ya que como $aww^Xa^{-1} = (aw)(wb^{-1})^X = (wb)(a^{-1}w)^X = (wb)(b^{-1}w^X) = ww^X$, el eje de la rotación $W W^X$ queda invariante por la isometría A . En consecuencia, al pegar dos a dos las caras de $\hat{\mathcal{P}}_u$, se obtiene una 3-variedad hiperbólica cónica. La singularidad es el nudo formado por las aristas $\mathcal{F}_w \cap \mathcal{F}_w^Z$ y $\mathcal{F}_w^X \cap \mathcal{F}_w^Y$, y el ángulo cónico $\hat{\alpha}$ es la suma de los ángulos diédricos de $\hat{\mathcal{P}}_u$ en estas dos aristas singulares. Cuando $u \rightarrow 1/\sqrt{3}$, $\hat{\alpha} \rightarrow 0$, y cuando $u \rightarrow 0$, $\hat{\alpha} \rightarrow 2\pi$ (porque el ángulo diédrico en cada arista singular tiende a π).

Tenemos, pues, una familia uniparamétrica de variedades hiperbólicas cónicas con el mismo espacio subyacente M y ángulo cónico que varía entre 0 y 2π . Queremos saber cuál es la 3-variedad topológica subyacente M . Para ello, vamos a quitar de $\widehat{\mathcal{P}}_u$ un pequeño entorno N de las aristas singulares $\mathcal{F}_w \cap \mathcal{F}_{wz}$ y $\mathcal{F}_{w^X} \cap \mathcal{F}_{w^Y}$. Entonces queda un poliedro truncado $\widehat{\mathcal{P}}_u \setminus N$, que combinatorialmente es el mismo que aparece si en el poliedro \mathcal{P}_u del ejemplo 1 quitamos un pequeño entorno de las aristas singulares $\mathcal{F}_a \cap \mathcal{F}_{a^{-1}}$ y $\mathcal{F}_b \cap \mathcal{F}_{b^{-1}}$. Además, las caras se identifican de igual manera en ambos casos. Por tanto, al pegar dos a dos las caras de $\widehat{\mathcal{P}}_u \setminus N$ se obtiene $\mathbb{S}^3 \setminus N([5/3])$, el complemento en \mathbb{S}^3 de un entorno tubular del nudo $[5/3]$. El entorno N se convierte, al hacer las identificaciones, en un toro sólido T . Este toro sólido T se pega a $\mathbb{S}^3 \setminus N([5/3])$ a lo largo del borde, para dar lugar a la variedad M . El meridiano de T se identifica con una curva homótopa a $ww^X = (ba^{-1}b^{-1}a)(ab^{-1}a^{-1}b) \in \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [5/3])$. Como ww^X es la longitud canónica del nudo $[5/3]$, resulta que la variedad M se obtiene por cirugía de Dehn de tipo 0 en el nudo $[5/3]$ (cf. [HLM₁]). Como el nudo de a ocho es un nudo fibrado de género 1, M es un fibrado sobre S^1 con fibra un toro. El círculo base de esta fibración es el ánima de la cirugía (es decir, dentro del poliedro $\widehat{\mathcal{P}}_u$, cada una de las dos aristas singulares). En la figura 3 se muestra una de las fibras, vista dentro del poliedro $\widehat{\mathcal{P}}_u$.

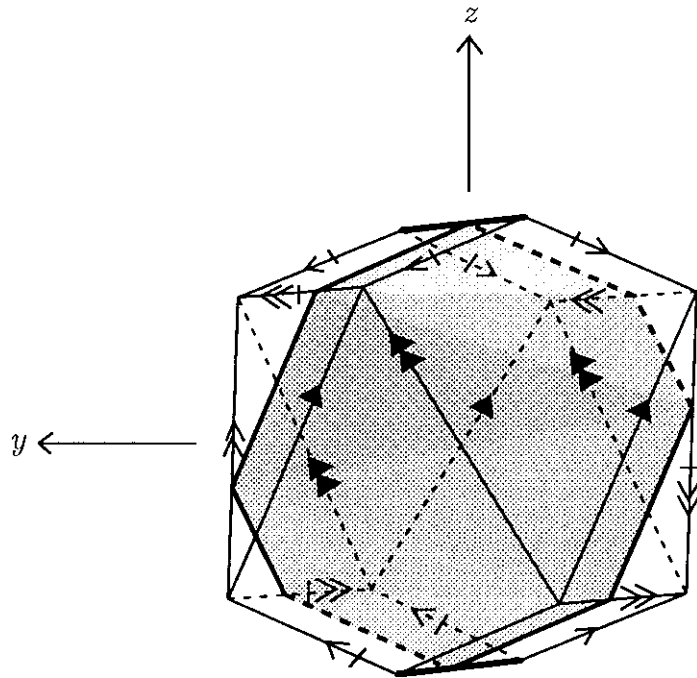
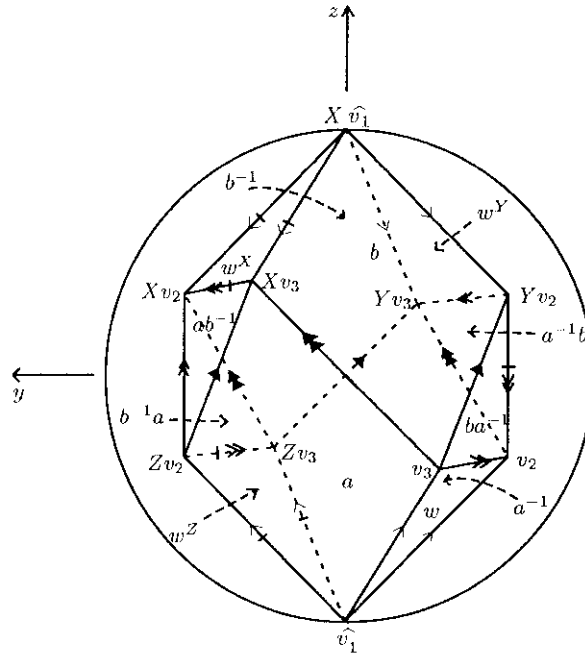


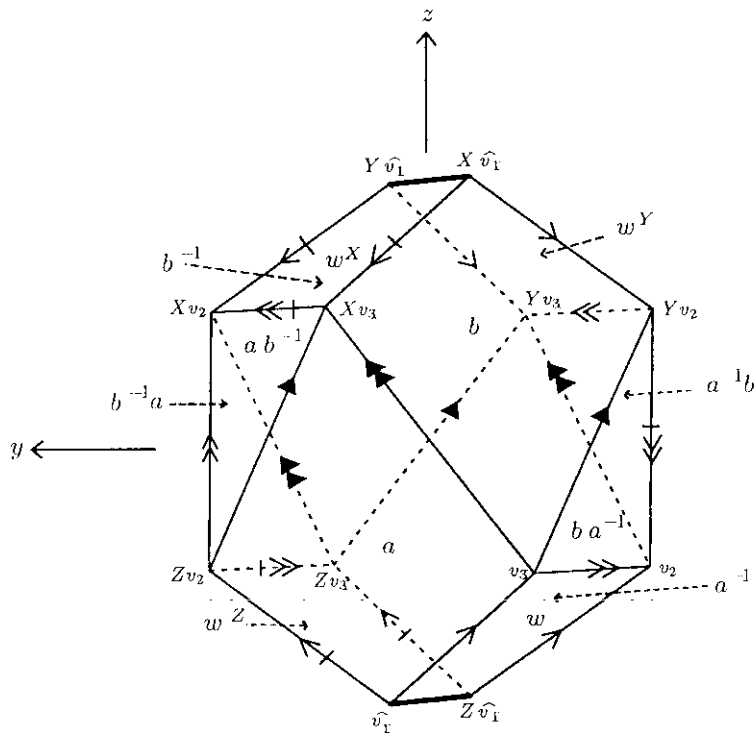
Figura 3

A continuación se muestran algunos de los poliedros de Dirichlet $\widehat{\mathcal{P}}_u$, cuando u varía entre $1/\sqrt{3}$ y 0 . Todos los poliedros están en el interior de la bola de radio 1, que es el modelo de Klein estándar de \mathbb{H}^3 .

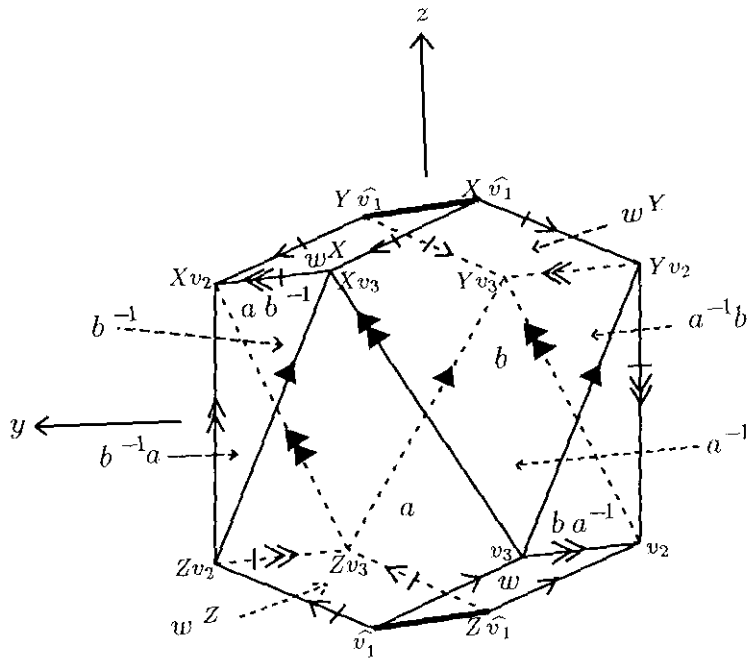
- Estructura hiperbólica completa : $u = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (poliedro visto desde el punto $(-10, 0, 0)$) :



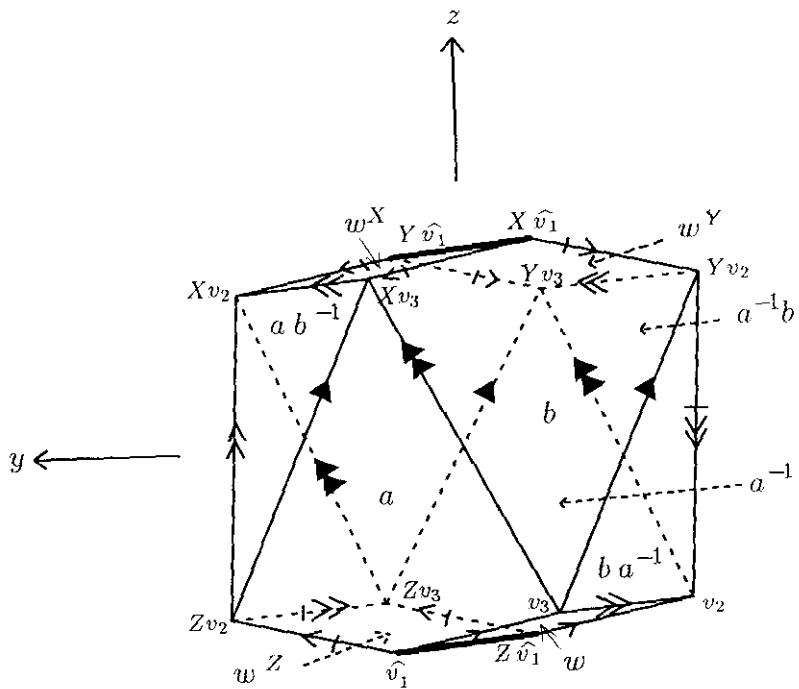
- $u = 0.5$ (poliedro visto desde el punto $(-10, 0, 0)$) :



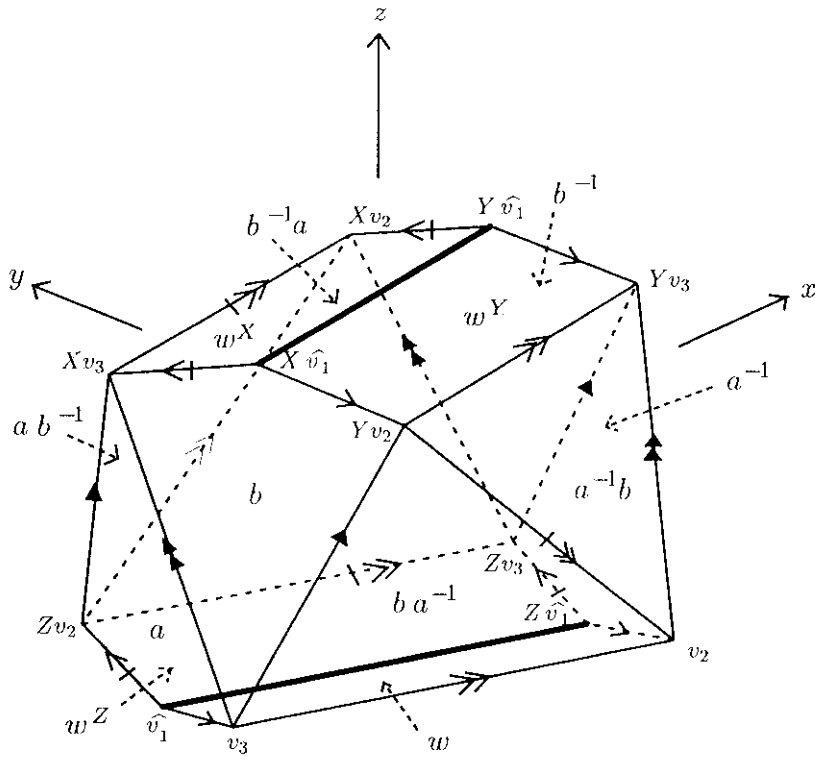
- $u = 0.4$ (poliedro visto desde el punto $(-10, 0, 0)$) :



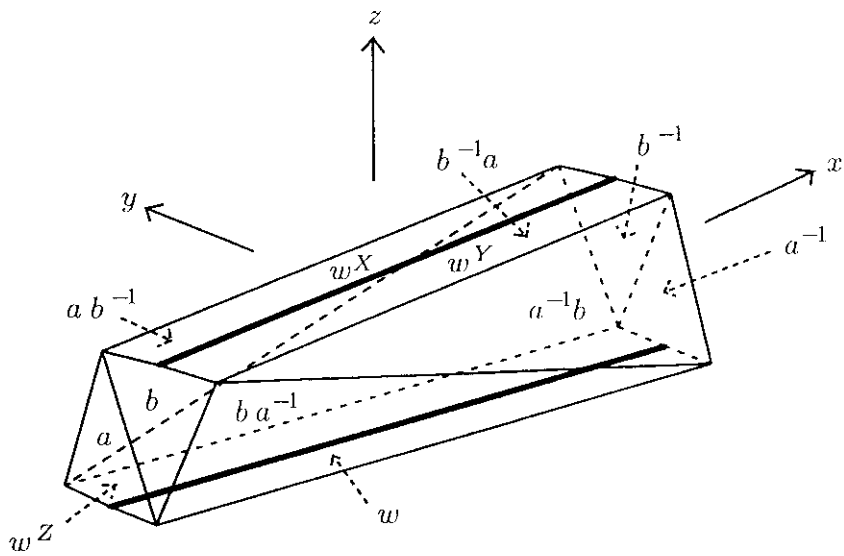
- $u = 0.3$ (poliedro visto desde el punto $(-10, 0, 0)$) :



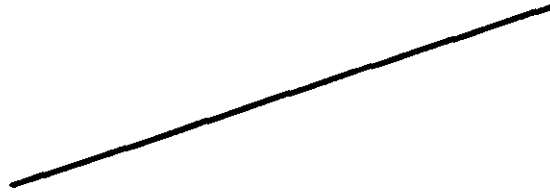
- $u = 0.3$ (poliedro visto desde el punto $(-10, -10, 5)$) :



- $u = 0.1$ (poliedro visto desde el punto $(-10, -10, 5)$) :



- $u \approx 0$ (poliedro visto desde el punto $(-10, -10, 5)$) :



Cuando $u \rightarrow 0$, $\hat{v}_1 \rightarrow (-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, 0)$, $v_2 \rightarrow (\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, 0)$ y $v_3 \rightarrow (-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, 0)$. Por tanto, cuando el ángulo cónico $\hat{\alpha}$ tiende a 2π , los poliedros $\hat{\mathcal{P}}_u$ degeneran en el segmento que une los puntos $\hat{v}_1 = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, 0)$ y $Z\hat{v}_1 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, 0)$. Es decir, cuando $\hat{\alpha} \rightarrow 2\pi$, las estructuras hiperbólicas cónicas en la variedad M degeneran en un círculo, que es el círculo base de la fibración por toros de M . Cuando $u = 0$,

$$A = B = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 & -\sqrt{5}/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{5}/2 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, cuando $u = 0$ el grupo de holonomía es un subgrupo discreto del grupo de traslaciones hiperbólicas que dejan invariante la recta $y = z = 0$.

Por otra parte, se sabe que esta variedad M , obtenida por cirugía cero en el nudo de a ocho, admite una estructura geométrica (no singular) de tipo Sol (porque es un fibrado sobre S^1 con fibra un toro y monodromía Anosov). En la sección siguiente vamos a ver un modelo proyectivo de Sol que nos permitirá encontrar un dominio fundamental poliédrico para esta estructura Sol en la variedad M , y que permitirá además pasar con continuidad de esta estructura Sol a las estructuras hiperbólicas cónicas que acabamos de construir.

Observación. En sus notas ([Thu₁], cap. 4), Thurston construye una familia de estructuras hiperbólicas incompletas en el complemento del nudo de a ocho, cuyas completaciones son las estructuras cónicas en la variedad obtenida por cirugía cero en el nudo de a ocho, que hemos visto aquí. Thurston construye estas estructuras incompletas identificando entre sí las caras de dos tetraedros hiperbólicos ideales mediante isometrías hiperbólicas. Cuando el ángulo cónico tiende a 2π , esos dos tetraedros degeneran en dos triángulos contenidos en un mismo plano, y el grupo de holonomía tiende a un subgrupo *no discreto* de isometrías de ese plano hiperbólico. En cambio, como hemos visto, en nuestro ejemplo los poliedros degeneran en un segmento y el grupo de holonomía tiende a un subgrupo (discreto) de traslaciones hiperbólicas a lo largo de la recta que contiene ese segmento. El motivo de esta discrepancia es que las aplicaciones desarrolladoras (resp. las representaciones de holonomía) están sólo definidas a menos de composición (resp. conjugación) por isometrías hiperbólicas. Para pasar de nuestro ejemplo al de

Thurston habría que conjugar cada holonomía ρ_u por una isometría φ_u (dependiente del parámetro u) de modo que, en el modelo del semiespacio, $\varphi_u \rho_u \varphi_u^{-1}(a)$ tuviera siempre a 0 como uno de sus puntos fijos y $\varphi_u \rho_u \varphi_u^{-1}(b)$ tuviera siempre a ∞ como punto fijo. De este modo, en el límite cuando $u \rightarrow 0$, se obtendría una representación metabeliana (como en [Thu₁]) en vez de una representación abeliana (como en nuestro ejemplo).

3. UN MODELO PROYECTIVO DE LA GEOMETRÍA SOL, QUE MUESTRA LA DEGENERACIÓN DEL EJEMPLO 2

Vamos a definir el grupo de Lie Sol como la componente de la identidad del grupo de isometrías del plano de Lorentz-Minkowski \mathbf{R}_1^2 (cf. [Mil], [Sc]) :

$$Sol = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta & y \\ \sinh \theta & \cosh \theta & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \theta, y, z \in \mathbf{R} \right\}$$

En Sol vamos a considerar la métrica invariante *por multiplicación a la derecha* dada por la fórmula

$$ds^2 = (dy - z d\theta)^2 + (dz - y d\theta)^2 + d\theta^2$$

(En la definición usual de la geometría Sol , se elige una métrica invariante por multiplicación a la izquierda. Sin embargo, nuestra definición es equivalente, y es la que nos va a permitir encontrar un modelo proyectivo de Sol).

Se puede probar (cf. [Sc]) que el grupo de isometrías de Sol con esta métrica tiene ocho componentes, y que la componente de la identidad es el propio grupo Sol actuando sobre sí mismo por multiplicación a la derecha. El estabilizador de la identidad es isomorfo al grupo diédrico de orden 8, y está formado por las siguientes isometrías:

$$(\theta, y, z) \rightarrow (\theta, \epsilon y, \epsilon z)$$

$$(\theta, y, z) \rightarrow (\theta, \epsilon z, \epsilon y)$$

$$(\theta, y, z) \rightarrow (-\theta, \epsilon y, -\epsilon z)$$

$$(\theta, y, z) \rightarrow (-\theta, \epsilon z, -\epsilon y)$$

donde $\epsilon = \pm 1$.

Vamos ahora a escribir el grupo Sol de la siguiente forma:

$$Sol = \left\{ \begin{pmatrix} t & x & y \\ x & t & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z, t \in \mathbf{R} ; x^2 - t^2 = -1, t > 0 \right\}$$

Entonces podemos identificar Sol con la siguiente hipercuádrica de \mathbf{R}^4 .

$$Sol = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x^2 - t^2 = -1, t > 0\}$$

en la que se define el producto

$$(x, y, z, t)(a, b, c, d) = (dx + at, y + cx + bt, z + bx + ct, ax + dt)$$

Las isometrías de Sol que pertenecen a la componente de la identidad son ahora la restricción a la hipercuádrica $\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x^2 - t^2 = -1, t > 0\}$ de los automorfismos lineales de \mathbf{R}^4 con matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} d & 0 & 0 & a \\ c & 1 & 0 & b \\ b & 0 & 1 & c \\ a & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $d^2 - a^2 = 1$ y $d > 0$.

Las ocho isometrías que pertenecen al estabilizador de la unidad son la restricción a la hipercuádrica Sol de los siguientes automorfismos lineales de \mathbf{R}^4 :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \epsilon & & \\ & & c & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \epsilon & & \\ & & -\epsilon & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \boxed{0 \quad c} & & \\ & & \boxed{c \quad 0} & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \boxed{0 \quad \epsilon} & & \\ & & \boxed{-\epsilon \quad 0} & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

donde $\epsilon = \pm 1$. (Obsérvese que, en particular, las tres matrices $X = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$,

$Y = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ y $Z = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ son isometrías de Sol).

Si proyectamos la hipercuádrica $\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x^2 - t^2 = -1, t > 0\}$ desde el origen de \mathbf{R}^4 sobre el hiperplano $t = 1$, obtenemos la "capa" infinita comprendida entre los dos planos $x = \pm 1$:

$$\{(x, y, z) \mid -1 < x < 1\}$$

Este subconjunto de \mathbf{R}^3 es un modelo proyectivo de la geometría Sol , porque las isometrías de Sol son las restricciones al conjunto $\{(x, y, z) \mid -1 < x < 1\}$ de ciertas proyectividades de $\mathbf{R}P^3$. En particular, toda estructura geométrica de tipo Sol en una 3-variedad tiene asociada una estructura proyectiva real en la misma variedad.

Degeneración de estructuras hiperbólicas en una estructura Sol

Para cada $k > 0$, vamos a considerar el siguiente modelo del espacio hiperbólico \mathbf{H}^3 :

$$\widehat{H}_k^3 = \{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x^2 + k^2(y^2 + z^2) - t^2 = -1, t > 0 \}$$

con la métrica inducida por la forma cuadrática $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & k^2 & & \\ & & k^2 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ de \mathbf{R}^4 . Las isometrías son las restricciones de los automorfismos lineales de \mathbf{R}^4 que preservan \widehat{H}_k^3 .

Del modelo estándar del hiperboloide de \mathbf{H}^3 se pasa a este modelo \widehat{H}_k^3 mediante el cambio de coordenadas $x' = x$, $y' = y/k$, $z' = z/k$, $t' = t$. Si se proyecta \widehat{H}_k^3 desde el origen de \mathbf{R}^4 sobre el hiperplano $t = 1$, entonces aparece el elipsoide $\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + k^2(y^2 + z^2) < 1 \}$, que es otro modelo proyectivo de \mathbf{H}^3 .

Cuando $k \rightarrow 0$, los conjuntos \widehat{H}_k^3 se aproximan a la hipercuádrlica $Sol = \{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x^2 - t^2 = -1, t > 0 \}$, y las isometrías de Sol se pueden obtener como límite de isometrías (hiperbólicas) de \widehat{H}_k^3 cuando k tiende a cero. De hecho, supongamos que para cada $k > 0$ tenemos una isometría de \mathbf{H}^3 , $M_k = (m_{ij}(k))$, y que cuando $k \rightarrow 0$, las matrices M_k tienden a una matriz de la forma

$$M = \begin{pmatrix} \cosh \xi & 0 & 0 & \sinh \xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \xi & 0 & 0 & \cosh \xi \end{pmatrix}$$

donde $\xi \in \mathbf{R}$. Supongamos además que existen $\lambda_{i1} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{m_{i1}(k)}{k} \in \mathbf{R}$ y $\mu_{i4} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{m_{i4}(k)}{k} \in \mathbf{R}$ para $i = 2, 3$. Para cada $k > 0$, denotemos por M'_k la matriz conjugada

$$M'_k = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1/k & & \\ & & 1/k & \\ & & & 1 \end{pmatrix} M_k \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & k & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces M'_k es una isometría hiperbólica en el modelo \widehat{H}_k^3 , y el límite de las matrices M'_k cuando $k \rightarrow 0$ es

$$M' = \begin{pmatrix} \cosh \xi & 0 & 0 & \sinh \xi \\ \lambda_{21} & 1 & 0 & \mu_{24} \\ \lambda_{31} & 0 & 1 & \mu_{34} \\ \sinh \xi & 0 & 0 & \cosh \xi \end{pmatrix}$$

Si $\lambda_{21} = \mu_{34}$ y $\lambda_{31} = \mu_{24}$, entonces M' es una isometría de Sol .

El ejemplo de la cirugía cero en el nudo de a ocho

Volvamos al ejemplo 2, en el que habíamos construido una familia uniparamétrica de estructuras hiperbólicas cónicas en la variedad M obtenida por cirugía cero en el nudo de a ocho. La singularidad es el ánimo de la cirugía, y el ángulo cónico $\hat{\alpha}$ varía entre 0 y 2π . Estas estructuras cónicas varían de manera continua según un parámetro $u \in (0, 1/\sqrt{3})$, de modo que cuando $u \rightarrow 1/\sqrt{3}$, $\hat{\alpha} \rightarrow 0$, y cuando $u \rightarrow 0$, $\hat{\alpha} \rightarrow 2\pi$. Cuando $u \rightarrow 0$, las estructuras hiperbólicas cónicas degeneran en un círculo. Por otra parte, se sabe que M admite una estructura geométrica (no singular) de tipo Sol.

Teniendo en cuenta las observaciones del apartado anterior, vamos a hacer ahora el cambio de coordenadas $x' = x$, $y' = y/u$, $z' = z/u$, para cada $u \in (0, 1/\sqrt{3})$. De este modo pasamos del modelo de Klein de radio 1 al modelo del elipsoide $\hat{H}_u^3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + u^2(y^2 + z^2) < 1\}$. Ahora el grupo de holonomía está generado por las siguientes matrices A y B :

$$A = \frac{1}{2(u^2-1)^2} \cdot \begin{pmatrix} 3-7u^2+2u^4 & u^2(3u^2-1) & -u^2\sqrt{u^4-10u^2+5} & -\sqrt{1-2u^2}\sqrt{u^4-10u^2+5} \\ 3u^2-1 & 2-3u^2-u^4 & u^2\sqrt{u^4-10u^2+5} & \sqrt{1-2u^2}\sqrt{u^4-10u^2+5} \\ \sqrt{u^4-10u^2+5} & -u^2\sqrt{u^4-10u^2+5} & 2-5u^2+u^4 & -\sqrt{1-2u^2}(1+u^2) \\ -\sqrt{1-2u^2}\sqrt{u^4-10u^2+5} & u^2\sqrt{1-2u^2}\sqrt{u^4-10u^2+5} & u^2\sqrt{1-2u^2}(1+u^2) & 3-5u^2 \end{pmatrix}$$

y B es la conjugada de A mediante la matriz $X = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$. Las nuevas coordenadas de

los vértices del poliedro de Dirichlet $\hat{\mathcal{P}}_u$ son:

$$\hat{v}_1 = \left(\frac{3u^2-1}{\sqrt{1-2u^2}\sqrt{u^4-10u^2+5}}, \frac{1-3u^2}{\sqrt{1-2u^2}\sqrt{u^4-10u^2+5}}, \frac{-1}{\sqrt{1-2u^2}} \right)$$

$$v_2 = \left(\frac{(1-3u^2)\sqrt{1-2u^2}}{\sqrt{u^4-10u^2+5}}, \frac{(u^2-3)\sqrt{1-2u^2}}{\sqrt{u^4-10u^2+5}}, -\sqrt{1-2u^2} \right)$$

$$v_3 = \left(\frac{-(1+u^2)\sqrt{1-2u^2}}{\sqrt{u^4-10u^2+5}}, \frac{-(1+u^2)\sqrt{1-2u^2}}{\sqrt{u^4-10u^2+5}}, -\sqrt{1-2u^2} \right)$$

(y los demás son imagen de éstos mediante las rotaciones X, Y, Z).

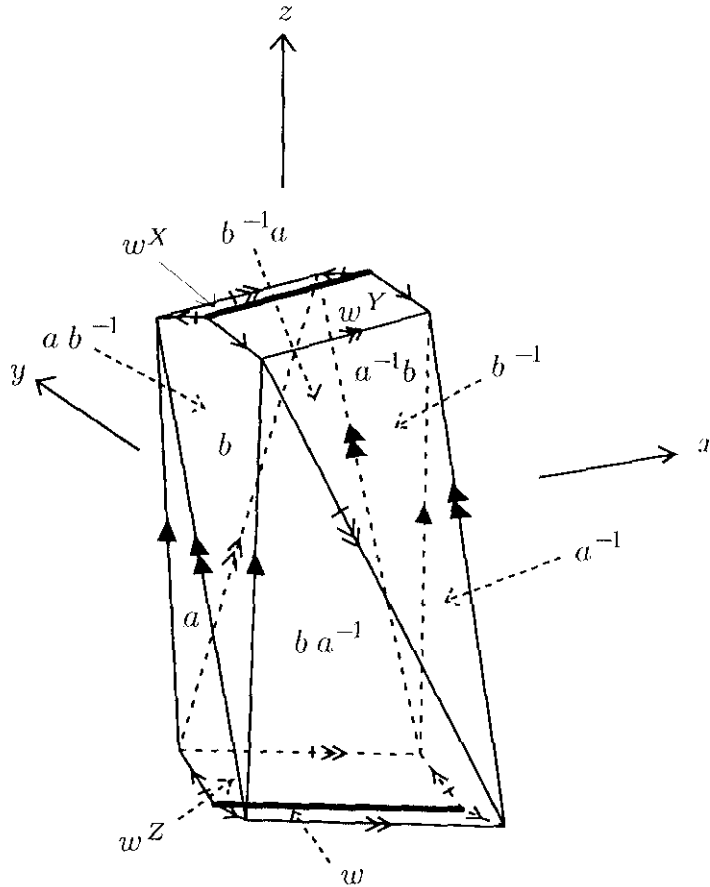
Ahora cuando $u \rightarrow 0$, los nuevos poliedros $\hat{\mathcal{P}}_u$ ya no degeneran en un segmento, sino que convergen a un verdadero poliedro $\hat{\mathcal{P}}_0$ en \mathbf{R}^3 , cuyos vértices son:

$$\hat{v}_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, -1 \right), \quad v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-3}{\sqrt{5}}, -1 \right), \quad v_3 = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, -1 \right)$$

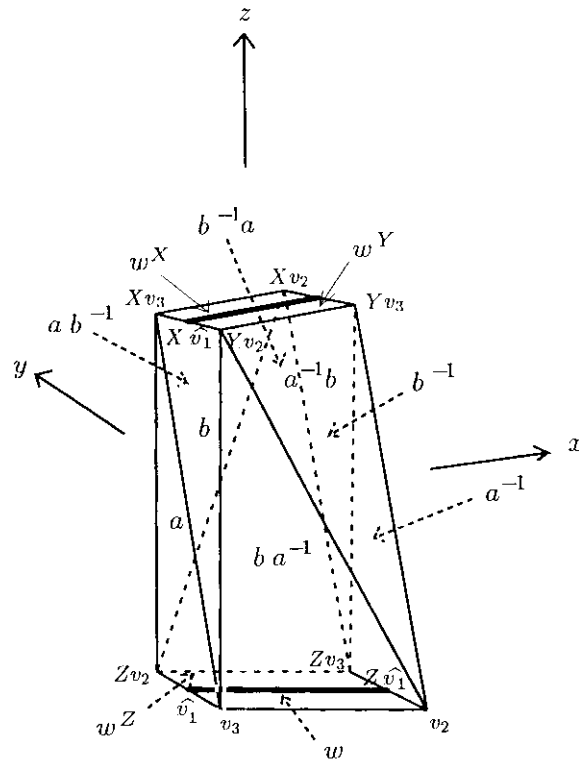
y todas las imágenes de éstos mediante las rotaciones X , Y y Z . El poliedro límite $\widehat{\mathcal{P}}_0$ está contenido en $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid -1 < x < 1\}$ (que es un modelo de Sol). A continuación se muestra uno de los poliedros $\widehat{\mathcal{P}}_u$ con $u > 0$, y el poliedro límite $\widehat{\mathcal{P}}_0$.

Observación. Las caras del poliedro límite $\widehat{\mathcal{P}}_0$ no son superficies totalmente geodésicas en la geometría Sol .

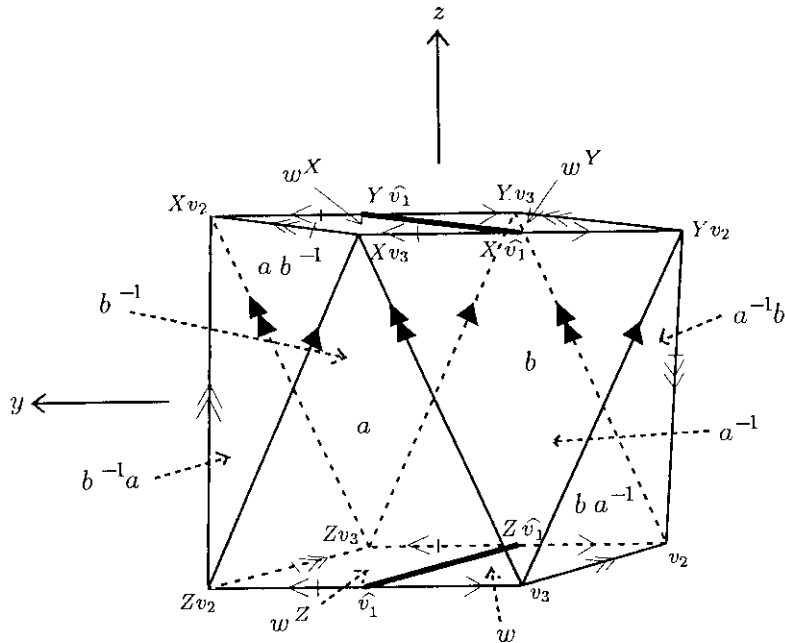
- $u = 0.2$ (poliedro visto desde el punto $(-2, -10, 3/2)$):



- $u = 0$ (poliedro visto desde el punto $(-2, -10, 1)$) :



- $u = 0$ (poliedro visto desde el punto $(-5, 0, 1)$) :



Las caras del poliedro límite $\widehat{\mathcal{P}}_0$ se identifican dos a dos de igual manera que las de $\widehat{\mathcal{P}}_u$. Ahora las transformaciones que realizan los pegados de las caras pertenecen al grupo generado por las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 & -\sqrt{5}/2 \\ -1/2 & 1 & 0 & \sqrt{5}/2 \\ \sqrt{5}/2 & 0 & 1 & -1/2 \\ -\sqrt{5}/2 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = X A X^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 & -\sqrt{5}/2 \\ 1/2 & 1 & 0 & -\sqrt{5}/2 \\ -\sqrt{5}/2 & 0 & 1 & 1/2 \\ -\sqrt{5}/2 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Tanto A como B son isometrías de Sol , en el modelo que definimos antes. En consecuencia, el poliedro $\widehat{\mathcal{P}}_0$ es un dominio fundamental para la estructura geométrica de tipo Sol en la variedad M . Las intersecciones de $\widehat{\mathcal{P}}_0$ con los planos $x = \text{constante}$ se convierten, al hacer las identificaciones, en las fibras de la fibración por toros de M .

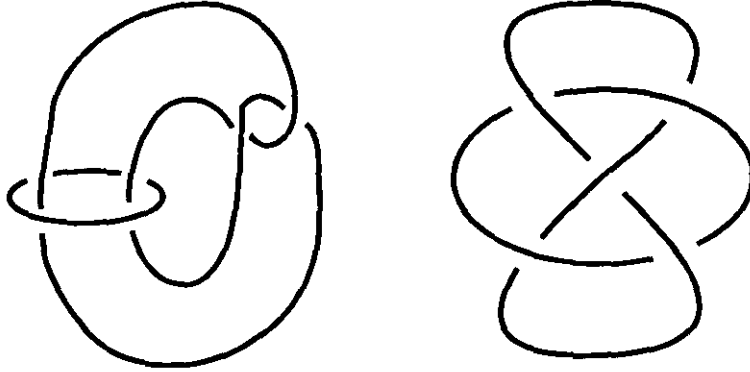
Así pues, a cada estructura hiperbólica cónica en M le hemos asociado una cierta estructura proyectiva real (singular), de tal manera que cuando el ángulo cónico tiende a 2π , esa familia uniparamétrica de estructuras proyectivas converge a una estructura proyectiva real (no singular) en M . Además, la estructura proyectiva límite está asociada de modo natural a la estructura geométrica de tipo Sol de la variedad M .

Cabe preguntarse si este fenómeno observado para la cirugía cero en el nudo de a ocho, se produce en general, siempre que haya una degeneración de estructuras hiperbólicas cónicas en una estructura Sol.

Pregunta. Supongamos que M es un fibrado sobre S^1 con fibra un toro y monodromía Anosov (que tiene por tanto geometría Sol). Supongamos además que existe una familia de estructuras hiperbólicas cónicas en M , con singularidad un enlace $\Sigma \subset M$ y ángulo cónico α que varía entre 0 y 2π . ¿Se puede encontrar siempre una familia de estructuras proyectivas reales (singulares) en M , asociadas a las estructuras hiperbólicas cónicas, de modo que cuando $\alpha \rightarrow 2\pi$ converjan a una estructura proyectiva real (no singular) en M , asociada a su estructura Sol?

4. EJEMPLO 3: ESTRUCTURAS CÓNICAS EN EL ENLACE DE WHITEHEAD, CON EL MISMO ÁNGULO CÓNICO EN AMBAS COMPONENTES

Consideremos el enlace racional $[8/3]$ o enlace de Whitehead:



El grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [8/3])$ admite la presentación $|a, b : aw = wa|$, donde $w = bab^{-1}a^{-1}b^{-1}ab$. La ecuación de la curva de trazas, en las coordenadas $x = \text{tr}(\rho(a)^2) - 2 = \text{tr}(\rho(b)^2) - 2$, $z = \text{tr}(\rho(ab)) - 2$, es:

$$z^3 + (2 - x)z^2 + (2 - 2x)z - x = 0$$

Es decir, si $\rho : \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [8/3]) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ es una representación no abeliana tal que $\text{tr}(\rho(a)) = \text{tr}(\rho(b))$, entonces los valores $x = \text{tr}(\rho(a)^2) - 2$ y $z = \text{tr}(\rho(ab)) - 2$ satisfacen la relación $z^3 + (2 - x)z^2 + (2 - 2x)z - x = 0$. Si ρ es la holonomía de una estructura hiperbólica cónica, entonces $x \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$. Por tanto, para ese valor de x , la ecuación (en z) $z^3 + (2 - x)z^2 + (2 - 2x)z - x = 0$ tiene una raíz real y dos raíces complejas conjugadas, y $z = \text{tr}(\rho(ab)) - 2$ es una de las dos raíces complejas conjugadas. Vamos a denotar por r la raíz real. Entonces $r^3 + (2 - x)r^2 + (2 - 2x)r - x = 0$, luego

$$x = \frac{r(r^2 + 2r + 2)}{(r + 1)^2}$$

(Esta es una función monótona creciente de r cuando $-2 + \sqrt{2} \leq r \leq 0$. Cuando $r = -2 + \sqrt{2}$, $x = -4$, y cuando $r = 0$, $x = 0$).

Podemos escribir ahora la ecuación de la curva de trazas en términos del nuevo parámetro r , y factorizarla:

$$z^3 + (2 - x)z^2 + (2 - 2x)z - x = (z - r) \left(z^2 + \frac{2r^2 + 3r + 2}{(r + 1)^2} z + \frac{r^2 + 2r + 2}{(r + 1)^2} \right)$$

Si este polinomio en z (con coeficientes reales) tiene dos raíces complejas conjugadas, z , \bar{z} , entonces se verifica que:

$$\text{Re}(z) = \frac{2r^2 + 3r + 2}{2(r + 1)^2} \quad \text{y} \quad |z| = \frac{\sqrt{r^2 + 2r + 2}}{r + 1}$$

Supongamos que ρ es la holonomía de una estructura hiperbólica cónica, correspondiente al punto (x, z) de la curva de trazas. Entonces vimos en la sección I.2 que $A = \rho(a)$ y $B = \rho(b)$ son dos rotaciones de ángulo $\alpha = \arccos \frac{x+2}{2}$ en torno a dos ejes que forman ángulo 2θ y están separados a distancia $2d$, donde $\cosh(2d)$ y $\cos(2\theta)$ son las soluciones de la siguiente ecuación cuadrática en t :

$$x t^2 + 2|z|t + 2\operatorname{Re}(z) - x = 0$$

En nuestro caso, esta ecuación cuadrática es

$$\frac{r(r^2 + 2r + 2)}{(r+1)^2} t^2 + \frac{2\sqrt{r^2 + 2r + 2}}{r+1} t - \frac{r^3 + 4r^2 + 5r + 2}{(r+1)^2} = 0$$

y sus soluciones son $\frac{(r+1)(-1 \pm (r+1))}{r\sqrt{r^2 + 2r + 2}}$. Por tanto,

$$\cosh(2d) = \frac{-(r+1)(r+2)}{r\sqrt{r^2 + 2r + 2}} \quad \text{y} \quad \cos(2\theta) = \frac{r+1}{\sqrt{r^2 + 2r + 2}}$$

Como en el ejemplo 1, vamos a elegir como parámetro $u = \cot \theta$. Tenemos que

$$u = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\theta)}{1 - \cos(2\theta)}} = \sqrt{\frac{\sqrt{r^2 + 2r + 2} + (r+1)}{\sqrt{r^2 + 2r + 2} - (r+1)}} = \sqrt{r^2 + 2r + 2} + (r+1)$$

Se verifica que u es una función monótona decreciente de r en el intervalo $[-2 + \sqrt{2}, 0]$, y cuando $-2 + \sqrt{2} \leq r < 0$, $1 + \sqrt{2} < u \leq (-1 + \sqrt{2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}) = \cot(3\pi/16)$. Expresando r en términos de u , obtenemos que

$$r = \frac{u^2 - 2u - 1}{2u}$$

De aquí se deduce que

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{(1 + u^2)\sqrt{1 + 2u - u^2}\sqrt{u^2 + 2u - 1}\sqrt{u^4 + 4u^3 - 6u^2 - 4u + 1}}{4u(u^2 - 1)^2}$$

$$2 \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{(1 + u^2)(1 + 2u - u^2)}{4u(u^2 - 1)^2}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{(1 + u^2)\sqrt{1 + 2u - u^2}}{\sqrt{u^2 + 2u - 1}\sqrt{u^4 + 4u^3 - 6u^2 - 4u + 1}}$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}}, \quad \cos \theta = \frac{u}{\sqrt{u^2 + 1}}$$

$$\operatorname{senh} d = \frac{\sqrt{u^4 - u^2 - 2u}}{\sqrt{u^2 + 1}\sqrt{1 + 2u - u^2}}, \quad \cosh d = \frac{\sqrt{2u^3 - u^2 + 1}}{\sqrt{u^2 + 1}\sqrt{1 + 2u - u^2}}$$

Podemos ahora sustituir estos datos en la expresión para la matriz A ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen}^2 \theta & 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta & -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \cosh d & -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \operatorname{senh} d \\ 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta & 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \theta & \operatorname{sen} \alpha \cos \theta \cosh d & \operatorname{sen} \alpha \cos \theta \operatorname{senh} d \\ \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \cosh d & -\operatorname{sen} \alpha \cos \theta \cosh d & 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \cosh^2 d & -2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{senh} d \cosh d \\ -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \operatorname{senh} d & \operatorname{sen} \alpha \cos \theta \operatorname{senh} d & 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{senh} d \cosh d & 1 + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{senh}^2 d \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que B es la conjugada de A mediante la matriz $X = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, esto nos

proporciona la representación de holonomía para cada $u \in (\cot(3\pi/16), 1 + \sqrt{2})$. No la escribimos explícitamente debido a la complicación de las expresiones que aparecen.

Observamos que si u_0 es la raíz real de $u^3 - u - 2$ (que vale $(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{(9 + \sqrt{78})^2}) / \sqrt[3]{9(9 + \sqrt{78})} \approx 1.52138$), entonces $\operatorname{senh} d \in \mathbf{R}$ si $u_0 < u < 1 + \sqrt{2}$; cuando $u = u_0$, $\operatorname{senh} d = 0$, y cuando $\cot(3\pi/16) \leq u < u_0$, $\operatorname{senh} d$ se hace imaginario puro. Todas las demás variables son siempre reales cuando $\cot(3\pi/16) \leq u < 1 + \sqrt{2}$. Por tanto, cuando $u = u_0$ se producirá una degeneración euclídea, y entre u_0 y $\cot(3\pi/16)$ habrá estructuras esféricas cónicas. Para ver automáticamente esta transición, hacemos un cambio de escala de factor $\cos \theta / (\tan(\alpha/2) \operatorname{senh} d)$, como en el ejemplo 1. Así pues, cuando $u_0 < u \leq 1 + \sqrt{2}$, estaremos en cada instante en un modelo de Klein de \mathbf{H}^3 de radio

$$R = \frac{u\sqrt{u^2 + 2u - 1}\sqrt{u^4 + 4u^3 - 6u^2 - 4u + 1}}{(1 + u^2)\sqrt{u^4 - u^2 - 2u}}$$

(Cuando $u = \cot(3\pi/16)$, $R = 0$, luego no se podrá ver la estructura de orbiforma esférica de ángulo π).

Podemos ahora construir los poliedros de Dirichlet \mathcal{P}_u centrados en $O = (0, 0, 0)$, correspondientes a estas representaciones de holonomía cuando $\cot(3\pi/16) < u \leq 1 + \sqrt{2}$. Como en el ejemplo 1, las tres rotaciones X , Y , Z de 180° en torno a los ejes coordenados son simetrías de \mathcal{P}_u .

A continuación se muestran los poliedros obtenidos con el programa Mathematica. No escribimos explícitamente las ecuaciones de las caras ni las coordenadas de los vértices porque son complicadas. Utilizamos las siguientes notaciones: $w = \operatorname{bab}^{-1}a^{-1}b^{-1}ba$ y $q = \operatorname{bab}^{-1}a^{-1}b^{-1}$. Como en el ejemplo 1, si g es una palabra en a y b , entonces $g^X = \psi_X(g)$ denota la palabra que resulta de sustituir a por b y b por a en g ; $g^Y = \psi_Y(g)$ se obtiene sustituyendo a por b^{-1} y b por a^{-1} , y $g^Z = \psi_Z(g)$ se obtiene sustituyendo a por a^{-1} y b por b^{-1} .

Se observa que ya no tienen todos los poliedros el mismo tipo combinatorio, como ocurría en el ejemplo 1, sino que al variar u aparecen y desaparecen algunas caras.

- Cuando $u = 1 + \sqrt{2}$ (es decir, para la estructura hiperbólica completa de volumen finito en $S^3 \setminus [8/3]$), las caras del poliedro corresponden a los siguientes elementos de $\pi_1(S^3 \setminus [8/3])$:

$$a, ba, bab, aq = abab^{-1}a^{-1}b^{-1}, aw = abab^{-1}a^{-1}b^{-1}ba$$

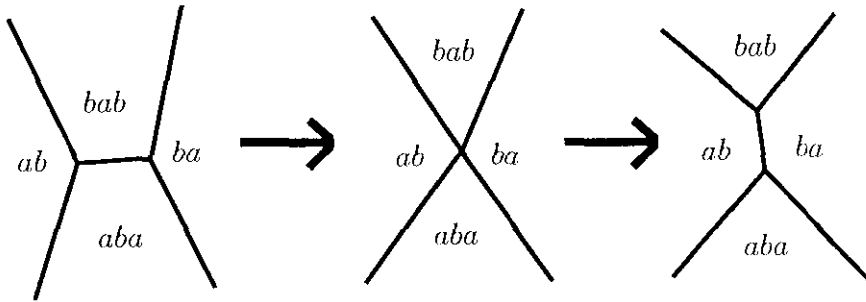
(y sus imágenes mediante ψ_X, ψ_Y y ψ_Z). En total hay 20 caras.

- Cuando $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} < u < 1 + \sqrt{2}$, las caras corresponden a los elementos:

$$a, ba, bab, q = bab^{-1}a^{-1}b^{-1}, q^{-1} = baba^{-1}b^{-1}, aq, w = bab^{-1}a^{-1}b^{-1}ba, aw$$

(y sus imágenes mediante ψ_X, ψ_Y y ψ_Z). En total hay 32 caras.

- Cuando $u = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, se produce un cambio de tipo combinatorio, según el esquema que se muestra en la figura:



- Cuando $\cot \frac{3\pi}{16} < u < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, las caras corresponden a los elementos:

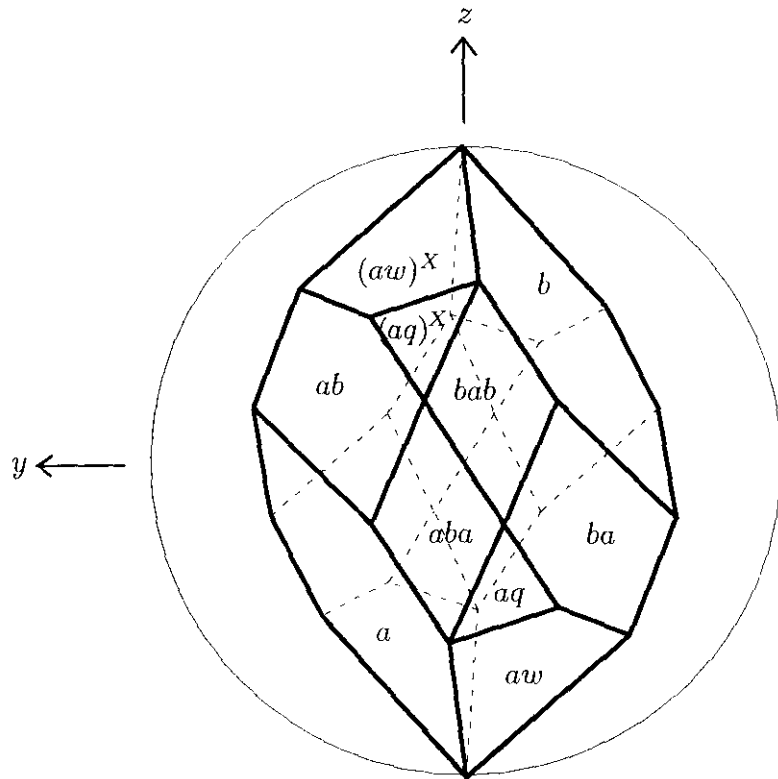
$$a, ba, bab, bab^{-1}a^{-1}, q, q^{-1}, aq, w, aw$$

(y sus imágenes mediante ψ_X, ψ_Y y ψ_Z). En total hay 36 caras.

En los dibujos, todos los poliedros están vistos desde el punto $(-3, 0, 0)$ de \mathbb{R}^3 . Marcamos cada cara con el elemento de $\pi_1(S^3 \setminus [8/3])$ que le corresponde. La singularidad está formada por las aristas $\mathcal{F}_a \cap \mathcal{F}_{a^{-1}}$ y $\mathcal{F}_b \cap \mathcal{F}_{b^{-1}}$, que están marcadas en grueso. La manera de identificar entre sí las aristas y los vértices se averigua como en el ejemplo 1. Todas las comprobaciones se hacen también de la misma forma. Sin embargo, el hecho de que se produzcan cambios de tipo combinatorio obliga a modificar el razonamiento para comprobar que la variedad que aparece al pegar las caras de \mathcal{P}_u es siempre S^3 y la singularidad es el enlace $[8/3]$. Igual que en el ejemplo 1, sabemos que cuando $u = 1 + \sqrt{2}$, el

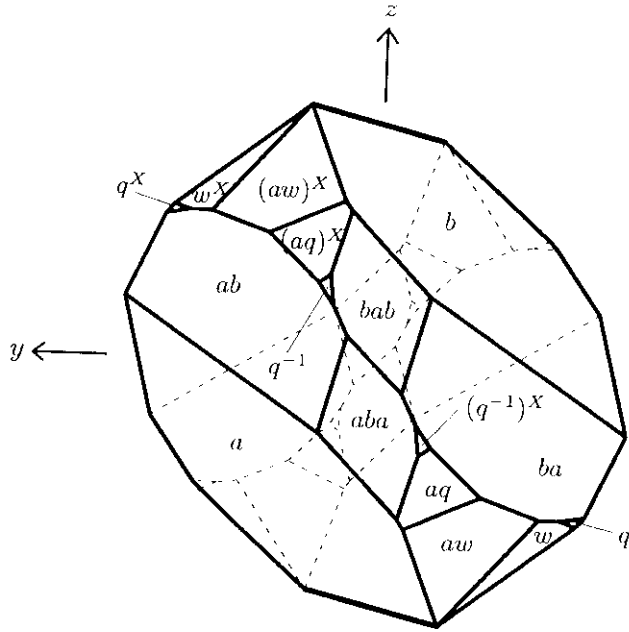
resultado de hacer las identificaciones en $\mathcal{P}_{1+\sqrt{2}}$ es $S^3 \setminus [8/3]$. Vamos a quitar de $\mathcal{P}_{1+\sqrt{2}}$ un pequeño entorno N de las aristas singulares, y vamos a hacer lo mismo con cualquier otro \mathcal{P}_u . Basta entonces probar que la variedad (con borde) M_u obtenida al pegar las caras de $\mathcal{P}_u \setminus N$, es homeomorfa a la que se obtiene al pegar las caras de $\mathcal{P}_{1+\sqrt{2}} \setminus N$. Para ver esto, vamos a encontrar dos diagramas de Heegaard isomorfos para estas dos variedades con borde. En $M_{1+\sqrt{2}}$, uno de los cuerpos con asas es un entorno regular del grafo \mathcal{G} formado por las aristas de $\mathcal{P}_{1+\sqrt{2}} \setminus N$, y el otro es el complementario. Tomemos ahora cualquier otro u , y consideremos el 2-complejo de M_u formado por las aristas de $\mathcal{P}_u \setminus N$ más las nuevas caras de $\mathcal{P}_u \setminus N$ que no estaban en $\mathcal{P}_{1+\sqrt{2}}$. Entonces este 2-complejo es del mismo tipo de homotopía que el grafo \mathcal{G} (la equivalencia de homotopía la proporciona la propia deformación). Por tanto, un entorno regular de este 2-complejo es un cuerpo con asas, y su complementario es otro cuerpo con asas, y ambos se pegan de la misma forma que en el diagrama de Heegaard de $M_{1+\sqrt{2}}$. Con esto queda demostrado que las dos variedades son homeomorfas (cf. capítulo IV, sección 4).

Estructura hiperbólica completa de volumen finito ($u = 1 + \sqrt{2}$)

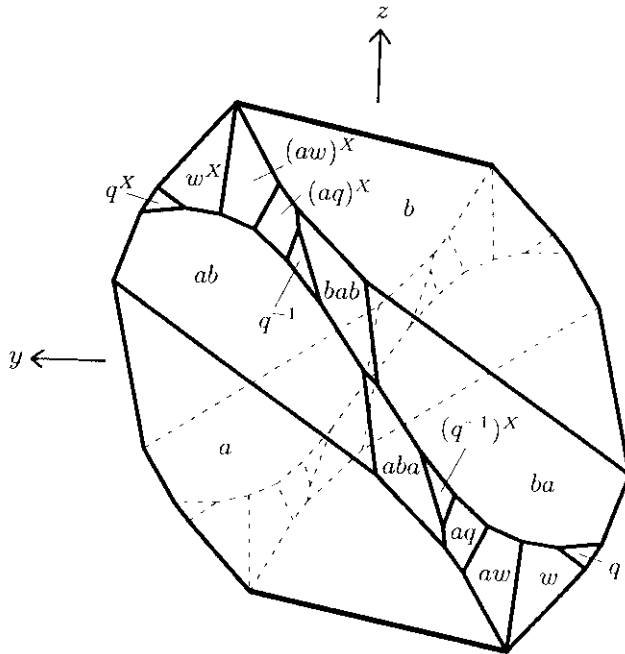


Estructuras hiperbólicas cónicas ($u_0 < u < 1 + \sqrt{2}$)

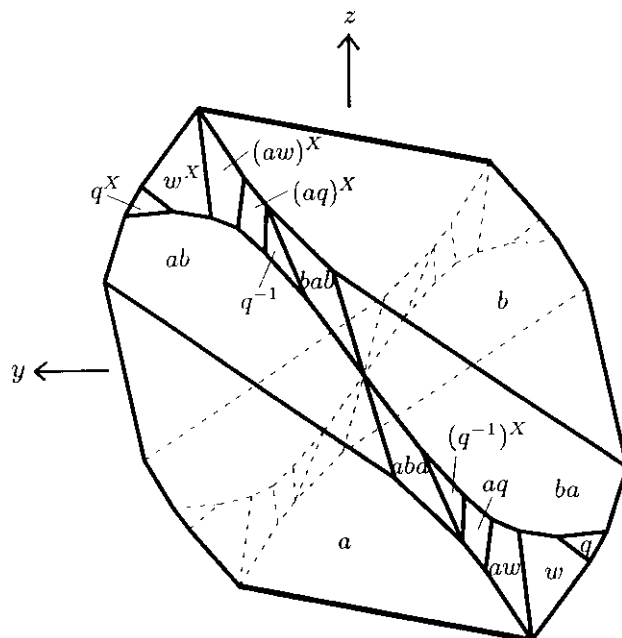
- $u = 2$:



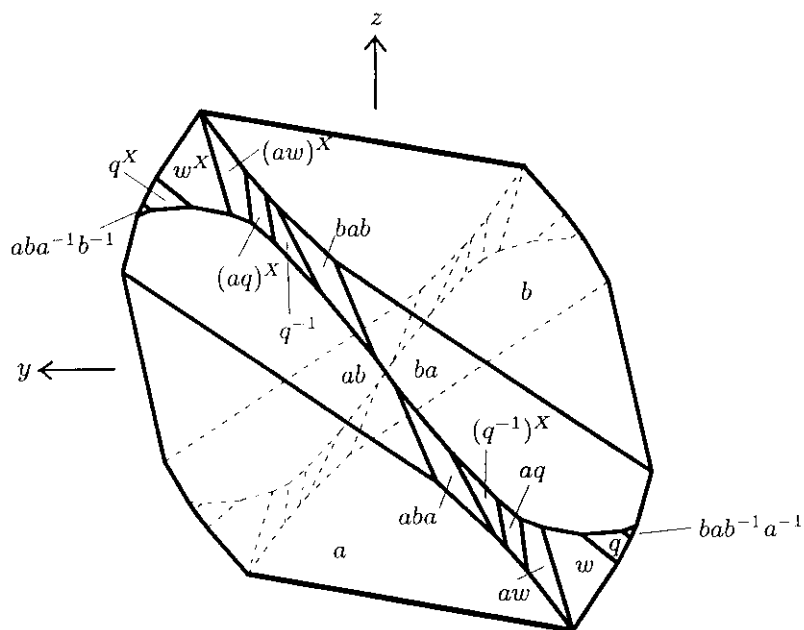
- $u = 1.7$:



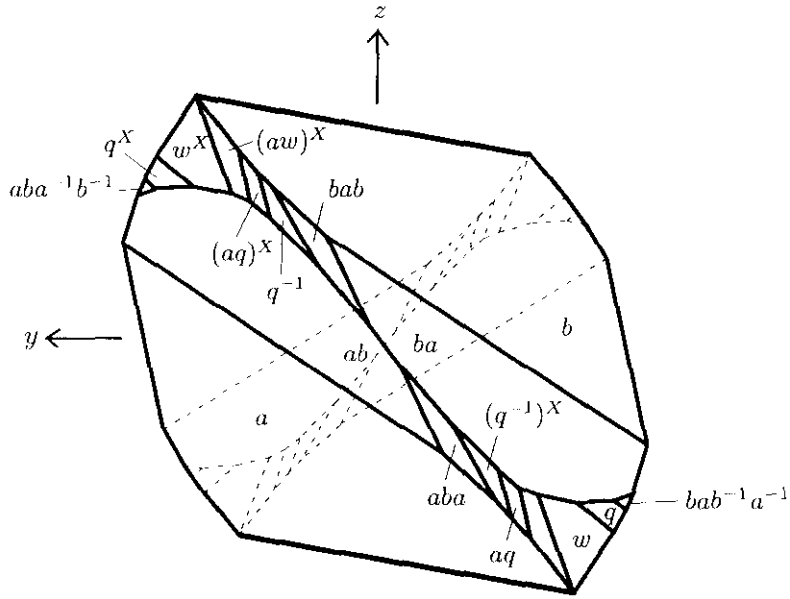
- $u = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (cambio de tipo combinatorio):



- $u = 1.55$:

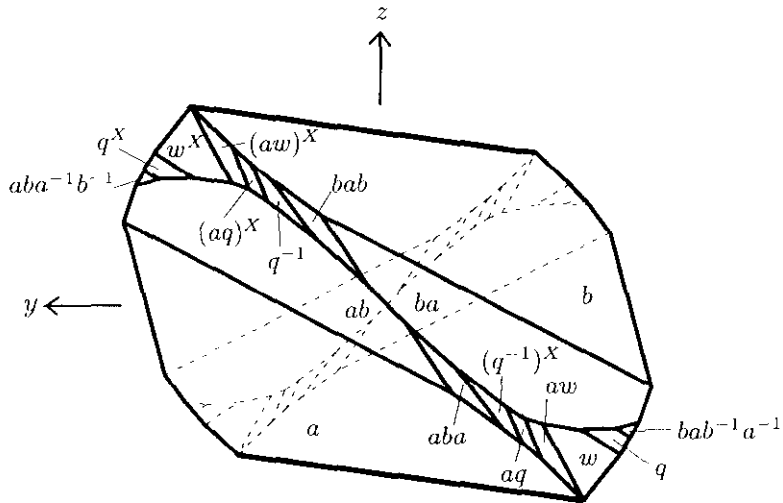


Estructura euclídea cónica ($u = u_0 = (\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{(9 + \sqrt{78})^2}) / \sqrt[3]{9(9 + \sqrt{78})} \approx 1.52138$)

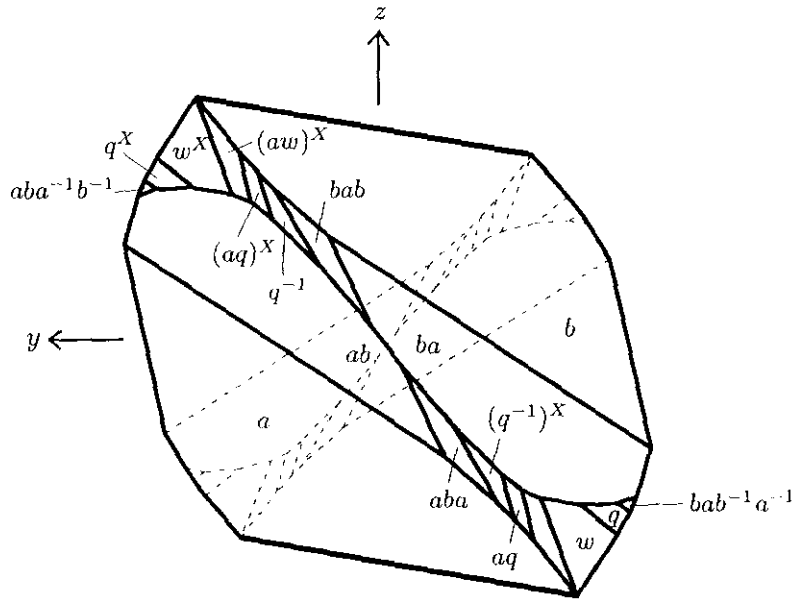


Estructuras esféricas cónicas ($\cot \frac{3\pi}{16} < u < u_0$)

- $u = 1.50$:



- $u = 1.497$:



Como en el ejemplo 1, si deshacemos el cambio de escala para ver la estructura esférica cónica de ángulo π , entonces cuando $u \rightarrow \cot(3\pi/16)$ los poliedros tienden a la capa infinita comprendida entre los dos planos horizontales $z = \pm \tan(\pi/16)$. Las aristas singulares tienden a dos rectas contenidas en cada uno de estos planos, que forman ángulo $3\pi/8$. Se obtiene, pues, la lente que vimos en la sección 1.5 para la orbiforma esférica de ángulo π en el enlace $[8/3]$.

5. EJEMPLO 4: ESTRUCTURAS ESFÉRICAS CONICAS EN EL ENLACE DE WHITEHEAD, CON UNO DE LOS DOS ÁNGULOS CÓNICOS CONSTANTEMENTE IGUAL A 180°

Vamos a considerar ahora la posibilidad de que los ángulos cónicos α , β en las dos componentes del enlace sean distintos. La ecuación de la superficie de trazas del enlace $[8/3]$, en las coordenadas $x = \text{tr}(\rho(a))$, $y = \text{tr}(\rho(b))$ y $z = \text{tr}(\rho(ab))$, es

$$z^3 - xy z^2 + (x^2 + y^2 - 2) z - xy = 0$$

Es decir, si $\rho : \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [8/3]) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ es una representación no abeliana, entonces los valores $x = \text{tr}(\rho(a))$, $y = \text{tr}(\rho(b))$ y $z = \text{tr}(\rho(ab))$ satisfacen la relación $z^3 - xy z^2 + (x^2 + y^2 - 2) z - xy = 0$. (Obsérvese que las variables x y z ahora no son las mismas que en los ejemplos anteriores. Por comodidad de notación llamamos ahora x , y , z a las variables que en la primera sección del capítulo I denotamos por \hat{x} , \hat{y} , \hat{z}).

Supongamos que el ángulo cónico β es constantemente igual a π , de modo que $y = 2 \cos(\beta/2) = 0$. Entonces las otras dos variables x, z verifican la ecuación $z^3 + (x^2 - 2)z = 0$, de forma que

$$z \in \{0, \pm\sqrt{2-x^2}\}$$

Vamos a suponer además que $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$, con lo cual $x = 2 \cos(\alpha/2) \in [0, \sqrt{2}]$ y $2 - x^2 > 0$.

Sabemos que cuando $\alpha = \beta = \pi$, existe una estructura de orbiforma esférica $(\mathbb{S}^3, [8/3], (\pi, \pi))$, cuya holonomía está dada por el siguiente par (ρ_1, ρ_2) de representaciones de $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [8/3])$ en $SU(2)$:

$$\begin{aligned} \rho_1(a) &= \begin{pmatrix} 0 & ie^{\pi i/8} \\ ie^{-\pi i/8} & 0 \end{pmatrix}, & \rho_1(b) &= \begin{pmatrix} 0 & ie^{-\pi i/8} \\ ie^{\pi i/8} & 0 \end{pmatrix} \\ \rho_2(a) &= \begin{pmatrix} 0 & ie^{-2\pi i/8} \\ ie^{2\pi i/8} & 0 \end{pmatrix}, & \rho_2(b) &= \begin{pmatrix} 0 & ie^{2\pi i/8} \\ ie^{-2\pi i/8} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para la representación ρ_1 , $z_1 = \text{tr}(\rho_1(ab)) = -2 \cos(\pi/4) = -\sqrt{2}$. Para ρ_2 , $z_2 = \text{tr}(\rho_2(ab)) = -2 \cos(\pi/2) = 0$.

