

R. 57.571

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada III: Política Económica

T
1741

**ECONOMÍA DINÁMICA CAÓTICA: UNA
APLICACIÓN AL MERCADO DE CAPITALES
ESPAÑOL**

Tesis doctoral presentada por

Pilar Grau Carles

Para la obtención del Grado de Doctor en Ciencias Económicas

Dirigida por el

Prof. Dr. Andrés Fernández Díaz

Madrid 1996

AGRADECIMIENTOS

Mi primer agradecimiento va dirigido al profesor Andrés Fernández, director de esta Tesis y maestro excepcional. Su profundos conocimientos tanto de la Ciencia Económica como de otras disciplinas, en particular la Matemática y la Física, me han resultado de gran ayuda, tanto en el desarrollo de la Tesis, como en mi formación investigadora. Sus consejos, orientaciones y optimismo me han permitido superar los obstáculos con los que inevitablemente se tropieza en toda investigación.

Así mismo, deseo agradecer a todos mis compañeros del Área de Economía del Centro Ramón Carande, el apoyo que me han prestado. El frecuente intercambio de opiniones con ellos ha contribuido a afianzar mis conocimientos en el campo de la Ciencia Económica. Especialmente, deseo agradecer al profesor Ramón Febrero las facilidades y la ayuda que en todo momento me ha brindado.

Por último, quiero agradecer al Dr. José Scheinkman y al Dr. Blake LeBaron el haberme suministrado copias de sus trabajos, difíciles de encontrar, así como informes institucionales en el campo de la dinámica no lineal.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN	1
--------------------	---

CAPÍTULO 2

EL CAOS

2.1. Definición	5
2.2. El camino hacia el Caos	10
2.3. Geometría no euclidiana y fractales	17

CAPÍTULO 3

CÓMO DETECTAR EL CAOS I

3.1. La reconstrucción del atractor	19
3.2. La dimensión fractal	24
3.3. Los exponentes de Liapunov	31

CAPÍTULO 4

CÓMO DETECTAR EL CAOS II

4.1. Del movimiento Browniano al análisis R/S	41
4.2. El análisis espectral	71
4.3. El test BDS	109

CAPÍTULO 5

ANTECEDENTES EN EL ESTUDIO DE LOS MERCADOS DE CAPITALES

5.1. El análisis técnico	118
5.2. El análisis fundamental	119
5.3. La teoría de los mercados eficientes	120

CAPÍTULO 6

UN MODELO SENCILLO

6.1. El inversor fundamental	129
6.2. El inversor técnico	132
6.3. El comportamiento del mercado	134

CAPÍTULO 7

ANÁLISIS EMPÍRICO DE LA BOLSA EN ESPAÑA

7.1. Características de las series	142
7.2. Evidencias de no normalidad en las cotizaciones: -el test R/S	146
7.3. Dimensión de correlación	167
7.4. Exponentes de Liapunov	173
7.5. Análisis espectral.....	176
7.6. Evidencias de no linealidad en las cotizaciones: -el test BDS	182

APÉNDICE	188
-----------------------	-----

CONCLUSIONES	192
---------------------------	-----

BIBLIOGRAFÍA	196
---------------------------	-----

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

El comportamiento económico es complejo, irregular y no lineal. El objetivo de la ciencia económica es desvelar la naturaleza irregular y complicada del fenómeno económico. Los modelos empíricos de análisis de series temporales han sido tradicionalmente lineales. La simplicidad de las herramientas para el análisis empírico ha sido el principal argumento en favor de la linealidad. Pero teóricamente es difícilmente justificable que el fenómeno económico siga un comportamiento lineal. El estudio de la no linealidad es complejo pero se hace necesario en la economía, por lo tanto es indispensable que se introduzcan conceptos e instrumentos nuevos relacionados con la no linealidad.

En las dos últimas décadas se han producido avances en el análisis matemático y estadístico de los sistemas dinámicos no lineales en otras ciencias, especialmente en la física.

Tradicionalmente la ciencia económica se ha nutrido de avances en otras disciplinas, particularmente de la física. No hay que olvidar que muchas de las ideas de la teoría neoclásica fueron tomadas de la física de la energía a

mediados del siglo XIX¹. Sin embargo, la física evoluciona y la economía neoclásica queda prácticamente en el mismo lugar. Pasa mucho tiempo hasta que la economía introduce la idea de que los procesos pueden ser objeto de influencias estocásticas. El nacimiento de la econometría se produce tras dicha aceptación. Sin embargo, la influencia estocástica se acepta únicamente para justificar aquello que no se puede explicar y no como una reconceptualización de la teoría económica. Así, la introducción de influencias estocásticas en los modelos econométricos no va unida a una justificación teórica sino que se mantiene la idea del determinismo en la economía.

La mayoría de las series económicas presentan una apariencia aleatoria siendo en general difícil de predecir su comportamiento. La aparición de la teoría del caos y los resultados obtenidos de la aplicación de la misma en campos como la física, la biología y la química sugieren que ésta se puede utilizar también para el estudio de los fenómenos económicos.

Un sistema determinista no lineal puede generar una serie que tenga la apariencia de aleatoria y por tanto sea imposible detectar su naturaleza determinista por técnicas de identificación lineales, como la autocorrelación. Un buen ejemplo puede encontrarse en Liu, Granger y Heller (1993)²

Los modelos dinámicos estocásticos no lineales, que generan comportamientos caóticos, parecen ser apropiados para el estudio de la fenomenología económica ya que están descritos por funciones no lineales que relacionan valores presentes y pasados de las variables y, además, incluyen también "shocks" externos, es decir, que los movimientos de las variables dependen de su historia y de impulsos estocásticos.

Los modelos lineales no pueden reproducir completamente la dinámica del sistema económico, sólo tienen la posibilidad de representar un número limitado de comportamientos. Únicamente mediante sistemas no lineales se puede reflejar la complejidad de la economía, que pasa de estados de equilibrio, estables o inestables, a estados periódicos o cuasiperiódicos, así como a comportamientos aparentemente aleatorios, pero generados por sistemas deterministas, es decir, comportamientos caóticos.

¹ Nos referimos, más concretamente a la equivalencia entre la utilidad y un campo de energía potencial.

² Liu, T., Granger, C. J. y Heller, W. P. (1993) "Using the Correlation Exponent to Decide whether an Economic Time Series is Chaotic" en Hashem Pesaran, M. y Potter, S. M. (eds.) *Nonlinear Dynamics, Chaos and Econometrics*. John Wiley & Sons.

Bajo el paradigma lineal, un equilibrio inestable parece que debe conducir necesariamente a un comportamiento explosivo, sin embargo, bajo una aproximación no lineal, la inestabilidad es la que abre el camino hacia comportamientos más complicados. Además, en un sistema caótico es imposible caracterizar la dinámica global del sistema a través del estudio de la dinámica local, ya que no existe equivalencia entre ambas.

Si el comportamiento de la economía se confirma como caótico, el objetivo es buscar pautas dentro del comportamiento complejo que permitan la predicción en periodos de tiempo cortos. No serán posibles predicciones para periodos de tiempo largos, ya que una de las principales características de un sistema que sigue un comportamiento caótico es la dependencia de las condiciones iniciales, es decir, que cualquier pequeña divergencia en la consideración de las mismas se amplifica exponencialmente en el proceso dinámico.

De todo lo anterior se deduce que es necesario la utilización de tests empíricos para determinar la presencia de caos determinista en las series económicas. Estos tests son muy diferentes de los tests tradicionales, los cuales son, en general, incapaces de distinguir entre caos y aleatoriedad pura. Algunos de los tests para determinar el carácter caótico de una serie temporal, como son el cálculo de la dimensión fractal y los exponentes de Liapunov, se han tomado de otras disciplinas, especialmente de la física. Pero las diferencias entre la economía y la física han provocado algunos problemas en la utilización de dichos tests. El principal ha surgido en relación con la longitud temporal de las series económicas, ya que éstas son, en general, más cortas que las disponibles para el estudio de los fenómenos físicos; pero además, las series económicas contienen una gran cantidad de ruido intrínseco que no aparece en otro tipo de series. Por ello se hace necesario que dichas técnicas se utilicen con cautela en el análisis de las series económicas.

Debido a los problemas surgidos, los economistas han contribuido al estudio de la no linealidad y del caos con algunas aportaciones propias, siendo una de las más interesantes la de Brock, Dechert y Scheinkman (1987)³ que desarrollan un nuevo test, el BDS, que utiliza el cálculo de la dimensión de correlación para detectar no linealidades en las series económicas.

³ Brock, W. A., Dechert, W. D. y Scheinkman, J. A. (1987) "A Test for Independence Based on the Correlation Dimension", Working Paper, University of Wisconsin at Madison, University of Houston and University of Chicago.

Otros tests, como el R/S, que no permite directamente la caracterización de una serie como caótica, aunque sí está muy directamente relacionado con el caos, han permitido una mejor caracterización de las series económicas.

Además, algunos métodos, como el de análisis de densidad espectral, se han mostrado útiles para el estudio de los fractales y las diferentes formas de ruido de una señal.

La economía se ha nutrido y debe seguir haciéndolo de instrumentos provenientes de otras disciplinas, adaptando aquellos métodos que no sean directamente utilizables en el análisis empírico de las series económicas.

Los mercados financieros parecen especialmente indicados para el estudio del caos porque, por una parte, se pueden encontrar series que abarquen un intervalo temporal mayor que la mayoría de las series económicas, mientras que, por otra parte, las fluctuaciones en los mercados de capitales son, en general, inesperadas y parecen más aleatorias que las fluctuaciones de otras variables económicas. Estas características ya hicieron que se considerara que la teoría de catástrofes era apropiada para el estudio de las series financieras.

Además, el que los datos empíricos permitan aceptar que los mercados financieros se comportan de forma caótica implica que se rechaza la teoría de los mercados eficientes, tradicionalmente aceptada en los medios académicos. Según esta teoría, los precios de los activos siguen un camino aleatorio. Pero, si el comportamiento errático de las series financieras se confirma como no lineal y caótico, la teoría de los mercados eficientes no podría aceptarse como verdadera.

La modelización del comportamiento de los mercados de capitales, una vez rechazada la hipótesis de su eficiencia, se debería hacer mediante un modelo no lineal que incluyera todos los posibles comportamientos que se pueden producir en un mercado: alzas sucesivas junto con bajas sucesivas, movimientos erráticos de los precios, burbujas y "crashes", de forma que refleje todas las posibles posturas de los agentes, que son las principales causantes de los movimientos de los precios en los mercados.

CAPÍTULO 2

EL CAOS

2.1. DEFINICIÓN

En la literatura matemática se han propuesto distintas definiciones de caos. Una primera definición intuitiva que resume el comportamiento de un sistema caótico es la que fue sugerida en una conferencia sobre el caos en la Real Sociedad, Londres (1986): "comportamiento estocástico que ocurre en un sistema determinista". Es decir, un sistema caótico parece aleatorio y muy irregular, pero se genera a través de un proceso determinista. Además, aunque hayamos acumulado gran cantidad de datos sobre el comportamiento pasado del sistema, no podemos realizar predicciones exactas acerca del comportamiento futuro del mismo.

Devaney (1989)¹ define de forma rigurosa y matemática una función caótica:

¹ Devaney, R. L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison Wesley. 1984. Pag 50.

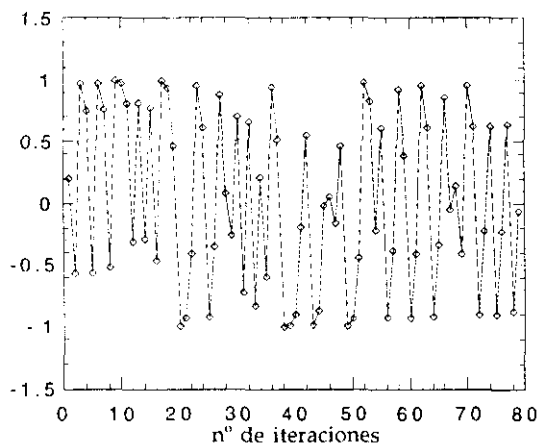
Sea V un conjunto. Se dice que una función $f: V \rightarrow V$ es caótica si:

1. f es sensible a las condiciones iniciales.
2. f es topológicamente transitiva.
3. los puntos periódicos son densos en V

Vamos a considerar ahora con más detalle estas tres características propias de los sistema caóticos:

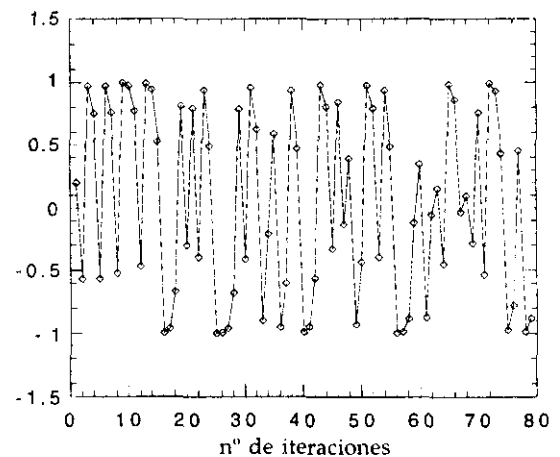
La primera característica es la basada en la dependencia de las condiciones iniciales. Se dice que una función $f: J \rightarrow J$ tiene dependencia de las condiciones iniciales si existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in J$ y cualquier vecindad N de x , existe un $y \in N$ y un $n \geq 0$ tal que $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.²

Esto significa que si una función tiene dependencia de las condiciones iniciales podemos tomar puntos arbitrariamente cercanos a x , de forma que después de varias iteraciones de f , éstos se separan en al menos un valor positivo δ .



condición inicial 0.200000

(a)



condición inicial 0.200001

(b)

Figura 2.1: Evolución de la función $f(x)=4x^3-3x$ para (a) $x_0=0,2$ y (b) $x_0=0,200001$.

² Se define $f^n(x)$ como $f(f(\dots f(x)))$ n veces.

Un caso particular de esta característica puede verse en las figuras 2.1 (a) y (b) que muestran las órbitas correspondientes a la función $f(x)=4x^3-3x$ para dos valores iniciales que difieren únicamente en 10^{-6} . La figura 2.2 muestra la diferencia entre la evolución de las dos, en ella se puede observar que a partir de la iteración 10 ambas señales comienzan a separarse, de tal forma que la evolución de esta serie parece tan errática como la de las series originales.

Esta primera característica de los sistemas caóticos tiene una importante consecuencia que podemos apuntar aquí y sobre la que volveremos más adelante. Un pequeño error en una de las condiciones iniciales de un sistema caótico se amplifica a lo largo de sucesivas iteraciones, lo que implica que en este tipo de sistemas sólo se pueden realizar predicciones mínimamente fiables para periodos relativamente cortos.

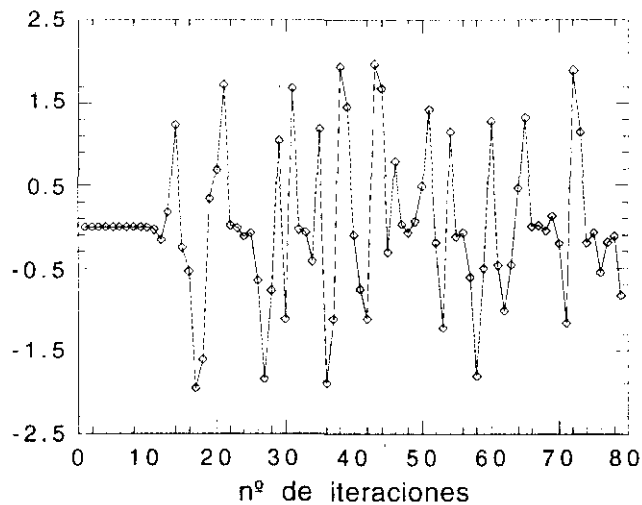


Figura 2.2: Diferencia entre la evolución de las figuras 1.1 (a) y (b).

La segunda característica es la transitividad topológica llamada también mezclado. Se dice que una función $f: J \rightarrow J$ es topológicamente

transitiva si para cualquier par de conjuntos abiertos U y $V \subset J$ existe un $k > 0$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Intuitivamente esto equivale a decir que siempre podemos encontrar condiciones iniciales de U que después de iteradas conduzcan a elementos de V , sean cuales fueren estos conjuntos U y V .

Si tomamos $f(x) = 4x^3 - 3x$ y obtenemos su iteración gráficamente, figura 2.3, después de 23 iteraciones conseguimos que un valor perteneciente al intervalo I entre dentro del intervalo J . Después de unos pocos cientos de iteraciones conseguimos cubrir todo el intervalo $[-1,1]$ como aparece en la figura 2.4.

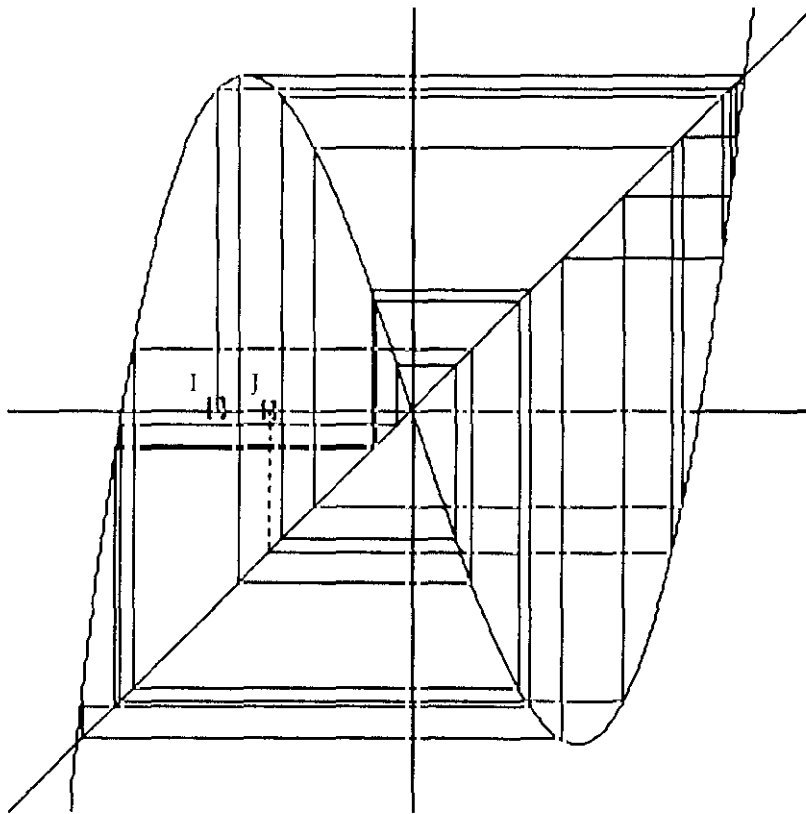


Figura 2.3: Iteración gráfica de $f(x) = 4x^3 - 3x$, si partimos del intervalo I después de 23 iteraciones llegamos al intervalo J .

La tercera condición enuncia que el sistema debe tener puntos periódicos densos en V . Es decir, que para cualquier condición inicial v_0 ,

existe siempre otra condición inicial z_0 que está a una distancia arbitrariamente cercana a v_0 y que además es periódica.

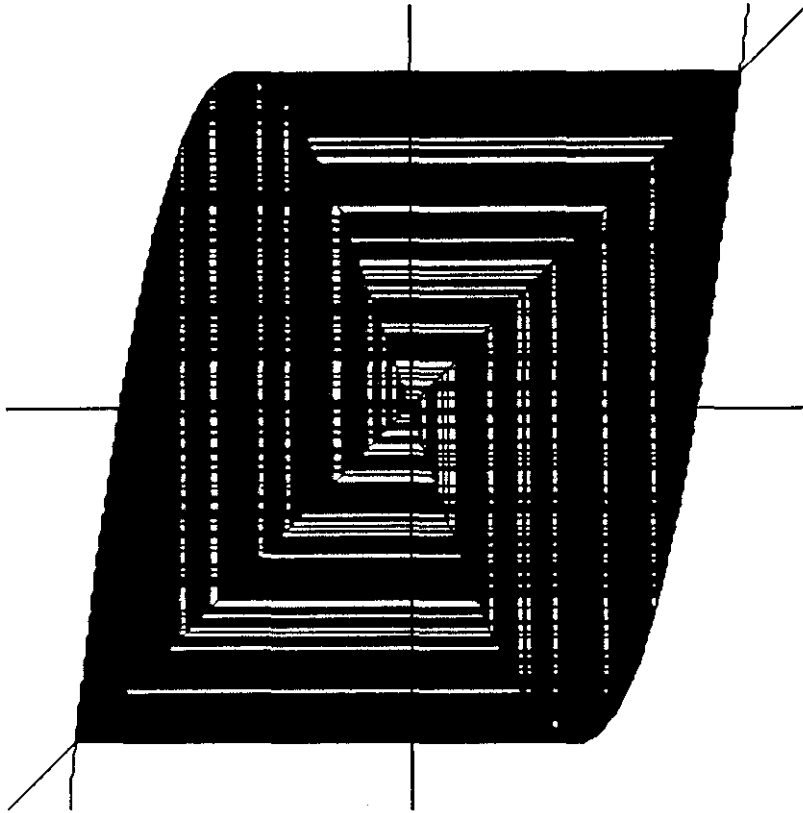


Figura 2.4: Iteración gráfica de $f(x)=4x^3-3x$, después de uno cientos de iteraciones casi se ha cubierto el intervalo $[-1,1]$.

Resumiendo las tres características podemos afirmar que para que un sistema sea caótico debe mostrar impredecibilidad, inseparabilidad y recurrencia.

La impredecibilidad proviene de la dependencia respecto a las condiciones iniciales, la inseparabilidad tiene su origen en la transitividad topológica: no podemos descomponer el sistema en dos subsistemas ya que cualquier órbita del sistema puede entrar en una región predeterminada del plano por pequeña que sea esta y, por último, la recurrencia aparece debido a los puntos periódicos: si empezamos las iteraciones en un punto periódico después de algunas iteraciones siempre volvemos a él.

De las tres propiedades expuestas anteriormente Branks et al. (1991)³ demuestran que el cumplimiento de (1) y (2) implica que se cumpla (3) pero el cumplimiento de (1) y (3) no implica que se cumpla (2) y el cumplimiento de (2) y (3) no implica que se cumpla (1).

2.2 EL CAMINO HACIA EL CAOS

Tradicionalmente caos y orden han sido considerados como conceptos antagónicos. Sin embargo, el caos no es más que una forma compleja de orden. Un sistema dinámico puede cambiar de un estado a otro, de forma que a los sucesivos cambios de estado en un sistema dinámico se les denomina camino o ruta hacia el caos. En este camino es posible encontrar cambios cualitativos del sistema que denominamos bifurcaciones y que marcarán la transición del orden al caos.

El primer paso de la ruta hacia el caos son los puntos fijos estables. Para ilustrar este concepto tomemos un sistema dinámico $f(x)=(1-\mu)x+\mu x^3$. Si el parámetro μ se sitúa en cualquier punto del intervalo $[1,2]$ el sistema muestra un comportamiento estable. En la figura 2.5 se puede observar el comportamiento del sistema cuando $\mu=1.5$.

Un punto fijo es aquel que para cualquier iteración cumple $x=f(x)$ por lo tanto si resolvemos:

$$x=(\mu-1)x+\mu x^3$$

obtenemos $x=0$, $x=\sqrt{\frac{2-\mu}{\mu}}$ y $x=-\sqrt{\frac{2-\mu}{\mu}}$ que son los puntos fijos del sistema.

³ Banks, J., Brooks, G., Davis, G. y Stacy, P. (1992) "On Devaney's Definition of Chaos". *American Mathematical Monthly*. 99. 332-334.

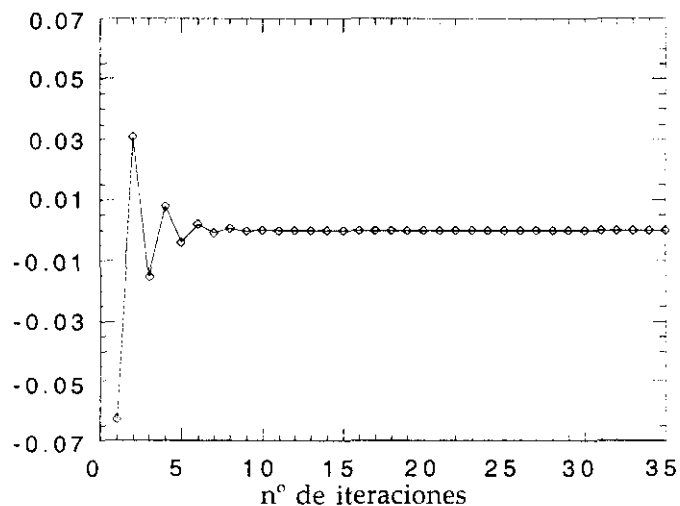


Figura 2.5: Comportamiento estable del sistema $f(x)=(1-\mu)x+\mu x^3$ cuando el parámetro μ toma el valor 1.5.

En las proximidades de un punto fijo es posible encontrar tres tipos de comportamiento dinámico. Un punto fijo puede ser: atractivo o estable si atrae por ambos lados, repulsivo o inestable si repele por ambos lados y superatractivo o superestable si atrae mucho por ambos lados. La estabilidad de un punto fijo está determinada por su multiplicador. El multiplicador de un punto fijo es el valor de la derivada de la función en ese punto fijo. Se define el multiplicador λ del punto fijo x_{pf} mediante la expresión:

$$\lambda = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_{pf}} \quad (2.1)$$

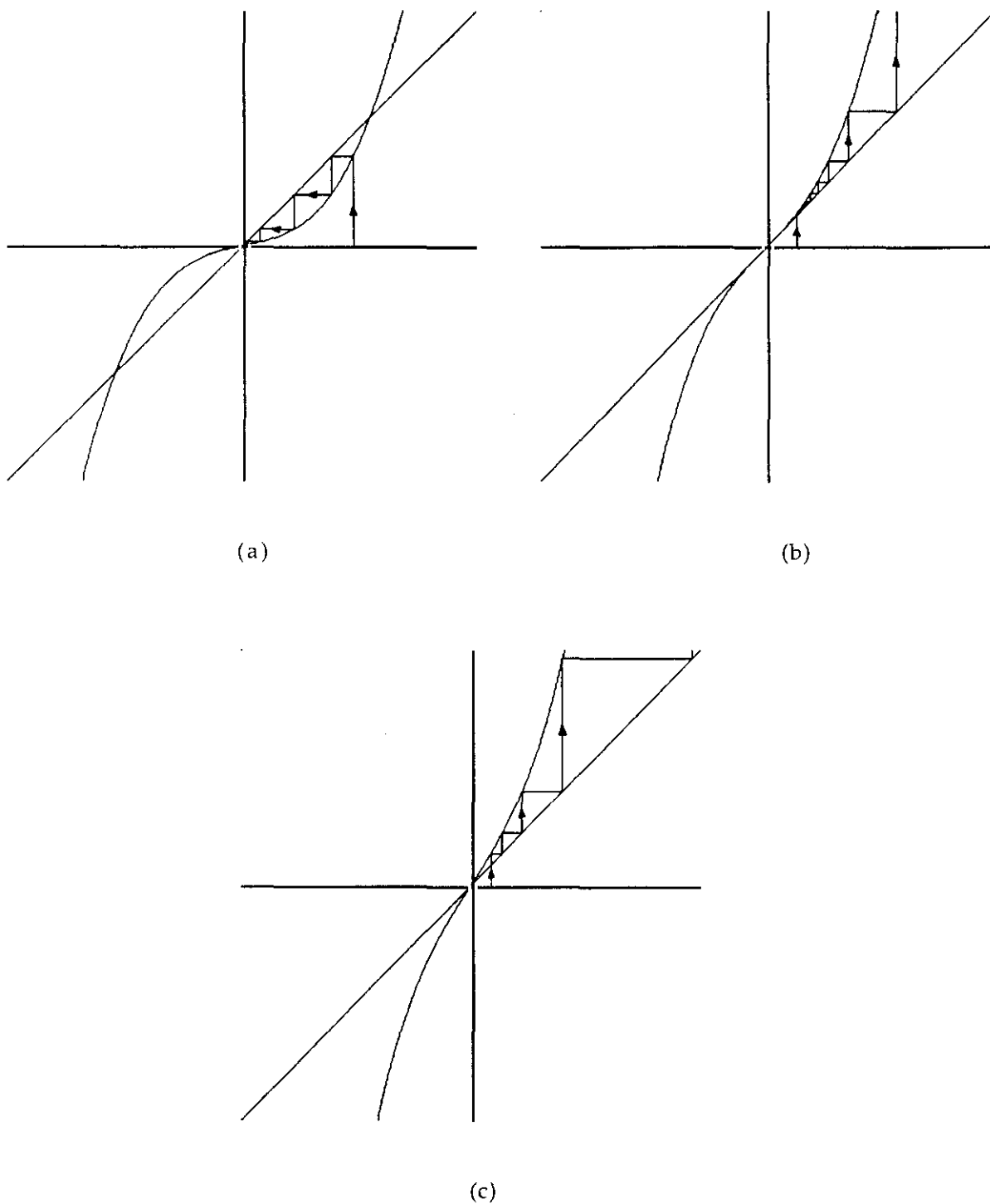


Figura 2.6: Estabilidad del punto fijo $x=0$ para el sistema $f(x)=(\mu-1)x+\mu x^3$ cuando $\mu < 2$, $\mu=2$, $\mu > 2$, el punto es estable en el gráfico (a), pasa a ser neutral ($\lambda=1$) en el gráfico (b), y se convierte en inestable en el gráfico (c).

Según su multiplicador, un punto fijo se clasifica:

$ \lambda < 1$	atractivo o estable
$ \lambda > 1$	repulsivo o inestable
$\lambda = 0$	superatractivo o superestable

En la figura 2.6 se muestra la evolución del punto fijo $x=0$ correspondiente al sistema $f(x)=(\mu-1)x+\mu x^3$ para distintos valores del parámetro μ ; si tomamos el parámetro $\mu < 2$ podemos comprobar que el sistema se comporta de forma estable, sin embargo si $\mu > 2$, el punto fijo $x=0$ se convierte en inestable.

El siguiente paso hacia el caos es el doblado de periodo. Si se incrementa el parámetro μ hasta 2.5, el punto fijo deja de ser estable, la serie ya no conduce hacia un único punto sino que oscila atrapada entre dos valores. Este tipo de comportamiento es el que aparece en la figura 2.7:

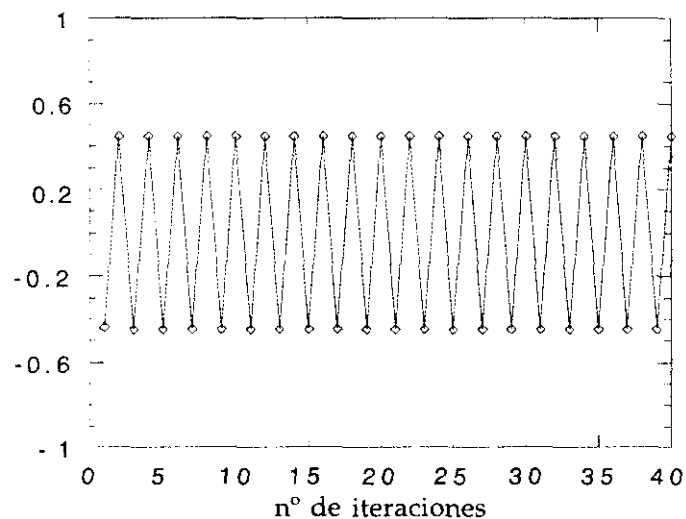


Figura 2.7: Comportamiento estable del sistema $f(x)=(1-\mu)x+\mu x^3$ cuando el parámetro μ toma el valor 1.2.

La serie oscila entre un valor inferior x_i y otro superior x_l , de forma que al par $\{x_i, x_l\}$ se le denomina ciclo 2 u órbita de periodo 2.

Según lo visto hasta ahora para $1 < \mu < 2$ la serie converge a un punto fijo x_{pf} atractivo o estable, cuando $\mu=2$ el punto fijo pierde su estabilidad y se convierte en repulsivo o inestable. El valor de μ para el cual el punto fijo cambia su estabilidad se denomina punto de bifurcación. Cuando el sistema llega a un punto de este tipo dobla su periodo.

Si se observa la gráfica de $f(f(x))$ de la figura 2.8 (a), para $\mu=2.5$ se puede ver que la segunda iteración de $f(x)$ tiene como puntos fijos $\{0, x_{pf}, x_i, x_l\}$, que son los puntos fijos estables $f(x)$ para $1 < \mu < 2$, más los dos nuevos puntos que conforman el ciclo 2.

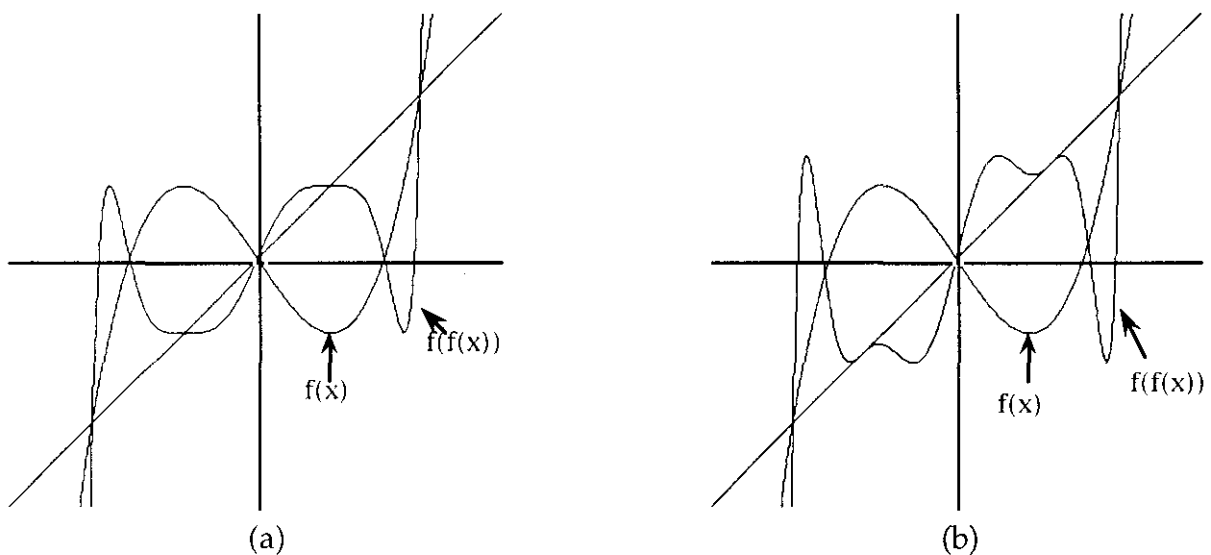


Figura 2.8: Comparación de los puntos fijos de $f(x)$ y de $f(f(x))$ cuando $\mu=2.5$ con dos puntos fijos estables, gráfico (a) y cuando $\mu=3$ donde los dos puntos fijos estables pierden su estabilidad, gráfico (b).

Si se aumenta el valor de μ , los puntos fijos x_i y x_l que eran estables pierden su estabilidad, según se muestra en la figura 2.8 (b), de modo que el sistema se halla ante un nuevo punto de bifurcación, entonces el ciclo se dobla, convirtiéndose en un ciclo cuatro. Al incrementar todavía más el

parámetro μ se vuelve a doblar el periodo llegando a un ciclo 8, después a uno 16 y así sucesivamente.

La distancia entre los puntos de bifurcación decrece rápidamente, de forma geométrica, de manera que se puede establecer la siguiente relación:

$$\frac{b_{k+1} - b_k}{b_{k+2} - b_{k+1}} = \delta = 4,669201\dots$$

en la que b_k es el punto de la bifurcación k-ésima.

Este valor de δ es la constante de Feigenbaum⁴ que es universal para todos los mapas unimodales, es decir, aquellos que sólo tienen un máximo y un mínimo.

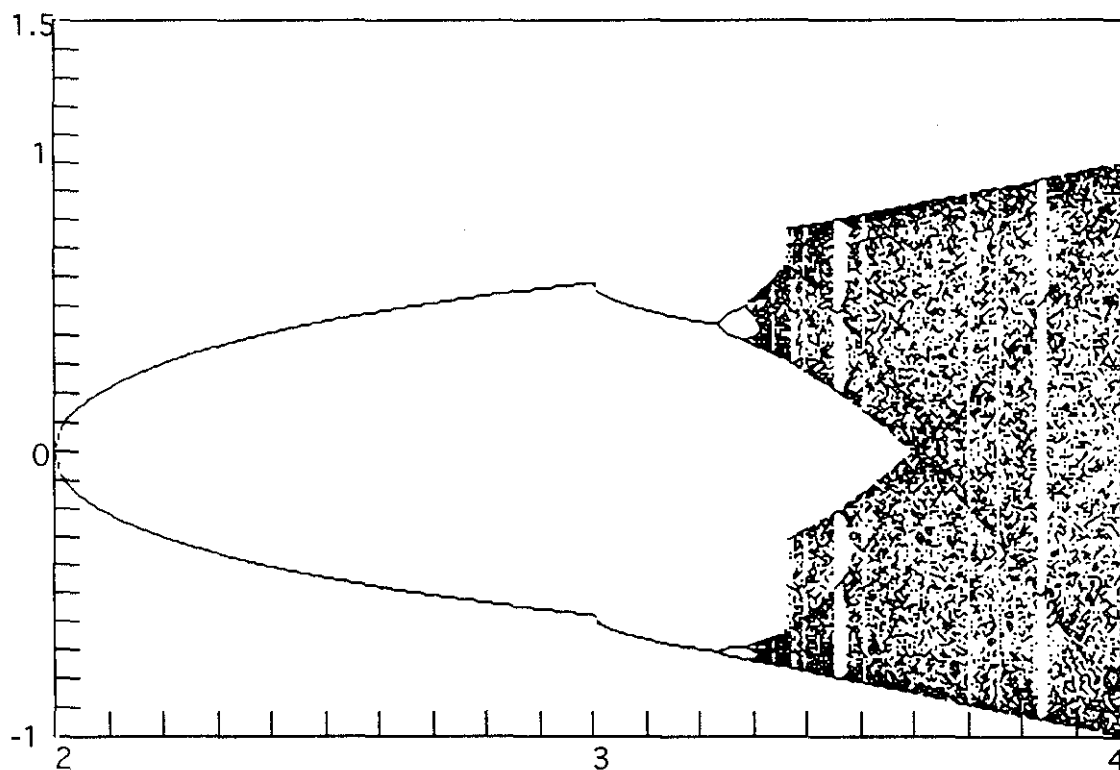


Figura 2.9: Diagrama de bifurcación del sistema dinámico $x_{n+1} = (1-\mu)x_n + \mu x_n^3$ para $2 < \mu < 4$

⁴ Feigenbaum, M. J. (1978) "Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations". *Journal of Statistical Physics* 19. 1. 25-52.

La figura 2.9⁵ muestra un diagrama de bifurcación para la función que sirve de ilustración de los distintos conceptos del caos. En el gráfico aparece la denominada cascada de bifurcaciones de doblado de periodo para los distintos valores de μ .

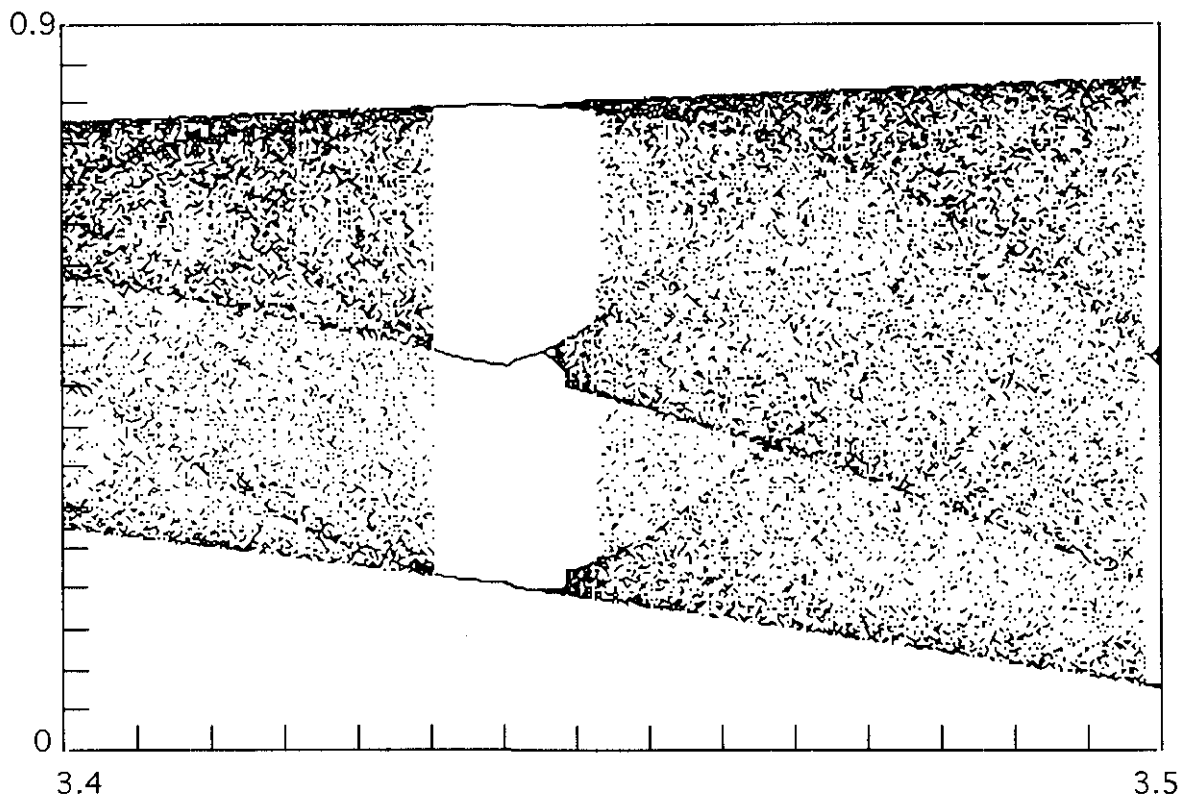


Figura 2.10: Diagrama de bifurcación del sistema dinámico $x_{n+1} = (1-\mu)x_n + \mu x_n^3$ para $3.4 < \mu < 3.5$ donde se puede observar la ventana con una órbita de periodo tres.

Otra de las características que puede observarse en la figura 2.9 es la existencia de ventanas⁶ donde desaparece el caos. La más ancha de estas ventanas corresponde a la órbita de periodo tres. La figura 2.10 muestra una ampliación de dicha ventana. Dentro de ésta pueden encontrarse tres

⁵ Este mapa de bifurcación se denomina mapa de bifurcación partida porque sólo aparece uno de sus brazos. Ambos existen pero sólo se puede ver uno de ellos dependiendo de la condición inicial.

⁶ Sobre el concepto de ventana puede consultarse: May, R. M. (1976) "Simple Mathematical Models with very Complicated Dynamics". *Nature* 261. 459-467.

cascadas de bifurcación total, presentando cada una de ellas su propia cascada de bifurcación y sus propias ventanas, es decir, vuelven a aparecer estructuras autosimilares.

2.3. GEOMETRÍA NO EUCLIDIANA Y FRACTALES

La noción de caos aparece muy frecuentemente ligada a la noción de fractal⁷. El término fractal se utiliza para denominar a aquellos objetos en los cuales las partes están ligadas con el todo. Es decir, el fractal sirve para denominar a las configuraciones auto-semejantes, que pueden ser irregulares o no. Los objetos fractales contienen estructuras que se incrustan unas dentro de otras, de forma que cada estructura más pequeña es una pequeña repetición no necesariamente idéntica de otra mayor. Los fractales deterministas son aquellos creados mediante iteración de figuras regulares, mientras que los fractales aleatorios siguen reglas de generación aleatorias.

La geometría euclidiana, que ha sido fuente de importantes aportaciones a la ciencia Matemática, no sirve, sin embargo, para explicar algunos de los aspectos de la realidad: la longitud del perímetro de una costa que es irregular, depende del tamaño de la regla que se utilice para medirla, cuanto más corta sea ésta, mayor será la medida obtenida⁸. Las formas geométricas clásicas, rectas, triángulos, esferas... tienen una dimensión expresada en números enteros. Sin embargo las figuras fractales tienen dimensiones no enteras. Una curva que sea suave tendrá una dimensión cercana a uno, mientras que una curva que se mueva en forma de zigzag de tal modo que casi llene el plano tendrá una dimensión cercana a dos.

⁷ B. B. Mandelbrot inventó la palabra fractal en 1975 en su obra *"Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension"* (Flammarion, Paris). Otra obra posterior donde desarrolla más ampliamente el concepto de fractal es *"The Fractal Geometry of Nature"*. W. H. Freeman and Co., New York, 1982.

⁸ Sobre este asunto puede consultarse: Feder, J. *Fractals* Plenum Press. 1988. Pag 6-9 .

La geometría fractal es una generalización de la geometría euclidiana; no intenta, por tanto, mostrar que esta última está equivocada sino que intenta subsanar las limitaciones de la geometría tradicional. Una dimensión fractal nunca será mayor que la dimensión euclidiana donde está encajada.

Pero cabe preguntarse ¿por qué los fractales, que son objetos estáticos son importantes en el estudio de los sistemas dinámicos? Cuando se observa un fractal, éste es una figura completa en la cual carece de importancia el orden en el que aparecen los puntos que forman la figura. Sin embargo, un sistema dinámico posee un cierto grado de regularidad, en el sentido de que el comportamiento del sistema en el periodo siguiente depende de forma preestablecida del estado en el que se encuentra el sistema en la actualidad. Si además el sistema dinámico es no lineal, su imagen se dobla en el espacio de fase, y debido a la regularidad del sistema, aquello que se dobla dará lugar a un doblez de un doblez. De este modo, la dinámica del espacio de fases generará un fractal y su estructura auto-similar.

CAPÍTULO 3

CÓMO DETECTAR EL CAOS I

3.1. LA RECONSTRUCCIÓN DE UN ATRACTOR

Cuando se trata de investigar la evolución en el tiempo de un sistema dinámico, o en el caso que nos ocupa de una economía, nos encontramos ante una serie de datos en distintos momentos del tiempo. Estos datos pueden parecer aleatorios, sin embargo, esa apariencia de aleatoriedad puede ser el resultado la evolución de un sistema dinámico con un cierto número de variables y que responde a unas leyes determinadas.

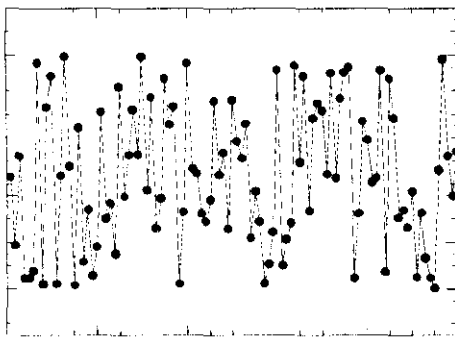
Si la serie temporal es caótica tiene una trayectoria en el espacio de fases que está atrapada en un atractor extraño. Esto significa que este atractor extraño sólo ocupará una pequeña fracción del espacio de fase disponible. Un modo de determinar la complejidad del sistema es el cálculo de la dimensión del atractor, de forma que, cuanto mayor sea la

dimensión, mayor complejidad tendrá el proceso que ha generado la serie temporal.

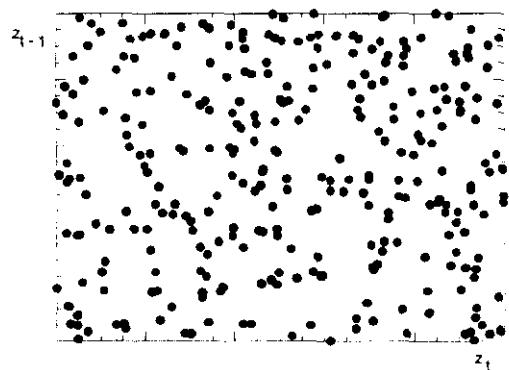
Dada una serie temporal $z(t)$, si los datos de esta serie temporal siguen una regla, entonces ésta deberá estar determinada por su pasado de forma que:

$$z(t)=\Psi[z(t-1), z(t-2), z(t-3)\dots]$$

En las figuras 3.1 (a) y 3.2 (a) se muestran dos series aparentemente aleatorias. Si se supone que $z(k)$ depende mucho de su predecesor inmediato $z(k-1)$ y menos de sus predecesores más antiguos y se dibuja el espacio de fase $z(k)$ versus $z(k-1)$, se puede observar que la distribución de los puntos de la figura 3.1 (b) continua siendo aparentemente aleatoria, mientras que la de la 3.2 (b) parece que corresponde a un atractor extraño.



(a)



(b)

Figura 3.1: (a) Serie temporal de apariencia aleatoria y (b) espacio de fase $z(t)$ versus $z(t-1)$ en el que parece que no hay ninguna estructura determinada, la serie continúa teniendo una apariencia aleatoria.

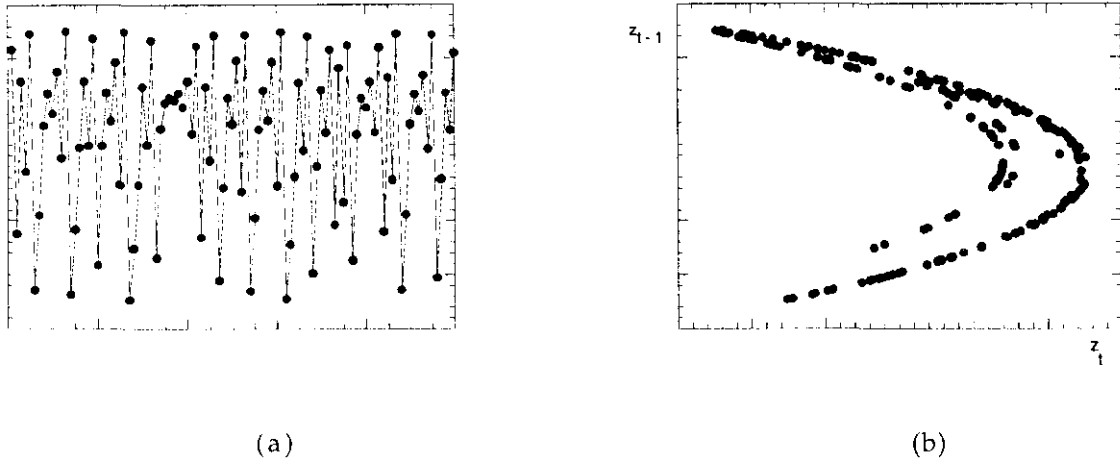


Figura 3.2: (a) Serie temporal de apariencia aleatoria y (b) espacio de fase $z(t)$ versus $z(t-1)$ en el que se puede distinguir la estructura de un atractor extraño.

Pero la dependencia del pasado no siempre es tan sencilla. Existe un método¹ para reconstruir el espacio de fase de una serie temporal. El atractor que se genera mediante este método es topológicamente equivalente al original, aunque en algunas direcciones puede aplastarse o deformarse. El método consiste en elegir un retardo en el tiempo y construir una serie de vectores n -dimensionales de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= \{x_1, x_{1+\tau}, x_{1+2\tau}, \dots, x_{1+(n-1)\tau}\} \\ \vec{x}_2 &= \{x_2, x_{2+\tau}, x_{2+2\tau}, \dots, x_{2+(n-1)\tau}\} \\ &\vdots \\ \vec{x}_M &= \{x_M, x_{M+\tau}, x_{M+2\tau}, \dots, x_{M+(n-1)\tau}\}\end{aligned}$$

donde n es la dimensión máxima del espacio considerado y τ es el retardo temporal. En la figura 3.3 se puede observar la proyección del atractor de

¹ Este método fue propuesto por Packard, N. H., Crutchfield, J. P., Farmer, J. D. y Shaw, R. S. (1980) "Geometry of Time Series". *Physical Review Letters*. 45. 9. 712-716.

