UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Departamento de Análisis Matemático

ANÁLISIS NO REGULAR EN VARIEDADES RIEMANNIANAS Y APLICACIONES A LAS ECUACIONES DE HAMILTON-JACOBI

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Fernando López - Mesas Colomina

Bajo la dirección de los doctores

Daniel Azagra Rueda
Juan Ferrera Cuesta

Madrid, 2004

ISBN: 84-669-2595-3

Análisis no regular en variedades riemannianas y aplicaciones a las ecuaciones de Hamilton-Jacobi

Memoria
que para obtener el título de
Doctor en Ciencias Matemáticas
presenta

Fernando López-Mesas Colomina

Directores: Daniel Azagra Rueda y Juan Ferrera Cuesta

Universidad Complutense de Madrid
Facultad de Ciencias Matemáticas
Departamento de Análisis Matemático

Mayo de 2004

Índice general

Introducción **5**

1. Nociones básicas sobre variedades riemannianas **13**

2. Principio variacional suave en variedades riemannianas **23**
2.1. Concepto de variedad riemanniana uniformemente mesetable . . 25
2.2. Principios variacionales en variedades riemannianas 28

3. Teoremas de Rolle aproximados **35**
3.1. Teorema de Rolle aproximado en variedades 35
3.2. Nociones sobre la subdiferencial proximal y el gradiente generalizado 38
3.3. Teoremas de Rolle aproximados para la subdiferencial proximal 40
3.4. Teorema de Rolle aproximado para el gradiente generalizado . . 46

4. Nociones sobre subdiferenciabilidad de funciones definidas en variedades riemannianas **51**
4.1. Definición y propiedades básicas 52
4.2. Reglas de la suma 58
4.3. Principio de minimización perturbada para la suma o diferencia de funciones 61
4.4. Propiedades topológicas y geométricas de los conjuntos de subdiferenciales. 65
4.5. Densidad de los puntos de subdiferenciabilidad. 67
4.6. Desigualdades del valor medio 68
4.7. (Sub)diferenciabilidad de funciones convexas en variedades riemannianas. 72
4.8. Estabilidad de subdiferenciales y superdiferenciales 77

5. Ecuaciones de Hamilton-Jacobi en variedades riemannianas **81**
5.1. Introducción y definiciones básicas 81
5.2. Principio del máximo para ecuaciones estacionarias de primer orden de Hamilton-Jacobi 83

5.3. Principio del máximo para ecuaciones parabólicas de Hamilton-Jacobi 85
5.4. Existencia y unicidad de soluciones de viscosidad de ecuaciones de Hamilton-Jacobi 87

Bibliografía **94**

Introducción

El propósito de esta Tesis es triple; primero, extender algunos resultados de minimización perturbada, como el principio variacional suave de Deville, Godefroy y Zizler, y otros resultados de localización de puntos casi críticos, como los teoremas de Rolle aproximados, al ámbito de las variedades riemannianas; segundo, introducir una definición de subdiferencial para funciones definidas en variedades riemannianas, y desarrollar la teoría del cálculo subdiferencial en variedades riemannianas, de manera que las aplicaciones más conocidas del cálculo subdiferencial permanezcan en variedades riemannianas; tercero, utilizar estas teorías para probar la existencia y unicidad de soluciones de viscosidad de ecuaciones de Hamilton-Jacobi definidas en variedades.

Es bien conocido que el teorema de Rolle falla en dimensión infinita. De manera más precisa, en cada espacio de Banach de dimensión infinita que posea una función meseta de clase C^1 (Lipschitz) existen funciones de clase C^1 (Lipschitz) que valen cero fuera de un abierto acotado y no tienen derivada cero en ningún punto del abierto; véase [9] y las referencias de este trabajo. El fallo del teorema de Rolle en dimensión infinita adquiere una forma más dramática en el reciente resultado de D. Azagra y Cepedello Boiso [4]: en cada variedad de Hilbert, las funciones regulares que *carecen de puntos críticos* son densas en el espacio de las funciones continuas. Por tanto, cuando tenemos una función regular en una variedad riemanniana infinito-dimensional carecemos de expectativas de encontrar algún punto crítico, independientemente de la forma que tenga la función, sencillamente porque puede que no los tenga. Esta gran diferencia entre dimensión finita e infinita, fuerza a considerar condiciones aproximadas a las clásicas del teorema de Rolle, para poder garantizar la existencia de derivadas arbitrariamente pequeñas para las funciones que las satisfagan. Estas ideas se desarrollan en los trabajos [8, 5]. En uno, en el caso de diferenciabilidad, estableciendo que si una función diferenciable oscila menos que 2ε en el borde de la bola unidad, entonces existe un punto interior de la bola unidad tal que la norma de la derivada de la función en ese punto es menor o igual que ε, y en el otro, en el caso análogo de subdiferenciabilidad. Más generalmente, existen varios principios de minimización (o variación) perturbada que han sido muy estudiados. Citaremos, como ejemplos, los más conocidos, Principio de Ekeland, Principio de Borwein-Preiss y Principio Variacional suave de Deville-Godefroy-Zizler. Véase los trabajos [28, 29] y sus referencias.

El hecho de que una variedad riemanniana es un espacio métrico nos permite aplicar, de forma inmediata, el principio variacional de Ekeland en el siguiente sentido: cualquier función semicontinua inferiormente y acotada inferiormente puede ser perturbada por una función, con forma de cono casi liso en todas las direcciones, de modo que la diferencia alcance un mínimo global. Pero algunas veces, especialmente cuando queremos construir una buena teoría de subdiferenciabilidad, necesitamos sustituir el cono por una función regular arbitrariamente pequeña con constante de Lipschitz también pequeña. Lo que necesitamos es, justamente, el principio variacional suave de Deville-Godefroy-Zizler en espacios de Banach que tengan una función meseta de clase C^1 y Lipschitz; véase [28]. Desafortunadamente, las ideas de la demostración de este Principio Variacional en espacios de Banach no pueden ser transferidas, de forma general, cuando se trata de variedades riemannianas. Es necesario, en principio, imponer ciertas condiciones a la variedad.

En el primer capítulo, resumimos los conceptos básicos sobre variedades riemannianas que serán utilizados a lo largo de todo este trabajo, matizando muy especialmente aquellas cuestiones fundamentales para el desarrollo de la teoría posterior. En este sentido son especialmente importantes los conceptos de trasporte paralelo y de función exponencial y sus caracterizaciones, así como los resultados relativos a convexidad y convexidad local. También se presentan en este capítulo dos teoremas del valor medio en variedades, que posteriormente, en la sección 4.6. del capítulo 4, se generalizarán a los casos de subdiferenciabilidad y superdiferenciabilidad de funciones definidas en variedades riemannianas.

En el segundo capítulo, establecemos el concepto de variedad riemanniana uniformemente mesetable, como aquella para la cual existen dos números $R > 1$ y $r > 0$ tales que, para cada punto $p \in M$, y cada $\delta \in (0, r)$, existe una función $b : M \to [0, 1]$, tal que $b(x) = 0$ si $d(x, p) \geq \delta$, $b(p) = 1$, y $\sup_{x\in M} \|db(x)\|_x \leq R/\delta$. Por ejemplo, cualquier espacio de Hilbert es uniformemente mesetable, y hay otros muchos ejemplos de variedades uniformemente mesetables, como las variedades compactas o, más generalmente, aquellas que tienen radios de inyectividad y convexidad estrictamente positivo. De hecho, no conocemos ninguna variedad que no sea uniformemente mesetable, aunque no sabemos con certeza si cualquier variedad riemanniana es uniformemente mesetable. Para estas variedades riemannianas uniformemente mesetables, hemos establecido un principio variacional suave del estilo del de Deville-Godefroy-Zizler, probando que, si (M, g) es una variedad riemanniana completa uniformemente mesetable, y $F : M \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ es una función semicontinua inferiormente y acotada inferiormente, $F \not\equiv +\infty$, entonces para cada $\delta > 0$ existe una función de clase C^1 y acotada $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F - \varphi$ alcanza un mínimo fuerte en M, $\|\varphi\|_\infty := \sup_{p\in M} |\varphi(p)| < \delta$ y $\|d\varphi\|_\infty := \sup_{p\in M} \|d\varphi(p)\|_p < \delta$. El resultado anterior se desprende de un lema que no solamente es aplicable para obtener resultados variacionales en variedades, sino que se muestra muy general para obtener distintos principios variacionales en situaciones diversas. De hecho, y con razonamientos sencillos, se obtiene el principio variacional de Ekeland en espacios métricos, o el principio variacional suave de Deville-Godefroy-Zizler, e incluso se sugiere la posibilidad de extender los principios variacionales a espacios métricos en los cuales haya definido algún posible concepto de diferenciabilidad.

En el capítulo 3, establecemos un teorema de Rolle aproximado en variedades, más concretamente, si (M, g) es una variedad riemanniana completa, U un subconjunto abierto y acotado de M, $p_0 \in M$ y $R > 0$ tales que $B_g(p_0, R) \subseteq \overline{U}$, $\varepsilon > 0$, y si suponemos que $f(\partial U) \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$, entonces existe algún $q \in U$, tal que $\|df(q)\|_q \leq \varepsilon/R$. También en este capítulo, avanzamos algunos resultados del tipo teoremas de Rolle aproximados, como continuación de los trabajos de D.Azagra y R.Deville (véase [3] y [5]), cuando sustituimos subdiferencial Fréchet por subdiferencial proximal en un caso, y por gradiente generalizado en otro. Especialmente reseñable es el hecho de que el teorema de Rolle falle para el gradiente generalizado en cualquier espacio de Banach, incluso en aquellos que no poseen una meseta regular (téngase presente, que si un espacio de Banach carece de mesetas regulares entonces el teorema de Rolle exacto para funciones regulares, es trivialmente cierto). De manera más específica, para cualquier espacio de Banach X, infinito-dimensional, existe una función acotada y Lipschitz f, definida en una bola cerrada B, tal que f vale cero en ∂B y sin embargo $0 \notin \partial f(x)$ cuando $x \in \mathrm{int}(B)$. Esto es, el teorema de Rolle falla cuando la suposición de la diferenciabilidad de la función se debilita, y se sustituye por lipchitzianidad. Como el gradiente generalizado contiene todas las subdiferenciales y superdiferenciales conocidas, esto cierra, de la manera más radical, el fallo que un teorema de Rolle exacto pueda tener para la subdiferencial. No obstante, en la tercera sección de este capítulo se ofrece un resultado positivo del teorema de Rolle aproximado para el gradiente generalizado.

En el cuarto capítulo, desarrollamos el estudio de la subdiferenciabilidad de funciones definidas en variedades. Diremos que una función $f : M \to (-\infty, \infty]$, es subdiferenciable en un punto p, cuando exista una función de clase C^1 $\varphi : M \to \mathbb{R}$, tal que $f - \varphi$ alcanza un mínimo local en p. Al conjunto de todas las derivadas $d\varphi(p)$ de todas las funciones φ le denominaremos subdiferencial de f en p, que es un subconjunto de T^*M_p, y que anotaremos $D^-f(p)$. De manera análoga se define la superdiferencial. Cuando M es $\mathbb{R}^n$ o un espacio de Hilbert, estas definiciones coinciden con las usuales. Establecemos otras definiciones equivalentes de subdiferenciabilidad y superdiferenciabilidad, incluyendo una local a través de cartas, que permite, en algunos casos, trasladar resultados establecidos en $\mathbb{R}^n$ o en espacios de Banach a situaciones análogas en variedades riemannianas. También vemos la equivalencia entre diferenciabilidad de una función en un punto, y que la función sea subdiferenciable y superdiferenciable, a la vez, en el punto. Seguidamente, estudiamos las propiedades elementales de la subdiferencial con respecto a la suma, el producto y la composición, incluyendo una regla débil, directa e inversa, de la suma, y un principio de minimización perturbada para la suma y diferencia de funciones. A continuación, vemos que las funciones semicontinuas inferiormente son subdiferenciables en un conjunto denso de su dominio. También, establecemos dos teoremas del valor medio, uno del estilo de Deville [23] y otro del estilo de Godefroy [35, 5]. En la sección siguiente de este capítulo,estudiamos la relación que existe entre convexidad y (sub)diferenciabilidad de funciones definidas en variedades riemannianas. Recordamos que una función $f : M \to \mathbb{R}$, decimos que es convexa, cuando $f \circ \sigma$ es convexa para cada geodésica σ (los trabajos [36, 37, 38, 39] contienen una buena introducción a la convexidad en variedades riemannianas). Lo que probamos en esta sección es que cada función convexa definida en una variedad de Riemann es subdiferenciable en todos los puntos y diferenciable en un conjunto denso. Además, cuando la variedad es finito-dimensional, entonces el conjunto de puntos de no-diferenciabilidad tiene medida cero. En la última sección de este capítulo establecemos un resultado de estabilidad para superdifernciales (de forma análoga se puede establecer para subdiferenciales) que jugará un papel decisivo en las aplicaciones del cálculo subdiferencial a las ecuaciones de Hamilton-Jacobi en variedades riemannianas. Sea Ω un subconjunto abierto de una variedad riemanniana M, sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones uniformemente acotadas y semicontinuas superiormente en Ω, y sea $u = \sup\{v : v \in \mathcal{F}\}$, entonces para cada $p \in \Omega$ y cada $\zeta \in D^+u^*(p)$, existen sucesiones $\{v_n\} \subset \mathcal{F}$, y $\{(p_n, \zeta_n)\} \subset T^*(\Omega)$ con $\zeta_n \in D^+v_n(p_n)$ tales que

1. $\lim_n v_n(p_n) = u^*(p)$
2. $\lim_n (p_n, \zeta_n) = (p, \zeta)$.

El capítulo quinto, y último, está dedicado plenamente a aplicar las teorías que hemos desarrollado en los capítulos anteriores al establecimiento de la existencia y unicidad de soluciones de viscosidad de ecuaciones de Hamilton-Jacobi. Las ecuaciones de primer orden de Hamilton-Jacobi son de la forma

$$F(x, u(x), du(x)) = 0$$

en el caso estacionario, y de la forma

$$F(t, x, u(x,t), du(t,x)) = 0$$

en el caso de evolución. Estas ecuaciones aparecen de manera natural en la teoría de control optimal y en la teoría de Lyapounov. Son conocidos un gran número de ejemplos de ecuaciones de Hamilton-Jacobi que no siempre admiten soluciones clásicas, incluso, en el caso más simple, cuando el espacio es $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, soluciones débiles, también denominadas soluciones de viscosidad, existen bajo hipótesis muy generales. En la bibliografía de este escrito se encuentra una extensa lista de referencias, acerca de las soluciones de viscosidad para ecuaciones de Hamilton-Jacobi, véase, por ejemplo, [10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 28, 29]. Todos estos trabajos tratan de ecuaciones de Hamilton Jacobi en $\mathbb{R}^n$ o en espacios de Banach infinito-dimensionales. Algunos ejemplos de ecuaciones de Hamilton-Jacobi aparecen de forma natural en variedades riemannianas (véase [1]). Ahora bien, no conocemos ningún trabajo que estudie soluciones no regulares, en general, ni soluciones de viscosidad, en particular, para ecuaciones de Hamilton-Jacobi definidas en variedades riemannianas (finito-dimensionales o infinito-dimensionales). Esto se debe, seguramente, a la laguna que existía en el cálculo no regular en variedades riemannianas. En este capítulo veremos que el cálculo subdiferencial en variedades tiene grandes posibilidades de desarrollarse para ampliar algunos resultados de existencia y unicidad de soluciones de viscosidad a las ecuaciones de Hamilton-Jacobi definidas en variedades riemannianas. También probaremos algunos resultados acerca de la regularidad (por ejemplo Lipschitzianidad, o diferenciabilidad en casi todo punto) de las soluciones de viscosidad para algunas de estas ecuaciones. Existen otros temas relacionados con las ecuaciones de Hamilton-Jacobi en variedades riemannianas para las que estas herramientas pueden ser utilizadas, como por ejemplo, para obtener un principio del máximo para ecuaciones de Hamilton-Jacobi. Precisando algo más, restringiremos nuestro estudio a dos de los ejemplos más interesantes de las ecuaciones de primer orden de Hamilton-Jacobi. El primer caso se refiere a las ecuaciones estacionarias de la forma

$$(*)\begin{cases} u + G(du) = f \\ u \text{ acotada,} \end{cases}$$

donde $f : M \to \mathbb{R}$ es una función acotada y uniformemente continua, y $G : T^*M \to \mathbb{R}$ es una función definida en el fibrado cotangente de M. De hecho, estas ecuaciones son, realmente, de la forma

$$(*)\begin{cases} u + F(du) = 0 \\ u \text{ acotado,} \end{cases}$$

donde $F : T^*M \to \mathbb{R}$, dado que siempre podemos tomar la función F de la forma $F(x, \xi_x) = G(x, \xi_x) - f(x)$.

Una función semicontinua superiormente (scs), $u : M \to \mathbb{R}$ es una *subsolución de viscosidad* de $u + F(du) = 0$ si $u(p) + F(p, \zeta) \leq 0$ para cada $p \in M$ y $\zeta \in D^+u(p)$. Una función semicontinua inferiormente (sci), $u : M \to \mathbb{R}$ es una *supersolución de viscosidad* de $u + F(du) = 0$ si $u(p) + F(p, \zeta) \geq 0$ para cada $p \in M$ y $\zeta \in D^-u(p)$. Una función continua, $u : M \to \mathbb{R}$, es una *solución de viscosidad* de $u+F(du) = 0$ si es a la vez subsolución y supersolución de viscosidad de $u+F(du) = 0$. Podemos definir soluciones de viscosidad en conjuntos abiertos

$\Omega \subset M$ de manera natural, cuando las funciones están definidas en Ω. Como una función u, Fréchet- diferenciable, verifica que $D^+u(p) = D^-u(p) = \{du(p)\}$, es evidente que cualquier solución de viscosidad de $u + F(du) = 0$, que sea acotada y Frechet-diferenciable, es una solución clásica de $(*)$.

El segundo caso se refiere a las ecuaciones parabólicas de la forma

$$(**) \begin{cases} u_t + F(t, d_x u) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases}$$

donde $u_0 : M \to \mathbb{R}$ es una condición inicial que suponemos acotada y uniformemente continua y $F : [0,\infty) \times T^*M \to \mathbb{R}$. Una subsolución de viscosidad de $(**)$ es una función $u : [0,+\infty) \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ semicontinua superiormente, y tal que para cada $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times M$ y cada $(a,\zeta) \in D^+u(t,x)$ se cumple

$$\begin{cases} a + F(t,x,\zeta) \leq 0 \\ u(0,x) \leq u_0(x), \end{cases}$$

Y una supersolución de $(**)$ es una función $u : [0,+\infty) \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ semicontinua inferiormente, y tal que para cada $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times M$ y cada $(a,\zeta) \in D^-u(t,x)$ se cumple

$$\begin{cases} a + F(t,x,\zeta) \geq 0 \\ u(0,x) \geq u_0(x), \end{cases}$$

Una función $u : [0,\infty) \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ continua es una solución de viscosidad de $(**)$ si es a la vez subsolución y supersolución de viscosidad de $(**)$. Como una función u Fréchet- diferenciable verifica que

$$D^+u(p) = D^-u(p) = \{du(p)\},$$

es evidente que cualquier solución de viscosidad que sea Fréchet-diferenciable es una solución clásica de $(**)$.

Para obtener resultados precisos sobre las soluciones de viscosidad de ecuaciones de Hamilton-Jacobi de la forma $(*)$ o $(**)$ cuando $F : T^*M \to \mathbb{R}$ es una función definida en el fibrado cotangente de M, le debemos exigir, a esta función, una cierta condición de continuidad uniforme, y a la variedad M también le exigiremos ciertos requisitos. Mas concretamente, la variedad M será una variedad riemanniana completa (finito-dimensional o infinito-dimensional), uniformemente localmente convexa, y con radio de inyectividad estrictamente positivo. En estas circunstancias la variedad M es uniformemente mesetable y por tanto se pueden aplicar los Principios Variacionales Suaves. En particular, las variedades compactas satisfacen estas propiedades. La función F será intrínsecamente uniformemente continua, o con mayor precisión, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta \in (0, r_M)$ tal que si $d(x,y) \leq \delta$, $\zeta \in T^*M_x$, $\xi \in T^*M_y$, y $\|\zeta - L_{yx}(\xi)\|_x \leq \delta$, entonces

$|F(x,\zeta) - F(y,\xi)| \leq \varepsilon$, donde L_{yx} es el transporte paralelo a lo largo de la (única) geodésica que conecta y con x. Aunque esta condición sobre la función F es aparentemente restrictiva, veremos que en muchas situaciones se reduce a una continuidad uniforme.

Con estas precisiones, obtenemos un principio del máximo para ecuaciones estacionarias en el siguiente sentido, si M es una variedad riemanniana completa, uniformemente localmente convexa y con radio de inyectividad estrictamente positivo, y $f, g : M \to \mathbb{R}$ son funciones uniformemente continuas y acotadas, y $F : T^*M \to \mathbb{R}$ es intrínsecamente uniformemente continua , y si u es una subsolución de viscosidad y acotada de $u + F(du) = f$ y v es una supersolución de viscosidad y acotada de $v + F(dv) = g$, entonces $v - u \geq \inf(g - f)$. En el caso de ecuaciones parabólicas el principio que del máximo quedaría establecido de la siguiente manera, si M es una variedad riemanniana completa, uniformemente localmente convexa y con radio de inyectividad estrictamente positivo, y $u_0, v_0 : M \to \mathbb{R}$ son funciones uniformemente continuas y acotadas, y $F : [0,\infty) \times T^*M \to \mathbb{R}$ es intrínsecamente uniformemente continua, y u es una subsolución de viscosidad acotada de

$$\begin{cases} u_t + F(t, d_x u) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases}$$

y v es una supersolución de viscosidad acotada de

$$\begin{cases} v_t + F(t, d_x v) = 0 \\ v(0,x) = v_0(x), \end{cases}$$

entonces $\sup_{[0,\infty)\times M}(u - v) \leq \sup_M(u_0 - v_0)$.

En el último apartado de este capítulo obtenemos un teorema de existencia y unicidad para ecuaciones estacionarias de primer orden, precisado de la siguiente manera: si M es una variedad riemanniana uniformemente localmente convexa y con radio de inyectividad estrictamente positivo, $F : T^*M \to \mathbb{R}$ una función estrictamente uniformemente continua, y si suponemos, también, que existe una constante $A > 0$ tal que $-A \leq F(x, 0_x) \leq A$ para cada $x \in M$, entonces existe una única solución de viscosidad acotada de la ecuación $u + F(du) = 0$.

Concluimos este trabajo con un breve estudio de una ecuación HJ que no es de la forma $(*)$ ni de la forma $(**)$, pero que resulta muy interesante por el significado geométrico de su única solución de viscosidad. Sea M una variedad riemanniana completa, Ω un subconjunto abierto y acotado de M, y sea $\partial\Omega$ el borde de Ω. Consideramos la siguiente ecuación de Hamilton-Jacobi denominada eitconal

$$\text{(HJ4)} \begin{cases} \|du(x)\|_x = 1 \text{ para todo } x \in \Omega \\ u(x) = 0 \text{ para todo } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

No existe ninguna solución clásica de (HJ4). En efecto, si una función $u : \overline{\Omega} \subset M \to \mathbb{R}$ es diferenciable en Ω y satisface que $\|du(x)\|_x = 1$ cuando $x \in \Omega$ y

$u = 0$ en $\partial\Omega$, entonces podemos aplicar el Teorema de Rolle en variedades 3.1 y encontrar un punto $x_0 \in \Omega$ tal que $\|du(x_0)\|_{x_0} < 1/2$, lo que constituye una contradicción. Ahora bien, lo que sí podemos encontrar es una única solución de viscosidad para la ecuación (HJ4), que es justamente la función distancia al borde $\partial\Omega$. Por definición, una función u es una solución de viscosidad de la ecuación (HJ4) si, y sólo si, u es continua; $u = 0$ en $\partial\Omega$; $\|\zeta\|_x \geq 1$ cuando $\zeta \in D^{-}u(x)$, $x \in \Omega$; y $\|\zeta\|_x \leq 1$ cuando $\zeta \in D^{+}u(x)$, $x \in \Omega$. Precisando algo más, si M es una variedad riemanniana completa, y Ω un subconjunto abierto y acotado de M con borde $\partial\Omega$, entonces la función $x \mapsto d(x, \partial\Omega) := \inf\{d(x,y) : y \in \partial\Omega\}$ es una solución de viscosidad de la ecuación *(HJ4)*. Es más, si M es uniformemente localmente convexa y tiene radio de inyectividad positivo, entonces $d(\cdot, \partial\Omega)$ es la *única* solución de viscosidad de esta ecuación.

AGRADECIMIENTOS

Después de casi doce años de estar dedicado plenamente a la enseñanza media, volví, casi por casualidad, al mismo departamento que había abandonado tiempo atrás, y como unas cosas llevan a otras, un día me encontré matriculado en los cursos de doctorado, y otro día los había acabado. Fue entonces cuando entre charla y charla de buenos amigos, le comenté a Juan Ferrera si estaba dispuesto a dirigirme algún trabajo de investigación. Y así empezó todo. Al poco tiempo estábamos mirando algunas cuestiones de optimización perturbada que nos acercaron a la tesis doctoral de Daniel Azagra, y de la tesis al autor, desde entonces hasta hoy, que hemos puesto punto final ha este trabajo, no he hecho más que sorprenderme de la naturalidad con la que tanto Juan como Daniel desgranan lo complejo hasta mostrarlo como simple, y de la generosidad con la que ofrecen todo el conocimiento que poseen. Siempre les estaré agradecido por haberme permitido trabajar junto a ellos.

Capítulo 1

Nociones básicas sobre variedades riemannianas

En esta sección presentamos las definiciones y resultados sobre variedades riemannianas que serán utilizados a lo largo de este trabajo. Una variedad riemanniana (M, g), es una variedad M de clase C^∞ modelada sobre un espacio de Hilbert H (posiblemente infinito-dimensional), tal que para todo $p \in M$ existe un producto escalar $g(p) = g_p := \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ en el espacio tangente $TM_p \simeq H$, de modo que $\|x\|_p = (\langle x, x\rangle_p)^{1/2}$ define una norma equivalente en TM_p para todo $p \in M$, y la aplicación $p \in M \mapsto g_p \in \mathcal{S}^2(M)$ es una sección de clase C^∞ del fibrado $\sigma_2 : \mathcal{S}_2 \to M$ de las formas bilineales simétricas. Si una función $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $p \in M$, la norma de la diferencial $df(p) \in T^*M_p$ en el punto p se define por

$$\|df(p)\|_p = \sup\{df(p)(v) : v \in TM_p, \|v\|_p \leq 1\}.$$

Dado que $(TM_p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Hilbert, tenemos una isometría lineal que identifica este espacio y su dual $(T^*M_p, \|\cdot\|_p)$ mediante la aplicación $TM_p \ni x \mapsto f_x = x \in T^*M_p$, donde $f_x(y) = \langle x, y\rangle$ para cada $y \in TM_p$. Para un camino, $\gamma : [a, b] \to M$, de clase C^1 , definimos su longitud por

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\frac{d\gamma}{dt}(s)\|_{\gamma(s)} ds.$$

Esta longitud depende solamente de la imagen $\gamma[a, b]$, y no de como se mueven los puntos $\gamma(t)$. De forma más concreta, si $h : [0, 1] \to [a, b]$ es una función continua y monótona, entonces $L(\gamma \circ h) = L(\gamma)$. Diremos que un camino γ es una parametrización por la longitud del arco, cuando $\gamma : [0, T] \to M$ satisface $\|\frac{d\gamma}{dt}(s)\|_{\gamma(s)} = 1$ para todo s, y en este caso

$$L(\gamma_{|_{[0,r]}}) = \int_0^r \|\frac{d\gamma}{dt}(s)\|_{\gamma(s)} ds = r$$

para cada $r \in [0, T]$. Para dos puntos $p, q \in M$, definimos la distancia d entre p y q como

$$d(p,q) = \inf\{L(\gamma) : \gamma \text{ es un camino de clase } C^1 \text{ que une } p \text{ y } q \text{ en } M\}$$

cuando p y q están en la misma componente conexa de M, y $d(p,q) = \infty$ en el caso contrario. Entonces d es una métrica en M (denominada g-distancia en M) la cual define la misma topología que la dada en M . Para esta métrica definimos la bola cerrada de centro p y radio $r > 0$ como

$$B_g(p,r) = \{q \in M : d(p,q) \le r\}.$$

Supongamos ahora que M posee una derivación covariante ∇. Sea V un campo vectorial a lo largo de una curva γ definida en M, entonces la derivada covariante $\nabla_{d\gamma(t)/dt}V(\gamma(t))$ define un campo vectorial a lo largo de γ que denominaremos derivada covariante de V a lo largo de γ y que anotaremos $\nabla V(t)/dt$ o simplemente $\nabla V(t)$. El campo V diremos que es paralelo a lo largo de γ cuando $\nabla V(t)/dt = 0$.

Lema 1.1. *Sea $\gamma : I \longrightarrow M$ una curva, t_0 y t_1 en I.*

(i) Para cada $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$ existe exactamente un campo vectorial paralelo V a lo largo de γ tal que $V(t_0) = V_0$.

(ii) La aplicación

$$P^{t_1}_{t_0,\gamma} : T_{\gamma(t_0)}M \longrightarrow T_{\gamma(t_1)}M$$

el cual asocia a cada V_0 el valor $V(t_1)$ del campo vectorial paralelo determinado en (i) es un isomorfismo que denominaremos trasporte paralelo.

Demostración. Es suficiente considerar el caso $\gamma|_{[t_0,t_1]}$ contenido en una carta (u, M'). En el caso contrario subdividiríamos el intervalo $[t_0, t_1]$ en un número finito de partes cuyas imágenes estuvieran contenidas en una carta. Si ponemos $u \circ \gamma(t) = u(t)$ y Γ es el símbolo de Christoffel asociado a la carta (u, M') de la derivada covariante considerada en M, que $V(t)$ es paralelo equivale a

$$\frac{\nabla V}{dt}(t) = \frac{dV}{dt}(t) + \Gamma(u(t))(\frac{du}{dt}, V(t)) = 0.$$

El lema es consecuencia de los resultados estándar para ecuaciones ordinarias de primer orden. Las soluciones $V(t)$ de la ecuación anterior forman un espacio vectorial isomorfo a E. $\square$

Una geodésica γ es un camino de clase C^∞ que satisface la ecuación

$$\nabla_{d\gamma(t)/dt} d\gamma(t)/dt = 0.$$

Si consideramos la ecuación

$$\nabla_{d\gamma(t)/dt} d\gamma(t)/dt = \frac{d^2u(t)}{t^2} + \Gamma(u(t))(\frac{du}{dt}, \frac{du}{dt}) = 0.$$

Los resultados estándar para ecuaciones diferenciales de segundo orden nos da que para cada $X \in TM$ existe un intervalo $J(X)$ conteniendo al 0 y una geodésica $\gamma = \gamma_X : J(X) \longrightarrow M$ con $\frac{d\gamma(0)}{dt} = X$. El par $(c_X, J(X))$ está unívocamente determinado si elegimos $J(X)$ maximal con respecto a la propiedad anterior. Si reformulamos ligeramente la ecuación anterior obtenemos la existencia de un entorno abierto $\tilde{T}M$ de M en TM tal que para todo $V \in \tilde{T}M$, la geodésica $\gamma_V(t)$ está definida para $|t| < 2$.

La aplicación exponencial $\exp : \tilde{T}M \to M$ se define como $\exp(V) = \gamma_V(1)$, y la restricción de exp a la fibra TM_x en $\tilde{T}M$ se denota por $\exp_x$.

En toda variedad riemanniana M existe exactamente una derivada covariante con torsión 0 tal que para toda curva en M, la traslación paralela es una isometría (véase Teorema 1.8.11 de [41]). A esta derivada se denomina derivada de Levi-Cività.

Exponemos, a continuación, algunas propiedades de la función exponencial. Véase [43, 41], para una demostración del siguiente teorema.

Teorema 1.2. *Sea (M, g) una variedad riemanniana. Consideramos la derivación de Levi-Cività. Entonces para cada $x \in M$ existe un numero $r > 0$ tal que la aplicación $\exp_x : B(0_x, r) \subset TM_x \to M$ está definida y verifica:*

1. $\exp_x : B(0_x, \delta) \to B_M(x, \delta)$ *es un difeomorfismo bi-Lipschitz C^∞, para toda $\delta \in (0, r]$.*

2. $\exp_x$ *transforma segmentos que pasan por 0_x y están contenidos en $B(0_x, r)$ en geodésicas en $B_M(x, r)$.*

3. $d\exp_x(0_x) = id_{TM_x}$.

En particular, teniendo en consideración la condición 3, para cada $C > 1$, el radio r puede ser elegido suficientemente pequeño para que las aplicaciones $\exp_x : B(0_x, r) \to B_M(x, r)$ y $\exp_x^{-1} : B_M(x, r) \to B(0_x, r)$ sean C-Lipschitz.

