UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Departamento de Matemática Aplicada

DEPENDENCIA CONTINUA RESPECTO A VARIACIONES DEL DOMINIO Y CONDICIONES DE FRONTERA DE LAS SOLUCIONES POSITIVAS DE UNA CLASE GENERAL DE PROBLEMAS DE CONTORNO SUBLINEALES ELÍPTICOS

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Santiago Cano Casanova

Bajo la dirección del doctor:
Julián López Gómez

Madrid, 2001

ISBN: 84-669-1792-6

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Facultad de Ciencias Matemáticas
Departamento de Matemática Aplicada

DEPENDENCIA CONTINUA RESPECTO A VARIACIONES DEL DOMINIO Y CONDICIONES DE FRONTERA DE LAS SOLUCIONES POSITIVAS DE UNA CLASE GENERAL DE PROBLEMAS DE CONTORNO SUBLINEALES ELÍPTICOS

TESIS DOCTORAL

Presentada por

Santiago Cano Casanova

Dirigida por

Julián López Gómez

Marzo de 2001

618842987
i26148377

Dependencia continua respecto a variaciones del dominio y condiciones de frontera de las soluciones positivas de una clase general de problemas de contorno sublineales elípticos

Santiago Cano Casanova

A Gema, mi mujer
y a mis padres

Agradecimientos

Deseo expresar mi gratitud a todas aquellas personas que, de una u otra forma, me han ayudado a llevar a cabo esta memoria. En especial:

Mis más sincero agradecimiento y mi más profunda admiración hacia el Profesor Julián López-Gómez, director de esta Memoria, por la amplia disponibilidad y constante atención que me ha brindado a lo largo de estos años, por la gran paciencia que ha mostrado en mis momentos de cerrazón, por sus continuos y sabios consejos, por haber aumentado mi visión en el campo de las matemáticas y sobre todo, por haber despertado mi interés en una parcela de éstas que me apasiona. Él ha sabido contagiarme y hacerme partícipe, de su intriga científica y dedicación a la hora de "hacer matemáticas". Indudablemente, a él le debo una parte muy importante de mi formación matemática. Espero en un futuro próximo poder seguir contando con su inestimable ayuda y profunda amistad.

Mi más profundo agradecimiento a todos mis compañeros del Dpto. de Matemática Aplicada y Computación de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de la Universidad Pontificia Comillas de Madrid, y muy en especial, a los profesores Felix Alonso, Lucia Cerrada, María Luisa Guerrero, Angela Jiménez, Antonio López y Agustín de la Villa, por su apoyo sincero e incondicional y porque, de una u otra forma, siempre me han ayudado a lo largo de estos años ocupándose de mis tareas docentes cuando ha sido necesario.

A mis padres, a los que tanto debo y de quien aprendí la constancia y perseverancia en el trabajo, por estar siempre a mi lado.

A Gema, mi mujer, porque ha sido un constante apoyo a lo largo de todos estos años, por ayudarme a no desanimarme en los peores momentos y por todo el tiempo que le debí dedicar y no lo hice. Espero poder recompensarla de ahora en adelante.

Gracias a todos.

Madrid, marzo de 2001.

Índice

Introducción

En esta memoria tratamos algunos problemas relevantes, con condiciones de frontera generales, dentro del marco de la teoría de problemas elípticos de valores en la frontera lineales y semilineales. A lo largo de esta memoria trabajamos con un dominio acotado Ω de $\mathbf{R}^N$, $N \geq 1$, de clase $\mathcal{C}^2$ con frontera $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, donde Γ_0 y Γ_1 son dos subconjuntos disjuntos abiertos y cerrados de $\partial\Omega$, y $\mathcal{L}$ es el operador diferencial lineal elíptico de segundo orden definido por

$$\mathcal{L} := -\sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \alpha_0(x)\,. \tag{1}$$

Se supone que $\mathcal{L}$ es uniformemente fuertemente elíptico en Ω con coeficientes

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})\,, \qquad \alpha_k \in L_\infty(\Omega)\,, \qquad 1 \leq i\,,j \leq N\,, \quad 0 \leq k \leq N\,.$$

En lo que a las condiciones de frontera concierne, a lo largo de este trabajo para cada función $b \in \mathcal{C}(\Gamma_1)$, el operador $\mathcal{B}(b)$ representa al operador de frontera definido por

$$\mathcal{B}(b)\varphi := \begin{cases} \varphi & \text{en } \Gamma_0\,, \\ \partial_\nu \varphi + b\varphi & \text{en } \Gamma_1\,, \end{cases} \tag{2}$$

donde

$$\nu = (\nu_1, ..., \nu_N) \in \mathcal{C}^1(\Gamma_1, \mathbf{R}^N)$$

es un campo vectorial exterior y no tangente y

$$\partial_\nu \varphi := \langle \nabla \varphi, \nu \rangle\,.$$

Así, $\mathcal{B}(b)$ es el operador de frontera de Dirichlet sobre Γ_0, denotado en lo sucesivo por $\mathcal{D}$, y el operador de frontera de Neumann o de derivada regular oblicua de primer orden sobre Γ_1. Debe ser mencionado que o bien Γ_0 o Γ_1 puede ser el conjunto vacío.

Uno de los aspectos más importantes que merecen ser destacados, es que nuestras condiciones de frontera generales no se encuentran dentro del marco clásico de trabajo, ya que estamos tratando con condiciones de frontera mixtas y, además, la función peso en la frontera $b \in \mathcal{C}(\Gamma_1)$ pude ser negativa o anularse en alguna región de algunas de las componentes de Γ_1. Nuestro principal propósito en esta memoria es generalizar, a nuestro marco de trabajo, algunos resultados clásicos bien conocidos disponibles en la literatura, para problemas elípticos de valores en la frontera lineales y semilineales bajo condiciones de frontera más restrictivas. En este sentido la principal contribución de esta memoria es la obtención de nuevos, y más generales, resultados sobre dependencia continua de las soluciones de problemas elípticos lineales y semilineales de valores en la frontera, respecto a perturbaciones del dominio y condiciones de frontera. En un principio obtendremos resultados muy generales de dependencia continua del auto-par principal del problema de autovalores lineal elíptico

$$\begin{cases} \mathcal{L}\varphi = \lambda\varphi & \text{en} \quad \Omega\,, \\ \mathcal{B}(b)\varphi = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{3}$$

respecto a las variaciones del dominio y a las condiciones de frontera. Después, demostraremos la dependencia continua de las soluciones positivas del correspondiente problema semilineal elíptico

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda W(x)u - a(x)f(x,u)u & \text{en} \quad \Omega\,, \\ \mathcal{B}(b)u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{4}$$

respecto de variaciones del dominio y condiciones de frontera, donde $\lambda \in \mathbf{R}$, $W \in L_\infty(\Omega)$, $a > 0$ pertenece a cierta clase de potenciales no negativos y $f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega} \times [0,\infty); \mathbf{R})$ satisface

$$\lim_{u \nearrow \infty} f(x,u) = +\infty \qquad \text{uniformemente en} \qquad \bar{\Omega} \tag{5}$$

y

$$\partial_u f(x,u) > 0\,, \qquad \text{para todo} \qquad (x,u) \in \bar{\Omega} \times [0,\infty)\,. \tag{6}$$

Posteriormente, estudiaremos el comportamiento asintótico del auto-par principal de (3) y la solución positiva de (4) cuando

$$\min_{\Gamma_1} b \nearrow \infty\,. \tag{7}$$

Básicamente, nuestros resultados establecen que bajo la condición (7), el auto-par principal de (3), digamos (σ_1, φ_1), converge en $\mathbf{R} \times H^1(\Omega)$ al auto-par principal del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \mathcal{L}\varphi = \lambda\varphi & \text{en} \quad \Omega\,, \\ \varphi = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega\,, \end{cases}$$

y que la única solución positiva de (4), converge en $H^1(\Omega)$ a la única solución positiva del problema de Dirichlet sublineal

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda W(x)u - a(x)f(x,u)u & \text{en} \quad \Omega\,, \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Los resultados básicos en los que se apoyan nuestras contribuciones a la teoría de variación de dominios son el Teorema 12.1 de [4] el cual establece, bajo nuestras hipótesis generales, la existencia y unicidad del autovalor principal de (3), denotado en lo sucesivo por $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)]$; y la reciente caracterización del principio del máximo fuerte en términos de la positividad del autovalor principal y en términos de la existencia de una supersolución positiva estricta, debida a H. Amann y J. López-Gómez [5], donde se generalizó la caracterización previa de J. López-Gómez

& M. Molina-Meyer [36] obtenida para condiciones de frontera Dirichlet. Tal caracterización es la principal herramienta técnica utilizada para obtener muchas de las comparaciones realizadas a lo largo de este trabajo, entre ellas, las monotonías de $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)]$ con respecto al potencial y al dominio subyacente, su caracterización puntual mini-max, y su concavidad. Nuestros resultados están fuertemente motivados por los trabajos [4],[5],[8],[9],[19],[20], [33],[34],[35],[36] y, al lado de las técnicas de monotonía a las cuales ya nos hemos referido, las principales herramientas técnicas utilizadas para obtener nuestros refinamientos son teoría local y global de bifurcación.

Básicamente, esta memoria ha sido dividida en cinco capítulos. En el Capítulo 1 especificamos las principales propiedades sobre el dominio, sobre el operador diferencial y sobre las condiciones de frontera con las cuales trabajaremos a lo largo de toda la memoria. También agrupamos algunos de los principales resultados de [4] y [5] y fijamos algunas notaciones generales que serán utilizadas para desarrollar nuestra teoría. En el Capítulo 2 obtenemos algunas propiedades de monotonía y la caracterización puntual mini-max del autovalor principal $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)]$. También analizamos la dependencia continua con respecto a variaciones del dominio y condiciones de frontera del auto-par principal de (3), y encontramos el comportamiento asintótico del auto-par principal de (3), cuando la condición (7) es satisfecha. En el Capítulo 3 analizamos, sin imponer la condición (6), la existencia y estructura del conjunto de soluciones positivas de (4), de acuerdo con el signo del potencial W en el conjunto de anulación de a. En el Capítulo 4, suponiendo (6), analizamos la dependencia continua, respecto a variaciones del dominio y condiciones de frontera, de las soluciones positivas de (4), y averiguamos el comportamiento asintótico de tales soluciones bajo la condición (7). Finalmente, el Capítulo 5 estará dedicado al análisis del comportamiento asintótico de las soluciones positivas de un problema de la forma

$$\begin{cases} \mathcal{L}u + \gamma V u = \lambda W u - a(x) f(x,u) u & \text{en } \Omega\,, \\ \mathcal{B}(b) u = 0 & \text{en } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{8}$$

cuando $\gamma \nearrow \infty$. Este problema es de gran interés desde el punto de vista de las aplicaciones.

A continuación, resumiremos brevemente el contenido y los principales resultados obtenidos en cada uno de los cuatro últimos capítulos.

El Capítulo 2 está dedicado al análisis de la existencia, multiplicidad y principales propiedades de los autovalores principales del problema lineal elíptico de valores en la frontera con peso

$$\begin{cases} \mathcal{L}\varphi = \lambda W(x)\varphi & \text{en } \Omega\,, \\ \mathcal{B}(b)\varphi = 0 & \text{en } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{9}$$

donde $W \in L_\infty(\Omega)$. Por un autovalor principal de (9) entendemos cualquier valor de $\lambda \in \mathbf{R}$ para el que existe una función positiva φ que es solución del problema lineal de valores en la frontera (9).

El análisis de la existencia de los autovalores principales de (9) es absolutamente necesario para tener un conocimiento completo de la estructura del conjunto de soluciones positivas de amplias clases de problemas semilineales elípticos de la forma

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda f(x,u) u & \text{en } \Omega\,, \\ \mathcal{B}(b) u = 0 & \text{en } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{10}$$

donde $f : \bar{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbf{R}$ es una función continua y λ es considerado como un parámetro real. Observar que λ puede ser el inverso de un coeficiente de difusión $d := 1/\lambda$ en frente de $\mathcal{L}$ cuando $\lambda > 0$, y que, desde el punto de vista de las aplicaciones a las ciencias aplicadas y a la ingeniería, uno está interesado en analizar cómo varía la dinámica de las soluciones positivas del modelo parabólico asociado a (10) cuando la difusión, o equivalentemente λ, cambia. Adoptando este punto de vista, los autovalores principales de la linealización alrededor de cualquier solución positiva del problema nos proporcionan el rango de valores del parámetro para los cuales la solución matemática puede ser una solución física de un sistema gobernado por (10).

En lo que concierne al contenido matemático de este capítulo, debe ser destacado que nuestras condiciones de frontera no se enmarcan dentro del marco clásico, ya que estamos tratando con condiciones de frontera mixtas y la función peso en la frontera b puediera ser negativa o anularse en alguna región de alguna de las componentes de Γ_1. En las aplicaciones estas condiciones de frontera aparecen de forma natural; por ejemplo, cuando se linealiza alrededor de una solución positiva del problema no lineal de radiación

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda f(x,u)u & \text{en } \Omega\,, \\ \partial_\nu u = u^p & \text{en } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{11}$$

donde $p > 1$ y $f : \bar{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbf{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$. En efecto, si u_0 es una solución positiva de (11), entonces la linealización de (11) en ella está dada por

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda[\partial_u f(x,u_0(x))u_0(x) + f(x,u_0(x))]u & \text{en } \Omega\,, \\ \partial_\nu u - pu_0^{p-1}(x)u = 0 & \text{en } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{12}$$

y, por ello, efectuando la elección

$$W(x) := \partial_u f(x,u_0(x))u_0(x) + f(x,u_0(x))\,, \qquad b(x) := -pu_0^{p-1}(x)\,, \qquad \Gamma_0 = \emptyset\,, \tag{13}$$

(12) se ecuentra dentro de nuestro marco abstracto de trabajo. Obsérvese que $b < 0$ sobre Γ_1. Los autovalores principales de (13) nos proporcionan los valores del parámetro λ donde la solución u_0 llega a ser estable, y por tanto, su conocimiento es absolutamente crucial para predecir el comportamiento aintótico de las soluciones de estos problemas no lineales de radiación.

El análisis del caso clásico cuando el potencial W tiene signo definido y está alejado de cero no ofrece ninguna dificultad matemática especial y está muy bien documentado en la literatura (e.g. R. Courant & D. Hilbert [13]); en el caso clásico, (9) posee un único autovalor principal. El análisis de (9) en la situación más general e interesante en que el potencial W cambia de signo, se remonta a los trabajos pioneros de A. Manes & A. M. Micheletti [39], donde fue tratado el caso especial en el que el operador $\mathcal{L}$ es autoadjunto, y P. Hess & T. Kato [26] (cf. P. Hess [25] y sus referencias), donde se demostró para operadores no necesariamente autoadjuntos, que en el caso en que los coeficientes de $\mathcal{L}$ y el potencial W son Hölder continuos, y además $b \geq 0$, ν es la normal exterior unitaria, $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)] > 0$, y o bien $\Gamma_0 = \emptyset$, o $\Gamma_1 = \emptyset$, entonces (9) posee dos autovalores principales; uno de ellos negativo y el otro positivo. Posteriormente, J. López-Gómez eliminó la hipótesis de coercividad

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)] > 0$$

del enunciado del teorema dado por P. Hess y T. Kato, en el caso especial en el que $\Gamma_1 = \emptyset$ (cf. [33] y [35]), es decir, cuando $\mathcal{B}(b) = \mathcal{D}$ es el operador Dirichlet.

Nuestro primer propósito en el Capítulo 2 será obtener una versión general de los resultados previos referentes a la existencia y multiplicidad de los autovalores principales de (9). En la actualidad, los resultados de este capítulo nos proporcionan mejoras sustanciales de todos los resultados obtenidos en [35], incluso en el caso más simple cuando $\mathcal{B}(b)$ es el operador de frontera Dirichlet, $\mathcal{D}$. Pero ahora el análisis matemático será mucho más sofisticado que en [35], ya que ahora necesitamos, bajo nuestras condiciones de frontera generales, la dependencia continua del autovalor principal $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)]$ con respecto a perturbaciones del dominio alrededor de su frontera Dirichlet. Esta dependencia continua de $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)]$ respecto a perturbaciones del dominio Ω alrededor de Γ_0, será demostrada en este capítulo y nos proporcionará un resultado mucho más general, en la línea de resultados previos referentes al análisis de la existencia y multiplicidad de los autovalores principales de (9). La demostración de nuestra versión más general está basada en la caracterización del principio del máximo fuerte de H. Amann & J. López-Gómez [5], mediante la construcción de adecuadas supersoluciones. Tal construcción es muy delicada ya que contiene gran cantidad de detalles técnicos. Durante la construcción de estas supersoluciones es cuando necesitaremos la dependencia continua del autovalor principal con respecto al dominio.

Otro hecho destacable, es que en este capítulo se mostrará la dependencia continua del autovalor principal $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)]$, con respecto a perturbaciones del dominio, para una clase muy general de dominios estables respecto del operador de frontera $\mathcal{B}(b)$ (cf. Sección 2.6 para más detalles). Éste es el primer trabajo donde el concepto de estabilidad ha sido introducido en el contexto de operadores con frontera general. El concepto de estabilidad de un dominio proviene de I. Babuška [8] y I. Babuška & R. Vyborny [9] donde fue utilizado para generalizar algunos resultados pioneros de R. Courant & D. Hilbert [13] sobre variación continua de autovalores principales con respecto al dominio Ω, en el caso especial en que $\Gamma_1 = \emptyset$ y $\mathcal{L}$ es autoadjunto.

Otra propiedad que demostraremos en el Capítulo 2 será la dependencia continua del autovalor principal $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)]$ respecto de la función peso en la frontera b. Parece que nuestro resultado es el primero disponible en la literatura. Aunque es crucial desde el punto de vista de las aplicaciones, sus consecuencias serán analizadas en un próximo trabajo. Además, en este capítulo averiguaremos el comportamiento asintótico del autovalor principal de (3), cuando b diverge a infinito uniformemente en Γ_1.

En el Capítulo 3, sin imponer (6), empezaremos analizando la existencia de soluciones positivas del problema sublineal elíptico de valores en la frontera (4), donde $a(x) \in L_\infty(\Omega)$ pertenece a una cierta clase de potenciales no negativos y $W \in L_\infty(\Omega)$. Después, analizaremos la estructura del diagrama de soluciones positivas de éste, de acuerdo al signo del potencial W en el conjunto de anulación de $a(x)$ y caracterizaremos la existencia de soluciones positivas de (4) en el caso particular en el que se cumple la condición (6). Finalmente, averiguaremos el crecimiento puntual de las soluciones positivas de (4) en el conjunto de anulación del potencial $a(x)$ y en alguna de las componentes de su frontera, cuando λ se aproxima al valor de bifurcación a soluciones positivas de (4) desde infinito. Debe ser destacado que $f(x,0) \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbf{R})$ y que no hay ninguna restricción de signo sobre $f(x,0)$ en Ω. También debe ser mencionado, que ya que la aplicación

$u \longmapsto f(\cdot, u)$ no es necesariamente monótona en $[0, \infty)$, el problema (4) puede exhibir más de una solución positiva para cada valor de λ perteneciente al rango de valores del parámetro λ para los cuales (4) posee una solución positiva.

Los problemas semilineales elípticos de valores en la frontera del tipo (4) han atraido gran atención durante las últimas decadas, por el gran número de aplicaciones en biología matemática y química de su versión parabólica

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{L}u = \lambda W(x)u - a(x)f(x,u)u & \text{en} \quad \Omega \times (0,\infty)\,, \\ \mathcal{B}(b)u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \times (0,\infty)\,, \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{on} \quad \bar{\Omega}\,. \end{cases} \tag{14}$$

Estos problemas parabólicos describen la dinámica de las soluciones positivas de muchas ecuaciones de reacción-difusión usadas en la modelización de una gran variedad de fenómenos en las ciencias aplicadas y la ingeniería. Desde el punto de vista de las aplicaciones uno está interesado en analizar cómo varía la dinámica de las soluciones positivas del modelo parabólico (14) cuando la difusión, o equivalentemente λ, cambia. En dinámica de poblaciones, el Problema (14) nos proporciona la evolución de una especie que obedece una ley generalizada de crecimiento logístico [40], [42]. Típicamente, u representa la densidad de población, α_{ij} son los coeficientes de difusividad de la especie u, los coeficientes $\alpha_i's$ describen los efectos de transporte, $-\alpha_0(x) + \lambda W(x)$ es la tasa de natalidad, o mortandad de la especie, de acuerdo con su signo, $f(x,u)$ describe el efecto límite del aumento de población, y el coeficiente $a(x)$ mide el estrés de población en la región donde éste es positivo. De este modo, las soluciones positivas de (4) son los equilibrios de (14) y por tanto, el análisis de la existencia, multiplicidad y estabilidad de las soluciones positivas de (4) es absolutamente necesario para adquirir un conocimiento completo del comportamiento asintótico de las soluciones positivas del problema de evolución (14).

En lo que al contenido matemático del Capítulo 3 concierne, de nuevo debe ser destacado que nuestras condiciones de frontera y nuestra no linealidad, $f(x,u)$, no se encuentran dentro del marco clásico de trabajo, ya que estamos tratando con condiciones de frontera mixtas donde la función peso en la frontera $b(x)$ puede ser negativa o anularse en alguna subregión de alguna de las componentes de Γ_1, y la función $f(x,0)$ puede ser no nula en Ω, y no estamos imponiendo ninguna restricción de signo sobre ésta en Ω. Algunos trabajos previos discutiendo esta clase de problemas son [12],[43], [19],[20] y [38], aunque nuestro marco de trabajo es lo suficientemente general como para incluir los modelos especiales considerados en estas referencias, donde b no cambia de signo y $f(x,0)$ debe ser idénticamente cero. Los originales resultados de este capítulo están motivados por los resultados encontrados en [32], [19] y [20], aunque merece ser destacado que nuestras mejoras están lejos de ser obvias, principalmente por la dificultad del análisis matemático necesario para solventar las dificultades técnicas inherentes al hecho de trabajar con una función $b(x)$ que cambia de signo.

La principal herramienta técnica utilizada para obtener los resultados del Capítulo 3 es la dependencia continua del autovalor principal con respecto a perturbaciones del dominio alrededor de su frontera Dirichlet, ya probada en el Capítulo 2. Así mismo, utilizaremos los resultados principales de [14] y [46]. En este capítulo adoptaremos la misma metodología que en [19] para obtener una condición necesaria y una condición suficiente para la existencia de una solución positiva de (4). Una dificultad técnica que debemos solventar en nuestro marco general de trabajo es la construcción de una adecuada supersolución positiva estricta. En nuestro marco de trabajo, la construcción de la supersolución positiva estricta es mucho más delicada que en [19], ya que la estructura del conjunto de anulación del potencial a puede ser más enrevesada que en [19] y además, no estamos imponiendo ninguna restricción sobre el signo de b en Γ_1, y por ello, $b(x)$ podría anularse en algunas regiones de alguna de las componentes de Γ_1, siendo negativa en otras regiones de esas componentes. Tal construcción es técnicamente complicada y está basada en la dependencia continua del autovalor principal $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)]$ respecto a perturbaciones del dominio, probada en el Capítulo 2. Además, en la construcción de la supersolución positiva estricta es necesario utilizar el crecimiento a infinito del autovalor principal del problema de Dirichlet, cuando la medida de Lebesgue del dominio subyacente tiene a 0 (cf. Teorema 2.9.1 del Capítulo 2); resultado que mejora sustancialmente el obtenido originalmente en [35] para el caso especial en que $\mathcal{B}(b) = \mathcal{D}$ y $\Gamma_1 = \emptyset$. Además, realizamos un pormenorizado análisis de la acotación y estructura del conjunto de soluciones positivas de (4) en nuestro marco general, de acuerdo con el signo del potencial W en el conjunto de anulación de $a(x)$, caracterizando el conjunto de valores del parámetro λ donde las soluciones positivas de (4) se bifurcan desde la rama trivial y desde infinito. Finalmente, mostraremos el crecimiento puntual a infinito de las soluciones positivas de (4), en el conjunto de anulación del potencial $a(x)$ y en una cierta región de su frontera, en el caso especial cuando $W > 0$ o $W < 0$ en Ω y λ se aproxima al valor de bifurcación desde infinito a soluciones positivas de (4). El resultado que obtenemos aquí, generaliza al obtenido en [37], [20], [38], que fue demostrado para el caso especial en que $\mathcal{B}(b) = \mathcal{D}$.

En el Capítulo 4 usamos la teoría desarrollada en los Capítulos 2 y 3, para analizar la dependencia continua con respecto a perturbaciones del dominio y condiciones de frontera de las soluciones positivas del problema sublineal (4) cuando se verifica (6). Para el análisis llevado a cabo en este capítulo suponemos que el campo vectorial $\nu := (\nu_1, \ldots, \nu_N)$, que aparece en el operador de frontera $\mathcal{B}(b)$ (cf. (2)), es el *campo vectorial conormal*, es decir, está dado por

$$\nu_i := \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} n_j\,, \qquad 1 \leq i \leq N\,;$$

donde α_{ij}, $1 \leq i, j \leq N$, son los coeficientes definidos por (1). Además incorporamos algunas condiciones suficientes para que se verifique tal dependencia continua de las soluciones positivas de (4) con respecto a variaciones del dominio y a las condiciones de frontera. El análisis llevado a cabo en este capítulo está fuertemente basado en los resultados de dependencia continua del autovalor principal demostrados en el Capítulo 2, al igual que los resultados que caracterizan la existencia de soluciones positivas de (4), demostrados en el Capítulo 3. Los resultados de este capítulo están lejos de ser obvios, ya que estamos trabajando con condiciones de frontera mixtas, y no hay ninguna restricción de signo ni sobre la función peso en la frontera $b \in \mathcal{C}(\Gamma_1)$, ni sobre $f(x,0) \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbf{R})$. Finalmente, averiguamos el comportamiento asintótico de las soluciones positivas de (4), bajo las condiciones (6) y (7), proporcionando además condiciones suficeintes que garantizan dicho comportamiento asintótico.

El Capítulo 5 está enteramente dedicado al análisis del comportamiento asintótico de las soluciones positivas del problema sublineal elíptico (8) cuando γ tiende a infinito, donde $W \in L_\infty(\Omega)$, $a(x)$, $V(x)$ pertenecen a una cierta clase de potenciales no negativos, $f \in C^1(\bar{\Omega} \times [0,\infty), \mathbf{R})$ y además (5) y (6) se cumplen. Nuestro principal resultado en este capítulo es una sustancial mejora del resultado principal de [34, Sección 4], que está lejos de ser inmediato, ya que involucra muchos de los resultados teóricos desarrollados en los capítulos previos. Básicamente, nuestro resultado establece que cuando $\gamma \nearrow \infty$, la única solución positiva de (8), digamos θ_γ, converge en $V = 0$, a la única solución positiva del correspondiente problema en la region donde $V = 0$, mientras que ésta converge a cero en la region donde $V > 0$. Por supuesto, para obtener tal resultado necesitamos que las regiones donde $V = 0$ y donde $V > 0$ sean suficientemente regulares en el sentido que será descrito en el Capítulo 5. Este resultado tiene un gran número de aplicaciones en ecología matemática como por ejemplo, para analizar el efecto de la competición ilimitada entre especies biológicas en presencia de refugios. Como en [34], obtendremos el comportamiento asintótico de las soluciones positivas de (8) cuando $\gamma \nearrow \infty$ mediante la construcción de una adecuada supersolución positiva estricta. Tal construcción es muy delicada ya que contiene una gran cantidad de detalles técnicos, inherentes al hecho mismo de trabajar con una función peso en la frontera $b(x)$ que cambia de signo. Finalizaremos el capítulo proporcionando algunas condiciones suficientes, bajo las cuales el comportamiento asintótico anteriormente mencionado de las soluciones positivas de (8) es garantizado.

Capítulo 1

Preliminares y notaciones

En este capítulo especificamos las principales propiedades del dominio, del operador diferencial y del operador de frontera con los que trabajaremos a lo largo de esta memoria. También, introducimos el marco funcional en el cual será desarrollada nuestra teoría, fijamos algunas notaciones generales y recogemos algunos de los principales resultados de [4] y [5] que serán utilizados a lo largo de esta memoria. Ya que todos los resultados aquí incluidos han sido demostrados en los trabajos anteriormente mencionados, únicamente enunciaremos dichos resultados.

1.1 Sobre el dominio, el operador diferencial, el operador de frontera y el marco funcional

En esta sección detallamos las propiedades sobre el dominio, sobre el operador diferencial y sobre el operador de frontera con los cuales vamos a trabajar a lo largo del resto de esta memoria. También introducimos el marco funcional en el que será desarrollada nuestra teoría.

1.1.1 El dominio Ω

A lo largo de esta memoria Ω es un dominio acotado en $\mathbf{R}^N$, $N \geq 1$, de clase $\mathcal{C}^2$, es decir, $\bar{\Omega}$ es una subvariedad N-dimensional compacta y conexa de clase $\mathcal{C}^2$ de $\mathbf{R}^N$ con frontera $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ de clase $\mathcal{C}^2$, donde Γ_0 y Γ_1 son dos subconjuntos disjuntos abiertos y cerrados de $\partial\Omega$. Además, Γ_0 y Γ_1 poseen un número finito de componentes y debe ser destacado que o bien Γ_0 o Γ_1 puede ser el conjunto vacío.

1.1.2 El operador diferencial $\mathcal{L}$

El operador diferencial con el que trabajaremos a lo largo de esta memoria es el operador diferencial lineal elíptico de segundo orden definido por

$$\mathcal{L} := -\sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \alpha_0(x), \tag{1.1.1}$$

el cual es uniformemente fuertemente elíptico en Ω con

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}), \qquad \alpha_k \in L_\infty(\Omega), \qquad 1 \le i, j \le N, \quad 0 \le k \le N.$$

En lo sucesivo denotaremos por $\mu > 0$ a la constante de elipticidad de $\mathcal{L}$ en Ω. Entonces, para cada $\xi \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ y $x \in \bar{\Omega}$ tenemos que

$$\sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \mu|\xi|^2.$$

1.1.3 Los operadores de frontera $\mathcal{B}(b)$ y $\mathcal{D}$

En lo que concierne a las condiciones de frontera, en lo sucesivo para cada función $b \in \mathcal{C}(\Gamma_1)$, $\mathcal{B}(b)$ representa al operador de frontera definido por

$$\mathcal{B}(b)\varphi := \begin{cases} \varphi & \text{on } \Gamma_0, \\ \partial_\nu \varphi + b\varphi & \text{on } \Gamma_1, \end{cases} \tag{1.1.2}$$

donde

$$\nu = (\nu_1, ..., \nu_N) \in \mathcal{C}^1(\Gamma_1, \mathbf{R}^N)$$

es un campo vectorial exterior y no tangente, y

$$\partial_\nu \varphi := \langle \nabla \varphi, \nu \rangle. \tag{1.1.3}$$

Así, $\mathcal{B}(b)$ es el operador de frontera Dirichlet sobre Γ_0, denotado en lo sucesivo por $\mathcal{D}$, y el operador de frontera Neumann o de derivada regular oblicua de primer orden sobre Γ_1.

Es conocido por los resultados de [4], [41] que para cada $b \in \mathcal{C}(\Gamma_1)$ y $p > 1$,

$$\mathcal{B}(b) \in \mathcal{L}(W_p^2(\Omega); W_p^{2-\frac{1}{p}}(\Gamma_0) \times W_p^{1-\frac{1}{p}}(\Gamma_1)).$$

Uno de los aspectos más importantes que merecen ser destacados, es el hecho de que las condiciones de frontera generales con las cuales trabajaremos en toda esta memoria no se encuentran enmarcadas dentro del marco clásico, ya que estamos tratando con condiciones de frontera mixtas y la función b puede ser negativa o anularse en alguna región de alguna de las componentes de Γ_1.

En lo sucesivo, dado cualquier subdominio propio Ω_0 de Ω de clase $\mathcal{C}^2$, asumiremos que Ω_0 satisface

$$\operatorname{dist}(\Gamma_1, \partial\Omega_0 \cap \Omega) > 0\,. \tag{1.1.4}$$

De este modo, si denotamos por Γ_1^i, $1 \leq i \leq n_1$, a las componentes de Γ_1, entonces para cada $1 \leq i \leq n_1$ o bien

$$\Gamma_1^i \subset \partial\Omega_0$$

o

$$\Gamma_1^i \cap \partial\Omega_0 = \emptyset\,.$$

Además, si $\Gamma_1^i \subset \partial\Omega_0$, entonces Γ_1^i debe ser una componente de $\partial\Omega_0$. En efecto, si $\Gamma_1^i \cap \partial\Omega_0 \neq \emptyset$ pero Γ_1^i no es una componente de $\partial\Omega_0$, entonces $\operatorname{dist}(\Gamma_1^i, \partial\Omega_0 \cap \Omega) = 0$.

Por tanto, dado cualquier subdominio propio Ω_0 de Ω de clase $\mathcal{C}^2$ verificando (1.1.4), el operador de frontera $\mathcal{B}(b, \Omega_0)$ construido a partir de $\mathcal{B}(b)$ definido por

$$\mathcal{B}(b, \Omega_0)\varphi := \begin{cases} \varphi & \text{en } \partial\Omega_0 \cap \Omega\,, \\ \mathcal{B}(b)\varphi & \text{en } \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1.5}$$

está bien definido en el sentido de [4]. Cuando $\Omega_0 = \Omega$ denotaremos

$$\mathcal{B}(b, \Omega) := \mathcal{B}(b)\,.$$

Si $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$, entonces $\partial\Omega_0 \subset \Omega$ y por definición

$$\mathcal{B}(b, \Omega_0)\varphi = \mathcal{D}\varphi = \varphi\,,$$

es decir, $\mathcal{B}(b, \Omega_0)$ se convierte en el operador de frontera Dirichlet, denotado en lo sucesivo por $\mathcal{D}$.

1.1.4 Marco funcional

En lo que al marco funcional se refiere, de aquí en adelante para cada $p > 1$ denotaremos por

$$W^2_{p,\mathcal{B}(b)}(\Omega) := \{\, u \in W^2_p(\Omega) \;:\; \mathcal{B}(b)u = 0 \,\}\,,$$

y

$$W^2_{\mathcal{B}(b)}(\Omega) := \bigcap_{p>1} W^2_{p,\mathcal{B}(b)}(\Omega) \subset H^2(\Omega)\,.$$

Recalcar que para cada $p > N$,

$$W^2_p(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{2-\frac{N}{p}}(\bar{\Omega}) \tag{1.1.6}$$

y que gracias al Teorema VIII.1 de [49], cada $u \in W^2_p(\Omega)$ es en c.t.p. de Ω dos veces diferenciable.

También, de aquí en adelante $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ representará el espacio de funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ con soporte compacto en Ω, $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega \cup \Gamma_1)$ el espacio de funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ con soporte compacto en $\Omega \cup \Gamma_1$ y $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ denotará la clausura en $H^1(\Omega)$ del conjunto de funciones $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega \cup \Gamma_1)$.

Los anteriores espacios funcionales serán los espacios funcionales naturales en los cuales será desarrollada nuestra teoría.

1.2 Autovalores principales de problemas de valores en la frontera de tipo mixto

Bajo las hipótesis de la Sección 1.1, consideremos para cada $V \in L_\infty(\Omega)$ y $b \in \mathcal{C}(\Gamma_1)$ el problema de autovalores de tipo mixto

$$\begin{cases} (\mathcal{L}+V)\varphi = \lambda\varphi & \text{en } \Omega\,, \\ \mathcal{B}(b)\varphi = 0 & \text{en } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{1.2.7}$$

Es conocido de los resultados de [4] que existe el menor autovalor real de (1.2.7) denotado en lo sucesivo por $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}+V,\mathcal{B}(b)]$ y denomiando *autovalor principal de* $(\mathcal{L}+V,\mathcal{B}(b),\Omega)$. El autovalor principal es simple y asociada con él hay una autofunción positiva, única salvo constante multiplicativa, denotada por $\varphi_{[\mathcal{L}+V,\mathcal{B}(b)]}$ y denominada *autofunción principal de* $(\mathcal{L}+V,\mathcal{B}(b),\Omega)$. Gracias al Teorema 12.1 de [4] la autofunción principal satisface que

$$\varphi_{[\mathcal{L}+V,\mathcal{B}(b)]} \in W^2_{\mathcal{B}(b)}(\Omega) \subset H^2(\Omega)$$

y es *fuertemente positiva en* Ω, en el sentido de que

$$\varphi_{[\mathcal{L}+V,\mathcal{B}(b)]}(x) > 0 \quad \forall\, x \in \Omega \cup \Gamma_1 \qquad \wedge \qquad \partial_\nu \varphi_{[\mathcal{L}+V,\mathcal{B}(b)]}(x) < 0 \quad \forall\, x \in \Gamma_0\,.$$

De hecho, $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}+V,\mathcal{B}(b)]$ es el único autovalor de (1.2.7) que posee una autofunción positiva, y es dominante en el sentido de que cualquier otro autovalor σ de (1.2.7) satisface

$$\Re\sigma > \sigma_1^\Omega[\mathcal{L}+V,\mathcal{B}(b)]\,.$$

Además, tomando

$$(\mathcal{L}+V)_p := (\mathcal{L}+V)|_{W^2_{p,\mathcal{B}(b)}(\Omega)}\,,$$

se verifica que para cada $\omega > -\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}+V,\mathcal{B}(b)]$ y $p > N$ el operador

$$[\omega + (\mathcal{L}+V)_p]^{-1} \in \mathcal{L}(L_p(\Omega))$$

es positivo, compacto e irreducible (cf. [47, V.7.7]).

En lo sucesivo, dado cualquier subdominio propio Ω_0 de Ω de clase $\mathcal{C}^2$ verificando (1.1.4), denotaremos por $\sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L}+V,\mathcal{B}(b,\Omega_0)]$ al autovalor principal del problema lineal de valores en l a frontera

$$\begin{cases} (\mathcal{L}+V)\varphi = \lambda\varphi & \text{en } \Omega_0\,, \\ \mathcal{B}(b,\Omega_0)\varphi = 0 & \text{en } \partial\Omega_0\,, \end{cases} \tag{1.2.8}$$

donde $\mathcal{B}(b,\Omega_0)$ es el operador de frontera definido por (1.1.5). Con el objeto de trabajar con dominios con un número finito de componentes conexas, introducimos a continuación el concepto de *autovalor principal* para un dominio con varias componentes conexas.

Definición 1.2.1 *Sea Ω_0 un subconjunto abierto de Ω satisfaciendo* (1.1.4), *con un número finito de componentes conexas de clase $\mathcal{C}^2$, digamos Ω_0^j, $1 \leq j \leq m$, tales que*

$$\bar{\Omega}_0^i \cap \bar{\Omega}_0^j = \emptyset \qquad si \qquad i \neq j.$$

Entonces, el autovalor principal del problema $(\mathcal{L}+V, \mathcal{B}(b,\Omega_0), \Omega_0)$ es definido por

$$\sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L}+V, \mathcal{B}(b,\Omega_0)] := \min_{1\leq j\leq m} \sigma_1^{\Omega_0^j}[\mathcal{L}+V, \mathcal{B}(b,\Omega_0^j)]. \tag{1.2.9}$$

Nota 1.2.2 *Debe ser destacado que ya que Ω_0 es de clase $\mathcal{C}^2$ y satisface* (1.1.4), *se sigue de las anteriores consideraciones que cada uno de los autovalores principales*

$$\sigma_1^{\Omega_0^j}[\mathcal{L}+V, \mathcal{B}(b,\Omega_0^j)], \qquad 1 \leq j \leq m,$$

está bien definido. Esto muestra la consistencia de la Definición 1.2.1.

Ahora introducimos el concepto de autovalor principal para una clase general de problemas lineales elípticos de valores en la frontera con peso.

Definición 1.2.3 *Para cada $W \in L_\infty(\Omega)$, cualquier valor de λ para el cual el problema*

$$\begin{cases} \mathcal{L}\varphi = \lambda W \varphi & en \quad \Omega \\ \mathcal{B}(b)\varphi = 0 & en \quad \partial\Omega\,; \end{cases} \tag{1.2.10}$$

admita una solución positiva φ, será denominado un autovalor principal de $(\mathcal{L}, W, \mathcal{B}(b), \Omega)$. Además, si λ es un autovalor principal de $(\mathcal{L}, W, \mathcal{B}(b), \Omega)$ con

$$N[\mathcal{L}-\lambda W] = span[\varphi] \qquad y \qquad W\varphi \notin R[\mathcal{L}-\lambda W],$$

se dirá que λ es un autovalor simple de $(\mathcal{L}, W, \mathcal{B}(b), \Omega)$.

El concepto previo de autovalor simple es consistente con el concepto de autovalor simple de $(\mathcal{L}-\lambda W, W)$ en Ω introducido en [14]. Así, por la unicidad del auto-par principal asociado con $(\mathcal{L}-\lambda W, \mathcal{B}(b), \Omega)$, garantizada por [4, Teorema 12.1], se sigue de la Definición 1.2.3 que los autovalores principales de (1.2.10) están dados por los ceros de la aplicación

$$\Sigma(\lambda) := \sigma_1^{\Omega}[\mathcal{L}-\lambda W, \mathcal{B}(b)], \qquad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Nos remitimos al capítulo 2 para detalles adiccionales.

1.3 El principio del máximo fuerte

A lo largo del desarrollo de toda esta memoria utilizamos la relación de orden natural en el espacio producto $L_p(\Omega) \times L_p(\partial\Omega)$. A saber,

$$(f_1, g_1) \geq (f_2, g_2) \Leftrightarrow f_1 \geq f_2 \ \wedge \ g_1 \geq g_2 .$$

Será dicho que $(f_1, g_1) > (f_2, g_2)$ si $(f_1, g_1) \geq (f_2, g_2)$ y $(f_1, g_1) \neq (f_2, g_2)$.

Con el fin de enunciar la caracterización del principio del máximo fuerte para problemas de valores en la frontera con condiciones de frontera generales, en términos de la existencia de una supersolución positiva estricta y en términos de la positividad del autovalor principal, introducimos los siguientes conceptos.

Definición 1.3.1 *Supongamos que $p > N$ y sea $V \in L_\infty(\Omega)$. Se dice que una función $\bar{u} \in W_p^2(\Omega)$ es una supersolución positiva estricta de $(\mathcal{L}+V, \mathcal{B}(b), \Omega)$ si $\bar{u} \geq 0$ y $((\mathcal{L}+V)\bar{u}, \mathcal{B}(b)\bar{u}) > 0$.*

Definición 1.3.2 *Supongamos que $p > N$. Se dice que una función $u \in W_p^2(\Omega)$ es fuertemente positiva en Ω, si $u(x) > 0$ para cada $x \in \Omega \cup \Gamma_1$ y $\partial_\beta u(x) < 0$ para cada $x \in \Gamma_0$ con $u(x) = 0$ y cualquier campo vectorial exterior y no tangente $\beta \in \mathcal{C}^1(\Gamma_0, \mathbf{R}^N)$.*

Definición 1.3.3 *Sea $V \in L_\infty(\Omega)$. Se dice que el problema $(\mathcal{L}+V, \mathcal{B}(b), \Omega)$ satisface el principio del máximo fuerte si $p > N$, $u \in W_p^2(\Omega)$, y $((\mathcal{L}+V)u, \mathcal{B}(b)u) > 0$ implican que u es fuertemente positiva en el sentido de la Definición 1.3.2.*

La siguiente caracterización del principio del máximo fuerte es un reciente resultado debido a H. Amann y J. López-Gómez [5], donde la previa caracterización de J. López-Gómez & M. Molina-Meyer [36], obtenida originalmente para condiciones de frontera Dirichlet, fue mostrada ser satisfecha para un operador de frontera general de la forma (1.1.2). Tal caracterización nos proporciona una de las principales herramientas técnicas para hacer muchas de las comparaciones utilizadas a lo largo de toda esta memoria.

Teorema 1.3.4 *Para cada $V \in L_\infty(\Omega)$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L} + V, \mathcal{B}(b)] > 0$;
- *$(\mathcal{L} + V, \mathcal{B}(b), \Omega)$ posee una supersolución positiva estricta;*
- *$(\mathcal{L} + V, \mathcal{B}(b), \Omega)$ satisface el principio del máximo fuerte.*

1.4 Soluciones débiles, soluciones fuertes, subsoluciones y supersoluciones para problemas semilineales

En esta sección introducimos los conceptos de *solución débil, solución fuerte, subsolución* y *supersolución* para problemas semilineales de valores en la frontera, con condiciones de frontera Dirichlet y condiciones de frontera de tipo mixto.

Para establecer el concepto de *solución débil* para estas clases de problemas de valores en la frontera, bajo las hipótesis de la Sección 1.1, es suficiente suponer que

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \cap W^1_\infty(\Omega), \qquad 1 \leq i,j \leq N. \tag{1.4.11}$$

Sean, para cada $V \in L_\infty(\Omega)$ y $\lambda \in \mathbf{R}$, los problemas de valores en la frontera

$$\begin{cases} (\mathcal{L}+V)u = F(\lambda,x,u) & \text{en} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.4.12}$$

y

$$\begin{cases} (\mathcal{L}+V)u = F(\lambda,x,u) & \text{en} \quad \Omega, \\ \mathcal{B}(b)u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.4.13}$$

donde

$$F(\lambda,\cdot,\cdot) \; : \; \Omega \times L_2(\Omega) \longmapsto L_2(\Omega),$$

para cada $\lambda \in \mathbf{R}$.

Definición 1.4.1 *Supongamos* (1.4.11). *Se dice que una función* $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ *es una solución débil de* (1.4.12) *si*

$$\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega \alpha_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\xi}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \tilde{\alpha}_i\xi\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \int_\Omega(\alpha_0+V)\xi\varphi = \int_\Omega F(\lambda,x,\varphi)\xi,$$

para cada $\xi \in C^\infty_c(\Omega)$, *donde*

$$\tilde{\alpha}_i := \alpha_i + \sum_{j=1}^N \frac{\partial\alpha_{ij}}{\partial x_j} \in L_\infty(\Omega), \qquad 1 \leq i \leq N. \tag{1.4.14}$$

Definición 1.4.2 *Sea* Ω *un dominio con frontera* $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ *de clase* $\mathcal{C}^2$, *donde* Γ_0 *y* Γ_1 *son dos subconjuntos disjuntos abiertos y cerrados de* $\partial\Omega$ *y denotemos por* $n = (n_1,\ldots,n_N)$ *a la normal exterior unitaria a* Ω *en* Γ_1. *Se dirá que el campo vectorial* $\nu := (\nu_1,\ldots,\nu_N)$ *es el campo vectorial conormal sobre* Γ_1, *si* ν *viene dado por*

$$\nu_i := \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}n_j, \qquad 1 \leq i \leq N; \tag{1.4.15}$$

donde α_{ij}, $1 \leq i,j \leq N$ *son los coeficientes definidos en* (1.1.1). *En este caso la derivada* ∂_ν, *definida por* (1.1.3), *será denominada derivada conormal sobre* Γ_1.

Nota 1.4.3 *Debe ser destacado que si* $\mu > 0$ *representa la constante de elipticidad de* $\mathcal{L}$ *y asumimos que* (1.4.15) *se verifica, entonces*

$$\langle\nu,n\rangle = \sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij}n_jn_i \geq \mu|n|^2 = \mu > 0,$$

y por tanto, ν es un campo vectorial exterior y no tangente. También, debe ser notado que si $\alpha_{ij} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$, $1 \leq i,j \leq N$, entonces $\nu \in \mathcal{C}^1(\Gamma_1, \mathbf{R}^N)$, ya que $\partial\Omega$ es de clase $\mathcal{C}^2$.

A lo largo de esta memoria el campo vectorial conormal desempeará un papel crucial.

Definición 1.4.4 *Supongamos* (1.4.11). *Asumamos además que ν es el campo vectorial conormal sobre Γ_1, es decir,* (1.4.15) *se verifica sobre Γ_1. Entonces, se dice que una función $\varphi \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ es una solución débil de* (1.4.13) *si*

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega \alpha_{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\xi}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \tilde{\alpha}_i \xi \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \int_\Omega (\alpha_0 + V)\xi\varphi = \int_\Omega F(\lambda, x, \varphi)\xi - \int_{\Gamma_1} b\xi\varphi\,,$$

para cada $\xi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega \cup \Gamma_1)$, donde $\tilde{\alpha}_i$, $1 \leq i \leq N$ son los coeficientes definidos por (1.4.14).

Ahora establecemos el concepto de *solución fuerte* y *solución positiva* para (1.4.13).

Definición 1.4.5 *Se dice que una función u es una solución fuerte para el problema* (1.4.13), *si $u \in W_p^2(\Omega)$ para algún $p > N$ y satisface* (1.4.13). *Si además $u > 0$ en Ω, entonces se dirá que u es una solución positiva de* (1.4.13).

En lo sucesivo las soluciones de (1.4.13) serán consideradas como pares-solución de la forma (λ, u). Así, se dirá que el par (λ_0, u_0) es una solución de (1.4.13) si u_0 es una solución de (1.4.13) para $\lambda = \lambda_0$. Lo mismo para las soluciones de (1.4.12).

Ahora introducimos el concepto de *supersolución positiva* y *subsolución positiva* para el problema (1.4.13).

Definición 1.4.6 *Sean $\lambda \in \mathbf{R}$, $p > N$ y $u \in W_p^2(\Omega)$. Entonces:*

a) Se dice que u es una supersolución positiva de (1.4.13), *si $u \geq 0$ en Ω y*

$$\begin{cases} (\mathcal{L} + V)u \geq F(\lambda, x, u) & \text{en} \quad \Omega\,, \\ \mathcal{B}(b)u \geq 0 & \text{en} \quad \partial\Omega\,. \end{cases}$$

En el caso particular de que alguna de las anteriores desigualdades se verifique de forma estricta, se dirá que la supersolución positiva u es estricta.

b) Se dice que u es una subsolución positiva de (1.4.13), *si $u \geq 0$ in Ω y*

$$\begin{cases} (\mathcal{L} + V)u \leq F(\lambda, x, u) & \text{en} \quad \Omega\,, \\ \mathcal{B}(b)u \leq 0 & \text{en} \quad \partial\Omega\,. \end{cases}$$

En el caso particular de que alguna de las anteriores desigualdades se verfique de forma estricta, se dirá que la subsolución positiva u es estricta.

Capítulo 2

Propiedades de Autovalores Principales

En este capítulo se caracteriza la existencia de autovalores principales para una clase general de problemas lineales elípticos de valores en la frontera de segundo orden con pesos, sujetos a una clase muy general de condiciones de frontera de tipo mixto. Nuestros resultados son una extensión sustancial de la teoría clásica debida a P. Hess y T. Kato [26]. Para la obtención de éstos, deberemos dar un gran número de nuevos resultados referentes a la dependencia continua del autovalor principal de un problema lineal elíptico de valores en la frontera de segundo orden con respecto al dominio subyacente y a sus condiciones de frontera. Estos resultados auxiliares complementan en cierto sentido la teoría de D. Daners y E. N. Dancer [16]. La principal herramienta técnica utilizada a lo largo de este capítulo, es una reciente caracterización del principio del máximo fuerte en términos de la existencia de una supersolución positiva estricta, debida a H. Amann y J. López-Gómez [5].

2.1 Introducción

En este capítulo estudiamos a la existencia, multiplicidad y principales propiedades de los autovalores principales del problema lineal de valores en la frontera con peso

$$\begin{cases} \mathcal{L}\varphi = \lambda W(x)\varphi & \text{en } \Omega\,, \\ \mathcal{B}(b)\varphi = 0 & \text{en } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

donde se efectúan las siguientes hipótesis:

a) Ω es un dominio acotado en $\mathbf{R}^N$, $N \geq 1$, de clase $\mathcal{C}^2$, es decir, $\bar{\Omega}$ es una subvariedad N-dimensional compacta y conexa de clase $\mathcal{C}^2$ de $\mathbf{R}^N$ con frontera $\partial\Omega$ de clase $\mathcal{C}^2$.

b) $\lambda \in \mathbf{R}$, $W \in L_\infty(\Omega)$ y

$$\mathcal{L} := -\sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \alpha_0(x) \tag{2.1.2}$$

es uniformemente fuertemente elíptico en Ω con

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}), \qquad \alpha_k \in L_\infty(\Omega), \qquad 1 \le i, j \le N, \quad 0 \le k \le N. \tag{2.1.3}$$

En lo sucesivo denotaremos por $\mu > 0$ a la constante de elipticidad de $\mathcal{L}$ en Ω. Entonces, para cada $\xi \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ y $x \in \bar{\Omega}$ tendremos que

$$\sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \mu|\xi|^2 .$$

c) $\mathcal{B}(b)$ representa al operador de frontera

$$\mathcal{B}(b)\varphi := \begin{cases} \varphi & \text{en } \Gamma_0 , \\ \partial_\nu \varphi + b\varphi & \text{en } \Gamma_1 , \end{cases} \tag{2.1.4}$$

donde Γ_0 y Γ_1 son dos subconjuntos disjuntos abiertos y cerrados de $\partial\Omega$ con $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega$, $b \in \mathcal{C}(\Gamma_1)$,

$$\nu = (\nu_1, ..., \nu_N) \in \mathcal{C}^1(\Gamma_1, \mathbf{R}^N)$$

es un campo vectorial exterior y no tangente, y

$$\partial_\nu \varphi := \langle \nabla\varphi, \nu \rangle .$$

Además, Γ_0 y Γ_1 poseen un número finito de componentes. Así, $\mathcal{B}(b)$ es el operador de frontera de Dirichlet sobre Γ_0, denotado en lo sucesivo por $\mathcal{D}$, y el operador de frontera de Neumann o de derivada oblicua regular de primer orden sobre Γ_1. Debe ser destacado que o bien Γ_0 o Γ_1 puede ser el conjunto vacío.

Recalcamos que por un autovalor principal de (2.1.1) entendemos un valor de $\lambda \in \mathbf{R}$ para el que existe una función positiva φ que es solución del problema lineal de valores en la frontera (2.1.1).

El análisis de la existencia de los autovalores principales de (2.1.1) es absolutamente necesario para tener un conocimiento completo de la estructura del conjunto de soluciones positivas de una amplia clase de problemas semilineales elípticos de la forma

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda f(x,u)u & \text{en } \Omega , \\ \mathcal{B}(b)u = 0 & \text{en } \partial\Omega , \end{cases} \tag{2.1.5}$$

donde $f : \bar{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbf{R}$ es una función continua y λ es considerado como un parámetro real. Observar que λ puede ser el inverso de un coeficiente de difusión $d := 1/\lambda$ en frente de $\mathcal{L}$ cuando

$\lambda > 0$, y que, desde el punto de vista de las aplicaciones a las ciencias aplicadas y a la ingeniería, uno está interesado en analizar cómo varía la dinámica de las soluciones positivas del modelo parabólico asociado a (2.1.5) cuando la difusión, o equivalentemente λ, cambia. Adoptando este punto de vista, los autovalores principales de la linealización alrededor de cualquier solución positiva del problema, nos proporcionan el rango de valores del parámetro para los cuales la solución matemática puede ser una solución física de un sistema gobernado por (2.1.5).

En lo que concierne al contenido matemático de este capítulo, debe ser destacado que nuestras condiciones de frontera generales no se encuentran dentro del marco clásico, ya que estamos tratando con condiciones de frontera de tipo mixto y b pudiera ser negativa o nula en alguna región de alguna de las componentes de Γ_1. En las aplicaciones estas condiciones de frontera surgen de forma natural; por ejemplo, cuando uno linealiza alrededor de una solución positiva del problema no lineal de radiación

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda f(x,u)u & \text{en } \Omega\,, \\ \partial_\nu u = u^p & \text{en } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{2.1.6}$$

donde $p > 1$ y $f : \bar{\Omega} \times [0,\infty) \to \mathbf{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$. En efecto, si u_0 es una solución positiva de (2.1.6), entonces la linealización de (2.1.6) alrededor de ella viene dada por

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda[\partial_u f(x,u_0(x))u_0(x) + f(x,u_0(x))]u & \text{en } \Omega\,, \\ \partial_\nu u - pu_0^{p-1}(x)u = 0 & \text{en } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{2.1.7}$$

y, por ello, efectuando la elección

$$W(x) := \partial_u f(x,u_0(x))u_0(x) + f(x,u_0(x))\,, \qquad b(x) := -pu_0^{p-1}(x)\,, \qquad \Gamma_0 = \emptyset\,, \tag{2.1.8}$$

(2.1.7) se encuentra en nuestro marco abstracto de trabajo. Obsérvese que $b < 0$ en Γ_1. Los autovalores principales de (2.1.8) nos proporcionan los valores del parámetro λ donde la solución u_0 llega a ser estable, y por tanto, su conocimiento es absolutamente crucial en orden a poder predecir el comportamiento asintótico de las soluciones de estos problemas no lineales de radiación.

El análisis del caso clásico cuando el potencial W tiene signo definido y está alejado de cero no ofrece ninguna dificultad matemática especial y está muy bien documentado en la literatura (e.g. R. Courant & D. Hilbert [13]); en el caso clásico, (2.1.1) posee un único autovalor principal. El análisis de (2.1.1) en el caso más general e interesante en que el potencial W cambia de signo se remonta a los trabajos pioneros de A. Manes & A. M. Micheletti [39], donde fue abordado el problema en el caso especial en el que $\mathcal{L}$ es autoadjunto, y P. Hess & T. Kato [26] (cf. P. Hess [25] y sus referencias), donde se demostró para operadores no necesariamente autoadjuntos que en el caso en el que los coeficientes de $\mathcal{L}$ y el potencial W son Hölder continuos, y además $b \geq 0$, ν es la normal exterior unitaria, $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)] > 0$, y o bien $\Gamma_0 = \emptyset$, o $\Gamma_1 = \emptyset$, entonces (2.1.1) posee dos autovalores principales; uno de ellos negativo y el otro positivo. De aquí en adelante, $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)]$ representará al autovalor principal de $\mathcal{L}$ en Ω sujeto al operador de frontera $\mathcal{B}(b)$

definido por (2.1.4), es decir, $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)]$ representará al único autovalor del problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}\varphi = \sigma\varphi & \text{en} \quad \Omega\,, \\ \mathcal{B}(b)\varphi = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega\,, \end{cases}$$

que posee una autofunción positiva. Posteriormente, J. López-Gómez eliminó la hipótesis de coercividad

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)] > 0 \tag{2.1.9}$$

del enunciado del teorema dado por P. Hess y T. Kato en el caso particular en el que $\Gamma_1 = \emptyset$ (cf. [33] y [35]), es decir, cuando $\mathcal{B}(b) = \mathcal{D}$ es el operador de Dirichlet. Tal sustancial generalización fue posible gracias al siguiente resultado.

Teorema 2.1.1 *Supongamos que $W \geq 0$, $W \neq 0$, es un potencial regular con un conjunto de anulación regular*

$$\Omega_0 := \Omega \setminus \overline{\{x \in \Omega \; : \; W(x) > 0\}}\,.$$

Entonces,

$$\lim_{\lambda \searrow -\infty} \sigma_1^\Omega[\mathcal{L} - \lambda W, \mathcal{D}] = \sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L},\mathcal{D}]\,. \tag{2.1.10}$$

Por tanto, ya que

$$\lim_{\lambda \nearrow \infty} \sigma_1^\Omega[\mathcal{L} - \lambda W, \mathcal{D}] = -\infty$$

y la aplicación

$$\lambda \to \sigma_1^\Omega[\mathcal{L} - \lambda W, \mathcal{D}]$$

es decreciente, se sigue que (2.1.1) posee un autovalor principal si, y sólamente si,

$$\sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L},\mathcal{D}] > 0\,. \tag{2.1.11}$$

Gracias a la célebre desigualdad debida a C. Faber [18] y E. Krahn [31], (2.1.11) es satisfecho si la medida de Lebesgue de Ω_0, $|\Omega_0|$, es suficientemente pequea; independientemente del signo de $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{D}]$. Observar que la previa caracterización de la existencia de un autovalor principal bajo las hipótesis del Teorema 2.1.1 es bastante natural ya que W tiende a un *potencial clásico* cuando $|\Omega_0| \searrow 0$. Ahora, gracias a la continuidad del autovalor principal con respecto al potencial, uno puede darse cuenta fácilmente que bajo la condición (2.1.11) si W es perturbado por un potencial $\tilde{W} < 0$ de pequea amplitud, entonces el problema lineal (2.1.1) para el potencial perturbado $W + \tilde{W}$ debe tener al menos un autovalor principal próximo al autovalor principal del problema no perturbado. Además, utilizando la analiticidad y concavidad de la aplicación

$$\lambda \to \Sigma(\lambda) := \sigma_1^\Omega[\mathcal{L} - \lambda(W + \tilde{W}), \mathcal{D}]$$

muestra la existencia de exactamente dos autovalores principales, [35]. Resumiendo, si (2.1.11) se cumple y la amplitud de $\tilde{W} < 0$ es suficientemente pequea, entonces el problema (2.1.1) para el potencial perturbado $W + \tilde{W}$ posee dos autovalores principales; los dos ceros de la aplicación $\Sigma(\lambda)$.

Es interesante mencionar que, junto al interés del Teorema 2.1.1 para caracterizar la existencia de autovalores principales de (2.1.1), ha sido mostrado que (2.1.10) es crucial en el análisis semi-clásico de operadores elípticos de segundo orden involucrando potenciales con pozos degenerados. En la actualidad, el Teorema 2.1.1 fue el punto de partida para analizar algunos antiguos problemas abiertos propuestos por B. Simon [48] (cf. E. N. Dancer & J. López-Gómez [17]).

En este capítulo adoptamos la misma metodología que en [35]. Así, nuestro primer propósito será obtener una versión general del Teorema 2.1.1 en nuestro marco general abstracto. Los resultados de este capítulo proporcionan mejoras sustanciales de todos los resultados encontrados en [35], incluso en el caso más simple en el que $\mathcal{B}(b)$ es el operador de Dirichlet, $\mathcal{D}$. Pero ahora el análisis matemático será más complicado que en [35], ya que el Teorema 2.1.1 está basado en la dependencia continua de $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{D}]$ con respecto a Ω, y es conocido que trabajando bajo nuestras condiciones generales de frontera la dependencia continua de $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)]$ falla si $\Gamma_0=\emptyset$ y $b=0$ (cf. los contraejemplos de Sección VI.2.6 en Volumen I de [13]). Como resultado de esta contrariedad, un gran esfuerzo ha sido hecho por analizar cómo varía el espectro del operador $-\Delta$ bajo condiciones de frontera Neumann homogéneas cuando el dominio es perturbado, e.g. J. K. Hale & J. M. Vegas [23], J. M. Arrieta [6], J. M. Arrieta et al. [7], y S. Jimbo [27], [28], donde fue desarrollado un pormenorizado análisis del comportamiento de los autovalores de tipo Neumann, para dominios formados por dos esferas unidas por un corredor que tiende a un segmento. Posteriormente, E. N. Dancer & D. Daners [16] mostraron cómo el clásico problema de tipo Robin, es decir, el caso en el que $\Gamma_0=\emptyset$ y b está acotada inferiormente por una constante positiva, se comporta de forma muy parecida al problema de Dirichlet, básicamente porque los problemas de tipo Robin clásicos tienen propiedades de regularidad similares al problema de Dirichlet, independientemente de la geometría del dominio, mientras que este no es el caso para el problema de Neumann. Algunos resultados previos sobre problemas de tipo Robin fueron encontrados en M. J. Ward & J. B. Keller [50] y M. J. Ward et al. [51], donde el método de desarrollos asintóticos fue utilizado para calcular los autovalores y autofunciones perturbadas para algunos casos especiales de interés en las aplicaciones. Como en este capítulo estamos trabajando bajo condiciones de frontera mixtas generales y en particular $b(x)$ puede anularse en alguna región de alguna de las componentes de Γ_1, siendo además negativa en otras regiones de estas componentes, para obtener la dependencia continua de $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)]$ con respecto a Ω es imperativo restringirnos a considerar perturbaciones de Ω alrededor de su frontera Dirichlet, Γ_0.

Bajo nuestras hipótesis generales, la existencia y unicidad del autovalor principal $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)]$ proviene de H. Amann [4], y la caracterización del principio del máximo fuerte en términos de la positividad del autovalor principal y en términos de la existencia de una supersolución positiva estricta es un reciente resultado debido a H. Amann y J. López-Gómez [5], donde la caracterización de J. López-Gómez & M. Molina-Meyer [36], obtenida originalmente para condiciones de frontera Dirichlet, se generalizó para un operador de frontera general de la forma (2.1.4). Tal caracterización es la herramienta técnica clave para obtener muchos de los resultados de comparación utilizados a lo largo de todo este trabajo, entre ellos la monotonía de $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)]$ con respecto al potencial y al dominio subyacente, su caracterización puntual mini-max, y su concavidad.

La dependencia continua de $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)]$ con respecto a las perturbaciones de Ω alrededor de Γ_0 nos proporcionará el siguiente resultado que extiende sustancialmente el ya obtenido en el Teorema 2.1.1.

Teorema 2.1.2 *Supongamos que*

$$\alpha_{ij} \in C^1(\bar{\Omega}), \qquad \alpha_i \in C(\bar{\Omega}), \qquad 1 \leq i, j \leq N,$$

y $W \in L_\infty(\Omega)$, $W \geq 0$, *es un potencial para el cual existen un subconjunto abierto* Ω_0 *de* Ω *y un subconjunto compacto* K *de* $\bar{\Omega}$ *con medida de Lebesgue cero tal que*

$$K \cap (\bar{\Omega}_0 \cup \Gamma_1) = \emptyset,$$

$$\Omega_+ := \{ x \in \Omega \ : \ W(x) > 0\} = \Omega \setminus (\bar{\Omega}_0 \cup K),$$

y se verifica cada una de las siguientes condiciones:

a) Ω_0 *posee un número finito de componentes de clase* C^2, *digamos* Ω_0^j, $1 \leq j \leq m$, *tales que* $\bar{\Omega}_0^i \cap \bar{\Omega}_0^j = \emptyset$ *si* $i \neq j$, *y*

$$\operatorname{dist}(\Gamma_1, \partial\Omega_0 \cap \Omega) > 0.$$

Así, si denotamos por Γ_1^i, $1 \leq i \leq n_1$, *a las componentes de* Γ_1, *entonces para cada* $1 \leq i \leq n_1$ *o bien* $\Gamma_1^i \subset \partial\Omega_0$ *o* $\Gamma_1^i \cap \partial\Omega_0 = \emptyset$. *Además, si* $\Gamma_1^i \subset \partial\Omega_0$, *entonces* Γ_1^i *debe ser una componente de* $\partial\Omega_0$. *En efecto, si* $\Gamma_1^i \cap \partial\Omega_0 \neq \emptyset$ *pero* Γ_1^i *no es una componente de* $\partial\Omega_0$, *entonces* $\operatorname{dist}(\Gamma_1^i, \partial\Omega_0 \cap \Omega) = 0$.

b) *Denotemos por* $\{i_1, ..., i_p\}$ *al subconjunto de* $\{1, ..., n_1\}$ *para el cual* $\Gamma_1^j \cap \partial\Omega_0 = \emptyset$ *si, y sólamente si,* $j \in \{i_1, ..., i_p\}$. *Entonces,* W *está alejado de cero en cada subconjunto compacto de*

$$\Omega_+ \cup \bigcup_{j=1}^{p} \Gamma_1^{i_j}.$$

c) *Denotemos por* Γ_0^i, $1 \leq i \leq n_0$, *a las componentes de* Γ_0, *y sea* $\{i_1, ..., i_q\}$ *el subconjunto de* $\{1, ..., n_0\}$ *para el cual* $(\partial\Omega_0 \cup K) \cap \Gamma_0^j \neq \emptyset$ *si, y sólamente si,* $j \in \{i_1, ... i_q\}$. *Entonces,* W *está alejado de cero en cada subconjunto compacto de*

$$\Omega_+ \cup [\bigcup_{j=1}^{q} \Gamma_0^{i_j} \setminus (\partial\Omega_0 \cup K)].$$

d) Para cada $\eta > 0$ existen un número natural $\ell(\eta) \geq 1$ y $\ell(\eta)$ subconjuntos abiertos de $\mathbf{R}^N$, G_j^η, $1 \leq j \leq \ell(\eta)$, con $|G_j^\eta| < \eta$, $1 \leq j \leq \ell(\eta)$, tales que

$$\bar{G}_i^\eta \cap \bar{G}_j^\eta = \emptyset \qquad si \quad i \neq j\,,$$

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} G_j^\eta\,,$$

y para cada $1 \leq j \leq \ell(\eta)$ el conjunto abierto $G_j^\eta \cap \Omega$ es conexo y de clase C^2.

e) ν es el campo conormal sobre $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_0$.

Entonces,

$$\lim_{\lambda \nearrow \infty} \sigma_1^\Omega[\mathcal{L} + \lambda W, \mathcal{B}(b)] = \sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_0)]\,, \tag{2.1.12}$$

donde $\mathcal{B}(b, \Omega_0)$ es el operador de frontera definido por

$$\mathcal{B}(b, \Omega_0)\varphi := \begin{cases} \varphi & \text{en} \quad \partial\Omega_0 \cap \Omega\,, \\ \mathcal{B}(b)\varphi & \text{en} \quad \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega\,. \end{cases}$$

La demostración del Teorema 2.1.2 está basada en la caracterización del principio del máximo fuerte de H. Amann & J. López-Gómez [5] a través de la construcción de adecuadas supersoluciones; tal construcción es muy delicada ya que contiene varios detalles técnicos. Durante la construcción de estas supersoluciones debemos aumentar ligeramente Ω_0 y este es el preciso momento cuando la dependencia continua del autovalor principal con respecto al dominio es necesitada.

La dependencia continua del autovalor principal se demostrará que se verifica para una clase muy general de dominios que son estables con respecto al operador de frontera $\mathcal{B}(b)$ (cf. Sección 2.6 para más detalles). Parece que éste es el primer trabajo donde el concepto de estabilidad ha sido introducido en el contexto de operadores de frontera generales. El concepto de estabilidad de un dominio proviene de I. Babuška [8] y I. Babuška & R. Vyborny [9] donde fue utilizado para generalizar algunos resultados pioneros de R. Courant & D. Hilbert [13] sobre la variación continua de autovalores principales con respecto al dominio Ω en el caso especial en el que $\Gamma_1 = \emptyset$ y $\mathcal{L}$ es autoadjunto. La estabilidad de un subconjunto de $\mathbf{R}^N$ es una condición muy débil que, además de jugar un papel central en la teoría del potencial por proporcionarnos todos los dominios para los cuales el problema de Dirichlet tiene sentido, (cf. D. R. Adams & L. I. Hedberg [1], E. N. Dancer [15], y sus referencias), ha desempeado un papel muy importante en la resolución de diversos problemas en análisis (cf. L. I. Hedberg [24]).

Otra propiedad que vamos a analizar en este capítulo es la dependencia continua del autovalor principal $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)]$ con respecto a la función peso en la frontera b. Nuestro principal resultado establece lo siguiente:

Teorema 2.1.3 *Denotemos por $\sigma(L_\infty(\Gamma_1), L_1(\Gamma_1))$ a la topología débil $*$ de $L_\infty(\Gamma_1)$ y supongamos que $b_n \in \mathcal{C}(\Gamma_1)$, $n \geq 1$, es una sucesión tal que*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \qquad en \quad \sigma(L_\infty(\Gamma_1), L_1(\Gamma_1))\,.$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b_n)] = \sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)]\,.$$

Parece que éste es el primer resultado general concerniente a la dependencia continua del autovalor principal con respecto a b disponible en la literatura. Debe ser destacado que el Teorema 2.1.3 es un resultado muy general que tiene fuertes consecuencias. Por ejemplo, se sigue fácilmente del Teorema 2.1.3 que si u_0 es una solución positiva estable de (2.1.6) y u_1 es una solución positiva inestable de (2.1.6), entonces u_0 y u_1 deben estar separadas en la norma L_∞.

Con el fin de construir familias generales de potenciales indefinidos para los cuales (2.1.1) posea dos autovalores principales, descompondremos el potencial en la diferencia entre su parte positiva y su parte negativa

$$W = W^+ - W^-\,, \qquad W^+ := \max\{W, 0\}\,,$$

y supondremos que, por ejemplo, W^+ satisface todos los requisitos del Teorema 2.1.2 y

$$\sigma_1^{\Omega_0^+}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_0^+)] > 0\,, \tag{2.1.13}$$

donde Ω_0^+ representa el conjunto abierto maximal de anulación de W^+. Por tanto, se plantea una cuestión bastante natural. ¿Cómo debe ser Ω_+ y b para obtener la condición de coercividad (2.1.13)?. En el caso en el que $\mathcal{B}(b, \Omega_0^+) = \mathcal{D}$ hemos probado que $\sigma_1^{\Omega_0^+}[\mathcal{L}, \mathcal{D}]$ crece a infinito con orden $|\Omega_0^+|^{-\frac{2}{N}}$ cuando $|\Omega_0^+| \searrow 0$. Precisamente, hemos obtenido el siguiente resultado.

Teorema 2.1.4 *Supongamos*

$$\alpha_{ij} \in \mathcal{C}(\bar\Omega) \cap W^1_\infty(\Omega)\,, \qquad 1 \leq i, j \leq N\,.$$

Entonces,

$$\liminf_{|\Omega_0^+|\searrow 0} \sigma_1^{\Omega_0^+}[\mathcal{L}, \mathcal{D}]|\Omega_0^+|^{\frac{2}{N}} \geq \mu\Sigma_1|B_1|^{\frac{2}{N}}\,,$$

donde B_1 es la bola unidad de $\mathbf{R}^N$, $\Sigma_1 = \sigma_1^{B_1}[-\Delta, \mathcal{D}]$ y μ es la constante de elipticidad de $\mathcal{L}$.

Por otra parte, se demuestra el siguiente resultado.

Teorema 2.1.5 *Supongamos*

$$\alpha_{ij} \in \mathcal{C}^1(\bar\Omega)\,, \qquad \alpha_i \in \mathcal{C}(\bar\Omega)\,, \qquad 1 \leq i, j \leq N\,,$$

y sea $b_n \in \mathcal{C}(\Gamma_1 \cap \partial\Omega_0^+)$, $n \geq 1$, *una sucesión arbitraria tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \min_{\Gamma_1\cap\partial\Omega_0^+} b_n = \infty .$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_1^{\Omega_0^+}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b_n, \Omega_0^+)] = \sigma_1^{\Omega_0^+}[\mathcal{L}, \mathcal{D}] .$$

De este modo, combinando el Theorem 2.1.4 con el Theorem 2.1.5 obtenemos que (2.1.13) se cumple si $|\Omega_0^+|$ es suficientemente pequeo y $b|_{\Gamma_1\cap\partial\Omega_0^+}$ es suficientemente grande, lo cual responde completamente a la cuestión planteada anteriormente.

Una vez que hemos discutido algunos de los principales resultados de este capítulo, pasamos a describir brevemente su organización. En la Sección 2.2 utilizamos la caracterización del principio del máximo fuerte para obtener las monotonías del autovalor principal con respecto al potencial, al dominio, y a la función peso en la frontera b. En la Sección 2.3 utilizamos la caracterización del principio del máximo fuerte para dar una caracterización puntual mini-max del autovalor principal que extiende el resultado correspondiente de M. Protter y H. Weinberger [45] y Teorema 4.5 de R. G. Pinsky [44], obtenido para condiciones de frontera Dirichlet. En la Sección 2.4 combinamos la caracterización mini-max obtenida en la Sección 2.3 con la ellipticidad de $\mathcal{L}$, para dar una prueba elemental de la concavidad del autovalor principal respecto del potencial. Aunque nuestro resultado es sustancialmente más general, debemos mencionar que la concavidad de la cota espectral con respecto al potencial proviene de T. Kato [29]. La concavidad se utilizará en la Sección 2.11 para obtener resultados de multiplicidad exacta de autovalores principales de (2.1.1). En la Sección 2.5 introducimos el concepto de estabilidad de un dominio para nuestras condiciones de frontera generales y mostramos que cualquier dominio que satisfaga la propiedad del segmento es estable. En la Sección 2.6 demostramos la dependencia continua del autovalor principal con respecto a cualquier perturbación admisible de un dominio estable. Incluso cuando nos restringimos a considerar el caso especial en el que $\Gamma_1 = \emptyset$, nuestros resultados serán mejoras sustanciales de los correspondientes resultados de [35], ya que en este capítulo estamos asumiendo que

$$\alpha_{ij} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) , \qquad \alpha_i \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) , \qquad 1 \leq i,j \leq N ,$$

en lugar de

$$\alpha_{ij} \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}) , \qquad \alpha_i \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) , \qquad 1 \leq i,j \leq N ,$$

como se supuso en [35] (cf. Teorema 4.2 de [35]). En la Sección 2.7 demostramos el Teorema 2.1.3, en la Sección 2.8 demostramos el Teorema 2.1.5, en la Sección 2.9 demostramos el Teorema 2.1.4, y en la Sección 2.10 demostramos el Teorema 2.1.2. Finalmente, en la Sección 2.11 aplicaremos la teoría previa para caracterizar la existencia de autovalores principales de (2.1.1).

2.2 Propiedades de monotonía

En esta sección utilizaremos la caracterización del principio del máximo fuerte dada en el Teorema 1.3.4 para obtener algunas propiedades de monotonía del autovalor principal. El siguiente resultado muestra la dominancia del autovalor principal del operador $\mathcal{L}$ sometido a condiciones de frontera Dirichlet homogéneas.

Proposición 2.2.1 *Supongamos que $\Gamma_1 \neq \emptyset$. Entonces,*

$$\sigma_1^{\Omega}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)] < \sigma_1^{\Omega}[\mathcal{L}, \mathcal{D}]\,.$$

Demostración: Denotemos por $\varphi_{[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)]}$ y $\varphi_{[\mathcal{L},\mathcal{D}]}$ a la autofunciones principales asociadas con los autovalores principales $\sigma_1^{\Omega}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)]$ y $\sigma_1^{\Omega}[\mathcal{L}, \mathcal{D}]$, respectivamente. Ya que $\varphi_{[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)]}$ es fuertemente positiva, para cada $x \in \Omega \cup \Gamma_1$ tenemos que $\varphi_{[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)]}(x) > 0$ y por eso, $\varphi_{[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)]} > 0$ en $\partial\Omega$. De este modo, $\varphi_{[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)]}$ nos proporciona una supersolución positive estricta de $(\mathcal{L} - \sigma_1^{\Omega}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)], \mathcal{D}, \Omega)$. Por tanto, gracias al Theorem 1.3.4, obtenemos que

$$0 < \sigma_1^{\Omega}[\mathcal{L} - \sigma_1^{\Omega}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)], \mathcal{D}] = \sigma_1^{\Omega}[\mathcal{L}, \mathcal{D}] - \sigma_1^{\Omega}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)]\,.$$

Esto concluye la demostración. $\square$

El siguiente resultado muestra la monotonía del autovalor principal con respecto al dominio subyacente.

Proposición 2.2.2 *Sea Ω_0 un subdominio propio de Ω de clase $\mathcal{C}^2$ verificando* (1.1.4). *Entonces,*

$$\sigma_1^{\Omega}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)] < \sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_0)]\,,$$

donde $\mathcal{B}(b, \Omega_0)$ es el operador de frontera definido por (1.1.5).

Demostración: Denotemos por $\varphi_{[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)]}$ la autofunción principal asociada con $\sigma_1^{\Omega}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)]$. Entonces,

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - \sigma_1^{\Omega}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)])\varphi_{[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)]} = 0 & \text{en } \Omega_0\,, \\ \varphi_{[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)]}(x) > 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_0 \cap \Omega\,, \\ \varphi_{[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)]}(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_0 \cap \Gamma_0\,, \\ \partial_\nu \varphi_{[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)]}(x) + b(x)\varphi_{[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)]}(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_0 \cap \Gamma_1\,. \end{cases}$$

Además, $\partial\Omega_0 \cap \Omega \neq \emptyset$, ya que Ω_0 es un subdominio propio de Ω. Por tanto, $\varphi_{[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)]}$ es una supersolución positiva estricta de $(\mathcal{L} - \sigma_1^{\Omega}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)], \mathcal{B}(b, \Omega_0), \Omega_0)$ y se sigue del Teorema 1.3.4 que

$$0 < \sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L} - \sigma_1^{\Omega}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)], \mathcal{B}(b, \Omega_0)] = \sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_0)] - \sigma_1^{\Omega}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)]\,.$$

Esto concluye la demostración. $\square$

El siguiente resultado muestra la monotonía del autovalor principal con respecto al potencial.

Proposición 2.2.3 *Sean P_1, $P_2 \in L_\infty(\Omega)$ tales que $P_1 < P_2$ en un conjunto de medida de Lebesgue positiva. Entonces,*

$$\sigma_1^{\Omega}[\mathcal{L} + P_1, \mathcal{B}(b)] < \sigma_1^{\Omega}[\mathcal{L} + P_2, \mathcal{B}(b)]\,.$$

Demostración: Denotemos por φ_1 la autofunción principal asociada con $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}+P_1,\mathcal{B}(b)]$. Entonces,

$$(\mathcal{L}+P_2-\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}+P_1,\mathcal{B}(b)])\varphi_1=(P_2-P_1)\varphi_1>0$$

en Ω. De este modo, φ_1 es una supersolución positiva estricta de

$$(\mathcal{L}+P_2-\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}+P_1,\mathcal{B}(b)],\mathcal{B}(b),\Omega)$$

y por tanto, gracias al Teorema 1.3.4,

$$0<\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}+P_2-\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}+P_1,\mathcal{B}(b)],\mathcal{B}(b)]=\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}+P_2,\mathcal{B}(b)]-\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}+P_1,\mathcal{B}(b)]\,.$$

Esto concluye la demostración. □

Como una consecuencia inmediata, de este resultado obtenemos la dependencia continua del autovalor principal con respecto al potencial.

Corolario 2.2.4 *Sea $P_n\in L_\infty(\Omega)$, $n\geq 1$, una sucesión de potenciales tal que*

$$\lim_{n\to\infty}P_n=P\qquad\text{en}\quad L_\infty(\Omega)\,.$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}+P_n,\mathcal{B}(b)]=\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}+P,\mathcal{B}(b)]\,.$$

Demostración: Para cada $\epsilon>0$ existe un número natural $n(\epsilon)\geq 1$ tal que para cada $n\geq n(\epsilon)$

$$P-\epsilon\leq P_n\leq P+\epsilon\qquad\text{en}\quad\Omega\,.$$

Por tanto, gracias a la Proposición 2.2.3, para cada $n\geq n(\epsilon)$ tenemos que

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}+P,\mathcal{B}(b)]-\epsilon\leq\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}+P_n,\mathcal{B}(b)]\leq\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}+P,\mathcal{B}(b)]+\epsilon\,.$$

Esto concluye la demostración. □

El siguiente resultado muestra la monotonía del autovalor principal con respecto a la función peso $b(x)$.

Proposición 2.2.5 *Supongamos que $\Gamma_1\neq\emptyset$ y sean b_1, $b_2\in C(\Gamma_1)$ tal que $b_1\leq b_2$, $b_1\neq b_2$. Entonces,*

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{B}(b_1)]<\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{B}(b_2)]\,.$$

Demostración: Denotemos por φ_1 a la autofunción principal asociada con $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{B}(b_1)]$. Entonces,

$$(\mathcal{L}-\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{B}(b_1)])\varphi_1=0\qquad\text{en}\quad\Omega\,,$$

$\varphi_1=0$ en Γ_0, y

$$\partial_\nu\varphi_1+b_2\varphi_1=(b_2-b_1)\varphi_1>0$$

en Γ_1. Así, φ_1 es una supersolución positiva estricta de $(\mathcal{L} - \sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b_1)], \mathcal{B}(b_2), \Omega)$. Por tanto, gracias al Teorema 1.3.4,

$$0 < \sigma_1^\Omega[\mathcal{L} - \sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b_1)], \mathcal{B}(b_2)] = \sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b_2)] - \sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b_1)].$$

Esto concluye la demostración. □

Corolario 2.2.6 *Supongamos que* $\Gamma_1 \neq \emptyset$, *sean* b_1, $b_2 \in \mathcal{C}(\Gamma_1)$ *tales que* $b_1 \leq b_2$, $b_1 \neq b_2$, *y* $\Omega_0 \subset \Omega$ *un subdominio de clase* $\mathcal{C}^2$ *verificando* (1.1.4). *Entonces,*

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b_1)] < \sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b_2, \Omega_0)]. \tag{2.2.1}$$

Demostración: Asumamos que $\Omega = \Omega_0$. Entonces, (2.2.1) se convierte en

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b_1)] < \sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b_2)],$$

lo cual es garantizado por Proposición 2.2.5. Resta mostrar el resultado cuando Ω_0 es un subdominio propio de Ω. Gracias a la Proposición 2.2.5,

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b_1)] < \sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b_2)].$$

Además, gracias a la Proposición 2.2.2,

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b_2)] < \sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b_2, \Omega_0)].$$

Esto concluye la demostración. □

Bajo las hipótesis del Corolario 2.2.6, asumamos que $\partial\Omega_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$. Entonces, Ω_0 es un subdominio propio de Ω y $\mathcal{B}(b_2, \Omega_0) = \mathcal{D}$ en $\partial\Omega_0$. Por eso, (2.2.1) se convierte en

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b_1)] < \sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L}, \mathcal{D}]. \tag{2.2.2}$$

Esta relación puede ser obtenida directamente de Proposición 2.2.1 y Proposition 2.2.2. En efecto, gracias a la Proposición 2.2.1

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b_1)] < \sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{D}],$$

y por eso, obtenemos de Proposición 2.2.2 que

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b_1)] < \sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L}, \mathcal{D}].$$

2.3 Caracterización puntual mini-max

Como una consecuencia del Teorema 1.3.4 se obtiene la siguiente caracterización puntual mini-max del autovalor principal $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)]$.

Teorema 2.3.1 *Dado $p > N$, denotemos por $\mathcal{P}_b$ al conjunto de funciones $\psi \in W_p^2(\Omega)$ tales que $\psi(x) > 0$ para cada $x \in \bar{\Omega}$ y $\mathcal{B}(b)\psi > 0$ en $\partial\Omega$. Entonces,*

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)] = \sup_{\psi\in\mathcal{P}_b} \inf_{x\in\Omega} \frac{\mathcal{L}\psi}{\psi}. \tag{2.3.1}$$

Demostración: Fijemos $\lambda < \sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)]$. Entonces,

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}-\lambda,\mathcal{B}(b)] > 0$$

y por eso, gracias al Teorema 1.3.4, $(\mathcal{L}-\lambda,\mathcal{B}(b),\Omega)$ satisface el principio del máximo fuerte. De este modo, la única solución ψ_1 del problema

$$\begin{cases} (\mathcal{L}-\lambda)\psi_1 = 1 & \text{en } \Omega\,, \\ \psi_1 = 1 & \text{en } \Gamma_0\,, \\ \partial_\nu\psi_1 + b\psi_1 = 1 & \text{en } \Gamma_1\,, \end{cases}$$

es fuertemente positiva. Además, $\psi_1 \in W_p^2(\Omega)$. En particular, $\psi_1 \in \mathcal{P}_b$ y $\mathcal{P}_b \neq \emptyset$. Tenemos que $\psi_1(x) > 0$ para cada $x \in \bar{\Omega}$. Por eso,

$$\lambda < \frac{\mathcal{L}\psi_1}{\psi_1} \qquad \text{en } \Omega\,.$$

Así,

$$\lambda \leq \inf_{x\in\Omega} \frac{\mathcal{L}\psi_1}{\psi_1} \leq \sup_{\psi\in\mathcal{P}_b} \inf_{x\in\Omega} \frac{\mathcal{L}\psi}{\psi}. \tag{2.3.2}$$

Ya que (2.3.2) es válida para cada $\lambda < \sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)]$, obtenemos que

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)] \leq \sup_{\psi\in\mathcal{P}_b} \inf_{x\in\Omega} \frac{\mathcal{L}\psi}{\psi}.$$

Para completar la demostración de (2.3.1) argumentamos por reducción al absurdo asumiendo que

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)] < \sup_{\psi\in\mathcal{P}_b} \inf_{x\in\Omega} \frac{\mathcal{L}\psi}{\psi}.$$

Entonces, existe $\epsilon > 0$ y $\psi \in \mathcal{P}_b$ tales que para cada $x \in \Omega$

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)] + \epsilon < \frac{\mathcal{L}\psi(x)}{\psi(x)}.$$

De este modo,

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - \sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)] - \epsilon)\psi > 0 & \text{en } \Omega\,, \\ \mathcal{B}(b)\psi > 0 & \text{en } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

y por eso, ψ es una supersolución positiva estricta de $(\mathcal{L} - \sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)] - \epsilon, \mathcal{B}(b), \Omega)$. Por tanto, gracias al Teorema 1.3.4

$$0 < \sigma_1^\Omega[\mathcal{L} - \sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)] - \epsilon, \mathcal{B}(b)] = -\epsilon\,,$$

lo cual es imposible. Esta contradicción completa la prueba del resultado. □

2.4 Concavidad respecto del potencial

En esta sección mostramos la concavidad de la aplicación

$$\begin{array}{ccc} L_\infty(\Omega) & \longmapsto & \mathbf{R} \\ P & \rightarrow & \sigma_1^\Omega[\mathcal{L} + P, \mathcal{B}(b)] \end{array}$$

con respecto a P. Algunos resultados previos menos generales de este tipo fueron dados en [29], [25] y [35]. La prueba que aquí mostramos sigue el mismo esquema que la prueba del Teorema 3.3 en [35], y utiliza una estrategia procedente de [10].

Teorema 2.4.1 *Para cada P_1, $P_2 \in L_\infty(\Omega)$ y $t \in [0,1]$ se verifica la siguiente desigualdad*

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L} + tP_1 + (1-t)P_2, \mathcal{B}(b)] \geq t\,\sigma_1^\Omega[\mathcal{L} + P_1, \mathcal{B}(b)] + (1-t)\,\sigma_1^\Omega[\mathcal{L} + P_2, \mathcal{B}(b)]\,. \tag{2.4.1}$$

Demostración: Ya que $\mathcal{L}$ es fuertemente uniformemente elíptico en Ω, para cada $x \in \bar{\Omega}$ la forma bilineal

$$\langle a, b\rangle := \sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij}(x) a_i b_j\,,$$

donde $a = (a_1, ..., a_N)$, $b = (b_1, ..., b_N) \in \mathbf{R}^N$, define un producto escalar en $\mathbf{R}^N$ y por eso, gracias a la desigualdad de Hölder tenemos que

$$2\sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij}(x) a_i b_j \leq \sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij}(x) a_i a_j + \sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij}(x) b_i b_j\,.$$

De esta desigualdad se sigue fácilmente que para cada $p > N$ la aplicación $G : W_p^2(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega)$ definida por

$$G(u) := (\mathcal{L} - \alpha_0)u + \alpha_0 - \sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,, \qquad u \in W_p^2(\Omega)\,,$$

es cóncava; es decir, para cada u_1, $u_2 \in W_p^2(\Omega)$ y $t \in [0,1]$ la siguiente desigualdad es satisfecha

$$G(tu_1 + (1-t)u_2) \geq t\,G(u_1) + (1-t)\,G(u_2)\,.$$

Observar que para cada $\psi \in \mathcal{P}_b$ se desprende la siguiente relación

$$\frac{\mathcal{L}\psi}{\psi} = (\mathcal{L} - \alpha_0)\theta + \alpha_0 - \sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = G(\theta)\,, \qquad \theta := \log \psi\,.$$

Consideremos P_1, $P_2 \in L_\infty(\Omega)$, $t \in [0,1]$ y ψ_1, $\psi_2 \in \mathcal{P}_b$ arbitrarios. Tomemos

$$\theta_i := \log \psi_i\,, \qquad i = 1\,,\, 2\,.$$

Teniendo en cuenta que siempre que $\psi \in \mathcal{P}_b$ se tiene que ψ, $\frac{1}{\psi} \in L_\infty(\Omega)$ y $\nabla\psi \in L_\infty(\Omega, \mathbf{R}^N)$, se sigue fácilmente que $\psi_1^t \psi_2^{1-t} \in \mathcal{P}_b$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\tfrac{[\mathcal{L}+t\,P_1+(1-t)\,P_2](\psi_1^t\psi_2^{1-t})}{\psi_1^t\psi_2^{1-t}} &= t\,P_1 + (1-t)\,P_2 + \tfrac{\mathcal{L}\psi_1^t\psi_2^{1-t}}{\psi_1^t\psi_2^{1-t}} \\
&= t\,P_1 + (1-t)\,P_2 + G(\log(\psi_1^t\psi_2^{1-t})) \\
&= t\,P_1 + (1-t)\,P_2 + G(t\,\log\psi_1 + (1-t)\,\log\psi_2) \\
&\geq t\,P_1 + (1-t)\,P_2 + t\,G(\theta_1) + (1-t)\,G(\theta_2) \\
&= t\,\tfrac{(\mathcal{L}+P_1)\psi_1}{\psi_1} + (1-t)\,\tfrac{(\mathcal{L}+P_2)\psi_2}{\psi_2} \\
&\geq t\,\inf_\Omega \tfrac{(\mathcal{L}+P_1)\psi_1}{\psi_1} + (1-t)\,\inf_\Omega \tfrac{(\mathcal{L}+P_2)\psi_2}{\psi_2}\,.
\end{aligned}$$

De este modo, gracias al Teorema 2.3.1 obtenemos que

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L} + t\,P_1 + (1-t)\,P_2, \mathcal{B}(b)] \geq t\,\inf_\Omega \frac{(\mathcal{L}+P_1)\psi_1}{\psi_1} + (1-t)\,\inf_\Omega \frac{(\mathcal{L}+P_2)\psi_2}{\psi_2}\,.$$

Ya que esta desigualdad es satisfecha para toda ψ_1, $\psi_2 \in \mathcal{P}_b$, tomando supremos con respecto a ψ_1 y ψ_2 en el miembro derecho obtenemos que

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L} + t\,P_1 + (1-t)\,P_2, \mathcal{B}(b)] \geq t\,\sigma_1^\Omega[\mathcal{L} + P_1, \mathcal{B}(b)] + (1-t)\,\sigma_1^\Omega[\mathcal{L} + P_2, \mathcal{B}(b)]\,.$$

Esto completa la demostración. □

2.5 Concepto de estabilidad

El concepto de estabilidad de un dominio proviene de Babuška [8] y Babuška & Vyborny [9] donde fue utilizado para generalizar algunos resultados pioneros de Courant & Hilbert [13] sobre la variación continua con respecto al dominio Ω de los autovalores de un operador diferencial autoadjunto $\mathcal{L}$ sujeto a condiciones de frontera Dirichlet homogéneas en $\partial\Omega$. Posteriormente, se demostró que este concepto jugaba un papel esencial en teoría del potencial, por proporcionarnos todos los dominios para los cuales el proble ma de Dirichlet tiene sentido (cf. [1] y sus referencias). Además, el concepto de estabilidad fue requerido en [35] para mostrar la dependencia continua de $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{D}]$ con respecto a Ω para una clase genera l de operadores diferenciales $\mathcal{L}$ no necesariamente autoadjuntos.

Sin embargo, cuando tratamos con condiciones de frontera de tipo Neumann, Courant y Hilbert [13] observaron que la dependencia continua del autovalor principal con respecto al dominio puede fallar y por eso, la dependencia continua de $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)]$ con respecto a Ω no es necesariamente cierta. De hecho, ésta falla si $\Gamma_0 = \emptyset$, $b = 0$, $\mathcal{L} = -\Delta$ y $\nu = n$ es la normal exterior unitaria. De este modo, se plantea una cuestión bastante natural. Bajo nuestras condiciones de frontera generales, hay alguna clase general de perturbaciones del dominio para la que se verifique la dependencia continua de $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)]$ en Ω?. En otras palabras, cómo debe ser extendido el concepto de estabilidad del conjunto abierto Ω para que permanezca válida la dependencia continua del autovalor principal?

En Sección 2.6 mostraremos que si $\Gamma_0 \neq \emptyset$, ∂_ν es la derivada conormal asociada a $\mathcal{L}$ y Ω se perturba de tal forma que la *frontera Neumann* Γ_1 es mantenida fija, entonces $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)]$ varía continuamente con Ω. Por tanto, adoptamos los siguientes conceptos.

Definición 2.5.1 *Sea Ω_0 un dominio acotado de $\mathbf{R}^N$ con frontera $\partial\Omega_0 = \Gamma_0^0 \cup \Gamma_1$ tal que $\Gamma_0^0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$, donde Γ_0^0 satisface los mismos requisitos que Γ_0, y Ω_n, $n \geq 1$, una sucesión de dominios acotados de $\mathbf{R}^N$ con fronteras $\partial\Omega_n = \Gamma_0^n \cup \Gamma_1$ de clase C^2 tal que*

$$\Gamma_0^n \cap \Gamma_1 = \emptyset\,, \qquad n \geq 1\,,$$

y Γ_0^n, $n \geq 1$, satisface los mismos requisitos que Γ_0. Entonces:

a) Se dice que Ω_n converge a Ω_0 desde el exterior si para cada $n \geq 1$

$$\Omega_0 \subset \Omega_{n+1} \subset \Omega_n \qquad y \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar\Omega_n = \bar\Omega_0\,.$$

b) Se dice que Ω_n converge a Ω_0 desde el interior si para cada $n \geq 1$

$$\Omega_n \subset \Omega_{n+1} \subset \Omega_0 \qquad y \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega_0\,.$$

c) Se dice que Ω_n converge a Ω_0 si existen dos sucesiones de dominios acotados regulares, digamos Ω_n^I y Ω_n^E, $n \geq 1$, tales que Ω_n^I converge a Ω_0 desde el interior, Ω_n^E converge a Ω_0 desde el exterior, y para cada $n \geq 1$

$$\Omega_n^I \subset \Omega_0 \cap \Omega_n\,, \qquad \Omega_0 \cup \Omega_n \subset \Omega_n^E\,.$$

Nota 2.5.2 *Debe ser destacado que si Ω_n es una sucesión de dominios acotados convergiendo a Ω_0 desde el exterior en el sentido de Definición 2.5.1-a), entonces*

$$dist(\Gamma_1, \partial\Omega_0 \cap \Omega_{n+1}) = dist(\Gamma_1, \Gamma_0^0) > 0$$

y

$$dist(\Gamma_1, \partial\Omega_{n+1} \cap \Omega_n) = dist(\Gamma_1, \Gamma_0^{n+1}) > 0\,.$$

Del mismo modo, si Ω_n es una sucesión de dominios acotados convergiendo a Ω_0 desde el interior en el sentido de Definición 2.5.1-b), entonces

$$dist(\Gamma_1, \partial\Omega_n \cap \Omega_{n+1}) = dist(\Gamma_1, \Gamma_0^n) > 0$$

y

$$dist(\Gamma_1, \partial\Omega_{n+1} \cap \Omega_0) = dist(\Gamma_1, \Gamma_0^{n+1}) > 0\,.$$

Definición 2.5.3 *Sea Ω_0 un dominio acotado de $\mathbf{R}^N$ con frontera $\partial\Omega_0 = \Gamma_0^0 \cup \Gamma_1$ tal que $\Gamma_0^0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$, donde Γ_0^0 satisface los mismos requisitos que Γ_0. Se dice que Ω_0 es estable si para cada sucesión de dominios acotados regulares Ω_n, $n \geq 1$, convergiendo a Ω_0 desde el exterior en el sentido de Definición 2.5.1-a) la siguiente relación se desprende*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} H^1_{\Gamma_0^n}(\Omega_n) = H^1_{\Gamma_0^0}(\Omega_0)\,,$$

donde las funciones de $H^1_{\Gamma_0^0}(\Omega_0)$ son consideradas como funciones de $H^1_{\Gamma_0^n}(\Omega_n)$ extendiéndolas por cero fuera de Ω_0. Recalcamos que $H^1_{\Gamma_0^n}(\Omega_n)$ representa la clausura en $H^1(\Omega_n)$ del conjunto de funciones $C_c^\infty(\Omega_n \cup \Gamma_1)$, $n \geq 0$.

El siguiente resultado muestra que si la frontera de Ω_0 es C^1, entonces Ω_0 es estable en el sentido de Definición 2.5.3. Este es uno de los resultados pivote de cual obtendremos nuestros principales teoremas sobre dependencia continua del autovalor principal con re specto a Ω_0.

Teorema 2.5.4 *Sea Ω_0 un dominio acotado de $\mathbf{R}^N$ con frontera $\partial\Omega_0 = \Gamma_0^0 \cup \Gamma_1$ de clase C^1 tal que $\Gamma_0^0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$, donde Γ_0^0 satisface los mismos requisitos que Γ_0. Entonces, Ω_0 es estable.*

Para demostrar este resultado necesitamos la siguiente versión refinada de Teorema 3.7 en [52].

Teorema 2.5.5 *Sea Ω un dominio acotado de $\mathbf{R}^N$ de clase C^1 con frontera*

$$\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1\,, \qquad \Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset\,,$$

y consideremos cualquier subdominio propio $\Omega_0 \subset \Omega$ de clase C^1 con frontera

$$\partial\Omega_0 = \Gamma_0^0 \cup \Gamma_1\,, \qquad \Gamma_0^0 \cap \Gamma_1 = \emptyset\,,$$

donde Γ_0^0 satisface los mismos requisitos que Γ_0. Denotemos por $H^1_{\Gamma_0^0}(\Omega_0)$ a la clausura en $H^1(\Omega_0)$ del conjunto de funciones $C_c^\infty(\Omega_0 \cup \Gamma_1)$. Entonces,

$$H^1_{\Gamma_0^0}(\Omega_0) = \{\, u \in H^1(\Omega) \;:\; \operatorname{supp} u \subset \bar{\Omega}_0 \,\}\,.$$

En la prueba de este resultado usaremos el siguiente bien conocido concepto.

