

TI-1996/10

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE



5314278578

**EL EFECTO HALL CUANTICO  
Y LAS OSCILACIONES SHUBNIKOV-DE HAAS  
EN EL GAS DE ELECTRONES BIDIMENSIONAL**

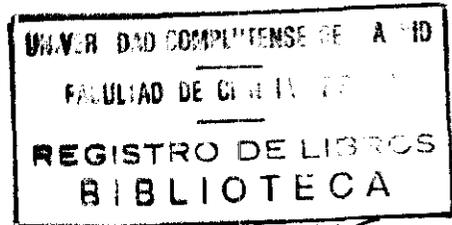
MEMORIA

presentada por

**ANTONIO URBINA YEREGUI**

para optar al grado de

**DOCTOR EN CIENCIAS FÍSICAS**



N.º REGISTRO 28468

Dirigida por

**Dr. FRANCISCO BATALLÁN CASAS**

Profesor de Investigación

**INSTITUTO DE CIENCIA DE MATERIALES, CSIC**

Madrid, 1996

*A mi tío Fernando,  
a quien le hubiera gustado poder leer esta tesis.*

*“En realidad es casi un milagro que los modernos métodos de enseñanza no hayan estrangulado ya la sagrada curiosidad de la investigación, pues, aparte de estímulo, esta delicada plantita necesita sobre todo de libertad; sin ésta se marchita indefectiblemente.*

*Es grave error creer que la ilusión de mirar y buscar puede fomentarse a golpe de coacción y sentido del deber.*

*Pienso que incluso a un animal de presa sano se le podría privar de su voracidad si a punta de látigo se le obliga continuamente a comer cuando no tiene hambre, sobre todo si se eligen de manera conveniente los alimentos así ofrecidos.”*

*ALBERT EINSTEIN  
Notas Autobiográficas*

## *Agradecimientos*

Quisiera dar las gracias en primer lugar al director de esta tesis, el Profesor Francisco Batallán Casas. Se dice que un buen maestro es aquel que enseña de forma que el que aprende tiene la impresión de hacerlo por sí mismo, éste ha sido el caso en lo que atañe a mi inmersión en el trabajo experimental tras una formación básicamente teórica. Paco, gracias por tu ayuda y comprensión en todo momento a lo largo de estos años.

Gracias también a los compañeros de laboratorio, Carlos Díaz Paniagua y Miguel Angel Hidalgo, y unos pisos más arriba a Agustín Martín. Los tres han compartido conmigo estos años de trabajo en el Consejo, haciéndolo todo más fácil y llevadero. Nuestra amistad llega mas allá de las cuatro paredes entre las que realizamos los experimentos.

A Jose Manuel Gilpérez y Susana Fernández de Avila, del Departamento de Ingeniería Electrónica de la ETSI de Telecomunicaciones (Universidad Politécnica de Madrid) quiero agradecerles el que tan amablemente nos hayan cedido sus muestras para realizar las medidas de magnetotransporte. Sin ellos este trabajo no hubiera sido posible.

Al Profesor Jose Luis Vicent, mi tutor en el Departamento de Física de Materiales de la Facultad de Ciencias Físicas (Universidad Complutense de Madrid) le agradezco su ayuda en todos los trámites relacionados con la presentación de esta tesis.

Al Instituto de Ciencia de Materiales (CSIC) he de agradecerle las facilidades que me ha dado para realizar el trabajo en sus instalaciones. Quiero mencionar especialmente el apoyo del personal de Secretaría (Narci, Cristina y Maricruz) y el trabajo a veces olvidado pero insustituible del personal de Talleres.

Los agradecimientos institucionales han de comenzar por la Fundación Domingo Martínez, cuya ayuda en forma de "Premio a la investigación" (Grant 92/93) llegó en el mejor momento, y deben continuar con las entidades financiadoras del proyecto en que se inscribe la realización de la tesis, la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología (PB85-0099 y MAT92-148) y la Comunidad Autónoma de Madrid.

Y finalmente, aunque no en último lugar, agradecer a M<sup>a</sup> José, mi compañera, a mi familia y a tantos amigos de estas tierras y otras mas allá del océano su paciencia y el apoyo que me han prestado durante estos años.

# INDICE

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. El gas de electrones bidimensional</b>	<b>5</b>
1.1 Aspectos teóricos	
1.1.1 Gas de electrones bidimensional	5
- <i>La densidad de estados</i>	9
1.1.2 Gas de electrones en presencia de campo magnético	15
- <i>La densidad de estados en presencia de B</i>	21
1.2 Las heteroestructuras de semiconductores	24
1.2.1 Los materiales III-V: características generales	25
1.2.2 Heteroestructuras de semiconductores	28
1.2.3 Pozos cuánticos con modulación de dopado y dopado delta	32
1.2.4 Pozos de $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$	34
<b>2. El magnetotransporte</b>	<b>37</b>
2.1. Transporte semiclásico	37
2.1.1 Conductividad estacionaria del gas de electrones bidimensional	38
- <i>Aproximación a la primera subbanda</i>	43
2.1.2 Evaluación de $\tau_i$ para algunos mecanismos de scattering	46
- <i>Scattering de Coulomb</i>	46
- <i>Scattering de aleación</i>	48
- <i>Scattering por rugosidad de intercara</i>	49
2.1.3 Transporte semiclásico en presencia de campo magnético	51
2.2. El Efecto Hall Cuántico y el Efecto Shubnikov-de Haas	55
2.2.1 Introducción	55
2.2.2 Los efectos de las impurezas y el desorden: el "gap de movilidad"	57
- <i>Argumento de Laughlin sobre la invariancia gauge</i>	61
2.2.3 Efectos de la temperatura y renormalización	64

### **3. Cálculo de la magnetoconductividad .....69**

3.1 Consideraciones generales.....	69
3.1.1 Ausencia de impurezas.....	72
3.1.2 Efecto de las imperfecciones y el desorden.....	74
- <i>Aproximación del potencial coherente (CPA)</i> .....	81
3.2 El tensor de la magnetoconductividad transversa.....	87
3.2.1 La densidad de estados.....	89
3.2.2 Forma de los niveles de Landau.....	93
3.2.3 El límite de alta temperatura.....	94
3.2.4 Contribución de los estados localizados.....	95
3.3 Resultados del cálculo.....	98
3.3.1 Resolución de los plateaus del efecto Hall cuántico .....	101
3.3.2 Los términos oscilatorios de $\sigma_{xy}$ .....	103
3.3.3 Simulación de resultados experimentales .....	106
3.3.4 Diagramas de renormalización.....	108
3.4 Extensiones del cálculo .....	110
3.4.1 Imanación: el Efecto de Haas-van Alphen.....	110
3.4.2 Magnetocapacidad .....	114
3.4.3 Calor específico .....	115
3.4.4 Segunda subbanda.....	116

### **4. Técnica experimental: .....119**

4.1 Medida de la magnetoresistencia .....	119
4.2 El sistema experimental.....	121
4.2.1 Producción del campo magnético .....	124
4.2.2 Criogenia y accesorios .....	125
4.2.3 Portamuestras .....	128
4.2.4 Regulación de la temperatura .....	129
4.2.5 Electrónica de medida .....	130
4.2.6 Automatización.....	132
4.3 Las muestras.....	134
4.4 El procedimiento.....	135
4.4.1 Preparación del experimento .....	136
4.4.2 Proceso de medida .....	139
4.4.3 Tratamiento de los datos .....	141

<b>5. Resultados experimentales .....</b>	<b>143</b>
5.1 Generalidades .....	143
5.2 Resultados .....	146
5.2.1 Pozos cuánticos con modulación de dopado .....	146
- <i>Muestra T4-K4</i> .....	146
- <i>Muestra T5</i> .....	156
5.2.2 Pozos cuánticos con dopado delta .....	158
- <i>Muestra S1</i> .....	158
5.2.3 Pozos cuánticos con modulación de dopado a ambos lados .....	163
- <i>Muestra S2</i> .....	163
- <i>Muestra S3</i> .....	165
 <b>6. Relación entre resultados teóricos y experimentales.....</b>	<b>175</b>
6.1 Inversión .....	175
6.2 Ajuste de la forma de los niveles de Landau .....	180
6.3 Efecto de la temperatura .....	184
6.4 Segunda subbanda .....	186
 <b>7. Conclusión .....</b>	<b>189</b>
Apéndice 1. Resolución de la ecuación de Schrödinger en presencia de campo magnético para el gauge de Landau .....	193
Apéndice 2. Cálculo de los coeficientes $K_j$ y su relación con el tiempo de relajación.....	195
Apéndice 3. Consideraciones topológicas.....	197
Apéndice 4. Aproximación desde la teoría de campos .....	203
Apéndice 5. El Efecto Hall Cuántico Fraccionario.....	207
Apéndice 6. La aproximación autoconsistente de Born (SCBA) .....	217
Apéndice 7. Fórmula de la suma de Poisson .....	223
Apéndice 8. Densidad de estados localizados .....	225
Apéndice 9. Tabla de ficheros experimentales .....	229
 <b>Bibliografía .....</b>	<b>241</b>

# INTRODUCCIÓN

El estudio de las propiedades de transporte del gas de electrones bidimensional es uno de los temas en la física que mejor puede conjugar aspectos teóricos que atañen a cuestiones fundamentales de la física y aplicaciones prácticas inmediatas en un campo muy activo tecnológicamente durante las últimas décadas: los dispositivos electrónicos basados en semiconductores.

Este doble interés se manifiesta además en la posibilidad de obtener datos experimentales de física fundamental sin tener que recurrir a grandes y costosas instalaciones, como la determinación experimental directa de la constante de estructura fina con una precisión contrastable con la que se obtiene en experimentos de física de altas energías. El rápido desarrollo en estos últimos años de técnicas como la epitaxia de haces moleculares o la fotolitografía, impulsado sin duda por su directa aplicación práctica en la producción industrial, ha permitido la fabricación de muestras de alta calidad. Los aspectos teóricos abarcan desde la teoría cuántica de campos, hasta el estudio de transiciones de fase metal-aislante; desde los efectos del desorden y la ruptura de simetrías, hasta la ausencia de disipación en el transporte y su relación con la superconductividad y la superfluidez; desde el cálculo de bandas en heteroestructuras hasta fenómenos de transporte activado y hopping de rango variable.

Siendo tan amplio el panorama, muchas veces nos encontramos con que los diversos aspectos se han estudiado de forma un tanto aislada, no sólo con la tristemente habitual distancia entre los “teóricos” y los “experimentales”, sino incluso al interior de ésta clásica división. En el presente trabajo nos hemos centrado en algunos aspectos de entre los arriba expuestos, que tradicionalmente se han estudiado por separado y que

intentaremos abordar desde una perspectiva más global: hemos desarrollado un sistema experimental que permite efectuar medidas de magnetotransporte a bajas temperaturas, hemos elegido en un determinado tipo de muestras que actualmente presentan gran interés tecnológico: los pozos pseudomórficos basados en  $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  y desde el punto de vista teórico hemos abordado dos efectos, el Efecto Shubnikov-de Haas y el Efecto Hall Cuántico, de forma conjunta.

Desde que Fowler *et al* (1966) observaron oscilaciones Shubnikov-de Haas en la componente diagonal de la magnetoresistencia transversa en una capa de inversión de Si, un gran número de trabajos se han presentado sobre el efecto Shubnikov-de Haas en sistemas bidimensionales de electrones. Kawaji *et al* (1976, 1978) hicieron sus primeros experimentos sobre un MOSFET<sup>1</sup> de Si usando configuraciones de disco de Corbino y barras Hall. La componente diagonal  $\sigma_{xx}$  de la magnetoconductividad que se mide directamente en la configuración de Corbino se hacía muy pequeña para determinados llenados de los niveles de Landau, los resultados eran consistentes con las predicciones de Ando *et al* (1974). No fué hasta mucho después que se profundizó en estos detalles, cuando Isihara y Smrčka (1986) calcularon la magnetoconductividad como una función de la densidad de estados y Coleridge *et al* (1989) estudiaron los coeficientes de transporte a bajo campo, poniendo énfasis en aclarar el significado de los tiempos de relajación que determinan la anchura de las oscilaciones Shubnikov-de Haas.

El Efecto Hall Cuántico observado en la componente no-diagonal de la magnetoresistencia transversa es uno de los más importantes descubrimientos hechos en física del estado sólido en los últimos años (von Klitzing *et al* 1980). Bajo buenas condiciones experimentales, los plateaus del Efecto Hall Cuántico alcanzan el valor  $h/e^2i$  con una precisión mejor que una parte en  $10^7$ . Para explicar esta cuantización tan exacta, un argumento general basado en la invariancia gauge y la existencia de un gap de movilidad fué dado por Laughlin (1981). Halperin (1982) desarrolló el argumento de forma más completa y analizó el efecto de los estados de borde que aparecen en los límites de la muestra. Joynt y Prange (1984) hicieron un estudio cuidadoso de la contribución de las imperfecciones y el desorden. Büttiker (1988) explica el Efecto Hall

---

<sup>1</sup> Metal-oxide-semiconductor field-effect transistor

Cuántico mediante la supresión del “backscattering” de los estados de borde a altos campos magnéticos. En general, se puede concluir que el Efecto Hall Cuántico está relacionado con la ruptura de la invariancia de traslación. Sin embargo, aún quedan muchas cuestiones abiertas, y cada día aparecen nuevas contribuciones al tema.

Cuando el Efecto Hall Cuántico se observa en la componente no-diagonal de la magnetoresistencia, la componente diagonal presenta las oscilaciones Shubnikov-de Haas. Es más, en los plateaus, donde la cuantización es exacta, las oscilaciones presentan un mínimo que llega a ser eventualmente cero en un amplio intervalo de campo magnético. Aparece un fenómeno de transporte en ausencia de disipación. El estudio conjunto de ambos efectos es crucial para obtener información experimental con la que poder contrastar los modelos teóricos para el tensor de conductividad. El punto de unión es la densidad de estados del gas de electrones bidimensional en presencia del campo magnético, la discusión sobre la forma de la densidad de estados así como la distinción entre estados localizados y extendidos y la aparición de un gap de movilidad es esencial para la comprensión del magnetotransporte en su conjunto. Las medidas de cantidades termodinámicas, tales como el calor específico, la magnetocapacidad o la imanación, son las que permiten estudiar experimentalmente la forma de la densidad de estados: en ellas los estados extendidos y localizados contribuyen de igual forma en el equilibrio. Sin embargo, en el gas de electrones bidimensional, debido al pequeño número de electrones presentes ( $10^{15}$  como máximo) estas medidas de equilibrio son muy difíciles de realizar. Será necesario hacer medidas de transporte, fuera del equilibrio, donde estados localizados y extendidos contribuyen de manera diferente, y tratar de obtener a partir de ellas información sobre la densidad de estados.

El trabajo que se expone a continuación presenta aspectos teóricos y experimentales, que tratan de profundizar en los temas arriba mencionados. El estudio teórico está orientado especialmente a la interpretación de los resultados experimentales obtenidos. A grandes rasgos podríamos dividir este trabajo en tres partes: una primera, que comprende los capítulos primero y segundo, es una introducción general que profundiza en aquellas cuestiones que emplearemos en el cálculo teórico y las medidas experimentales necesarias para el estudio del gas de electrones bidimensional. Una segunda parte coincide con el tercer capítulo, es el cálculo teórico del tensor de

magnetoconductividad transversa. La tercera parte son los capítulos cuarto, quinto y sexto, que abordan la parte experimental del trabajo y la interpretación de los resultados obtenidos. Describimos más en detalle el contenido de cada capítulo:

En el primer capítulo se hace una introducción al gas de electrones bidimensional, por un lado los aspectos teóricos, deteniéndonos especialmente en la densidad de estados, primero en ausencia de campo magnético y luego viendo los efectos que dicho campo produce sobre ella, y por otro su realización experimental en las heteroestructuras de semiconductores basadas en materiales III-V, describiendo los tipos de heteroestructuras, los diferentes modos de dopado y desarrollando algo más las basadas en la aleación ternaria  $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  que es la que nosotros estudiaremos experimentalmente. En un segundo capítulo se aborda el tema del magnetotransporte, primero la aproximación semiclásica, analizando el significado de los tiempos de relajación, y posteriormente los efectos cuánticos: el Efecto Hall Cuántico y el efecto Shubnikov-de Haas.

El capítulo tercero es el desarrollo del modelo teórico: calcularemos el tensor de la magnetoconductividad transversa tomando en cuenta la ruptura de la invariancia de traslación que se manifiesta en el sistema mediante las impurezas, el desorden y los bordes de la muestra; presentaremos gráficamente los resultados de este cálculo tanto para un caso idealizado como para casos más reales que nos permitirán interpretar nuestros resultados experimentales. También describiremos algunas extensiones del cálculo para el caso en que se produce el llenado de la segunda subbanda y el cálculo de magnitudes del equilibrio como la imanación, el calor específico y la magnetocapacidad.

El capítulo cuarto es una descripción del sistema experimental y el procedimiento de medida utilizado. La presentación de los resultados experimentales para las muestras basadas en heteroestructuras de  $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  con diferentes tipos de dopado se hace en el capítulo quinto y el contraste entre los resultados obtenidos teórica y experimentalmente es el contenido del capítulo sexto. La aplicación del modelo teórico permite profundizar en la interpretación de los datos experimentales, así como los resultados experimentales permiten definir las limitaciones y exactitud del modelo. Las conclusiones de este trabajo se exponen en el séptimo capítulo.

## Capítulo 1

# EL GAS DE ELECTRONES BIDIMENSIONAL

### 1.1 Definición y propiedades

#### 1.1.1 El gas de electrones bidimensional :

Entendemos por gas de electrones bidimensional un sistema de electrones cuyo movimiento está limitado en una dimensión (los niveles de energía cuantizados), pero es libre en las otras dos dimensiones.