Cualquier camino γ que une p y q en M y tal que $L(\gamma) = d(p, q)$ es una geodésica, y se denomina geodésica minimal. En lo que sigue, si no se especifica lo contrario, supondremos que un camino geodésico esta parametrizado por la longitud del arco.

La traslación paralela nos da, de forma natural, la diferencia de las medidas de longitud entre vectores (o formas) que están en diferentes espacios tangentes (o en duales de espacios tangentes, esto es, en diferentes fibras del fibrado cotangente) siempre que exista una geodésica minimizante que una sus proyecciones en M. Sea γ una geodésica minimizante que conecte dos puntos $x, y \in M$, de forma que $\gamma(t_0) = x, \gamma(t_1) = y$. Sean los vectores $V \in TM_x$, $W \in TM_y$, entonces podemos definir la distancia entre V y W como el número

$$\|W - P_{t_0,\gamma}^{t_1}(V)\|_y = \|V - P_{t_1,\gamma}^{t_0}(W)\|_x$$

(esta igualdad es cierta porque $P_{t_0}^{t_1}$ es una isometría lineal entre dos espacios tangentes, con inversa $P_{t_1}^{t_0}$). Del hecho de que los espacios T^*M_x y TM_x son isométricamente identificables por la formula $v = \langle v, \cdot \rangle$, podemos, de manera obvia, utilizar el mismo método seguido en espacios tangentes, para medir distancias entre formas $\xi \in T^*M_x$ y $\eta \in T^*M_y$ que se encuentran en diferentes fibras del fibrado cotangente.

Teorema 1.3 (Hopf-Rinow). *Si M es una variedad finito-dimensional riemanniana completa y conexa, entonces existe al menos una geodésica minimal que conecta dos puntos cualquiera de M.*

En otro orden de cosas, para cualquier punto p dado, la afirmación "q puede ser unido a p por una única geodésica minimal" es cierta para casi todo $q \in M$; ver [44]. Como es bien conocido, el teorema de Hopf-Rinow falla cuando M es infinito-dimensional, pero Ekeland [32] probó (utilizando su celebre principio variacional) que, en infinitas dimensiones, el conjunto de puntos que pueden ser unidos por una geodésica minimal en M es denso.

Teorema 1.4 (Ekeland). *Si M es una variedad riemanniana de dimensión infinita, completa y conexa, entonces para cualquier punto p dado, el conjunto* $\{q \in M : q$ que pueden ser unidos a p por una unica geodésica minimal $\}$ *es residual en M.*

Recalcamos que una variedad riemanniana M, se dice que es *geodésicamente completa* cuando el intervalo maximal de definición de cada geodésica en M es $\mathbb{R}$. Esto es equivalente a decir que para cualquier $x \in M$, la aplicación exponencial $\exp_x$ está definida en todo el espacio tangente TM_x (aunque, no obstante, $\exp_x$ no es necesariamente inyectiva en TM_x). Sabemos también que toda variedad riemanniana completa es geodésicamente completa. De hecho se tiene el siguiente resultado (véase [43], p. 224 para una demostración).

Proposición 1.5. *Sea (M, g) una variedad riemanniana. Considérese las siguientes condiciones:*

1. *M es completa (con respecto a la g-distancia).*
2. *M es geodésicamente completa.*
3. *Para cualquier $x \in M$, la aplicación exponencial $\exp_x$ está definida en todo TM_x.*
4. *Existe algún $x \in M$ tal que la aplicación exponencial $\exp_x$ está definida en todo TM_x.*

Entonces $(1) \implies (2) \implies (3) \implies (4)$, *y si suponemos que M es* finito-dimensional, *entonces todas las condiciones son equivalentes a cinco:*

5. *Cada conjunto de M cerrado y d_g-acotado es compacto.*

Ahora estableceremos algunos resultados acerca de la convexidad en variedades riemannianas.

Definición 1.6. Diremos que un subconjunto U de una variedad riemanniana es *convexo* si para cualquier x e y, $x, y \in U$, existe una única geodésica que une x e y, tal que la longitud de la geodésica es igual a $\mathrm{dist}(x, y)$, y que está contenida en U.

Cada variedad riemanniana es *localmente convexa*, en el siguiente sentido.

Teorema 1.7 (Whitehead). *Sea M una variedad riemanniana. Para cada $x \in M$, existe $c > 0$ tal que para todo r con $0 < r < c$, la bola abierta $B(x, r) = \exp_x B(0_x, r)$ es convexa.*

Este teorema justifica la necesidad de introducir la noción de variedad *uniformemente localmente convexa*, que será utilizada de manera relevante cuando desarrollemos los principios variacionales y las ecuaciones de Hamilton-Jacobi en variedades riemannianas.

Definición 1.8. Diremos que una variedad riemanniana M es *uniformemente localmente convexa* cuando existe $c > 0$ tal que para cada $x \in M$ y cada r con $0 < r < c$ la bola $B(x, r) = \exp_x B(0_x, r)$ es convexa.

Definición 1.9. El radio de convexidad de un punto $x \in M$ en una variedad riemanniana M lo definimos como el supremo en $\overline{\mathbb{R}^+}$ de los numeros $r > 0$ tales que la bola $B(x, r)$ es convexa. Anotamos este supremo por $c(M, x)$, y definimos el radio de convexidad global de M como $c(M) := \inf\{c(M, x) : x \in M\}$.

Observación 1.10. *De las definiciones precedentes se concluye directamente que una variedad riemanniana M es uniformemente localmente convexa cuando, y sólo cuando, $c(M) > 0$.*

Observación 1.11. *Por el teorema de Whitehead sabemos que $c(x, M) > 0$ para cada $x \in M$. En otro orden de cosas, la función $x \mapsto c(x, M)$ es continua en M, véase [41, Corollary 1.9.10]. Consecuentemente, si M es compacta, entonces $c(M) > 0$, esto es, M es uniformemente localmente convexa.*

La noción de radio de inyectividad de una variedad riemanniana, también, jugará un papel relevante en el estudio de los principios variacionales y las ecuaciones de Hamilton-Jacobi.

Definición 1.12. Definimos el radio de inyectividad de una variedad riemanniana M en un punto $x \in M$ como el supremo en $\overline{\mathbb{R}^+}$ de los números $r > 0$ tales que $\exp_x$ es un difeomorfismo de clase C^∞ entre la bola $B(0_x, r)$ y su imagen. Anotamos este supremo por $i(M, x)$. El radio de inyectividad de M lo definimos por $i(M) := \inf\{i(M, x) : x \in M\}$.

Observación 1.13. *Para una variedad finito-dimensional M, se prueba que $i(M, x)$ equivale al supremo de lo números $r > 0$ tales que $\exp_x$ es inyectiva cuando la restringimos a la bola $B(0_x, r)$, véase [41]. Si embargo, para variedades infinito dimensionales no está claro si esta afirmación es siempre verdadera.*

Observación 1.14. *Por el Teorema 1.2 sabemos que $i(x, M) > 0$ para cada $x \in M$. También conocemos que la función $x \mapsto i(x, M)$ es continua en M [41, Proposition 2.1.10]. Consecuentemente, si M es compacta, entonces $i(M) > 0$.*

Definición 1.15. Sea M una variedad riemanniana, y $T_1M = \{X \in TM : \|X\| = 1\}$. Sea $X \in T_1$ con proyección $\tau X = p$ y $\sigma(X)$ el supremo de los t con $d(p, \exp_p tX) = t$. Para $p \in M$ denotamos por $\widetilde{C}(p)$ al conjunto de los elementos $\sigma(X)X \in T_pM$ con $X \in T_pM \cap T_1M$ cuando $\sigma(X)$ es finito. Al conjunto $\widetilde{C}(p)$ se denomina *cut locus tangencial* de p, y su imagen $C(p)$ por la función $\exp_p$ se denomina *cut locus* de p.

Observación 1.16. *Del Lema 2.1.11 de [41] se desprende que cuando la variedad riemanniana M es completa y finito dimensional el radio de inyectividad en un punto $x \in M$ está caracterizado por la distancia de x al cut locus $C(x)$ de x. Por tanto, para cada $x \in M$ y cada $r > 0$ con $r < i(M,x)$, la función $\exp_x$ es un difeomorfismo que preserva las distancias radiales cuando se restringe a la bola de radio r en el espacio tangente TM_x.*

Finalmente consideramos algunos teoremas del valor medio. Los dos resultados siguientes se deducen fácilmente de los teoremas del valor medio para funciones de una variable, pero es conveniente establecerlos con precisión y demostrarlos para utilizarlos en futuras referencias.

Teorema 1.17 (Teorema del Valor Medio). *Sea (M,g) una variedad riemanniana , y $f : M \to \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable Fréchet, entonces para cada par de puntos $p, q \in M$, y cualquier camino geodésico minimal $\sigma : I \to M$ que una p y q, existe $t_0 \in I$ tal que*

$$f(p) - f(q) = d(p,q) df(\sigma(t_0))(\sigma'(t_0));$$

en particular $|f(p) - f(q)| \leq \|df(\sigma(t_0))\|_{\sigma(t_0)} d(p,q)$.

Demostración. Del hecho de que σ es una geodésica minimal podemos suponer que $I = [0, d(p,q)]$ y $\|\sigma'(t)\|_{\sigma(t)} = 1$ para todo $t \in I$, $\sigma(0) = q$, $\sigma(d(p,q)) = p$. Consideramos la función $h : I \to \mathbb{R}$ definida por $h(t) = f(\sigma(t))$. Aplicando el teorema del valor medio a la función h tenemos un punto $t_0 \in I$ tal que

$$f(p) - f(q) = h(d(p,q)) - h(0) = h'(t_0)(d(p,q) - 0) = df(\sigma(t_0))(\sigma'(t_0)) d(p,q),$$

y, considerando que $\|\sigma'(t_0)\|_{\sigma(t_0)} = 1$ y $|df(\sigma(t_0))(\sigma'(t_0))| \leq \|df(\sigma(t_0))\|_{\sigma(t_0)}$, se obtiene $|f(p) - f(q)| \leq \|df(\sigma(t_0))\|_{\sigma(t_0)} d(p,q)$. □

Cuando los puntos no pueden ser unidos por una geodésica minimal tenemos un resultado menos preciso que establece que si una función tiene derivada acotada, entonces es Lipschitz con respecto a la g-distancia en M. Este resultado sigue siendo cierto cuando las funciones están valoradas en una variedad riemanniana. Para una función diferenciable entre variedades riemannianas $f : M \to N$, definimos la norma de la derivada $df(p)$ en un punto $p \in M$ por

$$\|df(p)\|_p := \sup\{\|df(p)(v)\|_{f(p)} : h \in TM_p, \|v\|_p \leq 1\} =$$
$$\sup\{\zeta\big(df(p)(v)\big) : v \in TM_p, \zeta \in T^*N_{f(p)}, \|v\|_p = 1 = \|\zeta\|_{f(p)}\}.$$

Teorema 1.18 (Desigualdad de valor medio). *Sean M, N variedades riemannianas , y $f : M \to N$ una aplicación Fréchet diferenciable. Suponemos que f tiene derivada acotada, de forma más precisa $\|df(x)\|_x \leq C$ para cada $x \in M$, entonces f es C-Lipschitz, esto es*

$$d_N\big(f(p), f(q)\big) \leq C d_M(p, q)$$

para todo $p, q \in M$.

Demostración. Fijemos dos puntos cualquiera $p, q \in M$. Tomamos cualquier $\varepsilon > 0$. Por definición de $d(p, q)$, existe un camino C^1 $\gamma : [0, T] \to M$ con $\gamma(0) = q$, $\gamma(T) = p$, y

$$L(\gamma) \leq d_M(p, q) + \frac{\varepsilon}{C};$$

Podemos suponer que $\|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)} = 1$ para todo $t \in [0, T] = [0, L(\gamma)]$. Considerando el camino $\beta(t) := f(\gamma(t))$, que une los puntos $f(p)$ y $f(q)$ en N, y teniendo presente la definición de $d_N(f(p), f(q))$ y el hecho de que $\|d\gamma(t)\|_{\gamma(t)} = 1$ para todo t, tenemos

$$d_N\big(f(p), f(q)\big) \leq L(\beta) = \int_0^T \|d\beta(t)\|_{\beta(t)} dt = \int_0^T \|df(\gamma(t))(d\gamma(t))\|_{f(\gamma(t))} dt \leq$$

$$\int_0^T \|df(\gamma(t))\|_{\gamma(t)} dt \leq \int_0^T C dt = CT \leq C\big(d_M(p, q) + \varepsilon/C\big) = C d_M(p, q) + \varepsilon.$$

Por tanto $d_N(f(p), f(q)) \leq C d_M(p, q) + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ de donde se obtiene que $d_N(f(p), f(q)) \leq C d_M(p, q)$. □

En la sección 4.6. del capítulo 4 se generalizan estos teoremas del valor medio a los casos de subdiferenciabilidad y superdiferenciabilidad de funciones definidas en variedades riemannianas.

El siguiente teorema del valor medio es un resultado inverso del último teorema, que es inmediato cuando los espacios M y N son espacios de Hilbert, pero requiere justificación cuando se trata de variedades riemannianas.

Proposición 1.19. *Sean M, N variedades riemannianas. Si $f : M \to N$ son K-Lipschitz (esto es, $d_N(f(x), f(y)) \leq K d_M(x, y)$ para todo $x, y \in M$), entonces $\|df(x)\|_x \leq K$ para todo $x \in M$.*

Demostración. Consideramos primero el caso $N = \mathbb{R}$. Suponemos que existe $x_0 \in M$ con $\|df(x_0)\|_{x_0} > K$. Tomamos $v_0 \in TM_{x_0}$ tal que $\|v_0\|_{x_0} = 1$ y $df(x_0)(v_0) > K$. Consideramos la geodésica $\gamma(t) = \exp_{x_0}(tv_0)$ definida por $|t| \leq r_0$ con $r_0 > 0$ suficientemente pequeño. Definimos $F : [-r_0, r_0] \to \mathbb{R}$ por $F(t) =$

$f(\gamma(t))$. Tenemos que $F'(0) = df(x_0)(v_0) > K$. Por la definición de $F'(0)$ existe algún $\delta_0 \in (0, r_0)$ tal que

$$\frac{F(t) - F(0)}{t} > K \text{ if } |t| \leq \delta_0.$$

Tomando $t_1 = -\delta_0$, $t_2 = \delta_0$ y poniendo $F(t_1) - F(0) < Kt_1$ y $F(t_2) - F(0) > Kt_2$, se obtiene, sumando las expresiones,

$$F(t_2) - F(t_1) > K(t_2 - t_1).$$

Si ponemos $x_1 = \gamma(t_1)$, $x_2 = \gamma(t_2)$ en la expresión anterior

$$f(x_2) - f(x_1) > K(t_2 - t_1) = Kd(x_2, x_1),$$

lo que contradice que f es K-Lipschitz.

Ahora consideramos el caso general, cuando el conjunto de llegada es una variedad riemanniana N.

Supongamos que $\|df(x_0)\|_{x_0} > K$ para algún $x_0 \in M$, entonces existe algún $\zeta_0 \in T^*N_{f(x_0)}$ y $v_0 \in TM_{x_0}$ con $\|v_0\|_{x_0} = 1 = \|\zeta_0\|_{f(x_0)}$ y tal que $K < \|df(x_0)\|_{x_0} = \zeta_0\big(df(x_0)(v_0)\big)$.

Tomamos $s_0 > 0$ y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño para que $\exp^{-1}_{f(x_0)} : B(f(x_0), s_0) \to B(0_{f(x_0)}, s_0)$ sea un difeomorfismo $(1+\varepsilon)$-Lipschitz y $K < (1+\varepsilon)K < \|df(x_0)\|_{x_0}$. Ahora tomamos $r_0 > 0$ suficientemente pequeño para que $f(B(x_0, r_0)) \subset B(f(x_0), s_0)$, y definimos la composición

$$g : B(x_0, r_0) \to \mathbb{R},\ g(x) = \zeta_0\big(\exp^{-1}_{f(x_0)}(f(x))\big).$$

Es evidente que g es $(1+\varepsilon)K$-Lipschitz. Pero, del hecho de que $d\exp^{-1}_{f(x_0)}(f(x_0))$ es la identidad, tenemos que

$$\begin{aligned} dg(x_0)(v_0) = \zeta_0\big(d\exp^{-1}_{f(x_0)}(f(x_0))(df(x_0)(v_0))\big) = \\ \zeta_0\big(df(x_0)(v_0)\big) = \|df(x_0)\|_{x_0} > (1+\varepsilon)K, \end{aligned}$$

y esto contradice el resultado que hemos probado en el caso $N = \mathbb{R}$. $\square$

Capítulo 2

Principio variacional suave en variedades riemannianas

Como ya advertimos en la introducción general, en un espacio de Hilbert de dimensión infinita X, las funciones de clase C^∞ de X en $\mathbb{R}$ que no tienen ningún punto crítico son densas en el espacio de las funciones continuas $C(X, \mathbb{R})$. Esto conlleva que, dada una función regular en una variedad riemanniana infinito-dimensional, en general carecemos de expectativas de encontrar algún punto crítico, independientemente de la forma que tenga la función, y que los problemas de optimización sean mucho más difíciles de abordar que en dimensión finita. Tendremos por tanto que recurrir a resultados que permitan garantizar la existencia de puntos casi críticos, es decir, puntos en los que la derivada es muy pequeña (pero no nula en general). Los principios variacionales, también llamados principios de minimización perturbada, nos proporcionan tales puntos críticos aproximados (bien entendido, en los casos en que la forma de la función en cuestión indica que, si nos encontráramos en un contexto finito dimensional en lugar de en un espacio de dimensión infinita, dicha función debería tener un máximo o un mínimo). En las últimas décadas del pasado siglo varios autores establecieron y estudiaron resultados en esta línea. Aquí solo mencionaremos los que nos parecen más significativos: el principio de Ekeland, el de Borwein-Preiss, y el de Deville-Godefroy-Zizler. Históricamente, el principio variacional de Ekeland fue el primero en aparecer, el que se aplica a la clase mayor de espacios (los espacios métricos completos), y todavía uno de los más potentes y que siguen generando más aplicaciones. A continuación damos su enunciado (ver [31] para una demostración).

Teorema 2.1 (Principio Variacional de Ekeland). *Sea X un espacio métrico completo, y sea $f : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ una función propia semicontinua inferiormente que está acotada inferiormente. Sean $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in X$ tales que $f(x_0) < \inf\{f(x) : x \in X\} + \varepsilon$. Entonces, para cada λ con $0 < \lambda < 1$, existe un* *punto* $z \in Dom(f)$ *tal que:*

(i) $\lambda d(z, x_0) + f(z) \leq f(x_0)$

(ii) $d(z, x_0) < \varepsilon/\lambda$

(iii) $f(z) < \lambda d(x, z) + f(x)$ *para todo* $x \in X$ *tal que* $x \neq z$.

Esto significa, groseramente, que cualquier función semicontinua inferiormente puede ser perturbada por una función con forma de cono casi liso en todas las direcciones de modo que la diferencia alcance un mínimo global. El principio de Borwein-Preiss es válido en el marco de los espacios de Banach con normas diferenciables, pero puede enunciarse de una forma mucho más simple y atractiva en el caso de un espacio de Hilbert, como vemos a continuación. En este caso la función con la que se perturba la original es un múltiplo pequeño del cuadrado de la distancia a un determinado punto z, función que es relativamente plana en las proximidades del punto y donde la perturbación alcanza su mínimo, y que a la vez presenta la ventaja de ser diferenciable en todos los puntos (lo que no ocurre con los conos de Ekeland).

Teorema 2.2. *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Hilbert,* $f : X \to (-\infty, \infty]$ *una función semicontinua inferiormente y acotada inferiormente,* $\varepsilon > 0$. *Sea* $x_0 \in X$ *tal que* $f(x_0) < \inf f + \varepsilon$. *Entonces, para cada* $\lambda > 0$, *existen* $z \in B(x_0, \lambda)$, $y \in B(z, \lambda)$, *tales que* $f(y) \leq f(x_0)$ *y la función*

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda^2}\|x - z\|^2$$

alcanza un mínimo fuerte en y.

El hecho de que toda variedad riemanniana es un espacio métrico nos permite aplicar, de forma inmediata, el principio variacional de Ekeland en cualquier variedad riemanniana completa. Pero algunas veces, y especialmente cuando queremos construir una buena teoría de subdiferenciabilidad, necesitamos sustituir el cono por una función regular arbitrariamente pequeña y con constante de Lipschitz también pequeña. Esto es justamente lo que consigue, en el contexto de los espacios de Banach con suficientes funciones diferenciables, el principio variacional suave de Deville-Godefroy-Zizler, cuyo enunciado damos también a continuación. Utilizamos las siguientes notaciones: $\|\varphi\|_\infty = \sup\{|\varphi(x)| : x \in X\}$, $\|\varphi'\|_\infty = \sup\{\|\varphi'(x)\| : x \in X\}$.

Teorema 2.3. *Sea* X *un espacio de Banach con una función meseta de clase* C^1 *y Lipschitz, y sea* $F : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ *una función propia, semicontinua* *inferiormente y acotada inferiormente. Entonces, para cada $\delta > 0$, existen una función φ de clase C^1 con derivada acotada y un punto $x_0 \in X$ tales que:*

1. *$F - \varphi$ alcanza un mínimo en X en el punto x_0,*
2. *$\|\varphi\|_\infty < \delta$, y $\|\varphi'\|_\infty < \delta$.*

Cuando el espacio de Banach X posee una función meseta de clase C^p con derivadas todas ellas acotadas puede darse una versión más refinada de este resultado. A continuación enunciamos una particularización del caso $p = 2$ que utilizaremos en las demostraciones de algunos resultados del Capítulo 3. Para un enunciado más general y una demostración adecuada, se puede consultar [28].

Teorema 2.4. *Sea X un espacio de Banach con una función meseta de clase C^2 con derivadas acotadas, y sea $F : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ una función propia, semicontinua inferiormente y acotada inferiormente. Entonces, para cada $\delta > 0$, existen una función φ de clase C^2 con derivadas acotadas y un punto $x_0 \in X$ tales que:*

1. *$F - \varphi$ alcanza un mínimo en X en el punto x_0,*
2. *$\|\varphi\|_\infty < \delta$, $\|\varphi'\|_\infty < \delta$, y $\|\varphi''\|_\infty < \delta$.*

Desafortunadamente, las ideas de la demostración del Principio Variacional DGZ en espacios de Banach no pueden ser transferidas, de forma general, cuando se trata de variedades riemannianas. Es necesario, en principio, imponer ciertas condiciones a la variedad. La siguiente definición apunta en esta dirección.

2.1. Concepto de variedad riemanniana uniformemente mesetable

Definición 2.5. *Diremos que una variedad riemanniana M es* uniformemente mesetable *cuando existan dos números $R > 1$ (posiblemente grande) y $r > 0$ (pequeño) tales que para todo $p \in M$ y $\delta \in (0, r)$ existe una función $b : M \to [0, 1]$ de clase C^1 tal que:*

1. *$b(p) = 1$*
2. *$b(x) = 0$ si $d(x, p) \geq \delta$*
3. *$\sup_{x \in M} \|db(x)\|_x \leq R/\delta$.*

Observación 2.6. *Es fácil ver que toda variedad riemanniana M es* mesetable*, en el sentido de que para todo $p \in M$ y $\delta > 0$, existe una función meseta $b : M \to [0,1]$ con $b(p) = 1$, $b(x) = 0$ para $x \notin B(p,\delta)$, y b es Lipschitz, esto es* $\sup_{x\in M} \|db(x)\|_x < \infty$*. Lo que no está claramente determinado son las variedades riemannianas uniformemente mesetables. De hecho un espacio de Hilbert es uniformemente mesetable, y existen muchos ejemplos naturales de variedades riemannianas que son uniformemente mesetables. Lo que no conocemos es ningún ejemplo de variedad riemanniana que no sea uniformemente mesetable.*

Problema abierto 2.7. ¿Son uniformemente mesetables todas las variedades riemannianas?.

Lema 2.8. *Sea M una variedad riemanniana. Si M es uniformemente mesetable, entonces $M \times M$ es uniformemente mesetable, también.*

Demostración. La estructura natural riemanniana en $M \times M$ está inducida por la de (M, g) en el siguiente sentido

$$(g \times g)_{(p_1,p_2)}\big((v_1, v_2),\, (w_1, w_2)\big) := g_{p_1}(v_1, w_1) + g_{p_2}(v_2, w_2).$$

Sea $d_{M\times M}$ la notación de la distancia que la métrica riemanniana da al producto $M \times M$. Es obvio que si $\gamma(t) = \big(\alpha(t), \beta(t)\big)$ es un camino en $M \times M$, entonces α y β son caminos en M que satisfacen

$$\text{máx}\{L(\alpha), L(\beta)\} \le L(\gamma) \le L(\alpha) + L(\beta) \le 2\,\text{máx}\{L(\alpha), L(\beta)\},$$

lo que implica

$$\begin{aligned} &\text{máx}\{d_M(x_1, y_1), d_M(x_2, y_2)\} \le d_{M\times M}\big((x_1, x_2),\, (y_1, y_2)\big) \le \\ &d_M(x_1, y_1) + d_M(x_2, y_2) \le 2\,\text{máx}\{d_M(x_1, y_1), d_M(x_2, y_2)\} \end{aligned}$$

para todo $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in M \times M$. Como M es uniformemente mesetable, existen números $R = R_M > 1$ y $r_M > 0$ tales que para todo $p_0 \in M$, $\delta \in (0, r_M)$ existe una función, $b : M \to [0, 1]$ de clase C^1, tal que $b(p_0) = 1$, $b(x) = 0$ si $d_M(x, p_0) \ge \delta$, y $\sup_{x\in M} \|db(x)\|_x \le R/\delta$. Ahora tomamos un punto cualquiera $p = (p_1, p_2) \in M \times M$. Para todo $\delta \in (0, r_M)$, existen funciones meseta, b_1, b_2, regulares de clase C^1 en M tales que $b_i(p_i) = 1$, $b_i(x_i) = 0$ cuando $d_M(x_i, p_i) \ge \delta$, y $\|db(x_i)\| \le R/\delta$ para todo $x_i \in M$; $i = 1, 2$. Definimos una función meseta, $b : M \times M \to \mathbb{R}$, de clase C^1 por

$$b(x) = b(x_1, x_2) = b_1(x_1)b_2(x_2) \text{ for all } x = (x_1, x_2) \in M \times M.$$

Es obvio que $b(p_1, p_2) = 1$. Si $d_{M\times M}(x, p) \ge 2\delta$, entonces tenemos que

$$2\,\text{máx}\{d_M(x_1, p_1), d_M(x_2, p_2)\} \ge d_{M\times M}(x, p) \ge 2\delta,$$

cuando $d_M(x_i, p_i) \geq \delta$ para algún $i \in \{1, 2\}$, por tanto $b_i(x_i) = 0$ para algún i, y $b(x) = 0$. Finalmente, tenemos que

$$\|db(x_1, x_2)\|^2_{(x_1,x_2)} = \|db_1(x_1)\|^2_{x_1} + \|db_2(x_2)\|^2_{x_2} \leq 2(R/\delta)^2,$$

o, lo que es similar

$$\|db(x)\|_x \leq \frac{2\sqrt{2}R}{2\delta}$$

para todo $x = (x_1, x_2) \in M \times M$. Por tanto $M \times M$ satisface las condiciones de la definición 2.5, con $R_{M\times M} = 2\sqrt{2}R$, y $r_{M\times M} = 2r_M$. □

El siguiente teorema ofrece algunas condiciones suficientes para que una variedad riemanniana sea uniformemente mesetable.

Teorema 2.9. *Sea M una variedad riemanniana. Consideramos las siguientes seis condiciones:*

1. *M es compacta.*

2. *M es finito-dimensional, completa, y tiene radio de inyectividad $i(M)$ estrictamente positivo.*

3. *M es uniformemente localmente convexa y tiene radio de inyectividad $i(M)$ estrictamente positivo.*

4. *Existe una constante $r > 0$ tal que para todo $x \in M$ la aplicación $\exp_x$ está definida en $B(0_x, r) \subset TM_x$, $\exp_x : B(0_x, r) \to B(x, r)$ es un difeomorfismo de clase C^∞, y la función distancia está dada por la expresión*

$$d(y, x) = \| \exp_x^{-1}(y)\|_x \quad \textit{for all} \quad y \in B(x, r).$$

5. *Existe una constante $r > 0$ tal que para todo $x \in M$ la función distancia a x, $y \in M \mapsto d(y, x)$, es de clase C^∞ en $B(x, r) \setminus \{x\}$.*

6. *M es uniformemente mesetable.*

Entonces $(1) \implies (2) \implies (3) \iff (4) \implies (5) \implies (6)$.

Demostración. $(1) \implies (2)$ es una consecuencia trivial de la observación 1.14.

$(2) \implies (3)$: Es consecuencia inmediata de la observación 1.16.

$(3) \implies (4)$: Considerando que $i(M) > 0$, y sabiendo que existe algún $r_1 > 0$ tal que $\exp_x$ es un difeomorfismo en su imagen cuando se restringe a la bola

$B(0_x, r_1)$, para todo $x \in M$. El hecho de que M es uniformemente localmente convexa implica que existe algún $r_2 > 0$ tal que

$$d(y,x) = \| \exp_x^{-1}(y)\|_x \text{ for all } y \in B(x, r_2).$$

Podemos suponer, obviamente, que $r_1 = r_2 := r$. En particular $\exp_x$ aplica $B(0_x, r)$ en $B(x, r)$.

(4) $\implies$ (3) es obvio.

(4) $\implies$ (5) es trivial, de los hechos de que $\exp_x^{-1}$ es un C^∞ difeomorfismo entre dos bolas, $\| \cdot \|_x$ es C^∞ en $TM_x \setminus \{0_x\}$, y $d(y,x) = \| \exp_x^{-1}(y)\|_x$ para todo $y \in B(x, r)$.

(5) $\implies$ (6): Suponemos que la función distancia $y \mapsto d(y,x)$ es C^∞ en $B(x,r) \setminus \{x\}$. Sea $\theta : \mathbb{R} \to [0,1]$ una función C^∞ y Lipschitz tal que $\theta^{-1}(1) = (-\infty, 1/3]$ y $\theta^{-1}(0) = [1, \infty)$. Para un punto dado $x \in M$ y un número $\delta \in (0, r)$, definimos $b : M \to [0,1]$ por

$$b(y) = \theta\big(\frac{1}{\delta} d(y,x)\big).$$

Teniendo en consideración el hecho de que de que la función distancia $y \mapsto d(y,x)$ es 1-Lipschitz y que la norma de su derivada está acotada por 1 en todos los puntos (ver proposición 1.19), es fácil comprobar que b satisface las condiciones 1-2-3 de la definición 2.5, para una constante $R = \|\theta'\|_\infty > 1$ que sólo depende de la función θ, pero no del punto $x \in M$. □

Observación 2.10. *La condición de que M tenga radio de inyectividad estrictamente positivo no es necesaria para que M sea uniformemente mesetable, como se puede ver en el siguiente ejemplo. Sea M la superficie de $\mathbb{R}^3$ definida por la ecuación $z = 1/(x^2 + y^2)$, $(x, y) \neq (0, 0)$, con la estructura riemanniana natural inducida por $\mathbb{R}^3$, entonces $i(M) = 0$ y no es difícil comprobar que M es uniformemente mesetable.*

2.2. Principios variacionales en variedades riemannianas

El siguiente teorema es una extensión natural del Principio Variacional suave de Deville-Godefroy-Zizler a variedades riemannianas uniformemente mesetables. Recordamos que una función $F : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ se dice que alcanza un mínimo fuerte en p cuando $F(p) = \inf_{x \in M} F(x)$ y $\lim_{n\to\infty} d(p_n, p) = 0$ cuando (p_n) es una sucesión minimizante (esto es, si $\lim_{n\to\infty} F(p_n) = F(p)$).

Teorema 2.11 (Principio Variacional Suave en Variedades). *Sea (M, g) una variedad riemanniana completa que sea uniformemente mesetable, y sea $F : M \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ una función semicontinua inferiormente y acotada inferiormente, $F \not\equiv +\infty$, entonces para cada $\delta > 0$ existe una función de clase C^1 y acotada $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

1. *$F - \varphi$ alcanza un mínimo fuerte en M,*

2. *$\|\varphi\|_\infty := \sup_{p \in M} |\varphi(p)| < \delta$, y $\|d\varphi\|_\infty := \sup_{p\in M} \|d\varphi(p)\|_p < \delta$.*

Observación 2.12. *La suposición de que M es completa es necesaria, basta observar el siguiente ejemplo trivial: $M = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$, $f(x) = x$.*

La demostración del teorema 2.11 es consecuencia de los tres lemas que presentamos a continuación. En lo que sigue $B(x, r)$ denota la bola abierta de centro x y radio r en el espacio métrico M, y $B(\varphi, r)$ la bola abierta de centro φ y radio r en el espacio de Banach Y.