Rössler² en el espacio x - y , la figura 3.4 corresponde a la reconstrucción del mismo atractor con la serie temporal de la variable x .

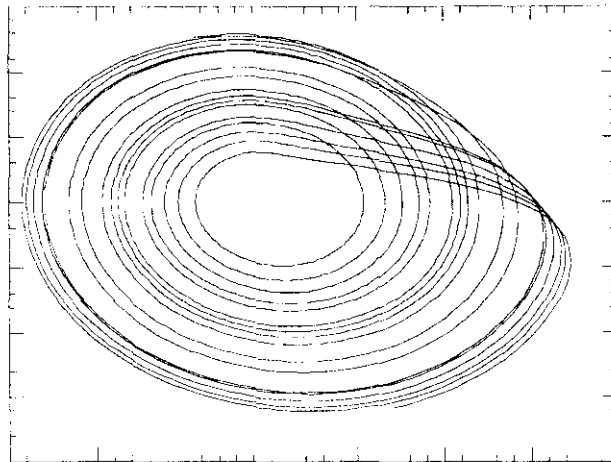


Figura 3.3: Proyección del atractor de Rössler en el espacio x - y .

La reconstrucción de un atractor extraño puede interpretarse como un cambio de coordenadas, de tal forma que el atractor reconstruido es una proyección del original en una dimensión euclidiana. Si se elige una dimensión $n \geq 2m + 1$, siendo m la dimensión del atractor original, es posible reconstruir el atractor de tal forma que la proyección sea inyectiva³, lo que significa que cada punto que aparece en la reconstrucción del atractor corresponde a un único punto del atractor original. Aunque el

² El atractor de Rössler es un ejemplo de caos en un sistema continuo definido por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$x' = -(x+z)$$

$$y' = x+ay$$

$$z' = b+xz-cz$$

para el ejemplo se han considerado los siguientes valores de los coeficientes: $a=0.15$, $b=0.20$, $c=10$.

³ El teorema que demuestra esta propiedad puede consultarse en Medio, A. *Chaotic Dynamics. Theory and Applications to Economics*. Cambridge University Press. 1992. Pag 180.

atractor reconstruido no sea idéntico al original, conserva las mismas propiedades topológicas.

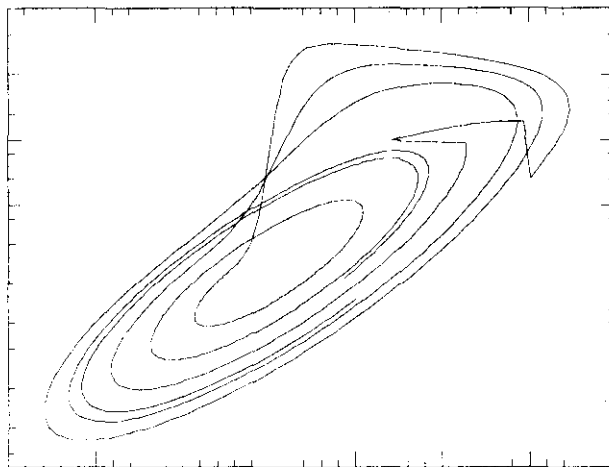


Figura 3.4: Reconstrucción del atractor de Rössler con la serie temporal de x .

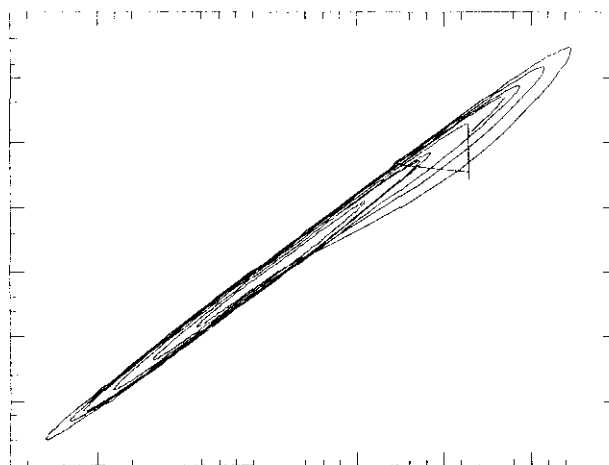


Figura 3.5: Reconstrucción del atractor de Rössler con la serie temporal de x . Como puede observarse la elección del retardo ha sido muy pequeña y el atractor reconstruido está muy cercano a la diagonal del espacio.

La elección del valor del retardo es prácticamente arbitraria, aunque si se elige muy pequeño, los puntos del atractor reconstruido serán prácticamente idénticos y la proyección del atractor se situará en la diagonal del espacio. Si, por el contrario, el retardo es muy grande, la correlación entre los componentes del vector será pequeña y será difícil detectar la estructura del atractor. Las figuras 3.5 y 3.6 muestran ambos casos.

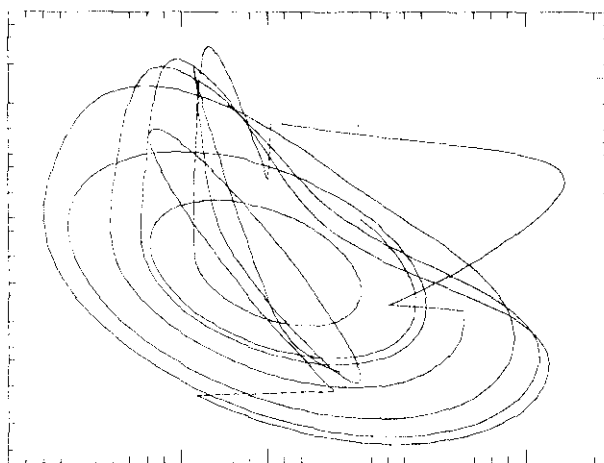


Figura 3.6: Reconstrucción del atractor de Rössler con la serie temporal de x . En este caso la elección del retardo ha sido demasiado grande de forma que la estructura del atractor original es difícil de detectar.

3.2 LA DIMENSIÓN FRACTAL

Una manera de caracterizar un atractor caótico extraño es mediante su dimensión. Existen distintas medidas de la dimensión, algunas sólo intentan estudiar la geometría del objeto, mientras que otras observan la dinámica que tiene lugar en él. Se estudiarán aquí tres medidas de la dimensión fractal: la dimensión de contado de cajas, la dimensión de información y la dimensión de correlación .

a) Dimensión de contado de cajas:

El método para calcular la dimensión por contado de cajas consiste en buscar una región que contenga todo el atractor y dividirla en cuadrados de lado s (otros autores proponen la división en círculos de radio s) y contar el número de cuadrados que contienen una parte del atractor⁴. Se llama N a dicho número. Se repite el procedimiento utilizando cuadrados de lado s más pequeño. Como es lógico el número de cuadrados será función del valor s . La pendiente del gráfico de $\log(N(s))$ versus $\log(1/s)$ será la dimensión de contado de cajas D_f . Este método, que parece muy simple, plantea un problema importante: es necesario adaptar el número de iteraciones al tamaño s . Cuanto más pequeño sea s , más iteraciones se deben realizar para obtener el verdadero $N(s)$, pero no es posible saber con exactitud cual es el mínimo número de iteraciones necesario. Este problema se agrava en el caso de atractores multidimensionales, en los que el tiempo computacional se hace mucho mayor.

b) Dimensión de información:

La dimensión de información es una alternativa a la dimensión por contado de cajas. Consideremos un subconjunto abierto B del espacio X en el que se encuentra el atractor. Como se explicó en el capítulo 2, las órbitas llenan el atractor de forma densa. Por esta razón es posible contar el número de veces que una órbita $x_0, x_1, x_2, \dots \in X$ entra en el subconjunto B . Además a medida que se realicen más iteraciones, el número de puntos dentro de B se estabilizará. Así pues, podemos definir una función:

⁴ En el caso de un espacio euclidiano de dimensión p se contarán el número de hipercubos de arista s (o de hiperesferas de radio s) que contienen algún punto del atractor.

$$\mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n 1_B(x_k) \quad (3.1)$$

en la que $1_B(x_k)$ es una función que se define del siguiente modo:

$$\begin{aligned} 1_B(x_k) &= 1 \quad \text{si } x \in B \\ 1_B(x_k) &= 0 \quad \text{si } x \notin B \end{aligned}$$

y $\sum_{k=0}^n 1_B(x_k)$ es el número de puntos de una órbita que entran dentro de B .

En lugar de utilizar $N(s)$ de la dimensión de contado de cajas se utiliza la siguiente función⁵:

$$I(s) = \sum_{k=1}^{N(s)} \mu(B_k) \log_2 \frac{1}{\mu(B_k)} \quad (3.2)$$

en la que $I(s)$ indica la cantidad de información necesaria para especificar un punto del atractor con una precisión de s .

En realidad, lo que se ha hecho es reemplazar el contado de cajas por otro procedimiento de contado definido por la función $\mu(B)$. Se observa claramente que cuando s se hace menor, la información $I(s)$ debe crecer, es decir, $I(s)$ aumenta de forma logarítmica con $1/s$ cuando $s \rightarrow 0$, por lo tanto:

$$I(s) \approx I_0 + D_I \log_2(1/s) \quad (3.3)$$

en la que I_0 es una constante y D_I es la pendiente de la línea del gráfico de $I(s)$ versus $\log_2(1/s)$. D_I es la medida que caracteriza a la dimensión de información.

⁵ Se toma el logaritmo en base dos para que $I(s)$ esté dado en bits de información.

La dimensión de información D_I es una cota inferior de la dimensión por contado de cajas, por lo tanto:

$$D_I \leq D_f$$

c) Dimensión de correlación:

Grassberger y Procaccia (1983)⁶ proponen el calculo de la dimensión de correlación mediante la integral de correlación $C_m(r)$. La integral de correlación es la probabilidad de que un par de puntos de un atractor se encuentren a una distancia r uno del otro de forma que:

$$C_m(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N Z(r - |\tilde{x}_i - \tilde{x}_j|) \quad (3.4)$$

en la que $Z(x)$ es la función de Heaviside, es decir:

$$\begin{aligned} Z(x) &= 1 \text{ si } r - |\tilde{x}_i - \tilde{x}_j| > 0 \\ Z(x) &= 0 \text{ si } r - |\tilde{x}_i - \tilde{x}_j| \leq 0 \end{aligned}$$

N es el número de observaciones, r es la distancia y C_m es la integral de correlación para una dimensión de inserción m .

Si se aumenta el valor de r , C_m también aumentará, es decir:

$$C_m = C_1 r^{D_c} \quad (3.5)$$

⁶ Grassberger, P. y Procaccia, I. (1983) "Characterization of Strange Attractors". *Physical Review Letters*. 50. 5. 346-349.

Para una dimensión de inserción m podemos calcular la dimensión fractal calculando la pendiente de $\log(C_m)$ versus $\log(r)$. Vamos a aplicar esto al atractor de Rössler.

La figura 3.7 muestra como la pendiente de la integral de correlación tiende a estabilizarse a medida que se aumenta la dimensión de inserción.

En la figura 3.8 se representa la pendiente instantánea del logaritmo de la integral de correlación versus el logaritmo de r , las curvas coinciden para $1 < r < 10$, a la vista del gráfico se puede concluir que la dimensión será cercana a 2.

La figura 3.9 proporciona la estimación mínimo cuadrática de la pendiente de las curvas del gráfico 3.7, pudiéndose observar que la dimensión está cercana a 2, -el valor teórico de la dimensión del atractor de Rössler es 2.01-.

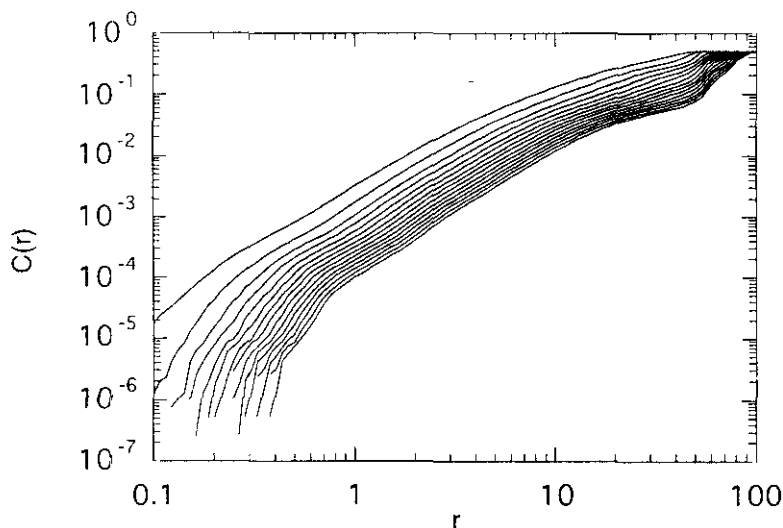


Figura 3.7: Integral de correlación del atractor de Rössler para las dimensiones de inserción de 2 a 16. La curva superior representa $m=2$ y la inferior $m=16$.

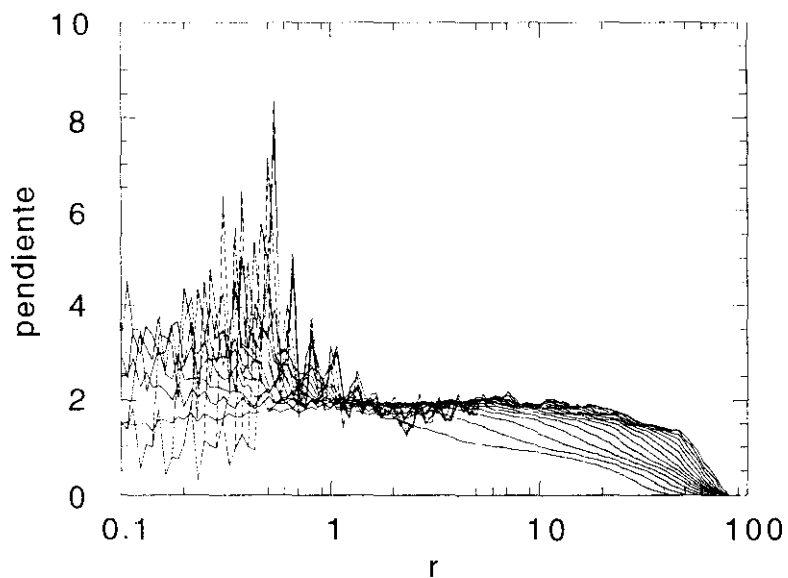


Figura 3.8: Pendiente instantánea de $\log C(r)$ versus $\log r$ del atractor de Rössler para las dimensiones de inserción de 2 a 16.

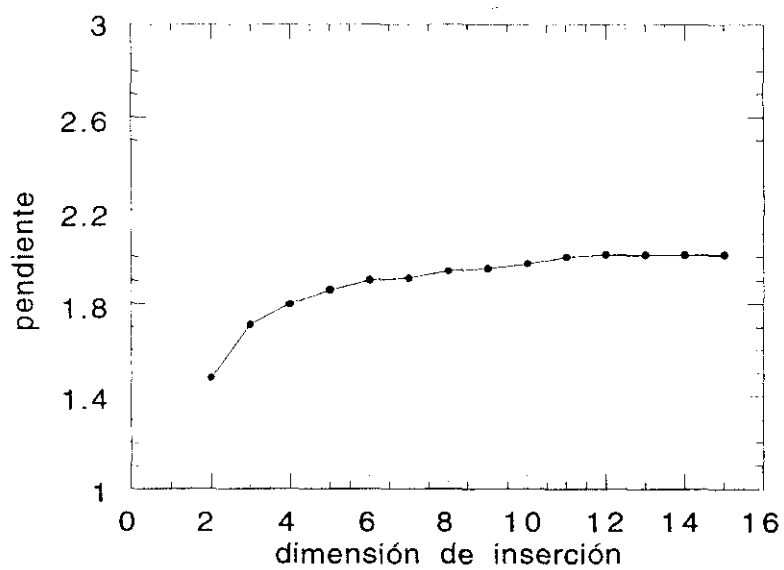


Figura 3.9: Dimensión del atractor de Rössler como pendiente de la región lineal de la figura 3.7.

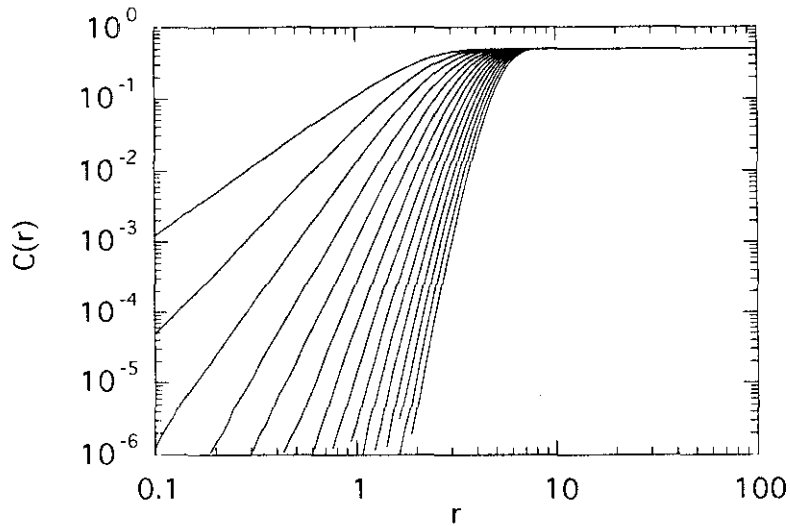


Figura 3.10: Integral de correlación para una serie de ruido blanco, las dimensiones de inserción van 2 a 16, de forma que la curva superior representa $m=2$ y la inferior $m=16$.

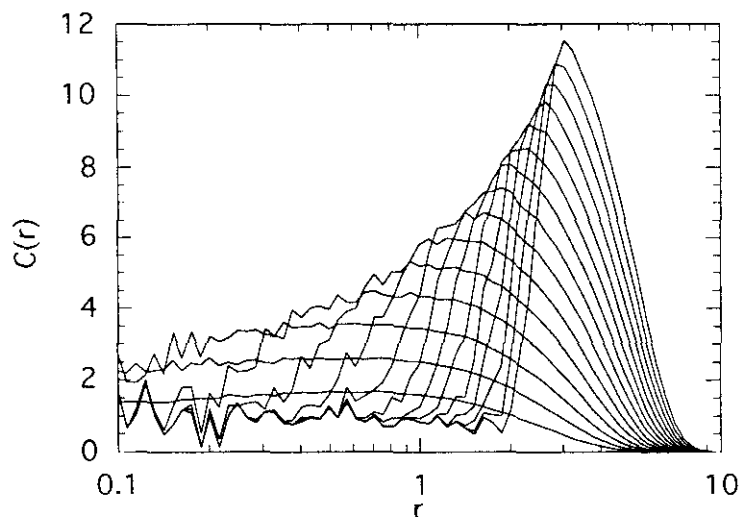


Figura 3.11: Pendiente instantánea de $\log C(r)$ versus $\log r$ del de una serie de ruido blanco para las dimensiones de inserción de 2 a 16.

La figura 3.10 muestra el cálculo de la dimensión de correlación para una serie de ruido blanco. En dicha figura es posible comprobar que la pendiente no se estabiliza cuando aumenta la dimensión de inserción. En la figura 3.11 se ha dibujado la evolución de la pendiente instantánea a medida que aumenta la dimensión de inserción.

Se ha demostrado que la dimensión de correlación D_c es, en general, inferior a la dimensión de información D_I , por lo tanto se tiene:

$$D_c \leq D_I \leq D_f$$

3.3. EXPONENTES DE LIAPUNOV

Como se estableció en Capítulo 2, una de las principales características de un sistema caótico es la dependencia de las condiciones iniciales. Una medida de dicha dependencia es el exponente de Liapunov $\lambda(x_0)$ que cuantifica el crecimiento medio de errores infinitesimales en el valor inicial x_0 .

Si se toma un error inicial ξ_0 , después de n iteraciones dicho error se convertirá en ξ_n y el error de amplificación total será:

$$\left| \frac{\xi_n}{\xi_0} \right| = \left| \frac{\xi_n}{\xi_{n-1}} \right| \left| \frac{\xi_{n-1}}{\xi_{n-2}} \right| \cdots \left| \frac{\xi_1}{\xi_0} \right| \quad (3.6)$$

Si se toman logaritmos y se calcula el crecimiento medio del error se tiene:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left| \frac{\xi_k}{\xi_{k-1}} \right| \quad (3.7)$$

Cuando se hace tender a infinito el número de iteraciones $n \rightarrow \infty$ y el error inicial ξ_0 es infinitamente pequeño se obtiene el verdadero exponente de Liapunov:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\xi_0 \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left| \frac{\xi_k}{\xi_{k-1}} \right| \quad (3.8)$$

Por lo tanto el exponente de Liapunov mide el crecimiento medio de un error en cada iteración. El error inicial debe tender a 0. En la práctica cuando se calcula el exponente, se renormaliza en cada iteración el tamaño del error a un número ε .

Un pequeño error inicial se multiplicará, en media, por e^λ en cada iteración. Esto quiere decir, que un exponente positivo implica que órbitas cercanas en el espacio de fases se alejan, mientras que un exponente negativo implica que órbitas cercanas se aproximan. Por lo tanto, cualquier sistema que contenga al menos un exponente de Liapunov positivo se define como caótico.

Si se quiere calcular el exponente de Liapunov de un sistema unidimensional de la forma $x_{n+1}=f(x_n)$ se tiene que por la definición de error:

$$\frac{\xi_k}{\xi_{k-1}} = \frac{f(x_{k-1} + \xi_{k-1}) - f(x_{k-1})}{\xi_{k-1}} \quad (3.9)$$

Además,

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow 0} \frac{\xi_k}{\xi_{k-1}} = f'(x_{k-1}) \quad (3.10)$$

por lo tanto

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left| \frac{\xi_k}{\xi_{k-1}} \right| = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |f'(x_{k-1})| \quad (3.11)$$

y si se hace tender el numero de iteraciones a infinito se obtiene el exponente de Liapunov:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |f'(x_{k-1})| \quad (3.12)$$

Para sistemas dinámicos no unidimensionales, cuyas ecuaciones son conocidas, es posible la aplicación de algoritmos que permiten calcular los exponentes de Liapunov. En general, se toma una trayectoria del atractor, se provoca una perturbación en la condición inicial y se observa como la trayectoria diverge de la trayectoria de referencia. Después de un intervalo t se mide la diferencia, se procede a renormalizar el error y se continúa del mismo modo un número n de veces. El exponente de Liapunov será la media de dichas divergencias.

Un resumen del algoritmo para la obtención del exponente de Liapunov de un sistema cuyas ecuaciones son conocidas puede ser el siguiente:

1. Se toma una condición inicial $P(0)$ y se itera un número determinado de veces hasta obtener la situación en el atractor $P(t)$.
2. Se perturba la condición inicial en ϵ y se evalúa la trayectoria después del mismo número de iteraciones $P'(t)$.
3. Se calcula la distancia d entre los dos puntos $P(t)$ y $P'(t)$.
4. El error ha aumentado o disminuido en d/ϵ . Se acumula el logaritmo de este factor.
5. Se renormaliza el error de forma que la distancia entre ambos puntos sea de nuevo igual a ϵ .
6. Se vuelve a 3 hasta realizar n iteraciones.
7. El exponente es la media de los logaritmos acumulados.

Este algoritmo queda ilustrado en la figura 3.12.

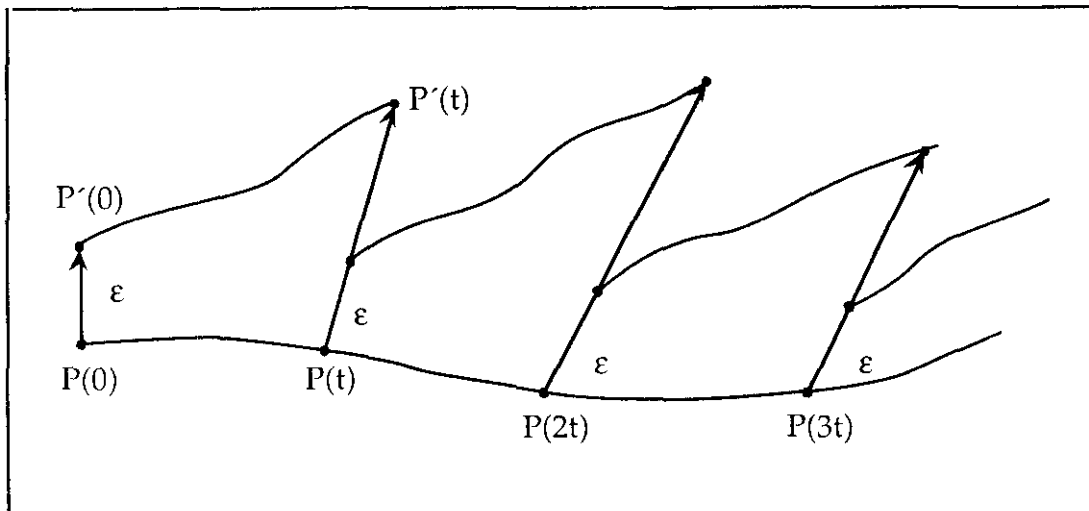


Figura 3.12: Renormalización de errores para obtener el exponente de Liapunov.

Este algoritmo permite obtener el primer exponente de Liapunov λ_1 que es el exponente de mayor valor.

El segundo exponente de Liapunov mide la velocidad con la que los puntos son atraídos dentro del atractor. Si se considera un atractor bidimensional, se supone una circunferencia de diámetro d centrada en un punto del atractor y se observa la imagen de dicha circunferencia después de una iteración, es posible constatar que esta circunferencia se ha convertido en una elipse. El diámetro de la circunferencia que se hallaba situado en la dirección en la que el error de amplificación es mayor, se ha convertido en el eje mayor de la elipse, mientras que el eje menor mide como se atraen puntos cercanos después de una iteración.

El segundo exponente de Liapunov λ_2 con $\lambda_2 \leq \lambda_1$ permite saber el factor al que se contrae el eje menor. Como el área de una elipse está definida por los dos ejes principales, $e^{\lambda_1 + \lambda_2}$ es el factor que permite determinar la variación del área en cada iteración.

Un sistema bidimensional está determinado por dos exponentes de Liapunov, si el sistema es tridimensional entonces está caracterizado por tres exponentes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; y e^{λ_1} es el factor medio por el cual se amplifica

un error inicial, $e^{\lambda_1+\lambda_2}$ es el factor medio por el cual se producen variaciones en el área y es $e^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$ el factor medio por el cual se producen variaciones en el volumen, siempre con $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$.

Se demuestra que cualquier sistema dinámico, que no tenga un punto fijo, tiene al menos un exponente de Liapunov igual a 0.

Como se ha dicho anteriormente, los ejes que se expanden corresponden a un exponente de Liapunov positivo, mientras que los que se contraen corresponden a uno negativo. En principio, parece que un exponente de Liapunov positivo es incompatible con el concepto de atractor, donde los puntos permanecen juntos en el espacio de fase. Esto es posible ya que ocurre un proceso de pliegue o doblez que unifica las trayectorias que están muy separadas. El exponente positivo refleja una dirección en la que el sistema experimenta un proceso de alargamiento y doblado propio de todo sistema caótico, que además, no permite que exista correlación entre puntos cercanos del atractor. Esta es la razón por la que no es posible predecir el comportamiento a largo plazo de cualquier condición inicial que esté especificada con alguna incertidumbre.

El signo de los exponentes de Liapunov de un sistema proporciona una información cualitativa sobre la dinámica del mismo. Así, un sistema unidimensional estará caracterizado por un único exponente de Liapunov, que será positivo si el sistema es caótico y negativo para cualquier órbita periódica. Un sistema tridimensional está caracterizado por tres exponentes de Liapunov. Estos son $(+,0,-)$ para un atractor extraño, $(0,0,-)$ para un toro, $(0,-,-)$ para un ciclo límite y $(-,-,-)$ para un punto fijo. En general, para un sistema n dimensional se tiene:

- $(-, -, \dots, -)$ para un punto fijo,
- $(0, -, \dots, -)$ para un ciclo límite,
- $(0, \dots, 0, -, \dots, -)$ para un toro T^n .
- $(+, \dots, +, 0, -, \dots, -)$ para un atractor caótico.

Parece que los exponentes de Liapunov están relacionados con la dimensión del atractor: basándose en experimentos numéricos Kaplan y Yorke (1978)⁷ llegaron a la conclusión de que es posible predecir la

⁷ Kaplan, J. L. y Yorke, J. A. (1979) "Chaotic Behavior of Multidimensional Difference Equations" en Peitgen, H.-O. y Walther, H. O. (eds.) *Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points*. Springer-Verlag, Heidelberg.

dimensión de un atractor extraño si se conocen los exponentes de Liapunov. La conjetura de Kaplan y Yorke considera una dinámica:

$$x_{k+1}=f(x_k)$$

donde la función f es una transformación en un espacio euclideo n -dimensional. Supongamos que f tiene n exponentes de Liapunov:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \dots \geq \lambda_n$$

Si se define ahora una función de forma que:

$$\gamma(k)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\dots+\lambda_n \quad \text{para } k=1,\dots,n \quad (3.13)$$

y hacemos $\gamma(0)=0$, extendiendo la función a todos los números reales de forma que $0 \leq d \leq n$, podemos concluir que por el orden de los exponentes de la gráfica, $\gamma(d)$ es cóncava y hay algún punto $d^* > 0$ para el cual $\gamma(d^*)=0$ ⁸. El valor de ese d^* es lo que se llama dimensión de Liapunov:

$$D_L = \max\{d > 0 / \gamma(d) \geq 0\} \quad (3.14)$$

o

$$D_L = m + \frac{1}{|\lambda_{m+1}|} \sum_{k=1}^m \lambda_k \quad (3.15)$$

⁸ Ya hemos dicho que el valor de la suma de los exponentes de Liapunov es negativo por lo tanto siempre habrá un valor para el cual la función $\gamma(k)$ tome el valor 0 si k es un número real.

en la que m es el entero máximo que cumple $\gamma(m) = \lambda_1 + \dots + \lambda_m \geq 0$.

Según Kaplan y Yorke la dimensión de Liapunov es igual a la dimensión de información el decir:

$$D_L = D_I$$

Todavía no se ha podido probar la conjetura de Kaplan y Yorke, aunque en la mayoría de los casos la dimensión de Liapunov es una muy buena aproximación a la dimensión fractal. Si se conocen las ecuaciones que generan el sistema dinámico es fácil obtener la dimensión de Liapunov, sin embargo, para una serie temporal, como veremos más adelante, es difícil la obtención de λ_{m+1} por lo que el cálculo de la dimensión fractal según este método no es tan directo.

LOS EXPONENTES DE LIAPUNOV DE UNA SERIE TEMPORAL

Según lo expuesto en el apartado 3.3 es posible reconstruir un atractor a partir de una serie temporal de una única variable. Basándose en esta reconstrucción será posible determinar los exponentes de Liapunov. Wolf et al. (1985)⁹ proponen un algoritmo que es una generalización del método seguido para sistemas dinámicos explícitos. Dada una serie temporal, si se reconstruye el atractor según el método explicado anteriormente, se obtiene un conjunto de vectores:

$$x(0), x(t), x(2t) \dots x((n-1)t)$$

Se procederá a elegir un punto $x(k_0t)$ a una distancia arbitrariamente pequeña de punto inicial $x(0)$ de forma que:

⁹ Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L y Vastano, J. A. (1985) "Determining Lyapunov Exponents from a time series". *Physica* 16D. 285-317.

$$|x(k_0 t) - x(0)| < \delta \quad \text{con } \delta > 0 \quad (3.16)$$

se llama a este punto $y_0(0) = x(k_0 t)$, los siguientes componentes de la serie para este punto son:

$$y_0(jt) = x((k_0 + j)t) \quad \text{con } j = 1, 2, 3, \dots \quad (3.17)$$

si se calcula el logaritmo de amplificación del error para un intervalo se tiene:

$$L_0 = \frac{1}{t} \log \frac{|y_0(t) - y_0(0)|}{|x(t) - x(0)|} \quad (3.18)$$

donde $|\cdot|$ es la norma euclidiana. Se repite el procedimiento para el siguiente punto de la órbita de referencia, siendo necesario para este punto encontrar otro punto $y_1(t)$ que represente un error en una dirección cercana a la utilizada para $y_0(t)$. En el caso de que la órbita anterior se encontrara todavía cercana a la órbita de referencia, entonces podríamos continuar con ella estableciendo $y_1(t) = y_0(t)$ y obteniendo un nuevo error de amplificación L_1 . Si se continúa de este modo se tiene $L_2, L_3, L_4 \dots L_{m-1}$.

La media del logaritmo el factor de amplificación del error será:

$$\lambda = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m-1} L_i \quad (3.19)$$

este valor de λ será una aproximación del mayor exponente de Liapunov.

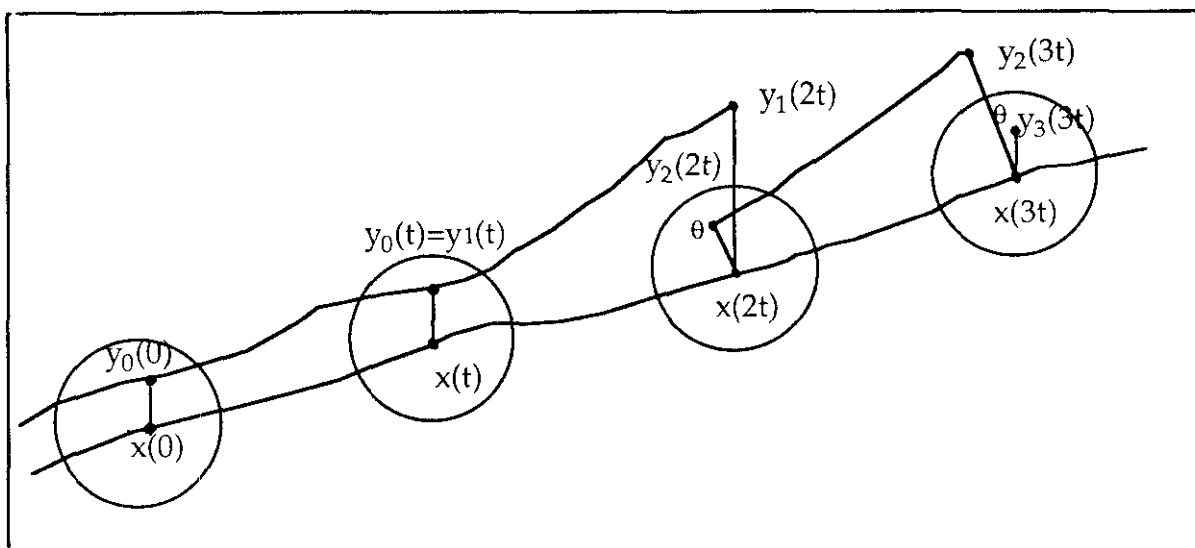


Figura 3.13: Ilustración de la metodología del algoritmo de Wolf para el cálculo del mayor exponente de Liapunov de una serie temporal.

Para la implementación de este algoritmo es importante tener en cuenta varios factores: por un lado, no hay que elegir los puntos perturbados muy cerca de los puntos de referencia $x(kt)$, porque la existencia de ruido en los datos podría dominar sobre el efecto de alargamiento del atractor caótico y, por otro, lado tampoco se debe dejar que sea demasiado grande, para evitar los efectos no lineales; en la práctica los elegiremos de forma que:

$$\varepsilon < |x(kt) - y_k(kt)| < \delta \quad (3.20)$$

siendo ε el error mínimo y δ el error máximo permitido.

Además, $y_k(kt)$ debe estar en la misma dirección que $y_{k-1}(kt)$ lo que se consigue minimizando el ángulo θ que existe entre ambos, cuando no es posible encontrar ningún punto de la órbita que se encuentre dentro de este ángulo, se mantiene el punto que se estaba utilizando.

Uno de los mayores problemas que presenta este algoritmo es el número de parámetros iniciales que se deben fijar y que pueden influir en el resultado.

En la figura 3.14 se muestra el resultado del algoritmo de Wolf para el atractor de Rössler. Como puede observarse el valor de λ converge a 0.13 que es el verdadero valor del exponente de Liapunov positivo.

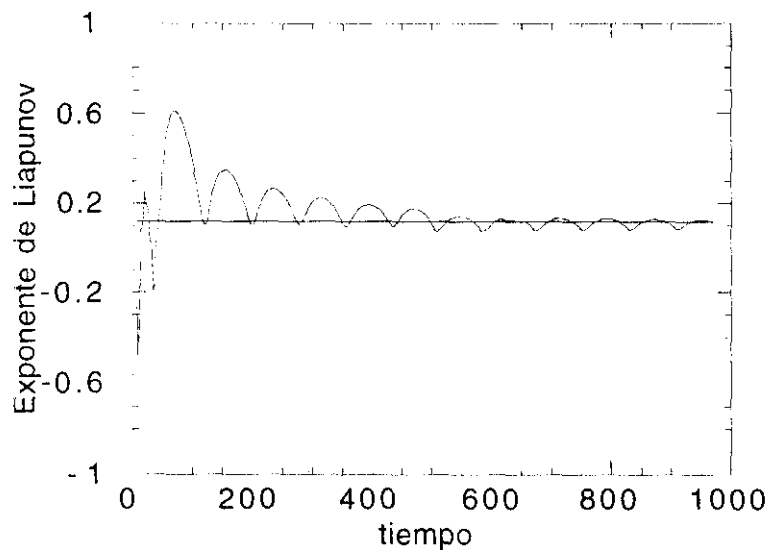


Figura 3.14: Exponente de Liapunov mediante el algoritmo de Wolf para el atractor de Rössler.

CAPÍTULO 4

CÓMO DETECTAR EL CAOS II

4.1. DEL MOVIMIENTO BROWNIANO AL ANÁLISIS R/S

EL MOVIMIENTO BROWNIANO

La teoría del camino aleatorio o del movimiento Browniano ha tenido gran trascendencia en el estudio de los mercados de capitales. Osborne (1964) compara el movimiento del cambio en los precios con el movimiento de una partícula en un fluido denominado también movimiento Browniano¹.

¹ El movimiento Browniano fue descrito por primera vez por el botánico R. Brown en 1828. Cuando investigaba el polen de diversas plantas observó que al dispersarlo en el agua los granos se movían de forma bastante irregular. Al comprobar que otras materias orgánicas seguían el mismo comportamiento, llegó a la conclusión de que había descubierto la moléculas primitivas de la materia viva. Aunque diferentes investigadores estudiaron el movimiento Browniano, fue Einstein el que atacó el problema de forma sistemática y

Una partícula de materia sólida dentro de un líquido se mueve debido al impacto de otras partículas, no siguiendo la trayectoria de dicha partícula ninguna pauta fija, sino que su movimiento es aleatorio. En un movimiento Browniano, existe independencia entre los desplazamientos de la partícula en los distintos momentos del tiempo; sin embargo, la posición de la partícula en un momento del tiempo no es independiente de la posición en otro momento del tiempo. Todo esto hizo suponer que el mercado de capitales pudiera comportarse como un movimiento Browniano, donde los rendimientos de las acciones son independientes entre sí.

Supongamos que la partícula sólo puede moverse en una línea, el eje x , y que la longitud de paso del movimiento puede tener una longitud de $+\xi$ o $-\xi$ cada τ segundos. Supongamos, además, que dicha longitud de paso es una variable estocástica que sigue una distribución normal de forma que:

$$p(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D\tau}} \exp\left(\frac{-\xi^2}{4D\tau}\right) \quad (4.1)$$

Es decir, a intervalos τ , la longitud del paso es una variable aleatoria ξ , de forma que la probabilidad de encontrar ξ en un intervalo $(\xi, \xi+d\xi)$ es $p(\xi, \tau)d\xi$. La varianza del proceso viene dada por:

$$\langle \xi^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 p(\xi, \tau) d\xi = 2D\tau \quad (4.2)$$

en la que el parámetro D es el coeficiente de difusión.

profunda. En cinco trabajos publicados entre 1905 y 1908, explicó el fenómeno y dió ideas para poder determinar dimensiones atómicas. Una versión en inglés con notas aclaratorias a los trabajos de Einstein, se encuentra en el libro: *Investigations on the Theory of Brownian Movement*. Dover Publications. 1956.

Si se normaliza el proceso aleatorio Gaussiano sustituyendo ξ por $\frac{\xi}{\sqrt{2D\tau}}$, entonces ξ será una variable aleatoria con media 0 y varianza $\langle \xi^2 \rangle = 1$.

En la figura 4.1 (a) se ha representado una sucesión de variables aleatorias Gaussianas normalizadas que simulan la longitud de paso de la partícula y en (b) se muestra la posición de la partícula en cada momento t .²

PROPIEDADES DE ESCALA

Supongamos que se observa la partícula a intervalos $b\tau$, donde b es un valor arbitrario, y que se establece por ejemplo $b=2$, entonces, el incremento ξ en la posición de la partícula es la suma de los incrementos ξ' y ξ'' cuya probabilidad conjunta es el producto de las probabilidades individuales

$$p(\xi'; \xi'', \tau) = p(\xi', \tau)p(\xi'', \tau) \quad (4.3)$$

ya que los dos incrementos son estadísticamente independientes.

Como $\xi' + \xi'' = \xi$ la densidad de probabilidad para ξ es:

$$p(\xi, 2\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi - \xi', \tau)p(\xi', \tau)d\xi = \frac{1}{\sqrt{4\pi D 2\tau}} \exp\left(\frac{-\xi^2}{4D 2\tau}\right) \quad (4.4)$$

² Las simulaciones de números aleatorios del presente trabajo se han realizado siguiendo el método propuesto por Press, W. P., Flannery, B. P., Teukolski, S. A., Vetterling, W. T. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press. 1986. Pag 202.

de donde podemos concluir que, aunque la partícula se haya observado cada dos pasos ($b=2$), es decir, con la mitad del tiempo de resolución, ésta sigue un proceso Gaussiano con media $\langle \xi \rangle = 0$ y varianza $\langle \xi^2 \rangle = 4D\tau$.

Si se generaliza este resultado para $b\tau$ observaciones se obtiene:

$$p(\xi, b\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Db\tau}} \exp\left(\frac{-\xi^2}{4Db\tau}\right) \quad (4.5)$$

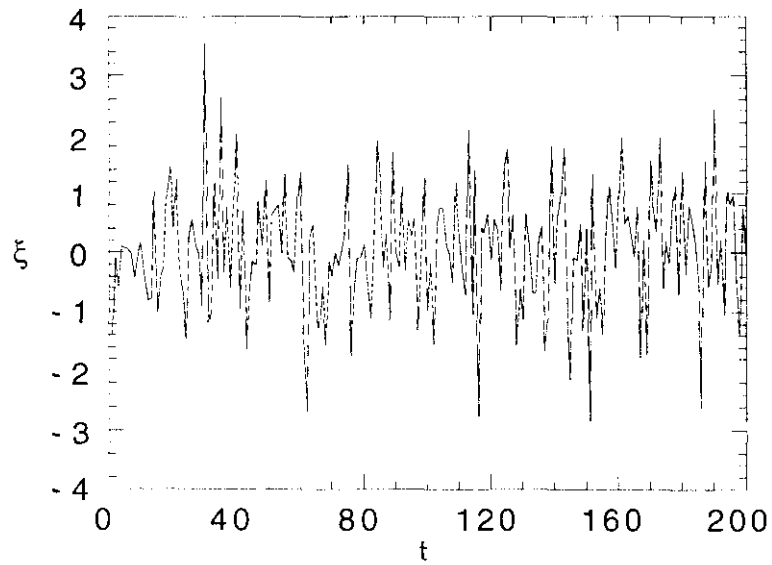
Es decir, que independientemente del número b de pasos entre cada observación, los incrementos en la posición de la partícula constituyen un proceso aleatorio con $\langle \xi \rangle = 0$ y varianza $\langle \xi^2 \rangle = 2Dt$, con $t=b\tau$.

Las figuras 4.1 y 4.2 son estadísticamente las mismas, excepto por la escala utilizada, es decir, los resultados del movimiento Browniano son similares si se utiliza un cambio de escala apropiado. Esta propiedad de escalado del movimiento Browniano consiste en la transformación de (4.1) utilizando $\hat{\xi} = b^{1/2}\xi$ y $\hat{\tau} = b\tau$, es decir, que el factor tiempo se escala con b y la longitud con $b^{1/2}$ con lo que la densidad de probabilidad queda:

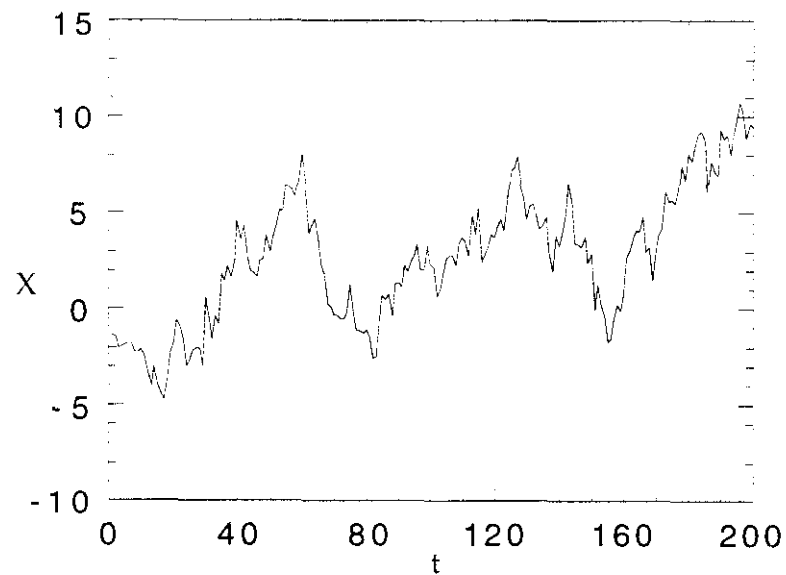
$$p(\hat{\xi} = b^{1/2}\xi, \hat{\tau} = b\tau) = b^{-1/2}p(\xi, \tau) \quad (4.6)$$

en la que se ha introducido el factor de normalización $b^{-1/2}$. Por consiguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\hat{\xi}, \hat{\tau}) d\hat{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi, \tau) d\xi = 1 \quad (4.7)$$

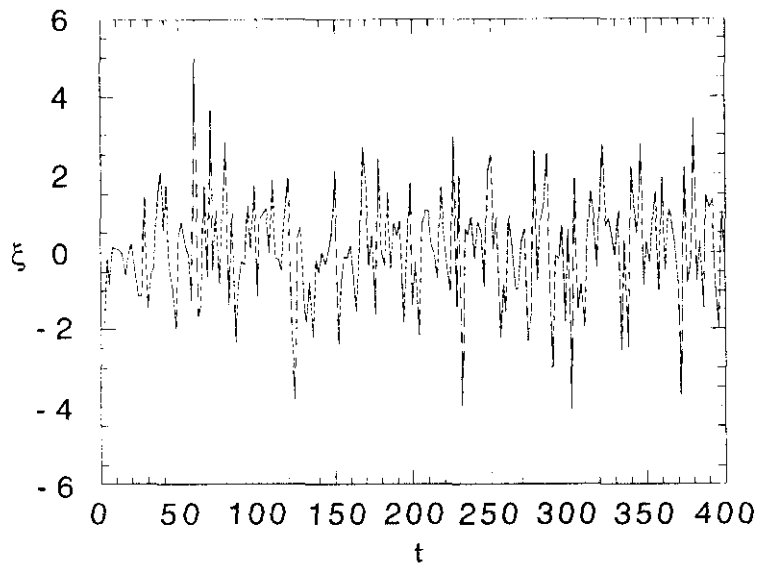


(a)

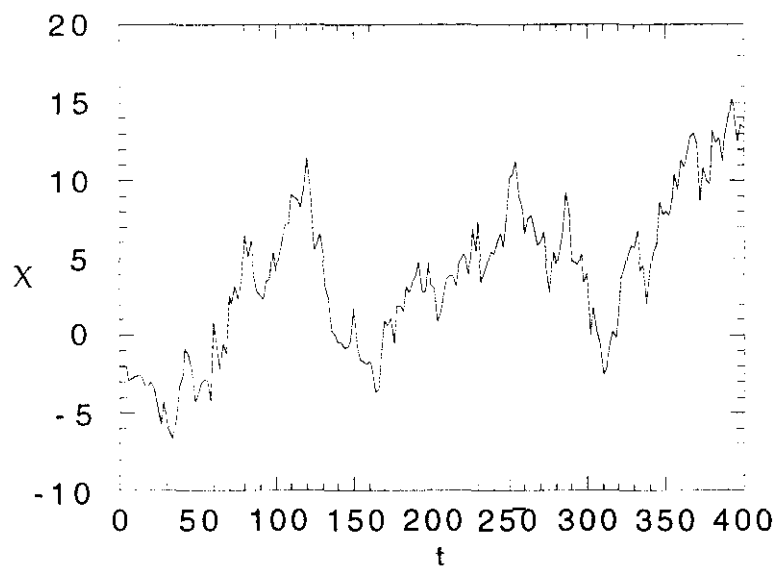


(b)

Figura 4.1: Sucesión de variables aleatorias Gaussianas con media cero y varianza 1. En (a) aparecen representadas las longitudes de paso de las partículas. En (b) se ha dibujado la posición de la partícula que se mide como $X(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i$.



(a)



(b)

Figura 4.2: Sucesión de variables aleatorias Gaussianas con media cero y varianza 1, cuando se observan cada dos pasos, $b=2$, es decir a intervalos de longitud 2τ . En (a) aparecen representadas las longitudes de paso de las partículas. En (b) se muestra la posición de la partícula.

La distribución de probabilidad para la posición de la partícula $X(t)$ será:

$$P(X(t) - X(t_0)) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D|t - t_0|}} \exp\left(-\frac{(X(t) - X(t_0))^2}{4D|t - t_0|}\right) \quad (4.8)$$

en la que $X(t_0)$ es la posición de la partícula en t_0 , un tiempo de referencia.

Esta distribución satisface la relación de escalado:

$$P(b^{1/2}(X(bt) - X(bt_0))) = b^{-1/2}P(X(t) - X(t_0)) \quad (4.9)$$

La media y la varianza de la posición de la partícula viene dada por:

$$\langle X(t) - X(t_0) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta X P(\Delta X, t - t_0) d\Delta X = 0 \quad (4.10)$$

$$\langle (X(t) - X(t_0))^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta X^2 P(\Delta X, t - t_0) d\Delta X = 2D|t - t_0|$$

en la que $\langle \dots \rangle$ significa la media muestral y ΔX es el incremento en la posición de la partícula, o sea, $\Delta X = X(t) - X(t_0)$.

Wiener en 1923 introdujo el concepto de función aleatoria para un movimiento Browniano. Si consideramos un proceso aleatorio Gaussiano normalizado $\{\xi\}$, los incrementos en la posición de una partícula Browniana son:

$$X(t) - X(t_0) \rightarrow \xi |t - t_0|^H \quad t \geq t_0 \quad (4.11)$$

para valores de t y t_0 cualesquiera.

En este caso $H=1/2$. Es decir que si se quiere conocer la posición de la partícula en un momento t sabiendo la posición en t_0 se elige un número aleatorio ξ de una distribución Gaussiana, se multiplica por $|t-t_0|^H$ y se añade este resultado a la posición en t_0 , que es $X(t_0)$.