Existen varios sistemas físicos en los que es posible una realización experimental del gas de electrones bidimensional. El que nosotros empleamos se basa en el confinamiento de los electrones en un pozo cuántico. Antes de entrar en detalles de cómo se construye físicamente un pozo cuántico, vamos a calcular algunas cantidades referidas a un pozo cuántico ideal, que en principio consideraremos unidimensional (Fig. 1.1):

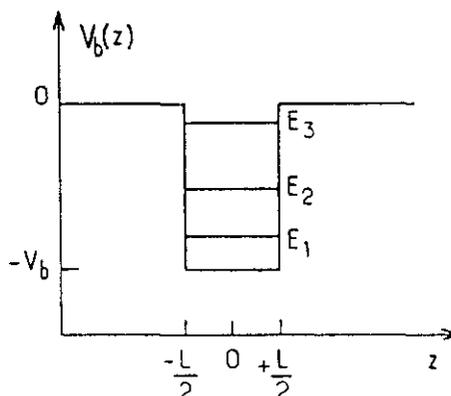


Figura 1.1: Esquema de un pozo cuántico unidimensional

Estudiaremos el movimiento unidimensional de una partícula de masa  $m^*$  sujeta a un potencial  $V_b(z)$  dado por:

$$V_b(z) = \begin{cases} 0 & |z| > \frac{L}{2} \\ -V_b & |z| < \frac{L}{2} \end{cases} \quad (1.1)$$

donde  $L$  es la anchura del pozo cuántico.

El movimiento de la partícula viene descrito por la función de onda  $\psi(z,t)$ , solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \left( z, p_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} \right) \Psi \quad (1.2)$$

donde  $H$  es el hamiltoniano del problema:

$$H = \frac{p_z^2}{2m^*} + V_b(z) \quad (1.3)$$

podemos efectuar una separación de variables, ya que el hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, y factorizar la función de onda:

$$\Psi(z,t) = \chi(z) e^{-i\frac{\epsilon}{\hbar}t} \quad (1.4)$$

entonces,  $\chi(z)$  debe satisfacer la ecuación de autovalores:

$$H(z, p_z) \chi(z) = \epsilon \chi(z) \quad (1.5)$$

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2}{dz^2} + V_b(z) \right] \chi(z) = \epsilon \chi(z) \quad (1.6)$$

además, se deberán satisfacer las siguientes condiciones de continuidad para  $\chi(z)$  y su derivada, así como la condición de que  $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} |\chi(z)|$  sea finito.

El potencial  $V_b$  es constante a trozos, lo que permite obtener soluciones exactas de la ecuación (1.6), suponemos la solución como una suma de ondas planas de vectores de onda opuestos. Dentro del pozo, estas ondas se propagan con vectores de onda  $\pm k_w$  dados por:

$$k_w = \sqrt{\frac{2m^*}{\hbar^2} (\epsilon + V_b)} \quad (1.7)$$

Fuera del pozo, las ondas se amortiguan, y su vector de onda tiene una parte imaginaria asociada con el amortiguamiento que viene dada por:

$$\kappa_b = \sqrt{-\frac{2m^* \varepsilon}{\hbar^2}} \quad (1.8)$$

Consideramos ahora las propiedades de simetría del problema. El potencial del pozo es simétrico respecto  $z$ , por tanto, podremos elegir las funciones de onda de forma que sean pares o impares en  $z$ , dentro del pozo tenemos:

$$\chi(z) = A \cos k_w z; \quad \varepsilon = -V_b + \frac{\hbar^2 k_w^2}{2m^*} \quad \text{para los estados pares} \quad (1.9)$$

$$\chi(z) = A \sin k_w z; \quad \varepsilon = -V_b + \frac{\hbar^2 k_w^2}{2m^*} \quad \text{para los estados impares} \quad (1.10)$$

Fuera del pozo la forma de la función de onda es:

$$\chi(z) = B \exp\left[-\kappa_b \left(z - \frac{L}{2}\right)\right]; \quad z \geq \frac{L}{2} \quad (1.11)$$

$$\chi(z) = C \exp\left[\kappa_b \left(z + \frac{L}{2}\right)\right]; \quad z \leq -\frac{L}{2} \quad (1.12)$$

donde hemos tenido en cuenta la condición de que la función de onda no diverja para  $z \rightarrow \pm\infty$ . Para los estados pares  $B=C$  y para los impares  $B=-C$ . Si aplicamos las condiciones de contorno en los puntos  $z = \frac{L}{2}$ , obtenemos las ecuaciones que deben ser satisfechas por la energía  $\varepsilon$ :

$$k_w \operatorname{tg}\left(k_w \frac{L}{2}\right) = \kappa_b \quad \text{para los estados pares} \quad (1.13)$$

$$k_w \operatorname{cotg}\left(k_w \frac{L}{2}\right) = -\kappa_b \quad \text{para los estados impares} \quad (1.14)$$

para un movimiento descrito por la ecuación (1.6). Las soluciones de éstas ecuaciones sólo pueden ser obtenidas numéricamente. Se obtiene un espectro de energías discreto para  $\varepsilon < 0$ , dado por los autovalores definidos por éstas ecuaciones para el movimiento en la dirección  $z$ . Esta es la razón que permite obtener un comportamiento cuasi-bidimensional en las heteroestructuras de semiconductores III-V. Si la distancia en energía entre sucesivos niveles discretos es mayor que el ensanchamiento térmico ( $\sim 25 \text{ meV}$  a temperatura ambiente) o el ensanchamiento por colisiones ( $\sim 17 \text{ meV}$  si  $m^* = 0.067 m_0$ , con una movilidad electrónica de  $\mu = 10^5 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ ), los portadores se comportan como si su movimiento fuera realmente bidimensional en el plano  $(x,y)$ , estando el movimiento  $z$  cuantizado en uno de los niveles discretos caracterizados por

$\chi(z)$ . Podemos ver también que existe una penetración en la barrera, es decir, hay una probabilidad distinta de cero de encontrar los portadores en la barrera: es el conocido efecto túnel.

Todo pozo cuántico tiene al menos un estado ligado, independientemente de la altura de la barrera. Por otro lado podemos suponer  $V_b$  infinito, en cuyo caso existirán infinitos estados ligados en el pozo. En éste último caso las soluciones de las ecuaciones (1.13) y (1.14) se pueden calcular analíticamente, quedando:

$$k_w L = p\pi, \quad p = 1, 2, \dots \quad (1.15)$$

y si consideramos la energía cero en el fondo del pozo, los niveles discretos vienen dados por:

$$E_p = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m^* L^2} p^2, \quad p \geq 1 \quad (1.16)$$

por ejemplo,  $E_1 \sim 56 \text{ meV}$  si  $L = 100 \text{ \AA}$  y  $m^* = 0.067 m_0$  (para un pozo de GaAs).

Para energías positivas ( $\epsilon \geq 0$ ), no hay estados ligados, el movimiento está caracterizado por un espectro continuo de estados permitidos de energía. Calculando las funciones de onda y los coeficientes de reflexión y transmisión de los bordes del pozo para distintas energías, se encuentran estados resonantes, llamados también estados ligados virtuales, que aparecen a ciertas energías discretas para las que la probabilidad de encontrar al portador en el interior del pozo se ve incrementada. Se puede interpretar como un efecto de interferencia constructiva de ondas, que hace que la partícula esté un cierto tiempo en el pozo y luego escape. A energía cero ( $\epsilon = 0$ ), los picos de resonancia se hacen infinitamente estrechos, lo que indica que el estado ligado virtual se transforma en un estado ligado real. Igualmente los virtuales se podían considerar como la “continuación” de los reales cuando su energía va aumentando y finalmente excede la energía de confinamiento.

La densidad de estados:

Es importante saber cuántos estados cuánticos  $|\nu\rangle$  por unidad de energía están disponibles en los alrededores de una cierta energía  $\varepsilon$ . Esta cantidad es la densidad de estados, y viene dada por:

$$D(\varepsilon) = \sum_{\nu} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\nu}) \quad (1.17)$$

donde  $\varepsilon_{\nu}$  es la energía asociada con el estado  $|\nu\rangle$ . La ecuación anterior se suele escribir de diferentes formas:

$$D(\varepsilon) = \sum_{\nu} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\nu}) = \sum_{\nu} \langle \nu | \varepsilon - H | \nu \rangle = \text{Tr} \delta(\varepsilon - H) \quad (1.18)$$

donde  $H$  es el Hamiltoniano del sistema, cuyos autovalores son las energías  $\varepsilon_{\nu}$ . La ventaja de usar la traza es que puede ser evaluada en cualquier base  $|l\rangle$ , sin necesidad de que los vectores de dicha base sean autoestados de  $H$ . La delta de Dirac puede también escribirse como:

$$(\varepsilon - H) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0} \text{Im}(\varepsilon - H + i\eta)^{-1} \quad (1.19)$$

donde  $\text{Im}(z)$  significa “parte imaginaria de  $z$ ”. Usando las ecuaciones (1.18) y (1.19), podemos escribir:

$$D(\varepsilon) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0} \text{Im} \sum_l \langle l | (\varepsilon - H + i\eta)^{-1} | l \rangle \quad (1.20)$$

Para el pozo cuántico, el espectro discreto de energía está “etiquetado” por el índice  $n$  del nivel ligado en el pozo, además debemos considerar el spin del electrón e introducir un número cuántico de spin  $s = \pm \frac{1}{2}$ . Entonces  $|\nu\rangle = |n, s\rangle$  y:

$$D(\varepsilon) = 2 \sum_n \delta(\varepsilon - \varepsilon_n) \quad (1.21)$$

donde el factor 2 da cuenta de la degeneración de spin de cada nivel  $n$ .

Hasta ahora hemos estado considerando el pozo cuántico unidimensional, restringiéndonos al estudio de la dirección  $z$ . El problema realmente es tridimensional, el movimiento de los portadores puede ser en cualquier dirección, debemos entonces considerar el Hamiltoniano completo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi(r) + V_b(z) \psi(r) = \varepsilon \psi(r) \quad (1.21)$$

este Hamiltoniano es suma de contribuciones que dependen por separado de las coordenadas  $x, y, z$ . Podremos encontrar autofunciones que sean separables en estas coordenadas, es mas, como el potencial sólo depende de  $z$ , el movimiento a lo largo de las direcciones  $x$  e  $y$  es libre. Podemos proponer funciones de onda de la forma:

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{S}} \exp[ik_x x + ik_y y] \chi(z) \quad (1.22)$$

donde  $S = L_x L_y$ , es el área de la muestra y  $\chi(z)$  es solución de la ecuación (1.6).

Sustituyendo éstos estados en la ecuación (1.21) encontramos:

$$\varepsilon = E_n + \frac{\hbar^2 k_{\perp}^2}{2m^*} \quad (1.23)$$

donde  $E_n$  es uno de los autovalores de la ecuación unidimensional de Schrödinger que resolvíamos para el pozo cuántico unidimensional (Ec(1.6)) y  $k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2$ . Por tanto, podemos asociar una banda bidimensional, que representa la energía cinética que proviene del movimiento en el plano  $(x, y)$  de los portadores, con cada uno de los estados ligados del pozo cuántico dados por la energía  $E_n$ .

La densidad de estados asociada a este movimiento, descrito por la ecuación (1.21), es:

$$D(\varepsilon) = 2 \sum_{k_x, k_y, n} \delta \left[ \varepsilon - E_n - \frac{\hbar^2 k_{\perp}^2}{2m^*} \right], \quad E_n < 0 \quad (1.24)$$

El área de la muestra se supone macroscópica, si aplicamos condiciones de contorno periódicas para los movimientos en las direcciones  $x$  e  $y$ , tenemos:

$$k_x = m \frac{2\pi}{L_x}, \quad k_y = n \frac{2\pi}{L_y} \quad (1.25)$$

como las longitudes  $L_x$  y  $L_y$  son muy grandes, la suma sobre  $k_x$  y  $k_y$  puede ser convertida en una integración:

$$\sum_{k_x, k_y} a(k_x, k_y) \xrightarrow{L_x, L_y \rightarrow \infty} \frac{L_x L_y}{(2\pi)^2} \int dk_x dk_y a(k_x, k_y) \quad (1.26)$$

y efectuando la integración sobre  $D(\varepsilon)$ , obtenemos:

$$D(\varepsilon) = \frac{m^* S}{\pi \hbar^2} \sum_n \Theta(\varepsilon - E_n); \quad E_n < 0 \quad (1.27)$$

donde  $\Theta(x)$  es la función escalón, que viene definida por:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

La forma de la densidad de estados se puede ver en Fig.1.2, tiene una forma escalonada, indicando el sucesivo llenado de los niveles  $E_n$ , que son las subbandas asociadas a los estados ligados del pozo en la dirección  $z$ .

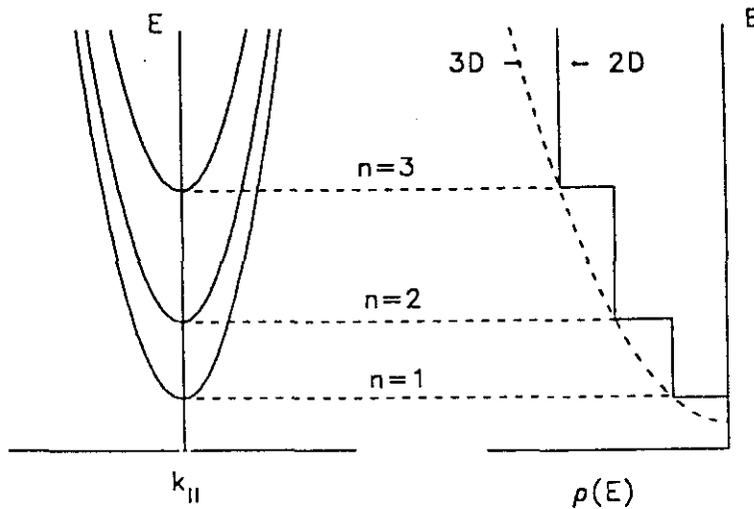


Figura 1.2 a y b: Forma escalonada de la densidad de estados

Podemos destacar dos características importantes:

i)  $D(\varepsilon) = 0$  para  $\varepsilon < E_1$ , éste es un efecto de la energía de confinamiento asociada con la localización de la partícula en la dirección  $z$ . Esto tendrá importantes consecuencias prácticas. Por ejemplo, un material volumico con un gap de energía entre las bandas de valencia y conducción dado por  $\varepsilon_g$ , absorberá luz con energía  $\hbar\omega > \varepsilon_g$ , pero si el mismo material se encuentra entre dos barreras que forman con él un pozo cuántico, el borde de absorción se habrá corrido hacia el azul una cantidad dada por la suma de las energías de confinamiento de los electrones y los huecos. Ajustando la anchura del pozo,  $L$ , éste corrimiento podrá ser ajustado desde cero hasta algunos cientos de meV.

ii) A bajas temperaturas, los portadores sólo pueblan la subbanda más baja,  $E_1$  del pozo cuántico, y el scattering por defectos estáticos sólo ocurrirá mediante mecanismos intrasubbanda. Si por alguna razón los portadores se vuelven más energéticos y empiezan a poblar la segunda subbanda (adquieren energías mayores que  $E_2$ ), entonces se

producirán mecanismos de scattering intersubbanda, lo que provocará una caída de la movilidad.

Cuando la anchura,  $L$ , del pozo cuántico se hace muy grande, muchos estados quedan ligados en el pozo  $\left[ \frac{L}{\pi} k_w(0) \rightarrow \infty \right]$  y la separación entre sus energías se hace cada vez más pequeña (decreciendo como  $L^{-2}$ ). Cuando  $L \rightarrow \infty$ , los niveles de energía tales que  $E_n \ll 0$ , aquellos cerca del fondo del pozo, coinciden con los de un pozo infinito y podemos aproximar la densidad de estados por la expresión:

$$D(\varepsilon) \approx \frac{m^* S}{\pi \hbar^2} \sum_{n=1}^{\infty} \Theta(\varepsilon + V_b - n^2 E_1) \quad (1.29)$$

donde  $E_1$  es la energía de confinamiento de estado fundamental (ver Ec.(1.26)), como  $L$  es grande y  $E_1$  pequeña, podemos convertir la suma en  $n$  en una integración. Aproximando para energías tales que  $\varepsilon + V_b \gg E_1$ ,

$$D(\varepsilon) \approx \frac{m^* S}{\pi \hbar^2} \left\{ \sqrt{\frac{\varepsilon + V_b}{E_1}} - 1 \right\} \approx \frac{m^* S}{\pi \hbar^2} \sqrt{\frac{\varepsilon + V_b}{E_1}} \quad (1.39)$$

o también:

$$D(\varepsilon) \underset{L \rightarrow \infty}{\approx} \frac{m^* S L}{\pi^2 \hbar^2} \sqrt{\frac{2m^*}{\hbar^2} (\varepsilon + V_b)} \quad (1.40)$$

esta ecuación coincide con el resultado obtenido cuando se desprecia el efecto del pozo cuántico sobre los niveles de energía de la partícula, es decir, la ecuación (1.40) es la densidad de estados de una partícula de masa  $m^*$  moviéndose libremente en una muestra volumica (3D) de volumen  $LS$ , en la práctica, éste limite se alcanza para pozos cuánticos de GaAs-Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As cuando la anchura es  $L > 10^3 \text{ \AA}$ .

Obtendremos también el número de portadores por unidad de área,  $n_e$ , integrando la densidad de estados hasta el nivel de Fermi,  $E_F$ :

$$n_e = \int_0^{E_F} D(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{m^* S}{\pi \hbar^2} \sum_n (E_F - E_n) \Theta(E_F - E_n) \quad (1.41)$$

A partir del nivel de Fermi, podemos definir un momento de Fermi,  $k_F$ , dado por

$$E_F = E_n + \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m^*} \quad (1.42)$$

y de aquí, tenemos para cada subbanda:

$$n_e = \frac{m^* S k_F}{\pi \hbar^2} \quad (1.43)$$

$$k_F = \left( \frac{2\pi n_e}{g_v} \right) \quad \text{y} \quad \lambda_F = \frac{2\pi}{k_F} \quad (1.44)$$

$\lambda_F$  se compara con la anchura del pozo que confina el gas bidimensional, para que el confinamiento sea efectivo y el gas de electrones se comporte bidimensionalmente, el ancho del pozo debe ser menor que  $\lambda_F$ , en caso contrario, el gas de electrones se comportará tridimensionalmente (Fig1.3).

