ANALISIS DE LOS PROCESOS COGNITIVOS QUE CONDUCEN A LA ADQUISICION Y DESARROLLO DE LA PROPIEDAD CONMUTATIVA

Tesis Doctoral presentada por Purificación Rodríguez Marcos

Madrid 22 de Febrero de 1991

Dirigida por el Dr. Vicente Bermejo Fernández

Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación

Facultad de Psicología de la Universidad Complutense de Madrid

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a Vicente Bermejo, Director de este trabajo, por su disponibilidad y su impulso, así como por las numerosas sugerencias y aportaciones, que me han permitido convertir en una realidad esta Tesis Doctoral. Tambien quiero agradecer la valiosa colaboración de Mª Oliva Lago, por los muchos momentos dedicados a discutir y contrastar puntos de vista y por su apoyo constante. También quiero dar las gracias a la Dirección y al profesorado del Colegio Luis Bello por las muchas facilidades que en todo momento me han mostrado, así como a los niños sin cuya colaboración este estudio no se hubiera hecho realidad. Finalmente, agradezco a Jorge su ayuda en la elaboración final del manuscrito, su contínuo estímulo y apoyo.

I N D I C E

INDICE DE TABLAS Y FIGURAS

INTRODUCCION

En cualquier área de conocimiento o dominio específico el proceso de aprendizaje no se inicia en el vacio. Las experiencias de cada día y los conocimientos socialmente transmitidos proporcionan un rico marco conceptual sobre el que se van a asentar los nuevos conocimientos. Este es el caso de las matemáticas. Uno de los hallazgos más interesantes proporcionados por la investigación actual en este área es que los niños poseen un importante conocimiento sobre aritmética elemental antes de iniciar su escolaridad. En esta línea, en los últimos años se han multiplicado los trabajos que intentan no sólo evaluar esos conocimientos sino también determinar su adquisición y evolución. A este respecto, destacan especialmente los trabajos relativos al conteo y los que se ocupan de las operaciones de suma y resta. En general, los primeros tienen como meta central averiguar hasta que punto el aprendizaje de los números se produce de forma mecánica o memorística (Baroody y Ginsburg, 1986; Briars y Siegler, 1984; Fuson y Hall, 1983; Sophian, 1987, etc.) o se encuentran regidos por principios que guian su adquisición (Bermejo, 1990; Bermejo, Lago y Rodríguez, 1986, 1989; Bermejo y Lago, 1987b, 1990; Gelman y Gallistel, 1978; Gelman y Meck, 1983, 1986; Greeno, Riley y Gelman, 1984; Wagner y Walters, 1982, etc.).

Los trabajos relativos a las operaciones de suma y resta ponen de manifiesto que los niños poseen una cierta competencia antes de iniciar su andadura escolar, que les permite solucionar adecuadamente situaciones, que exigen la puesta en marcha de estas operaciones, como por ejemplo: "Juán tiene 3 canicas y Pedro le da 2 canicas más. ¿Cuántas canicas tiene Juán ahora?" (Bermejo y Rodríguez, 1987 a, b y c, 1988, 1990 a; Carpenter y Moser, 1984; De Corte y Verschaffel, 1987; Hiebert, 1989, etc.). Sin embargo, estos mismos datos también indican que dentro del marco escolar y desafortunadamente a edades muy tempranas, las matemáticas se convierten en la materia escolar que más problemas plantea a los niños. Este fracaso puede ser explicado a partir de la consideración de dos tipos de factores: aquellos que se encuentran relacionados con ciertas creencias y mitos en torno a las matemáticas y a los factores implicados en el proceso de aprendizaje e instrucción. En relación con los primeros, hay que señalar que los mitos y creencias sobre las matemáticas actúan de modo contraproducente en su aprendizaje , dando lugar a contuctas de evitación y ansiedad por parte de los niños. Además, estos mitos afectan no sólo a los niños, sino también a los profesores. En esta línea, algunos estudios (Fey, 1979; Thompson, 1984; Frank, 1990) indican que aunque el conocimiento de los profesores sobre matemáticas y los distintos métodos de enseñanza son importantes, sus crencias influyen también en su estrategia de enseñanza, lo que ejerce un importante impacto en los estudiantes. Así, por ejemplo, Kogelman y Warren (1978) identifican, entre otros, los siguientes mitos en futuros profesores: "algunas personas tienen mente matemática y otros no", "las matemáticas requieren lógica y no intuición", "las matemáticas requieren una buena memoria", "los hombres son mejores en matemáticas que las mujeres", "es muy importante obtener siempre la respuesta exacta", "es malo contar con los dedos". No obstante, a pesar de la importancia de estas variables de tipo afectivo, las investigaciones realizadas en este área son escasas, aunque últimamente no son pocas (i.e., Greer y Verschaffel, 1990; McLeod, 1990; Frank, 1990) ya las voces que reclaman una mayor atención a estos temas.

En cuanto a los factores relacionados con el proceso de aprendizaje e instrucción, los estudios realizados en torno a este tema (i. e., Baroody y Ginsburg, 1986; Carpenter, 1986; Hiebert y Lefevre, 1986) apuntan que el fracaso de los niños en la resolución de las tareas de suma y resta puede ser caracterizado en términos de errores de conocimiento conceptual y de procedimiento. El conocimiento conceptual hace referencia a los principios y reglas subyacentes a estas operaciones; el conocimiento de procedimiento tiene que ver con la habilidad para generar estrategias de solución que sean congruentes con los requerimientos de la tarea. La evaluación de estos dos tipos de conocimiento no resulta tarea fácil, de modo que los estudiosos del tema, influenciados principalmente por los métodos y teorías del procesamiento de la información, analizan las ejecuciones de los niños en términos de estructuras de conocimiento y pasos en el procesamiento de la información, centrándose principalmente en el análisis de las estrategias y errores, lo que ha permitido no sólo la formulación de modelos de simulación, sino también describir con un cierto soporte empírico la adquisición y desarrollo de las operaciones aritméticas elementales.

El trabajo que aquí presentamos tiene como objetivo central la propiedad conmutativa y pretende dar un paso más en la clarificación y comprensión de la adquisición y desarrollo de la operación aditiva. Para ello, se ha realizado una revisión teórica del problema y posteriormente, a la luz de esta elaboración, se ha llevado a cabo el estudio experimental incluído en la parte empírica.

En la primera parte nos aproximamos a la literatura sobre la operación aditiva. A lo largo del primer capítulo hemos tratado de describir una panorámica general sobre los principales focos de interés de los estudios actuales sobre la adición. En esta línea, nos hemos referido a aspectos generales tales como el valor de los signos de sumar e igualdad, la distintas concepciones de la suma y las propiedades de la misma. En un nivel más específico hemos prestado especial atención a los problemas verbales de adición y, en este sentido, hemos analizado los distintos tipos de problemas, las variables que justifican los diferentes niveles de dificultad de los mismos y los modelos de simulación. Asimismo, en el primer capítulo hemos dedicado un apartado referente a las estrategias de solución y otro a los errores. En el primero, hemos tratado aspectos tales como los tipos de estrategias, la evolución de las mismas y los factores determinantes en su elección. En el segundo, hemos recogido los tipos de errores identificados cuando la operación de sumar se presenta como algoritmo y cuando lo hace como problema verbal, así como los factores explicativos que se han propuesto. Finalmente, en este capítulo recogemos algunos de los modelos evolutivos sobre la adquisición y desarrollo de la operación de sumar.

El segundo capítulo se centra específicamente en torno a la propiedad conmutativa. En los dos primeros apartados hemos tratado de ofrecer las bases sobre las que se asienta el conocimiento de la conmutatividad, por ello hemos dedicado un apartado al principio de irrelevancia del orden en el conteo y otro al proceso de transición de la estrategia "sum" al "min". Por último, recogemos los escasos estudios realizados en torno a este principio y algunas de los modelos explicativos que de un modo directo o indirecto se han dirigido al esclarecimiento de los procesos subyacentes a su adquisición y desarrollo.

La segunda parte coresponde al trabajo experimental. En primer lugar, presentamos nuestros objetivos e hipótesis experimentales, para pasar seguidamenente al método en el que se especifican las características de los niños que participan en el estudio y el material y procedimiento seguido. Igualmente, presentamos los resultados obtenidos tras someterlos a los diferentes tratamientos estadísticos aplicados y se interpretan y discuten a la luz del contexto teórico y las hipótesis propuestas inicialmente. A continuación, se examinan las estrategias que los niños ponen en marcha en las distintas tareas y los tipos de errores cometidos. Por último, se presentan algunas de las conclusiones que nos han parecido más relevantes.

El presente estudio finaliza con la recopilación del material bibliográfico utilizado.

PRIMERA PARTE: MARCO CONCEPTUAL Y PROBLEMATICA ACTUAL

1. *ANALISIS ESTRUCTURAL Y EVOLUTIVO DE LA OPERACION DE SUMAR*

1.1. EL VALOR DE LOS SIGNOS DE SUMAR E IGUALDAD

Las matemáticas exigen el empleo de símbolos escritos para representar las operaciones aritméticas. Estos símbolos constituyen un elemento imprescindible e idóneo para representar situaciones matemáticas. En esta línea, afirma Hiebert (1989) que la utilización apropiada de los símbolos implica la interpretación apropiada de los mismos y la utilización de estrategias que permitan su manipulación. En aritmética se usan dos tipos de símbolos: los numerales y los signos de operaciones o relaciones. Los numerales representan cantidades en el mundo real y los signos sirven para describir relaciones entre las cantidades. La mayoría de los niños aprenden a leer y escribir símbolos aritméticos muy pronto, aunque esto no implica que sepan realmente el significado de los mismos, constituyendo su interpretación una de las metas centrales del curriculum de matemáticas. En efecto, resulta de extrema importancia disponer de un conjunto claro y básico de conceptos y relaciones matemáticas que puedan ser utilizados durante el análisis y resolución de las tareas aditivas y en este sentido, es muy importante dotar al niño desde los inicios de la escolaridad de un conocimiento conceptual completo de los signos de sumar e igualdad. En esta línea, desde muy temprano los niños otorgan al signo de sumar un sentido de reunir, juntar. Sin embargo, no ocurre lo mismo con el signo de igualdad ya que su conocimiento supone, no solamente reconocer que el símbolo de igualdad significa igual, sino comprender el significado funcional, lo que conlleva tres cosas (De Corte y Verschaffel, 1981):

- Que el niño entienda que lo que está escrito a un lado del signo igual y lo que está escrito en el otro lado es lo mismo.

- Que utilice este conocimiento al comienzo y al final de su proceso de resolución de la tarea aditiva.

- Que el niño comprenda y aplique en sus procesos de solución las propiedades que derivan directa o indirectamente de la noción de igualdad, por ejemplo la intercambiabilidad de los dos términos de la adición.

En consecuencia, las sentencias de igualdad deben ser interpretadas como relaciones de equivalencia ("es lo mismo que"), implicando las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Sin embargo, el significado del símbolo de igualdad puede tener para los niños un sentido diferente que para los matemáticos. En concreto, Vergnaud (1982) identifica tres interpretaciones del signo igual: un mismo elemento, la respuesta y es equivalente a. Inicialmente, al menos, los niños son especialmente propensos a malinterpretar el signo igual como "operador" que significa "suman" o "hacen (un total de)" (Baroody, 1988; Baroody y Ginsburg, 1983; Behr, Erlwanger y Nichols, 1980).

Por su parte Kieran (1981) apunta que el signo igual no siempre es considerado en términos de equivalencia por parte del aprendiz y que dicha interpretación no es incorporada fácilmente ni rápidamente por los niños, sino que atraviesa, según el autor, tres momentos evolutivos. En un primer momento, que sitúa en la etapa de preescolar, los niños desarrollan una noción comparativa de la igualdad, que se basa en la habilidad para contar dos conjuntos y comparar sus numerosidades; en otras palabras, para determinar si dos conjuntos son iguales los niños de la etapa de preescolar cuentan los elementos correspondientes a cada conjunto y comparan el resultado de sus cardinales, afirmando la igualdad sobre la base de la misma cardinalidad (Gelman y Gallistel, 1978).

En un segundo momento, son capaces de juntar dos conjuntos distintos y contar el número total de elementos correspondiente a ambos conjuntos, lo que conduce a la noción de operador del signo igual de la que se deriva un énfasis especial en poner el resultado de la operación de adición. Esta noción intuitiva, que se desarrolla en la etapa preescolar es reafirmada en la etapa escolar, de modo que los niños interpretan el signo de igualdad, así como el de sumar, en términos de acciones a ser ejecutadas (Ginsburg, 1977) y debido a ello es frecuente que se encuentren con dificultades a la hora de leer ecuaciones que no se ajustan al orden convencional. En otras palabras, los niños esperan que se presenten las ecuaciones bajo un formato determinado (generalmente en horizontal) y que consten de dos términos a la izquierda, el resultado a la derecha y entre ambos un símbolo de conexión (el signo igual). Es por ello que consideran incorrectas ecuaciones que no se corresponden con la presentación habitual, como por ejemplo: 12=4+8, 6+3=7+2, 4=4, etc. (Baroody y Ginsburg, 1983; Behr et al., 1980; Ginsburg, 1982; Nichols, 1976) y presentan mayores dificultades cuando en la ecuación el elemento desconocido se sitúa a la izquierda (?=6+3; ?+3=9), que cuando está en la derecha (6+3=?, 6+?=9) (Weaver, 1973). Además, según parece desprenderse del trabajo de Behr, Erlwanger y Nichols (1976), el conocimiento posterior de las propiedades conmutativa y asociativa no parece proporcionar un concepto de igualdad en el sentido de equivalencia, que se correspondería con un tercer momento evolutivo. En concreto, estos autores estudian el significado del signo igual en niños de 1º a 6º grado y no encuentran evidencia de que se produzcan cambios en su pensamiento sobre la igualdad a lo largo de la escolaridad, ya que incluso los de 6º interpretan el signo de igualdad como signo de hacer algo. Por ejemplo, en el problema 4+5=3+6, la respuesta habitual consiste en afirmar que detrás del signo igual debería consignarse una respuesta y no otro problema, de hecho transformaban dicho problema en dos ecuaciones independientes, 4+5=9 y 3+6=9.

Algunas experiencias de aprendizaje tal como la llevada a cabo por Denmark, Barco y Voran (1976), que diseñó un experimento para enseñar el concepto de igualdad como una relación de equivalencia a un grupo de niños de primer grado, muestra que los niños podían conseguir una cierta flexibilización a la hora de utilizar el signo igual. Así, encontró que aceptaban su utilización en situaciones tales como 3=3, 3+2=4+1, 5=4+1, pero ello no suponía la interpretación del signo igual como una relación de equivalencia, sino que persistían en su utilización como operador.

Estas dificultades parecen persistir en niveles de escolaridad más avanzados y así parecen demostrarlo algunos trabajos (Herscovics y Kieran, 1980; Kieran, 1980) con niños de 12 a 14 años a los que se pide que expliquen el significado del signo igual y asímismo que pusiesen un ejemplo mostrando su uso. Se comprueba que sus descripciones del signo igual tendían a ser hechas en términos de la respuesta y que sus ejemplos se limitan a aquellos que implican consignar una operación en el lado izquierdo y el resultado en el derecho. A esta primera parte del experimento sigue una serie de sesiones de enseñanza que incluyen la construcción de operaciones de igualdades aritméticas con una operación a cada lado, que puede ser la misma o una diferente (por ej. 2x6=4x3, 2x6=10+2), y la construcción de dos operaciones a cada lado (por ej. 7x2+3-2=5x2-1+6). Los niños no parecen presentar problemas en las ecuaciones que contienen múltiples operaciones en ambos lados, justificándolas en términos de que ambos lados son iguales porque tienen el mismo valor. Parece, por tanto, que alcanzan una fase en la que el símbolo igual toma un sentido relacional y no simplemente como un signo de hacer algo, lo que permite a los niños deducir que el lado derecho no tiene por que representar únicamente el resultado de una operación, sino que también puede tomar la forma de una expresión que tenga el mismo valor que el lado izquierdo. Consecuentemente, la solución de ecuaciones implica no sólo la noción de que el lado derecho de la ecuación y el izquierdo son expresiones equivalentes, sino también que cada lado puede ser reemplazado por una ecuación equivalente.

La importancia del conocimiento del signo igual, es enfatizada también por De Corte y Verschaffel (1981). Estos autores informan que algunos niños resuelven incorrectamente algunas ecuaciones aditivas del tipo x=a+b, debido a un conocimiento deficiente del concepto de igualdad y así por ejemplo, un niño que ejecuta incorrectamente todos los ensayos de este tipo da la siguiente definición del signo de igualdad: "el signo tras el cual uno tiene que escribir el resultado"(p.772). Otro error, cometido por un 20% de los niños se produce al resolver el problema 9-x=8+x como 9-1=8+1, en realidad lo que hacen los niños es ejecutar dos operaciones: 9-1=8 y 8+1=9 y completan a continuación las partes desconocidas del problema. Sus resultados ponen de manifiesto que un alto porcentaje de los niños difícilmente se dan cuenta de que el signo de igualdad implica una relación de equivalencia cuantitativa de los términos de la derecha y de la izquierda del problema. Parece como si consideraran la incognita como el resultado de una o más operaciones, sin darse cuenta de que un problema aritmético sin resolver conlleva la representación de relaciones y proporciones cuantitativas.

Dada la gran relevancia que presupone un concepto claro de este signo para la resolución correcta de las tareas de adición es lo que lleva a algunos autores, como De Corte y Verschaffel, a proponer una serie de lecciones para su correcta enseñanza. En la primera lección los niños deberán aprender a utilizar los símbolos de igualdad, distinto, mayor y menor en la comparación de cantidades contínuas (con objetos materiales así como en representaciones gráficas) sobre diferentes parámetros, tales como la longitud; en la segunda tendrán que manejar dichos símbolos en la comparación de cantidades discontinuas, que eran presentadas mediante objetos o representaciones gráficas y, por último, en la tercera se les pondrá frente a términos desiguales, de modo que deberán deshacer la desigualdad bien disminuyendo la cantidad mayor, bien aumentando la más pequeña.

Por último, algunos autores (Fuson, 1988) informan que el significado del signo igual varía según el tipo de problema verbal que se presenta al niño. Así, en los problemas de cambio, que se caracterizan por la presencia de una acción implícita o explícita sobre el conjunto inicial, el signo igual significa "llegar a ser", "resulta en". En los problemas de combinación, que suponen relaciones estáticas entre dos conjuntos disjuntos significa "es idéntico a" y en los de comparación, que implican la relación de dos cantidades disjuntas, bien para determinar la diferencia entre ellas o bien para averiguar una de las cantidades conociendo la otra y la diferencia entre ellas, significa "es equivalente a" o "tiene el mismo número que". Una interpretación más detallada de cada categoría de problema se encuentra en el apartado 1.3.1.

Finalmente, Baroody y Ginsburg (1983) consideran dos explicaciones posibles en relación con el orígen de la interpretación incorrecta del signo igual. La primera de ellas incide en el factor educativo, insistiéndose desde esta perspectiva en que tanto las experiencias de enseñanza informales como las formales estimulan el aprendizaje del signo igual como operador, como se pone de manifiesto en el hecho de que dicho aprendizaje se inicia normalmente en el contexto de la suma y en su formato de ecuaciones similar a a+b=?. La segunda explicación hace hincapié en que las limitaciones cognitivas del niño derivan en una comprensión limitada del signo igual, de forma que una concepción relacional del mismo está vinculada a la consolidación del pensamiento concreto y el advenimiento del pensamiento formal. Podemos situar en este mismo marco explicativo los trabajos anteriormente mencionados de Kieran, ya que señala, por ejemplo, que los niños de 13 años se encuentran en un período de tránsito entre la consideración del signo igual como indicación de que tras él debe consignarse la respuesta y su aceptación como símbolo de equivalencia. Asímismo, Collis (1974) sugiere que los sujetos no pueden tratar con las ecuaciones de modo flexible hasta después de los 13 años.

Las implicaciones educativas de estos dos puntos de vista son diferentes. Así, de acuerdo con el primero de ellos, bastaría con efectuar una serie de cambios en la instrucción en matemáticas para que esas dificultades se viesen superadas; mientras que desde el punto de vista de los *déficits cognitivos* los *cambios* de instrucción no tendrían prácticamente incidencia para promover una concepción relacional del signo de igualdad. Con objeto de dar respuesta a este interrogante, Baroody y Ginsburg (1983) plantean un estudio en el que pretenden demostrar que los niños menores de 13 años pueden adquirir un sentido relacional del signo igual, introduciendo cambios en la instrucción. En este trabajo, se enseña el signo igual en términos de "lo mismo que" a niños de 1º, 2º y 3º grado, aunque los sujetos de los dos últimos grupos no habían recibido este tipo de enseñanza en los niveles anteriores de escolaridad. La tarea consiste en evaluar si una serie de ecuaciones, que se presentan con el formato habitual y no habitual, son correctas o no. Los resultados no apoyan el punto de vista de que las limitaciones cognitivas impidan el desarrollo del punto de vista relacional del signo igual. Sin embargo, aunque el procedimiento de enseñanza se revela como válido a la hora de promover un concepto relacional, se produce un conflicto respecto al empleo del signo igual como operador. Así, el profesor de 1º afirma que los problemas que se presentan bajo el formato a+b=? resultan más fáciles que aquellos que adoptan la forma de 6+3=4+? y ?=6+3. Existe, por tanto, una barrera cognitiva que actúa en contra del marco relacional, vinculada con el proceso de asimilación más que con las limitaciones cognitivas relacionadas con la edad. En otras palabras, estos autores afirman que tanto los factores cognitivos como los de instrución contribuyen a afianzar el punto de vista del signo igual como operador. El aprendizaje *informal* hace que los niños entren en la escuela con una tendencia a asimilar el signo igual como un esquema de acción para la suma, reforzándose dicha tendencia cognitiva en el marco escolar, ya que se introduce en el contexto de la suma tomando un sentido de operador (de producto).

Para finalizar, si bien resulta conveniente que la escuela enseñe un punto de vista relacional del signo igual, ya que puede resultar de gran utilidad a la hora de juzgar ecuaciones que impliquen el principio de identidad (4=4) y el de conmutatividad (5+7=7+5); también ha de insistir en el punto de vista del signo igual como operador, ya que resulta imprescindible a la hora de juzgar la equivalencia de ecuaciones en las que no figuran los mismos números, como por ejemplo 4+5=6+3 o 7+2=3+5.

1.2. LA CONCEPCION UNITARIA Y BINARIA DE LA SUMA. LAS PROPIEDADES DE LA SUMA

Las investigaciones más recientes en torno a la aritmética informal, coinciden en señalar que las primeras experiencias de conteo proporcionan a los niños un elevado conocimiento sobre la aritmética elemental. Dicho conocimiento se concreta en la capacidad de los niños no sólo para determinar el cardinal de un conjunto y comparar cantidades, sino también en un concepto informal de la suma como procedimiento para añadir más y de la substracción como procedimiento para quitar algo (Carpenter, Hiebert y Moser, 1981; Carpenter y Moser, 1983,1984; Fuson y Hall, 1983; Ginsburg, 1982; Resnick, 1983; Riley, Greeno y Heller, 1983; Starkey y Gelman, 1982).

El concepto inicial de la adición como proceso aumentativo permitirá a los niños pequeños resolver problemas del tipo N+1 con cierta facilidad, mientras que se encontrarán con mayor dificultad en los problemas 1+N. Ello se debe a que tienden a considerar estos problemas como diferentes y, en consecuencia, también con un resultado aditivo distinto. Además, mientras que la resolución de N+1 es simplemente el número siguiente a N, la de 1+N puede resultar mucho más costosa, ya que los niños pequeños necesitan representar las cantidades físicamente y, en el caso de que lo hagan con los dedos, la representación del segundo sumando puede dar lugar a que se olviden de que en una de las manos han representado previamente el primer sumando, en este caso, uno. Posteriormente, descubrirán que la suma de N+1 y 1+N es el número que sigue a N, lo que supondrá una capacidad de cálculo más flexible, que implica pasar por alto el orden de los sumandos. Este paso supone según Weaver (1982) superar la concepción unitaria de la suma. En concreto, Weaver diferencia dos concepciones en relación con la operación aditiva: la concepción unitaria y la concepción binaria.

La concepción unitaria hace referencia a un estado inicial en el que los niños entienden la operación de sumar como un cambio de estado. Este cambio de estado supone que un conjunto inicial se hace mayor y se corresponde con el proceso aumentativo al que nos referíamos anteriormente. Por ejemplo, interpretan la ecuación 6+3 como un conjunto formado por 6 elementos al que se añaden 3 elementos más y el problema 3+6 como un conjunto de 3 elementos al que se añaden 6 más, de modo que ambas operaciones no serían conmutativas, y por tanto serían diferentes.

Por otra parte, la concepción binaria supone que la adición puede ser entendida como la combinación de dos conjuntos o dos cardinales. En este caso el problema 6+3 representa la combinación de dos cardinales el 6 y el 3. Además esta concepción de la suma es conmutativa, es decir, el orden de los sumandos no marca diferencias en el resultado.

Aunque la evidencia empírica disponible es bastante escasa y los datos existentes resultan confusos, parece ser que la concepción unitaria de la suma es característica de las etapas iniciales, mientras que la concepción binaria supone un nivel conceptual más complejo (Baroody y Gannon, 1984; Baroody y Ginsburg, 1986; Weaver, 1982). No obstante, queda por aclarar como se produce el tránsito de una a otra.

Cuando los niños son introducidos en la resolución de algoritmos escritos, comienzan a descubrir las propiedades de la suma, esto es: la propiedad de identidad, la propiedad conmutativa y la propiedad asociativa.

La propiedad de identidad de la suma hace referencia al concepto de que cualquier número añadido a cero es ese mismo número. La propiedad conmutativa alude a que el orden en que se adicionen los sumandos no afecta al resultado final. Por último, la asociatividad es la propiedad de agrupamiento de la suma.

El conocimiento de estas propiedades tiene un claro interés desde el punto de vista de la adquisición del conepto de suma. Así, el principio de conmutatividad permitirá reducir a la mitad el aprendizaje de hechos numéricos, es decir, si el niño ha aprendido que 4+3 son 7, no necesitará memorizar que 3+4 son también 7, sino que deducirá este resultado aplicando inmediatamente la conmutatividad. La propiedad asociativa también será de gran ayuda para aprender hechos numéricos, por ejemplo para solucionar 8+9 el niño utiliza su conocimiento de los dobles y como sabe que 8+8 son 16 una más hacen un total de 17. En otras ocasiones recurrirá a su conocimiento de las particiones de 10, por ejemplo en el problema 9+5 puede hacer 9+1+4. Finalmente, las propiedades asociativa y conmutativa son especialmente importantes cuando el problema requiere la suma de tres números o más, ya que para la mayoría de los niños algunas combianciones de números son más fáciles que otras, por ejemplo el problema 7+4+5+6+3 puede ser reordenado del siguiente modo aplicando la propiedad conmutativa 7+3+4+6+5. Además si aplicamos la propiedad asociativa se puede reagrupar como sigue: (7+3) + (6+4) + 5 = 10 + 10 + 5. En consecuencia, aplicando las propiedades de la suma, los niños obtienen combinaciones más fáciles, facilitando de este modo la resolución del problema.

1.3. LOS PROBLEMAS VERBALES DE ADICION

Hay muchas situaciones de la vida real que conducen a las operaciones de sumar y restar. Estas situaciones son presentadas en la escuela en forma de problemas verbales de suma y resta. Así pues, los problemas verbales más que los algoritmos son el contexto fundamental a través del cual el niño aplica el conocimiento matemático en situaciones cercanas a la vida real. Sin embargo, como se constata en multiples investigaciones (Bermejo y Rodríguez, 1990 a; Briars y Larkin, 1984; Carpenter y Moser, 1983; Carpenter, 1986; Carpenter, Moser y Bebout, 1988; Dellarosa, Kintsch, Reusser y Weimer, 1988; Hiebert, 1982; Riley, Greeno y Heller, 1983) de modo aparentemente paradógico la ejecución en los problemas verbales es peor que en los algoritmos. Un hallazgo bastante generalizado es que las ecuaciones no ayudan a los niños a solucionar problemas y de hecho cuando se les solicita que escriban la ecuación, tienden a solucionar primero el problema y a escribir la ecuación con posterioridad. Fuson (1988) explica este fracaso aludiendo a que es necesario hacer una distinción entre la ecuación relativa al procedimiento de solución y la ecuación que modela la situación del problema. Las primeras son totalmente innecesarias, al menos en el caso de los números multidígito, porque resulta más fácil solucionar el problema cuando se presenta en forma vertical que en la horizontal. Respecto a las ecuaciones que modelan la situación del problema, Carpenter, Bebout y Moser (1985) y Bebout (1986) informan que los niños pueden escribir y solucionar con cierta facilidad ecuaciones para representar los problemas de cambio , debido a que interpretan el signo igual en la ecuación como "resulta en" en vez de "es equivalente a"; ahora bien no está claro que puedan ser usadas fácilmente para modelar los problemas de combinación y comparación. Tal como pone de relieve el estudio realizado por Carpenter, Bebout y Moser (1985). En dicho estudio participan 22 niños de primer grado y 41 de segundo grado, asignados al azar a dos grupos de instrucción. Ambos grupos reciben dos lecciones de 30', que tratan sobre la escritura de ecuaciones para representar los problemas verbales de suma y resta. Los problemas verbales incluídos en la instrucción son problemas de cambio con la incógnita en el resultado y con la incógnita en un sumando. Un grupo recibe instrucción en ecuaciones canónicas y no canónicas, mientras que el otro sólo recibe instrucción en la forma canónica; asimismo se les alienta a que usen el análisis parte-todo para identificar apropiadamente las ecuaciones. Este análisis facilita al niño la asignación de la operación correspondiente, esto es, si ambas partes son conocidas y el todo es el elemento desconocido la operación es la adición y, por otro lado, si una parte y el todo es dado la operación es la substracción. Una vez concluido el período de instrucción se evalua la habilidad de los niños para escribir ecuaciones que representen los problemas de suma y resta. Los resultados muestran que los niños de primer grado tienen éxito a la hora de representar ecuaciones que modelan directamente las acciones del problema, ahora bien fracasan al intentar escribir aquellas que requieran transformar los problemas, mientras que estas dificultades son superadas por los niños de segundo grado, ya que son capaces de escribir correctamente ecuaciones que requieren una transformación.

Por otra parte, Carpenter (1986) señala que las dificultades al escribir las ecuaciones para representar los problemas verbales pueden atribuirse a que las representaciones que los niños tienen disponibles (a+b,a-b) no siempre se corresponden con sus procedimientos de solución informal. Esto es, los niños pueden solucionar un problema tal como "Mario tiene 5 caramelos y Pedro le da algunos más. En total Mario tiene 13 caramelos. ¿Cuántos caramelos le da Pedro?", contando desde 5 hasta 13, lo que no se corresponde con las representaciones que los niños tienen disponibles, al menos inicialmente. Los niños pequeños pueden solucionar ciertos tipos de problemas verbales por modelado directo, pero pueden tener dificultades a la hora de representar mediante ecuaciones las acciones descritas en el problema.

Así pues, las discrepancias existentes entre la ejecución de los niños en los problemas aditivos y su capacidad para representar las acciones que realizan mediante algoritmos han hecho que esta clase de problemas hayan llegado a ser un foco de interés muy importante de la investigación más reciente. Dicha investigación intenta explicar cómo los sujetos solucionan los problemas verbales, recogiendo datos sobre las dificultades que presentan los distintos tipos de problemas y formular modelos o teorías para dar cuenta de las diferencias en la dificultad. Específicamente podemos hablar de dos categorías de investigaciones: en primer lugar, aquellas dirigidas a averiguar las causas que explican que los escolares resuelvan con mayor facilidad unos tipos de problemas aditivos que otros, analizando los factores que pueden incrementar o disminuir el grado de dificultad de los mismos: nivel de vocabulario, sintaxis, etc. En segundo lugar, los trabajos que han prestado interés al estudio de los procesos cognitivos que los niños ponen en marcha en la resolución de problemas, analizándose cuestiones relacionadas con los niveles de dificultad de los problemas verbales, estrategias de solución y naturaleza de los errores y la elaboración de modelos de simulación. Es decir, el primer grupo se ocupa principalmente de aspectos relacionados con la estructura de los problemas, mientras que en el caso último el centro de interés lo constituyen los aspectos de representación y ejecución por parte de los sujetos.

En los apartados que siguen intentaremos dar cuenta de los hallazgos más recientes en cada uno de esos ámbitos. Para ello, analizaremos en primer lugar los tipos de problemas verbales, las variables explicativas de los diferentes niveles de dificultad y los modelos de simulación, dejando las estrategias y los errores para un análisis posterior, ya que se analizarán conjuntamente con las ecuaciones.

1.3.1. Tipos de problemas verbales

La observación minuciosa de cómo los niños solucionan los problemas aditivos, ya sea en el marco escolar , ya en un contexto extraescolar permite constatar fácilmente que son capaces de resolver más tempranamente algunos de estos problemas que otros y esto ocurre incluso cuando las cantidades utilizadas son semejantes. Lo que parece indicar que además de las habilidades matemáticas hay otros factores, que contribuyen al éxito en la solución de los problemas. Este hecho es el que ha llevado a los autores a elaborar clasificaciones de los problemas con objeto de poder analizar de modo más sistemático los factores causantes de dicha dificultad. Desde esta óptica, las clasificaciones realizadas hasta la fecha han seguido cuatro tipos de criterios: desde el punto de vista simbólico, desde una perspectiva sintáctica, atendiendo a las relaciones semánticas y, por último, desde la concepción unitaria o binaria de la suma.

La clasificación de los problemas verbales desde el punto de vista simbólico se establece atendiendo al lugar que ocupa la incógnita, bien en el resultado o bien en uno de los sumandos, de modo que la ecuación puede tomar la forma canónica A+B=?, o bien A+?=B, o ?+B=A. Lógicamente el grado de dificultad de los problemas aumenta en el caso de las representaciones no canónicas.

Otros autores han categorizado los problemas a partir de variables de tipo sintáctico, tales como el número de palabras, la presencia de ciertos términos que inducen a la ejecución de una operación determinada, como por ejemplo la palabra "da" que induce a sumar, o considerando la secuencia en la que se presenta la información en el texto del problema.

En la actualidad, sin embargo, la mayoría de los autores siguen una clasificación de tipo semántico (Bermejo y Rodríguez, 1987c, 1990 b; Carpenter y Moser, 1982, 1983; Heller y Greeno, 1978; De Corte y Verschaffel, 1985; Heller y Greeno, 1978; Kintsch y Greeno, 1985; Morales, Shute y Pellegrino, 1985; Nesher y Greeno, 1981; Riley, Greeno y Heller, 1983: Vergnaud, 1982; Wolters, 1983). Este enfoque resulta más interesante en cuanto que intenta relacionar los procesos de solución empleados por los niños con la estructura semántica del problema planteado. Además, desde esta óptica y teniendo en cuenta los datos disponibles hasta este momento, se sugiere que la estructura semántica del problema es una varible más relevante que la sintaxis para determinar los procesos que los niños ponen en marcha en la solución de los problemas. De acuerdo con esta perspectiva, los problemas verbales de adición se pueden clasificar en cuatro categorías: problemas de cambio, combinación, comparación e igualación. En la tabla 1 se presentan ejemplos de cada una de las diferentes categorías de problemas. Los problemas de cambio aluden a situaciones que se caracterizan por la presencia de una condición inicial, sobre la que se efectúa una acción implícita o explícita que produce un cambio en la misma, dando como resultado el incremento o decremento de esa cantidad. En otras palabras, hay una condición inicial, seguida de un cambio que da lugar a un estado final o resultado del problema.

Los problemas de combinación y de comparación comparten la característica común de implicar relaciones estáticas entre las cantidades. En efecto, en los problemas de combinación se proponen dos conjuntos disjuntos, que pueden ser considerados aisladamente o como partes de un todo, sin que medie entre ellos ningún tipo de acción. Los problemas de comparación suponen igualmente la relación de dos cantidades disjuntas, bien para determinar la diferencia existente entre ellas, bien para averiguar una de las cantidades conociendo la otra y la diferencia entre ellas.

Por último, los problemas de igualación constituyen una mezcla de los problemas de comparación y cambio, puesto que hay una comparación de dos conjuntos disjuntos y unaacción implícita que ha de aplicarse a uno de los subconjuntos para hacerlo igual al otro.

Por otro lado, hay tres subtipos de problemas de cambio en función del lugar en que se encuentre la incógnita o cantidad desconocida. En el primer subtipo, se conoce la cantidad inicial y la magnitud del cambio, debiéndose determinar el resultado final como consecuencia del cambio introducido; en el segundo, tanto el estado inicial como el resultado son conocidos, teniéndose que averiguar la magnitud del cambio y, por último, en el tercero el niño tendrá que hallar la cantidad inicial, puesto que se conocen la magnitud del cambio y el resultado. Algo similar ocurre en los restantes problemas,

Tabla 1

Ejemplos de los distintos tipos de problemas verbales aditivos.

PROBLEMAS DE CAMBIO

1. Luis tenía 6 caramelos, Carlos le da 5 caramelos más, ¿Cuántos caramelos tiene Luis ahora?.
2. Luis tiene 3 caramelos, Carlos le da algunos caramelos más, Ahora Luis tiene 7 caramelos, ¿Cuántos caramelos le da Carlos?.
3. Luis tenía algunos caramelos, Carlos le da 5 caramelos más, Ahora tiene 14 caramelos, ¿Cuántos caramelos tenía al principio?

PROBLEMAS DE COMBINACION

1. Luis tiene 8 caramelos y Carlos tiene 3, ¿Cuántos caramelos tienen entre los dos?
2. Luis tien 9 caramelos, Carlos tiene también algunos caramelos, Entre los dos tienen 15, ¿Cuántos caramelos tiene Carlos?
3. Luis tiene algunos caramelos y Carlos tiene 6, Entre los dos tienen 13, ¿Cuántos caramelos tiene Luis?.

PROBLEMAS DE COMPARACION

1. Luis tien 5 caramelos, Carlos tiene 8 caramelos, ¿Cuántos caramelos tiene Carlos más que Luis?
2. Luis tiene 6 caramelos, Carlos tiene 4 caramelos más que Luis, ¿Cuántos caramelos tiene Carlos?
3. Luis tiene 15 caramelos, Tiene 3 caramelos más que Carlos, ¿Cuántos caramelos tiene Carlos?

PROBLEMAS DE IGUALACION

1. Luis tiene 12 caramelos, Carlos tiene 4 caramelos, ¿Cuántos caramelos le tienen que dar a Carlos para tener los mismos que Luis?
2. Luis tien 3 caramelos, Si le dan 6 caramelos tendrá los mismos que Carlos, ¿Cuántos caramelos tiene Carlos?
3. Luis tiene 11 caramelos, Si a Carlos le dan 5 caramelos tendrá los mismos que Luis, ¿Cuántos caramelos tiene Carlos?.

ya que tanto los de combinación, como los de comparación e igualación presentan estructuras aditivas y comparten un mismo esquema "sumando+sumando=suma": una entidad es la suma y las otras dos son los sumandos, que juntos son iguales a la suma. Además, en cada tipo de problema hay uno que requiere sumar para su resolución (el problema en el que los dos sumandos son conocidos) y dos que requieren la resta para su solución (los problemas donde un sumando y la suma son conocidos). El hecho de que existan estas variaciones , conduce a una importante distinción: la estructura semántica subyacente al tipo de problema como aditiva o substractiva versus el procedimiento de solución (suma/resta) que es requerido para resolver cada problema específico. En los casos más simples, la estructura semántica del tipo de problema y el procedimiento de solución son los mismos, pero en otros se produce un conflicto entre estos dos elementos, de modo que resultan ser considerablemente más difíciles de solucionar para los niños.

Para concluir este apartado, nos referiremos brevemente a la clasificación propuesta por Fuson (1988) atendiendo a la concepción unitaria y binaria de la suma. La concepción unitaria, como señalamos en el apartado inmediatamente anterior, implica un cambio de estado y se encuentra presente en los problemas de cambio, mientras que la concepción binaria supone entender la suma como la combinación de dos conjuntos, tal y como se refleja en los problemas de combinación y comparación.

1.3.2. Variables explicativas de los diferentes niveles de dificultad

La dificultad relativa de los diferentes problemas verbales ha sido estudiada por numerosos investigadores (i. e., Carpenter y Moser, 1983; Riley et al. 1983) encontrándose diferencias sistemáticas entre los niños respecto a su nivel de ejecución, lo que resulta de gran interés incluso desde una perspectiva educacional. Las explicaciones se agrupan globlamente en dos campos: aquellas que atribuyen la mejora producida con la edad al desarrollo del conocimiento lógico matemático y aquellas que la atribuyen al desarrollo de las habilidades de comprensión lingüística (Dellarosa, Kintsch, Reusser, Weimer, 1988).

De acuerdo con el punto de vista lógico-matemático (i. e., Riley, Greeno y Heller, 1983; Briars y Larkin, 1984; etc.), los niños fracasan a la hora de resolver ciertos problemas porque no poseen el conocimiento conceptual requerido para solucionarlos correctamente. Asimismo, se afirma que la dificultad del problema depende en parte de la estructura semántica del mismo. En esta línea, los trabajos realizados hasta la fecha (Carpenter y Moser, 1982,1983,1984; De Corte y Verschaffel, 1987a; Ibarra y Lindvall,1979; Vergnaud, 1981; etc) indican que los problemas de cambio (p.e., "Luis tiene 11 canicas. Juan le da 4 canicas más. ¿Cuántas canicas tiene Luis ahora?") resultan más sencillos que los de combinación ("Antonio tiene 7 canicas y Pedro tien 6. ¿Cuántas canicas tienen entre los dos?"), y estos a su vez que los de comparación ("Juan tiene 8 canicas y Luis tiene 4 canicas más que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Luis?"). La razón se encuentra en que los problemas de cambio reflejan más directamente una concepción unitaria de la adición (se trata de añadir sobre una cantidad inicial, existiendo un único poseedor) y los de combinación una concepción binaria (hay dos conjuntos, así como dos poseedores diferentes). Sin embargo, como apuntan Briars y Larkin (1984), estas diferencias tienden a desaparecer, lo que puede ser debido, por un lado, a la similitud entre estos problemas y por otro a que los problemas de combinación suponen una acción implícita, de manera que los niños pueden solucionarlos con un esquema unitario.

Con relación a los problemas de igualación, hay que señalar que son escasos los trabajos realizados . En un estudio llevado a cabo por nosotros (Bermejo y Rodríguez, 1987a) con niños de segundo de preescolar y primero de EGB, pudimos constatar que estos problemas resultan más complejos que los de combinación. El procedimiento empírico es el siguiente, el experimentador presenta al niño un muñeco que está aprendiendo a sumar, pidiéndole que le enseñe cómo tiene que hacer para resolver las adiciones. A continuación y siempre con material delante (caramelos) para facilitar al niño la representación de las cantidades del problema, se proponen problemas de combinación (p. e., "Yo tomo 4 caramelos y tú 5, ¿cuántos caramelos tenemos entre los dos?") e igualación (p. e., "Yo tomo 6 caramelos y tu 2, ¿cuántos caramelos deberías añadir para tener los mismos que yo?"). Encontramos que un elevado porcentaje de los niños de preescolar y EGB resuelven correctamente los problemas de combinación, mientras que dicho porcentaje desciende considerablemente en los problemas de igualación, sobre todo en los grupos de preescolar (ver tabla 2).

Las conclusiones que se pueden extraer de este estudio son las siguientes. En primer lugar, los resultados parecen indicar que no todos los niños que resuelven los problemas de combinación son igualmente capaces de solucionar los de igualación, pudiéndose explicar el elevado éxito en los problemas de combinación a través de dos factores: la presencia de ayudas (objetos) y el lugar ocuapado por la incógnita, ya que se sitúa en el resultado. En segundo lugar, los niños preescolares parecen incapaces de construir

Tabla 2

Porcentaje de sujetos que responden correctamente en los problemas de combinación e igualación.

	PROBLEMAS									
	Combinación					Igualación				
Nº de ensayos correctos	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
G.I.	12	-	-	4	84	44	4	-	-	52
G.II	8	-	-	4	88	28	4	4	12	52
G.III.	-	-	4	16	80	8	-	4	12	76
G.IV.	-	-	4	4	92	-	4	8	12	76

* G.I: 5-5;6 años, G.II: 5;6-6 años, G.III: 6-6;6 años, G.IV: 6;6-7 años

una representación mental adecuada de los problemas de igualación, presentando tres categorías principales de errores: contar todo, repetir una de las cantidades propuestas en la formulación del problema e inventar la respuesta. En consecuencia, la resolución correcta de un determinado tipo de problema aditivo no garantiza una ejecución similar en otros.

Por último, la dificultad suele aumentar dentro de cada categoría de problemas cuando la incógnita se sitúa en uno de los sumandos. La dificultad es aún mayor cuando el elemento desconocido es el primer sumando (p.e., Carpenter, 1986; Hiebert,1982; Riley et al., 1983). Por ejemplo, los problemas de cambio resultan más complejos cuando la incógnita se sitúa en el conjunto de partida, en vez de hacerlo en el conjunto de cambio o en el resultado. Asímismo, el éxito de los niños desciende en los problemas de combinación y comparación, cuando la incógnita se ubica en uno de los sumandos (Riley et al., 1983). Y esta dificultad alcanza su máximo nivel en los problemas de comparación cuando la incógnita aparece en el conjunto de partida, según los resultados obtenidos en nuestra investigación con este tipo de problemas (Bermejo y Rodríguez, 1990a) en niños de segundo y tercero de EGB. Estos datos son consistentes con la hipótesis de un esquema unitario inicial. Es decir, los niños que tienen un esquema unitario de la suma tienen más dificultades en las pruebas aditivas en las que el estado inicial es desconocido, debido a que no son capaces de traducir el problema a una forma más fácil consistente en intercambiar el lugar de los sumandos, de modo que la incógnita se situase en el segundo sumando.

Aquellos autores que han tratado de explicar las dificultades desde el punto de vista del desarrollo lingüístico (De Corte, Verschaffel y De Win, 1985; Hudson, 1983; Kintsch y Greeno, 1985; Lindvall e Ibarra, 1980) consideran que los problemas verbales son difíciles de solucionar, porque emplean formas lingüísticas que no tienen una proyección adecuada dentro de las estructuras conceptuales poseidas por el niño. Por ejemplo, es posible que el niño *conozca* y *comprenda las relaciones parte-todo* subyacentes a los problemas de adición, pero sea incapaz de representar adecuadamente la forma comparativa "¿cuántos caramelos tiene más Juan que Luis?". Los errores, por tanto, pueden reflejar deficiencias en el conocimiento lingüístico más que deficiencias en el conocimiento lógico matemático o, en el peor de los casos, en ambos. En otras palabras, además de la estructura semántica y el lugar ocupado por la incógnita, la formulación verbal del problema, es decir, el grado en que se explicitan en el texto las relaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas y el orden de presentación de la información, puede influir de manera determinante en la facilidad o dificualtad de los niños para resolver adecuadamente la tarea. Así parecen ponerlo en evidencia los resultados de diversos estudios (De Corte, Verschaffel y De Win, 1985; Hudson, 1983; Lindvall e Ibarra, 1980) que muestran que la reformulación verbal de las pruebas, de modo que sean más explícitas las relaciones semánticas, sin afectar a la estructura semántica y matemática de los mismos, facilita el proceso de comprensión y solución de la tarea.

En concreto, el trabajo llevado a cabo por Lindvall e Ibarra con niños de la etapa preescolar, pone de manifiesto que los problemas de combinación de subconjunto desconocido del tipo "Luis y Antonio tienen 7 caramelos; Luis tiene 4 caramelos; ¿cuántos caramelos tiene Antonio?" son más fáciles de solucionar para estos niños cuando se reformulan de la siguiente forma: "Luis y Antonio tienen 7 caramelos en total; Luis tiene 4 caramelos ; ¿cuántos caramelos tiene Antonio?". Resultados similares son encontrados en el trabajo de Hudson con 12 niños guardería, 24 de jardin de infancia y 28 de primer grado sobre problemas de comparación. Presenta a los niños una serie de dibujos (p.e., 5 pájaros y 4 gusanos), planteándoles a continuación dos preguntas con un intervalo de tiempo entre ellas. La primera es la habitual en los problemas de comparación: "¿cuántos pájaros hay más que gusanos?" y la segunda consiste en una reformulación de esta: "imagina que todos los pájaros corrieran y cada uno intentase coger un gusano; ¿cogerá cada pájaro un gusano?...¿cuántos pájaros se quedarán sin gusano?". Respecto a los resultados, el problema resulta significativamente más fácil cuando se plantea la segunda pregunta en los tres grupos de edad. Ello se debe a que esta pregunta facilita la puesta en marcha de una estrategia de emparejamiento.

Por último, De Corte et al. (1985) obtienen resultados similares con niños de edades comprendidas entre los 6 y 8 años. En concreto, se presentan dos series de seis problemas: la serie A, que se corresponde con la formulación habitual, y la serie B, que la constituyen los problemas reformulados. Cada serie consta de dos problemas de cambio en los que se desconoce el conjunto de partida, dos problemas de combinación en los que se desconoce uno de los subconjuntos y dos problemas de comparación en los que se desconoce la diferencia entre el conjunto de referencia y el conjunto de comparación. La hipótesis de partida es que tanto en un grupo como en otro, los resultados de la serie B serían significativamente superiores a los de la serie A. Asimismo, se predecía que los resultados de los niños mayores serían significativamente superiores a los de los niños más pequeños. Esta hipótesis se basa en el hecho de que los niños mayores gozan de mayor experiencia con los problemas y, en consecuencia, tienen esquemas más desarrollados para el procesamiento del texto verbal del problema. Los resultados globales confirman ambas hipóteis.

La reformulación verbal de los problemas explicitando las relaciones semánticas y sin afectar a la estructura semántica y matemática, facilita la comprensión de los problemas verbales y la solución de los mismos. Igualmente, las dificultades de los niños más pequeños en los problemas formulados de manera usual se deben a que no tienen suficiente dominio de los esquemas semánticos subyacentes en los problemas, lo que da lugar a una representación inadecuada de la tarea. Por el contrario, en los *problemas reformulados* se explicitan con claridad las relaciones semánticas de los mismos, compensando así los esquemas menos evolucionados y facilitando el procesamiento de la información contenida en el problema.

Para concluir, los trabajos aquí expuestos reafirman el punto de vista lingüístico, ya que si tomásemos en consideración la hipótesis de que los niños fracasan al solucionar ciertos problemas porque no tienen el conocimiento conceptual requerido para solucionarlos, no se podría esperar que se produjesen cambios en el nivel de ejecución cuando se reformulan los problemas, pero de hecho esto es precisamente lo que ocurre.

Para finalizar este apartado, hay que señalar que existe una serie de variables generales tales como la presencia de ayudas y la magnitud de los sumandos, que parecen influir en la ejecución correcta en los problemas verbales de suma, sobre todo en los niños pequeños. En esta línea, diversos estudios (Bermejo y Lago, 1988c; Bermejo y Rodríguez, 1987a; Carpenter y Moser, 1982; Carpenter et al., 1981; De Corte y Verschaffel, 1985, 1987b; Le Blanc, 1971; Steffe y Johnson, 1971; Riley et al., 1983) han encontrado que la presencia de objetos concretos o dibujos facilita el proceso de representación, dando lugar a una mejora del éxito infantil. Respecto a la magnitud de los sumandos, parece que existe relación entre dicha magnitud y el tipo de estrategias de solución seleccionadas por los niños (i.e., Bermejo y Lago, 1988c; Moser, 1980; Siegler y Robinson, 1982; Carpenter y Moser, 1982). Así, por ejemplo, los niños tienden a utilizar más frecuentemente la estrategia de contar a partir de uno de los sumandos cuando uno de éstos es superior al valor 10. Otros datos se relacionan con la facilidad de los sumandos dobles (Bermejo y Lago, 1988; Svenson, 1975; Svenson y Broquist, 1975), el tamaño del segundo sumando (Baroody, 1983), etc. El trabajo de Bermejo y Lago, que pasamos a exponer brevemente, puede ser un claro ejemplo de como influyen estas variables que estamos considerando. Los autores pretenden averiguar cómo influye la magnitud de los sumandos en el comportamiento de los niños de preescolar y 1º de EGB, así como el grado de abstracción en la representación de cada sumando. Para ello, presentan cinco situaciones que implican niveles distintos de abstracción: (I) números + círculos; (II) círculos + círculos; (III) círculos + números; (IV) objetos + objetos; y (V) número + número. Asímismo, se plantean tres condiciones en relación con la magnitud de los sumandos: (A) el primer sumando es menor que el segundo; (B) el primer sumando es mayor que el segundo; (C) el primer sumando es igual que el segundo. Con objeto de que los niños puedan utilizar los dedos si lo desean, en las tres condiciones el tamaño del sumando menor nunca supera la decena y asímismo, la estructura semántica de los problemas es de cambio y la incógnita se situa siempre en el resultado. Los resultados del análisis factorial 2 (Grupo I vs. Grupo II) x 5 (Situaciones mixtas --I y III-- vs. situaciones concretas --II y IV-- vs. situación abstracta --V--) x 3 (Sumandos A vs. sumandos B vs. sumandos C) con medidas repetidas, muestran que son significativos los efectos principales de los tres factores. Por tanto, existen diferencias significativas entre los dos grupos de edad en cuanto al nivel de ensayos correctos en las distintas tareas.

Igualmente, el modo de representar los sumandos resulta también significativo, de modo que el nivel de éxito de los niños depende del grado de abstracción de los mismos, sobre todo en los preescolares. Estos alcanzan mejores resultados cuando se representan ambos sumandos mediante objetos o dibujos, descendiendo notoriamente cuando ambos sumandos son guarismos. Por último, tanto la magnitud como la ubicación de los sumandos influye considerablemente en el comportamiento de los niños pequeños y ello se puede explicar por dos razones: el paso de unidades a decenas resulta complejo para los preescolares y, en segundo lugar, estos niños encuentran dificultades a la hora de representar las cantidades con los dedos, ya que la magnitud de las cantidades excede el número de dedos de ambas manos. En conclusión, a través de este trabajo se muestra que las estrategias de solución dependen de la edad, del nivel de abstracción de los sumandos y de la magnitud y ubicación de los mismos.