Por tanto, si $(\mathbb{S}^3, [8/3], (\alpha, \pi))$ es una estructura esférica cónica con ángulo cónico $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, entonces su holonomía necesariamente tiene asociado un par (ρ_1, ρ_2) de representaciones de $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [8/3])$ en $SU(2)$ que verifican las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} x &= \text{tr}(\rho_1(a)) = \text{tr}(\rho_2(a)) = 2 \cos \frac{\alpha}{2} & ; & \quad y = \text{tr}(\rho_1(b)) = \text{tr}(\rho_2(b)) = 0 ; \\ z_1 &= \text{tr}(\rho_1(ab)) = -\sqrt{2-x^2} & ; & \quad z_2 = \text{tr}(\rho_2(ab)) = 0 . \end{aligned}$$

Conjugando adecuadamente, podemos escribir ρ_1 y ρ_2 de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \rho_1(a) &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & ie^{i(-r+\theta)} \text{sen} \frac{\alpha}{2} \\ ie^{i(r-\theta)} \text{sen} \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, & \rho_1(b) &= \begin{pmatrix} 0 & ie^{i(r-\theta)} \\ ie^{i(-r+\theta)} & 0 \end{pmatrix} \\ \rho_2(a) &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & ie^{-i(r+\theta)} \text{sen} \frac{\alpha}{2} \\ ie^{i(r+\theta)} \text{sen} \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, & \rho_2(b) &= \begin{pmatrix} 0 & ie^{i(r+\theta)} \\ ie^{-i(r+\theta)} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde $\theta, r \in \mathbf{R}$. Entonces $z_1 = \text{tr}(\rho_1(ab)) = -2 \cos(2(\theta - r)) \text{sen} \frac{\alpha}{2} = -\cos(2(\theta - r)) \sqrt{4-x^2}$, y análogamente $z_2 = \text{tr}(\rho_2(ab)) = -\cos(2(\theta + r)) \sqrt{4-x^2}$. Como han de ser $z_1 = -\sqrt{2-x^2}$ y $z_2 = 0$, resulta que

$$\cos(2(\theta - r)) = \frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}, \quad \cos(2(\theta + r)) = 0,$$

luego

$$\cos(2\theta) \cos(2r) = \operatorname{sen}(2\theta) \operatorname{sen}(2r) = \frac{\sqrt{2-x^2}}{2\sqrt{4-x^2}}$$

y por tanto

$$\cos^2(2\theta) + \cos^2(2r) = 1 \quad , \quad \cos^2(2\theta) \cos^2(2r) = \frac{2-x^2}{4(4-x^2)}$$

De aquí se deduce que $\cos^2(2\theta)$ y $\cos^2(2r)$ son las soluciones de la siguiente ecuación cuadrática en t :

$$t^2 - t + \frac{2-x^2}{4(4-x^2)} = 0 \quad . \quad \text{Las soluciones de esta ecuación son}$$

$$\frac{2(4-x^2) \pm \sqrt{8(4-x^2)}}{4(4-x^2)} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2(4-x^2)}}$$

Cuando $x = 0$, $2\theta = 3\pi/8$ y $2r = \pi/8$, luego $\cos^2(2\theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$ y $\cos^2(2r) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Por tanto, en general es

$$\begin{aligned} \cos^2(2\theta) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2(4-x^2)}} \quad , \quad \operatorname{sen}^2(2\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2(4-x^2)}} \\ \cos^2(2r) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2(4-x^2)}} \quad , \quad \operatorname{sen}^2(2r) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2(4-x^2)}} \end{aligned}$$

Como en todos los ejemplos anteriores, vamos a elegir como parámetro $u = \cot(\theta)$ en vez de x .

Entonces

$$\begin{aligned} \cos(2\theta) &= \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} \quad , \quad \operatorname{sen}(2\theta) = \frac{2u}{u^2 + 1} \\ \cos(2r) &= \frac{2u}{u^2 + 1} \quad , \quad \operatorname{sen}(2r) = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} \end{aligned}$$

Para expresar x en términos de u , observamos que $\frac{16u^2(u^2-1)^2}{(u^2+1)^4} = 4\cos^2(2\theta)\cos^2(2r) = \frac{2-x^2}{4-x^2}$.

De aquí se deduce que

$$x = \frac{\sqrt{2}\sqrt{u^8 - 28u^6 + 70u^4 - 28u^2 + 1}}{u^4 - 6u^2 + 1}$$

Esta es una función monótona creciente de u en el intervalo $[1, \cot(3\pi/16)]$. Cuando $u = \cot(3\pi/16)$, $x = 0$, y cuando $u = 1$, $x = \sqrt{2}$.

En términos del parámetro u tenemos entonces que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \alpha &= \frac{(1+u^2)^2 \sqrt{u^8 - 28u^6 + 70u^4 - 28u^2 + 1}}{(u^4 - 6u^2 + 1)^2}, \\ 2 \operatorname{sen}^2 \alpha &= \frac{(1+u^2)^4}{(u^4 - 6u^2 + 1)^2}, \\ \operatorname{sen} \beta &= 0, & 2 \operatorname{sen}^2 \beta &= 2 \\ \operatorname{sen} \theta &= \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}}, & \cos \theta &= \frac{u}{\sqrt{u^2 + 1}} \\ \operatorname{sen} r &= \frac{u-1}{\sqrt{2(u^2 + 1)}}, & \cos r &= \frac{u+1}{\sqrt{2(u^2 + 1)}}\end{aligned}$$

La representación ρ de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [8/3])$ en $SO(4)$ que corresponde al par de representaciones (ρ_1, ρ_2) en $SU(2)$, está dada por la siguiente expresión (ver la sección 4 del capítulo I):

$$\begin{aligned}\rho(a) &= \begin{pmatrix} 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen}^2 \theta & 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta & -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \cos r & \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} r \\ 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta & 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \theta & \operatorname{sen} \alpha \cos \theta \cos r & -\operatorname{sen} \alpha \cos \theta \operatorname{sen} r \\ \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \cos r & -\operatorname{sen} \alpha \cos \theta \cos r & 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 r & 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} r \cos r \\ -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} r & \operatorname{sen} \alpha \cos \theta \operatorname{sen} r & 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} r \cos r & 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen}^2 r \end{pmatrix}, \\ \rho(b) &= \begin{pmatrix} 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{sen}^2 \theta & -2 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta & \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \theta \cos r & \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} r \\ -2 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta & 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \theta & -\operatorname{sen} \beta \cos \theta \cos r & \operatorname{sen} \beta \cos \theta \operatorname{sen} r \\ -\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \theta \cos r & -\operatorname{sen} \beta \cos \theta \cos r & 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 r & -2 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{sen} r \cos r \\ -\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} r & -\operatorname{sen} \beta \cos \theta \operatorname{sen} r & -2 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{sen} r \cos r & 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{sen}^2 r \end{pmatrix},\end{aligned}$$

Podemos ahora sustituir aquí las expresiones que hemos encontrado antes para los senos y cosenos de α , β , θ y r en términos de u . Para facilitar los cálculos es conveniente en este momento conjugar ρ por la siguiente rotación de 90° :

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tras conjugar se llega a que el grupo de holonomía está generado por las rotaciones

$$B = \frac{1}{1+u^2} \cdot \begin{pmatrix} -2u & 1-u^2 & 0 & 0 \\ 1-u^2 & 2u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2u & u^2-1 \\ 0 & 0 & u^2-1 & 2u \end{pmatrix} \quad y$$

$$A = \frac{1}{2(1-6u^2+u^4)^2} \cdot (C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4)$$

donde las columnas C_i son:

$$C_1 = \begin{pmatrix} (1+u)^2(1-29u^2+64u^3-29u^4+u^6) \\ (1-u^2)(1+u^2)^3 \\ (1-u^4)\sqrt{u^8-28u^6+70u^4-28u^2+1} \\ -(u-1)^2(u^2+1)\sqrt{u^8-28u^6+70u^4-28u^2+1} \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} (1-u^2)(1+u^2)^3 \\ (u-1)^2(1-29u^2+64u^3-29u^4+u^6) \\ -(u+1)^2(u^2+1)\sqrt{u^8-28u^6+70u^4-28u^2+1} \\ (1-u^4)\sqrt{u^8-28u^6+70u^4-28u^2+1} \end{pmatrix}$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} (u^4-1)\sqrt{u^8-28u^6+70u^4-28u^2+1} \\ (u+1)^2(u^2+1)\sqrt{u^8-28u^6+70u^4-28u^2+1} \\ (u-1)^2(1-29u^2+64u^3-29u^4+u^6) \\ (1-u^2)(1+u^2)^3 \end{pmatrix}, \quad C_4 = \begin{pmatrix} (u-1)^2(u^2+1)\sqrt{u^8-28u^6+70u^4-28u^2+1} \\ (u^4-1)\sqrt{u^8-28u^6+70u^4-28u^2+1} \\ (1-u^2)(1+u^2)^3 \\ (1+u)^2(1-29u^2+64u^3-29u^4+u^6) \end{pmatrix}$$

Podemos construir ya el poliedro de Dirichlet \mathcal{P}_u centrado en $O = (0, 0, 0, 1) \in \mathbb{S}^3$, correspondiente a esta representación de holonomía para cada $u \in (1, \cot(3\pi/16)]$. Cuando $u = \cot(3\pi/16)$, \mathcal{P}_u es el dominio fundamental en forma de lente para la estructura de orbiforma esférica de ángulo π . Al proyectarlo desde el origen de \mathbb{R}^4 sobre el hiperplano $t = 1$, \mathcal{P}_u se ve como la capa infinita comprendida entre los dos planos horizontales $z = \pm \tan(\pi/16)$ en \mathbb{R}^3 . Cuando $1 < u < \cot(3\pi/16)$, los poliedros \mathcal{P}_u están contenidos en el hemisferio superior de \mathbb{S}^3 (es decir, todos sus puntos distan menos que $\pi/2$ del punto base $O = (0, 0, 0, 1)$). Podemos proyectarlos, pues, biyectivamente sobre el hiperplano $t = 1$ desde el origen de \mathbb{R}^4 , y los veremos entonces como poliedros euclídeos en \mathbb{R}^3 . Al construirlos con el programa Mathematica, resulta que todos ellos tienen el mismo tipo combinatorio. A continuación se muestra un dibujo de un poliedro genérico \mathcal{P}_u , con cada cara marcada con el correspondiente elemento de $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [8/3])$. Usamos las mismas notaciones que en el ejemplo anterior; por ejemplo, $w = bab^{-1}a^{-1}b^{-1}ab$ y $q = bab^{-1}a^{-1}b^{-1}$. La rotación de 180° en torno al eje z , $Z = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$,

es una simetría del poliedro. La singularidad está marcada en grueso: de manera continua donde el ángulo cónico es π , y con puntos donde el ángulo es α . Se observa que la componente del enlace singular en la que el ángulo cónico es π , aparece en el poliedro dividida en cinco segmentos, que están contenidos en los ejes de las siguientes rotaciones de 180° (conjugadas de B): B , $Q = (BA)B^{-1}(A^{-1}B^{-1})$, $A^{-1}QA = (A^{-1}BA)B^{-1}(A^{-1}B^{-1}A)$, $Q^Z = (B^{-1}A^{-1})B(AB)$ y $AQ^ZA^{-1} = (AB^{-1}A^{-1})B(ABA^{-1})$.

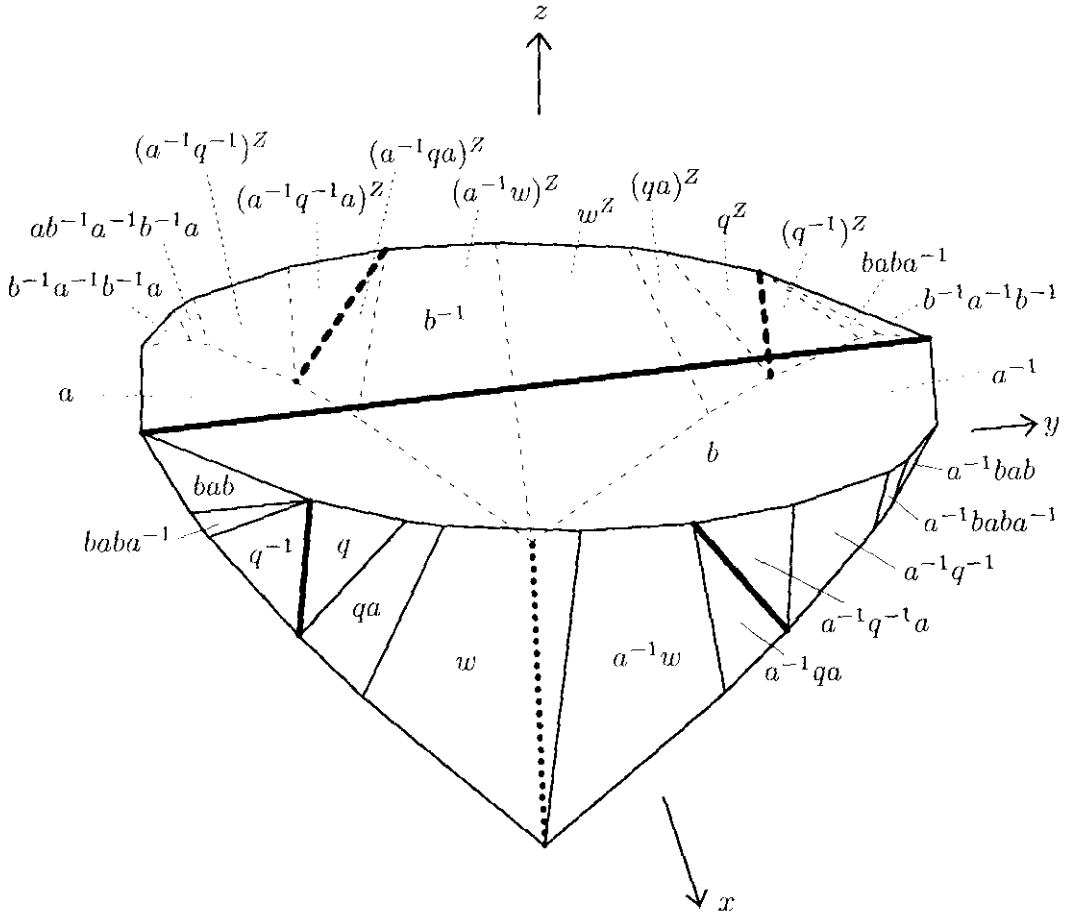


Figura 4

Todos los poliedros tienen 28 caras, correspondientes a los siguientes elementos del grupo $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [8/3])$: a , b , bab , $baba^{-1}$, $a^{-1}bab$, $q = bab^{-1}a^{-1}b^{-1}$, q^{-1} , $a^{-1}baba^{-1}$, qa , $a^{-1}q^{-1}$, $a^{-1}qa$, $a^{-1}q^{-1}a$, w , $a^{-1}w$, y los otros 14 que se obtienen a partir de éstos cambiando a por a^{-1} y b por b^{-1} . Hay 38 vértices, que son intersección de las siguientes caras:

$$v_1 = \mathcal{F}_a \cap \mathcal{F}_{a^{-1}} \cap \mathcal{F}_w \cap \mathcal{F}_{a^{-1}w}$$

$$v_{11} = \mathcal{F}_{a^{-1}} \cap \mathcal{F}_b \cap \mathcal{F}_{a^{-1}bab}$$

$$v_2 = \mathcal{F}_a \cap \mathcal{F}_b \cap \mathcal{F}_{b^{-1}} \cap \mathcal{F}_{bab}$$

$$v_{12} = \mathcal{F}_b \cap \mathcal{F}_{bab} \cap \mathcal{F}_{baba^{-1}} \cap \mathcal{F}_{q^{-1}} \cap \mathcal{F}_q$$

$$v_3 = \mathcal{F}_a \cap \mathcal{F}_{bab} \cap \mathcal{F}_{baba^{-1}}$$

$$v_{13} = \mathcal{F}_b \cap \mathcal{F}_q \cap \mathcal{F}_{qa}$$

$$v_4 = \mathcal{F}_a \cap \mathcal{F}_{baba^{-1}} \cap \mathcal{F}_{q^{-1}}$$

$$v_{14} = \mathcal{F}_b \cap \mathcal{F}_{qa} \cap \mathcal{F}_w$$

$$v_5 = \mathcal{F}_a \cap \mathcal{F}_q \cap \mathcal{F}_{q^{-1}} \cap \mathcal{F}_{qa}$$

$$v_{15} = \mathcal{F}_b \cap \mathcal{F}_w \cap \mathcal{F}_{a^{-1}w}$$

$$v_6 = \mathcal{F}_a \cap \mathcal{F}_{qa} \cap \mathcal{F}_w$$

$$v_{16} = \mathcal{F}_b \cap \mathcal{F}_{a^{-1}w} \cap \mathcal{F}_{a^{-1}qa} \cap \mathcal{F}_{a^{-1}q^{-1}a}$$

$$v_7 = \mathcal{F}_{a^{-1}} \cap \mathcal{F}_{a^{-1}w} \cap \mathcal{F}_{a^{-1}qa}$$

$$v_{17} = \mathcal{F}_b \cap \mathcal{F}_{a^{-1}qa} \cap \mathcal{F}_{a^{-1}q^{-1}}$$

$$v_8 = \mathcal{F}_{a^{-1}} \cap \mathcal{F}_{a^{-1}qa} \cap \mathcal{F}_{a^{-1}q^{-1}a} \cap \mathcal{F}_{a^{-1}q^{-1}}$$

$$v_{18} = \mathcal{F}_b \cap \mathcal{F}_{a^{-1}q^{-1}} \cap \mathcal{F}_{a^{-1}baba^{-1}}$$

$$v_9 = \mathcal{F}_{a^{-1}} \cap \mathcal{F}_{a^{-1}q^{-1}} \cap \mathcal{F}_{a^{-1}baba^{-1}}$$

$$v_{19} = \mathcal{F}_b \cap \mathcal{F}_{a^{-1}baba^{-1}} \cap \mathcal{F}_{a^{-1}bab}$$

$$v_{10} = \mathcal{F}_{a^{-1}} \cap \mathcal{F}_{a^{-1}baba^{-1}} \cap \mathcal{F}_{a^{-1}bab}$$

y los otros 19 que son imagen de éstos mediante la rotación Z de 180° .

Las identificaciones de las caras, aristas y vértices se comprueban sin dificultad de la manera habitual (hay que tener en cuenta que $H_{ab} \cap H_a = H_a \cap H_b$).

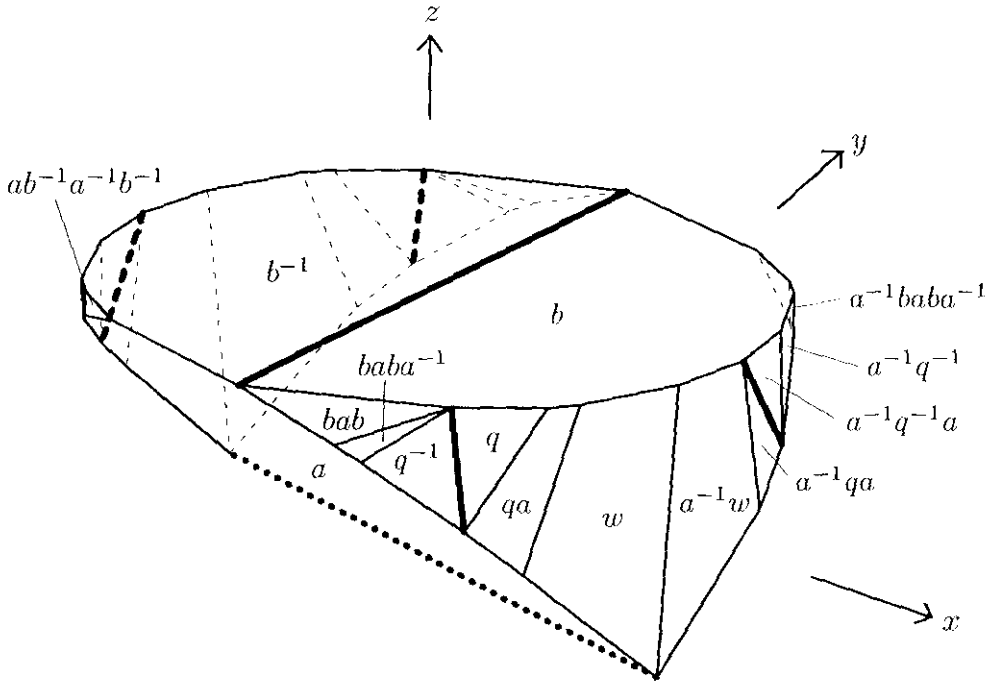
Para comprobar que el resultado de hacer las identificaciones es \mathbf{S}^3 y que la singularidad es el enlace de Whitehead, se puede proceder de la siguiente manera. Quitemos del poliedro un entorno de todas las aristas singulares, y denotemos por M la variedad (con borde) que se obtiene al pegar las caras del poliedro así truncado. Podemos calcular una presentación del grupo fundamental de M como se indica en la sección 5 del capítulo III: hay un generador por cada par de caras del poliedro, y las relaciones vienen dadas por los ciclos de identificaciones en torno a cada arista. Se comprueba que de esta presentación de $\pi_1(M)$ se puede pasar mediante movimientos de Tietze a la presentación estándar de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [8/3])$,

$$\{ a, b : a(bab^{-1}a^{-1}b^{-1}ab) = (bab^{-1}a^{-1}b^{-1}ab)a \}$$

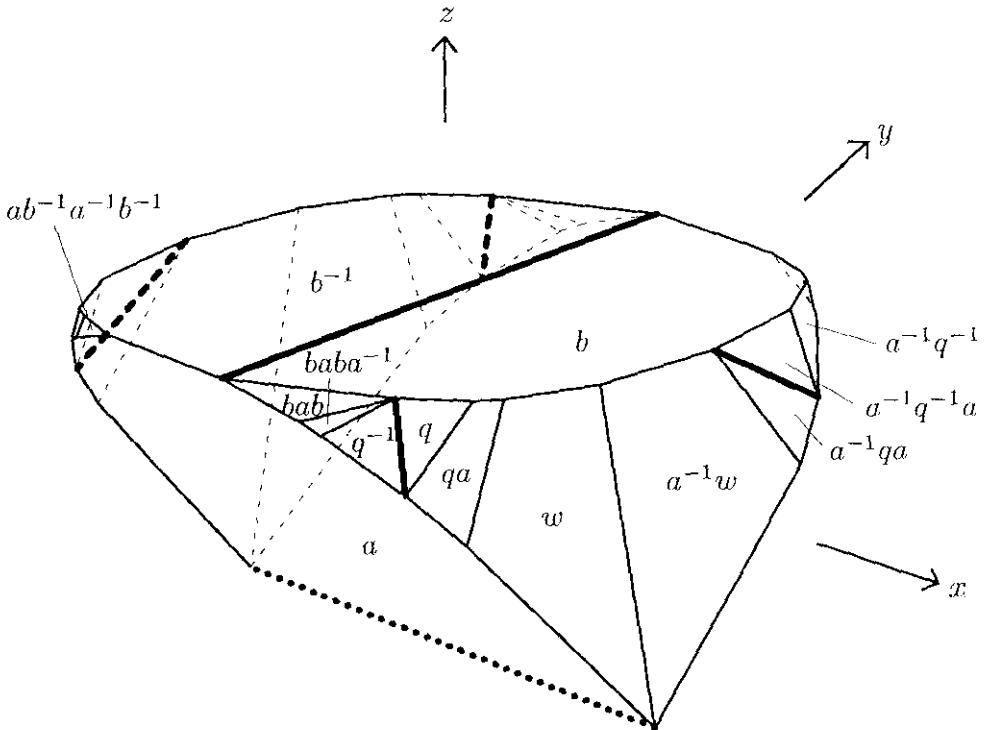
Se comprueba también que los grupos fundamentales de los dos toros que forman el borde de M son los subgrupos $\langle a , bab^{-1}a^{-1}b^{-1}ab \rangle$ y $\langle b , aba^{-1}b^{-1}a^{-1}ba \rangle$, respectivamente. Aplicando ahora el teorema de Waldhausen sobre clasificación de variedades Haken, resulta que M es homeomorfa a $\mathbf{S}^3 \setminus [8/3]$.

A continuación se muestran algunos de los poliedros de Dirichlet \mathcal{P}_u , cuando u varía entre $\cot(3\pi/16)$ y 1 :

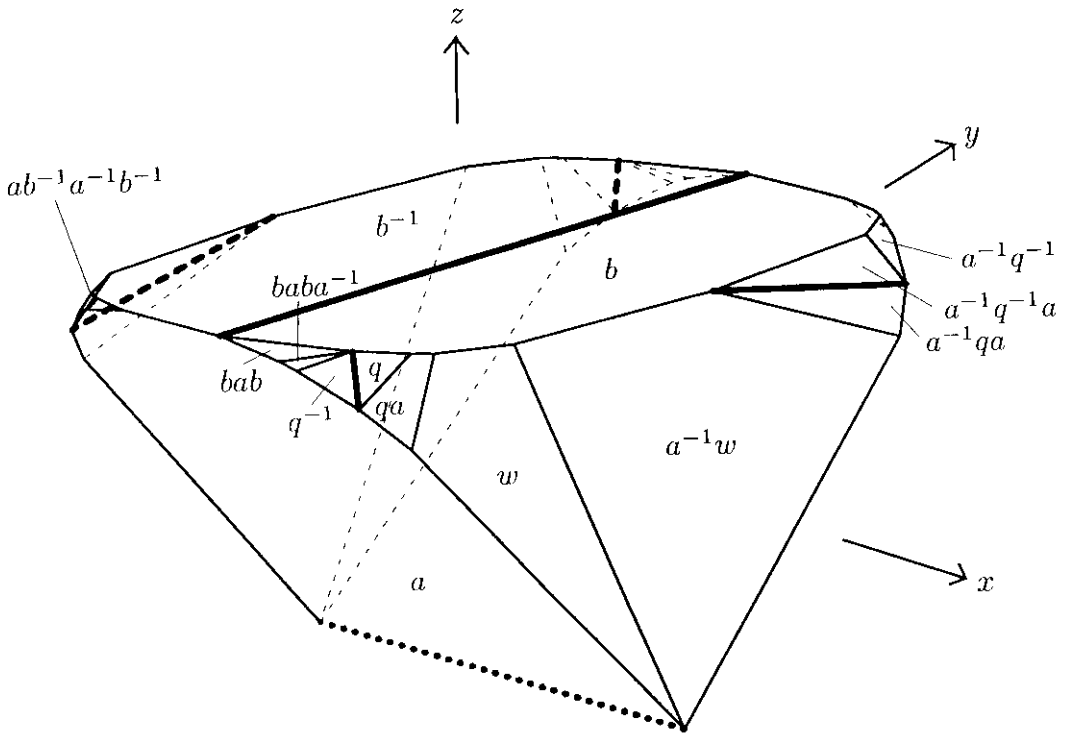
- $u = 1.4$:



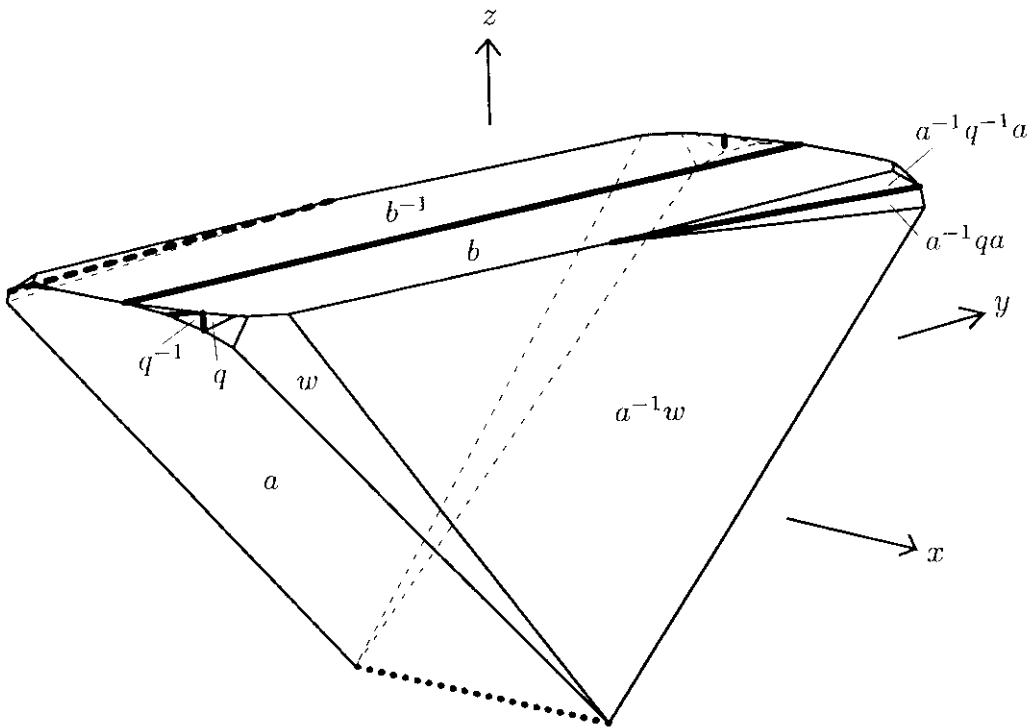
- $u = 1.3$:



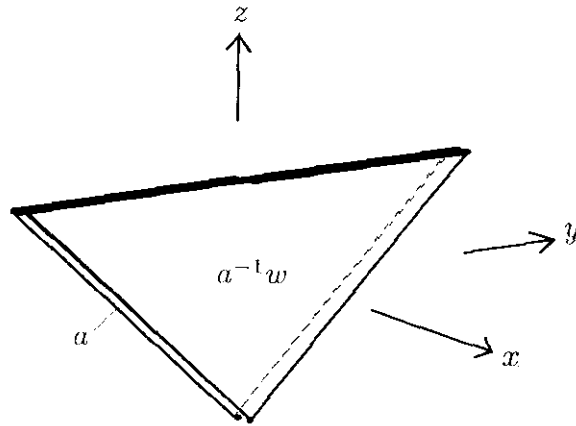
• $u = 1.2$:



• $u = 1.1$:



- $u = 1.01$:



- $u = 1.001$:



- $u = 1$: El poliedro degenera en un punto.

No vamos a escribir aquí explícitamente las ecuaciones de las caras ni las coordenadas de los vértices en función de u , debido a su complicación. Simplemente diremos que todos los vértices tienen coordenadas de la forma

$$((u-1)^2 f(u), (u-1)g(u), (u-1)h(u))$$

donde f, g, h son funciones de u (distintas para cada vértice), que están bien definidas cuando $1 \leq u \leq \cot(3\pi/16)$ (es decir, no se hacen infinito en ningún punto).

En consecuencia, cuando $u = 1$, los poliedros degeneran en el punto $O = (0, 0, 0)$. Cuando $u = 1$, el grupo de holonomía está generado por las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}} & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Si nos restringimos a la submatriz determinada por las dos filas y las dos columnas centrales, podemos identificar el grupo generado por A y B con un subgrupo discreto de $O(2)$.

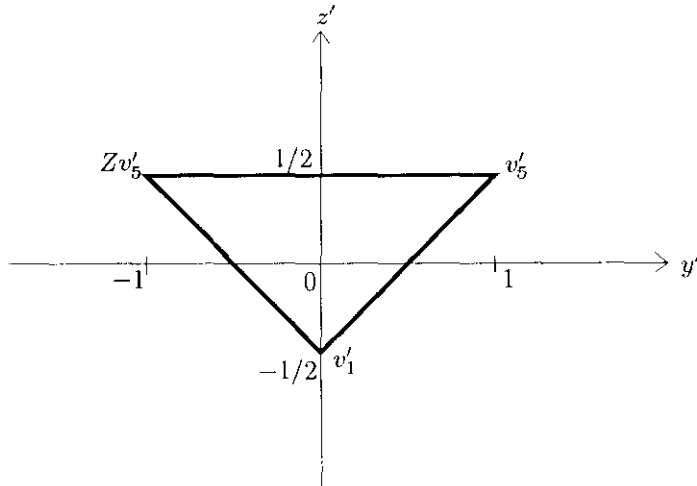
Supongamos que para cada $u \in (1, \cot(3\pi/16))$ hacemos el cambio de coordenadas

$$x' = \frac{x}{u-1}, y' = \frac{y}{u-1}, z' = \frac{z}{u-1}, t' = t$$

De este modo, para cada $u \in (1, \cot(3\pi/16))$ estaremos en el modelo $S^3_1/(u-1)$ de la semiesfera superior S^3_+ (véase la sección 4 del capítulo I). Cuando $u \rightarrow 1$, estos modelos tienden al hiperplano

$t = 1$, que se puede interpretar como un modelo de \mathbf{E}^3 . Pues bien, cuando $u \rightarrow 1$, los nuevos poliedros de Dirichlet dilatados \mathcal{P}'_u ya no degeneran en un punto, sino en un triángulo euclídeo contenido en el plano $x' = 0$ de \mathbf{E}^3 . Los vértices de este triángulo límite son:

$$v'_1 = (0, 0, -\frac{1}{2}) , v'_5 = (0, 1, \frac{1}{2}) , Zv'_5 = (0, -1, \frac{1}{2})$$



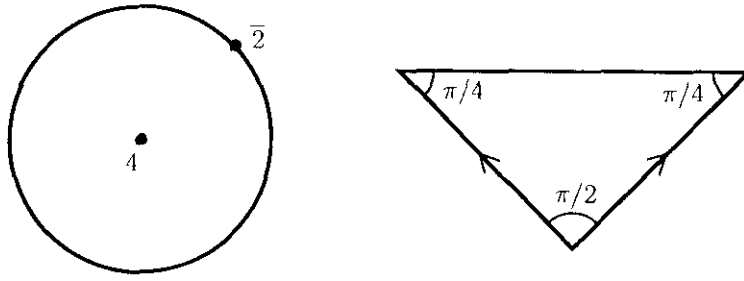
Es decir, en el límite aparece un triángulo isósceles euclídeo con ángulo recto en el vértice v'_1 . Cuando $u \rightarrow 1$, los nuevos grupos de holonomía tienden al subgrupo de isometrías euclídeas generado por:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 1/2 \\ -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} & & \\ & & & \end{pmatrix} , \quad B' = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Restringiéndonos a la submatriz determinada por las tres últimas filas y columnas, podemos identificar el grupo generado por A' y B' , con el subgrupo discreto G de $\text{Iso}(\mathbf{E}^2)$ generado por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 \\ -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La primera matriz representa una rotación de ángulo $\pi/2$ en torno al punto $(0, -1/2)$, y la segunda es la matriz de una reflexión en la recta $z' = 1/2$ (estamos considerando coordenadas (y', z') en \mathbf{E}^2). Este subgrupo $G < \text{Iso}(\mathbf{E}^2)$ es el grupo de holonomía de la orbiforma euclídea $D_{4; \sqrt{2}}$, cuyo espacio subyacente es un disco, y cuyos puntos singulares son un punto cónico de grupo de isotropía cíclico de orden 4 , y un punto esquina de grupo de isotropía diédrico de orden 4 .



Un dominio fundamental para esta 2-orbifold euclídea $D_{4;\overline{2}}$ es el triángulo isósceles de vértices $(0, 0, -\frac{1}{2})$, $(0, 1, \frac{1}{2})$, $(0, -1, \frac{1}{2})$, que aparecía como límite de los poliedros esféricos dilatados \mathcal{P}'_u cuando $u \rightarrow 1$.

Consideremos, por otra parte, la orbifold $(\mathbf{S}^3, [8/3], (\pi, \pi/2))$, cuyo espacio subyacente es \mathbf{S}^3 y cuya singularidad está formada por las dos componentes del enlace de Whitehead, con grupo de isotropía cíclico de orden 2 en una de ellas y cíclico de orden 4 en la otra. Se sabe que ésta es una orbifold fibrada de Seifert (cf. [BS], [Du]), cuya base es la 2-orbifold euclídea $D_{4;\overline{2}}$, y cuyo número de Euler es distinto de cero. Por tanto, se sabe que esta orbifold tiene una estructura geométrica de tipo Nil.

En la sección siguiente vamos a ver un modelo afín de la geometría Nil que nos permitirá encontrar un dominio fundamental poliédrico para esta estructura Nil en la orbifold $(\mathbf{S}^3, [8/3], (\pi, \pi/2))$, y que permitirá además pasar con continuidad de esta estructura Nil a las estructuras esféricas cónicas construidas en esta sección.

6. UN MODELO AFÍN DE LA GEOMETRÍA NIL, QUE MUESTRA LA DEGENERACIÓN DEL EJEMPLO 4

Vamos a definir el grupo de Lie Nil como el siguiente grupo de matrices 4×4 triangulares superiores:

$$Nil = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -z & y & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbf{R} \right\}$$

con el producto usual de matrices. Como

$$\begin{pmatrix} 1 & -c & b & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -z & y & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -(z+c) & y+b & x-cy+bz+a \\ 0 & 1 & 0 & y+b \\ 0 & 0 & 1 & z+c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

resulta que si identificamos Nil con \mathbf{R}^3 de la manera natural, entonces el producto se escribe así:

$$(a, b, c)(x, y, z) = (x - cy + bz + a, y + b, z + c)$$

Observación. La manera usual de definir Nil es como el grupo de Heisenberg

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & \beta & \alpha \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R} \right\}$$

con la multiplicación de matrices.

Para pasar de este modelo estándar de Nil al que acabamos de definir, hacemos el siguiente cambio de coordenadas (cf. [Sc]):

$$\alpha = x + yz, \quad \beta = \sqrt{2}y, \quad \gamma = \sqrt{2}z$$

Puesto que

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}b & a + bc \\ 0 & 1 & \sqrt{2}c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}y & x + yz \\ 0 & 1 & \sqrt{2}z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}(y + b) & x + yz + 2bz + a + bc \\ 0 & 1 & \sqrt{2}(z + c) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}(y + b) & (x - cy + bz + a + bc) + (y + b)(z + c) \\ 0 & 1 & \sqrt{2}(z + c) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

resulta que en las nuevas coordenadas (x, y, z) , el producto se escribe precisamente como en nuestro modelo:

$$(a, b, c)(x, y, z) = (x - cy + bz + a, y + b, z + c)$$

En el grupo $Nil = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -z & y & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbf{R} \right\}$ vamos a considerar la siguiente métrica

invariante por multiplicación a la izquierda:

$$ds^2 = (dx + z dy - y dz)^2 + 2 dy^2 + 2 dz^2$$

Entonces se puede probar (cf. [Sc]) que el grupo de isometrías de Nil con esta métrica tiene dos componentes conexas. La componente de la identidad, $Iso_0(Nil)$, es el grupo de dimensión 4 generado por el propio Nil (actuando sobre sí mismo por multiplicación a la izquierda) y por la acción de S^1 en Nil descrita por la siguiente fórmula:

$$(x, y, z) \rightarrow (x, \cos \theta y - \operatorname{sen} \theta z, \operatorname{sen} \theta y + \cos \theta z)$$

Las restantes isometrías son composición de los elementos de $\text{Iso}_0(\text{Nil})$ con la transformación

$$(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$$

Vamos ahora a identificar Nil con el hiperplano $t = 1$ de \mathbf{R}^4 , de la manera natural:

$$\text{Nil} = \{(x, y, z, 1) \mid x, y, z \in \mathbf{R}\}$$

Entonces todas las isometrías de Nil son las restricciones a este hiperplano de ciertas transformaciones lineales de \mathbf{R}^4 que lo preservan (es decir, de ciertas afinidades). En efecto, la multiplicación por la izquierda por un elemento $(a, b, c) \in \text{Nil}$, $(a, b, c)(x, y, z) = (x - cy + bz + a, y + b, z + c)$, corresponde a la aplicación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -c & b & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

La isometría $(x, y, z) \rightarrow (x, \cos \theta y - \text{sen } \theta z, \text{sen } \theta y + \cos \theta z)$ corresponde a la aplicación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ 0 & \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Todas las matrices de la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ 0 & \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $\theta \in \mathbf{R}$, pertenecen al normalizador del

grupo $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -c & b & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$. Por tanto, la componente de la identidad de $\text{Iso}(\text{Nil})$ es

el grupo

$$\text{Iso}_0(\text{Nil}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -c & b & a \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen } \theta & b \cos \theta - c \text{sen } \theta \\ 0 & \text{sen } \theta & \cos \theta & b \text{sen } \theta + c \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c, \theta \in \mathbf{R} \right\}$$

La otra componente de $\text{Iso}(\text{Nil})$ está formada por las matrices de la forma

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & c & -b & -a \\ 0 & -\cos \theta & \text{sen } \theta & -b \cos \theta + c \text{sen } \theta \\ 0 & \text{sen } \theta & \cos \theta & b \text{sen } \theta + c \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c, \theta \in \mathbf{R} \right\}$$

Hemos encontrado, pues, un modelo afin de la geometría Nil , ya que en él las isometrías de Nil son ciertas afinidades de \mathbf{R}^3 . En particular, toda estructura geométrica de tipo Nil en una 3-variedad (resp. 3-orbiforma) tiene asociada una estructura afin en la misma variedad (resp. orbiforma); compárese [Thu₂].

Degeneración de estructuras esféricas en una estructura Nil.

Para cada $k > 0$, vamos a considerar el siguiente modelo de la semiesfera superior S_+^3 :

$$\widehat{S}_k^+ = \{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid k^4 x^2 + k^2(y^2 + z^2) + t^2 = 1, t > 0 \},$$

con la métrica inducida por la forma cuadrática $\begin{pmatrix} k^4 & & & \\ & k^2 & & \\ & & k^2 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ de \mathbf{R}^4 . Del modelo estándar de S_+^3

se pasa a este modelo \widehat{S}_k^+ mediante el cambio de coordenadas $x' = x/k^2$, $y' = y/k$, $z' = z/k$, $t' = t$.

Cuando $k \rightarrow 0$, los conjuntos \widehat{S}_k^+ se aproximan al hiperplano $Nil = \{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid t = 1 \}$, y las isometrías de Nil se pueden obtener como límite de isometrías (esféricas) de \widehat{S}_k^+ cuando k tiende a cero. De hecho, supongamos que para cada $k > 0$ tenemos una isometría de S^3 , $M_k = (m_{ij}(k))$, y que cuando $k \rightarrow 0$, las matrices M_k tienden a una matriz de la forma

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{matrix}} & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

donde $\theta \in \mathbf{R}$. Supongamos además que existen $\lambda_{1j} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{m_{1j}(k)}{k^2} \in \mathbf{R}$ y $\mu_{i4} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{m_{i4}(k)}{k} \in \mathbf{R}$ para $i = 2, 3$ y $j = 2, 3, 4$. Para cada $k > 0$, denotemos por M'_k la matriz conjugada

$$M'_k = \begin{pmatrix} 1/k^2 & & & \\ & 1/k & & \\ & & 1/k & \\ & & & 1 \end{pmatrix} M_k \begin{pmatrix} k^2 & & & \\ & k & & \\ & & k & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces M'_k es una isometría esférica en el modelo \widehat{S}_k^+ , y el límite de las matrices M'_k cuando $k \rightarrow 0$ es

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen } \theta & \mu_{24} \\ 0 & \text{sen } \theta & \cos \theta & \mu_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $\lambda_{12} = \mu_{24} \operatorname{sen} \theta - \mu_{34} \cos \theta$ y $\lambda_{13} = \mu_{24} \cos \theta + \mu_{34} \operatorname{sen} \theta$, entonces M' es una isometría de Nil .

Observación. De manera análoga se pueden construir familias de modelos del espacio euclídeo E^3 o del espacio hiperbólico H^3 , que tienden a Nil , de modo que las isometrías de Nil se pueden obtener como límite de isometrías (euclídeas o hiperbólicas, respectivamente) de estos modelos. Es de esperar, pues, que se puedan producir degeneraciones de familias de estructuras euclídeas o hiperbólicas cónicas en una estructura Nil (como de hecho se producen).

El ejemplo de la orbiforma $(S^3, [8/3], (\pi, \pi/2))$

Volvamos al ejemplo 4, en el que habíamos construido una familia uniparamétrica de estructuras esféricas cónicas $(S^3, [8/3], (\pi, \alpha))$. La singularidad es el enlace de Whitehead, el ángulo cónico en una de las dos componentes es constantemente igual a π , y el ángulo cónico α en la otra componente varía entre $\pi/2$ y π . Estas estructuras cónicas varían de manera continua según un parámetro $u \in (1, \cot(3\pi/16))$, de modo que cuando $u \rightarrow \cot(3\pi/16)$, $\alpha \rightarrow \pi$, y cuando $u \rightarrow 1$, $\alpha \rightarrow \pi/2$. Cuando $\alpha \rightarrow \pi/2$, las estructuras esféricas cónicas degeneran en un punto. Por otra parte, se sabe que la orbiforma $(S^3, [8/3], (\pi, \pi/2))$ admite una estructura geométrica de tipo Nil .

En el ejemplo 4 describimos esta familia de estructuras esféricas cónicas mediante sus poliedros de Dirichlet \mathcal{P}_u con centro en $O = (0, 0, 0, 1) \in S^3$. Cuando $u \in (1, \cot(3\pi/16))$, todos los poliedros \mathcal{P}_u están contenidos en la semiesfera superior S^3_+ , y los podemos proyectar biyectivamente desde el origen de \mathbf{R}^4 sobre el hiperplano $t = 1$, para verlos como poliedros euclídeos en \mathbf{R}^3 . Sus vértices tienen entonces coordenadas de la forma

$$((u-1)^2 f(u), (u-1)g(u), (u-1)h(u))$$

donde f , g , h son funciones de u (distintas para cada vértice) que están bien definidas cuando $1 \leq u \leq \cot(3\pi/16)$.

A la vista de estas observaciones, vamos a hacer ahora el cambio de coordenadas

$$x' = \frac{x}{(u-1)^2}, \quad y' = \frac{y}{u-1}, \quad z' = \frac{z}{u-1}$$

para cada $u \in (1, \cot(3\pi/16))$. De esta forma pasamos del modelo estándar de S^3_+ al modelo $\widehat{S}^3_{u-1} = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid (u-1)^4 x^2 + (u-1)^2 (y^2 + z^2) + t^2 = 1, t > 0\}$. Denotemos por $\widehat{\mathcal{P}}_u$ la imagen del poliedro \mathcal{P}_u mediante este cambio de coordenadas.

Entonces cuando $u \rightarrow 1$, los nuevos poliedros $\widehat{\mathcal{P}}_u$ ya no degeneran en un punto, sino que convergen

a un verdadero poliedro $\widehat{\mathcal{P}}_1$ en \mathbb{R}^3 , cuyos vértices son:

$$\begin{aligned} v_1 &= (-4, 0, -\frac{1}{2}) & , & & v_8 &= (-\frac{7}{2}, -1, \frac{1}{2}) \\ v_2 &= (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}) & , & & v_{15} &= (-4, 1, \frac{1}{2}) \\ v_6 &= (-3, 1, \frac{1}{2}) & , & & v_{17} &= (-3, -1, \frac{1}{2}) \\ v_7 &= (-4, -1, \frac{1}{2}) & , & & & \end{aligned}$$

y las imágenes de éstos mediante la rotación Z de 180° .

De hecho, los vértices de $\widehat{\mathcal{P}}_u$ tienden a los siguientes puntos de $\widehat{\mathcal{P}}_1$:

$$\begin{aligned} v_1 &= (-4, 0, -\frac{1}{2}) & , & & v_{11} &= (-\frac{3}{2}, -1, \frac{1}{2}) \\ v_2 &= (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}) & , & & v_{12} &= (-\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2}) \\ v_3 &= (-\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}) & , & & v_{13} &= (-\frac{71}{22}, 1, \frac{1}{2}) \\ v_4 &= (-\frac{39}{22}, 1, \frac{1}{2}) & , & & v_{14} &= (-\frac{7}{2}, 1, \frac{1}{2}) \\ v_5 &= (-\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2}) & , & & v_{15} &= (-4, 1, \frac{1}{2}) \\ v_6 &= (-3, 1, \frac{1}{2}) & , & & v_{16} &= (-4, 0, \frac{1}{2}) \\ v_7 &= (-4, -1, \frac{1}{2}) & , & & v_{17} &= (-3, -1, \frac{1}{2}) \\ v_8 &= (-\frac{7}{2}, -1, \frac{1}{2}) & , & & v_{18} &= (-\frac{5}{2}, -1, \frac{1}{2}) \\ v_9 &= (-\frac{61}{22}, -1, \frac{1}{2}) & , & & v_{19} &= (-\frac{49}{22}, -1, \frac{1}{2}) \\ v_{10} &= (-\frac{5}{2}, -1, \frac{1}{2}) & , & & & \end{aligned}$$

El grupo de holonomía tiende, cuando $u \rightarrow 1$, al grupo generado por las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que son ambas isometrías de Nil , en el modelo que definimos antes. Se verifica que $AW = WA$, donde $W = BAB^{-1}A^{-1}B^{-1}AB$, y además $A^4 = B^2 = I$. Tenemos, pues, una representación del grupo fundamental de la orbiforma $(\mathbb{S}^3, [8/3], (\pi, \pi/2))$, $\pi_1^{orb}(\mathbb{S}^3, [8/3], (\pi, \pi/2)) = \{a, b : aw = wb, a^4 = b^2 = 1\}$, en $Iso(Nil)$.

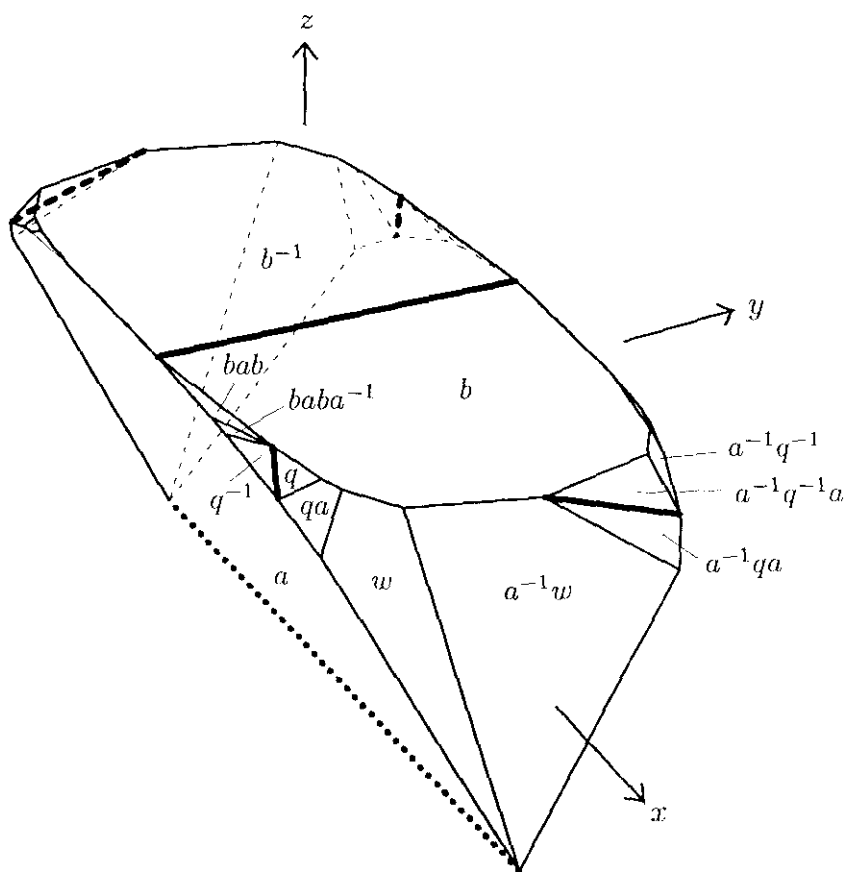
Las caras del poliedro límite $\widehat{\mathcal{P}}_1$ se identifican dos a dos mediante transformaciones del grupo engendrado por A y B , de igual manera que las caras de los poliedros $\widehat{\mathcal{P}}_u$. (Es decir, si cuando $u > 1$,

el vértice v_i se identificaba con el vértice v_j mediante una transformación de pegado $\rho_u(\gamma)$, entonces en el límite, cuando $u = 1$, se sigue produciendo la misma identificación).

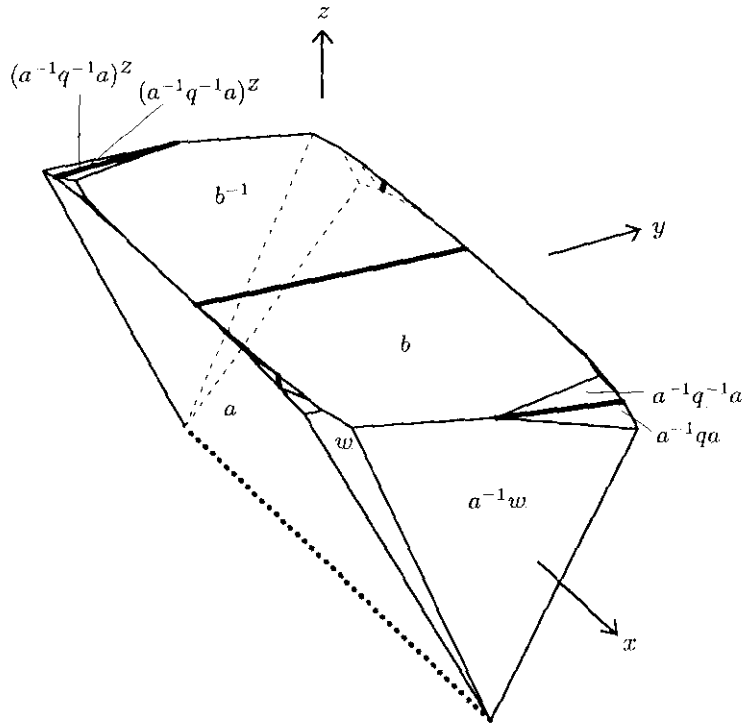
A continuación se muestran dos de los poliedros $\widehat{\mathcal{P}}_u$ con $u > 1$ próximo a 1, y el poliedro límite $\widehat{\mathcal{P}}_1$. De este último damos dos dibujos, desde dos puntos de vista distintos. En el segundo dibujo se indica, con flechas, cómo son las identificaciones en las aristas.

Observación. Las caras del poliedro límite $\widehat{\mathcal{P}}_1$ no son superficies totalmente geodésicas en la geometría Nil.

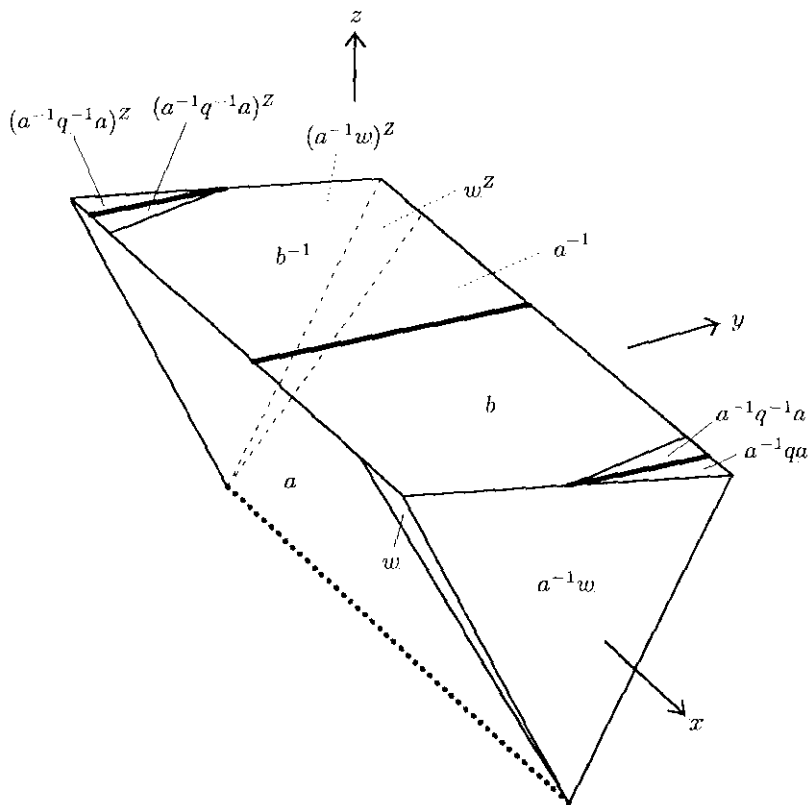
- $u = 1.2$ (poliedro visto desde el punto $(-15, 4, 2)$) :



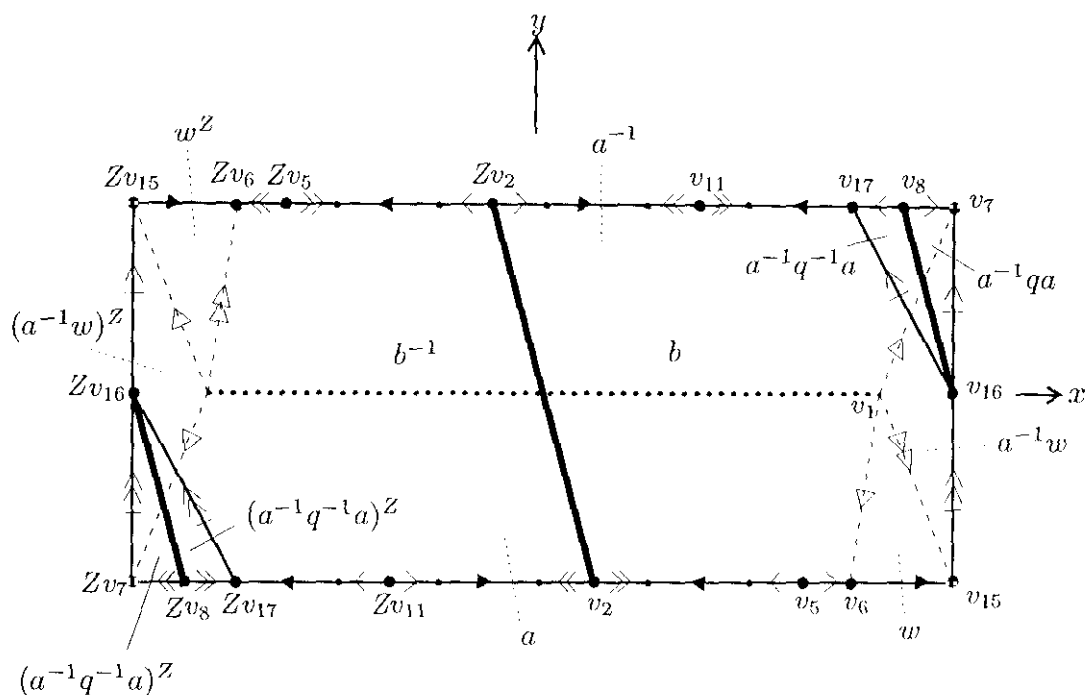
- $u = 1.1$ (poliedro visto desde el punto $(-15, 4, 2)$) :



- $u = 1$ (poliedro visto desde el punto $(-15, 4, 2)$) :



- $u = 1$ (poliedro visto desde el punto $(0, 0, 1)$) :



Para comprobar que las identificaciones en el poliedro límite $\widehat{\mathcal{P}}_1$ dan como resultado \mathbb{S}^3 , y que la singularidad es el enlace de Whitehead, se puede utilizar el mismo argumento que en el ejemplo 4, y observar que hay dos diagramas de Heegaard equivalentes para las variedades obtenidas a partir de $\widehat{\mathcal{P}}_1$ y a partir de cualquier otro $\widehat{\mathcal{P}}_u$ ($u > 1$), respectivamente.

El poliedro $\widehat{\mathcal{P}}_1$ es, pues, un dominio fundamental para la estructura geométrica de tipo Nil en la orbiforma $(\mathbb{S}^3, [8/3], (\pi, \pi/2))$. Las intersecciones de $\widehat{\mathcal{P}}_1$ con las rectas paralelas al eje x se convierten, al hacer las identificaciones, en las fibras de la fibración de Seifert de esta orbiforma. Se observa que todas las fibras contenidas en el plano $z = 1/2$ son segmentos que unen dos puntos de la componente singular de ángulo π , mientras que las demás son círculos. El eje de la rotación A (es decir, la componente singular de ángulo $\pi/2$) es la fibra excepcional de orden 4.

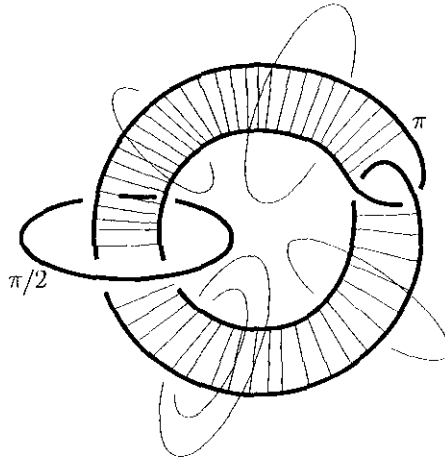


Figura 5. Fibración de Seifert de la orbiforma $(\mathbf{S}^3, [8/3], (\pi, \pi/2))$.

Así pues, a cada estructura esférica cónica $(\mathbf{S}^3, [8/3], (\pi, \alpha))$ le hemos asociado una cierta estructura proyectiva real (singular), de modo que cuando α tiende a $\pi/2$, esa familia uniparamétrica de estructuras proyectivas reales converge a una estructura afin en la orbiforma $(\mathbf{S}^3, [8/3], (\pi, \pi/2))$. Además, la estructura afin límite está asociada de manera natural a la estructura geométrica de tipo Nil en dicha orbiforma. De nuevo, surge de forma natural la siguiente pregunta acerca de la generalidad de este fenómeno.

Pregunta. Supongamos que M es una variedad geométrica cónica de tipo Nil, con singularidad un enlace $\Sigma \subset M$ y ángulos cónicos $< 2\pi$. Denotemos por M_{Nil} esta estructura cónica Nil. Supongamos además que existe una familia de estructuras cónicas esféricas (resp. hiperbólicas o euclídeas) en M , con singularidad Σ y ángulos cónicos que tienden a los de M_{Nil} . ¿Se pueden asociar a estas estructuras cónicas esféricas (resp. hiperbólicas o euclídeas), estructuras proyectivas reales (singulares) que converjan a una estructura afin en M_{Nil} , asociada a su geometría Nil?

Capítulo III

POLIEDROS DE DIRICHLET DE VARIEDADES CÓNICAS

INTRODUCCIÓN

En este capítulo se demuestra la existencia de poliedros de Dirichlet para cualquier variedad cónica hiperbólica, euclídea o esférica compacta M cuyos ángulos cónicos sean todos $< 2\pi$ (cf. § 1.6). Este teorema ha sido utilizado, sin demostración completa, por Hodgson ([Ho₂]), Kojima ([Ko]) y Zhou ([Zh]) (el argumento más cercano a una demostración está en [Ho₂]; en [Zh] se da un razonamiento bastante incompleto). En este capítulo daremos una demostración detallada de este resultado. Los detalles de la demostración son importantes porque tienen consecuencias de carácter constructivo, que en el capítulo siguiente permitirán estudiar las deformaciones de estructuras cónicas utilizando poliedros de Dirichlet. Más abajo indicaremos a qué detalles de la demostración nos referimos aquí concretamente.

Recordemos la explicación intuitiva de los poliedros de Dirichlet, que dimos en la sección 6 del capítulo I. Denotemos por $\Sigma \subset M$ el enlace singular, y sea $x_0 \in M \setminus \Sigma$ un punto base arbitrario. La cubierta universal del complemento de la singularidad, $\widetilde{M \setminus \Sigma}$, hereda una estructura de variedad hiperbólica, euclídea o esférica (no completa), de modo que el grupo fundamental $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$ actúa en ella como un grupo discreto de isometrías, y $M \setminus \Sigma$ es isométrica al cociente de $\widetilde{M \setminus \Sigma}$ bajo la acción de $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$. Si \tilde{x}_0 es un levantamiento cualquiera de x_0 a $\widetilde{M \setminus \Sigma}$, entonces podemos considerar el dominio de Dirichlet centrado en \tilde{x}_0 , para esta acción discreta de $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$:

$$\tilde{\mathcal{P}} = \{ \tilde{x} \in \widetilde{M \setminus \Sigma} \mid d(\tilde{x}, \tilde{x}_0) \leq d(\tilde{x}, \gamma \tilde{x}_0) \text{ , para todo } \gamma \in \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0) \} \subset \widetilde{M \setminus \Sigma}$$

Sea ahora $D : \widetilde{M \setminus \Sigma} \rightarrow X$ una aplicación desarrolladora (donde X denota \mathbf{H}^3 , \mathbf{E}^3 o \mathbf{S}^3 , respectivamente), sea $\rho : \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0) \rightarrow \text{Iso}(X)$ la correspondiente holonomía, y sea $O = D(\tilde{x}_0)$. Entonces el *poliedro de Dirichlet* de M centrado en O es la clausura de la imagen de $\tilde{\mathcal{P}}$ por D :

$$\mathcal{P} = \overline{D(\tilde{\mathcal{P}})}$$

En este capítulo vamos a probar que este poliedro de Dirichlet \mathcal{P} es un poliedro (hiperbólico, euclídeo o esférico) compacto, con un número finito de caras. Para ello, siguiendo a [Ho₂], [Ko] y [Zh], veremos

que el interior de \tilde{P} es un levantamiento a $\widetilde{M \setminus \Sigma}$ de la fractura o “cut-locus” de M con respecto al punto base x_0 . (Esto es cierto porque todos los ángulos cónicos son $< 2\pi$, y por tanto todo punto de $M \setminus \Sigma$ se puede unir al punto base x_0 por una geodésica totalmente contenida en $M \setminus \Sigma$, cf. lema 1.1. Si algún ángulo cónico fuera $> 2\pi$, entonces habría puntos de $M \setminus \Sigma$ que no se podrían alcanzar desde x_0 por geodésicas contenidas en $M \setminus \Sigma$.) En la literatura se define directamente el poliedro de Dirichlet de una variedad cónica M como el desarrollo (en el espacio modelador X) del complementario del cut-locus de M con respecto al punto base elegido. Ésta es también la definición con la que trabajaremos en este capítulo, puesto que es la más adecuada para hacer demostraciones. Sin embargo, conviene tener presente la definición equivalente anterior (en términos del dominio de Dirichlet \tilde{P} en la cubierta universal), que conceptualmente es más fácil.

En la sección 1 de este capítulo se define la fractura o cut-locus de una variedad cónica con ángulos cónicos $< 2\pi$, con respecto a un punto no singular arbitrario, y se demuestra que es homeomorfo a una bola abierta. En la sección 2 se prueba que \tilde{P} tiene un número finito de caras, es decir, que el conjunto

$$\bar{\Gamma} = \{ \gamma \in \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0) \mid \tilde{P} \cap \gamma\tilde{P} \neq \emptyset, \gamma \neq 1 \}$$

es finito (cf. lema 2.4). (Obsérvese que a cada cara de \tilde{P} le corresponde el elemento γ de $\bar{\Gamma}$ tal que $\gamma\tilde{P}$ es adyacente a \tilde{P} a lo largo de esa cara.) De aquí se deduce que \mathcal{P} es un poliedro compacto con un número finito de caras, cuyo borde está contenido en la unión finita de hiperplanos bisectores $H_\gamma = \{ x \in X \mid d(x, O) = d(x, \rho\gamma(O)) \}$, $\gamma \in \bar{\Gamma}$. La variedad cónica M se obtiene identificando dos a dos las caras de \mathcal{P} mediante isometrías de la forma $\rho\gamma$, donde $\gamma \in \bar{\Gamma}$ (cf. lema 2.9). En la sección 3 se demuestra que, cuando todos los ángulos cónicos son $\leq \pi$, el poliedro de Dirichlet \mathcal{P} es convexo, y se puede expresar como

$$\mathcal{P} = \{ x \in X \mid d(x, O) \leq d(x, \rho\gamma(O)) \text{ , para todo } \gamma \in \bar{\Gamma} \}$$

En la sección 4 se prueba que, incluso si los ángulos cónicos son $< 2\pi$, el poliedro \mathcal{P} es localmente convexo fuera de los puntos singulares, es decir, todo punto no singular del borde de \mathcal{P} tiene un entorno U en X tal que $U \cap \mathcal{P}$ es convexo (cf. lema 4.1).

Llamaremos a los elementos del subconjunto finito $\bar{\Gamma}$ de $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$, *facetas generales* del poliedro de Dirichlet \mathcal{P} . La justificación de este nombre es la siguiente: cada elemento $\gamma \in \bar{\Gamma}$ tiene asociado, como dijimos antes, un hiperplano bisector H_γ que toca al borde del poliedro \mathcal{P} en algún punto no singular. A veces este hiperplano H_γ determina una cara de \mathcal{P} (y en ese caso decimos que γ es una *faceta propia*), pero otras veces H_γ no define ninguna cara de \mathcal{P} , sino que “bascula” sobre una arista o un vértice no singular (y en ese caso decimos que γ es una *faceta fantasma*).