Definición 2.5.6 *Se dice que Ω_0 satisface la propiedad del segmento si para cada $x \in \partial\Omega_0$ existe un entorno U_x de x y un vector $v_x \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ tal que para cada $t \in (0,1)$*

$$U_x \cap \bar{\Omega}_0 + tv_x \subset \Omega_0 .$$

Nota 2.5.7 *Si Ω_0 es de clase C^1, entonces satisface la propiedad del segmento.*

Demostración del Teorema 2.5.5: Sea $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\operatorname{supp} u \subset \bar{\Omega}_0 .$$

Ya que $\Gamma_1 \subset \partial\Omega \cap \partial\Omega_0$ y Ω_0 es un subdominio de Ω, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$U^\epsilon \cap \Omega \subset \Omega_0 , \qquad U^\epsilon := \Gamma_1 + B_\epsilon ,$$

donde B_ϵ es la bola de radio ϵ centrada en el origen. Además, ya que $\Gamma_0^0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$, ϵ puede ser elegido suficientemente pequeo tal que

$$U^\epsilon \cap \Gamma_0^0 = \emptyset . \tag{2.5.1}$$

Sea $\eta \in C_c^\infty(U^\epsilon)$ tal que

$$\eta(x) = 1 \qquad \text{para cada} \quad x \in U^{\frac{\epsilon}{2}} .$$

Ya que $u \in H^1(\Omega)$, $u \in H^1(\Omega_0)$. Por eso, debido a que el conjunto de restricciones

$$\{\, \psi|_{\Omega_0} \ : \ \psi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N) \,\}$$

es denso en $H^1(\Omega_0)$, existe una sucesión $\psi_n \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$, $n \geq 1$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n|_{\Omega_0} - u\|_{H^1(\Omega_0)} = 0 . \tag{2.5.2}$$

Consideremos las nuevas funciones

$$\xi_n := (\eta\psi_n)|_{\Omega_0} , \qquad n \geq 1 .$$

Gracias a (2.5.1), para cada $n \geq 1$ tenemos que

$$\xi_n \in C_c^\infty(\Omega_0 \cup \Gamma_1) .$$

Además, gracias a (2.5.2),

$$\lim_{n\to\infty} \|\xi_n - \eta u\|_{H^1(\Omega_0)} = 0 . \tag{2.5.3}$$

Por Nota 2.5.7, Ω_0 satisface la propiedad del segmento. Por eso, para cada $x \in \Gamma_0^0$ existe un entorno U_x de x y un vector $v_x \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ tal que para cada $t \in (0,1)$

$$U_x \cap \bar{\Omega}_0 + tv_x \subset \Omega_0 . \tag{2.5.4}$$

Por la compacidad de Γ_0^0 existe un número natural $m \geq 1$ y m puntos $x_j \in \Gamma_0^0$, $1 \leq j \leq m$, tales que

$$\Gamma_0^0 \subset \bigcup_{j=1}^{m} U_{x_j}\,.$$

Sea U_{m+1} un conjunto abierto tal que $\bar{U}_{m+1} \subset \Omega_0$ y el sistema

$$\{\, U_{x_1}, ..., U_{x_m}, U_{m+1} \,\}$$

nos proporciona un recubrimiento de $\bar{\Omega}_0 \setminus U^{\frac{\epsilon}{2}}$, y sea

$$\{\, \beta_1, ..., \beta_m, \beta_{m+1} \,\}$$

una partición de la unidad subordinada a ese recubrimiento. Tomemos

$$\gamma_j := \beta_j(1-\eta)u\,, \qquad 1 \leq j \leq m+1\,,$$

y consideremos las traslaciones

$$\gamma_j^t := \gamma_j(\cdot - tv_{x_j})\,, \qquad 1 \leq j \leq m\,, \quad 0 < t < 1\,.$$

Por construcción,

$$\text{supp}\ \gamma_{m+1} \subset \text{supp}\ \beta_{m+1} \subset U_{m+1}$$

y $\bar{U}_{m+1} \subset \Omega_0$. Por eso,

$$\gamma_{m+1} \in H_0^1(\Omega_0)$$

y por tanto, existe una sucesión $\xi_n^{m+1} \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_0)$, $n \geq 1$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|\xi_n^{m+1} - \gamma_{m+1}\|_{H^1(\Omega_0)} = 0\,. \tag{2.5.5}$$

Además, ya que estamos asumiendo que supp $u \subset \bar{\Omega}_0$, para cada $1 \leq j \leq m$ obtenemos que

$$\text{supp}\ \beta_j \subset U_{x_j} \cap \text{supp}\ u \subset U_{x_j} \cap \bar{\Omega}_0\,.$$

De este modo, gracias a (2.5.4),

$$\text{supp}\ \gamma_j^t \subset U_{x_j} \cap \bar{\Omega}_0 + tv_{x_j} \subset \Omega_0\,, \qquad 1 \leq j \leq m\,, \quad 0 < t < 1\,.$$

y por eso,

$$\gamma_j^t \in H_0^1(\Omega_0)\,, \qquad 1 \leq j \leq m\,, \quad 0 < t < 1\,. \tag{2.5.6}$$

Por la continuidad del operador traslación, para cada número natural $n \geq 1$ existe $t_n \in (0,1)$ tal que

$$\|\gamma_j^{t_n} - \gamma_j\|_{H^1(\Omega_0)} \leq \frac{1}{n}\,, \qquad 1 \leq j \leq m\,. \tag{2.5.7}$$

Además, gracias a (2.5.6), para cada $n \geq 1$ y $1 \leq j \leq m$ existe

$$\xi_n^j \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_0)$$

tal que

$$\|\gamma_j^{t_n} - \xi_n^j\|_{H^1(\Omega_0)} \leq \frac{1}{n}. \tag{2.5.8}$$

Por tanto, gracias a (2.5.7) y (2.5.8), obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \|\xi_n^j - \gamma_j\|_{H^1(\Omega_0)} = 0, \qquad 1 \leq j \leq m. \tag{2.5.9}$$

Ahora, consideremos la sucesión

$$\varphi_n := \xi_n + \sum_{j=1}^{m+1} \xi_n^j, \qquad n \geq 1.$$

Por construcción, para cada $n \geq 1$ tenemos que

$$\varphi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_0 \cup \Gamma_1).$$

Además, gracias a (2.5.3), (2.5.5) y (2.5.9),

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \eta u + \sum_{j=1}^{m+1} \beta_j (1-\eta) u \qquad \text{en} \quad H^1(\Omega_0).$$

En $\bar{\Omega}_0 \setminus U^{\frac{\epsilon}{2}}$ tenemos que

$$\sum_{j=1}^{m+1} \beta_j = 1,$$

mientras que $\eta = 1$ en $U^{\frac{\epsilon}{2}}$. Así,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = u \qquad \text{en} \quad H^1(\Omega_0),$$

y por tanto,

$$u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega_0).$$

Para mostrar la otra inclusión consideremos $u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega_0)$. Por definición, existe una sucesión

$$\varphi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_0 \cup \Gamma_1), \quad n \geq 1, \tag{2.5.10}$$

tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - u\|_{H^1(\Omega_0)} = 0. \tag{2.5.11}$$

Ahora, consideremos la nueva sucesión

$$\psi_n := \begin{cases} \varphi_n & \text{en } \ \Omega_0 \cup \Gamma_1 \,, \\ 0 & \text{en } \ \bar{\Omega} \setminus (\Omega_0 \cup \Gamma_1) \,, \end{cases} \qquad n \geq 1 \,.$$

Gracias a (2.5.10), (2.5.11), y debido a que $\Gamma_0^0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$, tenemos que

$$\psi_n \in C_c^\infty(\Omega \cup \Gamma_1) \,, \qquad n \geq 1 \,.$$

Además, ψ_n, $n \geq 1$, es una sucesión de Cauchy en $H^1(\Omega)$. De este modo, existe $\psi \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} \|\psi_n - \psi\|_{H^1(\Omega)} = 0 \,. \tag{2.5.12}$$

En particular,

$$\lim_{n \to \infty} \psi_n = \psi \quad \text{c.t.p. en } \ \Omega \,,$$

y por eso $\psi = 0$ en $\Omega \setminus \Omega_0$, ya que $\psi_n = 0$ en $\Omega \setminus \Omega_0$ para cada $n \geq 1$. Así,

$$\operatorname{supp} \psi \subset \bar{\Omega}_0 \,.$$

Por otra parte, se sigue de (2.5.12) que

$$\lim_{n \to \infty} \|\psi_n|_{\Omega_0} - \psi|_{\Omega_0}\|_{H^1(\Omega_0)} = 0 \,. \tag{2.5.13}$$

Además, por definición,

$$\varphi_n = \psi_n|_{\Omega_0} \,, \qquad n \geq 1 \,.$$

De este modo, obtenemos de (2.5.11) y (2.5.13) que

$$u = \psi|_{\Omega_0} \,.$$

Por tanto, $u \in H^1(\Omega)$ y

$$\operatorname{supp} u \subset \bar{\Omega}_0 \,.$$

Esto concluye la demostración. □

Ahora estamos en disposición de probar el Teorema 2.5.4.

Demostración del Teorema 2.5.4: Sea Ω_n, $n \geq 1$, una sucesión de dominios acotados regulares convergiendo a Ω_0 desde el exterior en el sentido de Definición 2.5.1(a). Tenemos que probar que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} H^1_{\Gamma_0^n}(\Omega_n) = H^1_{\Gamma_0^0}(\Omega_0) \,. \tag{2.5.14}$$

Si $\Omega_1 = \Omega_0$, entonces $\Omega_n = \Omega_0$ para cada $n \geq 1$ y por tanto, (2.5.14) se verifica. Por lo tanto, para el resto de la prueba asumiremos que Ω_0 es un subdominio propio de Ω_1.

Asumamos que

$$u \in \bigcap_{n=1}^{\infty} H^1_{\Gamma_0^n}(\Omega_n)\,.$$

Entonces, se sigue por definición que

$$u \in H^1(\Omega_n)\,, \qquad \operatorname{supp} u \subset \bar{\Omega}_n\,, \qquad n \geq 1\,,$$

y por eso,

$$u \in H^1(\Omega_1)\,, \qquad \operatorname{supp} u \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\Omega}_n = \bar{\Omega}_0\,.$$

Por tanto, gracias al Teorema 2.5.5,

$$u \in H^1_{\Gamma_0^0}(\Omega_0)\,. \tag{2.5.15}$$

Ahora, asumamos que (2.5.15) y fijemos $n \geq 1$. Si $\Omega_0 = \Omega_n$, entonces

$$u \in H^1_{\Gamma_0^n}(\Omega_n)\,,$$

mientras que si Ω_0 es un subdominio propio de Ω_n la extensión de u por cero fuera de Ω_0, digamos $\tilde{u}$, satisface

$$\tilde{u} \in H^1_{\Gamma_0^n}(\Omega_n)\,.$$

Esto concluye la demostración. □

2.6 Dependencia continua respecto de Ω

En esta sección analizamos la dependencia continua de $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)]$ con respecto a perturbaciones del dominio Ω alrededor de su frontera Dirichlet Γ_0 en el caso particular en el que ∂_ν es la derivada conormal con respecto a $\mathcal{L}$, es decir, cuando la condición (1.4.15) es satisfecha. Por lo tanto, para el resto de esta sección será asumida la condición (1.4.15), aunque creemos que esta condición es necesitada exclusivamente por razones técnicas.

Denotemos por $\mu > 0$ la constante de elipticidad del operador $\mathcal{L}$. Entonces, gracias a (1.4.15), tenemos que

$$\langle \nu, n \rangle = \sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{ij} n_j n_i \geq \mu |n|^2 = \mu > 0\,,$$

y por tanto, ν es un campo vectorial exterior y no tangente. También, destaquemos que si $\alpha_{ij} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$, $1 \leq i,j \leq N$, entonces $\nu \in \mathcal{C}^1(\Gamma_1, \mathbf{R}^N)$, ya que Γ_1 es de clase $\mathcal{C}^2$.

La dependencia continua del autovalor principal con respecto al dominio está basada en el siguiente resultado, el cual nos proporciona la *dependencia continua desde el exterior.*

Teorema 2.6.1 (Dependencia continua exterior) *Asumamos que*

$$\alpha_{ij} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}), \quad \alpha_i \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}), \qquad 1 \le i,j \le N, \tag{2.6.1}$$

y que la condición (1.4.15) *es satisfecha.*

Sea Ω_0 *un subdominio propio de* Ω *con frontera de clase* $\mathcal{C}^2$ *tal que*

$$\partial\Omega_0 = \Gamma_0^0 \cup \Gamma_1, \qquad \Gamma_0^0 \cap \Gamma_1 = \emptyset,$$

donde Γ_0^0 *satisface los mismos requisitos que* Γ_0*, y sea* Ω_n*,* $n \ge 1$*, una sucesión de dominios acotados de* $\mathbf{R}^N$ *de clase* $\mathcal{C}^2$ *convergiendo a* Ω_0 *desde el exterior y tal que* $\Omega_n \subset \Omega$*,* $n \ge 1$*. Para cada* $n \ge 0$*, denotemos por* $\mathcal{B}_n(b)$ *al operador de frontera definido por*

$$\mathcal{B}_n(b)u := \begin{cases} u & \text{en } \Gamma_0^n, \\ \partial_\nu u + bu & \text{en } \Gamma_1, \end{cases}$$

donde

$$\Gamma_0^n := \partial\Omega_n \setminus \Gamma_1, \qquad n \ge 0,$$

y denotemos por $(\sigma_1^{\Omega_n}[\mathcal{L},\mathcal{B}_n(b)],\varphi_n)$ *al auto-par principal asociado con* $(\mathcal{L},\mathcal{B}_n(b),\Omega_n)$*, donde es asumido que la autofunción principal está normalizada tal que*

$$\|\varphi_n\|_{H^1(\Omega_n)} = 1, \qquad n \ge 0.$$

Entonces, $\varphi_0 \in W^2_{\mathcal{B}_0(b)}(\Omega_0)$ *y*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_1^{\Omega_n}[\mathcal{L},\mathcal{B}_n(b)] = \sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L},\mathcal{B}_0(b)], \qquad \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n|_{\Omega_0} - \varphi_0\|_{H^1(\Omega_0)} = 0.$$

Demostración: La existencia y la unicidad de los auto-pares principales

$$(\sigma_1^{\Omega_n}[\mathcal{L},\mathcal{B}_n(b)],\varphi_n), \qquad n \ge 0,$$

está garantizada por el Teorema 12.1 de [4]. Por construcción, para cada $n \ge 1$

$$\Omega_0 \subset \Omega_{n+1} \subset \Omega_n \subset \Omega,$$

y por eso, gracias a la Proposición 2.2.2 obtenemos que

$$\sigma_1^{\Omega_n}[\mathcal{L},\mathcal{B}_n(b)] \le \sigma_1^{\Omega_{n+1}}[\mathcal{L},\mathcal{B}_{n+1}(b)] \le \sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L},\mathcal{B}_0(b)], \qquad n \ge 1.$$

Por tanto, el límite

$$\sigma_1^E := \lim_{n\to\infty} \sigma_1^{\Omega_n}[\mathcal{L},\mathcal{B}_n(b)] \tag{2.6.2}$$

está bien definido. Tenemos que demostrar que

$$\sigma_1^E = \sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L},\mathcal{B}_0(b)]. \tag{2.6.3}$$

Gracias al Teorema 12.1 de [4],

$$\varphi_n \in W^2_{\mathcal{B}_n(b)}(\Omega_n) \subset H^2(\Omega_n)\,, \qquad n \geq 0\,.$$

Ahora, tomemos

$$\tilde{\varphi}_n := \begin{cases} \varphi_n & \text{en} \quad \Omega_n\,, \\ 0 & \text{en} \quad \Omega \setminus \Omega_n\,, \end{cases} \qquad n \geq 0\,.$$

Ya que $\varphi_n \in H^1(\Omega_n)$ y $\varphi_n = 0$ en Γ_0^n, para cada $n \geq 0$ tenemos que $\tilde{\varphi}_n \in H^1(\Omega)$. Además,

$$\|\tilde{\varphi}_n\|_{H^1(\Omega)} = \|\varphi_n\|_{H^1(\Omega_n)} = 1\,, \qquad n \geq 0\,. \tag{2.6.4}$$

Así, ya que $H^1(\Omega)$ está incluido de forma compacta en $L^2(\Omega)$, existe una subsucesión de $\tilde{\varphi}_n$, $n \geq 1$, reetiquetada por n, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{\varphi}_n - \tilde{\varphi}\|_{L^2(\Omega)} = 0 \tag{2.6.5}$$

para alguna función $\tilde{\varphi} \in L^2(\Omega)$. En particular,

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\varphi}_n(x) = \tilde{\varphi}(x) \qquad \text{c.t.p. en} \quad \Omega\,. \tag{2.6.6}$$

Además, afirmamos que

$$\operatorname{supp} \tilde{\varphi} \subset \bar{\Omega}_0\,. \tag{2.6.7}$$

En efecto, escojamos

$$x \notin \bar{\Omega}_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\Omega}_n\,.$$

Entonces, ya que $\bar{\Omega}_n$, $n \geq 1$, es una sucesión decreciente de conjuntos compactos, existe un número natural $n_0 \geq 1$ tal que $x \notin \bar{\Omega}_n$ para cada $n \geq n_0$. Por eso,

$$\tilde{\varphi}_n(x) = 0\,, \qquad n \geq n_0\,.$$

De este modo,

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\varphi}_n(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \notin \bar{\Omega}_0\,.$$

Por la unicidad del límite en (2.6.6) tenemos que

$$\tilde{\varphi} = 0 \qquad \text{en} \quad \Omega \setminus \bar{\Omega}_0\,,$$

y por lo tanto (2.6.7) está probado. Observar que $\varphi_n(x) > 0$ para cada $x \in \Omega_n \cup \Gamma_1$ y $n \geq 0$, ya que φ_n es fuertemente positiva en Ω_n. En particular, $\varphi_n(x) > 0$ para cada $x \in \Omega_0 \cup \Gamma_1$ y $n \geq 0$. Por eso, (2.6.6) implica

$$\tilde{\varphi} \geq 0 \qquad \text{en} \quad \Omega_0\,. \tag{2.6.8}$$

Ahora analizamos el comportamiento límite de las trazas φ_n, $n \geq 1$, en Γ_1. Por la regularidad requerida sobre $\partial\Omega_0$, se sigue del teorema de traza (e.g. Teorema 8.7 de [52]) que existe un operador lineal continuo

$$\gamma_1 := H^1(\Omega_0) \to W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$$

tal que

$$\gamma_1 u = u|_{\Gamma_1} \qquad \text{para cada} \quad u \in H^1(\Omega_0)\,. \tag{2.6.9}$$

Tal operador es denominado operador traza sobre Γ_1.

Para cada $n \geq 1$, denotemos por i_n la inclusión canónica

$$i_n : H^1(\Omega_n) \to H^1(\Omega_0)\,;$$

i_n es la restricción a Ω_0 de las funciones de $H^1(\Omega_n)$. Obsérvese que para cada $n \geq 1$

$$\|i_n\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_n),H^1(\Omega_0))} \leq 1\,. \tag{2.6.10}$$

Ahora, tomando

$$T_n := \gamma_1 \circ i_n\,, \qquad n \geq 1\,,$$

obtenemos de (2.6.10) que

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_n),W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))} \leq \|\gamma_1\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_0),W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))}\,, \qquad n \geq 1\,.$$

En particular, estos operadores están uniformemente acotados. Además, para cada $n \geq 1$ tenemos que

$$\varphi_n|_{\Gamma_1} = i_n(\varphi_n)|_{\Gamma_1} = T_n\varphi_n \in W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)\,,$$

y por eso

$$\|\varphi_n|_{\Gamma_1}\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \|T_n\varphi_n\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \leq \|\gamma_1\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_0),W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))}\,, \qquad n \geq 1\,,$$

donde hemos utilizado la condición de normalización.

Por otra parte, la inclusión $W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \hookrightarrow L_2(\Gamma_1)$ es compacta, ya que Γ_1 es compacto (e.g. Teorema 7.10 de [52]), y por tanto existe una subsucesión de φ_n, $n \geq 1$, de nuevo etiquetada por n, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n|_{\Gamma_1} - \varphi^*\|_{L_2(\Gamma_1)} = 0 \tag{2.6.11}$$

para alguna $\varphi^* \in L_2(\Gamma_1)$.

Ahora probamos que la correspondiente sucesión $\tilde{\varphi}_n$, $n \geq 1$, es una sucesión de Cauchy en $H^1(\Omega)$. Gracias a (2.6.5) esto muestra que

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{\varphi}_n - \tilde{\varphi}\|_{H^1(\Omega)} = 0\,. \tag{2.6.12}$$

En efecto, supongamos que k y m son números naturales tales que $1 \leq k \leq m$. Entonces, $\Omega_m \subset \Omega_k$ y debido a que $\mathcal{L}$ es fuertemente uniformemente elíptico en $\bar{\Omega}$, integrando por partes y teniendo en cuenta que $\varphi_n = 0$ en Γ_0^n para cada $n \geq 1$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\mu\|\nabla(\tilde{\varphi}_k & - \tilde{\varphi}_m)\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \textstyle\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega \alpha_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{\varphi}_k - \tilde{\varphi}_m) \frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{\varphi}_k - \tilde{\varphi}_m) \\
&= \textstyle\sum_{i,j=1}^N \left\{ \int_{\Omega_k} \alpha_{ij} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + \int_{\Omega_m} \alpha_{ij} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j} - 2 \int_{\Omega_m} \alpha_{ij} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j} \right\} \\
&= -\textstyle\sum_{i,j=1}^N \left\{ \int_{\Omega_k} \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha_{ij} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}) \varphi_k + \int_{\Omega_m} \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha_{ij} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i}) \varphi_m - 2 \int_{\Omega_m} \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha_{ij} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}) \varphi_m \right\} \\
&\quad + \textstyle\sum_{i,j=1}^N \int_{\Gamma_1} \alpha_{ij} \left\{ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \varphi_k n_j + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} \varphi_m n_j - 2 \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \varphi_m n_j \right\} .
\end{aligned}$$

De esta relación, gracias al hecho de que φ_n es la autofunción principal asociada con

$$\sigma_1^n := \sigma_1^{\Omega_n}[\mathcal{L}, \mathcal{B}_n(b)] , \qquad n \geq 0 ,$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mu\|\nabla(\tilde{\varphi}_k - \tilde{\varphi}_m)\|^2_{L_2(\Omega)} \leq\; & \textstyle\int_{\Omega_k} [\sigma_1^k \varphi_k - \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} - \alpha_0 \varphi_k] \varphi_k \\
& + \textstyle\int_{\Omega_m} [\sigma_1^m \varphi_m - \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_i \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} - \alpha_0 \varphi_m] \varphi_m \\
& -2 \textstyle\int_{\Omega_m} [\sigma_1^k \varphi_k - \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} - \alpha_0 \varphi_k] \varphi_m \\
& + \textstyle\sum_{i,j=1}^N \int_{\Gamma_1} \alpha_{ij} \left\{ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \varphi_k n_j + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} \varphi_m n_j - 2 \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \varphi_m n_j \right\} ,
\end{aligned} \tag{2.6.13}$$

donde los coeficientes $\tilde{\alpha}_i \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, $1 \leq i \leq N$, son los dados por (1.4.14). Reagrupando términos en (2.6.13) se sigue que

$$\begin{aligned}
\mu\|\nabla(\tilde{\varphi}_k - \tilde{\varphi}_m)\|^2_{L_2(\Omega)} \leq\; & \textstyle\sigma_1^k \int_{\Omega_k} \varphi_k(\varphi_k - \tilde{\varphi}_m) + (\sigma_1^m - \sigma_1^k) \int_{\Omega_m} \varphi_m^2 \\
& + \textstyle\sigma_1^k \int_{\Omega_m} \varphi_m(\varphi_m - \varphi_k) + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_k} \tilde{\alpha}_i(\tilde{\varphi}_m - \varphi_k) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \\
& + \textstyle\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_m} \tilde{\alpha}_i \varphi_m \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_k - \varphi_m) \\
& + \textstyle\int_{\Omega_k} \alpha_0 \varphi_k(\tilde{\varphi}_m - \varphi_k) + \int_{\Omega_m} \alpha_0 \varphi_m(\varphi_k - \varphi_m) \\
& + \textstyle\sum_{i,j=1}^N \int_{\Gamma_1} \alpha_{ij} \left\{ (\varphi_k - \varphi_m) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} + \varphi_m \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_m - \varphi_k) \right\} n_j .
\end{aligned} \tag{2.6.14}$$

Ahora, estimaremos cada uno de los términos del segundo miembro de (2.6.14). Obsérvese que, gracias a (2.6.4), se desprenden las siguientes estimaciones

$$\|\tilde{\varphi}_n\|_{L_2(\Omega)} \leq 1 , \quad \|\nabla \tilde{\varphi}_n\|_{L_2(\Omega)} \leq 1 , \qquad n \geq 0 . \tag{2.6.15}$$

Además, σ_1^n, $n \geq 1$, es una sucesión creciente acotada superiormente por σ_1^0, por construcción. Usando este hecho junto con la desigualdad de Hölder y (2.6.15) se obtiene

$$\left| \sigma_1^k \int_{\Omega_k} \varphi_k(\varphi_k - \tilde{\varphi}_m) \right| \leq |\sigma_1^0| \, \|\tilde{\varphi}_k - \tilde{\varphi}_m\|_{L_2(\Omega)} , \tag{2.6.16}$$

$$\left| (\sigma_1^m - \sigma_1^k) \int_{\Omega_m} \varphi_m^2 \right| \leq |\sigma_1^m - \sigma_1^k| , \tag{2.6.17}$$

$$\left|\sigma_1^k \int_{\Omega_m} \varphi_m(\varphi_m - \varphi_k)\right| \leq |\sigma_1^0| \, \|\tilde{\varphi}_m - \tilde{\varphi}_k\|_{L_2(\Omega)}, \tag{2.6.18}$$

$$\left|\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_k} \tilde{\alpha}_i(\tilde{\varphi}_m - \varphi_k)\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\right| \leq \left(\sum_{i=1}^N \|\tilde{\alpha}_i\|_{L_\infty(\Omega)}\right) \|\tilde{\varphi}_m - \tilde{\varphi}_k\|_{L_2(\Omega)}, \tag{2.6.19}$$

$$\left|\int_{\Omega_k} \alpha_0 \varphi_k(\tilde{\varphi}_m - \varphi_k)\right| \leq \|\alpha_0\|_{L_\infty(\Omega)} \|\tilde{\varphi}_m - \tilde{\varphi}_k\|_{L_2(\Omega)}, \tag{2.6.20}$$

y

$$\left|\int_{\Omega_m} \alpha_0 \varphi_m(\varphi_k - \varphi_m)\right| \leq \|\alpha_0\|_{L_\infty(\Omega)} \|\tilde{\varphi}_m - \tilde{\varphi}_k\|_{L_2(\Omega)}. \tag{2.6.21}$$

Con objeto de estimar las integrales sobre Γ_1 debemos recordar que para cada $n \geq 1$

$$\partial_\nu \varphi_n + b\,\varphi_n = 0 \qquad \text{en} \quad \Gamma_1,$$

donde

$$\nu_i := \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}\, n_j, \qquad 1 \leq i \leq N.$$

Así, para cada número natural $n \geq 0$ tenemos que

$$\sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} n_j = \sum_{i=1}^N \nu_i \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} = \langle \nabla \varphi_n, \nu \rangle = \partial_\nu \varphi_n = -b\,\varphi_n,$$

y por eso

$$\sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_m - \varphi_k) n_j = -b\,(\varphi_m - \varphi_k).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \left|\textstyle\sum_{i,j=1}^N \int_{\Gamma_1} \alpha_{ij}(\varphi_k - \varphi_m)\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} n_j\right| &= \left|\textstyle\int_{\Gamma_1} b\varphi_k(\varphi_m - \varphi_k)\right| \\ &\leq \|b\|_{L_\infty(\Gamma_1)} \|\varphi_k|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} \|(\varphi_k - \varphi_m)|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)}, \end{aligned} \tag{2.6.22}$$

y

$$\begin{aligned} \left|\textstyle\sum_{i,j=1}^N \int_{\Gamma_1} \alpha_{ij}\varphi_m \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_m - \varphi_k) n_j\right| &= \left|\textstyle\int_{\Gamma_1} b\,\varphi_m(\varphi_k - \varphi_m)\right| \\ &\leq \|b\|_{L_\infty(\Gamma_1)} \|\varphi_m|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} \|(\varphi_k - \varphi_m)|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)}. \end{aligned} \tag{2.6.23}$$

Únicamente queda por estimar el término

$$I_{mk} := \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_m} \tilde{\alpha}_i \varphi_m \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_k - \varphi_m). \tag{2.6.24}$$

Ya que $\tilde{\alpha}_i \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, con el fin de desarrollar una integración por partes en (2.6.24) debemos aproximar cada uno de los coeficientes $\tilde{\alpha}_i$, $1 \leq i \leq N$, por una sucesión de coeficientes regulares, denotada por α_i^n, $n \geq 1$.

Fijemos $\delta > 0$ y consideremos el entorno tubular de Ω de radio $\delta > 0$,

$$\Omega_\delta := \bar{\Omega} + B_\delta(0) .$$

Para cada $1 \leq i \leq N$, sea $\hat{\alpha}_i$ una extensión continua de $\tilde{\alpha}_i$ a $\mathbf{R}^N$ tal que

$$\hat{\alpha}_i \in \mathcal{C}_c(\Omega_\delta) , \qquad \|\hat{\alpha}_i\|_{L_\infty(\mathbf{R}^N)} = \|\tilde{\alpha}_i\|_{L_\infty(\Omega)} . \tag{2.6.25}$$

Ahora, consideremos la función

$$\rho(x) := \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{si} \quad |x| < 1 , \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1 , \end{cases}$$

y la *aproximación de la identidad* asociada

$$\rho_n := (\int_{\mathbf{R}^N} \rho)^{-1} n^N \rho(n \,\cdot) , \qquad n \in \mathbf{N} .$$

Observar que para cada $n \geq 1$ la función ρ_n satisface

$$\rho_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^N) , \qquad \operatorname{supp} \rho_n \subset B_{\frac{1}{n}}(0) , \qquad \rho_n \geq 0 , \qquad \|\rho_n\|_{L_1((\mathbf{R}^N)} = 1 .$$

Entonces, para cada $1 \leq i \leq N$ la nueva sucesión

$$\alpha_i^n := \rho_n * \hat{\alpha}_i , \qquad n \geq 1 ,$$

es de clase $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ y converge a $\hat{\alpha}_i$ uniformemente en cualquier subconjunto compacto de $\mathbf{R}^N$ (e.g. Teorema 8.1.3 de [22]). En particular,

$$\lim_{n\to\infty} \|\alpha_i^n|_\Omega - \tilde{\alpha}_i\|_{L_\infty(\Omega)} = 0 , \qquad 1 \leq i \leq N , \tag{2.6.26}$$

ya que $\hat{\alpha}_i|_\Omega = \tilde{\alpha}_i$. Además, gracias a (2.6.25), se sigue de la desigualdad de Young que

$$\|\alpha_i^n\|_{L_\infty(\mathbf{R}^N)} \leq \|\rho_n\|_{L_1(\mathbf{R}^N)} \|\hat{\alpha}_i\|_{L_\infty(\mathbf{R}^N)} = \|\tilde{\alpha}_i\|_{L_\infty(\Omega)} , \qquad 1 \leq i \leq N , \quad n \geq 1 , \tag{2.6.27}$$

y

$$\|\frac{\partial \alpha_i^n}{\partial x_i}\|_{L_\infty(\mathbf{R}^N)} \leq \|\frac{\partial \rho_n}{\partial x_i}\|_{L_1(\mathbf{R}^N)} \|\tilde{\alpha}_i\|_{L_\infty(\Omega)} , \qquad 1 \leq i \leq N , \quad n \geq 1 . \tag{2.6.28}$$

ya que

$$\frac{\partial \alpha_i^n}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho_n}{\partial x_i} * \hat{\alpha}_i , \qquad 1 \leq i \leq N , \quad n \geq 1 .$$

Por otro parte, para cada $1 \leq i \leq N$ y $n \geq 1$

$$\|\frac{\partial \rho_n}{\partial x_i}\|_{L_1(\mathbf{R}^N)} = (\int_{\mathbf{R}^N} \rho)^{-1} n \, \|\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\|_{L_1(\mathbf{R}^N)} ,$$

y por eso (2.6.28) implica

$$\|\frac{\partial \alpha_i^n}{\partial x_i}\|_{L_\infty(\mathbf{R}^N)} \leq \left(\int_{\mathbf{R}^N} \rho\right)^{-1} n \,\|\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\|_{L_1(\mathbf{R}^N)} \|\tilde{\alpha}_i\|_{L_\infty(\Omega)}, \qquad 1 \leq i \leq N, \quad n \geq 1. \tag{2.6.29}$$

Ahora, volviendo a (2.6.24) obtenemos que para cada $n \geq 1$

$$I_{mk} := \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_m} (\tilde{\alpha}_i - \alpha_i^n)\varphi_m \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_k - \varphi_m) + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_m} \alpha_i^n \varphi_m \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_k - \varphi_m). \tag{2.6.30}$$

Ahora estimamos cada uno de los términos del segundo miembro de (2.6.30). Aplicando la desigualdad de Hölder se sigue fácilmente que

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_m} (\tilde{\alpha}_i - \alpha_i^n)\varphi_m \tfrac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_k - \varphi_m)\right| &\leq \left(\sum_{i=1}^N \|\tilde{\alpha}_i - \alpha_i^n\|_{L_\infty(\Omega)}\right) \|\tilde{\varphi}_m\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla(\tilde{\varphi}_k - \tilde{\varphi}_m)\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq 2\sum_{i=1}^N \|\tilde{\alpha}_i - \alpha_i^n\|_{L_\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

Además, integrando por partes se obtiene

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_m} \alpha_i^n \varphi_m \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_k - \varphi_m) = -\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_m} (\varphi_k - \varphi_m)\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha_i^n \varphi_m) + \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_1} \alpha_i^n \varphi_m (\varphi_k - \varphi_m) n_i,$$

y por eso,

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_m} \alpha_i^n \varphi_m \tfrac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_k - \varphi_m)\right| \leq\ & \left(\sum_{i=1}^N \|\alpha_i^n\|_{L_\infty(\mathbf{R}^N)}\right) \|\nabla\tilde{\varphi}_m\|_{L_2(\Omega)} \|\tilde{\varphi}_k - \tilde{\varphi}_m\|_{L_2(\Omega)} \\ +\ & \left(\sum_{i=1}^N \|\tfrac{\partial \alpha_i^n}{\partial x_i}\|_{L_\infty(\mathbf{R}^N)}\right) \|\tilde{\varphi}_m\|_{L_2(\Omega)} \|\tilde{\varphi}_k - \tilde{\varphi}_m\|_{L_2(\Omega)} \\ +\ & \left(\sum_{i=1}^N \|\alpha_i^n\|_{L_\infty(\mathbf{R}^N)}\right) \|\varphi_m|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} \|(\varphi_k - \varphi_m)|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)}. \end{aligned}$$

De este modo, sustituyendo estas estimaciones en (2.6.30) y usando (2.6.15), (2.6.27) y (2.6.29) obtenemos que para cualquier $n \geq 1$

$$\begin{aligned} |I_{mk}| \leq\ & 2\sum_{i=1}^N \|\tilde{\alpha}_i - \alpha_i^n\|_{L_\infty(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \|\tilde{\alpha}_i\|_{L_\infty(\Omega)} \|\varphi_m|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} \|(\varphi_k - \varphi_m)|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} \\ & + \sum_{i=1}^N \left(1 + \left(\int_{\mathbf{R}^N} \rho\right)^{-1} n \,\|\tfrac{\partial \rho}{\partial x_i}\|_{L_1(\mathbf{R}^N)}\right) \|\tilde{\alpha}_i\|_{L_\infty(\Omega)} \|\tilde{\varphi}_k - \tilde{\varphi}_m\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ahora, fijemos $\epsilon > 0$. Gracias a (2.6.26) existe $n \geq 1$ tal que

$$2\sum_{i=1}^N \|\tilde{\alpha}_i - \alpha_i^n\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

Por eso, gracias a (2.6.5) y (2.6.11), existe $n_0 \geq 1$ tal que para cualquier $n_0 \leq k \leq m$

$$|I_{mk}| \leq \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.6.31}$$

Por tanto, sustituyendo (2.6.16 – 2.6.21) y (2.6.22 – 2.6.23) en (2.6.14) y usando (2.6.2), (2.6.5), (2.6.11), y (2.6.31), se sigue fácilmente que existe $k_0 \geq n_0$ tal que para cada $k_0 \leq k \leq m$

$$\mu\|\nabla(\tilde{\varphi}_k - \tilde{\varphi}_m)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \epsilon.$$

Esto prueba que $\tilde{\varphi} \in H^1(\Omega)$ y completa la demostración de (2.6.12). Observar que

$$\|\tilde{\varphi}\|_{H^1(\Omega)} = \lim_{n\to\infty} \|\tilde{\varphi}_n\|_{H^1(\Omega)} = \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_{H^1(\Omega_n)} = 1\,. \tag{2.6.32}$$

Además, si γ^1 representa el operador traza de $H^1(\Omega)$ sobre Γ_1, entonces

$$\|\varphi_n|_{\Gamma_1} - \tilde{\varphi}|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} = \|\gamma^1(\tilde{\varphi}_n - \tilde{\varphi})\|_{L_2(\Gamma_1)} \leq \|\gamma^1\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega),L_2(\Gamma_1))}\|\tilde{\varphi}_n - \tilde{\varphi}\|_{H^1(\Omega)}$$

y por eso, gracias a (2.6.12),

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n|_{\Gamma_1} - \tilde{\varphi}|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} = 0\,.$$

Así, gracias a (2.6.11) obtenemos que

$$\tilde{\varphi}|_{\Gamma_1} = \varphi^*\,. \tag{2.6.33}$$

Denotemos por

$$\varphi := \tilde{\varphi}|_{\Omega_0}\,. \tag{2.6.34}$$

Ya que $\varphi_n|_{\Omega_0} = \tilde{\varphi}_n|_{\Omega_0}$, por (2.6.12) tenemos que $\varphi \in H^1(\Omega_0)$ y que

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n|_{\Omega_0} - \varphi\|_{H^1(\Omega_0)} = 0\,.$$

Además, gracias a (2.6.7) y (2.6.32),

$$\|\varphi\|_{H^1(\Omega_0)} = \|\tilde{\varphi}\|_{H^1(\Omega)} = 1\,. \tag{2.6.35}$$

De este modo, gracias a (2.6.8), $\varphi > 0$ en Ω_0. Ahora mostramos que φ es una solución débil de

$$\begin{cases} \mathcal{L}\varphi = \sigma_1^E\varphi & \text{en } \Omega_0\,, \\ \mathcal{B}_0(b)\varphi = 0 & \text{en } \partial\Omega_0\,, \end{cases} \tag{2.6.36}$$

donde σ_1^E es el límite (2.6.2) y $\mathcal{B}_0(b)$ es el operador de frontera definido por

$$\mathcal{B}_0(b)u := \begin{cases} u & \text{en } \Gamma_0^0\,, \\ \partial_\nu u + bu & \text{en } \Gamma_1\,. \end{cases}$$

En efecto, ya que $\tilde{\varphi} \in H^1(\Omega)$ y supp $\tilde{\varphi} \subset \bar{\Omega}_0$ se sigue de Teorema 2.5.5 que $\tilde{\varphi} \in H^1_{\Gamma_0^0}(\Omega_0)$, y por eso $\varphi = \tilde{\varphi}|_{\Omega_0} \in H^1_{\Gamma_0^0}(\Omega_0)$. Ahora, tomemos

$$\xi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_0 \cup \Gamma_1)\,.$$

Entonces, multiplicando la ecuación

$$\mathcal{L}\varphi_n = \sigma_1^n\varphi_n \qquad \text{en } \ \Omega_n\,, \qquad n \geq 1\,,$$

por ξ, integrando en Ω_n, aplicando de fórmula de integración por partes y teniendo en cuenta que supp $\xi \subset \Omega_0 \cup \Gamma_1$, se sigue

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega_0} \alpha_{ij} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_0} \tilde{\alpha}_i \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \xi + \int_{\Omega_0} \alpha_0 \varphi_n \xi = \sigma_1^n \int_{\Omega_0} \varphi_n \xi + \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Gamma_1} \alpha_{ij} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \xi n_j ,$$

para cada $n \geq 1$. Además, aplicando que

$$\partial_\nu \varphi_n + b\varphi_n = 0 \qquad \text{en } \Gamma_1 , \qquad n \geq 1 ,$$

se verifica

$$\sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{ij} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \xi n_j = \sum_{i=1}^{N} \nu_i \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \xi = \langle \nabla \varphi_n, \nu \rangle \xi = \partial_\nu \varphi_n \xi = -b\varphi_n \xi ,$$

y por eso para cada $n \geq 1$ obtenemos que

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega_0} \alpha_{ij} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_0} \tilde{\alpha}_i \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \xi + \int_{\Omega_0} \alpha_0 \varphi_n \xi = \sigma_1^n \int_{\Omega_0} \varphi_n \xi - \int_{\Gamma_1} b\varphi_n \xi . \qquad (2.6.37)$$

Ya que $\tilde{\varphi}|_{\Gamma_1} = \varphi|_{\Gamma_1}$ y

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_{H^1(\Omega_0)} = 0 , \qquad \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n|_{\Gamma_1} - \tilde{\varphi}|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} = 0 ,$$

pasando al límite cuando $n \to \infty$ en (2.6.37) el teorema de la convergencia dominada implica que

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega_0} \alpha_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_0} \tilde{\alpha}_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \xi + \int_{\Omega_0} \alpha_0 \varphi \xi = \sigma_1^E \int_{\Omega_0} \varphi \xi - \int_{\Gamma_1} b\varphi \xi .$$

De este modo, $\varphi \in H^1_{\Gamma_0^0}(\Omega_0)$ es una solución débil de (2.6.36) y para cada $\omega > -\sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L}, \mathcal{B}_0(b)]$ la función $\varphi \in L_2^+(\Omega_0)$ nos proporciona una autofunción positiva de $(\omega + \mathcal{L}_2)^{-1}$ asociada al autovalor $(\omega + \sigma_1^E)^{-1}$. Gracias a la prueba de Teorema 12.1 de [4], el radio espectral del operador $(\omega mega + \mathcal{L}_2)^{-1}$ en Ω_0 debe ser igual a $(\omega + \sigma_1^E)^{-1}$. Por otra parte, gracias al teorema de Krein-Rutman (cf. [47] App. 3.2),

$$\text{spr } (\omega + \mathcal{L}_2)^{-1} = (\omega + \sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L}, \mathcal{B}_0(b)])^{-1} .$$

Por tanto,

$$\sigma_1^E = \sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L}, \mathcal{B}_0(b)] .$$

Además, por la unicidad de la autofunción principal $\varphi = \varphi_0$. Esto concluye la demostración del resultado, ya que el argumento es válido a lo largo de cualquier subsucesión. $\square$

Supongamos que Ω_0 es un subdominio propio estable de Ω con frontera $\partial\Omega_0 = \Gamma_0^0 \cup \Gamma_1$ donde $\Gamma_0^0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ y Γ_1 es de clase $\mathcal{C}^2$. Aunque el autovalor principal $\sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L}, \mathcal{B}_0(b)]$ pudiera no estar definido, ya que no estamos imponiendo ninguna condición de regularidad sobre Γ_0^0, la prueba del Teorema 2.6.1 todavía nos proporciona una condición suficiente para la existencia de un autovalor con el cual hay asociada una autofunción positiva. Por supuesto, excepto en el caso cuando Γ_0^0 es de clase $\mathcal{C}^2$, es desconocido si es o no único el autovalor principal. Precisamente se verifica el siguiente resultado.

Teorema 2.6.2 *Supongamos* (2.6.1) *y* (1.4.15). *Sea Ω_0 un subdominio propio estable de Ω con frontera*

$$\partial\Omega_0 = \Gamma_0^0 \cup \Gamma_1 \,, \qquad \Gamma_0^0 \cap \Gamma_1 = \emptyset \,,$$

donde Γ_1 es de clase $\mathcal{C}^2$ y Γ_0^0 satisface los mismos requisitos que Γ_0. Asumamos además que existe una sucesión Ω_n, $n \geq 1$, de dominios acotados de $\mathbf{R}^N$ de clase $\mathcal{C}^2$ convergiendo a Ω_0 desde el exterior y tal que $\Omega_n \subset \Omega$, $n \geq 1$. Denotemos por $(\sigma_1^{\Omega_n}[\mathcal{L}, \mathcal{B}_n(b)], \varphi_n)$ al auto-par principal asociado con $(\mathcal{L}, \mathcal{B}_n(b), \Omega_n)$, donde la autofunción principal es normalizada tal que

$$\|\varphi_n\|_{H^1(\Omega_n)} = 1 \,, \qquad n \geq 1 \,.$$

Entonces, existe una subsucesión de φ_n, $n \geq 1$, de nuevo etiquetada por n, y una función $\varphi \in H^1_{\Gamma_0^0}(\Omega_0)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n|_{\Omega_0} - \varphi\|_{H^1(\Omega_0)} = 0 \,,$$

y φ es una solución positiva débil de (2.6.36).

Demostración: Sea Ω_{-1} un subdominio propio de clase $\mathcal{C}^2$ de Ω_0 tal que

$$\partial\Omega_{-1} = \Gamma_0^{-1} \cup \Gamma_1$$

con $\Gamma_0^{-1} \cap \Gamma_1 = \emptyset$. Entonces, para cada $n \geq 1$ tenemos que

$$\sigma_1^n := \sigma_1^{\Omega_n}[\mathcal{L}, \mathcal{B}_n(b)] \leq \sigma_1^{\Omega_{-1}}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_{-1})] \,,$$

y por eso el límite

$$\sigma_1^E := \lim_{n\to\infty} \sigma_1^n$$

está bien definido. Ahora, la construcción de $\tilde{\varphi}$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} \|\tilde{\varphi}_{n_m} - \tilde{\varphi}\|_{H^1(\Omega)} = 0 \tag{2.6.38}$$

a lo largo de alguna subsucesión $\tilde{\varphi}_{n_m}$, $m \geq 1$, de $\tilde{\varphi}_n$, $n \geq 1$, puede ser llevada a cabo con el mismo argumento de la prueba del Teorema 2.6.1. Pero ahora para probar que

$$\varphi := \tilde{\varphi}|_{\Omega_0} \in H^1_{\Gamma_0^0}(\Omega_0)$$

no podemos utilizar el Teorema 2.5.5 como en la prueba del Teorema 2.6.1, ya que aquí no estamos requiriendo que Γ_0^0 sea regular. En lugar de ese argumento utilizamos el siguiente. Ya que para cada $m \geq 1$ tenemos que $\varphi_{n_m} \in H^1(\Omega_{n_m})$ y Ω_{n_m}, $m \geq 1$, es una sucesión decreciente de dominios, necesariamente

$$\tilde{\varphi}_{n_m} \in \bigcap_{k=1}^{m} H^1_{\Gamma_0^k}(\Omega_{n_k}) . \qquad m \geq 1 ,$$

Por eso, (2.6.38) implica

$$\tilde{\varphi} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} H^1_{\Gamma_0^k}(\Omega_{n_k}) = H^1_{\Gamma_0^0}(\Omega_0) ,$$

ya que estamos asumiendo que Ω_0 es estable. Por tanto, obtenemos de (2.6.38) que $\varphi \in H_{\Gamma_0^0}(\Omega_0)$. Finalmente, el mismo argumento de la demostración del Teorema 2.6.1 muestra que φ es una solución positiva débil de (2.6.36). Esto concluye la demostración. □

El siguiente resultado nos proporciona la *dependencia continua desde el interior.*

Teorema 2.6.3 (Dependencia continua exterior) *Supongamos* (2.6.1) *y* (1.4.15). *Sea* Ω_0 *un subdominio propio de* Ω *con frontera de clase* $\mathcal{C}^2$ *tal que*

$$\partial\Omega_0 = \Gamma_0^0 \cup \Gamma_1 , \qquad \Gamma_0^0 \cap \Gamma_1 = \emptyset ,$$

donde Γ_0^0 *satisface los mismos requisitos que* Γ_0 *y sea* Ω_n, $n \geq 1$, *una sucesión de dominios acotados de* $\mathbb{R}^N$ *de clase* $\mathcal{C}^2$ *convergiendo a* Ω_0 *desde el interior. Para cada* $n \geq 0$, *denotemos por* $\mathcal{B}_n(b)$ *al operador de frontera definido por*

$$\mathcal{B}_n(b)u := \begin{cases} u & \text{en } \Gamma_0^n , \\ \partial_\nu u + bu & \text{en } \Gamma_1 , \end{cases}$$

donde

$$\Gamma_0^n := \partial\Omega_n \setminus \Gamma_1 , \qquad n \geq 0 ,$$

y denotemos por $(\sigma_1^{\Omega_n}[\mathcal{L}, \mathcal{B}_n(b)], \varphi_n)$ *al auto-par principal asociado con* $(\mathcal{L}, \mathcal{B}_n(b). \Omega_n)$, *donde la autofunción principal es normalizada tal que*

$$\|\varphi_n\|_{H^1(\Omega_n)} = 1 , \qquad n \geq 0 .$$

Entonces, $\varphi_0 \in W^2_{\mathcal{B}_0(b)}(\Omega_0)$ *y*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_1^{\Omega_n}[\mathcal{L}, \mathcal{B}_n(b)] = \sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L}, \mathcal{B}_0(b)] , \qquad \lim_{n\to\infty} \|\tilde{\varphi}_n - \varphi_0\|_{H^1(\Omega_0)} = 0 .$$

donde

$$\tilde{\varphi}_n := \begin{cases} \varphi_n & \text{en } \Omega_n , \\ 0 & \text{en } \Omega_0 \setminus \Omega_n , \end{cases} \qquad n \geq 0 .$$

Demostración: La existencia y la unicidad de los auto-pares principales

$$(\sigma_1^{\Omega_n}[\mathcal{L},\mathcal{B}_n(b)],\varphi_n)\,,\qquad n\geq 0\,,$$

está garantizada por Teorema 12.1 de [4]. Definamos

$$\sigma_1^n := \sigma_1^{\Omega_n}[\mathcal{L},\mathcal{B}_n(b)]\,,\qquad n\geq 0\,.$$

Por construcción, para cada $n\geq 1$

$$\Omega_n\subset\Omega_{n+1}\subset\Omega_0\,,$$

y por eso, gracias a la Proposición 2.2.2 obtenemos que

$$\sigma_1^n\geq\sigma_1^{n+1}\geq\sigma_1^0\,,\qquad n\geq 1\,.$$

Por tanto, el límite

$$\sigma_1^I := \lim_{n\to\infty}\sigma_1^n \tag{2.6.39}$$

está bien definido. Tenemos que probar que $\sigma_1^I=\sigma_1^0$.

La prueba del Teorema 2.6.1 puede ser fácilmente adaptada para mostrar la existencia de $\tilde{\varphi}\in H^1(\Omega_0)$, $\tilde{\varphi}>0$, y de una subsucesión $\tilde{\varphi}_{n_m}$, $m\geq 1$, de $\tilde{\varphi}_n$, $n\geq 1$, verificando

$$\lim_{m\to\infty}\|\tilde{\varphi}_{n_m}-\tilde{\varphi}\|_{H^1(\Omega_0)}=0\,. \tag{2.6.40}$$

Ya que $\tilde{\varphi}_{n_m}\in H^1_{\Gamma_0^0}(\Omega_0)$ para cada $m\geq 1$, (2.6.40) implica

$$\tilde{\varphi}\in H^1_{\Gamma_0^0}(\Omega_0)\,.$$

Además, adaptando la prueba del Teorema 2.6.1 se puede ver fácilmente que $\tilde{\varphi}$ nos proporciona una solución positiva débil de

$$\begin{cases}\mathcal{L}\tilde{\varphi}=\sigma_1^I\tilde{\varphi} & \text{en } \Omega_0\,,\\ \mathcal{B}_0(b)\tilde{\varphi}=0 & \text{en } \partial\Omega_0\,.\end{cases} \tag{2.6.41}$$

Por tanto,

$$\tilde{\varphi}=\varphi_0\,,\qquad \sigma_1^I=\sigma_1^0\,.$$

Esto concluye la demostración, ya que el mismo argumento funciona a lo largo de cualquier subsucesión de φ_n, $n\geq 1$. □

Como una consecuencia inmediata, del Teorema 2.6.1 y Teorema 2.6.3 obtenemos la dependencia continua del autovalor principal con respecto al dominio, la cual establece lo siguiente.

Teorema 2.6.4 (Dependencia continua) *Supongamos* (2.6.1) *y* (1.4.15). *Sea Ω_0 un subdominio propio de Ω con frontera de clase C^2 tal que*

$$\partial\Omega_0 = \Gamma_0^0 \cup \Gamma_1 \,, \qquad \Gamma_0^0 \cap \Gamma_1 = \emptyset \,,$$

donde Γ_0^0 satisface los mismos requisitos que Γ_0 y sea Ω_n, $n \geq 1$, una sucesión de dominios acotados de Ω de clase C^2 convergiendo a Ω_0. Para cada $n \geq 0$, denotemos por $\mathcal{B}_n(b)$ al operador de frontera definido por

$$\mathcal{B}_n(b)u := \begin{cases} u & \text{en } \Gamma_0^n \,, \\ \partial_\nu u + bu & \text{en } \Gamma_1 \,, \end{cases}$$

donde

$$\Gamma_0^n := \partial\Omega_n \setminus \Gamma_1 \,, \qquad n \geq 0 \,.$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_1^{\Omega_n}[\mathcal{L}, \mathcal{B}_n(b)] = \sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L}, \mathcal{B}_0(b)] \,. \tag{2.6.42}$$

Demostración: Por definición, existen dos sucesiones de dominios acotados regulares, Ω_n^I y Ω_n^E, $n \geq 1$, tales que Ω_n^I converge a Ω_0 desde el interior, Ω_n^E lo hace desde el exterior, cuando $n \to \infty$, y

$$\Omega_n^I \subset \Omega_0 \cap \Omega_n \,, \qquad \Omega_0 \cup \Omega_n \subset \Omega_n^E \,, \qquad n \geq 1 \,.$$

En particular,

$$\Omega_n^I \subset \Omega_n \subset \Omega_n^E \,, \qquad n \geq 1 \,,$$

y gracias a la Proposición 2.2.2

$$\sigma_1^{\Omega_n^I}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_n^I)] \geq \sigma_1^{\Omega_n}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_n)] \geq \sigma_1^{\Omega_n^E}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_n^E)] \,. \tag{2.6.43}$$

Por otra parte, debido al Teorema 2.6.1 y al Teorema 2.6.3 obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_1^{\Omega_n^E}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_n^E)] = \sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_0)] \,, \qquad \lim_{n\to\infty} \sigma_1^{\Omega_n^I}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_n^I)] = \sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_0)] \,.$$

Por tanto, (2.6.42) se sigue de (2.6.43). Esto concluye la demostración. □

Nota 2.6.5 *Si Ω_0 es un subdominio propio de Ω con frontera $\partial\Omega_0 = \Gamma_0^0 \cup \Gamma_1$, donde $\Gamma_0^0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$, Γ_0^0 satisface los mismos requisitos que Γ_0, Γ_1 es de clase C^2 y no requerimos ninguna regularidad sobre Γ_0^0, entonces para cualquier sucesión Ω_n, $n \geq 1$, de subdominios de Ω_0 de clase C^2 convergiendo a Ω_0 desde el interior cuando $n \to \infty$, el límite* (2.6.39) *está bien definido y nos proporciona un autovalor asociado con el cual hay una solución positiva débil de* (2.6.41). *La prueba de este hecho puede ser fácilmente obtenida adaptando la prueba del Teorema 2.6.3, y por tanto omitimos sus detalles. Debe ser destacado que, excepto en el caso cuando Γ_0^0 es de clase C^2, σ_1^I pudiera no ser el único autovalor con una autofunción positiva débil asociada. De hecho, gracias al Teorema 2.6.2, si suponemos que Ω_0 es estable, entonces σ_1^E nos proporciona* *otro autovalor asociado con el cual hay una solución positiva débil. Excepto cuando* Γ_0^0 *es de clase* C^2, *es desconocido si se verifica o no la igualdad*

$$\sigma_1^I = \sigma_1^E\,. \tag{2.6.44}$$

Sería de gran interés caracterizar la clase de todos los dominios para los cuales (2.6.44) *se verifica, ya que estos dominios nos proporcionarían la familia de dominios que poseen un único autovalor principal. Conjeturamos que* (2.6.44) *es cierto si, y sólamente si,* Ω_0 *es estable en el sentido de la Definición 2.5.3.*

Debe ser destacado que el Teorema 2.6.4 nos proporciona una substancial extensión del Teorema 4.2 de [35] incluso en el caso particular de que $\Gamma_1 = \emptyset$, ya que los requisitos de regularidad aquí pedidos sobre los coeficientes del operador diferencial, son substancialmente más débiles que los asumidos en [35].

2.7 Dependencia continua respecto de $b(x)$

En esta sección analizamos la dependencia continua de

$$\sigma_1(b) := \sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)] \tag{2.7.1}$$

con respecto a la función peso $b(x)$ en el caso particular en el que ∂_ν es la derivada conormal con respecto a $\mathcal{L}$, es decir, cuando la condición (1.4.15) es satisfecha. Con fin de establecer nuestro principal resultado necesitamos la siguiente notación.

Definición 2.7.1 *Por* $\sigma(L_\infty(\Gamma_1), L_1(\Gamma_1))$ *denotamos la topología débil* $*$ *de* $L_\infty(\Gamma_1)$. *Así, dada una sucesión* $b_n \in C(\Gamma_1)$, $n \geq 1$, *se dice que*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \qquad \text{en} \quad \sigma(L_\infty(\Gamma_1), L_1(\Gamma_1)) \tag{2.7.2}$$

si

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma_1} b_n \xi = \int_{\Gamma_1} b\xi$$

para cada $\xi \in L_1(\Gamma_1)$.

Teorema 2.7.2 *Supongamos* $\Gamma_1 \neq \emptyset$, (1.4.15) *y* (2.6.1), *y sea* $b_n \in C(\Gamma_1)$, $n \geq 1$, *una sucesión arbitraria satisfaciendo* (2.7.2). *Para cada* $n \geq 1$ *denotemos por* φ_n *a la autofunción principal asociada con* $\sigma_1^n := \sigma_1(b_n)$ *normalizada tal que*

$$\|\varphi_n\|_{H^1(\Omega)} = 1\,, \qquad n \geq 1\,. \tag{2.7.3}$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_1^n = \sigma_1(b)\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_{H^1(\Omega)} = 0\,, \tag{2.7.4}$$

donde φ *representa la autofunción principal asociada con* $\sigma_1(b)$, *normalizada tal que*

$$\|\varphi\|_{H^1(\Omega)} = 1\,.$$

Demostración: Gracias a las hipótesis generales sobre Ω, la existencia y la unicidad de los auto-pares principales (σ_1^n, φ_n), $n \geq 1$, y $(\sigma_1(b), \varphi)$ está garantizada por Teorema 12.1 de [4]. Además, gracias a (2.7.2), obtenemos del Teorema de Banach-Steinhaus que b_n, $n \geq 1$, está uniformemente acotada en $L_\infty(\Gamma_1)$ (e.g. Proposición III.12(iii) de [11]). En otras palabras, existe una constante $C > 0$ para la cual

$$\|b_n\|_{L_\infty(\Gamma_1)} \leq C\,, \qquad n \geq 1\,.$$

De este modo, gracias a Proposición 2.2.5 obtenemos que

$$\sigma_1(-C) \leq \sigma_1^n \leq \sigma_1(C)\,, \qquad n \geq 1\,,$$

y por tanto, existe una subsucesión de σ_1^n, $n \geq 1$, reetiquetada por n, tal que

$$\sigma_1^\infty := \lim_{n\to\infty} \sigma_1^n \in \mathbf{R}$$

está bien definido. Gracias a Teorema 12.1 de [4], para cada $n \geq 1$

$$\varphi_n \in W^2_{\mathcal{B}(b_n)}(\Omega) \subset H^2(\Omega)\,,$$

y por eso, gracias a (2.7.3), existe una subsucesión de φ_n, reetiquetada por n, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi_\infty\|_{L_2(\Omega)} = 0 \tag{2.7.5}$$

para alguna $\varphi_\infty \in L_2(\Omega)$, ya que la inclusión $H^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$ es compacta. Como el argumento previo es válido a lo largo de cualquier subsucesión y el auto-par principal $(\sigma_1(b), \varphi)$ es único, para completar la demostración del teorema es suficiente mostrar que

$$\sigma_1^\infty = \sigma_1(b)\,, \qquad \varphi_\infty = \varphi\,, \tag{2.7.6}$$

y que de hecho

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_{H^1(\Omega)} = 0\,. \tag{2.7.7}$$

Gracias a (2.7.5),

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi_\infty \qquad \text{c.t.p. en} \quad \Omega\,,$$

y

$$\varphi_\infty \geq 0 \qquad \text{en} \quad \Omega\,,$$

ya que $\varphi_n > 0$ para cada $n \geq 1$. En lo que concierne a la trazas de las funciones φ_n, $n \geq 1$, sobre Γ_1, el mismo argumento de la prueba del Teorema 2.6.1 muestra que existe una subsucesión de φ_n, $n \geq 1$, de nuevo etiquetada por n, y una función $\varphi_* \in L_2(\Gamma_1)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n|_{\Gamma_1} - \varphi_*\|_{L_2(\Gamma_1)} = 0\,. \tag{2.7.8}$$

En particular, existe una constante $M > 0$ tal que

$$\|\varphi_n|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} \leq M\,, \qquad n \geq 1\,. \tag{2.7.9}$$

Ahora adaptamos el argumento de la prueba del Teorema 2.6.1 para mostrar que φ_n, $n \geq 1$, es una sucesión de Cauchy en $H^1(\Omega)$. En efecto, argumentando como en la prueba del Teorema 2.6.1 para cada par de números naturales $1 \leq k \leq m$ tenemos que para cualquier $n \geq 1$

$$\begin{aligned}\mu\|\nabla(\varphi_k \quad - \quad & \varphi_m)\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \sigma_1^k \int_\Omega \varphi_k(\varphi_k - \varphi_m) + (\sigma_1^m - \sigma_1^k) \int_\Omega \varphi_m^2 \\ & + \sigma_1^k \int_\Omega \varphi_m(\varphi_m - \varphi_k) + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \tilde{\alpha}_i(\varphi_m - \varphi_k)\tfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \\ & + \sum_{i=1}^N \int_\Omega (\tilde{\alpha}_i - \alpha_i^n)\varphi_m \tfrac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_k - \varphi_m) + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \alpha_i^n \varphi_m \tfrac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_k - \varphi_m) \\ & + \int_\Omega \alpha_0 \varphi_k(\varphi_m - \varphi_k) + \int_\Omega \alpha_0 \varphi_m(\varphi_k - \varphi_m) \\ & + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Gamma_1} \alpha_{ij} \left\{(\varphi_k - \varphi_m)\tfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} + \varphi_m \tfrac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_m - \varphi_k)\right\} n_j\,, \end{aligned} \tag{2.7.10}$$

donde $\tilde{\alpha}_i \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, $1 \leq i \leq N$, son los coeficientes definidos por (1.4.14) y para cada $1 \leq i \leq N$, α_i^n, $n \geq 1$, es una sucesión de clase $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} \|\alpha_i^n - \tilde{\alpha}_i\|_{L_\infty(\Omega)} = 0\,. \tag{2.7.11}$$

Supongamos que α_i^n, $1 \leq i \leq N$, $n \geq 1$, ha sido construida como en la prueba del Teorema 2.6.1. Gracias a (2.7.3), para cada $n \geq 1$ tenemos que

$$\|\varphi_n\|_{L_2(\Omega)} \leq 1\,, \qquad \|\nabla \varphi_n\|_{L_2(\Omega)} \leq 1\,, \tag{2.7.12}$$

y por tanto, argumentando como en la prueba del Teorema 2.6.1 nos proporciona las siguientes estimaciones

$$\left|\sigma_1^k \int_\Omega \varphi_k(\varphi_k - \varphi_m)\right| \leq \sup_{k \geq 1}\{|\sigma_1^k|\}\, \|\varphi_k - \varphi_m\|_{L_2(\Omega)}\,, \tag{2.7.13}$$

$$\left|(\sigma_1^m - \sigma_1^k)\int_\Omega \varphi_m^2\right| \leq |\sigma_1^m - \sigma_1^k|\,, \tag{2.7.14}$$

$$\left|\sigma_1^k \int_\Omega \varphi_m(\varphi_m - \varphi_k)\right| \leq \sup_{k \geq 1}\{|\sigma_1^k|\}\, \|\varphi_m - \varphi_k\|_{L_2(\Omega)}\,, \tag{2.7.15}$$

$$\left|\sum_{i=1}^N \int_\Omega \tilde{\alpha}_i(\varphi_m - \varphi_k)\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\right| \leq \left(\sum_{i=1}^N \|\tilde{\alpha}_i\|_{L_\infty(\Omega)}\right) \|\varphi_m - \varphi_k\|_{L_2(\Omega)}\,. \tag{2.7.16}$$

$$\left|\int_\Omega \alpha_0 \varphi_k(\varphi_m - \varphi_k)\right| \leq \|\alpha_0\|_{L_\infty(\Omega)}\|\varphi_m - \varphi_k\|_{L_2(\Omega)}\,, \tag{2.7.17}$$

$$\left|\int_\Omega \alpha_0 \varphi_m(\varphi_k - \varphi_m)\right| \leq \|\alpha_0\|_{L_\infty(\Omega)}\|\varphi_m - \varphi_k\|_{L_2(\Omega)}\,, \tag{2.7.18}$$

$$\left|\sum_{i=1}^N \int_\Omega (\tilde{\alpha}_i - \alpha_i^n)\varphi_m \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_k - \varphi_m)\right| \leq 2\sum_{i=1}^N \|\tilde{\alpha}_i - \alpha_i^n\|_{L_\infty(\Omega)}\,, \tag{2.7.19}$$

y

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^N \int_\Omega \alpha_i^n \varphi_m \tfrac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_k - \varphi_m)\right| & \leq \sum_{i=1}^N \|\tilde{\alpha}_i\|_{L_\infty(\Omega)} \|\varphi_m|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} \|(\varphi_k - \varphi_m)|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} \\ & + \sum_{i=1}^N \left(1 + \left(\int_{\mathbf{R}^N} \rho\right)^{-1} n \left\|\tfrac{\partial \rho}{\partial x_i}\right\|_{L_1(\mathbf{R}^N)}\right) \|\tilde{\alpha}_i\|_{L_\infty(\Omega)} \|\varphi_k - \varphi_m\|_{L_2(\Omega)}\,. \end{aligned} \tag{2.7.20}$$

Por otra parte, para cada $n \geq 1$ tenemos

$$\partial_\nu \varphi_n = -b_n \varphi_n \qquad \text{on} \quad \Gamma_1 \,,$$

y por eso, gracias a (1.4.15),

$$\sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{ij} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} n_j = -b_k \varphi_k \,, \qquad \sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (\varphi_m - \varphi_k) n_j = -b_m \varphi_m + b_k \varphi_k \,.$$

De este modo,

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Gamma_1} \alpha_{ij} (\varphi_k - \varphi_m) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} n_j = \int_{\Gamma_1} b_k \varphi_k (\varphi_m - \varphi_k) \,, \tag{2.7.21}$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Gamma_1} \alpha_{ij} \varphi_m \frac{\partial}{\partial x_i} (\varphi_m - \varphi_k) n_j = \int_{\Gamma_1} (b_k \varphi_k - b_m \varphi_m) \varphi_m \,. \tag{2.7.22}$$

Además, gracias al hecho de que b_n, $n \geq 1$, está uniformemente acotada, utilizando (2.7.9) se sigue

$$\left| \int_{\Gamma_1} b_k \varphi_k (\varphi_m - \varphi_k) \right| \leq C \| (\varphi_m - \varphi_k)|_{\Gamma_1} \|_{L_2(\Gamma_1)} \,, \tag{2.7.23}$$

donde $C > 0$ es una cierta constante independiente de k y m. Similarmente,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_1} (b_k \varphi_k - b_m \varphi_m) \varphi_m \right| &\leq \left| \int_{\Gamma_1} b_k \varphi_m (\varphi_k - \varphi_m) \right| + \left| \int_{\Gamma_1} \varphi_m^2 (b_k - b_m) \right| \\ &\leq C \| (\varphi_m - \varphi_k)|_{\Gamma_1} \|_{L_2(\Gamma_1)} + \left| \int_{\Gamma_1} \varphi_m^2 (b_k - b_m) \right| \,. \end{aligned} \tag{2.7.24}$$

Además,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_1} \varphi_m^2 (b_k - b_m) \right| &\leq \left| \int_{\Gamma_1} (\varphi_m^2 - \varphi_*^2)(b_k - b_m) \right| + \left| \int_{\Gamma_1} \varphi_*^2 (b_k - b_m) \right| \\ &\leq 2 \sup_{k \geq 1} \{ |b_k| \} \, \| \varphi_m + \varphi_* \|_{L_2(\Gamma_1)} \| \varphi_m - \varphi_* \|_{L_2(\Gamma_1)} + \left| \int_{\Gamma_1} \varphi_*^2 (b_k - b_m) \right| \,, \end{aligned}$$

y por eso, ya que b_k, $k \geq 1$, está uniformemente acotada en $L_\infty(\Gamma_1)$ y es una sucesión de Cauchy para la topología w^*, obtenemos de (2.7.8) y (2.7.24) que para cada $\epsilon > 0$ existe un número natural $n_0 \geq 1$ tal que para todo $k, m \geq n_0$

$$\left| \int_{\Gamma_1} (b_k \varphi_k - b_m \varphi_m) \varphi_m \right| \leq \frac{\epsilon}{2} \,. \tag{2.7.25}$$

Finalmente, utilizando (2.7.21 – 2.7.22) y sustituyendo (2.7.13 – 2.7.20), (2.7.23) y (2.7.25) en (2.7.10) se sigue fácilmente que existe $k_0 \geq n_0$ tal que

$$\mu \| \nabla (\varphi_k - \varphi_m) \|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \epsilon \,, \qquad k, m \geq k_0 \,.$$

Gracias a (2.7.5) esto muestra que

$$\lim_{n \to \infty} \| \varphi_n - \varphi_\infty \|_{H^1(\Omega)} = 0 \,. \tag{2.7.26}$$

Además, por la continuidad del operador traza de $H^1(\Omega)$ sobre Γ_1, existe una constante $C>0$ tal que para cada $n\geq 1$

$$\|(\varphi_n-\varphi_\infty)|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)}\leq C\,\|\varphi_n-\varphi_\infty\|_{H^1(\Omega)}\,,$$

y por eso (2.7.26) implica

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n|_{\Gamma_1}-\varphi_\infty|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)}=0\,. \tag{2.7.27}$$

Por tanto, gracias a (2.7.8),

$$\varphi_\infty|_{\Gamma_1}=\varphi_*\,.$$

Similarmente, ya que $\varphi_n|_{\Gamma_0}=0$ para cada $n\geq 1$, por la continuidad del operador traza de $H^1(\Omega)$ sobre Γ_0 obtenemos que

$$\varphi_\infty|_{\Gamma_0}=0\,.$$

En particular,

$$\varphi_\infty\in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\,.$$

Observar que, gracias a (2.7.3), se sigue de (2.7.26) que

$$\|\varphi_\infty\|_{H^1(\Omega)}=1\,.$$

Así, ya que $\varphi_n>0$ para cada $n\geq 1$,

$$\varphi_\infty>0\,.$$

Ahora probaremos que φ_∞ nos proporciona una solución débil de

$$\left\{\begin{array}{ll}\mathcal{L}\varphi_\infty=\sigma_1^\infty\varphi_\infty & \text{en }\Omega\,,\\ \mathcal{B}(b)\varphi=0 & \text{en }\partial\Omega\,,\end{array}\right. \tag{2.7.28}$$

donde $\sigma_1^\infty=\lim_{n\to\infty}\sigma_1^n$. Ya es conocido que $\varphi_\infty\in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$. Ahora, tomemos

$$\xi\in\mathcal{C}_c^\infty(\Omega\cup\Gamma_1)\,.$$

Entonces, multiplicando la ecuación

$$\mathcal{L}\varphi_n=\sigma_1^n\varphi_n\qquad\text{en}\quad\Omega\,,\qquad n\geq 1\,,$$

por ξ, integrando en Ω, aplicando la fórmula de integración por partes y teniendo en cuenta que $\operatorname{supp}\xi\subset\Omega\cup\Gamma_1$ se sigue

$$\sum_{i,j=1}^N\int_\Omega\alpha_{ij}\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_i}\frac{\partial\xi}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^N\int_\Omega\tilde{\alpha}_i\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_i}\xi+\int_\Omega\alpha_0\varphi_n\xi=\sigma_1^n\int_\Omega\varphi_n\xi+\sum_{i,j=1}^N\int_{\Gamma_1}\alpha_{ij}\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_i}\xi\,n_j\,,$$

para cada $n\geq 1$. Así, se sigue de

$$\partial_\nu\varphi_n=-b_n\varphi_n=0\qquad\text{en }\Gamma_1\,,\qquad n\geq 1\,,$$

que para cada $n \geq 1$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} \alpha_{ij} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \tilde{\alpha}_i \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \xi + \int_{\Omega} \alpha_0 \varphi_n \xi = \sigma_1^n \int_{\Omega} \varphi_n \xi - \int_{\Gamma_1} b_n \varphi_n \xi \,. \tag{2.7.29}$$

Además, se obtiene fácilmente de (2.7.26) y (2.7.27) que

$$\lim_{n\to\infty} \|(\varphi_n \xi - \varphi_\infty \xi)|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} = 0\,,$$

y por eso (2.7.2) implica que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma_1} b_n \varphi_n \xi = \int_{\Gamma_1} b \varphi_\infty \xi\,.$$

De este modo, pasando al límite cuando $n \to \infty$ en (2.7.29) el teorema de convergencia dominada implica que

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} \alpha_{ij} \frac{\partial \varphi_\infty}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \tilde{\alpha}_i \frac{\partial \varphi_\infty}{\partial x_i} \xi + \int_{\Omega} \alpha_0 \varphi_\infty \xi = \sigma_1^\infty \int_{\Omega} \varphi_\infty \xi - \int_{\Gamma_1} b\, \varphi_\infty \xi\,,$$

y por tanto $\varphi_\infty \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ es una solución positiva débil de (2.7.28). Esto muestra que para cada $\omega > -\sigma_1(b)$ la función $\varphi_\infty \in L_2^+(\Omega)$ nos proporciona una autofunción positiva de $(\omega + \mathcal{L}_2)^{-1}$ asociada con el autovalor $(\omega + \sigma_1^\infty)^{-1}$. Gracias a la prueba de Teorema 12.1 de [4], el radio espectral del operador $(\omega + \mathcal{L}_2)^{-1}$ en Ω debe ser igual a $(\omega + \sigma_1^\infty)^{-1}$. Por otra parte, gracias al teorema de Krein-Rutman (cf. [47] App. 3.2),

$$\operatorname{spr}\, (\omega + \mathcal{L}_2)^{-1} = (\omega + \sigma_1(b))^{-1}\,.$$

Por tanto,

$$\sigma_1^\infty = \sigma_1(b)\,.$$

Además, por la unicidad de la autofunción principal, $\varphi_\infty = \varphi$. Esto concluye la demostración del resultado, ya que el argumento es válido a lo largo de cualquier subsucesión. □

Nota 2.7.3 *(a) La condición* (2.7.2) *es satisfecha si*

$$\lim_{n\to\infty} \|b_n - b\|_{L_\infty(\Omega)} = 0\,.$$

(b) La prueba del Teorema 2.7.2 nos proporciona la existencia de un autovalor principal para $(\mathcal{L}, \mathcal{B}(b), \Omega)$, no necesariamente único, para una amplia clase de funciones $b \in L_\infty(\Gamma_1)$, no necesariamente continuas. En efecto, si b es el límite puntual de una sucesión uniformemente acotada $b_n \in C(\Gamma_1)$, $n \geq 1$, entonces se sigue del teorema de convergencia dominada de Lebesgue que b_n es débilmente $*$ convergente a b, y el argumento de la prueba del Teorema 2.7.2 muestra que σ_1^∞ está bien definido y que asociado con él hay una autofunción principal $\varphi_\infty \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$.

2.8 Comportamiento asintótico de $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)]$ cuando $\min_{\Gamma_1} b \nearrow \infty$

En esta sección analizamos el comportamiento del autovalor principal (2.7.1) cuando $\min_{\Gamma_1} b \uparrow \infty$. El resultado principal establece que éste converge al autovalor principal del problema de Dirichlet en Ω. Para obten er este resultado no requerimos que (1.4.15) sea satisfecha.

Teorema 2.8.1 *Supongamos* $\Gamma_1 \neq \emptyset$,

$$\alpha_{ij} \in C^1(\bar{\Omega}), \quad \alpha_i \in C(\bar{\Omega}), \qquad 1 \leq i, j \leq N, \tag{2.8.1}$$

y sea $b_n \in C(\Gamma_1)$, $n \geq 1$, *una sucesión arbitraria tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \min_{\Gamma_1} b_n = \infty. \tag{2.8.2}$$

Definamos

$$\sigma_1^n := \sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b_n)], \qquad n \geq 1,$$

y para cada $n \geq 1$ *denotemos por* φ_n *a la autofunción principal asociada con* σ_1^n, *normalizada tal que*

$$\|\varphi_n\|_{H^1(\Omega)} = 1, \qquad n \geq 1. \tag{2.8.3}$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_1^n = \sigma_1^0, \qquad \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi_0\|_{H^1(\Omega)} = 0, \tag{2.8.4}$$

donde (σ_1^0, φ_0) *es el auto-par principal asociado con el problema de Dirichlet en* Ω.

Demostración: Ya que se verifica la condición (2.8.2), sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$\min_{\Gamma_1} b_n > 0, \qquad n \geq 1. \tag{2.8.5}$$

Ahora, combinando Proposición 2.2.1 con Proposición 2.2.5 obtenemos de (2.8.5) que

$$\sigma_1(0) < \sigma_1^n < \sigma_1^0, \qquad n \geq 1. \tag{2.8.6}$$

Así, existe $\sigma_1^\infty \in [\sigma_1(0), \sigma_1^0]$ y una subsucesión de b_n, $n \geq 1$, reetiquetada por n, tal que

$$\sigma_1^\infty := \lim_{n\to\infty} \sigma_1^n. \tag{2.8.7}$$

En lo siguiente mostraremos que

$$\sigma_1^\infty = \sigma_1^0. \tag{2.8.8}$$

Gracias al Teorema 12.1 de [4] tenemos que

$$\varphi_n \in W^2_{\mathcal{B}(b_n)}(\Omega) \subset H^2(\Omega), \qquad n \geq 1.$$

De este modo, se sigue de (2.8.3) y (2.8.6) que existe una constante $C_1 > 0$ tal que

$$\|(\sigma_1^n - \alpha_0)\varphi_n\|_{L_2(\Omega)} \leq |\sigma_1^n| \leq C_1\,, \qquad n \geq 1\,. \tag{2.8.9}$$

Así, por las estimaciones L^p de Agmon, Douglis y Nirenberg [2], existe una constante $C_2 > 0$ tal que

$$\|\varphi_n\|_{H^2(\Omega)} \leq C_2\,, \qquad n \geq 1\,. \tag{2.8.10}$$

Además, ya que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$ es compacta, se sigue de (2.8.3) que existe una subsucesión de φ_n, $n \geq 1$, reetiquetada por n, y una función $\varphi \in L_2(\Omega)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_{L_2(\Omega)} = 0\,. \tag{2.8.11}$$

Necesariamente,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi \qquad \text{c.t.p. en} \quad \Omega\,,$$

y por eso

$$\varphi \geq 0\,.$$

Para completar la prueba del teorema es suficiente mostar que $(\sigma_1^\infty, \varphi) = (\sigma_1^0, \varphi_0)$ y que

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_{H^1(\Omega)} = 0\,,$$

ya que el argumento previo es válido a lo largo de cualquier subsucesión de b_n, $n \geq 1$.

Denotemos por j_1, j_2 a las inclusiones compactas

$$j_1 : W_2^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1) \hookrightarrow L_2(\Gamma_1)\,, \qquad j_2 : W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \hookrightarrow L_2(\Gamma_1)\,,$$

y por

$$\gamma_1 \in \mathcal{L}(H^2(\Omega), W_2^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1))\,, \qquad \gamma_2 \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))\,,$$

a los correspondientes operadores traza sobre Γ_1. Ya que $\varphi_n \in H^2(\Omega)$, para cada $n \geq 1$ tenemos que

$$\varphi_n|_{\Gamma_1} \in W_2^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1) \xrightarrow{j_1} L_2(\Gamma_1)\,, \qquad \nabla\varphi_n|_{\Gamma_1} \in W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \xrightarrow{j_2} L_2(\Gamma_1)\,,$$

y por eso, se sigue de (2.8.10) que

$$\begin{aligned} \|\varphi_n|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} &= \|j_1(\varphi_n|_{\Gamma_1})\|_{L_2(\Gamma_1)} \leq \|j_1\|\|\varphi_n|_{\Gamma_1}\|_{W_2^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)} \\ &\leq \|j_1\|\|\gamma_1\|\|\varphi_n\|_{H^2(\Omega)} \leq \|j_1\|\|\gamma_1\|C_2\,. \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} \|\nabla\varphi_n|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} &\leq \|j_2\|\|\nabla\varphi_n|_{\Gamma_1}\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \leq \|j_2\|\|\gamma_2\|\|\nabla\varphi_n\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \|j_2\|\|\gamma_2\|\|\varphi_n\|_{H^2(\Omega)} \leq \|j_2\|\|\gamma_2\|C_2\,. \end{aligned}$$

Por tanto, existe una constante $C_3 > 0$ tal que

$$\|\varphi_n|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} \leq C_3\,, \qquad \|\nabla\varphi_n|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} \leq C_3\,, \qquad n \geq 1\,. \tag{2.8.12}$$

Ahora, tomando

$$\beta_n := \min_{\Gamma_1} b_n\,, \qquad n \geq 1\,,$$

se sigue de

$$\partial_\nu \varphi_n = -b_n\varphi_n \qquad \text{en} \quad \Gamma_1\,, \qquad n \geq 1\,,$$

que

$$(\partial_\nu\varphi_n)^2 = b_n^2\varphi_n^2 \geq \beta_n^2\varphi_n^2 \qquad \text{en} \quad \Gamma_1\,, \qquad n \geq 1\,,$$

y por eso

$$\varphi_n^2|_{\Gamma_1} \leq \beta_n^{-2}(\partial_\nu\varphi_n)^2|_{\Gamma_1} \leq \beta_n^{-2}|\nu|^2|\nabla\varphi_n|_{\Gamma_1}|^2\,, \qquad n \geq 1\,,$$

donde $|\cdot|$ representa la norma euclídea de $\mathbf{R}^N$. De este modo, aplicando (2.8.12) se obtiene que

$$\|\varphi_n|_{\Gamma_1}\|^2_{L_2(\Gamma_1)} \leq \beta_n^{-2}|\nu|^2\|\nabla\varphi_n|_{\Gamma_1}\|^2_{L_2(\Gamma_1)} \leq \beta_n^{-2}|\nu|^2C_3^2\,, \qquad n \geq 1\,,$$

y por eso (2.8.2) implica

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} = 0\,. \tag{2.8.13}$$

En particular,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n|_{\Gamma_1} = 0 \qquad \text{c.t.p. en} \quad \Gamma_1\,.$$

Por otra parte, por construcción tenemos que $\varphi_n|_{\Gamma_0} = 0$ para cada $n \geq 1$. Por tanto, obtenemos de (2.8.13) que

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n|_{\partial\Omega}\|_{L_2(\partial\Omega)} = 0\,. \tag{2.8.14}$$

Ahora mostramos que φ_n, $n \geq 1$, es una sucesión de Cauchy en $H^1(\Omega)$. Combinando este hecho con (2.8.11) se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_{H^1(\Omega)} = 0\,, \qquad \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} = 1\,. \tag{2.8.15}$$

En efecto, argumentando como en la prueba del Teorema 2.7.2 obtenemos que para cada $1 \leq k \leq m$ la estimación (2.7.10) es satisfecha, al igual que las estimaciones (2.7.12 – 2.7.20). Además,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i,j=1}^N \int_{\Gamma_1} \alpha_{ij}(\varphi_k - \varphi_m)\tfrac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}n_j\right| &\leq \sum_{i,j=1}^N \|\alpha_{ij}\|_{L_\infty(\Omega)}\|\nabla\varphi_k|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)}\|(\varphi_k - \varphi_m)|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)}\\ &\leq C_3\sum_{i,j=1}^N \|\alpha_{ij}\|_{L_\infty(\Omega)}\|(\varphi_k - \varphi_m)|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)}\,,\end{aligned}$$

donde hemos utilizado (2.8.12). Similarmente,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i,j=1}^N \int_{\Gamma_1} \alpha_{ij}\varphi_m\tfrac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_m - \varphi_k)n_j\right| &\leq \sum_{i,j=1}^N\|\alpha_{ij}\|_{L_\infty(\Omega)}\|\varphi_m|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)}\|\nabla(\varphi_m - \varphi_k)|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)}\\ &\leq 2C_3\sum_{i,j=1}^N \|\alpha_{ij}\|_{L_\infty(\Omega)}\|\varphi_m|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)}\,.\end{aligned}$$

Por tanto, gracias a (2.8.14), para cada $\epsilon > 0$ existe un número natural $n_0 \geq 0$ tal que para cada $k, m \geq n_0$ tenemos

$$\left| \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Gamma_1} \alpha_{ij} \left\{ (\varphi_k - \varphi_m) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} + \varphi_m \frac{\partial}{\partial x_i} (\varphi_m - \varphi_k) \right\} n_j \right| \leq \frac{\epsilon}{2} . \tag{2.8.16}$$

Finalmente, sustituyendo (2.7.13 – 2.7.20) y (2.8.16) en (2.7.10) se sigue fácilmente que existe $k_0 \geq n_0$ tal que

$$\mu \|\nabla(\varphi_k - \varphi_m)\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \epsilon , \qquad k\,, m \geq k_0 .$$

Esto completa la prueba de (2.8.15), y en particular muestra que $\varphi \in H^1(\Omega)$ y que $\varphi > 0$.

Ahora averiguamos el comportamiento de φ sobre $\partial\Omega$. Denotemos por j a la inclusión compacta

$$j : W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \hookrightarrow L_2(\partial\Omega) ,$$

y por

$$\gamma \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)) ,$$

al operador traza sobre $\partial\Omega$. Ya que $\varphi_n - \varphi \in H^1(\Omega)$, para cada $n \geq 1$ tenemos que

$$(\varphi_n - \varphi)|_{\partial\Omega} \in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) ,$$

y por eso

$$\begin{aligned} \|(\varphi_n - \varphi)|_{\partial\Omega}\|_{L_2(\partial\Omega)} &\leq \|j\| \|(\varphi_n - \varphi)|_{\partial\Omega}\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \|j\|\|\gamma(\varphi_n - \varphi)\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \\ &\leq \|j\|\|\gamma\|\|\varphi_n - \varphi\|_{H^1(\Omega)} . \end{aligned}$$

De este modo, (2.8.15) implica

$$\lim_{n\to\infty} \|(\varphi_n - \varphi)|_{\partial\Omega}\|_{L_2(\partial\Omega)} = 0 ,$$

y por tanto, gracias a (2.8.14),

$$\gamma(\varphi) = \varphi|_{\partial\Omega} = 0 .$$

En particular, (2.8.15) implica que

$$\varphi \in H_0^1(\Omega) . \tag{2.8.17}$$

Ahora, el mismo argumento utilizado en las pruebas de Teorema 2.6.1 y Teorema 2.7.2 muestra que φ es una solución positiva débil de

$$\begin{cases} \mathcal{L}\varphi = \sigma_1^\infty \varphi & \text{en } \Omega , \\ \varphi = 0 & \text{en } \partial\Omega . \end{cases} \tag{2.8.18}$$

Por tanto, por la unicidad del auto-par principal, obtenemos que

$$(\sigma_1^\infty, \varphi) = (\sigma_1^0, \varphi_0) .$$

Esto concluye la demostración. □

Como una consecuencia inmediata del Teorema 2.8.1 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.8.2 *Supongamos* (2.8.1). *Entonces,*

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{D}] = \sup_{b\in\mathcal{C}(\Gamma_1)} \sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)]\,. \tag{2.8.19}$$

Demostración: Gracias a la Proposición 2.2.1,

$$\sup_{b\in\mathcal{C}(\Gamma_1)} \sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)] \leq \sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{D}]\,.$$

Además, debido al Teorema 2.8.1 tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{B}(n)] = \sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{D}]\,.$$

Esto concluye la demostración. □

2.9 Variando la medida de Ω

En esta sección mostramos que si la medida de Lebesgue de Ω es suficientemente pequea y $\min_{\Gamma_1} b$ es suficientemente grande, entonces $(\mathcal{L},\mathcal{B}(b),\Omega)$ satisface el principio del máximo fuerte, es decir, $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)] > 0$. Este resultado está basado en la siguiente generalización del Teorema 5.1 de [35].

Teorema 2.9.1 *Supongamos* (1.4.11) *y*

$$\Sigma_1^{\frac{1}{2}} |B_1|^{\frac{1}{N}} |\Omega|^{-\frac{1}{N}} \mu \geq |\tilde{\alpha}|_\infty\,, \tag{2.9.1}$$

donde

$$B_1 := \{x \in \mathbf{R}^N \; : \; |x| < 1\}\,, \qquad \Sigma_1 := \sigma_1^{B_1}[-\Delta,\mathcal{D}]\,, \tag{2.9.2}$$

$|\cdot|$ *representa la medida de Lebesgue en* $\mathbf{R}^N$, $\mu > 0$ *es la constante de elipticidad de* $\mathcal{L}$ *en* Ω, *y*

$$\tilde{\alpha} := (\tilde{\alpha}_1, ..., \tilde{\alpha}_N)\,, \qquad |\tilde{\alpha}|_\infty := \sup_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}\,, \tag{2.9.3}$$

donde $\tilde{\alpha}_i \in L_\infty(\Omega)$, $1 \leq i \leq N$, *son los coeficientes definidos en* (1.4.14). *Entonces,*

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{D}] \geq \mu\Sigma_1 |B_1|^{\frac{2}{N}} |\Omega|^{-\frac{2}{N}} - |\tilde{\alpha}|_\infty \Sigma_1^{\frac{1}{2}} |B_1|^{\frac{1}{N}} |\Omega|^{-\frac{1}{N}} + \inf_\Omega \alpha_0\,. \tag{2.9.4}$$

En particular,

$$\liminf_{|\Omega|\searrow 0} \sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{D}] |\Omega|^{\frac{2}{N}} \geq \mu\Sigma_1 |B_1|^{\frac{2}{N}}\,. \tag{2.9.5}$$

Nota 2.9.2 *(a) La estimación* (2.9.1) *es satisfecha si* $|\Omega|$ *es suficientemente pequea. (b) Supongamos que* $\mathcal{L} = -\Delta$. *Entonces, gracias a la desigualdad de Faber [18] y Krahn [31], entre todos los dominios con una medida de Lebesgue prefijada,* $|\Omega|$, *la bola tiene el autovalor principal más pequeo, ba jo condiciones de frontera Dirichlet homogéneas. Así, para cada dominio* Ω *la siguiente estimación es satisfecha*

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{D}]|\Omega|^{\frac{2}{N}} \geq \Sigma_1|B_1|^{\frac{2}{N}}, \tag{2.9.6}$$

y por tanto, la estimación (2.9.5) *es óptima.*

Demostración del Teorema 2.9.1: Denotemos por $\varphi > 0$ a la autofunción principal asociada con $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{D}]$. Entonces, multiplicando la ecuación diferencial

$$\mathcal{L}\varphi = \sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{D}]\varphi$$

por φ, integrando en Ω y aplicando la fórmula de integración por partes se sigue

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{D}]\int_\Omega \varphi^2 = \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega \alpha_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \tilde{\alpha}_i\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \int_\Omega \alpha_0\varphi^2. \tag{2.9.7}$$

Debido al hecho de que $\mathcal{L}$ es fuertemente uniformemente elíptico en Ω obtenemos que

$$\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega \alpha_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \geq \mu\int_\Omega |\nabla\varphi|^2. \tag{2.9.8}$$

Además, se sigue de la desigualdad de Hölder que

$$\left|\sum_{i=1}^N \int_\Omega \tilde{\alpha}_i\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right| = \left|\int_\Omega \varphi\langle\tilde{\alpha},\nabla\varphi\rangle\right| \leq \int_\Omega \varphi|\tilde{\alpha}|\,|\nabla\varphi| \leq |\tilde{\alpha}|_\infty\|\varphi\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)},$$

y por eso

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega \tilde{\alpha}_i\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \geq -|\tilde{\alpha}|_\infty\|\varphi\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)}. \tag{2.9.9}$$

De este modo, sustituyendo (2.9.8) y (2.9.9) en (2.9.7) se verifica que

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{D}] \geq \frac{\|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)}}{\|\varphi\|_{L_2(\Omega)}}\left(\mu\frac{\|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)}}{\|\varphi\|_{L_2(\Omega)}} - |\tilde{\alpha}|_\infty\right) + \inf_\Omega \alpha_0. \tag{2.9.10}$$

Por otra parte, utilizando la caracterización variacional de $\sigma_1^\Omega[-\Delta,\mathcal{D}]$, se sigue de (2.9.6) que

$$\frac{\int_\Omega |\nabla\varphi|^2}{\int_\Omega \varphi^2} \geq \Sigma_1|B_1|^{\frac{2}{N}}|\Omega|^{-\frac{2}{N}}. \tag{2.9.11}$$

Así, gracias a (2.9.11) y (2.9.1),

$$\mu\frac{\|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)}}{\|\varphi\|_{L_2(\Omega)}} \geq \mu\Sigma_1^{\frac{1}{2}}|B_1|^{\frac{1}{N}}|\Omega|^{-\frac{1}{N}} \geq |\tilde{\alpha}|_\infty.$$

Finalmente, (2.9.4) se sigue sustituyendo (2.9.11) en (2.9.10). Esto concluye la demostración. □

Ahora, como una consecuencia inmediata del Teorema 2.8.1 y Teorema 2.9.1, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.9.3 *Supongamos* (2.8.1). *Entonces,*

$$\liminf_{|\Omega|\searrow 0} \lim_{\substack{b\in\mathcal{C}(\Gamma_1)\\ \min_{\Gamma_1} b\nearrow\infty}} \sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)]\,|\Omega|^{\frac{2}{N}} \geq \mu\Sigma_1|B_1|^{\frac{2}{N}}\,. \tag{2.9.12}$$

En particular, $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)]$ puede ser tan grande como nosotros deseemos, tomando Ω con $|\Omega|$ suficientemente pequea y $b\in\mathcal{C}(\Gamma_1)$ con $\min_{\Gamma_1} b$ suficientemente grande.

2.10 Explosión de potenciales no negativos. Clase $\mathcal{A}(\Omega)$ de potenciales admisibles en Ω

En esta sección introducimos una clase de potenciales no negativos $V\in L_\infty(\Omega)$ para los que

$$\lim_{\lambda\nearrow\infty} \sigma_1^\Omega[\mathcal{L}+\lambda V,\mathcal{B}(b)] = \sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L},\mathcal{B}(b,\Omega_0)]\,, \tag{2.10.1}$$

donde Ω_0 es el subconjunto abierto máximal de Ω donde V se anula y $\mathcal{B}(b,\Omega_0)$ representa el operador de frontera introducido en (1.1.5). En la próxima sección utilizaremos (2.10.1) para caracterizar la existencia de autovalores principales de una amplia clase de problemas lineales de valores en la frontera con peso, de la forma

$$\begin{cases} \mathcal{L}\varphi = \sigma W\varphi & \text{en } \Omega\,,\\ \mathcal{B}(b)\varphi = 0 & \text{en } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{2.10.2}$$

donde $W\in L_\infty(\Omega)$ es un potencial con signo indefinido. Recalcamos que por un autovalor principal de (2.10.2) entendemos un valor de σ para el cual el problema admite una solución positiva φ. Como ya fue comentado en la Sección 2.1, el análisis de (2.10.2) es central desde el punto de vista de las aplicaciones de la teoría que estamos desarrollando a las ciencias aplicadas y a la ingeniería. Algunas versiones de (2.10.1) sustanci almente más débiles fueron utilizadas por J. López-Gómez en [17], para resolver algunos problemas clásicos abiertos, propuestos por Simon en [48] en el contexto del análisis semiclásico de operadores de Schrödinger. Por tanto, (2.10.1) tiene interés en sí mismo.

Ahora introducimos la clase de potenciales admisibles, denotados en lo sucesivo por $\mathcal{A}(\Omega)$, para los cuales (2.10.1) se verifica.

Definición 2.10.1 *Se dice que $V \in L_\infty(\Omega)$, $V \geq 0$, es un potencial admisible en Ω si existe un subconjunto abierto Ω_0 de Ω y un subconjunto compacto K de $\bar{\Omega}$ con medida de Lebesgue cero tal que*

$$K \cap (\bar{\Omega}_0 \cup \Gamma_1) = \emptyset\,, \tag{2.10.3}$$

$$\Omega_+ := \{\, x \in \Omega \ : \ V(x) > 0\} = \Omega \setminus (\bar{\Omega}_0 \cup K)\,, \tag{2.10.4}$$

y se verifica cada una de las siguientes condiciones:

($\mathcal{A}1$) *Ω_0 posee un número finito de componentes de clase C^2, digamos Ω_0^j, $1 \leq j \leq m$, tal que $\bar{\Omega}_0^i \cap \bar{\Omega}_0^j = \emptyset$ si $i \neq j$, y*

$$\mathrm{dist}(\Gamma_1, \partial\Omega_0 \cap \Omega) > 0\,. \tag{2.10.5}$$

Así, si denotamos por Γ_1^i, $1 \leq i \leq n_1$, las componentes de Γ_1, entonces para cada $1 \leq i \leq n_1$ o bien $\Gamma_1^i \subset \partial\Omega_0$ o $\Gamma_1^i \cap \partial\Omega_0 = \emptyset$. Además, si $\Gamma_1^i \subset \partial\Omega_0$, entonces Γ_1^i debe ser una componente de $\partial\Omega_0$. En efecto, si $\Gamma_1^i \cap \partial\Omega_0 \neq \emptyset$ pero Γ_1^i no es una componente de $\partial\Omega_0$, entonces $\mathrm{dist}(\Gamma_1^i, \partial\Omega_0 \cap \Omega) = 0$.

($\mathcal{A}2$) *Denotemos por $\{i_1, ..., i_p\}$ al subconjunto de $\{1, ..., n_1\}$ para el cual $\Gamma_1^j \cap \partial\Omega_0 = \emptyset$ si, y sólamente si, $j \in \{i_1, ..., i_p\}$. Entonces, V está separada de cero en cada subconjunto compacto de*

$$\Omega_+ \cup \bigcup_{j=1}^{p} \Gamma_1^{i_j}\,.$$

Observar que si $\Gamma_1 \subset \partial\Omega_0$, entonces únicamente estamos imponiendo que V esté separada de cero en cada subconjunto compacto de Ω_+.

($\mathcal{A}3$) *Denotemos por Γ_0^i, $1 \leq i \leq n_0$, a las componentes de Γ_0, y sea $\{i_1, ..., i_q\}$ el subconjunto de $\{1, ..., n_0\}$ para el cual $(\partial\Omega_0 \cup K) \cap \Gamma_0^j \neq \emptyset$ si, y sólamente si, $j \in \{i_1, ..., i_q\}$. Entonces, V está separada de cero en cada subconjunto compacto de*

$$\Omega_+ \cup [\bigcup_{j=1}^{q} \Gamma_0^{i_j} \setminus (\partial\Omega_0 \cup K)]\,.$$

Observar que si $(\partial\Omega_0 \cup K) \cap \Gamma_0 = \emptyset$, entonces únicamente estamos imponiendo que V esté separada de cero en cada subconjunto compacto de Ω_+.

($\mathcal{A}4$) *Para cada $\eta > 0$ existen un número natural $\ell(\eta) \geq 1$ y $\ell(\eta)$ subconjuntos abiertos de $\mathbf{R}^N$, G_j^η, $1 \leq j \leq \ell(\eta)$, con $|G_j^\eta| < \eta$, $1 \leq j \leq \ell(\eta)$, tales que*

$$\bar{G}_i^\eta \cap \bar{G}_j^\eta = \emptyset \qquad si \quad i \neq j\,,$$

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} G_j^\eta\,,$$

y para cada $1 \leq j \leq \ell(\eta)$ el conjunto abierto $G_j^\eta \cap \Omega$ es conexo y de clase C^2.

La familia de todos los potenciales admisibles en Ω *será denotada por* $\mathcal{A}(\Omega)$.

También, en lo sucesivo denotaremos por $\mathcal{A}^+(\Omega)$ *a la clase de funciones peso consistentes en elementos* $V \in \mathcal{A}(\Omega)$ *para los cuales* $\Omega_0 = \emptyset$. *Observar que si* $V \in \mathcal{A}^+(\Omega)$ *entonces*

$$K \cap \Gamma_1 = \emptyset\,, \qquad \Omega_+ := \{\, x \in \Omega \,:\, V(x) > 0 \,\} = \Omega \setminus K\,,$$

y si denotamos por Γ_0^i, $1 \leq i \leq n_0$, *a las componentes de* Γ_0 *y por* $\{i_1, ..., i_q\}$ *al subconjunto de* $\{1, ..., n_0\}$ *para el cual* $K \cap \Gamma_0^j \neq \emptyset$ *si ,y sólamente si,* $j \in \{i_1, ..., i_q\}$, *entonces* V *está separada de cero en cada subconjunto compacto de*

$$\Omega_+ \cup \Gamma_1 \cup (\bigcup_{j=1}^{q} \Gamma_0^{i_j} \setminus K)\,.$$

Cuando asumimos además que $K \cap \Gamma_0 = \emptyset$, *entonces únicamente estamos imponiendo que* V *esté separada de cero en cada subconjunto compacto de* $\Omega_+ \cup \Gamma_1$. *Además, se verifica la condición* ($\mathcal{A}4$).

Para establecer nuestro principal resultado necesitamos introducir el siguiente concepto.

Definición 2.10.2 *Sea* Ω_0 *un subconjunto abierto de* Ω *verificando los requisitos* ($\mathcal{A}1$) *de la Definición 2.10.1. Entonces, el autovalor principal de* $(\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_0), \Omega_0)$ *es definido por*

$$\sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_0)] := \min_{1 \leq j \leq m} \sigma_1^{\Omega_0^j}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_0^j)]\,.$$

Nota 2.10.3 *Ya que* Ω_0 *es de clase* $\mathcal{C}^2$, *se sigue de* (2.10.5) *que cada uno de los autovalores principales* $\sigma_1^{\Omega_0^j}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_0^j)]$, $1 \leq j \leq m$, *está bien definido. Esto muestra la consistencia de la Definición 2.10.2.*

El principal resultado de esta sección establece lo siguiente.

Teorema 2.10.4 *Supongamos* (2.6.1) *y* $V \in \mathcal{A}(\Omega)$. *Asumamos además que* (1.4.15) *se verifica en* $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_0$. *Entonces,* (2.10.1) *es satisfecho.*

Demostración: Gracias a la Proposición 2.2.2 y debido al hecho de que $V = 0$ en Ω_0, para cada $1 \leq j \leq m$ y $\lambda \in \mathbf{R}$ tenemos que

$$\sigma_1^{\Omega}[\mathcal{L} + \lambda V, \mathcal{B}(b)] < \sigma_1^{\Omega_0^j}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_0^j)]\,,$$

y por eso

$$\sigma_1^{\Omega}[\mathcal{L} + \lambda V, \mathcal{B}(b)] < \sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_0)]\,. \tag{2.10.6}$$

Además, gracias a la Proposición 2.2.3, la aplicación

$$\lambda \to P(\lambda) := \sigma_1^{\Omega}[\mathcal{L} + \lambda V, \mathcal{B}(b)]$$

es creciente. De este modo, $\lim_{\lambda\nearrow\infty} P(\lambda)$ está bien definido y debido a (2.10.6)

$$\lim_{\lambda\nearrow\infty} P(\lambda) \le \sigma_1^0 := \sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b,\Omega_0)]\,.$$

Por tanto, para completar la demostración de (2.10.1) resta probar que para cada $\epsilon > 0$ existe $\Lambda = \Lambda(\epsilon) \in \mathbf{R}$ tal que

$$P(\lambda) > \sigma_1^0 - \epsilon \tag{2.10.7}$$

si $\lambda > \Lambda$. Observar que (2.10.7) puede ser escrito equivalentemente en la forma

$$\sigma_1^{\Omega}[\mathcal{L} + \lambda V - \sigma_1^0 + \epsilon, \mathcal{B}(b)] > 0 \tag{2.10.8}$$

y que, gracias al Teorema 1.3.4, (2.10.8) es satisfecho si, y sólamente si,

$$(\mathcal{L} + \lambda V - \sigma_1^0 + \epsilon, \mathcal{B}(b), \Omega) \tag{2.10.9}$$

posee una supersolución positiva estricta para cada $\lambda > \Lambda$. El resto de la prueba está dedicado a la construcción de una supersolución positiva estricta de (2.10.9) para valores grandes de λ. En la construcción de ésta necesitamos distinguir entre varias situaciones d iferentes de acuerdo a la estructura del conjunto de anulación del potencial, Ω_0. En un principio consideramos el caso más simple cuando Ω_0 es conexo y $K = \emptyset$. Después, consideraremos el caso general.

Paso 1: Supongamos

$$m = 1\,, \qquad K = \emptyset\,.$$

Necesariamente, o bien $\Gamma_0 \cap \partial\Omega_0 = \emptyset$ o $\Gamma_0 \cap \partial\Omega_0 \neq \emptyset$. Supongamos

$$\Gamma_0 \cap \partial\Omega_0 = \emptyset\,. \tag{2.10.10}$$

Para cada $k \in \{0,1\}$, denotemos por Γ_k^j, $1 \le j \le n_k$, a las componentes de Γ_k. Denotemos por $\{i_1,...,i_p\}$ al subconjunto de $\{1,...,n_1\}$ para el cual $\Gamma_1^j \cap \partial\Omega_0 = \emptyset$, si y sólamente si , $j \in \{i_1,...,i_p\}$. Observar que, gracias a $(\mathcal{A}1)$ de Definición 2.10.1, Γ_1^j es una componente de $\partial\Omega_0$ para cada $j \in \{1,...,n_1\} \setminus \{i_1,...,i_p\}$.

