UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Departamento de Álgebra

ALISAMIENTO DE CINTAS SOBRE CURVAS

MEMORIA PRESENTADA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR POR

Miguel González Andrés

Bajo la dirección del Doctor:

Francisco Javier Gallego

Madrid, 2004

ISBN: 84-669-2592-9

Universidad Complutense de Madrid
Facultad de Ciencias Matemáticas
Departamento de Álgebra

ALISAMIENTO DE CINTAS SOBRE CURVAS

Memoria presentada por
MIGUEL GONZÁLEZ ANDRÉS
para optar al grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas
por la Universidad Complutense de Madrid
Madrid, abril de 2004

Resumen

En esta tesis se demuestra que las cintas, i.e. estructuras dobles asociadas a un fibrado de línea $\mathscr{E}$ sobre su soporte reducido, una curva proyectiva lisa e irreducible de género arbitrario, son alisables si tienen género aritmético mayor o igual que 3 y la curva soporte admite un recubrimiento doble liso e irreducible con módulo de traza cero asociado $\mathscr{E}$. El método usado se basa en las técnicas infinitesimales que se desarrollan para probar que si la curva soporte admite un tal recubrimiento doble entonces cada cinta sumergida sobre la curva es "infinitesimalmente alisable", i.e. se puede obtener como fibra central de la imagen de alguna deformación infinitesimal de primer orden del morfismo composición del recubrimiento doble y la inmersión del soporte reducido en el espacio proyectivo ambiente que contiene a la cinta. Se obtienen también inmersiones en el mismo espacio proyectivo para todas las cintas asociadas a $\mathscr{E}$. Entonces, suponiendo la existencia del recubrimiento doble, se demuestra en qué condiciones se puede extender el "alisamiento infinitesimal" a un alisamiento global sumergido. Como consecuencia se obtienen los resultados de alisamiento.

ALISAMIENTO DE CINTAS SOBRE CURVAS

MIGUEL GONZÁLEZ ANDRÉS

Resumen

En esta tesis se demuestra que las cintas, i.e. estructuras dobles asociadas a un fibrado de línea $\mathscr{E}$ sobre su soporte reducido, una curva proyectiva lisa e irreducible de género arbitrario, son alisables si tienen género aritmético mayor o igual que 3 y la curva soporte admite un recubrimiento doble liso e irreducible con módulo de traza cero asociado $\mathscr{E}$. El método usado se basa en las técnicas infinitesimales que se desarrollan para probar que si la curva soporte admite un tal recubrimiento doble entonces cada cinta sumergida sobre la curva es "infinitesimalmente alisable", i.e. se puede obtener como fibra central de la imagen de alguna deformación infinitesimal de primer orden del morfismo composición del recubrimiento doble y la inmersión del soporte reducido en el espacio proyectivo ambiente que contiene a la cinta. Se obtienen también inmersiones en el mismo espacio proyectivo para todas las cintas asociadas a $\mathscr{E}$. Entonces, suponiendo la existencia del recubrimiento doble, se demuestra en qué condiciones se puede extender el "alisamiento infinitesimal" a un alisamiento global sumergido. Como consecuencia se obtienen los resultados de alisamiento.

Palabras clave:
esquemas no reducidos, deformaciones.

SMOOTHING OF RIBBONS OVER CURVES

MIGUEL GONZÁLEZ ANDRÉS

Abstract

In this thesis we prove that ribbons, i.e. double structures associated to a line bundle $\mathscr{E}$ over its reduced support, a smooth irreducible projective curve of arbitrary genus, are smoothable if they have arithmetic genus greater or equal than 3 and the support curve possesses a smooth irreducible double cover with trace zero module $\mathscr{E}$. The method we use is based on the infinitesimal techniques that we develop to show that if the support curve admits such a double cover then every embedded ribbon over the curve is "infinitesimally smoothable", i.e. the ribbon can be obtained as central fiber of the image of some first–order infinitesimal deformation of the map obtained by composition of the double cover with the embedding of the reduced support in the ambient projective space that contains the ribbon. We also obtain embeddings in the same projective space for all ribbons associated to $\mathscr{E}$. Then, assuming the existence of the double cover, we prove that the "infinitesimal smoothing" can be extended to a global embedded smoothing for embedded ribbons of arithmetic genus greater or equal than 3. As a consequence we obtain the smoothing results.

Keywords:
non–reduced schemes, deformations.

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi director de tesis Profesor Dr. Francisco Javier Gallego por muchas indicaciones y conversaciones provechosas, por su continuo y paciente estímulo y su generosa asistencia a lo largo de este trabajo.

Mi agradecimiento también para el Profesor Dr. Ignacio Sols que con la mejor disposición me ofreció todo el ánimo y ayuda en la difícil empresa de regresar a la actividad matemática.

Finalmente quiero agradecer al Profesor Dr. Bangere P. Purnaprajna por sus comentarios acerca de algunas partes de este trabajo.

Índice

Capítulo 0

Introducción

Una cinta $\widetilde{Y}$ es una estructura de multiplicidad dos asociada a un fibrado de línea $\mathscr{E}$ sobre su soporte reducido Y. Con precisión, $\mathscr{E}$ es el ideal $\mathscr{I}$ de Y como subesquema de $\widetilde{Y}$, (de $\mathscr{I}^2 = 0$ se deduce que $\mathscr{I}$ es un $\mathscr{O}_Y$–módulo). El esquema $\widetilde{Y}$ se denomina una cinta sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$, [BE95, §1]. El concepto de cinta se puede extender a mayor multiplicidad permitiendo que $\mathscr{E}$ tenga cualquier rango. Si $\mathscr{E}$, en lugar de tener rango 1, tiene rango $n-1$ entonces $\widetilde{Y}$ se llama una cuerda de multiplicidad n.
Un alisamiento de una cinta significa la existencia de una familia, plana sobre una curva afín lisa puntuada, cuya fibra general es una variedad lisa y cuya fibra especial es la cinta. Si la cinta está sumergida en una variedad ambiente y la familia es una subvariedad del producto de la variedad ambiente por la curva base de la familia, entonces decimos que existe un alisamiento sumergido.
La cintas fueron estudiadas por primera vez en profundidad por D. Bayer y D. Eisenbud en su trabajo fundamental [BE95]. Son importantes en tanto en cuanto aparecen como degeneraciones de variedades lisas cuyas propiedades se tiene interés en estudiar. Con frecuencia esas propiedades son más sencillas de estudiar en una variedad degenerada que, no obstante, tiene una estructura más simple en muchos sentidos (e.g., la estructura del grupo de Picard de una cinta "racional", i.e. una cinta sobre $\mathbb{P}^1$, o el cálculo de las ecuaciones de una alfombra $K3$, i.e. una cinta con soporte reducido en un *scroll* racional liso normal y fibrado conormal el fibrado de línea canónico del *scroll*, véase [BE95]) mientras que su contrapartida nodegenerada, que aun teniendo inmejorables propiedades desde un punto de vista geométrico (lisura, irreducibilidad, ...), tiene una estructura más compleja. En efecto, una de las causas del interés por las cintas y otras estructuras dobles en la década de los 90 fue el estudio de la conjetura de Green acerca de las sicigias de la curva canónica. Para que este enfoque pueda ser efectivo es necesario saber, en primer lugar, que las cintas son alisables. Aquí radica la importancia de construir alisamientos de cintas.
El objetivo de esta tesis es ver bajo qué condiciones una cinta puede alisarse. El resultado que obtenemos es, (salvo unas pocas excepciones cuando el género de Y es $g = 0$ ó $g = 1$) que toda cinta sobre una curva proyectiva lisa e irreducible Y es alisable cuando tiene una "razón geométrica" para serlo. Esta razón geométrica es, como explicamos más adelante, que la cinta con fibrado conormal $\mathscr{E}$ esté asociada a un recubrimiento doble de Y , (con

precisión: que exista un recubrimiento doble de Y con módulo de traza cero asociado $\mathscr{E}$).
La aparición de cintas como límite plano de curvas lisas es esperable siempre que una familia de inmersiones degenere a un morfismo $2:1$ sobre una curva lisa Y. En efecto, en esta situación el grado y el género que las imágenes de las inmersiones imponen a su límite plano indican que este límite plano debe de ser una estructura doble Y, cuyo género es el de una cinta sobre Y asociada al módulo de traza cero del recubrimiento doble. Esta situación nos lleva a pensar que la existencia de un recubrimiento doble de Y con módulo de traza cero asociado $\mathscr{E}$ es la condición geométrica natural que habremos de imponer si esperamos que cintas de fibrado conormal $\mathscr{E}$ sean alisables.
En el nivel infinitesimal el hecho de que una cinta sumergida esté contenida en el primer entorno infinitesimal de su soporte reducido dentro de la variedad ambiente sugiere que puede ser capturada por "alisamientos infinitesimales de primer orden", i.e. se quiere establecer la siguiente correspondencia: por un lado se tiene una cinta sumergida $\widetilde{Y}$, por otro lado se tiene una deformación infinitesimal de primer orden del morfismo obtenido por composición de un recubrimiento doble de Y y la inmersión de Y en la variedad ambiente, de tal forma que la fibra central de la imagen de esta deformación es la cinta. Esta correspondencia no surge de forma totalmente inesperada (véase [Fon93], donde cintas racionales no hiperelípticas canónicamente sumergidas de género aritmético mayor o igual que 3 aparecen asociadas a deformaciones infinitesimales de recubrimientos hiperelípticos de curvas racionales normales, y [GP97], donde alfombras $K3$ aparecen asociadas a deformaciones de recubrimientos hiperelípticos de *scrolls* racionales normales). Estos ejemplos son, con todo, casos particulares y la aproximación es en un caso llevada a cabo por un cálculo explícito (una estrategia que sólo cabe esperar que sea funcional si la curva reducida Y es tan sencilla como $\mathbb{P}^1$ y el fibrado de línea asociado al morfismo desde el recubrimiento doble al espacio proyectivo ambiente se comporta tan bien como el fibrado de línea canónico). En el caso de las alfombras $K3$, la estrategia no es un cálculo explícito de las ecuaciones de una deformación infinitesimal de un recubrimiento doble, pero el éxito de la prueba se apoya fuertemente en circunstancias muy particulares, como la existencia de una única estructura doble con invariantes $K3$ sobre un *scroll* racional normal dado. En ambos casos la estrategias usadas en la demostración dependen de circunstancias muy particulares de cada caso. En consecuencia, para estudiar el problema en su generalidad se hace imprescindible un acercamiento y comprensión diferentes, de carácter altamente conceptual y general. Esto es lo que se hace en esta tesis, estableciendo los fundamentos para el proceso por el que una deformación infinitesimal de primer orden del morfismo obtenido por composición de un recubrimiento doble de una curva Y de género arbitrario (y no simplemente $\mathbb{P}^1$ donde como se ha dicho un acercamiento computacional explícito es posible) y la inclusión de Y en el espacio proyectivo ambiente, produce una cinta $\widetilde{Y}$ sobre Y, y cómo cada cinta $\widetilde{Y}$ sobre Y aparece de hecho vía tal proceso. Esto se hace en la Proposición 3.3.2 y el Teorema 3.3.3 que dicen que cada deformación infinitesimal, localmente trivial, de primer orden de un morfismo $X \xrightarrow{\varphi} Z$, que es finito sobre su imagen Y, produce una cuerda sobre Y que se aplica en la variedad destino Z y una deformación de primer orden de Y en Z de tal forma que la fibra central de la

imagen del morfismo deformación es igual a la imagen de la cuerda y la imagen total del morfismo deformación es la unión esquemática de su fibra central y de la deformación plana sumergida. Estos resultados dotan de contenido geométrico a la aplicación, obtenida por métodos cohomológicos, de $H^0(\mathscr{N}_\varphi)$, el espacio de deformaciones infinitesimales, localmente triviales, de primer orden de φ, a $\mathrm{Hom}(\mathscr{I}_{Y,Z}/\mathscr{I}^2_{Y,Z}, \mathscr{O}_Y) \oplus \mathrm{Hom}(\mathscr{I}_{Y,Z}/\mathscr{I}^2_{Y,Z}, \mathscr{E})$. Esta comprensión conceptual del proceso se consigue también en el Teorema 3.3.4 (que puede ser entendido como un resultado de "alisamiento infinitesimal"para cuerdas) que dice que si esta aplicación es sobreyectiva entonces cada cuerda, con fibrado conormal $\mathscr{E} = \pi_*\mathscr{O}_X/\mathscr{O}_Y$ (donde π es el morfismo de X a Y), sumergida en Z es la fibra central de la imagen de alguna deformación infinitesimal, localmente trivial, de primer orden de φ, y en el Teorema 3.3.5 que dice que en el caso en que X es una curva todas las cuerdas sobre la curva Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$ son obtenidas vía este proceso.
La forma en que, en esta tesis, se demuestra el alisamiento de cintas es probando que, con gran generalidad, en la esencia geométrica de una familia de curvas lisas en el espacio proyectivo que degenera a una cinta sobre Y subyace la existencia de una deformación del morfismo obtenido por composición de un recubrimiento doble de Y y la inclusión de Y en el espacio proyectivo, a una familia de inmersiones. Esto es así puesto que obtenemos la cinta como fibra central de la imagen de una deformación de un morfismo $2:1$ a una familia de inmersiones. El resultado principal de alisamiento de esta tesis es el Teorema 5.1.3 que dice:

Teorema 0.0.1. *Sean Y una curva proyectiva lisa e irreducible y $\mathscr{E}$ un fibrado de línea en Y. Supongamos que existe un recubrimiento doble liso e irreducible $X \xrightarrow{\pi} Y$ con $\pi_*\mathscr{O}_X/\mathscr{O}_Y = \mathscr{E}$. Entonces cada cinta $\widetilde{Y}$ sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$ y género aritmético $p_a(\widetilde{Y}) \geq 3$ es alisable.*

Como ya hemos indicado la condición de existencia del recubrimiento doble es la condición natural que cabe imponer para que la cintas de conormal $\mathscr{E}$ sean alisables. De hecho esta condición resulta ser poco restrictiva respecto de la condición necesaria obvia para que una cinta sea alisable: que su género aritmético sea mayor o igual que cero. Además, puesto que el género aritmético de una cinta $\widetilde{Y}$ de conormal $\mathscr{E}$ es $p_a(\widetilde{Y}) = d+2g-1$, donde $d = -\deg \mathscr{E}$ y g es el género de Y, la existencia del recubrimiento doble implica la condición $p_a(\widetilde{Y}) \geq 3$, salvo en unos pocos casos cuando $g = 0$ ó $g = 1$.
Para tener un primer atisbo del alcance de los resultados de esta tesis indicaremos que cuanto mayor sea el género g de la curva Y o mayor sea el género aritmético p_a de $\widetilde{Y}$ más cintas de género aritmético p_a sobre una curva Y de género g existen. La razón es que las cintas sobre una curva Y, con fibrado conormal $\mathscr{E}$, están clasificadas, salvo isomorfismo sobre Y, por los elementos del espacio $\mathrm{Ext}^1_Y(\omega_Y, \mathscr{E})$, salvo la acción de k^* (véase [BE95, 1.2] o 1.1.6). Obsérvese que si $p_a \geq 2$ entonces el espacio $\mathrm{Ext}^1_Y(\omega_Y, \mathscr{E})$ tiene dimensión $g-2+p_a$.

El alisamiento de las cintas se obtiene en forma de alisamiento sumergido puesto que el alisamiento aparece como imagen de una deformación de un morfismo que es la composición de un recubrimiento doble de Y con una inmersión de Y en un espacio proyectivo. Esto se hace en el Teorema 5.1.1 que dice:

Teorema 0.0.2. *Sean Y una curva proyectiva lisa e irreducible y $\mathscr{O}_Y(1)$ un fibrado de línea muy amplio en Y. Sea $\mathscr{E}$ un fibrado de línea en Y. Supongamos que $\mathscr{O}_Y(1)$ y $\mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_Y(1)$ son noespeciales. Denotemos por $\mathbb{P}^s \subset \mathbb{P}^r$, respectivamente, los espacios proyectivos de (uno cocientes) de $H^0(\mathscr{O}_Y(1))$ y $H^0(\mathscr{O}_Y(1)) \oplus H^0(\mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_Y(1))$. Supongamos que $r \geq 3$. Sea $Y \subset \mathbb{P}^r$ la inmersión definida como la composición de la inmersión $Y \subset \mathbb{P}^s$ determinada por la serie lineal completa $H^0(\mathscr{O}_Y(1))$ y $\mathbb{P}^s \subset \mathbb{P}^r$.*
Supongamos que $\widetilde{Y} \subset \mathbb{P}^r$ es una cinta sumergida nodegenerada sobre $Y \subset \mathbb{P}^r$ con fibrado conormal $\mathscr{E}$. Supongamos que $p_a(\widetilde{Y}) \geq 3$. Supongamos que existe un recubrimiento doble liso e irreducible $X \xrightarrow{\pi} Y$ con $\pi_*\mathscr{O}_X/\mathscr{O}_Y = \mathscr{E}$. Sea $X \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^r$ el morfismo obtenido componiendo π con la inclusión de Y en $\mathbb{P}^r$. Entonces

1. *existen una familia lisa e irreducible $\mathscr{X}$ propia y plana sobre una curva afín lisa puntuada T y un T–morfismo $\mathscr{X} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{P}^r_T$ con las siguientes características:*
   a) *la fibra general de $\mathscr{X}$ es una curva proyectiva lisa e irreducible,*
   b) *la fibra central de $\mathscr{X}$ es X,*
   c) *la fibra general del T–morfismo $\mathscr{X} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{P}^r_T$ es una inmersión cerrada,*
   d) *la fibra central del T–morfismo $\mathscr{X} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{P}^r_T$ es φ, y*
2. *la imagen del T–morfismo $\mathscr{X} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{P}^r_T$ es un subesquema cerrado íntegro $\mathscr{Y} \subset \mathbb{P}^r_T$ plano sobre T con las siguientes características:*
   a) *la fibra general de $\mathscr{Y}$ es una curva proyectiva lisa e irreducible nodegenerada con sección hiperplana noespecial en $\mathbb{P}^r$,*
   b) *la fibra central de $\mathscr{Y}$ es $\widetilde{Y} \subset \mathbb{P}^r$.*

Indiquemos que la condición $p_a(\widetilde{Y}) \geq 3$ se impone en el Teorema 0.0.2 por motivos técnicos debidos al uso de la parte fina del *moduli* de curvas lisas de género $p_a(\widetilde{Y})$ en la demostración.
La aplicación del Teorema 0.0.2 para deducir el Teorema 0.0.1, requiere un criterio para decidir cuándo todas las cintas sobre una curva Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$, se pueden sumergir de forma nodegenerada en un mismo espacio proyectivo $\mathbb{P}^r$ de forma que las inmersiones sean extensión de una inmersión $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^r$ fijada. Este criterio es la Proposición 4.1.2. Como consecuencia de la Proposición 4.1.2 vemos, en el Teorema 4.3.1, cómo sumergir de forma nodegenerada, en un mismo espacio proyectivo $\mathbb{P}^r$, todas las cintas con fibrado conormal $\mathscr{E}$ de forma que las inmersiones sean extensión de una inmersión $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^r$ fijada.
La demostración del Teorema 0.0.2 consiste en extender una deformación infinitesimal del morfismo $X \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^r$ a una deformación sobre una base afín. Para que la imagen de la deformación sobre la base afín contenga a $\widetilde{Y}$ como fibra central, elegimos la deformación infinitesimal de forma que esto ya ocurra en el nivel infinitesimal, es decir previamente demostramos que la cinta puede ser “infinitesimalmente alisada”. Este punto

clave infinitesimal es el Teorema 3.3.6, que hemos obtenido en el Capítulo 3, como una de las consecuencia de la teoría infinitesimal general que allí desarrollamos. El Teorema 3.3.6 dice:

Teorema 0.0.3. *Sean Y una curva proyectiva lisa e irreducible en $\mathbb{P}^r$ y $\mathscr{E}$ un fibrado de línea en Y. Supongamos que existe un recubrimiento doble liso e irreducible $X \xrightarrow{\pi} Y$ con $\pi_*\mathscr{O}_X/\mathscr{O}_Y = \mathscr{E}$. Sea $X \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^r$ el morfismo obtenido componiendo π con la inclusión de Y en $\mathbb{P}^r$. Entonces cada cinta sobre Y, con fibrado conormal $\mathscr{E}$, sumergida en $\mathbb{P}^r$ es la fibra central de la imagen de alguna deformación infinitesimal de primer orden de φ.*

Para valorar el alcance de los resultados de esta tesis se especializan a casos particulares de Y, véase Corolario 5.1.6, Corolario 5.1.8 y Corolario 5.1.9.

I. En el caso $g = 0$ algunos hechos que se obtienen son

   a) todas las cintas racionales de género aritmético $h \geq 3$ son infinitesimalmente producidas por una curva hiperelíptica asociada al fibrado conormal de las cintas $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-h-1)$,

   b) todas las cintas racionales de género aritmético $h \geq 3$ se pueden sumergir en $\mathbb{P}^h$ con grado $2h$ sobre una curva racional normal,

   c) todas las cintas racionales de género aritmético $h \geq 3$ y grado $2h$ sobre una curva racional normal en $\mathbb{P}^h$ son alisables,

   d) en consecuencia todas las cintas racionales de género aritmético mayor o igual que 3 son alisables.

   En comparación, el citado cálculo de L. Y. Fong (véase [Fon93]) demuestra que toda cinta racional no hiperelíptica de género aritmético $h \geq 3$ es infinitesimalmente producida por una curva hiperelíptica de género h en la inmersión canónica de la cinta no hiperelíptica en $\mathbb{P}^{h-1}$.

II. En el caso $g = 1$, i.e. para una curva elíptica Y, algunos hechos análogos que se obtienen son

   a) todas las cintas de género aritmético $h \geq 3$ son infinitesimalmente producidas por curvas bielípticas asociadas a los fibrados conormales de las cintas,

   b) todas las cintas de género aritmético $h \geq 6$ se pueden sumergir en $\mathbb{P}^{h-2}$ con grado $2h-2$ sobre una curva elíptica normal $Y \subset \mathbb{P}^{h-2}$ con sección hiperplana no isomorfa al dual del fibrado conormal de las cintas, todas las cintas de género aritmético $h = 4$ ó 5 se pueden sumergir en $\mathbb{P}^h$ con grado $2h$ sobre una curva elíptica normal $Y \subset \mathbb{P}^{h-1}$ y todas las cintas de género aritmético $h = 3$ se pueden sumergir en $\mathbb{P}^5$ con grado 8 sobre una curva elíptica normal $Y \subset \mathbb{P}^3$,

   c) todas las cintas sumergidas como en el ítem anterior son alisables,

d) en consecuencia todas las cintas de género aritmético mayor o igual que 3 sobre una curva elíptica son alisables.

También si nos preguntamos por una cota, que dependa sólo del género de Y, tal que toda cinta de género aritmético mayor o igual que esta cota sea alisable, entonces el Corolario 5.1.6, nos permite obtener esta cota, cuando el género g de Y es mayor o igual que 2.

III. Si $g \geq 2$ entonces todas las cintas sobre Y de género aritmético mayor o igual que $3g - 1$ son alisables.

Conviene observar que este último enunciado es simplemente una forma concisa de escribir un Corolario que muestra de forma parcial la generalidad de nuestro Teorema 5.1.3. El Teorema 5.1.3 también afirma el alisamiento de cintas en el rango $3 \leq p_a(\widetilde{Y}) \leq 3g - 2$, véase, por ejemplo, el Corolario 5.1.7.
Mencionemos también que la generalidad y la naturaleza conceptual de los resultados infinitesimales del Capítulo 3 permiten su aplicación en otras situaciones, por ejemplo, para el alisamiento de estructuras triples. En particular, Gallego, Purnaprajna y el autor aplican las técnicas desarrolladas aquí para demostrar el alisamiento de cuerdas de multiplicidad 3 sobre $\mathbb{P}^1$. Estos resultados aparecerán en otro lugar (cf. [GGP]).

Finalmente hemos incluido dos apéndices. En el primero estudiamos si, en las condiciones del Teorema 0.0.2, el punto que la cinta sumergida determina en su esquema de Hilbert es liso o no. Obtenemos una respuesta casi completa. Afirmativa, suponiendo $d \geq 2g - 1$. Negativa si el fibrado conormal verifica $\mathscr{E}^{-2} = \mathscr{O}_Y$ y $H^0(\mathscr{E}) = 0$.
En el segundo hacemos cálculos efectivos para obtener alisamiento infinitesimal en $\mathbb{P}^3$ para la cinta general de género 5 sobre una curva elíptica normal en $\mathbb{P}^3$.
Hay tres motivos para incluir estos cálculos:

1. estas inmersiones y alisamientos infinitesimales no se obtienen con las técnicas conceptuales de la tesis. Bien es cierto que, en el Corolario 5.1.8 (véase II más arriba), hemos probado el alisamiento sumergido de todas las cintas de género 5 sobre una curva elíptica; pero sumergidas en $\mathbb{P}^5$ sobre $Y \subset \mathbb{P}^4$.

2. Hacer cálculos efectivos construyendo las cintas mediante pegado de cintas escindidas sobre un recubrimiento afín de Y, aporta familiaridad con los objetos de estudio y es un buen ejemplo para ilustrar parte de la teoría general desarrollada.

3. La complejidad de los cálculos, que sólo la muy particular circunstancia de que la curva elíptica normal en $\mathbb{P}^3$ es una intersección completa permite llevar con éxito hasta el final, muestra definitivamente que éste es el caso límite en el que un acercamiento no conceptual al problema puede producir algún tipo de respuesta.

Convenios. Trabajamos sobre un cuerpo algebraicamente cerrado fijado k de característica cero. Todos los esquemas considerados son separados y de tipo finito sobre k.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos la definición de nuestros objetos de estudio. Cierto tipo de estructuras múltiples que llamaremos cuerdas y algunos resultados básicos acerca de ella. La existencia de una única cuerda escindida. La sucesión cotangente restringida asociada a una cuerda. El teorema de clasificación de cuerdas con fibrado conormal fijado (a consecuencia del cual se obtiene el hecho de que toda cuerda sobre una variedad afín lisa es escindida). La caracterización de las cuerdas sumergidas con soporte en una subvariedad lisa de una variedad lisa y la descripción de los morfismos desde una cuerda a un esquema en términos del morfismo inducido sobre el esquema soporte.
Las definiciones y hechos que reunimos en este capítulo son conocidos, en la referencia fundamental [BE95, §1] y en [GP97, §1], para cintas: estructuras de multiplicidad dos. Aquí aparecen demostraciones (que son prácticamente traslaciones de las pruebas que allí aparecen) establecidas para cuerdas, de los resultados conocidos para cintas, con ánimo de completitud e intención de facilitar la tarea del lector.

1.1. Definiciones y clasificación

La siguiente definición generaliza a esquemas de dimensión arbitraria las definiciones de [BE95, §1], y [Cha95, §1]. Hemos optado por mantener el término cuerda, en inglés *rope*, adoptado, en el caso de dimensión 1, en [Cha95, §1].

Definición 1.1.1. *Sean Y un esquema reducido y conexo y $\mathscr{E}$ un haz localmente libre de rango $n-1$ sobre Y.*

1. *Una n-cuerda sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$ es un esquema $\widetilde{Y}$ con $\widetilde{Y}_{\mathrm{red}} = Y$ tal que $\mathscr{I}^2_{Y,\widetilde{Y}} = 0$ y $\mathscr{I}_{Y,\widetilde{Y}} \simeq \mathscr{E}$ como $\mathscr{O}_Y$–módulos. Cuando $\mathscr{E}$ es un fibrado de línea, $\widetilde{Y}$ es denominada una cinta sobre Y.*

2. *Se dice que una cuerda $\widetilde{Y}$ es escindida si el morfismo de inclusión $Y \hookrightarrow \widetilde{Y}$ admite una retracción $\widetilde{Y} \to Y$.*

Proposición 1.1.2. *Sean Y un esquema reducido y conexo y $\mathscr{E}$ un haz localmente libre de rango finito sobre Y. Existe una única cuerda escindida sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$.*

Dem. Sean $S(\mathscr{E})$ el álgebra simétrica de $\mathscr{E}$ y $T = \mathbf{Spec}(S(\mathscr{E}))$ el fibrado afín asociado a $\mathscr{E}$ con proyección $T \to Y$. Sumergimos Y como la sección nula en T. El ideal de Y en T es el $\mathscr{O}_T$–módulo asociado con el ideal de aumentación $S_+(\mathscr{E})$ del álgebra $S(\mathscr{E})$. Es claro que el primer entorno infinitesimal de Y en T es una cuerda $\widetilde{Y}$ sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$. La restricción a $\widetilde{Y}$ de la proyección $T \to Y$ es una retracción de $Y \hookrightarrow \widetilde{Y}$ y, en consecuencia, $\widetilde{Y}$ es una cuerda escindida.
Para probar la unicidad, consideremos una cuerda $\widetilde{Y}$ sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$ escindida por la retracción $\widetilde{Y} \to Y$.
De la definición de cuerda con fibrado conormal $\mathscr{E}$ obtenemos una sucesión exacta natural de haces de grupos abelianos sobre Y

(1.1.2.1) $$0 \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{O}_{\widetilde{Y}} \longrightarrow \mathscr{O}_Y \longrightarrow 0.$$

El homomorfismo de álgebras $\mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_{\widetilde{Y}}$ asociado a la retracción $\widetilde{Y} \to Y$ define (1.1.2.1) como sucesión escindida de $\mathscr{O}_Y$–módulos. El hecho de que $\mathscr{E}^2 = 0$ implica que la estructura de álgebra de $\mathscr{O}_{\widetilde{Y}}$ está determinada por $\mathscr{E}$ como sigue: si $c, c' \in \mathscr{O}_Y$ y $m, m' \in \mathscr{E}$ son secciones sobre un abierto $U \subset Y$, el producto está definido en la forma

$$(c, m)(c', m') = (cc', cm' + c'm).$$

□

Lema–Definición 1.1.3. *Sean Y un esquema reducido y conexo e $\widetilde{Y}$ una cuerda sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$. La sucesión exacta natural*

$$\mathscr{E} \longrightarrow \Omega_{\widetilde{Y}}|_Y \longrightarrow \Omega_Y \longrightarrow 0$$

es también exacta en el término de la izquierda.
Denominaremos sucesión cotangente restringida de $\widetilde{Y}$ a la sucesión exacta natural

(1.1.3.1) $$e_{\widetilde{Y}}: \quad 0 \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \Omega_{\widetilde{Y}}|_Y \longrightarrow \Omega_Y \longrightarrow 0$$

y clase extensión de $\widetilde{Y}$ a la clase $[e_{\widetilde{Y}}] \in \operatorname{Ext}^1_Y(\Omega_Y, \mathscr{E})$.

Dem. El núcleo de la aplicación natural $\mathscr{E} \to \Omega_{\widetilde{Y}}|_Y$ es un subhaz coherente del haz localmente libre $\mathscr{E}$ que denotaremos $\mathscr{K}$. Queremos demostrar que $\mathscr{K} = 0$. Podemos reducir la demostración al caso en que Y es un esquema íntegro. En efecto, en el caso general, consideramos la descomposición en componentes irreducibles $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_r$. Si denotamos $Y_i' = Y - \bigcup_{j \neq i} Y_j$ y $U = Y_1' \cup \cdots \cup Y_r'$ entonces U es un abierto denso en Y. Por otra parte, el par $\widetilde{Y}_i' = (Y_i', \mathscr{O}_{\widetilde{Y}}|_{Y_i'})$ es un subesquema abierto de $\widetilde{Y}$ y, en consecuencia, es una cuerda sobre Y_i' con fibrado conormal $\mathscr{E}|_{Y_i'}$. Además el núcleo de la aplicación natural

$\mathscr{E}|_{Y'_i} \to \Omega_{\widetilde{Y}'_i}|_{Y'_i}$ es $\mathscr{K}|_{Y'_i}$. Si hemos probado el enunciado en el caso en que Y es íntegro, tendremos que $\mathscr{K}|_{Y'_i} = 0$ y, en consecuencia, $\mathscr{K}|_U = 0$. Esto es, el submódulo coherente $\mathscr{K}$ del módulo localmente libre $\mathscr{E}$ en el esquema reducido Y se anula en un abierto denso $U \subset Y$. Esto implica que $\mathscr{K} = 0$.

Para demostrar esta última afirmación podemos suponer que Y es afín, que $\mathscr{E}$ es trivial en Y y, considerando la intersección del submódulo $\mathscr{K}$ con cada sumando directo $\mathscr{O}_Y$ de $\mathscr{E}$, podemos suponer que $\mathscr{K}$ es un ideal coherente $\mathscr{K} \subset \mathscr{O}_Y$ que se anula en un abierto denso U del esquema afín reducido $Y = \operatorname{Spec} C$. Sea $c \in C$ una sección de $\mathscr{K}$ sobre Y. El elemento $c \in C$ se anula en el abierto denso U, esto implica que el abierto $\{y \in Y \mid c(y) \neq 0\}$ es vacío. Por tanto, el elemento c es nilpotente, y, puesto que C es reducido se tiene la igualdad $c = 0$, como se quería probar.

Supongamos ahora que Y es un esquema íntegro. Como consecuencia inmediata de "The Infinitesimal Lifting Property"(véase [Har77, II Ex. 8.6]) se deduce que la cuerda $\widetilde{Y}$ es escindida sobre cada abierto afín contenido en el abierto de puntos lisos de Y. Si $\widetilde{Y}$ es una cuerda escindida, es trivial comprobar que la aplicación $\mathscr{O}_{\widetilde{Y}} = \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{E} \to \Omega_Y \oplus \mathscr{E}$ es la derivación k–lineal universal de $\mathscr{O}_{\widetilde{Y}}$ en un $\mathscr{O}_Y$–módulo y, en consecuencia, la sucesión natural

$$\mathscr{E} \longrightarrow \Omega_{\widetilde{Y}}|_Y \longrightarrow \Omega_Y \longrightarrow 0$$

es la extensión trivial, y por lo tanto exacta a la izquierda. Por tanto, $\mathscr{K}$ se anula en el abierto denso formado por los puntos lisos de Y. Razonando como antes esto implica que $\mathscr{K} = 0$. $\square$

Observación 1.1.4. El concepto de extensión infinitesimal de un esquema X por un haz coherente $\mathscr{F}$, como un esquema X' que tiene un haz de ideales $\mathscr{I}$ tal que $\mathscr{I}^2 = 0$ y $(X', \mathscr{O}_{X'}/\mathscr{I}) \simeq (X, \mathscr{O}_X)$, y tal que $\mathscr{I} \simeq \mathscr{F}$ como $\mathscr{O}_X$–módulos, es bien conocido antes de [BE95]. Aparece, al menos, citado en [Har77, II Ex. 8.7], donde se propone al lector, como aplicación inmediata de "The Infinitesimal Lifting Property", la demostración del hecho de que si X es afín y nosingular, entonces toda extensión de X por un haz coherente $\mathscr{F}$ es isomorfa a la extensión trivial (o con nuestra denominación, escindida).

Por otra parte, la demostración del hecho de que la sucesión (1.1.3.1) es exacta a la izquierda no aparece en [BE95]. Nosotros hemos optado por incluir aquí un argumento completo.

Definición 1.1.5. *Un morfismo $\widetilde{Y} \to \widetilde{Y}'$ de cuerdas sobre Y es un morfismo de esquemas cuya restricción a Y es la identidad.*

Teorema 1.1.6 (Teorema de clasificación). *Sean Y un esquema reducido y conexo y $\mathscr{E}$ un haz localmente libre de rango finito sobre Y. Una cuerda $\widetilde{Y}$ sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$ está determinada por la clase extensión $[e_{\widetilde{Y}}] \in \operatorname{Ext}^1_Y(\Omega_Y, \mathscr{E})$ de su sucesión cotangente restringida, que es la fila exacta inferior $e_{\widetilde{Y}}$ en el diagrama couniversal*

(1.1.6.1)
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{O}_{\widetilde{Y}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{O}_Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r] & \Omega_{\widetilde{Y}}|_Y \arrow[r] & \Omega_Y \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Si $\widetilde{Y}'$ es otra cuerda sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$ entonces $\widetilde{Y}$ e $\widetilde{Y}'$ son isomorfas sobre Y si, y sólo si, sus clases extensión $[e_{\widetilde{Y}}]$ y $[e_{\widetilde{Y}'}]$ están en la misma órbita por la acción de los automorfismos de $\mathscr{E}$ en $\operatorname{Ext}^1(\Omega_Y, \mathscr{E})$.

Dem. Una cuerda $\widetilde{Y}$ con fibrado conormal $\mathscr{E}$ define la clase $[e_{\widetilde{Y}}] \in \operatorname{Ext}^1_Y(\Omega_Y, \mathscr{E})$ de su sucesión cotangente restringida, la fila exacta inferior en el diagrama conmutativo (1.1.6.1). Recíprocamente, sea $\mathscr{O}_Y \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega_Y$ la derivación canónica, y consideremos una extensión

$$e: \qquad 0 \longrightarrow \mathscr{E} \xrightarrow{j} \mathscr{G} \xrightarrow{p} \Omega_Y \longrightarrow 0.$$

Definimos el álgebra $\mathscr{O}_{\widetilde{Y}}$ de la cuerda $\widetilde{Y}$ asociada a la clase extensión $[e]$, como el haz de grupos abelianos que cierra un cuadrado couniversal para los homomorfismos de haces de grupos abelianos $\mathscr{O}_Y \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega_Y$ y $\mathscr{G} \xrightarrow{p} \Omega_Y$. Así, las secciones de $\mathscr{O}_{\widetilde{Y}}$ sobre una abierto $U \subset Y$ son los pares $(c, s) \in \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{G}$ tales que $\mathrm{d}c = ps$, con la estructura de k–álgebra definida por

(1.1.6.2) $$(c, s)(c', s') = (c\,c', c\,s' + c's),$$

y se tiene un diagrama conmutativo y exacto de haces de grupos abelianos

(1.1.6.3) $$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r, "\tilde{j}"] \arrow[d, equal] & \mathscr{O}_{\widetilde{Y}} \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d, "\mathrm{d}'"] & \mathscr{O}_Y \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{d}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r, "j"] & \mathscr{G} \arrow[r, "p"] & \Omega_Y \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Podemos ahora definir $\widetilde{Y} = (Y, \mathscr{O}_{\widetilde{Y}})$ y comprobar que es un esquema separado y de tipo finito sobre k.
Para comprobar que $\widetilde{Y}$ es un esquema vemos, en primer lugar, que los anillos $\mathscr{O}_{\widetilde{Y},y}$ son locales.
Observemos que todo functor exacto a izquierda transforma un diagrama couniversal en un diagrama couniversal. En consecuencia, podemos identificar el anillo $\mathscr{O}_{\widetilde{Y},y}$, en el diagrama couniversal

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{E}_y \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{O}_{\widetilde{Y},y} \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d] & \mathscr{O}_{Y,y} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{d}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{E}_y \arrow[r] & \mathscr{G}_y \arrow[r, "p"] & \Omega_{Y,y} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

y, por tanto, $\mathscr{O}_{\widetilde{Y},y} = \{(c, s) \in \mathscr{O}_{Y,y} \oplus \mathscr{G}_y \,|\, \mathrm{d}c = ps\}$. Se tiene entonces $\mathscr{E}_y^2 = 0$ y, en consecuencia, puesto que $\mathscr{O}_{Y,y}$ es reducido, $\mathscr{E}_y$ es el ideal nilradical de $\mathscr{O}_{\widetilde{Y},y}$. Esto implica que $\mathscr{O}_{\widetilde{Y},y}$ es un anillo local cuyo ideal maximal aparece como esquina superior izquierda en el diagrama couniversal

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{m} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{m}_{Y,y} \arrow[d, "\mathrm{d}"] \\ \mathscr{G}_y \arrow[r, "p"] & \Omega_{Y,y}. \end{tikzcd}$$

En efecto, si $\mathfrak{a}$ es un ideal de $\mathscr{O}_{\widetilde{Y},y}$ y suponemos que $\mathfrak{a}\mathscr{O}_{Y,y}$ está contenido en el ideal maximal, es obvio entonces que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$. En caso contrario, $\mathfrak{a}\mathscr{O}_{Y,y} = \mathscr{O}_{Y,y}$. De esta igualdad y de la sobreyectividad de $\widetilde{p}$ se deduce que existe un elemento $\alpha \in \mathfrak{a}$ tal que $1 - \alpha$ está en el núcleo de $\widetilde{p}$. Como hemos indicado, el núcleo de $\widetilde{p}$ coincide con el nilradical de $\mathscr{O}_{\widetilde{Y},y}$, por tanto α es una unidad y $\mathfrak{a} = \mathscr{O}_{\widetilde{Y},y}$.
En segundo lugar, si $U = \operatorname{Spec} C$ es un abierto afín en Y y S es el C–módulo asociado a $\mathscr{G}|_U$, entonces el anillo definido por $\mathscr{O}_{\widetilde{Y}}$ sobre U aparece como esquina superior izquierda en el diagrama couniversal

$$\begin{tikzcd} \widetilde{C} \arrow[r, "\widetilde{p}"] \arrow[d] & C \arrow[d, "\mathrm{d}"] \\ S \arrow[r, "p"] & \Omega_C. \end{tikzcd}$$

Comprobamos ahora que el par $\widetilde{U} = (U, \mathscr{O}_{\widetilde{Y}}|_U)$ es el esquema afín $\operatorname{Spec} \widetilde{C}$.
En efecto, basta tener en cuenta que si $\widetilde{c} = (c, s) \in \widetilde{C}$ entonces $\widetilde{c}(y) = c(y)$ para cada $y \in U$ y que la exactitud (a izquierda) del functor de fracciones implica que el anillo $\widetilde{C}_{\widetilde{c}}$ es la esquina superior izquierda del diagrama couniversal

$$\begin{tikzcd} \widetilde{C}_{\widetilde{c}} \arrow[r, "\widetilde{p}"] \arrow[d] & C_c \arrow[d, "\mathrm{d}"] \\ S_c \arrow[r, "p"] & \Omega_{C_c} \end{tikzcd} ,$$

y, por tanto, el anillo que define $\mathscr{O}_{\widetilde{Y}}$ sobre el abierto $\widetilde{U}_{\widetilde{c}} = U_c$ coincide con $\widetilde{C}_{\widetilde{c}}$.
De (1.1.6.3) se deduce que $\mathscr{E}^2 = 0$ y, por tanto, $\widetilde{Y}_{\mathrm{red}} = Y$. Así, la condición de separación para $\widetilde{Y}$ resulta de la condición de separación para Y (véase e.g. [Gro60, 5.5.1]).
Ahora comprobamos la condición de finitud para $\widetilde{C}$. Esta condición de finitud se obtiene de (1.1.6.3).
En efecto, si C está generado como k–álgebra por $c_1, \ldots, c_r$, el módulo asociado a $\mathscr{E}$ sobre U está generado como C–módulo por $m_1, \ldots, m_t$ y elegimos elementos $\widetilde{c}_1, \ldots, \widetilde{c}_r$ en $\widetilde{C}$ tales que $\widetilde{p}\,\widetilde{c}_i = c_i$, entonces $\widetilde{C}$ está generado como k–álgebra por los elementos $\{\widetilde{c}_i, \widetilde{j}\, m_l\}_{i,l}$. En efecto, sea $\widetilde{c} = (c, s) \in \widetilde{C}$. Escribimos $c = c(c_1, \ldots, c_r) \in k[c_1, \ldots, c_r]$, entonces $\widetilde{c} - c(\widetilde{c}_1, \ldots, \widetilde{c}_r) = \widetilde{j}(\sum b_l m_l)$ para ciertos $b_l \in C$. Ahora, si escribimos

$$b_l = b_l(c_1, \ldots, c_r) \in k[c_1, \ldots, c_r], \qquad \widetilde{c}_i = (c_i, s_i) \in C \oplus S,$$

y

$$s = \sum_k \frac{\partial b_l}{\partial X_k}(c_1, \ldots, c_r) s_k$$

se verifica

$$\begin{aligned} b_l(\widetilde{c}_1, \ldots, \widetilde{c}_r)\widetilde{j}(m_l) &= (b_l(c_1, \ldots, c_r), s)(0,\, jm_l) \\ &= (0,\, b_l(c_1, \ldots, c_r)\, jm_l) \\ &= (0,\, j(b_l(c_1, \ldots, c_r)\, m_l)) \\ &= \widetilde{j}(b_l(c_1, \ldots, c_r) m_j) \end{aligned} \tag{1.1.6.4}$$

y, en consecuencia, se tiene la igualdad

$$\widetilde{c} = c(\widetilde{c}_1, \ldots, \widetilde{c}_r) + \sum b_l(\widetilde{c}_1, \ldots, \widetilde{c}_r)\, \widetilde{j}\, m_l \in k[\{\widetilde{c}_i, \widetilde{j}\, m_l\}_{i,l}].$$

Ahora, a partir de (1.1.6.3), es inmediato comprobar que $\widetilde{Y}$ es una cuerda sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$.
Además $\mathscr{O}_{\widetilde{Y}} \xrightarrow{\mathrm{d}'} \mathscr{G}$ es una derivación k–lineal de $\mathscr{O}_{\widetilde{Y}}$ a un $\mathscr{O}_Y$–módulo. En consecuencia factoriza de modo único, por un homomorfismo de $\mathscr{O}_Y$–módulos, a través de la restricción de la derivación k–lineal universal en la forma $\mathscr{O} \to \Omega_{\widetilde{Y}}|_Y \to \mathscr{G}$. Es inmediato comprobar que se tiene entonces un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Omega_{\widetilde{Y}}|_Y \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r] & \mathscr{G} \arrow[r] & \Omega_Y \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

y, en consecuencia $\Omega_{\widetilde{Y}}|_Y \to \mathscr{G}$ es un isomorfismo. Esto muestra que $\widetilde{Y}$ es una cuerda con clase extensión $[e]$, probando la primera parte del teorema.
Para probar la segunda parte, recordemos cómo un homomorfismo $\mathscr{E} \xrightarrow{\tau} \mathscr{E}'$ induce un homomorfismo de grupos abelianos $\operatorname{Ext}^1(\Omega_Y, \mathscr{E}) \to \operatorname{Ext}^1(\Omega_Y, \mathscr{E}')$ que transforma la clase de una extensión $0 \to \mathscr{E} \xrightarrow{j} \mathscr{G} \xrightarrow{p} \Omega_Y \to 0$ en la clase de la fila exacta inferior del diagrama universal:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\tau"'] & \mathscr{G} \arrow[r, "p"] \arrow[d] & \Omega_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{E}' \arrow[r, "j'"] & \frac{\mathscr{E}' \oplus \mathscr{G}}{\operatorname{im}(-\tau \oplus j)} \arrow[r, "p'"] & \Omega_Y \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Denotaremos $\mathscr{G}_\tau = \frac{\mathscr{E}' \oplus \mathscr{G}}{\operatorname{im}(-\tau \oplus j)}$ y llamaremos e_τ a la extensión $0 \to \mathscr{E}' \xrightarrow{j'} \mathscr{G}_\tau \xrightarrow{p'} \Omega_Y \to 0$.
Esta transformación define una acción de los automorfismos de $\mathscr{E}$ en el espacio de clases de extensiones $\operatorname{Ext}^1(\Omega_Y, \mathscr{E})$.
Un morfismo $\widetilde{Y}' \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} \widetilde{Y}$ de cuerdas sobre Y es un homomorfismo $\mathscr{O}_{\widetilde{Y}} \xrightarrow{\widetilde{\varphi}^\sharp} \mathscr{O}_{\widetilde{Y}'}$ de haces de k–álgebras que induce la identidad en $\mathscr{O}_Y$. Tal homomorfismo induce un diagrama universal

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r] \arrow[d, "\tau"'] & \Omega_{\widetilde{Y}}|_Y \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{D}\widetilde{\varphi}|_Y"'] & \Omega_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{E}' \arrow[r] & \Omega_{\widetilde{Y}'}|_Y \arrow[r] & \Omega_Y \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

y, recíprocamente, en todo diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\tau"'] & \mathscr{G} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\gamma"'] & \Omega_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{E}' \arrow[r, "j'"] & \mathscr{G}' \arrow[r, "p'"] & \Omega_Y \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

la fila exacta inferior es equivalente a la extensión obtenida en un diagrama universal a partir de la fila superior por el homomorfismo $\mathscr{E} \xrightarrow{\tau} \mathscr{E}'$, e induce un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r] \arrow[d, "\tau"'] & \mathscr{O}_{\widetilde{Y}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{O}_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{E}' \arrow[r] & \mathscr{O}_{\widetilde{Y}'} \arrow[r] & \mathscr{O}_Y \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

y, en consecuencia, un morfismo $\widetilde{Y}' \to \widetilde{Y}$ sobre Y. Finalmente, $\widetilde{Y}' \to \widetilde{Y}$ es un isomorfismo si, y sólo si, $\mathscr{G} \xrightarrow{\gamma} \mathscr{G}'$ es un isomorfismo si, y sólo si, $\mathscr{E} \xrightarrow{\tau} \mathscr{E}'$ es un isomorfismo. $\square$

Observación 1.1.7. Queremos precisar el significado del Teorema 1.1.6 de clasificación. Cuando decimos que una cuerda queda determinada de modo único por su clase extensión estamos, con precisión, considerando el álgebra de una cuerda determinada salvo equivalencia de extensiones de k–álgebras conmutativas, en el sentido que explicamos a continuación.
Consideremos un haz de k–álgebras conmutativas $\mathscr{O}$ en una sucesión exacta de haces de k–módulos

$$0 \longrightarrow \mathscr{E} \xrightarrow{\widetilde{j}} \mathscr{O} \xrightarrow{\widetilde{p}} \mathscr{O}_Y \longrightarrow 0. \tag{1.1.7.1}$$

Supongamos que $\widetilde{p}$ sea un homomorfismo de haces de k–álgebras conmutativas y que se verifica

$$\alpha\widetilde{j}(m) = \widetilde{j}(\widetilde{p}(\alpha)m),$$

donde $m \in \mathscr{E}$ y $\alpha \in \mathscr{O}$ son secciones locales cualesquiera. Entonces es claro que $\widetilde{j}(\mathscr{E})^2 = 0$. Diremos que $\mathscr{O}$ es una extensión de $\mathscr{O}_Y$ por $\mathscr{E}$, (véase [Gro64, Chap.0, 18.2.1, 18.4.1]). Diremos que dos extensiones son equivalentes si existe un isomorfismo de haces de k–álgebras conmutativas $\mathscr{O}' \to \mathscr{O}$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r, "\widetilde{j}'"] \arrow[d, equal] & \mathscr{O}' \arrow[r, "\widetilde{p}'"] \arrow[d, "\gamma"] & \mathscr{O}_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r, "\widetilde{j}"] & \mathscr{O} \arrow[r, "\widetilde{p}"] & \mathscr{O}_Y \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

En general un morfismo de extensiones viene definido por un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{E}' \arrow[r, "\widetilde{j}'"] \arrow[d, "\zeta"'] & \mathscr{O}' \arrow[r, "\widetilde{p}'"] \arrow[d, "\gamma"] & \mathscr{O}_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r, "\widetilde{j}"] & \mathscr{O} \arrow[r, "\widetilde{p}"] & \mathscr{O}_Y \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

donde $\mathscr{E}' \xrightarrow{\zeta} \mathscr{E}$ es un homomorfismo de $\mathscr{O}_Y$–módulos y $\mathscr{O}' \to \mathscr{O}$ es un homomorfismo de haces de k–álgebras conmutativas.
El conjunto $\mathrm{Exalcom}_k(\mathscr{O}_Y, \mathscr{E})$ de clases de equivalencia de extensiones es, de forma natural,

un grupo abeliano, [Gro64, Chap.0, 18.3.4, 18.4.1].
En este sentido, consideramos que el haz de k–álgebras conmutativas de estructura de una cuerda $\widetilde{Y}$ sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$ está determinado, salvo equivalencia de extensiones de k–álgebras conmutativas.
Es claro que la demostración del Teorema 1.1.6 establece un isomorfismo entre el subgrupo de $\mathrm{Exalcom}_k(\mathscr{O}_Y, \mathscr{E})$ formado por las clases con representantes $\mathscr{O}$ tales que $(Y, \mathscr{O})$ es un esquema (y por tanto una cuerda sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$) y $\mathrm{Ext}^1_Y(\Omega_Y, \mathscr{E})$. Veamos esto. En primer lugar, este subconjunto de $\mathrm{Exalcom}_k(\mathscr{O}_Y, \mathscr{E})$ es un subgrupo puesto que (véase el Lema 3.3.1): la suma de extensiones correspondientes a los esquemas $\widetilde{Y}_1$ y $\widetilde{Y}_2$ es el haz de estructura del esquema $\widetilde{Y}_1 \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y}_2$. El opuesto de una clase que corresponde a una cuerda es una cuerda isomorfa, pero no equivalente, obtenida de la extensión opuesta $0 \to \mathscr{E} \overset{-j}{\to} \Omega_{\widetilde{Y}}|_Y \to \Omega_Y \to 0$. La extensión trivial define la cuerda escindida.
En segundo lugar, equivalencia de extensiones de k–álgebras corresponde a equivalencia de extensiones de $\mathscr{O}_Y$–módulos. En efecto, en un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r, "\widetilde{j}"] \arrow[d, equal] & \mathscr{O} \arrow[r, "\widetilde{p}"] \arrow[d] & \mathscr{O}_Y \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{d}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r, "j"] & \mathscr{G} \arrow[r, "p"] & \Omega_Y \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{1.1.7.2}$$

el cuadrado derecho es couniversal y se tiene un único diagrama conmutativo y exacto de haces de k–módulos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r, "\widetilde{j}"] \arrow[d, equal] & \mathscr{O} \arrow[r, "\widetilde{p}"] \arrow[d] & \mathscr{O}_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r] & \mathscr{O}_{\widetilde{Y}} \arrow[r] & \mathscr{O}_Y \arrow[r] & 0, \end{tikzcd} \tag{1.1.7.3}$$

donde $\mathscr{O}_{\widetilde{Y}} = \{(c, s) \in \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{G} \mid \mathrm{d}c = ps\}$, como en (1.1.6.3). La aplicación $\mathscr{O} \to \mathscr{O}_{\widetilde{Y}}$ es un homomorfismo de haces de anillos, de forma que el diagrama (1.1.7.3) muestra que ambas extensiones son equivalentes.
De forma más general si una extensión del tipo (1.1.7.1) aparece en un diagrama conmutativo y exacto de haces de k–módulos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r, "\widetilde{j}'"] \arrow[d, equal] & \mathscr{O}' \arrow[r, "\widetilde{p}'"] \arrow[d] & \mathscr{O}_Y \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{d}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r, "j'"] & \mathscr{G}' \arrow[r, "p'"] & \Omega_Y \arrow[r] & 0, \end{tikzcd} \tag{1.1.7.4}$$

donde la fila exacta inferior representa la misma clase en $\mathrm{Ext}^1_Y(\Omega_Y, \mathscr{E})$ que la fila exacta inferior de (1.1.7.2), es decir existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r, "j'"] \arrow[d, equal] & \mathscr{G}' \arrow[r, "p'"] \arrow[d] & \Omega_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r, "j"] & \mathscr{G} \arrow[r, "p"] & \Omega_Y \arrow[r] & 0, \end{tikzcd} \tag{1.1.7.5}$$

entonces (1.1.7.2) y (1.1.7.4) son couniversales y, por tanto, existe un único diagrama conmutativo de k–módulos

(1.1.7.6)
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r, "\widetilde{j}'"] \arrow[d, equal] & \mathscr{O}' \arrow[r, "\widetilde{p}'"] \arrow[d, "\gamma"] & \mathscr{O}_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r, "\widetilde{j}"] & \mathscr{O} \arrow[r, "\widetilde{p}"] & \mathscr{O}_Y \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Ahora bien, el homomorfismo de haces de k–módulos $\mathscr{O}' \xrightarrow{\gamma} \mathscr{O}$ es un isomorfismo y es un homomorfismo de álgebras. Recíprocamente a partir de una equivalencia como (1.1.7.6), del hecho que $\mathscr{O}' \to \mathscr{G}'$ es la derivación k–lineal universal de $\mathscr{O}'$ en un $\mathscr{O}_Y$–módulo, obtenemos un diagrama como (1.1.7.5). □

Corolario 1.1.8. *Si Y es una variedad afín lisa sobre k, entonces cada cuerda sobre Y es escindida.*

Dem. En este caso Ω_Y es un $\mathscr{O}_Y$–módulo proyectivo, en consecuencia $\operatorname{Ext}^1(\Omega_Y, \mathscr{E}) = 0$. □

1.2. Caracterización de cuerdas sumergidas

El siguiente resultado caracteriza cuerdas sumergidas en una variedad lisa en términos de subfibrados del fibrado normal de la subvariedad reducida soporte.