Como una consecuencia particular de la demostración de existencia de poliedros de Dirichlet, se obtiene una caracterización de las facetas generales en términos de las geodésicas que minimizan la distancia entre el punto base x_0 y los puntos no singulares de M . Esta caracterización es la que tendrá importancia en el capítulo siguiente, para demostrar el algoritmo que permite construir los poliedros de Dirichlet de estructuras cónicas suficientemente próximas a una dada (en un sentido que se precisará en la sección § IV.1).

Finalmente, en las tres últimas secciones de este capítulo III se incluyen algunas observaciones y ejemplos mencionados en los capítulos I y II. En la sección 5 se describe una presentación del grupo $\pi_1(M \setminus \Sigma)$ asociada al poliedro de Dirichlet \mathcal{P} , que puede ser útil para comprobar (utilizando el teorema de Waldhausen, cf. [Ri₁]) que el resultado de pegar las caras del poliedro es la variedad buscada. En la sección 6 se estudia el ejemplo de la estructura de orbiforma esférica en S^3 con singularidad un nudo o enlace de dos puentes y ángulo cónico π , que tiene importancia en las construcciones concretas del capítulo II, como punto de partida para las deformaciones de los poliedros de Dirichlet. Por último, en la sección 7 se demuestra que todas las simetrías de la variedad cónica que fijan el punto base del poliedro de Dirichlet, quedan reflejadas como simetrías del poliedro. Esta observación, interesante en si misma, es además útil para las construcciones prácticas.

1. FRACTURA O "CUT-LOCUS" DE UNA VARIEDAD CÓNICA

Sea M una 3-variedad cónica hiperbólica, euclídea o esférica compacta, con singularidad un enlace $\Sigma \subset M$ y ángulo cónico $< 2\pi$ en cada componente conexa de Σ . La estructura geométrica induce en M una distancia d , definida como el ínfimo de las longitudes de todas las curvas que unen dos puntos de M . Diremos que una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ es una *geodésica minimizante* en M si su longitud es $\text{long}(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b))$. Una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ es una *geodésica* si minimiza la longitud localmente. Diremos que una geodésica minimizante $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ es una *geodésica minimizante maximal* si no existe ninguna otra geodésica minimizante $\gamma : [a, c] \rightarrow M$ ($c > b$) que extienda a γ . (Como M es compacta, cualquier geodésica minimizante maximal está definida en un intervalo compacto). Normalmente consideraremos que las geodésicas minimizantes están definidas en el intervalo $[0, 1]$ y que están parametrizadas proporcionalmente a la longitud de arco.

Por ser M compacta, siempre existe una geodésica minimizante que une dos puntos cualesquiera $x, y \in M$, incluso si son singulares (cf. [Gro, §1.12, pág. 6]). El punto clave es que, cuando todos los ángulos cónicos son $< 2\pi$, una geodésica minimizante no puede atravesar nunca la singularidad

(éste es el lema siguiente). Por tanto, si una geodésica minimizante no está totalmente contenida dentro de la singularidad, entonces puede empezar o terminar en puntos singulares, pero entre medias es un arco geodésico suave dentro de la variedad riemanniana $M \setminus \Sigma$. En particular, dos puntos no singulares cualesquiera $x, y \in M \setminus \Sigma$ están unidos por una geodésica minimizante suave contenida en $M \setminus \Sigma$.

Lema 1.1. Sean $x \in M \setminus \Sigma$, $y \in M$ dos puntos distintos, y sea $\gamma : [0, b] \rightarrow M$ una geodésica minimizante tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(b) = y$. Entonces $\gamma([0, b]) \subset M \setminus \Sigma$.

Demostración. Supongamos que fuera $\gamma(t) \in \Sigma$ para algún $t \in (0, b)$. Sea $z = \gamma(t_0) \in \Sigma$ el primer punto en que γ corta a la singularidad. Entonces z tiene un entorno U en M que es isométrico a un abierto del espacio que se obtiene identificando por rotación las dos caras de un diedro de ángulo $\theta < 2\pi$ en \mathbb{H}^3 (resp. \mathbb{S}^3 , \mathbb{E}^3). Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, $\gamma([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]) \subset U$, y $\gamma(t_0 - \epsilon) \notin \Sigma$. Entonces existe un segmento que une $\gamma(t_0 - \epsilon)$ con $\gamma(t_0 + \epsilon)$ dentro de U sin pasar por z y que es más corto que $\gamma|_{[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]}$ (ver figura 1). Esto contradice que γ sea una geodésica minimizante. \square

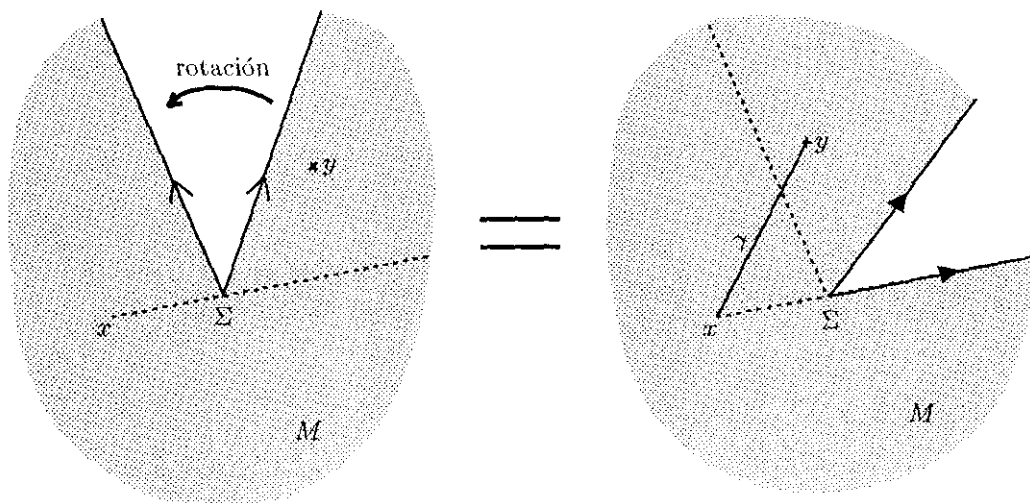


Figura 1

Otro punto importante es la siguiente propiedad de convergencia de sucesiones de geodésicas minimizantes en M , que se deduce del teorema de Ascoli y de la compacidad de M (ver [Gro, pág. 6]).

Lema 1.2. Sea $\gamma_n : [0, 1] \rightarrow M$ una sucesión de geodésicas minimizantes en M , parametrizadas proporcionalmente a la longitud de arco. Entonces la sucesión γ_n tiene una subsucesión que converge uniformemente en M a una geodésica minimizante $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$.

Demostración. Como γ_n está parametrizada proporcionalmente a la longitud de arco, $d(\gamma_n(t), \gamma_n(s)) = \text{long}(\gamma_n) \cdot |t - s| \leq \text{diam}(M) \cdot |t - s|$. Por tanto, la familia $\{\gamma_n\}$ es uniformemente Lipschitz, y en consecuencia equicontinua (cf. [Ch] o [Ma]). El teorema de Ascoli asegura entonces la existencia de una subsucesión que converge uniformemente en M a una curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$. Supongamos por comodidad que la propia sucesión $\gamma_n \xrightarrow{\text{unif}} \gamma$. Como la longitud es semi-continua inferiormente (cf. [Gro]), se tiene que $\text{long}(\gamma) \leq \liminf \text{long}(\gamma_n) = \lim d(\gamma_n(0), \gamma_n(1)) = d(\gamma(0), \gamma(1))$. Por tanto, γ es también una geodésica minimizante. \square

Como consecuencia de estos dos lemas, las variedades cónicas compactas con todos los ángulos cónicos $< 2\pi$ comparten muchas propiedades con las variedades riemannianas completas. Los siguientes lemas están enunciados en [KN] para variedades riemannianas completas, pero se pueden extender fácilmente a nuestro caso, y las demostraciones son análogas.

Lema 1.3. *Sea $x \in M \setminus \Sigma$, y sea $\gamma : [0, b] \rightarrow M$ una geodésica minimizante maximal en M que parte de x . Entonces se verifica alguna de las siguientes afirmaciones:*

- (1) $\gamma(b) \in \Sigma$;
- (2) $\gamma([0, b]) \subset M \setminus \Sigma$, y $\gamma(b)$ es el primer punto conjugado de x a lo largo de la geodésica γ en $M \setminus \Sigma$;
- (3) $\gamma([0, b]) \subset M \setminus \Sigma$, y existen al menos dos geodésicas minimizantes que unen x con $\gamma(b)$.

Demostración. Es consecuencia inmediata del lema 1.1 y de la demostración del teorema 7.1, cap. VIII de [KN]. \square

A continuación vamos a definir la *fractura* o *cut-locus* de la variedad cónica M con respecto a un punto base $x_0 \in M \setminus \Sigma$, elegido arbitrariamente. Denotaremos por S_{x_0} el conjunto de los vectores tangentes unitarios de $M \setminus \Sigma$ en x_0 , es decir, la esfera unidad en el espacio tangente $T_{x_0}(M \setminus \Sigma)$. Definimos una función $\mu : S_{x_0} \rightarrow \mathbf{R}^+$ de la siguiente forma. Dado $\mathbf{v} \in S_{x_0}$, sea $\gamma : [0, b] \rightarrow M$ la geodésica minimizante maximal (parametrizada por la longitud de arco) que parte de x_0 y cuyo vector tangente en x_0 es \mathbf{v} (es decir, $\gamma(t) = \exp_{x_0}(t\mathbf{v})$ para $0 \leq t < b$). Entonces definimos $\mu(\mathbf{v}) = b = \text{long}(\gamma)$. La imagen de μ está contenida en el intervalo compacto $[\text{inj}_{x_0}(M \setminus \Sigma), \text{diam}(M)] \subset \mathbf{R}^+$, donde $\text{inj}_{x_0}(M \setminus \Sigma)$ denota el radio de inyectividad en el punto x_0 y $\text{diam}(M)$ denota el diámetro de M .

Lema 1.4. La función $\mu : S_{x_0} \rightarrow \mathbf{R}^+$ es continua.

Demostración. (cf. [KN], cap. VIII, th.7.3.) Supongamos que μ no es continua en un cierto $\mathbf{v} \in S_{x_0}$. Entonces existe una sucesión $\{\mathbf{v}_k\} \subset S_{x_0}$ convergente a \mathbf{v} , tal que ciertamente existe $\lim \mu(\mathbf{v}_k)$ pero $\mu(\mathbf{v}) \neq \lim \mu(\mathbf{v}_k)$. Denotaremos $a_k = \mu(\mathbf{v}_k)$ y $a = \lim a_k$. Además, vamos a parametrizar las geodésicas proporcionalmente a la longitud de arco, de modo que todas ellas estén definidas en $[0, 1]$. Así, denotaremos por $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ la geodésica minimizante maximal tal que $\gamma(t) = \exp_{x_0}(t \mu(\mathbf{v})\mathbf{v})$ si $0 \leq t < 1$, y llamaremos $\gamma_k : [0, 1] \rightarrow M$ a la geodésica minimizante maximal tal que $\gamma_k(t) = \exp_{x_0}(t a_k \mathbf{v}_k)$ si $0 \leq t < 1$. Denotaremos $x_k = \gamma_k(1)$ para todo k ; sin pérdida de generalidad, podemos suponer que existe $\lim x_k = x \in M$. Como $d(x_0, x_k) = a_k$ para todo k , se tiene que $d(x_0, x) = \lim a_k = a$. Distinguiremos los dos casos posibles: $\mu(\mathbf{v}) > a$ ó $\mu(\mathbf{v}) < a$.

Caso 1: $\mu(\mathbf{v}) > a$.

En este caso, $x = \gamma\left(\frac{a}{\mu(\mathbf{v})}\right) = \exp_{x_0}(a\mathbf{v}) \in M \setminus \Sigma$. Por el lema 1.3, x no es conjugado de x_0 a lo largo de γ , y por tanto \exp_{x_0} transforma difeomórficamente un entorno U de $a\mathbf{v}$ en $T_{x_0}(M \setminus \Sigma)$, en un entorno de x en $M \setminus \Sigma$. Como $a_k \mathbf{v}_k \rightarrow a\mathbf{v}$, podemos suponer que $a_k \mathbf{v}_k \in U$ para todo k (y en particular $x_k = \exp_{x_0}(a_k \mathbf{v}_k) \in M \setminus \Sigma$ para todo k). Como $\exp_{x_0}|_U$ es un difeomorfismo sobre su imagen, tampoco puede ser x_k conjugado de x_0 a lo largo de γ_k . Por el lema 1.3, existe entonces otra geodésica minimizante $\alpha_k : [0, 1] \rightarrow M$ que une x_0 con x_k en $M \setminus \Sigma$. Esta segunda geodésica es de la forma $\alpha_k(t) = \exp_{x_0}(t a_k \mathbf{w}_k)$, $0 \leq t \leq 1$, para un cierto vector $\mathbf{w}_k \in S_{x_0}$, $\mathbf{w}_k \notin U$. Por el lema 1.2, podemos suponer que la sucesión $\{\alpha_k\}$ converge uniformemente a una geodésica minimizante $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ que une x_0 con $x = \lim x_k \in M \setminus \Sigma$. Por el lema 1.1, $\alpha([0, 1]) \subset M \setminus \Sigma$, y por tanto α es de la forma $\alpha(t) = \exp_{x_0}(t a \mathbf{w})$, $0 \leq t \leq 1$, para un cierto vector $\mathbf{w} = \lim \mathbf{w}_k \in S_{x_0}$. Como $\mathbf{w}_k \notin U$ para todo k , resulta que $\mathbf{w} \notin U$, y por tanto $\alpha \neq \gamma$. En consecuencia, el punto $x = \gamma\left(\frac{a}{\mu(\mathbf{v})}\right)$ está unido a x_0 por dos geodésicas minimizantes distintas, luego $\mu(\mathbf{v}) \leq a$, lo cual contradice la hipótesis.

Caso 2: $\mu(\mathbf{v}) < a$.

Consideremos la sucesión $\gamma_k : [0, 1] \rightarrow M$. Por el lema 1.2, podemos suponer que $\gamma_k \xrightarrow{\text{unif}} \alpha$, donde $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ es una geodésica minimizante que une x_0 con $x = \lim x_k$. Entonces $\text{long}(\alpha) = a > \mu(\mathbf{v}) = \text{long}(\gamma)$. Además, $\alpha'(0) = \lim \gamma_k'(0) = \lim a_k \mathbf{v}_k = a\mathbf{v} = \frac{a}{\mu(\mathbf{v})} \gamma'(0)$, luego α es una geodésica minimizante que extiende a γ . Esto contradice la maximalidad de γ .

□

Definición 1.1. Llamaremos *fractura* o *cut-locus* de la variedad cónica M con respecto al punto base $x_0 \in M \setminus \Sigma$, al subconjunto formado por los extremos de todas las geodésicas minimizantes maximales de M que parten de x_0 :

$$\text{Cut}_{x_0} = \{ \gamma(1) \mid \gamma: [0, 1] \rightarrow M \text{ es una geodésica minimizante maximal en } M \text{ con } \gamma(0) = x_0 \}$$

En particular, $\Sigma \subset \text{Cut}_{x_0}$.

Consideremos los siguientes subconjuntos del espacio tangente $T_{x_0}(M \setminus \Sigma)$:

$E = \{ tv \mid 0 \leq t < \mu(\mathbf{v}), \mathbf{v} \text{ es un vector tangente unitario de } M \setminus \Sigma \text{ en } x_0 \}$; su adherencia

$\overline{E} = \{ tv \mid 0 \leq t \leq \mu(\mathbf{v}), \mathbf{v} \text{ es un vector tangente unitario de } M \setminus \Sigma \text{ en } x_0 \}$; y su borde

$\partial E = \{ \mu(\mathbf{v})\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \text{ es un vector tangente unitario de } M \setminus \Sigma \text{ en } x_0 \}$.

Corolario 1.5. Las siguientes afirmaciones son ciertas:

(1) E es homeomorfo a una bola abierta en $T_{x_0}(M \setminus \Sigma)$, \overline{E} es homeomorfo a una bola cerrada y ∂E es homeomorfo a una esfera.

(2) \exp_{x_0} transforma E difeomórficamente en un abierto $U = \exp_{x_0}(E)$, que es denso en M .

(3) M es unión disjunta de Cut_{x_0} y $U = \exp_{x_0}(E)$.

Demostración. Ver [KN], cap. VIII, th.7.3. □

Corolario 1.6. La aplicación exponencial \exp_{x_0} se puede extender a una aplicación continua y sobreyectiva $\overline{\exp}_{x_0}: \overline{E} \rightarrow M$. El cut-locus es entonces $\text{Cut}_{x_0} = \overline{\exp}_{x_0}(\partial E)$.

Demostración. Basta definir $\overline{\exp}_{x_0}(\mu(\mathbf{v})\mathbf{v}) = \lim_{t \rightarrow \mu(\mathbf{v})} \exp_{x_0}(tv)$ para todo vector tangente unitario \mathbf{v} de $M \setminus \Sigma$ en x_0 . Estos son precisamente los extremos de todas las geodésicas minimizantes maximales de M que parten de x_0 , es decir, los puntos del cut-locus. □

2. POLIEDRO DE DIRICHLET DE UNA 3-VARIEDAD CÓNICA HIPERBÓLICA CON ÁNGULOS CÓNICOS MENORES QUE 2π

Supongamos ahora que M es una 3-variedad hiperbólica cónica cuya singularidad es un enlace $\Sigma \subset M$ y cuyos ángulos cónicos son todos $< 2\pi$. Entonces no hay puntos conjugados en $M \setminus \Sigma$ (cf. [KN], cap. VIII, corolario 2.4), y por tanto el cut-locus respecto a un punto base fijo $x_0 \in M \setminus \Sigma$, es

$$\text{Cut}_{x_0} = \Sigma \cup \{ x \in M \setminus \Sigma \mid \text{existen al menos dos geodésicas minimizantes que unen } x_0 \text{ con } x \}$$

y su complementario es

$$U = \exp_{x_0}(E) = \{ x \in M \setminus \Sigma \mid \text{existe una \u00fanica geod\u00e9sica minimizante que une } x_0 \text{ con } x \}$$

Sea $p : \widetilde{M \setminus \Sigma} \rightarrow M \setminus \Sigma$ la cubierta universal de $M \setminus \Sigma$. Consideraremos en $\widetilde{M \setminus \Sigma}$ la m\u00e9trica hiperb\u00f3lica inducida por la de $M \setminus \Sigma$. Como $U \subset M \setminus \Sigma$ es homeomorfo a una bola abierta, su levantamiento $p^{-1}(U)$ es una uni\u00f3n de copias disjuntas de U . Sea V una componente conexa de $p^{-1}(U)$, y sea $\tilde{x}_0 = p^{-1}(x_0) \cap V$. De hecho, V es el dominio de Dirichlet con centro en \tilde{x}_0 , para la acci\u00f3n discreta por isometr\u00edas del grupo fundamental $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$ en $\widetilde{M \setminus \Sigma}$.

Sea $D : \widetilde{M \setminus \Sigma} \rightarrow \mathbf{H}^3$ una aplicaci\u00f3n desarrolladora, que es una isometr\u00eda local (pero en general no es una cubierta). Sea $\rho : \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0) \rightarrow \text{Isom}(\mathbf{H}^3)$ la representaci\u00f3n de holonom\u00eda correspondiente. Entonces se verifica la siguiente condici\u00f3n de equivanancia: $D(\gamma x) = (\rho\gamma)(D(x))$ para todo $x \in \widetilde{M \setminus \Sigma}$ y todo $\gamma \in \pi_1(M \setminus \Sigma)$ (que act\u00faa en $\widetilde{M \setminus \Sigma}$ como una transformaci\u00f3n cubriente). Denotemos $O = D(\tilde{x}_0)$.

Definici\u00f3n 2.1. Llamaremos *poliedro de Dirichlet* \mathcal{P} de la variedad c\u00f3nica M , centrado en el punto O , a la clausura de la imagen de V por la aplicaci\u00f3n desarrolladora D :

$$\mathcal{P} = \overline{D(V)}$$

En esta secci\u00f3n vamos a probar que \mathcal{P} es un poliedro hiperb\u00f3lico compacto, estrellado en el punto O (ver la definici\u00f3n 2.3), y que la variedad M es isom\u00e9trica al espacio que se obtiene identificando las caras de \mathcal{P} mediante isometr\u00edas hiperb\u00f3licas. Adem\u00e1s, las caras de \mathcal{P} est\u00e1n contenidas en planos bisectores entre el punto base O y sus im\u00e1genes por ciertos elementos del grupo de holonom\u00eda. Por tanto, \mathcal{P} es una generalizaci\u00f3n del dominio de Dirichlet de una orbiforma hiperb\u00f3lica, lo cual justifica su nombre.

Primero tenemos que definir qu\u00e9 entendemos por poliedro hiperb\u00f3lico compacto estrellado en un punto.

Definici\u00f3n 2.2. Dado un conjunto $B \subset \mathbf{H}^3$ y un punto $O \notin B$, diremos que $\mathcal{P} \subset \mathbf{H}^3$ es el *cono desde* O sobre B si:

- (i) \mathcal{P} es la uni\u00f3n de todas las geod\u00e9sicas minimizantes que unen O con puntos de B ;
- (ii) para cada par de puntos distintos $x, y \in B$, las geod\u00e9sicas que unen O con x e y s\u00f3lo se cortan en el punto O .

Definición 2.3. Diremos que $\mathcal{P} \subset \mathbf{H}^3$ es un *poliedro compacto estrellado en un punto O* si existe un subconjunto $B \subset \mathcal{P}$ tal que:

- (i) \mathcal{P} es el cono desde O sobre B ;
- (ii) B está contenido en una unión finita de hiperplanos de \mathbf{H}^3 ;
- (iii) B es homeomorfo a una esfera \mathbf{S}^2 .

(En particular, \mathcal{P} es homeomorfo a una bola cerrada, el punto O está contenido en el interior de \mathcal{P} , y el borde de \mathcal{P} es $\partial\mathcal{P} = B$.)

Observación. Las definiciones son análogas en los casos euclídeo y esférico.

La demostración de que el poliedro de Dirichlet \mathcal{P} es un poliedro hiperbólico compacto, estrellado en el punto O , sigue el siguiente esquema.

- (1) Demostramos que el borde de \mathcal{P} es homeomorfo a una esfera, y que \mathcal{P} es el cono desde el punto base O sobre su borde $\partial\mathcal{P}$. Esto se hace en el lema 2.1.
- (2) Probamos que el borde de \mathcal{P} está contenido en una unión finita de hiperplanos de \mathbf{H}^3 . Estos hiperplanos son de hecho planos bisectores entre el punto base O y sus imágenes por ciertos elementos del grupo de holonomía. Esta parte de la demostración se divide a su vez en dos pasos:
 - (a) Definimos un cierto conjunto $\bar{\Gamma} \subset \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$ (que llamaremos las *facetas generales* de \mathcal{P} , cf. definición 2.4) , y demostramos que es finito, en los lemas 2.2, 2.3 y 2.4.
 - (b) Demostramos que $\partial\mathcal{P}$ está contenido en la unión de todos los planos bisectores de la forma $H_\gamma = \{x \in \mathbf{H}^3 \mid d(x, O) = d(x, \rho\gamma(O))\}$, donde $\gamma \in \bar{\Gamma}$. Esto se hace en el lema 2.5 y el corolario 2.6.

Con esto ya está probado que \mathcal{P} es un poliedro compacto, estrellado en el punto O (corolario 2.7). Finalmente, en los lemas 2.8 y 2.9 demostramos que la variedad cónica M es isométrica a un cociente de \mathcal{P} , obtenido identificando dos a dos sus caras mediante isometrías hiperbólicas. Además, estas isometrías de pegado son de la forma $\rho\gamma$, donde $\gamma \in \bar{\Gamma}$ (y ρ es la representación de holonomía de M).

Lema 2.1. *El borde del poliedro de Dirichlet $\mathcal{P} = \overline{D(V)}$ es homeomorfo a una esfera, y \mathcal{P} es el cono desde el punto base O sobre su borde $\partial\mathcal{P}$.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama, que es conmutativo dentro de los dominios de definición de las diversas aplicaciones que aparecen:

$$\begin{array}{ccc}
 T_O \mathbf{H}^3 & \xrightarrow[\text{difeomorfismo}]{\exp_O} & \mathbf{H}^3 \\
 d_{\tilde{x}_0} D \uparrow \text{isometría} & & D \uparrow \text{isometría local} \\
 T_{\tilde{x}_0}(\widetilde{M \setminus \Sigma}) & \xrightarrow{\exp_{\tilde{x}_0}} & \widetilde{M \setminus \Sigma} \\
 d_{\tilde{x}_0} p \downarrow \text{isometría} & & p \downarrow \text{isometría local} \\
 T_{x_0}(M \setminus \Sigma) & \xrightarrow{\exp_{x_0}} & M \setminus \Sigma
 \end{array}$$

Identificaremos los tres espacios tangentes $T_O \mathbf{H}^3$, $T_{\tilde{x}_0}(\widetilde{M \setminus \Sigma})$ y $T_{x_0}(M \setminus \Sigma)$. Dentro de cada uno de ellos, tenemos los siguientes conjuntos (que denotaremos siempre igual, con independencia de cuál sea el espacio tangente en el que los estemos considerando en cada momento):

$$E = \{ t\mathbf{v} \mid 0 \leq t < \mu(\mathbf{v}), \mathbf{v} \text{ vector tangente unitario} \} \quad (\text{homeomorfo a una bola abierta})$$

$$\overline{E} = \{ t\mathbf{v} \mid 0 \leq t \leq \mu(\mathbf{v}), \mathbf{v} \text{ vector tangente unitario} \} \quad (\text{homeomorfo a una bola cerrada})$$

$$\partial E = \{ \mu(\mathbf{v})\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \text{ vector tangente unitario} \} \quad (\text{homeomorfo a una esfera})$$

Recordemos que \overline{E} es el cono desde el origen $\mathbf{0}$ sobre el borde ∂E , y que $V = \exp_{x_0}(E)$. Entonces $\exp_O(E) = D(\exp_{\tilde{x}_0}(E)) = D(V)$. Como \exp_O es un difeomorfismo, resulta que $\mathcal{P} = \overline{D(V)} = \exp_O(\overline{E})$. Por tanto, el borde de \mathcal{P} coincide con $\exp_O(\partial E)$, que es homeomorfo a una esfera, y $\mathcal{P} = \exp_O(\overline{E})$ es el cono desde $O = \exp_O(\mathbf{0})$ sobre $\partial \mathcal{P} = \exp_O(\partial E)$. \square

Definición 2.4. Llamaremos *conjunto de facetas generales* del poliedro de Dirichlet \mathcal{P} al siguiente subconjunto de $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$:

$$\overline{\Gamma} = \{ \gamma \in \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0) \mid \text{existe } x \in M \setminus \Sigma \text{ tal que hay dos geodésicas minimizantes } \alpha, \beta \text{ que unen } x_0 \text{ con } x, \text{ de modo que } [\alpha\beta^{-1}] = \gamma \text{ en } \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0) \}$$

Observemos que $\gamma \neq 1$ para todo $\gamma \in \overline{\Gamma}$, ya que si α, β fueran dos geodésicas minimizantes que unieran x_0 con x y $[\alpha\beta^{-1}] = 1$ en $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$, entonces α y β se levantarían a dos geodésicas distintas con los mismos extremos en $\widetilde{M \setminus \Sigma}$, y esto es imposible por ser $\widetilde{M \setminus \Sigma}$ una variedad hiperbólica simplemente conexa (en efecto, $D\alpha$ y $D\beta$ serían dos geodésicas distintas en \mathbf{H}^3 que se cortarían en dos puntos). Otra propiedad evidente de $\overline{\Gamma}$ es que si $\gamma \in \overline{\Gamma}$, entonces también su inverso $\gamma^{-1} \in \overline{\Gamma}$. De hecho, $\overline{\Gamma}$

está en biyección con el conjunto de trasladados del dominio de Dirichlet V que son adyacentes a V :
 $\bar{\Gamma} = \{ \gamma \in \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0) \mid \bar{V} \cap \gamma(\bar{V}) \neq \emptyset \} .$

Para cada $\gamma \in \bar{\Gamma}$, definimos el plano bisector

$$H_\gamma = \{ x \in \mathbf{H}^3 \mid d(x, O) = d(x, (\rho\gamma)(O)) \}$$

Por abuso de lenguaje, a veces llamaremos también “faceta general” al plano bisector H_γ determinado por una faceta general $\gamma \in \bar{\Gamma}$.

En el corolario 2.6 veremos que el borde del poliedro de Dirichlet está contenido en la unión de planos bisectores H_γ , con $\gamma \in \bar{\Gamma}$. Antes necesitamos probar que el conjunto $\bar{\Gamma}$ es finito. Para ello, hay que tener en cuenta la estructura que tiene la variedad cónica M en un entorno de la singularidad.

Definición 2.5. Dado un punto singular $x \in \Sigma$, en el que el ángulo cónico es θ , diremos que una bola de radio r centrada en x es una *bola estándar* si es isométrica a un sector de ángulo θ de una bola hiperbólica de radio r , con los lados identificados mediante una rotación de ángulo θ . Diremos que un camino cerrado μ es un *meridiano de la singularidad próximo a x* si está contenido en una bola estándar $B(x, r)$ y genera el grupo fundamental de $B(x, r) \setminus \Sigma$ (ver la figura 2). Obsérvese que hay dos clases de homotopía distintas para los meridianos de la singularidad próximos a x : una es inversa de la otra.

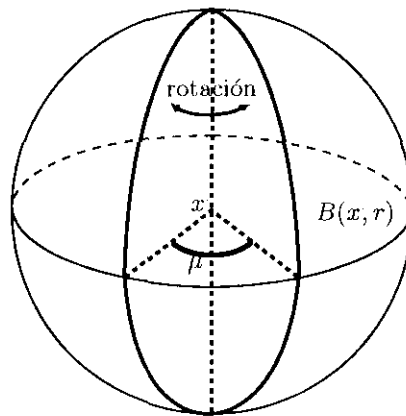


Figura 2

Lema 2.2. Sea B una bola estándar centrada en un punto singular $x \in \Sigma$, y sean $y, z \in B \setminus \Sigma$. Entonces existen a lo sumo dos geodésicas minimizantes α, β que unen y con z dentro de B , y en ese caso el producto $\alpha\beta^{-1}$ es un meridiano de la singularidad próximo a x (ver la figura 3). □

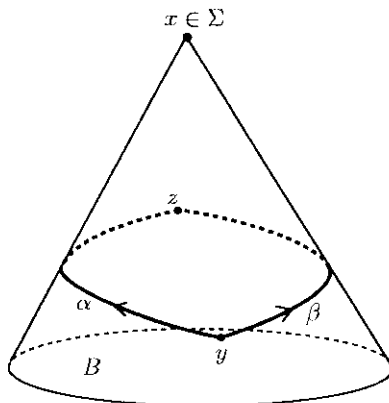


Figura 3

Teniendo en cuenta este lema, vamos a ver a continuación que, para definir el conjunto $\bar{\Gamma}$, podemos restringirnos a considerar geodésicas que estén fuera de un pequeño entorno tubular abierto de la singularidad. De aquí se deducirá que $\bar{\Gamma}$ es finito.

Lema 2.3. Existe un entorno tubular abierto $N(\Sigma)$ de Σ en M , que satisface la siguiente condición: Si existen dos geodésicas minimizantes α_x, β_x que unen x_0 con un punto $x \in N(\Sigma) \setminus \Sigma$, entonces existe otro punto $y \in M \setminus N(\Sigma)$ y dos geodésicas minimizantes α_y, β_y que unen x_0 con y , tales que $[\alpha_x \beta_x^{-1}] = [\alpha_y \beta_y^{-1}]$ en $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$. Además, las geodésicas α_y, β_y están completamente contenidas en $M \setminus N(\Sigma)$.

Demostración. Supongamos que no existiera un tal entorno $N(\Sigma)$. Entonces existiría una sucesión de puntos $\{x_n\} \subset M \setminus \Sigma$ con $d(x_n, \Sigma) \rightarrow 0$ y existirían pares de geodésicas minimizantes α_n, β_n que unen x_0 con x_n , tales que $[\alpha_n \beta_n^{-1}] \neq [\alpha_m \beta_m^{-1}]$ en $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$ si $m \neq n$. Por el teorema de Ascoli, podemos suponer (tomando subsucesiones) que $\alpha_n \xrightarrow{\text{unif}} \alpha$ y $\beta_n \xrightarrow{\text{unif}} \beta$, donde α, β son geodésicas minimizantes que unen x_0 con $x = \lim(x_n) \in \Sigma$.

Sea B una bola estándar centrada en $x \in \Sigma$. Elegimos $t_1 \in (0, 1)$ tal que $\alpha(t_1) \in B \setminus \Sigma$ y $\beta(t_1) \in B \setminus \Sigma$. Como en $M \setminus \Sigma$ dos curvas uniformemente próximas son homótopas, resulta que existe $\epsilon > 0$ tal que si $\gamma_1, \gamma_2 : [0, t_1] \rightarrow M \setminus \Sigma$ son dos curvas tales que $d(\gamma_i(t), \alpha(t)) < \epsilon$ para todo $t \in [0, t_1]$ y $\gamma_i(0) = x_0$, $i = 1, 2$, entonces existe una única geodésica minimizante $c : [0, 1] \rightarrow B \setminus \Sigma$ que une $\gamma_1(t_1)$ con $\gamma_2(t_1)$, y una homotopía $H : [0, 1] \times [0, t_1] \rightarrow M \setminus \Sigma$ tal que $H(0, t) = \gamma_1(t)$, $H(1, t) = \gamma_2(t)$, $H(s, 0) = x_0$ y $H(s, t_1) = c(s)$. Tomamos ϵ suficientemente pequeño para que la misma condición se

verifique para dos curvas que estén a distancia menor que ϵ de β .

Como $\alpha_n \xrightarrow{\text{unif}} \alpha$ y $\beta_n \xrightarrow{\text{unif}} \beta$, de lo anterior se deduce entonces que existe un entero N tal que si $m, n \geq N$, entonces $\alpha_n|_{[0, t_1]}$ es homótopa a $\alpha_m|_{[0, t_1]}$ en $M \setminus \Sigma$ y $\beta_n|_{[0, t_1]}$ es homótopa a $\beta_m|_{[0, t_1]}$ en $M \setminus \Sigma$, mediante homotopías que desplazan $\alpha_n(t_1)$ hasta $\alpha_m(t_1)$ (resp. $\beta_n(t_1)$ hasta $\beta_m(t_1)$) siguiendo la única geodésica minimizante que los une.

Vamos ahora a fijarnos en lo que ocurre dentro de B . Supongamos que $m, n \geq N$. Entonces, por el lema 2.2, existen a lo sumo dos clases de homotopía posibles para $\alpha_n|_{[t_1, 1]}$ (con extremos fijos), y lo mismo ocurre con $\alpha_m|_{[t_1, 1]}$, $\beta_n|_{[t_1, 1]}$ y $\beta_m|_{[t_1, 1]}$ (ver figura 4).

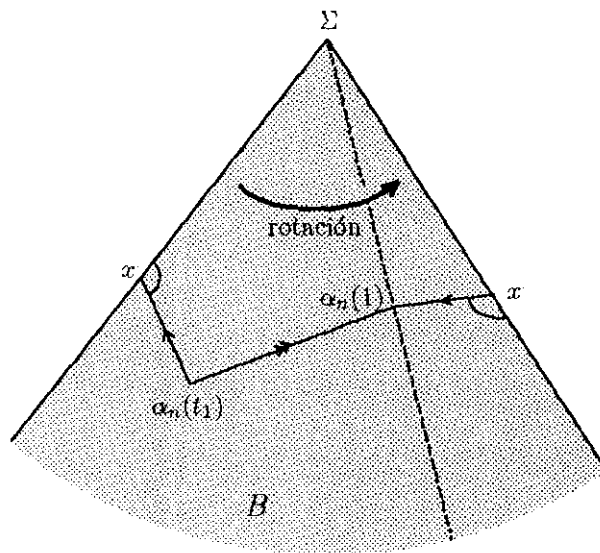


Figura 4

Por tanto, tomando una subsucesión si es preciso, podemos suponer que existe una homotopía $H : [0, 1] \times [t_1, 1] \rightarrow M \setminus \Sigma$ tal que $H(0, t) = \alpha_n(t)$, $H(1, t) = \alpha_m(t)$, $H(s, t_1)$ es la única geodésica minimizante que une $\alpha_n(t_1)$ con $\alpha_m(t_1)$, y $H(s, 1)$ es la única geodésica minimizante que une x_n con x_m , y podemos suponer que existe también una homotopía del mismo tipo entre $\beta_n|_{[t_1, 1]}$ y $\beta_m|_{[t_1, 1]}$.

Combinando ahora todas las homotopías en $M \setminus \Sigma$ entre los distintos segmentos de α_n y α_m (resp. β_n y β_m), resulta que $[\alpha_n \beta_n^{-1}] = [\alpha_m \beta_m^{-1}]$ en $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$, lo cual contradice la hipótesis.

Por tanto, existe un entorno tubular abierto W de Σ en M , tal que si $x \in W \setminus \Sigma$ verifica que existen dos geodésicas minimizantes α_x, β_x que unen x_0 con x , entonces existe otro $y \in M \setminus W$ y dos geodésicas minimizantes α_y, β_y que unen x_0 con y , de modo que $[\alpha_x \beta_x^{-1}] = [\alpha_y \beta_y^{-1}]$ en $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$. Pero ahora la unión de todas las geodésicas minimizantes que unen x_0 con cada uno de los puntos de

$M \setminus W$ es un conjunto compacto que contiene a $M \setminus W$, y su complementario $N(\Sigma)$ es un entorno tubular abierto de Σ que verifica las propiedades del enunciado. □

Lema 2.4. *El conjunto $\bar{\Gamma}$ es finito.*

Demostración. Por el lema anterior, podemos encontrar un entorno tubular abierto $N(\Sigma)$ de Σ en M tal que

$$\bar{\Gamma} = \{ \gamma \in \pi_1(M \setminus N(\Sigma), x_0) \mid \text{existe } x \in M \setminus N(\Sigma) \text{ tal que hay dos geodésicas minimizantes } \alpha, \beta \text{ que unen } x_0 \text{ con } x \text{ dentro de } M \setminus N(\Sigma), \text{ de modo que } [\alpha\beta^{-1}] = \gamma \text{ en } \pi_1(M \setminus N(\Sigma), x_0) \}$$

Como $M \setminus N(\Sigma)$ es una variedad compacta (con borde), resulta que sólo hay un número finito de clases de homotopía en $\pi_1(M \setminus N(\Sigma), x_0)$ que admitan como representante una curva $c : [0, 1] \rightarrow M \setminus N(\Sigma)$ de longitud $\text{long}(c) \leq 2 \text{diam}(M)$ (cf. [Gro, §1.13, pág. 7] o aplicar los mismos razonamientos que en el lema precedente). Pero todo $\gamma \in \bar{\Gamma}$ está representado por un producto de dos geodésicas minimizantes $\alpha\beta^{-1}$, de longitud $\text{long}(\alpha) + \text{long}(\beta) \leq 2 \text{diam}(M)$. Por tanto, $\bar{\Gamma}$ es un conjunto finito. □

Vamos a ver ahora que el borde del poliedro de Dirichlet \mathcal{P} está contenido en la unión (finita) de todos los planos bisectores determinados por las facetas generales $\gamma \in \bar{\Gamma}$.

Lema 2.5. *Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow M \setminus \Sigma$ una geodésica minimizante maximal tal que $\alpha(0) = x_0$, y sea $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \widetilde{M \setminus \Sigma}$ su levantamiento con $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$. Entonces $D\tilde{\alpha}$ es un segmento geodésico en \mathbf{H}^3 cuyo extremo $D\tilde{\alpha}(1) \in \bigcup_{\gamma \in \bar{\Gamma}} H_\gamma$.*

Demostración. Sea $x = \alpha(1) \in M \setminus \Sigma$. Como α es maximal, $x \in \text{Cut}_{x_0}$. Por el lema 1.2, existe al menos otra geodésica minimizante $\beta : [0, 1] \rightarrow M \setminus \Sigma$ que une x_0 con x . Sea $\gamma = [\alpha\beta^{-1}] \in \bar{\Gamma} \subset \pi_1(M \setminus W, x_0)$. Sea $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \widetilde{M \setminus \Sigma}$ el levantamiento de α con origen en \tilde{x}_0 , y sea $\tilde{x} = \tilde{\alpha}(1)$ su extremo. Si $\tilde{\beta} : [0, 1] \rightarrow \widetilde{M \setminus \Sigma}$ es el levantamiento de β con origen en $\gamma\tilde{x}_0$, entonces su extremo es también $\tilde{\beta}(1) = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{x}$, por ser $[\alpha\beta^{-1}] = \gamma$. Además, $\text{long}(\tilde{\alpha}) = \text{long}(\tilde{\beta}) = d(x, x_0)$. Entonces $D\tilde{\alpha}$ y $D\tilde{\beta}$ son geodésicas en \mathbf{H}^3 que unen $D(\tilde{x})$ con $D(\tilde{x}_0) = O$ y $D(\gamma\tilde{x}_0) = \rho_\gamma(O)$, respectivamente, y $\text{long}(D\tilde{\alpha}) = \text{long}(\tilde{\alpha}) = \text{long}(\tilde{\beta}) = \text{long}(D\tilde{\beta})$. Como en \mathbf{H}^3 todas las geodésicas son minimizantes, resulta que $d(O, D(\tilde{x})) = d(\rho_\gamma(O), D(\tilde{x}))$. Por tanto, $D(\tilde{x}) \in H_\gamma$. □

Corolario 2.6. *El borde del poliedro de Dirichlet \mathcal{P} está contenido en la unión finita de planos bisectores $\bigcup_{\gamma \in \bar{\Gamma}} H_\gamma$.*

Demostración. Consideremos de nuevo el diagrama conmutativo de la demostración del lema 2.1, y los tres conjuntos E , \overline{E} y ∂E . Sabemos ya que el poliedro de Dirichlet es $\mathcal{P} = \exp_O(\overline{E})$, y que su borde es $\partial\mathcal{P} = \exp_O(\partial E)$.

Los puntos de ∂E corresponden a los extremos de geodésicas minimizantes maximales de M , y se dividen en dos clases: los que pertenecen a Σ , y los que pertenecen a $\text{Cut}_{x_0} \setminus \Sigma$. Denotaremos por S el conjunto formado por los que corresponden a puntos de Σ . Con más precisión, recordemos que en el corolario 1.6 de la sección 1, definimos una aplicación continua y sobreyectiva $\overline{\text{exp}}_{x_0} : \overline{E} \rightarrow M$ que es extensión de $\text{exp}_{x_0} : E \rightarrow M \setminus \Sigma$. Entonces $\partial E = \overline{\text{exp}}_{x_0}^{-1}(\text{Cut}_{x_0})$, y $S = \overline{\text{exp}}_{x_0}^{-1}(\Sigma) \subset \partial E$.

En el lema 2.5 hemos visto que $\exp_O(\partial E \setminus S) = D(\exp_{\tilde{x}_0}(\partial E \setminus S)) \subset \bigcup_{\gamma \in \overline{\Gamma}} H_\gamma$, que es cerrado en \mathbf{H}^3 (porque $\overline{\Gamma}$ es finito). Por tanto, para probar que $\partial\mathcal{P} = \exp_O(\partial E)$ también está contenido en esta unión finita de hiperplanos bisectores, sólo hace falta ver que $\partial E \setminus S$ es denso en ∂E .

Ahora bien, como $M \setminus \Sigma$ es una variedad hiperbólica, la exponencial $\text{exp}_{x_0} : E \rightarrow M \setminus \Sigma$ incrementa las distancias (cf. [KN], cap. VIII, §8), y por tanto cada punto de M está unido por un número finito de geodésicas minimizantes a x_0 . Es decir, para todo $x \in M$ la fibra $\overline{\text{exp}}_{x_0}^{-1}(x)$ es finita. Como $\Sigma \subset C_{x_0} \subset M$ tiene dimensión 1, resulta que $S = \overline{\text{exp}}_{x_0}^{-1}(\Sigma) \subset \partial E$ tiene dimensión 1. Por tanto, $\partial E \setminus S$ es denso en ∂E . En consecuencia, $\partial\mathcal{P}$ es un subconjunto de la unión finita de planos bisectores $\bigcup_{\gamma \in \overline{\Gamma}} H_\gamma$, homeomorfo a una esfera. \square

Corolario 2.7. *El poliedro de Dirichlet \mathcal{P} es un poliedro compacto estrellado en el punto O .* \square

Definición 2.6. Denotaremos por $\text{Sing} = \exp_O(S) \subset \partial\mathcal{P}$ el desarrollo de la singularidad Σ . Es una unión de segmentos geodésicos disjuntos (y posiblemente algunos puntos aislados) contenidos en el borde del poliedro \mathcal{P} . Diremos que los puntos de Sing son los *puntos singulares* del poliedro de Dirichlet \mathcal{P} .

Finalmente, vamos a ver que la variedad cónica M es isométrica a un cociente de \mathcal{P} , obtenido identificando dos a dos sus caras mediante isometrías hiperbólicas del tipo $\rho\gamma$, donde $\gamma \in \overline{\Gamma}$. Haremos esto en dos pasos:

- $M \setminus \text{Cut}_{x_0}$ es isométrica al interior del poliedro de Dirichlet \mathcal{P} (lema 2.8).
- M es homeomorfa a un cociente de \mathcal{P} , obtenido identificando dos a dos sus caras mediante isometrías hiperbólicas del tipo $\rho\gamma$, donde $\gamma \in \overline{\Gamma}$ (lema 2.9).

Como $M \setminus \text{Cut}_{x_0}$ es un abierto denso en M , con esto habremos probado que M es de hecho isométrica a ese cociente de \mathcal{P} .

Lema 2.8. *La restricción a V de la aplicación desarrolladora, $D|_V : V \rightarrow D(V)$, es una isometría sobre su imagen. En consecuencia, $U = M \setminus \text{Cut}_{x_0}$ es isométrico al interior del poliedro de Dirichlet \mathcal{P} .*

Demostración. Como D es una isometría local, basta ver que $D|_V$ es inyectiva. Esto se deduce de que V es estrellado en x_0 , y dos geodésicas en el espacio hiperbólico \mathbf{H}^3 se cortan a lo sumo en un punto.

Como $U = M \setminus \text{Cut}_{x_0}$ es isométrico a V , de lo anterior se deduce que $M \setminus \text{Cut}_{x_0}$ es isométrica a $D(V)$, que coincide con el interior de \mathcal{P} . □

Lema 2.9. *La variedad cónica M es isométrica a un cociente del poliedro de Dirichlet \mathcal{P} , obtenido identificando dos a dos sus caras mediante isometrías hiperbólicas del tipo $\rho\gamma$, donde $\gamma \in \bar{\Gamma}$.*

Demostración. Usamos las mismas notaciones que en el lema 2.1. Como $\overline{\text{exp}}_{x_0} : \bar{E} \rightarrow M$ es continua y suprayectiva, y \bar{E} y M son compactos, resulta que M es homeomorfa al cociente de \bar{E} obtenido al identificar $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \partial E$ si $\overline{\text{exp}}_{x_0}(\mathbf{v}) = \overline{\text{exp}}_{x_0}(\mathbf{w})$. Ahora bien, $\text{exp}_O : \bar{E} \rightarrow \overline{D(V)}$ es un homeomorfismo. Por tanto, M es homeomorfa al cociente de $\mathcal{P} = \overline{D(V)}$ obtenido al identificar dos puntos x, y del borde de \mathcal{P} si $\overline{\text{exp}}_{x_0}(\text{exp}_O^{-1}(x)) = \overline{\text{exp}}_{x_0}(\text{exp}_O^{-1}(y))$. Como $U = \text{exp}_{x_0}(E)$ es un abierto denso en M que es isométrico a $D(V)$ (por el lema 2.8), se deduce que M es de hecho isométrica a este cociente de \mathcal{P} . Sólo falta ver que las identificaciones en el borde de \mathcal{P} se realizan mediante isometrías hiperbólicas del tipo $\rho\gamma$, donde $\gamma \in \bar{\Gamma}$.

Supongamos que x un punto del borde de \mathcal{P} no contenido en la singularidad Sing , y que y es otro punto que se identifica con x . Sean $\mathbf{v} = \text{exp}_O^{-1}(x)$ y $\mathbf{w} = \text{exp}_O^{-1}(y)$. Consideremos las geodésicas $\alpha(t) = \overline{\text{exp}}_{x_0}(t\mathbf{v})$ y $\beta(t) = \overline{\text{exp}}_{x_0}(t\mathbf{w})$, para $0 \leq t \leq 1$. Entonces α y β son dos geodésicas minimizantes maximales en M que unen x_0 con un mismo punto de $M \setminus \Sigma$. Sea $\gamma = [\alpha\beta^{-1}] \in \bar{\Gamma} \subset \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$. Consideremos los levantamientos $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ de α y β a la cubierta universal $\widetilde{M \setminus \Sigma}$, con origen en \tilde{x}_0 . Entonces $D\tilde{\alpha}(1) = \text{exp}_O(\mathbf{v}) = x$ y $D\tilde{\beta}(1) = \text{exp}_O(\mathbf{w}) = y$. Pero por otra parte $\tilde{\beta}(1) = \gamma^{-1}(\tilde{\alpha}(1))$, porque $[\alpha\beta^{-1}] = \gamma$. Por tanto, $y = D(\gamma^{-1}(\tilde{\alpha}(1))) = \rho\gamma^{-1}(D\tilde{\alpha}(1)) = \rho\gamma^{-1}(x)$. (De la demostración del lema 2.5 se deduce que en ese caso, $x \in H_\gamma \cap \mathcal{P}$ e $y \in H_{\gamma^{-1}} \cap \mathcal{P}$). □

Observaciones 2.1

- (1) De ahora en adelante daremos el mismo nombre a un punto de \mathcal{P} y al punto que le corresponde en M (cuando se hacen todas las identificaciones en el borde de \mathcal{P}). Cuando hablemos de las “caras” de \mathcal{P} , nos referimos siempre a las caras de dimensión 2.

(2) Convenga observar que, en la demostración del último lema, nada garantiza que cualquier punto x contenido en una cara de \mathcal{P} de la forma $H_\gamma \cap \mathcal{P}$ se identifique con el punto $\rho\gamma^{-1}(x)$. De hecho, esto es falso en general cuando algún ángulo cónico es $\geq \pi$. Lo que ocurre es que una cara de \mathcal{P} puede estar dividida en varias porciones por “aristas escondidas”, contenidas en el interior de la cara. (Por ejemplo, en el dominio lenticular para la orbiforma esférica $(\mathbb{S}^3, [p/q], \pi)$, los dos arcos que constituyen la singularidad son “aristas escondidas”, véase la figura 9 del capítulo I.) Cada una de estas porciones se identifica con otra cara (o porción de una cara) de \mathcal{P} mediante una isometría de la forma $\rho\gamma$. Pero estas isometrías de pegado $\rho\gamma$ serán en general distintas para distintas porciones de una misma cara.

Más adelante veremos que este fenómeno no se produce cuando todos los ángulos cónicos son $< \pi$. En ese caso, la variedad M se obtiene identificando cada cara $H_\gamma \cap \mathcal{P}$ del poliedro de Dirichlet con la cara $H_{\gamma^{-1}} \cap \mathcal{P}$, mediante la isometría $\rho\gamma^{-1}$.

(3) Todo lo que hemos hecho hasta ahora es también válido para variedades euclideas y esféricas cónicas compactas con todos los ángulos cónicos $< 2\pi$. En el caso euclideo, todos los argumentos son aplicables sin ninguna modificación. En el caso esférico, la posibilidad de que hubiera puntos conjugados podría crear en principio problemas. Sin embargo, las siguientes observaciones garantizan que el punto base x_0 no tiene puntos conjugados, y por tanto también en el caso esférico son válidos los mismos razonamientos:

- (i) Una variedad esférica cónica M con todos los ángulos cónicos $< 2\pi$ tiene diámetro $\leq \pi$ (cf. [KN], cap. VIII, corol. 4.3; véase también [GHL], th. 3.8.5).
- (ii) Supongamos además que $M \neq \mathbb{S}^3$, y sea $x_0 \in M \setminus \Sigma$ un punto no singular arbitrario. Entonces $d(x_0, x) < \pi$ para todo $x \in M$.

Como en una variedad esférica la distancia entre dos puntos conjugados es siempre igual a π (cf. [KN], cap. VIII, corol. 4.3), de (ii) se deduce que el punto base x_0 no tiene puntos conjugados.

Demostración de (ii): Supongamos que existiera un punto $x \in M$ tal que $d(x_0, x) = \pi$. Entonces (usando las mismas notaciones de antes), el punto antipodal O' de O pertenece a $\overline{D(V)}$. Sea ahora $y \in M \setminus \Sigma$ un punto no singular cualquiera. Entonces existe una geodésica minimizante α que une x con y , y $\alpha((0, 1]) \subset M \setminus \Sigma$. Sea $\tilde{\alpha}$ un levantamiento de α a $\widetilde{M \setminus \Sigma}$ tal que $\tilde{\alpha}((0, \epsilon)) \subset \overline{V}$ para ϵ suficientemente pequeño. Entonces $D\tilde{\alpha}$ es un arco de geodésica en \mathbb{S}^3 , que tiene necesariamente uno de sus extremos en el punto O' . Por tanto, $D\tilde{\alpha}$ se puede prolongar a una geodésica (minimizante) que une O' con O en $\overline{D(V)} \subset \mathbb{S}^3$. En consecuencia, cualquier geodésica minimizante que una un punto arbitrario $y \in M \setminus \Sigma$ con x , se puede prolongar a una geodésica minimizante (de longitud π) que una x_0 con x en M . De aquí se deduce que todas las geodésicas minimizantes maximales

que emanan de x_0 tienen longitud π . Como x_0 es no singular (y por tanto un entorno de x_0 en M es isométrico a una bola en \mathbb{S}^3), resulta que $M = \mathbb{S}^3$. \square

Vamos a enunciar ahora algunas propiedades del conjunto $\bar{\Gamma}$ en relación con el poliedro \mathcal{P} , que nos harán falta más adelante.

Lema 2.10. *Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

- (1) Para todo $\gamma \in \bar{\Gamma}$, el hiperplano H_γ corta al poliedro \mathcal{P} en algún punto no singular del borde.
- (2) Sea e una arista de \mathcal{P} , y sea $x \in e$ un punto no singular contenido en su interior. Entonces existen dos elementos distintos (no triviales) $\gamma_1, \gamma_2 \in \bar{\Gamma}$ tales que:
 - $H_{\gamma_1} \cap \mathcal{P}$ y $H_{\gamma_2} \cap \mathcal{P}$ son las dos caras del poliedro \mathcal{P} que inciden en la arista e , y
 - existen tres geodésicas minimizantes distintas α, β, γ que unen x_0 con x en M y verifican que $[\alpha\beta^{-1}] = \gamma_1$ y $[\alpha\gamma^{-1}] = \gamma_2$ en $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$.

El punto x se identifica con $\rho\gamma_1^{-1}(x)$ y $\rho\gamma_2^{-1}(x)$, y los tres puntos x , $\rho\gamma_1^{-1}(x)$ y $\rho\gamma_2^{-1}(x)$ son todos distintos. Como consecuencia, $\gamma_1^{-1}\gamma_2 \in \bar{\Gamma}$, y $\rho\gamma_1^{-1}(e) \subset H_{\gamma_1^{-1}} \cap H_{\gamma_1^{-1}\gamma_2}$. (Obsérvese que esto no quiere decir que $H_{\gamma_1^{-1}\gamma_2} \cap \mathcal{P}$ sea una cara del poliedro \mathcal{P}).

Demostración.

- (1) Sea $\gamma \in \bar{\Gamma}$. Por la propia definición de $\bar{\Gamma}$, existen dos geodésicas minimizantes α, β que unen x_0 con un punto $x \in M \setminus \Sigma$, de modo que $[\alpha\beta^{-1}] = \gamma$ en $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$. Sea $\tilde{\alpha}: [0, 1] \rightarrow \widetilde{M \setminus \Sigma}$ el levantamiento de α a $\widetilde{M \setminus \Sigma}$ con origen en \tilde{x}_0 . Entonces la imagen del extremo de $\tilde{\alpha}$ mediante la aplicación desarrolladora, es un punto no singular contenido en $H_\gamma \cap \mathcal{P}$, como en la demostración del lema 2.5.
- (2) Sean $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ las dos caras del poliedro \mathcal{P} que inciden en la arista e . Elegimos dos puntos y_1, y_2 en el interior de cada una de estas caras y cerca de x , de tal manera que los segmentos que unen x con y_1 y y_2 no contienen ningún punto singular. Entonces existe un único elemento $\gamma_1 \in \bar{\Gamma}$ tal que el segmento $[x, y_1]$ se identifica con el segmento $[\rho\gamma_1^{-1}(x), \rho\gamma_1^{-1}(y_1)] \subset H_{\gamma_1^{-1}} \cap \mathcal{P}$ (en particular, $\mathcal{F}_1 = H_{\gamma_1} \cap \mathcal{P}$). Análogamente, existe un único $\gamma_2 \in \bar{\Gamma}$ tal que el segmento $[x, y_2]$ se identifica con el segmento $[\rho\gamma_2^{-1}(x), \rho\gamma_2^{-1}(y_2)] \subset H_{\gamma_2^{-1}} \cap \mathcal{P}$ (y $\mathcal{F}_2 = H_{\gamma_2} \cap \mathcal{P}$). Sean α, β, γ las geodésicas que unen O con x , $\rho\gamma_1^{-1}(x)$ y $\rho\gamma_2^{-1}(x)$, respectivamente. Cuando se las ve dentro de M , α, β, γ son geodésicas minimizantes que unen x_0 con x en $M \setminus \Sigma$, y $[\alpha\beta^{-1}] = \gamma_1$ y $[\alpha\gamma^{-1}] = \gamma_2$. Como $\gamma_1 \neq \gamma_2$ (y ambos son no triviales), resulta que las tres geodésicas α, β, γ son distintas. Por tanto los tres puntos x , $\rho\gamma_1^{-1}(x)$, $\rho\gamma_2^{-1}(x)$ son también distintos. Por la definición de $\bar{\Gamma}$, es claro que $[\beta\gamma^{-1}] = [\alpha\beta^{-1}]^{-1}[\alpha\gamma^{-1}] = \gamma_1^{-1}\gamma_2 \in \bar{\Gamma}$. Además, $\rho\gamma_1^{-1}(x) \in H_{\gamma_1^{-1}\gamma_2}$,

ya que $d(\rho\gamma_1^{-1}(x), \rho\gamma_1^{-1}\gamma_2(O)) = d(x, \rho\gamma_2(O)) = d(x, \rho\gamma_1(O)) = d(\rho\gamma_1^{-1}(x), O)$. Todo esto se verifica también para cualquier otro punto x' de la arista e suficientemente próximo a x . Por tanto $\rho\gamma_1^{-1}(e) \subset H_{\gamma_1^{-1}} \cap H_{\gamma_1^{-1}\gamma_2}$.

□

3. POLIEDRO DE DIRICHLET DE UNA 3-VARIEDAD CÓNICA HIPERBÓLICA CON ÁNGULOS CÓNICOS MENORES QUE π

En esta sección probaremos que, cuando todos los ángulos cónicos son $\leq \pi$, el poliedro de Dirichlet \mathcal{P} de hecho es convexo, y lo escribiremos explícitamente como una intersección finita de semiespacios cerrados en \mathbf{H}^3 .

Lema 3.1. *Sea M una variedad cónica con todos los ángulos cónicos $< 2\pi$, y sea e una arista no singular de su poliedro de Dirichlet \mathcal{P} . Entonces el ángulo diédrico de \mathcal{P} en la arista e es $< \pi$.*

Demostración. Sea e una arista de \mathcal{P} no contenida en la singularidad $Sing$. Entonces sabemos que la suma de los ángulos diédricos en torno a todas las aristas que se identifican con e debe ser igual a 2π . Denotamos por $\angle(e)$ el ángulo diédrico en e . Elegimos un pequeño segmento e' contenido en el interior de e y formado por puntos no singulares. Existen entonces $\gamma_1, \gamma_2 \in \bar{\Gamma}$ como en el lema 2.10.(2), $\gamma_1 \neq \gamma_2$, tales que $e \subset H_{\gamma_1} \cap H_{\gamma_2} \cap \mathcal{P}$, y el segmento e' se identifica con $\rho\gamma_1^{-1}(e') \subset H_{\gamma_1^{-1}} \cap H_{\gamma_1^{-1}\gamma_2} \cap \mathcal{P}$ y con $\rho\gamma_2^{-1}(e') \subset H_{\gamma_2^{-1}} \cap H_{\gamma_2^{-1}\gamma_1} \cap \mathcal{P}$. Estos tres segmentos son todos distintos, por el lema 2.10.(2).

Consideremos el plano Π que pasa por O y es ortogonal a la recta $l = H_{\gamma_1} \cap H_{\gamma_2}$ (ver la figura 5). Este plano Π es el plano determinado por los puntos O , $\rho\gamma_1(O)$ y $\rho\gamma_2(O)$. Sea $P = l \cap \Pi$, y consideremos dos pequeños segmentos $[P, A] \subset H_{\gamma_1} \cap \Pi$, $[P, B] \subset H_{\gamma_2} \cap \Pi$ (ver la figura 5). Sean $\alpha = \angle(O, P, A)$ y $\beta = \angle(O, P, B)$. Entonces el ángulo diédrico de \mathcal{P} en e es $\angle(e) = \alpha + \beta$.

El plano que pasa por O y es ortogonal a la arista $\rho\gamma_1^{-1}(e') \subset H_{\gamma_1^{-1}} \cap H_{\gamma_1^{-1}\gamma_2}$ es el plano que pasa por los tres puntos O , $\rho\gamma_1^{-1}(O)$ y $\gamma_1^{-1}\gamma_2(O)$. Por tanto, es la imagen por la isometría $\rho\gamma_1^{-1}$ del plano determinado por los puntos O , $\rho\gamma_1(O)$ y $\rho\gamma_2(O)$, es decir, coincide con $\rho\gamma_1^{-1}(\Pi)$. El segmento $[\rho\gamma_1^{-1}(P), \rho\gamma_1^{-1}(A)]$ está contenido en $H_{\gamma_1^{-1}} \cap \rho\gamma_1^{-1}(\Pi)$. Como \mathcal{P} es estrellado en O , resulta que el ángulo diédrico en $\rho\gamma_1^{-1}(e')$ es estrictamente mayor que el ángulo $\angle(O, \rho\gamma_1^{-1}(P), \rho\gamma_1^{-1}(A))$. Ahora bien, este segundo ángulo es igual a α . En efecto, el triángulo $\Delta(O, \rho\gamma_1^{-1}(P), \rho\gamma_1^{-1}(A))$ es isométrico

a $\Delta(O, P, A)$, ya que:

$$\begin{cases} d(P, O) = d(P, \rho\gamma_1(O)) = d(\rho\gamma_1^{-1}(P), O) \\ d(A, O) = d(A, \rho\gamma_1(O)) = d(\rho\gamma_1^{-1}(A), O) \\ d(P, A) = d(\rho\gamma_1^{-1}(P), \rho\gamma_1^{-1}(A)) \end{cases}$$

Por tanto, $\angle(\rho\gamma_1^{-1}(e')) > \angle(O, \rho\gamma_1^{-1}(P), \rho\gamma_1^{-1}(A)) = \alpha$. Análogamente, $\angle(\rho\gamma_2^{-1}(e')) > \angle(O, \rho\gamma_2^{-1}(P), \rho\gamma_2^{-1}(B)) = \beta$, luego $\angle(\rho\gamma_1^{-1}(e')) + \angle(\rho\gamma_2^{-1}(e')) > \alpha + \beta$.

Pero ahora la suma de los ángulos diédricos en todas las aristas que se identifican con e es mayor o igual que $\angle(e) + \angle(\rho\gamma_1^{-1}(e')) + \angle(\rho\gamma_2^{-1}(e'))$. Por tanto, $2(\alpha + \beta) < \angle(e) + \angle(\rho\gamma_1^{-1}(e')) + \angle(\rho\gamma_2^{-1}(e')) \leq 2\pi$, luego $\angle(e) = \alpha + \beta < \pi$, como queríamos probar. \square

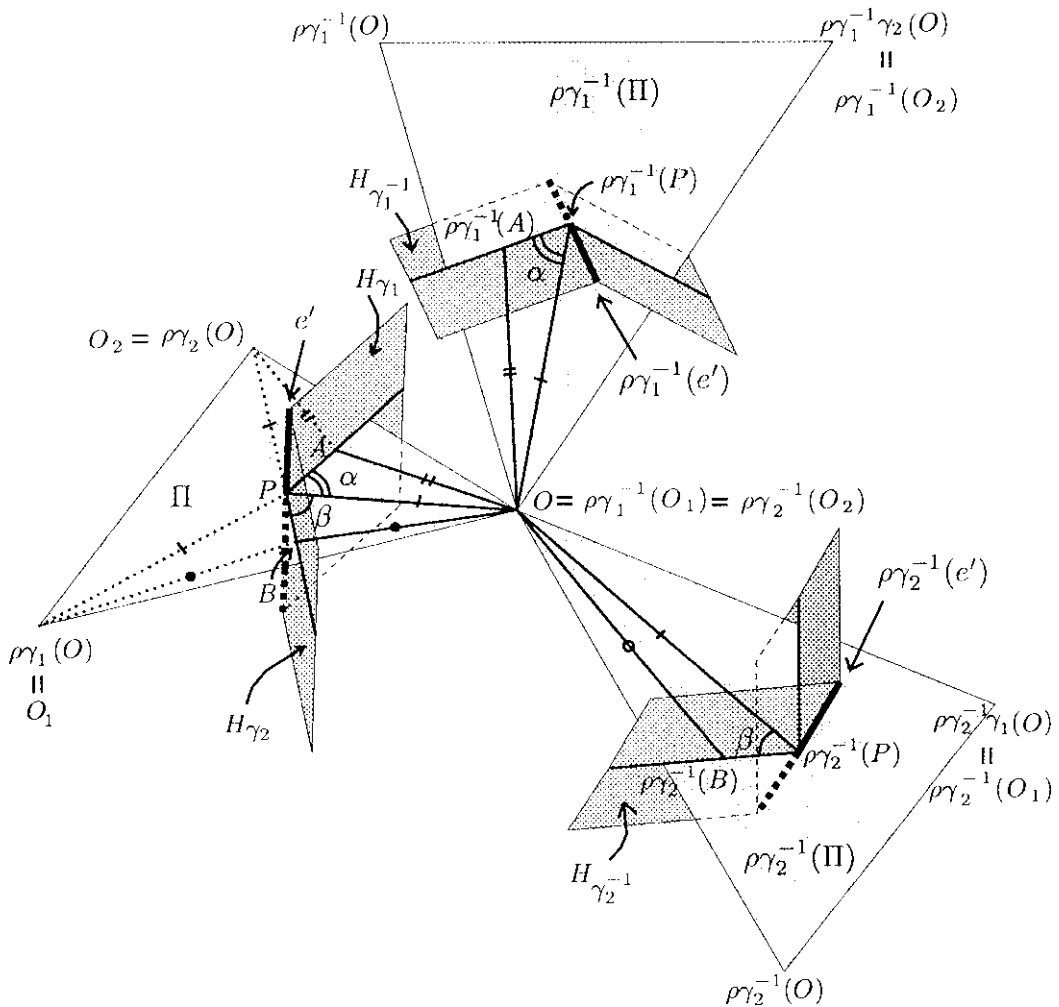


Figura 5

Corolario 3.2. Si M es una variedad cónica con todos los ángulos cónicos $\leq \pi$, entonces su poliedro de Dirichlet \mathcal{P} es convexo.

Demostración. Basta ver que los ángulos diédricos en todas las aristas de \mathcal{P} son $\leq \pi$. Si una arista está contenida en la singularidad $Sing$, entonces el ángulo diédrico en ella es $\leq \pi$ por hipótesis. Si una arista no está contenida en la singularidad, entonces el ángulo diédrico en ella es $< \pi$ por el lema anterior. \square

Observación 3.1. Recalquemos que si M es una 3-variedad hiperbólica cónica con ángulos cónicos $< 2\pi$, entonces el lema 3.1 dice que cualquier arista del poliedro de Dirichlet de M en la que el ángulo diédrico sea $\geq \pi$, necesariamente es una arista singular. En particular, si hay una “arista escondida” contenida en el interior de una cara, entonces debe ser una arista singular, y algún ángulo cónico debe ser $\geq \pi$.

