



ABRIR SECCIÓN II

SECCIÓN III

CIENCIA Y REALIDAD

PARTE I

**EL CONOCIMIENTO
CIENTÍFICO**

El pragmatismo de la época no se agota ni en el modernismo teológico ni en el pragmatismo filosófico, sino que tiene ramificaciones científicas en la teoría que se denomina convencionalismo. Por ello, la reflexión y crítica de Amor Ruibal no se detiene en los problemas filosóficos y teológicos, sino que avanzará también por los derroteros científicos, refutando todas las teorías que impliquen un agnosticismo. Es este carácter polifacético del pensamiento de Amor Ruibal, lo que le destaca de entre otros pensadores de su época y le hace tan interesante.

Este estudio sobre las teorías científicas de Amor Ruibal lo hemos dividido en dos partes: una primera parte que titulamos «El conocimiento científico», y es la que ahora iniciamos, donde compararemos su filosofía de la ciencia y las conclusiones a las que llega sobre la realidad, con dos autores de la época: Boutroux y Poincaré. Y una segunda parte titulada «Espacio y grandor», en la que estas orientaciones filosóficas distintas se van a encontrar realizadas en las teorías sobre el espacio y la naturaleza de la geometría. Amor Ruibal analizará y criticará dichas teorías para terminar explicando la naturaleza del espacio, por el concepto de *grandor*.

Esta primera parte, «El conocimiento científico», la vamos a comenzar con el estudio y comparación de la filosofía de la ciencia de E. Boutroux y Amor Ruibal, que como se verá serán sumamente coincidentes. La filosofía de E. Boutroux nos servirá además como puente que nos permita tratar las teorías científicas en continuidad con el modernismo teológico y el pragmatismo filosófico, ya que en él coinciden su dedicación a la filosofía de la ciencia con su preocupación por la crisis modernista. Sin embargo no haremos un estudio de su modernismo, sólo citaremos sus palabras inaugurales a una importante conferencia que dió en *La Société Française de Philosophie* el 19 de Noviembre de 1908, quince meses después de la condena de los modernistas por *Pascendi*. A esta conferencia titulada precisamente «Science et Religion», asisten importantes pensadores de la época, entre los que destacamos a Bergson, Berthelot, Brunschvicg, Couturat, Durkheim, Laberthonnière, Lachelier, Le Roy, y Lévy-Brühl. Las palabras con las que abrirá Boutroux, esta conferencia serán las siguientes:

"Si la Science et la Religion doivent continuer à coexister, il paraît contraire aux conditions de la pensée moderne d'admettre que ce résultat pourra être obtenu par le système dit de la cloison étanche, qui, aujourd'hui encore, est souvent préconisé ou jugé possible.

D'une part, en effet, la science moderne, ayant envahi les domaines psychologique, sociologique et moral, revendique l'étude et l'examen de toutes les formes de la vie humaine, sans exception aucune.

D'autre part, la religion se conçoit, ou comme pur sentiment, ou comme mélange de sentiment et connaissance. Pur sentiment, elle n'est, pour la science, qu'une donnée brute, qu'il lui appartient d'expliquer selon ses principes, en la ramenant, par voie d'analyse, aux phénomènes scientifiquement connus. Que si elle participe de la connaissance, elle ne peut être isolée radicalement de la science, parce que l'on ne conçoit pas la possibilité de deux vérités totalement hétérogènes.

Entre la Science et la Religion, désormais, la confrontation s'impose."¹

Además recuérdese que Boutroux ya ha sido mencionado cuando se trataba del kantismo en Francia, y aparecía como uno de los discípulos de Lachelier (página 82). Boutroux y Amor Ruibal convergerán en varios aspectos de su teoría sobre la ciencia. Primeramente, la teoría contingentista de Boutroux es convergente con el inductivismo radical de Amor Ruibal. Ambos autores coincidirán también en el relativismo como teoría explicativa del cosmos. Y en tercer lugar, como veremos, la teoría de Amor Ruibal sobre la *noción* y el *ser*, tiene un fundamento claro en la reflexión realizada por Boutroux sobre la relación entre el *ser* y las ideas.

¹ E. Boutroux, «Science et Religion» en *Bulletin de la Société Française de Philosophie*, tomo IX, 1909, p. 19.

La comparación con Poincaré sirve más bien de contrapunto a la teoría de Amor Ruibal. Si bien coinciden en el relativismo universal, sin embargo, el filósofo compostelano será sumamente crítico del convencionalismo de Poincaré, que es entendido como un pragmatismo de tipo científico. Este pragmatismo científico será criticado por Amor Ruibal desde su *realismo nocional*.

CAPÍTULO I

EL CONTINGENTISMO DE E. BOUTROUX Y AMOR RUIBAL

1. EL CONTINGENTISMO DE E. BOUTROUX.

A la teoría de Boutroux se la viene estudiando bajo el apelativo de *contingentismo* debido al título de su primera obra, su tesis doctoral de 1874: *De la contingence des lois de la nature*. En dicha obra exponía las razones por las que consideraba que las leyes naturales más que encerrar al hombre en los límites de la necesidad, le abría el campo de la contingencia y por ende el de la libertad. Dichas ideas fueron posteriormente ampliadas en las lecciones del curso que dió entre 1892-1893 en la Sorbona, y que después fueron publicadas en 1895 con el título: *De l'idée de loi naturelle dans la science et la philosophie contemporaines*.

Las dos ideas en las que se fundamenta Boutroux para concluir en sus trabajos la afirmación de la contingencia en vez de la necesidad como rectora del mundo, son las siguientes: en primer lugar, el carácter no *a priori* de las leyes científicas que se extiende desde el ámbito de lo lógico hasta las leyes de la psicología; y en segundo lugar, el carácter no reductible de cada uno de los niveles científicos que establece —lógica, matemáticas, física, biología y psicología— al nivel inferior. De este modo, la matemática no se reduciría a la lógica, ni la mecánica a la matemática, ni las leyes biológicas encontrarían tampoco su explicación en las leyes físicas, ni por último las leyes psicológicas se explicarían adecuadamente por la biología.

Estos dos elementos, como acabamos de indicar son los que le permitirán afirmar posteriormente la contingencia. El que aquí mayormente nos importa es la apelación a los hechos que realiza Boutroux, por coincidir en esto con Amor Ruibal -aunque por distintas razones-. Veamos ahora, con un poco de más detalle este aspecto.

Primeramente, a la lógica se la ha venido presentando comunmente como el ámbito por excelencia de la necesidad. El principio de identidad $A \text{ es } A$ era tenido como el fundamento absoluto de la necesidad. Pero si Boutroux acepta como necesaria tal proposición, entiende que su homóloga $A = a + b + c$ introduce, sin embargo, la contingencia, ya que no está determinado el segundo término. Por ello, unos años más tarde, en sus lecciones de la Sorbona, llegará a afirmar que el principio de identidad, no indica necesidad, sino más bien *posibilidad*:

"Le principe d'identité, ainsi défini, représente le type de la possibilité. Le principe de contradiction, au contraire, représente le type du faux, de l'impossibilité logique: A est non A [...]. Quant au principe du tiers exclue, il signifie qu'il n'y a pas de milieu entre A et non A. On peut l'appeler le principe de la possibilité indirecte..."¹

Si esto es así en el ámbito de la lógica pura, en el que la realidad no aparece referenciada, en las matemáticas que introducen ya un elemento sintético, la posibilidad se hace aún más patente. Además, si podemos tener a las leyes matemáticas como una creación humana, sin embargo se realizan éstas sobre la realidad, y por lo tanto no tienen un carácter apriórico puro:

"Les lois mathématiques supposent une élaboration très complexe. Elles ne sont comme exclusivement ni a priori ni a posteriori: elles sont une création de l'esprit; et cette création n'est pas arbitraire, mais a lieu grâce aux ressources de l'esprit, à propos et en vue de l'expérience. [...] Les mathématiques sont ainsi une adaptation volontaire et intelligente de la pensée aux choses." ²

El carácter de ciencia exacta de las matemáticas tiene un fundamento no tanto en una perfección superior, esto es, en su carácter lógico, sino en la eliminación de las discordancias de la realidad de la que parte³. La eliminación de estas discordancias de la realidad permite fundar la exactitud matemática:

"Certes, il est impossible d'expliquer par l'expérience l'exactitude des déterminations mathématiques, si l'on considère cette exactitude comme un caractère positif et absolu, attestant une perfection supérieure. Mais il semble que ce soit plutôt un caractère négatif, résultant de l'élimination des propriétés relativement accidentelles."⁴

Es decir, la matemática es una abstracción de los elementos de la realidad. Concretamente, Boutroux considera que las realidades a las que hacen referencia las leyes matemáticas, son el espacio —o la figura— y el movimiento.

"Les mathématiques ne considèrent que des réalités observables. La figure et le mouvement tombent sous les sens. Le concept de la mesure se ramène au concept de la coïncidence, considérée comme indépendante du lien, du sens des figures et de la manière dont on les superpose c'est-à-dire à des données explicables par l'expérience."⁵

¹ E. Boutroux, *De l'idée de loi naturelle dans la science et la philosophie contemporaines*. Librairie F. Alcan, Paris, 1895; p. 12.

² *Ibidem*, p. 23.

³ "I... Or l'expérience nous invite elle-même à éliminer les accidents qui troublent la pureté des déterminations mathématiques. Quel besoin avons-nous de notions à priori, pour achever ce travail de simplification, et éliminer par la pensée tous les accidents, toutes les irrégularités, c'est-à-dire, une manière abstraite et vague, celles que nous voyons et celles que nous ne voyons?" (E. Boutroux, *De la contingence des lois de la nature*. Librairie F. Alcan, Paris¹⁰, 1929; p. 49).

⁴ *Ibidem*, p. 48.

⁵ *Ibidem*, p. 52.

De esta forma los objetos geométricos que vienen dados por la extensión, no son unos conceptos puros debidos a nuestro entendimiento y ajenos a la realidad, como se pensaba desde Descartes hasta Poincaré, sino que tales figuras tienen su base en la realidad. Para Boutroux las formas geométricas no son una imposición de nuestra mente a la realidad sino que resulta de la abstracción de las formas reales, suprimiendo sus "imperfecciones".

"Mais, si ces objets [las figuras geométricas y los grupos de fuerza], ne sont imaginés que sous une forme grossière; si, sous leur forme précise, ils sont simplement conçus: rien n'empêche d'admettre qu'ils dérivent de l'expérience élaborée par l'abstraction."⁶

Así pues, el conocimiento matemático es un conocimiento *a posteriori* que procede de la experiencia. Los elementos que veíamos: extensión y movimiento, ahora entendidos, el primero como coexistencia y el segundo como sucesión y desplazamiento, son elementos empíricos:

"Ainsi la forme et la matière des éléments mathématiques sont contenues dans les données de l'expérience. La continuité mesurable dans la coexistence, la succession et le déplacement, est l'objet d'une connaissance à posteriori."⁷

Vemos como para Boutroux, las matemáticas, que en primera instancia aparecen como la ciencia más pura que cabe considerar, y cuyas leyes son absolutamente *a priori*, también están vinculadas en última instancia a la experiencia. Sus leyes y axiomas no son más que abstracciones de ésta. Boutroux, por lo tanto, se separa de la concepción kantiana de las matemáticas.

Esto mismo después aparecerá referido a las demás ciencias: la mecánica y la física aunque aquí la condición empírica de ellas no aparece como tan complicada como la anterior ya que estas ciencias aparecen afincadas en la realidad:

"Tous ce que nous pouvons dire, c'est qu'il y a dans les choses une manière d'être qui suggère à notre esprit l'invention des lois mécaniques."⁸

Si antiguamente las matemáticas se entendían como algo absolutamente *a priori* y por ende necesario⁹, y después, por una aplicación de las matemáticas a todo el ámbito de los conocimientos científicos, resultaba entonces que la necesidad matemática se extendía a todos los órdenes del saber científico:

"Nous croyons que tout est déterminé nécessairement, parce que nous croyons que tout, en réalité, est mathématique [...]."

⁶ *Ibidem*, p. 53.

⁷ *Ibidem*, p. 49.

⁸ *De l'idée de loi naturelle dans la science et la philosophie contemporaines*, p. 44.

⁹ "En fait, l'analyse des principes et des méthodes mathématiques y décèle mainte détermination contingente, maint artifice admis surtout parce qu'il réussit.

Ainsi la nécessité mathématique elle-même n'est plus pour nous Inconditionnée, comme elle pouvait l'être pour les anciens, qui tenaient les mathématiques pour entièrement *a priori*" (*Ibidem*, p. 137).

Le déterminisme moderne repose sur les deux assertions suivantes: 1° les mathématiques sont parfaitement intelligibles et son l'expression d'un déterminisme absolue; 2° les mathématiques s'appliquent exactement à la réalité, au moins en droit et dans le fond des choses."¹⁰

Todo esto nos lleva a un análisis más general sobre las leyes científicas. Primeramente tenemos que seguir insistiendo sobre la importancia de la experiencia para la ciencia, según Boutroux. Esta importancia aparece resaltada al final de su obra *De la contingence...*,

"...l'abandon de l'expérience est toujours dangereux toujours illégitime. L'expérience désormais n'est plus une pensée confuse, point de départ chronologique de la pensée distincte; ce n'est plus même uniquement l'ensemble des données parmi lesquelles l'induction discerne la loi, et quoi, une fois résumées ainsi dans une formule générale, rendent inutiles des observations nouvelles: c'est l'éternelle source et éternelle règle de la science, en tant que celle-ci veut connaître les choses d'une manière vraiment objective, c'est-à-dire dans leur histoire en même temps que dans leur nature, laquelle n'est, en définitive qu'un de leurs états. Selon la doctrine de la contingence, il est chimérique, il est faux de prétendre ramener l'histoire à une déduction pure et simple."¹¹

Las leyes naturales no son concebidas como algo impuesto a las cosas sino como procedentes de la realidad. En este sentido de las leyes naturales no tendrían un sentido nomológico sino abstractivo¹², lo que las convierte en contingentes: algo que es así en tanto que los hechos a los que hace referencia son de esa manera determinada. Si fuesen de otra manera, las leyes que se abstraen sobre esas regularidades serían distintas.

"En réalité, les rapports logiques objectifs ne précèdent pas les choses: ils en dérivent, et ils pourraient varier si les choses elles-mêmes venaient à varier, en ce qui concerne leurs ressemblances et leurs différences fondamentales."¹³

Hasta cierto punto, se puede decir que están relacionados necesidad y *apriorismo*, y por lo mismo contingentismo y *aposteriorismo*. Si la realidad es contingente todo el conocimiento que tengamos sobre ella tendrá que proceder de la misma realidad: desde lo más concreto, como son las leyes de la física y la química, a lo más abstracto como los axiomas matemáticos y las leyes lógicas. Si Boutroux, desechando al comienzo de su disertación había rechazado la necesidad, al plantear el principio de identidad como principio de la posibilidad y no de la necesidad, había también eliminado su carácter *apriórico*.

Amor Ruibal va a compartir el tono de la filosofía contingentista de Boutroux. Inclusive recomendará al padre E. Silva el libro *De la contingence...* "como un estudio complementario de interés"

¹⁰ *Ibidem*, p. 136. También se puede ver en lo siguiente: "Ainsi les objets des différentes sciences ne se laissent pas entièrement pénétrer par les mathématiques, et les lois fondamentales de chaque science nous apparaissent comme les compromis les moins défectueux que l'esprit ait pu trouver pour rapprocher les mathématiques de l'expérience" (*Ibidem*, p. 139).

¹¹ *De la contingence des lois de la nature*, p. 145.

¹² "On ne peut la loi de la conservation de l'énergie psychique) considérer comme donné à priori analytiquement, puisque l'idée des opérations psychologiques n'implique pas un degré déterminé d'énergie, comme condition de leur existence.

Elle n'est pas non plus un jugement synthétique à priori puisque le penchant de l'homme est, au contraire, de croire qu'il dispose des actes. Cette loi est une connaissance expérimentale, et ne peut prétendre qu'à une nécessité de fait" (*Ibidem*, p. 121).

¹³ *De l'idée de loi naturelle dans la science et la philosophie contemporaine*, p. 131. Boutroux mantiene una postura intermedia entre el convencionalismo pragmático y el realismo de Amor Ruibal que se deja traslucir en el siguiente texto: "Ce que nous appelons les lois de la nature est l'ensemble des méthodes que nous avons trouvées pour assimiler les choses à notre intelligence et les plier à l'accomplissement de nos volontés" (*Ibidem*, pp. 142 y s.).

dentro de las teorías modernas¹⁴. Si el filósofo francés desterraba la necesidad en los principios lógicos, lo mismo hará Amor Ruibal, para quien los principios de identidad, contradicción, etcétera, no son *a priori* e impuestos a la realidad, sino que por el contrario proceden de la misma realidad:

"...los principios ideales, no sólo en su génesis y origen respecto del entendimiento dependen del orden real, sino que también su formulación interna, y en su naturaleza, están subordinados a los elementos de la realidad, de cuyas relaciones son resultante y entre las cuales se engendran y son constituidos."¹⁵

Sin la realidad no existirían tales principios. Es más, si consideramos los principios como independientes y normativos respecto de la realidad, los principios constituirían toda la realidad de la que dependerían los seres:

"Si los seres no fuesen realizables en sí por la aptitud de conexión y relaciones de sus elementos, con prioridad lógica a todo principio, de una parte tendríamos que los principios puros serían algo en sí subsistente, porque precediendo a toda realidad, de nada podrían depender sino de sí mismos; y de otra, los principios por sí sólo constituirían toda realidad, y de ello habría que deducirla."¹⁶

Con lo cual, en definitiva, estaríamos en un platonismo o en un hegelianismo, en el que las ideas aparecen separadas de la realidad y son su objetividad —en el caso de Platón—, o son su origen evolutivo —como en el caso de Hegel—.

Esta concepción amorruibaliana del carácter *a posteriori* del principio de identidad y el resto de los principios lógicos, está vinculada a su teoría sobre los juicios analíticos y sintéticos.

Para el filósofo de Compostela, los principios son el último nivel de abstracción de los juicios, en los que únicamente quedan las relaciones, ya que se han suprimido los elementos relacionados¹⁷. Y los juicios no son ni *a priori*, ni *a posteriori*, ni analíticos ni sintéticos, ya que todos los juicios tienen su base en la realidad, y su necesidad sólo es *a tergo*, en el momento de idealidad:

"Por el conocimiento sintético, hallamos la realización de una forma de relaciones en los elementos reunidos en un todo cognoscible. Por el conocimiento analítico, formamos el tipo Ideal de la cosa, deduciendo reflejamente de éste la imposibilidad de descartar ninguno de sus factores, sin que desaparezca del todo, debido a la combinación indiscernible de éstos. En la conciencia de esta contemplación está todo el valor que los juicios analíticos tienen para nosotros."¹⁸

¹⁴ Carta de Amor Ruibal del 30 de Junio de 1929. Transcrita en *P.F.F.D.*, I, pp. 536-537 que a su vez está tomada de Avellino Gómez Ledo, *Amor Ruibal o la sabiduría con sencillez*, pp. 324-326.

¹⁵ *P.F.F.D.*, IX, p. 112. Así cuando se refería al principio de no-contradicción escribía: "...el principio de contradicción comienza por incluirse en el hecho del ser y su expresión primaria la tiene en el llamado principio de identidad: *lo que es, es*. Por consiguiente, es una ilusión creer que las cosas se sujetan a nosotros mediante el principio de contradicción, cuando en realidad somos nosotros los que nos sujetamos a ellas en la deducción de este principio. Discurrir de otra manera sería pensar que el orden lógico, que es el de los conceptos, constituye la fuente del orden ontológico, que es el de las realidades, lo cual es absolutamente falso. El orden lógico, por el contrario, supone siempre un orden ontológico, aunque, una vez conocida una verdad y establecida en el orden lógico, pueda ser para nosotros fuente de *conocimiento* de otras realidades del orden ontológico, sin producir las, por lo tanto, y tan sólo declarando su existencia" (*C.M.I.-NS*, p. 301). Quien quiera profundizar en el fundamento ontológico de los principios lógicos puede acudir a la tesis de M^a Dolores Mateu Muriscot, *Amor Ruibal: Principios y categorías*. Pro mans. Madrid, 1988; pp.189 y ss.

¹⁶ *Ibidem*.

¹⁷ "... si prescindimos de ellas, (las propiedades de los objetos), obtenemos una generalización, y hacemos aquel acto cognoscitivo reversible sobre una clase de objetos; y a medida que se agrande la abstracción, se extiende la posibilidad de aplicar aquél, hasta prescindir de los elementos relacionados y quedar con sólo las relaciones, cual sucede en cada ciencia con los principios supremos, y en el orden matemático, con las matemáticas puras" (*P.F.F.D.*, IX, p. 110).

¹⁸ *P.F.F.D.*, IX, p. 110.

Este carácter ideal de la analiticidad de los juicios dejará libre el camino de la contingencia. Los seres del Universo no están determinados de forma *a priori* y la necesidad desaparece del mundo:

"Desde ese momento el carácter de necesidad de los conceptos analíticos, como expresión de algo objetivo, queda condicionado por las relaciones de que son susceptibles los elementos existenciales, cognoscibles mediante el acto sintético; y de ahí la mayor amplitud de la contingencia en la naturaleza y en sus leyes, la cual en vez de limitada por formas fijas a priori, cual si las cosas y los elementos de las cosas se identificasen, y sólo fuesen inteligibles en un sentido único, una vez desligada del apriorismo ejemplar, no reconoce más limitación dicha contingencia que la consiguiente combinación y nexos posibles de elementos relacionados."¹⁹

Con respecto al carácter inductivo y por lo tanto sintético de las leyes matemáticas, sólo vamos a indicar por el momento, que existe una total sintonía entre el filósofo francés y Amor Ruibal. Pero de ello se hablará más detenidamente en los capítulos posteriores y en una perspectiva más amplia en la que estudiaremos a Poincaré, Le Roy, Russell y Couturat.

2. EL RELACIONALISMO DE BOUTROUX Y AMOR RUBIAL.

El contingentismo nos conduce a un nuevo aspecto, sumamente interesante de la teoría de Boutroux. La ley científica se establece como un puente, un nexo de unión entre lo interior del sujeto y lo exterior, entre el yo y el mundo, entre el pensamiento y las cosas:

"Le concept de loi est le produit de l'effort que nous faisons pour adapter les choses à notre esprit. La loi représente le caractère qu'il nous faut attribuer aux choses pour que celles-ci puissent être exprimées par les symboles dont nous disposons, les données que les mathématiques puissent s'unir à elle. Et l'événement prouve que certains phénomènes de la nature se prêtent à cette exigence, de telle sorte que la notion de loi mécanique domine toute la recherche scientifique, au moins comme idée directrice."²⁰

Boutroux afirma, por lo tanto, dos tipos de relación: por una parte, estima que las leyes científicas expresan relaciones entre los hechos, y por otra, la ley científica expresa también una relación entre el pensamiento y las cosas. En el proceso de conocimiento Boutroux indica dos etapas, que son muy similares a las que posteriormente señala Amor Ruibal como dialéctica de noción e idea: una primera etapa sensible de indeferenciación entre el sujeto y las cosas, y una segunda etapa inteligible, en la que surge ya esa diferencia.

En la primera etapa, el hombre recibe las impresiones, pero no aparece todavía la diferencia entre el yo y el no yo, entre el pensamiento y las cosas. En palabras de Boutroux:

"Enfin, au dessus de la vie elle-même, et sur les fondements qu'elle fournit, s'élève la conscience, où le monde est senti connu, dominé. La sensibilité est l'état de la personne qui est sous

¹⁹ P.F.F.D., IX, p. 109. Contingencia que no es impedida por los principios de la ciencia, que no hacen sino más que demostrarla: "Y por cuanto el ser de la ciencia, y su certeza, está en remontarse a principios, ella viene a constituirse a expensas de las determinaciones reales, dejando más ancho campo a la contingencia y mutabilidad de lo realizable que cae bajo sus conceptos, a medida que éstos adquieren más elevación, inmutabilidad y firmeza" (P.F.F.D., IX, p. 111).

²⁰ De l'idée de loi naturelle dans la science et la philosophie contemporaines, p. 38.

l'influence des choses et qui ne s'en distingue pas encore; qui, en quelque sorte, ne fait qu'un avec elles. L'Intelligence est la relation de la personne avec des choses dont elle se distingue, parce qu'elles lui apparaissent comme autres qu'elle-même. La volonté est l'acte de la personne qui, en vertu de sa supériorité, coordonne, organise, ramène à l'unité la multiplicité de ses manières d'être et la multiplicité des choses."²¹

Obsérvese la definición de inteligencia que da el filósofo francés. De esta definición podemos subrayar dos aspectos: primeramente, la inteligencia es una *relación* en la que se vincula la persona con las cosas; pero en segundo lugar, también hay que decir que es una relación en las que las cosas aparecen diferenciadas del yo. ¿No es acaso la expresión de lo que Amor Ruibal tematizará como la dialéctica de noción e idea?

Boutroux vuelve a manifestar la misma idea de forma un tanto más literaria, en el texto que abre su obra *De la contingence...*

"L'homme, à l'origine, tout entier à ses sensations de plaisirs ou de souffrance, ne songe pas au monde extérieur; il en ignore même l'existence. Mais, avec le temps, il distingue, dans ses sensations mêmes, deux éléments, dont l'un, relativement simple et uniforme, est le sentiment de soi-même, et dont l'autre, plus complexe et plus changeant, est la représentation d'objets étrangers. Dès lors s'éveille en lui le besoin de sortir de soi et de considérer en elles-mêmes les choses qui l'environnent, le besoin de connaître. Il ne se demande pas à quel point de vue il doit se placer pour voir les choses, non telles qu'elles lui apparaissent, mais telles qu'elles sont en réalité. Du point même où il se trouve ses yeux, en s'ouvrant, ont découvert une perspective admirable et des horizons infinis. Il s'y établit donc comme en lien d'observation; il entend de connaître le monde tel qu'il l'aperçoit de ce point de vue. C'est la première phase de la science, celle où l'esprit se repose sur les sens du soin de constituer la connaissance universelle. Et les sens lui fournissent en effet une première conception du monde. Selon leurs données le monde est un ensemble de faits d'une variété. L'homme peut les observer, les analyser, les décrire avec une exactitude croissante. La science est cette description même."²²

Sobre el primer tema de las relaciones que son expresadas por la ley científica, podemos afirmar a este respecto, que sus concepciones son bastante similares a las Poincaré. Téngase en cuenta que el concepto de relación procede fundamentalmente de la ciencia, y que ésta, la relación, aparece desde los ámbitos matemáticos a los ámbitos físicos²³.

El hombre, está vinculado a la realidad que conoce, y esa realidad que conoce no consiste más que en hechos y relaciones. Téngase en cuenta que la filosofía de Boutroux ya no se desarrolla en el ámbito substancialista clásico en el que el cosmos no era sino un agregado de cosas aisladas, de substancias, por definición independientes unas de otras; y en el que la relación era algo sobreañadido a la substancia —ya fuese esta relación transcendental o relación accidental—. Para el filósofo francés:

²¹ *De la contingence des lois de la nature*, p. 142.

²² *Ibidem*, pp. 1 y 2.

²³ También podría aludirse en el mismo sentido concretamente a las leyes mecánicas que son para Boutroux: "Les lois mécaniques de la nature, révélées par la science moderne, sont la chaîne qui lie la dehors au dedans" (*De l'idée de loi naturelle dans la science et la philosophie contemporaines*, p. 23). O en el nivel incluso más básico y racional de la lógica. Una de sus formas más clásicas, el silogismo, ha sido considerado por Boutroux con este mismo carácter de relatividad: "Il y a donc dans les choses des relations qui en un sens, correspondent à l'enchaînement syllogistique. [...] L'homme, apparemment n'est pas un monstre dans la nature; l'intelligence qui le caractérise doit avoir quelque rapport avec la nature des êtres en général. Il est raisonnable d'admettre dans la nature comme une tendance vers l'intelligibilité. S'il en est ainsi, le raisonnement représente un mode d'interprétation, d'interrogation qu'il est légitime d'employer à l'égard de la nature" (*Ibidem*, p. 19).

"Il voit que la nature se compose, non de choses isolées, mais de phénomènes qui s'appellent les uns les autres. Il constate que la contigüité des phénomènes au point de vue des sens, n'est pas un sûr indice de leur corrélation effective. Il voudrait pouvoir ranger les phénomènes, non dans l'ordre où ils apparaissent, mais dans l'ordre où ils dépendent effectivement les uns des autres."²⁴

Hemos de advertir, sin embargo que éste no es el pensamiento más importante de Boutroux ni el que define su teoría. Es una teoría secundaria sobre la que se apoya y vertebrata su pensamiento más original de la contingencia. Ahora bien, es importante destacar que si bien no constituye esta especie de relacionismo lo más genuino de su pensamiento, constituye empero el *ámbito teórico* donde postula Boutroux su contingentismo, es decir, su condición de posibilidad.

Realmente este ámbito viene constituido por dos elementos fundamentales: la ciencia del XIX y el positivismo. Evidentemente ambos elementos mantienen múltiples interdependencias y no pueden ser considerados como dos factores aislados; pero podríamos indicar, que el positivismo aporta básicamente la valorización del *hecho*, como único explicativo para el conocimiento de la realidad²⁵, mientras que la ciencia aporta la relación como categoría explicativa fundamental. La relación es aquello que vincula dos hechos entre sí y que puede ser expresada mediante una ley, que a su vez puede formularse de forma matemática. Con la sucesiva matematización de la ciencia se fue revalorizando la *relación*, ya que era la única categoría susceptible de ser expresada matemáticamente. Así pues, la ciencia sólo tiene en cuenta los hechos y sus mutuas relaciones:

"Cependant, tout en observant les faits, l'esprit remarque entre eux des liaisons constantes. Il voit que la nature se compose non de choses isolées, mais de phénomènes qui s'appellent les uns les autres. Il constate que la contigüité des phénomènes au point de vue des sens, n'est pas un sûr indice de leur corrélation effective. Il voudrait pouvoir ranger les phénomènes, non dans l'ordre où ils apparaissent, mais dans l'ordre où ils dépendent effectivement les uns des autres."²⁶

Si bien, como indica Boutroux con la precaución debida, ya que esta relación no es la simple relación de contigüidad en que los fenómenos aparecen, sino que haya de buscarse la relación efectiva de una cosa con otra²⁷. Y por esto mismo, el conocimiento nos revela estas relaciones. Pero éstas relaciones no son *necesarias*, sino constantes. La implicación de un hecho con otro no es necesaria, sino contingente.

Así lógicamente, el mundo entendido como el conjunto de relaciones no forma sino un sistema:

²⁴ De la contigence des lois de la nature, p. 2.

²⁵ Esta valorización del hecho, después pasará al pragmatismo, que se presenta desde un principio como una teoría empirista, aunque sin pretender hacer de los hechos un dogmatismo, como se ha visto en la sección segunda.

²⁶ *Ibidem*, p. 2.

²⁷ "Le champ de l'expérience peut d'ailleurs être nettement défini: ce sont les faits et leurs rapports observables. Les faits se distinguent en faits externes et en faits internes ou propres à l'être même qui en est le sujet. Par le sens, nous pouvons connaître les premiers; par la conscience empirique ou sens intime, nous pouvons atteindre les seconds en nous-mêmes. Les rapports observables consistent dans les rapports de ressemblance et de contigüité simultanée ou successive" (*Ibidem*, p. 12). "L'expérience, qui ne fournit aucune connaissance universelle dans l'espace et dans le temps, et qui fait seulement connaître les rapports extérieurs des choses, peut bien nous révéler des liaisons constantes, mais non des liaisons nécessaires" (*Ibidem*, p. 10).

"Le monde reste un tout parfaitement un, un système dont les parties s'appellent nécessairement les unes les autres."²⁸

Este relacionismo va pregnando todas las afirmaciones que va haciendo Boutroux. Así la causalidad es vista no como algo inherente al ser como era considerada en la teoría substancialista de Aristóteles, sino como una relación :

"Mais, dira-t-on, c'est effectivement par erreur que la cause avait été d'abord conçue comme une entité métaphysique contenue dans les phénomènes: elle n'en est que la condition déterminante. Elle ne se rapporte pas à l'être en soi, mais à la connaissance des phénomènes; et elle implique uniquement ce qui est nécessaire pour rendre cette connaissance possible. Il est juste de dire que la causalité n'est qu'un rapport et un lien de nécessité posé à priori."²⁹

También, las realidades físicas de la extensión y el peso, son tan sólo relaciones:

"L'entendu n'est jamais qu'un rapport. Il en est de même du poids: le poids est un rapport, et dépend de l'attraction terrestre. D'une manière générale, nous ne disposons que de l'expérience pour déterminer la grandeur ou la masse des atomes. Or l'expérience ne peut nous donner que le relative."³⁰

En el ámbito de lo orgánico, en el campo de la vida, se acentúa la relación de unos miembros con otros. Ya aquí no se trata de relaciones sino de correlaciones. El ser viviente es considerado entonces como un *todo*, como un sistema, al que podemos añadir además la característica de armonioso:

"L'être vivant est un tout. Ensuite, la vie est une action commune, et les organes sont construits de manière à pouvoir y concourir: il y a corrélation entre leurs rôles, et par suite, entre leur formes. En ce sens l'être vivant est un système harmonieux."³¹

Así los posibles cambios producidos en una de sus funciones son inmediatamente corregidos por el cambio de las otras manteniéndose el equilibrio del conjunto. Esta ley es llamada por Boutroux ley de las correlaciones orgánicas y su enunciado es el siguiente:

"La loi dès corrélations organiques suppose, entre les fonctions partielles et la fonction totale, une relation analogue à celle qui existe entre des forces concourantes et une résultante déterminée. Si l'une des forces concourantes est modifiée, la résultante se pourra demeurer la même qu'au moyen de modifications corrélatives subies par les autres forces concourantes. De même, en physiologie, si une

²⁸ De la contingence des lois de la nature, p. 4. También en su obra posterior reafirma la misma idea: "Car les progrès de la science ont de plus en plus montré que tout a sa raison comme sa cause; que toute ce qui est fait partie d'un système" (De l'idée de loi naturelle dans la science et la philosophie contemporaines, pp. 122-123).

²⁹ De la contingence des lois de la nature, p. 21. "La loi de causalité, sous sa forme abstraite et absolue, peut donc être à bon droit la maxime pratique de la science, dont l'objet est de suivre un à un les fils de la trame infinie; mais elle n'apparaît plus que comme une vérité incomplète et relative, lorsque l'on essaye de se représenter l'entrelacement universel, la pénétration réciproque du changement et de la permanence, qui constitue la vie et l'existence réelle" (Ibidem, p. 28).

³⁰ De l'idée de loi naturelle dans la science et la philosophie contemporaines, p. 67.

³¹ De la contingence des lois de la nature, p. 82. "L'unité n'y est conçue que comme rapport constant de juxtaposition, et l'harmonie n'y est conçue que comme influence réciproque.

La liaison, d'ailleurs, n'est considérée comme absolue, ni dans la loi des connexions, ni dans la loi des corrélations: d'autant que chacune de ces deux lois, prise absolument, pourrait faire tort à l'autre.[...]

Ainsi la vie, considérée comme totalité et harmonie, comme unité statique et dynamique, n'est pas l'objet d'une notion à priori. Le rapport qui l'unit aux propriétés physiques nous est donné par l'expérience et en partage les caractères" (Ibidem, p. 82).

fonction partielle est modifiée, les autres le seront de manière que la fonction totale reste possible. La loi des correlations peut donc se ramener à une loi plus simple, qui serait la permanence de la fonction totale, à travers tous les changements que peuvent subir les fonctions partielles."³²

Todo este relacionismo, lo veremos de nuevo reaparecer en Poincaré. Como hemos dejado ya indicado el relacionismo no es una teoría filosófica determinada, expuesta por un autor concreto, sino que es el ámbito teórico de toda una época, y que, sobre todo, se pone de manifiesto en la ciencia. También veíamos el relacionismo formulado como *inmanentismo* en los pragmatistas, y la crítica que le dedicaba Amor Ruibal. Recordemos cómo el filósofo compostelano pretendía evitar el monismo que acarrea esta teoría onto-gnoseológica, al eliminar supuestamente la subsistencias de los particulares. Por lo que hemos visto aquí, la teoría de Boutroux, está más cerca de Amor Ruibal que del inmanentismo, aunque este filósofo francés también haya sido juzgado por nuestro autor como pragmatista³³.

3. DE LA NOCIÓN DE *SER* AL *SER* NOCIONAL.

Como es sabido, el concepto de noción es un concepto central en Amor Ruibal, por no decir el más peculiar de su filosofía, y el que le sirve para fundamentar su realismo. Por ello, sin pretender en modo alguno limitar su originalidad, vamos a estudiarlo con respecto al concepto de *noción* que Boutroux tematiza en su obra *De la contingence ...*

Ni que decir tiene que la *noción* de Boutroux no es la de Amor Ruibal. El término noción en Boutroux, no tiene la significación ruibaliana de lo nocional —es decir, prelógico y preideal—, sino que viene a significar idea o concepto. Ahora bien, como intentaremos demostrar, la conceptualización de Boutroux de la noción como vinculada al *ser* va a suscitar la reflexión ruibaliana que le hará llegar a su propia concepción del *ser nocional*, y mismamente el término *noción* empleado por Amor Ruibal para distinguirlo de la idea está sacado de este contexto.

Como se ha visto en el apartado precedente, la pretensión de Boutroux en su obra *De la contingence...* es demostrar que de las leyes de las ciencias naturales —de la psicología, la física, la mecánica, y la matemática—, no se desprende ningún *apriorismo* ni ninguna necesidad, sino que en última instancia nos llevan todas ellas a la concepción contingente de la naturaleza.

En su desarrollo, después de referirse a la necesidad lógica, y al *ser*, tratará en un capítulo titulado "Des Genres", de la vinculación de la noción al *ser*, y si la noción representa una construcción *a priori* o no.

³² *Ibidem*, p. 88.

³³ "Humanismo y pragmatismo se encuentran como denominaciones comunes; si bien la primera se ordena a significar el origen humano de la ciencia y de sus principios, o sea, la formación convencional y no necesaria de la teoría, según la conveniencia de explicarnos a nosotros mismos los fenómenos de la realidad, o de lo que aparezca como tal. Esta orientación filosófica la acentúa el neocriticismo de Renouvier a la cabeza, y de ella es expresión el *contingentismo* de Boutroux; en una forma más sistemática y psicológica, aunque ya dentro plenamente del monismo pragmatista, hay que agregar la teoría de Bergson" (*P.F.F.D.*, I, p. 262 nota).

Las bases de su teoría de la noción y el *ser* están incardinadas en su idea sobre las leyes científicas y de forma más general en el conocimiento de la realidad. Para Boutroux como hemos visto, las leyes científicas no se imponen de forma *a priori* sobre la realidad, sobre las cosas; sino que más bien al contrario todo conocimiento procede de la realidad. En la ciencia, las leyes científicas aunque indican cómo operan las cosas entre sí, no tienen carácter *a priori* ya que proceden de la experiencia:

"Les lois sont le lit où passe le torrent des faits: ils l'ont creusé, bien qu'ils le suivent. Ainsi le caractère impératif des formules de la logique, bien qu'il soit pratiquement justifié, n'est qu'une apparence. En réalité, les rapports logiques objectifs ne précèdent pas les choses: ils en dérivent; et ils pourraient varier, si les choses elles-mêmes venaient à varier, en ce qui concerne leurs ressemblances et leurs différences fondamentales"³⁴

Este planteamiento positivista³⁵ sobre el conocimiento de las cosas, predetermina la concepción de Boutroux sobre la noción.

Para Boutroux, en primera instancia, el *ser* se da, no de manera general e inespecífica, sino que se da concretado en una serie de cosas, que a su vez pueden agruparse en géneros, especies, etcétera. Se nos da el *ser* "modalizado" en formas concretas. Estas formas concretas pueden después agruparse:

"...l'être ne nous est pas seulement donné en tant qu'être, c'est-à-dire comme une série de causes et d'effets. Les modes de l'être présentent, en outre, des ressemblances et des différences qui permettent de les ordonner en groupes appelés genres ou lois; de former avec les petits groupes des groupes plus considérables, et ainsi de suite."³⁶

El problema que se plantea entonces, es la relación que existe entre el *ser* y la noción. Primeramente, Boutroux niega que la *noción* añada algo al *ser*:

"Sans doute, l'organisation logique n'accroît pas la quantité de l'être. De même une statue de bronze ne contient pas plus de matière que le métal dont elle est faite."³⁷

La noción no tiene, pues, carácter entitativo, sino que es la unidad de varias formas determinadas que se agrupan formando las especies y a su vez éstas formando los géneros. La noción da armonía al

³⁴ De la contingence des lois de la nature, p. 39.

³⁵ Positivista en tanto que extrae sus leyes y principios de la realidad positiva y no apela a nada oculto, tipo noumeno, etcétera. Pero también podría decirse realista en el sentido ruihaliano. Cuando menos es inductivista, ya que los principios y las leyes son sacados de la experiencia.

³⁶ *Ibidem*, p. 29.

³⁷ *Ibidem*, pp. 29-30. "Elle n'est donc pas contenue dans l'être proprement dit, dont l'essence, en tant qu'il s'agit de l'être donné, est la diversité, la multiplicité pure et simple" (*Ibidem*, p. 30). "C'est parce qu'elle est ainsi intimement unie aux choses, qu'elle semble en faire partie intégrante" (*Ibidem*).

universo, a las cosas, en tanto que las reúne en semejantes³⁸, y las separa de otras que considera diferentes.

Otra concepción con la que tampoco está de acuerdo Boutroux, es la de concebir la noción, aunque separada del *ser*, como algo real, subsistente y *a priori*; esto es, como *idea* en el sentido platónico.

La noción no es la idea platónica subsistente y necesaria que se impone de forma *a priori* a las cosas. En cierto modo esta concepción pretendiendo distinguirse de la anterior cae en su mismo error: aunque se pretenda distinguir la idea del *ser*, al realizar esta diferenciación acontece que la idea se substancializa convirtiéndose en el *ser*, del que, en definitiva, participan las cosas.³⁹

Boutroux negará esta dos posibles relaciones entre el *ser* y la noción, porque ambas niegan el carácter necesario de la noción. Así, en el primer caso, la noción no deriva analíticamente del *ser* por lo tanto aunque el *ser* estuviese en el ámbito de la necesidad, la noción podría seguir siendo, empero, contingente. Por otra parte, la noción no puede ser concebida como idea en sentido idealista.

Pero si esta pretensión última de demostrar el carácter contingente de la noción es lo que mueve a Boutroux a realizar estos análisis, lo que subyace a ellos y lo que permite su concepción contingentista referente a la noción —y también respecto a los demás niveles analizados en su obra—, es que el conocimiento parte de las cosas dadas y se establece a partir de ellas.

¿Qué es por lo tanto la noción para Boutroux y qué relación tiene con el *ser*? He aquí su respuesta:

"Dans son application à l'étude de la nature, la notion, loin d'être une entité distincte, n'est que l'ensemble des caractères communs à un certain nombre d'êtres."⁴⁰

Por ello, no tiene carácter ni inmutable ni necesario, porque depende de las cosas dadas, y por ende, es relativo a éstas. Si estas cosas, si los seres del mundo cambiasen, cambiarían las nociones. Es por lo tanto que se puede hablar de un nexo, una síntesis entre el *ser* y las nociones que se establece por la experiencia, y no de forma *apriórica*:

³⁸ Las cosas para Boutroux no son iguales sino semejantes. La igualdad supone la identidad, y esta no aparece en la naturaleza: "Car il est impossible de trouver un caractère qui soit exactement le même dans deux individus; et il est vraisemblable, d'après la loi même de l'analogie d'où résulte l'existence des espèces, que, si deux individus étaient identiques sur un point, ils le seraient entièrement. La nature ne nous offre jamais que des ressemblances, non des identités..." (*Ibidem*, p. 37).

Puede compararse esta concepción de Boutroux con aquella quizá más radical de Bradley y Russell que veremos más abajo. Para éstos la comparación de dos cosas, supone su diversidad, y siendo diversas, es como pueden ser comparadas y halladas semejantes. Por ello, la identidad incluye siempre comparación de cosas distintas aunque sea aparentemente contradictorio.

En un nivel más radical encontramos en la misma época a Nietzsche, para quien en tanto que el principio de identidad no es una adaptación orgánica que hace igual lo semejante: "Quien, (...) no supo encontrar con la frecuencia suficiente lo "igual", con referencia a la alimentación o al animal enemigo, quien por lo mismo fue demasiado lento en inferir o demasiado precavido para ello, tenía sólo menos probabilidades de igualdad en todo lo semejante. Pero esta tendencia preponderante a tratar lo semejante como igual, que es una tendencia ilógica, pues en sí nada es igual, es la que ha dado lugar a todos los fundamentos de la lógica" (Nietzsche, «111. Procedencia de lo lógico» en *El gay saber*, Espasa-Calpe, Madrid, 1986; p. 147).

³⁹ Obsérvese que ésta es la crítica que realizará Ruibal a los idealismos: al substancializar la idea y separar la idea del *ser* lo que se consigue es substancializar la idea dejando por su parte desconocido el *ser*. Ésta es la operación que ha realizado todo el idealismo. Por ello, Amor Ruibal, al mantener la idea como representativa y solo como tal, es capaz esta idea de representar las cosas. Sólo separando lo ontológico de lo gnoseológico, y no psicologizando lo ontológico como hace el positivismo ni substancializando lo gnoseológico, es como se pueden mantener «las cosas» y el conocimiento de las cosas. Esto es lo que pretende hacer y desarrollar Amor Ruibal.

⁴⁰ *Ibidem*, p. 33.

"De la sorte, la synthèse de l'être et de la notion, dans son acception scientifique, peut être connue par l'expérience et l'abstraction. Car l'expérience nous révèle les ressemblances des choses et leurs différences."⁴¹

Así pues la noción unifica las cosas según sus semejanzas de lo más concreto hasta lo más general.

Esta unificación de los tipos de las cosas bajo las nociones ha sido interpretada, según Boutroux, de dos formas que para él son inaceptables⁴², proponiendo él a su vez una concepción inductivista que será la de Amor Ruibal. Estas dos concepciones son las siguientes: según la primera, la noción existiría en la naturaleza siendo una especie de substancia, común a los seres que se unifican bajo su concepto. La identidad de la noción, opera como un *ser* del cual después los individuos son modalizaciones. Este modelo como puede apreciarse está en intrínseca conexión con lo que decíamos más arriba de la vinculación *ser* y noción.

El otro punto de vista sobre la noción, la concibe de manera gnoseológica⁴³ —y de manera platónico-aristotélica diríamos nosotros—. La noción unifica las cosas bajo una identidad de tipo gnoseológico, pero esta identidad, actuaría como *a priori* sobre el conocimiento, y supondría la jerarquización y unificación de todo el conocimiento bajo un mismo tipo ideal. Por ello, la noción total y globalizante contendría a todas las restantes y, concluiríamos nosotros, en última instancia conociendo ésta conocemos todas las contenidas en ella. Como se ve, esta concepción está enraizada en la que veíamos antes que separando la noción del *ser*, convertía la noción en *ser*.

La crítica fundamental que realiza Boutroux, y que está conectada con lo que acabamos de ver del conocimiento inductivo, es que ambas teorías sobre la noción suponen que el principio de identidad, que sirve para unificar las cosas bajo una noción como *a priori*, es *previo y necesario* a toda experiencia. Lo cual para Boutroux es completamente falso:

"Issu de l'expérience, le principe d'identité ne peut être considéré comme nécessaire en droit, comme imposé à la création ou à la connaissance des choses."⁴⁴

Así pues, al considerar que dos cosas son iguales, realmente lo que estamos haciendo es comparar dos cosas que en ciertos aspectos tienen ciertas semejanzas, y que nos inducen a pensar que en el resto de características son iguales. La ciencia de este modo procede siguiendo semejanzas: observa las cosas y, considerando alguna de sus características, las agrupa bajo nociones. Luego, las relaciones entre estas distintas nociones se expresan en las leyes científicas. Ello hace que el conocimiento humano, cuanto más amplio sea y conozca más cosas, establecerá mejor sus géneros y leyes. Y de este modo, el conocimiento humano, y el científico en particular, nunca podrá decirse ni considerarse acabado y concluso: no hay en este sentido «esencias inmutables» que conocer⁴⁵. El conocimiento es progresivo. Por eso, Boutroux se puede reafirmar sobre su concepción contingentista sobre el Universo:

⁴¹ *Ibidem*. También lo que sigue: "C'est donc d'une manière contingente que se superposent à l'être la notion et toutes les déterminations qu'elle comporte. Considérés, du dehors, au point de vue de l'être, les modes de la notion ne se produisent pas d'une manière fatale." (*Ibidem*, p. 34).

⁴² Cfr. *Ibidem*, pp. 35-36.

⁴³ Cfr. *Ibidem*, p. 36.

⁴⁴ *Ibidem*, p. 38.

⁴⁵ En definitiva toda clasificación, toda ley en este sentido que pretenda ser «natural», no es más que artificial. Esto puede ser entendido de manera escéptica y por ello ser criticado por Amor Ruibal.

"Si un premier regard jeté de ce point de vue sur l'univers a pu faire croire que les choses avaient en effet des propriétés immuables, une nature éternelle, où se trouvait la raison dernière de toutes leurs vicissitudes: un examen plus approfondi montre que ce qu'on avait pris pour le fond immuable des choses n'était encore qu'une couche mobile et superficielle; et, à mesure recule devant lui ce fondement inébranlable qui devait tout supporter."⁴⁶

Para cualquier lector que conozca la filosofía de Amor Ruibal, las ideas de Boutroux, que acabamos de exponer, le parecerán muy próximas al autor compostelano. En efecto, si Boutroux, afirmaba que no existen «esencias inmutables» para Amor Ruibal tampoco. Como hemos visto en la sección II, cap. IV, nuestro conocimiento es progresivo. Si Boutroux habla de que las ideas no añaden nada al *ser* de las cosas, sino que sólo consisten en organizaciones lógicas que no tienen carácter entitativo, Amor Ruibal más claramente dirá que las ideas no tienen *ser* sino que son el momento de irrealidad de nuestro conocimiento:

"El valor de las ideas, en efecto, si se considera según lo que directamente expresan es tan sólo representativo, esto es, que siendo verdadero significa una conformidad entre el entendimiento y la cosa, en cuanto ésta es representación, pero no en cuanto es o no realidad."⁴⁷

Así mismo, coincidirán ambos autores en el proceso abstractivo en que se genera la idea. Ambos parten de que no hay cosas que puedan decirse idénticas, sólo hay cosas semejantes⁴⁸. Y de esas semejanzas abstraemos el universal:

"Existe ciertamente el universal; pero éste no consiste en una unidad superior a los individuos y que se realiza en ellos, sino que es cada individuo en cuanto que puede ser tipo de semejanza para los demás por razón de la esencia. El universal consiste, no en hallar lo idéntico entre los individuos, pues esta identidad no existe en manera alguna; sino en hallar lo semejante entre los seres individualmente diversos."⁴⁹

Pero el universal, o lo que es lo mismo la idea, para Amor Ruibal como para Boutroux, no puede concebirse ni como lo concibe el plantonismo ni como lo concibe el hegelianismo, en los que queda arruinado la relación cognoscitiva de lo real-ideal.

Veamos ahora el concepto de noción y cómo se gesta éste, respecto a las ideas que hemos ofrecido de Boutroux. ¿En qué se diferencia de la filosofía de Amor Ruibal con respecto a Boutroux? La diferencia entre ellos es una pequeña diferencia, pero con importantes consecuencias. Si Boutroux entendía la noción como modalización del *ser*, y se planteaba el nexo que unía a las nociones con el *ser*, el paso dado por Amor Ruibal será el concebir también el *ser* como noción. Esto es, retrotraer la noción al *ser* mismo. Así pues, el *ser* como *noción* —en este primer momento— va a tener las características de máxima amplitud ya que incluye a todas las cosas, ya que todas tienen *ser*; y por otra parte, su comprensión va a ser mínima, ya que no implica ninguna determinación que diferencie a un ser de otro.

⁴⁶ *Ibidem*, p. 40.

⁴⁷ P.F.F.D., IX, p. 38. Habla explícitamente de la «irrealidad» de las Ideas de Amor Ruibal, J. L. Barreiro en *Mundo, hombre y conocimiento...*, pp. 141-146.

⁴⁸ "Ningún individuo puede ser otro más que el que es; si pienso en un hombre cualquiera, puedo concebir su no existencia, lo mismo que su desaparición después de existir; más no puedo en manera alguna cambiar aquel hombre como individuo, por ningún otro hombre de los existentes o posibles en la especie humana, sin hacerle desaparecer.

[...] Esto que acontece con nosotros, sucede igualmente tratándose de los demás seres de la naturaleza, con la diferencia de que la individualidad de la conciencia nos hace sentir mejor en nosotros la idea de ese monopolio esencialmente individual. Un árbol, una piedra, una flor, son aquel árbol, aquella piedra y esta flor invariablemente; y todo lo que les sustituya será siempre otro en la escala de los seres." (P.F.F.D., IX, pp. 217-218).

⁴⁹ P.F.F.D., IX, p. 216.

Es esta operación la que introduce lo lógico hasta lo más profundo y fundamental de lo ontológico, al llevar la noción al *ser* mismo. Las nociones ya no son sólo modalizaciones del *ser*, sino que más aún, el *ser* llega a ser una noción. El efecto de esto será inmediato, la noción que veníamos empleando hasta aquí con el significado de concepto o idea, se transfigura en contacto con el *ser* y la *noción de ser* deja de ser una idea más, para convertirse en algo pre-ideal, en lo que es, el *ser-nocional*. Ya no es idea, sino que entra por esta vinculación radical con el *ser* a formar parte de toda idea. Y será ésto lo que posteriormente sirva para evitar todo idealismo y todo escepticismo que en el fondo no son sino la misma cosa.

Revisando *grosso modo* la filosofía realista de Amor Ruibal, y haciendo una reconstrucción genética de su filosofía vemos que se puede creer —y de hecho ha sido criticado varias veces por ello— que es un realista ingenuo, en cuanto al modo en que concibe cómo conocemos las cosas: que nuestro conocimiento refleja un conocimiento de la realidad, que de la realidad sacamos todos nuestros principios, categorías e ideas. Tal opinión tendría razón en cuanto esta concepción del conocimiento de las cosas es ingenua y no pasa por ningún planteamiento crítico. Si Amor Ruibal se hubiese quedado en esto, sería verdaderamente incontestable que sería un realista ingenuo. Pero después, este realismo ingenuo que se acerca al *ser* por las cosas, deja de ser ingenuo, y adquiere una fundamentación radical en el *ser*. El binomio de lo lógico y lo ontológico quedan amalgamados en el monomio de *ser-noción*. La onto-logía adquiere entonces su condición de posibilidad y el ontos (ὄντος) puede ser *conocido* y *dicho* (λόγος); pueden entonces conceptualizarse/decirse las cosas⁵⁰.

Todo esto que hemos presentado aquí de manera genética, se encuentra disperso en la obra de Amor Ruibal, con insuficiencia conceptual en la distinción de noción en el sentido ruibaliano y en el sentido general. Ello ha hecho que los que se han leído superficialmente su obra, así como los que no han entendido bien el sentido de lo *nocional*, hayan visto en su filosofía un realismo ingenuo.

Por ello, creemos que la obra de Boutroux es una clave hermenéutica fundamental, ya que la teoría del profesor francés sobre la noción, lleva a Amor Ruibal hasta el límite en la concepción de la noción como idea; si bien es Amor Ruibal el que cruza este límite al llevar la *noción* al *ser* mismo.

⁵⁰ Esto enlazaría con lo visto más arriba (p.196) cuando en el conocimiento místico se trató de la relación Intuición Idea.

CAPÍTULO II

LA FILOSOFÍA DE AMOR RUIBAL Y POINCARÉ

1. IMPORTANCIA DEL TEMA.

El relacionismo de Boutroux aparecerá más desarrollado en la obra de Poincaré. Quien lea sus obras, podrá apreciar lo similar de sus concepciones onto-cosmológicas con las de Amor Ruibal. En ambos, el mundo forma un entramado de relaciones del que no se puede prescindir ni para su estudio físico —en el caso de Poincaré— ni para su comprensión filosófica —en el caso de Amor Ruibal—.

Esta coincidencia no es fortuita: en el tomo X, de los *P.F.F.D.*, Amor Ruibal critica la filosofía de la ciencia del matemático francés. Y si revisamos su Biblioteca, veremos que en ella se encuentra la práctica totalidad de la obra filosófica de Poincaré: *La ciencia y la hipótesis*, *El valor de la ciencia*, *La ciencia y el método*¹.