Lema 2.13. *Sea M un espacio métrico completo, y $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach de funciones reales acotadas y continuas en M que satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *$\|\varphi\| \geq \|\varphi\|_\infty = \sup\{|\varphi(x)| : x \in M\}$ para cada $\varphi \in Y$.*

2. *Existen números $C > 1, r > 0$ tales que para cada $p \in M$, $\varepsilon > 0$ y $\delta \in (0, r)$ existe una función $b \in Y$ tal que $b(p) = \varepsilon$, $\|b\|_Y \leq C\varepsilon(1 + 1/\delta)$, y $b(x) = 0$ si $x \notin B(p, \delta)$.*

Sea $f : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función semicontinua inferiormente, acotada inferiormente y tal que $Dom(f) = \{x \in M | f(x) < +\infty\} \neq \emptyset$, entonces el conjunto G de todas las funciones $\varphi \in Y$ tales que $f + \varphi$ alcanza un mínimo fuerte en M contienen un subconjunto G_δ denso de Y.

Demostración. Dado un número $N \in \mathbb{N}$ tal que $N \geq 1/r$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq N$, consideramos el conjunto

$$U_n = \{\varphi \in Y | \, \exists \, x_0 \in M \; : \; (f + \varphi)(x_0) < \inf\{(f + \varphi)(x) | x \in M \backslash B(x_0, \frac{1}{n})\}\}.$$

Probaremos, en primer lugar, que U_n es un subconjunto abierto denso de Y. En efecto,

• U_n es abierto. Dado $\varphi \in U_n$. Por la definición de U_n existe $x_0 \in M$ tal que $(f + \varphi)(x_0) < \inf\{(f + \varphi)(x) | x \in M \backslash B(x_0, \frac{1}{n})\}$. Tomando $2\rho = \inf\{(f + \varphi)(x) | x \in$

$M\backslash B(x_0, \frac{1}{n})\} - (f+\varphi)(x_0) > 0$ y del hecho $\|\cdot\|_Y \geq \|\cdot\|_\infty$, se obtiene que $B_Y(\varphi, \rho) \subset B_\infty(\varphi, \rho) \subset U_n$.

• U_n es denso en Y. Tomando $\varphi \in Y$ y $\varepsilon > 0$. Dado que $f+\varphi$ está acotada inferiormente existe $x_0 \in M$ tal que $(f+\varphi)(x_0) < \inf\{(f+\varphi)(x)|x \in M\} + \varepsilon$. Ponemos ahora $\delta = 1/n < r$, y utilizamos la condición (2) para tomar una función $b \in Y$ tal que $b(x_0) = \varepsilon$, $\|b\|_Y \leq C(n+1)\varepsilon$, y $b(x) = 0$ para $x \notin B(x_0, \frac{1}{n})$, entonces $(f+\varphi)(x_0) - b(x_0) < \inf\{(f+\varphi)(x)|x \in M\}$, y si definimos $h = -b$, tenemos que

$$(f+\varphi+h)(x_0) < \inf\{(f+\varphi)(x)|x \in M\} \leq \inf\{(f+\varphi)(x)|x \notin B(x_0, \frac{1}{n})\}.$$

Por tanto $\inf\{(f+\varphi)(x)|x \notin B(x_0, \frac{1}{n})\} = \inf\{(f+\varphi+h)(x)|x \notin B(x_0, \frac{1}{n})\}$, y es obvio que la última desigualdad implica que $\varphi + h \in U_n$. Por otra parte tenemos que $\|h\|_Y \leq C(n+1)\varepsilon$, y como C y n son fijos y ε puede tomarse arbitrariamente pequeño, se obtiene que $\varphi \in \overline{U_n}$, y así probamos que U_n es denso en Y. Podemos aplicar el teorema de Baire para concluir que el conjunto $G = \bigcap_{n=N}^{\infty} U_n$ es un subconjunto denso G_δ de Y. Nos falta probar que si $\varphi \in G$ entonces $f+\varphi$ alcanza un mínimo fuerte en M. Para cada $n \geq N$, tomamos $x_n \in M$ tal que $(f+\varphi)(x_n) < \inf\{(f+\varphi)(x)|x \notin B(x_n, \frac{1}{n})\}$. Claramente, $x_k \in B(x_n, \frac{1}{n})$ si $k \geq n$, lo que implica que $(x_n)_{n=N}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en M y por tanto converge a algún $x_0 \in M$. Como f es semicontinua inferiormente y $\bigcap_{n=N}^{\infty} B(x_0, 1/n) = \{x_0\}$, se tiene

$$\begin{aligned}
&(f+\varphi)(x_0) \leq \liminf (f+\varphi)(x_n) \\
&\leq \liminf[\inf\{(f+\varphi)(x)|x \in M \setminus B(x_0, \frac{1}{n})\}] \\
&= \inf\{\inf\{(f+\varphi)(x)|x \in M \setminus B(x_0, \frac{1}{n})\} : n \in \mathbb{N}, n \geq N\} \\
&= \inf\{(f+\varphi)(x)|x \in M \setminus \{x_0\}\},
\end{aligned}$$

por tanto $f+\varphi$ alcanza un mínimo global en $x_0 \in M$. Finalmente, probaremos que $f+\varphi$ alcanza un mínimo fuerte en el punto x_0. Supongamos que $\{y_n\}$ es una sucesión en M tal que $(f+g)(y_n) \to (f+g)(x_0)$ y (y_n) no converge a x_0. Podemos suponer que $d(y_n, x_0) \geq \varepsilon$ para todo n. De la desigualdad anterior y del hecho de que $x_0 = \lim x_n$, podemos tomar $k \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_k, y_n) > \frac{1}{k}$ para todo n, y por lo tanto

$$(f+\varphi)(x_0) \leq (f+\varphi)(x_k) < \inf\{(f+\varphi)(x)|x \notin B(x_k, \frac{1}{k})\} \leq (f+\varphi)(y_n)$$

para todo n, lo que contradice que $(f+\varphi)(y_n) \to (f+\varphi)(x_0)$. □

Lema 2.14. *Sea M una variedad riemanniana uniformemente mesetable, entonces existen números $C > 1$ y $r > 0$ tales que para todo $p \in M$, $\varepsilon > 0$ y $\delta \in (0, r)$ existe una función b de clase C^1, $b : M \to [0, \varepsilon]$, tal que:*

1. $b(p) = \varepsilon = \|b\|_\infty := \sup_{x\in M} |b(x)|$.

2. $\|db\|_\infty := \sup_{x\in M} \|db(x)\|_x \leq C\varepsilon/\delta$.

3. $b(x) = 0$ *si* $x \notin B(p,\delta)$.

En particular, $\text{máx}\{\|b\|_\infty, \|db\|_\infty\} \leq C\varepsilon(1+1/\delta)$.

Demostración. En el caso de $\varepsilon = 1$ la definición de variedad uniformemente mesetable nos da la existencia de b. Si $\varepsilon \neq 1$ basta tomar $b_\varepsilon = \varepsilon b$. □

Lema 2.15. *Sea* (M,g) *una variedad riemanniana completa, entonces el espacio vectorial* $Y = \{\varphi : M \to \mathbb{R} \,|\, \varphi \text{ es de clase } C^1, \text{ acotada y Lipschitz}\}$*, dotado con la norma* $\|\varphi\|_Y = \text{máx}\{\|\varphi\|_\infty, \|d\varphi\|_\infty\}$*, es un espacio de Banach.*

Demostración. Es obvio que $(Y, \|\cdot\|_Y)$ es un espacio normado. Solamente tenemos que ver que Y es completo. Sea (φ_n) una sucesión de Cauchy respecto a la norma $\|\cdot\|_Y$. Del hecho de que el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas entre espacios métricos es una función continua, es obvio que (φ_n) converge uniformemente a una función continua $\varphi : M \to \mathbb{R}$. Dado que T^*M_x es un espacio normado y completo para cada $x \in M$, es claro que $(d\varphi_n)$ converge a una función $\psi : M \to T^*M$ definida por

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} d\varphi_n(x)$$

(donde este límite está en T^*M_x para cada $x \in M$). Veremos que $\psi = d\varphi$. Dado $p \in M$. Del Teorema 1.2 sabemos que existe algún $r > 0$ (dependiendo de p) tal que la función exponencial está definida en $B(0_p, r) \subset TM_p$ y es un difeomorfismo $\exp_p : B(0_p, r) \to B(p, r)$ tal que la derivada de $\exp_p$ y la de su inversa $(\exp_p)^{-1}$ están acotadas por 2 en $B(0_p, r)$ y en $B(p,r)$ respectivamente; en particular $\exp_p$ es un difeomorfismo bi-Lipschitz entre dos bolas. Denotaremos $\widetilde{\varphi}(h) = (\varphi \circ \exp_p)(h)$, para $h \in B(0_p, r)$, y $\widetilde{\varphi}(0_p) = d\varphi(p) \circ (d\exp_p(0_p)) = d\varphi(p)$. Tenemos

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{\widetilde{\varphi}(h) - \widetilde{\varphi}(0) - \psi(p)(h)}{\|h\|}\Big| = \Big|\frac{\widetilde{\varphi}(h) - \widetilde{\varphi}(0)}{\|h\|} - \psi(p)(\frac{h}{\|h\|})\Big| \leq \\
&\Big|\frac{\widetilde{\varphi}(h) - \widetilde{\varphi}(0) - (\widetilde{\varphi}_n(h) - \widetilde{\varphi}_n(0))}{\|h\|}\Big| + \Big|\frac{\widetilde{\varphi}_n(h) - \widetilde{\varphi}_n(0)}{\|h\|} - d\widetilde{\varphi}_n(0)(\frac{h}{\|h\|})\Big| + \\
&\Big|(d\widetilde{\varphi}_n(0) - \psi(p))(\frac{h}{\|h\|})\Big|. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Primero consideramos la expresión $|\frac{\widetilde{\varphi}(h)-\widetilde{\varphi}(0)-(\widetilde{\varphi}_n(h)-\widetilde{\varphi}_n(0))}{\|h\|}|$. Aplicando la desigualdad del Teorema del Valor Medio tenemos

$$|\widetilde{\varphi}_m(h) - \widetilde{\varphi}_m(0) - (\widetilde{\varphi}_n(h) - \widetilde{\varphi}_n(0))| \leq \sup_{x \in B(0_p,r)} \|d\widetilde{\varphi}_m(x) - d\widetilde{\varphi}_n(x)\|_p \|h\|_p \leq$$
$$2\|d\varphi_m - d\varphi_n\|_\infty \|h\|_p.$$

Como (φ_n) es una sucesión de Cauchy en Y deducimos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\widetilde{\varphi}_m(h) - \widetilde{\varphi}_m(0) - (\widetilde{\varphi}_n(h) - \widetilde{\varphi}_n(0))| < (\varepsilon/3)\|h\|$ cuando $m, n \geq n_0$ luego, haciendo tender $m \to \infty$, se obtiene $|\widetilde{\varphi}(h) - \widetilde{\varphi}(0) - (\widetilde{\varphi}_n(h) - \widetilde{\varphi}_n(0))| < (\varepsilon/3)\|h\|$ si $n \geq n_0$. Por otra parte, el término $|(d\widetilde{\varphi}_n(0) - \psi(p))(\frac{h}{\|h\|})|$ de la derecha de la desigualdad (1) es más pequeño que $\varepsilon/3$ cuando n es suficientemente grande; podemos suponer que esto es cierto si $n \geq n_0$. Finalmente, si fijamos $n = n_0$, el término $|\frac{\widetilde{\varphi}_{n_0}(h)-\widetilde{\varphi}_n(0)}{\|h\|} - d\widetilde{\varphi}_{n_0}(0)(\frac{h}{\|h\|})|$ puede hacerse más pequeño que $\varepsilon/3$ si $\|h\|$ es suficientemente pequeño, digamos $\|h\| \leq \delta$. Por combinación de las estimaciones que hemos realizado, para $n = n_0$, el término a la izquierda de la desigualdad (1) es más pequeña que ε si $\|h\| \leq \delta$. Lo que hace que $\widetilde{\varphi}$ sea diferenciable en p, con $d\widetilde{\varphi}(0_p) = \psi(p)$. Por tanto φ es diferenciable en p, con $d\varphi(p) = \psi(p)$. Concluimos que Y es un espacio de Banach viendo que $d\varphi = \psi$ es continua y acotada. Dado $\varepsilon > 0$. Del hecho de que (φ_n) es una sucesión de Cauchy en Y, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|d\varphi_n(y) - d\varphi_m(y)\|_y \leq \varepsilon$ para todo $y \in M$ cuando $n, m \geq n_0$. Haciendo tender $m \to \infty$ deducimos que $\|d\varphi_n(y) - \psi(y)\|_y \leq \varepsilon$ para todo $y \in M$, si $n \geq n_0$. Por tanto tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \|d\varphi_n - d\varphi\|_\infty = 0.$$

En particular, esto implica que $\|d\varphi\|_\infty < \infty$, esto es, φ es Lipschitz. Ahora podemos ver que $\psi = d\varphi$ es continua. Dado cualquier $p \in M$, existe $r > 0$ tal que $\exp_p : B(0_p, r) \to B(p, r)$ es un difeomorfismo 2-Lipschitz, y también su inversa $\exp_p^{-1}$. Definimos $\widetilde{\varphi} = \varphi \circ \exp_p : B(0_p, r) \to \mathbb{R}$. Para ver que $d\varphi$ es continua en p veremos que $d\widetilde{\varphi}$ es continua en 0_p. Aplicando la desigualdad del Teorema del Valor Medio se tiene que

$$\begin{aligned}
&\|d\widetilde{\varphi}(x) - d\widetilde{\varphi}(0)\|_p \leq \\
&\|d\widetilde{\varphi}(x) - d\widetilde{\varphi}_n(x)\|_p + \|d\widetilde{\varphi}_n(x) - d\widetilde{\varphi}_n(0)\|_p + \|d\widetilde{\varphi}_n(0) - d\widetilde{\varphi}(0)\|_p \leq \\
&2\|d\varphi - d\varphi_n\|_\infty + \|d\widetilde{\varphi}_n(x) - d\widetilde{\varphi}_n(0)\|_p + 2\|d\varphi - d\varphi_n\|_\infty = \\
&4\|d\varphi - d\varphi_n\|_\infty + \|d\widetilde{\varphi}_n(x) - d\widetilde{\varphi}_n(0)\|_p \qquad (2)
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $x \in B(0_p, r) \subset TM_p$. Por tanto $\|d\varphi - d\varphi_n\|_\infty \to 0$ cuando $n \to \infty$, y podemos tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|d\varphi - d\varphi_{n_0}\|_\infty \leq \varepsilon/8. \qquad (3)$$

Finalmente, como $d\widetilde{\varphi}_{n_0}$ es continua en 0_p, existe $\delta \in (0, r)$ tal que

$$\|d\widetilde{\varphi}_{n_0}(x) - d\widetilde{\varphi}_{n_0}(0)\|_p \ \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

si $\|x\|_p \leq \delta$. Por combinación de (2), (3) y (4), tenemos $\|d\widetilde{\varphi}(x) - d\widetilde{\varphi}(0)\|_p \leq \varepsilon$ si $\|x\|_p \leq \delta$. Esto nos hace ver que $d\widetilde{\varphi}$ es continua en 0_p. □

Ahora el Teorema 2.11 es una consecuencia obvia de los tres lemas anteriores.

Observación 2.16. En el Lema 2.13 es posible localizar el punto donde $f + g$ alcanza su mínimo. De manera más precisa, en las suposiciones del lema 2.13, se verifica que para cada $\varepsilon > 0$ existe un a_ε tal que cuando $y_0 \in M$ y satisface que $f(y_0) < \inf_X f + a_\varepsilon$, entonces existe $g \in Y$ y $x_0 \in M$ tal que:

(i) $f + g$ alcanza su mínimo en x_0

(ii) $\|g\|_Y \leq \varepsilon$ y $\|x_0 - y_0\| \leq \varepsilon$.

En efecto, sea $b \in Y$ tal que $b(y_0) = 1$ y $b(x) = 0$ si $x \notin B(y_0, \varepsilon)$ y definimos $a_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4\|b\|}$ y $h(x) = -3a_\varepsilon b(x)$. Por el lema 2.13 existe $k \in Y$ y $x_0 \in M$ tales que $\|k\| < a_\varepsilon$ y $f + h + k$ alcanza su mínimo en x_0. Definimos $g(x) = h(x) + k(x)$ que satisface la condición (i). También satisface que

$$\|g\|_Y \leq \|h\|_Y + \|k\|_y \leq \frac{3\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Por otra parte

$$(f + g)(y_0) = f(y_0) - 3a_\varepsilon + k(y_0) < f(y_0) - 2a_\varepsilon < \inf_X f - a_\varepsilon$$

y

$$(f + g)(x) = f(x) + k(x) > \inf_X f - a_\varepsilon$$

cuando $x \notin B(y_0, \varepsilon)$, lo que implica que $\|x_0 - y_0\| < \varepsilon$ y así se concluye (ii).

Observación 2.17. *El Lema 2.13 puede ser utilizado para obtener distintos principios de minimización perturbada como se refleja en las siguientes observaciones:*

1. *Cuando tomamos $M = X$, un espacio métrico y completo, e Y es el espacio de las funciones acotadas y Lipschitz $f : X \to \mathbb{R}$, con la norma*

$$\|f\|_Y = \|f\|_\infty + Lip(f) = \|f\|_\infty + \sup\{\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} : x, y \in X, x \neq y\}$$

(que satisface (1) y (2) del Lema 2.13 con $C = 1$ y cualquier r), entonces se obtiene un resultado que es fácil ver que implica el principio variacional de Ekeland.

2. *Cuando consideramos $M = X$, un espacio de Banach que tiene una meseta de clase C^1 y Lipschitz, y definimos Y como el espacio de Banach de las funciones regulares de clase C^1 y Lipschitz $f : X \to \mathbb{R}$, con la norma*

$$\|f\|_Y = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty,$$

entonces obtenemos el principio variacional suave de DGZ para espacios de Banach.

3. *Sea $M = X$ cualquier espacio métrico con alguna noción de* diferenciabilidad *bien definida, e Y el espacio de Banach de las funciones* diferenciables *(cuando esta palabra tenga algún sentido en este contexto) y Lipschitz $f : X \to \mathbb{R}$, con la norma*

$$\|f\|_Y = \|f\|_\infty + Lip(f).$$

Supongamos que X es uniformemente mesetable en el sentido de que Y satisface (2) *del Lema 2.13, entonces tendríamos un principio de minimización perturbada para funciones que son* diferenciables *y Lipschitz.*

Problema abierto 2.18. ¿El Teorema 2.11 es cierto sin suponer que M es uniformemente mesetable?

Capítulo 3

Teoremas de Rolle aproximados

3.1. Teorema de Rolle aproximado en variedades

Decíamos en la introducción, que en dimensión infinita, no tenemos la esperanza de generalizar los teoremas que garantizan la existencia de puntos críticos para funciones regulares, puesto que, aunque tengan cualquier forma estas funciones, pueden carecer de ellos. En esta sección, probaremos una versión aproximada del teorema de Rolle, el cual es cierto en cualquier variedad riemanniana (incluso cuando tiene dimensión infinita).

Teorema 3.1 (Teorema de Rolle aproximado en variedades). *Sea (M, g) una variedad riemanniana, U un subconjunto abierto de M tal que $\overline{U}$ es completo y acotado respecto a la g-distancia, $p_0 \in M$ y $R > 0$ tales que $B_g(p_0, R) \subseteq \overline{U}$, y $f : \overline{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y acotada en $\overline{U}$ y diferenciable en U.*

1. *Si $\sup f(U) > \sup f(\partial U)$, entonces para cada $r > 0$ existe $q \in U$ tal que $\|df(q)\|_q \leq r$.*

2. *Si $\inf f(U) < \inf f(\partial U)$, entonces para cada $r > 0$ existe $q \in U$ tal que $\|df(q)\|_q \leq r$.*

3. *Si $f(\overline{U}) \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$ para algún $\varepsilon > 0$, entonces existe $q \in U$ tal que $\|df(q)\|_q \leq \varepsilon/R$.*

Corolario 3.2. *Sea (M, g) una variedad riemanniana completa, U un subconjunto abierto y acotado de M, $p_0 \in M$ y $R > 0$ tales que $B_g(p_0, R) \subseteq \overline{U}$, $\varepsilon > 0$, y $f : \overline{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y acotada en $\overline{U}$ y diferenciable en U. Si suponemos que $f(\partial U) \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$, entonces existe algún $q \in U$ tal que $\|df(q)\|_q \leq \varepsilon/R$.*

Para la demostración del Teorema 3.1 necesitaremos el siguiente lema.

Lema 3.3. *Sea (M, g) una variedad riemanniana y $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en M. Si suponemos que $\|df(p)\|_p > \varepsilon > 0$, entonces existe un número $\delta > 0$ y dos caminos $\alpha, \beta : [0, \delta] \to M$ de clase C^1 , parametrizados por la longitud del arco, tales que*

$$f(\alpha(t)) < f(p) - \varepsilon t, \;\; y \;\; f(\beta(t)) > f(p) + \varepsilon t,$$

para todo $t \in (0, \delta]$.

Demostración. Probaremos la existencia del camino α (el camino β se obtiene de manera similar). Puesto que $\|df(p)\|_p > \varepsilon$, existe $h \in TM_p$ tal que $\|h\|_p = 1$ y $df(p)(h) < -\varepsilon$, entonces (por la caracterización del espacio tangente TM_p como el conjunto de las derivadas de todos los caminos regulares que pasan por p) podemos elegir un camino $\alpha : [0, r] \to M$ de clase C^1, parametrizado por la longitud del arco, tal que

$$\frac{d\alpha}{dt}(0) = h, \text{ y } \alpha(0) = p.$$

Definimos la función $F : [0, r] \to \mathbb{R}$ por $F(t) = f(\alpha(t))$, que verifica

$$F'(s) = df(\alpha(s))(\frac{d\alpha}{dt}(s))$$

para todo $s \in [0, r]$. En particular, para $s = 0$ tenemos que $F'(0) = df(p)(h) < \varepsilon$, y por tanto existe algún $\delta > 0$ tal que

$$\frac{F(t) - F(0)}{t} < -\varepsilon$$

para todo $t \in (0, \delta]$. Esto hace que $f(\alpha(t)) < f(p) - \varepsilon t$ para todo $t \in (0, \delta]$. □

.

Demostración del Teorema 3.1.

Caso 1: Sea $\eta = \sup f(U) - \sup f(\partial U) > 0$. Definimos $X = (\overline{U}, d_g)$, el cual es un espacio métrico completo. Sea $n > 1$ suficientemente grande para que $\overline{U} \subset B_g(p_0, n)$, y $\lambda = \min\{\eta/8n, r\} > 0$. Observamos que el diámetro de U es más pequeño o igual que $2n$, y por tanto se tiene que $\lambda d(x, y) \leq \eta/4$ para todo $x, y \in \overline{U}$. Ahora, aplicando el Principio Variacional de Ekeland 2.1, existe $q \in \overline{U}$ tal que

$$f(y) \leq f(q) + \lambda d(y, q) \text{ para todo } y \in X. \tag{1}$$

De hecho $q \in U$, puesto que si $q \in \partial U$, entonces tendríamos un a tal que $f(a) \geq \sup f(U) - \eta/4$ lo que supone que

$$\sup f(U) - \eta/2 = (\sup f(U) - \eta/4) - \eta/4 \leq f(a) - \lambda d(a, q) \leq f(q) \leq \sup f(\partial U),$$

sea una contradicción. Afirmamos que $\|df(q)\|_q \leq \lambda \leq r$. En efecto, supongamos que $\|df(q)\|_q > \lambda$, entonces aplicando el Lema 3.3, existiría un camino β de clase C^1 parametrizado por la longitud del arco, tal que $\beta(0) = q$ y

$$f(\beta(t)) > f(q) + \lambda t \tag{2}$$

para todo $t > 0$ suficientemente pequeño. Combinando (1) y (2), tenemos que

$$f(q) + \lambda t < f(\beta(t)) \leq f(q) + \lambda d(\beta(t), q) \leq f(q) + \lambda L(\beta_{|[0,t]}) = f(q) + \lambda t$$

si $t > 0$ es suficientemente pequeño; pero esto es una contradicción.
Caso 2: consideramos la función $-f$ y aplicamos el caso (1).
Caso 3: Consideramos dos situaciones.
Caso 3.1: Suponemos que $f(p_0) \neq 0$. Supondremos solamente que $f(p_0) < 0$ (el caso $f(p_0) > 0$ es análogo). Definimos $\lambda = \varepsilon/R$. Aplicando el Principio Variacional de Ekeland, se obtiene la existencia de un $q \in \overline{U}$ tal que

(i) $d(p_0, q) \leq \frac{1}{\lambda}(f(p_0) - f(q)) \leq \frac{1}{\lambda}(f(p_0) + \varepsilon) < R$, y

(ii) $f(q) < f(y) + \lambda d(y, q)$ si $y \neq q$.

La primera propiedad hace que $q \in \mathrm{int}B_g(p_0, R) \subseteq U$, y utilizando el Lema 3.3 como en el caso 1, es inmediato comprobar que la segunda propiedad implica que $\|df(q)\|_q \leq \lambda = \varepsilon/R$.
Caso 3.2: Suponemos finalmente que $f(p_0) = 0$ y que $\|df(p_0)\|_{p_0} > \varepsilon/R$ (en otro caso ya estaría probado). Por el Lema 3.3, existe $\delta > 0$ y un camino α de clase C^1 en U tal que

$$f(\alpha(t)) < f(p_0) - \frac{\varepsilon}{R}t$$

si $0 < t \leq \delta$. Definimos $x_0 = \alpha(\delta) \in B_g(p_0, \delta)$. Tenemos que

$$f(x_0) < f(p_0) - \frac{\varepsilon}{R}\delta = -\frac{\varepsilon}{R}\delta < 0.$$

Aplicando el Principio Variacional de Ekeland con $\lambda = \varepsilon/R$ tenemos un punto $q \in \overline{U}$ tal que

(i) $d(q, x_0) \leq \frac{f(x_0)+\varepsilon}{\varepsilon} < \frac{-\varepsilon\delta/R+\varepsilon}{\varepsilon/R} = R - \delta$, y

(ii) $f(q) < f(y) + \frac{\varepsilon}{R}d(y, q)$ para todo $y \neq q$.

Ahora, (i) implica que $d(q, p_0) \leq d(q, x_0) + d(x_0, p_0) < R - \delta + \delta = R$, esto es, $q \in \mathrm{int}B_g(p_0, R) \subseteq U$. Y, como antes, teniendo en consideración el Lema 3.3, (ii) implica que $\|df(q)\|_q \leq \varepsilon/R$. □

Observación 3.4. *Si $\overline{U}$ no es completo el resultado es obviamente falso: considérese $M = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$, $U = (0, 1)$, $\partial U = \{0\}$, $f(x) = x$. Por otra parte, la estimación ε/R no es mejorable, basta para comprobarlo considerar el ejemplo: $M = \mathbb{R}$, $U = (-1, 1)$, $f(x) = x$, $R = 1$, $p_0 = 0$, $\varepsilon = 1$.*

3.2. Nociones sobre la subdiferencial proximal y el gradiente generalizado

En esta sección introducimos dos conceptos subdiferenciales de gran interés para el estudio de funciones no regulares definidas en espacios de Hilbert, en un caso, y en espacios de Banach en el otro, y ambos conceptos son susceptibles de ser generalizados a variedades riemannianas.

Definición 3.5. *Sea X un espacio de Hilbert real. Un vector $\zeta \in X$ se denomina subgradiente proximal de una función semicontinua inferiormente f en $x \in \mathrm{dom}f$ cuando existen dos números positivos σ y η tales que*

$$f(y) \geq f(x) + \langle \zeta, y - x \rangle - \sigma \|y - x\|^2 \text{ para todo } y \in B(x, \eta).$$

Al conjunto de los ζ se anota $\partial_p f(x)$, y nos referimos a él como subgradiente proximal *o como P-subdiferencial. De forma similar introducimos el* supergradiente proximal. *Para una función semicontinua superiormente f, decimos que $\zeta \in X$ es un* supergradiente proximal *de f en $x \in Dom(f)$ cuando existen dos números positivos σ y η tales que*

$$f(y) \leq f(x) + \langle \zeta, y - x \rangle + \sigma \|y - x\|^2 \text{ for all } y \in B(x, \eta).$$

Al conjunto de tales ζ lo anotamos $\partial^p f(x)$ y nos referimos a él como supergradiente proximal

A continuación introducimos un lema que tendrá gran importancia en la sección siguiente.

Lema 3.6. *Sea $f : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ una función propia semicontinua inferiormente. Si $f - \varphi$ alcanza un mínimo local en el punto x_0 y φ es dos veces* *diferenciable en x_0, entonces $\varphi'(x_0)$ es un subgradiente proximal de f en x_0, esto es $\varphi'(x_0) \in \partial_p f(x_0)$. De manera similar, si $g : X \longrightarrow [-\infty, \infty)$ es una función propia semicontinua superiormente, ψ es una función dos veces diferenciable en x_0 y $g + \psi$ alcanza un máximo en x_0, entonces $\psi'(x_0) \in \partial^p g(x_0)$.*

Demostración. Sabemos que

$$f(y) - f(x_0) \geq \varphi(y) - \varphi(x_0) \tag{1}$$

para todo y de un entorno de x_0. Dado que φ es dos veces diferenciable en x_0, para cualquier $\varepsilon > 0$ podemos encontrar, dependiendo de ε, un $\delta > 0$ tal que

$$|\varphi(y) - \varphi(x_0) - \varphi'(x_0)(y - x_0) - \varphi''(x_0)(y - x_0)^2| \leq \varepsilon \|y - x_0\|^2$$

cuando $\|y - x_0\| \leq \delta$. Por tanto,

$$\varphi(y) - \varphi(x_0) \geq \varphi'(x_0)(y - x_0) + \varphi''(x_0)(y - x_0)^2 - \varepsilon \|y - x_0\|^2$$

si $\|y - x_0\| \leq \delta$ y considerando conjuntamente las dos desigualdades anteriores se obtiene que

$$\varphi(y) - \varphi(x_0) \geq \varphi'(x_0)(y - x_0) - \big(\|\varphi''(x_0)\| + \varepsilon\big)\|y - x_0\|^2 \tag{2}$$

cuando $\|y - x_0\| \leq \delta$. Por combinación de (1) y (2) tenemos que

$$f(y) - f(x_0) \geq \langle p, y - x_0 \rangle - \sigma \|y - x_0\|^2$$

para todo $y \in B(x_0, \delta)$, donde $\sigma = (\|\varphi''(x_0)\| + \varepsilon)$ y $p = \varphi'(x_0)$, y esto supone que $p \in \partial_p f(x_0)$. $\square$

Teniendo en consideración este lema y las definiciones de $\partial_p f(x)$ y $\partial^p f(x)$, deducimos inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 3.7. *Sea $f : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ una función propia semicontinua inferiormente, entonces*

$$\partial_p f(x) = \{\varphi'(x) : \varphi \in C^2(X, \mathbb{R}),\ f - \varphi \text{ alcanza un mínimo local en } x\}.$$

De manera similar, si $g : X \longrightarrow [-\infty, \infty)$ es una función propia semicontinua superiormente, entonces

$$\partial^p g(x) = \{\varphi'(x) : \varphi \in C^2(X, \mathbb{R}),\ g + \varphi \text{ alcanza un mínimo local en } x\}.$$

Este corolario sugiere una extensión natural de la definición de subgradiente proximal en espacios de Banach que no sean necesariamente de Hilbert pero que tengan una norma de clase C^2. Para tales espacios, definimos ∂_p y ∂^p como en el corolario.

Nos ocuparemos, a continuación, de introducir el concepto de gradiente generalizado y de alguna proposición que será utilizada posteriormente.

Definición 3.8. *Sea X un espacio de Banach real y $f : X \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz en un entorno de un punto dado $x \in X$. La derivada direccional generalizada de f en x en la dirección de v, lo anotamos $f^o(x; v)$, y se define de la siguiente manera:*

$$f^o(x; v) = \limsup_{(y,t)\to(x,0)} \frac{f(y+tv) - f(y)}{t},$$

donde y es un vector de X y t es un número real positivo. Definimos el gradiente generalizado de f en x como el conjunto de los $\zeta \in X^*$ tales que $f^o(x; v) \geq \langle \zeta, v \rangle$ para todo v y lo anotamos $\partial f(x)$.

Observación 3.9. El gradiente generalizado es un subconjunto de X^* no vacío, convexo, w^*-compacto; para una información más extensa véase [12].

En las demostraciones de los resultados relacionados con el gradiente generalizado se necesita utilizar la regla de la suma que enunciamos a continuación (una demostración puede ser consultada en [12] página 75).

Proposición 3.10. *Sea f_i (i=1,2,...,n) una función Lipschitz cerca de x, y λ_i (i=1,2,...,n) un número real, entonces $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ es Lipschitz cerca de x, y se tiene*

$$\partial\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right)(x) \subset \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \partial f_i(x).$$

3.3. Teoremas de Rolle aproximados para la subdiferencial proximal

En esta sección probaremos distintas versiones del teorema de Rolle para los subgradientes y supergradientes proximales.