Fijemos $\epsilon > 0$ y para cada $\delta > 0$ suficientemente pequeo consideremos los entornos tubulares de radio δ

$$\Omega_\delta := (\Omega_0 + B_\delta) \cap \Omega\,, \tag{2.10.11}$$

$$\mathcal{N}_\delta^{0,j} := (\Gamma_0^j + B_\delta) \cap \Omega\,, \qquad 1 \le j \le n_0\,, \tag{2.10.12}$$

$$\mathcal{N}_\delta^{1,j} := (\Gamma_1^j + B_\delta) \cap \Omega\,, \qquad j \in \{i_1,...,i_p\}\,, \tag{2.10.13}$$

donde $B_\delta \subset \mathbf{R}^N$ es la bola de radio δ centrada en el origen. Observar que Ω_0 debe poseer a lo más un número finito de agujeros, ya que es de clase $\mathcal{C}^2$. Gracias a (2.10.10), existe $\delta_0 > 0$ tal que para cada $0 < \delta < \delta_0$

$$\partial\Omega_\delta \setminus (\Gamma_1 \cap \partial\Omega_0) \subset \Omega_+\,, \quad \bar{\Omega}_\delta \cap \bigcup_{j=1}^{n_0} \bar{\mathcal{N}}_\delta^{0,j} = \emptyset\,, \quad \bigcup_{j=1}^{n_0} \bar{\mathcal{N}}_\delta^{0,j} \setminus \Gamma_0 \subset \Omega_+\,.$$

Además, ya que $\Gamma_k^j \cap \Gamma_\ell^i = \emptyset$ si $i \neq j$, existe $\delta_1 \in (0, \delta_0)$ tal que para cada $0 < \delta < \delta_1$

$$\bar{\mathcal{N}}_\delta^{k,j} \cap \bar{\mathcal{N}}_\delta^{\ell,i} = \emptyset \qquad \text{si} \quad (i,\ell) \neq (j,k)\,, \quad k\,,\ell \in \{0,1\}\,.$$

Además, ya que

$$\partial\Omega_0 \cap \bigcup_{j=1}^{p} \Gamma_1^{i_j} = \emptyset\,,$$

existe $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ tal que para cada $0 < \delta < \delta_2$

$$\bar{\Omega}_\delta \cap \bigcup_{j=1}^{p} \bar{\mathcal{N}}_\delta^{1,i_j} = \emptyset\,.$$

Por construcción, tenemos que Ω_0 es un subdominio propio de Ω_δ y que $\lim_{\delta \searrow 0} \Omega_\delta = \Omega_0$ en el sentido de la Definición 2.5.1. Así, se sigue de la Proposición 2.2.2 y Teorema 2.6.1 que

$$\lim_{\delta \searrow 0} \sigma_1^{\Omega_\delta}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_\delta)] = \sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_0)] = \sigma_1^0\,, \quad \sigma_1^{\Omega_\delta}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_\delta)] < \sigma_1^0\,, \quad 0 < \delta < \delta_2\,,$$

ya que se verifica (1.4.15) en cada una de las componentes de $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_0$. Por tanto, existe $\delta_3 \in (0, \delta_2)$ tal que

$$\sigma_1^{\Omega_\delta}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_\delta)] < \sigma_1^0 < \sigma_1^{\Omega_\delta}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_\delta)] + \epsilon \qquad \text{si} \quad 0 < \delta < \delta_3\,. \tag{2.10.14}$$

Por otra parte, ya que $\lim_{\delta \searrow 0} |\mathcal{N}_\delta^{0,j}| = 0$ para cada $1 \leq j \leq n_0$, se sigue del Teorema 2.9.1 que

$$\lim_{\delta \searrow 0} \sigma_1^{\mathcal{N}_\delta^{0,j}}[\mathcal{L}, \mathcal{D}] = \infty\,, \qquad 1 \leq j \leq n_0\,,$$

y por eso existe $\delta_4 \in (0, \delta_3)$ tal que para cada $0 < \delta < \delta_4$

$$\sigma_1^{\mathcal{N}_\delta^{0,j}}[\mathcal{L}, \mathcal{D}] > \sigma_1^0\,, \qquad 1 \leq j \leq n_0\,. \tag{2.10.15}$$

Fijemos $\delta \in (0, \delta_4)$, y denotemos por φ_δ, ψ_δ^i, $i \in \{i_1, .., i_p\}$, y ξ_δ^j, $1 \leq j \leq n_0$, a las autofunciones principales asociadas con $\sigma_1^{\Omega_\delta}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_\delta)]$, $\sigma_1^{\mathcal{N}_\delta^{1,i}}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \mathcal{N}_\delta^{1,i})]$, $i \in \{i_1, ..., i_p\}$, y $\sigma_1^{\mathcal{N}_\delta^{0,j}}[\mathcal{L}, \mathcal{D}]$, $1 \leq j \leq n_0$, respectivamente, y consideremos la función positiva $\Phi : \bar{\Omega} \to [0, \infty)$ definida por

$$\Phi := \begin{cases} \varphi_\delta & \text{en } \bar{\Omega}_{\frac{\delta}{2}}\,, \\ \psi_\delta^{i_j} & \text{en } \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j}\,, \quad 1 \leq j \leq p\,, \\ \xi_\delta^j & \text{en } \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j}\,, \quad 1 \leq j \leq n_0\,, \\ \zeta_\delta & \text{en } \bar{\Omega} \setminus (\bar{\Omega}_{\frac{\delta}{2}} \cup \bigcup_{j=1}^{p} \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j})\,, \end{cases} \tag{2.10.16}$$

donde ζ_δ es cualquier extensión positiva regular de

$$\varphi_\delta \cup \bigcup_{j=1}^{p} \psi_\delta^{i_j} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \xi_\delta^j$$

desde

$$\bar{\Omega}_{\frac{\delta}{2}} \cup \bigcup_{j=1}^{p} \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j}$$

hasta $\bar{\Omega}$ la cual es separada de cero en

$$\bar{\Omega} \setminus (\bar{\Omega}_{\frac{\delta}{2}} \cup \bigcup_{j=1}^{p} \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j}) .$$

Observar que ζ_δ existe, ya que las funciones $\varphi_\delta|_{\partial\Omega_{\frac{\delta}{2}}\cap\Omega}$, $\psi_\delta^{i_j}|_{\partial\mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j}\setminus\Gamma_1^{i_j}}$, $1 \leq j \leq p$, y $\xi_\delta^j|_{\partial\mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j}\setminus\Gamma_0^j}$, $1 \leq j \leq n_0$, estás separadas de cero. Además,

$$\Phi(x) > 0 \qquad \text{para cada} \quad x \in \Omega .$$

Si $\Gamma_1 \subset \partial\Omega_0$, entonces en la definición de $\Phi(x)$ debemos borrar las $\psi_\delta^{i_j}$'s.

Para completar la prueba de (2.10.1) en el caso (2.10.10) resta mostrar que existe $\Lambda = \Lambda(\epsilon)$ tal que Φ nos proporciona una supersolución estricta de (2.10.9) para cada $\lambda > \Lambda$. En efecto, ya que $V \geq 0$, se sigue de (2.10.14) que en $\Omega_{\frac{\delta}{2}}$ se desprende la siguiente estimación para cada $\lambda > 0$

$$(\mathcal{L} + \lambda V - \sigma_1^0 + \epsilon)\Phi = (\mathcal{L} + \lambda V - \sigma_1^0 + \epsilon)\varphi_\delta \geq (\sigma_1^{\Omega_\delta}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_\delta)] - \sigma_1^0 + \epsilon)\varphi_\delta > 0 .$$

Similarmente, gracias a (2.10.15), obtenemos que para cada $1 \leq j \leq n_0$ en $\mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j}$ se verifica

$$(\mathcal{L} + \lambda V - \sigma_1^0 + \epsilon)\Phi = (\mathcal{L} + \lambda V - \sigma_1^0 + \epsilon)\xi_\delta^j \geq (\sigma_1^{\mathcal{N}_\delta^{0,j}}[\mathcal{L}, \mathcal{D}] - \sigma_1^0 + \epsilon)\xi_\delta^j > 0 .$$

Ahora, observar que gracias a ($\mathcal{A}2$) de Definición 2.10.1 existe una constante $\omega > 0$ tal que

$$V \geq \omega > 0 \qquad \text{en} \quad \bar{\Omega} \setminus (\bar{\Omega}_{\frac{\delta}{2}} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j}) , \tag{2.10.17}$$

ya que

$$\bar{\Omega} \setminus (\Omega_{\frac{\delta}{2}} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j}) \subset \Omega_+ \cup \bigcup_{j=1}^{p} \Gamma_1^{i_j} .$$

De este modo, gracias a (2.10.17), para cada $1 \leq j \leq p$ en $\bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j}$ tenemos que

$$(\mathcal{L} + \lambda V - \sigma_1^0 + \epsilon)\Phi = (\mathcal{L} + \lambda V - \sigma_1^0 + \epsilon)\psi_\delta^{i_j} \geq (\sigma_1^{\mathcal{N}_\delta^{1,i_j}}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \mathcal{N}_\delta^{1,i_j})] - \sigma_1^0 + \epsilon + \lambda\omega)\psi_\delta^{i_j} > 0 ,$$

supuesto

$$\lambda > \max\{\omega^{-1}(\sigma_1^0 - \epsilon - \sigma_1^{\mathcal{N}_\delta^{1,i_j}}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \mathcal{N}_\delta^{1,i_j})]) , 0\} ,$$

mientras que en

$$\bar{\Omega} \setminus (\bar{\Omega}_{\frac{\delta}{2}} \cup \bigcup_{j=1}^{p} \bar{\mathcal{N}}^{1,i_j}_{\frac{\delta}{2}} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \bar{\mathcal{N}}^{0,j}_{\frac{\delta}{2}})$$

tenemos que

$$(\mathcal{L} + \lambda V - \sigma_1^0 + \epsilon)\Phi = (\mathcal{L} + \lambda V - \sigma_1^0 + \epsilon)\zeta_\delta \geq (\mathcal{L} - \sigma_1^0 + \epsilon)\zeta_\delta + \lambda\omega\zeta_\delta > 0$$

si $\lambda > 0$ si suficientemente grande, ya que $(\mathcal{L} - \sigma_1^0 + \epsilon)\zeta_\delta$ es independiente de λ y ζ_δ está separada de cero. Finalmente, por construcción,

$$\mathcal{B}(b)\Phi = \mathcal{D}\xi_\delta^j = 0 \qquad \text{en} \quad \Gamma_0^j, \qquad 1 \leq j \leq n_0,$$

$$\mathcal{B}(b)\Phi = (\partial_\nu + b)\psi_\delta^{i_j} = 0 \qquad \text{en} \quad \Gamma_1^{i_j}, \qquad 1 \leq j \leq p,$$

y

$$\mathcal{B}(b)\Phi = (\partial_\nu + b)\varphi_\delta = 0 \qquad \text{en} \quad \partial\Omega_0 \cap \Gamma_1.$$

Esto completa la prueba del teorema cuando la condición (2.10.10) es satisfecha.

Ahora, supongamos que

$$\Gamma_0 \cap \partial\Omega_0 \neq \emptyset, \tag{2.10.18}$$

en lugar de (2.10.10). Denotemos por Γ_0^i, $1 \leq i \leq n_0$, a las componentes de Γ_0, y sea $\{i_1, ..., i_q\}$ el subconjunto de $\{1, ..., n_0\}$ para el cual $\partial\Omega_0 \cap \Gamma_0^j \neq \emptyset$ si y sólamente si $j \in \{i_1, ..., i_q\}$.

Fijemos $\epsilon > 0$ y dado $\eta > 0$ suficientemente pequeo consideremos el nuevo dominio soporte

$$G_\eta := \Omega \cup (\bigcup_{j=1}^{q} \Gamma_0^{i_j} + B_\eta).$$

Fijemos $\eta > 0$ y sean $\tilde{\alpha}_{ij} = \tilde{\alpha}_{ji} \in \mathcal{C}^1(\bar{G}_\eta)$, $\tilde{\alpha}_i \in \mathcal{C}(\bar{G}_\eta)$, $\tilde{\alpha}_0 \in L_\infty(G_\eta)$ extensiones regulares desde $\bar{\Omega}$ a $\bar{G}_\eta$ de los coeficientes $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, α_i, α_0, $1 \leq i, j \leq N$, respectivamente. Ahora, consideremos el operador diferencial

$$\tilde{\mathcal{L}} := -\sum_{i,j=1}^{N} \tilde{\alpha}_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \tilde{\alpha}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \tilde{\alpha}_0 \qquad \text{en} \quad G_\eta.$$

Ya que $\mathcal{L}$ es fuertemente uniformemente elíptico en Ω con constante de elipticidad $\mu > 0$, se sigue fácilmente que existe $\tilde{\eta} \in (0, \eta)$ tal que $\tilde{\mathcal{L}}$ es fuertemente uniformemente elíptico en $G_{\tilde{\eta}}$ con constante de elipticidad $\frac{\mu}{2}$. Tomemos

$$\tilde{\Omega} := G_{\tilde{\eta}},$$

y consideremos el nuevo potencial

$$\tilde{V} := \begin{cases} 1 & \text{en} \quad \tilde{\Omega} \setminus \Omega, \\ V & \text{en} \quad \Omega, \end{cases}$$

y el nuevo operador de frontera

$$\tilde{\mathcal{B}}(b) := \begin{cases} \mathcal{D} & \text{en } \partial\tilde{\Omega} \setminus \Gamma_1, \\ \partial_\nu + b, & \text{en } \Gamma_1. \end{cases}$$

De ($\mathcal{A}3$) de Definición 2.10.1 se sigue fácilmente que $\tilde{V}$ pertenece a la clase $\mathcal{A}(\tilde{\Omega})$ de potenciales admisibles en $\tilde{\Omega}$. Además, por construcción

$$\tilde{\Omega}_0 = \Omega_0, \qquad (\partial\tilde{\Omega} \setminus \Gamma_1) \cap \partial\tilde{\Omega}_0 = \emptyset.$$

De este modo, la condición (2.10.10) es satisfecha para el nuevo problema en $\tilde{\Omega}$, y por eso existe $\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}(\epsilon)$ y una función positiva function $\tilde{\Phi} : \bar{\tilde{\Omega}} \to [0, \infty)$ con $\tilde{\Phi}(x) > 0$ para cada $x \in \tilde{\Omega}$ la cual es una supersolución estricta de

$$(\tilde{\mathcal{L}} + \lambda\tilde{V} - \tilde{\sigma}_1^0 + \epsilon, \tilde{\mathcal{B}}(b), \tilde{\Omega})$$

para cada $\lambda > \tilde{\Lambda}$, donde

$$\tilde{\sigma}_1^0 := \sigma_1^{\tilde{\Omega}_0}[\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\mathcal{B}}(b, \tilde{\Omega}_0)] = \sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_0)] = \sigma_1^0.$$

Tomemos

$$\Phi := \tilde{\Phi}|_{\bar{\Omega}}.$$

En Ω tenemos que para cada $\lambda > \tilde{\Lambda}$

$$(\mathcal{L} + \lambda V - \sigma_1^0 + \epsilon)\Phi = (\tilde{\mathcal{L}} + \lambda\tilde{V} - \tilde{\sigma}_1^0 + \epsilon)\tilde{\Phi} \geq 0.$$

Además,

$$\Phi(x) = \tilde{\Phi}(x) > 0 \qquad \text{para cada} \quad x \in \bigcup_{j=1}^{q} \Gamma_0^{i_j}, \tag{2.10.19}$$

ya que $\cup_{j=1}^{q}\Gamma_0^{i_j} \subset \tilde{\Omega}$, y

$$(\partial_\nu + b)\Phi|_{\Gamma_1} = (\partial_\nu + b)\tilde{\Phi}|_{\Gamma_1} \geq 0,$$

$$\Phi = \tilde{\Phi} = 0 \qquad \text{en} \quad \Gamma_0 \setminus \bigcup_{j=1}^{q} \Gamma_0^{i_j}.$$

De este modo, $\mathcal{B}(b)\Phi > 0$ en $\partial\Omega$, y por tanto Φ nos proporciona una supersolución positiva estricta de (2.10.9) para cada $\lambda > \tilde{\Lambda}$. Esto completa la demostración del teorema cuando Ω_0 es conexo y $K = \emptyset$.

Paso 2: Ahora, supongamos que estamos trabajando bajo las condiciones generales del teorema y que en adicción

$$\Gamma_0 \cap (\partial\Omega_0 \cup K) = \emptyset. \tag{2.10.20}$$

Entonces, (2.10.3) implica

$$K \subset \Omega\,, \qquad \bar{\Omega}_0 \subset \Omega \cup \Gamma_1\,, \qquad K \cap \bar{\Omega}_0 = \emptyset\,. \tag{2.10.21}$$

En particular,

$$\mathrm{dist}(\Gamma_0, \bar{\Omega}_0 \cup K) > 0\,, \qquad \mathrm{dist}(\Gamma_1, K) > 0\,, \qquad \mathrm{dist}(K, \bar{\Omega}_0) > 0\,. \tag{2.10.22}$$

Denotemos por Ω_0^i, $1 \le i \le m$, a las componentes de Ω_0 y definamos

$$\sigma_1^i := \sigma_1^{\Omega_0^i}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_0^i)]\,, \qquad 1 \le i \le m\,.$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que

$$\sigma_1^i \le \sigma_1^{i+1}\,, \qquad 1 \le i \le m-1\,.$$

Fijemos $\eta > 0$. Gracias a ($\mathcal{A}4$) de Definición 2.10.1, existe un número natural $\ell(\eta) \ge 1$ y $\ell(\eta)$ conjuntos abiertos $G_j^\eta \subset \mathbb{R}^N$, $1 \le j \le \ell(\eta)$, con $|G_j^\eta| < \eta$, $1 \le j \le \ell(\eta)$, tales que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} (G_j^\eta \cap \bar{\Omega}) \quad \text{y} \quad \bar{G}_i^\eta \cap \bar{G}_j^\eta = \emptyset \quad \text{si} \quad i \ne j\,,$$

y para cada $1 \le j \le \ell(\eta)$ el conjunto abierto $G_j^\eta \cap \Omega$ es conexo y de clase $\mathcal{C}^2$. Gracias a (2.10.21), podemos elegir los G_j^η's tales que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} \bar{G}_j^\eta \subset \Omega\,, \qquad \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} \bar{G}_j^\eta \cap \bar{\Omega}_0 = \emptyset\,. \tag{2.10.23}$$

En efecto, ya que

$$\mathrm{dist}(K, \bar{\Omega}_0 \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1) > 0\,,$$

existe un conjunto abierto G tal que

$$K \subset G\,, \qquad \bar{G} \subset \Omega\,, \qquad \bar{G} \cap \bar{\Omega}_0 = \emptyset\,.$$

Por eso, para tener (2.10.23) es suficiente tomar $G \cap G_j^\eta$, en lugar de G_j^η, $1 \le j \le \ell(\eta)$.

Argumentando como en la prueba del Teorema 2.9.1 se sigue fácilmente que existe $\eta_0 > 0$ tal que para cada $\eta \in (0, \eta_0)$ y $1 \le j \le \ell(\eta)$

$$\sigma_1^{G_j^\eta}[\mathcal{L}, \mathcal{D}] \ge \mu \Sigma_1 |B_1|^{\frac{2}{N}} \eta^{-\frac{2}{N}} - |\tilde{a}|_\infty \Sigma_1^{\frac{1}{2}} |B_1|^{\frac{1}{N}} \eta^{-\frac{1}{N}} + \inf_\Omega \alpha_0\,.$$

Por tanto, existe $\eta_1 \in (0, \eta_0)$ tal que para cada $\eta \in (0, \eta_1)$

$$\sigma_1^m < \min_{1 \le j \le \ell(\eta)} \sigma_1^{G_j^\eta}[\mathcal{L}, \mathcal{D}]\,. \tag{2.10.24}$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que

$$\sigma_1^{G_j^\eta}[\mathcal{L},\mathcal{D}] \leq \sigma_1^{G_{j+1}^\eta}[\mathcal{L},\mathcal{D}]\,, \qquad 1 \leq j \leq \ell(\eta)-1\,.$$

Ahora, fijemos $\eta \in (0,\eta_1)$ y para cada $\delta > 0$ y $1 \leq i \leq m$ consideremos el conjunto abierto

$$\Omega_\delta^i := (\Omega_0^i + B_\delta) \cap \Omega\,.$$

Ya que $\bar\Omega_0^i \cap \bar\Omega_0^j = \emptyset$ si $i \neq j$, existe $\delta_0 > 0$ tal que para cada $0 < \delta < \delta_0$

$$\bar\Omega_\delta^i \cap \bar\Omega_\delta^j = \emptyset \qquad \text{si} \quad i \neq j\,. \tag{2.10.25}$$

Además, gracias a (2.10.23), existe $\delta_1 \in (0,\delta_0)$ tal que para cada $0 < \delta < \delta_1$

$$\Big(\bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} \bar G_j^\eta\Big) \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{m} \bar\Omega_\delta^i\Big) = \emptyset\,. \tag{2.10.26}$$

Ahora, consideremos los potenciales

$$V_i := \begin{cases} V & \text{en} \;\; \bar\Omega_\delta^i\,, \\ 1 & \text{en} \;\; \bar\Omega \setminus \bar\Omega_\delta^i\,, \end{cases} \qquad 1 \leq i \leq m\,. \tag{2.10.27}$$

Gracias a (2.10.4), (2.10.25) y (2.10.26),

$$\Omega \cap \bigcup_{i=1}^{m} (\bar\Omega_\delta^i \setminus \bar\Omega_0^i) \subset \Omega_+\,,$$

y por eso para cada $1 \leq i \leq m$ el potencial V_i está separado de cero en cada subconjunto compacto de Ω_+, ya que V está separada de cero en cada subconjunto compacto de Ω_+. Sean Γ_1^j, $1 \leq j \leq n_1$, las componentes de Γ_1 y para cada $1 \leq i \leq m$ denotemos por $\{j_1,\dots,j_{p_i}\}$ al subconjunto de $\{1,\dots,n_1\}$ para el cual $\Gamma_1^j \cap \partial\Omega_0^i = \emptyset$ si y sólamente si $j \in \{j_1,\dots,j_{p_i}\}$. Entonces, para cada $1 \leq i \leq m$ tenemos que

$$\partial\Omega_0^i \cap \bigcup_{k=1}^{p_i} \Gamma_1^{j_k} = \emptyset\,.$$

En particular,

$$\operatorname{dist}(\partial\Omega_0^i, \bigcup_{k=1}^{p_i} \Gamma_1^{j_k}) > 0\,, \qquad 1 \leq i \leq m\,,$$

y por eso existe $\delta_2 \in (0,\delta_1)$ tal que para cada $1 \leq i \leq m$ y $0 < \delta < \delta_2$

$$\Big(\bigcup_{k=1}^{p_i} \Gamma_1^{j_k} + B_\delta\Big) \cap \bar\Omega_\delta^i = \emptyset\,. \tag{2.10.28}$$

Fijemos $\delta \in (0, \delta_2)$. Entonces, se sigue de (2.10.28) que para cada $1 \leq i \leq m$

$$V_i = 1 \qquad \text{en} \quad (\bigcup_{k=1}^{p_i} \Gamma_1^{j_k} + B_\delta) \cap \bar{\Omega}\,,$$

y por eso para cada $1 \leq i \leq m$ el potencial V_i está separado de cero en cada subconjunto compacto de

$$\Omega_+ \cup \bigcup_{k=1}^{p_i} \Gamma_1^{j_k}\,.$$

Por tanto,

$$V_i \in \mathcal{A}(\Omega)\,, \qquad 1 \leq i \leq m\,.$$

Observar que para cada $1 \leq i \leq m$ el conjunto de anulación asociado a V_i es Ω_0^i, el cual es conexo, y que el correspondiente K es el conjunto vacío, ya que (2.10.23) y (2.10.26) implican que

$$K \cap (\bar{\Omega}_\delta^i \cup \Gamma_1) = \emptyset\,, \qquad 1 \leq i \leq m\,.$$

De este modo, cada uno de estos potenciales se encuentra dentro del marco abstracto de trabajo del Paso 1, y por lo tanto para cada $\epsilon > 0$ existe $\Lambda_1 = \Lambda_1(\epsilon) > 0$ y m funciones regulares

$$\Phi_i : \bar{\Omega} \to [0, \infty)\,, \qquad 1 \leq i \leq m\,,$$

tales que

$$\Phi_i(x) > 0\,, \qquad x \in \Omega\,, \quad 1 \leq i \leq m\,, \tag{2.10.29}$$

y para cada $1 \leq i \leq m$ la función Φ_i es una supersolución estricta de

$$(\mathcal{L} + \lambda V_i - \sigma_1^{\Omega_0^i}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_0^i)] + \epsilon, \mathcal{B}(b), \Omega)$$

para cada $\lambda > \Lambda_1$.

Ahora, consideremos los potenciales

$$\hat{V}_j := \begin{cases} 0 & \text{en} \;\; G_j^\eta\,, \\ 1 & \text{en} \;\; \bar{\Omega} \setminus G_j^\eta\,, \end{cases} \qquad 1 \leq j \leq \ell(\eta)\,. \tag{2.10.30}$$

Fijemos $1 \leq j \leq \ell(\eta)$. Por construcción, el conjunto de anulación de $\hat{V}_j$ está dado por G_j^η el cual es conexo y de clase $\mathcal{C}^2$. Además, gracias a (2.10.23), $\bar{G}_j^\eta \subset \Omega$. Así, existe $\rho > 0$ tal que $\hat{V}_j = 1$ en $(\Gamma_1 + B_\rho) \cap \bar{\Omega}$, y por eso

$$\hat{V}_j \in \mathcal{A}(\Omega)\,, \qquad 1 \leq j \leq \ell(\eta)\,.$$

De este modo, cada uno de estos potenciales se encuentra dentro del marco abstracto de trabajo del Paso 1, y por tanto existe $\Lambda_2 = \Lambda_2(\epsilon) > 0$ y $\ell(\eta)$ funciones regulares

$$\hat{\Phi}_j : \bar{\Omega} \to [0, \infty)\,, \qquad 1 \leq j \leq \ell(\eta)\,,$$

tales que

$$\hat{\Phi}_j(x) > 0\,, \qquad x \in \Omega\,, \quad 1 \leq j \leq \ell(\eta)\,, \tag{2.10.31}$$

y para cada $1 \leq j \leq \ell(\eta)$ la función $\hat{\Phi}_j$ es una supersolución estricta de

$$(\mathcal{L} + \lambda \hat{V}_j - \sigma_1^{G_j^\eta}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, G_j^\eta)] + \epsilon, \mathcal{B}(b), \Omega)$$

para cada $\lambda > \Lambda_2$. Observar que ya que $\bar{G}_j^\eta \subset \Omega$, $1 \leq j \leq \ell(\eta)$,

$$\mathcal{B}(b, G_j^\eta) = \mathcal{D}\,, \qquad 1 \leq j \leq \ell(\eta)\,,$$

y por eso

$$\sigma_1^{G_j^\eta}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, G_j^\eta)] = \sigma_1^{G_j^\eta}[\mathcal{L}, \mathcal{D}]\,, \qquad 1 \leq j \leq \ell(\eta)\,. \tag{2.10.32}$$

Sean Γ_1^j, $1 \leq j \leq n_1$, las componentes de Γ_1 y denotemos por $\{i_1, ..., i_p\}$ al subconjunto de $\{1, ..., n_1\}$ para el cual $\Gamma_1^j \cap \partial\Omega_0 = \emptyset$ si y sólamente si $j \in \{i_1, ..., i_p\}$. Gracias a $(\mathcal{A}1)$ de Definición 2.10.1, Γ_1^j es una componente de $\partial\Omega_0$ para cada $j \in \{1, ..., n_1\} \setminus \{i_1, ..., i_p\}$. Además,

$$\bigcup_{j=1}^{p} \Gamma_1^{i_j} \cap \partial\Omega_0 = \emptyset\,,$$

y por eso

$$\mathrm{dist}(\bigcup_{j=1}^{p} \Gamma_1^{i_j}, \partial\Omega_0) > 0\,. \tag{2.10.33}$$

Ahora, consideremos los entornos tubulares de radio δ definidos por (2.10.12) y (2.10.13). Gracias a (2.10.20), (2.10.23) y (2.10.33), existe $\delta_3 \in (0, \delta_2)$ tal que para cada $0 < \delta < \delta_3$

$$(\bigcup_{j=1}^{p} \bar{\mathcal{N}}_\delta^{1,i_j} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \bar{\mathcal{N}}_\delta^{0,j}) \cap (\bigcup_{j=1}^{m} \bar{\Omega}_\delta^j \cup \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} \bar{G}_j^\eta) = \emptyset\,. \tag{2.10.34}$$

Además, ya que $\Gamma_k^j \cap \Gamma_\ell^i = \emptyset$ si $(i, \ell) \neq (j, k)$, existe $\delta_4 \in (0, \delta_3)$ tal que para cada $0 < \delta < \delta_4$

$$\bar{\mathcal{N}}_\delta^{k,j} \cap \bar{\mathcal{N}}_\delta^{\ell,i} = \emptyset \qquad \text{si} \quad (i, \ell) \neq (j, k)\,, \quad k\,, \ell \in \{0, 1\}\,. \tag{2.10.35}$$

Además, ya que $\lim_{\delta \searrow 0} |\mathcal{N}_\delta^{0,j}| = 0$ para cada $1 \leq j \leq n_0$, se sigue del Teorema 2.9.1 que existe $\delta_5 \in (0, \delta_4)$ tal que para cada $0 < \delta < \delta_5$

$$\sigma_1^{\mathcal{N}_\delta^{0,j}}[\mathcal{L}, \mathcal{D}] > \sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_0)] := \sigma_1^0\,, \qquad 1 \leq j \leq n_0\,. \tag{2.10.36}$$

Ahora, denotemos por ψ_δ^i, $i \in \{i_1, ..., i_p\}$, y ξ_δ^j, $1 \leq j \leq n_0$, a las autofunciones principales asociadas a $\sigma_1^{\mathcal{N}_\delta^{1,i}}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \mathcal{N}_\delta^{1,i})]$, $i \in \{i_1, ..., i_p\}$, y $\sigma_1^{\mathcal{N}_\delta^{0,j}}[\mathcal{L}, \mathcal{D}]$, $1 \leq j \leq n_0$, respectivamente.

Gracias a (2.10.26), (2.10.34) y (2.10.35), la siguiente función está bien definida

$$\Phi := \begin{cases} \Phi_i & \text{en } \Omega_\delta^i, \quad 1 \leq i \leq m, \\ \hat{\Phi}_j & \text{en } G_j^\eta, \quad 1 \leq j \leq \ell(\eta), \\ \psi_\delta^{i_j} & \text{en } \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j}, \quad 1 \leq j \leq p, \\ \xi_\delta^j & \text{en } \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j}, \quad 1 \leq j \leq n_0, \\ \zeta_\delta & \text{en } \bar{\Omega} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^m \Omega_\delta^i \cup \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} G_j^\eta \cup \bigcup_{j=1}^p \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j} \right), \end{cases} \tag{2.10.37}$$

donde ζ_δ es cualquier extensión positiva regular de

$$\bigcup_{i=1}^m \Phi_i \cup \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} \hat{\Phi}_j \cup \bigcup_{j=1}^p \psi_\delta^{i_j} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \xi_\delta^j$$

desde

$$\bigcup_{i=1}^m \Omega_\delta^i \cup \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} G_j^\eta \cup \bigcup_{j=1}^p \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j}$$

hasta $\bar{\Omega}$ la cual está separada de cero. Ésta existe ya que, gracias a (2.10.23), (2.10.29) y (2.10.31), las funciones

$$\Phi_i|_{\partial\Omega_\delta^i \setminus \Gamma_1}, \qquad \hat{\Phi}_j|_{\partial G_j^\eta}, \qquad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq \ell(\eta),$$

son positivas y separadas de cero, lo mismo que las funciones

$$\psi_\delta^{i_j}|_{\partial\mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j} \setminus \Gamma_1}, \qquad \xi_\delta^i|_{\partial\mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{0,i} \setminus \Gamma_0}, \qquad 1 \leq j \leq p, \quad 1 \leq i \leq n_0.$$

Como en Paso 1, en la definición de $\Phi(x)$ debemos borrar las $\psi_\delta^{i_j}$'s si $\Gamma_1 \subset \partial\Omega_0$.

Para cada $1 \leq i \leq m$ se sigue de la definición de Φ_i que en Ω_δ^i las siguientes relaciones son satisfechas para cada $\lambda > \Lambda_1$

$$(\mathcal{L} + \lambda V - \sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_0)] + \epsilon)\Phi = (\mathcal{L} + \lambda V_i - \sigma_1^1 + \epsilon)\Phi_i \geq (\mathcal{L} + \lambda V_i - \sigma_1^i + \epsilon)\Phi_i \geq 0,$$

ya que $V = V_i$ y

$$\sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_0)] = \sigma_1^1 \leq \sigma_1^i,$$

mientras que, gracias a (2.10.24), para cada $1 \leq j \leq \ell(\eta)$ se sigue de la definición de $\hat{\Phi}_j$ que en G_j^η las siguientes relaciones son satisfechas para cada $\lambda > \Lambda_2$

$$(\mathcal{L} + \lambda V - \sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_0)] + \epsilon)\Phi \geq (\mathcal{L} + \lambda \hat{V}_j - \sigma_1^1 + \epsilon)\hat{\Phi}_j > (\mathcal{L} + \lambda \hat{V}_j - \sigma_1^{G_j^\eta}[\mathcal{L}.\mathcal{D}] + \epsilon)\hat{\Phi}_j \geq 0,$$

ya que $V \geq \hat{V}_j = 0$ en G_j^η.

Gracias a ($\mathcal{A}2$) de Definición 2.10.1, V es positiva y separada de cero en cada subconjunto compacto de

$$\Omega_+ \cup \bigcup_{j=1}^{p} \Gamma_1^{i_j};$$

y por eso existe $\omega > 0$ tal que

$$V \geq \omega > 0 \qquad \text{en} \quad \bigcup_{j=1}^{p} \mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j}.$$

De este modo, para cada $1 \leq j \leq p$ en $\mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j}$ tenemos que para cada $\lambda > 0$

$$(\mathcal{L} + \lambda V - \sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b,\Omega_0)] + \epsilon)\Phi \geq (\sigma_1^{\mathcal{N}_\delta^{1,i_j}}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \mathcal{N}_\delta^{1,i_j})] - \sigma_1^1 + \epsilon + \lambda\omega)\psi_\delta^{i_j} > 0$$

si λ es suficientemente grande mientras que debido a (2.10.36) para cada $1 \leq j \leq n_0$ se sigue de la definición de Φ y ξ_δ^j que en $\mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j}$ para cada $\lambda > 0$ tenemos que

$$(\mathcal{L} + \lambda V - \sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b,\Omega_0)] + \epsilon)\Phi \geq (\sigma_1^{\mathcal{N}_\delta^{0,j}}[\mathcal{L}, \mathcal{D}] - \sigma_1^1 + \epsilon)\xi_\delta^j > 0.$$

En

$$\bar{\Omega} \setminus (\bigcup_{i=1}^{m} \Omega_\delta^i \cup \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} G_j^\eta \cup \bigcup_{j=1}^{p} \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j})$$

tenemos que

$$(\mathcal{L} + \lambda V - \sigma_1^0 + \epsilon)\Phi = (\mathcal{L} + \lambda V - \sigma_1^0 + \epsilon)\zeta_\delta \geq (\mathcal{L} - \sigma_1^0 + \epsilon)\zeta_\delta + \lambda\omega\zeta_\delta > 0$$

si $\lambda > 0$ es suficientemente grande, ya que $(\mathcal{L} - \sigma_1^0 + \epsilon)\zeta_\delta$ es independiente de λ y ζ_δ está separada de cero.

Finalmente,

$$\mathcal{B}(b)\Phi = \mathcal{D}\Phi = \xi_\delta^j = 0 \qquad \text{en} \quad \Gamma_0^j, \quad 1 \leq j \leq n_0,$$

$$\mathcal{B}(b)\Phi = (\partial_\nu + b)\Phi = (\partial_\nu + b)\psi_\delta^{i_j} = 0 \qquad \text{en} \quad \Gamma_1^{i_j}, \quad 1 \leq j \leq p,$$

y para cada $1 \leq j \leq m$ tal que $\partial\Omega_0^j \cap \Gamma_1 \neq \emptyset$ tenemos que

$$\mathcal{B}(b)\Phi = (\partial_\nu + b)\Phi = (\partial_\nu + b)\Phi_j \geq 0 \qquad \text{en} \quad \partial\Omega_\delta^j \cap \Gamma_1 = \partial\Omega_0^j \cap \Gamma_1.$$

Así

$$\mathcal{B}(b)\Phi \geq 0 \qquad \text{en} \quad \partial\Omega,$$

y por tanto la función Φ definida por (2.10.37) nos proporciona una supersolución positiva estricta de (2.10.9) si $\lambda > 0$ es suficientemente grande. Esto completa la demostración del teorema cuando la condición (2.10.20) es satisfecha.

Ahora, supongamos que

$$\Gamma_0 \cap (\partial\Omega_0 \cup K) \neq \emptyset . \tag{2.10.38}$$

Sean Γ_0^j, $1 \leq j \leq n_0$, las componentes de Γ_0, denotemos por $\{i_1, ..., i_q\}$ al subconjunto de $\{1, ..., n_0\}$ para el cual

$$\Gamma_0^j \cap (\partial\Omega_0 \cup K) \neq \emptyset$$

si y sólamente si $j \in \{i_1, ..., i_q\}$, y para cada $\eta > 0$ suficientemente pequeo consideremos el conjunto abierto

$$\tilde{\Omega} := G_\eta := \Omega \cup (\bigcup_{j=1}^{q} \Gamma_0^{i_j} + B_\eta) .$$

El resto de la demostración consiste en construir $\tilde{\mathcal{L}}$, $\tilde{V}$ y $\tilde{\mathcal{B}}(b)$, como en la prueba del Paso 1 para el caso cuando la condición (2.10.18) es satisfecha, por lo que $\tilde{\Omega}_0 = \Omega_0$, $\tilde{K} = K$, y

$$\tilde{\Gamma}_0 \cap (\partial\tilde{\Omega}_0 \cup \tilde{K}) = \emptyset .$$

Argumentando como en la prueba de la segunda parte del Paso 1, pero esta vez utilizando el resultado del Paso 2 bajo condición (2.10.20), en lugar del resultado del Paso 1 bajo condición (2.10.10), la presente situación es abarcada. Esto concluye la demostración del teorema. □

Argumentando como en la prueba del Teorema 2.10.4 en el caso particular en el que $a \in \mathcal{A}(\Omega)$ y $\Omega_0 = \emptyset$, se sigue fácilmente el próximo resultado. Debe ser destacado que debido al hecho de que no se necesita el Teorema 2.6.1 para demostrar el Teorema 2.10.5, la regularidad requerida sobre los coeficientes del operador $\mathcal{L}$ es más débil que la necesitada en el Teorema 2.10.4. Además, la condición (1.4.15) sobre Γ_1 no es requerida.

Teorema 2.10.5 *Supongamos que*

$$\alpha_{ij} \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \cap W^1_\infty(\Omega) , \qquad \alpha_i,\ \alpha_0 \in L_\infty(\Omega) , \qquad 1 \leq i,j \leq N.$$

Asumamos en adicción que $V \in \mathcal{A}^+(\Omega)$, es decir, $V \in \mathcal{A}(\Omega)$ y $\Omega_0 = \emptyset$. Entonces

$$\lim_{\lambda \nearrow \infty} \sigma_1^\Omega[\mathcal{L} + \lambda V, \mathcal{B}(b)] = +\infty.$$

2.11 Autovalores principales para problemas con pesos

En esta sección utilizamos la teoría desarrollada en las secciones previas para analizar la existencia y multiplicidad de los autovalores principales del problema lineal de valores en la frontera con peso

$$\begin{cases} \mathcal{L}\varphi = \lambda W \varphi & \text{en } \Omega , \\ \mathcal{B}(b)\varphi = 0 & \text{en } \partial\Omega , \end{cases} \tag{2.11.1}$$

donde $\lambda \in \mathbf{R}$ y $W \in L_\infty(\Omega)$. Un autovalor principal de (2.11.1) es cualquier valor de λ para el que el problema posee una solución positiva φ. Así, por la unicidad del auto-par principal asociado a

$$(\mathcal{L} - \lambda W, \mathcal{B}(b), \Omega),$$

los autovalores principales de (2.11.1) están dados por los ceros de la aplicación

$$\Sigma(\lambda) := \sigma_1^\Omega[\mathcal{L} - \lambda W, \mathcal{B}(b)], \qquad \lambda \in \mathbf{R}. \tag{2.11.2}$$

El siguiente resultado nos proporciona algunas propiedades generales de $\Sigma(\lambda)$.

Teorema 2.11.1 *La aplicación $\Sigma(\lambda)$ definida por* (2.11.2) *satisface las siguientes propiedades:*

a) *$\Sigma(\lambda)$ es real holomorfa y cóncava. Por tanto, o bien $\Sigma''(\lambda) = 0$ para cada $\lambda \in \mathbf{R}$, o bien existe un conjunto discreto $Z \subset \mathbf{R}$ tal que $\Sigma''(\lambda) < 0$ para cada $\lambda \in \mathbf{R} \setminus Z$. Por discreto es entendido que $Z \cap K$ es finito para cada subconjunto compacto K de $\mathbf{R}$.*

b) *Asumamos que existe un subconjunto abierto $D_+ \subset \Omega$ para el cual $\inf_{D_+} W > 0$. Entonces,*

$$\lim_{\lambda \nearrow \infty} \Sigma(\lambda) = -\infty. \tag{2.11.3}$$

Si además $W \geq 0$ en Ω, entonces $\Sigma'(\lambda) < 0$ para cada $\lambda \in \mathbf{R}$.

c) *Asumamos que existe un subconjunto abierto $D_- \subset \Omega$ para el cual $\sup_{D_-} W < 0$. Entonces,*

$$\lim_{\lambda \searrow -\infty} \Sigma(\lambda) = -\infty. \tag{2.11.4}$$

Si además $W \leq 0$ en Ω, entonces $\Sigma'(\lambda) > 0$ para cada $\lambda \in \mathbf{R}$.

d) *Asumamos que existen dos subconjuntos abiertos D_+ y D_- of Ω para los cuales*

$$\inf_{D_+} W > 0, \qquad \sup_{D_-} W < 0. \tag{2.11.5}$$

Entonces, las condiciones (2.11.3) *y* (2.11.4) *son satisfechas. En particular, existe $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ para el cual*

$$\Sigma(\lambda_0) = \sup_{\lambda \in \mathbf{R}} \Sigma(\lambda).$$

Además, $\Sigma'(\lambda_0) = 0$, $\Sigma'(\lambda) > 0$ si $\lambda < \lambda_0$, y $\Sigma'(\lambda) < 0$ si $\lambda > \lambda_0$. Por tanto, λ_0 es único.

Nota 2.11.2 *En el Teorema 2.11.1(a) la primera opción puede ocurrir. En efecto, si W es constante, entonces*

$$\Sigma(\lambda) = \sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)] - \lambda W.$$

De este modo, $\Sigma'(\lambda) = -W$ y $\Sigma''(\lambda) = 0$ para cada $\lambda \in \mathbf{R}$.

Demostración del Teorema 2.11.1: (a) Definamos

$$\mathcal{L}(\lambda) := \mathcal{L} - \lambda W .$$

Si $\mathcal{L}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, es considerada como una familia de operadores cerrados con dominio común

$$D(\mathcal{L}(\lambda)) = W^2_{\mathcal{B}(b)}(\Omega) ,$$

y valores en $L^2(\Omega)$, entonces es real holomorfa de tipo (A) en el sentido de T. Kato (cf. [30], Capítulo VII, §2). En efecto, para toda $v \in L^2(\Omega)$ y $u \in W^2_{\mathcal{B}(b)}(\Omega)$, el L_2-producto $\int_\Omega v\mathcal{L}(\lambda)u$ es real holomorfo en λ. Por tanto, obtenemos de Teoremas 1.7, 1.8 de Capítulo VII, §1.3, de [30] que $\Sigma(\lambda)$ es real holomorfa en λ. Además, si $\varphi(\lambda)$ representa la autofunción principal asóciada a $\Sigma(\lambda)$, normalizada tal que $\int_\Omega \varphi^2(\lambda) = 1$, entonces la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longmapsto & L_2(\Omega) \\ \lambda & \to & \varphi(\lambda) \end{array} \tag{2.11.6}$$

es real holomorfa también. La concavidad de la aplicación $\lambda \to \Sigma(\lambda)$ es una consecuencia del Teorema 2.4.1. De estos hechos se sigue fácilmente que $\Sigma''(\lambda) \leq 0$ para cada $\lambda \in \mathbf{R}$. Finalmente, ya que $\Sigma''(\lambda)$ es real holomorfa, se sigue del teorema de identidad que alguna de las siguientes opciones ocurre: O bien $\Sigma'' = 0$, o Σ'' se anula en un conjunto discreto, posiblemente vacío. Esto completa la prueba de la Parte (a).

(b) Asumamos que existe un subconjunto abierto $D_+ \subset \Omega$ para el cual $\inf_{D_+} W > 0$. Sean $x_+ \in D_+$ y $R > 0$ tales que $B_R(x_+) \subset D_+$. Entonces, Proposición 2.2.2 implica

$$\Sigma(\lambda) = \sigma_1^\Omega[\mathcal{L} - \lambda W, \mathcal{B}(b)] \leq \sigma_1^{B_R(x_+)}[\mathcal{L} - \lambda W, \mathcal{D}] ,$$

ya que

$$\mathcal{B}(b, B_R(x_+)) = \mathcal{D} .$$

De este modo, para cada $\lambda > 0$ obtenemos que

$$\Sigma(\lambda) \leq \sigma_1^{B_R(x_+)}[\mathcal{L}, \mathcal{D}] - \lambda \inf_{D_+} W ,$$

y por tanto

$$\lim_{\lambda \nearrow \infty} \Sigma(\lambda) = -\infty .$$

Esto muestra (2.11.3). Supongamos $W \geq 0$. Entonces, se sigue de Proposición 2.2.3 que $\Sigma'(\lambda) \leq 0$ para cada $\lambda \in \mathbf{R}$. Asumamos que existe $\lambda_1 \in \mathbf{R}$ tal que

$$\Sigma'(\lambda_1) = 0 .$$

Entonces, para cada $\lambda < \lambda_1$ tenemos que

$$0 \geq \Sigma'(\lambda) = \int_{\lambda_1}^{\lambda} \Sigma''(s)\, ds \geq 0 ,$$

ya que $\Sigma'' \leq 0$, y por eso $\Sigma' = 0$ en $(-\infty, \lambda_1]$. Así, se sigue del teorema de identidad que $\Sigma' = 0$ en $\mathbf{R}$, y por tanto Σ debe ser constante. Esto contradice (2.11.3) y muestra que $\Sigma'(\lambda) < 0$ para cualquier $\lambda \in \mathbf{R}$.

(c) Se sigue fácilmente aplicando Part (b) a la nueva función

$$\tilde{\Sigma}(\lambda) := \Sigma(-\lambda)\,, \qquad \lambda \in \mathbf{R}\,,$$

asociada al potencial $-W$.

(d) Es suficiente mostrar que $\Sigma'(\lambda) > 0$ si $\lambda < \lambda_0$, mientras que $\Sigma'(\lambda) < 0$ si $\lambda > \lambda_0$. Por definición,

$$\Sigma'(\lambda_0) = 0\,.$$

Asumamos que existe $\lambda_1 < \lambda_0$ tal que

$$\Sigma'(\lambda_1) \leq 0\,.$$

Entonces,

$$0 \geq \Sigma'(\lambda_1) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \Sigma''(\lambda)\, d\lambda \geq 0\,,$$

ya que $\Sigma'' \leq 0$, y por eso

$$\Sigma'(\lambda_1) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \Sigma''(\lambda)\, d\lambda = 0\,.$$

De este modo, $\Sigma'' = 0$ en $[\lambda_1, \lambda_0]$ y por lo tanto, gracias al teorema de identidad, obtenemos que $\Sigma'' = 0$ en $\mathbf{R}$. Por eso, existen dos constantes a, $b \in \mathbf{R}$ tales que

$$\Sigma(\lambda) = a\lambda + b\,, \qquad \lambda \in \mathbf{R}\,.$$

Este hecho contradice (2.11.5). Por tanto, $\Sigma'(\lambda) > 0$ para todo $\lambda < \lambda_0$.

Ahora, asumamos que existe $\lambda_2 > \lambda_0$ tal que

$$\Sigma'(\lambda_2) \geq 0\,.$$

Entonces,

$$0 \leq \Sigma'(\lambda_2) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_2} \Sigma''(\lambda)\, d\lambda \leq 0\,,$$

y por eso

$$\Sigma'(\lambda_2) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_2} \Sigma''(\lambda)\, d\lambda = 0\,.$$

Así, $\Sigma'' = 0$ en $[\lambda_0, \lambda_2]$ y por lo tanto, gracias al teorema de identidad, obtenemos que $\Sigma'' = 0$ en $\mathbf{R}$. Por eso, existen dos constantes a, $b \in \mathbf{R}$ tales que

$$\Sigma(\lambda) = a\lambda + b\,, \qquad \lambda \in \mathbf{R}\,.$$

Este hecho contradice (2.11.5). Por tanto, $\Sigma'(\lambda) < 0$ para todo $\lambda > \lambda_0$. Esto concluye la demostración del teorema. □

Del Teorema 2.11.1 se obtiene fácilmente la siguiente caracterización de la existencia de autovalores principales para el problema lineal de valores en la frontera con peso (2.11.1).

Teorema 2.11.3 *Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

a) *Asumamos que $W \geq 0$ y que existe un subconjunto abierto $D_+ \subset \Omega$ tal que $\inf_{D_+} W > 0$. Entonces,* (2.11.1) *posee un autovalor principal si, y sólamente si,*

$$\lim_{\lambda \searrow -\infty} \Sigma(\lambda) > 0\,. \tag{2.11.7}$$

Además, es único si existe. Denotémosle por λ_1. Entonces, λ_1 es un autovalor simple de $(\mathcal{L} - \lambda_1 W, W)$ en el sentido de [14].

b) *Asumamos que $W \leq 0$ y que existe un subconjunto abierto $D_- \subset \Omega$ tal que $\sup_{D_-} W < 0$. Entonces,* (2.11.1) *posee un autovalor principal si, y sólamente si,*

$$\lim_{\lambda \nearrow \infty} \Sigma(\lambda) > 0\,. \tag{2.11.8}$$

Además, es único si existe. Denotémosle por λ_1. Entonces, λ_1 es un autovalor simple de $(\mathcal{L} - \lambda_1 W, W)$ en el sentido de [14].

c) *Asumamos que existen dos subconjuntos abiertos D_+ y D_- of Ω para los cuales* (2.11.5) *es satisfecha, y sea $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ el único valor de λ para el cual $\Sigma'(\lambda) = 0$. Entonces,* (2.11.1) *posee un autovalor principal si, y sólamente si, $\Sigma(\lambda_0) \geq 0$. Además, λ_0 es el único autovalor principal de* (2.11.1) *si $\Sigma(\lambda_0) = 0$, mientras que* (2.11.1) *posee exactamente dos autovalores principales, digamos $\lambda_- < \lambda_+$, si $\Sigma(\lambda_0) > 0$. Además, en este caso*

$$\lambda_- < \lambda_0 < \lambda_+\,,$$

y $\lambda_\pm$ es un autovalor simple de $(\mathcal{L} - \lambda_\pm W, W)$ en el sentido de [14].

Demostración: Los resultados de existencia y multiplicidad son una consecuencia inmediata del Teorema 2.11.1. Únicamente resta mostrar la simplicidad de cualquier autovalor, digamos λ_1, de (2.11.1) cuando $\Sigma'(\lambda_1) \neq 0$.

Como en la prueba del Teorema 2.11.1, denotemos por $\varphi(\lambda)$ a la autofunción principal asociada a $\Sigma(\lambda)$, normalizada tal que $\int_\Omega \varphi^2(\lambda) = 1$. Entonces, ya sabemos que es real holomorfa, y por eso dif erenciando

$$(\mathcal{L} - \lambda W)\varphi(\lambda) = \Sigma(\lambda)\varphi(\lambda)$$

con respecto a λ se sigue que

$$(\mathcal{L} - \lambda W)\varphi'(\lambda) - W\varphi(\lambda) = \Sigma'(\lambda)\varphi(\lambda) + \Sigma(\lambda)\varphi'(\lambda)\,.$$

De este modo, tomando

$$\varphi_1 := \varphi(\lambda_1)\,, \qquad \varphi_1' := \varphi'(\lambda_1)\,,$$

obtenemos que

$$(\mathcal{L} - \lambda_1 W)\varphi_1' = W\varphi_1 + \Sigma'(\lambda_1)\varphi_1\,, \tag{2.11.9}$$

ya que, por definición, $\Sigma(\lambda_1) = 0$.

Recalcamos que λ_1 es un autovalor simple de $(\mathcal{L} - \lambda_1 W, W)$ si, y sólamente si,

$$W\varphi_1 \notin R[\mathcal{L} - \lambda_1 W]\,. \tag{2.11.10}$$

Supongamos $\Sigma'(\lambda_1) \neq 0$ y $W\varphi_1 \in R[\mathcal{L} - \lambda_1 W]$. Entonces se sigue de (2.11.9) que

$$\Sigma'(\lambda_1)\varphi_1 \in R[\mathcal{L} - \lambda_1 W]\,,$$

y por eso

$$\varphi_1 \in R[\mathcal{L} - \lambda_1 W]\,,$$

lo cual es imposible, ya que

$$N[\mathcal{L} - \lambda_1 W] = \mathrm{span}[\varphi_1]$$

y $\Sigma(\lambda_1) = 0$ es un autovalor algebraicamente simple de $\mathcal{L} - \lambda_1 W$. Por tanto, la condición (2.11.10) se verifica. Recíprocamente, se sigue de (2.11.9) que la condición (2.11.10) falla si $\Sigma'(\lambda_1) = 0$. Esto concluye la demostración del teorema. □

Nota 2.11.4 *(a) Bajo las hipótesis del Teorema 2.11.3(a) tenemos que, $\lambda_1 > 0$ si y sólamente si $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)] > 0$, y $\lambda_1 = 0$ si y sólamente si $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)] = 0$.*

(b) Bajo las hipótesis del Teorema 2.11.3(b), $\lambda_1 > 0$ si y sólamente si $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)] < 0$, y $\lambda_1 = 0$ si y sólamente si $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)] = 0$.

(c) Bajo las hipóteis del Teorema 2.11.3(c), asumamos además que $\Sigma(\lambda_0) = 0$. Entonces, $\lambda_0 > 0$ si y sólamente si $\Sigma'(0) > 0$, mientras que $\lambda_0 = 0$ si y sólamente si $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)] = 0$. Ahora, supongamos $\Sigma(\lambda_0) > 0$. Entonces, $\lambda_- < 0 < \lambda_+$ si $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)] > 0$, $0 = \lambda_- < \lambda_+$ si $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)] = 0$ y $\Sigma'(0) > 0$, $\lambda_- < \lambda_+ = 0$ si $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)] = 0$ y $\Sigma'(0) < 0$, $0 < \lambda_- < \lambda_+$ si $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)] < 0$ y $\Sigma'(0) > 0$, y $\lambda_- < \lambda_+ < 0$ si $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)] < 0$ y $\Sigma'(0) < 0$.

(d) El Teorema 2.11.3 es sustancialmente más general que el clásico resultado de Hess y Kato [26] (cf. [25] también), donde junto al hecho de que los coeficientes del operador diferencial y el operador de frontera son más restrictivos que los aquí considerados, fue requerido que $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)] > 0$.

El siguiente resultado nos proporciona algunas condiciones suficientes en términos de la función peso W para que (2.11.1) pueda poseer un autovalor principal. En un principio consideraremos el caso de un potencial con signo definido. Después abordaremos el caso general.

Teorema 2.11.5 *Supongamos $W \in L_\infty(\Omega)$ y $W \geq 0$. Entonces, las siguientes afirmaciones son ciertas:*

a) Si $\inf_\Omega W > 0$, *entonces* (2.11.1) *posee un único autovalor principal.*

b) Si $\inf_\Omega W = 0$, W *es admisible en el sentido de la Definición 2.10.1,* (2.6.1) *es satisfecho y* (1.4.15) *se verifica en* $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_0$, *entonces* (2.11.1) *posee un autovalor principal si, y sólemante si,*

$$\sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_0)] > 0\,. \tag{2.11.11}$$

Además, si existe es único.

Similarmente, el problema (2.11.1) *posee un único autovalor principal si* $\sup_\Omega W < 0$, *mientras que cuando* $\sup_\Omega W = 0$, $-W$ *es admisible en el sentido de la Definición 2.10.1,* (2.6.1) *es satisfecho y* (1.4.15) *se verifica en* $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_0$, *entonces* (2.11.1) *posee un autovalor principal si, y sólamente si,* (2.11.11) *es satisfecho. Además, si existe es único.*

Demostración: (a) Supongamos $\inf_\Omega W > 0$. Entonces, para cada $\lambda < 0$ tenemos que

$$\Sigma(\lambda) = \sigma_1^\Omega[\mathcal{L} - \lambda W, \mathcal{B}(b)] \geq \sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)] - \lambda \inf_\Omega W\,,$$

y por eso

$$\lim_{\lambda \searrow -\infty} \Sigma(\lambda) = \infty\,.$$

Por tanto, (2.11.7) se verifica y Teorema 2.11.3(a) completa la prueba.

(b) Supongamos $\inf_\Omega W = 0$, $W \in \mathcal{A}(\Omega)$, (2.6.1), y que (1.4.15) se verifica en $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_0$. Entonces, gracias al Teorema 2.10.4,

$$\lim_{\lambda \searrow -\infty} \Sigma(\lambda) = \sigma_1^{\Omega_0}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_0)]\,.$$

De este modo, (2.11.7) ocurre si, y sólamente si, (2.11.11) es satisfecho. Gracias al Teorema 2.11.3(a), esto completa la prueba si $W \geq 0$.

Si $W \leq 0$, en lugar de $W \geq 0$, es suficiente aplicar el reaultado ya obtenido a la nueva función

$$\tilde{\Sigma}(\lambda) := \Sigma(-\lambda)\,, \qquad \lambda \in \mathbf{R}\,,$$

asociada al potencial $-W$. □

Cuando W cambia de signo y

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)] > 0\,,$$

se sigue del Teorema 2.11.3(c) que (2.11.1) posee dos autovalores principales; uno negativo y el otro positivo. Si $(\mathcal{L}, \mathcal{B}(b), \Omega)$ no satisface el principio del máximo fuerte, entonces se verifican los siguientes resultados.

Teorema 2.11.6 *Supongamos* (2.6.1) *y*

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)] < 0\,. \tag{2.11.12}$$

Sea $W \in L_\infty(\Omega)$ un potencial para el cual existen dos subconjuntos abiertos D_+, $D_- \subset \Omega$ tales que la condición (2.11.5) *es satisfecha. Tomemos*

$$W^+ := \max\{W, 0\}, \qquad W^- := W^+ - W,$$

y asumamos que alguna de las siguientes dos condiciones es satisfecha:

a) $W^+ \in \mathcal{A}(\Omega)$, *la clase de potenciales admisibles en* Ω, (1.4.15) *es satisfecho en* $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_0^+$, *y*

$$\sigma_1^{\Omega_0^+}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_0^+)] > 0, \qquad \|W^-\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \max_{\lambda \leq \lambda_1^+} \frac{\Sigma_+(\lambda)}{-\lambda}, \tag{2.11.13}$$

donde Ω_0^+ *representa el conjunto abierto de anulación asociado a* W^+, *cuya existencia está garantizada por la Definición 2.10.1,*

$$\Sigma_+(\lambda) := \sigma_1^\Omega[\mathcal{L} - \lambda W^+, \mathcal{B}(b)], \qquad \lambda \in \mathbf{R},$$

y $\lambda_1^+ < 0$ *representa el único* λ *para el cual* $\Sigma_+(\lambda) = 0$.

b) $W^- \in \mathcal{A}(\Omega)$, *la clase de potenciales admisibles en* Ω, (1.4.15) *es satisfecho en* $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_0^-$, *y*

$$\sigma_1^{\Omega_0^-}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_0^-)] > 0, \qquad \|W^+\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \max_{\lambda \geq \lambda_1^-} \frac{\Sigma_-(\lambda)}{\lambda}, \tag{2.11.14}$$

donde Ω_0^- *representa el conjunto abierto de anulación asociado a* W^-, *cuya existencia está garantizada por la Definición 2.10.1,*

$$\Sigma_-(\lambda) := \sigma_1^\Omega[\mathcal{L} + \lambda W^-, \mathcal{B}(b)], \qquad \lambda \in \mathbf{R},$$

y $\lambda_1^- > 0$ *representa el único* λ *para el cual* $\Sigma_-(\lambda) = 0$.

Entonces, (2.11.1) *posee exactamente dos autovalores principales. Además, en el caso (a) los dos autovalores principales son negativos, mientras que en el caso (b) los dos autovalores principales de* (2.11.1) *son positivos.*

Nota 2.11.7 *Gracias al Corolario 2.9.3,* (2.11.13) *es satisfecho si* $|\Omega_0^+|$ *es suficientemente pequea, b es suficientemente grande, y* W^- *es suficientemente pequea, mientras que* (2.11.14) *se verifica si* $|\Omega_0^-|$ *es suficientemente pequea, b es suficientemente grande y* W^+ *es suficientemente pequea. De hecho, gracias al Teorema 2.9.1, si* $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_0^+ = \emptyset$, *y* $|\Omega_0^+|$ *y* W^- *son suficientemente pequeas, entonces la resctricción sobre b es innecesaria para tener* (2.11.13). *Similarmente, si* $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_0^- = \emptyset$, *y* $|\Omega_0^-|$ *y* W^+ *son suficientemente pequeas, entonces la restricción sobre b es innecesaria para tener* (2.11.14).

Demostración del Teorema 2.11.6: En un principio demostraremos que (2.11.13) y (2.11.14) tienen sentido. Supongamos

$$\sigma_1^{\Omega_0^+}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_0^+)] > 0 \, .$$

Entonces, la existencia y la unicidad de λ_1^+ está garantizada por el Teorema 2.11.5(b). Además, $\lambda_1^+ < 0$ y, gracias al Teorema 2.11.1(b),

$$\Sigma'_+(\lambda_1^+) < 0 \, .$$

De este modo,

$$\lim_{\lambda \nearrow \lambda_1^+} \frac{\Sigma_+(\lambda)}{-\lambda} = 0 \, .$$

Por otra parte, para cada $\lambda < \lambda_1^+$ tenemos que

$$\frac{\Sigma_+(\lambda)}{-\lambda} > 0 \, ,$$

y debido al Teorema 2.10.4

$$\lim_{\lambda \searrow -\infty} \frac{\Sigma_+(\lambda)}{-\lambda} = 0 \, .$$

Por tanto,

$$\max_{\lambda \le \lambda_1^+} \frac{\Sigma_+(\lambda)}{-\lambda} \in (0, \infty)$$

está bien definido. En particular, (2.11.13) tiene sentido. Similarmente, se sigue fácilmente que (2.11.14) tiene sentido.

Supongamos que la condición (a) es satisfecha. Entonces, existe $\tilde{\lambda} < \lambda_1^+ < 0$ tal que

$$\|W^-\|_{L_\infty(\Omega)} \le \frac{\Sigma_+(\tilde{\lambda})}{-\tilde{\lambda}} \, ,$$

y por eso

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L} - \tilde{\lambda} W^+, \mathcal{B}(b)] \ge -\tilde{\lambda} \|W^-\|_{L_\infty(\Omega)} \, .$$

De este modo,

$$\Sigma(\tilde{\lambda}) = \sigma_1^\Omega[\mathcal{L} - \tilde{\lambda} W, \mathcal{B}(b)] > \sigma_1^\Omega[\mathcal{L} - \tilde{\lambda} W^+, \mathcal{B}(b)] + \tilde{\lambda} \|W^-\|_{L_\infty(\Omega)} \ge 0 \, ,$$

ya que $\tilde{\lambda} < 0$ y $W^- < \|W^-\|_{L_\infty(\Omega)}$. El Teorema 2.11.3(c) completa la demostración de este resultado cuando la condición (a) es satisfecha. El argumento previo puede ser fácilmente adaptado para probar el teorema cuando, en lugar de (a), la condición (b) es satisfecha. Es to concluye la demostración. □

Teorema 2.11.8 *Supongamos* (2.6.1) *y*

$$\sigma_1^{\Omega}[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)] = 0\,. \tag{2.11.15}$$

Sea $W \in L_\infty(\Omega)$ un potencial para el que existen dos subconjuntos abiertos D_+, $D_- \subset \Omega$ tales que se verifica la condición (2.11.5). *Tomemos*

$$W^+ := \max\{W, 0\}\,, \qquad W^- := W^+ - W\,,$$

y supongamos que alguna de las siguientes dos condiciones es satisfecha:

a) $W^+ \in \mathcal{A}(\Omega)$, *la clase de potenciales admisibles en* Ω, (1.4.15) *es satisfecha en* $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_0^+$, *y*

$$\|W^-\|_{L_\infty(\Omega)} < \max_{\lambda\leq 0} \frac{\Sigma_+(\lambda)}{-\lambda}\,, \tag{2.11.16}$$

donde Ω_0^+ representa el conjunto abierto de anulación asociado a W^+ y

$$\Sigma_+(\lambda) := \sigma_1^{\Omega}[\mathcal{L} - \lambda W^+, \mathcal{B}(b)]\,, \qquad \lambda \in \mathbf{R}\,.$$

b) $W^- \in \mathcal{A}(\Omega)$, *la clase de potenciales admisibles en* Ω, (1.4.15) *es satisfecha en* $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_0^-$, *y*

$$\|W^+\|_{L_\infty(\Omega)} < \max_{\lambda\geq 0} \frac{\Sigma_-(\lambda)}{\lambda}\,, \tag{2.11.17}$$

donde Ω_0^- representa el conjunto abierto de anulación asociado a W^- y

$$\Sigma_-(\lambda) := \sigma_1^{\Omega}[\mathcal{L} + \lambda W^-, \mathcal{B}(b)]\,, \qquad \lambda \in \mathbf{R}\,.$$

Entonces, (2.11.1) *posee exactamente dos autovalores principales. Además, en el caso (a) uno de ellos es cero y el otro es negativo, mientras que en el caso (b) uno de ellos es cero y el otro es positivo.*

Demostración: En un principio mostraremos que (2.11.16) y (2.11.17) tienen sentido. Gracias a (2.11.15),

$$\Sigma_+(0) = \sigma_1^{\Omega}[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)] = 0\,,$$

y por eso debido a la monotonía del autovalor principal con respecto al dominio

$$\sigma_1^{\Omega_0^+}[\mathcal{L},\mathcal{B}(b,\Omega_0^+)] > 0\,.$$

Además, gracias al Teorema 2.11.1(b),

$$\Sigma_+'(0) < 0\,.$$

De este modo

$$\lim_{\lambda \nearrow 0} \frac{\Sigma_+(\lambda)}{-\lambda} = -\Sigma'_+(0) > 0\,.$$

Por otra parte, para cada $\lambda < 0$ tenemos que

$$\frac{\Sigma_+(\lambda)}{-\lambda} > 0\,,$$

y debido al Teorema 2.10.4

$$\lim_{\lambda \searrow -\infty} \frac{\Sigma_+(\lambda)}{-\lambda} = 0\,.$$

Por tanto,

$$\max_{\lambda \leq 0} \frac{\Sigma_+(\lambda)}{-\lambda} \in (0,\infty)$$

está bien definido. En particular, (2.11.16) tiene sentido. Similarmente, se sigue fácilmente que (2.11.17) tiene sentido.

Supongamos que la condición (a) es satisfecha. Entonces, existe $\tilde{\lambda} < 0$ tal que

$$\|W^-\|_{L_\infty(\Omega)} < \frac{\Sigma_+(\tilde{\lambda})}{-\tilde{\lambda}}\,,$$

y por eso

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L} - \tilde{\lambda} W^+, \mathcal{B}(b)] > -\tilde{\lambda} \|W^-\|_{L_\infty(\Omega)}\,.$$

De este modo,

$$\Sigma(\tilde{\lambda}) = \sigma_1^\Omega[\mathcal{L} - \tilde{\lambda} W, \mathcal{B}(b)] > \sigma_1^\Omega[\mathcal{L} - \tilde{\lambda} W^+, \mathcal{B}(b)] + \tilde{\lambda} \|W^-\|_{L_\infty(\Omega)} > 0\,,$$

ya que $\tilde{\lambda} < 0$. Ahora, el Teorema 2.11.3(c) completa la demostración del resultado cuando la condición (a) es satisfecha. El argumento previo puede ser fácilmente adaptado para probar el teorema cuando, en lugar de (a), la con dición (b) es satisfecha. Esto concluye la demostración. □

Capítulo 3

Soluciones positivas de una clase general de problemas sublineales

---

En este capítulo estudiamos la existencia y estructura del conjunto de soluciones positivas, de una clase muy general de problemas sublineales elípticos de valores en la frontera con pesos y con no linealidades no necesariamente monótonas, sujetos a condiciones de frontera no clásicas de tipo mixto. Nuestros resultados proporcionan extensiones sustanciales de algunos resultados previos encontrados en [32], [19] y [20]. Monotonía, teoría local y global de bifurcación y argumentos de continuación global son, entre otras, las técnicas utilizadas para llevar a cabo nuestro análisis matemático.

3.1 Introducción

En este capítulo empezamos caracterizando la existencia de soluciones positivas del problema sublineal elíptico de valores en la frontera con peso

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda W(x)u - a(x)f(x,u)u & \text{en } \Omega\,, \\ \mathcal{B}(b)u = 0 & \text{en } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

donde $a(x) \in L_\infty(\Omega)$ pertenece a cierta clase de potenciales no negativos y $W \in L_\infty(\Omega)$. Después analizamos la estructura del diagrama de soluciones positivas de (3.1.1), de acuerdo al signo del potencial W en el conjunto de anulación de $a(x)$, denotado en lo sucesivo por Ω_a^0. Finalmente, averiguamos el crecimiento puntual de las soluciones positivas de (3.1.1) en Ω_a^0 y en algunas regiones de su frontera, cuando λ se aproxima al valor de bifurcación a soluciones positivas de (3.1.1) desde infinito. La existencia de valores de λ para los que el problema exhibe bifurcación desde infinito se debe al hecho de que $\Omega_a^0 \neq \emptyset$.

A lo largo de este capítulo supondremos lo siguiente:

a) Ω es un dominio acotado en $\mathbf{R}^N$, $N \geq 1$, de clase $\mathcal{C}^2$, es decir, $\bar{\Omega}$ es una subvariedad N-dimensional compacta y conexa de clase $\mathcal{C}^2$ de $\mathbf{R}^N$ con frontera $\partial\Omega$ de clase $\mathcal{C}^2$.

b) $\lambda \in \mathbf{R}$ es considerado como un parámetro de bifurcación y continuación, $W \in L_\infty(\Omega)$ es un potencial en frente de λ, y

$$\mathcal{L} := -\sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \alpha_0(x) \tag{3.1.2}$$

es uniformemente fuertemente elíptico en Ω con

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}), \qquad \alpha_i \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}), \qquad \alpha_0 \in L_\infty(\Omega), \qquad 1 \leq i, j \leq N. \tag{3.1.3}$$

En lo sucesivo denotaremos por $\mu > 0$ a la constante de elipticidad de $\mathcal{L}$ en Ω. Entonces, para cada $\xi \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ y $x \in \bar{\Omega}$ tendremos que

$$\sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \mu|\xi|^2.$$

c) $a \in L_\infty(\Omega)$, $a > 0$, es un *potencial admisible* en Ω, en el sentido de la Definición 2.10.1. Es decir, a es un potencial para el cual existen un subconjunto abierto Ω_a^0 de Ω y un subconjunto compacto de K de $\bar{\Omega}$ con medida de Lebesgue cero tal que

$$K \cap (\bar{\Omega}_a^0 \cup \Gamma_1) = \emptyset, \tag{3.1.4}$$

$$\Omega_a^+ := \{x \in \Omega \ : \ a(x) > 0\} = \Omega \setminus (\bar{\Omega}_a^0 \cup K), \tag{3.1.5}$$

y se verifica cada una de las siguientes condiciones:

($\mathcal{A}1$) Ω_a^0 posee un número finito de componentes de clase $\mathcal{C}^2$, digamos $\Omega_a^{0,j}$, $1 \leq j \leq m$, tales que $\bar{\Omega}_a^{0,i} \cap \bar{\Omega}_a^{0,j} = \emptyset$ si $i \neq j$, y

$$\operatorname{dist}(\Gamma_1, \partial\Omega_a^0 \cap \Omega) > 0. \tag{3.1.6}$$

Así, si denotamos por Γ_1^i, $1 \leq i \leq n_1$, a las componentes de Γ_1, entonces para cada $1 \leq i \leq n_1$, o bien $\Gamma_1^i \subset \partial\Omega_a^0$ o $\Gamma_1^i \cap \partial\Omega_a^0 = \emptyset$. Además, si $\Gamma_1^i \subset \partial\Omega_a^0$, entonces Γ_1^i debe ser una componente de $\partial\Omega_a^0$. En efecto, si $\Gamma_1^i \cap \partial\Omega_a^0 \neq \emptyset$ pero Γ_1^i no es una componente de $\partial\Omega_a^0$, entonces $\operatorname{dist}(\Gamma_1^i, \partial\Omega_a^0 \cap \Omega) = 0$.

($\mathcal{A}2$) Denotemos por $\{i_1, ..., i_p\}$ al subconjunto de $\{1, ..., n_1\}$ para el cual $\Gamma_1^j \cap \partial\Omega_a^0 = \emptyset$ si, y sólamente si, $j \in \{i_1, ..., i_p\}$. Entonces, a está separado de cero en cada subconjunto compacto de

$$\Omega_a^+ \cup \bigcup_{j=1}^{p} \Gamma_1^{i_j}.$$

Observar que si $\Gamma_1 \subset \partial\Omega_a^0$, entonces únicamente estamos imponiendo que a esté separado de cero en cada subconjunto compacto de Ω_a^+.

($\mathcal{A}3$) Denotemos por Γ_0^i, $1 \leq i \leq n_0$, a las componentes de Γ_0, y sea $\{i_1, ..., i_q\}$ el subconjunto de $\{1, ..., n_0\}$ para el cual $(\partial\Omega_a^0 \cup K) \cap \Gamma_0^j \neq \emptyset$ si, y sólamente si, $j \in \{i_1, ..., i_q\}$. Entonces, a está separado de cero en cada subconjunto compacto de

$$\Omega_a^+ \cup [\bigcup_{j=1}^{q} \Gamma_0^{i_j} \setminus (\partial\Omega_a^0 \cup K)] .$$

Observar que si $(\partial\Omega_a^0 \cup K) \cap \Gamma_0 = \emptyset$, entonces únicamente estamos imponiendo que a esté separado de cero en cada subconjunto compacto de Ω_a^+.

($\mathcal{A}4$) Para cada $\eta > 0$ existen un número natural $\ell(\eta) \geq 1$ y $\ell(\eta)$ subconjuntos abiertos de $\mathbf{R}^N$, G_j^η, $1 \leq j \leq \ell(\eta)$, con $|G_j^\eta| < \eta$, $1 \leq j \leq \ell(\eta)$, tales que

$$\bar{G}_i^\eta \cap \bar{G}_j^\eta = \emptyset \qquad \text{si} \quad i \neq j ,$$

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} G_j^\eta ,$$

y para cada $1 \leq j \leq \ell(\eta)$ el conjunto abierto $G_j^\eta \cap \Omega$ es conexo y de clase $\mathcal{C}^2$.

En lo sucesivo, para cada $a \in L_\infty(\Omega)$, $a > 0$ verificando las hipótesis $(\mathcal{A}1) - (\mathcal{A}4)$ de c), será denotado por $a \in \mathcal{A}(\Omega)$.

d) $\mathcal{B}(b)$ representa al operador de frontera

$$\mathcal{B}(b)u := \begin{cases} u & \text{en } \Gamma_0 , \\ \partial_\nu u + bu & \text{en } \Gamma_1 , \end{cases} \tag{3.1.7}$$

donde Γ_0 y Γ_1 son dos subconjuntos disjuntos abiertos y cerrados de $\partial\Omega$ con $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega$, $b \in \mathcal{C}(\Gamma_1)$,

$$\nu = (\nu_1, ..., \nu_N) \in \mathcal{C}^1(\Gamma_1, \mathbf{R}^N)$$

es cualquier campo vectorial exterior y no tangente verificando

$$\nu_i := \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} n_j , \qquad 1 \leq i \leq N; \tag{3.1.8}$$

sobre $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_a^0$, donde $n = (n_1, \ldots, n_N)$ denota la normal exterior unitaria a Ω sobre Γ_1 y

$$\partial_\nu u := \langle \nabla u, \nu \rangle .$$

Así, (3.1.8) implica que si $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_a^0 \neq \emptyset$, entonces ν es el *campo conormal* sobre $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_a^0$ y $\partial_\nu u$ representa la *derivada cornormal* de u sobre $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_a^0$; y si $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_a^0 = \emptyset$, entonces $\nu \in \mathcal{C}^1(\Gamma_1, \mathbf{R}^N)$ es cualquier campo vectorial exterior y no tangente a Ω sobre Γ_1. Además, Γ_0 y Γ_1 poseen un número finito de componentes conexas. De este modo, $\mathcal{B}(b)$ es el operador de Dirichlet sobre Γ_0, denotado en lo sucesivo por $\mathcal{D}$, y el operador de Neumann o de derivada regular oblicua de primer orden sobre Γ_1. Debe ser destacado que o bien Γ_0 o Γ_1 puede ser el conjunto vacío.

e) La función $f : \bar{\Omega} \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbf{R}$ satisface las siguientes hipótesis:

$$f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega} \times [0, \infty); \mathbf{R}), \qquad \lim_{u \nearrow \infty} f(x, u) = +\infty \quad \text{uniformemente en} \quad \bar{\Omega}. \tag{3.1.9}$$

Obsérvese que (3.1.9) implica que para cada $M > 0$, existe $\mathcal{X}(M) > 0$, uniforme en $\bar{\Omega}$, tal que

$$f(x, \xi) > M \quad \text{para cada} \quad x \in \bar{\Omega} \quad \text{y} \quad \xi > \mathcal{X}(M). \tag{3.1.10}$$

En lo sucesivo denotaremos por $\mathcal{X}(M)$ a cualquier constante positiva fija verificando (3.1.10).

Debe ser destacado que $f(x, 0) \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbf{R})$ y no hay ninguna restricción de signo sobre $f(x, 0)$ en Ω. También, en lo sucesivo denotaremos por $I_f(x)$ a la función

$$I_f(x) := \inf_{\xi > 0} f(x, \xi),$$

y por $\wp(x, f)$ al conjunto

$$\wp(x, f) := \{\eta \geq 0 \;:\; f(x, \eta) = \inf_{\xi > 0} f(x, \xi)\}. \tag{3.1.11}$$

Además,

$$M_0 := \min\{\, 0\,, \min\{\, f(x, \xi) \;:\; (x, \xi) \in \bar{\Omega} \times [0, \mathcal{X}(0)] \,\}\},$$

está bien definido, ya que f satisface (3.1.9). Se ve fácilmente que

$$M_0 \leq I_f(x) \leq f(x, 0) \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbf{R})$$

para cada $x \in \Omega$ y, por ello, $I_f \in L_\infty(\Omega)$.

Ahora introducimos algunas notaciones. En lo sucesivo consideraremos los siguientes operadores diferenciales

$$\hat{\mathcal{L}} := \mathcal{L} + a(x) I_f(x), \qquad \tilde{\mathcal{L}} := \mathcal{L} + a(x) f(x, 0),$$

y para cada $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\mathcal{L}(\lambda) := \mathcal{L} - \lambda W(x)\,, \quad \hat{\mathcal{L}}(\lambda) := \hat{\mathcal{L}} - \lambda W(x)\,, \quad \tilde{\mathcal{L}}(\lambda) := \tilde{\mathcal{L}} - \lambda W(x)\,.$$

Observar que estos operadores son uniformemente fuertemente elípticos en Ω, con la misma constante de elipticidad $\mu > 0$ que $\mathcal{L}$. Además, consideraremos las aplicaciones

$$\Sigma(\lambda) := \sigma_1^\Omega[\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(b)]\,, \quad \hat{\Sigma}(\lambda) := \sigma_1^\Omega[\hat{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}(b)]\,, \quad \tilde{\Sigma}(\lambda) := \sigma_1^\Omega[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}(b)]\,, \tag{3.1.12}$$

y

$$\Sigma_0(\lambda) := \sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(b, \Omega_a^0)]\,, \tag{3.1.13}$$

todas ellas definidas para cada $\lambda \in \mathbf{R}$, y

$$\hat{\Lambda}(a, f) := \{\, \lambda \in \mathbf{R} \;:\; \hat{\Sigma}(\lambda) \leq 0 < \Sigma_0(\lambda) \,\}.$$

Obsérvese que ya que $a > 0$, gracias a la Proposición 2.2.2 y a la Proposición 2.2.3, para cada f verificando (3.1.9) y $\lambda \in \mathbf{R}$, las aplicaciones definidas por (3.1.12) y (3.1.13) satisfacen

$$\hat{\Sigma}(\lambda) \leq \tilde{\Sigma}(\lambda) < \Sigma_0(\lambda)\,. \tag{3.1.14}$$

En todo este capítulo, representaremos las soluciones positivas de (3.1.1) como pares (λ, u_λ) o simplemente como u_λ, donde λ es el parámetro de bifurcación. Además, para cada potencial $a \in \mathcal{A}(\Omega)$ y f verificando (3.1.9), denotaremos por $\Lambda(a, f)$ al conjunto de valores de λ para los cuales (3.1.1) posee al menos una solución positiva. Se debe destacar que ya que la aplicación $u \rightarrow f(\cdot, u)$ no es necesariamente monótona en $[0, \infty)$, (3.1.1) puede exhibir más de una solución positiva para cada $\lambda \in \Lambda(a, f)$. Así, la expresión (λ, u_λ) o simplemente u_λ, denotará cualquier solución positiva de (3.1.1) para el valor λ del parámetro. Para cada $\lambda \in \Lambda(a, f)$, $\mathcal{J}(\lambda)$ representará cualquier conjunto tal que $\{u_\lambda^i \;:\; i \in \mathcal{J}(\lambda)\}$ nos proporcione el conjunto de soluciones positivas de (3.1.1).

Los problemas semilineales elípticos de valores en la frontera del tipo (3.1.1) han atraido un gran interés durante las últimas décadas, por las aplicaciones que en ecología matemática y química tiene su modelo parabólico

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{L}u = \lambda W(x)u - a(x)f(x,u)u & \text{en} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ \mathcal{B}(b)u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{en} \quad \bar{\Omega}\,. \end{cases} \tag{3.1.15}$$

Estos problemas parabólicos describen la dinámica de las soluciones positivas de muchas ecuaciones de reacción-difusión utilizadas para modelizar una gran variedad de fenómenos en las ciencias aplicadas y la ingeniería. En estos problemas, λ puede ser el inverso de un coeficiente de difusión $d := \frac{1}{\lambda}$ en frente de $\mathcal{L}$ cuando $\lambda > 0$. Desde el punto de vista de las aplicaciones uno está interesado en analizar cómo varía la dinámica de las soluciones positivas del modelo parabólico (3.1.15) cuando la difusión, o equivalentemente λ, cambia. En dinámica de poblaciones, el Problema (3.1.15) nos proporciona la evolución de una especie que obedece una ley generalizada de crecimiento logístico [40], [42]. Típicamente, u representa la densidad de la población, α_{ij} son los coeficientes de difusividad de la especie u, los coeficientes $\alpha_i' s$ decriben los efectos de transporte, $-\alpha_0(x) + \lambda W(x)$ es la tasa de natalidad o mortandad de la especie, de acuerdo con su signo, $f(x, u)$ describe el efecto límite del aumento de población, y el coeficiente $a(x)$ mide el estrés de la población en Ω_a^+. Así, las soluciones positivas de (3.1.1) son los equilibrios positivos de (3.1.15) y por tanto, el análisis de la existencia, multiplicidad y estabilidad de las soluciones positivas de (3.1.1) es absolutamente necesario para tener un conocimiento completo del comportamiento asintótico de las soluciones positivas del problema de evolución (3.1.15).

En lo que al análisis matemático contenido en este capítulo concierne, se debe destacar que nuestras condiciones de frontera generales y nuestra no linealidad, $f(x, u)$, no se encuentran dentro del marco clásico, ya que estamos tratando con condiciones de frontera mixtas donde b puede ser negativa en alguna subregión de alguna de las componentes de Γ_1 y anularse en otras subregiones de estas componentes, y además, la función $f(x, 0)$ puede ser diferente de cero en

Ω. También se debe observar que no estamos imponiendo ninguna restricción sobre el signo de $f(x,0)$ en Ω. Agunos trabajos previos discutiendo esta clase de problemas son [12],[43],[19],[20] y [38], aunque nuestro marco de trabajo es lo suficientemente general como para incluir los modelos especiales considerados en estas referencias, donde b no cambia de signo y $f(x,0)$ debe ser idénticamente cero. Nuestros resultados están motivados por [32], [19] y [20]. En [19], se supone que Ω es un dominio acotado de $\mathbf{R}^N$, $N \geq 1$, donde $\partial\Omega \in \mathcal{C}^{2+\gamma}$ para algún $\gamma \in (0,1)$ y o bien $\partial\Omega = \Gamma_0$ o $\partial\Omega = \Gamma_1$. Además, $\mathcal{L}$ es un operador del tipo (3.1.2) con α_{ij}, α_i, $\alpha_0 \in \mathcal{C}^\gamma(\bar{\Omega})$, $i,j = 1,\ldots,N$ y el operador de frontera $\mathcal{B}(b)$ es o bien el operador de Dirichlet, es decir, $\mathcal{B}(b)u := \mathcal{D}u = u$ si $\Gamma_1 = \emptyset$, o el operador de Neumann si $\Gamma_0 = \emptyset$ and $b = 0$, es decir, $\mathcal{B}(b)u := \partial_\nu u$, o el operador de Robin si $\Gamma_0 = \emptyset$ y $b \neq 0$, es decir, $\mathcal{B}(b)u := \partial_\nu u + bu$, donde en ambos casos $\nu \in \mathcal{C}^{1+\gamma}(\partial\Omega, \mathbf{R}^N)$ es un campo vectorial exterior y no tangente y $b \in \mathcal{C}^{1+\gamma}(\partial\Omega)$ es no negativa en $\partial\Omega$. También, los potenciales $a, W \in \mathcal{C}^\gamma(\bar{\Omega})$, $a > 0$, y la función $f : \bar{\Omega} \times [0,\infty) \to \mathbf{R}$ es de clase $\mathcal{C}^{\gamma,1+\gamma}$, verificando $f(x,0) \doteq 0$,

$$f(x,u) > 0\,, \qquad \partial_u f(x,u) > 0 \quad \text{para todo} \quad u > 0\,, \quad x \in \Omega$$

y

$$\lim_{\xi \nearrow \infty} f(x,\xi) = \infty\,, \qquad \text{para cada} \qquad x \in \Omega\,.$$

También, si denotamos por Ω_a^0 al subconjunto abierto máximal de Ω donde se anula el coeficnte $a(x)$, es decir,

$$\Omega_a^0 := \{\, x \in \Omega \ : \ a(x) = 0 \,\}\,,$$

entonces Ω_a^0 es un $\mathcal{C}^{2+\gamma}$–subdominio de Ω tal que o bien $\Omega_a^0 \subset \Omega$ si $\mathcal{B}(b)$ es el operador de Dirichlet, o $\bar{\Omega}_a^0 \subset \Omega$ if $\mathcal{B}(b)$ es el operador de frontera de tipo Neumann o Robin. Bajo estas hipótesis, en las Secciones 3 y 4 de [19] fue analizada la existencia de las soluciones positivas de (3.1.1), lo mismo que la estructura de este conjunto de soluciones, en el caso especial en que o bien $\Gamma_1 = \emptyset$, o $\Gamma_0 = \emptyset$ y $b \geq 0$ en Γ_1. En las Secciones 2 y 3 de [20] fue analizada la existencia de soluciones positivas de (3.1.1), al igual que el crecimiento puntual a infinito en Ω_a^0, en el caso especial en el que Ω es un dominio acotado cuya frontera es de clase $\mathcal{C}^{1,1}$, $\mathcal{L} := -\Delta$, $\mathcal{B}(b) := \mathcal{D}$, $W = 1$, $f(x,u) := u^r + g(x,u)$, $r > 0$ donde $g : \bar{\Omega} \times [0,\infty) \to \mathbf{R}$, $g \in \mathcal{C}(\bar{\Omega} \times [0,\infty); \mathbf{R})$ es localmente Lipschitz continua en $\bar{\Omega} \times [0,\infty)$ con respecto a u y verifica las siguientes condiciones de crecimiento

$$\lim_{u \downarrow 0} g(\cdot,u) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{u \nearrow \infty} \frac{g(\cdot,u)}{u^r} = 0 \quad \text{uniformemente en} \quad \bar{\Omega}.$$

Observar, que si tomamos $\Omega_a^+ := \{\, x \in \Omega \ : \ a(x) > 0 \,\}$, entonces $\bar{\Omega}_a^+ \subset \Omega$ posee un número finito de componentes, digamos $\Omega_{a,j}^+$, $, 1 \leq j \leq \ell$, tales que $\bar{\Omega}_{a,i}^+ \cap \bar{\Omega}_{a,j}^+ = \emptyset$ si $i \neq j$, cada $\Omega_{a,j}^+$ es de clase $\mathcal{C}^1$, y $\Omega_a^0 := \Omega \setminus \bar{\Omega}_a^+$ es conexo si $N \geq 2$. El objetivo principal de este capítulo es generalizar a nuestro marco general de trabajo, los resultados de las Secciones 3 y 4 de [19] y algunos de los resultados de las Secciones 2 y 3 de [20]. Sin embargo, debe ser destacado que nuestras extesiones están lejos de ser obvias, ya que estamos trabajando con una clase muy general de potenciales para los que las técnicas desarrolladas en las anteriores referencias no funcionan, además de las nuevas técnicas necesitadas para tratar el caso en el que b cambia de signo. En este capítulo introduciremos una amplia clase de potenciales no negativos en Ω, denotada por $\mathcal{A}(\Omega)$, que nos permitirá extender los resultados de las Secciones 3 y 4 de [19], y alguno de los resultados de las Secciones 2 y 3 de [20], concernientes a la existencia de soluciones positivas y a la estructura del conjunto de soluciones positivas de (3.1.1), al caso en que estamos tratando con condiciones no clásicas, en el sentido de que no estamos imponiendo ninguna restricción de signo ni sobre la función peso en la frontera $b \in \mathcal{C}(\Gamma_1)$, ni sobre $f(x,0) \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$. Observar que el Problema (3.1.1) puede exhibir más de una solución positiva en el rango de valores del parámetro λ para el que existe alguna solución, por la pérdida de la monotonía de la no linealidad.

Las principales herramientas técnicas utilizadas para obtener los resultados de este capítulo son: la caracterización del principio del máximo fuerte en términos de la positividad del autovalor principal y en términos de la existencia de una supersolución positiva estricta, debida a H. Amann y J. López-Gómez [5], donde la caracterización previa de J. López-Gómez & M. Molina-Meyer [36] fue generalizada, los resultados de monotonía de $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L},\mathcal{B}(b)]$ respecto del potencial y del dominio subyacente y los resultados de dependencia continua del autovalor principal respecto a perturbaciones del dominio alrededor de su frontera Dirichlet, probados en el Capítulo 2. La caracterización del principio del máximo fuerte es la clave técnica para obtener muchos de los resultados de comparación usados en este capítulo. También serán utilizados los teoremas principales de [14] and [46].

Ahora resumimos los principales resultados de este capítulo. Para enunciar y discutir nuestras aportaciones, necesitamos el siguiente resultado obtenido en [19, Theorem 3.5, Proposition 4.1].

Teorema 3.1.1 *Bajo las hipótesis de [19] el Probema* (3.1.1) *posee una solución positiva si, y sólamente si,*

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}-\lambda W,\mathcal{B}(b)] < 0 < \sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}-\lambda W,\mathcal{D}]\,.$$

Para probar la condición necesaria en el anterior resultado, se utilizó la monotonía del autovalor principal respecto del dominio subyacente y respecto del potencial. La condición suficiente fue obtenida utilizando el método de sub y supersoluciones (cf. [3]), mediante la construcción de una adecuada subsolución positiva estricta y una adecuada supersolución positiva estricta del problema (3.1.1). La construcción de tal supersolución positiva estricta fue posible, gracias a la dependencia continua respecto del dominio del autovalor principal del problema de Dirichlet (cf. [35]). En este capítulo, adoptando la misma metodología que en [19], pero esta vez usando la monotonía del autovalor principal con respecto al potencial y con respecto al dominio subyacente probadas en la Proposición 2.2.3 y la Proposición 2.2.2, podemos demostrar la siguiente condición necesaria para la existencia de soluciones positivas de (3.1.1) en nuestro marco más general.

Proposición 3.1.2 *Si* (λ,u_λ) *es una solución positiva de* (3.1.1), *entonces*

$$\hat{\Sigma}(\lambda) \le 0 < \Sigma_0(\lambda)\,.$$

Si además existe un subconjunto medible $\mathcal{Q}\subset\Omega$ *con* $|\mathcal{Q}|>0$ *verificando*

$$\wp(x,f)=\{0\}\,,\qquad a(x)>0\,,\qquad x\in\mathcal{Q}\,,$$

donde $\wp(x,f)$ *está definido en* (3.1.11), *entonces*

$$\hat{\Sigma}(\lambda) < 0 < \Sigma_0(\lambda)\,.$$

Similarmente, en este capítulo obtenemos una condición suficiente para la existencia de una solución positiva de (3.1.1), mediante la utilización del método de sub y supersoluciones (cf. [3]). La construcción de la subsolución positiva estricta es folklore y se sigue del esquema de [19]. Un problema técnicamente más complicado es la construcción de la supersolución positiva estricta en nuestro marco general. En lo referente a la existencia y construcción de la supersolución positiva estricta de (3.1.1), probamos el siguiente resultado:

Teorema 3.1.3 *Bajo las condiciones generales de la introducción,* (3.1.1) *posee una supersolución positiva estricta arbitrariamente grande y alejada de cero en* $\bar{\Omega}$, *si* $\lambda \in \mathbf{R}$ *satisface*

$$\Sigma_0(\lambda) > 0\,.$$

En nuestro marco de trabajo, la construcción de la supersolución positiva estricta es técnicamente más complicada que en [19], ya que la estructura del conjunto de anulación del potencial a puede ser más enrevesada que en [19] y además, no estamos imponiendo ninguna restricción sobre el signo de b en Γ_1, pudiendo b anularse en alguna región de alguna de las componentes de Γ_1, siendo negativa en otras regiones de esas componentes. Tal construcción está basada en el Teorema 2.6.1. A saber, la dependencia continua del autovalor principal con respecto a perturbaciones del dominio alrededor de su frontera Dirichlet. El resultado obtenido en este trabajo mejora sustancialmente el obtenido originariamente en [35] para el caso especial en que $\mathcal{B}(b) = \mathcal{D}$ y $\Gamma_1 = \emptyset$. Durante la construcción de la supersolución positiva, debemos aumentar ligeramente el conjunto Ω_a^0 y este es el momento en el que es necesitada la dependencia continua del autovalor principal con respecto a perturbaciones del dominio alrededor de su frontera Dirichlet. Además, para la construcción de la supersolución positiva anteriormente mencionada, también es necesario utilizar el crecimiento a infinito del autovalor principal del problema de Dirichlet cuando la medida de Lebesgue del dominio subyacente tiende a 0 (cf. Teorema 2.9.1 de Capítulo 2). Como una consecuencia inmediata del Teorema 3.1.3, utilizando el método de sub y supersoluciones (cf. [3]), obtenemos la siguiente condición suficiente para la existencia de soluciones positivas de (3.1.1); resultado que combinado con la Proposición 3.1.2 proporciona una versión más general del Teorema 3.5 de [19].

Teorema 3.1.4 *El Problema* (3.1.1) *posee una solución positiva si*

$$\tilde{\Sigma}(\lambda) < 0 < \Sigma_0(\lambda)\,.$$

Si suponemos además que $\partial_u f(x,u) > 0$ para cada each $(x,u) \in \Omega \times (0,\infty)$, entonces se cumple el siguiente resultado.

Teorema 3.1.5 *Supongamos*

$$\partial_u f(x,u) > 0\,, \qquad (x,u) \in \Omega \times (0,\infty)\,.$$

Entonces, las siguientes afirmaciones son verdaderas:

i) El problema (3.1.1) *posee una solución positiva si, y sólamente si,*

$$\tilde{\Sigma}(\lambda) < 0 < \Sigma_0(\lambda). \tag{3.1.16}$$

Además, la solución positiva es única si existe. En lo sucesivo ésta será denotada por u_λ.

ii) Cada solución positiva de (3.1.1) *es no degenerada, es decir, la linealización de* (3.1.1) *en cualquier solución positiva únicamente posee la solución* $u = 0$.

iii) La aplicación

$$\begin{array}{ccc} \Lambda(a,f) & \to & \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \\ \lambda & \to & u_\lambda \end{array} \tag{3.1.17}$$

es continua. Además, si $W > 0$ *(resp.* $W < 0$*) en* Ω, *entonces la aplicación* (3.1.17) *es puntualmente creciente, (resp. decreciente).*

iv) Las soluciones positivas de (3.1.1) *están uniformemente acotadas en* $L_\infty(\Omega)$ *en cualquier subconjunto compacto de* $\Lambda(a,f)$.

v) El conjunto de valores de bifurcación a soluciones positivas de (3.1.1) *desde la rama trivial* $(\lambda, u) = (\lambda, 0)$ *está dado por*

$$\mathcal{O} := \{ \lambda \in \mathbf{R} \ : \ \tilde{\Sigma}(\lambda) = 0 \}.$$

vi) Supongamos además (3.1.16) *y sea* λ_0 *tal que*

$$\Sigma_0(\lambda_0) = 0.$$

Entonces,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \|u_\lambda\|_{L_\infty(\Omega)} = \infty.$$

En particular, λ_0 *es un valor de bifurcación desde infinito a soluciones positivas de* (3.1.1).

Debemos resaltar que no estamos imponiendo ninguna restricción sobre el signo de $f(x,0)$ y que por tanto nuestro resultado proporciona una mejora sustancial de los resultados previos existentes en la literatura (e.g. [19, Sección 4], [20, Teorema 2.4, Teorema 2.5]).

En este capítulo, también realizamos un análisis pormenorizado de la acotación y estructura del conjunto de soluciones positivas de (3.1.1) en nuestro marco general, de acuerdo con el signo del potencial W en el conjunto de anulación Ω_a^0 del potencial a; caracterizando además, el conjunto de valores del parámetro λ donde las soluciones positivas de (3.1.1) bifurcan desde la rama trivial y desde infinito. Entre otros resultados, obtenemos los siguientes:

Teorema 3.1.6 *Las soluciones positivas de* (3.1.1) *están uniformemente acotadas en* $L_\infty(\Omega)$ *en cada subconjunto compacto de* $\hat{\Lambda}(a,f)$. *En particular, para cada subconjunto compacto* D *de* $\hat{\Lambda}(a,f)$ *con* $D \cap \Lambda(a,f) \neq \emptyset$ *y cada* $p > 1$, *existe una constante* $C(D,p)$ *tal que*

$$\|u_\lambda^i\|_{W_p^2(\Omega)} \leq C(D,p) \qquad \textit{para todo} \qquad (\lambda, i) \in (D \cap \Lambda(a,f)) \times \mathcal{J}(\lambda).$$

Teorema 3.1.7 *Sean λ_0 tal que $\Sigma_0(\lambda_0)=0$ y $\{u_\lambda^i\}$ cualquier familia de soluciones positivas de (3.1.1) con $(\lambda,i)\in\Lambda(a,f)\times\mathcal{J}(\lambda)$. Entonces,*

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\|u_\lambda^i\|_{L_\infty(\Omega)}=\infty\,,\qquad i\in\mathcal{J}(\lambda)\,.$$

En particular, λ_0 es una valor de bifurcación desde infinito a soluciones positivas de (3.1.1).

Teorema 3.1.8 *Sea*

$$\mathcal{O}:=\{\,\lambda\in\mathbf{R}\;:\;\tilde{\Sigma}(\lambda)=0\,\}\,,$$

y supongamos que W satisface o bien a) o b) o c) del Teorema 2.11.3. Entonces, las siguientes afirmaciones son ciertas:

i) Si $\tilde{\lambda}_0$ es un valor de bifurcación a soluciones positivas de (3.1.1) *desde la rama trivial $(\lambda,u)=(\lambda,0)$, entonces $\tilde{\lambda}_0\in\mathcal{O}$.*

ii) Si $\tilde{\lambda}_0\in\mathcal{O}$ y

$$\tilde{\Sigma}'(\tilde{\lambda}_0)\neq 0\,,\tag{3.1.18}$$

entonces $\tilde{\lambda}_0$ es un valor de bifurcación a soluciones positivas de (3.1.1) *desde la rama trivial. Además, si denotamos por $(\tilde{\Sigma}(\tilde{\lambda}_0),\tilde{\varphi}_0)$ al auto-par principal de $(\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\lambda}_0),\mathcal{B}(b),\Omega)$ y por $\mathcal{Y}$ a cualquier complemento de span$[\tilde{\varphi}_0]$ en $\mathcal{U}$, entonces existe $\varepsilon>0$ y una aplicación diferenciable*

$$(\tilde{\lambda}(s),y(s))\;:\;(-\varepsilon,\varepsilon)\;\to\;\mathbf{R}\times\mathcal{Y}\tag{3.1.19}$$

tal que $((\tilde{\lambda}(0),y(0))=(\tilde{\lambda}_0,0)$ y la curva $(\tilde{\lambda}(s),u(s))$ definida por

$$\tilde{\lambda}(s)=\tilde{\lambda}_0+\mathcal{D}(\tilde{\lambda}_0)s+o(s)\,,\qquad u(s)=s(\tilde{\varphi}_0+y(s))\,,\qquad s\in(-\varepsilon,\varepsilon)\,,$$

con $\mathcal{D}(\tilde{\lambda}_0):=\tilde{\lambda}'(0)$, es una curva de soluciones de (3.1.1) *para $s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$. Además, existe un entorno $\mathcal{Z}$ de $(\tilde{\lambda}_0,0)$ en $\mathbf{R}\times\mathcal{U}$ tal que $(\lambda,u)\in\mathcal{Z}$ es una solución positiva de* (3.1.1) *si, y sólamente si, $(\lambda,u)=(\tilde{\lambda}(s),u(s))$ para algún $s\in(0,\delta)$ con $\delta\leq\varepsilon$.*

Además, (3.1.18) *se cumple si, y sólamente si,*

$$\int_\Omega W\tilde{\varphi}_0\tilde{\varphi}_0^*\neq 0\,,$$

donde $\tilde{\varphi}_0^*>0$ representa la autofunción principal del operador adjunto $\tilde{\mathcal{L}}^*(\tilde{\lambda}_0)$ de $\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\lambda}_0)$, y

$$\mathcal{D}(\tilde{\lambda}_0)=\frac{\int_{\Omega_a^+}a(x)\partial_u f(x,0)\tilde{\varphi}_0^2\tilde{\varphi}_0^*}{\int_\Omega W\tilde{\varphi}_0\tilde{\varphi}_0^*}.$$

iii) Sea $\tilde{\lambda}_0\in\mathcal{O}$ tal que $\tilde{\Sigma}'(\tilde{\lambda}_0)=0$ y supongamos que (3.1.1) *no posee ninguna solución positiva en $\lambda=\tilde{\lambda}_0$. Entonces, $\tilde{\lambda}_0$ es un valor de bifurcación a soluciones positivas de* (3.1.1) *desde la rama trivial $(\lambda,u)=(\lambda,0)$.*

iv) Supongamos además que

$$\partial_u f(x,u)>0\qquad\text{para cada}\qquad (x,u)\in\Omega\times(0,\infty)\,.$$

Entonces, $\tilde{\lambda}_0\in\mathbf{R}$ es un valor de bifurcación a soluciones positivas de (3.1.1) *desde la rama trivial $(\lambda,u)=(\lambda,0)$ si, y sólamente si, $\tilde{\lambda}_0\in\mathcal{O}$.*

Observar que bajo nuestras hipótesis generales, las demostraciones de los Teoremas 3.1.6, 3.1.7 y 3.1.8 son técnicamente más complicadas que las demostraciones de los resultados ya existentes en su línea, debido a la posible no unicidad de solución positiva como consecuencia de la pérdida de la monotonía de la no linealidad $f(x,u)$.

Otro problema que analizaremos en este capítulo es el crecimiento puntual a infinito de las soluciones positivas de (3.1.1) en Ω_a^0 y $\partial\Omega_a^0 \cap \Gamma_1$, en el caso especial en el que o bien $W > 0$, o $W < 0$ en Ω, y λ se aproxima al valor de bifurcación desde infinito a soluciones positivas de (3.1.1). En esta dirección el resultado principal establece lo siguiente:

Teorema 3.1.9 *Sea* $\{u_\lambda^i\}$ *cualquier familia de soluciones positivas de* (3.1.1), $(\lambda, i) \in \Lambda(a,f) \times \mathcal{J}(\lambda)$ *y* $\Gamma_1^k, 1 \le k \le n_1$ *las componentes de* Γ_1. *Supongamos que* $W > 0$ *en* Ω *y que existe un subconjunto abierto* $D_+ \subset \Omega_a^0$ *para el que*

$$\inf_{D_+} W > 0\,.$$

Supongamos además que

$$\lim_{\lambda \searrow -\infty} \Sigma_0(\lambda) > 0\,.$$

Denotemos por λ_0 *a la única raíz real de* $\Sigma_0(\lambda)$. *Entonces,*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} u_\lambda^i(x) = \infty\,, \qquad x \in \Omega_a^0 \cup \bigcup_{j=1}^{p} \Gamma_1^{k_j}\,, \quad i \in \mathcal{J}(\lambda)\,, \tag{3.1.20}$$

donde $\{k_1, k_2, \ldots, k_p\}$ *representa el subconjunto de* $\{1, \ldots n_1\}$ *para el cual* $\Gamma_1^k \cap \partial\Omega_a^0 \neq \emptyset$ *si, y sólamente si,* $k \in \{k_1, k_2, \ldots, k_p\}$.