La confrontación entre Poincaré y Amor Ruibal resultará muy fecunda, no sólo por las posibles influencias que pudo recibir Amor Ruibal; sino también, porque en la crítica que hace nuestro autor a la filosofía de la ciencia de este ilustre matemático, encontramos problematizados una serie de temas muy interesantes, que nos van a permitir profundizar en el pensamiento de Amor Ruibal.

En este capítulo vamos a emplear fundamentalmente dos textos de Amor Ruibal: un primer texto más antiguo², que va de la página 354 a la página 365 del tomo X de los *P.F.F.D.* Este texto tiene todas

¹ A excepción de *Derniers pensées*. Las ediciones que posee Amor Ruibal son las siguientes: *La Ciencia y la Hipótesis*. Versión de Pedro. M. González de Quijano. Madrid, 1907. *La Ciencia y el Método*. Versión de Eduardo Cazorla. Madrid, 1910. Aunque no se encuentra en su Biblioteca, *El valor de la ciencia*, es indudable por lo que reflejan sus escritos, que Amor Ruibal también leyó esta obra.

² Por una nota que incluye el editor de los póstumos C. Pumar, sabemos que éste era "un cuadernillo de cuartillas que no figuraba en los mazos de las mismas, sino entre ejemplares de Revistas y manuscritos de otras materias" (*P.F.F.D.*, X, p. 354 nota) y que por su contenido incompleto parecen ser apuntes para un posterior trabajo en el que trataría de estudiar el positivismo y (continúa...)

las características de ser unos apuntes para una exposición de la filosofía de Poincaré, y en él parece diferenciarse la postura de Poincaré del nominalismo. Y un segundo texto más reciente, posterior a 1921³, que va de la página 366 hasta el final del tomo en la página 429, que tiene la apariencia de ser una exposición más sistemática que la anterior sobre filosofía de la ciencia. En él ya se identifica a Poincaré con el nominalismo, y curiosamente, Amor Ruibal criticará al científico francés utilizando los mismos argumentos que Poincaré empleaba para criticar al nominalista Le Roy. Ambos textos aparecen bajo el título de «Apriorismo y aposteriorismo en las construcciones científicas».

La crítica que realiza Amor Ruibal al pensamiento científico de Poincaré, va a permitir que tratemos los siguientes temas:

Primeramente, con motivo de la clasificación que hace Amor Ruibal del pensamiento de Poincaré dentro del esquema general de la filosofía, surge el interesante tema de la relación que establecen las diversas teorías con la realidad. Dos clasificaciones va a hacer Amor Ruibal para encuadrar al científico francés: una primera ordenación aparece en el primer texto (*P.F.F.D.*, X, pp 354-365), y está realizada desde el punto de vista del apriorismo y el aposteriorismo; y una segunda clasificación que aparece en el segundo texto (*P.F.F.D.* X, pp. 366-429), desde la dialéctica y la ontología. El problema que aparece a la base de estas clasificaciones, es la relación gnoseológica que media entre el sujeto y objeto.

En un segundo momento, y como consecuencia del anterior Amor Ruibal se plantea el problema de la ciencia. La crítica que nuestro autor hace a las teorías científicas nos va a mostrar un aspecto inédito en la filosofía de Amor Ruibal: su marcado carácter *inductivista*. Frente a la clásica concepción del método científico como hipotético-deductivo que se desarrolla desde Galileo hasta Poincaré⁴, la concepción de Amor Ruibal sobre la ciencia, como se ha visto, es absolutamente *inductiva*, debido al marcado carácter realista de su filosofía. Lo que le llevará a considerar, que inclusive la matemática es una ciencia «empírica», en continuidad con el contingentismo de Boutroux.

La divergencia de sus concepciones científicas se pondrá de manifiesto cuando se trate de su valoración de las geometría euclidiana y no-euclidiana, y su relación con el espacio real; así como cuando analicemos el concepto de grandor. Pero todo esto, lo examinaremos en una discusión más amplia que implicará junto a H. Poincaré, a B. Russell y L. Couturat, cuando en la parte segunda de esta sección estudiemos las relaciones entre espacio y grandor.

En el transcurso de este estudio tendremos que habérmolas con dos paradojas. La primera, respecto a la concepción de la ciencia de Poincaré. Éste va a plantear su obra *El valor de la ciencia* como crítica a los planteamientos de E. Le Roy, pero curiosamente, la crítica que Poincaré va a hacer al filósofo francés, será la misma que Amor Ruibal le haga a él, terminado por incluirle junto a Le Roy en la concepción llamada nominalista.

²(...continuación)

el pragmatismo entre otras teorías *aprioristas* clásicas. Por su aspecto exterior "el color amarillento del papel, lo ya borroso del texto y otros detalles, incluso de orden caligráfico, que ofrece el dicho cuadernillo" (*ibidem*) es evidente que está escrito mucho antes del texto siguiente. Si tuviéramos que determinar una fecha, diríamos que fueron escritos entre 1911 y 1914, que son los años que van de la edición de las obras de Poincaré que figuran en su biblioteca, a la publicación del primer tomo de los *P.F.F.D.*

³ En este texto ya se mencionan teorías tan recientes como la teoría de la relatividad, o como la fenomenología de Husserl. Entre las obras citadas, la de fecha más reciente es *Logische Untersuchungen*, de Husserl de 1913-1921.

⁴ Téngase en cuenta la importancia que da Poincaré a la hipótesis en su libro *La ciencia y la hipótesis*, para quien: "Toda generalización es una hipótesis; la hipótesis tiene, pues, un papel necesario que nadie ha negado nunca. Sólo que debe ser siempre sometida, lo más pronto y lo más a menudo posible, a la comprobación experimental." (H. Poincaré, *La ciencia y la hipótesis*, Trd. de P. M. Quijano, Madrid, 1907; 173).

La segunda paradoja implica a Amor Ruibal. La teoría ontológica de Amor Ruibal, va a ser muy similar a la de Poincaré a pesar de las críticas que le hace, e inclusive podríamos decir que Poincaré —al igual que Boutroux— va a influir en la concepción relativista del Universo que tiene Amor Ruibal. Y es que Amor Ruibal aunque rechaza todos los aspectos agnósticos que conlleva el convencionalismo y el pragmatismo, coincidirá con su época en la importancia explicativa de la relación.

2. POINCARÉ Y EL CONOCIMIENTO DE LA REALIDAD.

Amor Ruibal estudia la teoría de Poincaré incluyéndola en un esquema filosófico general, como por otra parte, es habitual en nuestro autor. Los esquemas en que incluye a Poincaré son dos distintos dependiendo de la redacción. En el primer texto (*P.F.F.D.* X, pp. 354-365), la clasificación se realiza desde el punto de vista del apriorismo/aposteriorismo (véase la Tabla IX en la página 238). Según este criterio Amor Ruibal divide las teorías en aprioristas y aposterioristas: aprioristas serían aquellas doctrinas que imponen un concepto ajeno a la experiencia para la explicación de la realidad. Su origen, Amor Ruibal lo sitúa en la explicación del cambio por los primeros filósofos griegos:

"...el apriorismo surge de la concepción ontológica del universo como un perpetuo devenir, para dar unidad a la variedad y contingencia de los seres, originándose así la concepción lógica del Universo, es decir la ciencia y el conocimiento de lo real."⁵

Este apriorismo, tiene en un primer momento una raíz ontológica ya que

"...lo inmóvil no está en el concepto, sino porque está en la naturaleza, y entra como factor intrínseco en los fenómenos que nos rodean."⁶

En este primer momento se encontrarían las filosofías naturalistas de los jonios, y la escuela eleática.

En un segundo momento, el *a priori* no sería ya de tipo ontológico sino dialéctico: serían las ideas en Platón y las esencias en Aristóteles. Este apriorismo se mantendrá en toda la filosofía medieval. Reaccionando contra este apriorismo surge el aposteriorismo, según Amor Ruibal el aposteriorismo positivista...

"...subordinaba la realidad a una evolución, y [...] dejaba subsistente el fondo de la realidad como algo inaccesible, con lo cual se convertía en substratum de la realidad y del ser substancial."⁷

El aposteriorismo tiene en este esquema una doble vertiente: filosófica y científica. La vertiente filosófica viene representada por el positivismo, y la científica por el pragmatismo. Aquí es donde sitúa la filosofía de Poincaré. Esta forma de aposteriorismo viene caracterizada por la prioridad de la experiencia para la justificación y validación de la teoría.

⁵ *P.F.F.D.*, X, p. 355.

⁶ *P.F.F.D.*, X, p. 356.

⁷ *P.F.F.D.*, X, p. 360.

Si en el apriorismo era lo *a priori*, esto es, lo ajeno a la experiencia, lo necesario para la validación de la teoría —lo lógico, si podemos llamarlo así—; en el aposteriorismo es la experiencia lo que justifica la teoría⁸.

Amor Ruibal caracteriza con estas palabras al pragmatismo:

"Mas una nueva forma de aposteriorismo es introducida en los dominios de la ciencia. El aposteriorismo de la experiencia como elaboración personal, que convierte la teoría en una alteración de la verdad, o el apriorismo convencional que hace de la teoría un postulado arbitrario y libre, introducido por nosotros en la explicación de lo real; pero que no tiene, ni puede tener, valor más que en cuanto la realidad y la experiencia vengan a confirmarlo."⁹

APRIORISMO	ONTOLÓGICO "el proceso ontológico prima sobre el proceso dialéctico"	Escuela jónica.
		Escuela eleática.
		Apriorismo platónico. IDEAS
	DIALÉCTICO "el proceso dialéctico principio del ontológico"	Apriorismo aristotélico. ESENCIAS
APOSTERIORISMO	POSITIVISTA	Pragmatismo o convencionalismo; POINCARÉ
		Intermedio idea-hecho.
		Teoría como símbolo de lo real.
CLASIFICACIÓN SEGÚN EL PROCEDIMIENTO DE LA IDEA Y LOS HECHOS		

Tabla IX: Clasificación según el apriorismo/aposteriorismo.

El pragmatismo, a su vez, es clasificado por Amor Ruibal en tres tipos. El primero correspondería al pragmatismo de Poincaré para quien:

"La teoría de las ciencias experimentales, es de carácter convencional y creación sin valor objetivo, sino en cuanto es un esquema de acción, y una norma por la cual juzgamos de la materia según

⁸ En este esquema Amor Ruibal recoge los conceptos kantianos de *a priori*, y *a posteriori* y los hace operativos en su clasificación. Estos conceptos recordémoslos, son los siguientes: "entenderemos, pues por conocimiento *a priori* el que es absolutamente independiente de toda experiencia, no el que es independiente de ésta o aquella experiencia. A él se opone el conocimiento empírico, el que sólo es posible *a posteriori*, es decir, mediante la experiencia." (Kant, E. *Crítica de la razón pura*. B 2-3. Trad. de P. Ribas. Madrid. Alfaguara, 1978. p. 43).

⁹ P.F.F.D., X, p. 360.

nos conviene. En esta doctrina todos los procedimientos son legítimos. El calor se mide por el termómetro, porque es más cómodo, como pudiera medirse de otra manera. Se acepta la teoría del movimiento de la tierra, como antes se aceptó la opuesta."¹⁰

Otro tipo de positivismo consistiría en establecer un intermediario entre el hecho y la idea. Quizá se refiera aquí, Amor Ruibal a la teoría de las formas representativas, aunque no queda muy claramente determinado, dado el carácter de apunte de su escrito.

El tercer tipo de pragmatismo sería el que entiende a la teoría «como símbolo de lo real» sin que se corresponda con la experiencia. Quizá con este tipo, se refiera Amor Ruibal a la teoría nominalista de Le Roy.

En el segundo texto (*P.F.F.D.*, X, pp. 365-429), posterior en 10 años al anterior, el esquema filosófico se amplía y generaliza (ver Tabla X). Este esquema filosófico tiene un doble principio clasificador: por una parte considera la diferenciación histórica que acontece con la modernidad, pudiéndose entonces distinguir dos tipos de filosofías: la filosofía clásica y la filosofía moderna.

	FILOSOFÍA CLÁSICA Assimilatio cognitio cognoscendi. <i>Objetivismo</i>	FILOSOFÍA MODERNA "Separación de lo subjetivo y lo objetivo. <i>Subjetivismo</i> "
SISTEMAS DE IDEALIDAD PURA	<ul style="list-style-type: none"> ● SISTEMA PLATÓNICO 	<ul style="list-style-type: none"> ● TEORÍA DE LAS IDEAS INNATAS: DESCARTES... ● KANT. ● IDEALISMOS ABSOLUTOS: FICHTE, SCHELLING, HEGEL...
SISTEMAS DE REALIDAD PURA	<ul style="list-style-type: none"> ● SISTEMA ARISTOTÉLICO 	<ul style="list-style-type: none"> ● NOMINALISMO: <ul style="list-style-type: none"> ○ POSITIVISMO. ○ PRAGMATISMO (Poincaré)
IRREALIDAD		

Tabla X: Clasificación según los sistemas ontológicos.

La filosofía clásica viene marcada por una concepción del conocer como "*assimilatio cogniti et cognoscentis*"¹¹. Se parte de la realidad para luego ser interpretada por el sujeto cognoscente. El sujeto habrá de ajustarse al valor constitutivo de la realidad.

¹⁰ *P.F.F.D.*, X, pp. 362-363.

¹¹ Cfr. *P.F.F.D.*, X, p. 388.

Al contrario, la filosofía moderna marca la ruptura del mundo subjetivo y del mundo objetivo. Lo objetivo...

"...se constituye en función de la actividad psíquica en cuanto a los valores que a la realidad [...] le corresponda."¹²

El otro principio de clasificación es el de sistemas de idealidad pura y sistemas de realidad pura. Los sistemas de idealidad pura son aquéllos en los que la idealidad viene a constituir la realidad; su ontología, esto es, su concepción sobre la realidad viene a ser...

"...por su naturaleza extrínseca y superpuesta a la realidad, la cual o es vaciada directamente en los moldes ideales del sistema, o aparece interpretada como si fuese lo real equivalente al sistema en que se traduce."¹³

Así pues, "los sistemas de idealidad pura evolucionan sobre el *yo* o sobre la *idea*"¹⁴, interpretando la realidad según los conceptos. Mientras que con las teorías o sistemas de la realidad pura o fenoménica, sucede a la inversa; sólo tienen en cuenta "la base de la multiplicidad fenoménica que se ofrece a la percepción",¹⁵ y la idea sólo es entendida como algo inestable y convencional.

La teoría de Poincaré es vista dentro de este esquema como un sistema de la realidad pura o fenoménica. Se la considera dentro del nominalismo, que incluirá tanto al agnosticismo positivista, como al agnosticismo pragmatista. En estas teorías, caracterizadas por Amor Ruibal como nominalistas:

"...es consecuencia obligada declarar elemento extrínseco y yuxtapuesto, todo sistema que a base de conceptos generales se elabore sobre el mundo real y esto por el doble motivo de la incognoscibilidad de la cosa en sí, que o se presupone o se afirma expresamente; y por la índole de la facultad cognoscente considerada como simple instrumento de adaptación en todo lo que se refiere a la realidad del mundo exterior, el cual en tales doctrinas solo es interpretado, sin ser proplamente conocido, para ser utilizado por nosotros, según las exigencias del yo que se interpone con su peculiar elaboración y sistematizaciones."¹⁶

Es decir, el tipo sistemático nominalista viene determinado en sus consecuencias por la ruptura sujeto-objeto de la modernidad, según el principio clasificador que veíamos al comienzo. En este sentido,

"...la realidad del mundo sensible es independiente de las interpretaciones por las cuales se traduce, y ajena por lo tanto al valor de nuestra elaboración cognoscitiva".¹⁷

Así pues, la teoría se convierte en una convención, algo ficticio y arbitrario, terminando en lo que Amor Ruibal llamará un "escepticismo convencional"¹⁸. «Escepticismo» en tanto que, como ya hemos dicho, el conocimiento de la realidad de las cosas, de su ser, es ya imposible —efecto derivado de la

¹² P.F.F.D., X, p. 386.

¹³ P.F.F.D., X, p. 371.

¹⁴ P.F.F.D., X, p. 374.

¹⁵ *Ibidem*.

¹⁶ P.F.F.D., X, p. 373.

¹⁷ P.F.F.D., X, pp. 394-398.

¹⁸ Cfr. P.F.F.D., X, p. 399.

filosofía moderna—, y «convencional», en tanto que la teoría es convencional, es decir, no tiene ninguna permanencia ni consistencia en sí misma. Las ideas serían entonces una...

"...creación arbitraria o circunstancial de fórmulas desprovistas de contenido real"¹⁹.

Poincaré será considerado, por Amor Ruibal, como nominalista, debido fundamentalmente a su concepción de las matemáticas, y más concretamente por las relaciones entre la geometría y el espacio, como veremos más tarde.

En resumen, Poincaré en 1911-15, es visto por Amor Ruibal, como un pragmatista, aunque diferenciándolo aún de la teoría nominalista que es caracterizada en aquel entonces como simbolista. Diez años más tarde, en 1921-25 el científico francés será incluido explícitamente dentro del nominalismo, con todo lo que ello conlleva. Lo cual nos conduce a la primera paradoja que anunciábamos en la introducción a este capítulo. Poincaré que es calificado como *nominalista* por Amor Ruibal, concibe parte de su obra filosófica como crítica al nominalismo.

Veamos ahora cual era la crítica de Poincaré al nominalismo y cómo su crítica, cosa curiosa, se va a parecer mucho a la que hemos visto en Amor Ruibal.

Poincaré plantea su obra *El valor de la ciencia*²⁰, como crítica a los planteamientos hechos por E. Le Roy²¹. Éste concebía al parecer la ciencia como pura creación del científico, completamente desprovista de validez objetiva. Para Le Roy:

"La ciencia no está hecha más que de convenciones, y a esta circunstancia únicamente debe su aparente certeza. Los hechos científicos y, a fortiori, las leyes son la obra artificial del sabio. Luego la ciencia no puede enseñarnos nada de la verdad y sólo puede servirnos como norma de acción."²²

A esta actitud que Poincaré llamará nominalismo, es a la que va dirigida su obra. Ya en la introducción a *La ciencia y la hipótesis*, escribía:

"Impresionados por este carácter de libre convención que se reconoce en ciertos principios fundamentales de las ciencias, han querido algunos generalizar exageradamente y han olvidado al mismo tiempo que la libertad no es lo arbitrario. Ha llegado así a lo que se llama el nominalismo, y se han preguntado si no es engañado el sabio por sus definiciones, y si el mundo, que él cree descubrir, no está simplemente creado a su capricho."²³

Es decir, el sabio crea el hecho científico, que es diferenciable del hecho bruto. Toda la construcción de la ciencia se basará entonces en aspectos subjetivos. En el investigador, en última instancia. No existirá objetividad en la ciencia. La mediación subjetiva del investigador deja de ser tal para convertirse en un valor absoluto. Ésta es la concepción de E. Le Roy:

¹⁹ P.F.F.D., X, p. 400.

²⁰ H. Poincaré, *El valor de la ciencia*. Espasa-Calpe. Madrid³, 1964. Ésta es la edición que seguiremos de Poincaré, por no encontrar la que utilizó Amor Ruibal.

²¹ E. Le Roy, «Science et Philosophie» en la *Revue de Métaphysique et Morale*, París 1901. citado por H. Poincaré, *El valor de la ciencia*, p. 131.

²² *Ibidem*, p. 131.

²³ *La ciencia y la hipótesis*, p. 3.

"Para Le Roy, la Inteligencia deforma todo lo que toca y eso es más cierto todavía para su instrumento necesario: «el discurso». No hay realidad más que en nuestras impresiones fugitivas y cambiantes, y esta misma realidad, desde que se la toca, se desvanece."²⁴

Uno de los principales aspectos de esta subjetivación de la ciencia tiene su fundamento en el carácter convencional de las leyes científicas. Para la tesis nominalista, el carácter de convencionalidad de las leyes y principios científicos viene a significar que son arbitrarios:

"Algunos han exagerado el papel de la convención en la ciencia; hasta han llegado a decir que la ley, que el hecho científico mismo, eran creados por el sabio. Eso es ir demasiado lejos por el camino del nominalismo."²⁵

Las leyes científicas serán, pues, absolutamente contingentes; no tienen ningún carácter de necesidad.

A esta postura se opone Poincaré, quien por una parte concibe el desarrollo científico como necesariamente vinculado a la realidad; y por otra manifiesta el carácter no arbitrario de la ciencia:

"No, las leyes científicas no son creaciones artificiales; no tenemos ninguna razón para considerarlas como contingentes, aunque nos sea imposible demostrar que no lo son."²⁶

Pero curiosamente, el matemático francés, será considerado por Amor Ruibal como nominalista, como hemos visto. Su filosofía va a ser asimilada a la concepción que critica y contra la que va dirigida.

Poincaré mantiene una cierta posición realista, en el sentido, en que para él, las teorías científicas dependen de la realidad, aunque esta realidad es concebida, tan sólo como *experiencia*. El éxito de la ciencia demuestra, su fundamento sobre la realidad:

"...todos los días vemos [a la ciencia] obrar ante nuestros ojos. No podría ocurrir eso si no nos diera a conocer algo de la realidad."²⁷

La realidad, que como se verá, será para Poincaré un conjunto de relaciones, concepción muy similar, a la de Amor Ruibal.

Para resolver esta aparente paradoja es necesario que examinemos el concepto de ciencia que tiene Poincaré; más concretamente el valor que da a las leyes y postulados científicos. Y sobre todo respecto a la matemática, ya que...

"...el orden matemático, es donde por modo especial se refleja el contraste entre las ideas abstractas y las representaciones empíricas, es también en este orden donde con mayor relieve se ponen de manifiesto los desvíos de una legítima teoría cognoscitiva y ontológica."²⁸

²⁴ *El valor de la ciencia*, p. 131.

²⁵ *Ibidem*, p. 17.

²⁶ *Ibidem*.

²⁷ *La ciencia y la hipótesis*, p. 4. Lo cual no es sino un criterio de tipo pragmático.

²⁸ *P.F.F.D.*, X, p. 400.

3. EL PROBLEMA DE LAS LEYES Y POSTULADOS CIENTÍFICOS.

En las citas arriba expuestas para ilustrar la censura de Poincaré al nominalismo de Le Roy, se observa que Poincaré denosta el que, de considerar los postulados científicos como *convencionales*, Le Roy pase a entenderlos como arbitrarios.

El problema está en la consideración de los principios y las leyes científicas, y la relación de estos principios y de estas leyes con la *realidad*. Poincaré va a discutir este punto con una atención especial hacia la matemática y más concretamente hacia la geometría como parte de la matemática.

Efectivamente, en *La ciencia y la hipótesis* Poincaré parte de una concepción de la ciencia como algo que aunque tiene una base experimental, sus principios son completamente convencionales. Así, se expresa Poincaré refiriéndose a leyes de tipo físico:

"La ley de la aceleración, la regla de la composición de las fuerzas, ¿no son acaso más que convenciones arbitrarias? Convenciones, sí; arbitrarias, no; lo serían si se perdiesen de vista las experiencias que han conducido a adoptarlas a los fundadores de la ciencia, y que, por imperfectas que sean, bastarían para justificarlas. Conviene que de cuando en cuando se vuelva la vista al origen experimental de estas convenciones."²⁹

Esta idea tan general será posteriormente matizada. Poincaré, distingue de una parte los principios y los postulados científicos que no tienen ningún contacto con la realidad y son absolutamente convencionales; y de otra, las leyes científicas que son experimentales. Las leyes ponen en vinculación los postulados con la experiencia³⁰:

"Los principios son convenciones y definiciones disfrazadas. Están sacados, sin embargo, de leyes experimentales; esas leyes han sido, por decirlo así erigidas en principios a los cuales atribuye nuestro espíritu un valor absoluto."³¹

De aquí que la crítica de Poincaré al nominalismo resida en que se ha extendido el carácter convencional de los principios a toda la ciencia, resultando entonces que la ciencia es arbitraria y por lo tanto, carente de valor³².

La ley, así, se mantiene en contacto con la experiencia mientras que los principios aparecen como algo indeleble que no puede ser verificado. El nominalismo será válido a este respecto, sólo como elevación —o abstracción en lenguaje platónico-aristotélico— de una ley experimental en un principio:

"Gracias a estos artificios, por un nominalismo inconsciente, los sabios han levantado por encima de las leyes, lo que ellos llaman principios. Cuando una ley ha recibido una comprobación suficiente de

²⁹ *La ciencia y la hipótesis*, p. 131. También: "Los principios de la mecánica se nos presentan pues, bajo dos aspectos diferentes. Por una parte, son verdades fundadas sobre la experiencia, y comprobadas de una manera muy aproximada por lo que concierne a los sistemas casi aislados. Por otra parte, son postulados aplicables al conjunto del Universo y considerados como absolutamente verdaderos" (*ibidem*, p. 157).

³⁰ Nótese que continuamente con Poincaré nos estamos refiriendo y nos referiremos a la *experiencia* y no a *realidad*. La filosofía de Poincaré es experiencial, como se ha visto más arriba. En esto es operativa la clasificación de Amor Ruibal: al ser la filosofía de Poincaré una filosofía de la modernidad, existe una separación radical entre la experiencia —el fenómeno— y la cosa, siendo ésta realmente inalcanzable. La realidad es considerada, sólo en tanto en cuanto tiene que ver con el sujeto. Todo esto lo terminaremos de desarrollar cuando trataremos de la concepción de la realidad en Poincaré.

³¹ *La ciencia y la hipótesis*, p. 160.

³² Ver *supra* p. 241 y s.

la experiencia, se pueden adoptar dos actitudes. Podemos dejar esa ley en discusión; quedará sometida entonces a una incesante revisión que, sin duda alguna, acabará por demostrar que no es más que aproximada. O bien, se puede erigirla en principio, adaptando convenciones tales que la proposición sea ciertamente verdadera."³³

Es en este contexto donde se entiende que los axiomas y postulados de la geometría no se vean condicionados por la realidad del espacio. Es decir que no sean experimentales:

"Los axiomas geométricos no son, pues ni juicios sintéticos a priori ni hechos experimentales.

Son convenciones: nuestra elección, entre todas las convenciones posibles, está guiada por hechos experimentales, pero queda libre y no está limitada más que por la necesidad de evitar toda contradicción. Así es como los postulados pueden permanecer rigurosamente ciertos, aunque las leyes experimentales que han determinado su adopción no sean más que aproximadas."³⁴

Sin embargo toda ley puede descomponerse, a su vez, en un principio y una ley³⁵. Los principios obtenidos de este modo, ya no serán objeto de la experiencia; no son validables ni refutables por ella como sucedía con las leyes. Son, utilizando una categoría que ya hemos visto, *aprióricos*. Aún así, siempre quedarán leyes que puedan ser validables por la experiencia³⁶. Si todas las leyes se convirtiesen en principios, la ciencia se haría imposible y caeríamos en un nominalismo o con una expresión que ya hemos empleado, en un «escepticismo convencionalista».

Pero ahora, el problema se traslada a las leyes. Las leyes científicas no son nunca absolutamente ciertas. Siempre pueden invalidarse y encontrar otras aún más probables. Es aquí donde reside para Poincaré el avance de la ciencia:

"Por esas razones, toda ley particular será siempre sólo aproximada y probable. Los sabios nunca han desconocido esa verdad; creen solamente, con razón o sin ella, que toda ley podrá ser reemplazada por otra más aproximada y más probable, que esta ley nueva no será sino provisional, pero que el mismo movimiento podrá continuar indefinidamente, de suerte que al progresar la ciencia poseerá leyes cada vez más probables, que la aproximación acabará por diferir tan poco como se quiera de la exactitud y la probabilidad de la certeza. Si los sabios que piensan así tuvieran razón, ¿todavía se debería decir que las leyes de la naturaleza son contingentes, aunque cada ley, tomada en particular, pueda ser calificada de contingente?"³⁷

³³ *El valor de la ciencia*, p. 145. Pero la determinación de estas leyes, está caracterizada por un criterio pragmático: "Elegimos entonces estas reglas, no porque sean verdaderas, sino porque son las más cómodas, y podríamos resumirlas diciendo:

«La simultaneidad de dos acontecimientos, o el orden de su sucesión, la igualdad de dos duraciones deben ser definidos de tal suerte que el enunciado de las leyes naturales sea lo más simple posible. En otros términos, todas estas reglas, todas estas definiciones no son más que el fruto de un oportunismo inconsciente»" (*Ibidem*, p. 44).

³⁴ *La ciencia y la hipótesis*, p. 65. Sobre este carácter apriórico de los principios de la geometría se vuelve a manifestar más adelante cuando dice: "En las líneas que preceden he tratado ya de demostrar, en diversas ocasiones, que los principios de la Geometría no son hechos experimentalmente, y que en particular, el postulado de Euclides no podría ser demostrado por la experiencia." (*Ibidem*, p. 91).

³⁵ Cfr. *El valor de la ciencia*, p. 142.

³⁶ "El principio, en lo sucesivo cristalizado, por decirlo así, ya no está sometido a la comprobación experimental. No es ni verdadero ni falso; es cómodo.

A menudo se han encontrado grandes ventajas procediendo de esta manera, pero es claro que si *todas* las leyes hubieran sido transformadas en principios, no habría quedado *nada* de la ciencia. Toda la ley puede descomponerse en un principio y una ley; pero por eso es bien claro que siempre quedarán leyes, por lejos que se lleve esta descomposición.

Por lo tanto, el nominalismo tiene límites y esto es lo que podría desconocerse, si se tomaran literalmente las aseveraciones de Le Roy." (*Ibidem*, p. 146).

³⁷ *Ibidem*, p. 152.

Esto convierte a las leyes científicas en leyes provisionales e imperfectas que pueden ser reemplazadas por otra ley posterior, lo cual origina el carácter absolutamente inestable de las leyes científicas³⁸.

Otro aspecto que condiciona la inestabilidad de las leyes científicas es su relación con los postulados. Si estos postulados son convencionales, y las leyes científicas dependen a su vez de los postulados, las leyes científicas serán también convencionales. Es lo que plantea Poincaré cuando trata de encontrar eso que llama *el invariante universal*, que haga a la ley científica verdadera y estable y la aleje de la inestabilidad a la que se encuentra sometida:

"Puesto que el enunciado de nuestras leyes puede variar con las convenciones que adoptemos, y que esas convenciones pueden modificar aún las relaciones naturales de esas leyes, ¿hay en el conjunto de esas leyes algo que sea independiente de esas convenciones y que pueda, por decirlo así representar el papel de invariante universal?"³⁹

El invariante universal sería aquello que permaneciendo por debajo de la ley científica, permitiría que la ley pueda ser variada sin que cambie substancialmente el hecho científico. Utilizando un símil escolástico: ese invariante sería a la ley científica como la substancia a los accidentes. Es evidente que la pretensión fundamental de Poincaré, postulando la necesidad de un invariante es evitar el escepticismo al que su propia reflexión le llevaba⁴⁰:

"¿Cuál es entonces la naturaleza de ese invariante? Es fácil darse cuenta de ello, y una palabra bastará. Las leyes invariables son las relaciones entre los hechos brutos, mientras que las relaciones entre los «hechos científicos» permanecen siempre dependientes de ciertas sensaciones."⁴¹

Lo que no determina Poincaré es, qué es el hecho bruto y cuál es su diferencia con el hecho científico.

Haciendo nosotros crítica a Poincaré, podríamos plantear que su concepción del hecho bruto es imposible como decía Le Roy (página 100), ya que todos los hechos son experienciales. Así como para Poincaré no existe, como veremos, una realidad en sí fuera del sujeto cognoscente, tampoco, siendo rigurosos en esta interpretación, pueden darse hechos brutos ajenos al experimentador. Todo *hecho* por serlo ha de ser un hecho experiencial; en la filosofía de Poincaré, un hecho científico.

Amor Ruibal critica esta concepción de los principios y postulados científicos de Poincaré, y sus características más inmediatas, aunque sin mencionarlo explícitamente:

"Las características de tales principios, según reconocen los partidarios de dichas doctrinas son; el ser convencionales, el ser indeterminados, y el ser coherentes, en su aplicación y desenvolvimiento, de lo cual depende la estabilidad del sistema."⁴²

³⁸ "En la concepción que acabo de citar (y que llamaré la concepción científica), toda ley no es más que un enunciado imperfecto y provisional; pero debe ser reemplazada un día por otra ley superior, de la que no es más que una imagen grosera. No queda, pues, lugar para la intervención de una voluntad libre" (*Ibidem*).

³⁹ *Ibidem*, p. 148.

⁴⁰ Véase todo el razonamiento en las páginas 148-150 de *El valor de la ciencia*. En ellas se termina cuestionado el principio de no contradicción, y donde postula la posibilidad de unos seres constituidos por un fluido distinto a la materia, para demostrar la convencionalidad de nuestras concepciones. Aunque al final de su argumentación Poincaré rechaza estas hipótesis por excesivamente radicales.

⁴¹ *Ibidem*, p. 150. Para Amor Ruibal el invariante universal va a ser el ser.

⁴² P.F.F.D., X, p. 375.

Veamos, ahora, una a una estas notas determinadas por Amor Ruibal para la crítica a la teoría de Poincaré.

El carácter *convencional* de los postulados científicos no significa que sean arbitrarios, como planteaba el nominalismo más craso de Le Roy (como se ha visto en la página 242), sino que los principios dependen del sistema de referencia en el que aparecen constituidos. Los mismos primeros principios pueden ser en un sistema, bien indefinibles e indemostrables; como en otro sistema distinto ser todo lo contrario: demostrables por otros postulados⁴³. Se llega, pues, a un relativismo filosófico-científico y lo que ello significa: escepticismo. Puesto que, en cada sistema filosófico o científico lo verdadero depende de los principios establecidos, la verdad resultará, por lo tanto interna al sistema, no siendo posible una verdad de carácter general, y trascendente a los sistemas:

"No ha de buscarse pues, según esto la prevalencia de un sistema respecto de otro como verdadero, ya que todos son sostenibles; sino que a lo que debe atenerse, es a la estabilidad lógica del conjunto para la legitimidad de su utilización. Preguntar, pues, si una proposición es verdadera o no, o si es o no demostrable, en general y sin referencia a un sistema dado, es formular una cuestión que no tiene sentido. Sólo en orden a un sistema dado cabe decidir, si una proposición es o no verdadera, y es o no demostrable."⁴⁴

Estamos, pues, en un relativismo absoluto que rechazará Amor Ruibal.⁴⁵

Otra característica de los principios científicos, en la crítica, implícita, que hace Amor Ruibal a Poincaré es que son *indeterminados* con respecto a la experiencia. Como hemos visto más arriba (página 243) en la concepción científica de Poincaré los principios que procedían de las leyes naturales, ahora no tienen ningún contacto con la realidad: se habían abstraído «nominalistamente», decía Poincaré. Los principios aparecen entonces como «símbolos» vacíos de todo contenido real. Es este sentido que la concepción nominalista, llamada antes simbolista por Amor Ruibal, termine por incluir a Poincaré.

El carácter de *indeterminación* de los principios científicos que aparecía en Poincaré, se muestra claramente en el caso de la matemática⁴⁶ y de modo más concreto, en el caso de la geometría. Debido a esta indeterminación de los principios científicos, la geometría es considerada por Poincaré, como un sistema puramente formal, por lo que son válidas a la vez, geometrías diversas: la euclidiana, la de Riemann y la de Lobatchewsky.

Amor Ruibal no otorgará a los principios este carácter apriórico y extraobjetivo, que considera Poincaré. Para el filósofo compostelano, incluso los principios científicos van a tener un contenido real:

"De esta manera, los principios no son verdades de un sentido objetivo concreto, sino más bien definiciones implícitas en un aspecto dado de los fenómenos percibidos; y en cuanto definiciones, envuelven ya un postulado, o una serie de postulados, que la definición da por sentados en el orden de percepciones que intentamos traducir en sistema. Por esto, los principios son en rigor postulados, y por

⁴³ Un ejemplo que pone Amor Ruibal para criticar la teoría de las convenciones de Poincaré es el de la inducción matemática. Para Poincaré la inducción no es ni un juicio sintético a priori, ni un axioma, es una *convención* (Cfr. *La ciencia y el método*, Buenos Aires. Espasa-Calpe, 1944; p. 123). En cambio para Amor Ruibal es "un concepto abstracto (...), que sin embargo es de pleno valor objetivo y real, como dato, o hecho de experiencia" (*P.F.F.D.*, X, p. 407).

⁴⁴ *P.F.F.D.*, X, p. 376.

⁴⁵ Cfr. *P.F.F.D.*, X, p. 397 nota.

⁴⁶ Para Poincaré los objetos matemáticos no dicen ninguna relación a la realidad: "Los [objetos] matemáticos son independientes de la existencia de los objetos materiales; en Matemáticas la palabra existir no puede tener más que un sentido, significa exento de contradicción." (*La ciencia y el método*, p. 124. Y también en Cfr. *Ibidem*, p. 24).

lo tanto no tienen valor absoluto, sino determinado por las condiciones de los fenómenos y de nuestra selección para sistematizarlos."⁴⁷

La última característica para comparar las concepciones filosófico-científicas de Amor Ruibal y Poincaré, es la *coherencia*. Una coherencia que podríamos considerar en un doble aspecto: primeramente, en tanto que coherencia interna del sistema, y por lo tanto la conveniencia entre los postulados y deducciones del sistema que ha de darse en toda teoría para que no sea internamente contradictoria. En este sentido coincidirán Amor Ruibal y Poincaré, al reclamar la coherencia para las construcciones científicas.

Pero por otra parte, esta coherencia la extiende Amor Ruibal al aspecto general cognoscitivo de toda teoría científica: toda teoría científica, por hecho de serlo, dice un conocimiento de la realidad. No cabría en este sentido una teoría científica absolutamente *a priori*, que no tuviese en cuenta la realidad. De ahí que esta concepción de Poincaré de los principios científicos, sea considerada contradictoria por Amor Ruibal, al no reflexionar sobre el aspecto de la coherencia de la teoría científica como teoría cognoscitiva; ya que es una teoría científica que niega, en última instancia, el conocimiento de la realidad:

"...si no implica los conceptos de la realidad, no responde a interpretación real alguna, y por lo tanto resulta, como acto cognoscitivo, de Incoherencia manifiesta; si por el contrario implica los conceptos del mundo real, a éstos ha de subordinarse forzosamente, y por lo tanto ni es libre la elección de los pretendidos postulados, si no que se imponen los principios que la realidad determina, por los cuales es inteligible, ni la interpretación consiguiente de lo real puede ser hecha más, que a tenor de los conceptos que sobre ella han de ser modelados."⁴⁸

Aquí es donde descubrimos el punto nodal de la diferencia entre la filosofía de Amor Ruibal y la filosofía científica de Poincaré. Mientras que toda la ciencia desde Galileo hasta ahora, va a ser hipotético-deductiva, esto es, deduce de unos principios generales unas leyes particulares que después son sometidas a la experimentación científica, la filosofía de Amor Ruibal es una filosofía tan realista que concibe a la ciencia como ciencia inductiva. La ciencia si es conocimiento, ha de ser conocimiento de realidades. El aspecto realista es tan importante que hasta los primeros principios o postulados científicos, si han de ser *objetivos* y decir relación a la realidad habrán de proceder de la realidad:

"La coherencia de los conceptos no basta jamás, para constituir un sistema de valor ontológico; por cuanto la idealidad en sí no da la realidad, sino que la exige y supone."⁴⁹

Toda teoría entonces para que sea verdadera, ha de ser *objetiva*, y por lo tanto no hipotética; ha de proceder de la realidad conocida⁵⁰, lo que va a ser puesto de manifiesto, cuando Amor Ruibal discuta las ideas de Poincaré en torno al espacio y la geometría.

⁴⁷ P.F.F.D., X, p. 377.

⁴⁸ P.F.F.D., X, p. 378.

⁴⁹ P.F.F.D., X, p. 368.

⁵⁰ Cfr. P.F.F.D., X, pp. 398 y 411.

4. LA RELATIVIDAD UNIVERSAL.

Pero como suele suceder, la teoría criticada influye en el autor que la critica de forma inconsciente, introduciéndose de rondón en el propio sistema. Así, a pesar de la fuerte crítica de Amor Ruibal a la concepción científica de Poincaré, el científico francés, va a influir significativamente en la teoría ontológica de Amor Ruibal, en su comprensión del mundo.

Boutroux, Poincaré, Le Roy —y también Russell y Couturat, como veremos—, todos los científicos y filósofos de la ciencia de ese momento van a entender el mundo como un conjunto de relaciones. Las cosas no permanecen aisladas entre sí, sino que están relacionadas, y son las relaciones las que las explican. Esta visión relacionista de la realidad tiene su origen en las matemáticas, y a través de la matematización de la ciencia, se extenderá a la física, química, etcétera, y de ellas a la filosofía. Por eso el pensamiento de Amor Ruibal, fuertemente incardinado en su época, va a tener como presupuesto fundamental *la relación*. El correlacionalismo de Amor Ruibal, no es lo que distingue a su pensamiento, sino lo que le vincula a su época⁵¹.

Siguiendo las características que C.-A. Baliñas atribuye a la concepción ontológica de Amor Ruibal, vamos a compararla con la que Poincaré deja entrever en sus escritos filosóficos.

Baliñas, atribuye en su ya clásico libro sobre Amor Ruibal⁵², tres características fundamentales a la concepción onto-cosmológica del filósofo gallego: el universo como sistema, su carácter orgánico y su naturaleza armónica.

El universo es entendido por Amor Ruibal como sistema: esto es, las cosas están relacionadas unas con otras y sólo se puede entender en virtud del conjunto «sistemático» en el cual se integran. Ya en el tomo VI se preludiva esta comprensión cuando Amor Ruibal dice que:

"El universo no es más que un sistema de seres en relación, como cada ser sensible no es sino un sistema de elementos primarios relativos."⁵³

Existe en el universo una especie de conexión que traba unas cosas con otras. Ya no se puede entender el cosmos como los antiguos griegos y escolásticos lo hacían: como un agregado de substancias, yuxtapuestas unas a otras; sino como un sistema en el que unas explican a otras, y todas hallan su comprensión en el conjunto.

Léase con atención este texto donde ya aparece clara la comprensión de Amor Ruibal:

"Todos los seres creados realizan no sólo la entidad individual, por la que se distinguen de los demás, sino también la colectiva de la naturaleza, eslabonados íntimamente en virtud de relaciones que van más allá de lo que constituye la forma peculiar de los entes singulares, y que son tan necesarias para integrar las unidades superiores hasta la unidad total del Universo como los elementos primarios en relación que originan las unidades entitativas de cada cosa singular.

⁵¹ J. L. Barreiro, ha investigado otras posibles influencias en el concepto de relatividad como las de Höffding, *La relativité philosophique. Totalité et relation* (París, 1924) y la de Cicala, *Introduzione alla teoria dell'essere. La relazioni ontologiche* (Città di Castello, 1923). La conclusión de J. L. Barreiro es que ambas por lo tardío, y la segunda, además, por su carácter idealista no pudieron influir en Amor Ruibal, J. L. Barreiro, *op. cit.* p. 54 nota 20 y p. 59 nota 32).

⁵² Cfr. C.-A. Baliñas, *El pensamiento de Amor Ruibal...*, ed. cit., pp. 109-117.

⁵³ P.F.F.D., VI, p. 558.

Estas relaciones son como una extensión natural de las que van envueltas en los factores relativos de los seres y que hacen la adecuada inteligibilidad de los mismos.

Las obras de la Creación son páginas de un inmenso libro, donde unas se suman a las otras, para dar la totalidad de su sentido, mientras cada una de ellas puede reducirse a elementos inferiores, como las líneas de una página o las palabras de una línea, perdiendo entonces su significación determinada, a medida que se aislan de sus relaciones con el todo, para volver luego a adquirir aquélla, en virtud del todo en el que entran como elementos integrantes y de pura relatividad.

Así, es siempre el todo lo que da el ser formal y la inteligibilidad a los elementos parciales, que por consiguiente dicen relación a él, tan real e intrínsecamente, como intrínseca y realmente cada ser es lo que es en virtud de los factores de que consta. Y por cuanto cada ser aislado es solamente un todo relativo que se ordena a otros, y del cual otros a su vez dependen, sobre las entidades singulares vuelva a reproducirse el mismo principio de relatividad respecto de entidades superiores, y del todo de éstas refluye a su vez una nueva inteligibilidad sobre las unidades inferiores, que son en su categoría lo que otros elementos inferiores respecto de ellas.⁵⁴

La parte sólo alcanzará su comprensión en el todo, y cada ser concreto es a su vez un nudo de relaciones.

Poincaré había tenido una concepción muy similar sobre el cosmos. Para Poincaré la realidad de las cosas son relaciones, puestas de manifiesto por las leyes físicas:

"Decir que la ciencia no puede tener valor objetivo porque no nos hace conocer más que relaciones, significa razonar al revés, puesto que, precisamente, son las relaciones las únicas que pueden ser consideradas como objetivas.

Por ejemplo, los objetos exteriores para los cuales ha sido inventada la palabra objeto, son justamente objetos y no apariencias fugitivas e inasibles, porque no son sólo grupos de sensaciones, sino grupos unidos por un vínculo constante. Sólo este vínculo es objeto en ellos, y este vínculo es una relación.

Por lo tanto, cuando preguntamos cuál es el valor objetivo de la ciencia, eso no quiere decir: «¿nos hace conocer la ciencia la verdadera naturaleza de las cosas?», sino «¿nos hace conocer las verdaderas relaciones de las cosas?»⁵⁵

Su concepción procede de su formación matemática, ya que para la matemática, los objetos se entienden como un conjunto de relaciones y no como tales objetos⁵⁶.

Si Amor Ruibal utiliza la metáfora del libro para hablar del carácter sistemático del cosmos en que sólo son comprensibles las partes en el todo, Poincaré, en su ejemplo del «elefante» afirma lo mismo: no se puede comprender la realidad, sino como un conjunto:

⁵⁴ P.F.F.D., VIII, pp. 212-213.

⁵⁵ *El valor de la ciencia*, p. 160. Corresponderá a la ciencia descubrir estas relaciones que constituyen las cosas: "la ciencia nos revela otros vínculos más tenues pero no menos sólidos entre los fenómenos; son hilos tan delgados que han permanecido inadvertidos durante mucho tiempo, pero desde que se los ha observado, ya no hay manera de no verlos; no son pues, menos reales que los que dan su realidad a los objetos exteriores y poco importa que sean más recientemente conocidos, puesto que unos no pueden perecer antes que los otros" (*Ibidem*, p. 162). Para Amor Ruibal también aparece la esencia como el "locus virtual" determinado por las relaciones aunque distinguirá entre la esencia metafísica y la esencia física, como distinguirá el ser metafísico del ser físico de las cosas. La esencia metafísica será: "Algo que, determinando la entidad concreta cual energía interna se desenvuelve en todas las manifestaciones de la entidad, que por ella y con ella es lo que es en todas sus fases" (P.F.F.D., IX, p. 15). Mientras que la esencia física es: "la plena actual proyección en el conjunto de cualidades [...], que sólo se diferencia del ser físico en que aquella parte de propiedades relativamente estables en los diversos momentos históricos de la cosa, a fin de hacerla físicamente definible, prescindiendo de accidentes que en el ser físico se hallan en perpetua oscilación" (P.F.F.D., IX, p. 66). Tanto la esencia física como la esencia metafísica van a significar una *actualización* con respecto al ser que es considerado por Amor Ruibal como lo virtual, o potencial de la cosa (Cfr. P.F.F.D., IX, pp. 58-70).

⁵⁶ Cfr. *La ciencia y la hipótesis*, p.22 y *La ciencia y el método*, p. 25.

"Buscamos la realidad, pero ¿qué es la realidad?"

Los fisiólogos nos enseñan que los organismos están formados por células; los químicos agregan que las células mismas están formadas por átomos. ¿Quiere decir esto que esos átomos o esas células constituyen la realidad o, por lo menos, la única realidad? La forma en que estas células están dispuestas y de la cual resulta la unidad del individuo, ¿no es también una realidad mucho más interesante que la de los elementos aislados? Un naturalista que no hubiera estudiado nunca al elefante sino con el microscopio, ¿creería conocer suficientemente a este animal?"⁵⁷

Otra característica que estudia Baliñas de la concepción onto-cosmológica de Amor Ruibal es su organicidad: la unidad del cosmos es una unidad orgánica.⁵⁸ ¿Qué características tiene como tal unidad orgánica? Los miembros están ordenados unos a otros, y existe una armonía en este todo.

Si en Boutroux habíamos visto cómo la relación en los organismos vivos llegaba a ser correlación, en Poincaré —aunque su planteamiento científico proceda fundamentalmente de la matemática y de la física— aparece el cosmos como una unidad orgánica. Esta unidad es lo que va a permitir formular leyes cada vez más generales:

"...toda generalización supone, hasta cierto punto, la creencia en la unidad y en la sencillez de la Naturaleza. Para la unidad no puede haber dificultad. Si las diversas partes del Universo no fueran como los órganos de un mismo cuerpo, no se influirían mutuamente; cada una sería independiente de las demás, y nosotros en particular, no conoceríamos más que una sola. No tenemos, pues, que preguntarnos si la Naturaleza es una, sino cómo es una."⁵⁹

Y claro está, la consideración de la organicidad del cosmos va a conducir a ambos, a una concepción onto-cosmológica en que esté implicada la categoría de orden. En Amor Ruibal, según Baliñas, esta categoría de orden tiene su origen en que unas cosas están ordenadas a otras:

"La interpretación adecuada del ser y del devenir en el universo y de lo que la potencia y el acto representan filosóficamente en aquella, exigen que la realidad del mundo se considere no como un conjunto de seres independientes aun en su propia entidad, cual piezas aisladas de una máquina que se estudian sin referencia al todo que constituyen, sino, por el contrario, es menester que a través del valor de los singulares aislables se vea en primer término la íntima constitución orgánica del todo dentro del cual se hallan constituidos, y al cual se ordenan al mismo tiempo que son ordenados por él en la contextura lógica y ontológica que el todo determina."⁶⁰

En Poincaré la categoría de orden aparece más explícitamente marcada. La realidad no es más que las relaciones entre las cosas, de las que se manifiesta una especie de "armonía universal", que además para Poincaré será la fuente de toda belleza:

"El sabio no estudia la Naturaleza porque ella es útil; la estudia porque encuentra placer, y encuentra placer porque es bella. Si la Naturaleza no fuera bella, no valdría la pena conocerla, ni que la vida fuera vivida. No hablo aquí, entendamos bien, de esta belleza que sorprende los sentidos, de la belleza de las cualidades y de las apariencias; no es que la desdigne, lejos de ahí, pero no tiene nada que hacer con la Ciencia; quiero hablar de esa belleza más íntima que proviene del orden armonioso de las partes y que sólo una inteligencia puede comprender. Por así decir es ella la que da un cuerpo, un

⁵⁷ *El valor de la ciencia*, p. 27. Y también Cfr. *La ciencia y el método*, p. 104.

⁵⁸ "La realidad del mundo es esencialmente orgánica en sentido ontológico, y como tal, son esencialmente relativos unos a otros y al todo, los elementos que la constituyen; elementos que por eso mismo, mejor que sus partes del todo pueden decirse miembros del sistema del universo, y como tales, ordenados por su acción a la armonía y conservación del todo." (*C.M.I.* E.D.-E., p. 457).

⁵⁹ *La ciencia y la hipótesis*, p. 168.

⁶⁰ *C.M.I.*, E.D.-E., p. 458.

esqueleto a las halagadoras apariencias que embellecen nuestros sentidos y sin este soporte, la belleza de estos sueños fugitivos sería imperfecta, porque sería indecisa y huiría siempre. Por el contrario la belleza intelectual se basta a ella misma y por ella, más que por el bien futuro de la humanidad, el sabio se condena a largos y penosos trabajos."⁶¹

La única diferencia, que encontramos entre las dos concepciones de Amor Ruibal y Poincaré, no reside en la ontología propiamente dicha sino en el conocimiento de la realidad. Para Poincaré la realidad no es aprehendida nunca, sólo tenemos conciencia de los fenómenos. Para Amor Ruibal, el sujeto logra aprehender la realidad transcendente. Para Poincaré, la ciencia, a través de principios convencionales formaliza en leyes los fenómenos. Para Amor Ruibal, los principios mismos están abstraídos de la realidad. Salvo esta radical diferencia en la apercepción de la realidad ambos autores coincidirán en cómo es esa realidad.

Como conclusiones de esta primera parte, en la que hemos estudiado la concepción de la realidad que viene dada por la ciencia de la época, podemos indicar las siguientes:

En primer lugar, creemos haber dejado firmemente establecido que el correlativismo no es una doctrina específica de Amor Ruibal, sino que es una teoría epocal. Forma parte de la visión del mundo que tiene la ciencia de su época.

Por otra parte, creemos que ha quedado puesto de manifiesto, con la suficiente claridad que entre el modernismo religioso, el pragmatismo filosófico y el convencionalismo científico, existe una continuidad. El pensador francés E. Le Roy es un símbolo perfecto de esta conexión ya que en lo teológico es modernista, filosóficamente es tenido como pragmatista y en lo científico aparece como un convencionalista decidido.

Modernismo teológico, pragmatismo filosófico y convencionalismo científico, coincidirán en una profunda desconfianza de nuestro conocimiento racional como conocimiento de realidades —y *Realidades*—. Con matices diferentes en cada caso y orientaciones distintas, dependiendo de su materia de estudio, modernismo, pragmatismo y convencionalismo son anti-intelectualistas, desembocando en un agnosticismo. Siendo más radicales todavía, diremos que estas tres corrientes de pensamiento no son en realidad más que una sola, que es el *Sitzenleben* desde donde escribe Amor Ruibal. Por ello, Amor Ruibal estará más cerca de la teoría contingentista de Boutroux que del convencionalismo de Poincaré, como hemos visto, porque supone un inductivismo en las teorías científicas.

La radical importancia que concedía Amor Ruibal a que nuestro conocimiento científico, en cuanto conocimiento, sea un conocimiento de realidades quedará patente, cuando en la parte segunda de esta sección veamos su conceptualización del espacio y del grandor.

⁶¹ *La ciencia y el método*, p. 19-20. Realmente todo este libro viene a resaltar la armonía de la naturaleza, y la búsqueda de esta armonía por parte de la ciencia. Véase también *Ibidem*, pp. 21, 27, 50, 222, y en *El valor de la ciencia*, p. 17.

PARTE II

ESPACIO Y GRANDOR

El tema del espacio es fundamental para la comprensión de nuestro mundo. Es, junto al tiempo y a la materia, un concepto básico de la física, tanto de la física clásica como de la física relativista. Es más, su transformación radical es uno de los aspectos sobresalientes del paso de la primera a la segunda.

En la física clásica el concepto de espacio tenía una particular relevancia. Aunque el espacio vacío en un primer momento, en los atomistas griegos¹, surgía como una casi-realidad por su carácter de no ser, poco a poco se fue cargando de realidad hasta llegar a convertirse en el siglo XVII en el *sensorium Dei*². Parejo a esta reificación, el espacio se convierte en explicativo de las otras realidades físicas: el tiempo es considerado primeramente de forma espacial³, y en último grado como una de las dimensiones del espacio⁴. La materia a su vez, no es más que espacio lleno⁵, lo que Descartes llamaba *res extensa*. Ello hace que los problemas habidos con el espacio, el continuo y sus constitutivos últimos: los puntos, se trasladan a los modelos explicativos de la materia: el atomismo, y sus intentos de superación, el energetismo y el dinamismo. No es por ello casualidad que el tema del espacio, comience a ser tratado, en el tomo X de los *P.F.F.D.* páginas 150 a 223, a continuación de los problemas que aparecen con la extensión en el modelo atómico de la materia.

Si el espacio se convertía en el modelo explicativo de la realidad física, este modelo se quiebra a comienzos de este siglo con la teoría de la relatividad y la teoría cuántica. Estas dos teorías, suponen un cambio de paradigma. El espacio se ve afectado perdiendo sus características fundamentales: la homogeneidad y la continuidad. Así mismo el espacio deja de ser explicativo en la física, del tiempo y de la materia. Ahora, más bien es el tiempo el que aparece temporalizando la materia y el espacio.

En gran medida este cambio en el modelo físico, vino precedido por los desarrollos geométricos, que posibilitaron otros espacios distintos al "habitual" euclidiano de tres dimensiones.

¹ El espacio en el atomismo de Leucipo es denominado como «τὸ μὴ ὄν» (no ser), siguiendo el lenguaje parmenídeo. Demócrito por su parte, para evitar caer en la pura nada de los eleáticos, y aprovechando las diferencias de matices de las dos negaciones griegas lo denomina como «τὸ οὐκ ὄν». Se pasa así de la pura nada, al vacío.