Teorema 3.11. *Sea X un espacio de Hilbert real, $B = \overline{B}(0, R)$, $S = S(0, R)$ y*

$f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua y acotada tal que* $f(S) \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$ *para algún* $\varepsilon > 0$*, entonces :*

1. *Si* $\inf f(B) < \inf f(S)$*, entonces, para cada* $\alpha > 0$*, existe* $x_0 \in int(B)$ *y* $\zeta \in \partial_p f(x_0)$ *tales que* $\|\zeta\| < \alpha$*.*

2. *Si* $\sup f(B) > \sup f(S)$*, entonces, para cada* $\alpha > 0$*, existen* $x_0 \in int(B)$ *y* $\zeta \in \partial^p f(x_0)$ *tales que* $\|\zeta\| < \alpha$*.*

3. *Si* $f(B) \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$*, entonces, para cualquier* $\alpha > 0$*, existen* $x_1, x_2 \in int(B)$ *y* $\zeta_1 \in \partial_p f(x_1)$*,* $\zeta_2 \in \partial^p f(x_2)$ *tales que* $\|\zeta_1\|, \|\zeta_2\| < \frac{2\varepsilon}{R} + \alpha$*.*

Demostración.
Caso (1): Sea $\eta = \inf f(S) - \inf f(B) > 0$. Consideramos la función F definida como $F(x) = f(x)$ si $x \in B$ y $F(x) = \infty$ en otro caso; esta función es, obviamente, semicontinua inferiormente y acotada inferiormente, entonces el Principio Variacional de Deville-Godefroy-Zizler (Teorema 2.4) nos garantiza la existencia de una función g de clase C^2 tal que $\|g\|_\infty < \eta/3$, $\|g'\|_\infty < \alpha$, y $F - g$ alcanza un mínimo en el punto $x_0 \in B$. Afirmamos que $x_0 \in int(B)$. En efecto, si $x_0 \in S$, entonces podemos tomar $a \in B$ tal que $f(a) < \inf f(B) + \eta/3$, y tendríamos que

$$\inf f(B) + 2\eta/3 > f(a) - g(a) \geq F(x_0) - g(x_0) \geq \inf f(S) - \eta/3,$$

por tanto $\inf f(B) + \eta > \inf f(S)$, lo que supone una contradicción. Por otra parte, puesto que $f - g$ alcanza un mínimo en x_0, el Lema 3.6 asegura que $\zeta := g'(x_0) \in \partial_p f(x_0)$, y finalmente $\|\zeta\| < \alpha$ porque $\|g'\|_\infty < \alpha$.
Caso (2) Es suficiente aplicar (1) a la función $-f$.
Caso (3): Dado $\beta > 0$ suficientemente pequeño para que $\beta/2 + \beta/R < \alpha$ y $\beta < R$, elegimos $N > 1$ suficientemente grande para que

$$\frac{(2\varepsilon + \beta)}{R} \frac{\beta}{N} < \beta.$$

Sea $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa de clase C^∞ tal que:

(i) $a(t) = t$ si $t \geq \beta/N$,

(ii) $a(t) = a(0) > 0$ si $t \leq \beta/4N$,

(iii) $a'(t) > 0$ si $t > \beta/4N$

(iv) $a''(t) > 0$ si y solo si $t \in (\beta/4N, \beta/N)$.

Una función a como hemos descrito, se puede construir fácilmente integrando una función real b no negativa de clase C^∞ con soporte en el intervalo $[\beta/4N, \beta/N]$ y tal que $\int_{-\infty}^{\infty} b(t)dt = 1$, y sumando una constante positiva adecuada se obtienen las propiedades $a(0) > 0$ y $a(t) = t$ para $t \geq \beta/N$. Definimos la función $h : X \longrightarrow (0, \infty)$ por $h(x) = a(\|x\|)$. Es evidente que h es de clase C^∞, $h(0) = a(0) \in (0, \beta/N)$, y su derivada satisface $h'(x) = 0$ cuando $\|x\| \leq \beta/4N$, y $h'(x) = a'(\|x\|)x/\|x\|$ cuando $\|x\| \geq \beta/4N$. En particular, podemos ver que

$$\|h'(x)\| \leq a'(\|x\|) \leq 1 \text{ para todo } x \in X, \text{ y } \ h(x) = \|x\| \text{ si } \|x\| \geq \beta/N.$$

Consideramos la función $G : B \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$G(x) = f(x) + \frac{2\varepsilon + \beta}{R} h(x).$$

La función G es continua y G satisface, como es fácil comprobar, que $\inf G(B) < \inf G(S)$, entonces aplicando el caso (1) a G, obtenemos el punto x_1, requerido. El punto x_2 se obtiene reemplazando f por $-f$. $\square$

De este resultado se obtiene inmediatamente el siguiente.

Teorema 3.12. *Sea U un subconjunto abierto, conexo y acotado del espacio de Hilbert real X, y $f : \overline{U} \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada. Sea $R > 0$ y $x_0 \in U$ tal que dist $(x_0, \partial U) = R$. Suponemos que $f(\partial U) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$ para algún $\varepsilon > 0$, entonces :*

1. *Si $\inf f(U) < \inf f(\partial U)$, entonces, para cada $\alpha > 0$ existen $x_1 \in U$ y $\zeta \in \partial_p f(x_1)$ tales que $\|\zeta\| < \alpha$.*

2. *Si $\sup f(U) > \sup f(\partial U)$, entonces, para cada $\alpha > 0$, existen $x_2 \in U$ y $\zeta \in \partial^p f(x_2)$ tales que $\|\zeta\| < \alpha$.*

3. *Si $f(U) \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$, entonces, para cada $\alpha > 0$, existen $x_1, x_2 \in U$ y $\zeta_1 \in \partial_p f(x_1)$, $\zeta_2 \in \partial^p f(x_2)$ tales que $\|\zeta_1\|, \|\zeta_2\| < \frac{2\varepsilon}{R} + \alpha$.*

En cualquier caso, $\inf\{\|\zeta\| : \zeta \in \partial_p f(x) \cup \partial^p f(x),\, x \in U\} \leq 2\varepsilon/R$.

Si a las condiciones del teorema precedente le añadimos que $\partial_p f(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in U$, entonces podemos garantizar que $\inf\{\|\zeta\| : \zeta \in \partial_p f(x),\, x \in U\} \leq 2\varepsilon/R$. En efecto, es inmediato ver que si para algún punto x se tiene $\partial_p f(x) \neq \emptyset \neq \partial^p f(x)$, entonces la función f es diferenciable en x, y

$$\partial_p f(x) = \partial^p f(x) = \{f'(x)\}.$$

Observación 3.13. *Este resultado no puede mejorarse para obtener un punto tal que la norma de* cada *subgradiente proximal en ese punto sea más pequeño que* $2\varepsilon/R+\alpha$*, como se puede observar en el siguiente ejemplo:* $f:[-1,1]\longrightarrow\mathbb{R}$*,* $f(x)=|x|$.

Queremos garantizar la existencia de un punto tal que todos los subgradientes proximales en ese punto sean más pequeños en norma que $2\varepsilon/R$, en las condiciones (2) o (3) del Teorema 3.12 (bajo la condición (1) es imposible encontrar tal punto, como se ve en el ejemplo anterior). Los siguientes resultados están encaminados en esta dirección.

Lema 3.14. *Sea* X *un espacio de Hilbert y* $x_1\in X$ *y* $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ *una función semicontinua inferiormente. Suponemos que para algún* $\lambda>0$ *se verifica* $\lambda\left\|x_1-x\right\|+f\left(x_1\right)>f\left(x\right)$ *siempre que* $x\neq x_1$*, entonces, para todo* $\zeta\in\partial_p f(x_1)$*, se verifica* $\|\zeta\|<\lambda$.

Demostración. En efecto, para todo h con $\|h\|=1$ y poniendo $x=x_1+th$, tenemos que :

$$\frac{f\left(x_1+th\right)-f\left(x_1\right)}{|t|}<\lambda$$

Por otra parte existen $\eta>0$ y $\sigma>0$ tales que, si $|t|<\eta$, se verifica:

$$f\left(x_1+th\right)\geq f\left(x_1\right)+\langle\zeta,th\rangle-\sigma\left\|th\right\|^2,$$

y por tanto

$$\langle\zeta,th\rangle\leq f\left(x_1+th\right)-f\left(x_1\right)+\sigma t^2,$$

así

$$t\left\langle\zeta,h\right\rangle\leq f\left(x_1+th\right)-f\left(x_1\right)+\sigma t^2,$$

de donde

$$\frac{t}{|t|}\left\langle\zeta,h\right\rangle\leq\frac{f\left(x_1+th\right)-f\left(x_1\right)}{|t|}+\sigma\left|t\right|,$$

de esta manera se obtiene

$$\left|\langle\zeta,h\rangle\right|\leq\lambda+\sigma\left|t\right| \text{ para todo } |t|<\eta,$$

lo que implica $\|\zeta\|\leq\lambda$. □

Proposición 3.15. *Sea* $f:\overline{B}(0,R)\longrightarrow\mathbb{R}$ *una función continua y acotada. Suponemos que* $f(\overline{B}(0,R))\subset f(S(0,R))\subset[-\varepsilon,+\varepsilon]$*, entonces existe* $x\in B(0,R)$ *tal que* $\|\zeta\|\leq\frac{2\varepsilon}{R}$ *cuando* $\zeta\in\partial_p f(x)$.

Demostración. Si la función f no es subdiferenciable en algún punto de $B(0,R)$ el resultado es trivialmente cierto, supongamos por tanto que f es subdiferenciable en todos los puntos de $B(0,R)$. Inicialmente, también supondremos que $2\varepsilon < R$.
Caso I: Suponemos $f(0) > -\varepsilon$, y sea $\lambda = \frac{2\varepsilon}{R}$.

Como $f(0) > \sup\left\{f(x)\,\middle|\,x \in \overline{B}(0,R)\right\} - 2\varepsilon$ el Principio variacional de Ekeland aplicado a la función $F : X \to [-\infty,+\infty)$ tal que $F(x) = f(x)$ si $x \in \overline{B}(0,R)$ y $F(x) = -\infty$ si $x \notin \overline{B}(0,R)$, que es claramente semicontinua superiormente y acotada superiormente, nos da un $x_1 \in \overline{B}(0,R)$ tal que

(i) $\lambda \|x_1\| \leq f(x_1) - f(x_0)$

(ii) $\|x_1\| < \frac{2\varepsilon}{\lambda}$

(iii) $\lambda \|x - x_1\| + f(x_1) > f(x)$ siempre que $x \neq x_1$,

de manera que, por (ii), $x_1 \in B(0,R)$, y para cualquier $\zeta \in \partial_p f(x_1)$, el apartado (iii), conjuntamente con el lema anterior, implica $\|\zeta\| \leq \frac{2\varepsilon}{R}$.

Caso II: Suponemos ahora que $f(0) = -\varepsilon$, y escojamos $\zeta \in \partial_p f(0)$, también suponemos que $\|\zeta\| > \frac{2\varepsilon}{R}$ (en el caso contrario el resultado es trivial), entonces existe h con $\|h\| = 1$ tal que $\langle\zeta, h\rangle > \frac{2\varepsilon}{R}$. Por otra parte, existen $\eta > 0$ y $\sigma > 0$ tales que, para todo t con la propiedad de que $|t| < \eta$, verifican:

$$f(th) \geq f(0) + \langle\zeta, th\rangle - \sigma \|, th\|^2 ,$$

por tanto

$$f(th) + \varepsilon - t\langle\zeta, h\rangle \geq -\sigma t^2,$$

así

$$\frac{f(th) + \varepsilon - t\langle\zeta, h\rangle}{|t|} \geq -\sigma |t| ,$$

y considerando que $\frac{2\varepsilon}{R} - \langle\zeta, h\rangle < 0$, y que existe $\delta > 0$ tal que $\frac{2\varepsilon}{R} - \langle\zeta, h\rangle < -\sigma\delta$, se obtiene:

$$\frac{f(\delta h) + \varepsilon - \delta\langle\zeta, h\rangle}{\delta} > \frac{2\varepsilon}{R} - \langle\zeta, h\rangle ,$$

lo que implica

$$f(\delta h) + \varepsilon > \frac{2\delta\varepsilon}{R},$$

por tanto

$$f(\delta h) > \sup f(B(0,R)) - 2\varepsilon.$$

Tomando, ahora, $\lambda = \frac{2\varepsilon}{R}$, y aplicando el Principio variacional de Ekeland, obtenemos un $x_1 \in \overline{B}(0,R)$ tal que

(i) $\lambda \|x_1 - \delta h\| \leq f(x_1) - f(\delta h)$

(ii) $\|x_1 - \delta h\| \leq \frac{\varepsilon}{\lambda}$

(iii) $\lambda \|x - x_1\| + f(x_1) > f(x)$ para todo $x \neq x_1$.

Por (i) y considerando que $f(\delta h) + \varepsilon > \frac{2\varepsilon\delta}{R}$, obtenemos:

$$\|x_1 - \delta h\| \leq \frac{f(x_1) - f(\delta h)}{{}^{2\varepsilon}/_{R}} \leq \frac{\varepsilon - f(\delta h)}{{}^{2\varepsilon}/_{R}} < \frac{2\varepsilon - {}^{2\varepsilon\delta}/_{R}}{{}^{2\varepsilon}/_{R}} = R - \delta,$$

lo que implica que $\|x_1\| \leq \|x_1 - \delta h\| + \delta < (R - \delta) + \delta = R$, y por tanto $x_1 \in B(0, R)$.
De (iii) y del lema anterior se obtiene que para todo $p \in \partial_p f(x)$ se verifica $\|\zeta\| \leq \frac{2\varepsilon}{R}$.
Finalmente en el caso $2\varepsilon \geq R$ y teniendo en consideración que $\zeta \in \partial_p f(x)$ si, y sólo si, $\zeta \in \partial_p (rf)(x)$ para todo $r > 0$, y considerando la función $g = \frac{\varepsilon' f}{\varepsilon}$, donde $2\varepsilon' < R$, podemos concluir que existe $x \in B(0, R)$ tal que $\|\zeta\| \leq \frac{2\varepsilon}{R}$ para todo $\zeta \in \partial_p f(x)$. □

Corolario 3.16. *Sean X un espacio de Hilbert y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada, que satisface $\partial_p f(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$, entonces*

$$\inf\{\sup\{\|\zeta\| : \zeta \in \partial_p f(x)\}, x \in X\} = 0.$$

Proposición 3.17. *Sea U un subconjunto abierto, acotado y conexo de un espacio de Hilbert real X. Sea $f : \overline{U} \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada tal que $\sup f\left(\overline{U}\right) > \sup f(\partial U)$, entonces , para cada $\alpha > 0$, existe algún $x \in U$ tal que $\|\zeta\| < \alpha$ para todo $\zeta \in \partial_p f(x)$.*

Demostración. Dado un $\alpha > 0$ consideramos la función $F : X \to [-\infty, +\infty)$ tal que $F(x) = f(x)$ si $x \in \overline{U}$ y $F(x) = -\infty$ si $x \notin \overline{U}$, que es claramente semicontinua superiormente y acotada superiormente, un punto $x_0 \in U$ tal que $f(x_0) > \sup f(\partial U)$, y un λ tal que $0 < \lambda < min\{\alpha, 1\}$, entonces el principio variacional de Ekeland (Teorema 2.1) nos da un $x_1 \in \overline{U}$ tal que por (i) $f(x_1) > f(x_0)$, y por tanto $x_1 \in U$. De (iii) conjuntamente con el Lema 3.14 se obtiene que para todo $\zeta \in \partial_p f(x_1)$ se verifica $\|\zeta\| \leq \lambda$, y por tanto $\|\zeta\| \leq \alpha$. □

Una consecuencia del resultado precedente es que podemos afinar la estimación de la norma de los subgradientes cuando $\partial_p f(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in U$.

Teorema 3.18. *Sea U un abierto conexo y acotado de un espacio de Hilbert X. Sea $f : \overline{U} \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada tal que $\partial_p f(x) \neq \emptyset$ para* *todo $x \in U$. Sea $R > 0$ y $x_0 \in U$ tales que dist $(x_0, \partial U) = R$. Supongamos que $f(\partial U) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$, entonces existen $x_\varepsilon \in U$ y $\zeta \in \partial_p f(x_\varepsilon)$ tales que $\|\zeta\| \leq {}^{2\varepsilon}/_{R}$.*

Cuando f es constante en ∂U, tenemos que $\inf \{\|\zeta\| : \zeta \in \partial_p f(x), x \in U\} = 0$.

3.4. Teorema de Rolle aproximado para el gradiente generalizado

Antes de proceder a la demostración del teorema de Rolle aproximado para el gradiente generalizado, veremos que el teorema de Rolle exacto para el gradiente generalizado falla completamente en cualquier espacio de Banach infinito-dimensional, incluso aunque no tenga funciones meseta regulares. El resultado más importante de [9] establece que el teorema de Rolle (para funciones regulares y Lipschitz) falla en cualquier espacio de Banach que tenga una función meseta regular y Lipschitz, y es trivialmente cierto en cualquier espacio que no posea ninguna meseta regular y Lipschitz. En particular, cuando una función es clase C^1 y localmente Lipschitz el gradiente generalizado se reduce a la diferencial ordinaria, y por tanto el teorema de Rolle exacto falla para el gradiente generalizado en cualquier espacio que tenga una meseta de clase C^1 y Lipschitz. Cabe, por tanto, preguntarse ¿qué sucede cuando el espacio no posee una meseta de clase C^1 y Lipschitz y consideramos todas las funciones f localmente Lipschitz, y todos los gradientes generalizados $\partial f(x)$?. ¿Se vuelve cierto el teorema de Rolle exacto, en el sentido de que si $f = 0$ en el borde de un conjunto U abierto, acotado y conexo, entonces exista un punto $x \in U$ tal que $0 \in \partial f(x)$?. Veremos, a continuación, que este no es el caso.

Teorema 3.19. *Para todo espacio de Banach, X, infinito-dimensional, existe una función acotada y Lipschitz f, definida en una bola cerrada U, tal que f vale cero en ∂U y sin embargo $0 \notin \partial f(x)$ para todo $x \in int(U)$.*

Demostración. Todo espacio reflexivo tiene una norma equivalente de clase C^1 (ver [28]), y en cada espacio infinito-dimensional con una norma de clase C^1 existe un una bola cerrada U y una función $f : U \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathrm{int}(U)$ (ver [3]), por tanto el resultado cuando X es reflexivo es cierto , y podemos suponer, en consecuencia, que X es no reflexivo. En esta circunstancia, existe un funcional lineal y continuo $x^* \in X^*$ tal que x^* no alcanza su norma y $\|x^*\| = 1$. Consideramos la función

$$f(x) = \begin{cases} x^*(x) & \text{si} \quad x \in \overline{B}(0,1) \\ \frac{2-\|x\|}{\|x\|} x^*(x) & \text{si} \quad x \notin \overline{B}(0,1), \end{cases}$$

definida en $\overline{B}(0,2)$ y con valores en $\mathbb{R}$. La función f claramente vale cero en $S(0,2)$. Debemos probar que $0 \notin \partial f(x_0)$ para todo $x_0 \in B(0,2)$, lo que es equivalente a probar que para todo $x_0 \in B(0,2)$ existe $v \in X$ tal que $f^o(x_0,v) < 0$. En el caso $x_0 \in B = B(0,1)$ tenemos que $\partial f(x_0) = \{x^*\}$ y el resultado es inmediato. En el caso $x_0 \in S = S(0,1)$, consideramos las siguientes situaciones:

Caso I: Si $x^*(x_0) > 0$, podemos elegir $x_1 \in S$ tal que $x^*(x_1) > x^*(x_0)$ y $[x_0, x_1] \not\subset S$, para definir un vector $v = x_0 - x_1$ que satisfaga $x^*(v) < 0$. Observamos primero que existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$||y + tv|| \geq ||y|| \text{ para cada } y \in B(x_0, \varepsilon) \setminus B \text{ y } t > 0.$$

En efecto, la condición $[x_0, x_1] \not\subset S$ hace que exista un $t_0 > 0$ tal que $x_0 - t_0 v \in B$ y consecuentemente $y - t_0 v \in B \subset B(0, ||y||)$ para y cerca de x_0, lo que implica $y + tv \notin B(0, ||y||)$, equivalentemente $||y + tv|| \geq ||y||$, para todo $t > 0$. Para probar que $f^o(x_0, v) < 0$ vamos a considerar $\frac{f(y+tv)-f(y)}{t}$ y tres situaciones distintas.

(i) $y \in \overline{B}$ y $y + tv \in \overline{B}$. En este caso $\frac{f(y+tv)-f(y)}{t} = \frac{x^*(y+tv)-x^*(y)}{t} = x^*(v)$.

(ii) $y \in \overline{B}$ y $y + tv \notin \overline{B}$, entonces tenemos

$$\frac{f(y+tv)-f(y)}{t} = \frac{1}{t}\left[\frac{2-\|y+tv\|}{\|y+tv\|}x^*(y+tv) - x^*(y)\right] =$$
$$\frac{1}{t}\left[\frac{2-2\|y+tv\|}{\|y+tv\|}x^*(y)\right] + \frac{2-\|y+tv\|}{\|y+tv\|}x^*(v) \leq$$
$$\frac{2-\|y+tv\|}{\|y+tv\|}x^*(v) \leq \frac{x^*(v)}{2}.$$

Si y está suficientemente cerca de x_0, y $t > 0$ es pequeño, se tiene que $x^*(v) < 0$.

(iii) $y \notin \overline{B}$ y $y + tv \notin \overline{B}$. En este caso tenemos

$$\frac{f(y+tv)-f(y)}{t} = \frac{1}{t}\left[\frac{2-\|y+tv\|}{\|y+tv\|}x^*(y+tv) - \frac{2-\|y\|}{\|y\|}x^*(y)\right] =$$

$$x^*(v)\frac{2-\|y+tv\|}{\|y+tv\|} + \frac{1}{t}\left[\frac{2-\|y+tv\|}{\|y+tv\|} - \frac{2-\|y\|}{\|y\|}\right]x^*(y) =$$

$$= x^*(v)\frac{2-\|y+tv\|}{\|y+tv\|} + \frac{2\|y\| - 2\|y+tv\|}{t\|y\|\|y+tv\|}x^*(y) \leq$$

$$\leq x^*(v)\frac{2-\|y+tv\|}{\|y+tv\|} \leq \frac{x^*(v)}{2}.$$

En el caso $y \notin \overline{B}$ y $y + tv \in \overline{B}$ no es necesario que y esté suficientemente cerca de x_0, basta con tomar límites superiores para ver que $f^o(x_0, v) \leq \frac{x^*(v)}{2} < 0$.

Caso II: Si $x^*(x_0) < 0$, es suficiente aplicar el caso I a la función $-f$, y recordar que $\partial(-f)(x) = -\partial f(x)$.

Caso III: Si $x^*(x_0) = 0$, podemos tomar un punto $x_1 \in S$ tal que $x^*(x_1) > 0$. Definimos $v = x_0 - x_1$, tal que $x^*(v) < 0$. Considerando algunas situaciones como en el caso I, y procediendo de manera similar, es fácil ver que $f^o(x_0, v) < 0$.

Finalmente, cuando $x_0 \notin \overline{B}$, consideramos dos casos:

(i) Si $x^*(x_0) = 0$ tenemos un x_1 tal que $x^*(x_1) > 0$ y definimos $v = x_0 - x_1$, entonces tenemos

$$\frac{f(y+tv) - f(y)}{t} = \frac{1}{t}\left[\frac{2 - \|y+tv\|}{\|y+tv\|}x^*(y+tv) - \frac{2-\|y\|}{\|y\|}x^*(y)\right] =$$

$$\frac{2}{t}\frac{\|y\| - \|y+tv\|}{\|y\|\,\|y+tv\|}x^*(y) + \frac{2-\|y+tv\|}{\|y+tv\|}x^*(v) < \frac{2-||x_0||}{2||x_0||}x^*(v).$$

De los hechos $\frac{2}{t}\frac{\|y\|-\|y+tv\|}{\|y\|\|y+tv\|}$ acotado y $\lim_{y\to x_0} x^*(y) = 0$, se sigue que $f^o(x_0, v) < 0$.

(ii) $x^*(x_0) \neq 0$ es similar a los casos I y II anteriores, basta considerar solamente la situación $y \notin \overline{B}$ y $y + tv \notin \overline{B}$.

□

A continuación, probaremos una versión del teorema de Rolle aproximado para el gradiente generalizado.

Teorema 3.20 (Teorema de Rolle aproximado para el gradiente generalizado). *Sean U un subconjunto abierto, acotado y conexo de un espacio de Banach X, $f : \overline{U} \to \mathbb{R}$ una función acotada y localmente Lipschitz tal que $f(\partial U) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$, y $R > 0$ y $x_0 \in U$ tales que $dist(x_0, \partial U) = R$, entonces* $\inf\{\|\zeta\| : \zeta \in \partial f(x), x \in X\} \leq \frac{2\varepsilon}{R}$.

Nótese que del hecho de que el gradiente generalizado contiene al subgradiente proximal en espacios de Hilbert, el teorema anterior es una consecuencia inmediata del Teorema 3.12 cuando X es un espacio de Hilbert. Cuando el espacio de Banach no es de Hilbert o no posee ninguna meseta de clase C^2, se requiere una demostración diferente.

Proposición 3.21. *Sea U un abierto conexo y acotado en un espacio de Banach X y sea $f : \overline{U} \to \mathbb{R}$ una función localmente Lipschitziana y acotada tal que*

$\sup f(U) > \sup f(\partial U)$ *o* $\inf f(U) < \inf f(\partial U)$, *entonces para todo* $\alpha > 0$ *existen* $x \in U$ *y un* $\zeta \in \partial f(x)$ *tales que* $\|\zeta\| < \alpha$.

Demostración. En el caso de que $\sup f(U) > \sup f(\partial U)$ consideramos la función $F(x) = f(x)$ si $x \in \overline{U}$ y $F(x) = -\infty$ si $x \notin \overline{U}$. Sea $\eta = \sup f(U) - \sup f(\partial U)$ y $x_0 \in U$ tales que $f(x_0) > \sup f(U) - \eta$, entonces el principio variacional de Ekeland, nos da para todo α tal que $0 < \alpha < 1$, un $x_1 \in DomF$ tal que

(i) $\alpha \|x_1 - x_0\| \leq f(x_1) - f(x_0)$

(ii) $\|x_1 - x_0\| < \frac{\eta}{\alpha}$

(iii) $\alpha \|x - x_1\| + f(x_1) > f(x)$ siempre que $x_1 \neq x$.

De (i) se obtiene que $f(x_1) > f(x_0)$ por tanto $x_1 \in U$. De (iii) se deduce que que la función $\Phi(x) = f(x) - f(x_1) - \alpha \|x - x_1\|$ alcanza un máximo en $x = x_1$ por tanto $0 \in \partial\Phi(x_1)$, y aplicando la regla de la suma (Proposición 3.10) se obtiene que $0 \in \partial f(x_1) + \partial(-\alpha \|x - x_1\|)$. Por tanto existen $\zeta \in \partial f(x_1)$ y $\vartheta \in -\alpha\partial\|.\|(x - x_1)$, y dado que $0 = \zeta + \vartheta$ y $\|\vartheta\| \leq \alpha$ se tiene que $\|\zeta\| < \alpha$. La demostración en el caso de que $\inf f(U) < \inf f(\partial U)$ es análoga al caso anterior. □

Observación 3.22. *La conclusión de la proposición anterior no se puede mejorar para encontrar un punto* $x \in B$ *tal que para todo* $\zeta \in \partial f(x)$ *se verifique* $\|\zeta\| < \alpha$. *Basta considerar la función*

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \\ -x & si \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x-1 & si \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases},$$

y observar que

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{1\} & si \quad -1 < x < -\frac{1}{2} \\ [-1,1] & si \quad x = -\frac{1}{2} \\ \{-1\} & si \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ [-1,1] & si \quad x = \frac{1}{2} \\ \{1\} & si \quad \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}.$$

Proposición 3.23. *Sean* X *un espacio de Banach real,* $B = B(0, R)$ *y* $f : \overline{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función localmente Lipschitz tal que* $f(\overline{B}) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$, *entonces , para cada* $\alpha > 0$, *existen* $x \in int(B)$ *y* $\zeta \in \partial f(x)$ *tales que* $\|\zeta\| < \frac{2\varepsilon}{R} + \alpha$.

Demostración. Consideramos la función $\Phi(x) = f(x) - \frac{2\varepsilon+\alpha'}{R}\|x\|$, con $\alpha' > 0$. Para cualquier $x \in \partial B$ se tiene que $\Phi(x) = f(x) - (2\varepsilon + \alpha') < f(0)$, entonces podemos aplicar la proposición anterior a la función Φ y obtener un punto $x \in B$ y algún subgradiente $\vartheta_1 \in \partial\Phi(x)$ tal que $\|\vartheta_1\| < \alpha'$, entonces , aplicando la regla de la suma para el gradiente generalizado (Proposición 3.10), $\vartheta_1 \in \partial f(x) - \frac{2\varepsilon+\alpha'}{R}\partial \| \cdot \| (x)$, y por tanto $\vartheta_1 = \zeta - \frac{2\varepsilon+\alpha'}{R}\vartheta_2$, con $\|\vartheta_2\| \leq 1$, de lo que se deduce que $\|\zeta\| \leq \|\vartheta_1\| + \frac{2\varepsilon+\alpha'}{R} \leq \alpha' + \frac{2\varepsilon+\alpha'}{R} = \frac{2\varepsilon}{R} + \left[\alpha' + \frac{\alpha'}{R}\right]$. Eligiendo α' tal que $\alpha' + \frac{\alpha'}{R} < \alpha$, se sigue el resultado. □

Observación 3.24. *Como en el caso anterior, no podemos mejorara el resultado cambiando el "existe"por un "para todo" $\zeta \in \partial f(x)$. Basta considerar en este caso la función*

$$f(x) = \begin{cases} 6x+5 & si \quad -1 \leq x \leq -\frac{2}{3} \\ -6x-3 & si \quad -\frac{2}{3} \leq x \leq -\frac{1}{3} \\ 6x+1 & si \quad -\frac{1}{3} \leq x \leq 0 \\ -4x+1 & si \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 4x-3 & si \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases},$$

y su gradiente generalizado

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{6\} & si \quad -1 < x < -\frac{2}{3} \\ [-6,6] & si \quad x = \frac{2}{3} \\ \{-6\} & si \quad -\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{3} \\ [-6,6] & si \quad x = \frac{1}{3} \\ \{6\} & si \quad -\frac{1}{3} < x < 0 \\ [-4,6] & si \quad x = 0 \\ \{-4\} & si \quad 0 < x < \frac{1}{2} \\ [-4,4] & si \quad x = \frac{1}{2} \\ \{4\} & si \quad \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}.$$

Capítulo 4

Nociones sobre subdiferenciabilidad de funciones definidas en variedades riemannianas

En este capítulo extendemos la teoría general de las subdiferenciales de viscosidad, conocida y empleada hasta ahora en los espacios de Banach, al contexto de las variedades riemannianas. Recordemos que una función f definida en un espacio de Banach X se dice que es Fréchet subdiferenciable en un punto x, y que $\zeta \in X^*$ es una subdiferencial Fréchet de f en x, cuando

$$\liminf_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle \zeta, h \rangle}{\|h\|} \geq 0,$$

denotándose por $D^- f(x)$ al conjunto de los $\zeta \in X^*$ que satisfacen esta propiedad. También se dice que ζ es una subdiferencial de viscosidad de f en X si existe una función $\varphi : X \to \mathbb{R}$ que es de clase C^1 y tal que $f - \varphi$ alcanza un mínimo local en x, y $\zeta = \varphi'(x)$. Estas dos definiciones son equivalentes en los espacios de Banach X que tienen una función meseta de clase C^1. Así pues, en dichos espacios de Banach X se tiene que

$$D^- f(x) = \{\varphi'(x) : \varphi \in C^1(X, \mathbb{R}), f - \varphi \text{ alcanza un mínimo local en } x\}.$$

Esto sugiere una extensión natural de la definición a cualquier variedad diferenciable modelada sobre un espacio de Banach, pero la teoría correspondiente sólo será interesante si dicha variedad tiene una estructura adicional lo suficientemente rica, por ejemplo una estructura riemanniana. A continuación desarrollamos una teoría de subdiferenciales de viscosidad en variedades riemannianas. Casi todos los resultados que establecemos en esta sección generalizan resultados ya conocidos en espacios de Hilbert. Algunos de ellos son de carácter local (uno de los primeros teoremas que establecemos es una caracterización local de la subdiferencial por medio de cartas, lo que permite extender inmediatamente varios resultados sobre subdiferenciabilidad en espacios de Hilbert al caso riemanniano); las reglas de la suma y el producto y sus recíprocos aproximados o *fuzzy* son ejemplos de esta situación. Otros pueden deducirse con mayor o menor trabajo extra de la versión ya conocida en espacios de Hilbert (como los teoremas del valor medio subdiferenciales). Otros más (como la subdiferenciabilidad de las funciones convexas) requieren demostraciones específicas relativamente intrincadas. Y finalmente, los hay también de carácter decididamente global, como el principio de minimización perturbada de la suma o diferencia de funciones (resultado que a su vez desempeña un papel crucial en la demostración del teorema de existencia y unicidad de las soluciones de viscosidad de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi del capítulo siguiente), que tienen demostraciones en las que determinadas condiciones globales sobre la variedad son esenciales (como por ejemplo que la variedad sea uniformemente localmente convexa y con índice de inyectividad global positivo). En todo caso, y con el objeto de intentar hacer esta exposición lo más legible y autocontenida posible, incluso en aquellos resultados que pueden deducirse localmente de sus versiones planas mediante el uso de cartas, hemos intentado dar demostraciones directas de los enunciados, recurriendo lo menos posible a cartas y referencias ajenas a este trabajo.