Corolario 3.3. Sea M una variedad cónica con todos los ángulos cónicos $< 2\pi$. Denotemos por \mathcal{P} su poliedro de Dirichlet centrado en un punto base O , y por $Sing$ el conjunto de puntos singulares del poliedro de Dirichlet. Entendemos por “caras” (resp. “aristas”) de $\mathcal{P} \setminus Sing$, las componentes conexas del complemento de $Sing$ dentro de cada cara o arista de \mathcal{P} (si todos los ángulos cónicos son $< \pi$, entonces no son más que las caras y las aristas no singulares de \mathcal{P}). Entonces:

(1) El interior de las caras de $\mathcal{P} \setminus Sing$ corresponde a los puntos de $M \setminus \Sigma$ que están unidos a x_0 por exactamente dos geodésicas minimizantes.

El interior de las aristas de $\mathcal{P} \setminus Sing$ corresponde a los puntos de $M \setminus \Sigma$ que están unidos a x_0 por al menos tres geodésicas minimizantes.

Los vértices de $\mathcal{P} \setminus Sing$ corresponden a los puntos de $M \setminus \Sigma$ que están unidos a x_0 por más geodésicas minimizantes que ningún otro punto de un pequeño entorno suyo.

(2) Para cada arista no singular e de $\mathcal{P} \setminus Sing$, elijamos un punto cualquiera p_e de su interior, y sea $\Gamma(e) = \{\text{todas las geodésicas minimizantes que unen } x_0 \text{ con } p_e \text{ en } M\}$. Para cada vértice v de $\mathcal{P} \setminus Sing$, sea $\Gamma(v) = \{\text{todas las geodésicas minimizantes que unen } x_0 \text{ con } v \text{ en } M\}$. Entonces $\bar{\Gamma} = \left(\bigcup_e \{[\alpha\beta^{-1}] \in \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0) \mid \alpha, \beta \in \Gamma(e), \alpha \neq \beta\} \right) \cup \left(\bigcup_v \{[\alpha\beta^{-1}] \in \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0) \mid \alpha, \beta \in \Gamma(v), \alpha \neq \beta\} \right)$, donde las uniones se extienden a todas las aristas no singulares e y todos los vértices no singulares v de \mathcal{P} , respectivamente. \square

Con otras palabras, para determinar $\bar{\Gamma}$ a partir del poliedro \mathcal{P} , basta hacer lo siguiente. Para cada arista no singular e de $\mathcal{P} \setminus Sing$, se elige un punto p_e de su interior, se consideran todos los puntos p'_e de $\partial\mathcal{P}$ que se identifican con p_e , y se calculan las clases de homotopía, en $M \setminus \Sigma$, de los caminos formados por la geodésica que va de O a p_e , seguida de la geodésica que va de un p'_e a O . Análogamente, para cada vértice no singular v de $\mathcal{P} \setminus Sing$, se consideran todos los vértices v' de $\partial\mathcal{P}$ que se identifican con

v , y se calculan las clases de homotopía, en $M \setminus \Sigma$, de los caminos formados por la geodésica que va de O a v , seguida de la geodésica que va de un v' a O . El conjunto formado por todas estas clases de homotopía es $\bar{\Gamma}$.

Definición 3.1. Llamaremos *conjunto de facetas propias* del poliedro de Dirichlet \mathcal{P} al siguiente subconjunto de $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$:

$$\Gamma = \{ \gamma \in \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0) \mid \text{existe } x \in M \setminus \Sigma \text{ tal que hay exactamente dos geodésicas minimizantes } \alpha, \beta \text{ que unen } x_0 \text{ con } x, \text{ y } [\alpha\beta^{-1}] = \gamma \text{ en } \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0) \} \subset \bar{\Gamma}$$

Por abuso de lenguaje, a veces llamamos también “faceta propia” al plano bisector $H_\gamma = \{ x \in \mathbf{H}^3 \mid d(x, O) = d(x, (\rho\gamma)(O)) \}$ determinado por una faceta propia $\gamma \in \Gamma$. Toda faceta propia es en particular una faceta general; llamaremos *facetas fantasma* a las facetas generales que no sean facetas propias.

Para cada $\gamma \in \bar{\Gamma}$, definimos el semiespacio abierto $E_\gamma = \{ x \in \mathbf{H}^3 \mid d(x, O) < d(x, (\rho\gamma)(O)) \}$, y denotamos por \bar{E}_γ su adherencia.

Lema 3.4. Cuando todos los ángulos cónicos de la variedad cónica M son $\leq \pi$, el poliedro de Dirichlet coincide con la intersección finita de semiespacios cerrados $\bigcap_{\gamma \in \bar{\Gamma}} \bar{E}_\gamma$. Es decir,

$$\mathcal{P} = \{ x \in \mathbf{H}^3 \mid d(x, O) \leq d(x, (\rho\gamma)(O)) \text{, para todo } \gamma \in \bar{\Gamma} \}$$

Demostración. Lo único que falta ver es que un hiperplano de la forma H_γ , donde $\gamma \in \bar{\Gamma}$, no puede cortar al interior del poliedro \mathcal{P} . Supongamos que H_γ contuviera un punto y del interior de \mathcal{P} . Entonces por el lema 2.10.(1), sabemos que H_γ también contiene un punto no singular x del borde de \mathcal{P} . Como \mathcal{P} es convexo, el segmento $[y, x]$ está todo él contenido en el interior de \mathcal{P} (salvo el extremo x). Por tanto, H_γ contiene puntos del interior de \mathcal{P} arbitrariamente próximos a x , y podemos suponer que y está tan cerca de x como queramos.

Sea $\tilde{x} \in \bar{V} \subset \widetilde{M \setminus \Sigma}$ tal que $x = D(\tilde{x})$. Entonces existen dos geodésicas minimizantes que unen \tilde{x} con \tilde{x}_0 y $\gamma(\tilde{x}_0)$, respectivamente. Como la aplicación exponencial es abierta, existe un entorno \widetilde{W} de \tilde{x} en $M \setminus \Sigma$ tal que todo punto $z \in \widetilde{W}$ se puede unir mediante dos geodésicas $\tilde{\alpha}_z, \tilde{\beta}_z$ con \tilde{x}_0 y $\gamma(\tilde{x}_0)$, respectivamente. Entonces $W = D(\widetilde{W})$ es un entorno de x . Por la primera observación, podemos suponer que y está en $H_\gamma \cap W$. Sea $\tilde{y} \in V \subset \widetilde{M \setminus \Sigma}$ tal que $y = D(\tilde{y})$. Como $y \in H_\gamma$, $\text{long}(D\tilde{\alpha}_y) = \text{long}(D\tilde{\beta}_y)$, luego $\text{long}(\tilde{\alpha}_y) = \text{long}(\tilde{\beta}_y)$. Por tanto, $\alpha_y = p\tilde{\alpha}_y$ y $\beta_y = p\tilde{\beta}_y$ son dos geodésicas minimizantes que unen x_0 con $p(\tilde{y})$. Pero esto contradice el hecho de que y está en el interior de \mathcal{P} (y en consecuencia $p(\tilde{y}) \notin \text{Cut}_{x_0}$). \square

Corolario 3.5. *Sea M una variedad cónica con todos los ángulos cónicos $< \pi$. Entonces:*

- (1) *Para todo $\gamma \in \bar{\Gamma}$, la intersección del hiperplano H_γ con $\mathcal{P} \setminus \mathcal{S}$ es un conjunto convexo.*
- (2) *Si $x \in H_\gamma \cap (\mathcal{P} \setminus Sing)$, entonces x se identifica con $\rho\gamma^{-1}(x) \in H_{\gamma^{-1}} \cap (\mathcal{P} \setminus Sing)$ mediante la isometría $\rho\gamma^{-1}$, y $x \neq \rho\gamma^{-1}(x)$.*
- (3) *Si $x \in H_{\gamma_1} \cap H_{\gamma_2} \cap (\mathcal{P} \setminus Sing)$, entonces $\gamma_1^{-1}\gamma_2 \in \bar{\Gamma}$ y $\rho\gamma^{-1}(x) \in H_{\gamma_1^{-1}} \cap H_{\gamma_1^{-1}\gamma_2} \cap (\mathcal{P} \setminus Sing)$. Además, los tres puntos x , $\rho\gamma_1^{-1}(x)$ y $\rho\gamma_2^{-1}(x)$ son todos distintos.*

□

Observaciones 3.2.

- Si todos los ángulos cónicos son $< \pi$, entonces el poliedro de Dirichlet es $\mathcal{P} = \{ x \in \mathbf{H}^3 \mid d(x, O) \leq d(x, \rho\gamma(O)) \}$, para toda faceta propia $\gamma \in \Gamma$ } . Cada cara $H_\gamma \cap \mathcal{P}$ se identifica con la cara $H_{\gamma^{-1}} \cap \mathcal{P}$ mediante la isometría $\rho\gamma^{-1}$.
- Como en la sección anterior, todo lo que hemos hecho aquí sigue siendo también válido en los casos euclídeo y esférico.

4. UNA DESCRIPCIÓN LOCAL DEL POLIEDRO DE DIRICHLET CUANDO TODOS LOS ANGULOS CÓNICOS SON MENORES QUE 2π

Cuando algunos de los ángulos cónicos son $> \pi$, el poliedro de Dirichlet \mathcal{P} en general no es convexo (aunque puede serlo en algunos casos), y no se puede expresar como una intersección finita de semiespacios cerrados. Sin embargo, de las demostraciones de los dos lemas precedentes se deduce la siguiente descripción local de \mathcal{P} fuera de la singularidad $Sing$.

Lema 4.1. *Sea M una variedad cónica con todos los ángulos cónicos $< 2\pi$. Sea x un punto no singular del borde del poliedro de Dirichlet \mathcal{P} , y denotemos por α la geodésica que une el punto base O con x en \mathbf{H}^3 . Consideramos todos los puntos x' , x'' , ... de $\partial\mathcal{P}$ que se identifican con x , y las correspondientes geodésicas α' , α'' , ... que unen el punto base O con x' , x'' , ... , respectivamente, en \mathbf{H}^3 . Le asociamos al punto x el subconjunto $\bar{\Gamma}(x)$ de $\bar{\Gamma}$ formado por las clases de homotopía, en $M \setminus \Sigma$, de todos los caminos $\alpha\alpha'^{-1}$, $\alpha\alpha''^{-1}$, Con otras palabras,*

$$\bar{\Gamma}(x) = \{ [\alpha\beta^{-1}] \in \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0) \mid \beta \text{ es una geodésica minimizante que une } x_0 \text{ con } x \text{ en } M , \\ \text{y } \beta \neq \alpha \} \subset \bar{\Gamma}$$

Entonces existe un entorno U de x en \mathbf{H}^3 tal que $\mathcal{P} \cap U = \left(\bigcap_{\gamma \in \bar{\Gamma}(x)} \bar{E}_\gamma \right) \cap U$.

Demostración. Usando el teorema de Ascoli y la finitud de $\bar{\Gamma}$, es claro que existe un entorno W de x en $M \setminus \Sigma$ tal que si $y \in W$ está unido a x_0 por dos geodésicas minimizantes α_y, β_y , entonces x también está unido a x_0 por dos geodésicas minimizantes α_x, β_x , de modo que $[\alpha_x \beta_x^{-1}] = [\alpha_y \beta_y^{-1}]$. Sea U un entorno de x en \mathbb{H}^3 tal que $U \cap \mathcal{P} \subset W$ dentro de M , y tal que U no contiene ningún punto de \mathcal{P} que se identifique con x y sea distinto de x . Entonces $\partial \mathcal{P} \cap U = \bigcup_{\gamma \in \bar{\Gamma}(x)} H_\gamma$.

Por otra parte, del lema 3.1 se deduce que, fuera de la singularidad *Sing*, el poliedro de Dirichlet \mathcal{P} es localmente convexo. Si elegimos el entorno U de modo que $U \cap \mathcal{P}$ sea convexo, entonces por el mismo razonamiento que en el lema 3.4 se tiene que $\mathcal{P} \cap U = \left(\bigcap_{\gamma \in \bar{\Gamma}(x)} \bar{E}_\gamma \right) \cap U$.

□

Observación 4.1. Existe una biyección entre $\bar{\Gamma}(x)$ y el conjunto de todos los puntos de \mathcal{P} que se identifican con x (y son distintos de x). Además, $\bar{\Gamma} = \bigcup_{x \in \mathcal{P} \setminus \text{Sing}} \bar{\Gamma}(x)$.

5. UNA PRESENTACIÓN DEL GRUPO FUNDAMENTAL DEL COMPLEMENTO DE LA SINGULARIDAD, A PARTIR DEL POLIEDRO DE DIRICHLET

Ciclos de facetas en torno a un punto no singular del poliedro de Dirichlet

Sea x un punto no singular en el borde del poliedro de Dirichlet \mathcal{P} . Diremos que una sucesión finita de elementos $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ de $\bar{\Gamma}$, es un *ciclo de facetas* en torno a x , si

- $x \in H_{\lambda_1} \cap \mathcal{P}$;
- x se identifica con $\rho \lambda_1^{-1}(x) \in H_{\lambda_1^{-1}} \cap H_{\lambda_2} \cap \mathcal{P}$ mediante la isometría $\rho \lambda_1^{-1}$ (donde $\lambda_2 \neq \lambda_1^{-1}$);
- $\rho(\lambda_{i-1}^{-1} \cdots \lambda_1^{-1})(x)$ se identifica con $\rho(\lambda_i^{-1} \cdots \lambda_1^{-1})(x) \in H_{\lambda_i^{-1}} \cap H_{\lambda_{i+1}} \cap \mathcal{P}$ mediante la isometría $\rho \lambda_i^{-1}$ (donde $\lambda_{i+1} \neq \lambda_i^{-1}$) para $i = 1, \dots, r-1$; y
- $\rho(\lambda_r^{-1} \cdots \lambda_1^{-1})(x) = x$.

Diremos que es un *ciclo de facetas propias* en torno a x , si $\lambda_i \in \Gamma$ para todo i . Diremos que es un *ciclo minimal de facetas propias* en torno a x , si $\rho(\lambda_i^{-1} \cdots \lambda_1^{-1})(x) \neq x$ para todo $i < r$.

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ es un ciclo de facetas en torno a un punto no singular $x \in \mathcal{P}$, entonces $\lambda_1 \cdots \lambda_r = 1$ en $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$.

Una presentación de $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$

Por el Teorema de Seifert-Van Kampen, el grupo fundamental $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$ admite una presentación cuyos generadores son todos los elementos de Γ (es decir, todas las facetas propias), que podemos escribir emparejadamente como $\gamma_1, \gamma_1^{-1}, \dots, \gamma_m, \gamma_m^{-1}$, y cuyas relaciones son las siguientes:

- (i) $\gamma_j \gamma_j^{-1} = 1$ para todo j ;
- (ii) para cada arista no singular e de $\mathcal{P} \setminus Sing$, se elige un punto p_e en su interior y un ciclo minimal de caras propias $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ en torno a p_e , y se escribe la relación $\lambda_1 \cdots \lambda_r = 1$. (Obsérvese que todo $\lambda_i \in \Gamma = \{\gamma_1, \gamma_1^{-1}, \dots, \gamma_m, \gamma_m^{-1}\}$)

6. EJEMPLO : LA ESTRUCTURA DE ORBIFORMA ESFÉRICA EN S^3 CON SINGULARIDAD UN NUDO O ENLACE RACIONAL Y ÁNGULO 180°

En las secciones 5 y 6 del capítulo I vimos que la esfera S^3 siempre tiene una estructura de orbiforma esférica con singularidad cualquier nudo o enlace racional $[p/q]$ y ángulo cónico igual a π . Esta orbiforma se obtiene como el cociente de S^3 bajo la acción del grupo diédrico de orden $2p$ generado por dos rotaciones A, B de ángulo π , en torno a dos ejes que están separados a una distancia de $\frac{\pi}{p}$ y forman un ángulo de $\frac{q\pi}{p}$. Si $|a, b : aw = wb|$ es la presentación estándar del grupo $\pi_1(S^3 \setminus [p/q])$ (resp. $|a, b : aw = wa|$ en el caso de un enlace), entonces A y B son las holonomías de los generadores a y b . Sea O el punto medio entre los dos ejes de A y B . Entonces el poliedro de Dirichlet centrado en O es la "lente" comprendida entre dos esferas máximas en S^3 que se cortan formando ángulo π/p . La singularidad son dos arcos geodésicos situados en cada una de esas dos esferas formando ángulo $q\pi/p$, y $2p$ puntos sobre el ecuador de la lente, situados a igual distancia cada uno del siguiente.

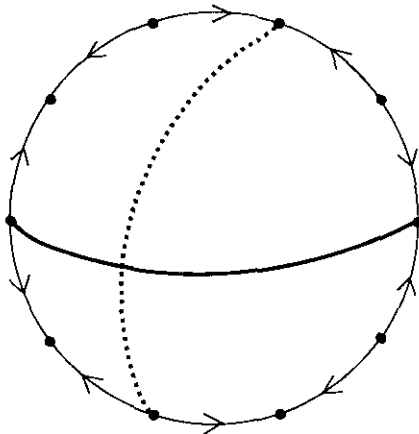


Figura 6

Las facetas propias de \mathcal{P} son los elementos a , a^{-1} , b y b^{-1} de $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [p/q])$.

El ecuador de la lente queda dividido por los $2p$ puntos singulares en $2p$ arcos iguales, que se identifican todos entre sí al pegar las caras de \mathcal{P} , dando lugar a un arco PQ que une dos puntos singulares (ver figura 6). Elijamos un punto x en uno cualquiera de estos arcos. Queremos ver cómo es un ciclo minimal de facetas propias en torno a x . Para ello, tomamos un punto x' en el interior de \mathcal{P} , próximo a x , y consideramos un meridiano del arco PQ con centro en x y que pase por x' , transverso a las caras de \mathcal{P} (ver figura 7).

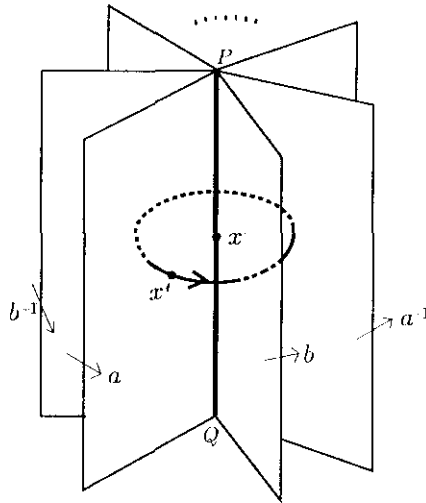


Figura 7

Escribimos ordenadamente las intersecciones sucesivas del meridiano con las caras (orientadas) de \mathcal{P} . Esto da lugar a una palabra σ en el alfabeto $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$, cuyas letras, permutadas cíclicamente, producen la palabra $awb^{-1}w^{-1}$, que es la relación de la presentación estándar de $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [p/q])$ (resp. $awa^{-1}w^{-1}$ si se trata de un enlace); véase la figura 8. (En realidad, podrían producir la inversa de la relación, $wbw^{-1}a^{-1}$, pero esto se evita orientando en sentido inverso el meridiano elegido.) Así pues, un ciclo minimal de facetas propias en torno a x , es una palabra σ en el alfabeto $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$, cuyas letras, leídas cíclicamente, producen la relación $awb^{-1}w^{-1}$. (En realidad, σ sólo depende del arco al que pertenezca x).

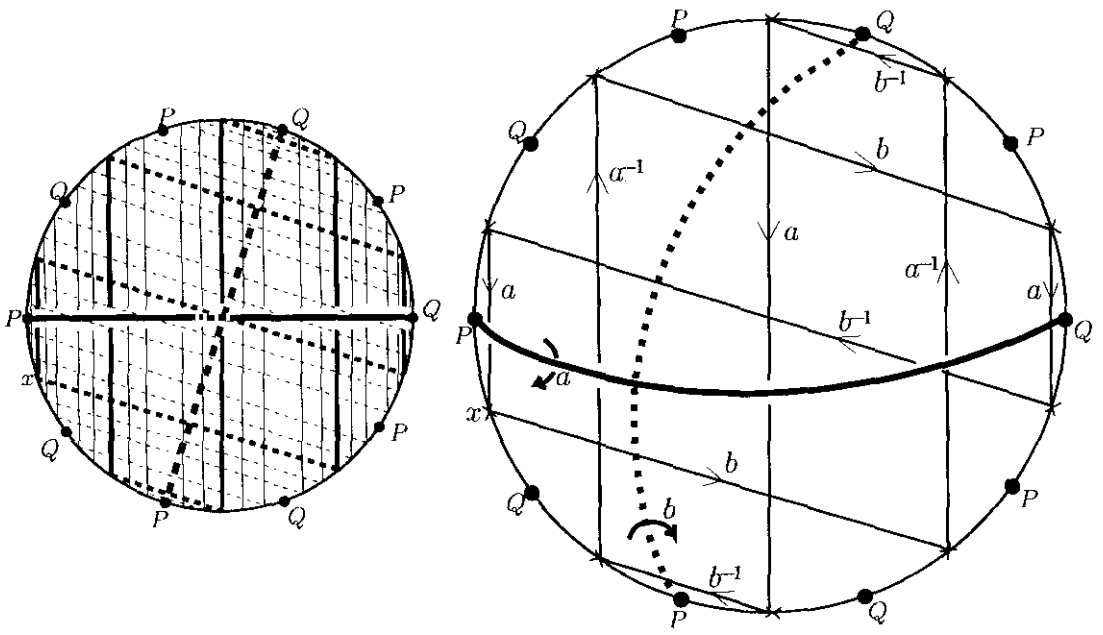


Figura 8. Ejemplo : $\sigma = (ba^{-1}b^{-1}a)b^{-1}(a^{-1}bab^{-1})a$

Supongamos que y es otro punto del ecuador de la lente que se identifica con x . Sea α el segmento geodésico que une O con x y β el que une O con y . Entonces $[\alpha\beta^{-1}] \in \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus \{p/q\})$ se puede escribir como una palabra $g(a, b)$ en el alfabeto $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$, tal que la palabra σ asociada al punto x comienza por $g(a, b)$ (ver figura 9). Es decir, $g(a, b)$ es un segmento inicial de la palabra σ .

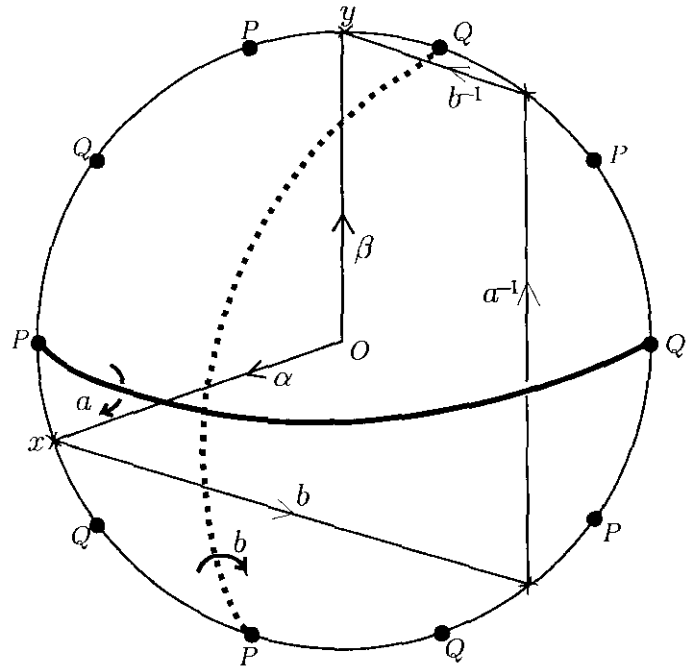


Figura 9. Ejemplo : $[\alpha\beta^{-1}] = ba^{-1}b^{-1}$

Por tanto, el conjunto $\bar{\Gamma}(x)$ (formado por todos los elementos $[\alpha\beta^{-1}]$ de este tipo), está compuesto por los $2p - 1$ segmentos iniciales (distintos de la identidad) de la palabra σ . En consecuencia, el conjunto $\bar{\Gamma}$ de todas las facetas generales de \mathcal{P} , está formado por todas las palabras $g(a, b)$ tales que alguna permutación cíclica de la relación $awb^{-1}w^{-1}$ comienza por $g(a, b)$.

7. SIMETRÍAS DEL POLIEDRO DE DIRICHLET

Supongamos que M es una 3-variedad hiperbólica cónica con singularidad un enlace $\Sigma \subset M$, y con todos los ángulos cónicos $< 2\pi$. Sea $D : \widetilde{M \setminus \Sigma} \rightarrow \mathbf{H}^3$ una aplicación desarrolladora para la parte no singular $M \setminus \Sigma$, y sea $\rho : \pi_1(M \setminus \Sigma) \rightarrow \text{Iso}(\mathbf{H}^3)$ la correspondiente representación de holonomía. Sea $x_0 \in M \setminus \Sigma$ un punto base cualquiera, \tilde{x}_0 un levantamiento de x_0 a $\widetilde{M \setminus \Sigma}$, y $O = D(\tilde{x}_0) \in \mathbf{H}^3$. Vamos a denotar por \mathcal{P} el poliedro de Dirichlet de M centrado en O .

Lema 7.1. *Supongamos que $\psi : (M, \Sigma) \rightarrow (M, \Sigma)$ es una isometría que deja fijo el punto base x_0 , y sea ψ_* el isomorfismo de $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$ inducido por ψ . Entonces existe una isometría hiperbólica $\varphi \in \text{Iso}(\mathbf{H}^3)$ que deja fijo el punto base O y es una simetría del poliedro de Dirichlet \mathcal{P} . En particular, φ pertenece al normalizador del grupo de holonomía $\rho(\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0))$ en $\text{Iso}(\mathbf{H}^3)$. Si γ es una faceta de \mathcal{P} , entonces $\psi_*\gamma$ también es una faceta de \mathcal{P} , y $H_{\psi_*\gamma} \cap \mathcal{P} = \varphi(H_\gamma \cap \mathcal{P})$.*

Demostración. Como ψ es una isometría de M que fija x_0 , preserva el cut-locus de M con respecto a x_0 , y en consecuencia deja también invariante su complemento $U = M \setminus \text{Cut}_{x_0}$. Sea V la componente conexa del levantamiento de U a $\widetilde{M \setminus \Sigma}$ que contiene a \tilde{x}_0 . Entonces ψ se levanta a una isometría $\tilde{\psi}$ de $\widetilde{M \setminus \Sigma}$ que fija \tilde{x}_0 y deja invariante V . Sabemos que $D|_V$ es una isometría sobre su imagen, y por tanto podemos definir la aplicación $\varphi = (D|_V)\tilde{\psi}(D|_V)^{-1}$ de $D(V)$ en $D(V)$. Entonces φ es una isometría de $D(V) \subset \mathbf{H}^3$ que fija $O = D(\tilde{x}_0)$. Ahora se puede extender φ a una isometría de todo \mathbf{H}^3 que fija O y preserva $D(V)$. Esta isometría (que denotamos también por φ) deja invariante el poliedro de Dirichlet $\mathcal{P} = \overline{D(V)}$. Además, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{M \setminus \Sigma} & \xrightarrow{\psi} & \widetilde{M \setminus \Sigma} & \xrightarrow{\gamma} & \widetilde{M \setminus \Sigma} \\ D \downarrow & & \downarrow D & & \downarrow D \\ \mathbf{H}^3 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{H}^3 & \xrightarrow{\rho\gamma} & \mathbf{H}^3 \end{array}$$

Dado $\gamma \in \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$, $\psi_*\gamma = \tilde{\psi}\gamma\tilde{\psi}^{-1}$ como transformación cubriente de $\widetilde{M \setminus \Sigma}$. En consecuencia, $\rho(\psi_*\gamma) = \varphi(\rho\gamma)\varphi^{-1}$ para todo $\gamma \in \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$, y por tanto φ pertenece al normalizador de $\rho(\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0))$ en $\text{Iso}(\mathbf{H}^3)$.

Finalmente, como $\varphi(O) = O$ resulta que $H_{\psi_*\gamma} = \varphi(H\gamma)$, luego $H_{\psi_*\gamma} \cap \mathcal{P} = \varphi(H\gamma \cap \mathcal{P})$. \square

Observación 7.1 Supongamos que M es una *orbiforma* hiperbólica (es decir, $G = \rho(\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0))$ es un subgrupo discreto de $\text{Iso}(\mathbf{H}^3)$ y M es isométrica al cociente \mathbf{H}^3/G). Si φ pertenece al normalizador de G en $\text{Iso}(\mathbf{H}^3)$ y $\phi(O) = O$, entonces φ es una simetría del poliedro de Dirichlet \mathcal{P} centrado en O .

En efecto, como $\mathcal{P} = \{x \in \mathbf{H}^3 \mid d(x, O) \leq d(x, g(O)) \text{ para todo } g \in G\}$, $\varphi(O) = O$ y $\varphi^{-1}G\varphi = G$, resulta que $\varphi(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.

Observación 7.2 Los mismos resultados son ciertos en los casos euclídeo y esférico.

Capítulo IV

DEFORMACIONES DE ESTRUCTURAS HIPERBÓLICAS CÓNICAS

INTRODUCCIÓN

En este capítulo se estudia la variación del poliedro de Dirichlet al deformar una estructura cónica dada *con ángulos cónicos menores que 2π* . (Recordemos que, como se indicó en la introducción de la tesis, el estudio del caso en que hay ángulos cónicos entre π y 2π es especialmente interesante.) Como dijimos también en la introducción, a partir de la representación de holonomía de una variedad cónica concreta, no hemos podido determinar en general su poliedro de Dirichlet con centro en un punto base dado, porque no sabemos determinar los planos bisectores que definen sus caras. (Éste es un problema abierto interesante pero muy difícil). Un objetivo menos ambicioso (que se resuelve en este capítulo), consiste en partir de una variedad cónica inicial M_0 , para la cual se conozca ya un poliedro de Dirichlet \mathcal{P}_0 , y “deformar” el poliedro \mathcal{P}_0 para conseguir poliedros de Dirichlet de variedades cónicas “próximas” a M_0 .

Tenemos que precisar qué entendemos aquí por variedades cónicas “próximas” a M_0 . Esto se hace en la sección 1, donde se define el *espacio de deformaciones de estructuras hiperbólicas cónicas* en una 3-variedad diferenciable compacta X , con singularidad un enlace $\Sigma \subset X$ y con un punto base fijo $x_0 \in X \setminus \Sigma$. En este espacio se considera la *topología cuasi-isométrica*; en ella, dos estructuras están próximas si existe un difeomorfismo que no dilata ni contrae mucho las distancias (o con más exactitud, una aplicación bilipschitziana cuya constante está próxima a 1).

Recordemos la idea intuitiva que permite relacionar el poliedro de Dirichlet inicial \mathcal{P}_0 con el poliedro de Dirichlet \mathcal{P} de una estructura cónica M suficientemente próxima a M_0 (cf. §I.6.) Denotemos por $\widetilde{M_0 \setminus \Sigma}$ la cubierta universal del complemento de la singularidad, con la métrica inducida por M_0 , y denotemos por $\widetilde{M \setminus \Sigma}$ la misma cubierta universal, pero ahora con la métrica (próxima a la anterior) inducida por M . Sean $\widetilde{\mathcal{P}}_0$ y $\widetilde{\mathcal{P}}$ los dominios de Dirichlet para las respectivas acciones discretas por isometrías de $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$ en $\widetilde{M_0 \setminus \Sigma}$ y $\widetilde{M \setminus \Sigma}$. Vamos a restringirnos a una parte compacta de cada uno de estos dominios; por ejemplo, la que se proyecta sobre el complemento de un pequeño entorno tubular de Σ . Por abuso de notación, llamaremos $\widetilde{\mathcal{P}}_0 \setminus N(\Sigma)$ y $\widetilde{\mathcal{P}} \setminus N(\Sigma)$ a los dominios así truncados. Consideremos el conjunto finito $\overline{\Gamma}_0 \subset \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$ formado por los elementos γ tales que $\gamma \widetilde{\mathcal{P}}_0 \cap \widetilde{\mathcal{P}}_0 \neq \emptyset$

(i.e. las *facetas generales* de \mathcal{P}_0). Entonces $\tilde{\mathcal{P}}_0 \cup \left(\bigcup_{\gamma \in \tilde{\Gamma}_0} \gamma \tilde{\mathcal{P}}_0 \right)$ es un entorno de $\tilde{\mathcal{P}}_0$ dentro de $\widetilde{M_0 \setminus \Sigma}$.

Pues bien, al deformar ligeramente la métrica, ocurre que $\tilde{\mathcal{P}} \cup \left(\bigcup_{\gamma \in \tilde{\Gamma}_0} \gamma \tilde{\mathcal{P}} \right)$ sigue siendo un entorno del

nuevo dominio de Dirichlet *truncado* $\tilde{\mathcal{P}} \setminus N(\Sigma)$. Es decir, si $\gamma \tilde{\mathcal{P}}$ es un trasladado de $\tilde{\mathcal{P}}$ que toca a $\tilde{\mathcal{P}} \setminus N(\Sigma)$ en algún punto, entonces $\gamma \in \tilde{\Gamma}_0$ (cf. teorema 2.3.) Con otras palabras, *fuera del entorno de la singularidad $N(\Sigma)$ fijado de antemano, el conjunto de facetas generales de \mathcal{P} está contenido en el conjunto de facetas generales de \mathcal{P}_0 si M está suficientemente próxima a M_0 (el grado de proximidad necesario depende del entorno $N(\Sigma)$ elegido).* Por otra parte, si $\gamma \tilde{\mathcal{P}}_0 \cap \tilde{\mathcal{P}}_0$ tiene interior no vacío en el borde de $\tilde{\mathcal{P}}_0$ (i.e. si γ es una *faceta propia* de \mathcal{P}_0), entonces $\gamma \tilde{\mathcal{P}} \cap \tilde{\mathcal{P}}$ también tiene interior no vacío en el borde de $\tilde{\mathcal{P}}$ (cf. teorema 2.3.) Es decir, *el conjunto de facetas propias de \mathcal{P}_0 está contenido en el conjunto de facetas propias de \mathcal{P} si M está suficientemente próxima a M_0 .*

Estos resultados se demuestran en la sección 2 de este capítulo. La clave está en utilizar la caracterización (obtenida en el capítulo III) de las facetas propias y las facetas generales en términos de geodésicas que minimizan la distancia entre el punto base y los puntos no singulares de la variedad cónica, y aplicar el teorema de Ascoli para estudiar la convergencia de sucesiones de geodésicas minimizantes.

En resumen, supongamos que tenemos una familia continua de deformaciones M_t de una estructura cónica M_0 , y denotemos por \mathcal{P}_t sus respectivos poliedros de Dirichlet con centro en un punto dado O . Sean ρ_t las correspondientes holonomías, y para cada $\gamma \in \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$, consideremos el plano bisector $H_\gamma(t) = \{x \in \mathbb{H}^3 \mid d(x, O) = d(x, \rho_t \gamma(O))\}$. Fijemos un pequeño entorno tubular $N(\Sigma)$ de la singularidad. Entonces existe un $\epsilon > 0$ (dependiente de $N(\Sigma)$) tal que para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ se verifican las siguientes propiedades:

- si el plano bisector $H_\gamma(0)$ define una cara de \mathcal{P}_0 , entonces $H_\gamma(t)$ también define una cara de \mathcal{P}_t ;
- si el plano bisector $H_\gamma(t)$ define una cara de \mathcal{P}_t que no está dentro del entorno $N(\Sigma)$, entonces $H_\gamma(0)$ toca al borde de \mathcal{P}_0 en algún punto no singular (aunque puede no definir ninguna cara de \mathcal{P}_0 ; sino “bascular” sobre una arista o un vértice no singular).

Estas propiedades no dicen nada acerca del comportamiento de los poliedros de Dirichlet deformados \mathcal{P}_t dentro del entorno $N(\Sigma)$. De hecho, se verifican para cualquier familia de deformaciones de una estructura hiperbólica en el complemento de un entorno tubular de la singularidad, con independencia de que se puedan extender o no a estructuras cónicas. (No toda estructura hiperbólica en $M \setminus N(\Sigma)$ se puede extender a una estructura cónica en M con singularidad Σ : a veces se puede extender a una estructura cónica en una variedad obtenida a partir de M por cirugía en el enlace Σ , y otras veces ni siquiera esto es posible, cf. [Thu₁].)

El estudio de la variación del poliedro de Dirichlet en las proximidades de la singularidad, al realizar una deformación, se hace en la sección 3 de este capítulo. Éste es, en principio, un problema más difícil, debido a que, al contrario de lo que ocurre para los puntos no singulares, hay infinitos trasladados del poliedro \mathcal{P}_0 que inciden en cualquier punto singular (hablando intuitivamente). Con más precisión: consideremos la cubierta universal del complemento de un entorno tubular abierto de la singularidad, $M_0 \setminus \widetilde{N}(\Sigma) \subset M_0 \setminus \Sigma$. Como el borde de $M_0 \setminus N(\Sigma)$ está formado por toros disjuntos, el borde de su cubierta universal $M_0 \setminus \widetilde{N}(\Sigma)$ está formado por una unión (infinita) de planos disjuntos. Consideremos una componente \widetilde{T} del borde de $M_0 \setminus \widetilde{N}(\Sigma)$ que corte al dominio de Dirichlet $\widetilde{\mathcal{P}}_0$. Entonces existen infinitos trasladados de $\widetilde{\mathcal{P}}_0$ que cortan también a \widetilde{T} . Parecería en principio que las relaciones de incidencia entre estos infinitos trasladados podrían cambiar arbitrariamente al hacer una deformación, con lo cual habría infinitas posibles caras nuevas que podrían aparecer, en las cercanías de la singularidad, en el nuevo poliedro de Dirichlet \mathcal{P} . (Esto es lo que sucede de hecho cuando se deforma la estructura hiperbólica completa de volumen finito en $M \setminus \Sigma$, para pasar a estructuras hiperbólicas cónicas en las variedades obtenidas a partir de M por todas las (infinitas) posibles cirugías en el enlace Σ , cf. § I.6.)

Sin embargo, estamos suponiendo que tanto M_0 como su deformación M son variedades cónicas con el mismo espacio subyacente y la misma singularidad. Por tanto, en la componente \widetilde{T} del borde de $M_0 \setminus \widetilde{N}(\Sigma)$ actúa, de manera discreta y cocompacta, un subgrupo periférico $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \subset \pi_1(M_0 \setminus \Sigma, x_0)$ (generado por un meridiano y una longitud de la correspondiente componente del enlace singular Σ). Al deformar, en la misma componente \widetilde{T} del borde de $M \setminus \widetilde{N}(\Sigma)$ se tiene una acción equivalente del mismo subgrupo $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \subset \pi_1(M_0 \setminus \Sigma, x_0)$. Ahora bien, este grupo $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ permuta el conjunto de trasladados de $\widetilde{\mathcal{P}}_0$ que cortan a \widetilde{T} , y el cociente es un conjunto finito (porque la acción de $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ en \widetilde{T} es cocompacta). De entre los infinitos trasladados $\gamma \widetilde{\mathcal{P}}_0$ que cortan a \widetilde{T} , existe, pues, una cantidad *finita* de ellos (que podemos determinar explícitamente), que son “los más cercanos” a $\widetilde{\mathcal{P}}_0$ y que generan a todos los demás por la acción de $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$. Llamaremos a los correspondientes elementos $\gamma \in \pi_1(M_0 \setminus \Sigma, x_0)$ (en número finito), *facetas singulares de \mathcal{P}_0* . Son las únicas posibles facetas nuevas que pueden aparecer en un entorno de la singularidad, en el poliedro de Dirichlet deformado \mathcal{P} .

Todos estos resultados permiten acotar de manera efectiva el conjunto de planos bisectores que se necesita considerar para construir los poliedros de Dirichlet de estructuras cónicas próximas a una dada. Todos los argumentos son también válidos para deformaciones de una estructura esférica (resp. euclídea) a estructuras esféricas (resp. euclídeas) próximas.

Finalmente, en la sección 4 se utilizan los resultados de las secciones anteriores para dar un algoritmo efectivo que permite construir poliedros de Dirichlet correspondientes a representaciones de holonomía próximas a una dada. Como consecuencia se obtiene además una demostración constructiva, para este

caso particular, del teorema más general que afirma (hablando vagamente) que *toda representación próxima a la representación de holonomía de una estructura geométrica, es también la holonomía de alguna estructura geométrica*. Este teorema fue enunciado en su mayor generalidad por Thurston ([Thu₁], §5.3.1) y demostrado de diferentes maneras por Canary-Epstein-Green ([CEG]) y Goldman ([Go₁]) entre otros (véase [Go₁] para una lista más completa de referencias).

Partimos ahora de los siguientes datos: una 3-variedad cerrada M con un enlace $\Sigma \subset M$, y una familia continua (de hecho, analítica a trozos) de representaciones ρ_t de $\pi_1(M \setminus \Sigma)$ en $\text{Iso}(\mathbf{H}^3)$, tal que ρ_0 es la holonomía de una estructura hiperbólica cónica en (M, Σ) (que denotaremos M_0), y tal que ρ_t envía los meridianos de Σ a rotaciones hiperbólicas. No suponemos a priori que ρ_t sea la holonomía de ninguna estructura hiperbólica cónica M_t en (M, Σ) . Queremos demostrar que en efecto lo es, y hallar un poliedro de Dirichlet \mathcal{P}_t para esa estructura cónica M_t . Esto se consigue con el siguiente algoritmo:

Fase 1:

- (1) Se parte de un poliedro de Dirichlet \mathcal{P}_0 con un cierto punto base O para la estructura hiperbólica cónica inicial M_0 , y se determinan sus conjuntos de facetas generales y singulares, $\bar{\Gamma}_0$ y Γ_{sing}
- (2) Para t suficientemente próximo a 0, se consideran los planos bisectores correspondientes a las facetas generales de \mathcal{P}_0 . Utilizándolos, se construye explícitamente un poliedro Q_t tal que, al identificar dos a dos algunas de sus caras, se obtiene una estructura hiperbólica (con borde no liso) en el complemento de un entorno tubular $N(\Sigma)$ de la singularidad, cuya holonomía es ρ_t .

Con esto se ha probado ya, de manera constructiva, que ρ_t es la holonomía de una estructura hiperbólica en $M \setminus N(\Sigma)$. Esto es un caso particular del teorema general antes mencionado (“*representaciones próximas a una holonomía son también holonomías*”), y constituye una parte del Teorema de Cirugía Hiperbólica de Thurston. Hasta aquí no se ha utilizado la hipótesis de que ρ_t envía los meridianos de Σ a rotaciones hiperbólicas; el resultado es cierto, pues, para representaciones cualesquiera próximas a ρ_0 . Hasta aquí el algoritmo es válido también para deformar una estructura esférica cónica a estructuras esféricas próximas (en el complemento de la singularidad), o para deformar una estructura euclídea cónica a estructuras euclídeas, hiperbólicas o esféricas próximas en el complemento de la singularidad (siempre que se conozcan las correspondientes representaciones de holonomía).

Si ρ_t envía los meridianos de Σ a rotaciones hiperbólicas, entonces la estructura hiperbólica en $M \setminus N(\Sigma)$ definida por el poliedro Q_t se puede extender a una estructura hiperbólica cónica M_t en (M, Σ) con holonomía ρ_t , por el mismo argumento introducido por Thurston en su Teorema de Cirugía Hiperbólica. Denotemos por \mathcal{P}_t el poliedro de Dirichlet de M_t centrado en O , que será una extensión del poliedro Q_t construido en la fase 1. Si admitimos que M_t ha de estar próxima a la estructura cónica inicial M_0 en la topología cuasi-isométrica (cf. observación 4.3), entonces el resultado de la sección 3

nos dice que las facetas propias de \mathcal{P}_t están contenidas en el conjunto de facetas generales y singulares de \mathcal{P}_0 . Con esta información podemos construir \mathcal{P}_t en la segunda fase del algoritmo:

Fase 2:

- (3) Se construyen *todos* los posibles poliedros que son extensión de \mathcal{Q}_t y tienen todas sus caras contenidas en la unión finita de planos bisectores $H_\gamma(t)$, donde γ recorre todas las facetas generales y singulares de \mathcal{P}_0 . Existe un número finito de tales poliedros.
- (4) Para cada uno de ellos, se comprueba si sus caras se identifican dos a dos mediante isometrías hiperbólicas para dar lugar a la estructura cónica M_t . Ya sabemos que ha de existir uno que verifique esta condición, y ése es el poliedro de Dirichlet buscado \mathcal{P}_t . (Según un teorema de Hodgson-Kerckhoff [HK] sobre rigidez de variedades hiperbólicas cónicas, debe ser además único.)

El mismo algoritmo sirve para deformaciones de una estructura cónica esférica (resp. euclídea) a estructuras cónicas esféricas (resp. euclídeas) próximas (partiendo siempre de la hipótesis de que se pueda deformar, a nivel puramente algebraico, la representación de holonomía).

1. LA TOPOLOGÍA CUASI-ISOMÉTRICA EN EL ESPACIO DE DEFORMACIONES DE UNA ESTRUCTURA HIPERBÓLICA CÓNICA

Sea X una 3-variedad diferenciable compacta, $\Sigma \subset X$ un enlace sumergido en X , y $x_0 \in X \setminus \Sigma$ un punto base fijo. Llamaremos una *estructura hiperbólica cónica* en (X, Σ) a un par (ϕ, M) , donde $\phi : X \rightarrow M$ es un difeomorfismo y M es una variedad hiperbólica cónica con singularidad $\phi(\Sigma)$ (cf. [Go₁]). Denotaremos por $\mathcal{C}(X, \Sigma)$ el espacio de todas las estructuras hiperbólicas cónicas en (X, Σ) .

Sin embargo, conviene considerar iguales dos estructuras hiperbólicas cónicas (ϕ, M) , (ϕ', M') en (X, Σ) cuando exista una isometría isotópica a la identidad. Más formalmente, diremos que dos estructuras hiperbólicas cónicas (ϕ, M) y (ϕ', M') son *isotópicas relativamente a x_0* si existe una isometría $h : M \rightarrow M'$ tal que ϕ' es isotópico a $h\phi$ relativamente a Σ y a x_0 . Con otras palabras, si $\text{Diff}_0(X, \Sigma, x_0)$ denota la componente de la identidad del grupo de los difeomorfismos $X \rightarrow X$ que fijan x_0 y Σ , entonces (ϕ, M) y (ϕ', M') son *isotópicas relativamente a x_0* si existen un difeomorfismo

$\varphi \in \text{Diff}_0(X, \Sigma, x_0)$ y una isometría $h : M \rightarrow M'$ tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & M \\ \varphi \downarrow & & \downarrow h \\ X & \xrightarrow{\phi'} & M' \end{array}$$

es conmutativo.

Denotaremos por $\mathfrak{S}(X, \Sigma)$ el conjunto de las clases de isotopía (relativa a x_0) de estructuras hiperbólicas cónicas en (X, Σ) , y lo llamaremos *espacio de deformaciones de estructuras hiperbólicas cónicas en (X, Σ)* . Es decir, $\mathfrak{S}(X, \Sigma) = \mathcal{C}(X, \Sigma)/\text{isotopía}$.

En este espacio $\mathfrak{S}(X, \Sigma)$ vamos a considerar la *topología cuasi-isométrica* definida a continuación (cf. [Thu₂], [CEG], [Gro]).

Definición. Dados dos espacios métricos X, Y y una constante $k \geq 1$, se dice que una aplicación $f : X \rightarrow Y$ es una *k-cuasi-isometría* si

$$\frac{1}{k} d_X(x, y) \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y)$$

para todo par de puntos $x, y \in X$. (En particular, toda cuasi-isometría f es un homeomorfismo).

Si X, Y son dos variedades riemannianas y $k \geq 1$, entonces se dice que una aplicación $f : X \rightarrow Y$ es una *k-cuasi-isometría local* si

$$\frac{1}{k} \|\mathbf{v}\| \leq \|d_x f(\mathbf{v})\| \leq k \|\mathbf{v}\|$$

para todo punto $x \in X$ y todo vector \mathbf{v} tangente a X en el punto x .

Diremos que dos estructuras hiperbólicas cónicas (ϕ, M) y (ϕ', M') en (X, Σ) son *k-cuasi-isométricas* (relativamente a x_0) si existen un difeomorfismo $\varphi \in \text{Diff}_0(X, \Sigma, x_0)$ y una *k-cuasi-isometría* $h : M \rightarrow M'$ tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & M \\ \varphi \downarrow & & \downarrow h \\ X & \xrightarrow{\phi'} & M' \end{array}$$

es conmutativo. (En particular, $h(\phi(\Sigma)) = \phi'(\Sigma)$). Evidentemente, esta relación extiende con la relación de isotopía definida en $\mathcal{C}(X, \Sigma)$ (y define por tanto una relación de equivalencia entre elementos de $\mathfrak{S}(X, \Sigma)$).

En el espacio de estructuras hiperbólicas cónicas $\mathcal{C}(X, \Sigma)$ definimos entonces la topología cuasi-isométrica de la siguiente forma. Dada una estructura $(\phi, M) \in \mathcal{C}(X, \Sigma)$, una base de entornos de

(ϕ, M) está formada por los conjuntos

$$U((\phi, M), \epsilon) = \{ (\phi', M') \in \mathcal{C}(X, \Sigma) \mid (\phi', M') \text{ es } e^\epsilon\text{-cuasi-isométrica a } (\phi, M) \}$$

La topología cuasi-isométrica que consideraremos en el espacio de deformaciones $\mathfrak{S}(X, \Sigma) = \mathcal{C}(X, \Sigma)/\text{isotopía}$ es entonces la topología cociente.

Holonomía de una estructura hiperbólica cónica

Supongamos que (ϕ, M) es una estructura hiperbólica cónica en (X, Σ) . Entonces $M \setminus \phi(\Sigma)$ es una variedad hiperbólica, y tiene asociado un homomorfismo de holonomía $\widehat{\rho} : \pi_1(M \setminus \phi(\Sigma), \phi(x_0)) \rightarrow \text{Iso}(\mathbf{H}^3)$, que está definido a menos de conjugación por elementos de $\text{Iso}(\mathbf{H}^3)$. Por otra parte, el difeomorfismo ϕ induce un isomorfismo $\phi_* : \pi_1(X \setminus \Sigma, x_0) \rightarrow \pi_1(M \setminus \phi(\Sigma), \phi(x_0))$. Llamaremos *holonomía* de la estructura (ϕ, M) al homomorfismo $\rho = \widehat{\rho}\phi_* : \pi_1(X \setminus \Sigma, x_0) \rightarrow \text{Iso}(\mathbf{H}^3)$. Está definido a menos de conjugación, y tiene la particularidad de que envía meridianos de la singularidad Σ a rotaciones de \mathbf{H}^3 .

Supongamos que (ϕ, M) y (ϕ', M') son dos estructuras isotópicas. Entonces existen un difeomorfismo $\varphi \in \text{Diff}_0(X, \Sigma, x_0)$ y una isometría $h : M \rightarrow M'$ tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & M \\ \varphi \downarrow & & \downarrow h \\ X & \xrightarrow{\phi'} & M' \end{array}$$

es conmutativo. Como φ es isotópico a la identidad, el automorfismo que induce en el grupo fundamental es la identidad. Por tanto, al nivel de los grupos fundamentales se tiene también un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(X \setminus \Sigma, x_0) & \xrightarrow{\phi_*} & \pi_1(M \setminus \phi(\Sigma), \phi(x_0)) & \xrightarrow{\widehat{\rho}} & \text{Iso}(\mathbf{H}^3) \\ \varphi_* = \text{id} \downarrow & & \downarrow h_* & & \\ \pi_1(X \setminus \Sigma, x_0) & \xrightarrow{\phi'_*} & \pi_1(M' \setminus \phi'(\Sigma), \phi'(x_0)) & \xrightarrow{\widehat{\rho}' } & \text{Iso}(\mathbf{H}^3) \end{array}$$

Como $h : M \rightarrow M'$ es una isometría, resulta que las aplicaciones desarrolladoras de $M \setminus \phi(\Sigma)$ y de $M' \setminus \phi'(\Sigma)$ difieren en una isometría hiperbólica, y por tanto $\widehat{\rho}' h_*$ es conjugada de $\widehat{\rho}$. En consecuencia, $\widehat{\rho}' h_* \phi_*$ es conjugada de $\rho = \widehat{\rho}\phi_*$. Pero como $\varphi_* = \text{id}$, se tiene que $\rho' = \widehat{\rho}' \phi'_* = \widehat{\rho}' h_* \phi_*$, luego ρ' es conjugada de ρ . Por tanto, la holonomía está bien definida (a menos de conjugación) para las clases de isotopía de estructuras hiperbólicas cónicas.

Vamos a considerar en el espacio de representaciones $\text{Hom}(\pi_1(X \setminus \Sigma, x_0), \text{Iso}(\mathbf{H}^3))$, la topología compacto-abierta, que coincide (por ser $\pi_1(X \setminus \Sigma, x_0)$ finitamente generado, cf. [G₀₁]) con la topología

de la convergencia puntual de homomorfismos, definida de la siguiente forma: dado un conjunto finito de generadores $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ de $\pi_1(X \setminus \Sigma, x_0)$, una base de entornos de una representación $\rho_0 : \pi_1(X \setminus \Sigma, x_0) \rightarrow \text{Iso}(\mathbf{H}^3)$ está formada por los conjuntos

$$U(\rho_0, W_1, \dots, W_m) = \{ \rho \mid \rho(\gamma_i) \in W_i ; i = 1, \dots, m \} ,$$

donde W_i es cualquier entorno de $\rho_0(\gamma_i)$ para cada i .

En el espacio cociente de $\text{Hom}(\pi_1(X \setminus \Sigma, x_0), \text{Iso}(\mathbf{H}^3))$ bajo la acción de $\text{Iso}(\mathbf{H}^3)$ por conjugación, consideraremos la topología cociente. Entonces se puede comprobar (cf. [Go₁]) que la aplicación

$$\text{hol} : \mathfrak{S}(X, \Sigma) \rightarrow \text{Hom}(\pi_1(X \setminus \Sigma, x_0), \text{Iso}(\mathbf{H}^3))/\text{Iso}(\mathbf{H}^3)$$

que a cada estructura hiperbólica cónica le asocia su holonomía, es continua.

2. VARIACIÓN LOCAL DEL DOMINIO DE DIRICHLET FUERA DE UN ENTORNO DE LA SINGULARIDAD, AL DEFORMAR UNA ESTRUCTURA HIPERBÓLICA CÓNICA

Sea (ϕ_0, M_0) una estructura hiperbólica cónica en (X, Σ) . Dado un $k > 1$ cualquiera, consideremos el entorno abierto U de (ϕ_0, M_0) en $\mathcal{C}(X, \Sigma)$ formado por todas las estructuras que son k -cuasi-isométricas a ella. Podemos encontrar una función continua $\delta : U \rightarrow [1, k]$ tal que para cada $(\phi, M) \in U$, (ϕ, M) es $\delta((\phi, M))$ -cuasi-isométrica a (ϕ_0, M_0) , y $\delta((\phi_0, M_0)) = 1$.

Para cada $(\phi, M) \in U$, elegimos un difcomorfismo $\varphi((\phi, M)) \in \text{Diff}_0(X, \Sigma, x_0)$ y una $\delta((\phi, M))$ -cuasi-isometría $h((\phi, M)) : M_0 \rightarrow M$ tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi_0} & M_0 \\ \varphi((\phi, M)) \downarrow & & \downarrow h((\phi, M)) \\ X & \xrightarrow{\phi} & M \end{array}$$

es conmutativo. (Para (ϕ_0, M_0) , $\varphi((\phi_0, M_0)) = \text{id}$ y $h((\phi_0, M_0)) = \text{id}$). En general, para mayor brevedad escribiremos $\delta = \delta((\phi, M))$, $\varphi = \varphi((\phi, M))$ y $h = h((\phi, M))$. Denotaremos por d_0 la distancia en M_0 y por d la distancia en cualquier otra estructura cónica M de U .

Fijemos un entorno regular de la singularidad en $M_0, W = \{ x \in M_0 \mid d_0(x, \phi_0(\Sigma)) < r \}$, que no contenga al punto base $\phi_0(x_0)$. El abierto W es homeomorfo a una unión finita de toros sólidos disjuntos.

Para cada estructura $(\phi, M) \in U$, consideramos el abierto $h(W) \subset \{x \in M \mid d(x, \phi(\Sigma)) < \delta r\}$ que sigue siendo un entorno regular de la singularidad en M . Por tanto, $M \setminus h(W)$ es una variedad compacta del mismo tipo de homotopía que $X \setminus \Sigma$, con borde una unión finita de toros. Además, como $\phi_0(x_0) \notin W$, se tiene que $\phi(x_0) = h\phi_0(x_0) \notin h(W)$.

Para cada $(\phi, M) \in U$ definimos los siguientes conjuntos finitos:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}((\phi, M), h(W)) = \{ \gamma \in \pi_1(X \setminus \Sigma, x_0) \mid \text{existe } x \in M \setminus h(W) \text{ tal que hay dos geodésicas} \\ \text{minimizantes } \alpha, \beta \text{ que unen } \phi(x_0) \text{ con } x \text{ en } M \setminus h(W), \\ \text{de modo que } \phi_*^{-1}[\alpha\beta^{-1}] = \gamma \text{ en } \pi_1(X \setminus \Sigma, x_0) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma((\phi, M), h(W)) = \{ \gamma \in \pi_1(X \setminus \Sigma, x_0) \mid \text{existe } x \in M \setminus h(W) \text{ tal que hay exactamente dos} \\ \text{geodésicas minimizantes } \alpha, \beta \text{ que unen } \phi(x_0) \text{ con } x \\ \text{en } M \setminus h(W), \text{ y } \phi_*^{-1}[\alpha\beta^{-1}] = \gamma \text{ en } \pi_1(X \setminus \Sigma, x_0) \} \end{aligned}$$

Es decir, $\bar{\Gamma}((\phi, M), h(W))$ y $\Gamma((\phi, M), h(W))$ corresponden a las facetas generales y las facetas propias, respectivamente, que aparecen fuera de un cierto entorno de la singularidad en un poliedro de Dirichlet de la variedad hiperbólica cónica M . Queremos estudiar la variación local de los conjuntos $\bar{\Gamma}((\phi, M), h(W))$ y $\Gamma((\phi, M), h(W))$ en un entorno de la estructura cónica de partida (ϕ_0, M_0) .

Denotaremos por $\text{diam}(M) = \max\{d(x, y) \mid x, y \in M\}$ el diámetro de cada variedad cónica M . Como $\text{diam}(M) \leq k \text{diam}(M_0)$, resulta que $\sup_{(\phi, M) \in U} \text{diam}(M) = R < +\infty$.

Lema 2.1. *Sea $\{(\phi_n, M_n)\} \subset U$ una sucesión que converge a (ϕ_0, M_0) , y para cada n , sea $\gamma_n \in \bar{\Gamma}((\phi_n, M_n), h_n(W))$. Entonces existe una subsucesión de $\{\gamma_n\}$ constantemente igual a un cierto $\gamma \in \bar{\Gamma}((\phi_0, M_0), W)$.*

Demostración. Para cada n existe un punto $x_n \in M_n \setminus h_n(W)$ y existen dos geodésicas minimizantes α_n, β_n que unen $\phi_n(x_0)$ con x_n en $M_n \setminus h_n(W)$, tales que $(\phi_n^{-1})_*[\alpha_n\beta_n^{-1}] = \gamma_n$ en $\pi_1(X \setminus \Sigma, x_0)$.

Consideremos la sucesión de aplicaciones $h_n^{-1}\alpha_n : [0, 1] \rightarrow M_0 \setminus W$. Como la sucesión $\{(\phi_n, M_n)\}$ converge a (ϕ_0, M_0) , resulta que cada h_n^{-1} es una δ_n -cuasi-isometría, donde $\delta_n \rightarrow 1$. Como además α_n tiene longitud acotada por $R = \sup_{(\phi, M) \in U} \text{diam}(M) < +\infty$, resulta que la familia $\{h_n^{-1}\alpha_n\}$ es uniformemente Lipschitz, y por tanto equicontinua. Por el teorema de Ascoli, tiene una subsucesión que converge a una función $\alpha : [0, 1] \rightarrow M_0 \setminus W$. Por comodidad, supondremos que $h_n^{-1}\alpha_n \xrightarrow{\text{unif}} \alpha$. En particular, $\alpha(0) = \phi_0(x_0)$ y $\alpha(1) = x = \lim h_n^{-1}(x_n) \in M_0 \setminus W$. Al ser la longitud semi-continua inferiormente

(cf. [Gro]), es $\text{long}(\alpha) \leq \liminf \text{long}(h_n^{-1}\alpha_n) \leq \liminf \delta_n \text{long}(\alpha_n) = \liminf \delta_n d_n(\phi_n(x_0), x_n) \leq \liminf \delta_n^2 d_0(\phi_0(x_0), h_n^{-1}(x_n)) = d_0(\phi_0(x_0), x)$. Por tanto, α es una geodésica minimizante que une $\phi_0(x_0)$ con x dentro de $M_0 \setminus W$.

Haciendo lo mismo con la sucesión $h_n^{-1}\beta_n : [0, 1] \rightarrow M_0 \setminus W$, obtenemos otra geodésica minimizante $\beta : [0, 1] \rightarrow M_0 \setminus W$ que une $\phi_0(x_0)$ con x en $M_0 \setminus W$. Tomando subsucesiones adecuadas, podemos suponer además que $h_n^{-1}\alpha_n \xrightarrow{\text{unif}} \alpha$ y $h_n^{-1}\beta_n \xrightarrow{\text{unif}} \beta$. Como en $M_0 \setminus W$ curvas uniformemente próximas son homótopas, resulta que, para n suficientemente grande, $[\alpha\beta^{-1}] = [(h_n^{-1}\alpha_n)(h_n^{-1}\beta_n)^{-1}] = (h_n^{-1})_*[\alpha_n\beta_n^{-1}]$ en $\pi_1(M_0 \setminus \phi_0(\Sigma), \phi_0(x_0))$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} (\phi_0^{-1})_*[\alpha\beta^{-1}] &= (\phi_0^{-1})_*(h_n^{-1})_*[\alpha_n\beta_n^{-1}] \\ &= (\varphi_n^{-1})_*(\phi_n^{-1})_*[\alpha_n\beta_n^{-1}] \\ &= (\varphi_n^{-1})_*(\gamma_n) \\ &= \gamma_n \end{aligned}$$

ya que $(\varphi_n^{-1})_* = \text{id}$ por ser φ_n isotópico a la identidad. Por tanto, para n suficientemente grande, γ_n es constantemente igual al elemento $\gamma = (\phi_0^{-1})_*[\alpha\beta^{-1}] \in \overline{\Gamma}((\phi_0, M_0), W)$. \square

Lema 2.2. Sea $\gamma \in \pi_1(X \setminus \Sigma, x_0)$ tal que $\gamma \in \Gamma((\phi_0, M_0), W)$. Entonces existe $\epsilon > 0$ (dependiente de W) tal que $\gamma \in \Gamma((\phi, M), h(W))$ si (ϕ, M) es e^ϵ -cuasi-isométrica a (ϕ_0, M_0) .

Demostración. Como $\gamma \in \Gamma((\phi_0, M_0), W)$, existe $x \in M_0 \setminus W$ tal que hay exactamente dos geodésicas minimizantes α_0, β_0 que unen $\phi_0(x_0)$ con x en $M_0 \setminus W$, y $(\phi_0^{-1})_*[\alpha_0\beta_0^{-1}] = \gamma$ en $\pi_1(X \setminus \Sigma, x_0)$. Denotaremos por ξ_0 el camino $\alpha_0\beta_0^{-1} : [0, 1] \rightarrow M_0 \setminus W$.

Para cada $(\phi, M) \in U$, la aplicación $h : M_0 \rightarrow M$ es una δ -cuasi-isometría, donde $\delta \rightarrow 1$ cuando $(\phi, M) \rightarrow (\phi_0, M_0)$. Vamos a ver que cuando (ϕ, M) está suficientemente próxima a (ϕ_0, M_0) , existe un punto en la traza del camino $\xi = h\xi_0$ que está unido a $\phi(x_0)$ por exactamente dos geodésicas minimizantes α, β en $M \setminus h(W)$, tales que $(\phi^{-1})_*[\alpha\beta^{-1}] = \gamma$ en $\pi_1(X \setminus \Sigma, x_0)$. Con esto ya tendremos que $\gamma \in \Gamma((\phi, M), h(W))$ cuando (ϕ, M) está cerca de (ϕ_0, M_0) , que es lo que queremos demostrar.

Supongamos primero que existiera $(\phi, M) \in U$ tal que para todo $t \in [0, 1]$, hubiera una única geodésica minimizante en $M \setminus h(W)$ uniendo $\phi(x_0)$ con $\xi(t)$. Entonces la imagen de ξ estaría contenida en el complementario del cut-locus de $M \setminus h(W)$ respecto a $\phi(x_0)$, que es contractible. Por tanto, $[\xi] = 1$ en $\pi_1(M \setminus \phi(\Sigma), \phi(x_0))$, y $\phi_*^{-1}[\xi] = 1$ en $\pi_1(X \setminus \Sigma, x_0)$. Pero $\phi_*^{-1}[\xi] = \phi_*^{-1}[h\xi_0] = (\phi_0^{-1})_*[\xi_0] = \gamma \neq 1$ en $\pi_1(X \setminus \Sigma, x_0)$, lo cual es una contradicción.

Así pues, para cada $(\phi, M) \in U$ existe un $t \in [0, 1]$ (dependiente de (ϕ, M)) tal que hay al menos dos geodésicas minimizantes α, β que unen $\phi(x_0)$ con $\xi(t)$ en $M \setminus h(W)$. Veamos ahora que cuando

(ϕ, M) está cerca de (ϕ_0, M_0) , estas dos geodésicas α, β son las únicas que unen $\phi(x_0)$ con $\xi(t)$ en $M \setminus h(W)$, y verifican que $\phi_*^{-1}[\alpha\beta^{-1}] = \gamma$.

Supongamos que existiera una sucesión (ϕ_n, M_n) convergente a (ϕ_0, M_0) tal que para cada n hay un punto $\xi_n(t_n)$ en la traza del camino ξ_n que está unido a $\phi_n(x_0)$ por al menos tres geodésicas minimizantes $\alpha_n, \beta_n, \lambda_n$ en $M_n \setminus h_n(W)$. Entonces, como en el lema anterior, aplicando el teorema de Ascoli y eligiendo subsucesiones adecuadamente, podemos suponer que $h_n^{-1}\alpha_n \xrightarrow{\text{unif}} \alpha$, $h_n^{-1}\beta_n \xrightarrow{\text{unif}} \beta$ y $h_n^{-1}\lambda_n \xrightarrow{\text{unif}} \lambda$, donde α, β, λ son tres geodésicas minimizantes que unen $\phi_0(x_0)$ con $\xi_0(t) = \lim h_n^{-1}(\xi_n(t_n)) = \lim \xi_0(t_n)$ en $M_0 \setminus W$. Además, estas tres geodésicas son distintas: por ejemplo, $\alpha \neq \beta$ porque $[\alpha_n\beta_n^{-1}] \neq 1$ (cf. definición III.2.4), y para n suficientemente grande es $[\alpha\beta^{-1}] = (h_n^{-1})_*[\alpha_n\beta_n^{-1}] \neq 1$ en $\pi_1(M_0 \setminus W, \phi_0(x_0))$ (ya que curvas uniformemente próximas son homótopas). Ahora bien, por hipótesis no existe ningún punto en $\xi_0([0, 1])$ que esté unido a $\phi_0(x_0)$ por tres geodésicas minimizantes, luego hemos llegado a una contradicción.