² Primeramente H. More, ya había notado que los atributos que se daban al espacio, eran idénticos a los que daban los escolásticos al Ser Supremo: "Uno, Simple, Inmóvil, Eterno, Completo, Independiente, Existente por sí, Subsistente por sí, Incorruptible, Necesario, Inmenso, Increado, Incircunscrito, Incompreensible, Omnipresente, Incorpóreo, Que todo lo penetra y abraza, Ser por esencia, Ser en Acto, Acto puro." (*Enchiridion Metaphysicum*, VIII citado por Milic Capek, *El Impacto Filosófico de la Física Contemporánea*, Tecnos, Madrid, 1965; p. 29). Esta divinización del espacio pasará posteriormente a Newton. Por otra parte, Spinoza considerará así mismo el espacio, como uno de los atributos de Dios: "La Extensión es un atributo de Dios, o sea, Dios es una cosa extensa." (*Ética*, II, prop. 2).

³ El tiempo tiene las mismas propiedades del espacio: es homogéneo, continuo, independiente del contenido físico, e infinito. Como diría Barrow, "el Tiempo es en cierto modo el Espacio del Movimiento" (Barrow, *Mathematical Works of Isaac Barrow*, citado por M. Capek, *op. cit.*, p. 55).

⁴ Curiosamente esta última espacialización del tiempo acontece con las primeras interpretaciones de la teoría de la relatividad, y más concretamente con Minkowski. Minkowski hizo del tiempo una cuarta dimensión del espacio en su diagrama: De ello se deducía que el pasado, el presente y el futuro, se hallaban yuxtapuestos, como acontece con los puntos del espacio. En este error cayeron H. Weyl, E. Cassirer, K. Gödel, Cunningham, y el mismo Einstein. Como indica M. Capek: "la espacialización del tiempo es una ilusión filosófica perenne que tiene sus raíces en los modos de pensamiento que caracterizan la mayor parte de la tradición filosófica y científica; [...] esta espacialización del tiempo, en vez de ser una interpretación correcta de la teoría de la relatividad, es precisamente una distorsión de su verdadero significado, una distorsión que fue posible por la persistente influencia de los hábitos intelectuales [...]; [...] una interpretación cuidadosa de la misma teoría indica que la fusión de espacio y tiempo se caracteriza más exactamente como *temporalización* o *dinamización* del espacio que como espacialización del tiempo..." (M. Capek, *op. cit.*, p. 173).

⁵ "La tercera entidad básica del mundo de la física clásica era la *materia*. Este concepto apenas ha cambiado desde los tiempos de Leucipo hasta principios del siglo XIX: un *algo* impenetrable, que llena completamente ciertas regiones del espacio y que persiste a través del tiempo aún cambiando de lugar.

Esto es evidente por la definición: materia = espacio lleno. ¿Lleno de qué? ¿Ocupado de qué? Para todo el que estaba imbuido del espíritu de la ciencia clásica, tal pregunta carecería completamente de significado; meramente indicaba el fracaso en captar el significado de la definición anteriormente expuesta. La función de ocupar el espacio no es una de varias propiedades de la materia; es su única propiedad" (*ibidem*, p. 70).

Amor Ruibal aunque atisbó este cambio, como se puede ver por la presencia de obras relativistas en su biblioteca⁶, así como por un par de menciones a la obra de Einstein⁷, se mueve aún en los parámetros de la física clásica. Téngase en cuenta que la transformación radical que supone la teoría de la relatividad todavía está, hoy en día, siendo asimilada y entendida por los físicos. La mayoría de los filósofos, se siguen moviendo actualmente en una comprensión del mundo que se mantiene en los parámetros de la física clásica.

Además la época en la que fijamos nuestra atención (1898-1905), es la época en la que culmina la física clásica y los modelos clásicos del espacio, justo antes de dar el gran salto a una nueva comprensión de las cosas. Esto hace que el estudio del concepto de espacio de esta época, sea fundamental para entender toda una comprensión del mundo que representa la física clásica, así como para atisbar los problemas que subyacían a esta comprensión, y las diferentes soluciones que se daban.

Si todo ello explica por sí mismo la importancia del espacio, también aclara la gran preocupación que estos temas físico-matemáticos despertaron en el filósofo compostelano. El tema del espacio y la extensión —aspecto muy vinculado al primero—, ocupan muchas páginas y redacciones distintas que todavía no han sido estudiadas; Ello debido en parte a lo complicado de estos pasajes, en los que se hace referencia a conceptos, teorías y personajes de las matemáticas del siglo pasado, en gran medida ajenos al conocimiento y saber filosófico. Mismamente, el concepto de grandor, es un término bastante alejado de nuestra comprensión. Por otra parte, la ausencia de estudios sobre estos textos, también ha sido debida también a la consideración de estos pasajes como secundarios a las preocupaciones filosóficas de Amor Ruibal; como algo denotativo de sus múltiples intereses y de su saber enciclopédico, y todo lo más, como lugares de llegada de sus planteamientos filosóficos. Pero como se intentará demostrar, no se trata de algo meramente episódico, sino que se trata de una preocupación fundamental en nuestro autor y que está presente en toda su vida intelectual.

En efecto, el primer contacto de Amor Ruibal con estos temas podemos situarlo en 1897-98, cuando B. Russell publica su tesis doctoral sobre un tema interdisciplinar de filosofía y matemáticas *An Essay on the foundations of geometry*. Al año de la edición de esta tesis en Inglaterra, en una revista de conocido prestigio filosófico y científico, en la *Revue de Méthapsique et Morale*, L. Couturat publicaba una recensión de este trabajo junto con sus apreciaciones críticas a las propuestas hechas por Russell. A este artículo seguirán, en otros sucesivos, dos polémicas sobre el espacio y los nuevos avances de la geometría entre el recién doctorado filósofo inglés y dos consagradas personalidades de la filosofía de la ciencia francesa: L. Couturat, ya mencionado, personaje de reconocido renombre en la filosofía de la ciencia; y H. Poincaré, matemático y filósofo, que marcaría toda una época en la ciencia francesa. Esta polémica la pudo seguir Amor Ruibal, desde la alejada ciudad de Compostela, ya que estuvo suscrito a esta revista internacional entre los años 1898-1911. Por ello, creemos que esta fecha, 1898, es fundamental en la formación de su pensamiento, como comienzo del arco de tiempo que extiende su

⁶ El número de obras sobre la teoría de la relatividad —y sobre temas científicos en general—, es inusual para lo que cabría esperar en un teólogo español de «provincias» a principios de siglo. Las obras del propio Einstein que posee son las siguientes: *La Théorie de la Relativité restreinte et généralisée* (París, 1921), *La Géométrie et l'expérience* (París, 1921), *L'Ether et la Théorie de la Relativité* (París, 1921). Además también encontramos en su biblioteca las siguientes obras de divulgación sobre la teoría de la relatividad: L. Rougier, *La matière et l'énergie selon la théorie de la relativité et la théorie des quanta*; B. Ibeas, *Las Teorías de la Relatividad de A. Einstein* (Madrid, s.a.); F. X. Fischer, *Das einsteinische Relativitätsprinzip und die philosophischen Anschauungen der Gegenwart* (München, 1921); E.-M. Lemeray, *Le Principe de Relativité* (París, 1916); J. Ubach, *La teoría de la relatividad en la Física Moderna* (Buenos Aires, 1920); E. Freulich, *Los fundamentos de la teoría de la gravitación de Einstein* (Madrid, 1920); H. W. Carr, *The General principle of Relativity in its philosophical and historical Aspect* (Londres, 1920); A. Eddington, *Espace, temps et gravitation* (París, 1921); V. Haldane, *La Règne de la Relativité* (París, 1922); J. Winternitz, *Relativitätstheorie und Erkenntnislehre* (Leipzig, 1923); A. Tilgher, *Relativisti Contemporanei* (Roma, 1923); y P. Drumaux, *L'evidence de la Théorie d'Einstein* (París, 1923).

⁷ Cfr. P.F.F.D., X, pp. 415 nota, 426 y ss.

alcance a los textos de 1921-30 en los que da su propia teoría de los problemas vertidos en estos artículos, que tanto le impresionaron.

Además de este aspecto hermenéutico, que hace el estudio del espacio sumamente interesante para la comprensión de la filosofía de nuestro autor, hay que añadir que el tema del espacio no aparece como un tema aislado —salvo en el estudio de «Espacio y Grandor»— sino que aparece implicado e implicando otros aspectos sumamente interesantes de su filosofía. Los textos en que Amor Ruibal trata del espacio, y del grandor, son los siguientes:

En el tomo VIII, aparece el espacio y el grandor tratados en diversos contextos: primeramente, el espacio aparece junto al tiempo, bajo el apelativo de *hypercategoría* (p. 239); es decir, el espacio es expresión de la relatividad subjetivo-objetiva del conocimiento. Posteriormente, con ocasión de exponer la teoría kantiana sobre el conocimiento de la realidad, Amor Ruibal también tratará del espacio y el tiempo (pp. 478-485).

El grandor que es un concepto, esencialmente vinculado al tema del espacio, aparece tratado en este tomo VIII, en las pp. 292-296. En este texto, Amor Ruibal pone de manifiesto el carácter nocional del grandor.

Pero será en el tomo X donde se trate de forma ya más sistemática del espacio. Téngase en cuenta además que el tomo X está compuesto por pasajes de diferentes redacciones. No es un volumen acabado, sino que más bien se trata de una compilación de fragmentos, que hizo Pumar a la muerte de Amor Ruibal, con una misma temática —la ciencia—. El primer texto sobre el espacio aparece en continuidad lógica con los problemas que conlleva el atomismo: *Lo que ha de sostenerse de la naturaleza de la materia* (pp. 150-224). El siguiente texto *Espacio e hyperespacio* (pp. 224-323) se trata ya de un estudio más sistemático sobre el tema. En él se repasan críticamente las diferentes teorías, antiguas y modernas, sobre el espacio. A éste le sigue el texto *Propiedades de lo extenso* (pp. 324-354), en el que se analizan también de forma histórico-crítica dos conceptos inherentes a la extensión: la continuidad y la divisibilidad. Por último, en el fragmento titulado por Pumar *Sistemas acerca del nexo de los procesos ontológico y gnoseológico* (pp. 366-427), vuelve a tratar del espacio y sobre todo de las geometrías métrica y proyectiva, como ejemplificaciones de los problemas sobre el conocimiento de la realidad que implican las teorías científicas.

A estos textos, publicados póstumamente, los tenemos que añadir dos inéditos: *Espacio y grandor*, y *El ente infinito*. En el primero y principal se estudia la posibilidad de mantener el grandor como esencia del espacio, a pesar de las concepciones de las nuevas geometrías y sobre todo de la geometría proyectiva, que en última instancia supone que el espacio euclidiano es un espacio más entre los posibles. Pero también hay que indicar que realmente *Espacio y grandor* se trata realmente de dos textos diferentes que tratan el mismo tema. El primer texto, que llamaremos arbitrariamente «Fragmento A»; iría del comienzo al párrafo —inclusive— que dice:

"Sobre la homogeneidad se funda una condición singular de la exterioridad que es su infinitud de divisibilidad; y que es lo que origina las líneas y las superficies como compuestas de puntos, y que origina las dificultades de la geometría. (Russell, p. 177)"⁸

Y el segundo texto, que llamaremos «Fragmento B», iría desde el párrafo siguiente a éste, hasta el final del texto. Este último fragmento está en continuidad ideológica con el tomo VIII, ya que analiza

⁸ *Espacio y grandor*. Fragmento A, s/p.

el grandor en relación con su teoría de los universales, como producto de los juicios comparativos. En cambio, el primer fragmento *Espacio y grandor* «Fragmento A», se establece como ampliación y explicitación del espacio sobre el contenido del grandor.

En *Ente finito y ente infinito*, aparecerá tratado el problema del grandor, con respecto al número y al continuo.

Para estudiar y comprender mejor la concepción de Amor Ruibal sobre el espacio es imprescindible estudiarlo en su contexto histórico. Por ello desarrollaremos de forma introductoria el concepto decimonónico de espacio y sus distintas implicaciones filosófico-matemáticas.

CAPÍTULO I

LA GEOMETRÍA DEL SIGLO XIX

El estudio del espacio había adquirido una gran importancia a finales del siglo pasado y comienzos del presente. Por una parte iba a ser el punto de llegada de los desarrollos de la geometría; una geometría clásica, euclidiana y tridimensional, que mantuvo su predominio desde los griegos hasta el siglo pasado, y que va a verse sobrepasada y cuestionada desde todos los aspectos.

Pero también el espacio concebido de una manera más amplia, va a ser el soporte y uno de los elementos fundamentales —eso sí, transformado— de la teoría de la relatividad.

Centrándonos ya, en la geometría como ciencia del espacio, podemos considerar al siglo XIX como el siglo de la geometría, o más propiamente el siglo de «las» geometrías. Si desde Euclides hasta el siglo XVIII los desarrollos geométricos se realizaban desde y en el espacio euclidiano, en el siglo pasado alcanzará su madurez, y la geometría euclidiana tridimensional se convertirá en un simple caso de la Geometría. Resumiendo muy brevemente la historia completa de la geometría, en términos del historiador de la matemática Carl B. Boyer, podemos decir que:

"En la Grecia clásica alcanzó su cenit, sólo para caer hasta su nadir hacia la época del hundimiento del Imperio Romano. En Arabia y en la Europa renacentista recuperó parte del terreno perdido; durante el siglo XVII, se encontraba en el umbral de una nueva era, para ser casi olvidada a continuación, durante más de un siglo, al menos por los matemáticos que se dedicaban a la investigación, languideciendo así a la sombra de las ramas del análisis que proliferaban de una manera exuberante. Inglaterra había librado una batalla perdida, especialmente a finales del siglo XVIII, para reponer los Elementos de Euclides en el glorioso lugar que ocuparan antaño, pero lo cierto es que poco se hizo por promover la investigación en el tema. Los esfuerzos de Monge y Carnot condujeron a un movimiento de renovación de la geometría pura durante el período de la Revolución Francesa, pero el verdadero renacimiento, en forma casi explosiva, de la geometría como rama viva de la matemática se produjo a comienzos del siglo XIX."¹

En el breve estudio histórico, introductorio a su trabajo sobre los fundamentos de la geometría, Russell divide la historia de la *metageometría* en tres períodos: un primer período que se caracterizaría

¹ Carl B. Boyer, *Historia de la Matemática*, Alianza Editorial, Madrid, 1986; p. 657.

por los intentos de demostración del quinto postulado de Euclides, y que culmina con los trabajos de Bolyai y Lobatchewski, estableciendo geometrías diferentes. Pero estas nuevas geometrías no tienen aún la importancia radical que alcanzarán en un segundo período, ya que son consideradas todavía como un ejercicio lógico-matemático, siendo la geometría euclidiana la única conceptualizada como verdadera. El segundo período tiene como representantes a Riemann, Helmholtz y Beltrami. En esta etapa, y sobre todo debido a los trabajos de Riemann, se logra una generalización del espacio geométrico, considerando entonces los espacios de Euclides y de Lobatchewski-Bolyai, como casos particulares de unas condiciones geométricas comunes, que determinan el espacio de Riemann como el espacio general que después será concretado en los anteriores. Y Russell por último, establece un tercer período que vendrá dado exclusivamente por los desarrollos de la geometría proyectiva y por su principal consecuencia: la eliminación de los condicionantes métricos de la geometría. Con los desarrollos de Cayley, Sophus Lie, y Klein, la geometría parece alcanzar su máximo grado de abstracción resultando entonces que ya el espacio no depende de la distancia, sino de las *relaciones*. Dentro de esta geometría generalísima, la geometría métrica de Euclides resultaría un caso particular dentro de las condiciones generales de la geometría.

Pero esta historia y clasificación de los períodos de la geometría del XIX, no resulta del todo exacta, ya que más bien intenta establecer una continuidad en la vía de la abstracción de los caracteres generales de todo espacio, que va desde los intentos de demostración del quinto postulado a la creación de una geometría no métrica, en la que el término distancia no tiene ya significación. Todo ello con el fin de establecer el carácter *a priori* de la geometría en general y a su vez, el carácter empírico de los axiomas específicos de la geometría de Euclides.

En realidad la historia de la geometría en el siglo XIX no es tan unilineal, sino que más bien es multilineal con intentos de aproximación y de generalización de una de sus partes sobre el resto. Para lo que aquí nos interesa, la comprensión de la geometría y del espacio por el siglo XIX, sigue dos planteamientos distintos: la geometría métrica y la geometría proyectiva, con algunos puntos de contacto entre ellas.

1. GEOMETRÍA EUCLIDIANA Y GEOMETRÍA. HISTORIA DEL V POSTULADO.

La primera parte del desarrollo de la geometría métrica está completamente vinculada al famoso V postulado de Euclides, y su demostrabilidad. En efecto desde el siglo IV antes de Cristo, que es cuando se componen los *Elementos* de Euclides como un manual escolar de matemáticas, hasta el siglo XIX se vino trabajando sobre la demostración del V postulado por las otras premisas. El V postulado decía así:

"Que si una línea recta corta a otras dos líneas rectas formando con ellas ángulos interiores del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, prolongadas indefinidamente, se cortan del lado por el cual los ángulos son menores que dos ángulos rectos."²

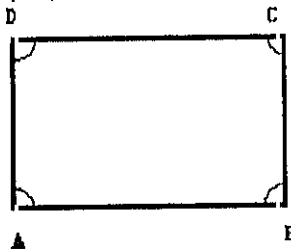
² Carl B. Boyer, *op. cit.*, p. 147.

El primer intento serio de demostración, que coincide con la prehistoria de la geometría no-euclidiana, es el de Saccheri, S. I. que en 1733 termina su obra maestra *Euclides ab omni nœvo vindicatus*. Su intención como puede apreciarse en el título, era la demostración de la geometría euclidiana como la única lógicamente posible. Para demostrar el V postulado lo intenta por *reductio ad absurdum*, suponiendo sucesivamente que los ángulos fuesen agudos y obtusos³. Analiza estas dos posibilidades y todas sus consecuencias, y las considera contradictorias: la hipótesis del ángulo agudo debido, según Saccheri, a la mala utilización de infinitésimos y la del ángulo obtuso, a la falsa hipótesis del matemático italiano de que toda línea recta ha de ser infinita.

El siguiente paso a dar, ya nos instala en el siglo XIX; y aquí las referencias a Gauss, Bolyai y Lobatchewski son obligadas. Aunque Gauss, el gran matemático del siglo XIX —y quizá de toda la historia de la matemática— no publicase nada sobre la posibilidad de otras geometrías no-euclidianas, es de seguro que trabajaba sobre el tema y animaba a sus discípulos a trabajar sobre este punto. Pero ninguno de ellos alcanzaron importantes avances sobre la materia⁴. Habría de ser, por una parte el matemático ruso de la universidad de Kazan, Lobatchewski, y por otra J. Bolyai hijo de W. Bolyai con quien Gauss mantenía correspondencia, quienes descubriesen la existencia de geometrías completamente coherentes que no siguen el V postulado declarado por Euclides, para toda geometría.

Empezando por este primero, Lobatchewski, da su primera formulación de una geometría no-euclidiana en 1826, aunque su publicación no se realizará hasta 1829. Quizá lo más interesante de esta geometría sea el que resulte ampliado el concepto de paralela a una recta, a "no secante con dicha recta"⁵. Partiendo de esta consideración, Lobatchewski desarrollará toda una geometría en la que por ejemplo, la suma de los ángulos de un triángulo será menor que dos rectos. Sin embargo esta geometría plenamente consistente —ya que no contiene ninguna contradicción— se alejaba mucho de nuestras concepciones comunes y cotidianas de la geometría clásica, y hasta de nuestra percepción del espacio. Es por ello que el mismo Lobatchewski, a esta nueva geometría, la llamase «geometría imaginaria».

³ Para la demostración de este postulado Saccheri construye un cuadrilátero sobre el segmento de recta AB, levantando dos perpendiculares en A y B que serían las rectas AD y BC, con lo cual los ángulos ADC y BCD son iguales. Entonces pueden pasar tres cosas: 1° Que ADC y BCD sean rectos con lo cual la suma de los ángulos de un triángulo son rectos. 2° Que ADC y BCD sean agudos con lo cual la suma de los ángulos de todo triángulo será menor a dos rectos. Y 3° caso que los ángulos dichos sean obtusos, resultando la suma de los ángulos de todo triángulo mayor que dos rectos. Con lo cual se pone de manifiesto la correspondencia que existe entre los ángulos del triángulo y el postulado de las paralelas.



⁴ Los discípulos de Gauss que trabajaron en este tema fueron F. K. Schwellkart (1780-1857) y F. A. Taurinus (1794-1874). Schwellkart ya manifestó en 1819, aunque no muy rigurosamente, la posibilidad de una geometría coherente, que no tuviese en cuenta el V postulado. Por su parte Taurinus, se acercó también mucho a las geometrías no-euclídeas en su estudio de 1825-26, sobre las fórmulas trigonométricas de una esfera de radio imaginario (Cfr. R. Taton, "Álgebra y geometrías en *Historia general de las ciencias. La ciencia contemporánea. El siglo XIX*. Tomo III, vol. 1, p. 46).

⁵ Sea un punto A y una recta BC en la geometría de Lobatchewski hay más de una recta paralela a (esto es no secante a) la recta BC y coplanarias al plano A, BC. Mientras que en la geometría euclidiana hay sólo una recta que cumpla esta condición.

La concepción geométrica de J. Bolyai, es muy similar a la de Lobatchewski, por eso no entramos en ella⁶.

En conclusión, en esta primera etapa las geometrías no-euclidianas se desarrollan, no con el objetivo de encontrar postulados geométricos más generales, sino que aparecen como el resultado de estudio del V postulado de Euclides, aunque a diferencia de Saccheri, estas geometrías son tenidas como plenamente coherentes y consistentes. En este sentido suscribimos las palabras de Russell que indican:

"... el propósito de la geometría hiperbólica fue indirecto: no era su propia construcción, sino que el motivo que impulsaba los trabajos era probar la independencia del axioma de las paralelas del resto de los axiomas. Si negando el axioma de paralelas y conservando el resto podemos obtener un sistema lógico sin contradicciones, se seguirá que el axioma del paralelismo no está contenido implícitamente en los otros."⁷

2. GEOMETRÍA Y METAGEOMETRÍA.

Los planteamientos de Riemann del año 1854, suponen un salto cualitativo con respecto a las anteriores geometrías. No sólo añaden una nueva geometría, la esférica, sino que en su trabajo todas las geometrías quedan incluidas. Este trabajo al que nos estamos refiriendo es su escrito de habilitación como Privatdozent en la Universidad de Göttingen, titulado *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*. En este escrito que se considera, como "la más famosa disertación de habilitación docente de toda la historia de la matemática"⁸, Riemann plantea sus conceptos generales sobre la geometría que vería ampliado su objeto no sólo a otros espacios diferentes del euclidiano, sino también, a todo conjunto de n -uplas ordenadas. Es lo que aparece mencionado en la obra de Russell bajo el término de multiplicidad. Un tipo de estas n -uplas serán las rectas y los puntos del espacio. Pero podríamos considerar cualquier otro tipo de n -uplas ordenadas como los colores⁹.

A su vez, considerando que el objeto de esta geometría es también el espacio, las geometrías de

⁶ De hecho Bolyai se consideró ofendido cuando en 1840 vio la edición alemana de las *Investigaciones geométricas sobre la teoría de las paralelas* de Lobatchewski, mientras que él sólo había recibido de Gauss una aprobación en una carta que escribió éste a su padre, en la que venía a decir aproximadamente, que: "no podía elogiar en conciencia la obra de Janos sin elogiar a sí mismo, dado que había mantenido los mismos puntos de vista desde hacía muchos años" (C. Boyer, *op. cit.* p. 674).

⁷ B. Russell, *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, en Obras Completas. vol. II. Aguilar. Madrid, 1973. p. 25 n° 15.

⁸ C. Boyer, *op. cit.*, p. 675.

⁹ Cfr. Boyer, *op. cit.* p. 675. Russell, *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, p. 26 n° 18-19. Posteriormente Russell criticará el concepto de multiplicidad de Riemann y su pretensión de ser generalísimo e incluir el espacio. Para Russell, el color sólo puede entrar en el concepto de multiplicidad de Riemann espacializándolo (Cfr. *Ibidem*, p. 61 n° 63).

Lobatchewski y Euclides ¹⁰, son casos particulares suyos.

Otro autor fundamental de este periodo de la geometría métrica es Beltrami con su trabajo *Saggio di Interpretazione della Geometria non Euclidea*¹¹. En él traduce las geometrías hiperbólica y esférica a la geometría euclidiana, concibiendo la línea recta como la geodésica que une dos puntos¹². Así en la geometría esférica, la línea recta viene dada por la geodésica que une dos puntos en una superficie de curvatura positiva (intuitivamente una esfera), mientras que en la geometría hiperbólica de Lobatchewski viene a ser la geodésica en una superficie de curvatura negativa que intuitivamente vendría dada al girar

¹⁰ Por poner un ejemplo en el que esto aparece claramente, veamos la distancia entre dos puntos. En la geometría euclidiana, la ecuación de la distancia es la siguiente:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Mientras que en la geometría general de Riemann, la ecuación para la distancia, en un espacio de tres dimensiones, es:

$$ds^2 = g_{11}dx^2 + g_{12}dxdy + g_{13}dxdz + \\ g_{21}dydx + g_{22}dy^2 + g_{23}dydz + \\ g_{31}dzdx + g_{32}dzdy + g_{33}dz^2$$

Para el espacio de un número n de dimensiones, de coordenadas x_1, x_2, \dots, x_n , la ecuación tendría la forma más general:

$$ds^2 = \sum_{i,j=0}^n g_{ij} dx_i dx_j$$

Así el espacio euclidiano es un caso especial del espacio riemanniano en que $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$ en un espacio tridimensional, ó g_i en el espacio n -dimensional y todos los restantes g_{ij} son 0.

Después, aceptando el principio de la superposición de figuras en el espacio, obtiene que mediante un conveniente cambio de coordenadas, la función de la distancia adopta la forma siguiente en tres dimensiones:

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{1 + \frac{C}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}$$

A C se le llamó convencionalmente *curvatura del espacio*. Para $C=0$ tendremos el espacio euclídeo, $C<0$ sería el espacio de Lobatchewski, $C>0$ el espacio de esférico de Riemann.

¹¹ Beltrami, «Saggio di Interpretazione della Geometria non Euclidea» publicado en *Giornale di matematiche*, vol. 6, 1968.

¹² Amor Ruibal, utilizará los resultados de Beltrami, para fundamentar su posición realista sobre el espacio. Para el filósofo compostelano los resultados de Beltrami, más que afirmar que la geometría euclídea tan sólo es *posible* no necesaria, demuestran que las geometrías no-euclidianas no son reales, sino meras posibilidades, al derivarse de la euclidiana:

"Beltrami [...], fue quien primeramente se propuso interpretar la planimetría no euclidiana como traducible por la geometría de superficies euclidianas de curvatura constante, positiva en la teoría de Riemann y negativa en la de Lobatchewsky, siempre que se hagan corresponder las geodésicas de dichas superficies y las rectas no euclidianas. [...] Así la geometría de Riemann, de dos dimensiones, [...], no difiere de la geometría esférica, que es una rama de la geometría ordinaria; de igual suerte que la de Lobatchewsky, de dos dimensiones reducida ya por Beltrami a variante de la misma geometría ordinaria; el razonamiento de Beltrami es, desde luego, igualmente aplicable a la misma geometría de tres dimensiones" (*P.F.F.D.*, X, p. 395 nota).

Esto mismo se lo planteará Poincaré dando por su parte una solución convencionalista: todas las geometrías son indiscernibles, convencionales, etcétera. Russell sin embargo, en el mismo sentido que Amor Ruibal, cree que existe una geometría real, y el resto son sólo posibles. La determinación de cuál sea o no la que refleje la realidad puede ser conocida por la experiencia.

una tratriz alrededor de su asíntota, que se ha venido a llamar *pseudoesfera*¹³

Con esto Beltrami demostró, no la verdad o falsedad de estas geometrías, sino su consistencia, con referencia a la geometría euclidiana: O las tres geometrías, la de Euclides, la de Lobatchewski, y la Riemann eran *lógicamente admisibles* o no lo era ninguna. En palabras de E. T. Bell:

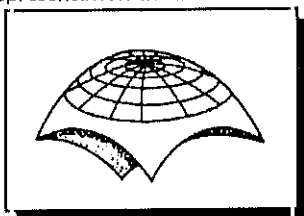
"Las realizaciones de Beltrami no demostraron nada más concluyente que el teorema de que la geometría de Euclides y las geometrías clásicas no euclidianas eran o bien todas lógicamente admisibles o bien todas lógicamente inadmisibles; no se había demostrado la consecuencia interna de ninguna de ellas."¹⁴

Como podemos observar, este segundo período se diferencia del anterior en que el objetivo que se persigue no es ya demostrar el V postulado de Euclides, sino demostrar —como lograron Riemann y Beltrami— que varias geometrías son posibles, y equiparar el espacio euclidiano con los no-euclidianos. Con ello se consigue dos cosas: primeramente, una mayor generalización sobre las concepciones anteriores del espacio que abarca varias posibilidades; es decir, el espacio matemático no tiene ninguna geometría en particular, sino que sobre él se pueden establecer distintas geometrías, todas ellas autoconsistentes. Y en segundo lugar, el espacio real deja de ser axiomáticamente euclidiano, surgiendo entonces la pregunta de cuál es la geometría de nuestro espacio, cuál es la geometría «real» y «verdadera».

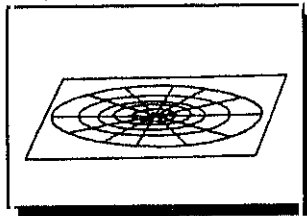
3. GEOMETRÍA PROYECTIVA.

La historia de la geometría proyectiva es una historia paralela a la de la geometría métrica; no es como pretende Russell continuación de la geometría métrica. Russell, con objeto de desarrollar de manera lineal, una historia de la abstracción de las propiedades del espacio, cuya culminación fuese la eliminación de sus propiedades métricas¹⁵, sitúa a continuación de los desarrollos de Riemann y Beltrami, los trabajos en la geometría proyectiva. Por ello, en el apartado que dedica a la geometría proyectiva sólo trata de dos autores: Cayley y Klein; así como de la posibilidad de dar una definición de distancia que no envuelva conceptos métricos, basada en una magnitud —o grandor— de tipo cualitativo. Por ello,

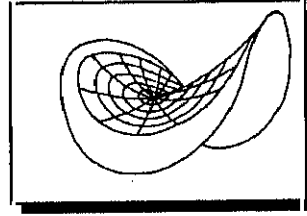
¹³ La representación intuitiva de estas geometrías, en un espacio de dos dimensiones, sería de la manera siguiente:



Geometría de Riemann.



Geometría de Euclides.



Geometría de Lobatchewski.

Gráficos tomados de S. Gallot, «Géométries» en *L'Univers philosophique*. P.U.F. París, 1987, p. 1008.

¹⁴ E. T. Bell, *Historia de las Matemáticas*. Trd. R. Ortíz. F. C. E.. Méjico, 1949, p. 345.

¹⁵ Para Russell, la geometría proyectiva está en continuidad y reemplaza a la geometría métrica: "El tercer período difiere radicalmente tanto en sus métodos como en sus fines y también en sustrato ideal filosófico del período que reemplaza. Mientras que en el anterior período cualquier cuestión gira en torno a la medida con su aparato de congruencia, movimiento libre, cuerpos rígidos y demás instrumentos, éstos se desvanecen completamente en el tercero, el cual, pasando al extremo opuesto, considera la cantidad como una categoría geométrica totalmente accidental y también se libera de la congruencia y de los métodos de la superposición" (Russell, *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, p. 35).

Russell sólo se ocupa del período de la geometría proyectiva que va de 1859 con la publicación de la memoria de Cayley *Sixth Memoir upon Quantics*, a 1897, año de la publicación de su tesis doctoral.

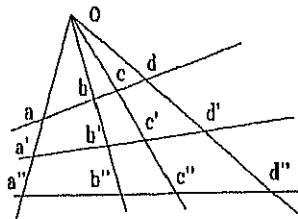
Pero nuestra pretensión en este apartado es la de presentar un panorama mucho más amplio de la geometría proyectiva. Como se verá, la continuidad entre las abstracciones de la geometría métrica y las de la geometría proyectiva no es tan lineal, y sólo aparece en el planteamiento de Russell. La geometría proyectiva pretende el estudio del espacio desde «otro punto de vista», eso sí, con pretensiones de generalidad con respecto a toda la geometría.

Aunque la «prehistoria» de la geometría proyectiva puede llevarnos al siglo XVII, con Descartes y Desargues, es en el siglo XIX cuando verdaderamente comienza su desarrollo e historia. El primer autor del que debemos hacer mención es Carnot con sus obras *Géométrie de position* (1803) y *Essai sur les transversales* (1806), que es el primero en descubrir la relación anarmónica¹⁶, esto es, la relación que existe entre cuatro puntos resultantes del corte de una recta con un haz de rectas.

Pero habremos de esperar a Poncelet para encontrar los desarrollos más sistemáticos de la geometría proyectiva. Su obra principal, *Traité des propriétés projectives des figures* (1822) que puede considerarse el tratado fundacional de esta geometría, la compone en Rusia, mientras permanecía prisionero tras las guerras napoleónicas. En ella amplía los conceptos y métodos que Carnot había demostrado en sus obras y establece las propiedades de las figuras que no son alteradas al proyectarlas, y que por lo tanto su proyección es independiente de las distancias y los ángulos.

El siguiente autor que aquí nos interesa mencionar, y por el que comienza la tercera parte del *Ensayo* de Russell, es el matemático Cayley. Aunque su trabajo fundamental no se desarrolla tanto en la geometría como en el álgebra, nosotros vamos a considerarlo con respecto al primer campo. Cayley logró reducir la geometría métrica a proyectiva, aunque sólo en la geometría plana, pero siendo posible extender sus conclusiones a cualquier geometría n-dimensional. Cayley da una nueva solución, no

¹⁶



Cuando un haz de rectas es cortado por otra recta, se establece entre los cuatro puntos de corte una relación que se llama razón anarmónica y viene expresada por el cociente

$$\frac{ab, ad}{cb' cd}$$

Y viceversa si Oa, Oc, Ob y Od, son cuatro rectas que pasan por un punto su razón anarmónica será:

$$\frac{\text{sen } a \Delta b, \text{sen } a \Delta d}{\text{sen } c \Delta b' \text{sen } c \Delta d}$$

Esta razón será invariante para cualquier otra recta que corte el haz de rectas Oa, Ob, Oc, Od. Así en la representación, las tres rectas y sus respectivas intersecciones tienen las mismas razones anarmónicas:

$$\frac{ab}{cb} \mid \frac{ad}{cd} = \frac{a'b'}{c'b'} \mid \frac{a'd'}{c'd'} = \frac{a''b''}{c''b''} \mid \frac{a''d''}{c''d''}$$

(Cfr. Russell, *Los principios de la matemática*, en *Obras completas*, vol. 2, ed. cit.; pp. 702-703, n° 370 y p. 728, n° 460).

métrica, a la distancia entre dos puntos, y así mismo a los ángulos, con lo cual los dos aspectos fundamentales de la geometría métrica quedaban explicados proyectivamente. En términos del propio Cayley:

"... la teoría en efecto es que las propiedades métricas de una figura no son las propiedades de la figura consideradas por sí mismas, aparte de cualquier otra cosa, sino sus propiedades, cuando se consideran en relación con otra figura, como, por ejemplo, la cónica llamada absoluta. [...] De modo que la geometría métrica es una parte de la geometría descriptiva [proyectiva], y toda la geometría es geometría descriptiva, y recíprocamente..."¹⁷

El siguiente paso en la generalización lo da Klein, que con su *Erlanger Programm* (1872) unifica las geometrías euclidianas y no-euclidianas en la geometría proyectiva utilizando la teoría de grupos, que había desarrollado Sophus Lie, compañero suyo en Göttingen. Klein logra de este modo, la unificación de las diferentes geometrías en el nivel más alto de generalidad. De donde resulta que una geometría es tan sólo el *conjunto de propiedades de las figuras que permanecen invariante en un grupo de transformaciones*. Con esta definición tan general quedan unificadas en un mismo concepto las geometrías euclidianas y no-euclidianas, y éstas en tanto que geometrías métricas, con las geometría proyectiva. De este modo la geometría euclidianas no es más que un caso especial de la geometría afín, y ésta a su vez un caso particular de la geometría proyectiva.

Con el *Erlanger Programm* de Klein se logra por fin alcanzar la máxima generalización de los estudios geométricos. Este trabajo culmina toda una época de investigaciones y trabajos. De su importancia nos dice C. Boyer lo siguiente:

"El Erlanger Programm de Klein fue un producto tan claramente típico del siglo XIX que no hubiera podido ser transferido conservando su significado, a ninguna época anterior. Al principio tuvo una circulación bastante limitada, pero antes de que finalizara el siglo llegó a ejercer una gran influencia sobre el mundo matemático internacional. La persistente influencia del Erlanger Programm hasta el día de hoy puede verse en casi cualquier exposición moderna de la geometría elemental."¹⁸

Con lo cual, de nuevo llegamos, a la conclusión de que la geometría euclidianas es una geometría más entre las muchas posibles, siendo sólo un caso particular de la geometría proyectiva que las contiene a todas. Con todo lo cual, las reflexiones filosóficas en torno al espacio real no se dejan esperar. Es significativo lo que indica el historiador de las matemáticas E. T. Bell, refiriéndose a la controversia de fondo entre los defensores de una geometría de corte sintético y los que estudiaban una geometría con métodos más analítico-geométricos:

"Pero lo que distingue a los geómetras del siglo XIX de la mayoría de sus sucesores no es la admisión de la utilidad de un vocabulario algebraico geometrizado. Los geómetras sintéticos más eminentes del pasado intentaron encontrar los puntos circulares, etc., en el «espacio» de la experiencia corriente, porque confundían los espacios «físicos» o «reales» o «a priori», sin intentar explicar lo que entendían por ese espacio, con las abstracciones de su álgebra y lo inadecuado de sus diagramas"¹⁹

También hay que mencionar en esta breve historia de la geometría proyectiva a otros autores, que aunque menos estudiados por Russell son imprescindibles para la comprensión de esta época matemática:

¹⁷ *Sixth Memoir upon Quantics* (1859) Citado sin paginación por E. T. Bell, *op. cit.*, p. 365.

¹⁸ C. Boyer, *op. cit.*, p. 680.

¹⁹ E. T. Bell, *op. cit.*, p. 350. Y refiriéndose a la obra de Poncelet que antes hemos mencionado, dice: "Esta obra clásica del método sintético fue de las que más contribuyeron a dar lugar a una de las controversias más fructíferas, y, como ahora suele creer más desprovistas de sentido de la historia de las matemáticas. Lo que se discutía era la «realidad» del «espacio» tal como se representa en geometría, y la disputa culminó en la «existencia» en el «espacio» de los elementos Imaginarios" (*ibidem*).

entre éstos podemos mencionar a K. G. C. von Staudt ²⁰ que intenta eliminar de la geometría todo elemento analítico, y constituirla de manera absolutamente sintética. Von Staudt se dio cuenta que la razón doble o anarmónica implicaba condiciones métricas en el espacio, ya que las coordenadas de los puntos en el espacio suponían subrepticamente, introducir los valores métricos que se pretendían eliminar. Para evitar esto desarrolló un método (el cuadrilátero de Staudt) en el que, en la línea recta, un cuarto punto viene relacionado con otros tres, sin introducir valores métricos, utilizando sólo intersecciones de rectas infinitas. Su pretensión última era geometrizar todos los números, esto es, *reducir el número a la forma*, pretensión que sólo cumplió en parte ya que al parecer no tuvo éxito completo con los números reales y complejos.

Se podría mencionar también al francés M. Chasles que continuó los pasos de Poncelet en *L'Ecole Polytechnique*, y cuya relevancia en este punto se debe a la importancia concedida a las seis razones dobles o anarmónicas.

Un último aspecto a destacar de la geometría de este siglo XIX, y que aparecerá en la obra de Russell, es el de la dualidad línea/punto. Su descubrimiento se debe a Ch. J. Brianchon, que demuestra en el teorema del hexágono inscrito en una cónica, que se puede reemplazar la palabra punto por recta. Este teorema dice así:

"Los seis {vértices/lados} de un hexágono están sobre una cónica si y sólo si los tres {puntos/rectas} comunes a los tres pares de {lados/vértices} opuestos tienen una {recta/punto} común."²¹

Aunque, el primero en enunciar claramente este teorema de la dualidad punto/recta, fue Geogonne en 1825–27. Geogonne se dio cuenta de que en ciertos problemas de la geometría plana se pueden sustituir la palabra *punto* por *recta*; y así mismo, intersección de rectas por alienación de puntos obteniendo de ello teoremas independientes²².

Es en medio de estos avances de la geometría donde se sitúa la pretensión de Russell de dar una fundamentación a la geometría y resolver ciertas incógnitas matemático-filosóficas que quedaban abiertas en esta época. Estas preguntas vendrían a ser: ¿qué es el espacio?, ¿hay un espacio que pueda ser considerado *real*? Si éste existe, ¿tiene forma euclidiana? ¿El espacio es *a priori* como decía Kant, o tenemos del espacio algún conocimiento empírico? Éstos son los problemas. Veamos ahora las distintas soluciones que se darán en la época, entre las que habremos de situar de forma polémica con las demás, la teoría de nuestro filósofo compostelano.

²⁰ Sus dos obras fundamentales son *Geometrie der Lage* (1847) y la *Beiträge zur geometrie der Lage* (1856–1860).

²¹C. Boyer, *op. cit.*, p. 658.

²² También pretendió para sí este descubrimiento Poncelet, que insistió en que la dualidad procedía del método de los polos y polares que él había concebido en su geometría proyectiva. Plücker demostró que Poncelet se equivocaba, al probar de modo analítico como las ecuaciones de la recta se transformaban en las del punto y viceversa, sustituyendo las constantes por las variables. En un artículo de 1831, Plücker consigue una generalización del teorema anterior a la dualidad entre el punto y el plano, y dejando invariable el término recta. También Chasles tuvo, al parecer, la misma idea aproximadamente cuando Plücker publicó sus resultados.

CAPÍTULO II

LOS FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRÍA

El primer intento de solución que vamos a tener en cuenta, y que motivará la exposición de los divergentes planteamientos de Couturat y Poincaré, corre a cargo de B. Russell. La obra de Russell, *Essay of foundations of geometrie*, como él mismo nos indica en el prefacio, es una ampliación y refundición de trabajos suyos anteriores sobre el tema. El objeto de la obra de Russell es investigar si el conocimiento geométrico puede ser considerado un conocimiento empírico, o es más bien *a priori*; con lo que ello implica respecto a su verdad: si es un conocimiento apodéctico o no lo es. Para lo cual, Russell realizará primero un estudio histórico de la metageometría, que como hemos visto divide en tres etapas. Después, en el capítulo II de su obra analiza los presupuestos filosóficos de las diversas geometrías y concepciones del espacio. En el capítulo III, que es el central de la obra, demostrará el carácter *a priori* de los axiomas de la geometría proyectiva y de los comunes a las geometrías métricas, de lo que deducirá posteriormente el carácter empírico de los axiomas específicos de la geometría euclidiana. Por último, en el capítulo IV, tratará de algunas consecuencias, y paradojas filosóficas que se derivan de su exposición.

1. EL ESPACIO GENERAL DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA.

Para Russell, la geometría proyectiva es el nivel previo y común a todas las geometrías posibles: euclidianas y no-euclidianas; y corresponde a una forma de exterioridad que constituye la forma común de todos los espacios. Así, la geometría proyectiva se convierte en el *a priori* del espacio, y que por lo tanto, es necesaria para cualquier experiencia. Después demostrará que los axiomas propios de la geometría métrica —esto es, el espacio general de Riemann— son también, *a priori* métricamente. Como consecuencia de lo anterior, Russell demostrará que los axiomas específicos de la geometría euclidiana, son empíricos, distinguiendo la geometría euclidiana de la geometría no-euclidiana: la euclidiana tiene ciertos axiomas que proceden de la experiencia.

Russell pretende dar una fundamentación filosófica de la conversión de las propiedades métricas a proyectivas que hizo Cayley, eliminando cualquier concepto de magnitud como la distancia y los ángulos; y demostrar lo que esto significa: que en la geometría proyectiva están contenidas todas las posibles geometrías métricas, como hizo posteriormente Klein. Esta pretensión es la que focaliza el trabajo de Russell:

"Tenemos buena base para esperar, por consiguiente, que los axiomas de la geometría proyectiva hayan de ser la más simple y completa expresión de los requisitos indispensables de cualquier razonamiento geométrico y esta esperanza yo confío que no será defraudada. La geometría proyectiva, en tanto que trata solamente con propiedades comunes a todos los espacios, se la encontrará, si no me equivoco, que es completamente a priori, y que no toma nada de la experiencia y que como la Aritmética, su materia es una creación del Intelecto puro."¹

Comienza Russell su intento, eliminando de la geometría proyectiva todo lo que signifique magnitud (lo que sería en terminología de Amor Ruibal grandor). Para lo cual demuestra que con planteamientos exclusivamente cualitativos —eliminando los cuantitativos— se pueden distinguir unos puntos de otros. Así B. Russell fundamenta una geometría absolutamente cualitativa solamente con dos elementos, los puntos y la línea recta; y con el hecho de que cualquier cuaterna de puntos puede distinguirse entre sí, ya que es la intersección de una recta con un haz de rectas dado². Se plantea así la geometría proyectiva, en la cualidad que subyace a toda cantidad (grandor):

"No tenemos distancia, pero tenemos la línea recta; no tenemos razón anarmónica cuantitativa, pero tenemos la propiedad, en cualquier cuaterna de puntos de una recta de ser la intersección con los rayos de un haz dado. Y desde esta base podemos construir una ciencia cualitativa de exterioridad abstracta cual es la geometría proyectiva."³

En última instancia, tenemos dos cosas y sólo dos cosas: los puntos, y sus relaciones. Estas relaciones si son diádicas constituyen la recta, si son triádicas el plano, y así consecutivamente⁴. Los puntos, evidentemente, serán los términos últimos de toda relación, irreductibles a su vez a otros elementos. Por ello, aunque parezca contradictorio, los puntos sin ser espaciales, fundamentan el espacio:

"Con arreglo a este procedimiento, pues, definimos nuestros puntos como los términos de relaciones espaciales, considerando que todo lo que no sea punto sea una relación entre puntos. ¿De este punto de vista, qué debemos tomar por puntos? Evidentemente que si la extensión es una relatividad pura deberán ser considerados como que no contienen ninguna extensión; pero si han de tomarse para constituir los términos para las relaciones espaciales, por ejemplo para las líneas rectas, esas relaciones deben mostrarles como los términos de las figuras que determinan. En otras palabras: puesto que realmente pueden ser tomados, sin contradicción, como el término de una relación espacial que no tiene extensión, deberemos tomarle como el término a utilizar en Geometría, y ya no podemos salirnos del espacio, como la más pequeña parte con que podemos tratar en la misma Geometría, o sea como la cosa que estando en el espacio no contiene espacio y a esta cosa la llamamos punto."⁵

¹ B. Russell, *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, pp. 97-98, n° 130.

² Este planteamiento se realiza a través del cuadrilátero de Staudt, mediante el cual se pueden distinguir sobre una recta unos puntos de otros, sin necesidad de utilizar el concepto de distancia.

³ *Ibidem*, p. 99, n° 107.

⁴ Si bien que, el punto puede venir dado por dos rectas o por tres volúmenes y una recta por dos planos. Esto es debido y se explica por el teorema de la dualidad, que hemos visto, en el que se puede establecer distintos teoremas —pero equivalentes— sustituyendo en ellos la palabra «punto» por «recta».

⁵ *Ibidem*, p. 105, n° 117.

Estas determinaciones cualitativas y sólo cualitativas del espacio, implican que las figuras en el espacio proyectivo sólo vengan dadas por sus relaciones internas y son independientes de las relaciones externas que las puedan envolver. Dicho de modo más claro: las figuras son independientes de su posición en el espacio. O también puede decirse a la inversa: el espacio es «pasivo» con respecto a las figuras. Esto, dicho de forma matemática no significaba más que el espacio es homogéneo. La homogeneidad del espacio implica también la relatividad de posición. En lenguaje premoderno sería más o menos, que no existen lugares naturales, sino que la posición de una figura viene dada sola y exclusivamente con respecto de otras figuras.

"Por consiguiente, la homogeneidad del espacio y la relatividad de posición están presupuestas en la comparación espacial cualitativa con la que se ocupa la geometría proyectiva."⁶

a. Los axiomas de la geometría proyectiva.

Así pues, Russell establece tres axiomas para la geometría proyectiva que sin pretender que sean sumamente precisos en sus expresiones, si al menos que sean suficientes para fundamentarla, de forma deductiva. Los axiomas son los siguientes:

I. Se pueden distinguir diferentes partes del espacio, pero todas las partes son cualitativamente similares y se distinguen solamente por el hecho inmediato de que cada una de ellas está fuera de la otra.

II. El espacio es continuo e infinitamente divisible; al resultado de esa división infinita o cero de extensión se le llama punto.

III. Cualquiera dos puntos determinan una figura única llamada línea recta, cualquiera tres determinan en general una figura de tres dimensiones, y por extraño que parezca lo contrario, lo mismo es cierto para cualquier número de puntos. Pero éste proceso llega a su fin más pronto o más tarde con algún número de puntos que determinan el espacio completo; pues, si así no fuese, ningún conjunto de relaciones entre un punto y un conjunto dado de puntos podría jamás determinar su relación con nuevos puntos y la Geometría se haría imposible."⁷

Los aspectos fundamentales del espacio clásico: homogeneidad, continuidad e independencia, aparecen de esta forma fundamentados, en el nivel más abstracto de la geometría: la geometría proyectiva. Todo espacio, en tanto que espacio ha de incluir estos axiomas. Pero no habrá que esperar más que ocho años para que esta teoría quede absolutamente derruida: la teoría de la relatividad demostrará la falsedad, de estas proposiciones «necesarias lógicamente»: el espacio ni es homogéneo, ni es continuo, ni es independiente⁸.

⁶ *Ibidem*, p.109, n° 125.

⁷ *Ibidem*, p. 107, n° 122.

⁸ Efectivamente, la física contemporánea ha demostrado, que el espacio ni es independiente, ni es homogéneo, ni es continuo. No es independiente, ya que por una parte está vinculado a la materia como demuestra la teoría general de la relatividad; y depende del tiempo como se deduce de la teoría especial de la relatividad:

"La teoría general, aún reteniendo la fusión del espacio y el tiempo, elimina otra distinción clásica que tan fundamental fue en la época prerrelativista: la distinción entre espacio y materia. La distinción entre el espacio y su contenido físico, fue implícitamente abolida por la teoría especial (...); en las ecuaciones de Lorentz desaparece la separación tradicional de la dinámica respecto de la cinemática, y el espacio, fusionado con el tiempo, parece adquirir propiedades físicas activas que no poseía el (continúa...)

Como se observa el concepto fundamental de la geometría proyectiva es el de forma de exterioridad. Bien entendido es un concepto lógico muy amplio, que incluye a la geometría como un caso especial, en el que la forma de exterioridad se refiere al espacio. El concepto de forma de exterioridad es definido páginas más adelante como:

"En cualquier mundo en que la percepción nos presenta cosas variadas con contenidos diferenciados y distintos debe existir en la percepción un «principio de diferenciación», un elemento al menos mediante el cual las cosas presentadas son distinguidas como diversas. Este elemento, tomado aisladamente y abstraído del contenido que él diferencia, podemos llamarlo forma de exterioridad."⁹

La preocupación de Russell en el resto del capítulo, va a ser demostrar cómo este concepto de forma de exterioridad satisface los axiomas antes definidos.

Primeramente demuestra cómo la forma de exterioridad cumple el primer axioma. La forma de exterioridad es una forma completamente relativa, ya que siempre implica algo respecto a otra cosa. Lo exterior siempre es exterior a algo. De la relatividad de la forma de exterioridad Russell deduce la homogeneidad del espacio.

De éstas dos anteriores, la relatividad y la homogeneidad se logra deducir el segundo axioma: la infinita divisibilidad del espacio concebido como forma de exterioridad. Y, añadimos nosotros, esta infinita divisibilidad demuestra el carácter «continuo» de la forma de exterioridad¹⁰.

El axioma tercero está realmente vinculado con el número de dimensiones de las que es capaz un espacio. Este número de dimensiones tiene tres limitaciones: la primera condición es que ha de ser un número natural de dimensiones¹¹. La segunda condición es que el número de dimensiones sea más de dos ya que

"... una forma de exterioridad es la mera expresión de la diversidad entre cosas, de lo cual se sigue que las cosas no pueden ocupar la misma posición en una forma a menos que exista otra forma mediante la cual la diferenciamos. Pues sin exterioridad no hay diversidad.

⁸(...continuación)

espacio clásico, al menos en tal grado: por ejemplo, su resistencia a un ilimitado incremento de la velocidad" (Capek, *op. cit.*, p. 188).

Posteriormente, la física cuántica pondría en cuestión otro aspecto fundamental del espacio: su homogeneidad. El modelo atómico de Bohr, daba el primer paso, al suponer unas regiones del espacio-tiempo privilegiadas —la órbitas de los electrones—, respecto de otras:

"Aunque «el postulado de Bohr», tal cual era llamado, se deducía lógicamente de la teoría cuántica era incompatible con la electrodinámica clásica, y desde luego, se hallaba en agudo y chocante contraste con toda la idea de la homogeneidad del espacio" (*Ibidem*, p. 239).

Inmediatamente, de esta pérdida de homogeneidad, se deducía su falta de continuidad. El espacio-tiempo, es pulsional. Las teorías del *hadón* (átomo de espacio) y del *cronón* (átomo de tiempo), muestran la necesidad de la actual física de explicar el espacio-tiempo como discontinuo (Cfr. *Ibidem*, pp. 241-250).

⁹ Russell, *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, p. 110, n° 128.

¹⁰ La infinita divisibilidad del espacio que se traduce en la concepción de "puntos inextensos", implica que éste es continuo, ya que:

"Si admitimos la existencia de puntos, tenemos que admitir su distribución igualmente densa sobre la totalidad del espacio sin excluirlos de ciertas zonas prohibidas, por muy pequeñas que sean. La estructura atómica del espacio sería incompatible con la homogeneidad del espacio, pues conduciría a la absurda conclusión de que hay «agujeros» en el espacio, o sea, regiones carentes de espacialidad" (Capek, *op. cit.* p. 40).

¹¹ "Cualquier forma de exterioridad debe tener un número natural de dimensiones" (Russell, *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, p. 112, n° 132). No se concibe un número de dimensiones racional del tipo:

$$\frac{n}{m}$$

[...] Por consiguiente una forma de una sola dimensión no podría por sí misma permitir tal cambio de las relaciones de exterioridad mediante las cuales solamente pueda ser concebido un mundo variado de cosas relacionadas entre sí.¹²

La tercera condición, ya se ha visto al enunciar el axioma III: la imposibilidad de un número infinito de dimensiones.

Por último, Russell demuestra la primera parte del primer axioma: la independencia de las relaciones intrínsecas de las relaciones extrínsecas, dicho de otra manera, la independencia de las figuras respecto de la posición. Esto lo realiza basándose en que la posición es relativa, y el espacio concebido como forma de exterioridad es homogéneo. Así pues el cambio en las relaciones exteriores se realizará sin el cambio de las relaciones interiores¹³.

Con todo esto, termina la primera parte del capítulo III. Russell pretende haber demostrado que se puede construir perfectamente la geometría, teniendo en cuenta solamente los aspectos cualitativos del espacio, entendido éste desde el concepto de forma de exterioridad. Así Russell «construye» una geometría perfectamente lógica, que no necesita en modo alguno de la experiencia¹⁴, y que más bien condiciona toda experiencia. Concluye esta primera sección diciendo:

"De momento, me limito a señalar que la geometría proyectiva es totalmente a priori; que trata de un objeto cuyas propiedades se deducen lógicamente de su definición y ~~no se~~ descubren empíricamente a través de los datos; que, además, su definición está fundada en la posibilidad de experimentar diversidad de relación o multiplicidad en la unidad y que el total de nuestra ciencia, por consiguiente, está lógicamente implicado y es deducible de la posibilidad de tal experiencia."¹⁵

2. GEOMETRÍAS EUCLIDIANAS Y NO-EUCLIDIANAS.

a. Los axiomas generales de la geometría métrica.

El siguiente paso que da Russell, será el de demostrar que los *axiomas generales* que pueden aplicarse a toda posible geometría métrica, se deducen de la geometría proyectiva, y por lo tanto son también *a priori*, ya que tienen el mismo carácter deductivo que los anteriores. A su vez, y por el mismo razonamiento, se demuestra que los axiomas propios de la geometría euclidiana, que la determinan como tal geometría, son concreciones *empíricas* de los anteriores. Por lo que esta sección es fundamental para entender la teoría de Russell sobre el espacio.