4.1. Definición y propiedades básicas

Definición 4.1. Sea (M, g) una variedad riemanniana, y $f : M \longrightarrow (-\infty, \infty]$ una función propia. Diremos que f es subdiferenciable en el punto $p \in \mathrm{dom}(f) = \{x \in M : f(x) < \infty\}$ cuando exista una función $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $f - \varphi$ alcance un mínimo local en el punto p. En este caso diremos que $\zeta = d\varphi(p) \in (TM_p)^* \simeq H^* = H$ es una subdiferencial de f en p. Definimos la subdiferencial de f en el punto p por el conjunto

$$D^- f(p) = \{d\varphi(p) : \varphi \in C^1(M, \mathbb{R}), f - \varphi \text{ alcanza un mínimo local en } p\},$$

que es un subconjunto de T^*M_p. De manera similar, definimos

$$D^+ f(p) = \{d\varphi(p) : \varphi \in C^1(M, \mathbb{R}), f - \varphi \text{ alcanza un máximo local en } p\},$$

y diremos que f es superdiferenciable en p cuando $D^+ f(p) \neq \emptyset$. Para cualquier $\zeta \in D^- f(p) \cup D^+ f(p)$, la norma de ζ se define como

$$\|\zeta\|_p = \sup\{|\zeta(h)| : h \in TM_p, \|h\|_p = 1\}.$$

Observación 4.2. *De las definiciones precedentes se obtienen, de manera obvia, las siguientes propiedades:*

1. *f es subdiferenciable en p si, y sólo si, $-f$ es superdiferenciable en p, y*
$$D^+(-f)(p) = -D^- f(p).$$

2. *Si f tiene un mínimo local en p, entonces $0 \in D^- f(p)$.*

3. *Si h tiene un máximo local en p, entonces $0 \in D^+ f(p)$.*

En el siguiente teorema se establecen definiciones equivalentes de subdiferenciabilidad.

Teorema 4.3 (Caracterizaciones de subdiferenciabilidad). *Sea $f : M \to (-\infty, \infty]$ una función definida en una variedad riemanniana, $p \in M$, y $\eta \in T^*M_p$, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *$\eta \in D^- f(p)$, o lo que es lo mismo, existe una función $\varphi : M \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $f - \varphi$ alcanza un mínimo local en p, y $\eta = d\varphi(p)$.*

2. *Existe una función, $\varphi : M \to \mathbb{R}$, Fréchet-diferenciable en p tal que $f - \varphi$ alcanza un mínimo local en p, y $\eta = d\varphi(p)$.*

3. *Para cada carta $h : U \subset M \to H$ con $p \in U$, si tomamos $\zeta = \eta \circ dh^{-1}(h(p))$, se verifica que*
$$\liminf_{v \to 0} \frac{(f \circ h^{-1})(h(p) + v) - f(p) - \langle \zeta, v \rangle}{\|v\|} \geq 0.$$

4. *Existe una carta $h : U \subset M \to H$ con $p \in U$ y tal que, para $\zeta = \eta \circ dh^{-1}(h(p))$, se verifica que*
$$\liminf_{v \to 0} \frac{(f \circ h^{-1})(h(p) + v) - f(p) - \langle \zeta, v \rangle}{\|v\|} \geq 0.$$

Cuando la función f está localmente acotada inferiormente (esto es, para cada $x \in M$ existe un entorno U de x tal que f esta acotada inferiormente en U), entonces las condiciones anteriores son todas equivalentes a la siguiente condición:

5. *Existe una función, $\varphi : M \to \mathbb{R}$, de clase C^1 tal que $f - \varphi$ alcanza un mínimo* global *en p, y $\eta = d\varphi(p)$.*

Consecuentemente, cualquiera de las condiciones anteriores puede ser tomada como definición de $\eta \in D^- f(p)$. *Análogamente, se pueden establecer condiciones equivalentes para el caso de funciones superdiferenciables; en particular*

$\zeta \in D^+ f(p)$ si, y sólo si, existe una carta $h : U \subset M \to H$ con $p \in U$ tal que, para $\zeta = \eta \circ dh^{-1}(h(p))$,

$$\limsup_{v\to 0} \frac{(f \circ h^{-1})(h(p)+v) - f(p) - \langle \zeta, v\rangle}{\|v\|} \leq 0.$$

Demostración. Las implicaciones (1) $\Longrightarrow$ (2) y (3) $\Longrightarrow$ (4) son triviales. Probaremos (2) $\Longrightarrow$ (3). Si $f - \varphi$ alcanza un mínimo local en p entonces $g := f \circ h^{-1} - \varphi \circ h^{-1}$ alcanzan, también, un mínimo local en $h(p)$, lo que implica

$$\liminf_{v\to 0} \frac{g(h(p)+v) - g(h(p))}{\|v\|} \geq 0$$

y, combinando estas desigualdades con el hecho de que

$$\lim_{v\to 0} \frac{(\varphi \circ h^{-1})(h(p)+v) - (\varphi \circ h^{-1})(h(p)) - \langle \zeta, v\rangle}{\|v\|} = 0$$

(porque $\zeta = d(\varphi \circ h^{-1})(h(p))$), se deduce fácilmente que

$$\liminf_{v\to 0} \frac{(f \circ h^{-1})(h(p)+v) - (f \circ h^{-1})(h(p)) - \langle \zeta, v\rangle}{\|v\|} \geq 0.$$

(4) $\Longrightarrow$ (1). Para probar esta implicación, utilizaremos el siguiente lema, el cual puede ser consultado en [28] en una situación algo más general y del que haremos un esbozo de su demostración.

Lema 4.4. *Si V es un conjunto abierto de un espacio H de Hilbert , $x \in V$, y $F : V \to (-\infty, \infty]$ es una función que satisface*

$$\liminf_{v\to 0} \frac{F(x+v) - F(x) - \langle \tau, v\rangle}{\|v\|} \geq 0$$

para algún $\tau \in H^*$, entonces existe una función $\psi : H \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $F - \psi$ tiene un mínimo local en x, y $d\psi(x) = \tau$.

Demostración. Reemplazando F por la función $v \mapsto \max\{F(x+v) - F(x) - \langle \tau, v\rangle, -1\}$, podemos suponer que $x = 0$, $\tau = 0$, $F(x) = 0$, y F es acotada inferiormente en V. El límite inferior del enunciado queda, ahora, como

$$\liminf_{\|v\|\to 0} \frac{F(v)}{\|v\|} \geq 0.$$

Definimos $\rho : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ por

$$\rho(t) = \inf\{F(v) : \|v\| \leq t\};$$

entonces ρ es no decreciente, $\rho(0) = 0$, por tanto $\rho \leq 0$, y considerando la desigualdad anterior se obtiene

$$\lim_{t \to 0} \frac{\rho(t)}{t} = 0. \tag{$*$}$$

Definimos, ahora, las funciones

$$\rho_1(t) = \int_t^{et} \frac{\rho(s)}{s} ds, \text{ y } \rho_2(t) = \int_t^{et} \frac{\rho_1(s)}{s} ds.$$

Entonces ρ_1 es continua, y ρ_2 es de clase C^1 en $(0, \infty)$. Además, ρ_1 y ρ_2 son no decrecientes. No es difícil ver que

$$\rho(e^2 t) \leq \rho_1(et) \leq \rho_2(t) \leq \rho_1(t) \leq \rho(t) \leq 0,$$

lo que implica, junto con $(*)$, que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\rho_2(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\rho_1(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\rho(t)}{t} = 0. \tag{$**$}$$

En estas condiciones, podemos definir la función $\psi : H \to \mathbb{R}$ por

$$\psi(z) = \rho_2(\|z\|),$$

con $\psi(0) = 0$. Está claro que ψ es de clase C^1 en $H \setminus \{0\}$ y, para todo $x \neq 0$,

$$d\psi(z) = \frac{\rho_1(e\|z\|) - \rho_1(\|z\|)}{\|z\|} d\| \cdot \|(z).$$

Considerando $(**)$ y el hecho de que la norma es 1-Lipschitz, tenemos que $\lim_{v \to 0} \|d\psi(z)\| = 0$, lo que implica (utilizando el teorema del valor medio) que ψ es Fréchet diferenciable en 0, con $d\psi(0) = 0$, y $d\psi$ es continua; por tanto ψ es de clase C^1 en H. Finalmente, tomando en consideración las propiedades de ρ, ρ_1 y ρ_2, es fácil ver que $(F - \psi)(z) \geq 0 = F(0) = \psi(0)$ para todo $z \in H$, y por tanto $F - \psi$ tiene un mínimo en 0. $\square$

Ahora retornamos a la demostración de (4) $\implies$ (1). Tomamos un entorno V de p tal que $\overline{V} \subset U$. Nótese que $F := f \circ h^{-1}$ es una función del conjunto abierto $h(U)$ del espacio de Hilbert H en $(-\infty, \infty]$, y por las hipótesis tenemos que

$$\liminf_{v \to 0} \frac{F(h(p) + v) - F(h(p)) - \langle \zeta, v \rangle}{\|v\|} \geq 0.$$

Por el lema precedente, existe una función $\psi : h(U) \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $F - \psi$ tiene un mínimo local en $h(p)$ y $\zeta = d\psi(h(p))$. Definimos $\phi := \psi \circ h : U \to \mathbb{R}$, que es una función de clase C^1. Es claro que $F \circ h - \psi \circ h = f - \phi$ tiene un

mínimo local en p, y $d\phi(p) = d\psi(h(p)) \circ dh(p) = \zeta \circ dh(p) = \eta$. Para terminar la demostración, extendemos ϕ al complementario de U. Definimos $\varphi = \theta\phi$, donde θ es una función del tipo Uryshon de clase C^1 cuyo valor es 1 en el conjunto V y 0 fuera de U (una tal función existe porque M tiene una partición de la unidad de clase C^∞ y $\overline{V} \subset U$). Es obvio que φ tiene las mismas propiedades de relevancia que ϕ.
Obviamente, (5) $\implies$ (1). Finalmente veremos que cuando f está localmente acotada inferiormente, (1) $\iff$ (5). Supongamos que existe una función $\psi : M \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y algún $r > 0$ tal que $0 = f(p) - \psi(p) \leq f(x) - \psi(x)$ si $x \in B(p, r)$, y anotemos $\eta = d\psi(p)$. Veremos que existe una función $\varphi : M \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $f - \varphi$ alcanza un mínimo global *global* en p y $d\varphi(p) = \eta$. Consideramos el conjunto abierto $U = M \setminus \overline{B}(p, r/2)$. Del hecho de que $f - \psi$ sea localmente acotada inferiormente, para cada $x \in U$ existe $\delta_x > 0$ y $m_x \in \mathbb{R}$ tal que $B(x, \delta_x) \subset U$ y $m_x \leq f(y) - \psi(y)$ para todo $y \in B(x, \delta_x)$. Consideramos el recubrimiento por abiertos

$$G := \{B(x, \delta_x) : x \in U\} \cup \{B(p, r)\}$$

de M. Como M tiene una partición de la unidad de clase C^∞, existe un refinamiento localmente finito $\{U_i\}_{i\in I}$ del recubrimiento G y una familia de funciones $\{\psi_i\}_{i\in I} \subset C^\infty(M, [0, 1])$ tal que $\mathrm{supp}(\psi_i) \subset U_i$ para cada i y $\sum_{i\in I} \psi_i = 1$. Para cada $i \in I$, si $U_i \subset B(p, r)$ definiremos $\alpha_i = 0$. En los demás casos elegimos algún $x_i \in U = M \setminus \overline{B}(p, r/2)$ tal que $U_i \subset B(x_i, \delta_{x_i})$, y para estos casos ponemos $\alpha_i = m_{x_i}$. Ahora podemos definir nuestra función $\varphi : M \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(x) = \psi(x) + \sum_{i\in I} \alpha_i \psi_i(x).$$

Está claro que φ es una función de clase C^1 tal que $\varphi = \psi$ en $\overline{B}(p, r/2)$ (en efecto, tomando $x \in \overline{B}(p, r/2)$; si $x \in U_i$ entonces $U_i \subset B(p, r)$, de la elección del recubrimiento G y de δ_y, se obtiene que $\alpha_i = 0$, para los restantes $j \in I$ tenemos $\psi_j(x) = 0$; por tanto $\varphi(x) = \psi(x) + 0 = \psi(x)$). En particular, se sigue que $\eta = d\psi(p) = d\varphi(p)$. Afirmamos que $f - \varphi$ alcanza un mínimo global en p. En efecto, fijamos $x \in M$. Si $x \in \overline{B}(p, r/2) = M \setminus U$ entonces, como justamente podemos ver, $\varphi(x) = \psi(x)$, y $0 = (f - \varphi)(p) \leq (f - \psi)(x) = (f - \varphi)(x)$. Si $x \in U$ entonces, para un $i \in I$ tal que $x \in U_i$ tendremos $(f - \psi)(x) \geq m_{x_i} = \alpha_i$, mientras que $\psi_j(x) = 0$ para cualquier $j \in I$ con $x \notin U_j$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
&f(x) - \varphi(x) = f(x) - \psi(x) - \sum_{i\in I} \alpha_i \psi_i(x) = \\
&f(x) - \psi(x) - \sum \{\alpha_i \psi_i(x) : i \in I, x \in U_i\} \geq \\
&\sup\{\alpha_i : i \in I, x \in U_i\} - \sum \{\alpha_i \psi_i(x) : i \in I, x \in U_i\} \geq 0 = f(p) - \varphi(p),
\end{aligned}$$

y $f - \varphi$ tiene un mínimo global en p. □

Corolario 4.5. *Sea $f : M \to (-\infty, \infty]$ una función definida en una variedad riemanniana, y sea $h : U \subset M \to h(U) \subset H$ una carta de M, entonces*

$$D^- f(p) = \{\zeta \circ dh(p) : \zeta \in H^*, \liminf_{v \to 0} \frac{(f \circ h^{-1})(h(p) + v) - f(p) - \langle \zeta, v \rangle}{\|v\|} \geq 0\}$$

$$= \{\zeta \circ dh(p) : \zeta \in D^-(f \circ h^{-1})(h(p))\}.$$

Ahora podemos ver que subdiferenciabilidad más superdiferenciabilidad es igual a diferenciabilidad.

Proposición 4.6. *Una función f es diferenciable en p si, y sólo si, f es a la vez subdiferenciable y superdiferenciable en p. En este caso, $\{df(p)\} = D^- f(p) = D^+ f(p)$.*

Demostración. Supongamos primero que f es a la vez subdiferenciable y superdiferenciable en p, entonces existen dos funciones $\varphi, \psi : M \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tales que $f - \varphi$ y $f - \psi$ tienen un mínimo local y un máximo local en p, respectivamente. Podemos suponer que $f(p) = \varphi(p) = \psi(p)$, entonces estas condiciones hacen que $f(x) - \varphi(x) \geq 0$ y $f(x) - \psi(x) \leq 0$ para todo $x \in U$, donde U es un entorno abierto de p. En otro orden de cosas, $(f - \varphi) - (f - \psi) = \psi - \varphi$ tiene un mínimo local en p, por tanto $0 = d(\psi - \varphi)(p) = d\psi(p) - d\varphi(p)$. Esto es, tenemos que

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \text{ para todo } x \in U,\ \varphi(p) = \psi(p) = f(p), \text{ y } d\varphi(p) = d\psi(p).$$

Utilizando cartas, es un ejercicio fácil comprobar que esta condición implica que f es diferenciable en p, con $df(p) = d\psi(p) = d\varphi(p)$; en particular de este argumento se desprende que $\{df(p)\} = D^- f(p) = D^+ f(p)$. Ahora, si f es diferenciable en p, entonces, por la regla de la cadena, se tiene $f \circ h^{-1}$ en $h(p)$ para cualquier carta $h : U \subset M \to H$; en particular, poniendo $\zeta = d(f \circ h^{-1})(h(p))$, tenemos

$$\lim_{v \to 0} \frac{(f \circ h^{-1})(h(p) + v) - f(p) - \langle \zeta, v \rangle}{\|v\|} = 0,$$

por lo que, considerando el Teorema 4.3, se obtiene $df(p) = \zeta \circ dh(p) \in D^- f(p) \cap D^+ f(p)$. □

De la demostración anterior podemos concluir el siguiente resultado (no completamente obvio): una función f es diferenciable en un punto p si, y sólo si, su gráfica está atrapada entre las gráficas de dos funciones de clase C^1 que tienen la misma derivada en p y tocan la gráfica de f en p.

Corolario 4.7 (Criterio de diferenciabilidad). *Una función continua $f : M \to \mathbb{R}$ es Fréchet-diferenciable en el punto p si; y sólo si, existen funciones de clase C^1 $\varphi, \psi : M \to \mathbb{R}$ tales que*

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \text{ para todo } x \in M,\ \varphi(p) = \psi(p) = f(p), \text{ y } d\varphi(p) = d\psi(p).$$

Diremos algunas palabras acerca de la relación que existe entre subdiferenciabilidad y continuidad. En general, una función subdiferenciable no es necesariamente continua. Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ si $x \in [0, 1]$, y 1 en cualquier otro caso, es Fréchet-subdiferenciable en todos los puntos de $\mathbb{R}$, y f no es continua ni en 0 ni en 1. Es fácil comprobar, sin embargo, que subdiferenciabilidad implica semicontinuidad inferior.

Proposición 4.8. *Si f es subdiferenciable en p entonces f es semicontinua inferiormente en p. Análogamente, superdiferenciabilidad implica semicontinuidad superior.*

Demostración. El resultado es inmediato en el caso de una función $g : V \subset H \to (-\infty, \infty]$; en efecto, si

$$\liminf_{v \to 0} \frac{g(x + v) - g(x) - \langle \tau, v \rangle}{\|v\|} \geq 0$$

entonces $\liminf_{y \to x} g(y) \geq g(x)$. El caso general se obtiene de la aplicación del Teorema 4.3. □

4.2. Reglas de la suma

En esta sección estudiaremos algunas propiedades de la subdiferencial relativas a la composición, suma y producto de funciones subdiferenciables y diferenciables. En el caso de superdiferenciabilidad, el enunciado de estas propiedades puede ser modificado de manera obvia.

Proposición 4.9 (Regla de la cadena). *Sean M y N variedades riemannianas y, $g : M \to N$, y $f : N \to (-\infty, \infty]$ funciones tales que f es subdiferenciable en $g(p)$, y g es Fréchet-diferenciable en p, entonces la composición $f \circ g : M \to (-\infty, \infty]$ es subdiferenciable en p, y*

$$\{\zeta \circ dg(p) : \zeta \in D^- f(g(p))\} \subseteq D^-(f \circ g)(p).$$

Demostración. Tomando $\zeta \in D^-f(g(p))$, existe una función $\varphi : N \to \mathbb{R}$ tal que $f - \varphi$ tiene un mínimo local en $g(p)$, φ es Fréchet diferenciable en $g(p)$, y $\zeta = d\varphi(g(p))$. En particular existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(y) - \varphi(y) \geq f(g(p)) - \varphi(g(p))$ cuando $d(y, g(p)) < \varepsilon$. Definimos $\psi = \varphi \circ g$. Dado que g es diferenciable en p y φ es diferenciable en $g(p)$, por la regla de la cadena se sigue que ψ es una función de M en $\mathbb{R}$ la cual es Fréchet diferenciable en p, con $d\psi(p) = d\varphi(g(p)) \circ dg(p)$. Como g es continua en p, existe $\delta > 0$ tal que $d(g(x), g(p)) < \varepsilon$ para todo x con $d(x,p) < \delta$, entonces $f(g(x)) - \varphi(g(x)) \geq f(g(p)) - \varphi(g(p))$ si $d(x,p) < \delta$, esto es, $f \circ g - \psi$ tiene un mínimo local en p. Por el Teorema 4.3 [(1) $\iff$ (2)], se deduce que $f \circ g$ es subdiferenciable en p, con $\zeta \circ dg(p) = d\varphi(g(p)) \circ dg(p) = d\psi(p) \in D^-(f \circ g)(p)$. $\square$

En el siguiente ejemplo se muestra que la inclusión de la Proposición 4.9 es estricta, en general.

Ejemplo 4.10. *Sean $M = N = \mathbb{R}$, $g(x) = |x|^{3/2}$, $f(y) = |y|^{1/2}$; $f \circ g(x) = |x|^{3/4}$, entonces g es una función de clase C^1 en $\mathbb{R}$, y tenemos $dg(0) = 0$, $D^-f(g(0)) = D^-f(0) = (-\infty, \infty)$, $D^-(f \circ g)(0) = (-\infty, \infty)$. Por tanto $\zeta \circ dg(0) = 0$ para cada $\zeta \in D^-f(g(0))$.*

Corolario 4.11. *Sean M y N variedades riemannianas, y $h : M \to N$ un difeomorfismo de clase C^1, entonces la función $f : M \to (-\infty, \infty]$ es subdiferenciable en p si, y sólo si, $f \circ h^{-1}$ es subdiferenciable en $h(p)$, y*

$$D^-f(p) = \{\zeta \circ dh(p) : \zeta \in D^-(f \circ h^{-1})(h(p))\}.$$

Demostración. Si $f : M \to (-\infty, \infty]$ es subdiferenciable en p, entonces, por la proposición anterior, $f \circ h^{-1} : N \to (-\infty, \infty]$ es subdiferenciable en $h(p) \in N$ y, por otra parte, sabemos que si $T \in D^-f(p)$ entonces $\zeta := T \circ dh^{-1}(h(p)) \in D^-(f \circ h^{-1})(h(p))$, por tanto $T = \zeta \circ dh(p)$, con $\zeta \in D^-(f \circ h^{-1})(h(p))$. Inversamente, si $f \circ h^{-1}$ es subdiferenciable en $h(p)$ entonces, haciendo uso del resultado anterior, $f = (f \circ h^{-1}) \circ h$ es subdiferenciable en p y, para cualquier $\zeta \in D^-(f \circ h^{-1})(h(p))$, tenemos $\zeta \circ dh(p) \in D^{-1}\big((f \circ h^{-1}) \circ h\big)(p) = D^-f(p)$. $\square$

Proposición 4.12 (Regla de la suma). *Para dos funciones $f_1, f_2 : M \longrightarrow (-\infty, \infty]$,cualesquiera, con $p \in M$, se verifica que*

$$D^-f_1(p) + D^-f_2(p) \subseteq D^-(f_1 + f_2)(p),$$

y

$$D^+f_1(p) + D^+f_2(p) \subseteq D^+(f_1 + f_2)(p).$$

Demostración. Tomamos $\zeta_i \in D^- f_i(p)$, $i = 1, 2$, entonces existen funciones regulares de clase C^1 $\varphi_i : M \to \mathbb{R}$ tales que $f_i - \varphi_i$ tiene un mínimo en p y $\zeta_i = d\varphi_i(p)$ para $i = 1, 2$, entonces $(f_1 + f_2) - (\varphi_1 + \varphi_2) = (f_1 - \varphi_1) + (f_2 - \varphi_2)$ tienen, claramente, un mínimo en p, por tanto $\zeta_1 + \zeta_2 = d(\varphi_1 + \varphi_2)(p)$ pertenecen a $D^-(f_1 + f_2)(p)$. □

Cuando una de las funciones involucradas en la suma es uniformemente continua la inclusión inversa puede darse bajo ciertas condiciones. Estas suposiciones son necesarias en general, como muestra un contraejemplo de Deville e Ivanov (en espacios de Hilbert); ver [30].

Teorema 4.13 (Regla aproximada para la subdiferencial de la suma). *Sea (M, g) una variedad riemanniana. Sean $f_1, f_2 : M \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que f_1 es semicontinua inferiormente y f_2 es uniformemente continua. Tomamos $p \in M$, una carta (U, φ) con $p \in U$, $\zeta \in D^-(f_1+f_2)(p)$, $\varepsilon > 0$, y un entorno V de (p, ζ) en el fibrado cotangente T^*M, entonces existen $p_1, p_2 \in U$, $\zeta_1 \in D^- f_1(p_1)$ y $\zeta_2 \in D^- f_2(p_2)$ tales que: $(p_i, \zeta_1 \circ d\varphi(p_1)^{-1} \circ d\varphi(p_i) + \zeta_2 \circ d\varphi(p_2)^{-1} \circ d\varphi(p_i)) \in V$ y $|f_i(p_i) - f_i(p)| < \varepsilon$ cuando $i = 1, 2$.*

Demostración. Fijamos una carta (U, φ) tal que $p \in U$ y considerando que T^*U es difeomorfo a $U \times H^*$ a través del difeomorfismo canónico $L : T^*U \to U \times H^*$ definido por $L(q, \xi) = (q, \xi \circ d\varphi(q)^{-1})$, el teorema puede ser reformulado de la siguiente manera: *para cada $p \in U$, $\zeta \in D^-(f_1 + f_2)(p)$, y $\varepsilon > 0$, existen $p_1, p_2 \in U$, $\zeta_1 \in D^- f_1(p_1)$, $\zeta_2 \in D^- f_2(p_2)$ tales que: $d(p_1, p_2) < \varepsilon$, $||\zeta_1 \circ d\varphi(p_1)^{-1} + \zeta_2 \circ d\varphi(p_2)^{-1} - \zeta \circ d\varphi(p)^{-1}|| < \varepsilon$, y $|f_i(p_i) - f_i(p)| < \varepsilon$ para $i = 1, 2$.* Pero esta aseveración se obtiene, inmediatamente, de la regla débil de la suma de Deville y El Haddad para espacios de Banach [26], aplicado a las funciones $f_1 \circ \varphi^{-1}$ y $f_2 \circ \varphi^{-1}$. □

Del teorema anterior se obtiene, de forma inmediata, la siguiente formulación de la regla aproximada de la subdiferencial de la suma en términos del transporte paralelo, como enunciamos a continuación.

Teorema 4.14. *Sea (M, g) una variedad riemanniana. Sean $f_1, f_2 : M \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que f_1 es semicontinua inferiormente y f_2 es uniformemente continua. Tomamos $p \in M$, $\zeta \in D^-(f_1 + f_2)(p)$ y $\varepsilon > 0$, entonces existen p_1 y p_2 en M y $\zeta_1 \in T^*M_{p_1}$ y $\zeta_2 \in T^*M_{p_2}$ tales que $d(p_1, p) < \varepsilon$ y $d(p_2, p) < \varepsilon$, $\zeta_1 \in D^- f_1(p_1)$ y $\zeta_2 \in D^- f_2(p_2)$, $|f_1(p_1) - f_1(p)| < \varepsilon$ y $|f_2(p_2) - f_2(p)| < \varepsilon$, y $\|L_{p_2 p}(\zeta_2) + L_{p_1 p}(\zeta_1) - \zeta\|_p < \varepsilon$. Donde $L_{p_i p}$ representa el transporte paralelo estándar de p_i a p para $i = 1$ o $i = 2$.*

Proposición 4.15 (Regla del producto). *Suponemos que $f_1, f_2 : M \longrightarrow [0, \infty)$ son funciones subdiferenciables en $p \in M$, entonces $f_1 f_2$ es subdiferenciable en p, y*

$$f_1(p)D^- f_2(p) + f_2(p)D^- f_1(p) \subseteq D^-(f_1 f_2)(p).$$

Demostración. Si $f_1(p) = f_2(p) = 0$ el resultado es inmediato. Supongamos por tanto que por ejemplo $f_1(p) > 0$. Tomemos $\zeta_i \in D^- f_i(p)$, y funciones $\varphi_i : M \to \mathbb{R}$ regulares de clase C^1 tales que $f_i - \varphi_i$ tenga un mínimo local en p y $\zeta_i = d\varphi_i(p)$ para $i = 1, 2$. Como es usual, podemos suponer que $\varphi_i(p) = f_i(p)$, y por tanto $f_i - \varphi_i \geq 0$. Dado que $\varphi_1(p) = f_1(p) > 0$ y φ_1 es continua, existe un entorno V de p tal que $\varphi_1 \geq 0$ en V. Supongamos que V es un entorno más pequeño tal que la restricción de $\varphi_1 - f_1$ a V tiene un mínimo global en p, entonces deducimos que $f_1 f_2 \geq \varphi_1 \varphi_2$ en V, esto es,

$$(f_1 f_2 - \varphi_1 \varphi_2)(x) \geq 0 = (f_1 f_2 - \varphi_1 \varphi_2)(p) \text{ para todo } x \in V,$$

lo que hace que $f_1 f_2 - \varphi_1 \varphi_2$ tenga un mínimo local en p, y por tanto

$$f_1(p)\zeta_2 + f_2(p)\zeta_1 = \varphi_1(p) d\varphi_2(p) + \varphi_2(p) d\varphi_1(p) = d(\varphi_1 \varphi_2)(p) \in D^-(f_1 f_2)(p).$$

□

Observación 4.16. *Si las funciones no son positivas, el resultado no es necesariamente cierto, como se puede ver en el siguiente ejemplo: $M = \mathbb{R}$, $f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = -1$, $p = 0$ (nótese que la función $(f_1 f_2)(x) = -|x|$ no es subdiferenciable en 0).*

4.3. Principio de minimización perturbada para la suma o diferencia de funciones

En esta sección obtenemos un principio de minimización perturbada para la suma (o diferencia) de funciones en aquellas variedades riemannianas que tienen índice de inyectividad positivo y son uniformemente localmente convexas. Este resultado constituye una de las piezas fundamentales de la demostración de la existencia y unicidad de las soluciones de viscosidad de ecuaciones de Hamilton-Jacobi que damos en el capítulo siguiente. También tiene otras consecuencias interesantes. Por ejemplo, la fórmula aproximada para la subdiferencial de la suma 4.13 puede deducirse como corolario de este principio de minimización pertubada de la diferencia de funciones. Antes de enunciar y demostrar este

principio necesitamos hacer unas consideraciones previas sobre el transporte paralelo y cierta propiedad de antisimetría de las derivadas parciales de la función distancia en las variedades riemannianas.
Si suponemos que M es una variedad riemanniana completa uniformemente localmente convexa y con índice de inyectividad $i(M) > r > 0$, entonces para cada $x \in M$ la función distancia, $y \mapsto d(y, x)$, es una función de clase C^∞ en $B(x, r)\setminus\{x\}$, y por tanto tiene perfecto sentido considerar las derivadas parciales $\partial d(x_0, y_0)/\partial x$ y $\partial d(x_0, y_0)/\partial y$ de la función distancia $d : M\times M \to \mathbb{R}$. El próximo resultado que veremos se refiere a una cierta propiedad de antisimetría de estas derivadas parciales y, para poder compararlas convenientemente, necesitaremos utilizar el trasporte paralelo de TM_{x_0} a TM_{y_0} a lo largo de la geodésica que une x_0 con y_0 (nótese que existe una única geodésica minimizante que une x_0 a y_0 porque M es uniformemente localmente convexa y $d(x_0, y_0) < r$). Sean $x_0, y_0 \in M$ tales que $d(x_0, y_0) < r$ y sea $\gamma(t) = \exp_{x_0}(tv_0)$, $0 \le t \le 1$, la única geodésica minimizante que une estos dos puntos. Para cada vector $w \in TM_{x_0}$, anotamos

$$L_{x_0y_0}(w) = P^1_{0,\gamma}(w)$$

la traslación paralela de w desde x_0 a y_0 a lo largo de γ. Recordamos (véase Capítulo 1) que la aplicación $L_{x_0y_0} : TM_{x_0} \to TM_{y_0}$ es una isometría lineal, con inversa $L_{y_0x_0} : TM_{y_0} \to TM_{x_0}$. Como es costumbre, identificaremos TM_p con T^*M_p (mediante la isometría lineal $v \mapsto \langle v, \cdot\rangle_p$). La isometría $L_{x_0y_0}$ induce, a su vez, una isometría lineal entre los fibrados cotangentes $T^*M_{x_0}$ y $T^*M_{y_0}$. Anotaremos esta nueva isometría por $L_{x_0y_0} : T^*M_{x_0} \to T^*M_{y_0}$.