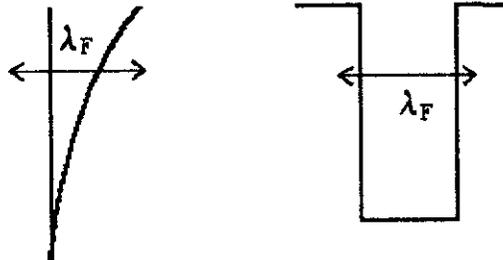


Figura 1.3: Relación entre la anchura del pozo y  $k_F$

A partir del número de portadores, podemos obtener la energía cinética media de las partículas, que viene dada, a  $T=0K$  por la siguiente expresión:

$$\frac{1}{n_e} \left\langle \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \right\rangle \quad (1.45)$$

Finalmente, en la Tabla 1.1 resumimos los resultados obtenidos para los casos de estructuras en las que encontramos un gas de electrones bidimensional (2D) con área  $S$ , y los casos en que el material se considera volúmico, es decir, el caso tridimensional (3D), con un volumen  $\Omega$ :

	2D	3D
<b>autoestados</b>	$ n, k_{\perp}, s\rangle, k_{\perp} = (k_x, k_y)$	$ k, s\rangle, k = (k_x, k_y, k_z)$
<b>densidad de estados</b>	$\sum_n D_n(\varepsilon)$ $D_n(\varepsilon) = \frac{m^* S}{\pi \hbar^2} \Theta(\varepsilon - E_n)$	$\frac{m^* \Omega}{\pi^2 \hbar^2} \sqrt{\frac{2m^* \varepsilon}{\hbar^2}}$
<b>número de portadores</b>	$n_s = \frac{m^* S}{\pi \hbar^2} \sum_n [E_F - E_n] \Theta(E_F - E_n)$	$n_s = \frac{\Omega}{3\pi^2} \left[ \frac{2m^*}{\hbar^2} E_F \right]^{3/2}$
<b>energía cinética media por partícula (T=0K)</b>	$\frac{1}{2} \frac{\sum_n [E_F - E_n]^2 \Theta(E_F - E_n)}{\sum_n [E_F - E_n] \Theta(E_F - E_n)}$	$\frac{3}{5} E_F$

Tabla 1.1

### 1.1.2 El gas de electrones bidimensional en presencia de campo magnético:

Consideraremos ahora la presencia de un campo magnético que afecta al gas de electrones bidimensional. Suponemos que el campo magnético,  $\vec{B}$ , es estático y uniforme y tiene una orientación dada por el ángulo  $\theta$  respecto al eje de crecimiento de la heteroestructura, que llamaremos eje  $z$ . (Fig. 1.4):

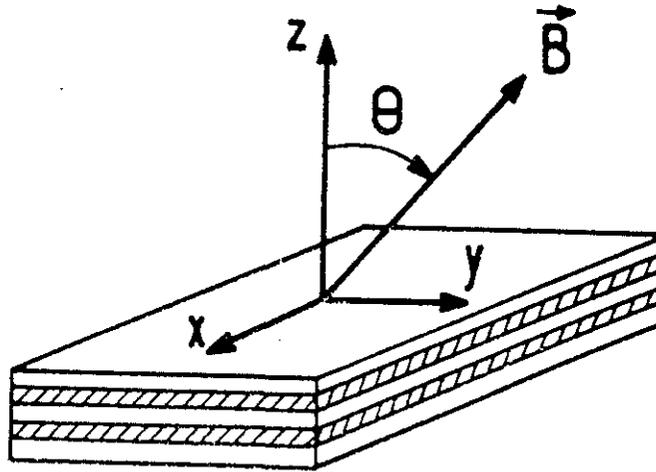


Figura 1.4: Orientación relativa del campo magnético y la muestra

Escribimos entonces:

$$\vec{B} = (0, B \sin \theta, B \cos \theta) \quad (1.46)$$

En lo que sigue convendrá expresar este campo magnético a partir de un potencial vector:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (1.47)$$

para elegir el potencial  $\vec{A}$  debemos tener en cuenta la invariancia gauge: si reemplazamos  $\vec{A}$  por  $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla f$ , donde  $f$  es una función diferenciable arbitraria, el campo magnético que se obtiene a partir de éste nuevo potencial  $\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}'$  coincide con  $\vec{B}$ . Hay una gran ambigüedad en la elección del potencial que corresponde a un campo dado, pero como es el campo el que tiene un significado físico, los resultados deberán depender únicamente del campo magnético y no de una determinada elección del potencial, es decir, deberá existir una invariancia gauge. Elegimos entonces<sup>1</sup>:

<sup>1</sup> Se pueden hacer diferentes elecciones, una de las más comunes es elegir el gauge de Landau. En el Apéndice 1 se desarrolla esta elección para el caso en que  $\theta = 0$ , es decir, cuando el campo es

$$\vec{A} = (Bz \operatorname{sen} \theta, Bx \operatorname{cos} \theta, 0) \quad (1.48)$$

introducimos además la notación:

$$B_{\perp} = B \operatorname{sen} \theta \quad ; \quad B_{\parallel} = B \operatorname{cos} \theta \quad (1.49)$$

$$\omega_{c\perp} = \frac{eB_{\perp}}{m^*c} \quad ; \quad \omega_{c\parallel} = \frac{eB_{\parallel}}{m^*c} \quad (1.50)$$

donde  $m^*$  es la masa efectiva de los portadores,  $e$  la carga del electrón y la notación perpendicular/paralelo se refiere respecto al eje de crecimiento (Fig 1.4).

Una vez definido el potencial vector, el campo magnético se introduce en el hamiltoniano haciendo la siguiente sustitución en el operador de momento lineal:

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \quad (1.51)$$

Además será necesario considerar el spin del electrón, su interacción con el campo magnético añade un término a la energía de la partícula que viene dado por:

$$g^* \mu_B \sigma \cdot B \quad (1.52)$$

donde  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_0c}$  es el magnetón de Bohr y  $g^*$  es el factor de Landé efectivo de los portadores ( $g^*=2$  para los electrones en el vacío). El operador  $\sigma$  toma los autovalores  $\pm \frac{1}{2}$ .

Con todo ello podemos escribir el hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2m} \left[ -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c} B_{\perp} z \right]^2 + \frac{1}{2m} \left[ -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + \frac{e}{c} B_{\parallel} x \right]^2 + \frac{p_z^2}{2m} + V(z) + g^* \mu_B \sigma \cdot B \quad (1.53)$$

donde  $V(z)$  es la energía potencial debida a la presencia de las barreras del pozo cuántico que confinan a los electrones. Este potencial puede ser modificado por la interacción electrón-electrón entre los portadores y su valor deberá ser calculado de forma autoconsistente.

Podemos separar las variables orbitales y las de spin, para hacer un análisis por separado de cada una de ellas:

$$\psi(r, \sigma) = \psi(r) \psi(\sigma) \quad (1.54)$$

Si consideramos que  $\sigma$  está cuantizado, podemos escribir los autoestados y las autoenergías correspondientes al hamiltoniano (Ec.1.53) como:

$$\psi(r, \sigma) = \langle r | \nu \rangle \otimes |\uparrow\rangle; \quad \varepsilon_\nu + \frac{1}{2} g^* \mu_B B \quad (1.55)$$

$$\psi(r, \sigma) = \langle r | \nu \rangle \otimes |\downarrow\rangle; \quad \varepsilon_\nu - \frac{1}{2} g^* \mu_B B \quad (1.56)$$

siendo  $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$  los dos autovectores asociados a los autovalores del operador  $\sigma_z$  y  $|\nu\rangle$  los autoestados de la parte orbital del hamiltoniano asociados al autovalor  $\varepsilon_\nu$ . El spin es invariante bajo rotaciones, por tanto, si cuantizamos  $\sigma$  a lo largo de cualquier dirección, aunque no sea necesariamente paralela a  $B$ , obtendremos los mismos autovalores. Es decir, el spin-splitting  $g^* \mu_B \sigma \cdot B$  depende sólo del módulo de  $B$ , no de su dirección.

Si nos fijamos ahora en la parte orbital del hamiltoniano, veremos que no depende de la coordenada  $y$ , podremos escribir los autoestados como:

$$\psi_\nu(r) = \frac{1}{\sqrt{L_y}} e^{ik_y y} \varphi_\mu(x, z) \quad (1.57)$$

en general, cuando  $\theta \neq 0$  y  $V(z)$  es arbitrario, las variables  $x$  y  $z$  no se pueden separar.

Si consideramos ángulos del campo magnético próximos a  $\theta = 0$ , podemos considerar una buena aproximación la separación de las variables  $x$  y  $z$ . Escribiremos el hamiltoniano en dos partes, una separable, que llamaremos aproximación de orden cero y otro término, cuyo estudio nos indicará el grado de validez de nuestra aproximación:

$$H = H_\perp + H_{//} + \delta H \quad (1.58)$$

donde, haciendo uso de la ecuación (1.57), tenemos:

$$H_\perp = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2m} \left[ \hbar k_y + \frac{e}{c} B_{//} x \right]^2 \quad (1.59)$$

$$H_{//} = \frac{p_z^2}{2m} + V(z) \quad (1.60)$$

$$\delta H = \delta H_1 + \delta H_2 = \frac{1}{2mc^2} e^2 B_\perp^2 z^2 + p_x z \frac{e B_\perp}{mc} \quad (1.61)$$

Si la aproximación es válida, entonces, las energías de orden cero (las correspondientes a la parte  $H_\perp + H_{//}$ ) solo dependen de  $B_{//}$ , además, podemos separar las dependencias de las coordenadas  $x$  y  $z$ . Esto significa que, a diferencia de lo que

ocurría con la parte de spin, los autovalores  $\varepsilon_n$  dependen de la componente del campo magnético paralela al eje de crecimiento de la estructura (la perpendicular al gas de electrones bidimensional). Esto nos suministra un test experimental sobre la bidimensionalidad del gas de electrones simplemente estudiando como varían las propiedades que dependen del campo magnético en función del ángulo que forma dicho campo magnético con el eje de crecimiento de la muestra. En el caso tridimensional, los autovalores de  $H$  sólo dependen del módulo de  $B$ , no de su dirección.

Estudiaremos ahora los autoestados de  $H_{\perp} + H_{\parallel}$ , habíamos sustituido la autofunción  $\psi(r)$ , debemos considerar ahora la parte dependiente de las coordenadas  $x$  y  $z$ , separables, que es:

$$\varphi_{\mu}(x, z) = \chi_m(z)\varphi_n(x) \quad (1.62)$$

donde:

$$H_{\parallel}\chi_m(z) = \xi_m\chi_m(z) \quad (1.63)$$

$$H_{\perp}\varphi_n(x) = \varepsilon_n\varphi_n(x) \quad (1.64)$$

aquí,  $\chi_m(z)$  son las funciones de onda para el movimiento en la dirección  $z$ , que corresponden al estado  $m$  (ligado o no) de energía  $\xi_m$  para el hamiltoniano en ausencia de campo magnético, y son las llamadas subbandas de la heteroestructura cuántica. Las funciones  $\varphi_n(x)$  son las autofunciones de un oscilador armónico de frecuencia  $\omega_{c\parallel}$  centrado en:

$$x_0 = -\frac{\ell^2 k_y}{\cos\theta} \quad (1.65)$$

donde  $\ell$  es la longitud magnética, que viene dada por:

$$\ell = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}} \quad (1.66)$$

Los autovalores de la ecuación (1.64) son independientes de  $k_y$  y están igualmente espaciados en la cantidad  $\hbar\omega_{c\parallel}$ . Estos son los famosos niveles de Landau:

$$\varepsilon_n(k_y) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_{c\parallel}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.67)$$

Las autofunciones de la ecuación (1.64) que corresponden a cada autovalor  $\varepsilon_n$ , se pueden expresar por medio de los polinomios de Hermite:

$$\varphi_n(x) = \frac{\cos\theta^{1/4}}{\sqrt{\ell}} \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{n}}} \exp\left[-\frac{\cos\theta}{2\ell^2}(x-x_0)^2\right] H_n\left[\left(\frac{x-x_0}{\ell}\right)\sqrt{\cos\theta}\right] \quad (1.68)$$

donde:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}] \quad (1.69)$$

con estas funciones de onda se puede verificar que:

$$\langle n|x|n\rangle = x_0 \quad (1.70)$$

lo que viene a confirmar el sentido físico que inicialmente dábamos a  $x_0$ : el centro la función de onda correspondiente al  $n$ -ésimo oscilador armónico. En conjunto, estos estados forman una estructura de niveles igualmente espaciados asociados a cada uno de los estados que teníamos en ausencia de campo magnético. Por tanto, y sin considerar de momento el spin del electron, podemos escribir:

$$|v\rangle = |m, n, k_y\rangle \quad (1.71)$$

que corresponde a una energía:

$$\varepsilon_v = \xi_m + \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_{c//} \quad (1.72)$$

El movimiento está totalmente cuantizado: el potencial  $V(z)$  ha cuantizado la componente  $z$  del movimiento de los portadores, mientras que la componente  $B_{//}$  del campo magnético ha cuantizado el movimiento en el plano  $(x,y)$  del gas bidimensional.

Sin embargo, existe una gran degeneración en los autovalores de la energía. Para calcular dicha degeneración suponemos una muestra cuyas dimensiones son  $L_x$  y  $L_y$  en el plano perpendicular al eje de crecimiento, estas dimensiones son enormes comparadas con la longitud definida de manera “natural” para el problema, la longitud magnética  $\ell$ , (lo que por otra parte justifica el haber ignorado el efecto del confinamiento lateral en el hamiltoniano). Consideraremos ahora que el centro del oscilador armónico debe estar dentro del cristal:

$$-\frac{L_x}{2} < x_0 < \frac{L_x}{2} \quad (1.73)$$

además los valores permitidos de  $k_y$  están uniformemente distribuidos y separados por un intervalo de  $2\pi/L_y$  (respetando el principio de exclusión de Pauli). Por tanto, la degeneración del autovalor  $\varepsilon_v$  es:

$$g_v = \frac{L_x L_y}{2\pi \ell^2} \cos\theta \quad (1.74)$$

éste resultado es exacto para  $\theta = 0$ , en los otros casos deben ser tenidos en cuenta los efectos introducidos por el término  $\delta H$  en el hamiltoniano. En este caso,  $\theta = 0$  y considerando que el sistema es bidimensional, tendríamos para el número de electrones por unidad de área:

$$n_e = \frac{1}{2\pi \ell^2} = \frac{eB}{h} \quad (1.75)$$

Las funciones de onda obtenidas, si consideramos el plano perpendicular al eje de crecimiento, podemos decir que están localizadas en una dirección pero deslocalizadas en la otra. Como los niveles están enormemente degenerados, podremos elegir para una energía dada una combinación lineal de funciones de onda que sea localizada o deslocalizada. Si consideramos un campo eléctrico, se levanta parte de la degeneración y si además, como veremos más adelante, consideramos impurezas, se sigue levantando la degeneración. Esto nos lleva a que ya no podremos seguir eligiendo combinaciones lineales de funciones de onda que sean localizadas o deslocalizadas para cualquier energía, sino que para una energía dada, el carácter localizado o deslocalizado quedará determinado.

En la Tabla 1.2 vienen dados, para ilustrar los órdenes de magnitud en que nos movemos, la frecuencia ciclotrón, la longitud magnética y la degeneración de cada nivel, para una serie de campos magnéticos fijos.

<b>B(T)</b>	<b><math>\omega_{c//}</math> (<math>10^{11} \text{ s}^{-1}</math>)</b>	<b>l(Å)</b>	<b><math>g_v</math> (<math>10^9 \text{ cm}^{-2}</math>)</b>
0.1	2.4	811	2.4
1	24	250	24
5	120	114	120
10	250	81	240
15	370	66	360
20	490	57	480

**Tabla 1.2**

Discutiremos ahora, brevemente, el efecto de los términos que despreciamos en la ecuación (1.58) para resolver el problema.

Empezaremos por  $\delta H_1$ , este término no afecta a la separabilidad de las variables  $x$  y  $z$ , su único efecto es mezclar los diferentes estados cuánticos del movimiento en la dirección  $z$ , es lo que se conoce como mezcla de subbandas. Los niveles  $\xi_m$  son modificados ligeramente, para un estado  $|m\rangle$  que esté suficientemente separado de los otros en energía, podemos calcular su variación utilizando un esquema perturbativo hasta primer orden, este esquema será válido si  $\langle \chi_n | \delta H_1 | \chi_m \rangle$  es mucho menor que la distancia en energía entre los dos niveles, es decir,  $\xi_n - \xi_m$ . Para el nivel fundamental del movimiento en  $z$ , o primera subbanda, la variación producida es pequeña, del orden de una centésima parte de la distancia entre sucesivas subbandas, por tanto será una buena aproximación no considerar la mezcla de subbandas. Esto es equivalente a decir que la cuantificación de Landau en la dirección  $z$  es mucho menor que la cuantificación del movimiento a lo largo del eje  $z$ , producida por el potencial  $V(z)$ . Para campos en la dirección  $\theta = 0$ , podremos considerar entonces los niveles de Landau como la cuantificación del movimiento en el plano perpendicular al eje  $z$  y despreciar la mezcla de diferentes subbandas provenientes de la cuantificación del movimiento en la dirección  $z$ .