¹² *Ibidem*, p. 114, n° 135.

¹³ Cfr. *Ibidem*, p. 116-117, n° 138.

¹⁴ Ni la experiencia exterior, ni la experiencia psicológica.

¹⁵ *Ibidem*, p. 117, n° 139.

Para Russell el estudio del espacio no se agota de ningún modo en la geometría proyectiva ya que ésta no considera aspectos fundamentales del espacio en sí, como la diferencia que existe entre espacios euclidianos y no-euclidianos. Así mismo, indica que hay ciertos aspectos físicos del espacio, fundamentales para la ciencia, y que sólo pueden ser estudiados introduciendo valores métricos¹⁶.

Por ello, la geometría métrica se deduce y completa los axiomas de la geometría proyectiva. En palabras de Russell:

"La geometría métrica, por consiguiente, aunque distinta de la geometría proyectiva, no es independiente de ella, sino que la presupone, y surge de su combinación con la idea, ajena a ella, de cantidad."¹⁷

En este sentido la geometría métrica¹⁸ depende de la geometría proyectiva ya que toda posibilidad de *medición*, que es el contenido de la geometría métrica, depende de la homogeneidad del espacio¹⁹, axioma fundamental de la geometría proyectiva. Esta dependencia profunda, se manifiesta en cada uno de los axiomas: el axioma del libre movimiento viene dado lógicamente por el que hemos visto de la homogeneidad del espacio; el axioma de la distancia por el de la línea recta proyectiva; siendo por último, el axioma de las dimensiones idéntico en una y otra geometría.

Ahora bien, la geometría métrica supone algunos cambios esenciales con respecto a la geometría proyectiva. El primero es que el principio de la dualidad entre recta y punto, deja de darse en los espacios métricos ya que en cualquiera de éstos, la *cantidad*²⁰ se predica de la recta, pero nunca del punto, ya que se considera inextenso. Y por otra parte la geometría métrica introduce el movimiento como un elemento fundamental, para decidir la congruencia o no entre dos figuras²¹.

Los axiomas de la geometría métrica son los siguientes: el axioma de libre movilidad, el axioma de las dimensiones y el axioma de la distancia.

i. El axioma del libre movimiento.

El axioma del libre movimiento, es enunciado por Russell como sigue:

"Las magnitudes espaciales se pueden mover de uno a otro lugar sin distorsión; o también podemos expresarlo así: Las formas no dependen en manera alguna de la posición absoluta en el espacio."²²

¹⁶ Cfr. *Ibidem*, p. 119, n° 141.

¹⁷ *Ibidem*, p. 119, n° 142.

¹⁸ La definición que da Russell de la geometría métrica es la siguiente: "... la geometría métrica se puede definir como la ciencia que trata con la comparación y las relaciones de las magnitudes espaciales" (*Ibidem*, p. 120, n° 143).

¹⁹ O relatividad de posición.

²⁰ Esta *cantidad* será denominada en Amor Rulbal *grandor*, siguiendo de esta manera la terminología francesa.

²¹ Para Russell, como se verá, la única manera posible de medir dos figuras geométricas será el superponerlas, para lo cual es necesario la libertad de movimientos en el espacio, y la no deformación de las figuras en estos movimientos.

²² *Ibidem*, p. 121, n° 144.

Para Russell este axioma es fundamental para la geometría métrica ya que de él resulta la misma posibilidad de medida. La medida sólo es posible a través de la congruencia, y como se ha visto, ésta es únicamente posible suponiendo este mismo axioma: que una figura se pueda trasladar de un lugar a otro en el espacio. La tarea en la que se va a embarcar el filósofo inglés va a ser demostrar por partida doble su *aprioridad*.

Para demostrar esta doble aprioridad, Russell sigue dos caminos. El primero es de tipo filosófico: si negásemos este axioma resultaría que el cambio de posición de una figura en el espacio supondría cambios en la figura, lo cual sería contradictorio, ya que esto implicaría no un espacio *pasivo* sino un espacio activo, dejando el espacio de ser homogéneo para ser más bien un *conjunto de singularidades*:

"Esa falta de homogeneidad y de pasividad es absurda puesto que el espacio al ser una forma de exterioridad, permite solamente posiciones relativas y no absolutas y debe de ser completamente homogéneo en todas sus partes. Suponer que ello sea de otra manera es atribuirle una sustanciación que ninguna forma de exterioridad tiene posibilidad de poseer."²³

La otra demostración es de tipo geométrico. En ella se enfrenta a ciertas objeciones que se pueden hacer al axioma. Pero por no extendernos demasiado sólo trataremos aquí la que consideramos más importante, enumerando el resto. Esta objeción es la que formula Erdmann según la cual pudiera ocurrir que la magnitud cambiase de manera regular con la traslación —cambio de posición— de esos cuerpos en el espacio; con lo cual el axioma de la homogeneidad del espacio dejaría de ser necesario.

A lo cual responde Russell, que esta concepción del cambio de magnitudes es contradictoria. Si concedemos que la única manera de medir una figura con otra es la congruencia, cuando traslademos la figura a otra posición ésta cambiará homogéneamente, pero para conocer este cambio tenemos que trasladar la figura con la cual medíamos, resultando también afectada con la *misma variación* que la figura medida. Con lo cual la segunda medida sería igual que la primera. Y aquí tenemos la contradicción, esta variación en la magnitud sería imposible conocerla y puesto que la magnitud absoluta es absurda, es como si no hubiese variación:

"Por consiguiente, puesto que la magnitud es solamente comprensible como resultado de comparación, las dimensiones de los cuerpos quedan inalteradas por el movimiento y la hipótesis sugerida no tiene sentido."²⁴

Otras dificultades que resuelve Russell referente al valor del axioma de libre movilidad para toda medición, son las siguientes: la medición de sólidos, esto es, de volúmenes, que necesitaría una cuarta dimensión en la que proyectarse; la medición de tornillos levógiros y dextrógiros, —esto es, figuras iguales pero simétricas respecto a un eje dado—; la posibilidad de congruencia en el tiempo; la posibilidad de medición en superficies no congruentes. A todas estas dificultades va respondiendo positivamente Russell.

²³ *Ibidem*, p. 122, n° 145.

²⁴ *Ibidem*, p. 76, n° 81. Russell, en esta crítica a la teoría de Erdmann, deja entrever dos ideas importantes. Primeramente, si se observa con cuidado, la refutación a Erdmann se basa en que el espacio no puede ser en modo alguno absoluto, sino que es relativo. Russell, parte de una concepción heideggeriana del espacio que es la que subyace en todo su ensayo y aparece de modo explícito en ciertos pasajes.

Así mismo, la crítica a Erdmann apunta a otra cuestión que trataremos posteriormente con más detenimiento: el grandor para Russell es siempre relativo, es siempre el resultado de una medición.

Por último, también es curioso observar cómo en esta refutación, utiliza el filósofo inglés una argumentación de tipo *pragmático*: si no es observable, no es real.

Con todo lo cual, Russell llega a la conclusión de que el axioma del libre movimiento implica necesariamente la homogeneidad del espacio y la relatividad de posición. La homogeneidad del espacio, ya que al permanecer idéntica la figura en cualquier parte del espacio, todas las partes del espacio han de ser similares y no pueden distinguirse unas de otras: son homogéneas. Y por ello mismo, las partes del espacio sólo son distinguibles unas de otras por su relación con otras. Sus relaciones son externas. Y al ser estas relaciones externas no influyen en nada en las cosas:

"«La posición no es una propiedad intrínseca de las cosas en el espacio, sino propiedad puramente relativa.» Si hubiese cosa alguna como posición absoluta, resultaría, en breves palabras, que la geometría métrica se haría imposible. Esta relatividad de la posición es el postulado de toda Geometría, al cual nos conduce cualquiera de los axiomas necesariamente métricos; y, recíprocamente, cada uno de estos axiomas se puede deducir de él."²⁵

Así pues, el axioma del libre movimiento está supuesto en toda medición haciéndola posible, dependiendo a su vez lógicamente, de la homogeneidad de toda forma de exterioridad —que es como definíamos el espacio proyectivo—. De todo lo cual resulta que el axioma de libre movilidad es doblemente *a priori* como queríamos demostrar:

"... nuestro axioma es a priori en doble sentido, pues está presupuesto en toda medición espacial y también es una propiedad necesaria de toda forma de exterioridad. Una aprioridad doblemente necesaria similar a ésta aparece, según veremos, en todos nuestros axiomas necesarios."²⁶

ii. El axioma de las dimensiones.

El axioma de las dimensiones viene a decir que "El espacio tiene que tener un número natural de dimensiones."²⁷ Este axioma como ya se ha dicho, es prácticamente idéntico al axioma III de la geometría proyectiva. Como se veía entonces, el número de dimensiones ha de ser finito, y además, ha de ser un número natural.

La demostración de este axioma la realiza Russell a partir de la multiplicidad de Riemann. En esta multiplicidad —que en el caso del espacio se trata sólo de una multiplicidad de tipo cuantitativo— una posición viene definida, porque está en relación con otras posiciones:

"En consecuencia, cualquier posición está completamente definida cuando y solamente cuando, se han dado suficientes relaciones tales que nos permitan determinar su relación con otra nueva posición, estando esta nueva posición definida por el mismo número de relaciones."²⁸

Siendo cada relación una dimensión, resulta que el espacio tiene de modo *a priori* un número natural de dimensiones.

²⁵ *Ibidem*, p. 127, n° 155.

²⁶ *Ibidem*, p. 128, n° 157.

²⁷ *Ibidem*, p. 129, n° 158.

²⁸ *Ibidem*, p. 130, n° 160.

El espacio euclidiano que tiene sólo tres dimensiones es un caso particular de este axioma, y su conocimiento viene dado no de manera *a priori* —y por lo tanto necesaria— sino de forma empírica, por nuestra experiencia²⁹.

iii. El axioma de la distancia.

El axioma de la distancia viene a decir, que:

"...dos puntos determinan una cantidad espacial única que se llama distancia."³⁰

Para probar este axioma fundamental de la geometría métrica, Russell se plantea demostrar las cuatro proposiciones en las que se puede desdoblar: 1ª, si no existiese la distancia sería imposible la medida; 2ª, la distancia sólo se mide por dos puntos, que delimitan una curva; 3ª, esta curva se deduce del concepto de la geometría proyectiva de forma de exterioridad; y 4ª, la aplicación de la cantidad a esta curva, conduce a una magnitud que es la distancia.

El planteamiento de la primera proposición lo realiza siguiendo la figura lógica del *modus tollens*: la posibilidad de medición nos lleva a inferir que existe una *magnitud* unívocamente determinada —la distancia—, que la posibilita. Sin embargo la demostración de esta primera proposición realmente la efectúa B. Russell de manera constructiva. Tenemos dos puntos que determinan entre ellos una relación. Por el axioma de libre movilidad podemos trasladar estos dos puntos por el espacio, cambiando el resto de sus relaciones con otras posiciones del espacio, y manteniendo a la vez esa relación anterior. Esta relación por lo tanto se caracterizará por ser una relación intrínseca entre esos puntos y por ende por ser su "distancia". A esta definición constructiva de la distancia, se le van a plantear diversas objeciones, que Russell irá rechazando, pero que por no hacer excesivamente largo este estudio, vamos a obviarlas aquí.

La segunda proposición viene a establecer la inversa del axioma general: la distancia envuelve una única curva³¹ determinada por dos puntos. Para Russell cualquier curva se refiere a la geodésica en la que se realiza, transformando sus arcos infinitesimales³² en la recta geodésica que determina la distancia. *Ésta es única*. No hay ninguna otra curva que una esos dos puntos estableciendo su distancia, que no sea la geodésica³³.

Pasemos ahora a la tercera proposición que establecía que "la existencia de curvas determinadas unívocamente por dos de sus puntos puede ser deducida de la naturaleza de una forma de exterioridad".³⁴ Esta proposición es casi evidente, ya que se haya en continuidad con lo dicho anteriormente. De hecho sigue B. Russell, el mismo razonamiento que la proposición primera de este axioma: ya que la existencia

²⁹ Aunque añade Russell que esto no significa «Imprecisión o Incertidumbre» como con respecto a otras leyes naturales ya que, al ser el número de dimensiones un número natural, resulta excluida los pequeños errores: no puede ser por ejemplo 7/2 de dimensión.

³⁰ *Ibidem*, p. 130, n° 162.

³¹ Cuando Russell se refiere a *curva*, en realidad está haciendo uso del concepto de *geodésica*: la línea más corta entre dos puntos, sobre cualquier tipo de superficie.

³² Al reducir toda curva a arcos infinitamente pequeños es como si estuviésemos trabajado en la geometría plana de Euclides.

³³ La única excepción a considerar es el caso de una superficie esférica, en la que dos puntos polares determinan dos o más curvas que tienen la misma distancia. Este caso particular será tratado con detenimiento por Russell.

³⁴ *Ibidem*, p. 135, n° 173.

de curvas determinadas unívocamente por dos de sus puntos procede de la proposición que dos puntos determinan siempre una distancia. Así pues una relación intrínseca entre dos puntos —distancia— determina una figura única: la línea que les une.

Por último, la cuarta proposición establecía que la existencia de esa curva unívocamente determinada, implicaba una magnitud única. Esto se demuestra, ya que si en la geometría proyectiva dos puntos cualesquiera eran indiscernibles porque sólo había entre ellos una relación cualitativa, ahora en la geometría métrica, su relación es cuantitativa, y es la magnitud. Y puesto, como hemos visto, su relación interna es única, es evidente que su distancia también es única. Con lo cual, Russell cierra el desarrollo de su argumentación con la primera proposición, que establecía una relación única entre dos puntos, llamada distancia:

"...si dos puntos están definidos simplemente por sus relaciones con otros puntos, es decir, si toda posición es relativa, todo punto tendrá que tener una relación, y sólo una, para con cualquier otro punto e independientemente del resto del espacio. Esta relación es la distancia entre dos puntos."³⁵

Con todos estos razonamientos, Russell pretende haber demostrado que los axiomas generales de la geometría métrica —esto es, comunes a todas las geometrías métricas— son *a priori*, de la misma manera como lo eran los de la geometría proyectiva. La experiencia será la encargada de determinar si nuestro espacio es euclidiano o no:

"Los restantes axiomas de la geometría euclídea —el axioma de las paralelas, el axioma del número de dimensiones en tres y la forma euclídea del axioma de la línea recta (dos líneas rectas no pueden encerrar ningún espacio)— no son esenciales para la posibilidad de la geometría métrica, es decir, no son deducibles del hecho de que sea posible una ciencia de las magnitudes espaciales."³⁶

3. ASPECTOS FILOSÓFICOS IMPLICADOS EN EL ESPACIO.

a. Concepto de a priori en Russell.

Una vez Russell ha fundamentado en el capítulo III los axiomas de la geometría métrica y la geometría proyectiva como completamente *a priori*, en el capítulo IV, de tipo filosófico, pretende el filósofo británico justificar el carácter *a priori* de la forma de exterioridad y solventar tres paradojas o contradicciones que implicaba su concepción del espacio.

Con respecto al carácter *a priori* de la forma de exterioridad, que fundamenta a su vez la *aprioridad* del espacio se plantea Russell la pregunta de cuál es la relación de la experiencia con la forma de exterioridad en general. La respuesta que da a esta pregunta es que la forma de exterioridad es *a priori*, esto es, trascendental a todo conocimiento experiencial, en el sentido de que es necesaria para toda experiencia.

³⁵ *Ibidem*, p. 136, n.º 175.

³⁶ *Ibidem*, p. 138, n.º 177.

Pero Russell pretende separarse de la concepción de *a priori* que concede Kant al espacio y al tiempo. Su diferencia con él consiste en lo siguiente: primeramente concibe la forma de exterioridad en un sentido más amplio que únicamente el espacio y el tiempo. El espacio y tiempo pertenecen a esta forma de exterioridad, pero no la agotan. Y en segundo lugar, mientras que Kant hacía del espacio y el tiempo condiciones subjetivas de la sensibilidad, Russell pretende prescindir del plano psicológico³⁷ y mantenerse tan solo en el epistemológico. Esto es, no considerar el espacio y el tiempo como los *esquemas subjetivos* que posibiliten nuestro conocimiento, sino tan sólo como las *condiciones lógicas* a las que se someten todas nuestras sensaciones. En palabras de Russell:

"Es cierto que yo voy a sostener que una forma de exterioridad, si es que ella ha de cumplir su misión, no deberá ser una mera concepción o una mera inferencia, sino que habrá de ser un elemento dado en percepción sensible y no, por supuesto, dado originalmente aislado, sino descubrible mediante análisis por atención al objeto de la percepción sensible. Pero Kant sostenía no solamente que este elemento está dado sino que también es subjetivo."³⁸

Así mismo, critica la justificación del espacio como condición necesaria de toda experiencia sensible: el espacio para Kant cumpliría, la función de que las cosas aparezcan como externas entre sí, y como externas al yo. Para Russell la exterioridad de las cosas respecto al yo, sólo tiene sentido espacialmente, si el yo es concebido como un cuerpo, y por lo tanto como un objeto más entre otros objetos. Así la exterioridad de las cosas respecto al yo, no es para Russell más que un caso especial de la exterioridad de las cosas entre sí. Con lo cual se consigue dos cosas: se invalida el planteamiento kantiano de la necesidad de la exterioridad para la fundamentación de la experiencia externa, y se plantea el problema de cuya resolución depende todo el conocimiento: ¿se conocerían las cosas como diversas pero relacionadas, si no existiese alguna forma de exterioridad? Como se verá inmediatamente, la respuesta es negativa.

Russell en este punto tan fundamental se apoya, invirtiéndolos, en los argumentos de los idealistas ingleses Bradley y Bosanquet. Para ambos el espacio y el tiempo al ser continuos hacen que no se pueda concebir nada como particular puro, sino que todo se halle lógicamente relacionado³⁹.

"... debido a la continuidad y la relatividad del espacio y del tiempo, ningún elemento (*this*) puede considerarse ni como simple ni como autosuficiente. Por un lado, cualquier elemento puede ser analizado y descompuesto en elementos (*theses*); y por otro lado, se ve que está necesariamente relacionado a otras cosas por fuera de los límites del objeto dado por la percepción sensitiva."⁴⁰

Apoyándose en esta concepción Russell, invierte el argumento y basándose en la relatividad de los elementos, fundamenta la forma de exterioridad. En efecto, para el filósofo británico, todo elemento dado en la sensación se puede descomponer en otros elementos, como también dice relación a otros

³⁷ Ya al comienzo de su *Ensayo...*, Russell planteaba la diferencia entre lo subjetivo y lo *a priori*:

"...*a priori* se refiere a cualquier conocimiento que aunque quizá provocado por la experiencia, lógicamente está supuesto como existente con anterioridad a la experiencia; por el contrario *subjetivo* significa un estado mental cuya causa inmediata yace, no en el mundo externo sino en la propia naturaleza del sujeto que lo sufre" (*Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, p. 16, n° 2).

De lo *a priori* se ocupa la Epistemología y de lo subjetivo la Psicología pura. Para conocer lo *a priori*, la Epistemología habrá de analizar lógicamente nuestros conocimientos, y ver cuáles de ellos son las *condiciones* de posibilidad de la experiencia. Mientras que para saber qué es lo subjetivo, la Psicología pura tendrá que estudiar nuestra sensaciones y sus combinaciones en nuestra interioridad (Cfr. *Ibidem*, p. 17, n° 4).

³⁸ *Ibidem*, p. 142, n° 183.

³⁹ Después Hannequin hablará de esto mismo en sentido físico en *Essai critique sur l'hypothese des atomes dans la science contemporaine*. París, 1899.

⁴⁰ Bradley, *Logic*, p. 51 y ss. citado por B. Russell, *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, p. 144, n° 187.

elementos externos a él. Lo cual implica una premisa lógica: "todo conocimiento envuelve un reconocimiento de la diversidad de relación, o si lo preferimos, de identidad en la diferencia."⁴¹

Esto es, la forma de exterioridad permite que las cosas puedan darse relacionadas y no como particulares. Russell demuestra que esta forma de exterioridad en el caso del tiempo, permite el conocimiento de las cosas, y se da en ese conocimiento, pero que no agota la forma de exterioridad. Es más, el tiempo como forma de exterioridad necesita ser completado por otra forma de exterioridad, que permita el conocimiento no ya de una cosa, sino de cosas diversas pero relacionadas. Esta segunda forma de exterioridad es el espacio.

En conclusión: el espacio y tiempo son *a priori* en tanto que son formas de exterioridad. La aprioridad para Russell no consiste en ser ajeno a la experiencia, sino más bien en ser absolutamente necesario a la experiencia: Es por ello que la lógica para Russell se encuentra en dependencia de la experiencia:

"...nosotros inferimos diversidad real, es decir, la existencia de cosas diferentes y solamente, por la diferencia de posición en el espacio o en el tiempo. De ello se sigue que suponer dos cosas en el mismo tiempo es todavía una contradicción lógica; pero no porque nosotros hemos construido los datos de los sentidos a partir de la lógica, sino a causa de que la lógica es dependiente, en cuanto a sus aplicaciones, de la naturaleza de esos datos."⁴²

b. Contradicciones de los conceptos espaciales y «materialización» del espacio.

Examinemos ahora una serie de contradicciones de carácter filosófico, en las que cae el estudio del espacio. Contradicciones de las que Amor Ruibal se va a hacer eco para, entre otras cosas, realizar la crítica al atomismo.

La primera contradicción se refiere al punto: en el espacio intuitivamente distinguimos partes, pero debido a la homogeneidad del espacio esas partes son indiscernibles del espacio. Es decir, toda parte del espacio ha de ser espacial. Pero en virtud también, de la homogeneidad del espacio, el espacio es infinitamente divisible. Por lo cual llega a la contradicción de que los puntos son por una parte espaciales en tanto que elementos del espacio, pero por otra parte inextensos:

"Un punto debe ser espacial, pues de otra manera no podría cumplir la función de un elemento espacial; pero al mismo tiempo no podría contener espacio, pues toda extensión finita es capaz de soportar ulterior análisis."⁴³

Esta paradoja según Russell resulta de la relatividad del espacio, ya que supone objetos espaciales relacionados, objetos que a su vez, se descomponen en relaciones hasta llegar a la nada.

⁴¹ *Ibidem*, p. 145, n° 189.

⁴² *Ibidem*, p. 147, n° 192.

⁴³ *Ibidem*, p. 149, n° 196.

Para evitar esta paradoja Russell sugiere concebir el espacio como compuesto de una especie de materia espacial, no en el sentido físico, sino una especie de materia en general que resulte de la abstracción de todas las propiedades no espaciales, y quedarnos sólo con las propiedades espaciales⁴⁴. Esta materia suministraría los términos últimos de las relaciones: los puntos, que serían los átomos de esta materia espacial, fundamentales para construir las relaciones, pero a su vez indescomponibles en otras relaciones. Así pues, el punto concebido de manera "atómica" sería el fundamento de todas las relaciones sin ser a su vez relación.

La segunda contradicción en que están implicadas las concepciones geométricas del espacio es la de la circularidad demostrativa, entre el punto, la recta y el plano: hemos visto más arriba cómo las rectas y los planos son definidos por los puntos, así como los puntos son definidos a su vez por las intersecciones de rectas y planos. Esto supone un problema filosófico, sobre qué es lo definido y qué es lo que define, en conclusión, qué concepto tiene una prioridad lógica sobre los otros. Esta paradoja procede como la anterior de la relatividad del espacio y como ella queda resuelta con la materialización del espacio. De esta manera los puntos serían los fundamentos del espacio aunque no son elementos espaciales, que serían pues las rectas y los planos. Las verdaderas unidades espaciales serían las rectas y los planos, ya que estos ya tienen propiedades espaciales.

La tercera paradoja o contradicción surge al considerar por una parte, que el espacio sólo y únicamente es un conjunto de relaciones, y por otra, que parece ser algo más que un conjunto de relaciones. Es decir que subyace, un «metaespacio» a los puntos, las rectas y los planos.

Esta paradoja la solucionará Russell distinguiendo entre el espacio vacío y el orden espacial. El espacio vacío representa todas las posibles relaciones espaciales, en tanto que el orden espacial se establece entre las figuras espaciales efectivas. Es para Russell, en la absolutización del espacio vacío, donde surgen las paradojas, ya que se pasa de lo meramente posible a su consideración substancializada. Éste será el defecto de la teoría kantiana del espacio, ya que aunque subjetivándolo, absolutiza ese espacio vacío potencial. En cambio para Russell hay que atender el espacio únicamente como orden espacial, en el que se dan relaciones entre *puntos efectivos* del espacio, entendidos éstos de la forma atomística que antes hemos indicado:

"Así pues, la misma referencia a la materia por la cual fue resuelta la antinomia del Punto resuelve también la antinomia relativa a la naturaleza relacional del espacio. El espacio, si ha de ser liberado de contradicciones, deber ser considerado exclusivamente como orden espacial, o sea, como conjunto de relaciones entre átomos materiales sin extensión. El espacio vacío, que nace por ilusión inevitable a partir del elemento espacial en la percepción sensible, se puede considerar, si es que queremos conservarlo, como el principio neto de la relatividad, o sea, como la simple posibilidad lógica de relaciones entre cosas diversas."⁴⁵

Una vez más con la "materialización" de las figuras espaciales y por ende del espacio, se ha superado una paradoja basada como las anteriores en la relatividad del espacio.

Como se puede observar, el intento de Russell de evitar un espacio absoluto, termina por materializar el espacio. El espacio está compuesto de átomos de espacio, llamados puntos. Nótese la proximidad de todos estos problemas con los del atomismo. De hecho, lo que denota todo esto es la vinculación de espacio y materia. Si hemos indicado en la página 255, que la primacía del espacio hace

⁴⁴ En cierto sentido aquí Russell recoge las propiedades de Helmholtz, deducidas de una especie de *materia espacial*.

⁴⁵ *Ibidem*, p. 155, n° 207.

concebir la materia como espacio lleno, Russell llega a lo inverso: el espacio es algo "material". La identidad espacio-materia, subyace a este planteamiento. No es por ello extraño, que los modelos físicos actuales sobre la materia, los modelos cuánticos, supusieran necesariamente el cambio de la concepción espacial: si el espacio era un continuo en la física clásica, en la física contemporánea, el espacio está limitado, ha dejado de ser homogéneo.

Por último, hemos de subrayar una vez más que la exposición del concepto de espacio que realiza B. Russell, es sumamente importante. Su obra podemos considerarla como el momento culminante de toda una época, y por ende el punto de inflexión de un paradigma a otro: del paradigma de la física clásica al paradigma de la física relativista.

Además, el *Ensayo* implicaba toda una forma de entender las relaciones entre el conocimiento científico —que no es sino conocimiento humano—, y la realidad de las cosas. Por ello, su obra no pasó, en modo alguno, desapercibida a sus contemporáneos, resultando ser un revulsivo en la filosofía de la ciencia, y en concreto en la filosofía de la matemática. Dos de las contestaciones que recibe, desde orientaciones bien diferentes, serán la del kantismo representado por L. Couturat, que considera al espacio como completamente *a priori* —incluyendo los axiomas propios de la geometría de Euclides—; y la convencionalista representada por Poincaré, para el que no existe una geometría que pueda considerarse plenamente «verdadera».

CAPÍTULO III

COUTURAT CRÍTICO DE RUSSELL

1. LA CRÍTICA DE COUTURAT AL *ENSAYO* DE RUSSELL.

La obra de Russell veía la luz el año 1897. Al año siguiente el filósofo francés L. Couturat hacía una breve exposición de este trabajo, para después criticar las ideas del joven filósofo inglés y exponer las suyas.

Para Couturat no sólo los axiomas comunes de las geometrías no-euclidianas con la euclidiana, eran *a priori*, sino que hasta los propios de ésta última: el número de las dimensiones del espacio, así como su curvatura, considerados por Russell como empíricos, habrían de ser *a priori*. Couturat es en la comprensión del espacio, más kantiano que el filósofo de Cambridge. De hecho respeta la mayor parte del trabajo de Russell criticando sólo aquello en que se separa del paradigma kantiano. Veámoslo.

Couturat, después de los consabidos halagos que dedica a su interlocutor Russell, comienza criticando la parte final de su trabajo, el capítulo cuarto, en que aparecían las paradojas que acabamos de comentar, porque en ellas subyace una concepción "realista" del espacio. Primeramente, hay que decir que Couturat no considera que las contradicciones que establece Russell sean tan importantes como él cree. Para Couturat:

"A vrai dire, et de la manière dont il les présente, ce ne sont même pas des contradictions formelles, mais de simples oppositions de points de vue compatibles avec la logique la plus sévère; et par conséquent elles ne nécessitent et ne justifient nullement une hypothèse aussi risquée que celle d'une matière géométrique."¹

En efecto, Couturat considera que es absolutamente inaceptable la idea de una especie de materia geométrica, como la que expone Russell para solventar las tres contradicciones. Esta concepción, para Couturat, introduce de rondón una idea del espacio y de la geometría de corte «empirista» o «realista». Esto es, considera el espacio como una realidad fuera del sujeto y percible por los sentidos. Concepción a la que se opone completamente Couturat. Para él sólo se puede concebir una especie de "materia

¹ L. Couturat, «Etudes critiques. Essai sur les fondamets de la géométrie. Par Bertrand Russell» *Revue de Métaphysique et Morale*, 1898. pp. 354-380; p. 369.

espacial", en campos como la Mecánica o la Física, y siempre como ilustración, pero que carece de significación en la Geometría.

Además, las tres contradicciones pueden ser fácilmente resueltas sin esta "materia espacial". La primera contradicción que consideraba las partes del espacio como intuitivamente distintas, aunque intelectivamente indiscernibles, para Couturat procede de confundir la sensibilidad con el entendimiento. Para Couturat la solución de este paralogismo se encuentra ya en Kant, cuando rechaza el principio de la identidad de los indiscernibles de Leibniz.

En cuanto a la contradicción de la circularidad en las definiciones del punto y de la recta, para Couturat ésta procede simplemente de pretender hallar a todo un fundamento. Noción contradictoria ya que lleva a un regreso *ad infinitum* o a establecer un fundamento *inconcusum*, un absoluto. Es más, para Couturat esta contradicción no demuestra más que el espacio es de carácter ideal:

"En un mot, de la relativité de l'espace il faut simplement conclure son idéalité; les antinomies de M. Russell nous amènent donc à la même conclusion que les antinomies kantiennes, et son susceptibles de la même solution".²

Pero como hemos dicho, la crítica fundamental de Couturat a Russell, va a ser que considera injustificada su concepción empirista de los axiomas de la geometría euclidiana. Para Couturat toda la geometría euclidiana ha de ser *a priori*.

Para probar la *aposterioridad* de los axiomas euclidianos habríamos de encontrar experiencias que nos lo testifiquen. Pero para aportar estas experiencias no sirve el conjunto de la Física, ya que ésta a su vez se apoya, para sus experimentos, en la concepción euclidiana del espacio:

"Nos lois physiques sont donc essentiellement relatives à la Geométrie que nous avons adoptée. Elles sont vraies dans l'hypothèse d'un espace euclidien; cela ne prouve absolument rien en faveur de cette hypothèse, car si l'on admettait une autre forme de l'espace, elles seraient remplacées par d'autres lois également vraies, c'est-à-dire conformes à l'expérience."³

Por ello, la experiencia no es eficaz en absoluto para discernir si nuestro espacio es euclidiano o no, ya que nuestro conocimiento experiencial sigue las leyes de la geometría proyectiva, y en ella son indiscernibles las geometrías métricas euclidianas y no-euclidianas.

Si la experiencia es, en este sentido, insuficiente para determinar si el espacio es euclidiano o no, la única manera de determinar su *a prioridad* es o deduciéndola de una forma de *a prioridad* que es la forma de exterioridad o bien mostrando que es condición necesaria para la medida. Esta última vía es rechazada por Couturat ya que los axiomas comunes a todas las geometrías, en tanto que axiomas necesarios y *suficientes* para la medida, constituyen los únicos axiomas que en este sentido pueden tenerse por *a priori*.

Sólo queda, pues, deducirla de una forma de exterioridad en general. Pero aquí, su deducción de la forma de exterioridad tendría un significado más vago y general, ya que la forma de exterioridad no es sólo la condición de toda medida, sino de toda experiencia. Couturat va demostrar que uno de los caracteres de la forma de exterioridad que era la homogeneidad es entendido por Russell de forma

² *Ibidem*, p. 370.

³ *Ibidem*, p. 371.

excesivamente restringida, y si ampliamos el concepto de forma de exterioridad también pueden ser derivados de él, los axiomas propios de la geometría euclidiana.

Para ello Couturat primeramente rechaza el que Russell, en realidad entienda la homogeneidad como isogeneidad: esto es, como la posibilidad de establecer figuras semejantes en diferentes lugares; que depende, a su vez, del postulado del libre movimiento. Pero la homogeneidad en el sentido más amplio, como lo entiende también Delboeuf y Couturat ⁴, implica junto con la independencia de la forma de las figuras respecto de la posición, la independencia de la forma de su tamaño; ya que sino, una figura espacial además de venir definida por sus relaciones extrínsecas vendría también definida por su *grandor*, lo cual es contrario a la relatividad esencial que constituye el espacio. Por lo tanto para Couturat habría que ampliar necesariamente la condición de ser *a priori* de la forma de exterioridad a la homogeneidad —entendida en el sentido de Delboeuf—. Pero la única geometría donde se realiza la homogeneidad del espacio, en este doble sentido, es en la geometría de Euclides, ya que en las otras geometrías la figura es afectada por su tamaño.

Además, la constante espacial para Couturat indica un grandor determinado que puede ser comparado de un espacio a otro:

"On ne peut mesurer une grandeur que par une grandeur de même espèce; or, si l'on peut mesurer toutes les grandeurs d'un espace par rapport à la constante de cet espace, il faut évidemment que cette constante soit elle-même une grandeur, et une grandeur spatiale. De l'aveu même de l'auteur, un espace non-euclidien enveloppe l'existence d'une grandeur donnée et déterminée, qu'on ne peut faire varier à volonté, et qui constitue un étalon naturel de grandeur."⁵

Por lo tanto, si la constante espacial constituye un grandor comparable, los diversos espacios pueden ser comparados por esa constante, esto es, pueden ponerse en relación. Además la constante espacial no es un dato que proceda de la experiencia, sino que está interrelacionada y es dependiente de la forma del espacio.

Por otra parte, los espacios de Riemann y Lobatchewski suponen contradicciones de la homogeneidad del espacio —en el sentido expuesto por Russell—. En la geometría de Riemann, una de las consecuencias de la homogeneidad del espacio no se cumple: concretamente el axioma de la distancia que pertenecía a la geometría métrica; ni tampoco el axioma de la geometría proyectiva del que dependía directamente: dos puntos determinan una figura única. En efecto, en el espacio de Riemann hay puntos privilegiados que podemos llamar «antípodas» y que determinan una infinidad de líneas rectas. Además este espacio de Riemann es finito y por lo tanto tiene un grandor absoluto con lo cual queda arruinado también la relatividad del grandor que acabamos de defender un poco más arriba. Esta finitud del espacio arruina también el axioma de libre movilidad. Si esto sucede con el espacio de Riemann, con el espacio de Lobatchewski sucede algo parecido, ya que aunque es un espacio infinito posee así mismo un grandor absoluto.

⁴ Aquí se da una equivocidad que es necesario aclarar. Para Russell, *homogeneidad*, es la independencia de la forma de las figuras, respecto de su posición en el espacio. Esto mismo es lo que Delboeuf y Couturat llaman *isogeneidad*. Para éstos, la *homogeneidad* es la independencia de la forma de las figuras, del tamaño que puedan tener: lo que significa que las figuras, aparte de por la forma, no vienen definidas por un "grandor" determinado. Esto lo indica el mismo Russell:

"Esta acepción de la homogeneidad no debe confundirse con el sentido en que yo he usado esta palabra. En el sentido de Delboeuf, significa que las figuras pueden ser similares aunque de tamaños diferentes; en mi sentido, significa que las figuras pueden ser similares aunque en diferentes lugares. A esta propiedad del espacio Delboeuf llama *isogeneidad*" (B. Russell, *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, p. 92, n° 98 nota).

⁵ Couturat, *op. cit.*, p. 375-376.

Con lo cual Couturat destruye uno de los fundamentos de la teoría de Russell, demostrando que las geometrías no euclidianas no cumplen el axioma fundamental de la relatividad del espacio. Éste había concluido la aprioridad de los axiomas comunes a las geometrías métricas en tanto que deducidos de la forma de exterioridad.

Para Couturat, al contrario:

"... les espaces non-euclidiens ne vérifient pas l'axiome fondamental de la relativité de l'espace. En d'autres termes, si l'on traitait toutes les conséquences de ce principe, on en pourrait déduire les deux axiomes qui caractérisent l'espace euclidien: 1° le postulat d'Euclide, qui équivaut à la possibilité des figures semblables; 2° l'axiome de l'unicité de la ligne droite, sans aucune exception."⁶

El otro axioma de la geometría euclidiana de corte empírico era el axioma de las tres dimensiones. Para Couturat este axioma aunque es algo que conocemos por la experiencia es una verdad necesaria y *a priori*, que se impone a nuestra sensibilidad. Ello determina que todo lo que conocemos experiencialmente venga regido por este *a priori*.

En conclusión y definiendo ahora la concepción de Couturat: el espacio es a la vez una forma del entendimiento y la sensibilidad. Lo que significa que si consideramos los axiomas comunes de la geometría —que vienen dados por el entendimiento— como *a priori*, tengamos también que considerar como *a priori* los axiomas propios de la geometría euclidiana, ya que son formas *a priori* de la sensibilidad. Esto es, su concepción se mueve en el más puro kantismo:

"En d'autres termes, toutes les propriétés de l'espace peuvent être connues a priori avec certitude, soit qu'elles découlent des conditions nécessaires de toute expérience possible, soit qu'elles résultent d'une condition de fait imposée à notre sensibilité."⁷

2. RESPUESTA DE RUSSELL A COUTURAT.

La respuesta de Russell no tarda en llegar. En un artículo de 1898, titulado *Les axiomes propres à Euclide sont-ils empiriques?*, Russell responde a todas estas críticas de Couturat. Después del panegérico de rigor, Russell comienza por establecer un punto en común entre su teoría y la de Couturat: el rechazo de la hipótesis convencionalista de Poincaré. Ya que la tesis convencionalista al concebir que los axiomas de todo tipo de geometría son convencionales, sobresee la cuestión de si los axiomas euclídeos tienen o no comprobación en la experiencia.

Una vez establecido este punto de coincidencia, esencial para poder discutir si estos axiomas son o no empíricos, Russell se propone demostrar que es posible saber empíricamente si nuestro espacio es o no euclidiano —aunque sea sólo «aproximadamente» euclidiano—⁸. Para ello propone una experiencia

⁶ *Ibidem*, p. 377.

⁷ *Ibidem*, p. 379.

⁸ "Nous sommes assurés, pour des raisons d'ordre empirique, que notre espace est approximativement euclidien: qu'il soit rigoureusement euclidien, c'est ce que nous ne savons pas et ne saurons jamais" (Russell, «Les axiomes propres à Euclide, sont-ils empiriques?» en la *Revue de Métaphysique et Morale*, 1899, pp. 759-776, p. 762).

sencilla de medición, que demuestra que con las mediciones efectuadas sobre nuestro espacio real, podemos saber si es aproximadamente euclidiano o no⁹.

En realidad para Russell, una vez establecidas las condiciones de posibilidad del espacio a través de los axiomas *a priori*, podemos en un segundo momento, saber como es nuestro espacio. Aunque, como el espacio euclidiano es un límite entre posibles espacios no euclidianos, la imperfección de nuestras mediciones nos impiden saber con exactitud si es exactamente o no euclidiano:

"Car l'espace euclidien est un cas limite, dont, par rapport aux distances mesurable, d'autres genres d'espace peuvent se rapprocher indéfiniment. Nous pourrions prouver que l'espace n'est pas euclidien, mais nous ne pouvons jamais espérer prouver qu'il est rigoureusement euclidien, tout de même que nous ne pouvons prouver rigoureusement la loi de la gravitation."¹⁰

Es en este sentido, explica Russell, cómo se puede entender que la Física sirva para demostrar cuál es nuestro espacio, y que a la vez podamos afirmar que la *posibilidad* de la geometría no depende de los resultados de la Física.

El siguiente aspecto que Russell tratará es la deducción que realiza Couturat, de que al ser imposible una magnitud absoluta —grandor— todas las magnitudes son relativas, de lo cual derivaba el autor francés que el espacio euclidiano es tan *a priori* como los desarrollados por la metageometría.

Russell se preguntará si es posible plantearse que la homogeneidad¹¹ sea una propiedad *a priori* del espacio. Cree Russell que no, ya que si bien puede haber un aumento lineal en las figuras, este aumento nunca se realiza sobre los ángulos. Luego los ángulos expresan un grandor absoluto que no puede cambiar sin cambiar la figura. Para Russell la constante espacial no puede ser considerada como un grandor, por lo que acabamos de decir: existe una vinculación de la constante espacial al grandor de los ángulos de tal manera que no se pueden cambiar éstos sin cambiar aquélla. Y otra razón es que dos constantes espaciales no son comparables entre sí:

"... par rapport à d'autres espaces du même genre, la constante spatiale n'a pas de grandeur particulière. Car la grandeur est inférée de l'égalité et de l'inégalité, qui impliquent comparaison. Mais deux espaces ne peuvent coexister dans le même monde. Conséquemment leurs constantes spatiales ne peuvent être comparées."¹²

Además la relación entre cada espacio y su constante espacial es única; esto es, no se pueden considerar diversos espacios con la constante espacial euclidiana: sólo hay un espacio euclidiano. Del mismo modo, los espacios no-euclidianos tienen una relación única con su constante espacial.

Después de contestar a las críticas concretas que le realiza Couturat, Russell se preocupa de dar una fundamentación filosófica general de su demostración de la aposterioridad del espacio euclidiano. Para lo cual, incide de nuevo en los planteamientos que hacía en el capítulo I de su *Ensayo*, sobre los

⁹ La experiencia consiste en coger una moneda, marcar en su canto un punto y después desarrollar sobre una línea recta su circunferencia; de donde resulta una medición determinada. Si ponemos en relación el diámetro de la moneda con su circunferencia, y esta resulta ser el número trascendente infinito no periódico π , el espacio será euclidiano.

¹⁰ *Ibidem*, p. 761.

¹¹ Recordemos que homogeneidad se trata aquí de que dos figuras puedan ser iguales, aunque de tamaños distintos.

¹² *Ibidem*, p. 764.

conceptos de aprioridad y necesidad. Russell pretende en todo momento diferenciar claramente, lo estrictamente filosófico, de lo que es meramente psicológico.

Como hemos visto, Couturat criticaba a Russell el que no hubiera demostrado de forma explícita la *aposterioridad* de los axiomas euclidianos y que su demostración haya sido de tipo negativo.

Russell reincide en su argumentación: el que haya ciertos axiomas del espacio euclídeo, como el de las paralelas, y el de las tres dimensiones, que han sido puestos en cuestión por la geometría, implica que se pueden establecer geometrías que no contengan dichos axiomas. Luego estos axiomas no son necesarios. La no necesidad no significa contradicción, sino sólo, que son posibles.

Por otra parte, el carácter empírico de estos axiomas, señala Russell, no significa que sean variables con el tiempo, esto es, que hoy haya tres dimensiones y al día siguiente nos encontremos con más o menos dimensiones¹³. Para Russell esto es absurdo ya que el espacio es absolutamente independiente del tiempo¹⁴. Para poder afirmar esto, Russell se basa en que para él, el espacio es una realidad independiente del sujeto:

"...l'espace, en tant qu'il est réel, a une réalité extérieure à nous-mêmes."¹⁵

La universalidad de los axiomas no radica en que sean *a priori*, sino en que se apliquen a todo lo espacial. Así, para Russell, la universalidad de los axiomas euclídeos no proviene de ellos mismos, sino que el espacio al ser uniforme —y esto es lo *a priori*—, hace que todos los objetos espaciales estén sometidos a la geometría euclidiana.

Para el matemático francés, el que fuese imposible deducir lógicamente los axiomas propios de Euclides de los generales de la geometría métrica, no explicaba suficientemente que Russell hubiese demostrado que fuesen empíricos. De este modo si los axiomas propios de Euclides son necesarios para la experiencia, como parece, son *a priori*.

Russell sin embargo pretende disociar esta necesidad de la *aprioridad*. La primera afirmación que hace Russell es que tanto la geometría euclidiana como las no-euclidianas, garantizan igualmente la posibilidad de una multiplicidad. El que el espacio euclidiano aparezca como una intuición *a priori*, no significa en modo alguno que no hubiesen sido posibles igualmente como *a priori* las otras geometrías o espacios. Esto es, y aquí coinciden Couturat con Russell, el espacio es una intuición *a priori*, y es necesario. Pero no que tal o cual geometría —geometría euclidiana, geometría de Riemann, geometría de Lobatchewski— sea la necesaria.

"Nous pouvons donc conclure seulement que, si les notions mathématiques doivent s'appliquer au monde, quelque chose d'analogue à une intuition a priori est nécessaire. Mais cet a priori semble

¹³ "Ce qui la rend supérieure (a la proposition de las tres dimensiones) a celle-ci, et y introduit un élément de nécessité, c'est la proposition que l'espace est nécessairement immuable. C'est ce qui fait qu'il est nécessaire, si l'espace a trois dimensions, qu'il ait toujours eu, et doive toujours avoir le même nombre de dimensions. Douter que l'espace ait trois dimensions est, bien entendu, légitime en dernière analyse, mais seulement au degré où nous révoquons en doute toutes les vérités de fait et toutes les données des sens. Je dirai donc que l'axiome des trois dimensions et l'impossibilité d'en découvrir une quatrième ne sont pas des propositions relatives à notre sensibilité, mais ont toute la certitude possible pour des vérités de fait" (*Ibidem*, pp. 773-774).

¹⁴ Actualmente la teoría de la relatividad ha demostrado todo lo contrario. El espacio y el tiempo son interdependientes. Es más, si antes se solía reducir el tiempo a una cuarta dimensión del espacio como hacía Minkowski en su diagrama, la teoría especial de la relatividad tiende a lo contrario, a temporalizar el espacio.

¹⁵ *Ibidem*, p. 773. "Cet axiome, je le maintiens, n'a pas de rapport à notre sensibilité, mais établit, une proposition qui, vraie ou fautive, concerne le monde extérieur. Le fait que les trois dimensions son perçues par nous ne prouve pas, excepté pour un disciple de Berkeley, qu'elles existent seulement dans nos perceptions" (*Ibidem*, p. 773).

moins absolu que celui des liaisons nécessaires entre idées mathématiques, car ces liaisons, étant hypothétiques demeurent vraies, même s'il n'existe pas une pluralité de sujets."¹⁶

Así pues, el espacio euclidiano, en tanto que hace posible la "diversidad material" es *a priori*, pero no es *a priori* en cuanto al modo concreto en como *resuelve* esta diversidad material.

Ya tenemos pues dos teorías sobre el espacio: la kantiana de Couturat, para quien el espacio es *a priori* y tiene forma euclidiana; y la semi-kantiana de Russell para quien los axiomas de la geometría proyectiva y métrica son también *a priori*, pero la decisión sobre la forma de nuestro espacio procede de la experiencia, es empírica. Veamos ahora la tercera teoría: la convencionalista de Poincaré.

¹⁶ *Ibidem*, p. 775.

CAPÍTULO IV

EL ESPACIO Y LA GEOMETRÍA

EN H. POINCARÉ

1. CRÍTICA CONVENCIONALISTA DE POINCARÉ.

Si las críticas anteriores eran dirigidas a Russell desde el ámbito kantiano, también va a recibir censuras desde el punto de vista convencionalista por parte de Poincaré. Al año siguiente de la publicación del artículo de Couturat, en 1899 Poincaré realizará una revisión de los planteamientos de Russell, en un artículo titulado «Des fondements de la géométrie, a propos d'un livre de M. Russell» aparecido también en la *Revue de Métaphysique et Morale*. En un tono mucho más mordaz que el anterior, Poincaré discutirá todos los planteamientos de Russell desde el punto de vista *convencionalista*.

Las objeciones de Poincaré están divididas en dos partes: una primera, en la que rechaza los axiomas de la geometría que enunciaba Russell, y una segunda en la que criticaba la pretendida separación que establece el filósofo de Cambridge entre la geometría proyectiva y la geometría métrica.

Respecto de la geometría proyectiva, Poincaré criticará la reducción de sus axiomas a tres, además de considerarlos mal formulados. También rechaza el que se puedan considerar los axiomas de la geometría proyectiva como las condiciones necesarias de toda experiencia:

"Nous devons donc conclure, contrairement à ce qu'affirme M. Russell, que les axiomes de la géométrie projective ne sont pas des conditions indispensables de toute expérience."¹

¹ Poincaré, «Des fondements de la géométrie. A propos d'un livre de M. Russell» en la *Revue de Métaphysique et Morale*, 1899. pp. 251-279. p. 255.

Con respecto a la geometría métrica, Poincaré revisará los axiomas dados por Russell. Primeramente niega que ciertos postulados de la geometría proyectiva sean comunes con la geometría métrica, concretamente los postulados de la homogeneidad del espacio y la relatividad de posición. Estos postulados tienen para Poincaré, distinta significación en una y otra geometría: no son, por lo tanto, comunes a ambas geometrías². Poincaré rechaza también el axioma de libre movilidad de Russell, ya que introduce un término que para él, no tiene ninguna significación matemática: la forma o figura geométrica. La definición que da Poincaré de este principio, con la terminología de Klein, será la siguiente:

"Le principe de libre mobilité doit s'énoncer ainsi dans le langage mathématique: Il y a un groupe de transformations qui conserve certaines propriétés des figures, et l'ensemble de ces propriétés constitue ce que nous appelons leur forme."³

Este principio de la libre movilidad que supone dos figuras iguales, presupone a su vez el que sean equivalentes en la geometría proyectiva⁴. Poincaré también discutirá el concepto de distancia que da Russell, concepto fundamental ya que sobre él se constituye toda la geometría métrica. Primeramente este concepto se corresponde a su homólogo proyectivo de línea recta. Después pasa a establecer que en verdad la distancia no viene dada por la relación unívoca de dos puntos, sino que más bien es la relación que existe entre dos *parejas* de puntos. Además, si la distancia puede ser considerada como grandor —magnitud— mensurable, para ello habrá de hacerse uso del concepto proyectivo de línea recta. Si, en cambio, se trata de la distancia como grandor no mensurable se puede prescindir perfectamente de esta noción.

Todas estas precisiones sobre los axiomas de la geometría métrica y geometría proyectiva vienen, en opinión de Poincaré, a demostrar que los axiomas dados por Russell son en realidad definiciones disfrazadas, carentes de todo valor. Por todo ello, Poincaré enjuicia muy duramente el trabajo de Russell diciendo:

"Nous avons passé en revue les axiomes que M. Russell considère comme des conditions indispensables de l'expérience. Pour la plupart d'entre eux, il ne l'a nullement établi; en employant dans ses énoncés des termes vagues et mal définis, en rendant les contours aussi flous que possible, il arrive à accumuler assez de brouillard pour empêcher de discerner tel axiome qui s'impose véritablement à nous de tel autre axiome plus précis qu'il veut nous imposer. Mais il n'a pu faire illusion qu'à ceux qui n'ont pas voulu prendre la peine de dissiper ce brouillard."⁵

Pasemos ahora a la parte más importante para nosotros, de la crítica de Poincaré a Russell: su opinión de que los axiomas propuestos como empíricos por éste no son tal, y que en conjunto nada de la geometría puede considerarse empírico:

"Mais si ces axiomes ne sont pas des conditions indispensables de l'expérience, devons-nous croire pour cela qu'ils sont empiriques? Loin de moi cette pensée; tout au contraire, j'estime que c'est

² "Au fond, si l'on traduit tout cela dans le langage mathématique, cela veut dire que les deux géométries ont ceci de commun que l'une et l'autre étudient un groupe; mais que ce n'est pas le même groupe; que cependant le groupe métrique est contenu dans le groupe projectif" (*Ibidem*, p. 257).

³ *Ibidem*, p. 260. Cfr. *El valor de la ciencia*, p. 50 ss. y 68.

⁴ Se vuelve a manifestar la idea expresada más atrás: "En d'autres termes, le groupe métrique doit être contenu dans le groupe projectif. Je vois bien que cette hypothèse est la plus commode et la plus naturelle; je ne vois pas qu'elle soit nécessaire" (Poincaré, «Des fondements de la géométrie. A propos d'un livre de M. Russell», p. 261).

⁵ *Ibidem*, p. 264.

à tort que M. Russell attribue le caractère empirique à d'autres axiomes, par exemple au postulat d'Euclide.

Bien plus, le mot empirique, en pareille matière, me semble dénué de toute espèce de sens."⁶

Para Poincaré ninguna experiencia de corte físico puede demostrar los postulados geométricos; ya que todas las experiencias de la física están fundadas sobre las definiciones geométricas. En esto coinciden la crítica de Poincaré y la de Couturat, aunque con orientación bien distinta: Poincaré, para demostrar que los axiomas son convencionales; y Couturat para demostrar que son necesarios. Pero además, inclusive en la física, los cuerpos y las figuras reales no «coinciden» con los tratados por la geometría, de los que son tan sólo aproximaciones.

Otro aspecto del convencionalismo de Poincaré, es que no podemos encontrar fenómenos espaciales que sólo se den en un tipo de geometría y no puedan traducirse a otra geometría. Para Poincaré toda experiencia puede darse en uno u otro espacio⁷. Por lo cual, ninguna experiencia puede decidir el tipo de espacio en que estamos, ya que ésta puede valer tanto para afirmar un espacio euclidiano, como riemanniano o lobatcheswkiano.

Criticando la demostración empírica que había realizado Russel de que nuestro espacio tiene aproximadamente forma euclidiana, Poincaré plantea la imposibilidad de que lo empírico del espacio pueda ser puesto de manifiesto por una experiencia, que al no seguir el principio de razón suficiente, ni el de relatividad del espacio, haya de ser tenida por exterior y por lo tanto *a priori*. Para ello Poincaré pone el ejemplo de un sistema material cualquiera en el que las posiciones de los cuerpos vienen determinadas unas por otras, siguiendo la llamada ley de relatividad. Estas posiciones serán distintas si son consideradas según la geometría euclidiana o no-euclidiana, lo que es indiscernible, ya que tanto en una como en otra, las posiciones —y también las velocidades— vienen dadas de forma relativa al estado interno de cada sistema. Así pues todas las mediciones que realicemos en este sistema dependerán únicamente de los valores iniciales que consideremos. La definición de ley de relatividad que da Poincaré, hace que toda experiencia que se realice en el espacio euclidiano, pueda realizarse también en cualquier geometría no-euclidiana que consideremos, ya que no violaría en ningún momento el principio de relatividad, que convenientemente enunciado diría lo siguiente:

"L'état des corps et leurs distances mutuelles à un instant quelconque, ainsi que les vitesses avec lesquelles varient ces distances à ce même instant, dépendront seulement de l'état de ces corps et de leurs distances mutuelles à l'instant initial; mais elles ne dépendront ni de la position absolue initiale du système, ni de son orientation absolue, ni des vitesses avec lesquelles variaient cette position et cette orientation absolues à l'instant initial."⁸

Por ello todos los axiomas geométricos, tanto los que Russell consideraba como empíricos como los considerados como *a priori*, no son para Poincaré ni lo uno ni lo otro. Entre estas dos posibilidades: lo empírico o lo *a priori*, Poincaré dice que existen otras dos posiciones intermedias: la kantiana de los juicios sintéticos *a priori* y la que defiende él: el convencionalismo.

⁶ *Ibidem*, pp. 264-265.

⁷ "Aucune expérience ne sera jamais en contradiction avec le postulat d'Euclide; en revanche aucune expérience ne sera jamais en contradiction avec le postulat de Lobatcheffsky" (*Ibidem*, p. 267).

⁸ *Ibidem*, p. 269.

"En ce qui me concerne, j'adopte une autre position intermédiaire: je crois que ces autres formes sont non-seulement possibles et propres, si elles existent, à remplir le rôle de l'espace; mais qu'elles existent au même titre que l'espace et sont seulement rejetées comme moins commodes ..."⁹

Aunque Poincaré al defender su posición convencionalista rechaza la de Kant, considera, no obstante, que Russell no ha conseguido refutar la tesis kantiana sobre el espacio. Russell no ha conseguido demostrar contra la teoría del espacio de Kant que exista una experiencia de carácter empírico que pruebe que el espacio tenga esta o aquella geometría.