Lema 4.17. *Sea M una variedad riemanniana completa, uniformemente localmente convexa y con índice de inyectividad $i(M) > r > 0$, y sean $x_0, y_0 \in M$ tales que $0 < d(x_0, y_0) < r$, entonces*

$$L_{y_0x_0}\Big(\frac{\partial d(y_0, x_0)}{\partial y}\Big) = -\frac{\partial d(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Demostración. Anotamos $r_0 = d(x_0, y_0)$ y suponemos que $r_0 < r$. Consideramos la geodésica $\gamma(t) = \exp_{x_0}(tv_0)$, $0 \le t \le 1$, donde $y_0 = \exp_{x_0}(v_0)$. Por la definición de trasporte paralelo y de geodésica es evidente que

$$L_{x_0y_0}(v_0) = \gamma'(1) = d\exp_{x_0}(v_0)(v_0).$$

En otro orden de cosas, de las correspondientes suposiciones de M, y por el Lema de Gauss (véase [41, 43]), sabemos que $\gamma'(1)$ es ortogonal a la esfera $S(x_0, r_0) = \{y \in M : d(y, x_0) = r_0\} = \exp_{x_0}(S(0_{x_0}, r_0))$. Como la esfera, $S(x_0, r_0)$, es una subvariedad de M uno-codimensional definida como el conjunto de ceros de la función regular $y \mapsto d(y, x_0) - r_0$ y (como es fácil comprobar)

$$\frac{\partial d(y_0, x_0)}{\partial y} \neq 0,$$

tenemos que esta derivada parcial es ortogonal a la esfera $S(x_0, r_0)$ en el punto y_0. Por tanto

$$L_{x_0 y_0}(v_0) = \gamma'(1) = \lambda \frac{\partial d(y_0, x_0)}{\partial y}$$

Para algún $\lambda \neq 0$. Además, como la función $t \mapsto d(\gamma(t), x_0)$ es creciente, tenemos que $\lambda > 0$. Finalmente, es claro que $y \mapsto d(y, x_0)$ es 1-Lipschitz, y

$$\| \frac{\partial d(y_0, x_0)}{\partial y} \| = 1,$$

de lo que deducimos que $\lambda = \|L_{x_0 y_0}(v_0)\|_{y_0} = \|v_0\|_{x_0}$, y

$$L_{x_0 y_0}(v_0) = \|v_0\|_{x_0} \frac{\partial d(x_0, y_0)}{\partial y}. \tag{1}$$

Ahora consideramos la geodésica

$$\beta(t) = \exp_{y_0}(t w_0),$$

$0 \leq t \leq 1$, donde $\exp_{y_0}(w_0) = x_0$. Por las definiciones de traslación paralela y geodésica sabemos que

$$L_{x_0 y_0}(v_0) = -w_0, \text{ y } \|w_0\|_{y_0} = \|v_0\|_{x_0}. \tag{2}$$

Por un argumento análogo al aplicado a γ, obtenemos que

$$L_{y_0 x_0}(w_0) = \|w_0\| \frac{\partial d(x_0, y_0)}{\partial x}. \tag{3}$$

Combinando (1), (2) y (3) es inmediato que

$$L_{y_0 x_0}\Big(\frac{\partial d(y_0, x_0)}{\partial y}\Big) = \frac{v_0}{\|v_0\|_{x_0}} = -\frac{L_{y_0 x_0}(w_0)}{\|w_0\|_{y_0}} = -\frac{\partial d(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

□

El siguiente teorema se puede considerar como un principio de minimización perturbada para la suma o diferencia de dos funciones. Lo probaremos como consecuencia de los Principios Variacionales Suaves 2.11 y el Lema 4.17

Teorema 4.18. *Sea M una variedad riemanniana completa uniformemente localmente convexa y con índice de inyectividad $i(M) > r > 0$, sean $u, v : M \to \mathbb{R}$ dos funciones, u acotada superiormente y semicontinuas superiormente (scs) y v acotada inferiormente y semicontinuas inferiormente (sci), entonces para cada $\varepsilon > 0$, existen $x_0, y_0 \in M$, $\zeta \in D^+u(x_0)$ y $\xi \in D^-v(y_0)$ tales que*

(i) $d(x_0, y_0) < \varepsilon$,

(ii) $\|\zeta - L_{y_0x_0}(\xi)\|_{x_0} < \varepsilon$,

(iii) $v(z) - u(z) \geq v(y_0) - u(x_0) - \varepsilon$ *para cada* $z \in M$.

Donde $L_{y_0x_0} : T^*M_{y_0} \to T^*M_{x_0}$ es el transporte paralelo estándar.

Demostración. Podemos suponer, obviamente, que $\varepsilon < r$. Sea $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^∞, no-creciente, y tal que

$$b(t) = b(0) > 2(\|v\|_\infty + \|u\|_\infty) + \varepsilon \text{ si } t \leq \varepsilon/4, \text{ y } b(t) = 0 \text{ si } t \geq \varepsilon. \tag{1}$$

Definimos la función $w : M \times M \to \mathbb{R}$ por

$$w(x, y) = v(y) - u(x) - b(d(x, y)) \text{ cuando } (x, y) \in M \times M.$$

La función w es semicontinua inferiormente y acotada inferiormente. Por el Lema 2.8 sabemos que $M \times M$ es uniformemente mesetable, y $M \times M$ es, obviamente, completa, por tanto podemos aplicar el Principio Variacional Suave 2.11 a la función w para asegurar la existencia de un par $(x_0, y_0) \in M \times M$ y de una función, $g : M \times M \to \mathbb{R}$, de clase C^1 tales que

(a) $\|g\|_\infty < \varepsilon/2 > \|dg\|_\infty$,

(b) $v(y) - u(x) - b(d(x, y)) - g(x, y) \geq v(y_0) - u(x_0) - b(d(x_0, y_0)) - g(x_0, y_0)$ para todo $x, y \in M$.

Si tomamos $x = x_0$ en (b), tenemos que v es subdiferenciable en el punto y_0, y

$$\xi := \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} + \frac{\partial (b \circ d)(x_0, y_0)}{\partial y} \in D^-v(y_0). \tag{2}$$

De manera similar, si tomamos $y = y_0$ en (b), tenemos que

$$\zeta := -\Big(\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial (b \circ d)(x_0, y_0)}{\partial x}\Big) \in D^+u(x_0). \tag{3}$$

Considerando el Lema 4.17 y la definición de b cuando $x_0 \neq y_0$, tenemos que

$$\begin{aligned} &L_{y_0x_0}\Big(\frac{\partial (b \circ d)(x_0, y_0)}{\partial y}\Big) + \frac{\partial (b \circ d)(x_0, y_0))}{\partial x} = \\ &b'(d(x_0, y_0))\Big[L_{y_0x_0}\Big(\frac{\partial d(x_0, y_0)}{\partial y}\Big) + \frac{\partial d(x_0, y_0)}{\partial x}\Big] = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

Por tanto

$$\|L_{y_0x_0}(\xi) - \zeta\|_{x_0} =$$

$$\|L_{y_0x_0}\Big(\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}\Big) + L_{y_0x_0}\Big(\frac{\partial (b\circ d)(x_0,y_0)}{\partial y}\Big) + \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x} + \frac{\partial (b\circ d)(x_0,y_0)}{\partial x}\|_{x_0}$$

$$= \|L_{y_0x_0}\Big(\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}\Big) + \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}\|_{x_0} \leq$$

$$|\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}\|_{y_0} + \|\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}\|_{x_0} \leq \|dg\|_\infty + \|dg\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

lo que prueba (ii). En otro orden de cosas, si $d(x_0, y_0) \geq \varepsilon$, y si tomamos $x = y = z$ en (b), tenemos que

$$b(0) \leq v(z) - u(z) - g(z,z) + g(x_0,y_0) - v(y_0) + u(x_0) \leq$$
$$2(\|v\|_\infty + \|u\|_\infty) + \varepsilon,$$

lo que contradice la definición de b, véase (1) al comienzo de la demostración. Por tanto $d(x_0, y_0) < \varepsilon$, lo que prueba (i). Finalmente, si tomamos $z = x = y$ en (b) y si consideramos que $\|g\|_\infty < \varepsilon/2$ y que la función b es no-creciente, tenemos que

$$v(z) - u(z) \geq v(y_0) - u(x_0) + b(0) - b(d(x_0,y_0)) + g(z,z) - g(x_0,y_0) \geq$$
$$v(y_0) - u(x_0) + 0 - \varepsilon/2 - \varepsilon/2 = v(y_0) - u(x_0) - \varepsilon,$$

lo que prueba (iii), y de esta manera finaliza la demostración. □

Observación 4.19. *La proposición precedente no siempre es cierta si la variedad no es completa. Por ejemplo: $M = (0,1) \subset \mathbb{R}$, $g(x) = x$, $f(x) = 0$, y $\varepsilon > 0$ pequeño.*

4.4. Propiedades topológicas y geométricas de los conjuntos de subdiferenciales.

Proposición 4.20. *$D^-f(p)$ y $D^+f(p)$ son subconjuntos cerrados y convexos de T^*M_p. En particular, si f es localmente Lipschitz, entonces estos conjuntos son w^*-compactos.*

Demostración. Probaremos primero que $D^-f(p)$ es convexo. Escogemos $\zeta_1, \zeta_2 \in D^-f(p)$, y tomamos funciones $\varphi_1, \varphi_2 : M \to \mathbb{R}$ regulares de clase C^1 tales que $d\varphi_i(p) = \zeta_i$, y $(f - \varphi_i)(x) \geq 0 = (f - \varphi_i)(p)$ para todo x en un entorno de p. Tomamos $t \in [0,1]$, y definimos la función $\varphi_t : M \to \mathbb{R}$ por $\varphi_t(x) = (1-t)\varphi_1(x) + t\varphi_2(x)$. Es inmediato ver que φ_t es una función de clase C^1 tal que $f - \varphi_t$ alcanza un mínimo local en p, y por tanto

$$(1-t)\zeta_1 + t\zeta_2 = d\varphi_t(p) \in D^- f(p).$$

Ahora veremos que $D^- f(p)$ es cerrado. Tomamos una carta $h : U \subset M \to H$ con $p \in U$. Dado que $dh(p) : TM_p \to H$ es un isomorfismo lineal y $(dh(p))^* : H^* \to (TM_p)^*$ (definida por $(dh(p))^*(\zeta) = \zeta \circ dh(p)$) es también un isomorfismo lineal, y, considerando el Corolario 4.5, sabemos que

$$D^- f(p) = \{\zeta \circ dh(p) : \zeta \in D^-(f \circ h^{-1})(h(p))\} = (dh(p))^* \big(D^-(f \circ h^{-1})(h(p))\big),$$

por tanto es suficiente ver que $D^-(f \circ h^{-1})(h(p))$ es cerrado en H^*. Esto es, queremos probar que $D^- g(x)$ es cerrado en $(H^*, \|\cdot\|)$ cuando $g : V \subset H \to (-\infty, \infty]$ es una función subdiferenciable en el punto x. En efecto, sea $(p_n) \subset D^- g(x)$ tal que $\|p_n - p\| \to 0$, probaremos que $p \in D^- g(x)$. Tenemos

$$\liminf_{v \to 0} \frac{g(x+v) - g(x) - \langle p_n, v\rangle}{\|v\|} \geq 0$$

para todo n, y por tanto

$$\begin{aligned}
&\liminf_{v \to 0} \frac{g(x+v) - g(x) - \langle p, v\rangle}{\|v\|} = \\
&= \liminf_{v \to 0} \left[\frac{1}{\|v\|}\left(g(x+v) - g(x) - \langle p_n, v\rangle\right) + \frac{1}{\|v\|}\langle p_n - p, v\rangle\right] \\
&\geq \liminf_{v \to 0} \frac{1}{\|v\|}\left(g(x+v) - g(x) - \langle p_n, v\rangle\right) + \liminf_{v \to 0} \frac{1}{\|v\|}\langle p_n - p, v\rangle \\
&\geq 0 + \liminf_{v \to 0} \frac{1}{\|v\|}\langle p_n - p, v\rangle = -\|p_n - p\|
\end{aligned}$$

para todo n, esto es,

$$\liminf_{v \to 0} \frac{g(x+v) - g(x) - \langle p, v\rangle}{\|v\|} \geq -\|p_n - p\|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, y puesto que $\|p_n - p\| \to 0$ deducimos que

$$\liminf_{v \to 0} \frac{g(x+v) - g(x) - \langle p, v\rangle}{\|v\|} \geq 0,$$

lo que hace $p \in D^- g(x)$. Finalmente, cuando f es localmente Lipschitz, por composición con la inversa de la función exponencial (la cual tiene una carta Lipschitz en un entorno de cada punto) y utilizando el Corolario 4.5, es fácil ver que $D^- f(p)$ y $D^+ f(p)$ están acotados, entonces por el teorema de Alaoglu-Bourbaki se sigue que estos conjuntos son w^*-compactos. □

4.5. Densidad de los puntos de subdiferenciabilidad.

Una consecuencia de los Principios Variacionales Suaves es que cualquier función semicontinua inferiormente es subdiferenciable en un subconjunto denso de su dominio.

Proposición 4.21. *Sea M una variedad riemanniana. Si $f : M \longrightarrow (-\infty, \infty]$ es una función propia y semicontinua inferiormente, entonces el conjunto $\{p \in dom(f) : D^- f(p) \neq \emptyset\}$ es denso en dom(f) $:= \{x \in M : f(x) < \infty\}$.*

Demostración. Supongamos primero que M es completa y uniformemente mesetable (adviértase que si M es un espacio de Hilbert estaríamos en este supuesto). En este caso, el resultado es una aplicación directa del Principio Variacional Suave 2.11 como exponemos a continuación. Tomamos cualquier punto p_0 con $f(p_0) < \infty$, y cualquier entorno U de p_0. Debemos probar que existe un punto $p \in U$ tal que $D^- f(p) \neq \emptyset$. Dado que M tiene una partición regular de la unidad, existe una función $b : M \to [0, \infty)$ de clase C^∞ tal que $b(y) > 0$ si, y sólo si, $y \in U$. Consideramos la función $g : M \to (-\infty, \infty]$ definida por

$$g(y) = \frac{1}{b(y)} \text{ si } y \in U, \text{ y } g(y) = \infty \text{ si } y \notin U.$$

La función g es semicontinua inferiormente en M, y de clase C^∞ en U, entonces la suma $f + g$ es semicontinua inferiormente, y $(f + g)(p_0) < +\infty$. De acuerdo con el Principio Variacional Suave, existe una función $\varphi : M \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $(f + g) - \varphi$ alcanza un mínimo fuerte en algún punto $p \in M$ y dado que la función está valorada $+\infty$ fuera de U, se verifica que $p \in U$. Puesto que la función $\varphi - g$ es de clase C^1 en U, y $f - (\varphi - g)$ alcanza un mínimo en p, concluimos que

$$d(\varphi - g)(p) \in D^- f(p) \neq \emptyset.$$

Ahora consideramos el caso cuando M no es necesariamente completa o uniformemente mesetable. Tomamos un punto $p_0 \in \text{dom}(f)$ y un conjunto abierto U que contenga a p_0. Podemos suponer que U es suficientemente pequeño para que exista una carta $h : \overline{U} \subset V \to H$. Por el Corolario 4.5 sabemos que, para cualquier $p \in M$, se tiene que $D^- f(p) \neq \emptyset$ si, y sólo si, $D^-(f \circ h^{-1})(p) \neq \emptyset$. Es suficiente, por tanto, ver que existe algún $x \in h(U)$ con $D^-(f \circ h^{-1})(x) \neq \emptyset$. Definimos $F(x) = f \circ h^{-1}(x)$ si $x \in h(\overline{U})$, y $F(x) = +\infty$ en otro caso. La función F es semicontinua inferiormente en H, y $F = f \circ h^{-1}$ en $h(U)$. Como H es un espacio de Hilbert es, ciertamente, completo y uniformemente mesetable, y por tanto podemos aplicar la primera parte de la argumentación para deducir la existencia de un punto $x \in h(U)$ tal que $\emptyset \neq D^- F(x) = D^-(f \circ h^{-1})(x)$. $\square$

4.6. Desigualdades del valor medio

Existen muchos teoremas sobre desigualdades del valor medio subdiferenciales en espacios de Banach. En esta sección solamente consideraremos dos de estos teoremas, los cuales son complementarios uno del otro. El primero se debe a Deville [23] y trata de funciones semicontinuas inferiormente definidas en conjuntos abiertos y conexos de un espacio de Banach, incluso sin requerir subdiferenciabilidad en casi todo punto, pero exigiendo la acotación de *todos* los subgradientes de la función en los puntos donde sea subdiferenciable. El segundo se debe a Godefroy (quien completa un resultado previo similar de Azagra y Deville), véase [35, 5], y solamente exige la existencia de *una* subdiferencial o superdiferencial que esté acotada (por alguna constante) en cada punto, pero requiere que la función satisfaga $D^-f(x) \cup D^+f(x) \neq \emptyset$ para *todos* los puntos del dominio de f (un subconjunto abierto y convexo de un espacio de Banach). A continuación, extenderemos estos teoremas de desigualdades del valor medio a variedades riemannianas. Las mismas ideas de las demostraciones de estos resultados pueden adaptarse para obtener demostraciones que sean válidas para el caso de variedades, pero para mayor brevedad hemos elegido deducirlas del caso de espacios de Hilbert.

Teorema 4.22 (Desigualdad del valor medio de Deville). *Sea (M, g) una variedad riemanniana, y sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función semicontinua inferiormente. Supongamos que existe una constante $K > 0$ tal que $\|\zeta\|_p \leq K$ para todo $\zeta \in D^-f(p)$ y $p \in M$, entonces*

$$|f(p) - f(q)| \leq K d_M(p, q) \ \textit{ for all } p, q \in M.$$

Demostración. El resultado es cierto en el caso de que $M = H$ sea un espacio de Hilbert. Aunque este resultado puede ser consultado en [23], haremos un breve recorrido de la demostración de Deville. Por un argumento estándar, es suficiente probar el resultado localmente (ver la demostración del caso general después). Fijamos $x_0 \in H$. Puesto que f es localmente acotada inferiormente existen $N, \delta > 0$ tales que $f(x) - f(x_0) \geq -N$ cuando $x \in B(x_0, 2\delta)$. Fijando $y \in B(x_0, \delta/4)$, $\varepsilon > 0$, consideramos la función definida por $F(x) = f(x) - f(y) - \alpha(\|x - y\|)$ cuando $\|x - y\| \leq \delta$, y $F(x) = +\infty$ en otro caso, donde $\alpha : [0, \infty) \to [0, \infty)$ es de clase C^1 y satisface $\alpha(t) = (K + \varepsilon)t$ si $t \leq \delta/2$, $\alpha(\delta) \geq N$, y $\alpha'(t) \geq K + \varepsilon$ para todo $t > 0$. Si $\inf F < 0$, aplicando el PVS DGZ existe un punto $x_1 \in B(y, \delta) \setminus \{y\}$ y un subgradiente $\zeta \in D^-f(x_1)$ tales que $\|\zeta\| > K$, lo que supone una contradicción. Por tanto $F \geq 0$, y haciendo tender $\varepsilon \to 0$ se obtiene el resultado local. Ver [23] para los detalles. Consideramos, por tanto, el caso general de variedades riemannianas. Fijamos dos puntos cualesquiera $p, q \in M$, y consideramos un camino $\gamma : [0, T] \to M$ continuo y de clase C^1 a trozos, parametrizado por la longitud del arco, con $\gamma(0) = p, \gamma(T) = q$. Tomamos $\varepsilon > 0$. Según el Teorema 1.2, para cada $x \in \gamma([0,T])$ existe $r_x > 0$ tal que $\exp_x : B(0_x, 2r_x) \subset TM_x \to B(x, 2r_x) \subset M$ es un difeomorfismo de clase C^∞ tal que las derivadas de la $\exp_x$ y de $\exp_x^{-1}$ están acotadas por $1+\varepsilon$ en esta bola. Como $\gamma([0,T])$ es compacto, existe una colección finita de puntos $x_1 = p, x_2, ..., x_n = q \in \gamma[0,T]$ tales que

$$\gamma\big([0,T]\big) \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, r_j),$$

donde ponemos $r_j = r_{x_j}$ para simplificar la notación. Sea $r = \min\{r_1, ..., r_n\}$, y elegimos un $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que $T/m < r/2$. Definimos $t_0 = 0 < t_1 = T/m < ... < t_j = jT/m < ... < T = t_m$, y consideramos los puntos a_j, b_j con $a_j = b_{j-1} = \gamma(t_{j-1})$, $j = 1, ..., m$, y $b_m = \gamma(t_m)$. Para cada $j \in \{1, ..., m-1\}$ elegimos un $i_j \in \{1, ..., n\}$ tal que

$$\gamma[t_{j-1}, t_j] \cap B(x_{i_j}, r_{i_j}) \neq \emptyset,$$

y pondremos $i_0 = 1$, $i_m = n$ (donde $x_{i_0} = p$ y $x_{i_m} = q$). Como la longitud de la restricción de γ a $[t_{j-1}, t_j]$, que anotaremos γ_j, es $t_j - t_{j-1} = T/m < r/2 \leq r_{i_j}/2$, entonces tenemos, obviamente, que

$$\gamma[t_{j-1}, t_j] \subset B(x_{i_j}, 2r_{i_j})$$

para cada $j = 1, ..., m$. Para simplificar, nuevamente, la notación pondremos $y_j = x_{i_j}$, y $s_j = r_{i_j}$, para $j = 0, 1, ..., m$. Consideramos la función $f_j : B(0_{y_j}, 2s_j) \to \mathbb{R}$ definida por $f_j = f \circ \exp_{y_j}$. Por el Corolario 4.11 conocemos que

$$D^- f_j(x) = \{\zeta \circ d\exp_{y_j}(x) : \zeta \in D^-(f)(\exp_{y_j}(x))\}$$

para todo $x \in B(0_{y_j}, 2s_j)$. Como $\|\zeta\|_y \leq K$ para todo $\zeta \in D^- f(y)$ con $y \in M$, y $\|d\exp_{y_j}(x)\| \leq (1+\varepsilon)$ para todo $x \in B(0_{y_j}, 2s_j)$, deducimos que $\|\eta\|_{y_j} \leq (1+\varepsilon)K$ para todo $\eta \in D^- f_j(x)$, $x \in B(0_{y_j}, 2s_j)$, entonces podemos aplicar el resultado al caso $H = TM_{x_j}$ y a la función f_j para ver que

$$\begin{aligned}&|f(a_j) - f(b_j)| = |f_j(\exp_{y_j}^{-1}(a_j)) - f(\exp_{y_j}^{-1}(b_j))| \leq \\ &(1+\varepsilon)K d_{TM_{y_j}}\big(\exp_{y_j}^{-1}(a_j)), \exp_{y_j}^{-1}(b_j)\big)\end{aligned}$$

para todo $j = 1, 2, ..., m$. Por otra parte; como $\exp_{x_j}^{-1}$ es $(1+\varepsilon)$-Lipschitz tenemos que

$$d_{TM_{y_j}}\big(\exp_{y_j}^{-1}(a_j)), \exp_{y_j}^{-1}(b_j)\big) \leq (1+\varepsilon) d_M(a_j, b_j)$$

para todo $j = 1, 2, ..., m$. Combinando estas dos últimas desigualdades se deduce que

$$|f(a_j) - f(b_j)| \leq (1+\varepsilon)^2 K d_M(a_j, b_j) \leq (1+\varepsilon)^2 K \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|d\gamma(t)\| dt$$

para todo $j = 1, ..., m$. Por tanto,

$$|f(p) - f(q)| = |\sum_{j=1}^{m}(f(a_j) - f(b_j))| \leq \sum_{j=1}^{m}|f(a_j) - f(b_j)| \leq$$

$$(1+\varepsilon)^2 K \sum_{j=1}^{m}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\|d\gamma(t)\|dt = (1+\varepsilon)^2 K\int_0^T \|d\gamma(t)\|dt = (1+\varepsilon)^2 K L(\gamma).$$

Tomando el ínfimo del conjunto de las longitudes $L(\gamma)$ de los caminos γ continuos y de clase C^1 a trozos que unen p y q , tenemos

$$|f(q) - f(p)| \leq (1+\varepsilon)^2 K d_M(q,p).$$

Finalmente, haciendo tender ε a 0 obtenemos la desigualdad requerida: $|f(q) - f(p)| \leq K d_M(q,p)$. $\square$

Corolario 4.23. *Sea (M, g) una variedad riemanniana, y sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, entonces*

$$\sup\left\{\|\zeta\|_p : \zeta \in D^- f(p), p \in M\right\} = \sup\left\{\|\zeta\|_p : \zeta \in D^+ f(p), p \in M\right\}.$$

Estas cantidades son finitas si, y sólo si, f es Lipschitz en M, y en este caso son iguales a la constante de Lipschitz de f.

Teorema 4.24 (Desigualdad del valor medio de Godefroy). *Sea (M, g) una variedad riemanniana, y sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de Borel tal que*

$$D^- f(p) \cup D^+ f(p) \neq \emptyset$$

para cada $p \in M$. Definimos $\Phi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Phi(p) = \inf\{\|\zeta\|_p : \zeta \in D^- f(p) \cup D^+ f(p)\}.$$

Entonces para cada camino $\gamma : I \to M$ parametrizado por la longitud del arco, se tiene que

$$\mu\big(f(\gamma(I))\big) \leq \int_I \Phi(\gamma(t))dt,$$

donde μ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Demostración. El resultado está probado cuando $M = H$ es un espacio de Hilbert (consúltese [35]). Deduciremos, por tanto, el caso general. Anotaremos $I = [0, T]$. Para un $\varepsilon > 0$ dado, elegimos puntos $y_j = x_{i_j}, a_j, b_j$, y números $s_j = r_{i_j}, t_j$, exactamente igual que en la demostración del Teorema 4.22. Anotaremos

$f_j = f \circ \exp_{y_j} : B(0_{y_j}, 2s_j) \to \mathbb{R}$, $\gamma_j = \exp_{y_j}^{-1} \circ \gamma : I_j := [t_{j-1}, t_j] \to B(0_{y_j}, 2s_j) \subset TM_{y_j}$, y

$$\Phi_j(y) = \inf\{\|\zeta\|_{y_j} : \zeta \in D^- f_j(x) \cup D^+ f_j(x)\}$$

para cada $x \in B(0_{y_j}, 2s_j)$.

Como $D^- f_j(x) = \{\zeta \circ d\exp_{y_j}(x) : \zeta \in D^-(f)(\exp_{y_j}(x))\}$ para todo $x \in B(0_{y_j}, 2s_j)$, y $\exp_{y_j}$ es $(1+\varepsilon)$-bi-Lipschitz en esta bola, es fácil ver que

$$\Phi_j(x) \leq (1+\varepsilon)\Phi(\exp_{y_j}(x))$$

para todo $x \in B(0_{y_j}, 2s_j)$.

Aplicando el resultado a $H = TM_{y_j}$, a la función f_j y al camino γ_j, se obtiene que

$$\mu\big(f(\gamma(I_j))\big) = \mu\big(f_j(\gamma_j(I_j))\big) \leq \int_{I_j} \Phi_j(\gamma_j(t))dt, \tag{1}$$

para todo $j = 1, 2, ..., m$. Pero, también, sabemos que

$$\int_{I_j} \Phi_j(\gamma_j(t))dt \leq \int_{I_j} (1+\varepsilon)\Phi(\exp_{y_j}(\gamma_j(t)))dt = (1+\varepsilon)\int_{I_j} \Phi(\gamma(t))dt. \tag{2}$$

Combinando las desigualdades (1) y (2), y sumando respecto a $j = 1, ..., m$, tenemos

$$\mu\big(f(\gamma(I))\big) \leq \sum_{j=1}^{m} \mu\big(f(\gamma(I_j))\big) \leq \sum_{j=1}^{m} (1+\varepsilon)\int_{I_j} \Phi(\gamma(t))dt \leq$$
$$(1+\varepsilon)\sum_{j=1}^{m} \int_{I_j} \Phi(\gamma(t))dt = (1+\varepsilon)\int_{I} \Phi(\gamma(t))dt.$$

Finalmente, haciendo tender ε a 0 tenemos $\mu\big(f(\gamma(I))\big) \leq \int_I \Phi(\gamma(t))dt$. $\square$

Corolario 4.25. *Sean (M, g) una variedad riemanniana, $f : M \to \mathbb{R}$ una función de Borel tal que para cada $p \in M$ existe $\zeta \in D^- f(p) \cup D^+ f(p)$ con $\|\zeta\|_p \leq K$, entonces*

$$\mu\big(f(\gamma(I))\big) \leq KL(\gamma)$$

para cada camino $\gamma : I \to M$. En particular, si f es continua, entonces $|f(p) - f(q)| \leq K d_M(p, q)$ para todo $p, q \in M$.

4.7. (Sub)diferenciabilidad de funciones convexas en variedades riemannianas.

El objeto de esta sección es probar que una función convexa (continua) definida en una variedad riemanniana, es subdiferenciable en todas partes y diferenciable en un conjunto denso.

Definición 4.26. Sea M una variedad riemanniana. Una función $f : M \to \mathbb{R}$ diremos que es convexa cuando la función $f \circ \sigma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sea convexa para cada geodésica $\sigma : I \to M$ (parametrizada por la longitud del arco).

La siguiente proposición es probablemente conocida, al menos en el caso de que M sea finito-dimensional, pero, puesto que no conocemos una referencia explícita, haremos una demostración conveniente para este trabajo.

Proposición 4.27. *Sea M una variedad riemanniana. Si una función $f : M \to \mathbb{R}$ es convexa y localmente acotada, entonces f es localmente Lipschitz. En particular, cada función continua y convexa es localmente Lipschitz.*

Demostración. Tomamos $p \in M$. Como f es localmente acotada existe $R > 0$ tal que f está acotada en la bola $B(p, R)$. De acuerdo con el Teorema 1.7, existe $r > 0$ con $0 < r < R/2$ tal que las bolas abiertas $B(p, 2r)$ y $B(p, r)$ son convexas. Fijamos $C = \sup\{f(x) : x \in B(p, 2r)\}$, y $m = \inf\{f(x) : x \in B(p, 2r)\}$. Veremos que la función f es K-Lipschitz en la bola $B(p, r)$, con $K = (C - m)/r$. En efecto, tomamos $x_1, x_2 \in B(p, r)$. Dado que $B(p, r)$ es convexa, existe una única geodésica $\gamma : [t_1, t_2] \to B(p, r)$, con longitud $d(x_1, x_2) = t_2 - t_1$, que une x_1 y x_2. Tomamos $v_1 \in TM_{x_1}$ tal que $\gamma(t) = \exp_{x_1}\big((t-t_1)v_1\big)$ para $t \geq t_1$ suficientemente pequeño. Como la bola $B(p, 2r)$ es también convexa y $x_1 \in B(p, r)$, podemos definir una geodésica $\sigma_1 : [-r, r] \to B(p, 2r) \subset M$ que pase por x_1 de la siguiente manera

$$\sigma_1(t) = \exp_{x_1}(tv_1) \text{ for all } t \in [-r, r].$$

En el caso de que tomemos $v_2 \in TM_{x_2}$, definimos una geodésica $\sigma_2 : [-r, r] \to B(p, 2r) \subset M$ que pasa por x_2 como

$$\sigma_2(t) = \exp_{x_2}(tv_2) \text{ for all } t \in [-r, r],$$

y así $\gamma(t) = \exp_{x_2}\big((t - t_2)v_2\big)$ para $t \leq t_2$ con $|t|$ suficientemente pequeño. Ponemos $t_3 = t_1 - r$, $t_4 = t_2 + r$, $x_3 = \sigma_1(-r)$, $x_4 = \sigma_2(r)$, y $I = [t_3, t_4]$, entonces si definimos $\sigma : I \to B(p, 2r)$ por

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_1(t - t_1) & \text{si } t \in [t_3, t_1]; \\ \gamma(t) & \text{si } t \in [t_1, t_2]; \\ \sigma_2(t - t_2) & \text{si } t \in [t_2, t_4], \end{cases}$$

se obtiene que σ es una geodésica que une x_3 a x_4 en $B(p, 2r)$. Ahora, como f es convexa, la función $g : [t_3, t_4] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$g(t) = f(\sigma(t))$$

es convexa. Por tanto tenemos

$$\frac{g(t_1) - g(t_3)}{t_1 - t_3} \leq \frac{g(t_2) - g(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \frac{g(t_4) - g(t_2)}{t_4 - t_2},$$

donde $t_3 = t_1 - r < t_1 < t_2 < t_2 + r = t_4$. Teniendo en consideración que $x_3, x_4 \in B(p, 2r)$, y $t_2 - t_1 = d(x_1, x_2)$, se sigue que

$$-\frac{C - m}{r} \leq \frac{f(x_1) - f(x_3)}{r} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{d(x_1, x_2)} \leq \frac{f(x_4) - f(x_2)}{r} \leq \frac{C - m}{r}.$$

De esta manera vemos que $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K d(x_1, x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in B(p, r)$, cuando $K = (C - m)/r$. □

Recordamos (véase Sección 2.2 del Capítulo 2) que para una función localmente Lipschitz $F : H \to \mathbb{R}$ definida en un espacio de Hilbert H, definimos la derivada direccional generalizada en $x \in H$, $F^0(x, v)$, como

$$\limsup_{(y,t)\to(x,0^+)} \frac{F(y + tv) - F(y)}{t}.$$

$F^0(x, v)$ es una función subaditiva homogénea positiva de v, y el conjunto $\{x^* \in H^* : x^*(v) \leq F^0(x, v) \text{ para cada } v\}$ se denomina gradiente generalizado de F en x, y se anota $\partial F(x)$. El gradiente generalizado es no vacío, convexo, y es un subconjunto w^*-compacto de H^*; véase [12] para una mayor información.