La función aleatoria sigue la distribución definida en (4.10). Es fácil comprobar que la variable x definida como:

$$x = \frac{X(t) - X(t_0)}{\sqrt{2D\tau}(|t-t_0|/\tau)^H} \quad (4.12)$$

con $H=0.5$ sigue una distribución Gaussiana:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (4.13)$$

Una generalización de la función aleatoria anterior es el movimiento Browniano fraccional introducido por Mandelbrot y Van Ness (1968) y Mandelbrot (1982)³ que consiste en considerar la función aleatoria $X(t)$ con un exponente H que puede tomar cualquier valor del intervalo $(0,1)$. A estas funciones las denominaremos $B_H(t)$. Si $H=1/2$ estamos en el caso de incrementos independientes y $B(t)=B_{1/2}(t)$.

Si utilizamos $B_H(t)$ en lugar de $X(t)$ en las ecuaciones (4.10) se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle B_H(t) - B_H(t_0) \rangle &= 0 \\ \langle (B_H(t) - B_H(t_0))^2 \rangle &= 2D\tau(|t-t_0|/\tau)^{2H} \propto |t-t_0|^{2H} \end{aligned} \quad (4.14)$$

³ Mandelbrot, B. B. y Van Ness, J. W. (1968) "Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications". *SIAM Review*. 10. 4. 422-437.

Mandelbrot, B. B. *The Fractal Geometry of Nature*. San Francisco: W. H. Freeman. 1982.

donde, por conveniencia, se ha establecido $\tau = 1$ y $2D\tau = 1$.

Como puede observarse, la varianza tanto del movimiento Browniano ordinario como del fraccional divergen en el tiempo.

El movimiento Browniano fraccional tiene correlaciones a largo plazo infinitas, es decir, los incrementos en el pasado están correlacionados con los del futuro.

Sabiendo que el incremento de $-t$ a 0 es $B_H(0) - B_H(-t)$, y el incremento entre 0 y t es $B_H(t) - B_H(0)$ y estableciendo $B_H(0) = 0$ y $\tau = 1$, $2D\tau = 1$ la correlación entre los incrementos futuros y pasados de $B_H(t)$ es:

$$C(t) = \frac{\langle -B_H(-t)B_H(t) \rangle}{\langle B_H(t)^2 \rangle} = 2(2^{2H-1} - 1) \quad (4.15)$$

En el caso de $H=1/2$, la correlación entre incrementos pasados y futuros es 0 y estamos ante un proceso aleatorio independiente. Pero cuando $H \neq 1/2$ la correlación siempre es distinta de 0 y estamos ante procesos persistentes o antipersistentes. Si $H > 1/2$, la correlación es positiva y tenemos persistencia; es decir, si en el pasado tuvimos incrementos, en el futuro, en media, habrá una tendencia creciente; pero, si la tendencia fue decreciente, en media, también lo será en el futuro.

Si por el contrario $H < 1/2$, la correlación es negativa, lo que indica que el proceso es antipersistente, es decir, una tendencia creciente en el pasado implica una tendencia decreciente en el futuro y viceversa, una tendencia decreciente en el pasado implica una tendencia creciente en el futuro.

En las figuras 4.3 y 4.4 se han dibujado series para $H=0.85$ y $H=0.4$. Ambas figuras⁴ en (a) muestran los incrementos de la función Browniana

⁴ La función Browniana fractal se ha simulado según la fórmula:

fractal B_H , o sea, $\Delta B_H(t) = B_H(t) - B_H(t-1)$ mientras que en (b) se han representado las funciones Brownianas fractales como función del tiempo, plasmándose la posición de la partícula que empieza en el origen $B_H(0)=0$ y que se mueve con las longitudes de paso que aparecen en (a). Como puede observarse en las figuras, cuando $H < 0.5$, la curva que se obtiene de la función Browniana fractal es muy errática, mientras que, cuando $H > 0.5$, la curva que se obtiene es mucho más suave. En otros términos, a medida que aumenta H , el registro de la posición de la partícula es mayor en amplitud, al mismo tiempo que se reduce el ruido.

EL ANÁLISIS R/S

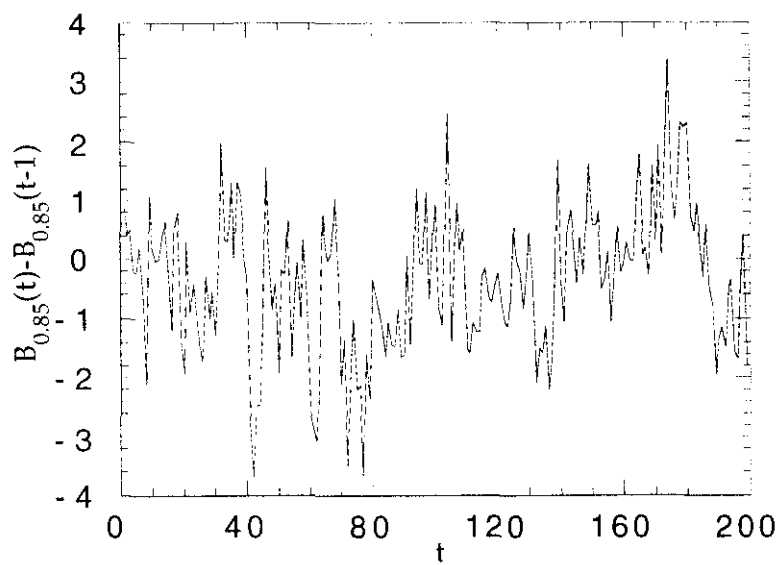
El análisis R/S es un método estadístico que permite calcular el valor de H para un movimiento Browniano fraccional.

Este método fue concebido por el hidrólogo inglés Hurst (1951)⁵ que pasó su vida estudiando el Nilo y los problemas relacionados con el almacenamiento de agua en un embalse. Como introducción al método de análisis R/S consideremos el problema al que se enfrentó Hurst. Su objetivo era diseñar un embalse ideal basándose en los datos sobre las observaciones del nivel del agua. Un embalse ideal nunca debería vaciarse ni rebosar.

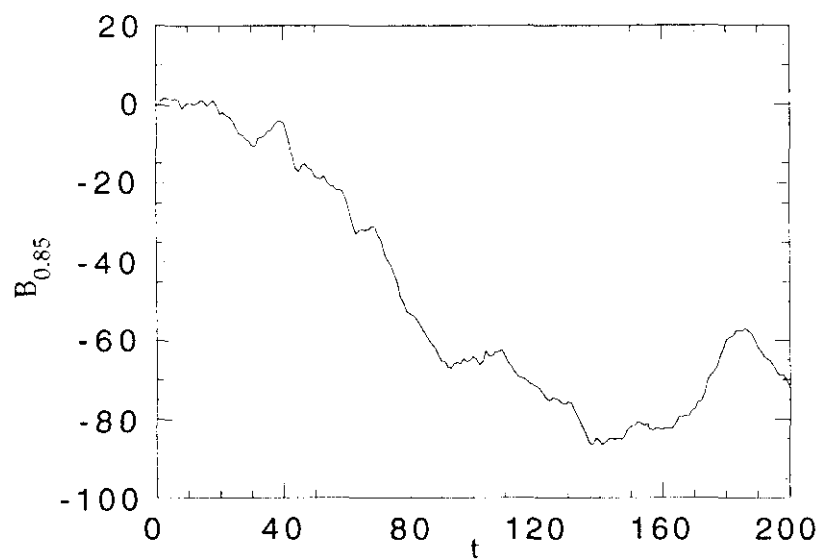
$$B_H(t) - B_H(t-1) = \frac{n^{-H}}{\Gamma(H + 1/2)} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n i^{H-1/2} \xi_{(1+n(M+t)-i)} \\ + \sum_{i=1}^{n(M-1)} \left((n+i)^{H-1/2} - i^{H-1/2} \right) \xi_{(1+n(M-1+t)-i)} \end{array} \right\}$$

de Mandelbrot, B. B. y Van Ness, J. W. (1968) "Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications". *SIAM Review*. 10. 4. 422-437.

⁵ Hurst, H. E. (1950) "Long-Term Storage Capacity of Reservoirs". *Transactions of the American Society of Civil Engineers*. 2447. 770-808.

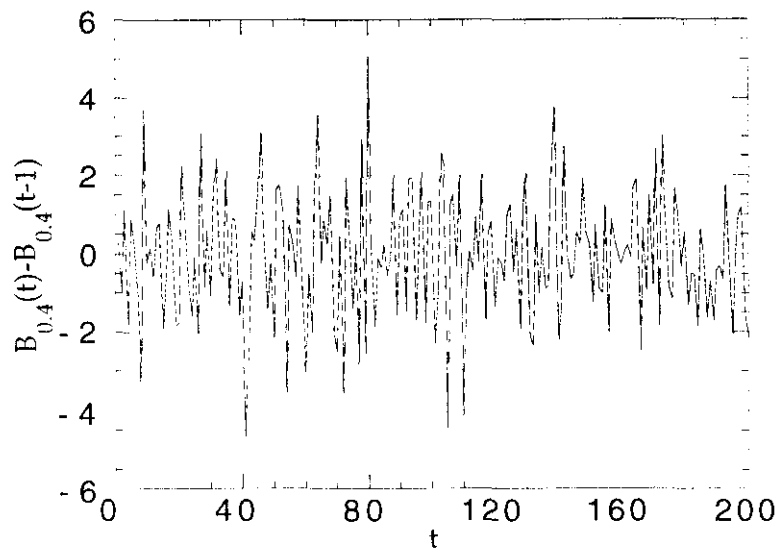


(a)

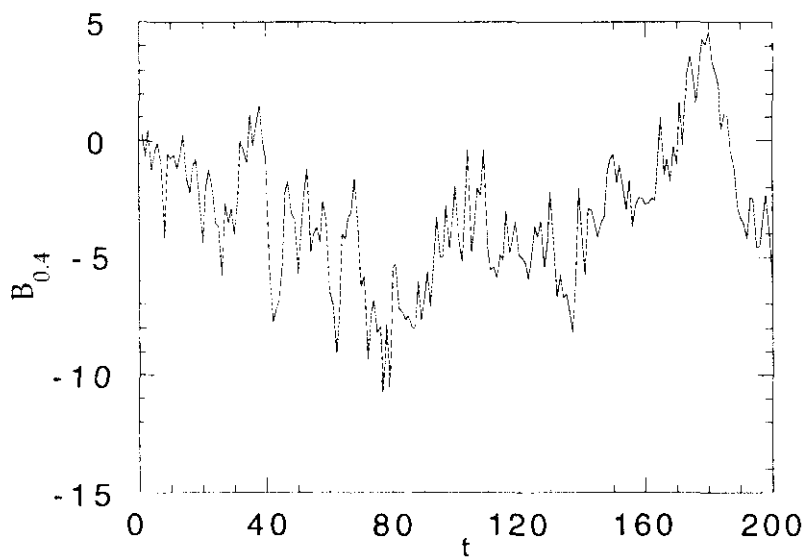


(b)

Figura 4.3: (a) Ruido fractal para $H=0.85$ y (b) función fractal Browniana B_H para $H=0.85$.



(a)



(b)

Figura 4.4: (a) Ruido fractal para $H=0.4$ y (b) función fractal Browniana B_H para $H=0.4$.

En un año t , el embalse recibe un influjo de agua $\xi(t)$ y el problema consiste en calcular cuanta cantidad de agua debe almacenarse en el embalse de forma que se libere un volumen de agua igual a la media de las entradas durante el periodo considerado.

La media de las entradas de agua durante un periodo de tiempo τ es:

$$\langle \xi \rangle_\tau = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \xi(t) \quad (4.16)$$

Esta media debe ser igual al volumen liberado por año.

Sea $X(t)$ la suma acumulada de desviaciones de $\xi(t)$ respecto a la media.

$$X(t, \tau) = \sum_{u=1}^t \{ \xi(u) - \langle \xi \rangle_\tau \} \quad (4.17)$$

La diferencia entre la suma acumulada máxima y mínima es el rango R . En el caso del embalse, R representa la diferencia entre la cantidad máxima y mínima de agua contenida en el embalse.

$$R(\tau) = \max_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau) - \min_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau) \quad (4.18)$$

La figura 4.5 muestra un esquema del embalse.

Es de suponer que R depende de τ , el tiempo considerado y, cuanto mayor sea t , mayor será el rango R esperado.

Para evitar esto, Hurst utilizó el ratio R/S donde S es la desviación típica:

$$S = \left(\frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \{ \xi(t) - \langle \xi \rangle_{\tau} \}^2 \right)^{1/2} \quad (4.19)$$

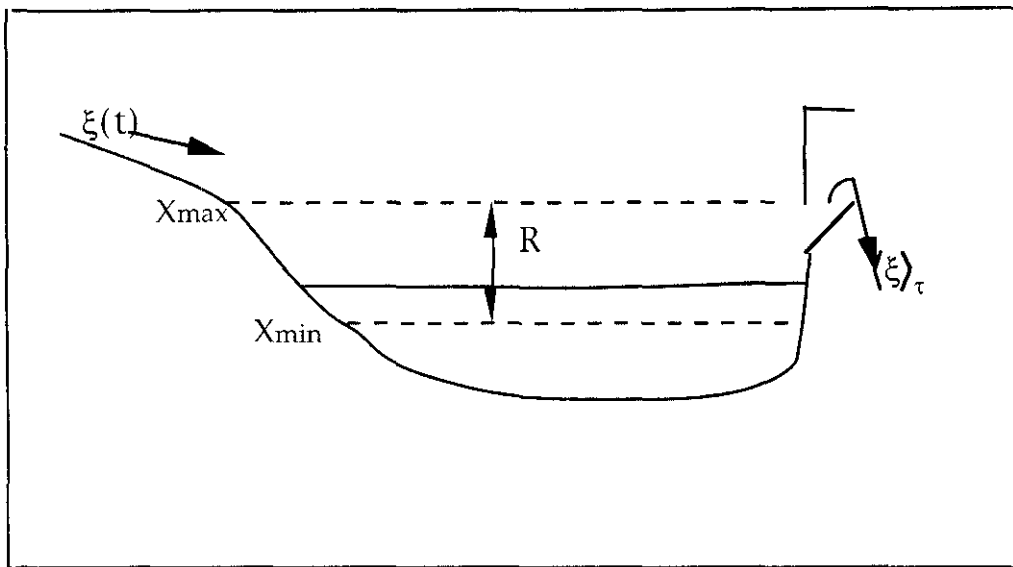


Figura 4.5: Esquema del embalse, el agua que entra es $\xi(t)$, la descarga media es $\langle \xi \rangle_{\tau}$ y $X(t) = \sum_t (\xi(t) - \langle \xi \rangle_{\tau})$ es la diferencia acumulada entre las entrada de agua y las salidas. R es la diferencia entre el contenido máximo y mínimo del embalse.

Hurst observó que para muchos fenómenos naturales R/S sigue la siguiente relación:

$$R/S = \left(\frac{\tau}{2} \right)^H \quad (4.20)$$

donde H se define como el exponente de Hurst.

El algoritmo para el cálculo de H de una serie temporal de longitud N se puede resumir como sigue⁶:

⁶ Este algoritmo se describe en: Peters, E. E. *Fractal Market Analysis*. John Wiley & Sons. 1994. Pag 62.

1. Se divide N en V intervalos contiguos de longitud n de forma que $Vn=N$. Denominaremos a cada intervalo I_v con $v=1,2,\dots,V$. Cada elemento de un intervalo se llamará $N_{k,v}$ de forma que $k=1,2,\dots,n$. Se calcula la media m_v de los valores para cada subintervalo de longitud n según:

$$m_v = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n N_{k,v} \quad (4.21)$$

2. Se calcula $X_{k,v}$, que son las desviaciones acumuladas respecto a la media para cada intervalo:

$$X_{k,v} = \sum_{i=1}^k (N_{i,v} - m_v) \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4.22)$$

3. Se define el rango para cada subintervalo R_{I_v} como la diferencia entre el valor máximo y mínimo de $X_{k,v}$:

$$R_{I_v} = \max(X_{k,v}) - \min(X_{k,v}) \quad (4.23)$$

4. Se calcula la desviación típica muestral para cada intervalo I_v :

$$S_{I_v} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (N_{k,v} - m_v)^2 \right)^{1/2} \quad (4.24)$$

5. Cada rango se normaliza dividiendo por la desviación típica S_{I_v} y se obtiene R/S para cada intervalo, el valor medio de R/S para los intervalos de longitud n es:

$$(R/S)_n = \frac{1}{V} \sum_{v=1}^V (R_{I_v} / S_{I_v}) \quad (4.25)$$

6. Se aumenta la longitud del intervalo hasta el siguiente valor entero que verifique que N/n sea un número entero y se repite el proceso desde 1 para todos los valores de N que verifiquen el cociente anterior.

7. Se calcula el exponente H mediante una regresión con $\log(n)$ como variable independiente y $\log(R/S)_n$ como variable dependiente. La pendiente de dicha regresión es el valor de H .

A continuación mostramos un ejemplo de análisis R/S para datos simulados de un proceso aleatorio normalizado, con media 0 y desviación típica 1. Figura 4.6.

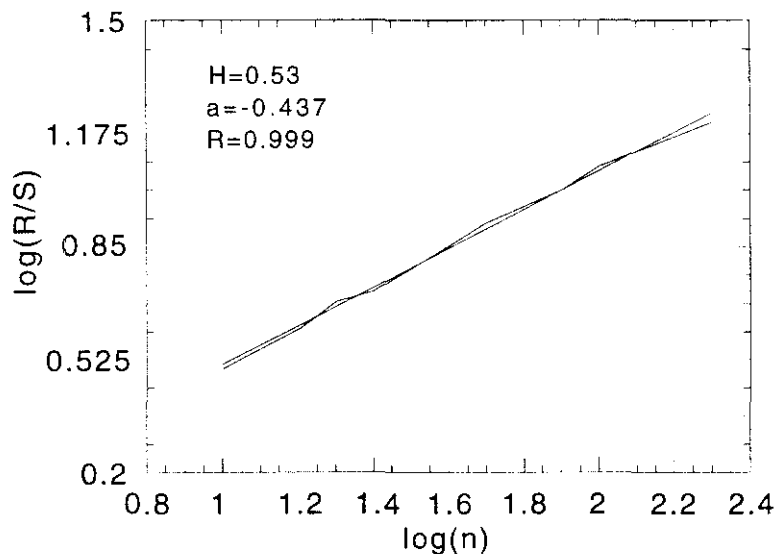


Figura 4.6: Análisis R/S para un proceso aleatorio Gaussiano con media 0 y desviación típica 1. $H=0.53$.

La mayoría de los fenómenos naturales no siguen un comportamiento Gaussiano. La obtención de un $H \neq 0.5$ implica que la serie tiene memoria; cuando $H > 0.5$ existe persistencia en el proceso mientras que si, por el contrario, $H < 0.5$, el proceso presenta antipersistencia. Un ejemplo de proceso persistente con $H=0.8$ puede contemplarse en la figura 4.7.

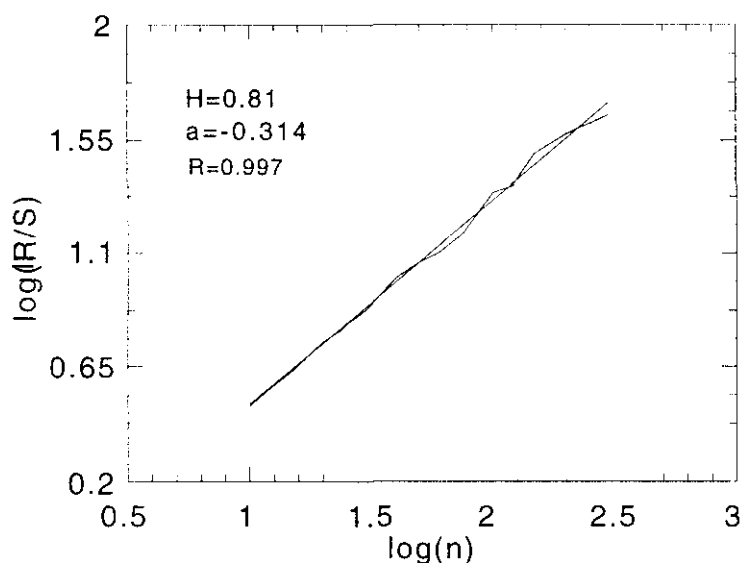


Figura 4.7: Análisis R/S para un proceso persistente. $H=0.8$.

ESTADÍSTICA DEL ANÁLISIS R/S

El presente epígrafe trata de generalizar un test estadístico para comprobar si una serie temporal sigue un proceso de ruido blanco. Se trata de determinar el grado de significatividad de cualquier H obtenido mediante el algoritmo explicado en el apartado de análisis R/S .

Hurst (1950)⁷ obtiene el valor de $(R/S)_n$ para una distribución binomial:

⁷ Hurst, H. E. (1950) "Long-Term Storage Capacity of Reservoirs" *Transactions of the American Society of Civil Engineers*. 2447. pag 779.

$$(R/S)_n = \left(n \frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \quad (4.26)$$

en la que n es el número de observaciones.

Feller (1951)⁸ demuestra matemáticamente cual es la media del rango ajustado de sumas acumuladas. Si se tiene una sucesión de variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n que se distribuyen con media 0 y desviación típica 1. Si se llama $Sum_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ y se define:

$$M_n = \max(0, Sum_1, Sum_2, \dots, Sum_n)$$

$$N_n = \min(0, Sum_1, Sum_2, \dots, Sum_n)$$

entonces la variable $R_n = M_n - N_n$ será el rango de las sumas acumuladas. Feller utiliza el rango ajustado de sumas acumuladas, es decir, en lugar de tomar las sumas acumuladas Sum_n toma sus desviaciones respecto a una recta que une el origen con (n, Sum_n) , así pues:

$$Sum^* = Sum - i \frac{Sum_n}{n}$$

La media y la varianza del rango ajustado de sumas acumuladas son:

$$E(R^*(n)) = \left(n \frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \quad (4.27)$$

⁸ Feller, W. (1951) "The Asymptotic Distribution of the Range of Sums of Independent Random Variables". *Annals of Mathematical Statistics*. 22. 427-433.

$$\text{Var}(R^*(n)) = \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2} \right) n$$

Peters (1994)⁹ obtiene mediante simulaciones de Montecarlo para 5000 números aleatorios el valor esperado del $\log(R/S)$ y observa desviaciones sistemáticas, para $n < 20$, del valor esperado según la fórmula de Feller. En economía debido a la escasez de datos no parece conveniente olvidarse del resultado para n pequeños. Es preciso corregir estas desviaciones.

Anis y Lloyd (1976)¹⁰ desarrollaron la siguiente ecuación para calcular el valor esperado de R/S para valores de n pequeños.

$$E(R/S)_n = \frac{\Gamma((1/2)(n-1))}{\sqrt{\pi}\Gamma((1/2)n)} \sum_{r=1}^{n-1} \sqrt{\frac{n-r}{r}} \quad (4.28)$$

que puede aproximarse¹¹ mediante la siguiente expresión:

$$E(R/S)_n = \left(n \frac{\pi}{2} \right)^{-1/2} \sum_{r=1}^{n-1} \sqrt{\frac{n-r}{r}} \quad (4.29)$$

Peters encuentra que para valores de n menores que 20 existe también una desviación respecto a los resultados obtenidos mediante las simulaciones de Montecarlo. Se hace necesario corregir la fórmula obtenida por Anis y Lloyd y propone la siguiente:

⁹ Peters, E. E. *Fractal Market Analysis*. John Wiley & Sons. 1994. pag 68.

¹⁰ Anis, A. A. y Loyd, E. H. (1986) "The Expected Value of the Adjusted Rescaled Hust Range of Independent Normal Summands". *Biometrika*. 1. 111-116.

¹¹ La aproximación es útil para valores grandes de n ya que evita la utilización de la función Γ , que en este caso, toma valores demasiado grandes para el cálculo.

$$E(R/S)_n = \left(\left(\frac{n-(1/2)}{n} \right) \binom{n}{\frac{\pi}{2}} \right)^{-1/2} \sum_{r=1}^{n-1} \sqrt{\frac{n-r}{r}} \quad (4.30)$$

En el presente trabajo se ha realizado la simulación de Montecarlo para 4000 números aleatorios que siguen una distribución normal con media 0 y desviación típica 1, se ha calculado el R/S para dichos números, después se han mezclado los datos dos veces y se ha vuelto a calcular el R/S . El proceso anterior se ha repetido 10 veces y después se ha obtenido el valor medio de los valores de R/S calculados. Los resultados se exponen en la primera columna de la tabla 4.1.

Tabla 4.1: Comparación de los valores estimados de $\log(R/S)$ según el método de Montecarlo y las diferentes fórmulas para una variable aleatoria Gaussiana.

nº de observaciones	Montecarlo	Hurst	Anis y Lloyd	Peters
10	0.45803	0.59806	0.44557	0.45671
16	0.59376	0.70012	0.58465	0.59155
20	0.65567	0.74857	0.64696	0.65245
25	0.77810	0.79703	0.70740	0.71179
32	0.71529	0.85063	0.77247	0.77589
40	0.83642	0.89909	0.82991	0.83264
50	0.89131	0.94754	0.88623	0.88841
80	1.0041	1.0496	1.0019	1.0033
100	1.0509	1.0981	1.0557	1.0567
125	1.1062	1.1465	1.1088	1.1097
160	1.1673	1.2001	1.1670	1.1676
200	1.2236	1.2486	1.2190	1.2196
250	1.2741	1.2970	1.2707	1.2711
400	1.3845	1.3991	1.3784	1.3787
500	1.4397	1.4475	1.4291	1.4293
800	1.5351	1.5496	1.5351	1.5352
1000	1.5790	1.5981	1.5851	1.5852
2000	1.7348	1.7486	1.7395	1.7395

De los valores de la tabla 4.1 podemos derivar el valor esperado de H .

Como puede observarse $H=0.5$ es el límite asintótico para un proceso independiente, siendo H mayor que 0.5 para valores de $n>50$. Es necesario, pues el desarrollo de un test para caracterizar la significatividad de H .

Como los valores de R/S son variables aleatorias que siguen una distribución normal, los valores de H también se distribuirán según una distribución normal. La varianza del exponente de Hurst será:

$$Var(H)_n = \frac{1}{N} \quad (4.31)$$

donde N es el número total de observaciones de la muestra.

Conociendo todo esto es posible contrastar la significatividad de cualquier valor de H obtenido, respecto al valor de H correspondiente a una distribución normal, para un número determinado de observaciones.

LOS CICLOS Y EL ANÁLISIS R/S

La búsqueda de ciclos ha constituido una parte esencial de las investigaciones económicas. Se intenta encontrar pautas de comportamiento regular en las variables económicas. El análisis espectral que se estudiará en el siguiente apartado permite analizar la amplitud y la frecuencia del comportamiento periódico.

Sin embargo, aunque el comportamiento de las variables sea cíclico, parece que no es regular. Algunos autores apuntan que la regularidad de los ciclos está escondida por ruido y pequeñas perturbaciones. Pero, sin embargo, parece más lógico pensar que los ciclos económicos puedan ser

no periódicos; en estos ciclos no es posible conocer la duración exacta de los mismos aunque si es posible obtener un valor aproximado de su duración.

El análisis R/S permite encontrar el comportamiento periódico de una serie temporal. Consideremos el caso de una función periódica definida como:

$$X_t = \text{sen}(t)$$

La figura 4.8 muestra la serie temporal de esta función periódica para un periodo $n=200$. Si realizamos un análisis R/S , el rango crecerá hasta que cubra toda la amplitud del ciclo, a partir de ese momento dejará de crecer pudiendo así conocer la amplitud del ciclo.

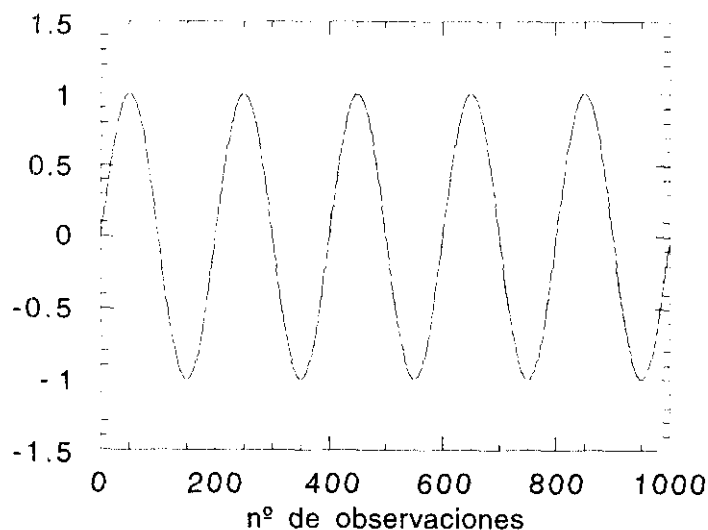


Figura 4.8: Serie temporal para la función seno con periodo igual a 200.

Como puede observarse en la figura 4.9 se produce una ruptura en el crecimiento de la serie para $n=200$, esta significa que el rango ha dejado de crecer y que esa es la longitud del ciclo.

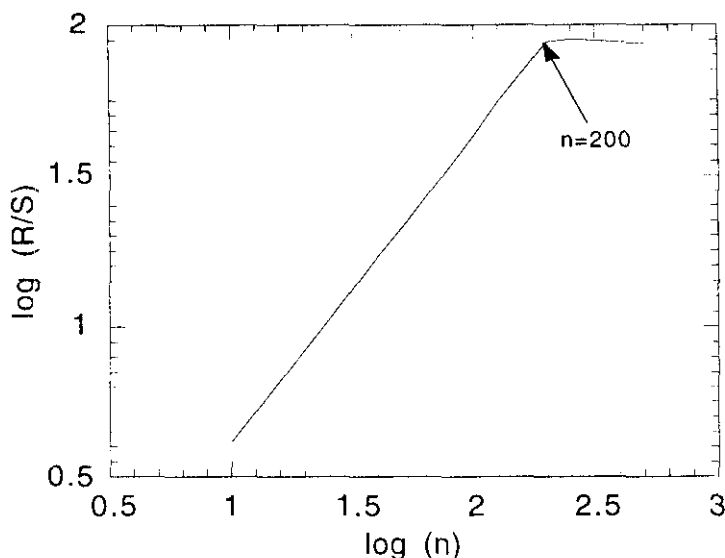


Figura 4.9: Análisis R/S para la serie temporal $\text{sen}(t)$.

Para poder observar con claridad donde se produce la ruptura en el gráfico del análisis R/S, Peters (1994)¹² propone la utilización del estadístico V que se define como sigue:

$$V_n = \frac{(R/S)_n}{\sqrt{n}} \tag{4.32}$$

Si dibujamos en un gráfico V y $\log(n)$ obtendremos distintos resultados según el tipo de proceso que estemos analizando:

- a) Si el proceso es un movimiento Browniano, con $H=0.5$, se escalará con la raíz cuadrada del tiempo y obtendremos un gráfico que será una línea horizontal. Figura 4.10.
- b) Si el proceso es un movimiento Browniano fraccional persistente, con $H>0.5$, obtendremos una línea creciente. Figura 4.11.

¹² Peters, E. E. *Fractal Market Analysis*. John Wiley & Sons. 1994. Pag 92.

c) Si el proceso es un movimiento Browniano fraccional antipersistente, con $H < 0.5$, obtendremos una línea decreciente. Figura 4.12.

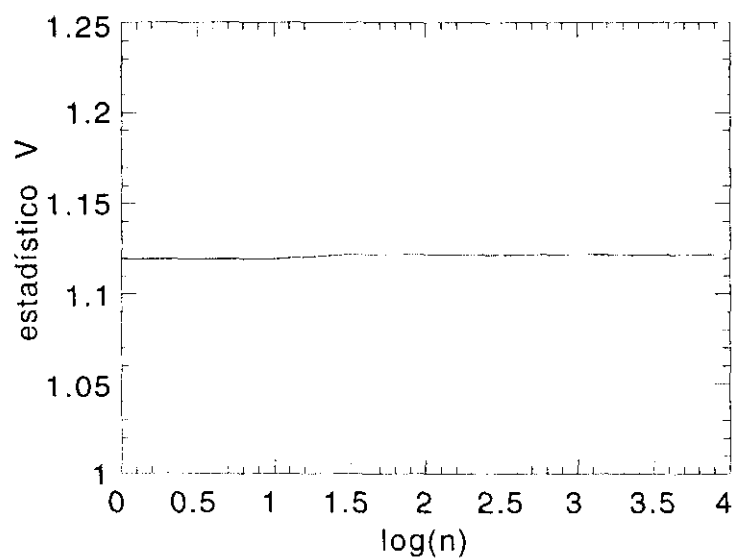


Figura 4.10: Estadístico V para un proceso aleatorio $H=0.5$.

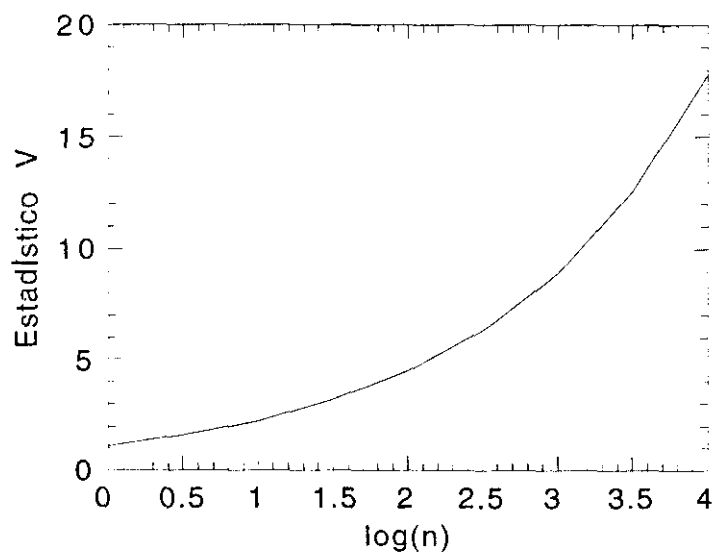


Figura 4.11: Estadístico V para un proceso persistente $H=0.8$.

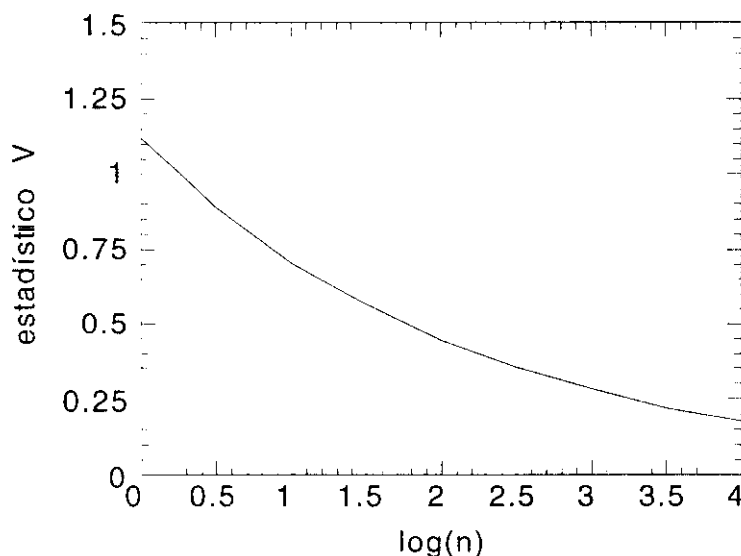


Figura 4.12: Estadístico V para un proceso antipersistente $H=0.3$.

Si observamos ahora la figura 4.13, podremos constatar el comportamiento del estadístico V ante un comportamiento cíclico. Cuando la pendiente deja de crecer la memoria del proceso desaparece y termina la longitud del ciclo. Así podremos saber cual es la longitud media del ciclo.

El estadístico V es robusto respecto al ruido. Para comprobarlo vamos a añadir ruido a la serie del seno para observar si es posible distinguir la amplitud del ciclo ante la presencia de una serie con ruido. En la figura 4.14 se ha dibujado la función seno a la que se le ha añadido una desviación típica de ruido. La figura 4.15 muestra el análisis R/S de la serie con ruido donde es posible ver con claridad la amplitud del ciclo. Por último, en la figura 4.16 se presenta el estadístico V con el pico en la observación $n=200$. La figuras 4.17, 4.18 y 4.19 son el resultado del mismo análisis para la función seno con tres desviaciones típicas. Si se observa la serie parece que se ha destruido totalmente la estructura senoidal, sin embargo todavía se puede ver claramente la amplitud del ciclo mediante el análisis R/S . La figuras 4.20, 4.21 y 4.22 son el resultado de añadir cinco desviaciones típicas a la función seno.

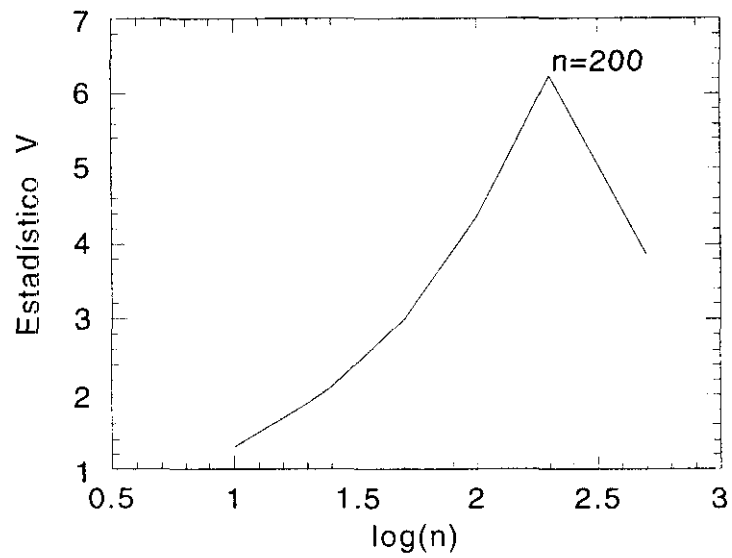


Figura 4.13: Estadístico V para la serie temporal $X_t = \text{sen}(t)$.

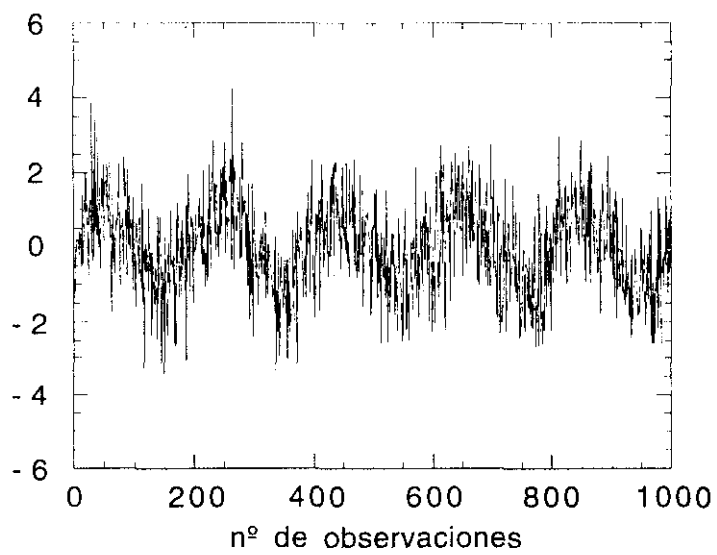


Figura 4.14: Función seno con una desviación típica de ruido.

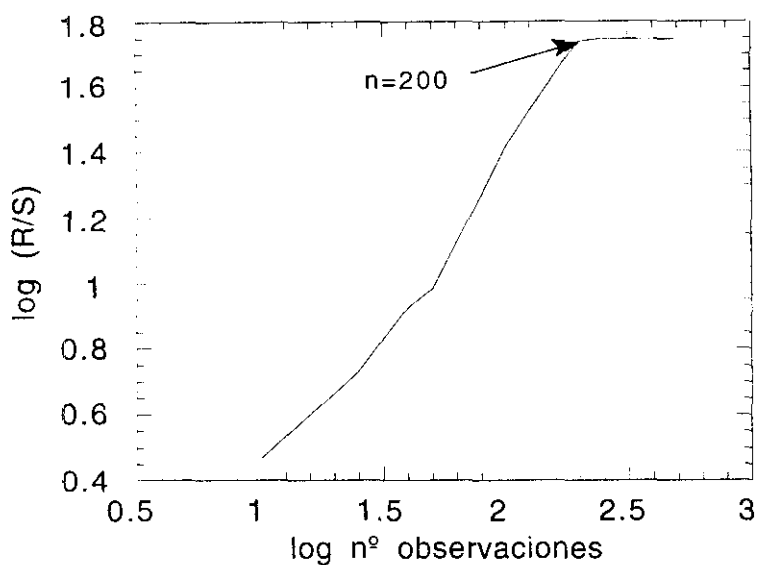


Figura 4.15: Análisis R/S de la función seno con una desviación típica de ruido.

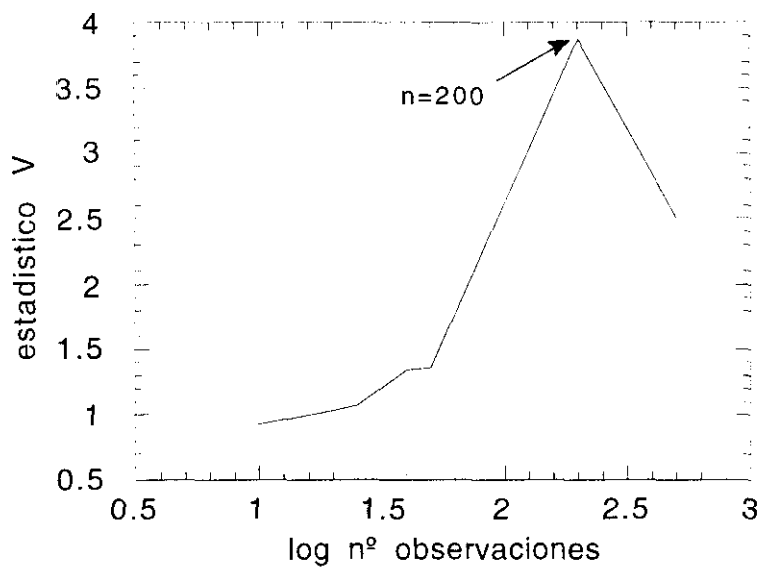


Figura 4.16: Estadístico V de la función seno con una desviación típica de ruido.

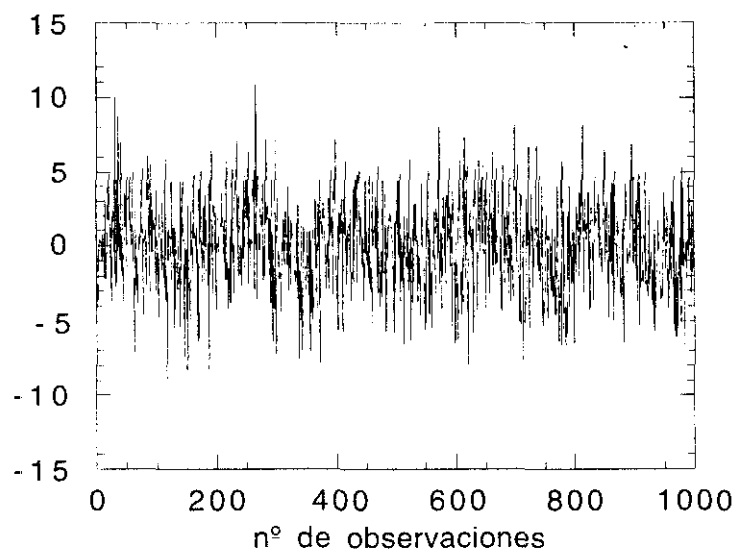


Figura 4.17: Función seno con tres desviaciones típicas de ruido.

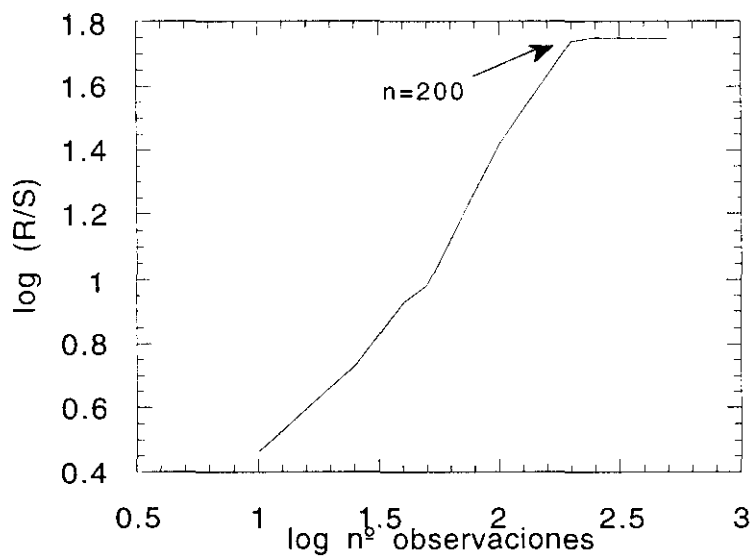


Figura 4.18: Análisis R/S de la función seno con tres desviaciones típicas de ruido.

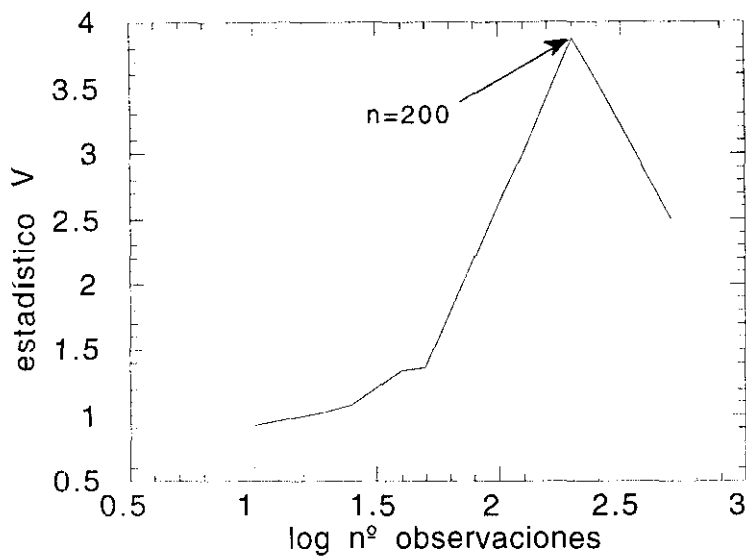


Figura 4.19: Estadístico V de la función seno con tres desviaciones típicas de ruido.

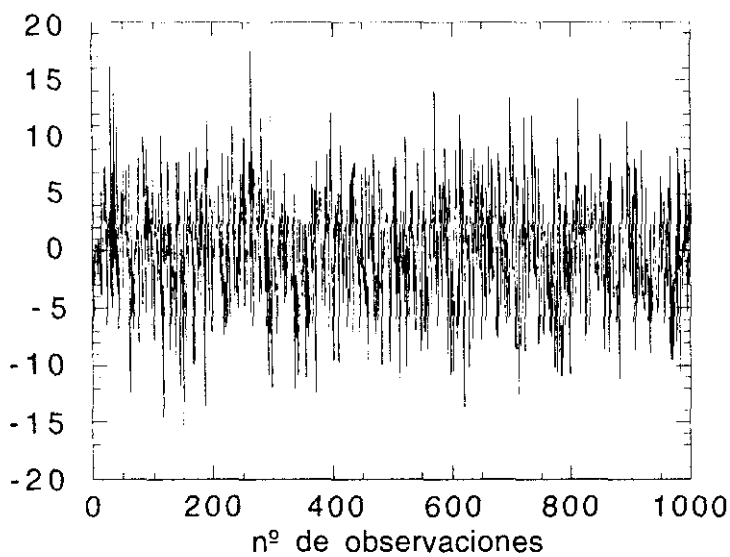


Figura 4.20: Función seno con cinco desviaciones típicas de ruido

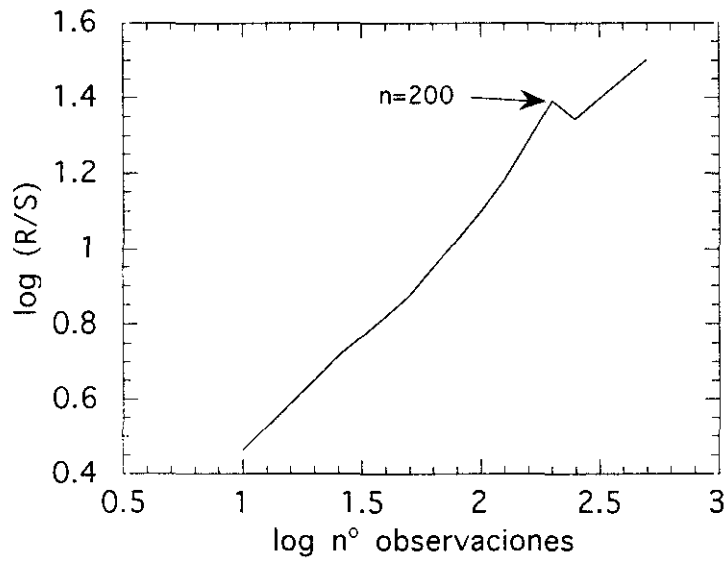


Figura 4.21: Análisis R/S de la función seno con cinco desviaciones típicas de ruido

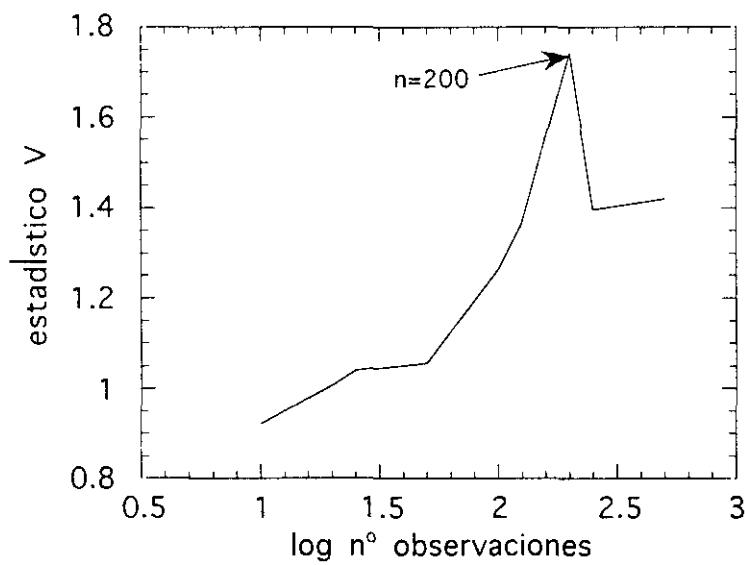


Figura 4.22: Estadístico V para la función seno con cinco desviaciones típicas de ruido.

De todos estos resultados es posible concluir que el análisis R/S permite detectar la existencia de ciclos, incluso ante la presencia de ruido en los datos.

4.2. ANÁLISIS ESPECTRAL

LA TRANSFORMACIÓN DE FOURIER

En economía, la evolución temporal de las variables se analiza, en muchos casos, mediante modelos dinámicos cuyas soluciones son funciones de una variable independiente del tiempo. A la proyección de estas funciones en el espacio de fase la denominaremos dominio temporal.

El estudio de los sistemas económicos se puede ampliar trabajando en el dominio de frecuencias mediante el análisis espectral. Si se designa con $h(t)$ a una función en el dominio temporal y $H(f)$ la representación de $h(t)$ en el dominio de frecuencias, las relaciones entre ambas funciones se denominan transformada de Fourier:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{2\pi i f t} dt$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{-2\pi i f t} df$$
(4.33)

Si t se mide en segundos, entonces f vendrá dada en ciclos por segundos o hertz. Estas expresiones son válidas para otras unidades: si h es una función de la posición de x (en metros), H será una función de la inversa de la longitud de onda (ciclos por metro). En el análisis de series temporales puede ser que el tiempo se exprese en días; si este es el caso, la frecuencia vendrá en ciclos por día.