1.3.3. Los modelos de simulación

En los apartados precedentes se ha revisado el notable conjunto de trabajos dirigidos a esclarecer cómo los niños solucionan los problemas aditivos. Algunas de las conclusiones más importantes, que se han puesto de relieve son que la facilidad para resolver los problemas varía de acuerdo con la estructura semántica de los mismos, con la posición de la cantidad desconocida y con la formulación verbal del problema, entre otros aspectos. Aunque estos estudios resultan útiles en cuanto que relacionan la ejecución de los niños con las características de los problemas y permiten establecer una cierta jerarquia en cuanto a los niveles de dificultad de los mismos, no resuelven la cuestión de cómo el niño soluciona el problema. Este es precisamente el objetivo de los modelos de simulación. Dichos modelos pretenden representar el proceso que sigue el sujeto en la realización de una tarea determinada, es decir, intentan mostrar los pasos que da el niño y los procesos cognitivos implicados para solucionar un problema aditivo. En general, estos modelos (Briars y

Larkin, 1984; De Corte y Verschaffel, 1985; Kintsch y Greeno, 1985; Riley et al. ,1983) consideran que existen dos componentes fundamentales implicados en la resolución de las tareas aditivas (Stigler, Fuson, Ham y Kim, 1986). El primero de ellos es la identificación y representación del problema, de modo que los niños construyen esquemas correspondientes a los diferentes tipos de problemas durante la fase de representación inicial de la tarea propuesta. Dicha representación difiere de acuerdo con el nivel de desarrollo en que se encuentre el niño, de modo que puede ser más o menos concreta o más o menos abstracta. Un segundo componente común a todos los modelos es la selección de un esquema de acción apropiado para la solución del problema, que es directamente activado por la representación conceptual. Finalmente, todos los modelos convergen en que las dificultades que presentan los niños se deben más a la construcción inadecuada de la representación inicial del problema planteado, que a la ejecución de la operación correspondiente (Bermejo y Lago, 1987a). Así, los modelos de simulación desarrollados por Riley et al. (1983) y Briars y Larkin (1984) asumen que la solución de los problemas verbales depende de varios tipos de conocimiento. El más importante para la representación del problema es el conocimiento conceptual, que conduce a la selección apropiada de un esquema de acción para la solución. Una vez que el niño comprende la situación y lleva a cabo la asignación de las cantidades, puede seleccionar una operación apropiada para resolver el problema. Además, estos modelos proporcionan hipótesis acerca de los procesos de representación que los niños construyen cuando solucionan problemas verbales, así como las inferencias que hacen y las operaciones que ejecutan sobre los conjuntos. Finalmente aportan datos sobre la dificultad de las diferentes clases de problemas.

1. 3. 3. 1. EL MODELO DE RILEY, GREENO Y HELLER

Riley, Greeno y Heller (1983) han desarrollado un modelo de simulación que caracteriza el progreso que se produce en la resolución de los problemas verbales en términos de avances en el conocimiento conceptual. El modelo distingue entre esquema del problema y esquema de acción. El primero representa el conocimiento conceptual, mientras que el segundo representa el conocimiento de procedimiento. El éxito en la resolución de los problemas depende de la disponibilidad en la memoria de representaciones conceptuales o esquemas correspondientes a los problemas de cambio, combinación y comparación, o lo que Riley et al. llaman el esquema del problema. Este esquema consiste en un sistema organizado de elementos y relaciones, de modo que esos elementos están estructurados en términos de relaciones cuantitativas, temporales y lógicas (Cobb, 1987; Morales, Shute y Pellegrino, 1985). Cuando el niño tiene disponible en su memoria un esquema apropiado, puede hacer corresponder la información del problema con dicho esquema, asignando correctamente las cantidades específicas. Por tanto, las dificultades en la ejecución de un tipo determinado de problema se deben bien a que el niño posee un esquema del problema incompleto o inadecuado, bien a la presencia de obstáculos en el momento de llevar a cabo la correspondencia mencionada.

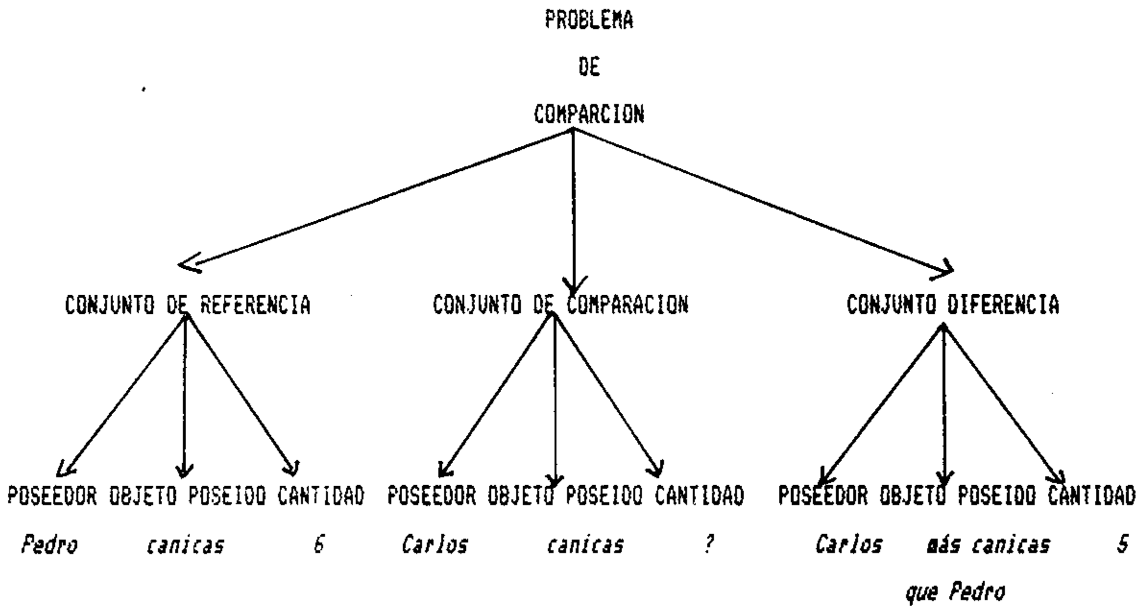
Los esquemas de acción están organizados en niveles diferentes, de modo que el nivel más básico incluye esquemas para hacer conjuntos, añadir elementos a los conjuntos, quitar elementos de los conjuntos, etc, mientras que los más globales se componen a partir de los más básicos. En definitiva, estos esquemas corresponden a los procedimientos para solucionar los problemas de adición.

Por otra parte identifican tres niveles de desarrollo que difieren en el modo en que se representa el conocimiento, correspondiendo los más avanzados a representaciones y procedimientos más sofisticados. El desarrollo se produce como resultado de los avances tanto en el conocimiento de procedimiento como en el conocimiento conceptual. En general, en el nivel 1 el niño resuelve problemas cuyos conjuntos pueden ser representados directamente, es decir, están limitados a representaciones externas de los problemas, utilizando objetos físicos para solucionarlos correctamente. En el nivel 2 no necesitan de la representación externa y hacen inferencias sobre los conjuntos para determinar la cantidad del conjunto desconocido. En el nivel 3, establecen relaciones parte-todo entre los conjuntos. Estos tres niveles son representados mediante redes semánticas.

En una versión posterior de este modelo desarrollada por Riley y Greeno (1988), utilizan como sistemas de representación tanto las redes semánticas como los sistemas de producción. Según estos autores, hay tres tipos de producciones: un conjunto de producciones construye redes semánticas que representan la información proposicional en el texto (el texto base de Kintsch y Greeno, 1985), un segundo conjunto de producciones construye modelos semánticos de las situaciones descritas en el texto (modelo del problema) y un tercer conjunto de producciones utiliza los modelos semánticos para responder a preguntas sobre los conjuntos (que están en los modelos semánticos). En concreto, en el nivel I los niños disponen de producciones para comprender las proposiciones sobre los conjuntos individuales que especifican la cantidad de objetos en ellos contenida, producciones para construir conjuntos en un modelo de problema que se corresponde a los conjuntos que son especificados en las redes semánticas y, por último, producciones para comprender cuestiones relativas a los conjuntos que están presentes en el modelo del problema y que conducen a acciones de conteo para responder a la pregunta planteada. En este nivel, los niños resuelven problemas en los que la información sobre los conjuntos permite construir secuencialmente el modelo del problema, proposición por proposición, tal como es presentada en el texto verbal . Pero, son incapaces de resolver problemas con la incógnita en uno de los sumandos, así como emplear estrategias diferentes a "contar todo" (Carpenter y Moser, 1982), consistentes en representar ambos conjuntos mediante objetos, contándolos todos seguidamente. Por ejemplo, en el siguiente problema de combinación "Pedro tiene 6 canicas. Carlos tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tienen entre los dos?", el niño procede como sigue: ante la frase "Pedro tiene 6 canaicas" crea una red semántica y un conjunto con 6 canicas; la proposición "Carlos tiene 5 canicas" conduce a una meta de construir un segundo conjunto con 5 canicas; finalmente, cuando se plantea la pregunta "¿Cuántas canicas tienen entre los dos?" forma una meta en la que trata de encontrar la unión de los dos conjuntos para responder a la pregunta, lo que le conduce a ejecutar acciones de conteo.

El nivel II, incluye un esquema que permite al niño darse cuenta de que los objetos tienen un doble papel, ya que están incluidos tanto en el conjunto principal como en uno de los subconjuntos. Esto es, construye redes semánticas que le permiten representar conjuntos que son mencionados en el texto del problema, pero que no tienen definidas las cantidades específicas. Representan relaciones entre los conjuntos, usando un esquema de relaciones parte-todo, de transferencia dentro o fuera del conjunto o de comparación de conjuntos. En este nivel, el niño puede solucionar problemas en los que la incógnita se sitúa en uno de los sumandos. Por ejemplo, en el siguiente problema de comparación: "Pedro tiene 6 canicas. Carlos tiene 5 canicas más que Pedro. ¿Cuántas canicas tiene Carlos?". La proposición "Pedro tiene 6 canicas" conduce al niño a una representación igual a la del nivel I; sin embargo, la frase "Carlos tiene 5 canicas más que Pedro" no puede ser representada por los niños del nivel I, ya que requiere comprender la relación entre cantidades para determinar el conjunto de referencia, el conjunto de comparación y el conjunto diferencia. Por otro lado, en este nivel los niños utilizan estrategias consistentes en contar a partir de uno de los sumandos ("counting-on"). En la figura 1 se representa la red semántica correspondiente a este nivel.

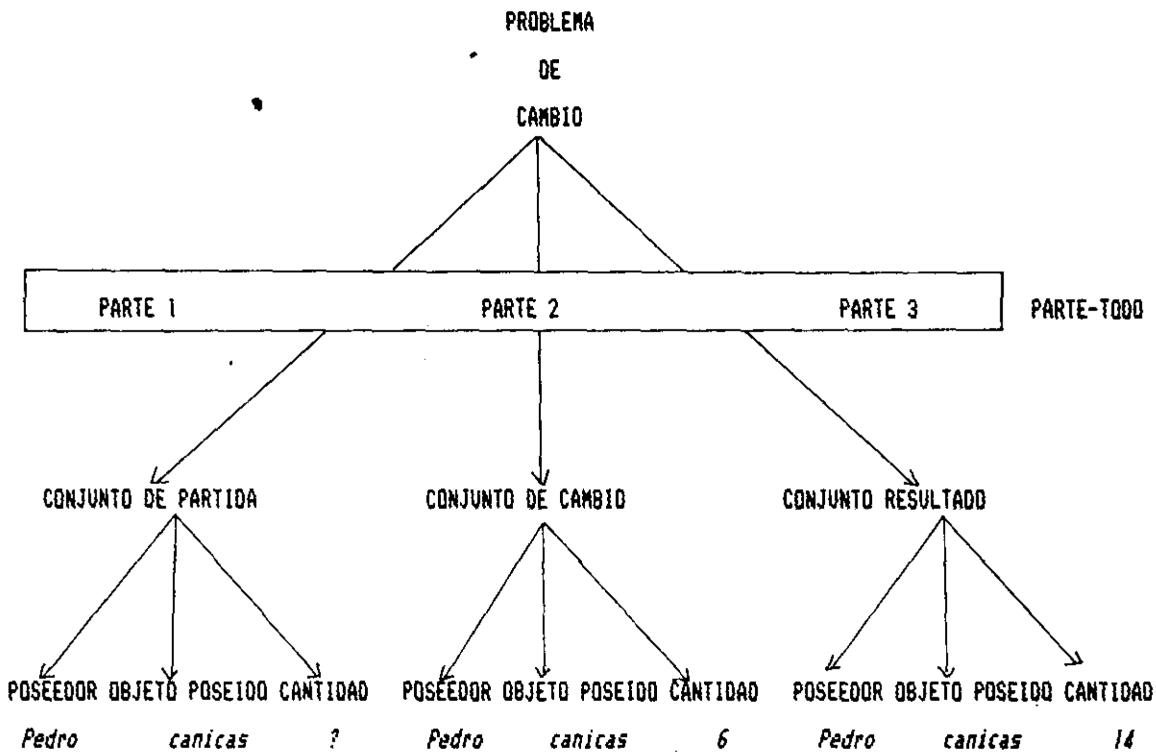
Figura 1
Red semántica correspondiente al nivel de conocimiento 2 en el modelo de Riley et al. (1983) (adaptado de Riley y Greeno, 1988)



En el nivel III la incorporación del esquema parte-todo facilita la representación de las relaciones entre todos los elementos del problema. Además, al contrario que en los dos niveles precedentes, el niño no precisa ahora la representación externa y utiliza cualquier tipo de estrategia, incluyendo las memorísticas y las basadas en reglas. Un ejemplo de este nivel se recoge en la Figura 2.

Figura 2

Réd semántica correspondiente al nivel de conocimiento 3 en el modelo de Riley et al. (1983) (adaptado de Riley y Greeno, 1988)



Por último, este modelo hace una serie de predicciones sobre el tipo de problemas que los niños pueden solucionar en cada nivel de desarrollo. Se asume que los problemas que dentro de una categoría determinada requieren el mismo nivel de desarrollo tienen el mismo grado de dificultad y asimismo, que los problemas pertenecientes a distintas categorías, aun cuando tengan el mismo nivel de desarrollo, no son similares respecto a su grado de dificultad, ya que cada categoría o tipo de problema requiere conocimientos específicos diferentes. En la tabla 3 figuran las predicciones del modelo sobre cada tipo de problema.

Tabla 3
Predicciones hechas por el modelo de Riley et al. (1983) sobre los tipos de problemas que los niños pueden solucionar en cada nivel de conocimiento

NIVELES DE CONOCIMIENTO	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3
TIPOS DE PROBLEMAS			
COMBINACION			
- 1:	SI	SI	SI
- 2:	NO	SI	SI
- 3:	NO	SI	SI
CAMBIO			
- 1:	SI	SI	SI
- 2:	NO	SI	SI
- 3:	NO	NO	SI
COMPARACION			
- 1:	SI	SI	SI
- 2:	NO	SI	SI
- 3:	NO	NO	SI

* El 1, 2, y 3 que aparece en cada categoría de problema se corresponden con los de la tabla 1.

1. 3. 3. 2. EL MODELO DE BRIARS Y LARKIN

El modelo de Briars y Larkin (1984), al que denominan CHIPS, presenta grandes similitudes con el modelo precedente. Al igual que el modelo de Riley et al. (1983), simula los procesos psicológios que el niño pone en marcha cuando soluciona un problema, tratando de identificar el grado de dificultad que encuentra. Propone tres niveles básicos de desarrollo , pero sin distinguir en este caso el conocimiento de procedimiento y el conocimiento conceptual. Se pueden establecer, en general, tres grandes diferencias entre ambos modelos: (a) el CHIPS representa cada elemento mencionado en el problema (p. e., 5 manzanas son representadas cada una por un contador), mientras que el modelo de Riley et al. representa únicamente las cantidades con números asociados y las identidades (p.e., 5 manzanas es una cantidad con valor 5 e identidad manzanas); (b) en el modelo de Riley et al., cada categoría de problema requiere un esquema diferente, mientras que en el CHIPS si un problema no implica directamente un esquema de cambio, usa un conocimiento lingüístico extra para interpretarlo como si se tratase de un problema de cambio; y (c) el CHIPS considera dos causas posibles de las dificultades de los niños: matemáticas y lingüísticas, mientras que el modelo de Riley et al., no hace esta distinción.

El CHIPS pretende determinar cómo un niño emplea materiales concretos (p.e., fichas) para representar de manera física un problema dado y hallar así la solución. La forma de operar consiste en la formulación de una lista de estructuras, cada una de las cuales representa a una ficha o chip. Estas fichas o chips sirven para construir una representación del problema o una estructura de datos organizada. El CHIPS opera por medio de dos componentes: un conjunto fuente y un conjunto de elementos que reflejan su conocimiento sobre el problema. En efecto, antes de que inicie su actuación dispone de un conjunto fuente, constituido por una colección de fichas, de modo que cuando se presenta un problema, el CHIPS extrae una palabra para procesarla y, o bien no hace nada, o ejecuta alguna acción sobre su colección de fichas. Por otro lado y al mismo tiempo, construye en su memoria de trabajo elementos que representen su conocimiento sobre el problema. Algunos de esos elementos son generales. Así, un elemento, que representa a una ficha, consiste en una lista que consta de tres características: un encabezamiento que sirve para identificarla como ficha, un número de identificación de esa ficha y un indicador que informa sobre si esta ficha ha sido o no contada . Otros elementos sirven como identificadores de conjuntos, tales como el nombre del poseedor, el objeto poseido, etc. Por fin, hay además un elemento de tipo temporal, que especifica el número de veces en que un grupo de fichas ha sido movido de un conjunto a otro. Otros elementos son especiales y representan las relaciones de pertenencia y de descripción. Los que hacen referencia a elementos de pertenencia indican que una ficha es un miembro de uno o más conjuntos y contienen información sobre el tiempo en que esta pertenencia se aplica. Por tanto, en el tiempo "0", todos las fichas son miembros del conjunto fuente, mientras que en el tiempo "1" algunas fichas son miembros de un segundo conjunto, quedando el resto en el conjunto fuente.

Por otro lado, el CHIPS *construye estructuras de datos* para registrar el conocimiento de modo organizado. Dichas estructuras reciben el nombre de esquemas. Estos esquemas son activos mientras reúnen información y se ejecutan las acciones (i.e., mover, contar). Cuando la acción es concluida con éxito, el esquema adquiere el estatus de "hecho" y el problema queda solucionado.

Al igual que en el modelo de Riley, el CHIPS dispone de tres niveles distintos de *conocimiento matemático:* contadores de función simple, contadores con doble función y de doble representación. El primer nivel es el más simple y es similar al de Riley et al. (1983). Sirve para solucionar los problemas que implican únicamente la habilidad de mover y contar fichas, así como la pertenencia de cada ficha a un solo conjunto. Por ejemplo: "Pedro tiene 6 canicas. Carlos le da 5 canicas más. ¿Cuántas canicas tiene Pedro ahora?". Cuando el CHIPS recibe la frase "Pedro tiene...", *reconoce* que Pedro puede disponer de un conjunto de algo y en consecuencia pone en marcha un esquema de movimiento. La cantidad "6" se añade al esquema, de modo que así el CHIPS sabe cuántas fichas tienen que ser movidas del conjunto fuente al conjunto que posee

Pedro. Para llevar a cabo estas y otras acciones el CHIPS registra su conocimiento en un conjunto de producciones que pertenecen al esquema de movimiento (Tabla, 4). Por ejemplo, la producción M1, llamada "Hacer un nuevo conjunto", y la producción M3 "Añadir un número al esquema de movimiento", hace que se trasladen los chips del conjunto fuente al conjunto de Pedro, en nuestro caso eso significa que el CHIPS traslada 6 fichas del conjunto fuente al conjunto de Pedro. Una vez hecho esto, el CHIPS toma la siguiente frase "le da". Esta proposición hace que se muevan fichas desde el conjunto fuente al poseído por Pedro, lo que es posible debido a que este conocimiento es proporcionado por la producción M2. En consecuencia, tenemos un conjunto original de Pedro con 6 canicas más un conjunto adicional, también de Pedro, con 5 canicas. La frase que se inicia con "cuántos" hace que el CHIPS construya un esquema de contar para recoger información sobre la identidad del conjunto que va a ser contado. Esto es posible gracias al conocimiento proporcionado por las producciones C1, C2 y C3.

En el segundo nivel, contadores de doble papel, una ficha puede ser usada como miembro de dos conjuntos, aunque de hecho esos dos conjuntos no estén simultáneamente presentes en el tiempo. Los chips o fichas juegan un doble papel: por un lado, determinar como hallar los elementos pertenecientes a dos conjuntos a la vez y,

Tabla 4
Sistemas de producción que recogen el conocimiento necesario para mover y contar fichas en el modelo de Briars y Larkin (1984).

MOVER

M1, HACER UN CONJUNTO
Si la palabra actual sugiere posesión o ganancia (tenía, encontró) y no hay un esquema de movimiento activo, Entonces hacer un conjunto nuevo y hacer un esquema para mover fichas al nuevo conjunto a partir del conjunto fuente con la condición de parar cuando un número de fichas (no especificadas actualmente) se hayan movido,

M2, MOVER FICHAS DENTRO O FUERA DE UN CONJUNTO
Si la palabra actual sugiere ganancia (o pérdida) (obtuvo) y hay un conjunto actual y no hay un esquema de movimiento activo, Entonces hacer un esquema para mover fichas del conjunto actual al conjunto fuente con la condición de parar cuando un número de fichas (no específico actualmente) haya sido movido,

M3, AÑADIR UN NUMERO A UN ESQUEMA DE MOVIMIENTO
Si la palabra actual es un número y hay un esquema de movimiento y el número asociado con la condición de parar no es específico, Entonces añadir el número actual al esquema de movimiento,

M4, INTERPRETAR LA PALABRA "ALGUNOS"
Si hay un esquema de movimiento con sus números sin especificar y la palabra actual es "algunos", Entonces dar al esquema de movimiento el status de "no se puede hacer",

M5, INTERPRETAR "AHORA" DESPUES "ALGUNOS"
Si hay un esquema para mover dentro o fuera de un conjunto y el esquema tiene un status de "no se puede hacer" y la palabra actual es "ahora", Entonces dar al esquema de movimiento un status de activo y fijar la condición de parar de modo que las fichas son movidas hasta que el conjunto actual tenga un número de fichas, no específico actualmente

CONTAR

C1, HACER UN ESQUEMA DE CONTEO
Si la frase actual es; "¿cuántos?" y no hay un esquema activo de conteo, Entonces hacer un esquema para contar,

C2, CONTAR EL CONJUNTO MAS RECIENTE
Si hay un esquema de conteo activo con el conjunto sin especificar y la palabra actual es "ahora", Entonces hacer que el conjunto que va a ser contado sea el creado más recientemente,

C3, IDENTIFICAR UN CONJUNTO QUE VA A SER CONTADO
Si hay un esquema de conteo activo con el conjunto sin especificar y la palabra actual es un descriptor y sólo hay un conjunto con ese descriptor, Entonces hacer el conjunto especificado por el esquema de movimiento,

por otro, encontrar el modo de contar esos conjuntos. Por ejemplo, en el problema " Pedro tiene 6 canicas. Tiene algunas más en el bolsillo. Ahora tiene 9. ¿Cuántas canicas tenía en el bolsillo?", el CHIPS construye inicialmente un conjunto de 6 fichas, que debe incrementar hasta alcanzar 9 elementos en total. Para responder a la pregunta "¿cuántas canicas tenía en el bolsillo?", necesita conocer la siguiente producción: "Si hay un esquema de contar activo y un conjunto A y chips que se han pasado a A y la palabra actual sugiere un incremento en el conjunto (i.e., tomar, coger); entonces hay que modificar el esquema de conteo para especificar los chips que ahora pertenecen a A, pero que eran miembros de un conjunto diferente en un momento inmediatamente anterior" (p.259).

A diferencia de los dos niveles anteriores, en el tercero existen variaciones notables entre el modelo presente y el de Riley et al. (1983). Esas diferencias se deben a que hipotetizan estructuras de conocimiento distintas. En efecto, Briars y Larkin señalan que en este nivel el CHIPS tiene la habilidad de reconocer que acciones como combinar y separar pueden ser invertidas. Ello es debido a que el CHIPS dispone de dos esquemas: un esquema de transferencia y un esquema de equivalencia de subconjuntos, cuya función es similar a la de los esquemas de mover y contar, es decir, almacenar conocimiento de modo organizado. El esquema de transferencia permite almacenar el número de fichas de un conjunto inicial, el número de fichas transferido dentro o fuera de él y el número de fichas existentes en el conjunto final. Por su parte, el esquema de equivalencia de subconjuntos es similar al esquema parte-todo de Riley et al. Permite el intercambio de subconjuntos, de modo tal que un problema muy complejo con la incógnita en el primer sumando (? + A = B), como el mencionado más arriba, puede transformarse en A + ? = B intercambiando los subconjuntos y solucionarse por modelado directo mediante contadores de doble función. Por ejemplo en el problema "Pedro tenía algunas canicas y pierde 2. Entonces le quedan 7. ¿Cuántas canicas tenía Pedro al principio?", se puede empezar por el conjunto final en el que hay 7 canicas, invertir la acción de quitar 2 y reconocer que el resultado 9 son las canicas que se encontraban en el conjunto inicial.

1. 3. 3. 3. OTROS MODELOS DE SIMULACION

El modelo de Kintsch y Greeno (1985), complementa a los dos anteriores, ya que intenta explicitar el modo en que se derivan las representaciones conceptuales del texto del problema. Para ello, analizan ampliamente los procesos de comprensión de la expresión verbal de la tarea propuesta. Los fundamentos teóricos de este modelo se encuentran en la teoría general sobre comprensión de textos desarrollada por Kintsch y van Dijk (1978) y van Dijk y Kintsch (1983), así como en el modelo de Riley et al., respecto al conocimiento matemático requerido para representar los problemas y los procesos de resolución. Kintsch y Greeno señalan que las conductas de los niños en la solución de problemas es el resultado de la interacción entre los procesos de comprensión del texto y las estrategias de solución. Más específicamente, la representación del problema depende del grado de sofisticación lingüística, de la capacidad del niño para comprender el conjunto de relaciones lógicas y de la elección del procedimiento de solución. En general, desde este modelo se afirma que la comprensión del texto de una tarea verbal supone construir una representación conceptual de la misma sobre la que puedan operar los procesos de resolución del problema. El modelo consta de dos componentes esenciales: estructuras de conocimiento y un conjunto de estrategias para utilizar dichas estructuras de conocimiento a la hora de construir la representación durante la resolución del problema. Por otra parte, la representación del problema se produce a un doble nivel. Por un lado, el input verbal se transforma en una representación conceptual de su significado (una lista de proposiciones). Estas proposiciones se organizan en una macroestructura que clarifica los conceptos y relaciones generales mencionadas en el texto y constituyen el texto base. Por otro lado, hay una representación abstracta del problema, el modelo del problema, en el que se inscribe la información relevante del mismo, extraída a partir del texto base, en forma de estrategias de cálculo apropiadas, que conducen a la solución del problema. Por tanto, el modelo del problema refleja los conocimientos necesarios para resolver la tarea planteada.

El paso de una representación a otra se produce a través de una serie de estrategias, desencadenadas por las proposiciones del texto base. Dichas estrategias son cuatro: (a) la estrategia de "hacer conjunto", inducida por una proposición cuantitativa (por ejemplo: "cinco" o "cuántas"); (b) la estrategia de "conjunto transferido", inducida por una proposición "da", junto con la existencia de un conjunto que es asociado a uno de los individuos implicados en esa proposición; (c) la estrategia de "diferencia", inducida por las proposiciones "tiene más que" o "tiene menos que"; y (d) la estrategia de "conjunto principal", inducida por la proposición "tienen juntos". Estas estrategias necesitan de la presencia de esquemas de alto orden para poder establecer relaciones entre los conjuntos y asignar los papeles correspondientes en el modelo del problema. Los esquemas de alto orden son: el esquema de transferencia, el esquema parte-todo, el esquema "más que" y el esquema "menos que". El primero de ellos se precisa en la representación de los problemas de cambio. En estos problemas hay un conjunto de "partida" inicial en el que se dispone de una cierta cantidad de objetos, un conjunto de objetos que se transfiere al conjunto de partida y un conjunto "resultado". El esquema parte-todo supone también la existencia de tres conjuntos: dos subconjuntos y un conjunto total y es característico de los problemas de combinación. Finalmente, los esquemas "más que" y "menos que" se ponen en marcha en los problemas de comparación, que incluyen un conjunto grande, un conjunto pequeño y una diferencia. Veamos, para concluir la descripción de este modelo, un ejemplo de problema de combinación. El problema es como sigue: "Pedro tiene 6 canicas y Carlos tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas tienen entre los dos?". En la primera frase, "Pedro tiene 6 canicas", nos encontramos en el texto base con tres proposiciones "Pedro", "6" y "canicas", de modo que la proposición "6" induce a la representación de un conjunto. Además, estas tres proposiciones son clasificadas en los emplazamientos de "objeto", "cantidad", "especificación" y "papel o función" en el modelo del problema, aunque por el momento el emplazamiento de "papel o función" se encuentra vacío. Las proposiciones 4, 5 y 6 se obtienen a partir de la frase "Carlos tiene 5 canicas", dando lugar a un segundo conjunto similar al anterior. Finalmente, las proposiciones 7 y 8 se extraen de la pregunta "¿cuántas canicas tienen entre los dos?" y así la proposición cuantitativa "¿cuántos?" hace que se identifique este conjunto como el objetivo del problema y la proposición "entre los dos" sirve como indicio para asignar a este conjunto el "papel o función" de conjunto principal. De esta forma, el modelo asigna el "papel o función" de subconjuntos a los dos conjuntos anteriores. Estos papeles o funciones están en el modelo del problema y no en el texto base, ya que no son derivados directamente de éste, sino que son añadidos como inferencias basadas en el esquema parte-todo. Una vez designados los papeles correspondientes a los conjuntos, se pone en marcha una estrategia de cálculo y el problema es resuelto.

En la misma línea que el modelo anterior, De Corte y Verschaffel (1985) proponen un modelo para explicar los problemas verbales aditivos en el que el procesamiento semántico tiene también gran importancia. En este modelo la fase más importante corresponde a la construcción de una representación interna del problema. La construcción de esa representación requiere la identificación de los elementos relevantes y las relaciones entre estos elementos descritos en el texto base. En síntesis, el modelo comprende cinco fases: (1) representación global del problema en términos de los conjuntos y las relaciones entre los conjuntos; (2) selección de una operación aritmética formal o una estrategia informal de conteo para encontrar el elemento desconocido en la representación del problema; (3) ejecución de la operación o de la estrategia informal; (4)

reactivación de la representación inicial del problema, sustituyendo el elemento desconocido por el resultado de su ejecución; y (5) verificación de la solución. En la primera fase, como señalamos anteriormente, se produce el procesamiento del texto orientado hacia una meta y esta representación mental se considera el resultado de un proceso de interacción botton-up y top-down. En dicho proceso intervienen dos esquemas: los semánticos y el "esquema de las palabras del problema" (Word Problem Schema, WPS). Los semánticos representan el conocimiento del sujeto acerca de las relaciones subyacentes en los problemas verbales. Por su parte el WPS, hace referencia al conocimiento que tiene el sujeto acerca de la estructura, del papel, y de la intención del problema. Este esquema permite al sujeto enfrentarse adecuadamente a la tarea, aún cuando el texto verbal contenga pocos indicios u omisiones. Además, orienta su lectura hacia ciertos conceptos y relaciones esenciales para la construcción de conjuntos y relaciones de conjuntos, desechando las proposiciones irrelevantes; y, por último, facilita la interpretación correcta de las ambigüedades e imprecisiones, obteniendo de este modo una representación completa y coherente.

1. 3. 3. 4. ALGUNOS DATOS EMPIRICOS SOBRE LOS MODELOS DE SIMULACION

Todos los modelos presentados en los apartados anteriores son sólo aproximaciones teóricas sobre los procesos cognitivos subyacentes en la resolución de los problemas. Es necesario que la evidencia empírica nos indique cuál de ellos es el más apropiado y, por el momento, sigue siendo una cuestión abierta. No obstante, existen algunos datos, que pueden arrojar alguna luz a este respecto. En esta línea, se encuentra el trabajo de Riley y Greeno (1988) que estudia el comportamiento de niños preescolares (**M** = 6 años), de primero (**M** = 7 años), segundo y tercero (**M** = 8;1 años) en la resolución de tareas verbales de combinación, cambio y comparación. El procedimiento seguido consta de dos fases. En una primera fase, se leen los problemas en voz alta y se repiten si fallan o si el propio niño lo pide. Disponen además de bloques de madera y hojas de papel. En la segunda fase, se leen de nuevo en orden diferente y se les pide que los repitan. En general los resultados se ajustan al modelo propuesto por estos autores en los problemas de combinación y cambio, pero no en los problemas de comparación. Veamos estos resultados con mayor detenimiento. Aunque los tipos de conocimiento asumidos en los niveles I y II en los problemas de comparación son los mismos que en los problemas de cambio y combinación, no obstante, hay más niños de preescolar y primero en el nivel I o II en los problemas de cambio y combinación, que en los problemas de comparación, explicándose los fallos en estos últimos por la falta de un conocimiento lingüístico y conceptual para comprender el lenguaje utilizado. Asímismo, los niños de segundo y tercero se encuentran en el nivel II o III en los problemas de combinación y cambio, pero muy pocos de ellos tienen éxito en los problemas de comparación. Sin embargo, estos pocos sujetos se comportan de acuerdo con alguno de los niveles que se predice en el modelo.

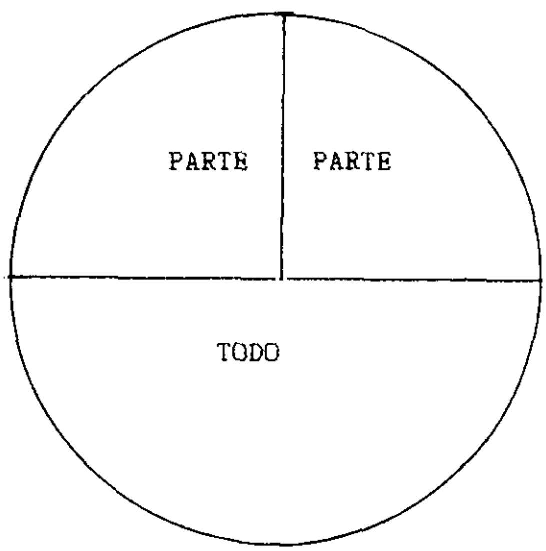
Por su parte el trabajo llevado a cabo por Willis y Fuson (1988) también nos aporta algunos datos interesantes sobre estos modelos. Se trata de un diseño de instrucción sobre problemas verbales realizado con niños de segundo de EGB. El tipo de instrucción utilizado consiste en enseñar a estos sujetos a representar los problemas verbales mediante dibujos esquemáticos, que modelan las características semánticas del problema. Las cantidades que aparecen en el problema se inscriben en esos dibujos esquemáticos, decidiendo posteriormente si hay que sumar o restar para encontrar el elemento desconocido. Los dibujos esquemáticos son de tres tipos: uno de ellos representa a los problemas de cambio, otro los de comparación y otro para los de combinación. En concreto, los que reflejan la estructura de los problemas de cambio incluyen un estado inicial, un cambio y un estado final; los de combinación reflejan el esquema parte-parte-todo y en los de comparación las cantidades grande y pequeña se sitúan una al lado de la otra con objeto de facilitar su comparación, anotando la diferencia en el interior de una línea discontinua (Figura 3).

Estos dibujos esquemáticos sirven para detectar si las dificultades infantiles en ciertos tipos de problemas se producen en la fase de representación (indicado por los dibujos inapropiados que hacen los niños), en la comprensión de las relaciones entre las cantidades del problema (indicado por la inserción incorrecta de los números dentro de los dibujos), en la elección de la estrategia de solución (indicado por la elección del algoritmo resta en vez de la suma o viceversa) y finalmente, en la puesta en marcha de las estrategias de solución (indicado por los errores de ejecución en la adición). Permiten comprobar, además, dos hipótesis referentes al proceso de representación. La hipótesis de Resnick (1983), según la cual los niños usan el esquema parte-parte-todo en la representación de los cuatro tipos de problemas aditivos y la hipótesis de Riley et al. (1983) y Kintsch y Greeno (1985), según la cual los niños utilizan este esquema únicamente en los problemas de cambio.

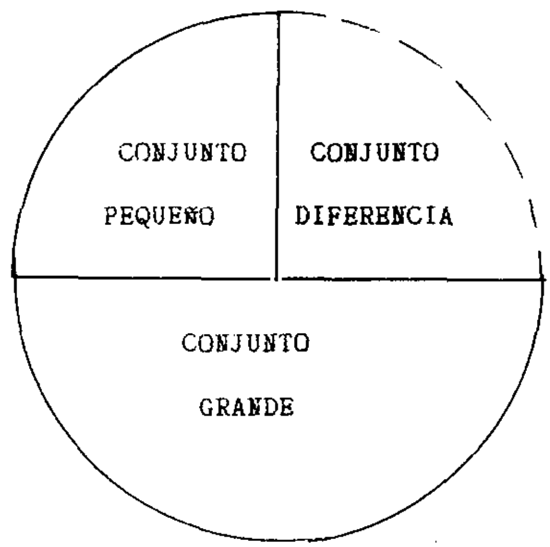
Figura 3

Dibujos esquemáticos propuestos por Willis y Fuson para la enseñanza de problemas de cambio, comparación y combinación (Adaptado de Willis y Fuson, 1988).

PROBLEMAS DE COMBINACION



PROBLEMAS DE COMPARACION



PROBLEMAS DE CAMBIO

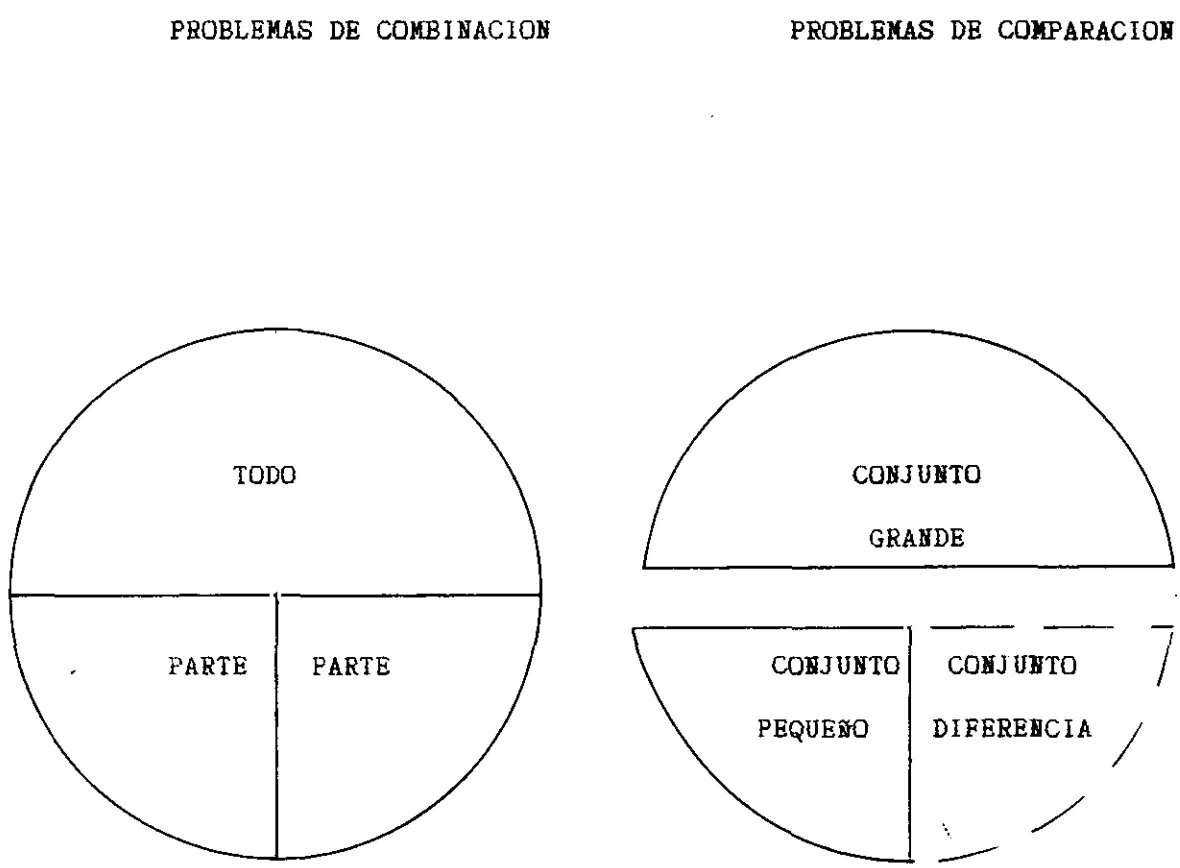
$\boxed{\text{ESTADO INICIAL}} \Rightarrow \boxed{\text{CAMBIO}} \Rightarrow \boxed{\text{ESTADO FINAL}}$

El período de instrucción se divide en unidades, de modo que en cada una de ellas se enseña tan sólo una categoría de problemas en el siguiente orden: problemas de combinación, cambio, comparación y problemas mixtos. Tras las sesiones de enseñanza de cada categoría de problema, el niño dispone de un período de práctica de dos a cuatro días sobre estos problemas en hojas diseñadas a tal efecto.

Los resultados muestran que la instrucción resulta exitosa, ya que todos los niños aprenden a utilizar los dibujos esquemáticos adecuadamente. Además, la correlación entre rellenar bien el dibujo y la elección de la estrategia de solución correcta es elevada. Sin embargo, en los problemas de combinación con la incógnita en una de las partes, un 50% de los niños construyen un dibujo de comparación. Por ello, se llevaron a cabo una serie de modificaciones en los dibujos (Figura 4). En primer lugar, en el gráfico utilizado para esquematizar los problemas de comparación modifican la posición de los espacios dedicados a cada una de las cantidades, de esta forma el recuadro más grande (que representa el todo) se situa encima de los otros dos (que representan las partes), a fin de que unidos estos dos alcancen la longitud del primero. En segundo lugar, también se modifica ligeramente el esquema empleado en los problemas de comparación, separararando los espacios dedicados a los conjuntos diferencia y pequeño del rectángulo en el que ha de situarse el conjunto mayor. Esta

Figura 4

Dibujos esquemáticos modificados por Willis y Fuson en problemas de combinación y comparación (Adaptado de Willis y Fuson, 1988)



modificación permitirá diferenciar este esquema del empleado en los problemas de combinación, ya que uno de los rectángulos en el que han de situarse las partes o bien el conjunto diferencia tiene líneas discontínuas en los problemas de comparación y, por otra parte, es clarificadora la separación de los dos rectángulos de menor tamaño, que dan lugar a dos bloques iguales, porque uno de ellos está dividido por la mitad a través de una línea discontínua.

Por último, los datos empíricos no apoyan la hipótesis de que los niños tengan éxito usando únicamente dibujos que incluyen relaciones parte-parte-todo en todos los tipos de problemas como apunta Resnick (1983), ni tampoco en los problemas más difíciles de cambio (Riley et al., 1983; Kintsch y Greeno, 1985). Muy al contrario, estos datos vienen a confirmar el trabjo de Wolters (1983), en el sentido de que parece más adecuado utilizar tres tipos de dibujos en lugar de uno. En efecto, Wolters lleva a cabo un estudio sobre los problemas verbales en niños de 6 a 10 años. Durante los dos primeros cursos reciben 10-11 lecciones, durante dos o tres semanas, sobre la comprensión del esquema parte-todo y su aplicación en los problemas verbales aditivos y de substracción. En cambio, los sujetos de tercero y cuarto siguieron un período de instrucción más amplio durante 2-3 meses sobre la aplicación y comprensión de la relación parte-todo. Los resultados muestran que la instrucción tiene un efecto positivo en la solución de los problemas de combinación, mientras que su incidencia es negativa en los restantes tipos de problemas. Estos resultados se explican porque al centrarse los niños en las relaciones parte-todo, fracasan en las tareas que presentan una estructura diferente, como en los problemas de cambio y comparación.

Con el mismo objetivo general, pero en una línea muy distinta a la mencionada, se sitúan los trabajos de Fletcher (1985) y Dellarosa (1986). Estos autores desarrollan programas de simulación por computador para comprobar el modelo de Kintsch y Greeno (1985) sobre los problemas verbales. Las diferencias entre ambos programas se sitúan en la complejidad de las estructuras de memoria que construyen, la sofisticación de su conocimiento lingüístico y en el número y tipos de estrategias de solución de problemas. Específicamente, el progama desarrollado por Fletcher recibe el nombre de WORDPRO, se diseña para simular la comprensión y solución de un conjunto de problemas verbales en niños de tercer grado. El modo de operar del WORDPRO es el siguiente. Dado el formato proposicional del texto, construye una representación en dos niveles: la correspondiente al texto base y la del modelo del problema, asumiéndose que el conocimiento sobre los conjuntos subyace a la construcción del texto base y el modelo del problema. Este conocimiento es insertado en un esquema con tres ranuras: la ranura correpondiente al objeto (p. ej. canicas), la ranura correspondiente a la cantidad en la que se especifica el cardinal del conjunto y, finalmente, la ranura de especificación, que contiene información relativa a los conjuntos que permite diferenciar uno de otro.

Por otro lado, un esquema de conjunto incluye la especificación de subranuras para el ganador y el tiempo. En el texto base, las ranuras del esquema de conjunto son rellenadas con las proposiciones y en el modelo del problema se elimina toda la información no esencial para una ranura . Además utiliza tres esquemas de alto orden para organizar el conjunto de esquemas dentro de las representaciones coherentes del problema. Un esquema de transferencia recoge las relaciones entre el conjunto de partida, el conjunto de transferencia y el conjunto resultado. El esquema de conjunto principal es usado para organizar el conjunto principal y los dos subconjuntos. Finalmente, un esquema describe las relaciones entre un conjunto pequeño, un conjunto grande y un conjunto diferencia.

En cuanto al modo de funcionamiento del WORDPRO, consiste en una estructura base en la que se incluyen un conjunto ordenado de reglas de producción, que controlan el flujo de información en la memoria a corto plazo. Cada regla contiene un conjunto de condiciones y un conjunto de acciones, de modo que cada condición es un test en los contenidos actuales de la MCP y las acciones alteran la MCP añadiendo nueva información, pasando la información vieja a la MLP o eliminando información.

En síntesis, podemos afirmar que el WORDPRO resulta ser un éxito por varias razones. En primer lugar, resuelve con exito los problemas para los que fue diseñado; en segundo lugar, prmite una más fácil comprensión de la teoría de Kintsch y Greeno, porque especifica el modo en que trabaja y, por último facilita la comparación de la ejecución del programa con la de los niños.

Por otro lado, Dellarosa (1986) diseña un nuevo programa, el ARITHPRO, cuyo objetivo es desarrollar y completar el programa WORDPRO. Al igual que en este programa, ARITHPRO interpreta la historia descrita en el problema verbal construyendo marcos proposicionales y la información numérica como conjuntos de objetos. La estructura del problema, o de modo más preciso, las relaciones lógicas entre los conjuntos que se crean durante la comprensión, se incluyen en superesquemas. El tipo particular de superesquema que es construido depende de la información presente en la proposición individual y del conjunto de estructuras. Finalmente, la presencia de un superesquema desencadena un procedimiento de conteo , produciendo de este modo una respuesta al problema. Si no se crea un superesquema o el superesquema resulta incompleto (por ejemplo, si ARITHPRO no comprende el problema), se desencadenan estrategias inadecuadas para la resolución del problema.

La estructura del programa de ARITHPRO incluye los principales componentes del modelo psicológico en el que está basado, a saber : los procesos de comprensión lingüística, el conocimiento concerniente a los conjuntos y sus relaciones lógicas, estrategias aritméticas de conteo, estrategias de solución incorrectas, las metas, un almacén de memoria a corto plazo (MCP) y un almacén de memoria a largo plazo (MLP). Respecto al conocimiento lingüístico, se codifica en el primer conjunto de reglas de producción y comprende tres tipos de información lingüística: conocimiento de las palabras y sus significados, conocimiento sobre las proposiciones y sus significados y, finalmente, conocimiento sobre la estructura del texto, es decir, reglas que crean expectativas concernientes a las proposiciones nuevas y a las ya procesadas. Estas reglas de producción se ponen en marcha ante la presencia de ciertas palabras, produciendo, algunas de estas reglas, la activación del conocimiento concerniente al significado de las palabras y los significados de las proposiciones. Las restantes reglas lingüísticas generan metas que se relacionan con el conjunto de información espececificada y con la estructura del problema y son desencadenadas por la presencia de ciertos tipos de estructuras de proposición en la MCP.

Respecto al conocimiento sobre los conjuntos y las relaciones de conjunto, el segundo grupo de reglas se relacionan con estructuras de construcción del problema. Esas reglas del superesquema de producción son de dos tipos: reglas que tratan sobre la comprensión de las palabras cuantitativas como conjuntos de objetos y reglas que se relacionan con la construcción de estructuras de problemas organizadas o superesquemas.

Por último, los procedimientos de conteo y reglas inadecuadas comprenden los dos grupos restantes de reglas de procedimiento.

En cuanto a las capacidades y limitaciones de ARITHPRO, se observa, por un lado, que puede solucionar los tipos de problemas descritos por Riley, Greeno y Heller (1983) y, además, puede tolerar bastante variabilidad en la redacción de estos problemas. Por otro lado, respecto a la ejecución de ARITHPRO en comparación con la de los niños, hay que señalar que las reglas del programa son extraidas empíricamente a través de la observación de las características de ejecución de los niños que tienen éxito al resolver los problemas. No obstante, como la ejecución no siempre es eficaz, el ARITHPRO se centra en los errores y en las modificaciones requeridas para simular estos errores. A la hora de explicar estos errores existe una vieja polémica entre los que los justifican como resultado de la falta de conocimiento matemático (Riley et al, 1983) y los que defienden que dicho resultado es atribuible a la carencia de un conocimiento lingüístico apropiado (Kintsch y Greeno, 1985). En esta línea, el programa ARITHPRO proporciona un medio útil para explorar esta controversia, ya que a diferencia de los niños, el conocimiento de ARITHPRO puede ser suprimido, cambiado o añadido, y tomar nota sobre los efectos de esos cambios en la ejecución. Se plantean dos cuestiones: ¿cuántos errores comete ARITHPRO manipulando su conocimiento lingüístico? y ¿cuántos errores comete ARITHPRO manipulando su conocimiento matemático?.

Respecto a la primera de las cuestiones, los problemas que incluyen el término "algunos", como por ejemplo "Pedro tiene algunas canicas. Carlos le da 8 canicas más. Ahora Pedro tiene 14 canicas. ¿Cuántas canicas tenía Pedro al principio?", el error más frecuente consiste en ofrecer como respuesta el cardinal del conjunto de transferencia, en este caso 8. Se ha sugerido que este error es causado porque el niño ignora la proposición que contiene la palabra "algunos". Para simular esta situación, ARITHPRO codifica una vez la entrada de la palabra "algunos" como miembro de una clase de palabra de cantidad y otra, como un modificador. Cuando ARITHPRO entiende "algunos" como una palabra de cantidad, construye una estructura correcta de transferencia con el cardinal del conjunto inicial como meta. Sin embargo, cuando entiende"algunos" como un modificador no construye una estructura de transferencia, sino que crea tres conjuntos individuales. La segunda línea del problema especifica un conjunto de transferencia, pero debido a la inexistencia de un conjunto previo, esta regla de transferencia no se dispara. Finalmente, se construye el tercer conjunto especificado por la palabra "cuántas". Debido a que ninguna de sus reglas estándar se aplican a esta configuración de memoria, ARITHPRO recurre a sus reglas incorrectas para intentar solucionar el problema. Algunas de estas reglas implican tomar en consideración las estructuras de proposición del texto base para buscar una palabra clave que ayude a solucionar el problema.

En este caso ARITHPRO posee el conocimiento matemático necesario para solucionar el problema, pero su activación no se produce debido a la falta de información lingüística.

Finalmente, se utiliza también ARITHPRO para hacer predicciones sobre la memoria de los aspectos verbales del texto. En breve, algunas de estas predicciones conciernen a la habilidad para recordar las proposiciones que contienen los nombres de los actores en la historia. A difencia de la mayoría de las otras proposiciones, las concernientes a los nombres de los actantes no se relacionan con cualquiera de las otras proposiciones del texto y debido a que son las primeras en procesarse, es más probable que sean desplazadas por la nueva entrada de proposiciones y, consecuentemente, se pierden de la MCP antes del final de un ciclo. En definitiva, el ARITHPRO predice que los nombres son particularmente difíciles para los niños a la hora de recordar la historia. Este es precisamente el caso, ya que se ha encontrado que los niños olvidan rápidamente los nombres de los personajes en la historia, incluso aún cuando su memoria para el resto del problema sea buena (Dellarosa, Weimer y Kintsch, 1985).

1.4. LAS ESTRATEGIAS INFANTILES DE RESOLUCION

Una vez finalizada la fase de representación de la información, el siguiente paso en la resolución de las tareas aditivas consiste en la elección de las estrategias de ejecución, ya se presente la tarea bajo la forma de algoritmo, ya sea bajo la forma de problema verbal. El análisis de estas estrategias, así como el de los errores , nos permitirá tener acceso a los procesos cognitivos que los niños ponen en marcha cuando resuelven las pruebas aritméticas. Nos ocuparemos a continuación del primero de estos aspectos, las estrategias. En primer lugar se ofrece una descripción de los principales tipos de estrategias, a saber: las estrategias de modelado directo, las estrategias de conteo y las estrategias de hechos numéricos. Asímismo y en relación con los hechos numéricos, presentaremos los modelos de Baroody (1983, 1985) y Aschraft (1982) sobre la producción y dominio de las combinaciones numéricas. Finalmente y en este mismo apartado nos ocuparemos de la evolución de las estrategias aditivas. En segundo lugar y en un nuevo apartado, nos centraremos en los factores determinantes de la elección de estrategia, presentando para ello el modelo propuesto por Siegler y Shipley (1987).