Además la geometría métrica y la geometría proyectiva son equivalentes. Para Poincaré ésta última no posee un carácter especialmente *a priori* que la diferencie de la geometría métrica. Así por ejemplo, si Russell estudia en la geometría métrica la igualdad de las figuras, y esta igualdad se basa en los movimientos que puedan realizar estas figuras¹⁰, en la geometría proyectiva también se puede hablar de la igualdad o desigualdad de las figuras, solamente que ahora los movimientos son transformaciones proyectivas. Para Poincaré, movimientos y transformaciones son exactamente iguales, y en definitiva los primeros pueden ser tenidos como una clase determinada de los segundos.

Tampoco quedaba justificada la distinción entre geometría métrica y geometría proyectiva en el tercer axioma que mencionaba Russell. Para Poincaré la verdadera geometría cualitativa es el *Analysis Situs* —lo que hoy se llama topología—, en el que se hace abstracción de cualquier aspecto métrico. Además la geometría proyectiva contiene elementos métricos como la razón anarmónica que no tienen por qué ser eliminados de ésta; la geometría proyectiva no es una geometría que tenga que excluir por definición todo lo métrico. Esto sólo se realiza bajo ciertas circunstancias, pero que en ningún momento son necesarias¹¹.

Después, Poincaré responderá a las críticas hechas por el filósofo británico tanto a su teoría convencionalista¹², como a la teoría e hipótesis de Helmholtz. Para el matemático francés los axiomas de Russell no son sino definiciones disfrazadas y ello no solamente respecto de los axiomas de Euclides, sino que inclusive también los axiomas de la teoría de Russell. Para el matemático francés, Russell no da más que definiciones que pueden ser cambiadas en un sentido u otro, ya que son *convencionales*. Uno de los ejemplos que pone Poincaré es el de la distancia, que para Russell es un axioma, mientras que para él, en línea con su pensamiento, no se trata más que de una definición¹³. Para Poincaré:

"... pour qu'une propriété soit un axiome ou un théorème, il faut que l'objet qui possède cette propriété ait été complètement défini indépendamment de cette propriété."¹⁴

⁹ *Ibidem*, pp. 270-271.

¹⁰ Estos movimientos son traslaciones, rotaciones, y las combinaciones entre ellas. En definitiva se puede observar que la igualdad o desigualdad de figuras se basa en el axioma de libre movilidad, y éste a su vez en la homogeneidad del espacio.

¹¹ *Cfr. Ibidem*, p. 272.

¹² Al parecer, Couturat denominaba a la teoría de Poincaré convencionalismo, como también después aparece esta denominación en Amor Ruibal. Este calificativo no le debía gustar mucho a Poincaré, que con ocasión de responder, al artículo de E. Le Roy «Science et philosophie» publicado en varias entregas en esta misma revista, escribirá su libro *El valor de la ciencia*, en el cual trata de matizar su concepción filosófica y científica separándose de la más convencionalista de Le Roy (Ver *supra* p. 241).

¹³ Si la distancia es una definición, y es lo que diferencia la geometría métrica de la proyectiva, para Poincaré esta diferencia no será más que una diferencia convencional ya que si cambiamos esta definición, la diferencia entre la geometría métrica y proyectiva desaparecerá.

¹⁴ Poincaré, "Des fondements de la géométrie. A propos d'un livre de M. Russell", p. 274.

Para Poincaré, la distancia no resulta definida de este modo; tampoco puede ser conocido el concepto de distancia de forma empírica, ya que se necesitaría una definición previa para poder aplicar este conocimiento empírico. En definitiva, para Poincaré en el caso de la distancia, que resulta paradigmático para entender su concepción nominalista, ésta es definida de modo absolutamente convencional.

La defensa que hace de las reconstrucciones imaginarias de otros espacios que realiza Helmholtz, le sirven para reafirmarse en su teoría. Primeramente defiende a Helmholtz sobre la posibilidad de imaginar y describir los espacios no-euclidianos. Para Poincaré es posible imaginar estos espacios ajenos a nuestra experiencia ya que poseen los mismos elementos que nuestro espacio, aunque eso sí relacionados de forma diferente:

"... dans le monde non-euclidien, nos sensations seraient composées des mêmes éléments que dans notre monde actuel, mais ces éléments s'associeraient et se succéderaient suivant d'autres lois. On peut donc parfaitement décrire ce monde non-euclidien, non en termes conceptuels, mais en composant un tableau nouveau avec des éléments connus."¹⁵

Después, la segunda crítica que dirige Russell a Helmholtz le da ocasión para poner un ejemplo que demuestra la validez de su teoría. La crítica de Russell a Helmholtz es que la geometría no es una teoría sacada de la experiencia externa; pero mientras que para Russell esto demostraría que la geometría —al menos en sus aspectos fundamentales— es *a priori*, para Poincaré lo único que demuestra es que las experiencias con los cuerpos sólidos nos da "l'occasion de créer la géométrie". Poincaré prueba como un «geómetra líquido», en su «espacio líquido», podría crear así mismo una geometría correcta con todos los elementos de nuestra geometría cotidiana. Lo único que cambiaría entre ésta y aquella serían las definiciones y las relaciones de los objetos de este espacio. Así mismo, Poincaré desde el punto de vista del *Analysis Situs*, el único auténticamente cualitativo, desarrolla a modo de ejemplo y muy brevemente una geometría general que contenga a las euclidianas y a las no-euclidianas. Un geómetra que viviese en un espacio no-euclidiano entendería de manera completamente natural, estas condiciones generalísimas, construyendo una geometría no-euclidiana y pareciéndole la geometría euclidiana completamente extraña e imposible.

Con todo ello, Poincaré pretende demostrar que le parece tan absurdo presentar los axiomas geométricos tanto como empíricos, como *a priori*. Todo esto aparecerá de manera positiva tratado en sus libros, en los que su concepción del espacio, viene fundamentada por una parte por el convencionalismo para el espacio matemático y por otra, por una interpretación de corte psíquico-fisiológica para el espacio de nuestro conocimiento.

¹⁵ *Ibidem*, p. 275-276. Para Russell: "... es inútil, si es que nuestro espacio ambiente es euclidiano, querer poseer un poder de imaginar el espacio no euclídeo. (...) nosotros no podemos imaginar, aunque podemos concebir y describir un espacio diferente del que tenemos actualmente..." (*Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, p. 67, n° 68).

Pero admite la posibilidad de su imaginabilidad si mantenemos que de momento, no se sabe exactamente si nuestro espacio es o no euclídeo. Aunque según la teoría espacial de Russell que mantiene ciertos axiomas de la geometría como *a priori*, mientras que otros son empíricos: "la imaginabilidad o no imaginabilidad de los espacios de la metageometría se convierte en cuestión sin importancia" (*Ibidem*).

2. SOBRE LOS AXIOMAS DE LA GEOMETRÍA.

Russell responderá también a Poincaré, como lo hizo anteriormente a Couturat, en un artículo en la misma revista titulado: "Sur les axiomes de la géométrie". Esta respuesta se divide en tres partes: en la primera de ellas intenta contestar a la cuestión, para nosotros esencial, sobre el carácter empírico de los axiomas euclidianos. En la segunda parte, intentará refutar la crítica de Poincaré a sus axiomas sobre la geometría proyectiva. Y por último tratará de reconstruir (o mantener) sus definiciones de distancia y de línea recta a pesar de las críticas que le han sido realizadas.

Russell comienza analizando las tres maneras posibles en las que se puede decir que la geometría euclidiana no puede ser ni verificada ni falseada. Esas tres maneras son las siguientes:

La primera manera es suponiendo que la geometría euclidiana es conocida *a priori* y por lo tanto, la experiencia no puede dar su valor de verdad. Como se puede apreciar, esta postura es la de Couturat.

Otra hipótesis, vendría a concebir que una de las geometrías es verdadera y otra es falsa, pero nosotros no podemos saber cuál es la verdadera y cuál es la falsa. El problema reside en nuestro conocimiento, no en la verdad o falsedad misma de las geometrías. Es decir, es una posición agnóstica respecto al conocimiento del espacio.

Y la tercera manera, en la que Russell encuadraría la concepción de Poincaré, es la de concebir que la geometría euclidiana no es ni verdadera ni falsa, así como tampoco lo son las geometrías no euclidianas. Por ello no podemos probar su verdad o falsedad. Aquí el agnosticismo no reside en la limitación de nuestro conocimiento, como en el caso anterior, sino en el mismo carácter de las geometrías.

Russell pasará por alto la primera manera de concebir los axiomas geométricos como *a priori*, que ya había refutado en su artículo de réplica a Couturat, y se centrará ahora en las otras dos hipótesis, la agnóstica y la convencionalista. Para Russell la diferencia entre esta dos formulaciones depende de la contestación que se de a las siguientes:

"1^a La Géométrie euclidienne est-elle une pure convention, ou bien est-elle vraie ou fausse?"

2^o Peut-on découvrir si elle est vraie ou fausse?"¹⁶

La cuestión principal como puede verse es la primera, ya que de su respuesta afirmativa depende el que pueda plantearse la segunda. El problema principal reside en ver cual es el carácter de los axiomas propios de la geometría euclidiana. Si son convencionales, no podrá entonces hallarse ninguna prueba de su verdad o falsedad. Si no lo son entonces podremos encontrar un método de su verdad o falsedad. Para Russell el saber si la geometría euclidiana es o no convencional, es un problema filosófico.

"... la question de savoir si la Géométrie euclidienne est ou n'est pas une pure convention est d'ordre philosophique. Elle ne porte nullement sur la nature réelle de l'univers, mais seulement sur la

¹⁶ Russell, «Sur les axiomes de la géométrie» en la *Revue de Métaphysique et morale*, 1899, pp. 684-707; p. 685.

portée des propositions en question; elle devrait être résolue de la même manière dans tous les univers possibles, ou même s'il n'existait pas d'univers du tout."¹⁷

Manteniéndose, pues, en este plano netamente filosófico, Russell analiza la teoría de Poincaré. Según Russell, el matemático francés admite al menos que ciertas proposiciones geométricas tienen alcance real. Por ejemplo, si el número de dimensiones del espacio es de tres o más dimensiones, puede ser comprobado en la realidad. Pero según parece, para Poincaré hay otro tipo de proposiciones geométricas que no tienen este alcance, por ejemplo las proposiciones métricas: estas proposiciones no indican nada sobre la realidad, sino más bien dicen relación al procedimiento de medida. Para Russell esto aparece como consecuencia lógica de que Poincaré no admita que del conocimiento del volumen o del área de los cuerpos podremos saber si nuestro espacio es euclidiano o no euclidiano:

"Du moment qu'il n'admet pas cela, il lui faut soutenir que la mesure ne nous fournit pas la grandeur des figures de l'espace, mais montre simplement quel résultat donne la mesure elle-même."¹⁸

Russell plantea por qué Poincaré emplea la operación de la medida, puesto que cualquier otra operación igualmente nos serviría, ya que sus resultados, como ocurre con la medida, estarán en relación con el procedimiento seguido, y de ningún modo, en como sea la realidad. La medida aparece como la puesta en relación de una distancia entre dos puntos con otra distancia marco, a través de unas ciertas reglas arbitrarias. Pero así mismo, este convencionalismo nos llevaría a considerar esta misma distancia-modelo como arbitrariamente establecida.

El convencionalismo nos obliga a dar un paso más, según Russell: el mismo concepto de distancia ha de ser establecido de manera arbitraria. La relación entre dos puntos puede ser considerada como "distancias" diferentes, y dentro del convencionalismo, igualmente válidas¹⁹.

También Russell responde a la crítica de Poincaré, de que la medida no se realiza sobre las figuras geométricas sino sobre los cuerpos reales, y éstos no son figuras geométricas perfectas. Para Russell la geometría es la base de la Dinámica: al ser inherentes a ésta, aceleraciones, velocidades, y posiciones le es necesario, pues, determinar distancias. Por lo tanto, si es imposible la verificación de las proposiciones geométricas, es imposible igualmente la verificación experimental de todas las leyes de la física, lo cual es absurdo. Además reprocha el filósofo inglés a Poincaré que si admite que los movimientos siguen aproximadamente el grupo de los movimientos euclidianos, tendría así mismo, que

¹⁷ *Ibidem*, p. 686. Quizá por los problemas epistemológicos en los que se desenvuelve la geometría y en general las matemáticas, es por lo que en su ensayo posterior, *Los principios de la matemática*, trata de evitar la referencia a la realidad de las proposiciones matemáticas, para tratar exclusivamente los problemas matemáticos desde un punto de vista lógico: "La Geometría puede considerarse como una pura ciencia *a priori* o como el estudio del espacio real. En este último sentido, sostengo que es una ciencia experimental, que debe desarrollarse por medio de cuidadosas mediciones. Pero no es en este sentido en el que voy a estudiarla. En cuanto rama de la matemática pura, la Geometría es estrictamente deductiva, indiferente a la elección de sus premisas y al problema de si existen (en sentido estricto) entidades tales como las definidas por sus premisas" (Russell, *Los principios de la matemática*, ed. cit., p. 688, n° 352).

¹⁸ Russell, «Sur les axiomes de la géométrie», p. 686.

¹⁹ Aquí Russell vuelve a retomar la paradoja del grandor y la medida. Russell criticará a Poincaré el que plantee la distancia como la relación entre dos pares de puntos, siendo dos a dos iguales (esto es $AB = CD$). Para Russell sin embargo, esta definición de distancia ya supone la distancia, puesto que AB y CD son distancias ya antes de ser comparadas. Así pues, mientras que para Russell la medida *descubre* la distancia, para Poincaré sin embargo, la medida *crea* la distancia. Y en consecuencia, mientras para Russell existe un método bueno y uno malo para medir la distancia, siendo el bueno el que nos de resultados verdaderos y malo el que los de falsos, para Poincaré todos los métodos son iguales, porque son indiferentes, ya que el resultado viene determinado exclusivamente por el método.

Como se puede observar, Russell utiliza aquí, el argumento opuesto que cuando responde a las críticas de Couturat (Cfr. «Les axiomes euclidiens sont-ils empiriques?», p. 763, nota 2).

admitir la posibilidad de que las proposiciones geométricas puedan o no verificarse con los objetos de la realidad.

Esto le llevará a Russell a plantear la cuestión que venimos discutiendo, de la manera siguiente:

"Y a-t-il quelques Jugements d'existence qui seraient vrais dans un monde euclidien, et faux dans un monde non-euclidien (ou vice versa)?"²⁰

Para Russell es evidente que existen tales juicios de existencia, y pone varios ejemplos que lo demuestran. Con lo cual se deduce que podemos determinar empíricamente si nuestro espacio es o no euclídiano.

En conclusión: como se puede observar en el desarrollo de esta argumentación, Russell no logra responder de manera muy fundamentada a la cuestión primera que se planteaba sobre el alcance de las proposiciones de la geometría euclidiana. Las proposiciones que pone como ejemplo de aquellas que pueden demostrar si la geometría euclidiana es corroborable o no en la realidad, también pueden ser utilizados de forma negativa, por lo que a las proposiciones geométricas podríamos considerarlas sin ninguna dificultad, como convencionales. De hecho la afirmación última de Russell es casi de tipo dogmático:

"Je dis que ce sont là des Jugements d'existence, et qu'ils sont vrais ou faux. Je ne m'inquiète pas pour le moment, de savoir lequel des deux: tout ce que je demande, c'est qu'on admette cette alternative."²¹

En términos estrictamente filosóficos, creemos que Poincaré tiene en este punto razón, por lo que la posición realista de Russell se debilitaría.

Una vez que da por resuelta la primera cuestión, Russell pasa a la segunda: las pruebas sobre cuál es nuestra geometría o lo que viene a ser lo mismo, si la geometría euclidiana puede demostrarse empíricamente o no. Para estas pruebas se remite a su artículo anterior, aunque va a precisar ciertas cuestiones. Primeramente, para Russell, el que la experiencia no nos dé resultados exactos no significa que estos sean totalmente inválidos. Según el filósofo británico, para conocer nuestra constante espacial no hace falta que nuestras medidas sean exactas ni que las líneas rectas sean absolutamente rectas, basta tan sólo con que sean aproximadamente rectas²². Por ello, Russell en el resto del artículo se va a referir a las rectas como "aproximadamente rectas" y a los resultados de las medidas "conducen aproximadamente" con los de la geometría euclidiana. Esto es, nuestra constante espacial se encuentra entre unos valores determinados que la limitan, y que por lo tanto la determinan para que nuestro espacio *no sea ni hiperbólico ni elíptico*.

Una vez afirmado esto, Russell, se preocupará de demostrar por qué, a pesar de la inexactitud de los datos de la experiencia, pueden ser éstos considerados válidos para verificar o falsear el que nuestro espacio sea o no euclídiano. Las razones son las siguientes: primeramente, según Russell no se puede pedir a las pruebas empíricas la certeza de las pruebas lógicas. Éstas son exactas, rigurosas y

²⁰ *Ibidem*, p. 689.

²¹ *Ibidem*, p. 690.

²² "D'ailleurs, Je n'admets pas qu'on puisse douter un seul instant que la constante spatiale se trouve entre certaines limites plus ou moins déterminables" (*Ibidem*, p. 693).

ciertas, y si las pruebas empíricas tuviesen la exactitud, el rigor y la certeza de las pruebas lógicas, serían por ende pruebas lógicas y no empíricas.

Además, para Russell toda experiencia no se apoya en sólo un dato, sino sobre varios datos, y las leyes experimentales²³ se encuentran vinculadas entre sí, una con otra formando un sistema. Así pues, si bien no encontramos una experiencia única para demostrar que nuestro espacio es euclidiano, sin embargo es el conjunto de la Física y sus experiencias, las que presuponen y demuestran este tipo de espacio. Toda experiencia nos revela dos cosas: cómo es nuestro espacio, y cómo se comportan los cuerpos en este espacio. Para Russell la armonía entre las hipótesis geométricas y físicas, hace que tengamos que tomarlas como ciertas:

"Il existe des hypothèses géométriques et dynamiques qui ont été trouvées harmonieuses. En tenant compte, dans nos mesures, des altérations qu'indiquent nos hypothèses mécaniques, nous obtenons des résultats de mesure qui concordent approximativement, en ce qui concerne les déformations des corps mesurés, avec les résultats que les mêmes hypothèses mécaniques nous auraient conduits à attendre d'eux. Il est extrêmement douteux que quelque autre hypothèse puisse produire cet accord, et tant qu'on n'aura pas découvert une telle hypothèse et montré qu'elle réussit dans le détail, la Géométrie et la Dynamique actuelles doivent, être acceptées comme empiriquement prouvées, conformément à la méthode habituelle des sciences inductives."²⁴

El carácter interrelacionado de las leyes científicas hace que no tengamos que fijarnos únicamente en una experiencia sino que haya de tenerse en cuenta el conjunto de las experiencias físicas que nos dan a conocer lo común de nuestro mundo.

En este punto, Russell llama en su ayuda al sentido común que nos hace escoger la hipótesis más razonable de entre aquéllas que darían cuenta de los mismos resultados —lo que sería un toque de pragmatismo «a lo Poincaré»—:

"Mais comme les résultats étaient compatibles avec cette hypothèse, on ne trouvait pas de raison suffisante pour heurter le sens commun.[...] Ainsi, bien que la certitude absolue fasse défaut dans ces cas-là, on peut atteindre un très haut degré de probabilité."²⁵

Por último, Russell se refiere a la objeción hecha por Poincaré, con ocasión de la crítica de los ejemplos dados por Helmholtz para ilustrar el espacio no-euclidiano. Para Poincaré todos los espacios eran imaginables, y tenían que ser imaginados para hacer posible el *experimentum crucis*. En cambio para Russell sólo el espacio real es el imaginable, y es tarea posterior el decidir si corresponde al espacio euclidiano o no euclidiano. Y el que no podamos imaginarnos otros espacios, no es necesario para determinar si nuestra geometría es correcta o falsa, ya que si nosotros imaginásemos los elementos de otro espacio posible, tendríamos a la vez que imaginarnos las condiciones en las que esos elementos serían verdaderos o falsos. Por ello, para Russell en el presente estado de cosas, no se puede imaginar otros espacios posibles. Además, la falsa idea que fundamenta la posible representación imaginativa de otros espacios, se asentaba en el hecho de que las propiedades que se predicasen de la recta euclidiana, serían igualmente predicables de la recta no euclidiana. Para Russell acontece todo lo contrario;

²³ "Tout les lois expérimentales forment une sorte de système tel qu'aucune d'elles n'est prouvée par une seule expérience, à moins qu'on n'admette la vérité de plusieurs autres lois. Mais au moyen de plusieurs expériences on obtient en quelque sorte un système d'équations simultanées, dont on peut tirer toutes les quantités inconnues" (*ibidem*, pp. 692-693).

²⁴ *ibidem*, pp. 691-692.

²⁵ *ibidem*, p. 693.

precisamente el que la recta cumpla unas ciertas propiedades y no otras, es lo que nos permitiría decidir si estamos en un espacio euclidiano o no²⁶.

Concluyendo esta primera parte de la respuesta de Russell a la crítica de Poincaré, citemos las siguientes palabras del filósofo inglés:

"En résumé, à moins que la Géométrie euclidienne ne soit vraie ou fausse, les expériences sur les corps, que M. Poincaré admet, son impossibles, et par là la Dynamique entière est ruinée; si ces expériences sont possibles, un nombre suffisante d'entre elles montrera quelle valeur doit avoir la constante spatiale, entre certaines limites. Nous ne pourrons jamais prouver expérimentalement que l'espace est rigoureusement euclidien, mais on ne peut assigner aucune limite théorique au degré d'approximation dont telle preuve est susceptible."²⁷

La segunda parte de la respuesta de Russell es menos relevante para nuestro estudio, por ello no la trataremos en detalle y sólo daremos una idea muy general de ella. Russell admite en parte la crítica que le dirigió Poincaré, de imprecisión de sus formulaciones de los axiomas de la geometría proyectiva, y da en este artículo seis axiomas en los términos más formales posibles. A estos axiomas los considera como suficientes²⁸, y esta suficiencia viene dada porque "la construction du quadrilatère de Staudt est unique", en tanto que el cuadrilátero de Staudt es la construcción proyectiva de la que puede derivarse toda la geometría proyectiva²⁹. Así mismo, de él puede derivarse el continuo ya que nos permite por un método constructivo obtener todos los puntos de una línea recta.

En lo que discrepa radicalmente Russell es en la crítica de Poincaré, de que sus definiciones son completamente indeterminadas y no definen nada. Lo trata muy brevemente en esta parte del artículo, donde se ocupa en la definición de línea recta, pero que más tarde explicará completamente en la tercera parte.

Pasemos pues a la tercera y última parte de este artículo, cuya importancia reside más en el aspecto filosófico que sirve para fundamentar el *Ensayo*, que en el aspecto matemático. Ante la cuestión planteada por Poincaré que solicitaba una definición rigurosa, independiente del V postulado de Euclides, y que no cayese en el terrible círculo vicioso, Russell va a responder simple y llanamente:

"...qu'on ne doit pas formuler une telle demande, parce que tout ce qui est fondamental est nécessairement indéfinissable."³⁰

Russell distingue dos tipos de definiciones: la definición matemática y la definición filosófica. Una definición matemática es para Russell la siguiente:

"Une définition mathématique consiste en une relation quelconque avec quelque concept connu, relation qui n'appartient qu'à l'objet ou aux objets à définir."³¹

²⁶ Con esto Russell se refiere concretamente al postulado de las paralelas.

²⁷ *Ibidem*, pp. 695-696.

²⁸ "On peut prouver par un calcul formel, en employant un langage non géométrique, que les axiomes énumérés sont strictement suffisants, et ne demandent à aucun moment un appel quelconque à l'imagination visuelle" *Ibidem*, p. 699. Esto lo realizará Russell en *Los principios de la Matemática* (1903).

²⁹ Hemos visto en la página 267 cómo se deriva de ella la razón anarmónica, y también que es anterior a las dos operaciones proyectivas fundamentales: la sección y la proyección.

³⁰ *Ibidem*, p. 700.

³¹ *Ibidem*.

Ello es debido a que las matemáticas sólo tratan de las relaciones³². En cambio la definición filosófica:

"Philosophiquement, un terme est défini quand on en connaît le sens, et son sens ne peut consister en relations avec d'autres termes."³³

Para Russell es absolutamente evidente que hay términos indefinibles³⁴. La pretensión de dar a todos los términos una definición, no llevaría más que al círculo vicioso, al absurdo. Por lo que, para el filósofo británico, hemos de tener necesariamente ciertos términos como indefinibles que sean concebidos primaria e inconcusamente:

"Qu'il y ait nécessairement des termes indéfinissables, c'est ce qui est évident après un moment de réflexion. Car les termes se définissent au moyen d'autres termes; essayer de définir tous les termes impliquerait donc forcément un cercle vicieux."³⁵

Así pues, Russell indica que todas aquellas proposiciones donde aparecen estos términos primitivos e indefinibles no son definiciones, son axiomas o teoremas:

"Par suite, toute proposition, quelle qu'elle soit, où ces notions figurent, est un axiome ou un théorème, et non une pure définition de mot."³⁶

Una vez aclarados estos presupuestos filosóficos, se comprende mejor la posición de Bertrand Russell cuando mantiene que la línea recta y la distancia son a este respecto indefinibles³⁷.

Ahora bien si la distancia y la recta son conceptos primordiales, indefinibles, se pueden establecer entre ellos relaciones —lo que en matemáticas se entiende como definición—.

Russell parte del concepto de punto, que viene dado filosóficamente como simple. Entre estos puntos se pueden establecer dos relaciones fundamentales: la distancia y la línea recta.

³² "Ce qui importe en Mathématiques, ce sont les relations entre les termes. Lorsque deux séries de termes ont les mêmes relations mutuelles, elles sont équivalentes aux yeux du mathématicien. Il ne s'inquiète pas de savoir ce que les termes sont eux-mêmes; seules leurs relations l'intéressent" (*ibidem*, p. 702). Ver también *Los principios de la matemática*, p. 397, nn° 8-9.

³³ Russell, «Sur les axiomes de la géométrie», p. 700.

³⁴ Russell pone aquí un ejemplo muy similar a los que después empleará Amor Ruibal para hablar de la noción: la letra y la palabra:

"Définir est une opération analogue à épeler. On peut bien épeler les mots, mais non les lettres. La question de M. Poincaré me place dans la situation désavantageuse d'un écolier à qui l'on demanderait d'épeler la lettre A, en lui défendant d'employer cette lettre dans sa réponse. Si cet écolier était mathématicien, il répondrait tout bonnement: A est la lettre qui précède B; et si on lui demandait d'épeler B, il dirait que c'est la lettre qui suit A. Mais s'il sait vraiment ce que c'est épeler il renoncera à la tâche, de désespoir" (*ibidem*, p. 701).

El término "épeler" significa deletrear, pero aquí sobre todo se emplea con el sentido básico de descomposición, ya que deletrear no es sino descomponer la palabra en las unidades últimas que son las letras, y éstas a su vez ya no se pueden descomponer.

³⁵ *ibidem*.

³⁶ *ibidem*, pp. 701-702.

³⁷ "Ces remarques s'appliquent manifestement à la distance et à la ligne droite. L'une et l'autre appartiennent, pour ainsi dire, à l'alphabet géométrique; elles peuvent servir à définir d'autres termes, mais elles sont elles-mêmes indéfinissables" (*ibidem*, p. 701).

"Entre deux points quelconques il y a deux relations fondamentales et indéfinissables. L'une d'elles est la distance. La distance est une grandeur sans signe et indivisible. L'autre relation est—ce que'on peut appeler (sous certains réserves) la direction; c'est la même chose que la ligne droit projective."³⁸

Ahora bien, estos dos conceptos son indefinibles, pero también son interdependientes. Esto es, para determinar un punto con respecto a otro, tenemos que fijar por un lado su distancia mutua, y también su dirección. Es necesaria la distancia, ya que sin ella todos los puntos que se encontrasen en la misma recta serían indiscernibles. Pero también es necesaria su dirección ya que de lo contrario, como ocurre con los puntos de la superficie de una esfera en la que todos ellos se encuentran en la misma relación de distancia con respecto al centro³⁹. Así pues la línea recta proyectiva y la distancia se coordinan, y de esta manera se pueden determinar todos los puntos de una recta.

Hasta aquí hemos expuesto la crítica que realiza el matemático francés al *Ensayo* de Russell. Sus puntos de vista sobre la ciencia y sobre el espacio, como se ha podido apreciar, son bien diferentes.

3. CONCEPCIÓN ESPACIAL DE POINCARÉ.

Para terminar el presente capítulo expondremos brevemente la teoría convencionalista de Poincaré sobre el espacio, ya que es una de las teorías a las que Amor Ruibal va a referirse directamente, cuando en el tomo X de los *P.F.F.D.* critica las teorías espaciales y la teorías científicas en general. En este apartado sólo expondremos la teoría de Poincaré sobre el espacio y la geometría, ya que la crítica de Amor Ruibal la expondremos seguidamente al comienzo del capítulo V. Con lo que la concepción de Poincaré y la crítica de Amor Ruibal, nos sirven de punto de unión y a la vez de inflexión, entre las reflexiones y polémicas anteriores, y la teoría del filósofo compostelano.

Las ideas geométricas de Poincaré, se hayan expresadas sobre todo en sus dos obras: *La valeur de la science* (1905) y *Science et méthode* (1908), que serán las que utilizemos para su exposición.

Para Poincaré, las geometrías de Lobachetswky y Riemann, habían cambiado por completo el panorama de la geometría. No sólo se obtenían geometrías distintas, sino que los mismos conceptos geométricos establecidos por Euclides en el s. V a.C., que parecían inamovibles, cambiaban ahora de significado:

"En el espacio conocemos triángulos rectilíneos cuyos ángulos suman dos rectos, pero conocemos igualmente triángulos curvilíneos cuyos ángulos suman menos de dos rectos. La existencia de unos no es más dudosa que la de los otros. Dar a los lados de los primeros el nombre de rectas, es adoptar la geometría euclidiana; dar a los lados de los últimos el nombre de rectas es adoptar la geometría no euclidiana. De modo que preguntar cuál geometría conviene adoptar equivale a preguntar a qué línea conviene dar el nombre de recta.

³⁸ *Ibidem*, p. 704.

³⁹ Esto le lleva a Russell a conceptualizar la distancia como un grandor superior a cualquier otro, ya que sirve para determinar unas cosas sobre otras:

"Ainsi l'avantage que la distance possède, au point de vue mathématique, sur d'autres grandeurs indivisibles, telles que le plaisir, est dû à la ligne droit, et par suite présuppose la Géométrie projective. Cette remarque s'applique, en conséquence, à toute la Géométrie métrique, qui, comme son nom l'indique, implique la possibilité de mesurer les grandeurs qu'elle étudie" (*Ibidem*, p. 707).

Es evidente que la experiencia no puede resolver una cuestión semejante."⁴⁰

Para Poincaré, además, todas estas geometrías tienen la característica de ser equivalentes entre sí, es decir, se pueden transformar unas en otras a través de funciones continuas: a cada punto de un espacio podemos hacerle corresponder el punto de otro espacio. Es a lo que Poincaré se refiere como "relatividad del espacio"⁴¹, es decir, poder pasar de un espacio euclidiano a un espacio no euclidiano, y viceversa, lo que les hace intercambiables.

No podemos encontrar por lo tanto una definición de recta más "notable" que otra, o una definición de movimiento más apropiada que otra. El valor de la recta o el valor del movimiento vienen dados por el sistema, y un sistema será válido sólo si es coherente, aunque sean convencionales sus postulados.

Todos estos espacios van a tener un fondo común sobre el que se recortan: el continuo de tres dimensiones. Así para Poincaré, la geometría es algo impuesto desde fuera a ese continuo, no pertenece al continuo, por lo que, tanto una geometría como otra, son válidas:

"...los dos espacios, euclidiano y no euclidiano, tienen un fondo común: ese continuo amorfo del que hablaba al principio; de él podemos sacar el espacio euclidiano o el lobatchevskiano, de la misma manera, que trazándole una graduación conveniente, podemos transformar un termómetro no graduado en termómetro Fahrenheit o termómetro Réaumur."⁴²

En el continuo de tres dimensiones podemos trazar tanto un espacio como otro, es como una hoja de papel, en metáfora de Poincaré en la que se pueden dibujar igualmente un cuadrado que un círculo⁴³

Pero aún queda por demostrar que el continuo del que hablamos tiene tres dimensiones⁴⁴. Poincaré consideraba a la experiencia incapaz de demostrar que el espacio tiene tres dimensiones:

"...la experiencia no nos prueba que el espacio tiene tres dimensiones; nos prueba que es cómodo atribuirle tres..."⁴⁵

ya que el número de correcciones que tendríamos que realizar sobre nuestro modelo teórico sería reducido al mínimo, debido a que nuestra experiencia visual y nuestra experiencia táctil funcionan en un "espacio visual" y en un "espacio táctil" de tres dimensiones. Pero nada más. No podemos educir del espacio visual y táctil el espacio real. De éste sólo podemos decir que es un continuo.

⁴⁰ Poincaré, *El valor de la ciencia*, p. 45.

⁴¹ Cfr. *Ibidem*, p. 47, y también en *La ciencia y el método*, p. 81.

⁴² *El valor de la ciencia*, p. 48.

⁴³ Cfr. *Ibidem*, p. 45; a esta idea de Poincaré se refiere Amor Rulbal en *P.F.F.D.*, X, p. 393.

⁴⁴ La geometría de n dimensiones viene prefigurada por J. F. Herbart, y su primera realización se debe al trabajo de H. G. Grassmann (1809-1877) titulado *Lineale Ausdehnungslehre* (1844), aunque no adquirirla relevancia hasta el trabajo de Riemann ya mencionada *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*.

⁴⁵ *El valor de la ciencia*, p. 82. Sobre las tres dimensiones del espacio, Poincaré utilizará también una argumentación de carácter pragmático: es cómodo atribuirle tres. "¿Se ha de decir entonces que es la experiencia quien nos enseña que el espacio tiene tres dimensiones, puesto que partiendo de una ley experimental, hemos llegado a atribuirle tres? Pero allí no hemos hecho, por decir así, más que una experiencia de fisiología, y así como bastaría adoptar sobre los ojos cristales de construcción conveniente para hacer cesar el acuerdo entre las sensaciones de convergencia y acomodación, ¿vamos a decir que basta ponerse gafas para que el espacio tenga cuatro dimensiones, y que el óptico que las ha construido ha dado una dimensión más al espacio? Evidentemente, no; todo lo que podemos decir es que la experiencia nos ha enseñado que es cómodo atribuir tres dimensiones al espacio" (*Ibidem*, p. 65, y ver también *La ciencia y el método*, pp. 92-93 y 95).

No entraremos aquí en los largos razonamientos dados por Poincaré para demostrar la tridimensionalidad de estos espacios sensoriales, demostraciones que se sitúan a media distancia entre la fisiología y la matemática. Sólo trataremos de sus premisas, que son las siguientes:

1º El espacio para Poincaré no se puede representar, ya que es un continuo matemático infinito⁴⁶, y nosotros sólo podemos representar los continuos físicos y los objetos finitos.

2º El espacio *es relativo* a un eje de coordenadas ligadas a nuestro cuerpo⁴⁷.

3º La importancia del movimiento para la génesis de la noción de espacio, sobre lo cual dice Poincaré:

"he demostrado el papel preponderante desempeñado por los movimientos de nuestro cuerpo en la génesis de la noción de espacio. Para un ser completamente inmóvil, no habría ni espacio ni geometría; sería en vano que los objetos exteriores se movieran alrededor de él; las variaciones que esos movimientos harían experimentar a sus impresiones no serían atribuidas por este ser a los cambios de estado; este ser no tendría ningún medio de distinguir a esas dos clases de cambios, y esta distinción, fundamental para nosotros, no tendría ningún sentido para él."⁴⁸

De hecho tanto el espacio visual como el espacio táctil se basan ambos en el espacio motor⁴⁹.

En resumidas cuentas, para Poincaré, el espacio de nuestro conocimiento es un espacio fenoménico que viene dado por los movimientos de nuestro cuerpo y por los órganos sensoriales. ¿Pero éste es el espacio real? No, como queda dicho el espacio real para Poincaré, no es más que un continuo amorfo —muy similar al *continuo* del pragmatismo—, del que nuestro conocimiento no nos puede facilitar ningún dato. Sólo podemos decir del él, en el sentido pragmático-convencionalista, que es cómodo atribuirle las tres dimensiones y la forma de la geometría euclidiana.

Todo esto enlaza perfectamente con las dos ideas centrales del pensamiento científico de Poincaré, que hemos tratado: el relativismo y el convencionalismo. De hecho Poincaré en su teoría espacial no hace sino proyectar estos conceptos de los cuales ya hemos visto la crítica de Amor Ruibal. Completemos ahora esta crítica con la más específicamente realizada por el filósofo compostelano a estas teorías espaciales.

⁴⁶ Cfr. *El valor de la ciencia*, p. 67.

⁴⁷ Cfr. *Ibidem*, p. 56. *La ciencia y el método*, pp. 77 y 96. Y el carácter orgánico de la sensación del espacio puede verse en las páginas 55 y 85.

⁴⁸ *El valor de la ciencia*, p. 58.

⁴⁹ Cfr. *Ibidem*, p. 57.

CAPÍTULO V

EL REALISMO ESPACIAL DE AMOR RUIBAL

Amor Ruibal conoce bastante bien la historia de la geometría y en general la de la ciencia del siglo XIX. Es interesante observar como estas discusiones con respecto a las matemáticas, que tuvieron lugar en la *Revue de Méthaphysique et Morale*, en 1898-1899, van a mantener la atención de Amor Ruibal sobre el tema, que adquirirá las obras de los diversos actores de la discusión. Así, conocerá sin duda la posterior obra de Russell sobre la matemáticas, *The principles of mathematics*, así como la réplica homónima de ésta que realiza L. Couturat en *Les principes des mathématiques*, y también sus otras obras *De l'infini mathématique*, y *L'algebre de la logique*; e igualmente, las tres obras de Poincaré, *La ciencia y la hipótesis*, *La ciencia y el método*, y *El valor de la ciencia*¹. Es interesante constatar como esta preocupación por los temas científicos aflora inclusive en sus últimos escritos, aunque de forma un tanto accidental, cuando se ocupa de la conexión de las teorías científicas y la realidad.

Todo esto nos lleva a tener en cuenta la importancia de esta discusión que acabamos de ver, en la formación del pensamiento filosófico de nuestro autor. Quien haya leído con atención dicha polémica, habrá notado los importantes aspectos filosóficos que en ella entran en juego. No se trata solamente de la simple cuestión teorética sobre si existen más o menos geometrías, como si éstas no indicasen nada sobre la realidad. Todo lo contrario, las geometrías hablan sobre la realidad. Por ello la diferencia entre las concepciones de Russell, de Couturat y Poincaré no son irrelevantes; todo lo contrario, son diferencias radicales sobre *cómo* y *qué* se puede conocer de nuestra realidad, y *cómo es* nuestro mundo. Para ello las matemáticas ofrecen un modelo metateórico de comprensión de las cosas.

Como se ha dicho, y todo matemático afirmaría, las matemáticas con lo único que trabajan es con *relaciones*. Descompone el mundo en relaciones y ellas son lo *explicativo* de las cosas. No hay sitio alguno para teorías de corte substancialista ni de corte metafísico. Russell decía que una cosa se define

¹ Amor Ruibal poseía en su biblioteca las siguientes ediciones de las obras de Poincaré: *La Ciencia y la Hipótesis*, Versión de P. M. González Quijano. Madrid, 1907; y *La Ciencia y el Método*. Versión de E. Cazorla. Madrid, 1910.

matemáticamente por sus relaciones. Amor Ruibal en este ámbito de pensamiento va a realizar y construir su teoría *filosófica*, en la que como se sabe, va a dar primacía a la relación, para la explicación del mundo y de las cosas.

Pudiéramos decir, que estas lecturas y problemas científico-matemáticos constituyen un substrato fundamental en su pensamiento. Y digo *fundamental* en un doble sentido: primero, por el número y la importancia que tienen los elementos que de la ciencia toma: la relación, y el ámbito último irreductible que no se puede descomponer en relaciones; unos argumentos fundamentales para rechazar el atomismo, etcétera; y por otra, porque en las relaciones fundamenta su teoría ontológica y cosmológica, momentos básicos de su filosofía.

Con ello no queremos decir que su filosofía recoja elementos de aquí y allá resultando una filosofía ecléctica, sino que más bien *recoge problemas*. Las soluciones de estos problemas se ven, sin embargo, tematizadas y enriquecidas desde su propia perspectiva realista. Por lo que a este respecto, nunca se puede negar, que su filosofía es una filosofía original, aunque tenga que ser estudiada incardinándola en su época de la cual estamos ofreciendo aquí unos rasgos fundamentales.

Veamos como Amor Ruibal responde a esta polémica en los pocos textos que tenemos.

1. CRÍTICA DE AMOR RUIBAL A LA CONCEPCIÓN GEOMÉTRICA DE POINCARÉ.

Frente al convencionalismo de Poincaré, para el que, como acabamos de ver, todas las geometrías son equivalentes en cuanto son igualmente coherentes en sus postulados y conclusiones, y pueden ser transformadas unas en otras, Amor Ruibal afirma que el espacio euclidiano tiene el valor de ser más notable que el espacio no-euclidiano. Para demostrarlo, ofrece dos razones, una de tipo netamente geométrico, y otra que procede de su concepción de la realidad y de entender el conocimiento como un conocimiento de realidades.

Según su argumentación geométrica, el carácter de "notable" de la geometría euclidiana sobre el resto de geometrías no euclidianas, viene dado por que éstas últimas *se constituyen a partir de la geometría euclidiana*, variando alguno de sus postulados o axiomas². Por lo que, para Amor Ruibal, la geometría euclidiana va a permanecer subsistente en cada una de las geometrías no euclidianas:

"El hecho mismo de múltiples geometrías no euclidianas, diversas entre sí, que dejan subsistente la geometría euclidiana y se forman sobre sus axiomas y postulados, con sólo prescindir de alguno de

² Así explica que cada una de estas geometrías tenga como fundamento y origen a la geometría euclídea. Variando el postulado de las paralelas de Euclides llegamos a la geometría de Lobatchewski, y si variamos además del postulado, el axioma tendremos la geometría de Riemann. Pero para Amor Ruibal, tales geometrías por su relación con la realidad del espacio son únicamente posibles, mientras que la geometría euclídea es la real.

ellos, hace ver que no la constituyen, ni la hacen equiparable a cualquier otra no experimental que pueda imaginarse."³

Así, mientras las geometrías no euclidianas por excluir el postulado de las paralelas, son consideradas geometrías curvas, la geometría euclidiana "no es ni rectilínea ni curvilínea"⁴. Por lo tanto, la geometría euclidiana incluirá a las geometrías no euclidianas.

La segunda razón que argumenta Amor Ruibal para demostrar la prioridad de la geometría euclidiana sobre las otras geometrías procede de las reflexiones filosóficas anteriores. Para Amor Ruibal la geometría, como toda otra ciencia, se constituye sobre la realidad, por lo tanto

"...según dicha forma de realidad, sea posible o imposible, así la geometría ideada será posible o realizable."⁵

De aquí que mientras que el resto de las geometrías no euclidianas son convencionales y sólo posibles en tanto que responden a una realidad posible, la geometría euclidiana responde a una "intuición real actual". Así pues, la geometría aparece como un primer nivel de abstracción de la idea sobre la realidad del espacio⁶.

Tampoco Amor Ruibal estará de acuerdo con la teoría convencionalista de Poincaré respecto a que atribuimos tres dimensiones al espacio, por pura comodidad, debido a que nuestros sentidos: vista tacto y movimiento se desenvuelven en tres dimensiones. Nuestro filósofo compostelano no aceptará esta concepción de Poincaré ya que la considera como un intento pragmatista de que "la elaboración de la ciencia es ajena a la constitución de la realidad"⁷. Para Amor Ruibal por el contrario es la "relatividad" de las representaciones del espacio como espacio visual, táctil y motriz, la que permite afirmar un espacio real "absoluto" al que se refieren⁸. La relación, por lo tanto entre el espacio geométrico y estos espacios sensitivos no es más que la que existe entre lo abstracto y lo concreto⁹.

La geometría, entonces, va a ser un primer nivel de abstracción sobre el espacio real, o grandor donde sólo se prescinde

"...del contenido material en que aquella forma se materializa"¹⁰.

³ P.F.F.D., X, p. 409 nota.

⁴ Cfr. P.F.F.D., X, p. 410 nota.

⁵ P.F.F.D., X, p. 411.

⁶ Es por esto que en el último nivel de abstracción de la geometría, la geometría proyectiva, no cabe la distinción entre espacio euclidiano y no euclidiano (Cfr. A. Amor Ruibal, *Espacio y grandor*, Fragmento B, s/p. En tanto que no está editada todavía esta obra preferimos omitir cualquier paginación).

⁷ P.F.F.D., X, p. 401.

⁸ Cfr. P.F.F.D., X, p. 401. Amor Ruibal va a criticar la génesis de la noción de espacio por las sensaciones internas. Para el canónigo compostelano, no se puede identificar la *localización* con la sensación interna (P.F.F.D., VIII, p. 298 y ss.). Más bien al contrario: "La localización [...] entra como un factor íntimo de la sensación y por lo mismo la noción espacial no puede ser una resultante de la sensación, sino una forma de ella misma, proyectada por condición inherente al acto cognoscitivo que corresponde, ..." (P.F.F.D., VIII, p. 304).

⁹ Cfr. P.F.F.D., X, p. 424.

¹⁰ P.F.F.D., X, p. 418.

Como hemos visto, un segundo nivel de abstracción sobre el espacio vendría a ser lo que Amor Ruibal llama «metageometría», que incluiría unificándolas, las diferentes geometrías descubiertas. En un nivel superior de abstracción, ya se prescinde de todo elemento cuantitativo: estudiándose sólo, las propiedades del continuo -en terminología de Poincaré, *espacio real* en Amor Ruibal-. Para nuestro autor, en definitiva, tanto los conceptos de la geometría como los de la metageometría son objetivos¹¹: dicen relación a una realidad, el grandor¹².

Por esto, lo mismo que Amor Ruibal criticaba a Poincaré respecto a las geometrías euclidianas y no euclidianas, ahora lo va criticar con relación a la metageometría del espacio de n dimensiones:

"Si las geometrías no euclidianas de n dimensiones han de tener algún sentido, éste no puede ser otro que el de una intuición de un espacio hipotético, capaz de ser realizado, cuando a ellos corresponde una realidad posible. Por el contrario, el espacio de tres dimensiones es el único que responde a la intuición real actual, y por lo tanto el único cuyo valor no es hipotético, ni puramente posible, sino de realidad conocida."¹³

Con la crítica a la concepción espacial de Poincaré, que es tenido por Amor Ruibal como un pragmatista científico, se nos abre el camino para comprender la concepción espacial del filósofo compostelano.

Vamos ahora a ver, ya de forma más sistemática, cuáles son las ideas de Amor Ruibal respecto a las metageometrías y a la geometría proyectiva, que en parte ya han sido enunciadas en este apartado.

2. LAS METAGEOMETRÍAS Y SU VALORACIÓN POR AMOR RUIBAL.

Para Amor Ruibal aunque todas las metageometrías son posibles, no quiere decir que sean equivalentes, ni que tengan el mismo valor de realidad.

De hecho en la breve historia que hace nuestro autor de la metageometría¹⁴, pretende dejar suficientemente claro que las geometrías no-euclidianas proceden por derivación de la euclidiana,

¹¹ Cfr. P.F.F.D., X, p. 419.

¹² El grandor representa la realidad nocional del espacio. Es el grandor el que permitirá que nos refrinamos al espacio como espacio real, y evitar así que calgamos en una concepción idealista del espacio como ocurre en Kant (Cfr. P.F.F.D., X, pp. 481-482) o de tipo sensitivo interno como ocurre en Poincaré.

Es por ello que Amor Ruibal tratará de defender el grandor en los dominios de la geometría proyectiva, en su trabajo *Espacio y grandor*. En este trabajo hablará de un grandor métrico sometido a las condiciones métricas de la geometría y un grandor no métrico, virtual, o nocional necesario y condición de posibilidad del grandor métrico:

"...el grandor, ora como *noción*, esto es como forma indefinible de lo extenso, ora como medida o sea como relación, se manifiesta en todas las concepciones geométricas" (*Espacio y grandor*. Fragmento B, s/p.).

¹³ P.F.F.D., X, p. 409.

¹⁴ Cfr. P.F.F.D., IX, pp. 393-394 nota.

suprimiendo el V postulado. Así para él, la metageometría de Lobatchewski, elimina el V postulado¹⁵, y la geometría esférica de Riemann, suprime el V postulado y su axioma correspondiente¹⁶.

Como observa Amor Ruibal, estas otras geometrías no indican que la geometría sea independiente del espacio real, sino que dicen relación al espacio real como posibles:

"...el elemento esencial presupuesto es la realidad posible del espacio, y por lo tanto de la extensión, y de lo externo, que las haga verificables. De suerte que, como decimos arriba, la multiplicidad de sistemas no acusa independencia constructiva respecto de lo real; sino por el contrario, exige capacidad efectiva de lo real para darles valor y consistencia."¹⁷

Para fundamentar esta opinión de manera matemática hace referencia a los trabajos de Beltrami y Plücker. Según vimos en la breve historia que realizamos de la geometría en el siglo XIX, Beltrami consigue traducir y reducir la geometría de Lobatchewski y la esférica de Riemann a la geometría plana de Euclides.

Así para Amor Ruibal, la geometría euclidiana constituye la clase general de la geometría de donde se derivan posteriormente las geometrías de Riemann y Lobatchewski. Por eso, si examinamos la geometría de Euclides desde alguna de estas dos, que tienen al espacio como curvilíneo, la geometría de Euclides aparece como plana, lo cual induce, a estos matemáticos, según nuestro autor, al error de considerar la geometría euclidiana como una clase concreta de la metageometría. Pero esta deducción para Amor Ruibal, es errónea ya que implica que todas la geometrías son igual de hipotéticas e imaginarias. No existe una geometría más *real* que otra. Para el ilustre canónigo, la geometría euclidiana, no es ni curvilínea ni rectilínea, y al no serlo, queda incluida en ella tanto la geometría curva como la geometría recta; en cambio las otras dos geometrías, la de Riemann y la de Lobatchewski-Bolyai, devienen de la supresión del V postulado, por lo tanto, son un caso particular de la geometría de Euclides:

"Aparte de esto, según lo indicado, la geometría euclidiana no es rectilínea ni curvilínea, sino que en ella caben con la recta, todas las curvas posibles; por el contrario, en las geometrías no euclidianas, y por ello excluyen el postulado de las paralelas, no cabe sino la geometría curva, como la curvatura que atribuyen al espacio, que a la vez no distinguen de la forma (absoluta o relativa) del universo físico como lo estiman constituido."¹⁸

¹⁵ El V postulado "desaparece como es sabido, en la geometría de Lobatchewski; en ésta por el contrario se establece: *que por un punto se pueden trazar varias paralelas a una recta*" (P.F.F.D, X, p. 393).

¹⁶ El axioma de la geometría de Euclides dice en formulación de Amor Ruibal, lo siguiente: "...por dos puntos no puede hacerse pasar más que una recta; ya que por dos puntos en dicha geometría, sólo, en principio, puede hacerse pasar un círculo máximo" (P.F.F.D., X, p. 393).

¹⁷ P.F.F.D, X, p. 394. La posibilidad siempre hace relación a algo real, en este caso al espacio real: "La posibilidad de estos espacios, y la de los cuerpos en que se constituyen, hace posible las geometrías respectivas, en cuanto la entidad de dichos cuerpos, como actual o posible, determine el valor de las geometrías mencionadas" (P.F.F.D, X, p. 394). Y más adelante indicará también: "...las mismas geometrías no euclidianas en cuanto se consideren como posibles, requieren como elemento indispensable el corresponder a una forma de espacio en que se concreten, y sin lo cual son fórmulas sin contenido ni carácter científico alguno" (P.F.F.D, X, p. 410).

¹⁸ P.F.F.D, X, p. 410. Y un poco más adelante completa la idea de la manera siguiente: "... esto sin contar que la curvatura de cualquier tipo geométrico no euclidiano (en el ejemplo propuesto y en otros similares la curvatura es propiamente euclidiana, y no responde con exactitud a la no euclidiana a que se refiere), siempre resulta traducible por nuestra geometría ordinaria" (P.F.F.D, X, p. 421).

3. LA GEOMETRÍA MÉTRICA Y LA GEOMETRÍA PROYECTIVA.

Como veíamos en la página 265, con Cayley la geometría proyectiva se proponía como la generalización máxima de la geometría, y por lo tanto, como geometría general que contuviese en sí el resto de las geometrías métricas. Para ello, la geometría proyectiva hacía abstracción de un elemento fundamental que la diferenciaba de la geometría métrica, y la daba su carácter de apriorístico y necesario. Ese elemento del que hacía dejación era el grandor o magnitud. El núcleo de la discusión que hemos visto entre Russell-Couturat y Russell-Poincaré radica en el carácter de la geometría proyectiva y su relación con la geometría métrica euclidiana. Veamos la disputa entre tres formas de concebir esta relación: de forma completamente apriorística —y necesaria— por Couturat; de forma completamente convencional de Poincaré, y de forma semi-apriorística por Russell.

Para Couturat tanto la geometría proyectiva, como la geometría euclidiana son *a priori*. De ello deriva el que sean necesarias, y sean un esquema transcendental sobre el que se dan posteriormente nuestras sensaciones.

Para Poincaré, la geometría proyectiva es convencional, no se da necesariamente, sino que su necesidad depende de los postulados previos. La geometría euclidiana será para él no más verdadera que otras, sino más cómoda.

Para Russell, como ha quedado suficientemente claro, la geometría proyectiva y los axiomas comunes a toda geometría métrica *son a priori*, en el sentido de necesarios, y la geometría de Euclides sería un caso particular de la geometría métrica, pero cuyos axiomas particulares —los que la diferencian de otras geometrías métricas— son empíricos. Así pues, la experiencia para Russell sirve para determinar que tipo de geometría es la que corresponde a la realidad.

¿Cuál es la opinión de Amor Ruibal ante estas ideas? Sus teorías sobre el espacio más cercanas a este debate las podemos encontrar en los inéditos de *Espacio y grandor*, y en el Tomo X de los *P.F.F.D.*.

Amor Ruibal en los dos textos que componen *Espacio y grandor*, tiene la pretensión de fundamentar el *grandor* como el concepto nocional generador de la idea de espacio. Por ello acepta, *prima facie*, prácticamente todas las ideas y los análisis de Russell sobre el espacio, separándose de la concepción apriorística de Couturat y convencionalista de Poincaré. Pero en un segundo momento, se va a distanciar también de la concepción de Russell, ya que éste suponía que existe una geometría más abstracta aún, la proyectiva, que elimina el concepto de distancia.

Amor Ruibal, por el contrario va a justificar el concepto de grandor como *nocional*, esto es, como primitivo, y constituyente de todo espacio:

"El problema de que se trata reduce a lo siguiente: 1) Determinar si la noción de grandor entra necesariamente en toda noción de espacio, y por consiguiente si todo espacio es definible en cuanto mensurable.

2) Determinar si el espacio tiene principios fijos, que [se] siguen de la naturaleza intrínseca de la percepción o no tiene norma alguna y sólo empíricamente puede establecerse sus leyes."¹⁹

El problema reside en que para Russell la geometría proyectiva supone un nivel de abstracción mayor sobre el espacio métrico del que se ocupaba la metageometría, para lo cual tenía que eliminar el concepto de grandor. Amor Ruibal acepta completamente el carácter más general de la geometría proyectiva, del que la geometría métrica es una especificación. Pero en tanto que ha definido el espacio como "grandor de lo posible extenso" es necesario que también en la geometría proyectiva encontremos ese grandor. En otras palabras:

"Desde luego es necesario asentar que si todo elemento métrico puede ser una derivación y como una prolongación de elementos proyectivos, al mismo tiempo el grandor puede ser representante del espacio métrico, es necesario hallar algo en el espacio métrico que despojado de toda su forma métrica equivale al espacio de proyección."²⁰

Ese algo, evidentemente, va a ser el grandor. Si la geometría proyectiva renunciase a ese grandor nocional, no podría referirse al espacio real²¹. De esta manera la geometría proyectiva aún excluyendo la cantidad no puede excluir el grandor. No sólo es indispensable mantener el grandor como noción para mantener la geometría proyectiva como una geometría del espacio, esto sí, del espacio considerado tan sólo como virtual; sino que es necesario intrínsecamente para la constitución de la geometría proyectiva, ya que sin él, el axioma I de esta geometría que establecía Russell, carecería de sentido:

"Antes bien, ahí está la razón de su existencia, en mantener las relaciones intrínsecas a la cantidad sin expresar ésta. Por eso puede sin duda alguna llamarse primer axioma de la geometría proyectiva, la distinción de puntos entre sí, según lo reconocía Veronese (*), y es generalmente afirmado."²²

De esta manera el grandor para Amor Ruibal tiene un triple significado:

1º El grandor en la geometría métrica, es la efectiva y actual entre dos puntos. Es decir, la distancia. Este *grandor* no es el de la geometría proyectiva, ya que, como se ha dicho repetidamente, la geometría proyectiva excluye el grandor como medida actual.