Así pues, existe $\epsilon > 0$ tal que si (ϕ, M) es e^ϵ -cuasi-isométrica a (ϕ_0, M_0) , entonces hay un punto $\xi(t)$ en la traza del camino ξ que está unido a $\phi(x_0)$ por exactamente dos geodésicas minimizantes α, β en $M \setminus h(W)$. Supongamos ahora que existiera una sucesión (ϕ_n, M_n) convergente a (ϕ_0, M_0) tal que $(\phi_n^{-1})_*[\alpha_n\beta_n^{-1}] \neq \gamma$ para todo n . Como antes, podemos suponer que $h_n^{-1}\alpha_n \xrightarrow{\text{unif}} \hat{\alpha}$ y $h_n^{-1}\beta_n \xrightarrow{\text{unif}} \hat{\beta}$, donde $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ son dos geodésicas minimizantes que unen $\phi_0(x_0)$ con $\xi_0(t) = \lim \xi_0(t_n)$ en $M_0 \setminus W$. Como el único punto de $\xi_0([0, 1])$ que está unido a $\phi_0(x_0)$ por dos geodésicas minimizantes en $M_0 \setminus W$ es $x = \xi_0(1/2)$, resulta que $\xi_0(t) = x$, y $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ coinciden con las dos únicas geodésicas minimizantes α_0, β_0 que unen $\phi_0(x_0)$ con x en $M_0 \setminus W$. Como curvas uniformemente próximas en $M_0 \setminus W$ son homótopas y $(\phi_0^{-1})_*[\alpha_0\beta_0^{-1}] = \gamma$, resulta que para n suficientemente grande, $(\phi_n^{-1})_*[\alpha_n\beta_n^{-1}] = (\phi_0^{-1})_*(h_n^{-1})_*[\alpha_n\beta_n^{-1}] = (\phi_0^{-1})_*[\alpha_0\beta_0^{-1}] = \gamma$. Pero esto contradice la hipótesis.

Por tanto, existe $\epsilon > 0$ tal que si (ϕ, M) es e^ϵ -cuasi-isométrica a (ϕ_0, M_0) , entonces hay un punto $\xi(t)$ en la traza del camino ξ que está unido a $\phi(x_0)$ por exactamente dos geodésicas minimizantes α, β en $M \setminus h(W)$, y $\phi_*^{-1}[\alpha\beta^{-1}] = \gamma$ en $\pi_1(X \setminus \Sigma, x_0)$. En particular, $\gamma \in \Gamma((\phi, M), h(W))$.

□

Teorema 2.3. Existe $\epsilon > 0$ (dependiente de W) tal que si (ϕ, M) es e^ϵ -cuasi-isométrica a (ϕ_0, M_0) , entonces

$$\Gamma((\phi_0, M_0), W) \subseteq \Gamma((\phi, M), h(W)) \subseteq \bar{\Gamma}((\phi, M), h(W)) \subseteq \bar{\Gamma}((\phi_0, M_0), W)$$

Demostración. Supongamos que existiera una sucesión $\{(\phi_n, M_n)\}$ convergente a (ϕ_0, M_0) tal que $\bar{\Gamma}((\phi_n, M_n), h_n(W)) \not\subseteq \bar{\Gamma}((\phi_0, M_0), W)$ para todo n . Entonces para cada n existe un elemento $\gamma_n \in \bar{\Gamma}((\phi_n, M_n), h_n(W))$ tal que $\gamma_n \notin \bar{\Gamma}((\phi_0, M_0), W)$. Pero entonces, por el lema 2.1, existe una subsucesión de $\{\gamma_n\}$ que es constantemente igual a un cierto $\gamma \in \bar{\Gamma}((\phi_0, M_0), W)$, lo cual contradice la hipótesis.

Por otra parte, como $\Gamma((\phi_0, M_0), W)$ es finito, del lema 2.2 se deduce que existe $\epsilon > 0$ tal que si (ϕ, M) es e^ϵ -cuasi-isométrica a (ϕ_0, M_0) , entonces $\Gamma((\phi_0, M_0), W) \subseteq \Gamma((\phi, M), h(W))$. \square

Corolario 2.4. Si $\Gamma((\phi_0, M_0), W) = \bar{\Gamma}((\phi_0, M_0), W)$, entonces existe $\epsilon > 0$ (dependiente de W) tal que si (ϕ, M) es e^ϵ -cuasi-isométrica a (ϕ_0, M_0) , entonces $\Gamma((\phi, M), h(W)) = \bar{\Gamma}((\phi, M), h(W)) = \bar{\Gamma}((\phi_0, M_0), W)$. \square

Observación 2.1. Si se elige el entorno tubular abierto $W = \{x \in M_0 \mid d_0(x, \phi_0(\Sigma)) < r\}$ suficientemente pequeño, entonces los conjuntos $\Gamma((\phi_0, M_0), W)$ y $\bar{\Gamma}((\phi_0, M_0), W)$ no dependen de W . De hecho, para W suficientemente pequeño,

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}((\phi_0, M_0), W) = \{ \gamma \in \pi_1(X \setminus \Sigma, x_0) \mid \text{existe } x \in M_0 \setminus \phi_0(\Sigma) \text{ tal que hay dos geodésicas mini-} \\ \text{mizantes } \alpha, \beta \text{ que unen } \phi_0(x_0) \text{ con } x \text{ en } M_0 \setminus \phi_0(\Sigma), \\ \text{de modo que } (\phi_0^{-1})_*[\alpha\beta^{-1}] = \gamma \text{ en } \pi_1(X \setminus \Sigma, x_0) \} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma((\phi_0, M_0), W) = \{ \gamma \in \pi_1(X \setminus \Sigma, x_0) \mid \text{existe } x \in M_0 \setminus \phi_0(\Sigma) \text{ tal que hay exactamente dos} \\ \text{geodésicas minimizantes } \alpha, \beta \text{ que unen } \phi_0(x_0) \text{ con } x \\ \text{en } M_0 \setminus \phi_0(\Sigma), \text{ y } (\phi_0^{-1})_*[\alpha\beta^{-1}] = \gamma \text{ en } \pi_1(X \setminus \Sigma, x_0) \} \end{aligned}$$

Es decir, para W suficientemente pequeño, $\Gamma((\phi_0, M_0), W)$ y $\bar{\Gamma}((\phi_0, M_0), W)$ corresponden a todas las facetas propias o generales, respectivamente, del poliedro de Dirichlet de M_0 con punto base $\phi_0(x_0)$.

En particular, de aquí se deduce que el conjunto de todas las facetas propias de (ϕ_0, M_0) está contenido en el conjunto de todas las facetas propias de (ϕ, M) si (ϕ, M) está suficientemente próxima a (ϕ_0, M_0) . Es decir, existe $\epsilon > 0$ tal que si (ϕ, M) es e^ϵ -cuasi-isométrica a (ϕ_0, M_0) , entonces

$$\Gamma(\phi_0, M_0) \subseteq \Gamma(\phi, M)$$

En cambio, $\Gamma((\phi, M), h(W))$ y $\bar{\Gamma}((\phi, M), h(W))$ ciertamente dependen de la elección de W , y en general no contienen a todas las facetas (propias o generales) del poliedro de Dirichlet de M con punto base $\phi(x_0)$. El motivo es que, al deformar una estructura cónica M hasta alcanzar M_0 , alguna cara del poliedro de Dirichlet de M podría irse haciendo cada vez más pequeña hasta degenerar en un punto singular de M_0 .

3. VARIACIÓN LOCAL DEL DOMINIO DE DIRICHLET DENTRO DE UN ENTORNO DE LA SINGULARIDAD, AL DEFORMAR UNA ESTRUCTURA HIPERBÓLICA CÓNICA

En la sección 2 sólo hemos considerado estructuras hiperbólicas (no singulares) *en el complemento de un entorno tubular de la singularidad*, y no hemos utilizado en ningún momento el hecho de que esas estructuras se puedan extender a estructuras cónicas en (X, Σ) . En consecuencia, tampoco hemos obtenido ninguna información acerca del comportamiento del poliedro de Dirichlet en las proximidades de la singularidad, cuando se realiza una deformación de la estructura cónica. Ahora bien, no toda estructura hiperbólica en $X \setminus N(\Sigma)$ se puede extender a una estructura cónica en (X, Σ) : a veces se puede extender a una estructura cónica en una variedad obtenida a partir de X por cirugía en el enlace Σ , y otras veces ni siquiera esto es posible (cf. [Thu₁]). Los resultados de la sección 2 son válidos (con mayor generalidad) para cualquier familia de deformaciones de una estructura hiperbólica en $X \setminus N(\Sigma)$, con independencia de que se puedan o no extender a estructuras cónicas en (X, Σ) . A cambio, no describen cómo cambia el poliedro de Dirichlet en un entorno de la singularidad, cuando las deformaciones se extienden de hecho a estructuras cónicas en (X, Σ) . El objetivo de esta sección es obtener esta descripción. Utilizaremos las mismas notaciones que en la sección precedente. Recordemos primero la definición de *bola estándar centrada en un punto singular* que dimos en el capítulo III, def. 2.5.

Definición. Dado un punto singular $x \in \Sigma$, en el que el ángulo cónico es θ , diremos que una bola de radio r centrada en x es una *bola estándar* si es isométrica a un sector de ángulo θ de una bola hiperbólica de radio r , con los lados identificados mediante una rotación de ángulo θ . Diremos que un camino cerrado μ es un *meridiano de la singularidad próximo a x* si está contenido en una bola estándar $B(x, r)$ y genera el grupo fundamental de $B(x, r) \setminus \Sigma$ (ver figura 1). Hay dos clases de homotopía distintas para los meridianos de la singularidad próximos a x : una es inversa de la otra.

Observación 3.1. Supongamos que $h : (M, \Sigma) \rightarrow (M', \Sigma')$ es una δ -cuasi-isometría, y que $B_M(x, r)$ es una bola estándar en M , centrada en un punto singular $x \in \Sigma$. Entonces $B_{M'}(h(x), r/\delta)$ es una bola estándar en M' .

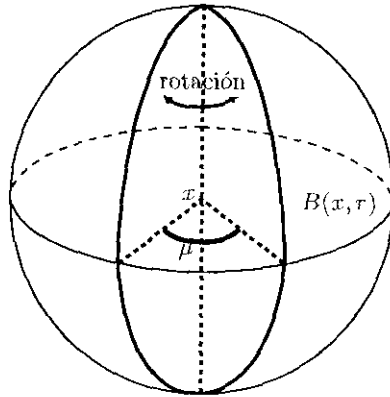


Figura 1

A cada punto singular $x \in \Sigma$ le asociamos un subconjunto finito $\Gamma_{\text{sing}}(x)$ de $\pi_1(M \setminus \Sigma)$, de la siguiente manera.

- A cada geodésica minimizante α que une x_0 con x , le asociamos dos elementos de $\Gamma_{\text{sing}}(x) \subset \pi_1(M \setminus \Sigma)$, definidos como sigue. Elegimos un disco E centrado en x , transverso a Σ , contenido dentro de una bola estándar $B_M(x, r)$, y que contenga un segmento $[y, x]$ de α . Denotamos por μ el borde del disco E (i.e. μ es un meridiano de la singularidad próximo a x , que corta a α en un punto y). Recorremos α hasta llegar al punto y de intersección con μ ; a continuación recorremos μ ó μ^{-1} ; y finalmente volvemos por α^{-1} al punto base x_0 . Las clases de homotopía de estos dos caminos son los dos elementos de $\Gamma_{\text{sing}}(x)$ asociados a α .
- A cada par de geodésicas minimizantes distintas α, β que unen x_0 con x , le asociamos tres elementos de $\Gamma_{\text{sing}}(x) \subset \pi_1(M \setminus \Sigma)$, definidos como sigue. Elegimos un disco E centrado en x , transverso a Σ , contenido dentro de una bola estándar $B_M(x, r)$, y que contenga un segmento $[y, x]$ de α y un segmento $[z, x]$ de β . Denotamos por μ el borde del disco E (i.e. μ es un meridiano de la singularidad próximo a x , que corta a α en un punto y y a β en un punto z). Denotamos por $\hat{\alpha}$ (resp. $\hat{\beta}$) el segmento de α (resp. β) que une x_0 con y (resp. con z). Elegimos un arco λ dentro de μ que una y con z (ver figura 2). Entonces los tres elementos de $\Gamma_{\text{sing}}(x) \subset \pi_1(M \setminus \Sigma)$ asociados al par de geodésicas (α, β) son:

$$[\hat{\alpha} \lambda \hat{\beta}^{-1}] \quad , \quad [\hat{\alpha} \lambda \mu \hat{\beta}^{-1}] \quad , \quad [\hat{\alpha} \lambda \mu^{-1} \hat{\beta}^{-1}]$$

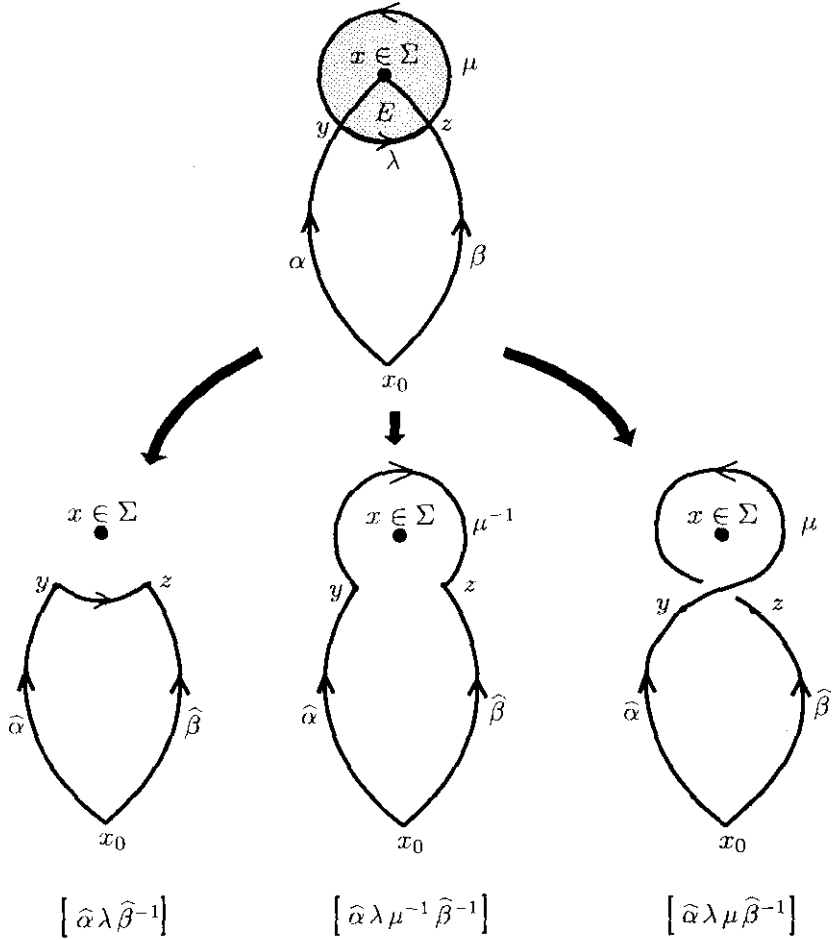
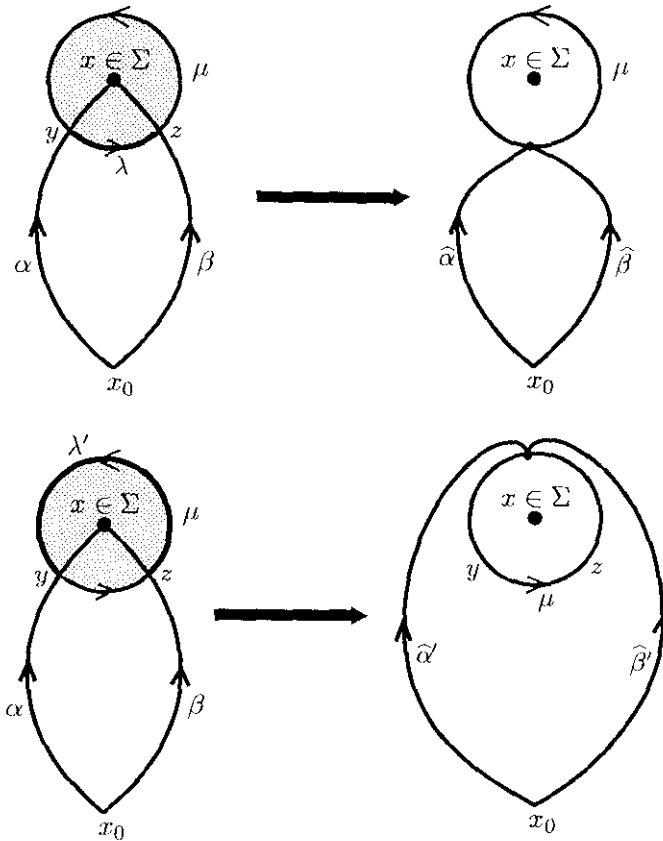


Figura 2

Es fácil ver (cf. figura 3) que la terna de elementos de $\pi_1(M \setminus \Sigma)$ definidos por α y β no depende de la elección del arco λ . (En último término, esto se debe a que en una bola estándar B , $\pi_1(B \setminus \Sigma) \cong \mathbf{Z}$ y μ, μ^{-1} son los únicos generadores.)

El conjunto $\Gamma_{\text{sing}}(x)$ es finito porque sólo hay una cantidad finita de geodésicas minimizantes que unen x_0 con x (cf. cap. III). Definimos el conjunto $\Gamma_{\text{sing}} = \bigcup_{x \in \Sigma} \Gamma_{\text{sing}}(x)$, que también es un subconjunto finito de $\pi_1(M \setminus \Sigma)$ (porque Σ es compacto, y si $y \in \Sigma$ está suficientemente próximo a $x \in \Sigma$, entonces $\Gamma_{\text{sing}}(y) \subset \Gamma_{\text{sing}}(x)$.) Llamaremos a los elementos de Γ_{sing} , *facetas singulares* del poliedro de Dirichlet de M centrado en x_0 .



$$\hat{\alpha} \hat{\beta}^{-1} = \hat{\alpha}' \mu \hat{\beta}'^{-1}$$

$$\hat{\alpha} \mu \hat{\beta}^{-1} = \hat{\alpha}' \mu^{-1} \hat{\beta}'^{-1}$$

$$\hat{\alpha} \mu^{-1} \hat{\beta}^{-1} = \hat{\alpha}' \hat{\beta}'^{-1}$$

Figura 3

Sea ahora (ϕ_0, M_0) una estructura hiperbólica en (X, Σ) . Como en la sección 2, consideramos el entorno U de (ϕ_0, M_0) en $\mathcal{C}(X, \Sigma)$ formado por todas las estructuras que son k -cuasi-isométricas a (ϕ_0, M_0) (donde $k > 1$). Existe una función continua $\delta : U \rightarrow [1, k]$ tal que para cada $(\phi, M) \in U$, (ϕ, M) es $\delta((\phi, M))$ -cuasi-isométrica a (ϕ_0, M_0) , y $\delta((\phi_0, M_0)) = 1$. Para abreviar escribiremos $\delta = \delta((\phi, M))$. Para cada $(\phi, M) \in U$, elegimos un difeomorfismo $\varphi \in \text{Diff}_0(X, \Sigma, x_0)$ y una δ -cuasi-isometría $h : M_0 \rightarrow M$ tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi_0} & M_0 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow h \\ X & \xrightarrow{\phi} & M \end{array}$$

es conmutativo. (Para (ϕ_0, M_0) , $\varphi = \text{id}$ y $h = \text{id}$). Denotaremos por d_0 la distancia en M_0 y por d la distancia en cualquier otra estructura cónica M de U .

Para cada $(\phi, M) \in U$ consideramos el conjunto de facetas generales de su poliedro de Dirichlet centrado en $\phi(x_0)$:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}(\phi, M) = \{ \gamma \in \pi_1(X \setminus \Sigma, x_0) \mid \text{existe } x \in M \setminus \phi(\Sigma) \text{ tal que hay dos geodésicas} \\ \text{minimizantes } \alpha, \beta \text{ que unen } \phi(x_0) \text{ con } x \text{ en } M \setminus \phi(\Sigma), \\ \text{de modo que } \phi_*^{-1}[\alpha\beta^{-1}] = \gamma \text{ en } \pi_1(X \setminus \Sigma, x_0) \} \end{aligned}$$

Consideremos también el conjunto de facetas singulares del poliedro de Dirichlet de M_0 centrado en $\phi_0(x_0)$, $\Gamma_{\text{sing}}(\phi_0, M_0)$, antes definido.

Lema 3.1. Sea $\{(\phi_n, M_n)\} \subset U$ una sucesión que converge a (ϕ_0, M_0) , y sea $\gamma_n \in \bar{\Gamma}(\phi_n, M_n)$ para todo n . Entonces existe una subsucesión de $\{\gamma_n\}$ constantemente igual a un cierto $\gamma \in \bar{\Gamma}(\phi_0, M_0) \cup \Gamma_{\text{sing}}(\phi_0, M_0)$.

Demostración. Para cada n existe un punto $x_n \in M_n \setminus \phi_n(\Sigma)$ y existen dos geodésicas minimizantes α_n, β_n que unen $\phi_n(x_0)$ con x_n en $M_n \setminus \phi_n(\Sigma)$, tales que $(\phi_n^{-1})_*[\alpha_n\beta_n^{-1}] = \gamma_n$ en $\pi_1(X \setminus \Sigma, x_0)$. Como vimos en el lema 2.1, podemos suponer que las sucesiones $h_n^{-1}\alpha_n$ y $h_n^{-1}\beta_n$ convergen uniformemente a sendas geodésicas minimizantes α, β (no necesariamente distintas) que unen x_0 con un mismo punto $x \in M_0$.

Si $x \in M_0 \setminus \phi_0(\Sigma)$, entonces del lema 2.1 se deduce que $\alpha \neq \beta$ y que existe una subsucesión de $\{\gamma_n\}$ constantemente igual a $\gamma = [\alpha\beta^{-1}] \in \bar{\Gamma}(\phi_0, M_0)$. Ahora queremos ver que si $x \in \phi_0(\Sigma)$, entonces existe una subsucesión de $\{\gamma_n\}$ constantemente igual a un cierto elemento $\gamma \in \Gamma_{\text{sing}}(\phi_0, M_0)$.

Elegimos $r > 0$ tal que la bola $B_{M_0}(x, r)$ es estándar. Como x es el límite de la sucesión de puntos $h_n^{-1}(x_n)$, resulta que para n suficientemente grande, $d_0(h_n^{-1}(x_n), x) < r/k^2$ (k es una cota superior para todas las constantes δ de cuasi-isometría, en el entorno U de (ϕ_0, M_0)). Como h_n es una δ -cuasi-isometría y $\delta \leq k$, resulta que la bola $B_n = B_{M_n}(h_n(x), r/k)$ es estándar (cf. observación 3.1). Además, $x_n \in B_n$, porque como $d_0(h_n^{-1}(x_n), x) < r/k^2$, es $d_n(x_n, h_n(x)) < \delta r/k^2 \leq r/k$ (pues $\delta \leq k$). Elegimos un punto y_n sobre la geodésica α_n , que esté dentro de la bola B_n pero “no muy próximo” a x_n (es decir, $d_n(y_n, x_n)$ no debe tender a cero). Esto es posible porque cuando $n \rightarrow +\infty$, x_n se aproxima a $h_n(x)$, mientras que el radio de la bola B_n es constante (para n suficientemente grande podemos elegir, por ejemplo, y_n tal que $d_n(y_n, x_n) = r/(2k)$). Análogamente, elegimos un punto z_n sobre la geodésica β_n , que esté dentro de la bola B_n pero no muy próximo a x_n (i.e. $d_n(z_n, x_n)$ no tiende a cero). Denotemos por $\hat{\alpha}_n$ (resp. $\hat{\beta}_n$) la (única) geodésica minimizante que une $\phi_n(x_0)$ con y_n (resp. con z_n) en M_n ; $\hat{\alpha}_n$ y $\hat{\beta}_n$ son restricciones de las geodésicas α_n y β_n , respectivamente.

Afirmación. Por ser B_n una bola estándar, existe un meridiano de la singularidad μ_n próximo a $h_n(x)$, que corta a α_n en y_n y a β_n en z_n , tal que el camino $\alpha_n\beta_n^{-1}$

- ó bien es homótopo a $\widehat{\alpha}_n \lambda_n \widehat{\beta}_n^{-1}$, donde λ_n es un arco de μ_n que une y_n con z_n ,
- ó bien es homótopo a $\widehat{\alpha}_n \lambda_n \mu_n \widehat{\beta}_n^{-1}$,
- ó bien es homótopo a $\widehat{\alpha}_n \lambda_n \mu_n^{-1} \widehat{\beta}_n^{-1}$ (ver figura 4).

Además, podemos suponer que la distancia de μ_n a la singularidad no tiende a cero cuando n tiende a infinito, porque y_n y z_n se mantienen alejados de $h_n(x)$.

Es decir, $\gamma_n \in \{(\phi_n^{-1})_*[\widehat{\alpha}_n \lambda_n \widehat{\beta}_n^{-1}], (\phi_n^{-1})_*[\widehat{\alpha}_n \lambda_n \mu_n \widehat{\beta}_n^{-1}], (\phi_n^{-1})_*[\widehat{\alpha}_n \lambda_n \mu_n^{-1} \widehat{\beta}_n^{-1}]\}$.

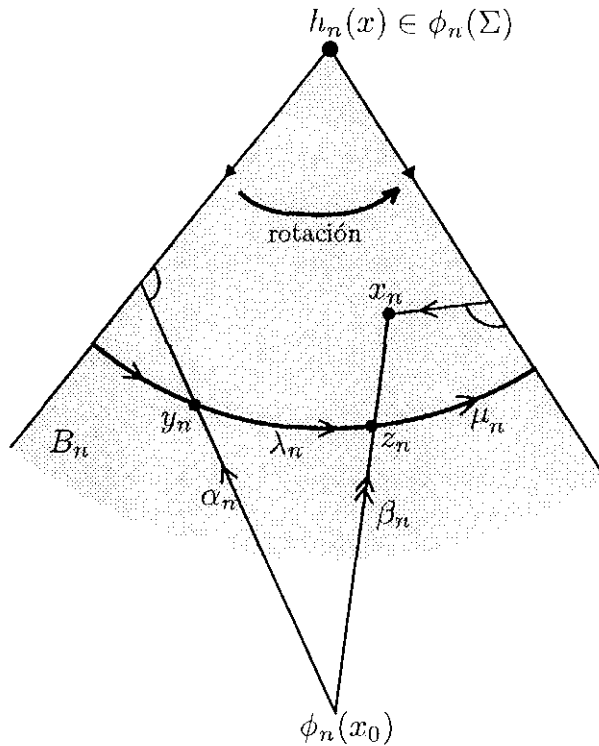


Figura 4 : en este ejemplo, $\alpha_n\beta_n^{-1}$ es homótopo a $\widehat{\alpha}_n \lambda_n \mu_n^{-1} \widehat{\beta}_n^{-1}$

En efecto, siempre se puede representar la bola estándar B_n dentro de \mathbb{H}^3 como un sector de una bola hiperbólica (cuyos lados se identifican por rotación, cf. figura 1), de tal manera que el segmento de la geodésica β_n que une z_n con x_n no toque a ninguno de los lados del sector. Ahora el segmento de la geodésica α_n que une y_n con x_n puede cortar a lo sumo una vez a cada uno de los lados del sector, ya que de lo contrario α_n no sería minimizante. Estamos, pues, en la situación de la figura 4, y

la afirmación resulta clara.

Retrocedemos ahora de nuevo a la variedad cónica inicial M_0 aplicando la δ -cuasi-isometría h_n^{-1} . Como $\delta \leq k$, tenemos que $h_n^{-1}(B_n)$ está contenido en la bola $B_{M_0}(x, \delta r/k) \subset B_{M_0}(x, r)$, que es estándar. Podemos suponer, aplicando el teorema de Ascoli como en el lema 2.1, que:

- la sucesión $h_n^{-1}(y_n)$ tiende a un punto y que está sobre la geodésica α , y es distinto de x ;
- la sucesión $h_n^{-1}(z_n)$ tiende a un punto z que está sobre la geodésica β , y es distinto de x ;
- la sucesión $h_n^{-1}\hat{\alpha}_n$ converge uniformemente a la (única) geodésica minimizante $\hat{\alpha}$ que une $\phi_0(x_0)$ con y ($\hat{\alpha}$ es una restricción de la geodésica α);
- la sucesión $h_n^{-1}\hat{\beta}_n$ converge uniformemente a la (única) geodésica minimizante $\hat{\beta}$ que une $\phi_0(x_0)$ con z ($\hat{\beta}$ es una restricción de la geodésica β);
- la sucesión $h_n^{-1}\mu_n$ converge uniformemente a un meridiano de la singularidad μ próximo a x ;
- la sucesión $h_n^{-1}\lambda_n$ converge uniformemente a un arco de μ que une y con z .

De nuevo como en el lema 2.1 (utilizando que curvas uniformemente próximas en $M_0 \setminus \phi_0(\Sigma)$ son homótopas), tenemos que para n suficientemente grande,

$$\gamma_n \in \{(\phi_0^{-1})_*[\hat{\alpha} \lambda \hat{\beta}^{-1}], (\phi_0^{-1})_*[\hat{\alpha} \lambda \mu \hat{\beta}^{-1}], (\phi_0^{-1})_*[\hat{\alpha} \lambda \mu^{-1} \hat{\beta}^{-1}]\} \subset \Gamma_{\text{sing}}(\phi_0, M_0)$$

□

De aquí se deduce inmediatamente el siguiente resultado:

Teorema 3.2. *Existe $\epsilon > 0$ tal que si (ϕ, M) es e^ϵ -cuasi-isométrica a (ϕ_0, M_0) , entonces*

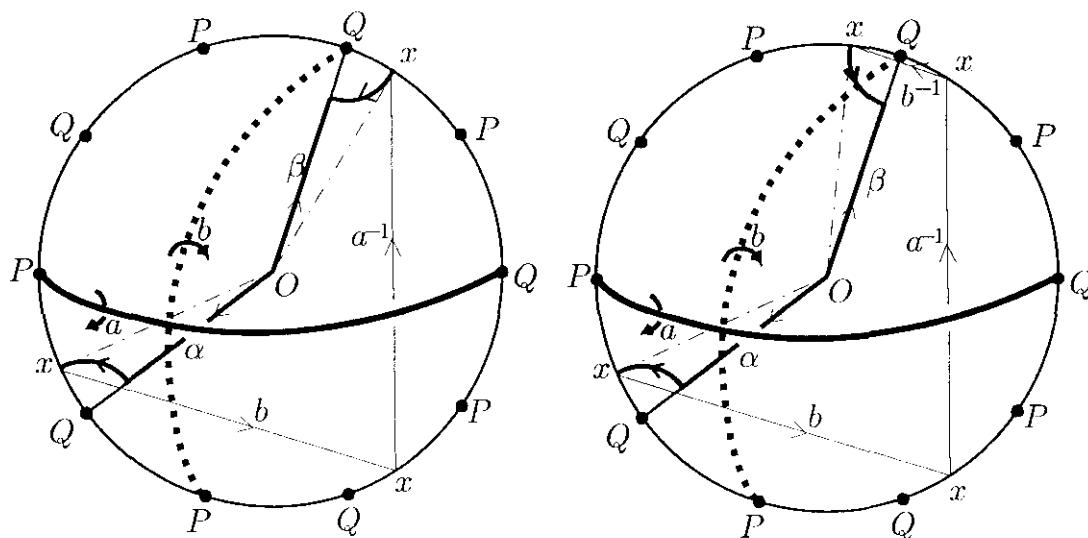
$$\bar{\Gamma}(\phi, M) \subseteq \bar{\Gamma}(\phi_0, M_0) \cup \Gamma_{\text{sing}}(\phi_0, M_0)$$

Demostración. Si no fuera así, entonces existiría una sucesión de estructuras $\{(\phi_n, M_n)\} \subset U$ que converge a (ϕ_0, M_0) , y una sucesión de elementos $\gamma_n \in \bar{\Gamma}(\phi_n, M_n)$, tales que $\gamma_n \notin \bar{\Gamma}(\phi_0, M_0) \cup \Gamma_{\text{sing}}(\phi_0, M_0)$ para todo n . Pero por el lema 3.1, existe una subsucesión de γ_n constantemente igual a un elemento $\gamma \in \bar{\Gamma}(\phi_0, M_0) \cup \Gamma_{\text{sing}}(\phi_0, M_0)$, lo cual es una contradicción. □

Puesto que los conjuntos $\bar{\Gamma}(\phi_0, M_0)$ y $\Gamma_{\text{sing}}(\phi_0, M_0)$ son calculables si se conoce el poliedro de Dirichlet para M_0 centrado en $\phi_0(x_0)$, este teorema nos permite acotar de manera efectiva el conjunto de hiperplanos bisectores que necesitamos considerar para construir los poliedros de Dirichlet de estructuras cónicas próximas a la de partida.

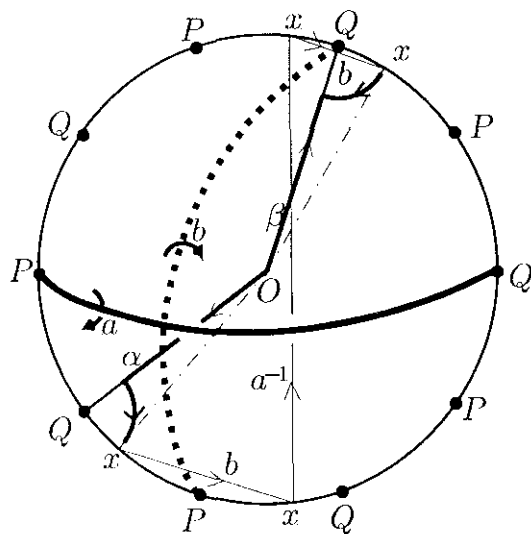
Observación 3.1. De la demostración del lema 3.1 se deduce también que $\Gamma_{\text{sing}}(\phi, M) \subseteq \Gamma_{\text{sing}}(\phi_0, M_0)$ si (ϕ, M) es e^ϵ -cuasi-isométrica a (ϕ_0, M_0) , para ϵ suficientemente pequeño.

Observación 3.2. Por ejemplo, para la estructura de orbiforma esférica en S^3 con singularidad un nudo o enlace de dos puentes, se puede comprobar que las facetas singulares de su dominio de Dirichlet lenticular (cf. §III.6) coinciden con las facetas generales. En la figura 5 se muestran las tres facetas singulares asociadas al par de geodésicas minimizantes (α, β) que unen el punto base O con el punto singular Q . Las tres coinciden con las facetas generales determinadas por las geodésicas minimizantes marcadas con rayas y puntos, que unen O con el punto no singular x .



Faceta singular: ba^{-1}

Faceta singular: $ba^{-1}b^{-1}$



Faceta singular: $ba^{-1}b$

Figura 5 : Las facetas singulares asociadas al punto singular Q coinciden con las facetas generales asociadas al punto no singular x .

Un caso particular de deformación : variación del punto base

Sea (ϕ, M) una estructura hiperbólica cónica en (X, Σ) y $x_0 \in X \setminus \Sigma$ un punto base dado. Podemos elegir un entorno U de x_0 en $X \setminus \Sigma$ de modo que para cada $x \in U$, existe una aplicación $h_x : (M, \phi(\Sigma), \phi(x_0)) \rightarrow (M, \phi(\Sigma), \phi(x))$ que es isotópica a la identidad y además es una $\delta(x)$ -cuasi-isometría, donde $\delta(x) \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow x_0$. Para cada $x \in U$, definimos entonces la estructura $(h_x\phi, M)$, que es $\delta(x)$ -cuasi-isométrica a (ϕ, M) .

Por los teoremas 2.3 y 3.2 (y la observación 2.1), tenemos que existe $\epsilon > 0$ tal que si $d(\phi(x), \phi(x_0)) < \epsilon$, entonces

$$\Gamma(\phi, M) \subseteq \Gamma(h_x\phi, M) \subseteq \bar{\Gamma}(h_x\phi, M) \subseteq \bar{\Gamma}(\phi, M) \cup \Gamma_{\text{sing}}(\phi, M)$$

En particular, todas las facetas propias del poliedro de Dirichlet de M con punto base $\phi(x_0)$, son también facetas propias del poliedro de Dirichlet de M centrado en cualquier punto $\phi(x)$ suficientemente próximo a $\phi(x_0)$. En consecuencia, si $\phi(x_0)$ es un punto en el que el número de facetas propias del poliedro de Dirichlet alcanza un máximo local, entonces los poliedros de Dirichlet centrados en puntos próximos a $\phi(x_0)$ siguen teniendo todos ellos las mismas facetas propias.

Por otra parte, argumentos análogos a los del lema 3.1 permiten demostrar el siguiente resultado:

Proposición 3.3.

- (i) Existe una cota superior común (independiente del punto base) para el número de facetas (propias o generales) de todos los posibles dominios de Dirichlet de una estructura cónica (ϕ, M) (con todos los ángulos cónicos $< 2\pi$).
- (ii) En consecuencia, existe siempre un punto base $\phi(x_0)$ en el que el número de facetas propias del poliedro de Dirichlet alcanza el máximo absoluto.
- (iii) Siempre existe, pues, un "punto base genérico" $\phi(x_0)$, en el sentido de que al desplazarlo ligeramente, el poliedro de Dirichlet sigue teniendo el mismo tipo combinatorio.

□

4. ALGORITMO DE CONSTRUCCIÓN DE DEFORMACIONES LOCALES A PARTIR DE LA REPRESENTACIÓN DE HOLONOMÍA

Sea M una 3-variedad cerrada y orientable y $\Sigma \subset M$ un enlace contenido en M . Supongamos que M_0 es una estructura hiperbólica cónica en (M, Σ) con ángulos cónicos $< 2\pi$ en todas las componentes del enlace. Elegimos puntos base arbitrarios $x_0 \in M_0 \setminus \Sigma$ y $O \in \mathbf{H}^3$. Sea $D : \widetilde{M_0 \setminus \Sigma} \rightarrow \mathbf{H}^3$ una aplicación desarrolladora tal que $D(x_0) = O$, y sea $\rho_0 : \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0) \rightarrow PSL(2, \mathbf{C})$ la holonomía correspondiente. Por un teorema de Culler ([Cu]), ρ_0 se levanta a una representación de $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$ en $SL(2, \mathbf{C})$. Además, por un resultado de Thurston (cf. [CS], prop. 3.2.1), existe una curva real ρ_t (analítica a trozos) dentro del espacio de representaciones de $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$ en $SL(2, \mathbf{C})$, cuyo valor en $t = 0$ es el levantamiento de la holonomía ρ_0 , y tal que ρ_t envía los meridianos de Σ a rotaciones hiperbólicas. Si cambiamos al modelo del hiperboloide de \mathbf{H}^3 , e identificamos $PSL(2, \mathbf{C})$ con la componente de la identidad de $SO(3, 1)$, entonces tenemos una familia de representaciones $\rho_t : \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0) \rightarrow SO(3, 1)$ tales que para cada $\gamma \in \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$, $\rho_t(\gamma)$ es una matriz cuyas entradas son funciones de t , analíticas a trozos.

Del Teorema de Cirugía Hiperbólica de Thurston se deduce que, para t suficientemente próximo a 0, existe una estructura hiperbólica cónica en (M, Σ) con holonomía ρ_t . En esta sección nos proponemos encontrar un poliedro de Dirichlet \mathcal{P}_t para ella (lo cual nos permitirá dar además una demostración constructiva de su existencia). Haremos esto utilizando el siguiente algoritmo, que dividimos en varias fases.

FASE 1: construcción de un poliedro \mathcal{Q}_t tal que, al identificar dos a dos algunas de sus caras mediante isometrías hiperbólicas, se obtiene una estructura hiperbólica (con borde no liso) en el complemento de un entorno tubular $N(\Sigma)$ de la singularidad, cuya holonomía es ρ_t

Para mayor claridad, distinguiremos dos casos: ángulos cónicos $< \pi$ y ángulos cónicos $< 2\pi$.

Caso 1: todos los ángulos cónicos de M_0 son $< \pi$.

Consideremos los subconjuntos finitos de $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$ formados por las facetas generales y las facetas propias, respectivamente, del poliedro de Dirichlet \mathcal{P}_0 de partida:

$$\bar{\Gamma}_0 = \{ \gamma \in \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0) \mid \text{existe } x \in M_0 \setminus \Sigma \text{ tal que hay dos geodésicas minimizantes } \alpha, \beta \text{ que unen } x_0 \text{ con } x \text{ en } M_0 \setminus \Sigma, \text{ de modo que } [\alpha\beta^{-1}] = \gamma \text{ en } \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0) \}$$

$\Gamma_0 = \{ \gamma \in \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0) \mid \text{existe } x \in M_0 \setminus \Sigma \text{ tal que hay exactamente dos geodésicas minimizantes } \alpha, \beta \text{ que unen } x_0 \text{ con } x \text{ en } M_0 \setminus \Sigma, \text{ y } [\alpha\beta^{-1}] = \gamma \text{ en } \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0) \}$

Para cada $\gamma \in \pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$ y cada t , definamos el hiperplano hiperbólico

$$H_\gamma(t) = \{ x \in \mathbf{H}^3 \mid d(x, O) = d(x, (\rho_t \gamma)(O)) \}$$

y el semiespacio abierto

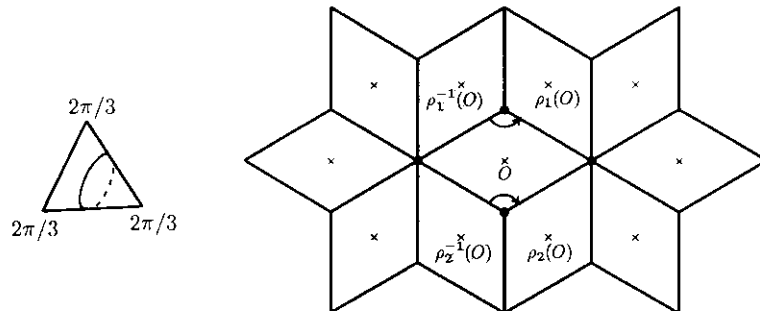
$$E_\gamma(t) = \{ x \in \mathbf{H}^3 \mid d(x, O) < d(x, (\rho_t \gamma)(O)) \}$$

y consideremos el poliedro hiperbólico $\widehat{\mathcal{P}}_t = \bigcap_{\gamma \in \Gamma_0} \overline{E}_\gamma(t)$ (ver figura 6). Sabemos que $\widehat{\mathcal{P}}_0 = \mathcal{P}_0 =$

$\bigcap_{\gamma \in \Gamma_0} \overline{E}_\gamma(0) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma_0} \overline{E}_\gamma(0)$ es el poliedro de Dirichlet para M_0 ; los puntos de él que constituyen la

singularidad Σ son una unión de aristas y vértices de \mathcal{P}_0 , que denotaremos \mathcal{S}_0 . Los poliedros $\widehat{\mathcal{P}}_t$ se aproximan a $\widehat{\mathcal{P}}_0 = \mathcal{P}_0$ cuando t tiende a 0. Lo que queremos ver es que cuando t está suficientemente próximo a 0, se pueden trincar algunos vértices y aristas de $\widehat{\mathcal{P}}_t$ (precisamente aquéllos que convergen a puntos de \mathcal{S}_0 cuando t tiende a 0), de modo que las caras del poliedro truncado restante se pueden identificar dos a dos mediante isometrías hiperbólicas, dando como resultado una estructura hiperbólica en el complemento de un entorno regular de Σ en M_0 , con holonomía ρ_t .

Vamos a ilustrar los pasos del algoritmo utilizando el ejemplo, mostrado ya en la introducción de la tesis y en el capítulo I, de la orbiforma euclídea cuyo espacio subyacente es la esfera S^2 , con tres puntos cónicos de ángulos $2\pi/3, 2\pi/3, 2\pi/3$ (ver figura). El grupo de holonomía está generado por dos rotaciones ρ_1, ρ_2 de ángulo $2\pi/3$. Partimos del dominio de Dirichlet \mathcal{P}_0 centrado en el punto medio O entre los puntos fijos de ρ_1 y ρ_2 . Todos sus vértices son puntos singulares, y las facetas propias coinciden con las facetas generales (y son $\rho_1, \rho_2, \rho_1^{-1}$ y ρ_2^{-1}). A continuación consideramos la deformación trivial que consiste en desplazar ligeramente el punto base O , de modo que ya no esté en el segmento que une los puntos fijos de ρ_1 y ρ_2 . En la figura 6 se muestran los poliedros \mathcal{P}_0 y $\widehat{\mathcal{P}}_t$.



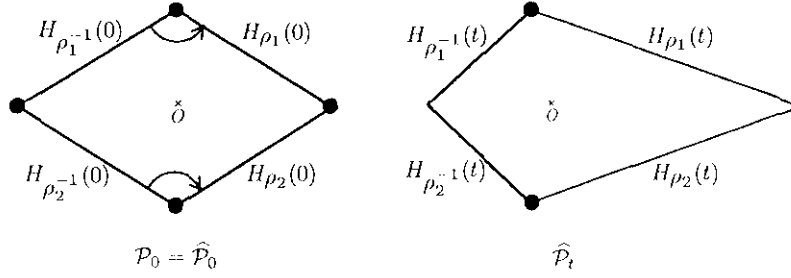


Figura 6

La analiticidad de las entradas de las matrices $\rho_t(\gamma)$, para $\gamma \in \bar{\Gamma}_0$, se va a utilizar para controlar la variación del tipo combinatorio de los poliedros $\hat{\mathcal{P}}_t$ y garantizar que el conjunto de puntos t en que cambia el tipo combinatorio es discreto. Para ello, básicamente se hace uso de la siguiente propiedad de las funciones reales analíticas a trozos. Si $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ es una función analítica a trozos, entonces existe $\delta > 0$ tal que:

- (a1) si $f(0) > 0$, entonces $f(t) > 0$ para todo $t \in (0, \delta)$;
- (a2) si $f(0) < 0$, entonces $f(t) < 0$ para todo $t \in (0, \delta)$;
- (a3) si $f(0) = 0$, entonces ó bien $f(t) = 0$ para todo $t \in (0, \delta)$, ó bien $f(t) > 0$ para todo $t \in (0, \delta)$, ó bien $f(t) < 0$ para todo $t \in (0, \delta)$.

En lo que sigue, y a menos que se diga lo contrario, consideraremos siempre el modelo del hiperboloide $\mathbf{H}^3 = \{ (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^4 \mid -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1 \}$. En este modelo, un hiperplano hiperbólico H es intersección con \mathbf{H}^3 de un hiperplano vectorial (que denotaremos también H) del espacio de Lorentz-Minkowski \mathbf{R}_1^4 . También denotaremos igual los puntos de \mathbf{H}^3 y sus vectores posición en \mathbf{R}_1^4 . Para cada $\gamma \in \bar{\Gamma}_0$, los hiperplanos vectoriales $H_\gamma(t)$ tienen ecuaciones de la forma $a(t) \cdot x_0 + b(t) \cdot x_1 + c(t) \cdot x_2 + d(t) \cdot x_3 = 0$, en las que los coeficientes $a(t), b(t), c(t), d(t)$ son funciones de t , analíticas a trozos. Además, para cada $\gamma \in \bar{\Gamma}_0$, existe un vector $\nu_\gamma(t)$, cuyas coordenadas son funciones de t analíticas a trozos, tal que $E_\gamma(t) = \{ v \in \mathbf{H}^3 \mid \langle v, \nu_\gamma(t) \rangle < 0 \}$ (donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar en \mathbf{R}_1^4).

Como $\hat{\mathcal{P}}_0$ es un poliedro hiperbólico compacto, resulta que si t está suficientemente próximo a 0, entonces $\hat{\mathcal{P}}_t$ también es un poliedro hiperbólico compacto.

Lema 4.1. *Existe $\delta > 0$ tal que todos los poliedros $\hat{\mathcal{P}}_t$ tienen el mismo tipo combinatorio si $0 < t < \delta$ (aunque este tipo combinatorio puede ser distinto del de $\hat{\mathcal{P}}_0 = \mathcal{P}_0$).*

Demostración. Vamos a probar que si para algún $t_0 \in (0, \delta)$ hay r planos bisectores $H_{\alpha_1}(t_0), \dots, H_{\alpha_r}(t_0)$ que se cortan en un vértice v_{t_0} de $\hat{\mathcal{P}}_{t_0}$, entonces para todo $t \in (0, \delta)$ los r planos bisectores

$H_{\alpha_1}(t), \dots, H_{\alpha_r}(t)$ se cortan también en un vértice v_t de $\widehat{\mathcal{P}}_t$. Cuando t tiende a cero, los vértices v_t tienden a un punto $v_0 \in H_{\alpha_1}(0) \cap \dots \cap H_{\alpha_r}(0)$, que pertenece al borde de $\widehat{\mathcal{P}}_0$ (aunque podría no ser un vértice, sino estar contenido en el interior de una arista).

La demostración de descompone en tres partes:

- (1) estudiar la posición relativa de los hiperplanos vectoriales $H_\gamma(t)$ ($\gamma \in \overline{\Gamma}_0$) en \mathbf{R}_1^4 ;
- (2) estudiar la posición relativa de las intersecciones de los hiperplanos vectoriales $H_\gamma(t)$ ($\gamma \in \overline{\Gamma}_0$), con respecto a \mathbf{H}^3 (en el modelo del hiperboloide);
- (3) estudiar la posición relativa de las intersecciones de los planos hiperbólicos $H_\gamma(t)$ ($\gamma \in \overline{\Gamma}_0$), con respecto al poliedro $\widehat{\mathcal{P}}_t$.

(1) Posición relativa de los hiperplanos vectoriales $H_\gamma(t)$ ($\gamma \in \overline{\Gamma}_0$) en \mathbf{R}_1^4 :

Tres hiperplanos vectoriales $H_\alpha(t), H_\beta(t), H_\gamma(t)$ se cortan en una recta vectorial si y sólo si los tres vectores $\nu_\alpha(t), \nu_\beta(t), \nu_\gamma(t)$ son linealmente independientes, es decir, si el rango de la matriz de sus coordenadas es 3. Como las coordenadas de $\nu_\alpha(t), \nu_\beta(t)$ y $\nu_\gamma(t)$ son funciones de t analíticas a trozos, resulta que existe $\delta > 0$ tal que:

- Si $\nu_\alpha(0), \nu_\beta(0), \nu_\gamma(0)$ son linealmente independientes, entonces $\nu_\alpha(t), \nu_\beta(t), \nu_\gamma(t)$ son linealmente independientes para todo $t \in (-\delta, \delta)$ (por (a1) y (a2)).
- Si $\nu_\alpha(0), \nu_\beta(0), \nu_\gamma(0)$ son linealmente dependientes, entonces ó bien $\nu_\alpha(t), \nu_\beta(t), \nu_\gamma(t)$ son linealmente dependientes para todo $t \in (-\delta, \delta)$, ó bien $\nu_\alpha(t), \nu_\beta(t), \nu_\gamma(t)$ son linealmente independientes para todo $t \in (-\delta, \delta), t \neq 0$ (por (a3)).

Es decir, si para algún t_0 con $0 < |t_0| < \delta$, se verifica que $H_\alpha(t_0) \cap H_\beta(t_0) \cap H_\gamma(t_0)$ es una recta vectorial L_{t_0} , entonces $H_\alpha(t) \cap H_\beta(t) \cap H_\gamma(t)$ es una recta vectorial L_t para todo t tal que $0 < |t| < \delta$. En ese caso, es posible que $H_\alpha(0) \cap H_\beta(0) \cap H_\gamma(0)$ tenga dimensión mayor que 1, pero (por la analiticidad) siempre existe una recta vectorial $L_0 \subseteq H_\alpha(0) \cap H_\beta(0) \cap H_\gamma(0)$ que es el límite de las rectas L_t cuando t tiende a 0.

(2) Posición relativa de las intersecciones de los hiperplanos vectoriales $H_\gamma(t)$ ($\gamma \in \overline{\Gamma}_0$), con respecto a \mathbf{H}^3 (en el modelo del hiperboloide):

Para cada t , elegimos un vector \mathbf{v}_t que genere la recta L_t , de modo que las coordenadas de \mathbf{v}_t sean funciones de t analíticas a trozos. Tomando δ suficientemente pequeño, podemos asegurar que si $\langle \mathbf{v}_{t_0}, \mathbf{v}_{t_0} \rangle < 0$ para algún t_0 con $0 < |t_0| < \delta$, entonces $\langle \mathbf{v}_t, \mathbf{v}_t \rangle < 0$ para todo t tal que $0 < |t| < \delta$. En ese caso, elegimos siempre el vector \mathbf{v}_t de modo que su primera coordenada sea positiva.

Haciendo esto para cada tripla α, β, γ de elementos distintos de $\overline{\Gamma}_0$ (que es un conjunto finito) podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que si para algún t_0 con $0 < |t_0| < \delta$ hay r hiperplanos vectoriales

$H_{\alpha_1}(t_0), \dots, H_{\alpha_r}(t_0)$ que se cortan en una recta L_{t_0} generada por un vector temporal \mathbf{v}_{t_0} , entonces para todo t tal que $0 < |t| < \delta$, estos r hiperplanos se cortan también en una recta vectorial $L_t = H_{\alpha_1}(t) \cap \dots \cap H_{\alpha_r}(t)$ generada por un vector temporal \mathbf{v}_t , y el límite de estas rectas L_t cuando $t \rightarrow 0$ es una recta $L_0 \subseteq H_{\alpha_1}(0) \cap \dots \cap H_{\alpha_r}(0)$ (en particular, $H_{\alpha_1}(0) \cap \dots \cap H_{\alpha_r}(0) \neq \emptyset$). Denotaremos entonces por $v_t(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ el punto $L_t \cap \mathbf{H}^3$ (aunque con frecuencia escribiremos simplemente v_t y omitiremos $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ cuando se sobreentiendan).

(3) Posición relativa de las intersecciones de los planos hiperbólicos $H_\gamma(t)$ ($\gamma \in \bar{\Gamma}_0$), con respecto al poliedro $\widehat{\mathcal{P}}_t$:

Queremos ver ahora cuándo estos puntos v_t son vértices del poliedro $\widehat{\mathcal{P}}_t$. Para ello, tenemos que ver si v_t está en todos los semiespacios $E_\gamma(t)$, es decir, si $\langle \mathbf{v}_t, \nu_\gamma(t) \rangle < 0$ para todo $\gamma \in \bar{\Gamma}_0$. Para cada $\gamma \in \bar{\Gamma}_0$, la función $\langle \mathbf{v}_t, \nu_\gamma(t) \rangle$ es analítica a trozos, y por tanto existe un pequeño entorno $(-c, c)$ de 0 tal que la función tiene siempre el mismo signo cuando $-c < t < 0$ y cuando $0 < t < c$ (aunque puede tener signos opuestos a cada lado de 0). Por ello, vamos a restringirnos a construir los poliedros $\widehat{\mathcal{P}}_t$ cuando t se mueve desde 0 en una sola dirección, por ejemplo cuando $t > 0$.

Por la analiticidad, podemos encontrar un δ suficientemente pequeño de manera que:

(1) Si para algún t_0 con $0 < |t_0| < \delta$ hay r hiperplanos hiperbólicos $H_{\alpha_1}(t_0), \dots, H_{\alpha_r}(t_0)$ que se cortan en un punto $v_{t_0} \in \mathbf{H}^3$, entonces para todo t tal que $0 < |t| < \delta$, estos r hiperplanos se cortan también en un punto $v_t = H_{\alpha_1}(t) \cap \dots \cap H_{\alpha_r}(t) \in \mathbf{H}^3$, y el límite de estos puntos v_t cuando $t \rightarrow 0$ es un punto $v_0 \in H_{\alpha_1}(0) \cap \dots \cap H_{\alpha_r}(0)$.

(2) Además, para cualquier $\gamma \in \bar{\Gamma}_0$ se verifica que:

- Si $\langle v_0, \nu_\gamma(0) \rangle < 0$, entonces $\langle v_t, \nu_\gamma(t) \rangle < 0$ para todo $t \in (0, \delta)$.
- Si $\langle v_0, \nu_\gamma(0) \rangle > 0$, entonces $\langle v_t, \nu_\gamma(t) \rangle > 0$ para todo $t \in (0, \delta)$.
- Si $\langle v_0, \nu_\gamma(0) \rangle = 0$, entonces ó bien $\langle v_t, \nu_\gamma(t) \rangle = 0$ para todo $t \in (0, \delta)$, ó bien $\langle v_t, \nu_\gamma(t) \rangle < 0$ para todo $t \in (0, \delta)$, ó bien $\langle v_t, \nu_\gamma(t) \rangle > 0$ para todo $t \in (0, \delta)$.

En consecuencia, si $v_{t_0} = H_{\alpha_1}(t_0) \cap \dots \cap H_{\alpha_r}(t_0)$ es un vértice de $\widehat{\mathcal{P}}_{t_0}$ para algún $t_0 \in (0, \delta)$, entonces $v_t = H_{\alpha_1}(t) \cap \dots \cap H_{\alpha_r}(t)$ es un vértice de $\widehat{\mathcal{P}}_t$ para todo $t \in (0, \delta)$ y $v_0 \in H_{\alpha_1}(0) \cap \dots \cap H_{\alpha_r}(0)$ es un punto del borde de $\widehat{\mathcal{P}}_0$ (aunque podría no ser un vértice, sino estar contenido en el interior de una arista).

En conclusión, el tipo combinatorio de todos los poliedros $\widehat{\mathcal{P}}_t$ es el mismo para todo $t \in (0, \delta)$, aunque puede ser distinto del tipo combinatorio de $\widehat{\mathcal{P}}_0$.

□

Observación. Además, si $H_\gamma(0) \cap \mathcal{P}_0$ tiene interior no vacío en el borde de $\widehat{\mathcal{P}}_0 = \mathcal{P}_0$ (donde $\gamma \in \overline{\Gamma}_0$), entonces $H_\gamma(t) \cap \widehat{\mathcal{P}}_t$ también tiene interior no vacío en el borde de $\widehat{\mathcal{P}}_t$ para todo $t \in (0, \delta)$ (como se puede comprobar usando argumentos análogos a los anteriores).

Queremos ver a continuación que se pueden trincar algunos vértices y aristas de $\widehat{\mathcal{P}}_t$ de modo que las caras del poliedro truncado resultante se pueden identificar dos a dos mediante isometrías hiperbólicas, para dar lugar a una estructura hiperbólica en el complemento de un entorno tubular $N(\Sigma)$ de la singularidad. Para ello, vamos a distinguir en $\widehat{\mathcal{P}}_t$ dos clases de vértices.

Definición. Diremos que un vértice $v_t \in \widehat{\mathcal{P}}_t$ es un *vértice próximo a la singularidad* si converge, cuando t tiende a cero, a un punto $v_0 \in \mathcal{S}_0$. En caso contrario, diremos que v_t es un *vértice alejado de la singularidad*. Diremos que una arista $e_t \subset \widehat{\mathcal{P}}_t$ está *próxima a la singularidad* si converge, cuando t tiende a cero, a un subconjunto de \mathcal{S}_0 .

Precisamente vamos a trincar en $\widehat{\mathcal{P}}_t$ todos los vértices y aristas próximos a la singularidad.

Sea $\mathcal{T}_t \subset \partial\widehat{\mathcal{P}}_t$ la unión de todas las aristas y vértices de \mathcal{P}_t que están próximos a la singularidad (en particular, $\mathcal{T}_0 = \mathcal{S}_0$ son los puntos singulares de \mathcal{P}_0). Llamaremos un *collar* de \mathcal{T}_t en $\widehat{\mathcal{P}}_t$ a un entorno de \mathcal{T}_t que sólo corte a las aristas de $\widehat{\mathcal{P}}_t$ que tienen al menos uno de sus extremos en \mathcal{T}_t (i.e. próximo a la singularidad).

Elegimos un subcomplejo triangulado *convexo* \mathcal{Q}_t de $\widehat{\mathcal{P}}_t$ tal que $\widehat{\mathcal{P}}_t \setminus \mathcal{Q}_t$ es un collar de \mathcal{T}_t en $\widehat{\mathcal{P}}_t$ (ver figura 7), y \mathcal{Q}_t varía de manera continua con el parámetro t , es decir: cada \mathcal{Q}_t tiene un número constante de vértices $w_1(t), \dots, w_m(t)$, y cada vértice $w_i(t)$ describe un camino continuo cuando t varía en $[0, \delta]$. (Cuando $t = 0$, algunos de los simplices de la triangulación de \mathcal{Q}_t pueden degenerar.) En particular, la familia de vértices $w_1(t), \dots, w_m(t)$ contiene a todos los vértices de $\widehat{\mathcal{P}}_t$ que están alejados de la singularidad. Obsérvese que si $w_i(0) \in H_\gamma(0)$, entonces $\rho_0\gamma^{-1}(w_i(0)) \in \mathcal{P}_0 \setminus \mathcal{T}_0$.

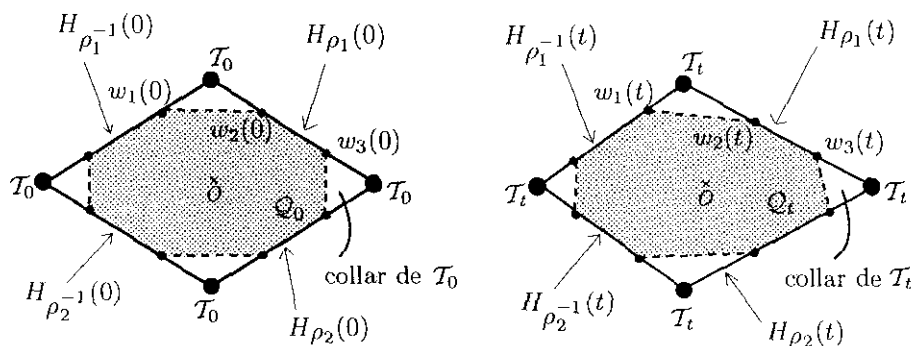


Figura 7

Si δ es suficientemente pequeño, entonces para todo $t \in [0, \delta]$ y todo vértice $w_i(t)$ se verifican las siguientes condiciones:

- (i) si $w_i(t) \in H_\gamma(t) \cap \mathcal{Q}_t$, entonces $w_i(0) \in H_\gamma(0) \cap \mathcal{Q}_0$;
- (ii) para todo $\gamma \in \{\text{id}\} \cup \bar{\Gamma}_0$, si $\rho_0\gamma(w_i(0)) \notin \mathcal{T}_0$, entonces $\rho_t\gamma(w_i(t)) \notin \mathcal{T}_t$;
- (iii) si para algún $\gamma \in \bar{\Gamma}_0$ y algún $\xi \in \{\text{id}\} \cup \bar{\Gamma}_0$ se verifica que $d((\rho_0\xi)(w_i(0)), O) < d((\rho_0\xi)(w_i(0)), (\rho_0\gamma)(O))$, entonces $d((\rho_t\xi)(w_i(t)), O) < d((\rho_t\xi)(w_i(t)), (\rho_t\gamma)(O))$.

Afirmación. Si $w_i(t) \in H_\gamma(t) \cap \mathcal{Q}_t$, entonces $\rho_t\gamma^{-1}(w_i(t)) \in \hat{\mathcal{P}}_t \setminus \mathcal{T}_t$.

En efecto, por (i) tenemos que $w_i(0) \in H_\gamma(0) \cap \mathcal{Q}_0$, luego $\rho_0\gamma^{-1}(w_i(0)) \in \mathcal{P}_0 \setminus \mathcal{T}_0$. Por (ii), $\rho_t\gamma^{-1}(w_i(t)) \notin \mathcal{T}_t$. Tenemos que comprobar que $d(\rho_t\gamma^{-1}(w_i(t)), O) \leq d(\rho_t\gamma^{-1}(w_i(t)), \rho_t\xi(O))$ para todo $\xi \in \bar{\Gamma}_0$. Distinguiamos dos casos:

- Si $\rho_0\gamma^{-1}(w_i(0)) \notin H_\xi(0)$:
entonces necesariamente $d(\rho_0\gamma^{-1}(w_i(0)), O) < d(\rho_0\gamma^{-1}(w_i(0)), \rho_0\xi(O))$, y por (iii) resulta que $d(\rho_t\gamma^{-1}(w_i(t)), O) < d(\rho_t\gamma^{-1}(w_i(t)), \rho_t\xi(O))$.
- Si $\rho_0\gamma^{-1}(w_i(0)) \in H_\xi(0)$:
entonces $\gamma\xi \in \bar{\Gamma}_0$ (por el corolario 3.5.(3) del capítulo III). Como $w_i(t)$ pertenece a $\hat{\mathcal{P}}_t$ y a H_γ , resulta que $d(w_i(t), \rho_t\gamma(O)) = d(w_i(t), O) \leq d(w_i(t), \rho_t(\gamma\xi)(O))$. Aplicando a ambos miembros la isometría $\rho_t\gamma^{-1}$, resulta que $d(\rho_t\gamma^{-1}(w_i(t)), O) \leq d(\rho_t\gamma^{-1}(w_i(t)), \rho_t\xi(O))$. □

Por tanto, podemos extender el subcomplejo \mathcal{Q}_t a otro subcomplejo convexo \mathcal{Q}'_t con las mismas propiedades pero con un vértice más: el punto $\rho_t\gamma^{-1}(w_i(t))$ (ver figura 8). Repitiendo el mismo proceso una cantidad finita de veces, llegamos a un subcomplejo triangulado (que denotamos también \mathcal{Q}_t) que varía de manera continua con el parámetro t y verifica que:

- $\hat{\mathcal{P}}_t \setminus \mathcal{Q}_t$ es un collar de \mathcal{T}_t en $\hat{\mathcal{P}}_t$;
- si $w_j(t)$ es un vértice de la triangulación de \mathcal{Q}_t que pertenece al hiperplano H_γ , entonces $\rho_t\gamma^{-1}(w_j(t))$ también es un vértice de la triangulación de \mathcal{Q}_t (que pertenece al hiperplano $H_{\gamma^{-1}}$).

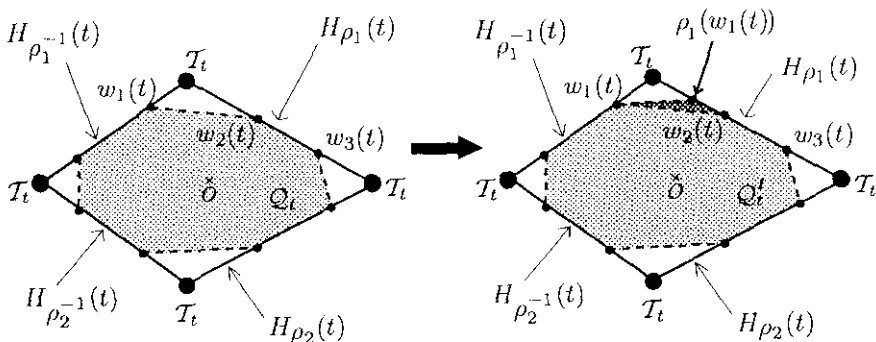


Figura 8

Este complejo Q_t es un poliedro compacto, obtenido por “truncamiento” de algunos vértices y aristas de \widehat{P}_t . Llamaremos *caras* de Q_t a las intersecciones del borde de Q_t con planos bisectores de la forma $H_\gamma(t)$ ($\gamma \in \overline{\Gamma}_0$) que tienen interior no vacío en el borde de Q_t . Las denotaremos por $\mathcal{F}_\gamma(t) = Q_t \cap H_\gamma(t)$. Llamaremos *arista* de Q_t a la intersección de dos caras: $e_t = Q_t \cap H_{\gamma_1}(t) \cap H_{\gamma_2}(t)$. (Es decir, sólo nos interesa la parte del borde de Q_t que también pertenece al borde de \widehat{P}_t , no la parte por donde hemos truncado.)

De todo lo anterior se deduce que cada cara $\mathcal{F}_\gamma(t)$ de Q_t se identifica mediante la isometría hiperbólica $\rho_t \gamma^{-1}$ con la cara $\mathcal{F}_{\gamma^{-1}}(t) = \rho_t \gamma^{-1}(\mathcal{F}_\gamma(t))$.

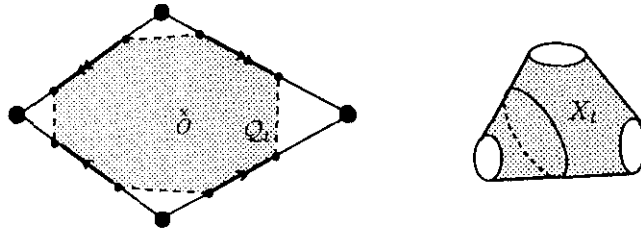


Figura 9

Sea X_t el espacio topológico obtenido como cociente de Q_t al identificar cada cara $\mathcal{F}_\gamma(t)$ de Q_t con $\mathcal{F}_{\gamma^{-1}}(t)$ mediante la isometría $\rho_t \gamma^{-1}$. Queremos ver que X_t es una variedad hiperbólica (con borde no liso) homeomorfa al complemento en M de un entorno tubular $N(\Sigma)$ de la singularidad.