1.4.1. Tipos de esrategias y evolución de las mismas

La observación de las respuestas ofrecidas por los niños, tanto en los algoritmos de adición como en los problemas verbales, permiten establecer las siguientes estrategias (Carpenter y Moser, 1983, 1984):

(1). *Estrategias de modelado directo.*

Dentro de esta categoría se incluye la estrategia de **contar todo con modelos**, que consiste en representar ambos sumandos mediante objetos físicos o los dedos y recontar, a continuación, todos los objetos para determinar la suma. Por ejemplo, Diana (5;5 años) en el algoritmo 4 + 3, representa 4 con los dedos de una mano contando "1, 2, 3 y

4" y 3 con los de la otra ("1, 2 y 3"), por último cuenta todo de nuevo (Bermejo y Rodríguez, 1987a). Según se desprende de los trabajos recientes (Bermejo y Lago, 1988a; Bermejo y Rodríguez, 1987a, b; Carpenter et al., 1981: Carpenter y Moser, 1984; Ginsburg y Russell, 1981; Lindvall e *Ibarra*, 1980; *Resnick*, 1983; *Starkey y Gelman*, 1982), los niños utilizan esta estrategia ya en la etapa preescolar, antes de iniciarse la escolarización formal. Por su parte Baroody (1987) propone que los niños inventan espontáneamente atajos para evitar el laborioso procedimiento de contar todo:

1: es semejante a la estrategia de contar todo con objetos, es decir, el niño representa ambos conjuntos con los dedos, pero en vez de recontar los dos conjuntos inicia el recuento a partir del cardinal del primer conjunto.

2: se representan ambos conjuntos y se obtiene la suma total mediante un patrón de reconocimiento.

3: se utiliza el conteo para representar con los dedos el primer sumando y la percepción inmediata para el segundo, por último se cuenta todo.

4: es semejante a la anterior en cuanto al proceso de representación de los conjuntos y se diferencia en que el recuento final se inicia a partir del cardinal del primer sumando.

5: es igual que las dos anteriores en el proceso de representación, pero la suma total se extrae por medio de un patrón de reconocimiento.

6: es similar a la 3, la diferencia estriba en que a la hora de representar los conjuntos el patrón de reconocimiento se aplica al primer conjunto en vez de hacerlo en el segundo.

7: sigue los mismos pasos que 4, con la salvedad que acabamos de describir en 6.

8: como en 6 y 7, el niño comienza representando el primer conjunto mediante percepción inmediata, a continuación cuenta el segundo conjunto y, por último, obtiene la suma total mediante percepción inmediata.

9: esta estrategia, que Siegler y colaboradores (Siegler y Robinson, 1982; Siegler y Shrager, 1984) llaman **contar dedos**, consiste en representar ambos sumandos mediante percepción inmediata y a continuación contar todo para obtener la suma total.

10: es similar a 9, pero el proceso de recuento final se inicia a partir del cardinal del primer sumando.

11: es igual a 9 con la salvedad de que la suma total se produce mediante percepción inmediata.

(2.) *Estrategias de conteo*

Dentro de esta categoría se incluyen las estrategias de **contar todo sin modelos**, **contar a partir del primer sumando** y **contar a partir del sumando mayor**. La primera de ellas es el procedimiento *SUM* identificazdo por Groen y Parkman (1972) y consiste en inciar la secuencia de conteo en el primer sumando, añadiendo seguidamente el segundo ; pero a diferencia de la estrategia de **contar todo con modelos** el niño no usa objetos o dedos para representar los términos de la suma. La estrategia de **contar a partir del primer sumando** consiste en iniciar el conteo a partir del cardinal del primer sumando y continuar con el segundo, sin previa representación de los conjuntos. Se diferencia de la estrategia anterior en que los niños sólo utilizan los dedos para registrar los incrementos en el segundo sumando y poder finalizar así el conteo. Un ejemplo ilustrativo sería el siguiente: Norberto (5;7 años) en el algoritmo 5 + 2, cuenta a partir del 5 ("5, 6 y 7"), ayudándose con los dedos para contar la segunda cantidad, sin una representación previa de la misma (Bermejo y Rodríguez, 1987a). Por último, el procedimiento de **contar a partir del sumando mayor** es la estrategia de conteo más evolucionada y más económica cognitivamente. El niño inicia la secuencia de conteo a partir del cardinal del sumando mayor, añadiendo a continuación el valor del otro sumando.

Por otra parte, cuando el niño utiliza estas estrategias necesita algún procedimiento que le permita registrar el número de pasos efectuados al final del conteo. A este respecto, algunos autores (Baroody, 1987; Baroody y Ginsburg, 1986; Bermejo y Lago, 1988c; Bermejo y Rodríguez, 1987b, 1990b; Carpenter y Moser, 1982, 1983, 1984; Fuson, 1982, 1988) señalan que la mayoría de los niños usan sus dedos para registrar el número de pasos que se incrementan en la secuencia de conteo. Asímismo, cuando el conteo se produce mentalmente, parecen usar ciertos ritmos físicos, como por ejemplo movimientos de cabeza y, en otras ocasiones, el conteo doble (por ejemplo, 4 es 1, 5 es 2, 6 es 3 ...).

Otros trabajos (Baroody, 1984b; Baroody, 1987; Baroody y Ginsburg, 1986) sugieren estrategias de conteo diferentes, como **contar todo empezando por el sumando mayor** y **contar entidades**. En esta última se representa sólamente el segundo sumando, existiendo varias formas de llevar a cabo dicha representación y de obtener la suma total:

- Representar únicamente el segundo sumando mediante conteo y obtener el total recontando ambos sumandos.

- Representar sólo el segundo sumando mediante conteo y obtener el total contando a partir del cardinal del primer sumando.

- Representar el segundo sumando mediante el conteo y extraer el total por percepción inmediata, siempre y cuando exista una imagen mental del primer conjunto o un patrón implícito de dedos.

- Representar el segundo sumando por percepción inmediata y obtener el total recontando ambos conjuntos.

- Representar el segundo sumando mediante percepción inmediata y obtener la suma total contando a partir del cardinal del primer sumando.

- Representar el segundo sumando por percepción inmediata y obtener el total también mediante percepción inmediata, siempre y cuando el niño tenga una imagen mental del primer conjunto o un patrón implícito de dedos.

Para finalizar, en las tareas del tipo a+__=b, los niños utilizan usualmente la estrategia de **contar a partir de un número dado** y la de **contar hacia atrás**. Por ejemplo, en el problema 6+__=9, cuentan "6...,7,8,9,", la respuesta es "3" o bien "9...,8,7,6", la respuesta es "3"; en el primer caso ponen en marcha la estrategia de **contar a partir de un número dado** y en el segundo el **conteo hacia atrás**. Es decir, en ambos casos, cuentan el número de pasos que hay entre dos cantidades 6-9/9-6. Para ello, necesitan guardar el trazo mientras cuentan y en este sentido, existen diferentes métodos a la hora de hacerlo (Steffe, von Glasersfeld, Richards y Cobb, 1983). Uno de los más comunes consiste en la extensión sucesiva de los dedos conforme se van diciendo los números. Por último, señalar que la estrategia de **contar hacia atrás** presenta una considerable dificualtad (Baroody, 1984b; Carpenter y Moser, 1984; Fuson, 1986; Fuson y Willis, 1988; Steinberg, 1985), lo cual puede ser una de las razones por las que los niños tienden a usarla menos frecuentemente y además, explicaría el hecho de que la resta resulte **más difícil** que la suma.

(3). *Estrategias de Hechos numéricos*

Con el desarrollo, los niños tienden a reemplazar los procedimientos de conteo por otras estrategias aditivas fundadas en **reglas** y **memorización**. Las primeras, se refieren a procedimientos en los que el niño compone y descompone los números para hallar la suma total. Por ejemplo, Pablo (5;6 años) en el algoritmo 5 + 4 responde: "Como sé que 5 y 5 son 10, le quito una y son 9" (Bermejo y Rodríguez, 1987a).

En la **memorización**, el hecho numérico se recupera inmediatamente de la memoria a largo plazo sin conteo aparente. la producción precisa y automática de combinaciones numéricas es un objetivo esencial en la educación en matemáticas elementales, pero no por ello es un objetivo que se pueda lograr fácil y rápidamente. Este problema puede ser debido, al menos en parte, a la escasa información de los educadores sobre cómo los niños aprenden las combinaciones numéricas básicas y sobre cómo las combinaciones numéricas se representan en la memoria a largo plazo de los adultos. En general, en los primeros intentos de explicación, se asumía que el dominio de este procedimiento supone una acción puramente mecánica. En esta línea, se afirma que los adultos recuperan los hechos numéricos a partir de las asociaciones en la memoria. La meta y el método de instrucción eran claros, los niños debían formar vínculos entre dos dígitos y su suma (Thorndike, 1922) y tales asociaciones se hacen más rápidas a través de la repetición. Además, consideran que las estrategias de conteo, así como el descubrimiento de relaciones, son obstáculos que evitan el trabajo de memorización. Por contra, hoy en día está cambiando esta concepción simplista, tal como puede constatarse en algunos modelos propuestos sobre la organización de los hechos numéricos en la memoria (Aschraft, 1982; Baroody , 1984b, 1985a, b; Baroody y Ginsburg, 1986; Siegler y Shrager, 1984). Por ejemplo, los resultados de Ashcraft sobre la suma (Ashcraft y Stazyk, 1981) indican que los adultos recuperan los hechos numéricos a partir de redes de hechos aritméticos en la memoria a largo plazo. Sus estudios evolutivos ponen de manifiesto que los niños recuperan, en los primeros niveles, unos pocos hechos simples a partir de la memoria y utilizan los procedimientos de conteo para los restantes. En los sujetos de tercero y cuarto grado, los tiempos de reacción son similares a los de los sujetos adultos. Dados los resultados de estas investigaciones, Ashcraft (1982) propone un modelo de recuperación en red de la ejecución aritmética elemental, modelo al que Barrody (1985) denomina asociativo. Desde este modelo se afirma que los hechos numéricos están representados mentalmente en la memoria como en una tabla. En concreto, el modelo consta de dos componentes fundamentales en la memoria a largo plazo y que son responsables de la ejecución. El primer componente hace referencia a que los hechos de suma son almacenados en representaciones en forma de red, de modo que cada hecho aprendido es representado mediante un nudo en la red. Estos varían respecto a su grado de accesibilidad y así, los problemas más difíciles son menos accesibles durante la búsqueda en la memoria. El tiempo que se necesita para producir un hecho numérico particular, está determinado por la "distancia" mental atravesada durante la búsqueda en la memoria, es decir, el tiempo necesitado para encontrar la intersección de dos sumandos en la tabla. El segundo componente es el de procedimiento. Este componente almacena conocimiento sobre la aritmética, esto es, contiene conocimiento sobre los algoritmos, heurísticos, reglas, procedimientos informales, etc. Así pues, desde esta teoría se atribuye la producción eficiente de hechos numéricos a procesos reproductivos. Los procesos reconstructivos, que implican conocimiento conceptual y de procedimiento, pasan a un segundo plano y son utilizados por el niño cuando no conoce algo o se encuentra cansado.

En contraste con este modelo, Baroody sugiere que tanto la representación mental como el recuerdo eficiente de hechos numéricos es más elaborada. Afirma que la generación eficiente de combinaciones numéricas se debe, en parte, a que el niño almacena y usa etiquetas verbales o algoritmos. Por ejemplo, la regla de que N+0=N y 0+N=N. En otras palabras, el niño puede utilizar varios medios, incluyendo los procesos reconstructivos, para generar combinaciones numéricas. En efecto, algunas combinaciones numéricas pueden ser extraídas rápidamente mediante procesos reproductivos, pero muchas otras son producidas con igual velocidad a partir de reglas o principios (i. e., cualquier número sumado a cero es ese mismo número), que se integran en un conocimiento aritmético general. Además, sugiere la posibilidad de que un miembro de una combinación numérica pueda ser almacenado en forma de una asociación numérica específica y representado por una regla. Por ejemplo, 1+0 puede ser almacenado como la asociación 1+0=1 y como la regla de que N+0=N y así, combianciones poco familiares como 0+2467 se resuelven mediante la regla. Esto último, que permite al niño, según Baroody, eliminar la necesidad de aprender y almacenar asociaciones numéricas individuales, resulta cognitivamente más económico que basarse exclusivamente en una red de hechos numéricos individuales. Desde esta óptica, este modelo sugiere que el conocimiento de procedimiento y el conocimiento conceptual son aspectos integrantes del aprendizaje y de la representación y producción eficiente de combinaciones numéricas básicas, de modo que el niño no aprende tales combinaciones de modo separado como asociaciones numéricas específicas, sino como un sistema de experiencias interrelacionadas (Baroody y Ginsburg, 1986). En esta línea, en relación con el aprendizaje de combinaciones numéricas, propone que el conocimiento de relaciones permite a los niños aprender parejas y familias de combinaciones. Así, aunque la práctica puede jugar un papel fundamental en el descubrimiento de relaciones, el desarrollo de las combinaciones numéricas depende básicamente de la internalización de relaciones matemáticas. Asimismo, para dar cuenta de las diferencias en la dificultad relativa de las combinaciones, el modelo hace notar que las relaciones subyacentes a las diferentes familias de combinaciones varían en cuanto a la facilidad con que pueden ser aprendidas y usadas. En resumidas cuentas, el orden de adquisición de las combinaciones numéricas está relacionado con la relevancia y complejidad de las *relaciones subyacentes a varias familias* de combinaciones numéricas, más que por la frecuencia de la práctica como proponen los modelos de tipo asociativo. Además, el modelo también sugiere que tanto la representación mental como el procesamiento de las combinaciones numéricas están mediatizados por procesos de tipo reconstructivo así como por procesos reproductivos. Por ejemplo, para resolver las sumas 2+6 y 6+2 supone poner en marcha el conocimiento semántico (la propiedad conmutativa) y el conocimiento factual (la asociación conjunta de que 2 y 6 son 8). Así pues, este modelo asume que la representación de combinaciones numéricas básicas está integrada en un marco estructural al que subyace el conocimiento numérico y el conocimeinto aritmético general. El conocimiento de procedimiento y el conocimiento conceptual juegan un papel más importante en la generación de dichas combinaciones, que simplemente facilitar el recuerdo de hechos almacenados. En suma, desde el modelo de Baroody y a diferencia de los modelos de aprendizaje de asociaciones, se propone que la representación mental de combinaciones numéricas básicas incorpora hechos y relaciones integradas en un marco estructural, de modo que la producción eficiente de combinaciones supone algo más que simplemente extraer datos de un sistema de recuerdo de hechos, ya que además implica extraer los datos de una red estructural integrada.

Por su parte, Ashcraft (1985) critica el modelo de Baroody respecto a la economía cognitiva que supone la utilización de reglas. Según Ashcraft, si bien es cierto que resulta cognitivamente más económico la memorización de una regla sencilla como N+0=N para la producción de hechos numéricos en los que haya de intervenir el cero, también es cierto que la generación de respuestas a partir de una regla, aunque economice espacio en la memoria a largo plazo (ningún teórico ha sugerido que la memoria a largo plazo tenga un espacio insuficiente), puede que no suponga un ahorro en términos de fuentes de procesamiento, capacidad o fuentes atencionales en la memoria de trabajo. Es decir, si podemos obtener la respuesta 14 para 8+6 sólo aplicando una regla, entonces el total de reglas que se aplicarían en un problema semejante a 428+845 puede sobrecargar la memoria de trabajo del alumno. A este respecto, puntualiza Baroody (1986) que las reglas, los procedimientos y los principios pueden hacerse automáticos o rutinarios. No obstante, Ashcraft señala que Baroody no presenta evidencia de que las reglas puedan llegar a ser automáticas en su ejecución y además tampoco dice claramente a que reglas se refiere.

En definitiva, ambos autores consideran que tanto los procesos reproductivos como los reconstructivos (a través de reglas, etc) desempeñan un papel fundamental en la producción de combinaciones numéricas, ahora bien mientras que Ashcraft hace hincapié fundamentalmente en los reproductivos, dejando los reconstructivos para las situaciones en las que el niño no conoce algo o está cansado, Baroody pone un énfasis especial en los reconstructivos y sugiere que nosotros almacenamos reglas y procedimientos y reconstruimos las respuestas bien usando reglas, bien extrayendo la respuesta de la memoria.

Par finalizar este apartado, nos referiremos seguidamente a la evolución de las estrategias aditivas. Existen pocos estudios sobre esta cuestión, debido fundamentalmente a la ausencia de trabajos longitudinales, por las complicaciones usuales que conlleva el empleo de esta aproximación metodológica. Uno de los pocos existentes es el realizado por Carpenter y Moser (1984). Se trata de un estudio en el que se hizo un seguimiento longitudinal durante tres años a niños de primer grado con objeto de estudiar los procesos que utilizan en la resolución de problemas verbales de suma y resta y su evolución con el paso del tiempo. Para identificar dichos procesos se realizaron entrevistas individuales. En cuanto a los resultados, nos referiremos exclusivamente a los obtenidos con los problemas aditivos tomando como ejemplo los de cambio. En conreto, observan que los niños resuelven inicialmente los problemas de cambio con una estrategia de contar todo y que esta estrategia, gradualmente, da paso al conteo a partir de uno de los cardinales del conjunto y a la utilización de hechos numéricos. Estos datos son confirmados en el análisis de los perfiles individuales, esto es, apoyan la conclusión de que la estrategia de contar todo es sustituida por la estrategia de contar a partir de una de las cantidades. En relación con esta última parece existir una gran variabilidad en el momento en que se observa por primera vez, aunque todos los niños la utilizan en algún momento en el estudio. Además, el cambio de la estrategia de contar todo a la de contar a partir de un número dado no es inicialmente completo, ya que los niños pueden utilizar ambas en un primer momento. Por otra parte, no existe una evidencia clara en relación con la existencia de estadios separados en las estrategias de contar a partir del primero y contar a partir del mayor. Parece razonable que los niños que conocen esta última estrategia la utilizasen preferentemente frente a la de contar a partir del primer sumando, no obstante, como señalamos anteriormente, a menudo no ponen en marcha el procedimiento más efectivo del que disponen, de modo que la frecuencia de uso resulta similar en ambas. Así, el 80% de los niños utilizan ambas estrategias al menos durante una entrevista, el 43% utilizan ambas estrategias por primera vez durante la misma entrevista, el 34% realiza el conteo a partir del primer sumando una entrevista antes que el conteo a partir del mayor y el 22% al revés. Finalmente, los resultados de este estudio, les permiten identificar cinco niveles: en el primer nivel, los niños son incapaces de resolver cualquier problema de suma y resta; en el segundo, utilizan el modelado directo; el tercero es un período transitorio en el que utilizan tanto estrategias de modelado directo como las de conteo; en el cuarto se limitan a las de conteo, y, finalmente, en el quinto recurren además a las memorísticas y a las reglas. Asímismo, los modelos de simulación, que hemos visto en el apartado anterior, sugieren estrategias diferentes en cada uno de los niveles de conocimiento. Por ejemplo, el modelo de Riley et al. propone para los problemas de cambio las siguientes: en el nivel I aparecerían sólo estrategias de modelado directo; en el nivel II los niños utilizarían estrategias de conteo a partir de uno de los sumandos y, finalmente, en el nivel III, emplearían cualquier tipo de estrategia, incluyendo las memorísticas y las reglas.

1.4.2. Elección de estrategias y procesos de transición

Las estrategias difieren entre sí en su grado de precisión, en la cantidad de tiempo que requieren para su puesta en marcha, en las demandas exigidas a la memoria y en el rango de problemas a los que se aplican. Partiendo de la consideración de todos estos aspectos, la pregunta que se plantea es la siguiente: ¿cómo deciden los niños la estrategia que van a aplicar cuando resuelven un problema?. Se han propuesto varias hipótesis explicativas y una de ellas es la del conocimiento metacognitivo. Desde esta aproximación se afirma que los niños seleccionan las estrategias teniendo en cuenta sus propias capacidades, las demandas del material y las estrategias disponibles. Esta explicación presenta, según Siegler y Shipley (1987), algunos problemas tanto desde el punto de vista empírico como teórico. A nivel empírico, se han obtenido correlaciones bajas entre conocimiento explícito de las capacidades cognitivas y el uso de estrategias (Brown, Bransford, Ferrara y Campione, 1983; Sternberg y Powel, 1983, entre otros). A nivel teórico el problema reside en que existe una falta de claridad respecto a como el conocimiento metacognitivo conduce a la elección de estrategias y así, se plantean una serie de cuestiones que no pueden ser resueltas desde este enfoque. Por ejemplo, ¿evaluan los niños de modo explícito sus capacidades intelectuales, sus estrategias disponibles y las demandas de la tarea cada vez que se enfrentan con una tarea que puede ser resuelta de dos o más formas?, ¿someten a consideración cada estrategia que puede ser utilizada en la tarea o sólo una parte de ella?, etc. A la luz de estos problemas, se considera la posibilidad de que los niños puedan llegar a utilizar estrategias adaptativas sin evaluar explícitamente sus habilidades intelectuales, las estrategias disponibles y los requerimientos de la tarea.

Un enfoque alternativo corresponde al modelo de distribución de asociaciones de Siegler. Recibe este nombre porque considera que los errores, los tiempos de solución y las estrategias manifiestas dependen de la distribución de las asociaciones entre problemas y respuestas potenciales. Esta aproximación descansa en una serie de datos empíricos sobre la operación de sumar (Siegler y Robinson, 1982; Siegler y Shrager, 1984) con niños de 4 y 5 años y tiene por objeto explicar qué estrategias utilizan , el tiempo que se tarda en ejecutar cada una de ellas y las relaciones entre errores, tiempos de solución y estrategia manifiesta en cada problema.

El modelo incluye dos partes que interactuan entre si: una representación del conocimiento sobre los problemas y un proceso de recuperación que actúa sobre la representación para producir la ejecución. La representación implica asociaciones de fuerzas variantes entre el tipo de problema y las posibles respuestas al mismo. El proceso que opera en esta representación presenta tres fases:

- Fase de recuperación: el niño conjunta dos parámetros: un criterio de confianza y una amplitud de búsqueda. El criterio de confianza presenta un valor que puede ser superado por la fuerza de asociación de una respuesta recordada. La ámplitud de búsqueda indica la cantidad de esfuerzos que hace el niño antes de pasar a la segunda fase del proceso. Los valores de esos parámetros son seleccionados al azar en cada ensayo.

Una vez que los parámetros son conjuntados, el niño recupera una respuesta. La probabilidad de que cualquier respuesta sea recuperada en un determinado esfuerzo de recuerdo es proporcional a la fuerza de asociación entre esa respuesta y el problema. Sí la fuerza de asociación de la respuesta recordada excede el criterio de confianza el niño da la respuesta y si no es así, trata de ver si el número de búsquedas que ha realizado está dentro de la amplitud permisible de búsqueda. En el caso de que sea así, recupera una respuesta, la compara con el criterio de confianza y la ofrece como solución en caso de que la fuerza de asociación exceda al criterio. Si llega al punto en que las búsquedas acometidas igualan a la amplitud de búsqueda para ese ensayo, puede usar de modo óptimo una forma alternativa de recuerdo consistente en recuperar una última respuesta y decirla cualquiera que sea ésta.

- Fase de elaboración de la representación: el niño puede generar bien una representación externa (por ejemplo poniendo los dedos), bien una representación interna. Una vez que ha formado la representación recupera, de nuevo, una respuesta. Sí la fuerza de asociación de esa respuesta excede el criterio de confianza, es emitida. En caso de que no sea así pasa a la tercera fase.

- Fase de conteo: en esta tercera fase cuenta los objetos a partir de la representación realizada en la fase anterior y da como respuesta el número asignado al último objeto.

Este modelo sirve para dar cuenta de las estrategias que usan los niños, sus características temporales y las relaciones entre las estrategias observables, los errores y los tiempos de solución media en cada problema. Consideraremos en primer lugar las estrategias identificadas en los estudios experimentales:

- **Estrategia de contar con los dedos**: representan las cantidades con los dedos y los cuentan

- **Estrategia de dedos**: ponen los dedos, pero responden sin ningún conteo aparente.

- **Estrategia de conteo**: cuentan en voz alta sin ningún referente externo obvio.

- **Estrategia de recuerdo:** responden sin ninguna conducta manifiesta entre la presentación del problema y la respuesta.

La última de las estrategias aparece si los niños recuerdan una respuesta cuya fuerza de asociación excede el criterio de confianza. Por su parte, la estrategia de dedos emerge cuando los niños fallan al tratar de recuperar una respuesta cuya fuerza de asociación exceda su criterio de confianza, entonces "pone los dedos" y recuerda una respuesta. La estrategia de contar con los dedos aparece si los niños fallan tanto en la estrategia de recuerdo como en la estrategia de dedos. Por último, la estrategia de conteo se pone en marcha si los niños fallan en las otras estrategias

Respecto al tiempo de ejecución de cada una de las estrategias anteriores, se señala que la de recuerdo sería más rápida que cualquiera de las otras , a su vez la estrategia de dedos sería más rápida que la de contar con los dedos y además, sí el tiempo necesitado para formar una representación externa no supera al que se utiliza para formar una representación interna, la estrategia de dedos también sería más rápida que la estrategia de conteo.

Quizas el aspecto más interesante del modelo se refiere a las relaciones que establece entre el porcentaje de errores, los tiempos de solución medios y el porcentaje de uso de cada estrategia en los distintos problemas. Estas tres variables dependientes no constituyen aspectos separados entre si, sino que parecen ser todas ellas función de un mismo factor, la distribución de las asociaciones. En esta línea, un bajo porcentaje en el uso de estrategias observables, un bajo porcentaje de errores y un tiempo de solución pequeño acompaña a una distribución apuntada, frente a una distribución plana que supone todo lo contrario.

El modelo también trata de explicar cómo el niño busca un equilibrio entre las demandas de velocidad y precisión, de modo que siempre y cuando fuera posible, usaría la estrategia de recuerdo que resulte más rápida. Pero, cuando el recuerdo no produce una respuesta que esté suficientemente asociada con el problema, recurriría a otras estrategias observables que consumen más tiempo. Otra de las ventajas del modelo reside en que trata todos los problemas del mismo modo, es decir, a diferencia de los primeros modelos de la suma (Ashcraft, 1982; Groen y Parkman, 1972) no asume que los dobles tengan un status especial o que la distancia mental entre las sumas se incremente exponencialmente con sus tamaños. Para finalizar, el modelo sugiere hipótesis acerca de como el niño adquiere la distribución de asociaciones. Tres son los factores fundamentales que parecen tener un peso específico en esta cuestión: asociaciones preexistentes a partir de la hilera de conteo, frecuencia de exposición a los problemas y el resultado de la suma de los dos sumandos. Estos tres factores determinan los apuntamientos de la distribución de las asociaciones, que a su vez determinan el porcentaje de uso de estrategia observable, el porcentaje de errores en los ensayos de recuperación y los tiempos de solución medios en esos ensayos.

Desde el punto de vista de la validez empírica del modelo, existe una serie de trabajos (Siegler y Robinson, 1982; Siegler y Shrager, 1984; Siegler, 1987; Siegler, 1988), que pasamos a analizar a continuación. Examinaremos en primer lugar el trabajo de Siegler y Sharager, porque supone una réplica y extensión del realizado por Siegler y Robinson.

Al igual que en el experimento de Siegler y Robinson, se presentan un conjunto de problemas a sujetos de 4 y 5 años, con la siguiente estructura: " Sí tienes n naranjas y te dan m más, ¿cuántas tienes entonces?" (p.86). Más concretamente, los problemas se agrupan en tres apartados: (1) se muestran 25 problemas cuyos sumandos presentan valores inferiores o iguales a 5, siendo el valor total de la suma menor o igual a 10; (2) incluye 25 problemas en los que la suma es menor o igual a 10, pero uno de los sumandos puede tomar como valor máximo el 9 y, (3) lo componen 25 problemas, que difieren respecto a los anteriores en que la suma puede alcanzar el valor 12 y los sumandos el valor 11. En breve, los resultados indican que se presentan las mismas estrategias que Siegler y Robinson: recuerdo, dedos, conteo y conteo de dedos. Los tiempos relativos de solución de las estrategias también son los mismos, la estrategia de recuerdo era siempre significativamente más rápida que la de dedos y, asímismo, esta última era también significativamente más rápida que la de conteo y la de contar con los dedos. Asímismo, se aprecian fuertes relaciones entre el uso de estrategias observables, errores y tiempos de solución en los tres grupos de problemas.

El experimento de Siegler (1988) tiene como meta central evaluar la validez del modelo de elección de estrategias en relación con las diferencias individuales. Anteriormente se había encontrado que dicho modelo servía para analizar las diferencias en las elecciones de estrategias en diferentes problemas, la cuestión que ahora se plantea es si también resulta útil para analizar las diferencias en las elección de estrategias en individuos diferentes. En concreto se propone identificar grupos de niños cuyas ejecuciones eran semejantes y que diferían de las de otros niños.

La asunción básica del modelo en relación con las diferencias individuales en la elección de estrategias, es que dichas diferencias resultan de la selección de valores diferentes en los parámetros que determinan dicha elección. A saber, los apuntamientos de las distribuciones y el rigor del criterio de confianza. Las diferencias individuales en apuntamientos de las distribuciones conduciría a los niños con distribuciones apuntadas a recuperar una respuesta más a menudo, de modo más preciso y más rápidamente que los niños con distributiciones planas. Las diferencias individuales en el criterio de confianza conducirían a los niños que eligen criterios altos a recuperar menos a menudo y a usar estrategias que exigen la puesta en marcha de procedimientos de conteo más frecuentemente, que los niños que eligen criterios más bajos.

Participan en el estudio 21 niños y 15 niñas de primer grado, cuya media de edad es 81 meses. Se presentan tres tareas: sumar, restar y lectura de palabras. Los problemas de suma son 14 con los sumandos mayores con un rango de 2 a 15, los sumandos pequeños alcanzan valores de 1 a 6 y sumas de 3 a 18. Los problemas de resta son 14 y justamente los mismos que los de suma invertidos. Los items que deben leer comprenden de 2 letras a 8. Tanto los problemas como las palabras son tomados de los textos que habitualmente manejan los niños.

En cuanto al procedimiento, las tres tareas son presentadas en dias consecutivos. En las instrucciones se pone especial énfasis en resaltar al niño que puede utilizar cualquier medio para obtener la respuesta. Por último, cuatro meses después del experimento, los niños pasan una prueba estandarizada (Metropolitan Achievement Test). Esta prueba incluye seis puntuaciones que parecen relevantes para el presente experimento: puntuación global en matemáticas, cálculo, solución de problemas, puntuación global en lectura, reconocimiento de palabras y lectura comprensiva.

Los resultados se analizan considerando tres aspectos fundamentales: la ejecución del sujeto en cada tarea de forma separada, centrándose en el tipo de estrategia usada, precisión y velocidad en cada tarea; en un segundo momento se examinan las ejecuciones de los niños en pares de tareas y por último, se examinan las consistencias de las ejecuciones a lo largo de las tres tareas. En relación con el primer tipo de análisis y tal y como se desprende de los datos, los niños utilizan estrategias de recuperación y otras consistentes en contar a partir de uno o contar a partir del número mayor en la suma, contar hacia atrás a partir del número mayor en la resta y la anticipación en la lectura. La ejecución correcta resulta similar en las tres tareas (74% en la suma, 64% en la resta y 80% en la lectura). La única diferencia se registra en los tiempos de solución, ya que son menores en la tarea de lectura (2,5 seg.) en comparación con las otras dos tareas (9,9 seg. en la suma y 11,6 seg. en la resta).

Por lo que hace referencia a las *consistencias* de las ejecuciones individuales de los niños a lo largo de las tareas, consideraremos primero las relaciones que se establecen en la ejecución en pares de tareas. Las correlaciones entre la ejecución de los niños en las tareas de suma y resta son significativas, tanto cuando se considera la ejecución en todos los ensayos conjuntamente como cuando se considera separadamente la ejecución en ensayos con estrategias de recuperación u otras estrategias. Ahora bien las relaciones entre la tarea de lectura y las dos tareas aritméticas son menos consistentes. No obstante, los datos más interesantes proceden del análisis de cluster en las tres tareas. Dicho análisis permite diferenciar tres grupos de niños: los estudiantes buenos, los estudiantes regulares y los perfeccionistas. Las comparaciones hechas con la prueba de de Tukey indican que los buenos estudiantes obtenían puntuaciones correctas significativamente más a menudo que los estudiantes regulares en los ensayos de recuerdo en las tres tareas. Estos últimos obtienen puntuaciones correctas significativamente más a menudo y se muestran más rápidos en los ensayos con otras estrategias en tareas de suma y resta . Por su parte, la relación entre los perfeccionistas y los otros dos grupos es más compleja. Los perfeccionistas violan la relaciones entre estrategia usada, errores y tiempos de solución, ya que la prueba de Tukey indica que estos sujetos son significativamente más precisos que los estudiantes regulares en los ensayos de recuerdo en las tres tareas y en los ensayos con otras estrategias en las tareas de suma y resta. También son significativamente más rápidos que éstos en los ensayos de estrategias de recuperación y otras estrategias en tareas de suma y resta. A pesar de su gran velocidad y precisión. los perfeccionistas usan el recuerdo significativamente menos a menudo en las tareas de suma y resta, pero no en la de identificación de palabras. De modo similar, los perfeccionistas son tan rápidos y precisos como los buenos estudiantes, aunque usan mucho menos frecuentemente el recuerdo.

Respecto a la prueba de logro, las diferencias entre perfeccionistas y buenos estudiantes por un lado y estudiantes regulares por otro son paralelas a las encontradas en el experimento. Los dos primeros grupos de sujetos puntuan consistentemente más alto que los no tan buenos estudiantes.

Las diferencias entre los grupos tienen que ver con las dos variables que el modelo propone como relevantes en la elección de estrategias a las que ya hemos hecho mención: el criterio de confianza y los apuntamientos de las distribuciones. Específicamente, los perfeccionistas parecen ser niños que excogen un criterio de confianza muy alto y tienen distribuciones apuntadas, los estudiantes buenos también tienen distribuciones apuntadas, pero eligen criterios de confianza menos altos, mientras que los estudiantes regulares parecen elegir criterios de confianza más bajos y tienen distribuciones menos apuntadas que los niños de los otros dos grupos.

Este experimento se replica posteriormente introduciendo variaciones tanto en las muestras de niños, como en los problemas usados y en los métodos para evaluar la estrategia desplegada. En concreto, se pide a los niños que describiesen verbalmente la estrategia que usan después de dar la respuesta al problema. Esta modificación en el método de evaluación de las estrategias se introdujo a causa de que el empleo excesivo de la conducta manifiesta como índice de las estrategias basadas por ejemplo en el conteo, subestima su frecuencia y sobrevalora el recuerdo. En síntesis, los resultados fueron muy similares a los del experimento anterior encontrándose el mismo patrón de diferencias individuales.

Par finalizar este apartado, hay que hacer mención de otros estudios que vinculan la elección de estrategias con factores tales como la estructura semántica del problema y con la carga que suponen para la memoria de trabajo del niño. Muy brevemente y en relación con el primero de estos factores, señalaremos que algunos trabajos (Carpenter et al., 1981; De Corte y Verscahaffel, 1985) parecen hallar una cierta relación entre la estructura semántica del problema y la elección de estrategias, por ejemplo De Corte y Verschaffel señalan que los niños tienden a contar a partir del sumando mayor en los problemas de combinación y a contar a partir del primer sumando en los de cambio. Respecto al segundo de los factores, existen algunos datos que apuntan la necesidad de reducir la carga en la memoria de trabajo como aspecto fundamental a tener en consideración (por ejemplo, Carpenter y Moser, 1984). Sin embargo, a pesar de que unas estrategias suponen menor carga para la memoria de trabajo, como ya apuntábamos en el apartado anterior, no siempre se traduce en que sea la que el niño escoja en su ejecución. Cuando los sujetos disponen de diversas estrategias tienden a usarlas de modo intercambiable en vez de poner en marcha únicamente la más eficiente. Asímismo, Baroody (1984a) indica que los niños usan la estrategia de contar todo empezando por el mayor en problemas tales como 2+6, 3+6, 2+8 y la estrategia de contar todo empezando por el primer sumando en 2+4, 4+5, ya que en estos últimos la carga en la memoria es menor. Además, estos datos concuerdan con las predicciones hechas en el modelo de Briars y Larkin, en el sentido de que si el niño cuenta con dos o más estrategias, utilizará aquella que conlleve un menor número de pasos.

1.5. PRINCIPALES ERRORES ADITIVOS

En los últimos años se han estudiado ampliamente los errores de los niños en relación con la aritmética elemental (p.e., Blando, Kelly, Schneider y Sleeman, 1989; Davis, 1984). Se ha encontrado cierta estabilidad en algunos de ellos, que se conocen con el nombre de "bugs" (Brown y Burton, 1978). Algunos autores (Brown y VanLehn, 1980) afirman que los bugs se producen en la fase de producción y ocurren cuando se enfrenta al niño con una presentación de la tarea poco familiar o difícil, lo que le conduce a modificar un procedimiento conocido y aplicarlo incorrectamente a la tarea. Otros autores utilizan el término "reglas equívocas" (Blando, Kelly, Schneider y Sleeman, 1989) para referirse a los "bugs". Consideran que las "mal-rules" son violaciones de reglas matemáticas, que tiene lugar en la fase de codificación, cuando el niño desarrolla hipótesis. Sugieren, además, que algunos de estos errores se desencadenan cuando el niño infiere varias reglas que son consistentes con el ejemplo y no sólo la regla correcta.

En los apartados que siguen analizaremos las dificultades de los niños en la adición y el por qué de esas dificultades. Para ello vamos a tratar dos aspectos fundamentales: en primer lugar nos referiremos brevemente a los errores que se presentan más habitualmente cuando resuelven algoritmos de suma, ya que la mayoría de las investigaciones se ocupan de la resta y por último, desarrollaremos ampliamente los errores en los problemas verbales.

1.5.1. Errores en los algoritmos.

La resolución correcta de un algoritmo de suma requiere que el niño tenga en cuenta una serie de factores de tipo sintáctico y semántico (Brown y Burton, 1978; Brown y Van Lehn, 1980, 1982; Resnick, 1982, 1983). Los componentes sintácticos abarcan reglas que dirigen su actuación, como, por ejemplo, iniciar la suma por la primera columna de la derecha, proceder columna por columna, etc. Los semánticos hacen referencia a conceptos básicos implicados en la ejcución del algoritmo, como la notación posicional, sistema de base, la regla de llevadas, etc. Los errores pueden afectar a uno u otro componente o a ambos. En este sentido, en una de las investigaciones realizadas por nosotros (Bermejo y Rodríguez, 1986) con niños de segundo de preescolar y primero de EGB, sobre tareas aditivas y tareas de conservación de la materia, encontramos errores en ambos componentes. En el caso de los preescolares estos errores aumentan notablemente cuando el segundo sumando es mayor que el primero y no se puede representar con los dedos de una sola mano. En los niños de primero, la mayoría de los errores semánticos tienen lugar en los algoritmos con "llevadas", ya que presentan dificultades a la hora de realizar los intercambios entre columnas. Desde el punto de vista sintáctico, uno de los errores más frecuente consiste en anotar como resultado el valor absoluto de la adición de los dígitos de una columna, olvidando que sólo puede consignarse una cifra por columna hasta llegar a la última de la izquierda.

Finalmente, Baroody (1988) identifica una serie de dificultades con las que se pueden encontrar los niños y que les inducen a cometer errores:

- Dificultades de alineación: consiste en la colocación incorrecta o inconstante de las cifras.

- Dificultades debidas a la puesta en marcha de procedimientos incorrectos, parcialmente correctos o inventados.

- Dificultades referentes a la aplicación inconsistente de un procedimiento correcto. Esta clase de errores se presenta frecuentemente cuando los procedimientos carecen de significado y, en consecuencia, no están seguros de cuándo deben emplearlos.

- Dificultades derivadas de la aplicación mecánica de reglas o procedimientos aprendidos de memoria. Por ejemplo, aplican los procedimientos correctamente cuando los problemas se presentan de un modo familiar, mientras que si la forma del problema se modifica ligeramente (por ejemplo, de la presentación vertical a la horizontal) no hallan ninguna conexión con el procedimiento conocido. Es frecuente que los niños realicen cálculos correctos cuando se trata de números familiares para ellos e incorrectos cuando no lo son, porque no son capaces de aplicar las mismas reglas que para los familiares.

- Dificultades surgidas por la incapacidad para aprender procedimientos nuevos. Aplican de manera mecánica procedimientos aprendidos previamente a problemas nuevos y así, por ejemplo, algunos niños se basan en procedimientos informales en los algoritmos con dos cifras. Si el niño no dispone de una base conceptual para aprender el procedimiento nuevo, puede regresar a un procedimeitno aprendido previamente y más costoso o bien puede inventar uno propio.

- Dificultades derivadas de la memorización incompleta o incorrecta de reglas. Cuando no se comprenden las reglas sólo se recuerdan en parte o de manera incorrecta, lo que da lugar a muchos errores. Por ejemplo, cuando aprenden incorrectamente las reglas para sumar con llevadas, pueden cometer errores consistentes en colocar la cantidad que se llevan en la parte superior de la columna más a la izquierda en vez de la siguiente columna por la izquierda.

1.5.2. Errores en los problemas verbales aditivos

Los problemas verbales de adición son notoriamente más difíciles de solucionar que los presentados en formato numérico. Esta discrepancia sugiere que hay otros factores además de las habilidades matemáticas que contribuyen al éxito en la solución de problemas. Además, algunos problemas resultan ser más fáciles de solucionar que otros. Por ejemplo, incluso los niños pequeños resuelven sin dificultad los problemas de combinación con la incógnita en el resultado, pero cometen errores en los problemas de comparación. Esta diferencia en la ejecución cambia con la edad, de modo que la resolución de los diferentes tipos de problemas verbales llega a ser equivalente. En este apartado, nos ocuparemos seguidamente de los errores que se cometen habitualmente en los problemas verbales aditivos, analizando tres tipos de datos: los errores cometidos por los niños cuando se les solicita simplemente que resuelvan el problema, los que tienen lugar cuando se les pide que vuelvan a contar la historia del problema y, por último, aquellos que ocurren cuando deben completar un problema. Estos datos nos proporcionan información concerniente a las representaciones que los niños se hacen de los problemas.

Respecto a los primeros, existen dos grandes categorías de errores: errores de ejecución y errores de representación. Los de ejecución se originan cuando el niño resuelve la operación aritmética correspondiente, es decir, la suma y, por tanto, aparecen los mismos que acabamos de mencionar en relación con el formato numérico en el apartado 1.5.1. Los de representación surgen cuando el niño construye una representación inapropiada del problema a partir del texto verbal (De Corte y Verschaffel, 1985). Pueden ser de varios tipos:

(1) **Repetir una de las cantidades propuestas en el problema.** Se observa con cierta frecuencia en los cuatro tipos de problemas, a saber comparación, cambio, combinación e igualación (Bermejo y Rodríguez, 1988, 1990a; Carpenter y Moser, 1981, 1983; De Corte y Verschaffel, 1985, 1987b). En cuanto a los de comparación, por ejemplo en un trabajo realizado por nosotros (Bermejo y Rodríguez, 1990a), en el problema "Javier tiene 6 globos, Mario tiene 9 globos más que Javier. ¿Cuántos globos tiene Mario?", pudimos comprobar que un amplio porcentaje de niños de segundo y tercero de EGB responden a la pregunta diciendo 9. Este fracaso se debe, según Riley et al. (1983) a una representación inapropiada de la historia del problema, como resultado de la ausencia de un esquema que permita la comprensión del mismo. Por su parte Mayer (1982) apunta que esta representación deficiente se produce porque el niño interpreta una proposición de relación como una proposición de asignación. En otras palabras, la proposición relacional "Mario tiene 9 globos más que Javier" es interpretada como una proposición de asignación "Mario tiene 9 globos" y, por tanto, esa es la solución que dan a la pregunta.

En los problemas de cambio, los errores surgen sobre todo porque los niños se muestran incapaces de representar los conjuntos de partida y cambio separadamente (Riley et al., 1983). Por ejemplo, en el problema "María tiene algunos lápices. Isabel le da 5. Ahora María tiene 17 lápices. ¿Cuántos lápices tenía María al principio?", cuando el niño recibe la frase "María tiene algunos lápices" se da cuenta de que no sabe con exactitud los lápices que tiene, pero no crea un conjunto de partida desconocido para María. Ante la segunda proposición "Isabel le da 5", crea un conjunto con 5 lápices para María, pero al no haber representado el conjunto de partida inicial, no se concibe este conjunto como un cambio en el sumando inicial. A continuación, la tercera proposición "Ahora María tiene 17 lápices" se interpreta como un incremento en el conjunto anterior. Por tanto, ante la pregunta "¿cuántos lápices tenía María al principio?", responden 5, ésto es, el número que representa el conjunto inicial para el niño (Bermejo y Rodríguez, 1990a).

En los problemas de combinación del tipo "Pedro tiene 3 manzanas. Ana tiene también algunas manzanas. Pedro y Ana tienen juntos 9 manzanas. ¿Cuántas manzanas tiene Ana?", algunos niños responden 9. Estos datos se explican desde los modelos de Riley et al. (1983) y de Briars y Larkin (1984) sugiriendo que estos errores se producen por una falta de comprensión de la relación parte-todo. Es decir, los niños que no disponen de este esquema interpretan cada frase del problema separadamente, sin llegar a establecer las relaciones existentes entre los conjuntos. Una explicación alternativa es la proporcionada por De Corte y Verschaffel (1987b), ya que consideran que estos errores se originan porque interpretan la oración que contiene la palabra "juntos" como "Pedro y Ana tienen 9 manzanas", de manera que Pedro tiene 9 manzanas y Ana tiene 9 manzanas. En otras palabras, la oración que contiene la palabra "juntos" se concibe erróneamente como una información relativa a la cantidad de cada persona.

En cuanto a los problemas de igualación existen pocos datos al respecto, ya que la mayor parte de las investigaciones suelen incidir en los problemas de cambio, comparación y combinación. En un trabajo recientemente realizado por nosotros (Bermejo y Rodríguez, 1987a), que ya hemos descrito en el apartado 1.3.2, con niños de segundo de preescolar y niños de primero de EGB, encontramos que los niños más pequeños muestran múltiples dificultades para construir la representación mental adecuada, a pesar del uso de objetos para representar las acciones del problema. En efecto, a pesar de la disponibilidad de estas ayudas estos problemas resultan difíciles para los niños pequeños probablemente porque no se ajustan a la forma canónica (A + B = ?) y porque no se enseñan habitualmente en el marco escolar.

(2) **Inventar la respuesta**. Este tipo de respuestas aparece con cierta frecuencia cuando el niño no comprende el problema o está cansado.

(3) **Selección de una operación inadecuada**. Se presenta habitualmente cuando la incógnita se sitúa en uno de los sumandos, consistiendo la solución propuesta por los niños en la aplicación de la forma canónica A+B=? . Este error que se encuentra presente en las cuatro categorías de problemas, puede tener tres causas. La primera de ellas reside en la dificultad para concebir el significado de la indefinición de uno de los sumandos ("algunos"), asignándole en consecuencia la cantidad que se propone a continuación. La segunda se refiere a que no aprecian la información temporal contenida en el texto; y, por último, la proposición comparativa que determina el otro sumando resulta difícilmente comprensible para los niños (Bermejo y Rodríguez, 1990a). De Corte y Verschaffel (1985), por su parte, apuntan que este error se produce porque los niños procesan el texto superficialmente, debido, bien a que se centran en una palabra clave que está asociada a cierta operación aritmética (i.e., "entre los dos" se asocia con la adición), en vez de intentar construir una representación mental del problema como un todo; bien a que no comprenden el problema y simplemente utilizan la operación aritmética que les resulta más fácil y conocida, por regla general la suma en su forma canónica.

Otros autores (De Corte y Verschaffel, 1985; Dellarosa, Weimer, Kintsch, 1985; Dellarosa, Kintsch, Reusser, Weimer, 1988; Kintsch, 1989), incorporan un nuevo paradigma experimental consistente en pedir a los niños que vuelvan a contar los problemas antes o después de solucionarlos. Se comparan estos protocolos de recuerdo con los errores de solución y, se predice que los errores de solución constituyen ejecuciones correctas a problemas mal comprendidos y que el éxito en la resolución sería atribuible al éxito en la comprensión. En concreto, en el trabajo realizado por De Corte y Verschaffel (1985) con 30 niños de primer grado, se les pide que lleven a cabo las siguientes tareas: volver a contar el problema, resolverlo, explicar y justificar sus métodos de solución, construir una representación material de la historia con marionetas y bloques y, por último, escribir una ecuación del problema. Asímismo, al finalizar se enfrenta a los niños con un problema que no tiene solución y les solicita que construyan un problema verbal. En síntesis, sugieren que los errores producidos por los niños cuando intentan volver a contar el problema son debidos a deficiencias en el esquema de las palabras del problema (WPS) y a una representación semántica deficiente. Por ejemplo, en el problema "Pedro tiene 3 manzanas. Ana tiene 6 manzanas más que Pedro. ¿Cuántas manzanas tiene Ana?", algunos niños lo cuentan diciendo "Pedro tiene 3 manzanas. Ana tiene 6 manzanas. ¿Cuántas manzanas tiene Ana?"; y, en consecuencia, representan la historia poniendo 3 bloques a Pedro y 6 a Ana. Asímismo, en el problema "Pedro tiene 3 manzanas. Ana también tiene algunas manzanas. Pedro y Ana tienen 9 manzanas entre los dos. ¿Cuántas manzanas tiene Ana?", algunos niños no son capaces de construir la pregunta en la tarea de volver a contar el problema, ni tampoco son capaces de resolverlo. Un niño experto en la resolución de problemas verbales, que no pudiera por algún tipo de razón reproducir la oración de la pregunta, podría reconstruir con facilidad esa oración sobre la base de la información retenida y de su conocimiento de la estructura de los problemas. Por tanto, el fracaso de estos niños se debe probablemente a su incapacidad para manejar ese conocimiento. En este mismo contexto se sitúan los trabajos de Dellarosa, Weimer y Kintsch (1985) y Dellarosa, Kintsch, Reusser y Weimer (1988). El primero de ellos, se lleva a cabo con 30 niños de segundo sobre problemas verbales de cambio, combinación y comparación. Se presentan 6 problemas de recuerdo, otros 6 en los que la tarea consiste en hallar la solución y, finalmente, 12 problemas en los que deben no sólo recordar el texto de los mismos sino también solucionarlos, más algunos problemas de práctica.

Los resultados indican que, en las tareas de recuerdo, no se aprecian diferencias significativas entre los problemas fáciles y difíciles, confirmando que estos problemas resultan similares en relación con el texto base.

Estas similitudes no se mantienen respecto al modelo del problema, ya que recuerdan más fácilmente los problemas sencillos que los difíciles, una vez solucionados. Además, existe una tendencia a simplificar el problema en relación con el recuerdo, por ejemplo un problema de cambio difícil se recuerda como un problema de cambio fácil. En otras palabras, cuando un problema es simplificado, el resultado final consiste en un problema del mismo tipo, pero más sencillo. Lo que resta por saber es la relación entre esos cambios en el recuerdo y las soluciones propuestas por los niños. Para responder a esta pregunta se contrastan los dos problemas más fáciles y los dos más difíciles. Se categorizan los errores dentro de tres tipos: errores conceptuales, en los que la operación aritmética que se ejecuta es errónea; errores no conceptuales, en los que la operación es correcta, pero los números usados son incorrectos, como evidencian los datos del recuerdo; y un pequeño grupo residual de errores no calificables. Los errores no conceptuales se producen con independencia del tipo de problema, pero los errores conceptuales no se cometen nunca en los problemas más fáciles.

Por último, el trabajo de Dellarosa, Kintsch, Reusser y Weimer (1988) comprende dos experimentos. En el primero, se pide a los niños que recuerden textos de los problemas antes o después de solucionarlos, con objeto de comparar los protocolos de recuerdo con los errores de solución. El segundo experimento en el que se les solicita que generen las preguntas finales para completar los problemas verbales, se analizará más adelante. Participan en el estudio 38 niños de primer grado y la tarea consiste en solucionar 18 problemas de combinación, cambio y comparación. Para reducir la carga de memoria requerida para comprender el problema, todos los problemas tienen como actores a María y Juan y como objetos canicas, de este modo los niños necesitan prestar atención únicamente a las relaciones entre los conjuntos y a los cardinales de los conjuntos. En cuanto al procedimiento, todos los niños se evaluan individualmente y no se les informa sobre si tienen que solucionar el problema o recordarlo hasta después de haberlo leido, con objeto de asegurarse de que las estrategias usadas para solucionar y recordar los problmeas son las mismas en ambas condiciones. A continuación de los problemas verbales, se presenta al niño una hoja con problemas numéricos para que los solucionase. La resolución de estos últimos es consistentemente superior a la de los problemas verbales, obteniéndose un rendimiento algo inferior en las tareas numéricas en las que la incógnita se sitúa en el conjunto de partida. Por otro lado, en relación con la tarea de recuerdo, los datos son consistentes con la hipótesis de que existe una fuerte relación entre el recuerdo y la precisión de la solución. Se asume que el recuerdo que el niño tiene del problema, se relaciona con la representación que construye del mismo cuando lo intenta solucionar. En concreto, identifican 6 categorías de errores:

- Transformaciones preservando la estructura: se mantienen las relaciones matemáticas entre los conjuntos, pero se cambia la verbalización de la historia del problema durante el recuerdo. Una posible explicación de estas transformaciones es que los niños reconstruyen el texto base a partir de su representación interna de la estructura del problema. Si los problemas más complejos resultan difíciles porque sus textos bases son complicados innecesariamente, entonces se esperaría que los niños simplificasen el texto base durante el recuerdo, es decir, transformando un problema complejo en un problema sencillo. Para evaluar esta predicción, se categorizan los tres tipos de problemas como fáciles y difíciles a partir de los datos aportados por otros autores. En efecto, tal y como se predice se observan más transformaciones en los problemas más difíciles que en los fáciles. Además, cuando transforman un problema durante el recuerdo, los niños son sensibles al tipo de problema de que se trate. En el 77% de estas ocasiones, el problema era transformado dentro de problemas más simples del mismo tipo, por ejemplo los problemas difíciles de Comparación son transformados dentro de los problemas más fáciles de Comparación.