Proposición 1.2.1. *Definir una cuerda sumergida $\widetilde{Y}$, con fibrado conormal $\mathscr{E}$, sobre una subvariedad cerrada, lisa e irreducible Y de una variedad lisa e irreducible Z equivale a dar un subfibrado de $\mathscr{N}_{Y,Z}$ con fibrado dual isomorfo a $\mathscr{E}$. El ideal de $\widetilde{Y}$ en Z es el núcleo del homomorfismo compuesto sobreyectivo $\mathscr{I}_{Y,Z} \twoheadrightarrow \mathscr{I}_{Y,Z}/\mathscr{I}^2_{Y,Z} \twoheadrightarrow \mathscr{E}$.*

Dem. Si $\mathscr{K} \subset \mathscr{N}_{Y,Z}$ es un subfibrado con $\mathscr{K}^* \simeq \mathscr{E}$ entonces se tiene un epimorfismo $\mathscr{I}_{Y,Z}/\mathscr{I}^2_{Y,Z} \twoheadrightarrow \mathscr{E}$. Sea $\mathscr{J}$ el núcleo del homomorfismo compuesto sobreyectivo $\mathscr{I}_{Y,Z} \twoheadrightarrow \mathscr{I}_{Y,Z}/\mathscr{I}^2_{Y,Z} \twoheadrightarrow \mathscr{E}$. El ideal $\mathscr{J}$ define un subesquema cerrado $\widetilde{Y} \subset Z$. De las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \mathscr{J} \longrightarrow \mathscr{I} \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow 0$$

y

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{I}/\mathscr{J} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{O}_Z/\mathscr{J} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{O}_Z/\mathscr{I} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r] & \mathscr{O}_{\widetilde{Y}} \arrow[r] & \mathscr{O}_Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

se deduce que el ideal que define a Y como subesquema cerrado de $\widetilde{Y}$ es $\mathscr{E}$. Puesto que $\mathscr{E}^2 = (\mathscr{I}/\mathscr{J})^2 = 0$, por construcción de $\mathscr{J}$, vemos que $\widetilde{Y}$ es una cuerda sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$ sumergida en Z.
Recíprocamente, sea $\widetilde{Y}$ una cuerda sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$ sumergida en Z. Por definición de cuerda $\mathscr{I}^2_{Y,\widetilde{Y}} = (\mathscr{I}_{Y,Z}/\mathscr{I}_{\widetilde{Y},Z})^2 = 0$. Así $\mathscr{I}^2_{Y,Z} \subset \mathscr{I}_{\widetilde{Y},Z}$ y, en consecuencia, $\mathscr{I}_{Y,Z}/\mathscr{I}^2_{Y,Z}$ se aplica de forma sobreyectiva en $\mathscr{I}_{Y,Z}/\mathscr{I}_{\widetilde{Y},Z} = \mathscr{I}_{Y,\widetilde{Y}}$ que, por definición, es el haz localmente libre $\mathscr{E}$. □

1.3. Morfismos de una cuerda a un esquema

Los morfismos de una cuerda $\widetilde{Y}$ a un esquema Z pueden ser descritos en términos del morfismo inducido $Y \xrightarrow{i} Z$. Fijado un morfismo $Y \xrightarrow{i} Z$ denotaremos $i^*\Omega_Z \xrightarrow{\mathrm{D}i} \Omega_Y$ el homomorfismo inducido en los haces de diferenciales y también denotaremos

$$\mathrm{Ext}^1_Y(\Omega_Y, \mathscr{E}) \xrightarrow{\mathrm{D}i} \mathrm{Ext}^1_Y(i^*\Omega_Z, \mathscr{E})$$

el homomorfismo inducido en los grupos de clases de extensiones.

Proposición 1.3.1. *Sean Y un esquema reducido y conexo y $\mathscr{E}$ un haz localmente libre de rango finito en Y. Sea $\widetilde{Y}$ una cuerda sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$. Sea $Y \xrightarrow{i} Z$ un morfismo de Y a un esquema Z. Los morfismos $\widetilde{Y} \xrightarrow{\tilde{i}} Z$ extensión del morfismo dado $Y \xrightarrow{i} Z$ están en correspondencia biyectiva con las escisiones de la extensión cuya clase es la imagen de $[e_{\widetilde{Y}}]$ por la aplicación $\mathrm{Ext}^1_Y(\Omega_Y, \mathscr{E}) \xrightarrow{\mathrm{D}i} \mathrm{Ext}^1_Y(i^*\Omega_Z, \mathscr{E})$, i.e., de las escisiones de la sucesión exacta superior en el diagrama couniversal*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{P} \arrow[r] \arrow[d] & i^*\Omega_Z \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{D}i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r, "j"] & \Omega_{\widetilde{Y}}|_Y \arrow[r, "p"] & \Omega_Y \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

o, de forma equivalente, están en biyección los homomorfismos $i^*\Omega_Z \xrightarrow{\omega} \Omega_{\widetilde{Y}}|_Y$ que hacen conmutativo el diagrama

(1.3.1.1)
$$\begin{tikzcd}
 & & & i^*\Omega_Z \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "\mathrm{D}i"] & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r, "j"] & \Omega_{\widetilde{Y}}|_Y \arrow[r, "p"] & \Omega_Y \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

En particular un morfismo extensión existe si, y sólo si, $\mathrm{D}i([e_{\widetilde{Y}}]) = 0$.

Dem. Un morfismo extensión $\widetilde{Y} \xrightarrow{\tilde{i}} Z$ es un homomorfismo $\mathscr{O}_Z \xrightarrow{\tilde{i}^\sharp} i_*\mathscr{O}_{\widetilde{Y}}$ de k–álgebras que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_Z \arrow[r, "\tilde{i}^\sharp"] \arrow[dr, "i^\sharp"'] & i_*\mathscr{O}_{\widetilde{Y}} \arrow[d] \\
 & i_*\mathscr{O}_Y.
\end{tikzcd}$$

Puesto que i_* es exacto a izquierda y $\mathscr{O}_{\widetilde{Y}}$ está definido por el diagrama couniversal

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_{\widetilde{Y}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{O}_Y \arrow[d, "\mathrm{d}"] \\
\Omega_{\widetilde{Y}}|_Y \arrow[r, "p"] & \Omega_Y,
\end{tikzcd}$$

también

$$\begin{tikzcd}
i_*\mathscr{O}_{\widetilde{Y}} \arrow[r] \arrow[d] & i_*\mathscr{O}_Y \arrow[d, "i_*\mathrm{d}"] \\
i_*\Omega_{\widetilde{Y}}|_Y \arrow[r, "i_*p"] & i_*\Omega_Y
\end{tikzcd}$$

es un diagrama couniversal. En consecuencia, los homomorfismos de k–álgebras buscados $\mathscr{O}_Z \xrightarrow{\widetilde{i}^\sharp} i_*\mathscr{O}_{\widetilde{Y}}$, corresponden biyectivamente con las derivaciones de haces $\mathscr{O}_Z \xrightarrow{\mathrm{d}'} i_*\Omega_{\widetilde{Y}}|_Y$ que extienden a la derivación $\mathscr{O}_Z \xrightarrow{i^\sharp} i_*\mathscr{O}_Y \xrightarrow{i_*\mathrm{d}} i_*\Omega_Y$. Estas derivaciones corresponden de modo biyectivo con homomorfismos de haces de módulos $\Omega_Z \xrightarrow{\omega^\flat} i_*\Omega_{\widetilde{Y}}|_Y$ que hacen conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_Z \arrow[rrd, bend left, "i^\sharp"] \arrow[rd, "\widetilde{i}^\sharp"] \arrow[rdd, "\mathrm{d}'"'] \arrow[dd] & & \\
& i_*\mathscr{O}_{\widetilde{Y}} \arrow[r] \arrow[d] & i_*\mathscr{O}_Y \arrow[d, "i_*\mathrm{d}"] \\
\Omega_Z \arrow[r, "\omega^\flat"] & i_*\Omega_{\widetilde{Y}}|_Y \arrow[r, "i_*p"] & i_*\Omega_Y.
\end{tikzcd}$$

Por el isomorfismo de adjunción, estos homomorfismos $\omega^\flat$ están en biyección con los homomorfismos $i^*\Omega_Z \xrightarrow{\omega} \Omega_{\widetilde{Y}}|_Y$ que hacen conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& i^*\Omega_Z \arrow[ld, "\omega"'] \arrow[d, "\mathrm{D}i"] \\
\Omega_{\widetilde{Y}}|_Y \arrow[r, "p"'] & \Omega_Y.
\end{tikzcd}$$

□

En la siguiente observación escribimos la fórmula local (1.3.2.4) (que no aparece de forma explícita en la referencia [BE95]) de un homomorfismo extensión $\mathscr{O}_Z \xrightarrow{\widetilde{i}^\sharp} i_*\mathscr{O}_{\widetilde{Y}}$, que será usada en la demostración de algunos resultados de los siguientes capítulos.

Observación 1.3.2. Sean Y un esquema reducido y conexo y Z un esquema. Sea $\mathscr{E}$ un haz localmente libre de rango $n-1$ en Y.
Las secciones, sobre un abierto $U \subset Y$, del álgebra de la n–cuerda $\widetilde{Y}$ con clase extensión $[e]$, donde e es la sucesión exacta $0 \to \mathscr{E} \xrightarrow{j} \mathscr{G} \xrightarrow{p} \Omega_Y \to 0$, son

(1.3.2.1) $$\mathscr{O}_{\widetilde{Y}} = \{(c,s) \in \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{G} \,|\, \mathrm{d}c = ps\},$$

con estructura de k–álgebra definida por $(c,s)(c',s') = (c\,c', c\,s' + c's)$.
Sea $Y \xrightarrow{i} Z$ un morfismo. El morfismo extensión $\widetilde{Y} \xrightarrow{\widetilde{i}} Z$ asociado a un diagrama conmutativo

(1.3.2.2) $$\begin{tikzcd}
& & & i^*\Omega_Z \arrow[ld, "\omega"'] \arrow[d, "\mathrm{D}i"] & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r, "j"] & \mathscr{G} \arrow[r, "p"] & \Omega_Y \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

está definido por el único homomorfismo de álgebras $\mathscr{O}_Z \xrightarrow{\widetilde{i}^\sharp} i_*\mathscr{O}_{\widetilde{Y}}$ que hace conmutativo el diagrama

(1.3.2.3)
$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_Z \arrow[dr, "\widetilde{i}^\sharp"] \arrow[drr, bend left, "i^\sharp"] \arrow[dd] & & \\
& i_*\mathscr{O}_{\widetilde{Y}} \arrow[r] \arrow[d] & i_*\mathscr{O}_Y \arrow[d, "i_*\mathrm{d}"] \\
\Omega_Z \arrow[r, "\omega^\flat"] & i_*\mathscr{G} \arrow[r, "i_*p"] & i_*\Omega_Y,
\end{tikzcd}$$

donde $\omega^\flat$ corresponde a ω por el isomorfismo de adjunción.
Si $W \subset Z$ y $U \subset Y$ son abiertos afines con $U \subset i^{-1}W$ y a es una sección de $\mathscr{O}_Z$ sobre W entonces, según (1.3.2.3), la aplicación $\widetilde{i}^\sharp$ se escribe en la forma

(1.3.2.4)
$$\widetilde{i}^\sharp a = (i^\sharp a,\ \omega(\mathrm{d}a \otimes 1)).$$

Observación 1.3.3. El objetivo de esta observación es comparar el punto de vista adoptado en [BE95] respecto del problema de extensión de morfismos $Y \to Z$ a cintas $\widetilde{Y}$ sobre Y, que resuelve el problema para un esquema arbitrario Z, con el tratamiento que A. Grothendieck, en [G$^+$71, III, 5], adopta en el problema de prolongamiento infinitesimal global de morfismos, en el caso en que Z es liso. Estos comentarios se incluyen a modo de ilustración, y no serán usados más adelante.
Conservando nuestras notaciones, el resultado obtenido en [G$^+$71, III, 5] es como sigue. Fijemos esquemas Z e $\widetilde{Y}$ (en general sobre un esquema base S, que en nuestro caso es el espectro del cuerpo base k). Sean Y un subesquema cerrado de $\widetilde{Y}$ definido por un ideal $\mathscr{I}$ de cuadrado nulo e i un S–morfismo $Y \xrightarrow{i} Z$. Sea $\mathscr{P}$ el haz de conjuntos sobre $\widetilde{Y}$ cuyas secciones sobre un abierto $\widetilde{U}$ son los S–morfismos $\widetilde{U} \to Z$ extensión de $i|_U$, donde $U = \widetilde{U} \cap Y$. Entonces $\mathscr{P}$ es un haz formalmente principal homogéneo bajo el haz en grupos conmutativos
$$\mathfrak{G} = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(i^*\Omega_{Z/S}, \mathscr{I}).$$
Es decir, para todo $y \in Y$ el conjunto $\mathscr{P}_y$ es vacío o un espacio principal homogéneo bajo el grupo ordinario $\mathfrak{G}_y$. De forma equivalente, para cada abierto U el conjunto $\mathscr{P}(U)$ es vacío o un espacio principal homogéneo bajo el grupo ordinario $\mathfrak{G}(U)$. Esto es, $\mathfrak{G}$ actúa sobre $\mathscr{P}$ (digamos a la derecha) de forma que si $\mathscr{P}(U)$ es no vacío, para cada elemento $\widetilde{i} \in \mathscr{P}(U)$ la aplicación $\mathfrak{G}(U) \to \mathscr{P}(U)$ inducida por $\widetilde{i}$ sea biyectiva. Si todos los $\mathscr{P}_y$ son no vacíos, se dice que $\mathscr{P}$ es un haz principal homogéneo bajo $\mathfrak{G}$, o torsor bajo $\mathfrak{G}$.
El conjunto de clases, salvo isomorfismo, de haces principales homogéneos bajo $\mathfrak{G}$ se identifica con el conjunto (grupo de cohomología, puesto que $\mathfrak{G}$ es un haz de grupos conmutativos) de cohomología $H^1(Y, \mathfrak{G})$. En consecuencia, todo $\mathscr{P}$ principal homogéneo determina una clase de cohomología $c(\mathscr{P}) \in H^1(Y, \mathfrak{G})$, cuya trivialidad es necesaria y suficiente para que $\mathscr{P}$ sea trivial (i.e. isomorfo a $\mathfrak{G}$, sobre el que $\mathfrak{G}$ opera por traslaciones a derecha) o, de forma equivalente, para que $\mathscr{P}$ tenga una sección global, es decir, para que $Y \xrightarrow{i} Z$ admita una extensión a un S–morfismo $\widetilde{Y} \xrightarrow{\widetilde{i}} Z$.

Si Z es liso sobre S (al menos en los puntos de $i(Y)$) entonces $\mathscr{P}$ es un torsor bajo $\mathfrak{G}$. En este caso, la clase de cohomología $c(\mathscr{P}) \in H^1(Y, \mathfrak{G})$ se anula, si, y sólo si, el conjunto $\mathscr{P}(Y)$ de extensiones del morfismo i a S–morfismos $\widetilde{Y} \to Z$ es no vacío y, si este conjunto es no vacío, es un espacio homogéneo bajo el grupo $H^0(Y, \mathfrak{G})$.
Comparemos con el punto de vista adoptado en [BE95]. Recordemos que en la inclusión $H^1(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(i^*\Omega_Z, \mathscr{E})) \subset \operatorname{Ext}^1(i^*\Omega_Z, \mathscr{E})$, obtenida de la sucesión espectral de Ext's locales y globales, el subespacio $H^1(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(i^*\Omega_Z, \mathscr{E}))$ clasifica clases de extensiones de $i^*\Omega_Z$ por $\mathscr{E}$ localmente escindidas (triviales). En el resultado de [G$^+$71, III, 5] la existencia de la clase de cohomología en $H^1(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(i^*\Omega_Z, \mathscr{E}))$ cuya anulación equivale a la existencia de un morfismo extensión global, está asegurada bajo la hipótesis de ser Z liso. En este caso, $i^*\Omega_Z$ es localmente libre y, en consecuencia, la inclusión $H^1(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(i^*\Omega_Z, \mathscr{E})) \subset \operatorname{Ext}^1(i^*\Omega_Z, \mathscr{E})$ es un isomorfismo, lo que muestra la equivalencia de ambos acercamientos al problema. Podemos considerar el punto de vista adoptado en [BE95] más adecuado en el sentido de que determina una clase de cohomología, cuya trivialidad equivale a la existencia de una extensión, sin la hipótesis de la lisitud del espacio de llegada. Si bien el resultado se muestra eficaz si esta clase es calculable. Circunstancia que suele requerir la trivialidad local, es decir, suponer que la clase es un elemento de $H^1(Y, \mathfrak{G})$.

Capítulo 2

Espacios que parametrizan extensiones infinitesimales de morfismos

Como hemos mencionado en la introducción, nuestro objetivo es construir alisamientos para cintas sobre una curva sumergidas en cierto espacio proyectivo. Previamente habremos obtenido un resultado de inmersión en el mismo espacio proyectivo de todas las cintas con un fibrado conormal fijado. Este resultado requiere considerar las extensiones de la inclusión de la curva base Y en el espacio proyectivo ambiente $\mathbb{P}^r$ a cualquier cinta con fibrado conormal fijado $\mathscr{E}$, i.e., clasificar los pares formados por una cinta y un morfismo extensión. En la identificación del espacio $\mathrm{Hom}(\mathscr{N}^*_{Y,\mathbb{P}^r}, \mathscr{E})$ como el espacio que parametriza estos pares residen la novedad y la importancia del resultado de la primera sección este capítulo.
La segunda sección está dedicada a describir un espacio clasificador $D(X, \varphi)$ para las deformaciones infinitesimales, localmente triviales, de un morfismo $X \xrightarrow{\varphi} Z$. Este espacio es bien conocido en el contexto de la variedades diferenciables complejas (véase [Hor74, 4.2]). La novedad reside en que, siguiendo nuestra estrategia, el acercamiento al problema no es local (pegando deformaciones triviales para obtener la deformación global si la clase cohomológica de obstrucción se anula). El acercamiento al problema es global, considerando una deformación infinitesimal como una cinta con fibrado conormal trivial y argumentando como en la primera sección del capítulo. Estrategia que resulta especialmente importante puesto que, en primer lugar, permite enunciar el resultado en el contexto algebraico general de un morfismo $X \xrightarrow{\varphi} Z$ donde X es un esquema reducido y conexo y Z es un esquema, y, en segundo lugar y más importante para nuestro trabajo, conecta con el resultado de la primera sección para ser aplicados en la teoría infinitesimal del capítulo tercero.

2.1. Extensiones de una inmersión cerrada a cuerdas

Sea Y una subvariedad cerrada lisa e irreducible de una variedad lisa e irreducible Z. Denotemos $Y \overset{i}{\hookrightarrow} Z$ la inmersión cerrada. En esta situación, la sucesión cotangente restringida de Y en Z es exacta a la izquierda

$$0 \longrightarrow \mathscr{N}^*_{Y,Z} \longrightarrow i^*\Omega_Z \xrightarrow{\mathrm{D}i} \Omega_Y \longrightarrow 0. \tag{2.1.0.1}$$

Aplicando el functor $\mathrm{Hom}_Y(-, \mathscr{E})$ a la sucesión (2.1.0.1) obtenemos una sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}(i^*\Omega_Z, \mathscr{E}) \to \mathrm{Hom}(\mathscr{N}^*_{Y,Z}, \mathscr{E}) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1(\Omega_Y, \mathscr{E}) \xrightarrow{\mathrm{D}i} \mathrm{Ext}^1(i^*\Omega_Z, \mathscr{E}). \tag{2.1.0.2}$$

Consideremos una cuerda $\widetilde{Y}$ sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$ y su clase extensión

$$[e_{\widetilde{Y}}] \in \mathrm{Ext}^1_Y(\Omega_Y, \mathscr{E}).$$

Según la Proposición 1.3.1 un morfismo $\widetilde{Y} \xrightarrow{\widetilde{i}} Z$ extensión de $Y \xrightarrow{i} Z$ existe si, y sólo si,

$$\mathrm{D}i([e_{\widetilde{Y}}]) = 0.$$

En consecuencia, de la exactitud de la sucesión (2.1.0.2) se deduce que un morfismo $\widetilde{Y} \xrightarrow{\widetilde{i}} Z$ extensión de $Y \xrightarrow{i} Z$ existe si, y sólo si, $[e_{\widetilde{Y}}]$ admite un levantamiento por δ a un elemento

$$\tau \in \mathrm{Hom}(\mathscr{N}^*_{Y,Z}, \mathscr{E}).$$

El siguiente resultado nos dice que las extensiones de i a $\widetilde{Y}$ están en correspondencia biyectiva con los levantamientos de $[e_{\widetilde{Y}}]$.

Proposición 2.1.1. *Sea Y una subvariedad cerrada lisa e irreducible de una variedad lisa e irreducible Z. Sea $Y \overset{i}{\hookrightarrow} Z$ la inmersión cerrada. Sea $\mathscr{E}$ un haz localmente libre de rango $n-1$ sobre Y.*

1. *Existe una biyección entre pares $(\widetilde{Y}, \widetilde{i})$, donde $\widetilde{Y}$ es una n–cuerda sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$ e $\widetilde{Y} \xrightarrow{\widetilde{i}} Z$ es un morfismo extensión de $Y \overset{i}{\hookrightarrow} Z$ y elementos $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathscr{N}^*_{Y,Z}, \mathscr{E})$. Además, si τ e $(\widetilde{Y}, \widetilde{i})$ están en correspondencia entonces $\delta\tau = [e_{\widetilde{Y}}]$. Dos pares son isomorfos sobre Y si, y sólo si, los elementos correspondientes están en la misma órbita por la acción de los automorfismos de $\mathscr{E}$ en $\mathrm{Hom}(\mathscr{N}^*_{Y,Z}, \mathscr{E})$.*

2. *El subesquema imagen del morfismo $\widetilde{i}$ inducido por τ tiene ideal en Z igual al núcleo del homomorfismo composición $\mathscr{I}_{Y,Z} \to \mathscr{N}^*_{Y,Z} \xrightarrow{\tau} \mathscr{E}$. Por otra parte, $\widetilde{i}$ es una inmersión cerrada si, y sólo si, τ es sobreyectivo.*

Dem. Sean e una extensión $0 \to \mathscr{E} \xrightarrow{j} \mathscr{G} \xrightarrow{p} \Omega_Y \to 0$ e $i^*\Omega_Z \xrightarrow{\omega} \mathscr{G}$ un homomorfismo en un diagrama conmutativo

(2.1.1.1)
$$\begin{tikzcd}
 & & & i^*\Omega_Z \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "\mathrm{D}i"] & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r, "j"] & \mathscr{G} \arrow[r, "p"] & \Omega_Y \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Definimos una relación de equivalencia como sigue: $(e_1, \omega_1) \sim (e_2, \omega_2)$ si, y sólo si, existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & & i^*\Omega_Z \arrow[dl, "\omega_1"'] \arrow[ddl, "\omega_2"] \arrow[d, "\mathrm{D}i"] & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r, "j_1"'] \arrow[d, equal] & \mathscr{G}_1 \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d] & \Omega_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r, "j_2"] & \mathscr{G}_2 \arrow[r, "p_2"] & \Omega_Y \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

A partir de la Proposición 1.3.1 obtenemos una biyección entre pares extensión $(\widetilde{Y}, \widetilde{i})$ y clases de equivalencia $[(e, \omega)]$. Además, dos pares son isomorfos si, y sólo si, las clases correspondientes están en la misma órbita por la acción de los automorfismos de $\mathscr{E}$ en $\mathrm{Ext}^1(\Omega_Y, \mathscr{E})$.
En efecto, si $\mathscr{E}'$ es un haz localmente libre sobre Y y (e', ω') es un par formado por una extensión y un homomorfismo en un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & & i^*\Omega_Z \arrow[dl, "\omega'"'] \arrow[d, "\mathrm{D}i"] & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{E}' \arrow[r, "j'"] & \mathscr{G}' \arrow[r, "p'"] & \Omega_Y \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

definimos un morfismo $(e, \omega) \to (e', \omega')$ por los datos en el siguiente diagrama conmutativo

(2.1.1.2)
$$\begin{tikzcd}
 & & & i^*\Omega_Z \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[ddl, "\omega'"] \arrow[d, "\mathrm{D}i"] & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r, "j"'] \arrow[d, "\xi"'] & \mathscr{G} \arrow[r, "p"'] \arrow[d, "\gamma"'] & \Omega_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{E}' \arrow[r, "j'"] & \mathscr{G}' \arrow[r, "p'"] & \Omega_Y \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Denotemos $(\widetilde{Y}', \widetilde{i}')$ una extensión de i a una cuerda con fibrado conormal $\mathscr{E}'$. Entonces a un morfismo $(e, \omega) \to (e', \omega')$ le corresponde un morfismo de pares extensión $(\widetilde{Y}', \widetilde{i}') \to (\widetilde{Y}, \widetilde{i})$ y recíprocamente, a un morfismo $(\widetilde{Y}', \widetilde{i}') \to (\widetilde{Y}, \widetilde{i})$ le corresponde un diagrama como (2.1.1.2) con $\mathscr{G} = \Omega_{\widetilde{Y}}|_Y$ y $\mathscr{G}' = \Omega_{\widetilde{Y}'}|_Y$. En efecto, un morfismo $\widetilde{Y}' \xrightarrow{\alpha} \widetilde{Y}$ extensión de la inclusión $Y \hookrightarrow \widetilde{Y}$ equivale, según la Proposición 1.3.1, a un homomorfismo $\Omega_{\widetilde{Y}}|_Y \xrightarrow{\mathrm{D}\alpha|_Y} \Omega_{\widetilde{Y}'}|_Y$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & & \Omega_{\widetilde{Y}}|_Y \arrow[dl, "\mathrm{D}\alpha|_Y"'] \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{E}' \arrow[r] & \Omega_{\widetilde{Y}'}|_Y \arrow[r] & \Omega_Y \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Ahora el morfismo composición $\widetilde{Y}' \xrightarrow{\alpha} \widetilde{Y} \xrightarrow{\widetilde{i}} Z$ es igual a $\widetilde{Y}' \xrightarrow{\widetilde{i}'} Z$ si, y sólo si, la composición de homomorfismos de álgebras $\mathscr{O}_Z \xrightarrow{\widetilde{i}^\sharp} i_*\mathscr{O}_{\widetilde{Y}} \xrightarrow{i_*\alpha^\sharp} i_*\mathscr{O}_{\widetilde{Y}'}$ es igual a $\mathscr{O}_Z \xrightarrow{\widetilde{i}'^\sharp} i_*\mathscr{O}_{\widetilde{Y}'}$. La última igualdad de homomorfismos de álgebras equivale a la igualdad del homomorfismo composición $i^*\Omega_Z \xrightarrow{\mathrm{D}\widetilde{i}|_Y} \Omega_{\widetilde{Y}}|_Y \xrightarrow{\mathrm{D}\alpha|_Y} \Omega_{\widetilde{Y}'}|_Y$ y el homomorfismo $i^*\Omega_Z \xrightarrow{\mathrm{D}\widetilde{i}'|_Y} \Omega_{\widetilde{Y}'}|_Y$, es decir a la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & & i^*\Omega_Z \arrow[dl, "\mathrm{D}\widetilde{i}|_Y"'] \arrow[d, "\mathrm{D}i"] \arrow[ddl, "\mathrm{D}\widetilde{i}'|_Y"] & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r] \arrow[d, "\xi"'] & \Omega_{\widetilde{Y}}|_Y \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{D}\alpha|_Y"'] & \Omega_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{E}' \arrow[r] & \Omega_{\widetilde{Y}'}|_Y \arrow[r] & \Omega_Y \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde $\mathscr{E} \xrightarrow{\xi} \mathscr{E}'$ es el homomorfismo inducido en los núcleos por $\Omega_{\widetilde{Y}}|_Y \xrightarrow{\mathrm{D}\alpha|_Y} \Omega_{\widetilde{Y}'}|_Y$. Además, $\widetilde{Y}' \xrightarrow{\alpha} \widetilde{Y}$ es un isomorfismo sii $\Omega_{\widetilde{Y}}|_Y \xrightarrow{\mathrm{D}\alpha|_Y} \Omega_{\widetilde{Y}'}|_Y$ es un isomorfismo sii $\mathscr{E} \xrightarrow{\xi} \mathscr{E}'$ es un isomorfismo.
Para probar la primera parte de 2.1.1 establecemos una biyección, compatible con la acción de los automorfismos de $\mathscr{E}$, entre homomorfismos $\mathscr{N}^*_{Y,Z} \xrightarrow{\tau} \mathscr{E}$ y clases $[(e,\omega)]$, como sigue: Sea $\mathscr{N}^*_{Y,Z} \xrightarrow{\tau} \mathscr{E}$ un homomorfismo, recordemos que la clase extensión $\delta\tau \in \operatorname{Ext}^1(\Omega_Y, \mathscr{E})$ está representada por la fila exacta inferior en el diagrama universal:

(2.1.1.3)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{N}^*_{Y,Z} \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "\tau"'] & i^*\Omega_Z \arrow[r, "\mathrm{D}i"] \arrow[d, "\omega_\tau"] & \Omega_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r, "j"] & \frac{\mathscr{E}\oplus i^*\Omega_Z}{\operatorname{im}(-\tau\oplus j')} \arrow[r, "p"] & \Omega_Y \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Denotemos

(2.1.1.4)
$$(i^*\Omega_Z)_\tau = \frac{\mathscr{E} \oplus i^*\Omega_Z}{\operatorname{im}(-\tau \oplus j')}$$

y e_τ la extensión $0 \to \mathscr{E} \xrightarrow{j} (i^*\Omega_Z)_\tau \xrightarrow{p} \Omega_Y \to 0$. De esta forma a cada homomorfismo $\mathscr{N}^*_{Y,Z} \xrightarrow{\tau} \mathscr{E}$ le asignamos el par (e_τ, ω_τ) definido por el diagrama conmutativo:

(2.1.1.5)
$$\begin{tikzcd}
 & & & i^*\Omega_Z \arrow[dl, "\omega_\tau"'] \arrow[d, "\mathrm{D}i"] & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r, "j"] & (i^*\Omega_Z)_\tau \arrow[r, "p"] & \Omega_Y \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

En sentido opuesto, fijemos un par (e,ω) definido por un diagrama como (2.1.1.1), entonces existe un único homomorfismo τ^ω que hace conmutativo el diagrama

(2.1.1.6)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{N}^*_{Y,Z} \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "\tau^\omega"'] & i^*\Omega_Z \arrow[r, "\mathrm{D}i"] \arrow[d, "\omega"] & \Omega_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r, "j"] & \mathscr{G} \arrow[r, "p"] & \Omega_Y \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

De este modo a cada par (e,ω) le asignamos un homomorfismo $\mathscr{N}^*_{Y,Z} \xrightarrow{\tau^\omega} \mathscr{E}$.
Es sencillo comprobar que si $(e_1,\omega_1) \sim (e_2,\omega_2)$ entonces $\tau^{\omega_1} = \tau^{\omega_2}$. También es inmediato, según (2.1.1.3), que $\tau = \tau^{(\omega_\tau)}$. Finalmente comprobamos que (e,ω) es equivalente a $(e_{\tau^\omega},\omega_{\tau^\omega})$ observando que la propiedad universal del objeto $(i^*\Omega_Z)_{\tau^\omega}$ implica que el diagrama (2.1.1.6), factoriza de modo único en un diagrama conmutativo y exacto

(2.1.1.7)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{N}^*_{Y,Z} \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "\tau^\omega"'] & i^*\Omega_Z \arrow[r, "\mathrm{D}i"] \arrow[d, "\omega_{\tau^\omega}"] & \Omega_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r] \arrow[d, equal] & (i^*\Omega_Z)_{\tau^\omega} \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r, "j"] & \mathscr{G} \arrow[r, "p"] & \Omega_Y \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Esto establece la biyección entre homomorfismos $\mathscr{N}^*_{Y,Z} \xrightarrow{\tau} \mathscr{E}$ y clases $[(e,\omega)]$. Es inmediato comprobar que esta biyección es compatible con la acción de los automorfismos $\mathscr{E}$ en ambos conjuntos. En consecuencia la primera parte de 2.1.1 está demostrada.
Demostremos ahora la segunda parte. Fijemos $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathscr{N}^*_{Y,Z},\mathscr{E})$ y sea $(\widetilde{Y},\widetilde{i})$ el par extensión definido por (e_τ,ω_τ) como en la primera parte. Denotemos por $\mathscr{J}$ el núcleo del homomorfismo de álgebras $\mathscr{O}_Z \xrightarrow{\widetilde{i}^\sharp} i_*\mathscr{O}_{\widetilde{Y}}$ asociado al morfismo $\widetilde{Y} \xrightarrow{\widetilde{i}} Z$. Según (1.3.2.1) y (1.3.2.4), con las notaciones de (2.1.1.3) y (2.1.1.4), localmente podemos escribir

(2.1.1.8)
$$\mathscr{O}_{\widetilde{Y}} = \{(c,[(r,t)]) \in \mathscr{O}_Y \oplus (i^*\Omega_Z)_\tau \,|\, \mathrm{d}c = \mathrm{D}i(t)\},$$

y

(2.1.1.9)
$$\widetilde{i}^\sharp a = (i^\sharp a,\, \omega_\tau(\mathrm{d}a \otimes 1)) = (i^\sharp a,\, [(0,\mathrm{d}a \otimes 1)]),$$

donde $a \in \mathscr{O}_Z$ es una sección sobre un abierto $W \subset Z$. De la fórmula (2.1.1.9) se deduce que $\mathscr{I}^2_{Y,Z} \subset \mathscr{J} \subset \mathscr{I}_{Y,Z}$.
Por otra parte, si denotamos la composición $\mathscr{I}_{Y,Z} \twoheadrightarrow \mathscr{N}^*_{Y,Z} \xrightarrow{\tau} \mathscr{E}$ también por $\mathscr{I}_{Y,Z} \xrightarrow{\tau} \mathscr{E}$ entonces el diagrama

(2.1.1.10)
$$\begin{tikzcd}
\mathscr{I}_{Y,Z} \arrow[r] \arrow[d, "\tau"'] & \mathscr{O}_Z \arrow[d, "\widetilde{i}^\sharp"] \\
\mathscr{E} \arrow[r] & \mathscr{O}_{\widetilde{Y}}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. En efecto, sea $a \in \mathscr{I}_{Y,Z}$ una sección local. La imagen de a por la composición $\mathscr{I}_{Y,Z} \to \mathscr{E} \to \mathscr{O}_{\widetilde{Y}}$ es el par $(0,[(\tau(\bar{a}),0)]) \in \mathscr{O}_{\widetilde{Y}}$, donde $\bar{a} \in \mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ y $\mathscr{O}_{\widetilde{Y}}$ está descrito por (2.1.1.8). Según la definición (2.1.1.4) de $(i^*\Omega_Z)_\tau$ y con las notaciones de (2.1.1.3), se verifica la igualdad $[(\tau(\bar{a}),0)] = [(0,j'(\bar{a}))]$. Ahora bien $a \in \mathscr{I}_{Y,Z}$, por tanto $i^\sharp a = 0$ y $j'(\bar{a}) = \mathrm{d}a \otimes 1$. Ahora (2.1.1.9) muestra que el diagrama (2.1.1.10) es conmutativo.

En consecuencia obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & \mathscr{J} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathscr{J} \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{I}_{Y,Z} \arrow[r] \arrow[d, "\tau"'] & \mathscr{O}_Z \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{i}^\sharp"] & \mathscr{O}_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r] & \mathscr{O}_{\widetilde{Y}} \arrow[r] & \mathscr{O}_Y \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Finalmente, el Lema de la Serpiente muestra que $\widetilde{i}^\sharp$ es sobreyectivo sii τ es sobreyectivo. $\square$

2.2. Deformaciones infinitesimales de un morfismo

Sea $X \xrightarrow{\varphi} Z$ un morfismo, donde X es un esquema reducido y conexo y Z es un esquema. Denotemos $\Delta = \operatorname{Spec} k[\epsilon]/\epsilon^2$. Estamos interesados en las deformaciones infinitesimales, localmente triviales, de primer orden del par (X, φ), i.e. Δ–morfismos $\widetilde{X} \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} Z \times \Delta$ cuya fibra central

$$\widetilde{X} \times_\Delta \operatorname{Spec} k[\epsilon]/\epsilon k[\epsilon] \xrightarrow{(\widetilde{\varphi})_0} Z \times \Delta \times_\Delta \operatorname{Spec} k[\epsilon]/\epsilon k[\epsilon]$$

es igual a $X \xrightarrow{\varphi} Z$, donde $\widetilde{X}$ es una deformación infinitesimal, *localmente trivial*, de primer orden de X.
Un espacio clasificador aparece descrito en [Hor74]. Sea $\mathscr{V} = (V)$ una cubierta abierta afín de X. Como de costumbre, denotamos $\mathscr{C}^0(\mathscr{V}, -)$ y $\mathscr{Z}^1(\mathscr{V}, -)$, respectivamente, el grupo de 0–cocadenas y 1–cociclos respecto de la cubierta $\mathscr{V}$ y δ la aplicación coborde.
Sea $\varphi^*\Omega_Z \xrightarrow{\mathrm{D}\varphi} \Omega_X$ el homomorfismo inducido por $X \xrightarrow{\varphi} Z$. Pongamos

(2.2.0.11)
$$D(X,\varphi) = \frac{\{(g,\rho) \in \mathscr{C}^0(\mathscr{V}, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\varphi^*\Omega_Z, \mathscr{O}_X)) \times \mathscr{Z}^1(\mathscr{V}, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\Omega_X, \mathscr{O}_X)) \mid \delta g = \rho\, \mathrm{D}\varphi\}}{\{(h\, \mathrm{D}\varphi, \delta h) \mid h \in \mathscr{C}^0(\mathscr{V}, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\Omega_X, \mathscr{O}_X))\}}.$$

Lema 2.2.1. [Hor74, 4.2] *Sea $X \xrightarrow{\varphi} Z$ un morfismo, donde X es un esquema reducido y conexo y Z es un esquema. Sea $D(X,\varphi)$ definido por* (2.2.0.11). *Entonces*

1. *$D(X,\varphi)$ no depende de la cubierta afín.*
2. *Se tienen dos sucesiones exactas*

$$\operatorname{Hom}(\Omega_X, \mathscr{O}_X) \xrightarrow{\mathrm{d}\varphi} \operatorname{Hom}(\varphi^*\Omega_Z, \mathscr{O}_X) \to D(X,\varphi) \to H^1(\mathscr{H}om(\Omega_X, \mathscr{O}_X)) \xrightarrow{\mathrm{d}\varphi} H^1(\mathscr{H}om(\varphi^*\Omega_Z, \mathscr{O}_X)),$$
$$0 \to H^1(\mathscr{H}om(\Omega_{X/Z}, \mathscr{O}_X)) \to D(X,\varphi) \to H^0(\mathscr{N}_\varphi) \to H^2(\mathscr{H}om(\Omega_{X/Z}, \mathscr{O}_X)),$$

donde $\mathscr{N}_\varphi$ denota el conúcleo de $\mathscr{H}om(\Omega_X, \mathscr{O}_X) \xrightarrow{\mathrm{d}\varphi} \mathscr{H}om(\varphi^*\Omega_Z, \mathscr{O}_X)$.
En particular, si la aplicación $\mathscr{H}om(\Omega_X, \mathscr{O}_X) \xrightarrow{\mathrm{d}\varphi} \mathscr{H}om(\varphi^*\Omega_Z, \mathscr{O}_X)$ es inyectiva entonces existe un isomorfismo natural $D(X,\varphi) \simeq H^0(\mathscr{N}_\varphi)$.

Observación 2.2.2. El contenido del Lema 2.2.1 es un hecho de carácter estrictamente cohomológico acerca de haces sobre X. La demostración dada en [Hor74, 4.2], en el contexto de variedades diferenciables complejas, es aún válida en el caso de un homomorfismo de haces casicoherentes $\mathscr{A} \xrightarrow{F} \mathscr{B}$ con núcleo y conúcleo, respectivamente, $\mathscr{K}$ y $\mathscr{N}$, sobre un esquema noetheriano separado X. Sea $\mathscr{V}$ una cubierta abierta de X. Ponemos

$$D(X, F; \mathscr{V}) = \frac{\{(g, \rho) \in \mathscr{C}^0(\mathscr{V}, \mathscr{B}) \times \mathscr{Z}^1(\mathscr{V}, \mathscr{A}) \mid \delta g = F\rho\}}{\{(Fh, \delta h) \mid h \in \mathscr{C}^0(\mathscr{V}, \mathscr{A})\}}$$

y

$$D(X, F) = \varinjlim_{\mathscr{V}} D(X, F; \mathscr{V}), \tag{2.2.2.1}$$

donde el límite directo se toma bajo refinamiento de cubiertas. Entonces para cada cubierta abierta *afín* $\mathscr{V}$ la aplicación natural $D(X, F; \mathscr{V}) \to D(X, F)$ es un isomorfismo. El punto clave es que toda cubierta abierta afín $\mathscr{V}$ es acíclica para haces casicoherentes. Dos sucesiones exactas, como en el Lema 2.2.1, se obtienen entonces

$$\begin{aligned} H^0(\mathscr{A}) \to H^0(\mathscr{B}) \to D(X, F) \to H^1(\mathscr{A}) \to H^1(\mathscr{B}), \\ 0 \to H^1(\mathscr{K}) \to D(X, F) \to H^0(\mathscr{N}) \to H^2(\mathscr{K}). \end{aligned}$$

□

En la próxima Proposición 2.2.5 probamos que el espacio $D(X, \varphi)$ clasifica las deformaciones infinitesimales, localmente triviales, de primer orden de φ, considerando una deformación infinitesimal de X como una cinta con fibrado conormal trivial. Este punto de vista en la prueba proporciona la fórmula (2.2.5.4) que usaremos más adelante. Necesitamos las siguientes observaciones

Observación 2.2.3. Sean X un esquema noetheriano separado y

$$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to \mathscr{F}' \to 0$$

una extensión de haces coherentes sobre X. Si la extensión es localmente escindida, i.e. existe una cubierta abierta $\mathscr{V}$ de X tal que la restricción a cada abierto de $\mathscr{V}$ es una extensión escindida, entonces la restricción de la extensión a todo abierto afín es escindida. En efecto, recordemos que la sucesión espectral de Ext's local y global proporciona una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H^1(\mathscr{H}om(\mathscr{F}', \mathscr{F})) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(\mathscr{F}', \mathscr{F}) \longrightarrow H^0(\mathscr{E}xt^1(\mathscr{F}', \mathscr{F})) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^2(\mathscr{H}om(\mathscr{F}', \mathscr{F})) \longrightarrow \operatorname{Ext}^2(\mathscr{F}', \mathscr{F})$$

Una extensión es localmente escindida sii su clase está en el subespacio $H^1(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}', \mathscr{F})) \subset \operatorname{Ext}^1_X(\mathscr{F}', \mathscr{F})$.

Supongamos que la extensión $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to \mathscr{F}' \to 0$ es localmente escindida en la cubierta $\mathscr{V}$. Sea $U \subset X$ un abierto afín. La extensión $0 \to \mathscr{F}|_U \to \mathscr{F}''|_U \to \mathscr{F}'|_U \to 0$ es localmente escindida en la cubierta abierta $\mathscr{V} \cap U$ de U. Ahora bien, la condición afín de U implica que $H^1(\mathscr{H}om(\mathscr{F}'|_U, \mathscr{F}|_U)) = 0$. En consecuencia, la extensión $0 \to \mathscr{F}|_U \to \mathscr{F}''|_U \to \mathscr{F}'|_U \to 0$ es escindida. □

Observación 2.2.4. Sean $\widetilde{M}$ un $k[\epsilon]$–módulo y $M = \widetilde{M}/\epsilon\widetilde{M}$. Está bien definida la aplicación $M \xrightarrow{\epsilon} \widetilde{M}$ y se verifica que $\widetilde{M}$ es plano sobre $k[\epsilon]$ sii la aplicación $M \xrightarrow{\epsilon} \widetilde{M}$ es inyectiva. □

Proposición 2.2.5. *Sea $X \xrightarrow{\varphi} Z$ un morfismo, donde X es un esquema reducido y conexo y Z es un esquema. Consideremos $D(X, \varphi)$ definido por* (2.2.0.11)*. Existe una correspondencia biyectiva entre pares $(\widetilde{X}, \widetilde{\varphi})$ salvo Δ–isomorfismo, donde $\widetilde{X}$ es una deformación infinitesimal, localmente trivial, de primer orden de X y $\widetilde{X} \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} Z \times \Delta$ es un Δ–morfismo con fibra central $X \xrightarrow{\varphi} Z$, y clases en $D(X, \varphi)$.*

Dem. Sea $\widetilde{X}$ una deformación infinitesimal de primer orden sobre X. En particular, por definición, $\widetilde{X}$ es un esquema plano sobre Δ. Por tanto, tensorizando con $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}$ la sucesión exacta de Δ–módulos

$$0 \longrightarrow k \xrightarrow{\ \epsilon\ } k[\epsilon] \longrightarrow k \longrightarrow 0,$$

se obtiene una sucesión exacta de $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}$–módulos:

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X \xrightarrow{\ \epsilon\ } \mathscr{O}_{\widetilde{X}} \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow 0.$$

Esta sucesión muestra que $\widetilde{X}$ es una cinta sobre X con fibrado conormal $\mathscr{O}_X$. Recíprocamente, sea $\widetilde{X}$ una cinta sobre X con fibrado conormal $\mathscr{O}_X$. El isomorfismo $\mathscr{O}_X = \mathscr{I}_{X,\widetilde{X}}$ induce una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}_{\widetilde{X}} \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow 0.$$

La imagen de la sección global $1 \in \mathscr{O}_X$ por la aplicación $\mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_{\widetilde{X}}$, define una estructura de Δ–esquema en $\widetilde{X}$. Por tanto, teniendo en cuenta la Observación 2.2.4, una cinta $\widetilde{X}$ sobre X con fibrado conormal $\mathscr{O}_X$ es un Δ–esquema plano con fibra central X, i.e. una deformación infinitesimal de primer orden de X.

Los Δ–morfismos $\widetilde{X} \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} Z \times \Delta$ están en biyección con los k–morfismos $\widetilde{X} \xrightarrow{\widehat{\varphi}} Z$. La biyección (obtenida de la propiedad universal del producto fibrado $Z \times \Delta$) es como sigue: a $\widetilde{\varphi}$ corresponde $\widehat{\varphi} = \theta\widetilde{\varphi}$, donde $Z \times \Delta \xrightarrow{\theta} Z$ es la proyección sobre el primer factor. Conviene expresar localmente la correspondencia $\widetilde{\varphi} \leftrightarrow \widehat{\varphi}$. El homomorfismo de álgebras $\mathscr{O}_Z \xrightarrow{\theta^\sharp} \mathscr{O}_Z \oplus \mathscr{O}_Z\epsilon$, asociado a la proyección $Z \times \Delta \xrightarrow{\theta} Z$, es la obvia inclusión como primer factor. Así,

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}^\sharp(a + a'\epsilon) &= \widetilde{\varphi}^\sharp(\theta^\sharp(a) + \theta^\sharp(a')\,\epsilon) \\ &= \widehat{\varphi}^\sharp(a) + \widehat{\varphi}^\sharp(a')\epsilon, \qquad \text{donde } a + a'\epsilon \in \mathscr{O}_Z \oplus \mathscr{O}_Z\epsilon. \end{aligned} \tag{2.2.5.1}$$

Sean $X \xrightarrow{i_X} \widetilde{X}$ y $Z \xrightarrow{i_Z} Z \times \Delta$ las inclusiones de X y Z, respectivamente, como fibras centrales de $\widetilde{X}$ y $Z \times \Delta$. Sea $(\widetilde{\varphi})_0$ el morfismo obtenido como fibra central de $\widetilde{\varphi}$, i.e., el único morfismo que hace conmutativo el diagrama

(2.2.5.2)
$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] & Z \times \Delta \\ X \arrow[u, "i_X"] \arrow[r, "(\widetilde{\varphi})_0"] & Z. \arrow[u, "i_Z"'] \end{tikzcd}$$

De la identidad $\theta i_Z = \mathrm{id}_Z$ y de (2.2.5.2) obtenemos la igualdad $\widehat{\varphi}\, i_X = (\widetilde{\varphi})_0$. Por tanto vemos que el Δ–morfismo $\widetilde{\varphi}$ es una extensión de φ, i.e. se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] & Z \times \Delta \\ X \arrow[u, "i_X"] \arrow[r, "\varphi"] & Z, \arrow[u, "i_Z"'] \end{tikzcd}$$

sii el k–morfismo $\widehat{\varphi}$ es una extensión de φ, i.e. se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[dr, "\widehat{\varphi}"] & \\ X \arrow[u, "i_X"] \arrow[r, "\varphi"] & Z. \end{tikzcd}$$

Ahora, argumentando como en el inicio de la demostración de la Proposición 2.1.1, establecemos una biyección entre pares $(\widetilde{X}, \widetilde{\varphi})$ salvo Δ–isomorfismo y clases de pares $[(e, \omega)]$ definidas por equivalencia de diagramas

(2.2.5.3)
$$\begin{tikzcd} & & & \varphi^*\Omega_Z \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "\mathrm{D}\varphi"] & \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{O}_X \arrow[r, "j"] & \mathscr{G} \arrow[r, "p"] & \Omega_X \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

En efecto, a $(\widetilde{X}, \widetilde{\varphi})$ le asignamos el par (e, ω) asociado a $(\widetilde{X}, \widehat{\varphi})$. Dos pares extensión $(\widetilde{X}_1, \widetilde{\varphi}_1)$ y $(\widetilde{X}_2, \widetilde{\varphi}_2)$ son Δ–isomorfos sii los pares $(\widetilde{X}_1, \widehat{\varphi}_1)$ y $(\widetilde{X}_2, \widehat{\varphi}_2)$ son k–isomorfos y el isomorfismo inducido $\mathscr{G}_1 \to \mathscr{G}_2$ restringe a la identidad en $\mathscr{O}_X$, i.e., sii los pares (e_1, ω_1) y (e_2, ω_2) son equivalentes. Esto establece la biyección.
Observemos, para futura referencia, que según (2.2.5.1) y (1.3.2.4) el Δ–morfismo $\widetilde{\varphi}$ asociado a (e, ω) se expresa localmente por

(2.2.5.4)
$$\begin{aligned} \mathscr{O}_Z \oplus \mathscr{O}_Z\epsilon &\xrightarrow{\widetilde{\varphi}^\sharp} \varphi_*\mathscr{O}_{\widetilde{X}} \\ a + a'\epsilon &\mapsto (\varphi^\sharp a,\, \omega(\mathrm{d}a \otimes 1) + j\varphi^\sharp a'), \end{aligned}$$

donde

$$\mathscr{O}_{\widetilde{X}} = \{(b, s) \in \mathscr{O}_X \oplus \mathscr{G} \mid p\, s = \mathrm{d}b\}.$$

Ahora, para demostrar la Proposición 2.2.5, establecemos una biyección entre el conjunto de clases $[(e, \omega)]$, donde la extensión e es localmente escindida, y $D(X, \varphi)$.