Los físicos utilizan habitualmente la frecuencia angular ω en lugar de la frecuencia propiamente dicha, cuya definición es:

$$\omega = 2\pi f$$

en este caso $H(\omega) = |H(f)|_{f=\omega/2\pi}$. Por lo tanto, las transformadas de Fourier vienen dadas por:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{i\omega t} dt \tag{4.34}$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Nosotros emplearemos las expresiones (4.33), aunque los resultados serían los mismos que utilizando (4.34). Hay que tener en cuenta que tanto en (4.33) como en (4.34): $-\infty < t < \infty$ y $-\infty < f < \infty$ o $-\infty < \omega < \infty$.

Como ejemplo consideraremos el caso de una función:

$$\begin{aligned} h(t) &= 0 & t < -T \\ h(t) &= 1 & -T < t < T \\ h(t) &= 0 & t > T \end{aligned}$$

La transformada de Fourier de $h(t)$ es:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{2\pi i f t} dt = \int_{-T}^T e^{2\pi i f t} dt = \frac{\text{sen}(2\pi f T)}{\pi f}$$

En la figura 4.23 se han representado las funciones $h(t)$ y su transformada $H(f)$.

La función $H(f)$ es en general compleja:

$$H(f) = R(f) + i X(f) = A(f) e^{i\phi(f)}$$

en la que $A(f)$ es el espectro de Fourier de $h(t)$, $A^2(f)$ es el espectro de energía y $\phi(f)$ es el ángulo de fase.

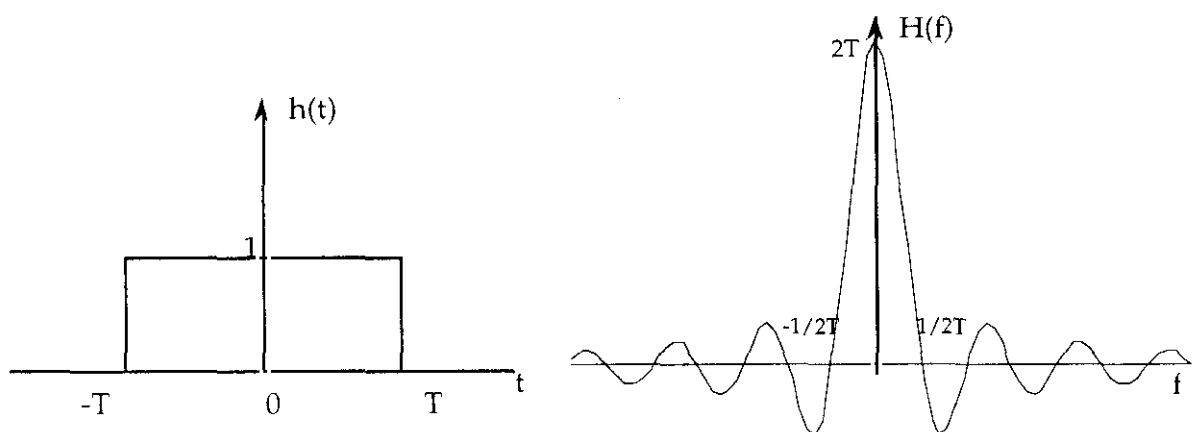


Figura 4.23: Representación de $h(t)$ y de su transformada de Fourier $H(f)$.

PROPIEDADES Y TEOREMAS

a) Linealidad: Si $H_1(f)$ y $H_2(f)$ son transformadas de Fourier de $h_1(t)$ y $h_2(t)$, respectivamente, y a_1 y a_2 son dos constantes arbitrariamente pequeñas, entonces:

$$a_1 h_1(t) + a_2 h_2(t) \leftrightarrow a_1 H_1(f) + a_2 H_2(f) \quad (4.35)$$

donde \leftrightarrow indica que las funciones de primero y segundo miembro están relacionadas por las integrales de (4.33).

b) Simetría: Si $H(f)$ es la transformada de Fourier de $h(t)$, entonces:

$$H(t) \leftrightarrow h(-f) \quad (4.36)$$

c) Escalamiento temporal: Si a es una constante real, entonces:

$$h(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} H\left(\frac{f}{a}\right) \quad (4.37)$$

d) Escalamiento de frecuencia: Si b es una constante real, entonces:

$$\frac{1}{|b|} h\left(\frac{t}{b}\right) \leftrightarrow H(bf) \quad (4.38)$$

e) Desplazamiento temporal: Si la función $h(t)$ está desplazada una constante t_0 , el espectro de Fourier permanece el mismo pero es necesario añadir un término lineal $2\pi ft_0$ a su ángulo de fase:

$$h(t - t_0) \leftrightarrow H(f)e^{2\pi ift_0} \quad (4.39)$$

f) Desplazamiento de frecuencia: Cuando f_0 es una constante real, la integral de Fourier de $e^{-2\pi if_0 t} h(t)$ se obtiene desplazando $H(f)$ en f_0 . Así pues:

$$e^{-2\pi if_0 t} h(t) \leftrightarrow H(f - f_0) \quad (4.40)$$

g) Derivación temporal: Tomando la derivada n-ésima respecto a t , de los dos miembros de la segunda expresión de (4.33) tenemos:

$$\frac{d^n h(t)}{dt^n} \leftrightarrow (-2\pi i f)^n H(f) \quad (4.41)$$

esta expresión no garantiza la existencia de la transformada de $d^n h/dt^n$, simplemente dice que si esta transformación existe vendrá dada por $(-2\pi i f)^n H(f)$

h) Derivación de frecuencia: Tomando la derivada n-ésima respecto a f de los dos miembros de la primera expresión de (4.33) tenemos:

$$(2\pi i t)^n h(t) \leftrightarrow \frac{d^n H(f)}{df^n} \quad (4.42)$$

i) Conjugación de funciones: La integral de Fourier de la conjugada $h^*(t) = h_1(t) - ih_2(t)$ de una función compleja $h(t) = h_1(t) + ih_2(t)$ viene dada por $H^*(-f)$

$$h^*(t) \leftrightarrow H^*(-f) \quad (4.43)$$

j) Teorema del momento: Este teorema relaciona las derivadas de $H(f)$ con el origen de momentos de su transformada inversa $h(t)$. El momento de orden n de $h(t)$ se define como:

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n h(t) dt \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.44)$$

y el teorema establece que

$$(i)^n m_n = \frac{d^n H(0)}{df^n} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.45)$$

k) Convolución temporal: dadas dos funciones podemos formar la integral:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) h_2(t - \tau) d\tau \quad (4.46)$$

Esta integral define una función $h(t)$ conocida como convolución de h_1 y h_2 , la expresión de convolución se escribe frecuentemente como:

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) \quad (4.47)$$

y resulta inmediato comprobar que:

$$h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t) \quad (4.48)$$

La integral de una función se puede también escribir como una convolución:

$$\int_{-\infty}^t g(y) dy = g(t) * V(t) \quad (4.49)$$

en la que $V(t)$ es la función escalón unidad.

La transformada de Fourier $H(f)$ de la convolución $h(t)$ de dos funciones h_1 y h_2 es igual al producto de las transformadas de Fourier H_1 y H_2 de estas dos funciones. Así pues, si

$$h_1(t) \leftrightarrow H_1(f) \qquad h_2(t) \leftrightarrow H_2(f) \qquad (4.50)$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau)h_2(t - \tau)d\tau \leftrightarrow H_1(f)H_2(f) \qquad (4.51)$$

1) Formula de Parseval: si $H(f) = A(f)e^{i\phi(f)}$ es la transformada de Fourier de $h(t)$ entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2(f)df \qquad (4.52)$$

Una fórmula más general es la siguiente. Si:

$$h_1(t) \leftrightarrow H_1(f) \qquad h_2(t) \leftrightarrow H_2(f) \qquad (4.53)$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_1(t)h_2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} H_1(-f)H_2(f)df \qquad (4.54)$$

ESPECTRO DE ENERGÍA

A la magnitud $A^2(f)$ de la fórmula (4.52) se le denomina espectro de energía de $h(t)$. La justificación de este nombre se basa en dicha fórmula. Para comprenderlo utilizaremos el concepto físico de energía eléctrica. Supongamos que $h(t)$ es la diferencia de potencial de una fuente al aplicarla sobre una resistencia de 1 ohmio. La energía liberada por la fuente es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt$$

Según la fórmula (4.52) esta energía es igual al área bajo la curva $A^2(f)$.

La correlación de dos funciones, designada por $\text{Corr}(g,h)$, se define como:

$$\text{Corr}(g,h) \leftrightarrow G(f)H^*(f) \quad (4.55)$$

La correlación de una función consigo misma se denomina autocorrelación. En este caso:

$$\text{Corr}(g,h) \leftrightarrow |H(f)|^2 \quad (4.56)$$

que se conoce como teorema de Wiener-Khinchin.

El espectro de potencia $P(f)$, también conocido como densidad de potencia espectral de una señal escalar $h(t)$, se define como el cuadrado del

módulo del coeficiente de Fourier $|H(f)|^2$ y mide la energía por unidad de tiempo en función de la frecuencia f .

En algunos casos resulta interesante conocer cuanta potencia está contenida en una señal en un determinado intervalo de frecuencias $(f, f + df)$ y no se desea distinguir entre frecuencias positivas y negativas. En este caso se define la densidad espectral de potencia para la banda positiva como:

$$P_n(f) = |H(f)|^2 + |H(-f)|^2 \quad 0 \leq f \leq \infty \quad (4.57)$$

de modo que la potencia total es la integral de $P_n(f)$ extendida de $f=0$ a $f=\infty$. Cuando la función $h(t)$ es real, los dos términos de (4.57) son iguales, en cuyo caso $P_n(f) = 2|H(f)|^2$.

LA FUNCIÓN DELTA DE DIRAC

Lo que habitualmente se denomina función delta de Dirac $\delta(t)$, no es realmente una función ordinaria que tiene valores definidos para cada t . La definición rigurosa de $\delta(t)$ se obtiene recurriendo a la teoría de distribuciones. Sin embargo, es posible dar una definición y algunas reglas de operación que resultan muy útiles en ciertas aplicaciones de la transformada de Fourier.

La definición de $\delta(t)$ es la siguiente: Si $\phi(t)$ es una función arbitraria y continua en un punto dado t_0 , $\delta(t)$ es tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \phi(t) dt = \phi(t_0) \quad (4.58)$$

de forma similar la derivada n-ésima $d^n \delta / dt^n$ se define por

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n \delta(t-t_0)}{dt^n} \phi(t) dt = (-1)^n \frac{d^n \phi(t_0)}{dt^n} \quad (4.59)$$

Las propiedades más interesantes de la función delta de Dirac y de su derivada son las siguientes:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \quad (4.60)$$

$$h(t)\delta(t) = h(0)\delta(t) \quad (4.61)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\phi(t) dt = -\phi'(0) \quad (4.62)$$

$$h(t)\delta'(t) = h(0)\delta'(t) - h'(0)\delta(t) \quad (4.63)$$

$$\delta(t) = 0 \quad \text{para } t < 0 \quad (\text{o para } t > 0) \quad (4.64)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (4.65)$$

La transformada de Fourier de la función $\delta(t)$ es :

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i f t} \delta(t) dt = 1 \quad (4.66)$$

así pues

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad (4.67)$$

Si en lugar de $\delta(t)$ tomamos $\delta(t-t_0)$ resulta que:

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{2\pi i f t_0} \tag{4.68}$$

Si aplicamos la propiedad de simetría a (4.67) y (4.68) resulta:

$$1 \leftrightarrow \delta(f) \tag{4.69}$$

$$e^{-2\pi i f_0 t} \leftrightarrow \delta(f - f_0) \tag{4.70}$$

En la figura 4.24 (a) se ha representado gráficamente la expresión de (4.67), en la 4.24 (b) la expresión de (4.69).

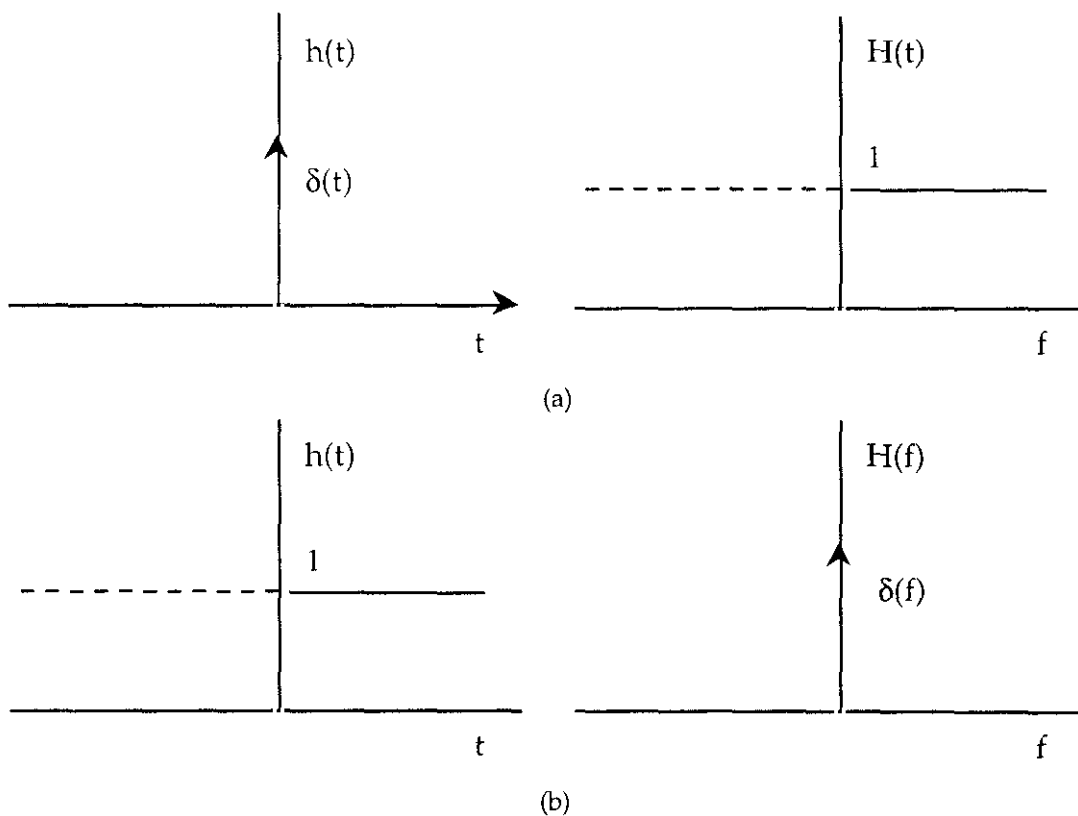


Figura 4.24: (a) Representación de (4.67) y (b) representación de (4.69).

Como ejemplo de aplicación de la función delta de Dirac calcularemos la transformada de Fourier de la función $h(t) = \cos 2\pi f_0 t$.

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\pi f_0 t e^{2\pi i f t} dt \quad (4.71)$$

como

$$\cos 2\pi f_0 t = \frac{1}{2} (e^{2\pi i f_0 t} + e^{-2\pi i f_0 t}) \quad (4.72)$$

resulta que

$$H(f) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t(f+f_0)} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t(f-f_0)} dt = \frac{1}{2} [\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)] \quad (4.73)$$

o sea que

$$\cos 2\pi f_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)] \quad (4.74)$$

En la figura 4.25 se ha representado la expresión (4.74).

Una función cosenoidal de frecuencia f_0 tiene como transformada de Fourier dos deltas de Dirac situadas en $-f_0$ y f_0 .

Si en lugar del coseno se toma el seno resulta que:

$$\text{sen } 2\pi f_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2i} [\delta(f+f_0) - \delta(f-f_0)] \quad (4.75)$$

En la figura 4.26 se ha representado la expresión (4.75).

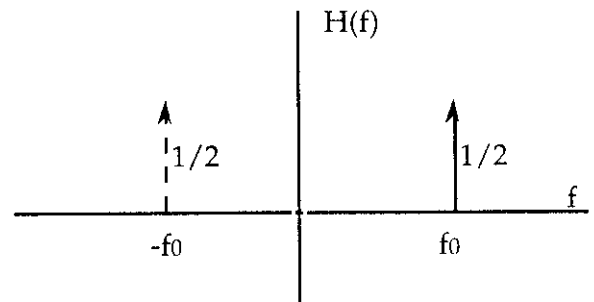
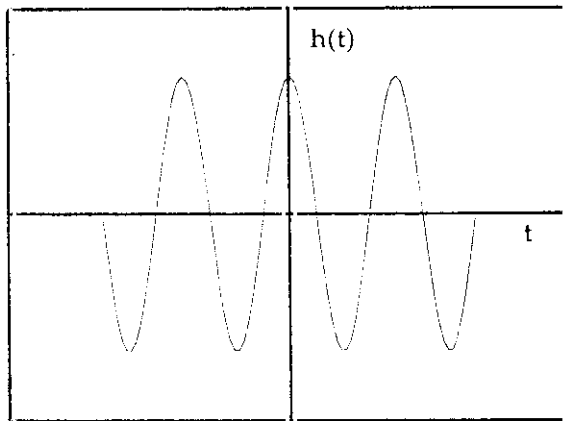


Figura 4.25: Representación de $h(t)$ y de su transformada de Fourier $H(f)$ como delta de Dirac para la expresión de (4.74).

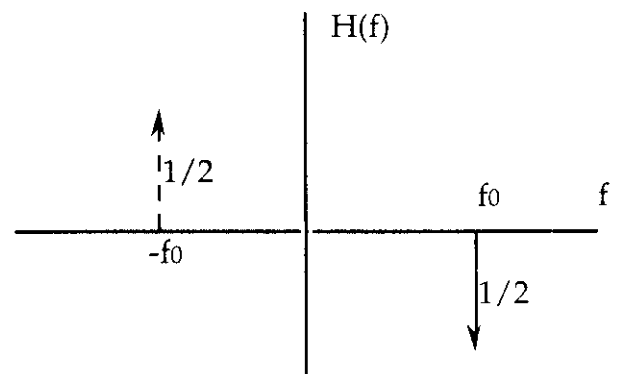
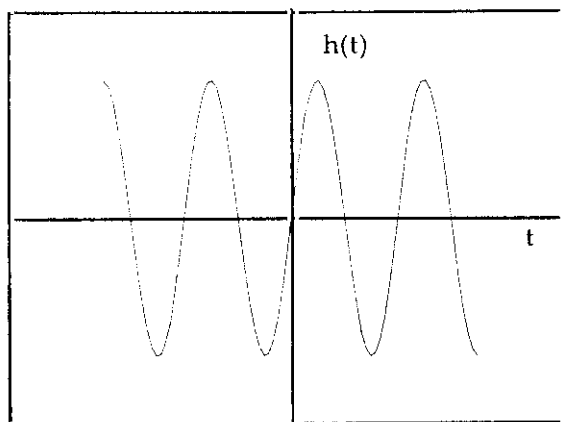


Figura 4.26: Representación de $h(t)$ y de su transformada de Fourier $H(f)$ como delta de Dirac para la expresión (4.75).

TRANSFORMADA DE FOURIER PARA MUESTRAS DISCRETAS

En las aplicaciones económicas, la situación común es que la función $h(t)$ se muestree a intervalos iguales de tiempo. Sea Δ el intervalo entre dos muestras consecutivas, de modo que la serie de valores muestreado sea:

$$h_n = h\Delta n \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (4.76)$$

El recíproco del intervalo de tiempo Δ se denomina tasa de muestreo. Si el tiempo se mide en días, entonces la tasa de muestreo es el número de muestras registradas por día.

Para un intervalo de muestreo Δ , existe una frecuencia especial f_c llamada frecuencia crítica de Nyquist dada por:

$$f_c \equiv \frac{1}{2\Delta} \quad (4.77)$$

La pregunta que surge es: ¿Cuál debe ser el intervalo de muestreo para que se puedan detectar las frecuencias presentes? La respuesta nos la da el teorema del muestreo o teorema cardinal que dice: el intervalo de muestreo debe ser la recíproca de dos veces la frecuencia más alta presente. Cuando la frecuencia más alta existente es igual o inferior a la frecuencia de Nyquist se detectarán todas las frecuencias. Sin embargo, si la frecuencia más alta existente está por encima de la de Nyquist, no se detectarán todas las frecuencias y además aparecerá una distorsión en el efecto de "aliasing" o de falsa traslación. El efecto de "aliasing" se traduce en que toda frecuencia exterior al intervalo crítico ($-f_c, f_c$) se proyecta en el interior del

intervalo, debido al muestreo. Ello genera una distorsión especialmente elevada a altas frecuencias.

Lo primero que hay que obtener son las expresiones discretas de las integrales de Fourier (4.33) cuando se dispone de un número finito de puntos muestrales. Supongamos que tenemos N valores muestrales consecutivos

$$h_k \equiv h(t_k) \quad t_k \equiv k\Delta \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.78)$$

en la que Δ es el intervalo de muestreo. Supondremos que N es par. Puesto que con N puntos de entrada no es posible obtener más de N puntos independientes de salida, la transformada de Fourier $H(f)$ se obtendrá solamente para los valores:

$$f_n \equiv \frac{n}{N\Delta} \quad n = -N/2, \dots, N/2 \quad (4.79)$$

Los valores extremos de n corresponden a los límites inferior y superior del intervalo de la frecuencia crítica de Nyquist. Todos los valores de n son independientes con la excepción de $-N/2$ y $N/2$, que de hecho dan valores iguales en la transformada $H(f)$.

La transformada discreta de Fourier de los N puntos h_k viene dada por:

$$H_n \equiv \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2\pi i k n / N} \quad (4.80)$$

La relación entre la transformada discreta de Fourier de un conjunto de números y la transformada continua de Fourier, cuando se consideran como muestras de una función continua muestreada a intervalos Δ , puede escribirse como:

$$H(f_n) \approx \Delta H_n \quad (4.81)$$

en la que f_n se obtiene de (4.79).

La fórmula para la transformada inversa de Fourier que permite recuperar el conjunto de las h_k a partir de las H_n es:

$$h_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n e^{-2\pi i k n / N} \quad (4.82)$$

El teorema de Parseval se enuncia:

$$\sum_{k=0}^{N-1} |h_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |H_n|^2 \quad (4.83)$$

LA TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER O FAST FOURIER TRANSFORM (FFT)

El proceso de una transformada de Fourier discreta de N puntos según (4.80) supone el cálculo de N^2 multiplicaciones complejas más $N(N-1)$ sumas complejas. Utilizando una computadora con una potencia de cálculo de 1 Mips (un millón de instrucciones por segundo) se requerirían unas dos semanas para calcular una transformada de Fourier de $N=10^6$ valores.

Existen varios algoritmos de FFT que permiten reducir de forma importante el número de operaciones y, por consiguiente, el tiempo de cálculo. A continuación se presenta el algoritmo de partición en el tiempo.

Si se define:

$$W_N \equiv e^{2\pi i/N} \quad (4.84)$$

entonces (4.80) se puede escribir como:

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k W_N^{nk} \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (4.85)$$

en el caso de que N sea par, es posible separar (4.85) en dos secuencias de $N/2$ puntos, que corresponden respectivamente a los componentes pares e impares de h_k .

$$H_n = \sum_{k=0}^{(N/2)-1} h_{2k} W_N^{2kn} + \sum_{k=0}^{(N/2)-1} h_{2k+1} W_N^{(2k+1)n} \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (4.86)$$

Utilizando las igualdades $W_N^2 = W_{N/2}$ y $W_N^{N/2} = -1$, la secuencia H_n se puede escribir con dos ecuaciones:

$$H_n = \sum_{k=0}^{N/2-1} h_{2k} W_{N/2}^{kn} + W_N^n \sum_{k=0}^{N/2-1} h_{2k+1} W_{N/2}^{kn} \quad (4.87)$$

$$H_{n+N/2} = \sum_{k=0}^{N/2-1} h_{2k} W_{N/2}^{kn} - W_N^n \sum_{k=0}^{N/2-1} h_{2k+1} W_{N/2}^{kn} \quad (4.88)$$

$$n = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

Introduciendo las transformadas de Fourier discretas de orden $N/2$ H_{p_n} y H_{i_n} , que corresponden respectivamente a los elementos pares e impares de la secuencia H_n , (4.87) y (4.88) pueden reescribirse como:

$$\begin{aligned} H_n &= H_{p_n} + W_N^n H_{i_n} \\ H_{n+N/2} &= H_{p_n} - W_N^n H_{i_n} \end{aligned} \quad (4.89)$$

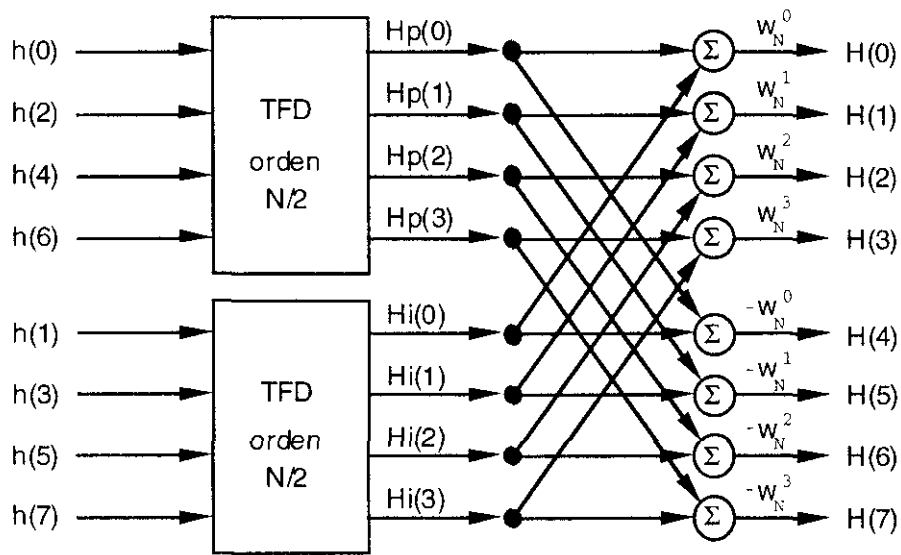
$$n = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

Según (4.89) el cálculo de la transformada de Fourier discreta de N puntos se ha reducido a $N^2/2$ operaciones complejas con N sumas y $N/2$ productos.

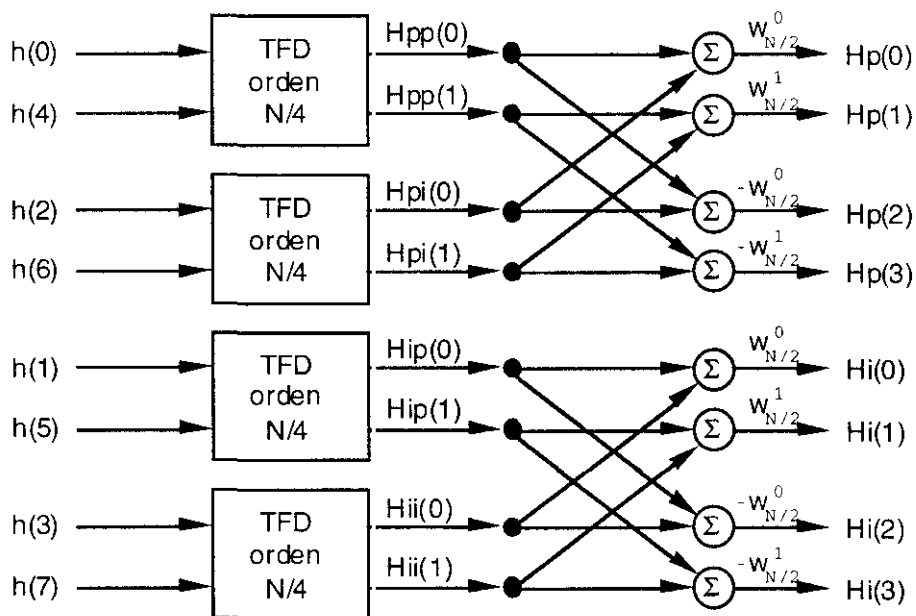
Si $N/2$ es par, el mismo procedimiento puede aplicarse para reemplazar las dos transformadas de Fourier discretas H_{p_n} y H_{i_n} de $N/2$ con $N/4$ puntos. En el caso de que N sea una potencia de dos, podemos aplicar este procedimiento de manera recursiva, dividiendo cada transformada de Fourier discreta de orden i en una suma de dos transformadas de Fourier discretas de orden $i/2$. Así se puede reducir el número de operaciones complejas hasta $N \log_2(N)$ sumas y $(N/2) \log_2(N)$ multiplicaciones.

La figura 4.27 (a), (b) y (c) representa los diferentes pasos necesarios para calcular una transformada de Fourier discreta de $N=8$ puntos.

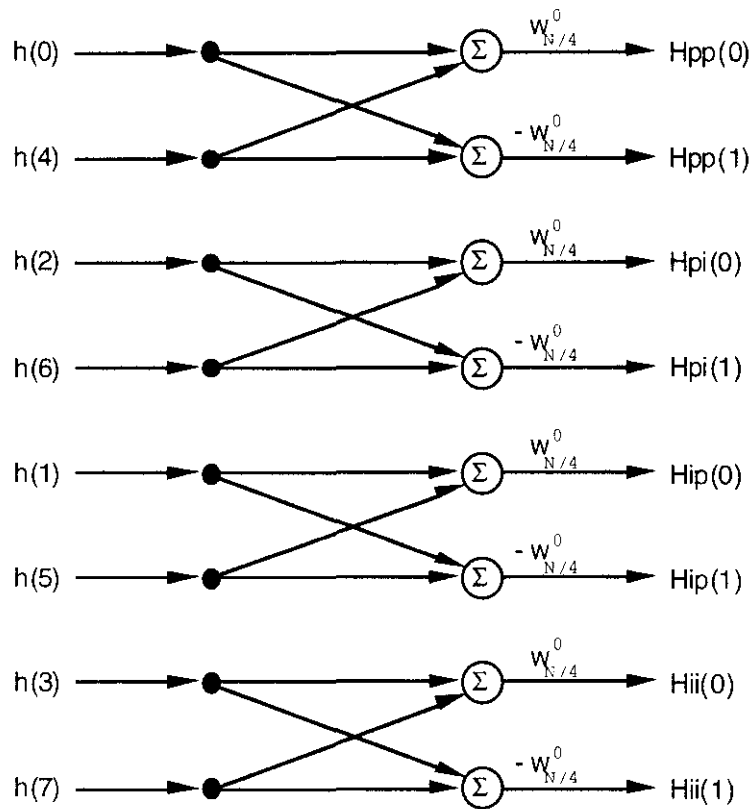
A la hora de codificar el algoritmo de partición en el tiempo, resulta necesario reordenar los valores h_k como aparece en la figura 4.27 (c), según el orden de los bits invertidos. La reordenación corresponde a un cambio de variable del índice k a un índice k' . Si expresamos k y k' en binario puro, k' se obtiene de manera inmediata al invertir los bits de k , como lo muestra la tabla 4.2. Una vez reordenados los valores h_k el cálculo de los puntos H_n no presenta ninguna dificultad.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.27: Esquema del algoritmo de cálculo de la transformada de Fourier discreta.

Tabla 4.2: Forma de reordenar la variable de índice k a k'.

N=8 puntos			
índice k en decimal	índice k en binario puro	índice k' en binario	índice k' en decimal
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

CONVOLUCIÓN Y DECONVOLUCIÓN

Se ha definido la convolución de dos funciones mediante la expresión (4.46) y el teorema de la convolución, mediante (4.51). El teorema establece que la transformada de Fourier de la convolución de dos funciones es igual al producto de sus transformadas de Fourier individuales. En nuestras aplicaciones resulta más interesante discutir ésto para el caso discreto. La convolución de dos funciones $r(t)$ y $s(t)$ se designa con $r*s$ y es matemáticamente equivalente a la convolución en el orden inverso $s*r$. En las aplicaciones se acostumbra a designar con s a la señal de larga duración, que puede presentar varios máximos. A la función r se la denomina función respuesta y se caracteriza por tener un sólo máximo, menos duración y caer a cero en ambos lados del máximo.

La convolución discreta mediante una función de respuesta de duración M vendrá dada por:

$$(r * s)_j \equiv \sum_{k=-M/2+1}^{M/2} s_{j-k} r_k \quad (4.90)$$

El teorema de deconvolución discreta se enuncia como sigue: Si una señal s_j es periódica con periodo N , su convolución discreta con una función respuesta de duración N es un miembro del par:

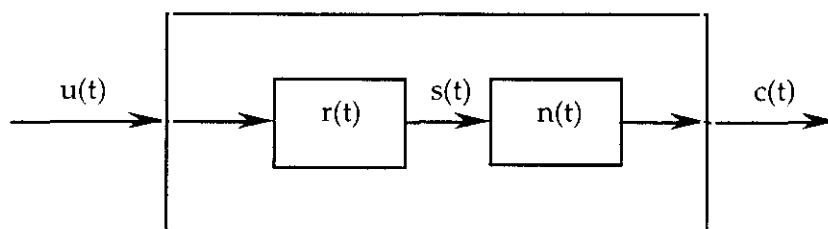
$$\sum_{k=-N/2+1}^{N/2} s_{j-k} r_k \leftrightarrow S_n R_n \quad (4.91)$$

en la que S_n ($n=0, \dots, N-1$) es la transformada de Fourier de s_j ($j=0, \dots, N-1$), mientras que R_n ($n=0, \dots, N-1$) es la transformada de Fourier de r_k ($k=0, \dots, N-1$). Puesto que r_k es, generalmente, de dimensión mucho menor que s_j ,

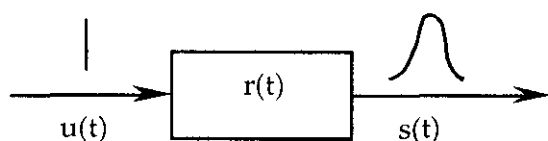
para conseguir que ambas funciones tengan la misma dimensión se añadirán ceros a r_k hasta igualar la dimensiones de ambas funciones.

FILTRADO ÓPTIMO

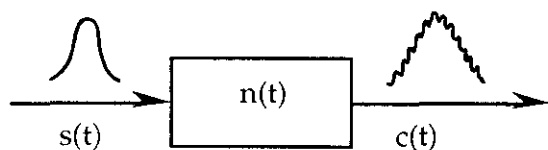
Una de las propiedades de la transformada de Fourier es la capacidad de filtrar el ruido de una señal. En los sistemas físicos es muy frecuente que al impactarles una señal, la respuesta de salida sea una señal deformada y contaminada con ruido.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.28: En la figura (a) se esquematiza el proceso que sufre la señal. En (b) se representa la respuesta del sistema a una función delta es una distribución. En (c) se muestra que a la distribución de entrada se le ha añadido ruido.

Supongamos que una señal "pura" $u(t)$ se impacta en el sistema, como indica la figura 4.28. La señal de la salida es una señal "contaminada" $c(t)$. De forma ideal podemos suponer que la señal $u(t)$ sufre una convolución con la función $r(t)$ que caracteriza al detector, con lo que se obtiene la función $s(t)$. A la función $s(t)$ hay que añadir el ruido producido que vendrá dado por la función $n(t)$. Todo lo dicho hasta aquí se puede escribir en forma matemática como sigue:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)u(t - \tau)d\tau \quad \text{o} \quad S(f) = R(f)U(f) \quad (4.92)$$

en la que S , R y U son las transformadas de Fourier de s , r y u , respectivamente. Además, la señal de salida se puede escribir como:

$$c(t) = s(t) + n(t) \quad (4.93)$$

Nuestro objetivo es encontrar un filtro $\phi(t)$ o $\Phi(f)$, que cuando se aplica a la señal de salida $c(t)$ o $C(f)$, y se deconvoluciona posteriormente con $r(t)$ o $R(f)$ produzca una señal $\tilde{u}(t)$ o $\tilde{U}(f)$ lo más próxima posible a $u(t)$ o $U(f)$. Así pues, en el espacio de frecuencias, la señal verdadera U vendrá dada por:

$$\tilde{U}(f) = \frac{C(f)\Phi(f)}{R(f)} \quad (4.94)$$

Entenderemos que \tilde{U} es próxima a U cuando es mínima la expresión:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{u}(t) - u(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{U}(f) - U(f)|^2 df \quad (4.95)$$

Introduciendo las fórmulas (4.94) y (4.93) en (4.95) resulta:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{(S(f) + N(f))\Phi(f)}{R(f)} - \frac{S(f)}{R(f)} \right|^2 df = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} |R(f)|^{-2} \left\{ |S(f)|^2 [1 - \Phi(f)]^2 + |N(f)|^2 \Phi(f)^2 \right\} df \end{aligned} \quad (4.96)$$

Se supone que la señal S y el ruido N no están correlacionadas, así pues su producto cuando se integra respecto a la frecuencia f es cero. Por consiguiente, la condición de mínimo de (4.96) se traduce en que la función filtro venga expresada por:

$$\Phi(f) = \frac{|S(f)|^2}{|S(f)|^2 + |N(f)|^2} \quad (4.97)$$

La función que nos da el filtro óptimo depende sólo de S y N y es independiente de R y U . Sin embargo, la dependencia de S y N nos obliga a buscar un procedimiento para obtener $|S|^2$ y $|N|^2$ separadamente. El ruido presenta siempre componentes de alta frecuencia por lo que en un diagrama en que se represente $\ln|C|^2$ en función de la frecuencia la parte superior del diagrama corresponderá al ruido. Una hipótesis razonable es que el ruido vendrá dado por una recta ajustada a la parte superior de espectro de frecuencias. De esta forma se determina $|N(f)|^2$. Si a $|C(f)|^2$ se le resta, punto a punto, $|N(f)|^2$ se obtiene $|S(f)|^2$. De esta forma se puede determinar el filtro $\Phi(f)$.

Para ver la utilidad de filtro óptimo, así como las dificultades que presenta su aplicación consideraremos el caso de una señal $s(t)=\cos 2\pi ft$ a la que le sumamos ruido gaussiano $n(t)$, con lo que se obtiene la función $c(t)$. Nuestro objetivo es aplicar la transformada de Fourier y el concepto de filtro óptimo para recuperar la señal $s(t)$.

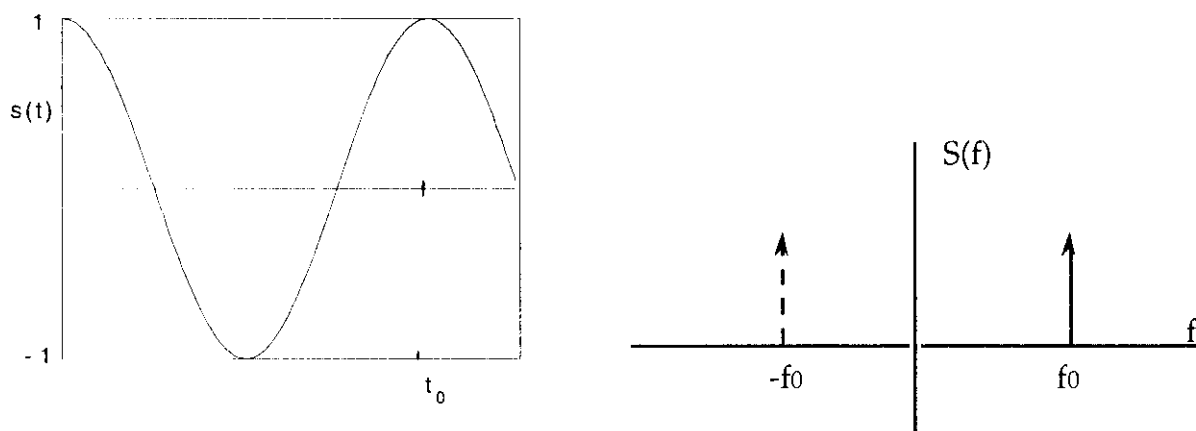


Figura 4.29: Función de la señal: (a) en el espacio de tiempos, y (b) en el espacio de fases.

Puesto que la transformada de Fourier de la función delta de Dirac:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{2\pi i f t} dt = 1 \quad (4.98)$$

Según se desprende de aplicar (4.58) resulta que:

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad (4.99)$$

Si se aplica la propiedad de desplazamiento temporal (4.39) resulta:

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{2\pi i f t_0} \quad (4.100)$$

Teniendo en cuenta la propiedad de simetría de (4.36) tenemos que:

$$e^{-2\pi i f_0 t} \leftrightarrow \delta(f - f_0) \quad (4.101)$$

Por lo tanto:

$$\cos 2\pi f_0 t = \frac{1}{2} (e^{2\pi i f_0 t} + e^{-2\pi i f_0 t}) \leftrightarrow \frac{1}{2} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) \quad (4.102)$$

En la figura 4.29 se ha representado la función $s(t)$ y su transformada de Fourier $S(f)$.

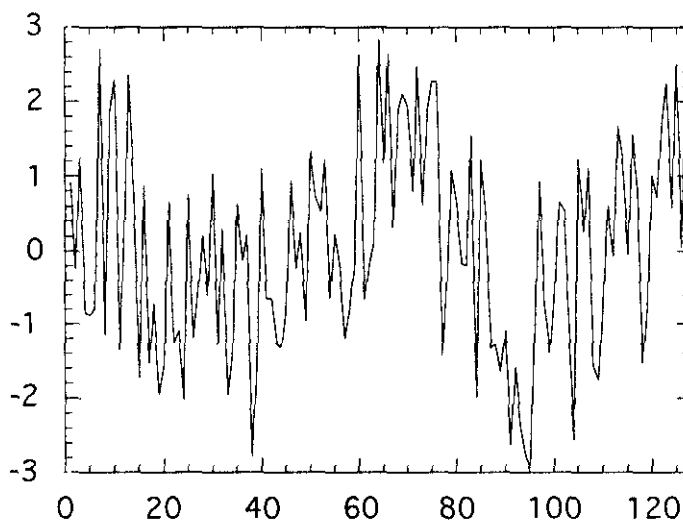


Figura 4.30: Función coseno con ruido.

En la figura 4.30, se ha dibujado la función coseno con ruido $c(t)$. Por último, en la figura 4.31 se muestra la función coseno recuperada después de haberle aplicado el filtro $\Phi(f)$.

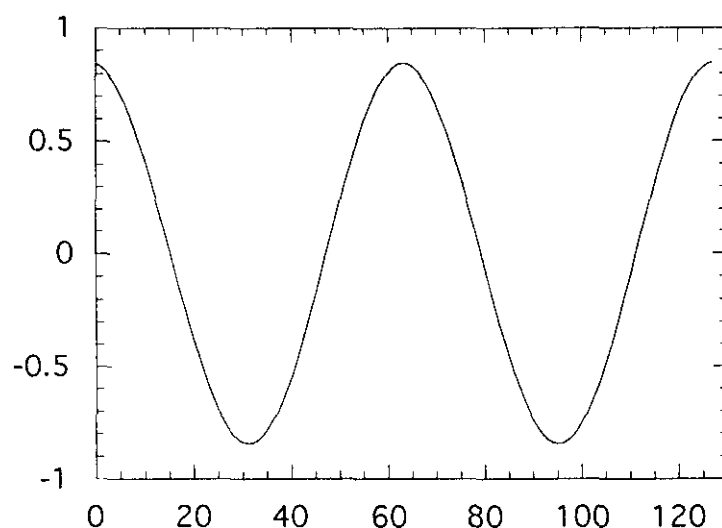


Figura 4.31: Función coseno recuperada después del filtrado.

DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA

El espectro de potencia $P(f)$ o, lo que es equivalente, la densidad espectral de potencia PSD (Power Spectral Density) de una función escalar $h(t)$ se define como el cuadrado del módulo de su transformada de Fourier $|H(f)|^2$. Esta magnitud mide la energía por unidad de tiempo o la potencia de una señal, función de la frecuencia f .

Resulta habitual determinar cuanta potencia hay contenida en el intervalo de frecuencias $(f, f+df)$ sin hacer ninguna distinción entre frecuencias positivas y negativas. En este caso se define al PSD como:

$$P(f) = |H(f)|^2 + |H(-f)|^2 \quad 0 \leq f \leq \infty \quad (4.103)$$

Si $h(t)$ es una función real, como ocurre normalmente en las aplicaciones económicas entonces:

$$H(f) = H(-f) \quad (4.104)$$

y por lo tanto:

$$P(f) = 2|H(f)|^2 \quad (4.105)$$

Con frecuencia el factor 2 se omite y se sigue hablando de densidad espectral de potencia.

En la práctica la PSD hay que estimarla a partir de un número finito de datos muestrales.

Si tomamos a intervalos iguales N puntos de la muestra de la función $c(t)$ y calculamos su transformada de Fourier discreta se obtiene:

$$C_k = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{2\pi i j k / N} \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (4.106)$$

El espectro de potencia para $(N/2)+1$ frecuencias o periodograma viene dado por:

$$P(0) = P(f_0) = \frac{1}{N^2} |C_0|^2$$

$$P(f_k) = \frac{1}{N^2} (|C_k|^2 + |C_{N-k}|^2) \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

$$P(f_c) = P(f_{N/2}) = \frac{1}{N^2} |C_{N/2}|^2 \quad (4.107)$$

en las que f_k está definida sólo para frecuencias cero y positivas:

$$f_k \equiv \frac{k}{N\Delta} = 2f_c \frac{k}{N} \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} \quad (4.108)$$

El periodograma es una estimación aproximada de la densidad espectral de potencia. Esta afirmación se puede justificar intuitivamente si se observa que se está calculando a partir de frecuencias separadas por un intervalo constante.

Se pueden estimar las contribuciones de las frecuencias f_i y f_{i+1} pero no podemos decir nada de la contribución de las frecuencias intermedias a la PSD. La información contenida en las frecuencias intermedias no se ha perdido sino que afecta a las frecuencias del periodograma. El valor de una componente de frecuencia f_i es una especie de media de todos los valores de las componentes que no se han estimado y que tienen frecuencias incluidas en un intervalo centrado en f_i . La amplitud de este intervalo varía de acuerdo con el tipo de periodograma empleado.

Para superar esta limitación lo más eficaz es emplear la técnica de la ventana. Los tipos de ventanas más utilizadas son las siguientes:

Ventana de Parzen:

$$w_j = 1 - \frac{\left| j - \frac{1}{2}(N-1) \right|}{\frac{1}{2}(N+1)} \quad (4.110)$$

Ventana de Welch:

$$w_j = 1 - \left(\frac{j - \frac{1}{2}(N-1)}{\frac{1}{2}(N+1)} \right)^2 \quad (4.111)$$

Ventana de Hanning:

$$w_j = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi j}{N-1} \right) \right] \quad (4.112)$$

De estas, la que goza de más popularidad es la de Parzen.

Cuando se utilizan ventanas, las ecuaciones del periodograma son las siguientes:

$$D_k \equiv \sum_{j=0}^{N-1} c_j w_j e^{2\pi j k / N} \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (4.113)$$

$$P(0) = P(f_0) = \frac{1}{W_{ss}} |D_0|^2$$

$$P(f_k) = \frac{1}{W_{ss}} \left[|D_k|^2 + |D_{N-k}|^2 \right] \quad k = 1, 2, \dots, \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \quad (4.114)$$

$$P(f_c) = P(f_{N/2}) = \frac{1}{W_{ss}} |D_{N/2}|^2$$

en la que W_{ss} viene dada por:

$$W_{ss} \equiv N \sum_{j=0}^{N-1} w_j^2 \quad (4.115)$$

La estimación de la PSD mediante el periodograma presenta además un problema de inconsistencia. El periodograma es un estimador y, por lo tanto, una variable aleatoria caracterizada por su varianza. Cuando un estimador es consistente su varianza tiende a cero cuando el número de observaciones tiende a infinito. Para explicar la inconsistencia del periodograma consideraremos dos casos. En el primero supondremos que incrementamos el número de datos de la función de muestreo, guardando el intervalo de muestreo invariable. El intervalo de Nyquist no variará, pero tendremos un mayor número de frecuencias observables que absorberán el incremento de información. Si, por el contrario, se reduce el intervalo de muestreo guardando constante el número de estimaciones por unidad de tiempo, la información adicional producirá un incremento del intervalo de Nyquist. En ninguno de los casos se reduce la varianza de la PSD.

Existen técnicas para reducir la varianza de la estimación, basadas en procedimientos de segmentación. Supongamos que se ha elegido una ventana y que los datos se agrupan en K segmentos de $N=2M$ puntos. Si se aplica la transformada de Fourier a cada segmento y se promedian los k periodogramas resultantes se obtiene una PSD estimada en M valores de la frecuencia entre 0 y f_c . Cuando se quieren procesar los datos en tiempo real el algoritmo más sencillo, desde el punto de vista de tiempo de cálculo, consiste en hacer la segmentación de los datos sin solapamiento. En este caso los $2M$ primeros datos forman el segmento 1; los siguientes $2M$ datos el segmento 2; y así sucesivamente hasta el segmento número k , cuando el total de puntos muestreados es de $2kM$. En este caso la varianza se reduce en un factor k respecto a un segmento.

En economía no se analizan los datos en tiempo real cuando se estudian los datos. En este caso un método de solape permite obtener la varianza mínima para un número fijo de datos muestreados. Resulta casi óptimo solapar los segmentos de manera que la zona de solape sea la mitad de la longitud de un segmento. El primer y segundo conjunto de M puntos constituye el segmento 1; el segundo y tercer conjunto de M puntos forman el segmento 2; y así hasta el segmento número k que estará formado por los conjuntos de orden k y $k+1$ de M puntos. El total de puntos muestreados es $(k+1)M$. La reducción en la varianza no es un factor de k ya que los segmentos no son independientes desde el punto de

vista estadístico. Se puede demostrar que la varianza se reduce en un factor $9k/11$, lo cual es mucho mejor que el factor de reducción $k/2$ que se obtendría con los mismos segmentos pero sin solapamiento.

APLICACIONES DEL ANÁLISIS ESPECTRAL

El análisis espectral permite analizar sistemas dinámicos muy diversos. En economía se aplica al estudio de la periodicidad o cuasiperiodicidad. Toda función periódica se puede descomponer mediante una serie de Fourier en componentes armónicos. Además, la transformada de Fourier de una función seno o coseno es una delta de Dirac, con lo cual, toda función periódica tendrá un espectro de frecuencia dado por infinitas deltas de Dirac. En el caso de series temporales, los datos son finitos y el análisis espectral queda limitado a una suma discreta de armónicos. Así pues, en la práctica, la obtención de picos en una PSD indica la existencia de periodicidad en el proceso estudiado.

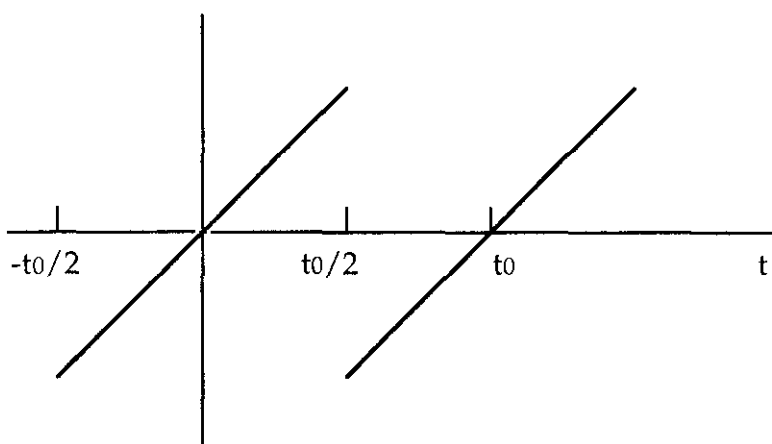


Figura 4.32: Representación de una función temporal del tipo diente de sierra.