Dada una arista e_t de Q_t , diremos que una sucesión finita de elementos $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ de $\overline{\Gamma}_0$ es un *ciclo de caras propias* para e_t , si cada $\mathcal{F}_{\lambda_i}(t)$ es una cara de Q_t , y se verifica que: $e_t \subset \mathcal{F}_{\lambda_1}(t)$; $\rho_t(\lambda_i^{-1} \cdots \lambda_1^{-1})(e_t) \subset \mathcal{F}_{\lambda_i^{-1}}(t) \cap \mathcal{F}_{\lambda_{i+1}}(t)$ (donde $\lambda_{i+1} \neq \lambda_i^{-1}$) para $i = 1, \dots, r-1$; y $\rho_t(\lambda_r^{-1} \cdots \lambda_1^{-1})(e_t) = e_t$.

Para ver que X_t es una variedad hiperbólica (con borde no liso), es suficiente probar que si e_t es una arista de Q_t y si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ es un ciclo de caras propias para e_t , entonces $\rho_t(\lambda_1 \cdots \lambda_r) = 1$. (En principio esto sólo garantizaría que la suma de ángulos diédricos en torno a la arista es un múltiplo de 2π ; sin embargo, como para $t = 0$ sabemos que vale exactamente 2π , por continuidad se deduce que vale 2π para todo t .)

Cuando t tiende a cero, pueden ocurrir tres cosas:

- (i) la arista e_t converge a un segmento contenido en una arista (no singular) e_0 de \mathcal{P}_0 ;
- (ii) la arista e_t converge a un punto del interior de una arista (no singular) e_0 de \mathcal{P}_0 ;
- (iii) la arista e_t converge a un vértice no singular v_0 de \mathcal{P}_0 .

En los casos (i) y (ii), $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ es un ciclo de facetas (no necesariamente propias) para la arista no singular e_0 de \mathcal{P}_0 , luego $\lambda_1 \cdots \lambda_r = 1$ en $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$, y por tanto $\rho_t(\lambda_1 \cdots \lambda_r) = 1$. En el caso

(iii), $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ es un ciclo de facetas (no necesariamente propias) para el vértice no singular v_0 de \mathcal{P}_0 , luego también se tiene que $\lambda_1 \cdots \lambda_r = 1$ en $\pi_1(M \setminus \Sigma, x_0)$, y por tanto $\rho_t(\lambda_1 \cdots \lambda_r) = 1$.

En consecuencia, X_t es una 3-variedad hiperbólica (con borde no liso). Como para $t = 0$ ya sabemos que X_0 es homeomorfa a $M \setminus N(\Sigma)$, sólo nos falta probar que X_t es homeomorfa a X_0 para todo t próximo a 0. Para ver esto, vamos a encontrar dos diagramas de Heegaard equivalentes para las dos variedades con borde X_0 y X_t .

En X_0 , consideremos el grafo \mathcal{G}_0 formado por los bordes de todas las caras $\mathcal{F}_\gamma(0)$ de \mathcal{Q}_0 . Un entorno tubular $N(\mathcal{G}_0)$ de este grafo \mathcal{G}_0 en X_0 es un cuerpo con asas, y su complementario es otro cuerpo con asas (posiblemente de género distinto). Por tanto, esto proporciona un diagrama de Heegaard para la variedad con borde X_0 . Las curvas del diagrama son las intersecciones de las caras de \mathcal{Q}_0 con $N(\mathcal{G}_0)$.

Ahora consideremos en X_t el complejo \mathcal{G}_t formado por los bordes de todas las caras $\mathcal{F}_\gamma(t)$, y además por todas las caras $\mathcal{F}_\gamma(t)$ de \mathcal{Q}_t tales que $\gamma \in \bar{\Gamma}_0$ pero $\gamma \notin \Gamma_0$ (es decir, todas las nuevas facetas propias que han aparecido al hacer la deformación). Este complejo \mathcal{G}_t ya no será en general un grafo, pues puede contener 2-celdas, pero ciertamente es del mismo tipo de homotopía del grafo \mathcal{G}_0 (la equivalencia de homotopía la proporciona la propia deformación). Por tanto, un entorno regular $N(\mathcal{G}_t)$ de \mathcal{G}_t en X_t sigue siendo un cuerpo con asas, y su complementario es otro cuerpo con asas, y es claro, por la construcción, que esta descomposición de X_t es un diagrama de Heegaard equivalente al anterior diagrama de Heegaard para X_0 . En efecto, las curvas del diagrama son las intersecciones con $N(\mathcal{G}_t)$ de las caras de \mathcal{Q}_t que ya eran caras de \mathcal{Q}_0 . El paso de $N(\mathcal{G}_0)$ a $N(\mathcal{G}_t)$ puede interpretarse como la realización de perforaciones en $N(\mathcal{G}_0)$, que son rellenadas a continuación por caras $\mathcal{F}_\gamma(t)$ con $\gamma \in \bar{\Gamma}_0 \setminus \Gamma_0$. Esto no afecta a las curvas del diagrama (ver figura 10, para un ejemplo de deformación de una estructura euclídea, no singular, en el toro tridimensional T^3).

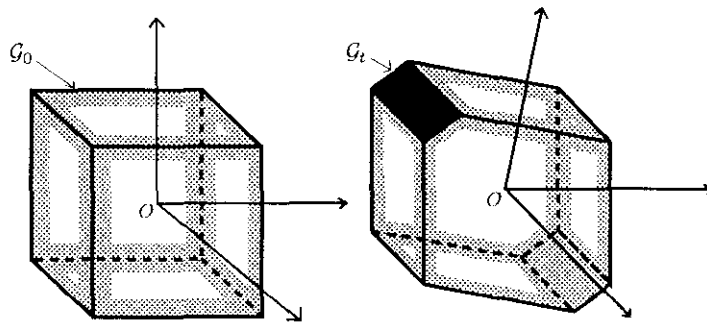


Figura 10

Por tanto, X_t es una variedad hiperbólica homeomorfa a $M \setminus N(\Sigma)$, y su holonomía es, por construcción, ρ_t .

Caso 2: los ángulos cónicos de M_0 son $< 2\pi$.

La única dificultad que presenta este caso con respecto al anterior consiste en que ahora el poliedro de Dirichlet \mathcal{P}_0 ya no es necesariamente convexo (y por tanto sus deformaciones tampoco serán en general poliedros convexos). Sólo sabemos que \mathcal{P}_0 es localmente convexo fuera de la singularidad, y conocemos además una descripción local de \mathcal{P}_0 en un entorno de cada punto no singular. Por ello, definiremos los poliedros deformados \mathcal{P}_t “a trozos”, descomponiéndolos en una cantidad finita de subconjuntos convexos.

Como en el caso anterior, denotamos por \mathcal{P}_0 el poliedro de Dirichlet de M_0 con centro O , y denotamos por \mathcal{S}_0 el conjunto de puntos singulares de \mathcal{P}_0 . Para cada punto no singular $x \in \mathcal{P}_0 \setminus \mathcal{S}_0$, denotamos por α_x la geodésica que une O con x en \mathbf{H}^3 , y definimos el conjunto de facetas generales que inciden en x :

$$\bar{\Gamma}_0(x) = \{ [\alpha_x \beta_x^{-1}] \in \pi_1(M_0 \setminus \Sigma, x_0) \mid \beta_x \text{ es una geodésica minimizante que une } x_0 \text{ con } x \text{ en } M_0, \\ \text{y } \beta_x \neq \alpha_x \} \subset \bar{\Gamma}_0$$

(Si x pertenece al interior de \mathcal{P}_0 , entonces $\bar{\Gamma}_0(x) = \emptyset$.)

Sabemos que existe un entorno U_x de x en \mathbf{H}^3 tal que:

$$(1) \mathcal{P}_0 \cap U_x = \left(\bigcap_{\gamma \in \bar{\Gamma}_0(x)} \bar{E}_\gamma(0) \right) \cap U_x \subset \mathcal{P}_0 \setminus \mathcal{S}_0 ;$$

$$(2) \bar{\Gamma}_0(y) \subseteq \bar{\Gamma}_0(x) \text{ para todo } y \in \mathcal{P}_0 \cap U_x .$$

En general, dado un subconjunto $A \subset \mathbf{H}^3$, denotaremos por $\bar{\Gamma}_0(A)$ la unión de todos los subconjuntos $\bar{\Gamma}_0(x)$ con $x \in A \cap (\mathcal{P}_0 \setminus \mathcal{S}_0)$. (Es decir, $\bar{\Gamma}_0(A)$ es el conjunto de facetas generales que inciden en puntos de A .)

Sea N un entorno abierto de \mathcal{S}_0 en \mathbf{H}_3 , que sólo corte a las aristas de \mathcal{P}_0 que inciden en algún punto singular. Recubrimos $\mathcal{P}_0 \setminus N$ por una cantidad finita de abiertos convexos U_1, \dots, U_n de \mathbf{H}^3 tales que

$$U_i \cap \mathcal{P}_0 = U_i \cap \left(\bigcap_{\gamma \in \bar{\Gamma}_0(U_i)} \bar{E}_\gamma(0) \right) \subset \mathcal{P}_0 \setminus \mathcal{S}_0$$

Consideremos ahora la familia continua de planos bisectores $H_\gamma(t)$ ($\gamma \in \bar{\Gamma}_0$), que varían de manera analítica a trozos con respecto al parámetro t . Si t está suficientemente próximo a 0 , se verifica que:

$$(a) H_\gamma(t) \cap U_i \neq \emptyset \text{ si y sólo si } H_\gamma(0) \cap U_i \neq \emptyset ;$$

$$(b) U_i \cap \left(\bigcap_{\gamma \in \bar{\Gamma}_0(U_i)} \bar{E}_\gamma(t) \right) \text{ es homeomorfo a } U_i \cap \left(\bigcap_{\gamma \in \bar{\Gamma}_0(U_i)} \bar{E}_\gamma(0) \right) .$$

Definimos entonces

$$\hat{\mathcal{P}}_t = \bigcup_{i=1}^n U_i \cap \left(\bigcap_{\gamma \in \bar{\Gamma}_0(U_i)} \bar{E}_\gamma(t) \right)$$

Se verifica que $\widehat{\mathcal{P}}_t$ es homeomorfo al poliedro truncado $\widehat{\mathcal{P}}_0 = \mathcal{P}_0 \cap \left(\bigcup_{i=1}^n U_i \right)$. Además existe $\delta > 0$ tal que los poliedros truncados $\widehat{\mathcal{P}}_t$ tienen todos el mismo tipo combinatorio cuando $0 < t \leq \delta$ (aunque pueden tener distinto tipo combinatorio que $\widehat{\mathcal{P}}_0$).

Denotaremos por \mathcal{T}_t el conjunto de puntos del borde de $\widehat{\mathcal{P}}_t$ que no pertenecen a ningún plano bisector H_γ (es decir, la parte del borde por donde se ha truncado). Llamaremos un *collar* de \mathcal{T}_t en $\widehat{\mathcal{P}}_t$ a un entorno de \mathcal{T}_t en $\widehat{\mathcal{P}}_t$ que sólo corta a las aristas de $\widehat{\mathcal{P}}_t$ que tienen uno de sus extremos en \mathcal{T}_t .

Elegimos un subconjunto \mathcal{Q}_t de $\widehat{\mathcal{P}}_t$ que es un complejo triangulado tal que:

- $\widehat{\mathcal{P}}_t \setminus \mathcal{Q}_t$ es un collar de \mathcal{T}_t en $\widehat{\mathcal{P}}_t$;
- \mathcal{Q}_t varía de manera continua con el parámetro t , es decir: cada \mathcal{Q}_t tiene un número constante de vértices $w_1(t), \dots, w_m(t)$, y cada vértice $w_i(t)$ describe un camino continuo cuando t varía en $[0, \delta]$. (Cuando $t = 0$, algunos de los simplicios de la triangulación de \mathcal{Q}_t pueden degenerar.)

Exigimos además que si $\gamma \in \overline{\Gamma}_0(w_i(0))$, entonces $\rho_0 \gamma^{-1}(w_i(0)) \in \bigcup_{j=1}^n U_j$.

Si δ es suficientemente pequeño, entonces para todo $t \in [0, \delta]$ y todo vértice $w_i(t)$ se verifican las siguientes condiciones:

- (i) si $w_i(t) \in H_\gamma(t) \cap U_j$, donde $\gamma \in \overline{\Gamma}_0(U_j)$, entonces $\gamma \in \overline{\Gamma}_0(w_i(0))$;
- (ii) para todo $\gamma \in \{\text{id}\} \cap \overline{\Gamma}_0$, si $\rho_0 \gamma(w_i(0)) \in U_j$, entonces $\rho_t \gamma(w_i(t)) \in U_j$;
- (iii) si para algún $\gamma \in \overline{\Gamma}_0$ y algún $\xi \in \{\text{id}\} \cap \overline{\Gamma}_0$ se verifica que $d((\rho_0 \xi)(w_i(0)), O) < d((\rho_0 \xi)(w_i(0)), (\rho_0 \gamma)(O))$, entonces $d((\rho_t \xi)(w_i(t)), O) < d((\rho_t \xi)(w_i(t)), (\rho_t \gamma)(O))$.

Afirmación. Si $w_i(t) \in H_\gamma(t) \cap U_j$, donde $\gamma \in \overline{\Gamma}_0(U_j)$, entonces $\rho_t \gamma^{-1}(w_i(t)) \in \widehat{\mathcal{P}}_t$.

En efecto, por (i) tenemos que $\gamma \in \overline{\Gamma}_0(w_i(0))$, luego $\rho_0 \gamma^{-1}(w_i(0)) \in \bigcup_{j=1}^n U_j$, y por tanto $\rho_0 \gamma^{-1}(w_i(0)) \in U_k$ para algún k . Por (ii), $\rho_t \gamma^{-1}(w_i(t)) \in U_k$. Tenemos que comprobar que $d(\rho_t \gamma^{-1}(w_i(t)), O) \leq d(\rho_t \gamma^{-1}(w_i(t)), \rho_t \xi(O))$ para todo $\xi \in \overline{\Gamma}_0(U_k)$. Distinguimos dos casos:

- Si $\xi \notin \overline{\Gamma}_0(\rho_0 \gamma^{-1}(w_i(0)))$:
entonces necesariamente $d(\rho_0 \gamma^{-1}(w_i(0)), O) < d(\rho_0 \gamma^{-1}(w_i(0)), \rho_0 \xi(O))$, y por (iii) resulta que $d(\rho_t \gamma^{-1}(w_i(t)), O) < d(\rho_t \gamma^{-1}(w_i(t)), \rho_t \xi(O))$.
- Si $\xi \in \overline{\Gamma}_0(\rho_0 \gamma^{-1}(w_i(0)))$:
entonces $\gamma \xi \in \overline{\Gamma}_0(w_i(0))$ (por el lema 2.10.(2) del capítulo III). Supongamos que $w_i(0) \in U_h$. Entonces $\gamma \xi \in \overline{\Gamma}_0(U_h)$. Como $w_i(t)$ pertenece a $\widehat{\mathcal{P}}_t \cap U_h$ (por la condición (ii)) y a H_γ , resulta que $d(w_i(t), \rho_t \gamma(O)) = d(w_i(t), O) \leq d(w_i(t), \rho_t(\gamma \xi)(O))$. Aplicando a ambos miembros la isometría $\rho_t \gamma^{-1}$, resulta que $d(\rho_t \gamma^{-1}(w_i(t)), O) \leq d(\rho_t \gamma^{-1}(w_i(t)), \rho_t \xi(O))$. \square

Por tanto, podemos extender el subcomplejo \mathcal{Q}_t a otro subcomplejo \mathcal{Q}'_t con las mismas propiedades pero con un vértice más: el punto $\rho_t \gamma^{-1}(w_i(t))$. Repitiendo el mismo proceso una cantidad finita de veces, llegamos a un subcomplejo triangulado (que denotamos también \mathcal{Q}_t) que varía de manera continua con el parámetro t y verifica que:

- $\widehat{\mathcal{P}}_t \setminus \mathcal{Q}_t$ es un collar de \mathcal{T}_t en $\widehat{\mathcal{P}}_t$;
- si $w_j(t)$ es un vértice de la triangulación de \mathcal{Q}_t que pertenece a $U_i \cap H_\gamma$ (donde $\gamma \in \overline{\Gamma}_0(U_j)$), entonces $\rho_t \gamma^{-1}(w_j(t))$ también es un vértice de la triangulación de \mathcal{Q}_t (que pertenece al plano bisector $H_{\gamma^{-1}}$).

Se demuestra como en el caso anterior, que las caras del poliedro truncado \mathcal{Q}_t se identifican dos a dos mediante isometrías hiperbólicas para dar lugar a una estructura hiperbólica en $M \setminus N(\Sigma)$ con holonomía ρ_t .

Observación 4.1. Tenemos así una demostración constructiva, para este caso particular, del teorema más general que afirma (hablando vagamente) que *toda representación próxima a la representación de holonomía de una estructura geométrica, es también la holonomía de alguna estructura geométrica*. Este teorema fue enunciado en su mayor generalidad por Thurston ([Thu₁], §5.3.1) y demostrado de diferentes maneras por Canary-Epstein-Green ([CEG]) y Goldman ([Go₁]) entre otros (véase [Go₁] para una lista más completa de referencias), y constituye una parte del Teorema de Cirugía Hiperbólica de Thurston.

Observación 4.2. Lo único que hemos utilizado en esta fase del algoritmo es la existencia de:

- una familia de representaciones $\rho_t : \pi_1(M_0 \setminus \Sigma, x_0) \rightarrow SL(4, \mathbf{R})$ tales que para cada $\gamma \in \pi_1(M_0 \setminus \Sigma, x_0)$, $\rho_t(\gamma)$ es una matriz cuyas entradas son funciones de t , analíticas a trozos;
- un plano $H_\gamma(t)$ de \mathbf{H}^3 asociado a cada matriz $\rho_t(\gamma)$, de tal manera que los coeficientes de la ecuación de $H_\gamma(t)$ son funciones de t analíticas a trozos, y además se verifican las condiciones:
 - (a) $\rho_t(\gamma^{-1})(H_\gamma(t)) = H_{\gamma^{-1}}(t)$;
 - (b) $\rho_t(\gamma^{-1})(H_\gamma(t) \cap H_\xi(t)) = H_{\gamma^{-1}}(t) \cap H_{\gamma^{-1}\xi}(t)$.

En consecuencia, los mismos argumentos son válidos para deformar una estructura esférica cónica a estructuras esféricas próximas (en el complemento de un entorno de la singularidad), o para deformar una estructura euclídea cónica a estructuras euclídeas, hiperbólicas o esféricas próximas, también en el complemento de un entorno de la singularidad (y siempre que se conozcan, por supuesto, las correspondientes representaciones de holonomía). Además, hasta aquí no se ha usado la hipótesis de que ρ_t envíe los meridianos de Σ a rotaciones; la construcción es, pues, válida para cualquier curva (analítica a trozos) de representaciones ρ_t , con punto de partida la representación inicial ρ_0 .

Extensión de la estructura hiperbólica en $M \setminus N(\Sigma)$ definida por el poliedro \mathcal{Q}_t , a una estructura cónica M_t en (M, Σ) con holonomía ρ_t .

Si para todo meridiano μ de Σ en M se verifica que $\rho_t \mu$ es una rotación (como habíamos supuesto inicialmente en las hipótesis), entonces la estructura hiperbólica de $X_t \simeq M \setminus N(\Sigma)$ se puede extender a una estructura hiperbólica cónica en M con singularidad Σ y holonomía ρ_t , por el método de cirugía de Dehn hiperbólica introducido por Thurston en sus notas (cf. [Thu₁]).

En efecto, supongamos que las componentes del enlace Σ son $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$, y consideremos una cualquiera de ellas, Σ_i . Sea $T_t \subset \partial X_t$ el toro correspondiente al borde de un entorno tubular de Σ_i en M . Truncando los poliedros \mathcal{P}_t adecuadamente, siempre podemos suponer que cuando $t \rightarrow 0$, los toros T_t tienden a un toro T_0 que bordea un entorno tubular de Σ_i en M_0 . Sea $T_t \times [0, \epsilon]$ un collar de T_t en X_t , y sean λ, μ dos generadores de $\pi_1(T_t)$, donde μ es un meridiano de Σ_i en M . Denotemos por $h_t : \pi_1(T_t \times [0, \epsilon]) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$ la holonomía de la estructura hiperbólica de $T_t \times [0, \epsilon]$. Entonces $h_t \mu$ y $h_t \lambda$ son dos isometrías con un eje invariante común l_t . Como $h_t \mu$ y $h_t \lambda$ están próximas a $h_0 \mu$ y $h_0 \lambda$ cuando t está próximo a 0, el eje l_t está cerca del eje invariante común l_0 de $h_0 \mu$ y $h_0 \lambda$. Puesto que el desarrollo de la cubierta universal de $T_0 \times [0, \epsilon]$ en \mathbb{H}^3 no corta a l_0 , resulta que cuando t está próximo a 0, el desarrollo de la cubierta universal de $T_t \times [0, \epsilon]$ en \mathbb{H}^3 tampoco corta al eje l_t . Por tanto, este desarrollo de $T_t \times [0, \epsilon]$ en $\mathbb{H}^3 \setminus l_t$ se puede levantar a la cubierta universal $\widetilde{\mathbb{H}^3 \setminus l_t}$ de $\mathbb{H}^3 \setminus l_t$. Sea \tilde{h}_t el levantamiento de la holonomía h_t a la cubierta universal $\widetilde{\mathbb{H}^3 \setminus l_t}$. Entonces el cociente de $\widetilde{\mathbb{H}^3 \setminus l_t}$ bajo la acción del grupo generado por $\tilde{h}_t \mu$ y $\tilde{h}_t \lambda$ tiene una estructura hiperbólica que extiende a la de $T_t \times [0, \epsilon]$, y su completación es un toro sólido de meridiano μ , con una estructura hiperbólica cónica singular en el ánima del toro sólido, y de ángulo cónico igual al ángulo de la rotación $\rho_t \mu$.

FASE 2: Construcción del poliedro de Dirichlet \mathcal{P}_t para la estructura hiperbólica cónica M_t con holonomía ρ_t .

Observación 4.3. En esta fase tenemos que hacer uso de la siguiente hipótesis: cuando t está cerca de 0, la estructura cónica M_t (cuya existencia se acaba de demostrar) está próxima a la estructura cónica inicial M_0 en la topología cuasi-isométrica. Este es un punto delicado que no demostramos aquí, debido a la dificultad de las técnicas que serían necesarias. (No obstante, recurriendo al teorema de Hodgson-Kerckhoff [HK] (que da una parametrización local del espacio de deformaciones de una estructura hiperbólica cónica por los ángulos cónicos), se deduce que las diversas topologías que se pueden definir en dicho espacio de deformaciones son equivalentes: la topología C^∞ en las aplicaciones

desarrolladoras, la topología Hausdorff y la topología cuasi-isométrica (cf. [CEG], §3 y [Gro], thm. 8.25). Por tanto, M_t ha de estar en efecto próxima a M_0 en sentido cuasi-isométrico.)

Si admitimos que cuando t está próximo a 0, M_t está próxima a M_0 en la topología cuasi-isométrica, entonces podemos aplicar el resultado de la sección 3, que nos dice que las facetas propias de \mathcal{P}_t están contenidas en el conjunto de facetas generales y singulares de \mathcal{P}_0 . Como \mathcal{P}_t es una extensión del poliedro \mathcal{Q}_t obtenido en la fase 1, el siguiente algoritmo finito permite construir \mathcal{P}_t :

- Se construyen *todos* los posibles poliedros que son extensión de \mathcal{Q}_t y tienen todas sus caras contenidas en la unión finita de planos bisectores $H_\gamma(t)$, donde γ recorre todas las facetas generales y singulares de \mathcal{P}_0 (ver figura 11). Existe un número finito de tales poliedros.
- Para cada uno de ellos, se comprueba si sus caras se identifican dos a dos mediante isometrías hiperbólicas para dar lugar a la estructura cónica M_t . Ya sabemos que ha de existir uno que verifique esta condición, y ése es el poliedro de Dirichlet buscado \mathcal{P}_t . (Según el teorema de Hodgson-Kerckhoff [HK] sobre rigidez de variedades hiperbólicas cónicas, debe ser además único.)

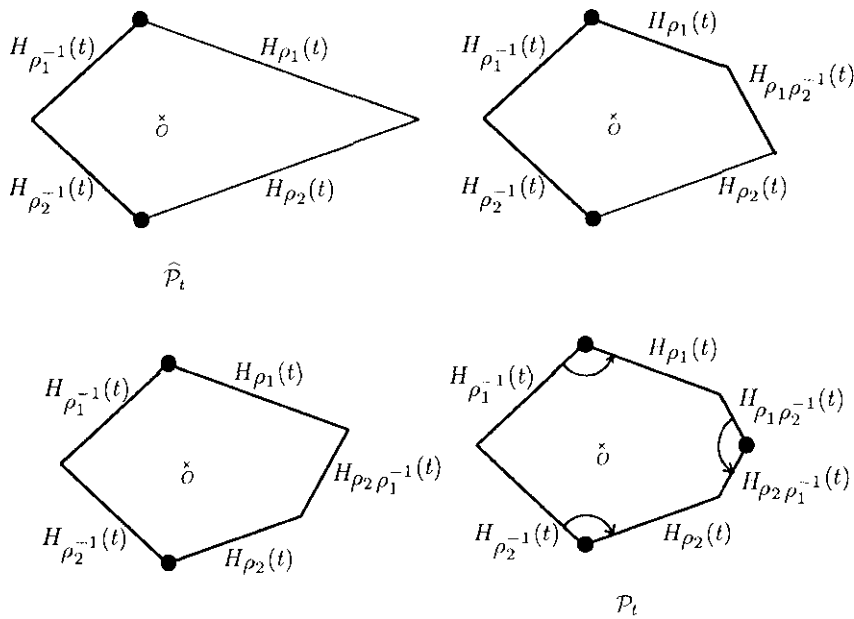


Figura 11

Esta segunda fase del algoritmo se simplifica si se dispone de información adicional sobre el poliedro de Dirichlet: por ejemplo, sabemos que si un plano bisector $H_\gamma(t)$ aparece como cara del poliedro, también ha de aparecer el correspondiente $H_{\gamma^{-1}}(t)$. Si además todos los ángulos cónicos son menores que π , sabemos que el poliedro ha de ser convexo. Toda esta información reduce el número de poliedros que hay que construir en esta fase.

El mismo algoritmo sirve para deformaciones de una estructura cónica esférica (resp. euclídea) a estructuras cónicas esféricas (resp. euclídeas) próximas (partiendo siempre de la hipótesis de que se pueda deformar, a nivel puramente algebraico, la representación de holonomía).

Observación 4.4. Supongamos que para todo t dentro de un intervalo *compacto* $[-\epsilon, \epsilon]$, existe una estructura cónica M_t con holonomía ρ_t . Entonces, como consecuencia de todo lo anterior, se deduce que el conjunto de valores de $t \in [-\epsilon, \epsilon]$ para los que se produce un cambio de tipo combinatorio en el poliedro de Dirichlet \mathcal{P}_t es *finito*.

Capítulo V

NUEVAS ESTRUCTURAS CON HOLONOMÍA SEMI-RIEMANNIANA, Y UNA FÓRMULA DE SCHLÄFLI EN HIPERCUÁDRICAS SEMI-RIEMANNIANAS

INTRODUCCIÓN

En este capítulo se describen otras estructuras singulares en el nudo de a ocho, que aparecen de modo natural, pero no se conocen bien y son nuevas en la literatura. Se trata de estructuras proyectivas reales en S^3 , singulares en el nudo de a ocho (o nudo racional $[5/3]$), cuyo grupo de holonomía está contenido en $PSO(2, 2)$, el grupo de transformaciones proyectivas de RP^3 que preservan la forma cuadrática $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$. Por otra parte, el grupo ortogonal $SO(2, 2)$ es el grupo de isometrías de la pseudoesfera $S_2^3(-1) = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 \mid x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = -1\}$, que es una variedad de Lorentz de curvatura constante (cf. [O’N]). Por tanto, se puede dar otra interpretación distinta a las estructuras proyectivas reales antes mencionadas, en términos de métricas de Lorentz. Concretamente, se puede descomponer S^3 en dos bolas, tales que en el interior de cada una de ellas está definida una métrica de Lorentz de curvatura constante, que tiene una “singularidad” (análoga a la de una variedad riemanniana cónica) en los arcos del nudo de a ocho contenidos dentro de cada bola.

En la sección 1 se describe una familia uniparamétrica de representaciones de holonomía del grupo fundamental del complemento del nudo de a ocho, $\pi_1(S^3 \setminus [5/3])$, en $SO(2, 2)$. Esta familia se obtiene como continuación natural de la familia uniparamétrica de representaciones de holonomía de $\pi_1(S^3 \setminus [5/3])$ en $SO(4)$, correspondientes a las estructuras esféricas cónicas en S^3 , singulares en el nudo de a ocho, con ángulo cónico entre $2\pi/3$ y π .

En la sección 2 se construye una familia de poliedros en RP^3 , cuyas caras se pueden identificar mediante ciertas proyectividades, para dar lugar a estructuras proyectivas en S^3 (singulares en el nudo de a ocho) que tienen por holonomías las representaciones descritas en la sección 1.

El hecho de que aparezcan de modo natural, además de las ocho geometrías de Thurston, otras geometrías semi-riemannianas, motivó la búsqueda de una fórmula de Schläfli para calcular el volumen de poliedros contenidos en hipercuádricas semi-riemannianas (tales como la pseudoesfera $S_2^3(-1)$). En las restantes secciones del capítulo se obtiene esta fórmula y se muestran otras aplicaciones de ella en contextos diferentes.

La fórmula diferencial de Schläfli desempeña un papel fundamental en el cálculo del volumen de poliedros hiperbólicos y esféricos de cualquier dimensión. Dada una familia de n -símplices Δ que varían diferenciablemente en un espacio no euclídeo de dimensión n y curvatura constante $\kappa = 1$ o $\kappa = -1$, la fórmula de Schläfli expresa la diferencial del volumen $V_n(\Delta)$ de Δ , en términos de los volúmenes de sus caras de codimensión 2 y los ángulos diédricos en esas caras. Concretamente,

$$dV_n(\Delta) = \frac{\kappa}{n-1} \sum_F V_{n-2}(F) d\alpha_F$$

donde la suma se extiende a todas las caras F de codimensión 2 de Δ , $V_{n-2}(F)$ denota el volumen $((n-2)$ -dimensional) de la cara F y α_F es el ángulo diédrico en la cara F .

Alrededor de 1852, L. Schläfli demostró esta fórmula para símplices esféricos de cualquier dimensión ([Sch]). En 1936, H. Kneser dio una demostración distinta, que podía generalizar fácilmente al caso hiperbólico ([Kne]). Como referencia más reciente, es recomendable el artículo de J. Milnor ([Mil₂]), en el que se pueden encontrar algunas notas históricas sobre la fórmula de Schläfli y una nueva demostración que es particularmente transparente. En los últimos años se ha hecho gran uso de esta fórmula para calcular el volumen de 3-variedades hiperbólicas y 3-variedades hiperbólicas cónicas ([HLM₁], [HLM₃], [HLM₄]), siguiendo una idea de C. Hodgson ([Ho₁]).

Por otra parte, como hemos dicho antes, también es interesante calcular el volumen de símplices contenidos en variedades semi-riemannianas completas de curvatura constante, tales como la pseudoesfera $S_2^3(-1)$. Otro ejemplo importante es la esfera de de Sitter n -dimensional S_1^n , que es una variedad de Lorentz completa de curvatura constante 1. Existe una relación de dualidad entre S_1^n y el espacio hiperbólico n -dimensional H^n (considerados ambos como subvariedades del espacio de Lorentz-Minkowski $(n+1)$ -dimensional), por la cual a cada punto v de la esfera de de Sitter se le asocia el hiperplano hiperbólico que tiene a v como vector normal unitario. Una fórmula de Schläfli para el volumen de símplices en S_1^n es, pues, útil para relacionar el volumen de un símplice hiperbólico con la medida del conjunto de hiperplanos que lo intersecan. L. Santaló encontró una fórmula de este tipo en dimensión $n = 3$ ([Sa₂], §IV.17.5, nota 1), utilizando métodos de geometría integral. El director de esta tesis, D. José María Montesinos, obtuvo una fórmula diferencial de Schläfli para tetraedros en la esfera de de Sitter tridimensional S_1^3 ([Mo₂]), derivando la mencionada fórmula de Santaló y aplicando a continuación la fórmula de Schläfli para tetraedros hiperbólicos. Él me sugirió la posibilidad de obtener una fórmula de Schläfli para símplices en S_1^n , siguiendo la demostración de Kneser, y utilizarla para generalizar la igualdad de Santaló a dimensiones superiores.

En la sección 3, se adapta y generaliza la demostración de Kneser para obtener una fórmula diferencial de Schläfli para una clase muy amplia de símplices en cualquier hipercuádrlica central unidad del espacio

semi-euclideo \mathbb{R}_q^{n+1} (cf. [O'N]). Para ello, es necesaria una definición adecuada de ángulo diédrico en una geometría semi-riemanniana. Este es un punto delicado que se resuelve en el apartado 3.4, generalizando la definición (parcial) estándar (cf. [O'N]).

A continuación, se dan tres aplicaciones de la fórmula de Schläfli en la esfera de de Sitter. En la sección 4, se redemuestra la fórmula de Santaló en dimensión 3 (que relaciona el volumen de un tetraedro hiperbólico con la medida del conjunto de hiperplanos que lo cortan), utilizando ahora las fórmulas de Schläfli en \mathbb{H}^3 y S_1^3 . En esta sección se introducen también los conceptos de polar y dual complementario de un simplejo hiperbólico de dimensión arbitraria, que serán necesarios al generalizar la fórmula de Santaló a dimensiones superiores.

En la sección 5, se obtienen unas fórmulas de Gauss-Bonnet para símlices de la esfera de de Sitter n -dimensional S_1^n cuyas caras son todas riemannianas, en analogía con las fórmulas de Gauss-Bonnet generalizadas para símlices esféricos e hiperbólicos, que relacionan entre sí los volúmenes de todas las caras de dimensión par del símlice y los ángulos diédricos en esas caras (cf. [Sa₁], [AVS]).

Finalmente, la sección 6 es consecuencia de las dos anteriores, y consiste en una generalización a dimensión superior, de la fórmula que relaciona el volumen de un símlice hiperbólico con el del conjunto de hiperplanos que lo cortan.

1. HOLONOMÍAS SEMI-RIEMANNIANAS PARA EL NUDO DE A OCHO

Recordemos la familia uniparamétrica de representaciones del grupo fundamental del nudo de a ocho (o nudo racional $[5/3]$) en $SL(2, \mathbb{C})$, que describimos en la sección 1 del capítulo II. El grupo fundamental $\pi_1(S^3 \setminus [5/3])$ admite la presentación $|a, b : aw = wb|$, donde $w = ba^{-1}b^{-1}a$. Pues bien, para cada número real $u \in (\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}]$, consideráramos un par de representaciones ρ_1, ρ_2 de $\pi_1(S^3 \setminus [5/3])$ en $SL(2, \mathbb{C})$, definidas por:

$$\rho_1(a) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & ie^{d+i\theta} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \\ ie^{-(d+i\theta)} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \quad \rho_1(b) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & ie^{-(d+i\theta)} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \\ ie^{d+i\theta} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rho_2(a) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & ie^{d-i\theta} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \\ ie^{-(d-i\theta)} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \quad \rho_2(b) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & ie^{-(d-i\theta)} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \\ ie^{d-i\theta} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

donde α , θ y d son funciones continuas (con valores complejos) del parámetro u tales que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sqrt{3u^2 - 1} \sqrt{u^2 + 1}}{2(1 - u^2)} & , & \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{u^4 - 10u^2 + 5}}{2(1 - u^2)} \\ \operatorname{sen} \theta &= \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} & , & \quad \cos \theta = \frac{u}{\sqrt{u^2 + 1}} \\ \operatorname{senh} d &= \frac{\sqrt{1 - 2u^2}}{\sqrt{3u^2 - 1}} & , & \quad \cosh d = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{3u^2 - 1}} \end{aligned}$$

A este par de representaciones en $SL(2, \mathbb{C})$ le asociábamos una representación ρ en el grupo $SO(3, 1; \mathbb{C})$

$\subset SL(4, \mathbb{C})$ formado por las matrices M tales que $M \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} M^t = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$:

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen}^2 \theta & 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta & -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \cosh d & -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \operatorname{senh} d \\ 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta & 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \theta & \operatorname{sen} \alpha \cos \theta \cosh d & \operatorname{sen} \alpha \cos \theta \operatorname{senh} d \\ \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \cosh d & -\operatorname{sen} \alpha \cos \theta \cosh d & 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \cosh^2 d & -2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{senh} d \cosh d \\ -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \operatorname{senh} d & \operatorname{sen} \alpha \cos \theta \operatorname{senh} d & 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{senh} d \cosh d & 1 + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{senh}^2 d \end{pmatrix}$$

y $\rho(b)$ es la conjugada de $\rho(a)$ mediante la matriz $X = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$.

Cuando $\frac{1}{\sqrt{3}} < u < \frac{1}{\sqrt{2}}$, las tres funciones α , θ y d son reales. Las matrices $\rho_j(a)$ y $\rho_j(b)$ ($j = 1, 2$) corresponden (en el modelo del semiespacio de \mathbb{H}^3) a dos rotaciones hiperbólicas de ángulo α en torno a dos ejes que están separados a distancia $2d$ y forman ángulo 2θ . Las matrices $\rho(a)$ y $\rho(b)$ pertenecen al grupo ortogonal (real) $SO(3, 1)$, y representan las mismas rotaciones hiperbólicas, pero en el modelo proyectivo (o de Klein) de \mathbb{H}^3 . Como ya vimos, ρ es la holonomía de una estructura hiperbólica cónica en \mathbb{S}^3 con singularidad el nudo $[5/3]$ y ángulo cónico $\alpha \in (0, 2\pi/3)$.

Cuando $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$, la distancia d se hace igual a cero. Por tanto, ρ_1 y ρ_2 son dos representaciones conjugadas de $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [5/3])$ en $SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \mid u, v \in \mathbb{C}, u\bar{u} + v\bar{v} = 1 \right\}$ (que es la cubierta universal de $SO(3)$). La representación ρ corresponde a la parte de rotación de la holonomía de una estructura euclídea cónica en \mathbb{S}^3 con singularidad el nudo de a ocho y ángulo cónico $\alpha = 2\pi/3$.

Finalmente, cuando $u \in (\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}]$, las funciones α y θ continúan siendo reales, mientras que d se hace imaginario puro, y podemos escribir $d = -ir$, donde $r > 0$. Por tanto, ρ_1 y ρ_2 son dos representaciones de $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [5/3])$ en $SU(2)$, pero ya no son conjugadas una de la otra. Dan lugar a una representación de $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [5/3])$ en $SU(2) \times SU(2)$ (que es la cubierta universal de $SO(4)$). Por

otra parte, ρ es una representación de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [5/3])$ en el subgrupo \mathcal{J} de $SO(3, 1; \mathbf{C})$ formado por las matrices de la forma

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & i m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & i m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & i m_{34} \\ i m_{41} & i m_{42} & i m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \quad \text{con } m_{ij} \in \mathbf{R}$$

Este subgrupo se identifica con el grupo ortogonal (real) $SO(4)$ mediante la conjugación por la matriz $T = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$.

Si conjugamos ρ por la matriz T obtenemos, pues, una representación ρ' de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [5/3])$ en $SO(4) \cong \text{Iso}^+(\mathbf{S}^3)$, dada por:

$$\rho'(a) = \begin{pmatrix} 1 - 2 \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \text{sen}^2 \theta & 2 \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \text{sen} \theta \cos \theta & - \text{sen} \alpha \text{sen} \theta \cos r & \text{sen} \alpha \text{sen} \theta \text{sen} r \\ 2 \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \text{sen} \theta \cos \theta & 1 - 2 \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \theta & \text{sen} \alpha \cos \theta \cos r & - \text{sen} \alpha \cos \theta \text{sen} r \\ \text{sen} \alpha \text{sen} \theta \cos r & - \text{sen} \alpha \cos \theta \cos r & 1 - 2 \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 r & 2 \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \text{sen} r \cos r \\ - \text{sen} \alpha \text{sen} \theta \text{sen} r & \text{sen} \alpha \cos \theta \text{sen} r & 2 \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \text{sen} r \cos r & 1 - 2 \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \text{sen}^2 r \end{pmatrix}$$

y $\rho'(b) = X \rho'(a) X$.

Ahora las matrices $\rho'(a)$ y $\rho'(b)$ son dos rotaciones esféricas de ángulo α en torno a dos ejes separados a distancia $2r$ y que forman ángulo 2θ . La representación ρ' es la holonomía de una estructura esférica cónica en \mathbf{S}^3 con singularidad el nudo de a ocho y ángulo $\alpha \in (2\pi/3, \pi]$. La relación entre ρ' y el par de representaciones ρ_1, ρ_2 en $SU(2)$ es la siguiente: si identificamos $\mathbf{S}^3 = \{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1 \}$ con $SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x + iy & z + it \\ -z + it & x - iy \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1 \right\}$, entonces la isometría esférica $\rho'(a)$ corresponde a la transformación

$$\begin{pmatrix} x + iy & z + it \\ -z + it & x - iy \end{pmatrix} \longrightarrow \rho_1(a)^{-1} \begin{pmatrix} x + iy & z + it \\ -z + it & x - iy \end{pmatrix} \rho_2(a)$$

Análogamente, $\rho'(b)$ corresponde a la transformación

$$\begin{pmatrix} x + iy & z + it \\ -z + it & x - iy \end{pmatrix} \longrightarrow \rho_1(b)^{-1} \begin{pmatrix} x + iy & z + it \\ -z + it & x - iy \end{pmatrix} \rho_2(b)$$

Es natural preguntarse a continuación qué ocurre cuando el parámetro u se hace mayor que $\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$. En ese caso $\cos(\alpha/2)$ se hace imaginario puro, mientras que $\text{sen}(\alpha/2)$ sigue siendo

real. Por tanto, cuando $\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \leq u < 1$, podemos escribir la función α de la forma $\alpha = \pi - i\beta$, donde $0 \leq \beta < +\infty$. El ángulo θ continúa siendo real, y $d = -ir$ también es imaginario puro.

Por tanto, cuando $\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \leq u < 1$, las representaciones ρ_1 y ρ_2 son de la forma

$$\rho_1(a) = \begin{pmatrix} i \sinh \frac{\beta}{2} & ie^{i(-r+\theta)} \cosh \frac{\beta}{2} \\ ie^{i(r-\theta)} \cosh \frac{\beta}{2} & i \sinh \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}, \quad \rho_1(b) = \begin{pmatrix} i \sinh \frac{\beta}{2} & ie^{i(r-\theta)} \cosh \frac{\beta}{2} \\ ie^{i(-r+\theta)} \cosh \frac{\beta}{2} & i \sinh \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rho_2(a) = \begin{pmatrix} i \sinh \frac{\beta}{2} & ie^{-i(r+\theta)} \cosh \frac{\beta}{2} \\ ie^{i(r+\theta)} \cosh \frac{\beta}{2} & \overline{i \sinh \frac{\beta}{2}} \end{pmatrix}, \quad \rho_2(b) = \begin{pmatrix} i \sinh \frac{\beta}{2} & ie^{i(r+\theta)} \cosh \frac{\beta}{2} \\ ie^{-i(r+\theta)} \cosh \frac{\beta}{2} & i \sinh \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

Es decir, ρ_1 y ρ_2 son representaciones de $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [5/3])$ en el subgrupo H de $SL(2, \mathbb{C})$ formado por las matrices $M \in SL(2, \mathbb{C})$ tales que $M \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \overline{M}^t = \pm \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$. Este subgrupo tiene dos componentes conexas. La componente de la identidad coincide con $SU(1, 1)$:

$$H_0 = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ \overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix} \mid u, v \in \mathbb{C}, u\overline{u} - v\overline{v} = 1 \right\}$$

La otra componente es

$$H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ -\overline{v} & -\overline{u} \end{pmatrix} \mid u, v \in \mathbb{C}, -u\overline{u} + v\overline{v} = 1 \right\}$$

Obsérvese que ρ_1 y ρ_2 no son representaciones de $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [5/3])$ en $H_0 = SU(1, 1)$, ya que las cuatro matrices $\rho_j(a)$, $\rho_j(b)$, $j = 1, 2$, pertenecen a la otra componente H_1 .

Observación. Al proyectivizar, el subgrupo $PH = \{ M \in PSL(2, \mathbb{C}) \mid M \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \overline{M}^t = \pm \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \}$ de $PSL(2, \mathbb{C})$ es isomorfo al grupo proyectivo unitario $PU(1, 1) = \{ M \in PGL(2, \mathbb{C}) \mid M \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \overline{M}^t = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \}$.

Por otra parte, la representación ρ de $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus [5/3])$ en $SO(3, 1; \mathbb{C})$ ahora es de la siguiente forma:

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} 1 - 2 \cosh^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \theta & 2 \cosh^2 \frac{\beta}{2} \sin \theta \cos \theta & -i \sinh \beta \sin \theta \cos r & -\sinh \beta \sin \theta \sen r \\ 2 \cosh^2 \frac{\beta}{2} \sin \theta \cos \theta & 1 - 2 \cosh^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \theta & i \sinh \beta \cos \theta \cos r & \sinh \beta \cos \theta \sen r \\ i \sinh \beta \sin \theta \cos r & -i \sinh \beta \cos \theta \cos r & 1 - 2 \cosh^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 r & 2i \cosh^2 \frac{\beta}{2} \sen r \cos r \\ -\sinh \beta \sin \theta \sen r & \sinh \beta \cos \theta \sen r & -2i \cosh^2 \frac{\beta}{2} \sen r \cos r & 1 - 2 \cosh^2 \frac{\beta}{2} \sen^2 r \end{pmatrix}$$

$$y \rho(b) = X \rho(a) X .$$

Por tanto, ρ es una representación de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [5/3])$ en el subgrupo \mathcal{I} de $SO(3, 1; \mathbf{C})$ formado por las matrices de la forma

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & i m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & i m_{23} & m_{24} \\ i m_{31} & i m_{32} & m_{33} & i m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & i m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \quad \text{con } m_{ij} \in \mathbf{R}$$

Este subgrupo se identifica con el grupo ortogonal (real) $SO(2, 2)$ (formado por los automorfismos lineales de \mathbf{R}^4 que preservan la orientación y la forma cuadrática $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$), mediante la conjugación por

la matriz $T = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -i & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$. Por tanto, conjugando ρ por esta matriz T obtenemos una representación

ρ' de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [5/3])$ en $SO(2, 2)$, dada por:

$$\rho'(a) = \begin{pmatrix} 1 - 2 \cosh^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \theta & 2 \cosh^2 \frac{\beta}{2} \sin \theta \cos \theta & \sinh \beta \sin \theta \cos r & -\sinh \beta \sin \theta \sin r \\ 2 \cosh^2 \frac{\beta}{2} \sin \theta \cos \theta & 1 - 2 \cosh^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \theta & -\sinh \beta \cos \theta \cos r & \sinh \beta \cos \theta \sin r \\ \sinh \beta \sin \theta \cos r & -\sinh \beta \cos \theta \cos r & 1 - 2 \cosh^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 r & 2 \cosh^2 \frac{\beta}{2} \sin r \cos r \\ -\sinh \beta \sin \theta \sin r & \sinh \beta \cos \theta \sin r & 2 \cosh^2 \frac{\beta}{2} \sin r \cos r & 1 - 2 \cosh^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 r \end{pmatrix}$$

$$y \rho'(b) = X \rho'(a) X .$$

El grupo $SO(2, 2)$ se puede identificar con el grupo de isometrías de la pseudoesfera

$$S_2^3(1) = \{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 1 \}$$

que preservan la orientación. La forma cuadrática $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ de \mathbf{R}^4 induce en la hipercuadrática

$S_2^3(1)$ una métrica semi-riemanniana de signatura $+$ $-$ $-$ $-$. Con esta métrica, la pseudoesfera $S_2^3(1)$ es una variedad de Lorentz completa de curvatura constante igual a 1 (en el sentido de la geometría semi-riemanniana, cf. [O'N]). Para variedades de Lorentz existen, además de la noción de orientabilidad, las nociones de "orientabilidad temporal" y "orientabilidad espacial" (según cómo se oriente en cada plano tangente el cono distinguido formado por los vectores de norma negativa, cf. [O'N]). Por ello, el grupo de isometrías que preservan la orientación de la variedad de Lorentz $S_2^3(1)$, $SO(2, 2)$, tiene dos componentes conexas:

- la componente de la identidad está formada por las isometrías que preservan tanto la orientación temporal como la orientación espacial (es decir, las matrices $M = (m_{ij})$ de $SO(2, 2)$ tales que los dos menores principales de orden 2 $\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} m_{33} & m_{34} \\ m_{43} & m_{44} \end{vmatrix}$ son positivos).
- la otra componente está formada por las isometrías que invierten tanto la orientación temporal como la orientación espacial (es decir, las matrices $M = (m_{ij})$ de $SO(2, 2)$ tales que los dos menores principales $\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} m_{33} & m_{34} \\ m_{43} & m_{44} \end{vmatrix}$ son negativos).

La representación ρ' no es una representación de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [5/3])$ en la componente de la identidad de $SO(2, 2)$, ya que

$$\begin{vmatrix} 1 - 2 \cosh^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \theta & 2 \cosh^2 \frac{\beta}{2} \sin \theta \cos \theta \\ 2 \cosh^2 \frac{\beta}{2} \sin \theta \cos \theta & 1 - 2 \cosh^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - 2 \cosh^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 r & 2 \cosh^2 \frac{\beta}{2} \sin r \cos r \\ 2 \cosh^2 \frac{\beta}{2} \sin r \cos r & 1 - 2 \cosh^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 r \end{vmatrix} \\ = -\cosh \beta < 0$$

luego $\rho'(a)$ y $\rho'(b)$ invierten tanto la orientación espacial como la orientación temporal de $S_2^3(1)$.

Veamos la relación que existe entre ρ' y el par de representaciones ρ_1 y ρ_2 . La pseudoesfera $S_2^3(1)$ se puede identificar de modo natural con el grupo unitario especial $SU(1, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} x + iy & -t + iz \\ -t - iz & x - iy \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 1 \right\}$. De manera análoga a lo que ocurre con el grupo $SO(4)$, se tiene que la cubierta doble de $SO(2, 2)$ es $SU(1, 1) \times SU(1, 1) = H_0 \times H_0$ (con las mismas notaciones anteriores). La cubierta doble de la otra componente se puede identificar con $H_1 \times H_1$. Resulta entonces que la isometría $\rho'(a) \in SO(2, 2)$ corresponde a la siguiente transformación de $SU(1, 1)$:

$$\begin{pmatrix} x + iy & -t + iz \\ -t - iz & x - iy \end{pmatrix} \longrightarrow \rho_1(a)^{-1} \begin{pmatrix} x + iy & -t + iz \\ -t - iz & x - iy \end{pmatrix} \rho_2(a)$$

y $\rho'(b)$ corresponde a la transformación

$$\begin{pmatrix} x + iy & -t + iz \\ -t - iz & x - iy \end{pmatrix} \longrightarrow \rho_1(b)^{-1} \begin{pmatrix} x + iy & -t + iz \\ -t - iz & x - iy \end{pmatrix} \rho_2(b)$$

Observaciones.

- (1) El grupo $SO(2, 2)$ coincide también con el grupo de isometrías que preservan la orientación de la hipercuadrada

$$S_2^3(-1) = \{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = -1 \}$$

que posee una métrica de Lorentz de curvatura constante -1 , inducida por la forma cuadrática $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ de \mathbf{R}^4 . (Si se cambia de signo la métrica de $S_2^3(-1)$, se obtiene una variedad isométrica a $S_2^3(1)$.)

(2) La pseudoesfera $S_2^3(1)$ se puede identificar también con el grupo de Lie $SL(2, \mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbf{R}, ad - bc = 1 \right\}$ mediante la aplicación que transforma la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{R})$ en el punto $\left(\frac{a+d}{2}, \frac{b-c}{2}, \frac{a-d}{2}, \frac{b+c}{2} \right)$. La métrica de Lorentz de $S_2^3(1)$ coincide, mediante esta identificación, con una métrica de Lorentz en el grupo de Lie $SL(2, \mathbf{R})$ que ha sido ampliamente estudiada en la literatura (véase [Ku₁], [Ku₂], [KR], [Go₂]).

La transición de las holonomías esféricas a las holonomías semi-riemannianas

Cuando el ángulo cónico α es igual a π (es decir, cuando el parámetro vale $u = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$), los dos homomorfismos ρ_1, ρ_2 son representaciones de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [5/3])$ en el subgrupo $SU(2) \cap H$ de $SL(2, \mathbf{C})$:

$$\rho_1(a) = \begin{pmatrix} 0 & ie^{i(-r+\theta)} \cosh \frac{\beta}{2} \\ ie^{i(r-\theta)} \cosh \frac{\beta}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_1(b) = \begin{pmatrix} 0 & ie^{i(r-\theta)} \cosh \frac{\beta}{2} \\ ie^{i(-r+\theta)} \cosh \frac{\beta}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho_2(a) = \begin{pmatrix} 0 & ie^{-i(r+\theta)} \cosh \frac{\beta}{2} \\ ie^{i(r+\theta)} \cosh \frac{\beta}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_2(b) = \begin{pmatrix} 0 & ie^{i(r+\theta)} \cosh \frac{\beta}{2} \\ ie^{-i(r+\theta)} \cosh \frac{\beta}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Correspondientemente, el homomorfismo ρ' es una representación de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [5/3])$ en el subgrupo $SO(4) \cap SO(2, 2)$ de $GL(4, \mathbf{R})$:

$$\rho'(a) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \cos(2\theta) & \text{sen}(2\theta) \\ \text{sen}(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{matrix}} & & & 0 \\ & & & \\ & 0 & & \boxed{\begin{matrix} -\cos(2r) & \text{sen}(2r) \\ \text{sen}(2r) & \cos(2r) \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

y $\rho'(b) = X \rho'(a) X$.

Por tanto, para $u = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$ existe una representación de holonomía ρ' que es simultáneamente esférica y semi-riemanniana.

Observación. Según vimos en el capítulo II, esta representación ρ' es la holonomía de una estructura esférica cónica en \mathbf{S}^3 con singularidad el nudo de a ocho y ángulo cónico $\alpha = \pi$. Pero también se

puede interpretar como la holonomía de una estructura proyectiva real en $S^3 \setminus [5/3]$. Si aplicamos el teorema que afirma que “las representaciones próximas a una representación de holonomía son también holonomías” (cf. [Thu₁], [CEG], [Go₁]), resulta que cuando el parámetro u es mayor que $\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$ pero está suficientemente próximo a $\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$, siguen existiendo estructuras proyectivas reales en $S^3 \setminus [5/3]$ cuya holonomía es ρ' . En la sección 2 encontraremos efectivamente tales estructuras.

Un modelo proyectivo para la pseudoesfera $S_2^3(1)$

Si proyectamos la pseudoesfera $S_2^3(1)$ desde el origen de \mathbf{R}^4 sobre el hiperplano $t = 1$, obtenemos como imagen el conjunto $\mathcal{H}_+ = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 > 1\}$, que es el *exterior* del hiperboloide reglado $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. La proyección está bien definida y es biyectiva si se restringe al “hemisferio superior” de $S_2^3(1)$, $\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 1, t > 0\}$. Las subvariedades totalmente geodésicas de $S_2^3(1)$ son las intersecciones de la pseudoesfera $S_2^3(1)$ con subespacios vectoriales de \mathbf{R}^4 , y se proyectan por tanto sobre intersecciones de \mathcal{H}_+ con planos y rectas de \mathbf{R}^3 . Las isometrías de $S_2^3(1)$ se proyectan sobre transformaciones proyectivas de $\mathbf{R}P^3$ que dejan \mathcal{H}_+ invariante.

En consecuencia, \mathcal{H}_+ se puede interpretar como un modelo proyectivo para el hemisferio superior de la pseudoesfera $S_2^3(1)$.

Análogamente, el *interior* del hiperboloide reglado, $\mathcal{H}_- = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 < 1\}$, es un modelo proyectivo para el hemisferio superior de la pseudoesfera complementaria $S_2^3(-1)$.

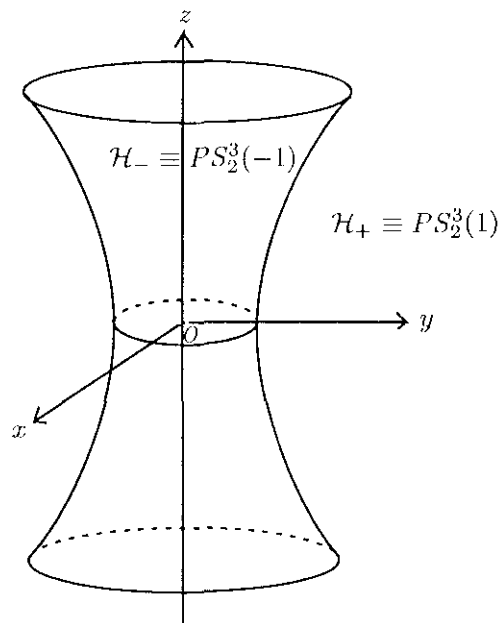


Figura 1

2. ESTRUCTURAS PROYECTIVAS CON HOLONOMÍA SEMI-RIEMANNIANA , SINGULARES EN EL NUDO DE A OCHO

Como vimos en la sección anterior, para cada número real $u \in [\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}, 1)$, existe una representación ρ'_u de $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus \{5/3\})$ en $SO(2, 2)$, dada por

$$\rho'_u(a) = \begin{pmatrix} 1 - 2 \cosh^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \theta & 2 \cosh^2 \frac{\beta}{2} \sin \theta \cos \theta & \sinh \beta \sin \theta \cos r & -\sinh \beta \sin \theta \sin r \\ 2 \cosh^2 \frac{\beta}{2} \sin \theta \cos \theta & 1 - 2 \cosh^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \theta & -\sinh \beta \cos \theta \cos r & \sinh \beta \cos \theta \sin r \\ \sinh \beta \sin \theta \cos r & -\sinh \beta \cos \theta \cos r & 1 - 2 \cosh^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 r & 2 \cosh^2 \frac{\beta}{2} \sin r \cos r \\ -\sinh \beta \sin \theta \sin r & \sinh \beta \cos \theta \sin r & 2 \cosh^2 \frac{\beta}{2} \sin r \cos r & 1 - 2 \cosh^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 r \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} \sinh \beta &= \frac{\sqrt{3u^2 - 1} \sqrt{u^2 + 1} \sqrt{-u^4 + 10u^2 - 5}}{2(u^2 - 1)^2}, & 2 \cosh^2 \frac{\beta}{2} &= \frac{(3u^2 - 1)(u^2 + 1)}{2(u^2 - 1)^2} \\ \sin \theta &= \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}}, & \cos \theta &= \frac{u}{\sqrt{u^2 + 1}} \\ \sin r &= \frac{-\sqrt{1 - 2u^2}}{\sqrt{3u^2 - 1}}, & \cos r &= \frac{u}{\sqrt{3u^2 - 1}} \end{aligned}$$

y $\rho'_u(b)$ es conjugada de $\rho'_u(a)$ por la matriz $X = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$.

Es decir, las matrices $A = \rho'_u(a)$ y $B = \rho'_u(b)$ vienen dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3-7u^2+2u^4}{2(u^2-1)^2} & \frac{u(3u^2-1)}{2(u^2-1)^2} & \frac{u\sqrt{-u^4+10u^2-5}}{2(u^2-1)^2} & \frac{\sqrt{2u^2-1}\sqrt{-u^4+10u^2-5}}{2(u^2-1)^2} \\ \frac{u(3u^2-1)}{2(u^2-1)^2} & \frac{2-3u^2-u^4}{2(u^2-1)^2} & \frac{-u^2\sqrt{-u^4+10u^2-5}}{2(u^2-1)^2} & \frac{-u\sqrt{2u^2-1}\sqrt{-u^4+10u^2-5}}{2(u^2-1)^2} \\ \frac{u\sqrt{-u^4+10u^2-5}}{2(u^2-1)^2} & \frac{-u^2\sqrt{-u^4+10u^2-5}}{2(u^2-1)^2} & \frac{2-5u^2+u^4}{2(u^2-1)^2} & \frac{-u\sqrt{2u^2-1}(1+u^2)}{2(u^2-1)^2} \\ \frac{\sqrt{2u^2-1}\sqrt{-u^4+10u^2-5}}{2(u^2-1)^2} & \frac{-u\sqrt{2u^2-1}\sqrt{-u^4+10u^2-5}}{2(u^2-1)^2} & \frac{-u\sqrt{2u^2-1}(1+u^2)}{2(u^2-1)^2} & \frac{3-5u^2}{2(u^2-1)^2} \end{pmatrix}$$

y B es la conjugada de A mediante la matriz $X = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$.

Cuando $u = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$, ρ'_u es la holonomía de una estructura proyectiva real en el complemento del nudo de a ocho. Esta estructura se puede extender a una estructura proyectiva en \mathbb{S}^3 , con una singularidad de tipo cónico en el nudo de a ocho. Aunque para este valor concreto del parámetro, ρ'_u

es una representación de $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus [5/3])$ en $SO(2, 2) = \text{Iso}^+(S_2^3(1)) = \text{Iso}^+(S_2^3(-1))$, la estructura proyectiva con holonomía ρ'_u no proviene de una estructura de Lorentz en $\mathbf{S}^3 \setminus [5/3]$ modelada en la pseudoesfera $S_2^3(1)$ ó $S_2^3(-1)$. Recordemos que esta estructura proyectiva con holonomía ρ'_u proviene de una estructura esférica cónica en \mathbf{S}^3 , con singularidad el nudo $[5/3]$ y ángulo cónico π . Un dominio fundamental \mathcal{P} para esta estructura esférica es la “lente” comprendida entre dos esferas maximales de \mathbf{S}^3 , que se cortan formando ángulo $\pi/5$. Ahora bien, dentro de \mathbf{R}^4 , el dominio \mathcal{P} está en parte dentro del cono de luz de la métrica $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ y en parte fuera de él. En consecuencia, si intentamos proyectarlo sobre la pseudoesfera $S_2^3(1)$, resulta que una parte del dominio \mathcal{P} se proyecta sobre $S_2^3(1)$, pero otra parte se proyecta sobre $S_2^3(-1)$. En la figura 2 se muestra un esquema de lo que ocurre, en dimensión 2.

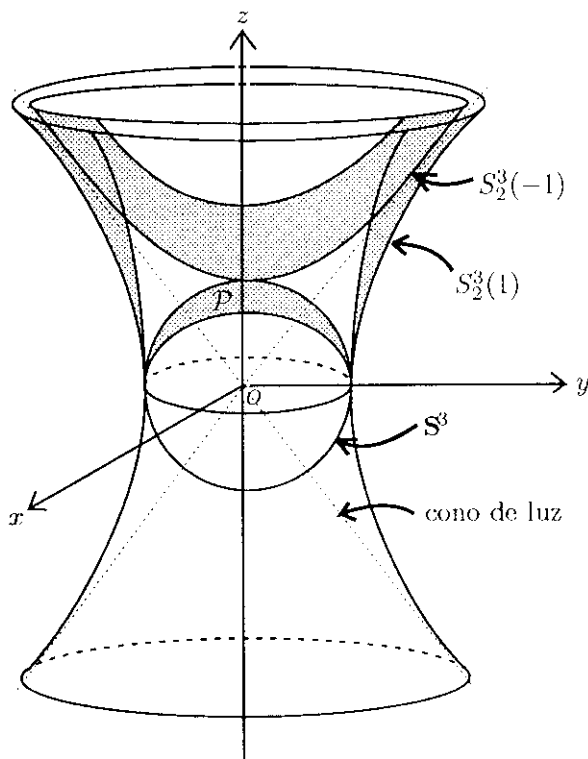


Figura 2

Otra forma de verlo es la siguiente. Si proyectamos el dominio \mathcal{P} desde el origen de \mathbf{R}^4 sobre el hiperplano $t = 1$, obtenemos la “capa” infinita comprendida entre dos planos horizontales paralelos. Esta capa corta al hiperboloide reglado $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, y tiene por tanto una parte dentro de \mathcal{H}_+ y otra parte dentro de \mathcal{H}_- (ver figura 3).

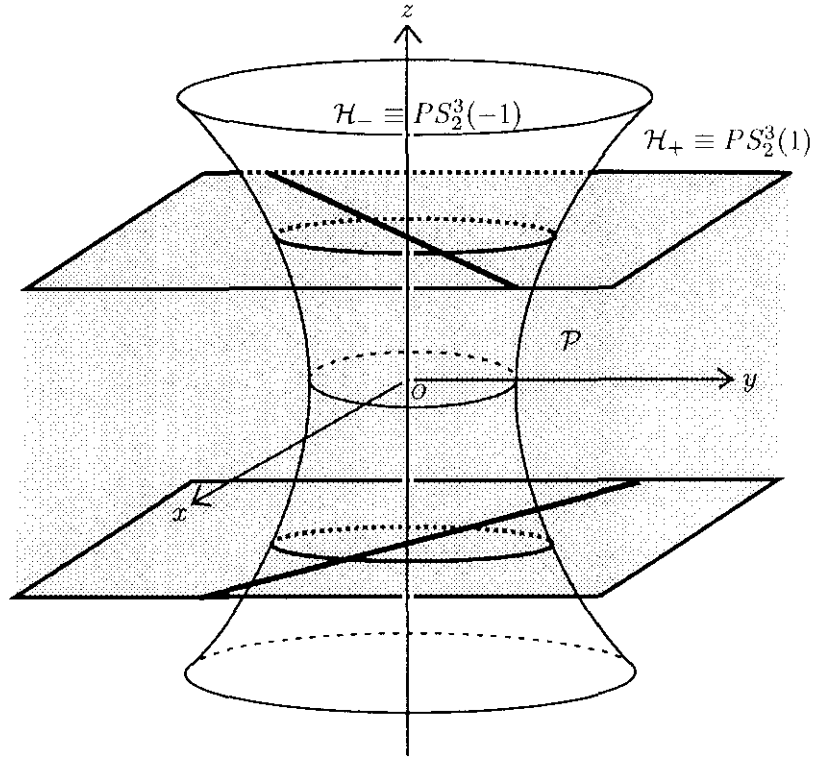


Figura 3

Como ya dijimos en una observación en la sección anterior, de un teorema de Thurston se deduce que, cuando u está próximo a $\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$, existen estructuras proyectivas en $S^3 \setminus [5/3]$ cuya holonomía es ρ' . Veremos a continuación que tales estructuras proyectivas existen de hecho para todo $u \in [\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}, 1)$.

Sea \langle , \rangle el producto escalar de \mathbf{R}^4 correspondiente a la forma cuadrática $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$, y sea $\mathbf{u} = (0, 0, 0, 1)$. A cada matriz $M \in SO(2, 2)$ le asociamos el siguiente hiperplano vectorial de \mathbf{R}^4 :

$$H_M = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 \mid \langle \mathbf{x}, M\mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle \}$$

Es decir, si $M\mathbf{u} = (a, b, c, d)$ (donde $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = -1$), entonces la ecuación de H_M es:

$$H_M : ax + by - cz - (d - 1)t = 0$$

Ahora no se puede decir propiamente que $H_M \cap S_2^3(-1)$ sea el plano bisector entre los puntos de $S_2^3(-1)$ cuyos vectores posición son \mathbf{u} y $M\mathbf{u}$, porque $S_2^3(-1)$ es una variedad de Lorentz, en la que no hay una noción de distancia bien definida. Sin embargo, la definición de H_M generaliza la definición de plano bisector en \mathbf{H}^3 y \mathbf{S}^3 , y comparte con ella las siguientes propiedades:

$$(i) M^{-1}(H_M) = H_{M^{-1}} ;$$

$$(ii) M_1^{-1}(H_{M_1} \cap H_{M_2}) = H_{M_1^{-1}} \cap H_{M_1^{-1}M_2} .$$

(En general, consideraremos los modelos proyectivos \mathcal{H}_+ y \mathcal{H}_- de las pseudoesferas $S_2^3(1)$ y $S_2^3(-1)$, respectivamente, y denotaremos también por H_M la intersección del hiperplano antes definido, con el hiperplano $t = 1$. Es decir, si $M\mathbf{u} = (a, b, c, d)$, entonces $H_M : ax + by - cz = (d - 1)$).