Las clases de extensiones localmente escindidas están clasificadas por el subespacio $H^1(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\Omega_X, \mathscr{O}_X)) \subset \operatorname{Ext}^1(\Omega_X, \mathscr{O}_X)$. Recordemos que la aplicación de inclusión, obtenida de la sucesión espectral de Ext's local y global, es como sigue: a una clase $[\rho]$, con $\rho \in \mathscr{Z}^1(\mathscr{V}, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\Omega_X, \mathscr{O}_X))$, le corresponde la clase de la extensión e definida por los diagramas de pegado

(2.2.5.5)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{O}_{V\cap V'} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{O}_{V\cap V'} \oplus \Omega_{V\cap V'} \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_{VV'}"] & \Omega_{V\cap V'} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{O}_{V\cap V'} \arrow[r] & \mathscr{O}_{V\cap V'} \oplus \Omega_{V\cap V'} \arrow[r] & \Omega_{V\cap V'} \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde

(2.2.5.6)
$$\sigma_{VV'} = \begin{bmatrix} \mathrm{id}_{\mathscr{O}} & \rho_{VV'} \\ 0 & \mathrm{id}_{\Omega} \end{bmatrix}.$$

Establecemos la biyección. Comencemos con una clase $[(e, \omega)]$, donde e es localmente escindida. Según la Observación 2.2.3, la extensión e es escindida sobre cada abierto afín. Fijemos una cubierta afín $\mathscr{V} = (V)$ de X de forma que e sea escindida en cada conjunto abierto de $\mathscr{V}$, y fijemos una familia de retracciones locales $r = (r_V)_{V\in\mathscr{V}}$ para j, i.e. $r_V j = \mathrm{id}_{\mathscr{O}_V}$ para cada $V \in \mathscr{V}$. Entonces $(r_{V'} - r_V)j = 0$ para $V, V' \in \mathscr{V}$ y, por tanto, existe un único $\rho \in \mathscr{Z}^1(\mathscr{V}, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\Omega_X, \mathscr{O}_X))$ tal que $\delta r = \rho p$. Además, la cocadena $r\,\omega$ verifica que $\delta(r\,\omega) = \rho\,\mathrm{D}\varphi$. Cambiando el par (e, ω) por un par equivalente (e', ω') y la familia de retracciones r por r' se obtiene un par $(r'\omega', \rho')$ equivalente a $(r\omega, \rho)$. En efecto, se tiene un diagrama conmutativo

(2.2.5.7)
$$\begin{tikzcd}
 & & & \varphi^*\Omega_Z \arrow[dl, dashed, "\omega"'] \arrow[ddl, dashed, "\omega'"] \arrow[d, "\mathrm{D}\varphi"] & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{O}_X \arrow[r, "j"] \arrow[d, equal] & \mathscr{G} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\gamma"] & \Omega_X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{O}_X \arrow[r, "j'"] & \mathscr{G}' \arrow[r, "p'"] & \Omega_X \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Obtenemos las igualdades $(r'_V\gamma - r_V)j = 0$. Por tanto, existe un único $h \in \mathscr{C}^0(\mathscr{V}, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\Omega_X, \mathscr{O}_X))$ tal que $r'\gamma - r = hp$. Así se tiene la igualdad $r'\omega' - r\omega = h\,\mathrm{D}\varphi$. También se obtiene $(\delta h)p = (\rho' - \rho)p$, lo que implica $\rho' - \rho = \delta h$. Por tanto, $(r'\omega', \rho')$ es equivalente a $(r\omega, \rho)$. De este modo la clase $[(e, \omega)]$ define una clase $[(r\omega, \rho)]$ en $D(X, \varphi)$.
A la inversa, a una clase $[(g, \rho)]$ le asignamos la clase del par (e, ω) construido como sigue: la extensión e está definida a partir de ρ por medio de los diagramas de pegado (2.2.5.5). La igualdad $\delta g = \rho\,\mathrm{D}\varphi$, en la definición de $D(X, \varphi)$, implica que los homomorfismos

$$\varphi^*\Omega_Z\big|_V \xrightarrow{\binom{g_V}{\mathrm{D}\varphi}} \mathscr{O}_V \oplus \Omega_V,$$

son compatibles con los isomorfismos de pegado (2.2.5.6) y definen un homomorfismo global ω y un diagrama conmutativo como (2.2.5.3). Cambiando (g, ρ) por el par equivalente

(g', ρ') existe $h \in \mathscr{C}^0(\mathscr{V}, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\Omega_X, \mathscr{O}_X))$ tal que $g' - g = h\mathrm{D}\varphi$ y $\rho' - \rho = \delta h$. Entonces los homomorfismos locales

$$\mathscr{O}_V \oplus \Omega_V \xrightarrow{\gamma_V} \mathscr{O}_V \oplus \Omega_V,$$

donde

$$\gamma_V = \begin{bmatrix} \mathrm{id}_{\mathscr{O}} & h_V \\ 0 & \mathrm{id}_{\Omega} \end{bmatrix},$$

son compatibles con los isomorfismos de pegado (2.2.5.6) y definen un homomorfismo

$$\mathscr{G} \xrightarrow{\gamma} \mathscr{G}'$$

y un diagrama como (2.2.5.7). Esto es, la clase $[(e, \omega)]$ está bien definida. Es sencillo comprobar que estas aplicaciones son inversas una de otra. □

Observación 2.2.6. La biyección $\{[(e, \omega)]\} \longleftrightarrow \{[(g, \rho)]\}$ es un isomorfismo aditivo si definimos la suma de las clases $[(e_1, \omega_1)] + [(e_2, \omega_2)]$ en la forma que explicamos a continuación. (No usaremos este hecho más adelante).
La suma de las clases $[(e_1, \omega_1)] + [(e_2, \omega_2)]$ es la clase $[(e, \omega)]$ obtenida de la forma siguiente: para definir la extensión e consideramos el diagrama couniversal

(2.2.6.1)
$$\begin{tikzcd} \mathscr{G}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{G}_1 \arrow[d, "p_1"] \\ \mathscr{G}_2 \arrow[r, "p_2"] & \Omega_X. \end{tikzcd}$$

Entonces existe un único homomorfismo $\mathscr{O}_X \xrightarrow{j'} \mathscr{G}'$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}_X \arrow[dr, dashed, "j'"] \arrow[drr, bend left, "-j_1"] \arrow[ddr, bend right, "j_2"'] & & \\ & \mathscr{G}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{G}_1 \arrow[d, "p_1"] \\ & \mathscr{G}_2 \arrow[r, "p_2"] & \Omega_X. \end{tikzcd}$$

Denotamos $\mathscr{G}$ el conúcleo del homomorfismo $\mathscr{O}_X \xrightarrow{j'} \mathscr{G}'$. El homomorfismo $\mathscr{G}' \xrightarrow{p'} \Omega_X$ obtenido de (2.2.6.1) factoriza a través de $\mathscr{G}$, en un epimorfismo $\mathscr{G} \xrightarrow{p} \Omega_X$.
Ahora si $\mathscr{O}_X \xrightarrow{j_i'} \mathscr{G}'$, $i = 1, 2$, son los homomorfismos que hacen conmutativos los diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}_X \arrow[dr, dashed, "j_1'"] \arrow[drr, bend left, "j_1"] \arrow[ddr, bend right, "0"'] & & \\ & \mathscr{G}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{G}_1 \arrow[d, "p_1"] \\ & \mathscr{G}_2 \arrow[r, "p_2"] & \Omega_X, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathscr{O}_X \arrow[dr, dashed, "j_2'"] \arrow[drr, bend left, "0"] \arrow[ddr, bend right, "j_2"'] & & \\ & \mathscr{G}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{G}_1 \arrow[d, "p_1"] \\ & \mathscr{G}_2 \arrow[r, "p_2"] & \Omega_X, \end{tikzcd}$$

entonces las composiciones $\mathscr{O}_X \xrightarrow{j_i'} \mathscr{G}' \to \mathscr{G}$ son iguales y definen un monomorfismo $\mathscr{O}_X \xrightarrow{j} \mathscr{G}$. Se tiene entonces una sucesión exacta

$$e:\ 0 \to \mathscr{O}_X \xrightarrow{j} \mathscr{G} \xrightarrow{p} \Omega_X \to 0.$$

Para obtener el homomorfismo $\mathscr{G} \xrightarrow{\omega} \Omega_X$ basta ahora observar que de las igualdades $p_1\omega_1 = \mathrm{D}\varphi = p_2\omega_2$ de deduce un homomorfismo $\varphi^*\Omega_Z \xrightarrow{\omega'} \mathscr{G}'$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\varphi^*\Omega_Z \arrow[dr, dashed, "\omega'"] \arrow[drr, bend left, "\omega_1"] \arrow[ddr, bend right, "\omega_2"'] & & \\
& \mathscr{G}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{G}_1 \arrow[d, "p_1"] \\
& \mathscr{G}_2 \arrow[r, "p_2"] & \Omega_X.
\end{tikzcd}$$

La composición $\varphi^*\Omega_Z \xrightarrow{\omega'} \mathscr{G}' \to \mathscr{G}$ es el homomorfismo $\mathscr{G} \xrightarrow{\omega} \Omega_X$ buscado.
Es inmediato comprobar la aditividad observando que se obtiene una familia $\mathscr{G} \xrightarrow{r} \mathscr{O}_X$ de retracciones locales de $\mathscr{O}_X \xrightarrow{j} \mathscr{G}$, factorizando a través de $\mathscr{G}$ la familia de homomorfismos locales obtenida sumando las familias $\mathscr{G}' \to \mathscr{G}_i \xrightarrow{r_i} \mathscr{O}_X$. $\square$

Observación 2.2.7. Sean $W = \operatorname{Spec} A \subset Z$ y $V = \operatorname{Spec} B \subset X$ abiertos afines tales que $V \subset \varphi^{-1}W$. Según (2.2.5.4), la expresión local del morfismo $\widetilde{X} \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} Z \times \Delta$ asociado a una clase $[(g,\rho)]$ es

$$\begin{aligned} A \oplus A\epsilon &\xrightarrow{\widetilde{\varphi}^\sharp} B \oplus B\epsilon \\ a + a'\epsilon &\mapsto \varphi^\sharp a + (g_V(\mathrm{d}a \otimes 1) + \varphi^\sharp a')\epsilon, \end{aligned}$$

donde $\Omega_A \otimes B \xrightarrow{g_V} B$ es el homomorfismo que la cocadena g define sobre el abierto V. $\square$

Observación 2.2.8. Sea Y una subvariedad cerrada lisa e irreducible de una variedad lisa e irreducible Z y denotemos $Y \overset{i}{\hookrightarrow} Z$ la inmersión cerrada.
Es bien conocido que las deformaciones de primer orden de Y en Z están parametrizadas por el espacio $H^0(\mathscr{N}_{Y,Z})$. Podemos recuperar este hecho mediante la Proposición 2.1.1 y la correspondencia descrita por (2.2.5.1).
En efecto, según la Proposición 2.1.1 existe una biyección entre secciones $\tau \in H^0(\mathscr{N}_{Y,Z})$ y pares $(\bar{Y}, \widehat{i})$, donde $\bar{Y}$ es una cinta sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{O}_Y$ e $\bar{Y} \xrightarrow{\widehat{i}} Z$ es una extensión de i. Ahora, pensando como en la prueba de la Proposición 2.2.5, vemos que el par $(\bar{Y}, \widehat{i})$ corresponde biyectivamente con el par $(\bar{Y}, \bar{i})$, donde $\bar{i}$ es el Δ–morfismo $\bar{Y} \xrightarrow{\bar{i}} Z \times \Delta$ extensión de i definido por

(2.2.8.1) $$\bar{i}^\sharp(a + a'\epsilon) = \widehat{i}^\sharp(a) + \widehat{i}^\sharp(a')\epsilon, \qquad \text{donde } a + a'\epsilon \in \mathscr{O}_Z \oplus \mathscr{O}_Z\epsilon.$$

Si escribimos el álgebra de $\bar{Y}$ en la forma

$$\mathscr{O}_{\bar{Y}} = \{(i^\sharp a, [(i^\sharp a', t)]) \in \mathscr{O}_Y \oplus (i^*\Omega_Z)_\tau \mid \mathrm{d}(i^\sharp a) = \mathrm{D}i(t)\},$$

donde, con las notaciones de (2.1.1.3),

$$(i^*\Omega_Z)_\tau = \frac{\mathscr{O}_Y \oplus i^*\Omega_Z}{\mathrm{im}(-\tau \oplus j')}$$

entonces la fórmula (2.2.5.4) dice que la expresión local de $\bar{i}$ es,

$$\begin{aligned} \mathscr{O}_Z \oplus \mathscr{O}_Z\epsilon &\xrightarrow{\bar{i}^\sharp} \mathscr{O}_{\bar{Y}} \\ a + a'\epsilon &\mapsto (i^\sharp a, [(i^\sharp a', \mathrm{d}a \otimes 1)]). \end{aligned}$$

De esta expresión se deduce que $\bar{i}^\sharp$ es sobreyectiva, puesto que la igualdad $\mathrm{d}(i^\sharp a) = \mathrm{D}i(t)$ implica que $j'^{-1}(t - \mathrm{d}a \otimes 1)$ está definido, y se tiene entonces la identidad

$$(i^\sharp a, [(i^\sharp a', t)]) = (i^\sharp a, [(i^\sharp a' + \tau j'^{-1}(t - \mathrm{d}a \otimes 1)\,,\, \mathrm{d}a \otimes 1)]).$$

Esto es, $\bar{Y} \xrightarrow{\bar{i}} Z \times \Delta$ es una inmersión cerrada. $\square$

Capítulo 3

Imágenes de deformaciones infinitesimales de cierto tipo de morfismos

En esta sección establecemos la nueva teoría infinitesimal que describe con toda generalidad el proceso que relaciona cuerdas, sobre una subvariedad cerrada lisa e irreducible Y de una variedad lisa e irreducible Z, que se aplican en la variedad ambiente Z y deformaciones infinitesimales, localmente triviales, de primer orden de morfismos que son la composición de un recubrimiento finito de Y y la inclusión $Y \hookrightarrow Z$.
Como consecuencia de esta teoría, en el caso particular de cintas sobre curvas, obtenemos el Teorema 3.3.6 de alisamiento infinitesimal que será la clave infinitesimal de la prueba de nuestro principal Teorema 5.1.1 de alisamiento global sumergido.
Conviene también resaltar que la generalidad y la naturaleza conceptual de los resultados de esta sección abre la posibilidad de futuras aplicaciones en otros contextos, e.g. alisamiento de estructuras de multiplicidad superior, marcando el camino de ulteriores líneas de investigación que continúen el trabajo de esta tesis.

3.1. La situación

Sea $X \xrightarrow{\varphi} Z$ un morfismo de una variedad íntegra, Cohen–Macaulay, X a una variedad lisa e irreducible Z. Sea Y la imagen (esquemática) de φ. Denotemos $Y \overset{i}{\hookrightarrow} Z$ la inmersión cerrada. Supongamos que Y es lisa y que φ induce un morfismo finito $X \xrightarrow{\pi} Y$.
En estas condiciones π es sobreyectivo y plano. El álgebra $\pi_*\mathscr{O}_X$ es un $\mathscr{O}_Y$–módulo localmente libre de cierto rango n y la aplicación traza proporciona una escisión para la aplicación inyectiva $\mathscr{O}_Y \to \pi_*\mathscr{O}_X$. Por tanto $\pi_*\mathscr{O}_X$ es la suma directa de $\mathscr{O}_Y$ y un $\mathscr{O}_Y$–módulo localmente libre $\mathscr{E}$ de rango $n-1$.

3.2. Secciones globales del haz normal

Sea $\mathscr{N}_\varphi$ el haz normal de la aplicación φ definido por la sucesión exacta

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\Omega_X, \mathscr{O}_X) \xrightarrow{\mathrm{d}\varphi} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\varphi^*\Omega_Z, \mathscr{O}_X) \to \mathscr{N}_\varphi \to 0.$$

Obtendremos los resultados fundamentales de este capítulo dotando de contenido geométrico a la sucesión de cohomología de la útil extensión en la que este haz encaja:

Lema 3.2.1. *En las condiciones de 3.1 existe una sucesión exacta*

$$0 \to \mathscr{N}_\pi \to \mathscr{N}_\varphi \to \pi^*\mathscr{N}_{Y,Z} \to 0. \tag{3.2.1.1}$$

Dem. En primer lugar, probamos que la aplicación canónica $\pi^*\Omega_Y \xrightarrow{\mathrm{D}\pi} \Omega_X$ es inyectiva. Sobre el abierto formado por los puntos lisos de X la aplicación $\pi^*\Omega_Y \xrightarrow{\mathrm{D}\pi} \Omega_X$ es un homomorfismo de haces localmente libres del mismo rango cuyo determinante define un divisor R, de ramificación del morfismo π, en dicho abierto. Así la aplicación $\mathrm{D}\pi$ es un isomorfismo sobre el abierto no vacío $X - \operatorname{Sing} X - R$. Por tanto el núcleo de $\mathrm{D}\pi$ es un subhaz de torsión del haz localmente libre $\pi^*\Omega_Y$. Puesto que X es reducido, este subhaz de torsión ha de ser nulo. Así obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \pi^*\Omega_Y \xrightarrow{\mathrm{D}\pi} \Omega_X \longrightarrow \Omega_{X/Y} \longrightarrow 0\,. \tag{3.2.1.2}$$

Por otra parte, puesto que $\Omega_{X/Y}$ tiene soporte contenido en $R \cup \operatorname{Sing} X$, se verifica $\mathscr{H}om(\Omega_{X/Y}, \mathscr{O}_X) = 0$. En consecuencia, dualizando (3.2.1.2), obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\Omega_X, \mathscr{O}_X) \xrightarrow{\mathrm{d}\pi} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\pi^*\Omega_Y, \mathscr{O}_X) \longrightarrow \mathscr{N}_\pi \longrightarrow 0.$$

Levantando a X la sucesión exacta $0 \to \mathscr{I}_{Y,Z}/\mathscr{I}_{Y,Z}^2 \to i^*\Omega_Z \xrightarrow{\mathrm{D}i} \Omega_Y \to 0$ y dualizando obtenemos la sucesión exacta

$$0 \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\pi^*\Omega_Y, \mathscr{O}_X) \xrightarrow{\pi^*\mathrm{d}i} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\varphi^*\Omega_Z, \mathscr{O}_X) \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\pi^*\mathscr{I}_{Y,Z}/\mathscr{I}_{Y,Z}^2, \mathscr{O}_X) \to 0.$$

Ahora, la composición $\mathscr{H}om(\Omega_X, \mathscr{O}_X) \xrightarrow{\mathrm{d}\pi} \mathscr{H}om(\pi^*\Omega_Y, \mathscr{O}_X) \xrightarrow{\pi^*\mathrm{d}i} \mathscr{H}om(\varphi^*\Omega_Z, \mathscr{O}_X)$ es inyectiva. Esto es, también la aplicación $\mathscr{H}om(\Omega_X, \mathscr{O}_X) \xrightarrow{\mathrm{d}\varphi} \mathscr{H}om(\varphi^*\Omega_Z, \mathscr{O}_X)$ es inyectiva. En consecuencia, existe una aplicación inyectiva $\mathscr{N}_\pi \to \mathscr{N}_\varphi$ cuyo conúcleo coincide con el conúcleo de $\mathscr{H}om(\pi^*\Omega_Y, \mathscr{O}_X) \xrightarrow{\pi^*\mathrm{d}i} \mathscr{H}om(\varphi^*\Omega_Z, \mathscr{O}_X)$.
Obtenemos así un diagrama conmutativo y exacto

(3.2.1.3)

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\Omega_X, \mathscr{O}_X) \arrow[r, "\mathrm{d}\pi"] \arrow[d, equal] & \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\pi^*\Omega_Y, \mathscr{O}_X) \arrow[r] \arrow[d, "\pi^*\mathrm{d}i"] & \mathscr{N}_\pi \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\Omega_X, \mathscr{O}_X) \arrow[r, "\mathrm{d}\varphi"] & \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\varphi^*\Omega_Z, \mathscr{O}_X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{N}_\varphi \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\pi^*\mathscr{I}_{Y,Z}/\mathscr{I}_{Y,Z}^2, \mathscr{O}_X) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \pi^*\mathscr{N}_{Y,Z} \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

y la columna derecha es la sucesión exacta buscada. □

Con las notaciones de (2.2.0.11), (2.2.2.1) y Lema 3.2.1 se tiene

Lema 3.2.2. *En las condiciones de 3.1 existe un diagrama conmutativo*

(3.2.2.1)
$$\begin{tikzcd} D(X,\varphi) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mu"'] & H^0(\mathscr{N}_\varphi) \arrow[d, "\phi"] \\ D(X,\pi^*\mathrm{d}i) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\alpha'"', "\wr"] & \mathrm{Hom}(\pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2,\mathscr{O}_X) \arrow[d, "\alpha", "\wr"'] \\ D(Y,(\mathrm{D}i)') \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2,\pi_*\mathscr{O}_X), \end{tikzcd}$$

donde $H^0(\mathscr{N}_\varphi) \xrightarrow{\phi} \mathrm{Hom}(\pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2,\mathscr{O}_X)$ *es la aplicación en secciones globales obtenida de* (3.2.1.1)*, la composición* $D(X,\varphi) \to \mathrm{Hom}(\pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2,\mathscr{O}_X)$ *es* $[(g,\rho)] \mapsto g_{|\pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2}$ *y si* $\alpha'\mu([(g,\rho)]) = [(f,\varrho)]$ *entonces la composición* $D(X,\varphi) \to \mathrm{Hom}(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2,\pi_*\mathscr{O}_X)$ *es* $[(g,\rho)] \mapsto f_{|\mathscr{I}/\mathscr{I}^2}$.

Dem. Los espacios $D(X,\varphi)$ y $D(X,\pi^*\mathrm{d}i)$ están asociados, según la Observación 2.2.2, respectivamente, con los homomorfismos $\mathrm{d}\varphi$ y $\pi^*\mathrm{d}i$ en (3.2.1.3). El espacio $D(Y,(\mathrm{D}i)')$ está asociado, según la Observación 2.2.2, con el homomorfismo $(\mathrm{D}i)'$ en la sucesión exacta (3.2.2.2)

$$0 \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(\Omega_Y,\pi_*\mathscr{O}_X) \xrightarrow{(\mathrm{D}i)'} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(i^*\Omega_Z,\pi_*\mathscr{O}_X) \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{I}_{Y,Z}/\mathscr{I}^2_{Y,Z},\pi_*\mathscr{O}_X) \to 0$$

obtenida de la sucesión exacta $0 \to \mathscr{I}_{Y,Z}/\mathscr{I}^2_{Y,Z} \to i^*\Omega_Z \xrightarrow{\mathrm{D}i} \Omega_Y \to 0$. Así que si $\mathscr{U} = (U)$ es una cubierta abierta afín de Y y $\mathscr{V} = (V = \pi^{-1}U)$ es la cubierta afín inducida de X entonces $D(X,\varphi)$ está dado por (2.2.0.11),

$$D(X,\pi^*\mathrm{d}i) = \frac{\{(g,\rho') \in \mathscr{C}^0(\mathscr{V},\mathscr{H}om(\varphi^*\Omega_Z,\mathscr{O}_X)) \times \mathscr{Z}^1(\mathscr{V},\mathscr{H}om(\pi^*\Omega_Y,\mathscr{O}_X)) \mid \delta g = \pi^*\mathrm{d}i(\rho')\}}{\{(\pi^*\mathrm{d}i(h'),\delta h') \mid h' \in \mathscr{C}^0(\mathscr{V},\mathscr{H}om(\pi^*\Omega_Y,\mathscr{O}_X))\}}$$

y

$$D(Y,(\mathrm{D}i)') = \frac{\{(f,\varrho) \in \mathscr{C}^0(\mathscr{U},\mathscr{H}om(i^*\Omega_Z,\pi_*\mathscr{O}_X)) \times \mathscr{Z}^1(\mathscr{U},\mathscr{H}om(\Omega_Y,\pi_*\mathscr{O}_X)) \mid \delta f = \varrho\,\mathrm{D}i\}}{\{(h\,\mathrm{D}i,\delta h) \mid h \in \mathscr{C}^0(\mathscr{U},\mathscr{H}om(\Omega_Y,\pi_*\mathscr{O}_X))\}}.$$

Los homomorfismos $\mathrm{d}\varphi$, $\pi^*\mathrm{d}i$ en (3.2.1.3) y $(\mathrm{D}i)'$ en (3.2.2.2) son inyectivos. En consecuencia, según la Observación 2.2.2, se tienen isomorfismos naturales $D(X,\varphi) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathscr{N}_\varphi)$, $D(X,\pi^*\mathrm{d}i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2,\mathscr{O}_X)$ y $D(Y,(\mathrm{D}i)') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2,\pi_*\mathscr{O}_X)$.
De (3.2.1.3) y del carácter functorial de $D(X,-)$ en las sucesiones exactas de la Observación 2.2.2 se obtiene una aplicación $D(X,\pi^*\mathrm{d}i) \to D(X,\mathscr{N}_\pi \to \mathscr{N}_\varphi)$ y un diagrama conmutativo

(3.2.2.3)
$$\begin{tikzcd} D(X,\pi^*\mathrm{d}i) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & D(X,\mathscr{N}_\pi \to \mathscr{N}_\varphi) \arrow[d, "\wr"] \\ \mathrm{Hom}(\pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2,\mathscr{O}_X) \arrow[r, equal] & H^0(\pi^*\mathscr{N}_{Y,Z}), \end{tikzcd}$$

En particular, la aplicación $D(X,\pi^*\mathrm{d}i) \to D(X,\mathscr{N}_\pi \to \mathscr{N}_\varphi)$ es un isomorfismo y, en consecuencia, la composición

$$D(X,\varphi) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathscr{N}_\varphi) \to D(X,\mathscr{N}_\pi \to \mathscr{N}_\varphi) \to D(X,\pi^*\mathrm{d}i)$$

es el único homomorfismo $D(X,\varphi) \xrightarrow{\mu} D(X,\pi^*\mathrm{d}i)$ que hace conmutativo el cuadrado superior en el diagrama (3.2.2.1). Así pues esta aplicación es $[(g,\rho)] \overset{\mu}{\mapsto} [(g,\rho\,\mathrm{D}\pi)]$.
De los isomorfismos de adjunción

(3.2.2.4)
$$\begin{aligned} &\mathscr{C}^0(\mathscr{V},\mathscr{H}om(\varphi^*\Omega_Z,\mathscr{O}_X)) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}^0(\mathscr{U},\mathscr{H}om(i^*\Omega_Z,\pi_*\mathscr{O}_X)) \qquad \text{y} \\ &\mathscr{Z}^1(\mathscr{V},\mathscr{H}om(\pi^*\Omega_Y,\mathscr{O}_X)) \xrightarrow{\sim} \mathscr{Z}^1(\mathscr{U},\mathscr{H}om(\Omega_Y,\pi_*\mathscr{O}_X)), \end{aligned}$$

determinados explícitamente como sigue: a

$$\begin{aligned} &(g,\rho') \in \mathscr{C}^0(\mathscr{V},\mathscr{H}om(\varphi^*\Omega_Z,\mathscr{O}_X)) \times \mathscr{Z}^1(\mathscr{V},\mathscr{H}om(\pi^*\Omega_Y,\mathscr{O}_X)) \qquad \text{corresponde} \\ &(f,\varrho) \in \mathscr{C}^0(\mathscr{U},\mathscr{H}om(i^*\Omega_Z,\pi_*\mathscr{O}_X)) \times \mathscr{Z}^1(\mathscr{U},\mathscr{H}om(\Omega_Y,\pi_*\mathscr{O}_X)) \end{aligned}$$

tales que existen diagramas conmutativos
(3.2.2.5)

$$\begin{tikzcd} \Omega_U \arrow[d] \arrow[dr, "\varrho"] & \\ (\pi|_V)_*(\pi|_V)^*\Omega_U \arrow[r, "\pi_*\rho'"] & (\pi_*\mathscr{O}_X)|_U, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i^*\Omega_Z|_U \arrow[d] \arrow[dr, "f"] & \\ (\pi|_V)_*(\pi|_V)^*(i^*\Omega_Z|_U) \arrow[r, "\pi_*g"] & (\pi_*\mathscr{O}_X)|_U, \end{tikzcd}$$

para todos los abiertos $U \in \mathscr{U}$ y $V = \pi^{-1}U \in \mathscr{V}$, se obtiene un isomorfismo

(3.2.2.6)
$$D(X,\pi^*\mathrm{d}i) \underset{\sim}{\xrightarrow{\alpha'}} D(Y,(\mathrm{D}i)') \ \text{dado por} \ [(g,\rho')] \mapsto [(f,\varrho)].$$

Por otra parte, el isomorfismo $D(X,\pi^*\mathrm{d}i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2,\mathscr{O}_X)$ determinado por la Observación 2.2.2 está definido por $[(g,\rho')] \mapsto g_{|\pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2}$, i.e., para la restricción de la cocadena g a $\pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ se tiene

$$\delta(g_{|\pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2}) = (\delta g)_{|\pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2} = \pi^*\mathrm{d}i(\rho')|_{\pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2} = (\rho'\,\pi^*\mathrm{D}i)|_{\pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2} = 0$$

y por tanto hay una sección global $g_{|\pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2} \in \mathrm{Hom}(\pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2,\mathscr{O}_X)$. Del mismo modo, el isomorfismo $D(Y,(\mathrm{D}i)') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2,\pi_*\mathscr{O}_X)$ está determinado por $[(f,\varrho)] \mapsto f_{|\mathscr{I}/\mathscr{I}^2}$.
Ahora, del hecho de que g corresponde a f por el isomorfismo de adjunción en (3.2.2.4), vemos que $g_{|\pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2}$ corresponde a $f_{|\mathscr{I}/\mathscr{I}^2}$ por el isomorfismo de adjunción α en (3.2.2.1). De esta manera obtenemos la conmutatividad en el cuadrado inferior de (3.2.2.1).
En consecuencia la aplicación $D(X,\varphi) \to \mathrm{Hom}(\pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2,\mathscr{O}_X)$ es la composición $[(g,\rho)] \mapsto [(g,\rho\,\mathrm{D}\pi)] \mapsto g_{|\pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2}$ y la aplicación $D(X,\varphi) \to \mathrm{Hom}(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2,\pi_*\mathscr{O}_X)$ es $[(g,\rho)] \mapsto [(g,\rho\,\mathrm{D}\pi)] \mapsto [(f,\varrho)] \mapsto f_{|\mathscr{I}/\mathscr{I}^2}$. □

Proposición 3.2.3. *En las condiciones de 3.1 existe un diagrama conmutativo*

(3.2.3.1)
$$\begin{tikzcd} H^0(\mathscr{N}_\varphi) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathrm{Ext}^1(\Omega_X, \mathscr{O}_X) \arrow[d, "\mathrm{d}\pi"] \\ \mathrm{Hom}(\pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2, \mathscr{O}_X) \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, "\alpha"', "\wr"] & \mathrm{Ext}^1(\pi^*\Omega_Y, \mathscr{O}_X) \arrow[d, "\beta", "\wr"'] \\ \mathrm{Hom}(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2, \pi_*\mathscr{O}_X) \arrow[r, "\delta_3"] & \mathrm{Ext}^1(\Omega_Y, \pi_*\mathscr{O}_X). \end{tikzcd}$$

La aplicación δ_1 envía la sección $\nu \in H^0(\mathscr{N}_\varphi)$ que, por el isomorfismo $D(X,\varphi) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathscr{N}_\varphi)$ y la Proposición 2.2.5, corresponde a una deformación infinitesimal, localmente trivial, de primer orden $(\widetilde{X}, \widetilde{\varphi})$ de φ, a la clase de la extensión que define $\widetilde{X}$. Las aplicaciones δ_3 y δ_2 son, respectivamente, los homomorfismos de conexión obtenidos de la sucesión $0 \to \mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \to i^*\Omega_Z \to \Omega_Y \to 0$ y su levantamiento a X.

Dem. Definimos δ_1 como la composición del homomorfismo de conexión $H^0(\mathscr{N}_\varphi) \to H^1(\mathscr{H}om(\Omega_X, \mathscr{O}_X))$, obtenido de la fila intermedia en (3.2.1.3), y la inclusión $H^1(\mathscr{H}om(\Omega_X, \mathscr{O}_X)) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1(\Omega_X, \mathscr{O}_X)$, obtenida de la sucesión espectral de Ext's locales y globales. Si $\nu \in H^0(\mathscr{N}_\varphi)$ corresponde a $[(g,\rho)] \in D(X,\varphi)$ por el isomorfismo $D(X,\varphi) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathscr{N}_\varphi)$ entonces $H^0(\mathscr{N}_\varphi) \to H^1(\mathscr{H}om(\Omega_X, \mathscr{O}_X))$ envía ν a $[\rho]$. Así δ_1 envía ν a la clase de la extensión definida por los diagramas de pegado (2.2.5.5). En consecuencia, según la Proposición 2.2.5, vemos que δ_1 envía ν a la clase de la extensión que define la deformación infinitesimal, localmente trivial, de primer orden $\widetilde{X}$ en el par $(\widetilde{X}, \widetilde{\varphi})$ asociado a $[(g,\rho)]$.
Probamos ahora la conmutatividad del cuadrado superior en (3.2.3.1).
El homomorfismo de conexión δ_2 es la composición del homomorfismo de conexión $H^0(\mathscr{H}om(\pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2, \mathscr{O}_X)) \to H^1(\mathscr{H}om(\pi^*\Omega_Y, \mathscr{O}_X))$ obtenido tomando cohomología en la columna central de (3.2.1.3), y de la inclusión natural $H^1(\mathscr{H}om(\pi^*\Omega_Y, \mathscr{O}_X)) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1(\pi^*\Omega_Y, \mathscr{O}_X)$. Además, esta inclusión es un isomorfismo puesto que Y es lisa. En consecuencia, según el cuadrado conmutativo superior en (3.2.2.1), la conmutatividad del cuadrado superior en (3.2.3.1) es equivalente a la conmutatividad del diagrama

(3.2.3.2)
$$\begin{tikzcd} D(X,\varphi) \arrow[r] \arrow[d, "\mu"'] & H^1(\mathscr{H}om(\Omega_X, \mathscr{O}_X)) \arrow[d, "\mathrm{d}\pi"] \\ D(X, \pi^*\mathrm{d}i) \arrow[r] & H^1(\mathscr{H}om(\pi^*\Omega_Y, \mathscr{O}_X)), \end{tikzcd}$$

donde las aplicaciones horizontales están determinadas por la Observación 2.2.2 y μ es la aplicación de (3.2.2.1). La conmutatividad de (3.2.3.2) se sigue directamente de las definiciones.
Probamos ahora la conmutatividad en el cuadrado inferior de (3.2.3.1). La flecha vertical α es el isomorfismo de adjunción. El isomorfismo vertical β se deduce de las condiciones afín del morfismo π y lisa de la variedad Y. En efecto, se tiene $\mathrm{Ext}^1(\pi^*\Omega_Y, \mathscr{O}_X) \simeq H^1(\mathscr{H}om(\pi^*\Omega_Y, \mathscr{O}_X))$, puesto que $\pi^*\Omega_Y$ es localmente libre. De la condición afín de π se deduce que $H^1(\mathscr{H}om(\pi^*\Omega_Y, \mathscr{O}_X)) \simeq H^1(\pi_*\mathscr{H}om(\pi^*\Omega_Y, \mathscr{O}_X))$. Por otra parte,

el isomorfismo de adjunción dice que $\pi_*\mathscr{H}om(\pi^*\Omega_Y, \mathscr{O}_X) \simeq \mathscr{H}om(\Omega_Y, \pi_*\mathscr{O}_X)$. En consecuencia existe un isomorfismo

$$H^1(\mathscr{H}om(\pi^*\Omega_Y, \mathscr{O}_X)) \xrightarrow[\sim]{\beta'} H^1(\mathscr{H}om(\Omega_Y, \pi_*\mathscr{O}_X)).$$

Finalmente $H^1(\mathscr{H}om(\Omega_Y, \pi_*\mathscr{O}_X)) \simeq \mathrm{Ext}^1(\Omega_Y, \pi_*\mathscr{O}_X)$, puesto que Ω_Y es localmente libre. Además, la conmutatividad del cuadrado inferior de (3.2.3.1) es equivalente a la conmutatividad del diagrama

(3.2.3.3)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2, \mathscr{O}_X) \arrow[r, "\delta_2'"] \arrow[d, "\alpha"', "\wr"] & H^1(\mathscr{H}om(\pi^*\Omega_Y, \mathscr{O}_X)) \arrow[d, "\beta'", "\wr"'] \\
\mathrm{Hom}(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2, \pi_*\mathscr{O}_X) \arrow[r, "\delta_3'"] & H^1(\mathscr{H}om(\Omega_Y, \pi_*\mathscr{O}_X)),
\end{tikzcd}$$

donde δ_2' y δ_3' se obtienen, respectivamente, tomando cohomología en la columna central de (3.2.1.3) y en la sucesión exacta (3.2.2.2). Así la cuestión se reduce a probar la conmutatividad en (3.2.3.3). En efecto, de (3.2.2.6) y (3.2.2.5) obtenemos un diagrama conmutativo

(3.2.3.4)
$$\begin{tikzcd}
D(X, \pi^*\mathrm{d}i) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha'"', "\wr"] & H^1(\mathscr{H}om(\pi^*\Omega_Y, \mathscr{O}_X)) \arrow[d, "\beta'", "\wr"'] \\
D(Y, (\mathrm{D}i)') \arrow[r] & H^1(\mathscr{H}om(\Omega_Y, \pi_*\mathscr{O}_X)),
\end{tikzcd}$$

donde las flechas horizontales están determinadas por la Observación 2.2.2. Ahora, según el cuadrado conmutativo inferior en (3.2.2.1), la conmutatividad de (3.2.3.4) implica la conmutatividad en (3.2.3.3). □

La siguiente observación tiene como objetivo entender mejor el significado de (3.2.3.1).

Observación 3.2.4. A partir de (3.2.1.3), podemos escribir el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & & \\
& H^0(\mathscr{N}_\pi) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(\mathscr{H}om(\Omega_X, \mathscr{O}_X)) \subset \mathrm{Ext}^1(\Omega_X, \mathscr{O}_X) \arrow[r, "\mathrm{d}\pi"] \arrow[d, equal] & H^1(\mathscr{H}om(\pi^*\Omega_Y, \mathscr{O}_X)) = \mathrm{Ext}^1(\pi^*\Omega_Y, \mathscr{O}_X) \arrow[d, "\pi^*\mathrm{d}i"] \\
& H^0(\mathscr{N}_\varphi) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d] & H^1(\mathscr{H}om(\Omega_X, \mathscr{O}_X)) \subset \mathrm{Ext}^1(\Omega_X, \mathscr{O}_X) \arrow[r, "\mathrm{d}\varphi"] & H^1(\mathscr{H}om(\varphi^*\Omega_Z, \mathscr{O}_X)) = \mathrm{Ext}^1(\varphi^*\Omega_Z, \mathscr{O}_X) \\
\mathrm{Hom}(\pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2, \mathscr{O}_X) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\delta_2"] & H^0(\pi^*\mathscr{N}_{Y,Z}) & & \\
H^1(\mathscr{H}om(\pi^*\Omega_Y, \mathscr{O}_X)) \arrow[d, equal] & & & \\
\mathrm{Ext}^1(\pi^*\Omega_Y, \mathscr{O}_X). & & &
\end{tikzcd}$$

El cuadrado conmutativo superior de (3.2.3.1) es la igualdad de las composiciones

$$H^0(\mathscr{N}_\varphi) \xrightarrow{\phi} \mathrm{Hom}(\pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2, \mathscr{O}_X) \xrightarrow{\delta_2} \mathrm{Ext}^1(\pi^*\Omega_Y, \mathscr{O}_X)$$

$$H^0(\mathscr{N}_\varphi) \xrightarrow{\delta_1} H^1(\mathscr{H}om(\Omega_X, \mathscr{O}_X)) \xrightarrow{\mathrm{d}\pi} \mathrm{Ext}^1(\pi^*\Omega_Y, \mathscr{O}_X).$$

Describamos más explícitamente ambos homomorfismos compuestos.
Fijemos $\nu \in H^0(\mathscr{N}_\varphi)$. El homomorfismo de conexión

$$\operatorname{Hom}(\pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2, \mathscr{O}_X) \xrightarrow{\delta_2} \operatorname{Ext}^1(\pi^*\Omega_Y, \mathscr{O}_X)$$

aplica $\pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \xrightarrow{\phi(\nu)} \mathscr{O}_X$ en la clase de la fila exacta inferior en el diagrama universal

(3.2.4.1)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \arrow[r, "\pi^* j'"] \arrow[d, "\phi(\nu)"'] & \varphi^*\Omega_Z \arrow[r, "\pi^*\mathrm{D}i"] \arrow[d] & \pi^*\Omega_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{O}_X \arrow[r] & (\varphi^*\Omega_Z)_{\phi(\nu)} \arrow[r] & \pi^*\Omega_Y \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Si ν corresponde a $[(g,\rho)] \in D(X,\varphi)$ con $\delta\, g = \rho\,\mathrm{D}\varphi$, por el isomorfismo de Lema 2.2.1, entonces

$$H^0(\mathscr{N}_\varphi) \xrightarrow{\delta_1} \operatorname{Ext}^1(\Omega_X, \mathscr{O}_X)$$

aplica ν en la clase de la extensión

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X \xrightarrow{j} \mathscr{G} \xrightarrow{p} \Omega_X \longrightarrow 0$$

determinada por los diagramas de pegado (2.2.5.5) definidos por los isomorfismos locales $\sigma = \begin{bmatrix} \mathrm{id}_\mathscr{O} & \rho \\ 0 & \mathrm{id}_\Omega \end{bmatrix}$. Por tanto

$$\operatorname{Ext}^1(\Omega_X, \mathscr{O}_X) \xrightarrow{\mathrm{d}\pi} \operatorname{Ext}^1(\pi^*\Omega_Y, \mathscr{O}_X)$$

aplica $\delta_1(\nu)$ es la clase determinada por la extensión

(3.2.4.2)
$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{H} \longrightarrow \pi^*\Omega_Y \longrightarrow 0$$

definida por los diagramas de pegado

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{O}_{V\cap V'} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{O}_{V\cap V'} \oplus \pi^*\Omega_Y|_{V\cap V'} \arrow[r] \arrow[d, "\sigma'_{VV'}"] & \pi^*\Omega_Y|_{V\cap V'} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{O}_{V\cap V'} \arrow[r] & \mathscr{O}_{V\cap V'} \oplus \pi^*\Omega_Y|_{V\cap V'} \arrow[r] & \pi^*\Omega_Y|_{V\cap V'} \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde $\sigma' = \begin{bmatrix} \mathrm{id}_\mathscr{O} & \rho\,\mathrm{D}\pi \\ 0 & \mathrm{id}_{\pi^*\Omega} \end{bmatrix}$.
La conmutatividad del cuadrado superior de (3.2.3.1) es equivalente al hecho de que la fila exacta inferior de (3.2.4.1) y (3.2.4.2) son extensiones equivalentes.
Este hecho puede ser también comprobado de forma directa. En efecto, basta observar que la composición de diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2|_{V\cap V'} \arrow[r, "\pi^* j'"] \arrow[d, "\phi(\nu)|_{V\cap V'}"'] & \varphi^*\Omega_Z|_{V\cap V'} \arrow[r, "\pi^*\mathrm{D}i"] \arrow[d, "\varpi_V|_{V\cap V'}"] & \pi^*\Omega_Y|_{V\cap V'} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{O}_{V\cap V'} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{O}_{V\cap V'} \oplus \pi^*\Omega_Y|_{V\cap V'} \arrow[r] \arrow[d, "\sigma'"] & \pi^*\Omega_Y|_{V\cap V'} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{O}_{V\cap V'} \arrow[r] & \mathscr{O}_{V\cap V'} \oplus \pi^*\Omega_Y|_{V\cap V'} \arrow[r] & \pi^*\Omega_Y|_{V\cap V'} \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde $\varpi = \begin{bmatrix} g \\ \pi^*\mathrm{D}i \end{bmatrix}$, es el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2|_{V\cap V'} \arrow[r, "\pi^* j'"] \arrow[d, "\phi(\nu)|_{V\cap V'}"'] & \varphi^*\Omega_Z|_{V\cap V'} \arrow[r, "\pi^*\mathrm{D}i"] \arrow[d, "\varpi_{V'}|_{V\cap V'}"] & \pi^*\Omega_Y|_{V\cap V'} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{O}_{V\cap V'} \arrow[r] & \mathscr{O}_{V\cap V'} \oplus \pi^*\Omega_Y|_{V\cap V'} \arrow[r] & \pi^*\Omega_Y|_{V\cap V'} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por tanto, la extensión (3.2.4.2) aparece, como fila inferior, en un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \arrow[r, "\pi^* j'"] \arrow[d, "\phi(\nu)"'] & \varphi^*\Omega_Z \arrow[r, "\pi^*\mathrm{D}i"] \arrow[d, "\varpi"] & \pi^*\Omega_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{O}_X \arrow[r] & \mathscr{H} \arrow[r] & \pi^*\Omega_Y \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

En consecuencia, la extensión (3.2.4.2) es equivalente a la fila inferior de (3.2.4.1).
En el cuadrado inferior de (3.2.3.1) vemos, a partir de la demostración de la Proposición 3.2.3, que el isomorfismo

$$\mathrm{Ext}^1(\pi^*\Omega_Y, \mathscr{O}_X) \underset{\sim}{\xrightarrow{\beta}} \mathrm{Ext}^1(\Omega_Y, \pi_*\mathscr{O}_X)$$

está explícitamente determinado como sigue: a la clase de una extensión

(3.2.4.3) $$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{H} \longrightarrow \pi^*\Omega_Y \longrightarrow 0$$

β asigna la clase de la extensión

(3.2.4.4) $$0 \longrightarrow \pi_*\mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \Omega_Y \longrightarrow 0$$

construida como extensión couniversal, por el homomorfismo canónico $\Omega_Y \to \pi_*\pi^*\Omega_Y$, de la extensión obtenida aplicando π_* a (3.2.4.3), según el diagrama:

(3.2.4.5)
$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \pi_*\mathscr{O}_X \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{F} \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \pi_*\mathscr{O}_X \arrow[r] & \pi_*\mathscr{H} \arrow[r] \arrow[d] & \pi_*\pi^*\Omega_Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & \Omega_Y \otimes \mathscr{E} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Omega_Y \otimes \mathscr{E} \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

En efecto, si (3.2.4.3) es equivalente a la extensión construida por los datos de pegado determinados por ρ' entonces es sencillo comprobar que (3.2.4.4) es equivalente a la

extensión construida por los datos de pegado determinados por ϱ, donde $[\varrho] = \beta'([\rho'])$ según (3.2.2.5).
Recíprocamente, el isomorfismo β^{-1} asigna a la clase de una extensión (3.2.4.4) la clase de la extensión construida como extensión universal, por el homomorfismo canónico $\pi^*\pi_*\mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X$, de la extensión obtenida aplicando π^* a (3.2.4.4), según el diagrama:

(3.2.4.6)
$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & \pi^*\mathscr{E} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \pi^*\mathscr{E} \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \pi^*\pi_*\mathscr{O}_X \arrow[r] \arrow[d] & \pi^*\mathscr{F} \arrow[r] \arrow[d] & \pi^*\Omega_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{O}_X \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{H} \arrow[r] \arrow[d] & \pi^*\Omega_Y \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0. & &
\end{tikzcd}$$

Es posible también comprobar la conmutatividad del cuadrado inferior de (3.2.3.1) directamente a partir de esta descripción de β. En efecto, consideremos un homomorfismo $\pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \xrightarrow{\nu'} \mathscr{O}_X$. El isomorfismo

(3.2.4.7)
$$\operatorname{Hom}(\pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2, \mathscr{O}_X) \xrightarrow{\alpha} \operatorname{Hom}(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2, \pi_*\mathscr{O}_X),$$

se traduce en un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \arrow[d] \arrow[dr, "\alpha(\nu')"] & \\
\pi_*\pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \arrow[r, "\pi_*\nu'"'] & \pi_*\mathscr{O}_X.
\end{tikzcd}$$

El elemento $\delta_2(\nu') \in \operatorname{Ext}^1(\pi^*\Omega_Y, \mathscr{O}_X)$ es la clase de la fila inferior en un diagrama universal

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \arrow[r, "\pi^*j'"] \arrow[d, "\nu'"'] & \varphi^*\Omega_Z \arrow[r, "\pi^*\mathrm{D}i"] \arrow[d] & \pi^*\Omega_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{O}_X \arrow[r] & \mathscr{H} \arrow[r] & \pi^*\Omega_Y \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Aplicando π_* y componiendo con los homomorfismos canónicos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \arrow[r, "j'"] \arrow[d] & i^*\Omega_Z \arrow[r, "\mathrm{D}i"] \arrow[d] & \Omega_Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \pi_*\pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \arrow[r, "\pi_*\pi^*j'"] \arrow[d, "\pi_*\nu'"'] & \pi_*\varphi^*\Omega_Z \arrow[r, "\pi_*\pi^*\mathrm{D}i"] \arrow[d] & \pi_*\pi^*\Omega_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \pi_*\mathscr{O}_X \arrow[r] & \pi_*\mathscr{H} \arrow[r] & \pi_*\pi^*\Omega_Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

obtenemos un diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "\alpha(\nu')"'] & i^*\Omega_Z \arrow[r, "\mathrm{D}i"] \arrow[d] & \Omega_Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \pi_*\mathscr{O}_X \arrow[r] & \pi_*\mathscr{H} \arrow[r] & \pi_*\pi^*\Omega_Y \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd} \tag{3.2.4.8}$$

En un diagrama como (3.2.4.5), la extensión (3.2.4.4) representa el elemento

$$\beta\delta_2(\nu') \in \operatorname{Ext}^1(\Omega_Y, \pi_*\mathscr{O}_X).$$

Además $\mathscr{F}$ es el núcleo del homomorfismo composición $\pi_*\mathscr{H} \to \pi_*\pi^*\Omega_Y \to \Omega_Y \otimes \mathscr{E}$ y, en consecuencia, el diagrama (3.2.4.8) factoriza en un diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "\alpha(\nu')"'] & i^*\Omega_Z \arrow[r, "\mathrm{D}i"] \arrow[d] & \Omega_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \pi_*\mathscr{O}_X \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{F} \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \pi_*\mathscr{O}_X \arrow[r] & \pi_*\mathscr{H} \arrow[r] & \pi_*\pi^*\Omega_Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

que muestra que la extensión (3.2.4.4) representa el elemento

$$\delta_3\alpha(\nu') \in \operatorname{Ext}^1(\Omega_Y, \pi_*\mathscr{O}_X).$$

Esto prueba la conmutatividad del cuadrado inferior de (3.2.3.1). □

3.3. Imágenes de deformaciones infinitesimales y cuerdas

La siguiente Proposición 3.3.2 dota de significado geométrico a la Proposición 3.2.3. Es el punto de partida para el Teorema 3.3.3 y el Teorema 3.3.4, resultados principales de este capítulo. Para establecer la Proposición 3.3.2 necesitamos el siguiente:

Lema 3.3.1. *Sea Y un esquema reducido y conexo.*

1. *Una cuerda $\widetilde{Y}$ sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$ admite una estructura no trivial de Δ–esquema que extiende la estructura de $\widetilde{Y}$ como k–esquema sii $\mathscr{E}$ tiene una sección global no nula.*

2. *Sean $\widetilde{Y}_1$ una n_1–cuerda y $\widetilde{Y}_2$ una n_2–cuerda sobre Y con fibrados conormales, respectivamente, los haces localmente libres $\mathscr{E}_1$ y $\mathscr{E}_2$ sobre Y. Denotemos $\widetilde{Y}_1 \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y}_2$ el esquema obtenido por pegado de $\widetilde{Y}_1$ e $\widetilde{Y}_2$ a lo largo de Y.*

a*) El esquema* $\widetilde{Y}_1 \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y}_2$ *es una* (n_1+n_2-1)*–cuerda sobre* Y *con fibrado conormal* $\mathscr{E}_1 \oplus \mathscr{E}_2$*.*

b*) El isomorfismo natural*

$$\operatorname{Ext}^1(\Omega_Y, \mathscr{E}_1 \oplus \mathscr{E}_2) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}^1(\Omega_Y, \mathscr{E}_1) \oplus \operatorname{Ext}^1(\Omega_Y, \mathscr{E}_2) \tag{3.3.1.1}$$

envía la clase extensión de $\widetilde{Y}_1 \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y}_2$ *a las clases extensión de* $\widetilde{Y}_1$ *y* $\widetilde{Y}_2$*.*

c*) Consideremos un esquema* Z *y un morfismo* $Y \to Z$*. Dar morfismos* $\widetilde{Y}_1 \to Z$ *y* $\widetilde{Y}_2 \to Z$ *que extienden el morfismo dado* $Y \to Z$ *es equivalente a dar un morfismo* $\widetilde{Y}_1 \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y}_2 \to Z$ *que extiende* $Y \to Z$*.*

Dem. 1. Definir una tal estructura equivale a fijar un elemento no nulo $t \in \Gamma(\mathscr{O}_{\widetilde{Y}})$ tal que $t^2 = 0$. Puesto que $\mathscr{I}^2_{Y,\widetilde{Y}} = 0$ toda sección global no nula de $\mathscr{E}$ define un tal elemento t y, recíprocamente, puesto que Y es reducido y se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathscr{E}) \longrightarrow \Gamma(\mathscr{O}_{\widetilde{Y}}) \longrightarrow \Gamma(\mathscr{O}_Y)$$

si $t \in \Gamma(\mathscr{O}_{\widetilde{Y}})$ verifica $t^2 = 0$ entonces $t \in \Gamma(\mathscr{E})$.
*2.*a*)* Sean $\mathscr{O}_{\widetilde{Y}_1} \xrightarrow{\widetilde{p}_1} \mathscr{O}_Y$ y $\mathscr{O}_{\widetilde{Y}_2} \xrightarrow{\widetilde{p}_2} \mathscr{O}_Y$ los epimorfismos de k–álgebras que definen los morfismos de inclusión $Y \hookrightarrow \widetilde{Y}_1$ y $Y \hookrightarrow \widetilde{Y}_2$. Sea $\mathscr{O}$ el subhaz de $\mathscr{O}_{\widetilde{Y}_1} \oplus \mathscr{O}_{\widetilde{Y}_2}$, definido, como haz de grupos abelianos, por el diagrama couniversal

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{O}_{\widetilde{Y}_1} \arrow[d, "\widetilde{p}_1"] \\ \mathscr{O}_{\widetilde{Y}_2} \arrow[r, "\widetilde{p}_2"] & \mathscr{O}_Y . \end{tikzcd} \tag{3.3.1.2}$$

Denotemos

$$\mathscr{O} \overset{\widetilde{p}}{\twoheadrightarrow} \mathscr{O}_Y \tag{3.3.1.3}$$

el epimorfismo obtenido de(3.3.1.2).
Afirmamos que $\mathscr{O}$ es un subhaz de k-álgebras de $\mathscr{O}_{\widetilde{Y}_1} \oplus \mathscr{O}_{\widetilde{Y}_2}$ y que el par $(Y, \mathscr{O})$ define un esquema separado y de tipo finito sobre k. En efecto, $\mathscr{O}$ es el núcleo del homomorfismo de haces de grupos abelianos $\mathscr{O}_{\widetilde{Y}_1} \oplus \mathscr{O}_{\widetilde{Y}_2} \xrightarrow{[\widetilde{p}_1,\, -\widetilde{p}_2]} \mathscr{O}_Y$. Por tanto, $\mathscr{O}$ es un haz de k–subálgebras

de $\mathscr{O}_{\widetilde{Y}_1} \oplus \mathscr{O}_{\widetilde{Y}_2}$ y se tiene un diagrama conmutativo y exacto

(3.3.1.4)
$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & \mathscr{E}_1 \oplus \mathscr{E}_2 \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathscr{E}_1 \oplus \mathscr{E}_2 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{O} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{p}"] & \mathscr{O}_{\widetilde{Y}_1} \oplus \mathscr{O}_{\widetilde{Y}_2} \arrow[r, "{[\widetilde{p}_1,\, -\widetilde{p}_2]}"] \arrow[d, "\begin{bmatrix}\widetilde{p}_1 & \\ & \widetilde{p}_2\end{bmatrix}"] & \mathscr{O}_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{O}_Y \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{O}_Y \arrow[r, "{[\mathrm{id}\,,\, -\mathrm{id}]}"'] \arrow[d] & \mathscr{O}_Y \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0. & &
\end{tikzcd}$$

Probemos ahora que el par $\widetilde{Y} = (Y, \mathscr{O})$ es un esquema separado y de tipo finito sobre k. Para comprobar que es un esquema, en primer lugar, vemos que los anillos $\mathscr{O}_y$ son locales. Observemos que todo functor exacto a izquierda transforma un diagrama couniversal en un diagrama couniversal. En consecuencia, podemos identificar el anillo $\mathscr{O}_y$, en el diagrama couniversal

(3.3.1.5)
$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_y \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{O}_{\widetilde{Y}_1,y} \arrow[d, "\widetilde{p}_1"] \\
\mathscr{O}_{\widetilde{Y}_2,y} \arrow[r, "\widetilde{p}_2"] & \mathscr{O}_{Y,y}.
\end{tikzcd}$$

Esto implica que $\mathscr{O}_y$ es un anillo local cuyo ideal maximal aparece como esquina superior izquierda en el diagrama couniversal

(3.3.1.6)
$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{m}_y \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{m}_{\widetilde{Y}_1,y} \arrow[d, "\widetilde{p}_1"] \\
\mathfrak{m}_{\widetilde{Y}_2,y} \arrow[r, "\widetilde{p}_2"] & \mathfrak{m}_{Y,y}.
\end{tikzcd}$$

En efecto, si $\mathfrak{a}$ es un ideal de $\mathscr{O}_y$ y suponemos que $\mathfrak{a}\mathscr{O}_{\widetilde{Y}_1,y} \subset \mathfrak{m}_{\widetilde{Y}_1,y}$ y $\mathfrak{a}\mathscr{O}_{\widetilde{Y}_2,y} \subset \mathfrak{m}_{\widetilde{Y}_2,y}$, entonces de (3.3.1.6) se deduce que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}_y$. En caso contrario se verifica $\mathfrak{a}\mathscr{O}_{\widetilde{Y}_1,y} = \mathscr{O}_{\widetilde{Y}_1,y}$ ó $\mathfrak{a}\mathscr{O}_{\widetilde{Y}_2,y} = \mathscr{O}_{\widetilde{Y}_2,y}$. En ambos casos $\mathfrak{a}\mathscr{O}_{Y,y} = \mathscr{O}_{Y,y}$. De esta igualdad y de la sobreyectividad de $\mathscr{O}_y \xrightarrow{\widetilde{p}} \mathscr{O}_{Y,y}$, obtenido de (3.3.1.3), se deduce que existe un elemento $\alpha \in \mathfrak{a}$ tal que $1-\alpha$ está en el núcleo de $\widetilde{p}$. Ahora bien, según (3.3.1.5), se tiene $\ker \widetilde{p} = \ker \widetilde{p}_1 \oplus \ker \widetilde{p}_2$. Por otra parte, $\ker \widetilde{p}_1 = \operatorname{nil} \mathscr{O}_{\widetilde{Y}_1,y}$ y $\ker \widetilde{p}_2 = \operatorname{nil} \mathscr{O}_{\widetilde{Y}_2,y}$. Se sigue que el núcleo de $\widetilde{p}$ es igual al nilradical de $\mathscr{O}_y$ y, por tanto, α es una unidad y $\mathfrak{a} = \mathscr{O}_y$.