- Transformaciones que violan la estructura del problema: este tipo de transformación conlleva un cambio sustancial en las relaciones matemáticas del problema original, esto es, tanto la redacción como la estructura cambian.

- Construcción de problemas sin sentido: el problema que recuerdan no tiene sentido y dan como respuesta una de las cantidades propuestas en el problema.

- Transformaciones en las que se menciona dos veces el conjunto principal.

- Recuerdo parcial: esta categoría no parece ser una transformación, sino más bien una falta de recuerdo o un error de memoria. Una oración del problema era simplemente olvidada o dejada de lado.

- Categoría mixta: incluye los errores que no entran dentro de ninguna de las las categorías mencionadas anteriormente, como, por ejemplo, el recuerdo confuso inclasificable y cuando el niño no recuerda nada del problema.

Por otro lado, los niños cometen cuatro tipos de errores cuando solucionan los problemas: errores de operación (11%), errores consistentes en responder con una de las cantidades presentadas en el problema (18%), errores aritméticos (11%) y errores incalificables (8%). Los errores de operación son errores en los que el niño selecciona inadecuadamente la operación aritmética correspondiente, por ejemplo, sumar cuando lo que tiene que hacer es restar o viceversa.

En el presente estudio, se predice que existe relación entre la falta de comprensión de la historia del problema y los errores de solución. En particular, predicen que los errores son respuestas correctas a historias mal comprendidas. A este respecto, las transformaciones en las que se preserva la estructura se asocian más a menudo con respuestas correctas (64%) y errores aritméticos (25%); las transformaciones que violan la estructura están relacionados con errores de operación (42%); las transfornmaciones que dan lugar a problemas sin sentido tienen que ver con errores de repetición de cantidades (69%); las transformaciones consistentes en repetir el conjunto principal dos veces dan lugar a errores de repetición de cantidades (43%) y operaciones erroneas (16%) y las transformaciones de recuerdo parcial se asocian en su mayoría con soluciones correctas.

En suma, la tarea de recuerdo proporciona clara evidencia de que las estrategias de solución se hallan determinadas por la comprensión de la historia del problema. Además, frecuentemente los errores conceptuales observados, se relacionan con la falta de comprensión de la historia de modo sistemático. Estos errores conceptuales son, como señalamos más arriba, respuestas correctas a historias mal comprendidas.

Por último y para terminar este apartado, recogemos a continuación una serie de errores que se producen cuando se pide al niño que complete o construya un problema (De Corte y Verschaffel, 1985; Dellarosa, Kintsch, Reusser y Weimer, 1988). Nos referiremos estrictamente a los datos, puesto que el tipo de metodología utilizado en cada experiencia ya ha sido mencionada anteriormente. Específicamente, en la experiencia de De Corte y Verschaffel se hipotetiza y así parecen confirmarlo los datos, que el niño ejecutará mal la tarea de construir un problema, debido a la falta de familiaridad con los problemas verbales. Los errores encontrados son de tres tipos:

- Construyen una historia sin pregunta: por ejemplo, "Hay 10 peras y tu quitas 5 de ellas" (p. 17).

- Elaboran una historia sin números: por ejmplo, "Ana y Juan fueron al zoo; alimentaron a los animales; entonces volvieron a casa" (p. 17)

- Un problema sin solución: por ejemplo, "Ana y Juan están comiendo huevos de pascua y Juan da 2 huevos de chocolate a Ana; ¿cuántos huevos tiene Juan ahora?" (p. 19).

- Un problema en el que se especifica el resultado: por ejemplo "Pedro tiene 7 manzanas, dió 3 manzanas; ahora Pedro todavía tiene 4 manzanas" (p.19).

Por último, en la experiencia comentada anteriormente de Dellarosa et al. (1988), se hace mención a un segundo experimento en el que los niños deben completar un problema. Los problemas son diseñados en viñetas, de modo que simulan situaciones semejantes a las de la vida real. En la mitad de los problemas deben generar una pregunta para terminar la historia; mientras que en la otra mitad la pregunta está presente y tienen que situarla en el lugar que le corresponde. Además se incluye una tarea de recuerdo. Participan 36 niños de segundo y 36 de tercero. El análisis de resultados se realiza mediante un análisis de varianza 2x2x2, cuyos factores son el nivel de escolaridad (segundo, tercero), la tarea de pregunta (generación y estándar) y la condición de recuerdo (solucionar el problema antes de recordarlo y solucionarlo después de recordarlo). Hay dos factores significativos: el efecto del nivel de escolaridad, que indica que los niños de tercero solucionan más correctamente los problemas que los de segundo y la condición de recuerdo, que indica que los sujetos solucionan más problemas correctamente cuando las soluciones preceden al recuerdo que cuando siguen al recuerdo. La tarea de pregunta no influye significativamente en las soluciones de los niños.

Por otro lado, se construye un modelo de regresión para predecir las soluciones de los niños en función de su recuerdo estructural y la generación de la pregunta . Se comprueba que, en la condición de generación de pregunta estándar, la habilidad de los niños para solucionar un problema depende de la habilidad para comprender la historia apropiadamente. En la condición de generación, la ejecución de los niños de 3º está determinada por su habilidad para completar el problema con una cuestión adecuada y su habilidad para recordar la estructura del problema apropiadamente. Por su parte, la ejecución de los niños de segundo grado, esta influenciada significaticativamente por un único factor, la habilidad para completar la historia con una pregunta apropiada. Claramente, la ejecución de los niños de 2º resulta más idiosincrásica, lo que puede ser interpretado considerando que las demandas de la tarea exceden sus fuentes de procesamiento.

Finalmente, los tipos de preguntas que los niños generan para completar las historias están directamente relacionadas con los tipos de estrategias de solución adoptados. Cuando completan una historia con una pregunta correcta, tienden a producir respuestas correctas. Los errores de operación errónea tienden a ser precedidos de preguntas incorrectamente formuladas para poder resolver el problema, mientras que los errores consistentes en repetir una de las cantidades suelen estar precedidos de preguntas en las que se incluyen cantidades.

1.6. MODELOS EVOLUTIVOS EN LA ADQUISICION DE LA ADICION

Uno de los hallazgos más importantes de la investigación actual sobre matemáticas, es que los niños entran en la escuela con un alto conocimiento informal en torno a la aritmética (Carpenter et al., 1981; Carpenter y Moser, 1983, 1984; Fuson y Hall, 1983; Ginsburg, 1982; Resnick, 1983; Riley et al., 1983; Starkey y Gelman, 1982). Dicho conocimiento, les permitirá resolver tareas de cálculo del tipo N+1 y N-1, antes de recibir instrucción formal sobre la adición y la substracción. Asímismo, antes de que conozcan estrategias sofisticadas como los hechos numéricos y las reglas, inventan procedimientos tales como la estrategia de representar los sumandos con los dedos y contar todo para resolver problemas con sumandos superiores a uno. Los avances posteriores, vienen marcados por la presencia de procedimientos más complejos y una mayor flexibilización en la elección de las estrategias que conducen a la solución del problema, como resultado de un conocimiento conceptual más elaborado. En relación con esto último, la mayoría de los autores (Baroody y Ginsburg, 1986; Carpenter, 1986; Resnick, 1983; Weaver, 1982, etc.) tratan de averiguar cómo se vincula el conocimiento de procedimiento y el conocimiento conceptual. En esta línea se encuentran también los modelos de simulación, como el de Riley et al. en el que los avances en el conocimiento de procedimiento se explican como resultado de los avances en el conocimiento conceptual. En otras palabras, el desarrolo a lo largo de los niveles que establece el modelo se produce por un incremento en la habilidad para representar relaciones entre y dentro de los problemas. No insistiremos más en este aspecto, puesto que dedicamos una serie de apartados a la explicación de cada uno de los modelos. No obstante, nos gustaría añadir que la conducta de los niños no es tan ordenada como sugieren los modelos y que las diferencias sistemáticas observadas (i.e., utilizar estrategias de modelado directo en unos problemas, mientras que en otros utilizan otras más complejas), no encuentran en ellos la adecuada explicación. Por tanto, es probable que el conocimiento conceptual por si solo sea insuficiente para dar cuenta de los avances en el conocimiento de procedimiento. En este sentido, Baroody y Ginsburg (1986) apuntan que el desarrollo de los procedimientos usados para solucionar problemas de suma y resta no se rige siempre por el desarrollo del conocimiento conceptual. Según estos autores, la conexión entre conocimiento de procedimiento y conceptual es muy compleja y, en muchos casos, el desarrollo del conocimiento conceptual no asegura la adquisición de procedimientos relacionados con dicho conocimiento. Asimismo, señalan que la construcción de procedimientos avanzados puede deberse tanto a la adquisición del conocimiento conceptual subyacente, como a un intento de reducir las demandas de procesamiento cognitivo de la tarea.

Otro acercamiento a la explicación evolutiva de la adquisición viene de la mano de Haldford (1978) quien ha realizado uno de los primeros intentos de extender la teoría piagetiana del desarrollo cognitivo al área de matemáticas. En su aproximación, considera que existen tres niveles en el desarrollo de los conceptos matemáticos que se corresponden con los estadios piagetianos preoperacional, operacional concreto y formal. Estos tres niveles son: el estadio de las operaciones unitarias, el estadio de las operaciones binarias simples y el estadio de composición de las operaciones binarias.

El estadio unitario tiene que ver con los conocimientos iniciales del niño sobre las operaciones matemáticas. Tal conocimiento incluiría: la habilidad para contar, la estimación de números pequeños, la habilidad para distinguir los signos de igualdad, suma y resta, y la habilidad para reconocer que el cardinal de un conjunto se incrementa añadiendo más y se decrementa quitando algo. Sin embargo, hay numerosas ideas que no pueden ser comprendidas sin las operaciones binarias simples, un ejemplo de ello es el concepto de números negativos, que son el resultado de substraer un número grande de uno pequeño. Los conceptos de suma, producto, diferencia, son ejemplos de conceptos que no tienen significado en ausencia de las operaciones matemáticas (i. e., tal como sucede en el caso de tener que encontrar un sumando desconocido, ya que su resolución se relaciona necesariamente con la operación de adición). Todos estos conceptos dependen de las operaciones binarias simples, en particular de las operaciones de adición, multiplicación y de las operaciones complementarias de substracción y división. El estadio de las composiciones binarias supone un grado de elaboración superior. Un ejemplo prototípico es el concepto de proporción, que implica una comparación de dos razones, cada razón en si misma comprende la operación de división.

Por último, en cuanto a la evolución cronológica de estos estadios, se señala que antes de los 5 años de edad sólo estarían disponibles para el niño las operaciones unitarias; después de los 5 años hasta aproximadamente los 11, los conceptos basados en operaciones binarias y a partir de los 11 años las composiciones binarias.

La evidencia empírica de este modelo nos la proporciona Haldford (1978) en una experiencia realizada con 32 niños que tienen una media de edad de 10;4 años, 36 con una media de edad de 12;5 años y 26 con una media de edad de 16;1 años, sobre pruebas aritméticas, que requieren una operación o una composición de dos o más operaciones. Se predice que los niños más pequeños contestarían acertadamente a los items que exigen la puesta en marcha de una única operación, mientras que aquellos que necesitan para su resolución composición de operaciones sólo se ejecutarán con éxito en el grupo de 11-16 años. Específicamente, el procedimiento experimental consta de cuatro pruebas. En la primera, los sujetos deberán solucionar 31 ecuaciones, de 8 tipos, como por ejemplo: operaciones que requieren únicamente operaciones simples, por ejemplo x=8-5, operaciones que requieren operaciones simples con ordenamiento, por ejmplo 7=x-3. La prueba número dos evalua la habilidad para ejecutar dos operaciones en secuencia, con la secuencia de operaciones indicada por parentesis, por ejemplo: operaciones que requieren una operación: (x=6+4), dos operaciones con paréntesis no ordenadas: x=(6+1)-2. La tres consisten en hallar la operación desconocida: encontrar una operación simple, por ejemplo 3 ? 6=9, encontrar una operación desconocida usada dos veces, por ejemplo (2?2)?2=6. En la prueba cuatro, los niños deben comparar los resultados de dos operaciones y decidir si son lo mismo, si son diferentes o si es imposible de determinar, por ejemplo: una operación en cada expresión con números pequeños, por ejemplo 4/2, 8/2, dos operaciones en cada expresión o con números grandes, por ejemplo 6x4/2, 6x8/4.

En cuanto a los resultados, en la primera prueba, ambos grupos resuelven correctamente la mayoría de los items, siendo aquellas que implican dos operaciones que necesitan ser coordinadas (i.e., 8-3=x-8) los que producen un peor nivel de ejecución en el grupo de los niños de 10-11 años. El análisis de los errores muestra que el fracaso en estos items se explica por la aplicación inapropiada del principio de conmutatividad. En la prueba dos, el nivel de ejecución es igualmente alto en todos los items, lo que demuestra que la resolución de dos operaciones en secuencia y la interpretación de los paréntesis no presentan especiales problemas a los niños. En la tercera, se mantiene este mismo nivel de ejecución en algunos items, pero en los que suponen dos operaciones desconocidas (i.e., (4?2)? 3=2) sólo los realizan correctamente el 50% y los items que conllevan una operación desconocida en las dos operaciones no son realizados correctamente hasta los 16-17 años. Finalmente, en la prueba cuatro el nivel de resolución es alto en los dos primeros tipos, pero los niños de 12-13 años tienen muchas dificultades en los items con números desconocidos. Así pues, tal y como se predice, los niños más pequeños ejecutan correctamente las pruebas correspondientes al estadio segundo, es decir, el nivel de operaciones binarias, mientras que las correspondientes al nivel de composiciones binarias resultan ser únicamente accesibles para los niños mayores.

Por otra parte y también desde un marco evolutivo, los intentos recientes de explicar cómo se produce la comprensión del número en el niño se han dirigido a esclarecer los procesos psicológicos en ella implicados y especialmente a determinar los cambios que se producen antes y durante la escolarización. En esta línea, Resnick (1983) elabora una teoría en la que trata de dar respuesta a cómo los niños amplían su conocimiento sobre el número como resultado de la instrucción formal. En concreto, sugiere que el paso a niveles de desarrollo superiores resulta de la comprensión del esquema parte-todo, que sufrirá diversas transformaciones a lo largo de la instrucción formal. Establece tres períodos en el desarrollo: el primero se sitúa en la etapa de preescolar, el segundo en el período primario inicial y el tercero en el período primario tardío. En el período preescolar, la representación del número tiene como base el conteo y la comparación de cantidades. Cuando los niños entran en la escuela, ya poseen una representación del número que se caracteriza por una secuencia numérica mental con una serie de características: cada número ocupa una posición dentro de la cadena, las diversas posiciones se encuentran ligadas entre si por una relación de "siguiente", una indicación direccional que otorga el significado de mayores a las posiciones más alejadas dentro de la secuencia y, por último, la habilidad para registrar directamente la representación posicional del número tras oir su nombre. Todo ello permite al niño determinar entidades mediante el conteo, comparar cantidades y solucionar una gran variedad de problemas aritméticos. Sin embargo, estas ejecuciones requieren sólo una representación primitiva del número en comparación con la que se desarrollará posteriormente, por lo que en esta etapa, no se pueden relacionar cantidades con la sola utilización de la secuencia numérica. En el período primario inicial se alcanza según Resnick uno de los mayores logros conceptuales: la interpretación del número en términos de las relaciones parte-todo. Este esquema especifica que cualquier cantidad (el todo) puede ser dividida (en partes), siempre y cuando la suma de las partes sea igual al todo. Aplicado a la cantidad, permite pensar en los números como compuestos de otros números. Por ello, la resolución de un problema se realiza mediante la representación de los datos del mismo en términos del esquema parte-todo; esto es, asignándoles la categoría parte o la de todo, lo que posibilita la identificación adecuada de la incógnita y la utilización de estrategias de cómputo flexibles. Además, gracias al conteo mental, los niños de este período pueden solucionar problemas que no son asequibles a los más pequeños, que necesitan en todo momento una representación observable del número.

Por último, en el período primario tardío, se produce el aprendizaje del número decimal, como consecuencia de la elaboración sucesiva del esquema parte-todo, de modo que los números son interpretados inicialmente como compuestos por unidades y decenas, incluyendo posteriormente las centenas, millares, etc., estando sometidos a reagrupamientos espaciales bajo el control del esquema parte-todo. Resnick señala tres estadios fundamentales en el desarrollo del conocimiento decimal. En el primero, los números se representan como compuestos por decenas y unidades; en el segundo, se reconoce la posibilidad de realizar múltiples particiones de la cantidad, apareciendo dos fases en este estadio: en la primera los niños necesitan el conteo para establecer la equivalencia de las cantidades sometidas a procesos de transformación; mientras que, en la segunda, reconocen la equivalencia mediante el esquema de intercambio, sin necesidad de recurrir al conteo. En el tercer estadio se produce la aplicación del esquema parte-todo al cálculo escrito.

Resumiendo, Resnick considera que la competencia matemática de los niños se produce por la sucesiva elaboración del esquema parte-todo y, como hemos visto, en un primer momento se halla implicado, al menos implícitamente, en los procedimientos de conteo y comparación de cantidades; en una elaboración posterior en el cómputo mental y finalmente en la estructura decimal.

Weaver (1982), no obstante, presenta una explicación alternativa a la propuesta por Resnick, distinguiendo entre concepción unitaria y concepción bianaria de la suma de la que ya nos hemos hecho eco en apartados anteriores. La concepción unitaria supone entender la suma como un cambio de estado, en el sentido de que un conjunto inicial se hace mayor. Por otro lado, la suma puede entenderse igualmente como la combinación de dos conjuntos o dos cardinales, y en este caso estamos considerando la suma desde una perspectiva binaria. Algunos autores (Baroody y Ginsburg, 1983; Weaver, 1982) señalan que inicialmente los niños entienden la suma como una operación unitaria; mientras que la concepción binaria aparecería más tarde en el desarrollo infantil. No obstante, el soporte empírico de esta afirmación resulta más bien confuso. En algunos trabajos (Baroody y Ginsburg, 1986; Carpenter, 1986) se intenta relacionar la concepción infantil de la suma con el tipo de problemas verbales y con las estrategias empleadas en su solución. Con respecto a los problemas verbales, los de cambio reflejan más directamente una concepción unitaria de la adición (añadir a una cantidad inicial, un poseedor), mientras que los de combinación reflejan una concepción binaria (dos conjuntos, dos poseedores diferentes). Por ello, se espera que el éxito de los niños pequeños alcance sus cotas máximas en los problemas de cambio. Sin embargo, numerosas investigaciones (Carpenter, Hiebert y Moser, 1983; Carpenter y Moser, 1983; Lindvall e Ibarra, 1979; Steffe y Johnson, 1971) muestran que los problemas de cambio no resultan más fáciles que los de combinación. Pero, por otra parte, algunos estudios (p.e., Carpenter, 1986; Hiebert, 1982; Riley et al., 1983) apuntan que las pruebas aditivas en las que se desconoce el primer sumando resultan más difíciles que aquellas en las que el lugar de la incógnita se ubica en el segundo término y estos datos son consistentes con la hipótesis de un esquema unitario inicial. En otras palabras, los niños que poseen un esquema unitario de la suma presentan más dificultades en las tareas aditivas que tienen la incógnita en el primer sumando, debido a su incapacidad para intercambiar el lugar que ocupan los sumandos, de modo que la incógnita se sitúe en el segundo término.

Por último, parece existir una cierta evolución en relación a las estrategias de solución. Sería de esperar, por tanto, que las estrategias más sencillas (basadas en el conteo) se asociasen a una concepción unitaria y las más complejas (reglas, memoria) a una concepción binaria. Sin embargo, tampoco hay datos claros a este respecto. Por ejemplo, algunos estudios (Carpenter y Moser, 1982; Steffe et al., 1983) indican que los niños pequeños que utilizan la estrategia de contar todo, no respetan de modo consistente el orden de los sumandos a la hora de representarlos, ni empiezan siempre su conteo a partir del primer sumando representado. Esto podría sugerir que la estrategia de contar todo no implicaría necesariamente un concepto unitario de la suma (Cobb, 1985). Posteriormente, los niños inventarían estrategias de acortamiento, como contar a partir del sumando mayor (Groen y Parkman, 1972;

Groen y Resnick, 1977; Resnick, 1983; Resnick y Ford, 1981); sin embargo, persisten las dudas acerca de si esta estrategia supone un avance conceptual relacionado con la concepción binaria de la suma, y propiciado por el descubrimiento de la conmutatividad, o si resulta simplemente del descubrimiento de un procedimiento ahorrativo para solucionar los problemas (Baroody y Gannon, 1984).

En suma, a lo largo de los primeros años escolares se produce un avance conceptual notable en la comprensión de la operación de sumar, que si bien podemos describir en sus grandes líneas, resulta difícil identificar los factores responsables de este desarrollo. El conocimiento conceptual no puede medirse directamente y su inferencia a partir de la observación de los procedimientos que utiliza el niño en la resolución de los problemas es tarea ardua y un reto constante para los profesionales de la psicopedagogía.

2. *LA PROPIEDAD CONMUTATIVA DE LA SUMA*

2.1. INTRODUCCION: EN QUE CONSISTE Y CUANDO SE ENSEÑA

Aunque ciertas operaciones, como por ejemplo 5+7 y 7+5 son matemáticamente equivalentes, pueden implicar significados distintos para los niños pequeños. En esta línea, un aspecto crucial en la adquisición de la suma comporta el aprendizaje de las propiedades y principios subyacentes a la misma. Los niños necesitan aprender no sólo a calcular algoritmos, sino también los patrones y regularidades subyacentes al cálculo. Sin embargo, este aspecto de la educación en matemáticas no ha recibido suficiente atención por parte de los estudiosos del tema. Es quizás por esta razón que su enseñanza se reserva al Ciclo Medio. En concreto, en los Programas Renovados del Ciclo Medio se hace referencia a esta propiedad en el Bloque Temático nº 2 en el apartado 2.1. correspondiente a los números naturales: "Reconocer y aplicar las propiedades conmutativa y asociativa de la adición" (p.115). Asímismo, algunos de los libros de texto consultados (Anaya, S.M. Bruño, Santillana) incorporan este concepto en 3º de EGB.

En general y sin pretender ofrecer una lista exhaustiva de los ejercicios que se proponen en los textos consultados, aparecen los siguientes tipos:

1. Comprobar que dos operaciones conmutadas presentan el mismo resultado. Es decir, se solicita al niño que resuelva una operación determinada (25+13) y seguidamente esa misma operación conmutada (13+25).

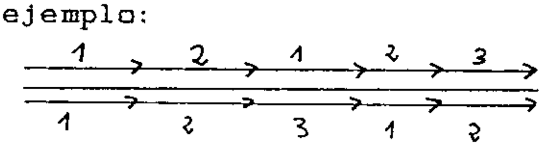
2. Determinar si dos operaciones obtienen o no el mismo resultado, escribiendo entre ellas el signo de igualdad (=) o desigualdad (≠).

Por ejemplo:

- 6+3 3+6
- 7+4 4+9

3. Escribir operaciones que se representan en una recta numérica.

Por ejemplo:



2+3 = 3+2

?+? = ?+?

4. Resolver problemas formulados verbalmente, en los que se incluyen pares de algoritmos conmutados

Por ejemplo:

"Para hacer una instalación eléctrica contamos con dos trozos de cable eléctrico, uno de 7 m y otro de 5 m. ¿Cómo conseguiremos obtener más cantidad de cable, poniendo primero el de 7 m y después el de 5 m o al revés?"

5. Completar operaciones

Por ejemplo:

"Juan tiene 25 canicas de barro y 13 de cristal. Pedro tiene 13 canicas de barro y 25 de cristal.

Completa:

- Canicas de Juan = 25+____=
- Canicas de Pedro = 13+____= "

En los apartados que siguen y en el diseño experimental principalmente, intentaremos demostrar que el principio de conmutatividad puede ser introducido mucho antes, cuando los niños comienzan a dar sus primeros pasos en la adición. Ahora bien, cabe la posibilidad de que los ejercicios propuestos en los libros de texto sean excesivamente complejos y necesiten ser reformulados y adaptados a la competencia conceptual, que el niño tenga en esos momentos.

2.2. EL PRINCIPIO DE ORDEN IRRELEVANTE EN EL CONTEO Y SU RELACION CON LA PROPIEDAD CONMUTATIVA

El principio de etiquetamiento de orden irrelevante surge en relación con el conteo y tiene su proyección en la operación de sumar. Puede ser observado tempranamente en la suma cuando el niño tras etiquetar ambos conjuntos, reinicia el conteo para hallar el total por cualquiera de los elementos pertenecientes a los conjuntos y, asímismo, aparece más adelante en el procedimiento de contar a partir del sumando mayor. No obstante, dejaremos este aspecto para los apartados siguientes, ocupándonos en éste de su comprensión y evolución en relación al conteo.

Gelman y Gallistel (1978) presentan dos definiciones del principio de orden irrelevante y que son usadas indistintamente por ellos. La primera de ellas hace referencia a que cuando el niño aplica las etiquetas de conteo sabe que no tienen por qué ser asignadas en un orden fijo; en la segunda hacen mención a que el orden en que son enumerados los elementos de un conjunto no afecta a la designación cardinal del mismo. Además, Gelman y Meck (1986) indican que los niños tienen que ser capaces de contar de modo no estándar para ejecutar correctamente la tarea de irrelevancia del orden. Según Baroody (1984a) estas dos definiciones suponen conceptos distintos. Afirma que la asignación arbitraria de etiquetas (1ª definición) es una habilidad evolutivamente menos desarrollada que la habilidad para predecir que los conteos efectuados en distintos ordenes dan como resultado el mismo cardinal (2ª definición). La tesis defendida por este autor es que el principio de orden irrelevante se utiliza de modo excesivamente amplio y que las medidas realizadas sobre el mismo comportan una noción evolutivamente menos avanzada. Para evaluar estas afirmaciones lleva a cabo una trabajo con 47 niños de 5;0-6;2 años y 60 niños de 5;11-6;8 años. Se presenta una hilera de 8 objetos y todos los sujetos pasan cuatro situaciones. En la primera (A) se pide al niño que responda a la pregunta de ¿cuántos objetos hay?; en la segunda (B) debe responder a la pregunta ¿podrías hacer que este fuera el numero "uno" (señalando el último item enumerado por el niño) y contar hacia allá?; en la tercera (C) el experimentador pregunta "nos ha salido N (el valor cardinal obtenido en A) contando de esta manera, ¿qué crees que nos saldrá contando así?", en esta prueba se cubría la muestra para evitar que los niños volvieran a contar y en la cuarta (D), se pide al niño que cuente la muestra en la dirección contraria. En la primera situación se evalua si el niño tiene conocimiento del principio de correspondencia uno a uno y de cardinalidad, ya que si desconoce estos dos principios difícilmente se podría esperar de él que tuviese el de irrelevancia del orden. Las pruebas B y D se emplean para evaluar el esquema de etiquetación de orden indiferente, mientras que la C es una tarea de predicción diseñada para observar hasta qué punto el niño tiene el principio de orden irrelevante y no un esquema de etiquetación indiferente al orden (en esta prueba no caben problemas de olvido porque el experimentador repetía en la formulación de la pregunta el cardinal obteneido por el niño en la primera situación).

Los resultados obtenidos por Baroody apoyan la necesidad de distinguir entre el esquema de etiquetamiento indiferente al orden y el principio de irrelevancia del orden. Todos los niños tuvieron éxito en la situación B y, asímismo, tan sólo un sujeto fracasa en la situación D, lo que parece indicar que todos ellos disponen del esquema de etiquetamiento indiferente al orden. Además, los niños más pequeños tienen sobre todo menos éxito en la situación C que evalua el principio de irrelevancia del orden. Más concretamente, en el grupo de los pequeños 13/47 realizan mal las predicciones, 8/47 indican que no saben cuál es el resultado, 3/47 se muestran inseguros respecto al resultado y 1/47 cuenta para responder. En consecuencia, estos datos parecen apoyar una clara tendencia evolutiva en el sentido de que los niños aplican muy tempranamente un esquema de etiquetación indiferente al orden y sólo posteriormente descubren el principio de irrelevancia del orden, es decir, el conocimiento de que la etiquetación es un proceso arbitrario no implica necesariamente una comprensión de que el orden o distribución es irrelevante para la cardinalidad. Esto es consistente, afirma el autor, con el punto de vista de Greeno, Riley y Gelman (1984) respecto a que el conocimiento de los principios de conteo no es un fenómeno de todo o nada, ya que la competencia relativa a un principio puede estar distribuida entre diversos esquemas y resulta probable que el niño desarrolle algunos aspectos de la competencia pero no otros. Adicionalmente, Ginsburg y Russell (1981) encuentran datos que parecen confirmar los de Baroody con niños preescolares. En efecto, estos niños parecen incapaces de anticipar el resultado de diferentes órdenes de conteo. No obstante, Gelman, Meck y Merkin (1986) ofrecen una interpretación alternativa a la propuesta por Baroody y otros autores. Presentan cuatro estudios, en los dos primeros parten de la hipótesis de que los niños fracasan en la prueba de irrelevancia del orden en el estudio de Baroody, debido a limitaciones en la competencia de utilización. A este respecto, Greeno, Riley y Gelman (1984) diferencian tres tipos de competencia: la competencia conceptual que hace referencia al conocimiento de reglas y principios; la competencia de procedimiento que tiene que ver con la habilidad para generar estrategias congruentes con los requerimientos de la competencia conceptual y la competencia de utilización, que se refiere a la habilidad para evaluar los requerimientos de la tarea a la luz de las limitaciones impuestas por la competencia conceptual. Asímismo, en los dos estudios restantes examinan la conclusión de Smith y Greeno (1984) respecto a que el fracaso en la tarea de irrelevancia del orden pueda ser atribuido a las dificultades de los niños pequeños con la competencia de utilización y de procedimiento.

En relación con el estudio de Baroody (1984a) , Gelman et al. (1986) consideran que el fracaso en la tarea de irrelevancia del orden se debe a que los niños pequeños consideran las instrucciones del experimentador como un reto, lo que conlleva que su primera respuesta sea equivocada (especialmente porque sólo cuentan en una ocasión la muestra) y podrían mostrarse inseguros con respecto a la respuesta que ofrecen en un principio. Para probar esta hipótesis crearon tres situaciones experimentales en tres grupos de sujetos de 4 años. El primer grupo se somete a las mismas condiciones que el de Baroody; el segundo tiene oportunidad de contar cada muestra tres veces, respondiendo en las tres ocasiones a la pregunta de cardinalidad y el resto de las pruebas son idénticas a las de Baroody; el tercer grupo comienza contando la muestra y respondiendo a la pregunta de cardinalidad, a continuación el experimentador señala el último elemento y pregunta "¿puedes empezar a contar por N?" (N era el valor cardinal obtenido por el niño), "¿cuántos te saldrán?". Además los tres grupos pasan una tarea de detección de errores con ensayos correctos e incorrectos y una tarea también de detección de errores con "truco", para analizar su comprensión del principio de cardinalidad. En la primera tarea de detección de errores se emplean hileras heterogéneas de 5,7 y 10 objetos con tres tipos de ensayos: ensayos correctos, ensayos con errores referentes al principio de correspondencia uno a uno (se omite o repite un item, dando como cardinal el último elemento de la secuencia de conteo) y ensayos con errores de cardinalidad (el cardinal ofrecido por el niño era dos más o dos menos que el correcto, respetando el principio de correspondencia uno a uno). En la tarea de "truco" se utiliza una muestra con 7 items y los niños tienen que juzgar si la respuesta del muñeco a la pregunta de cardinalidad es la correcta o no: la primera vez la marioneta realiza correctamente la tarea, pero en la segunda ocasión cuando cuenta la muestra comienza por el extremo contrario al utilizado como punto de partida en el primer ensayo, pero comete un error de correspondencia uno a uno y responde con el cardinal correpondiente al último elemento de la secuencia de conteo. Los datos de este estudio apoyan el punto de vista de que el éxito en las tareas de conteo prècisa del conocimiento conceptual, de procedimiento y de utilización y que el fracaso de los niños en la tarea de Baroody podría deberse a que no comprenden correctamente los requerimientos de la tarea y no a la carencia de un conocimiento conceptual. Además consideran que los sujetos del trabajo de Ginsburg y Russell (1981) no integran correctamente la meta de obtener el cardinal de un conjunto con su conducta previa de conteo, lo que conlleva una ejecución deficiente en el nivel de competencia de procedimiento.

Este mismo estudio se realiza también con 21 niños de 3 años de edad. Los sujetos pasan dos fases experimentales, en la primera se distribuyen en dos condiciones experimentales: una en la que se replica el trabajo de Baroody y la otra consiste en que se permite al niño contar tres veces y se hace una pregunta ligeramente modificada. Al cabo de 2-3 meses pasan las tareas de detección de errores: la habitual y la de "truco". Se utilizan 5 elementos para la tarea de Baroody y en la de detección de errores con "truco", mientras que en la tarea de detección de errores habitual se presentan 5 y 7 objetos. Los resultados indican que en el grupo de réplica aciertan 8 de los 10 sujetos y 7 sujetos en cada grupo tienen éxito en la tarea de "truco". Gelman et al. (1986) apuntan que las conclusiones del estudio de Baroody no son válidas, ya que consideran que el método utilizado por este autor resulta especialmente sensible a factores que influyen sobre la competencia de utilización.

En los dos estudios restantes se trata de probar la hipótesis de que si las dificultades de los niños en la tarea de irrelevancia del orden se deben a déficits de la competencia de utilización y de procedimiento, su ejecución debería ser favorecida introduciendo modificaciones en la tarea, de modo que se reduzcan sus características novedosas y de demandas de estrategias. Un modo de hacerlo consiste en reducir el número de elementos de la muestra. Participan en el estudio 40 niños de 3 y 4 años. La mitad de los sujetos de cada nivel de edad se asignan a cada una de las dos condiciones experimentales: tarea fácil (se evalua el principio de irrelevancia del orden ante 3 y 4 elementos) y tarea difícil (se evalua el principio ante 5 elementos). Una vez que los niños cuentan muestras de N elementos se les presenta una marioneta y se les pide que le enseñen algunos trucos, diciéndoles: "Empieza a contar por aquí (el elemento al que siempre se le asigna un numeral dado) y otorgarle el número 1" y se sigue con este procedimiento hasta que se asigna al objeto clave el valor N+1, de modo que en este último ensayo los niños tienen que darse cuenta de que la muestra sólo está compuesta por N elementos. Por tanto, los niños que son capaces de percibir este hecho, dan muestras de comprender que el valor cardinal de una muestra permanece constante a lo largo de los ensayos. El experimento finaliza con una prueba diseñada para evaluar si los niños saben que se puede asignar cualquier elemento de la secuencia de conteo a cualquiera de los elementos de la muestra, mientras que esto no es posible cuando se asignan las etiquetas numéricas a los objetos (principio de orden estable). Los resultados indican que los niños de la condición fácil ejecutan mejor las tareas que los de la condición difícil. En efecto, 11/20 niños de 3 años resuelven todos los ensayos con la muestra de tres elementos en su primer intento, mientras que solo 1/20 resuelve correctamente la tarea con 5 objetos. Asímismo, de los 11 que tienen éxito con 3 elementos, 6 ejecutan correctamente la tarea con 5 elementos, mostrando que el éxito en una tarea novedosa más fácil se transfiere a una versión más compleja de la misma tarea. Por otro lado, 16/20 niños de 4 años resuelven correctamente la tarea con 3 objetos y 10/20 con 5 elementos. Además, en el ensayo en el que tienen que asignar el numeral N+1 se observa que en la condición fácil el 50% de los sujetos de 3 años rehusan hacerlo y el 75% de los de 4 años, haciendo mención a que no pueden o pidiendo un elemento más; en la condición difícil no hubo ningún niño de 3 años que lo hiciera así, pero si el 70% de los de 4 años.

En suma, los resultados parecen confirmar la hipótesis de que la dificultad de la tarea del principio de irrelevancia del orden depende de la imposición de demandas en la competencia de utilización y de procedimiento del niño. Si simplificamos la tarea, los niños pequeños utilizan estrategias adecuadas y, además, son capaces de transferir su reconocimiento de cómo mejorar la tarea en problemas más complejos, aunque cabe la posibilidad de que el éxito se deba a que los niños tienen oportunidad de repetir la tarea varias veces. Por ello, se diseña un nuevo experimento en el que se repite 3 veces la tarea con conjuntos de 5 elementos. Toman parte en el estudio 10 sujetos de 3 y 4 años en cada una de las tres condiciones experimentales: condición fácil (se mantiene el mismo procedimiento que en el trabajo anterior), condición de repetición control (pasan tres veces un conjunto de 5 elementos) y condición de control estándar (pasan tan solo una vez la tarea de irrelevancia del orden, pero previamente cuentan una hilera heterogénea de 3 elementos en tres ocasiones y una hilera heterogénea de 4 elementos en cuatro ocasiones). Los resultados muestran que bajo determinadas condiciones incluso los niños de 3 años pueden dar muestras del principio de orden irrelevante, ya que cuando se emplean muestras pequeñas las demandas estratégicas son menores y los niños lo hacen correctamente. En otras palabras, la competencia de producción de los niños mayores es superior a la de los pequeños, lo que da lugar a una mejor competencia de utilización y de procedimiento.

En síntesis, todos los experimentados realizados por Gelman et al. (1986) muestran que la variablidad en las ejecuciones en las tareas de conteo y en concreto en el principio de irrelevancia del orden, puede estar motivada por problemas en la evaluación de la tarea (competencia de utilización) y en la planificación de soluciones (competencia de procedimiento), debido a las limitaciones impuestas por la competencia conceptual.

2. 3. EL PROCESO DE TRANSICION DE LA ESTRATEGIA "SUM" A LA ESTRATEGIA "MIN"

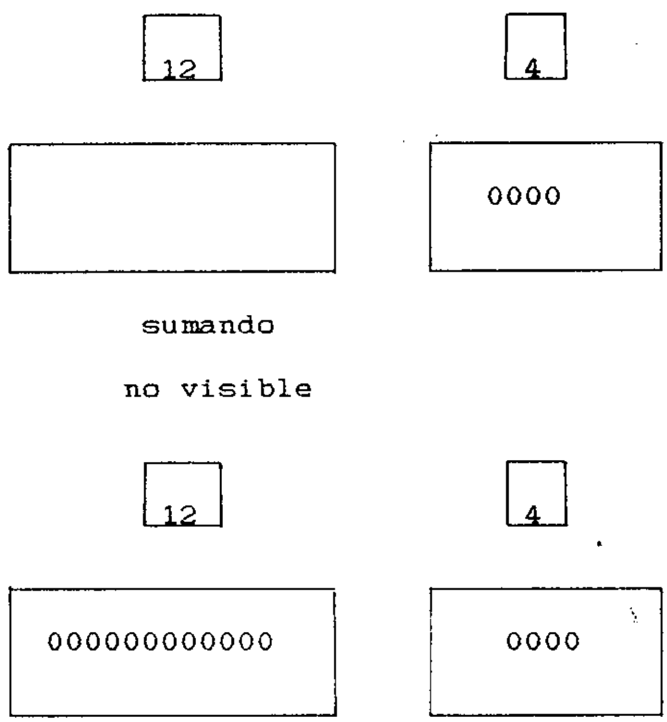
Como hemos visto en el apartado 1.4.1 la estrategia aditiva más básica consiste en contar todo empezando por el primer sumando. Este procedimiento supone demandas considerables a la memoría de trabajo del niño, ya que su puesta en marcha exige almacenar en la memoria los dos sumandos, enumerar el primero y continuar el conteo empezando de nuevo por el primer sumando, una vez enumerado el segundo sumando; en definitiva, supone un doble conteo (Baroody, 1982, 1984c; Fuson, 1982). Con el desarrollo, los niños inventan estrategias de conteo más sofisticadas. Así, Baroody identifica una estrategia, que reduce a dos pasos las demandas sobre la memoria y que implica enumerar ambos sumandos y contar a partir del sumando mayor. Además, otros autores (Carpenter y Moser, 1982; Ginsburg, 1982; Groen y

Resnick, 1977, etc.) han observado dos procedimientos más que suponen un mayor decremento en las demandas de memoria: el conteo a partir del primer sumando y el conteo a partir del sumando mayor. Desde el punto de vista evolutivo, interesa identificar los factores responsables del paso de las estrategias más primitivas a las más desarrolladas. Por ello, en este apartado y dada su relación con la propiedad conmutativa, nos ocuparemos del proceso de transición de la estrategia de contar todo a la estrategia de contar a partir de uno de los sumandos y contar a partir del mayor. En esta línea se encuentra el trabajo de Groen y Resnick (1977). Los resultados de este estudio apuntan que los preescolares utilizan espontáneamente el procedimiento de contar a partir de uno de los sumandos, después de 12-20 semanas de entrenamiento. Carpenter et al. (1981), Houlihan y Ginsburg (1981), Ilg y Ames (1951), Saxe (1982) y Secada (1982), entre otros, obtienen resultados similares. Asimismo, Secada, Fuson y Hall (1983) trabajan con 79 niños de 6 a 7;6 años, con el objeto de identificar las subhabilidades responsables del paso de una estrategia a otra. Sugieren tres: (a) contar a partir de un punto arbitrario de la secuencia; (b) para poder proseguir el conteo, el niño transforma el significado cardinal del primer sumando en un significado de conteo (ver también, Fuson y Hall, 1983) y (c) comenzar el conteo del segundo sumando con el siguiente elemento de la secuencia de conteo. El estudio consta de varias fases. En primer lugar, cada niño pasa individualmente una prueba en la que se trata de determinar su conocimiento acerca de la estrategia de contar a partir de uno de los sumandos. Esta prueba consta de 6 ensayos. En los tres primeros, el experimentador muestra al niño una tarjeta en la que sólo figura el cardinal del conjunto (primer sumando) y a continuación otra en la que aparecen puntos y el cardinal del conjunto (segundo sumando) (Figura 5). La tarea del niño consiste en determinar el número total de puntos (la suma). En los tres ensayos restantes el cometido es similar, pero tanto en una tarjeta como en la otra aparecen puntos y el cardinal de cada conjunto.

La siguiente prueba pretende evaluar las tres subhabilidades mencionadas. En la primera tarea se pide al niño que empiece a contar a partir de un punto determinado en la secuencia. La segunda se inicia siguiendo el mismo procedimiento utilizado en la primera prueba, esto es, se colocan ante el niño las tarjetas con puntos, preguntando después el experimentador qué número corresponde al último punto de la primera tarjeta. La subhabilidad tres se evalúa del mismo modo, pero ahora se pregunta qué número tiene el primer punto de la segunda tarjeta. En la siguiente fase, los niños pasan de nuevo la primera prueba y aquellos que, sin poseer la estrategia de ***Contar a partir de uno de los sumandos***, tienen la primera subhabilidad, pero no la segunda y tercera, son seleccionados para llevar a cabo el experimento. La mitad de estos sujetos son entrenados en las subhabilidades 2 y 3, pasando a continuación un postest semejante al de la primera prueba; la otra mitad constituye el grupo control que sólamente pasa el postest.

Figura 5

Adaptación de la tarea de contar a partir de uno de los sumandos de Secada, Fuson y Hall (1983).



En cuanto a los resultados, 28 niños que utilizan como estrategia contar a partir de uno de los sumandos tienen las tres subhabilidades, mientras que 36 de los 45 niños que cuentan todo no tienen una o más subhabilidades. La mayoría de los niños del grupo experimental usan en el postest la estrategia de contar a partir de uno de los sumandos.

Por otra parte, algunos modelos evolutivos se ocupan también de estos procesos de transición (Briars y Larkin, 1984; Riley et al., 1983). Así, apuntan, por ejemplo, que la estrategia de contar a partir del primer sumando constituye el paso de tránsito entre el procedimiento de contar todo y contar a partir del sumando mayor. En cambio, Baroody (1987) sugiere una línea evolutiva con ligeras diferencias: contar todo con modelos → contar todo empezando por el primer sumando → contar todo empezando por el sumando mayor → contar a partir del primer sumando. Por su parte Resnick (1982), señala que la utilización del procedimiento de contar a partir del sumando mayor no deriva sistemáticamente del descubrimiento de la propiedad conmutativa, sino que más bien resulta de la práctica en la suma. En concreto, considera tres explicaciones posibles:

- Explicación por equivalencia de pares: desde esta perspectiva se considera que el niño descubre relaciones entre ciertos problemas (ej.: 3+4=4+3) como consecuencia de la practica. Es decir, en un momento determinado se da cuenta de que estos problemas dan el mismo resultado, lo que le inducirá a contar comenzando siempre por el mayor. En esta misma línea, Wagner y Walters (1982) señalan que independientemente de que los niños reciban instrucción explícita llegan a creer en la necesidad de ciertos hechos aritméticos (i.e., a+b=b+a). Así, en relación con la conmutatividad afirman que sus orígenes se hallan en los encuentros repetidos en secuencias de conteo tales como 2+3=3+2, 2+4=4+2, etc, a partir de las cuales generalizan que a+b=b+a. Sin embargo, en opinión de Resnick, esta explicación no está exenta de dificultades, ya que para que el niño logre darse cuenta de que los dos problemas son equivalentes, deberá tener en su memoria a corto plazo el resultado de ambos para poder compararlos. Por otro lado, en la experiencia de Groen y Resnick (1977), observan que los niños utilizan los procedimientos de comenzar a partir del mayor en situaciones en las que no se producen emparejamientos de problemas, lo que hace pensar que la práctica en pares de problemas no es la responsable de la aparición de este procedimiento. Sin embargo, esta equivalencia si es posible advertirla en problemas sencillos (7+1=1+7), en los que el resultado emerge rápidamente en la memoria a corto plazo y que los niños, habiendo observado esta conmutatividad en pares sencillos, generalizan a otros pares.

- Explicación por déficit: el niño se da cuenta de que ciertas operaciones son conmutativas cuando percibe que otras no lo son (por ejemplo, la resta). Es entonces cuando busca procedimientos para resolver los problemas que le exijan menos esfuerzo, esto es, los procedimientos de empezar a contar a partir del mayor. Utilizará este procedimiento una y otra vez y al comprobar que el resultado siempre está bien, lo escogerá como preferido.

- Explicación en términos parte-todo: señala que este procedimiento surge porque los niños aplican el esquema parte-todo a la suma. Los sumandos son componentes de la "parte" y no existe entre ellos una relación de orden, lo que determina que pueden ser utilizados en cualquier posición a la hora de hallar el "todo". Esta es, según Resnick, la explicación más aceptable.

Por su parte Neches (1981) proporciona una explicación formal acerca del descubrimiento del procedimiento de contar a partir del sumando mayor (el procedimiento que Groen y Parkman, 1972 denominan min). El programa, que recibe el nombre de HPM, comienza utilizando el procedimiento de contar todo y acaba con el procedimiento de contar a partir del sumando mayor, tras una cierta cantidad de ensayos de práctica. Específicamente, el programa funciona del siguiente modo. Mediante el procedimiento de contar todo, la meta de sumar es descompuesta en dos submetas de hacer conjuntos y contar el resultado. Para satisfacer la primera submeta, establece metas de correspondencia de elementos hasta que el conjunto producido sea de igual tamaño que el sumando. Para ello, HPM empareja los objetos con la secuencia convencional de números. El resultado de la submeta de hacer conjunto son parejas de conjuntos con números que representan sus tamaños. Asímismo, la submeta de contar el resultado se satisface realizando metas de correspondencia hasta que el sistema cuenta todos los objetos.

La transformación del HPM del procedimiento de contar todo al procedimiento de contar a partir del sumando mayor se acompaña de un conjunto de procesos de automodificación. El modelo señala que cuando un procedimiento se ejecuta queda un trazo en la memoria y además, el sistema dispone de un conjunto de heurísticos de "transformación de estrategia", cada uno de los cuales sugiere un cambio que puede ser hecho si ciertas condiciones son detectadas en el trazo de la memoria. Estos cambios compiten con el procedimiento actual y son reforzados o extinguidos dependiendo de la mejoría que se espera de ellos. Por otro lado, cuando surge un procedimiento modificado, éste se encuentra sujeto al mismo proceso de aprendizaje que el procedimiento inical. Por tanto, las estrategias nuevas son producidas a lo largo de una secuencia de pequeños pasos que suponen un refinamiento del procedimiento inicial. En efecto el HPM utiliza tres heurísticos:

1. **Resultado aún disponible**: si un item es previamente computado, intentar recuperarlo en vez de computarlo de nuevo.

2. **Resultado no modificado**: si un item de información se computa pero no se usa, intentar evitar computarlo.

3. **Esfuerzo diferente**: si el esfuerzo requerido para lograr una meta difiere en dos ocasiones, intentar usar el método que implica menos esfuerzo.

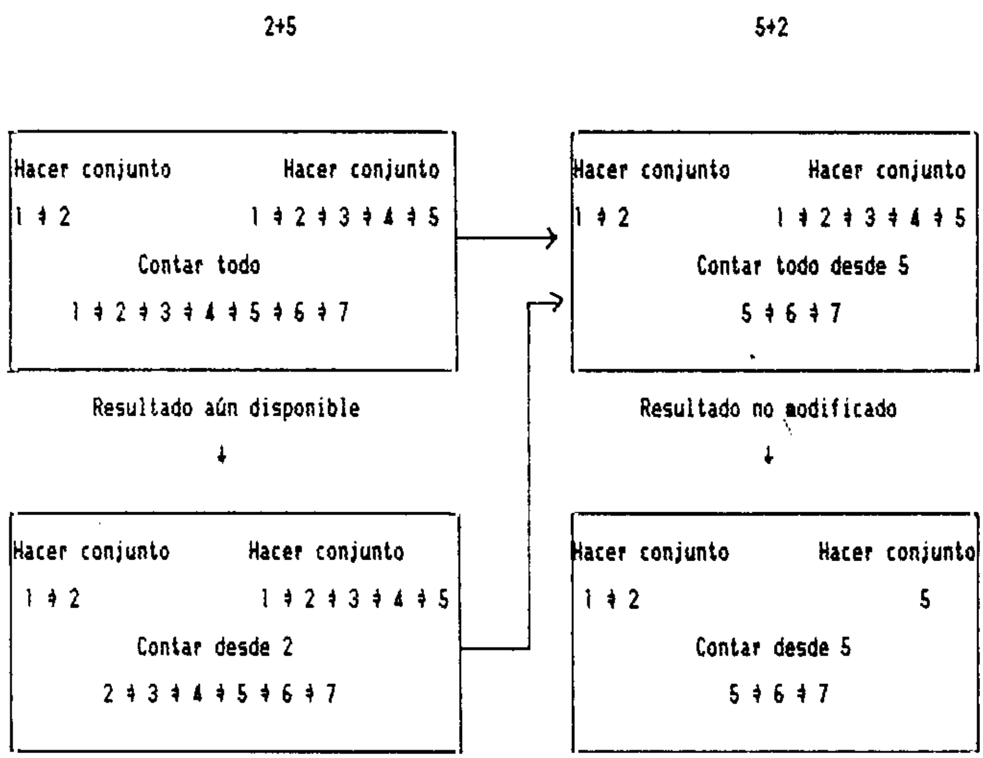
Veamos seguidamente un ejemplo en los problemas 2+5 y 5+2. Consideremos, en primer lugar, el problema 2+5. Para realizar la meta de hacer conjunto con el procedimiento de contar todo, HPM empareja 2 objetos con la secuencia convencional de números "1 y 2" y 5 objetos diferentes con los números "1,2 ,3, 4 y 5" y, seguidamente, empieza a contar. Para alcanzar esta meta utiliza el heurístico de **resultado aún disponible**. Para ello, HPM construye una regla nueva que hace que el sistema funcione de acuerdo a un procedimiento que llaman contar todo a partir del primer sumando, esto es, el nuevo procedimiento cuenta únicamente los objetos que representan al segundo sumando (por ejemplo, en el problema 2+5, cuenta "2, 3,4,5,6 y 7"). Este nuevo procedimiento es generado por HPM sin referencia alguna a un esquema de todos y partes o de inclusión. No obstante, cuando este procedimiento se ejecuta el sistema reconoce que los objetos que representan al primer sumando (generado bajo la primera meta de hacer conjunto) no se usan realmente para determinar la suma final, ya que el resultado de construir el conjunto es el mismo número que se da como sumando. Este número proporciona el punto de partida para modificar el proceo de contar, de modo que los objetos en el primer conjunto no son operativizados durante la fase del procedimiento de contar. Esta es una condición en la que el heurístico de **resultado no modificado** es aplicable y así, en vez de contar un conjunto de 2 objetos simplemente dirá 2 sobre la base de que el conjunto sigue existiendo sin tener que contar sus miembros en la actualidad. En síntesis, este nuevo procedimiento omite el conteo del primer sumando, genera objetos para representar el segundo sumando y entonces cuenta estos objetos empezando a partir del primer sumando, esto es, el procedimiento de contar a partir del primer sumando (Figura 6).