Consideremos en primer lugar el caso de una serie temporal del tipo diente de sierra. La función continua de periodo p viene definida por:

$$h(t) = \frac{2c}{p}t \quad -\frac{p}{2} < t < \frac{p}{2} \quad (4.116)$$

y su forma se ha dibujado en la figura 4.32.

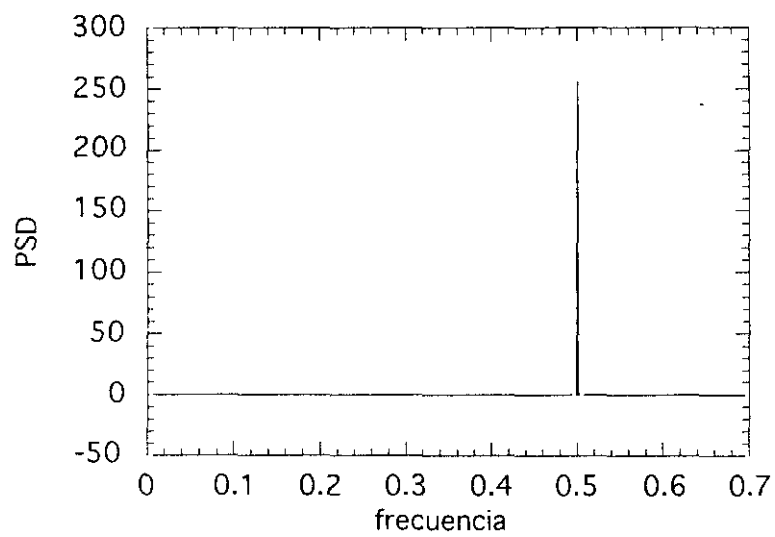
El desarrollo en serie de Fourier nos da que:

$$y = \frac{2c}{\pi} \left[\operatorname{sen} \frac{2\pi t}{p} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{4\pi t}{p} + \frac{1}{3} \operatorname{sen} \frac{6\pi t}{p} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} \frac{8\pi t}{p}, \dots, (-1)^{n+1} \operatorname{sen} \frac{2\pi n t}{p}, \dots \right] \quad (4.117)$$

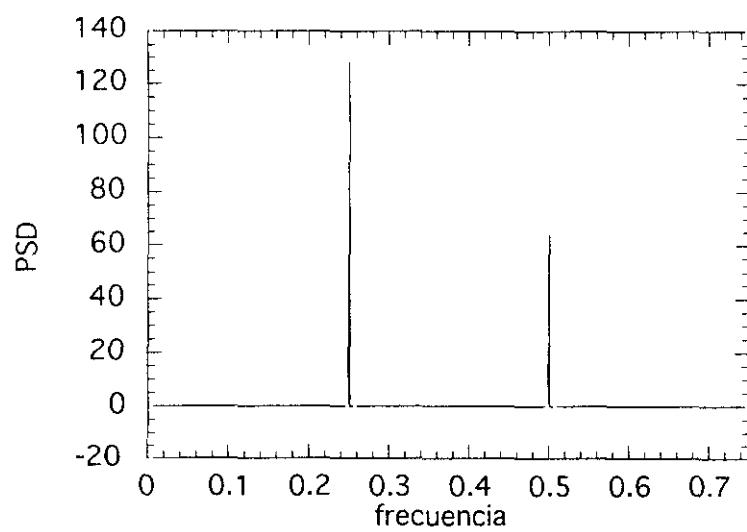
En la figura 4.33 se han representado los correspondientes PSD para $c=1$ y $p=2, 4$ y 8 . Para $p=2$, figura 4.33 (a), se obtiene un sólo pico en el intervalo de frecuencias entre 0 y f_c , según el criterio de Nyquist. En cambio para $p=4$, figura 4.33 (b), se obtienen 2 picos y para $p=8$, figura 4.33 (c), resultan 4 picos. Estos picos se producen a frecuencias que son múltiplos de $1/p$.

Con estos ejemplos se ve claramente que el carácter periódico de un modelo es fácilmente detectable y que su espectro en el espacio de fase consiste enteramente en funciones delta. Hay que evitar la inclusión de transitorios ya que estos podrían generar picos similares a los producidos por un modelo periódico.

Un modelo cuasiperiódico que implique variar frecuencias fundamentales f_1, \dots, f_n presentará un espectro de potencia con funciones delta para cada una de las frecuencias fundamentales y también todas las combinaciones lineales de las mismas con coeficientes enteros.



(a)



(b)

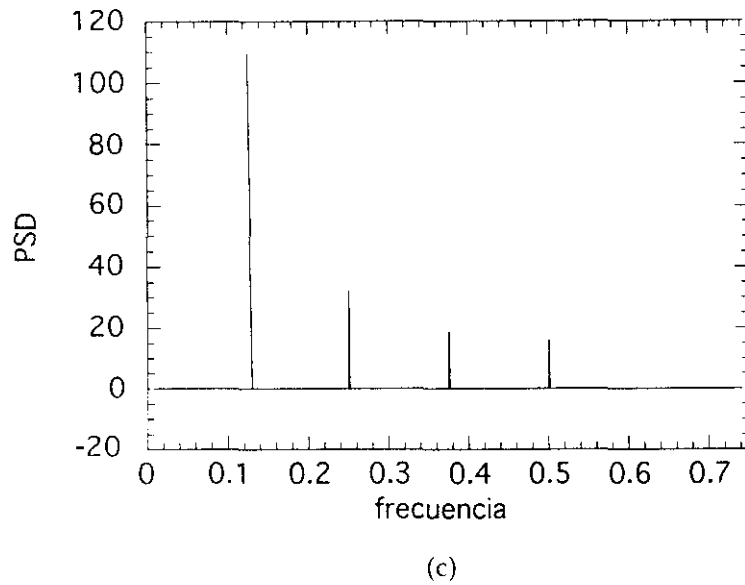


Figura 4.33: PSD de la función diente de sierra para (a) $p=2$, (b) $p=4$, y (c) $p=8$.

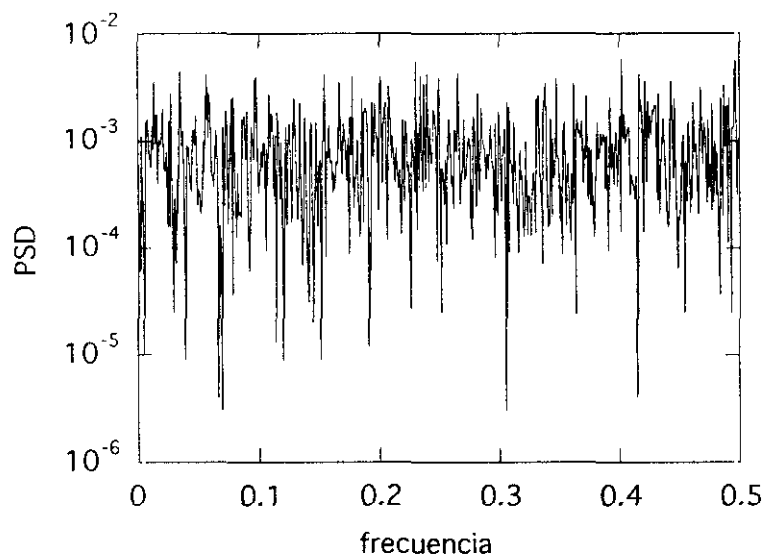


Figura 4.34: PSD de ruido blanco.

En la figura 4.34 se ha representado la PSD de una serie temporal representada por ruido blanco. Como puede observarse en el gráfico existen componentes para todas las frecuencias, lo que indica que el espectro de amplitud debería ser constante, o en otros términos independiente de la frecuencia.

DENSIDAD ESPECTRAL Y MOVIMIENTO BROWNIANO FRACCIONAL

Supongamos una función temporal $x(t)$. Si se define la transformada de Fourier de dicha función se tiene:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{2\pi ift} dt \quad (4.118)$$

La densidad espectral de potencia es:

$$P(f) = |X(f)|^2 \quad (4.119)$$

La función de correlación $C(\tau)$ mide como las fluctuaciones de $x(t)$ están correlacionados en los tiempos t y $t+\tau$:

$$C(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle \quad (4.120)$$

donde $\langle \dots \rangle$ significa la media conjunta.

$P(f)$ y $C(\tau)$ no son independientes, sino que están relacionados por las expresiones de Wiener-Khintchine:

$$\begin{aligned}
 P(f) &\propto \int C(\tau) \cos 2\pi f \tau \, d\tau \\
 C(\tau) &\propto \int P(f) \cos 2\pi f \tau \, df
 \end{aligned}
 \tag{4.121}$$

Mediante los algoritmos de FFT se puede calcular $P(f)$ y de ella estimar $C(\tau)$.

El ruido blanco $w(t)$ no tiene correlaciones en el tiempo, es decir, el futuro es independiente del pasado. Por ello su densidad espectral es una constante con igual potencia en todas las frecuencias, su gráfico tendría la forma de la figura 4.35, es decir, el espectro de potencias es una banda ancha horizontal.

Para un movimiento Browniano $X(t)$, que es la suma de ruidos blancos, es decir: $X(t) = \int w(t) \, dt$ la media de la distancia recorrida en un tiempo T es:

$$\Delta X(t) = \left\langle |X(t + \tau) - X(t)|^2 \right\rangle^{1/2} \propto T^{1/2}$$

y

$$P(f) \propto \frac{1}{f^2} \tag{4.122}$$

La densidad espectral de potencia para un movimiento Browniano ordinario tiene la forma que aparece en la figura 4.36. Es decir que si se realiza un ajuste por mínimos cuadrados de espectro de potencia se obtiene una recta con pendiente -2.

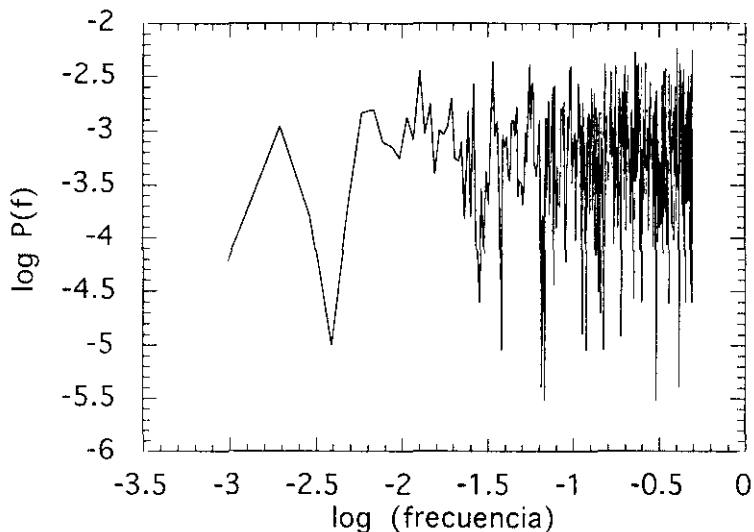


Figura 4.35: Función de densidad espectral para una serie de ruido blanco.

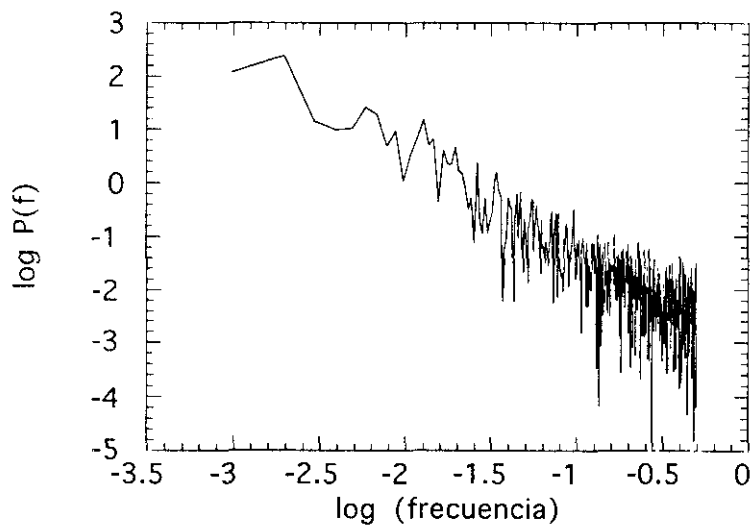


Figura 4.36: Función de densidad espectral para un movimiento Browniano ordinario.

Sin embargo muchos fenómenos, como ya hemos dicho, siguen un movimiento Browniano fraccional $B_H(t)$ que está caracterizado por un parámetro H de forma que $H \in (0,1)$. En este caso:

$$\Delta B_H(t) = \left\langle |B_H(t+\tau) - B_H(t)|^2 \right\rangle^{1/2} \propto T$$

y

$$P_H(f) \propto \frac{1}{f^\alpha} \tag{4.123}$$

donde $\alpha=2H+1$.

De todo esto podemos concluir que cuando $H=0$, $B_H(t)$ es ruido $1/f$ también llamado ruido rosa. Cuando $H=1/2$, $B_H(t)$ es ruido $1/f^2$ o movimiento Browniano ordinario.

4.3. EL ESTADÍSTICO BDS

Basándose en el cálculo de la integral de correlación definida en el Capítulo 3, Brock, Dechert y Scheinkman (1987)¹² desarrollan un test denominado BDS. La hipótesis nula para dicho test es que una serie temporal esté independientemente e idénticamente distribuida (i.i.d.).

El estadístico BDS se calcula de la siguiente forma:

Sea una serie temporal x_t para $t=1, \dots, T$, si se construye para esta serie un conjunto de vectores n dimensionales según se explica en el

¹² Brock W., Dechert W. y Scheinkman J. (1987) "A Test for Independence Based on the Correlation Dimension", Working Paper, University of Wisconsin at Madison, University of Houston and University of Chicago.

capítulo 3 siendo n la dimensión de inserción, la integral de correlación será:

$$C_n(\varepsilon) = \frac{2}{T_n(T_n - 1)} \sum_{t,s} Z(\varepsilon - |x_t - x_s|) \quad (4.124)$$

donde $T_n = T - n + 1$ y Z es una función de Heaviside que toma el valor 1 si $\varepsilon - |x_t - x_s| > 0$ y el valor 0 en el caso contrario.

Bajo la hipótesis nula de que la serie x_t es i.i.d. se cumple que:

$$C_n(\varepsilon) = C_1(\varepsilon)^n \quad (4.125)$$

Por lo tanto $C_n(\varepsilon) - C_1(\varepsilon)^n$ sigue una distribución normal con media 0 y varianza

$$\sigma_n^2 = 4 \left(K^n + 2 \sum_{j=1}^n K^{n-j} C^{2j} + (n-1)^2 C^{2n} - n^2 K C^{2n-2} \right) \quad (4.126)$$

en la que $C=C(\varepsilon)$ que se puede estimar consistentemente como $C_1(\varepsilon)$ y $K=K(\varepsilon)$ que se puede estimar mediante la expresión:

$$K(\varepsilon) = \frac{6}{T_n(T_n - 1)(T_n - 2)} \sum_{t < s < r} h_\varepsilon(x_t, x_s, x_r) \quad (4.127)$$

en la que:

$$h_{\varepsilon}(x_t, x_s, x_r) = \frac{1}{3} [Z(x_t, x_s)Z(x_s, x_r) + Z(x_t, x_r)Z(x_r, x_s) + Z(x_s, x_t)Z(x_t, x_r)]$$

por lo que el estadístico BDS es:

$$W_n(\varepsilon) = T^{1/2} (C_n(\varepsilon) - C_1(\varepsilon)^n) / \sigma_n(\varepsilon) \quad (4.128)$$

El gráfico de recurrencia, que es un instrumento que permite detectar el cambio estructural en los datos, está muy relacionado con el cálculo de la integral de correlación y con el estadístico BDS.

En un gráfico de recurrencia cada eje representa la longitud de tiempo estudiada. Se construyen vectores según se indica en el capítulo 3 haciendo $\tau=1$. Supongamos que se denominan a dos vectores construidos de dicha forma x_t^n y x_s^n para una dimensión de inserción n . Cuando $d(x_t^n, x_s^n) < \varepsilon$ se dibuja un punto en el gráfico, siendo d una medida de la distancia, en el presente trabajo la distancia euclidiana y ε una distancia mínima, por el contrario si $d(x_t^n, x_s^n) \geq \varepsilon$ no se dibuja ningún punto en el gráfico.

Cuando un punto (t,s) está oscurecido significa que x_t^n y x_s^n están a una distancia menor que ε uno del otro. La posibilidad de que se oscurezca un punto es la integral de correlación $C_n(\varepsilon)$, si la serie es i.i.d. la probabilidad de que se oscurezcan los puntos de la gráfica será uniforme. La figura 4.37 muestra el gráfico de recurrencia para una distribución normal de variables aleatorias.

Si en el gráfico aparecen áreas claras significa que puntos distantes están ocurriendo en un periodo de tiempo muy pequeño, por el contrario, las áreas oscuras indican que muchos de los puntos cercanos ocurren en un periodo de tiempo corto. En ambos casos se está violando la hipótesis de distribución independiente e idéntica de las variables. Por otro lado, la existencia de cuadros oscuros simétricos sobre la diagonal implica periodos de estabilidad y escasa volatilidad. Un cambio abrupto de una zona clara a una oscura indica un brusco cambio en la dinámica entre dos periodos, lo

que hace que el gráfico de recurrencia sea una buena forma de observar cambios estructurales en los datos económicos.

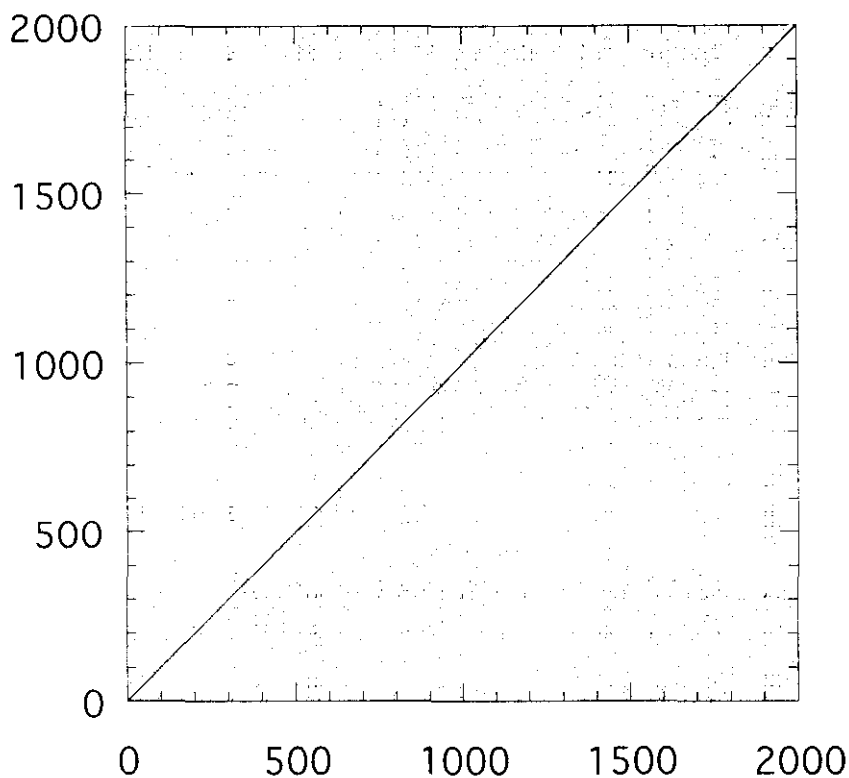


Figura 4.37: Gráfico de recurrencia para una serie distribuida i.i.d.

Brock, Hsieh y LeBaron (1991)¹³ obtienen mediante simulaciones de Montecarlo la distribución asintótica del estadístico BDS para muestras finitas. Las conclusiones a las que llegan son que para $n=2$ la distribución del estadístico se acerca tanto más a la normal cuanto mayor sea el tamaño

¹³ Brock, W. A., Hsieh, D. A. y LeBaron, B. *Nonlinear Dynamics, Chaos and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence*. MIT Press, Cambridge, MA. 1991.

muestral y mayor sea el rango de ϵ . Si la muestra es pequeña, $T < 500$ la aproximación no es muy buena. Si aumenta n y la muestra permanece fija el comportamiento del estadístico empeora, debiéndose esto a que cuanto mayor es n menor es el número de observaciones. Para conseguir un buen comportamiento del estadístico, el tamaño muestral debe ser superior a 500, la dimensión de inserción debe ser 5 o inferior y ϵ debe estar entre 0.5 y 2 desviaciones típicas de los datos. La potencia del estadístico BDS se analiza también en Brock, Hsieh y LeBaron (1991). Se prueban siete alternativas a la hipótesis de i.i.d.: estas son $AR(1)$, $MA(1)$ que corresponden a modelos lineales TAR (threshold autoregressive), NMA (nonlinear moving average), $ARCH$ (autorregresive conditional heteroskedasticity) y $GARCH$ (generalized ARCH) que son modelos no lineales estocásticos y, además, el modelo del aplicación "tienda" que es un modelo caótico determinista. El estadístico BDS puede detectar todos estos modelos. Por ello, el BDS se debe aplicar a una serie preblanqueada. Si existe alguna relación lineal el estadístico la detectará, así que, para poder utilizarlo como test para detectar la no linealidad de la serie es necesario eliminar toda la dependencia lineal. En nuestro caso aplicaremos el BDS a los residuos de un $AR(p)$ que se identificará para la serie temporal.

El rechazo de la hipótesis nula de i.i.d. de una serie no implica que esta sea caótica, aunque si se ha limpiado la serie de toda dependencia lineal, el test detectará todo comportamiento no lineal; lo que no puede distinguir el test es si la no linealidad proviene de una serie caótica o de un proceso no lineal estocástico.

En el presente trabajo se han probado los resultados del estadístico BDS para dos distribuciones que son i.i.d y para algunos modelos utilizados en economía como son:

- NMA (nonlinear moving average):

$$x_t = u_t + \gamma u_{t-1} u_{t-2} \quad u_t \sim N(0,1)$$

para $\gamma=0.6$.

-ARCH (autorregresive conditional heteroskedasticity):

$$x_t = \sigma_t u_t$$

$$\sigma_t^2 = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1}^2 \quad u_t \sim N(0,1)$$

para $\phi_0=1$ y $\phi_1=0.5$.

GARCH (generalized ARCH):

$$x_t = \sigma_t u_t$$

$$\sigma_t^2 = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1}^2 + \psi \sigma_{t-1}^2 \quad u_t \sim N(0,1)$$

para $\phi_0=1$ y $\phi_1=0.2$ y $\psi=0.7$.

Las tablas 4.3 a 4.7 muestran los resultados del estadístico para los modelos anteriores para series de 700 datos cada una, de forma que los de las dos primeras permiten aceptar la hipótesis nula, mientras que los de las siguientes, que corresponden a modelos no lineales, permiten rechazar la hipótesis de independencia en las series.

Tabla 4.3: Resultados del estadístico BDS para una distribución uniforme.

n	ϵ/σ			
	0.5	1	1.5	2
2	-2.546694	0.292952	0.382654	0.717852
3	-0.494468	1.085971	1.128429	1.463283
4	-5.461785	0.744064	0.939361	1.36267
5	0.209639	1.192983	1.500721	1.900002

Tabla 4.4: Resultados del estadístico BDS para una distribución Normal (0,1).

n	ϵ/σ			
	0.5	1	1.5	2
2	1.642312	2.110843	2.201454	2.210538
3	1.439007	2.012179	1.993658	1.797801
4	1.364839	1.737128	1.650144	1.400758
5	0.964990	1.464809	1.421657	1.144445

Tabla 4.5: Resultados del estadístico BDS para un modelo NMA.

n	ϵ/σ			
	0.5	1	1.5	2
2	6.470622	6.562157	6.963266	7.386632
3	8.940800	8.796130	8.588568	8.654159
4	10.165645	9.425358	8.517922	8.181867
5	10.516976	9.303860	8.073116	7.475482

Tabla 4.6: Resultados del estadístico BDS para un modelo ARCH.

n	ϵ/σ			
	0.5	1	1.5	2
2	10.634527	10.881483	10.504183	9.989569
3	11.388490	11.092144	10.372041	9.412835
4	11.270882	10.708540	9.798040	8.679775
5	11.343715	10.343715	9.052760	7.933683

Tabla 4.7: Resultados del estadístico BDS para un modelo GARCH.

n	ϵ/σ			
	0.5	1	1.5	2
2	4.019930	4.918412	5.090114	5.413928
3	4.507176	5.328273	5.261669	5.208007
4	4.332092	5.303943	4.936153	4.772433
5	3.136466	4.996359	4.497921	4.245135

CAPÍTULO 5

ANTECEDENTES EN EL ESTUDIO DE LOS MERCADOS DE CAPITALS

Uno de los temas más estudiado y analizado por parte de los economistas es el comportamiento de los mercados financieros. La explicación de por qué se producen fluctuaciones en los precios y el deseo de predecir éstas ha suscitado gran cantidad de trabajos con desiguales resultados.

La teoría más extendida dentro del mundo académico es la Hipótesis de los Mercado Eficientes (EMH) que propugna que los activos reflejan toda la información pública disponible. Es, por tanto, imposible realizar predicciones sobre el comportamiento de los precios de las acciones.

Dentro del mundo no académico los analistas bursátiles rechazan esta teoría y se basan para hacer sus predicciones principalmente en dos métodos: el análisis técnico y el análisis fundamental.

En los últimos años la Hipótesis de Mercado Eficiente ha sufrido numerosos ataques. Muchos de los estudios recientes parecen contradecir la

teoría del camino aleatorio y por tanto la impredecibilidad en el comportamiento de los precios de las acciones.

5.1 EL ANÁLISIS TÉCNICO

Los analistas técnicos basan su política de inversión en el comportamiento del mercado en sí mismo. Es decir, intentan predecir los precios estudiando su pasado; piensan que los cambios en la oferta y en la demanda pueden anticiparse observando los "charts"¹, a fin de detectar pautas en los precios de las acciones.

Tradicionalmente, el mundo académico no ha aceptado el análisis técnico, debido, principalmente, a su falta de fundamento teórico y, además, porque era contrario a la teoría sobre la eficiencia de los mercados de activos. Sin embargo, en los últimos años ha tenido un auge considerable, de forma que algunos trabajos recientes² intentan contrastar si las reglas de comercio técnicas pueden aportar beneficios.

Vamos a explicar aquí dos de las reglas técnicas más simples, la regla del oscilador de media móvil y la regla de filtrado.

En la regla del oscilador de media móvil, las señales de compra y venta se generan con dos medias móviles del índice, una a corto plazo y otra a largo plazo. La estrategia en su forma simple consiste en comprar cuando la media móvil de periodo corto sube por encima de la del periodo largo y vender cuando cae por debajo.

Esta regla de media móvil se puede mejorar si se introduce una banda alrededor de la media móvil. Con esto se consigue reducir las señales

¹ A los analistas técnicos también se les denomina también "chartistas".

² Brock, W., Lakonishok, J. y LeBaron, B. (1992): "Simple Technical Trading Rules and the Stochastic Properties of Stock Returns". *Journal of Finance* 5. 1731-1766.

Levich, R. M., Thomas, R. L. (1993) "The Significance of Technical Trading-rule Profits in the Foreign Exchange Market: a bootstrap approach". *Journal of International Money and Finance*. 12. 451-474.

LeBaron, B. (1990) "Technical Trading Rules and Regime Shifts in Foreign Exchange". Working paper, University of Wisconsin-Madison.

de compra o venta debido a que la señal de compra aparece únicamente cuando la media móvil corta está por encima de la media móvil larga en una cantidad superior a la banda, es decir, mientras se encuentre dentro de la banda no habrá señal alguna.

En la regla de filtrado se genera una señal de compra cuando el precio alcanza un nivel de resistencia. Este nivel de resistencia se define como el máximo local. Normalmente, los agentes intentan vender siempre en el pico y, debido a la presión de venta, el precio se resistirá al alza, pero si el precio sube por encima del pico anterior, se habrá roto la resistencia y esto producirá una señal de compra. O sea, que se recomienda comprar cuando el precio sube un tanto por ciento por encima del último pico y vender cuando baja un tanto por cien por debajo de último mínimo.

5.2. EL ANÁLISIS FUNDAMENTAL

Los analistas fundamentales se basan en el valor real o intrínseco de una acción. Si el precio de la acción está por encima de su valor fundamental, venderán porque tienen la esperanza de que el precio va a bajar, si, por el contrario, el precio de la acción está por encima de su valor fundamental comprarán.

Los fundamentalistas consideran que el valor de una acción es el valor actual de los beneficios totales que se espera obtener de ella. Estos beneficios dependen, de la tasa de crecimiento de la empresa y de la duración de dicha tasa de crecimiento; cuanto mayores sean ambas mayor será el beneficio esperado y, por tanto, mayor será el valor intrínseco. Otro factor del que dependen los beneficios es la expectativa de reparto de dividendos, cuanto mayores sean, mayor será el valor fundamental. Además, el valor fundamental dependerá también de otros factores como son, el grado de riesgo y el nivel de tipos de interés de la economía, cuanto mayores sean éstos menor será el valor intrínseco del título.

Durante los últimos veinticinco años, en el mundo académico, el análisis fundamental ha permanecido estancado. Recientemente, debido a

las anomalías detectadas en el mercado que ponen en cuestión la Hipótesis de los Mercados Eficientes, han aparecido trabajos que aportan ideas nuevas en la teoría fundamental. Destacaremos aquí dos de ellos: el de Ou y Penman (1989)³, que intenta explotar la información obtenida mediante el estudio del estado financiero de una empresa para predecir rentabilidades extraordinarias, y el de Fama y French (1993)⁴, que estudia el tamaño de la empresa y el ratio valor contable-valor de mercado de las acciones para explicar la rentabilidad media de los títulos. Ambos trabajos han recibido importantes críticas en su punto más débil, que en ambos casos reside en la carencia de soporte conceptual para los resultados empíricos que sustentan las conclusiones; pero es innegable que han abierto una vía para el resurgimiento del análisis fundamental.

5.3 LA HIPÓTESIS DE MERCADO EFICIENTE

La hipótesis de mercado eficiente se basa en la teoría del equilibrio competitivo aplicado a los mercados de activos. Toda la posible ventaja comparativa que pueda tener un individuo que participe en el mercado de activos se basa en la diferencia de información. Si toda la información de que dispone el individuo es universalmente conocida, entonces es imposible que pueda seguir una regla de comercio que proporcione sistemáticamente beneficios. Para los seguidores de la teoría de los mercados eficientes, la información pública es muy grande y, por tanto, es muy difícil poseer alguna información que no esté descontada en el mercado, siendo imposible seguir una regla que proporcione beneficios.

³ Ou, J. A. y Penman, S. H. (1989) "Financial Statement Analysis and the Prediction of Stock Returns". *Journal of Accounting and Economics*. 295-329.

⁴ Fama, E. F. y French, K. R. (1993) "Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds" *Journal of Financial Economics*. 33. 3-56.

Si un mercado es eficiente respecto a un conjunto de información Ψ , entonces ésta ya ha sido descontada en los precios y el individuo que la posea no tendrá ventaja comparativa sobre el resto.

Un mercado eficiente se define como un mercado donde hay un gran número de agentes racionales, maximizadores de beneficio, que tratan de predecir los valores futuros de las acciones y donde toda la información importante está disponible para todos.

Como los agentes actúan en un mercado en competencia, los precios de las acciones reflejan, tanto la información sobre aquellos hechos que ya han ocurrido, como sobre aquellos que el mercado espera que ocurran en el futuro. Toda la información se reflejará instantáneamente en los precios. Este ajuste instantáneo en un mercado eficiente implica que los cambios sucesivos en los precios de las acciones son independientes entre sí. El mercado, debido a la independencia de los cambios en los precios, funciona como un camino aleatorio; es decir, la serie de precios de las acciones no tiene memoria, por lo que el pasado de la serie no puede utilizarse para predecir el futuro. La senda que siga la serie de los precios será semejante a la que se produce cuando se suma una serie de números aleatorios, o en otros términos, a un movimiento Browniano.

Según se defina el conjunto de información Ψ , que poseen los agentes y que ya está reflejada en los precios, se pueden distinguir tres versiones de la eficiencia de mercado⁵:

Los mercados son eficientes en su forma débil si Ψ comprende los precios pasados de los activos. Así pues, basándose en los precios pasados no se puede seguir ninguna regla de comercio que proporcione beneficios sistemáticos. Los mercados asimilan la información eficientemente y es imposible predecir el precio futuro de una acción basándose en el precio pasado. Esta versión de eficiencia de mercado se enfrenta a los principios del análisis técnico que, como hemos dicho, utiliza la serie pasada de los precios de las acciones para elaborar reglas de compra o venta.

Los mercados son eficientes en su forma semifuerte si Ψ introduce toda la información disponible por el público. Por lo tanto, según esta versión, es imposible predecir el precio de una acción basándose en la información pública disponible.

⁵ Fama, E. F. (1970) "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work". *Journal of Finance*. 25. 2. 383-417.

Los mercados son eficientes en su forma fuerte si Ψ incluye, además de la información disponible por el público, información no pública. Es imposible, según esta versión, predecir el precio de una acción sea cual fuere el conjunto de información que se posea.

Las formas fuerte y semifuerte van en contra de las bases del análisis fundamental, ya que todo lo que se pueda saber en relación con el crecimiento esperado de los beneficios o con la evolución de la empresa ya está descontado en el precio.

Por la propiedad de las esperanzas condicionadas, la eficiencia en la forma fuerte implica eficiencia en la forma semifuerte y ésta, a su vez, implica eficiencia en la forma débil.

El primero de los trabajos empíricos para comprobar la teoría del camino aleatorio fue el de Bachelier (1900) que estudia el movimiento de los precios de las acciones y concluye que los precios especulativos se comportan como un juego justo, con lo que la esperanza de ganancia de un especulador es siempre cero.

Los estudios posteriores sobre la eficiencia de mercado tratan de contrastar la hipótesis del camino aleatorio. Desde mediados de 1950 hasta mediados de 1960, diversos trabajos muestran evidencias de que el comportamiento de los rendimientos de los activos puede aproximarse por un camino aleatorio

Si las series siguen un camino aleatorio es imposible obtener beneficios sistemáticos siguiendo alguna regla de compra. Alguna de la literatura del camino aleatorio intenta comprobar la capacidad de obtener beneficios sistemáticos, pero la mayoría quiere contrastar que los cambios sucesivos en los precios de las acciones son estadísticamente independientes. Uno de los tests más utilizados se basa en los coeficientes de correlación. En la mayoría de los estudios realizados⁶ se obtienen unos coeficientes de correlación serial semejantes a cero, lo que en principio parece apoyar la teoría de que no existe ningún tipo de dependencia en los

⁶ Algunos de los trabajos que obtienen los coeficientes de correlación serial para los precios de las acciones son:

Kendall, M. G. (1953) "The Analysis of Economic Time Series". *Journal of the Royal Statistical Society*. Serie A. 96. 11-25.

Cootner, P. H. (1962) "Stock Prices: Random vs. Systematic Changes". *Industrial Management Review*. 3. 24-45.

Fama, E. F. (1965) "The Behavior of Stock Market Prices". *Journal of Business*. 38. 34-105.

cambios sucesivos en los precios, comportándose éstos como un camino aleatorio.

El que la serie de precios bursátiles siga un camino aleatorio implicaría que la formación de los precios de los activos no se rige por las leyes de la oferta y la demanda, que son las causantes de la formación de precios de otros tipos de bienes. Según los seguidores del camino aleatorio, es la racionalidad de los individuos la que provoca el comportamiento aleatorio de los precios; si los individuos son racionales, se producirá un ajuste instantáneo de los precios a toda información nueva que llegue al mercado. Pero esta justificación sobre la racionalidad de los individuos también puede proporcionar un razonamiento contrario a la hipótesis del camino aleatorio, por un lado, como ya se ha dicho, no es posible que existan pautas de comportamiento en los precios de las acciones porque implicaría que los individuos no son racionales, pero, por otro lado, parece que los inversores no son racionales porque pierden su tiempo y dinero buscando como invertir para obtener beneficios, según expone LeRoy(1989)⁷.

Un modelo menos restrictivo que el del camino aleatorio es el modelo de martingala, Samuelson (1965)⁸ es el primero que estudia la posible relación entre la eficiencia de mercado y las martingalas.

Un proceso estocástico x_t es una martingala, respecto a un conjunto de información Ψ , si tiene la propiedad:

$$E(x_{t+1} / \Psi_t) = x_t \quad (5.1)$$

lo que equivale a decir que la mejor predicción de x_{t+1} con la información Ψ actual es x_t .

Un proceso estocástico y_t es un juego justo si:

⁷ LeRoy, S. (1989) "Efficient Capital Markets and Martingales". *Journal of Economic Literature*. 27. 1583-1621.

⁸ Samuelson, P. A.(1965) "Proof That Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly". *Industrial Management Review*. 6. 41-49.

Similares resultados se ofrecen en Mandelbrot, B. (1966) "Forecasts of Future Prices, Unbiased Markets and Martingale Models". *Journal of Business*. 39. 1. 242-255.

$$E(y_{t+1} / \Psi_t) = 0 \quad (5.2)$$

o también, y_t es un juego justo si y_{t+1} no se puede predecir dado Ψ_t .

Resulta evidente que x_t es una martingala si $x_{t+1} - x_t$ es un juego justo. Es posible afirmar entonces que la variación en los precios es un juego justo si y sólo si la serie de precios es una martingala⁹.

Si por ejemplo, los agentes conocieran la variación de los precios pasados y fueran capaces de utilizarlos para predecir la variación en los precios futuros, entonces los precios no seguirían un juego justo. Muchos de los tests empíricos del modelo de martingala intentan probar que es imposible, conociendo los rendimientos pasados, obtener buenas predicciones de los rendimientos futuros.

Admitir que x_t sigue un camino aleatorio en sentido estricto es más restrictivo que decir que x_t sigue una martingala, ya que ésta última elimina cualquier dependencia de la esperanza de $x_{t+1} - x_t$, con la información disponible en t , mientras que el camino aleatorio elimina la dependencia con momentos condicionales superiores de x_{t+1} .

Samuelson afirma que el modelo de martingala se cumple cuando todos los agentes tienen preferencias iguales, constantes en el tiempo y, además, son neutrales al riesgo. Esto es equivalente a aceptar que los inversores preferirán mantener aquel activo que proporcione una tasa de rendimiento mayor, ignorando la diferencia en el riesgo que pueda existir entre los activos.

Pero el supuesto de que los agentes son neutrales al riesgo no parece muy apropiado para caracterizar el comportamiento de los inversores, así que posteriormente se intenta ampliar el modelo de martingala con el supuesto de que los agentes son adversos al riesgo. Si se supone que los precios se comportan de forma que, grandes cambios en los mismos van seguidos de grandes cambios y pequeños cambios van seguidos de pequeños cambios, el riesgo tendrá una covarianza positiva a lo largo del tiempo. En este caso, los agentes que sean adversos al riesgo mantendrán activos con riesgo sólo si la tasa de rendimiento esperada varía de forma

⁹ LeRoy, S. (1989) "Efficient Capital Markets and Martingales". *Journal of Economic Literature*. 27. 1583-1621.

que les compense por esos cambios en el riesgo. La incorporación de la aversión al riesgo en el marco de los mercados eficientes dio lugar al CAPM (Capital Asset Pricing Model)¹⁰. El CAPM supone que las expectativas de los individuos respecto a la tasa de rendimiento de los activos son homogéneas. Los agentes prefieren aquel activo que proporciona una mayor tasa de rendimiento para un nivel de riesgo, siendo siempre adversos al riesgo. Por lo tanto, el precio del activo es equivalente al rendimiento descontado esperado menos una corrección que refleja el riesgo y la aversión al riesgo. Tanto la primera versión del CAPM, como su versión posterior intertemporal, implican que es posible predecir el precio del activo mediante el rendimiento descontado esperado, lo cual contradice el modelo de martingala y juego justo.

La evidencia empírica obtenida del estudio de la eficiencia en los mercados es contradictoria. Por un lado parece que pares de cambios sucesivos en los precios de distinto signo ocurren mucho más a menudo que cambios del mismo signo, según Niderhoffer y Osborne (1966)¹¹, lo cual parece contradecir la hipótesis de las martingalas. Por otro lado se ha comprobado que las varianzas de las acciones no son constantes en el tiempo¹². Además, parece que existen algunas anomalías relacionadas con el calendario, como por ejemplo el llamado efecto Enero¹³.

Según la teoría del CAPM las acciones con más riesgo deben proporcionar un rendimiento mayor. Tinic y West (1984)¹⁴ encontraron que se cumple esta relación entre riesgo y rendimiento únicamente en el mes de Enero, pero no pudieron rechazar la hipótesis de que durante el

¹⁰ Sharpe, W. F. (1964) "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Condition of Risk". *Journal of Finance*. 19. 4. 425-442.

¹¹ Niderhoffer, V. y Osborne, M. F. M. (1966) "Market Making and Reversal of the Stock Exchange". *Journal of American Statistic Association*. 61. 613.897-916.

¹² Mandelbrot (1963) "The Variation of Certain Speculative Prices". *Journal of Business*. 36. 392-417.

¹³ Sobre este asunto puede consultarse Thaler, R. H. (1987) "Anomalies: The January Effect". *Journal of Economic Perspectives* 1. 1. 197-201.

Clark, R. y Ziemba, W. T. (1987) "Playing the Turn-of-the-Year Effect with Index Futures". *Operations Research*. 35. 6. 799-813.

¹⁴ Tinic, S. M. y West, R. R. (1984) "Risk and Return: January vs. the Rest of the Year". *Journal of Financial Economics*. 13. 4. 561-74.

resto de meses del año los inversores no se vieran compensados con un rendimiento mayor cuando incurren en un riesgo mayor.

Existen además evidencias en contra del comportamiento racional de los individuos cuando compran o venden acciones, sobre este asunto puede consultarse Miller (1977)¹⁵.

Otro argumento contra la eficiencia de mercado es el alto volumen de comercio en los mercado financieros, de modo que sólo una parte del comercio que se realiza en el mercado se hace de forma racional, comprando o vendiendo según el riesgo; la mayoría de las transacciones se basan en que los inversores creen que pueden ser más listos que el resto, lo cual podría considerarse que está en contra de lo que se entiende como racional.

Además, en las ventas masivas de acciones, como las que ocurrieron en Octubre de 1987, sin que aparezcan nuevas noticias en el mercado, también parecen inexplicables desde el punto de vista de la eficiencia en el mercado.

Todas estas anomalías parecen rechazar empíricamente el modelo de martingala, basado principalmente en que los agentes son racionales y adversos al riesgo y tienen un mismo horizonte de inversión.

El comportamiento de los inversores parece que puede depender de sus horizontes de inversión: un inversor con un horizonte de inversión corto (diario) se preocupará por conseguir el precio más alto del día si vende y el más bajo si compra. A este tipo de inversor no le preocupará el valor intrínseco de la acción. Por otro lado, el agente con un horizonte de inversión largo, observará con más atención el estado de la economía y la evolución de los precios a largo plazo. Pero, por ejemplo, cuando ocurre un acontecimiento inesperado en el mercado, es posible que el inversor con un horizonte de inversión largo salga del mercado o cambie su horizonte de inversión y se convierta un inversor a corto. Así pues, un horizonte de inversión se puede acortar cuando los inversores sienten que la información "fundamental" que utilizan en el largo plazo, ya no es importante, por ejemplo, en periodos de crisis. Según Peters (1995)¹⁶ es la existencia de distintos horizontes de inversión lo que da estabilidad al

¹⁵ Miller, E. M. (1977) "Risk, Uncertainty and Divergence of Opinion". *Journal of Finance*. 32. 4. 1151-1168.

¹⁶ Peters, E. E. *Fractal Market Analysis*. John Wiley & Sons. 1994. Pag 272.

mercado. Cuando todos los agentes tienen los mismos horizontes de inversión el mercado se vuelve inestable.

La información, por lo tanto, no tiene un impacto uniforme sobre los precios y tiene efectos distintos, dependiendo del horizonte de inversión de los participantes en el mercado.

Normalmente se identifica eficiencia de mercado con el modelo de martingala junto con expectativas racionales de los agentes. Dicho modelo se justifica por la sencillez de las herramientas estadísticas necesarias para su estudio, aunque parece que no se ajusta a la realidad. Parece más apropiado intentar modelizar el comportamiento del mercado mediante dinámica compleja, donde se reflejen los posibles tipos de comportamientos de los agentes ante la llegada de nueva información y los efectos de los "shocks" exógenos.

UN MODELO SENCILLO

El comportamiento de los mercados de activos, es, sin duda, complejo y la modelización de su dinámica difícil. Tradicionalmente, como se ha expuesto en el capítulo anterior, se ha considerado que las perturbaciones en los precios de los activos se producen debido a la llegada de nueva información a los mercados.

Recientemente, sin embargo, empieza a tomar importancia en la modelización de los mercados de activos el papel que la forma de pensar de los inversores tiene en el movimiento de los precios de las acciones. Peters (1994)¹ explica que los inversores no son homogéneos y reaccionan de distinta forma ante la llegada de nueva información, guiándose sobre todo por sus horizontes de inversión. Smith et al. (1988)² muestran que pueden aparecer burbujas generadas psicológicamente en un mercado.

¹ Peters, E. E. *"Fractal Market Analysis"*. John Wiley & Sons.1994. 42-44.

² Smith, V., Suchanek, G. L. y Williams, A. W. "Bubbles, Crashes and Endogenous Expectations in Experimental Spot Asset Markets". *Econometrica* 56. 1119-1151.

Un modelo que intente reflejar el comportamiento de los mercados de activos debe mostrar precios que fluctúen, donde se alternen periodos en los que se producen alzas en las cotizaciones, con periodos con bajadas de las mismas³ y con cambios repentinos de unos a otros. Zeeman (1974)⁴ utilizó la teoría de las catástrofes para explicar la alternancia entre estos periodos, así como la existencia de "crashes".

En el modelo de Zeeman, así como en muchos anteriores y como en Fernandez-Diaz et al. (1994)⁵, existen dos tipos de agentes que participan en el mercado: los inversores fundamentales, que toman sus decisiones basándose en el valor intrínseco de una acción y los inversores técnicos, que se basan en la evolución pasada de los precios de las acciones para fijar su estrategia de compra.

Para el modelo del presente capítulo nos hemos basado en el propuesto por Day y Huang (1990) y Day y Huang (1993)⁶, que proponen una función de exceso de demanda de mercado y un ajuste dinámico de los precios dada dicha función de exceso de demanda.

6.1. EL INVERSOR FUNDAMENTAL

El inversor fundamental se basa, como ya se ha expuesto anteriormente, en el valor fundamental o intrínseco de un activo. Si el precio del activo está por debajo del valor fundamental, compra y, si está por encima, vende.

³ Mercados alcistas y mercados bajistas: "bull and bear markets".

⁴ Zeeman, E. C. (1974) "On the Unstable behaviour of Stock Exchanges" *Journal of Mathematical Economics*. 1. 39-49.

⁵ Fernandez-Diaz, A., Alonso A. y Grau P. (1994) "Caos y mercado de capitales: Una introducción". *Cuadernos de Economía Aplicada*. CEURA. Madrid.

⁶ Day, R. H. y Huang, W. (1990) "Bulls, Bears and Market Sheep". *Journal of Economic Behavior and organization*. 16. 37-83.

Day, R. H. y Huang, W. (1993) "Chaotically Switching Bear and Bull Markets" en *Nonlinear Dynamics and Evolutionary Economics*. Day, R. H. y Chen, P. (eds.) Oxford University Press. 169-182.

Pero, en el mercado, los precios están fluctuando continuamente: si el precio es mayor que el valor fundamental y el inversor vende se producirán ganancias, y cuanto mayor sea el precio mayores serán éstas. Si se retrasa la decisión de inversión y el precio baja, se habrá perdido una oportunidad de obtener beneficios. Así pues, cuanto mayor sea el precio, mayor será la posibilidad de pérdida si no se compra y, lo opuesto: si el precio es inferior al valor fundamental, cuanto menor sea el precio, mayor será la posibilidad de pérdida si no se compra. Además, si el precio es igual al valor fundamental, la posibilidad de perder o ganar será nula.

Sea P_t el precio de un activo en el momento t , sea P^* el valor fundamental y sea $f(P_t)$ una función que representa la posibilidad de perder cuando no se vende si los precios de mercado son altos o, de no comprar cuando el mercado está bajo.

Supongamos que el inversor se fija un precio máximo P_s y un precio mínimo P_i . Si el precio de mercado está fuera de (P_s, P_i) , el inversor no estará en el mercado. La función de demanda por parte de estos inversores será la siguiente:

$$D_{fd}(P_t) = \begin{cases} 0 & P_t > P_s \\ \alpha (P^* - P_t) f(P_t) & P_i < P_t < P_s \\ 0 & P_t < P_i \end{cases} \quad (6.1)$$

en la que α es una constante que mide la fuerza de la demanda del inversor fundamental.

Veamos un ejemplo de función de demanda de activos para este grupo de inversores. Podemos definir $f(P_t)$ como:

$$f(P_t) = [(P_s - P)(P - P_i)]^{-1} \quad (6.2)$$

si fijamos $P_s=2$, $P_i=0$ y $P^*=1$, $f(P_t)$ tendrá la forma que se muestra en la figura 6.1.

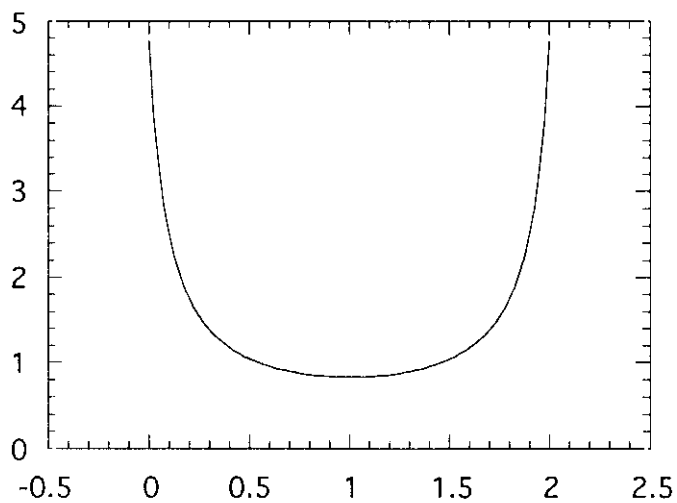


Figura 6.1: Posibilidad de incurrir en pérdidas de un inversor fundamental dado que $P_i=0$ y $P_s=2$.

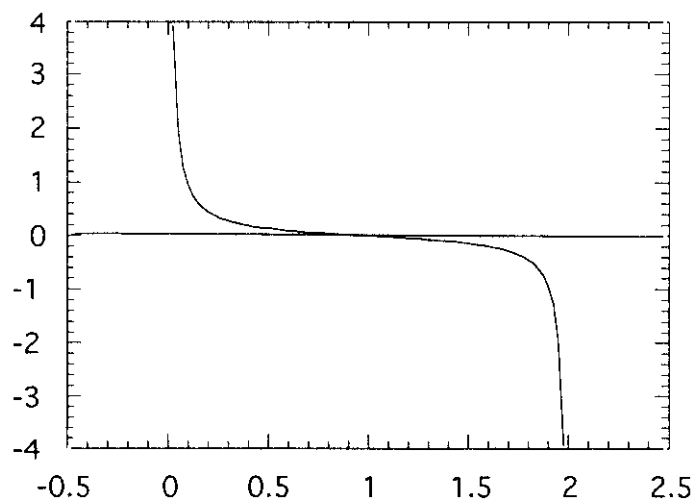


Figura 6.2: Función de demanda para un inversor fundamental para un valor de $\alpha=0.2$.