Por tanto, utilizando esta definición de “plano bisector”, se puede aplicar el procedimiento de la sección § IV.4, y deformar el dominio \mathcal{P} (correspondiente al valor $u = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$) a otros poliedros que proporcionan estructuras proyectivas en $S^3 \setminus [5/3]$ con holonomía ρ'_u , para valores próximos del parámetro u .

De hecho, consideraremos los mismos elementos de $\pi_1(S^3 \setminus [5/3])$ que determinaban las caras de los poliedros de Dirichlet para las estructuras cónicas en S^3 con singularidad el nudo de a ocho $[5/3]$:

$$a, b, a^{-1}, b^{-1} ; ba^{-1}, ab^{-1}, a^{-1}b, b^{-1}a$$

$$w = ba^{-1}b^{-1}a, w^X = ab^{-1}a^{-1}b, w^Y = a^{-1}bab^{-1}, w^Z = b^{-1}aba^{-1}$$

(ver § I.1). Ahora para cada valor del parámetro $u \in [\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}, 1)$, estos doce elementos de $\pi_1(S^3 \setminus [5/3])$ tienen asociados los siguientes “planos bisectores”:

$$H_a : -(1 + u^2)\sqrt{2u^2 - 1} + \sqrt{-u^4 + 10u^2 - 5}(-x + uy) - u(1 + u^2)z = 0$$

$$H_{ba^{-1}} : -u(3 - u^2)\sqrt{2u^2 - 1} + \sqrt{-u^4 + 10u^2 - 5}(-ux - y) + (3u^2 - 1)z = 0$$

$$H_w : -u(1 + u^2)\sqrt{2u^2 - 1} + u^2\sqrt{-u^4 + 10u^2 - 5}(-ux - y) + (2u^4 + u^2 - 1)z = 0$$

y las imágenes de éstos mediante las tres rotaciones X, Y y Z de 180° en torno a los ejes coordenados.

Cuando $\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} < u < 1$, estos doce planos determinan un poliedro compacto y convexo \mathcal{P}_u en \mathbf{RP}^3 , que tiene el mismo tipo combinatorio que los poliedros de Dirichlet para las estructuras cónicas en S^3 con singularidad el nudo de a ocho $[5/3]$, descritos en § II.1. Hay doce vértices, cuyas coordenadas son:

$$v_1 = \left(\frac{(1 - 3u^2)\sqrt{2u^2 - 1}}{u^2\sqrt{-u^4 + 10u^2 - 5}}, \frac{(1 - 3u^2)\sqrt{2u^2 - 1}}{u^3\sqrt{-u^4 + 10u^2 - 5}}, \frac{-\sqrt{2u^2 - 1}}{u} \right)$$

$$v_2 = \left(\frac{(1 - 3u^2)\sqrt{2u^2 - 1}}{\sqrt{-u^4 + 10u^2 - 5}}, \frac{u(u^2 - 3)\sqrt{2u^2 - 1}}{\sqrt{-u^4 + 10u^2 - 5}}, -u\sqrt{2u^2 - 1} \right)$$

$$v_3 = \left(\frac{-(1 + u^2)\sqrt{2u^2 - 1}}{\sqrt{-u^4 + 10u^2 - 5}}, \frac{-u(1 + u^2)\sqrt{2u^2 - 1}}{\sqrt{-u^4 + 10u^2 - 5}}, -u\sqrt{2u^2 - 1} \right)$$

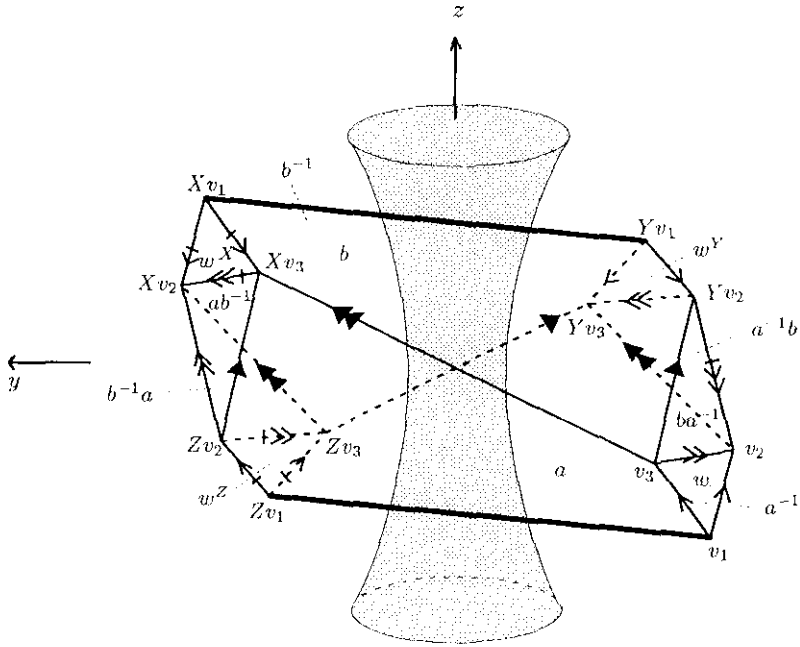
y las imágenes de éstos mediante las tres rotaciones X , Y y Z de 180° en torno a los ejes coordenados. Las caras de \mathcal{P}_u se identifican dos a dos mediante transformaciones proyectivas del subgrupo de $PSO(2, 2)$ engendrado por las matrices A y B , y los pegados se realizan de la misma manera que para los poliedros de Dirichlet de las estructuras cónicas en S^3 con singularidad el nudo de a ocho. En consecuencia, al realizar los pegados se obtiene una estructura proyectiva real en S^3 (con holonomía ρ'_u) que tiene una “singularidad” en el nudo de a ocho. (Los puntos del nudo tienen un entorno modelado en un diedro de $\mathbb{R}P^3$ con los lados identificados mediante una proyectividad que deja fija punto a punto la arista del diedro).

Al igual que ocurría para el valor inicial del parámetro, $u = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$, esta estructura proyectiva definida por el poliedro \mathcal{P}_u no proviene de una estructura de Lorentz en S^3 (singular en el nudo de a ocho) modelada en la pseudoesfera $S^3_2(1)$ ó $S^3_2(-1)$. El motivo es que \mathcal{P}_u tiene una parte dentro del hiperboloide reglado $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (i.e. en \mathcal{H}_- , que es un modelo del hemisferio superior de $S^3_2(-1)$) y otra parte fuera de él (i.e. en \mathcal{H}_+ , que es un modelo del hemisferio superior de $S^3_2(1)$). De hecho, todos los vértices de \mathcal{P}_u están fuera del hiperboloide reglado (en \mathcal{H}_+), mientras que el punto base $O = (0, 0, 0)$ está dentro del hiperboloide (en \mathcal{H}_-).

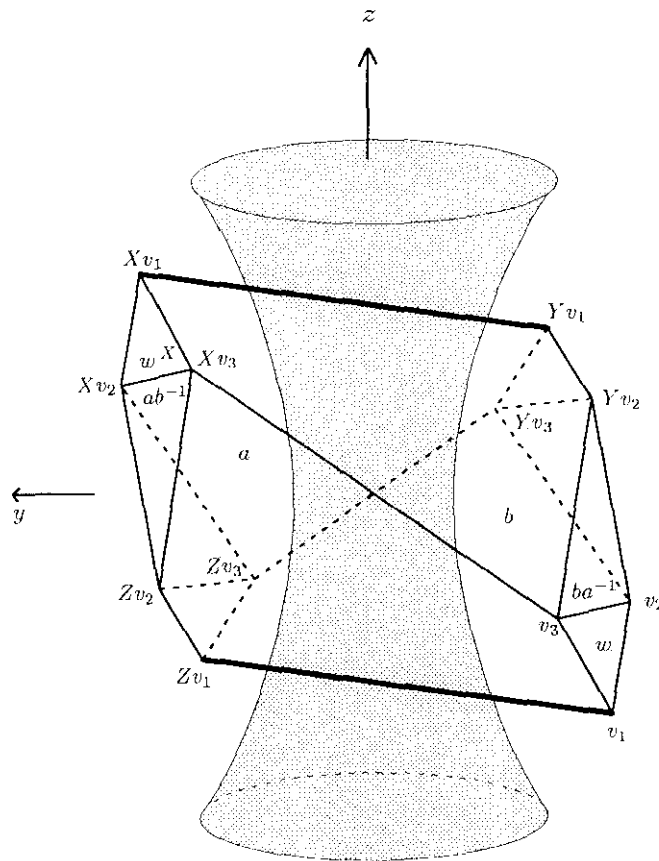
A continuación se muestran algunos de los poliedros \mathcal{P}_u , cuando u varía entre $\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \approx 0.7265$ y 1 . Cada cara está marcada con el elemento del grupo $\pi_1(S^3 \setminus \Sigma)$ que le corresponde, y las flechas en las aristas indican cómo son las identificaciones. La singularidad está marcada en grueso. Se indica también de modo aproximado la posición relativa del poliedro respecto del hiperboloide reglado $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Cuando $u \rightarrow 1$, los poliedros \mathcal{P}_u convergen a un tetraedro completamente inscrito en el hiperboloide reglado. Sus vértices son: $v_1 = (-1, -1, -1)$, $Xv_1 = (-1, 1, 1)$, $Yv_1 = (1, -1, 1)$ y $Zv_1 = (1, 1, -1)$. Todas las aristas, salvo las que unen v_1 con Zv_1 y Xv_1 con Yv_1 , están totalmente contenidas en el hiperboloide reglado.

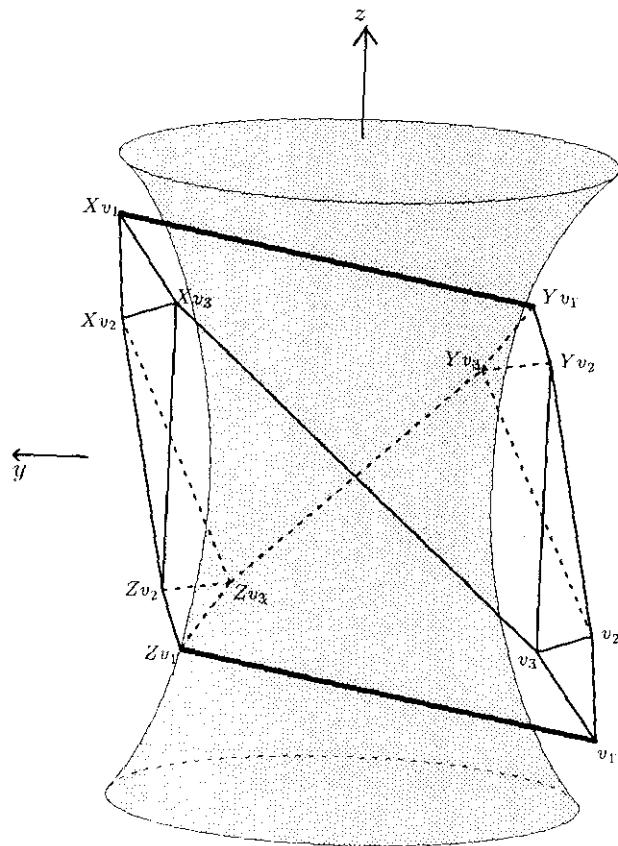
- $u = 0.727$ (visto desde el punto $(-2, 0, 0)$) :



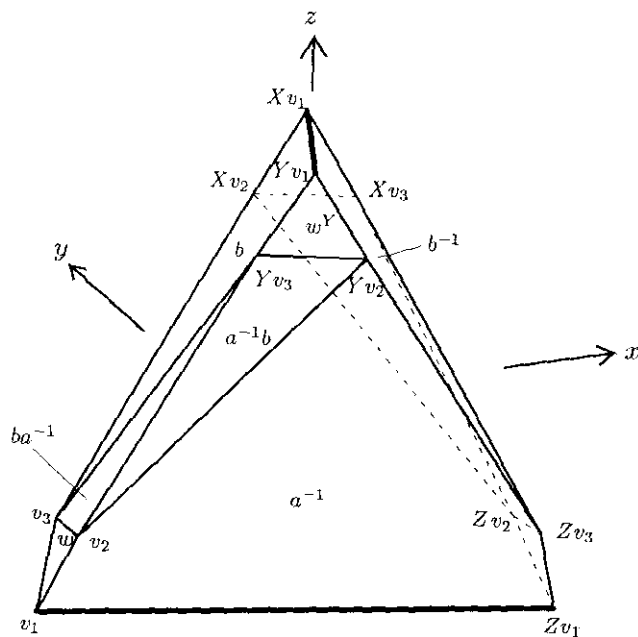
- $u = 0.73$ (visto desde el punto $(-2, 0, 0)$) :



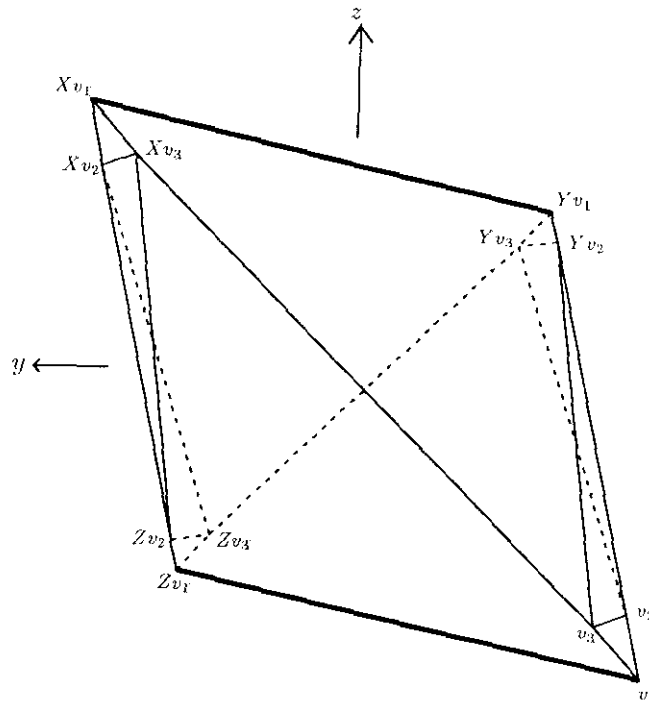
- $u = 0.8$ (visto desde el punto $(-2, 0, 0)$) :



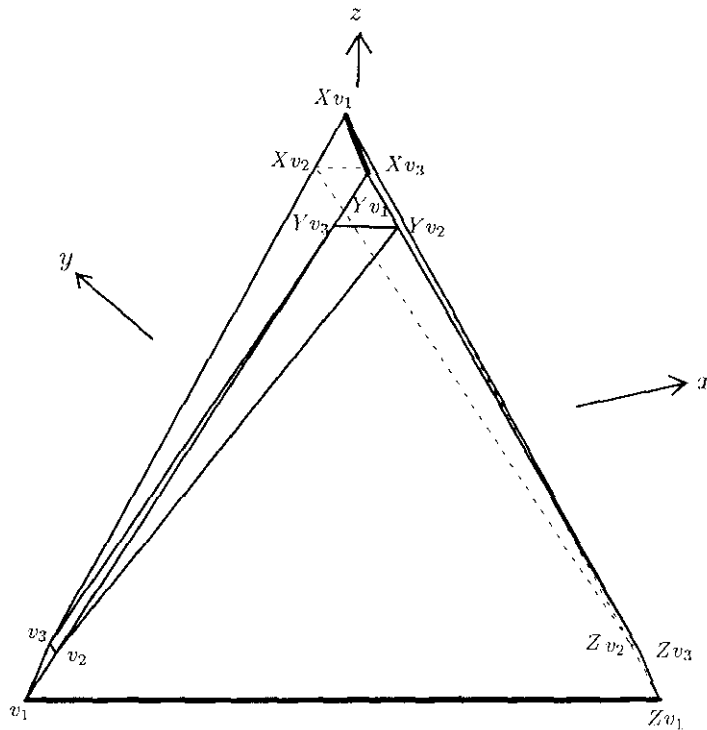
- $u = 0.8$ (visto desde el punto $(10, -13, 2)$) :



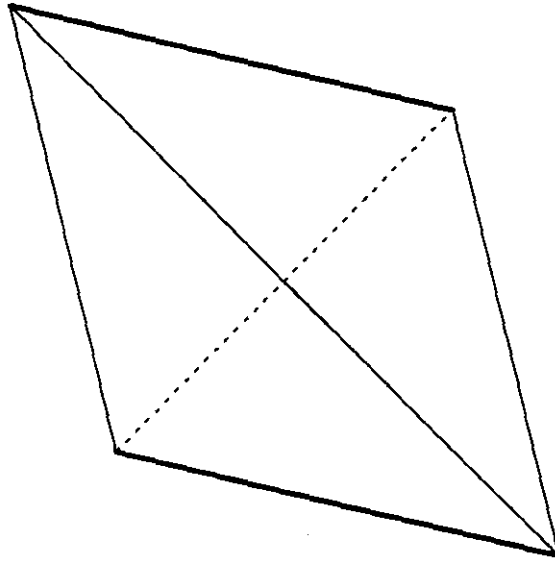
- $u = 0.9$ (visto desde el punto $(-2, 0, 0)$) :



- $u = 0.9$ (visto desde el punto $(10, -12, 2)$) :



- Cuando $u = 1$, el poliedro degenera en un tetraedro inscrito en el hiperboloide reglado.



En realidad, la intersección de \mathcal{P}_u con el hiperboloide reglado $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ se convierte siempre, al realizar los pegados de las caras de \mathcal{P}_u , en una esfera de Conway para el nudo de a ocho (es decir, una esfera en S^3 que corta al nudo en cuatro puntos), que además separa los dos máximos locales de los dos mínimos locales de una proyección del nudo de a ocho con dos puentes. Esta afirmación se puede comprobar directamente, realizando a mano los pegados de las caras de \mathcal{P}_u (cuando u está cerca de $\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$, es evidente).

Cada una de las dos bolas en que esta esfera de Conway descompona a S^3 , tiene una estructura de Lorentz (singular en los arcos del nudo contenidos en cada bola), modelada en una de las pseudoesferas $S_2^3(1)$ ó $S_2^3(-1)$, respectivamente.

Existen varias preguntas naturales que se plantean acerca de estas estructuras. Para las estructuras hiperbólicas y esféricas cónicas en S^3 con singularidad el nudo de a ocho, existen fórmulas que describen el ángulo cónico, la longitud del nudo singular y el volumen de la variedad cónica (cf. [HLM₁], y más en general [HLM₃]). Concretamente, si definimos las funciones

$$\alpha(u) = \arccos\left(\frac{3 - 6u^2 - u^4}{2(u^2 - 1)^2}\right),$$

$$l(u) = 2 \operatorname{arccosh}\left(1 + \frac{2(3u^2 - 1)(1 - 2u^2)(u^2 + 1)}{(1 - u^2)^4}\right) \quad y$$

$$V(u) = \int_{1/\sqrt{2}}^u \frac{8u^3 l(u) du}{(1 - u^2)\sqrt{(u^4 - 10u^2 + 5)(3u^2 - 1)(u^2 + 1)}}$$

entonces:

- cuando $\frac{1}{\sqrt{3}} < u < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha(u)$ es el ángulo cónico de la correspondiente estructura hiperbólica cónica de S^3 con singularidad el nudo de a ocho, $l(u)$ es la longitud del nudo singular, y $-V(u)$ es el volumen de dicha estructura hiperbólica cónica;

- cuando $\frac{1}{\sqrt{2}} < u < \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$, $l(u) = 2i \arccos\left(1 + \frac{2(3u^2 - 1)(1 - 2u^2)(u^2 + 1)}{(1 - u^2)^4}\right)$ es imagi-

nario puro, y $V(u) = \int_{1/\sqrt{2}}^u \frac{8u^3 \operatorname{Im}(l(u)) du}{(1 - u^2)\sqrt{(u^4 - 10u^2 + 5)(3u^2 - 1)(u^2 + 1)}}$ también. La parte imagi-

naria de $l(u)$ es la longitud del nudo singular en la correspondiente estructura esférica cónica de S^3 con singularidad el nudo de a ocho, la parte imaginaria de $V(u)$ es el volumen de dicha estructura esférica cónica, y $\alpha(u)$ sigue siendo el ángulo cónico.

Cuando $\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} < u < 1$, se verifica que $u^4 - 10u^2 + 5 < 0$, $\frac{3 - 6u^2 - u^4}{2(u^2 - 1)^2} < -1$ y $1 + \frac{2(3u^2 - 1)(1 - 2u^2)(u^2 + 1)}{(1 - u^2)^4} < -1$. Por tanto, podemos suponer que

$$\alpha(u) = \pi - i \operatorname{arccosh}\left(\frac{-3 + 6u^2 + u^4}{2(u^2 - 1)^2}\right),$$

$$l(u) = 2 \operatorname{arccosh}\left(-1 - \frac{2(3u^2 - 1)(1 - 2u^2)(u^2 + 1)}{(1 - u^2)^4}\right) + i\pi, \quad y$$

$$\operatorname{Im}(V(u)) = \int_{1/\sqrt{2}}^u \frac{8u^3 \operatorname{Re}(l(u)) du}{(1 - u^2)\sqrt{(-u^4 + 10u^2 - 5)(3u^2 - 1)(u^2 + 1)}}$$

¿Se puede dar alguna interpretación geométrica a los tres números $\operatorname{Im}(\alpha(u))$, $\operatorname{Re}(l(u))$ y $\operatorname{Im}(V(u))$ (en términos de las estructuras de Lorentz antes mencionadas)? Obsérvese que las dos bolas que tienen estructuras de Lorentz singulares tienen volumen (semi-riemanniano) infinito, y cada uno de los arcos singulares contenidos dentro de cada bola tiene también longitud (semi-riemanniana) infinita.

Esta pregunta motivó el estudio del volumen de poliedros en hipercuádricas semi-riemannianas de curvatura constante, que ocupa el resto del capítulo. En la sección 3.4 de este capítulo se da una interpretación a los números

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\alpha(u)) &= -\operatorname{arccosh}\left(\frac{-3 + 6u^2 + u^4}{2(u^2 - 1)^2}\right) \quad y \\ \operatorname{Re}(l(u)) &= 2\operatorname{arccosh}\left(-1 - \frac{2(3u^2 - 1)(1 - 2u^2)(u^2 + 1)}{(1 - u^2)^4}\right). \end{aligned}$$

Todavía está abierto el problema de dar una interpretación al número $\operatorname{Im}(V(u))$.

Otra pregunta abierta es averiguar si este fenómeno de transición de estructuras esféricas cónicas a estructuras con una holonomía semi-riemanniana se produce (como es de esperar) para cualquier nudo o enlace de dos puentes.

3. UNA FÓRMULA DIFERENCIAL DE SCHLÄFLI PARA SÍMPlices EN HIPERCUÁDRICAS SEMI-RIEMANNIANAS

3.1. Preliminares y definiciones

Recordamos primero algunas definiciones estándar en geometría semi-riemanniana (ver [O'N]), a fin de fijar las notaciones.

El espacio semi-euclídeo \mathbf{R}_q^{n+1} es \mathbf{R}^{n+1} con la métrica semi-riemanniana definida por la forma bilineal de índice $q \geq 0$,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = - \sum_{i=0}^{q-1} x_i y_i + \sum_{j=q}^n x_j y_j$$

donde $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_0, \dots, y_n)$. La norma de un vector $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_q^{n+1}$ es $|\mathbf{x}| = |\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle|^{1/2}$. Se dice que un vector \mathbf{x} es *temporal* si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle < 0$, *espacial* si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ y *luz* si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$.

Dado $\epsilon \in \{\pm 1\}$, la hipercuádrica central unidad de \mathbf{R}_q^{n+1} de signo ϵ es la subvariedad

$$Q_q^n(\epsilon) = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}_q^{n+1} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \epsilon \}$$

Es una subvariedad semi-riemanniana n -dimensional (no necesariamente conexa), completa, de curvatura constante igual a ϵ . Las subvariedades totalmente geodésicas de $Q_q^n(\epsilon)$ son las componentes conexas de

la intersección de $Q_q^n(\epsilon)$ con subespacios vectoriales de \mathbb{R}^{n+1} . Las isometrías de $Q_q^n(\epsilon)$ son la restricción a $Q_q^n(\epsilon)$ de los automorfismos lineales de \mathbb{R}_q^{n+1} que dejan $Q_q^n(\epsilon)$ invariante. Como casos particulares importantes, señalaremos que $Q_0^n(1) = \mathbb{S}^n$ es la esfera n -dimensional; $Q_1^n(-1)$ tiene dos componentes conexas, una de las cuales es el espacio hiperbólico n -dimensional \mathbb{H}^n , y $Q_1^n(1)$ es la esfera de de Sitter n -dimensional. De ahora en adelante escribiremos $S_q^n(\epsilon)$ para denotar una componente conexa cualquiera de $Q_q^n(\epsilon)$, y llamaremos también a $S_q^n(\epsilon)$ hipercuádrica n -dimensional.

A continuación vamos a definir n -símplice en la hipercuádrica $S_q^n(\epsilon)$, lo cual veremos que exige cierto cuidado.

Definición 3.1.1. Llamaremos *semiespacio vectorial* en \mathbb{R}_q^{n+1} a un semiespacio cerrado cuyo borde sea un hiperplano vectorial de \mathbb{R}_q^{n+1} . Llamaremos *cono simplicial* en \mathbb{R}_q^{n+1} a la intersección de $(n+1)$ semiespacios vectoriales en posición general (es decir, tales que la intersección de los $(n+1)$ hiperplanos vectoriales del borde sea sólo el origen). Una *cara* de codimensión k ($k = 0, \dots, n$) del cono simplicial C es la intersección de C con k hiperplanos vectoriales del borde de C .

Observación 3.1.1. La intersección de un cono simplicial arbitrario C con la hipercuádrica $S_q^n(\epsilon)$ puede ser vacía (ver figura 4, para el caso en que $S_q^n(\epsilon)$ es la esfera de de Sitter $S_1^2(1)$). También puede ocurrir que esa intersección sea no compacta (ver figura 5, también para la esfera de de Sitter $S_1^2(1)$).

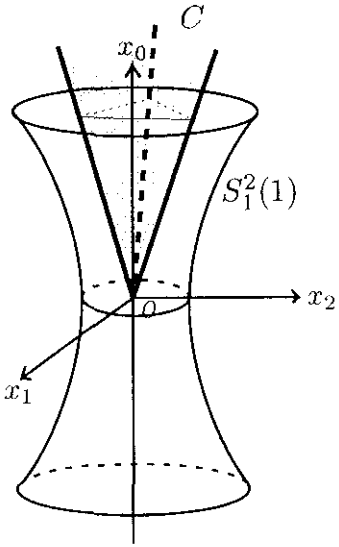


Figura 4

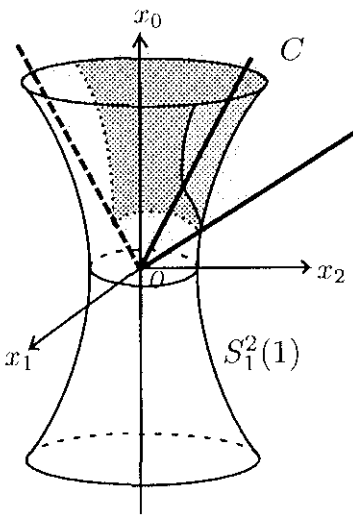


Figura 5

Definición 3.1.2. Llamaremos n -símplice en la hipercuádrica n -dimensional $S_q^n(\epsilon)$, a la intersección de un cono simplicial con $S_q^n(\epsilon)$, cuando esta intersección sea no vacía y compacta. Una *cara* de codimensión k ($k = 0, \dots, n$) del n -símplice $\Delta \subset S_q^n(\epsilon)$, es la intersección con $S_q^n(\epsilon)$ de una cara de

codimensión k del correspondiente cono simplicial.

Lema 3.1.1 *Todo cono simplicial C en \mathbf{R}_q^{n+1} se puede escribir de la forma*

$$C = \{ x_0 \mathbf{v}_0 + \cdots + x_n \mathbf{v}_n \mid x_0 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \}$$

para una cierta base $\{\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n\}$ de \mathbf{R}_q^{n+1} .

Demostración. Supongamos que C es intersección de los semiespacios vectoriales $H_i = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}_q^{n+1} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_i \rangle \geq 0 \}$ para $i = 0, \dots, n$, donde $\{\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_n\}$ es una base de \mathbf{R}_q^{n+1} . Consideremos la base dual $\{\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n\}$, que verifica que $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j \rangle = \delta_{ij}$ para $i, j = 0, \dots, n$. Entonces $\mathbf{x} = x_0 \mathbf{v}_0 + \cdots + x_n \mathbf{v}_n \in C$ si y sólo si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_i \rangle = x_i \geq 0$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$. Por tanto, $C = \{ x_0 \mathbf{v}_0 + \cdots + x_n \mathbf{v}_n \mid x_0 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \}$.

□

Notación. Usaremos la siguiente notación para las caras de codimensión k del cono simplicial $C = \{ x_0 \mathbf{v}_0 + \cdots + x_n \mathbf{v}_n \mid x_0 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \}$:

$$C_{i_1 \dots i_k} = \{ x_0 \mathbf{v}_0 + \cdots + x_n \mathbf{v}_n \mid x_0 \geq 0, \dots, x_n \geq 0; x_{i_1} = \cdots = x_{i_k} = 0 \}$$

Lema 3.1.2. *Un subconjunto $\Delta \subset S_q^n(\epsilon)$ es un n -símplice si y sólo si se puede escribir de la forma*

$$\Delta = \{ x_0 \mathbf{v}_0 + \cdots + x_n \mathbf{v}_n \mid x_0 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \} \cap S_q^n(\epsilon)$$

para una cierta base $\{\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n\}$ de \mathbf{R}_q^{n+1} tal que:

$\epsilon \cdot \langle x_0 \mathbf{v}_0 + \cdots + x_n \mathbf{v}_n, x_0 \mathbf{v}_0 + \cdots + x_n \mathbf{v}_n \rangle > 0$ si $x_0 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ y no son todos nulos.

Demostración. Por el lema 3.1.1 y la definición de n -símplice, lo único que hace falta probar es que, dado un cono simplicial C en \mathbf{R}_q^{n+1} , la intersección $C \cap S_q^n(\epsilon)$ es no vacía y compacta si y sólo si $\epsilon \cdot \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ para todo $\mathbf{x} \in C$, $\mathbf{x} \neq 0$.

Consideremos la esfera unidad en el espacio euclídeo \mathbf{R}^{n+1} , $\mathbf{S}^n = \{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \}$, y sea $\sigma : \mathbf{R}_q^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{S}^n$ la proyección radial desde el origen. Entonces σ es una aplicación continua, y la restricción de σ a la hipercuadrada $S_q^n(\epsilon)$ es un homeomorfismo sobre un abierto $U = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{S}^n \mid \epsilon \cdot \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0 \}$ de \mathbf{S}^n (donde \langle, \rangle denota, como siempre, el producto escalar en \mathbf{R}_q^{n+1}).

Dado un cono simplicial C en \mathbf{R}_q^{n+1} , denotamos $C_0 = C \setminus \{0\}$. La intersección $C \cap S_q^n(\epsilon) = C_0 \cap S_q^n(\epsilon)$ es compacta y no vacía si y sólo si $\sigma(C_0 \cap S_q^n(\epsilon))$ es compacto y no vacío, es decir, si y sólo si $\sigma(C_0) \cap U$ es cerrado y no vacío. Como $\sigma(C_0) \cap (\mathbf{S}^n \setminus U)$ siempre es cerrado y $\sigma(C_0)$ es conexo,

resulta que $\sigma(C_0) \cap U$ es cerrado y no vacío si y sólo si $\sigma(C_0) \cap (\mathbb{S}^n \setminus U) = \emptyset$, es decir, si y sólo si $\sigma(C_0 \cap \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_q^{n+1} \mid \epsilon \cdot \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \leq 0 \}) = \emptyset$. Por tanto, $C_0 \cap S_q^n(\epsilon)$ es compacto y no vacío si y sólo si $C_0 \cap \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_q^{n+1} \mid \epsilon \cdot \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \leq 0 \} = \emptyset$.

□

Notación. Usaremos la siguiente notación para las caras de codimensión k del simple

$$\Delta = \{ x_0 \mathbf{v}_0 + \dots + x_n \mathbf{v}_n \mid x_0 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \} \cap S_q^n(\epsilon) :$$

$$F_{i_1 \dots i_k} = \{ x_0 \mathbf{v}_0 + \dots + x_n \mathbf{v}_n \mid x_0 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 ; x_{i_1} = \dots = x_{i_k} = 0 \} \cap S_q^n(\epsilon)$$

Observación 3.1.2. Sea C un cono simplicial en \mathbb{R}_q^{n+1} tal que $\Delta = C \cap S_q^n(\epsilon)$ es un n -simple. Cada cara $C_{i_1 \dots i_k}$ de codimensión k de C , genera un subespacio vectorial $(n+1-k)$ -dimensional $\langle C_{i_1 \dots i_k} \rangle$ de \mathbb{R}_q^{n+1} , que tiene una métrica inducida por la de \mathbb{R}_q^{n+1} . Si esta métrica inducida es no degenerada de un cierto índice ν , entonces $S_q^n(\epsilon) \cap \langle C_{i_1 \dots i_k} \rangle$ es una hipercuadrada $(n-k)$ -dimensional $S_\nu^{n-k}(\epsilon)$, y la correspondiente cara de Δ , $F_{i_1 \dots i_k} = S_q^n(\epsilon) \cap C_{i_1 \dots i_k}$, es un $(n-k)$ -simple en esta hipercuadrada. Si la métrica inducida en $\langle C_{i_1 \dots i_k} \rangle$ es degenerada, entonces la cara $F_{i_1 \dots i_k}$ de Δ tiene también, como subvariedad de $S_q^n(\epsilon)$, una métrica inducida degenerada.

En todo lo que sigue, restringiremos nuestra atención a la clase de los n -simplices Δ de $S_q^n(\epsilon)$ que satisfacen la condición adicional (*), enunciada a continuación, a fin de evitar la división por cero en los cálculos posteriores:

(*) *Todas las caras de codimensión 1 y 2 de Δ tienen una métrica inducida no degenerada.*

3.2. La función volumen

Sea Δ un n -simple en $S_q^n(\epsilon)$, y sea C el cono simplicial de \mathbb{R}_q^{n+1} tal que $\Delta = C \cap S_q^n(\epsilon)$. Para calcular el volumen de Δ , es muy útil tener en cuenta la siguiente idea de Kneser ([Kne]). Vamos a definir, para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_q^{n+1}$, la función $r(\mathbf{x}) = \sqrt{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle|}$. Se verifica que en cada punto de la hipercuadrada

$S_q^n(\epsilon)$, el gradiente de r es un vector ortogonal a $S_q^n(\epsilon)$. Además, si $\begin{cases} x_0 = f_0(\theta_1, \dots, \theta_n) \\ \vdots \\ x_n = f_n(\theta_1, \dots, \theta_n) \end{cases}$ es una

parametrización de un abierto $U \subset S_q^n(\epsilon)$ por n parámetros $\theta_1, \dots, \theta_n$, entonces el cono determinado por todas las semirrectas que unen el origen de \mathbb{R}_q^{n+1} con los puntos de U , se puede parametrizar por

$\begin{cases} x_0 = r f_0(\theta_1, \dots, \theta_n) \\ \vdots \\ x_n = r f_n(\theta_1, \dots, \theta_n) \end{cases}$. En consecuencia, dentro del cono simplicial C se verifica la siguiente relación

entre la forma de volumen de \mathbf{R}_q^{n+1} , que denotamos $d\mathbf{R}_q^{n+1}$, y la forma de volumen de la hipercuadrada $S_q^n(\epsilon)$, que denotamos $dS_q^n(\epsilon)$:

$$d\mathbf{R}_q^{n+1} = r^n dr \wedge dS_q^n(\epsilon)$$

(Aquí \mathbf{R}_q^{n+1} tiene la orientación canónica, y $S_q^n(\epsilon)$ está orientada de modo que el vector normal $\frac{\partial}{\partial r} = \epsilon \cdot \text{grad}(r)$, seguido de una base positivamente orientada de vectores tangentes a $S_q^n(\epsilon)$, sea una base positivamente orientada de \mathbf{R}_q^{n+1}).

Por tanto, el volumen de Δ se puede obtener a partir de la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \int_C e^{-\frac{r^2}{2}} d\mathbf{R}_q^{n+1} &= \int_C r^n e^{-\frac{r^2}{2}} dr \wedge dS_q^n(\epsilon) \\ &= \int_{\Delta} dS_q^n(\epsilon) \cdot \int_0^{+\infty} r^n e^{-\frac{r^2}{2}} dr \\ &= 2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) V_n(\Delta) \end{aligned} \quad (1)$$

Sea $\{\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base positivamente orientada de \mathbf{R}_q^{n+1} tal que $C = \{x_0 \mathbf{v}_0 + \dots + x_n \mathbf{v}_n \mid x_0 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$. Denotamos por (x_0, \dots, x_n) las coordenadas en esa base, y por $\Phi(x_0, \dots, x_n) = \langle x_0 \mathbf{v}_0 + \dots + x_n \mathbf{v}_n, x_0 \mathbf{v}_0 + \dots + x_n \mathbf{v}_n \rangle$ la forma cuadrática de \mathbf{R}_q^{n+1} . Entonces para los puntos del cono simplicial C se verifica que $\Phi = \epsilon \cdot r^2$. Consideremos por otra parte el paralelepípedo determinado en \mathbf{R}_q^{n+1} por los vectores $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n$, que en las coordenadas (x_0, \dots, x_n) corresponde al cubo $[0, 1]^{n+1}$. Si $V(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n)$ es el volumen de este paralelepípedo en \mathbf{R}_q^{n+1} (que coincide con su volumen euclídeo), entonces la forma de volumen de \mathbf{R}_q^{n+1} es:

$$d\mathbf{R}_q^{n+1} = V(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n) dx_0 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Por tanto, en las coordenadas (x_0, \dots, x_n) la relación (1) se escribe así:

$$2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) V_n(\Delta) = V(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n) \cdot \int_C e^{-\epsilon \Phi/2} dx_0 \dots dx_n \quad (2)$$

3.3. Diferencial de la función volumen

El espacio \mathcal{S} de todos los n -simplices de $S_q^n(\epsilon)$ tiene una estructura natural de variedad diferenciable de dimensión $n(n+1)$, con cartas modeladas por ejemplo en $\overbrace{S_q^n(\epsilon) \times \dots \times S_q^n(\epsilon)}^{n+1 \text{ veces}}$,

consistentes en el producto de entornos abiertos suficientemente pequeños de los $n + 1$ vértices. La función volumen $V_n : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$, que a cada n -símplice Δ le asocia su volumen $V_n(\Delta)$, es una función diferenciable, y estamos interesados en determinar una fórmula para su diferencial, dV_n .

Para ello, vamos a considerar en un punto arbitrario $\Delta \in \mathcal{S}$, una base formada por $n(n + 1)$ vectores linealmente independientes tangentes a \mathcal{S} en Δ , y vamos a calcular el valor de la 1-forma dV_n , aplicada a cada uno de estos vectores tangentes. El modo de elegir dicha base es el siguiente: para cada uno de los $n + 1$ vértices de Δ , tomamos n vectores linealmente independientes tangentes a \mathcal{S} en Δ , que representan n maneras de mover el vértice elegido en distintas direcciones, dejando todos los demás vértices fijos. Concretamente, el vértice escogido se va a desplazar sobre la recta que lo une con cada uno de los n vértices restantes, según se describe a continuación.

Sea $C = \{x_0 \mathbf{v}_0 + \dots + x_n \mathbf{v}_n \mid x_0 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$ el cono simplicial tal que $\Delta = C \cap S_q^n(\epsilon)$. Como el orden de los vértices es arbitrario, basta estudiar el caso en que el vértice \mathbf{v}_1 se mueve en la dirección del vértice \mathbf{v}_0 y todos los demás vértices quedan fijos. Para cada $t \in \mathbb{R}$, consideramos la base formada por los vectores $\begin{cases} \mathbf{v}_0(t) = \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_1(t) = \mathbf{v}_1 - t \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_i(t) = \mathbf{v}_i \text{ si } 2 \leq i \leq n \end{cases}$. Cuando t está suficientemente próximo a 0, el cono simplicial $C_t = \{\lambda_0 \mathbf{v}_0(t) + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n(t) \mid \lambda_0 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0\}$ verifica que $\Delta_t = C_t \cap S_q^n(\epsilon)$ es un n -símplice. Vamos a tomar entonces, como uno de los vectores tangentes a \mathcal{S} en el punto Δ , el vector tangente al camino de n -símplices Δ_t en el instante $t = 0$.

El valor de la 1-forma dV_n , aplicada a este vector tangente, es $\left. \frac{dV_n(\Delta_t)}{dt} \right|_{t=0}$. Según la fórmula (2),

$$2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) V_n(\Delta_t) = V(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n) \cdot \int_{C_t} e^{-\epsilon \Phi/2} dx_0 \dots dx_n$$

Como

$$\begin{aligned} C_t &= \{\lambda_0 \mathbf{v}_0(t) + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n(t) \mid \lambda_0 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0\} \\ &= \{\underline{x_0 \mathbf{v}_0 + \dots + x_n \mathbf{v}_n \mid x_0 + x_1 t \geq 0, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0}\} \end{aligned}$$

resulta que

$$\begin{aligned} 2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) V_n(\Delta_t) &= \\ &= V(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n) \cdot \int_{x_1=0}^{+\infty} \int_{x_0=-x_1 t}^{+\infty} \int_{x_2=0}^{+\infty} \dots \int_{x_n=0}^{+\infty} e^{-\epsilon \Phi/2} dx_0 \dots dx_n \quad (3) \end{aligned}$$

Derivando esta igualdad, se tiene que

$$2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \frac{dV_n(\Delta_t)}{dt} \Big|_{t=0} =$$

$$= V(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n) \cdot \int_{x_1=0}^{+\infty} \int_{x_2=0}^{+\infty} \dots \int_{x_n=0}^{+\infty} x_1 e^{-\epsilon \Phi/2} dx_1 \dots dx_n \Big|_{x_0=0} \quad (4)$$

Vamos ahora a considerar la base dual $\{\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_n\}$ de $\{\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n\}$, que verifica que $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j \rangle = \delta_{ij}$. Tomando múltiplos de los vectores \mathbf{v}_i si es preciso, podemos siempre suponer que $|\mathbf{w}_j| = 1$ para $j = 0, \dots, n$. Denotamos por (x_0, \dots, x_n) las coordenadas en la base $\{\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n\}$, y por (y_0, \dots, y_n) las coordenadas en la base dual $\{\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_n\}$. Entonces:

$$x_i = \langle x_0 \mathbf{v}_0 + \dots + x_n \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_i \rangle = \langle y_0 \mathbf{w}_0 + \dots + y_n \mathbf{w}_n, \mathbf{w}_i \rangle = \sum_{j=0}^n \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle y_j$$

y se tiene, pues, la siguiente relación entre unas coordenadas y otras:

$$x_i = \sum_{j=0}^n \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle y_j \quad y_i = \sum_{j=0}^n \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle x_j \quad (5)$$

En las coordenadas (x_0, \dots, x_n) , la forma cuadrática de \mathbf{R}_q^{n+1} se escribe como

$$\Phi = \sum_{i,j=0}^n \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle x_i x_j. \text{ Por tanto,}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 2 \sum_{j=0}^n \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle x_j = 2 y_i \quad (6)$$

Así pues, a partir de (5) se deduce que en el hiperplano $x_0 = 0$, es

$$\begin{cases} x_1 = \sum_{j=0}^n \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_j \rangle y_j \\ x_0 = y_0 + \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_i \rangle y_i = 0 \end{cases}$$

luego

$$x_1 = \sum_{i=1}^n (\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_i \rangle - \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \rangle \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_i \rangle) y_i$$

$$= \sum_{i=1}^n (\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_i \rangle - \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \rangle \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_i \rangle) \frac{\partial(\Phi/2)}{\partial x_i}$$

Para cada $t \in \mathbf{R}$, sea $\{\mathbf{w}_0(t), \dots, \mathbf{w}_n(t)\}$ la base dual de $\{\mathbf{v}_0(t), \dots, \mathbf{v}_n(t)\}$. Es fácil comprobar que

$$\begin{cases} \mathbf{w}_0(t) = \mathbf{w}_0 + t \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_i(t) = \mathbf{w}_i \text{ para } 1 \leq i \leq n \end{cases} . \text{ Para cada } i \in \{1, \dots, n\}, \text{ vamos a definir la función}$$

$$f_{0i}(t) = \frac{\langle \mathbf{w}_0^*(t), \mathbf{w}_i(t) \rangle}{|\mathbf{w}_0(t)| \cdot |\mathbf{w}_i(t)|}$$

Teniendo en cuenta que $|\mathbf{w}_j| = 1$ para todo j , se obtiene al derivar que

$$\left. \frac{df_{0i}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_i \rangle - \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \rangle \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_i \rangle$$

Por tanto,

$$x_1 = \sum_{i=1}^n \left. \frac{df_{0i}(t)}{dt} \right|_{t=0} \cdot \frac{\partial(\Phi/2)}{\partial x_i} \quad (7)$$

Sustituyendo en (4), resulta que

$$\begin{aligned} & 2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \left. \frac{dV_n(\Delta_t)}{dt} \right|_{t=0} = \\ & = V(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n) \cdot \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^n \left. \frac{df_{0i}(t)}{dt} \right|_{t=0} \cdot \frac{\partial(\Phi/2)}{\partial x_i} e^{-\epsilon \Phi/2} dx_1 \dots dx_n \Big|_{x_0=0} \\ & = -\epsilon \cdot V(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n) \cdot \sum_{i=1}^n \left. \frac{df_{0i}(t)}{dt} \right|_{t=0} \cdot \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} \frac{\partial(e^{-\epsilon \Phi/2})}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_n \Big|_{x_0=0} \\ & = \epsilon \cdot V(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n) \cdot \sum_{i=1}^n \left. \frac{df_{0i}(t)}{dt} \right|_{t=0} \cdot \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} e^{-\epsilon \Phi/2} dx_1 \dots dx_n \Big|_{x_0=x_i=0} \quad (8) \end{aligned}$$

Ahora bien, el volumen de la cara de codimensión 2 de Δ , $F_{0i} = \{x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_n \mathbf{v}_n \mid x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0; x_i = 0\} \cap S_q^n(\epsilon)$, se puede calcular también aplicando la relación (2) en el subespacio $(n-1)$ -dimensional de \mathbf{R}_q^{n+1} generado por $\mathbf{v}_1, \dots, \widehat{\mathbf{v}}_i, \dots, \mathbf{v}_n$. Es decir,

$$\begin{aligned} & 2^{\frac{n-3}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) V_{n-2}(F_{0i}) = \\ & = V(\mathbf{v}_1, \dots, \widehat{\mathbf{v}}_i, \dots, \mathbf{v}_n) \cdot \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} e^{-\epsilon \Phi/2} dx_1 \dots d\widehat{x}_i \dots dx_n \Big|_{x_0=x_i=0} \end{aligned}$$

Sustituyendo en (8), se tiene entonces

$$\begin{aligned} & 2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \left. \frac{dV_n(\Delta_t)}{dt} \right|_{t=0} = \\ & = \epsilon \sum_{i=1}^n \frac{V(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n)}{V(\mathbf{v}_1, \dots, \widehat{\mathbf{v}}_i, \dots, \mathbf{v}_n)} \cdot \left. \frac{df_{0i}(t)}{dt} \right|_{t=0} \cdot 2^{\frac{n-3}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) V_{n-2}(F_{0i}) \end{aligned}$$

Como la función gamma tiene la propiedad de que $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{n-1}{2} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)$, resulta que

$$\left. \frac{dV_n(\Delta_t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\epsilon}{n-1} \sum_{i=1}^n \frac{V(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n)}{V(\mathbf{v}_1, \dots, \widehat{\mathbf{v}}_i, \dots, \mathbf{v}_n)} \cdot \left. \frac{df_{0i}(t)}{dt} \right|_{t=0} \cdot V_{n-2}(F_{0i}) \quad (9)$$

Vamos ahora a utilizar algunas observaciones elementales sobre el volumen de un paralelepípedo en \mathbf{R}_q^{n+1} , a fin de simplificar el factor $\frac{V(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n)}{V(\mathbf{v}_1, \dots, \widehat{\mathbf{v}}_i, \dots, \mathbf{v}_n)}$.

- (i) En primer lugar, $V(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n)$ coincide con el volumen euclídeo del paralelepípedo determinado en \mathbf{R}^{n+1} por los vectores $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n$ (ya que la forma cuadrática de \mathbf{R}_q^{n+1} tiene una matriz, que denotaremos J_q , de determinante igual a ± 1). Por tanto, $V(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n)$ es el valor absoluto del determinante de la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n$ en la base canónica de \mathbf{R}_q^{n+1} . También es igual a $\sqrt{|\det(\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle)_{i,j}|}$.
- (ii) Sea $\{\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_n\}$ la base dual de $\{\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n\}$, y sea M (resp. N) la matriz cuyas columnas son las coordenadas de $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n$ (resp. $\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_n$). Entonces $M^t \cdot J_q \cdot N$ es la matriz identidad, luego $|\det(N)| = |\det(M)|^{-1}$, y por tanto

$$V(\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_n) = \frac{1}{V(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n)}$$

- (iii) Dado k entre 0 y $n-1$, sean $\mathbf{v}'_0, \dots, \mathbf{v}'_k$ las proyecciones ortogonales de los vectores $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_k$ sobre el subespacio generado por $\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_k$ (que es ortogonal a todos los vectores restantes $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n$). Entonces para cada $i \in \{0, \dots, k\}$, $\mathbf{v}'_i - \mathbf{v}_i$ es combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n$, luego

$$V(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n) = V(\mathbf{v}'_0, \dots, \mathbf{v}'_k, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n) = V(\mathbf{v}'_0, \dots, \mathbf{v}'_k) \cdot V(\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$$

(siendo la última igualdad consecuencia de la ortogonalidad). Por otra parte, es inmediato ver que $\{\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_k\}$ es la base dual de $\{\mathbf{v}'_0, \dots, \mathbf{v}'_k\}$ dentro del subespacio generado por $\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_k$. Por tanto, de (ii) se deduce que

$$V(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n) = \frac{V(\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n)}{V(\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_k)} \quad (10)$$

Utilizando esta última propiedad en el caso particular de la expresión (9), resulta que

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV_n(\Delta_t)}{dt} \right|_{t=0} &= \frac{\epsilon}{n-1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{V(\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_i)} \cdot \left. \frac{df_{0i}(t)}{dt} \right|_{t=0} \cdot V_{n-2}(F_{0i}) \\ &= \frac{\epsilon}{n-1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{|\langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_0 \rangle \cdot \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle - \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_i \rangle^2|}} \cdot \left. \frac{df_{0i}(t)}{dt} \right|_{t=0} \cdot V_{n-2}(F_{0i}) \end{aligned} \quad (11)$$

Antes de poder proseguir hasta llegar a una fórmula de Schläfli, necesitamos una definición de ángulo diédrico en una geometría semi-riemanniana. No existe ninguna definición general de ángulo en la literatura, por la razón que se explica en la sección siguiente, pero nos interesaría poder definir el ángulo diédrico $\alpha_{0i}(t)$ en la cara $F_{0i}(t)$ de Δ_t de tal manera que

$$\left. \frac{d\alpha_{0i}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{|\langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_0 \rangle \cdot \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle - \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_i \rangle^2|}} \cdot \left. \frac{df_{0i}(t)}{dt} \right|_{t=0}$$

donde $f_{0i}(t) = \frac{\langle \mathbf{w}_0(t), \mathbf{w}_i(t) \rangle}{|\mathbf{w}_0(t)| \cdot |\mathbf{w}_i(t)|}$.

3.4. Una definición de ángulo diédrico en geometría semi-riemanniana

Consideremos el plano vectorial de \mathbf{R}_q^{n+1} generado por los vectores \mathbf{w}_0 y \mathbf{w}_i , que es ortogonal al subespacio vectorial de codimensión dos $\langle C_{0i} \rangle$, generado por $\mathbf{v}_1, \dots, \widehat{\mathbf{v}}_i, \dots, \mathbf{v}_n$. La restricción a este plano de la forma cuadrática de \mathbf{R}_q^{n+1} es una forma cuadrática no degenerada, por la condición (*) impuesta al simple Δ (recuérdese la observación 2). Si es una forma cuadrática definida (positiva o negativa), entonces no hay ningún problema en definir el ángulo diédrico en la cara F_{0i} de la manera usual, como

$$\alpha_{0i} = \pi - \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_i \rangle}{|\mathbf{w}_0| \cdot |\mathbf{w}_i|}\right) = \pi - \arccos(f_{0i})$$

Sin embargo, sí existe un problema cuando este plano ortogonal tiene una métrica de Lorentz. Necesitamos, pues, definir el ángulo entre dos vectores no luz cualesquiera en el plano de Lorentz-Minkowski \mathbf{R}_1^2 . La dificultad radica en que el conjunto de vectores unitarios en \mathbf{R}_1^2 no es acotado. En el plano euclídeo \mathbf{R}^2 , el ángulo entre dos vectores unitarios $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ se puede definir como la longitud del arco que éstos determinan en la circunferencia unidad \mathbf{S}^1 . Si intentamos definir de manera análoga el ángulo entre dos vectores unitarios $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ de \mathbf{R}_1^2 , entonces nos encontramos con que el arco que éstos determinan en el conjunto de vectores unitarios de \mathbf{R}_1^2 puede tener ramas infinitas.

Una manera natural de resolver el problema es la siguiente. Como la hipérbola \mathcal{H}^- correspondiente a los vectores temporales unitarios de \mathbf{R}_1^2 tiene una métrica definida positiva, mientras que la hipérbola \mathcal{H}^+ correspondiente a los vectores espaciales unitarios tiene una métrica definida negativa, asignaremos longitud positiva a todos los arcos contenidos en \mathcal{H}^- y longitud negativa a todos los arcos contenidos en \mathcal{H}^+ . Dados dos vectores no luz unitarios $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ en \mathbf{R}_1^2 , consideremos el arco (posiblemente con ramas infinitas) que determinan en $\mathcal{H}^- \cup \mathcal{H}^+$, y sea l_r la suma de las longitudes (con el convenio de signos anterior) de las porciones de este arco contenidas dentro del disco euclídeo de radio r en \mathbf{R}^2 . Definiremos entonces el ángulo entre \mathbf{w}_1 y \mathbf{w}_2 como el límite de l_r cuando r tiende a infinito. Es

fácil comprobar (como se ilustra a continuación en algunos casos particulares), que esta definición es equivalente a la siguiente:

Definición 3.4.1. Dados dos vectores no luz $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ en \mathbb{R}_1^2 , se define el *ángulo* entre \mathbf{w}_1 y \mathbf{w}_2 como

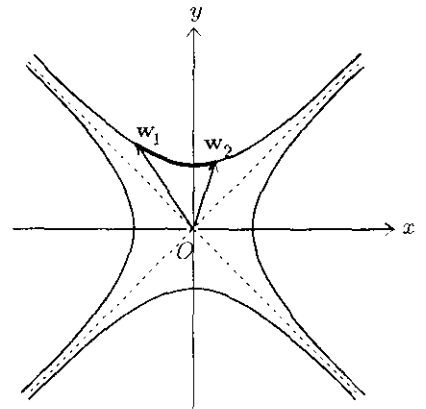
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ang}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \text{arccosh}\left(\frac{-\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle}{|\mathbf{w}_1| \cdot |\mathbf{w}_2|}\right) \text{ si } \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle > 0 \text{ y } \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle < 0 ; \\ \text{ang}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = -\text{arccosh}\left(\frac{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle}{|\mathbf{w}_1| \cdot |\mathbf{w}_2|}\right) \text{ si } \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle > 0 \text{ y } \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle > 0 ; \\ \text{ang}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = -\text{arcsenh}\left(\frac{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle}{|\mathbf{w}_1| \cdot |\mathbf{w}_2|}\right) \text{ si } \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle < 0 . \end{array} \right.$$

Esta definición es coherente con la definición estándar de ángulo hiperbólico entre dos vectores temporales contenidos en el mismo semicono temporal de un espacio vectorial de Lorentz (ver [O'N]), y veremos que también es la adecuada para nuestro propósito.

Algunos ejemplos

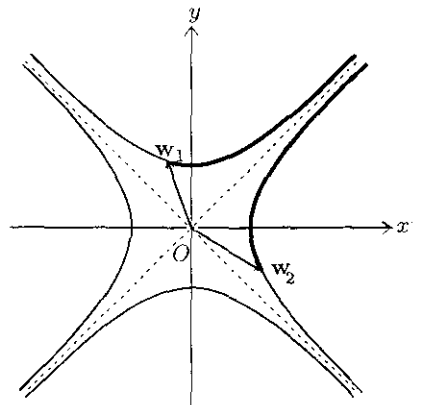
• **Caso 1:** $\mathbf{w}_1 = (\sinh t, \cosh t)$, $\mathbf{w}_2 = (\sinh s, \cosh s)$

$$\begin{aligned} \text{ang}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) &= |t - s| \\ &= \text{arccosh}(\cosh(t - s)) \\ &= \text{arccosh}(-\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle) \end{aligned}$$



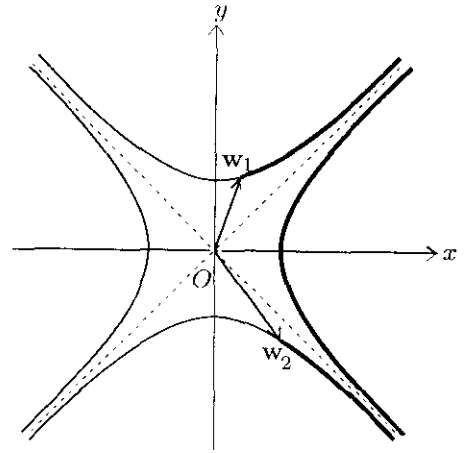
• **Caso 2:** $\mathbf{w}_1 = (\sinh t, \cosh t)$, $\mathbf{w}_2 = (\cosh s, \sinh s)$

$$\begin{aligned} \text{ang}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\text{ang}(\mathbf{w}_1, (\sinh x, \cosh x)) + \\ &\quad + \text{ang}(\mathbf{w}_2, (\cosh x, \sinh x))] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} ((x - t) - (x - s)) \\ &= s - t \\ &= -\text{arcsenh}(\sinh(t - s)) \\ &= -\text{arcsenh}(\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle) \end{aligned}$$



•Caso 3: $\mathbf{w}_1 = (\sinh t, \cosh t)$, $\mathbf{w}_2 = (\sinh s, -\cosh s)$, $t > s$

$$\begin{aligned} \text{ang}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\text{ang}(\mathbf{w}_1, (\sinh x, \cosh x)) + \\ &\quad + \text{ang}((\cosh x, \sinh x), (\cosh(-x), \sinh(-x))) + \\ &\quad + \text{ang}(\mathbf{w}_2, (\sinh x, -\cosh x))] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} ((x - t) - 2x + (x - s)) \\ &= -(t + s) \\ &= -\text{arccosh}(\cosh(t + s)) \\ &= -\text{arccosh}(\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle) \end{aligned}$$



Puesto que con nuestro convenio de signos hemos asignado longitud total cero al conjunto de todos los vectores unitarios de \mathbf{R}_1^2 , la siguiente definición de ángulo diédrico también es natural.

Definición 3.4.2. Dados dos vectores no luz $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ en \mathbf{R}_q^{n+1} que generan un plano de Lorentz, se define el *ángulo diédrico* en la arista del diedro $\{\mathbf{v} \in \mathbf{R}_q^{n+1} \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle \geq 0, \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_2 \rangle \geq 0\}$, como $\alpha = -\text{ang}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$.

Observación. Con estas definiciones, el número $\text{Im}(\alpha(u)) = -\text{arccosh}\left(\frac{-3 \pm 6u^2 \pm u^4}{2(u^2 - 1)^2}\right)$ mencionado en la sección 2, es el “ángulo cónico” (semi-riemanniano) en la singularidad, y $\text{Re}(l(u)) = 2 \text{arccosh}\left(-1 - \frac{2(3u^2 - 1)(1 - 2u^2)(u^2 + 1)}{(1 - u^2)^4}\right)$ es la “longitud” (semi-riemanniana) de la singularidad. En efecto, $\text{Re}(l(u))/2$ es el “ángulo” entre los vectores posición de los vértices v_1 y Zv_1 (que generan un plano de Lorentz), y $\text{Im}(\alpha(u))$ es el “ángulo diédrico” en la arista singular cuyos extremos son v_1 y Zv_1 .

3.5. Una fórmula diferencial de Schläfli

Teorema 3.5.1. Sea $S_q^n(\epsilon)$ una componente conexa de la hipercuádrada central unidad de signo ϵ de \mathbf{R}_q^{n+1} , y sea Δ una familia de n -símplices en $S_q^n(\epsilon)$ que dependen diferenciablemente de uno o más parámetros, y tales que todas sus caras de codimensión 1 y 2 tienen una métrica inducida no degenerada. Entonces se verifica la siguiente fórmula para la diferencial de su volumen, $V_n(\Delta)$:

$$dV_n(\Delta) = \frac{\epsilon}{n-1} \sum_F V_{n-2}(F) d\alpha_F$$

donde la suma se extiende a todas las caras F de codimensión 2 de Δ , $V_{n-2}(F)$ es el volumen $((n-2)$ -dimensional) de la cara F y α_F es el ángulo diédrico en la cara F . (En el caso $n-2=0$, convenimos en que $V_0(F) = 1$).

Demostración. Retomamos la demostración en el punto al que habíamos llegado en la sección 4. Recordemos que partíamos de un n -símplice

$$\Delta = \{x_0 \mathbf{v}_0 + \dots + x_n \mathbf{v}_n \mid x_0 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\} \cap S_q^n(\epsilon)$$

(donde habíamos elegido la base $\{\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n\}$ de modo que todos los vectores \mathbf{w}_i de la base dual fueran unitarios), y deformábamos Δ desplazando uno cualquiera de los vértices, \mathbf{v}_1 , en la dirección de otro cualquiera, \mathbf{v}_0 , y dejando todos los demás vértices fijos. Concretamente, definíamos para todo t suficientemente próximo a 0, el n -símplice

$$\Delta_t = \{\lambda_0 \mathbf{v}_0 + \lambda_1 (\mathbf{v}_1 - t \mathbf{v}_0) + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n \mid \lambda_0 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0\} \cap S_q^n(\epsilon)$$

Los únicos ángulos diédricos que varían son los ángulos en las aristas de la cara opuesta al vértice \mathbf{v}_0 , es decir, los ángulos diédricos $\alpha_{0i}(t)$ en las caras de codimensión 2 de Δ_t que son de la forma $F_{0i}(t)$ ($i = 1, \dots, n$). Por tanto, queremos demostrar que

$$\left. \frac{dV_n(\Delta_t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\epsilon}{n-1} \sum_{i=1}^n V_{n-2}(F_{0i}) \cdot \left. \frac{d\alpha_{0i}(t)}{dt} \right|_{t=0}$$

En el apartado 4 habíamos visto que

$$\left. \frac{dV_n(\Delta_t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\epsilon}{n-1} \sum_{i=1}^n V_{n-2}(F_{0i}) \cdot \frac{1}{\sqrt{|\langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_0 \rangle \cdot \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle - \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_i \rangle^2|}} \cdot \left. \frac{df_{0i}(t)}{dt} \right|_{t=0}$$

donde $f_{0i}(t) = \frac{\langle \mathbf{w}_0(t), \mathbf{w}_i(t) \rangle}{|\mathbf{w}_0(t)| \cdot |\mathbf{w}_i(t)|}$. Sólo falta ver, pues, que

$$\left. \frac{d\alpha_{0i}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{|\langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_0 \rangle \cdot \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle - \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_i \rangle^2|}} \cdot \left. \frac{df_{0i}(t)}{dt} \right|_{t=0}$$

Hay que distinguir varios casos:

• **Caso 1.** Si $\langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_0 \rangle \cdot \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle - \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_i \rangle^2 > 0$, entonces, para t próximo a 0, el plano generado por $\mathbf{w}_0(t)$ y $\mathbf{w}_i(t)$ tiene una métrica definida, y el ángulo diédrico en la cara $F_{0i}(t)$ es $\alpha_{0i}(t) = \pi - \arccos(f_{0i}(t))$. Por tanto,

$$\left. \frac{d\alpha_{0i}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{1 - f_{0i}^2(0)}} \cdot \left. \frac{df_{0i}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{|\langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_0 \rangle \cdot \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle - \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_i \rangle^2|}} \cdot \left. \frac{df_{0i}(t)}{dt} \right|_{t=0}$$

(teniendo en cuenta que los vectores \mathbf{w}_i tienen todos norma 1).

• **Caso 2.** Si $\langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_0 \rangle \cdot \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle - \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_i \rangle^2 < 0$, entonces, para t próximo a 0, el plano generado por $\mathbf{w}_0(t)$ y $\mathbf{w}_i(t)$ tiene una métrica de Lorentz. Hay tres posibilidades:

(i) $\langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_0 \rangle \cdot \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle > 0$ y $\langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_i \rangle < 0$.

En este caso, $\alpha_{0i}(t) = -\operatorname{arccosh}(-f_{0i}(t))$, luego

$$\left. \frac{d\alpha_{0i}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{f_{0i}^2(0) - 1}} \cdot \left. \frac{df_{0i}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{|\langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_0 \rangle \cdot \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle - \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_i \rangle^2|}} \cdot \left. \frac{df_{0i}(t)}{dt} \right|_{t=0}$$

(ii) $\langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_0 \rangle \cdot \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle > 0$ y $\langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_i \rangle > 0$.

Ahora $\alpha_{0i}(t) = \operatorname{arccosh}(f_{0i}(t))$, y por tanto

$$\left. \frac{d\alpha_{0i}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{f_{0i}^2(0) - 1}} \cdot \left. \frac{df_{0i}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{|\langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_0 \rangle \cdot \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle - \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_i \rangle^2|}} \cdot \left. \frac{df_{0i}(t)}{dt} \right|_{t=0}$$

(iii) $\langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_0 \rangle \cdot \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle < 0$.

En este caso, $\alpha_{0i}(t) = \operatorname{arsenh}(f_{0i}(t))$, luego

$$\left. \frac{d\alpha_{0i}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_{0i}^2(0)}} \cdot \left. \frac{df_{0i}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{|\langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_0 \rangle \cdot \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle - \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_i \rangle^2|}} \cdot \left. \frac{df_{0i}(t)}{dt} \right|_{t=0}$$

Por tanto,

$$\left. \frac{dV_n(\Delta_t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{c}{n-1} \sum_{i=1}^n V_{n-2}(F_{0i}) \cdot \left. \frac{d\alpha_{0i}(t)}{dt} \right|_{t=0}$$

Como la elección de los vértices \mathbf{v}_0 y \mathbf{v}_1 es arbitraria, resulta que la fórmula de Schläfli que queremos probar, se verifica para una base formada por $n(n+1)$ vectores tangentes al espacio de n -simplices en el punto Δ , y por tanto es cierta en general.

□

4. APLICACIÓN 1 : VOLUMEN DUAL DE UN TETRAEDRO HIPERBÓLICO EN DIMENSIÓN 3

Llamaremos *volumen dual* de un n -símplice hiperbólico Δ en H^n , a la “medida” del conjunto de hiperplanos de H^n que intersecan al símplice dado. Hay dos maneras naturales de definir una medida en el conjunto \mathcal{P}^n de hiperplanos de H^n . Por una parte, \mathcal{P}^n se puede identificar con el grupo de Lie $O(1, n)/\mathcal{J}$, donde \mathcal{J} es el subgrupo de $O(1, n)$ formado por todas las transformaciones que dejan invariante un hiperplano dado de H^n . Este grupo de Lie tiene una forma de volumen invariante por traslaciones a izquierda, que define una medida en \mathcal{P}^n (cf. [Sa₂]). Por otra parte, la esfera de de Sitter $S_1^n(1)$ (que denotaremos simplemente S_1^n a partir de ahora), es una cubierta doble de \mathcal{P}^n , mediante la aplicación que a cada punto $v \in S_1^n$ le asocia el hiperplano de H^n ortogonal a v (con respecto al producto escalar de Minkowski de \mathbf{R}_1^{n+1}). Como la forma de volumen de S_1^n es invariante por la aplicación antipodal, resulta que induce también una medida en \mathcal{P}^n . Veamos que ambas medidas coinciden.