Teorema 4.28. *Sea $g : M \to \mathbb{R}$ una función continua y convexa en una variedad riemanniana, entonces g es subdiferenciable en cada punto de M.*

Demostración. Sea $\phi_p : U_p \to H$ una carta exponencial en p. Tenemos $\phi_p(p) = 0$. Dado otro punto $q \in U_p$, tomamos un $(\phi_p, v) \in TM_q$, y anotamos $\sigma_{q,v}(t) = \phi_q^{-1}(tw)$, donde $(\phi_p, v) \sim (\phi_q, w)$, que es una geodésica que pasa por q con derivada (ϕ_p, v). Escribir $(\phi_p, v) \sim (\phi_q, w)$ es equivalente a poner $w = d(\phi_q \circ \phi_p^{-1})(\phi_p(q))(v)$, y, a su vez, equivalente a $v = d(\phi_p \circ \phi_q^{-1})(0_q)(w)$. Definimos

$$f^\circ(p, v) = \limsup_{q\to p\ t\to 0^+} \frac{f(\sigma_{q,v}(t)) - f(q)}{t}$$

Aserto 1. Se verifica que $f^\circ(p,v) = \inf_{t>0} \frac{f(\sigma_{p,v}(t))-f(p)}{t}$, *y consecuentemente*

$$f^\circ(p,v) = \inf_{t>0} \frac{(f\circ\phi_p^{-1})(tv) - (f\circ\phi_p^{-1})(0)}{t}.$$

Aserto 2. Existe $x^* \in H^*$ *tal que* $x^*(v) \le f^\circ(p,v)$ *para todo* $v \in H$.

De estas aseveraciones se desprende que

$$(f\circ\phi_p^{-1})(tv) - (f\circ\phi_p^{-1})(0) - x^*(tv) \ge 0$$

para cada $v \in S_H$, y cada $t \in [0,r)$. Como $B(0,r) \subset \phi_p(U_p)$ y $(f\circ\phi_p^{-1}) - x^*$ alcanza un mínimo en 0 se verifica que $x^* \in D^-((f\circ\phi_p^{-1}))(0)$. Siguiendo el Corolario 4.5 concluimos que $D^-f(p) \neq \emptyset$ con lo que termina la demostración del teorema. □

Demostración del aserto 1. Fijamos un $\delta > 0$. Dado que $f\circ\sigma_{q,v}$ es convexa, tenemos

$$f^\circ(p,v) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sup_{d(p,q)\le\varepsilon\delta} \sup_{0<t<\varepsilon} \frac{f(\sigma_{q,v}(t)) - f(q)}{t} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sup_{d(p,q)\le\varepsilon\delta} \frac{f(\sigma_{q,v}(\varepsilon)) - f(\sigma_{q,v}(0))}{\varepsilon} = (*).$$

Ahora estimamos $d(\sigma_{p,v}(\varepsilon), \sigma_{q,v}(\varepsilon))$. Tenemos que

$$d(\sigma_{p,v}(\varepsilon), \sigma_{q,v}(\varepsilon)) \le K_p||\phi_p(\sigma_{p,v}(\varepsilon)) - \phi_p(\sigma_{q,v}(\varepsilon))|| = K_p||\varepsilon v - \phi_p(\sigma_{q,v}(\varepsilon))|| =$$

$$= K_p||\varepsilon v - (\phi_p\circ\phi_q^{-1})(\varepsilon w)|| = K_p||\varepsilon v - (\phi_p\circ\phi_q^{-1})(0) - \varepsilon d(\phi_p\circ\phi_q^{-1})(0)(w) - o(\varepsilon)|| =$$

$$= K_p||(\phi_p\circ\phi_q^{-1})(0) + o(\varepsilon)|| \le K_p(||\phi_p(q)|| + ||o(\varepsilon)||) \le$$

$$\le K_p(L_p d(p,q) + ||o(\varepsilon)||) \le K_p(L_p\varepsilon\delta + \varepsilon\delta) \le C\varepsilon\delta,$$

donde L_p y K_p son constantes de Lipschitz de ϕ_p y ϕ_p^{-1} respectivamente, $C = K_p(L_p+1)$, y ε suficientemente pequeño para que $\|o(\varepsilon)\| \le \varepsilon\delta$ y $||D(\phi_p\circ\phi_q^{-1})(v) - v|| < \delta$. Como f es localmente Lipschitz, existe $K > 0$ tal que f es K-Lipschitz en un entorno de p que podemos suponer que es U_p. De las estimaciones anteriores tenemos que, para $d(p,q) \le \varepsilon\delta$,

$$\Big|\frac{f(\sigma_{q,v}(\varepsilon)) - f(\sigma_{q,v}(0))}{\varepsilon} - \frac{f(\sigma_{p,v}(\varepsilon)) - f(\sigma_{p,v}(0))}{\varepsilon}\Big| \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon}(|f(\sigma_{q,v}(\varepsilon)) - f(\sigma_{p,v}(\varepsilon))| + |f(p) - f(q)|) \le$$

$$\le \frac{K}{\varepsilon}(d(\sigma_{p,v}(\varepsilon), \sigma_{q,v}(\varepsilon)) + d(p,q)) \le K(C+1)\delta.$$

De lo que se deduce que

$$(*) \leq \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{f(\sigma_{p,v}(\varepsilon)) - f(\sigma_{p,v}(0))}{\varepsilon} + K(C+1)\delta$$

y, haciendo tender $\delta \to 0$, tenemos

$$f^\circ(p,v) \leq \lim_{t \to 0^+} \frac{f(\sigma_{p,v}(t)) - f(p)}{t} = \inf_{t>0} \frac{f(\sigma_{p,v}(t)) - f(p)}{t}.$$

Teniendo en consideración que la otra desigualdad es trivial, queda probado el aserto. □

Demostración del aserto 2. Tenemos que

$$\lim_{q \to p} \sup_{t \to 0^+} \frac{f(\sigma_{q,v}(t)) - f(\sigma_{q,v}(0))}{t} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{d(p,q)<\varepsilon \ 0<t<\varepsilon} \frac{f(\sigma_{q,v}(t)) - f(\sigma_{q,v}(0))}{t} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{d(p,q)<\varepsilon \ 0<t<\varepsilon} \frac{(f \circ \phi_p^{-1})(\phi_p(\sigma_{q,v}(t)) - (f \circ \phi_p^{-1})(\phi_p(q))}{t} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{d(p,q)<\varepsilon \ 0<t<\varepsilon} \frac{F(y + \lambda_y(t)) - F(y)}{t},$$

donde $(f \circ \phi_p^{-1}) = F$, $y = \phi_p(q)$, y $\lambda_y(t) = \phi_p(\sigma_{q,v}(t)) - \phi_p(q)$. A continuación, tenemos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{d(p,q)<\varepsilon \ 0<t<\varepsilon} \frac{F(y + \lambda_y(t)) - F(y)}{t} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{||y||<\varepsilon \ 0<t<\varepsilon} \frac{F(y + \lambda_y(t)) - F(y)}{t},$$

porque $L_p||y|| \leq d(p,q) \leq K_p||y||$ (recordemos que ϕ_p y $(\phi_p)^{-1}$ son Lipschitz). Ahora, si tomamos $||y|| < \varepsilon$ y $0 < t < \varepsilon$, tenemos

$$\Big| \frac{F(y + \lambda_y(t)) - F(y)}{t} - \frac{F(y + tv) - F(y)}{t} \Big| = \Big| \frac{F(y + \lambda_y(t)) - F(y + tv)}{t} \Big| \leq$$

$$\leq K' \frac{||\lambda_y(t) - tv||}{t} = K'\varphi(t),$$

donde K' es la constante de Lipschitz de F y φ satisface $\lim_{t \to 0^+} \varphi(t) = 0$, porque

$$\lambda_y(t) - tv = \phi_p(\sigma_{q,v}(t)) - \phi_p(q) - tv = o(t).$$

Finalmente, tenemos

$$\Big| \sup_{||y||<\varepsilon \ 0<t<\varepsilon} \frac{F(y + \lambda_y(t)) - F(y)}{t} - \sup_{||y||<\varepsilon \ 0<t<\varepsilon} \frac{F(y + tv) - F(y)}{t} \Big| \leq$$

$$\leq \sup_{||y||<\varepsilon \ 0<t<\varepsilon} \Big| \frac{F(y + \lambda_y(t)) - F(y)}{t} - \frac{F(y + tv) - F(y)}{t} \Big| \leq$$

$$\leq K' \sup_{0<t<\varepsilon} \varphi(t),$$

que tiende a 0 cuando $\varepsilon \to 0^+$, por tanto $f^\circ(p,v) = F^\circ(0,v)$. Dado que $\partial F(0) \neq \emptyset$, existe $x^* \in \partial F(0)$ tal que $x^*(v) \leq F^\circ(p,v)$ para cada $v \in H$, con lo que concluye la demostración. □

Teorema 4.29. *Sea $g : M \to \mathbb{R}$ una función continua y convexa en una variedad riemanniana completa, entonces el conjunto Diff$(g) := \{x \in M :$ g es diferenciable en $x\}$ es denso en M.*

Demostración. De acuerdo con la Proposición 4.21, $\mathrm{Diff}^+(g) := \{p \in M : D^+g(p) \neq \emptyset\}$ es denso en M. Por el Teorema 4.28, sabemos que $\mathrm{Diff}^-(g) := \{p \in M : D^-g(p) \neq \emptyset\} = M$, entonces , por la Proposición 4.6, obtenemos que

$$\mathrm{Diff}(g) = \mathrm{Diff}^+(g) \cap \mathrm{Diff}^-(g) = \mathrm{Diff}^+(g) \text{ es denso en } M.$$

□

Utilizando herramientas más sofisticadas, este resultado se puede extender a la categoría de las funciones localmente Lipschitz, como vemos a continuación.

Teorema 4.30. *Sea $g : M \to \mathbb{R}$ una función localmente Lipschitz. Si M es finito-dimensional, entonces g es diferenciable en casi todo punto, esto es, el conjunto $M \setminus$ Diff(g) tiene medida cero. Si M es infinito-dimensional, entonces el conjunto de puntos de diferenciabilidad de g, Diff(g), es denso en M.*

Demostración. Como M es separable, es suficiente probar el resultado para cualquier subconjunto abierto $U \subset M$ suficientemente pequeño para que g sea Lipschitz en U. Tomamos un punto $p \in U$. Dado que la función exponencial en p es localmente casi una isometría, en particular Lipschitz, podemos tomar una carta $h = \Phi_p : V \to H$ Lipschitz, para un conjunto abierto suficientemente pequeño $V \subset U$, entonces la composición $g \circ h^{-1} : h(V) \subset H \to \mathbb{R}$ es una función Lipschitz de un subconjunto abierto de un espacio de Hilbert en $\mathbb{R}$. Cuando H es finito-dimensional, el teorema clásico de Rademacher establece que $g \circ h^{-1}$ es diferenciable en $h(V)$ en casi todo punto (ver [33]) y, como h es un difeomorfismo de clase C^1 (por tanto h preserva puntos de diferenciabilidad y conjuntos de medida cero), se sigue que g es diferenciable en V casi todo punto. Si H es infinito-dimensional entonces podemos aplicar el célebre teorema de Preiss que asegura que para toda función Lipschitz de un conjunto abierto a un conjunto abierto de un espacio de Banach Asplund (en particular cuando el espacio es de Hilbert) existe al menos un punto de diferenciabilidad [46]. Por este teorema, es inmediato obtener que $g \circ h^{-1}$ es diferenciable en un subconjunto denso de

$h(V)$. Por tanto cuando h es un difeomorfismo de clase C^1, tenemos que g es diferenciable en un subconjunto denso de V. Finalmente, como M puede ser recubierta por una unión numerable de conjuntos abiertos V en cada uno de los cuales g es Lipschitz, se obtiene el resultado. □

Corolario 4.31. *Sea M una variedad riemanniana, y $f : M \to \mathbb{R}$ una función convexa y localmente acotada, entonces f es diferenciable en un subconjunto denso de M (cuyo complementario tiene medida cero si M es finito-dimensional).*

Demostración. Por la Proposición 4.27 sabemos que f es localmente Lipschitz, entonces , por el Teorema 4.30, se sigue que f es diferenciable en un subconjunto denso de M. □

4.8. Estabilidad de subdiferenciales y superdiferenciales

En esta sección establecemos un resultado de estabilidad para superdiferncíale (de forma análoga se puede establecer para subdiferenciales) que jugará un papel decisivo en las aplicaciones del cálculo subdiferencial a las ecuaciones de Hamilton-Jacobi en variedades riemannianas.

Definición 4.32. Para un conjunto abierto $\Omega \subset M$ dado y una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$, definimos la envoltura semicontinua superior de u, que denotamos u^*, por

$$u^*(x) = \inf\{v(x) \,|\, v : \Omega \to \mathbb{R} \text{ es continua y } u \leq v \text{ en } \Omega\} \quad \text{para cada } x \in \Omega.$$

De manera similar se define la envoltura semicontinua inferior, que denotamos por u_*.

Teniendo en consideración que un espacio de Hilbert es una variedad riemanniana modelada sobre si mismo y que a su vez es uniformemente mesetable, podemos aplicar las definiciones y resultados contenidos en este texto al marco de los espacios de Hilbert. En concreto el siguiente resultado es una consecuencia de los principios variacionales y lo utilizaremos para dar una versión más general en variedades riemannianas. Existe también una versión en espacios de Banach que puede ser consultada en [28, Proposition VIII.1.6]

Proposición 4.33. *Sea Ω un subconjunto abierto de un espacio de Hilbert E, sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones uniformemente acotadas y semicontinuas superiormente en Ω, y sea $u = \sup\{v : v \in \mathcal{F}\}$, entonces para cada $p \in \Omega$ y* *cada* $\zeta \in D^+u^*(p)$, *existen sucesiones* $\{v_n\} \subset \mathcal{F}$, *y* $\{(p_n, \zeta_n)\} \subset T^*(\Omega)$ *con* $\zeta_n \in D^+v_n(p_n)$ *tales que*

1. $\lim_n v_n(p_n) = u^*(p)$

2. $\lim_n (p_n, \zeta_n) = (p, \zeta)$.

Demostración. Sea $p \in \Omega$ y $\zeta \in D^+u^*(p)$ dados. Por el Teorema 4.3 existe una función $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ la cual es Fréchet diferenciable en E y tal que

(a) $(u^* - \varphi)(p) = 0$ y $(u^* - \varphi)(x) \leq 0$ si $x \in \Omega$ y

(b) $\zeta = \varphi(p)$ y φ' continua en p.

Por la definición de u^*, para cada $n \geq 1$, existe $v_n \in \mathcal{F}$ y $q_n \in E$ tales que $\|q_n - p\| < \frac{1}{n}$ y $(v_n - \varphi)(q_n) > -\frac{1}{n}$. Si definimos $(v_n - \varphi)(x) = 0$ cuando $x \notin \Omega$, tenemos que $v_n - \varphi$ es scs y acotada por 0. Por el principio variacional suave (Teorema 2.11) existe $\psi_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$ Fréchet diferenciable tal que:

1. $\|\psi_n\|_\infty < \frac{1}{n}$ y $\|\psi_n\|'_\infty < \frac{1}{n}$

2. $v_n - \varphi + \psi_n$ alcanza su supremo en algún $p_n \in E$.

Como $(v_n - \varphi)(q_n) \geq \sup(v_n - \varphi) - \frac{1}{n}$, por la Observación 2.16 podemos suponer que $\lim \|p_n - q_n\| = 0$. Por tanto, utilizando el hecho de que $\|q_n - p\| < \frac{1}{n}$,tenemos que $\lim \|p_n - p\| = 0$ y $p_n \in \Omega'$ para n suficientemente grande. Por otra parte, $\zeta_n = \varphi'(p_n) - \psi_n'(p_n) \in D^+v_n(p_n)$ y

$$\|\zeta_n - \zeta\| \leq \|\psi_n'(p_n)\| + \|\varphi'(p_n) - \varphi'(p)\| \leq \frac{1}{n} + \|\varphi'(p_n) - \varphi'(p)\|.$$

Como φ' es continua en p, tenemos que $\lim_n \|\zeta_n - \zeta\| = 0$. Finalmente:

$$0 \geq (\zeta - \varphi)(p_n) \geq (\zeta_n - \varphi)(q_n) - \frac{2}{n} \geq -\frac{3}{n}.$$

Por tanto

$$\lim_n v_n(p_n) = \lim_n \varphi(p_n) = \varphi(p) = u^*(p)$$

□

Proposición 4.34. *Sea* Ω *un subconjunto abierto de una variedad riemanniana* M, *sea* $\mathcal{F}$ *una familia de funciones uniformemente acotadas y semicontinuas superiormente en* Ω, *y sea* $u = \sup\{v : v \in \mathcal{F}\}$, *entonces para cada* $p \in \Omega$ *y cada* $\zeta \in D^+u^*(p)$, *existen sucesiones* $\{v_n\} \subset \mathcal{F}$, *y* $\{(p_n, \zeta_n)\} \subset T^*(\Omega)$ *con* $\zeta_n \in D^+v_n(p_n)$ *tales que*

1. $\lim_n v_n(p_n) = u^*(p)$
2. $\lim_n (p_n, \zeta_n) = (p, \zeta)$.

Demostración. Fijamos una carta (U, φ), con $p \in U$. Consideramos la familia $\mathcal{F} \circ \varphi^{-1} = \{v \circ \varphi^{-1} : v \in \mathcal{F}\}$. Las funciones de esta colección son semicontinuas superiormente en $\varphi(U \cap \Omega)$ y son una familia uniformemente acotada. Por otra parte, tenemos que $u \circ \varphi^{-1} = sup\{v \circ \varphi^{-1} : v \in \mathcal{F}\}$, y $u^* \circ \varphi^{-1} = (u \circ \varphi^{-1})^*$. Ahora, aplicamos la proposición anterior al conjunto abierto $\varphi(U \cap \Omega)$, a la familia $\mathcal{F} \circ \varphi^{-1}$, al punto $\varphi(p)$ y la superdiferencial $\zeta \circ d\varphi(p)^{-1} \in D^+(u \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$, para obtener las sucesiones $\{\varphi(p_n)\}$ en $\varphi(U \cap \Omega)$, $\{v_n \circ \varphi^{-1}\}$ en $\mathcal{F} \circ \varphi^{-1}$, y $\zeta_n \circ d\varphi(p)^{-1} \in D^+(v_n \circ \varphi^{-1})(\varphi(p_n))$ tales que $\lim_n \varphi(p_n) = \varphi(p)$, $\lim_n \zeta_n \circ d\varphi(p)^{-1} = \zeta \circ d\varphi(p)^{-1}$, y

$$\lim_n (v_n \circ \varphi^{-1})(\varphi(p_n)) = (u \circ \varphi^{-1})^*(\varphi(p)) = u^* \circ \varphi^{-1}(\varphi(p)).$$

Por tanto $\lim_n p_n = p$, $\lim_n v_n(p_n) = u^*(p)$, y

$$\lim_n \zeta_n \circ d\varphi(p_n)^{-1} = \lim_n \zeta_n \circ d\varphi(p_n)^{-1} \circ d\varphi(p) \circ d\varphi(p)^{-1} = \lim_n \zeta_n \circ d\varphi(p)^{-1}$$

porque φ es C^1, así $\lim_n d\varphi(p_n)^{-1} \circ d\varphi(p) = \mathrm{id}$. El resultado se sigue, trivialmente, de la representación local del fibrado cotangente. $\square$

Capítulo 5

Ecuaciones de Hamilton-Jacobi en variedades riemannianas

5.1. Introducción y definiciones básicas

En general una ecuación de Hamilton-Jacobi de primer orden es de la forma

$$H(x, u(x), Du(x)) = 0$$

en el caso estacionario, y de la forma

$$H(t, x, u(t, x), Du(t, x)) = 0$$

en el caso de evolución. Este capítulo es solamente un intento de dar una idea del potencial de las aplicaciones del cálculo no regular a la teoría de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi en variedades riemannianas, y no elaborar un tratado exhaustivo de estas ecuaciones. Nos restringiremos a dos de los ejemplos más interesantes de ecuaciones de primer orden de Hamilton-Jacobi. En cualquiera de los casos las soluciones de estas ecuaciones estarán definidas en en variedades riemannianas a las que debemos exigir ciertas condiciones. En lo que resta de este escrito, la variedad M será una variedad riemanniana completa (finito-dimensional o infinito-dimensional) tal que M satisface las condiciones (3) o (4) (que son equivalentes) de la Proposición 2.9, más concretamente, M es uniformemente localmente convexa y tiene radio de inyectividad estrictamente positivo, o equivalentemente, existe una constante $r = r_M > 0$ tal que para cada $x \in M$ la aplicación $\exp_x$ está definida en la bola $B(0_x, r) \subset TM_x$ y es un difeomorfismo de clase C^∞

$$\exp_x : B(0_x, r) \to B(x, r),$$

y la función distancia viene dada por la expresión

$$d(y, x) = \| \exp_x^{-1}(y)\|_x \ \text{ para todo } \ y \in B(x, r).$$

En particular, las variedades compactas satisfacen estas propiedades. Nótese que cuando M satisface la condición (3) de la Proposición 2.9 entonces M es uniformemente mesetable y por tanto se pueden aplicar los Principios Variacionales Suaves 2.11 a M.

Para el estudio de la existencia y unicidad de soluciones de viscosidad de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi, a la función $F : T^*M \to \mathbb{R}$ definida en el fibrado cotangente de M, le debemos exigir una cierta condición de uniformidad, en el siguiente sentido.

Definición 5.1. Diremos que una función $F : T^*M \to \mathbb{R}$ es intrínsecamente uniformemente continua, cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta \in (0, r_M)$ tal que si $d(x,y) \leq \delta$, $\zeta \in T^*M_x$, $\xi \in T^*M_y$, $\|\zeta - L_{yx}(\xi)\|_x \leq \delta$ entonces

$$|F(x,\zeta) - F(y,\xi)| \leq \varepsilon.$$

Observación 5.2. Si F satisface la definición anterior, entonces F es continua. Esto es una consecuencia obvia del hecho de que la aplicación

$$(x,\zeta) \in T^*M_x \mapsto L_{xx_0}(\zeta)$$

es continua en (x_0,ζ_0), esto es, si $(x_n,\zeta_n) \to (x_0,\zeta_0)$ en T^*M entonces

$$L_{x_n x_0}(\zeta_n) \to \zeta_0$$

para cada $(x_0,\zeta_0) \in T^*M$. Que esta aplicación es continua es, a su vez, una consecuencia de la definición de trasporte paralelo a lo largo de una curva como solución de una ecuación diferencial lineal, que tiene una dependencia continua de las condiciones iniciales.

Observación 5.3. Consideremos una variedad finito-dimensional M contenida en $\mathbb{R}^n$, por tanto $T^*M \subset \mathbb{R}^{2n}$. Supongamos que M satisface la siguiente condición:

$$\forall \varepsilon \ \exists \ \delta > 0\text{: } v,h \in TM_x \ \ x \in M,\ \|v\|_x \leq \delta \implies \|d\exp_x(v)(h) - h\|_x \leq \varepsilon$$

(nótese que esta condición es automática cuando M es compacta y en otros muchos ejemplos naturales), entonces cada función $F : T^*M \to \mathbb{R}$ que sea uniformemente continua respecto a la métrica usual euclidiana de $\mathbb{R}^{2n}$ es intrínsecamente uniformemente continua también, como es fácil observar. Consecuentemente, existen múltiples ejemplos naturales de funciones intrínsecamente uniformemente continuas $F : T^*M \to \mathbb{R}$.

5.2. Principio del máximo para ecuaciones estacionarias de primer orden de Hamilton-Jacobi

Consideramos las ecuaciones de la forma

$$(*) \begin{cases} u + G(du) = f \\ \quad u \text{ acotada,} \end{cases}$$

donde $f : M \to \mathbb{R}$ es una función acotada y uniformemente continua, y $G : T^*M \to \mathbb{R}$ es una función definida en el fibrado cotangente de M. De hecho, estas ecuaciones son, realmente, de la forma

$$(*) \begin{cases} u + F(du) = 0 \\ \quad u \text{ acotada,} \end{cases}$$

donde $F : T^*M \to \mathbb{R}$, dado que siempre podemos tomar la función F de la forma $F(x, \xi_x) = G(x, \xi_x) - f(x)$. Una función $u : M \to \mathbb{R}$ acotada y Fréchet-diferenciable es una solución clásica de la ecuación $(*)$ cuando

$$u(p) + F(p, du(p)) = 0 \quad \text{ para cada } \; p \in M.$$

A continuación introducimos la noción de solución de viscosidad.

Definición 5.4. Una función semicontinua superiormente (scs) $u : M \to \mathbb{R}$ es una *subsolución de viscosidad* de $u + F(du) = 0$ si $u(p) + F(p, \zeta) \leq 0$ para cada $p \in M$ y $\zeta \in D^+u(p)$. Una función semicontinua inferiormente (sci) $u : M \to \mathbb{R}$ es una *supersolución de viscosidad* de $u + F(du) = 0$ si $u(p) + F(p, \zeta) \geq 0$ para cada $p \in M$ y $\zeta \in D^-u(p)$. Una función continua $u : M \to \mathbb{R}$ es una *solución de viscosidad* de $u + F(du) = 0$ si es a la vez subsolución y supersolución de viscosidad de $u + F(du) = 0$. Podemos definir soluciones de viscosidad en conjuntos abiertos $\Omega \subset M$ de manera natural, cuando las funciones están definidas en Ω.

Observación 5.5. *Como una función u Fréchet- diferenciable verifica que*

$$D^+u(p) = D^-u(p) = \{du(p)\},$$

es evidente que cualquier solución de viscosidad que sea acotada y Frechet-diferenciable de $u + F(du) = 0$ *es una solución clásica de* $(*)$.

Ahora podemos probar el siguiente *principio del máximo* para ecuaciones de Hamilton-Jacobi de la forma $(*)$.

Teorema 5.6. *Sea M una variedad riemanniana completa, uniformemente localmente convexa y con radio de inyectividad estrictamente positivo y sean $f, g : M \to \mathbb{R}$ funciones uniformemente continuas y acotadas, y $F : T^*M \to \mathbb{R}$ intrínsecamente uniformemente continua. Si u es una subsolución de viscosidad y acotada de $u + F(du) = f$, y v es una supersolución de viscosidad y acotada de $v + F(dv) = g$, entonces $v - u \geq \inf(g - f)$.*

Demostración. Si $\varepsilon > 0$ está dado, entonces, por la Proposición 4.18, existen $p, q \in U$, $\zeta \in D^+u(p)$ y $\xi \in D^-v(q)$ tales que

i) $d(p,q) < \varepsilon$, $\|\zeta - L_{qp}(\xi)\|_p < \varepsilon$

ii) $v(x)-u(x) \geq v(q)-u(p)-\varepsilon$ para cada $x \in M$. Dado que u y v son sub y super soluciones de viscosidad, respectivamente, tenemos que $u(p) + F(p,\zeta) \leq f(p)$ y $v(q) + F(q,\xi) \geq g(q)$, y por tanto para cada $x \in M$ se verifica que

$$v(x) - u(x) \geq v(q) - u(p) - \varepsilon \geq g(q) - F(q,\xi) - f(p) + F(p,\zeta) - \varepsilon \geq$$

$$\geq \inf(g - f) + (f(q) - f(p)) + (F(p,\zeta) - F(q,\xi)) - \varepsilon.$$

Ahora, si $\varepsilon \to 0^+$, tenemos que $f(q)-f(p)$ tiende a 0 porque f es uniformemente continua, $F(p,\zeta) - F(q,\xi)$ tiende a 0 puesto que F es intrínsecamente uniformemente continua, y consecuentemente obtenemos que $v - u \geq \inf(g - f)$. $\square$

Modificando convenientemente la demostración del teorema anterior podemos encontrar un resultado de dependencia continua de las soluciones de viscosidad de ecuaciones de la forma $(*)$ con respecto a los Hamiltonianos como precisamos en el teorema siguiente. Previamente definimos $\|F - G\|_\infty = \sup\{|F(p,\zeta) - G(p,\zeta)| : (p,\zeta) \in T^*M\}$.

Teorema 5.7. *Sea M una variedad riemanniana completa, uniformemente localmente convexa y con radio de inyectividad estrictamente positivo y sean u y v soluciones de viscosidad acotadas de $u + F(du) = 0$ y $v + G(dv) = 0$ respectivamente, entonces $|v(x) - u(x)| \leq \|F - G\|_\infty$ para todo $x \in M$.*

Demostración. Procediendo como en la demostración anterior, si $\varepsilon > 0$ está dado, entonces, por la Proposición 4.18, existen $p, q \in U$, $\zeta \in D^+u(p)$ y $\xi \in D^-v(q)$ tales que

i) $d(p,q) < \varepsilon$, $\|\zeta - L_{qp}(\xi)\|_p < \varepsilon$

ii) $v(x) - u(x) \geq v(q) - u(p) - \varepsilon$ para cada $x \in M$. Dado que u y v son sub y super soluciones de viscosidad, respectivamente, tenemos que $u(p) + F(p,\zeta) \leq 0$ y $v(q) + G(q,\xi) \geq 0$, y por tanto para cada $x \in M$ se verifica que

$$u(x) - v(x) \leq u(p) - v(q) + \varepsilon \leq G(q,\xi) - F(p,\zeta) + \varepsilon =$$

$$\begin{aligned}&(G(q,\xi)-G(p,\zeta))+(G(p,\zeta)-F(p,\zeta))+\varepsilon\\&\leq (G(q,\xi)-G(p,\zeta))+\|F-G\|_\infty+\varepsilon\end{aligned}$$

y haciendo tender ε a 0 y teniendo en consideración que G es uniformemente intrínsecamente uniformemente continua se obtiene que $v(x)-u(x)\leq\|F-G\|_\infty$ y razonando de forma análoga se obtendría que $u(x)-v(x)\leq\|F-G\|_\infty$. □

5.3. Principio del máximo para ecuaciones parabólicas de Hamilton-Jacobi

En esta sección consideramos ecuaciones de Hamilton-Jacobi de la forma

$$(**)\begin{cases}u_t+F(t,d_xu)=0\\ u(0,x)=u_0(x),\end{cases}$$

Donde $u_0 : M\to\mathbb{R}$ es una condición inicial que suponemos acotada y uniformemente continua y $F:[0,\infty)\times T^*M\to\mathbb{R}$.

Definición 5.8. *Una subsolución de viscosidad de $(**)$ es una función $u:[0,+\infty)\times M\longrightarrow\mathbb{R}$ semicontinua superiormente, y tal que para cada $(t,x)\in\mathbb{R}^+\times M$ y cada $(a,\zeta)\in D^+u(t,x)$ se cumple*

$$\begin{cases}a+F(t,x,\zeta)\leq 0\\ u(0,x)\leq u_0(x),\end{cases}$$

Y una supersolución de $(**)$ es una función $u:[0,+\infty)\times M\longrightarrow\mathbb{R}$ semicontinua inferiormente, y tal que para cada $(t,x)\in\mathbb{R}^+\times M$ y cada $(a,\zeta)\in D^-u(t,x)$ se cumple

$$\begin{cases}a+F(t,x,\zeta)\geq 0\\ u(0,x)\geq u_0(x),\end{cases}$$

Una función $u:[0,\infty)\times M\longrightarrow\mathbb{R}$ continua es una solución de viscosidad de $(**)$ si es a la vez subsolución y supersolución de viscosidad de $(**)$.

Observación 5.9. *Como una función u Fréchet- diferenciable verifica que*

$$D^+u(p)=D^-u(p)=\{du(p)\},$$

es evidente que cualquier solución de viscosidad que sea Fréchet-diferenciable es una solución clásica de $(**)$.

Teorema 5.10. *Sea M una variedad riemanniana completa, uniformemente localmente convexa y con radio de inyectividad estrictamente positivo, y sean*

$u_0, v_0 : M \to \mathbb{R}$ funciones uniformemente continuas y acotadas, y $F : [0,\infty) \times T^*M \to \mathbb{R}$ intrínsecamente uniformemente continua. Si u es una subsolución de viscosidad acotada de

$$\begin{cases} u_t + F(t, d_x u) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases}$$

y v es una supersolución de viscosidad acotada de

$$\begin{cases} v_t + F(t, d_x v) = 0 \\ v(0,x) = v_0(x), \end{cases}$$

entonces $\sup_{[0,\infty)\times M}(u - v) \leq \sup_M (u_0 - v_0)$

Demostración. Supongamos el contrario, existirían $(t_0, x_0) \in (0,\infty) \times M$, $\delta > 0$ y $0 < \varepsilon_0 < \frac{\delta}{2t_0}$ tales que

$$u(t_0, x_0) - v(t_0, x_0) - \delta > \sup_M (u_0 - v_0) + \varepsilon, \qquad (1)$$

para $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Consideramos la función Φ definida en $\mathbb{R} \times M$

$$\Phi = \begin{cases} u(t,x) - v(t,x) - \frac{\delta t}{t_0} & \text{si}(t,x) \in [0,\infty) \times M \\ -\infty & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La función Φ es semicontinua superiormente y acotada superiormente. Por el teorema 2.11 aplicado a la función $-\Phi$ existe una función $g : \mathbb{R} \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable con continuidad tal que:

(i) $\Phi + g$ alcanzan su máximo en un punto $(s, y) \in [0,\infty) \times M$

(ii) $\|g\|_\infty = \sup\{|g(t,x); (t,x) \in \mathbb{R} \times M\} < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\|g'\|_\infty = \sup\{|g'(t,x); (t,x) \in \mathbb{R} \times M\} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Donde $s > 0$ porque de lo contrario entraríamos en contradicción con (1). Si ponemos $A = \frac{\delta}{t_0} - g_t(s,y)$ y $\zeta = D_x g(s,y)$ tenemos que $(A, \zeta) \in D^+(u(s,y) - v(s,y))$ con la condición $A > \varepsilon_0$ para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Ahora el teorema 4.14 da la existencia de $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in (0,\infty) \times M$ y de $(b_1, \zeta_1) \in D^+u(t_1, x_1)$ y $(b_2, \zeta_2) \in D^-v(t_2, x_2)$ tales que:

(i) $|t_i - s| < \varepsilon$ y $d(x_i, y) < \varepsilon$ para $i = 1, 2$.