Esta función, como puede observarse, representa una posibilidad alta de tener pérdidas, cuando el precio es P_i o P_s y no se compra o se vende, y una posibilidad pequeña de incurrir en pérdidas cuando el precio está cercano a su valor fundamental.

La función de demanda para este caso será:

$$D_{fd}(P_t) = \alpha (P^* - P_t) \left(1 / (2P_t - P_t^2) \right) \quad (6.3)$$

y tendrá la forma que se representa en la figura 6.2.

Esta función de demanda es positiva, cuando el precio es inferior al valor fundamental, y mayor, cuando más alejado esté el precio de dicho valor; por el contrario, es negativa, cuando el precio es superior al valor fundamental.

6.2. EL INVERSOR TÉCNICO

El inversor técnico es el que se basa en la evolución de los precios pasados para decidir su estrategia de compra. Como se explica en el capítulo anterior existen distintas reglas técnicas para decidir la compra o la venta de acciones.

Day y Huang (1993) proponen la siguiente regla técnica simple: comprar cuando el precio sube con la esperanza de que suba más y vender cuando baja para no incurrir en pérdidas. La función de demanda tiene la forma:

$$D_{tc}(P_t) = \beta(P_t - v) \quad (6.4)$$

en la que β es una contante positiva y v es el valor fundamental.

En el presente trabajo se va a utilizar una regla un poco más complicada como es la regla de la media móvil. En este caso, la señal de compra o venta se basa en una media móvil de los precios pasados de la forma⁷:

$$ma_t = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} P_{t-i} \quad (6.5)$$

En este caso se generará una señal de compra cuando el precio actual esté por encima de la media móvil y una señal de venta si el precio está por debajo de la media móvil. Para el presente modelo fijamos $L=3$, por lo tanto, aparecerá una señal de compra si:

$$\frac{1}{3}(p_t + p_{t-1} + p_{t-2}) < p_t$$

y, si ocurre lo contrario, la señal será de venta.

Supongamos que los analistas técnicos tienen una función de demanda como la siguiente:

$$D_{tc}(P_t) = \beta (P_t - P_t^2) \quad (6.6)$$

en la que β es una constante que mide la fuerza del analista técnico. En este caso, la demanda será positiva si la señal ha sido de compra o negativa si la señal ha sido de venta.

⁷ LeBaron, B. (1991) "Technical Trading Rules and Regime Shifts in Foreign Exchange". Working Paper 9118. University of Wisconsin-Madison. pag 2.

6.3. EL COMPORTAMIENTO DEL MERCADO

La demanda total de acciones será la suma de las demandas de los dos tipos de agentes que actúan en el mercado:

$$D_T(P_t) = D_{fd}(P_t) + D_{tc}(P_t) \quad (6.7)$$

La formación de los precios se realizará de la siguiente forma: si la demanda ha sido positiva, el precio subirá en un porcentaje que denominamos γ del exceso de demanda; pero, si por el contrario, la demanda ha sido negativa, el precio bajará en una proporción γ del exceso de demanda. La siguiente función resume este comportamiento:

$$P_{t+1} = P_t + \gamma D_T(P_t) \quad (6.8)$$

en la que γ es una constante positiva.

Es decir, el comportamiento del mercado depende de los coeficientes: α , que refleja la importancia relativa de los inversores fundamentales, β , que refleja la importancia de los inversores técnicos y γ , que es un coeficiente de ajuste de los precios.

Si se utiliza la regla técnica que propone Day en (6.4), fijando $v=1$, y se ha tomando la función de demanda propuesta para los inversores fundamentales en (6.3), es posible obtener distintos resultados sobre el comportamiento de mercado según los distintos valores que pueden tomar α y β .

En este caso, sustituyendo (6.3) y (6.4) en (6.8), el modelo quedaría como sigue :

$$P_{t+1} = P_t + \gamma \left(D_{fd}(P_t) + D_{tc}(P_t) \right) = P_t + \gamma \left(\alpha (P^* - P_t) \left(\frac{1}{2P_t + P_t^2} \right) + \beta (P_t - v) \right) \quad (6.9)$$

Las figuras 6.3, 6.4 y 6.5 muestran los resultados en la evolución de los precios mediante iteración gráfica para distintos valores de los parámetros α , β y γ , cuando se fija el valor fundamental $P^*=1$ y el valor en el que se basan los analistas técnicos es $v=1$. La figura 6.3 muestra la solución de punto fijo, en la que el precio se estabiliza en el valor fundamental; en la figura 6.4 se puede observar la solución de ciclo dos y, por último, en la figura 6.5 aparece la solución caótica en la que los precios pueden tomar cualquier valor dentro del intervalo $(0,1)$ y donde los precios alternan subidas con bajadas sucesivas.

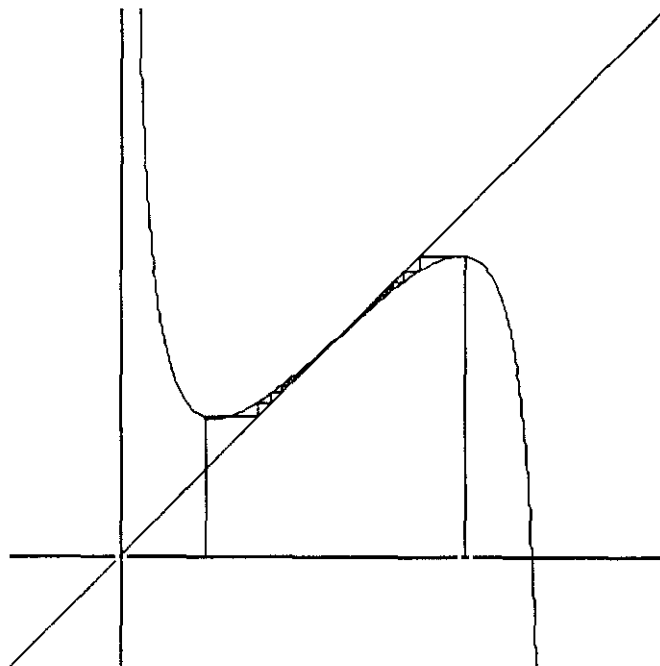


Figura 6.3: Evolución de los precios mediante iteración gráfica cuando los valores de los parámetros son $\alpha=0.6$ y $\beta=0.3$ y $\gamma=1$. Los precios tiende a un punto fijo que coincide con el valor fundamental.

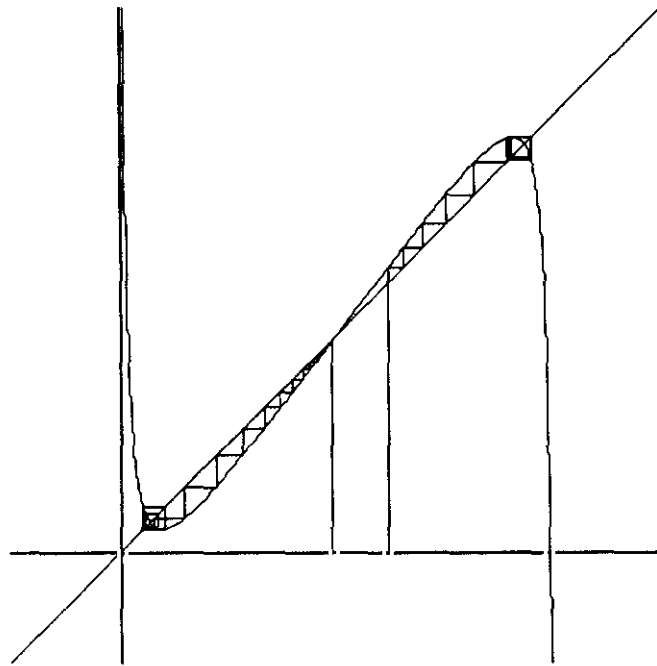


Figura 6.4: Evolución de los precios mediante iteración gráfica cuando los valores de los parámetros son $\alpha=0.2$ y $\beta=0.6$ y $\gamma=1$. Los precios quedan atrapados en un ciclo 2.

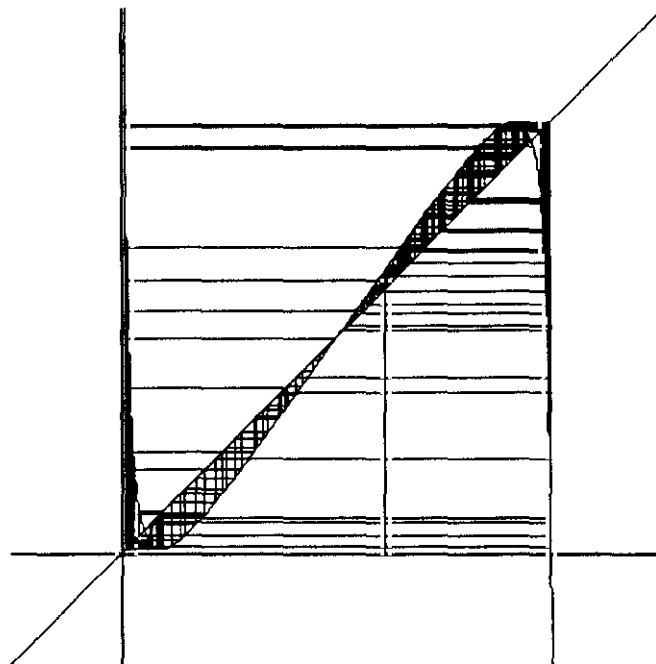


Figura 6.5: Evolución de los precios mediante iteración gráfica cuando los valores de los parámetros son $\alpha=0.1$ y $\beta=0.5$ y $\gamma=1$. Solución caótica.

Para el caso propuesto, en el que los inversores técnicos utilizan la regla de la media móvil que aparece en (6.5) para obtener las señales de compra o venta, no es posible obtener la evolución de los precios mediante iteración gráfica.

El modelo que proponemos, además de incorporar las señales de compra y venta, excluye del mercado a los inversores fundamentales cuando el precio está fuera de (P_i, P_s) , quedando en este caso en el mercado únicamente los inversores técnicos. Si se toma como función de demanda de los analistas técnicos (6.6) y como función de demanda de los analistas fundamentales (6.3), el modelo quedaría como sigue :

$$P_{t+1} = P_t + \gamma \left(\alpha (P^* - P_t) \left(\frac{1}{2P_t + P_t^2} \right) + \beta (P_t - P_t^2) \right) \quad P_i < P_t < P_s$$

$$P_{t+1} = \beta (P_t - P_t^2) \quad P_t < P_i, P_t > P_s$$
(6.10)

a estas expresiones se debe añadir la señal de venta o compra para los inversores técnicos según la regla expuesta en (6.5).

La tabla 6.1 resume los resultados que se obtienen para el modelo propuesto si se fija $\gamma=1$ y se varían los coeficientes α y β , que representan la fuerza del agente fundamental y del agente técnico en el mercado. Los valores iniciales que se han tomado para elaborar la tabla son: $P_1=0.9$, $P_2=0.8$ y $P_3=0.9$ -valores muy cercanos al valor fundamental-.

Si se observa la tabla de resultados de simulación del modelo se puede comprobar, que si el peso de los dos agentes es muy pequeño y parecido, el mercado se comporta de forma estable, de modo que el precio tiende a su valor fundamental $P^*=1$ u oscila cíclicamente alrededor del valor fundamental. Ambos comportamientos pueden verse en las figuras 6.6 y 6.7.

Si crece el peso de los analistas técnicos, aunque no lo haga el de los fundamentales, el comportamiento de los precios puede ser explosivo, subiendo o bajando muy bruscamente como se muestra en la figura 6.8. Si en la simulación se observa que tipo de agentes está actuando en cada

momento en el mercado, se puede constatar que, si el peso de los analistas técnicos es grande, estos acaban por expulsar a los analistas fundamentales, provocando el comportamiento explosivo de los precios.

Tabla 6.1: Resultados de simulación del modelo propuesto en (6.10).

β	α							
	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5
0.5	PF(1)	PF(1)	PF(1)	PF(1)	PF(0)	PF(0)	C4	CA
1	PF(1)	PF(1)	PF(1)	PF(1)	PF(0)	PF(0)	PF(0)	PF(0)
1.1	C2	C4	C2	PF(1)	PF(0)	PF(0)	PF(0)	PF(0)
1.15	C4	C4	C4	PF(1)	PF(0)	PF(0)	PF(0)	PF(0)
1.2	C4	CA	C4	PF(1)	PF(0)	PF(0)	PF(0)	PF(0)
1.3	C4	CA	C8	C2	PF(0)	PF(0)	PF(0)	PF(0)
1.4	C4	CA	CA	C2	PF(1)	E	E	E
1.5	C8	E	E	C4	PF(1)	E	E	E
1.6	E	E	E	CA	PF(1)	E	E	E
2	E	E	E	E	CA	PF(1)	E	E
2.5	E	E	E	E	E	E	E	E

PF(1): punto fijo estable en el valor $P_t=1$, PF(0): punto fijo estable en el valor $P_t=0$, C_i : ciclo de periodicidad i , CA: comportamiento caótico, E: comportamiento explosivo de los precios.

Cuando crece el peso de los analistas fundamentales y el de los analistas técnicos es relativamente pequeño, se obtiene la solución estable en la que los precios se estabilizan en el valor $P_t=0$. En este caso, también los analistas técnicos son los únicos que quedan al final en el mercado; pudiéndose deber esto a que, dado que las condiciones iniciales son inferiores al valor fundamental, los inversores fundamentales, que tienen un gran peso, compran y hacen subir mucho los precios; de esta forma que éstos llegan al límite superior, y tienen que abandonar el mercado quedando únicamente los inversores técnicos, que hacen tender los precios a $P_t=0$. La evolución de los precios en este caso se puede observar en la figura 6.9.

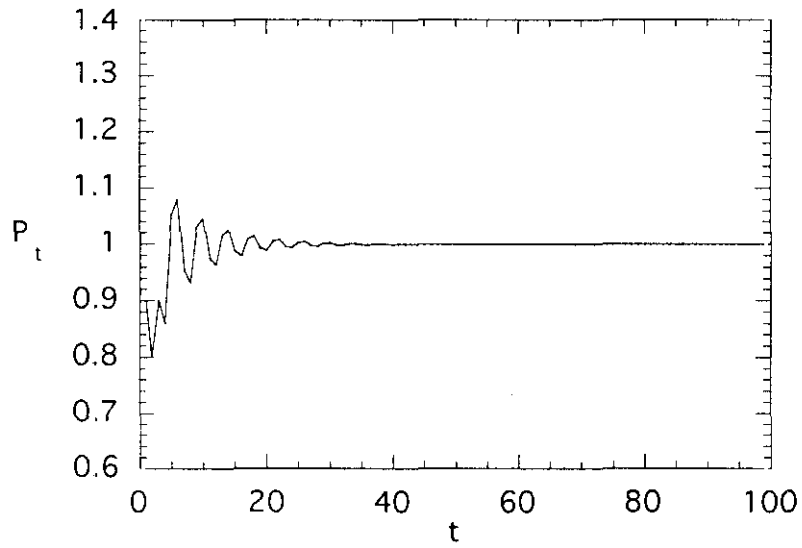


Figura 6.6: Evolución de los precios para $\alpha=0.5$ y $\beta=1$.

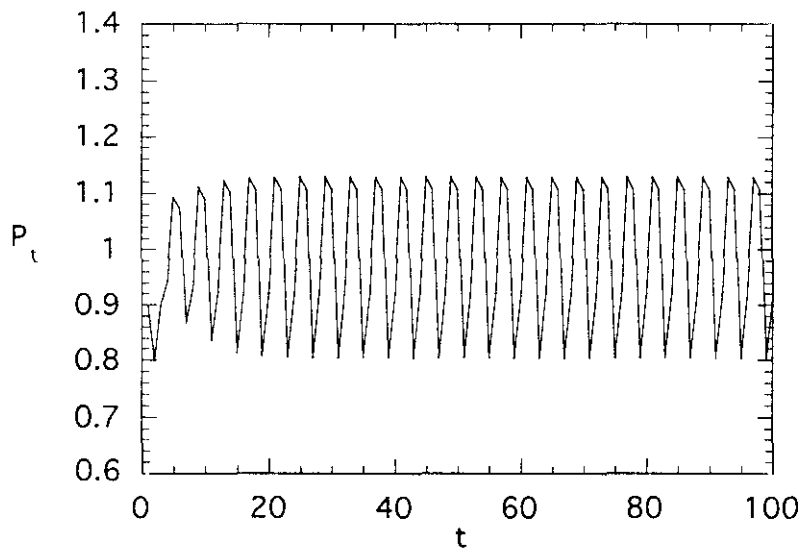


Figura 6.7: Evolución de los precios para $\alpha=1.5$ y $\beta=1.2$.

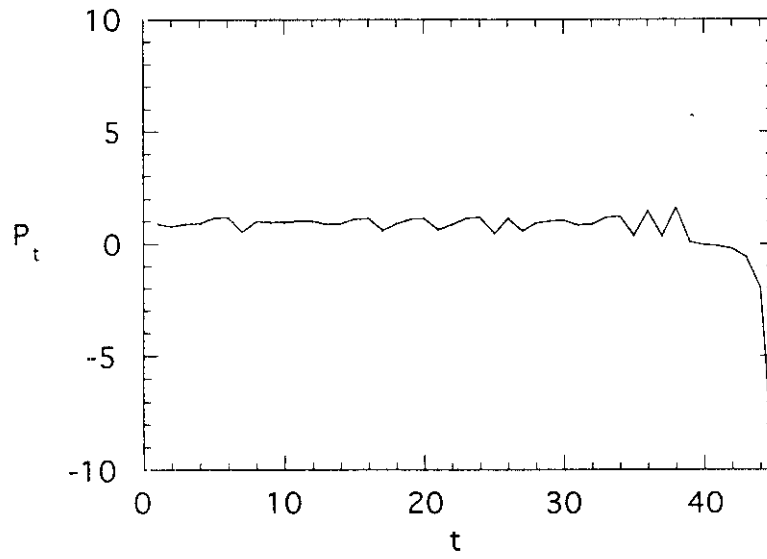


Figura 6.8: Evolución de los precios cuando $\alpha=1.5$ y $\beta=1.5$.

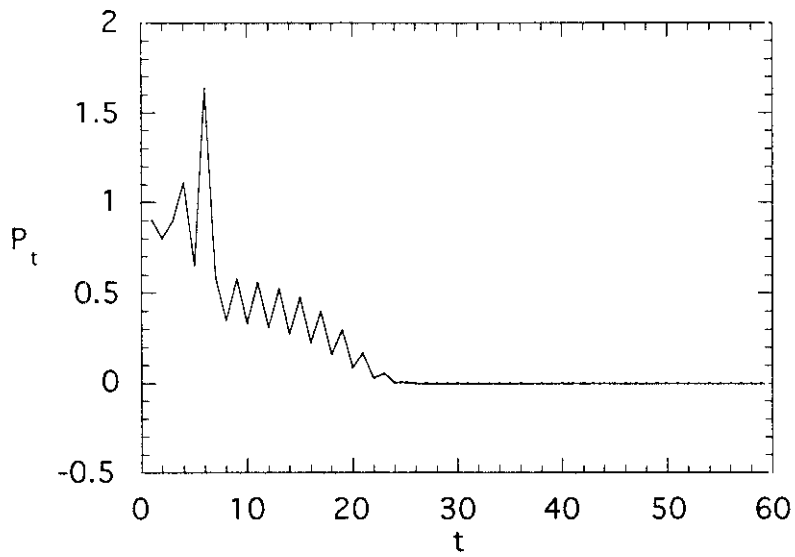


Figura 6.9: Evolución de los precios para $\alpha=3$, $\beta=1$.

Observando la tabla de resultados se puede apreciar que el modelo, para ciertos valores de los parámetros, sigue un comportamiento caótico en los precios. Este tipo de movimiento en los precios se ha representado en la figura 6.10.

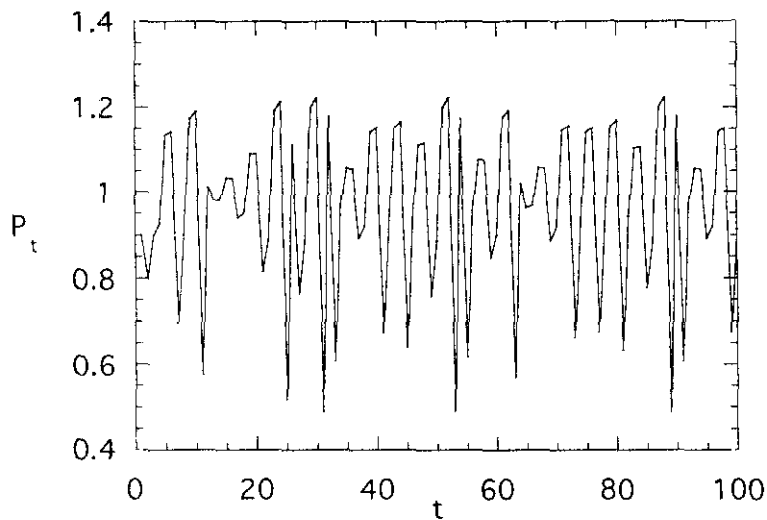


Figura 6.10: Evolución de los precios para $\alpha=1.5$ y $\beta=1.4$.

Con el modelo propuesto pueden obtenerse distintos tipos de comportamiento de los precios en el mercado. Hay que recordar que en el mercado de valores, el peso que tienen los distintos agentes que hay dentro del mismo, varía continuamente, de forma que es posible que los precios fluctúen con subidas y bajadas. No será fácil que se llegue a un comportamiento explosivo: ya que probablemente, los analistas técnicos cuando observen una subida de precios disminuirán su peso, logrando estabilizar de nuevo el mercado.

CAPÍTULO 7

ANÁLISIS EMPÍRICO DE LA BOLSA EN ESPAÑA

7.1. CARACTERÍSTICAS DE LAS SERIES

El mercado bursátil español ha estado tradicionalmente fragmentado en cuatro bolsas, Madrid, Barcelona, Bilbao y Valencia, y cada una de ellas ha construido su propio índice. De todos ellos, el índice general de la Bolsa de Madrid es el que ha tenido una mayor difusión. Esto es debido a que en la Bolsa de Madrid se ha concentrado más de las tres cuartas partes de la contratación bursátil en España.

Además de estos índices tradicionales, la Sociedad de Bolsas construye un índice que es conocido como IBEX 35. Integran este índice los 35 valores que reúnen las mayores condiciones de liquidez, revisándose las acciones que lo constituyen semestralmente.

Para el análisis empírico de la bolsa en España se han utilizado dos tipos de series distintas.

La primera consiste en datos mensuales del índice general de la Bolsa de Madrid desde Enero de 1941 hasta Diciembre de 1991. Este conjunto de datos se compone de 612 observaciones.

La segunda serie es el índice diario del IBEX 35 desde Enero de 1987 hasta Febrero de 1995, lo que constituye un total de 2032 observaciones.

La serie del índice general de la Bolsa de Madrid toma como base 100 el 31 de Diciembre de 1940. Pero, como puede suponerse, en un periodo tan largo, 1940-1991, la inflación ha influido en el precio de las acciones; para evitar el efecto de ésta es necesario convertir las pesetas de 1991 en pesetas del año 1940, obteniéndose de este modo un índice general deflactado. Pero además, en el precio de la acción puede resultar fundamental la percepción de dividendos que es un factor importante en la rentabilidad de las acciones. El índice total de la Bolsa de Madrid considera la reinversión de dividendos. También se puede deflactar el índice total si se quiere evitar el efecto de las subidas en los precios.

Para el análisis *R/S* también se utilizarán los índices normales sectoriales; los sectores en los que se desagrega el índice general son: bancos, electricidad, construcción, alimentación, comunicación, siderometalurgia, químico-textil y varios. El sector de inversión no se ha utilizado en el presente trabajo porque la serie es demasiado corta ya que empieza a contabilizarse en el año 1947.

La evolución de los índice general normal y total es semejante, aunque el general total va siempre por encima del normal alejándose o acercándose según que los dividendos percibidos sean mayores o menores, respectivamente.

El índice IBEX 35 comenzó a evaluarse en el año 1990, siendo el utilizado en el presente trabajo una reconstrucción del mismo desde Enero de 1987.

La correlación entre ambos índices, el general de la Bolsa de Madrid y el IBEX 35, es muy alta, de un 99%. Se utilizarán uno u otro en función de las características necesarias de los datos según el análisis que se vaya a realizar.

Para el análisis del caos, es necesario, en general, un gran número de observaciones, pero también es importante que los datos cubran un intervalo temporal largo.

Ninguna de las dos series cumple ambos requisitos al mismo tiempo por lo que deben observarse con precaución los resultados obtenidos en algunos de los tests para detectar la existencia de caos, especialmente, los que requieran gran cantidad de datos y periodo de tiempo muy largo.

Para el análisis de los datos utilizaremos la tasa de variación de los precios, es decir, la primera diferencia del logaritmo de los datos:

$$X_t = \log(P_t/P_{t-1}) = \log(P_t) - \log(P_{t-1}) \quad (7.1)$$

en la que P_t es la serie original y X_t es la primera diferencia del logaritmo. La utilización de la tasa de variación permite no tomar en cuenta el efecto que la inflación puede tener sobre los datos.

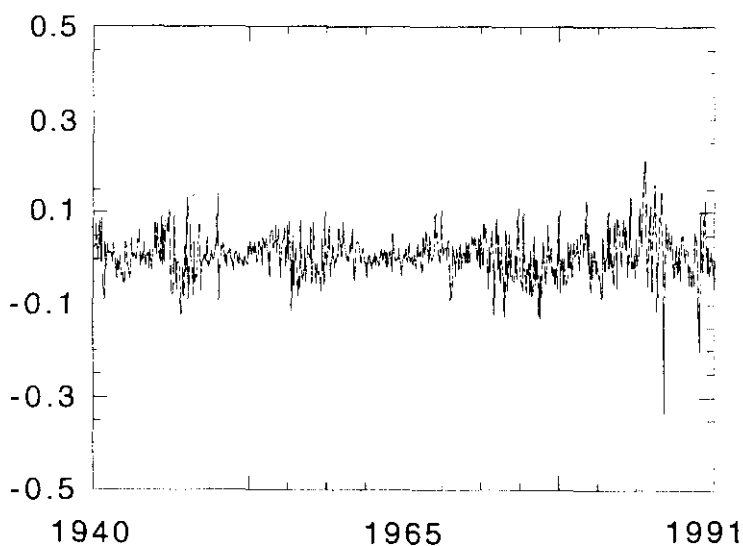


Figura 7.1: Variación logarítmica de los beneficios mensuales del índice general de la Bolsa de Madrid.

En la figura 7.1 se muestra la serie de datos de la primera diferencia en logaritmos del índice general¹, en la figura 7.2 se representa la primera

¹ Para todos los resultados que se ofrecen sobre el análisis *R/S* se ha tomado la serie de datos del índice general. Se han realizado análisis semejantes con el índice total y en todos los casos se obtienen resultados parecidos.

diferencia a un día del IBEX 35 y en la figura 7.3 se ha dibujado la primera diferencia a cinco días del IBEX 35.

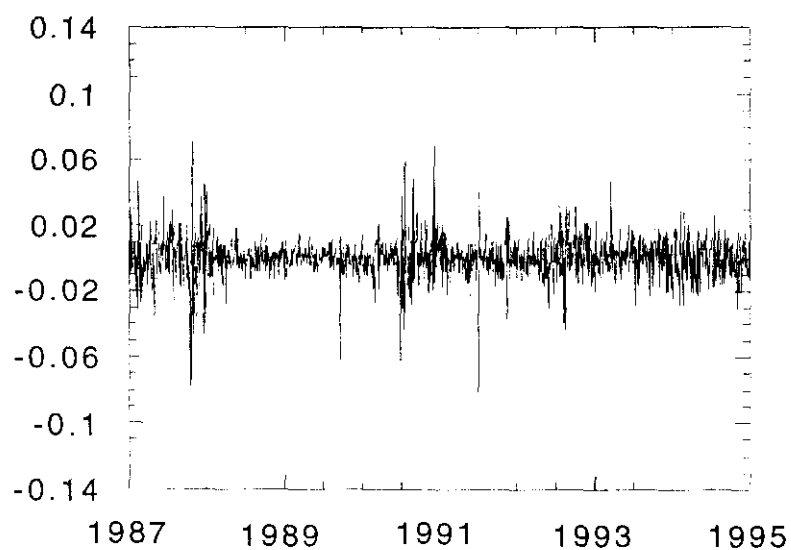


Figura 7.2: Variación logarítmica de los beneficios diarios del IBEX 35.

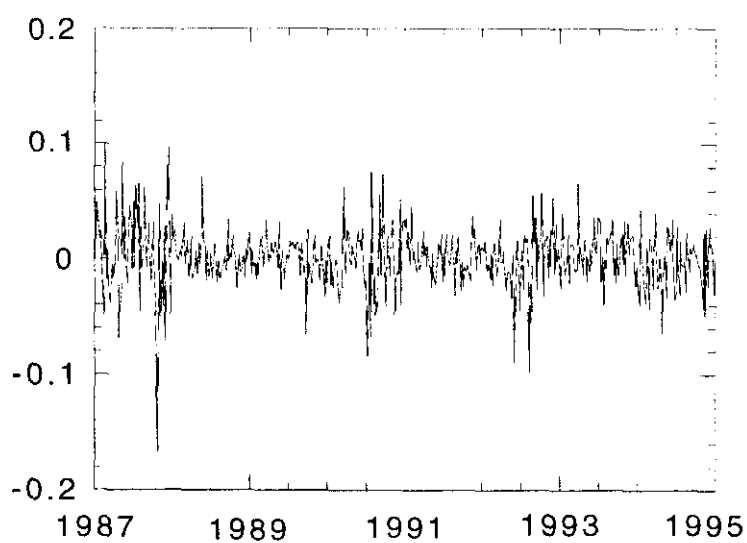


Figura 7.3: Variación logarítmica de los beneficios a cinco días del IBEX 35.

7.2. EVIDENCIAS DE NO NORMALIDAD EN LAS COTIZACIONES: EL TEST BDS

Es ampliamente reconocido por numerosos estudios sobre las cotizaciones de la bolsa, Fama (1965), Sharpe (1970)², que si se compara una serie de beneficios con una distribución normal, la primera está sesgada negativamente, tiene unas colas más anchas y, además, presenta leptokurtosis, es decir, tienen un pico mayor alrededor de la media. En la tabla 7.1 se presentan algunas de las características de las series utilizadas.

Tabla 7.1. Características de las series del índice general y del IBEX 35.

	general	IBEX 35
media	6.01848681E-03	1.56574490E-04
varianza	2.42904760E-03	1.41114593E-04
desviación típica	4.92853709E-02	1.18791666E-02
sesgo	-0.42687184	-0.45608509
kurtosis	4.59426117	7.82165241

Las figuras 7.4. y 7.5 muestran la distribución de las series que se están estudiando. En ambas puede observarse fácilmente las diferencias con la distribución normal, el apuntamiento y las colas más anchas.

² Fama, E. F (1965) "The Behavior of Stock Market Prices". *Journal of Business*. 38. 34-105.

Sharpe, W. F. *Portfolio Theory and Capital Markets*. New York: McGraw-Hill, 1970.

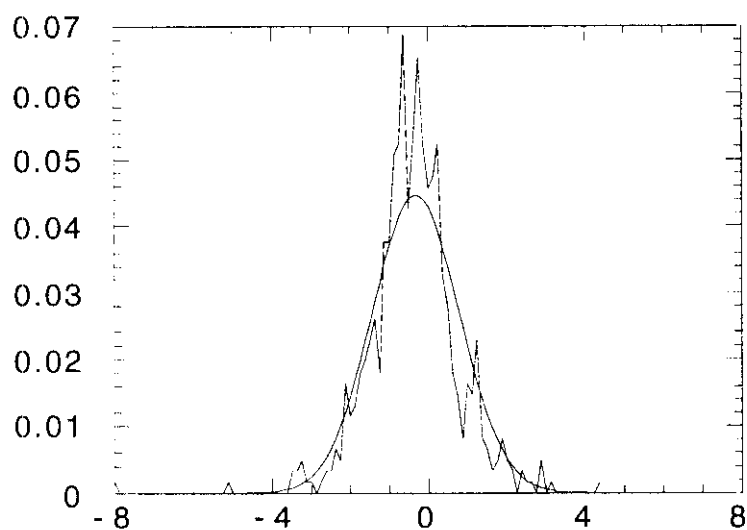


Figura 7.4: Distribución de frecuencias de la tasa de variación de las cotizaciones para el índice general de la Bolsa de Madrid.

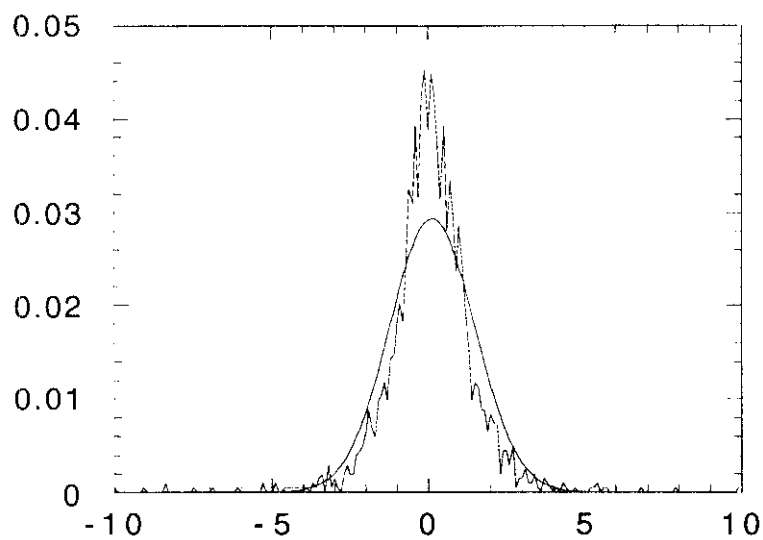


Figura 7.5: Distribución de frecuencias de la tasa de variación de las cotizaciones para el índice IBEX 35.

La Hipótesis de los Mercados Eficientes, como se ha expuesto en el capítulo 5, establece que los precios de las acciones reflejan toda la información pública disponible, produciéndose cambios en los precios de las acciones cuando aparece nueva información; por ello los movimientos en los precios de las acciones se comportan siguiendo un movimiento Browniano ordinario, pudiéndose afirmar, en este caso, que los mercados no tienen memoria de lo que ha ocurrido en el pasado.

El análisis *R/S* permite comprobar si una serie temporal sigue o no un movimiento Browniano ordinario, es decir, si las observaciones de la serie son independientes entre sí, o si, por el contrario, lo que ha ocurrido en el pasado afecta a los precios de hoy.

Si existe dependencia lineal en una serie temporal, ésta puede sesgar el exponente de Hurst y hacer que aparezca como significativo, cuando en realidad no lo es. Una forma de reducir la dependencia lineal y minimizar el sesgo es tomar la serie de residuos autorregresivos. Con esto se consigue minimizar los efectos de memoria corta y el efecto inflacionista, por lo que el análisis *R/S* sólo cuantificará la memoria larga del proceso.

La utilización de un *AR(1)* no reduce toda la correlación serial que pueda existir en el proceso, aunque la reduce significativamente (Brock et al. (1991)³) y es especialmente importante en series muestreadas con una frecuencia baja, donde puede existir mucho ruido en los datos, que pueden sesgar el exponente de Hurst.

En el análisis *R/S* se utilizará como serie los residuos *AR(1)* de la tasa de variación de los precios. Se ha elegido un modelo *AR(1)* porque es el que se ha identificado para ambas series. Los resultados se pueden consultar en el Apéndice.

Las figuras 7.6 a 7.13 muestran los resultados para la serie de residuos del índice general de la Bolsa de Madrid y para los distintos índices sectoriales. Como puede observarse, existe una desviación sistemática entre los valores del *R/S* esperados para un camino aleatorio y los *R/S* efectivos. Los exponentes de Hurst van de $H=0.66$, para el caso de sector de empresas eléctricas, hasta $H=0.71$, para el caso de la alimentación.

³ Brock, W. A., Dechert, W. D., Scheinkman, J. A., LeBaron, B. (1991) "A Test for Independence Based on the Correlation Dimension". Manuscrito no publicado.

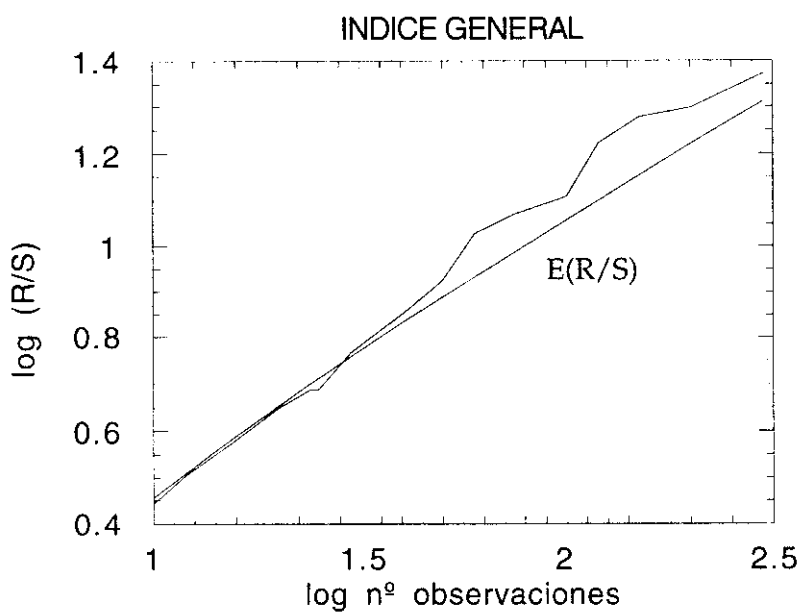


Figura 7.6: Análisis R/S del índice general de la Bolsa de Madrid. $H=0.67$.

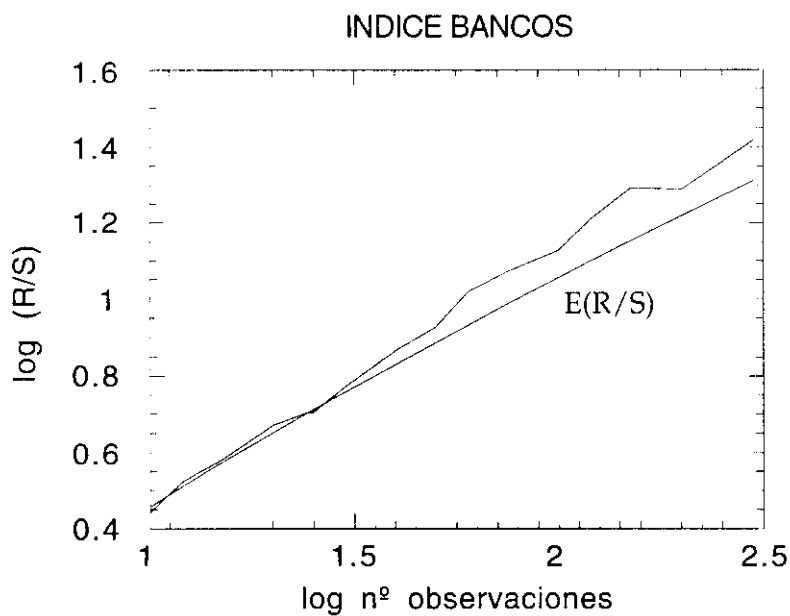


Figura 7.7: Análisis R/S del índice de bancos de la Bolsa de Madrid. $H=0.67$.

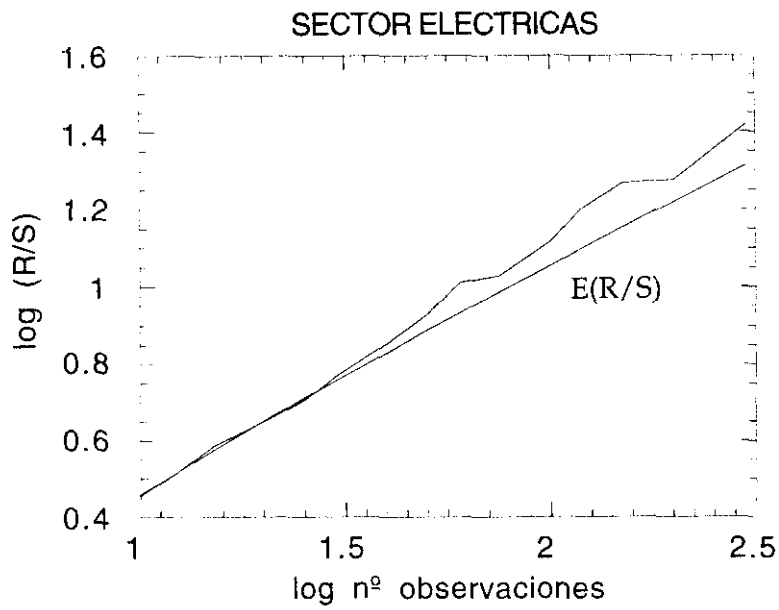


Figura 7.8: Análisis R/S del índice de las empresas eléctricas de la Bolsa de Madrid. $H=0.66$.

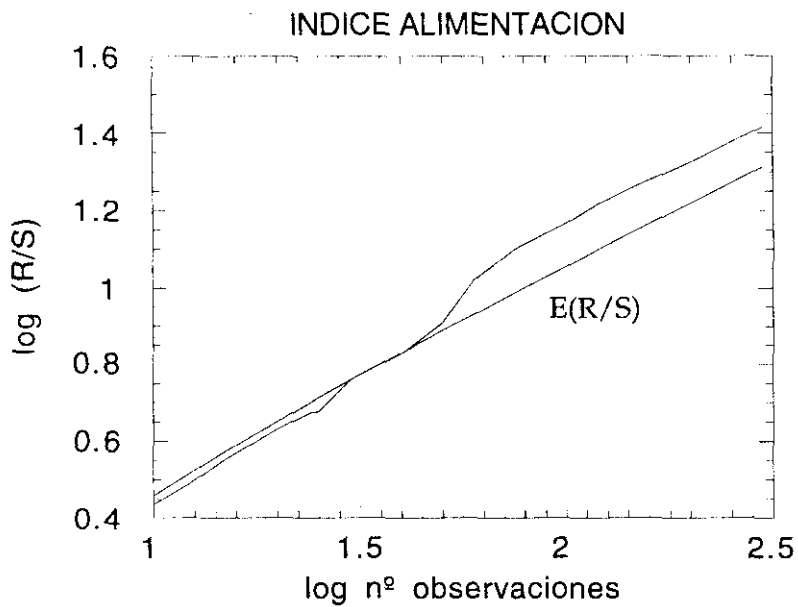


Figura 7.9: Análisis R/S del índice de las empresas de alimentación de la Bolsa de Madrid. $H=0.71$.

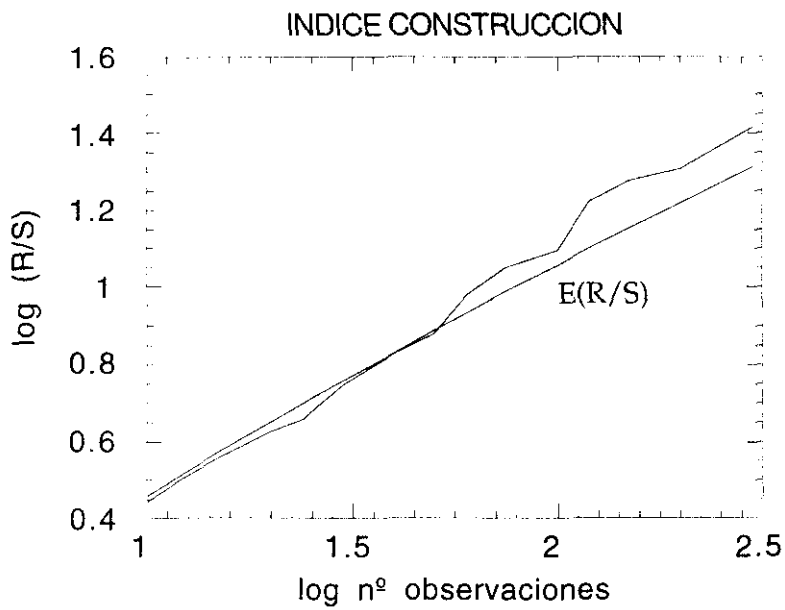


Figura 7.10: Análisis R/S del índice de las empresas de construcción de la Bolsa de Madrid. $H=0.69$.

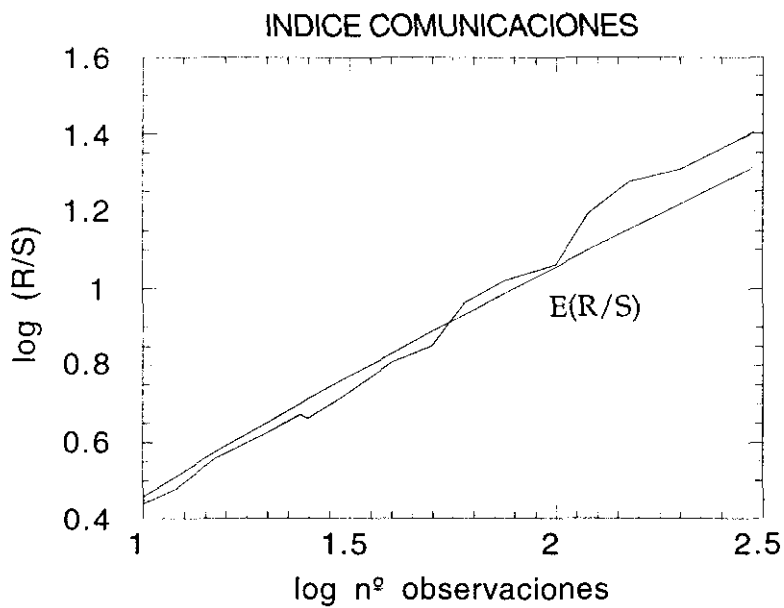


Figura 7.11: Análisis R/S del índice de las empresas de comunicaciones de la Bolsa de Madrid. $H=0.69$.

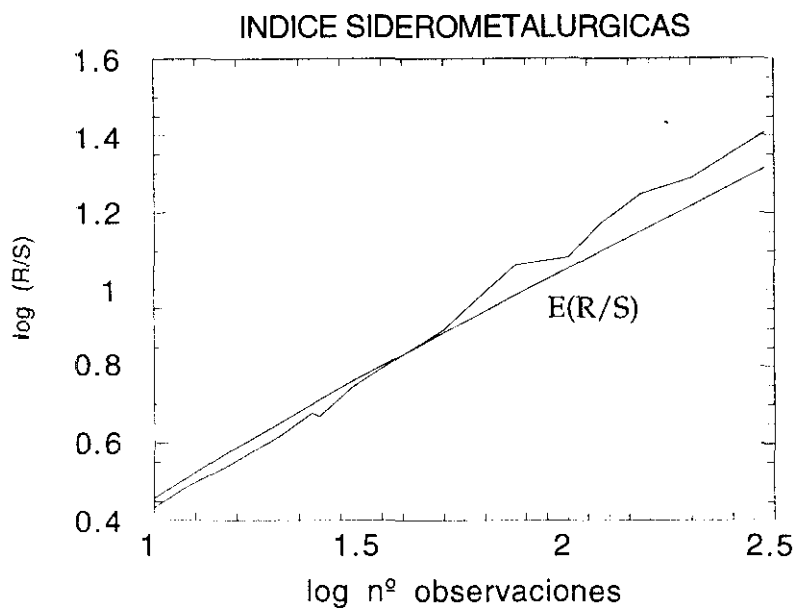


Figura 7.12: Análisis R/S del índice de las empresas siderometalúrgicas de la Bolsa de Madrid. $H=0.68$.

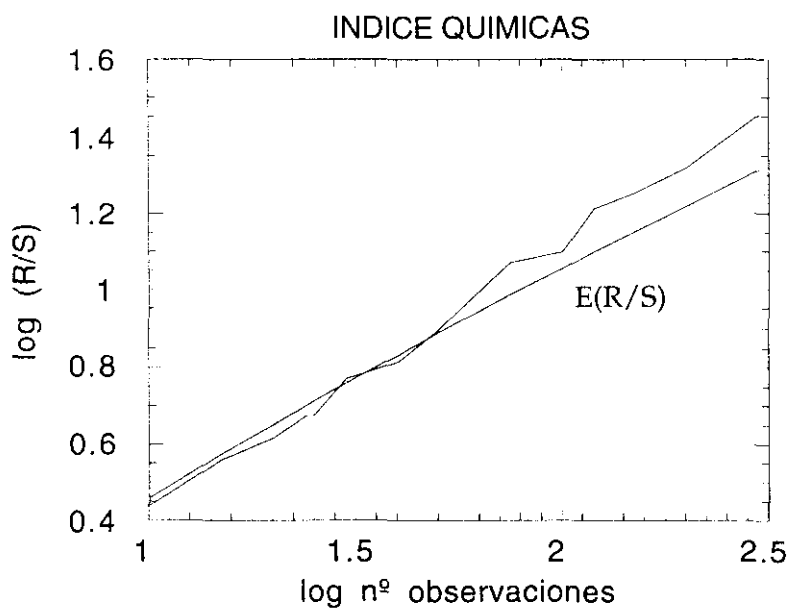


Figura 7.13: Análisis R/S del índice de químicas de la Bolsa de Madrid. $H=0.70$.

Se puede comprobar que el exponente de Hurst es mayor que 0.5 en todos los casos estudiados, desviándose sistemáticamente de su valor esperado; por todo esto, se hace necesario comprobar si los valores de H son significativos. Veamos el caso del índice general: el análisis R/S proporciona un valor de $H=0.67$, mientras que el valor esperado de H es 0.57. Los resultados del análisis R/S realizado sobre esta serie se detallan en la tabla 7.2. Como ya se ha afirmado en el Capítulo 4, el exponente de Hurst sigue una distribución normal con varianza $1/N$, siendo N el número total de observaciones.

Tabla 7.2: Resultados del análisis R/S sobre el índice general de la Bolsa de Madrid.

n	$\log(n)$	$\log(R/S)$	$E(R/S)$
10	1.0000	0.44333	0.45671
12	1.0792	0.50579	0.51023
15	1.1761	0.56501	0.57360
20	1.3010	0.64799	0.65245
24	1.3802	0.68847	0.70104
25	1.3979	0.68754	0.71179
30	1.4771	0.76658	0.75927
40	1.6021	0.85278	0.83264
50	1.6990	0.92647	0.88841
60	1.7782	1.0284	0.93335
75	1.8751	1.0700	0.98767
100	2.0000	1.1078	1.0567
120	2.0792	1.2209	1.1000
150	2.1761	1.2778	1.1525
200	2.3010	1.2975	1.2196
300	2.4771	1.3718	1.3130

En el caso que nos ocupa el número total de observaciones es 600, por lo que la varianza es $1/600$ y la desviación típica es 0.04082. El exponente de Hurst está 2.26 desviaciones típicas por encima de la media, lo que quiere decir que es significativo al 95% de confianza, siendo posible rechazar la hipótesis nula del camino aleatorio. La serie temporal de las cotizaciones del índice general de la Bolsa de Madrid se comporta como un movimiento Browniano fraccional. Además, como $H > 0.5$ se puede afirmar que la serie es persistente. En la tabla 7.3 se presentan los resultados de las regresiones del análisis R/S .