Figura 6
Adaptación del modelo inicial de invención del procedimiento MIN

2+5 = ?	5+2 = ?
Hacer conjunto con el 2: 1 → 2 Hacer conjunto con el 5: 1 → 2 → 3 → 4 → 5 Contar todo 1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → 7	Hacer conjunto con el 5: 1 → 2 → 3 → 4 → 5 Hacer conjunto con el 2: 1 → 2 Contar todo 1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → 7
Resultado aún no disponible ↓	Resultado aún disponible ↓
Hacer conjunto con el 2: 1 → 2 Hacer conjunto con el 5: 1 → 2 → 3 → 4 → 5 Contar desde el 2 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → 7	Hacer conjunto con el 5: 1 → 2 → 3 → 4 → 5 Hacer conjunto con el 2: 1 → 2 Contar desde el 5 5 → 6 → 7
Resultado no modificado ↓	Resultado no modificado ↓
Hacer conjunto con el 2: 2 Hacer conjunto con el 5: 1 → 2 → 3 → 4 → 5 Contar desde 2 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → 7	Hacer conjunto con el 5: 5 Hacer conjunto con el 2: 1 → 2 Contar desde 5 5 → 6 → 7

Se presentan dos objeciones importantes al modelo (Resnick y Neches, 1984). La primera hace referencia a que se dota implícitamente al sistema con el conocimiento de las relaciones conmutativas. Esto parece cuestionable a la luz de los datos sobre la ejecución de la suma en niños. Por ejemplo, Ginsburg (1977) muestra que a los niños pequeños que se les pide que resuelvan problemas conmutativos, generalmente solucionan el segundo problema por conteo, con ninguna mención y ningún uso de la solución precedente. Sin embargo, el HPM predice que, si hay un conocimiento inical de la propidad conmutativa, los niños copiarían la respuesta al probleama en lugar de abordar un nuevo cálculo. Por otro lado, para que HPM pueda hacer este descubrimiento, necesita tener la habilidad para detectar que ciertos pares de problemas tienen el mismo resultado, lo que no puede suceder simplemente comparando las respuestas de los dos problemas, sino que dicho descubrimiento debe estar basado en que el sistema sea capaz de recordar algo sobre los procesos de solución. Sin embargo, la estructura semántica construida por HPM durante el proceso de solución de un problema es amplia y la retención en la memoria de trabajo de esa estructura mientras se soluciona un segundo problema parece un modelo poco probable del procesamiento humano. Con objeto de superar estas delficiencias, Resnick y Neches (1984) desarrollan una nueva versión del HPM. En esta nueva versión, el HPM dispone de un conocimiento inicial referente al principio de orden irrelevante, esto es, el concepto de que, aunque los números deben ser asignados en un orden fijo cuando se cuenta, no es importante que número se asigna a cada objeto. De acuerdo con este principio, la nueva versión de HPM etiqueta todos los objetos a ser contados como equivalentes. En cuanto al efecto de este conocimiento sobre el sistema, es como sigue (Figura 7).

Figura 7
Adaptación del modelo modificado para la invención del procedimiento min (Resnick y Neches, 1984)



El sistema cambia su procedimiento de contar todo a contar todo empezando por el primer sumando usando el heurístico **resultado aún disponible**. Pero debido a que la nueva versión es indiferente al orden en que son contados los objetos, puede poner en marcha un heurístico de **resultado aún disponible** al establecer la meta de contar en el segundo sumando. Además, aunque el conjunto que representa el segundo sumando contiene objetos diferentes, el etiquetamiento de todos los objetos como equivalentes permite al sistema generalizar sobre los objetos específicos y reconocer la secuencia convencial de números producida en ambos conteos como la misma. Por ejemplo, en el problema 2+5 cuenta el primer sumando ("1,2") , el segundo sumando ("1,2,3, 4,5") y, por fin, todos los elementos , pues bien hay un punto donde cuenta de nuevo 2 elementos y otro donde cuenta 5 de nuevo. En síntesis, en el procedimiento de contar todo a partir del primer sumando las dos metas de hacer conjunto dan lugar a la representación de los objetos de cada uno de los sumandos. El cardinal del primer sumando es el inicio del proceso de contar, de modo que el conjunto de objetos que representan a este sumando se inscriben como un subconjunto del conjunto de meta contar y cuando se produce el conteo, hay un punto en el que el conjunto más pequeño se iguala al conjunto mayor (en el caso de los problemas en los que el sumando más pequeño se ubica en el primer sumando). Para evitar esta redundancia, HPM crea una regla nueva consistente en contar todo a partir del segundo sumando, utilizando por tanto el resultado del conteo de este segundo sumando. Por ejemplo, en el problema 2+5, cuenta 2 ("1,2"), después 5 ("1,2,3,4,5") y finalmente cuenta a partir de 5 ("5,6,7"). En definitiva, el HPM construye una nueva regla que da lugar al procedimiento de sumar todo empezando por el segundo sumando, que consiste en tomar como punto de inicio el cardinal del segundo sumando y contar únicamente los elementos correspondientes al primer sumando. En el caso de los problemas en los que el segundo sumando es el mayor, el sistema tiende a utilizar preferentemente este último procedimiento frente al de contar todo empezando por el primer sumando. Así pues, en este momento el HPM dispone de dos procedimientos que compiten entre si: contar todo a partir del primer sumando y contar todo a partir del segundo sumando. Lo que interesa determinar en este momento es como el HPM transforma estas reglas en el procedimiento de contar a partir del sumando mayor y, lo que resulta claro, es que este procedimiento guarda relación con el heurístico de **resultado no modificado**. En otras palabras, una vez que se establece la preferencia por empezar a contar a partir del sumando mayor, el heurístico **resultado no modificado** puede aplicarse, lo que conduce a la eliminación de la meta de hacer conjunto para el sumando mayor, dando como resultado el procedimiento de contar empezando por el mayor.

En suma, esta nueva versión de HPM difiere de la anterior en varias cosas, como ya hemos visto. No obstante, quizás la diferencia fundamental es que las transiciones en la nueva versión dependen únicamente de dos heurísticos: **resultado aún disponible** y **resultado no modificado**, mientras que la primera dependía de tres. Esto permite que el sistema funcione con un menor grado de activación de la memoria, reduciendo la dependencia del sistema de que construya un conocimiento matemático relativo a la propiedad conmutativa y la equivalencia de problemas. No obstante, aunque explica adecuadamente el procedimiento de contar a partir del mayor, presenta una importante limitación y es que dicho procedimiento se basa en un conjunto de reglas específicas de pares de números (por ejemplo, cuando 2 y 5 aparecen, empezar con 5; cuando 8 y 6 aparecen empezar con 8), pero esto no refleja un principio general de conmutatividad. La comprensión de dicho principio se produce, según los autores, cuando el niño es capaz de coordinar estas reglas del procedimiento de contar a partir del mayor con su conocimiento sobre los números grandes y pequeños dentro de un esquema parte-todo.

Para finalizar este apartado, Baroody (Baroody, 1982, 1984c; Baroody y Ginsburg, 1986) considera que el procedimiento de contar a partir del sumando mayor resulta de un proceso de economía cognitiva. Señala que cuando el niño está contando, en un momento determinado, puede darse cuenta de que contar el primer sumando (el mayor) es redundante y empezar simplemente con el cardinal del sumando. Este descubrimiento es, según Baroody, especialmente probable con conjuntos que son reconocidos inmediatamente o kinestésicamente a través de patrones de dedos o visualmente a través de la percepción inmediata. En definitiva asume que la invención de las estrategias que no tienen en cuenta el orden de los sumandos no implica el conocimiento de la propiedad conmutativa. En esta línea hay que situar el trabajo de Baroody (1984c) sobre una niña prescolar (Felicia) durante un año. El método utilizado es una entrevista semiestructurada. En la primera entrevista, se evaluan habilidades matemáticas básicas, incluyendo la suma, en el contexto de un juego de carreras de coches. Merecen especial mención las respuestas de Felicia en los problemas de adición mental del tipo 4+1, 6+2, 4+2, 1+5, 3+2, 2+4 y 3+5, ya que presenta respuestas correctas en todos los problemas menos en el último. Las estrategias utilizadas consisten en contar todo y contar todo empezando por el sumando mayor en los problemas 1+2, 2+4 y 3+5 (p. e., 2+4: "1,2,3,4..5,6". Aunque esta última estrategia requiere el mismo número de pasos que la estrategia de contar todo, el doble conteo requiere sólo dos pasos.

En las entrevistas siguientes se observa que continua utilizando la estrategia de contar todo en las sumas más simples (por ejemplo, 3+1) y que la precisión de los procesos de contar todo mentalmente iba en aumento, ya que resuelve el 50% de los problemas que requiere un conteo doble de uno o dos pasos y tan solo el 10% de los que precisan tres pasos o más. En la septima entrevista, Felicia alcanza un mayor grado de precisión y así, resuelve correctamente el 90% de los problemas que requieren uno o dos pasos y el 67% de los que necesitan tres o más.

Por otro lado, se descubre que la estrategia de adición mental informal que utiliza Felicia varía con el tamaño del problema y que, asímismo, suplanta la estrategia de contar todo empezando por el sumando mayor por la de empezar a contar a partir del mayor en los problemas con sumandos grandes, aunque continua utilizando el procedimiento de contar todo en los problemas más sencillos. Esta inconsistencia se debe a que la estrategia de contar a partir del mayor para los problemas con dígitos grandes no es una verdadera estrategia, en el sentido de que Felicia no se da cuenta, probablemente, de que generar el primer conteo es redundante y, en consecuencia dicha estrategia no es más que una variación de acortamiento de la estrategia de contar todo empezando por el mayor. Ello explicaría los errores de la niña en problemas como 32+6=36, ya que debido al esfuerzo de cómputo puede olvidar las unidades pertenecientes al primer sumando e iniciar el conteo con el segundo sumando. En definitiva, aunque las estrategias utilizadas por Felicia pueden diferir en cuanto a su economía cognitiva, no son distintas en su base conceptual. En otras palabras, la invención de los procedimientos de contar todo empezando por el mayor y contar todo a partir del mayor son independientes del conocimiento del principio de conmutatividad. Los niños pueden inventar estas estrategias para reducir la carga de la memoria y no necesariamente apreciar que 3+6 y 6+3 son equivalentes.

2.4. APORTACIONES TEORICAS Y ETAPAS EVOLUTIVAS EN LA ADQUISICION DE LA CONMUTATIVIDAD.

A pesar de la importancia que tiene el conocimiento de la propiedad conmutativa para una adecuada comprensión de la adición, son escasos tanto las aportaciones teóricas propuestas que expliquen su adquisición y evolución, como los datos empíricos disponibles hasta el momento. En este apartado nos proponemos acercarnos a estos datos, exponiendo primeramente las principales posiciones teóricas, para analizar a continuación los datos empíricos de los trabajos de investigación que se han ocupado de este tema.

Algunos modelos de simulación (Briars y Larkin, 1984; Riley, Greeno y Heller, 1983) hacen una breve mención a la propiedad conmutativa. Consideran que el conocimiento de la conmutatividad se corresponde con una comprensión implícita de las relaciones parte-todo. La comprensión de dicho esquema, que en el modelo de Riley et al. como vimos en una apartado anterior se alcanza en el nivel 3, facilita por una parte la identificación de las acciones apropiadas para resolver los diversos tipos de problemas propuestos y por otra el establecimiento de relaciones entre los sumandos (partes) "a" y "b" y su suma "c". Es decir, "a" y "b" son partes de "c" y, por tanto, "a+b" y "b+a" son operaciones equivalentes. Además, desde esta óptica, se señala que el conocimiento de la conmutatividad es una condición necesaria para la invención de procedimientos de adición más flexibles. Así, afirman que existe un vínculo directo entre el procedimiento de contar a partir del mayor y el conocimiento de la propiedad conmutativa. En concreto, la adquisición del procedimiento de contar a partir del mayor se relaciona con la comprensión de los problemas de combinación, ya que estos problemas necesitan del conocimiento de las relaciones.parte-todo.

Por su parte Weaver (1982), sugiere que la conmutatividad describe una propiedad binaria de la suma. Inicialmente, los niños pequeños pueden tratar la suma como una operación unitaria, es decir, definen la adición en términos de cambios de estado y pueden tener nociones contradictorias acerca de los efectos del orden de los sumandos. Por ello, asumen que el orden de los sumandos implica diferencias en el resultado. En otras palabras, los problemas con sumandos invertidos son psicológicamente problemas diferentes para los niños pequeños. Por ejemplo, mientras que "5+7" se interpreta con 5 y 7 más, "7+5" como 7 y 5 más y, consecuentemente, el niño cree firmemente que los resultados (sumas) de estos problemas son diferentes. La concepción binaria, permitirá al niño entender la operación aditiva como la combinación de dos conjuntos, de modo que el orden de combinación de los mismos no presenta diferencias en el resultado.

Por su parte Baroody (1988, Baroody y Ginsburg, 1986) considera dos etapas evolutivas en la adquisición de la conmutatividad: la protoconmutatividad y la conmutatividad. A este respecto, señala que algunos niños parecen tener una noción primitiva de la conmutatividad, la protoconmutatividad o "esquema de adición de orden indiferente", que implica que el orden en que se adicionan los sumandos no marca diferencias en relación con la exactitud de la suma. En otras palabras, la protoconmutatividad supone que dos números pueden ser combinados en cualquier orden para producir respuestas correctas, aunque no necesariamente las mismas (Baroody, Ginsburg y Waxman, 1983). En definitiva, la protoconmutatividad permite que el orden de los sumandos pueda afectar al resultado. Este esquema de etiquetamiento de orden indiferente o protoconmutatividad se adquiere como resultado de la experiencia informal y se puede poner de manifiesto en la variedad de modos que los niños utilizan para organizar los objetos cuando ponen en marcha el procedimiento de contar todo con modelos u objetos concretos. Por ejemplo, cuando utilizan este procedimento, no respetan de modo consistente el orden de los sumandos tanto a la hora de representarlos como en el conteo (Baroody, 1982; Baroody, 1988; Carpenter y Moser, 1982). Con la experiencia adicional, este protoconcepto es elaborado para formar un concepto completo y genuino de la conmutatividad. Además, como los niños son capaces de descubrirla por medios informales, la apreciación de este principio no se encuentra ligada a la utilización de estrategias más avanzadas. En esta línea, Baroody considera que la conmutatividad puede ser un concepto particularmente apropiado para ser fomentado mediante el aprendizaje por descubrimiento y que puede ser descubierto tempranamente por los niños, sin necesidad de tener una concepción binaria de la suma, si se les da oportunidad de comparar los resultados de pares conmutados (Baroody, Ginsburg y Waxman, 1983).

Por último, Carpenter (1986) señala que los niños que no reconocen que 5+7 y 7+5 tienen el mismo resultado no tienen una comprensión completa de la conmutatividad, aunque añade que, inicialmente al menos, los niños no aplican inmediatamente los conceptos a todas las situaciones posibles. De acuerdo con Baroody y Ginsburg (1986) considera que puede resultar apropiado etiquetar el conocimiento conceptual inicial que tienen los niños acerca de la conmutatividad como protoconmutatividad. Ahora bien, según Carpenter, resulta inapropiado concluir que la conmutatividad no proporciona una base conceptual válida para inventar procedimientos que no tienen en cuenta el orden de los sumandos a la hora de realizar la operación aditiva. Resulta incorrecto, por tanto, afirmar que el conocimiento conceptual sea de algún modo innecesario para producir avances en el conocimiento de procedimiento. En relación con esto, afirma que, en efecto, los niños pueden llegar a utilizar procedimientos sin vincularlos con una forma de conocimiento conceptual y algunas invenciones se pueden producir exclusivamente en relación con el conocimiento de procedimiento, pero a menudo cuando ocurren en este nivel conducen a errores.

Desde el punto de vista empírico, la indigencia de datos resulta sorprendente. Baroody, Ginsburg y Waxman (1983) examinan tres principios fundamentales en relación con la suma: el principio de conmutatividad, el de complementariedad de la suma y la resta y la progresión N+1. Este estudio se realiza con niños de primero, segundo y tercer grado. El procedimiento experimental consta de una sesión preliminar y una sesión experimental. La sesión preliminar tiene por objeto que los niños se familiaricen con los experimentadores y con las tareas que se van a utilizar en la sesión experimental. Además, proporciona datos acerca de los niveles de ejecución de los niños en 18 combinaciones de suma y resta. A este respecto, se observa que los niños de primer grado tienen una precisión media en la adición del 78%, los de segundo 90% y los de tercero 96%. Además, los items que resultan más fáciles son los dobles (4+4, 6+6 y 10+10) y las combinaciones 10+4, 10+5 y 12+5. Por otro lado, obtienen un éxito moderado en los problemas que implican un conteo doble de seis pasos; en los problemas 6+8, 6+10, 6+11, 7+7, 7+9, 8+7, 9+9, 9+10 y 10+7 obienen un éxito medio del 61% al 83% y un éxito medio del 44% al 56% en 9+8, 8+9 y 8+11. En los problemas de substracción, el nivel de éxito es menor en los tres niveles: 43% (0 a 100%) para 1º, 61% (25 a 100%) para 2º y 92% (50 a 100%) en 3º.

En la sesión experimental, cada sujeto fue entrevistado individualmente en un contexto de juego. La tarea se diseña de tal modo que permite al niño utilizar ciertos principios matemáticos y evitar la labor de cálculo. Se trata de un juego de "baseball" con tres "saques" y en cada uno de ellos se presentan 10 items de cálculo. Uno de los saques tiene que ver con la propiedad conmutativa (C), otro con la complementariedad de la suma-resta (A) y otro con la progresión de 1 (N+1) (P). Los saques se presentan en el siguiente orden: CAP, CPA, ACP, APC, PAC, PCA, balanceándolos en cada nivel escolar.

Los resultados indican que existe una asociación significativa entre el grado y el uso del principio de complementariedad. La mayoría de los niños de 3º (83%) usan el principio en casi todos los ensayos, mientras que únicamente lo hace el 39% de los niños de segundo y primer grado.

Al contrario que en la conmutatividad, el uso del principio de complementariedad parece estar relacionado con las estrategias de solución de los problemas aditivos. En general, cuando los niños usan estrategias aditivas evolutivamente desarrolladas, usan el principio de complementariedad suma-resta más frecuentemente.

Por otro lado, la utilización del principio N+1 es más baja de lo esperado. En efecto, los niños de tercer grado, de quienes se espera que utilizase el principio con mayor frecuencia, lo hacen raramente. Posiblemente la abstracción de este principio, según estos autores, se vería facilitada por la presentación de secuencias ordenadas de datos como por ejemplo 2+1, 2+2, 2+3...

Por último, el principio de conmutatividad es el más utilizado, ya que la mayoría lo usan en al menos 3 de los 4 ensayos y tan sólo un niño de primer grado no lo utiliza en absoluto. Respecto a los demás niños de primer grado, las tres cuartas partes lo usan en el primer ensayo y los restantes en el siguiente. Además, el 59% lo usan consistentemente. Los de segundo y tercer grado, utilizan la conmutatividad consistentemente el 89% y 83% respectivamente, después de usarla una vez.

La amplia utilización de este principio por parte de los niños de primer grado, según estos autores, pone de manifiesto que dicho conocimiento es el resultado de su experiencia informal, puesto que según su profesor estos niños no habían recibido instrucción formal en este principio. Por tanto, parece que esta experiencia informal provoca la aparición de una noción temprana de conmutatividad, más concretamente lo que se ha venido llamando protoconmutatividad. Además, tal y como se demuestra en el estudio, los niños de cada nivel usan el conteo en lugar de estrategias más avanzadas, lo que parece indicar que la apreciación de este principio no es dependiente del desarrollo de estrategias más evolucionadas. Estos datos son completados y ampliados en el estudio realizado por Baroody y Gannon (1984). Se plantean tres objetivos fundamentales: examinar el desarrollo de las estrategias de adición, determinar si la conmutatividad es asumida o descubierta por los niños pequeños y, finalmente, las relaciones entre conmutatividad y las estrategias de contar todo empezando por el sumando mayor y contar a partir del sumando mayor. Respecto a esto último, contrastan tres hipótesis . La primera de ellas hace referencia a que los niños asumen de modo natural que la adición (y otras operaciones aritméticas) es conmutativa. Debido a que el orden de los sumandos no tiene ningún significado para ellos, inventan los procedimientos antes mencionados para evitar el esfuerzo de cómputo y además, dado que la inversión de los sumandos genera la misma respuesta que cuando se utilizan otras estrategias menos avanzadas y a que los adultos indican que la respuesta es correcta, utilizarán estrategias más económicas de contar todo empezando por el mayor o contar a partir del mayor.

De acuerdo con la segunda hipótesis, el descubrimiento de la conmutatividad permite a los niños inventar estrategias aditivas más económicas. Por ejemplo, un niño puede solucionar pares de problemas como 5+1 y 1+5 mediante una estrategia de contar todo y darse cuenta de que la suma es la misma, de modo que a partir de tales ejemplos, puede abstraer la generalización de que los pares invertidos son equivalentes. Por otro lado, debido a que un problema puede ser sustituido por otro para hallar la suma (el principio de conmutatividad) y dado que resulta más fácil obtener la suma total si se empieza sumando a partir del mayor, el niño adopta esta estrategia más económica . En síntesis, de acuerdo con las hipótesis 1 y 2, la apreciación de la conmutatividad es una condición necesaria para la invención de estrategias aditivas en las que no se tenga en cuenta el orden de los sumandos y, consiguientemente, todos los niños que utilizan estas estrategias ven los pares invertidos como equivalentes en la suma.

Hay una tercera posibilidad y es que la conmutatividad no es una condición necesaria para el desarrollo de estrategias de adición más económicas (Baroody, 1982). Desde esta posición se afirma que el niño busca el modo de evitar el esfuerzo cognitivo empezando con el sumando mayor, sin preocuparse del resultado de la operación. Por ejemplo, puede usar el procedimiento de contar a partir del mayor en problemas como 7+1 y 1+7 y no darse cuenta de que el resultado es el mismo en ambos problemas. Por tanto, algunos niños que inventan estrategias de adición evolucionadas, no tienen éxito necesariamente en las tareas que evalúan la conmutatividad.

El estudio se lleva a cabo con 36 niños con un rango de edad entre 5;4-6;9 (M:5;11). Las tareas que deberán resolver son de tres tipos: una prueba de adición y dos de conmutatividad. La tarea de adición consiste en una serie de tarjetas en las que aparecen algoritmos en horizontal y se presenta como un juego de carreras de coche. El experimentador dice: "Aquí pone M y N. ¿Cuántos son M y N conjuntamente?. Si es necesario, el experimentador dice; "Puedes representar ésto como tu quieras, con los dedos, los bloques o en tu cabeza". Hay un total de doce problemas con el sumando menor primero y otros 12 con el sumando mayor en primer lugar. Las cantidades oscilan entre 2 y 8.

En cuanto a las tareas de conmutatividad, en la primera de ellas el experimentador presenta la tarea como un juego de mirada rápida. Hay un total de 28 ensayos y tres tipos de pruebas: pares conmutativos, pares idénticos y sumas diferentes. El experimentador muestra al niño una tarjeta donde aparece el problema y lo lee en voz alta. El tiempo máximo de exposición de la tarjeta es de 4". En la segunda tarea de conmutatividad, se pide al niño que resuelva una suma y, seguidamente, aparece la misma suma conmutada y se le pregunta si se obtiene o no el mismo resultado. Se registra el tiempo de reacción y las explicaciones del niño.

La presentación de las pruebas sigue el siguiente orden, en la primera sesión experimental se administran la mitad de los ensayos de adición y la mitad de los ensayos de conmutatividad de la primera tarea; en la segunda, pasan la mitad restante de los ensayos de adición y los de la primera tarea de conmutatividad; en la tercera sesión, resuelven la segunda tarea de conmutatividad.

Los resultados respecto a la tarea de adición, indican que de los 19 niños que utilizan el procedimiento de contar todo de modo concreto durante la 1ª sesión, 12 (63%) continuan dependiendo de este procedimiento en la 2ª sesión, 5(21%) experimentan con procedimientos mentales aunque sigue utilizando otros procedimientos menos evolucionados, y sólamente 2 (11%) adoptan un algoritmo mental como su procedimiento predominante. Por otro lado, de los 13 niños que dependen inicialmente de estrategias mentales como contar todo empezando por el mayor, contar a partir del primer sumando y contar todo a partir del sumando mayor, prácticamente la mitad (6 de 13) adoptan una estrategia más avanzada durante la segunda sesión. Por último, la estrategia de contar todo empezando por el sumando mayor, encontrada por Baroody (1984c) en un estudio de casos, es utilizada por 6 niños. Asímismo, 3 niños inventan durante el curso del estudio la estrategia de contar a partir del sumando mayor. Durante la segunda sesión, dos niños adoptan una estrategia de representar el primer sumando con los dedos sin contar y entonces usan dedos adicionales para contar. Según, Baroody y Gannon, el uso de representaciones automáticas (de una vez, sin contar uno por uno) con los dedos puede ser un vehículo por el cual el niño invente procedimientos de contar a partir de un sumando mentalmente.

Las tareas de conmutatividad son resueltas tan sólo por 35 niños, ya que se elimina uno. Consideran 4 categorías de resultados:

- A: sujetos que tienen éxito en ambas tareas (14 sujetos).

- B: sin éxito manifiesto (13 sujetos).

- C: éxito en la tarea 2 y no en 1. No tienen una firme comprensión de la conmutatividad (4 sujetos).

- D: éxito en la tarea 2 y no en la 1. Pueden haber aprendido la conmutatividad durante el estudio (4 sujetos).

Una cuestión que se plantea es si estas tareas pueden sobrevalorar el conocimiento de la conmutatividad, ya que los niños pueden estar más pendientes de la suma que de los sumandos. En relación con esto, se encuentra que 9 niños responden automáticamente al problema de la segunda tarea de conmutatividad con la suma computada en el problema resuelto previamente, lo que resulta una evidencia clara de que los niños comprenden la conmutatividad. Además, un dato adicional es que 8 niños cuentan bien en la primera tarea de conmutatividad, bien en la segunda, bien finalmente en ambas, lo que supone una clara indicación de que se centran en el resultado del problema más que en los sumandos. Así pues, aproximadamente la mitad de los niños se centran en los resultados de los problemas implícita o explícitamente.

Finalmente, en cuanto a las relaciones entre la conmutatividad y las estrategias aditivas se obtienen los siguientes resultados. En primer lugar, algunos de los niños que utilizan más frecuentemente la estrategia de contar todo resuelven con éxito las tareas de conmutatividad; en segundo lugar, los niños que usan estrategias de adición mental tienen una probabilidad significativamente mayor de tener éxito en las tareas de conmutatividad que aquellos que dependen del uso del procedimiento de contar todo concreto y, en último lugar, la invención o uso de una estrategia que no tenga en cuenta el orden de los sumandos no se asocia necesariamente con una apreciación segura de la conmutatividad. Aunque la mayoría de los niños (6 de 11), cuya estrategia predominante es contar todo empezando por el sumando mayor o contar a partir del sumando mayor, tienen éxito en ambas tareas de conmutatividad, tres de ellos (27%) tienen un éxito mixto, y dos (18%) no tienen éxito en ambas tareas.

Así pues, algunos niños que usan dichas estrategias no aprecian la equivalencia de los pares conmutativos.

Los resultados del presente estudio ponen de manifiesto que el principio de conmutatividad no es asumido de modo simple por los niños, ya que, por un lado, sólo la mitad de ellos tienen éxito en cada una de las tareas de conmutatividad y algo menos de la mitad de ellos tiene éxito manifiesto y, por otro, ninguno de los niños que usan la estrategia de contar todo se dieron cuenta consistentemente de que los pares conmutados obtienen el mismo resultado en la suma. Además, casi la cuarta parte de los sujetos cuentan en una o dos ocasiones para establecer la equivalencia de los pares de problemas. En suma, se rechaza la primera hipótesis y se afirma que el conocimiento de la conmutatividad no conduce al descubrimiento de procedimientos de ejecución más económicos. Por otra parte y de acuerdo con la tercera hipótesis y en desacuerdo con la segunda, los niños que usan o descubren los procedimientos de contar todo a partir del mayor o contar a partir del mayor no resuelven consistentemente de modo adecuado las pruebas de conmutatividad. Es decir, el descubrimiento de la conmutatividad no es una condición necesaria para la invención de estrategias de adición que no tienen en cuenta el orden de los sumandos, sino que la invención de dichas estrategias puede ocurrir sólamente para evitar el esfuerzo mental. En otras palabras, según estos autores, los niños pueden resolver los algoritmos de adición utilizando estas estrategias para minimizar el esfuerzo del proceso de guardar registro en el conteo sin tener en cuenta ni las implicaciones de sus acciones, ni la demanda de la tarea. Estos datos vienen a confirmar el modelo de Resnick y Neches (1984) descrito en el apartado anterior. Según dicho modelo el programa genera la estrategia de contar a partir del mayor para eliminar los pasos redundantes en el proceso de cómputo.

En conclusión, el estudio de Baroody y Gannon muestra que los niños pueden no tener en cuenta el orden a la hora de ejecutar la suma, pero esto no implica necesariamnete que aprecien la conmutatividad, sino que la conmutatividad se descubre. La invención de estrategias que no tienen en cuenta el orden de los sumandos implica sólo protoconmutatividad y una concepción unitaria de la suma.

SEGUNDA PARTE: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y RESULTADOS EXPERIMENTALES

3. OBJETIVOS E HIPOTESIS

La revisión de los estudios, que en los últimos años se vienen realizando sobre la operación de sumar, pone de manifiesto como un gran número de ellos se han dirigido al análisis de los problemas verbales de adición (p. e., Carpenter y Moser, 1983; De Corte y Verschaffel, 1987b; Wolters, 1982, etc), dando lugar no sólo a la delimitación de distintas categorías de problemas verbales y grados de dificultad, sino también a formular modelos de simulación. Por el contrario, no han proliferado de igual modo los estudios relativos a las distintas propiedades de la adición. Más concretamente, tal y como señalamos en el apartado 2. 4., es muy reducido el número de trabajos que se ocupan de la propiedad conmutativa y esta carencia es aún mayor si nos referimos a su origen y desarrollo. De ahí que el trabajo que se presenta seguidamente pretenda, como objetivo general, determinar las bases sobre las que se asienta la comprensión y desarrollo de la conmutatividad. Un mejor conocimiento de los distintos pormenores y aspectos que afectan a la propiedad conmutativa, tiene un claro interés desde varios puntos de vista. En primera instancia, siguiendo la tendencia actual de la psicología evolutiva de investigar el desarrollo cognitivo en dominios específicos, estudiar la propiedad conmutativa constituye un intento más de comprender los procesos y mecanismos subyacentes al mismo. En un nivel más concreto, el análisis de esta propiedad permite obtener una comprensión más completa y profunda de los mecanismos que rigen el proceso de sumar, especialmente en lo que se refiere al modo en que se vincula dicha propiedad con los procedimientos y estrategias de resolución. Desde una óptica instructiva, tener una idea detallada de la manera en que esta propiedad va apareciendo y evolucionando y de los factores que influyen en dicho proceso, ofrece la oportunidad de establecer las correspondientes estrategias educativas, para conseguir no sólo una mejor y más temprana ejecución, sino también una mejor comprensión por parte del niño de los aspectos nucleares del proceso de sumar.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriormente mencionadas, se plantean las siguientes hipótesis generales:

HIPOTESIS 1: Se observarán diferencias evolutivas entre los grupos en cuanto al nivel de rendimiento en función del tipo de tareas, el tipo de sumandos y la presencia/ausencia del resultado.

HIPOTESIS 2: Las estrategias utilizadas por los niños a lo largo de las distintas tareas sufrirán variaciones en función de la edad, la presencia del resultado, los tipos de tarea y de sumandos.

HIPOTESIS 3: Los errores cometidos por los niños en las distintas tareas variarán en función de la edad, la presencia/ausencia del resultado, la tarea y el tipo de sumandos.

En otras palabras, se encontrarán diferencias entre los grupos en función del nivel de escolaridad, ya que a medida que éste sea más elevado aumentarán los conocimientos y experiencia del niño en torno a la adición. Dichas diferencias afectarán al tipo de estrategias y errores cometidos por los niños en los distintos factores considerados

Por lo que respecta a la propiedad conmutativa, nuestras hipótesis son:

HIPOTESIS 4: La presencia del resultado aumentará el nivel de dificultad tanto en las tareas de conmutatividad como en la tarea de resolver sumas.

Esta hipótesis parece bastante plausible, al menos en el caso de la tarea aditiva, a la luz de los datos proporcionados por otras investigaciones (p. e., Carpenter, 1986; Hiebert, 1982; Riley et al., 1983). La resolución correcta de la tarea aditiva cuando la incógnita se sitúa en el sumando inicial, comporta un alto nivel de complejidad y una concepción binaria de la suma (Weaver, 1982). Asímismo, hipotetizamos que dicha dificultad también será superior en las tareas de conmutatividad, ya que una de las operaciones no está resuelta, obligando al niño a realizar las comparaciones en función del todo en vez de las partes. Por ejemplo, en la tarea de comparar sumas cuando el resultado no se halla presente los niños se limitarán a comprobar si en las dos cuentas aparecen los mismos sumandos. Sin embargo, al incluir el resultado en una de ellas, es probable que las comparaciones entre las cuentas se realicen en función del resultado, de modo que al no figurar en una de ellas afirmen simplemente que ambas cuentas no son iguales o bien resuelvan el algoritmo incompleto.

HIPOTESIS 5: **La adquisición de la propiedad conmutativa no es un proceso de todo o nada, sino que presenta un cierto grado de evolución, de modo que el nivel de ejecución de los niños será superior en la tarea de comparar sumas (verificación) que en la tarea de encontrar el sumando desconocido (producción).**

Esto al menos es lo que parecen apuntar los resultados de otras investigaciones (Gelman y Meck, 1983; Miller, Keating y Perlmutter, 1984: Zbrodoff y Logan, 1990) que tratan sobre conceptos matemáticos elementales.

HIPOTESIS 6: La utilización de estrategias consitentes en contar empezando por el mayor (contar todo empezando por el mayor y contar a partir del mayor) en la resolución de las tareas aditivas, supone cierta competencia en la propiedad conmutativa.

A diferencia de la opinión expresada por otros autores (Baroody y Ginsburg, 1986; Resnick y Neches, 1984), que señalan que los niños inventan estas estrategias, independientemente de su conocimiento sobre la conmutatividad, nos proponemos demostrar, de acuerdo con Carpenter (1986), que el conocimiento de procedimiento no puede desvincularse del conocimiento conceptual.

HIPOTESIS 7: El fracaso del niño en ciertas tareas aditivas no se acompaña necesariamente de un fracaso en las tareas de conmutatividad, sino que en ciertas ocasiones éstas pudieran resultar más sencillas.

En otras palabras, ciertas tareas aditivas como hallar el sumando inicial o el resultado en cantidades como hechos numéricos superiores a la decena, pueden resultar muy complejas para los niños dando lugar al fracaso, sin embargo puede no ser este el caso en las tareas de conmutatividad. En estas últimas, el niño puede extraer la respuesta mediante una simple estrategia perceptiva comprobando que en las dos cuentas que ha de comparar o completar, se encuentran los mismos números. Además, la conmutatividad es tan sólo una propiedad de la adición y ésta comporta además el conocimiento de otras propiedades (i.e., identidad, asociatividad).

4. *METODO*

4. 1. SUJETOS

Participan en el estudio un total de 72 niños elegidos al azar, pertenecientes a un colegio madrileño de nivel socio-económico medio, distribuidos en tres grupos de 24 sujetos cada uno. El grupo I, está formado por niños de segundo de preescolar, cuyas edades oscilan entre los 5 - 6 años (M:5;6); en el grupo II se incluyen niños de 1º de EGB con edades comprendidas entre los 6 - 7 años (M:6;4); por último, el grupo III está compuesto por niños de 2º de EGB con edades de 7 - 8 años (M:7;6).

4. 2. MATERIAL Y PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL:

El material, lo constituyen cuadernillos en los que aparecen descritas las pruebas y un lápiz para anotar la respuesta.

El procedimiento experimental consiste en administrar las pruebas de modo individual en dos momentos distintos separados por una semana. En la primera aplicación la mitad de los sujetos de los distintos grupos resuelve las tareas en las que está presente el resultado, mientras que la otra mitad lo hace con aquellas en las que el resultado se encuentra ausente. En la segunda ocasión se invierten los términos, de manera que todos los sujetos ejecuten todas las tareas. De este modo, se evita que la duración de las pruebas sea excesiva y produzca fatiga y además se controla el posible efecto del aprendizaje de unas tareas sobre otras.

En la aplicación de las pruebas se dan instrucciones a los niños para que resuelvan una serie de tareas que les vamos a plantear. Las tareas son las incluídas en los cuadernillos que son leídas por el experimentador en voz alta. Sin limitaciones de tiempo el sujeto debe proporcionar la respuesta en unos casos verbalmente y en otros de modo escrito en función del tipo de tarea que debe resolver (producción o verificación), llevándose a cabo una filmación en vídeo de todo el proceso de ejecución para su análisis posterior. Las razones por las que las tareas son leídas directamente en vez de entregar simplemente el cuadernillo al niño son varias. En primer lugar, nos aseguramos que se produce una comprensión adecuada del enunciado del problema al acabar su lectura, ya que se formulan algunas preguntas para comprobar si se ha entendido. En segundo lugar, para evitar que el nivel de lectura influya en la ejecución de las tareas, que es esperablemente inferior en los niños de 2º de Preescolar. Finalmente, para cerciorarnos de que los más jóvenes identifican perfectamente las cantidades utilizadas en los problemas, sobre todo en la tarea de resolución de sumas, puesto que frecuentemente saben contar hasta cantidades muy elevadas sin que ello implique necesariamente su reconocimiento cuando aparecen escritas.

Las tareas propuestas son de tres tipos: 1) resolver sumas; 2) comparar sumas y 3) encontrar el sumando desconocido. La tabla 5 muestra ejemplos de cada una de estas tareas tanto cuando el resultado está presente como ausente. La primera y la tercera son tareas de producción, en las que el sujeto debe construir la respuesta; mientras que la segunda constituye una tarea de verificación en la que simplemente tiene que indicar si es verdadero o falso lo que se le propone y explicar las razones que le han llevado a tomar esa decisión.

La tarea de resolver sumas se presenta bajo la forma de problemas verbales de cambio, pero con el algoritmo ya escrito, de modo que el niño tiene que encontrar el elemento desconocido. La otra tarea de producción propuesta es la de encontrar el sumando desconocido. Se trata de una prueba de conmutatividad, también formulada verbalmente y con el algoritmo ya construído. Se presentan dos cuentas, con dos sujetos diferentes, una está completa mientras que en la otra se desconoce uno de los sumandos. Lo que se pide al niño es que determine los elementos (p.e., canicas) que

Tabla 5
Ejemplos de las tareas incluidas en el protocolo

RESULTADO AUSENTE

SUMAR:

Al principio Juan tenía estos caramelos. María le dió éstos. ¿Cuántos caramelos tienen ahora Juan en total?

1 + 13

COMPARAR SUMAS:

Luis tiene estos caramelos y Pedro tiene estos. ¿Tienen los dos el mismo número de caramelos?

1 + 16	16 + 1

ENCONTRAR SUMANDO DESCONOCIDO:

Cesar tiene estas canicas y Tomás tiene estas. ¿Cuántas canicas necesita Tomás para tener las mismas que Cesar

1 + 12	12 +

RESULTADO PRESENTE

SUMAR:

Al principio Juan tenía algunos caramelos. María le dió éstos. Ahora en total Juan tiene estos. ¿Cuántos caramelos tenía Juan al principio?

+ 13 = 14

COMPARAR SUMAS:

Luis tiene estos caramelos y Pedro tiene estos. ¿Tienen los dos el mismo número de caramelos?

1 + 16 = 17	16 + 1

ENCONTRAR SUMANDO DESCONOCIDO:

Cesar tiene estas canicas y Tomás tiene estas. ¿Cuántas canicas necesita Tomás para tener las mismas que Cesar?

1 + 12 = 13	12 +

le faltan para tener exactamente los mismos que hay en la otra cuenta, obteniéndose la solución correcta al poner en relación ambos algoritmos. La última de las tareas es la de comparar sumas. Consiste en una prueba de conmutatividad en la que el niño debe comparar pares de algoritmos conmutados, para determinar si dos sujetos tienen o no la misma cantidad de objetos

Tal como indicamos más arriba, los sujetos cumplimentan las tareas en dos sesiones, en una de ellas (primera o segunda según los sujetos) el resultado está presente y en la otra no. Esto supone que en la prueba de resolver sumas, tendrán que hallar el resultado en un caso y en el otro averiguar el primer sumando. En la prueba de encontrar el sumando desconocido, unas veces aparece el resultado en el algoritmo en que se conocen ambos sumandos y en otras no, consistiendo la tarea del niño en uno y otro caso en determinar el sumando desconocido. En la prueba de comparación, en algunas ocasiones aparece ejecutada sólo una de las sumas, mientras que en otros casos no aparece ninguna de ellas resuelta (Tabla, 5). Cuando en esta prueba no se halla presente el resultado, se les pide que resuelvan ambas cuentas en el sumando hechos numéricos, una vez contestadas las preguntas sobre conmutatividad en este mismo sumando. El objeto es comprobar si los sujetos que admiten la igualdad de las cuentas aplican este conocimiento a la resolución de las tareas aditivas cuando aparecen algoritmos conmutados. La razón por la que se realiza con el sumando hechos numéricos, reside en que en este sumando se presentan cantidades familiares para los niños de preescolar y fácilmente representables con los dedos, mientras que si eligiésemos otros sumandos es probable que las diferencias que pudieran aparecer no fueran imputables a un mayor o menor conocimiento de la propiedad conmutativa, sino a una mayor experiencia en la resolución de tareas aditivas. Además, únicamente solicitamos la resolución del algoritmo aditivo en este sumando para evitar alargar la prueba excesivamente y provocar cansancio en los niños.

En cuanto a las cantidades, se utilizan cuatro tipos de sumandos en cada tarea: 1 + N, círculos más guarismos, hechos numéricos y hechos numéricos que superan la decena. Estos sumandos son los mismos en ambas partes del experimento. En la Tabla 6, se recogen especificamente las cantidades utilizadas.

Finalmente, en cada tarea hay tres ensayos para cada tipo de sumando y se contrabalancea tanto el orden de presentación de las tareas como el de los sumandos.

El diseño experimental resultante es como sigue:

NO ESTA PRESENTE EL RESULTADO			ESTA PRESENTE EL RESULTADO		
Resolver sumas	Comparar sumas	Encontrar sumando	Resolver sumas	Comparar sumas	Encontrar sumando
1234*	1234	1234	1234	1234	1234

(* Tipo de sumandos)

Tabla 6
Cantidades específicas utilizadas en las distintas tareas.

1 + N	CIRCULOS + GUARISMO	HECHOS NUMERICOS	HECHOS NUMERICOS SUPERIORES A LA DECENA
1+13	0000000+12	3+5	5+12
1+8	000+7	2+3	6+9
1+15	00000+17	4+6	7+13
1+16	000000+13	3+6	8+11
1+7	00+6	3+4	5+8
1+11	0000+18	2+7	6+14
1+12	00000000+16	2+8	4+15
1+6	000+5	4+5	7+9
1+14	000000000+14	2+6	8+12

5. ***RESULTADOS Y DISCUSION***

5. 1. ANALISIS CUANTITATIVO GLOBAL DE RESULTADOS

El análisis de varianza 3 (Grupo: G.I vs G.II vs G.III) 2 (Resultado: presencia vs ausencia del resultado) x 3 (Tareas: resolver sumas vs comparar sumas conmutativas vs encontrar el sumando desconocido) x 4 (Sumandos: 1+N vs círculos+guarismo vs hechos numéricos vs hechos numéricos superiores a la decena) con medidas repetidas en los tres últimos factores y llevado a cabo mediante el programa BMDP (2V), muestra que son significativos los efectos principales de los factores grupo ($F_{2,69}$= 19.88, p=0.0000), tipo de tarea ($F_{2,138}$=10.46, p< 0.0001) , presencia-ausencia del resultado ($F_{1,69}$= 80.32, p<0.0000) y el tipo de sumandos ($F_{3,207}$=7, p<0.0002). Por tanto y como podemos observar en la tabla de medias (Tabla, 7) existen diferencias entre los grupos, de modo que las medias más altas corresponden al grupo de los mayores, siguiéndoles a continuación los de 1º de EGB y, por último, los preescolares. Además, los niños se comportan de modo diferente en las dos situaciones experimentales de presencia/ausencia del resultado, alcanzando una puntuación superior en este último caso. Las tres tareas propuestas dan lugar a respuestas significativamente distintas y

Tabla 7

Medias (X) y Desviaciones típicas (DT) del ANOVA.

		AUSENCIA DEL RESULTADO												PRESENCIA DEL RESULTADO											
TAREAS		1*				2				3				1				2				3			
SUMANDOS		1**	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
GRUPOS																									
6,I	X	1,1	,6	2,3	,5	1,9	2,5	2	2,1	2,3	2,3	2,2	2,1	,2	,1	,4	,4	,7	,9	,5	,6	,8	1	,9	,7
	DT	1,3	1,1	,8	1,1	1,3	1,1	1,4	1,3	1,1	1,1	1,3	1,4	,8	,6	,9	1,2	1,2	1,4	1,1	1,2	1,3	1,3	1,3	1,3
6,II	X	2,6	2	2,6	2,4	2,4	2,6	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7	2,7	1,5	1,1	1,4	1,1	1	1,4	1,1	1,2	1,4	1,9	1,4	1,4
	DT	,9	,9	,9	1,1	1,2	1,2	1,1	1,1	1,1	,7	,8	,8	1,5	1,5	1,4	1,3	1,4	1,4	1,4	1,5	1,5	1,4	1,5	1,5
6,III	X	2,9	2,4	2,9	2,3	2,7	2,7	2,7	2,7	2,8	2,7	2,9	2,9	2,4	1,4	2,2	2,1	2	2,1	2,1	2,1	2,5	2,3	2,6	2,4
	DT	,3	,9	,2	1,1	,8	,8	,8	,8	,6	,7	,6	,6	1,2	1,4	1,3	1,2	1,4	1,4	1,4	1,4	1,1	1,1	1,1	1,2

La puntuación máxima es 3

* 1: resolver sumas, 2: comparar sumas, 3: encontrar sumando desconocido

** 1: 1+N, 2: círculos + guarismo, 3: hechos numéricos, 4: hechos numéricos superiores a la decena asímismo, el tipo de sumandos (tamaño de las cantidades) influye en los resultados obtenidos.

El análisis de varianza indica que son significativas las siguientes interacciones dobles: grupo x presencia del resultado ($F_{2,69}=3.82$, $p<0.02$), grupo x tarea ($F_{4,138}=2.57$, $p<0.04$), grupo x tipo de sumandos ($F_{6,207}=4.28$, $p<0.0004$), tarea x tipo de sumandos ($F_{6,414}=18.49$, $p<0.0000$). Igualmente son significativas las siguientes interacciones triples: grupo x tipo de tarea x tipo de sumandos ($F_{12,414}=2.16$, $p<0.01$), presencia del resultado x tipo de sumandos x grupo ($F_{6,207}=2.58$, $p<0.01$), presencia del resultado x tipo de tarea x tipo de sumandos ($F_{6,414}= 4.07$, $p<0.0006$), así como la interacción cuadruple presencia del resultado x tipo de tarea x tipo de sumandos x grupo ($F_{12,414}=3.13$, $p<0.0003$). El análisis de las interacciones se realiza mediante las comparaciones de interacción con la prueba de Scheffé. El objetivo de esta prueba radica en aislar las comparaciones entre las medias que, por ser significativas, influyen en que la interacción resulte significativa. A la hora de ejecutar dicho análisis seguimosdos criterios: en primer lugar, analizamos únicamente las interacciones triples descartando las dobles y la cuadruple para evitar repeticiones innecesarias y porque resulta más clara la exposición de resultados a partir de éstas; en segundo lugar, en cada una de estas interacciones triples realizamos las comparaciones que desde el punto de vista teórico eran de mayor interés, procurando siempre progresar desde las más generales , que nos proporcionan una información más global, a las comparaciones más específicas, que nos permiten extraer información más detallada.

5.1.1. Análisis de las relaciones entre los factores grupo, tipo de tarea y tipo de sumandos

Respecto a la interacción grupo x tipo de tarea x tipo de sumandos (AxCxD) efectuamos dos tipos de comparaciones de interacción (Anexo, 1): entre los distintos niveles del factor grupo en los factores tipo de tarea y tipo de sumandos y comparaciones de interacción entre los distintos niveles de los factores tipo de tarea y tipo de sumandos en el factor grupo. En cuanto a las primeras, encontramos diferencias significativas entre G.I y G.II en relación a las tareas y el tipo de sumandos ($F_{1,414}$ =4.33, $p < 0.01$) y entre el G.I y G.III ($F_{1,414}$=4.07, $p < 0.01$), pero no entre el G.II y G.III ($F_{1,414}$=0.85) en esos mismos factores. Estos datos parecen indicar, por un lado, que el comportamiento del G.I en los factores tarea y sumandos difiere significativamente del G.II y el G.III y, por otro lado, que no existen diferencias significativas entre estos dos últimos grupos en esos factores. En efecto, el análisis de la tabla 8, revela que los niveles de ejecución del G.III son sensiblemente superiores a los del G.I a lo largo de las distintas tareas y tipos de sumandos y que estas diferencias, aunque se mantienen para el G.II no son tan dispares.

Tabla 8
Medias y sumatorios correspondientes a la interacción A (Grupo) x C (tarea) x D (Tipo de sumandos)

		C1D1	C1D2	C1D3	C1D4	C2D1	C2D2	C2D3	C2D4	C3D1	C3D2	C3D3	C3D4
A1	$\bar{X}$	0,73	0,4	1,38	0,46	1,31	1,69	1,27	1,38	1,58	1,67	1,54	1,44
	Σ	25	19	66	22	63	81	61	66	76	80	74	69
A2	$\bar{X}$	2,06	1,56	2,02	1,79	1,71	1,98	1,77	1,92	2	2,35	2,04	2,08
	Σ	99	75	97	86	82	95	85	92	96	113	98	100
A3	$\bar{X}$	2,65	1,9	2,56	2,21	2,38	2,42	2,44	2,4	2,67	2,52	2,75	2,63
	Σ	127	91	123	106	114	116	117	115	128	121	132	126

A1= Grupo 1; A2= Grupo 2; A3= Grupo 3

C1= Resolver sumas; C2= Comparar sumas; C3=encontrar el sumando desconocido

D1= 1 + N; D2= círculos + guarismos; D3= hechos numéricos; D4= hechos numéricos superiores a la decena

Estos datos son completados a la luz del análisis de las interacciones entre los distintos niveles de los factores tipo de tarea y tipo de sumandos en el factor grupo. Así, dichos análisis apuntan diferencias significativas entre la tarea de resolver sumas y la tarea de comparar sumas conmutativas ($F_{2,414}=17.52$, $p<0.01$) y entre la tarea de resolver sumas y la tarea de encontrar el sumando desconocido ($F_{2,414}=12.39$, $p<0.01$), pero no entre las tareas de conmutatividad, esto es, la tarea de comparar sumas y la de encontrar el sumando desconocido ($F_{2,414}=0.68$). Como podemos constatar en la tabla 8 no parecen existir diferencias sobresalientes entre las tareas de conmutatividad, a pesar de que el rendimiento de los niños de los distintos grupos es ligeramente superior en la tarea de encontrar el sumando desconocido, tanto en relación a la prueba de comparar sumas como en relación a la prueba de resolver sumas.

En resumen, hasta aquí los datos expuestos parecen indicar que la interacción grupo x tarea x tipo de sumandos se debe a dos cosas: por un lado, a que existen diferencias significativas entre el grupo de preescolar y los grupos de EGB en los factores tipo de tarea y tipo de sumandos, y por otra, resultan igualmente significativas las diferencias entre las tareas de resolver sumas - comparar sumas conmutativas y resolver sumas - encontrar el sumando desconocido, siendo más fácil en todos los casos las tareas de conmutatividad. Ahora bien, resta por determinar entre que tareas y sumandos concretamente se producen las diferencias entre los grupos. Para ello, realizamos dos tipos de contrastes de interacción también con la prueba de Scheffé: a) entre los distintos niveles de los factores grupo y tipo de tarea, asignando el mismo peso a todos los sumandos, y b) entre los distintos niveles de los factores grupo y tarea en cada uno de los sumandos (Anexo, 1). Los resultados en el primer tipo de comparaciones, indican la existencia de diferencias significativas para las tareas de resolver sumas y comparar sumas entre el G.I y el G.II ($F_{1,414}$=29.20, $p<0.01$), el G.I y G.III ($F_{1,414}$=21.98, $p<0.01$), pero no entre los grupos de EGB en estas mismas tareas. Es decir, la evolución de las puntuaciones de los niños de EGB en ambas tareas son similares, mientras que no sucede lo mismo en el caso de los preescolares a los que les resulta más fácil la tarea de comparar sumas. De igual modo, los contrastes de interacción de las tareas de resolver sumas y encontrar el sumando desconocido ponen de manifiesto que son significativas las diferencias entre el G.I y el grupo G.II ($F_{1,414}$= 19.81, $p<0.01$) y entre el G.I y G.III ($F_{1,414}$= 16.43, $p<0.01$). En efecto, como podemos constatar en la Tabla de medias (Tabla 8) en el G.I los niños resuelven mejor la tarea de comparar sumas que la tarea de resolver sumas excepto en el sumando hechos numéricos, sin embargo en el G.II el rendimiento en la tarea de conmutatividad llega a ser ligeramente inferior en los sumandos 1+N y hechos numéricos, mientras que en el G.III el comportamiento de los niños es prácticamente igual en ambas tareas, aunque desciende ligeramente el nivel de rendimiento en la tarea de resolver sumas en el sumando círculos más guarismos. Finalmente, no resultan significativas las diferencias entre las tareas de conmutatividad con respecto a los grupos, de modo que las puntuaciones obtenidas por el G.I en ambas tareas son similares, así como las del G.II y del G.III. No obstante, en el G.I los niveles de ejecución son superiores en la tarea de encontrar el sumando desconocido tanto en relación con la tarea de resolver sumas como de comparar sumas y estas diferencias se mantienen en el G.II y G.III en todos los sumandos.

En contra de nuestra hipótesis inicial, aunque no alcance el nivel de significatividad, en presencia del resultado los niños de todos los grupos ejecutan peor las tareas de comparar sumas que las de encontrar el sumando desconocido, a pesar de que se trata esta última de una tarea de producción y no se presenta bajo la forma canónica. Además, cuando aplicamos la Q de Yule para ver el grado de asociación entre las tareas de conmutatividad en cada uno de los grupos, tomando separadamente cada sumando y en el factor presencia del resultado (Tablas 9 y 10), se observa que en la condición presencia del resultado, la tarea de encontrar el sumando desconocido se desarrolla

Tabla 9
Resultados de la aplicación de la Q de Yule entre las tareas de comparar sumas - encontrar sumando desconocido, en presencia del resultado, para cada uno de los sumandos y en cada grupo.