Sea $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ una referencia ortonormal móvil en \mathbf{R}_1^{n+1} , con $\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \rangle = -1$, $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle = 1$ si $i = 1, \dots, n$, y $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = 0$ si $i \neq j$. Según el método de la referencia móvil, las formas de Maurer-Cartan ω_{ij} para el grupo $O(1, n)$ están definidas por las relaciones $d\mathbf{x}_i = \sum_{j=0}^n \omega_{ji} \mathbf{x}_j$, $i = 0, \dots, n$, y verifican que $\omega_{0j} = \omega_{j0}$, $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ ($i, j = 1, \dots, n$). La densidad de hiperplanos considerada por Santaló es la forma $d\mathcal{P}^n = \omega_{0n} \wedge \omega_{n1} \wedge \dots \wedge \omega_{n, n-1}$ (cf. [Sa₂], IV.17.3).

Vamos a expresar ahora la forma de volumen de S_1^n en términos de estas formas de Maurer-Cartan. Fijemos $i \in \{1, \dots, n-1\}$, y supongamos que $\mathbf{x} \in S_1^n$ está en el plano vectorial (riemanniano) generado por \mathbf{x}_i y \mathbf{x}_n . Entonces $\mathbf{x} = \cos(s_i) \mathbf{x}_n + \sin(s_i) \mathbf{x}_i$, donde s_i es la distancia de \mathbf{x} a \mathbf{x}_n . Si suponemos \mathbf{x}_n y \mathbf{x}_i fijos, y que \mathbf{x} se mueve sobre la geodésica que une \mathbf{x}_n con \mathbf{x}_i , entonces $d\mathbf{x} = (-\sin(s_i) \mathbf{x}_n + \cos(s_i) \mathbf{x}_i) ds_i$. Si, por el contrario, suponemos que $\mathbf{x} \in S_1^n$ está en el plano vectorial (de Lorentz) generado por \mathbf{x}_0 y \mathbf{x}_n , y que existe una geodésica L que une \mathbf{x} con \mathbf{x}_n , entonces $\mathbf{x} = \cosh(s_0) \mathbf{x}_n + \sinh(s_0) \mathbf{x}_0$, donde s_0 es la distancia de \mathbf{x} a \mathbf{x}_n . Suponiendo \mathbf{x}_n y \mathbf{x}_0 fijos, y que \mathbf{x} se mueve sobre la geodésica L , tenemos entonces que $d\mathbf{x} = (\sinh(s_0) \mathbf{x}_n + \cosh(s_0) \mathbf{x}_0) ds_0$. En particular, cuando $s_i = 0$ ($i = 1, \dots, n-1$), se tiene que $\mathbf{x} = \mathbf{x}_n$, y de lo anterior se deduce que $d\mathbf{x}_n = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{x}_j ds_j$. Como, por otra parte, $d\mathbf{x}_n = \sum_{j=0}^n \omega_{jn} \mathbf{x}_j$, resulta que $ds_i = \omega_{in}$ ($i = 0, \dots, n-1$). Entonces la forma de volumen de S_1^n es, a menos de cambio de signo (es decir, de cambio de la

orientación en S_1^n),

$$\begin{aligned}
 dS_1^n &= ds_1 \wedge \dots \wedge ds_{n-1} \wedge ds_0 \\
 &= \omega_{1n} \wedge \dots \wedge \omega_{n-1,n} \wedge \omega_{0n} \\
 &= (-1)^{n-1} \omega_{0n} \wedge \omega_{1n} \wedge \dots \wedge \omega_{n-1,n} \\
 &= \omega_{0n} \wedge \omega_{n1} \wedge \dots \wedge \omega_{n,n-1} \\
 &= d\mathcal{P}^n
 \end{aligned}$$

En consecuencia, el volumen dual de un n -símplice hiperbólico se puede calcular como el volumen de un cierto subconjunto de la esfera de de Sitter.

4.1. Polar y dual complementario de un símplex hiperbólico

Sea Δ un n -símplice del espacio hiperbólico \mathbf{H}^n . Sea $\{v_0, \dots, v_n\}$ una base de \mathbf{R}_1^{n+1} tal que $\Delta = \{x_0 v_0 + \dots + x_n v_n \mid x_0 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\} \cap \mathbf{H}^n$, y sea $\{w_0, \dots, w_n\}$ la base dual, que está formada por vectores espaciales.

Asociaremos al símplex Δ los dos subconjuntos siguientes de la esfera de de Sitter S_1^n :

(i) el *polar*

$$\Delta^* = \{x_0 w_0 + \dots + x_n w_n \mid x_0 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\} \cap S_1^n$$

que es intersección de S_1^n con un cono simplicial de \mathbf{R}_1^{n+1} , pero no es acotado; y

(ii) el *dual complementario*

$$\Delta^P = \{x_0 w_0 + \dots + x_n w_n \mid x_0 \geq 0 \text{ y } x_i \leq 0 \text{ para algún } i \in \{1, \dots, n\}\} \cap S_1^n$$

que es un subconjunto compacto de S_1^n pero no es un símplex.

Lema 4.1.1. *El dual complementario Δ^P es un poliedro compacto en S_1^n , cuyas caras de codimensión mayor o igual que 1 son todas riemannianas (es decir, son símplexes esféricos). El polar Δ^* no es acotado, pero todas sus caras de codimensión mayor o igual que 1 son también símplexes esféricos, y además toda cara de Δ^* de codimensión mayor o igual que 2 es también cara de Δ^P . El ángulo diédrico de Δ^* en una cara de codimensión 2 es el opuesto del ángulo diédrico de Δ^P en la misma cara.*

Demostración. La compacidad de Δ^P será una consecuencia clara de su interpretación geométrica (ver lema 4.1.2. más abajo), pero también podemos demostrarla ahora, comprobando que para todo $w \in \{x_0 w_0 + \dots + x_n w_n \mid x_0 \geq 0 \text{ y } x_i \leq 0 \text{ para algún } i \in \{1, \dots, n\}\}$, es $\langle w, w \rangle > 0$ (cf. lema 3.1.2). En efecto, como $\langle w, v_0 \rangle = x_0 \geq 0$, resulta que w no puede ser un vector temporal o luz contenido

en el mismo semicono temporal que \mathbf{v}_0 . Pero como $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle = x_i \leq 0$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$, resulta que \mathbf{w} tampoco puede ser un vector temporal o luz contenido en el otro semicono temporal, luego necesariamente \mathbf{w} es un vector espacial.

El dual complementario Δ^P no es intersección de S_1^n con un cono simplicial de \mathbf{R}_1^{n+1} , pero si se puede triangular en n -simplices cuyas caras son todas riemannianas, de la siguiente forma. Para cada n -upla de signos $\sigma = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$, definimos el conjunto

$$\Delta^\sigma = \{x_0 \mathbf{w}_0 + x_1 \cdot \epsilon_1 \mathbf{w}_1 + \dots + x_n \cdot \epsilon_n \mathbf{w}_n \mid x_0 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\} \cap S_1^n$$

Entonces $\Delta^* = \Delta^{(1, \dots, 1)}$ y $\Delta^P = \bigcup_{\sigma \neq (1, \dots, 1)} \Delta^\sigma$. Si $\sigma \neq (1, \dots, 1)$, entonces Δ^σ es un n -simplex de S_1^n , cuyas caras son todas riemannianas porque son ortogonales a los vectores temporales $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n$.

El polar Δ^* no es acotado, porque $\Delta^* \cup \Delta^P = \{x_0 \mathbf{w}_0 + \dots + x_n \mathbf{w}_n \mid x_0 \geq 0\} \cap S_1^n$, que claramente es no acotado. Sin embargo, todas las caras del cono simplicial $C = \{x_0 \mathbf{w}_0 + \dots + x_n \mathbf{w}_n \mid x_0 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$ son riemannianas (pues son ortogonales a los vectores temporales $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n$), y por tanto cortan a S_1^n en simplices esféricos. En consecuencia, todas las caras de Δ^* son simplices esféricos.

Sea $F_{ij}^* = \{x_0 \mathbf{w}_0 + \dots + x_n \mathbf{w}_n \mid x_0 \geq 0, \dots, x_n \geq 0; x_i = x_j = 0\} \cap S_1^n$ una cara de codimensión 2 de Δ^* . Entonces F_{ij}^* también es una cara de codimensión 2 de los tres simplices $\Delta^{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)}$ de la triangulación de Δ^P para los cuales $\epsilon_k = 1$ si $k \notin \{i, j\}$, y además F_{ij}^* no es cara de ningún otro simplexe de la triangulación de Δ^P . El ángulo diédrico de Δ^* en la cara F_{ij}^* es $-\text{ang}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = -\text{arccosh}\left(\frac{-\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle}{|\mathbf{v}_i| \cdot |\mathbf{v}_j|}\right)$, mientras que el ángulo diédrico de Δ^P en la misma cara es la suma de los ángulos diédricos de los tres simplices de la triangulación que inciden en F_{ij}^* , que es igual a

$$\left(-\text{ang}(-\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) - \text{ang}(\mathbf{v}_i, -\mathbf{v}_j) - \text{ang}(-\mathbf{v}_i, -\mathbf{v}_j)\right) = \text{ang}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \text{arccosh}\left(\frac{-\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle}{|\mathbf{v}_i| \cdot |\mathbf{v}_j|}\right).$$

□

En las siguientes figuras se muestran algunos ejemplos en dimensión 2, para aclarar la relación entre Δ, Δ^* y Δ^P .

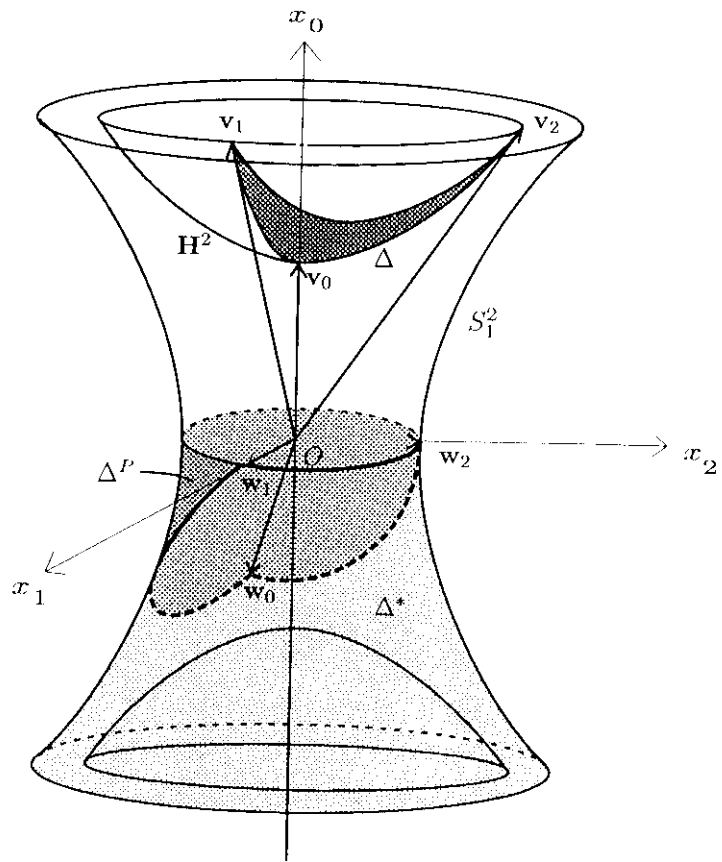


Figura 6

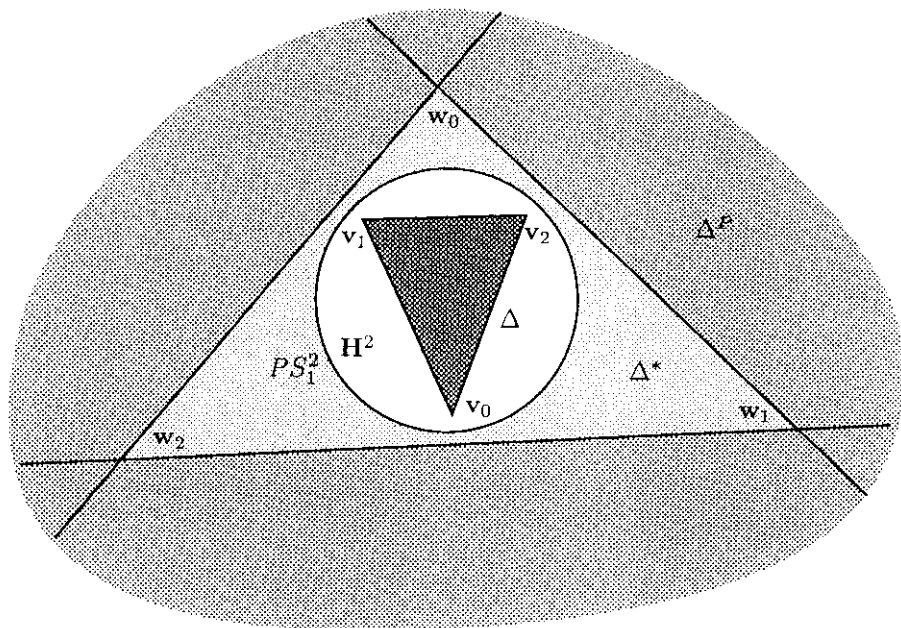


Figura 7 (vista en el modelo proyectivo de Beltrami-Klein)

Veamos a continuación la interpretación geométrica del dual complementario Δ^P de un simplejo hiperbólico Δ .

Lema 4.1.2. *Existe una biyección entre el dual complementario Δ^P menos un subconjunto de medida nula, y el conjunto de hiperplanos hiperbólicos que cortan al simplejo Δ . Esta biyección está dada por la aplicación que a cada punto \mathbf{w} de Δ^P le asocia el hiperplano de \mathbf{H}^n ortogonal a \mathbf{w} .*

Demostración. El vector $\mathbf{w} = x_0 \mathbf{w}_0 + \dots + x_n \mathbf{w}_n \neq 0$ es ortogonal a un hiperplano que corta a Δ , si y sólo si existen $y_0 \geq 0, \dots, y_n \geq 0$ no todos nulos, tales que $\langle \mathbf{w}, y_0 \mathbf{v}_0 + \dots + y_n \mathbf{v}_n \rangle = 0$, es decir, tales que $x_0 y_0 + \dots + x_n y_n = 0$ (pues $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j \rangle = \delta_{ij}$). Esto ocurre si y sólo si existen $i, j \in \{0, \dots, n\}$, $i \neq j$, tales que $x_i \geq 0$ y $x_j \leq 0$. Cambiando \mathbf{w} de signo si es necesario, podemos siempre suponer $x_0 \geq 0$ y algún $x_i \leq 0$, $i = 1, \dots, n$, con lo cual $\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} \in \Delta^P$. Por tanto, la aplicación que a cada punto \mathbf{w} de Δ^P le asocia el hiperplano de \mathbf{H}^n ortogonal a \mathbf{w} , tiene por imagen el conjunto de hiperplanos \mathbf{H}^n que cortan a Δ . Esta aplicación no es biyectiva porque hay puntos de Δ^P que son antipodales, y tienen, pues, la misma imagen. Ahora bien, los únicos puntos de Δ^P para los cuales su antipodal pertenece también a Δ^P , son los que tienen la coordenada $x_0 = 0$ y algún $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$. Son, por tanto, puntos del borde de Δ^P y constituyen un subconjunto de medida nula. \square

Del lema anterior se deduce que el volumen dual de un n -simplejo Δ en \mathbf{H}^n coincide con el volumen de su dual complementario Δ^P en S_1^n . Para calcular dicho volumen, utilizaremos la fórmula diferencial de Schläfli en la esfera de de Sitter, obtenida en la sección 3.

Lema 4.1.3. *Sea Δ una familia de n -simplejos hiperbólicos que depende diferenciablemente de uno o más parámetros. Entonces los duales complementarios Δ^P varían también diferenciablemente según los mismos parámetros, y se tiene la siguiente expresión para la diferencial de su volumen, $V_n(\Delta^P)$:*

$$dV_n(\Delta^P) = \frac{1}{n-1} \sum_{F^*} V_{n-2}(F^*) d\alpha_{F^*}$$

donde la suma se extiende a todas las caras F^* de codimensión 2 del polar Δ^* (que son también caras de codimensión 2 de Δ^P), $V_{n-2}(F^*)$ es el volumen $((n-2)$ -dimensional) de la cara F^* y α_{F^*} es el ángulo diédrico de Δ^P en la cara F^* . (En el caso $n-2=0$, convenimos en que $V_0(F^*)=1$).

Demostración. Sea $\Delta = \{x_0 \mathbf{v}_0 + \cdots + x_n \mathbf{v}_n \mid x_0 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\} \cap \mathbf{H}^n$, y sea $\{\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_n\}$ la base dual de $\{\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n\}$. Consideremos la triangulación del dual complementario Δ^P vista en la demostración del lema 4.1.1:

$$\Delta^P = \bigcup_{\sigma \neq (1, \dots, 1)} \Delta^\sigma$$

donde $\Delta^\sigma = \{x_0 \mathbf{w}_0 + x_1 \cdot \epsilon_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + x_n \cdot \epsilon_n \mathbf{w}_n \mid x_0 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\} \cap S_1^n$ para cada n -upla de signos $\sigma = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$. Si Δ varía diferenciablemente, entonces todos los simpleses Δ^σ que triangulan Δ^P varían también diferenciablemente, y podemos aplicar la fórmula de Schläfli para determinar la diferencial de su volumen. Veamos que la suma de los ángulos diédricos en torno a cualquier cara de codimensión 2 de esta triangulación que no sea una cara del polar Δ^* , es constantemente igual a cero, y por tanto esa cara no contribuye a la fórmula de Schläfli.

Sea $F_{ij} = \{x_0 \mathbf{w}_0 + x_1 \cdot \epsilon_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + x_n \cdot \epsilon_n \mathbf{w}_n \mid x_0 \geq 0, \dots, x_n \geq 0; x_i = x_j = 0\} \cap S_1^n$ una cara de codimensión 2 de Δ^σ , donde $\sigma = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \neq (1, \dots, 1)$. Supongamos que esta cara F_{ij} no es una cara de Δ^* , lo cual equivale a que $\epsilon_k = -1$ para algún $k \notin \{i, j\}$. Si $i \neq 0$ y $j \neq 0$, entonces F_{ij} está contenida en el interior de Δ^P , y hay cuatro simpleses de la triangulación de Δ^P que inciden en la cara F_{ij} , correspondientes a las n -uplas $(\epsilon_1, \dots, \pm \epsilon_i, \dots, \pm \epsilon_j, \dots, \epsilon_n)$. La suma de ángulos diédricos en torno a F_{ij} es entonces

$$2\epsilon_i \epsilon_j \text{ang}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) - 2\epsilon_i \epsilon_j \text{ang}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0$$

Si $i = 0$, entonces F_{ij} está contenida en el interior de una cara de codimensión 1 de Δ^P , y hay dos simpleses de la triangulación de Δ^P que inciden en la cara F_{0j} , correspondientes a las n -uplas $(\epsilon_1, \dots, \pm \epsilon_j, \dots, \epsilon_n)$. La suma de ángulos diédricos en torno a F_{0j} es también

$$\epsilon_j \text{ang}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_j) - \epsilon_j \text{ang}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_j) = 0$$

En consecuencia,

$$dV_n(\Delta^P) = \frac{1}{n-1} \sum_{F^*} V_{n-2}(F^*) d\alpha_{F^*}$$

donde la suma se extiende a todas las caras F^* de codimensión 2 del polar Δ^* .

□

4.2. Volumen dual de un tetraedro hiperbólico en dimensión 3

Proposición 4.2.1. (Santaló, [Sa₂], §IV.17.5, nota 1) Sea Δ un tetraedro hiperbólico en \mathbf{H}^3 , y sea Δ^P su dual complementario. Entonces se verifica la siguiente relación entre el volumen de Δ y su volumen dual:

$$V_3(\Delta) + V_3(\Delta^P) = \frac{1}{2} \sum_F (\pi - \alpha_F) V_1(F)$$

donde la suma se extiende a todas las aristas F del tetraedro Δ , $V_1(F)$ es la longitud de la arista F y α_F es el ángulo diédrico en la arista F .

Demostración. Sea $\Delta = \{x_0 \mathbf{v}_0 + \dots + x_3 \mathbf{v}_3 \mid x_0 \geq 0, \dots, x_3 \geq 0\} \cap \mathbf{H}^3$, y sea $\{\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_3\}$ la base dual de $\{\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_3\}$. La fórmula de Schläfli hiperbólica dice que

$$dV_3(\Delta) = -\frac{1}{2} \sum_{0 \leq i < j \leq 3} V_1(F_{ij}) d\alpha_{ij}$$

donde $F_{ij} = \{x_0 \mathbf{v}_0 + \dots + x_3 \mathbf{v}_3 \mid x_0 \geq 0, \dots, x_3 \geq 0; x_i = x_j = 0\} \cap \mathbf{H}^3$ y α_{ij} es el ángulo diédrico de Δ en la arista F_{ij} .

Por otra parte, el lema 4.1.3 anterior afirma que

$$dV_3(\Delta^P) = \frac{1}{2} \sum_{0 \leq k < l \leq 3} V_1(F_{kl}^*) d\alpha_{kl}^*$$

donde $F_{kl}^* = \{x_0 \mathbf{w}_0 + \dots + x_3 \mathbf{w}_3 \mid x_0 \geq 0, \dots, x_3 \geq 0; x_k = x_l = 0\} \cap \mathbf{H}^3$ y α_{kl}^* es el ángulo diédrico de Δ^P en la arista F_{kl}^* , que por el lema 4.1.1 es igual a $\text{ang}(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l)$.

Se verifican entonces las siguientes relaciones. Dados $0 \leq i < j \leq 3$, si denotamos por $0 \leq k < l \leq 3$ los otros dos elementos de $\{0, 1, 2, 3\}$ distintos de i, j , entonces:

$$V_1(F_{kl}^*) = \text{ang}(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_l) = \pi - \alpha_{ij} \quad \text{y} \quad \alpha_{kl}^* = \text{ang}(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l) = V_1(F_{ij})$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} dV_3(\Delta^P) &= \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i < j \leq 3} (\pi - \alpha_{ij}) dV_1(F_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i < j \leq 3} (\pi - \alpha_{ij}) dV_1(F_{ij}) - \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i < j \leq 3} V_1(F_{ij}) d\alpha_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i < j \leq 3} V_1(F_{ij}) d\alpha_{ij} \\ &= \frac{1}{2} d\left(\sum_{0 \leq i < j \leq 3} (\pi - \alpha_{ij}) \cdot V_1(F_{ij}) \right) - dV_3(\Delta) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$d(V_3(\Delta) + V_3(\Delta^P)) = d\left(\frac{1}{2} \sum_F (\pi - \alpha_F) \cdot V_1(F)\right)$$

donde la suma se extiende a todas las aristas F del tetraedro Δ . Integrando, resulta entonces que

$$V_3(\Delta) + V_3(\Delta^P) = \frac{1}{2} \sum_F (\pi - \alpha_F) \cdot V_1(F) + \text{constante}$$

Para determinar la constante, observamos que se puede hacer que Δ degenerare en un punto, de manera que las longitudes de sus aristas tienden a cero, y la expresión $\frac{1}{2} \sum_F (\pi - \alpha_F) V_1(F)$ tiende a cero. En ese caso, su dual complementario Δ^P degenera en un plano (de volumen cero), y en consecuencia $V_3(\Delta) + V_3(\Delta^P)$ tiende a cero. Por tanto, la constante es nula, y se obtiene la fórmula buscada. \square

En dimensión superior, la relación entre el volumen de un n -simplíce hiperbólico Δ y su volumen dual no es tan inmediata, debido a que en ese caso el volumen de una cara de codimensión 2 de Δ coincide con el ángulo diédrico de Δ^P en una cara de codimensión $(n-1) \neq 2$, que ya no aparece en la fórmula de Schläfli para el volumen de Δ^P . Para generalizar la fórmula del volumen dual a dimensiones superiores, necesitaremos unas identidades que se probarán en la sección siguiente, y que también nos permitirán obtener unas fórmulas de Gauss-Bonnet para n -símplices en la esfera de de Sitter S_1^n con todas las caras riemannianas.

5. APLICACIÓN 2 : FÓRMULAS DE GAUSS-BONNET EN LA ESFERA DE DE SITTER, PARA SÍMPlices CON TODAS LAS CARAS RIEMANNIANAS.

En esta sección, se obtienen unas fórmulas para símplices de S_1^n cuyas caras son todas riemannianas, que relacionan el volumen del símplice con los volúmenes de sus aristas de diversas dimensiones y con los ángulos diédricos en esas aristas, en analogía con las fórmulas generalizadas de Gauss-Bonnet para símplices esféricos e hiperbólicos (cf. [Sa₁]).

Sea Δ un n -símplice en la esfera de de Sitter S_1^n , tal que todas sus caras tienen una métrica inducida riemanniana. Sea $\{v_0, \dots, v_n\}$ una base de \mathbf{R}_1^{n+1} tal que $\Delta = \{x_0 v_0 + \dots + x_n v_n \mid x_0 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\} \cap S_1^n$, y sea $\{w_0, \dots, w_n\}$ la base dual, que está formada por vectores

temporales. Podemos encontrar entonces signos $\epsilon_0, \dots, \epsilon_n \in \{\pm 1\}$ tales que $\epsilon_0 \mathbf{w}_0, \dots, \epsilon_n \mathbf{w}_n$ son todos vectores del semicono temporal superior. Llamaremos *símplice hiperbólico polar* de Δ a

$$\Delta^* = \{x_0 \cdot \epsilon_0 \mathbf{w}_0 + \dots + x_n \cdot \epsilon_n \mathbf{w}_n \mid x_0 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\} \cap \mathbf{H}^n$$

Definición 5.1. Dado $0 \leq r \leq n - 1$, y dada una cara de codimensión $r + 1$ del símplice Δ ,

$$F_{i_0 \dots i_r} = \{x_0 \mathbf{v}_0 + \dots + x_n \mathbf{v}_n \mid x_0 \geq 0, \dots, x_n \geq 0; x_{i_0} = \dots = x_{i_r} = 0\} \cap S_1^n$$

llamaremos *ángulo polar* de Δ en la cara $F_{i_0 \dots i_r}$, al símplice hiperbólico de dimensión r siguiente:

$$\Theta_{i_0 \dots i_r} = \{x_{i_0} \cdot \epsilon_{i_0} \mathbf{w}_{i_0} + \dots + x_{i_r} \cdot \epsilon_{i_r} \mathbf{w}_{i_r} \mid x_{i_0} \geq 0, \dots, x_{i_r} \geq 0\} \cap \mathbf{H}^n$$

(que es una cara del símplice hiperbólico polar Δ^*). Definiremos la *medida algebraica del ángulo polar* $\Theta_{i_0 \dots i_r}$ como:

$$\theta_{i_0 \dots i_r} = \epsilon_{i_0} \dots \epsilon_{i_r} \cdot V_r(\Theta_{i_0 \dots i_r})$$

donde $V_r(\Theta_{i_0 \dots i_r})$ es el volumen (r -dimensional) del símplice hiperbólico $\Theta_{i_0 \dots i_r}$. Convenimos en que cuando $r = 0$, $\theta_i = \epsilon_i = \pm 1$ para $i = 0, \dots, n$.

Proposición 5.1. Sea Δ una familia de n -símplices en S_1^n con todas las caras riemannianas, que dependen diferenciablemente de uno o más parámetros. Para cualquier $1 \leq r \leq n - 2$, se verifica la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} & \Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n-r-1}{2}\right) \cdot \sum_{\dim(F)=r+1} \theta_F \cdot dV_{r+1}(F) = \\ & = \Gamma\left(\frac{r}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n-r+1}{2}\right) \cdot \sum_{\dim(F)=r-1} V_{r-1}(F) \cdot d\theta_F \end{aligned} \quad (1)$$

donde las sumas se extienden a todas las caras F del símplice Δ de la dimensión indicada, θ_F es la medida algebraica del ángulo polar en la cara F , y $V_k(F)$ denota el volumen (k -dimensional) de una cara F de dimensión k de Δ .

Demostración. Sea F una cara de codimensión $n - r - 1$ de Δ . Como Δ tiene todas las caras riemannianas, F es un símplice esférico de dimensión $r + 1$, y la diferencial de su volumen viene dada por la fórmula de Schläfli esférica:

$$dV_{r+1}(F) = \frac{1}{r} \sum_{\substack{L \subset F \\ \dim(L)=r-1}} V_{r-1}(L) \cdot d\alpha(L, F) \quad (2)$$

donde la suma se extiende a todas las caras L de dimensión $r-1$ de F , y $\alpha(L, F)$ es el ángulo diédrico del simplejo esférico F en la cara L .

Por otra parte, sea L una cara de codimensión $n-r+1$ de Δ , y sea Θ_L el ángulo polar de Δ en la cara L . Entonces Θ_L es un simplejo hiperbólico de dimensión $n-r$, y la diferencial de su volumen viene dada por la fórmula de Schläfli hiperbólica. Como las caras de Θ_L coinciden con los ángulos polares de Δ en las caras F de codimensión $n-r-1$ que contienen a L , podemos escribir:

$$dV_r(\Theta_L) = \frac{-1}{n-r-1} \sum_{\substack{L \subset F \\ \dim(F)=r+1}} V_{n-r-2}(\Theta_F) \cdot d\beta(\Theta_F, \Theta_L)$$

donde la suma se extiende a todas las caras F de dimensión $r+1$ de Δ que contienen a L , y $\beta(\Theta_F, \Theta_L)$ es el ángulo diédrico del simplejo hiperbólico Θ_L en la cara Θ_F .

Como las medidas algebraicas de Θ_F y Θ_L son en realidad $\theta_F = \pm V_{n-r-2}(\Theta_F)$ y $\theta_L = \pm V_{n-r}(\Theta_L)$, resulta que la expresión de la fórmula de Schläfli hiperbólica en términos de las medidas algebraicas de los ángulos polares, es de la siguiente forma:

$$d\theta_L = \frac{-1}{n-r-1} \sum_{\substack{L \subset F \\ \dim(F)=r+1}} \theta_F \cdot \tau(L, F) d\beta(\Theta_F, \Theta_L) \quad (3)$$

donde $\tau(L, F) = \frac{\theta_L \cdot V_{n-r-2}(\Theta_F)}{V_{n-r}(\Theta_L) \cdot \theta_F} / i^n \{\pm 1\}$ es un signo que depende de las caras L y F .

Supongamos por comodidad que $F = \{x_0 \mathbf{v}_0 + \dots + x_{r+1} \mathbf{v}_{r+1} \mid x_0 \geq 0, \dots, x_{r+1} \geq 0\} \cap S_1^n$, y $L = \{x_0 \mathbf{v}_0 + \dots + x_{r+1} \mathbf{v}_{r+1} \mid x_0 \geq 0, \dots, x_{r+1} \geq 0; x_0 = x_1 = 0\} \cap S_1^n$, que es una cara de dimensión $r-1$ de F . Entonces el ángulo de F en la cara L es

$$\alpha(L, F) = \pi - \text{ang}(\mathbf{w}'_0, \mathbf{w}'_1)$$

donde $\mathbf{w}'_0, \mathbf{w}'_1$ son dos vectores pertenecientes al subespacio vectorial de \mathbf{R}_1^{n+1} generado por $\{\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{r+1}\}$, tales que $\langle \mathbf{w}'_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij}$ para $i = 0, 1; j = 0, \dots, r+1$. Como el subespacio generado por $\{\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{r+1}\}$ es ortogonal al subespacio generado por $\{\mathbf{w}_{r+2}, \dots, \mathbf{w}_n\}$, resulta que los vectores $\mathbf{w}'_0, \mathbf{w}'_1$ están unívocamente determinados por las condiciones

$$\begin{cases} \langle \mathbf{w}'_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij} \\ \langle \mathbf{w}'_i, \mathbf{w}_k \rangle = 0 \end{cases} \quad \text{para } i = 0, 1; j = 0, \dots, r+1; k = r+2, \dots, n. \quad (4)$$

Por otra parte, los ángulos polares de Δ en las caras F y L son, respectivamente, $\Theta_F = \{x_{r+2} \cdot \epsilon_{r+2} \mathbf{w}_{r+2} + \dots + x_n \cdot \epsilon_n \mathbf{w}_n \mid x_{r+2} \geq 0, \dots, x_n \geq 0\} \cap \mathbf{H}^n$, y

$$\Theta_L = \{x_0 \cdot \epsilon_0 \mathbf{w}_0 + x_1 \cdot \epsilon_1 \mathbf{w}_1 + x_{r+2} \cdot \epsilon_{r+2} \mathbf{w}_{r+2} + \cdots + x_n \cdot \epsilon_n \mathbf{w}_n \mid x_0 \geq 0, x_1 \geq 0, x_{r+2} \geq 0, \dots, x_n \geq 0\} \cap \mathbf{H}^n.$$

Sus medidas algebraicas son $\theta_F = \epsilon_{r+2} \cdots \epsilon_n \cdot V_{n-r-2}(\Theta_F)$ y $\theta_L = \epsilon_0 \cdot \epsilon_1 \cdot \epsilon_{r+2} \cdots \epsilon_n \cdot V_{n-r}(\Theta_L)$, respectivamente, luego el signo $\tau(L, F)$ que aparece en la fórmula de Schläfli es $\tau(L, F) = \epsilon_0 \cdot \epsilon_1$.

El ángulo diédrico del símplexe hiperbólico Θ_L en la cara Θ_F es

$$\beta(\Theta_F, \Theta_L) = \pi - \text{ang}(\mathbf{v}'_0, \mathbf{v}'_1)$$

donde $\mathbf{v}'_0, \mathbf{v}'_1$ son dos vectores pertenecientes al subespacio vectorial de \mathbf{R}_1^{n+1} generado por $\{\epsilon_0 \mathbf{w}_0, \epsilon_1 \mathbf{w}_1, \epsilon_{r+2} \mathbf{w}_{r+2}, \dots, \epsilon_n \mathbf{w}_n\}$, tales que $\langle \mathbf{v}'_i, \epsilon_j \mathbf{w}_j \rangle = \delta_{ij}$ para $i = 0, 1; j = 0, 1, r+2, \dots, n$. Como el subespacio generado por $\{\epsilon_0 \mathbf{w}_0, \epsilon_1 \mathbf{w}_1, \epsilon_{r+2} \mathbf{w}_{r+2}, \dots, \epsilon_n \mathbf{w}_n\}$ es ortogonal al subespacio generado por $\{\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{r+1}\}$, resulta que los vectores $\mathbf{v}'_0, \mathbf{v}'_1$ están unívocamente determinados por las condiciones

$$\begin{cases} \langle \epsilon_i \mathbf{v}'_i, \mathbf{w}_j \rangle = \delta_{ij} \\ \langle \epsilon_i \mathbf{v}'_i, \mathbf{v}_k \rangle = 0 \end{cases} \quad \text{para } i = 0, 1; j = 0, 1, r+2, \dots, n; k = 2, \dots, r+1. \quad (5)$$

Consideremos el subespacio vectorial Π de \mathbf{R}_1^{n+1} generado por los vectores $\{\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{r+1}, \mathbf{w}_{r+2}, \dots, \mathbf{w}_n\}$. Este subespacio tiene codimensión 2 en \mathbf{R}_1^{n+1} , porque es suma directa de los dos subespacios, mutuamente ortogonales, que tienen por bases $\{\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{r+1}\}$ y $\{\mathbf{w}_{r+2}, \dots, \mathbf{w}_n\}$, respectivamente. De las condiciones (4) y (5) se deduce entonces que $\{\mathbf{w}'_0, \mathbf{w}'_1\}$ y $\{\epsilon_0 \mathbf{v}'_0, \epsilon_1 \mathbf{v}'_1\}$ son dos bases del plano Π^\perp ortogonal a Π en \mathbf{R}_1^{n+1} . Además, como $\langle \mathbf{w}'_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij}$ para $i = 0, 1; j = 0, \dots, r+1$, resulta que \mathbf{w}'_i es suma de \mathbf{w}_i más una combinación lineal de $\mathbf{w}_{r+2}, \dots, \mathbf{w}_n$. Y como $\langle \epsilon_i \mathbf{v}'_i, \mathbf{w}_j \rangle = \delta_{ij}$ para $i = 0, 1; j = 0, 1, r+2, \dots, n$, se tiene finalmente que $\langle \epsilon_i \mathbf{v}'_i, \mathbf{w}'_j \rangle = \delta_{ij}$ para $i, j = 0, 1$. Por tanto, $\{\mathbf{w}'_0, \mathbf{w}'_1\}$ y $\{\epsilon_0 \mathbf{v}'_0, \epsilon_1 \mathbf{v}'_1\}$ son bases *duales* del plano Π^\perp . En consecuencia,

$$\text{ang}(\mathbf{w}'_0, \mathbf{w}'_1) = \pi - \text{ang}(\epsilon_0 \mathbf{v}'_0, \epsilon_1 \mathbf{v}'_1)$$

y por tanto

$$\begin{aligned} d\alpha(L, F) &= -d(\text{ang}(\mathbf{w}'_0, \mathbf{w}'_1)) \\ &= d(\text{ang}(\epsilon_0 \mathbf{v}'_0, \epsilon_1 \mathbf{v}'_1)) \\ &= \epsilon_0 \epsilon_1 \cdot d(\text{ang}(\mathbf{v}'_0, \mathbf{v}'_1)) \\ &= -\tau(L, F) \cdot d\beta(\Theta_F, \Theta_L) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta ahora las fórmulas de Schläfli (2) y (3), resulta que

$$\begin{aligned}
& \sum_{\dim(F)=r+1} \theta_F \cdot dV_{r+1}(F) = \\
&= \frac{1}{r} \sum_{\dim(F)=r+1} \sum_{\substack{L \subset F \\ \dim(L)=r-1}} \theta_F \cdot V_{r-1}(L) \cdot d\alpha(L, F) \\
&= \frac{-1}{r} \sum_{\dim(L)=r-1} \sum_{\substack{L \subset F \\ \dim(F)=r+1}} V_{r-1}(L) \cdot \theta_F \cdot \tau(L, F) \cdot d\beta(\Theta_F, \Theta_L) \\
&= \frac{n-r-1}{r} \sum_{\dim(L)=r-1} V_{r-1}(L) \cdot \left(\frac{-1}{n-r-1} \sum_{\substack{L \subset F \\ \dim(F)=r+1}} \theta_F \cdot \tau(L, F) d\beta(\Theta_F, \Theta_L) \right) \\
&= \frac{n-r-1}{r} \sum_{\dim(L)=r-1} V_{r-1}(L) \cdot d\theta_L
\end{aligned}$$

Usando las propiedades de la función gamma, llegamos finalmente a la fórmula buscada:

$$\begin{aligned}
& \Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n-r-1}{2}\right) \cdot \sum_{\dim(F)=r+1} \theta_F \cdot dV_{r+1}(F) = \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n-r+1}{2}\right)}{2} \cdot \sum_{\dim(F)=r-1} V_{r-1}(F) \cdot d\theta_F
\end{aligned}$$

□

Vamos a definir las constantes siguientes (cf. [Sa₁]) para $0 \leq i \leq n-1$:

$$c_i = \frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n-i}{2}\right)}{2 \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \frac{\text{Vol}(\mathbf{S}^n)}{\text{Vol}(\mathbf{S}^i) \cdot \text{Vol}(\mathbf{S}^{n-1-i})}$$

Entonces para $1 \leq r \leq n-2$, la igualdad (1) se puede escribir también como:

$$c_{r+1} \cdot \sum_{\dim(F)=r+1} \theta_F \cdot dV_{r+1}(F) - c_{r-1} \cdot \sum_{\dim(F)=r-1} V_{r-1}(F) \cdot d\theta_F = 0 \quad (6)$$

Observación 5.1. En la demostración de la proposición 5.1 no se ha usado en ningún momento que el simplexe Δ sea compacto. Por tanto, las igualdades (6) se verifican también para cualquier subconjunto (no vacío) de la esfera de de Sitter S_1^n que sea intersección de S_1^n con un cono simplicial de \mathbf{R}_1^{n+1} , y tal que todas sus caras de codimensión ≥ 1 sean riemannianas. (Por ejemplo, el polar Δ^* de un n -simplexe hiperbólico Δ , cf. lema 4.1.1.)

Una fórmula de Gauss-Bonnet.

Proposición 5.2. Sea Δ un n -símplice en la esfera de de Sitter S_1^n tal que todas sus caras sean riemannianas. Entonces

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \cdot c_{2k} \cdot \sum_{\dim(F)=2k} V_{2k}(F) \cdot \theta_F = 0 \quad (7)$$

donde se suma sobre todas las caras F de Δ de dimensión par, $V_{2k}(F)$ es el volumen de una cara F de dimensión $2k$, θ_F es la medida algebraica del ángulo polar de Δ en la cara F , y c_i es la constante definida por

$$c_i = \frac{\text{Vol}(\mathbf{S}^n)}{\text{Vol}(\mathbf{S}^i) \cdot \text{Vol}(\mathbf{S}^{n-1-i})} = \frac{\Gamma(\frac{i+1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{n-i}{2})}{2 \Gamma(\frac{n+1}{2})} \quad \text{si } 0 \leq i \leq n-1 \quad \text{y} \quad c_n = 1$$

(Estamos usando aquí los siguientes convenios: si $k = \frac{n}{2}$, entonces el ángulo polar θ_Δ en todo el símplice se toma igual a -1 ; si $k = \frac{n-1}{2}$, entonces los ángulos polares en las caras de codimensión 1 son ± 1 (ver definición 5.1), y si $k = 0$, entonces los volúmenes de las caras de dimensión 0 son 1)

Observación 5.2. Para dimensión n par, la fórmula de Gauss-Bonnet (7) permite expresar el volumen del n -símplice Δ en términos de los volúmenes de símplices de dimensión menor:

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \cdot V_n(\Delta) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^k \cdot c_{2k} \cdot \sum_{\dim(F)=2k} V_{2k}(F) \cdot \theta_F \quad \text{si } n \text{ es par}$$

Cuando n es impar, la fórmula de Gauss-Bonnet no incluye el volumen del propio símplice, y por tanto no da una expresión de $V_n(\Delta)$ en términos de los volúmenes de símplices de dimensión más pequeña:

$$\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k \cdot c_{2k} \cdot \sum_{\dim(F)=2k} V_{2k}(F) \cdot \theta_F = 0 \quad \text{si } n \text{ es impar}$$

Demostración de la proposición 5.2. Vamos a hacer la demostración sólo en el caso en que n es par; el otro caso es análogo.

Sea, pues, n un número par y Δ un n -símplice en S_1^n tal que todas sus caras son riemannianas. La fórmula de Schläfli en la esfera de de Sitter (teorema 3.5.1) dice que

$$dV_n(\Delta) = \frac{1}{n-1} \sum_F V_{n-2}(F) d\alpha_F$$

donde se suma sobre todas las caras F de codimensión 2 de Δ y α_F es el ángulo diédrico de Δ en la cara F . Ahora bien, de las definiciones de ángulo diédrico y ángulo polar se deduce fácilmente que el ángulo polar de Δ en la cara F es $\theta_F = -\alpha_F$. (En efecto, con las mismas notaciones de la definición 5.1 se tiene que, si $\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j$ son los vectores ortogonales a la cara F , entonces $\alpha_F = -\text{ang}(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j)$, mientras que $\theta_F = \epsilon_i \cdot \epsilon_j \cdot \text{ang}(\epsilon_i \mathbf{w}_i, \epsilon_j \mathbf{w}_j) = (\epsilon_i \cdot \epsilon_j)^2 \cdot \text{ang}(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) = \text{ang}(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j)$) Por tanto, también podemos escribir

$$dV_n(\Delta) = \frac{-1}{n-1} \sum_F V_{n-2}(F) d\theta_F$$

Teniendo en cuenta además que la constante $c_{n-2} = \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{2 \Gamma(\frac{n+1}{2})} = \frac{1}{n-1}$, resulta que

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \cdot dV_n(\Delta) = (-1)^{\frac{(n-2)}{2}} \cdot c_{n-2} \cdot \sum_{\dim(F)=n-2} V_{n-2}(F) d\theta_F$$

Considerando, por otra parte, las relaciones (6), se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} (-1)^{\frac{(n-2)}{2}} \cdot c_{n-2} \cdot \sum_{\dim(F)=n-2} V_{n-2}(F) d\theta_F = (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot dV_n(\Delta) \\ (-1)^{\frac{(n-2)}{2}} \cdot c_{n-2} \cdot \sum_{\dim(F)=n-2} \theta_F dV_{n-2}(F) + (-1)^{\frac{(n-4)}{2}} \cdot c_{n-4} \cdot \sum_{\dim(F)=n-4} V_{n-4}(F) d\theta_F = 0 \\ \vdots \\ c_4 \cdot \sum_{\dim(F)=4} \theta_F dV_4(F) - c_2 \cdot \sum_{\dim(F)=2} V_2(F) d\theta_F = 0 \\ -c_2 \cdot \sum_{\dim(F)=2} \theta_F dV_2(F) + c_0 \cdot \sum_{\dim(F)=0} d\theta_F = 0 \end{array} \right.$$

Si sumamos todas estas igualdades, obtenemos que

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \cdot dV_n(\Delta) = d \left(\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^k \cdot c_{2k} \cdot \sum_{\dim(F)=2k} V_{2k}(F) \cdot \theta_F \right)$$

e integrando resulta que

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \cdot V_n(\Delta) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^k \cdot c_{2k} \cdot \sum_{\dim(F)=2k} V_{2k}(F) \cdot \theta_F + \text{constante}$$

Para determinar la constante de integración, consideremos el caso límite en el que el simplejo hiperbólico polar Δ^* degenera en un punto, de modo que todos los ángulos polares de Δ tienden a cero. Entonces

el simple Δ degenera en un subconjunto contenido en un hiperplano de S_1^n , y por tanto $V_n(\Delta) \rightarrow 0$. En consecuencia, la constante de integración es nula y se obtiene la fórmula buscada:

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \cdot V_n(\Delta) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^k \cdot c_{2k} \cdot \sum_{\dim(F)=2k} V_{2k}(F) \cdot \theta_F$$

□

Observación 5.3. He llamado a la fórmula (7) *fórmula de Gauss-Bonnet* debido a su analogía con las fórmulas generalizadas de Gauss-Bonnet para poliedros convexos en el espacio no euclídeo de curvatura constante $\kappa = \pm 1$ (cf. [Sa1], [AVS]). Sin embargo, existe la diferencia esencial de que en la fórmula (7), para simples de la esfera de de Sitter S_1^n con todas sus caras riemannianas, el segundo miembro de la igualdad es cero. Por tanto, si tratáramos de generalizar la fórmula (7) a poliedros de S_1^n triangulables mediante simples de este tipo, no aparecería la característica de Euler del poliedro.

Observación 5.4. El mismo procedimiento utilizado en la demostración de las proposiciones 5.1 y 5.2 se puede aplicar también en los casos esférico e hiperbólico para probar las citadas fórmulas de Gauss-Bonnet para simples en S^n y H^n . Dichas fórmulas se pueden deducir, pues, de las fórmulas de Schläfli esférica e hiperbólica.

6. APLICACIÓN 3 : VOLUMEN DUAL DE UN n -SÍMPlice HIPERBÓLICO. (GENERALIZACIÓN DE UNA FÓRMULA DE SANTALÓ.)

Sea $\Delta = \{x_0 v_0 + \dots + x_n v_n \mid x_0 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\} \cap H^n$ un n -simple hiperbólico, y sea $\{w_0, \dots, w_n\}$ la base dual de $\{v_0, \dots, v_n\}$. Consideremos el polar de Δ , $\Delta^* = \{x_0 w_0 + \dots + x_n w_n \mid x_0 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\} \cap S_1^n$, y el dual complementario, $\Delta^P = \{x_0 w_0 + \dots + x_n w_n \mid x_0 \geq 0 \text{ y } x_i \leq 0 \text{ para algún } i \in \{1, \dots, n\}\} \cap S_1^n$. Vimos ya en §4.1 que el volumen dual de Δ (es decir, la medida del conjunto de hiperplanos de H^n que cortan a Δ) coincide con el volumen $V_n(\Delta^P)$ de su dual complementario en S_1^n . Ahora vamos a relacionar este volumen dual $V_n(\Delta^P)$ con los volúmenes de las caras de dimensión impar del simple hiperbólico Δ y con los ángulos polares en esas caras.

Definición 6.1. A cada cara de codimensión $k + 1$ del simple Δ ($0 \leq k \leq n - 1$),

$$F = \{x_0 v_0 + \dots + x_n v_n \mid x_0 \geq 0, \dots, x_n \geq 0; x_{i_1} = \dots = x_{i_k} = 0\} \cap H^n$$

le asociaremos la siguiente cara de dimensión k del polar Δ^* :

$$F^* = \{x_{i_1} v_{i_1} + \cdots + x_{i_k} v_{i_k} \mid x_{i_1} \geq 0, \dots, x_{i_k} \geq 0\} \cap S_1^n$$

Diremos que F y F^* son *caras polares*. Llamaremos *ángulo polar* θ_F del simplejo hiperbólico Δ en la cara F al volumen de la cara polar F^* (que es un simplejo esférico de dimensión k ; cf. Lema 4.1.1).

Observación 6.1. Si F es una cara de codimensión 2 de Δ y α_F es el ángulo diédrico de Δ en F , entonces el ángulo polar es $\theta_F = \pi - \alpha_F$.

Proposición 6.1. Sea Δ un n -simplejo hiperbólico. Entonces su volumen dual es

$$V_n(\Delta^P) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \cdot c_{2k+1} \cdot \sum_{\dim(F)=2k+1} V_{2k+1}(F) \cdot \theta_F \quad (1)$$

donde se suma sobre todas las caras F de Δ de dimensión impar, $V_{2k+1}(F)$ es el volumen de una cara F de dimensión $2k+1$, θ_F es el ángulo polar de Δ en la cara F , y c_i es la constante definida por

$$c_i = \frac{\text{Vol}(\mathbf{S}^n)}{\text{Vol}(\mathbf{S}^i) \cdot \text{Vol}(\mathbf{S}^{n-1-i})} = \frac{\Gamma(\frac{i+1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{n-i}{2})}{2 \Gamma(\frac{n+1}{2})} \quad \text{si } 0 \leq i \leq n-1 \quad \text{y} \quad c_n = 1$$

(Estamos usando aquí los siguientes convenios: si $k = \frac{n-1}{2}$, entonces el ángulo polar θ_Δ en todo el simplejo se toma igual a 1; si $k = \frac{n-2}{2}$, entonces los ángulos polares en las caras de codimensión 1 son 1, y si $k = 0$, entonces los volúmenes de las caras de dimensión 0 son 1)

Observación 6.2. Para dimensión n impar, la fórmula (1) permite relacionar el volumen del n -simplejo Δ con su volumen dual:

$$V_n(\Delta^P) + (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot V_n(\Delta) = \sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} (-1)^k \cdot c_{2k+1} \cdot \sum_{\dim(F)=2k+1} V_{2k+1}(F) \cdot \theta_F \quad \text{si } n \text{ es impar}$$

En particular, para dimensión 3 se obtiene de nuevo la fórmula de Santaló para tetraedros hiperbólicos:

$$V_3(\Delta) + V_3(\Delta^P) = \frac{1}{2} \sum_{\dim(F)=1} V_1(F) \cdot \theta_F$$

Cuando n es par, la fórmula (1) relaciona, en cambio, el volumen dual del simplejo Δ con su "área superficial" $S_{n-1}(\Delta)$, es decir, con la suma de los volúmenes de todas sus caras de codimensión 1:

$$V_n(\Delta^P) + (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot c_{n-1} \cdot S_{n-1}(\Delta) = \sum_{k=0}^{\frac{n-4}{2}} (-1)^k \cdot c_{2k+1} \cdot \sum_{\dim(F)=2k+1} V_{2k+1}(F) \cdot \theta_F \quad \text{si } n \text{ es par}$$

En particular, para dimensión 2, la fórmula dice que la medida del conjunto de rectas que cortan a un triángulo hiperbólico plano, es igual al perímetro del triángulo. En dimensión 4, dice que

$$3 V_4(\Delta^P) + 2 S_3(\Delta) = \sum_{\dim(F)=1} V_1(F) \cdot \theta_F$$

Demostración de la proposición 5.1. Vamos también a hacerla sólo en el caso en que n es impar, pues el otro caso es análogo.

Consideremos el polar Δ^* de Δ . Aunque Δ^* no es compacto, sí es intersección de la esfera de de Sitter S_1^n con un cono simplicial de \mathbf{R}_1^{n+1} , y por tanto las igualdades (6) de la sección 5 son también válidas para Δ^* (ver Observación 5.1). Como las constantes c_i satisfacen la relación $c_i = c_{n-i-1}$, tenemos que para $2 \leq r \leq n-1$,

$$c_{r-2} \cdot \sum_{\dim(F^*)=n-r+1} \theta_{F^*} \cdot dV_{n-r+1}(F^*) - c_r \cdot \sum_{\dim(F^*)=n-r-1} V_{n-r-1}(F^*) \cdot d\theta_{F^*} = 0 \quad (2)$$

donde las sumas se extienden a todas las caras F^* del polar Δ^* de la dimensión indicada, θ_{F^*} es la medida algebraica del ángulo polar en la cara F^* , y $V_k(F^*)$ denota el volumen (k -dimensional) de una cara F^* de dimensión k de Δ^* .

Como la base dual $\{v_0, \dots, v_n\}$ de $\{w_0, \dots, w_n\}$ está formada por vectores temporales que están todos en el semicono superior, resulta que la medida algebraica del ángulo polar de Δ^* en cada cara F^* de dimensión k , coincide con el volumen de la cara polar F de Δ (cf. Definición 5.1). Se tiene, pues, la siguiente relación: si $F \subset \Delta$ y $F^* \subset \Delta^*$ son caras polares de dimensiones r y $n-r-1$, respectivamente, entonces

$$V_r(F) = \theta_{F^*} \quad \text{y} \quad V_{n-r-1}(F^*) = \theta_F$$

Por tanto, para $1 \leq r \leq n-2$, la igualdad (2) se puede escribir también en términos de magnitudes relacionadas con el propio simplejo hiperbólico Δ en vez de con su polar Δ^* , de la siguiente forma:

$$c_{r-2} \cdot \sum_{\dim(F)=r-2} V_{r-2}(F) \cdot d\theta_F - c_r \cdot \sum_{\dim(F)=r} \theta_F \cdot dV_r(F) = 0 \quad (3)$$

donde las sumas se extienden a todas las caras F del simplejo Δ de la dimensión indicada, θ_F es el ángulo polar de Δ en la cara F , y $V_k(F)$ denota el volumen (k -dimensional) de una cara F de dimensión k de Δ .

Por otra parte, si tenemos en cuenta la observación 6.1 y el hecho de que la constante $c_1 = c_{n-2} = \frac{1}{n-1}$, entonces la fórmula de Schläfli hiperbólica dice que

$$dV_n(\Delta) = c_{n-2} \cdot \sum_{\dim(F)=n-2} V_{n-2}(F) d\theta_F \quad (4)$$

Análogamente, como la constante $c_1 = c_{n-2} = \frac{1}{n-1}$, de la fórmula de Schläfli en la esfera de de Sitter se deduce (ver Lema 4.1.3) que:

$$dV_n(\Delta^P) = c_1 \cdot \sum_{\dim(F^*)=n-2} V_{n-2}(F^*) d\alpha_{F^*}$$

donde se suma sobre todas las caras F^* de codimensión 2 del polar Δ^* , y α_{F^*} es el ángulo diédrico de Δ^P en la cara F^* . En la demostración del Lema 4.1.3 se vio que $\alpha_{F^*} = V_1(F)$, donde F es la cara polar de F^* . Como además $V_{n-2}(F^*) = \theta_F$, resulta que

$$dV_n(\Delta^P) = c_1 \cdot \sum_{\dim(F)=1} \theta_F dV_1(F) \quad (5)$$

Juntando las ecuaciones (3), (4) y (5), tenemos que

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 \cdot \sum_{\dim(F)=1} \theta_F dV_1(F) = dV_n(\Delta^P) \\ c_1 \cdot \sum_{\dim(F)=1} V_1(F) d\theta_F - c_3 \cdot \sum_{\dim(F)=3} \theta_F dV_3(F) = 0 \\ \vdots \\ (-1)^{\frac{(n-5)}{2}} \cdot c_{n-4} \cdot \sum_{\dim(F)=n-4} V_{n-4}(F) d\theta_F + (-1)^{\frac{(n-3)}{2}} \cdot c_{n-2} \cdot \sum_{\dim(F)=n-2} \theta_F dV_{n-2}(F) = 0 \\ (-1)^{\frac{(n-3)}{2}} \cdot c_{n-2} \cdot \sum_{\dim(F)=n-2} V_{n-2}(F) d\theta_F = (-1)^{\frac{(n-3)}{2}} \cdot dV_n(\Delta) \end{array} \right.$$

Sumando todas estas igualdades, obtenemos que

$$d\left(V_n(\Delta^P) + (-1)^{\frac{(n-3)}{2}} \cdot V_n(\Delta) \right) = d\left(\sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} (-1)^k \cdot c_{2k+1} \cdot \sum_{\dim(F)=2k+1} V_{2k+1}(F) \cdot \theta_F \right)$$

e integrando resulta que

$$V_n(\Delta^P) + (-1)^{\frac{(n-3)}{2}} \cdot V_n(\Delta) = \sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} (-1)^k \cdot c_{2k+1} \cdot \sum_{\dim(F)=2k+1} V_{2k+1}(F) \cdot \theta_F + \text{constante}$$

Para determinar la constante de integración, consideremos de nuevo el caso límite en el que el simplejo hiperbólico Δ degenera en un punto, de modo que Δ^P degenera en un hiperplano de S_1^n , y por tanto $V_n(\Delta) \rightarrow 0, V_n(\Delta^P) \rightarrow 0$, y los volúmenes de todas las caras de Δ tienden a cero. En consecuencia, la constante de integración es nula y se obtiene la fórmula buscada:

$$V_n(\Delta^P) + (-1)^{\frac{(n+1)}{2}} \cdot V_n(\Delta) = \sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} (-1)^k \cdot c_{2k+1} \cdot \sum_{\dim(F)=2k+1} V_{2k+1}(F) \cdot \theta_F$$

□

BIBLIOGRAFÍA

- [AVS] D.V. Alekseevskij, E.B. Vinberg, A.S. Solodovnikov, *Geometry of spaces of constant curvature*, Geometry II (E.B. Vinberg, ed.), Encyclopedia of Mathematical Sciences, vol. 29, Springer Verlag, 1993, pp. 1-138.
- [Bi] L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni*, E. Spoerri ed., Pisa, 1918,
- [BP] M. Boileau, J. Porti, *On Thurston's Orbifold Theorem*, en preparación.
- [Bo] F. Bonahon, *Diffeotopies des espaces lenticulaires*, *Topology* **22** (1983) n°3, 305-314.
- [BS] F. Bonahon, L. Siebenmann, *The classification of Seifert fibred 3-orbifolds*, Low Dimensional Topology (R. Fenn, ed.), London Math. Soc. Lecture Note Series **95**, Cambridge Univ. Press, 1985, pp. 19-85.
- [Bu] G. Burde, *SU(2)-representation spaces for two-bridge knot groups*, *Math. Ann.* **288** (1990), 103-119.
- [BZ] G. Burde, H. Zieschang, *Knots*, de Gruyter, 1985.
- [CEG] R.D. Canary, D.B.A. Epstein, P. Green, *Notes on notes of Thurston*, Analytical and Geometric Aspects of Hyperbolic Space (D.B.A. Epstein, ed.), London Math. Soc. Lecture Note Series **111**, Cambridge Univ. Press, 1987, pp. 3-92.
- [Ch] G. Choquet, *Cours d'Analyse - Topologie (Tome II)*, Masson et Cie, 1964.
- [Con] J. H. Conway, *An enumeration of knot and links, and some of their algebraic properties*, Coll. Computational Problems in Abstract Algebra (Proc. Conf. Oxford, 1967), Pergamon, Oxford, 1970, pp. 329-358.
- [CZ] S. Cuccagna, B. Zimmermann, *On the mapping class group of spherical 3-orbifolds*, *Proc. Am. Math. Soc.* **116** (1992) n°2, 561-566.
- [Cu] M. Culler, *Lifting representations to covering groups*, *Advances in Math.* **59** (1986), 64-70.
- [CS] M. Culler, P. Shalen, *Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds*, *Annals of Math.* **117** (1993), 109-146.
- [Du] W.D. Dunbar, *Geometric Orbifolds*, *Revista Matemática de la Univ. Complutense de Madrid* **1** (1988), 67-99.
- [F] W. Fenchel, *Elementary Geometry in Hyperbolic Space*, *Stud. Math.* **11**, de Gruyter, 1989.
- [GHL] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer Verlag, 1990. n°3, 305-314.
- [Go₁] W.M. Goldman, *Geometric structures on manifolds and varieties of representations*, *Contemporary Mathematics* **74** (1988), pp. 169-198.

- [Go₂] W.M. Goldman, *Nonstandard Lorentz space forms*, J. Diff. Geom. **21** (1985), n°2, 301-308.
- [GM] F. González-Acuña, J.M. Montesinos, *On the character variety of group representations in $SL(2, \mathbb{C})$ and $PSL(2, \mathbb{C})$* , Math. Z. **214** (1993), 627-652.
- [Gro] M. Gromov, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, (J. Lafontaine, P. Pansu, eds.), Textes Mathématiques 1, CEDIC Nathan, Paris, 1981.
- [He] M. Heusener, *$SO_3(\mathbb{R})$ -representation curves for two-bridge knot groups*, Math. Ann. **298** (1994), 327-348.
- [HLM₁] H.M. Hilden, M.T. Lozano, J.M. Montesinos, *On a remarkable polyhedron geometrizing the figure eight knot cone manifolds*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **2** (1995), 501-561.
- [HLM₂] H.M. Hilden, M.T. Lozano, J.M. Montesinos, *On the arithmetic 2-bridge knot and link orbifolds and a new knot invariant*, J. Knot Theory and its Ramifications **4** (1995) n°1, 81-114.
- [HLM₃] H.M. Hilden, M.T. Lozano, J.M. Montesinos, *On volumes and Chern-Simons invariants of geometric 3-manifolds*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **3** (1996), 723-744.
- [HLM₄] H.M. Hilden, M.T. Lozano, J.M. Montesinos, *Volumes and Chern-Simons invariants of cyclic coverings over rational knots*, Proc. of the 37th Taniguchi Symposium on Topology and Teichmüller spaces, Finland, July 1995 (S. Kojima et al., eds.), World Scientific Publishing Co. 1996, pp. 31-55.
- [HLM₅] H.M. Hilden, M.T. Lozano, J.M. Montesinos, *On the Borromean Orbifolds: Geometry and Arithmetic*, Topology'90, Proc. of the Research Semester in Low Dimensional Topology (Ohio State Univ.) (B. Apanasov, W. Neumann, A. Reid, L. Siebenmann, eds.), de Gruyter, 1992, pp. 133-167.
- [HLM₆] H.M. Hilden, M.T. Lozano, J.M. Montesinos, *The arithmeticity of certain torus bundle cone 3-manifolds and hyperbolic surface bundle 3-manifolds, and an enhanced arithmeticity test*, Knots'96, Proc. of the 5th International Research Institute of Mathematical Society of Japan, Tokyo, July 1996 (S. Suzuki, ed.), World Scientific Publishing Co. 1997, pp. 73-80.
- [Ho₁] C. Hodgson, *Degeneration and regeneration of geometric structures on 3-manifolds*, PhD thesis, Princeton University 1986.
- [Ho₂] C. Hodgson, *Geometric structures on 3-dimensional orbifolds: Notes on Thurston's proof*, preprint.
- [HK] C. Hodgson, S. Kerckhoff, *Rigidity of hyperbolic cone-manifolds and hyperbolic Dehn surgery*, preprint.
- [Kl] E.P. Klassen, *Representations of knot groups in $SU(2)$* , Transactions of the AMS **326**(2) (1991), 795-828.
- [Kne] H. Kneser, *Der Simplexinhalt in der nichteuklidischen Geometrie*, Deutsche Math. **1** (1936), 337-340.

- [KN] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Interscience publishers, 1963.
- [Ko] S. Kojima, *Deformations of hyperbolic 3-cone-manifolds*, preprint.
- [Ku₁] R.S. Kulkarni, *Fundamental groups of homogeneous space forms*, *Math. Ann.* **234** (1978), 51-60.
- [Ku₁] R.S. Kulkarni, *Proper actions and pseudo-riemannian space forms*, *Adv. in Math.* **40** (1981), n°1, 10-51.
- [KR] R.S. Kulkarni, F. Raymond *3-dimensional Lorentz space-forms and Seifert fiber spaces*, *J. Diff. Geom.* **21** (1985), 231-268.
- [LS] M.T. Lozano, C. Safont, *Virtually regular coverings*, *Proc. AMS* **106** (1989), 207-214.
- [Ma] J.E. Marsden, *Elementary classical analysis*, Freeman & Co., 1974.
- [MM] Y. Matsumoto, J.M. Montesinos, *A proof of Thurston's uniformization theorem of geometric orbifolds*, *Tokyo J. Math.* **14** (1991), n°1, 181-196.
- [Mil₁] J. Milnor, *Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups*, *Advances in Math.* **21** (1976), 293-329.
- [Mil₂] J. Milnor, *The Schläfli differential equality*, *Collected papers*, vol. 1, Publish or Perish, 1994.
- [Mol] E. Molnár, *The projective interpretation of the eight 3-dimensional homogeneous geometries*, *Beiträge zur Algebra und Geometrie* **38** (1997), n°2, 261-288.
- [Mo₁] J.M. Montesinos, *Varietades de Seifert que son recubridores cíclicos ramificados de dos hojas*, *Bol. Soc. Mat. Mexicana* (2) **18** (1973), 1-32.
- [Mo₂] J.M. Montesinos, *Schläfli formula with integral geometry?* (manuscrito sin publicar, contenido en una carta al profesor L. Santaló del 18-6-93).
- [O'N] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with applications to Relativity*, Academic Press, 1983.
- [Ot] J.P. Otal, *Thurston's hyperbolization of Haken manifolds*, preprint, École Normale Supérieure de Lyon, n°208 (1997).
- [Po] J. Porti, *Regenerating hyperbolic and spherical cone structures from euclidean ones*, preprint.
- [Rat] J.G. Ratcliffe, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Springer-Verlag, 1994.
- [Ri₁] R. Riley, *An elliptical path from parabolic representations to hyperbolic structures*, *Topology of low-dimensional manifolds* (Proc. Second Sussex Conf, Chelwood Gate, 1977), *Lecture Notes in Mathematics* **722**, pp. 99-133.
- [Ri₂] R. Riley, *Seven excellent knots*, *Low Dimensional Topology*, *London Math. Soc. Lecture Note Series* **48** (R. Brown, T.L.Thickstun, eds.), Cambridge Univ. Press 1982, pp. 81-151.
- [Ri₃] R. Riley, *Nonabelian representations of 2-bridge knot groups*, *Q. J. Math. Oxf.* **35** (1984), 191-208.
- [Sa₁] L. Santaló, *Sobre la fórmula de Gauss-Bonnet para poliedros en espacios de curvatura constante*, *Revista de la Union Matemática Argentina* **XX** (1960), 79-91.

- [Sa₂] L. Santaló, *Integral Geometry and Geometric Probability*, Encyclopedia of Mathematics and its applications, vol. 1, Addison-Wesley, 1976.
- [Sb] H. Schubert, *Knoten mit zwei Brücken*, Math. Z. **65** (1956), 133-170.
- [Sch] L. Schläfli, *On the multiple integral $\int^n dx dy \dots dz$, whose limits are $p_1 = a_1x + b_1y + \dots + h_1z > 0$, $p_2 > 0, \dots, p_n > 0$, and $x^2 + y^2 + \dots + z^2 < 1$* , Quart. J. pure appl. Math. **2** (1858), 69-301.
- [Sc] P. Scott, *The Geometries of 3-Manifolds*, Bull. London Math. Soc. **15** (1983), 401-487.
- [ST] H. Seifert, W. Threlfall, *A textbook of topology*, Academic Press, 1980.
- [SOK] T. Soma, K. Ohshika, S. Kojima, *Towards a proof of Thurston's geometrization theorem for orbifolds*, preprint.
- [Thi] B. Thiel, *Einheitliche Beschreibung der acht Thurstonschen Geometrien*, Diplomarbeit, Göttingen 1997.
- [Thu₁] W.P. Thurston, *The Geometry and Topology of 3-Manifolds*, notes of the Princeton Math. Dept., 1979.
- [Thu₂] W.P. Thurston, *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Volume 1, Princeton Univ. Press, 1997.
- [Zh] Q. Zhou, *3-dimensional geometric cone structures*, PhD thesis, University of California, L.A., 1989.