¹⁹ *Espacio y grandor*. Fragmento A, s/p. En el «Fragmento A», Amor Ruibal plantea el mismo problema: "Redúcese, pues, la cuestión aún según la doctrina aludida, a saber si puede darse grandor independientemente del aspecto métrico que se representa en la geometría común (1) Inosotros y nuestra doctrina sostenemos la afirmativa; porque...] porque eso es lo que se requiere para saber si puede el grandor ser forma primera del espacio."

²⁰ *Espacio y grandor*. Fragmento A, s/p.

²¹ "Es evidente que aunque la geometría proyectiva pueda prescindir del espacio métrico para hallar un tipo superior espacial, o sea una representación más amplia del concepto de espacio, no puede prescindir de los elementos fundamentales de dicho espacio métrico, porque lo contrario sería renunciar a toda construcción real del espacio sensible, que en definitiva no puede menos de ser mensurable" (*Espacio y grandor*. Fragmento A, s/p.). Creemos que aquí sería más exacto hablar del espacio real aunque posteriormente venga dado de forma clara y determinante por la sensación.

El elemento fundamental del espacio métrico del que no puede prescindir la geometría proyectiva es el grandor, ya que éste es una hypercategoría y por lo tanto elemento de posibilidad del conocimiento como veremos en la nota 24 de la página 330.

* Nota de Amor Ruibal: "V. *Grundlegun der Geometrie* (trad. al) Leipzig, 1814. V. Russell que la cita."

En esta nota de Amor Ruibal, la supuesta obra de Veronese, aparece mal citada. En realidad se trata de *Grundzüge der Geometrie* (trad. al.) citado por Russell, en su *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, p. 68, n.º 106.

²² *Espacio y grandor*. Fragmento A, s/p.

2º El grandor en "los extremos métricos", es el referido a los puntos extremos de una medida dada. Este grandor no pertenece para Amor Ruibal ni a la geometría métrica ni a la proyectiva. ¿Cuál es pues su estatuto lógico-espacial? Amor Ruibal no lo aclara demasiado, en parte debido al carácter provisional de este texto. Parece ser que su razonamiento es el siguiente: los puntos, que son los extremos de todo grandor (medida), forman y fundamentan el espacio. Ahora bien los puntos como tales no tienen extensión. Se da entonces la paradoja de que los puntos no siendo espaciales al ser inextensos son los principios generativos del espacio. Es desde esta perspectiva que los puntos tienen grandor:

"El segundo modo, no se identifica directamente con el grandor métrico, pues en él se prescinde de la condición de medida de lo extenso para limitarse los puntos que son principio de la extensión. Mas si en los puntos se reconoce un grandor real, es indudable que a ellos puede trasladarse la razón de medida propia de grandor métrico, que al fin aparece en la misma categoría, sin otra diferencia que la de magnitud."²³

Este grandor es identificado por Amor Ruibal con el concepto de multiplicidad de Riemann, y Erdmann.²⁴

3º/ Por último, el tercer concepto de grandor es el que incluye Amor Ruibal dentro de la geometría proyectiva. Es el grandor como noción de la cual derivan de forma escalonada los dos conceptos anteriores del grandor: el grandor como los puntos —unidad infinita y primera del espacio— y el grandor como extensión.

Amor Ruibal para fundamentar y sostener esta teoría sobre el grandor *como nocional* va a iniciar un estudio sobre qué es el espacio.

4. ANÁLISIS DEL «FRAGMENTO A» DE ESPACIO Y GRANDOR.

En su estudio sobre el espacio, el primer texto que vamos a analizar es el «Fragmento A», de su inédito *Espacio y grandor*. Como pondremos en evidencia, en este primer texto, Amor Ruibal va seguir muy de cerca la obra de Russell, para en un segundo momento distanciarse de las posiciones filosóficas de éste con respecto al espacio y la geometría, como queda reflejado en el «Fragmento B».

Siguiendo a Russell el primer aspecto que examina es el espacio como forma de exterioridad. Para Amor Ruibal el concepto de exterioridad —forma de exterioridad en Russell— va a ser:

²³ *Espacio y grandor*, Fragmento A, s/p.

²⁴ Este concepto de grandor también aparece indicado en el segundo texto: "Desde luego no faltan quienes establezcan aún geoméricamente el grandor como base de toda la acción espacial y reduzcan así a esa unidad todo concepto de espacio. Riemann ha sostenido..."

El pensamiento de Riemann es reproducido por Erdmann. Sin embargo esta manera de explicar el espacio por el grandor no es aceptable" (*Espacio y grandor*, Fragmento B, s/p).

Amor Ruibal sigue la teoría de Russell sobre el punto como término de la relación espacial:

"Evidentemente que si la extensión es una relatividad pura deberán ser considerados como que no contienen ninguna extensión; pero si han de tomarse para constituir los términos para relaciones espaciales, por ejemplo, para líneas rectas, esas relaciones deben mostrarles como los términos de las figuras que determinan. En otras palabras: puesto que realmente pueden ser tomados, sin contradicción, como el término a utilizar en Geometría, y ya que no podemos salirnos del espacio, como la más pequeña parte con que podamos tratar en la misma Geometría, o sea como la cosa que estando en el espacio no contiene espacio, y a esta cosa la llamamos punto" (Russell, *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, p. 105, n° 117).

"Esta exterioridad es algo que no podemos designar más que por el hecho de ser cada cosa externa a otra, o sea de no confundirse entre sí."²⁵

Como veíamos en Russell, se deducía esta forma de exterioridad de un llamado «principio de diferenciación» por el cual, una cosa es percibida y, concebida como diversa de otra. También Amor Ruibal concibe que la forma de exterioridad viene dada por una diferencia espacial, por la que

"...un cuerpo ni es otro cuerpo ni ocupa su lugar."²⁶

Con lo cual se hace abstracción de las propiedades inherentes a las cosas y se considera sólo y exclusivamente su posición con respecto a otra. Por ello la posición de una cosa, no puede ser considerada «accidente locativo» como lo hacía la escolástica²⁷; y por otra parte, se elimina de la posición todo carácter entitativo²⁸, ya que no tiene en cuenta las características internas, y sólo considera la propiedad externa de la relación de una cosa con otra:

"Privada así la posición de entidad, pues toda entidad es algo intrínseco no de pura referencia externa, queda privada de toda cualidad intrínseca, y por consiguiente reducida a ser como posición la simple posibilidad de cosas diferenciadas o el principio puro de diferenciación. Por consiguiente, ni la posición, ni la exterioridad que representa, ni el principio de diferenciación, tienen en sí diferencias desde que se afilan de la cosa concreta."²⁹

De la condición general de exterioridad de la geometría proyectiva, Amor Ruibal va a derivar una serie de *propiedades*³⁰, con las cuales se encuentra imbricada. Estas propiedades se deducen de los análisis realizados por Russell para eliminar de la geometría proyectiva todo lo que significase elemento o carácter métrico³¹. Así la primera propiedad de la geometría proyectiva es

"1º La ausencia de todo elemento métrico o cuantitativo; y por consiguiente, la necesidad de que todo elemento métrico tenga otro valor no métrico en sentido proyectivo."³²

²⁵ *Espacio y grandor*, Fragmento A, s/p. La exterioridad lleva pareja, como hemos visto otros dos conceptos: la relatividad y la homogeneidad del espacio. La formulación de Russell de esto es la siguiente:

"En primer lugar, la exterioridad es una concepción esencialmente relativa, es decir: nada puede ser externo a sí mismo. Ser externo a otro algo es ser otro con cierta relación a aquél algo. De aquí que cuando abstraemos una forma de exterioridad de todo contenido material y la estudiamos en su aislamiento, la posición aparecerá necesariamente como puramente relativa—la posición no puede tener ninguna cualidad intrínseca, pues nuestra forma consiste en exterioridad pura y la exterioridad no contiene ni sobra ni traza de cualidad intrínseca. Así obtenemos nuestro postulado fundamental, la relatividad de posición, o, como podemos decir, la total ausencia por parte de nuestra forma de vestigio alguno de substancia (*thinghood*)" (Russell, *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, p. 110, n° 129).

²⁶ *Espacio y grandor*, Fragmento A, s/p.

²⁷ "Mas ¿en qué consiste este principio de diferenciación del espacio? Al no admitir los accidentes locativos, que son imposibles, y que además nunca podrían significar la diversidad de espacios, sino a lo más servirle de fundamento no queda sino reconocerle un carácter intrínsecamente relativo, sea resultante de que un cuerpo ni es otro cuerpo ni ocupa su lugar. De otra suerte habría que afirmar que una cosa puede diferenciarse a sí misma que es manifiesto absurdo" (*Espacio y grandor*, Fragmento A, s/p.).

²⁸ Cfr. *P.F.F.D.*, X, pp. 284–298. Esta concepción de la extensión y el espacio con carácter entitativo es la misma que tiene Russell.

²⁹ *Espacio y grandor*, Fragmento A, s/p. Es este posicionamiento filosófico, al considerar el espacio y la extensión como tan sólo relaciones externas a las cosas, lo que ilumina su crítica a la concepción escolástica, que aparece en las páginas 257–283 del tomo X.

³⁰ Como se observará, más que de propiedades, se trata de un razonamiento por el que se abstrae lo *cualitativo* de los elementos métricos del espacio.

³¹ Esta pretensión de Russell se haya expresada por doquier en su obra que hemos analizado, *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, pero que aparece principalmente formulada en los primeros apartados del capítulo III de esta obra, concretamente en los números 102, 103 y 104.

³² *Espacio y grandor*, Fragmento A, s/p.

Lo cual, por una parte es una propiedad de la geometría proyectiva en el sentido russelliano, pero por otra es lo que pretende Russell; por ello objetivamente es más bien un fin al que pretende llegar Russell³³.

La segunda propiedad que indica Amor Ruibal es:

"2º La necesidad de presuponer la distinción de puntos (en cuanto se dan puntos proyectivos) con anterioridad a la determinación de sus coordenadas proyectivas; puesto que aquéllas son una condición de ésta, y no viceversa."³⁴

Efectivamente, las coordenadas en la geometría proyectiva no pretenden determinar nada métrico, no introducen ninguna cantidad: como se ha visto, la distinción de unos puntos de otros en un espacio carente de distancia y de coordenadas, se puede hacer mediante el método del cuadrilátero de Staudt. El símil que emplea Russell para explicarlo es la asignación de los números a las casas de una calle, que no determinan ninguna medida y lo único que pretenden es distinguir una casa de otra, asignándole un número³⁵. Pudiera ser también una letra o un símbolo. Lo que pretende es demostrar que el sistema de coordenadas en la geometría proyectiva no es más la distinción de unos puntos de otros;

"El sistema de coordenadas proyectivas es un conjunto de signos completamente externo y meramente convencional que no toca en absoluto a la esencia de la geometría proyectiva."³⁶

La tercera propiedad de la geometría proyectiva que menciona Amor Ruibal es que habida cuenta del carácter de esta geometría y de la propiedad anterior, resulta que:

"3º Por lo mismo [que] ningún elemento de medida puede determinar una posición proyectiva, no puede derivarse de ahí la distinción ni la distribución de puntos correspondiente a dicha posición en cada punto, toda vez que sin la pluralidad de éstos (o sus equivalentes) ni con sólo su pluralidad pueden subsistir. De otra parte, suprimiendo el grandor métrico en la geometría proyectiva, la posición de puntos no puede ser resultado de la distancia que es determinada por dicho grandor."³⁷

Con lo cual se afirma que una pluralidad de puntos distintos no basta, ni puede fundar una geometría, sino que estos puntos han de estar en relación. Y en segundo lugar, esta relación no puede ser, en la geometría proyectiva, la *distancia* que queda excluida por ser expresión de grandores, ni tampoco la razón anarmónica por implicar ésta en sí conceptos métricos. Estas dos ideas que expresa Amor Ruibal, en el «Fragmento A» de *Espacio y grandor*, están antedichas por Russell:

"Ahora es evidente que un conjunto de puntos distinguidos unos de los otros no pueden fundar una Geometría; deberemos tener alguna idea de la manera en que los puntos están relacionados, a fin de tener una materia adecuada para la discusión. Pues, puesto que todas las ideas de cantidad están excluidas, las relaciones entre puntos no pueden ser relaciones de distancia en el sentido ordinario ni aún

³³ Véase la introducción histórica que realizaba Amor Ruibal (Cfr. *P.F.F.D.*, X, pp. 412 nota) en la que la geometría proyectiva aparece como ciencia matemática donde no reconocía esa pretensión de ausencia del elemento métrico. Eso ya se lo advertía Poincaré en el artículo que consideramos de respuesta a Russell, así como varios de sus libros, en los que indicaba que la única geometría auténticamente cualitativa era el *Analysis situs* (Ver páginas 215, 294, 295).

³⁴ *Espacio y grandor*, Fragmento A, s/p.

³⁵ El orden por lo tanto tampoco es aquí relevante. Puede ser una asignación aleatoria. El orden introduciría el grandor, ya que todo sistema ordenando introduce un rango de ordenación y este rango representa ya el grandor. Así por ejemplo que $1 < 2$ y que $2 < 3$ introduce ya el grandor.

³⁶ Russell, *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, p. 98, n.º 106.

³⁷ *Espacio y grandor*, Fragmento A, s/p.

razones anarmónicas en el sentido de la geometría ordinaria, pues que éstas se definen corrientemente como las razones de cuatro distancias, o de cuatro senos, y así son constitutivas."³⁸

Por ello, Amor Ruibal se pregunta:

"¿Qué queda, pues, para salvar la verdad geométrica en la simple proyección?"

La respuesta que da explícitamente Amor Ruibal unas páginas más abajo, es la que indicaba Russell. Para el filósofo británico, ya que ni la distancia ni la relación anarmónica sirven para fundar la geometría proyectiva como geometría, es necesario hacer uso de otro concepto que no contenga ningún elemento métrico: la línea recta.

Amor Ruibal sin mencionarlo explícitamente pero refiriéndose a él, incluye otras dos «propiedades» de la geometría proyectiva. Estas dos «propiedades» seguirán de forma clara la exposición de Russell sobre la dialéctica cualidad-cantidad que fundamenta el espacio:

"4º Toda posición métrica es una posición cuantitativa, y por lo mismo depende de una comparación cuantitativa entre grandores (que se traduce en distancia). Mas no existe grandor cuantitativo que no se funde en una identidad de una cualidad, sobre la cual recae el grandor mencionado. El hecho mismo de reconocer una desigualdad o desigualdad cuantitativa entre dos cosas, presupone constituida la identidad de la cualidad, lógicamente anterior a aquel hecho.

De aquí se sigue que todas las figuras cuyas diferencias sean totalmente determinables por el grandor métrico, poseen una cualidad común capaz de ser entendida en sí independientemente del grandor métrico.

De donde resulta que cualidad es el fundamento de la cantidad métrica que el substrato de ésta nos da resultado aquélla."³⁹

Amor Ruibal lo que indica aquí es la necesidad con que la geometría proyectiva se deduce de la geometría métrica: la geometría métrica compara grandores entre sí, lo que da otros grandores, que son en cierto sentido, los que fundamentan a su vez la distancia. Ahora bien toda comparación requiere que lo comparado sea por una parte semejante; y por otra parte, diferente. De esta forma la comparación cuantitativa ha de basarse en la identidad cualitativa⁴⁰. Por lo tanto el efectuar comparaciones de grandor en la geometría métrica implicaba necesariamente que existía una base común que permitía la comparación en la geometría proyectiva. Es por eso que Russell indicaba:

"Pero como toda comparación cuantitativa presupone una identidad de cualidad podemos esperar encontrar en la geometría proyectiva la cualidad substrata de la superestructura métrica."⁴¹

A todo lo cual Amor Ruibal añadirá que:

³⁸ Russell, *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, p. 99, nº 107.

³⁹ *Espacio y grandor*, Fragmento A, s/p.

⁴⁰ Cfr. Russell, *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, pp. 60-61, nnº 61-62 y p. 75, nº 79.

⁴¹ Russell, *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, p. 99, nº 107. Y sigue diciendo Russell. "Veremos que éste es el caso efectivamente. No tenemos distancia, pero tenemos la línea recta; no tenemos razón anarmónica cuantitativa, pero tenemos, la propiedad, en cualquier cuaterna de puntos de una recta, de ser la intersección con los rayos de un haz dado. Y desde esta base podemos construir una ciencia cualitativa de exterioridad abstracta cual es la geometría proyectiva" (*ibidem*).

"5° La cualidad en cuanto pueda ser geométrica, ha de ser determinada por elementos geométricos también, en los cuales desaparezca el valor métrico cuantitativo."⁴²

Por todo lo cual parece que Amor Ruibal se sitúa en completa continuidad con el pensamiento de Russell: la geometría proyectiva habrá de fundamentarse en el aspecto cualitativo del espacio, que viene dado por las relaciones espaciales. Estas relaciones espaciales, serán relaciones entre puntos, considerados evidentemente desprovistos de todo valor cuantitativo, y más aún, de substancialidad propia. En este sentido, los puntos son tenidos, como hemos indicado más atrás, únicamente como términos de relaciones⁴³:

"Los puntos, pues, no son proyectivamente más que términos de relaciones espaciales, en las cuales no se incluye grandor mensurable.

Por consiguiente si nada hay mensurable, y todo lo que no sea punto es pura relación los mismos puntos que terminan las relaciones no son extensos; y constituyen en el espacio cosa que no tiene espacio."⁴⁴

Así pues, tenemos puntos y relaciones entre puntos. Si la relación es diádica⁴⁵, entre dos puntos solamente, tendremos la línea recta proyectiva que para Amor Ruibal es "expresiva de la línea recta común"⁴⁶. La expresión de Russell era la siguiente:

"Decimos que cualesquiera dos de nuestros puntos están en línea recta que queda completamente definida por ellos dos. Esta recta, estando determinada por los dos puntos, debe ser considerada como una relación de los dos puntos o como un atributo del sistema formado por los dos en conjunto. Éste es el único atributo puramente cualitativo, como demostraremos más tarde, de un sistema de dos puntos."⁴⁷

Para nuestro autor, también es la línea recta atributo cualitativo de un sistema de dos puntos. Pero esto mismo hace que todo sistema diádico de dos puntos sobre una recta sea indiscernible de otro cualquiera que se considere. ¿Cómo distinguir un sistema de dos puntos de otro sistema de dos puntos? Ésta es la pregunta que late en lo que a continuación escribe Amor Ruibal, y que es casi con las mismas palabras lo que Russell expresaba en su *Ensayo*:

⁴² *Espacio y grandor*, Fragmento A, s/p.

⁴³ Después de exponer la dualidad entre punto y recta, y ver los inconvenientes filosóficos que planteaba el encontrarse que la definición de la recta por el punto puede convertirse en la definición del punto por la recta, Russell, toma la decisión, totalmente injustificada, de poner el punto como fundamento de la definición del espacio. Así llega, como acabamos de ver, a lo que transcribe prácticamente Amor Ruibal: "... definimos nuestros puntos como los términos de relaciones espaciales, considerando que todo lo que no sea punto sea una relación entre puntos. (Y,) puesto que realmente pueden ser tomados, sin contradicción, como término de una relación espacial que no tiene extensión, debemos tomarle como el término a utilizar en Geometría, y ya que no podemos salirnos del espacio, como la más pequeña parte con que podamos tratar en la misma Geometría, o como la cosa que estando en el espacio no contiene espacio, y a esta cosa la llamamos punto" (*Espacio y grandor*, Fragmento A, s/p.).

⁴⁴ *Espacio y grandor*, Fragmento A, s/p.

⁴⁵ Hemos puesto expresamente diádica porque aunque Amor Ruibal solo trata de la relación entre dos puntos, de la misma manera se puede establecer una relación espacial entre tres puntos que no contengan magnitud alguna y que sería el plano. Y así mismo una relación entre cuatro puntos que sería el volumen. En sentido estricto estas relaciones entre puntos no se detiene aquí sino que se pueden seguir estableciendo relaciones n-ádicas entre un conjunto de puntos que nos dé elementos espaciales determinados (Cfr. *Ibidem*. Ver también *Los principios de la matemática*, ed. cit., pp.687-695, nn° 351-360).

⁴⁶ Aquí se trasluce la opinión de Amor Ruibal de que nuestro espacio conocido es el "espacio real" de donde resulta que la línea recta de nuestro espacio conocido es la línea recta del espacio euclidiano. En sentido estricto y bien analizado, esta línea recta más bien se refiere a la geodésica de cualquier espacio. Ya que ésta es la línea recta en ese espacio. A lo cual se añade la razón de que la geometría proyectiva por contener a toda geometría métrica y ser por eso generalísima, su *línea recta* habría de ser abstracción de todas y cualquier línea recta de cualquier espacio posible, del que sólo se habría eliminado la magnitud.

⁴⁷ Russell, *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, p. 99, n° 108.

"Puede decirse que la línea recta es atributo cualitativo de todo sistema de dos puntos proyectivos, y a su vez dos puntos en relación son atributo cualitativo de la recta proyectiva. Esto mismo ha de repetirse en todo sistema de dos puntos colocados en la misma recta. De modo que cuando se nos dan dos puntos en una recta proyectiva no pueden distinguirse de otros dos puntos en la misma recta, sin acudir al concepto de grandor, que está excluido; porque la relación cualitativa de dos puntos dados es igual a la de los otros dos ya presupuestos desde el momento en que entre ellos existe la misma relación y sólo de la relación puede resultar la diferencia."⁴⁸

Lo mismo va a suceder con las rectas por el principio de dualidad de Geogonne que mencionamos en la introducción histórica sobre la geometría⁴⁹ (página 267) ya que una recta es determinada por dos puntos, y como acabamos de decir dos puntos de por sí son cualitativamente indiferentes. Así pues, dado un punto e infinitas rectas que pasen por él, son todas ellas indiscernibles cualitativamente. Sólo podríamos distinguir una de estas rectas de las de las demás, añadiendo un segundo punto por el que pasase esta recta. Esto mismo es dicho por nuestro filósofo compostelano de la manera siguiente:

"Y en transformación recíproca tenemos que siendo los puntos cualitativamente semejantes, las rectas correspondientes lo son también; porque no hay nada que distinga dos rectas si no son los puntos por donde pasan, los cuales como tales puntos, hemos dicho no tienen nada que los distinga. De modo que si se considera un punto determinado por dos rectas que en él se encuentran dichas rectas son cualitativamente incapaces de ser distinguidas de otra u otras, ya que dicho punto haría su única relación cualitativa."⁵⁰

Después de haber indicado esto, Russell desarrolla las transformaciones proyectivas —la proyección y la sección— que dan lugar a figuras, proyectivamente equivalentes⁵¹. Posteriormente, Russell realiza la reconstrucción del cuadrilátero de Staudt, para demostrar de modo absolutamente proyectivo la llamada razón anarmónica⁵², como método no-métrico para asignar de forma unívoca un número a cada punto de la recta.

⁴⁸ *Espacio y grandor*, Fragmento A, s/p. Las palabras de Russell sobre esto mismo son las siguientes: "De aquí, se deduce que para la geometría proyectiva, cuando se dan solamente dos puntos, ellos son indistinguibles cualitativamente de cualesquiera otros dos puntos de la misma línea recta, puesto que cualesquiera otros dos puntos tienen la misma relación" (*Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, p. 99 n° 108).

⁴⁹ Este principio de dualidad aparece multitud de veces subyacente en la obra de Russell (*ibidem*, n° 108 y otros). También era donde se apoyaba, como hemos visto, su paradoja sobre los puntos y las rectas que el solventará con la substancialización del espacio. Se puede ver la discusión en torno a este principio y su consecuencia, la substancialización del espacio en Couturat, «Études critiques. Essai sur les fondements de la géométrie», pp. 366-370; y la respuesta de Russell en «Les axiomes propres à Euclide sont-ils empiriques?», p. 776.

⁵⁰ *Espacio y grandor*, Fragmento A, s/p. La expresión de Russell es la siguiente: "Recíprocamente, puesto que una recta es una figura determinada por cualesquiera dos de sus puntos y todos los puntos son similares cualitativamente, se sigue que todas las líneas rectas son similares cualitativamente. Por consiguiente, debemos considerar a un punto como determinado por dos líneas rectas que se encuentren en él, y el punto según esta manera de razonar se convierte en la única relación cualitativa entre dos rectas. De aquí que si se considera el punto solamente como dado resulta que las dos líneas rectas son indistinguibles cualitativamente de cualquier otro par de rectas por el punto" (Russell, *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, pp. 99-100 n° 108).

⁵¹ "La aplicación sucesiva a cualquier figura de dos operaciones, una de sección y otra de proyección, produce otra figura que es indistinguible proyectivamente de la primera en tanto que las dimensiones de la figura original y de la segunda sean las mismas; así, por ejemplo, si la segunda operación es la de cortar por un plano, la figura original habrá sido plana. Las figuras obtenidas a partir de una figura dada mediante proyecciones y secciones solamente están ligadas a ella mediante el principio de dualidades..." (*ibidem*, p. 100, n° 110).

⁵² La relación anarmónica como hemos visto expresa la relación entre cuatro puntos de una recta. Como habíamos visto en la nota 16 de la página 265, esta razón es una razón que es métrica. A través de la construcción del cuadrilátero de Staudt se podrá desarrollar esta razón de forma estrictamente proyectiva.

Todos estos razonamientos y demostraciones son obviados por Amor Ruibal que pasa directamente a la conclusión que se deriva de ello: la relación anarmónica es una relación que puede ser desarrollada de manera exclusivamente proyectiva.

Russell, después, pasará a estudiar las llamadas transformaciones proyectivas: la sección y la proyección. Estas transformaciones tienen la propiedad de dar como resultado, figuras proyectivamente equivalentes. Seguidamente expone la demostración de Staudt, su famoso cuadrilátero, por la que puede establecerse una relación entre los cuatro puntos de una recta, sin necesidad de ninguna medida ni tan siquiera sin necesidad de coordenadas proyectivas. La relación entre los cuatro puntos de una recta, que antes era puesta de manifiesto por la razón anarmónica, es ahora demostrada de forma completamente sintética:

"Al mismo tiempo dada la identidad de cualidad de todos los pares de puntos que se hayan en una misma recta, así como de los pares de rectas proyectivas que pasan por el mismo punto, se alcanza fácilmente por qué son necesarios cuatro puntos en línea recta para que se dé lo que se denomina relación anarmónica, o sea una relación proyectiva intrínseca entre los puntos de suerte que dados tres de ellos, el cuarto pueda ser determinado de un modo proyectivo. Porque ni dos puntos, cuya relación proyectiva es la recta, ni un tercer punto añadido, cuya posición es indeterminable mediante la relación anterior, permiten aquella determinación, que corresponde en cambio a cuatro puntos, puesto que representa datos que ya no son necesarios para la línea recta y que permite ulteriores determinaciones."⁵³

Efectivamente, según ya indicaba Russell dos puntos son indiscernibles de cualquiera otros dos:

"Puesto que todas las líneas rectas son proyectivamente equivalentes, la relación entre un par de puntos es exactamente equivalente a la que haya entre otro par. Por consiguiente, dado un punto solamente, no puede asignarse relación alguna proyectiva a un segundo punto cualquiera que pueda limitar en algún sentido la elección de ese segundo punto."⁵⁴

Tampoco un tercer punto implica una relación anarmónica ya que:

"Dados dos puntos, sin embargo, existe una relación tal que el tercer punto sea colineal con los dos primeros. Esto limitará la posición del tercer punto a estar en una recta, pero como dos puntos no determinan más que una recta el tercer punto no se puede limitar más. Así vemos por qué no se puede encontrar relación proyectiva intrínseca entre tres puntos que nos capacitan para determinar unívocamente un tercero a partir de dos dados."⁵⁵

Pero ya este tercer punto implica que un cuarto punto pueda ser determinado unívocamente. Los primeros constituirían la recta donde se le puede encontrar y el tercero concreta este cuarto punto. En expresión del filósofo inglés:

"Sin embargo dados tres puntos colineales, tenemos ya algo más que una línea recta, y la construcción del cuadrilátero nos permite determinar unívocamente cualquier número de nuevos puntos sobre la recta. Esto nos demuestra el porqué la razón anarmónica tiene que ser una relación entre cuatro puntos más bien que entre tres."⁵⁶

La expresión de todo esto en Amor Ruibal es la siguiente:

⁵³ *Espacio y grandor*, Fragmento A, s/p.

⁵⁴ Russell, *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, p. 106, n.º 120.

⁵⁵ *Ibidem*.

⁵⁶ *Ibidem*.

"Tenemos, pues, ya suficiente para establecer que dos figuras enlazadas por transformación proyectiva son cualitativamente semejantes y viceversa, la semejanza cualitativa de dos figuras las hace estar en su relación proyectiva. Puntos en una misma línea sin diferencia son cualitativamente semejantes y por lo mismo sólo pueden distinguirse por inmediata intuición; más no conceptualmente sin recurrir al grandor. Si tenemos un punto fuera de esta línea en relación con los puntos anteriores, obtendremos nuevas relaciones, que son otras rectas; y añadiendo otro diverso se añadirán nuevas relaciones; pero siempre obtendremos así una misma relación que es la línea recta; mas estas líneas, recíprocamente, definen los puntos, y como ellos, son cualitativamente semejantes.

De aquí resulta que toda figura así construida, prescindiendo del grandor no puede distinguirse de otra sino es por intuición inmediata, y no por sus propiedades cualitativas.

Así tendríamos de cuatro en cuatro líneas o de cuatro en cuatro puntos una transformación proyectiva, que nos da figuras cualitativamente indiscernibles. Es decir, que la base para no considerar las figuras proyectivas como idénticas no es ningún principio conceptual, sino la percepción intuitiva de la diversidad de posición en ellas, ni más ni menos que acontece con la distinción de puntos entre sí.⁵⁷

Así pues, por las transformaciones proyectivas obtenemos figuras iguales. Su igualdad se basa en que son indiscernibles conceptualmente. Un punto cualquiera de una recta sería idéntico a todos los puntos de la recta mientras sea considerado solamente como punto, sin relación a ninguna otra figura. Si ahora tomamos un nuevo punto exterior a esta recta, las relaciones —líneas rectas que podemos establecer con estos puntos— son nuevas, y a su vez se puede decir que todas esas rectas definen el punto exterior. Si tomamos otro punto exterior distinto y establecemos con los puntos anteriores de la recta otras relaciones, la figura nueva así constituida será indistinguible cualitativamente de la anterior. Por lo tanto, el primer punto exterior como el segundo punto exterior son cualitativamente y conceptualmente iguales.

Lo que hemos efectuado es una transformación proyectiva que se denomina proyección, de este modo dos figuras, en este caso los puntos exteriores, tienen la misma cualidad, y por lo tanto son conceptualmente indiscernibles. Russell se refiere a ello:

"Así que la única razón, dentro de la geometría proyectiva, para no considerar las figuras como efectivamente idénticas, es la percepción intuitiva de la diferencia de posición. Esto es fundamental y debe aceptarse como un dato, el cual se presupone en la distinción entre puntos diversos y constituye la base fundamental de la Geometría. Efectivamente ello es la esencia de la noción de una forma de exterioridad y constituye la materia objeto de la geometría proyectiva."⁵⁸

Lo que lleva a Amor Ruibal a concluir que la geometría proyectiva habrá de regirse por unos principios que coinciden con los axiomas que Russell establece para la misma. Aunque nuestro filósofo compostelano enuncia el primero y el resto los indica tan sólo numéricamente, no es difícil, a tenor de lo expuesto, deducir los otros dos:

"En vista de esto y como base de la geometría proyectiva resultan los siguientes principios, a los cuales se ajustan las demás deducciones:

1) Las partes que pueden distinguirse en el espacio son cualitativamente semejantes, y por lo mismo no pueden distinguirse más que por el hecho inmediato de que unas están situadas fuera de las otras.

2).....

⁵⁷ *Espacio y grandor*, Fragmento A, s/p.

⁵⁸ Russell, *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, p. 107, n° 121.

3).....⁵⁹

Para Amor Ruibal estos tres axiomas se basan en el primero de ellos que afirma la homogeneidad del espacio⁶⁰. Como hemos visto, una figura —sea punto línea o superficie— viene definida por sus relaciones internas, siendo por ello, externamente indiscernible de cualquier otra que posea las mismas relaciones internas, como acabamos de ver. Lo que significa es que el espacio es homogéneo. Al ser el espacio homogéneo la posición de una figura en un lugar u otro del espacio, es absolutamente indiferente a la figura. Esto es, el espacio no forma parte de las relaciones internas de las figuras, ni las modifica:

"La razón de estos axiomas está en la perfecta homogeneidad del espacio que se afirma en el primero de los mencionados axiomas; puesto que se ha establecido que un figura puede ser definida por sus relaciones interiores; y éstas son independientes de las exteriores a las cuales pertenece solo determinar la posición y por lo mismo ninguna acción tiene sobre la figura en sí. Y si las propiedades (la homogeneidad y relatividad de posición, resultan ser propiedades de toda forma de exterioridad, fuera de la intuición, y puramente conceptuales; pero que abarcan lo mismo el espacio euclidiano que el no euclidiano. [Esto aparece tachado]) Internas de una figura son las mismas cualesquiera que sea sus relaciones externas, síguese que todas las partes del espacio son cualitativamente semejantes o sea que es homogéneo el espacio; puesto que un cambio de relación externa es un cambio de la parte del espacio ocupado."

Por ello, Amor Ruibal siguiendo muy de cerca a Russell dice:

"Toda comparación espacial cualitativa, pues, presupone la homogeneidad y relatividad de la posición. Mas esta homogeneidad y relatividad son propiedades de la forma de exterioridad, aunque puramente conceptuales y fuera de la intuición y que en este concepto se extiende lo mismo al espacio euclidiano que al no euclidiano."⁶¹

Es esta homogeneidad la que será el fundamento de la forma de exterioridad como explicativa del espacio. Forma de exterioridad que será por la misma razón de la homogeneidad, divisible *ad infinitum*, y lo que como veremos más detalladamente con respecto al siguiente texto de espacio y grandor es lo problemático e inaceptable para Amor Ruibal.

"Sobre la homogeneidad se funda una condición singular de la exterioridad que es su infinitud de divisibilidad; pero esto no puede ser sin una substanciación de la exterioridad; y que es lo que origina las líneas y las superficies como compuestas de puntos, y que origina las dificultades de la geometría."⁶²

⁵⁹ *Espacio y grandor*, Fragmento A, s/p. Ver la enunciación de estos axiomas por Russell en la página 271 de este trabajo. La enunciación de estos axiomas por Amor Ruibal aunque se hayan en este lugar, debería hacerse cuatro párrafos más abajo cuando comienza: "En vista de esto, y como principio de la geometría proyectiva, pueden sentarse..."

⁶⁰ *Espacio y grandor*, Fragmento A, s/p. Todo lo cual no es sino paráfrasis de Russell, "Ahora cuando consideramos lo que esté involucrado en tal equivalencia absoluta cualitativa, encontramos en seguida como el más evidente prerrequisito, la homogeneidad perfecta del espacio. Pues se presupone que una figura se puede determinar completamente por sus relaciones internas, y que las relaciones externas que definen su posición, aunque son suficientes para distinguirla de otras figuras, ello no afecta en manera alguna a sus propiedades internas, que son consideradas como cualitativamente idénticas con las de las figuras con relaciones externas totalmente diferentes" (Russell, *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, p. 108, n° 124).

⁶¹ *Espacio y grandor*, Fragmento A, s/p. Russell dice de la manera siguiente: "Por consiguiente, la homogeneidad del espacio y la relatividad de posición están presupuestas en la geometría proyectiva. Ésta última es, como ya se vio, la base del principio de dualidad, pero estas propiedades como procuraré demostrar, corresponden necesariamente a cualquier forma de exterioridad y así son propiedades *a priori* de todos los espacios posibles. Sin embargo, para demostrar esto, deberemos definir de antemano la noción de forma de exterioridad en general" (Russell, *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, p. 109, n° 125).

⁶² *Espacio y grandor*, Fragmento A, s/p. En Russell, véase todo el n° 131 del *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, y en especial: "Por consiguiente para tratamiento cuantitativo las relaciones espaciales deben ser substanciadas. Una vez hecho esto obtenemos, como vimos anteriormente, una forma de exterioridad homogénea e infinitamente divisible. [...] Es así solamente a partir de la substanciación de las relaciones que requiere la geometría métrica, como surge la consideración de las rectas y los planos, como compuestos de puntos, y es pues de esa substanciación de la que brotan las dificultades para la geometría métrica."

Con esto se cierra el primer texto de *Espacio y Grandor* «Fragmento A», en el que Amor Ruibal sigue muy de cerca los conceptos y explicaciones de Russell sobre la geometría proyectiva. En el segundo texto, ya no sigue las teorías de Russell, sino que al contrario, es la crítica de los planteamientos del filósofo de Cambridge. ¿Por qué este cambio de actitud de un fragmento a otro? Una posible respuesta a esta cuestión, es que el primer fragmento, es un apunte de Amor Ruibal, de las teorías de Russell sobre el espacio. Pero después de su estudio, y habida cuenta de las polémicas suscitadas por este trabajo —por otra parte, fundamental en la historia de las matemáticas—, Amor Ruibal encuentra una serie de problemas y contradicciones en la teoría de Russell. Estos problemas son los derivados de la dualidad punto/línea, y el que podemos considerar más fundamental: el carácter inextenso de los puntos, y su papel de ser los elementos últimos del espacio. La contradicción que existe en la naturaleza de los puntos, tiene su raíz matemática en un problema más general: las relaciones entre el número y el continuo.

A estas paradojas, habría que añadir una razón de índole filosófica: la teoría russelliana sobre el espacio, termina derivando hacia un idealismo. De hecho, ya su teoría, al considerar los axiomas comunes de la geometría métrica, y los axiomas de la geometría proyectiva como *a priori*, no hacía, sino concebir que la esencia del espacio, *la forma de exterioridad* era *a priori*. Esta solución no se podía conciliar con el realismo de Amor Ruibal. Por ello, gran parte de las energías de nuestro filósofo compostelano se dedicarán a demostrar que inclusive el espacio como *forma de exterioridad* implica un concepto que no es *a priori*, sino nocional: el grandor. Esta tarea la realiza en el «Fragmento B» de *Espacio y Grandor*. Pero antes de mostrar cómo realiza esta crítica, es necesario que volvamos de nuevo a contemplar su época, ya en ella se desarrolla una discusión, que consideramos fundamental para la comprensión posterior de los argumentos que desarrolla Amor Ruibal contra Russell: es la discusión sobre el número y el grandor.

CAPÍTULO VI

EL GRANDOR

1. EL NÚMERO Y EL GRANDOR.

En 1898, dos años después de la vuelta de Amor Ruibal de Roma y estando ya dando clase de Derecho Canónico, en la Universidad Pontificia de Santiago de Compostela, se publicaba en la *Revue de Métaphysique et Morale*, un artículo de L. Couturat¹ comentando a su vez otro, escrito por el joven B. Russell, en la revista inglesa *Mind*, y titulado «On the Relations of Number and Quantity»². En el artículo de L. Couturat se hacía resumen y crítica de la teoría de Russell sobre el grandor y los números, y además L. Couturat añadía su explicación de cómo la teoría de números dependía de la del grandor. Es interesante acercarnos a esta polémica no tanto por la solución matemática que nos presenta Couturat como por los problemas que se plantea con su concepción del grandor, la relación de éste con la teoría de la medición, así como por las implicaciones filosóficas de estos planteamientos.

Son estas implicaciones filosóficas y los problemas encontrados en esta substancialización de las relaciones lo que encuentra Amor Ruibal como inaceptable y lo que origina su crítica. Antes de entrar en ello hay que añadir que aunque dudamos que Amor Ruibal haya leído directamente el artículo de Russell en *Mind*, es evidente que tendría conocimiento al menos de su contenido, por la recensión que hace Couturat antes de su crítica. De hecho el artículo de Couturat se divide en dos partes, bien señaladas: una primera parte de exposición y crítica del artículo de Russell, y una segunda donde se explana su propio sistema. Pasemos a revisar ahora mismo, el contenido de este artículo.

El problema fundamental nace en cómo aplicar el número al grandor, en tanto que el grandor supone algo continuo, mientras que el número supone la discontinuidad. En efecto, la "materia", el objeto

¹ L. Couturat, «Sur les rapports du nombre et le grandeur» en *Revue de Métaphysique et Morale*. París, 1898. pp. 422-447.

² Publicado en *Mind*, tomo VI, n° 23. 1897.

sobre el que se aplica el número es el *continuo*, la operación por la cual este continuo se ve limitado a un grandor y su comparación con otro grandor considerado como unidad, será la operación de la medida. Para Russell, el número no hace más que expresar la relación de un grandor con otro:

"Dans le continu, le nombre n'exprime que le rapport d'une grandeur à une autre; le nombre présuppose toujours une unité qui n'a rien de numérique, qui est, par suite, une grandeur. Il est donc absurde de croire que le nombre épuise le contenu de la grandeur, et de vouloir réduire la grandeur continue à un système de nombres (comme certains mathématiciens modernes)."³

Así pues resulta que el número necesita de la *unidad* para constituirse, pero a su vez esta *unidad* no es sino un grandor. Es decir, el grandor necesita del grandor para constituirse ya que el grandor necesita de la medida para constituirse; y ésta, a su vez, supone inexcusablemente una unidad de medida que no es sino un grandor. Con lo cual llegamos a la primera antinomia, de la que como veremos, Amor Ruibal se hará eco de ella posteriormente:

"Il y a là une contradiction, une sorte d'antinomie: la grandeur suppose la comparaison, et la comparaison suppose la grandeur."⁴

Pero si se examina con un poco de detenimiento esta antinomia, se observa que tiene su origen en la definición misma de grandor. La definición de grandor que da Russell y transmite Couturat es la de:

"...une chose susceptible de plus et de moins."⁵

Esta definición, afirma dos cosas al mismo tiempo: primero que el grandor está determinado por la posibilidad del aumento o la disminución. Pero, ¿el aumento o la disminución de qué? Del grandor mismo. Se da, pues, una circularidad, ya que la definición del grandor supone el grandor mismo como sujeto del aumento y la disminución.

Planteándolo de otra manera podemos decir que el grandor supone que una cosa pueda cambiar sin cambiar de naturaleza. Ya que este cambio no es más que cuantitativo y la naturaleza de una cosa que es su aspecto cualitativo, permanece constante. Con lo cual se plantea el problema siguiente: ¿el grandor es algo intrínseco o algo extrínseco a las cosas? Russell ante este dilema desarrollará una argumentación que demuestra tanto, que el grandor es intrínseco como extrínseco, y en definitiva que ambas soluciones son igualmente válidas resultando la antinomia que hemos enunciado más arriba.

En efecto, si el grandor es intrínseco a las cosas, tendremos que adoptar y justificar una de las dos hipótesis siguientes: a) que el grandor es una categoría independiente del resto de categorías, o b) que el grandor es un dato inmediato de los sentidos.

Si aceptamos la primera hipótesis, el grandor habría de ser independiente del resto de las cualidades del objeto, lo que significa, a su vez, que no pueda definirse por conceptos.

Esta primera hipótesis es analizada por Russell haciendo distinción de dos tipos de grandores: el grandor extensivo y el intensivo. El grandor extensivo es aquél cuyo aumento o disminución es homogéneo al grandor original: vgr. la extensión. Por el contrario, el grandor intensivo es aquél cuyo

³ Couturat, «Sur les rapports du nombre et le grandeur», p. 423.

⁴ *Ibidem*.

⁵ *Ibidem*, p. 424.

aumento o disminución no es homogéneo al grandor original: vgr. el tono de un color. En efecto, así tenemos que la diferencia entre dos extensiones es otra extensión, ahora bien la diferencia de dos tonos no es otro tono.

Si analizamos las implicaciones del grandor extensivo llegamos a una contradicción: en tanto que *homogéneo* al cambio, el grandor extensivo habría de ser considerado como algo *accidental*, algo que puede añadirse y quitarse, sin modificar la naturaleza del sujeto sobre lo que se añade o se subtrae. En cambio, si consideramos el sujeto sobre lo que se añade y subtrae, ese sujeto será *substancial*: es lo que permanece por debajo del cambio. Luego llegamos a la conclusión, y aquí aparece la contradicción que:

"...la grandeur extensive est un accident, en tant qu'homogène à son changement; et elle est une substance, en tant que sujet à son changement."⁶

Si consideramos ahora el grandor intensivo vemos una idéntica contradicción. Dos grandores intensivos pueden compararse si son o no iguales, ya que son cualitativamente idénticos. La igualdad o desigualdad entre ellos no existe más que después de la comparación. Ahora bien, es también indudable que ellos existen antes de la comparación con su grandor determinante, y consecuentemente el grandor es previo a la comparación. Con lo cual caemos de nuevo en la antinomia presentada al principio: el grandor es fruto de la medida, pero a su vez es el grandor lo que fundamenta la medida, ya que ésta no es otra cosa que la comparación de grandores. En conclusión, esta primera hipótesis que mantenía que el grandor es categoría independiente de las cualidades, nos ha conducido a una contradicción.

Examinemos ahora la segunda de las hipótesis: la consideración del grandor como un dato inmediato de los sentidos, y por lo tanto no conceptual. Esta segunda hipótesis para explicar el posible carácter intrínseco del grandor tiene dos dificultades. Primero, que sólo explicaríamos de esta manera el grandor intensivo pero no el extensivo, siendo éste último casi más importante que el primero. Además Poincaré en un artículo de la *Revue de Métaphysique et Morale*⁷ sobre el continuo matemático había demostrado que el grandor no puede ser sino de tipo conceptual, ya que aunque perceptivamente no podemos percibir la diferencia entre dos sensaciones, conceptualmente si podemos intercalar entre ellas un valor intermedio, y así sucesivamente; pudiendo entonces tener idea del continuo, a pesar de que no lo conozcamos por la percepción⁸.

Estas dos hipótesis y su falsación nos llevan a contradecir la primera propuesta del grandor como algo intrínseco a las cosas, ya que todas las conclusiones a las que llegábamos siguiendo esta hipótesis tenía como presupuesto común que:

"... la grandeur est une notion de relation: une chose n'est pas une grandeur par elle-même, mais par rapport à d'autres choses. La grandeur naît donc de la comparaison, son essence consiste dans la mesure."⁹

Aunque por otra parte, y aquí volvemos a la antinomia expuesta al principio:

⁶ *Ibidem*.

⁷ H. Poincaré, «Le continu mathématique» en la *Revue de Métaphysique et Morale*, vol.1. 1893.

⁸ Una demostración similar de esto aparece en la obra de Poincaré, *El valor de la ciencia*, pp. 50-54.

⁹ Couturat, «Sur les rapports du nombre et le grandeur», p. 426.

"... la grandeur reste antérieure à la mesure et au nombre, car l'un et l'autre reposent sur la comparaison préalable des grandeurs au point de vue de plus et du moins."¹⁰

Esta conclusión negativa sobre el concepto de grandor lleva a Russell a plantearse un problema previo, y que según él, descubre el concepto de grandor. Este problema es la inadecuación entre nuestro conocimiento conceptual y nuestro conocimiento sensible. Efectivamente la medida supone que comparamos dos cosas que, conceptualmente consideradas, son iguales. Ahora bien el hecho mismo de la comparación, hace que se las compare cualitativamente, convirtiendo, por el hecho mismo de la comparación la cantidad en una cualidad. Así pues, en conclusión de Russell, podemos decir que:

"Si l'intelligence était adéquate à la sensibilité, elle découvrirait entre toutes choses des différences conceptuelles et les distinguerait par leurs qualités individuelles. Si les données des sens nous apparaissent sous forme de grandeurs, c'est qu'elles ne sont pas pleinement intelligibles. [...] L'idée de grandeur manifeste donc «l'inadéquation de l'intelligence et de la sensibilité», ou encore «l'irrationalité fondamentale de la sensation»."¹¹

A estos problemas planteados por Russell —y no completamente resueltos, ya que sólo le llevan a afirmar la limitación de nuestro conocimiento—, va a responder en este artículo L. Couturat, discutiendo por una parte los razonamientos y conclusiones del joven filósofo británico, y por otra, proponiendo una teoría de números, que dependa del orden y del grandor.

Couturat va a criticar a Russell el que quiera demostrar que el grandor es contradictorio, que la contradicción de tipo matemático, se asiente a su vez, en la contradicción filosófica entre el entendimiento y los sentidos. Así mismo, Couturat reprochará a Russell, que habiendo demostrado que ambas hipótesis sobre el grandor, la intrínseca y la extrínseca son contradictorias, decide al final quedarse con una de ellas: la que afirma el carácter externo del grandor; no estando justificada, en modo alguno, tal elección.

En completa oposición con Russell, para Couturat es válida una de las hipótesis examinadas sobre el grandor: la que mantiene que el grandor es intrínseco a las cosas. Inclusive más intrínseca que el resto de las cualidades del objeto considerado. Para el filósofo francés esta concepción intrínseca del grandor no es contradictoria, y las contradicciones y antinomias planteadas por Russell son falaces. En efecto, Couturat distingue entre un grandor medido y un grandor medible, así toda medición no es más que poner un grandor en relación con otro, entendido éste como unidad, de lo que se obtiene un número que es el grandor medido. Ahora bien, esta comparación se realiza ya sobre grandores determinados, los grandores *mesurables*. De esta manera, para Couturat, escapamos

"... à la première antinomie: «la comparaison suppose la grandeur; la grandeur suppose la comparaison». Pour dissiper l'équivoque d'où naît la contradiction, il suffit de distinguer, [...], la grandeur de la quantité, ou grandeur mesurée, et de dire: «La quantité suppose la comparaison; mais la comparaison suppose la grandeur»."¹²

Una segunda antinomia que suponía el texto de Russell y que impedía la inteligibilidad del grandor era considerar que el grandor no era más que una relación, pero que a la vez era más que una relación. Esta antinomia, como se ve claramente, depende de la anterior y la solución que da Couturat se deduce de la que acabamos de ver. La cuestión estriba, en cómo entendemos la relatividad del grandor:

¹⁰ *Ibidem*.

¹¹ *Ibidem*, pp. 426-427.

¹² *Ibidem*, pp. 429-430.

El grandor, o mejor dicho el juicio del grandor —el grandor medida—, se ha de realizar sobre dos grandores dados —determinados—, y de la misma especie. En palabras bastante claras de Couturat:

"Pour pouvoir dire de deux choses que l'une est plus grand ou plus petite que l'autre, il faut évidemment les concevoir au préalable comme des grandeurs; de plus, comme des grandeurs de même espèce, sans quoi elles ne seraient pas même comparables; enfin, comme des grandeurs déterminées, car autrement, leur rapport de grandeur, le sens même de leur inégalité, serait arbitraire et indéterminé."¹³

La última crítica —ya más de tipo filosófico— que realiza Couturat a Russell es, que utiliza un lenguaje equívoco —al que subyace un esquema aristotélico— que le conduce a todos estos errores. Russell habla del grandor usando el esquema de substancia y accidentes, siendo substancia lo que permanece en todo cambio y los accidentes aquello que se añade al cambio. El problema surge cuando la substancia y los accidentes son "homogéneos": se igualan substancia y accidentes, y aparece el paralogismo. Para Couturat, este esquema aristotélico, no tiene ya sentido en las ciencias:

"Mais, en vérité, c'est vouloir s'abuser que d'appliquer à l'idée claire et distincte de grandeur les catégories de substance et d'accident, et même la distinction logique de sujet et d'attribut, qui n'ont pas de place en mathématiques ni dans aucune science. Il faut laisser ces notions confuses, et vides à l'arsenal scolastique, et les régler dans ce musée d'antiquités inutiles et encombrantes qu'est le système d'Aristote."¹⁴

Si para Russell una cosa que tenía el grandor A y pasaba a tener el grandor B, planteaba el problema del movimiento y del cambio, Couturat resuelve este problema de una forma más matemática: se trata de una variable X que va pasando por diversos valores sucesivos. El problema filosófico planteado por Russell, de un grandor sensible pero no inteligible, ya que se basaba en el reconocimiento por parte de nuestro entendimiento que existe entre dos cosas una diferencia que no puede ser inteligida, queda de este modo matemáticamente superado. Esta «diferencia de los indiscernibles» que planteaba Russell con respecto al grandor, y le llevaba a una especie de escepticismo es superada por Couturat. Couturat concibe que el grandor es cognoscible, o más aún, situándose en la herencia cartesiana, el grandor es para Couturat lo único explicativo. Sólo podemos conocer científicamente lo que procede de la cantidad: lo mensurable y lo calculable:

"Ainsi nous nous accordons avec M. Russell pour reconnaître l'hétérogénéité de la sensibilité et de l'entendement, et l'irrationalité fondamentale de la sensation; seulement, au lieu de dire que ce qu'il y a d'incompréhensible dans la sensation, c'est la quantité, parce qu'elle est irréductible à la qualité, nous disons que c'est la qualité, parce qu'elle est irréductible à la quantité."¹⁵

¹³ *Ibidem*, p. 430.

¹⁴ *Ibidem*, pp. 431-432.

¹⁵ *Ibidem*, p. 434.

2. EL GRANDOR EN LA FILOSOFÍA DE AMOR RUIBAL.

Este artículo, como ya hemos indicado, seguro que lo conocía el filósofo compostelano. Aunque también tenemos que decir que ninguno de sus escritos puede ser entendido como una respuesta directa a los planteamientos de Russell y Couturat. Teniendo en cuenta que este artículo es de 1898, y sus escritos sobre el grandor son algo más posteriores, entre 1911-30, no se puede ver en éstos últimos un *reflejo directo* de las cuestiones que hemos analizado. Pero a pesar de la distancia en el tiempo y de la diferencia en el talante de nuestro autor, con respecto a Couturat y Russell, se pueden ver en los escritos del filósofo compostelano destellos de esas cuestiones. Por ello no queremos hacer aquí una comparación exhaustiva entre la teoría de éste y la de aquéllos, ni encontrar citas de estos artículos, sólo queremos, y podemos, poner de manifiesto que las soluciones que da nuestro autor al problema del grandor, tienen como telón de fondo estas polémicas.

Amor Ruibal cuando se ocupa del grandor de manera general, lo entiende al igual que los autores estudiados, como principio y base de otros conceptos. En el texto del tomo X de los *P.F.F.D.*, aparece como fundamento de todo lo mensurable y el origen del número:

"...todo lo mensurable aparezca bajo su dominio, o sea conocido bajo la razón de dicha medida. El número, el movimiento, el tiempo y el espacio, son tributarios del grandor, de la misma manera que lo extenso."¹⁶

Que la extensión, y por consiguiente el espacio, dependan de la idea del grandor no es en absoluto difícil de entender. Que el tiempo pueda reducirse a grandor es posible hacerlo a través del espacio. De hecho medimos el tiempo por el movimiento y por ende por el espacio.

"... si la extensión, el espacio y el tiempo son mensurables, están comprendidos bajo la noción de grandor; y a ellos ha de aplicárseles dicha noción, según su respectivo carácter."¹⁷

Su relación con el número es más difícil de conceptualizar —lo acabamos de ver en Russell y Couturat—. Para Amor Ruibal el número se relaciona con el grandor en tanto que:

"... el grandor viene a ser una forma transcendente, o una variante del número que hemos señalado como propiedad transcendental de los entes. Y he aquí que el grandor, como el número, se extienda a toda realidad actual o posible."¹⁸

Lo que resulta extraño, es que el grandor, a parte de a las realidades extensas, se aplica a toda realidad actual o posible, y de hecho también se aplica a Dios y a los Ángeles:

"Así el Ente Supremo es por naturaleza más grande que todos los espíritus; los Ángeles son más grandes por su naturaleza, que el alma racional, etcétera."¹⁹

¹⁶ *P.F.F.D.*, X, p. 225. Y un poco más adelante, se reafirma en la misma opinión: "El número, el movimiento, el tiempo, el espacio, son tributarios del grandor, de la misma manera que lo extenso; y son inconcebibles sin que antes exista en nosotros la noción mencionada" (*P.F.F.D.*, X, p. 229).

¹⁷ *P.F.F.D.*, X, p. 229.

¹⁸ *P.F.F.D.*, X, p. 230.

¹⁹ *P.F.F.D.*, X, p. 230.

Sólo se puede entender esta afirmación teniendo en cuenta dos aspectos: el grandor intensivo, y la homogeneidad del ser. El grandor intensivo, significaba la comparación desde el punto de vista de la cualidad. Dios y el hombre serían iguales en cuanto al ser nocional, pero Dios es ser infinito. Esto se explica teniendo en cuenta su concepción de la homogeneidad en el ser nocional.