(ii) $|u(t_1, x_1) - u(s,y)| < \varepsilon$ y $|v(t_2, x_2) - v(s,y)| < \varepsilon$

(iii) $|b_1 - b_2 - A| < \varepsilon$ y $||L_{x_1 y}(\zeta_1) + L_{x_2 y}(\zeta_2) - \zeta||_y < \varepsilon$

Como u es una subsolución de viscosidad y v una supersolución de viscosidad se obtiene que $b_1 + F(t_1, x_1, \zeta_1) \leq 0$ y $b_2 + F(t_2, x_2, \zeta_2) \geq 0$. Y por tanto

$$b_1 - b_2 + F(t_1, x_1, \zeta_1) - F(t_2, x_2, \zeta_2) \leq 0$$

de donde

$$A - \varepsilon + F(t_1, x_1, \zeta_1) - F(t_2, x_2, \zeta_2) \leq 0$$

Además

$$|t_1 - t_2| \leq |t_1 - s| + |s - t_2| < 2\varepsilon$$

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, y) + d(y, x_2) < 2\varepsilon$$

y

$$||L_{x_1 y}(\zeta_1) + L_{x_2 y}(\zeta_2)||_y \leq$$

$$||L_{x_1 y}(\zeta_1) + L_{x_2 y}(\zeta_2) - \zeta||_y + \|\zeta\|_y < \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}$$

Ahora haciendo tender ε hacia cero y teniendo en cuenta que F es intrínsecamente uniforme continua se obtiene que A, que depende de ε, tendería a un valor menor o igual que 0 lo que supone una contradicción con el hecho de que $A > \varepsilon_0$ para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. □

5.4. Existencia y unicidad de soluciones de viscosidad de ecuaciones de Hamilton-Jacobi

Proposición 5.11. *Sean Ω un subconjunto abierto de M, $\mathcal{F}$ una familia de funciones uniformemente acotada en Ω y $u = \sup\{v : v \in \mathcal{F}\}$. Si cada v es una subsolución de viscosidad de $u + F(du) = 0$, entonces u^* es una subsolución de viscosidad de $u + F(du) = 0$.*

Demostración. Sea $p \in \Omega$ y $\zeta \in D^+u^*(p)$. De acuerdo con la Proposición 4.34, existen sucesiones $\{v_n\} \subset \mathcal{F}$ y $\{(p_n, \zeta_n)\} \subset T^*(\Omega)$ con $\zeta_n \in D^+v_n(p_n)$ y tales que

i) $\lim_n v_n(p_n) = u^*(p)$

ii) $\lim_n (p_n, \zeta_n) = (p, \zeta)$. Como v_n es una subsolución de viscosidad de $u+F(du) = 0$, tenemos que $v_n(p_n) + F(p_n, \zeta_n) \leq 0$. Por tanto $u^*(p) + F(p, \zeta) \leq 0$. □

Corolario 5.12. *El supremo de dos subsoluciones de viscosidad es una subsolución de viscosidad.*

Estamos ya en condiciones de demostrar el resultado principal sobre existencia y unicidad de soluciones de viscosidad de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi de la forma $(*)$.

Teorema 5.13. *Sea M una variedad riemanniana uniformemente localmente convexa y con radio de inyectividad estrictamente positivo. Sea $F : T^*M \to \mathbb{R}$ una función intrínsecamente uniformemente continua (véase Definición 5.1). Supongamos, también, que existe una constante $A > 0$ tal que $-A \leq F(x, 0_x) \leq A$ para cada $x \in M$, entonces existe una única solución de viscosidad acotada de la ecuación $u + F(du) = 0$.*

Demostración. La unicidad se sigue del Teorema 5.6, tomando $f = g = 0$. Para ver la existencia, definimos $\mathcal{F}$ como la familia de subsoluciones de viscosidad, $w : M \to \mathbb{R}$, de la ecuación $u + F(du) = 0$, que satisfacen

$$-A \leq w(p) \leq A \quad \text{ para cada } \; p \in M.$$

La familia $\mathcal{F}$ es no vacía, puesto que la función $w_0(p) = -A$ pertenece a $\mathcal{F}$ (porque $-A + F(p, 0_p) \leq 0$). Sea u la envoltura superior semicontinua de $\sup\{w : w \in \mathcal{F}\}$, y v la envoltura inferior semicontinua de u. Por la definición tenemos que $v \leq u$. Por otra parte, de acuerdo con la Proposición 5.11, u es una subsolución viscosa de $u + F(du) = 0$.

Aserto. v es una supersolución de viscosidad de $u + F(du) = 0$.

Si este aserto estuviera probado, tendríamos que $u \leq v$ por la Proposición 5.6, por tanto $u = v$ sería una solución de viscosidad y, así, la existencia estaría establecida. Por tanto, tan sólo queda probar el aserto. Si v no es una supersolución de viscosidad, existen $p_0 \in M$ y $\zeta_0 \in D^- v(p)$ tales que $v(p_0) + F(p_0, \zeta_0) < 0$. Por el Teorema 4.3(5), existe una función de clase C^1, $h : M \to \mathbb{R}$, con $\zeta_0 = dh(p_0)$ y tal que $v - h$ alcanza un mínimo global en p_0. Por tanto podemos suponer que

$$v(p_0) + F(p_0, dh(p_0)) < 0, \quad v(p_0) = h(p_0), \;\text{ y } h(p) \leq v(p) \text{ para todo } p \in M. \quad (1)$$

De la desigualdad $h(p) \leq v(p) \leq u(p) \leq A$ tenemos $h(p_0) < A$, por tanto $A - h$ tiene un mínimo local en p_0, y consecuentemente $dh(p_0) = 0$, lo que implica $v(p_0) + F(p_0, dh(p_0)) = h(p_0) + F(p_0, dh(p_0)) = A + F(p_0, 0) \geq A - A = 0$, que supone una contradicción con (1). Ahora podemos tomar un número $\delta > 0$ y una función de clase C^1, $b : M \to [0, \infty)$, con soporte en $B(p_0, \delta)$, $b(p_0) > 0$, y tal que $||b||_\infty$, $||db||_\infty$ son suficientemente pequeños para que

$$h(p) + b(p) + F(p, dh(p) + db(p)) < 0 \quad \text{para todo} \quad p \in B(p_0, 2\delta), \text{ and} \qquad (2)$$

$$h(p) + b(p) \leq A \quad \text{para todo} \quad p \in M \qquad (3).$$

Esto es posible por (1) y gracias al hecho de que F es continua. Consideramos la siguiente función:

$$w(p) = \begin{cases} \max\{h(p) + b(p), u(p)\} & \text{si} \quad p \in B(p_0, 2\delta) \\ u(p) & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Donde tenemos que $w(p) = u(p)$ si $p \in \Omega_1 := M \setminus \overline{B}(p_0, \delta)$, porque $u(p) \geq v(p) \geq h(p) = h(p) + b(p)$ cuando $p \in B(p_0, 2\delta) \setminus \overline{B}(p_0, \delta)$. Por tanto w es una subsolución de viscosidad de $u + F(du) = 0$ en Ω_1. Por otra parte, considerando (2), es evidente que w es el máximo de dos subsoluciones de viscosidad en $\Omega_2 := B(p_0, 2\delta)$, y consecuentemente w es una subsolución en Ω_2. Por tanto w es una subsolución de viscosidad de $u + F(du) = 0$ en $M = \Omega_1 \cup \Omega_2$, lo que implica que $w \in \mathcal{F}$, puesto que, por (3), $-A \leq u \leq w$ y $w(p) \leq A$. Finalmente, tenemos que $u \geq w$, porque $u \geq sup\mathcal{F}$. Por tanto $u(p) \geq w(p) \geq h(p) + b(p)$ en $B(p_0, \delta)$, y en particular $v(p_0) = u_*(p_0) \geq h(p_0) + b(p_0) > h(p_0)$, lo que contradice (1). □

Cuando M es compacta, el teorema anterior cobra una apariencia muy simple.

Corolario 5.14. *Sean M una variedad riemanniana compacta, $f : M \to \mathbb{R}$ una función continua y $F : T^*M \to \mathbb{R}$ una función intrínsecamente uniformemente continua, entonces existe una única solución de viscosidad de la ecuación $u + F(du) = f$.*

Demostración. La demostración se desprende inmediatamente del Teorema 5.13, considerando los siguientes hechos: 1) si M es compacta, entonces M es localmente uniformemente convexa y $i(M) > 0$ (véase la Observación 1.11 y 1.14); 2) cualquier solución de viscosidad u es continua, por tanto u es acotada en la variedad compacta M; y 3) f es uniformemente continua porque f es continua en M que es compacta. □

Observación 5.15. En particular, cuando M es una variedad compacta se la puede considerar como un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y por tanto $T^*M \subset \mathbb{R}^{2n}$. Si $F : T^*M \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua respecto a la métrica Euclediana usual en $\mathbb{R}^{2n}$, entonces el Corolario 5.14 y la Observación 5.3 garantizan la existencia de una única solución de viscosidad de la ecuación $u + F(du) = f$.

No obstante, el requerimiento de que F sea uniformemente continua no se puede relajar en principio, porque el fibrado cotangente T^*M no es, en ningún caso, compacto. Por tanto, aunque F sea continua no se puede asegurar que F sea uniformemente continua en T^*M.

Observación 5.16. Si nos planteamos una ecuación de Hamilton-Jacobi tal que

$$u + F(du) = 0, \ u \text{ acotada} \tag{$*$}$$

en una variedad M en la que no se presupone una estructura riemanniana definida en M. Es razonable hacerse la siguiente pregunta:"¿es posible definir una estructura riemanniana adecuada g que haga que M sea uniformemente localmente convexa y con radio de inyectividad positivo, y que haga que F sea intrínsecamente uniformemente continua, también?". En otras palabras, podemos encontrar una variedad riemanniana N con radios de convexidad y de inyectividad positivos y un difeomorfismo $\psi : N \to M$ tal que la función $G : T^*N \to \mathbb{R}$ sea intrínsecamente uniformemente continua , donde $G = F \circ (T^*\psi)$, con $T^*\psi : T^*N \to T^*M$ definido por $T^*\psi(x, \eta) := \big(\psi(x), \eta \circ (d\psi^{-1})(\psi(x))\big)$. Porque si esto es así, entonces por el Teorema 5.13, la ecuación

$$v + G(dv) = 0, \ v \text{ acotada} \tag{$**$}$$

tiene una única solución de viscosidad. Pero es obvio que v es una solución de viscosidad de $(**)$ si, y sólo si, la función $u = v \circ \psi^{-1}$ es una solución de viscosidad de $(*)$. Por tanto la ecuación $(*)$ tiene una única solución de viscosidad, también. El siguiente ejemplo muestra el potencial de este esquema.

Ejemplo 5.17. Sea M la subvariedad de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$z = \frac{1}{x^2 + y^2},$$

sea $F : T^*M \subset \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$, y consideramos la ecuación de Hamilton-Jacobi $u + F(du) = 0$. Si dotamos a M de la estructura riemanniana natural heredada de $\mathbb{R}^3$, entonces M no es uniformemente localmente convexa, y además $i(M) = 0$; por tanto el Teorema 5.13 no es directamente aplicable. Ahora, definimos N por

$$z = \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}, \ \ z > 0,$$

que tiene la estructura riemanniana natural como subvariedad de $\mathbb{R}^3$. Es evidente que N es uniformemente localmente convexa y tiene radio de inyectividad positivo. La aplicación $\psi : N \to M$ definida por

$$\psi(x, y, z) = \Big(\frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, x, \ \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, y, \ z \Big)$$

es un difeomorfismo de clase C^∞. Supongamos que la función $G = F \circ (T^*\psi) : T^*N \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua respecto a la métrica usual de $\mathbb{R}^6$, entonces N satisface las propiedades de la Observación 5.3, lo que hace que G sea intrínsecamente uniformemente continua. Por tanto, por el procedimiento de la observación 5.16, la ecuación $u + F(du) = 0$, u acotada en M, tiene una única solución de viscosidad.

Del teorema del valor medio de Deville 4.22 deduciremos, a continuación, un resultado de regularidad de soluciones de viscosidad (o incluso subsoluciones) de ecuaciones de Hamilton-Jacobi con una estructura ”coercitiva”.

Corolario 5.18. *Sean M una variedad riemanniana y $F : \mathbb{R} \times T^*M \to \mathbb{R}$ una función. Consideramos la siguiente ecuación de Hamilton-Jacobi:*

$$F(u(x), du(x)) = 0. \tag{HJ3}$$

Suponemos que existe una constante $K > 0$ tal que $F(t, \zeta_x) > 0$ cuando $\|\zeta_x\|_x \geq K$ y $t \in \mathbb{R}$. Sea $u : M \to \mathbb{R}$ una subsolución de viscosidad de (HJ3)*, entonces :*

1. *u es K-Lipschitz, esto es, $|u(x) - u(y)| \leq Kd(x, y)$ para cada $x, y \in M$.*
2. *Si M es finito-dimensional, u es Fréchet-diferenciable en casi todo punto.*
3. *Si M es infinito-dimensional u es Fréchet-diferenciable en un subconjunto denso de M.*

Demostración. Si u es una subsolución de viscosidad, entonces $F(u(x), \zeta_x) \leq 0$ para cada $x \in M$ y cada $\zeta_x \in D^-u(x)$. Por tanto $\|\zeta_x\| \leq K$ para cada $\zeta_x \in D^-u(x)$ (en otro caso $F(u(x), \zeta_x) > 0$, lo que supone una a contradicción), entonces, por el Teorema 4.22, u es K-Lipschitz. Por otra parte, (2) y (3) se deducen, inmediatamente, del Teorema 4.30. $\square$

Concluimos este trabajo con un breve estudio de una ecuación HJ que no es de la forma $(*)$, pero que resulta muy interesante por el significado geométrico de su única solución de viscosidad. Sea M una variedad riemanniana completa, Ω un subconjunto abierto y acotado de M, y sea $\partial\Omega$ el borde de Ω. Consideramos la siguiente ecuación de Hamilton-Jacobi denominada eitconal

$$\text{(HJ4)} \begin{cases} \|du(x)\|_x = 1 \text{ para todo } x \in \Omega \\ u(x) = 0 \text{ para todo } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

No existe ninguna solución clásica de (HJ4). En efecto, si una función $u : \overline{\Omega} \subset M \to \mathbb{R}$ es diferenciable en Ω y satisface que $\|du(x)\|_x = 1$ cuando $x \in \Omega$ y $u = 0$ en $\partial\Omega$, entonces podemos aplicar el Teorema de Rolle en variedades 3.1 y encontrar un punto $x_0 \in \Omega$ tal que $\|du(x_0)\|_{x_0} < 1/2$, lo que constituye una contradicción. Ahora bien, lo que sí podemos encontrar es una única solución de viscosidad para la ecuación (HJ4), que es justamente la función distancia al borde $\partial\Omega$. Por definición, una función u es una solución de viscosidad de la ecuación (HJ4) si, y sólo si, u es continua; $u = 0$ en $\partial\Omega$; $\|\zeta\|_x \geq 1$ cuando $\zeta \in D^- u(x)$, $x \in \Omega$; y $\|\zeta\|_x \leq 1$ cuando $\zeta \in D^+ u(x)$, $x \in \Omega$.

Teorema 5.19. *Sea M una variedad riemanniana completa, y Ω un subconjunto abierto y acotado de M con borde $\partial\Omega$, entonces la función $x \mapsto d(x, \partial\Omega) := \inf\{d(x,y) : y \in \partial\Omega\}$ es una solución de viscosidad de la ecuación* (HJ4)*. Es más, si M es uniformemente localmente convexa y tiene radio de inyectividad positivo, entonces $d(\cdot, \partial\Omega)$ es la* única *solución de viscosidad de esta ecuación.*

Demostración. Probaremos primero la unicidad. Supongamos que $u, v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ es una solución de viscosidad de (HJ4). Como u y v son continuas, y $u = v = 0$ en $\partial\Omega$, podemos extender u y v con continuidad a la totalidad de M, sin más que poner $u = 0 = v$ en $M \backslash \Omega$. Es suficiente probar que $u \leq v$ en Ω (porque de manera similar, o por simetría, se tendría que $v \leq u$, y por tanto $u = v$). Tomemos cualquier $\alpha \in (0,1)$ y comprobemos que $\alpha u \leq v$. En efecto, supongamos que $\inf\{v(x) - \alpha u(x) : x \in \Omega\} < 0$. Escojamos un ε tal que

$$0 < 2\varepsilon < \min\left\{\frac{1-\alpha}{2}, -\inf\{v(x) - \alpha u(x) : x \in \Omega\}\right\}.$$

Dado que u y v son soluciones de viscosidad, tenemos que $\|\zeta\|_x \leq 1$ cuando $\zeta \in D^+ u(x) \cup D^+ v(x)$, $x \in \Omega$, luego, por el Teorema del valor medio 4.22, u y v son 1-Lipschitz. En particular, como Ω es acotado tenemos que las funciones u y v son acotadas, entonces , de acuerdo con el Teorema 4.18, existen $x_0, y_0 \in M$, $\zeta \in D^+(\alpha u)(x_0)$ y $\xi \in D^- v(y_0)$ tales que

1. $d(x_0, y_0) < \varepsilon$
2. $\|\zeta - L_{x_0 y_0}(\xi)\|_{x_0} < \varepsilon$
3. $\inf(v - \alpha u) \geq v(y_0) - \alpha u(x_0) - \varepsilon$.

Teniendo en consideración que u y v son 1-Lipschitz y $u = v = 0$ en $M \setminus \Omega$, es fácil ver que (3) y la elección de ε implican que $x_0, y_0 \in \Omega$. Ahora, como u y v son soluciones de viscosidad se tiene que

$$\frac{1}{\alpha}\zeta \in D^+ u(x_0) \implies \|\frac{1}{\alpha}\zeta\|_{x_0} \leq 1 \implies \|\zeta\|_{x_0} \leq \alpha, \text{ y}$$

$$\xi \in D^- v(y_0) \implies \|\xi\|_{y_0} \geq 1.$$

De (2), y recordando que $L_{x_0 y_0}$ es una isometría lineal, tenemos que

$$1 \leq \|\xi\|_{y_0} = \|L_{x_0 y_0}(\xi)\|_{x_0} \leq \|\zeta\|_{x_0} + \varepsilon \leq \alpha + \varepsilon < 1,$$

lo que supone una contradicción. Ahora, probaremos que $u := d(\cdot, \partial\Omega)$ es una solución de viscosidad de la ecuación (HJ4), y por lo visto anteriormente será la única solución. La propiedad $u = 0$ en $\partial\Omega$ es evidente por la definición de u, por tanto solamente tenemos que probar las condiciones de la norma de los vectores de $D^- u(x)$ y $D^+ u(x)$, para $x \in \Omega$.

Paso 1. Tomamos $\xi \in D^- u(x)$, $x \in \Omega$. Tenemos que ver que $\|\xi\|_x \geq 1$. Por el Teorema 4.3 podemos tomar una función $\varphi : M \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $u(y) - \varphi(y) \geq u(x) - \varphi(x) = 0$ cuando $y \in M$. Fijamos $0 < \varepsilon < 1$. Ahora, para cada α con $0 < \alpha < d(x, \partial\Omega)$, por la definición de $d(x, \partial\Omega)$ podemos tomar $x_\alpha \in \partial\Omega$ con

$$d(x, \partial\Omega) \geq d(x, x_\alpha) - \frac{\varepsilon\alpha}{4}.$$

A continuación, haciendo uso del Teorema de Ekeland de tipo Hopf-Rinow aproximado 1.4, podemos tomar un punto $y_\alpha \in \Omega$ con

$$d(x_\alpha, y_\alpha) < \frac{\varepsilon\alpha}{4}$$

y una geodésica $\gamma_\alpha : [0, T_\alpha] \to \overline{\Omega} \subset M$ que una $x = \gamma_\alpha(0)$ a $y_\alpha = \gamma_\alpha(T_\alpha)$, y tal que $L(\gamma_\alpha) = d(x, y_\alpha)$, entonces tenemos

$$L(\gamma_\alpha) = d(x, y_\alpha) \leq d(x, x_\alpha) + d(x_\alpha, y_\alpha) \leq d(x, x_\alpha) + \frac{\varepsilon\alpha}{4} \leq d(x, \partial\Omega) + \frac{\varepsilon\alpha}{2},$$

esto es

$$d(x, \partial\Omega) \geq L(\gamma_\alpha) - \frac{\varepsilon\alpha}{2}. \tag{4}$$

Ponemos $v_\alpha = d\gamma_\alpha(0)/dt \in TM_x$, por tanto $\gamma_\alpha(t) = \exp_x(tv_\alpha)$ y $\|v_\alpha\|_x = 1$, y definimos $z_\alpha = \gamma_\alpha(\alpha)$, entonces se tiene

$$\begin{aligned}
&\varphi(z_\alpha) - \varphi(x) \leq u(z_\alpha) - u(x) = d(z_\alpha, \partial\Omega) - d(x, \partial\Omega) \leq \\
&d(z_\alpha, \partial\Omega) - L(\gamma_\alpha) + \frac{\varepsilon\alpha}{2} \leq d(z_\alpha, y_\alpha) + d(y_\alpha, x_\alpha) - L(\gamma_\alpha) + \frac{\varepsilon\alpha}{2} \leq \\
&L(\gamma_{\alpha|_{[\alpha, T_\alpha]}})) + \frac{\varepsilon\alpha}{2} - L(\gamma_\alpha) + \frac{\varepsilon\alpha}{2} = \\
&L(\gamma_\alpha) - \alpha + \frac{\varepsilon\alpha}{2} - L(\gamma_\alpha) + \frac{\varepsilon\alpha}{2} = \alpha(-1 + \varepsilon),
\end{aligned}$$

por tanto

$$\frac{\varphi(z_\alpha) - \varphi(x)}{\alpha} \leq -1 + \varepsilon. \tag{5}$$

Por el Teorema del valor medio, existe $s_\alpha \in [0, \alpha]$ tal que

$$d\varphi(\gamma_\alpha(s_\alpha))(\frac{d\gamma_\alpha(s_\alpha)}{dt}) = \frac{\varphi(z_\alpha) - \varphi(x)}{\alpha}. \tag{6}$$

Combinando (5) y (6), y considerando que $\|d\gamma_\alpha(s)/dt\|_{\gamma_\alpha(s)} = 1$ para todo s, tenemos que

$$\|d\varphi(\gamma_\alpha(s_\alpha))\|_{\gamma_\alpha(s_\alpha)} \geq 1 - \varepsilon \tag{7}$$

para cada $\alpha \in (0, u(x))$, entonces, como las funciones $y \to d\varphi(y)$ y $(y, \zeta) \to \|\zeta\|_y$ son continuas, y $\gamma_\alpha(s_\alpha) = \exp_x(s_\alpha v_\alpha) \to \exp_x(0) = x$ cuando $\alpha \to 0$, se sigue que

$$\|\xi\|_x = \|d\varphi(x)\|_x = \lim_{\alpha\to 0^+} \|d\varphi(\gamma_\alpha(s_\alpha))\|_{\gamma_\alpha(s_\alpha)} \geq 1 - \varepsilon. \tag{8}$$

Finalmente, haciendo tender $\varepsilon \to 0$ en (8), se deduce que $\|\xi\|_x \geq 1$.

Paso 2. Ahora tomamos $\zeta \in D^+u(x)$, $x \in \Omega$, y veremos que $\|\zeta\|_x \leq 1$. Esto es mucho más fácil que en el caso anterior. Tomamos una función $\psi : M \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $d\psi(x) = \zeta$ y $u(y) - \psi(y) \leq u(x) - \psi(x) = 0$ cuando $y \in M$. Para cada $v \in TM_x$ consideramos la geodésica $\gamma_v(t) = \exp_x(tv)$. Como $u = d(\cdot, \partial\Omega)$ es 1-Lipschitz tenemos que

$$\psi(\gamma_v(t)) - \psi(\gamma_v(0)) \geq u(\gamma_v(t)) - u(\gamma_v(0)) \geq -d(\gamma_v(t), \gamma_v(0)) = -t,$$

por tanto

$$\frac{\psi(\gamma_v(t)) - \psi(\gamma_v(0))}{t} \geq -1$$

para cada $t > 0$ suficientemente pequeño, y

$$d\psi(x)(v) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\psi(\gamma_v(t)) - \psi(\gamma_v(0))}{t} \geq -1. \tag{9}$$

Dado que la desigualdad (9) es cierta para cada $v \in TM_x$, concluimos que $\|\zeta\|_x = \|d\psi(x)\|_x \leq 1$. $\square$

Bibliografía

[1] Abrahan and Marsden, *Foundations of Mechanics*, Second Edition, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., Reading, Masssachusetts, 1980.

[2] D. Aussel, J.-N. Corvellec, M. Lassonde, *Mean value property and subdifferential criteria for lower semicontinuous functions*, Transactions of the Amer. Math. Soc., 347 (1995), 4147-4161.

[3] D. Azagra, *Smooth negligibility and subdifferential calculus in Banach spaces, with applications*, Ph. D. Thesis, Universidad Complutense de Madrid, October 1997.

[4] D. Azagra and M. Cepedello Boiso, *Uniform approximation of mappings by smooth mappings with no critical points on Hilbert manifolds*, preprint, 2002.

[5] D. Azagra and R. Deville, *Subdifferential Rolle's and Mean Value Inequality Theorems*, Bull. Austral. Math. Soc. 56 (1997), p. 319-329.

[6] D. Azagra, J. Ferrera, F. López-Mesas, *Approximate Rolle's theorems for the proximal subgradient and the generalized gradient*, J. Math. Anal. Appl. 283 (2003), p. 180-191.

[7] D. Azagra, J. Ferrera, F. López-Mesas, *Nonsmooth analysis and Hamilton-Jacobi equations on Riemannian manifolds*, preprint, (2003).

[8] D. Azagra, J. Gómez, and J.A. Jaramillo, *Rolle's theorem and negligibility of points in infinite-dimensional Banach spaces,* J. Math. Anal. Appl. 213 (1997), 487-495.

[9] D. Azagra, Mar Jiménez-Sevilla, *The Failure of Rolle's Theorem in Infinite-Dimensional Banach Spaces,* J. Funct. Anal. 182 (2001), 207-226.

[10] G. Barles, *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, Mathematics & Applications (Paris), Springer-Verlag, 1994.

[11] J.Bes, J.Ferrera, *On a multidimensional version of Rolle's theorem,* Publ. Dto. Análisis Mat. UCM. serie 1 no. 42 (1996-97) 21-27.

[12] F.H. Clarke, Yu.S. Ledyaev, R.J. Stern, P.R. Wolenski *Nonsmooth Analysis and Control Theory,* Springer, Graduate Texts in Mathematics 178.

[13] M. G. Crandall, L. C. Evans and P.L. Lions, *Some properties of viscosity solutions to Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 282 (1984), 487-502.

[14] M. G. Crandall, H. Ishii and P.L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order to fully nonlinear partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc., 27 (1992), 1-67.

[15] M. G. Crandall, H. Ishii and P.L. Lions, *Uniqueness of viscosity solutions revisited*, J. Math. Soc. Japan, 39 (1987), 581-596.

[16] M. G. Crandall and P.L. Lions, *Condition d'unicité pour les solutions généralisées des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre*, C. R. Acad. Sci. Paris, 292 (1984), 183-186.

[17] M. G. Crandall and P.L. Lions, *Viscosity solutions of hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 277 (1983), 1-42.

[18] M. G. Crandall and P.L. Lions, *Solutions de viscosité non bornées des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre*, C. R. Acad. Sci. Paris, 198 (1981), 217-220.

[19] M. G. Crandall and P.L. Lions, *On existence and uniqueness of solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Non. Anal. Theor. Math. Appl., 10 (1986), 353-370.

[20] M. G. Crandall and P.L. Lions, *Unbounded viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Illinois J. Math., 31 (1987), 665-688.

[21] M. G. Crandall and P.L. Lions, *Solutions de viscosité pour les équations de Hamilton-Jacobi en dimension infinie intervenant dans le contrôle optimal de problèmes d'évolution*, C. R. Acad. Sci. Paris, 305 (1987), 233-236.

[22] M. G. Crandall and P.L. Lions, *Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions*, J. Funct. Anal., *Part I: Uniqueness of viscosity solutions*, 62 (1985), 379-396; *Part II: existence of viscosity solutions*, 65 (1986), 368-405; *Part III* 68 (1986), 214-247; *Part IV: Unbounded linear terms*, 90 (1990), 237-283; *Part V:B-continuous solutions*, 97 (1991), 417-465.

[23] R. Deville, *A mean value theorem for the non differentiable mappings*, Serdica Math. J. 21 (1995), 59-66.

[24] R. Deville, *Stability of Subdifferentials of Nonconvex Functions in Banach Spaces*, Set-Valued Analysis 2 (1994), 141-157.

[25] R. Deville, *Smooth variational principles and nonsmooth analysis in Banach spaces*, Nonlinear Analysis, Differential Equations and Control (edited by F.H. Clarke and R.J. Stern), pp. 369–405; NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., 528, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.

[26] R. Deville and E. El Haddad, *The viscosity subdifferential of the sum of two functions in Banach spaces. I. First order case*, J. Convex Anal. 3 (1996), no. 2, 295-308.

[27] R. Deville and El Mahjoub El Haddad, *The subdifferential of the sum of two functions in Banach spaces. II. Second order case*, Bull. Austral. Math. Soc., 51 (1995), 235-248.

[28] R.Deville, G.Godefroy, y and V.Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces,* Pitman Monographies and Surveys in Pure and Applied Mathematics vol. 64, 1993.

[29] R. Deville and N. Ghoussoub, *Perturbed Minimization Principles and Applications*, Handbook of the Geometry of Banach Spaces, vol. 1, edited by W.B. Johnson and J. Lindenstrauss, chapter 10, pp. 393–435, North-Holland, Amsterdam, 2001 Elsevier Science.

[30] R. Deville and M. Ivanov, *Smooth variational principles with constraints*, Arch. Math. 69 (1997), 418-426.

[31] I.Ekeland, *Nonconvex minimization problems,* Bull. Amer. Math. Soc. (New series), vol. 1, no. 3 (1979), 443-474.

[32] I.Ekeland, *The Hopf-Rinow theorem in infinite dimension*, J. Differential Geom. 13 (1978), no. 2, 287–301.

[33] Federer, *Geometric measure theory*, Geometric measure theory. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153, Springer-Verlag New York Inc., New York 1969.

[34] J.Ferrer, *Rolle's, theorem fail in* l_2*,* Amer Mat. Monthly 103 (1996), 161-165.

[35] G. Godefroy, *Some remarks on subdifferential calculus*, Revista Matemática Complutense, vol. 11, no. 2 (1998), 269-279.

[36] R.E. Greene and K. Shiohama, *Convex functions on complete noncompact manifolds: topological structure*, Inventiones Math. 63 (1981), 129-157.

[37] R.E. Greene and K. Shiohama, *Convex functions on complete noncompact manifolds: differentiable structure*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4 série, t. 14 (1981), 357-367.

[38] R.E. Greene and H. Wu, C^∞ *convex functions and manifolds of positive curvature*, Acta Math. 137 (1976), 209-245.

[39] R.E. Greene and H. Wu, C^∞ *approximations of convex, subharmonic, and plurisubharmonic functions*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4 série, t. 12 (1979), 47-84.

[40] E. M. El Haddad, *Calcul sous-differentiel et solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, Thèse doctorale présentée à l'Université Bordeaux I en 1994.

[41] W. Klingenberg, *Riemannian Geometry*, Walter de Gruyter Studies in Mathematics 1, Berlin-New York, 1982.

[42] I. Kupka, *Counterexample to the Morse-Sard theorem in the case of infinite-dimensional manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 954-957.

[43] S. Lang, *Fundamentals of differential geometry*, Springer-Verlag (Graduate Texts in Mathematics 191), New York 1999.

[44] J. Milnor, *Morse Theory*, Ann. of Math. Studies, Princeton University Press, Princeton 1963.

[45] R. R. Phelps, *Convex functions, monotone operators and differentiability*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1364, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1993.

[46] D. Preiss, *Differentiability of Lipschitz functions on Banach spaces*, J. Funct. Anal. 91 (1990), 312-345.

[47] S.A.Shkarin, *On Rolle's theorem in infinite-dimensional Banach espaces,* translation from Matematicheskie Zametki, vol 51, no.3, pp. 128-136, March, 1992.

Universidad Complutense de Madrid Facultad de Ciencias Matemáticas Departamento de Análisis Matemático Avenida Complutense s/n 28040 Madrid, España.