Además, (3.1.20) *se cumple uniformemente en cada subconjunto compacto de* $\Omega_a^0 \cup \bigcup_{j=1}^p \Gamma_1^{k_j}$. *En particular, existen* $\lambda_1 \in \Lambda(a,f)$ *próximo a* λ_0 *y para cada subconjunto compacto* K *de* $\Omega_a^0 \cup \bigcup_{j=1}^p \Gamma_1^{k_j}$ *una constante* $\gamma(K) > 0$, *tal que la siguiente estimación se verifica en* K

$$u_\lambda^i > log(\frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_0 - \lambda})^{\gamma(K)}, \qquad i \in \mathcal{J}(\lambda)$$

para cada λ *comprendido entre* λ_1 *y* λ_0.

El mismo resultado se cumple si $W < 0$ *en* Ω *y además suponemos que existe un subconjunto abierto* $D_- \subset \Omega_a^0$ *para el cual*

$$\sup_{D_-} W < 0$$

y

$$\lim_{\lambda \nearrow \infty} \Sigma_0(\lambda) > 0\,.$$

Este resultado extiende algunos resultados previos obtenidos en [37], [20], [38] para el caso especial en que $\mathcal{B}(b) = \mathcal{D}$.

Ahora brevemente describiremos las distribución de este capítulo. La Sección 3.2 contiene las demostraciones de la Proposición 3.1.2 y de los Teoremas 3.1.3 y 3.1.4. La Sección 3.3 contiene las demostraciones de los Teoremas 3.1.5, 3.1.6, 3.1.7, y 3.1.8 y un pormenorizado análisis de la acotación y estructura de $\Lambda(a,f)$, averiguando el diagrama glóbal de bifurcación de las soluciones positivas de (3.1.1), de acuerdo al signo del potencial W en Ω_a^0 y Ω_a^+. Además en esta sección caracterizaremos $\Lambda(a,f)$. La Sección 3.4 contiene la demostración del Teorema 3.1.9.

3.2 Existencia de soluciones positivas

En esta sección analizamos la existencia de soluciones positivas de (3.1.1). En un principio obtenemos una condición necesaria para la existencia de una solución positiva. Después, utilizamos el método de sub y supersoluciones para obtener una condición suficiente para la existencia de tal solución positiva. La construcción de la supersolución está basada en el Teorema 2.6.1 y Teorema 2.9.1.

Definición 3.2.1 *Se dice que una función* $u : \bar{\Omega} \to [0,\infty)$ *es una solución positiva de* (3.1.1), *si* $u \in W_p^2(\Omega)$ *con* $p > N$ *y* $u > 0$.

Lema 3.2.2 *Supongamos que* (λ_0, u_0) *es una solución positiva de* (3.1.1). *Entonces,* u_0 *es fuertemente positiva en* Ω *y* $u_0 \in W^2_{\mathcal{B}(b)}(\Omega)$. *Además,*

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L} - \lambda_0 W + a(\cdot)f(\cdot,u_0(\cdot)), \mathcal{B}(b)] = 0.$$

En particular, para cada $\gamma \in (0,1)$ *tenemos que* $u_0 \in \mathcal{C}^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$, *y* u_0 *es dos veces continuamente diferenciable c.t.p. en* Ω.

Proof: Sea $(\lambda, u) = (\lambda_0, u_0)$ una solución positiva de (3.1.1). Por definición, existe $p > N$ tal que $u_0 \in W_p^2(\Omega)$. Por eso, gracias al Teorema de Morrey, $u_0 \in L_\infty(\Omega)$. De este modo,

$$a(\cdot)f(\cdot,u_0(\cdot)) \in L_\infty(\Omega)$$

y u_0 satisface

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 u_0 = 0 & \text{en } \Omega \\ \mathcal{B}(b)u_0 = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde

$$\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}(\lambda_0) + a(\cdot)f(\cdot,u_0(\cdot)).$$

En otras palabras, u_0 es una autofunción positiva de $\mathcal{L}_0$ asociada con el autovalor 0. Así, por la unicidad del auto-par principal, $(0,u_0)$ es el auto-par principal de $\mathcal{L}_0$ en Ω y por tanto,

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}_0, \mathcal{B}(b)] = 0, \qquad u_0 \in W^2_{\mathcal{B}(b)}(\Omega),$$

y u_0 es fuertemente positiva en Ω (cf. [4, Teorema 12.1]). Las restantes afirmaciones se siguen fácilmente de la inclusión $W_p^2(\Omega) \subset \mathcal{C}^{2-\frac{N}{p}}(\overline{\Omega})$ para cada $p > N$, y Teorema VIII.1 de [49]. $\square$

Ahora, definamos

$$\mathcal{U} := W^2_{\mathcal{B}(b)}(\Omega)\,, \qquad \mathcal{V} := L_2(\Omega)\,,$$

y denotemos por $\mathcal{U}^+$ al cono de funciones no negativas de $\mathcal{U}$ y por $\mathcal{F}(\lambda, u) := \mathbf{R} \times \mathcal{U}^+ \longrightarrow \mathcal{V}$ al operador definido por

$$\mathcal{F}(\lambda, u) := \mathcal{L}(\lambda)u + a(\cdot)f(\cdot, u)u\,, \qquad (\lambda, u) \in \mathbf{R} \times \mathcal{U}^+\,; \tag{3.2.1}$$

cuyos ceros son los pares de soluciones no negativas (λ, u) de (3.1.1). Debe ser destacado que gracias al Lema 3.2.2, (3.1.1) admite dos tipos de soluciones no negativas. A saber, $u = 0$ y las soluciones positivas de (3.1.1), las cuales son fuertemente positivas en Ω.

El siguiente resultado nos proporciona una condición necesaria para la existencia de soluciones positivas.

Proposición 3.2.3 *Si* (λ, u_λ) *es una solución positiva de* (3.1.1), *entonces*

$$\hat{\Sigma}(\lambda) \leq 0 < \Sigma_0(\lambda). \tag{3.2.2}$$

Si además existe un subconjunto medible $\mathcal{Q} \subset \Omega$ *con* $|\mathcal{Q}| > 0$ *verificando*

$$\wp(x, f) = \{0\}\,, \qquad a(x) > 0\,, \qquad x \in \mathcal{Q} \tag{3.2.3}$$

donde $\wp(x, f)$ *está definida en* (3.1.11), *entonces*

$$\hat{\Sigma}(\lambda) < 0 < \Sigma_0(\lambda). \tag{3.2.4}$$

Demostración: En efecto, si (λ, u_λ) es una solución positiva de (3.1.1), entonces $u_\lambda \in L_\infty(\Omega)$, $f(\cdot, u_\lambda(\cdot)) \in L_\infty(\Omega)$ y $(0, u_\lambda)$ es el auto-par principal asociado con

$$(\mathcal{L}(\lambda) + a(\cdot)f(\cdot, u_\lambda(\cdot)), \mathcal{B}(b), \Omega).$$

Además, ya que u_λ es fuertemente positiva en Ω, para cada $x \in \Omega$ tenemos que

$$I_f(x) \leq f(x, u_\lambda(x)).$$

Así, teniendo en cuenta que $a > 0$ y gracias a la Proposición 2.2.3, obtenemos que

$$0 = \sigma_1^\Omega[\mathcal{L}(\lambda) + a(x)f(x, u_\lambda), \mathcal{B}(b)] \geq \sigma_1^\Omega[\hat{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}(b)] = \hat{\Sigma}(\lambda).$$

Además, ya que $\Omega_a^0 \subset \Omega$, la Proposición 2.2.2 implica que

$$0 = \sigma_1^\Omega[\mathcal{L}(\lambda) + a(x)f(x, u_\lambda), \mathcal{B}(b)] < \sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(b, \Omega_a^0)] = \Sigma_0(\lambda).$$

Esto completa la demostración de (3.2.2).

Ahora probamos (3.2.4) bajo la condición (3.2.3). Supongamos que existe un subconjunto medible $\mathcal{Q} \subset \Omega$ con $|\mathcal{Q}| > 0$ satisfaciendo (3.2.3). Entonces, para cada $x \in \mathcal{Q}$ y $\xi > 0$ se verifica

$$f(x,\xi) > f(x,0). \tag{3.2.5}$$

De este modo, si (λ, u_λ) es una solución positiva de (3.1.1), entonces debido al hecho de que u_λ es fuertemente positiva en Ω, se sigue de (3.2.3) y (3.2.5) que

$$f(x,0) = I_f(x) < f(x,u_\lambda(x)) \quad \text{para cada} \quad x \in \mathcal{Q}. \tag{3.2.6}$$

Además, ya que $a(x) > 0$ para cada $x \in \mathcal{Q}$, se sigue de (3.2.6) que para cada $x \in \mathcal{Q}$,

$$a(x)I_f(x) < a(x)f(x,u_\lambda(x)). \tag{3.2.7}$$

Así, gracias a la Proposición 2.2.3 y (3.2.7), obtenemos que

$$0 = \sigma_1^\Omega[\mathcal{L}(\lambda) + a(x)f(x,u_\lambda), \mathcal{B}(b)] > \sigma_1^\Omega[\hat{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}(b)] = \hat{\Sigma}(\lambda).$$

Esto completa la prueba de (3.2.4) y concluye la demostración de la proposición. □

El siguiente resultado nos proporciona una condición suficiente para la existencia de soluciones positivas.

Teorema 3.2.4 *Bajo las hipótesis generales de la introducción,* (3.1.1) *posee una solución positiva si*

$$\tilde{\Sigma}(\lambda) < 0 < \Sigma_0(\lambda). \tag{3.2.8}$$

Para demostrar este teorema necesitamos los dos próximos resultados.

Proposición 3.2.5 *Bajo las hipótesis generales de la introducción, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ verificando*

$$\tilde{\Sigma}(\lambda) < 0\,, \tag{3.2.9}$$

el problema (3.1.1) *posee una subsolución positiva estricta arbitrariamente pequeña.*

Proof: En efecto, tomemos λ verificando (3.2.9). Denotemos por $(\tilde{\Sigma}(\lambda), \tilde{\varphi}_\lambda)$ al auto-par principal asociado con $(\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}(b), \Omega)$, y definamos

$$\underline{u}_\lambda := \varepsilon\tilde{\varphi}_\lambda$$

donde $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño. Entonces

$$(\mathcal{L}(\lambda) + a(x)f(x,\underline{u}_\lambda))\underline{u}_\lambda = \varepsilon\tilde{\varphi}_\lambda(\tilde{\Sigma}(\lambda) + a(x)(f(x,\varepsilon\tilde{\varphi}_\lambda) - f(x,0))).$$

Además, debido a (3.1.9) tenemos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(f(x,\varepsilon\tilde{\varphi}_\lambda) - f(x,0)) = 0$$

y por eso, eligiendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño y teniendo en cuenta (3.2.9), obtenemos que

$$(\mathcal{L}(\lambda) + a(x)f(x, \underline{u}_\lambda))\underline{u}_\lambda \lneq 0.$$

Por otra parte,

$$\mathcal{B}(b)\underline{u}_\lambda = \varepsilon\mathcal{B}(b)\tilde{\varphi}_\lambda = 0,$$

y por tanto, $\underline{u}_\lambda$ nos proporciona la subsolución positiva estricta requerida. Esto concluye la demostración. □

Teorema 3.2.6 *Bajo las hipótesis generales de la introducción,* (3.1.1) *posee una supersolución positiva estricta arbitrariamente grande y alejada de cero en* $\bar{\Omega}$, *supuesto que* $\lambda \in \mathbb{R}$ *satisface*

$$\Sigma_0(\lambda) > 0. \tag{3.2.10}$$

Demostración: En efecto, tomemos λ satisfaciendo (3.2.10) y definamos por

$$\mathcal{L}_1 := \mathcal{L}(\lambda), \qquad \Sigma_0 := \Sigma_0(\lambda) = \sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}_1, \mathcal{B}(b, \Omega_a^0)] > 0.$$

Para construir la supersolución positiva estricta de (3.1.1) para este valor de λ, necesitamos distinguir entre varias situaciones diferentes de acuerdo a la estructura del conjunto abierto máximal de anulación Ω_a^0 del potencial a que se encuentra en frente de la no linealidad. En un principio consideraremos el caso más simple cuando Ω_a^0 es conexo y $K = \emptyset$. Después, consideraremos el caso general.

Paso 1: Supongamos

$$m = 1, \qquad K = \emptyset.$$

Necesariamente, o bien $\Gamma_0 \cap \partial\Omega_a^0 = \emptyset$ o $\Gamma_0 \cap \partial\Omega_a^0 \neq \emptyset$. Supongamos

$$\Gamma_0 \cap \partial\Omega_a^0 = \emptyset. \tag{3.2.11}$$

Para cada $k \in \{0, 1\}$, denotemos por Γ_k^j, $1 \le j \le n_k$, a las componentes de Γ_k. Denotemos por $\{i_1, ..., i_p\}$ al subconjunto de $\{1, ..., n_1\}$ para el cual $\Gamma_1^j \cap \partial\Omega_a^0 = \emptyset$ si, y sólamente si, $j \in \{i_1, ..., i_p\}$. Observar que, ya que $a \in \mathcal{A}(\Omega)$, gracias a ($\mathcal{A}1$), Γ_1^j es una componente de $\partial\Omega_a^0$ para cada $j \in \{1, ..., n_1\} \setminus \{i_1, ..., i_p\}$.

Para cada $\delta > 0$ suficientemente pequeño consideremos los entornos tubulares de radio $\delta > 0$

$$\Omega_\delta := (\Omega_a^0 + B_\delta) \cap \Omega,$$

$$\tilde{\mathcal{N}}_\delta^{0,j} := (\Gamma_0^j + B_\delta), \qquad \mathcal{N}_\delta^{0,j} := \tilde{\mathcal{N}}_\delta^{0,j} \cap \Omega, \qquad 1 \le j \le n_0, \tag{3.2.12}$$

$$\mathcal{N}_\delta^{1,j} := (\Gamma_1^j + B_\delta) \cap \Omega, \qquad j \in \{i_1, ..., i_p\}, \tag{3.2.13}$$

donde $B_\delta \subset \mathbf{R}^N$ es la bola de radio δ centrada en el origen. Observar que Ω_a^0 debe poseer a lo más un número finito de agujeros, ya que es de clase $\mathcal{C}^2$. Gracias a (3.2.11), existe $\delta_0 > 0$ tal que para cada $0 < \delta < \delta_0$

$$\partial\Omega_\delta \setminus (\Gamma_1 \cap \partial\Omega_a^0) \subset \Omega_a^+ , \quad \bar{\Omega}_\delta \cap \bigcup_{j=1}^{n_0} \bar{\mathcal{N}}_\delta^{0,j} = \emptyset , \quad \bigcup_{j=1}^{n_0} \bar{\mathcal{N}}_\delta^{0,j} \setminus \Gamma_0 \subset \Omega_a^+ .$$

Además, ya que $\Gamma_k^j \cap \Gamma_\ell^i = \emptyset$ si $(i,l) \neq (j,k)$, existe $\delta_1 \in (0, \delta_0)$ tal que para cada $0 < \delta < \delta_1$

$$\bar{\mathcal{N}}_\delta^{k,j} \cap \bar{\mathcal{N}}_\delta^{\ell,i} = \emptyset \qquad \text{si} \quad (i,\ell) \neq (j,k) , \quad k , \ell \in \{0,1\} .$$

También, ya que

$$\partial\Omega_a^0 \cap \bigcup_{j=1}^{p} \Gamma_1^{i_j} = \emptyset ,$$

existe $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ tal que para cada $0 < \delta < \delta_2$

$$\bar{\Omega}_\delta \cap \bigcup_{j=1}^{p} \bar{\mathcal{N}}_\delta^{1,i_j} = \emptyset .$$

Por construcción, tenemos que Ω_a^0 es un subdominio propio de Ω_δ y que $\lim_{\delta\searrow 0} \Omega_\delta = \Omega_a^0$ en el sentido de la Definición 2.5.1-a). Así, se sigue de la Proposición 2.2.2 y del Teorema 2.6.1 que

$$\sigma_1^{\Omega_\delta}[\mathcal{L}_1, \mathcal{B}(b, \Omega_\delta)] < \Sigma_0 , \quad 0 < \delta < \delta_2$$

y

$$\lim_{\delta\searrow 0} \sigma_1^{\Omega_\delta}[\mathcal{L}_1, \mathcal{B}(b, \Omega_\delta)] = \Sigma_0 > 0,$$

ya que se cumple la condición (3.1.8) en cada una de las componentes de $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_a^0$. Por tanto, existe $\delta_3 \in (0, \delta_2)$ tal que

$$\sigma_1^{\Omega_\delta}[\mathcal{L}_1, \mathcal{B}(b, \Omega_\delta)] > \frac{\Sigma_0}{2} > 0 \qquad \text{si} \quad 0 < \delta < \delta_3 . \tag{3.2.14}$$

Por otra parte, para cada $0 < \delta < \delta_3$ consideremos el nuevo dominio soporte

$$\mathcal{H}_\delta := \Omega \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \bar{\mathcal{N}}_\delta^{0,j} \tag{3.2.15}$$

y sean $\breve{\alpha}_{ij} = \breve{\alpha}_{ji} \in \mathcal{C}^1(\bar{\mathcal{H}}_\delta)$, $\breve{\alpha}_i \in \mathcal{C}(\bar{\mathcal{H}}_\delta)$, $\breve{\alpha}_0$, $\breve{W} \in L_\infty(\mathcal{H}_\delta)$ extensiones regulares desde $\bar{\Omega}$ hasta $\mathcal{H}_\delta$ de los coeficientes $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, α_i, α_0, W, $1 \leq i,j \leq N$, respectivamente, del operador $\mathcal{L}_1$. Ahora, consideremos el nuevo operador diferencial

$$\breve{\mathcal{L}}_1 := -\sum_{i,j=1}^{N} \breve{\alpha}_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \breve{\alpha}_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \breve{\alpha}_0(x) - \lambda \breve{W}(x) \quad \text{in} \quad \mathcal{H}_\delta. \tag{3.2.16}$$

Ya que $\mathcal{L}_1$ es fuertemente uniformemente elíptico en Ω con constante de elipticidad $\mu > 0$, se sigue fácilmente que existe $\delta_4 \in (0, \delta_3)$ tal que para cada $0 < \delta < \delta_4$ el operador $\breve{\mathcal{L}}_1$ es fuertemente uniformemente elíptico en $\mathcal{H}_\delta$ con constante de elipticidad mayor que $\frac{\mu}{2}$. Entonces, ya que $\lim_{\delta \searrow 0} |\bar{\mathcal{N}}_\delta^{0,j}| = 0$ para cada $1 \le j \le n_0$, se sigue del Teorema 2.9.1 que existe $\delta_5 \in (0, \delta_4)$ tal que para cada $0 < \delta < \delta_5$

$$\sigma_1^{\bar{\mathcal{N}}_\delta^{0,j}}[\breve{\mathcal{L}}_1, \mathcal{D}] > 0\,, \qquad 1 \le j \le n_0\,. \tag{3.2.17}$$

Fijemos $\delta \in (0, \delta_5)$, y denotemos por φ_δ, ψ_δ^i, $i \in \{i_1, .., i_p\}$, ξ_δ^j, $j \in \{1, \dots, n_0\}$ a las autofunciones principales asociadas con los autovalores principales $\sigma_1^{\Omega_\delta}[\mathcal{L}_1, \mathcal{B}(b, \Omega_\delta)]$, $\sigma_1^{\mathcal{N}_\delta^{1,i}}[\mathcal{L}_1, \mathcal{B}(b, \mathcal{N}_\delta^{1,i})]$, $i \in \{i_1, \dots, i_p\}$ y $\sigma_1^{\bar{\mathcal{N}}_\delta^{0,j}}[\breve{\mathcal{L}}_1, \mathcal{D}]$, $j \in \{1, \dots, n_0\}$ respectivamente. Entonces, definamos la función positiva

$$\overline{u} := k\Phi$$

donde $k > 0$ es una constante suficientemente grande que será determinada más adelante y $\Phi : \bar{\Omega} \to [0, \infty)$ está definida por

$$\Phi := \begin{cases} \varphi_\delta & \text{en } \bar{\Omega}_{\frac{\delta}{2}}\,, \\ \psi_\delta^{i_j} & \text{en } \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j}\,, \quad 1 \le j \le p\,, \\ \xi_\delta^j & \text{en } \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j}\,, \quad 1 \le j \le n_0\,, \\ \zeta_\delta & \text{en } \bar{\Omega} \setminus (\bar{\Omega}_{\frac{\delta}{2}} \cup \bigcup_{j=1}^p \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j})\,, \end{cases}$$

donde ζ_δ es cualquier extensión positiva y regular de

$$\varphi_\delta \cup \bigcup_{j=1}^p \psi_\delta^{i_j} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \xi_\delta^j\,,$$

desde

$$\bar{\Omega}_{\frac{\delta}{2}} \cup \bigcup_{j=1}^p \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j}$$

hasta $\bar{\Omega}$, la cual está alejada de cero en

$$\bar{\Omega} \setminus (\bar{\Omega}_{\frac{\delta}{2}} \cup \bigcup_{j=1}^p \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j})\,.$$

Observar que ζ_δ existe, ya que las funciones

$$\varphi_\delta|_{\partial\Omega_{\frac{\delta}{2}} \cap \Omega}\,, \quad \psi_\delta^{i_j}|_{\partial\mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j} \setminus \Gamma_1^{i_j}}\,, \; 1 \le j \le p, \quad \xi_\delta^j|_{\partial\mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j}}\,, \; 1 \le j \le n_0$$

están alejadas de cero. Además, debe ser destacado que por construcción $\Phi(x)$ es positiva y alejada de cero en $\bar{\Omega}$.

Si $\Gamma_1 \subset \partial\Omega_a^0$, entonces en la definición de $\Phi(x)$ debemos borrar las $\psi_\delta^{i_j}$'s. Para completar la demostración del Paso 1 en el caso (3.2.11) falta probar que existe $\kappa > 0$ suficientemente grande tal que $\overline{u} := k\Phi$ nos proporciona una supersolución positiva estricta de (3.1.1) para cada $k \geq \kappa$. En efecto, fijamos

$$\mathcal{X}_1 := \mathcal{X}(1) > 0\,,$$

donde $\mathcal{X}(1)$ está definida en (3.1.10). Ya que φ_δ está separada de cero en $\bar{\Omega}_{\frac{\delta}{2}}$, existe $\kappa_1 > 0$ tal que para cada $k \geq \kappa_1 > 0$ se verifica lo siguiente en $\bar{\Omega}_{\frac{\delta}{2}}$,

$$k\varphi_\delta \geq \kappa_1\varphi_\delta > \mathcal{X}_1 > 0\,,$$

y por eso, para cada $k \geq \kappa_1 > 0$

$$f(x, k\varphi_\delta) > 1\,, \qquad x \in \bar{\Omega}_{\frac{\delta}{2}}\,. \tag{3.2.18}$$

Entonces, ya que $a \geq 0$, se sigue de (3.2.14) y (3.2.18) que en $\Omega_{\frac{\delta}{2}}$ se verifica la siguiente estimación para cada $k \geq \kappa_1 > 0$

$$(\mathcal{L}_1 + a(x)f(x,\overline{u}))\overline{u} = k\varphi_\delta(\sigma_1^{\Omega_\delta}[\mathcal{L}_1, \mathcal{B}(b,\Omega_\delta)] + a(x)f(x,k\varphi_\delta)) >$$

$$> k\varphi_\delta(\frac{\Sigma_0}{2} + a(x)) \geq k\varphi_\delta\frac{\Sigma_0}{2} > 0.$$

Similarmente, ya que ξ_δ^j, $1 \leq j \leq n_0$, está alejada de cero en $\bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j}$, existe $\kappa_2 \geq \kappa_1 > 0$ tal que para cada $k \geq \kappa_2 > 0$ se desprende lo siguiente en $\bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j}$

$$k\xi_\delta^j \geq \kappa_2\xi_\delta^j > \mathcal{X}_1\,, \qquad 1 \leq j \leq n_0\,,$$

y por eso, para cada $k \geq \kappa_2 > 0$ y $1 \leq j \leq n_0$

$$f(x, k\xi_\delta^j) > 1\,, \qquad x \in \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j}\,. \tag{3.2.19}$$

Además, por construcción

$$\check{\mathcal{L}}_1|_{\mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j}} = \mathcal{L}_1\,.$$

De este modo, se sigue de (3.2.17) y (3.2.19) que para cada $1 \leq j \leq n_0$ y $k \geq \kappa_2 > 0$, en $\mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j}$ se verifica la siguiente estimación

$$(\mathcal{L}_1 + a(x)f(x,\overline{u}))\overline{u} = k\xi_\delta^j(\sigma_1^{\bar{\mathcal{N}}_\delta^{0,j}}[\check{\mathcal{L}}_1, \mathcal{D}] + a(x)f(x,k\xi_\delta^j)) >$$

$$> k\xi_\delta^j(\sigma_1^{\bar{\mathcal{N}}_\delta^{0,j}}[\check{\mathcal{L}}_1, \mathcal{D}] + a(x)) \geq k\xi_\delta^j\sigma_1^{\bar{\mathcal{N}}_\delta^{0,j}}[\check{\mathcal{L}}_1, \mathcal{D}] > 0\,,$$

ya que $a \geq 0$.

Ahora, notemos que ya que $a \in \mathcal{A}(\Omega)$, gracias a $(\mathcal{A}2)$ y debido al hecho de que

$$\bar{\Omega} \setminus (\Omega_{\frac{\delta}{2}} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j}) \subset \Omega_a^+ \cup \dot{\bigcup_{j=1}^{p}} \Gamma_1^{i_j},$$

existe una constante $\omega > 0$ tal que

$$a \geq \omega > 0 \qquad \text{en} \quad \bar{\Omega} \setminus (\bar{\Omega}_{\frac{\delta}{2}} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j}). \tag{3.2.20}$$

Ahora denotamos por

$$M_\delta := \max\{ \, |\sigma_1^{\mathcal{N}_\delta^{1,i_j}}[\mathcal{L}_1, \mathcal{B}(b, \mathcal{N}_\delta^{1,i_j})]| \; : \; j = 1, \dots, p \, \} \tag{3.2.21}$$

y fijamos

$$\mathcal{X}_2 := \mathcal{X}(1 + \frac{M_\delta}{\omega}) > 0.$$

Ya que $\psi_\delta^{i_j}$ es fuertemente positiva en $\mathcal{N}_\delta^{1,i_j}$, está alejada de cero en $\bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j}$, y por eso existe $\kappa_3 \geq \kappa_2 > 0$ tal que para cada $k \geq \kappa_3 > 0$ se verifica la siguiente estimación en $\mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j}$

$$k\psi_\delta^{i_j} \geq \kappa_3 \psi_\delta^{i_j} > \mathcal{X}_2 > 0, \qquad 1 \leq j \leq p$$

y así, para cada $k \geq \kappa_3 > 0$

$$f(x, k\psi_\delta^{i_j}) > 1 + \frac{M_\delta}{\omega} > 0, \qquad x \in \mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j}. \tag{3.2.22}$$

De este modo, gracias a (3.2.20) y (3.2.22) tenemos que para cada $k \geq \kappa_3 > 0$ y $1 \leq j \leq p$, se verifica la siguiente estimación en $\mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j}$,

$$(\mathcal{L}_1 + a(x) f(x, \overline{u}))\overline{u} = k\psi_\delta^{i_j} (\sigma_1^{\mathcal{N}_\delta^{1,i_j}}[\mathcal{L}_1, \mathcal{B}(b, \mathcal{N}_\delta^{1,i_j})] + a(x) f(x, k\psi_\delta^{i_j})) >$$

$$> K\psi_\delta^{i_j} (\sigma_1^{\mathcal{N}_\delta^{i_j}}[\mathcal{L}_1, \mathcal{B}(b, \mathcal{N}_\delta^{1,i_j})] + \omega + M_\delta) \geq k\psi_\delta^{i_j}\omega > 0.$$

Por otra parte, por construcción existe $\omega_1 > 0$ tal que

$$\zeta_\delta \geq \omega_1 > 0 \qquad \text{en} \qquad \bar{\Omega} \setminus (\bar{\Omega}_{\frac{\delta}{2}} \cup \bigcup_{j=1}^{p} \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j}). \tag{3.2.23}$$

Fijemos

$$\mathcal{X}_3 := \mathcal{X}(1 + \frac{\|\mathcal{L}_1 \zeta_\delta\|_{L_\infty(\Omega)}}{\omega\omega_1}) > 0,$$

donde ω es la constante positiva definida por (3.2.20). Entonces, existe $\kappa_4 \geq \kappa_3 > 0$ tal que para cada $k \geq \kappa_4 > 0$

$$k\zeta_\delta \geq \kappa_4\zeta_\delta \geq \kappa_4\omega_1 > \mathcal{X}_3 > 0\,. \tag{3.2.24}$$

Así, debido al hecho de que $\mathcal{L}_1(\zeta_\delta)$ es independiente de k, para cada $k \geq \kappa_4 > 0$ tenemos que

$$f(x,k\zeta_\delta) > 1 + \frac{\|\mathcal{L}_1\zeta_\delta\|_{L_\infty(\Omega)}}{\omega\omega_1}\,, \qquad x \in \bar{\Omega} \setminus (\bar{\Omega}_{\frac{\delta}{2}} \cup \bigcup_{j=1}^{p} \bar{\mathcal{N}}^{1,i_j}_{\frac{\delta}{2}} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \bar{\mathcal{N}}^{0,j}_{\frac{\delta}{2}})\,. \tag{3.2.25}$$

Por tanto, gracias a (3.2.20), (3.2.23), (3.2.25) obtenemos que en

$$\bar{\Omega} \setminus (\bar{\Omega}_{\frac{\delta}{2}} \cup \bigcup_{j=1}^{p} \bar{\mathcal{N}}^{1,i_j}_{\frac{\delta}{2}} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \bar{\mathcal{N}}^{0,j}_{\frac{\delta}{2}})$$

se verifica la siguiente estimación

$$(\mathcal{L}_1 + a(x)f(x,\overline{u}))\overline{u} \geq k(\mathcal{L}_1\zeta_\delta + \|\mathcal{L}_1\zeta_\delta\|_{L_\infty(\Omega)} + \omega\omega_1) \geq k\omega\omega_1 > 0$$

supuesto $k \geq \kappa_4$.

Finalmente, por construcción,

$$\mathcal{B}(b)\overline{u} = k\mathcal{B}(b)\Phi = k\mathcal{D}\xi^j_\delta > 0 \qquad \text{en} \quad \Gamma_0^j\,, \qquad 1 \leq j \leq n_0\,,$$

$$\mathcal{B}(b)\overline{u} = k\mathcal{B}(b)\Phi = k(\partial_\nu + b)\psi^{i_j}_\delta = 0 \qquad \text{en} \quad \Gamma_1^{i_j}\,, \qquad 1 \leq j \leq p\,,$$

y

$$\mathcal{B}(b)\overline{u} = k\mathcal{B}(b)\Phi = k(\partial_\nu + b)\varphi_\delta = 0 \qquad \text{en} \quad \partial\Omega^0_a \cap \Gamma_1\,.$$

Por eso, tenemos que para cada $k \geq \kappa_4 > 0$ la función $\overline{u} := k\Phi$ está alejada de cero en $\bar{\Omega}$ y satisface

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1\overline{u} + a(x)f(x,\overline{u})\overline{u} > 0 & \text{en } \Omega \\ \mathcal{B}(b)\overline{u} \geq 0 & \text{en } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Por tanto, $\overline{u}$ nos proporciona la requerida supersolución positiva estricta. Esto completa la demostración del Paso 1 bajo condición (3.2.11).

Ahora, supongamos

$$\Gamma_0 \cap \partial\Omega^0_a \neq \emptyset\,, \tag{3.2.26}$$

en lugar de (3.2.11). Denotemos por Γ_0^i, $1 \leq i \leq n_0$, a las componentes de Γ_0, y sea $\{i_1,...,i_q\}$ el subconjunto de $\{1,...,n_0\}$ para el cual $\partial\Omega^0_a \cap \Gamma_0^j \neq \emptyset$ si, y sólamente si, $j \in \{i_1,...,i_q\}$.

Dado $\eta > 0$ suficientemente pequeño consideremos el nuevo dominio soporte

$$G_\eta := \Omega \cup (\bigcup_{j=1}^{q} \Gamma_0^{i_j} + B_\eta)\,,$$

donde $B_\eta \subset \mathbf{R}^N$ es la bola de radio η centrada en el origen. Fijemos $\eta > 0$ y sean $\tilde{\alpha}_{ij} = \tilde{\alpha}_{ji} \in \mathcal{C}^1(\bar{G}_\eta)$, $\tilde{\alpha}_i \in \mathcal{C}(\bar{G}_\eta)$, $\tilde{\alpha}_0$, $\tilde{W} \in L_\infty(G_\eta)$ extensiones regulares desde $\bar{\Omega}$ hasta $\bar{G}_\eta$ de los coeficientes $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, α_i, α_0, W, $1 \leq i,j \leq N$, respectivamente, del operador $\mathcal{L}_1$. Además, sea $\tilde{f} \in \mathcal{C}^1(\bar{G}_\eta \times [0,\infty), \mathbf{R})$ una extensión regular desde $\bar{\Omega} \times [0,\infty)$ hasta $\bar{G}_\eta \times [0,\infty)$ de la función f tal que

$$\lim_{u\uparrow\infty} \tilde{f}(x,u) = +\infty \qquad \text{uniformemente en } \bar{G}_\eta.$$

Ahora, consideremos el operador diferencial

$$\tilde{\mathcal{L}}_1 := -\sum_{i,j=1}^{N} \tilde{\alpha}_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \tilde{\alpha}_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \tilde{\alpha}_0(x) - \lambda \tilde{W}(x) \qquad \text{en} \quad G_\eta .$$

Ya que $\mathcal{L}$ es fuertemente uniformemente elíptico en Ω con constante de elipticidad $\mu > 0$, se ve fácilmente que existe $\tilde{\eta} \in (0,\eta)$ tal que $\tilde{\mathcal{L}}_1$ es fuertemente uniformemente elíptico en $G_{\tilde{\eta}}$ con constante de elipticidad $\frac{\mu}{2}$. Tomemos

$$\tilde{\Omega} := G_{\tilde{\eta}} \, ,$$

consideremos el potencial auxiliar

$$\tilde{a} := \begin{cases} 1 & \text{en} \quad \tilde{\Omega} \setminus \Omega \, , \\ a & \text{en} \quad \Omega \, ; \end{cases}$$

el operador de frontera auxiliar

$$\tilde{\mathcal{B}}(b) := \begin{cases} \mathcal{D} & \text{en} \quad \partial\tilde{\Omega} \setminus \Gamma_1 \, , \\ \partial_\nu + b & \text{en} \quad \Gamma_1 \, ; \end{cases}$$

y los problemas sublineales de valores en la frontera asociados

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{L}}_1 u + \tilde{a}(x)\tilde{f}(x,u)u = 0 & \text{en} \quad \tilde{\Omega} \\ \tilde{\mathcal{B}}(b)u = 0 & \text{en} \quad \partial\tilde{\Omega}. \end{cases} \tag{3.2.27}$$

De $(\mathcal{A}3)$, se sigue fácilmente que $\tilde{a}$ pertenece a la clase $\mathcal{A}(\tilde{\Omega})$ de potenciales admisibles en $\tilde{\Omega}$. Además, por construcción

$$\tilde{\Omega}^0_{\tilde{a}} = \Omega^0_a \, , \qquad (\partial\tilde{\Omega} \setminus \Gamma_1) \cap \partial\tilde{\Omega}^0_{\tilde{a}} = \emptyset \, .$$

Observar que ahora

$$\tilde{\Sigma}_0 := \sigma_1^{\tilde{\Omega}^0_{\tilde{a}}}[\tilde{\mathcal{L}}_1, \tilde{\mathcal{B}}(b, \tilde{\Omega}^0_{\tilde{a}})] = \sigma_1^{\Omega^0_a}[\mathcal{L}_1, \mathcal{B}(b, \Omega^0_a)] = \Sigma_0 > 0 \, ,$$

y

$$\cup_{j=1}^{q} \Gamma_0^{i_j} \subset \tilde{\Omega}.$$

De este modo, la condición (3.2.11) es satisfecha para el nuevo problema en $\tilde{\Omega}$, y por eso por los anteriores argumentos, existe una supersolución positiva estricta arbitrariamente grande de (3.2.27), digamos $\overline{\tilde{u}}$, satisfaciendo

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{L}}_1\overline{\tilde{u}} + \tilde{a}(x)\tilde{f}(x,\overline{\tilde{u}})\overline{\tilde{u}} > 0 & \text{en } \tilde{\Omega} \\ \tilde{\mathcal{B}}(b)\overline{\tilde{u}} \geq 0 & \text{en } \partial\tilde{\Omega}. \end{cases} \tag{3.2.28}$$

Definamos

$$\overline{u} := \overline{\tilde{u}}|_{\bar{\Omega}}\,.$$

Entonces, gracias a (3.2.28) tenemos que en Ω se desprende lo siguiente

$$(\mathcal{L}_1 + a(x)f(x,\overline{u}))\overline{u} = (\tilde{\mathcal{L}}_1 + \tilde{a}(x)\tilde{f}(x,\overline{\tilde{u}}))\overline{\tilde{u}} > 0\,. \tag{3.2.29}$$

Además, tenemos que sobre $\partial\Omega$ se verifica lo siguiente

$$\overline{u}(x) = \overline{\tilde{u}}(x) > 0 \qquad \text{para cada} \quad x \in \Gamma_0\,, \tag{3.2.30}$$

y

$$(\partial_\nu + b)\overline{u}(x) = (\partial_\nu + b)\overline{\tilde{u}}(x) = 0 \qquad \text{para cada } x \in \Gamma_1\,.$$

Por tanto,

$$\mathcal{B}(b)\overline{u} > 0 \quad \text{ en } \ \partial\Omega$$

y gracias a (3.2.29), obtenemos que $\overline{u}$ nos proporciona una supersolución positiva estricta arbitrariamente grande de (3.1.1) bajo condición (3.2.26). Esto concluye la demostración del teorema cuando Ω_a^0 es conexo y $K = \emptyset$.

Step 2: Ahora, supongamos que estamos trabajando bajo las condiciones generales del teorema y que además

$$\Gamma_0 \cap (\partial\Omega_a^0 \cup K) = \emptyset\,. \tag{3.2.31}$$

Entonces, (3.1.4) implica

$$K \subset \Omega\,, \qquad \bar{\Omega}_a^0 \subset \Omega \cup \Gamma_1\,, \qquad K \cap \bar{\Omega}_a^0 = \emptyset\,. \tag{3.2.32}$$

En particular,

$$\text{dist}(\Gamma_0, \bar{\Omega}_a^0 \cup K) > 0\,, \qquad \text{dist}(\Gamma_1, K) > 0\,, \qquad \text{dist}(K, \bar{\Omega}_a^0) > 0\,.$$

Denotemos por $\Omega_a^{0,i}$, $1 \leq i \leq m$, a las componentes de of Ω_a^0 y definamos por

$$\Sigma_0^i := \sigma_1^{\Omega_a^{0,i}}[\mathcal{L}_1, \mathcal{B}(b, \Omega_a^{0,i})]\,, \qquad 1 \leq i \leq m\,.$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que

$$\Sigma_0^i \leq \Sigma_0^{i+1}\,, \qquad 1 \leq i \leq m-1\,.$$

Entonces, por Definición 1.2.1 y gracias a (3.2.10) obtenemos que

$$0 < \Sigma_0 = \Sigma_0^1 \leq \Sigma_0^2 \leq \ldots \leq \Sigma_0^m . \tag{3.2.33}$$

Fijemos $\eta > 0$. Gracias a $(\mathcal{A}4)$, existe un número natural $\ell(\eta) \geq 1$ y $\ell(\eta)$ conjuntos abiertos $G_j^\eta \subset \mathbf{R}^N$, $1 \leq j \leq \ell(\eta)$, con $|G_j^\eta| < \eta$, $1 \leq j \leq \ell(\eta)$, tales que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} (G_j^\eta \cap \bar{\Omega}) \quad \text{y} \quad \bar{G}_i^\eta \cap \bar{G}_j^\eta = \emptyset \quad \text{si} \quad i \neq j ,$$

y para cada $1 \leq j \leq \ell(\eta)$ el conjunto abierto $G_j^\eta \cap \Omega$ es conexo y de clase $\mathcal{C}^2$. Gracias a (3.2.32), podemos elegir los G_j^η's tal que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} \bar{G}_j^\eta \subset \Omega , \qquad \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} \bar{G}_j^\eta \cap \bar{\Omega}_a^0 = \emptyset . \tag{3.2.34}$$

En efecto, ya que

$$\operatorname{dist}(K, \bar{\Omega}_a^0 \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1) > 0 ,$$

existe un conjunto abierto G tal que

$$K \subset G , \qquad \bar{G} \subset \Omega , \qquad \bar{G} \cap \bar{\Omega}_a^0 = \emptyset .$$

Por eso, para tener (3.2.34) es suficiente considerar $G \cap G_j^\eta$, en lugar de G_j^η, $1 \leq j \leq \ell(\eta)$.

Argumentando como en la demostración del Teorema 2.9.1 es fácilmente visto que existe $\eta_0 > 0$ tal que para cada $\eta \in (0, \eta_0)$ y $1 \leq j \leq \ell(\eta)$

$$\sigma_1^{G_j^\eta}[\mathcal{L}_1, \mathcal{D}] \geq \mu \Sigma_1 |B_1|^{\frac{2}{N}} \eta^{-\frac{2}{N}} - |\tilde{\alpha}|_\infty \Sigma_1^{\frac{1}{2}} |B_1|^{\frac{1}{N}} \eta^{-\frac{1}{N}} + \inf_\Omega (\alpha_0 - \lambda W) ;$$

donde Σ_1, B_1 y $\tilde{\alpha}$ están definidos en (2.9.2) y (2.9.3). Por tanto, existe $\eta_1 \in (0, \eta_0)$ tal que para cada $\eta \in (0, \eta_1)$

$$\min_{1 \leq j \leq \ell(\eta)} \sigma_1^{G_j^\eta}[\mathcal{L}_1, \mathcal{D}] > 0 . \tag{3.2.35}$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que

$$0 < \sigma_1^{G_j^\eta}[\mathcal{L}_1, \mathcal{D}] \leq \sigma_1^{G_{j+1}^\eta}[\mathcal{L}_1, \mathcal{D}] , \qquad 1 \leq j \leq \ell(\eta) - 1 . \tag{3.2.36}$$

Ahora, fijemos $\eta \in (0, \eta_1)$ y para cada $\delta > 0$ y $1 \leq i \leq m$ consideremos el conjunto abierto

$$\Omega_\delta^i := (\Omega_a^{0,i} + B_\delta) \cap \Omega .$$

Ya que $\bar{\Omega}_a^{0,i} \cap \bar{\Omega}_a^{0,j} = \emptyset$ si $i \neq j$, existe $\delta_0 > 0$ tal que para cada $0 < \delta < \delta_0$

$$\bar{\Omega}_\delta^i \cap \bar{\Omega}_\delta^j = \emptyset \qquad \text{si} \quad i \neq j . \tag{3.2.37}$$

Además, gracias a (3.2.34), existe $\delta_1 \in (0, \delta_0)$ tal que para cada $0 < \delta < \delta_1$

$$(\bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} \bar{G}_j^{\eta}) \cap (\bigcup_{i=1}^{m} \bar{\Omega}_\delta^i) = \emptyset. \tag{3.2.38}$$

Ahora, consideremos los potenciales

$$a_i := \begin{cases} a & \text{en } \bar{\Omega}_\delta^i, \\ 1 & \text{en } \bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}_\delta^i, \end{cases} \qquad 1 \le i \le m.$$

Gracias a (3.1.5), (3.2.37) y (3.2.38),

$$\Omega \cap \bigcup_{i=1}^{m} (\bar{\Omega}_\delta^i \setminus \bar{\Omega}_a^{0,i}) \subset \Omega_a^+,$$

y por eso para cada $1 \le i \le m$ el potencial a_i está alejado de cero en cada subconjunto compacto de $\Omega_{a_i}^+$, ya que a está alejada de cero en cada subconjunto compacto de Ω_a^+. Denotemos por Γ_1^j, $1 \le j \le n_1$, a las componentes de Γ_1 y para cada $1 \le i \le m$, denotemos por $\{j_1, ..., j_{p_i}\}$ al subconjunto de $\{1, ..., n_1\}$ para el cual $\Gamma_1^j \cap \partial\Omega_a^{0,i} = \emptyset$ si, y sólamente si, $j \in \{j_1, ..., j_{p_i}\}$. Entonces, para cada $1 \le i \le m$ tenemos que

$$\partial\Omega_a^{0,i} \cap \bigcup_{k=1}^{p_i} \Gamma_1^{j_k} = \emptyset.$$

En particular,

$$\operatorname{dist}(\partial\Omega_a^{0,i}, \bigcup_{k=1}^{p_i} \Gamma_1^{j_k}) > 0, \qquad 1 \le i \le m,$$

y por eso, existe $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ tal que para cada $1 \le i \le m$ y $0 < \delta < \delta_2$

$$(\bigcup_{k=1}^{p_i} \Gamma_1^{j_k} + B_\delta) \cap \bar{\Omega}_\delta^i = \emptyset. \tag{3.2.39}$$

Fijemos $\delta \in (0, \delta_2)$. Entonces, se sigue de (3.2.39) que para cada $1 \le i \le m$

$$a_i = 1 \qquad \text{en} \quad (\bigcup_{k=1}^{p_i} \Gamma_1^{j_k} + B_\delta) \cap \bar{\Omega},$$

y así, para cada $1 \le i \le m$ el potencial a_i está alejado de cero en cada subconjunto compacto de

$$\Omega_{a_i}^+ \cup \bigcup_{k=1}^{p_i} \Gamma_1^{j_k}.$$

Por tanto,

$$a_i \in \mathcal{A}(\Omega), \qquad 1 \le i \le m.$$

Observar que para cada $1 \leq i \leq m$ el conjunto de anulación asociado con a_i es $\Omega_a^{0,i}$, el cual es conexo, y que el correspondiente K es el conjunto vacío, ya que (3.2.34) y (3.2.38) implican

$$K \cap (\bar{\Omega}_\delta^i \cup \Gamma_1) = \emptyset, \qquad 1 \leq i \leq m.$$

De este modo, cada uno de estos potenciales se encuentra en el marco abstracto de trabajo del Paso 1. Además, gracias a (3.2.33), tenemos que

$$\Sigma_0^i > 0 \qquad 1 \leq i \leq m.$$

Por tanto, por los resultados del Paso 1, existen m funciones regulares

$$\overline{u}_i : \bar{\Omega} \to [0, \infty), \qquad 1 \leq i \leq m,$$

tal que $\overline{u}_i$ es positiva y alejada de cero en $\bar{\Omega}$ y para cada $1 \leq i \leq m$ se desprende lo siguiente

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 \overline{u}_i + a_i(x) f(x, \overline{u}_i)\overline{u}_i > 0 & \text{en} \quad \Omega \\ \mathcal{B}(b)\overline{u}_i \geq 0 & \text{en} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2.40}$$

Ahora, consideremos los potenciales

$$\hat{a}_j := \begin{cases} 0 & \text{en} \quad G_j^\eta, \\ 1 & \text{en} \quad \bar{\Omega} \setminus G_j^\eta, \end{cases} \qquad 1 \leq j \leq \ell(\eta).$$

Fijemos $1 \leq j \leq \ell(\eta)$. Por construcción, el conjunto de anulación de $\hat{a}_j$ está dado por G_j^η el cual es conexo y de clase $\mathcal{C}^2$. Además, gracias a (3.2.34), $\bar{G}_j^\eta \subset \Omega$. De este modo, existe $\rho > 0$ tal que $\hat{a}_j = 1$ en $(\Gamma_1 + B_\rho) \cap \bar{\Omega}$, y por eso

$$\hat{a}_j \in \mathcal{A}(\Omega), \qquad 1 \leq j \leq \ell(\eta).$$

Por tanto, cada uno de estos potenciales se encuentra dentro del marco abstracto de trabajo del Paso 1. Además, ya que $\bar{G}_j^\eta \subset \Omega$ para cada $1 \leq j \leq \ell(\eta)$, tenemos que

$$\mathcal{B}(b, G_j^\eta) = \mathcal{D}, \qquad 1 \leq j \leq \ell(\eta),$$

y gracias a (3.2.36) obtenemos que

$$\sigma_1^{G_j^\eta}[\mathcal{L}_1, \mathcal{B}(b, G_j^\eta)] = \sigma_1^{G_j^\eta}[\mathcal{L}_1, \mathcal{D}] > 0, \qquad 1 \leq j \leq \ell(\eta).$$

Entonces, por los resultados del Paso 1, obtenemos que existen $\ell(\eta)$ funciones regulares

$$\hat{u}_j : \bar{\Omega} \to [0, \infty), \qquad 1 \leq j \leq \ell(\eta),$$

tal que $\hat{u}_j$ es positiva y alejada de cero en $\bar{\Omega}$ y para cada $1 \leq j \leq \ell(\eta)$ se desprende lo siguiente

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 \hat{u}_j + \hat{a}_j(x) f(x, \hat{u}_j)\hat{u}_j > 0 & \text{en} \quad \Omega \\ \mathcal{B}(b)\hat{u}_j \geq 0 & \text{en} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2.41}$$

Sean Γ_1^j, $1 \leq j \leq n_1$, las componentes de Γ_1 y denotemos por $\{i_1, ..., i_p\}$ al subconjunto de $\{1, ..., n_1\}$ para el cual $\Gamma_1^j \cap \partial\Omega_a^0 = \emptyset$ si, y sólamente si, $j \in \{i_1, ..., i_p\}$. Gracias a $(\mathcal{A}1)$, Γ_1^j es una componente de $\partial\Omega_a^0$ para cada $j \in \{1, ..., n_1\} \setminus \{i_1, ..., i_p\}$. En particular,

$$\bigcup_{j=1}^{p} \Gamma_1^{i_j} \cap \partial\Omega_a^0 = \emptyset,$$

y por eso

$$\mathrm{dist}(\bigcup_{j=1}^{p} \Gamma_1^{i_j}, \partial\Omega_a^0) > 0. \tag{3.2.42}$$

Ahora, consideremos los entornos tubulares de radio $\delta > 0$ definidos por (3.2.12),(3.2.13) y (3.2.15) y el operador $\breve{\mathcal{L}}_1$ definido por (3.2.16). Gracias a (3.2.31), (3.2.34) y (3.2.42), existe $\delta_3 \in (0, \delta_2)$ tal que para cada $0 < \delta < \delta_3$

$$(\bigcup_{j=1}^{p} \bar{\mathcal{N}}_\delta^{1,i_j} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \bar{\mathcal{N}}_\delta^{0,j}) \cap (\bigcup_{j=1}^{m} \bar{\Omega}_\delta^j \cup \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} \bar{G}_j^\eta) = \emptyset. \tag{3.2.43}$$

Además, ya que $\Gamma_k^j \cap \Gamma_\ell^i = \emptyset$ si $(i, \ell) \neq (j, k)$, existe $\delta_4 \in (0, \delta_3)$ tal que para cada $0 < \delta < \delta_4$

$$\bar{\mathcal{N}}_\delta^{k,j} \cap \bar{\mathcal{N}}_\delta^{\ell,i} = \emptyset \qquad \text{si} \quad (i, \ell) \neq (j, k), \quad k, \ell \in \{0, 1\}. \tag{3.2.44}$$

También, ya que $\lim_{\delta \searrow 0} |\bar{\mathcal{N}}_\delta^{0,j}| = 0$ para cada $1 \leq j \leq n_0$, se sigue del Teorema 2.9.1 que existe $\delta_5 \in (0, \delta_4)$ tal que para cada $0 < \delta < \delta_5$

$$\sigma_1^{\bar{\mathcal{N}}_\delta^{0,j}}[\breve{\mathcal{L}}_1, \mathcal{D}] > 0, \qquad 1 \leq j \leq n_0. \tag{3.2.45}$$

Fijemos $\delta \in (0, \delta_5)$ y denotemos por ψ_δ^i, $i \in \{i_1, ..., i_p\}$, y ξ_δ^j, $1 \leq j \leq n_0$, a las autofunciones principales asociadas con $\sigma_1^{\mathcal{N}_\delta^{1,i}}[\mathcal{L}_1, \mathcal{B}(b, \mathcal{N}_\delta^{1,i})]$, $i \in \{i_1, ..., i_p\}$, y $\sigma_1^{\bar{\mathcal{N}}_\delta^{0,j}}[\breve{\mathcal{L}}_1, \mathcal{D}]$, $1 \leq j \leq n_0$, respectivamente. Gracias a (3.2.38), (3.2.43) y (3.2.44), la siguiente función está bien definida

$$\Phi := \begin{cases} \overline{u}_i & \text{en } \;\Omega_\delta^i, \quad 1 \leq i \leq m, \\ \hat{u}_j & \text{en } \;G_j^\eta, \quad 1 \leq j \leq \ell(\eta), \\ \psi_\delta^{i_j} & \text{en } \;\bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j}, \quad 1 \leq j \leq p, \\ \xi_\delta^j & \text{en } \;\bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j}, \quad 1 \leq j \leq n_0, \\ \zeta_\delta & \text{en } \;\bar{\Omega} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^m \Omega_\delta^i \cup \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} G_j^\eta \cup \bigcup_{j=1}^p \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j}\right)\,; \end{cases}$$

donde ζ_δ es cualquier extensión positiva y regular de

$$\bigcup_{i=1}^{m} \overline{u}_i \cup \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} \hat{u}_j \cup \bigcup_{j=1}^{p} \psi_\delta^{i_j} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \xi_\delta^j$$

desde

$$\bigcup_{i=1}^{m} \Omega_\delta^i \cup \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} G_j^\eta \cup \bigcup_{j=1}^{p} \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j}$$

hasta $\bar{\Omega}$; la cual está alejada de cero. Ésta existe ya que las funciones

$$\overline{u}_i|_{\partial\Omega_\delta^i \setminus \Gamma_1}, \qquad \hat{u}_j|_{\partial G_j^\eta}, \qquad 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le \ell(\eta),$$

son positivas y alejadas de cero, lo mismo que las funciones

$$\psi_\delta^{i_j}|_{\partial\mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j} \setminus \Gamma_1}, \qquad \xi_\delta^i|_{\partial\mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{0,i} \cap \Omega}, \qquad 1 \le j \le p, \quad 1 \le i \le n_0,$$

como resultado del hecho de que (3.2.34) ,(3.2.43) ,(3.2.44) sean satisfechos y debido a que $\overline{u}_i$ y $\hat{u}_j$ están alejadas de cero en $\bar{\Omega}$ para cada $1 \le i \le m$ y $1 \le j \le \ell(\eta)$, respectivamente.

Como en el Paso 1, en la definición de $\Phi(x)$ debemos borrar las $\psi_\delta^{i_j}$'s si $\Gamma_1 \subset \partial\Omega_a^0$.

Ahora, consideremos la siguiente función

$$\overline{u} := k\Phi \tag{3.2.46}$$

donde $k > 0$ es una constante suficientemente grande que será determinada más adelante. Para completar la demostración del Paso 2 bajo las condiciones (3.2.31), falta mostrar que existe $\kappa > 0$ suficientemente grande tal que la función definida por (3.2.46) nos proporciona una supersolución positiva estricta de (3.1.1) para cada $k \ge \kappa$, la cual está alejada de cero en $\bar{\Omega}$. Ahora definimos para cada $1 \le i \le m$ las funciones

$$g_i(\cdot) := f(\cdot, \overline{u}_i(\cdot)) \in L_\infty(\Omega),$$

y para cada $1 \le i \le m$ fijamos

$$\mathcal{X}_i := \mathcal{X}(\|g_i\|_{L_\infty(\Omega)}) > 0, \qquad \tilde{\mathcal{X}}_1 := \max_{1 \le i \le m} \{\mathcal{X}_i\} > 0.$$

Entonces, ya que $\overline{u}_i$ está alejada de cero en $\bar{\Omega}$, existe una constante $\overline{\omega}_i > 0$ tal que

$$\overline{u}_i \ge \overline{\omega}_i > 0 \qquad \text{en} \qquad \bar{\Omega},$$

y por eso, existe $\tilde{\kappa}_1 > 0$ tal que para cada $k \ge \tilde{\kappa}_1 > 0$

$$k\overline{u}_i \ge \tilde{\kappa}_1 \overline{\omega}_i > \tilde{\mathcal{X}}_1 \ge \mathcal{X}_i, \qquad 1 \le i \le m.$$

Entonces, para cada $1 \le i \le m$ y $k \ge \tilde{\kappa}_1 > 0$ se desprende lo siguiente

$$f(x, k\overline{u}_i) > \|g_i\|_{L_\infty(\Omega)}, \qquad x \in \bar{\Omega}, \tag{3.2.47}$$

y por tanto de la definición de $\overline{u}_i$ y $\tilde{\mathcal{X}}_1$, ya que $a = a_i$ en Ω^i_δ y gracias a (3.2.40) y (3.2.47), obtenemos que para cada $1 \leq i \leq m$ y $k \geq \tilde{\kappa}_1 > 0$, se verifica la siguiente estimación en Ω^i_δ

$$\mathcal{L}_1\overline{u} + a(x)f(x,\overline{u})\overline{u} = k(\mathcal{L}_1\overline{u}_i + a_i(x)f(x,k\overline{u}_i)\overline{u}_i) =$$

$$= k(\mathcal{L}_1 + a_i(x)f(x,\overline{u}_i))\overline{u}_i + ka_i(x)\overline{u}_i(f(x,k\overline{u}_i) - f(x,\overline{u}_i)) >$$

$$> ka_i(x)\overline{u}_i(\|g_i\|_{L_\infty(\Omega)} - g_i(x)) \geq 0\,,$$

es decir, para cada $1 \leq i \leq m$ en Ω^i_δ

$$(\mathcal{L}_1 + a(x)f(x,k\overline{u}_i))(k\overline{u}_i) > 0$$

para cada $k \geq \tilde{\kappa}_1 > 0$. Similarmente, ahora consideramos para cada $1 \leq j \leq \ell(\eta)$ la función

$$\hat{g}_j(\cdot) := f(\cdot,\hat{u}_j(\cdot)) \in L_\infty(\Omega)\,.$$

Definamos

$$\hat{\mathcal{X}}_j := \mathcal{X}(\|\hat{g}_j\|_{L_\infty(\Omega)}) > 0\,, \qquad \tilde{\mathcal{X}}_2 := \max_{1\leq j\leq \ell(\eta)}\{\hat{\mathcal{X}}_j\} > 0\,.$$

Ya que por construcción $\hat{u}_j$ está alejada de cero en $\bar{\Omega}$, existe una constante $\hat{\omega}_j > 0$ tal que

$$\hat{u}_j \geq \hat{\omega}_j > 0 \qquad \text{en} \qquad \bar{\Omega}$$

y por eso, existe $\tilde{\kappa}_2 \geq \tilde{\kappa}_1 > 0$ tal que para cada $k \geq \tilde{\kappa}_2 > 0$

$$k\hat{u}_j \geq \tilde{\kappa}_2\hat{\omega}_j > \tilde{\mathcal{X}}_2 \geq \hat{\mathcal{X}}_j\,, \qquad 1 \leq j \leq \ell(\eta).$$

De este modo, para cada $1 \leq j \leq \ell(\eta)$ y $k \geq \tilde{\kappa}_2 > 0$

$$f(x,k\hat{u}_j) > \|\hat{g}_j\|_{L_\infty(\Omega)} \geq 0\,, \qquad x \in \bar{\Omega}. \tag{3.2.48}$$

Por eso, gracias a (3.2.48) y (3.2.41) y teniendo en cuenta que $a \geq \hat{a}_j = 0$ en G^η_j, se sigue de la definición de $\hat{u}_j$ que se verifica la siguiente estimación en G^η_j para cada $1 \leq j \leq \ell(\eta)$ y $k \geq \tilde{\kappa}_2 > 0$,

$$\mathcal{L}_1\bar{u} + a(x)f(x,\bar{u})\bar{u} \geq k(\mathcal{L}_1\hat{u}_j + \hat{a}_j(x)f(x,k\hat{u}_j)\hat{u}_j) =$$

$$= k(\mathcal{L}_1\hat{u}_j + \hat{a}_j(x)f(x,\hat{u}_j)\hat{u}_j) + k\hat{a}_j(x)\hat{u}_j(f(x,k\hat{u}_j) - f(x,\hat{u}_j)) =$$

$$= k(\mathcal{L}_1\hat{u}_j + \hat{a}_j(x)f(x,\hat{u}_j)\hat{u}_j) > 0\,,$$

es decir, para cada $1 \leq j \leq \ell(\eta)$,

$$(\mathcal{L}_1 + a(x)f(x,k\hat{u}_j))(k\hat{u}_j) > 0 \qquad \text{en} \qquad G^\eta_j\,, \quad k \geq \tilde{\kappa}_2 > 0\,.$$

Similarmente, definiendo

$$\tilde{\mathcal{X}}_3 := \mathcal{X}(1) > 0\,;$$

y teniendo en cuenta que ξ_δ^j, $1 \le j \le n_0$, está alejada de cero en $\tilde{\mathcal{N}}^{0,j}_{\frac{\delta}{2}}$, existe $\tilde{\kappa}_3 \ge \tilde{\kappa}_2 > 0$ tal que para cada $k \ge \tilde{\kappa}_3 > 0$ y $1 \le j \le n_0$

$$k\xi_\delta^j \ge \tilde{\kappa}_3 \xi_\delta^j > \tilde{\mathcal{X}}_3 > 0 \quad \text{en} \quad \tilde{\mathcal{N}}^{0,j}_{\frac{\delta}{2}}.$$

Así, para cada $1 \le j \le n_0$ y $k \ge \tilde{\kappa}_3 > 0$

$$f(x, k\xi_\delta^j) > 1\,, \qquad x \in \tilde{\mathcal{N}}^{0,j}_{\frac{\delta}{2}}\,. \tag{3.2.49}$$

Por tanto, gracias a (3.2.45) y (3.2.49), se sigue de la definición de $\overline{u}$ que para cada $1 \le j \le n_0$ se verifica la siguiente estimación en $\mathcal{N}^{0,j}_{\frac{\delta}{2}}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1\overline{u} + a(x)f(x,\overline{u})\overline{u} &= k\xi_\delta^j(\sigma_1^{\tilde{\mathcal{N}}_\delta^{0,j}}[\breve{\mathcal{L}}_1, \mathcal{D}] + a(x)f(x,k\xi_\delta^j)) \ge \\ &\ge k\xi_\delta^j(\sigma_1^{\tilde{\mathcal{N}}_\delta^{0,j}}[\breve{\mathcal{L}}_1, \mathcal{D}] + a(x)) \ge k\xi_\delta^j \sigma_1^{\tilde{\mathcal{N}}_\delta^{0,j}}[\breve{\mathcal{L}}_1, \mathcal{D}] > 0\,;\end{aligned}$$

para cada $k \ge \tilde{\kappa}_3 > 0$.

Ahora, observar que ya que $a \in \mathcal{A}(\Omega)$, gracias a ($\mathcal{A}2$) y debido al hecho de que

$$\bar{\Omega} \setminus (\bigcup_{i=1}^{m} \Omega_\delta^i \cup \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} G_j^\eta \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \mathcal{N}^{0,j}_{\frac{\delta}{2}}) \subset \Omega_a^+ \cup \bigcup_{j=1}^{p} \Gamma_1^{i_j}\,,$$

existe una constante $\omega > 0$ tal que

$$a \ge \omega > 0 \qquad \text{en} \qquad \bar{\Omega} \setminus (\bigcup_{i=1}^{m} \Omega_\delta^i \cup \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} G_j^\eta \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \mathcal{N}^{0,j}_{\frac{\delta}{2}})\,. \tag{3.2.50}$$

Consideremos la $M_\delta \ge 0$ definida por (3.2.21) y fijemos

$$\tilde{\mathcal{X}}_4 := \mathcal{X}(\frac{1+M_\delta}{\omega}) > 0.$$

Entonces, ya que $\psi_\delta^{i_j}$ está alejada de cero en $\mathcal{N}^{1,i_j}_{\frac{\delta}{2}}$, existe $\tilde{\kappa}_4 \ge \tilde{\kappa}_3 > 0$ tal que para cada $k \ge \tilde{\kappa}_4 > 0$

$$k\psi_\delta^{i_j} \ge \tilde{\kappa}_4 \psi_\delta^{i_j} \ge \tilde{\mathcal{X}}_4 > 0\,, \qquad 1 \le j \le p\,,$$

y por eso, para cada $1 \le j \le p$ y $k \ge \tilde{\kappa}_4 > 0$

$$f(x, k\psi_\delta^{i_j}) > \frac{1+M_\delta}{\omega} > 0\,, \qquad x \in \tilde{\mathcal{N}}^{1,i_j}_{\frac{\delta}{2}}. \tag{3.2.51}$$

De este modo, de la definición de $\psi_\delta^{i_j}$ y gracias a (3.2.50) y (3.2.51), obtenemos que para cada $1 \le j \le p$ y $k \ge \tilde{\kappa}_4 > 0$, se verifica la siguiente estimación en $\mathcal{N}^{1,i_j}_{\frac{\delta}{2}}$

$$\mathcal{L}_1\overline{u} + a(x)f(x,\overline{u})\overline{u} = k\psi_\delta^{i_j}(\sigma_1^{\mathcal{N}_\delta^{1,i_j}}[\mathcal{L}_1, \mathcal{B}(b, \mathcal{N}_\delta^{1,i_j})] + a(x)f(x, k\psi_\delta^{i_j})) \ge$$

$$\geq k\psi_\delta^{i_j}(\sigma_1^{\mathcal{N}_\delta^{1,i_j}}[\mathcal{L}_1, \mathcal{B}(b, \mathcal{N}_\delta^{1,i_j})] + M_\delta + 1) \geq k\psi_\delta^{i_j} > 0.$$

Por otra parte, por construcción existe $\omega_1 > 0$ tal que

$$\zeta_\delta \geq \omega_1 > 0 \qquad \text{en} \qquad \bar{\Omega} \setminus (\bigcup_{i=1}^{m} \Omega_\delta^i \cup \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} G_j^\eta \cup \bigcup_{j=1}^{p} \mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j}) \subset \Omega_a^+ . \tag{3.2.52}$$

Definamos

$$\tilde{\mathcal{X}}_5 := \mathcal{X}(1 + \frac{\|\mathcal{L}_1\zeta_\delta\|_{L_\infty(\Omega)}}{\omega\omega_1}) > 0\,.$$

Entonces, existe $\tilde{\kappa}_5 \geq \tilde{\kappa}_4 > 0$ tal que para cada $k \geq \tilde{\kappa}_5 > 0$

$$k\zeta_\delta \geq \tilde{\kappa}_5\zeta_\delta \geq \tilde{\kappa}_5\omega_1 > \tilde{\mathcal{X}}_5 > 0. \tag{3.2.53}$$

De este modo, debido al hecho de que $\mathcal{L}_1(\zeta_\delta)$ es independiente de k, se sigue de (3.2.53) que para cada $k \geq \tilde{\kappa}_5 > 0$ se desprende lo siguiente

$$f(x, k\zeta_\delta) > 1 + \frac{\|\mathcal{L}_1\zeta_\delta\|_{L_\infty(\Omega)}}{\omega\omega_1} > 0 \tag{3.2.54}$$

en $\bar{\Omega} \setminus (\bigcup_{i=1}^m \Omega_\delta^i \cup \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} G_j^\eta \cup \bigcup_{j=1}^p \mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j})$. Por tanto, gracias a (3.2.50), (3.2.52) y (3.2.54), en el conjunto

$$\bar{\Omega} \setminus (\bigcup_{i=1}^{m} \Omega_\delta^i \cup \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} G_j^\eta \cup \bigcup_{j=1}^{p} \mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j})$$

se verifica la siguiente estimación

$$\mathcal{L}_1\overline{u} + a(x)f(x,\overline{u})\overline{u} \geq k(\mathcal{L}_1\zeta_\delta + \omega\omega_1 + \|\mathcal{L}_1\zeta_\delta\|_{L_\infty(\Omega)}) \geq k\omega\omega_1 > 0$$

para cada $k \geq \tilde{\kappa}_5$.

Finalmente, sobre la frontera tenemos que

$$\mathcal{B}(b)\overline{u} = k\mathcal{B}(b)\Phi = k\mathcal{D}\Phi = k\xi_\delta^j > 0 \qquad \text{en} \quad \Gamma_0^j, \quad 1 \leq j \leq n_0\,;$$

$$\mathcal{B}(b)\overline{u} = k\mathcal{B}(b)\Phi = k(\partial_\nu + b)\Phi = k(\partial_\nu + b)\psi_\delta^{i_j} = 0 \qquad \text{en} \quad \Gamma_1^{i_j}\,, \quad 1 \leq j \leq p\,;$$

y para cada $1 \leq i \leq m$ tal que $\partial\Omega_a^{0,i} \cap \Gamma_1 \neq \emptyset$, se sigue que

$$\mathcal{B}(b)\overline{u} = k\mathcal{B}(b)\Phi = k(\partial_\nu + b)\Phi = k(\partial_\nu + b)\overline{u}_i = 0 \qquad \text{en} \quad \partial\Omega_\delta^i \cap \Gamma_1 = \partial\Omega_a^{0,i} \cap \Gamma_1\,,$$

por construcción. De este modo

$$\mathcal{B}(b)\overline{u} \geq 0 \qquad \text{en} \quad \partial\Omega\,.$$

Entonces, la función $\overline{u}$ definida por (3.2.46) satisface

$$(\mathcal{L}_1\bar{u} + a(x)f(x,\bar{u})\bar{u}, \mathcal{B}(b)\bar{u}) > 0$$

y por tanto nos proporciona una supersolución positiva estricta de (3.1.1) para cada $k \geq \tilde{\kappa}_5 > 0$. Observar que dicha supersolución está alejada de cero en $\bar{\Omega}$. Esto concluye la demostración del teorema bajo condición (3.2.31).

Ahora, supongamos

$$\Gamma_0 \cap (\partial\Omega_a^0 \cup K) \neq \emptyset\,, \tag{3.2.55}$$

en lugar de (3.2.31). Denotemos por Γ_0^j, $1 \leq j \leq n_0$, a las componentes de Γ_0, y por $\{i_1, ..., i_q\}$ al subconjunto de $\{1, ..., n_0\}$ para el cual

$$\Gamma_0^j \cap (\partial\Omega_a^0 \cup K) \neq \emptyset$$

si, y sólamente si, $j \in \{i_1, ..., i_q\}$. Además, para cada $\eta > 0$ suficientemente pequeño consideremos el conjunto abierto

$$\tilde{\Omega} := G_\eta := \Omega \cup (\bigcup_{j=1}^{q} \Gamma_0^{i_j} + B_\eta)\,.$$

El resto de la demostración consiste en construir $\tilde{\mathcal{L}}_1$, $\tilde{a}$, $\tilde{f}$ y $\tilde{\mathcal{B}}(b)$, como en la demostración del Paso 1 para el caso cuando se verifica la condición (3.2.26), por lo que $\tilde{\Omega}_{\tilde{a}}^0 = \Omega_a^0$, $\tilde{K} = K$, y

$$\tilde{\Gamma}_0 \cap (\partial\tilde{\Omega}_{\tilde{a}}^0 \cup \tilde{K}) = \emptyset\,,$$

donde $\tilde{\Gamma}_0 = \partial\tilde{\Omega} \setminus \Gamma_1$. Argumentando como en la demostración de la segunda parte del Paso 1, pero esta vez utilizando el resultado del Paso 2 bajo condición (3.2.31), en lugar del resultado del Paso 1 bajo condición (3.2.11), se cubre la presente situación. Esto concluye la demostración del teorema. □

Ahora ya estamos en condiciones de probar el Teorema 3.2.4.

Demostración del Teorema 3.2.4: Gracias a la Proposición 3.2.5 y al Teorema 3.2.6, para cada λ verificando (3.2.8), el problema (3.1.1) posee una subsolución positiva estricta $\underline{u}_\lambda$ arbitrariamente pequeña y una supersolución positiva estricta $\overline{u}_\lambda$ arbitrariamente grande. De este modo, por la construcción de $\underline{u}_\lambda$ realizada en la Proposición 3.2.5 y la construcción de $\overline{u}_\lambda$ hecha en el Teorema 3.2.6, es posible tomar $\underline{u}_\lambda$ suficientemente pequeña y $\overline{u}_\lambda$ suficientemente grande tal que

$$0 < \underline{u}_\lambda < \overline{u}_\lambda.$$

Así, aplicando el método de sub y supersoluciones (cf. [3]), inferimos la existencia de al menos una solución positiva u_λ de (3.1.1) verificando

$$0 < \underline{u}_\lambda < u_\lambda < \overline{u}_\lambda\,,$$

supuesto que λ satisface (3.2.8). Esto concluye la demostración del teorema. □

Nota 3.2.7 *Argumentando como en la demostración del Teorema 3.2.6 en el caso particular cuando $a \in \mathcal{A}^+(\Omega)$, es decir, en el caso especial en el que $a \in \mathcal{A}(\Omega)$ y $\Omega_a^0 = \emptyset$ (cf. Sección 2.10), se sigue fácilmente que* (3.1.1) *posee una supersolución positiva estricta arbitrariamente grande para cada $\lambda \in \mathbf{R}$. Además, en este caso particular, la condición* (3.1.8) *sobre Γ_1 no es requerida, ya que no es necesario aplicar el Teorema 2.6.1. También, la única regularidad necesitada sobre los coeficientes del operador $\mathcal{L}$ es la requerida para tener garantizada la existencia de los autovalores principales y aplicar el Teorema 2.9.1, es decir,*

$$\alpha_{ij} \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \cap W^1_\infty(\Omega)\,, \qquad \alpha_i \in L_\infty(\Omega)\,, \qquad 0 \leq i \leq N\,. \tag{3.2.56}$$

Ahora, argumentando como en la demostración de la Proposición 3.2.3, del Teorema 3.2.4, de la Proposición 3.2.5, del Teorema 3.2.6 y teniendo en cuenta la Nota 3.2.7, se sigue fácilmente el siguiente resultado.

Teorema 3.2.8 *Supongamos $a \in \mathcal{A}^+(\Omega)$, es decir, $a \in \mathcal{A}(\Omega)$ y $\Omega_a^0 = \emptyset$. Asumamos además* (3.2.56). *Entonces, las siguientes afirmaciones son ciertas:*

i) Si (λ, u_λ) es una solución positiva de (3.1.1), *entonces*

$$\hat{\Sigma}(\lambda) \leq 0\,.$$

ii) Para cada $\lambda \in \mathbf{R}$ verificando

$$\tilde{\Sigma}(\lambda) < 0\,,$$

(3.1.1) *posee una subsolución positiva estricta suficientemente pequeña.*

iii) Para cada $\lambda \in \mathbf{R}$, (3.1.1) *posee una supersolución positiva estricta arbitrariamente grande y alejada de cero en $\bar{\Omega}$.*

iv) Para cada $\lambda \in \mathbf{R}$ verificando

$$\tilde{\Sigma}(\lambda) < 0\,,$$

(3.1.1) *posee una solución positiva.*

3.3 Estructura del diagrama de soluciones positivas

En esta sección analizamos el comportamiento de las soluciones positivas de (3.1.1) cuando λ tiende a $\partial\Lambda(a, f)$ y averiguamos la estructura global del diagrama de soluciones positivas de (3.1.1), de acuerdo al signo del potencial $W \in L_\infty(\Omega)$ en Ω_a^0 y Ω_a^+, respectivamente. También, utilizamos la teoría desarrollada en las secciones previas para caracterizar la estructura de $\Lambda(a, f)$ cuando W tiene signo constante en Ω y en algunos casos cuando W cambia de signo en Ω. Además obtendremos un resultado local de multiplicidad para las soluciones positivas de (3.1.1) en un entorno de los valores de bifurcación a soluciones positivas de (3.1.1) desde la rama trivial $(\lambda, u) = (\lambda, 0)$.

El siguiente lema es crucial, para comparar las soluciones positivas de (3.1.1) con las soluciones positivas de un problema sublineal auxiliar de valores en la frontera de tipo mixto donde la no linealidad $f(x,u)$ es monótona. Dicho lema es una de las principales herramientas técnicas para obtener muchos de los resultados de esta sección.

Lema 3.3.1 *Sea $f(x,u)$ verificando* (3.1.9). *Entonces existe g, $h \in C^1([0,\infty),\mathbf{R})$ tal que*

$$\partial_u g(u) > 0\,, \qquad \partial_u h(u) > 0\,, \qquad u \geq 0, \tag{3.3.1}$$

$$g(u) < f(x,u) < h(u)\,, \qquad (x,u) \in \bar{\Omega} \times [0,\infty); \tag{3.3.2}$$

y

$$g(0) < I_f(x)\,, \qquad x \in \bar{\Omega}. \tag{3.3.3}$$

Demostración: En efecto, ya que $f \in C^1(\bar{\Omega} \times [0,\infty),\mathbf{R})$, para cada $u \in [0,\infty)$ las funciones

$$m(u) := \min_{x\in\bar{\Omega}} f(x,u) \in \mathbf{R}\,, \qquad M(u) := \max_{x\in\bar{\Omega}} f(x,u) \in \mathbf{R}$$

están bien definidas. Además, ya que $f(x,u)$ satisface (3.1.9), tenemos que

$$\lim_{u\nearrow+\infty} m(u) = +\infty\,, \qquad \lim_{u\nearrow+\infty} M(u) = +\infty$$

y por eso, existe una sucesión creciente de números reales positivos $\{N_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$m(u) > n \quad \text{si} \quad u > N_n$$

para cada $n \in \mathbf{N}$. Ahora, tomemos $N_0 := 0$,

$$\Upsilon < \min\{1\ ,\ \min\{m(u)\ :\ 0 \leq u \leq N_1\}\}$$

y consideremos las siguientes sucesiones crecientes de números reales

$$\tilde{N}_n := \begin{cases} \Upsilon - 1 & \text{si } n = 0\,, \\ \Upsilon & \text{si } n = 1\,, \\ n-1 & \text{si } n > 1\,, \end{cases}$$

y

$$\tilde{M}_n := n + \max\{\,M(u)\ :\ 0 \leq u \leq N_n\,\}\,, \qquad n \geq 1.$$

Es claro que las sucesiones $\{\tilde{N}_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\tilde{M}_n\}_{n=1}^{\infty}$ son crecientes. Para mostrar (3.3.1) y (3.3.2) es suficiente construir dos funciones regulares $g,h \in C^1([0,\infty),\mathbf{R})$ verificando (3.3.1) cuyas gráficas pasen por los puntos

$$(N_n,\tilde{N}_n)\,, \qquad (N_{n-1},\tilde{M}_n)\,, \qquad n \geq 1\,,$$

respectivamente. Tales funciones verificarán

$$g(u) < m(u) \leq f(x,u) \leq M(u) < h(u)$$

para cada $(x,u) \in \bar{\Omega} \times [0,\infty)$; y esto prueba (3.3.2).

Falta entonces por demostrar que es posible tomar g satisfaciendo (3.3.3). En efecto, si la función g ya elegida satisface (3.3.3), entonces el resultado está probado. De lo contrario, supongamos que g no satisface (3.3.3). Entonces, ya que $I_f(x) \in L_\infty(\Omega)$, existe una constante $k \in \mathbf{R}$ tal que

$$k < \min\{ g(0) , I_f(x) \} , \qquad x \in \bar{\Omega} .$$

Así, para obtener (3.3.3) es suficiente tomar $\tilde{k} \in \mathbf{R}$ tal que

$$\tilde{k} > g(0) - k > 0,$$

y considerar la nueva función

$$\tilde{g} := g - \tilde{k}.$$

Entonces, $\tilde{g} \in C^1([0,\infty),\mathbf{R})$ y satisface (3.3.1) , (3.3.2) y (3.3.3). Esto concluye la demostración. □

El siguiente teorema nos proporciona una mejora sustancial de alguno de los resultados de [19] por tratar el caso de no-linealidades generales monótonas y condiciones de frontera generales. Debe ser destacado que aquí no estamos asumiendo que nuestra no-linealidad sea nula en el origen($u = 0$). Ésta puede tomar cualquier valor en $u = 0$, no necesariamente constante. La prueba de la unicidad de solución positiva en el siguiente teorema, está basada en la demostración del Teorema 2.1 en [38].

Teorema 3.3.2 *Supongamos*

$$\partial_u f(x,u) > 0 , \qquad (x,u) \in \Omega \times (0,\infty) . \tag{3.3.4}$$

Entonces, las siguientes afirmaciones son ciertas:

i) El problema (3.1.1) *posee una solución positiva si, y sólamente si,*

$$\tilde{\Sigma}(\lambda) < 0 < \Sigma_0(\lambda). \tag{3.3.5}$$

Además, la solución positiva es única si existe. En lo sucesivo ésta será denotada por u_λ.

ii) Cada solución positiva de (3.1.1) *es no degenerada, es decir, la linealización de* (3.1.1) *en cualquier solución positiva únicamente posee la solución* $u = 0$.

iii) La aplicación

$$\begin{array}{ccc} \Lambda(a,f) & \rightarrow & C^1(\bar{\Omega}) \\ \lambda & \rightarrow & u_\lambda \end{array} \tag{3.3.6}$$

es continua. Además, si $W > 0$ *(resp.* $W < 0$*) en* Ω, *entonces la aplicación* (3.3.6) *es puntualmente creciente, (resp. decreciente).*

iv) Las soluciones positivas de (3.1.1) *están uniformemente acotadas en* $L_\infty(\Omega)$ *en cada subconjunto compacto de* $\Lambda(a,f)$.

v) El conjunto de valores de bifurcación a soluciones positivas de (3.1.1) *desde la rama trivial* $(\lambda, u) = (\lambda, 0)$ *está dado por*

$$\mathcal{O} := \{ \lambda \in \mathbf{R} \ : \ \tilde{\Sigma}(\lambda) \doteq 0 \} .$$

vi) Supongamos además (3.3.5) *y sea* λ_0 *tal que*

$$\Sigma_0(\lambda_0) = 0. \tag{3.3.7}$$

Entonces,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \|u_\lambda\|_{L_\infty(\Omega)} = \infty. \tag{3.3.8}$$

En particular, λ_0 *es una valor de bifurcación desde infinito a soluciones positivas de* (3.1.1).

Proof: *i)* En efecto, por la monotonía de f en su segundo argumento tenemos que

$$I_f(x) = f(x, 0) , \qquad x \in \bar{\Omega} \tag{3.3.9}$$

y por eso, para cada $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\hat{\mathcal{L}}(\lambda) = \tilde{\mathcal{L}}(\lambda) , \qquad \hat{\Sigma}(\lambda) = \tilde{\Sigma}(\lambda).$$

Observar que ahora el conjunto $\mathcal{Q}$ definido en la Proposición 3.2.3 puede ser tomado como Ω_a^+. Así, gracias a la Proposición 3.2.3 y Teorema 3.2.4, obtenemos que (3.1.1) posee una solución positiva si, y sólamente si, λ satisface (3.3.5).

Ahora, argumentando como en [38, Teorema 2.1], probamos la unicidad de la solución positiva de (3.1.1) para cada λ satisfaciendo (3.3.5). Tomemos λ satisfaciendo (3.3.5) y sean u_λ^i, $i = 1, 2$ dos soluciones positivas de (3.1.1) para el valor λ del parámetro, $u_\lambda^1 \neq u_\lambda^2$. Entonces, por la existencia y unicidad del autovalor principal

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}(\lambda) + a(x) f(x, u_\lambda^i), \mathcal{B}(b)] = 0 , \quad i = 1, 2; \tag{3.3.10}$$

y

$$\begin{cases} (\mathcal{L}(\lambda) + a(x) g(x))(u_\lambda^1 - u_\lambda^2) = 0 & \text{en } \Omega , \\ \mathcal{B}(b)(u_\lambda^1 - u_\lambda^2) = 0 & \text{en } \partial\Omega , \end{cases} \tag{3.3.11}$$

donde

$$g(x) := \begin{cases} \frac{f(x, u_\lambda^1(x)) u_\lambda^1(x) - f(x, u_\lambda^2(x)) u_\lambda^2(x)}{u_\lambda^1(x) - u_\lambda^2(x)} & \text{si } u_\lambda^1(x) \neq u_\lambda^2(x) , \\ f(x, u_\lambda^1(x)) & \text{si } u_\lambda^1(x) = u_\lambda^2(x) \end{cases} \qquad x \in \bar{\Omega}.$$

Además, ya que $u_\lambda^1 \neq u_\lambda^2$, por la monotonía de f en su segundo argumento, tenemos que

$$g(\cdot) > f(\cdot, u_\lambda^1(\cdot)). \tag{3.3.12}$$

Así, se sigue de (3.3.10), (3.3.12) y la monotonía del autovalor principal con respecto al potencial que

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}(\lambda) + a(x) g(x), \mathcal{B}(b)] \geq \sigma_1^\Omega[\mathcal{L}(\lambda) + a(x) f(x, u_\lambda^1), \mathcal{B}(b)] = 0.$$

Observar que puede ocurrir que $g(x) = f(x, u_\lambda^1)$ en Ω_a^+, y por ello en la desigualdad previa no podemos sustituir $\geq$ por $>$ sin ningún trabajo adiccional. Asumamos

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}(\lambda) + a(x)g(x), \mathcal{B}(b)] > 0.$$

Entonces, cero no puede ser un autovalor de $\mathcal{L}(\lambda) + a(x)g(x)$, y por eso obtenemos de (3.3.11) que $u_\lambda^1 = u_\lambda^2$, lo cual es imposible. De este modo,

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}(\lambda) + a(x)g(x), \mathcal{B}(b)] = 0$$

y $u_\lambda^1 \neq u_\lambda^2$. Entonces, por la simplicidad del autovalor principal, se sigue de (3.3.11) que existe $\beta \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ tal que

$$u_\lambda^1 - u_\lambda^2 = \beta\varphi,$$

donde $\varphi > 0$ representa a la autofunción principal asociada con el autovalor principal $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}(\lambda) + a(x)g(x), \mathcal{B}(b)]$; φ es fuertemente positiva en Ω. Así, o bien $u_\lambda^1(x) < u_\lambda^2(x)$ para cada $x \in \Omega$ o $u_\lambda^1(x) > u_\lambda^2(x)$ para cada $x \in \Omega$. En cualquiera de estas situaciones tenemos que $g(x) > f(x, u_\lambda^1)$ para cada $x \in \Omega$. Por tanto, por la monotonía del autovalor principal con respecto al potencial y (3.3.10) obtenemos que

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}(\lambda) + a(x)g(x), \mathcal{B}(b)] > \sigma_1^\Omega[\mathcal{L}(\lambda) + a(x)f(x, u_\lambda^1), \mathcal{B}(b)] = 0,$$

lo cual implica $u_\lambda^1 = u_\lambda^2$. Esta contradicción demuestra la unicidad de la solución positiva de (3.1.1) para cada λ satisfaciendo (3.3.5). Esto concluye la demostración de Parte (i).

ii) En efecto, si (λ, u_λ) es una solución positiva de (3.1.1), entonces por la unicidad del autovalor principal

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}(\lambda) + a(x)f(x, u_\lambda), \mathcal{B}(b)] = 0. \tag{3.3.13}$$

Además, debido a (3.3.4) tenemos que

$$a(\cdot)\partial_u f(\cdot, u) > 0, \qquad u > 0. \tag{3.3.14}$$

De este modo, usando (3.3.13), (3.3.14) y la monotonía del autovalor principal con respecto al potencial, obtenemos que

$$\sigma_1^\Omega[D_u\mathcal{F}(\lambda, u_\lambda), \mathcal{B}(b)] = \sigma_1^\Omega[\mathcal{L}(\lambda) + a(x)(f(x, u_\lambda) + \partial_u f(x, u_\lambda)u_\lambda), \mathcal{B}(b)] > 0,$$

donde $\mathcal{F}(\lambda, u)$ es el operador definido en (3.2.1) y por ello, (λ, u_λ) es no degenerada.

(*iii*) En efecto, sea $\lambda_* \in \Lambda(a, f)$. Entonces, *i*) implica que λ_* satisface (3.3.5). Además, por la continuidad de las aplicaciones $\tilde{\Sigma}(\lambda)$ y $\Sigma_0(\lambda)$ (cf. Teorema 2.11.1-a)), existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$\tilde{\Sigma}(\lambda) < 0 < \Sigma_0(\lambda) \tag{3.3.15}$$

para cada $\lambda \in (\lambda_* - \varepsilon, \lambda_* + \varepsilon)$ y por eso, *i*) implica que

$$(\lambda_* - \varepsilon, \lambda_* + \varepsilon) \subset \Lambda(a, f). \tag{3.3.16}$$

Sea λ_n, $n \geq 1$, un sucesión de números reales tal que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda_* , \qquad \lambda_n \in (\lambda_* - \varepsilon, \lambda_* + \varepsilon) , \quad n \geq 1 . \tag{3.3.17}$$

Gracias a (3.3.16) y (3.3.17), se sigue de i) que para cada $n \in \mathbf{N}$, el problema (3.1.1) posee una única solución positiva asociada con $\lambda = \lambda_n$, digamos u_{λ_n}. Además, gracias al Teorema 3.2.6, existe una supersolución positiva estricta uniforme de (3.1.1) para todo $\lambda \in (\lambda_* - \varepsilon, \lambda_* + \varepsilon)$. Denotaremos a ésta por $\bar{u}$. Entonces, por (3.3.4) y gracias al principio del máximo, se sigue de la unicidad de solución positiva de (3.1.1) que

$$u_\lambda < \bar{u} \quad \text{para cada} \quad \lambda \in (\lambda_* - \varepsilon, \lambda_* + \varepsilon) .$$

Así, existe $C > 0$ tal que

$$\|u_\lambda\|_{L_\infty(\Omega)} \leq C \quad \text{para cada} \quad \lambda \in (\lambda_* - \varepsilon, \lambda_* + \varepsilon)$$

y por eso, existe $M > 0$ suficientemente grande tal que

$$\|\mathcal{L}u_{\lambda_n} - \alpha_0 u_{\lambda_n}\|_{L_\infty(\Omega)} = \|(\lambda_n W - \alpha_0)u_{\lambda_n} - a(x)f(x, u_{\lambda_n})u_{\lambda_n}\|_{L_\infty(\Omega)} \leq M \quad \text{para cada } n \in \mathbf{N}.$$

Entonces, por las estimaciones L_p–elípticas de Agmon, Douglis & Nirenberg (cf. [2]), para cada $p > 1$ existe una constante $C(p) > 0$ tal que

$$\|u_{\lambda_n}\|_{W_p^2(\Omega)} \leq C(p) , \qquad \text{para cualquier} \qquad n \in \mathbf{N}. \tag{3.3.18}$$

Ahora fijamos $p > N$. Sean $M > -\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)]$ y $\mathcal{J} : W^2_{p,\mathcal{B}(b)}(\Omega) \hookrightarrow L_p(\Omega)$ el operador inclusión, el cual es compacto. Consideremos el operador

$$\mathcal{K}(\lambda, u) := (\mathcal{L} + M)^{-1}[(\lambda W(\cdot) + M)\mathcal{J}u - a(\cdot)f(\cdot, \mathcal{J}u)\mathcal{J}u] , \tag{3.3.19}$$

el cual es compacto, como un operador en $W^2_{p,\mathcal{B}(b)}(\Omega)$, $p > N$. De este modo, para cada $n \in \mathbf{N}$ la función u_{λ_n} satisface la siguiente ecuación de punto fijo

$$\mathcal{K}(\lambda_*, u_{\lambda_n}) = (\lambda_* - \lambda_n)(\mathcal{L} + M)^{-1}(W u_{\lambda_n}) + u_{\lambda_n} . \tag{3.3.20}$$

Entonces, gracias a (3.3.18) y ya que $\mathcal{K}(\lambda^*, \cdot)$ es compacto considerado como un operador en $W^2_{p,\mathcal{B}(b)}(\Omega)$, podemos extraer una subsucesión de u_{λ_n}, $n \geq 1$, de nuevo etiquetada por n, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{K}(\lambda_*, u_{\lambda_n}) = u^* \qquad \text{en} \qquad W^2_{p,\mathcal{B}(b)}(\Omega) \tag{3.3.21}$$

para alguna $u^* \in W^2_{p,\mathcal{B}(b)}(\Omega)$. Además, ya que $(\mathcal{L}+M)^{-1}(W u_{\lambda_n})$, $n \geq 1$, está acotada y $\lambda_n \to \lambda_*$ cuando $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda_* - \lambda_n)(\mathcal{L} + M)^{-1}(W u_{\lambda_n}) = 0. \tag{3.3.22}$$

De este modo, tomando límites en (3.3.20), se sigue de (3.3.21) y (3.3.22) que

$$\lim_{n\to\infty} u_{\lambda_n} = u^* \qquad \text{y} \qquad u^* = \mathcal{K}(\lambda_*, u^*) . \tag{3.3.23}$$

Por tanto, u^* es una solución de (3.1.1) para $\lambda = \lambda_*$. Además, ya que $u_{\lambda_n} > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, obtenemos que $u^* \geq 0$. Así, la Proposición 3.3.8 implica que o bien $u^* = 0$ o u^* es fuertemente positiva en Ω. Ahora, teniendo en cuenta que λ_* satisface (3.3.5), a afirmación v) implica que $\lambda = \lambda_*$ no puede ser un valor de bifurcación a soluciones positivas de (3.1.1) desde la rama trivial $(\lambda, u) = (\lambda, 0)$. De este modo, $u^* > 0$ y de la unicidad de la solución positiva de (3.1.1), se sigue que $u^* = u_{\lambda_*}$. Por tanto, gracias a (1.1.6) se infiere que

$$\lim_{n\to\infty} u_{\lambda_n} = u_{\lambda_*} \qquad \text{en} \qquad \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}).$$

Ya que este argumento se aplica a lo largo de cualquier subsucesión, la continuidad de la aplicación $\lambda \to u_\lambda$ está desmostrada.

Ahora probamos el carácter creciente de la aplicación (3.3.6) cuando $W > 0$ en Ω. En efecto, por diferenciación con respecto a λ se obtiene

$$\begin{cases} D_u\mathcal{F}(\lambda, u_\lambda)\frac{d}{d\lambda}u_\lambda = Wu_\lambda > 0 & \text{en} \quad \Omega \\ \mathcal{B}(b)\frac{d}{d\lambda}u_\lambda = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Además, argumentando como en la prueba de Parte ii), obtenemos que

$$\sigma_1^\Omega[D_u\mathcal{F}(\lambda, u_\lambda), \mathcal{B}(b)] > 0$$

y por ello, se sigue el principio del máximo que $\frac{d}{d\lambda}u_\lambda$ es fuertemente positiva en Ω. Por tanto, la aplicación $\lambda \to u_\lambda$ es puntualmente creciente. Este argumento puede ser fácilmente adaptado para probar el correspondiente resultado cuando $W < 0$.

(iv) Razonaremos por reducción al absurdo. Si existe un subconjunto compacto D de $\Lambda(a, f)$ tal que las soluciones positivas de (3.1.1) no están acotadas en $L_\infty(\Omega)$ en D, entonces existen una subsucesión $(\lambda_n, u_{\lambda_n})$, $\lambda_n \in D$, $n \in \mathbb{N}$, de soluciones positivas de (3.1.1) y un $\lambda^* \in D$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda^*, \qquad \lim_{n\to\infty} \|u_{\lambda_n}\|_{L_\infty(\Omega)} = \infty. \tag{3.3.24}$$

Además, ya que $\lambda^* \in D \subset \Lambda(a, f)$, existe una función $u_{\lambda^*} > 0$ tal que $(\lambda^*, u_{\lambda^*})$ es una solución positiva de (3.1.1) y gracias a i), u_{λ^*} es la única solución positiva de (3.1.1) para $\lambda = \lambda^*$. Entonces, por la continuidad de la rama de soluciones positivas en un entorno de λ^* (cf. iii)) y gracias a la unicidad de la solución positiva, se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda_n, u_{\lambda_n}) = (\lambda^*, u_{\lambda^*}) \qquad \text{en} \qquad \mathbb{R} \times \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}).$$

Esto contradice (3.3.24) y completa la demostración.

v) Esta afirmación será demostrada en un contexto más general en el Teorema 3.3.10-iv).

vi) En efecto, supongamos (3.3.5) y sea λ_0 verificando (3.3.7). Entonces, gracias a (3.1.14) y debido a la concavidad de la aplicación $\Sigma_0(\lambda)$ (cf. Teorema 2.11.1-a)), existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que o bien

$$\tilde{\Sigma}(\lambda) < 0 < \Sigma_0(\lambda) \quad \text{para cada} \quad \lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon) \tag{3.3.25}$$

o

$$\tilde{\Sigma}(\lambda) < 0 < \Sigma_0(\lambda) \quad \text{para cada} \quad \lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0). \tag{3.3.26}$$

Supongamos que (3.3.25) es satisfecho. Entonces, por el Teorema 3.2.4 tenemos que

$$(\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon) \subset \Lambda(a, f). \tag{3.3.27}$$

Así, si asumimos que (3.3.8) falla, existe una constante $C > 0$ y una sucesión $(\lambda_n, u_{\lambda_n})$ de soluciones positivas de (3.1.1) con $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda_0\,, \qquad \|u_{\lambda_n}\|_{L_\infty(\Omega)} \leq C\,, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.3.28}$$

Entonces, gracias a las estimaciones L_p–elípticas de Agmon, Douglis & Nirenberg (cf. [2]), para cada $p > N$ uno puede adaptar el argumento de la prueba de Parte *iii*) para mostrar la existencia de $u^* \in W_p^2(\Omega)$ satisfaciendo

$$\lim_{n\to\infty} u_{\lambda_n} = u^* \qquad \text{en} \qquad W_p^2(\Omega)$$

y

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\lambda_0)u^* + a(x)f(x,u^*)u^* = 0 & \text{en } \Omega\,, \\ \mathcal{B}(b)u^* = 0 & \text{en } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Ya que $u_{\lambda_n} > 0$, $n \in \mathbb{N}$, necesariamente (λ_0, u^*) es una solución no negativa de (3.1.1). Supongamos $u^* > 0$ en Ω. Entonces, por la unicidad del autovalor principal y gracias a la Proposición 2.2.2, obtenemos que

$$0 = \sigma_1^\Omega[\mathcal{L}(\lambda_0) + a(x)f(x,u^*), \mathcal{B}(b)] < \Sigma_0(\lambda_0)$$

y esto contadice (3.3.7). Entonces, necesariamente $u^* = 0$. De este modo, λ_0 es un valor de bifurcación a soluciones positivas de (3.1.1) desde la rama trivial y Parte *v*) y (3.1.14) implican que

$$0 = \tilde{\Sigma}(\lambda_0) < \Sigma_0(\lambda_0)\,,$$

lo cual, de nuevo, es una contradicción con (3.3.7). Por tanto, (3.3.8) se verifica. Esto concluye la demostración bajo condición (3.3.25). Este argumento puede ser fácilmente adaptado para completar los detalles de la prueba en el caso (3.3.26). □

Nota 3.3.3 *Debe ser destacado que para obtener la unicidad de la solución positiva del problema* (3.1.1), *la condición* (3.1.8) *sobre* $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_a^0$ *no es necesitada.*

Argumentando como en la demostración del Teorema 3.3.2 en el caso particular cuando $a \in \mathcal{A}^+(\Omega)$, es decir, cuando $a \in \mathcal{A}(\Omega)$ y $\Omega_a^0 = \emptyset$, gracias al Teorema 3.2.8, se obtiene fácilmente el siguiente resultado.

Teorema 3.3.4 *Supongamos* (3.2.56) *y que* $a \in \mathcal{A}^+(\Omega)$. *Entonces,* (3.1.1) *posee una solución positiva si, y sólamente si,*

$$\tilde{\Sigma}(\lambda) < 0.$$

Además, la solución positiva es única si existe.

Nota 3.3.5 *Debe ser destacado que en el Teorema 3.3.4 no es requerida la condición* (3.1.8) *sobre* Γ_1.

En los próximos cuatro resultados, extenderemos la teoría de [19] y [20] a nuestro marco general, estimando el subconjunto de λ's para los cuales (3.1.1) admite una solución positiva. En la demostración de cada uno de ellos, adoptaremos la siguiente notación

$$\hat{\Sigma}(\lambda,f) := \sigma_1^\Omega[\mathcal{L}(\lambda)+a(x)I_f(x),\mathcal{B}(b)]\,, \qquad \tilde{\Sigma}(\lambda,f) := \sigma_1^\Omega[\mathcal{L}(\lambda)+a(x)f(x,0),\mathcal{B}(b)]\,,$$

para señalar así la dependencia en f de las aplicaciones $\hat{\Sigma}(\lambda)$ y $\tilde{\Sigma}(\lambda)$.

Teorema 3.3.6 *Bajo las condiciones generales de la introducción, las soluciones positivas de* (3.1.1) *están uniformemente acotadas en* $L_\infty(\Omega)$ *en cada subconjunto compacto de* $\hat{\Lambda}(a,f)$. *En particular, para cada subconjunto compacto* D *de* $\hat{\Lambda}(a,f)$ *con* $D\cap\Lambda(a,f)\neq\emptyset$ *y cada* $p>1$, *existe una constante* $C(D,p)$ *tal que*

$$\|u_\lambda^i\|_{W_p^2(\Omega)} \leq C(D,p) \qquad \textit{para todo} \qquad (\lambda,i)\in(D\cap\Lambda(a,f))\times\mathcal{J}(\lambda)\,.$$

Demostración: En un principio mostraremos la existencia de cotas a priori uniformes para las soluciones positivas de (3.1.1) en cada subconjunto compacto de $\hat{\Lambda}(a,f)$. En efecto, ya que $f(x,u)$ satisface (3.1.9), se sigue del Lema 3.3.1 que existe $g\in\mathcal{C}^1([0,\infty),\mathbf{R})$ verificando (3.3.1), (3.3.2) y (3.3.3). Ahora, para cada $\lambda\in\Lambda(a,g)$ consideramos el siguiente problema sublineal de valores en la frontera de tipo mixto

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\lambda)u+a(x)g(u)u=0 & \text{en } \Omega\,,\\ \mathcal{B}(b)u=0 & \text{en } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{3.3.29}$$

Gracias al Teorema 3.3.2-i), ya es sabido que el problema (3.3.29) posee una única solución positiva para cada $\lambda\in\Lambda(a,g)$, la cual en lo sucesivo será denotada por $\theta_{[\lambda,g]}$. Además,

$$\Lambda(a,g)=\{\,\lambda\in\mathbf{R}\;:\;\tilde{\Sigma}(\lambda,g)<0<\Sigma_0(\lambda)\,\}\,. \tag{3.3.30}$$

Ahora afirmamos que

$$\hat{\Lambda}(a,f)\subset\Lambda(a,g). \tag{3.3.31}$$

En efecto, si $\lambda\in\hat{\Lambda}(a,f)$ entonces

$$\hat{\Sigma}(\lambda,f)\leq 0<\Sigma_0(\lambda). \tag{3.3.32}$$

Además, debido a (3.3.3) y ya que $a>0$, tenemos que

$$a(x)g(0)\leq a(x)I_f(x) \quad \forall\, x\in\Omega\,.$$

De hecho, en cualquier $x\in\Omega_a^+$ la desigualdad previa es estricta. De este modo, por la monotonía del autovalor principal con respecto al potencial, obtenemos que

$$\tilde{\Sigma}(\lambda,g)=\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}(\lambda)+a(x)g(0),\mathcal{B}(b)]<\hat{\Sigma}(\lambda,f);$$

y por eso, (3.3.32) implica

$$\tilde{\Sigma}(\lambda, g) < 0 < \Sigma_0(\lambda).$$

Por ello, se sigue de (3.3.30) que $\lambda \in \Lambda(a,g)$. Esto completa la prueba de (3.3.31).

Ahora, para cada $\lambda \in \Lambda(a,f)$, $\mathcal{J}(\lambda)$ representará cualquier conjunto tal que $\{ u_\lambda^i \ : \ i \in \mathcal{J}(\lambda) \}$ nos proporcione el conjunto de soluciones positivas de (3.1.1).