Para considerar el efecto del término  $\delta H_2$ , es necesario recurrir a un esquema perturbativo de segundo orden por lo menos. Este término acopla niveles de Landau de diferentes subbandas, cuyos índices varían en una unidad, además, si el potencial  $V(z)$  es par en  $z$ , sólo subbandas de paridad opuesta se acoplan. En la práctica, ésto supone que dos niveles de Landau consecutivos que pertenecen a subbandas adyacentes se cortan. Este corte se produce para valores del campo magnético que dependen del ángulo  $\theta$  considerado, en ese momento los niveles de Landau se mezclan.

*La densidad de estados en presencia de campo magnético:*

A partir de aquí, consideraremos el caso en que  $\theta = 0$ , es decir, despreciamos las modificaciones introducidas por  $\delta H$ , que como hemos visto, para este caso son pequeñas, y aunque producen ligeras modificaciones en los niveles de energía, podemos suponer que no hay mezcla de subbandas. Sin embargo, sí tendremos en cuenta el spin

del electrón. Como los movimientos en el plano  $(x,y)$  y a lo largo del eje  $z$  son separables, podemos descomponer la densidad total de estados en contribuciones que provienen de las diferentes subbandas  $m$ :

$$D(\varepsilon) = \sum_m D_m(\varepsilon) \quad (1.76)$$

donde:

$$D_m(\varepsilon) = \sum_{\sigma_z, k_y, n} \delta \left[ \varepsilon - \xi_m - \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_{c||} - g^* \mu_B B \sigma_z \right]; \quad \sigma_z = \pm \frac{1}{2} \quad (1.77)$$

como las autoenergías no dependen de  $k_y$ , la suma sobre  $k_y$  puede ser efectuada de manera muy sencilla sin más que tener en cuenta la degeneración que viene dada por la ecuación (1.74), haciendo  $\theta = 0$  y llamando  $S = L_x L_y$ . Queda entonces:

$$D_m(\varepsilon) = \frac{S}{2\pi \ell^2} \sum_{\sigma_z, n} \delta \left[ \varepsilon - \xi_m - \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_{c||} - g^* \mu_B B \sigma_z \right] \quad (1.78)$$

dado que el movimiento de los portadores está totalmente cuantizado, la densidad de estados será cero excepto para unos valores discretos de la energía, dados por:

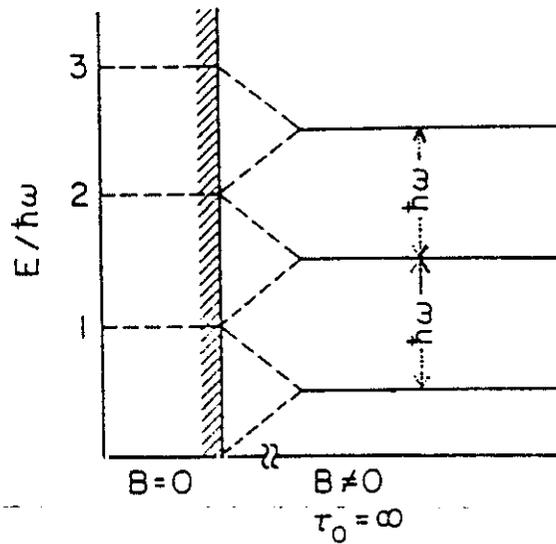
$$\varepsilon_{m\sigma_z} = \xi_m + \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_{c||} + g^* \mu_B B \sigma_z \quad (1.79)$$

Si recordamos la forma de la densidad de estados del gas bidimensional en ausencia de campo magnético, dada por la ecuación (1.27), que reescribimos aquí llamando  $\xi_m$  a lo que allí aparecía como  $E_n$  y que son los niveles correspondientes a las diferentes subbandas:

$$D_{m\sigma_z}^{B=0}(\varepsilon) = \frac{m^* S}{2\pi \hbar^2} \Theta(\varepsilon - \xi_m) \quad (1.80)$$

se puede apreciar el enorme efecto que produce el campo magnético sobre la densidad de estados (Fig. 1.5). De una situación, en ausencia de campo, donde para energías  $\varepsilon > \xi_1$  la densidad de estados no presenta ningún gap y es continua comportándose el gas de electrones de forma metálica; se pasa a una sucesión de deltas de Dirac, puntos singulares, separados por gaps de energía prohibida. Si consideramos el caso en que  $T=0K$ , y llamamos  $\varepsilon_F$  a la energía del nivel de Fermi de un gas de electrones, éste se comportará como un metal si  $\varepsilon_F = \varepsilon_{m\sigma_z}$ , o como un aislante si  $\varepsilon_F \neq \varepsilon_{m\sigma_z}$ . Este cambio drástico debido al campo magnético no puede ser encontrado en materiales volúmenes, donde la cuantización no es completa y los electrones mantienen un movimiento libre (a

lo largo del campo). Es por tanto una propiedad exclusiva de los sistemas bidimensionales.



*Figura 1.5: Niveles de Landau*

Por supuesto, la situación no es tan clara. En realidad, la densidad de estados no presenta una forma "pura" de sucesión de deltas de Dirac. Será necesario tener en cuenta las diferentes imperfecciones (desorden, defectos del cristal, impurezas aleatorias... ) que modificarán las formas de las deltas, redondeando sus picos, añadiendo estados en los gaps prohibidos de energía... Sin embargo, el esquema arriba expuesto es el punto de partida para la discusión, que será desarrollada en los siguientes capítulos.

## 1.2 Las heteroestructuras de semiconductores

La realización práctica de un gas de electrones bidimensional más accesible a los experimentos son las heteroestructuras de semiconductores. De hecho, son las únicas sobre las que actualmente se pueden realizar medidas de transporte en el gas bidimensional. Por sus grandes aplicaciones técnicas, se ha invertido un gran esfuerzo económico e investigador en ellas. En los últimos años se han mejorado enormemente las técnicas de fabricación, alcanzándose una calidad enorme, que permite su síntesis de forma muy controlada, capa a capa atómica. En esta sección nos referiremos a las heteroestructuras de semiconductores III-V, y más en detalle a las heteroestructuras pseudomórficas de  $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  que son el tipo de muestras sobre las que haremos nuestros experimentos.

Un reflejo de la rápida innovación que se está produciendo en éste campo son las heteroestructuras más recientes como los hilos cuánticos o los puntos cuánticos, donde ha llegado a confinarse respectivamente un gas de electrones unidimensional o electrones uno a uno de forma controlada. En éste trabajo no vamos a tratar estos dos aspectos, remitimos sin embargo a una creciente bibliografía de la que los artículos que citamos a continuación son sólo una pequeña muestra: Ando (1991), Altshuler *et al* (1993), Andrada *et al* (1993), Bird *et al* (1992), Chen *et al* (1993), Dignam *et al* (1994), Frost *et al* (1993), Huang *et al* (1993), Mani *et al* (1993a) Morawicz *et al* (1992), Sundaram *et al* (1993), van Wees *et al* (1988, 1989, 1991) Weis *et al* (1993). También se está desarrollando rápidamente el estudio del transporte vertical en heteroestructuras de semiconductores, citamos, por ejemplo una de sus muchas aplicaciones: la espectroscopía por magnetotúnel resonante: Brey *et al* (1988), Degani *et al* (1993), Eaves (1990), Eisenstein *et al* (1990, 1992b) Ephron *et al* (1992), Hayden *et al* (1991, 1992a), Moon *et al* (1993), Müller *et al* (1993), Zaslavsky *et al* (1990); o también las propiedades de una doble capa de gas bidimensional y su relación con la superconductividad: Bonesteed (1993), Murphy *et al* (1994), Varma *et al* (1994).

### 1.2.1 Los materiales III-V: características generales:

Los compuestos III-V cristalizan en la estructura zinc-blenda. Esta red puede ser considerada como dos subredes fcc (face-centered-cubic) interpenetradas, desplazada una respecto a la otra una distancia igual a un cuarto de la diagonal principal del cubo. Cada una de las especies ocupa los lugares definidos por una cada una de las redes fcc, de manera que la red total, la estructura zinc-blenda no puede ser considerada como una red de Bravais, ya que la celda elemental contiene dos átomos: uno en el origen y otro en una posición  $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$  donde  $a$  es el lado del cubo (Fig. 1.6).

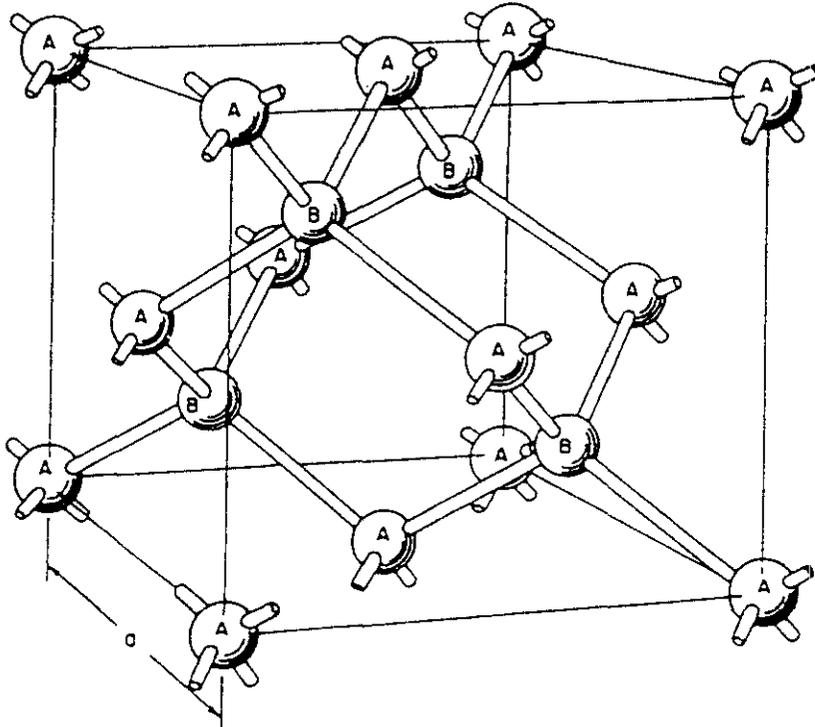


Figura 1.6: Red zinc-blenda para los compuestos III-V

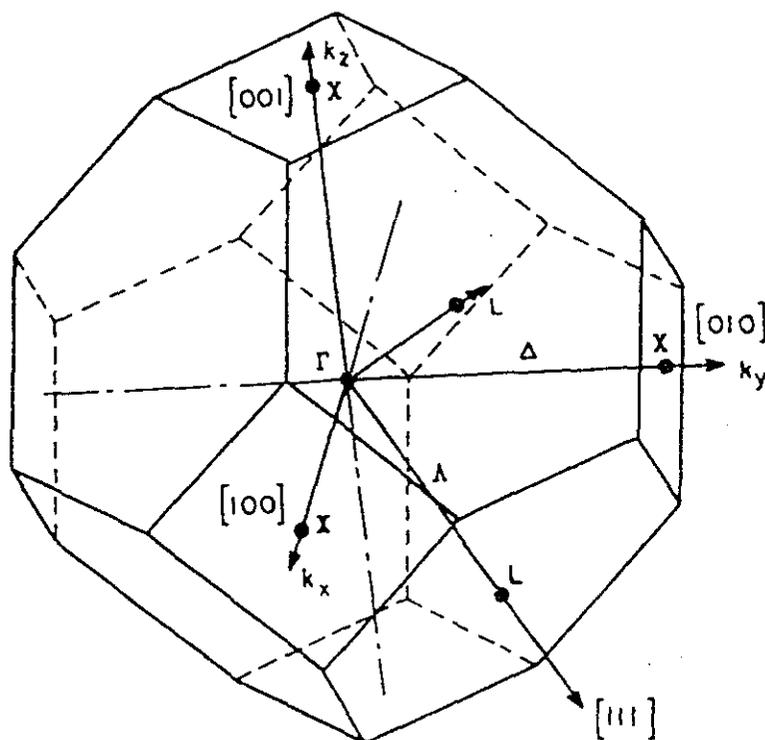


Figura 1.7: Red recíproca

La red recíproca de cada una de las redes fcc es una red bcc (body-centered-cubic), siendo la primera zona de Brilluin un octaedro truncado, cuyos puntos de simetría se indican en la figura (1.7).

Las propiedades electrónicas de los compuestos binarios vienen determinadas por los ocho electrones externos por celda unidad que forman los enlaces químicos. El resto de los electrones están fuertemente ligados al correspondiente núcleo y no contribuyen al transporte electrónico. Los ocho electrones externos (cinco provienen del anión y tres del catión) dan lugar a los enlaces tetraédricos entre una especie y los cuatro vecinos más próximos, que son de la otra. Los orbitales  $s$  y  $p$  de un átomo se hibridizan con los de otro, produciendo dos niveles, uno enlazante y otro antienlazante. Debido al gran número de celdas unidad, estos niveles se ensanchan y dan lugar a bandas. Los niveles enlazantes de tipo  $s$  están siempre ocupados por dos electrones por cada celda unidad, los otros seis electrones llenan completamente los otros tres orbitales enlazantes, que son del tipo  $p$ . Las bandas que se originan a partir de los orbitales antienlazantes están vacías,

siendo la más baja (a menudo de tipo  $s$ ) la que da lugar a la banda de conducción del material.

En todos los compuestos III-V, el borde superior de la banda de valencia se encuentra en el centro de la zona de Brillouin (punto  $\Gamma$ ), correspondiendo las más altas a huecos pesados y ligeros que, en ausencia de acoplo spin-órbita, están degeneradas en dicho punto. El borde inferior de la banda de conducción puede estar, o bien en el punto  $\Gamma$ , o bien próximo a los puntos L o X (Fig 1.8). En general, cuanto más pesado es el catión del binario, más probable es encontrar el borde de la banda de conducción cerca del punto  $\Gamma$ .

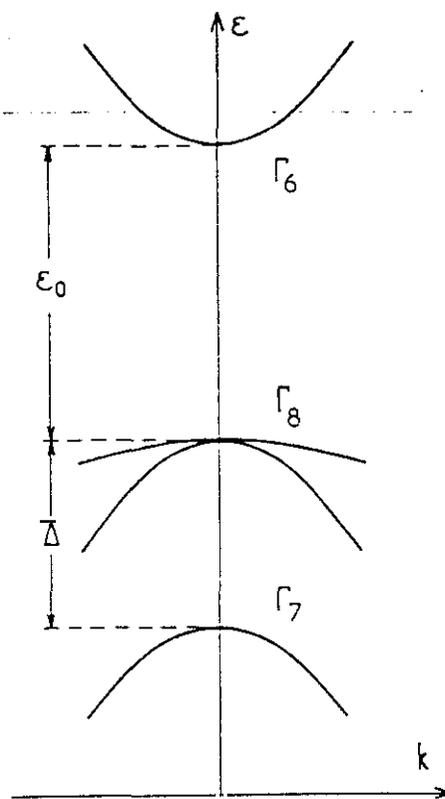


Figura 1.8: Bordes de banda de los compuestos III-V en volumen

Es posible hacer aleaciones ternarias o cuaternarias con materiales III-V. Si consideramos, por ejemplo, una aleación ternaria dada por  $A_xB_{1-x}C$ , los aniones  $C$  ocupan los lugares de una de las subredes fcc, mientras que los dos cationes  $A$  y  $B$  se distribuyen de forma aleatoria en los lugares de la segunda subred fcc. Esto hace que el potencial real que sienten los electrones ya no sea periódico, la simetría de traslación se rompe. Para poder tratar matemáticamente estos casos, se hace una aproximación de cristal virtual, en la que el potencial aperiódico se sustituye por un potencial "medio" periódico

y el desorden se introduce como una perturbación. El gap de energía prohibida entre el borde superior de la banda de valencia y el inferior de la de conducción se ve modificado. Si los dos compuestos binarios ( $AC$  y  $BC$ ) tienen una estructura de bandas y constantes de red similares, el gap de energía varía casi linealmente con  $x$ ; si los binarios, aunque tengan una constante de red ajustada, difieren en su estructura de bandas puede haber dependencias no lineales con  $x$  (ver Fig 1.9). Además, el punto en que se encuentra el fondo de la banda de conducción puede desplazarse (por ejemplo, desde  $\Gamma$  hacia  $X$ ).

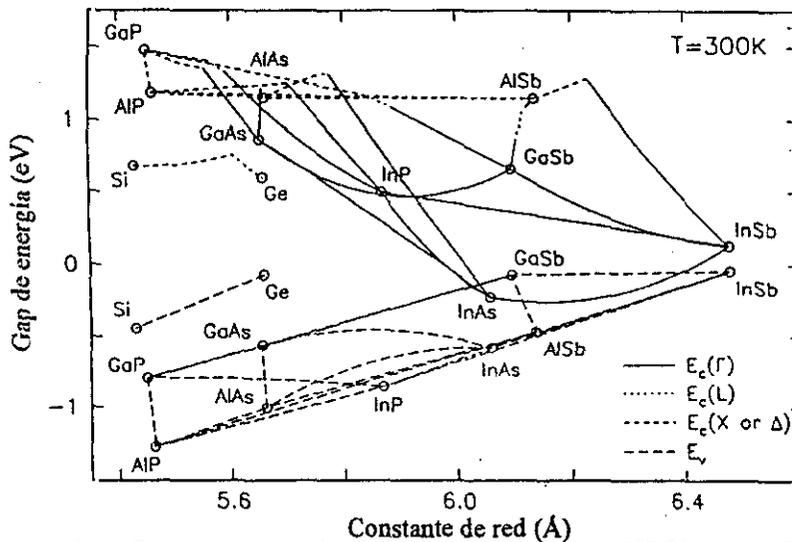


Figura 1.9: Gaps de energía para los compuestos III-V y sus aleaciones

## 1.2.2 Heteroestructuras de semiconductores:

Comentaremos brevemente algunas características de las heteroestructuras de semiconductores. En la actualidad, el perfeccionamiento de las técnicas de fabricación a permitido el desarrollo de diversos tipos de heteroestructuras de materiales III-V, algunas de las cuales empiezan a utilizarse en dispositivos electrónicos. La técnica de crecimiento por epitaxia de haces moleculares (MBE) ha permitido la fabricación capa a capa atómica de heteroestructuras cuánticas con muy baja densidad de defectos. En particular, ésta técnica ha permitido crecer cristales de un semiconductor sobre otro distinto, consiguiéndose intercaras entre ellos con muy pocos defectos si el desajuste de red no es grande; si este desajuste es grande, se pueden crecer heteroestructuras en cuya intercara aparecen tensiones, que sin llegar a destruir la heteroestructura, permiten modificar características importantes de su estructura de bandas (son las llamadas heteroestructuras pseudomórficas).