En segundo lugar, si $U = \operatorname{Spec} C$ es un abierto afín en Y y $\widetilde{U}_1 = \operatorname{Spec} \widetilde{C}_1$, $\widetilde{U}_2 = \operatorname{Spec} \widetilde{C}_2$ son los correspondientes abiertos afines en $\widetilde{Y}_1$ y $\widetilde{Y}_2$ (recordemos que un esquema noetheriano es afín sii el esquema reducido asociado lo es, [Gro60, 4.5.9]), entonces el anillo definido por

$\mathscr{O}$ sobre U aparece como esquina superior izquierda en el diagrama couniversal

(3.3.1.7)
$$\begin{tikzcd} \widetilde{C} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{C}_1 \arrow[d, "\widetilde{p}_1"] \\ \widetilde{C}_2 \arrow[r, "\widetilde{p}_2"] & C. \end{tikzcd}$$

Comprobamos ahora que el par $\widetilde{U} = (U, \mathscr{O}|_U)$ es el esquema afín $\operatorname{Spec} \widetilde{C}$. En efecto, basta tener en cuenta que si $\widetilde{c} = (\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2) \in \widetilde{C}$ y denotamos por $c \in C$ el elemento $\widetilde{p}_1\widetilde{c}_1 = \widetilde{p}_2\widetilde{c}_2$, entonces $\widetilde{c}(y) = \widetilde{c}_1(y) = \widetilde{c}_2(y) = c(y)$ para cada $y \in U$ y que la exactitud (a izquierda) del functor de fracciones implica que el anillo $\widetilde{C}_{\widetilde{c}}$ es la esquina superior izquierda del diagrama couniversal

(3.3.1.8)
$$\begin{tikzcd} \widetilde{C}_{\widetilde{c}} \arrow[r] \arrow[d] & (\widetilde{C}_1)_{\widetilde{c}_1} \arrow[d, "\widetilde{p}_1"] \\ (\widetilde{C}_2)_{\widetilde{c}_2} \arrow[r, "\widetilde{p}_2"] & C_c, \end{tikzcd}$$

y, por tanto, el anillo que define $\mathscr{O}$ sobre el abierto $\widetilde{U}_{\widetilde{c}} = (\widetilde{U}_1)_{\widetilde{c}_1} = (\widetilde{U}_2)_{\widetilde{c}_2} = U_c$ coincide con $\widetilde{C}_{\widetilde{c}}$. Ahora, según (3.3.1.4), existe una sucesión exacta

(3.3.1.9)
$$0 \longrightarrow \mathscr{E}_1 \oplus \mathscr{E}_2 \xrightarrow{\widetilde{j}} \mathscr{O} \xrightarrow{\widetilde{p}} \mathscr{O}_Y \longrightarrow 0.$$

Esto es $\mathscr{I}_{Y,\widetilde{Y}} = \mathscr{E}_1 \oplus \mathscr{E}_2$. De (3.3.1.4) y de $\mathscr{E}_1^2 = 0$, $\mathscr{E}_2^2 = 0$ se deduce que $\mathscr{I}_{Y,\widetilde{Y}}^2 = 0$ y, por tanto, $\widetilde{Y}_{\text{red}} = Y$. Así, la condición de separación para $\widetilde{Y}$ resulta de la condición de separación para Y (véase e.g. [Gro60, 5.5.1]).

La condición de finitud para $\widetilde{C}$ se obtiene de (3.3.1.9) con el argumento usado en la demostración del Teorema 1.1.6. Si C está generado como k–álgebra por $c_1, \ldots, c_r$, el módulo asociado a $\mathscr{E}_1 \oplus \mathscr{E}_2$ sobre U está generado como C–módulo por $m_1, \ldots, m_t$ y elegimos elementos $\widetilde{c}_1, \ldots, \widetilde{c}_r$ en $\widetilde{C}$ tales que $\widetilde{p}\,\widetilde{c}_i = c_i$, entonces $\widetilde{C}$ está generado como k–álgebra por los elementos $\{\widetilde{c}_i, \widetilde{j}\, m_l\}_{i,l}$. En efecto, sea $\widetilde{c} \in \widetilde{C}$ y denotemos $c = \widetilde{p}\,\widetilde{c}$ su imagen en C. Escribimos $c = c(c_1, \ldots, c_r) \in k[c_1, \ldots, c_r]$, entonces

$$\widetilde{c} - c(\widetilde{c}_1, \ldots, \widetilde{c}_r) = \widetilde{j}(\sum b_l m_l)$$

para ciertos $b_l \in C$. Ahora, si escribimos $b_l = b_l(c_1, \ldots, c_r) \in k[c_1, \ldots, c_r]$ se verifica, con las notaciones de (3.3.1.10) y teniendo en cuenta las igualdades análogas (1.1.6.4) para $\widetilde{Y}_1$, $\widetilde{Y}_2$, si $m_l = (m_{l1}, m_{l2}) \in \mathscr{E}_1 \oplus \mathscr{E}_2$, $\widetilde{c}_i = (\widetilde{c}_{i1}, \widetilde{c}_{i2}) \in \widetilde{C}_1 \oplus \widetilde{C}_2$ y $c_i = \widetilde{p}\,\widetilde{c}_i = \widetilde{p}_1\,\widetilde{c}_{i1} = \widetilde{p}_2\,\widetilde{c}_{i2}$,

$$\begin{aligned} b_l(\widetilde{c}_1, \ldots, \widetilde{c}_r)\widetilde{j}\, m_l &= (b_l(\widetilde{c}_{11}, \ldots, \widetilde{c}_{r1}),\, b_l(\widetilde{c}_{12}, \ldots, \widetilde{c}_{r2}))(\widetilde{j}_1\, m_{l1},\, \widetilde{j}_2\, m_{l2}) \\ &= (b_l(\widetilde{c}_{11}, \ldots, \widetilde{c}_{r1})\widetilde{j}_1\, m_{l1},\, b_l(\widetilde{c}_{12}, \ldots, \widetilde{c}_{r2})\widetilde{j}_2\, m_{l2}) \\ &= (\widetilde{j}_1(b_l(c_1, \ldots, c_r)\, m_{l1}), \widetilde{j}_2(b_l(c_1, \ldots, c_r)\, m_{l2})) \\ &= \widetilde{j}(b_l(c_1, \ldots, c_r)\, m_{l1},\, b_l(c_1, \ldots, c_r)\, m_{l2}) \\ &= \widetilde{j}(b_l(c_1, \ldots, c_r)(m_{l1},\, m_{l2})) \\ &= \widetilde{j}(b_l(c_1, \ldots, c_r)m_l) \end{aligned}$$

y, en consecuencia, se tiene la igualdad

$$\widetilde{c} = c(\widetilde{c}_1, \ldots, \widetilde{c}_r) + \sum b_l(\widetilde{c}_1, \ldots, \widetilde{c}_r)\, \widetilde{j}\, m_l \in k[\{\widetilde{c}_i, \widetilde{j}\, m_l\}_{i,l}].$$

Observemos ahora que, de la definición de $\mathscr{O}$, obtenemos también un diagrama conmutativo y exacto

(3.3.1.10)
$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & \mathscr{E}_1 \arrow[d] \arrow[r, equal] & \mathscr{E}_1 \arrow[d, "\widetilde{j}_1"] & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{E}_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{O} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "\widetilde{p}"] & \mathscr{O}_{\widetilde{Y}_1} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{p}_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{E}_2 \arrow[r, "\widetilde{j}_2"'] & \mathscr{O}_{\widetilde{Y}_2} \arrow[r, "\widetilde{p}_2"'] \arrow[d] & \mathscr{O}_Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

Los diagramas (3.3.1.4) y (3.3.1.10) muestran que $\widetilde{Y}_1$ y $\widetilde{Y}_2$ pueden ser considerados como subesquemas cerrados de $\widetilde{Y}$ de forma que

$$\widetilde{Y}_1 \cup \widetilde{Y}_2 = \widetilde{Y} \qquad \text{e} \qquad \widetilde{Y}_1 \cap \widetilde{Y}_2 = Y.$$

Esto es, el k–esquema $\widetilde{Y} = (Y, \mathscr{O})$ es el esquema obtenido por pegado de $\widetilde{Y}_1$ e $\widetilde{Y}_2$ a lo largo de Y que denotamos $\widetilde{Y}_1 \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y}_2$. Finalmente, la sucesión (3.3.1.9) muestra que $\widetilde{Y}$ es una cuerda sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}_1 \oplus \mathscr{E}_2$.

*2.*b*)* Sean

$$e_1 :\ 0 \longrightarrow \mathscr{E}_1 \xrightarrow{j_1} \mathscr{F}_1 \xrightarrow{p_1} \Omega_Y \longrightarrow 0, \qquad e_2 :\ 0 \longrightarrow \mathscr{E}_2 \xrightarrow{j_2} \mathscr{F}_2 \xrightarrow{p_2} \Omega_Y \longrightarrow 0.$$

las sucesiones cotangentes restringidas de $\widetilde{Y}_1$ e $\widetilde{Y}_2$. La clase que por el isomorfismo (3.3.1.1) se aplica en el par $([e_1], [e_2])$ es la clase de la fila exacta superior en el diagrama couniversal

(3.3.1.11)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{E}_1 \oplus \mathscr{E}_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{F} \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_Y \arrow[r] \arrow[d, "\left[\begin{smallmatrix} \mathrm{id} \\ \mathrm{id} \end{smallmatrix}\right]"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{E}_1 \oplus \mathscr{E}_2 \arrow[r, "\left[\begin{smallmatrix} j_1 & \\ & j_2 \end{smallmatrix}\right]"] & \mathscr{F}_1 \oplus \mathscr{F}_2 \arrow[r, "\left[\begin{smallmatrix} p_1 & p_2 \end{smallmatrix}\right]"] & \Omega_Y \oplus \Omega_Y \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E}_1 \oplus \mathscr{E}_2 \arrow[r] \arrow[dd, equal] & \mathscr{O} \arrow[r, "\widetilde{p}"] \arrow[dd] & \mathscr{O}_Y \arrow[dr, "\mathrm{d}"] \arrow[dd, "\left[\begin{smallmatrix} \mathrm{id} \\ \mathrm{id} \end{smallmatrix}\right]"] & \\
 & & & \Omega_Y \arrow[dd, "\left[\begin{smallmatrix} \mathrm{id} \\ \mathrm{id} \end{smallmatrix}\right]"] \\
\mathscr{E}_1 \oplus \mathscr{E}_2 \arrow[r] \arrow[dr, equal] & \mathscr{O}_{\widetilde{Y}_1} \oplus \mathscr{O}_{\widetilde{Y}_2} \arrow[r, "\left[\begin{smallmatrix} \widetilde{p}_1 & \\ & \widetilde{p}_2 \end{smallmatrix}\right]"] \arrow[dr] & \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{O}_Y \arrow[dr] & \\
 & \mathscr{E}_1 \oplus \mathscr{E}_2 \arrow[r, "\left[\begin{smallmatrix} j_1 & \\ & j_2 \end{smallmatrix}\right]"] & \mathscr{F}_1 \oplus \mathscr{F}_2 \arrow[r, "\left[\begin{smallmatrix} p_1 & p_2 \end{smallmatrix}\right]"] & \Omega_Y \oplus \Omega_Y,
\end{tikzcd}$$

se obtiene un diagrama conmutativo

(3.3.1.12)
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{E}_1 \oplus \mathscr{E}_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{O} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{O}_Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{E}_1 \oplus \mathscr{E}_2 \arrow[r] & \mathscr{F} \arrow[r] & \Omega_Y \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

Ahora bien, en todo diagrama como (3.3.1.12) el cuadrado derecho es couniversal. En consecuencia la fila inferior de (3.3.1.12) define la clase extensión de la cuerda $\widetilde{Y}$ como queríamos probar.
2.c) Consideremos un morfismo $Y \xrightarrow{i} Z$. La condición couniversal para un cuadrado se conserva por functores exactos a izquierda. Por tanto es couniversal el siguiente diagrama, obtenido aplicando i_* al diagrama (3.3.1.2),

(3.3.1.13)
$$\begin{tikzcd} i_*\mathscr{O} \arrow[r] \arrow[d] & i_*\mathscr{O}_{\widetilde{Y}_1} \arrow[d, "i_*\widetilde{p}_1"] \\ i_*\mathscr{O}_{\widetilde{Y}_2} \arrow[r, "i_*\widetilde{p}_2"] & i_*\mathscr{O}_Y. \end{tikzcd}$$

Así el enunciado de la parte *2.c* del Lema es la reescritura de la propiedad couniversal de (3.3.1.13) para el haz de k–álgebras $\mathscr{O}_Z$. □

Proposición 3.3.2. *Supongamos las condiciones de 3.1.*

1. *Sea $(\widetilde{X}, \widetilde{\varphi})$ una deformación infinitesimal, localmente trivial, de primer orden de $X \xrightarrow{\varphi} Z$. Asociados a $(\widetilde{X}, \widetilde{\varphi})$ existen un par $(\widetilde{Y}, \widetilde{i})$, donde $\widetilde{Y}$ es una n–cuerda sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$ e $\widetilde{Y} \xrightarrow{\widetilde{i}} Z$ es un morfismo extensión de $Y \overset{i}{\hookrightarrow} Z$, y una deformación de primer orden $\bar{Y} \subset Z \times \Delta$ de Y en Z.*

2. *Existe un diagrama conmutativo*

(3.3.2.1)
$$\begin{tikzcd} H^0(\mathscr{N}_\varphi) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "\Phi_1 \oplus \Phi_2"'] & \operatorname{Ext}^1(\Omega_X, \mathscr{O}_X) \arrow[d, "\Psi_1 \oplus \Psi_2"] \\ \operatorname{Hom}(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2, \mathscr{O}_Y) \oplus \operatorname{Hom}(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2, \mathscr{E}) \arrow[r, "\delta"] & \operatorname{Ext}^1(\Omega_Y, \mathscr{O}_Y) \oplus \operatorname{Ext}^1(\Omega_Y, \mathscr{E}). \end{tikzcd}$$

Si $(\widetilde{X}, \widetilde{\varphi})$ corresponde a $\nu \in H^0(\mathscr{N}_\varphi)$ entonces $\bar{Y}$ e $(\widetilde{Y}, \widetilde{i})$ están definidas, respectivamente, por $\Phi_1\nu$ y $\Phi_2\nu$. Además, las clases extensión de $\widetilde{X}$, $\bar{Y}$ e $\widetilde{Y}$ están dadas, respectivamente, por $\delta_1\nu$, $\Psi_1\delta_1\nu$ y $\Psi_2\delta_1\nu$.

3. *Sea $\bar{Y} \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y}$ la $(n+1)$–cuerda sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{E}$ obtenida por pegado de $\bar{Y}$ e $\widetilde{Y}$ a lo largo de Y. Existe un Δ–morfismo $\widetilde{X} \xrightarrow{\widetilde{\pi}} \bar{Y} \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y}$ extensión de $X \xrightarrow{\pi} Y$. Si $\widetilde{\psi}$ es la composición $\widetilde{X} \xrightarrow{\widetilde{\pi}} \bar{Y} \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y} \xrightarrow{\bar{\iota}} Z \times \Delta$, donde $\bar{Y} \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y} \xrightarrow{\bar{\iota}} Z \times \Delta$*

es el único Δ–morfismo extensión de $\widetilde{Y} \xrightarrow{\tilde{i}} Z$ y $\bar{Y} \hookrightarrow Z \times \Delta$, entonces $\widetilde{\psi}$ es una deformación infinitesimal, localmente trivial, de primer orden de φ tal que $\widetilde{\psi}$ y $\widetilde{\varphi}$ coinciden sobre el subesquema abierto de $\widetilde{X}$ con soporte en el complementario del divisor de ramificación de $X \xrightarrow{\pi} Y$ y tal que la diferencia de $\widetilde{\psi}$ y $\widetilde{\varphi}$ es una deformación infinitesimal, localmente trivial, de primer orden con origen trivial de $X \xrightarrow{\pi} Y$.

4. *El subesquema imagen de $\bar{Y} \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y} \xrightarrow{\tilde{\imath}} Z \times \Delta$ es la unión esquemática de $\bar{Y}$ y del subesquema imagen de $\widetilde{Y} \xrightarrow{\tilde{i}} Z$.*

Dem. Según la Proposición 2.2.5 y el Lema 3.2.2 a $(\widetilde{X}, \widetilde{\varphi})$ le corresponde una sección global $\nu \in H^0(\mathscr{N}_\varphi)$. Del diagrama (3.2.3.1) y de la escisión $\pi_*\mathscr{O}_X \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{E}$ obtenemos el diagrama conmutativo (3.3.2.1).
Sean $\nu_1 = \Phi_1\nu$ y $\nu_2 = \Phi_2\nu$, se tienen entonces homomorfismos

$$\mathscr{I}_{Y,Z}/\mathscr{I}^2_{Y,Z} \xrightarrow{\nu_1} \mathscr{O}_Y \quad \text{y} \quad \mathscr{I}_{Y,Z}/\mathscr{I}^2_{Y,Z} \xrightarrow{\nu_2} \mathscr{E}. \tag{3.3.2.2}$$

Denotemos $\delta(\nu_1, \nu_2) = (\zeta_1, \zeta_2)$.
Existe una deformación de primer orden $\bar{Y} \overset{\bar{i}}{\hookrightarrow} Z \times \Delta$ de Y en Z asociada a ν_1. Según la Observación 2.2.8 el álgebra de $\bar{Y}$ se escribe en la forma

$$\mathscr{O}_{\bar{Y}} = \{(i^\sharp a, [(i^\sharp a', t)]) \in \mathscr{O}_Y \oplus (i^*\Omega_Z)_{\nu_1} \mid \mathrm{d}(i^\sharp a) = \mathrm{D}i(t)\},$$

donde, con las notaciones de (2.1.1.3),

$$(i^*\Omega_Z)_{\nu_1} = \frac{\mathscr{O}_Y \oplus i^*\Omega_Z}{\mathrm{im}(-\nu_1 \oplus j')}$$

y la expresión local de $\bar{i}$ es,

$$\begin{aligned} \mathscr{O}_Z \oplus \mathscr{O}_Z\epsilon &\xrightarrow{\bar{i}^\sharp} \mathscr{O}_{\bar{Y}} \\ a + a'\epsilon &\mapsto (i^\sharp a, [(i^\sharp a', \mathrm{d}a \otimes 1)]). \end{aligned} \tag{3.3.2.3}$$

Por tanto el ideal $\bar{\mathscr{I}} \subset \mathscr{O}_Z \oplus \mathscr{O}_Z\epsilon$ del subesquema $\bar{Y} \subset Z \times \Delta$ que es el núcleo del homomorfismo de álgebras (3.3.2.3) está dado localmente, sobre cada abierto afín $W = \operatorname{Spec} A \subset Z$, por

$$\bar{\mathscr{I}} = \{a + a'\epsilon \,|\, a \in \mathscr{I}_{Y,Z} \text{ y } \nu_1'(a) = -i^\sharp a'\}, \tag{3.3.2.4}$$

donde ν_1' es la composición $\mathscr{I}_{Y,Z} \to \mathscr{I}_{Y,Z}/\mathscr{I}^2_{Y,Z} \xrightarrow{\nu_1} \mathscr{O}_Y$ y $\mathscr{O}_Z \xrightarrow{i^\sharp} i_*\mathscr{O}_Y$ es la aplicación de k–álgebras asociada a $Y \overset{i}{\hookrightarrow} Z$.
Sea $\bar{Y} \xrightarrow{\hat{i}} Z$ la composición $\bar{Y} \overset{\bar{i}}{\hookrightarrow} Z \times \Delta \xrightarrow{\theta} Z$. Como en la demostración de la

Proposición 2.2.5 vemos que $(\bar{Y}, \widehat{i}\,)$ es una extensión de $Y \xrightarrow{i} Z$. Además se tiene un diagrama conmutativo como (2.1.1.3)

(3.3.2.5)
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \arrow[r] \arrow[d, "\nu_1"'] & i^*\Omega_Z \arrow[r, "\mathrm{D}i"] \arrow[d, "\omega_1"'] & \Omega_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{O}_Y \arrow[r, "j_1"] & \mathscr{F}_1 \arrow[r, "p_1"] & \Omega_Y \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

donde la clase de la fila exacta inferior e_1 es la clase extensión de $\bar{Y}$. Por tanto $\zeta_1 = [e_1]$. También podemos escribir el álgebra de $\bar{Y}$ como esquina superior izquierda en un diagrama couniversal con los homomorfismos $\mathscr{O}_Y \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega_Y$ y $\mathscr{F}_1 \xrightarrow{p_1} \Omega_Y$. Así sobre el abierto afín $U = W \cap Y$, se tiene

$$\mathscr{O}_{\bar{Y}} = \{(c, f_1) \in \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{F}_1 \,|\, p_1 f_1 = \mathrm{d}c\},$$

y una fórmula como (2.2.5.4)

(3.3.2.6)
$$\bar{i}^\sharp(a + a'\epsilon) = (i^\sharp a,\, \omega_1(\mathrm{d}a \otimes 1) + j_1 i^\sharp a').$$

Según la Proposición 2.1.1, a ν_2 le corresponde un único par $(\widetilde{Y}, \widetilde{i})$, donde $\widetilde{Y}$ es una n–cuerda con fibrado conormal $\mathscr{E}$ e $\widetilde{Y} \xrightarrow{\widetilde{i}} Z$ es un morfismo extensión de $Y \overset{i}{\hookrightarrow} Z$. La clase extensión de $\widetilde{Y}$ está representada por la fila exacta inferior e_2 definida por el diagrama universal

(3.3.2.7)
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \arrow[r] \arrow[d, "\nu_2"'] & i^*\Omega_Z \arrow[r, "\mathrm{D}i"] \arrow[d, "\omega_2"'] & \Omega_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r, "j_2"] & \mathscr{F}_2 \arrow[r, "p_2"] & \Omega_Y \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Así se tiene $\zeta_2 = [e_2]$.
Sea $[(e, \omega)]$ la clase definida por un diagrama conmutativo como (2.2.5.3)

(3.3.2.8)
$$\begin{tikzcd} & & & \varphi^*\Omega_Z \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "\mathrm{D}\varphi"] & \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{O}_X \arrow[r, "j"] & \mathscr{G} \arrow[r, "p"] & \Omega_X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

que corresponde a $(\widetilde{X}, \widetilde{\varphi})$. La clase extensión de $\widetilde{X}$ está representada por la fila exacta e en (3.3.2.8) y, según la Proposición 3.2.3, se tiene $\delta_1 \nu = [e]$. En consecuencia, de la conmutatividad de (3.3.2.1), se tiene $\Psi_1[e] = [e_1]$ y $\Psi_2[e] = [e_2]$. Esto demuestra los apartados *1.* y *2.*
Demostremos el apartado *3.* Sea $\bar{Y} \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y}$ el k–esquema obtenido por pegado de $\bar{Y}$ e $\widetilde{Y}$ a lo largo de Y. Según el Lema 3.3.1, sabemos que $\bar{Y} \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y}$ es una $(n+1)$–cuerda con fibrado conormal $\mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{E}$, cuya clase extensión está representada por la fila exacta superior en un diagrama como (3.3.1.11)

(3.3.2.9)
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{E} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{F} \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{E} \arrow[r] & \mathscr{F}_1 \oplus \mathscr{F}_2 \arrow[r] & \Omega_Y \oplus \Omega_Y \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

donde $\Omega_Y \to \Omega_Y \oplus \Omega_Y$ es el homomorfismo diagonal y la fila exacta inferior se obtiene de las extensiones e_1 en (3.3.2.5) y e_2 en (3.3.2.7).

Según la propiedad universal de $\bar{Y} \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y}$, existe un único morfismo $\bar{Y} \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y} \xrightarrow{\hat{\imath}} Z$ que extiende a $\bar{Y} \xrightarrow{\bar{i}} Z$ e $\widetilde{Y} \xrightarrow{\tilde{i}} Z$. Según Lema 3.3.1 *1.*, sabemos también que el esquema $\bar{Y} \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y}$ admite una estructura no trivial de Δ–esquema. En consecuencia existe un Δ–morfismo $\bar{Y} \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y} \xrightarrow{\tilde{\imath}} Z \times \Delta$.

El álgebra $\mathscr{O}$ del esquema $\bar{Y} \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y}$ está definida por un diagrama como (3.3.1.2)

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{O}_{\bar{Y}} \arrow[d, "\bar{p}"] \\
\mathscr{O}_{\widetilde{Y}} \arrow[r, "\tilde{p}"] & \mathscr{O}_Y .
\end{tikzcd}$$

Por tanto podemos escribir

$$\mathscr{O} = \{(\bar{b}, \widetilde{b}) \in \mathscr{O}_{\bar{Y}} \oplus \mathscr{O}_{\widetilde{Y}} \,|\, \bar{p}\,\bar{b} = \tilde{p}\,\widetilde{b}\},$$

de forma que la estructura como Δ–esquema en $\bar{Y} \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y}$ está definida por

$$(\bar{b}, \widetilde{b})\epsilon \;= (\bar{b}\epsilon, 0).$$

Argumentando como en la demostración de la Proposición 2.2.5 con fórmulas como (2.2.8.1)

(3.3.2.10)
$$\mathscr{O}_Z \xrightarrow{\hat{\imath}^\sharp} i_*\mathscr{O} \qquad\qquad \hat{\imath}^\sharp\, a = (\widehat{i}^\sharp\, a, \widetilde{i}^\sharp\, a)$$
$$\mathscr{O}_Z \oplus \mathscr{O}_Z\,\epsilon \xrightarrow{\tilde{\imath}^\sharp} i_*\mathscr{O} \qquad\qquad \tilde{\imath}^\sharp(a + a'\epsilon) = \hat{\imath}^\sharp\, a + \hat{\imath}^\sharp\, a'\epsilon,$$

es inmediato verificar que son conmutativos los diagramas

$$\begin{tikzcd}
\bar{Y} \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y} \arrow[r, "\tilde{\imath}"] & Z \times \Delta \\
\bar{Y} \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\bar{i}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\bar{Y} \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y} \arrow[r, "\tilde{\imath}"] & Z \times \Delta \\
\widetilde{Y} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\tilde{i}"] & Z. \arrow[u, "i_Z"']
\end{tikzcd}$$

La unicidad de $\bar{Y} \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y} \xrightarrow{\tilde{\imath}} Z \times \Delta$ se deduce de la unicidad de $\bar{Y} \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y} \xrightarrow{\hat{\imath}} Z$.

Además, $\bar{Y} \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y} \xrightarrow{\hat{\imath}} Z$ es el morfismo extensión de $Y \xrightarrow{i} Z$ que, según la Proposición 2.1.1, corresponde a $\mathscr{I}_{Y,Z}/\mathscr{I}^2_{Y,Z} \xrightarrow{\nu_1 \oplus \nu_2} \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{E}$. En efecto, la clase de la fila exacta superior en (3.3.2.9) es la clase extensión de $\bar{Y} \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y}$ y de (3.3.2.5) y (3.3.2.7) se obtiene un diagrama conmutativo

(3.3.2.11)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \arrow[r] \arrow[d, "\nu_1 \oplus \nu_2"'] & i^*\Omega_Z \arrow[r, "\mathrm{D}i"] \arrow[d, "\omega_3"'] & \Omega_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{E} \arrow[r] & \mathscr{F} \arrow[r] & \Omega_Y \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

En consecuencia, según la Proposición 2.1.1, existe un morfismo $\bar{Y} \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y} \xrightarrow{\widehat{\iota}'} Z$ extensión de $Y \xrightarrow{i} Z$ definido por $\nu_1 \oplus \nu_2$. Componiendo el diagrama (3.3.2.11) con los diagramas universales obtenidos de la fila inferior con las proyecciones de $\mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{E}$ a cada factor, se recuperan los diagramas (3.3.2.5) y (3.3.2.7). Así que $\widehat{\iota}'$ restringe a $\bar{Y} \xrightarrow{\widehat{i}} Z$ y $\widetilde{Y} \xrightarrow{\widetilde{i}} Z$ y por tanto se tiene $\widehat{\iota}' = \widehat{\iota}$.
Demostramos ahora el apartado *4*. Podemos escribir el álgebra de $\bar{Y} \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y}$ sobre un abierto afín $U = W \cap Y$ como

$$\mathscr{O} = \{(c, f_1, f_2) \in \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{F}_1 \oplus \mathscr{F}_2 \mid \mathrm{d}c = p_1 f_1 = p_2 f_2\}.$$

Entonces, por definición, $(c, f_1, f_2)\,\epsilon = (0, j_1 c, 0)$ y de (3.3.2.10) obtenemos

$$\widetilde{\iota}^\sharp a = (i^\sharp a,\, \omega_1(\mathrm{d}a \otimes 1),\, \omega_2(\mathrm{d}a \otimes 1)).$$

En consecuencia $\widetilde{\iota}$ está localmente dado por

$$\begin{aligned} &\mathscr{O}_Z \oplus \mathscr{O}_Z \epsilon \xrightarrow{\widetilde{\iota}^\sharp} i_* \mathscr{O} \\ &\widetilde{\iota}^\sharp(a + a'\epsilon) = (i^\sharp a,\, \omega_1(\mathrm{d}a \otimes 1) + j_1 i^\sharp a',\, \omega_2(\mathrm{d}a \otimes 1)). \end{aligned} \tag{3.3.2.12}$$

Si $a \in \mathscr{I}$ entonces $\omega_1(\mathrm{d}a \otimes 1) = j_1 \nu_1(\bar{a})$ y $\omega_2(\mathrm{d}a \otimes 1) = j_2 \nu_2(\bar{a})$. Por tanto se tiene

$$\ker \widetilde{\iota}^\sharp = \{a + a'\,\epsilon \mid a \in \mathscr{I},\, \nu_1(\bar{a}) = -i^\sharp a' \text{ y } \nu_2(\bar{a}) = 0\}. \tag{3.3.2.13}$$

Denotemos $\mathscr{J}$ el ideal en Z de la imagen del morfismo $\widetilde{Y} \xrightarrow{\widetilde{i}} Z$. Sabemos, según la Proposición 2.1.1, que $\mathscr{J}$ es el núcleo de $\mathscr{I}_{Y,Z} \to \mathscr{I}_{Y,Z}/\mathscr{I}_{Y,Z}^2 \xrightarrow{\nu_2} \mathscr{E}$. Así, a partir de (3.3.2.4) y (3.3.2.13), vemos que

$$\ker \widetilde{\iota}^\sharp = \bar{\mathscr{I}} \cap (\mathscr{J} + \mathscr{O}_Z\,\epsilon).$$

Esto demuestra el apartado *4*.
Definimos ahora el morfismo $\widetilde{X} \xrightarrow{\widetilde{\pi}} \bar{Y} \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y}$ extensión de $X \xrightarrow{\pi} Y$. Denotemos π' la composición $X \xrightarrow{\pi} Y \hookrightarrow \bar{Y} \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y}$. La sucesión cotangente restringida de $\bar{Y} \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y}$ es equivalente a la fila superior en (3.3.2.9). Así se tiene $\pi'^*(\Omega_{\bar{Y} \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y}}) \simeq \pi^* \mathscr{F}$. En consecuencia, según la Proposición 1.3.1, los morfismos $\widetilde{X} \xrightarrow{\widetilde{\pi}} \bar{Y} \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y}$ extensión de $X \xrightarrow{\pi'} \bar{Y} \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y}$ están en biyección con los diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} & & & \pi^*\mathscr{F} \arrow[dl, "\omega'"'] \arrow[d, "\mathrm{D}\pi'"] & \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{O}_X \arrow[r, "j"] & \mathscr{G} \arrow[r, "p"] & \Omega_X \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{3.3.2.14}$$

Construyamos un diagrama como (3.3.2.14). Consideremos el isomorfismo de excisión $\pi_* \mathscr{O}_X \simeq \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{E}$. Denotemos también por $\nu_1 \oplus \nu_2$ el homomorfismo inducido

$$\mathscr{I}_{Y,Z}/\mathscr{I}_{Y,Z}^2 \xrightarrow{\nu_1 \oplus \nu_2} \pi_* \mathscr{O}_X.$$

Con las notaciones de (3.2.3.1) se tiene, por construcción, $\alpha^{-1}(\nu_1 \oplus \nu_2) = \phi(\nu)$. Por tanto $\phi(\nu)$ es la composición

$$\pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \xrightarrow{\pi^*(\nu_1\oplus\nu_2)} \pi^*\pi_*\mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}_X.$$

Por otra parte, $\delta_3(\nu_1 \oplus \nu_2)$ es la clase de la fila inferior en el diagrama

(3.3.2.15)
$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathscr{I}/\mathscr{I}^2 & \longrightarrow & i^*\Omega_Z & \xrightarrow{\mathrm{D}i} & \Omega_Y & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \nu_1\oplus\nu_2} & & \downarrow{\scriptstyle \omega_3} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \pi_*\mathscr{O}_X & \xrightarrow{j_{\mathscr{F}}} & \mathscr{F} & \xrightarrow{p_{\mathscr{F}}} & \Omega_Y & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

obtenido de (3.3.2.11).
Ahora, de la conmutatividad del diagrama (3.2.3.1), obtenemos $\beta^{-1}\delta_3(\nu_1 \oplus \nu_2) = \delta_2\phi(\nu)$. En consecuencia la composición

(3.3.2.16)
$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 & \longrightarrow & \varphi^*\Omega_Z & \xrightarrow{\pi^*\mathrm{D}i} & \pi^*\Omega_Y & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \pi^*(\nu_1\oplus\nu_2)} & & \downarrow{\scriptstyle \pi^*\omega_3} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \pi^*\pi_*\mathscr{O}_X & \longrightarrow & \pi^*\mathscr{F} & \longrightarrow & \pi^*\Omega_Y & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \mathscr{O}_X & \longrightarrow & \mathscr{H} & \longrightarrow & \pi^*\Omega_Y & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

del levantado por π del diagrama (3.3.2.15) y de un diagrama como (3.2.4.6) es un diagrama conmutativo

(3.3.2.17)
$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 & \longrightarrow & \varphi^*\Omega_Z & \xrightarrow{\pi^*\mathrm{D}i} & \pi^*\Omega_Y & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \phi(\nu)} & & \downarrow{\scriptstyle \varpi} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \mathscr{O}_X & \longrightarrow & \mathscr{H} & \longrightarrow & \pi^*\Omega_Y & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

donde $\varphi^*\Omega_Z \xrightarrow{\varpi} \mathscr{H}$ es la composición

$$\varphi^*\Omega_Z \xrightarrow{\pi^*\omega_3} \pi^*\mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{H}$$

y la fila exacta inferior representa la clase $\beta^{-1}\delta_3(\nu_1 \oplus \nu_2)$.
De nuevo de la conmutatividad de (3.2.3.1) se obtiene $\beta^{-1}\delta_3(\nu_1 \oplus \nu_2) = \mathrm{d}\pi(\delta_1\nu)$. Sabemos también que $\delta_1\nu = [e]$, donde e es, como antes, la fila exacta en (3.3.2.8). Así $\mathrm{d}\pi([e])$ es también la clase de la fila exacta inferior en (3.3.2.17). En consecuencia existe un diagrama conmutativo

(3.3.2.18)
$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathscr{O}_X & \longrightarrow & \mathscr{H} & \longrightarrow & \pi^*\Omega_Y & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{D}\pi} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathscr{O}_X & \longrightarrow & \mathscr{G} & \longrightarrow & \Omega_X & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Por composición de la parte inferior del diagrama (3.3.2.16) y del diagrama (3.3.2.18) obtenemos un diagrama conmutativo

(3.3.2.19)
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \pi^*\pi_*\mathscr{O}_X \arrow[r, "\pi^* j_{\mathscr{F}}"] \arrow[d, "\mathrm{can}"'] & \pi^*\mathscr{F} \arrow[r, "\pi^* p_{\mathscr{F}}"] \arrow[d, "\omega'"'] & \pi^*\Omega_Y \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{D}\pi"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{O}_X \arrow[r, "j"] & \mathscr{G} \arrow[r, "p"] & \Omega_X \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Ahora, de la definición de π', se obtiene que la composición $\pi^*\mathscr{F} \to \pi^*\Omega_Y \xrightarrow{\mathrm{D}\pi} \Omega_X$ es $\pi^*\mathscr{F} \xrightarrow{\mathrm{D}\pi'} \Omega_X$. En efecto, sabemos que $\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} \Omega_{\bar{Y}\cup_Y \widetilde{Y}}|_Y$ y este isomorfismo identifica $\mathscr{F} \to \Omega_Y$ con el homomorfismo canónico $\Omega_{\bar{Y}\cup_Y \widetilde{Y}}|_Y \to \Omega_Y$. Esto prueba la existencia de un morfismo $\widetilde{X} \xrightarrow{\widetilde{\pi}} \bar{Y} \cup_Y \widetilde{Y}$ extensión de $X \xrightarrow{\pi'} \bar{Y} \cup_Y \widetilde{Y}$.

Por otra parte, por composición de los diagramas (3.3.2.17) y (3.3.2.18) se obtiene un diagrama conmutativo

(3.3.2.20)
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \arrow[r] \arrow[d, "\phi(\nu)"'] & \varphi^*\Omega_Z \arrow[r, "\pi^*\mathrm{D}i"] \arrow[d, "\omega''"'] & \pi^*\Omega_Y \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{D}\pi"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{O}_X \arrow[r] & \mathscr{G} \arrow[r] & \Omega_X \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

donde ω'' es $\varphi^*\Omega_Z \xrightarrow{\pi^*\omega_3} \pi^*\mathscr{F} \xrightarrow{\omega'} \mathscr{G}$. El diagrama (3.3.2.20) define una deformación infinitesimal, localmente trivial, de primer orden de $\widetilde{X} \xrightarrow{\widetilde{\psi}} Z \times \Delta$ de φ con el mismo origen $\widetilde{X}$ que $\widetilde{\varphi}$. Verifiquemos que $\widetilde{\psi}$ es igual a la composición $\widetilde{X} \xrightarrow{\widetilde{\pi}} \bar{Y} \cup_Y \widetilde{Y} \xrightarrow{\widetilde{\iota}} Z \times \Delta$. Escribimos el álgebra de $\widetilde{X}$ como

$$\mathscr{O}_{\widetilde{X}} = \{(b, s) \in \mathscr{O}_X \oplus \mathscr{G} \mid p\, s = \mathrm{d}b\}.$$

Entonces con la fórmula local (3.3.2.12), fórmulas como (2.2.5.4)

$$\begin{aligned} &\mathscr{O}_Z \oplus \mathscr{O}_Z\epsilon \xrightarrow{\widetilde{\psi}^\sharp} \varphi_*\mathscr{O}_{\widetilde{X}} \\ &\widetilde{\psi}^\sharp(a + a'\epsilon) = (\varphi^\sharp a,\, \omega''(\mathrm{d}a \otimes 1) + j\varphi^\sharp a'), \end{aligned}$$

y como (1.3.2.4)

$$\begin{aligned} \mathscr{O} &\xrightarrow{\widetilde{\pi}^\sharp} \pi_*\mathscr{O}_{\widetilde{X}} \\ \widetilde{\pi}^\sharp m &= (\pi'^\sharp m,\ \omega'(\mathrm{d}m \otimes 1)) \\ &= (\pi^\sharp c, \omega'(\pi^* f)), \end{aligned}$$

donde $m = (c, f = (f_1, f_2)) \in \mathscr{O} = \{(c, f_1, f_2) \in \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{F}_1 \oplus \mathscr{F}_2 \mid \mathrm{d}c = p_1 f_1 = p_2 f_2\}$, y con la identidad $\omega'' = \omega'(\pi^*\omega_3)$, la verificación de la identidad $(i_*\widetilde{\pi}^\sharp)\widetilde{\iota}^\sharp = \widetilde{\psi}^\sharp$ se reduce a comprobar la igualdad $\omega'\pi^*(j_1 i^\sharp a', 0) = j\varphi^\sharp a'$ con $a' \in \mathscr{O}_Z$ una sección local. Con las notaciones de (3.3.2.15) y (3.3.2.19), se tiene $j_{\mathscr{F}}(i^\sharp a', 0) = (j_1 i^\sharp a', 0)$ y entonces

$$\begin{aligned} \omega'\pi^*(j_1 i^\sharp a', 0) &= \omega'(\pi^*(j_{\mathscr{F}}(i^\sharp a', 0))) \\ &= \omega'((\pi^* j_{\mathscr{F}})\pi^*(i^\sharp a', 0)) \\ &= j\,\mathrm{can}(\pi^*(i^\sharp a', 0)) \\ &= j((i_*\pi^\sharp)i^\sharp a') \\ &= j\varphi^\sharp a'. \end{aligned}$$

Sabemos también, según la construcción en el Lema 3.2.2, que (3.3.2.8) da lugar al siguiente diagrama

(3.3.2.21)
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \arrow[r] \arrow[d, "\phi(\nu)"'] & \varphi^*\Omega_Z \arrow[r, "\pi^*\mathrm{D}i"] \arrow[d, "\omega"'] & \pi^*\Omega_Y \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{D}\pi"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{O}_X \arrow[r] & \mathscr{G} \arrow[r] & \Omega_X \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

De (3.3.2.20), (3.3.2.21) y del hecho de que $\mathrm{D}\pi$ es un isomorfismo fuera del divisor de ramificación R de $X \xrightarrow{\pi} Y$, vemos que las deformaciones $\widetilde{\varphi}$ y $\widetilde{\psi}$ coinciden sobre el subesquema abierto de $\widetilde{X}$ con soporte en el conjunto abierto $X - R$. También, de (3.3.2.20), vemos que si $\nu' \in H^0(\mathscr{N}_\varphi)$ es el elemento que corresponde a $\widetilde{\psi}$ entonces $\phi(\nu') \in \mathrm{Hom}(\pi^*\mathscr{I}/\mathscr{I}^2, \mathscr{O}_X)$ es igual a $\phi(\nu)$. De la sucesión exacta en secciones globales obtenida de (3.2.1.1)

$$0 \to H^0(\mathscr{N}_\pi) \to H^0(\mathscr{N}_\varphi) \xrightarrow{\phi} H^0(\pi^*\mathscr{N}_{Y,Z}),$$

y el isomorfismo $D(X,\pi) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathscr{N}_\pi)$, donde

$$D(X,\pi) = \frac{\{(h',\rho) \in \mathscr{C}^0(\mathscr{V}, \mathscr{H}om(\pi^*\Omega_Y, \mathscr{O}_X)) \times \mathscr{Z}^1(\mathscr{V}, \mathscr{H}om(\Omega_X, \mathscr{O}_X)) \mid \delta h' = \rho\,\mathrm{D}\pi)\}}{\{(h\,\mathrm{D}\pi, \delta\, h) \mid h \in \mathscr{C}^0(\mathscr{V}, \mathscr{H}om(\Omega_X, \mathscr{O}_X))\}},$$

vemos que la diferencia de $(\widetilde{X}, \widetilde{\varphi})$ y $(\widetilde{X}, \widetilde{\psi})$ es una deformación infinitesimal, localmente trivial, de primer orden con origen trivial, $X \times \Delta \to Y \times \Delta$, de $X \xrightarrow{\pi} Y$. $\square$

El siguiente resultado, con las notaciones de la Proposición 3.3.2 y de (3.3.2.2), describe la imagen del morfismo $\widetilde{\varphi}$ en relación con la deformación sumergida $\bar{Y}$ y el par $(\widetilde{Y}, \widetilde{i})$ asociados a $(\widetilde{X}, \widetilde{\varphi})$.

Teorema 3.3.3. *Sea $X \xrightarrow{\varphi} Z$ un morfismo de una variedad íntegra, Cohen–Macaulay, X a una variedad lisa e irreducible Z. Sea Y su imagen esquemática. Supongamos que Y es lisa y que φ induce un morfismo finito $X \xrightarrow{\pi} Y$. Sea $(\widetilde{X}, \widetilde{\varphi})$ una deformación infinitesimal, localmente trivial, de primer orden de $X \xrightarrow{\varphi} Z$ definida por una sección global ν de $\mathscr{N}_\varphi$. Entonces:*

1. *La fibra central de la imagen del morfismo $\widetilde{\varphi}$ contiene a Y y está contenida en el primer entorno infinitesimal de Y en Z y es igual a la imagen del morfismo $\widetilde{Y} \to Z$ obtenido de ν_2. Con más precisión, el ideal de ambas la fibra central de la imagen de $\widetilde{\varphi}$ y de la imagen de $\widetilde{Y} \to Z$ es el núcleo de la composición de homomorfismos*

$$\mathscr{I}_{Y,Z} \to \mathscr{I}_{Y,Z}/\mathscr{I}_{Y,Z}^2 \xrightarrow{\nu_2} \mathscr{E}.$$

2. *La imagen de $\widetilde{\varphi}$ es la unión esquemática de su fibra central y de la deformación plana de Y definida por ν_1 y es igual a la imagen del Δ–morfismo $\bar{Y} \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y} \xrightarrow{\iota} Z \times \Delta$.*

Dem. Denotemos $\widetilde{\mathscr{J}}$ el ideal en $Z \times \Delta$ de la imagen de $\widetilde{\varphi}$ y denotemos $\mathscr{J}$ el ideal en Z de la fibra central $(\operatorname{im}\widetilde{\varphi})_0$. Denotemos $\bar{\mathscr{I}}$ el ideal de $\bar{Y}$ en $Z \times \Delta$.
Recordemos, véase la Observación 2.2.3, que una sucesión exacta corta localmente escindida de haces coherentes en un esquema noetheriano separado es escindida sobre cada subconjunto abierto afín. Así se puede cubrir Y con subconjuntos abiertos afines $U = W \cap Y = \operatorname{Spec} A/I$, donde $W = \operatorname{Spec} A$ es un subconjunto abierto afín en Z, de forma que la deformación, localmente trivial, de primer orden $\widetilde{X}$ sea trivial sobre los subconjuntos abiertos afines $V = \pi^{-1}U = \operatorname{Spec} B$ que cubren X.

Se tiene entonces $B = A/I \oplus M$ con $M = \Gamma(U, \mathscr{E})$. Sea $A \xrightarrow{\varphi^\sharp} B$ el homomorfismo de anillos inducido por el morfismo φ.
Según la Proposición 2.2.5 y el Lema 3.2.2, a $(\widetilde{X}, \widetilde{\varphi})$ le corresponde una sección global $\nu \in H^0(\mathscr{N}_\varphi)$ y, según el isomorfismo en (3.2.2.1), consideramos ν como una clase $[(g, \rho)] \in D(X, \varphi)$, para un par $(g, \rho) \in \mathscr{C}^0(\mathscr{V}, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\varphi^*\Omega_Z, \mathscr{O}_X)) \times \mathscr{Z}^1(\mathscr{V}, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\Omega_X, \mathscr{O}_X))$ tal que $\delta g = \rho\, \mathrm{D}\varphi$, donde $\mathscr{V}$ es la cubierta abierta afín considerada en X.
Los anillos de $Z \times \Delta$ sobre W y de $\widetilde{X}$ sobre V son, respectivamente, $A \oplus A\epsilon$ y $B \oplus B\epsilon$. Entonces, según la Observación 2.2.7, el homomorfismo de anillos inducido por el morfismo $\widetilde{\varphi}$ se escribe en la forma

$$\begin{aligned} & A \oplus A\epsilon \xrightarrow{\widetilde{\varphi}^\sharp} B \oplus B\epsilon \\ & a + a'\epsilon \mapsto \varphi^\sharp a + (g_V(\mathrm{d}a \otimes 1) + \varphi^\sharp a')\,\epsilon, \end{aligned} \tag{3.3.3.1}$$

donde $\Omega_A \otimes B \xrightarrow{g_V} B$ es el homomorfismo determinado por la cocadena g sobre el conjunto abierto $V \in \mathscr{V}$.
Demostremos la parte *1*.
El hecho de que el ideal de la imagen del morfismo $\widetilde{Y} \to Z$ obtenido de ν_2 es el núcleo de $\mathscr{I}_{Y,Z} \to \mathscr{I}_{Y,Z}/\mathscr{I}_{Y,Z}^2 \xrightarrow{\nu_2} \mathscr{E}$ se sigue de la Proposición 2.1.1.
Ahora debemos demostrar que $\mathscr{I}_{Y,Z}^2 \subset \mathscr{J} \subset \mathscr{I}_{Y,Z}$ y que $\mathscr{J}$ es el núcleo de $\mathscr{I}_{Y,Z} \to \mathscr{I}_{Y,Z}/\mathscr{I}_{Y,Z}^2 \xrightarrow{\nu_2} \mathscr{E}$. Esto puede ser probado localmente. Denotemos $I, J \subset A$, respectivamente, los ideales de Y y $(\operatorname{im}\widetilde{\varphi})_0$ y detonemos $\bar{I}, \widetilde{J} \subset A \oplus A\epsilon$, respectivamente, los ideales de $\bar{Y}$ e $\operatorname{im}\widetilde{\varphi}$. Por definición $\widetilde{J}$ es el núcleo del homomorfismo (3.3.3.1). En consecuencia

$$\widetilde{J} = \{a + a'\epsilon \mid a \in I \ \text{ y } \ g_V(\mathrm{d}a \otimes 1) + \varphi^\sharp a' = 0\}.$$

Por otra parte, tomar la fibra central equivale a tensorizar los anillos con $k[\epsilon]/\epsilon k[\epsilon]$ de modo que J es la imagen de $\widetilde{J} \otimes k[\epsilon]/\epsilon k[\epsilon] \to A$. Por tanto

$$J = \{a \in I \mid g_V(\mathrm{d}a \otimes 1) \in \operatorname{im} \varphi^\sharp = A/I \subset B\}.$$

En particular, se tiene $J \subset I$.
Del Lema 3.2.2, obtenemos diagramas conmutativos de homomorfismos de, respectivamente, B–módulos y A/I–módulos

(3.3.3.2)
$$\begin{tikzcd} I/I^2 \otimes B \arrow[r] \arrow[d, "\phi(\nu)|_V"'] & \Omega_A \otimes B \arrow[dl, "g_V"] \\ B\,, & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I/I^2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha\phi(\nu)|_U"'] & \Omega_A \otimes A/I \arrow[dl, "f_U"] \\ B\,. & \end{tikzcd}$$

Según el diagrama de la parte izquierda vemos que $I^2 \subset J$.
Según la escisión $B = A/I \oplus M$, consideramos f_U como un par $((f_U)_1, (f_U)_2) \in \operatorname{Hom}_{A/I}(\Omega_A \otimes A/I, A/I) \oplus \operatorname{Hom}_{A/I}(\Omega_A \otimes A/I, M)$. Por tanto, con las notaciones de (3.3.2.1) y (3.3.2.2), el diagrama de la derecha en (3.3.3.2) equivale a diagramas conmutativos

(3.3.3.3)
$$\begin{tikzcd} I/I^2 \arrow[r] \arrow[d, "\nu_1"'] & \Omega_A \otimes A/I \arrow[dl, "(f_U)_1"] \\ A/I\,, & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I/I^2 \arrow[r] \arrow[d, "\nu_2"'] & \Omega_A \otimes A/I \arrow[dl, "(f_U)_2"] \\ M\,. & \end{tikzcd}$$

De (3.3.3.2) y (3.3.3.3) podemos reescribir $\widetilde{J}$ como

(3.3.3.4)
$$\widetilde{J} = \{a + a'\epsilon \mid a \in I, \nu_1(\bar{a}) = -\bar{a}' \;\text{ y }\; \nu_2(\bar{a}) = 0\}.$$

De (3.3.3.4) y del hecho de que J es la imagen de $\widetilde{J} \otimes k[\epsilon]/\epsilon k[\epsilon] \to A$ vemos que

(3.3.3.5)
$$J = \{a \in I \mid \nu_2(\bar{a}) = 0\}.$$

Demostremos ahora la parte *2*.
El hecho de que la imagen de $\widetilde{\varphi}$ es la unión esquemática de su fibra central y de la deformación plana de Y definida por ν_1 es, por definición, equivalente a la identidad

$$\widetilde{\mathscr{J}} = \bar{\mathscr{I}} \cap (\mathscr{J} + \mathscr{O}_Z\,\epsilon),$$

o localmente a la identidad

(3.3.3.6)
$$\widetilde{J} = \bar{I} \cap (J + A\epsilon).$$

Demostremos (3.3.3.6). El subesquema plano $\bar{Y} \subset Z \times \Delta$ es la imagen de la deformación del morfismo de inclusión $Y \hookrightarrow Z$ definida, según la Proposición 2.2.5, por la sección global $\nu_1 \in H^0(\mathscr{N}_{Y,Z})$. Por tanto, véase la Observación 2.2.8 y (3.3.2.4),

(3.3.3.7)
$$\bar{I} = \{a + a'\epsilon \mid a \in I \;\text{ y }\; (f_U)_1(\mathrm{d}a \otimes 1) = -\bar{a}'\} = \{a + a'\epsilon \mid a \in I \;\text{ y }\; \nu_1(\bar{a}) = -\bar{a}'\}.$$

De (3.3.3.5) y (3.3.3.7), se tiene

$$\bar{I} \cap (J + A\epsilon) = \{a + a'\epsilon \,|\, a \in I, \nu_1(\bar{a}) = -a' \text{ y } \nu_2(\bar{a}) = 0\} = \widetilde{J}.$$

El hecho de que la imagen del Δ–morfismo $\bar{Y} \underset{Y}{\cup} \widetilde{Y} \xrightarrow{\tilde{\iota}} Z \times \Delta$ es la unión esquemática de la imagen de $\widetilde{Y} \to Z$ y $\bar{Y}$ está demostrado en la Proposición 3.3.2. $\square$

Establecemos ahora el resultado principal de esta sección que podemos interpretar como un Teorema de "alisamiento infinitesimal"para cuerdas sumergidas.