Ahora afirmamos que para cada $\lambda \in \Lambda(a,f)$ se desprende lo siguiente

$$u_\lambda^i \leq \theta_{[\lambda,g]}, \qquad \text{para todo} \qquad i \in \mathcal{J}(\lambda). \tag{3.3.33}$$

En efecto, sea $(\lambda, i) \in \Lambda(a,f) \times \mathcal{J}(\lambda)$. Entonces, (3.3.31) implica que $\lambda \in \Lambda(a,g)$ y por tanto, existe una única solución positiva $\theta_{[\lambda,g]}$ de (3.3.29). Además, gracias a (3.3.2) la función u_λ^i satisface

$$0 = \mathcal{L}(\lambda)u_\lambda^i + a(x)f(x,u_\lambda^i)u_\lambda^i \geq \mathcal{L}(\lambda)u_\lambda^i + a(x)g(u_\lambda^i)u_\lambda^i \qquad \text{en} \qquad \Omega\,,$$

y

$$\mathcal{B}(b)u_\lambda^i = 0 \qquad \text{en} \qquad \partial\Omega.$$

Así, para cada $i \in \mathcal{J}(\lambda)$, u_λ^i es una subsolución positiva de (3.3.29) y por tanto, por la unicidad de la solución positiva de (3.3.29) (cf. Teorema 3.3.2-i)) y el principio del máximo fuerte, (3.3.33) se verifica para cada $\lambda \in \Lambda(a,f)$ (cf. [38, Proposición 5.5]).

Sea D un subconjunto compacto de $\hat{\Lambda}(a,f)$ tal que $D \cap \Lambda(a,f) \neq \emptyset$. Por (3.3.31), D es un subconjunto compacto de $\Lambda(a,g)$ y gracias al Teorema 3.3.2-iv), existe $M(D) > 0$ tal que

$$\|\theta_{[\lambda,g]}\|_{L_\infty(\Omega)} \leq M(D) \qquad \text{para cualquier} \qquad \lambda \in D. \tag{3.3.34}$$

Por tanto, si existe una sucesión de soluciones positivas de (3.1.1), $(\lambda_n, u_{\lambda_n}^i)$, con $\lambda_n \in D \cap \Lambda(a,f)$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathcal{J}(\lambda_n)$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_{\lambda_n}^i\|_{L_\infty(\Omega)} = \infty\,,$$

obtenemos además por (3.3.33) que

$$\lim_{n\to\infty} \|\theta_{[\lambda_n,g]}\|_{L_\infty(\Omega)} = \infty\,,$$

lo cual contradice (3.3.34). Esto completa la demostración de la existencia de cotas a priori uniformes en L_∞ para las soluciones positivas de (3.1.1) en cada subconjunto compacto D de $\hat{\Lambda}(a,f)$ con $D \cap \Lambda(a,f) \neq \emptyset$.

Ahora, ya que

$$\|u_\lambda^i\|_{L_\infty(\Omega)} \leq M(D) \qquad \text{para cualquier } (\lambda, i) \in (D \cap \Lambda(a,f)) \times \mathcal{J}(\lambda)$$

y u_λ es una solución de (3.1.1), existe una constante $\tilde{M}(D)$ tal que

$$\|\mathcal{L}u_\lambda^i\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \tilde{M}(D) \qquad \text{para cualquier } (\lambda, i) \in (D \cap \Lambda(a,f)) \times \mathcal{J}(\lambda).$$

De este modo, para cada $p > 1$ existe una constante $\hat{M}(D,p)$ tal que

$$\|\mathcal{L}u_\lambda^i\|_{L_p(\Omega)} \leq \hat{M}(D,p) \qquad \text{para cualquier } (\lambda, i) \in (D \cap \Lambda(a,f)) \times \mathcal{J}(\lambda)$$

y por las estimaciones elípticas L_p de Agmon, Douglis y Nirenberg (cf. [2]), se sigue la existencia de una constante $C(D,p) > 0$ tal que

$$\|u_\lambda^i\|_{W_p^2(\Omega)} \leq C(D,p) \qquad \text{para cualquier } (\lambda, i) \in (D \cap \Lambda(a,f)) \times \mathcal{J}(\lambda)\,.$$

Esto concluye la demostración del resultado. □

Proposición 3.3.7 *Supongamos que*

$$\inf \Lambda(a,f) = -\infty. \tag{3.3.35}$$

Entonces,

$$\sup_D W \geq 0 \tag{3.3.36}$$

en cada subconjunto abierto D de Ω_a^0. Además,

a) Si $W > 0$ en Ω, entonces existe $C \geq 0$ tal que

$$\limsup_{\lambda \searrow -\infty} \|u_\lambda^i\|_{L_\infty(\Omega)} \leq C\,, \qquad i \in \mathcal{J}(\lambda).$$

b) Si existe un subconjunto abierto $D_- \subset \Omega \setminus \Omega_a^0$ para el cual $\sup_{D_-} W < 0$, *entonces*

$$\liminf_{\lambda \searrow -\infty} \|u_\lambda^i\|_{L_\infty(\Omega)} = +\infty\,, \qquad i \in \mathcal{J}(\lambda).$$

Demostración: En efecto, si existe un subconjunto abierto $D \subset \Omega_a^0$ tal que

$$\sup_D W < 0,$$

entonces por el Teorema 2.11.1-c) tenemos que

$$\lim_{\lambda \searrow -\infty} \Sigma_0(\lambda) = -\infty,$$

y por ello

$$\inf\{\lambda \in \mathbf{R} \;:\; \Sigma_0(\lambda) > 0\} \in \mathbf{R}\,.$$

Además, gracias a la Proposición 3.2.3,

$$\Lambda(a,f) \subset \{\lambda \in \mathbf{R} \;:\; \Sigma_0(\lambda) > 0\}$$

y por tanto,

$$\inf \Lambda(a,f) \in \mathbf{R}\,,$$

lo cual contradice (3.3.35). Esto concluye la prueba de (3.3.36).

Ahora probamos Parte a). Observar que, gracias al Lema 3.3.1, existe $g \in C^1([0,\infty),\mathbf{R})$ satisfaciendo (3.3.1) y (3.3.2). Entonces, considerando el problema (3.3.29) y argumentando como en la demostración del Teorema 3.3.6, obtenemos (3.3.31). En particular, se sigue de (3.3.35) que

$$\inf \Lambda(a,g) = -\infty.$$

Para probar Parte a) razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que existe una sucesión $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Lambda(a,f)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = -\infty\,, \qquad \sup_{n\in\mathbf{N}} \|u^i_{\lambda_n}\|_{L_\infty(\Omega)} = \infty\,, \quad i \in \mathcal{J}(\lambda_n). \tag{3.3.37}$$

Observar que (3.3.31) implica

$$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Lambda(a,g)$$

y por eso, por la unicidad de la solución positiva de (3.3.29), para cada λ_n existe una única solución positiva de (3.3.29), denotada por $\theta_{[\lambda_n,g]}$. Además, ya que $W > 0$ en Ω, se sigue del Teorema 3.3.2-iii) que la aplicación $\lambda \to \|\theta_{[\lambda_n,g]}\|_{L_\infty(\Omega)}$ es creciente y por ello, existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \|\theta_{[\lambda_n,g]}\|_{L_\infty(\Omega)} = \|\theta_{[\lambda^*,g]}\|_{L_\infty(\Omega)} = C > 0\,, \tag{3.3.38}$$

donde $\lambda^* := \max_{n\in\mathbf{N}}\{\lambda_n\}$. Ahora, argumentando como en la prueba del Teorema 3.3.6, se obtiene que

$$\|u^i_{\lambda_n}\|_{L_\infty(\Omega)} \le \|\theta_{[\lambda_n,g]}\|_{L_\infty(\Omega)} \qquad \forall\, n \in \mathbf{N}\,, \quad \text{para cada} \quad (n,i) \in \mathbf{N}\times\mathcal{J}(\lambda_n)\,.$$

De este modo, teniendo en cuenta (3.3.38), obtenemos que

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \|u^i_{\lambda_n}\|_{L_\infty(\Omega)} \le \sup_{n\in\mathbf{N}} \|\theta_{[\lambda_n,g]}\|_{L_\infty(\Omega)} = C > 0\,,$$

lo cual contradice (3.3.37). Esta contradicción concluye la demostración de Parte a).

Ahora probamos Parte b). Razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que existe un subconjunto $D_- \subset \Omega \setminus \Omega^0_a$ para el cual $\sup_{D_-} W < 0$, $C \ge 0$ y una sucesión $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Lambda(a,f)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = -\infty\,, \qquad \sup_{n\in\mathbf{N}} \|u^i_{\lambda_n}\|_{L_\infty(\Omega)} \le C\,, \quad i \in \mathcal{J}(\lambda_n)\,.$$

Entonces, ya que $f \in C^1(\bar\Omega \times [0,\infty),\mathbf{R})$, tenemos que

$$f(x,u^i_{\lambda_n}) \le \|f\|_{L_\infty(\bar\Omega\times[0,C])} := M \ge 0\,, \quad \text{para cualquier} \quad (n,i) \in \mathbf{N}\times\mathcal{J}(\lambda_n)\,. \tag{3.3.39}$$

De este modo, teniendo en cuenta (3.3.39), gracias a la unicidad del autovalor principal y a su monotonía con respecto al potencial, se desprende la siguiente estimación para cada $n \in \mathbb{N}$

$$0 = \sigma_1^{\Omega}[\mathcal{L} - \lambda_n W + a(x)f(x, u^i_{\lambda_n}), \mathcal{B}(b)] \leq \sigma_1^{\Omega}[\mathcal{L} + a(x)M - \lambda_n W, \mathcal{B}(b)], \quad i \in \mathcal{J}(\lambda_n). \quad (3.3.40)$$

Por ello, se sigue del Teorema 2.11.1-c), que

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_1^{\Omega}[\mathcal{L} + a(x)M - \lambda_n W, \mathcal{B}(b)] = -\infty,$$

lo cual contradice (3.3.40). Esto completa la prueba de Parte *b*) y concluye la demostración de la proposición. □

Adaptando el argumento de la demostración de la Proposición 3.3.7 y usando el Teorema 2.11.1-b), en lugar del Teorema 2.11.1-c), se sigue fácilmente el próximo resultado en la línea de la Proposición 3.3.7 para el caso en el que $\sup \Lambda(a, f) = \infty$.

Proposición 3.3.8 *Supongamos*

$$\sup \Lambda(a, f) = \infty.$$

Entonces,

$$\inf_D W \leq 0$$

en cada subconjunto abierto D de Ω_a^0. Además,

a) Si $W < 0$ en Ω, entonces existe $C \geq 0$ tal que

$$\limsup_{\lambda \nearrow \infty} \|u^i_\lambda\|_{L_\infty(\Omega)} \leq C, \qquad i \in \mathcal{J}(\lambda).$$

b) Si existe un subconjunto abierto $D_+ \subset \Omega \setminus \Omega_a^0$ para el cual $\inf_{D_+} W > 0$, entonces

$$\liminf_{\lambda \nearrow \infty} \|u^i_\lambda\|_{L_\infty(\Omega)} = +\infty, \qquad i \in \mathcal{J}(\lambda).$$

Teorema 3.3.9 *Sea λ_0 tal que $\Sigma_0(\lambda_0) = 0$ y $\{u^i_\lambda\}$ cualquier familia de soluciones positivas de* (3.1.1) *con $(\lambda, i) \in \Lambda(a, f) \times \mathcal{J}(\lambda)$. Entonces,*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \|u^i_\lambda\|_{L_\infty(\Omega)} = \infty, \qquad i \in \mathcal{J}(\lambda).$$

En particular, λ_0 es un valor de bifurcación desde infinito a soluciones positivas de (3.1.1).

Demostración: En efecto, ya que $f(x, u)$ satisface (3.1.9), se sigue del Lema 3.3.1 que existe $h \in \mathcal{C}^1([0, \infty), \mathbb{R})$ satisfaciendo (3.3.1) y (3.3.2). Ahora, para cada $\lambda \in \Lambda(a, h)$ consideramos el siguiente problema sublineal de valores en la frontera de tipo mixto

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\lambda)u + a(x)h(u)u = 0 & \text{en } \Omega, \\ \mathcal{B}(b)u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.3.41)$$

Gracias al Teorema 3.3.2-i), el problema (3.3.41) posee una única solución positiva para cada $\lambda \in \Lambda(a,h)$, la cual en lo sucesivo será denotada por $\theta_{[\lambda,h]}$, y

$$\Lambda(a,h) = \{\, \lambda \;:\; \tilde{\Sigma}(\lambda,h) < 0 < \Sigma_0(\lambda)\,\}. \tag{3.3.42}$$

Ahora afirmamos que

$$\Lambda(a,h) \subset \Lambda(a,f)\,. \tag{3.3.43}$$

En efecto, (3.3.2) implica

$$f(x,0) < h(0) \qquad \text{para cada} \qquad x \in \Omega\,,$$

y por ello,

$$a(x)f(x,0) \le a(x)h(0) \qquad \text{para cada} \qquad x \in \Omega\,,$$

ya que $a > 0$. Además, para cada $x \in \Omega_a^+$ la desigualdad previa es estricta. Entonces, por la monotonía del autovalor principal con respecto al potencial, se sigue que

$$\tilde{\Sigma}(\lambda,f) < \sigma_1^{\Omega}[\mathcal{L}(\lambda) + a(x)h(0), \mathcal{B}(b)] = \tilde{\Sigma}(\lambda,h).$$

De este modo, teniendo en cuenta (3.3.42), para cada $\lambda \in \Lambda(a,h)$

$$\tilde{\Sigma}(\lambda,f) < 0 < \Sigma_0(\lambda)\,.$$

Ahora el Teorema 3.2.4 completa la prueba de (3.3.43). Ahora ya disponemos de los resultados necesarios para demostrar el terorema.

Gracias al Teorema 3.2.4,

$$\lambda_0 \in \partial\Lambda(a,f) \cap \partial\Lambda(a,h) \neq \emptyset\,.$$

Además, por la continuidad y concavidad de $\Sigma_0(\lambda)$ y $\tilde{\Sigma}(\lambda)$ (cf. Teorema 2.11.1-a)) se sigue de (3.1.14) que existe $\varepsilon > 0$ tal que o bien

$$\tilde{\Sigma}(\lambda,h) < 0 < \Sigma_0(\lambda)$$

es satisfecho para cada $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0)$, o es satisfecho para cada $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$. Por eso, el Teorema 3.3.2-i) y (3.3.43) implican que o bien

$$(\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0) \subset \Lambda(a,h) \subset \Lambda(a,f)\,, \tag{3.3.44}$$

o

$$(\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon) \subset \Lambda(a,h) \subset \Lambda(a,f). \tag{3.3.45}$$

Sin pérdida de ganeralidad supongamos (3.3.44) y denotemos por $\mathcal{J}(\lambda)$ a la familia tal que (λ, u) es una solución positiva de (3.1.1) si, y sólamente si, $u = u_\lambda^i$ para algún $i \in \mathcal{J}(\lambda)$. Fijemos $(\lambda, i) \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0) \times \mathcal{J}(\lambda) \subset \Lambda(a,f) \times \mathcal{J}(\lambda)$. Se sigue de (3.3.2) que la función u_λ^i satisface

$$0 = \mathcal{L}(\lambda)u_\lambda^i + a(x)f(x,u_\lambda^i)u_\lambda^i \le \mathcal{L}(\lambda)u_\lambda^i + a(x)h(u_\lambda^i)u_\lambda^i \qquad \text{en} \qquad \Omega\,,$$

y
$$\mathcal{B}(b)u_\lambda^i = 0 \qquad \text{en} \qquad \partial\Omega.$$

Así, para cada $i \in \mathcal{J}(\lambda)$, u_λ^i es una supersolución positiva de (3.3.41) y debido a la unicidad de solución positiva de (3.3.41) (cf. Teorema 3.3.2-i)), se sigue del principio del máximo que

$$u_\lambda^i \geq \theta_{[\lambda,h]}\,, \qquad \text{para cada} \qquad i \in \mathcal{J}(\lambda)\,,$$

(cf. [38, Proposición 5.5]). De este modo,

$$\|\theta_{[\lambda,h]}\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \|u_\lambda^i\|_{L_\infty(\Omega)} \quad \text{para cada} \quad (\lambda, i) \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0) \times \mathcal{J}(\lambda)\,. \tag{3.3.46}$$

Además, gracias al Teorema 3.3.2-vi), se verifica lo siguiente

$$\lim_{\lambda \nearrow \lambda_0^-} \|\theta_{[\lambda,h]}\|_{L_\infty(\Omega)} = +\infty\,.$$

Por tanto, se sigue de (3.3.46) que

$$\lim_{\lambda \nearrow \lambda_0^-} \|u_\lambda^i\|_{L_\infty(\Omega)} = +\infty, \qquad i \in \mathcal{J}(\lambda).$$

Esto concluye la demostración del teorema bajo condición (3.3.44). Este argumento puede ser fácilmente adaptado para completar los detalles de la desmostración en el caso (3.3.45). Esto concluye la demostración del teorema. □

En el próximo resultado, analizamos el conjunto de valores de bifurcación a soluciones positivas de (3.1.1) desde la rama trivial $(\lambda, u) = (\lambda, 0)$.

Teorema 3.3.10 *Sea*
$$\mathcal{O} := \{\,\lambda \in \mathbf{R}\ :\ \tilde{\Sigma}(\lambda) = 0\,\}\,,$$
y asumamos que W satisface o bien a) o b) o c) del Teorema 2.11.3. Entonces, las siguientes afirmaciones son ciertas:

i) Si $\tilde{\lambda}_0$ es un valor de bifurcación a soluciones positivas de (3.1.1) *desde la rama trivial $(\lambda, u) = (\lambda, 0)$, entonces $\tilde{\lambda}_0 \in \mathcal{O}$.*

ii) Si $\tilde{\lambda}_0 \in \mathcal{O}$ y
$$\tilde{\Sigma}'(\tilde{\lambda}_0) \neq 0\,, \tag{3.3.47}$$
entonces $\tilde{\lambda}_0$ es un valor de bifurcación a soluciones positivas de (3.1.1) *desde la rama trivial. Además, si denotamos por $(\tilde{\Sigma}(\tilde{\lambda}_0), \tilde{\varphi}_0)$ al auto-par principal de $(\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\lambda}_0), \mathcal{B}(b), \Omega)$ y por $\mathcal{Y}$ a cualquier complemente de span $[\tilde{\varphi}_0]$ en $\mathcal{U}$, entonces existe $\varepsilon > 0$ y una función diferenciable*

$$(\tilde{\lambda}(s), y(s))\ :\ (-\varepsilon, \varepsilon)\ \rightarrow\ \mathbf{R} \times \mathcal{Y} \tag{3.3.48}$$

tal que $((\tilde{\lambda}(0), y(0)) = (\tilde{\lambda}_0, 0)$ y la curva $(\tilde{\lambda}(s), u(s))$ definida por

$$\tilde{\lambda}(s) = \tilde{\lambda}_0 + \mathcal{D}(\tilde{\lambda}_0)s + o(s)\,, \qquad u(s) = s(\tilde{\varphi}_0 + y(s))\,, \qquad s \in (-\varepsilon, \varepsilon)\,, \tag{3.3.49}$$

con $\mathcal{D}(\tilde{\lambda}_0) := \tilde{\lambda}'(0)$*, es una curva de soluciones de* (3.1.1) *para* $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$*. Además, existe un entorno* $\mathcal{Z}$ *de* $(\tilde{\lambda}_0, 0)$ *en* $\mathbf{R} \times \mathcal{U}$ *tal que* $(\lambda, u) \in \mathcal{Z}$ *es una solución positiva de* (3.1.1) *si, y sólamente si,* $(\lambda, u) = (\tilde{\lambda}(s), u(s))$ *para algún* $s \in (0, \delta)$ *con* $\delta \le \varepsilon$.

Además, (3.3.47) *se verifica si, y sólamente si,*

$$\int_\Omega W \tilde{\varphi}_0 \tilde{\varphi}_0^* \neq 0\,, \tag{3.3.50}$$

donde $\tilde{\varphi}_0^* > 0$ *representa la autofunción principal del operador adjunto* $\tilde{\mathcal{L}}^*(\tilde{\lambda}_0)$ *de* $\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\lambda}_0)$*, y en este caso*

$$\mathcal{D}(\tilde{\lambda}_0) = \frac{\int_{\Omega_a^+} a(x) \partial_u f(x, 0) \tilde{\varphi}_0^2 \tilde{\varphi}_0^*}{\int_\Omega W \tilde{\varphi}_0 \tilde{\varphi}_0^*}. \tag{3.3.51}$$

iii) Sea $\tilde{\lambda}_0 \in \mathcal{O}$ *tal que* $\tilde{\Sigma}'(\tilde{\lambda}_0) = 0$ *y supongamos que* (3.1.1) *no posee ninguna solución positiva en* $\lambda = \tilde{\lambda}_0$*. Entonces,* $\tilde{\lambda}_0$ *es un valor de bifurcación a soluciones positivas de* (3.1.1) *desde la rama trivial* $(\lambda, u) = (\lambda, 0)$.

iv) Supongamos además que

$$\partial_u f(x, u) > 0 \qquad \textit{para cada} \qquad (x, u) \in \Omega \times (0, \infty)\,. \tag{3.3.52}$$

Entonces, $\tilde{\lambda}_0 \in \mathbf{R}$ *es un valor de bifurcación a soluciones positivas de* (3.1.1) *desde la rama trivial* $(\lambda, u) = (\lambda, 0)$ *si, y sólamente si,* $\tilde{\lambda}_0 \in \mathcal{O}$.

Demostración: Las soluciones positivas de (3.1.1) son los ceros del operador

$$\mathcal{H} : \mathbf{R} \times \mathcal{U}^+ \to \mathcal{U}\,,$$

definido por

$$\mathcal{H}(\lambda, u) := u - (\mathcal{L} + M)^{-1}[(\lambda W(\cdot) + M)\mathcal{J}u - a(\cdot) f(\cdot, \mathcal{J}u)\mathcal{J}u]\,,$$

donde $\mathcal{J} : \mathcal{U}^+ \hookrightarrow L_p(\Omega)$ es el operador inclución, el cual es compacto, y

$$M > -\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b)]\,.$$

Además,

$$\mathcal{H}(\lambda, 0) = 0 \qquad \text{para cada} \qquad \lambda \in \mathbf{R}$$

y

$$D_u \mathcal{H}(\lambda, 0) := \mathcal{I} - \mathcal{T}(\lambda)\,;$$

donde para cada $\lambda \in \mathbf{R}$, $\mathcal{T}(\lambda) : \mathcal{U}^+ \to \mathcal{U}$ es el operador definidō por

$$\mathcal{T}(\lambda) := (\mathcal{L} + M)^{-1}[\lambda W(\cdot) + M - a(\cdot) f(\cdot, 0)]\mathcal{J}$$

e $\mathcal{I}$ es el operador identidad en $\mathcal{U}^+$. También,

$$D_{u\lambda} \mathcal{H}(\lambda, 0) := -(\mathcal{L} + M)^{-1} W\,.$$

Gracias a la compacidad de $\mathcal{T}(\lambda)$ considerado como un operador en $\mathcal{U}^+$, para cada $\lambda \in \mathbf{R}$ tenemos que el operador $D_u\mathcal{H}(\lambda,0)$ es un operador de Fredholm de índice 0. Además,

$$N\,[D_u\mathcal{H}(\lambda,0)] = N\,[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)].$$

Ahora probamos i). En efecto, si $\tilde{\lambda}_0$ es un valor de bifurcación a soluciones positivas de (3.1.1) desde la rama trivial $(\lambda,u) = (\lambda,0)$, necesariamente $\dim N[\mathcal{D}_u\mathcal{H}(\tilde{\lambda}_0,0)] \geq 1$ y por eso,

$$N\,[\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\lambda}_0)] \neq 0\,.$$

Así, se sigue de la unicidad del auto-par principal del problema $(\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\lambda}_0), \mathcal{B}(b), \Omega)$, que $\tilde{\Sigma}(\tilde{\lambda}_0) = 0$ y por tanto, i) está probado.

ii) Sea $\tilde{\lambda}_0 \in \mathcal{O}$ satisfaciendo (3.3.47). En este caso, se sigue del Teorema 2.11.3 que $\tilde{\lambda}_0$ es un autovalor simple de de $(\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\lambda}_0), W, \mathcal{B}(b), \Omega)$ en el sentido de la Definición 1.2.3. Por eso, si $\tilde{\varphi}_0$ denota la autofunción principal de $\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\lambda}_0)$ asociada con $\tilde{\Sigma}(\tilde{\lambda}_0) = 0$, entonces

$$N\,[D_u\mathcal{H}(\tilde{\lambda}_0,0)] = N\,[\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\lambda}_0)] = \mathrm{span}[\tilde{\varphi}_0] \tag{3.3.53}$$

y

$$W\tilde{\varphi}_0 \notin R\,[\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\lambda}_0)]. \tag{3.3.54}$$

Además,

$$D_{u\lambda}\mathcal{H}(\tilde{\lambda}_0,0)\tilde{\varphi}_0 \notin R\,[D_u\mathcal{H}(\tilde{\lambda}_0,0)]\,; \tag{3.3.55}$$

porque si (3.3.55) no es satisfecho, entonces $W\tilde{\varphi}_0 \in R\,[\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\lambda}_0)]$ y esto contradice (3.3.54). Así, debido al hecho de que $D_u\mathcal{H}(\tilde{\lambda}_0,0)$ es un operador de Fredholm de índice 0 y gracias a (3.3.53), (3.3.55), obtenemos que

$$\dim N[D_u\mathcal{H}(\tilde{\lambda}_0,0)] = \mathrm{codim}\, R[D_u\mathcal{H}(\tilde{\lambda}_0,0)] = 1$$

y

$$D_{\lambda u}\mathcal{H}(\tilde{\lambda}_0,0)\tilde{\varphi}_0 \notin R\,[D_u\mathcal{H}(\tilde{\lambda}_0,0)]\,.$$

Por tanto, 0 es un $D_{\lambda u}\mathcal{H}(\tilde{\lambda}_0,0)-$autovalor simple de $D_u\mathcal{H}(\tilde{\lambda}_0,0)$ y [14, Lema 1.1] implica que $\tilde{\lambda}_0$ es un valor de bifurcación a soluciones positivas de (3.1.1) desde la rama trivial $(\lambda,u) = (\lambda,0)$ y todas las afirmaciones sobre la aplicación (3.3.48) y la curva (3.3.49) son satisfechas.

Ahora probamos que (3.3.47) se verifica si, y sólamente si, (3.3.50) es satisfecho. En efecto, denotemos por $\tilde{\varphi}(\lambda)$ a la autofunción principal asociada con $\tilde{\Sigma}(\lambda)$, normalizada tal que

$$\int_\Omega \tilde{\varphi}^2(\lambda) = 1.$$

Ya es conocido que $\tilde{\Sigma}(\lambda)$ es real holomorfa, y por ello diferenciando la relación

$$\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)\tilde{\varphi}(\lambda) = \tilde{\Sigma}(\lambda)\tilde{\varphi}(\lambda)$$

con respecto a λ, se obtiene

$$\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)\tilde{\varphi}'(\lambda) - W\tilde{\varphi}(\lambda) = \tilde{\Sigma}'(\lambda)\varphi(\lambda) + \tilde{\Sigma}(\lambda)\tilde{\varphi}'(\lambda).$$

Así, definiendo

$$\tilde{\varphi}_0 := \tilde{\varphi}(\tilde{\lambda}_0), \qquad \tilde{\varphi}_0' := \tilde{\varphi}'(\tilde{\lambda}_0),$$

obtenemos que

$$\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\lambda}_0)\tilde{\varphi}_0' = W\tilde{\varphi}_0 + \tilde{\Sigma}'(\tilde{\lambda}_0)\tilde{\varphi}_0, \tag{3.3.56}$$

ya que, por definición, $\tilde{\Sigma}(\tilde{\lambda}_0) = 0$. De este modo, multiplicando (3.3.56) por $\tilde{\varphi}_0^*$ e integrando por partes en Ω, se sigue que

$$\int_\Omega W\tilde{\varphi}_0\tilde{\varphi}_0^* = -\tilde{\Sigma}'(\tilde{\lambda}_0)\int_\Omega \tilde{\varphi}_0\tilde{\varphi}_0^*. \tag{3.3.57}$$

Por eso, ya que $\int_\Omega \tilde{\varphi}_0\tilde{\varphi}_0^* > 0$, (3.3.57) implica el resultado.

Ahora demostramos (3.3.51). En efecto, sustituyendo (3.3.49) en (3.1.1), teniendo en cuenta que $\tilde{\Sigma}(\tilde{\lambda}_0) = 0$ y la definición de $\tilde{\varphi}_0$, identificando términos de primer y segundo orden, se obtiene que

$$\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\lambda}_0)\tilde{\varphi}_0 = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \tag{3.3.58}$$

y

$$\mathcal{D}(\tilde{\lambda}_0)W\tilde{\varphi}_0 = a(x)\partial_u f(x,0)\tilde{\varphi}_0^2. \tag{3.3.59}$$

La condición (3.3.58) no proporciona ninguna información adiccional, pero multiplicando por $\tilde{\varphi}_0{}^*$ en ambos lados de (3.3.59) e integrando en Ω, obtenemos que si la condición (3.3.50) es satisfecha, entonces (3.3.51) se verifica. Esto concluye la demostración de *ii*).

iii) En efecto, si $\tilde{\lambda}_0 \in \mathcal{O}$ y $\tilde{\Sigma}'(\tilde{\lambda}_0) = 0$, entonces se sigue del Teorema 2.11.1 que W satisface las hipótesis del Teorema 2.11.3-c) y por ello, $\tilde{\lambda}_0$ es único y satisface

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \tilde{\Sigma}(\lambda) = \tilde{\Sigma}(\tilde{\lambda}_0) = 0.$$

De este modo, se sigue de (3.1.14) que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\tilde{\Sigma}(\lambda) < 0 < \Sigma_0(\lambda) \qquad \text{para cada} \qquad \lambda \in (\tilde{\lambda}_0 - \varepsilon, \tilde{\lambda}_0 + \varepsilon) \setminus \{\tilde{\lambda}_0\}$$

y por eso,

$$(\tilde{\lambda}_0 - \varepsilon, \tilde{\lambda}_0 + \varepsilon) \subset \hat{\Lambda}(a,f).$$

También, se sigue del Teorema 3.2.4 que

$$(\tilde{\lambda}_0 - \varepsilon, \tilde{\lambda}_0 + \varepsilon) \setminus \{\tilde{\lambda}_0\} \subset \Lambda(a,f).$$

Sea $(\lambda_n, u_{\lambda_n})$, $n \geq 1$, cualquier sucesión de soluciones positivas de (3.1.1) tal que

$$\lambda_n \in (\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_0 + \varepsilon), \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \tilde{\lambda}_0.$$

Se puede observar fácilmente que cada solución positiva $(\lambda_n, u_{\lambda_n})$, $n \geq 1$, satisface la ecuación de punto fijo

$$\mathcal{K}(\tilde{\lambda}_0, u_{\lambda_n}) = (\tilde{\lambda}_0 - \lambda_n)(\mathcal{L} + M)^{-1}(W u_{\lambda_n}) + u_{\lambda_n},$$

donde $\mathcal{K}(\lambda, u)$ es el operador compacto en $W^2_{p,\mathcal{B}(b)}(\Omega)$, $p > N$, definido por (3.3.19). Ahora, gracias a la existencia de cotas a priori uniformes en L_∞ para las soluciones positivas de (3.1.1) en $[\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_0 + \varepsilon)$ (cf. Teorema 3.3.6), se sigue mediante un argumento estándar de compacidad, la exitencia de una subsucesión de $(\lambda_n, u_{\lambda_n})$, reetiquetada por n, satisfaciendo

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda_n, u_{\lambda_n}) = (\tilde{\lambda}_0, u^*) \qquad \text{en} \qquad \mathbf{R} \times W^2_p(\Omega), \tag{3.3.60}$$

para alguna solución no negativa u^* de (3.1.1). Ya que (3.1.1) no admite ninguna solución positiva en $\lambda = \tilde{\lambda}_0$, necesariamente $u^* = 0$. Así,

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda_n, u_{\lambda_n}) = (\tilde{\lambda}_0, 0) \qquad \text{en} \qquad \mathbf{R} \times W^2_p(\Omega)$$

y por tanto, $\tilde{\lambda}_0$ es un valor de bifurcación a soluciones positivas de (3.1.1) desde la rama trivial $(\lambda, u) = (\lambda, 0)$. Debe ser destacado que el mismo resultado puede ser obtenido si $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \tilde{\lambda}_0$ y $\lambda_n \in (\tilde{\lambda}_0 - \varepsilon, \tilde{\lambda}_0)$, $n \geq 1$. Esto concluye la prueba de *iii*).

iv) La condición necesaria se sigue de *i*). Ahora demostramos la condición suficiente. En efecto, tomemos $\tilde{\lambda}_0 \in \mathcal{O}$. Entonces, o bien

$$\tilde{\Sigma}'(\tilde{\lambda}_0) \neq 0, \tag{3.3.61}$$

o

$$\tilde{\Sigma}'(\tilde{\lambda}_0) = 0. \tag{3.3.62}$$

Supongamos que (3.3.61) es satisfecho. Entonces el resultado se sigue de *ii*). Supongamos ahora que (3.3.62) es satisfecho. Gracias a (3.3.52) se sigue del Teorema 3.3.2-i) que

$$\Lambda(a, f) = \{\, \lambda \in \mathbf{R} \;:\; \tilde{\Sigma}(\lambda) < 0 < \Sigma_0(\lambda) \,\}$$

y por eso, $\tilde{\lambda}_0 \notin \Lambda(a, f)$. Ahora, el resultado se sigue fácilmente de *iii*). Esto concluye la demostración del teorema. □

Ahora, nuestro principal propósito es utilizar la teoría ya desarrollada para averiguar la estructura de $\Lambda(a, f)$ de acuerdo al signo de $W \in L_\infty(\Omega)$ en Ω^0_a. En nuestro análisis la continuidad y concavidad de las aplicaciones $\hat{\Sigma}(\lambda)$, $\tilde{\Sigma}(\lambda)$ y $\Sigma_0(\lambda)$ mostradas por el Teorema 2.4.1 y Teorema 2.11.1-a) jugarán un papel esencial. Obsérvese que cada una de estas aplicaciones tiene a lo sumo dos raíces reales, las cuales en lo sucesivo serán denotadas por $\hat{\lambda}_i$, $\tilde{\lambda}_i$ y λ^0_i, $i = 1, 2$ respectivamente. Para cada una de estas aplicaciones, usaremos el subíndice $i = 1$ si la raíz es única, mientras que usaremos $i = 1, 2$ cuando tenga dos. Con estas notaciones, tomaremos $\hat{\lambda}_1 < \hat{\lambda}_2$, $\tilde{\lambda}_1 < \tilde{\lambda}_2$ y $\lambda^0_1 < \lambda^0_2$, respectivamente. Debe ser destacado que debido al Teorema 3.3.9, las raíces reales λ^0_i, $i = 1, 2$, son valores de bifurcación desde infinito a soluciones positivas de (3.1.1). También debe ser mencionado que si existe un subconjunto abierto $D_+ \subset \Omega$ para el cual $\inf_{D_+} W > 0$ y además $W > 0$ en Ω y $\lim_{\lambda \searrow -\infty} \tilde{\Sigma}(\lambda) > 0$, entonces se sigue del Teorema 2.11.1-b) y Teorema 2.11.3-a) que la aplicación $\tilde{\Sigma}(\lambda)$ posee una única raíz real, digamos $\tilde{\lambda}_1$, tal que $\tilde{\Sigma}'(\tilde{\lambda}_1) < 0$. Así, Teorema 3.3.10-ii) implica que $\tilde{\lambda}_1$ es un valor de bifurcación a soluciones positivas de (3.1.1) desde la rama trivial $(\lambda, u) = (\lambda, 0)$. Similarmente, si existen dos subconjuntos abiertos D_+ y D_- de Ω para los cuales $\inf_{D_+} W > 0$ y $\sup_{D_-} W < 0$ y además $\sup_{\mathbf{R}} \tilde{\Sigma}(\lambda) > 0$, entonces gracias al Teorema 2.11.1-d) y Teorema 2.11.3-c), la aplicación $\tilde{\Sigma}(\lambda)$ posee exactamente dos raíces reales, digamos $\tilde{\lambda}_i$, $i = 1, 2$ con $\tilde{\lambda}_1 < \tilde{\lambda}_2$ satisfaciendo $\tilde{\Sigma}'(\tilde{\lambda}_1) > 0$ y $\tilde{\Sigma}'(\tilde{\lambda}_2) < 0$ y por eso, el Teorema 3.3.10-ii) implica que $\tilde{\lambda}_i$, $i = 1, 2$ son valores de bifurcación a soluciones positivas de (3.1.1) desde la rama trivial $(\lambda, u) = (\lambda, 0)$. En lo sucesivo denotaremos por $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_i)$ al *continuo de soluciones positivas* de (3.1.1) emanando desde la rama trivial $(\lambda, u) = (\lambda, 0)$ en $\lambda = \tilde{\lambda}_i$ y por $\mathcal{P}_\lambda(\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_i))$ a su λ-proyección. Por un *continuo* entendemos un conjunto cerrado y conexo. También, denotaremos por $\mathcal{D}(\tilde{\lambda}_i)$ al escalar definido por (3.3.49), si la condición (3.3.47) es satisfecha.

En nuestro análisis haremos uso del siguiente concepto.

Definición 3.3.11 *Se dice que W cambia de signo en $D \subset \Omega$, si existen dos subconjuntos abiertos D_+ y D_- of D para los cuales*

$$\inf_{D_+} W > 0, \qquad \sup_{D_-} W < 0.$$

Proposición 3.3.12 *Supongamos que W cambia de signo en Ω_a^0. Entonces*

$$\Lambda(a, f) \neq \emptyset \quad \textit{si, y sólamente si,} \quad \sup_{\lambda \in \mathbf{R}} \Sigma_0(\lambda) > 0. \tag{3.3.63}$$

Supongamos además $\Lambda(a, f) \neq \emptyset$. Entonces $\Lambda(a, f)$ está acotado y

i) $\sup_{\lambda \in \mathbf{R}} \tilde{\Sigma}(\lambda) < 0$ *implica* $\Lambda(a, f) = (\lambda_1^0, \lambda_2^0)$;

ii) $\sup_{\lambda \in \mathbf{R}} \tilde{\Sigma}(\lambda) = 0$ *implica* $(\lambda_1^0, \lambda_2^0) \setminus \{\tilde{\lambda}_1\} \subset \Lambda(a, f) \subset (\lambda_1^0, \lambda_2^0)$;

iii) $\sup_{\lambda \in \mathbf{R}} \tilde{\Sigma}(\lambda) > 0$ *implica* $(\lambda_1^0, \tilde{\lambda}_1) \cup (\tilde{\lambda}_2, \lambda_2^0) \subset \Lambda(a, f) \subset (\lambda_1^0, \lambda_2^0)$.

Además, en el caso iii) las siguientes afirmaciones son ciertas:

a) Si

$$\sup_{\lambda \in \mathbf{R}} \hat{\Sigma}(\lambda) > 0, \tag{3.3.64}$$

entonces

$$\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1) \subset (\lambda_1^0, \hat{\lambda}_1] \times \mathcal{U}, \qquad \mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_2) \subset [\hat{\lambda}_2, \lambda_2^0) \times \mathcal{U}. \tag{3.3.65}$$

b) Supongamos (3.2.3) *y*

$$\sup_{\lambda \in \mathbf{R}} \hat{\Sigma}(\lambda) = 0. \tag{3.3.66}$$

Entonces

$$\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1) \subset (\lambda_1^0, \hat{\lambda}_1) \times \mathcal{U}, \qquad \mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_2) \subset (\hat{\lambda}_1, \lambda_2^0) \times \mathcal{U}. \tag{3.3.67}$$

c) En ambos casos, a) y b), $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_i)$ es no acotado en $\mathcal{U}$ y $(\lambda_i^0, +\infty) \in \mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_i)$, $\quad i = 1, 2$.

Demostración: En efecto, ya que W cambia de signo en Ω_a^0, gracias al Teorema 2.11.1-d) tenemos que

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \hat{\Sigma}(\lambda) = -\infty\,, \quad \lim_{\lambda \to \pm\infty} \tilde{\Sigma}(\lambda) = -\infty\,, \quad \lim_{\lambda \to \pm\infty} \Sigma_0(\lambda) = -\infty\,. \tag{3.3.68}$$

Así, por la concavidad de las aplicaciones $\tilde{\Sigma}(\lambda)$ y $\Sigma_0(\lambda)$ (cf. Teorema 2.11.1-a)) y teniendo en cuenta (3.1.14) y (3.3.68), se sigue que

$$\sup_{\lambda \in \mathbf{R}} \Sigma_0(\lambda) > 0 \quad \text{si, y sólamente si,} \quad \{\lambda \in \mathbf{R} \ : \ \tilde{\Sigma}(\lambda) < 0 < \Sigma_0(\lambda)\} \neq \emptyset\,.$$

De este modo, la Proposición 3.2.3 y el Teorema 3.2.4 implican la equivalencia (3.3.63). Supongamos ahora que $\Lambda(a, f) \neq \emptyset$. Observar que en este caso, se sigue de los argumentos previos que la aplicación $\Sigma_0(\lambda)$ tiene exactamente dos raíces reales, denotadas en lo sucesivo por λ_i^0, $i = 1, 2$ con $\lambda_1^0 < \lambda_2^0$. Entonces, ya que $\sup_{\lambda \in \mathbf{R}} \Sigma_0(\lambda) > 0$, se sigue de (3.3.68) que el conjunto $\{\lambda \in \mathbf{R} \ : \ \Sigma_0(\lambda) > 0\}$ está acotado y gracias a la Proposición 3.2.3, inferimos que $\Lambda(a, f)$ está acotado. Por otra parte, teniendo en cuenta (3.1.14), (3.3.68), Proposición 3.2.3 y Teorema 3.2.4, las afirmaciones $i), ii)$ y $iii)$ se siguen fácilmente.

Ahora probamos $iii) - a)$, $iii) - b)$ y $iii) - c)$. Supongamos $iii)$ y (3.3.64). Entonces, gracias a la Proposición 3.2.3,

$$\Lambda(a, f) \subset \{\lambda \in \mathbf{R} \ : \ \hat{\Sigma}(\lambda) \le 0 < \Sigma_0(\lambda)\} = (\lambda_1^0, \hat{\lambda}_1] \cup [\hat{\lambda}_2, \lambda_2^0)\,.$$

Ahora, ya que $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_i)$ es conexo y debido al Teorema 3.3.10, $\tilde{\lambda}_i$, $i = 1, 2$ es un valor de bifurcación a soluciones positivas de (3.1.1) desde la rama trivial $(\lambda, u) = (\lambda, 0)$, se sigue (3.3.65). Similarmente, si $iii)$ es satisfecho, asumimos (3.2.3) y además suponemos (3.3.66), en lugar de (3.3.64), entonces obtenemos que

$$\Lambda(a, f) \subset (\lambda_1^0, \hat{\lambda}_1) \cup (\hat{\lambda}_1, \lambda_2^0)\,.$$

Ya que $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_i)$, $i = 1, 2$ es cerrado y conexo, también tenemos (3.3.67).

Ahora, en cada uno de los casos $iii) - a)$ y $iii) - b)$ se sigue de la alternativa global de Rabinowitz [46], que o bien $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_i)$, $i = 1, 2$ es no acotado en $\mathbf{R} \times \mathcal{U}$ o existe algún λ_i^* con $\lambda_i^* \neq \tilde{\lambda}_i$, el cual es un valor de bifurcación a soluciones positivas de (3.1.1) desde la rama trivial $(\lambda, u) = (\lambda, 0)$, satisfaciendo

$$\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_i) \cap [\{(\lambda, u) = (\lambda, 0)\} \setminus (\tilde{\lambda}_i, 0)] = (\lambda_i^*, 0).$$

De este modo, bajo cualquiera de las condiciones de $a)$ o $b)$, gracias al Teorema 3.3.10, se sigue que $\tilde{\lambda}_1$ y $\tilde{\lambda}_2$ son los únicos valores de bifurcación a soluciones positivas de (3.1.1) desde la rama trivial $(\lambda, u) = (\lambda, 0)$ en $\mathcal{P}_\lambda(\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1))$ y $\mathcal{P}_\lambda(\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_2))$, respectivamente. Entonces, necesariamente $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_i)$, $i = 1, 2$ es no acotado en $\mathbf{R} \times \mathcal{U}$. Además, ya que su $\lambda-$proyección está acotada, necesariamente su $\mathcal{U}-$proyección es no acotada. Además, ya que por el Teorema 3.3.6 tenemos cotas a priori uniformes para las soluciones positivas de (3.1.1) en cualquier subconjunto compacto de $\hat{\Lambda}(a,f)$, inferimos del Teorema 3.3.9 que $(\lambda_i^0,\infty) \in \mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_i)\,, i=1,2$. Esto concluye la demostración del resultado. $\square$

Proposición 3.3.13 *Supongamos que $W \in \mathcal{A}(\Omega_a^0)$, es decir, W es un potencial admisible en Ω_a^0 y que además existe un subconjunto abierto $D_- \subset \Omega \setminus \Omega_a^0$ para el cual*

$$\sup_{D_-} W < 0\,. \tag{3.3.69}$$

Entonces,

$$\Lambda(a,f) \neq \emptyset \quad \textit{si, y sólamente si,} \quad \sigma_1^{\Omega_{a,W}^0}[\mathcal{L},\mathcal{B}(b,\Omega_{a,W}^0)] > 0\,; \tag{3.3.70}$$

donde $\Omega_{a,W}^0$ representa el subconjunto abierto máximal de Ω_a^0 donde W es nula, es decir,

$$\Omega_{a,W}^0 := (\Omega_a^0)_W^0.$$

Supongamos además $\Lambda(a,f) \neq \emptyset$. Entonces

i) $\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \tilde{\Sigma}(\lambda) < 0$ *implica* $\Lambda(a,f) = (-\infty,\lambda_1^0)\,;$

ii) $\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \tilde{\Sigma}(\lambda) = 0$ *implica* $(-\infty,\lambda_1^0) \setminus \{\tilde{\lambda}_1\} \subset \Lambda(a,f) \subset (-\infty,\lambda_1^0)\,;$

iii) $\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \tilde{\Sigma}(\lambda) > 0$ *implica* $(-\infty,\tilde{\lambda}_1) \cup (\tilde{\lambda}_2,\lambda_1^0) \subset \Lambda(a,f) \subset (-\infty,\lambda_1^0)\,.$

Además, en el caso iii) las siguientes afirmaciones son ciertas:

a) Si las hipótesis de iii) − a) de la Proposición 3.3.12 son satisfechas, entonces

$$\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1) \subset (-\infty,\hat{\lambda}_1] \times \mathcal{U}\,, \qquad \mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_2) \subset [\hat{\lambda}_2,\lambda_1^0) \times \mathcal{U}\,, \tag{3.3.71}$$

b) Si las hipótesis de iii) − b) de la Proposición 3.3.12 son satisfechas, entonces

$$\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1) \subset (-\infty,\hat{\lambda}_1) \times \mathcal{U}\,, \qquad \mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_2) \subset (\hat{\lambda}_1,\lambda_1^0) \times \mathcal{U}\,. \tag{3.3.72}$$

c) En ambos casos, iii) − a) y iii) − b), $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1)$ es no acotado en λ y $\mathcal{U}$, $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_2)$ es no acotado en $\mathcal{U}$ y $(\lambda_1^0,+\infty) \in \mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_2)$.

Demostración: En efecto, ya que $W \in \mathcal{A}(\Omega_a^0)$, el conjunto $\Omega_{a,W}^0$ satisface $(\mathcal{A}1)$ en Ω_a^0 y por ello, el autovalor principal $\sigma_1^{\Omega_{a,W}^0}[\mathcal{L},\mathcal{B}(b,\Omega_{a,W}^0)]$ está bien definido. Además, ya que

$$\partial\Omega_{a,W}^0 \cap \Gamma_1 \subset \bar{\Omega}_a^0 \cap \Gamma_1 = \partial\Omega_a^0 \cap \Gamma_1,$$

y debido al hecho de que (3.1.8) se verifica sobre $\partial\Omega_a^0 \cap \Gamma_1$, tenemos que (3.1.8) se verifica sobre $\partial\Omega_{a,W}^0 \cap \Gamma_1$. De este modo, gracias al Teorema 2.10.4, se desprende

$$\lim_{\lambda \searrow -\infty} \Sigma_0(\lambda) = \sigma_1^{\Omega_{a,W}^0}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_{a,W}^0)]. \tag{3.3.73}$$

Tomemos

$$\Omega_{a,W}^+ := (\Omega_a^0)_W^+ ,$$

el cual está bien definido ya que $W \in \mathcal{A}(\Omega_a^0)$. Gracias a $(\mathcal{A}2)$ tenemos que W está alejada de cero en cada subconjunto compacto de $\Omega_{a,W}^+$ y por ello, gracias a (3.3.69), W cambia de signo en Ω. De este modo, se sigue del Teorema 2.11.1-d) que

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \tilde{\Sigma}(\lambda) = -\infty . \tag{3.3.74}$$

También, el Teorema 2.11.1-b), implica

$$\lim_{\lambda \nearrow \infty} \Sigma_0(\lambda) = -\infty . \tag{3.3.75}$$

Además, ya que $W \geq 0$ en Ω_a^0, por la monotonía del autovalor principal con respecto al potencial, se sigue que $\Sigma_0(\lambda)$ es decreciente. Para probar (3.3.70) argumentamos como sigue. Supongamos $\Lambda(a,f) \neq \emptyset$ y tomemos $\lambda_* \in \Lambda(a,f)$. Entonces, gracias a la Proposición 3.2.3, tenemos que $\Sigma_0(\lambda_*) > 0$ y ya que $\Sigma_0(\lambda)$ es decreciente, obtenemos que

$$\lim_{\lambda \searrow -\infty} \Sigma_0(\lambda) > 0.$$

Ahora, (3.3.73) completa la prueba de la condición necesaria. Recíprocamente, si

$$\sigma_1^{\Omega_{a,W}^0}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_{a,W}^0)] > 0 ,$$

entonces obtenemos de (3.3.73) y (3.3.74) que existe $\lambda^* \in \mathbb{R}$ verificando

$$\tilde{\Sigma}(\lambda^*) < 0 < \Sigma_0(\lambda^*) \tag{3.3.76}$$

y por eso, el Teorema 3.2.4 implica que $\lambda^* \in \Lambda(a,f)$. Esto concluye la prueba de (3.3.70).

Supongamos ahora que $\Lambda(a,f) \neq \emptyset$. Observar que en este caso, se sigue de los argumentos previos que la aplicación $\Sigma_0(\lambda)$ tiene una única raíz real, la cual será denotada en lo sucesivo por λ_1^0. Entonces, ya que $\Sigma_0(\lambda)$ es decreciente en λ, las aplicaciones $\Sigma_0(\lambda)$, $\tilde{\Sigma}(\lambda)$ son cóncavas y usando (3.3.73), (3.3.74), (3.3.75), (3.1.14), se sigue fácilmente de la Proposición 3.2.3 y el Teorema 3.2.4, la validez de *i*), *ii*) y *iii*). Similarmente, argumentando como en la Proposición 3.3.12, obtenemos las afirmaciones *iii*) $-$ *a*) y *iii*) $-$ *b*). Ahora probamos *iii*) $-$ *c*). En efecto, gracias al Teorema 3.3.10 tenemos que $\tilde{\lambda}_1$ es un valor de bifurcación a soluciones positivas de (3.1.1) desde la rama trivial. De este modo, se sigue del Teorema 3.3.10 y la estructura de $\tilde{\Sigma}(\lambda)$, que $\tilde{\lambda}_1$ es el único valor de bifurcación a soluciones positivas de (3.1.1) desde la rama trivial en

$\mathcal{P}_\lambda(\mathcal{C}^+(\tilde\lambda_1))$. Por eso, gracias a la alternativa global de Rabinowitz [46], obtenemos que $\mathcal{C}^+(\tilde\lambda_1)$ es no acotado en $\mathbf{R} \times \mathcal{U}$. De este modo, por la existencia de cotas a priori para las soluciones positivas de (3.1.1) en cada subconjunto compacto de $\hat\Lambda(a,f)$ (cf. Teorema 3.3.6), obtenemos que $\mathcal{C}^+(\tilde\lambda_1)$ es no acotado en λ. Además, gracias a la Proposición 3.3.7-b), $\mathcal{C}^+(\tilde\lambda_1)$ es no acotado en $\mathcal{U}$. Similarmente, adaptando los argumentos previos se obtiene fácilmente que $\mathcal{C}^+(\tilde\lambda_2)$ es no acotado en $\mathbf{R}\times\mathcal{U}$. También, ya que su $\lambda-$proyección está acotada, necesariamente $\mathcal{C}^+(\tilde\lambda_2)$ es no acotado en $\mathcal{U}$ y por la existencia de cotas a priori uniformes para las soluciones positivas de (3.1.1) en cada subconjunto compacto de $\hat\Lambda(a,f)$ (cf. Teorema 3.3.6), obtenemos que $(\tilde\lambda_1^0, +\infty) \in \mathcal{C}^+(\tilde\lambda_2)$. Esto completa la prueba de *iii*) $-$ *c*) y concluye la demostración del resultado. □

Proposición 3.3.14 *Supongamos que*

$$\inf_{\Omega_a^0} W > 0 \tag{3.3.77}$$

y que existe un subconjunto abierto $D_- \subset \Omega \setminus \Omega_a^0$ *para el que*

$$\sup_{D_-} W < 0. \tag{3.3.78}$$

Entonces, $\Lambda(a,f) \neq \emptyset$ *y las afirmaciones i), ii) y iii) de la Proposición 3.3.13 son ciertas. Además, si las hipótesis del caso iii)$-$a) (resp. iii)$-$b)) de la Proposición 3.3.13 son satisfechas, entonces se verifica la condición* (3.3.71) *(resp.* (3.3.72)*) y en cualquiera de estos casos,* $\mathcal{C}^+(\tilde\lambda_1)$ *es no acotado en* λ *y* $\mathcal{U}$*,* $\mathcal{C}^+(\tilde\lambda_2)$ *es no acotado en* $\mathcal{U}$ *y* $(\tilde\lambda_1^0, +\infty) \in \mathcal{C}^+(\tilde\lambda_2)$.

Demostración: En efecto, gracias a (3.3.77), para cada $\lambda < 0$ tenemos que

$$\Sigma_0(\lambda) = \sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L} - \lambda W, \mathcal{B}(b,\Omega_a^0)] \geq \sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b,\Omega_a^0)] - \lambda \inf_{\Omega_a^0} W\,.$$

Por ello, (3.3.77) implica

$$\lim_{\lambda\searrow-\infty} \Sigma_0(\lambda) = +\infty. \tag{3.3.79}$$

Observar que se sigue de (3.3.77) y (3.3.78) que el potencial W cambia de signo en Ω. Por eso, (3.3.74) se verifica y Teorema 2.11.1-b) implica (3.3.75). De este modo, de (3.3.74) y (3.3.79) se sigue la existencia de λ^* verificando (3.3.76). Por tanto, el Teorema 3.2.4 implica que $\Lambda(a,f) \neq \emptyset$. El resto de la demostración puede ser llevado a cabo adaptando el argumento utilizado en la demostración de la Proposición 3.3.13. Esto concluye la demostración del resultado. □

Corolario 3.3.15 *Supongamos que W satisface, o bien las hipótesis de la Proposición 3.3.12, o de la Proposición 3.3.13 o de la Proposición 3.3.14, y además asumamos que*

$$\sup_{\lambda\in\mathbf{R}} \tilde\Sigma(\lambda) > 0$$

y (3.3.64) *son satisfechos. Entonces, las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

i) Si $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1)$ *emana supercríticamente de* $(\lambda, u) = (\tilde{\lambda}_1, 0)$*, entonces existe* λ_1^* *verificando*

$$\tilde{\lambda}_1 < \lambda_1^* \leq \hat{\lambda}_1 , \tag{3.3.80}$$

tal que bajo las hipótesis de la Proposición 3.3.12 satisface

$$(\lambda_1^0, \lambda_1^*] \cup (\tilde{\lambda}_2, \lambda_2^0) \subset \Lambda(a, f) ; \tag{3.3.81}$$

mientras que bajo las hipótesis de la Proposición 3.3.13 (o Proposición 3.3.14) verifica

$$(-\infty, \lambda_1^*] \cup (\tilde{\lambda}_2, \lambda_1^0) \subset \Lambda(a, f). \tag{3.3.82}$$

ii) Si $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_2)$ *emana subcríticamente desde* $(\lambda, u) = (\tilde{\lambda}_2, 0)$*, entonces existe* λ_2^* *verificando*

$$\hat{\lambda}_2 \leq \lambda_2^* < \tilde{\lambda}_2 , \tag{3.3.83}$$

tal que bajo las hipótesis de la Proposición 3.3.12 satisface

$$(\lambda_1^0, \tilde{\lambda}_1) \cup [\lambda_2^*, \lambda_2^0) \subset \Lambda(a, f) ; \tag{3.3.84}$$

mientras que bajo las hipótesis de la Proposición 3.3.13 (o Proposición 3.3.14) verifica

$$(-\infty, \tilde{\lambda}_1) \cup [\lambda_2^*, \lambda_1^0) \subset \Lambda(a, f). \tag{3.3.85}$$

iii) Si $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1)$ *emana supercríticamente de* $(\lambda, u) = (\tilde{\lambda}_1, 0)$ *y* $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_2)$ *emana subcríticamente de* $(\lambda, u) = (\tilde{\lambda}_2, 0)$*, existen* λ_1^* *y* λ_2^* *verificando*

$$\tilde{\lambda}_1 < \lambda_1^* \leq \hat{\lambda}_1 < \hat{\lambda}_2 \leq \lambda_2^* < \tilde{\lambda}_2 , \tag{3.3.86}$$

tal que bajo las hipótesis de la Proposición 3.3.12 cumplen que

$$(\lambda_1^0, \lambda_1^*] \cup [\lambda_2^*, \lambda_2^0) \subset \Lambda(a, f) ; \tag{3.3.87}$$

mientras que bajo las hipótesis de la Proposición 3.3.13 (o Proposición 3.3.14) verifican que

$$(-\infty, \lambda_1^*] \cup [\lambda_2^*, \lambda_1^0) \subset \Lambda(a, f). \tag{3.3.88}$$

Demostración: i) En un principio supondremos que estamos trabajando bajo las hipótesis de la Proposición 3.3.12. En efecto, ya que $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1)$ emana supercríticamente de $(\lambda, u) = (\tilde{\lambda}_1, 0)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_1 + \varepsilon) \subset \mathcal{P}_\lambda(\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1)) \cap \Lambda(a, f).$$

Definamos

$$\lambda_1^* := \sup\{\lambda \in \mathbf{R} \ : \ \lambda \in \mathcal{P}_\lambda(\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1))\}. \tag{3.3.89}$$

Por construcción, tenemos que $\tilde{\lambda}_1 < \lambda_1^* \leq \hat{\lambda}_1$. Además, gracias al Terorema 3.3.6, existen cotas a priori uniformes para las soluciones positivas de (3.1.1) en cada subconjunto compacto de $\hat{\Lambda}(a, f)$, en particular en $[\tilde{\lambda}_1, \hat{\lambda}_1]$. De este modo, por un argumento natural de compacidad, se sigue que para cualquier sucesión de soluciones positivas de (3.1.1), digamos (λ_n, u_n), con $u_n = u_{\lambda_n}$ y $\tilde{\lambda}_1 < \lambda_n \leq \hat{\lambda}_1$, $n \geq 1$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda_1^*,$$

se desprende que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u^*,$$

para alguna solución no negativa (λ_1^*, u^*) de (3.1.1). Necesariamente $u^* > 0$, ya que $\tilde{\lambda}_1$ es el único valor de bifurcación a soluciones positivas de (3.1.1) desde la rama trivial $(\lambda, u) = (\lambda, 0)$ en $(\lambda_1^0, \hat{\lambda}_1]$ (cf. Teorema 3.3.10-i)) y por construcción $\tilde{\lambda}_1 < \lambda_1^*$. De este modo, ya que $\mathcal{P}_\lambda(\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1))$ es conexo, obtenemos que

$$(\tilde{\lambda}_1, \lambda_1^*] \subset \Lambda(a, f). \tag{3.3.90}$$

Ahora demostramos que en este caso, (3.1.1) posee una solución positiva para $\lambda = \tilde{\lambda}_1$. En efecto, ya que $\sup_{\lambda\in\mathbf{R}} \tilde{\Sigma}(\lambda) > 0$, el Teorema 2.11.1-d y Teorema 2.11.3-c) implican que $\tilde{\Sigma}'(\tilde{\lambda}_1) > 0$ y que $\tilde{\lambda}_1$ es un autovalor simple de $(\tilde{\mathcal{L}}, W, \mathcal{B}(b), \Omega)$ en el sentido de la Definición 1.2.3. Así, se sigue del Teorema 3.3.10-ii) que $\tilde{\lambda}_1$ es un valor de bifurcación a soluciones positivas de (3.1.1) desde la rama trivial $(\lambda, u) = (\lambda, 0)$. De este modo, ya que $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1)$ es no acotado en $\mathcal{U}$, $(\lambda_1^0, +\infty) \in \mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1)$ y $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1)$ emana supercríticamente de $\tilde{\lambda}_1$, existen dos soluciones positivas de (3.1.1), digamos $(\lambda_i, u_{\lambda_i})$, $i = 1, 2$, con $\lambda_2 > \tilde{\lambda}_1 > \lambda_1$ y $(\lambda_i, u_{\lambda_i}) \in \mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1)$, $i = 1, 2$. Por tanto, ya que $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1)$ es conexo y debido a hecho de que $\tilde{\lambda}_1$ es un autovalor simple de $(\tilde{\mathcal{L}}, W, \mathcal{B}(b), \Omega)$, se sigue fácilmente que necesariamente existe una solución positiva de (3.1.1) en $\lambda = \tilde{\lambda}_1$, digamos $(\tilde{\lambda}_1, u_{\tilde{\lambda}_1})$, con $(\tilde{\lambda}_1, u_{\tilde{\lambda}_1}) \in \mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1)$.

Por otra parte, gracias a la Proposición 3.3.12, tenemos que

$$(\lambda_1^0, \tilde{\lambda}_1) \cup (\tilde{\lambda}_2, \lambda_2^0) \subset \Lambda(a, f). \tag{3.3.91}$$

Por tanto, teniendo en cuenta (3.3.90),(3.3.91) y debido al hecho de que (3.1.1) posee una solución positiva para $\lambda = \tilde{\lambda}_1$, se sigue (3.3.81). Esto completa la prueba de (3.3.81).

Los argumentos previos pueden ser fácilmente adaptados para mostrar (3.3.82) bajo las hipótesis de la Proposición 3.3.13 o de la Proposición 3.3.14, ya que en ambas situaciones el continuo $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1)$ es no acotado en λ y en $\mathcal{U}$.

Para probar *ii*), es suficiente tomar

$$\lambda_2^* := \inf\{\lambda \in \mathbf{R} \ : \ \lambda \in \mathcal{P}_\lambda(\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_2))\}$$

y razonar como en el caso *i*).

iii) Se sigue fácilmente de *i*) y *ii*). Esto concluye la demostración del corolario. □

Nota 3.3.16 1) *Resultados similares a los mostrados en el Corolario 3.3.15 se pueden obtener fácilmente, si en cualquiera de los casos i) o ii) o iii) del Corolario 3.3.15 asumimos* (3.3.66) *en lugar de* (3.3.64) *y además suponemos* (3.2.3). *Omitiremos los detalles.*

2) *Debe ser destacado que bajo las hipótesis de la Proposición 3.3.12-iii)-a), si denotamos por*

$$\lambda_1^* := \sup\{\,\lambda \in \mathbf{R} \;:\; \lambda \in \mathcal{P}_\lambda(\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1))\,\}\,, \qquad \lambda_2^* := \inf\{\,\lambda \in \mathbf{R} \;:\; \lambda \in \mathcal{P}_\lambda(\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_2))\,\}\,,$$

pudiera ocurrir que $\lambda_1^* < \hat{\lambda}_1 < \hat{\lambda}_2 < \lambda_2^*$ *siendo*

$$\Lambda(a,f) = (\lambda_1^0, \hat{\lambda}_1] \cup [\hat{\lambda}_2, \lambda_2^0)\,.$$

De hecho, o bien $\Lambda(a,f) \cap (\lambda_1^0, \hat{\lambda}_1]$, *o* $\Lambda(a,f) \cap [\hat{\lambda}_2, \lambda_2^0)$ *pudiera no ser conexo, ya que la existencia de una o varias componentes del conjunto de soluciones positivas de* (3.1.1), *aisladas y separadas de* $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_i)$ $i = 1, 2$, *no puede ser excluida. Similarmente, en el caso* $iii) - b)$ *pudiera ocurrir que* $\lambda_1^* < \hat{\lambda}_1 < \lambda_2^*$ *siendo*

$$\Lambda(a,f) = (\lambda_1^0, \check{\lambda}_1] \cup [\check{\lambda}_2, \lambda_2^0)$$

con $\lambda_1^* < \check{\lambda}_1 < \hat{\lambda}_1 < \check{\lambda}_2 < \lambda_2^*$. *Incluso más, o bien* $\Lambda(a,f) \cap (\lambda_1^0, \hat{\lambda}_1)$ *o* $\Lambda(a,f) \cap (\hat{\lambda}_1, \lambda_2^0)$ *no necesita ser conexo. Situaciones similares a éstas ya descritas pudieran ocurrir bajo las hipótesis de la Proposición 3.3.13-iii) y Proposición 3.3.14-iii).*

Ahora damos un resultado de multiplicidad local de las soluciones positivas de (3.1.1).

Corolario 3.3.17 *Supongamos que W satisface, o bien las hipótesis de la Proposición 3.3.12, o de la Proposición 3.3.13 o de la Proposición 3.3.14. Asumamos además que* $\sup_{\lambda \in \mathbf{R}} \tilde{\Sigma}(\lambda) > 0$ *y que o bien* (3.3.64) *es satisfecho o se verifican* (3.3.66) *y* (3.2.3). *Entonces, las siguientes afirmaciones son ciertas:*

i) Si $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1)$ *emana supercríticamente desde* $(\lambda, u) = (\tilde{\lambda}_1, 0)$, *entonces existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* (3.1.1) *posee al menos dos soluciones positivas para cada* $\lambda \in (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_1 + \varepsilon)$ *y al menos una solución positiva para* $\lambda = \tilde{\lambda}_1$.

ii) Si $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_2)$ *emana subcríticamente desde* $(\lambda, u) = (\tilde{\lambda}_2, 0)$, *entonces existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* (3.1.1) *posee al menos dos soluciones positivas para cada* $\lambda \in (\tilde{\lambda}_2 - \varepsilon, \tilde{\lambda}_2)$ *y al menos una solución positiva para* $\lambda = \tilde{\lambda}_2$.

Proof: i) Ya que bajo las actuales hipótesis se verifica que $\tilde{\Sigma}(\tilde{\lambda}_1) = 0$ y $\tilde{\Sigma}'(\tilde{\lambda}_1) > 0$, se sigue del Teorema 2.11.3-c) y Teorema 3.3.10-ii) que $\tilde{\lambda}_1$ es un autovalor simple de $(\tilde{\mathcal{L}}, W, \mathcal{B}(b), \Omega)$ en el sentido de la Definición 1.2.3 y un valor de bifurcación a soluciones positivas de (3.1.1) desde la rama trivial $(\lambda, u) = (\lambda, 0)$. Además, gracias al Teorema 3.3.10-ii), existe $\rho_1 > 0$ tal que en $B_{\rho_1}(\tilde{\lambda}_1)$ el conjunto de soluciones positivas de (3.1.1) está dado por la curva de soluciones positivas (3.3.49), donde $B_{\rho_1}(\tilde{\lambda}_1)$ representa la bola de radio $\rho_1 > 0$ centrada en $(\tilde{\lambda}_1, 0)$. Además, argumentando como en la demostración del Corolario 3.3.15, obtenemos que existe una solución positiva de (3.1.1) en $\lambda = \tilde{\lambda}_1$, digamos $(\tilde{\lambda}_1, \tilde{u}_1)$, con $(\tilde{\lambda}_1, \tilde{u}_1) \in \mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1)$. Sea $\rho_2 \in (0, \rho_1)$ tal que $(\tilde{\lambda}_1, \tilde{u}_1) \notin B_{\rho_2}(\tilde{\lambda}_1)$ y (λ_2, u_2), con $\tilde{\lambda}_1 < \lambda_2$, la solución positiva de (3.1.1) obtenida como intesección de la curva de soluciones positivas (3.3.49) con

$$\{\,(\lambda, u) \in \mathbf{R} \times \mathcal{U} \;:\; \|(\lambda, u)\|_{\mathbf{R} \times \mathcal{U}} = \rho_2\,\}\,.$$

Tenemos que $(\lambda_2, u_2) \in \mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1)$. Así, ya que $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1)$ es conexo, existe un subcontinuo de $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1)$, digamos $\mathcal{C}_1^+(\tilde{\lambda}_1)$, conectando (λ_2, u_2) con $(\tilde{\lambda}_1, \tilde{u}_1)$. Ahora, por la estructura del conjnto de soluciones positivas de (3.1.1) dada por el Teorema 3.3.10-ii), necesariamente $\mathcal{C}_1^+(\tilde{\lambda}_1)$ está localizado en el exterior de $B_{\rho_2}(\tilde{\lambda}_1)$. Por tanto, para cada $\lambda \in (\tilde{\lambda}_1, \lambda_2)$ existen al menos dos soluciones positivas de (3.1.1), una en el interior de la bola $B_{\rho_2}(\tilde{\lambda}_1)$ y otra fuera de la bola $B_{\rho_2}(\tilde{\lambda}_1)$.

Este argumento puede ser fácilmente adaptado para mostrar Parte ii). Esto concluye la demostración.

$\square$

Nota 3.3.18 *Observar que si se cumple* (3.3.50) *y* $\mathcal{D}(\tilde{\lambda}_1) > 0$, *entonces* $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1)$ *emana supercríticamente desde* $(\lambda, u) = (\tilde{\lambda}_1, 0)$ *y podemos aplicar el Corolario 3.3.15-i) y Corolario 3.3.17-i). Similarmente, cuando se cumple* (3.3.50) *y* $\mathcal{D}(\tilde{\lambda}_2) < 0$, *entonces* $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_2)$ *emana subcríticamente desde* $(\lambda, u) = (\tilde{\lambda}_2, 0)$ *y podemos aplicar el Corolario 3.3.15-ii) y Corolario 3.3.17-ii).*

Teorema 3.3.19 *Supongamos que* $W \in \mathcal{A}(\Omega)$ *y denotemos por* $\Omega_W^0 \subset \Omega$ *al subconjunto abierto máximal donde* W *es nula. Observar que* Ω_W^0 *satisface* $(\mathcal{A}1)$. *Asumamos además que* ν *es el campo conormal sobre* $\partial\Omega_W^0 \cap \Gamma_1$ *y que*

$$\inf_{\Omega_a^0} W > 0. \tag{3.3.92}$$

Entonces, $\Lambda(a,f) \neq \emptyset$ *y las siguientes afirmaciones son ciertas:*

i) Si $\sigma_1^{\Omega_W^0}[\tilde{\mathcal{L}}, \mathcal{B}(b, \Omega_W^0)] \leq 0$, *entonces* $\Lambda(a,f) = (-\infty, \lambda_1^0)$.

ii) Si $\sigma_1^{\Omega_W^0}[\hat{\mathcal{L}}, \mathcal{B}(b, \Omega_W^0)] \leq 0 < \sigma_1^{\Omega_W^0}[\tilde{\mathcal{L}}, \mathcal{B}(b, \Omega_W^0)]$, *entonces o bien*

   (a) $\Lambda(a,f) = (-\infty, \lambda_1^0)$, *o*

   (b) $\Lambda(a,f) = (\tilde{\lambda}_1, \lambda_1^0)$, *o*

   (c) $\Lambda(a,f) = [\lambda^*, \lambda_1^0)$ *para algún* λ^* *satisfaciendo*

$$\hat{\Sigma}(\lambda^*) < 0 \leq \tilde{\Sigma}(\lambda^*). \tag{3.3.93}$$

iii) Si $\sigma_1^{\Omega_W^0}[\hat{\mathcal{L}}, \mathcal{B}(b, \Omega_W^0)] > 0$, *entonces o bien*

   (a) $\Lambda(a,f) = (\tilde{\lambda}_1, \lambda_1^0)$, *o*

   (b) $\Lambda(a,f) = [\lambda^*, \lambda_1^0)$ *para algún* λ^* *satisfaciendo*

$$\hat{\Sigma}(\lambda^*) \leq 0 \leq \tilde{\Sigma}(\lambda^*) \tag{3.3.94}$$

con al menos una de las desigualdades de forma estricta.

Además, en los casos ii) – (b), ii) – (c) y iii), $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1)$ es no acotado en $\mathcal{U}$ y

$$(\lambda_1^0, +\infty) \in \mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1),$$

mientras que en el caso ii) – (a), $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1)$ es acotado en $\mathcal{U}$ y no acotado en λ, si

$$(\lambda_1^0, +\infty) \notin \mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1).$$

Demostración: Ya que $W \in \mathcal{A}(\Omega)$ y ν es el campo conormal sobre $\partial\Omega_W^0 \cap \Gamma_1$, se sigue del Teorema 2.10.4 que

$$\lim_{\lambda \searrow -\infty} \tilde{\Sigma}(\lambda) = \sigma_1^{\Omega_W^0}[\tilde{\mathcal{L}}, \mathcal{B}(b, \Omega_W^0)], \qquad \lim_{\lambda \searrow -\infty} \hat{\Sigma}(\lambda) = \sigma_1^{\Omega_W^0}[\hat{\mathcal{L}}, \mathcal{B}(b, \Omega_W^0)]. \tag{3.3.95}$$

Además, por la monotonía del autovalor principal con respecto al potencial, para cada $\lambda < 0$

$$\Sigma_0(\lambda) = \sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L} - \lambda W, \mathcal{B}(b, \Omega_a^0)] \geq \sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}, \mathcal{B}(b, \Omega_a^0)] - \lambda \inf_{\Omega_a^0} W$$

y por eso, (3.3.92) implica

$$\lim_{\lambda \searrow -\infty} \Sigma_0(\lambda) = +\infty. \tag{3.3.96}$$

Por otra parte, ya que $W > 0$ en Ω y se verifica (3.3.92), se sigue del Teorema 2.11.1-b) que las aplicaciones $\hat{\Sigma}(\lambda)$, $\tilde{\Sigma}(\lambda)$ y $\Sigma_0(\lambda)$ son decrecientes y

$$\lim_{\lambda \nearrow +\infty} \hat{\Sigma}(\lambda) = -\infty, \quad \lim_{\lambda \nearrow +\infty} \tilde{\Sigma}(\lambda) = -\infty, \quad \lim_{\lambda \nearrow +\infty} \Sigma_0(\lambda) = -\infty. \tag{3.3.97}$$

También, gracias a (3.3.95) y debido al hecho de que $\tilde{\Sigma}(\lambda)$ y $\hat{\Sigma}(\lambda)$ son decrecientes, tenemos que

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \tilde{\Sigma}(\lambda) = \sigma_1^{\Omega_W^0}[\tilde{\mathcal{L}}, \mathcal{B}(b, \Omega_W^0)], \qquad \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \hat{\Sigma}(\lambda) = \sigma_1^{\Omega_W^0}[\hat{\mathcal{L}}, \mathcal{B}(b, \Omega_W^0)]. \tag{3.3.98}$$

En particular, deducimos que $\Sigma_0(\lambda)$ tiene una única raíz real denotada por λ_1^0, y que cada una de las aplicaciones $\tilde{\Sigma}(\lambda)$ y $\hat{\Sigma}(\lambda)$ tiene a lo sumo una única raíz real, denotada por $\tilde{\lambda}_1$ y $\hat{\lambda}_1$ respectivamente, de acuerdo al signo de $\sigma_1^{\Omega_W^0}[\tilde{\mathcal{L}}, \mathcal{B}(b, \Omega_W^0)]$ y $\sigma_1^{\Omega_W^0}[\hat{\mathcal{L}}, \mathcal{B}(b, \Omega_W^0)]$, respectivamente.

Ahora probamos que $\Lambda(a, f) \neq \emptyset$. En efecto, se obtiene fácilmente de (3.1.14), (3.3.96), utilizando además la continuidad de $\tilde{\Sigma}(\lambda)$ y $\Sigma_0(\lambda)$, que existe $\check{\lambda}$ satisfaciendo

$$\tilde{\Sigma}(\check{\lambda}) < 0 < \Sigma_0(\check{\lambda}).$$

Así, gracias al Teorema 3.2.4, $\check{\lambda} \in \Lambda(a, f)$ y por eso $\Lambda(a, f) \neq \emptyset$.

Ahora probamos que si (λ_1, u_1) es una solución positiva de (3.1.1) para algún $\lambda_1 \in \Lambda(a, f)$, entonces (3.1.1) posee una solución positiva para cada $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_1^0)$, es decir, $[\lambda_1, \lambda_1^0) \subset \Lambda(a, f)$. En efecto, ya que $W > 0$ en Ω y (λ_1, u_1) es una solución positiva de (3.1.1), para cada $\lambda > \lambda_1$ se desprende

$$0 = \mathcal{L}(\lambda_1)u_1 + a(x)f(x, u_1)u_1 > \mathcal{L}(\lambda)u_1 + a(x)f(x, u_1)u_1 \qquad \text{en} \qquad \Omega,$$

y

$$\mathcal{B}(b)u_1 = 0 \qquad \text{en} \qquad \partial\Omega\,;$$

es decir, u_1 es una subsolución positiva estricta de (3.1.1) para cada $\lambda > \lambda_1$. Además, gracias al Teorema 3.2.6, para cada $\lambda < \lambda_1^0$ existe una supersolución positiva estricta arbitrariamente grande de (3.1.1), alejada de cero en $\bar{\Omega}$. En particular, para cada $\lambda_1 < \lambda < \lambda_1^0$, u_1 es una subsolución positiva estricta de (3.1.1) y existe una supersolución positiva estricta de (3.1.1), digamos $\bar{u}_\lambda$, satisfaciendo $0 < u_1 < \bar{u}_\lambda$. De este modo, aplicando el método de sub y supersoluciones (e.g. [3]), obtenemos que (3.1.1) posee una solución positiva para cada $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1^0)$ y por tanto

$$[\lambda_1, \lambda_1^0) \subset \Lambda(a, f)\,.$$

En particular, $\Lambda(a, f)$ es conexo.

Ahora probamos Parte *i*). Supongamos $\sigma_1^{\Omega_W^0}[\tilde{\mathcal{L}}, \mathcal{B}(b, \Omega_W^0)] \leq 0$. Entonces usando los resultados (3.1.14), (3.3.95), (3.3.96), (3.3.97), (3.3.98) y el hecho de que las aplicaciones $\hat{\Sigma}(\lambda)$ y $\tilde{\Sigma}(\lambda)$ son decrecientes, se sigue que

$$\tilde{\Sigma}(\lambda) < 0 < \Sigma_0(\lambda) \qquad \text{para cada} \qquad \lambda \in (-\infty, \lambda_1^0).$$

Por eso, la Proposición 3.2.3 y el Teorema 3.2.4 implican que $\Lambda(a, f) = (-\infty, \lambda_1^0)$. Esto completa la demostración de Parte *i*).

Observar que si las hipótesis de Parte *i*) fallan, entonces $\sigma_1^{\Omega_W^0}[\tilde{\mathcal{L}}, \mathcal{B}(b, \Omega_W^0)] > 0$ y ya que

$$\sigma_1^{\Omega_W^0}[\hat{\mathcal{L}}, \mathcal{B}(b, \Omega_W^0)] \leq \sigma_1^{\Omega_W^0}[\tilde{\mathcal{L}}, \mathcal{B}(b, \Omega_W^0)]\,, \tag{3.3.99}$$

puede ocurrir que o bien

$$0 < \sigma_1^{\Omega_W^0}[\hat{\mathcal{L}}, \mathcal{B}(b, \Omega_W^0)] \leq \sigma_1^{\Omega_W^0}[\tilde{\mathcal{L}}, \mathcal{B}(b, \Omega_W^0)]\,,$$

o

$$\sigma_1^{\Omega_W^0}[\hat{\mathcal{L}}, \mathcal{B}(b, \Omega_W^0)] \leq 0 < \sigma_1^{\Omega_W^0}[\tilde{\mathcal{L}}, \mathcal{B}(b, \Omega_W^0)].$$

Entonces, para probar Parte *ii*) y Parte *iii*) necesitamos distinguir entre los dos diferentes últimos casos.

Demostración de la Parte *ii*). Supongamos $\sigma_1^{\Omega_W^0}[\hat{\mathcal{L}}, \mathcal{B}(b, \Omega_W^0)] \leq 0 < \sigma_1^{\Omega_W^0}[\tilde{\mathcal{L}}, \mathcal{B}(b, \Omega_W^0)]$. En este caso la aplicación $\tilde{\Sigma}(\lambda)$ tiene una única raíz real denotada en lo sucesivo por $\tilde{\lambda}_1$. Además, se sigue fácilmente que para cada $\lambda \in (\tilde{\lambda}_1, \lambda_1^0)$ se verifica que

$$\tilde{\Sigma}(\lambda) < 0 < \Sigma_0(\lambda)$$

y por eso, el Teorema 3.2.4 implica que

$$(\tilde{\lambda}_1, \lambda_1^0) \subset \Lambda(a, f)\,. \tag{3.3.100}$$

Entonces, o bien (3.1.1) no admite una solución positiva si $\lambda \leq \tilde{\lambda}_1$, o existe una solución positiva de (3.1.1) para algún $\lambda_1 \leq \tilde{\lambda}_1$, digamos (λ_1, u_1). En el primer caso, utilizando (3.3.100) se sigue de la Proposición 3.2.3 que

$$\Lambda(a, f) = (\tilde{\lambda}_1, \lambda_1^0).$$

Esto completa la prueba de *ii*) − (*b*).

En el segundo caso, gracias a la Proposición 3.2.3 y al Teorema 3.2.4, o bien

$$\inf \Lambda(a, f) = -\infty,$$

o

$$\inf \Lambda(a, f) \in \mathbf{R}.$$

Así, si $\inf \Lambda(a, f) = -\infty$ debido al hecho de que $\Lambda(a, f)$ es conexo, obtenemos que

$$\Lambda(a, f) = (-\infty, \lambda_1^0)$$

y *ii*) − (*a*) es mostrado.

Si no es así, definamos

$$\lambda^* := \inf \Lambda(a, f) \in \mathbf{R}. \tag{3.3.101}$$

En este caso, se sigue del hecho de que $\Lambda(a, f)$ sea conexo que

$$(\lambda_1^*, \lambda_1^0) \subset \Lambda(a, f).$$

Además, gracias al Teorema 3.3.6, tenemos cotas a priori uniformes para las soluciones positivas de (3.1.1) en cada subconjunto compacto de $\hat{\Lambda}(a, f)$. Así, las soluciones positivas de (3.1.1) están uniformemente acotadas en $[\lambda^*, \tilde{\lambda}_1 + \varepsilon]$ para algún $\varepsilon > 0$ satisfaciendo $\tilde{\lambda}_1 + \varepsilon < \lambda_1^0$. Ahora, por un argumento estándar de compacidad, podemos inferir la existencia de una sucesión de soluciones positivas de (3.1.1), digamos (λ_n, u_n), con $\lambda^* < \lambda_n < \tilde{\lambda}_1 + \varepsilon$, $n \geq 1$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} (\lambda_n, u_n) = (\lambda^*, u^*),$$

para alguna solución no negativa u^* de (3.1.1) en $\lambda = \lambda^*$. De este modo, debido a que $\lambda = \tilde{\lambda}_1$ es el único valor de bifurcación a soluciones positivas de (3.1.1) desde la rama trivial $(\lambda, u) = (\lambda, 0)$ (cf. Teorema 3.3.10-i)-ii)), o bien $\lambda^* < \tilde{\lambda}_1$ y entonces $u^* > 0$, o $\lambda^* = \tilde{\lambda}_1$ y (3.1.1) posee una solución positiva u^* en $\tilde{\lambda}_1$. Por tanto, si (3.3.101) es satisfecho y (3.1.1) posee una solución positiva para algún $\lambda_1 \leq \tilde{\lambda}_1$, o bien $\Lambda(a, f) = [\lambda^*, \lambda_1^0)$ para algún λ^* verificando

$$\hat{\Sigma}(\lambda^*) < 0 < \tilde{\Sigma}(\lambda^*),$$

o $\Lambda(a, f) = [\tilde{\lambda}_1, \lambda_1^0)$. Esto completa la prueba de *ii*) − (*c*).

Demostración de Parte *iii*). Supongamos $\sigma_1^{\Omega_W^0}[\hat{\mathcal{L}}, \mathcal{B}(b, \Omega_W^0)] > 0$. En este caso, gracias a la Proposición 3.2.3 se sigue de (3.3.98) que $\Lambda(a, f)$ está acotado inferiormente. Ahora, los mismos argumentos utilizados para demostrar Parte *ii*) pueden ser usados para completar la demostración de la Parte *iii*).

Finalmente, debido a que $\tilde{\lambda}_1$ es el único valor de bifurcación a soluciones positivas de (3.1.1) desde la rama trivial (cf. Teorema 3.3.10-i),ii)), se sigue de la alternativa global de Rabinowitz [46], que $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1)$ es no acotado en $\mathbf{R}\times\mathcal{U}$. Por otra parte, en los casos $ii)-(b)$, $ii)-(c)$ o $iii)$ la $\lambda-$proyección de $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1)$ está acotada. Por tanto, en estos casos obtenemos que $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1)$ es no acotado en $\mathcal{U}$. Además, en cualquiera de estos casos, por la existencia de cotas a priori uniformes para las soluciones positivas de (3.1.1) en cada subconjunto compacto de $\hat{\Lambda}(a,f)$, (cf. Teorema 3.3.6), tenemos que $(\lambda_1^0,+\infty)\in\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1)$.

En el caso $ii)-(a)$, si además $(\lambda_1^0,+\infty)\not\subset\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1)$, entonces se sigue de la existencia de cotas a priori uniformes para las soluciones positivas de (3.1.1) en cada subconjunto compacto de $\hat{\Lambda}(a,f)$ (cf. Teorema 3.3.6) que la $\lambda-$proyección de $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1)$ es no acotada, ya que por la alternativa global de Rabinowitz [46] tenemos que $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1)$ es no acotado en $\mathbf{R}\times\mathcal{U}$. Además, se sigue de la Proposición 3.3.7-a), que en este caso la $\mathcal{U}-$proyección de $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1)$ está acotada. Esto concluye la demostración del teorema. □

Teorema 3.3.20 *Supongamos que $W\in\mathcal{A}(\Omega)\cap\mathcal{A}(\Omega_a^0)$. Denotemos por $\Omega_{a,W}^0$ al subconjunto abierto definido en la Proposición 3.3.13 y por Ω_W^0 al subconjunto abierto máximal de Ω donde W se anula. Supongamos además que ν es el campo conormal sobre $\partial\Omega_W^0\cap\Gamma_1$. Entonces,*

$$\Lambda(a,f)\neq\emptyset \quad \textit{si, y sólamente si,} \quad \sigma_1^{\Omega_{a,W}^0}[\mathcal{L},\mathcal{B}(b,\Omega_{a,W}^0)]>0\,. \tag{3.3.102}$$

Supongamos además (3.3.102). *Entonces, todas las afirmaciones del Teorema 3.3.19 son ciertas.*

Demostración: Ya que

$$\partial\Omega_{a,W}^0\cap\Gamma_1\subset\bar{\Omega}_a^0\cap\Gamma_1=\partial\Omega_a^0\cap\Gamma_1$$

y (3.1.8) se verifica sobre $\partial\Omega_a^0\cap\Gamma_1$, tenemos que (3.1.8) se verifica sobre $\partial\Omega_{a,W}^0\cap\Gamma_1$. Por ello, el Teorema 2.10.4 implica que

$$\lim_{\lambda\searrow-\infty}\Sigma_0(\lambda)=\sigma_1^{\Omega_{a,W}^0}[\mathcal{L},\mathcal{B}(b,\Omega_{a,W}^0)]\,.$$

Además, ya que $W>0$ en Ω_a^0, la aplicación $\Sigma_0(\lambda)$ es decreciente. Ahora, argumentando como en la demostración de (3.3.70) en la Proposición 3.3.13, se sigue (3.3.102). El resto de la demostración puede ser llevado a cabo adaptando el argumento utilizado en la demostración del Teorema 3.3.19. □

Teorema 3.3.21 *Supongamos que*

$$\inf_{\Omega}W>0. \tag{3.3.103}$$

Entonces, $\Lambda(a,f)\neq\emptyset$. Además, o bien

i) $\Lambda(a,f)=(\tilde{\lambda}_1,\lambda_1^0)$ *o* *ii)* $\Lambda(a,f) = [\lambda^*, \lambda_1^0)$ *para algún* λ^* *verificando*

$$\hat{\Sigma}(\lambda^*) \leq 0 \leq \tilde{\Sigma}(\lambda^*)$$

con al menos una de las desigualdades de forma estricta. En este caso, si además se cumple (3.2.3), *entonces*

$$\hat{\Sigma}(\lambda^*) < 0 \leq \tilde{\Sigma}(\lambda^*).$$

En cualquiera de estos casos, i) y ii), $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1)$ *es no acotado en* $\mathcal{U}$ *y* $(\lambda_1^0, +\infty) \in \mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_1)$.

Demostración: En efecto, se sigue de la monotonía del autovalor principal con respecto al potencial, que para cada $\lambda < 0$

$$\hat{\Sigma}(\lambda) = \sigma_1^\Omega[\hat{\mathcal{L}} - \lambda W, \mathcal{B}(b)] \geq \sigma_1^\Omega[\hat{\mathcal{L}}, \mathcal{B}(b)] - \lambda \inf_\Omega W .$$

Por eso, (3.3.103) implica

$$\lim_{\lambda \searrow -\infty} \hat{\Sigma}(\lambda) = +\infty . \tag{3.3.104}$$

Así, de (3.1.14) y (3.3.104) se desprende que

$$\lim_{\lambda \searrow -\infty} \tilde{\Sigma}(\lambda) = +\infty , \qquad \lim_{\lambda \searrow -\infty} \Sigma_0(\lambda) = +\infty. \tag{3.3.105}$$

Además, usando (3.3.103), el Teorema 2.11.1-b) implica que las aplicaciones $\hat{\Sigma}(\lambda)$, $\tilde{\Sigma}(\lambda)$ y $\Sigma_0(\lambda)$ son decrecientes y

$$\lim_{\lambda \nearrow +\infty} \hat{\Sigma}(\lambda) = -\infty, \quad \lim_{\lambda \nearrow +\infty} \tilde{\Sigma}(\lambda) = -\infty, \quad \lim_{\lambda \nearrow +\infty} \Sigma_0(\lambda) = -\infty. \tag{3.3.106}$$

En particular, se sigue de los anteriores hechos que cada una de las aplicaciones previas tiene una única raíz real, denotada por $\hat{\lambda}_1$, $\tilde{\lambda}_1$ y λ_1^0, respectivamente. Ahora, usando los resultados (3.1.14), (3.3.105), (3.3.106) y gracias a la continuidad de $\tilde{\Sigma}(\lambda)$ y $\Sigma_0(\lambda)$, obtenemos que

$$\tilde{\Sigma}(\lambda) < 0 < \Sigma_0(\lambda) \qquad \text{para cada} \qquad \lambda \in (\tilde{\lambda}_1, \lambda_1^0)$$

y por eso, se sigue del Teorema 3.2.4 que

$$(\tilde{\lambda}_1, \lambda_1^0) \subset \Lambda(a,f).$$

El resto de la demostración puede ser llevado a cabo adaptando el argumento utilizado en la demostración del Teorema 3.3.19-iii). Esto concluye la demostración del teorema. □

Nota 3.3.22 *Obsérvese que si en los resultados previos cambiamos* W *por* $-W$, *entonces podemos obtener fácilmente los correspondientes resultados sobre la estructura de* $\Lambda(a,f)$ *y del continuo* $\mathcal{C}^+(\tilde{\lambda}_i)$, $i = 1, 2$.

3.4 Comportamiento puntual de las soluciones positivas

En esta sección adoptamos los argumentos de [37], [20], [38], para mostrar el crecimiento puntual a infinito de las soluciones positivas de (3.1.1) en Ω_a^0 y sobre $\partial\Omega_a^0 \cap \Gamma_1$, cuando λ tiende al valor de bifurcación desde infinito, en el caso especial cuando W tiene signo constante en Ω.

Teorema 3.4.1 *Sean* $\{u_\lambda^i\}$ *cualquier familia de soluciones positivas de* (3.1.1), $(\lambda, i) \in \Lambda(a, f) \times \mathcal{J}(\lambda)$ *y* $\Gamma_1^k, 1 \leq k \leq n_1$ *las componentes de* Γ_1. *Supongamos que* $W > 0$ *en* Ω *y que existe un subconjunto abierto* $D_+ \subset \Omega_a^0$ *para el que*

$$\inf_{D_+} W > 0\,. \tag{3.4.1}$$

Supongamos además que

$$\lim_{\lambda \searrow -\infty} \Sigma_0(\lambda) > 0\,. \tag{3.4.2}$$

Denotemos por λ_0 *a la única raíz real de la aplicación* $\Sigma_0(\lambda)$. *Entonces,*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} u_\lambda^i(x) = \infty\,, \qquad x \in \Omega_a^0 \cup \bigcup_{j=1}^{p} \Gamma_1^{k_j}\,, \quad i \in \mathcal{J}(\lambda)\,, \tag{3.4.3}$$

donde $\{k_1, k_2, \ldots, k_p\}$ *representa el subconjunto de* $\{1, \ldots n_1\}$ *para el cual* $\Gamma_1^k \cap \partial\Omega_a^0 \neq \emptyset$ *si, y sólamente si,* $k \in \{k_1, k_2, \ldots, k_p\}$.

Además, se verifica (3.4.3) *uniformemente en cada subconjunto compacto de* $\Omega_a^0 \cup \bigcup_{j=1}^p \Gamma_1^{k_j}$. *En particular, existen* $\lambda_1 \in \Lambda(a, f)$ *próximo a* λ_0 *y para cada subconjunto compacto* K *de* $\Omega_a^0 \cup \bigcup_{j=1}^p \Gamma_1^{k_j}$ *una constante* $\gamma(K) > 0$, *tal que la siguiente estimación se cumple en* K

$$u_\lambda^i > log(\frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_0 - \lambda})^{\gamma(K)}, \qquad i \in \mathcal{J}(\lambda) \tag{3.4.4}$$

para cada λ *comprendido entre* λ_1 *y* λ_0.

El mismo resultado se verifica si $W < 0$ *en* Ω *y además asumimos que existe un subconjunto abierto* $D_- \subset \Omega_a^0$ *para el cual*

$$\sup_{D_-} W < 0 \tag{3.4.5}$$

y

$$\lim_{\lambda \nearrow \infty} \Sigma_0(\lambda) > 0\,. \tag{3.4.6}$$

Demostración: Supongamos $W > 0$ en Ω y asumamos que se verifican (3.4.1), (3.4.2). Entonces, se sigue del Teorema 2.11.1 y Teorema 2.11.3 que en esta situación las aplicaciones $\Sigma_0(\lambda)$ y $\tilde{\Sigma}(\lambda)$ son decrecientes y $\Sigma_0(\lambda)$ tiene una única raíz real. Denotemos por λ_0 a la única raíz real de $\Sigma_0(\lambda)$. Usando (3.1.14) y gracias al carácter decreciente de $\Sigma_0(\lambda)$, $\tilde{\Sigma}(\lambda)$, se sigue del Teorema 3.2.4 que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0) \subset \Lambda(a, f). \tag{3.4.7}$$

Por otra parte, gracias al Lema 3.3.1, existe $h \in \mathcal{C}^1([0,\infty),\mathbf{R})$ satisfaciendo (3.3.1) y (3.3.2). Ahora, consideremos el problema de valores en la frontera de tipo mixto (3.3.41) y denotemos por $\theta_{[\lambda,h]}$ a su única solución positiva para cada $\lambda \in \Lambda(a,h)$ (cf. Teorema 3.3.2-i)). Entonces, argumentando como en el Teorema 3.3.9, se sigue que existe $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon)$ tal que

$$(\lambda_0 - \varepsilon_1, \lambda_0) \subset \Lambda(a,h) \subset \Lambda(a,f) \tag{3.4.8}$$

y

$$u^i_\lambda \geq \theta_{[\lambda,h]}\,, \qquad \lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon_1, \lambda_0)\,, \quad i \in \mathcal{J}(\lambda). \tag{3.4.9}$$

En particular, utilizando (3.4.8) se sigue de la Proposición 3.2.3 y Teorema 3.2.4 que

$$\lambda_0 \in \partial\Lambda(a,f) \cap \Lambda(a,h) \neq \emptyset.$$

Ahora, tomemos $\lambda_1 \in (\lambda_0 - \varepsilon_1, \lambda_0)$. Ya que $W > 0$ en Ω, gracias al Teorema 3.3.2-iii), la aplicación $\lambda \to \theta_{[\lambda,h]}$ es creciente y por eso, se sigue de (3.4.9) que

$$u^i_\lambda \geq \theta_{[\lambda,h]} \geq \theta_{[\lambda_1,h]}\,, \qquad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_0)\,, \quad i \in \mathcal{J}(\lambda). \tag{3.4.10}$$

Así, para probar (3.4.3) es suficiente mostrar que para cada $x \in \Omega^0_a \cup \bigcup_{j=1}^p \Gamma_1^{k_j}$

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \theta_{[\lambda,h]}(x) = \infty\,. \tag{3.4.11}$$

En efecto, diferenciando (3.3.41) con respecto a λ se desprende que

$$\mathcal{L}(\lambda)\dot\theta_{[\lambda,h]} + a(x)[\theta_{[\lambda,h]}\partial_u h(\theta_{[\lambda,h]}) + h(\theta_{[\lambda,h]})]\dot\theta_{[\lambda,h]} = W\theta_{[\lambda,h]} \qquad \text{en} \qquad \Omega \tag{3.4.12}$$

y

$$\mathcal{B}(b)\dot\theta_{[\lambda,h]} = 0 \qquad \text{en} \qquad \partial\Omega\,, \tag{3.4.13}$$

para cada $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_0)$, donde $\dot\theta_{[\lambda,h]}$ representa la derivada de $\theta_{[\lambda,h]}$ con respecto a λ. De este modo, ya que a es nula en Ω^0_a y $W > 0$, se sigue de (3.4.10) y (3.4.12) que para cada $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_0)$ se verifica lo siguiente

$$\mathcal{L}(\lambda)\dot\theta_{[\lambda,h]} = W\theta_{[\lambda,h]} \geq W\theta_{[\lambda_1,h]} \qquad \text{in} \qquad \Omega^0_a\,. \tag{3.4.14}$$

Además, ya que $\dot\theta_{[\lambda,h]} \geq 0$ y gracias a (3.4.13), se sigue de la definición del operador de frontera $\mathcal{B}(b,\Omega^0_a)$, que

$$\mathcal{B}(b,\Omega^0_a)\dot\theta_{[\lambda,h]} \geq 0 \qquad \text{en} \qquad \partial\Omega^0_a. \tag{3.4.15}$$

Por otro parte, la solución $\theta_{[\lambda_1,h]}$ es fuertemente positiva en Ω (cf. Lema 3.2.2) y por eso, existe $c > 0$ tal que

$$W\theta_{[\lambda_1,h]} \geq cW\varphi_0 \qquad \text{en} \qquad \Omega^0_a\,, \tag{3.4.16}$$

donde φ_0 representa la autofunción principal asociada con $\Sigma_0(\lambda_0)$. De este modo, ya que $\Sigma_0(\lambda) > 0$ para cada $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_0)$, gracias a la caracterización del principio del máximo (cf. Teorema 1.3.4), se sigue de (3.4.14),(3.4.15) y (3.4.16) que para cada $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_0)$

$$\dot{\theta}_{[\lambda,h]} = \mathcal{L}^{-1}(\lambda)(W\theta_{[\lambda,h]}) \geq \mathcal{L}^{-1}(\lambda)(cW\varphi_0) = \frac{c}{\lambda_0 - \lambda}\varphi_0\,, \tag{3.4.17}$$

donde $\mathcal{L}^{-1}(\lambda)$ representa al operador inverso de $\mathcal{L}(\lambda)$ en Ω_a^0 y por ello,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \dot{\theta}_{[\lambda,h]}(x) = +\infty \tag{3.4.18}$$

para cada $x \in \bar{\Omega}_a^0$ tal que $\varphi_0(x) > 0$. Así, debido al hecho de que φ_0 es fuertemente positiva en Ω_a^0, tenemos que

$$\varphi_0(x) > 0\,, \qquad \text{para cada} \quad x \in \Omega_a^0 \cup \bigcup_{j=1}^{p} \Gamma_1^{k_j}\,,$$

y por ello, (3.4.17) implica que

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \dot{\theta}_{[\lambda,h]}(x) = +\infty\,, \qquad \text{para cada} \quad x \in \Omega_a^0 \cup \bigcup_{j=1}^{p} \Gamma_1^{k_j}.$$

Observar que gracias a $(\mathcal{A}1)$, se sigue que $\Gamma_1^{k_j} \subset \partial\Omega_a^0$ y $\Gamma_1^{k_j}$ es una componente de $\partial\Omega_a^0$ para cada $1 \leq j \leq p$. Esto completa la prueba de (3.4.11) y consecuentemente (3.4.3) es mostrado.

Además, ya que φ_0 es fuertemente positiva en Ω_a^0, se sigue que φ_0 está alejada de cero en cada subconjunto compacto de $\Omega_a^0 \cup \bigcup_{j=1}^{p} \Gamma_1^{k_j}$ y por eso, (3.4.17) junto con (3.4.10) implican que (3.4.3) se verifica uniformemente en cualquier subconjunto compacto de $\Omega_a^0 \cup \bigcup_{j=1}^{p} \Gamma_1^{k_j}$. Además, si K es un subconjunto compacto de $\Omega_a^0 \cup \bigcup_{j=1}^{p} \Gamma_1^{k_j}$, debido a que $\theta_{[\lambda_1,h]}$ es fuertemente positiva en Ω, se sigue de (3.4.10) y (3.4.17) que la siguiente estimación es satisfecha

$$u_\lambda^i(x) \geq \theta_{[\lambda,h]}(x) > \theta_{[\lambda_1,h]}(x) + \log(\frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_0 - \lambda})^{\gamma(K)} > \log(\frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_0 - \lambda})^{\gamma(K)}\,, \qquad x \in K$$

para cada $(\lambda, i) \in [\lambda_1, \lambda_0) \times \mathcal{J}(\lambda)$; donde $\gamma(K) := c \inf_K \varphi_0 > 0$. Esto concluye la demostración del teorema cuando $W > 0$ en Ω y se cumplen (3.4.1) y (3.4.2).

Ahora supongamos que $W < 0$ en Ω y además (3.4.5) y (3.4.6) se verifican. Entonces, adaptando el argumento previo obtenemos que $\tilde{\Sigma}(\lambda)$ y $\Sigma_0(\lambda)$ son crecientes y que existe $\varepsilon_1 > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$(\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon_1) \subset \Lambda(a, h) \subset \Lambda(a, f)\,.$$

Además, la aplicación $\lambda \to \theta_{[\lambda,h]}$ es decreciente y (3.4.10) es satisfecho para cada $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_1]$ con $\lambda_1 \in (\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon_1)$ fijo. De este modo, argumentando como en el caso en el que $W > 0$ en Ω, obtenemos que

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \dot{\theta}_{[\lambda,h]}(x) = -\infty\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \Omega_a^0 \cup \bigcup_{j=1}^{p} \Gamma_1^{k_j}\,,$$

y por ello, (3.4.3) es mostrado. Además, de (3.4.10) obtenemos que (3.4.3) es satisfecho uniformemente en cualquier subconjunto compacto de $\Omega_a^0 \cup \bigcup_{j=1}^p \Gamma_1^{k_j}$, y de nuevo (3.4.4) es obtenido para cada $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_1]$. Esto completa la demostración del teorema cuando $W < 0$ en Ω y (3.4.5), (3.4.6) son satisfechos. Esto concluye la demostración del teorema. □

Nota 3.4.2 *Observar que ya que la función $\theta_{[\lambda_1,h]}$ es fuertemente positiva en Ω (cf. Lema 3.2.2), $\theta_{[\lambda_1,h]}$ está alejada de cero en cada subconjunto compacto D de $\Omega \cup \Gamma_1$. Ahora, dado un subconjunto compacto D de $\Omega \cup \Gamma_1$, definamos*

$$C(D) := \inf_{x \in D} \theta_{[\lambda_1,h]}(x) > 0 .$$

Entonces, bajo las hipótesis del Teorema 3.4.1, se sigue de (3.4.10) que existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño independiente de D, tal que

$$u_\lambda^i(x) \geq C(D) > 0 , \qquad x \in D , \qquad i \in \mathcal{J}(\lambda) ,$$

se verifica o bien para cada $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0)$ si $W > 0$ en Ω, o para cada $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$ si $W < 0$ en Ω. En otras palabras, si W tiene signo constante en Ω, existe $\varepsilon > 0$ tal que la familia de soluciones positivas de (3.1.1)

$$\{ u_\lambda^i \ : \ (\lambda, i) \in ((\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon) \cap \Lambda(a, f)) \times \mathcal{J}(\lambda) \}$$

está uniformemente alejada de cero en cada subconjunto compacto de $\Omega \cup \Gamma_1$.