Debido a la redistribución de carga que se produce en la intercara, los bordes de banda que tenían los materiales volúmicos se desplazan. La distancia que existe entre los bordes de banda de los semiconductores a ambos lados de la intercara es la llamada discontinuidad de banda. Dependiendo de la posición relativa de los bordes de las bandas de valencia superior y de conducción inferior de ambos semiconductores, podemos efectuar una clasificación de las heterouniones entre ellos. Las de tipo I, aquellas en las que los bordes de las bandas de conducción y de valencia del material de banda prohibida menor se hallan en la banda prohibida del material con banda prohibida mayor (Fig.1.10a). Las de tipo II son aquellas en las que el borde de la banda de valencia del material de banda prohibida menor corresponde a una energía permitida del material de banda prohibida mayor (Fig.1.10b):

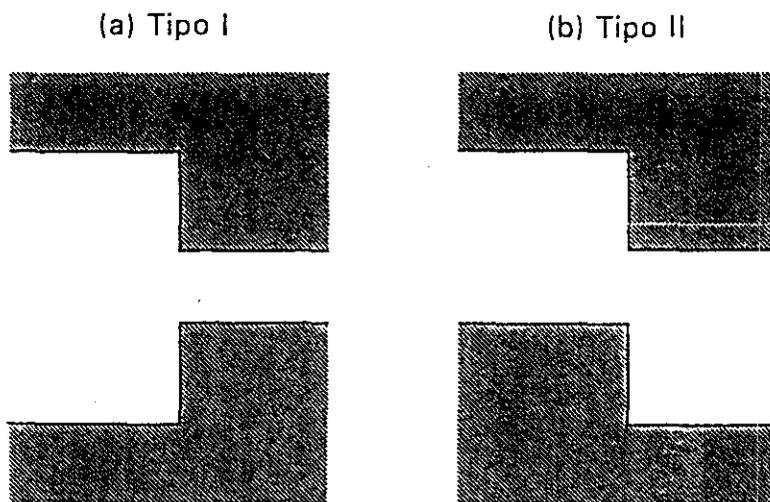


Figura 1.10: Heterouniones tipo I (a) y tipo II(b)

Si se crecen sucesivamente varias capas de distintos semiconductores, se pueden fabricar una gran variedad de heteroestructuras, llamadas estructurales, ya que los perfiles de potencial de las bandas son determinados por la alternancia de los diferentes semiconductores; el dopaje podrá modificar estos perfiles, pero sus características fundamentales vienen determinadas por la estructura. En contraposición se puede hablar de homoeestructuras cuánticas por dopado, en las que los perfiles de banda se construyen mediante el dopaje selectivo de un mismo material semiconductor (por ejemplo las superredes *n-i-p-i*: alternancia de dopaje *n* y *p* con capas sin dopar de modo que la

distribución homogénea de carga produce un potencial que modula el perfil de las bandas). Veremos aquí algunos casos de heteroestructuras cuánticas estructurales:

Una heterounión simple forma una estructura de importantes aplicaciones prácticas: mediante el dopaje de los semiconductores, podemos doblar el perfil de la banda cerca de la intercara dando lugar a la llamada capa de inversión, donde se acumulan los portadores, formando un gas bidimensional; si sobre la estructura se evapora un metal al que se aplicará un potencial (la "puerta") podemos variar fácilmente la densidad de portadores. Es el fundamento del transistor.

Un pozo cuántico estructural consiste en una lámina delgada de un semiconductor A (el pozo) crecida entre dos láminas más gruesas (las barreras) de un semiconductor diferente B (las barreras pueden estar formadas de distintos materiales siempre que el borde de la banda de conducción del material del pozo sea inferior al de los materiales de ambas barreras). En el interior del pozo puede haber estados ligados, cuyo movimiento a lo largo del eje de crecimiento está cuantizado, para que esto se produzca es necesario que la anchura del pozo sea inferior al recorrido libre medio de los portadores en dicho material; por encima del borde de la barrera, el movimiento es libre. Si los estados ligados del pozo son poblados por electrones (que aporta el dopaje), obtenemos un gas de electrones que de manera efectiva se puede considerar bidimensional.

Los pozos cuánticos estructurales pueden clasificarse según el tipo de heterouniones que los forman: un pozo cuántico B-A-B es del tipo I(II) si las heterouniones entre los materiales A y B es de tipo I(II) (Fig 1.11). En un pozo tipo I, el material A es un pozo tanto para electrones como para huecos, en cambio, en uno tipo II, el material A es un pozo para los electrones, pero una barrera para los huecos, de manera que los portadores de distinto signo se hallan espacialmente separados. Si consideramos sistemas formados por tres o más componentes, podemos alternar heterouniones tipo I y II de muchas maneras, logrando una gran variedad de perfiles de banda, a estos sistemas se les llama de tipo III.

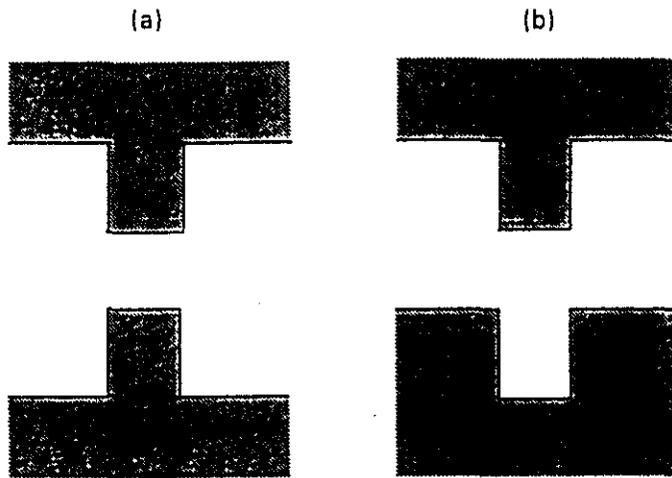


Figura 1.11: Pozos cuánticos tipo I(a) y tipo II(b)

Una superred estructural es una sucesión de pozos cuánticos. La más sencilla es una sucesión infinita de pozos de material A separados por barreras de material B, de la forma A-B-A-B-A... En una superred existe una periodicidad adicional en el sistema, mayor que la celda unidad de los materiales que la constituyen, desde el punto de vista electrónico, se habla de superred cuando el recorrido libre medio del electrón es mayor que el periodo de la superred, de manera que se puede hablar de un efecto túnel apreciable entre los sucesivos pozos. Los estados permitidos del movimiento a lo largo del eje de crecimiento ya no son valores discretos, sino que se ensanchan dando lugar a las minibandas, separadas por intervalos de energía prohibida, de manera análoga a las bandas permitidas y prohibidas de los materiales volúmicos. Si las barreras son muy anchas, los pozos cuánticos se desacoplan y el ancho de las minibandas se hace despreciable; en este caso se habla de pozos cuánticos múltiples (Fig.1.12).

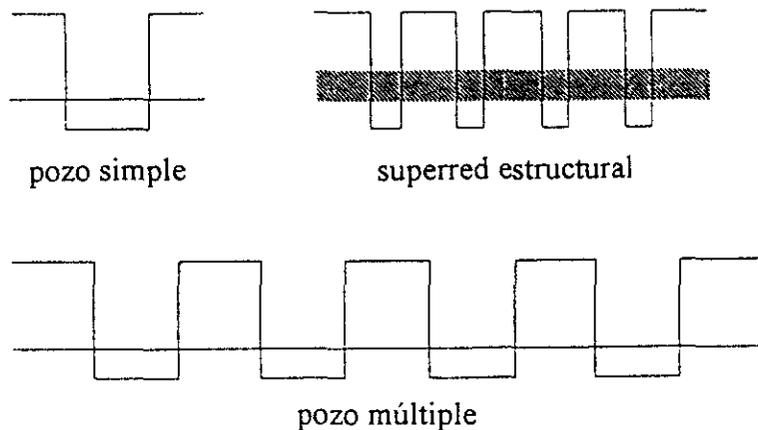


Figura 1.12: Superred estructural

### 1.2.3 Pozos cuánticos con modulación de dopado y dopado delta:

A  $T=0K$ , las heteroestructuras arriba descritas carecen de portadores libres. Una manera de poblar estas estructuras es dopándolas (con impurezas donantes o aceptoras), lo que permitirá tener portadores libres (electrones o huecos, respectivamente) en equilibrio térmico a bajas temperaturas, dando lugar a un gas bidimensional de portadores. Actualmente, en las heteroestructuras III-V se emplean dos tipos de dopaje para poblar los pozos: la modulación de dopado y el dopaje delta, que ha sido posible implementar gracias al gran desarrollo tecnológico alcanzado en las técnicas de crecimiento. En ambos casos se obtienen importantes aplicaciones prácticas (sobre todo dispositivos microelectrónicos de alta movilidad, por ejemplo HEMT<sup>1</sup>, MODFET<sup>2</sup> y  $\delta$ -FET<sup>3</sup>, y también un notable interés desde el punto de vista teórico, al aparecer fenómenos de física fundamental, tales como el Efecto Hall Cuántico Entero y el Efecto Hall Cuántico Fraccionario.

La modulación de dopado consiste en dopar selectivamente una zona de la heteroestructura, normalmente en la barrera, dejando el resto de la estructura libre de impurezas (se frena bruscamente el flujo de dopante durante el crecimiento, consiguiéndose impurezas residuales con concentraciones menores que  $10^{14}\text{cm}^{-3}$ ). Si las impurezas quedan localizadas en la barrera, los portadores son transferidos al fondo de la banda del material del pozo por efecto del potencial creado, que altera el perfil de las bandas, manteniéndose así el nivel de Fermi constante (para calcular la densidad de portadores que se obtiene será necesario resolver autoconsistentemente las ecuaciones de Schrödinger y Poisson). De esta manera quedan separadas espacialmente las impurezas de los portadores mediante una barrera no dopada, llamada capa espaciadora, reduciéndose la dispersión por impurezas y aumentando la movilidad de los portadores (Fig 1.13a, Chico 1993). Experimentalmente se comprueba éste aumento de la movilidad al aumentar la capa espaciadora, sin embargo se debe tener en cuenta que una capa

---

<sup>1</sup> High Electron Mobility Transistor

<sup>2</sup> Modulation Doped Field Effect Transistor

<sup>3</sup>  $\delta$ -Field Effect Transistor

demasiado gruesa provocará una menor densidad de portadores, y además creará más dificultades a la hora de fabricar circuitos integrados.

La técnica de modulación de dopado con Si, se ha utilizado ampliamente en la fabricación de dispositivos electrónicos de alta movilidad. Sin embargo, existen limitaciones estructurales (límite de solubilidad tridimensional del Si, niveles de impureza...) que limitan la densidad electrónica bidimensional que se obtiene en el pozo a valores menores a  $2 \times 10^{12} \text{cm}^{-2}$ . Esta limitación se puede solventar utilizando la técnica del dopado  $\delta$  en las barreras del pozo, que consiste en introducir una monocapa de dopante en la barrera, consiguiéndose densidades de portadores que doblan las que se tenían con la técnica de modulación de dopado y manteniendo movilidades altas gracias a la separación espacial entre la zona dopada y el canal electrónico. El perfil de las bandas de la Fig 1.13b muestra el caso en que se ha efectuado un dopado  $\delta$  a ambos lados del pozo. Nos interesará que se forme un solo gas bidimensional en el centro del pozo cuántico, donde la dispersión por rugosidad en la intercara y por las impurezas donantes sea mínima, pero puede suceder que se pueblen los nuevos pozos formados debido a la modificación que se produce en el perfil de la banda en la zona de la monocapa dopante. Será necesario diseñar la estructura de forma que todos los electrones estén en el canal de conducción, es decir, que las capas delta estén agotadas: hayan cedido todos los electrones, obteniéndose perfiles de banda más parecidos a los de la modulación de dopado, sin población en los pozos delta.

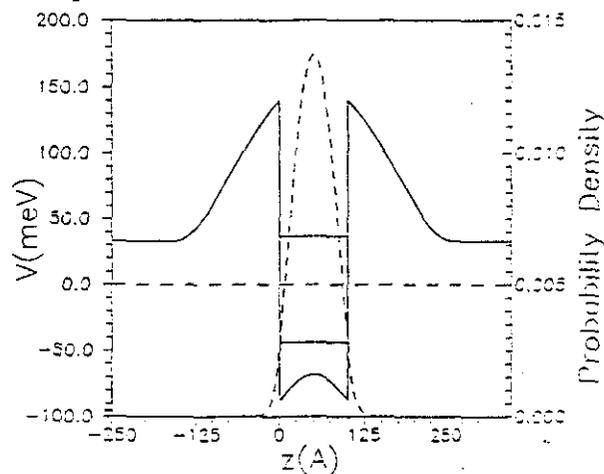


Figura 1.13a: Pozo cuántico con modulación de dopado, se indican también los niveles de energía y la densidad de probabilidad de las subbandas ocupadas (Chico 1993).

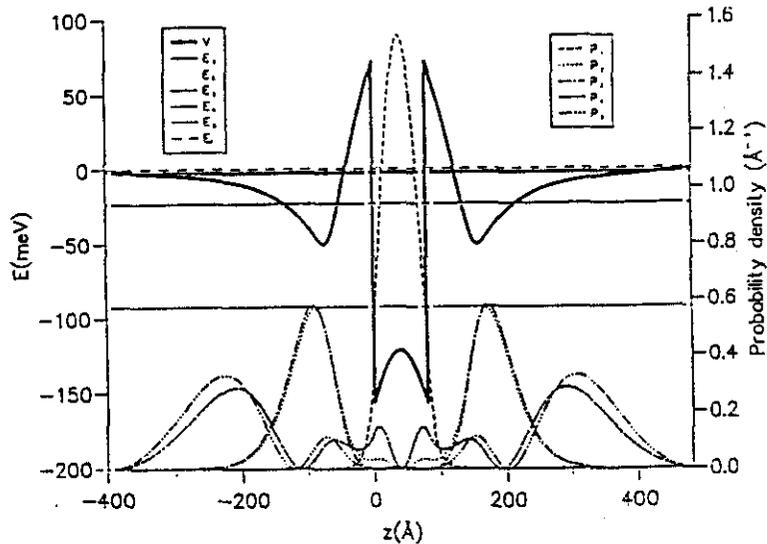


Figura 1.13b: Pozo cuántico con dopado  $\delta$  (b), se indican también los niveles de energía y la densidad de probabilidad de las subbandas ocupadas (Chico 1993).

Si sobre la heteroestructura se evapora una puerta metálica, aplicando un potencial es posible variar de forma continua la densidad de portadores del canal, obteniendo así el conocido transistor (Fig 1.14). Los transistores con modulación de dopado presentan notables ventajas sobre los tradicionales, mayor movilidad y densidad de portadores, se esperan además obtener mejoras en las características  $I-V$  a alta frecuencia y alta velocidad.

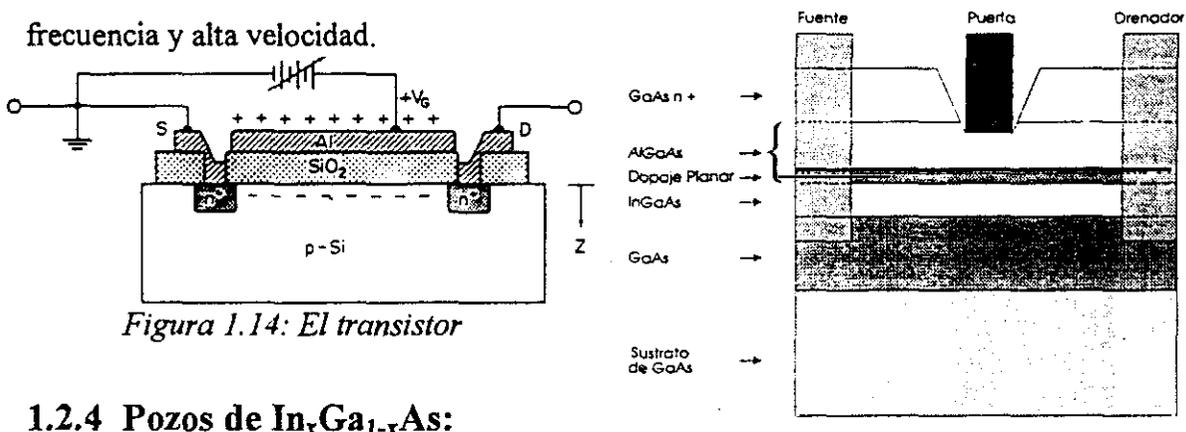


Figura 1.14: El transistor

#### 1.2.4 Pozos de $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ :

De los pozos cuánticos arriba mencionados, comentaremos de forma breve un tipo que recientemente ha empezado a fabricarse por su gran interés práctico. Son los pozos pseudomórficos, que se caracterizan porque entre los materiales que forman la heteroestructura hay una notable diferencia en el parámetro de red. Las redes cristalinas de los materiales se ajustan elásticamente, mediante deformación biaxial (tensión o compresión), variando las constantes de red en la dirección de crecimiento para poder ajustar las constantes de red en la intercara de forma que se mantenga constante el

volumen. Por ejemplo: una capa de  $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  que tiene una constante de red mayor que el GaAs, estará sometida a una compresión para poder ajustar dicha constante a la del sustrato de GaAs, no deformado en el plano de la intercara, y por tanto, la constante de red en la dirección de crecimiento aumentará (para el caso de  $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  sobre GaAs, la tensión se acomoda mediante una deformación elástica tetragonal). Si el espesor de la capa crecida no supera un espesor crítico, la calidad cristalina de la heteroestructura es buena y no aparecerán excesivos defectos en la intercara. La estructura de bandas se ve modificada por efecto de las tensiones y compresiones, lo que da lugar a importantes aplicaciones prácticas, quizá la más importante es que se levanta la degeneración de las bandas de huecos pesados y ligeros en la banda de valencia, reduciéndose la masa efectiva de los huecos y aumentando la movilidad de dispositivos de canal  $p$  (dispositivos de lógica complementaria, (Gilpérez 1994)).