Teorema 3.3.4. *Sea $X \xrightarrow{\varphi} Z$ un morfismo de una variedad íntegra, Cohen–Macaulay, X a una variedad lisa e irreducible Z. Sea Y su imagen esquemática. Supongamos que Y es lisa y que φ induce un morfismo finito $X \xrightarrow{\pi} Y$. Sea $\mathscr{E}$ el $\mathscr{O}_Y$–módulo localmente libre $\pi_*\mathscr{O}_X/\mathscr{O}_Y$. Si la aplicación $H^1(\mathscr{N}_\pi) \to H^1(\mathscr{N}_\varphi)$ es inyectiva entonces toda cuerda sobre Y, con fibrado conormal contenido en $\mathscr{E}$, sumergida en Z es la fibra central de la imagen de alguna deformación infinitesimal, localmente trivial, de primer orden de φ.*

Dem. Según la Proposición 1.2.1, una cuerda $\widetilde{Y}$ sobre Y, con fibrado conormal $\mathscr{E}'$, sumergida en Z corresponde a un homomorfismo sobreyectivo $\mathscr{I}_{Y,Z}/\mathscr{I}_{Y,Z}^2 \overset{\tau}{\twoheadrightarrow} \mathscr{E}'$ y su ideal $\mathscr{J}$ es el núcleo de $\mathscr{I}_{Y,Z} \twoheadrightarrow \mathscr{I}_{Y,Z}/\mathscr{I}_{Y,Z}^2 \overset{\tau}{\twoheadrightarrow} \mathscr{E}'$.
Supongamos que $\mathscr{E}' \subset \mathscr{E}$ y denotemos ν_2 la aplicación inducida $\mathscr{I}_{Y,Z}/\mathscr{I}_{Y,Z}^2 \xrightarrow{\nu_2} \mathscr{E}$. la hipótesis de que la aplicación $H^1(\mathscr{N}_\pi) \to H^1(\mathscr{N}_\varphi)$ sea inyectiva es equivalente, según la sucesión de cohomología de (3.2.1.1), al hecho de que la aplicación

$$H^0(\mathscr{N}_\varphi) \xrightarrow{\phi} H^0(\pi^*\mathscr{N}_{Y,Z})$$

en (3.2.3.1) sea sobreyectiva. En consecuencia el elemento $(0, \nu_2) \in H^0(\pi^*\mathscr{N}_{Y,Z})$ admite un levantamiento a una sección global $\nu \in H^0(\mathscr{N}_\varphi)$. Sea $\widetilde{\varphi}$ la deformación infinitesimal, localmente trivial, de primer orden asociada. Según el Teorema 3.3.3, vemos que la fibra central $(\operatorname{im}\widetilde{\varphi})_0$ tiene ideal $\mathscr{J}$. $\square$

En el caso de que Y sea una curva obtenemos

Teorema 3.3.5. *Sea $X \xrightarrow{\varphi} Z$ un morfismo de una curva lisa e irreducible X a una variedad lisa e irreducible Z. Sea Y su imagen esquemática. Supongamos que Y es lisa y que φ induce un morfismo finito $X \xrightarrow{\pi} Y$. Sea $\mathscr{E}$ el $\mathscr{O}_Y$–módulo localmente libre $\pi_*\mathscr{O}_X/\mathscr{O}_Y$. Entonces cada cuerda sobre la curva lisa e irreducible Y, con fibrado conormal contenido en $\mathscr{E}$, sumergida en Z es la fibra central de la imagen de alguna deformación infinitesimal de primer orden de φ.*

Dem. Puesto que X es una curva vemos que el soporte de $\mathscr{N}_\pi$ es un conjunto finito. En consecuencia $H^1(\mathscr{N}_\pi) = 0$. $\square$

Como consecuencia obtenemos el resultado infinitesimal clave que usaremos en la demostración del Teorema 5.1.1 de alisamiento global de cintas sumergidas sobre curvas.

Teorema 3.3.6. *Sean Y una curva proyectiva lisa e irreducible en $\mathbb{P}^r$ y $\mathscr{E}$ un fibrado de línea en Y. Supongamos que existe un recubrimiento doble liso e irreducible $X \xrightarrow{\pi} Y$ con $\pi_*\mathscr{O}_X/\mathscr{O}_Y = \mathscr{E}$. Sea $X \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^r$ el morfismo obtenido componiendo π con la inclusión de Y en $\mathbb{P}^r$. Entonces cada cinta sobre Y, con fibrado conormal $\mathscr{E}$, sumergida en $\mathbb{P}^r$ es la fibra central de la imagen de alguna deformación infinitesimal de primer orden de φ.*

Finalmente, manteniendo las notaciones previas, identificamos cuando se obtiene la propia subvariedad Y como fibra centrar de la imagen de $\widetilde{\varphi}$ y cuando $\widetilde{\varphi}$ factoriza a través de $Y \times \Delta$. Usaremos el siguiente

3.3.7 (Criterio local de platitud). *[Mat80, 20.C] Sean A un anillo, I un ideal de A y M un A-módulo. Sean $A_0 = A/I$ y $M_0 = M/IM$. Supongamos que I es nilpotente. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *M es A–plano.*
2. *M_0 es A_0–plano, y $I \otimes_A M \simeq IM$ por la aplicación natural.*
3. *M_0 es A_0–plano y $\mathrm{Tor}_1^A(A_0, M) = 0$.*

Proposición 3.3.8. *En la situación del Teorema 3.3.3, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$Y = (\mathrm{im}\,\widetilde{\varphi})_0$.*
2. *$\nu_2 = 0$.*

2'. *$(\widetilde{Y}, \widetilde{i})$ es el par formado por la cuerda escindida y su proyección a Y.*

3. *$\mathrm{im}\,\widetilde{\varphi} \subset \bar{Y}$.*
4. *$\mathrm{im}\,\widetilde{\varphi} = \bar{Y}$.*
5. *$\mathrm{im}\,\widetilde{\varphi}$ es plano sobre Δ.*

Dem. 2. $\Leftrightarrow$ 2'. Si $\nu_2 = 0$ entonces, según la Proposición 2.1.1, $[e_{\widetilde{Y}}] = \delta\,\nu_2 = 0$. Por tanto $\widetilde{Y}$ es la cuerda escindida y con la fórmula (2.1.1.9) comprobamos que $\widetilde{Y} \xrightarrow{\widetilde{i}} Z$ induce una retracción de $Y \hookrightarrow \widetilde{Y}$. Recíprocamente supongamos que $\widetilde{Y}$ es la cuerda escindida e $\mathrm{im}\,\widetilde{i} \subset Y$. Entonces $\mathscr{I}_{Y,Z} \subset \mathscr{I}_{\mathrm{im}\,\widetilde{i},Z}$. Ahora bien, según la Proposición 2.1.1, el subesquema $\mathrm{im}\,\widetilde{i}$ tiene por ideal en Z el núcleo de $\mathscr{I}_{Y,Z} \to \mathscr{I}_{Y,Z}/\mathscr{I}_{Y,Z}^2 \xrightarrow{\nu_2} \mathscr{E}$. Por tanto $\nu_2 = 0$.
1. $\Rightarrow$ 2. Se deduce de Teorema 3.3.3 *1.*
2. $\Rightarrow$ 3. Las expresiones (3.3.3.4) and (3.3.3.7) dicen que

$$\widetilde{\mathscr{J}} = \{a + a'\epsilon \mid a \in \mathscr{I}_{Y,Z}, \nu_1(\bar{a}) = -\bar{a}' \ \text{ y } \ \nu_2(\bar{a}) = 0\}. \tag{3.3.8.1}$$

$$\bar{\mathscr{I}} = \{a + a'\epsilon \mid a \in \mathscr{I}_{Y,Z} \ \text{ y } \ \nu_1(\bar{a}) = -\bar{a}'\}. \tag{3.3.8.2}$$

Por tanto, si $\nu_2 = 0$ entonces $\operatorname{im}\widetilde{\varphi} \subset \bar{Y}$.
3. $\Rightarrow$ *4.* Se deduce del Teorema 3.3.3 *2.*
4. $\Rightarrow$ *5.* Es bien conocido que el subesquema $\bar{Y}$ definido por (3.3.8.2) es plano sobre Δ.
5. $\Rightarrow$ *1.* Según el "Criterio local de platitud"[Mat80, 20.C], vemos que $\operatorname{im}\widetilde{\varphi}$ es plano sobre Δ sii $\mathscr{T}or_1^{\Delta}(k[\epsilon]/\epsilon k[\epsilon], \mathscr{O}_{\operatorname{im}\widetilde{\varphi}}) = 0$. Tensorizando por $k[\epsilon]/\epsilon k[\epsilon]$ la sucesión exacta $\widetilde{\mathscr{J}} \hookrightarrow \mathscr{O}_Z \otimes k[\epsilon] \twoheadrightarrow \mathscr{O}_{\operatorname{im}\widetilde{\varphi}}$ vemos que esta última condición es equivalente al hecho de que el homomorfismo sobreyectivo $\widetilde{\mathscr{J}} \otimes k[\epsilon]/\epsilon k[\epsilon] \to \mathscr{J}$ sea un isomorfismo. Por otra parte, teniendo en cuenta la identidad $\widetilde{\mathscr{J}}\epsilon = \mathscr{J}\epsilon$, es sencillo comprobar que son equivalentes:
(1) $\widetilde{\mathscr{J}} \otimes k[\epsilon]/\epsilon k[\epsilon] \to \mathscr{J}$ es inyectivo.
(2) $\widetilde{\mathscr{J}} \cap \mathscr{O}_Z\epsilon \subset \mathscr{J}\epsilon$.
(3) $a\epsilon \in \widetilde{\mathscr{J}} \Rightarrow a \in \mathscr{J}$.
Ahora, de (3.3.8.1), obtenemos $\mathscr{I}_{Y,Z}\epsilon = \widetilde{\mathscr{J}} \cap \mathscr{O}_Z\epsilon$. Así se tiene $\mathscr{I}_{Y,Z}\epsilon \subset \mathscr{J}\epsilon$ y en consecuencia $\mathscr{I}_{Y,Z} \subset \mathscr{J}$. La inclusión $\mathscr{J} \subset \mathscr{I}_{Y,Z}$ se deduce del Teorema 3.3.3 1. □

Proposición 3.3.9. *En la situación del Teorema 3.3.3, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$(\widetilde{X}, \widetilde{\varphi})$ factoriza a través de una deformación infinitesimal, localmente trivial, de primer orden $\widetilde{X} \to Y \times \Delta$ de π.*
2. *$\nu \in H^0(\mathscr{N}_\pi)$.*
3. *$\bar{Y} = Y \times \Delta$ e $(\widetilde{Y}, \widetilde{i})$ es el par formado por la cuerda escindida y su proyección a Y.*

Dem. Se tiene la sucesión exacta $0 \to H^0(\mathscr{N}_\pi) \to H^0(\mathscr{N}_\varphi) \xrightarrow{\phi} H^0(\pi^*\mathscr{N}_{Y,Z})$. Así *2.* $\nu \in H^0(\mathscr{N}_\pi)$ es equivalente a *2'.* $(\nu_1, \nu_2) = (0, 0)$ y, en consecuencia *2.* es equivalente a *3.* Demostremos que *1.* es equivalente a *2'.* En efecto, el ideal de $Y \times \Delta$ en $Z \times \Delta$ es $\mathscr{I} \oplus \mathscr{I}\epsilon$ y hemos denotado por $\widetilde{\mathscr{J}}$ el ideal de $\operatorname{im}\widetilde{\varphi}$. Así *1.* es equivalente a $\mathscr{I} \oplus \mathscr{I}\epsilon \subset \widetilde{\mathscr{J}}$. De (3.3.8.1) vemos que $\mathscr{I} \oplus \mathscr{I}\epsilon \subset \widetilde{\mathscr{J}}$ es equivalente a $(\nu_1, \nu_2) = (0, 0)$. □

Capítulo 4

Inmersión en el espacio proyectivo para cintas sobre curvas

En este capítulo estudiamos el problema de la inmersión de cuerdas en el espacio proyectivo. En la primera sección obtenemos un resultado general para cuerdas sobre una variedad lisa de cualquier dimensión. En concreto, la Proposición 4.1.2 es un criterio para decidir si todas las cuerdas con un mismo fibrado conormal $\mathscr{E}$ sobre una variedad soporte reducida, lisa e irreducible Y se pueden sumergir en un mismo espacio proyectivo $\mathbb{P}^r$ extendiendo una inmersión $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^r$. El resto del capítulo se refiere a cintas sobre curvas. En el Teorema 4.3.1 obtenemos inmersión en el mismo espacio proyectivo para todas las cintas con un mismo fibrado conormal fijado sobre una curva. Para algunas de estas inmersiones probaremos, en el siguiente capítulo, la existencia de un alisamiento sumergido, y como consecuencia obtendremos el alisamiento de cintas abstractas. El capítulo concluye con un estudio más detallado de inmersiones proyectivas de cintas sobre curvas de género $g = 1$ y de cintas sobre $\mathbb{P}^1$.

4.1. Un criterio de inmersión en $\mathbb{P}^r$ para cuerdas de conormal $\mathscr{E}$

Sea Y una subvariedad proyectiva lisa e irreducible en $\mathbb{P}^r$. Sea $\mathscr{E}$ un haz localmente libre de rango finito sobre Y. Recordemos, según la Proposición 2.1.1, que los morfismos desde cuerdas con fibrado conormal $\mathscr{E}$, que extienden una inmersión cerrada fijada $Y \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^r$, están en biyección con los homomorfismos $\mathscr{N}^*_{Y,\mathbb{P}^r} \to \mathscr{E}$, de forma que las inmersiones cerradas corresponden a los homomorfismos sobreyectivos.
En los dos siguientes resultados obtenemos un criterio para decidir si todas las cuerdas con fibrado conormal fijado $\mathscr{E}$ pueden ser sumergidas en el mismo espacio proyectivo con soporte en una inmersión fijada de la parte reducida Y.

Lema 4.1.1. *Sea Y un esquema propio y conexo sobre k y sean $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ haces localmente libres de rango finito sobre Y.*

1. *Los homomorfismos sobreyectivos de $\mathscr{F}$ a $\mathscr{E}$ forman un abierto de* $\operatorname{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E})$ *que es el complementario de un cono algebraico.*

2. *Consideremos una extensión de un haz coherente $\mathscr{F}'$ por $\mathscr{F}$. Sea* $\operatorname{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E}) \xrightarrow{\delta} \operatorname{Ext}^1(\mathscr{F}',\mathscr{E})$ *el homomorfismo de conexión inducido por la extensión. Si la clase de la extensión escindida levanta a un epimorfismo, entonces cada clase en la imagen de δ, puede ser levantada a un epimorfismo.*

Dem. 1. Un homomorfismo $\mathscr{F} \xrightarrow{\psi} \mathscr{E}$ es sobreyectivo sii para cada punto $y \in Y$ el homomorfismo inducido $\mathscr{F}(y) \xrightarrow{\psi(y)} \mathscr{E}(y)$ es sobreyectivo.
Sea e el rango de $\mathscr{E}$. El espacio vectorial $\mathscr{E}(y)$ es e–dimensional. Por tanto, el homomorfismo $\mathscr{F}(y) \xrightarrow{\psi(y)} \mathscr{E}(y)$ es no sobreyectivo sii el homomorfismo $\wedge^e\mathscr{F}(y) \xrightarrow{\wedge^e\psi(y)} \wedge^e\mathscr{E}(y)$ es nulo. Es decir, un homomorfismo $\mathscr{F} \xrightarrow{\psi} \mathscr{E}$ es no sobreyectivo en un punto $y \in Y$ sii el homomorfismo inducido $\wedge^e\mathscr{F}(y) \xrightarrow{\wedge^e\psi(y)} \wedge^e\mathscr{E}(y)$ se anula.
Consideremos el conjunto

$$\Gamma = \{(y,\psi) \mid \psi \text{ es no sobreyectivo en } y\} \subset Y \times \operatorname{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E}).$$

Afirmamos que Γ es el soporte de un subesquema cerrado de $Y \times \operatorname{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E})$. En efecto, denotemos $\mathscr{G} = \mathscr{H}om(\wedge^e\mathscr{F},\wedge^e\mathscr{E})$. Cuando consideramos el espacio vectorial $\operatorname{Hom}(\wedge^e\mathscr{F},\wedge^e\mathscr{E})$ como variedad afín nos referimos a la variedad $\mathbf{V}_k(H^0(\mathscr{G})^*) = \mathbf{Spec}_k(S(H^0(\mathscr{G})^*))$. El homomorfismo canónico $H^0(\mathscr{G}) \otimes_k \mathscr{O}_Y \to \mathscr{G}$ dualiza en un homomorfismo de $\mathscr{O}_Y$–módulos $\mathscr{G}^* \to H^0(\mathscr{G})^* \otimes_k \mathscr{O}_Y$ que define un morfismo (de evaluación)

$$Y \times_k \mathbf{V}_k(H^0(\mathscr{G})^*) = \mathbf{V}_Y(H^0(\mathscr{G})^* \otimes_k \mathscr{O}_Y) \xrightarrow{\mathbf{ev}} \mathbf{V}_Y(\mathscr{G}^*),$$

es decir un morfismo de $Y \times H^0(\mathscr{G})$ en el esquema espacio total del haz coherente $\mathscr{G}$, cuya fibra $\mathbf{V}_k(H^0(\mathscr{G})^*) \to \mathbf{V}_{k(y)}(\mathscr{G}(y)^*)$ en un punto $\operatorname{Spec} k(y) \to Y$ corresponde al homomorfismo dual del homomorfismo de evaluación $H^0(\mathscr{G}) \to \mathscr{G}(y)$. Denotemos $Y \xrightarrow{t} \mathbf{V}_Y(\mathscr{G}^*)$ la sección nula. El soporte del subesquema cerrado $\mathbf{ev}^{-1}\, t(Y)$ es entonces el conjunto "de incidencia"

$$\Gamma' = \{(y,\phi) \mid \phi(y) = 0\} \subset Y \times \operatorname{Hom}(\wedge^e\mathscr{F},\wedge^e\mathscr{E}).$$

Además la aplicación $\operatorname{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E}) \xrightarrow{\wedge^e} \operatorname{Hom}(\wedge^e\mathscr{F},\wedge^e\mathscr{E})$ es un morfismo si consideramos estos espacios vectoriales como variedades afines en el sentido anterior. Es el morfismo $\mathbf{V}_k(\operatorname{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E})^*) \xrightarrow{\wedge^e} \mathbf{V}_k(\operatorname{Hom}(\wedge^e\mathscr{F},\wedge^e\mathscr{E})^*)$ inducido por la aplicación lineal $\operatorname{Hom}(\wedge^e\mathscr{F},\wedge^e\mathscr{E})^* \xrightarrow{\xi} \operatorname{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E})^*$ definida para $a \in \operatorname{Hom}(\wedge^e\mathscr{F},\wedge^e\mathscr{E})^*$ y $\psi \in \operatorname{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E})$ por $\xi(a)(\psi) = a(\wedge^e\psi)$.
Obtenemos Γ como el subesquema cerrado imagen inversa

$$\Gamma = (\mathrm{id}_Y \times \wedge^e)^{-1}\Gamma' \subset Y \times \operatorname{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{E}).$$

La proyección B de Γ a $\mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{E})$ será entonces un cerrado algebraico y es claramente un cono.
2. Supongamos que para una clase $\zeta \in \mathrm{Ext}^1(\mathscr{F}', \mathscr{E}) - \{0\}$ en la imagen de δ, cada elevamiento de ζ por δ está en el cono algebraico cerrado B formado por los homomorfismos no sobreyectivos.
Fijemos $s \in B$ con $\delta(s) = \zeta$. Entonces para cada $\lambda \in k^*$ y cada $v \in \ker \delta$ la identidad $\delta(s + \lambda^{-1}v) = \zeta$ y nuestra hipótesis implican que $s + \lambda^{-1}v \in B$. Puesto que B es un cono, deducimos que para cada $\lambda \in k^*$, B contiene el conjunto $\lambda s + \ker \delta$. Puesto que B es un cerrado algebraico, deducimos que B contiene también el núcleo de δ. Así obtenemos una contradicción. □

Proposición 4.1.2. *Sea Y una subvariedad proyectiva lisa e irreducible en $\mathbb{P}^r$, con $r \geq 3$, y sea $\mathscr{E}$ un haz localmente libre de rango finito sobre Y.*

1. *Si la cuerda escindida con fibrado conormal $\mathscr{E}$ puede ser sumergida como subesquema cerrado nodegenerado en $\mathbb{P}^r$ extendiendo la inmersión $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^r$ entonces cada cuerda con fibrado conormal $\mathscr{E}$ que se aplica a $\mathbb{P}^r$ extendiendo $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^r$ puede ser sumergida como subesquema cerrado nodegenerado en $\mathbb{P}^r$ extendiendo $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^r$.*

2. *Si el homomorfismo de conexión $\mathrm{Hom}(\mathscr{N}^*_{Y,\mathbb{P}^r}, \mathscr{E}) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1(\Omega_Y, \mathscr{E})$ es sobreyectivo y la cuerda escindida con fibrado conormal $\mathscr{E}$ puede ser sumergida como subesquema cerrado nodegenerado en $\mathbb{P}^r$ extendiendo $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^r$ entones cada cuerda con fibrado conormal $\mathscr{E}$ puede ser sumergida como subesquema cerrado nodegenerado en $\mathbb{P}^r$ extendiendo $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^r$.*

Dem. Si $\mathrm{Hom}(\mathscr{N}^*_{Y,\mathbb{P}^r}, \mathscr{E}) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1(\Omega_Y, \mathscr{E})$ es sobreyectivo entonces, según la Proposición 2.1.1, cada cuerda con fibrado conormal $\mathscr{E}$ se aplica a $\mathbb{P}^r$ extendiendo $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^r$, así la segunda parte es consecuencia de la primera.
Sea L un hiperplano en $\mathbb{P}^r$. Supongamos que Y está contenida en L. Se tiene entonces una sucesión exacta natural $\mathscr{O}_Y(-1) \to \mathscr{N}^*_{Y,\mathbb{P}^r} \to \mathscr{N}^*_{Y,L} \to 0$. En consecuencia $\mathrm{Hom}(\mathscr{N}^*_{Y,L}, \mathscr{E})$ es, de forma natural, un subespacio de $\mathrm{Hom}(\mathscr{N}^*_{Y,\mathbb{P}^r}, \mathscr{E})$. Además la condición lisa de Y implica que esta sucesión es también exacta a la izquierda y escindida. Así

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{N}^*_{Y,\mathbb{P}^r}, \mathscr{E}) = \mathrm{Hom}(\mathscr{N}^*_{Y,L}, \mathscr{E}) \oplus \mathrm{Hom}(\mathscr{O}_Y(-1), \mathscr{E}),$$

y, por tanto, la aplicación $L \mapsto \mathrm{Hom}(\mathscr{N}^*_{Y,L}, \mathscr{E})$ es un morfismo del espacio proyectivo de hiperplanos que contienen a Y (puede ser vacío) a la grassmaniana de subespacios de codimensión $h^0(\mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_Y(1))$ en $\mathrm{Hom}(\mathscr{N}^*_{Y,\mathbb{P}^r}, \mathscr{E})$. En consecuencia la unión de los subespacios $\mathrm{Hom}(\mathscr{N}^*_{Y,L}, \mathscr{E})$, donde L es cualquier hiperplano en $\mathbb{P}^r$ que contiene a Y, es un cono algebraico cerrado.
Fijemos $s \in \mathrm{Hom}(\mathscr{N}^*_{Y,L}, \mathscr{E})$. Denotemos $s_1 \in \mathrm{Hom}(\mathscr{N}^*_{Y,\mathbb{P}^r}, \mathscr{E})$ la composición de homomorfismos $\mathscr{N}^*_{Y,\mathbb{P}^r} \twoheadrightarrow \mathscr{N}^*_{Y,L} \xrightarrow{s} \mathscr{E}$. De (1.3.2.4) y (2.1.1.3), vemos que el morfismo $\widetilde{Y} \xrightarrow{\widetilde{i}_1} \mathbb{P}^r$ definido por s_1 es la composición del morfismo $\widetilde{Y} \xrightarrow{\widetilde{i}} L$ definido por s y $L \overset{l}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^r$.

En efecto, se tiene un diagrama conmutativo

(4.1.2.1)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{N}^*_{Y,\mathbb{P}^r} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "s_1"] & \Omega_{\mathbb{P}^r}|_Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "\omega_{s_1}"] & \Omega_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{N}^*_{Y,L} \arrow[r] \arrow[d, "s"'] & \Omega_L|_Y \arrow[r] \arrow[d, "\omega_s"] & \Omega_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r] & (\Omega_L|_Y)_s = (\Omega_{\mathbb{P}^r}|_Y)_{s_1} \arrow[r, "p"] & \Omega_Y \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Así

$$\begin{aligned}
\widetilde{i}_1^\sharp a &= (i^\sharp a,\ \omega_{s_1}(\mathrm{d}a \otimes 1)) \\
&= (i_L^\sharp l^\sharp a,\ \omega_s(\mathrm{d}l^\sharp a \otimes 1)) \\
&= \widetilde{i}^\sharp l^\sharp a,
\end{aligned}$$

donde $a \in \mathscr{O}_{\mathbb{P}^r}$ e $Y \xrightarrow{i_L} L$ es la inclusión de Y en L.
Recíprocamente, si el morfismo $\widetilde{Y} \xrightarrow{\widetilde{i}_1} \mathbb{P}^r$ definido por un elemento $s_1 \in \operatorname{Hom}(\mathscr{N}^*_{Y,\mathbb{P}^r}, \mathscr{E})$ factoriza por $L \overset{l}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^r$, es decir si $\operatorname{im} \widetilde{i}_1 \subset L$, entonces $Y \subset L$, puesto que Y es el soporte reducido de $\operatorname{im} \widetilde{i}_1$, y $\mathscr{N}^*_{Y,\mathbb{P}^r} \xrightarrow{s_1} \mathscr{E}$ factoriza a través de $\mathscr{N}^*_{Y,L}$, puesto que el morfismo inducido $\widetilde{Y} \xrightarrow{\widetilde{i}} L$ corresponde a un homomorfismo $\mathscr{N}^*_{Y,L} \xrightarrow{s} \mathscr{E}$ y, según acabamos de ver, el homomorfismo composición $\mathscr{N}^*_{Y,\mathbb{P}^r} \twoheadrightarrow \mathscr{N}^*_{Y,L} \xrightarrow{s} \mathscr{E}$ define el morfismo composición $\widetilde{Y} \xrightarrow{\widetilde{i}} L \overset{l}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^r$ que es el morfismo inicial $\widetilde{Y} \xrightarrow{\widetilde{i}_1} \mathbb{P}^r$. Por tanto, según la correspondencia biyectiva de la Proposición 2.1.1, $\mathscr{N}^*_{Y,\mathbb{P}^r} \xrightarrow{s_1} \mathscr{E}$ es igual a $\mathscr{N}^*_{Y,\mathbb{P}^r} \twoheadrightarrow \mathscr{N}^*_{Y,L} \xrightarrow{s} \mathscr{E}$.
Hemos probado que la imagen del morfismo $\widetilde{Y} \to \mathbb{P}^r$ definido por un elemento $s \in \operatorname{Hom}(\mathscr{N}^*_{Y,\mathbb{P}^r}, \mathscr{E})$ está contenida en un hiperplano L sii Y está contenida en L y $s \in \operatorname{Hom}(\mathscr{N}^*_{Y,L}, \mathscr{E})$. Por tanto, una inmersión nodegenerada en $\mathbb{P}^r$ de la cuerda asociada a un elemento $\zeta \in \operatorname{Ext}^1(\Omega_Y, \mathscr{E})$ corresponde a un levantamiento de ζ a un homomorfismo sobreyectivo $s \in \operatorname{Hom}(\mathscr{N}^*_{Y,\mathbb{P}^r}, \mathscr{E})$ que no pertenece a ningún subespacio $\operatorname{Hom}(\mathscr{N}^*_{Y,L}, \mathscr{E})$ cuando $Y \subset L$ y L es un hiperplano. Nuestra hipótesis dice que este levantamiento existe para $\zeta = 0$.
Según el Lema 4.1.1, el conjunto de homomorfismos no sobreyectivos es un cono algebraico cerrado. Así, la unión de este cono y el cono de subespacios $\operatorname{Hom}(\mathscr{N}^*_{Y,L}, \mathscr{E})$ es un cono algebraico cerrado B' en $\operatorname{Hom}(\mathscr{N}^*_{Y,\mathbb{P}^r}, \mathscr{E})$.
Ahora, razonando como en la demostración de Lema 4.1.1 *2.*, vemos que cada clase $\zeta \in \operatorname{Ext}^1(\Omega_Y, \mathscr{E})$ en la imagen de δ puede ser levantada a un elemento de $\operatorname{Hom}(\mathscr{N}^*_{Y,\mathbb{P}^r}, \mathscr{E})$ que no pertenece a B'. Este elemento define una inmersión nodegenerada en $\mathbb{P}^r$ extendiendo $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^r$ de la cuerda con clase extensión ζ. $\square$

Observación 4.1.3. La aplicación δ es sobreyectiva si ambos $H^1(\mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_Y(1))$ y $H^2(\mathscr{E})$ se anulan. En efecto, basta tener en cuenta que de la sucesión de Euler restringida a Y

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^r}|_Y \longrightarrow H^0(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^r}(1)) \otimes \mathscr{O}_Y(-1) \longrightarrow \mathscr{O}_Y \longrightarrow 0$$

obtenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}^1(\mathscr{O}_Y(-1),\mathscr{E})\otimes H^0(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^r}(1))^* \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\Omega_{\mathbb{P}^r}|_Y,\mathscr{E}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(\mathscr{O}_Y,\mathscr{E}),$$

por tanto $\mathrm{Ext}^1(\Omega_{\mathbb{P}^r}|_Y,\mathscr{E})=0$.
En particular para una curva Y la anulación de $H^1(\mathscr{E}\otimes\mathscr{O}_Y(1))$ implica la sobreyectividad de δ. □

4.2. Inmersión en $\mathbb{P}^r$ de la cinta escindida de conormal $\mathscr{E}$ sobre una curva Y

De ahora en adelante, Y será una curva proyectiva lisa e irreducible de género cualquiera g, y $\mathscr{E}$ un fibrado de línea sobre Y. Consideramos cintas sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$. Nuestro próximo objetivo será obtener inmersiones proyectivas nodegeneradas, en el mismo espacio proyectivo, para todas las cintas con fibrado conormal $\mathscr{E}$ con soporte en una (posiblemente degenerada) inmersión proyectiva de la curva base Y. De acuerdo con la Proposición 4.1.2, en primer lugar buscamos una inmersión proyectiva nodegenerada para la cinta escindida con fibrado conormal $\mathscr{E}$. El método que usaremos es sugerido por la siguiente proposición.

Proposición 4.2.1. *Sea Y una curva proyectiva lisa e irreducible y sea $Y \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^r$ una inmersión cerrada, con $r\geq 3$. Sea $\widetilde{Y}$ la cinta escindida sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$. Supongamos que existe una inmersión cerrada $\widetilde{Y} \overset{\tilde{i}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^r$ extendiendo $Y \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^r$. Entonces*

1. *existe una extensión*

$$0 \longrightarrow \mathscr{E}\otimes\mathscr{O}_Y(1) \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{O}_Y(1) \longrightarrow 0,$$

tal que la cinta escindida $\widetilde{Y}$ es el primer entorno infinitesimal de la sección definida por el epimorfismo $\mathscr{M}\to\mathscr{O}_Y(1)$ dentro de la superficie geométricamente reglada $S=\mathbb{P}_Y(\mathscr{M})$.

2. *Denotemos $\mathscr{O}_S(1)$ el fibrado de línea fundamental sobre $S=\mathbb{P}_Y(\mathscr{M})$. Existe un morfismo $S \overset{\psi}{\to} \mathbb{P}^r$, con $\psi^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^r}(1)=\mathscr{O}_S(1)$, cuya imagen es un, posiblemente singular, scroll y cuya restricción a $\widetilde{Y}$ es la inmersión $\widetilde{Y} \overset{\tilde{i}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^r$. Además, se tiene $H^0(\mathscr{O}_S(1))=H^0(\mathscr{O}_S(1)|_{\widetilde{Y}})$.*

Dem. Sea $Y'\subset\mathbb{P}^r$ la imagen de i. La cinta sobre Y sumergida en $\mathbb{P}^r$ por un epimorfismo $i^*\mathscr{N}^*_{Y',\mathbb{P}^r} \overset{\tau}{\to} \mathscr{E}$ es la cinta escindida sii este epimorfismo extiende a un homomorfismo (sobreyectivo) $i^*\Omega_{\mathbb{P}^r} \overset{\tau}{\to} \mathscr{E}$.
Supongamos ahora que existe el epimorfismo $i^*\Omega_{\mathbb{P}^r} \overset{\tau}{\to} \mathscr{E}$. Sea $\mathscr{F}$ el núcleo de

$$i^*\Omega_{\mathbb{P}^r}(1) \xrightarrow{\tau\otimes 1} \mathscr{E}\otimes\mathscr{O}_Y(1).$$

Consideramos la restricción a Y de la sucesión de Euler

$$0 \longrightarrow i^*\Omega_{\mathbb{P}^r}(1) \longrightarrow H^0(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^r}(1)) \otimes \mathscr{O}_Y \longrightarrow \mathscr{O}_Y(1) \longrightarrow 0.$$

Denotemos $\mathscr{M}$ el conúcleo de la composición $\mathscr{F} \to i^*\Omega_{\mathbb{P}^r}(1) \to H^0(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^r}(1)) \otimes \mathscr{O}_Y$. Así obtenemos la sucesión exacta en *1.* conforme a un diagrama

(4.2.1.1)
$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & i^*\Omega_{\mathbb{P}^r}(1) \arrow[r, "\tau\otimes 1"] \arrow[d] & \mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_Y(1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{F} \arrow[r] & H^0(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^r}(1)) \otimes \mathscr{O}_Y \arrow[r, "l"] \arrow[d] & \mathscr{M} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & \mathscr{O}_Y(1) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathscr{O}_Y(1) \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 & .
\end{tikzcd}$$

Sea $S = \mathbb{P}_Y(\mathscr{M})$ la superficie geométricamente reglada asociada a $\mathscr{M}$ con proyección $S \xrightarrow{p} Y$. Sea $Y \overset{s}{\hookrightarrow} S$ la sección asociada al cociente $\mathscr{M} \to \mathscr{O}_Y(1)$. Entonces se tiene (véase [Har77, V 2.6]) $p^*(\mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_Y(1)) = \mathscr{O}_S(1) \otimes \mathscr{O}_S(-Y)$ y por tanto $\mathscr{O}_S(-Y)|_Y = \mathscr{E}$.
Denotemos $\widetilde{Y}$ el primer entorno infinitesimal de Y dentro de S. Tensorizando con $\mathscr{O}_S(-Y)$ la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_S(-Y) \longrightarrow \mathscr{O}_S \longrightarrow \mathscr{O}_Y \longrightarrow 0,$$

obtenemos la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathscr{I}_{\widetilde{Y},S} \longrightarrow \mathscr{I}_{Y,S} \longrightarrow \mathscr{O}_S(-Y)|_Y \longrightarrow 0.$$

Por tanto la igualdad $\mathscr{O}_S(-Y)|_Y = \mathscr{E}$ significa que $\widetilde{Y}$ es una cinta sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$. Es la cinta escindida puesto que la restricción de p a $\widetilde{Y}$ proporciona una retracción de $\widetilde{Y}$ a Y. Esto demuestra *1.*
Levantando a S el homomorfismo sobreyectivo $H^0(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^r}(1)) \otimes \mathscr{O}_Y \to \mathscr{M}$, y componiendo con el cociente canónico $p^*\mathscr{M} \to \mathscr{O}_S(1)$, obtenemos un homomorfismo sobreyectivo $H^0(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^r}(1)) \otimes \mathscr{O}_S \to \mathscr{O}_S(1)$ que define un morfismo $S \xrightarrow{\psi} \mathbb{P}^r$.
Por construcción, la restricción por $Y \overset{s}{\hookrightarrow} S$ del epimorfismo $H^0(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^r}(1)) \otimes \mathscr{O}_S \to \mathscr{O}_S(1)$ es el homomorfismo sobreyectivo $H^0(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^r}(1)) \otimes \mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_Y(1)$ del diagrama (4.2.1.1). En consecuencia la composición $Y \overset{s}{\hookrightarrow} S \xrightarrow{\psi} \mathbb{P}^r$ es la inmersión dada $Y \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^r$.
Por otra parte, la inmersión $\widetilde{Y} \hookrightarrow S$ extendiendo $Y \overset{s}{\hookrightarrow} S$ corresponde, en la biyección de Proposición 2.1.1, al epimorfismo (isomorfismo en este caso) $\mathscr{N}^*_{Y,S} \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}$ según el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{N}^*_{Y,S} \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\wr"] & s^*\Omega_S \arrow[r, "\mathrm{D}s"] \arrow[d, "\wr"] & \Omega_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r] & \Omega_{\widetilde{Y}}|_Y \arrow[r] & \Omega_Y \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Además la restricción por $Y \overset{s}{\hookrightarrow} S$ del homomorfismo canónico $\psi^*\Omega_{\mathbb{P}^r} \xrightarrow{\mathrm{D}\psi} \Omega_S$, induce un diagrama conmutativo

(4.2.1.2)
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{N}^*_{Y,\mathbb{P}^r} \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "\tau'"'] & i^*\Omega_{\mathbb{P}^r} \arrow[r, "\mathrm{D}i"] \arrow[d, "s^*\mathrm{D}\psi"] & \Omega_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{N}^*_{Y,S} \arrow[r, "a"] & s^*\Omega_S \arrow[r, "\mathrm{D}s"] & \Omega_Y \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Componiendo ambos diagramas obtenemos un diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{N}^*_{Y,\mathbb{P}^r} \arrow[r] \arrow[d, "\tau'"'] & i^*\Omega_{\mathbb{P}^r} \arrow[r, "\mathrm{D}i"] \arrow[d] & \Omega_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r] & \Omega_{\widetilde{Y}}|_Y \arrow[r] & \Omega_Y \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

que muestra que el morfismo composición $\widetilde{Y} \hookrightarrow S \xrightarrow{\psi} \mathbb{P}^r$, corresponde al homomorfismo compuesto $\mathscr{N}^*_{Y,\mathbb{P}^r} \xrightarrow{\tau'} \mathscr{N}^*_{Y,S} \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}$. Ahora bien, este homomorfismo compuesto coincide, por construcción, con el epimorfismo $\mathscr{N}^*_{Y,\mathbb{P}^r} \xrightarrow{\tau} \mathscr{E}$. En consecuencia, el morfismo composición $\widetilde{Y} \hookrightarrow S \xrightarrow{\psi} \mathbb{P}^r$ es la inmersión original $\widetilde{Y} \xrightarrow{\tilde{i}} \mathbb{P}^r$.
Por tanto la imagen de S debe de ser una superficie puesto que es reducida y contiene a $\widetilde{Y}$. Además la imagen es un *scroll* en $\mathbb{P}^r$ puesto que, por construcción, $\psi^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^r}(1) = \mathscr{O}_S(1)$. Por otra parte, los haces $R^ip_*(\mathscr{O}_S(-2Y) \otimes \mathscr{O}_S(1))$ se anulan para $i = 0, 1$. Así se tiene $p_*\mathscr{O}_S(1) \simeq p_*(\mathscr{O}_S(1)|_{\widetilde{Y}})$ y por tanto $H^0(\mathscr{O}_S(1)) = H^0(\mathscr{O}_S(1)|_{\widetilde{Y}})$. Esto finaliza la demostración de *2*. $\square$

Proposición 4.2.2. *Sea Y una curva proyectiva lisa e irreducible y sea $S = \mathbb{P}_Y(\mathscr{N}) \xrightarrow{p} Y$ la superficie geométricamente reglada asociada a un haz localmente libre de rango dos $\mathscr{N}$ sobre Y. Denotemos $\mathscr{O}_S(1)$ el fibrado de línea fundamental sobre $S = \mathbb{P}_Y(\mathscr{N})$.*

1. *Una sección $Y \hookrightarrow S$ cuyo primer entorno infinitesimal dentro de S es la cinta escindida $\widetilde{Y}$ sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$ es equivalente a un subfibrado de línea $\mathscr{L} \hookrightarrow \mathscr{N}$ tal que existe una sucesión exacta $0 \to \mathscr{L} \to \mathscr{N} \to \mathscr{E}^{-1} \otimes \mathscr{L} \to 0$. En este caso $\mathscr{O}_S(Y) = \mathscr{O}_S(1) \otimes p^*\mathscr{L}^{-1}$.*

2. *Sea $\mathscr{O}_Y(1)$ un fibrado de línea muy amplio sobre Y. Denotemos $\mathbb{P}^s \subset \mathbb{P}^r$, respectivamente, los espacios proyectivos de (uno cocientes) de $H^0(\mathscr{O}_Y(1))$ y $H^0(\mathscr{O}_Y(1)) \oplus H^0(\mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_Y(1))$. Sea $Y \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^r$ la inmersión cerrada definida como la composición de la inmersión $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^s$ dada por la serie lineal completa $H^0(\mathscr{O}_Y(1))$ y $\mathbb{P}^s \subset \mathbb{P}^r$.*
   Supongamos que $H^1(\mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_Y(1)) = 0$. Supongamos que existe una sucesión exacta

   (4.2.2.1)
   $$0 \to \mathscr{L} \to \mathscr{N} \to \mathscr{E}^{-1} \otimes \mathscr{L} \to 0,$$

   con $\mathscr{L}$ un fibrado de línea, y sea $Y \hookrightarrow S$ la sección asociada.
   Si el fibrado de línea $\mathscr{O}_S(1) \otimes p^*(\mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_Y(1) \otimes \mathscr{L}^{-1})$ es globalmente generado entonces

su serie lineal completa define un morfismo $S \xrightarrow{\psi} \mathbb{P}^r$ *tal que la composición con la sección es la inmersión dada* $Y \xhookrightarrow{i} \mathbb{P}^r$.
Además, el morfismo inducido de la cinta escindida $\widetilde{Y}$ *a* $\mathbb{P}^r$ *está definido por la serie lineal completa de* $(\mathscr{O}_S(1) \otimes p^*(\mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_Y(1) \otimes \mathscr{L}^{-1}))|_{\widetilde{Y}}$ *y por tanto su imagen es nodegenerada.*

Dem. Sea $Y \hookrightarrow S$ la sección definida por un epimorfismo $\mathscr{N} \twoheadrightarrow \mathscr{K}$ con $\mathscr{K}$ un haz invertible. Sea $\mathscr{L}$ el núcleo de $\mathscr{N} \twoheadrightarrow \mathscr{K}$. Entonces se tiene (véase [Har77, V 2.6]) $p^*\mathscr{L} = \mathscr{O}_S(1) \otimes \mathscr{O}_S(-Y)$ y $\mathscr{L} = (\mathscr{O}_S(1) \otimes \mathscr{O}_S(-Y))|_Y$. Por otra parte, si $\widetilde{Y}$ es el primer entorno infinitesimal de Y dentro de S entonces $\widetilde{Y}$ es la cinta escindida sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{O}_S(-Y)|_Y$. Así se tiene $\mathscr{K} = \mathscr{E}^{-1} \otimes \mathscr{L}$ sii $\mathscr{O}_S(-Y)|_Y = \mathscr{E}$. Esto demuestra *1.*
Demostremos *2.* Denotemos $\mathscr{L}' = \mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_Y(1) \otimes \mathscr{L}^{-1}$. Observemos en primer lugar que

$$H^0(\mathscr{O}_S(1) \otimes p^*\mathscr{L}') = H^0(\mathscr{N} \otimes \mathscr{L}'). \tag{4.2.2.2}$$

De la definición de la sección se tiene $\mathscr{O}_S(1)|_Y = \mathscr{E}^{-1} \otimes \mathscr{L}$. Así se tiene la igualdad

$$(\mathscr{O}_S(1) \otimes p^*\mathscr{L}')|_Y = \mathscr{O}_Y(1)$$

y la sucesión exacta

$$0 \to \mathscr{O}_S(-Y) \otimes \mathscr{O}_S(1) \otimes p^*\mathscr{L}' \to \mathscr{O}_S(1) \otimes p^*\mathscr{L}' \to \mathscr{O}_Y(1) \to 0. \tag{4.2.2.3}$$

Ahora empujando a Y la sucesión (4.2.2.3) obtenemos

$$0 \to \mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_Y(1) \to \mathscr{N} \otimes \mathscr{L}' \to \mathscr{O}_Y(1) \to 0,$$

que es (4.2.2.1) tensorizada por $\mathscr{L}'$. De la hipótesis $H^1(\mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_Y(1)) = 0$ y el isomorfismo (4.2.2.2), obtenemos, tomando secciones globales, una sucesión exacta

$$0 \to H^0(\mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_Y(1)) \to H^0(\mathscr{O}_S(1) \otimes p^*\mathscr{L}') \to H^0(\mathscr{O}_Y(1)) \to 0.$$

Por tanto se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H^0(\mathscr{O}_S(1) \otimes p^*\mathscr{L}') \otimes \mathscr{O}_S \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \mathscr{O}_S(1) \otimes p^*\mathscr{L}' \arrow[d] \\
H^0(\mathscr{O}_Y(1)) \otimes \mathscr{O}_Y \arrow[r, two heads] & \mathscr{O}_Y(1)
\end{tikzcd}$$

donde las flechas horizontales son los homomorfismos de evaluación. Esto demuestra que existe un morfismo $S \xrightarrow{\psi} \mathbb{P}^r$ cuya restricción a Y es la inmersión dada $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^r$.
Finalmente, se tiene $R^i p_*(\mathscr{O}_S(-2Y) \otimes \mathscr{O}_S(1) \otimes p^*\mathscr{L}') = 0$ para $i = 0, 1$. Así $p_*(\mathscr{O}_S(1) \otimes p^*\mathscr{L}') \simeq p_*((\mathscr{O}_S(1) \otimes p^*\mathscr{L}')|_{\widetilde{Y}})$ y en consecuencia $H^0(\mathscr{O}_S(1) \otimes p^*\mathscr{L}') = H^0((\mathscr{O}_S(1) \otimes p^*\mathscr{L}')|_{\widetilde{Y}})$. □

4.3. Inmersión en $\mathbb{P}^r$ de las cintas de conormal $\mathscr{E}$ sobre una curva Y

Para una curva base Y de género cualquiera g, como aplicación inmediata de la Proposición (4.2.2), la manera de situar la cinta escindida $\widetilde{Y}$ con fibrado conormal $\mathscr{E}$ dentro de una superficie geométricamente reglada es tomar el primer entorno infinitesimal de la sección definida por $\mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{E} \twoheadrightarrow \mathscr{O}_Y$ dentro de $\mathbb{P}(\mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{E})$. Esto es la cinta escindida con fibrado conormal $\mathscr{E}$ vista como (véase [BE95, 1.1]) el primer entorno infinitesimal de la sección nula en $\mathbf{V}(\mathscr{E})$.
El siguiente teorema proporciona inmersión en un mismo espacio proyectivo para todas las cintas con un conormal fijado sobre una inmersión degenerada de la curva base.

Teorema 4.3.1. *Sea Y una curva proyectiva lisa e irreducible, sea $\mathscr{O}_Y(1)$ un fibrado de línea muy amplio sobre Y y sea $\mathscr{E}$ un fibrado de línea sobre Y. Denotemos $\mathbb{P}^s \subset \mathbb{P}^r$, respectivamente, los espacios proyectivos de (uno cocientes) de $H^0(\mathscr{O}_Y(1))$ y $H^0(\mathscr{O}_Y(1)) \oplus H^0(\mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_Y(1))$. Sea $Y \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^r$ la inmersión cerrada definida como la composición de la inmersión $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^s$ dada por la serie lineal completa $H^0(\mathscr{O}_Y(1))$ y $\mathbb{P}^s \subset \mathbb{P}^r$.*
Sea $d = -\deg \mathscr{E}$ y supongamos que $\deg \mathscr{O}_Y(1) \geq \text{máx}\,\{d+2g+1, 2g+1\}$. *Entonces se tiene $r \geq 3$ y cada cinta sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$ admite una inmersión nodegenerada en $\mathbb{P}^r$ con soporte degenerado $Y \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^r$.*

Dem. Podemos aplicar la Proposición 4.2.2 para la sección definida por $\mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{E} \twoheadrightarrow \mathscr{O}_Y$ dentro de $\mathbb{P}(\mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{E})$. La hipótesis $\deg \mathscr{O}_Y(1) \geq \text{máx}\,\{d+2g+1, 2g+1\}$ implica que el fibrado de línea $\mathscr{O}_S(1) \otimes p^* \mathscr{O}_Y(1)$ es muy amplio (véase [Har77, V Ex. 2.11]). Así obtenemos una inmersión nodegenerada en $\mathbb{P}^r$ para la cinta escindida con fibrado conormal $\mathscr{E}$. Ahora obtenemos el Teorema 4.3.1 de la Observación 4.1.3 y la Proposición 4.1.2.
Observemos que $h^0(\mathscr{O}_Y(1)) \geq g+2$ y $h^0(\mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_Y(1)) \geq g+2$, así $r \geq 3$ y la inmersión $Y \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^r$ es degenerada. □

4.4. Inmersión de cintas elípticas y racionales

Aunque con las inmersiones del Teorema 4.3.1 obtendremos nuestro resultado principal respecto de alisamiento de cintas sobre curva de género cualquiera, el estudio de otras posibles inmersiones de cintas con soporte en inmersiones nodegeneradas de la curva reducida base, es una cuestión de interés en sí misma.
En este sentido, para géneros bajos $g = 0, 1$, podemos hacer un estudio detallado de inmersiones de la cinta escindida con fibrado conormal $\mathscr{E}$, de cuya existencia, con un argumento similar al de la demostración del Teorema 4.3.1, obtendremos, en muchos casos, inmersiones nodegeneradas, en el mismo espacio proyectivo $\mathbb{P}^r$, para todas las cintas sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$ extendiendo una inmersión nodegenerada de Y en $\mathbb{P}^r$.

4.4.1. Inmersión de cintas sobre una curva elíptica

Sea $Y \subset \mathbb{P}^s$ una curva elíptica normal de grado $s+1 \geq 3$. Las cintas sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$ están clasificadas, salvo isomorfismo que induce la identidad en Y, por el espacio $H^1(\mathscr{E})$ módulo k^*.
Denotemos $d = -\deg \mathscr{E}$. Indiquemos que el género aritmético de una cinta con fibrado conormal $\mathscr{E}$ es $p_a(\widetilde{Y}) = d+1$.
El Teorema 4.3.1 asegura que si $s+1 \geq \max\{d+3, 3\}$ entonces toda cinta con fibrado conormal $\mathscr{E}$ se sumerge nodegenerada en $\mathbb{P}^r$, con $r = 2s+1-d$, con soporte degenerado $Y \subset \mathbb{P}^s$ (e.g. si $d \geq 0$ en $\mathbb{P}^{d+5}$ con soporte $Y \subset \mathbb{P}^{d+2}$; si $d < 0$ (la única cinta) en $\mathbb{P}^{-d+5}$ con soporte $Y \subset \mathbb{P}^2$).
Una aplicación más cuidadosa de nuestro estudio permite refinar este resultado.
Podemos escribir $\mathscr{O}_Y(1) = \mathscr{O}_Y((s+1)P)$ y $\mathscr{E} = \mathscr{O}_Y(-dQ)$ para ciertos puntos $P, Q \in Y$.
Si $S = \mathbb{P}_Y(\mathscr{N})$ es una superficie geométricamente reglada con invariante e asociada a un haz localmente libre normalizado (i.e. $H^0(\mathscr{N}) \neq 0$, pero $H^0(\mathscr{N} \otimes \mathscr{L}) = 0$ siempre que $\mathscr{L}$ sea un haz invertible de grado negativo) entonces (véase [Har77, V, 2.12, 2.15]) las opciones son:

1. $\mathscr{N}$ es indescomponible, $e = -1$ y la única extensión no escindida
$$0 \to \mathscr{O}_Y \to \mathscr{N} \to \mathscr{O}_Y(O) \to 0,$$
donde $O \in Y$ es un punto arbitrario, determina $\mathscr{N}$.
2. $\mathscr{N}$ es indescomponible, $e = 0$ y la única extensión no escindida
$$0 \to \mathscr{O}_Y \to \mathscr{N} \to \mathscr{O}_Y \to 0,$$
determina $\mathscr{N}$.
3. $\mathscr{N} = \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{L}'$, donde $\mathscr{L}'$ es un haz invertible cualquiera con $\deg \mathscr{L}' \leq 0$, en este caso $e = -\deg \mathscr{L}' \geq 0$.

Por otra parte, (véase [Har77, V, Ex. 2.12]), el fibrado de línea $\mathscr{O}_S(1) \otimes p^*\mathscr{O}_Y(\mathfrak{b})$, donde $\mathscr{O}_Y(\mathfrak{b}) = \mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_Y(1) \otimes \mathscr{L}^{-1}$, es

- globalmente generado sii $\deg \mathfrak{b} \geq e+2$.
- muy amplio sii $\deg \mathfrak{b} \geq e+3$.

Estudiemos en cada caso la existencia de una extensión como (4.2.2.1)

$$0 \to \mathscr{L} \to \mathscr{N} \to \mathscr{E}^{-1} \otimes \mathscr{L} \to 0. \tag{4.4.0.1}$$

1. Debe de ser $\mathscr{L}^2 = \mathscr{O}_Y(O - dQ)$. En consecuencia d es impar y podemos escribir $\mathscr{L} = \mathscr{O}_Y(\frac{1-d}{2}R)$ para cierto $R \in Y$ tal que $(d-1)R \sim dQ - O$. La existencia de (4.4.0.1) equivale a una sección global sin ceros de $\mathscr{N}(\frac{d-1}{2}R)$, donde $(d-1)R \sim dQ - O$.