	G,I								G,II								G,III							
SUMANDOS	1*		2		3		4		1		2		3		4		1		2		3		4	
	C,-	C,+	C,-	C,+	C,-	C,+	C,-	C,+	C,-	C,+	C,-	C,+	C,-	C,+	C,-	C,+	C,-	C,+	C,-	C,+	C,-	C,+	C,-	C,+
E,-	51	5	43	5	50	0	51	3	36	3	21	4	36	3	32	6	9	3	10	6	9	0	11	4
E,+	1	15	8	16	9	13	6	12	12	21	18	29	11	22	10	24	15	45	12	44	12	51	12	45
Q	,99		,89		1		,94		,91		,79		,92		,85		,8		,72		1		,82	
Logg-odds	1,3		-,43		-2,9		-,62		-1,27		-1,41		-1,19		-,48		-1,49		-,65		-3,2		-1,02	

(C; comparar sumas, E; encontrar sumando desconocido)
* 1; 1+N, 2; círculos + guarismo, 3; hechos numéricos, 4; hechos numéricos superiores a la decena

antes en todos los grupos y en todos los sumandos, salvo en el G. I en el sumando 1+N.

En ausencia del resultado, se presentan estos mismos datos en el G. III y en los sumandos círculos+guarismo y hechos numéricos en el G. II; en el G. I no existe asociación entre estas tareas en ninguno de los sumandos. Esto significa, que la propiedad conmutativa surge antes en la tarea de encontrar el sumando desconocido al menos en presencia del resultado y en algunos sumandos y grupos en ausencia del mismo. La superioridad obtenida en esta prueba puede venir determinada porque es el propio niño el que ha de establecer la igualdad, mientras que en la de comparar fracasan porque se limitan a verificar que estén los mismos números y como en una de las cuentas no aparece el resultado simplemente no admiten la igualdad sin comprobar siquiera el resultado.

Tabla 10
Resultados de la aplicación de la Q de Yule entre las tareas de comparar sumas - encontrar sumando desconocido, en ausencia del resultado, para cada uno de los sumandos y en cada grupo.

	6,I							
SUMANDOS	1*		2		3		4	
	C,-	C,+	C,-	C,+	C,-	C,+	C,-	C,+
E,-	8	8	5	11	8	12	8	13
E,+	17	39	7	49	16	36	13	38
Q	,39		,52		,2		,2	
Logg-odds			,43					

	6,II							
SUMANDOS	1		2		3		4	
	C,-	C,+	C,-	C,+	C,-	C,+	C,-	C,+
E,-	3	6	0	6	3	4	1	5
E,+	11	52	10	56	9	56	9	57
Q	,4		-1		,65		,12	
Logg-odds			-,48		-,75			

	6,III							
SUMANDOS	1		2		3		4	
	C,-	C,+	C,-	C,+	C,-	C,+	C,-	C,+
E,-	3	1	3	4	3	0	3	0
E,+	3	65	3	62	3	66	3	66
Q	,97		,88		1		1	
Logg-odds	-,85		,25		-1,94		-1,94	

(C; comparar sumas, E; encontrar sumando desconocido)
* 1; 1+N, 2; círculos + guarismo, 3; hechos numéricos, 4; hechos numéricos superiores a la decena

Por lo que hace referencia a los contrastes de interacción entre los distintos niveles de los factores grupo y tareas en cada uno de los sumandos, hallamos diferencias significativas entre los grupos I y II ($F_{1,414}$= 9.85, p<0.01) y I-III ($F^{1,414}$= 10.88, p<0.01) en las tareas de resolver sumas - encontrar el sumando desconocido en el sumando 1+N; entre los grupos I-II ($F_{1,414}$= 11.95, p<0.01) y I-III ($F_{1,414}$= 9.36, p<0.01) en las tareas de resolver sumas - comparar sumas en el sumando círculos+guarismo y también para este mismo sumando entre los grupos I-III ($F_{1,414}$= 6.67, p<0.01) en las tareas resolver sumas - encontrar el sumando desconocido. En el sumando hechos numéricos superiores a la decena, alcanzan la significatividad las diferencias entre los grupos I-II ($F_{1,414}$= 9.85, p<0.01) y I-III ($F_{1,414}$= 8.41, p<0.01) en las tareas resolver sumas - comparar sumas y entre los grupos I-II (F1,414= 7.52, p<0.01) y I-III (F1,414= 4.95, p<0.5) en las tareas resolver sumas - encontrar el sumando desconocido. Por último, no se encuentran diferencias significativas entre los grupos en los distintos niveles del factor tarea en el sumando hechos numéricos, lo que parece indicar que el nivel de ejecución de los niños en este tipo de sumandos es similar a lo largo de las distintas tareas y los grupos. Ello se debe a que los niños de preescolar están acostumbrados a tratar con este tipo de sumandos en las tareas aditivas y además pueden representarlos fácilmente con los dedos; por su parte los de EGB saben el resultado de memoria sin necesidad de operar.

El nivel de análisis aquí alcanzado no sólo nos permite reafirmar nuestras conclusiones anteriores, sino también precisarlas y ampliarlas. A este respecto y según se desprende de nuestros datos, las diferencias entre los grupos I-II y I-III se producen en las tareas de resolver sumas-comparar sumas y resolver sumas-encontrar el sumando desconocido, pero no entre las tareas de conmutatividad en ninguna de las comparaciones entre los grupos, si bien estas últimas, sobre todo la tarea de encontrar el sumando desconocido, resultan ser las más sencillas en todos los grupos. Además y a un nivel más específico, hemos localizado las diferencias entre esos mismos grupos y tareas en los sumandos 1+N, círculos+guarismo y hechos numéricos superiores a la decena. En suma, estos resultados ponen de manifiesto dos cosas. Por un lado, el rendimiento de los niños en los diferentes grupos de edad se ve afectado por los factores tarea y sumandos, apreciándose diferencias evolutivas entre el grupo de preescolar y los de EGB. Por otro lado, las puntuaciones obtenidas en las tareas de conmutatividad son similares entre los grupos, son más fácilmente solucionadas por todos los sujetos de la muestra y, en general, para todos los sumandos, sobre todo la tarea de encontrar el sumando desconocido. En otras palabras, la mayoría de los sujetos participantes en este estudio, resuelven con mayor facilidad las tareas de conmutatividad que la tarea de resolver sumas. En esta línea, caben al menos dos interpretaciones posibles, que desde nuestro punto de vista son complementarias. En primer lugar, el fracaso de los niños en la tarea aditiva puede ser debido bien a que poseen mayor competencia en la suma de la que realmente manifiestan, bien a que no disponen de un esquema de adición suficientemente desarrollado. En el primer caso, dicho fracaso se relacionaría con la carencia de procedimientos de ejecución suficientemente elaborados, al menos en las tareas aditivas que no se acomodan a la forma canónica. En segundo lugar y en contra de lo que viene siendo práctica habitual en nuestro marco escolar, los niños parecen demostrar cierta competencia respecto a la propiedad conmutativa antes de que se enseñe en el Ciclo Inicial, generalmente en 3º de EGB, que les permite resolver ciertas tareas de conmutatividad como comparar sumas y encontrar el sumando desconocido. Dicha competencia, puede tener sus orígenes en el principio de irrelevancia del orden en el conteo, mediante el cual el niño descubre que el cardinal de un conjunto no varía independientemente del modo en que contemos los elementos del mismo (Baroody y Gannon, 1984). Posteriormente y de acuerdo con Baroody (1986) aplicaría este conocimiento a la adición , dándose cuenta de que los cardinales que representan los sumandos son iguales en una y otra cuenta. Por tanto y teniendo en cuenta los datos del presente estudio, no parece indicado iniciar la enseñanza de la propiedad conmutativa en el momento en que los niños disponen de un amplio conocimiento sobre la adición, sino que debería hacerse conjuntamente con ésta, diseñando tareas que impliquen distintos niveles de complejidad. En el presente estudio hemos sugerido dos: comparar sumas y encontrar el sumando desconocido, esperemos que la investigación futura ofrezca muchas más. La adquisición progresiva de la propiedad conmutativa permitirá al niño el acceso a una concepción binaria de la suma (Weaver, 1982), de modo que la suma represente la combinación de dos conjuntos, no afectando para nada al resultado el orden en que se les combine y, en consecuencia, la comprensión de la suma en términos partes-todo (Briars y Larkin, 1984; Riley, Greeno y Heller, 1983; Resnisck, 1983). Es decir, no basta con que el niño identifique las partes y el todo en un problema aditivo y en un algoritmo, además ha de saber que el modo en que se combinen las partes no afecta al resultado, esto es, la propiedad conmutativa, ya que de otro modo pueden resultar dificultosos los avances en el conocimiento de procedimiento hacia estrategias como contar a partir del mayor de los sumandos.

En suma, de acuerdo con Baroody, Ginsburg y Waxman (1983) parece existir un cierto nivel de conocimiento de la conmutatividad previo a la consecución de un concepto completo y elaborado. Dicho nivel es lo que ellos denominan protoconmutatividad y consistiría en que los niños admiten que los sumandos pueden ser intercambiados a la hora de efectuar la suma, pero produciendo diferencias en el cómputo total o resultado. Con posterioridad y como resultado de la experiencia desarrollan un concepto genuino de la conmutatividad, que es descubierto por el niño y no se halla ligado a la utilización de estrategias aditivas más avanzadas. Desde nuestro punto de vista, existen otros niveles además de los señalados por estos autores en relación con la conmutatividad, que dependiendo del nivel de dificultad de la tarea posibilitará o no la puesta en marcha del nivel de competencia real de los niños. Además en contra de lo defendido por estos autores, consideramos que este conocimiento inicial de la propiedad conmutativa, facilitará la adquisición de procedimientos aditivos más complejos, como contar a partir del mayor y reducirá el aprendizaje de hechos numéricos. No obstante, dejaremos la discusión de estos aspectos para más adelante a la luz de los datos proporcionados por el análisis de las interacciones presencia-ausencia del resultado x tarea x tipo de sumandos (BxCxD) y presencia-ausencia del resultado x grupo x tipo de sumandos (BxAxD).

5.1.2. Análisis de las relaciones entre los factores presencia/ausencia del resultado tarea y sumandos

En cuanto a la interacción presencia del resultado x tarea x tipo de sumandos (BxCxD), podemos afirmar en general que existen diferencias en los niveles de ejecución de los niños en el factor presencia/ausenica del resultado respecto a los factores tipo de tarea y tipo de sumandos. Así, tal y como se puede observar en la tabla 11, el rendimiento es sensiblemente superior cuando el resultado no se halla presente en todas las tareas y en todos los sumandos.

Más específicamente, las comparaciones de interacción (Anexo 1) entre los distintos niveles del factor tipo de tarea, asignando el mismo peso a los sumandos, en el factor presencia del resultado, apuntan diferencias significativas entre la tarea de resolver sumas y comparar sumas ($F_{1,414}=$ 8.55, $p<0.01$) y aún cuando resulta más sencilla la tarea de conmutatividad, tanto en presencia como en ausencia del resultado, las distancias entre las puntuaciones medias en esta prueba en ambas condiciones son mayores que en la de resolver sumas. Por otro lado, las comparaciones de interacción entre las tareas de resolver sumas - encontrar el sumando desconocido y comparar sumas - encontrar el sumando desconocido no arrojan diferencias significativas. En efecto, las puntuaciones medias en las tareas de resolver sumas y encontrar el sumando desconocido, evolucionan de modo similar, es decir, las distancias entre las puntuaciones medias son semejantes, mientras que en la tarea de comparar sumas se hace mayor en relación a las otras dos tareas, aunque únicamente alcance la significatividad en comparación con la tarea de resolver sumas (Tabla 11).

Tabla 11
Medias y sumatorios correspondientes a la interacción B (presencia/ausencia del resultado) x C (Tareas) x D (Tipo de sumando)

		C1D1	C1D2	C1D3	C1D4	C2D1	C2D2	C2D3	C2D4	C3D1	C3D2	C3D3	C3D4
B1	$\bar{X}$	2,22	1,67	2,61	1,76	2,38	2,61	2,42	2,49	2,6	2,6	2,58	2,58
	Σ	160	120	188	127	171	188	174	179	187	187	186	186
B2	$\bar{X}$	1,4	0,9	1,36	1,21	1,22	1,44	1,24	1,31	1,57	1,76	1,64	1,51
	Σ	101	65	98	87	88	104	89	94	113	127	118	109

B1= Ausencia del resultado; B2= Presencia del resultado
C1= Resolver sumas; C2= Comparar sumas; C3=encontrar el sumando desconocido
D1= 1 + N; D2= círculos + guarismos; D3= hechos numéricos; D4= hechos numéricos superiores a la decena

Por otro lado, tratamos de averiguar si existen diferencias entre las tareas en el factor presencia/ausencia del resultado en cada uno de los sumandos, lo que nos induce a realizar dos tipos de comparaciones. Las primeras consisten en comparaciones de interacción entre las tareas tomadas dos a dos y agrupando las de conmutatividad frente a la tarea de resolver sumas, tomando los sumandos dos a dos ; las segundas son iguales si exceptuamos el hecho de que ahora las comparaciones se efectúan en cada uno de los sumandos. En cuanto al primer tipo, no existen diferencias significativas en ningún caso. En el segundo tipo, encontramos diferencias significativas únicamente en el sumando hechos numéricos superiores a la decena entre las tareas resolver sumas - comparar sumas ($F_{1,414}$= 8.002, $p<0.01$), resolver sumas - encontrar el sumando desconocido ($F_{1,414}$= 5.23, $p<0.05$) y resolver sumas - tareas de conmutatividad consideradas conjuntamente ($F_{1,414}$= 8.78, $p<0.01$). En consecuencia, el patrón de ejecución de los niños en el factor presencia/ausencia del resultado es parecido en los sumandos 1+N, círculos+guarismo y hechos numéricos, cuando comparamos las tareas entre si. En otras palabras, no existen diferencias significativas entre las tareas en los sumandos 1+N, círculos+guarismo y hechos numéricos, ya que las distancias entre las puntuaciones en el factor presencia/ausencia del resultado son semejantes en unas tareas y otras, mientras que en el sumando hechos numéricos superiores a la decena la distancia entre las puntuaciones se hace menor en la tarea de resolver sumas, por lo que al comparar esa tarea con las otras dos alcanza el nivel de significatividad. Así pues, la mayor parte de los sujetos que consiguen resolver con éxito la prueba de sumar con la incógnita en el resultado en el sumando hechos numéricos superiores a la decena, obtienen también éxito en esa misma tarea cuando la incógnita se sitúa en el sumando inicial. Ello se debe a que la solución correcta de estas tareas aditivas exige un alto nivel de conocimiento conceptual de la adición y el despliegue de estrategias complejas como contar a partir del sumando mayor para calcular la suma total y contar desde el sumando conocido hasta el resultado para hallar el sumando desconocido; esto es, el niño ha de conocer no sólo que el orden en que se efectúa la suma no altera el resultado final, sino también que el resultado final representa la combinación de dos conjuntos y que conociendo uno de ellos es posible descubrir el otro simplemente contando desde éste hasta el resultado total. En efecto, tan sólo un sujeto en el G. I en los tres ensayos y tres en el G. III en al menos un ensayo ejecutan mejor esta tarea cuando tienen que hallar el sumando inicial. Además, los sujetos que resuelven esta misma tarea en el sumando hechos numéricos superiores a la decena obtienen éxito tanto en el sumando 1+N como en hechos numéricos. En concreto, en el G.I todos los sujetos que ejecutan correctamente la tarea de resolver sumas con la incógnita en un sumando lo hacen igualmente en 1+N; en los grupos II y III tan sólo dos sujetos en cada grupo y únicamente en un ensayo la solucionan mejor en el sumando hechos numéricos superiores a la decena.

Por otro lado, la mayoría de los sujetos que resuelven correctamente la tarea de sumar en sus dos versiones (i. e., con y sin el resultado), tienen éxito en alguno de los ensayos de las pruebas de comparar sumas y encontrar el sumando desconocido, tanto en el sumando hechos numéricos superiores a la decena como en todos los demás. A este respecto, en ausencia del resultado, todos los sujetos del grupo de los más pequeños que efectúan correctamente la tarea de sumar lo hacen asímismo en las tareas de conmutatividad en al menos algunos ensayos. En los grupos de EGB se produce el mismo fenómeno a excepción de algunos casos. Específicamente, en el G. II dos sujetos resuelven correctamente la tarea de encontrar el sumando desconocido así como la de sumar, pero incorrectamente la de comparar sumas en los tres ensayos en todos los sumandos y además, en este mismo grupo un sujeto resuelve mal ambas tareas de conmutatividad en todos los sumandos. En el G. III se produce una situación similar, ya que encontramos un sujeto que soluciona mal tanto la prueba de encontrar como la de comparar en cada uno de los sumandos en todos los ensayos y otro sujeto, que realiza incorrectamente la tarea de comparar en todos los sumandos y en todos los ensayos. En presencia del resultado, hay una coincidencia general, ya que un sujeto del G. I resuelve bien la tarea de sumar en el sumando hechos numéricos superiores a la decena, pero mal la tarea de comparar en todos los sumandos y otro mal ambas tareas de conmutatividad. En el G.II hay dos sujetos que resuelven mal la de comparar y bien la de encontrar el sumando desconocido en todos los ensayos y en todos los sumandos, dos que ejecutan mal ambas tareas en todos los ensayos y en todos los sumandos y uno que realiza mal un ensayo en la prueba de encontrar en el sumando hechos numéricos superiores a la decena. En el G. III un sujeto soluciona mal la tarea de comparar y otro ambas tareas de conmutatividad.

En suma, los resultados procedentes del análisis de la interacción presencia del resultado x tarea x tipo de sumandos, permiten concluir lo siguiente. En primer lugar y de acuerdo con nuestra hipótesis (4), el factor presencia del resultado afecta al nivel de éxito de los sujetos en el factor tarea, en el sentido de que cuando el resultado se halla presente el nivel de éxito desciende en todas las tareas y en todos los sumandos. Todo ello, pone de manifiesto que la competencia de los niños en la suma y la propiedad conmutativa se presenta primeramente en situaciones en las que el resultado no se encuentra presente. En efecto, varios estudios (p. e., Carpenter, 1986; De Corte y Verschaffel, 1981; Grouws, 1972; Hirstein, 1979; Rosenthal y Resnick, 1974; Riley et al., 1983) indican que las tareas de adición en las que la incógnita se sitúa en uno de los sumandos son más difíciles de solucionar, que cuando lo hace en el resultado y esta dificultad es aún mayor cuando se encuentra en el sumando inicial . Weaver (1982) explica este fracaso aludiendo a la falta de un esquema binario para la adición. Además, consideramos que el bajo rendimiento en las tres tareas cuando el resultado se halla presente se relaciona con el desconocimiento por parte de los sujetos de la función del signo igual. En este sentido, numerosos estudios (Baroody y Ginsburg, 1983; Behr, Erlwanger y Nichols, 1976; Kieran, 1981, etc) apuntan que el fracaso de los niños en algunas tareas de adición pueden deberse a que otorgan a este símbolo matemático un sentido de operador, es decir, se interpreta como un signo de "suman" o "hacen un total de..". En el presente estudio tal desconocimiento se evidencia en los errores cometidos por los niños en las tres tareas, ya que consisten, como veremos más adelante en el apartado correspondiente al análisis de los errores, en el caso de la suma en repetir una de las cantidades ya dadas: bien el resultado, bien el sumando conocido. En la prueba de encontrar el sumando desconocido, aparece un error similar que estriba en atribuir el resultado de la suma en una de las cuentas como sumando desconocido en la otra. Finalmente, en la tarea de comparar sumas conmutativas los niños no admiten la igualdad porque una de las operaciones no está resuelta y es precisamente en esta tarea donde se deja sentir más la presencia del resultado en relación con las otras dos tareas, aunque únicamente alcanza la significatividad en comparación con la tarea de resolver sumas. Es decir, en la tarea de comparar cuando el resultado no se halla presente, los niños no tienen inconveniente en aceptar la igualdad afirmando en general que los sumandos son iguales , pero en el momento en que una de las cuentas aparece resuelta, no admiten la igualdad simplemente indicando que no están los mismos números.

La segunda de las conclusiones que se derivan del análisis de esta interacción triple es que con excepción del sumando hechos numéricos superiores a la decena, las distancias entre las puntuaciones medias son semejantes en los restantes sumandos, cuando comparamos las tareas entre si. Además, el análisis de las frecuencias de sujetos que resuelven correctamente la tarea de sumar en el factor presencia/ausencia del resultado, revela que la mayoría de estos sujetos ejecutan correctamente las tareas de conmutatividad. Aunque también es cierto que una buena parte de los sujetos que obtienen éxito en las tareas de conmutatividad, no lo tienen en las tareas de resolver sumas. En otras palabras, la solución correcta de las tareas aditivas se acompaña generalmente de la ejecución correcta de alguno de los ensayos en las tareas de conmutatividad, pero asímismo los niños parecen demostrar mayor competencia en las tareas de conmutatividad que en las sumas, ya que el rendimiento es superior en aquellas, al menos en ciertas condiciones. Esto confirma nuestra hipótesis de que el fracaso en ciertas tareas aditivas no se acompaña necesariamnete de un fracaso en las tareas de conmutatividad, sino que en ciertas ocasiones éstas pudieran resultar más sencillas, como por ejemplo, en presencia del resultado.

5.1.3. Análisis de las relaciones entre los factores presencia/ausencia del resultado, grupo y sumandos.

Por último, en lo que se refiere a la interacción presencia del resultado x grupo x tipo de sumandos (BxAxD), en un nivel más general, llevamos a cabo comparaciones de interacción (Anexo, 1) entre los distintos niveles del factor grupo, asignando el mismo peso a los sumandos, en el factor presencia/ausencia del resultado. Los resultados muestran diferencias significativas entre los grupos I-III ($F_{1,207}$= 28.71, $p<0.01$) y II-III ($F_{1,207}$= 26.9, $p<0.01$), pero no entre los grupos I y II. Estos datos indican que los sujetos del grupo III obtienen puntuaciones similares tanto en presencia como en ausencia del resultado, mientras que los sujetos del G. I presentan diferencias y obtienen un éxito superior en ausencia del resultado. Igualmente, los sujetos del G. II en comparación con el G. III, presentan medias superiores en la condición ausencia del resultado (Tabla 12). Finalmente, la distancia entre las puntuaciones medias en presencia del resultado y en ausencia del mismo, es constante en los grupos I y II. En resumen, el factor presencia del resultado afecta especialmente al nivel de rendimiento de los niños del G. I y G. II.

Tabla 12
Medias y sumatorios correspondientes a la interacción B (Ausencia/presencia del resultado) x A (Grupo) x D (Tipo de sumandos)

		A1D1	A1D2	A1D3	A1D4	A2D1	A2D2	A2D3	A2D4	A3D1	A3D2	A3D3	A3D4
B1	$\bar{X}$	1,81	1,82	2,15	1,6	2,56	2,44	2,6	2,58	2,83	2,61	2,86	2,65
	Σ	130	131	155	115	184	176	187	186	204	188	206	191
B2	$\bar{X}$	0,61	0,68	0,64	0,58	1,29	1,49	1,29	1,28	2,29	1,94	2,31	2,17
	Σ	44	49	46	42	93	107	93	92	165	140	166	156

A1= Grupo 1; A2= Grupo 2; A3= Grupo 3
B1= Ausencia del resultado; B2= Presencia del resultado
D1= 1 + N; D2= círculos + guarismos; D3= hechos numéricos;
D4= hechos numéricos superiores a la decena

Por otra parte, el análisis de las comparaciones de interacción entre los grupos en cada uno de los sumandos, en el factor presencia/ausencia del resultado, revela que existen diferencias significativas entre los grupos I y III ($F_{1,207}$= 7.04, p<0.01), II y III ($F_{1,207}$= 9.02, p<0.01) en el sumando 1+N. Asímismo alcanzan la significatividad las comparaciones entre los grupos I y III ($F_{1,207}$= 14.89, p<0.01) en el sumando círculos+guarismo, entre los grupos II y III ($F_{1,207}$= 9.33, p<0.01) en el sumando hechos numéricos y, finalmente, entre los grupos I y III ($F_{1,207}$= 4.71, p<0.01) y entre los grupos II y III

($F_{1,207}$= 10.86, $p<0.01$) en el sumando hechos numéricos superiores a la decena.

En conclusión y de acuerdo con nuestra hipótesis (1) existen diferencias evolutivas entre los grupos I y II respecto al grupo III en el factor presencia/ausencia del resultado. Dichas diferencias se manifiestan específicamente en los sumandos 1+N, círculos+guarismo y hechos numéricos.

5.2. ANALISIS DE ESTRATEGIAS

5.2.1. Las estrategias aditivas

En este apartado llevaremos a cabo, en primer lugar, un análisis pormenorizado de los procedimientos de ejecución utilizados por los niños en la resolución de las tareas aditivas cuando la incógnita se sitúa en el resultado. Dicho análisis nos permitirá examinar, por un lado, hasta que punto el tipo de sumandos determina la selección de dichos procedimientos y establecer, por otro, diferentes niveles evolutivos en relación con las estrategias de resolución. En segundo lugar y para finalizar este apartado, pasaremos a considerar estos mismos aspectos y en esta misma tarea, pero con la diferencia de que ahora la incógnita se halla en el sumando inicial.

5.2.1.1. ANALISIS DE LAS ESTRATEGIAS ADITIVAS CUANDO LA INCOGNITA SE SITUA EN EL RESULTADO

En la tarea de resolver sumas con la incógnita en el resultado y siguiendo de cerca los estudios de Carpenter y Moser (1983, 1984), identificamos las tres categorías de estrategias propuestas por estos autores, a saber: modelado directo, conteo y hechos numéricos. La estrategia de modelado directo aparece fundamentalmente en 2º de Preescolar (32.64% de los ensayos) y llega a ser prácticamente inexistente en el grupo II (13.08% de los ensayos) y III (4.76% de los ensayos) (Tabla 13). Las estrategias de conteo son las más frecuentes, en general en todos los grupos e independientemente del tipo de sumandos. En efecto, representan el 61.54% de los ensayos en el G. I, el 53.8% en el G. II y el 46.77% en el G. III. Más concretamente, estas estrategias son de tres tipos: contar todo mentalmente o sin modelos, contar a partir del menor y contar a partir del mayor. Como podemos observar en la tabla 13, la estrategia más utilizada es contar a partir del mayor. Por otra parte, el descenso progresivo de los porcentajes en las estrategias de conteo en los grupos de

EGB, se debe a que en estos grupos cobran mayor importancia las estrategias de hechos numéricos, esto es, las memorísticas y las reglas. Así, mientras en 2º de Preescolar tan sólo en el 5.81% de los ensayos ponen en marcha este procedimiento, en 1º de EGB lo hacen en el 33.09% de los ensayos y en 2º de EGB en el 48.46%.

Ahora bien, estos datos deben ser matizados atendiendo al tipo de sumando. A este respecto y en el sumando 1+N, la estrategia más frecuente entre los preescolares consiste en contar a partir del mayor, mientras que los niños de 1º de EGB emplean tanto esta estrategia como las memorísticas, aunque el porcentaje es ligeramente superior en esta última y, finalmente, los de 2º de EGB utilizan también ambas, pero especialmente las memorísticas. Por ejemplo, en el algoritmo 1+8 los niños del G. I tienen necesidad de representar el 1 con los dedos cuando cuentan a partir de 8; los de EGB lo hacen de memoria y escriben el resultado inmediatamente. Estas diferencias entre los grupos se manifiestan asímismo en el sumando hechos numéricos, ya que entre los preescolares el procedimiento de contar todo es el más habitual; por su parte en el G. II aparece tanto la estrategia de contar a partir del mayor como las memorísticas y en el G. III estas últimas sobre todo. Por último, en el sumando círculos+guarismo y hechos numéricos superiores a la decena, no se presentan diferencias entre los grupos, ya que el porcentaje más alto de ensayos se registra en la estrategia de contar a partir del mayor.

Tabla 13
Estrategias utilizadas en la tarea de resolver sumas con la incógnita en el resultado. Porcentajes de ensayos correspondientes a cada estrategia.

	G. I				G. II				G.III			
SUMANDOS	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
ESTRATEGIAS												
Contar todo con modelos	22,22	26,66	50,9	30,78	3,14	26,08	14,51	8,61	0	12,27	1,41	5,36
		(32,64)*				(13,08)				(4,76)		
Contar todo mentalmente	7,41	0	9,09	0	0	2,17	4,83	0	0	0	0	0
		(4,125)				(1,75)				(0)		
Contar a partir del menor	11,11	6,67	18,18	7,69	1,59	10,86	9,67	10,34	2,86	1,75	7,04	5,35
		(10,91)				(8,11)				(4,25)		
Contar a partir del mayor	48,15	60	16,35	61,53	41,31	43,47	30,64	60,34	32,85	49,12	30,98	57,14
		(46,51)				(43,94)				(42,52)		
Memoristicas	11,11	6,67	5,45	0	53,96	15,22	40,32	8,62	62,86	15,79	60,56	16,07
		(5,81)				(29,53)				(38,82)		
Reglas	0	0	0	0	0	2,17	0	12,07	1,43	21,05	0	16,07
		(0)				(3,56)				(9,64)		

* Los valores entre paréntesis respresentan el porcentaje medio de ensayos en cada grupo en cada una de las estrategias.

En suma, se producen diferencias evolutivas entre los grupos en cuanto a los procedimientos de resolución, de modo que en el G. I las estrategias más habituales son las de conteo y modelado directo, en el G. II las de conteo principalemnte, así como las de hechos numéricos y en el G. III las de hechos numéricos alcanzan un porcentaje similar a las de conteo. Además, estas diferencias entre los grupos se manifiestan principalemnte en los sumandos 1+N y hechos numéricos.

En líneas generales, estos datos vienen a confirmar en parte los resultados procedentes del estudio longitudinal de Carpenter y Moser (1984). Estos autores afirman que inicialmente los sujetos no abandonan los procedimientos menos evolucionados, como contar todo con modelos, en favor de otros más complejos como los de conteo o hechos numéricos. En efecto, aunque los niños del G. I utilizan más frecuentemente la estrategia de contar a partir del mayor, no por ello relegan el procedimiento de contar todo; ya que éste no sólo resulta frecuente en todos los sumandos, sino que es el procedimiento principal en el sumando hechos numéricos debido a que el tamaño de los sumandos facilita la representación con los dedos de ambas manos. Este procedimiento menos evolucionado desaparece progresivamente, hasta alcanzar valores como 1.41% de los ensayos en el sumando hechos numéricos en el G. III o el valor cero en este mismo grupo en el sumando 1+N. Sin embargo, la comparación de las estrategias de conteo entre si indica que los niños que conocen la estrategia de contar a partir del mayor la utilizan preferentemente, relegando a un segundo plano las estrategias de contar todo mentalmente y contar a partir del menor. De ahí que , por una parte, la estrategia de contar todo mentalmente aparece en 2º de Preescolar y 1º de EGB, coexistiendo con las estrategias de contar a partir del menor y mayor e incluso con las de hechos numéricos, pero en un reducido porcentaje de ensayos , ya que representa un 4.125 % de los ensayos del G. I, un 1.75% de los ensayos del G. II y un 0% de los ensayos en el G. III.

Sin embargo y a diferencia de los resultados del trabajo de Carpenter y Moser (1984), los sujetos que presentan el procedimiento más evolucionado de contar a partir del mayor, prácticamente no utilizan la estrategia de contar a partir del menor, como lo demuestra el hecho de que en esta última los porcentajes de ensayos son muy bajos: 10.91% en el, G. I, 8.11% en el G. II y 4.25% en el G. III. Por tanto, si bien es cierto que los niños no siempre ponen en marcha el procedimiento más efectivo del que disponen si tenemos en cuenta las tres categorías generales de estrategias, también se aprecia que en el caso de las estrategias de conteo, una vez que disponen de la de contar a partir del mayor la tendencia es de uso preferente respecto a las de contar mentalmente y contar a partir del menor.

5.2.1.2. NIVELES EVOLUTIVOS DE LAS ESTRATEGIAS DE CONTAR TODO CON MODELOS Y CONTEO

A un nivel más profundo de análisis, al igual que Baroody (1987), hemos encontrado varias formas de ejecutar las estrategias de modelado directo y conteo. Dichas formas, según este autor, son atajos, que los sujetos ponen en marcha para evitar el laborioso procedimiento de representar primero ambos sumandos con objetos o dedos y recontar a continuación. En concreto, en la estrategia de contar todo por modelado directo localizamos cuatro tipos, que implican, desde nuestro punto de vista, grados distintos de complejidad que agrupamos en cuatro niveles evolutivos. El nivel 1º consiste en contar todo representando inicialmente los dos sumandos con los dedos, recontándolos a continuación conjuntamente. Este procedimiento da lugar a un proceso de doble conteo, ya que por una parte, el niño cuenta los dedos para representar cada sumando y por otra, cuenta nuevamente para hallar el total. El 2º nivel supone contar todo, pero representando inmediatamente los dos sumandos con los dedos sin necesidad de contar uno por uno. Al igual que en la estrategia anterior, requiere representar las dos cantidades para hallar el total, pero a diferencia de esta no hay doble conteo. El nivel 3º implica contar todo a medida que se representan los sumandos con los dedos. Como en los niveles anteriores, se representan los sumandos con los dedos, pero esta representación no es previa, sino que ocurre al mismo tiempo que el niño cuenta para establecer el total. Finalmente el 4º nivel consiste en un barrido mental en uno de los sumandos, añadiendo posteriormente el otro con los dedos, por ejemplo en el algoritmo 3+5 el niño cuenta de 1 a 3 sin necesidad de ningún tipo de registro y añade 5 con los dedos. Además, cada uno de estos niveles incluye dos subniveles: contar todo empezando por el menor y contar todo empezando por el mayor. La distribución del porcentaje de ensayos en cada nivel se recoge en la Tabla 14.

Tabla 14
Porcentajes de ensayos correspondientes a los distintos niveles de la estrategia de contar todo con modelos

		G. I	G. II	G.III
NIVEL	Ia*	0	0.43	0
	Ib	17.72	6.81	1.75
NIVEL	IIa	0.91	0	0
	IIb	3.625	0	0
NIVEL	IIIa	3.23	1.19	0
	IIIb	1.36	3.365	1.69
NIVEL	IVa	5.77	0	0
	IVb	0	1.29	1.31

* La letra "a" que acompaña a los distintos niveles significa que el niño empieza a contar por el mayor, mientras que la "b" significa que lo hace por el menor.

Por lo que hace referencia a las estrategias de conteo, identificamos asímismo distintos modos de llevarlas a cabo. Así, la estrategia de contar todo sin modelos presenta dos formas: contar todo mentalmente empezando por el menor y contar todo mentalmente empezando por el mayor. Por su parte, en la estrategia de contar a partir del menor distinguimos tres niveles: en el nivel 1º los niños representan con los dedos simultáneamente el sumando menor y sin contarlo añaden el mayor ayudándose con los dedos; en el nivel 2º representan con los dedos simultáneamente el sumando menor y el mayor, pero cuentan únicamente el mayor; en el nivel 3º representan sólo el sumando mayor con los dedos a medida que cuentan y en el nivel 4º, se añade el sumando mayor mentalmente. Por último, en la estrategia de contar a partir del mayor encontramos tres niveles: el 1º implica representar simultánemante con los dedos el sumando mayor y añadir el menor a medida que se cuenta; el 2º consiste en añadir el sumando menor con los dedos a medida que se cuenta y en el nivel 3º se adiciona el sumando menor mentalmente. Estos niveles de complejidad, tanto en la estrategia de contar a partir del menor como en la de contar a partir del mayor, se establecen de acuerdo con la necesidad que tiene el niño o no de representar el sumando que no se va a contar y en función del modo en que representan el sumando que si va a contar. En la Tabla 15 se recogen los porcentajes de ensayos globales independientemente de los sumandos en cada nivel y en cada estrategia.

Tabla 15
Porcentaje de ensayos correspondientes a los distintos niveles de las estrategias de conteo

ESTRATEGIAS	NIVELES	G. I	G. II	G.III
Contar a	I	5.8	0.43	0
partir del	II	3.2	0	0
menor	III	1.92	7.68	4.25
Contar a	I	1.36	0	0
partir del	II	21.74	26.73	24.12
mayor	III	23.4	17.205	18.4

Para finalizar, nos gustaría señalar dos aspectos sobre los niveles establecidos. En primer lugar, es posible que además de los niveles evolutivos encontrados en el presente estudio, existan otros tanto en las estrategias de modelado directo como en las de conteo, sobre todo en estas últimas. Por ejemplo, en la estrategia de contar a partir del mayor puede haber un nivel en el que los niños representen simultáneamente con los dedos ambos sumandos,contando únicamente el menor. En segundo lugar, respecto al proceso de transición entre estrategias podemos observar que el nivel 2 de las estrategias de contar a partir del menor y mayor se vincula con el nivel 2 de la estrategia de contar todo con modelos, en cuanto que el niño representa con los dedos simultáneamente ambos sumandos, aunque en las estrategias de conteo cuenten a partir de uno de los sumandos. En esta misma línea, el nivel 1 de las estrategias de conteo se relaciona con los niveles 2 y 3 de contar todo con modelos, ya que en ambos casos el niño representa uno de los sumandos independientemente con los dedos y añade el otro seguidamente, sin necesidad de una representación previa. Además los niveles 1 y 2 de las estrategias de contar a partir de uno de los sumandos podrían haber surgido a partir del nivel 4 de contar todo, dado que hay cierta similitud entre el comportamiento de los niños cuando representan con los dedos inmediatamente el sumando mayor o menor y sin contarlo añaden el otro sumando, y cuando realizan un proceso de "barrido" sobre uno de los sumandos. Asímismo, existen ciertos vículos entre las estrategias de conteo, que permiten observar como los niños pasan de unos niveles de conteo a otros más sofisticados. A este respecto, se puede considerar que el paso siguiente en la estrategia de contar todo sin modelos resulta ser, bien el nivel 4 de contar a partir del menor, que consiste en añadir el sumando mayor mentalmente, bien el nivel 3 directamente de la estrategia de contar a partir del mayor en la que el sumando menor se añade mentalmente, bien el nivel 4 de contar a partir del menor y de éste al nivel 3 de contar a partir del mayor o bien, finalmente, cualquiera de los otros niveles tanto en la estrategia de contar a partir del menor como en la estrategia de contar a partir del mayor. Por último, cada uno de los niveles de la estrategia de contar a partir del menor se corresponde con las de la estrategia de contar a partir del mayor, por ejemplo el nivel 1 de contar a partir del menor con el 1 de contar a partir del mayor, ya que en ambos casos el niño representa con los dedos simultánemante uno de los sumandos y sin necesidad de contarlos añade el otro sumando. En síntesis y para finalizar el análisis de las estrategias en esta prueba aditiva, pueden existir rutas evolutivas distintas a la hora de pasar de unos niveles a otros y de unas estrategias a otras. No resulta sencillo encontrar un patrón de desarrollo estable y único para describir el tránsito entre estrategias. Aunque se aprecian ciertas similitudes entre algunos sujetos, y de ahí la razón de hablar de rutas evolutivas, son también notorias las múltiples variaciones individuales. La explicación de tales diferencias puede venir de la mano de factores múltiples (por ejemplo, las experiencias informales previas). En otras palabras, no todos los niños han de superar necesariamente los 4 niveles que, por ejemplo, hemos propuesto en relación con la estrategia de contar todo con modelos antes de adquirir la estrategia de contar a partir del menor, ni tampoco todos los niños pasan de la estrategia de contar todo con modelos a la estrategia de contar todo sin modelos y de ésta a la de contar a partir del menor y, finalmente, a la de contar a partir del mayor, sino que el paso puede ser directo a la de contar a partir del mayor.

5.2.1.3. ANALISIS DE LAS ESTRATEGIAS ADITIVAS CUANDO LA INCOGNITA SE SITUA EN EL SUMANDO INICIAL

La tarea de resolver sumas con la incógnita en un sumando, como se desprende del análisis global de resultados, presenta un alto nivel de dificultad en comparación con las restantes tareas, causado fundamentalmente por el lugar en que se ubica la incógnita. Además, la resolución de esta prueba puede ser efectuada bien mediante la suma, bien mediante la resta. En el presente estudio, la mayoría de los niños de todos los grupos tienden a considerarla como una prueba de adición, puesto que en el 70.92% de los ensayos del G. I, en el 60.94% de los del G. II y en el 53.12% en el G. III (Tabla 16) ponen en marcha una estrategia consistente en contar desde el sumando conocido hasta el resultado. Sin embargo, tan sólo en el 10.61% de los ensayos del G. I, en el 0.89% de los del G. II y en el 2.23% de los ensayos del G. III, usan la estrategia de contar hacia atrás relacionada con la substracción. La aplicación de estas estrategias de conteo es muy compleja. Así, contar hacia atrás es una forma de conteo poco habitual para los niños y además, tanto este procedimiento como el de contar a partir de un número dado requiere la utilización de un sistema de doble registro. Esto es, por ejemplo, en el problema __ + 5 = 8, cuando el niño cuenta hacia atrás tiene que registrar, por un lado, que ha de contar hacia atrás hasta el 5 y por otro los pasos que hay desde el 8 al 5; el procedimiento de contar a partir del sumando conocido es similar, ha de recordar que su conteo finaliza en el 8 y registrar el número de pasos que hay entre el 5 y el 8. Identificamos dos formas de llevar a cabo el registro: con los dedos y mentalmente. A este respecto, en la estrategia de contar a partir de un número dado, la mayoría de los niños de los tres grupos de edad emplean más habitualmente los dedos que el registro mental: 31.63% de los ensayos en el G. I, 40.41% en el G. II y 35.13% en el G. III. Sin embargo, en la estrategia de contar hacia atrás, en el G. I y G. II el sistema de registro es mental, mientras que en el G. III es con los dedos; no obstante, la mayor parte de los niños de Preescolar ejecutan mal esta tarea.

Tabla 16
Estrategias utilizadas en la tarea de resolver sumas con la incógnita en el sumando inicial. Porcentajes de ensayos correspondientes a cada estrategia.

	G.I				G.II				G.III			
SUMANDOS	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
ESTRATEGIAS												
Contar a partir de una cantidad dada con los dedos	0	75	18,18	33,33	0	66,67	34,28	60,1	0	61,76	30,77	48
		(31,63)*				(40,41)				(35,13)		
Contar a partir de una cantidad dada mentalmente	62,5	25	36,36	33,33	8,33	25,92	22,86	25	5,26	23,53	21,15	22
		(39,3)				(20,53)				(17,98)		
Contar hacia atrás con los dedos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,94	0	6
		(0)				(0)				(2,23)		
Contar hacia atras mentalmente	0	0	9,1	33,33	0	0	0	3,57	0	0	0	0
		(10,61)				(0,89)				(0)		
Memorísticas	37,5	0	0	0	91,67	3,7	42,86	0	89,47	11,76	42,31	14
		(9,37)				(34,56)				(39,38)		
Reglas	0	0	27,26	0	0	3,7	0	7,14	5,26	0	5,77	10
		(6,81)				(2,71)				(5,26)		
Estimación	0	0	9,1	0	0	0	0	3,57	0	0	0	0
		(2,27)				(0,89)				(0)		

* los valores entre paréntesis respresentan el porcentaje medio de ensayos en cada estrategia y para cada grupo

Además de las estrategias de conteo, aparecen las de memoria, reglas y estimación. Estas dos últimas se muestran muy escasamente en todos los grupos. Por contra, la estrategia de memoria cobra importancia en los grupos de

EGB, hasta el punto de alcanzar un porcentaje de aparición (39.38% de los ensayos) semejante a la estrategia de contar desde el sumando conocido hasta el resultado en 2º de EGB.

Finalmente, en cuanto a la distribución de estas estrategias en relación con los sumandos, el procedimiento de contar a partir de un número dado se presenta mayoritariamente en todos los sumandos en el G. I y en los grupos II y III, a excepción del sumando 1+N, ya que tiende a ser solucionado memorísticamente y asímismo, en estos grupos esta última estrategia resulta altamente frecuente en el sumando hechos numéricos (42.86% y 42.31%, respectivamente).

5.2 2. Las estrategias en las tareas de conmutatividad

En este apartado, efectuaremos primeramente, un análisis detallado de las estrategias utilizadas por los niños en las pruebas de comparar sumas y encontrar el sumando desconocido, tanto en presencia del resultado como en ausencia del mismo y asímismo, agruparemos las estrategias de una y otra prueba en niveles distintos de complejidad.

5.2.2.1. ANALISIS DE LAS ESTRATEGIAS CORRESPONDIENTES A LA TAREA DE COMPARAR SUMAS

En la tarea de comparar sumas, cuando el resultado no se halla presente, encontramos cuatro tipos de estrategias: 1) aquellas que se centran en los sumandos, 2) las que aluden a que el resultado de ambas operaciones es el mismo, 3) las que hacen mención directamente a la propiedad conmutativa y 4) las que señalan que tanto los sumandos, como los signos son los mismos en una y otra operación. Además, tanto en la estrategia relativa a los sumandos como en la que hace referencia al resultado, se diferencian tres tipos de argumentaciones. Así, en la primera de ellas, los niños fundamentan la igualdad bien afirmando que los sumandos están al revés, bien atendiendo únicamente a uno de los sumandos de ambas operaciones, bien, finalmente, centrándose en ambos. En la segunda, la equivalencia del resultado en ambas operaciones se establece solucionando ambas cuentas, una de ellas o ninguna de las dos.

En cuanto a los resultados (Tabla 17), tanto los niños del G. I como los del G. II y G. III, justifican la igualdad mayoritariamente a partir de los sumandos y más concretamente, argumentan que ambos sumandos son iguales en el 65.31% de los ensayos en 2º de Preescolar, 69.305% en 1º

Tabla 17
Estrategias utilizadas en la tarea de comparar sumas en ausencia del resultado. Porcentajes de ensayos correspondientes a cada estrategia.

	6,I				6,II				6,III			
SUMANDOS	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
ESTRATEGIAS												
Los sumandos son iguales	70,21	33,33	81,25	76,47	63,79	64,51	66,66	82,26	31,82	34,85	31,82	50
		(65,31)*				(69,30)				(37,12)		
Uno de los sumandos es igual	14,9	60	0	5,9	15,52	24,19	10	12,9	9,09	25,76	4,54	4,54
		(20,2)				(15,65)				(10,98)		
Sumandos al revés	2,13	0	6,25	5,9	5,17	0	5	0	4,54	4,54	13,64	9,09
		(3,57)				(2,54)				(7,95)		
Da lo mismo a+b que b+a	0	0	0	0	0	0	0	0	9,09	6,06	9,09	4,54
		(0)				(0)				(7,19)		
El resultado es el mismo, resuelve una operación	6,38	0	0	0	15,52	11,3	18,33	4,84	36,36	24,24	40,91	27,27
		(1,59)				(12,5)				(32,19)		
El resultado es el mismo sin necesidad de operar	0	0	0	0	0	0	0	0	9,09	4,54	0	4,54
		(0)				(0)				(4,54)		
El resultado es el mismo, resuelve ambas cuentas	0	6,67	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		(1,67)				(0)				(0)		
Los sumandos y los signos son iguales	6,38	0	12,5	11,73	0	0	0	0	0	0	0	0
		(7,65)				(0)				(0)		

* los valores entre paréntesis respresentan el porcentaje medio de ensayos en cada estrategia y para cada grupo

de EGB y 37.12% en 2º de EGB. No obstante, en el G. III aparece también frecuentemente la estrategia que indica que el resultado es el mismo, una vez solucionada una de las operaciones (32.19% de los ensayos). Por último, la estrategia en la que se enuncia directamente la propiedad conmutativa se presenta sólamente en 2º de EGB (7.19% de los ensayos) y la que establece la igualdad basándose en que los sumandos y signos de las dos operaciones son iguales es exclusiva de los preescolares (7.65% de los ensayos). Esta última constituye una estrategia puramente perceptiva, en el sentido de que los niños que la emplean se limitan a comprobar que en ambas operaciones estén presentes los mismos componentes.

Con respecto a las diferencias entre las estrategias atendiendo al tipo de sumando, no parece que este factor influya notoriamente en ninguno de los grupos. No obstante, en el grupo de los mayores las estrategias relacionadas con los sumandos y el resultado, alcanzan un porcentaje de ensayos similar en el suamndo N+1 (Tabla, 17). Para estos sujetos la resolución de este algoritmo no presenta ninguna dificultad, ya que como hemos visto en las tareas aditivas, lo hacen de memoria y eligen una u otra estrategia indistintamente, debido al escaso esfuerzo que requiere la tarea.

En esta misma prueba, en presencia del resultado, se manifiestan básicamente las mismas estrategias, aunque desaparecen las correspondientes a que los sumandos y signos son iguales y la consistente en solucionar ambas cuentas (Tabla 18). Los resultados, muestran que en los gupos I y II los sujetos que resuelven correctamente esta tarea emplean mayoritariamente la estrategia de que los sumandos son iguales (89.54%, 72.58% de los ensayos, respectivamente). El argumento que se propone en estos casos es el de que ambos sumandos son iguales (60.435% de los ensayos y 42.21%, respectivamente). Sin embargo, en el G. III se produce un aumento considerable en el uso de la estrategia que hace referencia al resultado (54.05% de los ensayos) sin necesidad de operar. Además, en este mismo grupo, se produce un aumento sustancial del procedimiento basado en enunciar la propiedad conmutativa (18.15% de los ensayos). Por último, no se muestran diferencias importantes entre los sumandos en las estrategias de resolución.

En síntesis, se puede afirmar, en primer lugar, que en la prueba de comparar sumas con y sin el resultado, al contrario que en el estudio de Baroody y Gannon (1984), los niños de los grupos I y II se centran principalmente en los sumandos a la hora de determinar si dos operaciones aditivas son o no equivalentes, independientemente del tipo de sumando de que se trate. A este respecto, hay que tener

Tabla 18
Estrategias utilizadas en la tarea de comparar sumas en presencia del resultado. Porcentajes de ensayos correspondientes a cada estrategia.

	G.I				G.II				G.III			
SUMANDOS	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
ESTRATEGIAS												
Los sumandos son iguales	56,25	28,57	76,92	80	37,5	33,33	52	50	0	10	5,88	6,12
		(60,43)*				(43,21)					(5,5)	
Uno de los sumandos es igual	25	57,14	0	0	12,5	30,30	12	10	0	10	0	0
		(20,54)				(16,2)					(2,5)	
Sumandos al revés	0	14,28	0	20	12,5	18,18	12	10	18,75	6	17,65	18,37
		(8,57)				(13,17)					(15,19)	
Da lo mismo a+b que b+a	0	0	0	0	0	0	0	0	12,5	18	17,64	24,48
		(0)				(0)					(18,15)	
El resultado es el mismo, resuelve una operación	0	0	0	0	25	18,18	12	20	8,33	8	0	2,04
		(0)				(18,79)					(4,59)	
El resultado es el mismo sin necesidad de operar	18,75	0	23,08	0	12,5	0	12	10	60,42	48	58,82	48,98
		(10,46)				(8,62)					(54,05)	

* los valores entre paréntesis respresentan el porcentaje medio de ensayos en cada estrategia y para cada uno de los grupos.

en cuenta no obstante que, como hemos visto en el análisis global de resultados, un porcentaje considerable de niños de 2º de Preescolar que admiten la igualdad en la prueba de comparar sumas en ausencia del resultado, fracasan cuando el resultado se halla presente, puesto que se centran en el resultado afirmando que las dos operaciones no son iguales debido a que en una de ellas no figura el resultado. Así pues, es posible que estos sujetos no posean un conocimiento suficientemente elaborado de la propiedad conmutativa y se trate más bien de una comparación entre las operaciones a un nivel estrictamente perceptivo. En este caso, se limitan a comprobar simplemente si están presentes los mismos guarismos en una y otra operación y así, cuando les preguntamos acerca de si en las dos operaciones hay la misma cantidad responden afirmativamente, pero cuando una de ellas aparece sumada rechazan la igualdad indicando que se trata de dos operaciones distintas. Pudiera ser que, en el primer caso y a pesar de nuestra pregunta referente a la cantidad, los niños no necesariamente aludan a la equivalencia de las adiciones, sino más bien a la equivalencia de los cardinales que representan los sumandos, mientras que en el segundo caso comparan los resultados. Así parece confirmarlo, en parte, el hecho de que de los 16 sujetos del G. I que resuelven correctamente la tarea de comparar sumas en el sumando hechos numéricos en ausencia del resultado, 9 de ellos necesitan sumar en las dos cuentas para obtener el resultado; mientras que en el G. II lo hacen 7 de los 20 sujetos que la ejecutan correctamente y tan sólo 2 de 22 en el G. III. En este último grupo, aunque la estrategia relativa a los sumandos aparece tanto en presencia del resultado como en ausencia del mismo, aumenta considerablemente la que se refiere al resultado. Ello se debe a que en este grupo los niños poseen un mayor conocimiento conceptual y de procedimiento de la adición, hasta el punto de que, como hemos visto en el apartado correspondiente a las estrategias aditivas, ponen en marcha procedimientos memorísticos. En esta línea, cuando emiten el juicio de conmutatividad en la tarea de comparar sumas aluden a los sumandos o al resultado, dependiendo de que conozcan previamente o no el resultado de ambas operaciones.

5.2.2.2. ANALISIS DE LAS ESTRATEGIAS CORRESPONDIENTES A LA TAREA DE ENCONTRAR EL SUMANDO DESCONOCIDO

En la tarea de encontrar el sumando desconocido, en ausencia del resultado, las estrategias guardan una gran similitud con las halladas en la tarea de comparar sumas. Son de cinco tipos: 1) las que se centran en los sumandos ("porque aquí hay...y aquí no"), 2) las que lo hacen en el resultado ("porque a+b son c y para tener igual aquí es b"), 3) aquellas que aluden directamente a la propiedad conmutativa ("da lo mismo decir a+b que b+a, porque el resultado es el mismo"), 4) las consistentes en copiar simplemente el número que falta mirando en la otra cuenta ("lo he visto aquí", "lo pone aquí") y finalmente, 5) la estrategia aditiva de contar a partir de un número dado (i.e., resuelven la cuenta en la que figuran los dos sumandos anotando el resultado en la otra y, seguidamente, cuentan en esta última desde el sumando conocido hasta el resultado).