Capítulo 4

Variación de dominios y condiciones de frontera en una clase general de problemas sublineales

---

Este capítulo analiza la dependencia continua con respecto a perturbaciones del dominio y condiciones de frontera, de las soluciones positivas de una clase muy general de problemas sublineales elípticos de valores en la frontera con pesos. También averigua el comportamiento asintótico de las soluciones positivas de esa clase de problemas sublineales, cuando la función peso en la frontera $b(x)$ explota. Para llevar a cabo este análisis utilizaremos entre otros la caracterización del principio del máximo fuerte debida a H. Amann y J. López-Gómez [5], los resultados sobre dependencia continua de autovalores principales demostrados en el Capítulo 2, y los resultados sobre existencia y unicidad de soluciones positivas para problemas sublineales elípticos de valores en la frontera, demostrados en el Capítulo 3.

4.1 Introducción

Es este capítulo analizamos la dependencia continua con respecto a perturbaciones del dominio Ω y condiciones de frontera, de las soluciones positivas del siguiente problema sublineal elíptico de valores en la frontera de tipo mixto con peso

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda W(x)u - a(x)f(x,u)u & \text{en } \Omega\,, \\ \mathcal{B}(b)u = 0 & \text{en } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

donde $a \in L_\infty(\Omega)$ pertenece a un cierta clase de potenciales no negativos que será introducida más adelante y $W \in L_\infty(\Omega)$. A lo largo de este capítulo supondremos que:

a) Ω es un dominio acotado de $\mathbf{R}^N$, $N \geq 1$, de clase $\mathcal{C}^2$, es decir, $\bar{\Omega}$ es una subvariedad N-dimensional compacta y conexa de $\mathbf{R}^N$ con frontera $\partial\Omega$ de clase $\mathcal{C}^2$.

b) $\lambda \in \mathbf{R}, W \in L_\infty(\Omega)$ y

$$\mathcal{L} := -\sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \alpha_0(x) \tag{4.1.2}$$

es un operador diferencial lineal elíptico de segundo orden en Ω con coeficientes

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}), \quad \alpha_i \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}), \quad \alpha_0 \in L_\infty(\Omega), \quad 1 \leq i, j \leq N, \tag{4.1.3}$$

el cual es uniformemente fuertemente elíptico en Ω. En lo sucesivo denotaremos por $\mu > 0$ a la constante de elipticidad de $\mathcal{L}$ en Ω. Entonces, para cada $\xi \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ y $x \in \bar{\Omega}$ tenemos que

$$\sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j \geq \mu\,|\xi|^2.$$

c) $\mathcal{B}(b)$ representa al operador de frontera

$$\mathcal{B}(b)u := \begin{cases} u & \text{en } \Gamma_0, \\ \partial_\nu u + bu & \text{en } \Gamma_1, \end{cases} \tag{4.1.4}$$

donde Γ_0 y Γ_1 son dos subconjuntos disjuntos abiertos y cerrados de $\partial\Omega$ con $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega$, $b \in \mathcal{C}(\Gamma_1)$, y

$$\nu = (\nu_1, ..., \nu_N) \in \mathcal{C}^1(\Gamma_1; \mathbf{R}^N)$$

es cualquier campo vectorial exterior y no tangente. Necesariamente, Γ_0 y Γ_1 poseen un número finito de componentes conexas. Observar que $\mathcal{B}(b)$ es el operador de frontera de Dirichlet sobre Γ_0, denotado en lo sucesivo por $\mathcal{D}$, y el operador de frontera de Neumann o de derivada regular oblicua de primer orden sobre Γ_1. Debe ser destacado que o bien Γ_0 o Γ_1 puede ser el conjunto vacío.

d) La función $f : \bar{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbf{R}$ satisface

$$f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega} \times [0, \infty); \mathbf{R}), \quad \lim_{u \nearrow \infty} f(x, u) = +\infty \text{ uniformemente en } \bar{\Omega}, \tag{4.1.5}$$

y

$$\partial_u f(\cdot, u) > 0 \qquad \text{para cada} \qquad u \geq 0. \tag{4.1.6}$$

Destacaremos que

$$f(\cdot, 0) \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}; \mathbf{R})$$

y que no hay ninguna restricción de signo sobre $f(\cdot, 0)$ en Ω. Además, (4.1.6) implica

$$f(\cdot, 0) = \inf_{\xi > 0} f(\cdot, \xi).$$

e) En lo que a la función peso $a \in L_\infty(\Omega)$ concierne, supondremos que a es un potencial admisible en Ω, es decir, $a \in \mathcal{A}(\Omega)$, donde $\mathcal{A}(\Omega)$ es la clase de funciones peso a en Ω, reales, no negativas, medibles y acotadas, para las cuales existe un subconjunto abierto Ω_a^0 de Ω y un subconjunto compacto K de $\bar{\Omega}$ con medida de Lebesgue cero tal que

$$K \cap (\bar{\Omega}_a^0 \cup \Gamma_1) = \emptyset\,, \tag{4.1.7}$$

$$\Omega_a^+ := \{\, x \in \Omega \ : \ a(x) > 0\} = \Omega \setminus (\bar{\Omega}_a^0 \cup K)\,, \tag{4.1.8}$$

y que se verifica cada una de las siguientes cuatro condiciones:

($\mathcal{A}1$) Ω_a^0 posee un número finito de componentes conexas de clase $\mathcal{C}^2$, digamos $\Omega_a^{0,j}$; $1 \le j \le m$, tales que $\bar{\Omega}_a^{0,i} \cap \bar{\Omega}_a^{0,j} = \emptyset$ si $i \neq j$, y

$$\text{dist}\,(\Gamma_1, \partial\Omega_a^0 \cap \Omega) > 0\,. \tag{4.1.9}$$

Así, si denotamos por Γ_1^i, $1 \le i \le n_1$, a las componentes de Γ_1, entonces para cada $1 \le i \le n_1$ o bien $\Gamma_1^i \subset \partial\Omega_a^0$ o $\Gamma_1^i \cap \partial\Omega_a^0 = \emptyset$. Además, si $\Gamma_1^i \subset \partial\Omega_a^0$, entonces Γ_1^i debe ser una componente de $\partial\Omega_a^0$. En efecto, si $\Gamma_1^i \cap \partial\Omega_a^0 \neq \emptyset$ pero Γ_1^i no es una componente de $\partial\Omega_a^0$, entonces dist $(\Gamma_1^i, \partial\Omega_a^0 \cap \Omega) = 0$.

($\mathcal{A}2$) Denotemos por $\{i_1, ..., i_p\}$ al subconjunto de $\{1, ..., n_1\}$ para el cual $\Gamma_1^j \cap \partial\Omega_a^0 = \emptyset$ si, y sólamente si, $j \in \{i_1, ..., i_p\}$. Entonces, a está alejada de cero en cada subconjunto compacto de

$$\Omega_a^+ \cup \bigcup_{j=1}^{p} \Gamma_1^{i_j}\,.$$

Observar que si $\Gamma_1 \subset \partial\Omega_a^0$, entonces únicamente estamos imponiendo que a esté alejada de cero en cada subconjunto compacto de Ω_a^+.

($\mathcal{A}3$) Denotemos por Γ_0^i, $1 \le i \le n_0$, a las componentes de Γ_0, y sea $\{i_1, ..., i_q\}$ el subconjunto de $\{1, ..., n_0\}$ para el cual $(\partial\Omega_a^0 \cup K) \cap \Gamma_0^j \neq \emptyset$ si, y sólamente si, $j \in \{i_1, ..., i_q\}$. Entonces, a está alejada de cero en cada subconjunto compacto de

$$\Omega_a^+ \cup [\bigcup_{j=1}^{q} \Gamma_0^{i_j} \setminus (\partial\Omega_a^0 \cup K)]\,.$$

Observar que si $(\partial\Omega_a^0 \cup K) \cap \Gamma_0 = \emptyset$, entonces únicamente estamos imponiendo que a esté alejada de cero en cada subconjunto compacto de Ω_a^+.

($\mathcal{A}4$) Para cada $\eta > 0$ existen un número natural $\ell(\eta) \ge 1$ y $\ell(\eta)$ subconjuntos abiertos de $\mathbf{R}^N$, G_j^η, $1 \le j \le \ell(\eta)$, con $|G_j^\eta| < \eta$, $1 \le j \le \ell(\eta)$, tales que

$$\bar{G}_i^\eta \cap \bar{G}_j^\eta = \emptyset \qquad \text{si} \quad i \neq j\,, \qquad K \subset \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} G_j^\eta\,,$$

y para cada $1 \le j \le \ell(\eta)$ el conjunto abierto $G_j^\eta \cap \Omega$ es conexo y de clase $\mathcal{C}^2$.

Debemos destacar que bajo estas hipótesis generales, la teoría abstracta desarrollada en los Capítulos 2 y 3 puede ser aplicada para trabajar con (4.1.1).

En lo sucesivo también consideraremos la clase de funciones peso $\mathcal{A}^+(\Omega)$ consistente en los elementos $a \in \mathcal{A}(\Omega)$ para los que $\Omega_a^0 = \emptyset$ (cf. Sección 2.10).

Ahora introducimos alguna notación general. De aquí en adelante denotaremos por $\tilde{\mathcal{L}}$ al operador diferencial auxiliar

$$\tilde{\mathcal{L}} := \mathcal{L} + a(\cdot)f(\cdot, 0), \tag{4.1.10}$$

y para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, representaremos por $\mathcal{L}(\lambda)$ y $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ a los operadores auxiliares

$$\mathcal{L}(\lambda) := \mathcal{L} - \lambda W, \qquad \tilde{\mathcal{L}}(\lambda) := \tilde{\mathcal{L}} - \lambda W. \tag{4.1.11}$$

Se debe destacar, que los operadores definidos por (4.1.10) y (4.1.11) son uniformemente fuertemente elípticos en Ω con la misma constante de elipticidad $\mu > 0$ que $\mathcal{L}$.

En lo sucesivo nos referiremos al problema (4.1.1) como problema $P[\lambda, \Omega, \mathcal{B}(b)]$. También, denotaremos por $\Lambda[\Omega, \mathcal{B}(b)]$ al conjunto de valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales $P[\lambda, \Omega, \mathcal{B}(b)]$ posee una solución positiva. En el caso particular de que $\mathcal{B}(b) = \mathcal{D}$ denotaremos por

$$P[\lambda, \Omega, \mathcal{B}(b)] = P[\lambda, \Omega, \mathcal{D}], \qquad \Lambda[\Omega, \mathcal{B}(b)] = \Lambda[\Omega, \mathcal{D}].$$

Algunos resultados pioneros en el marco de soluciones débiles para condiciones de frontera de tipo Robin clásicas, se pueden encontrar en E.N.Dancer & D.Daners [16], donde se realizó un detallado análisis del comportamiento límite de las soluciones de ciertos problemas de valores en la frontera de tipo Robin, cuando una sucesión de dominios Ω_n converge a Ω en un sentido muy débil. Ya que las condiciones de frontera allí consideradas son condiciones de frontera de tipo Robin cásicas, es decir, $\Gamma_0 = \emptyset$ y la función peso en la frontera $b(x)$ está acotada inferiormente por una constante positiva, para desarrollar su análisis Dancer y Daners pudieron utilizar resultados globales de invertibilidad. Debido al hecho de que en este capítulo estamos trabajando bajo condiciones de frontera generales de tipo mixto y en particular, la función peso en la frontera $b(x)$ se puede anular en algunas regiones de alguna de las componentes de Γ_1, siendo además negativa en otras regiones de estas componentes, para obtener la dependencia continua de las soluciones positivas de (4.1.1) con respecto a perturbaciones del dominio Ω alrededor de su frontera Dirichlet Γ_0, debemos realizar un pormenorizado análisis sobre el comportamiento de las trazas de las soluciones en los dominios aproximantes, para obtener así la convergencia en $H^1(\Omega)$ de tales soluciones positivas. Precisamente, demostraremos los siguientes resultados sobre dependencia continua de soluciones positivas de (4.1.1), con respecto a perturbaciones exteriores e interiores del dominio alrededor de su frontera Dirichlet.

Teorema 4.1.1 (Dependencia continua exterior) *Supongamos* (1.4.15). *Sea* Ω_0 *un subdominio propio de* Ω *con frontera de clase* C^2 *tal que*

$$\partial\Omega_0 = \Gamma_0^0 \cup \Gamma_1, \qquad \Gamma_0^0 \cap \Gamma_1 = \emptyset,$$

donde Γ_0^0 *satisface los mismos requisitos que* Γ_0, *y sea* $\Omega_n \subset \Omega$, $n \geq 1$, *una sucesión de dominios acotados de* $\mathbf{R}^N$ *de clase* $\mathcal{C}^2$ *convergiendo a* Ω_0 *desde el exterior en el sentido de la Definición 2.5.1. Para cada* $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ *denotemos por* $\mathcal{B}_n(b)$ *al operador de frontera definido por*

$$\mathcal{B}_n(b)u := \begin{cases} u & \text{en } \Gamma_0^n, \\ \partial_\nu u + bu & \text{en } \Gamma_1, \end{cases}$$

donde

$$\Gamma_0^n := \partial\Omega_n \setminus \Gamma_1, \qquad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

Supongamos además que

$$a \in \mathcal{A}(\Omega_0), \qquad \lambda \in \Lambda[\Omega_0, \mathcal{B}_0(b)]$$

y que existe $n_0 \in \mathbf{N}$ *tal que*

$$a \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \mathcal{A}(\Omega_n), \qquad \lambda \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \Lambda[\Omega_n, \mathcal{B}_n(b)]$$

y para cada $n \geq 0$ *denotemos por* u_n *a la única solución positiva de* $P[\lambda, \Omega_n, \mathcal{B}_n(b)]$; *debe ser destacado que la unicidad está garantizada por el Teorema 3.3.2. Entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n|_{\Omega_0} - u_0\|_{H^1(\Omega_0)} = 0.$$

Teorema 4.1.2 (Dependencia continua interior) *Supongamos* (1.4.15). *Sea* Ω_0 *un subdominio propio de* Ω *con frontera de clase* $\mathcal{C}^2$ *tal que*

$$\partial\Omega_0 = \Gamma_0^0 \cup \Gamma_1, \qquad \Gamma_0^0 \cap \Gamma_1 = \emptyset,$$

donde Γ_0^0 *satisface los mismos requisitos que* Γ_0, *y sea* $\Omega_n \subset \Omega$, $n \geq 1$, *una sucesión de dominios acotados de* $\mathbf{R}^N$ *de clase* $\mathcal{C}^2$ *convergiendo a* Ω_0 *desde el interior en el sentido de la Definición 2.5.1. Para cada* $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ *denotemos por* $\mathcal{B}_n(b)$ *al operador de frontera definido por*

$$\mathcal{B}_n(b)u := \begin{cases} u & \text{en } \Gamma_0^n, \\ \partial_\nu u + bu & \text{en } \Gamma_1, \end{cases}$$

donde

$$\Gamma_0^n := \partial\Omega_n \setminus \Gamma_1, \qquad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

Supongamos además que

$$a \in \mathcal{A}(\Omega_0), \qquad \lambda \in \Lambda[\Omega_0, \mathcal{B}_0(b)],$$

y que existe $n_0 \in \mathbf{N}$ *tal que*

$$a \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \mathcal{A}(\Omega_n), \qquad \lambda \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \Lambda[\Omega_n, \mathcal{B}_n(b)],$$

y para cada $n \geq 0$, denotemos por u_n a la única solución positiva de $P[\lambda, \Omega_n, \mathcal{B}_n(b)]$; debe ser destacado que la unicidad está garantizada por el Teorema 3.3.2. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{u}_n - u_0\|_{H^1(\Omega_0)} = 0\,,$$

donde

$$\tilde{u}_n := \begin{cases} u_n & \text{en } \Omega_n \\ 0 & \text{en } \Omega_0 \setminus \Omega_n, \end{cases} \qquad n \geq 1\,.$$

Ahora, combinando el Teorema 4.1.1 con el Teorema 4.1.2 obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.1.3 (Dependencia continua) *Supongamos* (1.4.15). *Sea Ω_0 un subdominio propio de Ω con frontera de clase C^2 tal que*

$$\partial\Omega_0 = \Gamma_0^0 \cup \Gamma_1\,, \qquad \Gamma_0^0 \cap \Gamma_1 = \emptyset\,,$$

donde Γ_0^0 satisface los mismos requisitos que Γ_0, y sea $\Omega_n \subset \Omega$, $n \geq 1$, una sucesión de dominios acotados de $\mathbf{R}^N$ de clase C^2 convergiendo a Ω_0 en el sentido de la Definición 2.5.1.

Sean Ω_n^I y Ω_n^E, $n \geq 1$, dos sucesiones de dominios acotados en Ω tales que Ω_n^I, $n \geq 1$, converge a Ω_0 desde el interior, Ω_n^E, $n \geq 1$, converge a Ω_0 desde el exterior y

$$\Omega_n^I \subset \Omega_0 \cap \Omega_n\,, \qquad \Omega_0 \cup \Omega_n \subset \Omega_n^E\,, \qquad n \geq 1\,.$$

Para cada

$$\tilde{\Omega} \in \mathcal{O} := \{\,\Omega_0\,, \Omega_n\,, \Omega_n^I\,, \Omega_n^E \;:\; n \geq 1\,\}\,,$$

denotemos por $\mathcal{B}(b, \tilde{\Omega})$ al operador de frontera definido por

$$\mathcal{B}(b, \tilde{\Omega})u := \begin{cases} u & \text{en } \partial\tilde{\Omega} \setminus \Gamma_1\,, \\ \partial_\nu u + bu & \text{en } \Gamma_1\,. \end{cases}$$

Supongamos además que

$$a \in \mathcal{A}(\Omega_0)\,, \qquad \lambda \in \Lambda[\Omega_0, \mathcal{B}_0(b)]\,,$$

y que existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que

$$a \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} [\mathcal{A}(\Omega_n) \cap \mathcal{A}(\Omega_n^I) \cap \mathcal{A}(\Omega_n^E)]$$

y

$$\lambda \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} (\Lambda[\Omega_n, \mathcal{B}(b, \Omega_n)] \cap \Lambda[\Omega_n^I, \mathcal{B}(b, \Omega_n^I)] \cap \Lambda[\Omega_n^E, \mathcal{B}(b, \Omega_n^E)])\,.$$

Denotemos por u_0 a la única solución positiva de $P[\lambda, \Omega_0, \mathcal{B}(b, \Omega_0)]$ y para cada $n \geq n_0$, denotemos por u_n, u_n^I, u_n^E a las únicas soluciones positivas de

$$P[\lambda, \Omega_n, \mathcal{B}(b, \Omega_n)]\,, \qquad P[\lambda, \Omega_n^I, \mathcal{B}(b, \Omega_n^I)]\,, \qquad P[\lambda, \Omega_n^E, \mathcal{B}(b, \Omega_n^E)]\,,$$

respectivamente. Ahora, definamos

$$\tilde{u}_n^I := \begin{cases} u_n^I & \text{en } \Omega_n^I \\ 0 & \text{en } \Omega_0 \setminus \Omega_n^I , \end{cases} \qquad n \geq 1 ,$$

y

$$\tilde{u}_n := \begin{cases} u_n & \text{en } \Omega_n \\ 0 & \text{en } \Omega \setminus \Omega_n , \end{cases} \qquad n \geq 1 .$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n^E|_{\Omega_0} - u_0\|_{H^1(\Omega_0)} = 0 , \qquad \lim_{n\to\infty} \|\tilde{u}_n^I - u_0\|_{H^1(\Omega_0)} = 0 ,$$

y

$$\tilde{u}_n^I \leq u_0 \leq u_n^E|_{\Omega_0} , \qquad \tilde{u}_n^I \leq \tilde{u}_n|_{\Omega_0} \leq u_n^E|_{\Omega_0} , \qquad en \;\; \Omega_0 , \qquad n \geq n_0 .$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{u}_n|_{\Omega_0} - u_0\|_{L_p(\Omega_0)} = 0 , \qquad p \in [1,\infty) .$$

Otra propiedad que analizaremos en este capítulo será la dependencia continua de las soluciones positivas de (4.1.1) respecto de la función peso en la frontera $b(x)$. En este sentido, nuestro principal resultado establece lo siguiente:

Teorema 4.1.4 *Denotemos por $\sigma(L_\infty(\Gamma_1), L_1(\Gamma_1))$ a la topología débil de $L_\infty(\Gamma_1)$. Supongamos $\Gamma_1 \neq \emptyset$ y (1.4.15). Sea $b_n \in C(\Gamma_1)$, $n \geq 0$, una sucesión verificando*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b_0 \qquad en \qquad \sigma(L_\infty(\Gamma_1), L_1(\Gamma_1)) . \tag{4.1.12}$$

Sean $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2 \in C(\Gamma_1)$ y $n_0 \in \mathbf{N}$ tales que

$$\hat{b}_1 \leq b_n \leq \hat{b}_2 , \qquad n = 0, \quad n \geq n_0 , \tag{4.1.13}$$

cuya existencia está garantizada por (4.1.12). Supongamos además que

$$\lambda \in \Lambda[\Omega, \mathcal{B}(b_0)] \cap \bigcap_{i=1}^{2} \Lambda[\Omega, \mathcal{B}(\hat{b}_i)] \cap \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \Lambda[\Omega, \mathcal{B}(b_n)] . \tag{4.1.14}$$

Para cada $n \geq n_0$, denotemos por u_n a la única solución positiva de $P[\lambda, \Omega, \mathcal{B}(b_n)]$, y por u_0 a la única solución positiva de $P[\lambda, \Omega, \mathcal{B}(b_0)]$, cuya existencia está garantizada por (4.1.14) y cuya unicidad por el Teorema 3.3.2. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_0\|_{H^1(\Omega)} = 0 .$$

Parece que éste es el primer resultado general disponible en la literatura, concerniente a la dependencia continua con respecto a $b(x)$ de las soluciones positivas de un problema de valores en la frontera del tipo (4.1.1). Debe ser destacado que el Teorema 4.1.4 es un resultado muy general con consecuencias muy fuertes. Por ejemplo, Theorem 4.1.4 es esencial en el análisis del comportamiento de las soluciones positivas de problemas de valores en la frontera con condiciones de frontera no lineales.

Finalmente, es este capítulo averiguaremos el comportamiento asintótico de las soluciones positivas de (4.1.1) cuando

$$\min_{\Gamma_1} b(x) \nearrow \infty.$$

En este sentido, nuestro principal resultado establece que éstas convergen a la solución positiva del problema de Dirichlet $P[\lambda, \Omega, \mathcal{D}]$. El resultado es el siguiente:

Teorema 4.1.5 *Supongamos $\Gamma_1 \neq \emptyset$. Sea $b_n \in \mathcal{C}(\Gamma_1)$, $n \geq 1$, una sucesión verificando*

$$\lim_{n\to\infty} \min_{\Gamma_1} b_n = \infty\,.$$

Asumamos que

$$\lambda \in \Lambda[\Omega, \mathcal{D}]\,.$$

Supongamos además que existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que

$$\lambda \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \Lambda[\Omega, \mathcal{B}(b_n)].$$

Para cada $n \geq n_0$, denotemos por u_n a la única solución positiva de $P[\lambda, \Omega, \mathcal{B}(b_n)]$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_D\|_{H^1(\Omega)} = 0\,,$$

donde u_D es la única solución positiva del problema de Dirichlet $P[\lambda, \Omega, \mathcal{D}]$.

Una vez que hemos discutido algunos de los principales resultados de este capítulo, pasamos a describir brevemente su organización. En la Sección 4.2 damos un resultado de comparación entre la única solución positiva de (4.1.1) y cualquier sub o supersolución positiva de (4.1.1), en la Sección 4.3 demostramos que el hecho de pertenecer a la clse $\mathcal{A}(\Omega)$ o $\mathcal{A}^+(\Omega)$ se hereda a cualquier subdominio abierto de Ω satisfaciendo determinadas propiedades estructurales, en la Sección 4.4 demostramos el Teorema 4.1.1, en la Sección 4.5 demostramos el Teorema 4.1.2, en la Sección 4.6 combinamos el Teorema 4.1.1 con el Teorema 4.1.2 para demostrar el Teorema 4.1.3, en la Sección 4.7 demostramos el Teorema 4.1.4 y finalmente, en la Sección 4.8 demostramos el Teorema 4.1.5. Además, en las Secciones 4.4, 4.5, 4.7 y 4.8 proporcionamos condiciones suficientes bajo las cuales está garantizado el marco abstracto de trabajo que permite aplicar los diferentes resultados de dependencia continua de soluciones positivas de problemas sublineales elípticos.

4.2 Un teorema de comparación

En esta sección, como una consecuencia del Teorema 1.3.4, mostramos un teorema de comparación entre la solución positiva y cualquier supersolución positiva (resp. subsolución positiva) de un problema elíptico del tipo (4.1.1).

Teorema 4.2.1 *Para cada $V \in L_\infty(\Omega)$, sea el problema*

$$\begin{cases} (\mathcal{L}+V)u = \lambda W(x)u - a(x)f(x,u)u & \text{en } \Omega \\ \mathcal{B}(b)u = 0 & \text{en } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Supongamos que (4.2.1) *posee una solución positiva, $p > N$, y $u \in W_p^2(\Omega)$ es una supersolución positiva (resp. subsolución positiva) de* (4.2.1). *Entonces,*

$$u \geq \theta \qquad (\textit{resp. } u \leq \theta)\,,$$

donde θ representa la única solución positiva de (4.2.1).

Demostración: Supongamos que $u \in W_p^2(\Omega)$, $p > N$ es una supersolución positiva de (4.2.1). Necesariamente, o bien $u = \theta$ o $u \neq \theta$. Si $u = \theta$ el resultado está probado. Supongamos entonces que

$$u \neq \theta\,. \tag{4.2.2}$$

En este caso, u debe ser una supersolución positiva estricta de (4.2.1). En efecto, si no es así, por la unicidad de solución positiva del problema (4.2.1) se deduce que $u = \theta$, lo cual contradice (4.2.2). Entonces,

$$\begin{cases} (\mathcal{L}+V+ag-\lambda W)(u-\theta) \geq 0 & \text{en } \Omega\,, \\ \mathcal{B}(b)(u-\theta) \geq 0 & \text{en } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{4.2.3}$$

con alguna de las desigualdades de forma estricta, donde

$$g(x) := \begin{cases} \frac{u(x)f(x,u(x))-\theta(x)f(x,\theta(x))}{u(x)-\theta(x)} & \text{si } u(x) \neq \theta(x) \\ f(x,u(x)) & \text{si } u(x) = \theta(x) \end{cases}, \qquad x \in \bar{\Omega}\,.$$

Por la monotonía de f en su segundo argumento, se sigue fácilmente que

$$g > f(\cdot,\theta) \qquad \text{en } \Omega\,,$$

ya que $u \neq \theta$. Así, gracias a la Proposición 2.2.3 y al Lema 3.2.2, obtenemos que

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}+V+ag-\lambda W,\mathcal{B}(b)] \geq \sigma_1^\Omega[\mathcal{L}+V+af(\cdot,\theta)-\lambda W,\mathcal{B}(b)] = 0\,. \tag{4.2.4}$$

Debe ser destacado que pudiera ocurrir que $g = f(\cdot,\theta)$ en Ω_a^+. Por eso, $\geq$ no puede ser sustituido por $>$ en (4.2.4) sin ningún trabajo adiccional. Supongamos

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}+V+ag-\lambda W,\mathcal{B}(b)] = 0 \tag{4.2.5}$$

y denotemos por $\varphi > 0$ a la autofunción principal de $(\mathcal{L} + V + ag - \lambda W, \mathcal{B}(b), \Omega)$. Entonces, se sigue de (4.2.3) que para cada $\kappa > 0$ la función

$$\bar{u} := u - \theta + \kappa\varphi$$

nos proporciona una supersolución estricta de $(\mathcal{L} + V + ag - \lambda W, \mathcal{B}(b), \Omega)$. Además, ya que φ es fuertemente positiva en Ω, $\bar{u} > 0$ si κ es suficientemente grande. De este modo, se sigue del Teorema 1.3.4 que

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L} + V + ag - \lambda W, \mathcal{B}(b)] > 0\,, \tag{4.2.6}$$

lo cual contradice (4.2.5). Por tanto, necesariamente se cumple (4.2.6) y cero no puede ser un autovalor de $(\mathcal{L} + V + ag - \lambda W, \mathcal{B}(b), \Omega)$. De este modo, gracias al Teorema 1.3.4, se sigue de (4.2.3) y (4.2.6) que $u > \theta$, siendo ésta la desigualdad deseada. Este argumento puede ser fácilmente adaptado para completar la prueba del teorema. □

4.3 Estar en la clase $\mathcal{A}(\Omega)$ es hereditario

En esta sección probaremos que el hecho de estar en $\mathcal{A}(\Omega)$ o $\mathcal{A}^+(\Omega)$ se hereda a cualquier subdominio abierto de Ω satisfaciendo adecuadas propiedades estructurales. En lo sucesivo, siempre que $a \in \mathcal{A}(\Omega)$ y $\tilde{\Omega}$ sea un subdominio abierto de Ω tàl que $a \in \mathcal{A}(\tilde{\Omega})$, denotaremos por $[\tilde{\Omega}]_a^0$ al subconjunto abierto máximal de $\tilde{\Omega}$ donde el potencial a se anula (recordar la definición de la clase $\mathcal{A}(\tilde{\Omega})$).

Teorema 4.3.1 *Supongamos $a \in \mathcal{A}(\Omega)$ y sean Ω_a^0, Ω_a^+ y K los correspondientes conjuntos de la definición de clase $\mathcal{A}(\Omega)$. Sea $\tilde{\Omega}$ un subdominio abierto de Ω de clase $\mathcal{C}^2$ verificando*

$$\mathit{dist}(\partial\Omega, \partial\tilde{\Omega} \cap \Omega) > 0\,. \tag{4.3.1}$$

Entonces, las siguientes afirmaciones son ciertas:

i) Si $\Omega_a^0 \cap \tilde{\Omega} \neq \emptyset$, $\Omega_a^0 \cap \tilde{\Omega}$ es de clase $\mathcal{C}^2$ y

$$(\partial\tilde{\Omega} \cap \Omega) \cap \partial(\Omega_a^0 \cap \tilde{\Omega}) = (\partial\tilde{\Omega} \cap \Omega) \cap \bar{\Omega}_a^0\,, \tag{4.3.2}$$

entonces $a \in \mathcal{A}(\tilde{\Omega})$ y

$$[\tilde{\Omega}]_a^0 = \Omega_a^0 \cap \tilde{\Omega}\,.$$

ii) Si $\Omega_a^0 \cap \tilde{\Omega} = \emptyset$ y

$$\Gamma^* \setminus K \subset \Omega_a^+\,, \tag{4.3.3}$$

para cada componente Γ^* de $\partial\tilde{\Omega} \cap \Omega$ satisfaciendo

$$\Gamma^* \cap K \neq \emptyset\,,$$

entonces $a \in \mathcal{A}^+(\tilde{\Omega})$.

In particular, si $a \in \mathcal{A}^+(\Omega)$, entonces $a \in \mathcal{A}^+(\tilde{\Omega})$.

Demostración: Primeramente debe ser observado que gracias a (4.3.1), cada componente $\hat{\Gamma}$ de $\partial\Omega$ satisface o bien $\hat{\Gamma} \subset \partial\tilde{\Omega}$ o $\hat{\Gamma} \cap \partial\tilde{\Omega} = \emptyset$ y si $\hat{\Gamma} \subset \partial\tilde{\Omega}$, entonces $\hat{\Gamma}$ debe ser una componente de $\partial\tilde{\Omega}$. En particular, si denotamos por Γ_1^i, $1 \leq i \leq n_1$, a las componentes de Γ_1, entonces, para cada $1 \leq i \leq n_1$, o bien $\Gamma_1^i \subset \partial\tilde{\Omega}$ o $\Gamma_1^i \cap \partial\tilde{\Omega} = \emptyset$. Además, si $\Gamma_1^i \subset \partial\tilde{\Omega}$, entonces Γ_1^i debe ser una componente de $\partial\tilde{\Omega}$. Denotaremos por $\{i_1, \dots, i_{\tilde{n}_1}\}$ al subconjunto de $\{1, \dots, n_1\}$ para el cual $\Gamma_1^i \subset \partial\tilde{\Omega}$ si, y sólamente si, $i \in \{i_1, \dots, i_{\tilde{n}_1}\}$.

Ahora probamos i). Supongamos que $\Omega_a^0 \cap \tilde{\Omega}$ es no vacío y de clase C^2. Ya que $a \in \mathcal{A}(\Omega)$, existe un subconjunto abierto Ω_a^0 de Ω y un subconjunto compacto K de $\bar{\Omega}$ con medida de Lebesgue cero tal que

$$K \cap (\bar{\Omega}_a^0 \cup \Gamma_1) = \emptyset\,, \tag{4.3.4}$$

$$\Omega_a^+ := \{x \in \Omega \;:\; a(x) > 0\} = \Omega \setminus (\bar{\Omega}_a^0 \cup K)\,, \tag{4.3.5}$$

y se verifica cada una de las cuatro condiciones $(\mathcal{A}1) - (\mathcal{A}4)$ de la introducción. En particular,

$$\operatorname{dist}(\Gamma_1, \partial\Omega_a^0 \cap \Omega) > 0\,. \tag{4.3.6}$$

Observar, que gracias a (4.3.6), cada una de las componentes de Γ_1^i, $1 \leq i \leq n_1$, of Γ_1 satisface o bien

$$\Gamma_1^i \subset \partial\Omega_a^0$$

o

$$\Gamma_1^i \cap \partial\Omega_a^0 = \emptyset\,.$$

Además, si $\Gamma_1^i \subset \partial\Omega_a^0$, entonces Γ_1^i debe ser una componente de $\partial\Omega_a^0$.

Definiendo por

$$\tilde{\Omega}_a^0 := \Omega_a^0 \cap \tilde{\Omega}\,, \qquad \tilde{K} := K \cap \bar{\tilde{\Omega}}\,, \qquad \tilde{\Omega}_a^+ := \tilde{\Omega} \setminus (\bar{\tilde{\Omega}}_a^0 \cup \tilde{K})\,,$$

mostraremos que el conjunto abierto

$$[\tilde{\Omega}]_a^0 := \tilde{\Omega}_a^0$$

y el conjunto compacto $\tilde{K}$ satisfacen todos los requisitos de la definición de la clase $\mathcal{A}(\tilde{\Omega})$. En efecto, denotemos por $\Omega_a^{0,i}$, $1 \leq i \leq m$ a las componentes de Ω_a^0. Es conocido de la definición de clase $\mathcal{A}(\Omega)$ que

$$\bar{\Omega}_a^{0,i} \cap \bar{\Omega}_a^{0,j} = \emptyset \qquad \text{si} \qquad i \neq j\,.$$

Ya que Ω_a^0 es el subconjunto abierto máximal de Ω donde a se anula, $\tilde{\Omega}_a^0$ es el subconjunto abierto máximal de $\tilde{\Omega}$ donde a se anula. Además, ya que

$$\tilde{\Omega}_a^0 = \Omega_a^0 \cap \tilde{\Omega} = \bigcup_{i=1}^m \Omega_a^{0,i} \cap \tilde{\Omega} = \bigcup_{i=1}^m (\Omega_a^{0,i} \cap \tilde{\Omega}) \tag{4.3.7}$$

es de clase C^2, obtenemos que $\Omega_a^{0,i} \cap \tilde{\Omega}$ es de clase C^2 para cada $1 \leq i \leq m$. Además,

$$\overline{\Omega_a^{0,i} \cap \tilde{\Omega}} \cap \overline{\Omega_a^{0,j} \cap \tilde{\Omega}} = \emptyset \tag{4.3.8}$$

si $i \neq j$, porque
$$\bar{\Omega}_a^{0,i} \cap \bar{\Omega}_a^{0,j} = \emptyset .$$
Debe ser observado que alguno de los conjuntos $\Omega_a^{0,i} \cap \tilde{\Omega}$, $1 \leq i \leq m$ puede ser el conjunto vacío. De este modo, gracias a la reguaridad de $\Omega_a^{0,i} \cap \tilde{\Omega}$, para cada $1 \leq i \leq m$, obtenemos que $\tilde{\Omega}_a^{0,i} \cap \tilde{\Omega}$ posee un número finito de componentes de clase $\mathcal{C}^2$ con clausuras mutuamente dis juntas. Por eso, gracias a (4.3.7) y (4.3.8), $\tilde{\Omega}_a^0$ posee un número finito de componentes de clase $\mathcal{C}^2$ cuyas respectivas clausuras son mutuamente disjuntas. También, ya que K es un subconjunto compacto de $\bar{\Omega}$ con medida de Lebesgue cero, $\tilde{K}$ es un subconjunto compacto de $\bar{\tilde{\Omega}}$ con medida de Lebesgue cero, y ya que $\tilde{K} \subset K$ y $\tilde{\Omega}_a^0 \subset \Omega_a^0$,
$$\tilde{K} \cap (\bar{\tilde{\Omega}}_a^0 \cup \Gamma_1) \subset K \cap (\bar{\Omega}_a^0 \cup \Gamma_1) .$$
Por eso, gracias a (4.3.4),
$$\tilde{K} \cap (\bar{\tilde{\Omega}}_a^0 \cup \Gamma_1) = \emptyset .$$
Además, gracias a (4.3.5),
$$\{x \in \tilde{\Omega} \ : \ a(x) > 0\} = \tilde{\Omega} \cap (\Omega \setminus (\bar{\Omega}_a^0 \cup K)) = \tilde{\Omega} \setminus (\bar{\tilde{\Omega}}_a^0 \cup \tilde{K}) ,$$
por la definición de $\tilde{\Omega}_a^0$ y $\tilde{K}$. Por tanto,
$$\tilde{\Omega}_a^+ = \{x \in \tilde{\Omega} \ : \ a(x) > 0\} = \tilde{\Omega} \setminus ([\bar{\tilde{\Omega}}]_a^0 \cup \tilde{K}) .$$
Para completar la prueba de la Parte (i) resta mostrar que se cumplen ($\mathcal{A}$1)-($\mathcal{A}$4).

Ya que $\tilde{\Omega}_a^0$ posee un número finito de componentes de clase $\mathcal{C}^2$ cuyas respectivas clausuras son mutuamente disjuntas, para completar la prueba de ($\mathcal{A}_1$) es suficiente demostrar que
$$\operatorname{dist}(\Gamma_1, \partial\tilde{\Omega}_a^0 \cap \tilde{\Omega}) > 0 . \tag{4.3.9}$$
En efecto, ya que
$$\partial\tilde{\Omega}_a^0 = \partial(\Omega_a^0 \cap \tilde{\Omega}) \subset \partial\Omega_a^0 \cup \partial\tilde{\Omega} ,$$
tenemos que
$$\partial\tilde{\Omega}_a^0 \cap \tilde{\Omega} \subset (\partial\Omega_a^0 \cup \partial\tilde{\Omega}) \cap \tilde{\Omega} = \partial\Omega_a^0 \cap \tilde{\Omega} \subset \partial\Omega_a^0 \cap \Omega ,$$
porque $\partial\tilde{\Omega} \cap \tilde{\Omega} = \emptyset$. Así, ya que $a \in \mathcal{A}(\Omega)$,
$$\operatorname{dist}(\Gamma_1, \partial\tilde{\Omega}_a^0 \cap \tilde{\Omega}) \geq \operatorname{dist}(\Gamma_1, \partial\Omega_a^0 \cap \Omega) > 0 ,$$
lo cual completa la prueba de (4.3.9).

Esto completa la demostración de ($\mathcal{A}$1) para a en $\tilde{\Omega}$.

Gracias a (4.3.9), para cada $i \in \{i_1, \dots, i_{\tilde{n}_1}\}$, la componente Γ_1^i de $\Gamma_1 \cap \partial\tilde{\Omega}$ (cf. el principio de la demostración) satisface o bien $\Gamma_1^i \subset \partial\tilde{\Omega}_a^0$ o $\Gamma_1^i \cap \partial\tilde{\Omega}_a^0 = \emptyset$. Además, si $\Gamma_1^i \subset \partial\tilde{\Omega}_a^0$, entonces Γ_1^i debe ser una componente de $\partial\tilde{\Omega}_a^0$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que existe
$$1 \leq \tilde{n}_2 \leq \tilde{n}_1$$

tal que, para cada $1 \leq k \leq \tilde{n}_1$,

$$\Gamma_1^{i_k} \subset \partial\tilde{\Omega} \cap \partial\tilde{\Omega}_a^0$$

si, y sólamente si,

$$1 \leq k \leq \tilde{n}_2 .$$

Entonces, por construcción, tenemos

$$\Gamma_1 \cap \partial\tilde{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{\tilde{n}_1} \Gamma_1^{i_k}, \qquad \Gamma_1 \cap \partial\tilde{\Omega} \cap \partial\tilde{\Omega}_a^0 = \bigcup_{k=1}^{\tilde{n}_2} \Gamma_1^{i_k},$$

y

$$\partial\tilde{\Omega}_a^0 \cap \bigcup_{k=\tilde{n}_2+1}^{\tilde{n}_1} \Gamma_1^{i_k} = \emptyset$$

si $\tilde{n}_2 < \tilde{n}_1$.

Ahora probamos $(\mathcal{A}2)$ para a en $\tilde{\Omega}$. Utilizando las notaciones previas, para probar $(\mathcal{A}2)$ debemos demostrar que a está alejada de cero en cada subconjunto compacto de

$$\tilde{\Omega}_a^+ \cup \bigcup_{k=\tilde{n}_2+1}^{\tilde{n}_1} \Gamma_1^{i_k} .$$

Para demostrar lo anterior, utilizaremos la siguiente identidad

$$\partial\Omega_a^0 \cap \bigcup_{k=\tilde{n}_2+1}^{\tilde{n}_1} \Gamma_1^{i_k} = \emptyset . \tag{4.3.10}$$

Para probar (4.3.10) razonamos por reducción al absurdo asumiendo que existe

$$\tilde{n}_2 + 1 \leq k \leq \tilde{n}_1$$

para el cual

$$\Gamma_1^{i_k} \cap \partial\Omega_a^0 \neq \emptyset .$$

Entonces, gracias a (4.3.6),

$$\Gamma_1^{i_k} \subset \partial\Omega_a^0$$

y por eso,

$$\Gamma_1^{i_k} \subset \partial\Omega_a^0 \cap \partial\tilde{\Omega} , \tag{4.3.11}$$

ya que, por construcción, $\Gamma_1^{i_k} \subset \partial\tilde{\Omega}$ (cf. el principio de la demostración del teorema). Así, ya que

$$\partial\Omega_a^0 \cap \partial\tilde{\Omega} \subset \partial(\Omega_a^0 \cap \tilde{\Omega}) = \partial\tilde{\Omega}_a^0 , \tag{4.3.12}$$

se sigue de (4.3.11) y (4.3.12) que

$$\Gamma_1^{i_k} = \Gamma_1^{i_k} \cap \partial\Omega_a^0 \cap \partial\tilde{\Omega} \subset \Gamma_1^{i_k} \cap \partial\tilde{\Omega}_a^0 ,$$

lo cual es imposible, ya que por construcción,

$$\Gamma_1^{i_k} \cap \partial\tilde{\Omega}_a^0 = \emptyset .$$

Esta contradicción demuestra (4.3.10). Por otra parte,

$$\tilde{\Omega}_a^+ = \{x \in \tilde{\Omega} \, : \, a(x) > 0\} \subset \{x \in \Omega \, : \, a(x) > 0\} = \Omega_a^+ \tag{4.3.13}$$

y por tanto, (4.3.10) y (4.3.13) implican

$$\tilde{\Omega}_a^+ \cup \bigcup_{k=\tilde{n}_2+1}^{\tilde{n}_1} \Gamma_1^{i_k} \subset \Omega_a^+ \cup \bigcup_{k=\tilde{n}_2+1}^{\tilde{n}_1} \Gamma_1^{i_k} \subset \Omega_a^+ \cup (\Gamma_1 \setminus \partial\Omega_a^0) . \tag{4.3.14}$$

Ya que $a \in \mathcal{A}(\Omega)$, a está alejada de cero en cualquier subconjunto compacto de

$$\Omega_a^+ \cup (\Gamma_1 \setminus \partial\Omega_a^0) .$$

De este modo, gracias a (4.3.14), a está alejada de cero en cada subconjunto compacto de

$$\tilde{\Omega}_a^+ \cup \bigcup_{k=\tilde{n}_2+1}^{\tilde{n}_1} \Gamma_1^{i_k}$$

y por tanto, $(\mathcal{A}2)$ es satisfecha por a en $\tilde{\Omega}$. Esto completa de demostración de $(\mathcal{A}2)$ para a en $\tilde{\Omega}$.

Ahora probamos $(\mathcal{A}3)$ para a en $\tilde{\Omega}$. Recalcamos que gracias a (4.3.1), cada componente Γ^* de $\partial\Omega$ cumple o bien

$$\Gamma^* \subset \partial\tilde{\Omega} ,$$

o

$$\Gamma^* \cap \partial\tilde{\Omega} = \emptyset.$$

Además, si $\Gamma^* \subset \partial\tilde{\Omega}$, entonces Γ^* debe ser una componente de $\partial\tilde{\Omega}$. De este modo,

$$\partial\tilde{\Omega} = (\Gamma_0 \cap \partial\tilde{\Omega}) \cup (\Gamma_1 \cap \partial\tilde{\Omega}) \cup (\partial\tilde{\Omega} \cap \Omega) ,$$

y

$$\operatorname{dist}(\Gamma_1 \cap \partial\tilde{\Omega} , \Gamma_0 \cap \partial\tilde{\Omega}) > 0 , \qquad \operatorname{dist}(\Gamma_i \cap \partial\tilde{\Omega} , \partial\tilde{\Omega} \cap \Omega) > 0 , \qquad i = 0, 1 . \tag{4.3.15}$$

Denotemos por Γ_0^i, $1 \le i \le n_0$ a las componentes de Γ_0 y por Γ_1^j, $1 \le j \le n_1$ a las componentes de Γ_1. Sean además, Γ_0^i, $1 \le i \le \tilde{n}_0$ las componentes de $\partial\tilde{\Omega} \cap \Gamma_0$, Γ_1^j, $1 \le j \le \tilde{n}_1$ las componentes de $\partial\tilde{\Omega} \cap \Gamma_1$ y Γ_2^l, $1 \le l \le \tilde{n}_2$ las componentes de $\partial\tilde{\Omega} \cap \Omega$. Así, tenemos que

$$\partial\tilde{\Omega} \cap \Gamma_0 = \bigcup_{i=1}^{\tilde{n}_0} \Gamma_0^i, \qquad \partial\tilde{\Omega} \cap \Gamma_1 = \bigcup_{j=1}^{\tilde{n}_1} \Gamma_1^j, \qquad \partial\tilde{\Omega} \cap \Omega = \bigcup_{l=1}^{\tilde{n}_2} \Gamma_2^l .$$

Gracias a (4.3.15) tenemos que

$$\operatorname{dist}(\Gamma_2^l, \Gamma_0^i) > 0, \qquad 1 \le l \le \tilde{n}_2, \qquad 1 \le i \le \tilde{n}_0 ,$$

$$\operatorname{dist}(\Gamma_2^l,\Gamma_1^j)>0,\qquad 1\le l\le \tilde n_2,\qquad 1\le j\le \tilde n_1\,,$$

y

$$\operatorname{dist}(\Gamma_1^j,\Gamma_0^i)>0,\qquad 1\le j\le \tilde n_1,\qquad 1\le i\le \tilde n_0\,.$$

Ahora, sea $\{i_1,\dots,i_p\}$ el subconjunto de $\{1,\dots,\tilde n_0\}$ tal que $\Gamma_0^i\cap(\partial\tilde\Omega_a^0\cup\tilde K)\neq\emptyset$ si, y sólamente si, $i\in\{i_1,\dots,i_p\}$, y $\{l_1,\dots,l_q\}$ el subconjunto de $\{1,\dots,\tilde n_2\}$ tal que $\Gamma_2^l\cap(\partial\tilde\Omega_a^0\cup\tilde K)\neq\emptyset$ si, y sólamente si, $l\in\{l_1,\dots,l_q\}$. Sea $\mathcal{I}$ el subconjunto de $\{1,\dots,n_0\}$ tal que $\Gamma_0^i\cap(\partial\Omega_a^0\cup K)\neq\emptyset$ si, y sólamente si, $i\in\mathcal{I}$.

Ahora probamos que

$$\{i_1,\dots,i_p\}\subset\mathcal{I},\tag{4.3.16}$$

y por ello,

$$\Gamma_0^i\cap(\partial\Omega_a^0\cup K)\neq\emptyset\,,$$

para cada $i\in\{i_1,\dots,i_p\}$. Para demostrar (4.3.16) razonaremos por reducción al absurdo asumiendo que existe $i\in\{i_1,\dots,i_p\}$ tal que $i\notin\mathcal{I}$. Entonces,

$$\Gamma_0^i\cap(\partial\tilde\Omega_a^0\cup\tilde K)\neq\emptyset\qquad\text{y}\qquad \Gamma_0^i\cap(\partial\Omega_a^0\cup K)=\emptyset\tag{4.3.17}$$

se cumplen y ya que

$$\Gamma_0^i\cap(\partial\tilde\Omega_a^0\cup\tilde K)\subset\Gamma_0^i\cap(\bar\Omega_a^0\cup K)\subset\Gamma_0^i\cap(\partial\Omega_a^0\cup K)=\emptyset,$$

llegamos a contradicción con (4.3.17). Esto demuestra (4.3.16).

Ahora, para demostrar ($\mathcal{A}3$) para a en $\tilde\Omega$ debemos demostrar que a está alejada de cero en cada subconjunto compacto de

$$\tilde\Omega_a^+\cup[\bigcup_{k=1}^p\Gamma_0^{i_k}\setminus(\partial\tilde\Omega_a^0\cup\tilde K)]\cup[\bigcup_{k=1}^q\Gamma_2^{l_k}\setminus(\partial\tilde\Omega_a^0\cup\tilde K)]\,.$$

En efecto, ya que por construcción

$$\bigcup_{k=1}^q\Gamma_2^{l_k}\subset\partial\tilde\Omega\cap\Omega\,,$$

obtenemos que

$$[\bigcup_{k=1}^q\Gamma_2^{l_k}\setminus(\partial\tilde\Omega_a^0\cup\tilde K)]\subset(\partial\tilde\Omega\cap\Omega)\setminus(\partial\tilde\Omega_a^0\cup\tilde K)=(\partial\tilde\Omega\cap\Omega)\setminus(\partial(\Omega_a^0\cap\tilde\Omega)\cup\tilde K),\tag{4.3.18}$$

ya que gracias a ($\mathcal{A}1$) para a en $\tilde\Omega$ tenemos que $\tilde\Omega_a^0=\Omega_a^0\cap\tilde\Omega$. Así, gracias a (4.3.2), se sigue de (4.3.18) que

$$[\bigcup_{k=1}^q\Gamma_2^{l_k}\setminus(\partial\tilde\Omega_a^0\cup\tilde K)]\subset(\partial\tilde\Omega\cap\Omega)\setminus(\bar\Omega_a^0\cup\tilde K)=(\partial\tilde\Omega\cap\Omega)\setminus(\bar\Omega_a^0\cup K)\subset\Omega\setminus(\bar\Omega_a^0\cup K)=\Omega_a^+\,,\tag{4.3.19}$$

ya que por definición de $\tilde{K}$,

$$\tilde{K} \cap \partial\tilde{\Omega} \cap \Omega = K \cap \bar{\tilde{\Omega}} \cap \partial\tilde{\Omega} \cap \Omega = K \cap \partial\tilde{\Omega} \cap \Omega .$$

Por otra parte, debe ser destacado que

$$\Gamma_0^{i_k} \setminus (\partial\tilde{\Omega}_a^0 \cup \tilde{K}) = \Gamma_0^{i_k} \setminus (\partial\Omega_a^0 \cup K) , \qquad 1 \leq k \leq p , \tag{4.3.20}$$

ya que

$$(\partial\tilde{\Omega}_a^0 \cup \tilde{K}) \cap \Gamma_0^{i_k} = (\partial\Omega_a^0 \cup K) \cap \Gamma_0^{i_k},$$

porque $\bigcup_{k=1}^{p} \Gamma_0^{i_k} \subset \partial\tilde{\Omega} \cap \Gamma_0$. Por eso, se sigue de (4.3.16) y (4.3.20) que

$$[\bigcup_{k=1}^{p} \Gamma_0^{i_k} \setminus (\partial\tilde{\Omega}_a^0 \cup \tilde{K})] = [\bigcup_{k=1}^{p} \Gamma_0^{i_k} \setminus (\partial\Omega_a^0 \cup K)] \subset [\bigcup_{i \in \mathcal{I}} \Gamma_0^{i} \setminus (\partial\Omega_a^0 \cup K)] . \tag{4.3.21}$$

Entonces, ya que $\tilde{\Omega}_a^+ \subset \Omega_a^+$, se sigue de (4.3.19) y (4.3.21) que

$$\tilde{\Omega}_a^+ \cup [\bigcup_{k=1}^{p} \Gamma_0^{i_k} \setminus (\partial\tilde{\Omega}_a^0 \cup \tilde{K})] \cup [\bigcup_{k=1}^{q} \Gamma_2^{l_k} \setminus (\partial\tilde{\Omega}_a^0 \cup \tilde{K})] \subset \Omega_a^+ \cup [\bigcup_{i \in \mathcal{I}} \Gamma_0^{i} \setminus (\partial\Omega_a^0 \cup K)] . \tag{4.3.22}$$

Por tanto, debido al hecho de que a está alejada de cero en cada subconjunto compacto de

$$\Omega_a^+ \cup [\bigcup_{i \in \mathcal{I}} \Gamma_0^{i} \setminus (\partial\Omega_a^0 \cup K)] ,$$

porque $a \in \mathcal{A}(\Omega)$, se sigue de (4.3.22) que a está alejada de cero en cada subconjunto compacto de

$$\tilde{\Omega}_a^+ \cup [\bigcup_{k=1}^{p} \Gamma_0^{i_k} \setminus (\partial\tilde{\Omega}_a^0 \cup \tilde{K})] \cup [\bigcup_{k=1}^{q} \Gamma_2^{l_k} \setminus (\partial\tilde{\Omega}_a^0 \cup \tilde{K})] .$$

Esto completa la demostración de $(\mathcal{A}3)$ para a en $\tilde{\Omega}$.

Ahora probamos $(\mathcal{A}4)$ para a en $\tilde{\Omega}$. En efecto, sea $\eta > 0$. Entonces, ya que $a \in \mathcal{A}(\Omega)$, existe un número natural $\ell(\eta) \geq 1$ y $\ell(\eta)$ subconjuntos abiertos de $\mathbf{R}^N$, G_j^η, $1 \leq j \leq \ell(\eta)$, con $|G_j^\eta| < \eta$, $1 \leq j \leq \ell(\eta)$, tales que

$$\bar{G}_i^\eta \cap \bar{G}_j^\eta = \emptyset \qquad si \qquad i \neq j , \qquad K \subset \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} G_j^\eta , \tag{4.3.23}$$

y para cada $1 \leq j \leq \ell(\eta)$ el conjunto abierto $G_j^\eta \cap \Omega$ es conexo y de clase $\mathcal{C}^2$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $G_j^\eta \cap \tilde{\Omega} \neq \emptyset$ para cada $1 \leq j \leq \ell(\eta)$. Ya que $G_j^\eta \cap \Omega$ es de clase $\mathcal{C}^2$ para cada $1 \leq j \leq \ell(\eta)$, y $\tilde{\Omega}$ es de clase $\mathcal{C}^2$, el conjunto $G_j^\eta \cap \tilde{\Omega}$ posee un número finito de componentes con clausuras mutuamente disjunt as. Para cada $\eta > 0$ y $1 \leq j \leq \ell(\eta)$, denotemos por $N(\eta, j)$ al número de componentes de $G_j^\eta \cap \tilde{\Omega}$ y por

$$\{ G_j^{\eta,k} , \ 1 \leq k \leq N(\eta, j) \} ,$$

a la familia de componentes de $G_j^\eta \cap \tilde\Omega$. Ahora, para cada $\eta > 0$ y $1 \le j \le \ell(\eta)$, consideremos los conjuntos

$$\tilde G_j^{\eta,k} := G_j^{\eta,k} + B_\varepsilon(0)\,, \qquad 1 \le k \le N(\eta, j)\,,$$

donde $B_\varepsilon(0)$ es la bola de radio $\varepsilon > 0$ centrada en el origen. Gracias a (4.3.23) y ya que para cada $1 \le j \le \ell(\eta)$ las clausuras de $G_j^{\eta,k}$, $1 \le k \le N(\eta,j)$ son mutuamente disjuntas, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\bar{\tilde G}_i^{\eta,l} \cap \bar{\tilde G}_j^{\eta,k} = \emptyset \quad \text{si} \quad (i,l) \neq (j,k)\,, \tag{4.3.24}$$

para cada $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$. Observar que ya que $G_j^{\eta,k}$ es conexo para cada $1 \le j \le \ell(\eta)$, $1 \le k \le N(\eta,j)$, cada uno de los conjuntos $\tilde G_j^{\eta,k}$ es conexo. Ahora, ya que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} G_j^\eta\,,$$

tenemos que

$$\tilde K = K \cap \bar{\tilde\Omega} \subset \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} (G_j^\eta \cap \bar{\tilde\Omega}) \subset \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} \bigcup_{k=1}^{N(\eta,j)} \tilde G_j^{\eta,k}\,. \tag{4.3.25}$$

Además, ya que

$$|G_j^{\eta,k}| \le |G_j^\eta| < \eta\,, \quad 1 \le j \le \ell(\eta)\,,\ 1 \le k \le N(\eta,j)\,,$$

existe $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon_0)$ tal que

$$|\tilde G_j^{\eta,k}| < \eta\,, \qquad 1 \le j \le \ell(\eta)\,, \qquad 1 \le k \le N(\eta,j)\,, \tag{4.3.26}$$

para cada $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$. Además, ya que $\tilde G_j^{\eta,k}$ es conexo y $\tilde\Omega$ es de clase $\mathcal{C}^2$, existe $\varepsilon_2 \in (0,\varepsilon_1)$ tal que $\tilde G_j^{\eta,k} \cap \tilde\Omega$ es conexo para cada *varepsilon* $\in (0,\varepsilon_2)$, $1 \le j \le \ell(\eta)$, $1 \le k \le N(\eta,j)$.

Fijemos $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2)$. Supongamos que $\tilde G_j^{\eta,k} \cap \tilde\Omega \in \mathcal{C}^2$ para cada $1 \le j \le \ell(\eta)$, $1 \le k \le N(\eta,j)$. Entonces, gracias a (4.3.24), (4.3.25), (4.3.26) y ya que $\tilde G_j^{\eta,k} \cap \tilde\Omega$ es conexo y de clase $\mathcal{C}^2$, obtenemos que existe un número natur al $\tilde\ell(\eta)$ con

$$1 \le \tilde\ell(\eta) \le \ell(\eta) N(\eta,j)\,,$$

y $\tilde\ell(\eta)$ subconjuntos abiertos de $\mathbf{R}^N$, denotados por $\tilde G_j^{\eta,k}$, cumpliendo los requisitos de $(\mathcal{A}4)$ para a en $\tilde\Omega$. En particular,

$$\tilde K \subset \bigcup_{\substack{1\le j\le \ell(\eta)\\ 1\le k\le N(\eta,j)}} \tilde G_j^{\eta,k}\,. \tag{4.3.27}$$

Ahora, supongamos que existe un conjunto $\tilde G_j^{\eta,k}$ para el cual $\tilde G_j^{\eta,k} \cap \tilde\Omega \notin \mathcal{C}^2$. Entonces, gracias a (4.3.27)

$$\operatorname{dist}(\tilde K, \partial \bigcup_{\substack{1\le j\le \ell(\eta)\\ 1\le k\le N(\eta,j)}} \tilde G_j^{\eta,k}) > 0\,,$$

y por eso, existe un subconjunto abierto $\hat{G}_j^{\eta,k}$ de $\mathbf{R}^N$ tal que $\hat{G}_j^{\eta,k} \cap \tilde{\Omega}$ es conexo y

$$\tilde{K} \cap \bar{\tilde{G}}_j^{\eta,k} \subset \hat{G}_j^{\eta,k} \subset \bar{\tilde{G}}_j^{\eta,k} \subset \tilde{G}_j^{\eta,k}, \qquad \hat{G}_j^{\eta,k} \cap \tilde{\Omega} \in \mathcal{C}^2.$$

Entonces, sustituyendo $\tilde{G}_j^{\eta,k}$ por $\hat{G}_j^{\eta,k}$, obtenemos que de nuevo $(\mathcal{A}4)$ es satisfecho para a en $\tilde{\Omega}$.

La prueba de $(\mathcal{A}4)$ para a en $\tilde{\Omega}$ está completa.

Esto concluye la demostración de *i*).

ii) La demostración de *i*) puede ser fácilmente adaptada para demostrar que $a \in \mathcal{A}^+(\tilde{\Omega})$ supuesto que $\Omega_a^0 \cap \tilde{\Omega} = \emptyset$ y (4.3.3) es satisfecho por cada componente Γ^* de $\partial\tilde{\Omega} \cap \Omega$ verificando $\Gamma^* \cap K \neq \emptyset$.

Finalmente, supongamos que $a \in \mathcal{A}^+(\Omega)$. Entonces $\Omega_a^0 = \emptyset$ y por eso, $\Omega_a^0 \cap \tilde{\Omega} = \emptyset$ y se verifica la condición (4.3.3). Ahora, *ii*) implica el resultado.

Esto concluye la demostración del teorema. □

Como una consecuencia inmediata del Teorema 4.3.1 se sigue fácilmente el siguiente corolario.

Corolario 4.3.2 *Supongamos $a, V \in \mathcal{A}(\Omega)$, sean Ω_a^0, Ω_a^+ y K los correspondientes conjuntos de la definición de $a \in \mathcal{A}(\Omega)$ y Ω_V^0, Ω_V^+ y K_V los correspondientes conjuntos de la definición de $V \in \mathcal{A}(\Omega)$. Supongamos además que Ω_V^0 es conexo y*

$$dist\,(\Gamma_0, \partial\Omega_V^0 \cap \Omega) > 0\,. \tag{4.3.28}$$

Entonces, las siguientes afirmaciones son ciertas:

i) Si $\Omega_a^0 \cap \Omega_V^0 \neq \emptyset$, $\Omega_a^0 \cap \Omega_V^0$ es de clase $\mathcal{C}^2$ y

$$(\partial\Omega_V^0 \cap \Omega) \cap \partial(\Omega_a^0 \cap \Omega_V^0) = (\partial\Omega_V^0 \cap \Omega) \cap \bar{\Omega}_a^0,$$

entonces $a \in \mathcal{A}(\Omega_V^0)$ y

$$[\Omega_V^0]_a^0 = \Omega_a^0 \cap \Omega_V^0.$$

ii) Si $\Omega_a^0 \cap \Omega_V^0 = \emptyset$ y (4.3.3) es satisfecho por cada componente Γ^* de $\partial\Omega_V^0 \cap \Omega$ cumpliendo $\Gamma^* \cap K \neq \emptyset$, entonces $a \in \mathcal{A}^+(\Omega_V^0)$.

iii) Si $a \in \mathcal{A}^+(\Omega)$, entonces $a \in \mathcal{A}^+(\Omega_V^0)$.

Demostración: Ya que $V \in \mathcal{A}(\Omega)$, existe el correspondiente subconjunto abierto máximal de Ω donde V se anula, denotado por Ω_V^0, verificando

$$\mathrm{dist}\,(\Gamma_1\,,\, \partial\Omega_V^0 \cap \Omega) > 0 \tag{4.3.29}$$

y con un número finito de componentes de clase $\mathcal{C}^2$ con clausuras mutuamente disjuntas. Entonces, ya que $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, se sigue de (4.3.28) y (4.3.29) que

$$\mathrm{dist}\,(\partial\Omega\,,\, \partial\Omega_V^0 \cap \Omega) > 0\,,$$

y por eso, ya que $a \in \mathcal{A}(\Omega)$, tomando

$$\tilde{\Omega} := \Omega_V^0\,,$$

el resultado se sigue como una inmediata consecuencia del Teorema 4.3.1.

Esto concluye la demostración del corolario. □

4.4 Dependencia continua exterior

En esta sección analizamos la dependencia continua de las soluciones positivas de (4.1.1), con respecto a perturbaciones exteriores del dominio Ω alrededor de su frontera Dirichlet Γ_0 en el caso especial en el que ∂_ν es la derivada conormal con respecto a $\mathcal{L}$. Por tanto, a lo largo de toda la sección asumiremos que se verifica (1.4.15).

En lo sucesivo nos referiremos al problema (4.1.1) como el problema $P[\lambda, \Omega, \mathcal{B}(b)]$. También, denotaremos por $\Lambda[\Omega, \mathcal{B}(b)]$ al conjunto de valores de $\lambda \in \mathbf{R}$ para los cuales $P[\lambda, \Omega, \mathcal{B}(b)]$ posee una solución positiva.

El siguiente resultado nos proporciona la *dependencia continua exterior* de las soluciones positivas de $P[\lambda, \Omega, \mathcal{B}(b)]$.

Teorema 4.4.1 (Dependencia continua exterior) *Supongamos* (1.4.15). *Sea* Ω_0 *un subdominio propio de* Ω *con frontera de clase* C^2 *tal que*

$$\partial\Omega_0 = \Gamma_0^0 \cup \Gamma_1 , \qquad \Gamma_0^0 \cap \Gamma_1 = \emptyset ,$$

donde Γ_0^0 *satisface los mismos requisitos que* Γ_0, *y sea* $\Omega_n \subset \Omega$, $n \geq 1$, *una sucesión de dominios acotados de* $\mathbf{R}^N$ *de clase* C^2 *convergiendo a* Ω_0 *desde el exterior. Para cada* $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ *denotemos por* $\mathcal{B}_n(b)$ *al operador de frontera definido por*

$$\mathcal{B}_n(b)u := \begin{cases} u & \text{en } \Gamma_0^n , \\ \partial_\nu u + bu & \text{en } \Gamma_1 , \end{cases} \tag{4.4.1}$$

donde

$$\Gamma_0^n := \partial\Omega_n \setminus \Gamma_1 , \qquad n \in \mathbf{N} \cup \{0\} .$$

Supongamos además que

$$a \in \mathcal{A}(\Omega_0) , \qquad \lambda \in \Lambda[\Omega_0, \mathcal{B}_0(b)]$$

y que existe $n_0 \in \mathbf{N}$ *tal que*

$$a \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \mathcal{A}(\Omega_n) , \qquad \lambda \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \Lambda[\Omega_n, \mathcal{B}_n(b)] \tag{4.4.2}$$

y para cada $n \geq 0$ *denotemos por* u_n *a la única solución positiva de* $P[\lambda, \Omega_n, \mathcal{B}_n(b)]$; *debe ser destacado que la unicidad está garantizada por el Teorema 3.3.2. Entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n|_{\Omega_0} - u_0\|_{H^1(\Omega_0)} = 0 . \tag{4.4.3}$$

Demostración: Supongamos (4.4.2). Sin pérdida de generalidad podemos asumnir que $n_0 = 1$. Entonces, gracias al Teorema 3.3.2, el problema $P[\lambda, \Omega_n, \mathcal{B}_n(b)]$, $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, posee una única solución positiva, denotada en lo sucesivo por u_n. Además, gracias al Lema 3.2.2,

$$u_n \in W^2_{\mathcal{B}_n(b)}(\Omega_n) \subset H^2(\Omega_n) , \qquad n \in \mathbf{N} \cup \{0\} ,$$

y u_n es fuertemente positiva en Ω_n. En lo sucesivo para cada $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ definimos

$$\tilde{u}_n := \begin{cases} u_n & \text{en } \Omega_n, \\ 0 & \text{en } \Omega \setminus \Omega_n. \end{cases}$$

Ya que $u_n \in H^1(\Omega_n)$ y $u_n = 0$ sobre Γ_0^n, tenemos que $\tilde{u}_n \in H^1(\Omega)$ y

$$\|\tilde{u}_n\|_{H^1(\Omega)} = \|u_n\|_{H^1(\Omega_n)}, \qquad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}. \tag{4.4.4}$$

Además, ya que u_n es fuertemente positiva en Ω_n, $\Gamma_1 = \partial\Omega_n \setminus \Gamma_0^n$ para cada $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ y

$$\Omega_0 \subset \Omega_{n+1} \subset \Omega_n, \qquad n \in \mathbf{N},$$

se sigue fácilmente que

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_n = \lambda W u_n - af(\cdot, u_n)u_n & \text{en } \Omega_{n+1} \\ \mathcal{B}_{n+1}(b)u_n \geq 0 & \text{en } \partial\Omega_{n+1} \end{cases} \qquad n \in \mathbf{N},$$

y

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_n = \lambda W u_n - af(\cdot, u_n)u_n & \text{en } \Omega_0 \\ \mathcal{B}_0(b)u_n \geq 0 & \text{en } \partial\Omega_0 \end{cases} \qquad n \in \mathbf{N}.$$

De este modo, para cada $n \in \mathbf{N}$ la función u_n es una supersolución positiva de $P[\lambda, \Omega_{n+1}, \mathcal{B}_{n+1}(b)]$ y $P[\lambda, \Omega_0, \mathcal{B}_0(b)]$. Por eso, gracias al Teorema 4.2.1, obtenemos que

$$u_n|_{\Omega_{n+1}} \geq u_{n+1} > 0, \qquad u_n|_{\Omega_0} \geq u_0 > 0, \quad n \geq 1.$$

Por tanto, en Ω tenemos que

$$0 < \tilde{u}_0 \leq \tilde{u}_{n+1} \leq \tilde{u}_n \leq \tilde{u}_1, \qquad n \in \mathbf{N}. \tag{4.4.5}$$

Ahora, tomando

$$M := \|\tilde{u}_1\|_{L_\infty(\Omega)},$$

se sigue de (4.4.5) que

$$\|\tilde{u}_n\|_{L_\infty(\Omega)} \leq M, \qquad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \tag{4.4.6}$$

y por eso,

$$\|\tilde{u}_n\|_{L_2(\Omega)} \leq M\,|\Omega|^{\frac{1}{2}}, \qquad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}. \tag{4.4.7}$$

Ahora, Ahora mostraremos que existe $\hat{M} > 0$ tal que

$$\|\tilde{u}_n\|_{H^1(\Omega)} \leq \hat{M}, \qquad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}. \tag{4.4.8}$$

En efecto, ya que $\Omega_n \subset \Omega$ para cada $n \geq 0$ y $\mathcal{L}$ es fuertemente uniformemente elíptico en $\bar{\Omega}$, integrando por partes y utilizando que $u_n = 0$ sobre Γ_0^n, $\tilde{u}_n = 0$ en $\Omega \setminus \Omega_n$, $\tilde{u}_n|_{\Omega_n} = u_n$ y $u_n \in H^2(\Omega_n)$, $n \geq 0$, se obtiene que

$$\begin{aligned} \mu\|\nabla\tilde{u}_n\|^2_{L_2(\Omega)} &\leq \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega \alpha_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_i}\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_n} \alpha_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\frac{\partial u_n}{\partial x_j} \\ &= -\sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_n} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\alpha_{ij}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\Big)u_n + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Gamma_1} \alpha_{ij}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}u_n n_j \\ &= -\sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_n} \alpha_{ij}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i \partial x_j}u_n - \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_n} \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}u_n + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Gamma_1} \alpha_{ij}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}u_n n_j. \end{aligned}$$

De esta relación, teniendo en cuenta que u_n es una solución de $P[\lambda, \Omega_n, \mathcal{B}_n(b)]$ obtenemos que

$$\mu\|\nabla \tilde{u}_n\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \int_{\Omega_n} [(\lambda W - af(\cdot, u_n) - \alpha_0)u_n - \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_i \frac{\partial u_n}{\partial x_i}]u_n + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Gamma_1} \alpha_{ij}\frac{\partial u_n}{\partial x_i} u_n n_j\,, \quad (4.4.9)$$

donde los coeficientes $\tilde{\alpha}_i \in C(\bar{\Omega})$, $1 \leq i \leq N$, están dados por (1.4.14). De este modo, ya que $\tilde{u}_n = 0$ en $\Omega \setminus \Omega_n$ y $\tilde{u}_n \in H^1(\Omega)$ para cada $n \in \mathbf{N}$, se sigue de (4.4.9) que

$$\mu\|\nabla \tilde{u}_n\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \int_{\Omega} [\lambda W - af(\cdot, \tilde{u}_n) - \alpha_0]\tilde{u}_n^2 - \int_\Omega \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_i \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_i}\tilde{u}_n + \sum_{i,j=1,}^N \int_{\Gamma_1} \alpha_{ij}\frac{\partial u_n}{\partial x_i} u_n n_j\,. \quad (4.4.10)$$

Por otra parte, por construcción tenemos que

$$\partial_\nu u_n + b u_n = 0 \qquad \text{en} \qquad \Gamma_1\,, \qquad n \in \mathbf{N}\,,$$

donde $\nu = (\nu_1, ..., \nu_N)$ satisface

$$\nu_i := \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} n_j\,, \qquad 1 \leq i \leq N\,,$$

ya que estamos suponiendo que se verifica (1.4.15). Así, para cada número natural $n \geq 1$ tenemos que

$$\sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij}\frac{\partial u_n}{\partial x_i} n_j = \sum_{i=1}^N \nu_i \frac{\partial u_n}{\partial x_i} = \langle \nabla u_n, \nu\rangle = \partial_\nu u_n = -b u_n\,,$$

y por eso

$$\sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij}\frac{\partial u_n}{\partial x_i} u_n n_j = -b u_n^2\,. \quad (4.4.11)$$

Ahora, sustituyendo (4.4.11) en (4.4.10) y usando que $\tilde{u}_n|_{\Gamma_1} = u_n|_{\Gamma_1}$ se obtiene que

$$\mu\|\nabla \tilde{u}_n\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \int_{\Omega} [\lambda W - af(\cdot, \tilde{u}_n) - \alpha_0]\tilde{u}_n^2 - \int_\Omega \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_i \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_i}\tilde{u}_n - \int_{\Gamma_1} b\tilde{u}_n^2\,. \quad (4.4.12)$$

Ahora procedemos a estimar cada uno de los términos del segundo miembro de (4.4.12). Gracias a (4.4.6),

$$\left|\int_{\Omega} [\lambda W - af(\cdot, \tilde{u}_n) - \alpha_0]\tilde{u}_n^2\right| \leq M_1 M^2 |\Omega|\,, \quad (4.4.13)$$

donde

$$M_1 := |\lambda| \|W\|_{L_\infty(\Omega)} + \|a\|_{L_\infty(\Omega)} \|f\|_{L_\infty(\bar{\Omega}\times[0,M])} + \|\alpha_0\|_{L_\infty(\Omega)}\,.$$

Además,

$$\left|\int_{\Gamma_1} b\tilde{u}_n^2\right| \leq M^2 \|b\|_{L_\infty(\Gamma_1)} |\Gamma_1|\,, \quad (4.4.14)$$

donde $|\Gamma_1|$ representa la medida de Lebesgue $(N-1)$-dimensional de Γ_1.

Ahora, definiendo

$$M_2 := \sum_{i=1}^{N} \|\tilde{\alpha}_i\|_{L_\infty(\Omega)}, \qquad \varepsilon := \left(\frac{\mu}{M_2}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.4.15}$$

donde $\mu > 0$ es la constante de elipticidad de $\mathcal{L}$, y utilizando la desigualdad de Hölder se verifica que

$$\left|\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \tilde{\alpha}_i \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_i} \tilde{u}_n\right| \leq \sum_{i=1}^{N} \|\tilde{\alpha}_i\|_{L_\infty(\Omega)} \int_\Omega |\varepsilon \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_i}| \, |\varepsilon^{-1}\tilde{u}_n| \leq M_2 \frac{\varepsilon^2}{2} \|\nabla \tilde{u}_n\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{M_2}{2\varepsilon^2} \|\tilde{u}_n\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

De este modo, (4.4.15) implica

$$\left|\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \tilde{\alpha}_i \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_i} \tilde{u}_n\right| \leq \frac{\mu}{2} \|\nabla \tilde{u}_n\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{M_2^2}{2\mu} \|\tilde{u}_n\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{4.4.16}$$

Por eso, gracias a (4.4.7), (4.4.13), (4.4.14) y (4.4.16), obtenemos de (4.4.12) que

$$\mu \|\nabla \tilde{u}_n\|^2_{L_2(\Omega)} \leq M_3 + \frac{\mu}{2} \|\nabla \tilde{u}_n\|^2_{L_2(\Omega)},$$

donde

$$M_3 := M^2(M_1|\Omega| + \|b\|_{L_\infty(\Gamma_1)}|\Gamma_1|) + \frac{1}{2\mu} M_2^2 M^2 |\Omega|.$$

De este modo,

$$\|\nabla \tilde{u}_n\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \frac{2M_3}{\mu}, \tag{4.4.17}$$

y por tanto, gracias a (4.4.7) y (4.4.17), obtenemos que

$$\|\tilde{u}_n\|_{H^1(\Omega)} \leq \hat{M}, \qquad n \in \mathbf{N},$$

donde

$$\hat{M} := \left(M^2|\Omega| + \frac{2M_3}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Esto completa la prueba de (4.4.8).

Ahora, gracias a (4.4.5) y (4.4.8), a lo largo de alguna subsucesión, de nuevo etiquetada por n, tenemos que

$$0 < L := \lim_{n\to\infty} \|\tilde{u}_n\|_{H^1(\Omega)}. \tag{4.4.18}$$

En lo sucesivo nos restringiremos a tratar con las funciones de esa subsucesión. Ya que $H^1(\Omega)$ está incluido de forma compacta en $L_2(\Omega)$, se sigue de (4.4.8) que existe $\tilde{u} \in L_2(\Omega)$ y una subsucesión de $\tilde{u}_n$, $n \geq 1$, reetiquetada por n, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{u}_n - \tilde{u}\|_{L_2(\Omega)} = 0. \tag{4.4.19}$$

Para completar la demostración del Teorema es suficiente mostrar que (4.4.18) y (4.4.19) implican

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{u}_n - \tilde{u}\|_{H^1(\Omega)} = 0\,, \qquad \operatorname{supp} \tilde{u} \subset \bar{\Omega}_0\,, \qquad \tilde{u}|_{\Omega_0} = u_0\,,$$

ya que este argumento puede ser repetido a lo largo de cualquier subsucesión. De hecho, es suficiente probar la validez de la primera relación a lo largo de alguna subsucesión, ya que u_0 es la única solución positiva débil de $P[\lambda, \Omega_0, \mathcal{B}_0(b)]$.

Definamos

$$\tilde{v}_n := \frac{\tilde{u}_n}{\|\tilde{u}_n\|_{H^1(\Omega)}}\,, \qquad v_n := \tilde{v}_n|_{\Omega_n} = \frac{u_n}{\|u_n\|_{H^1(\Omega_n)}}\,, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,.$$

Por construcción, $\tilde{v}_n \in H^1(\Omega)$, $v_n \in H^2(\Omega_n)$,

$$\tilde{v}_n|_{\Omega\setminus\Omega_n} = 0\,, \qquad \|\tilde{v}_n\|_{H^1(\Omega)} = \|v_n\|_{H^1(\Omega_n)} = 1\,, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,, \tag{4.4.20}$$

y v_n es una solución positiva de

$$\begin{cases} \mathcal{L}v_n = \lambda W v_n - a f(\cdot, u_n) v_n & \text{en} \quad \Omega_n \\ \mathcal{B}_n(b) v_n = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega_n\,, \end{cases} \tag{4.4.21}$$

ya que u_n es una solución positiva de $P[\lambda, \Omega_n, \mathcal{B}_n(b)]$. Además, (4.4.5) y (4.4.6) implican

$$\|\tilde{v}_n\|_{L_\infty(\Omega)} = \frac{\|\tilde{u}_n\|_{L_\infty(\Omega)}}{\|\tilde{u}_n\|_{H^1(\Omega)}} \leq \frac{M}{\|\tilde{u}_n\|_{L_2(\Omega)}} \leq \frac{M}{\|\tilde{u}_0\|_{L_2(\Omega)}}\,. \tag{4.4.22}$$

Ahora, ya que $H^1(\Omega)$ está incluido de forma compacta en $L_2(\Omega)$, obtenemos de (4.4.20) que existe $\tilde{v} \in L_2(\Omega)$ y una subsucesión de $\tilde{v}_n$, $n \geq 1$, etiquetada por n, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{v}_n - \tilde{v}\|_{L_2(\Omega)} = 0\,. \tag{4.4.23}$$

En particular,

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{v}_n = \tilde{v} \qquad \text{c.t.p. en} \quad \Omega\,. \tag{4.4.24}$$

En lo sucesivo nos restringiremos a trabajar con las funciones de esa subsucesión. Ahora afirmamos que

$$\operatorname{supp} \tilde{v} \subset \bar{\Omega}_0\,. \tag{4.4.25}$$

En efecto, tomemos

$$x \notin \bar{\Omega}_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\Omega}_n\,.$$

Entonces, ya que $\bar{\Omega}_n$, $n \geq 1$, es una sucesión no creciente de conjuntos compactos, existe un número natural $n_0 \geq 1$ tal que $x \notin \bar{\Omega}_n$ para cada $n \geq n_0$. Así, $\tilde{v}_n(x) = 0$ para cada $n \geq n_0$, y por eso

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{v}_n(x) = 0 \qquad \text{si} \quad x \notin \bar{\Omega}_0\,.$$

Por tanto, la unicidad del límite en (4.4.24) implica que

$$\tilde{v} = 0 \qquad \text{en} \quad \Omega \setminus \bar{\Omega}_0 .$$

Esto demuestra (4.4.25).

Observar que $\tilde{v}_n(x) > 0$ para cada $x \in \Omega_n \cup \Gamma_1$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ya que $\tilde{v}_n$ es fuertemente positiva en Ω_n. Por eso, $\tilde{v}_n(x) > 0$ para cada $x \in \Omega_0 \cup \Gamma_1$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ya que $\Omega_0 \subset \Omega_n$. De este modo, (4.4.24) implica que

$$\tilde{v} \geq 0 \qquad \text{en} \quad \Omega_0 . \tag{4.4.26}$$

Ahora, analizaremos el comportamiento límite de las trazas de $\tilde{v}_n$, $n \geq 1$, sobre Γ_1. Por la regularidad requerida sobre $\partial\Omega_0$, se sigue del teorema de traza (e.g. Teorema 8.7 of [52]) que el operador traza sobre Γ_1

$$\begin{array}{rcl} \gamma_1 : H^1(\Omega_0) & \to & W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \\ u & \mapsto & \gamma_1 u := u|_{\Gamma_1} \end{array} \tag{4.4.27}$$

está bien definido y es un operador lineal y continuo. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ denotemos por i_n a la inclusión canónica

$$i_n : H^1(\Omega_n) \to H^1(\Omega_0) ,$$

es decir, la restricción a Ω_0 de las funciones de $H^1(\Omega_n)$. Observar que para cada $n \geq 1$

$$\|i_n\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_n),H^1(\Omega_0))} \leq 1 . \tag{4.4.28}$$

Entonces, definiendo

$$T_n := \gamma_1 \circ i_n , \qquad n \geq 1 ,$$

obtenemos de (4.4.28) que

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_n),W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))} \leq \|\gamma_1\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_0),W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))} , \qquad n \geq 1 .$$

Así, los operadores traza T_n, $n \geq 1$, están uniformemente acotados. Además, para cada $n \geq 1$ tenemos que

$$v_n|_{\Gamma_1} = T_n v_n \in W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) .$$

Por eso, (4.4.20) implica

$$\|\tilde{v}_n|_{\Gamma_1}\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \|v_n|_{\Gamma_1}\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \|T_n v_n\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \leq \|\gamma_1\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_0),W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))} , \qquad n \geq 1 ,$$

y ya que la inclusión

$$W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \hookrightarrow L_2(\Gamma_1)$$

es compacta, porque Γ_1 es compacto (e.g. Teorema 7.10 de [52]), existen $v^* \in L_2(\Gamma_1)$ y una subsucesión de $\tilde{v}_n$, $n \geq 1$, de nuevo etiquetada por n, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{v}_n|_{\Gamma_1} - v^*\|_{L_2(\Gamma_1)} = 0 . \tag{4.4.29}$$

En lo sucesivo nos restringiremos a trabajar con funciones de esa subsucesión.

Ahora probaremos que $\tilde{v}_n$, $n \geq 1$, es una sucesión de Cauchy en $H^1(\Omega)$. Observar que, gracias a (4.4.23), esto implica que

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{v}_n - \tilde{v}\|_{H^1(\Omega)} = 0. \tag{4.4.30}$$

En efecto, sean k y m dos números naturales tales que $1 \leq k \leq m$. Entonces, $\Omega_m \subset \Omega_k$ y, ya que $\mathcal{L}$ es fuertemente uniformemente elíptico en Ω, integrando por partes y usando que $v_n = 0$ sobre Γ_0^n, $\tilde{v}_n = 0$ en $(\Omega \setminus \Omega_n) \cup \Gamma_0^n$ y $\tilde{v}_n|_{\Omega_n} = v_n$, $n \geq 1$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\mu \|\nabla(\tilde{v}_k - \tilde{v}_m)\|_{L_2(\Omega)}^2 &\leq \textstyle\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega \alpha_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{v}_k - \tilde{v}_m) \frac{\partial}{\partial x_j}(\tilde{v}_k - \tilde{v}_m) \\
&= \textstyle\sum_{i,j=1}^N [\int_{\Omega_k} \alpha_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \int_{\Omega_m} \alpha_{ij} \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \frac{\partial v_m}{\partial x_j} - 2 \int_{\Omega_m} \alpha_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_m}{\partial x_j}] \\
&= -\textstyle\sum_{i,j=1}^N [\int_{\Omega_k} v_k \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_i}) + \int_{\Omega_m} v_m \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha_{ij} \frac{\partial v_m}{\partial x_i}) - 2 \int_{\Omega_m} v_m \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_i})] \\
&+ \textstyle\sum_{i,j=1}^N \int_{\Gamma_1} \alpha_{ij} (v_k \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + v_m \frac{\partial v_m}{\partial x_i} - 2 v_m \frac{\partial v_k}{\partial x_i}) n_j \,.
\end{aligned}$$

Así, ya que v_n, $n \geq 1$, es una solución positiva de (4.4.21), obtenemos de la desigualdad previa que

$$\begin{aligned}
\mu \|\nabla(\tilde{v}_k - \tilde{v}_m)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq\ & \textstyle\int_{\Omega_k} [\lambda W v_k - a f(\cdot, u_k) v_k - \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \alpha_0 v_k] v_k \\
& + \textstyle\int_{\Omega_m} [\lambda W v_m - a f(\cdot, u_m) v_m - \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_i \frac{\partial v_m}{\partial x_i} - \alpha_0 v_m] v_m \\
& -2 \textstyle\int_{\Omega_m} [\lambda W v_k - a f(\cdot, u_k) v_k - \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \alpha_0 v_k] v_m \\
& + \textstyle\sum_{i,j=1}^N \int_{\Gamma_1} \alpha_{ij} (v_k \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + v_m \frac{\partial v_m}{\partial x_i} - 2 v_m \frac{\partial v_k}{\partial x_i}) n_j \,,
\end{aligned} \tag{4.4.31}$$

donde las funciones $\tilde{\alpha}_i \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, $1 \leq i \leq N$, son las dadas por (1.4.14). Reagrupando términos en (4.4.31) obtenemos

$$\begin{aligned}
\mu \|\nabla(\tilde{v}_k - \tilde{v}_m)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq\ & \textstyle\int_{\Omega_k} (\lambda W - \alpha_0)(v_k - \tilde{v}_m) v_k + \int_{\Omega_m} (\lambda W - \alpha_0)(v_m - v_k) v_m \\
& + \textstyle\int_{\Omega_k} a f(\cdot, u_k)(\tilde{v}_m - v_k) v_k + \int_{\Omega_m} a f(\cdot, u_k)(v_k - v_m) v_m \\
& + \textstyle\int_{\Omega_m} a v_m^2 [f(\cdot, u_k) - f(\cdot, u_m)] \\
& + \textstyle\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_k} \tilde{\alpha}_i (\tilde{v}_m - v_k) \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_m} \tilde{\alpha}_i v_m \frac{\partial}{\partial x_i}(v_k - v_m) \\
& + \textstyle\sum_{i,j=1}^N \int_{\Gamma_1} \alpha_{ij} [(v_k - v_m) \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + v_m \frac{\partial}{\partial x_i}(v_m - v_k)] n_j \,.
\end{aligned} \tag{4.4.32}$$

Ahora estimaremos cada uno de los términos del segundo miembro de (4.4.32). Observar que (4.4.20) implica

$$\|\tilde{v}_n\|_{L_2(\Omega)} \leq 1\,, \qquad \|\nabla \tilde{v}_n\|_{L_2(\Omega)} \leq 1\,, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,. \tag{4.4.33}$$

De este modo, gracias a la desigualdad de Hölder, obtenemos de (4.4.6) y (4.4.33) que

$$\left| \int_{\Omega_k} (\lambda W - \alpha_0)(v_k - \tilde{v}_m) v_k \right| \leq \|\lambda W - \alpha_0\|_{L_\infty(\Omega)} \|\tilde{v}_k - \tilde{v}_m\|_{L_2(\Omega)}\,, \tag{4.4.34}$$

$$\left| \int_{\Omega_m} (\lambda W - \alpha_0)(v_m - v_k) v_m \right| \leq \|\lambda W - \alpha_0\|_{L_\infty(\Omega)} \|\tilde{v}_k - \tilde{v}_m\|_{L_2(\Omega)}\,, \tag{4.4.35}$$

$$\left| \int_{\Omega_k} a f(\cdot, u_k)(\tilde{v}_m - v_k) v_k \right| \leq \|a\|_{L_\infty(\Omega)} \|f\|_{L_\infty(\Omega \times [0,M])} \|\tilde{v}_k - \tilde{v}_m\|_{L_2(\Omega)}\,, \tag{4.4.36}$$

$$\left|\int_{\Omega_m} af(\cdot,u_k)(v_k-v_m)v_m\right| \le \|a\|_{L_\infty(\Omega)}\|f\|_{L_\infty(\Omega\times[0,M])}\|\|\tilde v_k-\tilde v_m\|_{L_2(\Omega)}\,, \tag{4.4.37}$$

y

$$\left|\sum_{i=1}^N\int_{\Omega_k}\tilde\alpha_i(\tilde v_m-v_k)\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right| \le \|\tilde v_m-\tilde v_k\|_{L_2(\Omega)}\sum_{i=1}^N\|\tilde\alpha_i\|_{L_\infty(\Omega)}\,. \tag{4.4.38}$$

Además, gracias a (4.4.6) y (4.1.5), se sigue fácilmente que

$$|f(\cdot,u_k)-f(\cdot,u_m)| \le \|\partial_u f(\cdot,\cdot)\|_{L_\infty(\Omega\times[0,M])}|u_k-u_m|\,,$$

y por eso

$$\left|\int_{\Omega_m} av_m^2[f(\cdot,u_k)-f(\cdot,u_m)]\right| \le C\,\|\tilde v_m\|_{L_\infty(\Omega)}\int_{\Omega_m}|v_m(u_k-u_m)|\,,$$

donde

$$C := \|a\|_{L_\infty(\Omega)}\|\partial_u f\|_{L_\infty(\Omega\times[0,M])}\,.$$

De este modo, utilizando la desigualdad de Hölder obtenemos de (4.4.22) y (4.4.33) que

$$\left|\int_{\Omega_m} av_m^2[f(\cdot,u_k)-f(\cdot,u_m)]\right| \le \frac{CM}{\|\tilde u_0\|_{L_2(\Omega)}}\|\tilde u_k-\tilde u_m\|_{L_2(\Omega)}\,. \tag{4.4.39}$$

Con el fin de estimar las integrales sobre Γ_1 uno debe recordar que

$$\partial_\nu v_n + b\,v_n = 0 \qquad \text{en}\quad \Gamma_1\,, \qquad n\in\mathbb{N}\,,$$

ya que v_n es una solución positiva de (4.4.21). Entonces, se sigue de la hipótesis (1.4.15) que para cada $n\in\mathbb{N}$

$$\sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij}\frac{\partial v_n}{\partial x_i}n_j = \sum_{i=1}^N \nu_i\frac{\partial v_n}{\partial x_i} = \langle\nabla v_n,\nu\rangle = \partial_\nu v_n = -b\,v_n\,,$$

y por eso

$$\sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}(v_m-v_k)n_j = -b\,(v_m-v_k)\,.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\left|\textstyle\sum_{i,j=1}^N\int_{\Gamma_1}\alpha_{ij}(v_k-v_m)\frac{\partial v_k}{\partial x_i}n_j\right| &= \left|\textstyle\int_{\Gamma_1} b\,v_k\,(v_m-v_k)\right| \\ &\le \|b\|_{L_\infty(\Gamma_1)}\|v_k|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)}\|(v_k-v_m)|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)}\,,\end{aligned} \tag{4.4.40}$$

y

$$\begin{aligned}\left|\textstyle\sum_{i,j=1}^N\int_{\Gamma_1}\alpha_{ij}v_m\frac{\partial}{\partial x_i}(v_m-v_k)n_j\right| &= \left|\textstyle\int_{\Gamma_1} b\,v_m\,(v_k-v_m)\right| \\ &\le \|b\|_{L_\infty(\Gamma_1)}\|v_m|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)}\|(v_k-v_m)|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)}\,.\end{aligned} \tag{4.4.41}$$

Únicamente falta por estimar el término

$$I_{mk} := \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_m} \tilde{\alpha}_i v_m \frac{\partial}{\partial x_i}(v_k - v_m)\,. \tag{4.4.42}$$

Ya que $\tilde{\alpha}_i \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, $1 \leq i \leq N$, con el objeto de realizar una integración por partes en (4.4.42), debemos aproximar cada uno de estos coeficientes por una sucesión de funciones regulares, digamos α_i^n, $n \geq 1$, $1 \leq i \leq N$. Fijemos $\delta > 0$ y consideremos el entorno tubular de Ω de radio $\delta > 0$,

$$\Omega_\delta := \bar{\Omega} + B_\delta(0)\,.$$

Para cada $1 \leq i \leq N$, sea $\hat{\alpha}_i$ una extensión continua de $\tilde{\alpha}_i$ a $\mathbf{R}^N$ tal que

$$\hat{\alpha}_i \in \mathcal{C}_c(\Omega_\delta)\,, \qquad \|\hat{\alpha}_i\|_{L_\infty(\mathbf{R}^N)} = \|\tilde{\alpha}_i\|_{L_\infty(\Omega)}\,. \tag{4.4.43}$$

Ahora, consideremos la función

$$\rho(x) := \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{si } |x| < 1\,, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1\,, \end{cases} \tag{4.4.44}$$

y la *aproximación de la identidad* asociada

$$\rho_n := \left(\int_{\mathbf{R}^N} \rho\right)^{-1} n^N \rho(n\,\cdot)\,, \qquad n \in \mathbf{N}\,.$$

Observar que para cada $n \geq 1$ la función ρ_n verifica

$$\rho_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^N)\,, \qquad \operatorname{supp} \rho_n \subset B_{\frac{1}{n}}(0)\,, \qquad \rho_n \geq 0\,, \qquad \|\rho_n\|_{L_1(\mathbf{R}^N)} = 1\,.$$

Entonces, para cada $1 \leq i \leq N$ la nueva sucesión

$$\alpha_i^n := \rho_n * \hat{\alpha}_i\,, \qquad n \geq 1\,,$$

es de clase $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ y converge a $\hat{\alpha}_i$ uniformemente en cualquier subconjunto compacto de $\mathbf{R}^N$ (e.g. Teorema 8.1.3 de [22]). En particular,

$$\lim_{n\to\infty} \|\alpha_i^n|_\Omega - \tilde{\alpha}_i\|_{L_\infty(\Omega)} = 0\,, \qquad 1 \leq i \leq N\,, \tag{4.4.45}$$

ya que $\hat{\alpha}_i|_\Omega = \tilde{\alpha}_i$. Además, gracias a (4.4.43), se sigue de la desigualdad de Young que para cada $n \geq 1$

$$\|\alpha_i^n\|_{L_\infty(\mathbf{R}^N)} \leq \|\rho_n\|_{L_1(\mathbf{R}^N)} \|\hat{\alpha}_i\|_{L_\infty(\mathbf{R}^N)} = \|\tilde{\alpha}_i\|_{L_\infty(\Omega)}\,, \qquad 1 \leq i \leq N\,, \tag{4.4.46}$$

y

$$\left\|\frac{\partial \alpha_i^n}{\partial x_i}\right\|_{L_\infty(\mathbf{R}^N)} \leq \left\|\frac{\partial \rho_n}{\partial x_i}\right\|_{L_1(\mathbf{R}^N)} \|\tilde{\alpha}_i\|_{L_\infty(\Omega)}\,, \qquad 1 \leq i \leq N\,, \tag{4.4.47}$$

ya que

$$\frac{\partial \alpha_i^n}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho_n}{\partial x_i} * \hat{\alpha}_i , \qquad 1 \le i \le N , \qquad n \ge 1 .$$

Además, ya que para cada $1 \le i \le N$ y $n \ge 1$

$$\| \frac{\partial \rho_n}{\partial x_i} \|_{L_1(\mathbf{R}^N)} = (\int_{\mathbf{R}^N} \rho)^{-1} n \| \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \|_{L_1(\mathbf{R}^N)} ,$$

(4.4.47) implica

$$\| \frac{\partial \alpha_i^n}{\partial x_i} \|_{L_\infty(\mathbf{R}^N)} \le (\int_{\mathbf{R}^N} \rho)^{-1} n \| \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \|_{L_1(\mathbf{R}^N)} \| \tilde{\alpha}_i \|_{L_\infty(\Omega)} , \qquad 1 \le i \le N , \tag{4.4.48}$$

para cada $n \ge 1$. Ahora, yendo a (4.4.42) obtenemos que para cada $n \ge 1$

$$I_{mk} := \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_m} (\tilde{\alpha}_i - \alpha_i^n) v_m \frac{\partial}{\partial x_i} (v_k - v_m) + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_m} \alpha_i^n v_m \frac{\partial}{\partial x_i} (v_k - v_m) . \tag{4.4.49}$$

Ahora estimaremos cada uno de los términos del segundo miembro de (4.4.49). Aplicando la desigualdad de Hölder y utilizando (4.4.33) se sigue fácilmente que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_m} (\tilde{\alpha}_i - \alpha_i^n) v_m \tfrac{\partial (v_k - v_m)}{\partial x_i} \right| & \le \left(\sum_{i=1}^N \| \tilde{\alpha}_i - \alpha_i^n \|_{L_\infty(\Omega)} \right) \| \tilde{v}_m \|_{L_2(\Omega)} \| \nabla (\tilde{v}_k - \tilde{v}_m) \|_{L_2(\Omega)} \\ & \le 2 \sum_{i=1}^N \| \tilde{\alpha}_i - \alpha_i^n \|_{L_\infty(\Omega)} . \end{aligned}$$

Además, integrando por partes se obtiene

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_m} \alpha_i^n v_m \frac{\partial}{\partial x_i} (v_k - v_m) = - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_m} (v_k - v_m) \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_i^n v_m) + \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_1} \alpha_i^n v_m (v_k - v_m) n_i ,$$

y por eso,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_m} \alpha_i^n v_m \tfrac{\partial}{\partial x_i} (v_k - v_m) \right| \le & \left(\sum_{i=1}^N \| \alpha_i^n \|_{L_\infty(\mathbf{R}^N)} \right) \| \nabla \tilde{v}_m \|_{L_2(\Omega)} \| \tilde{v}_k - \tilde{v}_m \|_{L_2(\Omega)} \\ & + \left(\sum_{i=1}^N \| \tfrac{\partial \alpha_i^n}{\partial x_i} \|_{L_\infty(\mathbf{R}^N)} \right) \| \tilde{v}_m \|_{L_2(\Omega)} \| \tilde{v}_k - \tilde{v}_m \|_{L_2(\Omega)} \\ & + \left(\sum_{i=1}^N \| \alpha_i^n \|_{L_\infty(\mathbf{R}^N)} \right) \| v_m |_{\Gamma_1} \|_{L_2(\Gamma_1)} \| (v_k - v_m) |_{\Gamma_1} \|_{L_2(\Gamma_1)} . \end{aligned}$$

De este modo, sustituyendo estas estimaciones en (4.4.49) y usando (4.4.33), (4.4.46) y (4.4.48) obtenemos que

$$\begin{aligned} |I_{mk}| & \le \sum_{i=1}^N \left(2 \| \tilde{\alpha}_i - \alpha_i^n \|_{L_\infty(\Omega)} + \| \tilde{\alpha}_i \|_{L_\infty(\Omega)} \| v_m |_{\Gamma_1} \|_{L_2(\Gamma_1)} \| (v_k - v_m) |_{\Gamma_1} \|_{L_2(\Gamma_1)} \right) \\ & \quad + \sum_{i=1}^N \left(1 + (\int_{\mathbf{R}^N} \rho)^{-1} n \| \tfrac{\partial \rho}{\partial x_i} \|_{L_1(\mathbf{R}^N)} \right) \| \tilde{\alpha}_i \|_{L_\infty(\Omega)} \| \tilde{v}_k - \tilde{v}_m \|_{L_2(\Omega)} \end{aligned}$$

para cada $n \ge 1$. Ahora, fijemos $\epsilon > 0$. Gracias a (4.4.45), existe $n \ge 1$ tal que

$$2 \sum_{i=1}^N \| \tilde{\alpha}_i - \alpha_i^n \|_{L_\infty(\Omega)} \le \frac{\epsilon}{4} .$$

Por eso, gracias a (4.4.23) y (4.4.29), existe $n_0 \geq 1$ tal que para cada $n_0 \leq k \leq m$

$$|I_{mk}| \leq \frac{\epsilon}{2}. \tag{4.4.50}$$

Por tanto, sustituyendo (4.4.34 – 4.4.41) y (4.4.50) en (4.4.32) y utilizando (4.4.19), (4.4.23) y (4.4.29), se sigue fácilmente que existe $k_0 \geq n_0$ tal que para cada $k_0 \leq k \leq m$

$$\mu \, \|\nabla(\tilde{v}_k - \tilde{v}_m)\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \epsilon .$$

Esto muestra que $\tilde{v} \in H^1(\Omega)$ y completa la prueba de (4.4.30). Observar, que gracias a (4.4.20),

$$\|\tilde{v}\|_{H^1(\Omega)} = \lim_{n\to\infty} \|\tilde{v}_n\|_{H^1(\Omega)} = 1 . \tag{4.4.51}$$

Además, si γ^1 representa al operador traza de $H^1(\Omega)$ sobre Γ_1, entonces

$$\|\tilde{v}_n|_{\Gamma_1} - \tilde{v}|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} = \|\gamma^1(\tilde{v}_n - \tilde{v})\|_{L_2(\Gamma_1)} \leq \|\gamma^1\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega),L_2(\Gamma_1))}\|\tilde{v}_n - \tilde{v}\|_{H^1(\Omega)}$$

y por eso, (4.4.30) implica

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{v}_n|_{\Gamma_1} - \tilde{v}|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} = 0 .$$

De este modo, gracias a (4.4.29), obtenemos que

$$\tilde{v}|_{\Gamma_1} = v^* . \tag{4.4.52}$$

Ahora, definamos

$$v := \tilde{v}|_{\Omega_0} . \tag{4.4.53}$$

Ya que por construcción $v_n|_{\Omega_0} = \tilde{v}_n|_{\Omega_0}$, se sigue de (4.4.30) que $v \in H^1(\Omega_0)$ y

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n|_{\Omega_0} - v\|_{H^1(\Omega_0)} = 0 . \tag{4.4.54}$$

Además, gracias a (4.4.25) y (4.4.51),

$$\|v\|_{H^1(\Omega_0)} = \|\tilde{v}\|_{H^1(\Omega)} = 1 . \tag{4.4.55}$$

Por otra parte,

$$\|\tilde{v}_n - \frac{\tilde{u}}{L}\|_{L_2(\Omega)} = \|\frac{\tilde{u}_n}{\|\tilde{u}_n\|_{H^1(\Omega)}} - \frac{\tilde{u}}{L}\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{\|\tilde{u}_n - \tilde{u}\|_{L_2(\Omega)}}{\|\tilde{u}_n\|_{H^1(\Omega)}} + \left|\frac{1}{\|\tilde{u}_n\|_{H^1(\Omega)}} - \frac{1}{L}\right| \|\tilde{u}\|_{L_2(\Omega)} ,$$

donde L es la constante definida por (4.4.18). Así, se sigue de (4.4.18) y (4.4.19) que

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{v}_n - \frac{\tilde{u}}{L}\|_{L_2(\Omega)} = 0 .$$

De este modo, gracias a (4.4.19) y (4.4.30), obtenemos que

$$\tilde{u} = L\tilde{v} \qquad \text{en} \qquad L_2(\Omega) . \tag{4.4.56}$$

Además, gracias a (4.4.25), (4.4.26), (4.4.54), (4.4.55), y (4.4.56) tenemos que

$$\tilde{u} \in H^1(\Omega_0), \qquad \operatorname{supp} \tilde{u} \subset \bar{\Omega}_0, \qquad \tilde{u} > 0. \tag{4.4.57}$$

Definamos por

$$u := \tilde{u}|_{\Omega_0}.$$

Gracias a (4.4.54) y (4.4.56), tenemos que

$$u = Lv \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \|v_n|_{\Omega_0} - \frac{u}{L}\|_{H^1(\Omega_0)} = 0. \tag{4.4.58}$$

A continuación mostraremos que u es una solución débil de $P[\lambda, \Omega_0, \mathcal{B}_0(b)]$. En efecto, ya que $\tilde{v} \in H^1(\Omega)$ y supp $\tilde{v} \subset \bar{\Omega}_0$, se sigue del Teorema 2.5.5 que $\tilde{v} \in H^1_{\Gamma_0^0}(\Omega_0)$. Así, $v \in H^1_{\Gamma_0^0}(\Omega_0)$ y por eso $u = Lv \in H^1_{\Gamma_0^0}(\Omega_0)$. Ahora, tomemos

$$\xi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_0 \cup \Gamma_1).$$

Entonces, multiplicando las ecuaciones diferenciales

$$\mathcal{L}v_n = \lambda W v_n - af(\cdot, u_n)v_n, \qquad n \geq 1,$$

por ξ, integrando en Ω_n, aplicando la fórmula de integración por partes y teniendo en cuenta que supp $\xi \subset \Omega_0 \cup \Gamma_1$ se obtiene

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_0} \alpha_{ij} \frac{\partial v_n}{\partial x_i}\frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_0} \tilde{\alpha}_i \frac{\partial v_n}{\partial x_i}\xi + \int_{\Omega_0} \alpha_0 v_n \xi = {} & \textstyle\int_{\Omega_0} (\lambda W - af(\cdot, u_n))v_n\xi \\ & \textstyle + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Gamma_1} \alpha_{ij} \frac{\partial v_n}{\partial x_i}\xi n_j, \end{aligned}$$

para cada $n \geq 1$, donde los coeficientes $\tilde{\alpha}_i$, $1 \leq i \leq N$, están dados por (1.4.14). Además, usando que

$$\partial_\nu v_n + b v_n = 0 \qquad \text{en } \Gamma_1, \qquad n \geq 1,$$

se desprende que

$$\sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij} \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \xi n_j = \sum_{i=1}^N \nu_i \frac{\partial v_n}{\partial x_i}\xi = \langle \nabla v_n, \nu\rangle \xi = \partial_\nu v_n \xi = -b v_n \xi,$$

y por eso, para cada $n \geq 1$ obtenemos que

$$\sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_0} \alpha_{ij} \frac{\partial v_n}{\partial x_i}\frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_0} \tilde{\alpha}_i \frac{\partial v_n}{\partial x_i}\xi + \int_{\Omega_0} \alpha_0 v_n \xi = \int_{\Omega_0} (\lambda W - af(\cdot, u_n))v_n \xi - \int_{\Gamma_1} b v_n \xi. \tag{4.4.59}$$

De este modo, usando (4.4.6), $\tilde{v}|_{\Gamma_1} = v|_{\Gamma_1}$ y

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L_2(\Omega)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|v_n|_{\Omega_0} - v\|_{H^1(\Omega_0)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|v_n|_{\Gamma_1} - v|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} = 0,$$

y pasando al límite cuando $n \to \infty$ en (4.4.59), el teorema de convergencia dominada implica

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega_0} \alpha_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_0} \tilde{\alpha}_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \xi + \int_{\Omega_0} \alpha_0 v \xi = \int_{\Omega_0} (\lambda W - af(\cdot, u)) v \xi - \int_{\Gamma_1} b v \xi . \quad (4.4.60)$$

Finalmente, multiplicando (4.4.60) por L y teniendo en cuenta que $u = Lv$ se infiere que

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega_0} \alpha_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_0} \tilde{\alpha}_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \xi + \int_{\Omega_0} \alpha_0 u \xi = \int_{\Omega_0} (\lambda W - af(\cdot, u)) u \xi - \int_{\Gamma_1} b u \xi$$

para cada $\xi \in C_c^\infty(\Omega_0 \cup \Gamma_1)$. Por tanto, $u \in H^1_{\Gamma_0^0}(\Omega_0)$, $u > 0$, es una solución positiva débil de $P[\lambda, \Omega_0, \mathcal{B}_0(b)]$. Ya que u_0 es la única solución positiva de $P[\lambda, \Omega_0, \mathcal{B}_0(b)]$, necesariamente

$$u_0 = u = Lv . \quad (4.4.61)$$

Ahora, gracias a (4.4.54), se sigue de (4.4.61) que

$$\lim_{n \to \infty} \| v_n |_{\Omega_0} - \frac{u_0}{L} \|_{H^1(\Omega_0)} = 0 . \quad (4.4.62)$$

Además, ya que

$$u_n|_{\Omega_0} - u_0 = \|\tilde{u}_n\|_{H^1(\Omega)} \left[\left(v_n|_{\Omega_0} - \frac{u_0}{L} \right) + \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{\|\tilde{u}_n\|_{H^1(\Omega)}} \right) u_0 \right] ,$$

se sigue de (4.4.8) que

$$\|u_n|_{\Omega_0} - u_0\|_{H^1(\Omega_0)} \leq \hat{M} \left[\|v_n|_{\Omega_0} - \frac{u_0}{L}\|_{H^1(\Omega_0)} + \left| \frac{1}{L} - \frac{1}{\|\tilde{u}_n\|_{H^1(\Omega)}} \right| \|u_0\|_{H^1(\Omega_0)} \right] .$$

Por tanto, gracias a (4.4.18) y (4.4.62), concluimos que

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n|_{\Omega_0} - u_0\|_{H^1(\Omega_0)} = 0 .$$

Esto muestra la validez de (4.4.3) a lo largo de la subsucesión con la que hemos venido trabajando. Como el argumento previo funciona a lo largo de cualquier subsucesión, la demostración del teorema está completa. □

El siguiente resultado nos proporciona algunas condiciones suficientes que garantizan (4.4.2). Por tanto, bajo estas condiciones se verifica la conclusión del Teorema 4.4.1.