Tabla 7.3: Resultados de las regresiones del análisis R/S sobre el índice general de la Bolsa de Madrid.

	datos Bolsa	E(R/S)
H	0.66927	0.57752
Constante	-0.21736	-0.10177
R cuadrado	0.99455	0.99938
n° observaciones	16	16
Grados libertad	14	14
Significatividad	2.26	

A continuación se ofrecen las tablas de resultados del análisis R/S sobre los distintos sectores en los que se subdivide el índice general: tablas 7.4 a 7.10. Como puede observarse, todos los valores de H son significativos al 95% de confianza, es decir, en todos los casos las series son persistentes. Como todas las series consisten en residuos $AR(1)$ en las que se ha eliminado la dependencia lineal a corto plazo se puede afirmar que todas las series siguen un proceso con memoria larga.

Tabla 7.4: Resultados de las regresiones del análisis *R/S* sobre el índice del sector bancos de la Bolsa de Madrid.

	datos Bolsa	E(<i>R/S</i>)
<i>H</i>	0.67049	0.57752
Constante	-0.20916	-0.10177
R cuadrado	0.99684	0.99938
nº observaciones	16	16
Grados libertad	14	14
Significatividad	2.27	

Tabla 7.5: Resultados de las regresiones del análisis *R/S* sobre el índice del sector eléctricas de la Bolsa de Madrid.

	datos Bolsa	E(<i>R/S</i>)
<i>H</i>	0.66233	0.57752
Constante	-0.20421	-0.10177
R cuadrado	0.99752	0.99938
nº observaciones	16	16
Grados libertad	14	14
Significatividad	2.07	

Tabla 7.6: Resultados de las regresiones del análisis *R/S* sobre el índice del sector construcción de la Bolsa de Madrid.

	datos Bolsa	E(<i>R/S</i>)
<i>H</i>	0.69099	0.57752
Constante	-0.2655	-0.10177
R cuadrado	0.99665	0.99938
nº observaciones	16	16
Grados libertad	14	14
Significatividad	2.78	

Tabla 7.7: Resultados de las regresiones del análisis *R/S* sobre el índice del sector comunicaciones de la Bolsa de Madrid.

	datos Bolsa	E(R/S)
<i>H</i>	0.68507	0.57752
Constante	-0.27005	-0.10177
R cuadrado	0.99592	0.99938
n° observaciones	16	16
Grados libertad	14	14
Significatividad	2.63	

Tabla 7.8: Resultados de las regresiones del análisis *R/S* sobre el índice del sector alimentación de la Bolsa de Madrid.

	datos Bolsa	E(R/S)
<i>H</i>	0.70568	0.57752
Constante	-0.27744	-0.10177
R cuadrado	0.99564	0.99938
n° observaciones	16	16
Grados libertad	14	14
Significatividad	3.13	

Tabla 7.9: Resultados de las regresiones del análisis *R/S* sobre el índice del sector de empresas siderometalúrgicas de la Bolsa de Madrid.

	datos Bolsa	E(R/S)
<i>H</i>	0.67897	0.57752
Constante	-0.2536	-0.10177
R cuadrado	0.99818	0.99938
n° observaciones	16	16
Grados libertad	14	14
Significatividad	2.48	

Tabla 7.10: Resultados de las regresiones del análisis R/S sobre el índice del sector de empresas químicas de la Bolsa de Madrid.

	datos Bolsa	E(R/S)
H	0.70091	0.57752
Constante	-0.2793	-0.10177
R cuadrado	0.99761	0.99938
n° observaciones	16	16
Grados libertad	14	14
Significatividad	3.02	

Si en lugar de utilizar datos mensuales del índice general utilizamos datos diarios del IBEX 35 también obtenemos un valor de $H=0.611$, el cual también es significativo, tal y como se especifica en la tabla 7.11. El valor obtenido de H es menor que el calculado para datos mensuales, lo cual se debe a que cuando aumenta el detalle en los datos, también aumenta el nivel de ruido, volviéndose la serie más errática y disminuyendo el valor de H . La figura 7.14 muestra el resultado gráfico del análisis R/S sobre el índice IBEX 35 diario.

Tabla 7.11: Resultados de las regresiones del análisis R/S sobre el índice diario IBEX 35.

	datos Bolsa	E(R/S)
H	0.61108	0.56027
Constante	-0.13167	-0.07532
R cuadrado	0.9987	0.9993
n° observaciones	11	11
Grados libertad	9	9
Significatividad	2.22	

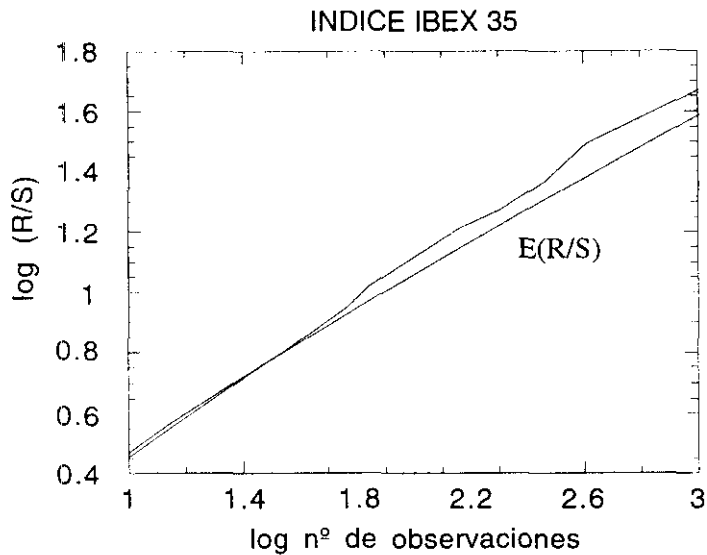


Figura 7.14: Análisis R/S sobre el índice diario IBEX 35. $H=0.61$.

Si utilizamos ahora el IBEX 35 a cinco días obtenemos un H que no es significativo, por lo que no es posible rechazar la hipótesis nula de que el proceso sea un camino aleatorio. Esto se debe a que la serie, en este caso, tiene muy pocos datos, 406, por lo que no es posible obtener un exponente H significativo. Como ya hemos indicado anteriormente, para el análisis R/S es necesario, tanto una serie larga en el tiempo, como con un gran número de observaciones. Los resultados del análisis para esta serie se exhiben en la tabla 7.12 y en la figura 7.15.

La utilización de la serie de datos originales, en lugar de la serie de residuos $AR(1)$, permite comprobar si existe dependencia lineal en el proceso y si ésta puede afectar al cálculo de H . En las figuras 7.16 y 7.17 se ha dibujado la diferencia entre el análisis R/S con los datos originales y con los residuos de un $AR(1)$ para las dos series consideradas en el presente trabajo.

Tabla 7.12: Resultados de las regresiones del análisis R/S sobre el índice a cinco días IBEX 35.

	datos Bolsa	$E(R/S)$
H	0.63058	0.57883
Constante	-0.11518	-0.10496
R cuadrado	0.99339	0.9994
nº observaciones	8	8
Grados libertad	6	6
Significatividad	1.16	

En ambos gráficos puede observarse que existe un sesgo al alza del exponente de Hurst si se toman las series de datos originales. Esto permite concluir que el proceso puede tener memoria corta, que es preciso eliminar antes de realizar el análisis R/S . Sin embargo, los puntos en los que se producen cambios en la tendencia de $\log(R/S)$ corresponden al mismo valor de n para la serie de datos originales y para la serie de residuos.

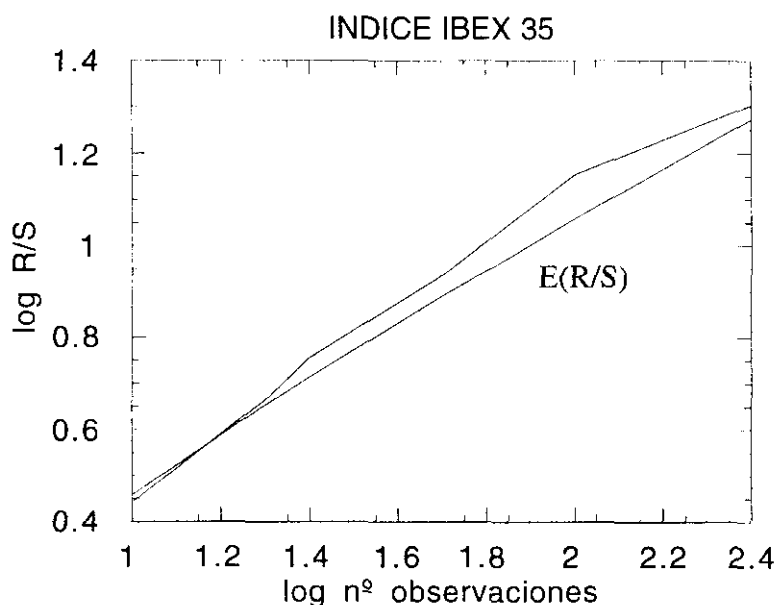


Figura 7.15: Análisis R/S del índice IBEX 35 a cinco días. $H=0.63$.

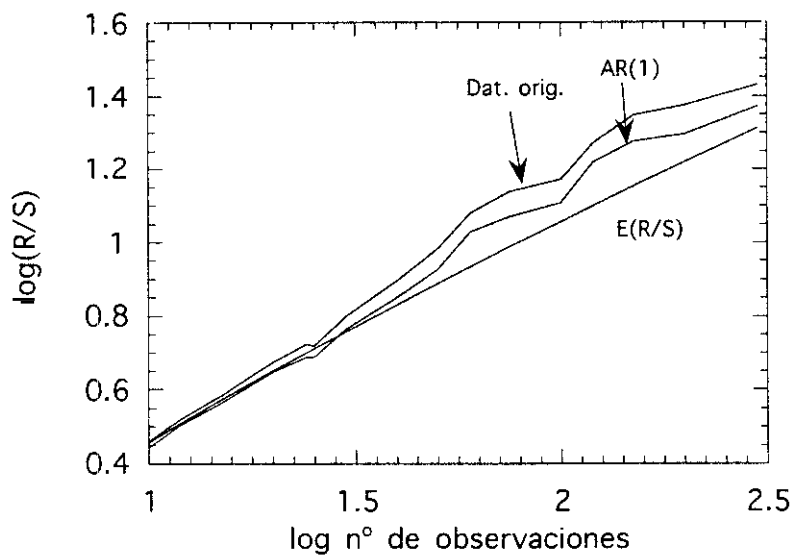


Figura 7.16: Comparación del análisis R/S de la serie original y de la serie de residuos $AR(1)$ del índice general de la Bolsa de Madrid.

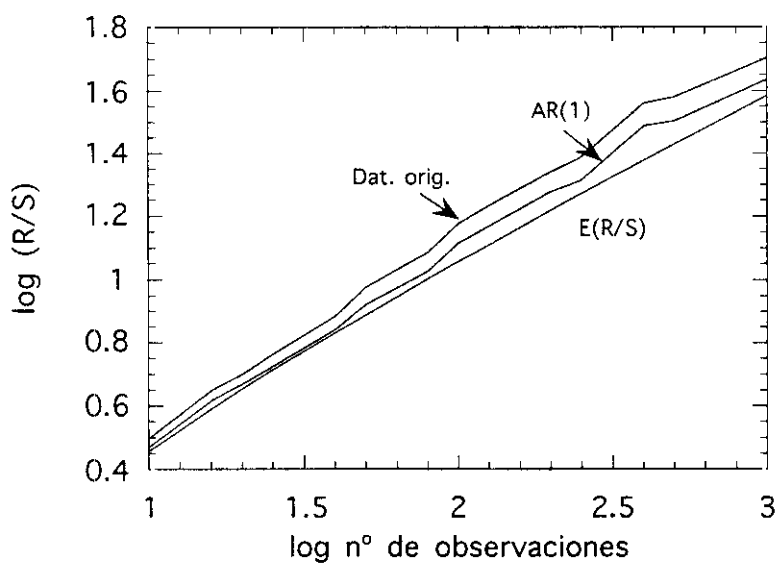


Figura 7.17: Comparación del análisis R/S de la serie original y de la serie de residuos $AR(1)$ del IBEX 35.

Como se explica en el capítulo 4, el análisis R/S es muy eficaz para detectar la existencia de ciclos incluso bajo la presencia de ruido en los datos. La longitud media del ciclo aparece donde se produce una ruptura en el gráfico R/S . Si se quiere conocer con exactitud el punto donde se produce esta ruptura es aconsejable el cálculo el estadístico V . Además, si el estadístico V muestra una tendencia creciente, se puede concluir que el proceso es persistente. En las figuras 7.18 a 7.25 se representa el estadístico V para las series estudiadas.

Como puede observarse todos los estadísticos V de las series presentan una *tendencia creciente* lo que indica que son persistentes. Cuando la pendiente se hace plana o cambia su tendencia significa que el ciclo ha terminado. En las figuras puede comprobarse que el estadístico sigue una tendencia semejante a la de su valor esperado hasta un valor de $n=20$ donde parece que cambia su tendencia, esto significa que, dado que los datos son mensuales, puede haber un ciclo de aproximadamente 1.6 años. Después la tendencia se vuelve creciente de nuevo hasta el valor de $n=58$, lo que indica que existen evidencias de otro ciclo de mayor duración, de unos 4.8 años. En algunos de los índices sectoriales se puede apreciar la existencia de algún otro ciclo más corto e incluso de algún alargamiento o acortamiento de los ciclos observables en el índice general.

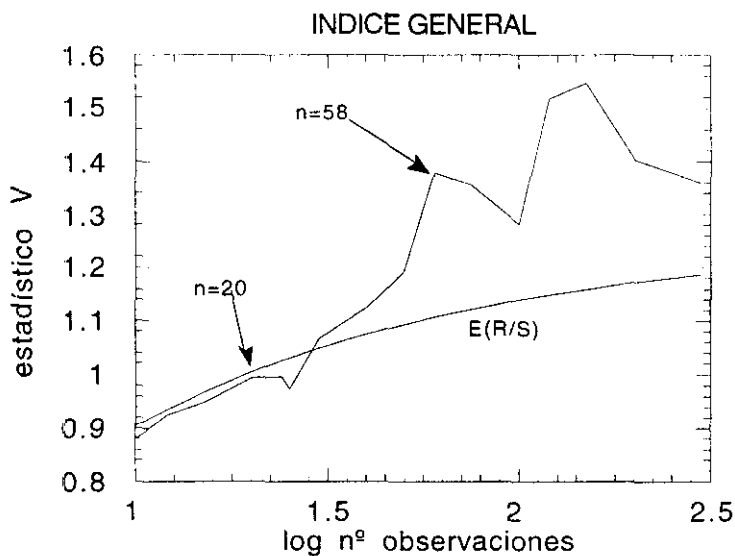


Figura 7.18: Estadístico V del índice general mensual de la Bolsa de Madrid.

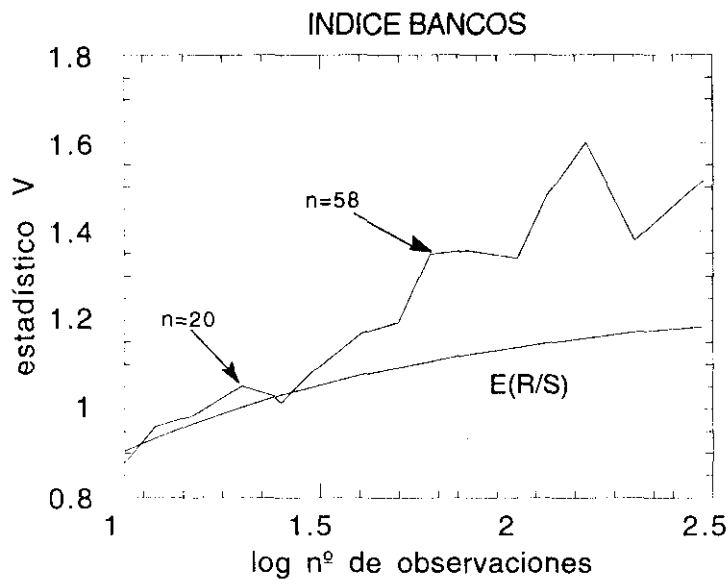


Figura 7.19: Estadístico V del sector bancos de la Bolsa de Madrid.

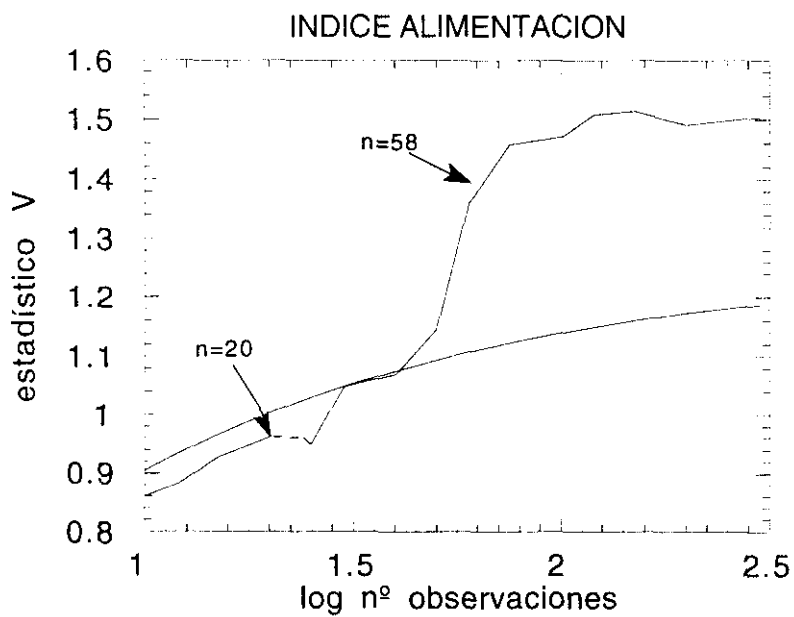


Figura 7.20: Estadístico V del sector alimentación de la Bolsa de Madrid.

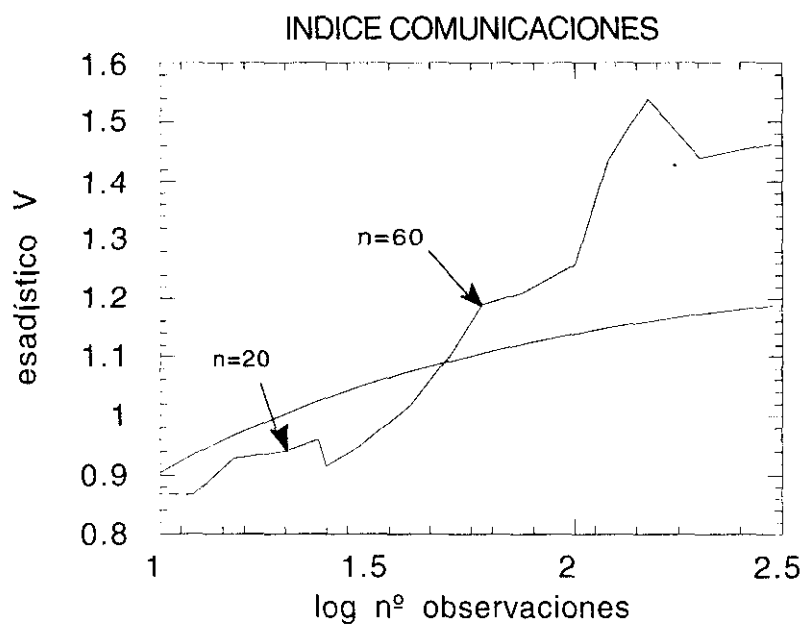


Figura 7.21: Estadístico V del sector comunicaciones de la Bolsa de Madrid.

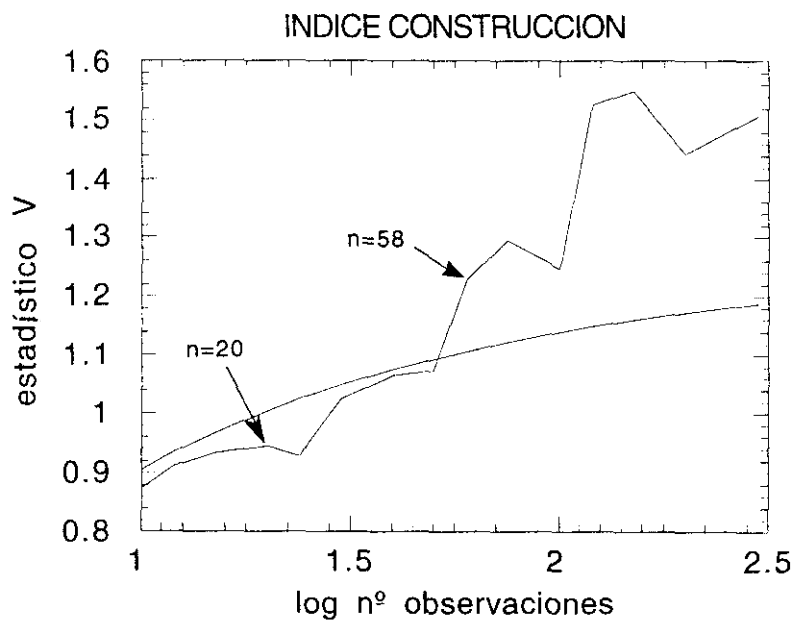


Figura 7.22: Estadístico V del sector construcción de la Bolsa de Madrid.

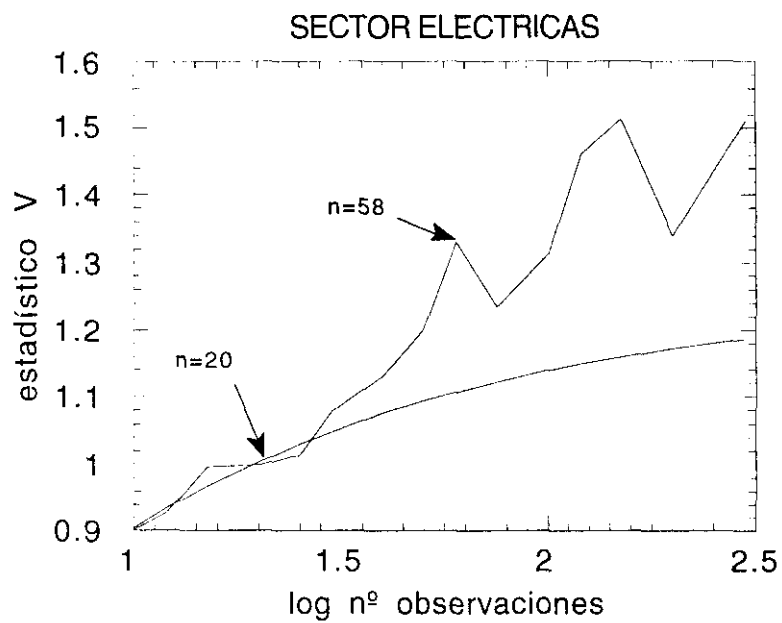


Figura 7.23: Estadístico V del sector eléctricas de la Bolsa de Madrid.

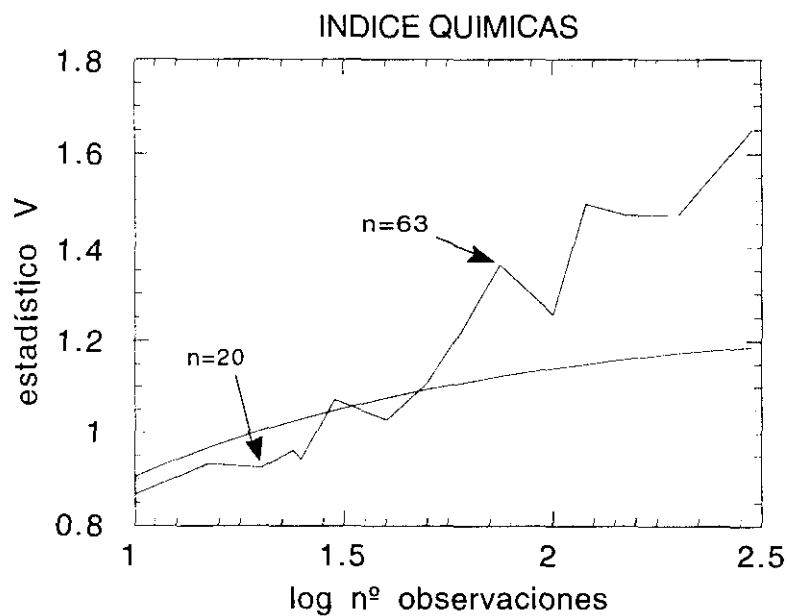


Figura 7.24 Estadístico V del sector químicas de la Bolsa de Madrid.

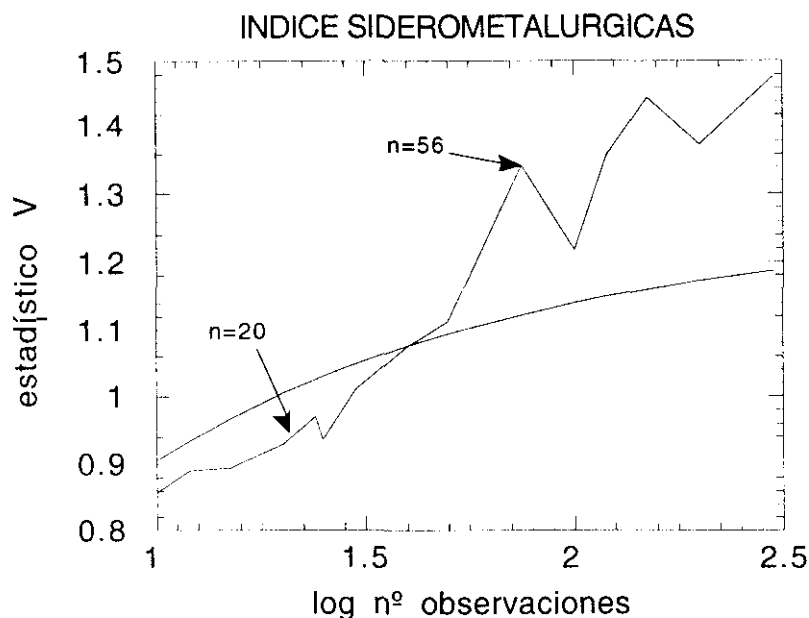


Figura 7.25: Estadístico V del sector siderometalúrgicas de la Bolsa de Madrid.

Utilizando los datos del IBEX 35 debe ser posible encontrar también la existencia de estos ciclos, pero dada la escasa longitud temporal de la serie sólo será posible encontrar el ciclo más corto. Si se observa la figura 7.26 puede verse como el estadístico V sigue una tendencia creciente hasta $n=400$ lo que significa, dado que los datos son diarios, un ciclo de 1.6 años, siendo este resultado semejante al obtenido con los valores mensuales.

Igualmente se ha utilizado los datos del IBEX 35 a cinco días (figura 7.27) donde también puede observarse el ciclo de aproximadamente unos 1.6 años aunque como ya habíamos dicho H , no era significativo debido a la escasez de los datos.

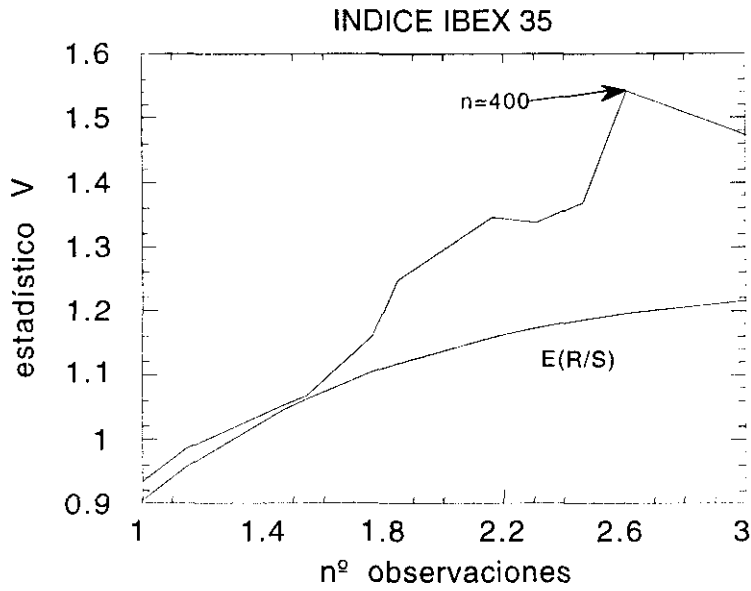


Figura 7.26: Estadístico V, IBEX 35 diario.

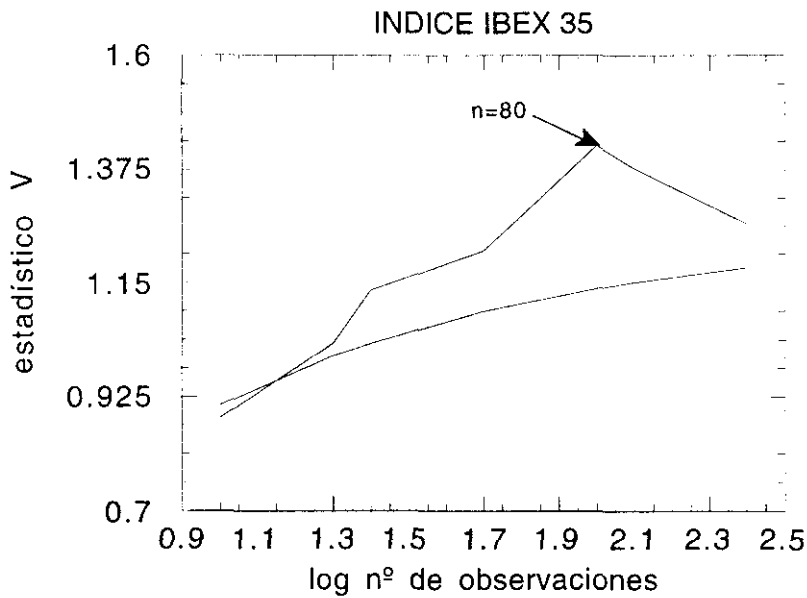


Figura 7.27: Estadístico V, IBEX 35 a cinco días.

7.3. DIMENSIÓN DE CORRELACIÓN

A continuación se ofrecen los resultados del análisis de la dimensión de correlación obtenidos siguiendo la metodología expuesta en el Capítulo 3. Una dimensión de correlación baja es una de las características necesarias para considerar que la serie sigue un comportamiento caótico.

Se calculará la función de correlación así como la pendiente instantánea del logaritmo de la función de correlación versus el logaritmo de la separación, tanto para la serie original de la tasa de variación del índice general como para la del IBEX 35.

Las figuras 7.28 y 7.30 muestran el cálculo de la integral de correlación mediante el método del retardo en el tiempo, para unas dimensiones de inserción que van de 2 a 16. En estas figuras las líneas situadas en la parte superior indican una dimensión de inserción menor. Lo primero que se observa en los gráficos es la existencia de fluctuaciones aleatorias en la parte inferior de las líneas de cada dimensión de inserción, lo cual se debe al escaso número de datos, dado que la distancia r , en este caso es muy pequeña y por otro lado se está utilizando una función de Heaviside. Esta parte debe ser ignorada para el cálculo de la pendiente de la integral de correlación y por lo tanto de la dimensión. Si se observan ahora los gráficos de las pendientes instantáneas, se pueden distinguir dos tipos de comportamientos, según el índice que se tome para el análisis. En el caso del índice IBEX 35, figura 7.29, no es posible observar la saturación en la pendiente, ya que ésta varía entre 4 y 12. Es imposible, por lo tanto, asegurar que se trate de una serie caótica. Esto puede deberse a que, como ya se ha mencionado anteriormente, el espacio temporal que abarcan los datos es pequeño y, además la serie al estar muestreada a una frecuencia alta, -recuérdese que se trata de datos diarios- es más fluctuante y contiene ruido. Sin embargo, si se analiza la figura 7.31, del índice general de la Bolsa de Madrid, se puede constatar que existe una tendencia a la saturación en una dimensión cercana a 6. Este comportamiento puede ser un indicador de caos aunque el efecto de saturación no está suficientemente claro, posiblemente debido a la escasez en el número de datos.

Resultados similares de la dimensión de correlación para series de datos bursátiles, pueden encontrarse en Scheinkman y LeBaron (1989) y Lui, Granger y Heller (1993)⁴.

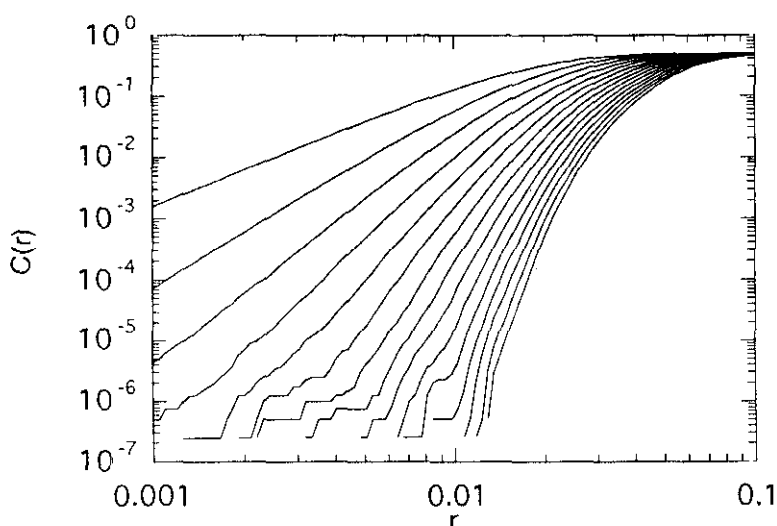


Figura 7.28: Integral de correlación para el índice IBEX 35 con datos diarios para las dimensiones de inserción 2 a 16.

Como ya se ha indicado anteriormente, la existencia de ruido en los datos puede influir en la determinación de la dimensión. Brock (1986)⁵ sugiere adaptar el modelo a un $AR(p)$ y realizar el mismo cálculo sobre los residuos del modelo ajustado. Brock demuestra el siguiente teorema: Sea $\{x_t\}_{t=1}^{\infty}$ una serie de datos deterministas y caóticos, si se adapta la serie a un modelo $AR(p)$ con p finito; entonces, en general, la dimensión de correlación y el exponente de Liapunov dominante de $\{x_t\}$ y $\{\varepsilon_t\}$ son iguales. Las figuras 7.32, 7.33, 7.34 y 7.35 esquematizan los resultados del cálculo de la integral de correlación, así como de los valores de las pendientes instantáneas, para cada

⁴ Scheinkman, J. A. y LeBaron, B. (1989) "Nonlinear Dynamics and Stock Returns" *Journal of Business*. 62. 311-337.

Lui, T., Grange, C. W. J. y Heller, W. P. (1993) "Using the Correlation Exponent to Decide Whether an Economic Series is Chaotic" en *Nonlinear Dynamics, Chaos and Econometrics*. Hasmem Pesaran, M. y Potter, S. M. (eds.) John Wiley & Sons.

⁵ Brock, W. A. (1986) "Distinguishing Random and Deterministic Systems: Abridged Version". *Journal of Economic Theory*. 40. 168-195.

dimensión de inserción, de las series de residuos de un $AR(1)$, identificado en las dos series de datos.

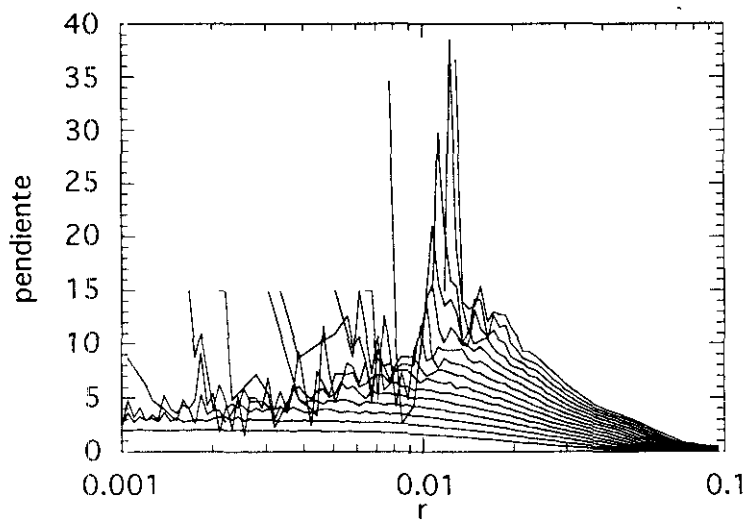


Figura 7.29: Pendiente instantánea para el gráfico 7.28, las dimensiones de inserción están comprendidas entre 2 y 16.

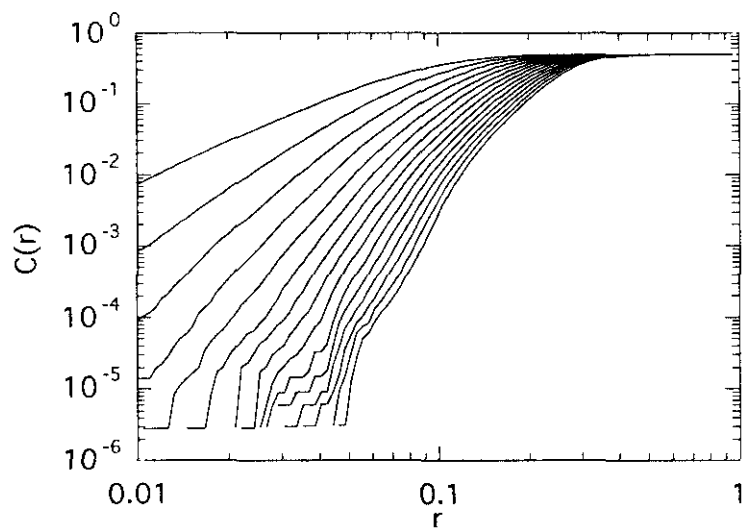


Figura 7.30: Integral de correlación para el índice mensual general de la Bolsa de Madrid.

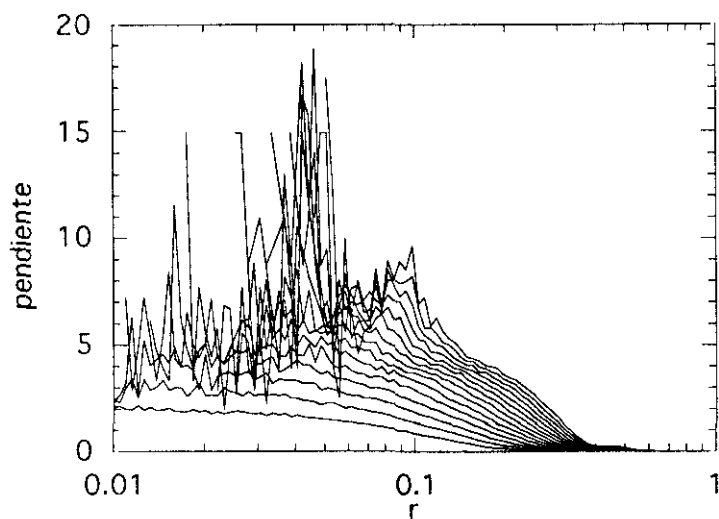


Figura 7.31: Pendiente instantánea para el gráfico 7.30, las dimensiones de inserción están comprendidas entre 2 y 16.

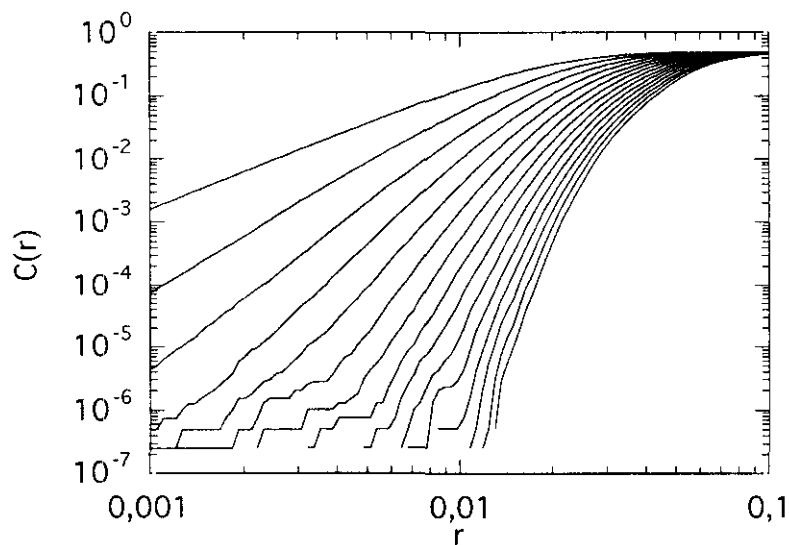


Figura 7.32: Integral de correlación para la serie de residuos del índice IBEX 35, las dimensiones de inserción están comprendidas entre 2 y 16.

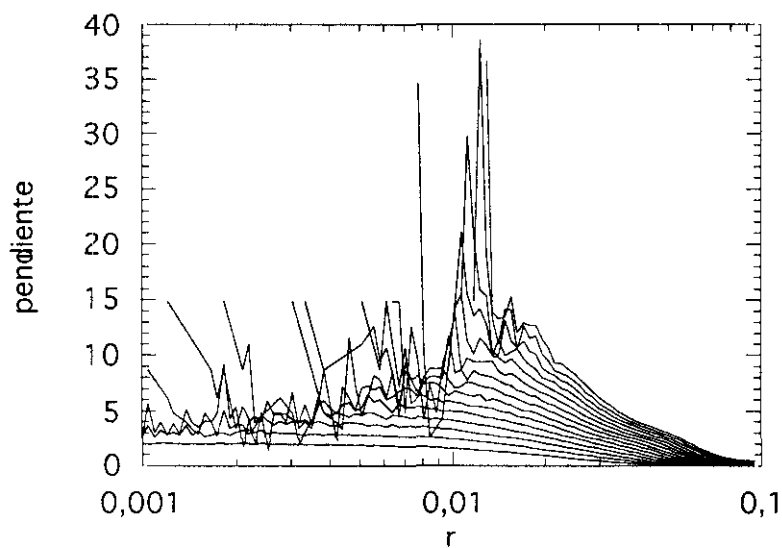


Figura 7.33: Pendiente instantánea para el gráfico 7.32, las dimensiones de inserción están comprendidas entre 2 y 16.

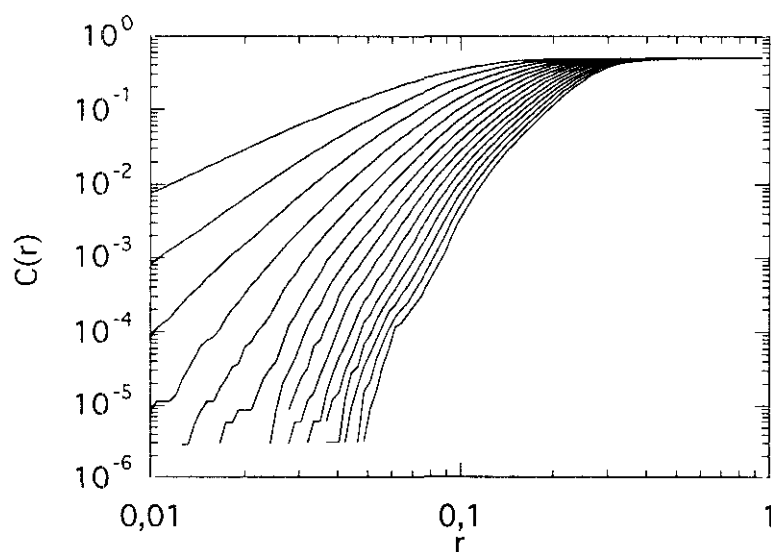


Figura 7.34: Integral de correlación para la serie de residuos del índice general de la Bolsa de Madrid, las dimensiones de inserción están comprendidas entre de 2 y 16.

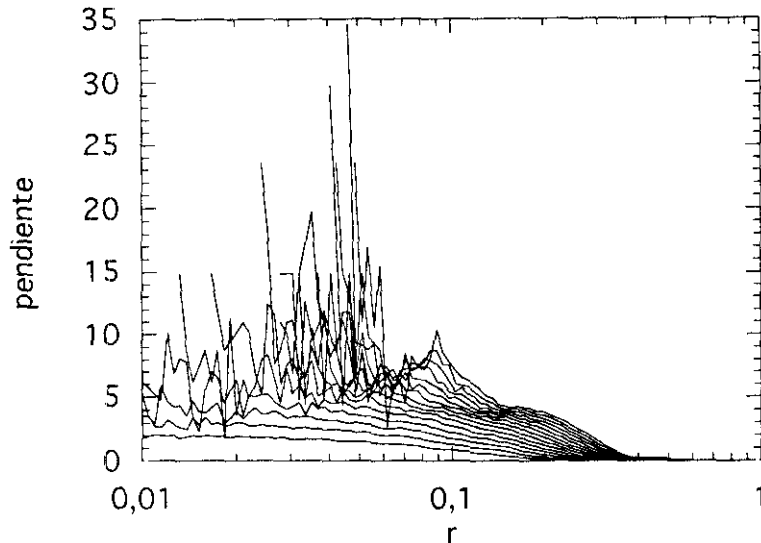


Figura 7.35: Pendiente instantánea para el gráfico 7.34, las dimensiones de inserción están comprendidas entre 2 y 16.

Es posible observar que no existe mucha diferencia entre los gráficos resultantes del análisis de la serie de residuos y los de la serie original. En ambos casos no se puede constatar la convergencia de las pendientes de la integral de correlación para la serie del IBEX 35, mientras que se observa que la pendiente converge a valores entre 6 u 8 para la serie de índice general de la Bolsa de Madrid. Podemos, pues, concluir que la serie del índice general de la Bolsa de Madrid cumple el teorema que demuestra Brock, lo que permite reforzar la afirmación de que la serie puede ser caótica. En cualquier caso, como ya se ha explicado, la obtención de este resultado, aunque semejante al obtenido en otros estudios sobre precios de las acciones, no se puede considerar como del todo concluyente, debido a la escasez del número de datos. Según Ramsey y Yuan (1989)⁶, la pendiente del logaritmo de la integral de correlación $\log C(r)$ versus $\log(r)$ está sesgada a la baja cuando el número de observaciones es pequeño, lo cual puede provocar que se acepte la existencia de caos cuando existe la posibilidad de que no lo haya.

⁶ Ramsey, J. y Yuan, H. (1989) "Bias and Error Bias in Dimension Calculation and Their Evaluations in some Simple Models". *Physical Letters A*. 134. 287-297.

7.4 LOS EXPONENTES DE LIAPUNOV

Los exponentes de Liapunov son una medida de la convergencia o divergencia de dos condiciones iniciales cercanas en un sistema dinámico. La existencia de un exponente de Liapunov positivo caracteriza al sistema como caótico, ya que una pequeña perturbación en las condiciones iniciales crecerá exponencialmente según dicho exponente.

Vamos a analizar los exponentes de Liapunov para las series de cotizaciones del índice general y de IBEX 35 según el algoritmo de Wolf⁷. En la figura 7.36 puede observarse la convergencia del exponente de Liapunov a un valor de $\lambda=0.1$, valor positivo que parece indicar que la serie sigue un comportamiento caótico. La figura 7.37 muestra el mismo análisis para la serie del índice IBEX 35, en este caso el exponente de Liapunov converge a $\lambda=0.07$, que es un valor positivo aunque demasiado cercano a 0 para poder asegurar un comportamiento caótico de la serie. Ya hemos dicho que este algoritmo es muy sensible al ruido en los datos y puede no proporcionar una correcta caracterización cuando el número de datos de la serie es limitado⁸. La serie del IBEX 35, como ya se ha explicado, por estar muestreada a una frecuencia superior se comporta de forma más aleatoria, lo que puede proporcionar una posible explicación de la obtención de un exponente de Liapunov tan bajo.

El resultado que se obtiene para el índice general de la Bolsa de Madrid es semejante al obtenido por Eckmann et al. (1998)⁹ para la serie de S&P 500.

⁷ Wolf, A., Swift, B., Swinney, J. y Vastano, J. (1985) "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series". *Physica D*. 16. 285-317.

⁸ Esta conclusión se demuestra en Brock, W. A. (1986) "Distinguishing Random and Deterministic Systems: Abridged Version". *Journal of Economic Theory*. 40. 168-195.

⁹ Eckmann, J. P., Oliffson, S., Ruelle, D. y Scheinkman, J. A. (1988) "Lyapunov Exponents for Stock Returns". en Anderson, P., Arrow, K. y Pines, D. (eds.) *The Economy as an Evolving Complex System*, Vol. V. Santa Fe Institute in the Science of Complexity. Redwood City. CA. Addison Wesley.

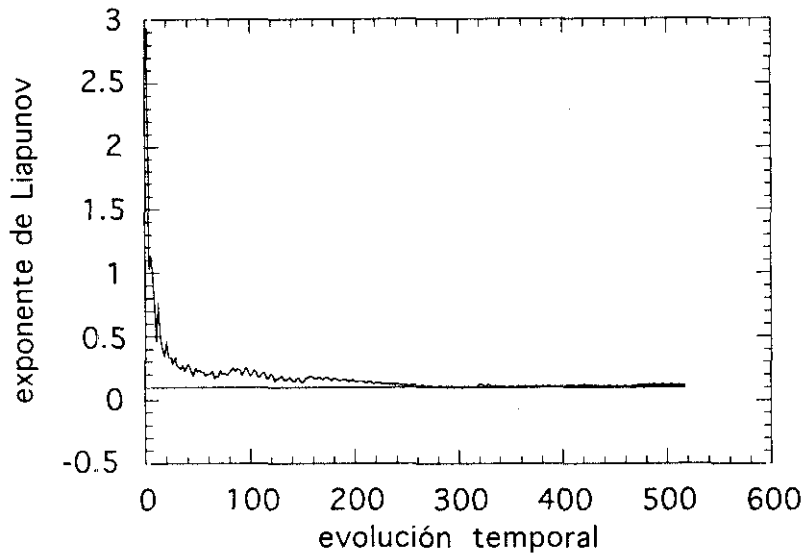


Figura 7.36: Exponente de Liapunov según el algoritmo de Wolf para la serie temporal del índice general de la Bolsa de Madrid, $\lambda=0.1$.

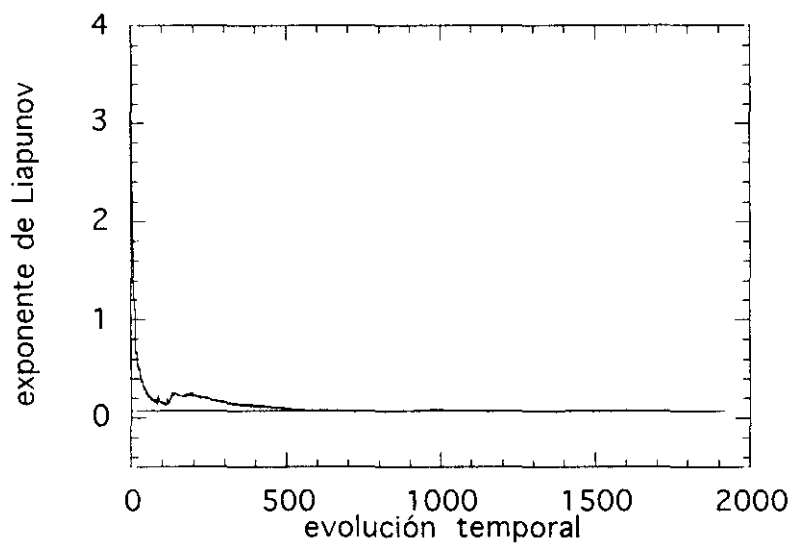


Figura 7.37: Exponente de Liapunov según el algoritmo de Wolf para la serie temporal del IBEX 35, $\lambda=0.07$.

Vamos a aplicar ahora el teorema propuesto por Brock y analizar el exponente de Liapunov para la serie de residuos de la serie $AR(1)$ identificada para ambas series. Las figuras 7.38 y 7.39 muestran los resultados.