El caso de la aleación ternaria de  $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  permite una mayor variedad de aplicaciones. Es en este tipo de heteroestructuras sobre las que hemos realizado nuestras medidas, por ello nos extendemos un poco más en describir alguna de sus propiedades. Como podemos observar en la figura (1.9), la variación en la proporción  $x$  de In en la aleación modifica la anchura del gap, así como el desajuste de red, lo que permitirá controlar la tensión en el cristal (para  $x=0.3$ , por ejemplo, la anchura de los pozos está limitada a un máximo de  $130\text{\AA}$  con las técnicas de crecimiento actual, por encima de ésta cantidad se producen dislocaciones que relajan la tensión y estropean el cristal). También la masa efectiva de los portadores en el canal de  $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  depende de  $x$ , la aproximación más sencilla para materiales volúmicos viene dada por:

$$\frac{m_b^*}{m_0} = 0.067(1-x) + 0.023x \quad (1.81)$$

sin embargo, cuando consideramos un pozo cuántico en el que los electrones se comportan bidimensionalmente, es necesario hacer la siguiente corrección (debido a efectos de no-parabolicidad de la banda de conducción, Ando 1982):

$$m_{2D}^*(E_F) = \left( 1 + \frac{(4/3)E_0 + 4E_F}{E_g} \right)^{1/2} m_b^* \quad (1.82)$$

donde  $E_g$  es la energía del gap para el  $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  en volumen,  $E_0$  es la energía de la subbanda fundamental y  $E_F$  es la energía de Fermi.

Los transistores pseudomórficos tienen las ventajas adicionales de una mayor eficiencia en la modulación (capacidad para modular la corriente mediante la tensión de la puerta, sin modular las cargas parásitas de la barrera) y menor ruido a altas frecuencias. Son dispositivos con grandes aplicaciones para dispositivos de optoelectrónica, microondas e interruptores rápidos. Comparados con los MODFET convencionales de AlGaAs/GaAs, los MODFET pseudomórficos de AlGaAs/InGaAs/GaAs son superiores, presentando un mayor confinamiento de los portadores debido a la mayor discontinuidad en la banda de conducción, y una masa efectiva de los portadores menor, ya que el canal electrónico se encuentra en el  $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ . (Liu 1988, Fernández 1992, Wiesner 1994, Fernández de Avila 1994, Gilpérez 1994).

## Capítulo 2

### El Magnetotransporte

#### 2.1 Transporte semiclásico

En el capítulo anterior hemos estudiado los niveles de energía de un gas de electrones bidimensional. Aunque éste es un sistema general, una de las realizaciones experimentales de este gas, con certeza la más utilizada y con mayores aplicaciones técnicas, son las heteroestructuras semiconductoras cuánticas; a menudo nos referiremos durante el cálculo a cuestiones que nos vamos a encontrar en esta realización experimental concreta (por ejemplo: eje de crecimiento, rugosidad de intercara, etc...), lo que no debe considerarse como una pérdida de generalidad, ya que muchas de las formas propuestas, para potenciales, por ejemplo, son susceptibles de diversas interpretaciones físicas. Habíamos encontrado que el movimiento de los portadores a lo largo del eje de crecimiento (eje  $z$ ) está cuantizado, obteniéndose estados ligados llamados subbandas. Por otro lado, el movimiento en el plano del gas bidimensional (plano  $xy$ ) es libre en ausencia del campo magnético.

Si consideramos el sistema en equilibrio, no tenemos ninguna corriente eléctrica permanente, pero sí corrientes locales transitorias debido a que los electrones tienen un momento en el plano  $xy$  que es distinto de cero. Sin embargo, el scattering que sufren los electrones debido a los diferentes defectos, hacen aleatoria la dirección del momento en una escala de tiempo del orden de  $10^{-12}s$ , y por tanto, a escala macroscópica no es apreciable ninguna corriente en el plano del gas bidimensional.

Supongamos ahora que aplicamos en la dirección  $x$  un campo eléctrico débil, constante y homogéneo:

$$\vec{E} = E\hat{x} \quad (2.1)$$

al scattering aleatorio que teníamos inicialmente se suma ahora una aceleración en la dirección del campo, lo que da lugar a una velocidad de arrastre distinta de cero, apreciable macroscópicamente. En un situación estacionaria, y para campos eléctricos débiles, la densidad de corriente eléctrica  $\vec{j} = j\hat{x}$ , será proporcional al campo aplicado: el sistema reacciona a una débil perturbación mediante un flujo que es proporcional a la perturbación (“régimen óhmico”). Como los sistemas estudiados, en ausencia de campo magnético, se pueden considerar isótropos en el plano  $xy$ , la proporcionalidad entre la corriente eléctrica y el campo aplicado no dependerá de la orientación del campo y se puede expresar como:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (2.2)$$

donde  $\sigma$  es la conductividad óhmica bidimensional del gas de electrones.

En lo que sigue trataremos de calcular  $\sigma$ , en el régimen óhmico y para bajas temperaturas, relacionándola con los parámetros del material. El scattering del electrón producido por los defectos se considerará elástico, esto hace posible definir un tiempo de relajación para cada una de las subbandas que resultan de la cuantificación del movimiento en la dirección  $z$ . El scattering de Coulomb debido a las impurezas, la rugosidad de intercara o el scattering de aleación (que se produce cuando el material es una aleación ternaria) son todos mecanismos elásticos y serán los que consideremos en lo sucesivo. Se puede establecer una relación entre el tiempo de relajación y los diferentes mecanismos de scattering.

### 2.1.1 Conductividad estacionaria del gas de electrones bidimensional

Asumiremos aquí las mismas condiciones que en el capítulo anterior: los portadores serán considerados independientes (no hay interacción entre ellos) y podremos desacoplar el movimiento en el plano  $xy$  del movimiento a lo largo del eje  $z$ .

Los niveles de energía que teníamos para los estados  $|n, k_{\perp}\rangle$  es:

$$\varepsilon_n(k_\perp) = E_n + \frac{\hbar^2 k_\perp^2}{m_n^*} \quad (2.3)$$

donde cada estado cuántico viene etiquetado por  $n$ , que indica la subbanda correspondiente de energía  $E_n$  y masa efectiva  $m_n^*$ , y  $k_\perp = (k_x, k_y)$  que es el vector de onda del movimiento en el plano  $xy$ .

Si estamos en equilibrio térmico y eléctrico, la función de distribución de los estados  $|n, k_\perp\rangle$  es la distribución de Fermi-Dirac, que viene dada por:

$$f_n^0(k_\perp) = \left\{ 1 + \exp\left[\beta (\varepsilon_n(k_\perp) - \mu)\right] \right\}^{-1} \quad (2.4)$$

donde:

$$\beta = \frac{1}{k_B T} \quad (2.5)$$

$k_B$  es la constante de Boltzmann,  $T$  la temperatura electrónica y  $\mu$  el potencial químico.

Calcularemos la respuesta lineal del gas bidimensional de electrones a la presencia de un campo eléctrico débil, constante y homogéneo aplicado en la dirección  $x$  (Ec 2.1). El Hamiltoniano del sistema, donde incluimos los defectos, viene dado, en ausencia de campo magnético por:

$$H = H_0 + eEx + H_{def} \quad (2.6)$$

donde  $H_0$  es el Hamiltoniano sin perturbar, cuyos autoestados son  $|n, k_\perp\rangle$ .  $H_{def}$  incluye las fluctuaciones locales del potencial debido a la presencia de los defectos. Podemos escribirlo como una suma de las contribuciones de los diferentes defectos, situados en posiciones  $\vec{R}_i$ , distribuidas aleatoriamente, por ello, este término no es invariante bajo traslaciones y su efecto será ensanchar los estados  $|n, k_\perp\rangle$ :

$$H_{def} = \sum_{R_i} H_{def}(\vec{r} - \vec{R}_i) \quad (2.7)$$

A partir de aquí el problema puede ser abordado de diferentes maneras. Se puede hacer un tratamiento riguroso del transporte eléctrico, completamente cuántico, basado en la resolución de la ecuación de Liouville para la matriz de densidad. Por otro lado se puede emplear la aproximación semiclásica, basada en la resolución de la ecuación de Boltzmann, que en este caso resulta válida. La conexión entre ambos tratamientos ha

sido estudiada de forma rigurosa por Kohn y Luttinger (1957). En lo que sigue, nos ceñiremos al tratamiento proporcionado por la aproximación semiclásica.

Debido a la presencia de los términos  $eEx$  y  $H_{def}$  en el Hamiltoniano, las funciones de distribución de los estados  $|n, k_{\perp}\rangle$  ya no vendrán dadas por la distribución  $f_n^0$ , sino que se verán modificadas por las transiciones desde (o hacia) el estado  $|n, k_{\perp}\rangle$  hacia (o desde) otros estados  $|n', k'_{\perp}\rangle$ . Esto provoca que las nuevas funciones de distribución  $f_n$  se vean permanentemente aumentadas o disminuidas debido a las transiciones. Cuando se alcanza el estado estacionario, es decir:

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} = 0 \quad (2.8)$$

las funciones  $f_n(k_{\perp})$  son las soluciones de la ecuación de Boltzmann, que podemos escribir como (Ashcroft 1976, Bastard 1988):

$$-\frac{e}{m_n} \hbar k_{\perp} \cdot \vec{E} \frac{\partial f_n}{\partial \varepsilon_n(k_{\perp})} = \sum_{n', k'_{\perp}} \left\{ W_{n'k'_{\perp} \rightarrow nk_{\perp}} f_{n'}(k'_{\perp}) [1 - f_n(k_{\perp})] - W_{nk_{\perp} \rightarrow n'k'_{\perp}} f_n(k_{\perp}) [1 - f_{n'}(k'_{\perp})] \right\} \quad (2.9)$$

donde  $\vec{E}$  es el campo eléctrico aplicado y  $W_{\alpha \rightarrow \beta}$  es la probabilidad por unidad de tiempo de que ocurra una transición, inducida por el término  $H_{def}$ , desde el estado  $|\alpha\rangle$  hasta el estado  $|\beta\rangle$ . Si consideramos la microreversibilidad del sistema, tendremos que:

$$W_{\alpha \rightarrow \beta} = W_{\beta \rightarrow \alpha} \quad (2.10)$$

en una primera aproximación, las probabilidades de transición  $W_{\alpha \rightarrow \beta}$  se pueden calcular mediante la aproximación de Born:

$$W_{\alpha \rightarrow \beta} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(\varepsilon_{\alpha} - \varepsilon_{\beta}) \left| \langle \alpha | H_{def} | \beta \rangle \right|^2 \quad (2.11)$$

Si el potencial de los defectos es grande, provocando un scattering sobre los electrones más eficiente, será necesario emplear la aproximación autoconsistente de Born (sección 3.1.2) que considera niveles con una determinada anchura. De momento, y para resolver la ecuación de Boltzmann, emplearemos la ecuación (2.11), podemos reescribir la ecuación (2.9) como sigue:

$$-\frac{e}{m_n} \hbar k_{\perp} \cdot \vec{E} \frac{\partial f_n}{\partial \varepsilon_n(k_{\perp})} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{n', k'_{\perp}} \left\langle \left| \langle nk_{\perp} | H_{def} | n'k'_{\perp} \rangle \right|^2 \right\rangle_{promedio} \times [f_{n'}(k'_{\perp}) - f_n(k_{\perp})] \times \delta[\varepsilon_n(k'_{\perp}) - \varepsilon_n(k_{\perp})] \quad (2.12)$$

donde  $\langle \dots \rangle_{\text{promedio}}$  significa que se efectúa un promedio sobre todas las posiciones de los defectos,  $\vec{R}_j$ , que estaban distribuidos aleatoriamente:

$$\langle A(R_1, R_2, \dots, R_N) \rangle_{\text{promedio}} = \int A(R_1, R_2, \dots, R_N) P(R_1, R_2, \dots, R_N) \times d^3 R_1 d^3 R_2 \dots d^3 R_N \quad (2.13)$$

donde  $P(R_1, R_2, \dots, R_N)$  es la probabilidad de encontrar un defecto en la posición  $R_1$ , otro en  $R_2$ , y así sucesivamente. Para resolver la integral se hace una nueva aproximación: se considera que la densidad de defectos es baja (límite de impurezas diluidas) y podemos considerarlos independientes, es decir no existe correlación entre ellos y podemos factorizar:

$$P(R_1, R_2, \dots, R_N) = \prod_i P(R_i) \quad (2.14)$$

esto simplifica la ecuación (2.12), donde el promedio sobre el cuadrado de los valores esperados de  $H_{\text{def}}$  se reduce a los términos diagonales, es decir, cuando  $H_{\text{def}}$  se evalúa en los mismos  $R_i$  para obtener dicho cuadrado. Cada defecto contribuye a la ecuación (2.12) de manera separada. Esta aproximación es válida para la mayoría de las heteroestructuras y especialmente a las de modulación de dopado, donde la densidad de defectos residual en la zona donde se encuentra el gas de electrones bidimensional es muy baja, del orden de  $10^{-14} \text{cm}^{-3}$ .

Proponemos para las funciones de distribución en el equilibrio soluciones de la ecuación (2.12), que tengan la forma siguiente:

$$f_j(k_{\perp}) = f_j^0(k_{\perp}) + \frac{e}{m_j} \hbar k_{\perp} \cdot \vec{E} \frac{\partial f_j^0}{\partial \varepsilon_j(k_{\perp})} \tau_j [\varepsilon_j(k_{\perp})] \quad (2.15)$$

donde el índice  $j$  indica la correspondiente subbanda. Al sustituir esta forma en la ecuación de Boltzmann, supondremos que la ecuación es lineal respecto al campo eléctrico. Esto significa que tanto los diferentes  $\tau_j$ , como la conductividad  $\sigma$ , serán independientes del campo. Ando *et al* (1974, 1975, 1982) y Mori *et al* (1980) han demostrado que una distribución de la forma dada por la ecuación (2.15), es solución de la ecuación (2.12), siempre que los  $\tau_j$  satisfagan las siguientes relaciones lineales:

$$-\sum_{k_{\perp\sigma}} \frac{k_{\perp}^2}{m_i} \frac{\partial f_i^0}{\partial \varepsilon(k_{\perp})} = \sum_j K_{ij} \tau_j \quad (2.16)$$

donde  $K_{ij}$  incluye los términos de scattering que provienen de  $H_{def}$  evaluado en los diferentes estados cuánticos que pueden estar en la misma o diferentes subbandas. En su forma más general  $K_{ij}$  incluye scattering intra e intersubbanda. Para  $T=0K$  podemos simplificar la relación anterior, en este caso tenemos:

$$\frac{\partial f_i^0}{\partial \varepsilon(k_{\perp})} = -\delta[\varepsilon_F - \varepsilon_i(k_{\perp})] \quad (2.17)$$

$$\sum_{k_{\perp}\sigma} \hbar^2 \frac{k_{\perp}^2}{m_i} \frac{\partial f_i^0}{\partial \varepsilon(k_{\perp})} = -\frac{2m_i S}{\pi \hbar^2} [\varepsilon_F - E_i] \quad (2.18)$$

donde  $\varepsilon_F$  es la energía de Fermi y  $S$  es el área de la muestra. Con ésto podemos reescribir la ecuación (2.16) como sigue (ver Apéndice 2):

$$\varepsilon_F - E_i = \sum_j K_{ij}^{T=0}(\varepsilon_F) \tau_j(\varepsilon_F) \quad (2.19)$$

Evaluamos ahora la densidad de corriente eléctrica (por unidad de área), promediada sobre las funciones de distribución  $f_n$ :

$$\langle \vec{j} \rangle = -\frac{e}{S} \sum_{i,k_{\perp},\sigma} \frac{\hbar k_{\perp}}{m_i} f_i[\varepsilon_i(k_{\perp})] \quad (2.20)$$

sustituyendo ahora la expresión que tenemos para las funciones de distribución, y teniendo en cuenta que los términos de orden cero  $f_i^0$  no contribuyen a la corriente, nos queda (para  $T=0K$ ):

$$\langle \vec{j} \rangle = \frac{e^2 \hbar^2}{S} \sum_{i,k_{\perp},\sigma} k_{\perp} \frac{k_{\perp} \cdot \vec{E}}{m_i^2} \tau_i(\varepsilon_F) \delta[\varepsilon_F - \varepsilon_i(k_{\perp})] \quad (2.21)$$

que se puede simplificar si consideramos válida la condición de isotropía en el plano para las relaciones de dispersión  $\varepsilon_i(k_{\perp})$  e introducimos la densidad de portadores (por unidad de área) de la subbanda  $i$ -ésima que viene dada por:

$$n_s^{(i)} = \frac{m_i}{\pi \hbar^2} (\varepsilon_F - E_i) \quad (2.22)$$

de esta manera obtenemos la ley de Ohm:

$$\langle \vec{j} \rangle = \sigma \vec{E} \quad (2.23)$$

donde la conductividad total es la suma de las conductividades de las subbandas:

$$\sigma = \sum_i \sigma_i \quad (2.24)$$

y para cada subbanda tenemos:

$$\sigma_i = \frac{n_s^{(i)} e^2 \tau_i(\varepsilon_F)}{m_i} \quad (2.25)$$

que coincide con la conocida relación empírica que obtuvo Drude (Ashcroft 1976).