Amor Ruibal recoge los problemas enunciados por Russell respecto al grandor con la finalidad de mostrar su carácter nocional. Así para Amor Ruibal si pretendemos hacer del grandor una idea y definirlo, por lo tanto, como "todo lo que puede tener aumento o disminución", entraremos en las contradicciones de la medida, como acabamos de ver en el artículo de Couturat. El grandor de esta manera sería resultado de un aumento, pero para ello ha de tener ya previamente un grandor determinado. Y por otra parte, como también hemos visto en Amor Ruibal y en la exposición del grandor de los filósofos francés y británico, el grandor es producto de una comparación, pero para que pueda darse esa comparación tenemos antes que tener dos grandores determinados.²⁰

También Amor Ruibal critica otra posible definición del grandor como "todo lo que es comparable desde el punto de vista de la igualdad o desigualdad", ya que en vez de estar definido el grandor por la igualdad o desigualdad, éstas presuponen el grandor. En efecto:

"La idea de igualdad, o desigualdad, hace manifiesto otro inconveniente; y es que no pudiendo darse igual ni desigual, sino entre cosas distintas, o el grandor no sería tal por su condición intrínseca, o la definición no merecería ese nombre, pues no significaría lo definido más que en sus manifestaciones accidentales."²¹

Esta nueva definición del grandor parece que hace más bien referencia al grandor denominado «intensivo» por Russell. Como hemos visto, para que puedan ser comparados entre sí dos grandores intensivos —vgr. los tonos de un color—, hay que considerarlos sólo desde el punto de vista de la «igualdad o desigualdad». Ahora bien, esta definición, para Amor Ruibal, supone dos equívocos: el primero de ellos, coincide con el que hemos visto más arriba: la igualdad o desigualdad presupone el grandor y por lo tanto no lo explica. Además como añade en este segundo razonamiento, se daría el caso de que el grandor habría de establecerse entre dos cosas *conceptualmente iguales*, aunque *realmente distintas*, se entraría en una contradicción ya que una de dos: o el grandor sería entonces algo intrínseco a la cosa y por lo tanto no se podría establecer la comparación de grandor que aparece siempre como una comparación externa; o bien que el grandor en tanto que igual o desigual sería, por lo tanto, algo no esencial para definir el grandor, y en definitiva la definición quedaría vacía. Pongamos un ejemplo para mejorar la comprensión de esta crítica de Amor Ruibal: Tengamos dos papeles *distintos* A y B. El A más blanco que el B. Si concebimos el grandor como la igualdad o desigualdad existente entre un blanco y otro, tendremos que A es más blanco que B o que A es menos blanco que B. Ahora bien, caeremos en una contradicción si queremos definir como grandor la «cantidad»²² de blancura de un papel, ya que si decimos que la cantidad de blancura sólo se sabe después de la comparación de un blanco con el otro, también es cierto que cada uno de ellos tiene una «cantidad» de blanco determinada, antes de toda comparación. Con lo cual aparece de manifiesto la contradicción ya señalada: el grandor aparece como

²⁰ Fórmula muy parecida a la empleada por Russell y Couturat.

²¹ P.F.F.D., X, p. 228.

²² Ponemos «cantidad» por ser un término muy gráfico, aunque sabemos que es un tanto impropio cuando se comparan colores, u otras cosas menos cuantitativas como el espacio, la extensión o la masa. Otros términos aunque son, quizá, más propios para lo que se compara, podrían llevar a confusiones: Por ejemplo «grado», ya que subrepticamente estamos incluyendo una medición con respecto a una escala dada.

fruto de la comparación y a su vez como el fundamento de dicha comparación. Y también, según la crítica de Amor Ruibal quedaría de manifiesto que si el grandor resultase de la igualdad o desigualdad de esa cantidad de blanco de las dos hojas a las que nos referimos resultaría que aunque ese blanco fuese el mismo blanco *conceptualmente*, —ya que si no, sería imposible compararlo desde el punto de vista de la igualdad o desigualdad—, serían *distintos realmente*, con lo cual se cae en las contradicciones dichas por Ruibal: la cantidad de blanco pertenece *intrínsecamente* a cada hoja y por lo tanto no se da evidentemente comparación y por lo tanto «grandor de blanco», o bien el que tuviese «mas o menos blancura» sería algo extrínseco a la blancura y por lo tanto no serviría para definir el concepto de grandor. Sería una definición huera²³.

Otro problema al que parece responder nuestro canónigo, es el problema filosófico que derivaba Russell del problema matemático, y al que a su vez respondía Couturat: la disociación entre lo percibido por los sentidos y lo aprehendido por el entendimiento, desembocaba en una especie de agnosticismo, ya que nuestro entendimiento se veía imposibilitado a conocer *todo* conceptualmente.

Para Amor Ruibal sucede todo lo contrario. Para él, el grandor expresa la vinculación necesaria que existe entre sensibilidad y entendimiento por una parte, y entre el objeto y el sujeto por otra. De hecho en el texto del tomo VIII de los *P.F.F.D.*, en que Amor Ruibal trata del grandor en la sensibilidad, le sirve antes que nada para ilustrar la adecuación del conocimiento sensible con el intelectual sin necesidad de elementos intermedios, ni de las formas mixtas del aristotelismo como son el entendimiento agente y el entendimiento paciente:

"... así como necesita el espíritu del elemento material para la intelección, de la cual es instrumento previo y concomitante, sin que intervenga en la operación intelectual, de igual suerte ha menester dicho elemento para el conocimiento sensitivo, que es uno de sus varios actos y operaciones."²⁴

Lo orgánico, pues, aparece tanto en lo intelectual como en lo sensitivo, demostrando por una parte que no hay oposición entre lo intelectual y lo sensitivo, así como que para el conocimiento es necesario el sujeto cognoscente y la realidad cognoscible.

Amor Ruibal cuando estudia las sensaciones indica que las nociones de naturaleza requieren dos condiciones para realizarse: el espacio y el tiempo:

"... las nociones de naturaleza se realizan con dos condiciones, que aunque objetivamente motivadas, son de carácter psicológico, a saber: la proyección externa de la continuidad como forma del tiempo y de extensión; cuyo fundamento real no es lo continuo ni lo discontinuo, sino la simple sucesión en sí de causa y efecto, respecto del tiempo, y del grandor en la entidad objetiva traducible en la continuidad de la extensión, y en su forma abstracta, el espacio."²⁵

Estas condiciones de las nociones de naturaleza son subjetivas, en cuanto determinan la forma de todas percepciones que tenemos. Amor Ruibal fijándose en el grandor, destaca que toda sensación tiene de forma concomitante un grandor. Esto es, en toda sensación se da un grado de intensidad. Así, pues,

²³ Como se observa, las críticas de Amor Ruibal a las definiciones de grandor hacen claramente referencia a la discusión entre Couturat y Russell. Se puede decir, sin exagerar demasiado, que los argumentos del artículo de Couturat, aparecen planteados de nuevo por Amor Ruibal en este tomo X, de los *P.F.F.D.*.

²⁴ *P.F.F.D.*, VIII, p. 291.

²⁵ *P.F.F.D.*, VIII, p. 292. Es por ser el espacio y el tiempo condiciones de las nociones de naturaleza —las categorías para Amor Ruibal—, por lo que denomina formas de la continuidad como *hypercategorías*: "El número, el movimiento, el tiempo, el espacio, son tributarios del grandor, de la misma manera que lo extenso; y son inconcebibles sin que antes exista en nosotros la *noción* mencionada" (*P.F.F.D.*, VIII, p. 239).

no es que se tenga sensación determinada de un grandor, que el grandor sea percibido como un objeto externo a nosotros, sino que el grandor aparece acompañando a toda percepción que tengamos:

"Nosotros, en efecto, no tenemos sensación alguna de la extensión o del grandor, ni hay sentido alguno capaz de percibirlo o representarlo, sino que en todos a través del objeto propio del sentido de que se trate."²⁶

Según esta argumentación, el concepto de grandor aparece como *a priori*, esto es, como condición subjetiva de la sensibilidad, y lo nocional según esto parecería equipararse con la *aprioridad* kantiana. Pero, no nos lleven a error estas palabras de Amor Ruibal, ya que si aquí vemos la afirmación de lo subjetivo del grandor, inmediatamente, afirmará también que al grandor subjetivo corresponde indudablemente un grandor objetivo. Así,

"La intensidad, pues, no es propia tan sólo de las sensaciones, como se ha sostenido; la intensidad hállase, al igual que en las sensaciones, en el mundo externo, de donde ellas provienen"²⁷

Por otra parte, nuestro filósofo compostelano, viene a retomar la división que veíamos en la discusión de Russell con Couturat, entre el grandor intensivo y el grandor extensivo. Este último sería el que se aplicaría a la materia sensible, y que vendría a ser la extensión, como hemos visto. El grandor intensivo, que era más problemático en su concepción, lo aplica Amor Ruibal en primera instancia a la sensación, pero también a los valores y por ende a la moral.

Ello hace que todo lo cualitativo aparezca con un grandor determinado. Para Amor Ruibal, no podemos separar lo cualitativo y lo cuantitativo. Esto era lo que había ocurrido en la discusión Russell-Couturat. En efecto, hemos visto que el grandor, implicaba la eliminación de todo lo cualitativo, para sólo considerar lo cuantitativo, lo que llevaba aparejada la duda sobre el carácter intrínseco o accidental del grandor. Esta cuestión, así como las antinomias a que conducía, eran eliminadas por Russell al afirmar la contradicción entre el entendimiento —dirigido hacia lo cualitativo— y la sensación —referida a lo cuantitativo—. Couturat evitaba así mismo las paradojas, haciendo de lo cuantitativo, lo único científicamente explicativo de las cosas. Así lo cualitativo quedaba definido por lo cuantitativo.

Para Amor Ruibal, ni una ni otra solución son válidas. Para nuestro autor toda sensación se da bajo un tipo de grandor y por lo tanto, la «forma cualitativa», es representada por una «intensidad» determinada de la sensación. De esta manera,

"... las cualidades no se encuentran totalmente aisladas entre sí, como se ha sostenido, haciendo imposible que fuesen comparables, ni menos con la extensión, la cual por el contrario es primordial en la determinación de las sensaciones."²⁸

Esto es, frente a la idea de Russell, el grandor, no implica la eliminación de lo cualitativo, sino que al contrario, lo supone. Y por otra parte, tampoco resulta válida la solución cartesiana —Couturat— en que se disocia lo cualitativo de lo cuantitativo, convirtiendo a lo cuantitativo explicativo de lo cualitativo. Para Amor Ruibal:

²⁶ P.F.F.D., VIII, p. 293.

²⁷ P.F.F.D., VIII, p. 294.

²⁸ P.F.F.D., VIII, p. 293.

"De esta misma condición del grandor [su condición de nocional] procede que no se ofrezca al conocimiento, sino con el aspecto propio de las cosas a que se aplica; y de ahí, que el grandor aplicado a las sensaciones aparezca a primera vista como grandor diverso del que se enuncia del mundo externo, y que se trate de aislar, y se aisle en varias escuelas, el elemento cuantitativo puro del puro elemento cuantitativo, sin reparar en que también en el mundo objetivo de la cantidad no se ofrece a la percepción, sino como cualitativa o medida de una cualidad, mediante la cual puede ser apreciada."²⁹

Además, para el canónigo compostelano, es un error el considerar como única explicación de la realidad lo mensurable y lo extenso, como hizo Descartes, ya que estos dos modos de grandor no son los únicos que pueden ser contemplados. Como ya hemos visto, para Amor Ruibal existen varios tipos de grandor: el de la «materia sensible» que sería el grandor extenso, pero también hay un grandor especial de las sensaciones que no es extensivo sino intensivo, y que Amor Ruibal llama "grandor de los valores". Este "grandor de los valores" englobará lo físico, lo sensitivo, y lo moral. Así pues para nuestro autor:

"... de que lo extenso no sirva para dar la norma de los valores en el orden moral o físico, no se sigue que ellos no tengan su grandor propio mensurable [...]; no de otra suerte que, si son determinables normas generales respecto del valor moral de los hechos, o de las sensaciones mismas, no cabe una medida matemáticamente justa de su mérito o demérito."³⁰

Por último, el grandor no es concebido por Amor Ruibal como algo solamente subjetivo, bajo cuyo rango captamos y conceptualizamos las cosas, sino que en virtud de la relatividad objetiva-subjetiva dependiente de su condición primaria en tanto que noción, permite el paso sin contradicción del orden externo al interno, así como, del cuantitativo al cualitativo. En efecto, si podemos hablar de un grandor objetivo intrínsecamente enlazado con el subjetivo es porque antes hemos constituido la relatividad objetivo-subjetiva que fundamenta nuestro conocimiento:

"Dada la noción de grandor como primaria, y condición así del mundo de las sensaciones como de las percepciones externas (con sólo la diferencia que la naturaleza de los objetos sobre que recae ocasiona y determina), el tránsito del mundo interno al externo, así como de lo cualitativo a lo cuantitativo, no ofrece dificultades; antes bien está garantido por la condición intrínseca del ser cognoscitivo, y es la forma determinada del enlace de relatividad que atrás hemos señalado como base de toda certeza."³¹

Una vez visto en su complejidad lo que significa para Amor Ruibal el concepto de grandor, podemos ya volver a tratar el tema del espacio. La crítica que seguidamente veremos desarrollarse contra la doctrina *apriorista* russelliana, tiene este concepto de grandor como eje central de su argumentación.

²⁹ P.F.F.D., VIII, p. 293.

³⁰ P.F.F.D., VIII, p. 295.

³¹ P.F.F.D., VIII, pp. 295-296.

3. CRÍTICA DE AMOR RUIBAL AL CONCEPTO DE ESPACIO DE RUSSELL: «FRAGMENTO B» DE *ESPACIO Y GRANDOR*.

Para Erdmann y según la exposición que Russell hace de su teoría en el *Ensayo*, el espacio puede ser concebido como una magnitud —grandor—, en el sentido de Riemann. El espacio es para Erdmann una multiplicidad concreta, que viene determinada por su constante de espacio. Russell, criticará los cuatro presupuestos que sustentan esta concepción del espacio métrico caracterizado por su constante espacial, según la cual los espacios euclidianos y no-euclidianos, pueden ser comparados entre sí por su constante espacial. Estos cuatro presupuestos, que según Russell subyacen a la teoría de Erdmann son: 1º/ Supone que los conceptos sólo pueden obtenerse por abstracción cuando tenemos un conjunto de objetos separados, de los que se puede abstraer una común característica a todos ellos. 2º/ Supone que toda definición es en realidad una clasificación dentro de un género. 3º/ Que se pueda aplicar el concepto de magnitud al espacio como un todo. 4º/ Que de esta magnitud, determinante del espacio, se pueda deducir las características de dicho espacio.

De estos cuatro presupuestos, nosotros sólo examinaremos aquí el tercero, ya que en él se debate el concepto de espacio como magnitud. Para Russell todo juicio comparativo sobre *cantidades* presupone una cualidad común.

"Un juicio sobre magnitud es siempre un juicio de comparación y, lo que es más, la comparación nunca está referida a cualidad sino solamente a cantidad. La cualidad en el juicio sobre magnitud está presupuesta ser idéntica en el objeto cuya cantidad se quiere fijar y en la unidad con la cual es comparada."³²

Basándose en esta idea, Russell critica a Erdmann su concepción de que un espacio está definido por la constante de espacio, ya que ésta se define como un elemento cuantitativo que procede de la comparación de diversos elementos inherentes a un espacio. De ello se deriva, por una parte, que esta constante no exprese nada cualitativo de ese espacio, y que por otra, no podamos comparar en razón de la constante de espacio, diversos espacios entre sí, como pretende Erdmann. Esto es imposible para Russell ya que la unidad cualitativa no se daría entre las constantes de los distintos espacios:

"No existe unidad cualitativa similar en las tres especies de espacio mediante la cual pudiera hacerse la comparación cuantitativa. Las líneas rectas de un espacio no pueden superponerse a las de otro: dos líneas rectas, en un espacio, cuyas medidas nos dan números cuyo producto es el recíproco de la curvatura no puede, en consecuencia, ser cuantitativamente comparada con otra de ellas [...] Lo mismo ocurre con las constantes de espacio; la constante de espacio es de por sí la unidad para magnitudes de su propio espacio y difiere cualitativamente de la constante de espacio de otra clase de espacio."³³

Para Russell —siguiendo a Riemann—, van a ser precisamente las *cualidades* comunes a los diferentes espacios euclidianos y no euclidianos, propiedades *a priori* del espacio. Y es esto lo que Amor Ruibal no admite de la exposición de Russell.

³² Russell, *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, p. 74, n° 79.

³³ *Ibidem*, p. 75, n° 79. Ver nota 39 de la página 315.

En efecto, el filósofo compostelano, si bien hemos visto que en el «Fragmento A» de *Espacio y grandor*, sigue completamente los argumentos de Russell, en este «Fragmento B» se desvía de la concepción del filósofo de Cambridge. El aspecto crucial para ello es el grandor. Russell, en un proceso de abstracción elimina del espacio lo cuantitativo. Para Amor Ruibal esta eliminación de lo cuantitativo, del grandor, supone la supresión de *lo que constituye al espacio como espacio*.

La primera crítica contra los argumentos de Russell, la dirige contra el mismo proceso de abstracción. Apoyándose en las paradojas, que el mismo Russell trata en su *Ensayo*, Amor Ruibal, demostrará, que si existe un espacio general, es porque podemos comparar espacios concretos entre sí, como establecía Erdmann. Y la comparación, requiere necesariamente, que haya algo común, que en el caso de los espacios concretos es el grandor:

"Desde luego los juicios de comparación están siempre como base de universalidad; sin ellos, o no, es posible llegar a los universales, o hay que declarar los universales subsistentes. ¿Cómo podríamos pensar en la humanidad sin un juicio de comparación entre seres humanos? Toda propiedad que puede ser universal es esencialmente comparable, o no llega a ser universal. Nadie puede dudar que tenemos idea de grandor; y si la comparación fuese obstáculo, habría que decir que sólo tenemos ideas de cada cosa grande, sin idea de grandor, lo cual es contrasentido."³⁴

Para Amor Ruibal, el espacio proyectivo al tratar de la cantidad implica necesariamente el concepto de grandor. Es evidente que este grandor del que habla aquí no se trata en ningún momento del grandor métrico, no se trata en ningún momento de magnitud. Amor Ruibal empleará aquí su esquema de noción-idea. Se trata de una noción —en el sentido ruibaliano— un aspecto cualitativo del espacio que le define: ser grandor. Así el espacio primariamente, antes de ser euclidiano o no euclidiano, esto es, antes de tener una métrica determinada, es un *grandor*. Para Amor Ruibal, por lo tanto este *grandor* es algo:

"...intrínseco a toda forma de exterioridad."³⁵

Así pues, a la forma de exterioridad que era lo que Russell admitía únicamente como el nudo aspecto cualitativo del espacio, le pertenece inherentemente el grandor, pues, la cantidad es un *cualidad* determinativa del espacio:

"De aquí resulta que si bien en cuanto todo grandor expresa una cantidad que necesariamente supone una cualidad que es objeto de medida, en sí no es una cantidad; es una cualidad intrínseca a todo lo que se nos ofrece en una forma de exterioridad, y tan íntima como la misma exterioridad, que antes de todo y previamente a cualquier otro atributo cualitativo, en cuanto forma de exterioridad es un grandor."³⁶

Por lo tanto, para Amor Ruibal es correcto el presupuesto de Erdmann de definir los espacios con una cantidad —grandor—, ya que esto es su cualidad determinativa como espacio. Cada espacio concreto puede ser puesto en relación con la constante espacial que lo define. A su vez, estos espacios podrán ser comparados unos con otros según esta constante espacial:

"Geoméricamente las constantes espaciales, caracterizando cada una un espacio, representan forzosamente la unidad última del grandor como término de comparaciones cuantitativas. Estas constantes espaciales, pues, tienen un grandor indudable respecto del espacio a que se refieren como medida. Y

³⁴ *Espacio y grandor*, Fragmento B, s/p.

³⁵ *Espacio y grandor*, Fragmento B, s/p.

³⁶ *Espacio y grandor*, Fragmento B, s/p.

nadie puede probar que este valor no le corresponde representativamente (con valor absoluto de grandor) respecto de otros espacios sin suponer que está desprovista en sí de grandor respecto a otras constantes espaciales o sea respecto a otros espacios geométricos y esto no puede suponerse sin afirmar que no se da grandor porque no se da identidad de cualidades comparables que es lo que está en cuestión.³⁷

Basado en esta concepción del espacio como grandor, Amor Ruibal va a criticar la solución de ciertas paradojas sobre el espacio, que había presentado Russell, y que le parecen al filósofo compostelano contradictorias e insuficientes.

La primera paradoja en la que se veía envuelto Russell y que hemos visto en la exposición sumaria de su *Ensayo* (en la página 280 de esta tesis), era el entender a los puntos como carentes de cualquier extensión y a la vez como generadores de los elementos espaciales —recta, plano, volumen, etcétera—. Para Amor Ruibal esta paradoja proviene de haber eliminado el grandor de la caracterización intrínseca de todo espacio. Para Amor Ruibal, el punto sí no representa ningún grandor, no puede fundamentar el espacio:

"Aunque supusiéramos el universo compuesto de puntos inextensos y que el fenómeno de la extensión le era consiguiente, no pensaríamos en hallar el espacio en la cualidad de ser simple, sino que en esa cualidad hallaríamos la negación espacial. Justamente es por eso porque se arguye de absurdo ese sistema; porque deduce el espacio de donde no existe ni puede existir."³⁸

Así mismo, Russell trataba en su *Ensayo* de otra paradoja que se daba en la geometría proyectiva y que procedía del principio de dualidad: dos puntos definen una línea recta, pero a su vez dos líneas recta definen un punto. Tres puntos definen un plano y tres planos definen un punto. Ello significa que el espacio está únicamente compuesto de relaciones, lo que es contradictorio e indica más bien la necesidad de encontrar algo ajeno a tales relaciones y que suponga la fundamentación³⁹ del espacio. Ese algo para el filósofo compostelano es el grandor:

"Por consiguiente, si el espacio proyectivo no se compone sino de relaciones y las relaciones no son determinadas ni por los puntos ni por las líneas, puesto que lo mismo cabe considerar la línea como relación entre puntos, que el punto como relación entre líneas, y la superficie como originada por puntos, que los puntos originados por superficies, es menester concluir de aquí un círculo inevitable del cual sería imposible salir si no estuviese latente el concepto de grandor espacial que mantiene la relación de las investigaciones abstractas proyectivas con el valor métrico de la realidad objetiva.

¿Qué quedaría de una figura espacial cuyos determinantes son puras relaciones, sin referencia implícita a ningún grandor?"⁴⁰

También Amor Ruibal se referirá a la razón anarmónica. Ésta que es considerada en principio como métrica, posteriormente y gracias a la construcción del cuadrilátero de Staudt, vemos que podía ser expresada como una *descripción pura*. Ahora bien si es posible que podamos prescindir de su carácter cuantitativo en el sentido métrico, como admite Amor Ruibal, lo que le parece irrenunciable es que aunque no tenga sentido métrico, no por ello el grandor queda excluido de la razón doble:

³⁷ *Espacio y grandor*, Fragmento B, s/p.

³⁸ *Espacio y grandor*, Fragmento B, s/p.

³⁹ ¿Qué significa *fundamento del espacio*? Fundamento del espacio es aquello que hace que el espacio sea espacio, antes de ser espacio euclidiano, de Riemann, de Lobatchewski, o cualquier otro. Es la *esencia* del espacio.

⁴⁰ *Espacio y grandor*, Fragmento B, s/p.

"Ciertamente es posible prescindir de su carácter cuantitativo y limitarse a sus propiedades cualitativas; pero no es posible demostrar éstas sin la existencia de aquéllas y por consiguiente sin la influencia del grandor implícito. Dicho se está que tratándose de relaciones geométricas sin elementos cuantitativos, viene a reproducirse aquí el círculo inevitable antes mencionado."⁴¹

Otro aspecto que Amor Ruibal criticará, es que Russell excluye todo grandor de la forma de exterioridad. Después de su análisis de la geometría proyectiva habíamos visto, como Russell, llegaba a la conclusión de que la forma de exterioridad era el fundamento del espacio. Pero para Amor Ruibal, forma de exterioridad no es sino "principio de diferenciación":

"...un elemento al menos mediante el cual las cosas presentadas son distinguidas como diversas."⁴²

En efecto, dentro del espacio proyectivo hemos visto que las figuras procedentes de transformaciones proyectivas son equivalentes, su única diferencia es la posición.

Sin embargo, a pesar que hayamos eliminado toda magnitud de las figuras, es necesario reconocer que, en tanto que son figuras, tienen un *grandor*⁴³. Además si ocurriese que tales figuras proyectivas no tuviesen ningún grandor, posteriormente no podríamos obtener grandor métrico alguno, y la geometría métrica quedaría desprovista de toda significación:

"Porque ninguna propiedad cualitativa puede pasar a cuantitativa, si en su mismo ser no encierra en algún caso ningún grandor. En las propiedades cualitativas es la propiedad fundamental que tenga la cualidad de ser cuanta, pues si alguna vez pudiera existir sin esto nunca podría adquirirlo; puesto que su concepto no lo exige, y no hay nada que lo exija en ella ni hay nada que le dé la cantidad; porque dicho concepto representa la naturaleza de la cosa, nada da la cosa lo que no exige su naturaleza."⁴⁴

Otros dos aspectos que criticará Amor Ruibal, relacionados con la forma de exterioridad es la homogeneidad del espacio y su divisibilidad infinita.

La homogeneidad del espacio era, ya lo hemos visto, el primer axioma de la geometría proyectiva. Y dicha homogeneidad procedía, al igual que la forma de exterioridad, de las transformaciones proyectivas⁴⁵. Russell deducirá la homogeneidad, de la forma de pura exterioridad. En cierta medida, es la misma deducción que la realizada con la relatividad de posición⁴⁶. Tal resultado se obtiene, como hemos visto, abstrayendo todo contenido *material* de las figuras, quedándonos únicamente la diversidad

⁴¹ *Espacio y grandor*, Fragmento B, s/p.

⁴² *Espacio y grandor*, Fragmento B, s/p.

⁴³ "Pero la misma exterioridad siendo relativa no puede tener por principio de diferenciación sino el grandor cualitativo, porque la cualidad de exterioridad real se funda en el grandor métrico y no es posible que deje de tener grandor como cualidad aquello que es fuente del grandor real. Suprimidos elementos y totalidad, y todo lo que no sea relaciones no por eso se suprime sino aquello que no sea pura exterioridad; y pura exterioridad es el grandor considerado en sí y prescindiendo del contenido del mismo" (*Espacio y grandor*, Fragmento B, s/p.).

⁴⁴ *Espacio y grandor*, Fragmento B, s/p. En el fondo esta discusión no es sólo de Amor Ruibal. Russell en su artículo «On the Relations of Number and Quantity» ya conocía esta paradoja: el grandor está antes y después de la medida. Antes de la medida en cuanto se necesita que las cosas que se midan tengan de por sí ya una dimensión, una magnitud aunque ésta no se pueda conocer. No es la comparación la que crea el grandor, sino el grandor el que permite y descubre la comparación.

⁴⁵ "Si no fuese así, sería imposible algo parecido a transformación proyectiva, ya que tal transformación siempre altera la posición, es decir las relaciones externas de una figura; y por consiguiente no podría, si es que las figuras fuesen dependientes de sus relaciones con otras figuras o con el espacio vacío, ser estudiado sin referencia a otras figuras o respecto a la posición absoluta de la figura original" (Russell, *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, p. 108, n.º 124).

⁴⁶ Hemos visto como homogeneidad y relatividad de posición estaban intrínsecamente entrelazadas.

que procede de la posición. Esto es, fuera de toda determinación material, una figura geométrica se diferenciará de otra sólo por su posición. Lo cual hace que el principio de diferenciación, la posición, sea uniforme e indiferenciado. Esto es lo mismo que decir, que el espacio es homogéneo:

"Pues cualquier cualidad en una posición, mediante la cual se puede considerar fuera de otra o distinguida de otra sería necesariamente más o menos intrínseca y contradiría la pura relatividad. De aquí que todas las posiciones son cualitativamente semejantes, es decir, que la forma es homogénea en todas partes."⁴⁷

Por aclarar un poco más el sentido de esta afirmación de Russell, retomemos lo dicho más arriba sobre las figuras de la geometría proyectiva. Dos figuras que se puedan relacionar por una transformación proyectiva son equivalentes, es decir, son cualitativamente iguales. Por ejemplo, dos rectas que procedan de la proyección de los puntos de corte de una recta con otra recta, son equivalentes ya que lo que las define, sus relaciones internas, permanecen idénticas. Lo único en que se diferencian una de otra, es que una está en una posición y la otra en otra posición distinta. Esta diferencia de posición hace que siendo *iguales* —cualitativamente— sean *distintas*.

Lo que aquí se concluye es que el espacio es homogéneo, porque estén donde estén situadas estas dos rectas, seguirán siendo iguales cualitativamente aunque diferentes numéricamente. Por el contrario si una de estas rectas en una posición p fuese una curva y en otra posición p' una recta, la diferencia no sería de posición sino de tipo cualitativo⁴⁸.

Lo que criticará Amor Ruibal a la teoría de la homogeneidad de B. Russell, no es la homogeneidad en sí, sino que para explicar la homogeneidad del espacio sea necesario hacer abstracción de toda cualidad, y por ende, del grandor mismo. Por ello dice:

"... pero la homogeneidad exige que el principio de diferenciación no sea diferenciado; y esto no es posible a no ser que se haga desaparecer toda significación objetiva de exterioridad. Es necesario establecer entonces que no se trata más que de la posibilidad de la diversidad. Pero ésta representa la diferenciación como consiguiente a un grandor posible que sostenga las relaciones como posibles."⁴⁹

Posibilidad⁵⁰ de una diversidad porque se le ha desprovisto del elemento realizante: el grandor. Es decir la homogeneidad comprendida así por Russell, expresa sólo la posibilidad, que se encuentra realizada cuando tenemos de factor figuras en el espacio. Y es indudable que las figuras son grandor, aunque se abstraigan de ella toda determinación cuantitativa⁵¹.

⁴⁷ Russell, *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, p. 111, n° 130.

⁴⁸ Poniendo un ejemplo, con la intención de aclarar todo esto, diremos, sea una cosa A y una cosa B. Ambas cosas son cualitativamente diferentes: tienen propiedades muy distintas. Si alguien preguntase en qué se diferencia la cosa A y la cosa B, no podría deducir de esta pregunta la denominada «forma de exterioridad» llamada espacio, ya que entre ambos se pueden hallar multitud de diferencias cualitativas. Sólo se llegaría al espacio, si redujésemos todas las diferencias y nos quedásemos sólo con la singularidad A y la singularidad B. Entonces si dijésemos a alguien sean un A y un B dos cosas sin ninguna cualidad que las diferencie, pero sin embargo diferentes entre sí, esa persona descubriría el espacio.

⁴⁹ *Espacio y grandor*, Fragmento B, s/p.

⁵⁰ El carácter de posibilidad de la forma de exterioridad también viene indicado por Russell cuando trata de la forma de exterioridad: "El hecho parece ser que exterioridad no es tanto una relación como la mera relatividad o la mera posibilidad de una relación." (*Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, p.111, n° 131). Cfr. *Ibidem*, pp. 154-156, nn° 207-208.

⁵¹ "...una forma común capaz de ser traducida en el espacio euclidiano o no euclidiano, no puede más que ser una forma privada de las determinantes respectivas de un grandor métrico; mas no del grandor-cualidad que es lo único que resta de común en todo espacio, si lo es" (*Espacio y grandor*, Fragmento B, s/p.).

Es por esta misma razón, que la homogeneidad propuesta por Russell es una especie de abstracción sobre los espacios particulares, para establecer un género de espacio amorfo sin ninguna determinación, apareciendo este espacio como nuda *posibilidad* de los espacios concretos:

"La homogeneidad hace que el espacio sea amorfo, indiferente para cualquier forma; pues esto se exige de no expresar ningún espacio particular y de ser capaz de todos. Pero un espacio amorfo sería espacio determinados todos los grandores, (y no) pueden determinarse grande sino es en relación a otro grandor."⁵²

Por otra parte Ruibal rechazará dos alternativas que considera contradictorias: la que critica Russell y mantiene que el espacio es solidario de los cuerpos; y la aceptada por el propio Russell: que opina que entre el espacio y los cuerpos no existe ninguna interacción.

La primera es la que considera que el espacio no es independiente de los fenómenos o figuras espaciales. Esta alternativa niega la homogeneidad y la pasividad del espacio. La homogeneidad ya que el espacio actuaría en las figuras, en el sentido en que tal o cual posición estarían en correlación con una forma determinada.

"Si el espacio no es independiente de los fenómenos, sino que los determina en ese caso el grandor real de los cuerpos es la extensión del ser real del espacio, que en tanto se demuestra espacio en cuanto dé la forma de grandor a los fenómenos."⁵³

Lo que haría a la extensión inseparable del espacio, ya que todos los cuerpos tendrían el espacio como característica intrínseca. Es decir, no se podría considerar el espacio sin considerar los cuerpos que lo determinan y modifican, ni viceversa. Lo cual significa que hacer solidarios los cuerpos del espacio, no es más que convertir el espacio en *extensión*. Cosa a la que se opone Amor Ruibal⁵⁴.

La otra hipótesis, que es la que adopta Russell, pretende hacer al espacio absolutamente indiferente a las formas:

"Si el espacio es indiferente y pasivo respecto a todas las formas [Incluido el grandor], [estas] son indiferentes respecto del espacio. Por lo mismo los fenómenos del grandor habrán de estudiarse con independencia de él o lo que es igual, habrá de colocarse otro espacio dentro del espacio, al cual se refieran dichos grandores."⁵⁵

Por ello el espacio métrico y su geometría son irrecuperables desde la geometría proyectiva ya que ésta al eliminar todo grandor no constituiría el *nivel previo* de la geometría métrica como hemos visto.

⁵² *Espacio y grandor*, Fragmento B, s/p.

⁵³ *Espacio y grandor*, Fragmento B, s/p.

⁵⁴ Nótese, que hasta cierto punto Amor Ruibal tenía razón, Russell va a caer en esta concepción pero desde la perspectiva contraria: por querer establecer el espacio como absolutamente ajeno al grandor, como abstracción de toda cualidad, va a terminar por substancializarlo para evitar las paradojas que hemos mencionado. La conclusión es la misma, bien por dos caminos distintos: o se hace del espacio una especie de materia por desvincularlo de todo grandor, o al vincularlo con las cosas se convierte en intrínseco a las cosas.

⁵⁵ *Espacio y grandor*, Fragmento B, s/p.

Un último aspecto contradictorio en el que se apoya Amor Ruibal para corregir la teoría de Russell es la paradoja de la infinita divisibilidad del espacio. Esta propiedad del espacio procede para Russell, de la homogeneidad y relatividad del espacio⁵⁶, y consiste en:

"... la relación de exterioridad entre dos cosas cualesquiera es infinitamente divisible y consecuentemente se la puede considerar como sustituida por un número infinito de elementos (por llamarlo así) de nuestra forma, o también como la suma de dos relaciones de exterioridad."⁵⁷

La división al infinito presupone dos cosas: primero, que se introduce conceptos métricos, ya que la división es una operación métrica, así como también presupone la substancialización del espacio:

"La divisibilidad es noción métrica; resulta en la forma de exterioridad que hay relaciones divisibles lo cual es imposible como relaciones; y si se trata de substanciación de la relatividad dicha; de otra suerte sería inútil el mencionarla. (La substancialización hace que no sea exterior a sí misma lo substancializado, y que deje de ser pura relación ad aliud)."⁵⁸

Aunque, hay que decir, que de todo ello, también Russell es consciente⁵⁹.

Todo esto apunta, en última instancia y aunque parezca paradójico, a que Russell termine substancializando el espacio, por pretender excluirlo de toda cualidad. Ello era discutido por Couturat y Poincaré. No es por lo tanto extraño, que Amor Ruibal afirme:

"Esa doctrina en el fondo conduce, o a substancializar el espacio, como algo exterior al grandor, o a realizar labor de idealismo negando al espacio y a la extensión toda representación objetiva."⁶⁰

La teoría espacial de Russell que pretendía separarse por una parte del idealismo transcendental kantiano, defendido por Couturat, y por otra del convencionalismo de Poincaré, termina de este modo cayendo en un idealismo.

Es por esto que Amor Ruibal haya intentado fundamentar en todo momento su teoría espacial en el concepto de grandor. Ya que al ser éste de tipo nocional, le permite concebir realísimamente el espacio, que en su caso tiene *realmente* tres dimensiones y forma euclidiana, a la par que defiende su doctrina inductivista de la ciencia.

⁵⁶ Véase lo que hemos estudiado sobre la concepción de Russell del espacio en el capítulo II, pág. 272.

⁵⁷ Russell, *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, p. 111, n° 131.

⁵⁸ *Espacio y grandor*, Fragmento B, s/p.

⁵⁹ Sobre la introducción de conceptos métricos con la división *ad infinitum* Russell indica en una nota lo siguiente:

"Es importante observar, no obstante, que esta manera de considerar las relaciones espaciales es métrica; desde el punto de vista proyectivo, la relación entre dos puntos es la línea recta, completa e ilimitada, en la que ellos están, y no es necesario considerarla como divisible en parte o como formada de puntos."

Y sobre la substancialización del espacio:

"Pues cuando consideramos una cantidad como extensión, es decir, como divisible en partes, necesariamente la consideramos como algo más que una mera relación o atributo, puesto que ninguna mera relación o atributo puede ser dividida. Por consiguiente para tratamiento cuantitativo las relaciones espaciales deben ser substancializadas" (Russell, *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, p. 112, n° 131).

⁶⁰ *Espacio y grandor*, Fragmento B, s/p.

CONCLUSIONES

Después de este largo recorrido por las polémicas de una época a las que hacía referencia la obra de Amor Ruibal, creemos haber demostrado que la filosofía de nuestro autor compostelano no es una filosofía desconectada de su época, ni anclada en el pasado escolástico. Su filosofía surge y ha de entenderse desde su contexto epocal. Por eso, su obra habrá de estudiarse cuando se estudie el modernismo, habrá de tenerse en cuenta cuando se examine la filosofía de la ciencia de comienzos del presente siglo, y no podrá olvidarse de ningún modo, cuando se trate de la «crisis de fin de siglo». Esperemos que la presente tesis junto con la reedición completa de sus obras, saque definitivamente del ostracismo un pensamiento tan polifacético y original.

En efecto, el pensamiento de Amor Ruibal se inscribe en la «crisis de fin de siglo», y se explica desde esta perspectiva. Una crisis que se produce en el entrecruzamiento de tres líneas distintas, a la par que fuertemente vinculadas entre sí, del pensamiento occidental: la teología, la filosofía y la ciencia.

El avance inusitado de las teorías y descubrimientos científicos en los ámbitos fundamentales de las matemáticas, la física, y la biología, trajo consigo una nueva concepción de la realidad y de su conocimiento. No era, pues, extraño, que este impulso conllevase conflictos y rupturas con la noción de la realidad y del conocimiento que implicaban los dogmas y la teología.

Hemos visto cómo esta polémica de teología-ciencia, quedaba perfectamente caracterizada en la confrontación entre el Concilio Vaticano I y J. W. Draper, representante eximio del pensamiento positivista de su época. Pero la discusión terminaba en la obra de Draper, con la ruptura entre ciencia y fe. En respuesta a Draper surgirán, en el bando católico, multitud de apologistas que harán de la ciencia una *ancilla theologiae*, entre los que nosotros destacamos a Comellas y Cluet.

Esta controversia se vivió de forma muy intensa en la ciudad «europea» de Santiago de Compostela, donde el joven Amor Ruibal formaba su pensamiento. Dos instituciones sirvieron de escenario para el debate: la Universidad y el Seminario. El conflicto finisecular giró en Santiago de Compostela en torno a dos temas fundamentales: la aceptación o rechazo de la teoría

transformista de Darwin, puesta frente a frente con el dogma de la creación y la filosofía substancialista escolástica; y la dependencia o independencia de los principios, métodos y resultados de la ciencia experimental respecto a los postulados por la ciencia cristiana.

Estas dos polémicas, que se vivían de forma muy aguda en esta pequeña ciudad, también tuvieron su eco en la obra de Amor Ruibal, y se las puede encontrar conformando uno de los estratos más profundos de su teoría; incluso podríamos afirmar que es el origen de sus inquietudes intelectuales.

El *nexo material* entre estas discusiones y la obra de Amor Ruibal, lo encontrábamos entre los manuscritos aún inéditos de nuestro filósofo compostelano, en unas hojas que a modo de apuntes recogían las objeciones clásicas que se realizaban a la teoría de la evolución. Como hemos visto, Amor Ruibal pasó del rechazo manifiesto de la teoría transformista en los *P.F.F.C.*, a la aceptación tácita en su obra póstuma, lo que nos indica una evolución de su pensamiento en este tema.

En lo que concierne a la independencia del conocimiento científico respecto del conocimiento teológico, Amor Ruibal siguió claramente las doctrinas del Concilio Vaticano I. Primeramente, afirmó la validez del conocimiento teológico para, en un segundo momento y demostrando la relatividad e incompletud del conocimiento humano, afirmar la primacía de *lo revelado* frente a la ciencia.

A pesar de ello no podemos decir que su planteamiento filosófico sea tradicionalista, aunque sí se mantiene claramente en la ortodoxia. Esto quedaba demostrado cuando comparábamos su pensamiento con la filosofía de su coetáneo Comellas Cluet. Después de haber examinado los distintos significados que tenían para ambos el concepto de «ideal», hemos analizado su exposición del escepticismo y la evidencia. Así, mientras que Comellas y Cluet, desde una perspectiva tradicional y premoderna, criticaba el escepticismo y rechazaba la duda metódica del cartesianismo; Amor Ruibal refutaba los argumentos del filósofo catalán, como demasiado simples, y consideraba a la duda hipotética o metódica —junto con su teoría de las tres verdades—, como un método fundamental para el avance del saber científico.

De forma más patente si cabe, este premodernismo de Comellas ha quedado puesto de manifiesto en su teoría sobre la evidencia objetiva. Para el filósofo catalán, la evidencia objetiva era la base de la certeza y por lo tanto de la verdad. Amor Ruibal, desde una posición post-crítica, planteaba que no se podía fundamentar la verdad en la evidencia objetiva, ya que ésta no es sino una evidencia subjetiva. Su solución puede considerarse, por lo tanto, post-moderna, en el sentido que Amor Ruibal, proponía el nexo de sujeto-objeto, fundamentado en su teoría de la correlatividad universal, como la única solución posible al problema crítico. Por consiguiente, en la comparación de Comellas y Cluet con Amor Ruibal se hacen evidentes dos soluciones distintas del problema crítico: la solución pre-moderna de Comellas y Cluet, y la solución post-moderna de Amor Ruibal; ya que la solución moderna, no termina, en última instancia, mas que en el escepticismo.

Otra de las respuestas dadas a la ruptura de ciencia-fe iba a ser *el modernismo*. Con el modernismo la ruptura se introducía en la Iglesia, y aparecía, no ya como confrontación de la Iglesia con el mundo moderno, sino con los caracteres de una herejía intraeclesial. Sin embargo, el modernismo en su origen, tenía una pretensión bien distinta. Los modernistas: historiadores, exégetas, y pensadores cristianos en general, amparándose en la *Constitución dogmática sobre la Fe católica* del Concilio Vaticano I, pretendían, separando lo natural y lo sobrenatural para dejar a salvo la fe, abrir el camino de la investigación del dogma, de la Sda. Escritura, la Historia de la Iglesia, etcétera. Pero Roma vino a descubrir detrás de esta pretensión investigadora y de esta *ἐποχή* de lo sobrenatural, un ateísmo real. Según *Pascendi* en los estudios de los modernistas, se había introducido de rondón el agnosticismo, el evolucionismo y el inmanentismo, que en última instancia venían a negar que Dios pudiera ser conocido racionalmente. Estos tres postulados de la filosofía modernista, agnosticismo, inmanentismo y evolucionismo, tuvieron su caldo de cultivo en la situación filosófica que vivía Europa, y singularmente Francia, a finales del siglo XIX y comienzos del XX, conformada por el kantismo, el vitalismo bergsoniano y el pragmatismo anglosajón, con evidentes conexiones entre ellos.

Personaje característico de esta situación filosófica fue el teólogo protestante liberal, y pensador francés A. Sabatier, que resumía su época y resultaba antecedente claro del modernismo. Su obra *Esquisse d'une philosophie de la religion d'après la psychologie et l'histoire*, que se presentaba como solución de la crisis finisecular de ciencia-religión, influiría poderosamente en los pensadores modernistas y pragmatistas como E. Le Roy y W. James.

E. Le Roy y W. James lograron sintetizar en sus respectivas obras los fundamentos filosóficos de esta corriente de pensamiento. El primero, por cuanto que su libro *Dogme et critique*, resumía perfectamente los problemas que se habían suscitado en torno al dogma con el avance del saber científico y filosófico, y porque condensó el espíritu de la solución modernista. Y W. James, por cuanto resumió claramente en sus libros filosóficos, el sistema filosófico del pragmatismo, añadiéndose además, a su interés, su comprensión de la religión como hecho humano, que expuso en *The Varieties of Religious Experience*. Ambos pensadores van a coincidir en el fondo de sus planteamientos, aunque E. Le Roy escribiese desde su condición de católico francés, y tuviese como finalidad hacer comprensible el dogma en una sociedad científico-positivista; y W. James escribiese desde el ámbito del protestantismo norteamericano, con la finalidad de explicitar una nueva filosofía que permitiese arrumbrar la vieja división entre racionalismo y empirismo.

Su objetivo último, como se ha visto en la tesis, era superar la crisis finisecular de ciencia-religión. Ambos lo hacían desde una profunda desconfianza del conocimiento racional, y más concretamente en contra del intelectualismo. Para evitar la confrontación de los dogmas religiosos con las nuevas teorías y descubrimientos científicos, hicieron de la religión algo vivencial, alejado de toda racionalidad y conocimiento. Por ello, Le Roy distinguía en las formulaciones dogmáticas católicas su expresión racional, de su contenido revelado que era su sentido vivencial (pragmático). Y James, seguidor de Sabatier, desde una perspectiva más amplia

hacía lo mismo con la religión en general, distinguiendo entre sus concreciones institucionales —sacramentos, dogmas, teologías—, y el sentido profundo: el sentimiento religioso del hombre. La religión para James dejaba de ser sobrenatural y se convertía en algo humano, demasiado humano. Podía, de este modo, ser estudiada desde la Ciencia de las Religiones, pero a costa de ser convertida en un fenómeno psicológico más. Esta reducción psicologista de lo religioso se ha podido apreciar claramente, cuando examinábamos las experiencias místicas que eran puestas en continuidad por W. James, con otros estados mentales, en una gradación sin ruptura que iba desde la *sensación de haber estado allí antes*, a los fenómenos más relevantes de la mística cristiana, pasando por los estados producidos por los tóxicos y las drogas.

El modernismo-pragmatismo se veía, por lo tanto, avocado a un agnosticismo de lo trascendente, e inclusive, a un agnosticismo general del conocimiento humano. Sus presupuestos kantianos surgían de esta manera en las consecuencias de esta corriente de pensamiento. El modernismo, aunque pretendiese con su anti-intelectualismo solventar la crisis a la que había conducido el descomunal avance de la razón moderna, no dejaba por ello de ser moderno, y permanecía atrapado en el problema crítico.

La crítica de Amor Ruibal, se dirigía a los problemas dogmáticos más inmediatos que conlleva el modernismo: la evolución del dogma, el antisobrenaturalismo, y el anti-intelectualismo. Pero además, se dirigía a *los problemas fundamentales de su filosofía*. No de otro modo, su principal obra la tituló, *Los Problemas fundamentales de la Filosofía y el Dogma*. Por esto, la crítica de Amor Ruibal al modernismo religioso, está realizada, sobre todo, desde el punto de vista filosófico. El análisis que hemos detallado en esta tesis nos ha mostrado cómo el pensador compostelano, ha ido desmenuzando uno a uno los elementos teóricos del pragmatismo, y sus presupuestos ideológicos: el agnosticismo, el inmanentismo y el evolucionismo. Lo cual nos llevaba a la conclusión que el planteamiento crítico de la Encíclica *Pascendi*, que acusaba al filósofo modernista de agnóstico, inmanentista y evolucionista, estaba en la base de todo su análisis y refutación del modernismo-pragmatismo.

Pero Amor Ruibal, aunque intenta superar los problemas filosóficos y teológicos que aparecen en su época —que en gran medida es la nuestra—, y rechaza la solución modernista, está imbuído de su tiempo, y su solución filosófica no deja de ser concomitante con muchos de estos planteamientos. De esta forma su correlacionalismo universal es en gran medida coincidente con el inmanentismo de E. Le Roy. Ambos entendían que el universo no se encuentra constituido por un agregado de sustancias aisladas, sino que éstas aparecen profundamente relacionadas entre sí, y sólo pueden ser entendidas si son puestas en relación. Son las relaciones lo que hace comprensible el Universo. Pero Amor Ruibal, para evitar caer en un monismo de clara tendencia panteísta, afirmaba también, la subsistencia de las cosas.

Así mismo, coincidirá Amor Ruibal con los autores pragmatistas en un intuicionismo primero, en el que aparecen unificados sujeto y objeto. Pero al contrario que el pragmatismo, que hacía de esta intuición primera el origen del sujeto y objeto, Amor Ruibal siempre mantendrá la dualidad previa y ontológica de sujeto-objeto para fundamentar el conocimiento. Dualidad que le sirve para defender su realismo y dar una solución al llamado problema crítico.

Esta intuición correlacionalista después se articulará en su comprensión de la aprehensión nocional. Lo que viene a remarcar una vez más que la filosofía de Amor Ruibal, no es una filosofía premoderna, sino más bien post-moderna, por cuanto se plantea desde y como superación de los problemas planteados por la modernidad y que subyacen de forma manifiesta en el modernismo-pragmatismo.

Pero Amor Ruibal, no se ocupará tan sólo de los problemas fundamentales de la teología y la filosofía, sino que abordará también temas y problemas científicos sabedor de su importancia. No sin razón, ya que habían sido los grandes avances científicos los que habían puesto en tela de juicio las teorías filosóficas y las afirmaciones teológicas. Además, el examen de las diversas teorías científicas, en tanto que conocimiento racional de la naturaleza, se veía justificado por la propia filosofía de Amor Ruibal, que defendía la importancia del conocimiento natural como base del conocimiento de sobrenaturaleza. De este modo un agnosticismo en el conocimiento de la realidad natural, cerraría todo paso al conocimiento de Dios.

No es por ello extraño, que exista una vinculación entre modernismo, pragmatismo y convencionalismo. Estas tres corrientes de pensamiento manifestaban una profunda desconfianza en la razón y en su capacidad para conocer la naturaleza y a Dios. La relación entre estas tres corrientes aparecía de forma singular en E. Le Roy que era defensor del modernismo teológico, estaba vinculado más o menos al pragmatismo filosófico, y se manifestaba como radical convencionalista científico. También esta conexión entre ciencia-fe-filosofía se mostraba en la figura del filósofo E. Boutroux, quien si por una parte realizaba una filosofía de la ciencia, por otra, se ocupaba de dar una solución al conflicto entre la ciencia y la religión, asumiendo posturas modernistas. Y también se podía ver en Poincaré que, junto con sus notables desarrollos e investigaciones matemáticas, dedicaba buena parte de sus escritos a interpretar filosóficamente los últimos avances científicos. Y es que el XIX, era todavía un siglo que conocía una ciencia humanista, y una filosofía ilustrada científicamente.

Amor Ruibal, que se forma y vive en este ambiente de confrontación científico-filosófica, se verá profundamente influido por el modelo de realidad que subyace a la ciencia. De hecho, su relativismo universal no es muy diferente al que desde planteamientos científicos formularan Le Roy, Boutroux, Poincaré, Russell y Couturat. Ciertamente la ley científica —física o matemática— no es más que la *relación* que hay entre un conjunto de fenómenos con otros, quedando de este modo explicados unos por otros. Amor Ruibal asume este modelo explicativo de la realidad, sólo que corrigiendo su desviación *relativista* —y su posible conclusión panteísta—, como hemos dicho, reafirmando la subsistencia de cada uno de los elementos de la relación. Tampoco podemos olvidar que su teoría de lo *nocional* tenía su origen en la reflexión realizada por Boutroux sobre *l'être et la notion*.

Pero si Amor Ruibal nutría su pensamiento en un suelo científico, también era consciente de que ciertas soluciones eran radicalmente agnósticas, y por lo tanto inválidas para fundamentar un conocimiento de lo natural y sobrenatural. Por eso, refutará tanto el convencionalismo-pragmatista de Poincaré, que negaba la nota de realidad en los principios y leyes científicas, como el apriorismo de Couturat y el semi-apriorismo de Russell, que hacían de las leyes

científicas —en este caso de los axiomas de la geometría— determinaciones ideales del conocimiento de la realidad. Amor Ruibal, pretendía evitar tanto uno como otro extremos, ya que para él el conocimiento científico, expresado en las leyes y los principios, es un conocimiento de realidades. En este sentido coincidirá bastante con el contingentismo de Boutroux. Para ambos, todo nuestro conocimiento, desde la mecánica y la física hasta las matemáticas, e inclusive llegando a la lógica, procedía de la realidad. Este *inductivismo* haría de Amor Ruibal un realista científico: la ciencia es un conocimiento de la realidad natural. Realismo que cerraba el paso a todo agnosticismo.

Toda esta polémica entre apriorismo, convencionalismo y realismo se ha examinado especialmente cuando hemos tratado el importante tema de *Espacio y grandor*. Nuestro filósofo compostelano vivió en un trascendental momento de transformación del paradigma científico: vivió la culminación de la física clásica, asistió a su crisis y por fin conoció su cambio por el modelo de la teoría de la relatividad de Einstein y la mecánica cuántica; aunque estas nuevas teorías no fueron asimiladas por él.

Este importante cambio en los modelos científicos fue en gran parte debido a los avances matemáticos del siglo XIX, y de forma especial, al avance de la geometría. El surgimiento de nuevas geometrías métricas, junto con el desarrollo de las geometrías cualitativas pusieron en crisis la antigua relación del espacio con la geometría euclidiana. Punto filosófico culminante de esta crisis fue el *An Essay on Foundations of Geometry* de B. Russell, quien pretendió sistematizar en esta obra los diferentes avances matemáticos y darles una fundamentación filosófica coherente. Su intento filosófico puede calificarse de semi-apriorista, puesto que hacía de los axiomas de la geometría proyectiva, los axiomas generales de toda la geometría, de donde eran después deducidos los axiomas de la geometría métrica. De este modo, si los primeros eran *a priori*, los segundos también. Sólo quedaba para la experiencia determinar cuál era la forma concreta de nuestro espacio, y el número de dimensiones que tenía.

Pero esta posición intermedia de B. Russell, no satisfizo ni al apriorista L. Couturat, para quien todos los axiomas geométricos, inclusive los referidos a la forma euclidiana de nuestro espacio y a su número de dimensiones, eran completamente *a priori*; ni tampoco complació al convencionalista Poincaré, para quien los axiomas métricos eran puras convenciones, y la determinación de la geometría de nuestro espacio como euclidiana, no tenía más razón de ser, que «resultaba más cómoda». Tampoco contentó a Amor Ruibal para quien todo el conocimiento que tenemos sobre el espacio, y toda la geometría, procedía de la experiencia. Nuestra experiencia era la que determinaba, de forma absoluta, la geometría de nuestro espacio.

Para evitar la tendencia agnóstica, que latía en el apriorismo y en el convencionalismo, y mantener su tesis científica realista, el filósofo compostelano reformuló un concepto procedente de la filosofía de la ciencia francesa, el concepto de *grandeur*, que tradujo al término equivalente castellano de *grandor*. El *grandor* se convertía, de este modo, en la esencia de todo lo espacial, así como de todas las cosas que son comparables desde una perspectiva de más o de menos —mayor o menor—. De esta manera inclusive en la geometría proyectiva, que se mostraba como

una geometría cualitativa, y por lo tanto que eliminaba de sus contenidos el concepto de distancia, no podía eliminar, sin embargo, el concepto de grandor.

En el cuerpo de la tesis, ya hemos visto las discusiones técnicas en torno a todos estos conceptos filosófico-matemáticos. En todas ellas subyacía un realismo a ultranza en el filósofo compostelano, el mismo que se traslucía cuando trataba del problema modernista o cuando analizaba la filosofía pragmatista.

Para terminar, y como resultado de este trabajo, podemos formular las siguientes TESIS sobre Amor Ruibal:

1. La etapa de formación de Amor Ruibal en el Seminario de Santiago de Compostela coincide con la polémica de ciencia-religión y del evolucionismo que se desarrolla en dicha ciudad aproximadamente entre los años 1868-1900.