- Si $d \leq -1$ impar, entonces $H^0(\mathscr{N}(\frac{d-1}{2}R)) = 0$.
- Si $d \geq 3$ impar, entonces $H^0(\mathscr{N}(\frac{d-1}{2}R)) = H^0(\mathscr{O}_Y(\frac{d-1}{2}R)) \oplus H^0(\mathscr{O}_Y(\frac{d-1}{2}R+O))$. En este caso una sección global sin ceros equivale a divisores efectivos $D_1 \sim \frac{d-1}{2}R$ y $D_2 \sim \frac{d-1}{2}R + O$ tales que $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, cuya existencia es inmediata puesto que la serie lineal definida por $\frac{d-1}{2}R+O$ es sin puntos base y de dimensión ≥ 1. Aquí $\deg \mathfrak{b} = s + 1 - \frac{d+1}{2}$. Así $\deg \mathfrak{b} \geq e + 2 = 1, e + 3 = 2$ sii $s \geq \frac{d+1}{2}, \frac{d+3}{2}$. Ahora $H^1(\mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_Y(1)) = H^1(\mathscr{O}_Y((s+1)P - dQ))$ se anula siempre que $s+1 > d$ ó $s + 1 = d$ y $dP \nsim dQ$. Así
  - para $d \geq 3$ impar, tomando $s \geq d$, es $s \geq \frac{d+3}{2}$. Así obtenemos inmersión nodegenerada en $\mathbb{P}^r$, con $r = 2s + 1 - d$, con soporte degenerado $Y \subset \mathbb{P}^s$, para todas las cintas con fibrado conormal $\mathscr{E}$ con $-\deg \mathscr{E} = d$ (e.g. en $\mathbb{P}^{d+1}$ con soporte $Y \subset \mathbb{P}^d$).
  - para $d \geq 5$ impar, tomando $s + 1 = d$ y $dP \nsim dQ$ (i.e. $\deg \mathscr{E}^{-1} = \deg \mathscr{O}_Y(1)$ y $\mathscr{E}^{-1} \neq \mathscr{O}_Y(1)$), obtenemos inmersión nodegenerada en $\mathbb{P}^{d-1}$ con soporte *nodegenerado* $Y \subset \mathbb{P}^{d-1}$, para todas las cintas con fibrado conormal $\mathscr{E}$ con $-\deg \mathscr{E} = d$.
- Si $d = 1$, entonces $\deg \mathscr{L} = 0$. Si $\mathscr{L}$ es no trivial entonces la única sección global de $\mathscr{N} \otimes \mathscr{L}^{-1}$ se anula en un punto $R \nsim O$ tal que $\mathscr{L}^{-1} = \mathscr{O}_Y(R - O)$. Si $\mathscr{L} = \mathscr{O}_Y$ entonces $Q = O$ y la sucesión $0 \to \mathscr{O}_Y \to \mathscr{N} \to \mathscr{O}_Y(O) \to 0$ es del tipo (4.4.0.1). De forma que la cinta escindida con fibrado conormal $\mathscr{E} = \mathscr{O}_Y(-O)$ se obtiene como el primer entorno infinitesimal dentro de S de la sección que corresponde al cociente $\mathscr{N} \twoheadrightarrow \mathscr{O}_Y(O)$. Aquí $\deg \mathfrak{b} = s \geq e + 3 = 2$ y $H^1(\mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_Y(1)) = H^1(\mathscr{O}_Y((s + 1)P - O)) = 0$, por tanto las dos cintas con fibrado conormal $\mathscr{E} = \mathscr{O}_Y(-O)$ se sumergen nodegeneradas en $\mathbb{P}^{2s}$ sobre $Y \subset \mathbb{P}^s$ (e.g. en $\mathbb{P}^4$ con soporte $Y \subset \mathbb{P}^2$).

2. En este caso, $\mathscr{L}^2 = \mathscr{E} = \mathscr{O}_Y(-dQ)$. Por tanto d es par y podemos escribir $\mathscr{L} = \mathscr{O}_Y(\frac{-d}{2}R)$ para cierto $R \in Y$ tal que $dR \sim dQ$. La existencia de (4.4.0.1) equivale a una sección global sin ceros de $\mathscr{N}(\frac{d}{2}R)$, donde $dR \sim dQ$.
   - Si $d \leq -2$ par, entonces $H^0(\mathscr{N}(\frac{d}{2}R)) = 0$.
   - Si $d = 2$ en $H^0(\mathscr{N}(R)) = H^0(\mathscr{O}_Y(R)) \oplus H^0(\mathscr{O}_Y(R))$ no hay secciones sin ceros.
   - Si $d \geq 4$ par, entonces $H^0(\mathscr{N}(\frac{d}{2}R)) = H^0(\mathscr{O}_Y(\frac{d}{2}R)) \oplus H^0(\mathscr{O}_Y(\frac{d}{2}R))$. En este caso una sección global sin ceros equivale a divisores efectivos $D_1 \sim \frac{d}{2}R$ y $D_2 \sim \frac{d}{2}R$ tales que $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, cuya existencia es inmediata puesto que la serie lineal definida por $\frac{d}{2}R$ es sin puntos base y de dimensión ≥ 1. Aquí $\deg \mathfrak{b} = s + 1 - \frac{d}{2}$. Así $\deg \mathfrak{b} \geq e + 2 = 2, e + 3 = 3$ sii $s \geq \frac{d}{2} + 1, \frac{d}{2} + 2$. Ahora $H^1(\mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_Y(1)) = H^1(\mathscr{O}_Y((s+1)P - dQ))$ se anula siempre que $s+1 > d$ ó $s+1 = d$ y $dP \nsim dQ$. Así
     - para $d \geq 4$ par, tomando $s \geq d$ es $s \geq \frac{d}{2} + 2$. Así obtenemos inmersión nodegenerada en $\mathbb{P}^r$, con $r = 2s + 1 - d$, con soporte degenerado $Y \subset \mathbb{P}^s$,

para todas las cintas con fibrado conormal $\mathscr{E}$ con $-\deg \mathscr{E} = d$ (e.g. en $\mathbb{P}^{d+1}$ con soporte $Y \subset \mathbb{P}^d$).

- para $d \geq 6$ par, tomando $s+1 = d$ y $dP \nsim dQ$ (i.e. $\deg \mathscr{E}^{-1} = \deg \mathscr{O}_Y(1)$ y $\mathscr{E}^{-1} \neq \mathscr{O}_Y(1)$), obtenemos inmersión nodegenerada en $\mathbb{P}^{d-1}$ con soporte *nodegenerado* $Y \subset \mathbb{P}^{d-1}$, para todas las cintas con fibrado conormal $\mathscr{E}$ con $-\deg \mathscr{E} = d$.

- Si $d = 0$, entonces $\deg \mathscr{E} = 0$ y $\deg \mathscr{L} = 0$.
  - Si $\mathscr{E}$ es no trivial entonces $\mathscr{L}^{-1}$ es de grado 0 no trivial, por tanto $H^0(\mathscr{N} \otimes \mathscr{L}^{-1}) = 0$.
  - Si $\mathscr{E} = \mathscr{O}_Y$ y $\mathscr{L}$ es no trivial entonces $H^0(\mathscr{N} \otimes \mathscr{L}^{-1}) = 0$. Si $\mathscr{L} = \mathscr{O}_Y$ entonces la sucesión $0 \to \mathscr{O}_Y \to \mathscr{N} \to \mathscr{O}_Y \to 0$ es del tipo (4.4.0.1). De forma que la cinta escindida con fibrado conormal $\mathscr{O}_Y$ se obtiene como el primer entorno infinitesimal dentro de S de la sección que corresponde al cociente $\mathscr{N} \twoheadrightarrow \mathscr{O}_Y$. Aquí $\deg \mathfrak{b} = s+1 \geq e+3 = 3$ y $H^1(\mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_Y(1)) = H^1(\mathscr{O}_Y((s+1)P)) = 0$, por tanto las dos cintas con fibrado conormal $\mathscr{O}_Y$ se sumergen nodegeneradas en $\mathbb{P}^{2s+1}$ sobre $Y \subset \mathbb{P}^s$ (e.g. en $\mathbb{P}^5$ con soporte $Y \subset \mathbb{P}^2$).

3. $\mathscr{N} = \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{L}'$. Se tiene $\mathscr{L}^2 = \mathscr{E} \otimes \mathscr{L}'$.

   a) Supongamos $e = 0$. Entonces d es par.
   - Si $d < 0$ entonces $H^0(\mathscr{N} \otimes \mathscr{L}^{-1}) = 0$.
   - Supongamos $d = 0$.
     Si $\mathscr{L}$ es no trivial entonces $\mathscr{N} \otimes \mathscr{L}^{-1}$ tiene sección global sin ceros (una única) exactamente si $\mathscr{L}' = \mathscr{L}$. En este caso ha de ser $\mathscr{E} = \mathscr{L}$. Es decir $\mathscr{E}$ es de grado cero no trivial. Por tanto la única cinta es la escindida. Aquí $\deg \mathfrak{b} = s+1 \geq e+3 = 3$. Por tanto la única cinta con conormal $\mathscr{E}$ de grado 0 no trivial se sumerge nodegenerada en $\mathbb{P}^{2s+1}$, con soporte degenerado $Y \subset \mathbb{P}^s$ (e.g. en $\mathbb{P}^5$ con soporte $Y \subset \mathbb{P}^2$).
     Si $\mathscr{L}$ es trivial entonces $\mathscr{L}' = \mathscr{E}^{-1}$. Por tanto $\mathscr{N} \otimes \mathscr{L}^{-1} = \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{E}^{-1}$ tiene secciones globales sin ceros, bien sea $\mathscr{E}$ trivial o no. De nuevo obtenemos inmersión nodegenerada para las cintas (dos o única) con fibrado conormal $\mathscr{E}$ de grado 0, en $\mathbb{P}^r$, con $r = 2s+1$, con soporte degenerado $Y \subset \mathbb{P}^s$ (e.g. en $\mathbb{P}^5$ con soporte en $Y \subset \mathbb{P}^2$). Estas inmersiones son parte del resultado del Teorema 4.3.1.
   - Supongamos $d \geq 2$ (d par). Entonces $\mathscr{L} = \mathscr{O}_Y(-\frac{d}{2}R)$, para cierto $R \in Y$. Así $\mathscr{N} \otimes \mathscr{L}^{-1} = \mathscr{O}_Y(\frac{d}{2}R) \oplus \mathscr{L}'(\frac{d}{2}R)$ tiene secciones globales sin ceros sii $d \geq 4$ ó $d = 2$ y $\mathscr{L}'$ es no trivial. Aquí la condición $\deg \mathfrak{b} = -d+s+1+\frac{d}{2} \geq e+3 = 3$ es $s \geq \frac{d}{2} + 2$.
     - para $d = 2$, tomando $s = 3$, obtenemos inmersión nodegenerada en $\mathbb{P}^5$, con soporte degenerado $Y \subset \mathbb{P}^3$, para todas las cintas con fibrado conormal $\mathscr{E}$ con $-\deg \mathscr{E} = 2$.

- para $d \geq 4$ par, tomando $s \geq d$ es $s \geq \frac{d}{2} + 2$. Así obtenemos, de nuevo, inmersión nodegenerada en $\mathbb{P}^r$, con $r = 2s + 1 - d$, con soporte degenerado $Y \subset \mathbb{P}^s$, para todas las cintas con fibrado conormal $\mathscr{E}$ con $-\deg \mathscr{E} = d$ (e.g. en $\mathbb{P}^{d+1}$ con soporte $Y \subset \mathbb{P}^d$).
- para $d \geq 6$ par, tomando $s+1 = d$ y $dP \nsim dQ$ (i.e. $\deg \mathscr{E}^{-1} = \deg \mathscr{O}_Y(1)$ y $\mathscr{E}^{-1} \neq \mathscr{O}_Y(1)$), obtenemos, de nuevo, inmersión nodegenerada en $\mathbb{P}^{d-1}$ con soporte *nodegenerado* $Y \subset \mathbb{P}^{d-1}$, para todas las cintas con fibrado conormal $\mathscr{E}$ con $-\deg \mathscr{E} = d$.

b) Supongamos $e > 0$. Escribimos $\mathscr{L}' = \mathscr{O}_Y(-eQ')$ para cierto $Q' \in Y$. Entonces $\mathscr{L}^2 = \mathscr{O}_Y(-dQ - eQ')$. Por tanto $d + e$ es par.

- Supongamos $d + e = 0$.
  - Si $d = -e < 0$ entonces la única cinta con fibrado conormal $\mathscr{E} = \mathscr{O}_Y(-dQ)$ es la cinta escindida. Si $\mathscr{L}$ es no trivial entonces $H^0(\mathscr{N} \otimes \mathscr{L}^{-1}) = 0$. Tomamos $\mathscr{L} = \mathscr{O}_Y$ y, por tanto, $\mathscr{L}' = \mathscr{E}^{-1}$. Aquí $\deg \mathfrak{b} = -d + s + 1 \geq e + 3 = -d + 3$ de manera que obtenemos inmersión nodegenerada para la cinta escindida en $\mathbb{P}^r$, con $r = -d + 2s + 1$, con soporte degenerado $Y \subset \mathbb{P}^s$ (e.g. en $\mathbb{P}^{-d+5}$ con soporte en $Y \subset \mathbb{P}^2$). Estas inmersiones son parte del resultado del Teorema 4.3.1.
- Supongamos que $d + e \neq 0$ (recordemos que $d + e$ es par).
  - Si $d + e < 0$ entonces $H^0(\mathscr{N} \otimes \mathscr{L}^{-1}) = 0$.
  - Si $d+e > 0$ entonces $\mathscr{L} = \mathscr{O}_Y(-\frac{d+e}{2}R)$ para cierto $R \in Y$ con $(d+e)R \sim dQ + eQ'$. La existencia de (4.4.0.1) equivale a una sección global sin ceros de $\mathscr{O}_Y(\frac{d+e}{2}R) \oplus \mathscr{O}_Y(\frac{d+e}{2}R - eQ')$.
    - Si $-e < d < e$ no hay secciones sin ceros.
    - Si $0 < e = d$ entonces $\mathscr{N} \otimes \mathscr{L}^{-1} = \mathscr{O}_Y(dR) \oplus \mathscr{O}_Y(dQ - dR)$ tiene secciones (una única) sin ceros sii $dQ \sim dR$, i.e. $\mathscr{L} = \mathscr{E}$. En este caso $\mathscr{L}' = \mathscr{E}$ y la sucesión (4.4.0.1) es $0 \to \mathscr{E} \to \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{E} \to \mathscr{O}_Y \to 0$. Aquí $\deg \mathfrak{b} = s + 1$.
      Si suponemos que $s + 1 \geq d + 3$ entonces $H^1(\mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_Y(1)) = 0$ y obtenemos inmersión nodegenerada para las cintas con fibrado conormal $\mathscr{E} = \mathscr{O}_Y(-dQ)$ en $\mathbb{P}^r$, con $r = 2s + 1 - d$, con soporte degenerado $Y \subset \mathbb{P}^s$ (e.g. en $\mathbb{P}^{d+5}$ con soporte en $Y \subset \mathbb{P}^{d+2}$). Estas inmersiones son parte del resultado del Teorema 4.3.1.
    - Si $0 < e < d$, entonces $\mathscr{O}_Y(\frac{d+e}{2}R) \oplus \mathscr{O}_Y(\frac{d+e}{2}R - eQ')$ tiene secciones globales sin ceros. Aquí la condición $\deg \mathfrak{b} = -d + s + 1 + \frac{d+e}{2} \geq e + 3$ es $s \geq \frac{d+e}{2} + 2$.
      Para $d \geq 7$, tomando $s+1 = d$ y $\mathscr{E}^{-1} \neq \mathscr{O}_Y(1)$, y $7 \leq e+6 \leq d$ con $d+e$ par (e.g. $e + 6 = d$), obtenemos, de nuevo, inmersión nodegenerada para las cintas con fibrado conormal $\mathscr{E} = \mathscr{O}_Y(-dQ)$ en $\mathbb{P}^{d-1}$, con soporte *nodegenerado* $Y \subset \mathbb{P}^{d-1}$.
      Para $d \geq 3$, tomando $e + 2 = d$ y $s \geq d + 1$ obtenemos inmersión

nodegenerada para las cintas con fibrado conormal $\mathscr{E} = \mathscr{O}_Y(-dQ)$ en $\mathbb{P}^{-d+2s+1}$, con soporte degenerado $Y \subset \mathbb{P}^s$ (e.g. en $\mathbb{P}^{d+3}$ con soporte en $Y \subset \mathbb{P}^{d+1}$).

4.4.2. Inmersión de cintas sobre $\mathbb{P}^1$

Sea $Y \subset \mathbb{P}^s$ una curva racional normal. Las cintas sobre $\mathbb{P}^1$ con fibrado conormal $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-d)$ están clasificadas, salvo isomorfismo que induce la identidad en $\mathbb{P}^1$, por el espacio $H^1(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-d+2))$ módulo k^*.
Indiquemos que el género aritmético de una cinta sobre $\mathbb{P}^1$ con fibrado conormal $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-d)$ es $p_a(\widetilde{Y}) = d-1$.
El Teorema 4.3.1 asegura que si $s \geq \max\{d+1, 1\}$ entonces toda cinta con fibrado conormal $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-d)$ se sumerge nodegenerada en $\mathbb{P}^r$, con $r = 2s+1-d$, con soporte degenerado $Y \subset \mathbb{P}^s$ (e.g. si $d \geq 0$ en $\mathbb{P}^{d+3}$ con soporte $Y \subset \mathbb{P}^{d+1}$ (para $d = 0, 1, 2, 3$ hay una única cinta); si $d < 0$ (la única cinta) en $\mathbb{P}^{-d+3}$ con soporte en un subespacio lineal $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^{-d+3}$).
Una aplicación más cuidadosa de nuestro estudio permite refinar este resultado.

- Un haz localmente libre normalizado $\mathscr{N}$ de rango 2 se escribe en la forma $\mathscr{N} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-e)$ con $e \geq 0$.
- El fibrado de línea $\mathscr{O}_S(1) \otimes p^* \mathscr{O}_Y(\mathfrak{b})$, donde $\mathscr{O}_Y(\mathfrak{b}) = \mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_Y(1) \otimes \mathscr{L}^{-1}$, es muy amplio sii $\deg \mathfrak{b} > e$.

Podemos escribir $\mathscr{L} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-a)$. Entonces $\mathscr{N} \otimes \mathscr{L}^{-1}$ tiene secciones globales sin ceros sii $a \geq e$. Aquí la condición $\deg \mathfrak{b} = -d + s + a > e$ es $s \geq d + 1 + e - a$.
Por otra parte, $H^1(\mathscr{O}_Y(1) \otimes \mathscr{E}) = H^1(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(s-d))$ se anula sii $s \geq d-1$. Por tanto podemos refinar el Teorema 4.3.1 para $d \geq 3$.

- Para $d \geq 3$ tomando $a = e+2$ y $s = d-1$ todas las cintas sobre $\mathbb{P}^1$ con fibrado conormal $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-d)$ se sumergen nodegeneradas en $\mathbb{P}^{d-1}$ con soporte *nodegenerado* en una curva racional normal $Y \subset \mathbb{P}^{d-1}$.

Capítulo 5

Alisamiento

Este capítulo contiene los resultados fundamentales de este trabajo. Demostramos (véase Teorema 5.1.3) que, imponiendo débiles condiciones sobre el fibrado conormal $\mathscr{E}$, todas la cintas con fibrado conormal $\mathscr{E}$ (con unas pocas excepciones si $g = 0$ ó $g = 1$, véase Observación 5.1.5), sobre una curva proyectiva lisa e irreducible Y de género g son alisables.
Por alisamiento de una cinta $\widetilde{Y}$ sobre una curva proyectiva lisa e irreducible Y, entendemos la existencia de una familia $\mathscr{Y}$ propia y plana sobre una curva (afín), lisa, puntuada $(T, 0)$ con las siguientes características:

1. la fibra general $\mathscr{Y}_t, t \neq 0$, es una curva proyectiva lisa e irreducible,
2. la fibra central $\mathscr{Y}_0$ es isomorfa a la cinta $\widetilde{Y}$.

Si la cinta $\widetilde{Y}$ está sumergida como subesquema cerrado en un espacio proyectivo $\mathbb{P}^r$ diremos que admite un alisamiento sumergido si existe un subesquema cerrado íntegro $\mathscr{Y} \subset \mathbb{P}^r_T$, plano sobre la curva (afín) puntuada $(T, 0)$, con las siguientes características:

1. la fibra general $\mathscr{Y}_t \subset \mathbb{P}^r, t \neq 0$, es una curva proyectiva lisa e irreducible,
2. la fibra central $\mathscr{Y}_0 \subset \mathbb{P}^r$ es la cinta $\widetilde{Y}$.

El resultado fundamental es el Teorema 5.1.1 que proporciona condiciones suficientes para la existencia de alisamiento sumergido para cintas.

Sobre una curva proyectiva lisa e irreducible Y de género arbitrario consideramos cintas con fibrado conormal fijado $\mathscr{E}$. Denotemos $d = -\deg \mathscr{E}$ y g el género de Y. El género aritmético de una cinta $\widetilde{Y}$ con fibrado conormal $\mathscr{E}$ es

$$p_a(\widetilde{Y}) = d + 2g - 1.$$

En el Teorema 5.1.1 suponemos la existencia de un recubrimiento doble liso e irreducible $X \xrightarrow{\pi} Y$ con $\pi_* \mathscr{O}_X / \mathscr{O}_Y = \mathscr{E}$. Esta es la condición geométrica natural para esperar que una cinta con fibrado conormal $\mathscr{E}$ sea alisable.

Observación 5.0.1. *([BPVdV84, I.17])* Un recubrimiento doble liso e irreducible $X \xrightarrow{\pi} Y$ con $\pi_* \mathscr{O}_X / \mathscr{O}_Y = \mathscr{E}$ está determinado por $\mathscr{E}$ y su lugar de bifurcación, un divisor efectivo, liso para que X sea una curva lisa, con fibrado de línea asociado $\mathscr{E}^{-2}$. Por tanto, la existencia de un recubrimiento doble liso e irreducible $X \xrightarrow{\pi} Y$ con $\pi_* \mathscr{O}_X / \mathscr{O}_Y = \mathscr{E}$ es equivalente a

1. la existencia en Y de un divisor no nulo, reducido y efectivo con fibrado de línea asociado $\mathscr{E}^{-2}$, ó,

2. $\mathscr{E}^{-2} = \mathscr{O}_Y$ y $H^0(\mathscr{E}) = 0$. $\square$

Suponemos también, por motivos técnicos, que el género de X verifica la condición $g_X \geq 3$. Observemos que $g_X = d + 2g - 1$. Es decir, el género de X y el género aritmético de la cinta $\widetilde{Y}$ son iguales. Por tanto estamos imponiendo la condición

3. $p_a(\widetilde{Y}) \geq 3$.

Observemos que una obvia condición necesaria para que $\widetilde{Y}$ sea alisable es $p_a(\widetilde{Y}) \geq 0$. Por tanto, la condición $p_a(\widetilde{Y}) \geq 3$ excluye pocas cintas.
Por otra parte, la existencia del recubrimiento doble, es una condición poco exigente para el fibrado $\mathscr{E}$. Por ejemplo, las condiciones (1) y (3) se verifican si $d \geq \text{máx}\{g, -2g+4\}$ (la condición $d \geq g$ se impone para asegurar que $\mathscr{E}^{-2}$ es sin puntos base). Además si $g \geq 2$, la existencia del recubrimiento doble implica la condición $p_a(\widetilde{Y}) \geq 3$, puesto que ha de ser $d \geq 0$.

5.1. Alisamiento sumergido

En primer lugar demostramos el alisamiento de cintas sumergidas.

Teorema 5.1.1. *Sean Y una curva proyectiva lisa e irreducible y $\mathscr{O}_Y(1)$ un fibrado de línea muy amplio sobre Y. Sea $\mathscr{E}$ un fibrado de línea sobre Y. Supongamos que $\mathscr{O}_Y(1)$ y $\mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_Y(1)$ son noespeciales. Denotemos por $\mathbb{P}^s \subset \mathbb{P}^r$, respectivamente, el espacio proyectivo de (uno cocientes) de $H^0(\mathscr{O}_Y(1))$ y $H^0(\mathscr{O}_Y(1)) \oplus H^0(\mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_Y(1))$. Supongamos que $r \geq 3$. Sea $Y \subset \mathbb{P}^r$ la inmersión definida como la composición de la inmersión $Y \subset \mathbb{P}^s$ determinada por la serie lineal completa $H^0(\mathscr{O}_Y(1))$ y $\mathbb{P}^s \subset \mathbb{P}^r$.*
Supongamos que $\widetilde{Y} \subset \mathbb{P}^r$ es una cinta sumergida nodegenerada sobre $Y \subset \mathbb{P}^r$ con fibrado conormal $\mathscr{E}$. Supongamos que $p_a(\widetilde{Y}) \geq 3$. Supongamos que existe un recubrimiento doble liso e irreducible $X \xrightarrow{\pi} Y$ con $\pi_* \mathscr{O}_X / \mathscr{O}_Y = \mathscr{E}$. Sea $X \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^r$ el morfismo obtenido componiendo π con la inclusión de Y en $\mathbb{P}^r$. Entonces

1. *existen una familia lisa e irreducible $\mathscr{X}$ propia y plana sobre una curva afín lisa puntuada T y un T–morfismo $\mathscr{X} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{P}^r_T$ con las siguientes características:*

   a) *la fibra general de $\mathscr{X}$ es una curva proyectiva lisa e irreducible,*

   b) *la fibra central de $\mathscr{X}$ es X,*

c) *la fibra general del T–morfismo* $\mathscr{X} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{P}^r_T$ *es una inmersión cerrada,*

d) *la fibra central del T–morfismo* $\mathscr{X} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{P}^r_T$ *es* φ, *y*

2. *la imagen del T–morfismo* $\mathscr{X} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{P}^r_T$ *es un subesquema cerrado íntegro* $\mathscr{Y} \subset \mathbb{P}^r_T$ *plano sobre T con las siguientes características:*

   a) *la fibra general de $\mathscr{Y}$ es una curva proyectiva lisa e irreducible nodegenerada con sección hiperplana noespecial en* $\mathbb{P}^r$,

   b) *la fibra central de $\mathscr{Y}$ es* $\widetilde{Y} \subset \mathbb{P}^r$.

Observación 5.1.2. Si $H^0(\mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_Y(1)) = 0$ entonces $Y \subset \mathbb{P}^r$ es nodegenerada. $\square$

Dem. (del Teorema 5.1.1) Denotemos $d = -\deg \mathscr{E}$ y g el género de Y.
Por hipótesis existe un recubrimiento doble liso e irreducible $X \xrightarrow{\pi} Y$ con $\pi_* \mathscr{O}_X = \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{E}$.
La curva X es proyectiva lisa e irreducible de género $g_X = d + 2g - 1$. Así $g_X = p_a(\widetilde{Y})$ y, por hipótesis, $g_X \geq 3$.
Sobre X consideramos el fibrado de línea $L = \pi^* \mathscr{O}_Y(1)$. La hipótesis de que $\mathscr{O}_Y(1)$ y $\mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_Y(1)$ son noespeciales implica que L es noespecial.
La aplicación natural $H^0(\mathscr{O}_Y(1)) \xrightarrow{\pi^*} H^0(\pi_* L) = H^0(L)$ admite una retracción

$$H^0(\pi_* L) \xrightarrow{p} H^0(\mathscr{O}_Y(1))$$

obtenida a partir de la aplicación traza $\pi_* \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_Y$ tensorizando por $\mathscr{O}_Y(1)$ y tomando secciones globales. Así se tiene

$$H^0(L) = H^0(\mathscr{O}_Y(1)) \oplus H^0(\mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_Y(1)).$$

Vemos también que el levantamiento del homomorfismo sobreyectivo de evaluación $H(\mathscr{O}_Y(1)) \otimes \mathscr{O}_Y \twoheadrightarrow \mathscr{O}_Y(1)$ es la composición de $H^0(\mathscr{O}_Y(1)) \otimes \mathscr{O}_X \xrightarrow{\pi^* \otimes \mathrm{id}} H^0(L) \otimes \mathscr{O}_X$ y del homomorfismo de evaluación $H^0(L) \otimes \mathscr{O}_X \to L$.
Ahora la composición del epimorfismo $H^0(L) \otimes \mathscr{O}_X \xrightarrow{p \otimes \mathrm{id}} H^0(\mathscr{O}_Y(1)) \otimes \mathscr{O}_X$ y del levantamiento del epimorfismo de evaluación $H(\mathscr{O}_Y(1)) \otimes \mathscr{O}_Y \twoheadrightarrow \mathscr{O}_Y(1)$ define un epimorfismo $H^0(L) \otimes \mathscr{O}_X \twoheadrightarrow L$ que proporciona un morfismo $X \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^r$. Este morfismo φ es la composición $X \xrightarrow{\pi} Y \hookrightarrow \mathbb{P}^s \hookrightarrow \mathbb{P}^r$.
El Teorema 3.3.6 implica que existe una deformación infinitesimal de primer orden de $\widetilde{X} \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} \mathbb{P}^r_\Delta$ de φ tal que la fibra central de la imagen de $\widetilde{\varphi}$ es igual a la cinta $\widetilde{Y}$. Denotemos $\widetilde{L} = \widetilde{\varphi}^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^r_\Delta}(1)$. Entonces $\widetilde{L}$ restringe a L en X.
La hipótesis de que $\widetilde{Y}$ es nodegenerada en $\mathbb{P}^r$ implica que si la imagen de $\widetilde{\varphi}$ está contenida en un subesquema cerrado definido en $\mathbb{P}^r_\Delta$ por una forma lineal con coeficientes en $k[\epsilon]$, entonces la fibra central de este subesquema es $\mathbb{P}^r$. En consecuencia vemos que, dado un conjunto de coordenadas de $\mathbb{P}^r$, el morfismo $\widetilde{X} \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} \mathbb{P}^r_\Delta$ corresponde a la elección de un conjunto de $r+1$ secciones $\{\widetilde{l}_0, \ldots, \widetilde{l}_r\}$ en $\Gamma(\widetilde{L})$ tales que generan $\widetilde{L}$, cualquiera de cuyas

posibles relaciones sobre $k[\epsilon]$ tienen coeficientes no unidades y cuya restricción a $H^0(L)$ es un conjunto $\{l_0, \ldots, l_r\}$ de $r+1$ secciones que generan L y tales que exactamente $s+1$ de ellas son independientes. A este último conjunto corresponde $X \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^r$.
Consideramos $\widetilde{\omega} = \omega_{\widetilde{X}/\Delta}$ y $\widetilde{L}' = \widetilde{L} \otimes \widetilde{\omega}^{\otimes n}$, donde n es suficientemente grande para que $L' = L \otimes \omega_X^{\otimes n}$ sea muy amplio, noespecial y la serie lineal completa de L' defina una inmersión $X \hookrightarrow \mathbb{P}^{r'}$ que determine un punto liso $[X']$ en el correspondiente esquema de Hilbert. Sea H el subconjunto abierto, liso (e irreducible) de este esquema de Hilbert formado por curvas lisas, irreducibles y nodegeneradas $C \subset \mathbb{P}^{r'}$ de grado $d' = 2 \deg \mathscr{O}_Y(1) + n(2g_X - 2)$ y género $g_X = d + 2g - 1$. Entonces $[X'] \in H$. Puesto que $n >> 0$, entonces para cada tal curva $\mathscr{O}_C(1)$ es noespecial, la inmersión de C en $\mathbb{P}^{r'}$ está definida por una serie completa y define un punto liso en su esquema de Hilbert. Por otra parte, puesto que L' es muy amplio y $H^1(L') = 0$, también $\widetilde{L}'$ es muy amplio relativo a Δ y la inmersión $X \hookrightarrow \mathbb{P}^{r'}$ extiende a una inmersión $\widetilde{X} \hookrightarrow \mathbb{P}^{r'}_\Delta$ (véase Lema 5.2.1). Así la imagen $\widetilde{X}'$ de $\widetilde{X} \hookrightarrow \mathbb{P}^{r'}_\Delta$ es una familia plana sobre Δ que corresponde a un vector tangente a H en el punto de Hilbert $[X']$ de X'. Ahora, puesto que $[X']$ es un punto liso en H, podemos tomar una curva afín lisa e irreducible T en H que pasa por $[X']$ con dirección tangente el vector tangente dado.
Podemos tomar esta curva de forma que todos sus puntos, excepto $[X']$, estén situados en el abierto U de H construido en la forma siguiente: H admite un morfismo sobreyectivo sobre $\mathscr{P}_{d',g_X}$, el espacio *coarse moduli* de pares formados por una curva de género g_X y un fibrado de línea de grado d' sobre la curva. Denotemos $d_1 = 2 \deg \mathscr{O}_Y(1)$ y consideremos también $\mathscr{P}_{d_1,g_X}$ fibrado sobre la parte fina del espacio de *moduli* $\mathscr{M}^0_{g_X}$. Sea $\mathscr{C}^{(d_1)}$ el esquema que representa el functor de divisores efectivos relativos de Cartier de grado relativo d_1 sobre la curva universal $\mathscr{C}^0_{g_X} \to \mathscr{M}^0_{g_X}$ (si la familia en cuestión es plana y proyectiva sobre la base, este functor es representable por un subesquema abierto del esquema de Hilbert de la familia. En el caso de una familia lisa sobre la base la inmersión de este abierto en el esquema de Hilbert de la familia es universalmente cerrada, véase [Gro62, 4.1]). Por hipótesis $d_1 - g_X = r \geq 3$, en particular $d_1 \geq g_X$. En consecuencia el morfismo $\mathscr{C}^{(d_1)} \to \mathscr{P}_{d_1,g_X}$ es sobreyectivo. Denotemos $\mathscr{C} = \mathscr{C}^0_{g_X} \times_{\mathscr{M}^0_{g_X}} \mathscr{C}^{(d_1)}$. Sobre $\mathscr{C}$ existe un divisor efectivo relativo de Cartier universal $\mathscr{D}$. Consideremos el fibrado de línea $\mathscr{O}_{\mathscr{C}}(\mathscr{D})$ y sea $\mathscr{C} \xrightarrow{q} \mathscr{C}^{(d_1)}$ el morfismo (plano y propio, de hecho proyectivo) de proyección. Entonces, por el teorema de cambio de base y cohomología, en un punto (C, D) de $\mathscr{C}^{(d_1)}$, formado por una curva C de género g_X y un divisor noespecial D de grado d_1 en C, la fibra del haz coherente $R^1 q_* \mathscr{O}_{\mathscr{C}}(\mathscr{D})$ es isomorfa a $H^1(C, D)$ y lo mismo es cierto cerca de (C, D). Así existe un abierto no vacío W_1 en $\mathscr{C}^{(d_1)}$ formado por pares que se componen de una curva y un divisor cuyo fibrado de línea asociado es noespecial. Además, si nos restringimos a W_1, fuera del soporte del conúcleo de la aplicación natural $q^* q_*(\mathscr{O}_{\mathscr{C}}(\mathscr{D})) \to \mathscr{O}_{\mathscr{C}}(\mathscr{D})$ obtenemos un abierto W_2 en $\mathscr{C}^{(d_1)}$ formado por pares que se componen de una curva de género g_X y un divisor efectivo de grado d_1 cuyo fibrado de línea asociado es noespecial y globalmente generado. En [EH83, 5.1] se prueba que si $r \geq 3$ entonces en una curva lisa general la serie lineal general de dimensión r no tiene puntos base y su morfismo asociado a $\mathbb{P}^r$ es una inmersión cerrada. Además, $\mathscr{C}^{(d_1)}$ es irreducible de modo que W_1 domina $\mathscr{M}^0_{g_X}$. En consecuencia, el conjunto W_2 es no vacío, y restringiendo W_2 de modo que $q_*(\mathscr{O}_{\mathscr{C}}(\mathscr{D}))$ sea libre de rango

$r+1$ sobre W_2, se tiene un W_2–morfismo $\mathscr{C}^0_{g_X} \times_{\mathscr{M}^0_{g_X}} W_2 \to \mathbb{P}^r_{W_2}$. Ahora (véase e.g. [Gro61, 4.6.7]) el conjunto W formado por los puntos de W_2 tales que el morfismo inducido en las fibras sobre el punto es una inmersión cerrada es abierto en W_2. Así obtenemos un abierto W en $\mathscr{C}^{(d_1)}$ formado por pares que se componen de una curva de genero g_X y un divisor efectivo de grado d_1 cuyo fibrado de línea asociado es noespecial y muy amplio. También por [EH83, 5.1], si suponemos que $d_1 - g_X = r \geq 3$ entonces el conjunto abierto W es no vacío. Ahora, puesto que $\mathscr{C}^{(d_1)}$ es irreducible y $\mathscr{C}^{(d_1)} \to \mathscr{P}_{d_1,g_X}$ es sobreyectivo, obtenemos también un abierto no vacío en $\mathscr{P}_{d_1,g_X}$ formado por pares que se componen de una curva y un fibrado de línea noespecial y muy amplio con tantas secciones globales como L. Por otra parte, tensorizando por $\omega^{\otimes n}$ se tiene un isomorfismo entre $\mathscr{P}_{d_1,g_X}$ y $\mathscr{P}_{d',g_X}$. De modo que tomamos el conjunto abierto $U \subset H$ imagen inversa del abierto considerado en $\mathscr{P}_{d',g_X}$. Ahora, tomamos nuestra curva T con punto general en este abierto U.

Denotemos $0 \in T$ el punto que corresponde a X'. Sobre la curva afín puntuada $(T,0)$ se tiene una familia polarizada, plana y propia $(\mathscr{X}, \mathscr{L}')$ que contiene a (X, L') y $(\widetilde{X}, \widetilde{L}')$ como fibras sobre el punto 0 y el vector tangente a T en 0.

Ahora, tensorizando por la potencia $-n$ del haz dualizante relativo de la familia obtenemos una familia $(\mathscr{X}, \mathscr{L})$ plana y propia sobre T cuya fibra central es (X, L), cuya restricción al vector tangente a T en 0 es $(\widetilde{X}, \widetilde{L})$ y cuyo miembro general $(\mathscr{X}_t, \mathscr{L}_t)$ se compone de una curva lisa e irreducible de género g_X y un fibrado de línea noespecial y muy amplio $\mathscr{L}_t$ con tantas secciones globales como L y grado $d_1 = \deg L$. Entonces se tiene $h^0(\mathscr{L}_t) = r+1$ para cada t y probaremos que, después de restringir T si es necesario, $\mathscr{L}$ define un T–morfismo $\mathscr{X} \to \mathbb{P}^r_T$ cuya fibra sobre el vector tangente a T en 0 es el morfismo inicial $\widetilde{X} \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} \mathbb{P}^r_\Delta$ y cuya fibra general $\mathscr{X}_t \xrightarrow{\varphi_t} \mathbb{P}^r$ para $t \neq 0$ es una inmersión cerrada dada por la serie lineal completa de $\mathscr{L}_t$. En efecto, recordemos que el morfismo $\widetilde{X} \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} \mathbb{P}^r_\Delta$ está asociado a un homomorfismo sobreyectivo $\mathscr{O}^{r+1}_{\widetilde{X}} \twoheadrightarrow \widetilde{L}$ dado por $r+1$ secciones globales $\{\widetilde{l}_0, \ldots, \widetilde{l}_r\}$ cualquiera de cuyas posibles relaciones sobre $k[\epsilon]$ tienen coeficientes no unidades y cuya restricción a X es un conjunto $\{l_0, \ldots, l_r\}$ de $r+1$ secciones globales de L tales que exactamente $s+1$ de ellas son independientes. El epimorfismo obtenido por restricción $\mathscr{O}^{r+1}_X \twoheadrightarrow L$ dado por $\{l_0, \ldots, l_r\}$ define el morfismo inicial $X \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^r$. Ahora, obtendremos un T–morfismo $\mathscr{X} \to \mathbb{P}^r_T$ extensión de $\widetilde{X} \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} \mathbb{P}^r_\Delta$ si podemos levantar $\{\widetilde{l}_0, \ldots, \widetilde{l}_r\}$ a secciones globales $\{\mathsf{m}_0, \ldots, \mathsf{m}_r\}$ de $\mathscr{L}$ tales que el homomorfismo asociado $\mathscr{O}^{r+1}_{\mathscr{X}} \to \mathscr{L}$ sea sobreyectivo. Sea $\mathscr{X} \xrightarrow{p} T$ el (plano y propio, de hecho proyectivo) morfismo estructural. Los hechos que p es propio, $\mathscr{L}$ es plano sobre T y $H^1(\mathscr{X}_t, \mathscr{L}_t) = 0$ para cada $t \in T$ implican que $p_*\mathscr{L}$ es un haz localmente libre de rango $r+1$ sobre $T = \operatorname{Spec} R$ y "la formación de p_* conmuta con extensión de la base"así se tiene $\Gamma(\mathscr{L}) \otimes_R k[\epsilon]/\epsilon k[\epsilon] = \Gamma(L)$ y $\Gamma(\mathscr{L}) \otimes_R k[\epsilon] = \Gamma(\widetilde{L})$. Después de restringir T, podemos suponer que $\mathsf{M} = \Gamma(\mathscr{L})$ es un R–módulo libre de rango $r+1$.

Demostremos que la aplicación $\mathsf{M} \to \Gamma(\widetilde{L})$ es sobreyectiva. La fibra central $\mathscr{X}_0 = X$ es un divisor de Cartier en $\mathscr{X}$ puesto que $\mathscr{X} \to T$ es plano y $0 \in T$ es un divisor de Cartier. Por tanto $\widetilde{X}$ es, como subesquema cerrado de $\mathscr{X}$, el primer entorno infinitesimal de X en

$\mathscr{X}$. Tensorizando por $\mathscr{L}$ la sucesión exacta asociada a la inclusión $\widetilde{X} \subset \mathscr{X}$

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathscr{X}}(-2X) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathscr{X}} \longrightarrow \mathscr{O}_{\widetilde{X}} \longrightarrow 0,$$

y empujando a T, obtenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow p_*\mathscr{L}(-2X) \longrightarrow p_*\mathscr{L} \longrightarrow \widetilde{p}_*\widetilde{L} \longrightarrow R^1p_*\mathscr{L}(-2X),$$

donde $\widetilde{X} \xrightarrow{\widetilde{p}} \Delta$ es el morfismo estructural. Ahora, restringiendo T, podemos suponer que el punto $0 \in T$ es, como divisor en T, linealmente equivalente a cero. En consecuencia, el fibrado de línea $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}(-X)$ es isomorfo a $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$. De este modo vemos que $R^1p_*\mathscr{L}(-2X)$ se anula a partir del hecho que $\mathscr{L}$ induce fibrados lineales noespeciales en cada fibra. Así podemos levantar $\{\widetilde{l}_0, \dots, \widetilde{l}_r\}$ a secciones $\{\mathsf{m}_0, \dots, \mathsf{m}_r\}$. Las secciones $\{\mathsf{m}_0, \dots, \mathsf{m}_r\}$ definen un morfismo $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}^{r+1} \to \mathscr{L}$ cuyo conúcleo se anula en 0. En consecuencia (véase Lema 5.2.2), restringiendo T, podemos suponer que $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}^{r+1} \to \mathscr{L}$ es sobreyectivo. De este modo hemos obtenido un epimorfismo $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}^{r+1} \to \mathscr{L}$ que define un T–morfismo $\mathscr{X} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{P}^r_T$ cuya Δ–fibra es $\widetilde{X} \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} \mathbb{P}^r_\Delta$.
La sección $\mathsf{m}_0 \wedge \cdots \wedge \mathsf{m}_r$ de $\wedge^{r+1}\mathsf{M}$ corresponde, después de una elección de base en M, a un elemento $\mathsf{d} \in R$. Afirmamos que $\mathsf{d} \neq 0$. En efecto, vemos esto probando que d no se anula en el orden $n = r - s$. Si $n = 0$ entonces $\{l_0, \dots, l_r\}$ son independientes de forma que d no se anula en $0 \in T$. Supongamos que $n \geq 1$. El $k[\epsilon]$–módulo $\Gamma(\widetilde{L}) = \mathsf{M} \otimes_R k[\epsilon]$ es libre, de forma que se tiene $\Gamma(\widetilde{L}) = \Gamma(L) \oplus \Gamma(L)\,\epsilon$. En consecuencia podemos escribir $\widetilde{l}_i = l_i + m_i\epsilon$ donde $m_i \in \Gamma(L)$. La anulación de d en el orden n es equivalente (véase Lema 5.2.3) a

$$(5.1.2.1) \qquad \sum_{0 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq r} l_0 \wedge \cdots \wedge l_{i_1-1} \wedge m_{i_1} \wedge l_{i_1+1} \wedge \cdots \wedge l_{i_n-1} \wedge m_{i_n} \wedge l_{i_n+1} \wedge \cdots \wedge l_r = 0.$$

De (5.1.2.1) se obtiene (véase Lema 5.2.4) una relación $k[\epsilon]$–lineal entre las secciones $\{l_0 + m_0\epsilon, \dots, l_r + m_r\epsilon\}$ tal que alguno de sus coeficientes es una unidad en $k[\epsilon]$. La existencia de esta relación lineal implica (véase Lema 5.2.5) que la fibra central $(\operatorname{im}\widetilde{\varphi})_0$ es degenerada. Esto es contrario a nuestra hipótesis de que la cinta $\widetilde{Y}$ es nodegenerada. De forma que la igualdad (5.1.2.1) no ocurre y en consecuencia d no se anula en el orden $n = r - s$ como queríamos probar.
Por tanto, restringiendo T, podemos suponer que los $r + 1$ elementos $\{\mathsf{m}_0, \dots, \mathsf{m}_r\}$ de M inducen una base en $H^0(\mathscr{L}_t)$ para cada $0 \neq t \in T$.
Así obtenemos para cada $0 \neq t \in T$ un homomorfismo sobreyectivo $\mathscr{O}_{\mathscr{X}_t}^{r+1} \twoheadrightarrow \mathscr{L}_t$ dado por una base de $H^0(\mathscr{L}_t)$ y para $t = 0$ el homomorfismo sobreyectivo $\mathscr{O}_X^{r+1} \twoheadrightarrow L$ cuyo morfismo asociado es $X \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^r$. Esto es una familia plana de morfismos $\mathscr{X}_t \xrightarrow{\Phi_t} \mathbb{P}^r$ cuya fibra central es $X \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^r$, cuya fibra general es una inmersión cerrada asociada a una serie lineal completa y cuya Δ–fibra es $\widetilde{X} \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} \mathbb{P}^r_\Delta$.
Sea $\mathscr{Y}$ la imagen del T–morfismo $\mathscr{X} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{P}^r_T$. La familia total $\mathscr{X}$ es lisa e irreducible así que $\mathscr{Y}$ es íntegro. Además, Φ es una inmersión cerrada sobre $T - 0$ puesto que Φ_t es una

inmersión cerrada para cada $t \in T - 0$ (véase e.g. [Gro61, 4.6.7]). En consecuencia para cada $t \in T - 0$ se tiene la igualdad $\mathscr{Y}_t = \operatorname{im}(\Phi_t)$. Finalmente, los hechos que T es una curva íntegra y lisa y que $\mathscr{Y}$ es íntegro y domina T implican que $\mathscr{Y}$ es plano sobre T. Así la fibra $\mathscr{Y}_0$ de $\mathscr{Y}$ en $0 \in T$ es el límite plano de las imágenes de $\mathscr{X}_t \xrightarrow{\Phi_t} \mathbb{P}^r$ para $t \neq 0$. Por otra parte, esta fibra $\mathscr{Y}_0$ contiene la fibra central $(\operatorname{im}\widetilde{\varphi})_0$ de la imagen de $\widetilde{\varphi}$ y puesto que ambas la fibra $\mathscr{Y}_0$ y la fibra $(\operatorname{im}\widetilde{\varphi})_0$ tienen el mismo grado y el mismo género aritmético se deduce que son iguales. □

Como consecuencia del Teorema 4.3.1 y del Teorema 5.1.1 obtenemos el alisamiento de cintas.

Teorema 5.1.3. *Sean Y una curva proyectiva lisa e irreducible y $\mathscr{E}$ un fibrado de línea en Y. Supongamos que existe un recubrimiento doble liso e irreducible $X \xrightarrow{\pi} Y$ con $\pi_*\mathscr{O}_X/\mathscr{O}_Y = \mathscr{E}$. Entonces cada cinta $\widetilde{Y}$ sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$ y género aritmético $p_a(\widetilde{Y}) \geq 3$ es alisable.* □

Observación 5.1.4. Recordemos que la existencia de un recubrimiento doble liso e irreducible $X \xrightarrow{\pi} Y$ con $\pi_*\mathscr{O}_X/\mathscr{O}_Y = \mathscr{E}$ es equivalente a la verificación de una de las condiciones siguientes.

1. Existe en Y un divisor no nulo, reducido y efectivo con fibrado de línea asociado $\mathscr{E}^{-2}$.

2. Se verifican las condiciones $\mathscr{E}^{-2} = \mathscr{O}_Y$ y $H^0(\mathscr{E}) = 0$. □

Observación 5.1.5. En el Teorema 5.1.3 la condición de existencia del recubrimiento doble impone $d \geq 0$, y, por tanto, si $g \geq 2$ implica la condición $p_a(\widetilde{Y}) \geq 3$, puesto que $p_a(\widetilde{Y}) = d + 2g - 1$. Por otra parte, en los casos $g = 0$ ó $g = 1$, la condición $p_a(\widetilde{Y}) \geq 3$ sólo excluye unos pocos valores entre los $d \geq 0$. En concreto $d = 0, 1, 2, 3$ si $g = 0$, y $d = 0, 1$ si $g = 1$.
Esto significa que imponer, en el enunciado del Teorema 5.1.3, la condición $p_a(\widetilde{Y}) \geq 3$ es, en la práctica superfluo, puesto que la condición $p_a(\widetilde{Y}) \geq 3$ es, casi siempre, implicada por la condición de existencia del recubrimiento doble. □

Sea $d = -\deg \mathscr{E}$. Recordemos que $p_a(\widetilde{Y}) = d + 2g - 1$. Las hipótesis $p_a(\widetilde{Y}) \geq 3$ y (1) de la Observación 5.1.4 se verifican, para todo $\mathscr{E}$, si $d \geq \max\{g, -2g + 4\}$ de forma que obtenemos:

Corolario 5.1.6. *Sea Y una curva proyectiva lisa e irreducible de género g.*

1. *Sea $\mathscr{E}$ un fibrado de línea sobre Y y $d = -\deg \mathscr{E}$. Si $d \geq \max\{g, -2g + 4\}$ entonces cada cinta sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$ es alisable.*

2. *Supongamos que $g \geq 2$. Sea $\mathscr{E}$ un fibrado de línea sobre Y tal que $\mathscr{E}^{-2} = \mathscr{O}_Y$ y $H^0(\mathscr{E}) = 0$. Entonces cada cinta sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$ es alisable.* □

Para géneros $g \geq 3$ hay un rango no cubierto por el Corolario 5.1.6 donde el Teorema 5.1.3 también se aplica, suponiendo que $\mathscr{E}$ es general. Supongamos que $g \geq 3$ y $g+1 \leq 2d \leq 2g-1$. Entonces el fibrado lineal general $\mathscr{E}^{-2}$ es noespecial, su serie lineal completa tiene dimensión mayor o igual que 2 y, su divisor asociado general es reducido. Así está garantizada la existencia de un recubrimiento doble asociado a $\mathscr{E}^{-2}$ y $p_a(\widetilde{Y}) = d + 2g - 1 \geq 3$. Obtenemos por tanto

Corolario 5.1.7. *Sea Y una curva proyectiva lisa e irreducible de género $g \geq 3$. Sea $\mathscr{E}$ un fibrado de línea general con $g+1 \leq 2d \leq 2g-1$, donde $d = -\deg \mathscr{E}$. Entonces cada cinta sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$ es alisable.* □

En los casos de cintas sobre una curva elíptica o cintas sobre $\mathbb{P}^1$, podemos aplicar también el Teorema 5.1.1 para cintas sumergidas como se indica en la Sección 4.4. En estos casos obtenemos los siguientes resultados de alisamiento sumergido para cintas con soporte en una inmersión nodegenerada de su parte reducida.

Corolario 5.1.8. *Sea $Y \subset \mathbb{P}^{d-1}$ una curva elíptica normal de grado $d \geq 5$. Sea $\mathscr{E}$ un fibrado de línea de grado $-d$ tal que $\mathscr{E}^{-1}$ es no isomorfo a $\mathscr{O}_Y(1)$. Entonces para cada cinta $\widetilde{Y}$ sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$ sumergida en $\mathbb{P}^{d-1}$ con soporte en $Y \subset \mathbb{P}^{d-1}$ existe un subesquema cerrado íntegro $\mathscr{Y} \subset \mathbb{P}^{d-1} \times T$ plano sobre una curva afín lisa, puntuada T cuya fibra general es una curva nodegenerada, proyectiva, lisa e irreducible de género $d+1$ con sección hiperplana noespecial en $\mathbb{P}^{d-1}$ y cuya fibra central es $\widetilde{Y} \subset \mathbb{P}^{d-1}$. Además, en estas condiciones, cada cinta $\widetilde{Y}$ sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$ admite una inmersión en $\mathbb{P}^{d-1}$ con soporte en $Y \subset \mathbb{P}^{d-1}$.* □

Corolario 5.1.9. *Sea $Y \subset \mathbb{P}^{d-1}$ una curva elíptica normal de grado $d-1$. Supongamos que $d \geq 4$. Entonces para cada cinta $\widetilde{Y}$ sobre $\mathbb{P}^1$ con fibrado conormal $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-d)$ sumergida en $\mathbb{P}^{d-1}$ con soporte en $Y \subset \mathbb{P}^{d-1}$ existe un subesquema cerrado íntegro $\mathscr{Y} \subset \mathbb{P}^{d-1} \times T$ plano sobre una curva afín lisa, puntuada T cuya fibra general es una curva nodegenerada, proyectiva, lisa e irreducible de género $d-1$ con sección hiperplana noespecial en $\mathbb{P}^{d-1}$ y cuya fibra central es $\widetilde{Y} \subset \mathbb{P}^{d-1}$. Además, en estas condiciones, cada cinta $\widetilde{Y}$ sobre $\mathbb{P}^1$ con fibrado conormal $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-d)$ admite una inmersión en $\mathbb{P}^{d-1}$ con soporte en $Y \subset \mathbb{P}^{d-1}$.* □

5.2. Lemas

Algunos hechos elementales, cuya prueba incluimos aquí, han sido usados en la demostración del Teorema 5.1.1.