La movilidad de cada subbanda (a  $T=0K$ ) se define como:

$$\mu_i = \frac{e}{m_i} \tau_i(\varepsilon_F) \quad (2.26)$$

Si consideramos la densidad total de portadores:

$$n_e = \sum_i n_e^{(i)} \quad (2.27)$$

podemos definir una movilidad efectiva  $\bar{\mu}$  que se relaciona con  $\sigma$  mediante la expresión:

$$\sigma = n_e e \bar{\mu} \quad (2.28)$$

y por tanto:

$$\bar{\mu} = \sum_i \mu_i \frac{n_e^{(i)}}{n_e} \quad (2.29)$$

Aproximación a la primera subbanda:

La relación que teníamos entre los  $\tau_i(\varepsilon_F)$  y la energía, dada por la ecuación (2.19), indica que en el caso general no se pueden considerar simplemente proporcionales a  $\varepsilon_F - E_i$ , sino que será necesario invertir la matriz  $K_{ij}$  para obtenerla. Este cálculo es complicado, ya que los coeficientes  $K_{ij}$  contienen términos que envuelven el scattering entre estados de diferentes subbandas; estas transiciones intersubbanda son elásticas y contribuyen a la corriente  $\langle \vec{j} \rangle$ . Solamente en el caso en que consideremos poblada únicamente la primera subbanda, la ecuación (2.19) podrá simplificarse y mostrar un significado físico claro. Esta es la aproximación a la primera subbanda, también llamado “límite cuántico eléctrico”. En éste caso el único término no nulo de la matriz  $K_{ij}$  es el  $K_{11}$ . Si definimos  $q_{\perp}$  mediante:

$$k'_{\perp} - k_{\perp} = q_{\perp} \quad (2.30)$$

tenemos que  $\hbar q_{\perp}$  es el momento adquirido por el electrón como resultado de su colisión con algún defecto como puede verse en la figura (2.1):

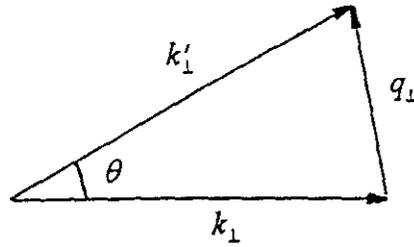


Figura 2.1: Relación entre los momentos antes y después del scattering

De la figura podemos deducir que:

$$k_{\perp} \cdot q_{\perp} = -2k_{\perp}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (2.31)$$

y a partir de la expresión general de  $K_{II}$  se obtiene (ver Apéndice 2):

$$\frac{1}{\tau_1(\varepsilon_F)} = \frac{m_1 S}{2\pi \hbar^3} \int_0^{2\pi} d\theta (1 - \cos\theta) \times \left\langle \left| \langle 1k_{\perp}\sigma | H_{\text{def}} | 1k_{\perp} + q_{\perp}\sigma \rangle \right|^2 \right\rangle_{\text{promedio}}^{q_{\perp}=2k_{\perp} \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|} \quad (2.32)$$

donde  $k_F$  es el vector de onda de Fermi, que viene dado por:

$$\varepsilon_F - E_1 = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_1} \quad (2.33)$$

La ecuación (2.32) indica que la inversa del tiempo de relajación es la media angular, sobre todas las posibles colisiones elásticas que ocurren en un círculo de Fermi, del producto de la probabilidad de transición por scattering elástico entre estados cuya velocidad cambia de orientación un ángulo  $\theta$ , por la disminución relativa de velocidad  $k_F(1 - \cos\theta) / k_F$ .

Antes de considerar las posibles formas de  $H_{def}$  para algunos casos particulares de defectos y obtener, para cada caso, una relación para el tiempo de relajación, haremos un comentario sobre dos efectos que no vamos a considerar en lo sucesivo: el scattering intersubbanda y los efectos de apantallamiento del potencial de los defectos que nota un electrón debido a la presencia de los demás.

El scattering intersubbanda introduce anomalías en la movilidad de los electrones cuando empieza a llenarse la segunda subbanda, es decir, cuando la energía de Fermi coincide con el fondo de la primera subbanda excitada,  $E_2$ . Si consideramos que la densidad de estados del gas bidimensional está dada por la ecuación (1.27), una escalera con escalones bruscos ( $T=0K$ ), tendremos, cuando nos aproximamos a  $E_2$ :

$$\mu(\varepsilon_F) = \frac{e\tau_1}{m_1} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \tau_1 = \frac{\varepsilon_F - E_1}{K_{11}} & ; \quad \varepsilon_F = E_2 - \eta, \eta \rightarrow 0 \\ \tau_1 \approx \frac{\varepsilon_F - E_1}{K_{11} - K_{21}K_{12} / K_{22}} & ; \quad \varepsilon_F = E_2 + \eta, \eta \rightarrow 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

lo que indica que incluso cuando consideramos despreciable la contribución a la conductividad de la segunda subbanda ( $n_s^{(2)} \rightarrow 0$ ), obtenemos una discontinuidad en el tiempo de relajación y por tanto, también en la movilidad. Esto se debe al scattering intersubbanda que se empieza a producir y a la forma peculiar de la densidad de estados para el gas bidimensional. Experimentalmente no se observa una discontinuidad abrupta, debido a que la temperatura finita provoca una indefinición (“se ensanchan”) de los niveles de energía de las subbandas, que difumina el comienzo del llenado de la segunda subbanda; sin embargo sí se aprecian caídas más suaves de la movilidad (Störmer *et al* 1982, Coleridge 1990).

El otro efecto que no consideraremos en lo sucesivo es el apantallamiento de Coulomb. La interacción de un electrón con una impureza se ve modificada por la presencia de los otros electrones, la diferencia entre esta interacción y la que se produciría si el electrón estuviera solo, es lo que se llama apantallamiento. El tratamiento correcto de estos efectos se hace mediante un esquema perturbativo. Si suponemos que la densidad de electrones es grande, pero manteniéndose en la aproximación de la primera subbanda, se obtienen resultados parecidos a los de materiales en volumen

(Bastard 1988). Estos resultados son válidos si consideramos el plano  $xy$  del gas bidimensional, la única diferencia es que los efectos de apantallamiento se saturan en vez de continuar aumentando como sucede en volumen. En la dirección  $z$ , dada la gran anisotropía respecto a las otras direcciones, los resultados en volumen no son extrapolables. Cuando varias subbandas están ocupadas, los efectos de apantallamiento se hacen muy complicados.

### 2.1.2 Evaluación de $\tau_i$ para algunos mecanismos de scattering:

El tiempo de relajación  $\tau_i$  que aparece en la aproximación semiclásica puede relacionarse con los potenciales responsables de diferentes tipos de scattering. Esto permite en algunos casos relacionar la movilidad con la densidad de portadores del gas bidimensional, dependencia que se puede verificar experimentalmente. Consideraremos tres tipos de scattering que se dan en las heteroestructuras de semiconductores: el scattering de Coulomb, el scattering de aleaciones (para materiales ternarios) y el scattering debido a la rugosidad de intercara.

#### Scattering de Coulomb:

La movilidad a baja temperatura se ve limitada por el scattering de Coulomb que sufren los portadores provocado por las impurezas cargadas. Estas impurezas, en las heteroestructuras con modulación de dopado, pueden dividirse en dos tipos:

i) Las impurezas que se introducen deliberadamente para dopar las barreras del pozo cuántico y que transfieren sus electrones al canal. Su densidad en volumen suele ser de unas  $2 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ .

ii) Las impurezas residuales que quedan en el canal. Su densidad en volumen es de unas  $10^{14} \text{ cm}^{-3}$ .

Si consideramos la aproximación a una sola subbanda y recordando el formalismo de la sección anterior, tenemos a  $T=0K$ :

$$\mu(\varepsilon_F) = \frac{e\tau_1}{m_1} \quad (2.35)$$

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{m_1 S}{2\pi \hbar^3} \int_0^{2\pi} d\theta (1 - \cos\theta) \left\langle \left| \langle 1k_\perp \sigma | H_{def} | 1k_\perp + q_\perp \sigma \rangle \right|^2 \right\rangle_{\text{promedio}}^{q_\perp = 2k_F \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|} \quad (2.36)$$

donde  $H_{def}$  es el potencial de interacción entre el electrón y las impurezas, que se consideran distribuidas aleatoriamente. Los elementos de matriz se pueden calcular haciendo una transformación de Fourier para el potencial de las impurezas (Bastard 1981, 1982) y explotando el carácter aleatorio de su distribución; además, los términos que contienen el ángulo  $\theta$  indican que el scattering hacia adelante se ve enormemente favorecido, lo que permite simplificar algo el cálculo. Resumimos los principales resultados que se obtienen: las impurezas actúan de forma no correlacionada, los eventos de scattering se pueden considerar independientes unos de otros, cosa especialmente válida si consideramos impurezas diluidas; las impurezas atractivas y repulsivas actúan de la misma forma.

Para el caso ideal en que en la heteroestructura con modulación de dopaje podemos considerar todas las impurezas a una distancia  $z_0$  del gas bidimensional (por ejemplo, dopaje delta) tenemos:

$$\mu(\varepsilon_F) = 16 |z_0|^3 \frac{e n_e}{\hbar N_d} \sqrt{2\pi n_e} \quad (2.37)$$

donde  $N_d$  es la densidad (por unidad de área) de los dopantes. Si consideramos que todos los dopantes están ionizados,  $n_e = N_d$ , el cálculo se simplifica: por ejemplo, para  $n_e = 10^{12} \text{cm}^{-2}$  y  $z_0 = 150 \text{Å}$ , se obtiene  $\mu \approx 2 \times 10^5 \text{cm}^2/\text{Vs}$ .

Si se desean obtener altas movilidades, dos condiciones deberán satisfacerse a la hora de fabricar estas heteroestructuras: que la concentración de impurezas cargadas en el canal y en la barrera espaciadora sea muy baja, y que dicha barrera espaciadora sea lo suficientemente gruesa para separar el gas bidimensional de electrones de las impurezas donantes de forma que el scattering que sufren los portadores debido a estas impurezas sea pequeño. Sin embargo, aunque de esta manera las movilidades que se alcanzan son grandes, la conductividad es pequeña debido a la baja concentración de portadores, que tienen mayor dificultad en alcanzar el canal desde la impureza donante.

Scattering de aleación:

Este scattering se produce en heteroestructuras en las que tenemos una aleación ternaria de semiconductores III-V. En estos casos, uno de los átomos constituyentes del cristal ocupa los lugares de una de las redes fcc que forman la estructura zinc-blenda, los otros dos se reparten los lugares de la segunda red fcc de forma aleatoria. El potencial cristalino resultante ya no será periódico. Este scattering afectará especialmente a aquellas heteroestructuras en las que el gas bidimensional se encuentra localizado en el ternario.

Para poder tratar el problema hay dos métodos comúnmente utilizados: la aproximación del potencial coherente (CPA), más ampliamente estudiada en otra sección, y la aproximación del cristal virtual, que es la que desarrollamos brevemente aquí para comentar los rasgos generales de este tipo de scattering.

En la aproximación del cristal virtual, se sustituye el potencial no periódico debido a los átomos que se reparten una red fcc aleatoriamente por un potencial periódico producido por un “átomo medio” que ocupa dicha red. La diferencia entre el potencial real y este potencial del cristal virtual es lo que produce el scattering conocido como scattering de aleación, que puede considerarse como una suma de scatterings producidos por potenciales de corto alcance, muy localizados y no correlacionados unos con otros ( $\delta V(r)$ ). El elemento de matriz promediado para este potencial es proporcional a la integral de  $\chi_i^4(z)$  (parte de la función de onda que contiene la dependencia en  $z$  de los autoestados) sobre la zona de la heteroestructura donde tenemos la aleación ternaria. Se tiene:

$$\mu_{al} = \frac{e\tau_{al}(\epsilon_F)}{m_1} \quad ; \quad \frac{1}{\tau_{al}(\epsilon_F)} = m_1 \frac{\Omega_0}{\hbar^3} [\delta V]^2 x(1-x) \int_{Ter} dz \chi_i^4(z) \quad (2.38)$$

donde  $\Omega_0$  es el volumen de la celda unidad y  $x$  es el porcentaje de la aleación  $A_xB_{1-x}C$ . La dependencia de la movilidad con la densidad de portadores se obtiene evaluando la integral que aparece en la Ec 2.38, para lo que habrá que tomar una determinada forma para  $\chi_i(z)$ , si tomamos la dada por Fang y Howard (1966):

$$\begin{cases} \chi_1(z) = \sqrt{\frac{b^3}{2}} z \exp\left(-\frac{bz}{2}\right) & z \geq 0 \\ \chi_1(z) = 0 & z \leq 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

se obtiene:

$$\mu_{ai} = \frac{e}{m_i^2} \frac{\hbar^3}{\Omega_0 [\delta V]^2} \frac{16}{x(1-x) 3b} \quad (2.40)$$

para aleaciones con  $In_xGa_{1-x}As$ , se puede tomar  $b \approx n_e^{1/3}$ , y por tanto, la movilidad decrece cuando  $n_e$  crece, esto se debe a que cuanto mayor es  $n_e$ , más concentrada está la función de onda y los portadores se hacen más sensibles a las fluctuaciones del potencial debido a la aleación, que ocurren a una escala espacial fija, dada por  $\Omega_0$ . Para estas aleaciones se ha obtenido un valor experimental de  $(\delta V) \approx 0.6eV$  (Bastard 1983), el valor es elevado debido al gran desajuste de red que se produce en este caso, lo que limita la movilidad a menos de  $2 \times 10^5 cm^2/Vs$ . Para el  $Al_xGa_{1-x}As$  el desajuste es mucho menor, y en ellos el scattering de aleación es poco importante, no limita la movilidad.

#### Scattering por rugosidad en la intercara:

La separación entre dos capas sucesivas de semiconductores en una heteroestructura nunca es perfecta. Los materiales difunden uno en otro distancias que pueden ser de varias monocapas atómicas. Además, para determinados materiales (especialmente con aleaciones ternarias) el desajuste de red genera tensiones en la intercara lo que dará lugar a una densidad apreciable de defectos. Se conoce poco de la estructura microscópica de estos defectos, por lo que será necesario utilizar modelos simplificados para su tratamiento.

Trataremos de obtener, mediante uno de estos modelos, la influencia que sobre el tiempo de relajación produce el scattering por rugosidad en la intercara. Suponemos un defecto caracterizado por su profundidad  $h$  a lo largo del eje de crecimiento y su extensión lateral,  $l_x, l_y$ , en el plano del gas electrónico bidimensional, si la intercara ideal está situada en  $z=0$ , un modelo para un defecto de intercara repulsivo (una barrera que irrumpe en el pozo cuántico) viene dado por:

$$V_{def}(r, \rho_i) = V_b \Theta[z(h-z)] \Theta\left[\frac{l_x^2}{4} - (x-x_i)^2\right] \Theta\left[\frac{l_y^2}{4} - (y-y_i)^2\right] \quad (2.41)$$

para un defecto centrado en  $\rho_i = (x_i, y_i)$  en el plano de la intercara.  $V_b$  es la altura de la barrera que forma el pozo cuántico y  $\Theta(x)$  es la función escalón.

Será necesario calcular el elemento de matriz para este potencial. Para ello suponemos que tenemos una única subbanda ocupada a  $T=0K$  y que la profundidad del defecto (su penetración  $h$  en el pozo) es pequeña comparada con la longitud característica de la variación de la función de onda de los portadores en  $z=0$ , esto permite tratar de igual manera los defectos atractivos y repulsivos. Además debemos calcular un promedio estadístico sobre la distribución aleatoria de los defectos ( $\rho_i$ ) y sobre sus tamaños ( $h, l_x, l_y$ ). Finalmente queda (Bastard 1988):

$$\frac{\hbar}{\tau_{rug}(\epsilon_F)} = 16h^2 V_b^2 N_{def} \chi_1^4(0) \frac{m_1}{\pi \hbar^2} \times \int_0^\pi \frac{d\theta}{\epsilon^2 \left(2k_F \sin \frac{\theta}{2}\right)} \times \frac{\sin^2 \left[ \frac{k_F l_x}{2} (\cos \theta - 1) \right]}{k_F^4 \sin^2 \theta (1 - \cos \theta)} \times \sin^2 \left[ \frac{k_F l_y}{2} \sin \theta \right] \quad (2.42)$$

donde  $k_F$  es el vector de onda de Fermi,  $N_{def}$  es la concentración de defectos por unidad de área y  $\chi_1$  es la parte de la función de onda que ya consideramos en la sección anterior. Los scattering sucesivos se suponen incoherentes (defectos “independientes”) por lo que la condición  $N_{def} l_x l_y \ll 1$  debe satisfacerse.

Se obtienen características similares al scattering de aleación, ya que en ambos casos estamos tratando con potenciales de corto alcance, a una escala fija. El tiempo de relajación  $\tau_{rug}$  decrece cuando aumenta la concentración de portadores  $n_e$ , ya que el término  $\chi_1$  aumenta con  $n_e$  localizando la función de onda, frente al alcance del potencial, que permanece fijo. Conviene destacar, que a pesar de la dependencia explícita con  $V_b^2$ , el tiempo de relajación es casi independiente de  $V_b$ , ya que  $\chi_1^4$  es proporcional a  $V_b^{-2}$  si  $V_b - E_l$  es grande.