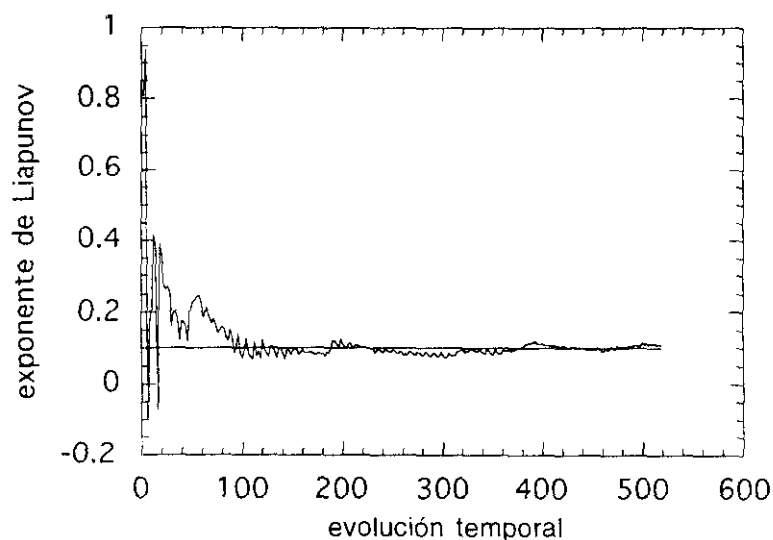


Figura 7.38: Exponente de Liapunov para la serie de residuos del índice general de la Bolsa de Madrid, $\lambda=0.1$.

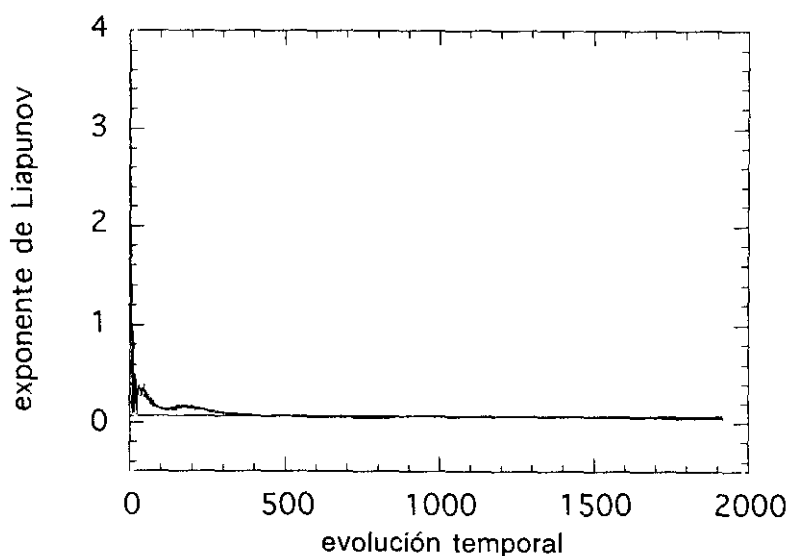


Figura 7.39: Exponente de Liapunov para la serie de residuos del IBEX 35, $\lambda=0.07$.

Comparando los gráficos 7.36 con 7.38 y 7.37 con 7.39 se puede constatar que los exponentes de Liapunov son los mismos para la serie original y para la serie de residuos, por lo que las series cumplen el teorema de Brock, lo que permite apoyar con mayor fuerza la hipótesis de caos en la serie de índice general de la Bolsa.

Según Brock (1986)¹⁰, debido a la inexistencia de errores estandar para los exponente de Liapunov, para conjuntos pequeños de datos, el algoritmo de estimación de Wolf puede generar exponentes espúreos positivos en procesos i.i.d., lo que puede impedir la distinción de procesos lineales estocásticos y procesos deterministas. Por esta razón, deben observarse con cautela los exponentes obtenidos, que presentan indicios de que las series son caóticas, siendo imposible poder asegurarlo completamente.

En cualquier caso hay que insistir en que dado el número limitado de observaciones de las series utilizadas, es posible que el algoritmo de Wolf no proporcione una correcta caracterización de los exponentes de Liapunov, como se puede constatar en Brock (1986)¹⁰.

7.5. ANÁLISIS ESPECTRAL

Como ya se ha anticipado, el análisis de Fourier se emplea en el estudio de los sistemas dinámicos. El análisis espectral puede proporcionar información cualitativa y cuantitativa sobre el comportamiento del sistema. Observando la estructura de la PSD es posible obtener conclusiones sobre la periodicidad o cuasiperiodicidad de un sistema. La figura 7.39 muestra el espectro de potencias para las serie del índice general de la Bolsa de Madrid.

¹⁰ Brock, W. A. (1986) "Distinguishing Random and Deterministic Systems: Abridged Version". *Journal of Economic Theory*. 40. 168-195.

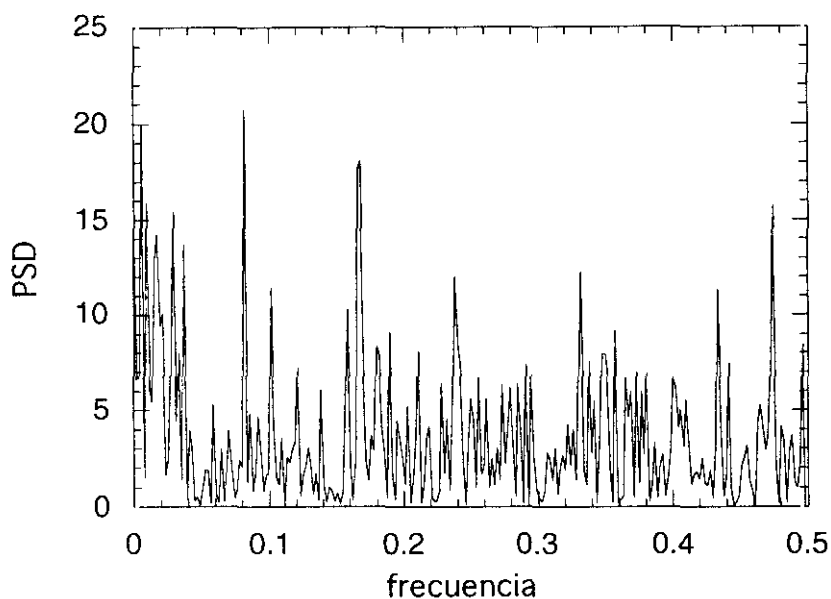


Figura 7.39: PSD de la serie del índice general de la Bolsa de Madrid.

Los picos más altos de la PSD pueden reflejar una periodicidad de la serie. La tabla 7.13 muestra los picos más relevantes junto con el número de años al que correspondería cada periodo.

La elección de los picos relevantes se ha llevado a cabo del siguiente modo: Si tomamos los 100 últimos valores y hallamos la media y la desviación típica obtenemos 3.15 para la media y 2.89 para la desviación típica. Si al valor medio le sumamos tres desviaciones típicas se tiene que el valor resultante es 11.82, lo que indica que en el 99.73% de los casos todos los valores son inferiores a 11.82, como tenemos 256 valores de la PSD, como máximo podría haber un valor superior a 11.82 debido a fluctuación estadística. Tomamos pues únicamente los valores superiores a dicho número.

Tabla 7.13: Comparación de resultados del análisis de la periodicidad de la serie según la PSD y según el análisis R/S .

n	POTENCIA	T (años)	T (años) R/S
0	16.39		
3	19.90	14.22	13.83
5	15.90	8.53	8.52
8	12.82	5.53	5.50
9	14.22	4.74	4.80
15	15.42	2.84	-
19	13.72	2.25	2.35
42	20.73	1.02	1.62
85	17.68	0.50	-
86	18.11	0.49	-
122	12.01	0.35	-
170	12.25	0.25	-
243	15.73	0.176	-

El valor para $n=15$ podría ser un armónico simultáneo de $n=3$ y $n=5$ y sumando estos armónicos con el fondo puede dar un valor superior al muestral. El valor $n=42$ que corresponde aproximadamente a $T=1$ año es un valor válido y representativo. Lo mismo ocurre con $T=6$ meses. Los siguientes resultados pueden aparecer por estar en la zona de frecuencias altas.

Si se comparan los resultados obtenidos mediante análisis espectral con los obtenidos mediante el análisis R/S que aparecen en la figura 7.18 puede observarse que algunos de los puntos donde cambia la pendiente del estadístico V corresponden también a puntos donde se ha encontrado un pico de la PSD. La última columna de la tabla muestra los puntos donde es posible apreciar la existencia de ciclos según el análisis R/S .

La figura 7.40 muestra el espectro de potencias para la serie del IBEX 35.

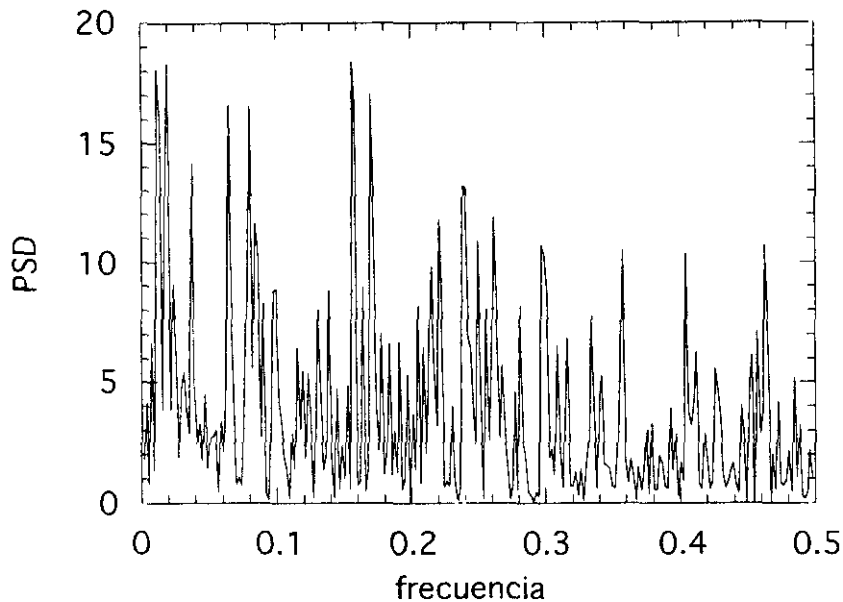


Figura 7.40: PSD de la serie del IBEX 35.

Como puede observarse el espectro de potencia para la serie del IBEX 35 es mucho más errático que el de la serie del índice general de forma que se asemeja más al de la serie de ruido blanco. Esto puede deberse, como ya se ha dicho a la existencia de mayor ruido en los datos. Los picos más relevantes, con el periodo al que se refieren, pueden verse en la tabla 7.14.

Si observamos ahora la figura 7.26 que muestra el estadístico V y se puede comprobar que los puntos en los que la pendiente cambia de tendencia son muchos menos que los obtenidos mediante análisis espectral. El valor en días correspondiente a dichos puntos aparece en la última columna de la tabla 7.14. Si comparamos los puntos obtenidos mediante ambos métodos vemos que los resultados no son tan similares como los obtenidos con la serie del índice general. Además el PSD no detecta el valor de $T=400$ que es el que parece más significativo para el estadístico V . Esto puede deberse al comportamiento más errático de la serie del IBEX 35 que se produce como consecuencia utilizar datos muestreados a una frecuencia alta, en este caso datos diarios.

Tabla 7.14: Comparación de resultados del análisis de la periodicidad de la serie según la PSD y según el análisis R/S.

n	POTENCIA	T (días)	T (días) R/S
6	18.1	170.7	169.8
7	16.1	143.3	-
9	14.1	113.8	128.8
10	18.3	102.4	-
19	14.2	53.9	52.5
41	16.6	25.0	33.8
80	18.4	12.8	-
81	16.9	12.6	-
87	17.0	11.8	-

Como se explica en el capítulo 4, para muchos sistemas caóticos se ha observado que existe un ruido denominado $1/f^\alpha$. Este se produce porque los componentes de frecuencia baja dominan sobre los componentes de frecuencia alta siguiendo una función exponencial¹¹. Este fenómeno aparece muy acentuado en las series correspondientes al cuadrado de los rendimientos de las acciones¹².

Si se calcula el espectro de potencia en logaritmos del cuadrado de los rendimientos de las acciones y se normaliza restando el valor medio de los valores del espectro para la zona de altas frecuencias se obtienen las figuras 7.41 y 7.42 para el índice general de la Bolsa de Madrid y para el IBEX 35 respectivamente. Observando dichos gráfico se puede comprobar la tendencia decreciente de los mismos lo que indica que las series no se comportan como un ruido blanco. Los valores de α que se obtienen son 1.41 para la serie del índice general de la Bolsa de Madrid y 1.21 para el IBEX 35.

¹¹ Shaw, R. (1980) "Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow. *Z. Naturforsch.* 36A. 80-112.

Voss, F. R. (1993) "1/f noise and fractals in DNA-base sequences". En Crilly, A. J., Ernschaw, R. A. y Jones, H. (eds.) *Applications of Fractal and Chaos*, 7-20. Springer- Verlag.

¹² Brock, W. A., Hsieh, D. A. y LeBaron, B. *Nonlinear Dynamics, Chaos and Instability: Statistical Theory an Economic Evidence*. MIT Press, Cambridge, MA. 1991. pag 188.

En ambos casos el valor obtenido es menor que el que se espera según la teoría, esto puede deberse de nuevo a que el valor teórico de α es un límite asintótico para series temporales con un gran número de datos, por lo tanto, dada la escasa longitud de las series no consigue alcanzarse dicho límite. Sin embargo, parece clara la tendencia decreciente del espectro de potencia.

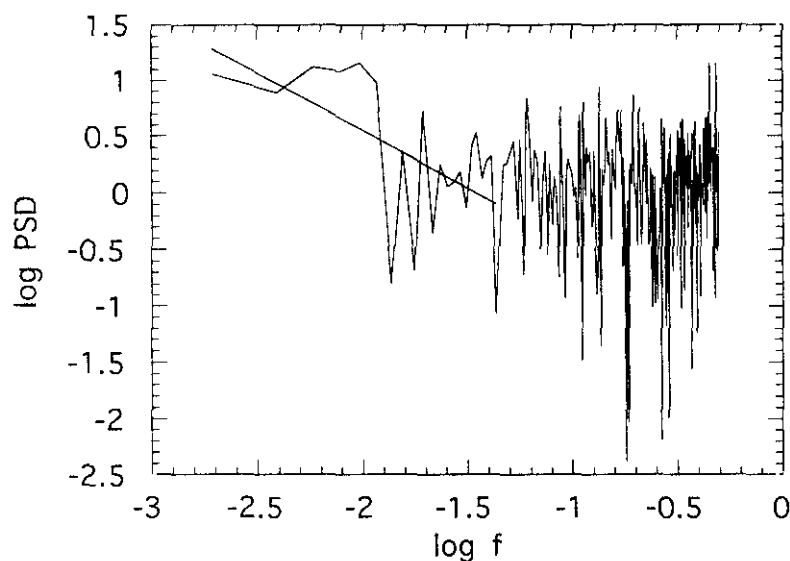


Figura 7.41: PSD del índice general de la Bolsa de Madrid. Ajuste por mínimos cuadrados $\alpha=1.41$.

El espectro de potencias normalizado se calcula restando el valor medio de los valores del espectro de potencia para la zona de bajas frecuencias, que es donde normalmente se encuentra el ruido, a la serie de PSD¹³.

¹³ Voss, F. R. (1993) "1/f noise and fractals in DNA-base sequences". En Crilly, A. J., Ernschaw, R. A. y Jones, H. (eds.) *Applications of Fractal and Chaos*. 7-20. Springer- Verlag.

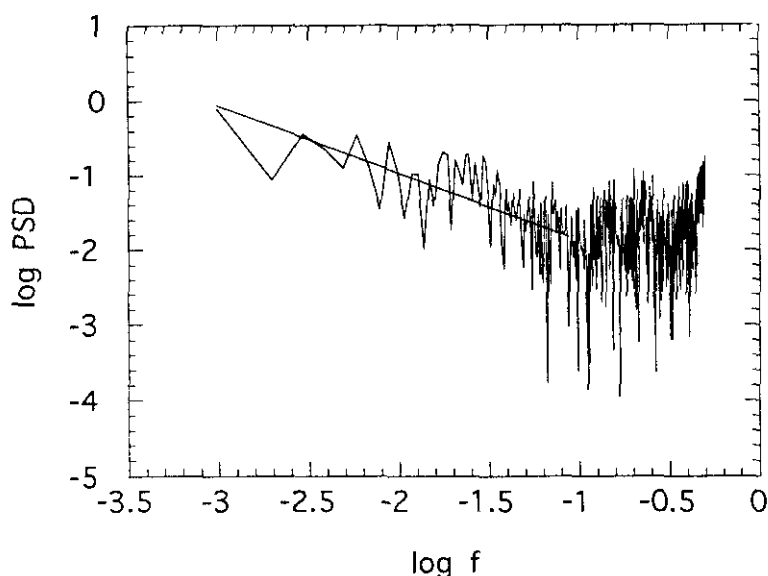


Figura 7.42: PSD del IBEX 35. Ajuste por mínimos cuadrados $\alpha=1.25$.

7.6. EVIDENCIAS DE NO LINEALIDAD EN LAS COTIZACIONES: EL TEST BDS

GRÁFICO DE RECURRENCIA

Antes de comprobar los resultados del estadístico BDS vamos a observar el gráfico de recurrencia de las series, el cual, como se explica en el capítulo 4, sirve para detectar el cambio estructural en una serie temporal. Las figuras 7.43 y 7.44 muestran dichos gráficos para las series del índice general de la bolsa de Madrid y del IBEX 35, respectivamente.

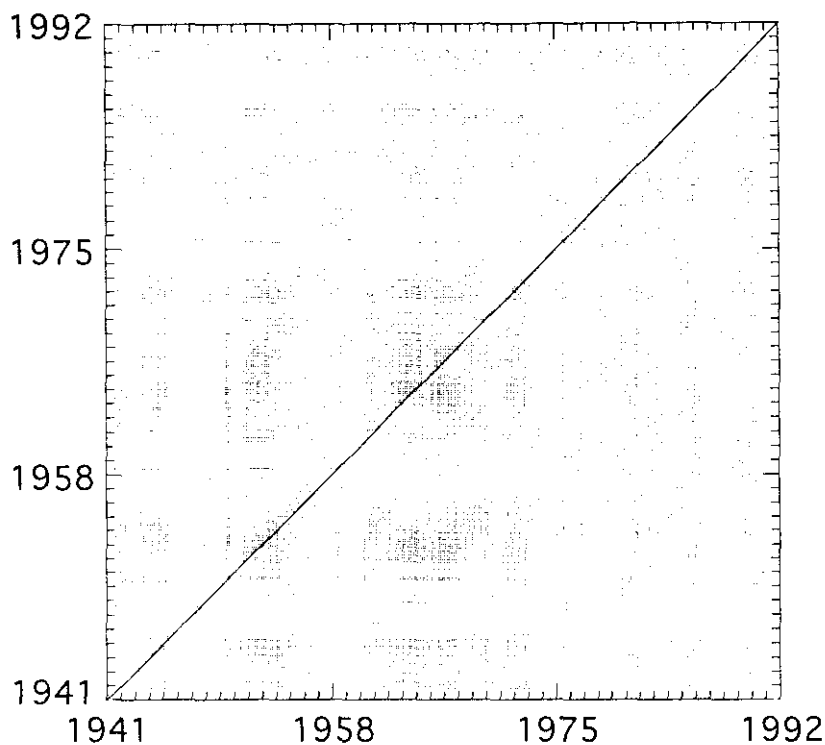


Figura 7.43: Gráfico de recurrencia para el índice general de la Bolsa de Madrid.

La existencia de zonas claras y oscuras en los gráficos de recurrencia permite suponer que existe una violación de la hipótesis de que la tasa de variación de las cotizaciones se comporte i.i.d.. Es posible, observando las figuras, detectar importantes cambios estructurales. Las zonas oscuras pueden indicar tanto periodos de escasa volatilidad, como periodos en los que hay una estructura no lineal mayor. Los cambios de zonas claras a oscuras sugieren un fuerte cambio de la dinámica del sistema.

En la figura 7.43 se pueden observar principalmente dos cuadrados más oscuros alrededor de la diagonal que corresponden a periodos de estabilidad. El primero va de 1951 a 1955 y corresponde a un momento en el que la economía española sufre un fuerte crecimiento con gran estabilidad de precios. El segundo va de 1961 a 1973, fecha en la que comienza la crisis del

petróleo, y con ella un periodo turbulento, que aparece en el gráfico de recurrencia como una zona en blanco alrededor de la diagonal.

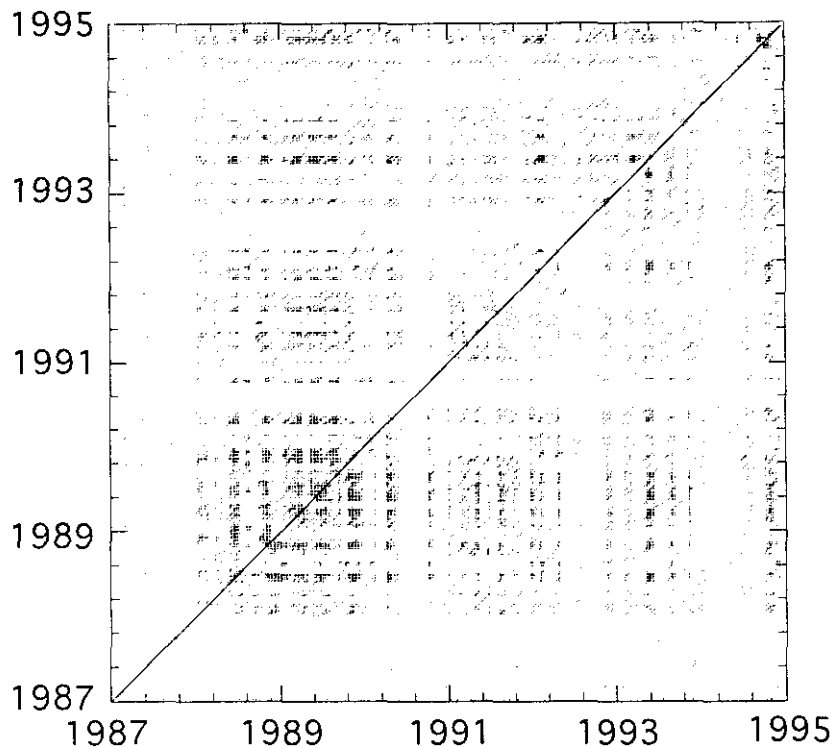


Figura 7.44: Gráfico de recurrencia del índice IBEX 35.

En la figura 7.4 puede apreciarse una clara zona blanca cerca del origen del gráfico de recurrencia, que corresponde a la crisis que en 1987 se produce en la bolsa de Nueva York y que se transmite a todas las bolsas europeas y entre ellas la de Madrid.

Entre 1988 y mediados de 1990 se advierte un cuadrado más oscuro alrededor de la diagonal, pero con zonas más claras dentro del mismo. Esto corresponde a un periodo con movimientos erráticos del índice. Por ejemplo, puede verse un banda más clara alrededor de 1990 que coincide con una minicrisis que se inicia en la bolsa de Nueva York a finales del año anterior.

A mediados de 1990 comienza otra etapa de mayor volatilidad debida a la nueva crisis derivada de la guerra de Golfo.

EL TEST BDS

A continuación se presentan los resultados de aplicar el estadístico BDS a la series originales de los dos índices de la bolsa. Se ha calculado el estadístico para las dimensiones de encajado $n=2, 3, 4$ y 5 y para valores de ε de $0.25, 0.5, 1, 1.5$ y 2 desviaciones típicas de los datos. La tabla 7.15 muestra los resultados para la serie del índice general. Como puede observarse es posible, en todos los casos, rechazar la hipótesis de i.i.d..

Tabla 7.15: Estadístico BDS del índice general de la Bolsa de Madrid.

n	ε/σ				
	0.25	0.5	1	1.5	2
2	5.840095	5.194503	3.821797	3.990361	9.381537
3	10.560119	9.629033	7.664747	6.635921	6.404317
4	16.316307	14.311967	10.267917	8.034744	7.088071
5	20.142443	19.283282	12.951483	9.381537	7.712086

En la tabla 7.16 muestra los resultados del estadístico BDS para la serie de datos originales del índice IBEX 35, en este caso también se rechaza la hipótesis de i.i.d..

Pero al aplicar el estadístico BDS es recomendable limpiar la serie de cualquier dependencia lineal que pueda haber en los datos, ya que si esta existiera provocaría que se rechazara la hipótesis de i.i.d. de la serie. Para evitar esto tomamos la serie de residuos obtenida de un $AR(1)$. En las tablas 7.17 y 7.18 se exponen los resultados del estadístico BDS para las series de residuos de ambas series.

Tabla 7.16: Estadístico BDS del índice IBEX 35.

n	ϵ/σ				
	0.25	0.5	1	1.5	2
2	13.343875	13.648496	13.616281	12.893772	11.940408
3	18.877888	18.103634	16.504814	15.361211	14.381205
4	25.954288	23.613833	19.636556	17.439852	15.917387
5	34.320075	30.036022	22.415922	18.845725	16.760378

Tabla 7.17: Estadístico BDS para la serie de residuos de índice general de la Bolsa de Madrid.

n	ϵ/σ				
	0.25	0.5	1	1.5	2
2	6.922454	5.683908	4.624107	4.066834	4.727866
3	10.012855	10.088762	8.291317	6.569896	6.170742
4	14.750758	14.382121	11.042503	8.123854	6.929695
5	13.319774	19.906815	14.095224	9.657452	7.661181

Tabla 7.18: Estadístico BDS para la serie de residuos de IBEX 35.

n	ϵ/σ				
	0.25	0.5	1	1.5	2
2	12.890692	12.810138	13.024257	12.520398	11.472056
3	19.298314	18.204885	16.406271	15.127818	14.218511
4	26.830170	24.211098	19.878351	17.367244	15.857520
5	37.716856	31.247882	23.111366	18.960075	16.765356

Los resultados de ambas tablas permiten rechazar la hipótesis de i.i.d. de las series. Los resultados obtenidos mediante este test permiten contradecir la teoría de que las variaciones de las cotizaciones son generadas por variables i.i.d.

Como ya se explicó, el rechazo de la hipótesis no implica que la serie sea caótica, sin embargo, si se ha limpiado la serie de toda dependencia lineal, el estadístico BDS muestra que hay evidencias de no linealidad en la serie de rendimiento de las acciones.

APÉNDICE

RESULTADOS DEL ANÁLISIS POR SERIES TEMPORALES DE LA SERIE DEL ÍNDICE GENERAL DE LA BOLSA DE MADRID

TABLA 1: Función de autocorrelación de la serie de rendimientos de las acciones

j	ρ_j	j	ρ_j
1	0.16084*	21	0.028393
2	0.0091325	22	-0.0099744
3	-0.011623	23	-0.012317
4	0.074786	24	0.056101
5	0.086811	25	0.051363
6	0.12812	26	0.0039678
7	0.038381	27	-0.031639
8	0.049330	28	0.019213
9	0.0051480	29	0.036711
10	0.078369	30	0.018444
11	0.099678	31	-0.056298
12	0.088148	32	0.0098437
13	-0.0029566	33	-0.083867
14	-0.0092088	34	0.081235
15	0.029019	35	0.069928
16	0.042944	36	0.028344
17	0.018264	37	-0.0015786
18	0.0016994	38	-0.018518
19	-0.083088	39	-0.048955
20	-0.036462	40	-0.046140

(*) significativo al 99%.

Resultados de la estimación de un AR(1)

$$\alpha_1=0.1731 \quad (0.0399) \quad \text{Estadístico } t=4.34$$

El valor entre paréntesis es la desviación típica.

TABLA 2: Resultados estadísticos de los residuos del modelo estimado.

Mínimo	-0.33776426
Máximo	0.18429604
Media	-3.4098683e-06
Desv. típica	0.048676122
Varianza	0.0023693648
Sesgo	-0.4496295
Kurtosis	4.3557142

TABLA 3: ACF de los residuos del modelo AR(1).

j	ρ_j	j	ρ_j
1	0.0027371	21	0.038542
2	-0.015719	22	-0.013072
3	-0.025874	23	-0.019838
4	0.065964	24	0.052941
5	0.057003	25	0.044183
6	0.11489	26	0.0018767
7	0.0097886	27	-0.036774
8	0.046020	28	0.020082
9	-0.014653	29	0.033149
10	0.063892	30	0.022156
11	0.077804	31	-0.064409
12	0.076880	32	0.033730
13	-0.016357	33	-0.10349
14	-0.014629	34	0.088816
15	0.025738	35	0.055843
16	0.038091	36	0.018051
17	0.012278	37	-0.0029213
18	0.011956	38	-0.011242
19	-0.082188	39	-0.040974
20	-0.029483	40	-0.033903

RESULTADOS DEL ANÁLISIS POR SERIES TEMPORALES DE LA SERIE DEL IBEX 35

TABLA 4: Función de autocorrelación de la serie de rendimientos de las acciones

j	ρ_j	j	ρ_j
1	0.17975*	21	0.0032328
2	0.049441	22	0.021735
3	0.014205	23	0.041293
4	0.030134	24	0.0042334
5	-0.035076	25	0.036262
6	0.0074495	26	0.028591
7	0.056815	27	-0.017730
8	0.016856	28	0.013194
9	0.025094	29	-0.017126
10	0.045916	30	-0.0029926
11	-0.014011	31	-0.016506
12	-0.0058374	32	-0.043866
13	0.0011372	33	0.017056
14	0.031020	34	0.0077684
15	0.013447	35	-0.012660
16	-0.011581	36	-0.053362
17	0.016359	37	-0.029798
18	0.032794	38	-0.017823
19	-0.012985	39	-0.036951
20	-0.030229	40	-0.016243

(*) significativo al 99%.

Resultados de la estimación de un AR(1)

$\alpha_1=0.1812$ (0.0219) Estadístico t=4.34

El valor entre paréntesis es la desviación típica.

TABLA 5: Resultados estadísticos de los residuos del modelo estimado.

Mínimo	-0.088676013
Máximo	0.084278144
Media	-2.2008608e-05
Desv. típica	0.011687037
Varianza	0.00013658683
Sesgo	-0.36495558
Kurtosis	5.6737978

TABLA 6: ACF de los residuos del modelo AR(1).

j	ρ_j	j	ρ_j
1	-0.0042066	21	0.0053221
2	0.018511	22	0.015783
3	0.0011920	23	0.039439
4	0.034392	24	-0.011679
5	-0.043699	25	0.032487
6	0.0031346	26	0.025559
7	0.058335	27	-0.023689
8	0.0029508	28	0.021733
9	0.016689	29	-0.021508
10	0.047647	30	0.0028283
11	-0.024348	31	-0.0081824
12	-0.0020291	32	-0.049020
13	-0.0039879	33	0.023138
14	0.029400	34	0.0074662
15	0.011756	35	-0.0032219
16	-0.017452	36	-0.049306
17	0.012874	37	-0.017080
18	0.032238	38	-0.0037597
19	-0.014279	39	-0.033368
20	-0.032344	40	-0.0064299

CONCLUSIONES

En la presente memoria se describen distintos métodos para comprobar la existencia de no linealidad, de no normalidad y de caos en series temporales. Así mismo, éstos se aplican a dos series de cotizaciones bursátiles de la Bolsa de Madrid: el índice general y el IBEX 35.

El análisis R/S permite comprobar si una serie sigue o no un movimiento Browniano y caracterizar la existencia de memoria en la misma, es decir, calificarla como persistente o antipersistente. Además, se comporta como un test robusto para encontrar las características periódicas de la serie, incluso cuando se aplica a series contaminadas con ruido.

Mediante el análisis espectral es posible obtener la periodicidad o cuasiperiodicidad de un sistema dinámico, así como la caracterización de una serie temporal como un movimiento Browniano fraccional.

La dimensión de correlación, una aproximación de la dimensión fractal, es uno de los elementos importantes para calificar una serie temporal como caótica. Así, una dimensión de correlación baja es una condición necesaria para considerar que la serie sigue un comportamiento caótico. Una serie que siga un comportamiento aleatorio tendrá una dimensión de correlación muy grande. El cálculo de la dimensión de correlación puede estar sesgado en el caso de que la serie contenga ruido estocástico.

La existencia de algún exponente de Liapunov positivo permite caracterizar a una serie como caótica, ya que implica que dos trayectorias cercanas divergen exponencialmente. El algoritmo utilizado proporciona excelentes resultados sobre la correcta caracterización del exponente de Liapunov de mayor valor cuando se dispone de una serie temporal, con un gran número de datos y que no contenga ruido. Sin embargo, los resultados obtenidos mediante esta algoritmo deben observarse con cuidado cuando se utilice en series con un número limitado de observaciones, como son las que normalmente se emplean en economía.

El análisis espectral es muy adecuado en el estudio de los sistemas dinámicos, ya que proporciona información sobre el comportamiento del sistema. Un sistema caótico se caracteriza por una banda ancha en el espectro de potencias. La existencia de picos en el espectro puede ser producto de ciertas periodicidades del sistema. Además, la densidad espectral de potencia permite clasificar el ruido del sistema como un movimiento Browniano fraccional.

El estadístico BDS se calcula a partir de la dimensión de correlación y permite, una vez limpiada la serie de toda linealidad, contrastar la hipótesis de no linealidad en la serie; este test aparece como muy robusto ante distintos modelos no lineales.

El resultado de la aplicación de los distintos test a sobre las series temporales de la Bolsa de Madrid permite obtener las siguientes conclusiones:

-Se rechaza la hipótesis de i.i.d. de los rendimientos de las acciones para las series de cotizaciones de la Bolsa de Madrid.

-La obtención, mediante el análisis R/S, de exponentes de Hurst de 0.67 y 0.61, para el índice general e IBEX 35, respectivamente, ambos significativamente diferentes de 0.5, ha permitido afirmar que ambas series presentan persistencia y memoria larga. Esto significa que grandes cambios en las cotizaciones van seguidos de grandes cambios y pequeños cambios van seguidos de pequeños cambios.

-Mediante el análisis R/S y el análisis de Fourier se ha mostrado que las series temporales de cotizaciones bursátiles se comportan como un movimiento Browniano fraccional. A través de éste último se ha obtenido un espectro de potencia ancho y decreciente, típico del movimiento Browniano fraccional.

-Se ha calculado una dimensión de correlación de la serie del índice general de la Bolsa de Madrid cercana a 6. Este resultado debe tomarse con precaución debido a que la serie utilizada, aunque cubre un intervalo temporal muy grande, contiene un número reducido de datos. En relación con la serie de IBEX 35, observando únicamente mediante el resultado de la

dimensión de correlación, no se ha podido concluir si se trata de una serie caótica con una dimensión muy alta o de una serie aleatoria.

-Se han obtenido los exponentes de Liapunov de las series de rendimientos de las acciones estudiadas, siendo ambos positivos, lo que proporciona indicios de que las series pueden ser caóticas. Estos resultados no pueden ser considerados como concluyentes ya que el exponente positivo de mayor valor se obtiene para la serie más corta, la del índice general, y el poco número de datos utilizados para el cálculo puede proporcionar una mala caracterización del exponente. Para la serie del IBEX 35, más larga, el exponente de Liapunov que se ha calculado también es positivo aunque muy cercano a cero.

-La existencia de un exponente de Hurst más cercano a 0.5 en la serie del IBEX 35 que está formada por datos diarios, ha permitido concluir que las series temporales muestreadas con una periodicidad alta contienen más ruido. Una mayor cantidad de ruido en los datos puede haber sido la causa de no poder obtener conclusiones totalmente favorables a la existencia de caos utilizando las técnicas tradicionales; así pues en series contaminadas con mucho ruido es frecuente la obtención de un exponente de Liapunov muy cercano a cero y una dimensión de correlación alta.

-Mediante la aplicación del estadístico BDS se ha podido rechazar la hipótesis de linealidad de los rendimientos de las acciones para ambas series.

-Los gráficos de recurrencia, basados en el cálculo de la dimensión de correlación, han permitido rechazar la hipótesis de que la tasa de variación de las cotizaciones se comporta i.i.d., siendo posible detectar, observando los mismos, importantes cambios estructurales.

-Se ha podido constatar en las series de rendimientos de las acciones la existencia de ciclos no periódicos. Para la serie del índice general que contiene menos ruido, los dos métodos utilizados para calcular las características de los movimientos cíclicos, el análisis R/S y el análisis espectral, muestran resultados parecidos. Los ciclos más importantes obtenidos son de 1.6 y 4.8 años. Para la serie del IBEX 35 los resultados de ambos métodos no son tan

homogéneos, aunque mediante el análisis R/S el ciclo que se obtiene es también de 1.6 años , semejante al obtenido con la otra serie.

BIBLIOGRAFÍA

Andersen, P. F. (1988) "Chaos in System Dynamics Models". *System Dynamics Review*. 4. 3-13.

Anis, A. A. y Loyd, E. H. (1976) "The Expected Value of the Adjusted Rescaled Husk Range of Independent Normal Summands". *Biometrika* . 1. 111-116.

Assaf, D. y Gadbois, S. (1992) "Definition of Chaos". *The American Mathematical Monthly*. 99. 9. 865.

Banks, J., Brooks, G., Davis, G. y Stacy, P. (1992) " On Devaney's Definition of Chaos". *American Mathematical Monthly*. 99. 332-334.

Benettin, G., Galgani, L., Strelcyn, J-M. (1976) "Kolmogorov Entropy and Numerical Experiments". *Physical Review A*. 14. 6. 2238-2245.

Blackman, R. B. y Tukey, J. W. *The Measurement of Power Spectra*. Dover Publications. New York. 1959.

Bracewell, R. *The Fourier Transforms and its Applications*. McGraw-Hill. New York. 1965.

Brock, W. A. (1986) "Distinguishing Random and Deterministic Systems: Abridged Version". *Journal of Economic Theory*. 40. 168-195.

Brock, W. A. y Baek, E. (1991) "Some Theory of Statistical Inference for Nonlinear Science". *Review of Economic Studies*. 58. 697-716.

Brock, W. A. y Milliaris, A. G. *Differential Equations, Stability and Chaos in Dynamic Economics*. North-Holland. 1989.

Brock, W. A. y Sayers, C. L. (1988) "Is the Business Cycle Characterized by Deterministic Chaos?". *Journal of Monetary Economics*. 22. 71-90.

Brock, W. A., Dechert, W. D. y Scheinkman, J. A. (1987) "A Test for Independence Based on the Correlation Dimension", Working Paper, University of Wisconsin at Madison, University of Houston and University of Chicago.

Brock, W. A., Dechert, W. D., Scheinkman, J. A., LeBaron, B. (1991) "A Test for Independence Based on the Correlation Dimension". Manuscrito no publicado.

Brock, W. A., Hsieh, D. A. y LeBaron, B. *Nonlinear Dynamics, Chaos and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence*. MIT Press, Cambridge, MA. 1991.

Brock, W. A., Lakonishok, J. y LeBaron, B. (1992). "Simple Technical Trading Rules and the Stochastic Properties of Stock Returns". *Journal of Finance* . 5. 1731-1766.

Champeney, D. C. *Fourier Transforms and their Physical Applications*. Academic Press. Londres. 1973.

Chen, P. (1988) "Empirical and Theoretical Evidence of Economic Chaos". *System Dynamics Review*. Vol. 4. 81-108.

Clark, R. y Ziemba, W. T. (1987) "Playing the Turn-of-the-Year Effect with Index Futures". *Operations Research*. 35. 6. 799-813.

Cootner, P. H. (1962) "Stock Prices: Random vs. Systematic Changes". *Industrial Management Review*. 3. 24-45.

Crilly, A. J., Earnshaw, R. A. y Jones, H. (eds.) *Applications of Fractals and Chaos*. Springer-Verlag. 1993.

Dahan Dalmedico, A. Chabert, J.-L y Chemla, K. (eds.) *Chaos et déterminisme*. Editions du Seuil. 1992.

Day R. H. y Huang W. (1993) "Chaotically Switching Bear and Bull Markets" en *Nonlinear Dynamics and Evolutionary Economics*. R. H. Day y P. Chen (eds.) Oxford University Press. 169-182.

Day R. H. y Huang. W. (1990) "Bulls, Bears and Market Sheep". *Journal of Economic Behavior and Organization*. 16. 37-83.

Denker, M. y Keller, G. (1986) "Rigorous Statistical Procedures for Data for Dynamical Systems". *Journal of Statistical Physics*. 44. 1/2. 67-93.

Devaney, R. L. (1984) "Burst into Chaos". *Physics Letters*. 104. 8. 385-387.

Devaney, R. L. (1987) "Chaotic Burst in Nonlinear Dynamical Systems". *Science*. 235. 342-345.

Devaney, R. L. *An introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison Wesley. 1984.

Eckmann, J. P. y Ruelle, D. (1985) "Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors". *Review of Modern Physics*. 57. 3. 617-656.

Eckmann, J. P., Kamphorst, S. O., Ruelle, D., Cilberto, S. (1986), "Liapunov exponents from time series". *Physical Review* 34A. 4971-4979.

Eckmann, J. P., Oliffson, S., Ruelle, D. y Scheinckman, J. (1998) "Lyapunov Exponents for Stock Returns". en Anderson, P., Arrow, K. y Pines, D. (eds.) *The Economy as an Evolving Complex System*, Vol. V. Santa Fe Institute in the Science of Complexity. Redwood City. CA. Addison Wesley.

Einstein, A. *Investigations on the Theory of Brownian Movement*. Dover Publications. 1956.

Engle, R. F. (1982) "Autoregressive Conditional Heterocedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation". *Econometrica* 50. 4. 987-1007.

Fama, E. F. (1965) "The Behavior of Stock Market Prices". *Journal of Business* . 38. 34-105.

Fama, E. F. (1970) "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work". *Journal of Finance* . 25. 2. 383-417.

Fama, E. F. (1991) "Efficient Capital Markets II". *Journal of Finance*. 46. 5. 1575-1617.

Fama, E. F. (1995) "Random Walks in Stock Market Prices". *Financial Analysts Journal*. Jan.- Feb. 75-80.

Fama, E. F. y French, K. R. (1993) "Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds". *Journal of Financial Economics*. 33. 3-56.

Feder, J. *Fractals* . Plenum Press. 1988.

Feigenbaum, M. J. (1978) "Quantitative universality for a class of nonlinear transformations". *Journal of Statistical Physics*. 19. 1. 25-52.

Feller, W. (1951) "The Asymptotic Distribution of the Range of Sums of Independent Random Variables". *Annals of Mathematical Statistics*. 22. 427-433.

Fernandez Diaz, A., Alonso A. y Grau P. (1994) " Caos y mercado de capitales: Una introducción". *Cuadernos de Economía Aplicada*, CEURA, Madrid.

Fernández Díaz, A. *La economía de la complejidad. Economía dinámica caótica*. McGraw-Hill. 1994.

Frankel, J. A. y Froot, K. A. (1990) "Chartists, Fundamentalists and Trading in the Foreign Exchange Market". *American Economic Review*. 80. 2. 181-185.

Fraser, A. M. y Swinney, H. L. (1986) "Independent Coordinates for Strange Attractors from Mutual Information". *Physical Review A*. 33. 2. 1134-1140.

French, K. R y Roll, R. (1986) "Stock Return Variances: the Arrival of Information and Reaction of Traders". *Journal of Financial Economics*. 17. 5-26.

Giglio, M., Musazzi, S y Perini, U. (1984) "Low-Dimensionality Turbulent Convection". *Physical Review Letters*. 53. 25. 2402-2404.

Goodwin, R. M. *Chaotic Economic Dynamics*. Clarendon Press. Oxford. 1990.

Grassberger, P. y Procaccia, I. (1983) "Characterization of Strange Attractors". *Physical Review Letters*,. 50. 5. 346-349.

Grauwe, P., Dewacher, H. y Embrechts, M. *Exchange Rate Theory: Chaotic Models of Foreign Exchange Markets*. Blackwell. 1993.

Hashem Pesaran, M. y Potter, S. M. *Nonlinear Dynamics, Chaos and Econometrics*. John Wiley & Sons. 1993.

Hosking, J. R. M. (1981) "Fractional Differencing". *Biometrika*. 68. 1. 165-176.

Hsieh, D. A. (1991) "Chaos and Nonlinear Dynamics: Application to Financial Markets". *Journal of Finance* . 46. 5. 1839-1877.

Hsieh, D. A. (1995) "Nonlinear Dynamics in Financial Markets: Evidence and Implications". *Financial Analysts Journal*. July- August. 55-62.

Hurst, H. E. (1950) "Long-Term Storage Capacity of Reservoirs". *Transactions of the American Society of Civil Engineers*.. 2447. 770-808.

Kendall, M. G. (1953) "The Analysis of Economic Time Series". *Journal of the Royal Statistical Society*. serie A. 96. 11-25.

Larrain, M. (1991) "Testing Chaos and Nonlinearities in T-Bill Rates". *Financial Analysts Journal*. Sep.-Oct. 51-62.

LeBaron, B. (1991 a) "Econometría no lineal del caos: Resultados empíricos". *Cuadernos económicos del ICE*. 47. 1. 37-72.

LeBaron, B. (1991 b) "Technical Trading Rules and Regime Shifts in Foreign Exchange". Working Paper 9118. University of Wisconsin-Madison.

LeRoy, S. (1989) "Efficient Capital Markets and Martingales" *Journal of Economic Literature*. 27. 1583-1621.

Levich, R. M., Thomas, R. L. (1993) "The Significance of Technical Trading-rule Profits in the Foreign Exchange Market: a bootstrap approach". *Journal of International Money and Finance*. 12. 451-474.

Liu, T., Granger, C. J. y Heller, W. P. (1993) "Using the correlation exponent to decide whether an economic time series is chaotic" en Hashem Pesaran, M. y Potter, S. M. (eds.) *Nonlinear Dynamics, Chaos and Econometrics*. John Wiley & Sons.

Malkiel, B. G y Gragg, J. G. (1970) "Expectations and the Structure of Share Prices". *American Economic Review*. Sept. 601-617.

Malkiel, B. G. *Un paseo aleatorio por Wall Street*. Alianza Editorial. 1992.

Mandelbrot, B. (1963) "The Variation of Certain Speculative Prices". *Journal of Business*. 36. 392-417.

Mandelbrot, B. (1966) "Forecasts of Future Prices, Unbiased Markets and Martingale Models". *Journal of Business*. 39. 1. 242-255.

Mandelbrot, B. B. (1960) "The Pareto-Levy Law and the Distribution of Income". *International Economic Review*. Vol 1. 2. 79-107.

Mandelbrot, B. B. (1972) "Statistical Methodology for Nonperiodic Cycles: From Covariance to R/S Analysis". *Annals of Economic and Social Measurement*. 1. 3. 259-290.

Mandelbrot, B. B. (1985) "Self-affine Fractals and Fractal Dimensions". *Physica Scripta*. 32. 257-260.

Mandelbrot, B. B. *The Fractal Geometry of Nature*, San Francisco: W. H. Freeman. 1982.

Mandelbrot, B. B. y Van Ness, J. W. (1968) "Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications". *SIAM Review*. 10. 4. 422-437.

May, R. M. (1975) "Deterministic Models with Chaotic Dynamics". *Nature*. 256. July 17. 165-166.

May, R. M. (1976) "Simple Mathematical Models with very Complicated Dynamics". *Nature*. 261. 459-467.

Medio, A. *Chaotic Dynamics. Theory and Applications to Economics*. Cambridge University Press. 1992.

Miller, E., M. (1977) "Risk, Uncertainty and Divergence of Opinion". *Journal of Finance*. 32. 4. 1151-1168.

Mirowski, P. (1990) "From Mandelbrot to Chaos in Economic Theory". *Southern Economic Journal*. 57. 2. 289-307.

Niderhoffer, V. y Osborne, M. F. M. (1966) "Market Making and Reversal of the Stock Exchange". *Journal of American Statistic Association*. 61. 613. 897-916.

Ou, J. A. y Penman, S. H. (1989) "Financial Statement Analysis and the Prediction of Stock Returns". *Journal of Accounting and Economics*. 295-329.

Packard, N. H., Crutchfield, J. P., Farmer, J. D. y Shaw, R. S. (1980) "Geometry of Time Series". *Physical Review Letters*. 45. 9. 712-716.

Papoulis, A. *The Fourier Integral and its Applications*. McGraw-Hill. New York. 1962.

Peters, E. E. (1989) "Fractal Structure in the Capital Markets". *Financial Analysts Journal*. July-August. 32-37.

Peters, E. E. (1991) "A Chaotic Attractor for the S&P 500". *Financial Analysts Journal*. March-April. 55-81.

Peters, E. E. *Chaos and Order in The Capital Markets*. John Wiley & Sons. 1991.

Peters, E. E. *Fractal Market Analysis*. John Wiley & Sons. 1994.

Petingen, H-O., Jürgens, J. y Saupe, D. *Chaos and Fractals. New Frontiers to Science*. Springer-Verlag. 1992.

Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolski, S. A., Vetterling, W. T. *Numerical Recipes: the Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1986.

Puu, T. *Nonlinear Economic Dynamics*. Springer-Verlag. 1993.

Ramsey, J. y Yuan, H (1989) "Bias and Error Bias in Dimension Calculation and their Evaluations in Some Simple Models". *Physical Letters A*. 134. 287-297.

Samuelson, P. A. (1965) "Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly". *Industrial Management Review*. 6. 41-49.

Sano, M. y Sawada, Y. (1985) "Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series". *Physical Review Letters*. 55. 1082-1085.

Scheinkman, J. A. (1991) "No linealidades en las series económicas: herramientas estadísticas relacionadas con la dinámica no lineal". *Cuadernos económicos del ICE*. 47. 1. 21-35.

Scheinkman, J. A. y LeBaron, B. (1988) "Non-Linear Dynamics and GNP Data" en Barnett, W., Geweke, J. y Shell, K. (eds.) *Economic Complexity*, Cambridge University Press.

Scheinkman, J. A. y LeBaron, B. (1989) "Nonlinear dynamics and stock returns". *Journal of Business*. 62. 311-337.

Schwert, G. W. (1990) "Stock Market Volatility". *Financial Analysts Journal*. May-June. 23-34.

Sharpe, W. F. (1964) "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Condition of Risk". *Journal of Finance*. 19. 4. 425-442.

Sharpe, W. F. *Portfolio Theory and Capital Markets*. New York McGraw-Hill. 1970.

Shaw, R. (1981) "Strange Attractors, Chaotic Behavior and Information Flow". *Z. Naturforschung*. 36 a. 80-112.

Smith, R. L. (1992) "Estimating Dimension in Noisy Chaotic Time Series". *Journal of the Royal Statistic Society B*. 54. 2. 329-351.

Smith, V., Suchanek, G. L. y Williams, A. W. "Bubbles, Crashes and Endogenous Expectations in Experimental Spot Asset Markets". *Econometrica*. 56. 1119-1151.

Sterge, A. J. (1989) "On the Distribution of Financial Future Price Changes". *Financial Analysts Journal*. May-June. 75-78.

Thaler, R. H. (1987) "Anomalies: The January Effect". *Journal of Economic Perspectives* 1. 1. 197-201.

Vaga, T. (1990) "The Coherent Market Hypothesis". *Financial Analysts Journal*. Nov-Dec. 36-49.

Wolf, A., Swift, B., Swinney, J. y Vastano, J. (1985) "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series". *Physica D*. 16. 285-317.

Wright, J. (1984) "Method for Calculating a Lyapunov Exponent". *Physical Review A*. Vol 29. 5. 2924-2927.

Zeeman, E. C. (1974) "On the Unstable Behavior of Stock Exchanges". *Journal of Mathematical Economics*. 1. 39-49.

Zhang, Wei-Bin *Economic Dynamics*. Springer-Verlag. 1990.