Lema 5.2.1. *Sea $(\widetilde{X}, \widetilde{M})$ una deformación infinitesimal de primer orden del par (X, M), donde X es una variedad proyectiva, lisa e irreducible y M haz invertible muy amplio con $H^1(M) = 0$. Entonces $\widetilde{M}$ es muy amplio relativo a $\Delta = \operatorname{Spec} k[\epsilon]$. El $k[\epsilon]$–módulo $\Gamma(\widetilde{M})$ es libre. Si $\{m_0, \ldots, m_r\}$ es una base de $H^0(M)$ y $\{\widetilde{m}_0, \ldots, \widetilde{m}_r\}$ es un levantamiento a $\Gamma(\widetilde{M})$, entonces $\{\widetilde{m}_0, \ldots, \widetilde{m}_r\}$ es $k[\epsilon]$–base de $\Gamma(\widetilde{M})$. En consecuencia, la inmersión $X \to \mathbb{P}^r$ definida por la serie completa $H^0(M)$ extiende a una Δ–inmersión $\widetilde{X} \to \mathbb{P}^r_\Delta$ definida por una Δ–base de $\Gamma(\widetilde{M})$.*

Dem. Tensorizando con $\widetilde{M}$ la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X \xrightarrow{\epsilon} \mathscr{O}_{\widetilde{X}} \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow 0, \tag{5.2.1.1}$$

obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\epsilon} \widetilde{M} \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

En consecuencia,

$$0 \longrightarrow H^0(M) \xrightarrow{\epsilon} \Gamma(\widetilde{M}) \longrightarrow H^0(M) \longrightarrow 0 = H^1(M).$$

Se obtiene de aquí un isomorfismo de $k[\epsilon]$–módulos $\Gamma(\widetilde{M}) = H^0(M) \oplus H^0(M)\epsilon$.
Por hipótesis, M está generado por secciones globales, esto es, para cada $x \in X$ existe $s \in H^0(M)$ tal que $s(x) \neq 0$. Tomamos $\widetilde{s} \in \Gamma(\widetilde{M})$ levantamiento de s. Entonces $\widetilde{s}(x) = s(x) \neq 0$, de forma que $\widetilde{M}$ está globalmente generado.
Es trivial comprobar que si $\{m_0, \ldots, m_r\}$ es una base de $H^0(M)$ y $\{\widetilde{m}_0, \ldots, \widetilde{m}_r\}$ es un levantamiento a $\Gamma(\widetilde{M}) = H^0(M) \oplus H^0(M)\epsilon$, entonces $\{\widetilde{m}_0, \ldots, \widetilde{m}_r\}$ es $k[\epsilon]$–base de $\Gamma(\widetilde{M})$.
Finalmente probamos que $\widetilde{M}$ determina una inmersión si M determina una inmersión.
Puesto que M determina una inmersión, en el abierto $U = \{m_0 \neq 0\} = \{\widetilde{m}_0 \neq 0\}$, se verifica la igualdad $\Gamma(U, \mathscr{O}_X) = k[\{s_i\}]$ donde $s_i = \frac{m_i}{m_0}$.
Por otra parte, puesto que U es afín y liso, la deformación $\widetilde{X}$ es trivial en U, es decir, $\widetilde{U} = (U, \mathscr{O}_{\widetilde{X}|U})$ es un abierto afín isomorfo a $\operatorname{Spec}(k[\{s_i\}] \oplus k[\{s_i\}]\epsilon)$.
De (5.2.1.1) se obtiene, como es bien conocido, una sucesión "exponencial"

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}^*_{\widetilde{X}} \longrightarrow \mathscr{O}^*_X \longrightarrow 1,$$

asignando a una sección local $a \in \mathscr{O}_X$ la sección $1 + a\epsilon$, que proporciona una extensión de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow H^1(\mathscr{O}_X) \longrightarrow H^1(\mathscr{O}^*_{\widetilde{X}}) \longrightarrow H^1(\mathscr{O}^*_X) \longrightarrow 1. \tag{5.2.1.2}$$

Puesto que $H^1(\mathscr{O}_U) = 0$, la sucesión análoga a (5.2.1.2) obtenida cambiando $\widetilde{X}$ por $\widetilde{U}$ implica que $H^1(\mathscr{O}^*_{\widetilde{U}}) = H^1(\mathscr{O}^*_U)$, de forma que, $\widetilde{M}_{|\widetilde{U}} = M_{|U} \otimes k[\epsilon]$ y, por tanto, $\Gamma(\widetilde{U}, \widetilde{M}) = \Gamma(U, M) \otimes k[\epsilon]$. (Además M es trivial en U. Por tanto $\widetilde{M}$ es trivial en $\widetilde{U}$.)
Probar que $\widetilde{X} \to \mathbb{P}^r_\Delta$ es una inmersión cerrada equivale a probar que $\Gamma(U, \mathscr{O}_{\widetilde{X}}) = k[\{\widetilde{s}_i\}, \epsilon]$, donde $\widetilde{s}_i = \frac{\widetilde{m}_i}{\widetilde{m}_0}$. Comprobemos esta igualdad de anillos. Se puede escribir

$$\widetilde{s}_i = s_i + t_i\epsilon,$$

donde $t_i \in k[\{s_i\}]$.
Tomemos un elemento arbitrario $p(\{s_i\}) + q(\{s_i\})\epsilon \in \Gamma(U, \mathscr{O}_{\widetilde{X}})$. Sea

$$q_1(\{s_i\}) = q(\{s_i\}) - \sum_j \frac{\partial p}{\partial X_j}(\{s_i\})t_j.$$

Entonces

$$\begin{aligned} p(\{s_i\}) + q(\{s_i\})\epsilon &= p(\{s_i\}) + \sum_j \frac{\partial p}{\partial X_j}(\{s_i\})t_j\epsilon + q_1(\{s_i\})\epsilon \\ &= p(\{\widetilde{s}_i\}) + q_1(\{\widetilde{s}_i\})\epsilon \in k[\{\widetilde{s}_i\}, \epsilon]. \end{aligned}$$

□

El siguiente resultado es parte de [Gro61, 4.6.3].

Lema 5.2.2. *Sean $\mathscr{X} \xrightarrow{p} T$ un morfismo propio y $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un homomorfismo de $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$–módulos coherentes. Sea $0 \in T$. Si el homomorfismo inducido $\mathscr{F} \otimes_T k(0) \to \mathscr{G} \otimes_T k(0)$ es sobreyectivo, entonces existe un abierto $0 \in U \subset T$ tal que el homomorfismo $\mathscr{F}|_{p^{-1}U} \to \mathscr{G}|_{p^{-1}U}$ es sobreyectivo.*

Dem. El conúcleo $\mathscr{N}$ de $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ es un $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$–módulo coherente. La hipótesis afirma que para todo $x \in p^{-1}(0)$ se tiene $\mathscr{N}_x \otimes_{\mathscr{O}_{T,0}} \frac{\mathscr{O}_{T,0}}{\mathfrak{m}_{T,0}} = 0$. Ahora bien, $\mathscr{N}_x \otimes_{\mathscr{O}_{T,0}} \frac{\mathscr{O}_{T,0}}{\mathfrak{m}_{T,0}}$ se aplica de forma sobreyectiva en $\mathscr{N}_x \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{X},x}} \frac{\mathscr{O}_{\mathscr{X},x}}{\mathfrak{m}_{\mathscr{X},x}}$. De forma que este último también se anula. Aplicando el lema de Nakayama obtenemos $\mathscr{N}_x = 0$, y, puesto que $\mathscr{N}$ es coherente, existe un abierto $x \in V_x \subset \mathscr{X}$ tal que $\mathscr{N}|_{V_x} = 0$. Sea V la unión de todos los V_x. Entonces $p^{-1}(0) \subset V$ y $\mathscr{N}|_V = 0$. Ahora, puesto que p es cerrado, $U = T - p(\mathscr{X} - V)$ es un abierto que contiene a $0 \in T$ y se tiene $p^{-1}(U) \subset V$. □

Lema 5.2.3. *Sean R una k–álgebra noetheriana local regular de dimensión 1 con cuerpo residual k, $\mathfrak{m}$ su ideal maximal y $\hat{R} \simeq k[[t]]$ su completado $\mathfrak{m}$–ádico. Sea M un R–módulo libre de rango $r+1$. Sean $R \to k[\epsilon]$ un vector tangente, $M_1 = \mathsf{M} \otimes_R k[\epsilon]$ y $M_0 = M_1 \otimes_{k[\epsilon]} k$. Sean $\widetilde{l}_0, \dots, \widetilde{l}_r \in M_1$ y $l_0, \dots, l_r, m_0, \dots, m_r \in M_0$ tales que $\widetilde{l}_i = l_i + m_i\epsilon$. Supongamos que existen $\mathsf{m}_0, \dots, \mathsf{m}_r \in \mathsf{M}$ tales que $\mathsf{m}_i \otimes 1 = \widetilde{l}_i$. Sea $\{\mathsf{b}_0, \dots, \mathsf{b}_r\}$ una base de M como R–módulo y $\mathsf{d} \in R$ tal que $\mathsf{m}_0 \wedge \dots \wedge \mathsf{m}_r = \mathsf{d}(\mathsf{b}_0 \wedge \dots \wedge \mathsf{b}_r)$. Denotemos $s+1$ el rango del conjunto de vectores $\{l_0, \dots, l_r\}$ en el k–espacio vectorial M_0 y $n = r - s$. Entonces el elemento $\mathsf{d}_n = \mathsf{d} \otimes 1 \in \mathsf{M} \otimes_R \hat{R}/\hat{\mathfrak{m}}^{n+1}$ se anula sii*

$$\sum_{0 \le i_1 < \dots < i_n \le r} l_0 \wedge \dots \wedge l_{i_1-1} \wedge m_{i_1} \wedge l_{i_1+1} \wedge \dots \wedge l_{i_n-1} \wedge m_{i_n} \wedge l_{i_n+1} \wedge \dots \wedge l_r = 0. \tag{5.2.3.1}$$

Dem. Se puede suponer que el vector tangente $R \to k[\epsilon]$ corresponde, mediante el isomorfismo $\hat{R} \simeq k[[t]]$, al epimorfismo natural $k[[t]] \to k[[t]]/t^2$.
Denotemos $k[\epsilon_n] = k[[t]]/t^{n+1}$. El $k[\epsilon_n]$–módulo $M_n = \mathsf{M} \otimes_R \hat{R}/\hat{\mathfrak{m}}^{n+1} \simeq \mathsf{M} \otimes_R k[\epsilon_n]$ es libre y

$$M_n \otimes_{k[\epsilon_n]} k[\epsilon_n]/\epsilon_n k[\epsilon_n] = M_0.$$

Por tanto, como $k[\epsilon_n]$–módulos,

$$M_n \simeq M_0 \otimes_k k[\epsilon_n] = M_0 \oplus M_0\epsilon_n \oplus \dots \oplus M_0\epsilon_n^n. \tag{5.2.3.2}$$

En particular, como $k[\epsilon]$–módulos,

$$M_1 \simeq M_0 \oplus M_0\epsilon.$$

Además $\wedge^{r+1}\mathsf{M} \otimes_R k[\epsilon_n] = \wedge^{r+1}M_n$. Por tanto, se verifica

$$\mathsf{m}_{0n} \wedge \cdots \wedge \mathsf{m}_{rn} = \mathsf{d}_n(\mathsf{b}_{0n} \wedge \cdots \wedge \mathsf{b}_{rn}),$$

donde $\mathsf{m}_{jn} = \mathsf{m}_j \otimes 1 \in M_n$ y $\{\mathsf{b}_{0n} = \mathsf{b}_0 \otimes 1, \dots, \mathsf{b}_{rn} = \mathsf{b}_r \otimes 1\}$ forman una base de M_n. En consecuencia, la anulación $\mathsf{d}_n = 0$ es equivalente a $\mathsf{m}_{0n} \wedge \cdots \wedge \mathsf{m}_{rn} = 0$.
Según (5.2.3.2) podemos escribir

$$\mathsf{m}_{jn} = l_j + m_j\epsilon_n + \cdots + m_{jn}\epsilon_n^n,$$

para ciertos $m_{ji} \in M_0$, $i = 2, \dots, n$. En la expansión de la expresión

$$(5.2.3.3) \qquad (l_0 + m_0\epsilon_n + \cdots + m_{0n}\epsilon_n^n) \wedge \cdots \wedge (l_r + m_r\epsilon_n + \cdots + m_{rn}\epsilon_n^n) = 0,$$

un sumando posiblemente no nulo ha de contener a lo sumo $s+1$ elementos elegidos entre los $\{l_j\}$. Por tanto, ha de contener al menos n elementos elegidos entre los $\{m_j, m_{ji}\}$. Ahora bien, si aparecen más de n elementos elegidos entre los $\{m_j, m_{ji}\}$ o aparece algún m_{ji} entonces aparece ϵ_n^t, con $t > n$ y, por tanto, el sumando se anula. Esto es, en un sumando posiblemente no nulo han de aparecer exactamente n elementos elegidos entre los $\{m_j\}$ y exactamente $s+1$ elementos elegidos entre los $\{l_j\}$. De forma que (5.2.3.3) es equivalente a (5.2.3.1). □

Lema 5.2.4. *En las condiciones del Lema 5.2.3, si $n \geq 1$ y se verifica* (5.2.3.1) *entonces existe una relación $k[\epsilon]$–lineal entre los elementos $\{l_0 + m_0\epsilon, \dots, l_r + m_r\epsilon\}$ alguno de cuyos coeficientes es una unidad en $k[\epsilon]$.*

Dem. Sea $\{l'_0, \dots, l'_r\}$ una base del k–espacio vectorial M_0. Sean f, g los endomorfismos de M_0 tales que $f(l'_i) = l_i$ y $g(l'_i) = m_i$.
La existencia de una relación $k[\epsilon]$–lineal $\sum(\lambda_i + \mu_i\epsilon)(l_i + m_i\epsilon) = 0$ con algún $\lambda_i \neq 0$, es equivalente a la existencia de un elemento no nulo $0 \neq \sum \lambda_i l'_i \in \ker f$ tal que $g(\sum \lambda_i l'_i) \in \operatorname{im} f$.
El rango del conjunto $\{l_i\}$ es, por hipótesis, $s+1$. Por tanto, podemos suponer

$$l_n \wedge \cdots \wedge l_r \neq 0,$$

y

$$(5.2.4.1) \qquad l_j = \sum_{i=n}^{r} \alpha_{ij} l_i, \qquad \text{para} \qquad j = 0, \dots, n-1.$$

Entonces la expresión en el lado izquierdo de (5.2.3.1), i.e.

$$(5.2.4.2) \qquad \sum_{0 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq r} l_0 \wedge \cdots \wedge l_{i_1-1} \wedge m_{i_1} \wedge l_{i_1+1} \wedge \cdots \wedge l_{i_n-1} \wedge m_{i_n} \wedge l_{i_n+1} \wedge \cdots \wedge l_r,$$

es igual a la expresión

$$(m_0 - \sum_{i=n}^{r} \alpha_{i0} m_i) \wedge \cdots \wedge (m_{n-1} - \sum_{i=n}^{r} \alpha_{in-1} m_i) \wedge l_n \wedge \cdots \wedge l_r. \tag{5.2.4.3}$$

En efecto,

$$(m_0 - \sum_{i=n}^{r} \alpha_{i0} m_i) \wedge \cdots \wedge (m_{n-1} - \sum_{i=n}^{r} \alpha_{in-1} m_i),$$

es igual a

$$\sum_{b=0}^{\text{mín}\{n,r-n+1\}} (-1)^b \sum_{\substack{0\leq i_1<\cdots<i_b\leq n-1 \\ n\leq j_1<\cdots<j_b\leq r}} (\begin{vmatrix} \alpha_{j_1 i_1} & \dots & \alpha_{j_1 i_b} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{j_b i_1} & \dots & \alpha_{j_b i_b} \end{vmatrix} m_0 \wedge \cdots \wedge m_{i_1-1} \wedge m_{j_1} \wedge m_{i_1+1} \wedge$$
$$\cdots \wedge m_{i_b-1} \wedge m_{j_b} \wedge m_{i_b+1} \wedge \cdots \wedge m_{n-1}).$$

Por otra parte, en cada sumando de la expresión (5.2.4.2) se han sustituido n elementos entre los $\{l_0, \dots, l_r\}$. Cada una de estas sustituciones corresponde a sustituir b elementos entre los $\{l_n, \dots, l_r\}$ y sustituir $n-b$ entre los $\{l_0, \dots, l_{n-1}\}$, donde b recorre $0 \leq b \leq$ mín$\{n,\ r-n+1\}$. O de forma equivalente a sustituir b elementos entre los $\{l_n, \dots, l_r\}$ y elegir b elementos entre los $\{l_0, \dots, l_{n-1}\}$. De esta forma (5.2.4.2) se reescribe

(5.2.4.4)

$$\sum_{b=0}^{\text{mín}\{n,r-n+1\}} \sum_{\substack{0\leq i_1<\cdots<i_b\leq n-1 \\ n\leq j_1<\cdots<j_b\leq r}} (m_0 \wedge \cdots \wedge m_{i_1-1} \wedge l_{i_1} \wedge m_{i_1+1} \wedge \cdots \wedge m_{i_b-1} \wedge l_{i_b} \wedge m_{i_b+1} \wedge$$
$$\cdots \wedge m_{n-1} \wedge l_n \wedge \cdots \wedge l_{j_1-1} \wedge m_{j_1} \wedge l_{j_1+1} \wedge \cdots \wedge l_{j_b-1} \wedge m_{j_b} \wedge l_{j_b+1} \wedge \cdots \wedge l_r).$$

Ahora sustituyendo en (5.2.4.4) los $l_{i_1}, \dots, l_{i_b}$ por las expresiones (5.2.4.1), el sumando

$$m_0 \wedge \cdots \wedge m_{i_1-1} \wedge \sum_{i=n}^{r} \alpha_{ii_1} l_i \wedge m_{i_1+1} \wedge \cdots \wedge m_{i_b-1} \wedge \sum_{i=n}^{r} \alpha_{ii_b} l_i \wedge m_{i_b+1} \wedge \cdots \wedge m_{n-1} \wedge$$
$$l_n \wedge \cdots \wedge l_{j_1-1} \wedge m_{j_1} \wedge l_{j_1+1} \wedge \cdots \wedge l_{j_b-1} \wedge m_{j_b} \wedge l_{j_b+1} \wedge \cdots \wedge l_r,$$

es igual a

$$\begin{vmatrix} \alpha_{j_1 i_1} & \dots & \alpha_{j_1 i_b} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{j_b i_1} & \dots & \alpha_{j_b i_b} \end{vmatrix} m_0 \wedge \cdots \wedge m_{i_1-1} \wedge l_{j_1} \wedge m_{i_1+1} \wedge \cdots \wedge m_{i_b-1} \wedge l_{j_b} \wedge m_{i_b+1} \wedge \cdots \wedge m_{n-1} \wedge$$
$$l_n \wedge \cdots \wedge l_{j_1-1} \wedge m_{j_1} \wedge l_{j_1+1} \wedge \cdots \wedge l_{j_b-1} \wedge m_{j_b} \wedge l_{j_b+1} \wedge \cdots \wedge l_r.$$

Por tanto (5.2.4.2) es igual a

$$\sum_{b=0}^{\text{mín}\{n,r-n+1\}} (-1)^b \sum_{\substack{0\le i_1<\cdots<i_b\le n-1\\ n\le j_1<\cdots<j_b\le r}} (\begin{vmatrix} \alpha_{j_1 i_1} & \dots & \alpha_{j_1 i_b} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{j_b i_1} & \dots & \alpha_{j_b i_b} \end{vmatrix} m_0\wedge\cdots\wedge m_{i_1-1}\wedge m_{j_1}\wedge m_{i_1+1}\wedge$$

$$\cdots\wedge m_{i_b-1}\wedge m_{j_b}\wedge m_{i_b+1}\wedge\cdots\wedge m_{n-1}\wedge l_n\wedge\cdots\wedge l_r).$$

En consecuencia, según las hipótesis del Lema, la expresión (5.2.4.3) se anula, y, por tanto, existen $\beta_0,\dots,\beta_{n-1}$, no todos nulos, tales que

$$\beta_0(m_0-\sum_{i=n}^r \alpha_{i0}m_i)+\cdots+\beta_{n-1}(m_{n-1}-\sum_{i=n}^r \alpha_{in-1}m_i)\in< l_n,\dots,l_r> .$$

Así el vector no nulo

$$\beta_0(l'_0-\sum_{i=n}^r \alpha_{i0}l'_i)+\cdots+\beta_{n-1}(l'_{n-1}-\sum_{i=n}^r \alpha_{in-1}l'_i)$$

verifica

$$g(\beta_0(l'_0-\sum_{i=n}^r \alpha_{i0}l'_i)+\cdots+\beta_{n-1}(l'_{n-1}-\sum_{i=n}^r \alpha_{in-1}l'_i))\in \operatorname{im} f,$$

y

$$f(\beta_0(l'_0-\sum_{i=n}^r \alpha_{i0}l'_i)+\cdots+\beta_{n-1}(l'_{n-1}-\sum_{i=n}^r \alpha_{in-1}l'_i))=0,$$

como buscábamos. □

Lema 5.2.5. *En las condiciones de la demostración del Teorema 5.1.1, si existe una relación $k[\epsilon]$–lineal entre las secciones $\{l_0+m_0\epsilon,\dots,l_r+m_r\epsilon\}$ alguno de sus coeficientes es una unidad en $k[\epsilon]$ entonces la fibra central $(\operatorname{im}\widetilde{\varphi})_0$ es degenerada.*

Dem. Es un hecho básico que se tiene una sucesión exacta

$$0\longrightarrow \mathscr{I}_{\operatorname{im}\widetilde{\varphi}}\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}^r_\Delta}(1)\longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^r_\Delta}(1)\xrightarrow{\widetilde{\varphi}^\sharp\otimes 1}\widetilde{\varphi}_*\mathscr{O}_{\widetilde{X}}\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}^r_\Delta}(1)=\widetilde{\varphi}_*\widetilde{L}$$

cuyas sucesión de secciones globales es la sucesión exacta

$$0\longrightarrow\Gamma(\mathscr{I}_{\operatorname{im}\widetilde{\varphi}}\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}^r_\Delta}(1))\longrightarrow\Gamma(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^r_\Delta}(1))=k[\epsilon]X_0\oplus\cdots\oplus k[\epsilon]X_r\xrightarrow{\widetilde{\varphi}^*}\Gamma(\widetilde{L}).$$

Por tanto, denotando $H_{\lambda+\mu\epsilon}$ la sección global $\sum_{i=0}^r(\lambda_i+\mu_i\epsilon)X_i\in\Gamma(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^r_\Delta}(1))$, se verifica que el subesquema $\operatorname{im}\widetilde{\varphi}\subset\mathbb{P}^r_\Delta$ está contenido en el subesquema de $\mathbb{P}^r_\Delta$ definido por $H_{\lambda+\mu\epsilon}$ sii $\widetilde{\varphi}^*H_{\lambda+\mu\epsilon}=\sum_{i=0}^r(\lambda_i+\mu_i\epsilon)(l_i+m_i\epsilon)$ se anula. De esta forma, si se verifica la relación $\sum_{i=0}^r(\lambda_i+\mu_i\epsilon)(l_i+m_i\epsilon)=0$, donde algún λ_i es no nulo, entonces $\operatorname{im}\widetilde{\varphi}\subset H_{\lambda+\mu\epsilon}$. Tomando la fibra central obtenemos $(\operatorname{im}\widetilde{\varphi})_0\subset H_\lambda$, donde H_λ es el subesquema de $\mathbb{P}^r$ definido por $\sum_{i=0}^r\lambda_iX_i$, que resulta ser un verdadero hiperplano de $\mathbb{P}^r$ puesto que suponemos que algún λ_i es no nulo. □

Apéndice A

El punto de Hilbert de una cinta sumergida

Una pregunta natural acerca de una cinta sumergida en un espacio proyectivo es si determina un punto liso en su esquema de Hilbert.
La respuesta es afirmativa para cintas sobre $\mathbb{P}^1$ no escindidas de género mayor o igual que 3 en su inmersión canónica, como se demuestra en [BE95, 6.1]. La respuesta es también afirmativa para las alfombras $K3$ que en [GP97] los autores denominan equilibradas.
Para cintas de género aritmético mayor o igual que 3 con fibrado conormal $\mathscr{E}$, sobre una curva arbitraria de género g, sumergidas como en el Teorema 5.1.1, demostramos que una cinta $\widetilde{Y}$ determina un punto liso en su esquema de Hilbert sii $H^1(\mathscr{N}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}) = 0$ (es bien conocido, véase [Ser86], que esta condición es suficiente para que el punto definido en el esquema de Hilbert sea liso). Demostramos entonces que, si añadimos la poco restrictiva condición $d \geq 2g-1$, donde $d = -\deg \mathscr{E}$, (e.g. para las cintas sumergidas sobre una curva elíptica o sobre $\mathbb{P}^1$ en los Corolarios 5.1.8 y 5.1.9 se verifica la condición $d \geq 2g-1$) se verifica la anulación de este espacio de cohomología, y por tanto, el punto determinado en el esquema de Hilbert es liso.
Sin embargo, aquellas cintas sumergidas cuyo alisamiento proviene de una deformación del morfismo desde un recubrimiento *etale* X de Y (i.e. aquellas cintas cuyo fibrado conormal verifica la condición $\mathscr{E}^{-2} = \mathscr{O}_Y$ y $H^0(\mathscr{E}) = 0$) determinan un punto no liso en su esquema de Hilbert.
Demostramos aquí estas afirmaciones, si bien la prueba es similar a la demostración dada en [BE95, 6.1] o a la demostración dada en [GP97, 4.1] para decidir qué alfombras $K3$ determinan un punto liso en su esquema de Hilbert.

A.1. Lemas

En la demostración usaremos dos hechos bien conocidos:

Lema A.1.1. *Toda cinta sumergida sobre una curva lisa e irreducible $Y \subset \mathbb{P}^r$ es un subesquema cerrado intersección local completa en $\mathbb{P}^r$.*

Dem. Fijemos un punto $y \in Y$. La inmersión $\widetilde{Y} \subset \mathbb{P}^r$ corresponde a un epimorfismo $\mathscr{I}_{Y,\mathbb{P}^r}/\mathscr{I}^2_{Y,\mathbb{P}^r} \xrightarrow{\nu} \mathscr{E}$ cuyo núcleo es $\mathscr{I}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}/\mathscr{I}^2_{Y,\mathbb{P}^r}$. Podemos suponer que $\mathscr{I}_{Y,y} = (x_2, \dots, x_r)$ de forma que $\nu(\bar{x}_r)$ genere la fibra $\mathscr{E}_y$ y $\nu(\bar{x}_2) = \cdots = \nu(\bar{x}_{r-1}) = 0$. Así

$$\mathscr{I}_{\widetilde{Y},y} = (x_2, \dots, x_{r-1}) + \mathscr{I}^2_{Y,y} = (x_2, \dots, x_{r-1}, x_r^2).$$

□

Lema A.1.2. *Sea $\widetilde{Y} \subset \mathbb{P}^r$ una cinta sobre una curva lisa e irreducible $Y \subset \mathbb{P}^r$ con fibrado conormal $\mathscr{E}$. La restricción a Y del haz dualizante $\omega_{\widetilde{Y}}$ es $\omega_{\widetilde{Y}}|_Y = \omega_Y \otimes \mathscr{E}^{-1}$.*

Dem. Puesto que $\widetilde{Y}$ es un subesquema cerrado intersección local completa en $\mathbb{P}^r$ de codimensión $r-1$ el haz dualizante es invertible, $\omega_{\widetilde{Y}} = \mathscr{E}xt^{r-1}_{\mathscr{O}_{\mathbb{P}^r}}(\mathscr{O}_{\widetilde{Y}}, \omega_{\mathbb{P}^r})$ y $\mathscr{E}xt^{i}_{\mathscr{O}_{\mathbb{P}^r}}(\mathscr{O}_{\widetilde{Y}}, \omega_{\mathbb{P}^r}) = 0$ para $i \neq r-1$.
De la sucesión exacta de haces coherentes (de torsión con soporte en Y) en $\mathbb{P}^r$

(A.1.2.1) $$0 \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{O}_{\widetilde{Y}} \longrightarrow \mathscr{O}_Y \longrightarrow 0,$$

obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{E}xt^{r-1}_{\mathscr{O}_{\mathbb{P}^r}}(\mathscr{O}_Y, \omega_{\mathbb{P}^r}) \longrightarrow \mathscr{E}xt^{r-1}_{\mathscr{O}_{\mathbb{P}^r}}(\mathscr{O}_{\widetilde{Y}}, \omega_{\mathbb{P}^r}) \longrightarrow \mathscr{E}xt^{r-1}_{\mathscr{O}_{\mathbb{P}^r}}(\mathscr{E}, \omega_{\mathbb{P}^r}) \longrightarrow 0,$$

que es la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \omega_Y \longrightarrow \omega_{\widetilde{Y}} \longrightarrow \mathscr{E}^{-1} \otimes \omega_Y \longrightarrow 0.$$

Tensorizando con $\mathscr{O}_Y$ obtenemos un epimorfismo de haces invertibles en Y

$$\omega_{\widetilde{Y}}|_Y \longrightarrow \mathscr{E}^{-1} \otimes \omega_Y \longrightarrow 0,$$

que es, por tanto, el isomorfismo buscado.
La identidades $\mathscr{E}xt^{r-1}_{\mathscr{O}_{\mathbb{P}^r}}(\mathscr{E}, \omega_{\mathbb{P}^r}) = \mathscr{E}^{-1} \otimes \omega_Y$ y $\mathscr{E}xt^{i}_{\mathscr{O}_{\mathbb{P}^r}}(\mathscr{E}, \omega_{\mathbb{P}^r}) = 0$, para $i \neq r-1$, usadas en la prueba, pueden ser obtenidas fácilmente haciendo los cambios oportunos en [Har77, III, 7.11; 7.3] teniendo en cuenta que $\mathscr{E}$ es invertible en Y. □

A.2. Puntos de Hilbert lisos y no lisos

Teorema A.2.1. *Supongamos que se verifican las condiciones del Teorema 5.1.1. Entonces*

1. *si $H^1(\mathscr{E}^{-1}) = 0$ y $H^1(\mathscr{E}^{-2}) = 0$ el punto de Hilbert de $\widetilde{Y}$ es liso. En particular, si $d \geq 2g-1$ el punto de Hilbert de $\widetilde{Y}$ es liso.*

2. *Si se verifica la condición $\mathscr{E}^{-2} = \mathscr{O}_Y$ y $H^0(\mathscr{E}) = 0$ el punto de Hilbert de $\widetilde{Y}$ es singular.*

Observación A.2.2. Para $g \geq 2$ la condición $d \geq 2g-1$ implica las condiciones *1.* y *3.* de la Observación 5.0.1. Si $g = 0, 1$ entonces $d + 2g - 1 = p_a(\widetilde{Y}) \geq 3$ implica $d \geq 2g - 1$ y *1.* del Teorema 5.1.1.
Por otra parte, la condición *2.* de la Observación 5.0.1 implica $d = 0$ y $g \geq 1$, de forma que no se verifica $d \geq 2g - 1$.

Dem. (del Teorema A.2.1) El abierto del esquema de Hilbert correspondiente, que parametriza curvas nodegeneradas $X \subset \mathbb{P}^r$ lisas, irreducibles, con sección hiperplana noespecial de género $p_a(\widetilde{Y}) = d + 2g - 1$ y grado $d_1 = 2\deg Y$ es liso (e irreducible) de dimensión

$$h^0(\mathscr{N}_{X,\mathbb{P}^r}) = \chi(\mathscr{N}_{X,\mathbb{P}^r}) = (r+1)d_1 - (r-3)(p_a(\widetilde{Y}) - 1).$$

Hemos probado en el Teorema 5.1.1 que $\widetilde{Y}$ admite un alisamiento sumergido. Por tanto el punto de Hilbert de $\widetilde{Y}$ será liso si, y sólo si, se verifica la igualdad

$$h^0(\mathscr{N}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}) = (r+1)d_1 - (r-3)(p_a(\widetilde{Y}) - 1). \tag{A.2.2.1}$$

Puesto que, por hipótesis, $\mathscr{O}_Y(1)$ es noespecial se verifica

$$H^1(\mathscr{N}_{Y,\mathbb{P}^s}) = 0,$$

y

$$h^0(\mathscr{N}_{Y,\mathbb{P}^s}) = (s+1)\frac{d_1}{2} - (s-3)(g-1).$$

Además, puesto que $\mathscr{N}_{Y,\mathbb{P}^r} = \mathscr{O}_Y(1)^{\oplus(r-s)} \oplus \mathscr{N}_{Y,\mathbb{P}^s}$ se verifica

$$H^1(\mathscr{N}_{Y,\mathbb{P}^r}) = 0, \tag{A.2.2.2}$$

y

$$h^0(\mathscr{N}_{Y,\mathbb{P}^r}) = (r-s)h^0(\mathscr{O}_Y(1)) + h^0(\mathscr{N}_{Y,\mathbb{P}^s}) = (r+1)\frac{d_1}{2} - (r-3)(g-1). \tag{A.2.2.3}$$

Puesto que $\widetilde{Y}$ es una intersección local completa en $\mathbb{P}^r$ el haz $\mathscr{N}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}$ es localmente libre. Por tanto tensorizando la sucesión (A.1.2.1) por $\mathscr{N}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}$ se obtiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{N}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}|_Y \otimes \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{N}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r} \longrightarrow \mathscr{N}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}|_Y \longrightarrow 0. \tag{A.2.2.4}$$

Puesto que $\mathscr{I}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}/\mathscr{I}^2_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}$ es localmente libre se verifica la igualdad

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\widetilde{Y}}}(\mathscr{I}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}/\mathscr{I}^2_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}, \mathscr{O}_{\widetilde{Y}})|_Y = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{I}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}/\mathscr{I}^2_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}|_Y, \mathscr{O}_Y).$$

Además $\mathscr{I}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}/\mathscr{I}^2_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}|_Y = \mathscr{I}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}/\mathscr{I}_{Y,\mathbb{P}^r}\mathscr{I}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}$ y, por tanto, se tiene una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow (\mathscr{E}')^{-1} \longrightarrow \mathscr{I}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}/\mathscr{I}^2_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}|_Y \longrightarrow \mathscr{I}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}/\mathscr{I}^2_{Y,\mathbb{P}^r} \longrightarrow 0,$$

donde $\mathscr{E}'$ es un haz invertible en Y. Por tanto se tienen sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{I}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}/\mathscr{I}^2_{Y,\mathbb{P}^r}, \mathscr{O}_Y) \longrightarrow \mathscr{N}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}|_Y \longrightarrow \mathscr{E}' \longrightarrow 0, \tag{A.2.2.5}$$

y

$$0 \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{I}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}/\mathscr{I}^2_{Y,\mathbb{P}^r}, \mathscr{O}_Y) \otimes \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{N}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}|_Y \otimes \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}' \otimes \mathscr{E} \longrightarrow 0. \tag{A.2.2.6}$$

Además de

$$0 \longrightarrow \mathscr{I}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}/\mathscr{I}^2_{Y,\mathbb{P}^r} \longrightarrow \mathscr{I}_{Y,\mathbb{P}^r}/\mathscr{I}^2_{Y,\mathbb{P}^r} \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow 0,$$

obtenemos las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \mathscr{E}^{-1} \longrightarrow \mathscr{N}_{Y,\mathbb{P}^r} \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{I}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}/\mathscr{I}^2_{Y,\mathbb{P}^r}, \mathscr{O}_Y) \longrightarrow 0, \tag{A.2.2.7}$$

y

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_Y \longrightarrow \mathscr{N}_{Y,\mathbb{P}^r} \otimes \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{I}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}/\mathscr{I}^2_{Y,\mathbb{P}^r}, \mathscr{O}_Y) \otimes \mathscr{E} \longrightarrow 0. \tag{A.2.2.8}$$

Por otra parte, puesto que $\widetilde{Y}$ es una intersección local completa en $\mathbb{P}^r$ se tiene la igualdad

$$\bigwedge^{r-1} \mathscr{N}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r} = \omega_{\widetilde{Y}} \otimes \omega_{\mathbb{P}^r}^{-1} = \omega_{\widetilde{Y}} \otimes \mathscr{O}_{\widetilde{Y}}(r+1).$$

Por tanto,

$$\bigwedge^{r-1} \mathscr{N}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}|_Y = \omega_{\widetilde{Y}}|_Y \otimes \mathscr{O}_Y(r+1),$$

y, según el Lema A.1.2

$$\bigwedge^{r-1} \mathscr{N}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}|_Y = \omega_Y \otimes \mathscr{E}^{-1} \otimes \mathscr{O}_Y(r+1).$$

Por otra parte

$$\bigwedge^{r-1} \mathscr{N}_{Y,\mathbb{P}^r} = \omega_Y \otimes \mathscr{O}_Y(r+1),$$

y, por tanto,

$$\bigwedge^{r-1} \mathscr{N}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}|_Y = \bigwedge^{r-1} \mathscr{N}_{Y,\mathbb{P}^r} \otimes \mathscr{E}^{-1}. \tag{A.2.2.9}$$

Se verifica la igualdad

$$\mathscr{E}' = \mathscr{E}^{-2}. \tag{A.2.2.10}$$

En efecto, de (A.2.2.5) obtenemos

$$\bigwedge^{r-1} \mathscr{N}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}|_Y = \bigwedge^{r-2} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{I}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}/\mathscr{I}^2_{Y,\mathbb{P}^r}, \mathscr{O}_Y) \otimes \mathscr{E}',$$

y de (A.2.2.7) obtenemos

$$\bigwedge^{r-1} \mathscr{N}_{Y,\mathbb{P}^r} = \bigwedge^{r-2} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{I}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}/\mathscr{I}^2_{Y,\mathbb{P}^r}, \mathscr{O}_Y) \otimes \mathscr{E}^{-1}.$$

Así, de (A.2.2.9) se obtiene (A.2.2.10).
Por otra parte, de la hipótesis $H^1(\mathscr{E} \otimes \mathscr{O}_Y(1)) = 0$ se obtiene

$$H^1(\mathscr{N}_{Y,\mathbb{P}^r} \otimes \mathscr{E}) = 0. \tag{A.2.2.11}$$

Ahora de (A.2.2.7), (A.2.2.2) obtenemos

$$H^1(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{I}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}/\mathscr{I}^2_{Y,\mathbb{P}^r}, \mathscr{O}_Y)) = 0, \tag{A.2.2.12}$$

$$h^0(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{I}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}/\mathscr{I}^2_{Y,\mathbb{P}^r}, \mathscr{O}_Y)) = h^0(\mathscr{N}_{Y,\mathbb{P}^r}) - \chi(\mathscr{E}^{-1}), \tag{A.2.2.13}$$

y de (A.2.2.8), (A.2.2.11)

$$H^1(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{I}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}/\mathscr{I}^2_{Y,\mathbb{P}^r}, \mathscr{O}_Y) \otimes \mathscr{E}) = 0, \tag{A.2.2.14}$$

$$h^0(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{I}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}/\mathscr{I}^2_{Y,\mathbb{P}^r}, \mathscr{O}_Y) \otimes \mathscr{E}) = h^0(\mathscr{N}_{Y,\mathbb{P}^r} \otimes \mathscr{E}) - \chi(\mathscr{O}_Y). \tag{A.2.2.15}$$

Ahora de (A.2.2.5), (A.2.2.10), (A.2.2.12), (A.2.2.13) obtenemos

$$h^0(\mathscr{N}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}|_Y) = h^0(\mathscr{N}_{Y,\mathbb{P}^r}) - \chi(\mathscr{E}^{-1}) + h^0(\mathscr{E}^{-2}), \tag{A.2.2.16}$$

y

$$H^1(\mathscr{N}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}|_Y) = H^1(\mathscr{E}^{-2}), \tag{A.2.2.17}$$

y de (A.2.2.6), (A.2.2.10), (A.2.2.14), (A.2.2.15)

$$h^0(\mathscr{N}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}|_Y \otimes \mathscr{E}) = h^0(\mathscr{N}_{Y,\mathbb{P}^r} \otimes \mathscr{E}) - \chi(\mathscr{O}_Y) + h^0(\mathscr{E}^{-1}), \tag{A.2.2.18}$$

y

$$H^1(\mathscr{N}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}|_Y \otimes \mathscr{E}) = H^1(\mathscr{E}^{-1}). \tag{A.2.2.19}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} h^0(\mathscr{N}_{Y,\mathbb{P}^r} \otimes \mathscr{E}) &= \chi(\mathscr{N}_{Y,\mathbb{P}^r} \otimes \mathscr{E}) \\ &= \deg(\mathscr{N}_{Y,\mathbb{P}^r} \otimes \mathscr{E}) - (g-1)\operatorname{rank}(\mathscr{N}_{Y,\mathbb{P}^r} \otimes \mathscr{E}) \\ &= (r+1)\frac{d_1}{2} + 2g - 2 - (r-1)(d+g-1). \end{aligned} \tag{A.2.2.20}$$

Ahora de (A.2.2.4)

$$\chi(\mathscr{N}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}) = \chi(\mathscr{N}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}|_Y) + \chi(\mathscr{N}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}|_Y \otimes \mathscr{E}).$$

Así obtenemos

$$\chi(\mathscr{N}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}) = h^0(\mathscr{N}_{Y,\mathbb{P}^r}) + \chi(\mathscr{E}^{-2}) + h^0(\mathscr{N}_{Y,\mathbb{P}^r} \otimes \mathscr{E}) - \chi(\mathscr{O}_Y),$$

y así, según (A.2.2.3), (A.2.2.20),

$$\chi(\mathscr{N}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}) = (r+1)d_1 - (r-3)(d+2g-2).$$

Por tanto, la igualdad (A.2.2.1), i.e. la condición de ser liso el punto de Hilbert de $\widetilde{Y}$, equivale a

$$H^1(\mathscr{N}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}) = 0. \tag{A.2.2.21}$$

Finalmente, la cohomología de la sucesión (A.2.2.4), junto con los isomorfismos (A.2.2.17) y (A.2.2.18) proporcionan una sucesión exacta

$$H^1(\mathscr{E}^{-1}) \longrightarrow H^1(\mathscr{N}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}) \longrightarrow H^1(\mathscr{E}^{-2}) \longrightarrow 0.$$

Por tanto si $H^1(\mathscr{E}^{-1}) = 0$ y $H^1(\mathscr{E}^{-2}) = 0$ entonces $H^1(\mathscr{N}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}) = 0$ y se tiene la parte *1.* del Teorema. Si $\mathscr{E}^{-2} = \mathscr{O}_Y$ entonces $H^1(\mathscr{N}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r}) \neq 0$ y se tiene la parte *2.* del Teorema. □

Observación A.2.3. Dos cuestiones surgen, de forma inmediata, a partir del Teorema anterior.

1. Interpretar el significado geométrico de la singularidad del punto de Hilbert de la cinta en el caso $\mathscr{E}^{-2} = \mathscr{O}_Y, H^0(\mathscr{E}) = 0$.

2. Estudiar, para géneros $g \geq 2$, la anulación de $H^1(\mathscr{N}_{\widetilde{Y},\mathbb{P}^r})$ para cintas alisables en el rango $d \leq 2g-2$.

No abordaremos aquí la posible respuesta a estas cuestiones.

Apéndice B

Alisamiento infinitesimal efectivo en $\mathbb{P}^3$ de cintas elípticas de género 5

Hemos indicado en la Introducción los motivos por los que en este Apéndice hacemos cálculos efectivos para obtener alisamiento infinitesimal en $\mathbb{P}^3$ para la cinta general de género 5 sobre una curva elíptica normal en $\mathbb{P}^3$.
En primer lugar, necesitamos reintepretar el diagrama (3.2.3.1) en el caso de un recubrimiento cíclico.

B.1. Recubrimientos cíclicos de una curva

En esta sección vamos a ver que en el caso particular de una recubrimiento cíclico sobre una curva las aplicaciones de los diagramas (3.2.3.1), (3.3.2.1), admiten otra descripción, más adecuada para los cálculos efectivos que nos proponemos llevar a cabo.
Sean Y una curva proyectiva, lisa e irreducible, y $\mathscr{L}$ un haz localmente libre de rango 1 sobre Y.
Suponemos que existe una sección global no nula $r \in H^0(\mathscr{L}^{-n})$, cuyo divisor de ceros denotamos por B.
A continuación recordamos (véase [BPVdV84, I.17]) cómo construir el recubrimiento cíclico de grado n de Y con lugar de bifurcación B determinado por $\mathscr{L}$.
Sean $S(\mathscr{L}) = \bigoplus_{k\geq 0} \mathscr{L}^k$, $S_+(\mathscr{L}) = \bigoplus_{k\geq 1} \mathscr{L}^k$ y $T = \mathbf{Spec}(S(\mathscr{L})) \xrightarrow{\bar{\pi}} Y$, el espacio total de $\mathscr{L}^{-1}$.
El $S(\mathscr{L})$–homomorfismo natural $\mathscr{L} \otimes S(\mathscr{L}) \to S(\mathscr{L})$ corresponde a una sección global tautológica

$$\begin{aligned} t \in H^0(\bar{\pi}^*\mathscr{L}^{-1}) &= \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_T}(\bar{\pi}^*\mathscr{L}, \mathscr{O}_T) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{L}, \bar{\pi}_*\mathscr{O}_T) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{L}, S(\mathscr{L})) = \mathrm{Hom}_{S(\mathscr{L})}(\mathscr{L} \otimes S(\mathscr{L}), S(\mathscr{L})). \end{aligned}$$

Por otra parte, el epimorfismo canónico de $\mathscr{O}_Y$–álgebras $S(\mathscr{L}) \twoheadrightarrow \mathscr{O}_Y$, produce un Y–morfismo $Y \xrightarrow{n} T$, (sección nula en $H^0(\mathscr{L}^{-1}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{L}, \mathscr{O}_Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y-\mathrm{alg}}(\bar{\pi}_*\mathscr{O}_T, \mathscr{O}_Y) = \mathrm{Hom}_Y(Y, T)$).

El subesquema de ceros de la sección tautológica y la imagen esquemática de la sección nula coinciden: ambos tienen por ideal el $\mathscr{O}_T$–módulo asociado a $S_+(\mathscr{L})$.
La sección $t^n - \bar{\pi}^* r \in H^0(\bar{\pi}^*\mathscr{L}^{-n})$ define un subesquema X en T. Si $B = 0$ ó $B \neq 0$ es reducido, X es irreducible y liso. La proyección inducida $X \xrightarrow{\pi} Y$ es un morfismo finito sobreyectivo de grado n con lugar de bifurcación en B.
Llamamos a $X \xrightarrow{\pi} Y$ el recubrimiento cíclico de grado n de Y con lugar de bifurcación B determinado por $\mathscr{L}$.
Como antes, la sección $t^n - \bar{\pi}^* r \in H^0(\bar{\pi}^*\mathscr{L}^{-n})$ se puede interpretar como la diferencia de los homomorfismos de $S(\mathscr{L})$–módulos: $\mathscr{L}^n \otimes S(\mathscr{L}) \subset S(\mathscr{L})$ y $\mathscr{L}^n \otimes S(\mathscr{L}) \xrightarrow{\otimes r} S(\mathscr{L})$. En consecuencia, X se identifica con el Y–esquema afín sobre Y, asociado con la $\mathscr{O}_Y$–álgebra cociente de $S(\mathscr{L})$ por la imagen de dicho homomorfismo diferencia, que es isomorfa a la estructura de $\mathscr{O}_Y$–álgebra definida en $\mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{L} \oplus \cdots \oplus \mathscr{L}^{n-1}$, por: $\mathscr{L}^k \oplus \mathscr{L}^l \xrightarrow{\otimes} \mathscr{L}^{k+l}$ si $0 \leq k + l \leq n-1$, $\mathscr{L}^k \oplus \mathscr{L}^l \xrightarrow{\otimes} \mathscr{L}^{k+l} \xrightarrow{\otimes r} \mathscr{L}^{k+l-n}$ si $k + l \geq n$, para $0 \leq k, l \leq n-1$. Esto es

$$X = \mathbf{Spec}(\mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{L} \oplus \cdots \oplus \mathscr{L}^{n-1}).$$

Recordemos que el monomorfismo $\pi^*\omega_Y \to \omega_X$ define una sección global canónica de $(\pi^*\omega_Y)^* \otimes \omega_X$ que se anula en el divisor de ramificación R del morfismo $X \xrightarrow{\pi} Y$. Se tiene entonces el siguiente resultado.

Lema B.1.1. [BPVdV84, I.17.1] *Sea $X \xrightarrow{\pi} Y$ el recubrimiento cíclico de grado n de Y con lugar de bifurcación en el divisor liso B determinado por $\mathscr{L}$, donde $\mathscr{L}^{-n} = \mathscr{O}_Y(B)$. Sea R_1 el divisor reducido $\pi^{-1}B$ en X. Se verifica*

1. $\mathscr{O}_X(R_1) = \pi^*\mathscr{L}^{-1}$.
2. $\pi^*B = nR_1$, $R = (n-1)R_1$, $\mathscr{O}_X(R) = \pi^*\mathscr{L}^{-(n-1)}$.
3. $\omega_X = \pi^*(\omega_Y \otimes \mathscr{L}^{-(n-1)})$.

Dem. [BPVdV84, I.17.1] La curva Y sumergida como sección nula en T coincide con el divisor de ceros de la sección tautológica, por tanto, $\mathscr{O}_T(Y) = \bar{\pi}^*\mathscr{L}^{-1}$. Por construcción Y y $X \subset T$ se cortan transversalmente en R_1. Por tanto, $\mathscr{O}_X(R_1) = \mathscr{O}_T(Y)|_X = \pi^*\mathscr{L}^{-1}$. La igualdad $\pi^*B = nR_1$ se obtiene de la ecuación $t^n - \bar{\pi}^*r = 0$ para X en T. En particular, n es el orden de bifurcación en R_1 y, en consecuencia, $R = (n-1)R_1$ y $\mathscr{O}_X(R) = \pi^*\mathscr{L}^{-(n-1)}$. Finalmente $\omega_X = \pi^*\omega_Y \otimes \mathscr{O}_X(R) = \pi^*\omega_Y \otimes \pi^*\mathscr{L}^{-(n-1)}$. □

El siguiente resultado expresa el homomorfismo vertical derecho del diagrama 3.3.2.1, de forma más adecuada para nuestros propósitos en este apéndice.
Elegimos un abierto afín $U = \operatorname{Spec} C \subset Y$ donde ω_Y y $\mathscr{L}$ sean triviales generados, respectivamente, por secciones

$$\omega \in \Gamma(U, \omega_Y)$$

y,

$$p \in \Gamma(U, \mathscr{L}).$$

También $\mathscr{L}^{-1}$ es trivial en U generado por la sección p^{-1}.
Escribimos

$$r = a(p^{-1})^{\otimes n}, \qquad t|_X = p\ \pi^* p^{-1},$$

$$p \in \Gamma(\pi^{-1}U, \mathscr{O}_X) = \Gamma(U, \mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{L} \oplus \cdots \oplus \mathscr{L}^{n-1}).$$

Entonces

$$p^n = p^{\otimes n} \otimes r = p^{\otimes n} \otimes a(p^{-1})^{\otimes n} = a,$$

y

$$\pi^{-1}U \simeq \operatorname{Spec} C[p].$$

Proposición B.1.2. *Con las notaciones anteriores, el homomorfismo*

$$\operatorname{Ext}^1(\Omega_X, \mathscr{O}_X) \xrightarrow{\Psi_1 \oplus \Psi_2} \operatorname{Ext}^1(\Omega_Y, \mathscr{O}_Y) \oplus \operatorname{Ext}^1(\Omega_Y, \mathscr{E})$$

del diagrama 3.3.2.1 se escribe en la forma

(B.1.2.1) $$H^1(\mathscr{H}om(\omega_X,\mathscr{O}_X)) \xrightarrow{\Psi_1 \oplus \Psi_2} H^1(\mathscr{H}om(\omega_Y,\mathscr{O}_Y)) \oplus H^1(\mathscr{H}om(\omega_Y,\mathscr{L})) \oplus \cdots \oplus H^1(\mathscr{H}om(\omega_Y,\mathscr{L}^{n-1})).$$

descrita por la siguiente asignación: la clase de cohomología representada por el homomorfismo definido por la expresión

$$\pi^*(\omega \otimes (p^{-1})^{\otimes n-1}) \mapsto f_1 + f_2 p + \cdots + f_n p^{n-1}, \qquad f_1, f_2, \ldots, f_n \in C$$

se aplica en las clases de cohomología representadas por los homomorfismos definidos por la expresión

$$(\omega \mapsto f_2 a,\ \ldots\ ,\ \omega \mapsto f_n a p^{\otimes n-2},\ \omega \mapsto f_1 p^{\otimes n-1}).$$

Dem. Según el lema anterior, R es el divisor de ceros de la sección $t|_X^{\otimes n-1}$, en consecuencia, la sucesión $0 \to \pi^*\omega_Y \xrightarrow{\mathrm{D}\pi} \omega_X \to \mathscr{O}_R \to 0$ se identifica con

(B.1.2.2) $$0 \longrightarrow \pi^*\omega_Y \xrightarrow{1 \otimes t|_X^{\otimes n-1}} \pi^*\omega_Y \otimes \pi^*\mathscr{L}^{-(n-1)} \longrightarrow \mathscr{O}_R \longrightarrow 0$$

En general, según (3.3.2.1), se tiene una aplicación

$$\begin{tikzcd}
H^1(\mathscr{H}om(\omega_X,\mathscr{O}_X)) \arrow[r, "\mathrm{d}\pi"] \arrow[ddr] & H^1(\mathscr{H}om(\pi^*\omega_Y,\mathscr{O}_X)) \arrow[d, equal] \\
& H^1(\mathscr{H}om(\omega_Y,\pi_*\mathscr{O}_X)) \arrow[d, equal] \\
& H^1(\mathscr{H}om(\omega_Y,\mathscr{O}_Y)) \oplus H^1(\mathscr{H}om(\omega_Y,\mathscr{L})) \oplus \cdots \oplus H^1(\mathscr{H}om(\omega_Y,\mathscr{L}^{n-1})).
\end{tikzcd}$$

En el caso particular de un recubrimiento cíclico, según el Lema B.1.1, se tiene

$$\omega_X = \pi^*(\omega_Y \otimes \mathscr{L}^{-(n-1)}).$$

En consecuencia, obtenemos un isomorfismo

$$\begin{aligned} H^1(\mathscr{H}om(\omega_X,\mathscr{O}_X)) &= H^1(\mathscr{H}om(\pi^*(\omega_Y\otimes\mathscr{L}^{-(n-1)}),\mathscr{O}_X)) \\ &= H^1(\mathscr{H}om(\omega_Y\otimes\mathscr{L}^{-(n-1)},\pi_*\mathscr{O}_X)) \\ &= H^1(\mathscr{H}om(\omega_Y,\mathscr{L}^{n-1}))\oplus H^1(\mathscr{H}om(\omega_Y,\mathscr{L}^{n}))\oplus\cdots\oplus H^1(\mathscr{H}om(\omega_Y,\mathscr{L}^{2n-2})). \end{aligned} \tag{B.1.2.3}$$

Ahora la estructura de álgebra induce una aplicación

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(\mathscr{H}om(\omega_Y,\mathscr{L}^{n-1})) & \oplus & H^1(\mathscr{H}om(\omega_Y,\mathscr{L}^{n})) & \oplus & \cdots & \oplus & H^1(\mathscr{H}om(\omega_Y,\mathscr{L}^{2n-2})) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \otimes r} & & & & \downarrow{\scriptstyle \otimes r} \\ H^1(\mathscr{H}om(\omega_Y,\mathscr{L}^{n-1})) & \oplus & H^1(\mathscr{H}om(\omega_Y,\mathscr{O})) & \oplus & \cdots & \oplus & H^1(\mathscr{H}om(\omega_Y,\mathscr{L}^{n-2})). \end{array}$$

Queremos probar que el homomorfismo composición obtenido

$$H^1(\mathscr{H}om(\omega_X,\mathscr{O}_X))\to H^1(\mathscr{H}om(\omega_Y,\mathscr{L}^{n-1}))\oplus H^1(\mathscr{H}om(\omega_Y,\mathscr{O}))\oplus\cdots\oplus H^1(\mathscr{H}om(\omega_Y,\mathscr{L}^{n-2})), \tag{B.1.2.4}$$

coincide con el homomorfismo de (B.1.2.1). En efecto, un homomorfismo

$$\omega_X|_{\pi^{-1}U} = \pi^*(\omega_Y\otimes\mathscr{L}^{-(n-1)}|_U)\to\mathscr{O}_X|_{\pi^{-1}U} \tag{B.1.2.5}$$

queda determinado por la imagen del generador

$$\pi^*(\omega\otimes(p^{-1})^{\otimes n-1})\mapsto f_1+f_2p+\cdots+f_np^{n-1},\qquad f_1,f_2,\ldots,f_n\in C.$$

Según (B.1.2.2), la aplicación $H^1(\mathscr{H}om(\omega_X,\mathscr{O}_X)) \xrightarrow{\mathrm{d}\pi} H^1(\mathscr{H}om(\pi^*\omega_Y,\mathscr{O}_X))$ queda descrita (sobre cociclos de homomorfismos definidos en la intersección de pares de abiertos de un recubrimiento, que abusando de notación reduciremos a un homomorfismo como (B.1.2.5) definido en la intersección de un par de abiertos) transformando (B.1.2.5) en el homomorfismo (definido sobre la intersección de dos abiertos)

$$\pi^*\omega_Y|_{\pi^{-1}U}\to\mathscr{O}_X|_{\pi^{-1}U}$$

que asigna

$$\begin{aligned} \pi^*\omega &\mapsto \pi^*\omega\otimes t|_X^{\otimes n-1} = p^{n-1}\pi^*(\omega\otimes(p^{-1})^{\otimes n-1}) \\ &\mapsto p^{n-1}(f_1+f_2p+\cdots+f_np^{n-1}) = f_2a+\cdots+f_nap^{n-2}+f_1p^{n-1}, \end{aligned}$$

de modo que (con el mismo abuso de notación) la aplicación de (B.1.2.1)

$$H^1(\mathscr{H}om(\omega_X,\mathscr{O}_X))\to H^1(\mathscr{H}om(\omega_Y,\mathscr{O}_Y))\oplus H^1(\mathscr{H}om(\omega_Y,\mathscr{L}))\oplus\cdots\oplus H^1(\mathscr{H}om(\omega_Y,\mathscr{L}^{n-1})),$$

queda descrita por

$$\pi^*(\omega\otimes(p^{-1})^{\otimes n-1})\mapsto f_1+f_2p+\cdots+f_np^{n-1}\longmapsto(\omega\mapsto f_2a,\ldots,\omega\mapsto f_nap^{\otimes n-2},\omega\mapsto f_1p^{\otimes n-1}).$$

La aplicación de (B.1.2.4) queda descrita por

$$\begin{aligned} \pi^*(\omega\otimes(p^{-1})^{\otimes n-1})\mapsto f_1+f_2p+\cdots+f_np^{n-1} &\longmapsto (\omega\mapsto f_1p^{\otimes n-1},\omega\mapsto f_2p^{\otimes n},\ldots,\omega\mapsto f_np^{\otimes 2n-2}) \\ &\xmapsto{(\mathrm{id},\otimes r,\ldots,\otimes r)} (\omega\mapsto f_1p^{\otimes n-1},\omega\mapsto f_2a,\ldots,\omega\mapsto f_nap^{\otimes n-2}), \end{aligned}$$

expresiones que muestran que ambas aplicaciones coinciden. $\square$

B.2. Alisamiento infinitesimal efectivo de la cinta elíptica general de género 5

Sean Y una curva elíptica y $\mathscr{E}$ un fibrado lineal sobre Y con grado $\deg \mathscr{E} = -4$. En esta sección vamos a escribir ecuaciones para las deformaciones infinitesimales del morfismo definido por una subserie distinguida en la serie canónica de un recubrimiento doble de Y, a partir de deformaciones triviales, sobre dos abiertos afines, pegadas por un isomorfismo en la intersección. También vamos a describir cintas a partir de cintas triviales, sobre dos abiertos afines, pegadas por un isomorfismo en la intersección (véase [Fon93]), para obtener alisamiento infinitesimal efectivo en $\mathbb{P}^3$ de la cinta genérica con fibrado conormal $\mathscr{E}$. El hecho de que la curva elíptica normal es una intersección completa en $\mathbb{P}^3$ permite completar el cálculo para la cinta general.