Teorema 4.4.2 *Sea Ω_0 un subdominio propio de Ω con frontera de clase C^2 tal que*

$$\partial\Omega_0 = \Gamma_0^0 \cup \Gamma_1 , \qquad \Gamma_0^0 \cap \partial\Omega = \emptyset ,$$

donde Γ_0^0 satisface los mismos requisitos que Γ_0, y sea $\Omega_n \subset \Omega$, $n \geq 1$, una sucesión de dominios acotados de $\mathbb{R}^N$ de clase C^2 convergiendo a Ω_0 desde el exterior. Para cada número natural $n \geq 0$ sea $\mathcal{B}_n(b)$ el operador de frontera definido por (4.4.1) y sean Ω_a^0, Ω_a^+ y K los correspondientes conjuntos de la definición de $a \in \mathcal{A}(\Omega)$. Entonces, las siguientes afirmaciones son ciertas:

(a) *Supongamos* $\Omega_a^0 \subset \Omega_0$. *Entonces,*

$$a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}(\Omega_n), \qquad [\Omega_n]_a^0 = \Omega_a^0, \quad n \geq 0. \tag{4.4.63}$$

Supongamos además, que $\lambda \in \Lambda[\Omega_0, \mathcal{B}_0(b)]$ *y* (1.4.15) *se verifica sobre* $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_a^0$. *Entonces,*

$$\lambda \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \Lambda[\Omega_n, \mathcal{B}_n(b)]. \tag{4.4.64}$$

(b) *Supongamos* $\bar{\Omega}_0 \cap \bar{\Omega}_a^0 = \emptyset$. *Entonces,*

$$a \in \mathcal{A}^+(\Omega_0) \tag{4.4.65}$$

y existe $n_0 \in \mathbf{N}$ *tal que*

$$a \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \mathcal{A}^+(\Omega_n). \tag{4.4.66}$$

Supongamos además, que $\lambda \in \Lambda[\Omega_0, \mathcal{B}_0(b)]$. *Entonces,*

$$\lambda \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \Lambda[\Omega_n, \mathcal{B}_n(b)]. \tag{4.4.67}$$

(c) *Supongamos*

$$\bar{\Omega}_a^0 \cap \bar{\Omega}_0 \neq \emptyset, \qquad \Omega_a^0 \cap \Omega_0 = \emptyset$$

y que cada componente Γ^* *de* Γ_0^0 *para la cual* $\Gamma^* \cap K \neq \emptyset$ *satisface*

$$\Gamma^* \setminus K \subset \Omega_a^+.$$

Asumamos además, que existe $n_0 \in \mathbf{N}$ *tal que* $\Omega_a^0 \cap \Omega_n$ *es de clase* $\mathcal{C}^2$ *y* (4.3.2) *es satisfecho por* $\tilde{\Omega} := \Omega_n$ *para cada* $n \geq n_0$. *Entonces,*

$$a \in \mathcal{A}^+(\Omega_0), \qquad a \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \mathcal{A}(\Omega_n) \qquad y \qquad [\Omega_n]_a^0 = \Omega_a^0 \cap \Omega_n, \quad n \geq n_0. \tag{4.4.68}$$

Supongamos además que

$$\lambda \in \Lambda[\Omega_0, \mathcal{B}_0(b)].$$

Entonces,

$$\lambda \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \Lambda[\Omega_n, \mathcal{B}_n(b)]. \tag{4.4.69}$$

(*d*) *Supongamos*

$$\Omega_a^0 \cap \Omega_0 \neq \emptyset, \qquad \Omega_a^0 \cap \Omega_0 \in \mathcal{C}^2, \qquad \Omega_a^0 \cap (\Omega \setminus \Omega_0) \neq \emptyset,$$

y que existe $n_0 \in \mathbf{N}$ *tal que* $\Omega_a^0 \cap \Omega_n$, $n \geq n_0$, *es un subdominio propio de* Ω *de clase* $\mathcal{C}^2$. *Asumamos además, que* (4.3.2) *es satisfecho por* $\tilde{\Omega} := \Omega_0$ *y* $\tilde{\Omega} := \Omega_n$, $n \geq n_0$. *Entonces,*

$$a \in \mathcal{A}(\Omega_0), \qquad [\Omega_0]_a^0 = \Omega_a^0 \cap \Omega_0 \tag{4.4.70}$$

y

$$a \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \mathcal{A}(\Omega_n), \qquad [\Omega_n]_a^0 = \Omega_a^0 \cap \Omega_n, \qquad n \geq n_0. \tag{4.4.71}$$

Supongamos además que $\lambda \in \Lambda[\Omega_0, \mathcal{B}_0(b)]$ *y* (1.4.15) *se cumple sobre* $\Gamma_1 \cap \partial[\Omega_0]_a^0$. *Entonces, existe* $m_0 \in \mathbf{N}$, $m_0 \geq n_0$, *tal que*

$$\lambda \in \bigcap_{n=m_0}^{\infty} \Lambda[\Omega_n, \mathcal{B}_n(b)]. \tag{4.4.72}$$

(*e*) *Supongamos* $a \in \mathcal{A}^+(\Omega)$, *es decir,* $\Omega_a^0 = \emptyset$. *Entonces,*

$$a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^+(\Omega_n), \tag{4.4.73}$$

es decir, $a \in \mathcal{A}(\Omega_n)$ *y* $[\Omega_n]_a^0 = \emptyset$ *para cada* $n \geq 0$. *Supongamos además que* $\lambda \in \Lambda[\Omega_0, \mathcal{B}_0(b)]$. *Entonces*

$$\lambda \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \Lambda[\Omega_n, \mathcal{B}_n(b)]. \tag{4.4.74}$$

Además, en cada uno de los cinco casos anteriores, suponiendo que $\lambda \in \Lambda[\Omega_0, \mathcal{B}_0(b)]$ *y* (1.4.15) *se verifica sobre* Γ_1 *y denotando por* u_n *a la única solución positiva de* $P[\lambda, \Omega_n, \mathcal{B}_n(b)]$, *cuya existencia está garantizada para n suficientemente grande, se sigue del Teorema 4.4.1 que*

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n|_{\Omega_0} - u_0\|_{H^1(\Omega_0)} = 0, \tag{4.4.75}$$

donde u_0 *es la única solución positiva de* $P[\lambda, \Omega_0, \mathcal{B}_0(b)]$.

Demostración: Ya que Ω_n es una sucesión de dominios acotados de $\mathbf{R}^N$ convergiendo a Ω_0 desde el exterior, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\Gamma_0^n \subset \Omega$, $n \geq 0$, donde $\Gamma_0^n := \partial\Omega_n \setminus \Gamma_1$ satisface los mismos requisitos que Γ_0^0. Entonces,

$$\operatorname{dist}(\Gamma_0^n, \Gamma_1) > 0, \qquad \operatorname{dist}(\Gamma_0^n, \Gamma_0) > 0, \qquad n \geq 0,$$

y por eso

$$\operatorname{dist}(\partial\Omega, \partial\Omega_n \cap \Omega) = \operatorname{dist}(\partial\Omega, \Gamma_0^n,) = \operatorname{dist}(\Gamma_1 \cup \Gamma_0, \Gamma_0^n) > 0, \quad n \geq 0. \tag{4.4.76}$$

Por tanto, se verifica la condición (4.3.1) para cada Ω_n, $n \geq 0$.

También debe ser destacado que ya que $\lim_{n\to\infty} \Omega_n = \Omega_0$ desde el exterior, tenemos que

$$\Omega_0 \subset \Omega_n\,, \qquad \operatorname{dist}(\Gamma_1, \partial\Omega_0 \cap \Omega_n) = \operatorname{dist}(\Gamma_1; \Gamma_0^0) > 0\,, \quad n \geq 1$$

y por eso, gracias a la Proposición 2.2.2 obtenemos que

$$\sigma_1^{\Omega_n}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}_n(b)] < \sigma_1^{\Omega_0}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}_0(b)]\,. \tag{4.4.77}$$

Ahora probaremos cada una de las afirmaciones por separado.

Parte (a): Supongamos $\Omega_a^0 \subset \Omega_0$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tenemos que

$$\Omega_a^0 \cap \Omega_n = \Omega_a^0 \neq \emptyset\,, \qquad \Omega_a^0 \cap \Omega_n = \Omega_a^0 \in \mathcal{C}^2\,, \qquad n \geq 0$$

ya que $\Omega_a^0 \subset \Omega_0 \subset \Omega_n$, $n \geq 0$. Además se cumple (4.3.2) para cada Ω_n, $n \geq 0$, ya que

$$\partial\Omega_n \cap \Omega = \Gamma_0^n\,, \qquad \partial(\Omega_a^0 \cap \Omega_n) = \partial\Omega_a^0\,, \qquad \Gamma_0^n \cap \partial\Omega_a^0 = \Gamma_0^n \cap \bar{\Omega}_a^0\,,$$

para cada $n \geq 0$. Así, ya que $a \in \mathcal{A}(\Omega)$, gracias a (4.4.76) y (4.3.2) se sigue del Teorema 4.3.1 que

$$a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}(\Omega_n)\,, \qquad [\Omega_n]_a^0 = \Omega_a^0 \cap \Omega_n = \Omega_a^0 \in \mathcal{C}^2\,, \qquad n \geq 0\,.$$

Esto completa la prueba de (4.4.63).

Observar que

$$\sigma_1^{[\Omega_n]_a^0}[\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(b, [\Omega_n]_a^0)] = \sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(b, \Omega_a^0)]\,, \qquad n \geq 0\,. \tag{4.4.78}$$

Ahora, supongamos que

$$\lambda \in \Lambda[\Omega_0, \mathcal{B}_0(b)]\,,$$

y (1.4.15) se verifica sobre $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_a^0$. Entonces, gracias al Teorema 3.3.2,

$$\sigma_1^{\Omega_0}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}_0(b)] < 0 < \sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(b, \Omega_a^0)]\,, \tag{4.4.79}$$

ya que (1.4.15) se verifica sobre $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_a^0$. Además, gracias a (4.4.77),

$$\sigma_1^{\Omega_n}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}_n(b)] \leq \sigma_1^{\Omega_0}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}_0(b)]\,, \qquad n \geq 0\,, \tag{4.4.80}$$

ya que $\Omega_0 \subset \Omega_n$, $n \geq 1$. De este modo, gracias a (4.4.78), (4.4.79) y (4.4.80), obtenemos que

$$\sigma_1^{\Omega_n}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}_n(b)] < 0 < \sigma_1^{[\Omega_n]_a^0}[\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(b, [\Omega_n]_a^0)]\,, \qquad n \geq 0\,.$$

Por tanto, ya que (1.4.15) se verifica sobre $\Gamma_1 \cap \partial[\Omega_n]_a^0 = \Gamma_1 \cap \partial\Omega_a^0$, se sigue de nuevo del Teorema 3.3.2 que $\lambda \in \Lambda[\Omega_n, \mathcal{B}_n(b)]$ para cada $n \geq 0$, lo cual completa la prueba de (4.4.64).

Esto concluye la demostración de Parte (a).

Parte (b): Supongamos $\bar{\Omega}_0 \cap \bar{\Omega}_a^0 = \emptyset$. Entonces,

$$\operatorname{dist}(\partial\Omega_a^0, \partial\Omega_0) > 0\,,$$

y por eso,

$$\operatorname{dist}(\partial\Omega_a^0, \Gamma_0^0) > 0\,. \tag{4.4.81}$$

Además

$$\partial\Omega_0 \cap \Omega = \Gamma_0^0\,.$$

Sea Γ^* una componente de Γ_0^0 verificando que $\Gamma^* \cap K \neq \emptyset$. Entonces, gracias a (4.4.81) se sigue que

$$\Gamma^* \setminus K \subset \Omega_a^+\,,$$

y por eso, (4.3.3) es satisfecho por Ω_0. Entonces, gracias a (4.3.3) y (4.4.76) se sigue del Teorema 4.3.1 that $a \in \mathcal{A}^+(\Omega_0)$.

Similarmente, ya que Ω_n es una sucesión de dominios acotados de $\mathbf{R}^N$ convergiendo a Ω_0 desde el exterior, existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que

$$\bar{\Omega}_a^0 \cap \bar{\Omega}_n = \emptyset\,, \qquad n \geq n_0.$$

Así,

$$\operatorname{dist}(\partial\Omega_a^0, \Gamma_0^n) > 0, \qquad n \geq n_0\,. \tag{4.4.82}$$

Además,

$$\partial\Omega_n \cap \Omega = \Gamma_0^n.$$

De este modo, si Γ_n^* es una componente de Γ_0^n verificando que $\Gamma_n^* \cap K \neq \emptyset$, entonces gracias a (4.4.82),

$$\Gamma_n^* \setminus K \subset \Omega_a^+\,,$$

y por eso, (4.3.3) es satisfecho por cada Ω_n, $n \geq n_0$. Así, gracias a (4.4.76) y (4.3.3), se sigue del Teorema 4.3.1 que

$$a \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \mathcal{A}^+(\Omega_n)\,.$$

Esto demuestra (4.4.65) y (4.4.66).

Supongamos además que $\lambda \in \Lambda[\Omega_0, \mathcal{B}_0(b)]$. Entonces, gracias al Teorema 3.3.4 y (4.4.77) obtenemos que

$$\sigma_1^{\Omega_n}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}_n(b)] < \sigma_1^{\Omega_0}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}_0(b)] < 0\,, \qquad n \geq n_0\,.$$

Por tanto, gracias de nuevo al Teorema 3.3.4, se verifica la condición (4.4.67).

Esto completa la demostración de Parte (b).

Parte (c): Supongamos $\Omega_a^0 \cap \Omega_0 = \emptyset$, $\bar{\Omega}_a^0 \cap \bar{\Omega}_0 \neq \emptyset$ y $\Gamma^* \setminus K \subset \Omega_a^+$, para cada componente Γ^* de Γ_0^0 cumpliendo $\Gamma^* \cap K \neq \emptyset$. Entonces, ya que

$$\partial\Omega_0 \cap \Omega = \Gamma_0^0\,,$$

tenemos que cada componente Γ^* de $\partial\Omega_0 \cap \Omega$ para la cual $\Gamma^* \cap K \neq \emptyset$, satisface

$$\Gamma^* \setminus K \subset \Omega_a^+ .$$

Entonces, (4.3.3) es satisfecho por $\tilde{\Omega} = \Omega_0$ y gracias a (4.4.76), se sigue del Teorema 4.3.1 que $a \in \mathcal{A}^+(\Omega_0)$.

Por otra parte, ya que $\bar{\Omega}_a^0 \cap \bar{\Omega}_0 \neq \emptyset$, obtenemos que

$$\Omega_a^0 \cap \Omega_n \neq \emptyset, \qquad n \in \mathbb{N},$$

para n suficientemente grande. De este modo, ya que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\Omega_a^0 \cap \Omega_n \in \mathcal{C}^2$ y (4.3.2) es satisfecho por $\tilde{\Omega} := \Omega_n$, $n \geq n_0$, gracias a (4.4.76) se sigue del Teorema 4.3.1 que

$$a \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \mathcal{A}(\Omega_n) \qquad \text{y} \qquad [\Omega_n]_a^0 = \Omega_a^0 \cap \Omega_n, \qquad n \geq n_0 .$$

Esto prueba (4.4.68).

Ahora, ya que $\Omega_0 \cap \Omega_a^0 = \emptyset$, necesariamente

$$\lim_{n\to\infty} |[\Omega_n]_a^0| = 0,$$

donde $|\cdot|$ representa la medida de Lebesgue N-dimensional. Por tanto, gracias al Teorema 2.9.1, podemos aumentar n_0, si es necesario, para que

$$\sigma_1^{[\Omega_n]_a^0}[\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{D}] > 0, \qquad n \geq n_0, \tag{4.4.83}$$

ya que

$$\mathcal{B}(b, [\Omega_n]_a^0) = \mathcal{D}, \qquad n \geq n_0 .$$

De este modo, (4.4.83) puede ser escrito en la forma

$$0 < \sigma_1^{[\Omega_n]_a^0}[\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(b, [\Omega_n]_a^0)], \qquad n \geq n_0 . \tag{4.4.84}$$

Ahora, supongamos $\lambda \in \Lambda[\Omega_0, \mathcal{B}_0(b)]$. Entonces, gracias al Teorema 3.3.4 y (4.4.77), obtenemos que

$$\sigma_1^{\Omega_n}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}_n(b)] \leq \sigma_1^{\Omega_0}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}_0(b)] < 0, \qquad n \geq 0,$$

y por eso, (4.4.84) implica que

$$\sigma_1^{\Omega_n}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}_n(b)] < 0 < \sigma_1^{[\Omega_n]_a^0}[\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(b, [\Omega_n]_a^0)], \qquad n \geq n_0 .$$

Por tanto, gracias al Teorema 3.3.2, se verifica la condición (4.4.69). Debe ser destacado que ahora, para aplicar el Teorema 3.3.2, no es necesitada la condición (1.4.15) ya que $\Gamma_1 \cap \partial[\Omega_n]_a^0 = \emptyset$.

Esto completa la demostración de Parte (c).

Parte (d): Ya que $\Omega_a^0 \cap \Omega_0 \neq \emptyset$, $\Omega_a^0 \cap \Omega_0 \in \mathcal{C}^2$ y (4.3.2) es satisfecho por $\tilde{\Omega} := \Omega_0$, gracias a (4.4.76), se sigue del Teorema 4.3.1 que

$$a \in \mathcal{A}(\Omega_0), \qquad [\Omega_0]_a^0 \doteq \Omega_a^0 \cap \Omega_0 .$$

Además, ya que $\lim_{n\to\infty}(\Omega_a^0 \cap \Omega_n) = \Omega_a^0 \cap \Omega_0$ desde el exterior,

$$\Omega_a^0 \cap \Omega_n \neq \emptyset ,$$

para n suficientemente grande y por eso, gracias a (4.4.76) y ya que (4.3.2) y $\Omega_a^0 \cap \Omega_n \in \mathcal{C}^2$ son satisfechos por $\tilde{\Omega} = \Omega_n$, $n \geq n_0$, se sigue del Teorema 4.3.1 que

$$a \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \mathcal{A}(\Omega_n), \qquad [\Omega_n]_a^0 = \Omega_a^0 \cap \Omega_n , \quad n \geq n_0 .$$

Así, (4.4.70) y (4.4.71) se verifican. Por eso,

$$\operatorname{dist}(\Gamma_1, \partial[\Omega_n]_a^0 \cap \Omega_n) > 0 .$$

En particular, los autovalores principales

$$\sigma_1^{[\Omega_n]_a^0}[\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(b, [\Omega_n]_a^0)] , \qquad n \geq n_0 ,$$

están bien definidos.

Ahora, supongamos que $\lambda \in \Lambda[\Omega_0, \mathcal{B}_0(b)]$ y (1.4.15) se verifica sobre $\Gamma_1 \cap \partial[\Omega_0]_a^0$. Entonces, Teorema 3.3.2 implica que

$$\sigma_1^{\Omega_0}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}_0(b)] < 0 < \sigma_1^{[\Omega_0]_a^0}[\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(b, [\Omega_0]_a^0)] . \tag{4.4.85}$$

Además, ya que $\lim_{n\to\infty}[\Omega_n]_a^0 = [\Omega_0]_a^0$ desde el exterior, tenemos que

$$\Gamma_1 \cap \partial[\Omega_n]_a^0 = \Gamma_1 \cap \partial[\Omega_0]_a^0 ,$$

y ya que (1.4.15) se verifica sobre $\Gamma_1 \cap \partial[\Omega_0]_a^0$, se sigue que (1.4.15) se verifica sobre $\Gamma_1 \cap \partial[\Omega_n]_a^0$.

Por otra parte, gracias a (4.4.77),

$$\sigma_1^{\Omega_n}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}_n(b)] < \sigma_1^{\Omega_0}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}_0(b)] , \qquad n \geq n_0 . \tag{4.4.86}$$

Además, el Teorema 2.6.1 implica que

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_1^{[\Omega_n]_a^0}[\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(b, [\Omega_n]_a^0)] = \sigma_1^{[\Omega_0]_a^0}[\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(b, [\Omega_0]_a^0)] , \tag{4.4.87}$$

ya que (1.4.15) se verifica sobre $\Gamma_1 \cap \partial[\Omega_0]_a^0$. De este modo, combinando (4.4.85) con (4.4.86) y (4.4.87), obtenemos que existe $m_0 \geq n_0$ tal que

$$\sigma_1^{\Omega_n}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}_n(b)] < 0 < \sigma_1^{[\Omega_n]_a^0}[\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(b, [\Omega_n]_a^0)] , \qquad n \geq m_0 .$$

Por tanto, gracias al Teorema 3.3.2, se verifica (4.4.72), ya que (1.4.15) se cumple sobre $\Gamma_1 \cap \partial[\Omega_n]_a^0$.

Esto completa la demostración de Parte (d).

Parte (e): Supongamos que $a \in \mathcal{A}^+(\Omega)$. Entonces, gracias a (4.4.76), (4.4.73) se sigue del Teorema 4.3.1.

Ahora, supongamos $\lambda \in \Lambda[\Omega_0, \mathcal{B}_0(b)]$. Entonces, gracias a (4.4.77) y al Teorema 3.3.4, tenemos que

$$\sigma_1^{\Omega_n}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}_n(b)] \leq \sigma_1^{\Omega_0}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}_0(b)] < 0, \qquad n \geq 0,$$

y por eso, gracias de nuevo al Teorema 3.3.4, se verifica la condición (4.4.74).

Esto completa la demostración de Parte (e).

La última afirmación del teorema es una consecuencia inmediata del Teorema 4.4.1.

Esto concluye la demostración del teorema. □

4.5 Dependencia continua interior

En esta sección analizamos la dependencia continua de las soluciones positivas de (4.1.1) con respecto a perturbaciones interiores del dominio Ω alrededor de su frontera Dirichlet Γ_0, en el caso especial en el que ∂_ν e s la derivada conormal con respecto a $\mathcal{L}$. Por tanto, a lo largo de toda esta sección asumiremos que se cumple (1.4.15).

Como en la Sección 4.4, nos referiremos al problema (4.1.1) como el problema $P[\lambda, \Omega, \mathcal{B}(b)]$, y denotaremos por $\Lambda[\Omega, \mathcal{B}(b)]$ al conjunto de valores de $\lambda \in \mathbf{R}$ para los que $P[\lambda, \Omega, \mathcal{B}(b)]$ posee una solución positiva.

El siguiente resultado nos proporciona la *dependencia continua interior* de las soluciones positivas de $P[\lambda, \Omega, \mathcal{B}(b)]$.

Teorema 4.5.1 (Dependencia continua interior) *Supongamos* (1.4.15). *Sea Ω_0 un subdominio propio de Ω con frontera de clase C^2 tal que*

$$\partial\Omega_0 = \Gamma_0^0 \cup \Gamma_1, \qquad \Gamma_0^0 \cap \Gamma_1 = \emptyset,$$

donde Γ_0^0 satisface los mismos requisitos que Γ_0, y sea $\Omega_n \subset \Omega$, $n \geq 1$, una sucesión de dominios acotados de $\mathbf{R}^N$ de clase C^2 convergiendo a Ω_0 desde el interior. Para cada $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ denotemos por $\mathcal{B}_n(b)$ al operador de frontera definido por

$$\mathcal{B}_n(b)u := \begin{cases} u & \text{en } \Gamma_0^n, \\ \partial_\nu u + bu & \text{en } \Gamma_1, \end{cases} \tag{4.5.1}$$

donde

$$\Gamma_0^n := \partial\Omega_n \setminus \Gamma_1, \qquad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

Supongamos además que

$$a \in \mathcal{A}(\Omega_0), \qquad \lambda \in \Lambda[\Omega_0, \mathcal{B}_0(b)],$$

y que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$a \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \mathcal{A}(\Omega_n)\,, \qquad \lambda \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \Lambda[\Omega_n, \mathcal{B}_n(b)]\,, \tag{4.5.2}$$

y para cada $n \geq 0$, denotemos por u_n a la única solución positiva de $P[\lambda, \Omega_n, \mathcal{B}_n(b)]$; debe ser destacado que la unicidad está garantizada por el Teorema 3.3.2. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{u}_n - u_0\|_{H^1(\Omega_0)} = 0\,, \tag{4.5.3}$$

donde

$$\tilde{u}_n := \begin{cases} u_n & \text{en} \quad \Omega_n \\ 0 & \text{en} \quad \Omega_0 \setminus \Omega_n, \end{cases} \qquad n \geq 1\,. \tag{4.5.4}$$

Demostración: Supongamos (4.5.2). Entonces, gracias al Teorema 3.3.2, el problema de valores en la frontera $P[\lambda, \Omega_n, \mathcal{B}_n(b)]$, $n \geq n_0$, tiene una única solución positiva, denotada en lo su cesivo por u_n. Además, gracias al Lema 3.2.2,

$$u_n \in W^2_{\mathcal{B}_n(b)}(\Omega_n) \subset H^2(\Omega_n)\,, \qquad n \geq n_0\,,$$

y u_n es fuertemente positiva en Ω_n. Ya que $u_n \in H^1(\Omega_n)$ y $u_n = 0$ en Γ_0^n, tenemos que $\tilde{u}_n \in H^1(\Omega_0)$ y

$$\|\tilde{u}_n\|_{H^1(\Omega_0)} = \|u_n\|_{H^1(\Omega_n)}\,, \qquad n \geq n_0\,. \tag{4.5.5}$$

Además, ya que u_n es fuertemente positiva en Ω_n, $\Gamma_1 = \partial\Omega_n \setminus \Gamma_0^n$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y

$$\Omega_n \subset \Omega_{n+1} \subset \Omega_0\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,,$$

se sigue fácilmente que

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_{n+1} = \lambda W u_{n+1} - af(\cdot, u_{n+1})u_{n+1} & \text{en} \quad \Omega_n \\ \mathcal{B}_n(b)u_{n+1} \geq 0 & \text{en} \quad \partial\Omega_n, \end{cases} \qquad n \geq n_0\,,$$

y

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_0 = \lambda W u_0 - af(\cdot, u_0)u_0 & \text{en} \quad \Omega_n \\ \mathcal{B}_n(b)u_0 \geq 0 & \text{en} \quad \partial\Omega_n, \end{cases} \qquad n \geq n_0\,.$$

De este modo, para cada $n \geq n_0$ la función u_{n+1} es una supersolución positiva de $P[\lambda, \Omega_n, \mathcal{B}_n(b)]$ y u_0 es una supersolución positiva de $P[\lambda, \Omega_n, \mathcal{B}_n(b)]$. Por eso, gracias al Teorema 4.2.1, tenemos que

$$u_{n+1}|_{\Omega_n} \geq u_n > 0\,, \qquad u_0|_{\Omega_n} \geq u_n > 0\,, \quad n \geq n_0\,.$$

Por tanto, en Ω_0 tenemos que

$$0 < \tilde{u}_{n_0} \leq \tilde{u}_n \leq \tilde{u}_{n+1} \leq u_0\,, \qquad n \geq n_0\,. \tag{4.5.6}$$

Ahora, tomando

$$M := \|u_0\|_{L_\infty(\Omega_0)},$$

se sigue de (4.5.6) que

$$\|\tilde{u}_n\|_{L_\infty(\Omega_0)} \leq M, \qquad n \geq n_0. \tag{4.5.7}$$

Ahora, cambiando Ω por Ω_0, la demostración del Teorema 4.4.1 puede ser fácilmente adaptada para probar que existe $u \in H^1(\Omega_0)$ y una subsucesión de $\tilde{u}_n$, $n \geq n_0$, etiquetada de nuevo por n, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{u}_n - u\|_{H^1(\Omega_0)} = 0.$$

Ya que $\tilde{u}_n \in H^1_{\Gamma_0^0}(\Omega_0)$, $n \geq n_0$, el Teorema 2.5.5 implica que $u \in H^1_{\Gamma_0^0}(\Omega_0)$. Además, se sigue fácilmente que u nos proporciona una solución positiva débil de $P[\lambda, \Omega_0, \mathcal{B}_0(b)]$. Ya que u puede ser considerada como una autofunción principal para un operador elíptico de segundo orden, u nos proporciona una solución positiva de $P[\lambda, \Omega_0, \mathcal{B}_0(b)]$. De este modo, gracias a la unicidad de u_0, $u = u_0$. Como el argumento previo es válido a lo largo de cualquier subsucesión de $\tilde{u}_n$, $n \geq n_0$, la demostración del teorema está completa. □

El siguiente resultado nos proporciona algunas condiciones suficientes que garantizan la condición (4.5.2). Por tanto, bajo esas condiciones se verifica la conclusión del Teorema 4.5.1.

Teorema 4.5.2 *Sea Ω_0 un subdominio propio de Ω con frontera de clase C^2 tal que*

$$\partial\Omega_0 = \Gamma_0^0 \cup \Gamma_1, \qquad \Gamma_0^0 \cap \partial\Omega = \emptyset,$$

donde Γ_0^0 satisface los mismos requisitos que Γ_0, y sea Ω_n, $n \geq 1$ una sucesión de dominios acotados de $\mathbf{R}^N$ de clase C^2 convergiendo a Ω_0 desde el interior. Para cada $n \geq 0$ denotemos por $\mathcal{B}_n(b)$ al operador de frontera definido por (4.5.1) y sean Ω_a^0, Ω_a^+ y K los correspondientes conjuntos de la definición de $a \in \mathcal{A}(\Omega)$. Entonces, las siguientes afirm aciones son ciertas:

(a) *Supongamos que $\Omega_a^0 \cap \Omega_0 = \emptyset$ y cada componente Γ^* de Γ_0^0 para la cual $\Gamma^* \cap K \neq \emptyset$, satisface*

$$\Gamma^* \setminus K \subset \Omega_a^+.$$

Entonces,

$$a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^+(\Omega_n). \tag{4.5.8}$$

Supongamos además que $\lambda \in \Lambda[\Omega_0, \mathcal{B}_0(b)]$ y (1.4.15) se cumple sobre Γ_1. Entonces, existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que

$$\lambda \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \Lambda[\Omega_n, \mathcal{B}_n(b)]. \tag{4.5.9}$$

(*b*) *Supongamos que*

$$\Omega_a^0 \cap \Omega_0 \neq \emptyset\,, \qquad \Omega_a^0 \cap \Omega_0 \in \mathcal{C}^2\,, \qquad \Omega_a^0 \cap \Omega_n \in \mathcal{C}^2$$

y (4.3.2) *es satisfecho por* $\tilde\Omega = \Omega_0$ *y* $\tilde\Omega = \Omega_n$, *para* $n \in \mathbf{N}$ *suficientemente grande. Entonces,*

$$a \in \mathcal{A}(\Omega_0)\,, \qquad [\Omega_0]_a^0 = \Omega_a^0 \cap \Omega_0\,, \tag{4.5.10}$$

y existe $n_0 \in \mathbf{N}$ *tal que*

$$a \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \mathcal{A}(\Omega_n)\,, \qquad [\Omega_n]_a^0 = \Omega_a^0 \cap \Omega_n\,. \tag{4.5.11}$$

Supongamos además que $\lambda \in \Lambda[\Omega_0, \mathcal{B}_0(b)]$ *y* (1.4.15) *se cumple sobre* Γ_1. *Entonces, existe* $m_0 \in \mathbf{N}$, $m_0 \geq n_0$ *tal que*

$$\lambda \in \bigcap_{n=m_0}^{\infty} \Lambda[\Omega_n, \mathcal{B}_n(b)]\,. \tag{4.5.12}$$

Además, en cualquiera de los dos casos anteriores, suponiendo que $\lambda \in \Lambda[\Omega_0, \mathcal{B}_0(b)]$ *y* (1.4.15) *se cumple sobre* Γ_1, *se sigue del Teorema 4.5.1 que*

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde u_n - u_0\|_{H^1(\Omega_0)} = 0\,, \tag{4.5.13}$$

donde $\tilde u_n$ *es la extensión a* Ω_0 *definida por* (4.5.4), *cuya existencia está garantizada para* n *suficientemente grande, y* u_0 *es la única solución positiva de* $P[\lambda, \Omega_0, \mathcal{B}_0(b)]$.

Demostración: Una vez probadas las Partes (a) y (b), la relación (4.5.13) se sigue como una consecuencia del Teorema 4.5.1.

Primeramente destacamos que al igual que en el Teorema 4.4.2, (4.4.76) es satisfecho.

Ahora demostraremos cada una de las afirmaciones separadamente.

Parte (a): Supongamos que $\Omega_a^0 \cap \Omega_0 = \emptyset$ y que cada componente Γ^* de Γ_0^0 para la cual $\Gamma^* \cap K \neq \emptyset$, satisface $\Gamma^* \setminus K \subset \Omega_a^+$. Entonces, ya que

$$\partial\Omega_0 \cap \Omega = \Gamma_0^0\,,$$

obtenemos que cada componente Γ^* de $\partial\Omega_0 \cap \Omega$ para la cual $\Gamma^* \cap K \neq \emptyset$, satisface

$$\Gamma^* \setminus K \subset \Omega_a^*.$$

De este modo, (4.3.3) es satisfecho por $\tilde\Omega := \Omega_0$ y gracias a (4.4.76), se sigue del Teorema 4.3.1 que $a \in \mathcal{A}^+(\Omega_0)$.

Por otra parte, ya que Ω_n es una sucesión de dominios acotados de $\mathbf{R}^N$ convergiendo a Ω_0 desde el interior, tenemos que

$$\Omega_n \subset \Omega_0\,, \qquad n \geq 0\,,$$

y ya que $\Omega^0_a \cap \Omega_0 = \emptyset$, obtenemos que

$$\Omega^0_a \cap \Omega_n = \emptyset\,, \qquad n \geq 0\,.$$

Entonces, ya que

$$\partial\Omega_n \cap \Omega = \Gamma^n_0 \subset \Omega_0,$$

tenemos que cada componente Γ^*_n de cada Γ^n_0, para la cual $\Gamma^*_n \cap K \neq \emptyset$, satisface

$$\Gamma^*_n \setminus K \subset \Gamma^n_0 \setminus K \subset \Omega_0 \setminus K \subset \Omega^+_a\,,$$

ya que $\Omega^0_a \cap \Omega_0 = \emptyset$. Así, (4.3.3) es satisfecho por $\tilde{\Omega} := \Omega_n$, $n \in \mathbb{N}$, y gracias a (4.4.76) se sigue del Teorema 4.3.1 que

$$a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^+(\Omega_n)\,,$$

ya que $a \in \mathcal{A}(\Omega)$. Esto demuestra (4.5.8).

Ahora, supongamos que

$$\lambda \in \Lambda[\Omega_0, \mathcal{B}_0(b)]\,,$$

y (1.4.15) se verifica sobre Γ_1. Entonces, gracias al Teorema 3.3.4

$$\sigma_1^{\Omega_0}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda_0), \mathcal{B}_0(b)] < 0\,. \tag{4.5.14}$$

Por otra parte, ya que $\lim_{n\to\infty} \Omega_n = \Omega_0$ desde el interior, y debido al hecho de que (1.4.15) se verifica sobre Γ_1, se sigue del Teorema 2.6.3 que

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_1^{\Omega_n}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}_n(b)] = \sigma_1^{\Omega_0}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}_0(b)]\,. \tag{4.5.15}$$

De este modo, combinando (4.5.14) y (4.5.15), obtenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sigma_1^{\Omega_n}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}_n(b)] < 0, \qquad n \geq n_0$$

y por eso, el Teorema 3.3.4 implica el resultado. Esto prueba (4.5.9).

Esto concluye la demostración de Parte (a).

Parte (b): Supongamos que $\Omega^0_a \cap \Omega_0 \neq \emptyset$ y $\Omega^0_a \cap \Omega_0$ es de clase $\mathcal{C}^2$. Entonces, ya que (4.3.2) es satisfecho por $\tilde{\Omega} = \Omega_0$, gracias a (4.4.76) se sigue del Teorema 4.3.1 que

$$a \in \mathcal{A}(\Omega_0)\,, \qquad [\Omega_0]^0_a = \Omega^0_a \cap \Omega_0\,.$$

Además, ya que $\lim_{n\to\infty} \Omega_n = \Omega_0$ desde el interior, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Omega^0_a \cap \Omega_n \neq \emptyset\,, \qquad n \geq n_0\,,$$

y ya que $\Omega^0_a \cap \Omega_n \in \mathcal{C}^2$ y (4.3.2) es satisfecho por $\tilde{\Omega} := \Omega_n$ para n suficientemente grande, aumentando n_0 si es necesario, gracias a (4.4.76) se sigue del Teorema 4.3.1 que

$$a \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \mathcal{A}(\Omega_n)\,, \qquad [\Omega_n]^0_a = \Omega^0_a \cap \Omega_n \in \mathcal{C}^2\,, \qquad n \geq n_0\,.$$

Esto prueba (4.5.10) y (4.5.11). Por ello, los autovalores principales

$$\sigma_1^{[\Omega_n]_a^0}[\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(b, [\Omega_n]_a^0)], \; n \geq n_0 ,$$

están bien definidos.

Supongamos ahora que $\lambda \in \Lambda[\Omega_0, \mathcal{B}_0(b)]$ y (1.4.15) se verifica sobre Γ_1. Entonces, el Teorema 3.3.2 implica que

$$\sigma_1^{\Omega_0}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}(b, \Omega_0)] < 0 < \sigma_1^{[\Omega_0]_a^0}[\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(b, [\Omega_0]_a^0)] . \tag{4.5.16}$$

Además, ya que $\lim_{n\to\infty} \Omega_n = \Omega_0$ desde el interior, tenemos que $[\Omega_n]_a^0$ es una sucesión de abiertos regulares convergiendo a $[\Omega_0]_a^0$ desde su interior, y por eso se sigue del Teorema 2.6.3 que

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_1^{\Omega_n}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}(b, \Omega_n)] = \sigma_1^{\Omega_0}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}(b, \Omega_0)] \tag{4.5.17}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_1^{[\Omega_n]_a^0}[\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(b, [\Omega_n]_a^0)] = \sigma_1^{[\Omega_0]_a^0}[\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(b, [\Omega_0]_a^0)] , \tag{4.5.18}$$

ya que (1.4.15) se verifica sobre Γ_1. De este modo, obtenemos de (4.5.16), (4.5.17) y (4.5.18) que existe $m_0 \in \mathbf{N}$, $m_0 \geq n_0$ tal que

$$\sigma_1^{\Omega_n}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}(b, \Omega_n)] < 0 < \sigma_1^{[\Omega_n]_a^0}[\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(b, [\Omega_n]_a^0)] , \qquad n \geq m_0 .$$

Ahora, el Teorema 3.3.2 completa la prueba de Parte (b).

Esto concluye la demostración del teorema. □

4.6 Dependencia continua

Como una consecuencia inmediata de los Teoremas 4.4.1 y 4.5.1 se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 4.6.1 (Dependencia continua) *Supongamos* (1.4.15). *Sea Ω_0 un subdominio propio de Ω con frontera de clase $\mathcal{C}^2$ tal que*

$$\partial\Omega_0 = \Gamma_0^0 \cup \Gamma_1 , \qquad \Gamma_0^0 \cap \Gamma_1 = \emptyset ,$$

donde Γ_0^0 satisface los mismos requisitos que Γ_0, y sea $\Omega_n \subset \Omega$, $n \geq 1$, una sucesión de dominios acotados de $\mathbf{R}^N$ de clase $\mathcal{C}^2$ convergiendo a Ω_0.

Sean Ω_n^I y Ω_n^E, $n \geq 1$, dos sucesiones de dominios acotados en Ω tales que Ω_n^I, $n \geq 1$, converge a Ω_0 desde el interior, Ω_n^E, $n \geq 1$, converge a Ω_0 desde el exterior y

$$\Omega_n^I \subset \Omega_0 \cap \Omega_n , \qquad \Omega_0 \cup \Omega_n \subset \Omega_n^E , \qquad n \geq 1 .$$

Para cada

$$\tilde{\Omega} \in \mathcal{O} := \{ \Omega_0 , \Omega_n , \Omega_n^I , \Omega_n^E \; : \; n \geq 1 \} ,$$

denotemos por $\mathcal{B}(b,\tilde{\Omega})$ *al operador de frontera definido por*

$$\mathcal{B}(b,\tilde{\Omega})u := \begin{cases} u & \text{en } \partial\tilde{\Omega}\setminus\Gamma_1\,, \\ \partial_\nu u + bu & \text{en } \Gamma_1\,. \end{cases} \tag{4.6.1}$$

Supongamos además que

$$a \in \mathcal{A}(\Omega_0)\,, \qquad \lambda \in \Lambda[\Omega_0, \mathcal{B}_0(b)]\,, \tag{4.6.2}$$

y que existe $n_0 \in \mathbf{N}$ *tal que*

$$a \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} [\mathcal{A}(\Omega_n) \cap \mathcal{A}(\Omega_n^I) \cap \mathcal{A}(\Omega_n^E)] \tag{4.6.3}$$

y

$$\lambda \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} (\Lambda[\Omega_n, \mathcal{B}(b,\Omega_n)] \cap \Lambda[\Omega_n^I, \mathcal{B}(b,\Omega_n^I)] \cap \Lambda[\Omega_n^E, \mathcal{B}(b,\Omega_n^E)])\,. \tag{4.6.4}$$

Denotemos por u_0 *a la única solución positiva de* $P[\lambda,\Omega_0,\mathcal{B}(b,\Omega_0)]$ *y para cada* $n \geq n_0$*, denotemos por* u_n*,* u_n^I*,* u_n^E *a las únicas soluciones positivas de*

$$P[\lambda,\Omega_n,\mathcal{B}(b,\Omega_n)]\,, \qquad P[\lambda,\Omega_n^I,\mathcal{B}(b,\Omega_n^I)]\,, \qquad P[\lambda,\Omega_n^E,\mathcal{B}(b,\Omega_n^E)]\,,$$

respectivamente. Ahora, definamos por

$$\tilde{u}_n^I := \begin{cases} u_n^I & \text{en } \Omega_n^I \\ 0 & \text{en } \Omega_0\setminus\Omega_n^I\,, \end{cases} \qquad n \geq 1\,, \tag{4.6.5}$$

y

$$\tilde{u}_n := \begin{cases} u_n & \text{en } \Omega_n \\ 0 & \text{en } \Omega\setminus\Omega_n\,, \end{cases} \qquad n \geq 1\,. \tag{4.6.6}$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n^E|_{\Omega_0} - u_0\|_{H^1(\Omega_0)} = 0\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \|\tilde{u}_n^I - u_0\|_{H^1(\Omega_0)} = 0\,, \tag{4.6.7}$$

y

$$\tilde{u}_n^I \leq u_0 \leq u_n^E|_{\Omega_0}\,, \qquad \tilde{u}_n^I \leq \tilde{u}_n|_{\Omega_0} \leq u_n^E|_{\Omega_0}\,, \qquad \text{en } \Omega_0\,, \qquad n \geq n_0\,. \tag{4.6.8}$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{u}_n|_{\Omega_0} - u_0\|_{L_p(\Omega_0)} = 0\,, \qquad p \in [1,\infty)\,. \tag{4.6.9}$$

Demostración: Las relaciones (4.6.7) se siguen directamente del Teorema 4.4.1 y Teorema 4.5.1. Las relaciones (4.6.8) se siguen muy fácilmente combinando la unicidad de las soluciones positivas con el Teorema 4.2.1. Ahora, se sigue trivialmente de (4.6.7) y (4.6.8) que

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{u}_n|_{\Omega_0} - u_0\|_{L_2(\Omega_0)} = 0 \tag{4.6.10}$$

y por eso, (4.6.10) implica que

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{u}_n|_{\Omega_0} - u_0\|_{L_p(\Omega_0)} = 0\,, \qquad 1 \le p \le 2\,. \tag{4.6.11}$$

Además, argumentando como en (4.4.5), se sigue de (4.6.8) y Teorema 4.2.1 que

$$\tilde{u}_n|_{\Omega_0} \le u_n^E|_{\Omega_0} \le u_{n_0}^E|_{\Omega_0}\,, \qquad n \ge n_0\,. \tag{4.6.12}$$

De este modo, tomando

$$M := \|u_{n_0}^E\|_{L_\infty(\Omega_0)}\,,$$

obtenemos de (4.6.12) que

$$\|\tilde{u}_n\|_{L_\infty(\Omega_0)} \le M\,, \qquad n \ge n_0\,. \tag{4.6.13}$$

Por eso, gracias a la cota uniforme en $L_\infty(\Omega_0)$ dada por (4.6.13), se sigue de (4.6.10) que

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{u}_n|_{\Omega_0} - u_0\|_{L_p(\Omega_0)} = 0\,, \qquad p \in [2,\infty)\,. \tag{4.6.14}$$

Ahora, (4.6.11) y (4.6.14) completan la demostración del teorema.

Esto concluye la demostración del teorema. □

Adaptando la demostración del Teorema 4.4.2 y del Teorema 4.5.2 uno puede fácilmente obtener condiciones bastante simples sobre a y sobre los Ω_n's, para que (4.6.2) implique (4.6.3) y (4.6.4).

4.7 Dependencia continua respecto de $b(x)$

En esta sección analizamos la dependencia continua de las soluciones positivas del problema $P[\lambda, \Omega, \mathcal{B}(b)]$ con respecto a la función peso $b(x)$, en el caso especial en el que ∂_ν es la derivada conormal con respecto a $\mathcal{L}$, es decir, cuando la condición (1.4.15) es satisfecha. Para establecer nuestro principal resultado necesitamos la siguiente notación, ya introducida en la Sección 2.7.

Definición 4.7.1 *Denotaremos por $\sigma(L_\infty(\Gamma_1), L_1(\Gamma_1))$ a la topología débil $*$ de $L_\infty(\Gamma_1)$. Así, dada una sucesión $b_n \in C(\Gamma_1)$, $n \ge 1$, se dice que*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \qquad \text{en} \quad \sigma(L_\infty(\Gamma_1), L_1(\Gamma_1))\,,$$

si

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma_1} b_n \xi = \int_{\Gamma_1} b\xi$$

para cada $\xi \in L_1(\Gamma_1)$.

Nuestro principal resultado establece lo siguiente.

Teorema 4.7.2 *Supongamos $\Gamma_1 \neq \emptyset$ y (1.4.15). Sea $b_n \in \mathcal{C}(\Gamma_1)$, $n \geq 0$, una sucesión satisfaciendo*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b_0 \qquad en \qquad \sigma(L_\infty(\Gamma_1), L_1(\Gamma_1)). \tag{4.7.1}$$

Sean $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2 \in \mathcal{C}(\Gamma_1)$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\hat{b}_1 \leq b_n \leq \hat{b}_2, \qquad n = 0, \quad n \geq n_0, \tag{4.7.2}$$

cuya existencia está garantizada por (4.7.1). Supongamos además que

$$\lambda \in \Lambda[\Omega, \mathcal{B}(b_0)] \cap \bigcap_{i=1}^{2} \Lambda[\Omega, \mathcal{B}(\hat{b}_i)] \cap \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \Lambda[\Omega, \mathcal{B}(b_n)]. \tag{4.7.3}$$

Para cada $n \geq n_0$, denotemos por u_n a la única solución positiva de $P[\lambda, \Omega, \mathcal{B}(b_n)]$, y por u_0 a la única solución positiva de $P[\lambda, \Omega, \mathcal{B}(b_0)]$, cuya existencia y unicidad están garantizadas por (4.7.3) y Teor ema 3.3.2. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_0\|_{H^1(\Omega)} = 0. \tag{4.7.4}$$

Demostración: Gracias a (4.7.1) obtenemos del Teorema de Banach-Steinhaus que b_n, $n \geq 0$ es una sucesión uniformemente acotada en $L_\infty(\Gamma_1)$ (e.g. Proposición III.12(iii) de [11]). En otras palabras, existe una constante $C > 0$ para la cual

$$\|b_n\|_{L_\infty(\Gamma_1)} \leq C, \qquad n \geq 0. \tag{4.7.5}$$

Sean $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$ funciones continuas sobre Γ_1 verificando (4.7.2) y supongamos (4.7.3). Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $n_0 = 1$. Entonces, gracias al Teorema 3.3.2, el problema $P[\lambda, \Omega, \mathcal{B}(b_n)]$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tiene una única solución positiva, denotada en lo sucesivo por u_n. Además, gracias al Lema 3.2.2,

$$u_n \in W^2_{\mathcal{B}(b_n)}(\Omega) \subset H^2(\Omega), \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

y u_n es fuertemente positiva en Ω. Sea $\hat{u}_i$ única solución positiva de $P[\lambda, \Omega, \mathcal{B}(\hat{b}_i)]$, $i = 1, 2$, cuya existencia y unicidad están garantizadas por (4.7.3) y Teorema 3.3.2. Gracias de nuevo al Lema 3.2.2,

$$\hat{u}_i \in W^2_{\mathcal{B}(\hat{b}_i)}(\Omega), \qquad i = 1, 2,$$

y $\hat{u}_i$, $i = 1, 2$ es fuertemente positiva en Ω. Entonces, gracias a (4.7.2) y ya que u_n es una solución positiva de $P[\lambda, \Omega, \mathcal{B}(b_n)]$, se desprende que

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_n = \lambda W u_n - a f(\cdot, u_n) u_n & \text{en} \quad \Omega \\ \mathcal{B}(\hat{b}_1) u_n \leq 0 \leq \mathcal{B}(\hat{b}_2) u_n & \text{en} \quad \partial\Omega, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Así, para cada $n \geq 0$ la función u_n es una subsolución positiva de $P[\lambda, \Omega, \mathcal{B}(\hat{b}_1)]$ y una supersolución positiva de $P[\lambda, \Omega, \mathcal{B}(\hat{b}_2)]$. Por eso, gracias al Teorema 4.2.1, obtenemos que

$$0 < \hat{u}_2 \leq u_n \leq \hat{u}_1 , \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} . \tag{4.7.6}$$

Ahora, definiendo

$$M := \|\hat{u}_1\|_{L_\infty(\Omega)} ,$$

se sigue de (4.7.6) que

$$\|u_n\|_{L_\infty(\Omega)} \leq M , \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} , \tag{4.7.7}$$

y por eso,

$$\|u_n\|_{L_2(\Omega)} \leq M \, |\Omega|^{\frac{1}{2}} , \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} . \tag{4.7.8}$$

Ahora, demostraremos que existe $\hat{M} > 0$ tal que

$$\|u_n\|_{H^1(\Omega)} \leq \hat{M} , \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} . \tag{4.7.9}$$

En efecto, ya que $\mathcal{L}$ es fuertemente uniformemente elíptico en $\bar{\Omega}$, integrando por partes y utilizando que $u_n = 0$ sobre Γ_0 y $u_n \in H^2(\Omega)$, $n \geq 0$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\mu \|\nabla u_n\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \; & \textstyle\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega \alpha_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} = \\
= \; & \textstyle -\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_i}) u_n + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Gamma_1} \alpha_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} u_n n_j \\
= \; & \textstyle -\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega \alpha_{ij} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i \partial x_j} u_n - \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} u_n + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Gamma_1} \alpha_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} u_n n_j .
\end{aligned}$$

De esta relación, teniendo en cuenta que u_n es una solución de $P[\lambda, \Omega, \mathcal{B}(b_n)]$ obtenemos que

$$\mu \|\nabla u_n\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \int_\Omega [(\lambda W - af(\cdot, u_n) - \alpha_0) u_n - \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_i \frac{\partial u_n}{\partial x_i}] u_n + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Gamma_1} \alpha_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} u_n n_j , \tag{4.7.10}$$

donde los coeficientes $\tilde{\alpha}_i \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, $1 \leq i \leq N$, son los dados por (1.4.14). Por otra parte, por construcción tenemos que

$$\partial_\nu u_n + b_n u_n = 0 \qquad \text{en} \qquad \Gamma_1 , \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

donde $\nu = (\nu_1, ..., \nu_N)$ satisface

$$\nu_i := \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} n_j , \qquad 1 \leq i \leq N ,$$

ya que estamos suponiendo (1.4.15). De este modo, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tenemos que

$$\sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} n_j = \sum_{i=1}^N \nu_i \frac{\partial u_n}{\partial x_i} = \langle \nabla u_n, \nu \rangle = \partial_\nu u_n = -b_n u_n ,$$

y por eso

$$\sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} u_n n_j = -b_n u_n^2 . \tag{4.7.11}$$

Ahora, sustituyendo (4.7.11) en (4.7.10) se obtiene

$$\mu \|\nabla u_n\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \int_\Omega [\lambda W - af(\cdot, u_n) - \alpha_0] u_n^2 - \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \tilde{\alpha}_i \frac{\partial u_n}{\partial x_i} u_n - \int_{\Gamma_1} b_n u_n^2 . \tag{4.7.12}$$

Ahora procedemos a estimar cada uno de los términos del segundo miembro de (4.7.12). Gracias a (4.7.7),

$$\left| \int_\Omega [\lambda W - af(\cdot, u_n) - \alpha_0] u_n^2 \right| \leq M_1 M^2 |\Omega| , \tag{4.7.13}$$

donde

$$M_1 := |\lambda| \|W\|_{L_\infty(\Omega)} + \|a\|_{L_\infty(\Omega)} \|f\|_{L_\infty(\bar{\Omega} \times [0,M])} + \|\alpha_0\|_{L_\infty(\Omega)} .$$

Gracias a (4.7.5) y (4.7.7)

$$\left| \int_{\Gamma_1} b_n u_n^2 \right| \leq C M^2 |\Gamma_1| , \tag{4.7.14}$$

donde $|\Gamma_1|$ representa la medida de Lebesgue $(N-1)$-dimensional de Γ_1.

Tomando

$$M_2 := \sum_{i=1}^{N} \|\tilde{\alpha}_i\|_{L_\infty(\Omega)} , \qquad \varepsilon := \left(\frac{\mu}{M_2} \right)^{\frac{1}{2}} , \tag{4.7.15}$$

donde $\mu > 0$ es la constante de elipticidad de $\mathcal{L}$, y usando la desigualdad de Hölder se verifica que

$$\left| \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \tilde{\alpha}_i \frac{\partial u_n}{\partial x_i} u_n \right| \leq \sum_{i=1}^{N} \|\tilde{\alpha}_i\|_{L_\infty(\Omega)} \int_\Omega |\varepsilon \frac{\partial u_n}{\partial x_i}| \, |\varepsilon^{-1} u_n| \leq M_2 \frac{\varepsilon^2}{2} \|\nabla u_n\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{M_2}{2\varepsilon^2} \|u_n\|^2_{L_2(\Omega)} .$$

De este modo, (4.7.15) implica

$$\left| \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \tilde{\alpha}_i \frac{\partial u_n}{\partial x_i} u_n \right| \leq \frac{\mu}{2} \|\nabla u_n\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{M_2^2}{2\mu} \|u_n\|^2_{L_2(\Omega)} . \tag{4.7.16}$$

Por eso, gracias a (4.7.8), (4.7.13), (4.7.14) y (4.7.16), obtenemos de (4.7.12) que

$$\mu \|\nabla u_n\|^2_{L_2(\Omega)} \leq M_3 + \frac{\mu}{2} \|\nabla u_n\|^2_{L_2(\Omega)} , \tag{4.7.17}$$

donde

$$M_3 := M^2 (M_1 |\Omega| + C|\Gamma_1|) + \frac{1}{2\mu} M_2^2 M^2 |\Omega| .$$

De este modo, se sigue de (4.7.17) que

$$\|\nabla u_n\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \frac{2M_3}{\mu}, \tag{4.7.18}$$

y por tanto, gracias a (4.7.8) y (4.7.18), obtenemos que

$$\|u_n\|_{H^1(\Omega)} \leq \hat{M}, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

donde

$$\hat{M} := \left(M^2|\Omega| + \frac{2M_3}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Esto completa la prueba de (4.7.9).

Ahora, gracias a (4.7.6) y (4.7.9), a lo largo de alguna subsucesión, de nuevo etiquetada por n, tenemos que

$$0 < L := \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{H^1(\Omega)}. \tag{4.7.19}$$

En lo sucesivo nos restringiremos a tratar con funciones de esa subsucesión. Ya que $H^1(\Omega)$ está incluido de forma compacta en $L_2(\Omega)$, se sigue de (4.7.9) que existe $u \in L_2(\Omega)$ y una subsucesión de u_n, $n \geq 1$, reetiquetada por n, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L_2(\Omega)} = 0. \tag{4.7.20}$$

Para completar la demostración del teorema es suficiente mostrar que (4.7.19) y (4.7.20) implican que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{H^1(\Omega)} = 0 \qquad \text{y} \qquad u = u_0,$$

ya que este argumento puede ser repetido a lo largo de cualquier subsucesión. De hecho, es suficiente probar la validez de la primera relación a lo largo de alguna subsucesión, ya que u_0 es la única solución positiva débil de $P[\lambda, \Omega, \mathcal{B}(b_0)]$.

Definamos

$$v_n := \frac{u_n}{\|u_n\|_{H^1(\Omega)}}, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Por construcción, $v_n \in H^1(\Omega)$,

$$\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{4.7.21}$$

y v_n es una solución positiva de

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathcal{L}v_n = \lambda W v_n - af(\cdot, u_n)v_n & \text{en} & \Omega \\ \mathcal{B}(b_n)v_n = 0 & \text{en} & \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{4.7.22}$$

ya que u_n es una solución positiva de $P[\lambda, \Omega, \mathcal{B}(b_n)]$. Además, (4.7.6) y (4.7.7) implican

$$\|v_n\|_{L_\infty(\Omega)} = \frac{\|u_n\|_{L_\infty(\Omega)}}{\|u_n\|_{H^1(\Omega)}} \leq \frac{M}{\|u_n\|_{L_2(\Omega)}} \leq \frac{M}{\|\hat{u}_2\|_{L_2(\Omega)}}. \tag{4.7.23}$$

Ya que $H^1(\Omega)$ está incluido de forma compacta en $L_2(\Omega)$, obtenemos de (4.7.21) que existe $v \in L_2(\Omega)$ y una subsucesión de v_n, $n \geq 1$, etiquetada por n, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_{L_2(\Omega)} = 0\,. \tag{4.7.24}$$

En particular,

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v \qquad \text{c.t.p. en} \quad \Omega\,, \tag{4.7.25}$$

y

$$v \geq 0 \qquad \text{en} \quad \Omega\,,$$

ya que $v_n > 0$ para cada $n \geq 0$. En lo sucesivo nos restringiremos a considerar esa subsucesión.

En lo que a las trazas de las funciones v_n, $n \geq 0$, sobre Γ_1 concierne, el mismo argumento de la demostración del Teorema 4.4.1 muestra que existen $v_* \in L_2(\Gamma_1)$ y una subsucesión de v_n, $n \geq 0$, de nuevo etiquetada por n, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n|_{\Gamma_1} - v_*\|_{L_2(\Gamma_1)} = 0\,. \tag{4.7.26}$$

En lo sucesivo nos restringiremos a considerar esa subsucesión. En particular, existe $M_4 > 0$ tal que

$$\|v_n|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} \leq M_4\,, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,. \tag{4.7.27}$$

Ahora adaptamos el argumento de la demostración del Teorema 4.4.1 para mostrar que v_n, $n \geq 1$, es una sucesión de Cauchy en $H^1(\Omega)$. Observar, que gracias a (4.7.24), esto implica

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_{H^1(\Omega)} = 0\,. \tag{4.7.28}$$

En efecto, argumentando como en la demostración del Teorema 4.4.1, para cada par de números naturales $1 \leq k \leq m$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\mu\,\|\nabla(v_k - v_m)\|^2_{L_2(\Omega)} \;&\leq \textstyle\int_\Omega(\lambda W - \alpha_0)(v_k - v_m)v_k + \int_\Omega(\lambda W - \alpha_0)(v_m - v_k)v_m \\
&+ \textstyle\int_\Omega a f(\cdot, u_k)(v_m - v_k)v_k + \int_\Omega a f(\cdot, u_k)(v_k - v_m)v_m \\
&+ \textstyle\int_\Omega a v_m^2[f(\cdot, u_k) - f(\cdot, u_m)] + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \tilde{\alpha}_i(v_m - v_k)\frac{\partial v_k}{\partial x_i} \\
&+ \textstyle\sum_{i=1}^N \int_\Omega(\tilde{\alpha}_i - \alpha_i^n)v_m\frac{\partial}{\partial x_i}(v_k - v_m) + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \alpha_i^n v_m \frac{\partial}{\partial x_i}(v_k - v_m) \\
&+ \textstyle\sum_{i,j=1}^N \int_{\Gamma_1} \alpha_{ij}[(v_k - v_m)\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + v_m\frac{\partial}{\partial x_i}(v_m - v_k)]n_j\,,
\end{aligned} \tag{4.7.29}$$

donde $\tilde{\alpha}_i \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, $1 \leq i \leq N$, son los coeficientes definidos por (1.4.14) y para cada $1 \leq i \leq N$, α_i^n, $n \geq 1$, es una sucesión de clase $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|\alpha_i^n - \tilde{\alpha}_i\|_{L_\infty(\Omega)} = 0\,. \tag{4.7.30}$$

Suponemos que α_i^n, $1 \leq i \leq N$, $n \geq 1$, han sido construidos como en la prueba del Teorema 4.4.1. Gracias a (4.7.21), para cada $n \geq 1$ tenemos que

$$\|v_n\|_{L_2(\Omega)} \leq 1\,, \qquad \|\nabla v_n\|_{L_2(\Omega)} \leq 1\,, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,, \tag{4.7.31}$$

y por tanto, argumentando como en la prueba del Teorema 4.4.1, se desprenden las siguientes estimaciones

$$\left|\int_\Omega (\lambda W - \alpha_0)(v_k - v_m)v_k\right| \leq \|\lambda W - \alpha_0\|_{L_\infty(\Omega)} \|v_k - v_m\|_{L_2(\Omega)}, \tag{4.7.32}$$

$$\left|\int_\Omega (\lambda W - \alpha_0)(v_m - v_k)v_m\right| \leq \|\lambda W - \alpha_0\|_{L_\infty(\Omega)} \|v_k - v_m\|_{L_2(\Omega)}, \tag{4.7.33}$$

$$\left|\int_\Omega af(\cdot, u_k)(v_m - v_k)v_k\right| \leq \|a\|_{L_\infty(\Omega)}\|f\|_{L_\infty(\Omega\times[0,M])}\|v_k - v_m\|_{L_2(\Omega)}, \tag{4.7.34}$$

$$\left|\int_\Omega af(\cdot, u_k)(v_k - v_m)v_m\right| \leq \|a\|_{L_\infty(\Omega)}\|f\|_{L_\infty(\Omega\times[0,M])}\|\|v_k - v_m\|_{L_2(\Omega)}, \tag{4.7.35}$$

$$\left|\sum_{i=1}^N \int_\Omega \tilde{\alpha}_i(v_m - v_k)\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right| \leq \|v_m - v_k\|_{L_2(\Omega)} \sum_{i=1}^N \|\tilde{\alpha}_i\|_{L_\infty(\Omega)}, \tag{4.7.36}$$

$$\left|\sum_{i=1}^N \int_\Omega (\tilde{\alpha}_i - \alpha_i^n)v_m \frac{\partial}{\partial x_i}(v_k - v_m)\right| \leq 2\sum_{i=1}^N \|\tilde{\alpha}_i - \alpha_i^n\|_{L_\infty(\Omega)}, \tag{4.7.37}$$

y

$$\begin{aligned}\left|\textstyle\sum_{i=1}^N \int_\Omega \alpha_i^n v_m \frac{\partial}{\partial x_i}(v_k - v_m)\right| &\leq \textstyle\sum_{i=1}^N \|\tilde{\alpha}_i\|_{L_\infty(\Omega)}\|v_m|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)}\|(v_k - v_m)|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} \\ &+ \textstyle\sum_{i=1}^N \left(1 + (\int_{\mathbb{R}^N} \rho)^{-1} n \|\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\|_{L_1(\mathbb{R}^N)}\right) \|\tilde{\alpha}_i\|_{L_\infty(\Omega)}\|v_k - v_m\|_{L_2(\Omega)},\end{aligned} \tag{4.7.38}$$

donde ρ es la función definida por (4.4.44). Además, gracias a (4.7.7) y (4.1.5), se sigue fácilmente que

$$|f(\cdot, u_k) - f(\cdot, u_m)| \leq \|\partial_u f(\cdot, \cdot)\|_{L_\infty(\Omega\times[0,M])}|u_k - u_m|,$$

y por eso

$$\left|\int_\Omega av_m^2[f(\cdot, u_k) - f(\cdot, u_m)]\right| \leq C_1 \|v_m\|_{L_\infty(\Omega)} \int_\Omega |v_m(u_k - u_m)|,$$

donde

$$C_1 := \|a\|_{L_\infty(\Omega)}\|\partial_u f\|_{L_\infty(\Omega\times[0,M])}.$$

De este modo, utilizando la desigualdad de Hölder obtenemos de (4.7.23) y (4.7.31) que

$$\left|\int_\Omega av_m^2[f(\cdot, u_k) - f(\cdot, u_m)]\right| \leq \frac{C_1 M}{\|\hat{u}_2\|_{L_2(\Omega)}}\|u_k - u_m\|_{L_2(\Omega)}. \tag{4.7.39}$$

Por otra parte, para cada $n \geq 0$ tenemos que

$$\partial_\nu v_n + b_n v_n = 0 \qquad \text{en} \quad \Gamma_1,$$

ya que v_n es una solución positiva de (4.7.22). Entonces, se sigue de la condición (1.4.15) que

$$\sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_i}n_j = \sum_{i=1}^N \nu_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = \langle \nabla v_k, \nu\rangle = \partial_\nu v_k = -b_k v_k,$$

y por eso

$$\sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}(v_m - v_k) n_j = b_k v_k - b_m v_m .$$

Por tanto,

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Gamma_1} \alpha_{ij}(v_k - v_m) \frac{\partial v_k}{\partial x_i} n_j = \int_{\Gamma_1} b_k\, v_k\, (v_m - v_k) \tag{4.7.40}$$

y

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Gamma_1} \alpha_{ij} v_m \frac{\partial}{\partial x_i}(v_m - v_k) n_j = \int_{\Gamma_1} (b_k\, v_k - b_m v_m) v_m . \tag{4.7.41}$$

Gracias al hecho de que b_n, $n \geq 1$, está uniformemente acotada y utilizando (4.7.5) y (4.7.27) se obtiene

$$\left| \int_{\Gamma_1} b_k\, v_k\, (v_m - v_k) \right| \leq C M_4 \|(v_m - v_k)|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} , \tag{4.7.42}$$

donde $C > 0$ y $M_4 > 0$ son constantes independientes de k y m. Similarmente,

$$\begin{aligned} |\textstyle\int_{\Gamma_1}(b_k v_k - b_m v_m) v_m| \leq &\ |\textstyle\int_{\Gamma_1} b_k v_m (v_k - v_m)| + |\textstyle\int_{\Gamma_1} v_m^2 (b_k - b_m)| \\ \leq &\ C M_4 \|(v_m - v_k)|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} + |\textstyle\int_{\Gamma_1} v_m^2 (b_k - b_m)| . \end{aligned} \tag{4.7.43}$$

Además,

$$\begin{aligned} |\textstyle\int_{\Gamma_1} v_m^2 (b_k - b_m)| \leq &\ |\textstyle\int_{\Gamma_1} (v_m^2 - v_*^2)(b_k - b_m)| + |\textstyle\int_{\Gamma_1} v_*^2 (b_k - b_m)| \\ \leq &\ 2 \sup_{k \geq 1}\{|b_k|\} \|v_m + v_*\|_{L_2(\Gamma_1)} \|v_m - v_*\|_{L_2(\Gamma_1)} + \|\textstyle\int_{\Gamma_1} v_*^2 (b_k - b_m)\| , \end{aligned}$$

y por eso, ya que b_k, $k \geq 1$, está uniformemente acotada en $L_\infty(\Gamma_1)$ y es una sucesión de Cauchy para la topología w^*, obtenemos de (4.7.26) y (4.7.43) que para cada $\epsilon > 0$ existe un número natural $\tilde{n}_0 \geq 1$ tal que para todo $k, m \geq \tilde{n}_0$

$$\left| \int_{\Gamma_1} (b_k v_k - b_m v_m) v_m \right| \leq \frac{\epsilon}{2} . \tag{4.7.44}$$

Finalmente, usando (4.7.40) y (4.7.41) y sustituyendo (4.7.32) – (4.7.39), (4.7.42) y (4.7.43) en (4.7.29) se sigue fácilmente que existe $\tilde{k}_0 \geq \tilde{n}_0$ tal que

$$\mu \|\nabla(v_k - v_m)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \epsilon , \qquad k, m \geq \tilde{k}_0 .$$

Gracias a (4.7.24) esto prueba que

$$\lim_{n \to \infty} \|v_n - v\|_{H^1(\Omega)} = 0 , \qquad v \in H^1(\Omega). \tag{4.7.45}$$

Además, por la continuidad del operdor traza de $H^1(\Omega)$ sobre Γ_1, existe una constante $C_2 > 0$ tal que para cada $n \geq 1$

$$\|(v_n - v)|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} \leq C_2 \|v_n - v\|_{H^1(\Omega)} ,$$

y por eso (4.7.45) implica

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n|_{\Gamma_1} - v|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} = 0\,. \tag{4.7.46}$$

Por tanto, gracias a (4.7.26),

$$v|_{\Gamma_1} = v_*\,.$$

Similarmente, ya que $v_n|_{\Gamma_0} = 0$ para cada $n \geq 1$, por la continuidad del operador traza de $H^1(\Omega)$ sobre Γ_0 obtenemos que

$$v|_{\Gamma_0} = 0\,.$$

En particular,

$$v \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\,.$$

Observar, que gracias a (4.7.21), se sigue de (4.7.45) que

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = 1\,.$$

Así, ya que $v_n > 0$ para cada $n \geq 1$,

$$v > 0\,.$$

Por otra parte,

$$\|v_n - \frac{u}{L}\|_{L_2(\Omega)} = \|\frac{u_n}{\|u_n\|_{H^1(\Omega)}} - \frac{u}{L}\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{\|u_n - u\|_{L_2(\Omega)}}{\|u_n\|_{H^1(\Omega)}} + \left|\frac{1}{\|u_n\|_{H^1(\Omega)}} - \frac{1}{L}\right| \|u\|_{L_2(\Omega)}\,,$$

donde L es la constante definida por (4.7.19). De este modo, se sigue de (4.7.19) y (4.7.20) que

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - \frac{u}{L}\|_{L_2(\Omega)} = 0\,. \tag{4.7.47}$$

Así, gracias a (4.7.24) y (4.7.47), obtenemos que

$$u = Lv \qquad \text{en} \qquad L_2(\Omega)\,. \tag{4.7.48}$$

En lo sucesivo probaremos que u es una solución débil de $P[\lambda, \Omega, \mathcal{B}(b_0)]$. Ya conocemos que $v \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ y por eso, gracias a (4.7.48), obtenemos que

$$u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\,.$$

Ahora, tomemos

$$\xi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega \cup \Gamma_1)\,.$$

Entonces, multiplicando las ecuaciones diferenciales

$$\mathcal{L}v_n = \lambda W v_n - af(\cdot, u_n)v_n\,, \qquad n \geq 1\,,$$

por ξ, integrando en Ω, aplicando la fórmula de integración por partes y teniendo en cuenta que supp$\xi \subset \Omega \cup \Gamma_1$ se obtiene

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega \alpha_{ij} \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \tilde{\alpha}_i \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \xi + \int_\Omega \alpha_0 v_n \xi = \int_\Omega (\lambda W - af(\cdot, u_n)) v_n \xi + \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Gamma_1} \alpha_{ij} \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \xi\, n_j\,,$$

para cada $n \geq 1$, donde los coeficientes $\tilde{\alpha}_i$, $1 \leq i \leq N$, están dados por (1.4.14). Además, usando que

$$\partial_\nu v_n + b_n v_n = 0 \qquad \text{en } \Gamma_1\,, \qquad n \geq 1\,,$$

se verifica

$$\sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{ij} \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \xi\, n_j = \sum_{i=1}^{N} \nu_i \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \xi = \langle \nabla v_n, \nu \rangle \xi = \partial_\nu v_n \xi = -b_n v_n \xi\,,$$

y por eso para cada $n \geq 1$ obtenemos que

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega \alpha_{ij} \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \tilde{\alpha}_i \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \xi + \int_\Omega \alpha_0 v_n \xi = \int_\Omega (\lambda W - af(\cdot, u_n)) v_n \xi - \int_{\Gamma_1} b_n v_n \xi\,. \quad (4.7.49)$$

De este modo, usando (4.7.1), (4.7.7) y

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} = 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_{H^1(\Omega)} = 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} \|v_n|_{\Gamma_1} - v|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} = 0\,,$$

y pasando al límite cuando $n \to \infty$ en (4.7.49), el teorema de la convergencia dominada implica

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega \alpha_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \tilde{\alpha}_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \xi + \int_\Omega \alpha_0 v \xi = \int_\Omega (\lambda W - af(\cdot, u)) v \xi - \int_{\Gamma_1} b_0 v \xi\,. \quad (4.7.50)$$

Finalmente, multiplicando (4.7.50) por L y teniendo en cuenta que $u = Lv$ se sigue

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega \alpha_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \tilde{\alpha}_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \xi + \int_\Omega \alpha_0 u \xi = \int_\Omega (\lambda W - af(\cdot, u)) u \xi - \int_{\Gamma_1} b_0 u \xi$$

para cada $\xi \in C_c^\infty(\Omega \cup \Gamma_1)$. Por tanto, $u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$, $u > 0$, es una solución positiva débil de $P[\lambda, \Omega, \mathcal{B}(b_0)]$ y ya que u_0 es la única solución positiva de $P[\lambda, \Omega, \mathcal{B}(b_0)]$, necesariamente

$$u_0 = u = Lv\,. \quad (4.7.51)$$

Ahora, gracias a (4.7.51), se sigue de (4.7.28) que

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - \frac{u_0}{L}\|_{H^1(\Omega)} = 0\,. \quad (4.7.52)$$

Además, ya que

$$u_n - u_0 = \|u_n\|_{H^1(\Omega)} \left[\left(v_n - \frac{u_0}{L} \right) + \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{\|u_n\|_{H^1(\Omega)}} \right) u_0 \right]\,,$$

se sigue de (4.7.9) que

$$\|u_n - u_0\|_{H^1(\Omega)} \leq \hat{M}\left[\|v_n - \frac{u_0}{L}\|_{H^1(\Omega)} + \left|\frac{1}{L} - \frac{1}{\|u_n\|_{H^1(\Omega)}}\right| \|u_0\|_{H^1(\Omega)}\right].$$

Por tanto, gracias a (4.7.19) y (4.7.52), concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_0\|_{H^1(\Omega)} = 0\,.$$

Esto muestra la validez de (4.7.4) a lo largo de la subsucesión con la que hemos estado trabajando. Como el argumento previo funciona a lo largo de cualquier subsucesión, la prueba del teorema está completa. Esto concluye la demostración d el teorema. □

El siguiente resultado nos proporciona algunas condiciones suficientes que garantizan la condición (4.7.3). Por tanto, bajo esas condiciones se verifica la conclusión del Teorema 4.7.2.

Teorema 4.7.3 *Supongamos* $\Gamma_1 \neq \emptyset$ *y* (1.4.15). *Sea* $b_n \in \mathcal{C}(\Gamma_1)$, $n \geq 0$, *una sucesión verificando* (4.7.1). *Asumamos además que o bien* $a \in \mathcal{A}^+(\Omega)$ *o* $a \in \mathcal{A}(\Omega)$. *Entonces, las siguientes afirmaciones son ciertas:*

i) Si

$$\lambda \in \Lambda[\Omega, \mathcal{B}(b_0)]\,, \tag{4.7.53}$$

entonces, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\lambda \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \Lambda[\Omega, \mathcal{B}(b_n)]\,. \tag{4.7.54}$$

Si además

$$\lambda \in \bigcap_{i=1}^{2} \Lambda[\Omega, \mathcal{B}(\hat{b}_i)] \tag{4.7.55}$$

para algún par de funciones continuas $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$ *sobre* Γ_1 *verificando*

$$\hat{b}_1 \leq b_n \leq \hat{b}_2\,, \qquad n = 0, \qquad n \geq n_0\,, \tag{4.7.56}$$

entonces se verifica (4.7.4), *donde* u_n *representa a la única solución positiva del problema* $P[\lambda, \Omega, \mathcal{B}(b_n)]$, *cuya existencia para n suficientemente grande es garantizada por* (4.7.54), *y* u_0 *representa a la única solución positiva de* $P[\lambda, \Omega, \mathcal{B}(b_0)]$, *cuya existencia es garantizada por* (4.7.53).

ii) Si

$$\lambda \in \bigcap_{i=1}^{2} \Lambda[\Omega, \mathcal{B}(\hat{b}_i)]\,, \tag{4.7.57}$$

para algún par de funciones continuas $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$ *sobre* Γ_1 *verificando*

$$\hat{b}_1 \leq b_n \leq \hat{b}_2\,, \qquad n = 0\,, \quad n \geq n_0\,, \tag{4.7.58}$$

para algún $n_0 \in \mathbf{N}$*, entonces*

$$\lambda \in \Lambda[\Omega, \mathcal{B}(b_0)] \cap \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \Lambda[\Omega, \mathcal{B}(b_n)]\,, \tag{4.7.59}$$

y se verifica (4.7.4)*, donde* u_n *y* u_0 *representan las mismas funciones que en i), cuya existencia es garantizada por* (4.7.59).

Demostración: Desmostraremos cada una de las afirmaciones separadamente.

Part i): En un principio probaremos (4.7.54) por separado en cada una de las situaciones $a \in \mathcal{A}^+(\Omega)$ y $a \in \mathcal{A}(\Omega)$.

Supongamos que $a \in \mathcal{A}^+(\Omega)$ y (4.7.53) se verifica. Entonces, gracias al Teorema 3.3.4 tenemos que

$$\sigma_1^{\Omega}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}(b_0)] < 0\,. \tag{4.7.60}$$

Por otra parte, ya que

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b_0 \qquad \text{en} \qquad \sigma(L_\infty(\Gamma_1), L_1(\Gamma_1))\,,$$

se sigue del Teorema 2.7.2 que

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_1^{\Omega}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}(b_n)] = \sigma_1^{\Omega}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}(b_0)]\,. \tag{4.7.61}$$

Entonces, combinando (4.7.60) y (4.7.61), obtenemos que existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que

$$\sigma_1^{\Omega}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}(b_n)] < 0\,, \qquad n \geq n_0\,,$$

y gracias de nuevo al Teorema 3.3.4 obtenemos que

$$\lambda \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \Lambda[\Omega, \mathcal{B}(b_n)]\,.$$

Esto prueba (4.7.54) en el caso particular cuando $a \in \mathcal{A}^+(\Omega)$.

Ahora supongamos que $a \in \mathcal{A}(\Omega)$ y (4.7.53) se verifica. Entonces, se sigue del Teorema 3.3.2 que

$$\sigma_1^{\Omega}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}(b_0)] < 0 < \sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(b_0, \Omega_a^0)]\,. \tag{4.7.62}$$

Por otra parte, necesariamente se verifica o bien

$$\partial\Omega_a^0 \cap \Gamma_1 \neq \emptyset \tag{4.7.63}$$

o

$$\partial\Omega_a^0 \cap \Gamma_1 = \emptyset\,. \tag{4.7.64}$$

Supongamos que se cumple (4.7.63). Entonces, gracias a (4.7.1), se sigue del Teorema 2.7.2 que

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_1^\Omega[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}(b_n)] = \sigma_1^\Omega[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}(b_0)] \tag{4.7.65}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(b_n, \Omega_a^0)] = \sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(b_0, \Omega_a^0)]\,, \tag{4.7.66}$$

ya que (1.4.15) se verifica sobre Γ_1. De este modo, gracias a (4.7.62), obtenemos de (4.7.65) y (4.7.66) que existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que

$$\sigma_1^\Omega[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}(b_n)] < 0 < \sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(b_n, \Omega_a^0)]\,, \qquad n \geq n_0\,,$$

y por eso, el Teorema 3.3.2 implica que

$$\lambda \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \Lambda[\Omega, \mathcal{B}(b_n)]\,.$$

Esto completa la demostración de (4.7.54) en el caso particular en el que $a \in \mathcal{A}(\Omega)$ y (4.7.63) es satisfecho.

Supongamos ahora que $a \in \mathcal{A}(\Omega)$ y (4.7.64) es satisfecho. Entonces

$$\sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(b_n, \Omega_a^0)] = \sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{D}]\,, \qquad n \geq 0\,, \tag{4.7.67}$$

ya que

$$\mathcal{B}(b_n, \Omega_a^0) = \mathcal{D}\,, \qquad n \geq 0\,.$$

De este modo, gracias a (4.7.62) y (4.7.67)

$$\sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(b_n, \Omega_a^0)] = \sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{D}] > 0\,, \qquad n \geq 0. \tag{4.7.68}$$

Entonces, argumentando como en el caso previo, (4.7.62), (4.7.65), (4.7.68) y el Teorema 3.3.2 implican (4.7.54). Esto completa la demostración de (4.7.54) cuando $a \in \mathcal{A}(\Omega)$ bajo condición (4.7.64).

Ahora, en ambos casos $a \in \mathcal{A}^+(\Omega)$ y $a \in \mathcal{A}(\Omega)$, si además (4.7.55) y (4.7.56) son satisfechos, se sigue del Teorema 4.7.2 que (4.7.4) se verifica.

Esto concluye la demostración de Parte i).

Parte ii): En un principio probaremos (4.7.59) separadamente en cada una de las situaciones $a \in \mathcal{A}^+(\Omega)$ y $a \in \mathcal{A}(\Omega)$.

Supongamos que $a \in \mathcal{A}^+(\Omega)$ y (4.7.57) se verifica para $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2 \in \mathcal{C}(\Gamma_1)$ verificando (4.7.58). Entonces, gracias a (4.7.57), se sigue del Teorema 3.3.4 que

$$\sigma_1^\Omega[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}(\hat{b}_2)] < 0\,. \tag{4.7.69}$$

Por eso, gracias a (4.7.58) y (4.7.69), se sigue de la Proposición 2.2.5 que

$$\sigma_1^{\Omega}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda),\mathcal{B}(b_n)] \le \sigma_1^{\Omega}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda),\mathcal{B}(\hat{b}_2)] < 0\,, \quad n=0 \quad \text{y} \quad n \ge n_0.$$

Por tanto, gracias de nuevo al Teorema 3.3.4, tenemos que

$$\lambda \in \Lambda[\Omega,\mathcal{B}(b_0)] \cap \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \Lambda[\Omega,\mathcal{B}(b_n)]\,.$$

Esto prueba (4.7.59) en el caso particular cuando $a \in \mathcal{A}^+(\Omega)$.

Ahora, supongamos que $a \in \mathcal{A}(\Omega)$ y (4.7.57) se verifica para $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2 \in \mathcal{C}(\Gamma_1)$ verificando (4.7.58). Entonces, se sigue del Teorema 3.3.2 que

$$\sigma_1^{\Omega}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda),\mathcal{B}(\hat{b}_i)] < 0 < \sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}(\lambda),\mathcal{B}(\hat{b}_i,\Omega_a^0)]\,, \qquad i=1,2\,. \tag{4.7.70}$$

De este modo, gracias a (4.7.58) y (4.7.70), se sigue de la Proposición 2.2.5 que

$$\sigma_1^{\Omega}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda),\mathcal{B}(b_n)] \le \sigma_1^{\Omega}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda),\mathcal{B}(\hat{b}_2)] < 0\,,$$

y

$$\sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}(\lambda),\mathcal{B}(b_n,\Omega_a^0)] \ge \sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}(\lambda),\mathcal{B}(\hat{b}_1;\Omega_a^0)] > 0\,,$$

para $n=0$ y cada $n \ge n_0$. Por tanto, gracias de nuevo al Teorema 3.3.2, obtenemos que

$$\lambda \in \Lambda[\Omega,\mathcal{B}(b_0)] \cap \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \Lambda[\Omega,\mathcal{B}(b_0)].$$

Esto prueba (4.7.59) en el caso particular cuando $a \in \mathcal{A}(\Omega)$.

Además, en ambos casos $a \in \mathcal{A}^+(\Omega)$ y $a \in \mathcal{A}(\Omega)$ se sigue del Teorema 4.7.2 que (4.7.4) es satisfecho.

Esto completa la prueba de Parte ii) y concluye la demostración del teorema. □

4.8 Comportamiento asintótico de las soluciones positivas del problema $P[\lambda,\Omega,\mathcal{B}(b)]$ cuando $\min_{\Gamma_1} b \nearrow \infty$

En esta sección analizamos el comportamiento de las soluciones positivas del problema sublineal $P[\lambda,\Omega,\mathcal{B}(b)]$ cuando $\min_{\Gamma_1} b \uparrow \infty$. El principal resultado de esta sección establece que éstas convergen a la solución positiva del problema de Dirichlet $P[\lambda,\Omega,\mathcal{D}]$. Para obtener este resultado no requerimos que se verifique la condición (1.4.15).

Teorema 4.8.1 *Supongamos $\Gamma_1 \neq \emptyset$. Sea $b_n \in \mathcal{C}(\Gamma_1)$, $n \ge 1$, una sucesión verificando*

$$\lim_{n\to\infty} \min_{\Gamma_1} b_n = \infty\,. \tag{4.8.1}$$

Asumamos que

$$\lambda \in \Lambda[\Omega,\mathcal{D}]\,. \tag{4.8.2}$$

Supongamos además que existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que

$$\lambda \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \Lambda[\Omega,\mathcal{B}(b_n)]. \tag{4.8.3}$$

Para cada $n \geq n_0$, denotemos por u_n a la única solución positiva de $P[\lambda,\Omega,\mathcal{B}(b_n)]$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_D\|_{H^1(\Omega)} = 0\,, \tag{4.8.4}$$

donde u_D es la única solución positiva del problema de Dirichlet $P[\lambda,\Omega,\mathcal{D}]$.

Demostración: Ya que se verifica la condición (4.8.1), sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$\min_{\Gamma_1} b_n > 0\,, \qquad n \geq 1\,. \tag{4.8.5}$$

Además, gracias a (4.8.1), existe $\tilde{n}_0 \in \mathbf{N}$ tal que

$$\sup_{\Gamma_1} b_1 \leq \min_{\Gamma_1} b_n\,, \qquad n \geq \tilde{n}_0\,;$$

y por eso

$$b_1 \leq b_n\,, \qquad n \geq \tilde{n}_0\,. \tag{4.8.6}$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que (4.8.3) y (4.8.6) son satisfechos para $n \geq n_0$.

Por otra parte, gracias a (4.8.3), se sigue del Teorema 3.3.2 que $P[\lambda,\Omega,\mathcal{B}(b_n)]$, $n \geq n_0$ posee una única solución positiva, denotada en lo sucesivo por u_n. Además, gracias al Lema 3.2.2,

$$u_n \in W^2_{\mathcal{B}(b_n)}(\Omega) \subset H^2(\Omega)\,, \qquad n \geq n_0\,, \tag{4.8.7}$$

y u_n es fuertemente positiva en Ω. Entonces, gracias a (4.8.6) y ya que u_n es una solución positiva de $P[\lambda,\Omega,\mathcal{B}(b_n)]$, tenemos que

$$\left\{\begin{array}{rl} \mathcal{L}u_n = \lambda W u_n - af(\cdot,u_n)u_n & \text{en} \quad \Omega \\ \mathcal{B}(b_1)u_n \leq \mathcal{B}(b_n)u_n = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega\,, \end{array}\right. \qquad n \geq n_0$$

y por ello, u_n es una subsolución positiva de $P[\lambda,\Omega,\mathcal{B}(b_1)]$, $n \geq n_0$. Entonces, gracias al Teorema 4.2.1 tenemos que

$$u_n \leq u_1\,, \qquad n \geq n_0\,. \tag{4.8.8}$$

De la misma forma, es conocido que la solución positiva del problema de Dirichlet $P[\lambda,\Omega,\mathcal{D}]$, denotada por u_D, cuya existencia está garantizada por (4.8.2), satisface

$$u_D = 0 \qquad \text{y} \qquad \partial_\nu u_D < 0 \qquad \text{en} \qquad \partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1\,,$$

y por eso,

$$\mathcal{B}(b_n)u_D < 0\,, \qquad n \geq n_0\,.$$

De este modo tenemos que

$$\begin{cases} \mathcal{L}u_D = \lambda W u_D - af(\cdot,u_D)u_D & \text{en } \Omega \\ \mathcal{B}(b_n)u_D < 0 & \text{en } \partial\Omega\,, \end{cases} \qquad n \geq n_0$$

y por eso, u_D es una subsolución positiva estricta del problema $P[\lambda,\Omega,\mathcal{B}(b_n)]$, $n \geq n_0$. Entonces, gracias al Teorema 4.2.1, tenemos que

$$u_D \leq u_n\,, \qquad n \geq n_0\,, \tag{4.8.9}$$

y así, se sigue de (4.8.8) y (4.8.9) que

$$0 < u_D \leq u_n \leq u_1\,, \qquad n \geq n_0\,. \tag{4.8.10}$$

Ahora, definiendo

$$M := \|u_1\|_{L_\infty(\Omega)}\,, \tag{4.8.11}$$

se sigue de (4.8.10) que

$$\|u_n\|_{L_\infty(\Omega)} \leq M\,, \qquad n \geq n_0\,, \tag{4.8.12}$$

y por ello,

$$\|u_n\|_{L_2(\Omega)} \leq M|\Omega|^{\frac{1}{2}}\,, \qquad n \geq n_0\,. \tag{4.8.13}$$

Por otra parte, gracias a (4.8.5) tenemos que

$$\int_{\Gamma_1} b_n u_n^2 > 0\,, \qquad n \geq n_0\,,$$

y por ello, argumentando como en la prueba del Teorema 4.7.2 obtenemos que

$$\begin{aligned} \mu\|\nabla u_n\|^2_{L_2(\Omega)} &\leq \int_\Omega [\lambda W - af(\cdot,u_n) - \alpha_0]u_n^2 - \int_\Omega \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_i \frac{\partial u_n}{\partial x_i} u_n - \int_{\Gamma_1} b_n u_n^2 \\ &\leq \int_\Omega [\lambda W - af(\cdot,u_n) - \alpha_0]u_n^2 - \int_\Omega \sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_i \frac{\partial u_n}{\partial x_i} u_n\,. \end{aligned}$$

Entonces, siguiendo un proceso similar al mostrado en la demostración del Teorema 4.7.2, obtenemos que existe $\hat{C} > 0$ tal que

$$\|\nabla u_n\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \hat{C}\,, \qquad n \geq n_0\,,$$

y gracias a (4.8.13), se sigue la existencia de una constante positiva $\hat{M} > 0$ tal que

$$\|u_n\|_{H_1(\Omega)} \leq \hat{M}\,, \qquad n \geq n_0\,. \tag{4.8.14}$$

Además, gracias a (4.8.10) y (4.8.14), a lo largo de alguna subsucesión, de nuevo etiquetada por n, tenemos que

$$0 < L := \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{H^1(\Omega)}\,. \tag{4.8.15}$$

En lo sucesivo nos restringiremos a tratar con funciones de esa subsucesión. Ya que $H^1(\Omega)$ está incluido de forma compacta en $L_2(\Omega)$, se sigue de (4.8.14) que existen $u \in L_2(\Omega)$ y una subsucesión de u_n, $n \geq 1$, reetiquetada por n, tal que.

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L_2(\Omega)} = 0\,. \tag{4.8.16}$$

Para completar la demostración del teorema es suficiente mostrar que (4.8.15) y (4.8.16) implican que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{H^1(\Omega)} = 0 \qquad \text{y} \qquad u = u_D\,,$$

ya que este argumento puede ser repetido a lo largo de cualquier subsucesión. Definamos

$$v_n := \frac{u_n}{\|u_n\|_{H^1(\Omega)}}\,, \qquad n \geq 1.$$

Por construcción y gracias a (4.8.7), $v_n \in H^2(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$,

$$\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1\,, \qquad n \geq 1\,, \tag{4.8.17}$$

y v_n es una solución positiva de

$$\begin{cases} \mathcal{L}v_n = \lambda W v_n - af(\cdot,u_n)v_n & \text{en} \quad \Omega \\ \mathcal{B}(b_n)v_n = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{4.8.18}$$

ya que u_n es una solución positiva de $P[\lambda,\Omega,\mathcal{B}(b_n)]$. Además, (4.8.10) y (4.8.12) implican

$$\|v_n\|_{L_\infty(\Omega)} = \frac{\|u_n\|_{L_\infty(\Omega)}}{\|u_n\|_{H^1(\Omega)}} \leq \frac{M}{\|u_n\|_{L_2(\Omega)}} \leq \frac{M}{\|u_D\|_{L_2(\Omega)}}\,. \tag{4.8.19}$$

También, se sigue de (4.8.17) que

$$\|v_n\|_{L_2(\Omega)} \leq 1\,, \qquad \|\nabla v_n\|_{L_2(\Omega)} \leq 1\,, \qquad n \geq 1\,. \tag{4.8.20}$$

Ahora, ya que $H^1(\Omega)$ está incluido de forma compacta en $L_2(\Omega)$, obtenemos de (4.8.17) que existen $v \in L_2(\Omega)$ y una subsucesión de v_n, $n \geq 1$, etiquetada por n, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_{L_2(\Omega)} = 0\,. \tag{4.8.21}$$

En particular,

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v \qquad \text{c.t.p. en} \quad \Omega\,, \tag{4.8.22}$$

y

$$v \geq 0 \qquad \text{in} \quad \Omega\,,$$

ya que $v_n > 0$ para cada $n \geq 0$. En lo sucesivo nos restringiremos a considerar esa subsucesión.

Por otra parte, ya que gracias a (4.8.18)

$$\|(\mathcal{L}-\alpha_0)v_n\|_{L_2(\Omega)} = \|(\lambda W-\alpha_0)v_n - a(x)f(x,u_n)v_n\|_{L_2(\Omega)} \leq C_1\|v_n\|_{L_2(\Omega)}, \tag{4.8.23}$$

con

$$C_1 := \|\lambda W-\alpha_0\|_{L_\infty(\Omega)} + \|a\|_{L_\infty(\Omega)}\|f(\cdot,\cdot)\|_{L_\infty(\Omega\times[0,M])},$$

se sigue de (4.8.20) que

$$\|(\mathcal{L}-\alpha_0)v_n\|_{L_2(\Omega)} \leq C_1, \qquad n\geq 1. \tag{4.8.24}$$

De este modo, gracias a (4.8.20) y (4.8.24) se sigue de las estimaciones L^p de Agmon, Douglis y Nirenberg [2], que existe una constante $C_2>0$ tal que

$$\|v_n\|_{H^2(\Omega)} \leq C_2, \qquad n\geq 1. \tag{4.8.25}$$

Denotemos por j_1, j_2 a las inclusiones compactas

$$j_1 : W_2^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1) \hookrightarrow L_2(\Gamma_1), \qquad j_2 : W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \hookrightarrow L_2(\Gamma_1),$$

y por

$$\gamma_1 \in \mathcal{L}(H^2(\Omega), W_2^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)), \qquad \gamma_2 \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)),$$

a los correspondientes operadores traza sobre Γ_1. Ya que $v_n \in H^2(\Omega)$, para cada $n\geq n_0$ tenemos que

$$v_n|_{\Gamma_1} \in W_2^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1) \xrightarrow{j_1} L_2(\Gamma_1), \qquad \nabla v_n|_{\Gamma_1} \in W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \xrightarrow{j_2} L_2(\Gamma_1),$$

y por eso, se sigue de (4.8.25) que

$$\begin{aligned} \|v_n|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} &= \|j_1(v_n|_{\Gamma_1})\|_{L_2(\Gamma_1)} \leq \|j_1\|\|v_n|_{\Gamma_1}\|_{W_2^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)} \\ &\leq \|j_1\|\|\gamma_1\|\|v_n\|_{H^2(\Omega)} \leq \|j_1\|\|\gamma_1\|C_2. \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} \|\nabla v_n|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} &\leq \|j_2\|\|\nabla v_n|_{\Gamma_1}\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \leq \|j_2\|\|\gamma_2\|\|\nabla v_n\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \|j_2\|\|\gamma_2\|\|v_n\|_{H^2(\Omega)} \leq \|j_2\|\|\gamma_2\|C_2. \end{aligned}$$

Por tanto, existe una constante $C_3>0$ tal que

$$\|v_n|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} \leq C_3, \qquad \|\nabla v_n|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} \leq C_3, \qquad n\geq 1. \tag{4.8.26}$$

Además, ya que v_n es una solución positiva de (4.8.18) tenemos que

$$\partial_\nu v_n = -b_n v_n \qquad \text{en} \qquad \Gamma_1, \qquad n\geq 1. \tag{4.8.27}$$

Ahora, definiendo

$$\beta_n := \min_{\Gamma_1} b_n > 0, \qquad n\geq 1,$$

se sigue de (4.8.27) que

$$(\partial_\nu v_n)^2 = b_n^2 v_n^2 \geq \beta_n^2 v_n^2 \qquad \text{en } \Gamma_1 , \qquad n \geq 1 ,$$

y por eso

$$v_n^2|_{\Gamma_1} \leq \beta_n^{-2}(\partial_\nu v_n)^2|_{\Gamma_1} \leq \beta_n^{-2}|\nu|^2|\nabla v_n|_{\Gamma_1}|^2 , \qquad n \geq 1 ,$$

donde $|\cdot|$ representa la norma euclídea de $\mathbf{R}^N$. Así, aplicando (4.8.26) se sigue

$$\|v_n|_{\Gamma_1}\|^2_{L_2(\Gamma_1)} \leq \beta_n^{-2}|\nu|^2 \|\nabla v_n|_{\Gamma_1}\|^2_{L_2(\Gamma_1)} \leq \beta_n^{-2}|\nu|^2 C_3^2 , \qquad n \geq 1 ,$$

y por eso (4.8.1) implica

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} = 0 . \tag{4.8.28}$$

En particular,

$$\lim_{n\to\infty} v_n|_{\Gamma_1} = 0 \qquad \text{c.t.p. en } \Gamma_1 .$$

Por otra parte, por construcción tenemos que $v_n|_{\Gamma_0} = 0$ para cada $n \geq 1$, ya que $u_n|_{\Gamma_0} = 0$, $n \geq 1$. Por tanto, obtenemos de (4.8.28) que

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n|_{\partial\Omega}\|_{L_2(\partial\Omega)} = 0 . \tag{4.8.29}$$

Ahora mostramos que v_n, $n \geq 1$, es una sucesión de Cauchy en $H^1(\Omega)$. Combinando este hecho con (4.8.17) y (4.8.21) se llega a que

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_{H^1(\Omega)} = 0 , \qquad \|v\|_{H^1(\Omega)} = 1 . \tag{4.8.30}$$

En efecto, argumentando como en la demostración del Teorema 4.7.2 obtenemos que para cada par de números naturales $1 \leq k \leq m$ la estimación (4.7.29) es satisfecha, lo mismo que las estimaciones (4.7.31) – (4.7.38). Además,

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i,j=1}^N \int_{\Gamma_1} \alpha_{ij}(v_k - v_m)\tfrac{\partial v_k}{\partial x_i} n_j\right| &\leq \sum_{i,j=1}^N \|\alpha_{ij}\|_{L_\infty(\Omega)} \|\nabla v_k|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} \|(v_k - v_m)|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} \\ &\leq C_3 \sum_{i,j=1}^N \|\alpha_{ij}\|_{L_\infty(\Omega)} \|(v_k - v_m)|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} , \end{aligned}$$

donde hemos utilizado (4.8.26). Similarmente,

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i,j=1}^N \int_{\Gamma_1} \alpha_{ij} v_m \tfrac{\partial}{\partial x_i}(v_m - v_k) n_j\right| &\leq \sum_{i,j=1}^N \|\alpha_{ij}\|_{L_\infty(\Omega)} \|v_m|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} \|\nabla(v_m - v_k)|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} \\ &\leq 2C_3 \sum_{i,j=1}^N \|\alpha_{ij}\|_{L_\infty(\Omega)} \|v_m|_{\Gamma_1}\|_{L_2(\Gamma_1)} . \end{aligned}$$

Por tanto, gracias a (4.8.29), para cada $\epsilon > 0$ existe un número natural $\tilde{n}_0 \geq 1$ tal que para cada $k, m \geq \tilde{n}_0$ tenemos

$$\left|\sum_{i,j=1}^N \int_{\Gamma_1} \alpha_{ij} \left\{ (v_k - v_m)\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + v_m \frac{\partial}{\partial x_i}(v_m - v_k) \right\} n_j \right| \leq \frac{\epsilon}{2} . \tag{4.8.31}$$

También, de la misma forma que en la demostración del Teorema 4.7.2, gracias a la desigualdad de Hölder obtenemos de (4.8.19) que

$$\left|\int_\Omega av_m^2[f(\cdot,u_k)-f(\cdot,u_m)]\right| \le \frac{C_1M}{\|u_D\|_{L_2(\Omega)}}\|u_k-u_m\|_{L_2(\Omega)}, \tag{4.8.32}$$

donde

$$C_1 := \|a\|_{L_\infty(\Omega)}\|\partial_u f\|_{L_\infty(\Omega\times[0,M])}.$$

Finalmente, sustituyendo (4.7.32) – (4.7.38), (4.8.31) y (4.8.32) en (4.7.29) se sigue fácilmente que existe $\tilde{k}_0 \ge \tilde{n}_0$ tal que

$$\mu\|\nabla(v_k-v_m)\|^2_{L_2(\Omega)} \le \epsilon, \qquad k,m\ge \tilde{k}_0.$$

Esto completa la prueba de (4.8.30) y en particular muestra que $v\in H^1(\Omega)$.