2. La filosofía de Amor Ruibal, frente a la de Comellas y Cluet, que no se plantea el problema crítico, parte precisamente de él. Su concepción de la evidencia así lo demuestra. Aunque por otra parte, también aparece de forma clara en Amor Ruibal, que siempre nuestro conocimiento es un conocimiento de realidades.

3. Amor Ruibal conoce la crisis modernista-pragmatista. Su obra de los *P.F.F.D.*, nace en gran medida como crítica de sus planteamientos y teorías. Frente a estas teorías Amor Ruibal defenderá siempre...

a.)...en el orden filosófico:

i. La relación de elementos, pero a la vez la subsistencia y substancialidad de los elementos relacionados.

ii. El conocimiento como un conocimiento de realidades.

iii. El pluralismo en sus tres vertientes: la diferencia entre las cosas, que no se unifican en lo uno; la diferencia entre el sujeto de conocimiento y el objeto conocido, que permite el conocimiento; y la diferencia entre Dios y las creaturas.

b.)... en el orden teológico:

i. El carácter intelectual del dogma.

ii. El carácter sobrenatural de lo religioso: dogma, mística cristiana, Iglesia, sacramentos...

iii. El conocimiento natural de realidades sobrenaturales.

4. Al igual que Boutroux, Poincaré, Russell, Couturat, y otros científicos de la época, Amor Ruibal coincide con ellos en una idea relacional de la naturaleza: el universo es un conjunto de elementos en relación, que son conocidos en cuanto que puestos en coordinación unos con otros.

5. Pero al contrario que Poincaré y E. Le Roy, nuestro filósofo compostelano defiende que nuestro conocimiento científico —las leyes y teorías científicas—, es inducido de la realidad y no es una creación libre, ni *a priori*, ni convencional del espíritu humano.

6. El espacio, para el filósofo compostelano, no es *a priori*, sino que tiene un elemento real, que se da independiente del sujeto, y que por lo tanto las diferentes geometrías no son sino el residuo de las diferentes abstracciones que realizamos sobre él. El *ser* del espacio es el grandor. Ésta es su *esencia*.

7. Para Amor Ruibal, la geometría, inclusive la geometría proyectiva extrae, al igual que todo conocimiento científico, sus leyes y principios de la realidad de la que se abstrae, en este caso de la realidad espacial.

Por todo ello podemos concluir, que la filosofía de Amor Ruibal es una filosofía que surge de los problemas teológicos, filosóficos y científicos que conforman su época, y que pueden ser englobados bajo el apelativo de «crisis de fin de siglo»

BIBLIOGRAFÍA UTILIZADA

Esta bibliografía no pretende ser una bibliografía exhaustiva de las obras *de y sobre* Amor Ruibal, ni tampoco pretende recoger todos los títulos citados en la tesis. Por otra parte reunimos aquí obras que aunque no aparecen citadas en el cuerpo de la tesis, han servido para su elaboración. Es decir, esta bibliografía recoge aquellas publicaciones e inéditos que han servido *directa o indirectamente* para confeccionar este trabajo.

OBRAS DE AMOR RUIBAL:

a) Obras editadas:

Los Problemas fundamentales de la Filología comparada. Su historia, su naturaleza y sus diversas relaciones científicas, por el Dr. A. Amor Ruibal, Profesor en las Facultades de Teología y Derecho Canónico y de Estudios superiores de Lenguas orientales en la Universidad Pontificia Compostelana, Canónigo de la A. M. I. Catedral de Santiago. Dos volúmenes. T. I. [Tipografía Galaica, Santiago], 1904. XXIII+376 págs. T. II. [Santiago, Imp. y Enc. de la Universidad Pontificia, 1905]. XII+737 págs.

Los Problemas fundamentales de la Filosofía y el Dogma. Tomos I-VI. [Tip. de *El Eco de Santiago*, Santiago], s.a. Tomo I, [1914], VIII+404 págs. Tomo II, [1916], VIII+456 págs. Tomo III, [1917], VII+383 págs. Tomo IV, [1919], VIII+480 págs. Tomo V, [1920], XII+437 págs. Tomo IV, [1921], VIII+390 págs. Tomos VII-X, edición de C. Pumar Cornes. Imp. y Libr. del Seminario Conciliar. Santiago, 1933-1936. 18,5 cms. Tomo VII, 1933, XX+439 págs. Tomo VIII, 1934, 606 págs. Tomo IX, 1934, 564 págs. Tomo X, 1936, 454 págs. Edición de S. Casas Blanco. 2 Volúmenes. C.S.I.C. 1972-1974. Vol. 1 (Tomo I) 1972, 571 págs. Vol. 2. (Tomo II y III) 1974, 535 págs. Edición de C. Balañas, continuación de la de S. Casas. Vol. 3. (Tomo IV y V). Ed. Xunta de Galicia. Santiago de Compostela, 1993, 589 págs.

«Los principios de donde recibe el ente la existencia» en Amor Ruibal, *Cuatro manuscritos inéditos*. Ed. S. Casas. Edt. Gredos. Madrid, 1964. Págs. 88-182.

- «Naturaleza y sobrenaturaleza» en Amor Ruibal, *Cuatro manuscritos inéditos*. Ed. S. Casas. Edt. Gredos. Madrid, 1964. Págs. 183-308.
- «Existencia de Dios» en Amor Ruibal, *Cuatro manuscritos inéditos*. Ed. S. Casas. Edt. Gredos. Madrid, 1964. Págs. 307-500. Texto refundido por Casas con "Existencia de Dios según mi exposición".
- «Existencia de Dios según mi exposición» en Amor Ruibal, *Cuatro manuscritos inéditos*. Ed. S. Casas. Edt. Gredos. Madrid, 1964. Págs. 307-500. Texto refundido por Casas con "Existencia de Dios".
- «El ideal y la teoría de la verdad lógica-ontológica». Editado por S. Casas en Amor Ruibal, *Los Problemas fundamentales de la Filosofía y el Dogma*. Vol. I, C.S.I.C. Madrid, 1972. Págs. 379-414.
- «La teoría del dogma». Editado por S. Casas en Amor Ruibal, *Los Problemas fundamentales de la Filosofía y el Dogma*. Vol. I, C.S.I.C. Madrid, 1972. Págs. 415-428.
- «Símbolos y evolución». Editado por S. Casas en Amor Ruibal, *Los Problemas fundamentales de la Filosofía y el Dogma*. Vol. I, C.S.I.C. Madrid, 1972. Págs. 429-461.
- «Los criterios sobre el desarrollo de la dogmática». Editado por S. Casas en Amor Ruibal, *Los Problemas fundamentales de la Filosofía y el Dogma*. Vol. I, C.S.I.C. Madrid, 1972. Págs. 463-488.
- «Necesidad de medio». Editado por S. Casas en Amor Ruibal, *Los Problemas fundamentales de la Filosofía y el Dogma*. Vol. I, C.S.I.C. Madrid, 1972. Págs. 489-522.

b) Manuscritos inéditos.

Ente finito y ente infinito. Manuscrito de 110 págs.

Espacio y grandor. Manuscrito de 28 páginas. (En realidad está compuesto por dos fragmentos).

El conocimiento nocional y analógico de Dios. Manuscrito compuesto por fragmentos de 16+10+14+34+65+7 páginas.

Fragmentos menores varios.

ESTUDIOS SOBRE AMOR RUIBAL:

Abella Chouciño, G.-R., «Amor Ruibal y X. Zubiri. Estudio comparativo de la relatividad y de la respectividad ontológicas» en *Compostellanum* 30 (1985); pp. 167-89.

Abellán, J. L., «La filosofía independiente: Ángel Amor Ruibal» en *Historia crítica del pensamiento español. La crisis contemporánea*. Tomo V. Vol. III. Ed. Espasa-Calpe. Madrid, 1991.

- Baliñas, C.-A., *El pensamiento de Amor Ruibal*. Editora Nacional. Madrid, 1968.
- Baliñas, C.-A., «El correlacionismo dentro del pensamiento contemporáneo» en *Actas*, pp. 81-98.
- Baliñas, C.-A., «Introducción» en *P.F.F.D.*, III, pp. 7-16.
- Barreiro, J., «La sistematización de la mística cristiana, según Ángel Amor Ruibal», *Compostellanum*, 5 (1960); pp. 441-469.
- Barreiro Barreiro, J. L., «Función y realidad de la esencia según A. Amor Ruibal», en *Actas*, pp. 361-366
- Barreiro Barreiro, J. L., *Mundo, hombre, conocimiento en Amor Ruibal filósofo gallego*. Pico Sacro. Santiago de Compostela, 1978.
- Barreiro Gómez, J., *Sistematización del Conocer-Ser-Tiempo según Ángel Amor Ruibal*. Ed. Celta. Madrid-Lugo, 1965.
- Barreiro Gómez, J., «Amor Ruibal como intérprete de lo humano» en *Actas*, pp. 501-521.
- Casas Blanco, S., «El catálogo de la Biblioteca de Don Ángel Amor Ruibal» en *Pensamiento*, 25 (1969); pp. 371-402.
- Casas Blanco, S., «El catálogo de la Biblioteca de Don Ángel Amor Ruibal (Continuación)» en *Pensamiento*, (1970); pp. 33-71.
- Casas Blanco, S., «Introducción general» en *P.F.F.D.*, I, pp. 9-114.
- Casas Blanco, S., «Introducción» en *P.F.F.D.*, II, pp.9-17.
- Casas Blanco, S., «Problemas bibliográficos de Amor Ruibal» en *Actas*, pp. 3-79.
- Castañé Casellas, J., «Acto relacional de existencia», *Actas*, pp. 447-455.
- Castro Picallo, M., «El principio de relatividad trascendental, fundamento de la filosofía de Amor Ruibal», en *Actas*, pp. 339-347.
- Díaz Díaz, G., «Amor Ruibal, Angel» en *Hombres y documentos de la filosofía española*. Vol. 1. C.S.I.C., Madrid, 1980.
- Delgado Varela, J. M., «Visión ruibalista de la conexión filosófico-teológica», en *Estudios* 25 (1969); pp. 15-38.
- Delgado Varela, J. M., «La teología de Amor Ruibal» en *Actas*, pp. 205-269.
- Ferro Couselo, M., «Noción e idea según Amor Ruibal» en *Actas*, pp. 99-137.
- Filgueira Valverde, J., «Amor Ruibal en la cultura gallega de su tiempo», en *Actas*, pp. 537-555.
- Flórez Miguel, C., «La categoría de sistema y la filosofía de Amor Ruibal» en *Actas*, pp. 367-374.
- García Cortés, C., «30 años de bibliografías sobre Amor Ruibal ("Compostellanum", 1956-1985). Una revista gallega al servicio de un maestro universal» en *Cuadernos Salmatinos de Filosofía*, 14 (1987); pp. 337-347.

- García de la Mora, J. M., *Filología y Filosofía en A. M. Amor Ruibal (1869-1930)*. Tesis doctoral, presentada en la Universidad de Barcelona en 1973. Resumen de 13 páginas. Secretariado de publicaciones, intercambio científico y extensión universitaria. Barcelona, 1975.
- Gómez Ledo, A., *Ángel Amor Ruibal (1869-1930). Boceto Biobibliográfico*. Imp. Triunfo. Tetuán, 1931. 33 páginas.
- Gómez Ledo, A., *Ángel Amor Ruibal o la sabiduría con sencillez*. Imp. Orellana. Madrid, 1949.
- Gómez Ledo, A., «La otra cara del sabio», en *Estudios* 25 (1969); pp. 241-250.
- Gómez Ledo, A., «Amor Ruibal, humanista cristiano», en *Actas*, pp. 525-535.
- Lemos Montanet, J.-L., «Amor Ruibal. El hombre» en *Anthologica Annua*, nº 34. Roma, 1987; pp. 307-414.
- Mateu Muriscot, M^a D., *Amor Ruibal: Principios y categorías*. Tesis doctoral. Pro mans. Madrid, 1988.
- Martínez Ruíz, E., «Ángel Amor Ruibal, hoy» en *Actas*, pp. 384-414.
- Méndez Palleiro, L., «Estructura filosófica-teológica de la mística cristiana en el pensamiento de Amor Ruibal» en *Compostellanum*, 2, (1957); pp. 59-86.
- Muñoz Delgado, V., «Amor Ruibal y los sistemas escolásticos» en *Actas*, pp. 139-185.
- Muñoz Delgado, V., «Notas bibliográficas sobre Amor Ruibal y su proyección europea» en *Estudios*, 26 (1970); pp. 125-145.
- Muñoz Pérez Vizcaíno, J., «Relación entre partes y todo en el "correlacionismo"», en *Actas*, pp. 331-337.
- Muñoz Triguero, I., «Correlacionalismo y creación en Amor Ruibal», en *Actas*, pp. 349-360.
- Ortiz-Osés, A., «Para una exégesis de la filosofía hermenéutica de Amor Ruibal» en *Actas*, pp. 495-499.
- Ortiz-Osés, A., «El realismo filosófico español: Amor Ruibal y Zubiri» en *Pensamiento*, vol. 33, nº 129. Madrid, 1977, pp. 77-85.
- Ortiz-Osés, A. *La nueva filosofía hermenéutica. Hacia una razón axiológica posmoderna*. Ed. Anthropos. Barcelona, 1986.
- París Amador, C., Capítulo «La Filosofía de la Naturaleza en Amor Ruibal» en *Ciencia, conocimiento, ser*. Universidad de Santiago de Compostela. Santiago de Compostela, 1958; pp. 67-92.
- París Amador, C., «La antropología de Amor Ruibal» en *Actas*, pp. 271-293.
- Pérez, A., «Un aspecto de la filosofía de Zubiri: Su correlativismo» en *Estudios*, 20 (1964), pp. 99-111.
- Picaza, J., «Amor Ruibal y el conocimiento unívoco de Dios», en *Estudios* 25 (1969); pp. 171-192.
- Pikaza, X., «Amor Ruibal y el pensamiento cristiano español del siglo XX», en *Giornale di Metafisica*, Nuova Serie, vol. VI, (1984); pp. 93-140.

- Polo Carrasco, J., «"La Guerre, la culture et la religion" un nuevo escrito de Amor Ruibal», en *Actas*, pp. 323-330.
- Polo Carrasco, J., «La teología como ciencia valorativa y la renovación de la teología» en *Actas*, pp. 431-440.
- Rábade, S., «La Gnoseología de Amor Ruibal» en *Actas*, pp. 187-203.
- Raña Dafonte, C., «La analogía según Amor Ruibal» en *Agora*, 1 (1981); pp. 163-194.
- Raña Dafonte, C., «Datos para una teodicea según Amor Ruibal» en *Compostellanum*, 30 (1985); pp. 141-165.
- Rivera de Ventosa, E., «Mediación de Hegel y correlación en Amor Ruibal», en *Actas*, pp. 487-493.
- Rodríguez Bachiller, A., «El argumento ontológico a la luz del pensamiento de Amor Ruibal» en *Actas*, pp. 421-429.
- Rodríguez Bachiller, A., «El problema de la personalidad, según Amor Ruibal y el transplante de órganos», *Actas*, pp. 441-446.
- Rodríguez Carrajo, M., «Amor Ruibal y su obra», en *Estudios* 20 (1964); pp. 221-240.
- Rojo Seijas, J. L., «Problemas interpretativos aplicados a las nociones», *Actas*, pp. 457-463.
- Strobl, W., «Interpretación amorruibalista de la Historia de la Filosofía y la Teología» en *Estudios* 25 (1969); pp. 39-88.
- Torres Queiruga, A., «Zubiri-Amor Ruibal» en *Índice*, 175-176 (1963), pp. 14-15.
- Torres Queiruga, A., «La realidad radical como emergencia según Amor Ruibal» en *Miscellanea Comillensis*, 52 (1969); pp. 85-129.
- Torres Queiruga, A., «La noción como momento del concepto, según Amor Ruibal», en *Actas*, pp. 473-486.
- Torres Queiruga, A., *Constitución y Evolución del Dogma. La teoría de Amor Ruibal y su aportación*. Marova. Madrid, 1977.
- Torres Queiruga, A., *Noción, religión, transcendencia o conocimiento de Deus en Amor Ruibal e Xavier Zubiri*. Fundación Pedro Barrie de la Maza, Conde de Fenosa. Pontevedra, 1990.
- Urmeneta, F. de, «Amor Ruibal, peldaño ideológico entre Balmes y Zubiri», en *Actas*, pp. 375-381.
- Vázquez, F., «Amor Ruibal, maestro de Zubiri» en *Estafeta literaria*, 322-323 (1965); pp. 110-111.
- Vázquez, F., «Unidad dialéctica de la persona y la conciencia moral en Amor Ruibal», en *Estudios* 25 (1969); pp. 105-122.
- Zaragüeta, J., «El conocer y el ser en Amor Ruibal», en *Actas*, pp. 415-420.

OTRA BIBLIOGRAFÍA EMPLEADA:

- Abagnano, N., *Historia de la Filosofía*, vol. 3. Ed. Hora, Barcelona, 1982.
- Abellán, J. L., *Historia crítica del pensamiento español. La crisis contemporánea*. Tomo V. Vols. I y II. Ed. Espasa-Calpe. Madrid, 1989.
- Aubert, R., «La crisis modernista» en *Manual de Historia de la Iglesia* (dir. H. Jedin) Tomo VIII. La Iglesia entre la adaptación y la resistencia. Herder. Barcelona, 1978; pp. 586-668.
- Aubert, R., «El modernismo» en *Nueva Historia de la Iglesia* (dir. L. J. Rogier, R. Aubert, D. Knowles). Tomo V. La Iglesia en el mundo moderno (1848 al Vaticano II). Cristiandad. Madrid² 1984; pp. 188-206.
- Azam, G., *El modernismo desde dentro*. Ed. Anthropos. Barcelona, 1989.
- Baillot, A., «La philosophie et la religion selon Émile Boutroux» en *Revue Thomiste*. nº 17. 1934. Nouvelle Serie. Reprinted by Kraus Reprint Ltd. Vaduz, 1965; pp. 313-352.
- Baldwin, J. M., *El pensamiento y las cosas. Lógica genética*. Ed. Jorro. Madrid, 1911.
- Barreiro Fernández, X. -R., *Historia Contemporánea de Galicia*. ss. XIX y XX. Ed. Gamma. La Coruña, 1983.
- Bell, E. T. *Historia de las Matemáticas*. Fondo de Cultura Económica. México, 1949.
- Bergson, H., «Introduction: Vérité et réalité» en James, *Le pragmatisme*, Flammarion. París, 1911.
- Botti, A., *La Spagna e la crisi modernista. Cultura, società civile e religiosa tra Otto e Novecento*. Morcellania. Brescia, 1987.
- Boutroux, E., *De l'idée de loi naturelle dans la science et la philosophie contemporaines*. Librairie F. Alcan. París, 1895.
- Boutroux, E., «Science et religion» en *Bolletín de la Société Française de Philosophie*. Tomo IX. París, 1909; pp. 19-74.
- Boutroux, E., *Ciencia y religión en la filosofía contemporánea*. Trd. M. Rodríguez-Navas. Librería Gutenberg de José Ruiz. Madrid, 1910.
- Boutroux, E., *De la contingence des lois de la nature*. Librairie F. Alcan. París¹⁰, 1929.
- Boutroux, E., *Las leyes naturales (De la contingencia de las leyes de la naturaleza)*. Biblioteca Contemporánea, nº 43. Ed. Fco. Granada y C^{ta}. Barcelona, 1906.
- Boyer, Carl B., *Historia de la matemática*. Alianza Universidad-Textos. Madrid, 1986.
- Breton, S., «Dogme de la Résurrection et concept de la matière» en *Le modernisme*. Beauchesne. París, 1980.
- Brunschvicg, L., *La modalité du jugement*. Presse universitaires de France. París, 1964.

- Capek, M. *El impacto filosófico de la física contemporánea*. Tecnos. Madrid, 1965.
- Cárcel Ortí, V., «Estado material, académico y moral de los seminarios españoles durante el siglo XIX» en *Seminarios*, nnº 77-78, vol. 26. (1980); pp. 265-273.
- Caro Baroja, J., «El miedo al mono o "la cuestión universitaria» de 1875. *Historia* 16. nº 3, vol.1, Madrid, 1976. pp. 59.
- Colin, P. «Le Kantisme dans la crise moderniste», en *Le modernisme*. Beauchesne. Paris, 1980.
- Comellas y Cluet, A., *Demostración de la armonía entre la religión católica y la ciencia*. Tip. Verdaguer. Barcelona, 1880.
- Comellas y Cluet, A., *Introducción a la Filosofía, o sea doctrina sobre la dirección al ideal*. Imp. Viuda e Hijos de J. Subirana. Barcelona, 1883.
- Concilio Vaticano I, *Constitución dogmática sobre la fe católica*, en *Dz.*, pp. 413-419.
- Copleston, F., *Historia de la Filosofía*. vols. VIII-IX. Ed. Ariel, Barcelona, 1985-89.
- Couturat, L., «Sur les rapports du nombre et de la grandeur» en *Revue de Métaphysique et Morale*, vol. VI (1898); pp. 422-447.
- Couturat, L., «Essai sur les fondements de la Géométrie. Par Bertrand Russell» *Revue de Métaphysique et Morale*, vol. VI (1898); pp. 354-380.
- Couturat, L., *Les principes des mathématiques. Avec un appendice sur la philosophie des mathématiques de Kant*. Reimpresión de G. Olms Verlagsbuchhandlung. Hildesheim, 1965.
- Draper, J. W., *Historia de los conflictos entre la religión y la ciencia*. Trad. Armicis. Impr. Aribau. Madrid, 1876.
- Dubarle, D., «Modernisme et expérience religieuse. Réflexions sur un cas de traitement théologique» en *Le modernisme*. Beauchesne. Paris, 1980.
- Edwards, P. (Dir.), *The Encyclopedi of pilosophy*. The Macmillan Co. & The Free Press/Collier-Macmillan Ltd. Nueva York-Londres, 1967.
- Fraile, G., *Historia de la Filosofía Española*, vol. II. B.A.C. Madrid, 1972.
- Gallot, S., «Géométries» en *L'Univers Philosophique*, P.U.F.. París, 1983 pp.996-1026.
- Gicovate, B., «El modernismo y su historia», en *Hispanic Review*, nº 32 (1964); pp. 217-226.
- Greisch, J., «Maurice Blondel et les aspects herméneutiques de la crise moderniste» en *Le modernisme*. Beauchesne. Paris, 1980.
- Hendrick, E., «Draper, John Willian» en *Dictionary of American Biograpphy*, (dir. A. Jhonson y D. Malone) Charles Shribner's Sons. Nueva York,1959. Vol. III; pp. 438-441.
- Houssaye, J., «Le problème religieux dans la philosophie d'E. Le Roy» en *Le modernisme*. Beauchesne. Paris, 1980.
- James, W., *El significado de la verdad*. Ed. Jorro. Madrid, 1924.

- James, W., *Pragmatismo. Un nuevo nombre para algunos antiguos modos de pensar*. Aguilar. Buenos Aires, 1975.
- James, W., *Las variedades de la experiencia religiosa*. Península. Barcelona, 1986.
- Kant, E., *Crítica de la razón pura*. Trad. Pedro Ribas. Alfaguara. Madrid, 1978.
- Le Roy, E. «Science et Philosophie» *Revue de Métaphysique et Morale*, vol. VII (1899). pp. 375-425, 503-562, 708-731.
- Le Roy, E., «Sur la logique de l'invention» en *Revue de Métaphysique et Morale*, vol. VIII (1905); pp.193-223.
- Le Roy, E., «Comment se pose le problème de Dieu» en *Revue de Métaphysique et Morale*, vol. XV (1907). pp. 129-170, 470-513.
- Le Roy, E. *Dogme et critique*. Librairie Blond et C^{ie}. Paris, 1907.
- Lorenzo, J. de, *La filosofía de la matemática de Poincaré*. Ed. Tecnos. Madrid, 1974.
- Martín Velasco, J., *Introducción a la fenomenología de la religión*. Ed. Cristiandad. Madrid, 1982.
- Mayobre, P., *Debates ideológicos na Compostela do XIX*. Ed. do Castro. Pontevedra, 1985.
- Michelet, G. *Dieu et l'agnosticisme contemporaine*, Librairie Victor Lecoffre. J. Cabalda & C^{ie}. Paris², 1909.
- Montague, W. P., *Los caminos del conocimiento. (Lógica y epistemología)*. Trad. D. Núñez. Ed. Sudamericana. Buenos Aires, 1944.
- Munárriz, A., «Variada actividad teológica del filósofo Comellas y Cluet» en *Miscellanea Comillas*, 14 (1950); pp. 143-186.
- Parodi, D. *La philosophie contemporaine en France*. Alcan. Paris, 1925.
- Pérez, A., «Un aspecto de la filosofía de Zubiri: Su correlativismo», en *Estudios*, 20 (1964); pp. 99-111.
- Pío IX, *Quanta Cura*, en *Dz.*, pp.401-404.
- Pío IX, *Syllabus*, en *Dz.*, pp.404-413.
- Pío X, *Lamentabili*, en *Dz.*, pp. 475-480.
- Pío X, *Pascendi dominici gregis*, en *Dz.*, pp. 481-508.
- Poincaré, H., «Des fondements de la géométrie. A propos d'un livre de M. Russell» *Revue de Métaphysique et Morale*, vol. VII (1899). pp. 251-279.
- Poincaré, H., «Sur les principes de la Géométrie. Réponse à M. Russell», *Revue de Métaphysique et Morale*, vol. VIII (1900), p. 73.
- Poincaré, H., *La ciencia y la hipótesis*. Trd. de P. M. Quijano. Madrid, 1907.
- Poincaré, H., *La ciencia y el método*. Espasa-Calpe, Madrid, 1944.

- Poincaré, H., *El valor de la ciencia*. Espasa-Calpe. Madrid, 1948.
- Poulat, E. *La crisis modernista (Historia, dogma y crítica)*. Madrid. Taurus, 1974.
- Resnick, R. *Introducción a la teoría especial de la relatividad*. Ed. Limusa. México, 1977.
- Risse, G. B., «Virchow, Rudolf Carl» en *Dictionary of Scientific Biography*. (Editor C. Gillispie). Charles Schribner's Sons. Nueva York, 1973. Vol. XIV; pp. 39-44.
- Rodríguez Carracido, J., Capítulo «La doctrina de la evolución en la Universidad de Santiago. (Un recuerdo de mi vida estudiantil)» en *Estudios histórico-críticos de la ciencia española*. Imp. «Alrededor del Mundo». Madrid², 1917.
- Rourera Farré, L., *Antonio Comellas y Cluet: Filósofo de Berga (1832-1884)*. El Autor. Barcelona, 1980.
- Russell, B., «Les axiomes propres à Euclides sont-ils empiriques?» *Revue de Métaphysique et Morale*, vol. VI (1898), pp. 759-776.
- Russell, B., «Sur les axiomes de la géométrie», *Revue de Métaphysique et Morale*, vol. VII (1899) pp. 684-707.
- Russell, B., *Ensayo sobre los fundamentos de la geometría*, en *Obras Completas*, vol II. Aguilar. Madrid, 1973.
- Russell, B., *Los principios de la matemática*, en *Obras Completas*, vol II. Aguilar, Madrid, 1973.
- Russell, B., *La evolución de mi pensamiento filosófico*. Ed. Alianza. Madrid, 1982.
- Russell, B. *Autobiografía de Bertrand Russell. (1872-1914)*. Ed. Edhasa. vol I. Barcelona, 1990.
- Sabatier, A., *Ensayo de una Filosofía de la Religión según la psicología y la historia*. Trad. Ovejero y Maury. Ed. Jorro. Madrid, 1912.
- Sarri Muntada, J., «Las directrices filosóficas de A. Comelles y Cluet» en *Revista de Filosofía*, nn^o 92-93 Enero-Junio de 1965; pp. 77-107.
- Sentrout, G., *L'Objet de la Métaphysique selon Kant et selon Aristote*. Louvain, 1905.
- Sentrout, G., "Vrai thomisme contre vrai kantisme» en *Revue neo-scholastique*. Institute Supérieur de Philosophie. Louvain. (1906); pp. 164-200.
- Sertillanges, A., «Agnosticisme, ou anthropomorphisme?» en *Revue de Philosophie*, (1906). pp. 129-165.
- Taton, R. (dir.), *Historia general de las ciencias*. Vols. 2, 3 y 4. Ed. Destino. Barcelona, 1972-73.
- Tilliette, X., «Maurice Blondel et la controverse christologique» en *Le modernisme*. París. Beauchesne, 1980.
- Urdanoz, T., *Historia de la filosofía*, vol. 5. B.A.C. Madrid, 1975.
- Vico, A., «Informe sobre la situación de los seminarios en España hasta el 31 de diciembre de 1891», en *Seminarios*, nn^o 77-78, vol. 26. (1980); pp. 375-387.

Zubiri, X., «Respectividad de lo real» en *Realitas 3-4*. Vol. IV. Soc. de Estudios y Publicaciones. Ed. Labor. Madrid, 1979.

ÍNDICES

ÍNDICE ONOMÁSTICO

- Abagnano, N. 354
- Abella Chouciño, G. R. 350
- Abellán, J.L. 5, 10, 23-25, 27, 51, 75, 76,
350, 354
- Agustín, San 36, 64, 105
- Ambrosio, San 105
- Amor Ruibal, A. *passim*
- Aristóteles 32, 64, 86, 110, 227, 237
- Armicis, A.T. 25, 26, 355
- Æterni Patris* 12, 23, 41, 82
- Aubert, J. 73, 75, 354
- Anido Rodríguez, J. M. 32, 33
- Avenarius, R. 158
- Azam, G. 74, 76, 90, 354
- Azcárate, G. 25
- Baer, K. E. von 38
- Baillot, A. 354
- Bain, A. 196
- Baldwin, J.M. 153-155, 354
- Baliñas, C.-A. 5, 7, 10, 27, 43, 47, 143, 248,
250, 349, 351
- Barni, J.R. 83
- Barreiro, J. 195, 199
- Barreiro, J. L. 38, 43, 46, 52, 70, 143, 158,
159, 168, 232, 248, 351
- Barreiro Fernández, X.-R. 28, 354
- Barrow, I. 255
- Batiffol, P. 78
- Bell, E.T. 264, 266, 354
- Belot, G. 81
- Beltrami, E. 260, 263, 264, 309
- Bergson, H. 80-82, 111, 148, 165, 217, 228,
354
- Berkeley, G. 288
- Bernard, C. 36
- Berthelot, P.E. 148, 217
- Blondel, M. 16, 69, 79, 81, 82, 97, 98, 107,
113, 355, 357
- Blood, P. 197
- Bolyai, J. 260-262, 309
- Bolyai, W. 261
- Bosanquet, B. 279
- Botana Barbeito, A. 30
- Botti, A. 75, 76, 354
- Boutroux, E. 11, 15, 78, 82, 217, 219, 220,
221, 222, 224-233, 235-237,
248, 250, 251, 345-347, 354
- Boyer, C. B. 259, 260, 262, 266, 267, 354

- Bradley, F. H. 118, 135, 147, 229, 279
- Brehièr, E. 80, 97, 98
- Breton, S. 98-100, 102, 103, 106, 354
- Brianchon, Ch. J. 267
- Brunet y Talleda, A. 24, 31, 33
- Brunschvicg, L. 17, 82, 84, 86, 217, 354
- Büchner, L. 36
- Buffon, G. L. 35
- Buonaiuti, E. 79
- Caird, J. 135, 136, 147
- Calvo Troitero, A. 32, 33
- Capek, M. 255, 272, 354
- Capella, F. 85
- Cárcel Ortí, V. 355
- Carnot, L. 259, 265
- Caro Baroja, J. 28, 355
- Carr, H. W. 256
- Casares, A. 24, 30, 33
- Casas, A. 7, 9, 10, 34, 43, 52-54, 119, 314, 349-351
- Cassirer, E. 255
- Castañé Casellas, J. 351
- Castro Picallo, M. 351
- Cayley, A. 260, 264-266, 270, 310
- Cazorla, E. 235, 305
- Chasles, J. A. C. 267
- Cicala 248
- Clark, X. 197
- Coc, G. A. 196
- Colin, P. 77, 79, 80, 82-86, 98, 355
- Comellas y Cluet, A. 14, 27, 34, 43, 51-58, 61, 62, 63-66, 100, 170, 173, 341, 342, 347, 355, 356, 357
- Comte, A. 37, 142
- Copérnico, N. 37, 163
- Copleston, F. 115, 117, 355
- Cousin, V. 81, 83
- Couturat, L. 16, 98, 148, 217, 224, 236, 248, 256, 269, 282-289, 291, 293, 294, 296, 297, 305, 310, 317, 323-331, 339, 345, 346, 347, 355
- Cristo 56, 102, 206, 260
- Croce, B. 153
- Crookes, W. 21
- Cunningham, E. 255
- Cuvier, G. 26, 39, 41
- Dalton, J. 36
- Darwin, Ch. 24, 28, 34-38, 42, 85, 342
- De Bonald, L. G. A. 93, 174
- De Maistre, J. 37, 93
- Dehove 84
- Delacroix, H. 83, 128, 196, 200, 209
- Delboeuf, J. 285
- Delbos, V. 82, 83
- Delgado Varela, J. M. 351
- Delmont, M. 75
- Demócrito 255
- Denzinger, E. ver *Dz*
- Desbuts 177
- Descartes, R. 32, 62, 63, 110, 173, 221, 239, 255, 265, 332
- Dewey, J. 97, 98, 115, 123, 156
- Dios 7, 16, 17, 22, 30, 32, 36, 43, 44, 46-48, 55, 57, 78, 84, 85-89, 92-95, 98, 100, 101-103, 112, 113, 118, 122, 126, 128, 129, 133, 135-138, 145, 151, 152, 154, 163, 166, 170, 171, 175, 177, 184, 187, 188, 190, 191-193, 192, 194, 198, 199-206, 209, 255, 328, 329, 343, 345, 347, 350, 352

- Draper, J. W. 14, 23, 25, 26, 34, 37, 51, 100,
341, 355
- Drumaux, P. 256
- Dubarle, D. 74, 355
- Dubois-Reymond, E. 85, 90
- Duhem, P. 120
- Dunan 81
- Durkheim, E. 217
- Dz. 7, 23, 47-49, 74, 77-79, 83, 84, 87, 192,
355, 356
- Echegaray, E. 85
- Eddington, A. 256
- Edwards, P. 355
- Egger, V. 208
- Einstein, A. 255, 256, 346
- Emerson, R. W. 129
- Empédocles 36
- Erdmann, B. 83, 275, 312, 333, 334
- Eucken, R. 81, 83, 127
- Euclides 244, 259-264, 277, 282, 285, 288,
294, 300, 302, 306, 309,
310, 357
- Evellin, F. 82
- Ferro Couselo, M. 351
- Fichte, J. G. 239
- Filgueira Valverde, J. 351
- Fischer, F. X. 256
- Flomaripon 37
- Flórez Miguel, C. 351
- Flournoy 196
- Fonsegrive, G. 113
- Fracassini, U. 79
- Fraile, G. 10, 31, 355
- Freulich, E. 256
- Froschamer, J. 182
- Furon, F. 35
- Galileo 236, 247
- Gallot, S. 355
- García de la Mora, J. M. 351
- Garrigou-Lagrange, R. 77
- Gassendi, P. 36
- Gauthier, J. 81
- Gauss, C. F. 261, 262
- Gentile, G. 77
- Georgonne, J. D. 267, 317
- Gicovate, G. 355
- Gioberti 49, 174
- Gödel, K. 255
- Gómez, J.A. 79
- Gómez Ledo, A. 10, 32, 33, 52, 223, 352
- González, Z. 27, 34, 35
- González de Linares, A. 24, 28, 33
- González de Quijano, P. M. 235, 236, 305, 356
- Gorroño, D. 24, 31, 33
- Grandmaison, R. P. L. 105
- Grassmann, H. 303
- Greisch, J. 355
- Günther, A. 182
- Haeckel, E. 38, 117
- Haldane, V. 256
- Hannequin, A. 83, 279
- Harnack, A. 83, 87, 185, 191
- Hébert, M. 77, 80
- Hegel, G. F. W. 117, 145, 191, 223, 239, 353
- Helmhotz, H. von 260, 281, 294, 295, 299
- Hendrick, E. 355
- Heráclito 145, 147
- Herbart, J. H. 303

- Hermann 91
- Hermes, J. 182
- Höfding, H. 248
- Holt, E. B. 156
- Houssaye, J. 355
- Houtin, A. 75
- Husserl, E. 236
- Huster 36
- Hutton, J. 35
- Ibeas, B. 256
- James, W. 15, 37, 69-71, 80-82, 88, 95, 97, 98, 100, 105, 115, 116, 117-140, 139, 140, 142, 143, 149, 151, 153, 154, 156, 158, 160, 161, 163-168, 170, 173, 174-176, 179, 182, 183, 187, 188, 190, 192, 193, 195-207, 209, 210, 211, 343, 344, 354, 355, 356
- Janet, P. 200, 208
- Jastrow, J. 200
- Jedin, H. 75, 354
- Jesús 25, 69, 94, 95, 102, 191
- Jiguier 37
- Jobit, P. 75
- Juan de la Cruz, San 196
- Kant, E. 17, 36, 62, 82-86, 88, 92, 93, 110, 113, 117, 238, 239, 267, 279, 284, 294, 308, 355-357
- King, J. 196
- Klein, F. 260, 264, 266, 270, 292
- Kübel, J. 75
- Küng, H. 191
- Laberthonnière, L. 16, 75, 79, 81, 85, 97, 98, 107, 113, 165, 217
- Lachelier, J. 82, 217
- Lamarck 34, 36, 42
- Lamennais, F. R. 49, 174
- Lamentabili* 74, 79, 84, 356
- Lamy 36
- Laplace, P. S. 35
- Le Dantec, F. 34, 208
- Le Roy, E. 15, 70, 71, 75, 80, 81, 97-113, 115, 120, 126, 130, 139, 140, 139, 140, 142, 151, 152, 156, 164, 165, 170, 177, 178, 180, 182, 183, 192, 193, 204, 217, 224, 236, 239, 241, 242-246, 248, 251, 294, 343-345, 348, 355, 356
- Leibniz, G. W. 118, 284
- Lemeray, E. M. 256
- Lemos Montanet, J. L. 32, 352
- León XIII 53, 79, 83
- Leucipo 255
- Lie, S. 260, 266
- Littré, E. 37
- Lobatchewski, N. 260-264, 285, 288, 293, 306, 309, 335
- Lobstein 191
- Loisy, A. 73, 75, 77-79, 83, 113
- Lorentz, H. 271
- Lorenzo, J. de 356
- Lotze, R. H. 127
- Lutero 83
- Maezlu, R. 77
- Maréchal, C. 69
- Marion 208
- Maritain, J. 74, 81, 147, 159
- Martín Velasco, J. 129, 356
- Martínez Ruíz, E. 352
- Mateu Muriscot, M^a D. 223, 352
- Mayobre, P. 27-29, 31, 356

- Méndez Palleiro, L. M. 195, 352
- Mendive, J. 26, 34, 35
- Menégoz 83, 191
- Michelet, G. 85, 88, 356
- Milhaud, G. 83, 120
- Minkowski, O. 255, 288
- Mir, M. 26, 34, 35
- Miwart, G. 36
- Monge, G. 259
- Montague, W. P. 155, 356
- More, H. 255
- Munárriz, A. 51, 64, 65, 356
- Muñoz Delgado, V. 352
- Muñoz Pérez Vizcaíno, J. 352
- Muñoz Triguero, I. 352
- Natorp, P. 83
- Nazario de Santa Teresa 195
- Newman, J. H. 105, 135
- Newton, I. 255
- Nicea, Concilio de 185, 186
- Nietzsche, F. 80, 229
- Novoa Santos, 24
- Ollé-Laprune, L. 81
- Ortega y Gasset, J. 76, 77
- Ortiz-Osés, A. 70, 165, 352
- Paassen, P. van 191
- París Amador, C. 38, 352
- Parménides 147
- Parodi, D. 81, 83, 147, 148, 200, 208, 356
- Pascendi* 12, 71, 73, 74, 77, 79, 83, 84, 86, 97, 113, 172, 192, 193, 192, 193, 217, 343, 344, 356
- Paulsen, F. 17, 83
- Payá Alonso Rico, M. 32-33
- Peirce, C. S. 97, 115, 119, 161
- Pereiro Vicites, M. 30, 33
- Pérez, A. 352, 356
- Pesch, C. 35
- Pfleiderer, E. 191
- Phillipi 200
- Picaza, J. 352
- Pieron 208
- Pikaza, X. 352
- Piñeiro Herba, M. 29, 33
- Pío IX 12, 23, 356
- Pío X 79, 356
- Pío XI 74
- Piveteau, J. 39
- Platón 56, 110, 223, 237
- Plücker, J. 267, 309
- Poincaré, H. 15, 16, 22, 120, 148, 217, 218, 221, 224, 225, 228, 235-251, 256, 263, 269, 282, 286, 289, 291, 292-308, 310, 314, 325, 339, 345-348, 356
- Polo Carrasco, J. 352
- Poncelet, J. V. 32, 265-267
- Portalié, R. P .E. 105, 113
- Poulat, E. 73-75, 77-79, 87, 191, 357
- Pseudo-Dionisio 201
- Ptolomeo 37, 163
- Pumar, C. 7, 9, 235, 257, 349
- Quanta Cura* 12, 23, 84, 356
- Rábade, S. 353
- Ramón y Cajal, S. 24
- Raña, C. 5, 353
- Rauh, F. 81
- Raúllica 174
- Reid, T. 174

- Reimarus, H. S. 191
- Remacle, G. 81
- Renan, E. 130, 190
- Renouvier, Ch. 81, 86, 228
- Resnick, R. 357
- Ribas, P. 238, 356
- Ribot, T. A. 208
- Richter, H. T. 36
- Riemann, G. 246, 260, 262-264, 269, 276,
285, 288, 302, 303, 306,
309, 312, 333, 335
- Risse, G. B. 357
- Ristchl 191
- Rivera, S. 30, 33
- Rivera de Ventosa, E. 353
- Rivière, J. 75
- Rodríguez Bachiller, A. 353
- Rodríguez Blanco, F. 31-33, 35, 36
- Rodríguez Carracido, J. 28, 357
- Rodríguez Carrajo, M. 353
- Rojo Seijas, J. L. 353
- Romero Blanco, F. 28, 29, 31, 33
- Rosmini, A. 49, 174
- Rougier, L. 256
- Rourera Farré, L. 54, 55, 357
- Royce, J. 118, 155
- Rubiano, S. 115
- Ruiz Bueno, D. 7
- Russell, B. 16, 148, 224, 229, 236, 248, 256,
257, 259, 260, 262, 263-267,
269-289, 291-302, 305, 310,
311-321, 323, 324, 326,
327-331, 333-339, 345-347,
355, 356, 357
- Ruysbroeck 204
- Sabatier, A. 15, 70, 75, 83, 87-95, 100, 117,
118, 130, 132, 133, 138,
191, 192, 343, 357
- Sabatier, P. 75, 83
- Saccheri, G. 261, 262
- Sailly 98
- Salmerón, N. 26
- Sarri Muntada, J. 52, 357
- Schelling, F. W. J. 239
- Schiller, F. C. 97, 98, 113, 115, 116, 123,
124, 126, 149, 156, 158, 161
- Schopenhauer, A. 80, 113
- Schweikart, F. K. 261
- Schweitzer, A. 191
- Séailles, G. 81
- Sentrout, G. 84, 86, 106, 357
- Sertillanges, A. 177, 178, 357
- Stewart, D. 174
- Silva, E. 222
- Sollier 208
- Sorel, G. 81
- Sortais 17
- Spencer, H. 37, 78, 85, 90, 117, 118, 142, 145
- Spinoza, G. 255
- Starbuck 196, 209
- Staudt, Ch. von 267, 270, 300, 314, 317, 318,
335
- Strauss, D. 191
- Strobl, W. 353
- Syllabus* 12, 14, 23, 25, 47, 48, 74, 84, 356
- Sysmonds, J. A. 197
- Taton, R. 21, 261, 357
- Tauler 204
- Taurinus, F. A. 261
- Teresa, Sta. 196, 204

- Tétry, A. 38
- Thompson, J. J. 22
- Tilgher, A. 256
- Tillite, X. 357
- Tomás, Sto. 27, 32, 64, 81, 147, 177
- Torres Queiruga, A. 5, 34, 37, 38, 43, 50, 52,
53, 56, 61, 69, 70, 143, 353
- Tüchle, H. 79
- Turró, R. 24
- Ubach, J. 256
- Unamuno, M. 75, 77
- Urdanoz, T. 357
- Urmeneta, F. 353
- Urráburu 35
- Valle y Alvarez, R. 30, 33
- Varela de Montes, J. 28
- Vaticano I, Concilio 12, 14, 25, 26, 42, 46-48,
50, 55, 74, 84, 107, 172,
341-343, 355
- Vázquez, F. 353
- Veronese 311
- Vico, A. 357
- Vigil 36
- Vilá Nadal, A. 28, 29, 33
- Virchow, R. 36, 357
- Wenzel, F. K. 36
- Werner, A. G. 35
- Weyl, H. 255
- White, B. 37
- Wintenitz, J. 256
- Wrede 191
- Wundt, W. 81, 196
- Zaragüeta, J. 353
- Zenón 147, 148
- Zubiri, X. 196, 350, 352, 353, 356, 357

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla I: Evolucionismo y polémica ciencia-religión en Santiago de Compostela.	33
Tabla II: Comparación de <i>P.F.F.D.</i> , VIII, 6-7 con <i>P.F.F.D.</i> , VIII, 18-19...	108
Tabla III: Comparación del «espíritu rudo» y el «espíritu delicado» según James	116
Tabla IV: Comparación del E. Le Roy y W. James.	140
Tabla V: Correspondencia de las <i>facultades, funciones y momentos</i> en Amor Ruibal.	143
Tabla VI: El pragmatismo en la constitución y desarrollo dogmático.	181
Tabla VII: Comparación de la crítica de <i>Pascendi</i> al modernismo con la crítica de Amor Ruibal al pragmatismo.	193
Tabla VIII: Comparación del modernismo-pragmatismo con la filosofía de Amor Rubial.	194
Tabla IX: Clasificación según el apriorismo/aposteriorismo.	238
Tabla X: Clasificación según los sistemas ontológicos.	239

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustrac. 1: Relaciones del ideal.	44
Ilustrac. 2: Cuadrilátero de Saccheri	261
Ilustrac. 3: Representación del espacio según la geometría de Riemann	264
Ilustrac. 4: Representación del espacio según la geometría de Euclides	264
Ilustrac. 5: Representación del espacio según la geometría de Lobatchewski.	264
Ilustrac. 6: Razón anarmónica entre cuatro puntos/rectas.	265

ÍNDICE DE MAPAS CONCEPTUALES

Mapa conceptual 1: El escepticismo según A. Comellas y Cluet.	59
Mapa conceptual 2: El escepticismo según A. Amor Ruibal.	60

ÍNDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS	5
ABREVIATURAS	7
INTRODUCCIÓN GENERAL	9
1. PROBLEMAS INTERPRETATIVOS SOBRE LA FILOSOFÍA DE AMOR RUIBAL, OBLIGADO CAMBIO DE HERMENÉUTICA.	9
2. CLAVES HERMENÉUTICAS PARA EL ESTUDIO DEL PENSAMIENTO DE AMOR RUIBAL.	11
3. LA CRISIS DE FIN DE SIGLO.	12
4. ESTRUCTURA DE LA TESIS.	14

SECCIÓN I :

EL CONFLICTO ENTRE LA CIENCIA Y LA RELIGIÓN .	19
--	----

CAPÍTULO I

CIENCIA Y RELIGIÓN EN EL SIGLO XIX	21
1. EL IMPACTO DE LA CIENCIA EN EL SIGLO XIX.	21
2. EL CONFLICTO EN ESPAÑA.	23
3. EL CONTROVERTIDO LIBRO DE DRAPER.	25
4. LA POLÉMICA EN SANTIAGO DE COMPOSTELA.	27
5. EL CONFLICTO CIENCIA-RELIGIÓN EN AMOR RUIBAL.	34
a. La cuestión del transformismo.	34
b. La primacía del saber teológico.	42

CAPÍTULO II

COMELLAS CLUET Y AMOR RUIBAL	51
1. COMPARACIÓN GENERAL.	52
2. DEL IDEAL.	53
3. SOBRE EL ESCEPTICISMO Y LA EVIDENCIA.	57

SECCIÓN II

EL MODERNISMO:

UNA RESPUESTA A LA CRISIS CIENCIA-RELIGIÓN . . .	67
---	----

CAPÍTULO I

RASGOS FILOSÓFICOS DEL MODERNISMO	73
1. UNA CRISIS TODAVÍA PRESENTE.	73
2. ¿MODERNISMO EN ESPAÑA?	75
3. «EL FILÓSOFO MODERNISTA», SEGÚN <i>PASCENDI</i>	77
4. LAS FILOSOFÍAS DE LA CRISIS MODERNISTA.	80
5. A. SABATIER PRECURSOR DEL MODERNISMO.	88
a. La confrontación ciencia-fe como origen del problema.	90
b. Consecuencias del kantismo: subjetivismo, teleología y simbolismo. .	94

CAPÍTULO II

EL PRAGMATISMO DE E. LE ROY	97
1. EL MODERNISMO COMO PRAGMATISMO.	97
2. EL ORIGEN DE LA CUESTIÓN.	99
3. EL PRAGMATISMO, SOLUCIÓN DE LE ROY.	101

4. INTELLECTUALISMO Y PRAGMATISMO.	104
5. INMANENTISMO.	105
6. DOGMA Y FILOSOFÍA.	108
7. VALORACIÓN DE LAS FILOSOFÍAS ESCOLÁSTICAS Y LAS FILOSOFÍAS MODERNAS.	110
8. CRÍTICAS RECIBIDAS POR LE ROY.	112

CAPÍTULO III

EL PRAGMATISMO DE W. JAMES	115
1. EL PRAGMATISMO DE W. JAMES Y F. C. SCHILLER.	115
2. EL PUNTO DE PARTIDA DEL PRAGMATISMO.	116
3. LA VERDAD PARA EL PRAGMATISMO.	120
4. CÓMO SE VERIFICA UNA IDEA: CÓMO UNA IDEA SE HACE VERDADERA.	123
5. EL SENTIDO HUMANISTA DEL PRAGMATISMO.	124
6. LA INESPECIFICIDAD DEL FENÓMENO RELIGIOSO.	128
7. ORIGEN Y NATURALEZA DE LO RELIGIOSO.	131
8. LA CIENCIA DE LAS RELIGIONES.	134
9. DE LO METODOLÓGICO A LO TEÓRICO.	137
10. COMPARACIÓN DEL PRAGMATISMO DE E. LE ROY Y W. JAMES.	139

CAPÍTULO IV

CRÍTICA DE AMOR RUIBAL AL MODERNISMO ENTENDIDO COMO PRAGMATISMO	141
1. ORIGEN Y NATURALEZA DEL PRAGMATISMO.	142
2. CRÍTICA AL PRAGMATISMO.	143
a. Aspecto o criterio ontológico.	144
b. Aspecto o criterio lógico.	149

i. Crítica a la negación del conocimiento conceptual. (149); ii. Crítica del conocimiento como acción. (149); iii. Crítica de la intuición como nexo entre el conocimiento y la realidad. (152)	
c. Aspecto o criterio psicológico.	154
i. A la búsqueda de la realidad en sí. (154); ii. Relación entre el ser y la intuición. El problema de la realidad. (155); iii. Evolución de la intuición. (159); iv. Teoría de la verdad. (161)	
3. CRÍTICA AL INMANENTISMO.	164
4. CRÍTICA A LA TEORÍA DEL SUBCONSCIENTE.	167
5. CRÍTICA A LA CONCEPCIÓN RELIGIOSA DEL PRAGMATISMO.	169
a. Cómo se enlaza lo natural y lo sobrenatural. Relación entre la filosofía y el dogma.	170
i. El conocimiento racional <i>previo</i> al dogma. (172); ii. El conocimiento racional <i>concomitante</i> al dogma. (177); iii. El elemento racional <i>subsiguiente</i> al dogma. (178)	
b. El pragmatismo: tipo dogmático inválido.	180
i. El pragmatismo e intelectualismo en la reflexión sobre el origen y la formación del dogma. (182); ii. El pragmatismo en la reflexión sobre la evolución del dogma. (185); iii. El intelectualismo y el pragmatismo derivados del espíritu protestante. (189)	

CAPÍTULO V

EL PROBLEMA MÍSTICO: CONOCIMIENTO Y REALIDAD	195
1. ÁMBITO DE LA EXPERIENCIA MÍSTICA.	197
2. LA MÍSTICA CRISTIANA.	205
3. ORIGEN Y NATURALEZA DE LO MÍSTICO.	207

SECCIÓN III

CIENCIA Y REALIDAD.	213
------------------------------------	------------

PARTE I

EL CONOCIMIENTO CIENTÍFICO. 215

CAPÍTULO I

EL CONTINGENTISMO DE E. BOUTROUX Y AMOR RUBIAL.. 219

- 1. EL CONTINGENTISMO DE E. BOUTROUX.. 219
- 2. EL RELACIONALISMO DE BOUTROUX Y AMOR RUBIAL. 224
- 3. DE LA NOCIÓN DE *SER* AL *SER* NOCIONAL..228

CAPÍTULO II

LA FILOSOFÍA DE AMOR RUBIAL Y POINCARÉ. 235

- 1. IMPORTANCIA DEL TEMA.. 235
- 2. POINCARÉ Y EL CONOCIMIENTO DE LA REALIDAD.. 237
- 3. EL PROBLEMA DE LAS LEYES Y POSTULADOS CIENTÍFICOS.. 243
- 4. LA RELATIVIDAD UNIVERSAL.. 248

PARTE II

ESPACIO Y GRANDOR. 253

CAPÍTULO I

LA GEOMETRÍA DEL SIGLO XIX. 259

- 1. GEOMETRÍA EUCLIDIANA Y GEOMETRÍA. HISTORIA DEL
V POSTULADO.. 260
- 2. GEOMETRÍA Y METAGEOMETRÍA.. 262
- 3. GEOMETRÍA PROYECTIVA.. 264

CAPÍTULO II

LOS FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRÍA. 269

1. EL ESPACIO GENERAL DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA..	269
a. Los axiomas de la geometría proyectiva..	271
2. GEOMETRÍAS EUCLIDIANAS Y NO-EUCLIDIANAS.	273
a. Los axiomas generales de la geometría métrica..	273
i. El axioma del libre movimiento. (274); ii. El axioma de las dimensiones. (276); iii. El axioma de la distancia. (277)	
3. ASPECTOS FILOSÓFICOS IMPLICADOS EN EL ESPACIO..	278
a. Concepto de a priori <i>en Russell</i> ..	278
b. Contradicciones de los conceptos espaciales y «materialización» del espacio..	280

CAPÍTULO III

COUTURAT CRÍTICO DE RUSSELL	283
1. LA CRÍTICA DE COUTURAT AL <i>ENSAYO</i> DE RUSSELL.	283
2. RESPUESTA DE RUSSELL A COUTURAT.	286

CAPÍTULO IV

EL ESPACIO Y LA GEOMETRÍA EN H. POINCARÉ	291
1. CRÍTICA CONVENCIONALISTA DE POINCARÉ.	291
2. SOBRE LOS AXIOMAS DE LA GEOMETRÍA.	296
3. CONCEPCIÓN ESPACIAL DE POINCARÉ.	302

CAPÍTULO V

EL REALISMO ESPACIAL DE AMOR RUIBAL	305
1. CRÍTICA DE AMOR RUIBAL A LA CONCEPCIÓN GEOMÉTRICA DE POINCARÉ.	306
2. LAS METAGEOMETRÍAS Y SU VALORACIÓN POR AMOR RUIBAL.	308
3. LA GEOMETRÍA MÉTRICA Y LA GEOMETRÍA PROYECTIVA.	310
4. ANÁLISIS DEL «FRAGMENTO A» DE <i>ESPACIO Y GRANDOR</i> .	312

CAPÍTULO VI

EL GRANDOR	323
1. EL NÚMERO Y EL GRANDOR.	323
2. EL <i>GRANDOR</i> EN LA FILOSOFÍA DE AMOR RUIBAL.	328
3. CRÍTICA DE AMOR RUIBAL AL CONCEPTO DE ESPACIO DE RUSSELL: «FRAGMENTO B» DE <i>ESPACIO Y GRANDOR</i>	333
 CONCLUSIONES	 341
 BIBLIOGRAFÍA UTILIZADA	 349
 ÍNDICES	 359
ÍNDICE ONOMÁSTICO	361
ÍNDICE DE TABLAS	369
ÍNDICE DE ILUSTRACIONES	369
ÍNDICE DE MAPAS CONCEPTUALES	369
ÍNDICE GENERAL	371