Sea $X = \mathbf{Spec}(\mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{E}) \xrightarrow{\pi} Y$ el recubrimiento doble con lugar de bifurcación en el divisor de ceros de una sección general $r \in H^0(\mathscr{E}^{-2})$.
Se tiene la igualdad

$$H^0(\omega_X) = H^0(\omega_Y \otimes \mathscr{E}^{-1}) \oplus H^0(\omega_Y).$$

En consecuencia, hay una subserie distinguida $H^0(\mathscr{E}^{-1})$ en la serie canónica de X.
Fijemos puntos $P \neq Q \in Y$ tales que

$$\mathscr{E} = \mathscr{O}_Y(-4P) = \mathscr{O}_Y(-4Q),$$

y

$$d'P \nsim d'Q \quad \text{si} \quad d' = 2, 3.$$

Entonces, $\mathscr{E}$ es trivial sobre los abiertos afines $U = Y - P$ y $V = Y - Q$, generado, respectivamente, por secciones racionales p con divisor $-4P$ y q con divisor $-4Q$.
Fijamos también funciones no nulas

$$s_j \in H^0(\mathscr{O}_Y((6-j)P - (5-j)Q)), \quad j = 2, 3, 4.$$

En particular, tomamos $s_2 = q^{-1}p$ y el conjunto $\{p^{-1}, q^{-1}, s_3p^{-1}, s_4p^{-1}\}$ como base de $H^0(\mathscr{E}^{-1})$.
Entonces, si ω es una forma diferencial global no nula en Y y $t|_X = \{p\,\pi^*p^{-1}, q\,\pi^*q^{-1}\} \in H^0(\pi^*\mathscr{E}^{-1})$ es la sección tautológica, el conjunto

$$\{\pi^*(\omega \otimes p^{-1}), \pi^*(\omega \otimes q^{-1}), \pi^*(\omega \otimes s_3p^{-1}), \pi^*(\omega \otimes s_4p^{-1}), \pi^*\omega \otimes t|_X\} \tag{B.2.0.6}$$

es una base de $H^0(\omega_X)$.
Usando esta base, la serie distinguida en $H^0(\omega_X)$ determina un morfismo $X \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^3$ finito que es la composición de $X \xrightarrow{\pi} Y$ y la inmersión $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ como curva elíptica normal definida por la serie lineal completa asociada a $\mathscr{E}^{-1} = \mathscr{O}_Y(4P)$.
Sea $\widetilde{X}$ una deformación infinitesimal de X.
Buscamos una $k[\epsilon]$–base

$$\{\widetilde{s}_1, \cdots, \widetilde{s}_4, \widetilde{s}_0\},$$

para el espacio de secciones globales de $\omega_{\widetilde{X}/\Delta}$ que restringe a la base fijada en $H^0(\omega_X)$ y tal que las cuatro primeras secciones determinan una deformación $\widetilde{\varphi}: \widetilde{X} \to \mathbb{P}^3_\Delta$.

Describimos deformaciones de X y cintas sobre Y pegando objetos triviales sobre el recubrimiento U, V.
Sean

$$t_1 = s_2^{-1},\ t_3 = s_2^{-1}s_3, t_4 = s_2^{-1}s_4.$$

Se tiene

$$U = \operatorname{Spec} k[s_2, s_3, s_4], \quad V = \operatorname{Spec} k[t_1, t_3, t_4].$$

Si escribimos

$$r = ap^{-2}, \quad r = bq^{-2},$$

una cubierta afín de X es

$$\pi^{-1}U = \operatorname{Spec} k[s_2, s_3, s_4, p], \quad \pi^{-1}V = \operatorname{Spec} k[t_1, t_3, t_4, q], \quad \text{donde } \ p^2 = a,\ q^2 = b,\ p = s_2 q.$$

La deformación $\widetilde{X}$ está definida pegando los abiertos afines

$$\widetilde{U} = \pi^{-1}U \times \operatorname{Spec} k[\epsilon],\ \widetilde{V} = \pi^{-1}V \times \operatorname{Spec} k[\eta],$$

mediante un isomorfismo en la intersección que restringe al especificado en X determinado por una clase $[\rho] \in H^1(\mathscr{H}om(\omega_X, \mathscr{O}_X))$ en la forma:

$$u_1 + u_2\,\epsilon \mapsto u_1 + (\rho(\mathrm{d}u_1) + u_2)\eta \tag{B.2.0.7}$$

Necesitamos más notaciones. Escribimos

$$\omega = \sum_{j=2}^{4} a_j \mathrm{d}s_j\,, \quad \mathrm{d}s_j = s'_j\omega\,, \quad \mathrm{d}a = a'\omega\,; \quad a', a_j, s'_j \in k[s_2, s_3, s_4]. \tag{B.2.0.8}$$

Entonces se tiene

$$\sum_{j=2}^{4} a_j s'_j = 1. \tag{B.2.0.9}$$

Ahora podemos escribir explícitamente el isomorfismo de pegado, (B.2.0.7), de $\widetilde{X}$:
El homomorfismo

$$\rho : \omega_X|_{\pi^{-1}U\cap V} = \pi^*(\omega_Y \otimes \mathscr{E}^{-1}|_{U\cap V}) \longrightarrow \mathscr{O}_X|_{\pi^{-1}U\cap V}$$

queda determinado por la imagen del generador

$$\pi^*(\omega \otimes p^{-1}) = p^{-1}(\pi^*\omega \otimes t|_X) \mapsto f_1 + f_2 p,$$

donde $f_1, f_2 \in \Gamma(U \cap V, \mathscr{O}_Y)$ son elementos arbitrarios.
Cambiar ρ sumando un coborde en su clase en $H^1(\mathscr{H}om(\omega_X, \mathscr{O}_X))$, equivale a cambiar f_i, $i = 1, 2$ sumando un coborde en sus clases en los cocientes

$$H^1(\mathscr{E}^i) = k[s_2, s_3, s_4, s_2^{-1}]/(k[s_2, s_3, s_4] + s_2^{-i}k[s_2^{-1}, s_2^{-1}s_3, s_2^{-1}s_4]).$$

Este hecho hace explícito el isomorfismo

$$H^1(\mathscr{H}om(\omega_X, \mathscr{O}_X)) = H^1(\mathscr{E}) \oplus H^1(\mathscr{E}^2)$$

de (B.1.2.3).
Es importante indicar que, según la Proposición B.1.2, las clases extensión de la deformación plana de Y y de la cinta $\widetilde{Y}$ sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{E}$ asociadas a la deformación $(\widetilde{X}, \widetilde{\varphi})$ en la aplicación

$$H^1(\mathscr{H}om(\omega_X, \mathscr{O}_X)) \xrightarrow{\Psi_1 \oplus \Psi_2} H^1(\mathscr{O}_Y) \oplus H^1(\mathscr{E})$$

de (B.1.2.1) corresponden, respectivamente, a las clases de af_2 en $H^1(\mathscr{O}_Y)$ y de f_1 en $H^1(\mathscr{E})$.
(El lector estará prevenido acerca de la discordancia de notaciones para las letras f_1, f_2, en el contexto actual y en la Proposición 3.3.2).

Por otra parte, de $p^2 = a$ se obtiene

$$\mathrm{d}p = \frac{1}{2}a'p^{-1}(\pi^*\omega \otimes t|_X).$$

Además

$$\mathrm{d}s_j = s_j'(\pi^*\omega \otimes t|_X),$$

y, por tanto:

$$\rho(\mathrm{d}s_j) = s_j'(af_2 + f_1 p), \qquad \rho(\mathrm{d}p) = \frac{1}{2}a'(f_1 + f_2 p).$$

En consecuencia, de (B.2.0.7), el isomorfismo de pegado de $\widetilde{X}$ es de la forma:

$$\text{(B.2.0.10)} \qquad \begin{cases} \epsilon = \eta \\ s_2 = t_1^{-1} + s_2'(af_2 + f_1 t_1^{-1} q)\eta \\ s_j = t_1^{-1} t_j + s_j'(af_2 + f_1 t_1^{-1} q)\eta\,, \qquad j = 3, 4 \\ p = t_1^{-1} q + \dfrac{1}{2}a'(f_1 + f_2 t_1^{-1} q)\eta\,. \end{cases}$$

De forma similar, una cinta $\widetilde{Y}$ sobre Y con haz conormal $\mathscr{E}$ está determinada por un isomorfismo de pegado en la intersección de los abiertos afines

$$\widetilde{U}_{\widetilde{Y}} = \operatorname{Spec} k[s_2, s_3, s_4, \epsilon], \quad \widetilde{V}_{\widetilde{Y}} = \operatorname{Spec} k[t_1, t_3, t_4, \eta],$$

de la forma

$$\text{(B.2.0.11)} \qquad \begin{cases} \epsilon = t_1^{-1}\eta \\ s_2 = t_1^{-1} + s_2' f t_1^{-1}\eta \\ s_j = t_1^{-1}t_j + s_j' f t_1^{-1}\eta\,, \qquad j = 3,4, \end{cases}$$

donde f es un elemento en el cociente

$$H^1(\mathscr{E}) = k[s_2, s_3, s_4, s_2^{-1}]/(k[s_2, s_3, s_4] + s_2^{-1}k[s_2^{-1}, s_2^{-1}s_3, s_2^{-1}s_4]),$$

determinado salvo producto por un elemento de k^*.
Una cinta $\bar{Y}$ sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{O}_Y$ está determinada por un isomorfismo de pegado en la intersección de los abiertos afines

$$\bar{U}_{\bar{Y}} = \operatorname{Spec} k[s_2, s_3, s_4, \epsilon], \;\; \bar{V}_{\bar{Y}} = \operatorname{Spec} k[t_1, t_3, t_4, \eta],$$

de la forma

$$\text{(B.2.0.12)} \qquad \begin{cases} \epsilon = \eta \\ s_2 = t_1^{-1} + s_2' h t_1^{-1}\eta \\ s_j = t_1^{-1}t_j + s_j' h t_1^{-1}\eta\,, \qquad j = 3,4, \end{cases}$$

donde h es un elemento en el cociente

$$H^1(\mathscr{O}_Y) = k[s_2, s_3, s_4, s_2^{-1}]/(k[s_2, s_3, s_4] + k[s_2^{-1}, s_2^{-1}s_3, s_2^{-1}s_4]),$$

determinado salvo producto por un elemento de k^*.
Ahora buscamos una $k[\epsilon]$–base de $\Gamma(\widetilde{X}, \omega_{\widetilde{X}/\Delta})$.
Observemos primero, que una sección en $\Gamma(\widetilde{U}, \omega_{\widetilde{X}/\Delta})$ proveniente de una sección global debe restringir a una sección global en X, por tanto, debe ser de la forma

$$(c_1 + c_2 s_2 + c_3 s_3 + c_4 s_4 + c_0 p + (u_1 + u_2 p)\epsilon)p^{-1}(\pi^*\omega \otimes t|_X)$$

donde $c_j \in k$, $j = 0, \cdots, 4$ están determinados de modo único y $u_1, u_2 \in \Gamma(U, \mathscr{O}_Y)$ son arbitrarios.
En segundo lugar, necesitamos la relación entre los generadores

$$p^{-1}(\pi^*\omega \otimes t|_X) \;\text{ y }\; q^{-1}(\pi^*\omega \otimes t|_X)$$

de $\omega_{\widetilde{X}/\Delta}$ en $\widetilde{U}$ y $\widetilde{V}$ respectivamente. Esto requiere ciertos cálculos.
De (B.2.0.10) se obtiene

$$p^{-1} = s_2^{-1}q^{-1}(1 - \frac{1}{2}a'(s_2^{-1}q^{-1}f_1 + f_2)\eta).$$

Usando (B.2.0.8) se tiene:

$$
\begin{aligned}
p^{-1}(\pi^*\omega \otimes t|_X) &= s_2^{-1}q^{-1}(1-\frac{1}{2}a'(s_2^{-1}q^{-1}f_1+f_2)\eta)\cdot \\
&\cdot(\sum_{j=2}^{4}\{a_j(\{s_l+s_l'(af_2+f_1s_2q)\eta\})\mathrm{d}(s_j+s_j'(af_2+f_1s_2q)\eta)\}\otimes t|_X) \\
&= s_2^{-1}q^{-1}(1-\frac{1}{2}a'(s_2^{-1}q^{-1}f_1+f_2)\eta)\cdot \\
&\cdot(\sum_{j=2}^{4}\{a_j(\{s_l+s_l'(af_2+f_1s_2q)\eta\})\mathrm{d}s_j+\eta a_j\mathrm{d}(s_j'(af_2+f_1s_2q))\}\otimes t|_X) \\
&= s_2^{-1}q^{-1}(1-\frac{1}{2}a'(s_2^{-1}q^{-1}f_1+f_2)\eta)\cdot \\
&\cdot(\sum_{j=2}^{4}\{a_j\mathrm{d}s_j+\eta[a_j\mathrm{d}(s_j'(af_2+f_1s_2q))+\sum_{l=2}^{4}\frac{\partial a_j}{\partial X_l}s_l'(af_2+f_1s_2q)\mathrm{d}s_j]\}\otimes t|_X) \\
&= s_2^{-1}q^{-1}(1-\frac{1}{2}a'(s_2^{-1}q^{-1}f_1+f_2)\eta)\cdot \\
&\cdot([\pi^*\omega+\eta\sum_{j=2}^{4}\{a_j\mathrm{d}(s_j'(af_2+f_1s_2q))+a_j'(af_2+f_1s_2q)\mathrm{d}s_j\}]\otimes t|_X) \\
&= s_2^{-1}q^{-1}\{(\pi^*\omega\otimes t|_X)+\eta[-\frac{1}{2}a'(s_2^{-1}q^{-1}f_1+f_2)(\pi^*\omega\otimes t|_X)+ \\
&+\sum_{j=2}^{4}\{a_j\mathrm{d}(s_j'(af_2+f_1s_2q))+a_j'(af_2+f_1s_2q)\mathrm{d}s_j\}\otimes t|_X]\}.
\end{aligned}
$$

Simplificamos la última parte de la expresión usando (B.2.0.9)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=2}^{4}\{a_j\mathrm{d}(s_j'(af_2+f_1s_2q))+a_j'(af_2+f_1s_2q)\mathrm{d}s_j\} = (af_2+f_1s_2q)\sum_{j=2}^{4}a_j'\mathrm{d}s_j+ \\
&+\sum_{j=2}^{4}a_j[(af_2+f_1s_2q)\mathrm{d}s_j'+s_j'\mathrm{d}(af_2+f_1s_2q)] = (af_2+f_1s_2q)(\sum_{j=2}^{4}a_j's_j')\omega+ \\
&+(\sum_{j=2}^{4}a_js_j'')\omega(af_2+f_1s_2q)+(\sum_{j=2}^{4}a_js_j')\mathrm{d}(af_2+f_1s_2q) = (af_2+f_1s_2q)(\sum_{j=2}^{4}a_j's_j'+a_js_j'')\omega+ \\
&+\mathrm{d}(af_2+f_1s_2q) = (af_2+f_1s_2q)(\sum_{j=2}^{4}a_js_j')'\omega+\mathrm{d}(af_2+f_1s_2q) = \mathrm{d}(af_2+f_1s_2q).
\end{aligned}
$$

Sustituyendo

$$
p^{-1}(\pi^*\omega\otimes t|_X) = s_2^{-1}q^{-1}\{(\pi^*\omega\otimes t|_X)+\eta[-\frac{1}{2}a'(s_2^{-1}q^{-1}f_1+f_2)(\pi^*\omega\otimes t|_X)+\mathrm{d}(af_2+f_1s_2q)\otimes t|_X]\}.
$$

Recordando que

$$p^2 = a, \qquad \mathrm{d}(s_2q) = \mathrm{d}p = \frac{1}{2}s_2^{-1}q^{-1}\mathrm{d}a = \frac{1}{2}a's_2^{-1}q^{-1}(\pi^*\omega \otimes t|_X),$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
p^{-1}(\pi^*\omega \otimes t|_X) &= s_2^{-1}q^{-1}(\pi^*\omega \otimes t|_X) + \eta[-\frac{1}{2}a's_2^{-2}q^{-2}f_1(\pi^*\omega \otimes t|_X) - \\
&\quad - \frac{1}{2}a's_2^{-1}q^{-1}f_2(\pi^*\omega \otimes t|_X) + s_2^{-1}q^{-1}(f_2\mathrm{d}a + a\mathrm{d}f_2 + f_1\mathrm{d}(s_2q) + s_2q\mathrm{d}f_1)] \\
&= s_2^{-1}q^{-1}(\pi^*\omega \otimes t|_X) + \eta[\mathrm{d}(s_2q)f_2 + s_2q\mathrm{d}f_2 + \mathrm{d}f_1] \\
&= s_2^{-1}q^{-1}(\pi^*\omega \otimes t|_X) + \eta[\frac{1}{2}a's_2^{-1}q^{-1}(\pi^*\omega \otimes t|_X)f_2 + \\
&\qquad\qquad + s_2qf_2'(\pi^*\omega \otimes t|_X) + f_1'(\pi^*\omega \otimes t|_X)] \\
&= \{s_2^{-1} + \eta[(\frac{1}{2}a'f_2 + af_2')s_2^{-1} + f_1'q]\}q^{-1}(\pi^*\omega \otimes t|_X), \text{ donde } \mathrm{d}f_i = f_i'\omega,\ i = 1, 2.
\end{aligned}$$

En consecuencia, (con $s_1 = 1, t_2 = 1$), las secciones

$$\begin{aligned}
&[\sum_{j=1}^4 c_js_j + c_0p + (u_1 + u_2p)\epsilon]p^{-1}(\pi^*\omega \otimes t|_X) = [\sum_{j=1}^4 c_j(t_1^{-1}t_j + s_j'(af_2 + f_1t_1^{-1}q)\eta) + \\
&+ c_0(t_1^{-1}q + \frac{1}{2}a'(f_1 + f_2t_1^{-1}q)\eta) + (u_1 + u_2t_1^{-1}q)\eta] \cdot \{t_1 + \eta[(\frac{1}{2}a'f_2 + af_2')t_1 + f_1'q]\}q^{-1}(\pi^*\omega \otimes t|_X) = \\
&\{\sum_{j=1}^4 c_jt_j + c_0q + \eta[\sum_{j=1}^4 c_jt_j(\frac{1}{2}a'f_2 + af_2') + c_0f_1'at_1 + t_1(\sum_{j=1}^4 c_js_j'af_2 + \frac{1}{2}c_0a'f_1 + u_1) + \\
&+ q(\sum_{j=1}^4 c_jt_jf_1't_1^{-1} + c_0(\frac{1}{2}a'f_2 + af_2') + \sum_{j=1}^4 c_js_j'f_1 + \frac{1}{2}c_0a'f_2 + u_2)]\}q^{-1}(\pi^*\omega \otimes t|_X),
\end{aligned}$$

que extienden a una sección global son exactamente aquellas para las que las siguientes funciones están definidas en V:

$$s_2^{-1}\{(c_1 + \sum_{j=2}^4 c_js_j)(\frac{1}{2}a'f_2 + af_2') + af_2\sum_{j=2}^4 c_js_j' + c_0(\frac{1}{2}a'f_1 + af_1')\} + s_2^{-1}u_1 \quad ,$$

$$\{(c_1 + \sum_{j=2}^4 c_js_j)f_1 + c_0af_2\}' + u_2.$$

Ahora, obtenemos una $k[\epsilon]$–base para $\Gamma(\widetilde{X}, \omega_{\widetilde{X}/\Delta})$ usando el siguiente lema:

Lema B.2.1. *Sea h una función definida sobre $U \cap V$ y sea h' la función tal que $\mathrm{d}h = h'\omega$. Existen funciones u_1, u_2 sobre U, la primera determinada salvo adición de un elemento de $H^0(\mathscr{O}_Y(4P))$, la segunda determinada salvo adición de una constante, tales que $h + s_2^{-1}u_1$ y $h' + u_2$ están definidas sobre V.*

Dem. Para obtener u_1 basta tener en cuenta la anulación de

$$H^1(\mathscr{E}^{-1}) = k[s_2, s_3, s_4, s_2^{-1}]/(s_2^{-1}k[s_2, s_3, s_4] + k[s_2^{-1}, s_2^{-1}s_3, s_2^{-1}s_4]).$$

Para obtener u_2 vemos que h' se anula como una clase en el espacio

$$H^1(\mathscr{O}_Y) = k[s_2, s_3, s_4, s_2^{-1}]/(k[s_2, s_3, s_4] + k[s_2^{-1}, s_2^{-1}s_3, s_2^{-1}s_4]).$$

En efecto, la aplicación $H^0(\mathscr{O}_Y(P+Q)) \to k(P) \oplus k(Q)$ que asocia a una función racional el par de valores (de suma cero) obtenido como residuos de la función en los puntos P, Q, es la flecha central de la sucesión de cohomología del divisor $P+Q$,

$$0 \longrightarrow H^0(\mathscr{O}_Y) \longrightarrow H^0(\mathscr{O}_Y(P+Q)) \longrightarrow k(P) \oplus k(Q) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathscr{O}_Y) \longrightarrow 0.$$

El homomorfismo de conexión aplica un par de valores (α, β) en la clase de $g - f$ donde $(f, g) \in \Gamma(U, \mathscr{O}_Y(P+Q)) \oplus \Gamma(V, \mathscr{O}_Y(P+Q))$ son tales que $\mathrm{res}_Q f = \alpha$, y $\mathrm{res}_P g = \beta$.
En estas condiciones, $g - f$ representa la clase nula si, y sólo si, $\mathrm{res}_P g = -\mathrm{res}_Q f$ o, de forma equivalente $\mathrm{res}_P g = \mathrm{res}_P f$.
Puesto que el homomorfismo de conexión de la sucesión anterior en sobreyectivo se puede escribir $h' = g - f + g_1 - f_1$, donde $g_1 \in \Gamma(V, \mathscr{O}_Y)$, $f_1 \in \Gamma(U, \mathscr{O}_Y)$ y f, g como antes.
Ahora $\mathrm{res}_P h' = 0$, puesto que h' es la "derivada" de una función, y $\mathrm{res}_P g_1 = 0 = \mathrm{res}_P f_1$.
En consecuencia, $\mathrm{res}_P g - \mathrm{res}_P f = 0$. □

Así, obtenemos una $k[\epsilon]$–base de $\Gamma(\widetilde{X}, \omega_{\widetilde{X}/\Delta})$, que restringe a (B.2.0.6):

$$\begin{aligned}
\widetilde{s}_1 &= (1\ \ + (u_{11} + u_{12}p)\epsilon)p^{-1}(\pi^*\omega \otimes t|_X); \\
\widetilde{s}_j &= (s_j + (u_{j1} + u_{j2}p)\epsilon)p^{-1}(\pi^*\omega \otimes t|_X), \qquad j = 2,3,4; \\
\widetilde{s}_0 &= (p\ \ + (u_{01} + u_{02}p)\epsilon)p^{-1}(\pi^*\omega \otimes t|_X).
\end{aligned}$$

fijando $u_{ji} \in \Gamma(U, \mathscr{O}_Y)$, tales que las funciones:

$$\begin{array}{rcll}
s_2^{-1}(\frac{1}{2}a'f_2 + af_2') + s_2^{-1}u_{11} & , & f_1' + u_{12}; & \\
s_2^{-1}((\frac{1}{2}a'f_2 + af_2')s_j + af_2s_j') + s_2^{-1}u_{j1} & , & (s_jf_1)' + u_{j2}\,, & j = 2,3,4; \\
s_2^{-1}(\frac{1}{2}a'f_1 + af_1') + s_2^{-1}u_{01} & , & (af_2)' + u_{02}. &
\end{array}$$

estén definidas en V.
Como $\widetilde{U} = \{\widetilde{s}_1 \neq 0\}$ y $\widetilde{V} = \{\widetilde{s}_2 \neq 0\}$, una deformación $\widetilde{\varphi} : \widetilde{X} \to \mathbb{P}^3_\Delta$ está definida por las secciones $\{\widetilde{s}_1, \dots, \widetilde{s}_4\}$.
Los homomorfismos de álgebras que definen el morfismo se escriben como

$$\begin{aligned}
k[X_2, X_3, X_4, \epsilon] &\xrightarrow{\widetilde{\varphi}^\sharp} k[s_2, s_3, s_4, p, \epsilon] \\
X_j &\mapsto s_j + (u_{j2} - s_ju_{12})p\epsilon + (u_{j1} - s_ju_{11})\epsilon \\
\epsilon &\mapsto \epsilon,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k[X_1, X_3, X_4, \epsilon] &\xrightarrow{\widetilde{\varphi}^\sharp} k[t_1, t_3, t_4, q, \eta] \\ X_j &\mapsto t_j + (u_{j2} - t_j u_{22})q\eta + (u_{j1} - t_j u_{21})\eta \\ \eta &\mapsto \eta. \end{aligned}$$

Por tanto el subesquema $\operatorname{im}\widetilde{\varphi}$ está cubierto por los abiertos afines

$$\begin{aligned} \Gamma(U, \mathscr{O}_{\operatorname{im}\widetilde{\varphi}}) &= k[\{\sigma_j + (u_{j1} - s_j u_{11})\epsilon\}, \epsilon], \\ \Gamma(V, \mathscr{O}_{\operatorname{im}\widetilde{\varphi}}) &= k[\{\theta_j + t_1(u_{j1} - t_j u_{21})\eta\}, \eta], \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma_j &= s_j + (u_{j2} - s_j u_{12})p\,\epsilon, \quad j = 2, 3, 4 \\ \theta_j &= t_j + (u_{j2} - t_j u_{22})q\eta, \quad j = 1, 3, 4. \end{aligned}$$

Aplicando repetidamente las identidades

$$\begin{aligned} (\sigma_j + (u_{j1} - s_j u_{11})\epsilon)\epsilon &= \sigma_j\epsilon = s_j\epsilon \\ (\theta_j + t_1(u_{j1} - t_j u_{21})\eta)\eta &= \theta_j\eta = t_j\eta, \end{aligned}$$

para cualesquiera polinomios $m(X_2, X_3, X_4), n(X_1, X_3, X_4)$ se verifica

$$\begin{aligned} m(\sigma_j + (u_{j1} - s_j u_{11})\epsilon)\epsilon &= m(\sigma_j)\epsilon = m(s_j)\epsilon \\ n(\theta_j + t_1(u_{j1} - t_j u_{21})\eta)\eta &= n(\theta_j)\eta = n(t_j)\eta; \end{aligned} \tag{B.2.1.1}$$

en consecuencia, se puede prescindir del término adicional, y se tiene

$$\begin{aligned} \Gamma(U, \mathscr{O}_{\operatorname{im}\widetilde{\varphi}}) &= k[\{\sigma_j\}, \epsilon], \\ \Gamma(V, \mathscr{O}_{\operatorname{im}\widetilde{\varphi}}) &= k[\{\theta_j\}, \eta]. \end{aligned}$$

Proposición B.2.2. *Condiciones equivalentes.*

1. *El morfismo extensión* $\widetilde{Y} \xrightarrow{\widetilde{i}} \mathbb{P}^3$ *es una inmersión cerrada.*
2. *Se puede elegir* u_{j2}, $j = 1, \dots, 4$ *de modo que*

$$\begin{aligned} k[\{\sigma_j\}, \epsilon] &= k[\{s_j\}, \epsilon, p\,\epsilon], \\ k[\{\theta_j\}, \eta] &= k[\{t_j\}, \eta, q\eta]. \end{aligned} \tag{B.2.2.1}$$

3. *Las ecuaciones*

$$\begin{aligned} \sum_{j=2,3,4} \frac{\partial m}{\partial X_j}(\{s_k\})(u_{j2} - s_j u_{12}) &= 1 \\ \sum_{j=1,3,4} \frac{\partial n}{\partial X_j}(\{t_k\})(u_{j2} - t_j u_{22}) &= 1, \end{aligned} \tag{B.2.2.2}$$

tienen solución con polinomios

$$m(X_2, X_3, X_4) \in k[X_2, X_3, X_4] \ \text{ y } \ n(X_1, X_3, X_4) \in k[X_1, X_3, X_4]$$

tales que

$$m(\{s_k\}) = 0 \ \text{ y } \ n(\{t_k\}) = 0.$$

Dem. Las identidades de (B.2.2.1) equivalen a probar $p\epsilon \in k[\{\sigma_j\}, \epsilon]$ y $q\eta \in k[\{\theta_j\}, \eta]$, puesto que expresiones similares a (B.2.1.1) permiten escribir

$$s_j = \sigma_j - (u_{j2}(\{\sigma_k\}) - \sigma_j u_{12}(\{\sigma_k\}))p\epsilon$$

y

$$t_j = \theta_j - (u_{j2}(\{\theta_k\}) - \theta_j u_{22}(\{\theta_k\})q\eta.$$

Ahora, con la igualdad

$$m(\{\sigma_k\}) = m(\{s_k\}) + \sum_{j=2,3,4} \frac{\partial m}{\partial X_j}(\{s_k\})(u_{j2} - s_j u_{12})p\epsilon$$

y similar expresión para $n(\{\theta_k\})$, vemos que las condiciones

$$p\epsilon \in k[\{\sigma_j\}, \epsilon] \text{ y } q\eta \in k[\{\theta_j\}, \eta]$$

equivalen a la existencia de relaciones polinomiales $m(\{s_k\}) = 0, n(\{t_k\}) = 0$ tales que

$$\sum_{j=2,3,4} \frac{\partial m}{\partial X_j}(\{s_k\})(u_{j2} - s_j u_{12}) = 1$$
$$\sum_{j=1,3,4} \frac{\partial n}{\partial X_j}(\{t_k\})(u_{j2} - t_j u_{22}) = 1.$$

Observemos ahora, con las notaciones de la demostración del Teorema 3.3.3, que si

$$m(\{s_k\}) = 0, \ n(\{t_k\}) = 0$$

se tiene

(B.2.2.3)

$$\nu_2(\bar{m}) = f_{U2}(\mathrm{d}m \otimes 1) = f_{U2}(\sum_{j=2,3,4} \frac{\partial m}{\partial X_j}(\{s_k\})\mathrm{d}X_j) = \sum_{j=2,3,4} \frac{\partial m}{\partial X_j}(\{s_k\})(u_{j2} - s_j u_{12})p,$$
$$\nu_2(\bar{n}) = f_{V2}(\mathrm{d}n \otimes 1) = f_{V2}(\sum_{j=1,3,4} \frac{\partial n}{\partial X_j}(\{t_k\})\mathrm{d}X_j) = \sum_{j=1,3,4} \frac{\partial n}{\partial X_j}(\{t_k\})(u_{j2} - t_j u_{22})q.$$

Por tanto, (B.2.2.2) es equivalente a que ν_2 sea sobreyectivo.
Recordemos que, según la Proposición 2.1.1, asociado con ν_2 existe un morfismo extensión $\widetilde{Y} \xrightarrow{\widetilde{i}} \mathbb{P}^3$ desde la cinta $\widetilde{Y}$, definida por $\delta(\nu_2) = [f_1] \in H^1(\mathscr{E})$, que es una inmersión cerrada sii ν_2 es sobreyectivo. Por tanto (B.2.2.2) es equivalente a que este morfismo sea una inmersión cerrada. □

Supongamos que se verifican las condiciones de la Proposición B.2.2, i.e. que las ecuaciones (B.2.2.2) tienen solución. Entonces una cubierta afín para $\operatorname{im}\widetilde{\varphi}$ es

$$k[\{s_j\}, \epsilon, p\epsilon], \qquad k[\{t_j\}, \eta, q\eta],$$

con isomorfismos de pegado

$$\begin{cases} \epsilon = \eta \\ p\,\epsilon = t_1^{-1}(q\eta) \\ s_2 = t_1^{-1} + s_2' a f_2 \eta + s_2' f_1 t_1^{-1}(q\eta) \\ s_j = t_1^{-1} t_j + s_j' a f_2 \eta + s_j' f_1 t_1^{-1}(q\eta)\,, \qquad j = 3, 4. \end{cases}$$

Estos isomorfismos de pegado representan, como asegura el Teorema 3.3.3, una 3–cuerda sobre Y con fibrado conormal $\mathscr{O}_Y \oplus \mathscr{E}$ que es la unión de la cuerda $\bar{Y} = \{p\epsilon = 0, q\eta = 0\}$ de conormal $\mathscr{O}_Y$ con cubierta afín

$$k[\{s_j\}, \epsilon], \qquad k[\{t_j\}, \eta],$$

pegada por

$$\begin{cases} \epsilon = \eta \\ s_2 = t_1^{-1} + s_2'(a f_2)\eta \\ s_j = t_1^{-1} t_j + s_j'(a f_2)\eta\,, \qquad j = 3, 4, \end{cases}$$

i.e., de la cuerda definida por $[a f_2] \in H^1(\mathscr{O}_Y)$, y de su fibra central

$$(\operatorname{im} \widetilde{\varphi})_0 = \{\epsilon = 0, \eta = 0\}$$

que tiene cubierta afín

$$\operatorname{Spec} k[\{s_j\}, p\,\epsilon], \qquad \operatorname{Spec} k[\{t_j\}, q\eta]$$

con cambio de coordenadas

$$\begin{cases} p\,\epsilon = t_1^{-1}(q\eta) \\ s_2 = t_1^{-1} + s_2' f_1 t_1^{-1}(q\eta) \\ s_j = t_1^{-1} t_j + s_j' f_1 t_1^{-1}(q\eta)\,, \qquad j = 3, 4. \end{cases}$$

De acuerdo con (B.2.0.11) esta última es la cinta $\widetilde{Y}$ sobre Y definida por la clase de f_1 en $H^1(\mathscr{E}) = \operatorname{Ext}^1(\omega_Y, \mathscr{E})$.
Para obtener soluciones para las ecuaciones (B.2.2.2) necesitamos ecuaciones para Y.
Con nuestras elecciones los divisores de s_2, s_3, s_4 son

$$(s_2) = 4Q - 4P, \qquad (s_3) = R + 2Q - 3P, \qquad (s_4) = R' + Q - 2P$$

donde R, R' son puntos distintos entre sí y diferentes de P y Q.
Así, vemos que s_4^2 es una sección global de $\mathscr{O}_Y(4P - 2Q)$. En consecuencia, es una combinación lineal con coeficientes no nulos de s_2, s_3. Cambiando s_2, s_3 se puede suponer que

$$s_4^2 = s_2 + s_3.$$

También $s_3^2 \in H^0(\mathscr{O}_Y(6P-4Q))$ y se puede escribir

$$s_3^2 = \alpha s_2 + \beta s_2 s_4,$$

con

$$\alpha = (s_2^{-1} s_3^2)(Q) \in k^*, \quad \text{y} \quad \beta = (s_2^{-1} s_4^{-1} s_3^2)(P) \in k^*.$$

Por tanto, $Y \subset \mathbb{P}^3$ es la intersección completa de las cuádricas

$$X_3^2 - \alpha X_1 X_2 - \beta X_2 X_4 \ \text{ y } \ X_4^2 - X_1 X_2 - X_1 X_3.$$

La lisitud de Y impone la condición

$$\beta^2 \neq 16\alpha.$$

Por otra parte, las clases de

$$s_2^{-1} s_3 s_4, \qquad s_2^{-2} s_3 s_4, \qquad s_2^{-1} s_4, \qquad s_2^{-1} s_3,$$

son una base de

$$H^1(\mathscr{E}) = k[s_2, s_3, s_4, s_2^{-1}]/(k[s_2, s_3, s_4] + s_2^{-1} k[s_2^{-1}, s_2^{-1} s_3, s_2^{-1} s_4]).$$

En efecto, si una combinación lineal de estas funciones se escribe en la forma $u + s_2^{-1} v$, entonces u es constante ó $u s_2^2$ tiene orden en P menor o igual que -10. Como el orden en P de los sumandos obtenidos multiplicando por s_2^2 es mayor o igual que -9, se deduce que u es constante y se obtiene la independencia lineal de las cuatro funciones en $H^1(\mathscr{E})$.
Por tanto, cambiando f_1 en su clase en $H^1(\mathscr{E})$ se puede escribir:

(B.2.2.4) $$f_1 = \alpha_1 s_2^{-1} s_3 s_4 + \alpha_2 s_2^{-2} s_3 s_4 + \alpha_3 s_2^{-1} s_4 + \alpha_4 s_2^{-1} s_3$$

para únicos $\alpha_j \in k$.
Como $s_2^{-1} s_3^2$ se anula con orden 2 en R y $s_2^{-1} s_3^2 = \alpha + \beta s_4$ vemos que s_4' se anula con orden 1 en R. Además s_4' no se anula en Q, R' y tiene orden -3 en P. Por tanto vemos que

$$s_3^{-1} s_4' \in H^0(\mathscr{O}_Y(2Q))$$

y, así podemos escribir

$$s_4' = c s_3 + b s_2^{-1} s_3^2 = c s_3 + b\alpha + b\beta s_4.$$

De forma análoga

$$t_4^{-1} t_3' \in H^0(\mathscr{O}_Y(2P))$$

y podemos escribir

$$t_3' = e t_4 + d t_1^{-1} t_4^2 = e t_4 + d + d t_3.$$

Ahora un cálculo muestra que $c = 2b$, $d = -b\beta$, $e = -2b\alpha$. Por tanto, cambiando ω por una forma proporcional podemos suponer

$$s_4' = \alpha + 2s_3 + \beta s_4.$$

Con esta expresión, derivando en las ecuaciones de Y obtenemos:

$$s_2' = -\beta s_2 + 4s_3s_4, \qquad s_3' = 3\beta s_2 + 2\beta s_3 + 2\alpha s_4.$$

También

$$t_1' = \beta t_1 - 4t_3t_4, \qquad t_3' = -\beta - \beta t_3 - 2\alpha t_4, \qquad t_4' = -3\alpha t_1 - 2t_3 - 2\beta t_4.$$

Ahora se puede escribir explícitamente las funciones $u_{j2},\ j = 1, \ldots, 4$.
En efecto, observemos que para cierta constante γ se tiene la igualdad

(B.2.2.5) $$(s_2^{-1}s_3s_4)' - \beta s_4 = \gamma - \alpha s_2^{-1}s_3,$$

y, por tanto, la función $(s_2^{-1}s_3s_4)' - \beta s_4$ está definida en V. En efecto, como el orden de $(s_2^{-1}s_3s_4)'$ en P y en Q es -2, se tiene una igualdad de la forma

$$(s_2^{-1}s_3s_4)' + c_1 + c_2s_4 = d_1 + d_2s_2^{-1}s_3.$$

Se puede tomar $c_1 = 0$. Entonces

$$c_2 = -(s_4^{-1}(s_2^{-1}s_3s_4)')(P) = -\beta$$

y

$$d_2 = (s_2s_3^{-1}(s_2^{-1}s_3s_4)')(Q) = -\alpha.$$

Con la igualdad (B.2.2.5) y usando (B.2.2.4) se puede tomar

$$\begin{aligned}
u_{12} &= \alpha_1(\beta_0 - \beta s_4) + \beta_1\\
u_{22} &= -(\alpha_1s_3s_4 + \alpha_3s_4 + \alpha_4s_3)' + \alpha_2(\beta_0 - \beta s_4) + \beta_2\\
u_{32} &= -(\alpha_1s_2^{-1}s_3^2s_4 + \alpha_4s_2^{-1}s_3^2)' + \alpha_3(\beta_0 - \beta s_4) + \beta_3\\
u_{42} &= -(\alpha_1s_2^{-1}s_3s_4^2)' + \alpha_4(\beta_0 - \beta s_4) + \beta_4,
\end{aligned}$$

donde β_j , $j = 0, \ldots, 4$ son elementos cualesquiera en k.
Ahora hacemos las sustituciones

$$s_2^{-1}s_3^2s_4 = \beta s_2 + \beta s_3 + \alpha s_4,\ \ s_2^{-1}s_3^2 = \alpha + \beta s_4,\ \ s_2^{-1}s_3s_4^2 = \alpha + s_3 + \beta s_4.$$

El cálculo necesario para intentar resolver las ecuaciones (B.2.2.2) es voluminoso incluso con ayuda computacional.
Afortunadamente, podemos obtener conclusiones positivas, examinando las ecuaciones (B.2.2.2) en el caso más sencillo posible, i.e. tomando:

$$\begin{aligned}
m &= h_0(X_3^2 - \alpha X_2 - \beta X_2X_4) + m_0(X_4^2 - X_2 - X_3),\\
n &= k_0(X_3^2 - \alpha X_1 - \beta X_4) + n_0(X_4^2 - X_1 - X_1X_3),
\end{aligned}$$

donde $h_0, m_0, k_0, n_0 \in k$.
Simplificando las ecuaciones (B.2.2.2) con la ayuda del software Macaulay2 obtenemos los sistemas lineales

$$\begin{bmatrix} B_1 & F_1 \\ B_2 & F_2 \\ B_3 & F_3 \\ B_5 & F_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ m_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{B.2.2.6}$$

$$\begin{bmatrix} B_1 & F_1 \\ B_2 & F_2 \\ B_3 & F_3 \\ B_5 & F_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_0 \\ n_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{B.2.2.7}$$

donde

$$\begin{aligned} B_1 &= -\alpha\alpha_1\beta_0 - \beta\alpha_4\beta_0 + \beta^2\alpha_2 + \beta^2\alpha_3 + \alpha\beta\alpha_4 - \alpha\beta_1 - \beta\beta_4 \\ B_2 &= 2\alpha_3\beta_0 + \alpha^2\alpha_1 + \beta^2\alpha_2 + (\beta^2 + 2\alpha)\alpha_3 + 2\alpha\beta\alpha_4 + 2\beta_3 \\ B_3 &= -\beta\alpha_2\beta_0 + \alpha\beta\alpha_2 + 2\alpha\beta\alpha_3 + 2\alpha^2\alpha_4 - \beta\beta_2 \\ B_5 &= -\alpha\alpha_2\beta_0 + \alpha^2\alpha_3 - \alpha\beta_2 \\ F_1 &= -\alpha_1\beta_0 + \beta\alpha_4 - \beta_1 \\ F_2 &= -\alpha_1\beta_0 + \alpha\alpha_1 + 2\alpha_3 + 2\beta\alpha_4 - \beta_1 \\ F_3 &= 2\alpha_4\beta_0 + \alpha\beta\alpha_1 + \beta\alpha_2 + 2\beta\alpha_3 + (\beta^2 + 2\alpha)\alpha_4 + 2\beta_4 \\ F_5 &= -\alpha_2\beta_0 - \alpha_3\beta_0 + \alpha^2\alpha_1 + \alpha\alpha_3 + \alpha\beta\alpha_4 - \beta_2 - \beta_3. \end{aligned}$$

Si imponemos las condiciones

$$\begin{aligned} B_2 = 0,\ F_2 &= 0, \\ B_3 = 0,\ F_3 &= 0, \quad \text{y} \\ B_1F_5 - F_1B_5 &\neq 0, \end{aligned} \tag{B.2.2.8}$$

los sistemas (B.2.2.6) y (B.2.2.7) tienen solución

$$\begin{aligned} h_0 = -F_1(B_1F_5 - F_1B_5)^{-1},\ \ m_0 = B_1(B_1F_5 - F_1B_5)^{-1}, \\ k_0 = F_5(B_1F_5 - F_1B_5)^{-1},\ \ n_0 = -B_5(B_1F_5 - F_1B_5)^{-1}. \end{aligned} \tag{B.2.2.9}$$

Las condiciones $B_2 = 0$, $F_2 = 0$, $B_3 = 0$, $F_3 = 0$, equivalen, respectivamente, a las igualdades

$$\begin{aligned} \beta_3 &= -\frac{1}{2}(\alpha^2\alpha_1 + \beta^2\alpha_2 + (\beta^2 + 2\alpha)\alpha_3) - \alpha\beta\alpha_4 - \alpha_3\beta_0, \\ \beta_1 &= \alpha\alpha_1 + 2\alpha_3 + 2\beta\alpha_4 - \alpha_1\beta_0, \\ \beta_2 &= \alpha\alpha_2 + 2\alpha\alpha_3 + 2\alpha^2\beta^{-1}\alpha_4 - \alpha_2\beta_0, \\ \beta_4 &= -\frac{1}{2}(\alpha\beta\alpha_1 + \beta\alpha_2 + (\beta^2 + 2\alpha)\alpha_4) - \beta\alpha_3 - \alpha_4\beta_0. \end{aligned} \tag{B.2.2.10}$$

Sustituyendo, con ayuda de Macaulay2, esta igualdades en las expresiones de B_1, F_1, B_5, F_5, obtenemos

$$\begin{aligned} B_1 &= (\frac{1}{2}\alpha\beta^2 - \alpha^2)\alpha_1 + \frac{3}{2}\beta^2\alpha_2 + (2\beta^2 - 2\alpha)\alpha_3 + \frac{1}{2}\beta^3\alpha_4, \\ F_1 &= -\alpha\alpha_1 - 2\alpha_3 - \beta\alpha_4, \\ B_5 &= -\alpha^2\alpha_2 - \alpha^2\alpha_3 - 2\alpha^3\beta^{-1}\alpha_4, \\ F_5 &= \frac{3}{2}\alpha^2\alpha_1 + (\frac{1}{2}\beta^2 - \alpha)\alpha_2 + \frac{1}{2}\beta^2\alpha_3 + (-2\alpha^2\beta^{-1} + 2\alpha\beta)\alpha_4, \end{aligned} \tag{B.2.2.11}$$

y,

$$\begin{aligned} B_1F_5 - F_1B_5 = {} & (\frac{3}{4}\alpha^3\beta^2 - \frac{3}{2}\alpha^4)\alpha_1^2 + (\frac{1}{4}\alpha\beta^4 + \frac{5}{4}\alpha^2\beta^2)\alpha_1\alpha_2 + \\ & + (\frac{3}{4}\beta^4 - \frac{3}{2}\alpha\beta^2)\alpha_2^2 + (\frac{1}{4}\alpha\beta^4 + \frac{5}{2}\alpha^2\beta^2 - 4\alpha^3)\alpha_1\alpha_3 + \\ & + (\frac{7}{4}\beta^4 - 3\alpha\beta^2)\alpha_2\alpha_3 + (\beta^4 - \alpha\beta^2 - 2\alpha^2)\alpha_3^2 + \\ & + (\frac{7}{4}\alpha^2\beta^3 - 3\alpha^3\beta)\alpha_1\alpha_4 + (\frac{1}{4}\beta^5 + \frac{5}{2}\alpha\beta^3 - 4\alpha^2\beta)\alpha_2\alpha_4 + \\ & + (\frac{1}{4}\beta^5 + 4\alpha\beta^3 - 9\alpha^2\beta)\alpha_3\alpha_4 + (\alpha\beta^4 - \alpha^2\beta^2 - 2\alpha^3)\alpha_4^2. \end{aligned} \tag{B.2.2.12}$$

Observemos que las expresiones (B.2.2.11) y (B.2.2.12) son independientes de β_0.
Es inmediato comprobar que los coeficientes de la expresión (B.2.2.12) no pueden ser idénticamente nulos y, por tanto, la expresión (B.2.2.12) representa una cuádrica en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(H^1(\mathscr{E}))$ que parametriza las cintas no escindidas. Por tanto asignando a β_0 un valor arbitrario, tomando $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ dados por (B.2.2.10) y h_0, m_0, k_0, n_0 dados por (B.2.2.9) obtenemos solución para las ecuaciones (B.2.2.2), siempre que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\, \alpha_4$ no anulen la expresión (B.2.2.12). Por tanto

Proposición B.2.3. *Obtenemos alisamiento infinitesimal efectivo para las cintas en el abierto complementario de la cuádrica definida por* (B.2.2.12) *en el espacio* $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(H^1(\mathscr{E}))$ *de cintas no escindidas.*

Pudiera ser que las ecuaciones (B.2.2.2) tuvieran también solución para cintas (no escindidas) en la cuádrica (B.2.2.12). Sin embargo, hemos examinado las ecuaciones (B.2.2.2) añadiendo a h_0, m_0 formas lineales en X_2, X_3, X_4 y añadiendo a k_0, n_0 formas lineales en X_1, X_3, X_4. Obtenemos dos sistemas lineales de ecuaciones que dependen de una matriz 8×8 cuyos coeficientes se escriben en función de los $B_1, B_2, B_3, B_5, F_1, F_2, F_3, F_5$. Ahora bien, esta matriz tiene determinante nulo. De esta forma, de estos sistemas se obtienen, por supuesto, soluciones como las ya obtenidas para las cintas fuera de la cuádrica, pero no ofrecen nuevas soluciones para cintas en la cuádrica. □

Finalizamos este apéndice con una observación adicional.

Observación B.2.4. Determinamos para qué valores de los α_j y β_j se obtiene Y como fibra central de $\operatorname{im}\widetilde{\varphi}$.
Recordemos que, según la Proposición 3.3.8, obtenemos Y como fibra central de $\operatorname{im}\widetilde{\varphi}$ sii $\nu_2 = 0$ sii $(\widetilde{Y}, \widetilde{i})$ es el par formado por la cuerda escindida y su proyección a Y sii $\operatorname{im}\widetilde{\varphi} = \bar{Y}$.
Si todo α_j, β_j se anula para $j = 1, \ldots, 4$ entonces $u_{j2} - s_j u_{12} = 0$ para $j = 2, 3, 4$ y así $\nu_2 = 0$.
Recíprocamente, si $\nu_2 = 0$ entonces $[f_1] = 0$, esto es $\alpha_j = 0$ para $j = 1, \ldots, 4$ y entonces examinando (B.2.2.3), vemos que $\beta_j = 0$ para $j = 1, \ldots, 4$. Es decir α_j, β_j se anulan para todo $j = 1, \ldots, 4$ sii se obtiene Y como fibra central de $\operatorname{im}\widetilde{\varphi}$ sii $\operatorname{im}\widetilde{\varphi} = \bar{Y}$.

Bibliografía

[BE95] Dave Bayer and David Eisenbud, *Ribbons and their canonical embeddings*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), no. 3, 719–756. MR 95g:14032

[BPVdV84] W. Barth, C. Peters, and A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1984. MR 86c:32026

[Cha95] Karen A. Chandler, *Geometry of dots and ropes*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), no. 3.

[EH83] David Eisenbud and Joe Harris, *Divisors on general curves and cuspidal rational curves*, Invent. Math. **74** (1983), no. 3, 371–418. MR 85h:14019

[Fon93] Lung-Ying Fong, *Rational ribbons and deformation of hyperelliptic curves*, J. Algebraic Geom. **2** (1993), no. 2, 295–307. MR 94c:14020

[G^+71] Alexander Grothendieck et al., *Revêtements Étales et Groupe Fondamental. Exposés I à XIII.*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960/61 (SGA 1), dirigé par Alexander Grothendieck. Augmenté de deux exposés de M. Raynaud., Lecture Notes in Mathematics. 224. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. XXII, 447 p., (reproduit en LaTeX 2_ε en arXiv:math.AG/0206203), 1971.

[GGP] Francisco J. Gallego, Miguel González, and Bangere P. Purnaprajna, *Smoothing of triple structures over* $\mathbb{P}^1$, In preparation.

[GP97] Francisco J. Gallego and Bangere P. Purnaprajna, *Degenerations of $K3$ surfaces in projective space*, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), no. 6, 2477–2492. MR 97h:14048

[Gro62] Alexander Grothendieck, *Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique V. Les schémas de Picard : Théorèmes d'existence*, Séminaire Bourbaki, vol. 232, 1961-62.

[Gro60] ______, *EGA I, Le langage des schémas.*, Publ. Math. IHES, vol. 4, 1960.

[Gro61] ______, *EGA III, Étude cohomologique des faisceaux cohérents. (première partie.)*, Publ. Math. IHES, vol. 11, 1961.

[Gro64] ______, *EGA IV, Étude local des schémas et des morphismes des schémas. (premiére partie.)*, Publ. Math. IHES, vol. 20, 1964.

[Har77] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, No. 52. MR 57 #3116

[Hor74] Eiji Horikawa, *On deformations of holomorphic maps. II*, J. Math. Soc. Japan **26** (1974), 647–667. MR 50 #5027

[Mat80] Hideyuki Matsumura, *Commutative algebra. 2nd ed.*, Mathematics Lecture Note Series, 56. Reading, Massachusetts, etc.: The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., Advanced Book Program. XV, 313 p., 1980.

[Ser86] Edoardo Sernesi, *Topics on families of projective schemes*, Queen's Papers in Pure and Appl. Math. **73** (1986).