Ahora averiguamos el comportamiento de v sobre $\partial\Omega$. Denotemos por j a la inclusión compacta

$$j: W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\hookrightarrow L_2(\partial\Omega),$$

y por

$$\gamma\in\mathcal{L}(H^1(\Omega),W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)),$$

al operador traza sobre $\partial\Omega$. Ya que $v_n-v\in H^1(\Omega)$, para cada $n\ge 1$ tenemos que

$$(v_n-v)|_{\partial\Omega}\in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega),$$

y por eso

$$\begin{aligned}\|(v_n-v)|_{\partial\Omega}\|_{L_2(\partial\Omega)} &\le \|j\|\|(v_n-v)|_{\partial\Omega}\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \|j\|\|\gamma(v_n-v)\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\\ &\le \|j\|\|\gamma\|\|v_n-v\|_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

De este modo, (4.8.30) implica

$$\lim_{n\to\infty}\|(v_n-v)|_{\partial\Omega}\|_{L_2(\partial\Omega)}=0,$$

y por tanto, gracias a (4.8.29),

$$v|_{\partial\Omega}=0.$$

En particular,

$$v\in H_0^1(\Omega), \tag{4.8.33}$$

ya que $v\in H^1(\Omega)$. Además, ya que $v_n>0$ para cada $n\ge 1$, se sigue de (4.8.30) que

$$v>0.$$

Por otra parte,

$$\|v_n - \frac{u}{L}\|_{L_2(\Omega)} = \|\frac{u_n}{\|u_n\|_{H^1(\Omega)}} - \frac{u}{L}\|_{L_2(\Omega)} \le \frac{\|u_n - u\|_{L_2(\Omega)}}{\|u_n\|_{H^1(\Omega)}} + \left|\frac{1}{\|u_n\|_{H^1(\Omega)}} - \frac{1}{L}\right| \|u\|_{L_2(\Omega)},$$

donde $L > 0$ es la constante definida por (4.8.15). Así, se sigue de (4.8.15) y (4.8.16) que

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - \frac{u}{L}\|_{L_2(\Omega)} = 0\,, \tag{4.8.34}$$

y por eso, gracias a (4.8.21) y (4.8.34), obtenemos que

$$u = Lv \qquad \text{in} \qquad L_2(\Omega)\,. \tag{4.8.35}$$

Así, $u > 0$ y $u \in H_0^1(\Omega)$, ya que

$$L > 0\,, \qquad v > 0\,, \qquad v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Ahora, el mismo argumento utilizado en la demostración del Teorema 4.6.1 y del Teorema 4.7.2 muestra que u es una solución débil de $P[\lambda,\Omega,\mathcal{D}]$. Por eso, $u \in H_0^1(\Omega)$, $u > 0$, es una solución positiva débil de $P[\lambda,\Omega,\mathcal{D}]$ y ya que u_D es la única solución positiva de $P[\lambda,\Omega,\mathcal{D}]$, necesariamente

$$u_D = u = Lv\,. \tag{4.8.36}$$

Ahora, gracias a (4.8.36), se sigue de (4.8.30) que

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - \frac{u_D}{L}\|_{H^1(\Omega)} = 0\,. \tag{4.8.37}$$

Además, ya que

$$u_n - u_D = \|u_n\|_{H^1(\Omega)} \left[\left(v_n - \frac{u_D}{L}\right) + \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{\|u_n\|_{H^1(\Omega)}}\right) u_D\right],$$

se sigue de (4.8.14) que

$$\|u_n - u_D\|_{H^1(\Omega)} \le \hat{M} \left[\|v_n - \frac{u_D}{L}\|_{H^1(\Omega)} + \left|\frac{1}{L} - \frac{1}{\|u_n\|_{H^1(\Omega)}}\right| \|u_D\|_{H^1(\Omega)}\right].$$

Por tanto, gracias a (4.8.15) y (4.8.37), concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_D\|_{H^1(\Omega)} = 0\,.$$

Esto muestra la validez de (4.8.4) a lo largo de la subsucesión con la que hemos venido trabajando. Como el argumento previo funciona a lo largo de cualquier subsucesión, la demostración del resultado está completa. Esto concluye la demost ración del teorema. □

El siguiente resultado nos proporciona algunas condiciones suficientes que garantizan (4.8.3), supuesto que (4.8.2) es satisfecho. Por tanto, bajo estas condiciones suficientes se verifica la conclusión del Teorema 4.8.1.

Teorema 4.8.2 *Supongamos $\Gamma_1 \neq \emptyset$. Sea $b_n \in \mathcal{C}(\Gamma_1)$, $n \geq 1$, una sucesión verificando* (4.8.1). *Supongamos además que*

$$\lambda \in \Lambda[\Omega, \mathcal{D}], \tag{4.8.38}$$

y que o bien $a \in \mathcal{A}^+(\Omega)$ o $a \in \mathcal{A}(\Omega)$. Entonces, existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que

$$\lambda \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \Lambda[\Omega, \mathcal{B}(b_n)]. \tag{4.8.39}$$

Además, en ambos casos, suponiendo que $\lambda \in \Lambda[\Omega, \mathcal{D}]$ y denotando por u_n a la única solución positiva de $P[\lambda, \Omega, \mathcal{B}(b_n)]$, cuya existencia es garantizada para n suficientemente grande, se sigue del Teorema 4.8.1 que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_{\mathcal{D}}\|_{H^1(\Omega)} = 0, \tag{4.8.40}$$

donde $u_{\mathcal{D}}$ es la única solución positiva del problema de Dirichlet $P[\lambda, \Omega, \mathcal{D}]$.

Demostración: Una vez probado (4.8.39), la relación (4.8.40) se sigue como una consecuencia del Teorema 4.8.1.

Ahora, demostraremos (4.8.39) separadamente en cada una de las situaciones $a \in \mathcal{A}^+(\Omega)$ y $a \in \mathcal{A}(\Omega)$.

Supongamos que $a \in \mathcal{A}^+(\Omega)$. Entonces, gracias a (4.8.38), se sigue del Teorema 3.3.4 que

$$\sigma_1^{\Omega}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{D}] < 0. \tag{4.8.41}$$

Por otra parte, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \min_{\Gamma_1} b_n = +\infty, \tag{4.8.42}$$

se sigue del Teorema 2.8.1 que

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_1^{\Omega}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}(b_n)] = \sigma_1^{\Omega}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{D}]. \tag{4.8.43}$$

De este modo, combinando (4.8.41) y (4.8.43), se sigue que existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que

$$\sigma_1^{\Omega}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}(b_n)] < 0, \qquad n \geq n_0,$$

y por eso, gracias de nuevo al Teorema 3.3.4, obtenemos que

$$\lambda \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \Lambda[\Omega, \mathcal{B}(b_n)].$$

Esto prueba (4.8.39) en el caso particular cuando $a \in \mathcal{A}^+(\Omega)$.

Ahora supongamos que $a \in \mathcal{A}(\Omega)$. Entonces, gracias a (4.8.38), se sigue del Teorema 3.3.2 que

$$\sigma_1^{\Omega}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{D}] < 0 < \sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{D}]. \tag{4.8.44}$$

Por otra parte, necesariamente o bien

$$\partial\Omega_a^0 \cap \Gamma_1 \neq \emptyset \tag{4.8.45}$$

o

$$\partial\Omega_a^0 \cap \Gamma_1 = \emptyset\,. \tag{4.8.46}$$

Supongamos que (4.8.45) es satisfecho. Entonces, gracias a (4.8.1), se sigue del Teorema 2.8.1 que

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_1^\Omega[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda),\mathcal{B}(b_n)] = \sigma_1^\Omega[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda),\mathcal{D}] \tag{4.8.47}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}(\lambda),\mathcal{B}(b_n,\Omega_a^0)] = \sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}(\lambda),\mathcal{D}]\,. \tag{4.8.48}$$

Así, gracias a (4.8.44), se sigue de (4.8.47) y (4.8.48) que existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que

$$\sigma_1^\Omega[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda),\mathcal{B}(b_n)] < 0 < \sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}(\lambda),\mathcal{B}(b_n,\Omega_a^0)]\,, \qquad n \geq n_0\,. \tag{4.8.49}$$

De este modo, gracias a (4.8.49), el Teorema 3.3.2 implica que

$$\lambda \in \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \Lambda[\Omega,\mathcal{B}(b_n)]\,.$$

Esto completa la prueba del resultado en el caso especial de que $a \in \mathcal{A}(\Omega)$ y se verifique (4.8.45).

Ahora supongamos que $a \in \mathcal{A}(\Omega)$ y se cumple (4.8.46). Entonces,

$$\sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}(\lambda),\mathcal{B}(b_n,\Omega_a^0)] = \sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}(\lambda),\mathcal{D}]\,, \qquad n \geq 0\,,$$

ya que

$$\mathcal{B}(b_n,\Omega_a^0) = \mathcal{D}\,, \qquad n \geq 0\,,$$

y por eso, gracias a (4.8.44) tenemos que

$$\sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}(\lambda),\mathcal{B}(b_n,\Omega_a^0)] > 0\,, \qquad n \geq 0\,. \tag{4.8.50}$$

Ahora, argumentando como en la demostración de la situación previa, (4.8.44), (4.8.47), (4.8.50) y el Teorema 3.3.2 implican (4.8.39), supuesto $a \in \mathcal{A}(\Omega)$ y (4.8.46).

Esto completa la prueba del resultado en el caso particular en el que $a \in \mathcal{A}(\Omega)$.

Esto concluye la demostración del teorema. □

Capítulo 5

Explosión de potenciales en una clase general de problemas sublineales

---

En este capítulo analizamos el comportamiento asintótico, cuando un cierto potencial explota, de las soluciones positivas de una clase general de problemas sublineales de valores en la frontera de tipo mixto con pesos. Nuestro principal resultado es una sustancial extensión de [34, Sección 4] y tiene un gran número de aplicaciones en ecología matemática como, por ejemplo, en el análisis del efecto de la competición ilimitada entre especies biológicas en presencia de refugios, análisis que será llevado a cabo en un trabajo próximo. Como en los capítulos previos, las principales herramientas técnicas utilizadas para desarrollar el análisis matemático de este capítulo son, la caracterización del principio del máximo [5], los resultados referentes a dependencia continua de autovalores principales respecto a perturbaciones del dominio alrededor de su frontera Dirichlet, demostrados en el Capítulo 2, así como los resultados de dependencia continua respecto a perturbaciones del dominio alrededor de su frontera Dirichlet de las soluciones positivas de la clase general de problemas de valores en la frontera tratada en el Capítulo 4.

5.1 Introducción

En este capítulo analizamos el comportamiento asintótico cuando $\gamma \nearrow \infty$ de las soluciones positivas del siguiente problema sublineal elíptico de valores en la frontera de tipo mixto con peso

$$\begin{cases} \mathcal{L}u + \gamma V(x)u = \lambda W(x)u - a(x)f(x,u)u & \text{en} \quad \Omega \\ \mathcal{B}(b)u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{5.1.1}$$

donde $a, V \in L_\infty(\Omega)$ pertenecen a una cierta clase de potenciales no negativos que será introducida más adelante y $W \in L_\infty(\Omega)$.

A lo largo de todo este capítulo supondremos que:

a) Ω es un dominio acotado en $\mathbf{R}^N$, $N \geq 1$, de clase $\mathcal{C}^2$, es decir, $\bar{\Omega}$ es una subvariedad N-dimensional compacta y conexa de $\mathbf{R}^N$ con frontera $\partial\Omega$ de clase $\mathcal{C}^2$.

b) $\gamma, \lambda \in \mathbf{R}, W \in L_\infty(\Omega)$ y

$$\mathcal{L} := -\sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \alpha_0(x) , \tag{5.1.2}$$

es un operador diferencial lineal elíptico de segundo orden en Ω con

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) , \qquad \alpha_i \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) , \qquad \alpha_0 \in L_\infty(\Omega) , \qquad 1 \leq i \, , \, j \leq N, \tag{5.1.3}$$

siendo uniformemente fuertemente elíptico en Ω. En lo sucesivo denotaremos por $\mu > 0$ a la constante de elipticidad de $\mathcal{L}$ en Ω. Entonces, para cada $\xi \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$ y $x \in \bar{\Omega}$ tendremos que

$$\sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \mu |\xi|^2 .$$

c) $\mathcal{B}(b)$ representa al operador de frontera

$$\mathcal{B}(b)u := \begin{cases} u & \text{en } \Gamma_0 , \\ \partial_\nu u + bu & \text{en } \Gamma_1 , \end{cases} \tag{5.1.4}$$

donde Γ_0 y Γ_1 son dos subconjuntos disjuntos abiertos y cerrados de $\partial\Omega$ con $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega$, $b \in \mathcal{C}(\Gamma_1)$, y

$$\nu = (\nu_1, ..., \nu_N) \in \mathcal{C}^1(\Gamma_1, \mathbf{R}^N)$$

es cualquier campo vectorial exterior y no tangente. Necesariamente, Γ_0 y Γ_1 poseen un número finito de componentes conexas. Observar que, $\mathcal{B}(b)$ es el operador de frontera de Dirichlet sobre Γ_0, denotado en lo sucesivo por $\mathcal{D}$, y el operador de frontera de Neumann o de derivada regular oblicua de primer orden sobre Γ_1. Debe ser destacado que o bien Γ_0 o Γ_1 puede ser el conjunto vacío.

d) La función $f : \bar{\Omega} \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbf{R}$ satisface

$$f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega} \times [0, \infty); \mathbf{R}) , \qquad \lim_{u \nearrow \infty} f(x, u) = +\infty \quad \text{uniformemente en} \quad \bar{\Omega} , \tag{5.1.5}$$

y

$$\partial_u f(\cdot, u) > 0 \qquad \text{para cada} \qquad u \geq 0 . \tag{5.1.6}$$

Debe ser destacado que

$$f(\cdot, 0) \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}; \mathbf{R})$$

y que no hay ninguna restricción sobre el signo de $f(\cdot, 0)$ en Ω. Además, (5.1.6) implica

$$f(\cdot, 0) = \inf_{\xi > 0} f(\cdot, \xi) .$$

En lo sucesivo denotaremos por $\tilde{\mathcal{L}}$ al operador diferencial auxiliar

$$\tilde{\mathcal{L}} := \mathcal{L} + a(\cdot)f(\cdot,0)\,, \tag{5.1.7}$$

y para cada $\lambda \in \mathbf{R}$, $\mathcal{L}(\lambda)$ y $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ representarán a los operadores auxiliares

$$\mathcal{L}(\lambda) := \mathcal{L} - \lambda W\,, \qquad \tilde{\mathcal{L}}(\lambda) := \tilde{\mathcal{L}} - \lambda W\,. \tag{5.1.8}$$

Se debe mencionar que los operadores definidos por (5.1.7) y (5.1.8) son uniformemente elípticos en Ω, con la misma constante de elipticidad $\mu > 0$ que $\mathcal{L}$.

e) En lo que a las funciones peso $a, V \in L_\infty(\Omega)$ concierne, asumiremos que $a, V \in \mathcal{A}(\Omega)$, donde $\mathcal{A}(\Omega)$ es la clase general de funciones peso, reales medibles acotadas y no negativas en Ω, introducida en la Definición 2.10.1. En lo siguiente denotaremos por

$$\Omega_a^0 \qquad \Omega_a^+\,, \qquad K\,,$$

a los correspondientes conjuntos de la definición de $a \in \mathcal{A}(\Omega)$, y por

$$\Omega_V^0 \qquad \Omega_V^+\,, \qquad K_V\,,$$

a los correspondientes conjuntos de la definición de $V \in \mathcal{A}(\Omega)$. Observar que (2.10.3), (2.10.4), (2.10.5) y $(\mathcal{A}1) - (\mathcal{A}4)$ son satisfechos por a en Ω con sus respectivos conjuntos Ω_a^0, Ω_a^+ y K, lo mismo que V en Ω con sus respectivos conjuntos Ω_V^0, Ω_V^+ y K_V.

Además, en todo este capítulo supondremos que Ω_V^0 es conexo y que

$$\partial\Omega_V^0 = \Gamma_0^0 \cup (\partial\Omega_V^0 \cap \Gamma_1)\,, \qquad \Gamma_0^0 \cap \partial\Omega = \emptyset\,, \tag{5.1.9}$$

donde Γ_0^0 satisface los mismos requisitos que Γ_0. Se debe destacar que, como $V \in \mathcal{A}(\Omega)$,

$$\operatorname{dist}(\Gamma_1, \partial\Omega_V^0 \cap \Omega) > 0\,.$$

Por eso, si denotamos por Γ_1^i, $1 \leq i \leq n_1$ a las componentes de Γ_1, entonces para cada $1 \leq i \leq n_1$ o bien $\Gamma_1^i \subset \partial\Omega_V^0$ o $\Gamma_1^i \cap \Omega_V^0 = \emptyset$. Además, si $\Gamma_1^i \subset \partial\Omega_V^0$, entonces Γ_1^i debe ser una componente de $\partial\Omega_V^0$.

También, en lo sucesivo supondremos que Ω_a^0 y Ω_V^0 satisfacen alguna de las hipótesis (*a*), (*b*), (*c*), (*d*) o (*e*) del Teorema 4.4.2, donde en este teorema Ω_V^0 juega el papel de Ω_0, y que existe alguna sucesión Ω_δ, $\delta > 0$ de dominios acotados de $\mathbf{R}^N$ convergiendo a Ω_V^0 desde el exterior, cumpliendo los requisitos del Teorema 4.4.2 con

$$\Gamma_0^0 \cup \Omega_V^0 \subset \Omega_\delta \subset \Omega\,,$$

para cada $\delta > 0$ suficientemente pequeo.

De aquí en adelante denotaremos por

$$\Omega_{a,V}^0 := [\Omega_V^0]_a^0 = \Omega_a^0 \cap \Omega_V^0\,,$$

cuando $a \in \mathcal{A}(\Omega_V^0)$ y $\Omega_a^0 \cap \Omega_V^0 \neq \emptyset$.

Con el fin de enunciar el resultado principal de este capítulo, hemos de introducir las siguientes notaciones. En lo sucesivo, nos referiremos al problema (5.1.1) como $P[\gamma,\lambda,\Omega,\mathcal{B}(b)]$ y denotaremos por $\Lambda[\gamma,\Omega,\mathcal{B}(b)]$ al conjunto de valores de $\lambda\in\mathbf{R}$ para los cuales $P[\gamma,\lambda,\Omega,\mathcal{B}(b)]$ posee una solución positiva. En el caso particular en el que $\gamma=0$, o $V=0$ en Ω, denotaremos por

$$P[\lambda,\Omega,\mathcal{B}(b)]:=P[0,\lambda,\Omega,\mathcal{B}(b)]\,,\qquad \Lambda[\Omega,\mathcal{B}(b)]:=\Lambda[0,\Omega,\mathcal{B}(b)]\,.$$

También, ya que el Teorema 3.3.2 garantiza la unicidad de la solución positiva de $P[\gamma,\lambda,\Omega,\mathcal{B}(b)]$ supuesta su existencia, en el caso particular en el que $\lambda\in\Lambda[\gamma,\Omega,\mathcal{B}(b)]$ denotaremos por $u^{\Omega}_{[\mathcal{L}+\gamma V,\lambda W,\mathcal{B}(b)]}$ a la única solución positiva de $P[\gamma,\lambda,\Omega,\mathcal{B}(b)]$.

El resultado principal de este capítulo proporciona una versión muy general, y refinada, del Teorema 4.1 de [34] y que tiene una gran número de aplicaciones en ecología matemática como, por ejemplo, en el análisis del efecto de la competición ilimitada entre especies biológicas en presencia de refugios. El resultado establece lo siguiente.

Teorema 5.1.1 *Sean los problemas* $P[\gamma,\lambda,\Omega,\mathcal{B}(b)]$ *y* $P[\lambda,\Omega^0_V,\mathcal{B}(b,\Omega^0_V)]$. *Supongamos que*

$$\lambda\in\Lambda[\Omega^0_V,\mathcal{B}(b,\Omega^0_V)]\cap\Lambda[\gamma,\Omega,\mathcal{B}(b)] \tag{5.1.10}$$

para cada $\gamma>0$ *suficientemente grande. Supongamos además que* (1.4.15) *se verifica sobre* $\Gamma_1\cap\partial\Omega^0_V$. *Entonces,*

$$\lim_{\gamma\nearrow\infty}\|u^{\Omega}_{[\mathcal{L}+\gamma V,\lambda W,\mathcal{B}(b)]}-u^{\Omega^0_V}_{[\mathcal{L},\lambda W,\mathcal{B}(b,\Omega^0_V)]}\|_{L_p(\Omega^0_V)}=0\,,\qquad p\in[1,\infty)\,, \tag{5.1.11}$$

y

$$\lim_{\gamma\nearrow\infty}\|u^{\Omega}_{[\mathcal{L}+\gamma V,\lambda W,\mathcal{B}(b)]}\|_{L_\infty(K)}=0\,, \tag{5.1.12}$$

en cada subconjunto compacto K *de* $\bar\Omega\setminus\bar\Omega^0_V$. *En particular,*

$$\lim_{\gamma\nearrow\infty}u^{\Omega}_{[\mathcal{L}+\gamma V,\lambda W,\mathcal{B}(b)]}=\begin{cases}u^{\Omega^0_V}_{[\mathcal{L},\lambda W,\mathcal{B}(b,\Omega^0_V)]} & en\ \ \Omega^0_V\\ 0 & en\ \ \Omega\setminus\Omega^0_V\,,\end{cases}\qquad c.t.p.\ en\ \Omega\,. \tag{5.1.13}$$

La demostración del Teorema 5.1.1 está basada en la construcción de adecuadas supersoluciones positivas estrictas del problema $P[\gamma,\lambda,\Omega,\mathcal{B}(b)]$ para cada $\gamma>0$ suficientemente grande. Tal construcción es técnicamente muy delicada. Durante la construcción de estas supersoluciones, debemos aumentar ligeramente el conjunto abierto máximal de anulación Ω^0_V de V en Ω y éste es el momento en el que hemos de recurrir a los resultados de dependencia continua respecto a perturbaciones del dominio de las soluciones positivas de problemas sublineales, demostrados en el Capítulo 4. La Sección 5.2 está enteramente dedicada a demostrar el Teorema 5.1.1 y dar condiciones suficientes bajo las cuales se cumple (5.1.10). Por tanto, bajo esas condiciones suficientes las conclusiones del Teorema 5.1.1 están garantizadas.

5.2 Explosionando la amplitud de un potencial

En esta sección analizamos el comportamiento asintótico cuando $\gamma \nearrow \infty$ de las soluciones positivas de (5.1.1). Debe ser tenido en mente que ya que estamos suponiendo que $a, V \in \mathcal{A}(\Omega)$, la existencia de los conjuntos Ω_a^0 y Ω_V^0 está garantizada. Además, ya que a lo largo de esta sección será necesario tratar con el problema

$$P[\lambda, \Omega_V^0, \mathcal{B}(b, \Omega_V^0)],$$

debe ser destacado que ya que $V \in \mathcal{A}(\Omega)$ y Ω_V^0 es conexo, el conjunto Ω_V^0 es un subconjunto abierto conexo de Ω de clase $\mathcal{C}^2$ verificando

$$\text{dist}\,(\Gamma_1, \partial\Omega_V^0 \cap \Omega) = \text{dist}\,(\Gamma_1, \Gamma_0^0) > 0. \tag{5.2.1}$$

Por tanto, el problema $P[\lambda, \Omega_V^0, \mathcal{B}(b, \Omega_V^0)]$ se encuentra dentro del marco abstracto de trabajo del Capítulo 3, lo mismo que los problemas $P[\lambda, \Omega_\delta, \mathcal{B}(b, \Omega_\delta)]$, $\delta > 0$, para cada sucesión Ω_δ de dominios acotados de $\mathbf{R}^N$ convergiendo a Ω_V^0 desde el exterior y cumpliendo los requisitos del Teorema 4.4.2.

Nuestro principal propósito en esta sección es demostrar el Teorema 5.1.1. El siguiente resultado combinado con el Teorema 4.2.1, nos proporciona las herramientas técnicas básicas para obtener el Teorema 5.1.1.

Proposición 5.2.1 *Supongamos que*

$$\lambda \in \Lambda[\Omega_V^0, \mathcal{B}(b, \Omega_V^0)] \tag{5.2.2}$$

y (1.4.15) *se verifica sobre* $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_V^0$.

Entonces, para cada $\delta > 0$ *suficientemente pequeño, existen un número real* $\Lambda(\delta) > 0$ *y una función positiva* $\bar{u}_\delta$ *satisfaciendo:*

i) $\bar{u}_\delta$ *es una supersolución positiva estricta de* $P[\gamma, \lambda, \Omega, \mathcal{B}(b)]$ *para cada* $\gamma > \Lambda(\delta) > 0$.

ii) Las siguientes convergencias son satisfechas:

$$\lim_{\delta \searrow 0} \|\bar{u}_\delta - u^{\Omega_V^0}_{[\mathcal{L}, \lambda W, \mathcal{B}(b, \Omega_V^0)]}\|_{H^1(\Omega_V^0)} = 0, \tag{5.2.3}$$

y

$$\lim_{\delta \searrow 0} \|\bar{u}_\delta\|_{L_\infty(K)} = 0, \tag{5.2.4}$$

en cualquier subconjunto compacto K *de* $\bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}_V^0$. *En particular,*

$$\lim_{\delta \searrow 0} \bar{u}_\delta = \begin{cases} u^{\Omega_V^0}_{[\mathcal{L}, \lambda W, \mathcal{B}(b, \Omega_V^0)]} & \text{en} \quad \Omega_V^0 \\ 0 & \text{en} \quad \Omega \setminus \Omega_V^0, \end{cases} \quad \text{c.t.p. en } \Omega. \tag{5.2.5}$$

Demostración: Parte i) Sean λ satisfaciendo (5.2.2) y los operadores

$$\mathcal{L}_1 := \mathcal{L}(\lambda) \qquad \text{y} \qquad \tilde{\mathcal{L}}_1 := \tilde{\mathcal{L}}(\lambda)\,.$$

Ya que (5.1.9) es satisfecho,

$$\partial\Omega_V^0 \cap \Gamma_0 = \emptyset\,,$$

y por eso necesariamente, o bien $\Gamma_0 \cap K = \emptyset$ o $\Gamma_0 \cap K \neq \emptyset$.

Supongamos

$$\Gamma_0 \cap K = \emptyset\,. \tag{5.2.6}$$

Entonces, (2.10.3) y (5.1.9) implican

$$K \subset \Omega\,, \qquad \bar{\Omega}_V^0 \subset \Omega \cup \Gamma_1\,, \qquad K \cap \bar{\Omega}_V^0 = \emptyset\,. \tag{5.2.7}$$

En particular,

$$\operatorname{dist}(\Gamma_0, \bar{\Omega}_V^0 \cup K) > 0\,, \qquad \operatorname{dist}(\Gamma_1, K) > 0\,, \qquad \operatorname{dist}(K, \bar{\Omega}_V^0) > 0\,. \tag{5.2.8}$$

Sea $\eta > 0$. Gracias a ($\mathcal{A}4$), existe un número natural $\ell(\eta) \geq 1$ y $\ell(\eta)$ conjuntos abiertos $G_j^\eta \subset \mathbf{R}^N$, $1 \leq j \leq \ell(\eta)$, con $|G_j^\eta| < \eta$, tales que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} (G_j^\eta \cap \bar{\Omega})\,, \qquad \bar{G}_i^\eta \cap \bar{G}_j^\eta = \emptyset \quad \text{si} \quad i \neq j\,,$$

y para cada $1 \leq j \leq \ell(\eta)$, el conjunto abierto $G_j^\eta \cap \Omega$ es conexo y de clase $\mathcal{C}^2$. Gracias a (5.2.7), podemos elegir los G_j^η's para que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} \bar{G}_j^\eta \subset \Omega\,, \qquad \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} \bar{G}_j^\eta \cap \bar{\Omega}_V^0 = \emptyset\,. \tag{5.2.9}$$

En efecto, ya que

$$\operatorname{dist}(K, \bar{\Omega}_V^0 \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1) > 0\,,$$

existe un conjunto abiero G tal que

$$K \subset G\,, \qquad \bar{G} \subset \Omega\,, \qquad \bar{G} \cap \bar{\Omega}_V^0 = \emptyset\,.$$

Por eso, para tener (5.2.9) es suficiente considerar $G \cap G_j^\eta$, en lugar de G_j^η, $1 \leq j \leq \ell(\eta)$.

Además, gracias a (5.2.9), para cada $\eta > 0$ existen $\varepsilon := \varepsilon(\eta) > 0$ suficientemente pequeño y conjuntos abiertos $G_j^{\eta,\varepsilon}$ de clase $\mathcal{C}^2$ satisfaciendo

$$\bar{G}_j^\eta \subset G_j^{\eta,\varepsilon} \subset G_j^\eta + B_\varepsilon\,, \qquad 1 \leq j \leq \ell(\eta)\,,$$

y

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} \bar{G}_j^{\eta} \subset \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} G_j^{\eta,\varepsilon} \subset \Omega\,, \qquad |G_j^{\eta,\varepsilon}| < 2\eta\,, \qquad \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} \bar{G}_j^{\eta,\varepsilon} \cap \bar{\Omega}_V^0 = \emptyset\,, \tag{5.2.10}$$

donde B_ε representa la bola de radio ε centrada en el origen. Así, ya que

$$\lim_{\eta \searrow 0} |G_j^{\eta,\varepsilon}| = 0\,, \qquad 1 \leq j \leq \ell(\eta)\,,$$

se sigue el Teorema 2.9.1 que existe $\eta_0 > 0$ tal que para cada $\eta \in (0, \eta_0)$ y $1 \leq j \leq \ell(\eta)$

$$\min_{1 \leq j \leq \ell(\eta)} \sigma_1^{G_j^{\eta,\varepsilon}}[\tilde{\mathcal{L}}_1, \mathcal{D}] > 0\,, \tag{5.2.11}$$

donde $\varepsilon := \varepsilon(\eta)$. Fijemos $\eta \in (0, \eta_0)$.

Ahora, para cada $k \in \{0, 1\}$, denotemos por Γ_k^j, $1 \leq j \leq n_k$, a las componentes de Γ_k. Denotemos por $\{i_1, ..., i_p\}$ al subconjunto de $\{1, ..., n_1\}$ para el cual $\Gamma_1^j \cap \partial\Omega_V^0 = \emptyset$ si, y sólamente si, $j \in \{i_1, ..., i_p\}$. Gracias a $(\mathcal{A}1)$ para V en Ω, Γ_1^j es una componente de $\partial\Omega_V^0$ para cada $j \in \{1, ..., n_1\} \setminus \{i_1, ..., i_p\}$. Entonces, tenemos que

$$\bigcup_{j=1}^{p} \Gamma_1^{i_j} \cap \partial\Omega_V^0 = \emptyset\,, \tag{5.2.12}$$

y por eso,

$$\operatorname{dist}\Big(\bigcup_{j=1}^{p} \Gamma_1^{i_j}, \partial\Omega_V^0\Big) > 0\,. \tag{5.2.13}$$

Consideremos cualquier sucesión Ω_δ, $\delta > 0$ de dominios acotados de $\mathbf{R}^N$ convergiendo a Ω_V^0 desde el exterior cuando $\delta \searrow 0$, satisfaciendo los requisitos del Teorema 4.4.2 y

$$\Gamma_0^0 \cup \Omega_V^0 \subset \Omega_\delta \subset \Omega\,, \tag{5.2.14}$$

para cada $\delta > 0$ suficientemente pequeño. Debe ser destacado que ya que la sucesión Ω_δ converge a Ω_V^0 desde el exterior, se desprende lo siguiente

$$\partial\Omega_V^0 \cap \Gamma_1 = \partial\Omega_\delta \cap \Gamma_1\,. \tag{5.2.15}$$

Sean además para cada $\delta > 0$ suficientemente pequeño, los entornos tubulares de radio $\delta > 0$,

$$\mathcal{N}_\delta^{0,j} := (\Gamma_0^j + B_\delta) \cap \Omega\,, \qquad 1 \leq j \leq n_0\,, \tag{5.2.16}$$

$$\mathcal{N}_\delta^{1,j} := (\Gamma_1^j + B_\delta) \cap \Omega\,, \qquad j \in \{i_1, ..., i_p\}\,, \tag{5.2.17}$$

donde $B_\delta \subset \mathbf{R}^N$ es la bola de radio δ centrada en el origen. Gracias a (5.1.9), (5.2.6) y (5.2.10), existe $\delta_1 > 0$ tal que para cada $0 < \delta < \delta_1$

$$\Omega_\delta \subset \Omega\,, \quad \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} \bar{G}_j^{\eta,\varepsilon} \cap \bar{\Omega}_\delta = \emptyset\,, \quad \partial\Omega_\delta \setminus \Gamma_1 \subset \Omega_V^+\,, \quad \bigcup_{j=1}^{n_0} \bar{\mathcal{N}}_\delta^{0,j} \setminus \Gamma_0 \subset \Omega_V^+\,. \tag{5.2.18}$$

También, gracias a (5.1.9), (5.2.6) y (5.2.12), existe $\delta_2 \in (0,\delta_1)$ tal que para cada $0<\delta<\delta_2$

$$(\bigcup_{j=1}^{p} \bar{\mathcal{N}}_\delta^{1,i_j} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \bar{\mathcal{N}}_\delta^{0,j}) \cap (\bar{\Omega}_\delta \cup \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} \bar{G}_j^{\eta,e}) = \emptyset\,. \tag{5.2.19}$$

Además, ya que $\Gamma_k^j \cap \Gamma_\ell^i = \emptyset$ si $(i,\ell) \neq (j,k)$, existe $\delta_3 \in (0,\delta_2)$ tal que para cada $0<\delta<\delta_3$

$$\bar{\mathcal{N}}_\delta^{k,j} \cap \bar{\mathcal{N}}_\delta^{\ell,i} = \emptyset \qquad \text{si} \quad (i,\ell) \neq (j,k)\,, \quad k\,,\,\ell \in \{0,1\}\,. \tag{5.2.20}$$

También, ya que $\lim_{\delta\searrow 0} |\mathcal{N}_\delta^{0,j}| = 0$ para cada $1 \le j \le n_0$, se sigue del Teorema 2.9.1 que existe $\delta_4 \in (0,\delta_3)$ tal que para cada $0<\delta<\delta_4$

$$\sigma_1^{\mathcal{N}_\delta^{0,j}}[\tilde{\mathcal{L}}_1,\mathcal{D}] > 0\,, \qquad 1 \le j \le n_0\,. \tag{5.2.21}$$

Ahora mostramos que en el caso particular en el que $a \in \mathcal{A}(\Omega_V^0)$ y $\Omega_{a,V}^0 \neq \emptyset$, (1.4.15) se verifica sobre $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_{a,V}^0$. En efecto, ya que $\Omega_{a,V}^0$ es un subconjunto de Ω_V^0, tenemos que

$$\Gamma_1 \cap \partial\Omega_{a,V}^0 \subset \Gamma_1 \cap \bar{\Omega}_V^0 = \Gamma_1 \cap \partial\Omega_V^0\,, \tag{5.2.22}$$

y por eso, ya que (1.4.15) se verifica sobre $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_V^0$, se sigue de (5.2.22) que (1.4.15) se verifica sobre $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_{a,V}^0$.

Entonces, ya que $\lambda \in \Lambda[\Omega_V^0, \mathcal{B}(b,\Omega_V^0)]$, Ω_δ, $\delta>0$ satisface los requisitos del Teorema 4.4.2 y (1.4.15) se verifica sobre $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_{a,V}^0$, se sigue del Teorema 4.4.2 que existe $\delta_5 \in (0,\delta_4)$ tal que

$$\lambda \in \bigcap_{\delta\in(0,\delta_5)} \Lambda[\Omega_\delta, \mathcal{B}(b,\Omega_\delta)]\,. \tag{5.2.23}$$

Además, gracias a la unicidad de solución positiva del problema $P[\lambda,\Omega_\delta,\mathcal{B}(b,\Omega_\delta)]$, garantizada por Teorema 3.3.2 para cada $\lambda \in \Lambda[\Omega_\delta,\mathcal{B}(b,\Omega_\delta)]$, se sigue de (5.2.23) que para cada $\delta \in (0,\delta_5)$, el problema $P[\lambda,\Omega_\delta,\mathcal{B}(b,\Omega_\delta)]$ posee una única solución positiva, denotada por $u_{[\mathcal{L},\lambda W,\mathcal{B}(b,\Omega_\delta)]}^{\Omega_\delta}$. Definamos

$$u_\delta := u_{[\mathcal{L},\lambda W,\mathcal{B}(b,\Omega_\delta)]}^{\Omega_\delta}\,, \qquad \delta \in (0,\delta_5)\,.$$

Fijemos $\delta \in (0,\delta_5)$ y tomemos

$$H_{\frac{\delta}{2}}^\eta := \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} \bar{G}_j^\eta \cup \bigcup_{j=1}^{p} \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j}\,.$$

Denotemos por ψ_δ^i, $i \in \{i_1,...,i_p\}$, y ξ_δ^j, $1 \le j \le n_0$, a las autofunciones principales asociadas con $\sigma_1^{\mathcal{N}_\delta^{1,i}}[\tilde{\mathcal{L}}_1,\mathcal{B}(b,\mathcal{N}_\delta^{1,i})]$, $i \in \{i_1,...,i_p\}$, y $\sigma_1^{\mathcal{N}_\delta^{0,j}}[\tilde{\mathcal{L}}_1,\mathcal{D}]$, $1 \le j \le n_0$, respectivamente, normalizadas tal que

$$\|\psi_\delta^i\|_{L_\infty(\mathcal{N}_\delta^{1,i})} = 1\,, \quad \|\xi_\delta^j\|_{L_\infty(\mathcal{N}_\delta^{0,j})} = 1\,, \quad i \in \{i_1,\ldots,i_p\}\,, \quad 1 \le j \le n_0\,. \tag{5.2.24}$$

También, denotemos por ϑ_δ^j, $1 \leq j \leq \ell(\eta)$, a las autofunciones principales asociadas con $\sigma_1^{G_j^{\eta,\epsilon}}[\tilde{\mathcal{L}}_1, \mathcal{D}]$, normalizadas tal que

$$\|\vartheta_\delta^j\|_{L_\infty(G_j^{\eta,\epsilon})} = 1\,, \qquad 1 \leq j \leq \hat{\ell}(\eta)\,. \tag{5.2.25}$$

Ahora, consideremos la función positiva $\bar{u}_\delta : \bar{\Omega} \mapsto [0,\infty)$ definida por

$$\bar{u}_\delta := \begin{cases} u_\delta & \text{en } \bar{\Omega}_{\frac{\delta}{2}}\,, \\ \delta\vartheta_\delta^j & \text{en } \bar{G}_j^\eta\,, \qquad 1 \leq j \leq \ell(\eta)\,, \\ \delta\psi_\delta^{i_j} & \text{en } \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j}\,, \qquad 1 \leq j \leq p\,, \\ \delta\xi_\delta^j & \text{en } \bar{\mathcal{N}}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j}\,, \qquad 1 \leq j \leq n_0\,, \\ \zeta_\delta & \text{en } \bar{\Omega} \setminus (\bar{\Omega}_{\frac{\delta}{2}} \cup H_{\frac{\delta}{2}}^\eta)\,, \end{cases} \tag{5.2.26}$$

donde ζ_δ es cualquier extensión positiva y regular de

$$u_\delta \cup \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} \delta\vartheta_\delta^j \cup \bigcup_{j=1}^{p} \delta\psi_\delta^{i_j} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \delta\xi_\delta^j$$

desde $\bar{\Omega}_{\frac{\delta}{2}} \cup H_{\frac{\delta}{2}}^\eta$ hasta $\bar{\Omega}$, la cual está alejada de cero en $\bar{\Omega} \setminus (\bar{\Omega}_{\frac{\delta}{2}} \cup H_{\frac{\delta}{2}}^\eta)$. Obsérvese que ζ_δ existe ya que las funciones

$$u_\delta|_{\partial\Omega_{\frac{\delta}{2}}\setminus\Gamma_1}\,, \qquad \vartheta_\delta^j|_{\partial G_j^\eta}\,, \qquad 1 \leq j \leq \ell(\eta)\,,$$

son positivas y alejadas de cero, lo mismo que las funciones

$$\psi_\delta^{i_j}|_{\partial\mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j}\setminus\Gamma_1}\,, \qquad \xi_\delta^i|_{\partial\mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{0,i}\setminus\Gamma_0}\,, \qquad 1 \leq j \leq p\,, \quad 1 \leq i \leq n_0\,.$$

Si $\Gamma_1 \subset \partial\Omega_V^0$, entonces en la definición de $\bar{u}_\delta$ debemos borrar las $\delta\psi_\delta^{i_j}$'s, $1 \leq j \leq p$.

Gracias a (5.2.18), (5.2.19) y (5.2.20), la función $\bar{u}_\delta$ está bien definida. Además,

$$\bar{u}_\delta(x) > 0 \qquad \text{para cada} \qquad x \in \Omega\,.$$

Para completar la prueba de la Parte i) bajo condición (5.2.6) falta mostrar que existe $\Lambda = \Lambda(\delta) > 0$ tal que $\bar{u}_\delta$ nos proporciona una supersolución estricta de $P[\gamma, \lambda, \Omega, \mathcal{B}(b)]$ para cada $\gamma > \Lambda(\delta)$. En efecto, ya que $V \geq 0$ y $\Gamma_0^0 \cup \Omega_V^0 \subset \Omega_{\frac{\delta}{2}}$, se sigue por construcción que en $\Omega_{\frac{\delta}{2}}$ la siguiente estimación es satisfecha para cada $\gamma > 0$,

$$(\mathcal{L}_1 + \gamma V + a(x)f(x,\bar{u}_\delta))\bar{u}_\delta = (\mathcal{L}_1 + \gamma V + a(x)f(x,u_\delta))u_\delta = \gamma V u_\delta > 0.$$

También, ya que $\delta\vartheta_\delta^j > 0$ en G_j^η, $1 \leq j \leq \ell(\eta)$, se sigue de (5.1.6) que

$$f(x,\delta\vartheta_\delta^j) > f(x,0)\,, \qquad x \in G_j^\eta\,,$$

y por eso, la siguiente estimación se verifica en G_j^η para cada $\gamma > 0$ y $1 \le j \le \ell(\eta)$,

$$(\mathcal{L}_1 + \gamma V + a(x) f(x, \bar{u}_\delta))\bar{u}_\delta = \delta(\mathcal{L}_1 + \gamma V + a(x) f(x, \delta\vartheta_\delta^j))\vartheta_\delta^j =$$

$$= \delta(\sigma_1^{G_j^{\eta,\epsilon}}[\tilde{\mathcal{L}}_1, \mathcal{D}] + \gamma V + a(x)(f(x, \delta\vartheta_\delta^j) - f(x,0)))\vartheta_\delta^j \ge \delta\sigma_1^{G_j^{\eta,\epsilon}}[\tilde{\mathcal{L}}_1, \mathcal{D}]\vartheta_\delta^j .$$

De este modo, gracias a (5.2.11), en G_j^η, $1 \le j \le \ell(\eta)$ la siguiente estimación se desprende para cada $\gamma > 0$

$$\mathcal{L}_1 \bar{u}_\delta + \gamma V \bar{u}_\delta + a(x) f(x, \bar{u}_\delta)\bar{u}_\delta > 0 .$$

Similarmente, ya que $\delta\xi_\delta^j > 0$ en $\mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j}$, $1 \le j \le n_0$, se sigue de (5.1.6) que

$$f(x, \delta\xi_\delta^j) > f(x,0) , \qquad x \in \mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j} , \qquad 1 \le j \le n_0 ,$$

y por eso, en $\mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j}$, $1 \le j \le n_0$ se desprende lo siguiente para cada $\gamma > 0$

$$(\mathcal{L}_1 + \gamma V + a(x) f(x, \bar{u}_\delta))\bar{u}_\delta = \delta(\mathcal{L}_1 + \gamma V + a(x) f(x, \delta\xi_\delta^j))\xi_\delta^j =$$

$$= \delta(\sigma_1^{\mathcal{N}_\delta^{0,j}}[\tilde{\mathcal{L}}_1, \mathcal{D}] + \gamma V + a(x)(f(x, \delta\xi_\delta^j) - f(x,0)))\xi_\delta^j \ge \delta\sigma_1^{\mathcal{N}_\delta^{0,j}}[\tilde{\mathcal{L}}_1, \mathcal{D}]\xi_\delta^j .$$

Así, gracias a (5.2.21), en $\mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{0,j}$, $1 \le j \le n_0$ la siguiente estimación se verifica para cada $\gamma > 0$

$$\mathcal{L}_1 \bar{u}_\delta + \gamma V \bar{u}_\delta + a(x) f(x, \bar{u}_\delta)\bar{u}_\delta > 0 .$$

Ahora, observar que ya que $V \in \mathcal{A}(\Omega)$, gracias a ($\mathcal{A}2$) existe una constante $\omega > 0$ tal que

$$V > \omega > 0 \tag{5.2.27}$$

en cada subconjunto compacto de $\Omega_V^+ \cup \bigcup_{j=1}^p \Gamma_1^{i_j}$. En particular,

$$V > \omega > 0 \qquad \text{en} \qquad (\bar{\Omega} \setminus (\bar{\Omega}_{\frac{\delta}{2}} \cup H_{\frac{\delta}{2}}^\eta)) \cup \bigcup_{j=1}^p \mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j} \subset \Omega_V^+ \cup \bigcup_{j=1}^p \Gamma_1^{i_j} . \tag{5.2.28}$$

De este modo, ya que $\delta\psi_\delta^{i_j} > 0$ en $\mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j}$, $1 \le j \le p$, se sigue de (5.1.6) que

$$f(x, \delta\psi_\delta^{i_j}) > f(x,0) , \qquad x \in \mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j} , \qquad 1 \le j \le p ,$$

y por eso, gracias a (5.2.28) en $\mathcal{N}_{\frac{\delta}{2}}^{1,i_j}$, $1 \le j \le p$, se desprende la siguiente estimación

$$(\mathcal{L}_1 + \gamma V + a(x) f(x, \bar{u}_\delta))\bar{u}_\delta = \delta(\mathcal{L}_1 + \gamma V + a(x) f(x, \delta\psi_\delta^{i_j}))\psi_\delta^{i_j} =$$

$$= \delta(\sigma_1^{\mathcal{N}_\delta^{i_j}}[\tilde{\mathcal{L}}_1, \mathcal{B}(b, \mathcal{N}_\delta^{i_j})] + \gamma V + a(x)(f(x, \delta\psi_\delta^{i_j}) - f(x,0)))\psi_\delta^{i_j} \ge$$

$$\geq \delta(\sigma_1^{\mathcal{N}_\delta^{i_j}}[\tilde{\mathcal{L}}_1, \mathcal{B}(b, \mathcal{N}_\delta^{i_j})] + \gamma\omega)\psi_\delta^{i_j} > 0$$

supuesto que

$$\gamma > \Lambda_1(\delta) := \omega^{-1} \max_{1\leq j\leq p} \{ |\sigma_1^{\mathcal{N}_\delta^{1,i_j}}[\tilde{\mathcal{L}}_1, \mathcal{B}(b, \mathcal{N}_\delta^{1,i_j})]| \} \geq 0 .$$

Por otra parte, ya que $\bar{\Omega} \setminus (\bar{\Omega}_{\frac{\delta}{2}} \cup H^\eta_{\frac{\delta}{2}}) \subset \Omega_V^+$, se sigue de (5.2.28) que existe $\Lambda_2(\delta) > 0$ con

$$\Lambda_2(\delta) > \Lambda_1(\delta) \geq 0 ,$$

tal que la siguiente estimación se verifica en $\bar{\Omega} \setminus (\bar{\Omega}_{\frac{\delta}{2}} \cup H^\eta_{\frac{\delta}{2}})$

$$(\mathcal{L}_1 + \gamma V + a(x)f(x, \bar{u}_\delta))\bar{u}_\delta = (\mathcal{L}_1 + \gamma V + a(x)f(x, \zeta_\delta))\zeta_\delta > (\mathcal{L}_1 + a(x)f(x, \zeta_\delta) + \gamma\omega)\zeta_\delta > 0,$$

para cada $\gamma > \Lambda_2(\delta) > 0$, ya que $\omega > 0$, ζ_δ está alejada de cero en $\bar{\Omega} \setminus (\bar{\Omega}_{\frac{\delta}{2}} \cup H^\eta_{\frac{\delta}{2}})$ y $(\mathcal{L}_1 + a(x)f(x, \zeta_\delta))\zeta_\delta$ es independiente de γ.

Finalmente, por construcción, en la frontera se desprende lo siguiente

$$\mathcal{B}(b)\bar{u}_\delta = \delta \mathcal{D}\xi_\delta^j = 0 \qquad \text{en} \quad \Gamma_0^j , \qquad 1 \leq j \leq n_0 ,$$

$$\mathcal{B}(b)\bar{u}_\delta = \delta(\partial_\nu + b)\psi_\delta^{i_j} = 0 \qquad \text{en} \quad \Gamma_1^{i_j} , \qquad 1 \leq j \leq p ,$$

y gracias a (5.2.15),

$$\mathcal{B}(b)\bar{u}_\delta = (\partial_\nu + b)u_\delta = 0 \qquad \text{en} \quad \partial\Omega_V^0 \cap \Gamma_1 .$$

Así,

$$\mathcal{B}(b)\bar{u}_\delta = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega .$$

Por tanto, para cada $\delta > 0$ suficientemente pequeño existe

$$\Lambda(\delta) := \Lambda_2(\delta) > 0 ,$$

tal que bajo condición (5.2.6) la función positiva $\bar{u}_\delta$ definida por (5.2.26), nos proporciona una supersolución positiva estricta de $P[\gamma, \lambda, \Omega, \mathcal{B}(b)]$ para cada $\gamma > \Lambda(\delta) > 0$.

Esto completa la demostración de la Parte i) cuando la condición (5.2.6) es satisfecha.

Ahora, supongamos

$$\Gamma_0 \cap K \neq \emptyset , \tag{5.2.29}$$

en lugar de (5.2.6). Denotemos por Γ_0^i, $1 \leq i \leq n_0$, a las componentes de Γ_0, y sea $\{i_1, ..., i_q\}$ el subconjunto de $\{1, ..., n_0\}$ para el cual

$$K \cap \Gamma_0^j \neq \emptyset$$

si, y sólamente si, $j \in \{i_1, ..., i_q\}$.

Dado $\rho > 0$ suficientemente pequeño, consideremos el nuevo dominio soporte

$$G_\rho := \Omega \cup \left(\bigcup_{j=1}^{q} \Gamma_0^{i_j} + B_{\bar\rho} \right),$$

donde $B_\rho \subset \mathbb{R}^N$ es la bola de radio ρ centrada en el origen. Fijemos $\rho > 0$ y sean $\tilde\alpha_{ij} = \tilde\alpha_{ji} \in C^1(\bar G_\rho)$, $\tilde\alpha_i \in C(\bar G_\rho)$, $\tilde\alpha_0, \tilde W \in L_\infty(G_\rho)$ extensiones regulares desde $\bar\Omega$ hasta $\bar G_\rho$ de los coeficientes $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, α_i, $1 \leq i,j \leq N$, α_0 y W respectivamente. Ahora, consideremos el operador diferencial auxiliar

$$\tilde{\mathcal{L}}_1 := -\sum_{i,j=1}^{N} \tilde\alpha_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \tilde\alpha_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \tilde\alpha_0(x) - \lambda \tilde W(x) \qquad \text{en} \quad G_\rho .$$

Ya que $\mathcal{L}$ es fuertemente uniformemente elíptico en Ω con constante de elipticidad $\mu > 0$, se sigue fácilmente que existe $\tilde\rho \in (0,\rho)$ tal que $\tilde{\mathcal{L}}_1$ es fuertemente uniformemente elíptico en $G_{\tilde\rho}$ con constante de elipticidad $\frac{\mu}{2}$. Tomemos

$$\tilde\Omega := G_{\tilde\rho},$$

consideremos los potenciales auxiliares

$$\tilde a := \begin{cases} 1 & \text{en} \quad \tilde\Omega \setminus \Omega, \\ a & \text{en} \quad \Omega, \end{cases} \qquad \tilde V := \begin{cases} 1 & \text{en} \quad \tilde\Omega \setminus \Omega, \\ V & \text{en} \quad \Omega, \end{cases}$$

y el nuevo operador de frontera

$$\tilde{\mathcal{B}}(b) := \begin{cases} \mathcal{D} & \text{en} \quad \partial\tilde\Omega \setminus \Gamma_1, \\ \partial_\nu + b & \text{en} \quad \Gamma_1 . \end{cases}$$

Además, sea $\tilde f \in C^1(\bar{\tilde\Omega} \times [0,\infty), \mathbb{R})$ una extensión regular desde $\bar\Omega \times [0,\infty)$ hasta $\bar{\tilde\Omega} \times [0,\infty)$ de la función f, tal que

$$\lim_{u \nearrow \infty} \tilde f(x,u) = +\infty \qquad \text{uniformemente en} \qquad \bar{\tilde\Omega} .$$

De $(\mathcal{A}3)$ se sigue fácilmente que los potenciales auxiliares $\tilde a$, $\tilde V$ pertenecen a la clase $\mathcal{A}(\tilde\Omega)$ de potenciales admisibles en $\tilde\Omega$. Además, por construcción

$$\tilde\Omega^0_{\tilde a} = \Omega^0_a , \qquad \tilde\Omega^0_{\tilde V} = \Omega^0_V \subset \tilde\Omega , \qquad \tilde K = K \subset \tilde\Omega , \qquad \bigcup_{j=1}^{q} \Gamma_0^{i_j} \subset \tilde\Omega , \tag{5.2.30}$$

donde $\tilde K$ es el correspondiente conjunto K de la definición de $\mathcal{A}(\tilde\Omega)$. Por eso,

$$(\partial\tilde\Omega \setminus \Gamma_1) \cap (\partial\tilde\Omega^0_{\tilde V} \cup \tilde K) = \emptyset . \tag{5.2.31}$$

Además gracias a (5.2.30), tenemos que (1.4.15) se verifica sobre $\Gamma_1 \cap \partial\tilde{\Omega}^0_{\tilde{V}}$,

$$\tilde{\Omega}^0_{\tilde{a},\tilde{V}} = \tilde{\Omega}^0_{\tilde{a}} \cap \tilde{\Omega}^0_{\tilde{V}} = \Omega^0_a \cap \Omega^0_V = \Omega^0_{a,V},$$

$$\tilde{\mathcal{B}}(b, \tilde{\Omega}^0_{\tilde{V}}) = \tilde{\mathcal{B}}(b, \Omega^0_V) = \mathcal{B}(b, \Omega^0_V)$$

y

$$\lambda \in \Lambda[\tilde{\Omega}^0_{\tilde{V}}, \tilde{\mathcal{B}}(b, \tilde{\Omega}^0_{\tilde{V}})] = \Lambda[\Omega^0_V, \mathcal{B}(b, \Omega^0_V)].$$

De este modo gracias a (5.2.31), la condición (5.2.6) es satisfecha para el nuevo problema en $\tilde{\Omega}$ y por tanto, nos encontramos en el marco abstracto de trabajo de la Parte i) bajo condición (5.2.6), pero ahora para el nuevo problema en $\tilde{\Omega}$. Consecuentemente, por los resultados de Parte i), para cada $\delta > 0$ suficientemente pequeño existen $\tilde{\Lambda}(\delta) > 0$ y una función positiva $\bar{\tilde{u}}_\delta : \bar{\tilde{\Omega}} \to [0, \infty)$ satisfaciendo

$$\bar{\tilde{u}}_\delta(x) > 0 \quad \text{para cada} \quad x \in \tilde{\Omega}$$

y

$$\begin{cases} (\tilde{\mathcal{L}}_1 + \gamma\tilde{V} + \tilde{a}(x)\tilde{f}(x, \bar{\tilde{u}}_\delta))\bar{\tilde{u}}_\delta > 0 & \text{en} \quad \tilde{\Omega} \\ \tilde{\mathcal{B}}(b)\bar{\tilde{u}}_\delta = 0 & \text{en} \quad \partial\tilde{\Omega} \end{cases} \tag{5.2.32}$$

para cada $\gamma > \tilde{\Lambda}(\delta) > 0$. Ahora, definamos

$$\bar{u}_\delta := \bar{\tilde{u}}_\delta|_{\bar{\Omega}}. \tag{5.2.33}$$

Entonces, por construcción y gracias a (5.2.32), tenemos que en Ω se verifica lo siguiente

$$(\mathcal{L}_1 + \gamma V + a(x)f(x, \bar{u}_\delta))\bar{u}_\delta = (\tilde{\mathcal{L}}_1 + \gamma\tilde{V} + \tilde{a}(x)\tilde{f}(x, \bar{\tilde{u}}_\delta))\bar{\tilde{u}}_\delta|_\Omega \geq 0, \tag{5.2.34}$$

para cada $\gamma > \tilde{\Lambda}(\delta) > 0$.

Además, por construcción, tenemos que en $\partial\Omega$ se verifica

$$\bar{u}_\delta(x) = \bar{\tilde{u}}_\delta(x) > 0 \qquad \text{para cada} \quad x \in \bigcup_{j=1}^q \Gamma_0^{i_j} \neq \emptyset, \tag{5.2.35}$$

ya que $\cup_{j=1}^q \Gamma_0^{i_j} \subset \tilde{\Omega}$, y

$$\bar{u}_\delta = \bar{\tilde{u}}_\delta = 0 \qquad \text{en} \quad \Gamma_0 \setminus \bigcup_{j=1}^q \Gamma_0^{i_j};$$

$$(\partial_\nu + b)\bar{u}_\delta = (\partial_\nu + b)\bar{\tilde{u}}_\delta = 0 \qquad \text{en} \qquad \Gamma_1.$$

Por tanto,

$$\mathcal{B}(b)\bar{u}_\delta > 0 \qquad \text{en} \qquad \partial\Omega,$$

y gracias a (5.2.34) obtenemos que para cada $\delta > 0$ suficientemente pequeño la función $\bar{u}_\delta$ definida por (5.2.33), $\bar{u}_\delta$ nos proporciona una supersolución positiva estricta de $P[\gamma, \lambda, \Omega, \mathcal{B}(b)]$ para cada $\gamma > \tilde{\Lambda}(\delta) > 0$. Esto completa la demostración de la Parte i) bajo condición (5.2.29).

Esto concluye la demostración de la Parte i).

Parte ii) Primeramente recalcamos, como ya fue probado en Parte i), que debido al hecho de que (1.4.15) se verifica sobre $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_V^0$ tenemos que (1:4.15) es satisfecho sobre $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_{a,V}^0$, suupuesto $\Omega_{a,V}^0 \neq \emptyset$.

Ahora demostraremos separadamente la Parte ii) en cada una de las situaciones (5.2.6) o (5.2.29).

Supongamos (5.2.6) y sea Ω_δ la sucesión de dominios acotados de $\mathbf{R}^N$ convergiendo a Ω_V^0 desde el exterior, considerada en la Parte i). Entonces, ya que $\lambda \in \Lambda[\Omega_V^0, \mathcal{B}(b, \Omega_V^0)]$ y (1.4.15) se verifica sobre $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_{a,V}^0$, se sigue del Teorema 4.4.2 que existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$\lambda \in \bigcap_{\delta \in (0,\delta_0)} \Lambda[\Omega_\delta, \mathcal{B}(b, \Omega_\delta)] . \tag{5.2.36}$$

Definamos para cada $\delta \in (0, \delta_0)$

$$u_\delta := u^{\Omega_\delta}_{[\mathcal{L},\lambda W,\mathcal{B}(b,\Omega_\delta)]} ,$$

cuya existencia y unicidad están garantizadas por (5.2.36) y Teorema 3.3.2 (Nota 3.3.3). Entonces, ya que $\lambda \in \Lambda[\Omega_V^0, \mathcal{B}(b, \Omega_V^0)]$ y (1.4.15) se verifica sobre $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_V^0$, se sigue de nuevo del Teorema 4.4.2 que

$$\lim_{\delta \searrow 0} \| u_\delta - u^{\Omega_V^0}_{[\mathcal{L},\lambda W,\mathcal{B}(b,\Omega_V^0)]} \|_{H^1(\Omega_V^0)} = 0 . \tag{5.2.37}$$

Por tanto, ya que por construcción la supersolución positiva estricta $\bar{u}_\delta$ definida por (5.2.26) satisface

$$\bar{u}_\delta|_{\Omega_V^0} = u_\delta|_{\Omega_V^0} ,$$

se sigue de (5.2.37) que

$$\lim_{\delta \searrow 0} \| \bar{u}_\delta - u^{\Omega_V^0}_{[\mathcal{L},\lambda W,\mathcal{B}(b,\Omega_V^0)]} \|_{H^1(\Omega_V^0)} = 0 .$$

Esto demuestra (5.2.3).

Ahora probamos (5.2.4). En efecto, por construcción, se sigue de (5.2.24) y (5.2.25) que para cada $\delta > 0$ suficientemente pequeño se verifica que

$$\| \bar{u}_\delta \|_{L_\infty(H^\eta_{\frac{\delta}{2}})} \leq \delta , \tag{5.2.38}$$

donde $\bar{u}_\delta$ es la supersolución positiva estricta definida por (5.2.26).

Ahora, sea K cualquier subconjunto compacto de $\bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}_V^0$. Por construcción, existe $\delta_0 := \delta_0(K) > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$K \subset \bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}_{\frac{\delta}{2}} , \qquad \text{para cada} \qquad \delta \in (0, \delta_0) . \tag{5.2.39}$$

De este modo, se sigue de (5.2.38) y (5.2.39) que

$$\| \bar{u}_\delta \|_{L_\infty(K \cap H^\eta_{\frac{\delta}{2}})} \leq \delta , \qquad \| \bar{u}_\delta \|_{L_\infty(K \setminus H^\eta_{\frac{\delta}{2}})} = \| \zeta_\delta \|_{L_\infty(K \setminus H^\eta_{\frac{\delta}{2}})}$$

y por eso,

$$\|\bar{u}_\delta\|_{L_\infty(K)} \leq \max\{\delta, \|\zeta_\delta\|_{L_\infty(K\setminus H^{\eta}_{\frac{\delta}{2}})}\}\,. \tag{5.2.40}$$

Entonces, ya que ζ_δ es cualquier extensión positiva y regular de

$$u_\delta \cup \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} \delta\vartheta^j_\delta \cup \bigcup_{j=1}^{p} \delta\psi^{i_j}_\delta \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \delta\xi^j_\delta$$

desde

$$\bar{\Omega}_{\frac{\delta}{2}} \cup \bigcup_{j=1}^{\ell(\eta)} \bar{G}^{\eta}_j \cup \bigcup_{j=1}^{p} \bar{\mathcal{N}}^{1,i_j}_{\frac{\delta}{2}} \cup \bigcup_{j=1}^{n_0} \bar{\mathcal{N}}^{0,j}_{\frac{\delta}{2}}$$

a $\tilde{\Omega}$, y ya que gracias a (5.2.24) y (5.2.25)

$$\lim_{\delta\searrow 0} \|\delta\vartheta^j_\delta\|_{L_\infty(G^\eta_j)} = \lim_{\delta\searrow 0} \|\delta\psi^{i_j}_\delta\|_{L_\infty(\mathcal{N}^{1,i_j}_{\frac{\delta}{2}})} = \lim_{\delta\searrow 0} \|\delta\xi^j_\delta\|_{L_\infty(\mathcal{N}^{0,j}_{\frac{\delta}{2}})} = 0,$$

tomando límites en la expresión (5.2.40) cuando $\delta \searrow 0$, obtenemos (5.2.4).

Finalmente, (5.2.5) se sigue fácilmente de (5.2.3) y (5.2.4). Esto completa la demostración de la Parte ii) bajo la condición (5.2.6).

Ahora probamos (5.2.3), (5.2.4) y (5.2.5) bajo condición (5.2.29).

Supongamos (5.2.29). Entonces, argumentando como en la situación (5.2.6), tenemos que la supersolución positiva estricta $\bar{\bar{u}}_\delta$ construida en $\tilde{\Omega}$ en la Parte i) bajo la condición (5.2.29) satisface

$$\lim_{\delta\searrow 0} \|\bar{\bar{u}}_\delta - u^{\tilde{\Omega}^0_V}_{[\hat{\mathcal{L}},\lambda\tilde{W},\tilde{\mathcal{B}}(b,\tilde{\Omega}^0_V)]}\|_{H^1(\tilde{\Omega}^0_V)} = 0, \tag{5.2.41}$$

donde

$$\hat{\mathcal{L}} := \tilde{\mathcal{L}}_1 + \lambda\tilde{W}.$$

Además, teniendo en cuenta que por construcción

$$\tilde{\Omega}^0_V = \Omega^0_V \subset \tilde{\Omega}\,, \tag{5.2.42}$$

tenemos que

$$\bar{\bar{u}}_\delta|_{\tilde{\Omega}^0_V} = \bar{u}_\delta\,, \qquad \tilde{\mathcal{B}}(b,\tilde{\Omega}^0_V) = \tilde{\mathcal{B}}(b,\Omega^0_V) = \mathcal{B}(b,\Omega^0_V)$$

donde $\bar{u}_\delta$ es la supersolución positiva estricta definida por (5.2.33) y

$$\hat{\mathcal{L}}|_{\tilde{\Omega}^0_V} = \mathcal{L}\,, \qquad \tilde{W}|_{\tilde{\Omega}^0_V} = W\,.$$

Así, se sigue de (5.2.41) que

$$\lim_{\delta\searrow 0} \|\bar{u}_\delta - u^{\Omega^0_V}_{[\mathcal{L},\lambda W,\mathcal{B}(b,\Omega^0_V)]}\|_{H^1(\Omega^0_V)} = 0\,.$$

Esto demuestra (5.2.3) bajo condición (5.2.29).

De la misma forma, argumentado en $\bar{\Omega}$ como en la situación (5.2.6) tenemos que

$$\lim_{\delta \searrow 0} \|\bar{\bar{u}}_\delta\|_{L_\infty(\tilde{K})} = 0 \tag{5.2.43}$$

en cualquier subconjunto compacto $\tilde{K}$ de $\bar{\bar{\Omega}} \setminus \bar{\bar{\Omega}}^0_V$, en particular (5.2.43) se verifica en cualquier subconjunto compacto K de $\bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}^0_V$ ya que

$$\bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}^0_V = \bar{\Omega} \setminus \bar{\bar{\Omega}}^0_V \subset \bar{\bar{\Omega}} \setminus \bar{\bar{\Omega}}^0_V .$$

Ahora (5.2.4) se sigue teniendo en cuenta que

$$\bar{\bar{u}}_\delta|_{\bar{\Omega}\setminus\bar{\Omega}^0_V} = \bar{u}_\delta .$$

Esto prueba (5.2.4) bajo condición (5.2.29).

Ahora, (5.2.5) bajo condición (5.2.29) se obtiene fácilmente de (5.2.3) y (5.2.4) bajo condición (5.2.29). Esto completa la demostración de la Parte ii).

Esto concluye la demostración de la proposición. □

Ahora ya estamos en condiciones de poder demostrar el Teorema 5.1.1.

Demostración del Teorema 5.1.1 En efecto, ya que $\lambda \in \Lambda[\Omega^0_V, \mathcal{B}(b, \Omega^0_V)] \cap \Lambda[\gamma, \Omega, \mathcal{B}(b)]$ para cada $\gamma > 0$ suficientemente grande, gracias a la unicidad de solución positiva de los problemas

$$P[\gamma, \lambda, \Omega, \mathcal{B}(b)] \qquad \text{y} \qquad P[\lambda, \Omega^0_V, \mathcal{B}(b, \Omega^0_V)] ,$$

garantizada por Teorema 3.3.2 (Nota 3.3.3), la existencia y unicidad de

$$u^{\Omega}_{[\mathcal{L}+\gamma V, \lambda W, \mathcal{B}(b)]} \qquad \text{y} \qquad u^{\Omega^0_V}_{[\mathcal{L}, \lambda W, \mathcal{B}(b, \Omega^0_V)]}$$

están garantizadas para cada $\gamma > 0$ suficientemente grande. Además, por construcción

$$\mathcal{L}(\lambda) u^{\Omega}_{[\mathcal{L}+\gamma V, \lambda W, \mathcal{B}(b)]} + a(x) f(x, u^{\Omega}_{[\mathcal{L}+\gamma V, \lambda W, \mathcal{B}(b)]}) u^{\Omega}_{[\mathcal{L}+\gamma V, \lambda W, \mathcal{B}(b)]} = 0 \qquad \text{en} \qquad \Omega^0_V \tag{5.2.44}$$

y

$$\mathcal{B}(b) u^{\Omega}_{[\mathcal{L}+\gamma V, \lambda W, \mathcal{B}(b)]} = 0 .$$

Además, ya que $V \in \mathcal{A}(\Omega)$ tenemos que

$$\text{dist}\,(\Gamma_1, \partial\Omega^0_V \cap \Omega) > 0 \tag{5.2.45}$$

y por eso, el operador de frontera $\mathcal{B}(b, \Omega^0_V)$ definido por (1.1.5) está bien definido. De este modo, por construcción

$$\mathcal{B}(b, \Omega^0_V) u^{\Omega}_{[\mathcal{L}+\gamma V, \lambda W, \mathcal{B}(b)]} = \begin{cases} u^{\Omega}_{[\mathcal{L}+\gamma V, \lambda W, \mathcal{B}(b)]} & \text{en} \quad \partial\Omega^0_V \cap \Omega \\ 0 & \text{en} \quad \partial\Omega^0_V \cap \partial\Omega , \end{cases}$$

y ya que $u^{\Omega}_{[\mathcal{L}+\gamma V,\lambda W,\mathcal{B}(b)]}$ es fuertemente positiva en Ω, obtenemos que

$$\mathcal{B}(b,\Omega^0_V)u^{\Omega}_{[\mathcal{L}+\gamma V,\lambda W,\mathcal{B}(b)]} > 0\,. \tag{5.2.46}$$

Así, (5.2.44) y (5.2.46) implican que $u^{\Omega}_{[\mathcal{L}+\gamma V,\lambda W,\mathcal{B}(b)]}$ es una supersolución positiva estricta del problema $P[\lambda,\Omega^0_V,\mathcal{B}(b,\Omega^0_V)]$ para $\gamma>0$ suficientemente grande. Por eso, el Teorema 4.2.1 implica que

$$u^{\Omega}_{[\mathcal{L}+\gamma V,\lambda W,\mathcal{B}(b)]}|_{\Omega^0_V} \geq u^{\Omega^0_V}_{[\mathcal{L},\lambda W,\mathcal{B}(b,\Omega^0_V)]}\,, \tag{5.2.47}$$

para $\gamma>0$ suficientemente grande. Ahora, sea la función

$$u_* := \begin{cases} u^{\Omega^0_V}_{[\mathcal{L},\lambda W,\mathcal{B}(b,\Omega^0_V)]} & \text{en} \quad \bar{\Omega}^0_V \\ 0 & \text{en} \quad \bar{\Omega}\setminus\bar{\Omega}^0_V\,. \end{cases}$$

Entonces, ya que $u^{\Omega}_{[\mathcal{L}+\gamma V,\lambda W,\mathcal{B}(b)]}>0$ en Ω, teniendo en cuenta (5.2.47), se desprende que

$$u_* < u^{\Omega}_{[\mathcal{L}+\gamma V,\lambda W,\mathcal{B}(b)]}\,, \tag{5.2.48}$$

para cada $\gamma>0$ suficientemente grande.

Por otra parte, ya que $\lambda\in\Lambda[\Omega^0_V,\mathcal{B}(b,\Omega^0_V)]$ y (1.4.15) se verifica sobre $\Gamma_1\cap\partial\Omega^0_V$, se sigue de la Proposición 5.2.1 que para cada $\delta>0$ suficientemente pequeño, existe un número real $\Lambda(\delta)>0$ y una función positiva $\bar{u}_\delta$ tal que $\bar{u}_\delta$ es una supersolución positiva estricta de $P[\gamma,\lambda,\Omega,\mathcal{B}(b)]$ para cada $\gamma>\Lambda(\delta)>0$, y las convergencias dadas por (5.2.3) y (5.2.4) son satisfechas. Además, gracias al Teorema 4.2.1 se sigue que

$$u^{\Omega}_{[\mathcal{L}+\gamma V,\lambda W,\mathcal{B}(b)]} \leq \bar{u}_\delta \qquad \text{para} \qquad \gamma>\Lambda(\delta)>0\,. \tag{5.2.49}$$

Por eso, se sigue de (5.2.48) y (5.2.49) que

$$u_* < u^{\Omega}_{[\mathcal{L}+\gamma V,\lambda W,\mathcal{B}(b)]} \leq \bar{u}_\delta\,, \qquad \gamma>\Lambda(\delta)>0\,. \tag{5.2.50}$$

En particular, gracias a (5.2.50) tenemos que

$$u^{\Omega^0_V}_{[\mathcal{L},\lambda W,\mathcal{B}(b,\Omega^0_V)]} = u_*|_{\Omega^0_V} \leq u^{\Omega}_{[\mathcal{L}+\gamma V,\lambda W,\mathcal{B}(b)]}|_{\Omega^0_V} \leq \bar{u}_\delta|_{\Omega^0_V}\,, \quad \gamma>\Lambda(\delta)>0\,, \tag{5.2.51}$$

y por eso,

$$\|u^{\Omega}_{[\mathcal{L}+\gamma V,\lambda W,\mathcal{B}(b)]} - u^{\Omega^0_V}_{[\mathcal{L},\lambda W,\mathcal{B}(b,\Omega^0_V)]}\|_{L_2(\Omega^0_V)} \leq \|\bar{u}_\delta - u^{\Omega^0_V}_{[\mathcal{L},\lambda W,\mathcal{B}(b,\Omega^0_V)]}\|_{L_2(\Omega^0_V)}\,,\ \gamma>\Lambda(\delta)>0\,. \tag{5.2.52}$$

Entonces, tomando límites en la expresión (5.2.52) cuando $\gamma\nearrow\infty$, obtenemos que

$$\lim_{\gamma\nearrow\infty}\|u^{\Omega}_{[\mathcal{L}+\gamma V,\lambda W,\mathcal{B}(b)]} - u^{\Omega^0_V}_{[\mathcal{L},\lambda W,\mathcal{B}(b,\Omega^0_V)]}\|_{L_2(\Omega^0_V)} \leq \|\bar{u}_\delta - u^{\Omega^0_V}_{[\mathcal{L},\lambda W,\mathcal{B}(b,\Omega^0_V)]}\|_{L_2(\Omega^0_V)}\,; \tag{5.2.53}$$

y ya que gracias a la Proposición 5.2.1

$$\lim_{\delta\searrow 0} \|\bar{u}_\delta - u^{\Omega_V^0}_{[\mathcal{L},\lambda W,\mathcal{B}(b,\Omega_V^0)]}\|_{L_2(\Omega_V^0)} = 0\,, \tag{5.2.54}$$

tomando límites en la expresión (5.2.53) cuando $\delta \searrow 0$, se sigue de (5.2.54) que

$$\lim_{\gamma\nearrow\infty} \|u^{\Omega}_{[\mathcal{L}+\gamma V,\lambda W,\mathcal{B}(b)]} - u^{\Omega_V^0}_{[\mathcal{L},\lambda W,\mathcal{B}(b,\Omega_V^0)]}\|_{L_2(\Omega_V^0)} = 0\,. \tag{5.2.55}$$

Ahora, sea $\delta_0 > 0$ suficientemente pequeño. Entonces, gracias a (5.2.51) tenemos que

$$\|u^{\Omega}_{[\mathcal{L}+\gamma V,\lambda W,\mathcal{B}(b)]}\|_{L_\infty(\Omega_V^0)} \le \|\bar{u}_{\delta_0}\|_{L_\infty(\Omega_V^0)}\,, \qquad \gamma > \Lambda(\delta_0) > 0\,. \tag{5.2.56}$$

Por eso, gracias a la cota uniforme en $L_\infty(\Omega_V^0)$ dada por (5.2.56) para $u^{\Omega}_{[\mathcal{L}+\gamma V,\lambda W,\mathcal{B}(b)]}$, $\gamma > \Lambda(\delta_0)$, y la convergencia dada por (5.2.55), obtenemos que

$$\lim_{\gamma\nearrow\infty} \|u^{\Omega}_{[\mathcal{L}+\gamma V,\lambda W,\mathcal{B}(b)]} - u^{\Omega_V^0}_{[\mathcal{L},\lambda W,\mathcal{B}(b,\Omega_V^0)]}\|_{L_p(\Omega_V^0)} = 0\,, \qquad p \in [2,\infty)\,. \tag{5.2.57}$$

Por tanto, gracias a (5.2.57), obtenemos que

$$\lim_{\gamma\nearrow\infty} \|u^{\Omega}_{[\mathcal{L}+\gamma V,\lambda W,\mathcal{B}(b)]} - u^{\Omega_V^0}_{[\mathcal{L},\lambda W,\mathcal{B}(b,\Omega_V^0)]}\|_{L_p(\Omega_V^0)} = 0\,, \qquad p \in [1,\infty)\,.$$

Esto prueba (5.1.11).

Ahora demostramos (5.1.12). En efecto, sea K un subconjunto compacto de $\bar{\Omega}\setminus\bar{\Omega}_V^0$. Entonces, gracias a (5.2.50) tenemos que

$$0 = u_*|_K \le u^{\Omega}_{[\mathcal{L}+\gamma V,\lambda W,\mathcal{B}(b)]}|_K \le \bar{u}_\delta|_K\,, \qquad \gamma > \Lambda(\delta) > 0\,, \tag{5.2.58}$$

para cada $\delta > 0$ suficientemente pequeño, y por eso

$$\|u^{\Omega}_{[\mathcal{L}+\gamma V,\lambda W,\mathcal{B}(b)]}\|_{L_\infty(K)} \le \|\bar{u}_\delta\|_{L_\infty(K)}\,, \qquad \gamma > \Lambda(\delta) > 0\,. \tag{5.2.59}$$

Entonces, tomando límites en la expresión (5.2.59) cuando $\gamma \nearrow \infty$, obtenemos que

$$0 \le \lim_{\gamma\nearrow\infty} \|u^{\Omega}_{[\mathcal{L}+\gamma V,\lambda W,\mathcal{B}(b)]}\|_{L_\infty(K)} \le \|\bar{u}_\delta\|_{L_\infty(K)}\,, \tag{5.2.60}$$

y ya que gracias a la Proposición 5.2.1

$$\lim_{\delta\searrow 0} \|\bar{u}_\delta\|_{L_\infty(K)} = 0\,, \tag{5.2.61}$$

tomando límites en la expresión (5.2.60) cuando $\delta \searrow 0$ se sigue de (5.2.61) que

$$\lim_{\gamma\nearrow\infty} \|u^{\Omega}_{[\mathcal{L}+\gamma V,\lambda W,\mathcal{B}(b)]}\|_{L_\infty(K)} = 0\,.$$

Esto demuestra (5.1.12).

Ahora, (5.1.13) se sigue fácilmente de (5.1.11) y (5.1.12).

Esto concluye la demostración del teorema. $\square$

El siguiente resultado nos proporciona algunas condiciones suficientes que garantizan

$$\lambda \in \Lambda[\gamma, \Omega, \mathcal{B}(b)]$$

para cada $\gamma > 0$ suficientemente grande, supuesto que $\lambda \in \Lambda[\Omega_V^0, \mathcal{B}(b, \Omega_V^0)]$. Por tanto, bajo estas condiciones se verifican las conclusiones del Teorema 5.1.1.

Teorema 5.2.2 *Sean los problemas* $P[\gamma, \lambda, \Omega, \mathcal{B}(b)]$ *y* $P[\lambda, \Omega_V^0, \mathcal{B}(b, \Omega_V^0)]$. *Supongamos que*

$$\lambda \in \Lambda[\Omega_V^0, \mathcal{B}(b, \Omega_V^0)]\,, \tag{5.2.62}$$

y que o bien

$$\Omega_{a,V}^0 \in \mathcal{C}^2\,, \qquad a \in \mathcal{A}(\Omega_V^0)\,, \qquad V \in \mathcal{A}(\Omega_a^0)\,,$$

si $\Omega_{a,V}^0 \neq \emptyset$, *o bien*

$$a \in \mathcal{A}^+(\Omega_V^0)\,, \qquad V \in \mathcal{A}^+(\Omega_a^0)\,,$$

si $\Omega_{a,V}^0 = \emptyset$.

Asumamos además que (1.4.15) *se verifica sobre* $\Gamma_1 \cap (\partial\Omega_V^0 \cup \partial\Omega_a^0)$. *Entonces,*

$$\lambda \in \Lambda[\gamma, \Omega, \mathcal{B}(b)]$$

para cada $\gamma > 0$ *suficientemente grande y además* (5.1.11), (5.1.12) *y* (5.1.13) *son satisfechos.*

Demostración: Necesariamente o bien $\Omega_{a,V}^0 \neq \emptyset$ o $\Omega_{a,V}^0 = \emptyset$.

Supongamos que $\Omega_{a,V}^0 \neq \emptyset$. En este caso, $\Omega_{a,V}^0$ es de clase $\mathcal{C}^2$ y ya que (1.4.15) se verifica sobre $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_V^0$, argumentando como en la demostración de la Parte i) de la Proposición 5.2.1, obtenemos que (1.4.15) se verifica sobre $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_{a,V}^0$.

Ahora averiguamos la estructura de los conjuntos $\Lambda[\Omega_V^0, \mathcal{B}(b, \Omega_V^0)]$ y $\Lambda[\gamma, \Omega, \mathcal{B}(b)]$ para $\gamma > 0$ suficientemente grande. Ya que $a \in \mathcal{A}(\Omega_V^0)$ tenemos que el conjunto abierto máximal de anulación de a en Ω_V^0 es

$$[\Omega_V^0]_a^0 = \Omega_a^0 \cap \Omega_V^0 = \Omega_{a,V}^0 \in \mathcal{C}^2$$

y debido al hecho de que (1.4.15) se verifica sobre $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_{a,V}^0$, Teorema 3.3.2 implica que

$$\Lambda[\Omega_V^0, \mathcal{B}(b, \Omega_V^0)] := \{\lambda \in \mathbf{R} \;:\; \sigma_1^{\Omega_V^0}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}(b, \Omega_V^0)] < 0 < \sigma_1^{\Omega_{a,V}^0}[\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(b, \Omega_{a,V}^0)]\}\,. \tag{5.2.63}$$

Similarmente, ya que $a \in \mathcal{A}(\Omega)$ y (1.4.15) se verifica sobre $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_a^0$, se sigue del Teorema 3.3.2 que

$$\Lambda[\gamma, \Omega, \mathcal{B}(b)] := \{\lambda \in \mathbf{R} \;:\; \sigma_1^{\Omega}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda) + \gamma V, \mathcal{B}(b)] < 0 < \sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}(\lambda) + \gamma V, \mathcal{B}(b, \Omega_a^0)]\} \tag{5.2.64}$$

Ahora mostramos que $\lambda \in \Lambda[\gamma, \Omega, \mathcal{B}(b)]$ para cada $\gamma > 0$ suficientemente grande. En efecto, ya que $V \in \mathcal{A}(\Omega_a^0)$ tenemos que el conjunto de anulación de V en Ω_a^0 es

$$[\Omega_a^0]_V^0 = \Omega_V^0 \cap \Omega_a^0 = \Omega_{a,V}^0 \in \mathcal{C}^2$$

y debido al hecho de que (1.4.15) se verifica sobre $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_{a,V}^0$, se sigue del Teorema 2.10.4 que

$$\lim_{\gamma \nearrow \infty} \sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}(\lambda) + \gamma V, \mathcal{B}(b, \Omega_a^0)] = \sigma_1^{\Omega_{a,V}^0}[\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(b, \Omega_{a,V}^0)]\,. \tag{5.2.65}$$

Similarmente, ya que $V \in \mathcal{A}(\Omega)$ y (1.4.15) se verifica sobre $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_V^0$, se sigue del Teorema 2.10.4 que

$$\lim_{\gamma \nearrow \infty} \sigma_1^{\Omega}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda) + \gamma V, \mathcal{B}(b)] = \sigma_1^{\Omega_V^0}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}(b, \Omega_V^0)]\,. \tag{5.2.66}$$

De este modo, ya que $\lambda \in \Lambda[\Omega_V^0, \mathcal{B}(b, \Omega_V^0)]$, se deduce de (5.2.63), (5.2.65) y (5.2.66) que

$$\lim_{\gamma \nearrow \infty} \sigma_1^{\Omega}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda) + \gamma V, \mathcal{B}(b)] < 0\,, \qquad \lim_{\gamma \nearrow \infty} \sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}(\lambda) + \gamma V, \mathcal{B}(b, \Omega_a^0)] > 0 \tag{5.2.67}$$

y por eso, para cada $\gamma > 0$ suficientemente grande se desprende que

$$\sigma_1^{\Omega}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda) + \gamma V, \mathcal{B}(b)] < 0 < \sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}(\lambda) + \gamma V, \mathcal{B}(b, \Omega_a^0)]\,. \tag{5.2.68}$$

Entonces, teniendo en cuenta (5.2.64), se sigue de (5.2.68) que $\lambda \in \Lambda[\gamma, \Omega, \mathcal{B}(b)]$, para cada $\gamma > 0$ suficientemente grande. Ahora, el Teorema 5.1.1 implica el resultado en el caso particular en el que $\Omega_{a,V}^0 \neq \emptyset$.

Ahora supongamos que $\Omega_{a,V}^0 = \emptyset$. Para demostrar el resultado en este caso, primeramente averiguaremos la estructura de los conjuntos $\Lambda[\Omega_V^0, \mathcal{B}(b, \Omega_V^0)]$ y $\Lambda[\gamma, \Omega, \mathcal{B}(b)]$ para cada $\gamma > 0$ suficientemente grande. Ya que $\Omega_{a,V}^0 = \emptyset$ y $a \in \mathcal{A}^+(\Omega_V^0)$, se sigue del Teorema 3.3.4 que

$$\Lambda[\Omega_V^0, \mathcal{B}(b, \Omega_V^0)] = \{\lambda \in \mathbf{R} \;:\; \sigma_1^{\Omega_V^0}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}(b, \Omega_V^0)] < 0\}\,. \tag{5.2.69}$$

Similarmente, ya que $a \in \mathcal{A}(\Omega)$ y (1.4.15) se verifica sobre $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_a^0$, se sigue del Teorema 3.3.2 que (5.2.64) es satisfecho.

Ahora demostraremos que $\lambda \in \Lambda[\gamma, \Omega, \mathcal{B}(b)]$ para cada $\gamma > 0$ suficientemente grande. En efecto, ya que $V \in \mathcal{A}(\Omega)$ y (1.4.15) se verifica sobre $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_V^0$, se sigue del Teorema 2.10.4 que (5.2.66) es satisfecho. De este modo, ya que $\lambda \in \Lambda[\Omega_V^0, \mathcal{B}(b, \Omega_V^0)]$ se sigue de (5.2.66) y (5.2.69) que

$$\lim_{\gamma \nearrow \infty} \sigma_1^{\Omega}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda) + \gamma V, \mathcal{B}(b)] < 0\,. \tag{5.2.70}$$

Similarmente, ya que $\Omega_{a,V}^0 = \emptyset$ y $V \in \mathcal{A}^+(\Omega_a^0)$, el Teorema 2.10.5 implica que

$$\lim_{\gamma \nearrow \infty} \sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}(\lambda) + \gamma V, \mathcal{B}(b, \Omega_a^0)] = +\infty\,. \tag{5.2.71}$$

Entonces, se sigue de (5.2.70) y (5.2.71) que para cada $\gamma > 0$ suficientemente grande se verifica

$$\sigma_1^{\Omega}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda) + \gamma V, \mathcal{B}(b)] < 0 < \sigma_1^{\Omega_a^0}[\mathcal{L}(\lambda) + \gamma V, \mathcal{B}(b, \Omega_a^0)]. \tag{5.2.72}$$

Por tanto, (5.2.64) y (5.2.72) implican que $\lambda \in \Lambda[\gamma, \Omega, \mathcal{B}(b)]$, para cada $\gamma > 0$ suficientemente grande. Ahora, el Teorema 5.1.1 implica el resultado.

Esto concluye la demostración del teorema. □

Nota 5.2.3 *Debe ser destacado que el Corolario 4.3.2 nos proporciona condiciones suficientes para tener que $a \in \mathcal{A}(\Omega_V^0)$ y $V \in \mathcal{A}(\Omega_a^0)$ en el caso particular en el que $\Omega_{a,V}^0 \neq \emptyset$, o para tener que $a \in \mathcal{A}^+(\Omega_V^0)$ y $V \in \mathcal{A}^+(\Omega_a^0)$ en el caso particular en el que $\Omega_{a,V}^0 = \emptyset$.*

Teorema 5.2.4 *Sean los problemas $P[\gamma, \lambda, \Omega, \mathcal{B}(b)]$ y $P[\lambda, \Omega_V^0, \mathcal{B}(b, \Omega_V^0)]$. Supongamos que*

$$\lambda \in \Lambda[\Omega_V^0, \mathcal{B}(b, \Omega_V^0)].$$

Asumamos además que $a \in \mathcal{A}^+(\Omega)$ y (1.4.15) se verifica sobre $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_V^0$. Entonces,

$$\lambda \in \Lambda[\gamma, \Omega, \mathcal{B}(b)]$$

para cada $\gamma > 0$ suficientemente grande y además (5.1.11), (5.1.12) *y* (5.1.13) *son satisfechos.*

Demostración: Primeramente averiguaremos la estructura de los conjuntos $\Lambda[\Omega_V^0, \mathcal{B}(b, \Omega_V^0)]$ y $\Lambda[\gamma, \Omega, \mathcal{B}(b)]$ para cada $\gamma > 0$ suficientemente grande. Ya que $a \in \mathcal{A}^+(\Omega)$, el Corolario 4.3.2 implica que $a \in \mathcal{A}^+(\Omega_V^0)$ y por eso, se sigue del Teorema 3.3.4 que

$$\Lambda[\Omega_V^0, \mathcal{B}(b, \Omega_V^0)] = \{\lambda \in \mathbf{R} \ : \ \sigma_1^{\Omega_V^0}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}(b, \Omega_V^0)] < 0\}. \tag{5.2.73}$$

Similarmente, ya que $a \in \mathcal{A}^+(\Omega)$, se sigue del Teorema 3.3.4 que

$$\Lambda[\gamma, \Omega, \mathcal{B}(b)] = \{\lambda \in \mathbf{R} \ : \ \sigma_1^{\Omega}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda) + \gamma V, \mathcal{B}(b)] < 0\}. \tag{5.2.74}$$

Ahora probaremos que $\lambda \in \Lambda[\gamma, \Omega, \mathcal{B}(b)]$ para cada $\gamma > 0$ suficientemente grande. En efecto, ya que $V \in \mathcal{A}(\Omega)$ y (1.4.15) se verifica sobre $\Gamma_1 \cap \partial\Omega_V^0$, se sigue del Teorema 2.10.4 que

$$\lim_{\gamma \nearrow \infty} \sigma_1^{\Omega}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda) + \gamma V, \mathcal{B}(b)] = \sigma_1^{\Omega_V^0}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda), \mathcal{B}(b, \Omega_V^0)] \tag{5.2.75}$$

y ya que $\lambda \in \Lambda[\Omega_V^0, \mathcal{B}(b, \Omega_V^0)]$, obtenemos de (5.2.73) y (5.2.75) que

$$\sigma_1^{\Omega}[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda) + \gamma V, \mathcal{B}(b)] < 0, \tag{5.2.76}$$

para cada $\gamma > 0$ suficientemente grande. Por eso, teniendo en cuenta (5.2.74), se sigue del Teorema (5.2.76) que $\lambda \in \Lambda[\gamma, \Omega, \mathcal{B}(b)]$, para cada $\gamma > 0$ suficientemente grande. Ahora, el Teorema 5.1.1 implica el resultado.

Esto concluye la demostración del teorema. □

Nota 5.2.5 *Debe ser destacado que si $V \in \mathcal{A}^+(\Omega)$, entonces no tiene sentido analizar el comportamiento límite cuando $\gamma \nearrow \infty$ de las soluciones positivas de* (5.1.1). *En efecto, si $V \in \mathcal{A}^+(\Omega)$, entonces el Teorema 2.10.5 implica que*

$$\lim_{\gamma \nearrow \infty} \sigma_1^\Omega[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda) + \gamma V, \mathcal{B}(b)] = +\infty\,, \tag{5.2.77}$$

y ya que gracias al Teorema 3.3.2 (si $a \in \mathcal{A}(\Omega)$) o al Teorema 3.3.4 (si $a \in \mathcal{A}^+(\Omega)$), tenemos que

$$\Lambda[\gamma, \Omega, \mathcal{B}(b)] \subseteq \{\lambda \in \mathbf{R} \;:\; \sigma_1^\Omega[\tilde{\mathcal{L}}(\lambda) + \gamma V, \mathcal{B}(b)] < 0\}\,, \tag{5.2.78}$$

se sigue de (5.2.77) *y* (5.2.78) *que para cada $\lambda \in \mathbf{R}$, existe $\gamma_0 := \gamma_0(\lambda) > 0$ suficientemente grande, tal que $\lambda \notin \Lambda[\gamma, \Omega, \mathcal{B}(b)]$ para cada $\gamma \geq \gamma_0$.*

Bibliografía

[1] Adams, D. R., and Hedberg, L. I. [1996] Function Spaces and Potential Theory, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 314, Springer Verlag, Berlin.

[2] Agmon, S., Douglis, A. and Nirenberg, L. [1959] Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, Comm. in Pure and Appl. Maths. XII, 623-727.

[3] Amann, H., [1976] Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces, SIAM Rev. 18, 620-709.

[4] Amann, H. [1983] Dual semigroups and second order linear elliptic boundary value problems, Israel J. of Maths. 45, 225-254.

[5] Amann, H. and López-Gómez, J. [1998] A priori bounds and multiple solutions for superlinear indefinite elliptic problems, J. Diff. Eqns. 146, 336-374.

[6] Arrieta, J. M. [1995] Rate of eigenvalues on a dumbbell domain, simple eigenvalues case, Trans. Amer. Math. Soc. 347, 3503-3531.

[7] Arrieta, J. M., Hale, J. K. and Han, Q. [1991] Eigenvalue problems for nonsmoothly perturbed domains, J. Diff. Eqns. 91, 24-52.

[8] Babuška, I. [1961] Stability of the domain with respect to the fundamental problems in the theory of partial differential equations, mainly in connection with the theory of elasticity, I, II, Czech. Math. J. 11, 76-105, and 165-203.

[9] Babuška, I. and Vyborny, R. [1965] Continuous dependence of eigenvalues on the domain, Czech. Math. J. 15, 169-178.

[10] Berestycki, H., Nirenberg, L. and Varadhan S. R. S. [1994] The principal eigenvalue and maximum principle for second order elliptic operators in general domains, Comm. Pure Appl. Maths. XLVII, 47-92.

[11] Brezis, H. [1983] Analyse Fontionnelle, Masson, Paris.

[12] Brezis, H., and Oswald, L., [1986] Remarks on sublinear elliptic equations, Nonl. Anal. TMA 10(1986), 55-64.

[13] Courant, R. and Hilbert, D. [1962] Methods of Mathematical Physics, vol. I and II, Wiley-Interscience, New York.

[14] Crandall M. G., and Rabinowitz, P. H. [1973] Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues and linearized stability, Arch. Rat. Mech. Anal. 67, 161-180.

[15] Dancer, E. N. [1996] Some remarks on classical problems and fine properties of Sobolev spaces, Diff. Int. Eqns. 9, 437-446.

[16] Dancer, E. N. and Daners, D. [1997] Domain perturbation for elliptic equations subject to Robin boundary conditions, J. Diff. Eqns. 138, 86-132.

[17] Dancer, E. N. and López-Gómez J. [1997] Semiclassical analysis of general second order elliptic operators on bounded domains, Trans. Amer. Math. Soc. In press.

[18] Faber, C. [1923] Beweis das unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt, Sitzungsber. Bayer. Akad. der Wiss. Math. Phys., 169-172.

[19] Fraile, J. M., Koch-Medina, P., López-Gómez, J. and Merino, S., [1996] Elliptic eigenvalue problems and unbounded continua of positive solutions of a semilinear elliptic equation, J. Diff. Eqns. 127, 295-319.

[20] García-Melián, J., Gómez-Reñasco, R., López-Gómez, J. and Sabina de Lis, J. C., [1998] Pointwise growth and uniqueness of positive solutions for a class of sublinear elliptic problems where bifurcation from infinity occurs, Arch. Rational Mech. Anal. 145, 261-289.

[21] Gilbarg, D. and Trudinger, N. S. [1983] Elliptic Partial Differential Equations of the Second Order, Springer, Berlin.

[22] Guzmán, M. and Rubio, B. [1979] Integración: Teoría y Técnicas, Alhambra, Madrid.

[23] Hale, J. K. and Vegas, J. M. [1984] A nonlinear parabolic equation with varying domain, Arch. Rat. Mech. Anal. 86, 99-123.

[24] Hedberg, L. I. [1993] Approximation by harmonic functions, and stability of the Dirichlet problem, Exp. Math. 11, 193-259.

[25] Hess, P. [1991] Periodic-Parabolic boundary value problems and Positivity, Pitman R.N.M. 247, Longman Sci. Tech., Harlow.

[26] Hess, P. and Kato, T. [1980] On some linear and nonlinear eigenvalue problems with an indefinite weight function, Comm. P.D.E's. 5, 999-1030.

[27] Jimbo, S. [1989] The singularly perturbed domain and the characterization for the eigenfunctions with Neumann boundary condition, J. Diff. Eqns. 77, 322-350.

[28] Jimbo, S. [1993] Perturbation formula of eigenvalues in a singularly perturbed domain, J. Math. Soc. Japan 45, 339-356.

[29] Kato, T. [1982] Superconvexity of the spectral radius and convexity of the spectral bound and type, Math. Z. 180, 265-273.

[30] Kato, T. [1995] Perturbation Theory for Linear Operators, Classics in Mathematics, Springer, Berlin.

[31] Krahn, E. [1925] Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises, Math. Ann. 91, 97-100.

[32] López-Gómez, J., [1994] Bifurcation theory, Notas del curso de Zurich.

[33] López-Gómez, J. [1994] On linear weighted boundary value problems, in "Partial Differential Equations: Models in Physics and Biology" (G. Lumer, S. Nicaise and B. W. Schulze Eds.), Akademie, Berlin, 188-203.

[34] López-Gómez, J., [1995] Permanence under strong competition, WSSIAA 4, 473-488.

[35] López-Gómez, J. [1996] The maximum principle and the existence of principal eigenvalues for some linear weighted boundary value problems, J. Diff. Eqns. 127, 263-294.

[36] López-Gómez, J. and Molina-Meyer, M. [1994] The maximum principle for cooperative weakly coupled elliptic systems and some applications, Diff. Int. Eqns. 7, 383-398.

[37] López-Gómez, J., and Sabina de Lis, J.C., [1998] First variations of principal eigenvalues with respect to the domain and point-wise growth of positive solutions for problems where bifurcation from infinity occurs, J. Diff. Eqns. 148, 47-64.

[38] López-Gómez, J., [1999] Large solutions, metasolutions ... and asymptotic behaviour of the regular positive solutions of a class of sublinear parabolic problems with refuges, Elec. J. Diff. Eqns. To appear.

[39] Manes, A., Micheletti A. M. [1973] Un'estensione della teoria variazonale classica degli autovalori per operatori ellittici del secondo ordine, Boll. Un. Mat. Ital. 7, 285-301.

[40] Murray, J.D., [1993] Mathematical Biology, vol. 18, Springer Biomathematics Texts.

[41] Necas, J., [1967] Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Academia, Prague.

[42] Okubo, A., [1980] Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models. Springer, New York.

[43] Ouyang, T., [1992] On the positive solutions of semilinear equations $\Delta u + \lambda u - hu^p = 0$ on the compact manifolds, Trans. Amer. Math. Soc., 331 (1992), 503-527.

[44] Pinsky, R. G. [1995] Positive Harmonic Functions and Diffusion, An integrated analytic and probabilistic approach, Cambridge studies in advanced mathematics 45, Cambridge University Press, Cambridge.

[45] Protter, M. and Weinberger, H. [1966] On the spectrum of general second order operators, Boll. Amer. Math. Soc. 72, 251-255.

[46] Rabinowitz, P. H., [1971] Some global results for nonlinear eigenvalue problems, J. Funct. Anal. 7, 487-513.

[47] Schaefer, H. H. [1971] Topological Vector Spaces, Springer, New York.

[48] Simon, B. [1983] Semiclassical analysis of low lying eigenvalues, I. Non-degenerate minima: Asymptotic expansions, Ann. Inst. Henri Poincaré A XXXVIII, 12-37.

[49] Stein, E. M. [1970] Singular Integrals and Differentiability properties of functions, Princeton University Press, Princeton, NJ.

[50] Ward, M. J. and Keller, J. B. [1993] Strong localized perturbations of eigenvalue problems, SIAM J. Appl. Maths. 53, 770-798.

[51] Ward, M. J., Henshaw, D. and Keller, J. B. [1993] Summing logarithmic expansions for singularly perturbed eigenvalue problems, SIAM J. Appl. Maths. 53, 799-828.

[52] Wloka, J. [1987] Partial Differential Equations, Cambridge University Press, Cambridge.