Los resultados aquí obtenidos ponen de manifiesto que existen diferencias entre los grupos en cuanto al procedimiento de resolución escogido (Tabla 19). Los niños del G. I se basan casi exclusivamente en la estrategia de copia (72.53% de los ensayos) y buena parte de los del G. II (46.46% de los ensayos) en el que también cobra importancia la centrada en el resultado (40.46% de los ensayos). En el G. III los niños utilizan mayoritariamente la estrategia referente a los sumandos (44.8% de los ensayos) y alcanza cierta importancia la de conmutatividad (29.84% de los ensayos), mientras que el procedimiento de copia apenas tiene incidencia (25.34% de los ensayos) en comparación con los otros dos grupos.

En cuanto al tipo de estrategia seleccionada según el sumando de que se trate, las diferencias más importantes se registran en el sumando círculos+guarismo en el grupo I, ya que usan casi exclusivamente la estrategia de copia, mientras que en los restantes sumandos suelen apoyarse además en otros procedimientos. Además, la estrategia de contar a partir de un número dado se presenta sólo en el G. II en el sumando hechos numéricos.

Tabla 19
Estrategias utilizadas en la tarea de encontrar el sumando desconocido en ausencia del resultado. Porcentajes de ensayos correspondientes a cada estrategia.

	G.I				G.II				G.III			
SUMANDOS	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
ESTRATEGIAS												
Aluden a los sumandos	10,71	0 (9,49)*	9,61	17,65	0	3,03 (3,04)	4,61	4,54	44,11	30,76 (44,8)	43,47	60,87
Aluden al resultado	21,43	0 (17,97)	26,92	23,53	42,85	24,24 (40,46)	53,84	40,91	4,41	0 (1,10)	0	0
Da lo mismo a+b que b+a	0	0 (0)	0	0	14,28	3,03 (8,89)	4,61	13,64	39,7	23,08 (28,74)	34,78	17,39
Contar a partir de un número dado	0	0 (0)	0	0	0	0 (1,13)	0	4,54	0	0 (0)	0	0
Copia	67,86	99,99 (72,53)	63,46	58,82	42,86	69,69 (46,46)	36,92	36,36	11,76	46,15 (25,34)	21,74	21,74

* los valores entre paréntesis respresentan el porcentaje medio de ensayos en cada grupo en cada una de las estrategias.

Cuando el resultado está presente se mantienen las mismas estrategias que cuando éste no se halla presente, exceptuando la que alude directamente a la conmutatividad.

Además, como se puede observar en la Tabla 20, la distribución de las estrategias es muy similar. Así, los preescolares que ejecutan correctamente la tarea utilizan predominante la estrategia de copiar (64.98% de los ensayos). En el G. II el porcentaje es ligeramente superior en la estrategia de copia (38,7% de los ensayos), siguiéndole en importancia la que alude al resultado (31,79% de los ensayos) y en los sumandos (27.24% de los ensayos). En el grupo de los mayores destaca la estrategia que hace referencia a la necesidad de añadir una determinada cantidad para que el resultado de ambas operaciones sea el mismo.

En cuanto a los sumandos, existen diferencias entre los grupos, ya que en el G. I en los sumandos 1+N, círculos+guarismo y hechos numéricos los niños prefieren el procedimeinto de copiar, mientras que en hechos numéricos superiores a la decena se inclinan por el procedimiento referente al resultado. En el G. II el patrón de selección es similar al del G. I en el sumando círculos+guarismo, mientras que en los otros sumandos los niños eligen tanto este procedimiento como aquellos relacionados con los sumandos y el resultado; en el G. III escogen mayoritariamente en todos los sumandos la estrategia centrada en el resultado.

Tabla 20
Estrategias utilizadas en la tarea de encontrar el sumando desconocido en presencia del resultado. Porcentajes de ensayos correspondientes a cada estrategia.

	G.I				G.II				G.III			
SUMANDOS	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
ESTRATEGIAS												
Aluden a los sumandos	5	0	27,27	0	18,18	19,15	36,36	35,3	5	12,5	9,52	10,53
		(8,07)*				(27,24)				(9,4)		
Aluden al resultado	15	0	13,63	66,67	45,45	19,15	27,27	35,3	85	39,29	66,66	63,15
		(23,82)				(31,79)				(63,52)		
Contar a partir de un número dado	0	12,5	0	0	0	0	9,09	0	0	16,06	9,52	15,79
		(3,12)				(2,27)				(10,34)		
Copia	80	87,5	59,09	33,33	36,36	61,7	27,27	29,4	10	32,15	14,28	10,53
		(64,98)				(38,7)				(16,74)		

* los valores entre paréntesis representan el porcentaje medio en cada estrategia y para cada uno de los grupos.
Sumandos: 1= 1 + N; 2= círculos + guarismos; 3= hechos numéricos; 4= hechos numéricos superiores a la decena

Los datos procedentes de esta prueba, tanto si el resultado está presente como si este se halla ausente, indican que los niños del G. I encuentran el sumando desconocido copiándolo simplemente de la otra cuenta. Este procedimiento es muy simple y guarda cierta similitud con la estrategia relativa a los sumandos, ya que de algún modo, en ambos casos toman en consideración los sumandos y responden afirmativamente a la pregunta de conmutatividad una vez hallado el sumando desconocido. No obstante, en el primer caso aluden únicamente a que existe dicha igualdad porque han consignado la cantidad desconocida, mientras que en el segundo caso mencionan la similitud de los sumandos. Por otro lado, hay que señalar en este grupo que de los 15 sujetos que ejecutan correctamente las dos tareas de conmutatividad en ausencia del resultado, bien mediante el procedimiento de copia en la tarea de encontrar el sumando desconocido, bien aludiendo a los sumandos en la tarea de comparar sumas, 7 de ellos no necesitan sumar en esta última tarea en ambas cuentas en el sumando hechos numéricos. Este resultado sugiere que algunos sujetos de este grupo poseen el principio de conmutatividad y, por tanto, lo que puede haber ocurrido en la tarea de encontrar el sumando desconocido es que sufren una regresión, como en las tareas aditivas, a procedimientos de ejecución más simples, a pesar de disponer de otros más complejos, simplemente porque se trata de una tarea más sencilla.

En el G. II y también en la tarea de encontrar el sumando desconocido, aunque se mantiene esta pauta general de resultados, una buena parte de los sujetos hacen mención del procedimiento referido al resultado en ambas condiciones. Estos datos son contrarios a los obtenidos en la tarea de comparar sumas en ausencia del resultado, dado que en ésta los niños afirman la igualdad sobre la base de los sumandos. Sin embargo, lejos de ser contradictorios, resultan complementarios, ya que algunos sujetos (8) que utilizan la estrategia consistente en afirmar que los sumandos son iguales en la tarea de comparar sumas, saben además que el resultado de ambas cuentas es el mismo, puesto que todos ellos aluden al resultado en la tarea de encontrar el sumando desconocido y ninguno necesita sumar las dos cuentas en la prueba de comparar sumas en el sumando hechos numéricos. Algo semejante puede afirmarse en relación con el G. III, ya que tanto en esta tarea como en la de comparar sumas, ponen en marcha estrategias relativas a los sumandos o el resultado.

5.2.2.3. NIVELES EVOLUTIVOS EN LAS ESTRATEGIAS DE CONMUTATIVIDAD

Hemos agrupado las estrategias en niveles distintos de complejidad, aunque somos conscientes de que la confirmación de estos niveles requeriría la puesta en marcha de estudios de tipo longitudinal. Hemos tenido en cuenta un único criterio: consideramos hasta que punto el niño tiene en cuenta ambos términos de la operación, sabiendo que se trata de operaciones con idéntico resultado y, en qué medida admite la igualdad sin necesidad de resolver ambas operaciones. Es por ello que en el nivel inicial situamos estrategias muy simples de tipo perceptivo basadas en verificar que en ambos algoritmos figuran exactamente los mismos datos, como la estrategia de copia en la tarea de encontrar el sumando desconocido y la estrategia consistente en comprobar que tanto los signos como los números son coincidentes en ambas operaciones en la tarea de comparar sumas. En un segundo nivel, colocamos las estrategias relacionadas con los sumandos, pero que hacen mención únicamente a uno de ellos en las dos operaciones. Este procedimiento no se puede considerar como una verdadera estrategia de conmutatividad, puesto que conduce a error cuando uno de los sumandos no coincide en ambas operaciones. No obstante, le asignamos este segundo nivel y no el primero porque cabe la posibilidad de que los niños sepan que ambos sumandos son iguales, pero justifiquen la igualdad sólo a través de uno de ellos. El tercer nivel lo ocupan las estrategias en las que es necesario realizar algún tipo de operación antes de emitir el juicio de conmutatividad, como resolver ambas cuentas en la tarea de comparar sumas o contar a partir de un número dado en la prueba de encontrar el sumando desconocido. Este nivel se corresponde con lo que otros autores (Baroody, Ginsburg y Waxman, 1983) denominan protoconmutatividad. Esto implica que dos números pueden ser combinados en cualquier orden para producir respuestas correctas, aunque no necesariamente ha de obtenerse el mismo resultado. El cuarto nivel puede considerarse como un período de tránsito a la conmutatividad final, ya que todavía el niño necesita operar en una de las cuentas antes de afirmar la conmutatividad en ausencia del resultado. Esto es, resuelve una de las cuentas e inmediatamente admite que la otra alcanza el mismo resultado. En el quinto situamos las estrategias centradas en los sumandos y en el resultado, sin necesidad de efectuar operación alguna. Finalmente el sexto y último nivel, corresponde a la estrategia en la que mencionan directamente la propiedad conmutativa, es decir, que el resultado de sumar a+b y b+a es el mismo. Esquemáticamnete aparecerían los siguientes niveles:

1. Estrategias de tipo perceptivo

2. Estrategias que hacen mención a uno de los sumandos en ambas cuentas

3. Estrategias de cómputo en los dos algoritmos

4. Estrategias de cómputo en uno de los algoritmos

5. Estrategias centradas en la igualdad de los dos sumandos o el resultado

6. Estrategias en las que se enuncia directamente la propiedad conmutativa

5.2.3 Las estrategias aditivas y las tareas de conmuatividad

En este apartado pretendemos someter a prueba la hipótesis de que la utilización de estrategias aditivas consistentes en contar empezando por el mayor, supone una cierta competencia por parte del niño en el principio de conmutatividad. A este respecto, los trabajos realizados hasta el momento (Baroody y Ginsburg, 1984; Resnick, 1982; Resnick y Neches, 1984) apuntan que los niños descubren las estrategias de contar a partir del mayor independientemente de su conocimiento sobre la conmutatividad. Así, Baroody y Ginsburg consideran que los sujetos ponen en marcha este procedimiento como resultado de un proceso de economía cognitiva, esto es, tratan de evitar de este modo la tediosa labor mental de contar todo. Por su parte Resnick señala que esta estrategia deriva de la práctica en la adición. Por último, Resnick y Neches desarrollan un programa de ordenador denominado HPM, atribuyendo la aparición de la estrategia de contar a partir del mayor a la presencia de un esquema de etiquetamiento de orden indiferente y de los heurísticos de resultado aún disponible y resultado no modificado. Desde nuestro punto de vista, estimamos que si bien es posible que esta estrategia de contar a partir del mayor se relacione con la economía cognitiva y la práctica en la suma, no obstante el conocimiento de este procedimiento no puede desvincularse del conocimiento conceptual, que en este caso es el principio de conmutatividad. Dicho en otras palabras, el conocimiento conceptual del principio de conmutatividad permite la aparición del conocimiento del procedimiento de empezar a contar a partir del mayor. En este mismo sentido parecen confluir los modelos recientemente desarrollados en torno a las habilidades aritméticas elementales en los que se contempla que la resolución de estas tareas comporta tanto competencia conceptual como de procedimiento, siendo estos dos aspectos los componentes de una única competencia (Gelman y Greeno, 1989; Greeno, Riley y Gelman, 1984; Kintsch y Greeno, 1985; Riley et al., 1983; Siegler y Robinson, 1982, etc.).

Para comprobar la hipótesis que planteamos inicialmente, analizamos el comportamiento de los sujetos que en la tarea aditiva utilizan la estrategia de contar empezando por el mayor y contar a partir del mayor, en relación con el éxito o fracaso en las tareas de conmutatividad, tanto en presencia como en ausencia del resultado. Más específicamente, consideramos los ensayos correctos de las estrategias de contar todo con los dedos empezando por el mayor, contar todo mentalmente empezando por el mayor, contar con los dedos a partir del mayor y contar mentalmente a partir del mayor, aclarando que todos estos procedimientos no se presentan siempre en los tres grupos.

Los resultados (Tablas 21 y 22) indican que, en el G.I el porcentaje de éxito es superior al de fracaso en las tareas de conmutatividad en las estrategias de contar todo con los dedos empezando por el mayor y contar a partir del mayor con los dedos; en la estrategia de contar a partir del mayor mentalmente, se mantiene este resultado en la tarea de comparar sumas y encontrar el sumando desconocido en ausencia del resultado, pero no en presencia del mismo. En suma, los niños preescolares poseen una cierta comprensión del principio de conmutatividad, como lo demuestra el hecho de que poseen una serie de procedimientos de resolución consistentes en empezar por el mayor en las tareas aditivas, pero este conocimiento de la conmutatividad todavía no es lo suficientemente flexible y robusto. Desde esta óptica, hay que señalar que cualquier competencia conceptual posee múltiples derivaciones, que han de irse vinculando con los procedimientos de resolución y en este sentido, los niños más pequeños aún no lo han conseguido.

En el G. II ocurre algo similar a lo comentado en el grupo de los más pequños, ya que el porcentaje de ensayos correctos supera al de fracasos en las tareas de conmutatividad en la estrategia de contar todo mentalmente

Tabla 21
Porcentajes de ensayos correspondientes a los éxitos/fracasos en algunas estrategias aditivas en las tareas de conmutatividad, en ausencia del resultado

TAREAS	G.I				G.II				G.III			
	Comparar sumas		Encontrar sumando		Comparar sumas		Encontrar sumando		Comparar sumas		Encontrar sumando	
	B	M	B	M	B	M	B	M	B	M	B	M
ESTRATEGIAS												
Contar todo empezando por el mayor con los dedos	9,91	0	9,91	0	0,4	1,19	1,62	0	0	0	0	0
Contar todo empezando por el mayor mentalmente	0	0	0	0	0,4	0	0,4	0	0	0	0	0
Contar a patir del mayor con los dedos	18,11	5	23,1	0	23,63	3,13	24,17	2,58	19,95	2,84	21,63	1,15
Contar a partir del mayor mentalmente	19,69	3,7	23,39	0	14,02	3,17	12,27	4,88	18,39	1,34	18,67	1,07

B = Bien; M = Mal

empezando por el mayor. En las tareas de comparar sumas y enocontrar el sumando desconocido en ausencia del resultado, los éxitos son superiores a los fracasos únicamente en las estrategias de contar a partir del mayor con los dedos y contar a partir del mayor mentalmente. Finalmente, en el G. III la superioridad de los éxitos se observa en la estrategia de contar a partir del mayor mentalmente y con los dedos, aunque en este último caso hay que exceptuar la tarea de comparar sumas con el resultado.

Tabla 22
Porcentajes de ensayos correspondientes a los éxitos/fracasos en algunas estrategias aditivas en las tareas de conmutatividad, en presencia del resultado

	6,I				6,II				6,III			
TAREAS	Comparar sumas		Encontrar sumando		Comparar sumas		Encontrar sumando		Comparar sumas		Encontrar sumando	
	B	M	B	M	B	M	B	M	B	M	B	M
ESTRATEGIAS												
Contar todo empezando por el mayor con los dedos	9,91	0	5,77	4,14	0,43	1,19	1,21	0,4	0	0	0	0
Contar todo empezando por el mayor mentalmente	0	0	0	0	0,4	0	0,4	0	0	0	0	0
Contar a patir del mayor con los dedos	16,99	6,11	16,99	6,11	6,67	19,55	11,76	14,99	10,86	12,58	16,01	7,5
Contar a partir del mayor mentalmente	11,92	11,48	10,31	13,09	8,34	8,86	5,38	11,82	15,1	3,98	15,54	3,47

B = Bien; M = Mal

Estos datos sugieren dos interpretaciones complementarias. En primer lugar, la utilización por parte del niño de las estrategias consistentes en contar todo empezando por el mayor y contar a partir del mayor, conllevan siempre un cierto conocimiento de la propiedad conmutativa. En segundo lugar, el conocimiento incompleto de la conmutatividad es lo que puede propiciar que, al menos en los grupos I y II, además de la estrategia de contar empezando por el mayor los niños recurran a otros procedimientos de ejecución menos elaborados en las tareas aditivas. Así pués, el uso sistemático de las estrategias de conteo consistentes en empezar por el mayor se vincula con el conocimiento completo y elaborado del principio de conmutatividad. En este mismo sentido, la regresión que algunos autores (Cartpenter, 1986; Carpenter y Moser, 1982, 1984) señalan en los procedimientos de resolución empleados por los niños en las tareas aditivas, puede ser debida entre otras cosas al conocimiento incompleto del principio de conmutatividad, ya que de hecho los sujetos del G. III que poseen un mayor conocimiento sobre la adición y han recibido instrucción específica en este principio, pero en el ámbito de los conjuntos, abandonan prácticamente las estrategias de contar empezando por el menor.

5.3. ANALISIS DE ERRORES

5. 3. 1. Errores en las tareas aditivas

En este apartado analizaremos primeramente el porcentaje global de ensayos incorrectos, teniendo en cuenta el factor tipo de sumandos, así como el tipo de errores cometidos por los niños, tanto en presencia del resultado como en ausencia del mismo. Para ello, seguiremos de cerca el modelo de conteo de Greeno, Riley y Gelman (1984). Este modelo, intenta caracterizar la comprensión implícita de los principios de como contar de Gelman y Gallistel (1978) (correspondencia uno a uno, orden estable y cardinalidad) como una forma de competencia cognitiva. Para ello, analizan tres componentes: la competencia conceptual, la competencia de procedimiento y la competencia de utilización. El primer componente representa la comprensión de los principios y da cuenta de la planificación de los pasos a seguir. La competencia de procedimiento hace referencia al conocimiento de los principios generales de acción, que implican relaciones entre las metas fijadas, las acciones realizadas parar llegar a lograrlas y las condiciones-requisito para que las acciones puedan ejecutarse. Finalmente, la competencia de utilización alude al conocimiento de métodos de comprobación de teoremas. Estos tres tipos de competencia sirven, desde nuestro punto de vista, para explicar los errores cometidos por los niños en la tarea aditiva y así, distinguiremos tres tipos básicos de errores: errores de competencia conceptual, errores de competencia de procedimiento y errores de competencia de utilización. Los primeros se producen como consecuencia de que los niños disponen de un esquema incompleto de la adición, es decir, presentan una comprensión inadecuada de los procesos subyacentes a la operación de sumar. Dentro de esta categoría incluimos los errores consistentes en inventar la respuesta y repetir una de las cantidades propuestas. Los errores de competencia de procedimiento, suponen la competencia conceptual por parte del niño, pero las estrategias que el sujeto pone en marcha para resolver el problema no son las más idóneas, como, por ejemplo, intentar representar las dos cantidades cuando no se posee un número suficiente de dedos. El tercer tipo, implica competencia conceptual y de procedimiento, pero comporta fallos en la utilización del procedimiento seleccionado, como, por ejemplo, contar mal.

5.3.1.1. ANALISIS DE LOS ERRORES EN LA TAREA ADITIVA CON LA INCOGNITA EN EL RESULTADO

Cuando la incógnita se ubica en el resultado, se producen diferencias evolutivas respecto a los errores (Tabla 23). Así los más frecuentes corresponden al G. I en todos los sumandos, excepto en hechos numéricos, donde la frecuencia de ensayos incorrectos es muy baja; por su parte en el G. II persisten las dificultades, aunque el porcentaje de ensayos incorrectos es muy inferior, resultado ser el sumando círculos+guarismo el que más errores registra y, finalmente, en el G. III los errores son prácticamente inexistentes en los sumandos 1+N y hechos numéricos, mientras que persisten las dificultades en cículos+guarismo y hechos numéricos superiores a la decena. En contra de los resultados obtenidos por otros autores (Bermejo y Lago, 1988c ; Carpenter y Moser, 1982; De Corte y Verschaffel, 1985; Steffe y Johnson, 1971), la representación de uno de los sumandos mediante círculos no resulta de gran ayuda para los niños, este fracaso se debe sobre todo a que no inician el conteo a partir del guarismo, sino que lo hacen a partir de los círculos.

En cuanto a los tipos de errores encontrados, los resultados indican que los errores conceptuales resultan más frecuentes entre los niños de los grupos I y II. (Tabla, 24) y consisten fundamentalmente en repetir una de las cantidades; en el G. III se produce un error de este tipo en el sumando círculos+guarismo.

Los errores de procedimiento aparecen únicamente en el grupo de los niños preescolares, mientras los de utilización lo hacen en los tres grupos, aunque principalmente en los grupos de EGB.

Tabla 23

Frecuencias de ensayos correpondientes a los errores en la tarea de resolver sumas con la incógnita en el resultado.

SUMANDOS	1+N	CIRCULOS + GUARISMO	HECHOS NUMERICOS	HECHOS NUMERICOS SUPERIORES A LA DECENA
6,I	45	57	17	59
6,II	9	24	10	14
6,III	2	15	1	16

Tabla 24
Porcentajes de ensayos en los distintos tipos de errores en la tarea de resolver sumas con la incógnita en el resultado

	G,I				G,II				G III			
SUMANDOS	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
TIPOS DE ERRORES												
CONCEPTUAL:												
- Inventan	15,55	12,28	11,76	13,56	33,33	8,33	0	21,43	0	0	0	0
		(13,29)*				(15,77)				(0)		
- Repiten la cantidad mayor	35,55	15,79	5,9	20,34	33,33	12,5	30	21,43	0	0	0	0
		(19,39)				(24,31)				(0)		
- Repiten la cantidad menor	15,55	43,86	17,65	22,03	0	0	0	0	0	40	0	0
		(25,02)				(0)				(10)		
- Añaden una unidad al sumando mayor	0	0	0	0	0	12,5	30	21,43	0	0	0	0
		(0)				(15,98)				(0)		
Total	66,67	71,93	35,3	55,93	66,66	33,33	60	64,29	0	40	0	0
		(57,46)				(56,07)				(10)		
PROCEDIMIENTO:												
- Representan mal las cantidades con los dedos	15,55	17,54	41,17	23,73	0	0	0	0	0	0	0	0
		(24,49)				(0)				(0)		
UTILIZACION:												
- Cuentan mal	17,78	10,52	23,53	20,34	33,33	66,66	40	35,71	100	60	100	100
		(18,04)				(43,92)				(90)		

* Porcentaje de ensayos medio en cada tipo de estrategia errónea y para cada grupo
Sumandos: 1= 1 + N; 2= círculos + guarismos; 3= hechos numéricos; 4= hechos numéricos superiores a la decena

5. 3. 1. 2. ANALISIS DE LOS ERRORES EN LA TAREA ADITIVA CON LA INCOGNITA EN EL SUMANDO INICIAL

En la prueba de sumar con la incógnita en el sumando inicial, encontramos que en 2º de Preescolar todos los errores son altamente frecuentes, mientras que la frecuencia disminuye progresivamente en los grupos de EGB (Tabla, 25).

Tabla 25
Frecuencia de ensayos correpondientes a los errores en la tarea de resolver sumas con la incógnita en el sumando inicial.

SUMANDOS	1+N	CIRCULOS + GUARISMO	HECHOS NUMERICOS	HECHOS NUMERICOS SUPERIORES A LA DECENA
6,I	64	68	61	63
6,II	36	45	37	44
6,III	15	38	20	22

En esta prueba identificamos las mismas categorías de errores que en la prueba aditiva anterior, a saber: errores conceptuales, errores de procedimiento y errores de utilización. Dentro del primer tipo se incluyen los errores en los que el niño repite una de las cantidades presentes en el algoritmo (sumando conocido o resultado), aquellos en los que ofrece como respuesta un número cualquiera, los consistentes en adicionar el sumando conocido con el resultado, aquellos en los que se añade al sumando conocido una cantidad fija en todos los ensayos y los que implican presentar como respuesta un número superior al resultado. Los errores de procedimiento incluyen estrategias de estimación como responder con un número próximo al sumando conocido. Los errores de utilización se deben a que cuentan incorrectamente o a que hallan el resultado correctamente, pero anotan como respuesta una de las cantidades ya dadas.

Los resultados muestran que los errores más frecuentes en todos los grupos y en todos los sumandos son de tipo conceptual (Tabla 26), aunque en el grupo de los mayores aumentan los errores de utilización sobre todo en los sumandos círculos+guarismo y hechos numéricos superiores a la decena. Además y en relación con los errores conceptuales, los preescolares responden mayoritariamente repitiendo el sumando conocido, los de 1º de EGB presentan un comportamiento similar aunque un porcentaje de estos responde diciendo un número cualquiera y por su parte, los de 2º de EGB adicionan el sumando conocido con el resultado. A este respecto hay que señalar que si bien en todos estos casos se trata de errores conceptuales, los niños de EGB demuestran cierta competencia conceptual, ya que conocen al menos dos cosas: que el número que aparece

Tabla 26
Porcentajes de ensayos en los distintos tipos de errores en la tarea de resolver sumas con la incógnita en el sumando inicial

	G.I				G.II				G III			
SUMANDOS	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
TIPOS DE ERRORES												
CONCEPTUAL:												
-Repite cantidad: el sumando	46,87	35,29	42,62	44,44	41,67	46,67	43,24	40,91	20	15,79	15	13,64
		(42,3)*				(43,12)						(16,11)
-Repite cantidad: el resultado	17,19	13,23	21,31	22,22	16,67	8,89	16,22	13,63	0	2,63	0	0
		(18,51)				(13,85)						(0,66)
-Inventa	18,75	29,41	11,47	4,76	27,78	22,22	27,03	22,73	0	5,26	0	0
		(16,09)				(24,94)						(1,31)
-Adiciona resultado y sumando	4,69	10,29	9,83	4,76	5,55	2,22	2,7	2,27	60	23,68	60	40,91
		(7,39)				(3,18)						(45,92)
-Añade 5 al sumando	0	0	0	4,76	0	0	0	0	0	0	0	0
		(1,19)				(0)						(0)
-Dice una cantidad mayor que el resultado en una unidad	0	1,47	1,47	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		(0,73)				(0)						(0)
TOTAL	87,5	88,23	85,24	85,71	91,66	82,22	89,2	79,54	80	47,37	75	54,54
		(86,67)				(85,65)						(64,22)
PROCEDIMIENTO:												
-Estimación	9,37	11,76	13,11	14,28	8,33	6,67	8,11	9,1	20	13,16	15	13,64
		(12,13)				(8,05)					(15,45)	
UTILIZACION:												
-Cuentan mal	0	0	0	0	0	8,89	2,7	11,36	0	39,5	10	31,82
		(0)				(5,74)					(20,33)	
-Hallan correctamente el resultado, pero repiten cantidad	3,12	0	1,64	0	0	2,22	0	0	0	0	0	0
		(1,19)				(0,55)				(0)		
TOTAL	3,12	0	1,64	0	0	11,11	2,7	11,36	0	39,5	10	31,82
		(1,19)				(6,29)					(20,33)	

* Porcentaje de ensayos medio en cada tipo de estrategia errónea y para cada grupo

detrás del signo igual representa la unión de dos conjuntos y en consecuencia no puede asignarse como cantidad en el sumando desconocido, ya que el otro sumando no alcanza el valor cero y, finalmente, que para extraer el sumando desconocido es necesario operar sobre las cantidades conocidas y de ahí que los sujetos mayores sumen ambas cantidades.

Los errores de procedimiento y utilización son poco habituales en todos los grupos, aunque estos últimos se aprecian principalmente entre los niños mayores, mientras que los de procedimiento lo hacen entre los preescolares y más escasamente entre los de 1º de EGB. En definitiva estos datos indican que los niños de 2º de EGB , así como algunos de 1º disponen de la competencia conceptual necesaria para solventar este tipo de tarea, pero fallan a la hora de elegir el procedimiento más idóneo para llevar a buen término la solución.

5.3.2. Los errores en las tareas de conmutatividad

El nivel de éxito alcanzado por los sujetos de los tres grupos de edad en las tareas de conmutatividad es notorio, sobre todo en ausencia del resultado. A pesar de ello, hemos identificado a lo largo de las dos pruebas, comparar sumas y encontrar el sumando desconocido, varias categorías de errores que pasamos a considerar seguidamente.

5.3.2.1. ANALISIS DE LOS ERRORES EN LA TAREA DE COMPARAR SUMAS

En la prueba de comparar sumas en ausencia del resultado, los errores son poco frecuentes en todos los grupos (Tabla 27), aunque se aprecian ciertas diferencias evolutivas en cuanto que los sujetos pertenecientes a 2º de Preescolar cometen más errores que los de 1º y 2º de EGB, siendo estos últimos los que presentan un porcentaje más bajo.

Tabla 27
Frecuencia de ensayos correspondientes a los errores en la tarea de comparar sumas en cada uno de los grupos y en los cuatro tipos de sumandos, tanto en presencia como en ausencia del resultado.

	AUSENCIA DEL RESULTADO				PRESENCIA DEL RESULTADO			
SUMANDOS	1	2	3	4	1	2	3	4
6,I	25	12	24	21	56	51	59	57
6,II	14	10	12	10	48	39	47	42
6,III	6	6	6	6	24	22	21	23

En cuanto al tipo de errores se presentan dos categorías: 1) afirmar que no existe la misma cantidad porque los sumandos están al revés y 2) afirmar la igualdad sustituyendo el primer sumando de la segunda cuenta por un número cualquiera en su lugar. Los errores más frecuentes en todos los grupos corresponden a la primera categoría mencionada, mientras que los de la segunda aparecen únicamente en el grupo de 1º de EGB en los sumandos hechos numéricos y hechos numéricos superiores a la decena, pero en un porcentaje muy bajo (Tabla, 28).

Tabla 28
Porcentajes de ensayos en los distintos tipos de errores en la tarea de comparar sumas en ausencia del resultado

	6,I				6,II				6 III			
SUMANDOS	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
TIPOS DE ERRORES												
Sustituen el primer sumando de la segunda cuenta por un número cualquiera	0	0	0	0	0	0	16,67	10	0	0	0	0
		(0)*				(6,67)				(0)		
Están al revés	100	100	100	100	100	100	83,33	90	100	100	100	100
		(100)				(93,33)				(100)		

* Porcentaje de ensayos medio en cada tipo de estrategia errónea y para cada grupo
Sumandos; 1= 1 + N; 2= círculos + guarismos; 3= hechos numéricos; 4= hechos numéricos superiores a la decena

En presencia del resultado y en en esta misma tarea, se incrementa de manera apreciable la frecuencia de ensayos incorrectos en todos los grupos y en todos los sumandos , aunque se observa un ligero descenso con la edad, es decir, los sujetos de 2º de EGB cometen menos errores que los de 1º y éstos a su vez responden mejor que los de 2º de Preescolar (Tabla 27).

Los errores son de varios tipos: (1) errores de tipo perceptivo, (2) errores que inciden en la ausencia del resultado en una de las cuentas, (3) errores referentes a los sumandos, (4) errores mixtos y (5) errores no categorizables. El primer tipo consiste en que los niños realizan comparaciones perceptivas entre ambas cuentas, considerando que no son iguales en cuanto a la cantidad porque falta el resultado y el signo de igualdad o simplemente porque falta el resultado. El segundo, hace referencia a errores en los que los niños afirman que no existe la igualdad en las operaciones porque el resultado de ambas es distinto. El tercer tipo es semejante al anterior, salvo en que hacen referencia a que los sumandos están al revés. El cuarto, es una categoría mixta en la que los niños argumentan que en una de las cuentas figura el resultado y además, los sumandos están al revés. El quinto y último tipo se corresponde con explicaciones no categorizables en las que los niños inventan respuestas sin sentido.

En cuanto a los resultados (Tabla 29), el mayor porcentaje de ensayos incorrectos en todos los grupos, así como en los cuatro tipos de sumandos, corresponde al primer tipo de errores que hemos considerado. Más concretamente, se trata de errores en los que el niño o bien no admite la igualdad porque en una de las cuentas aparece el resultado, mientras que en la otra no o indica que en una de las operaciones no figura el signo igual ni tampoco el resultado. Estos errores ponen de manifiesto que compara simplemente las dos cuentas comprobando si en una y otra están presentes los mismos datos, de hecho esta estrategia errónea se pone en marcha igualmente en esta misma prueba en ausencia del resultado, pero en este caso conduce a respuestas correctas. Finalmente, los restantes tipos de errores son poco frecuentes en todos los grupos, alcanzando un porcentaje ligeramente superior el consistente en afirmar que el resultado de ambas cuentas no es el mismo.

Tabla 29
Porcentajes de ensayos en los distintos tipos de errores en la tarea de comparar sumas en presencia del resultado

	G,I				G,II				G III			
SUMANDOS	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
TIPOS DE ERRORES												
PERCEPTIVOS												
- Indican que falta el resultado	51,78	68,62	57,63	59,65	68,75	64,1	76,6	71,43	66,66	81,82	57,14	47,83
		(59,42)*				(70,22)				(63,36)		
- Indican que falta el signo de igualdad y el resultado	7,14	11,76	8,47	12,28	0	0	0	0	0	0	0	0
		(9,91)										
TOTAL	58,92	80,38	66,1	71,93	68,75	64,1	76,6	71,43	66,66	81,82	57,14	47,83
		(69,33)				(70,22)				(63,36)		
RESULTADO												
- Las dos cuentas no suman lo mismo	28,57	5,9	10,17	8,8	12,5	17,95	10,64	7,14	20,83	18,18	28,57	26,09
		(13,36)				(12,06)				(23,42)		
SUMANDOS												
- Los sumandos están al revés	7,14	11,76	13,56	10,53	18,75	10,25	12,76	21,43	12,5	0	14,28	0
		(10,75)				(15,79)				(6,69)		
MIXTOS												
- Los sumandos están al revés y falta el resultado	5,36	1,96	10,17	8,8	0	5,13	0	0	0	0	0	26,09
		(6,56)				(1,28)				(6,52)		
NO CATEGORIZABLES												
- Inventan la respuesta	0	0	0	0	0	2,56	0	0	0	0	0	0
		(0)				(0,64)				(0)		

* Porcentaje de ensayos medio en cada tipo de estrategia errónea y para cada grupo
Sumandos: 1= 1 + N; 2= círculos + guarismos; 3= hechos numéricos; 4= hechos numéricos superiores a la decena

5. 3. 2. 2. ANALISIS DE LOS ERRORES EN LA TAREA DE ENCONTRAR EL SUMANDO DESCONOCIDO

En la tarea de encontrar el sumando desconocido, los errores resultan ser más frecuentes en presencia del resultado que en ausencia del mismo, en todos los grupos de edad (Tabla 30). Específicamente, en ausencia del resultado, se presentan diferencias evolutivas entre los grupos, siendo los niños más pequeños los que peor ejecutan esta prueba y los mayores los que mejor la resuelven en todos los sumandos.

Tabla 30
Frecuencia de ensayos correspondientes a los errores en la tarea de encontrar el sumando desconocido en cada uno de los grupos y en los cuatro tipos de sumandos, tanto en presencia como en ausencia del resultado.

	AUSENCIA DEL RESULTADO				PRESENCIA DEL RESULTADO			
SUMANDOS	1	2	3	4	1	2	3	4
6,I	16	16	20	21	52	48	50	54
6,II	9	6	7	6	39	25	39	38
6,III	4	7	3	3	12	16	9	15

Los errores se agrupan en tres categorías: (1) repetición de cantidades, (2) las consistententes en resolver la cuenta en la que se consignan ambos sumandos anotando el resultado en el lugar correspondiente al sumando desconocido y (3) no categorizables, que se corresponden con respuestas en las que el sujeto inventa la respuesta poniendo un número cualquiera. Se presentan diferencias entre los grupos en relación con el tipo de errores cometidos por los niños. Así, entre los más pequeños los errores más frecuentes corresponden en todos los sumandos a la repetición de cantidades, bien simplemente colocando en el lugar de la incógnita el mismo sumando que aparece como conocido, bien anotando los dos sumandos correspondientes al primer algoritmo. Estos errores, que son semejantes a los que se producen en la tarea de sumar cuando la incógnita se ubica en el primer sumando, indican que el niño se centra en los sumandos y dado que éstos se encuentran al revés y el resultado de las cuentas debe ser el mismo, ofrecen como respuesta el sumando conocido o escriben la operación sobre la que se realizan las comparaciones (Tabla 31).

En 1º y 2º de EGB, aunque el porcentaje de ensayos incorrectos es muy escaso en ambos casos, predominan los errores correspondientes a la segunda categoría, esto es, resuelven la operación en la que los sumandos son conocidos y sitúan el resultado en la segunda operación en el lugar correspondiente al sumando desconocido. Estos errores indican que los niños no disponen de conocimiento referente al valor de las cantidades según se encuentren antes del signo de igualdad o después del mismo. Además en 2º de EGB, no hay ningún sujeto que repita cantidades.

Tabla 31
Porcentajes de ensayos en los distintos tipos de errores en la tarea de encontrar el sumando desconocido en ausencia del resultado

	6,I				6,II				6 III			
SUMANDOS	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
TIPOS DE ERRORES												
REPETICION DE CANTIDADES												
- El mismo sumando	37,5	37,5	40	33,33	33,33	66,66	0	33,33	0	0	0	0
		(37,08)				(33,33)				(0)		
- Ambos sumandos	0	18,75	15	14,28	0	0	0	0	0	0	0	0
		(12,01)				(0)				(0)		
TOTAL	37,5	56,25	55	47,61	33,3	66,66	0	33,33	0	0	0	0
		(49,09)				(33,33)				(0)		
RESOLVER CUENTA												
- Anotan el resultado de la cuenta	31,25	0	30	14,28	66,66	16,66	57,14	50	100	71,43	100	100
		(18,88)				(47,61)				(92,86)		
NO CATEGORIZABLES												
- Inventan la respuesta	31,25	43,75	15	38,09	0	16,66	42,86	16,66	0	28,57	0	0
		(32,02)				(19,04)				(7,14)		

Cuando el resultado está presente, se observan diferencias evolutivas entre los grupos, en cuanto que los niños preescolares resuelven peor las pruebas que los de 1º y 2º de EGB y éstos últimos, lo hacen mejor que los de 1º de EGB (Tabla 30).

El análisis de los errores cometidos por los sujetos en la ejecución de esta prueba, pone de relieve la presencia de un conjunto de estrategias que se muestran ineficaces y que pasamos a describir a continuación: 1) ofrecer como respuesta el resultado de la primera cuenta con o sin el signo igual, 2) indicar correctamente el sumando desconocido, pero sin admitir la igualdad de las cuentas bien porque el orden de los sumandos es distinto, bien porque en una de ellas no figura el resultado, 3) dar como respuesta la misma cantidad que el sumando conocido, 4) poner una cantidad distinta a cualquiera de las existentes en las cuentas, 5) considerar que el sumando desconocido lo constituye la suma del resultado con el sumando inicial en la primera cuenta, 6) equiparar el sumando desconocido con la primera cuenta ya sea con o sin el resultado y, 7) consignar como respuesta el resultado de la primera cuenta acompañándolo de alguno de los sumandos y en ocasiones además del signo igual.

En cuanto a los resultados (Tabla 32), tanto en el grupo de Preescolar como en el de 1º de EGB, los errores

Tabla 32
Porcentajes de ensayos en los distintos tipos de errores en la tarea de encontrar el sumando desconocido en presencia del resultado

	6,I				6,II				6 III			
SUMANDOS	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
TIPOS DE ERRORES *												
I:												
- Ia	59,62	60,42	52	54	25,64	40	30,77	28,95	50	37,5	33,33	26,67
		(56,46)				(31,34)				(36,87)		
- Ib	0	6,25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		(1,56)										
TOTAL	59,62	66,67	52	54	25,64	40	30,77	28,95	50	37,5	33,33	26,67
		(58,07)				(31,34)				(36,87)		
II:												
- IIa	5,77	6,25	6	5,55	0	4	0	0	0	0	0	0
		(5,9)				(1)				(0)		
- IIb	0	0	0	3,7	0	28	0	0	0	25	0	20
		(0,92)				(7)				(11,25)		
TOTAL	5,77	6,25	6	9,25	0	32	0	0	0	25	0	20
		(6,82)				(8)				(11,25)		
III	1,92	0	0	0	2,56	0	0	0	0	0	0	0
		(0,48)				(0,64)				(0)		
IV	5,77	8,33	2	7,41	15,38	0	7,69	7,89	0	0	0	13,33
		(5,87)				(7,74)				(3,33)		
V	0	0	0	0	25,64	24	23,07	15,79	50	37,5	66,67	40
		(0)				(22,12)				(48,54)		
VI:												
- VIa	0	0	6	9,26	0	0	0	0	0	0	0	0
		(3,81)				(0)				(0)		
- VIb	0	0	0	5,55	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL	0	0	6	14,81	0	0	0	0	0	0	0	0
		(5,2)				(0)				(0)		
VII:												
- VIIa	19,23	10,42	34	27,78	23,07	0	30,77	39,47	0	0	0	0
		(22,86)				(23,33)				(0)		
- VIIb	7,7	8,33	0	1,86	0	0	0	0	0	0	0	0
		(4,47)				(0)				(0)		
TOTAL	26,93	18,75	34	29,64	23,07	0	30,07	39,47	0	0	0	0
		(27,33)				(23,33)				(0)		

* (I: responden con el resultado, Ia: anotan el resultado de la primera cuenta, Ib: anotan el resultado y el signo; II: responden correctamente, pero no admiten igualdad porque IIa: los sumandos están al revés, IIb: no figura el resultado; III: responden con la misma cantidad que el sumando conocido; IV responden con una cantidad distinta a cualquiera de las existentes; V: adicionan el resultado de la primera cuenta con el sumando conocido en la segunda cuenta; VI: copian la primera cuenta en el lugar correspondiente al sumando desconocido, VIa: incluyendo el resultado, VIb: sin el resultado; VII: responden con el resultado acompañándolo de VIIa: alguno de los sumandos, VIIb: alguno de los sumandos y el signo de igualdad)

más frecuentes consisten en consignar como respuesta el resultado en el lugar del sumando desconocido, siguiéndoles a continuación los correspondientes a anotar el sumando que falta, el resultado y el signo en el grupo I y el sumando que falta y el resultado en el grupo II. En el grupo de los mayores, aunque persisten los errores de ofrecer como respuesta el resultado, aparecen también los que consisten en sumar en la primera cuenta el sumando inicial con el resultado de la misma, anotando a continuación este resultado en el lugar del sumando desconocido. Estos últimos errores también resultan frecuentes entre los niños de 1º de EGB.

En general, los errores cometidos por los niños a lo largo de esta prueba se deben a dos cosas, por un lado algunos de estos errores se pueden atribuir a que no identifican correctamente el valor de las cantidades, de ahí que en la mayoría de los errores indiquen como respuesta el resultado, ni tampoco el valor de los signos, lo que a su vez resulta en que a menudo los niños anoten como respuesta además el signo de igualdad. Por otro lado, aunque en un porcentaje más bien bajo, algunos sujetos escriben como respuesta la primera cuenta, lo que desde nuestro punto de vista puede tener tres interpretaciones posibles: bien, de acuerdo con la explicación citada más arriba, no conocen claramente el valor de las cantidades, bien porque no caen en la cuenta del sumando conocido, bien, finalmente, porque el sumando conocido no se sitúa en el lugar adecuado, intentando eliminar esta dificultad escribiendo toda la operación de nuevo.

5. 3. 3. Los errores aditivos y las tareas de conmutatividad

En este apartado pasamos a considerar seguidamente las respuestas erróneas de los niños en la tarea de sumar, tanto en presencia como en ausencia del resultado, y su relación con el éxito o fracaso en las tareas de conmutatividad. Como podemos observar en la Tabla 33, en todos los grupos, los errores aditivos, que se producen cuando la incógnita se sitúa en el resultado, se acompañan de un porcentaje mayor de fracaso en las tareas de comparar sumas y encontrar el sumando desconocido cuando el resultado se encuentra presente en estas últimas (p.e., en los errores de tipo conceptual en el grupo I encontramos un 48.73% de fracaso frente a un 8.72% de éxito en la tarea de comparar sumas en presencia del resultado). Sin embargo, esta pauta de resultados no se produce cuando en esas mismas tareas está ausente el resultado, en todos los grupos de edad (p.e., en los errores de tipo conceptual en el grupo I, encontramos un 34.81% de ensayos con éxito frente a un 22.63% de fracaso en la tarea de comparar sumas en ausencia del resultado). En otras palabras, buena parte

Tabla 33
Errores en la tarea de sumar con la incógnita en el resultado. Porcentajes de ensayos correspondientes a los éxitos/fracasos en las tareas de conmutatividad en ausencia y en presencia del resultado

TAREAS		6.I				6.II				6.III			
		Comparar sumas		Encontrar sumando		Comparar sumas		Encontrar sumando		Comparar sumas		Encontrar sumando	
		B	M	B	M	B	M	B	M	B	M	B	M
TIPOS DE ERRORES													
Conceptuales	A.R.	34,81	22,63	36,85	20,6	54,28	1,78	40,08	15,98	5	5	10	0
	P.R.	8,72	48,73	20,6	36,86	3,12	52,94	3,12	52,94	0	10	5	5
Procedimiento	A.R.	21,02	3,47	20,14	4,35	0	0	0	0	0	0	0	0
	P.R.	0	24,94	8,11	16,38	0	0	0	0	0	0	0	0
Utilización	A.R.	14,87	3,17	13,85	4,17	31,7	12,22	42,88	1,04	52,5	37,5	49,17	40,83
	P.R.	3,57	14,04	5,25	12,78	5,21	38,72	17,43	26,5	27,33	62,67	44,48	45,52

Abreviaturas: B= Bien; M = Mal; A.R. = Ausencia del resultado; P.R. = Presencia del resultado

de los ensayos incorrectos de la tarea de resolver sumas con la incógnita en el resultado, son ensayos incorrectos igualmente en las tareas de conmutatividad en presencia del resultado, pero no en su ausencia. Además, este resultado es el mismo si consideramos independientemente las tres categorías de errores aditivos: conceptuales, de procedimiento y de utilización. Cuando el resultado se halla ausente en las tareas de conmutatividad, los errores de procedimiento y utilización de la tarea aditiva se corresponden con un porcentaje superior de aciertos que en los de tipo conceptual, principalmente en 2º de Preescolar. Dicho de otro modo, los errores aditivos de procedimiento se asocian con un mayor conocimiento de la propiedad conmutativa, al menos entre los más pequeños. No obstante, en el grupo de los mayores los porcentajes de aciertos y errores en ambas tareas de conmutatividad resultan muy próximos en los errores de utilización (p.e., 49.17% vs 40.83% de ensayos en la tarea de encontrar en ausencia del resultado). A este respecto, hemos de señalar que los sujetos que cometen los errores de utilización emplean estrategias muy primitivas, como contar todo con los dedos, que no se corresponden en absoluto con su nivel de escolaridad y ello es debido a su escaso conocimiento de la conmutatividad.

En suma, los datos aquí encontrados ponen de manifiesto que antes de que los niños presenten una cierta maestría en la operación de sumar, acceden a una cierta competencia en relación con la conmutatividad. Es decir, los ensayos incorrectos en las tareas de sumar no siempre se corresponden con ensayos incorrectos en las tareas de conmutatividad, principalmente cuando en éstas se halla ausente el resultado. Sin embargo, hay que señalar a este respecto que todos los niños, salvo uno en 2º de Preescolar, que responden correctamente en las tareas de conmutatividad, manifiestan cierto nivel de éxito en la tarea de sumar cuando la incógnita se ubica en el resultado. En otras palabras, la adquisición de la propiedad conmutativa comporta siempre un cierto conocimiento de la adición.

En la tarea de sumar con la incógnita en el sumando inicial (tabla 34) se aprecia la misma pauta general de resultados. Es decir, en todos los grupos y en ambas tareas de conmutatividad en ausencia del resultado, el éxito supera al fracaso (p.e., en el grupo I en los errores conceptuales encontramos un 61.44% de éxito frente a un 25.23% de fracaso en la tarea de comparar sumas). Ahora bien, en las tares de conmutatividad en presencia del resultado y a diferencia de antes (resolver sumas con la incógnita en el resultado) en los errores de procedimiento y utilización, principalmente en 1º y 2º de EGB, el éxito sigue siendo superior al fracaso, pero no en los errores conceptuales donde se invierten estos resultados. Estos datos, están en desacuerdo con las afirmaciones de Weaver (1982) de que tanto la resolución correcta de las tareas de adición con la incógnita en el sumando inicial como la adquisición de la propiedad conmutativa, comportan un esquema de adición binario. En esta línea, aunque nuestros resultados muestran un fracaso considerable en la tarea de sumar con la incógnita en el sumando inicial, sobre todo en los grupos I y II, no encontramos un fracaso similar en las tareas de conmutatividad, en ausencia del resultado y en

Tabla 34
Errores en la tarea de sumar con la incógnita en el sumando inicial. Porcentajes de ensayos correspondientes a los éxitos/fracasos en las tareas de conmutatividad en ausencia y en presencia del resultado

		G.I				G.II				G.III			
TAREAS		Comparar sumas		Encontrar sumando		Comparar sumas		Encontrar sumando		Comparar sumas		Encontrar sumando	
		B	M	B	M	B	M	B	M	B	M	B	M
TIPOS DE ERRORES													
Conceptuales	A.R.	61,44	25,23	64,4	22,25	72,94	12,71	66,96	18,7	49,79	14,44	49,44	14,79
	P.R.	18,97	67,69	25,29	61,38	20,53	65,12	29,55	56,1	22,7	41,53	37,07	27,14
Procedimiento	A.R.	8,19	3,94	8,19	3,93	8,05	0	8,05	0	15,45	0	15,45	0
	P.R.	1,64	10,49	7,41	4,72	2,27	5,78	2,27	5,78	8,47	6,97	15,45	0
Utilización	A.R.	0,41	0,78	1,19	0	5,72	0,57	6,29	0	20,32	0	19,01	1,31
	P.R.	0	1,19	0,78	0,41	5,04	1,25	5,04	1,25	16,08	4,25	15,6	4,72

Abreviaturas: B= Bien; M = Mal; A.R. = Ausencia del resultado; P.R. = Presencia del resultado

algunas ocasiones en presencia del mismo (errores de procedimiento y utilización).

En resumen, el nivel de éxito alcanzado por los niños en algunas de las tareas de conmutatividad puede ser interpretado en dos direcciones. En primer lugar, cabe pensar que la adquisición de la propiedad conmutativa se asocia primeramente con un esquema unitario de la adición, pero dado que el nivel de éxito más elevado, tanto en las tareas de conmutatividad como en las de sumar con la incógnita en el sumando inicial, se produce en el grupo de los mayores, resulta probable que el desarrollo posterior del principio de conmutatividad se ligue a un esquema binario. En segundo lugar, cabe la posibilidad de que tanto los sujetos del G. I como los del G. II que responden incorrectamente a la tarea de sumar con la incógnita en el sumando inicial, se hallen en un período de tránsito en el conocimiento de un esquema binario de la adición, pero debido a la dificultad de esta tarea de sumar no manifiestan dicho conocimiento en relación con la adición, pero sí en algunas de las tareas de conmutatividad. En consecuencia, sería interesante la puesta en marcha de estudios posteriores que investigasen el proceso de tránsito entre el esquema unitario y binario de la adición, para responder a este interrogante sobre la conmutatividad.

CONCLUSIONES

El análisis de los datos obtenidos en el presente estudio, permite establecer las siguientes conclusiones respecto a nuestras hipótesis iniciales:

HIPOTESIS 1: Se observarán diferencias evolutivas entre los grupos en cuanto al nivel de rendimiento en función del tipo de tareas, el tipo de sumandos y la presencia/ausenica del resultado.

En relación con esta hipótesis, nuestros datos parecen apuntar dos cosas. En primer lugar, podemos afirmar que se aprecian diferencias en el nivel de rendimiento de los niños a lo largo de las distintas tareas, de modo que los mayores resuelven mejor las tareas que los de 1º de EGB y estos a su vez lo hacen mejor que los de 2º de Preescolar. No obstante, tan sólo alcanzan el nivel de significatividad estadística las diferencias entre el grupo de Preescolar y los grupos de EGB. Es decir, mientras que el rendimiento de los niños de 1º y 2º de EGB es relativamente similar a lo largo de las distintas pruebas, no lo es el de los niños de Preescolar. Así, encontramos diferencias entre los niños preescolares y los de 1º y 2º de EGB cuando se compara su rendimiento en las tareas de resolver sumas vs comparar sumas y resolver sumas vs encontrar el sumando desconocido en los sumandos 1+N, círculos + guarismo y hechos numéricos superiores a la decena. Sin embargo, dichas diferencias no se manifiestan entre las tareas de conmutatividad, esto es, comparar sumas vs encontrar el sumando desconocido en ninguno de los sumandos. Por tanto, las diferencias entre el grupo de Preescolar y los de EGB son imputables principalmente a la tarea de resolver sumas. Este resultado se ha explicado señalando que la operación de sumar comporta un nivel de competencia conceptual más amplio, que conlleva el conocimiento de otros principios y propiedades además de la conmutatividad. Por otra parte, encontrar este patrón de resultados es esperable si tenemos en cuenta que los niños de EGB han recibido o están recibiendo instrucción formal en la adición, mientras que los de Preescolar son iniciados sólamente en algunas nociones básicas y con algunas cantidades. De hecho, las diferencias no son tales en el sumando "hechos numéricos" porque conocen estos números y los pueden representar con los dedos. También cabe señalar que el hecho de no apreciarse diferencias significativas entre los grupos en las tareas de conmutatividad, pone de relieve como este principio se encuentra presente entre las competencias del niño desde muy temprano. Ello estaría en contradicción con las prácticas instructivas al uso que reservan la enseñanza de la propiedad conmutativa hasta un momento posterior, desaprovechando así una competencia que que forma parte del repertorio conceptual de períodos evolutivos anteriores. La discusión de la hipótesis 5, abundará sobre la cuestión de la evolución de la conmutatividad, matizando estas observaciones.

En segundo lugar, las diferencias entre los grupos se manifiestan también en el factor presencia/ausencia del resultado, ya que se produce un descenso notable en la ejecución de todos los grupos y en todos los sumandos en presencia del resultado. Este descenso en el rendimiento ocurre sobre todo en los niveles de 2º de Preescolar y 1º de EGB, en comparación con el de 2º de EGB. Específicamente, las diferencias entre los niños de Preescolar y los de 2º de EGB se producen en los sumandos 1+N , círculos + guarismo y hechos numéricos superiores a la decena y entre los de 1º y 2º de EGB en los sumandos 1+N, hechos numéricos y hechos numéricos superiores a la decena.

HIPOTESIS 2: las estrategias utilizadas por los niños a lo largo de las distintas tareas sufren variaciones en función de la edad, la presencia del resultado y los tipos de tarea y el tipo de sumandos.

En la tarea de **resolver sumas** y siguiendo de cerca la categorización de estrategias propuesta por Carpenter y Moser (1983, 1984), tanto si la incógnita se ubica en el resultado como si lo hace en uno de los sumandos resulta prioritario el empleo de procedimientos de conteo en todos los grupos: contar a partir del mayor y contar a partir de un número dado. Ahora bien, cuando la incógnita se halla en el resultado, los preescolares siguen dependiendo además de estrategias consistentes en contar todo con modelos, mientras que entre los mayores comienzan a ser predominantes igualmente las memorísticas. En esta misma tarea, hemos identificado varias formas de ejecutar las estrategias de contar todo con modelos y de conteo y hemos propuesto distintos niveles evolutivos de complejidad. Sin embargo, un hecho destacado cuando la incógnita aparece en el primer sumando, es que los niños no inventan atajos que supongan una menor carga para la memoria de trabajo, a no ser contar mentalmente o con los dedos. Las razones que explican esto son varias. En primer lugar, como ya hemos señalado, la tarea de adición con la incógnita en el primer sumando comporta una concepción binaria de la suma y, en segundo lugar, los niños no poseen demasiada experiencia en este tipo de tareas, por lo menos los de Preescolar, lo que fomenta cierta inseguridad y el aferramiento a estrategias ya dominadas. Esto último resulta evidente si tomamos en consideración los datos procedentes del análisis de estrategias en función del tipo de sumandos, ya que no aparecen diferencias en cuanto al procedimiento a seleccionar cuando la incógnita se halla en el primer sumando, mientras que sí las hay cuando se sitúa en el resultado.

Por lo que hace referencia a **las tareas de conmutatividad**, las estrategias utilizadas por los niños en una y otra tarea son muy similares tanto en presencia como en ausencia del resultado. En general, son las siguientes: estrategias de tipo perceptivo basadas en verificar que en ambos algoritmos figuran exactamente los mismos datos, estrategias centradas en los sumandos, estrategias centradas en el resultado y estrategias que hacen mención directamente a la propiedad conmutativa. Todos estos procedimientos suponen distintos niveles de complejidad y, por tanto, de conocimiento de la propiedad conmutativa, lo que se refleja en diferencias evolutivas entre los grupos. No obstante, dichas diferencias se ponen de relieve, principalmente, en la tarea de **encontrar el sumando desconocido**. En la tarea de **comparar sumas** se presentan únicamente en el grupo de los niños mayores, que optan mayoritariamente en esta tarea y en presencia del resultado por la estrategia que hace mención al resultado sin necesidad de operar, mientras que los otros dos grupos aluden a los sumandos. En la tarea de **encontrar el sumando desconocido**, tanto en presencia como en ausencia del mismo, los niños de 2º de Preescolar y 1º de EGB recurren fundamentalmente a la estrategia de copia, aunque en este último grupo aumenta la relativa al resultado, mientras que los de 2º de EGB ponen en marcha la estrategia referente a los sumandos. Finalmente , el tipo de sumandos no parece influir de modo notable en el procedimiento de ejecución seleccionado por los niños en todos los grupos de edad en la tarea de comparar sumas, pero sí en algunos de los sumandos en la tarea de encontrar el sumando desconocido.

HIPOTESIS 3: los errores cometidos por los niños en las distintas tareas varían en función de la edad, la presencia/ausencia del resultado, la tarea y el tipo de sumandos.

A la hora de clasificar los errores que aparecen en la tarea de sumar tomamos como punto de partida el modelo de conteo propuesto por Greeno, Riley y Gelman (1984), que considera tres aspectos básicos de la competencia en el conteo: conceptual, de procedimiento y de utilización. Teniendo en cuenta que apenas existen trabajos que se hayan ocupado de estudiar la ejecución de los niños en tareas de suma presentadas en forma de algoritmo y que la tipología de errores a la que recurren parece poco exhaustiva y de limitado valor explicativo, hemos optado por proponer una nueva categorización que considere los aspectos a los que nos hemos referido. Dado el interés heurístico de la clasificación de la competencia en el conteo antes apuntada, se adoptan estas mismas categorías para analizar los errores aparecidos en este estudio, distinguiéndose, por tanto, errores conceptuales, de procedimiento y de utilización.

Los resultados en la **tarea aditiva**, tanto si la incógnita se ubica en el sumando inicial como si lo hace en el resultado, indican la presencia de diferencias evolutivas entre los grupos, de modo que los errores más frecuentes correponden mayoritariamente a los niños de 2º de Preescolar, siguiéndoles en importancia los de 1º de EGB y, por último, los de 2º de EGB. Además, estos errores se relacionan principalmente con la competencia conceptual en general en todos los sumandos y, tanto en presencia como en ausencia del resultado, los niños responden con una de las cantidades presentes en la operación. No obstante, entre los sujetos mayores alcanzan cierta importancia los errores debidos al conocimiento de utilización, observándose que estos fallos descansan en el cómputo inadecuado. Por último, si bien los errores de procedimiento son abundantes entre los preescolares cuando la incógnita se ubica en el resultado, son escasos cuando se ubica en el primer sumando, ya que en este caso aumentan notablemente los referentes a la competencia conceptual. Esto indica que los niños preescolares demuestran mayor competencia en la suma cuando tienen que hallar el resultado. Por contra, en 1º y 2º de EGB los errores de procedimiento aumentan frente a los conceptuales, tanto en un caso como en otro.

Los errores procedentes de la tarea de **comparar sumas**, tanto en presencia como en ausencia del resultado, muestran varias cosas. En primer lugar, que existen diferencias evolutivas entre los grupos, de modo que, tanto en un caso como en otro, los errores más frecuentes se producen entre los niños más pequeños, siguiendo a estos los de 1º de EGB y, por último, los de 2º de EGB. En segundo lugar, no se aprecian diferencias importantes en relación con los tipos de errores en el factor tipo de sumando. En tercer lugar, existen diferencias entre el tipo de errores cometido por los niños, dependiendo de que el resultado esté presente o ausente. En el primer caso, los errores son más frecuentes y se producen como consecuencia de que los sujetos comprueban que en ambas cuentas no figuran exactamente los mismos datos. En el segundo caso, los errores son menores, aludiendo principalmente a que los sumandos están al revés y se trata por tanto de operaciones distintas con resultados diferentes. En la tarea de **encontrar el sumando desconocido**, se presentan básicamente los mismos resultados que en la de comparar sumas. Sin embargo, contrariamente a lo que sucede en la tarea anterior, las categorías de errores encontradas en ausencia y presencia del resultado son similares, aunque en este último caso y dado que la frecuencia de ensayos incorrectos es superior hemos identificado más categorías. Así, en presencia del resultado los errores de los niños en todos los grupos consisten mayoritariamente en señalar como respuesta el resultado de la primera cuenta o el sumando desconocido y el resultado; en ausencia del mismo, los sujetos de 2º de Preescolar anotan la cantidad ya conocida y los de 1º y 2º de EGB, resuelven la cuenta en la que conocen ambos términos y anotan el resultado.

HIPOTESIS 4: la presencia del resultado aumenta el nivel de dificultad tanto en las tareas de conmutatividad como en la tarea de resolver sumas.

Nuestros resultados se hallan en consonancia con esta hipótesis, ya que el nivel de rendimiento desciende en todas las tareas en presencia del resultado. Además, alcanzan la significatividad las comparaciones entre las tareas de resolver sumas y comparar sumas; En otras palabras, cuando asignamos el mismo peso específico a todos los sumandos, encontramos que las distancias entre las puntuaciones medias en la tarea de comparar sumas en el factor presencia/ausencia del resultado es superior al que se establece en la tarea de sumar y en la de encontrar el sumando desconocido. Es decir, si la presencia del resultado hace que los niños se desenvuelvan menos eficazmente en general, la eficacia se hace aún menor cuando la tarea que tiene que acometer es la de comparar sumas. En consecuencia, la presencia del resultado, lejos de resultar un elemento de ayuda a la hora de identificar el valor de los términos en estas tareas, dificulta su resolución. A este respecto y en relación con la tarea de sumar, nuestros datos vienen a confirmar los resultados aportados por otras investigaciones (p.e. Carpenter, 1986).

El fracaso de los niños en las tareas aditivas viene determinado por el desconocimiento de la función de los términos de la adición y de los signos y asímismo, porque la tarea aditiva con la incógnita en el sumando inicial supone una concepción binaria de la suma. Así, un ejemplo ilustrativo de lo dicho lo constituye el comportamiento de adicionar el sumando conocido y el resultado. En definitiva, estos resultados indican que los niños, por los menos en los niveles iniciales, no han desarrollado un concepto completo y elaborado de la adición. Más bien lo que poseen es una regla de adición que aplican con éxito en las tareas aditivas, que adoptan la forma canónica y se representan con algoritmos. En otras palabras, la presencia del signo de sumar les conduce a juntar los dos sumandos. Por su parte, la explicación de cómo la presencia del resultado afecta la ejecución de las tareas de conmutatividad habría que centrarla en el hecho de que el niño focaliza toda su atención en el resultado y deja de lado la información procedente de los sumandos, lo que le lleva a fracasar. Por el contrario cuando se atiende a los sumandos, sobre los que en sentido estricto descansa la propiedad conmutativa (a+b=b+a), la ejecución se torna exitosa. Teniendo en cuenta que si el resultado no está presente la probabilidad de considerar los sumandos resulta mucho mayor, parece lógico encontrar un mejor rendimiento. A partir de todo lo expuesto, se ha sugerido que tanto la adquisición de la operación aditiva como la conmutatividad se produce primeramente en ausencia del resultado.

HIPOTESIS 5: la adquisición de la conmutatividad no es un proceso de todo o nada, sino que presenta un cierto grado de evolución, de modo que el nivel de ejecución de los niños será superior en la tarea de comparar sumas (verificación) que en la tarea de encontrar el sumando desconocido (producción).

De acuerdo con nuestros datos, la adquisición de la propiedad conmutativa no es un proceso de todo o nada, ya que se halla mediatizada por la presencia del resultado y por el tipo de tarea. Tal y como acabamos de mencionar anteriormente, existen diferencias en el nivel de rendimiento en las tareas de conmutatividad en función de que se halle presente el resultado o no, de modo que este rendimiento resulta superior cuando está ausente. Sin embargo, en contra de nuestra hipótesis y de los datos procedentes de otras investigaciones (p.e., Gelman y Meck, 1983; Miller, Keating y Perlmutter, 1984), la tarea de encontrar el sumando desconocido resulta más sencilla que la de comparar sumas. En este caso, a pesar de que se trata de una tarea de producción y no se acomoda a la forma canónica, todos los sujetos, y en general en todos los sumandos, manifiestan un rendimiento superior cuando el resultado está presente. En ausencia del resultado, esto es igualmente cierto en el grupo de los mayores y en el grupo de 1º de EGB en algunos sumandos, mientras que no existe asociación entre estas tareas en el grupo de Preescolar. La superioridad del rendimiento en la tarea de producción (encontrar el sumando desconocido) no era esperable, ya que esta tarea guarda cierta similitud con la de sumar cuando la incógnita se halla en el sumando inicial y, como hemos visto más arriba, esa prueba resulta más difícil para los niños. No obstante, este resultado puede ser debido a que el niño a la hora de juzgar la igualdad en la tarea de comparar sumas puede basarse tanto en los sumandos, como en el resultado , mientras que en la de encontrar el sumando desconocido se ve obligado necesariamente a centrarse en los sumandos, extrayendo el sumando desconocido simplemente a partir del otro algoritmo que aparece conmutado, admitiendo finalmente la igualdad. Es decir, el mismo niño tiene que construir activamente el proceso de igualación a partir exclusivamente de los sumandos, que , constituyen el sustrato sobre el que se asienta la propiedad conmutativa.

HIPOTESIS 6: la utilización de estrategias consistentes en contar empezando por el mayor (contar todo empezando por el mayor, contar a partir del mayor) en la resolución de las tareas aditivas, supone cierta competencia en la propiedad conmutativa.

Los datos procedentes del presente estudio confirman esta hipótesis, puesto que, en general, en los tres grupos de edad los ensayos correspondientes a las estrategias de contar todo empezando por el mayor y contar a partir del mayor se relacionan con un nivel de éxito absoluto o parcial en las tareas de conmutatividad. Desde esta óptica y a diferencia de otros autores (Baroody y Ginsburg, 1986; Resnick y Neches, 1984), hemos sugerido que el conocimiento del procedimiento de contar empezando por el mayor no puede desvincularse del conocimiento conceptual de la propiedad conmutativa. Además, hemos indicado también que la regresión que se observa en los procedimientos de resolución utilizados por los niños en las tarea de sumar (p.e., Carpenter y Moser, 1982), esto es, por ejemplo la inconsistencia en la utilización de la estrategia de contar a partir del mayor, puede estar relacionada, entre otras cosas, con un conocimiento incompleto de la propiedad conmutativa.

HIPOTESIS 7: el fracaso del niño en ciertas tareas aditivas no se acompaña necesariamente de un fracaso en las tareas de conmutatividad, sino que éstas en ciertas ocasiones pudieran resultar más sencillas.

Los datos del presente estudio indican que antes de que los niños presenten un cierto nivel de maestría en la adición, poseen cierta competencia en la propiedad conmutativa. En esta línea, encontramos que si bien los errores aditivos producidos cuando la incógnita se halla en el resultado se acompañan de errores en ambas pruebas de conmutatividad en presencia del resultado, no es así en ausencia del mismo. Además y a pesar de que Weaver (1982) apunta que tanto la tarea aditiva con el sumando inicial desconocido como la propiedad conmutativa comportan un esquema binario, la mayoría de los niños de todos los grupos de edad que fracasan en la tarea aditiva no lo hacen en las pruebas de conmutatividad, a excepción de la tarea de comparar sumas en presencia del resultado. Proponemos dos explicaciones alternativas a estos datos: o bien la adquisición de la propiedad conmutativa se asocia primeramente con un esquema unitario de la adición o bien los niños se hallan en un período de tránsito en la adquisición de un esquema binario, que aplican inicialmente sólo a la conmutatividad. Desde esta óptica se ha sugerido la necesidad de investigaciones futuras, que estudien los procesos de tránsito del esquema unitario de la adición al binario. En todo caso, no parece justificado enseñar la propiedad conmutativa una vez que los niños hayan adquirido un cierto nivel en torno a la adición, sino que puede presentarse de forma pareja, ya que el conocimiento de la propiedad conmutativa podrá facilitar el conocimiento de la función de las partes y el todo dentro de la adición, la utilización de estrategias de conteo complejas como contar a partir del mayor y finalmente, reducirá sensiblemente la labor de aprendizaje de hechos numéricos.

El análisis de las distintas hipótesis planteadas constituye a nuestro juicio una contribución al esclarecimiento de los procesos cognitivos implicados en la operación de sumar, y en especial de la propiedad conmutativa y su evolución a lo largo del tiempo. No resulta fácil ofrecer, para terminar, una síntesis breve de los hallazgos obtenidos sin caer en una simplificación superficial. Sólamente subrayaremos como los distintos aspectos estudiados (edad, presencia/ausencia del resultado, tipo de tarea y tipo de sumandos) parecen ejercer una influencia de manera aislada o en interacción sobre la ejecución de los niños en la aplicación de la conmutatividad. A este respecto, el presente estudio ofrece datos sobre aspectos a los que anteriormente no se había prestado atención. Así, algunas innovaciones incorporadas al diseño, tales como la inclusión de tareas novedosas como encontrar el sumando desconocido, la manipulación de la presencia o no del resultado o la variación del tipo de sumandos nos ha permitido apreciar la evolución gradual de estrategias, así como la aparición de distintos tipos de errores.

Destacar sucintamente dos hallazgos principales. En concreto y en primer lugar, quisiéramos indicar que la adquisición de la propiedad conmutativa no es un proceso de todo o nada, sino algo que supone una adquisición gradual sobre la que inciden distintas variables algunas de las cuales han sido estudiadas aquí. Desde esta óptica, hemos identificado seis niveles evolutivos en el desarrollo de esta propiedad. En el primer nivel se establece la conmutatividad en función de que en ambas operaciones aparezcan los mismos datos. En el segundo basta con que uno de los sumandos de ambas operaciones sea el mismo. En el tercer y cuarto nivel el niño necesita resolver los dos o uno de los algoritmos. En el quinto se afirma la conmutatividad indicando que ambos sumandos o el resultado (sin necesidad de operar) son iguales en las dos operaciones. Finalmente, en el sexto y último nivel se enuncia directamente la propiedad conmutativa.

Una segunda aportación, que sólo mencionaremos, se refiere a que los niños parecen tener un cierto conocimiento de la conmutatividad antes de que aprendan a ejecutar perfectamente las tareas de sumar, de modo que no parece justificarse la enseñanza tardía de esta propiedad.

Futuros trabajos de investigación tendrán que contrastar y analizar nuestros datos con respecto a esta propiedad, así como ocuparse de otras propiedades, como por ejemplo la asociativa, que por el momento no ha recibido la debida atención. Igualmente, la incorporación de tareas distintas a la empleadas en este estudio ofrecerá la posibilidad de conocer la generalidad de nuestros datos a situaciones distintas, así como la posibilidad de matizarlos en función de variables que no hayan sido consideradas aquí. De este modo se obtendrá un cúmulo de conocimientos cada vez más elaborado en torno a cómo suman los niños, que no sólo no puede olvidarse en la práctica educativa, sino que además resultará imprescindible en orden a intervenir y optimizar convenientemente el proceso de aprendizaje de esta operación.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Ashcraft, M. H. (1982). The development of mental arithmetic: Achronometric approach. Developmental Review, 2, 213-136.

Ashcraft, M. H. (1983). Procedural knowledge versus fact retrieval in mental arithmetic: A reply to Baroody. Developmental Review, 3, 231-235.

Ashcraft, M. H. (1985). Is it parfetched that some of us remember our arithmetic facts?. Journal for Research in Mathematics Education, 16, 99-105.

Ashcraft, M. H. y Stazyk, E. H. (1981). Mental adition: A test of three verification models. Memory & Cognition, 9, 185-196.

Baroody, A. J. (1982) Are discovering commutativity and more economical addition strategies related?. Problem Solving, 4, 1-2.

Baroody, A. J. (1983). The development of procedural knowledge: An alternative explanation for chronometric trends of mental arithmetic. Developmental Review, 3, 225-2230.

Baroody, A. J. (1984a). More precisely defining and measuring the order-irrelevance principle. Journal of Experimental Child Psychology, 38, 33-41.

Baroody, A. J. (1984b). A re-examination of mental arithmetic models and data: A reply to Ashcraft. Developmental Review, 4, 148-156.

Baroody, A. J. (1984c). The case of Felicia: A young child´s strategies for reducing memory demands during mental addition. Cognition and Instruction, 1, 109-116.

Baroody, A. J. (1985). Mastery of basic number combinations: Internalization of relationships or facts?. Journal for Research in Mathematics Education, 16, 83-98.

Baroody, A. J. (1986). Basic counting principles used by mentally retarded children. Journal for Research in Mathematics Education, 17, 382-389.

Baroody, A. J. (1987). The development of counting strategies for single-digit addition. Journal for Research in Mathematics Education, 2, 141-157.

Baroody, A. J. (1988). El pensamiento matemático de los niños . Madrid: Aprendizaje-Visor, MEC.

Baroody, A. J. y Ginsburg, H. P. (1983). The effects of instruction on children's understanding of the "equal" sign. The Elementary School Journal, 84, 199-212.

Baroody, A. J. y Gannon, K. E. (1984). The development of the commutativity principle and economical addition strategies. Cognition and Instruction, 1, 321-339.

Baroody, A. J. y Ginsburg, H. P. (1986). The relationships between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. En J. Hiebert (Ed.), Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics (pp. 75-112). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Baroody, A. J., Ginsburg, H. P. y Waxman, B. (1983). Children's use of mathematical structure. Journal for Research in Mathematics Education, 14, 156-168.

Bebout, H. C. (1986). Teaching children to symbolically represent addition and subtraction verbal problems with number sentences that represent problem structure. Dissertation Abstracts International, 47, 1228-A.

Behr, M., Erlwanger, S. y Nichols, E. (1976). How children view equality sentences (PMDC Technical Report No. 3). Tallahassee: Florida State University. Citado por Kieran, C. (1981)

Bermejo, V. (1990). El niño y la aritmética. Barcelona: Paidós

Bermejo, V. y Lago, M. O. (1987a). El aprendizaje de las matemáticas. Estado actual de las investigaciones. Psicólogos. Papeles del Colegio, 6, 35-47.

Bermejo, V. y Lago, M. O. (1987b). Estudio de la relación entre la habilidad de contar y la cardinalidad. Enseñanza de las Ciencias, Número Extra, 330-331.

Bermejo, V. y Lago, M. O. (1988a). La adquisición de la adición. Estrategias infantiles en función de la naturaleza de los sumandos. En A. Alvarez (Comp.), Psicología y educación. Realizaciones y tendencias actuales en la investigación y en la práctica (pp. 321-329). Madrid: MEC y Visor Libros.

Bermejo, V. y Lago, M. O. (1988b). Development and cardinality: Processes and stages. Third European Conference on Developmental Psychology. Budapest.

Bermejo, V. y Lago, M. O. (1988c). Representación y magnitud de los sumandos en la resolución de problemas aditivos. Infancia y Aprendizaje, 44, 109-121.

Bermejo, V. y Lago, M. O. (1990). Developmental processes and stages in the acquisition of cardinality. International Journal of Behavioral Development, 13, 231-250.

Bermejo, V., Lago, M. O. y Rodríguez, P. (1986). [Tamaño de los conjuntos y actuación de los niños: Estudio piloto]. Investigación no publicada.

Bermejo, V., Lago, M. O. y Rodríguez, P. (1989). Procedimientos de cuantificación y cardinalidad. Revista de Psicología General y Aplicada, 42, 483-491.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1986 Junio). El esquema parte-todo en la conservación y adición. II Jornadas Internacionales de Psicología y Educación. Madrid.

Bermejo, V, y Rodríguez, P. (1987a). Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición. Infancia y Aprendizaje, 39-40, 71-81.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1987b). Fundamentos cognitivos de la adición. Psiquis, 3, 21-30.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1987c). Análisis de los factores incidentes en la solución de problemas de adición: Su estructura semántica, formulación y lugar de la incógnita. Enseñanza de las Ciencias, Número Extra, 332-333.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1988). La genèse de l'opération d'addition. Analyse de quelques variables significatives dans la résolution de problèmes additifs. European Journal of Psychology of Education, Número Special, 75-76.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1990a). Relevancia de algunos factores en la solución de problemas aditivos. Investigaciones Psicológicas, 8, 23-41.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1990b). La operación de sumar. En Bermejo, V., El niño y la aritmética. Paidós, p. 107-140.

Briars, D. J. y Larkin, J. H. (1984). An integrated model of skills in solving elementary word problems. Cognition and Instruction, 1, 245-296.

Briars, D. y Siegler, R. S. (1984). A featural analysis of preschoolers' counting knowledge. Developmental Psychology, 20, 607-618.

Brown, A. L., Bransford, J., Ferrara, R. y Campione, J. (1983). Learning, remembering, and understanding. En P. H. Mussen (Ed.), Handbook of child psychology (vol. 3) (pp. 77-166). Nueva York: John Wiley and Sons, Inc.

Brown, R. y Burton, R. (1978). Diagnostic models for procedural in basic mathematical skills. Cognitive Science, 2, 155-192.

Brown, J. y VanLehn, K. (1980). Repair theory: A generative theory of bugs in procedural skills. Cognitive Science, 4, 379-426.

Brown, J. S. y VanLehn, K. (1982). Towards a generative theory of "bugs". En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Eds.), Addition and subtraction: A cognitive perspective. (pp. 117-135). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Carpenter, T. P. (1986). Conceptual knowledge as a foundation for procedural knowledge: Implications from research on the initial learning of arithmetic. En J. Hiebert (Ed.), Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics (pp. 113-132). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1979). An investigation of the learning of addition and subtraction. Madison: Wisconsin Research and Development Center for Individualized Schooling.

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1981). Problem structure and first grade children´s initial solution processes for simple addition and subtraction problems. Journal for Research in Mathematics Education, 12, 27-39.

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Eds.), Addition and subtraction: A cognitive perspective. (pp. 9-24). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematics: Concepts and processes (pp. 7-44). Nueva York: Academic Press.

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. Journal for Research in Mathematics Education, 15, 179-202.

Carpenter, T. P., Hiebert, J. y Moser, J. M. (1981). The effect of problem structure on first-grader's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. Journal for Research in Mathematics Education, 12, 27-39.

Carpenter, T. P., Hiebert, J. y Moser, J. M. (1983). The effect of instruction on children's solutions of addition and subtraction word problems. Educational Studies in Mathematics, 14, 55-72.

Carpenter, T. P., Bebout, H. y Moser, J. M. (1985). The representation of basic addition and subtraction word problems. Presentado en el encuentro anual de la American Educational Research Association, Chicago, IL.

Carpenter, T. P., Moser, J. M. y Bebout, H. C. (1988). Representation of addition and subtraction word problems. Journal for Research in Mathematics Education, 19, 345-357.

Cobb, P. (1985). Mathematical actions, mathematical objects, and mathematical symbols. Journal of Mathematical Behavior, 4, 127-134.

Cobb, P. (1987). An analysis of three models of early number development. Journal for Research in Mathematics Education, 3, 163-179.

Davis, R. B. (1984). Learning mathematics: The cognitive science approach to mathematics education. Norwood. N. J. Ablex.

De Corte, E. y Verschaffel, L. (1981). Children's solution processes in elementary arithmetic problems: Analysis and improvement. Journal of Educational Psychology, 73, 765-779.

De Corte, E. y Verschaffel, L. (1985). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. The Journal of Mathematical Behavior, 4, 3-21.

De Corte, E. y Verschaffel, L. (1987a). The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving addition and subtraction word problems. Journal for Research in Mathematics Education, 18, 363-381.

De Corte, E. y Verschaffel, L. (1987b). Using retelling data to study young children's word problem solving. En J. A. Sloboda y D. Rogers (Eds.), Cognitive processes in mathematics (pp. 42-59). Nueva York: Oxford University Press.

De Corte, E., Verschaffel, L. y De Win, L. (1985). Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solutions. Journal of Educational Psychology, 77, 460-470.

Dellarosa, D. (1986). A computer simulation of children´s arithmetic word-problem solving. Behavioral Research Methods, Instruments & Computers, 18, 147-154. Citado por Dellarosa, Kintsch, Reusser y Weimer (1988).

Dellarosa, D., Weimer, R. y Kintsch, W. (1985). Children´s recall of arithmetic word problems. (Institute of Cognitive Science Teach. Rep. 14). University of Colorado, Boulder.

Dellarosa, D., Kintsch, W., Reusser, K. y Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. Cognitive Psychology, 20, 405-438.

Denmark, T., Barco, E. y Voran, J. (1976). Final report: A teaching experiment on equality. PMDC Technical Report No. 6, Florida State University. Citado por Baroody y Ginsburg (1983).

Fey, J. T. (1979). Mathematics teaching today: Perspectives from three national surveys. Mathematics Teacher, 72, 490-504.

Fletcher, C. R. (1985). Understanding and solving arithmetic word problems: A computer simulation. Behavior Research Methods, Instruments, * Computers, 17, 565-571.

Frank, M. L. (1990). What myths about mathematics are held and conveyed by teachers?. Arithmetic Teacher, 10-12.

Fuson, K. (1982). The counting-on solution procedure: Analysis and empirical results. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Eds.), Addition and subtraction: A cognitive perspective (pp. 67-81). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Fuson, K. (1986). Teaching children to subtract by counting up. Journal for Research in Mathematics Education, 17, 172-189.

Fuson, K. (1988). Children's counting and concepts of number. Nueva York: Springer-Verlag.

Fuson, K. y Hall, J. (1983). The acquisition of early number word meanings: A conceptual analysis and review. En H. Ginsburg (Ed.), The development of mathematical thinking (pp. 49-107). Nueva York: Academic Press.

Fuson, K. C. y Willis, G. B. (1988). Subtracting by counting up: More evidence. Journal for Research in Mathematics Education, 19, 402-420.

Gelman, R. y Gallistel, C. R. (1978). The child's understanding of number. Cambridge, Massachusetts: Hardvard University Press.

Gelman, R. y Meck, E. (1983). Preschoolers' counting: Principles before skill. Cognition, 13, 343-359.

Gelman, R. y Meck, E. (1986). The notion of principle: The case of counting. En J. Hiebert (Ed.), Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics (pp. 29-57). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Gelman, R. y Greeno, J. G. (1989). On the nature of competence: Principles for understanding in a domain. En L. B. Resnick (Ed.), Knowing, learning, and instruction (pp. 125-186). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Gelman, R., Meck, E. y Merkin, S. (1986). Young children's numerical competence. Cognitive Development, 1, 1-29.

Ginsburg, H. (1977). Children's arithmetic: The learning process. Nueva York: D. Van Nostrand.

Ginsburg, H. (1982). Children's arithmetic. Austin: Pro-Ed.

Ginsburg, H. y Russell, R. (1981). Social class and racial influences on early mathematical thinking. Monographs of the Society for Research in Child Development, 46.

Greeno, J. G., Riley, M. S. y Gelman, R. (1984). Conceptual competence and children's counting. Cognitive Psychology, 16, 94-143.

Greer, B. y Verschaffel, L. (1990). Introduction. International Journal of Educational Research, 14, 3-12.

Groen, G. y Parkman, J. (1972). A chronometric analysis of simple addition. Psychological Review, 79, 329-343.

Groen, G. y Resnick, L. B. (1977). Can preschool children invent addition algorithms?. Journal of Educational Psychology, 69, 645-652.

Grows, D. (1972). Differential performance of third-grade children in solving open sentences of four types. Disertation Abstract International, 32, 3860A.

Haldford, G. S. (1978). An approach to the definition of cognitive developmental stages in school mathematics. British Journal of Education Psychology, 48, 298-314.

Heller, J. I. y Greeno, J. G. (1978). Semantic processing of arithmetic word problem solving. Annual Meeting of the Midwestern Psychological Association. Chicago.

Herscovics, N. y Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. Mathematics Teacher, 73, 572-580.

Hicks, L. H. (1956). An analysis of number concept formation in the hesus monkey. Journal of Comparative and Physiological Psychology, 49, 212-218.

Hiebert, J. (1982). The position of unknown set in children's solutions of verbal arithmetic problems. Journal for Research in Mathematics Education, 13, 341-349.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics. En J. Hiebert (Ed.), Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics, (pp. 1-23). Hillsdale, Nueva Jersey, Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J. (1989). The struggle to link written symbols with understandings: An update. Arithmetic Teacher, 36, 38-44.

Hirstein, J. (1979). Children´s counting in addition, subtraction, and numeration contexts. Dissertation Abstracts International, 39, 7203A.

Houlihan, D. M. y Ginsburg, H. P. (1981). The addition methods of first and second grade children. Journal for Research in Mathematics Education, 12, 95-106.

Hudson, T. (1983). Correspondences and numerical differences between disjoint sets. Child Development, 54, 84-90.

Ibarra, C. G. y Lindvall, C. M. (1979 Abril). An investigation of factors associated with children's comprehension of simple story problems involving addition and subtraction prior to formal instruction on these operations. The Annual Meeting of the National Council of Teachers of Mathematics. Boston.

Ilg, F. y Ames, L. B. (1951). Developmental trends in arithmetic. The Journal of Genetic Psychology, 79, 3-28.

Kieran, C. (1980). Constructing meaning for non-trival equations. Presentado en el encuentro anual de la American Educational Research Association, Boston. Citdo por Kieran, C. (1981).

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. Educational Studies in Mathematics, 12, 317-325.

Kintsch, W. (1989). Learning from text. En Resnick, L. B. (Ed.), *Knowing, learning and instruction* , (pp. 25-45). Hillsdale, New Jersey.

Kintsch, W. y Greeno, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. Psychological Review, 92, 109-129.

Kintsch, W. y Van Dijk, T. A. (1978). Towards a model of text comprehension and production. Psychological Review, 85, 363-394.

Kogelman, S. y Warren, J. (1978). Mind over Math. New York: McGraw-Hill.

Le Blanc, J. F. (1971). The performance of first grade children in four levels of conservation of numerousness and three IQ gruops in solving subtraction problems. Madison: Wisconsin Research and Development Center for Cognitive Learning.

Lindvall, C. M. e Ibarra, C. G. (1980). Incorrect procedures used by primary grade pupils in solving open addition and subtraction sentences. Journal for Research in Mathematics Education, 11, 50-62.

Mayer, R. E. (1982). Memory for algebra story problems. Journal of Educational Psychology, 2, 199-216.

McLeod, D. B. (1990). Information-processing theories and mathematics learning: The role of affect. International Journal of Educational Research, 14, 13-29.

Miller, K., Keating, D. y Perlmutter, M. (1984). Cognitive aritmetic: Comparison of operations. Journal of Experimental Psychology: Learning, memory, and cognition, 10, 46-60.

Morales, R. V., Shute, V. J. y Pellegrino, J. W. (1985). Developmental differences in understanding and solving simple mathematics word problems. Cognition and Instruction, 2, 41-57.

Neches, R. (1981). HPM: A computational formalism for heuristic procedure modification. Proccedings of the Seventh International Joint Conference on Artificial Intelligence, 283-288.

Nesher, P. y Greeno, J. G. (1981). Semantic categories of word-problems reconsidered, (pp. 63-68). The 5th Conference of the I.G.P.M.E.. Grenoble.

Nichols, E. (1976). First and second grade children's interpretationof action upon objects. PMDC Technical Report 14. Tallahassee, Florida State University. Citado por Kieran, C. (1981).

Resnick, L. B. (1982). Syntax and semantics in learning to subtract. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Eds.), Addition and subtraction: A cognitive perspective (pp. 136-155). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Resnick, L. B. (1983). A developmental theory of number understanding. En H. Ginsburg (Ed.), The development of mathematical thinking (pp. 109-151). Nueva York: Academic Press.

Resnick, L. G. y Ford, W. W. (1981). The psychology of mathematics for instruction. Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Resnick, L. G. y Neches, R. (1984). Factors affecting individual differences in learning ability. En R. J. Sternberg (Ed.), Advances in the psychology of human intelligence (pp. 275-323). Hillsdale, New Jersey: LEA.

Riley, M. S. y Greeno, J. G. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. Cognition and Instruction, 5, 49-101.

Riley, M. S., Greeno, J. G. y Heller, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. En H. Ginsburg (Ed.), The development of mathematical thinking (pp. 153-196). Nueva York: Academic Press.

Rosenthal, D. J. A. y Resnick, L. B. (1974). Children's solution processes in arithmetic word problems. Journal of Educational Psychology, 66, 817-825.

Saxe, G. (1982). Developing forms of arithmetical thought among the Oksapmin of Papua New Guinea. Developmental Psychology, 18, 583-594.

Secada, W. G. (1982). The use of counting by manual deaf children for addition and subtraction. American Educational Research Association. Nueva York.

Secada, W. G., Fuson, K. y Hall, J. W. (1983). The transition from counting-all to counting-on in addition. Journal for Research in Mathematics Education, 14, 47-57.

Siegler, R. S. (1987). Strategy choices in subtraction. En J. A. Sloboda y D. Rogers (Eds.), Cognitive processes in mathematics (pp. 81-106). Nueva York: Oxford University Press.

Siegler, R. S. (1988). Individual differences in strategy choices: Good students, not-so-good students and perfectionists. Child Development, 59, 833-851.

Siegler, R. y Robinson, M. (1982). The development of numerical understandings. En H. Reese y L. Lipsitt (Eds.), Advances in child development and behavior (pp. 241-311). Nueva York: Academic Press.

Siegler, R. S. y Shrager, J. (1984). Strategy choices in addition and subtraction: How do children know what to do?. En C. Sophian (Ed.), Origins of cognitive skills (pp. 229-293). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Siegler, R. S. y Shipley, C. (1987). The role of learning in children´s strategy choices. En L. S. Liben (Ed.), Development and learning: Conflict or congruence? (pp. 71-108). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Sophian, C. (1987). Early developments in children's use of counting to solve quantitative problems. Cognition and Instruction, 4, 61-90.

Starkey, P. y Gelman, R. (1982). The development of addition and subtraction abilities prior to formal schooling in arithmetic. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Eds.), Addition and subtraction: A cognitive perspective. (pp. 99-116). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Steffe, L. P. y Johnson, D. (1971). Problems-solving performances of first-grade children. Journal for Research in Mathematics Education, 2, 50-64.

Steffe, L. P., von Glasersfeld, E., Richards, J. y Cobb, P. (1983). Children's counting types: Philosophy, theory, and application. Nueva York: Praeger Publishers.

Steinberg, R. M. (1985). Instruction on derived facts strategies in addition and subtraction. Journal for Research in Mathematics Education, 16, 337-355.

Sternberg, R. J. y Powel, J. S. (1983). The development of intelligence. En P. H. Mussen (Ed.), Handbook of child psychology: Cognitive Development (pp. 341-419). Nueva York: Wiley.

Stigler, J. W., Fuson, K. C. , Ham, M. y Kim, M. S. (1986). An analysis of addition and subtraction word problems in American and Soviet elementary mathematics textbooks. Cognition and instruction, 3, 153-171.

Svenson, O. (1975). Analysis of time required by children for simple additions. Acta Psychologica, 39, 289-302.

Svenson, O. y Broquist, S. (1975). Strategies for solving simple addition problems: A comparison of normal and subnormal children. Scandinavian Journal of Psychology, 16, 143-151.

Thompson, A. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. Educational Studies in Mathematics, 15, 105-127.

Thorndike, E. L. (1922). The psychology of arithmetic. New York: Mcmillan.

Van Dijk, T. A. y Kintsch, W. (1983). Strategies of discourse comprehension. Nueva York: Academic Press.

Vergnaud, G. (1981). L'enfant, la mathématique et la réalité. Berna: Peter Lang.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Eds.), Addition and subtraction: A cognitive perspective (pp. 39-59). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Wagner, S. y Walters, J. A. (1982). A longitudinal analysis of early number concepts: From numbers to number. En G. Forman (Ed.), Action and thought (pp. 137-161). Nueva York: Academic Press.

Weaver, J. F. (1973). The symmetric property of the equality relation and young children´s ability to solve open addition and subtraction sentences. Journal for Research in Mathematics Education, 4, 45-46.

Weaver, J. F. (1982). Interpretations of number operations and symbolic representations of addition and subtraction. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Eds.), Addition and subtraction: A cognitive perspective (pp. 60- 66). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Willis, G. B. y Fuson, K. (1988). Teaching children to use schematic drawings to solve addition and subtraction word problems. Journal of Educational Psychology, 80, 192-201.

Wolters, M. A. (1983). The part-whole schema and arithmetical problems. Educational Studies in Mathematics, 14, 127-138.

Zbrodoff, N. J. y Logan, G. D. (1990). On the relation between production and verification tasks in the Psychology of simple arithmetic. Journal of Experimental Psychology: Learning, memory, and cognition, 16, 83-97.

A N E X O

INTERACCION AxCxD

COMPARACIONES DE INTERACCION

F A comp, en CD = 4,33	(11, 414)	p < 0,01	(1 -1 0)
F A comp, en CD = 4,07	(11, 414)	p < 0,01	(1 0 1)
F A comp, en CD = 0,85	(11, 414)	N, S,	(0 1 -1)
F CD comp, en A = 10,99	(2, 414)	p < 0,01	(1 0 0 0 -1/2 0 0 0-1/2 0 0 0)
F CD comp, en A = 3,01	(2, 414)	N, S,	(-1/2 0 0 0 1 0 0 0 -1/2 0 0 0)
F CD comp, en A = 2,33	(2 414)	N, S,	(-1/2 0 0 0 -1/2 0 0 0 1 0 0 0)
F CD comp, en A = 7,14	(2, 414)	p < 0,01	(0 1 0 0 0 -1/2 0 0 0 -1/2 0 0)
F CD comp, en A = 4,51	(2, 414)	p < 0,05	(0 -1/2 0 0 1 0 0 0 0 -1/2 0 0)
F CD comp, en A = 0,96	(2, 414)	N, S,	(0 -1/2 0 0 0 -1/2 0 0 0 1 0 0)
F CD comp, en A = 0,29	(2, 414)	N, S,	(0 0 1 0 0 0 -1/2 0 0 0 -1/2 0)
F CD comp, en A = 0,10	(2, 414)	N, S,	(0 0 -1/2 0 0 0 1 0 0 0 -1/2 0)
F CD comp, en A = 0,21	(2, 414)	N, S,	(0 0 -1/2 0 0 0 -1/2 0 0 0 1 0)
F CD comp, en A = 7,08	(2, 414)	p < 0,01	(0 0 0 1 0 0 0 -1/2 0 0 0 -1/2)
F CD comp, en A = 2,86	(2, 414)	N, S,	(0 0 0 -1/2 0 0 0 1 0 0 0 -1/2)
F CD comp, en A = 1,03	(2, 414)	N, S,	(0 0 0 -1/2 0 0 0 -1/2 0 0 0 1)
F CD comp, en A = 17,52	(2, 414)	p < 0,01	(1/4 1/4 1/4 1/4-1/4 -1/4 -1/4 -1/4 0 0 0 0)
F CD comp, en A = 12,39	(2, 414)	p < 0,01	(1/4 1/4 1/4 1/4 0 0 0 0 -1/4 -1/4 - 1/4 -1/4)
F CD comp, en A = 0,68	(2, 414)	N, S,	(0 0 0 0 1/4 1/4 1/4 1/4 -1/4 -1/4 - 1/4 -1/4)

CONTRASTES DE INTERACCION

F A cont. en CD = 29,20	(1, 414)	p < 0,01	(1 -1 0)	(1/4 1/4 1/4 1/4 -1/4 -1/4 -1/4 -1/4 0 0 0 0)
F A cont. en CD = 21,98	(1, 414)	p < 0,01	(1 0 -1)	(1/4 1/4 1/4 1/4 -1/4 -1/4 -1/4 -1/4 0 0 0 0)
F A cont. en CD = 0,51	(1, 414)	N. S.	(0 1 -1)	(1/4 1/4 1/4 1/4 -1/4 -1/4 -1/4 -1/4 0 0 0 0)
F A cont. en CD = 19,82	(1, 414)	p <0,01	(1 -1 0)	(1/4 1/4 1/4 1/4 0 0 0 0 -1/4 -1/4 -1/4 -1/4)
F A cont. en CD = 16,43	(1, 414)	p <0,01	(1 0 -1)	(1/4 1/4 1/4 1/4 0 0 0 0 -1/4 -1/4 -1/4 -1/4)
F A cont. en CD = 0,16	(1, 414)	N. S.	(0 1 -1)	(1/4 1/4 1/4 1/4 0 0 0 0 -1/4 -1/4 -1/4 -1/4)
F A cont. en CD = 0,89	(1, 414)	N. S.	(1 -1 0)	(0 0 0 0 1/4 1/4 1/4 1/4 -1/4 -1/4 -1/4 -1/4)
F A cont. en CD = 0,40	(1, 414)	N. S.	(1 0 -1)	(0 0 0 0 1/4 1/4 1/4 1/4 -1/4 -1/4 -1/4 -1/4)
F A cont. en CD = 0,10	(1, 414)	N. S.	(0 1 -1)	(0 0 0 0 1/4 1/4 1/4 1/4 -1/4 -1/4 -1/4 -1/4)
F A cont. en CD = 0,84	(1, 414)	N. S.	(1 -1 0)	(1 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0)
F A cont. en CD = 1,5	(1, 414)	N. S.	(1 0 -1)	(1 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0)
F A cont. en CD = 0,1	(1, 414)	N. S.	(0 1 -1)	(1 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0)
F A cont. en CD = 9,85	(1, 414)	p < 0,01	(1 -1 0)	(1 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0)
F A cont. en CD = 10,88	(1, 414)	p < 0,01	(1 0 -1)	(1 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0)
F A cont. en CD = 0,10	(1, 414)	p < 0,01	(0 1 -1)	(1 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0)
F A cont. en CD = 0,01	(1, 414)	N. S.	(1 -1 0)	(0 0 0 0 1 0 0 0 -1 0 0 0)
F A cont. en CD = 0,01	(1, 414)	N. S.	(1 0 -1)	(0 0 0 0 1 0 0 0 -1 0 0 0)
F A cont. en CD = 0	(1, 414)	N. S.	(0 1 -1)	(0 0 0 0 1 0 0 0 -1 0 0 0)
F A cont. en CD = 11,95	(1, 414)	p < 0,01	(1 -1 0)	(0 1 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0)
F A cont. en CD = 9,37	(1, 414)	p < 0,01	(1 0 -1)	(0 1 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0)
F A cont. en CD = 0,16	(1, 414)	N. S.	(0 1 -1)	(0 1 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0)
F A cont. en CD = 3,64	(1, 414)	p < 0,05	(1 -1 0)	(0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1 0 0)
F A cont. en CD = 6,67	(1, 414)	p < 0,05	(1 0 -1)	(0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1 0 0)
F A cont. en CD = 0,46	(1, 414)	N. S.	(0 1 -1)	(0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1 0 0)
F A cont. en CD = 2,40	(1, 414)	N. S.	(1 -1 0)	(0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1 0 0)
F A cont. en CD = 0,02	(1, 414)	N. S.	(1 0 -1)	(0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1 0 0)
F A cont. en CD = 1,15	(1, 414)	N. S.	(0 1 -1)	(0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1 0 0)
F A cont. en CD = 0,31	(1, 414)	N. S.	(1 -1 0)	(0 0 1 0 0 0 -1 0 0 0 0 0)
F A cont. en CD = 0,001	(1, 414)	N. S.	(1 0 -1)	(0 0 1 0 0 0 -1 0 0 0 0 0)
F A cont. en CD = 0,27	(1, 414)	N. S.	(0 1 -1)	(0 0 1 0 0 0 -1 0 0 0 0 0)
F A cont. en CD = 0,31	(1, 414)	N. S.	(1 -1 0)	(0 0 1 0 0 0-1 0 0 0 0 0)
F A cont. en CD = 0,01	(1, 414)	N. S.	(1 0 -1)	(0 0 1 0 0 0-1 0 0 0 0 0)
F A cont. en CD = 0,46	(1, 414)	N. S.	(0 1 -1)	(0 0 1 0 0 0-1 0 0 0 0 0)
F A cont. en CD = 0	(1, 414)	N. S.	(1 -1 0)	(0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1 0)
F A cont. en CD = 0,025	(1, 414)	N. S.	(1 0 -1)	(0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1 0)
F A cont. en CD = 0,025	(1, 414)	N. S.	(0 1 -1)	(0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1 0)
F C cont. en AD = 9,85	(1, 414)	p < 0,01	(1 -1 0)	(0 0 0 1 0 0 0 -1 0 0 0 0)
F C cont. en AD = 8,41	(1, 414)	p < 0,01	(1 0 -1)	(0 0 0 1 0 0 0 -1 0 0 0 0)
F A cont. en CD = 0,06	(1, 414)	N. S.	(0 1 -1)	(0 0 0 1 0 0 0 -1 0 0 0 0)
F A cont. en CD = 7,52	(1, 414)	p < 0,01	(1 -1 0)	(0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 -1)
F A cont. en CD = 4,95	(1, 414)	p < 0,05	(1 0 -1)	(0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 -1)
F A cont. en CD = 2,78	(1, 414)	N. S.	(0 1 -1)	(0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 -1)
F A cont. en CD = 0,16	(1, 414)	N. S.	(1 -1 0)	(0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1)
F A cont. en CD = 0,46	(1, 414)	N. S.	(1 0 -1)	(0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1)
F A cont. en CD = 0,08	(1, 414)	N. S.	(0 1 -1)	(0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1)

INTERACCION BxCxD

COMPARACIONES DE INTERACCION

F CD comp. en B = 8,56	(1, 414)	$p < 0,01$	(1/4 1/4 1/4 1/4 -1/4 -1/4 -1/4 -1/4 0 0 0 0)
F CD comp. en B = 2,23	(1, 414)	N. S.	(1/4 1/4 1/4 1/4 0 0 0 0 -1/4 -1/4 -1/4 -1/4)
F CD comp. en B = 3,34	(1, 414)	N. S.	(0 0 0 0 1/4 1/4 1/4 1/4 -1/4 -1/4 -1/4 -1/4)
F CD comp. en B = 0,50	(1, 414)	N. S.	(1/3 -1/3 0 0 1/3 -1/3 0 0 0 0 0 0)
F CD comp. en B = 0,72	(1, 414)	N. S.	(1/3 0 -1/3 0 1/3 0 -1/3 0 1/3 0 -1/3 0)
F CD comp. en B = 0,15	(1, 414)	N. S.	(1/3 0 0 -1/3 1/3 0 0 -1/3 1/3 0 0 -1/3)
F CD comp. en B = 2,37	(1, 414)	N. S.	(0 1/3 -1/3 0 0 1/3 -1/3 0 0 1/3 -1/3 0)
F CD comp. en B = 0,002	(1, 414)	N. S.	(0 1/3 0 -1/3 0 1/3 0 -1/3 0 1/3 0 -1/3)
F CD comp. en B = 2,35	(1,414)	N. S.	(0 0 1/3 -1/3 0 0 1/3 -1/3 0 0 1/3 -1/3)
F CD comp. en B = 2,24	(1, 414)	N. S.	(1 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0)
F CD comp. en B = 1,06	(1, 414)	N. S.	(1 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0)
F CD comp. en B = 0,55	(1, 414)	N. S.	(0 0 0 0 1 0 0 0 -1 0 0 0)
F CD comp. en B = 3,10	(1, 414)	N. S.	(0 1 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0)
F CD comp. en B = 0,78	(1, 414)	N. S.	(0 1 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0)
F CD comp. en B = 2,22	(1, 414)	N. S.	(0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1 0 0)
F CD comp. en B = 1,00	(1, 414)	N. S.	(0 0 1 0 0 0 -1 0 0 0 0 0)
F CD comp. en B = 1,95	(1, 414)	N. S.	(0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 -1 0)
F CD comp. en B = 1,11	(1, 414)	N. S.	(0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1 0)
F CD comp. en B = 8,00	(1, 414)	$p < 0,01$	(0 0 0 1 0 0 0 -1 0 0 0 0)
F CD comp. en B = 5,23	(1, 414)	$p < 0,05$	(0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 -1)
F CD comp. en B = 0,12	(1, 414)	N. S.	(0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1)
F CD comp. en B = 1,84	(1, 414)	N. S.	(1 0 0 0 -1/2 0 0 0 -1/2 0 0 0)
F CD comp. en B = 1,50	(1, 414)	N. S.	(-1/2 0 0 0 1 0 0 0 -1/2 0 0 0)
F CD comp. en B = 0,33	(1, 414)	N. S.	(-1/2 0 0 0 -1/2 0 0 0 1 0 0 0)
F CD comp. en B = 1,85	(1, 414)	N. S.	(0 1 0 0 0 -1/2 0 0 0 -1/2 0 0)
F CD comp. en B = 3,29	(1, 414)	N. S.	(0 -1/2 0 0 0 1 0 0 0 -1/2 0 0)
F CD comp. en B = 0,97	(1, 414)	N. S.	(0 -1/2 0 0 0 -1/2 0 0 0 1 0 0)
F CD comp. en B = 0,91	(1, 414)	N. S.	(0 0 1 0 0 0 -1/2 0 0 0 -1/2 0)
F CD comp. en B = 0,07	(1, 414)	N. S.	(0 0 -1/2 0 0 0 1 0 0 0 -1/2 0)
F CD comp. en B = 2,05	(1, 414)	N. S.	(0 0 -1/2 0 0 0 -1/2 0 0 0 1 0)
F CD comp. en B = 8,78	(1, 414)	$p < 0,01$	(0 0 0 1 0 0 0 -1/2 0 0 0 -1/2)
F CD comp. en B = 3,67	(1, 414)	N. S.	(0 0 0 -1/2 0 0 0 1 0 0 0 -1/2)
F CD comp. en B = 0,90	(1, 414)	N. S.	(0 0 0 -1/2 0 0 0 -1/2 0 0 0 1)

INTERACCION BxAxD

COMPARACIONES DE INTERACCION

F AD comp, en B = 7,04	(1, 207)	p <0,01	(1 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0)
F AD comp, en B = 0,12	(1, 207)	N, S,	(0 1 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0)
F AD comp, en B = 2,90	(1, 207)	N, S,	(0 1 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0)
F AD comp, en B = 1,27	(1, 207)	N, S,	(0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1 0 0)
F AD comp, en B = 0,65	(1, 207)	N, S,	(0 0 1 0 0 0 -1 0 0 0 0 0)
F AD comp, en B = 14,89	(1, 207)	p <0,01	(0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 -1 0)
F AD comp, en B = 9,33	(1, 207)	p <0,01	(0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1 0)
F AD comp, en B = 9,02	(1, 207)	p <0,01	(0 0 0 0 1 0 0 0 -1 0 0 0)
F AD comp, en B = 1,27	(1, 207)	N, S,	(0 0 0 1 0 0 0 -1 0 0 0 0)
F AD comp, en B = 4,71	(1, 207)	p <0,05	(0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 -1)
F AD comp, en B = 10,86	(1, 207)	p <0,01	(0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 -1)
F A comp, en BD= 0,03	(1, 207)	N, S,	(1/4 1/4 1/4 1/4 -1/4 -1/4 -1/4 -1/4 0 0 0 0)
F A comp, en BD= 28,71	(1, 207)	p <0,01	(1/4 1/4 1/4 1/4 0 0 0 0 -1/4 -1/4 -1/4 -1/4)
F A comp, en BD= 26,90	(1, 207)	p <0,01	(0 0 0 0 1/4 1/4 1/4 1/4 -1/4 -1/4 -1/4 -1/4)