### 2.1.3 Transporte semiclásico en presencia de campo magnético:

Siguiendo en la aproximación semiclásica, partimos de la ecuación de Boltzmann, en la que aparece un único tiempo de relajación (se consideran todos los electrones equivalentes) cuya interpretación fué esbozada en la sección anterior y que consideraremos evaluado a  $\varepsilon = \varepsilon_F$ . Ya tenemos definidas, para el caso estacionario, la corriente eléctrica y la conductividad de cada subbanda. En lo sucesivo nos limitaremos a la aproximación de la primera subbanda, por lo que no escribiremos el índice  $i$  correspondiente.

$$\langle \vec{j} \rangle = \sigma \vec{E} \quad (2.43)$$

si definimos una velocidad de los portadores mediante:

$$\langle \vec{j} \rangle = n_e e \vec{v} \quad (2.44)$$

donde  $n_e$  es la densidad de portadores, podemos reescribir la ecuación de Boltzmann, introduciendo el campo magnético mediante la fuerza de Lorentz, dicho campo lo consideramos perpendicular al gas bidimensional:

$$-\frac{m\vec{v}}{\tau} = e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B} \quad (2.45)$$

y multiplicando por  $n_e$ :

$$\vec{j} \frac{m}{e\tau} = en_e \vec{E} - \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} \quad (2.46)$$

que es la ecuación básica.

Escribiendo por componentes:

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \sigma_0 \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} - \omega_c \tau \begin{pmatrix} j_y \\ -j_x \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

donde  $\tau$  es el único tiempo de relajación,  $\omega_c$  es la frecuencia ciclotrón, dada por la ecuación (1.50) haciendo  $\omega_{c//} = \omega_c$  y  $B_{//} = B$  ya que estamos considerando  $\theta = 0$ , y  $\sigma_0$  es la conductividad en ausencia de campo magnético (el subíndice cero indica dicha ausencia, no se refiere a ninguna subbanda), que viene dada por la relación de Drude (Ec 2.25):

$$\sigma_0 = \frac{n_e e^2 \tau}{m} \quad (2.48)$$

Si resolvemos por componentes obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} j_x &= \sigma_0 E_x - \omega_c \tau j_y \\ j_y &= \sigma_0 E_y - \omega_c \tau (-j_x) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} j_x &= \sigma_0 E_x - \omega_c \tau (\sigma_0 E_y + \omega_c \tau j_x); \\ j_x (1 + (\omega_c \tau)^2) &= \sigma_0 E_x - \omega_c \tau \sigma_0 E_y \end{aligned} \quad (2.49)$$

la isotropía en el plano  $xy$  que teníamos ha sido eliminada por la presencia del campo magnético. Será necesario analizar las componentes del tensor  $\sigma$ .

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2} \quad (2.50)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\omega_c \tau \sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2} \quad (2.51)$$

cumpliéndose además las relaciones de Onsager (1931a,b):

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} &= -\sigma_{yx} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Aplicando al caso particular en que  $j_y = 0$ , tenemos:

$$\sigma_0 E_y = -\omega_c \tau j_x \quad (2.53)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{j_x}{E_y} \quad (2.54)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_H = -\frac{\sigma_0}{\omega_c \tau} = -\frac{ne}{B} \quad (2.55)$$

obtenemos entonces el efecto Hall clásico.

Cuando se realiza un experimento, lo más habitual es medir las resistividades, por lo que procederemos a invertir el tensor de conductividad, teniendo en cuenta que estamos considerando el caso bidimensional:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

$$\rho = \sigma^{-1} \quad (2.57)$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

haremos incapié en que, en dos dimensiones, y siempre que  $\sigma_{xy} \neq 0$ , se cumple la relación:

$$\sigma_{xx} = 0 \Leftrightarrow \rho_{xx} = 0 \quad (2.59)$$

En particular, si sustituimos en la ecuación 2.58, las expresiones para  $\sigma_{xx}$  y  $\sigma_{xy}$  tenemos:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1/\sigma_0 & B/ne \\ -B/ne & 1/\sigma_0 \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

La presencia del campo magnético provoca la aparición de los niveles de Landau dentro de cada subbanda (ver sección 1.2). Estos niveles se irán llenando sucesivamente, uno detrás de otro. Consideraremos ahora el caso en que el llenado de los niveles de Landau es tal que  $\nu = i$ , es decir  $n = im_B$  con  $i$  entero, es decir, el último nivel completamente lleno. Queda:

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & h/ie^2 \\ -h/ie^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

La resistencia, que es lo que más habitualmente se mide en los experimentos, viene relacionada con la resistividad, para el caso bidimensional, por las siguientes ecuaciones:

$$R_{xx} = \rho_{xx} \frac{L}{W} \quad (2.62)$$

$$R_{xy} = \rho_{xy}$$

donde  $L$  y  $W$  son las distancias entre los contactos longitudinales y transversales respectivamente (Fig.2.3).

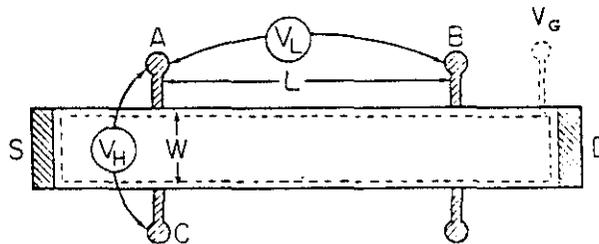


Figura 2.3: Forma de la barra Hall para medidas de magnetoresistencia.



## 2.2 El Efecto Hall Cuántico y el Efecto Shubnikov-de Haas

### 2.2.1 Introducción:

El efecto Hall cuántico fué descubierto en 1980 por von Klitzing, Dorda y Pepper (1980). Klaus von Klitzing fué galardonado en 1985 con el Premio Nobel de Física por este descubrimiento. Básicamente, lo que se encontró es que bajo ciertas condiciones, en un sistema bidimensional de electrones sometido a fuertes campos magnéticos, el tensor de conductividad toma la forma:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -ie^2 / h \\ ie^2 / h & 0 \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

donde  $h$  es la constante de Planck,  $e$  es la carga del electrón e  $i$  es un número entero. La componente no-diagonal de la conductividad está dada por una combinación de constantes fundamentales. La conductividad diagonal se anula, por lo que el sistema no presenta disipación, fenómeno que se puede relacionar con la superconductividad y la superfluidez. Este comportamiento básico es independiente de los detalles de la muestra, forma, impurezas, campo magnético o cualquier otra condición del material o de la medida.

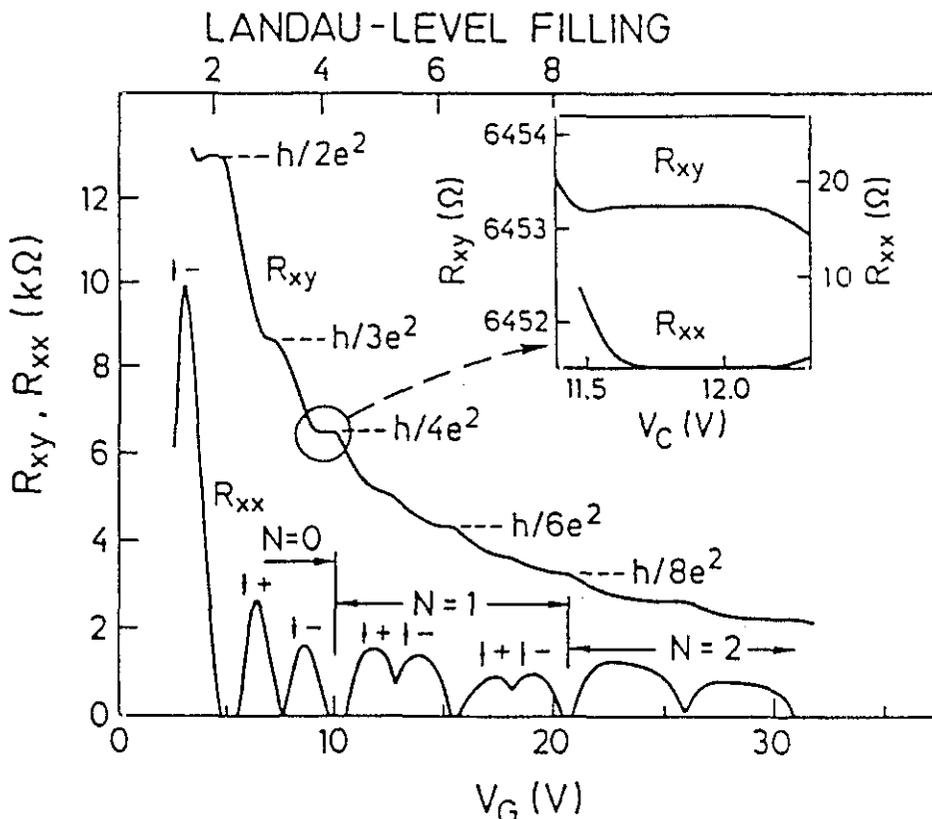


Figura 2.4: El efecto Hall cuántico: figura original de von Klitzing

Existían algunos precedentes de medidas efectuadas sobre MOSFET<sup>1</sup> de silicio, usando configuraciones de disco de Corbino o barra Hall (Kawaji 1976, 1978, Ando 1975), la técnica de medida era suficientemente precisa, pero parece que la calidad de las muestras no había alcanzado el nivel que permitiera observar el fenómeno. Fué el experimento de von Klitzing (1980) sobre una muestra (MOSFET de Si con alta movilidad) de Dorda y Pepper el que primero permitió observar la cuantización de los plateaus Hall con una precisión de cinco partes por millón, esta precisión ya mostraba la importancia y las posibilidades del fenómeno. En la figura (2.4) reproducimos el experimento original. Se presenta la resistencia Hall,  $R_{xy} = R_H$  (componente no-diagonal de la magnetoresistencia transversa) y la resistencia longitudinal,  $R_{xx}$  (componente diagonal) en función del voltaje de puerta,  $V_g$ , aplicado para un campo magnético fijo. Sobre la curva  $R_H \propto I/V_g$  esperable, aparecen los sorprendentes efectos: aparecen plateaus a valores de  $R_H$  dados por  $h/ie^2$ , que se extienden para intervalos anchos del potencial de puerta, en  $R_{xx}$  se observan las oscilaciones Shubnikov-de Haas, cuyos mínimos para estos mismos intervalos se hacen nulos. En los experimentos en que se mantiene fijo el voltaje de puerta y se varía el campo magnético, aparece el mismo efecto para intervalos del campo magnético.

El efecto Hall cuántico presenta además un gran interés para la metrología: puede ser utilizado como una referencia standard de resistencia que depende sólo de constantes fundamentales de la naturaleza:

$$R_H(i) = h / ie^2 \approx 25812.807 \Omega / i \quad (2.64)$$

las técnicas de medida de resistencia han permitido alcanzar una precisión de 0.01 partes por millón (métodos potenciométricos a muy baja temperatura sobre el plateau  $i=4$  a  $6453.20 \Omega$ : Cage 1985), presentando además una deriva en el tiempo mucho menor que cualquier otro método<sup>2</sup>.

La constante de estructura fina,  $\alpha$ , es una medida sin dimensiones del acoplo de la materia con el campo electromagnético y está en el corazón de la Electrodinámica

<sup>1</sup> Metal-Oxide Semiconductor Field Effect Transistor.

<sup>2</sup> En enero de 1990, el efecto Hall cuántico fué adoptado como la base para la referencia standard de resistencia en Estados Unidos.

Cuántica. Puede ser expresada en términos de  $\hbar/e^2$  y por tanto está directamente relacionada con  $R_H$ :

$$\alpha = \frac{\mu_0 c e^2}{2 \hbar} = \frac{\mu_0 c}{2} \frac{1}{iR_H(i)} \quad (2.65)$$

donde  $\mu_0$ , la permeabilidad del vacío, es por definición exactamente  $4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$  y la velocidad de la luz ha sido recientemente definida para ser  $299792458 \text{m/s}$  (BIPM, 1983). Por tanto se puede utilizar el efecto Hall cuántico para determinar  $\alpha$  directamente con la misma incertidumbre que  $R_H$ . Las medidas de  $R_H$  dan  $\alpha^{-1} = 137.035993(10)$  ( $\pm 0.07 \text{ppm}$ ), que están de acuerdo hasta  $0.03 \text{ppm}$  con el valor obtenido mediante las medidas del momento anómalo del electron. Si se reduce la incertidumbre de medida de  $R_H$ , podrá utilizarse como un test riguroso de la Electrodinámica Cuántica (o de la validez de la ecuación (2.63)). Es interesante destacar que esta constante fundamental de acoplo de la teoría cuántica de campos pueda ser determinada con tanta precisión usando un sistema de física de la materia condensada.

### 2.2.2 Los efectos de las impurezas y el desorden: el “gap de movilidad”

El punto de partida para el tratamiento teórico del efecto Hall cuántico es la estructura de niveles de Landau que aparece cuando resolvemos la ecuación de Schrödinger en presencia de un campo magnético perpendicular al sistema bidimensional de electrones (que suponemos que no interactúan entre si). Estos resultados han sido obtenidos en la sección 1.1 para la realización concreta del gas de electrones bidimensional en heteroestructuras cuánticas de semiconductores. Utilizando las magnitudes características que aparecen en el problema: la longitud magnética  $\ell$ , y la distancia entre niveles de Landau  $\hbar\omega_c$ , recordamos aquí las ecuaciones (1.67) y (1.68) que describen los autoestados y las autoenergías del problema. Reescribiendo para  $\theta = 0$  y una muestra en barra Hall en la que el lado largo va en la dirección  $x$ , tenemos:

$$\varphi_{nk}(y) \propto H_n(y/\ell - \ell k) \exp\left[-(y - \ell^2 k)^2 / 2\ell^2\right] \quad (2.66)$$

$$E_{nk} = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (2.67)$$

Si las dimensiones del sistema en la dirección  $y$  están confinadas a  $0 < y < W$ , teníamos que  $0 < k < W/\ell^2$ . Si imponemos condiciones de contorno periódicas en los

bordes:  $\psi(x', y) = \psi(x + L, y)$ , siendo  $L$  y  $W$  el largo y ancho de la muestra, tenemos:  $k = 2\pi p/L$ . Entonces, el número total de estados en un nivel de Landau es  $LW/2\pi\ell^2$  y si lo expresamos por unidad de área tenemos:

$$n_B = \frac{1}{2\pi\ell^2} = \frac{eB}{hc} \quad (2.67)$$

Podemos definir también el índice de llenado,  $\nu$ , de los niveles de Landau. Si  $n$  es el número de nivel de Landau considerado y  $n_B$  es el número de electrones que caben en un nivel, entonces es inmediato que:

$$\nu = \frac{n}{n_B} \quad (2.68)$$

un caso importante es cuando  $\nu$  es entero, es decir  $n = in_B$  con  $i$  entero, entonces el último nivel de Landau está completamente lleno, y el nivel de Fermi debe estar en un gap de energía. Es plausible que entonces no haya scattering ( $\rho_0$  desaparece), y el tensor de conductividad toma la forma dada por la ecuación (2.63). De esta manera se explica un punto del plateau Hall, aquel donde la recta clásica lo corta. Pero el efecto Hall cuántico se observa no sólo para un sistema ideal cuyo índice de llenado es entero, sino para un intervalo ancho alrededor de éste valor: obtenemos un plateau estable.

Recordaremos que los estados  $\psi$  están extendidos en la dirección  $x$ , pero confinados en la dirección  $y$ . Debido a la enorme degeneración de los niveles, podemos elegir combinaciones lineales de los estados que estén confinados en ambas direcciones: serían estados localizados. Si aplicamos un campo eléctrico o consideramos la presencia de potenciales de impurezas, se levanta la degeneración y perdemos la libertad de elegir entre estados extendidos o localizados, su carácter queda determinado a una energía dada.

La rotura de la invariancia traslacional es esencial para la observación del Efecto Hall Cuántico<sup>3</sup>. Esta rotura, en la práctica es provocada por las impurezas u otras imperfecciones del material, lo que se traduce en la presencia de un potencial aleatorio en

<sup>3</sup>Otra argumentación está en el tratamiento de campos eléctricos y magnéticos cruzados usando la transformación relativista (Jackson, 1975). En un sistema de referencia que se mueve respecto al laboratorio con velocidad  $v = cExE/B^2$ , el campo eléctrico desaparece. Esto da una densidad de corriente  $j = -nev$ , con la dirección y magnitud correspondiente a un nivel de Landau lleno. Si la invariancia traslacional se rompe, entonces  $j = -nev$  sin importar el valor de  $n$ .

el Hamiltoniano del sistema. El tratamiento analítico de este problema se presenta en el siguiente capítulo. Aquí nos limitaremos a exponer las ideas principales, viendo cual es el mecanismo para la aparición del efecto Hall cuántico.

El efecto global de las impurezas es ensanchar los niveles de Landau (Fig 2.5). En el tratamiento habitual del scattering elástico, a los niveles de energía se les añade una parte compleja responsable de su ensanchamiento:  $E_{n\mathbf{k}} \rightarrow E_{n\mathbf{k}} + i\hbar/\tau$ . La imagen clásica de los electrones moviéndose en un campo magnético es que los electrones se mueven en círculos, si las impurezas son pocas y alejadas entre si en comparación con el radio de la órbita ciclotrón, algunos electrones seguirán su ruta sin interferir con impurezas (y por tanto sin cambiar su energía) mientras otros se verán influenciados por ellas y por tanto sufrirán un corrimiento en su energía. Esta imagen es extrapolable al caso cuántico (al menos para algún tipo de impurezas), sin más que sustituir el radio de la órbita ciclotrón ( $v_F/\omega_C$ ) por la longitud magnética  $\ell$ . El campo eléctrico puede causar una deriva de los electrones a través de un sistema de impurezas. Los estados que están localizados en una dirección quedan forzosamente extendidos en la otra debido a la presencia del campo eléctrico (que levanta la degeneración), de hecho, quedan extendidos a lo largo de las líneas equipotenciales.

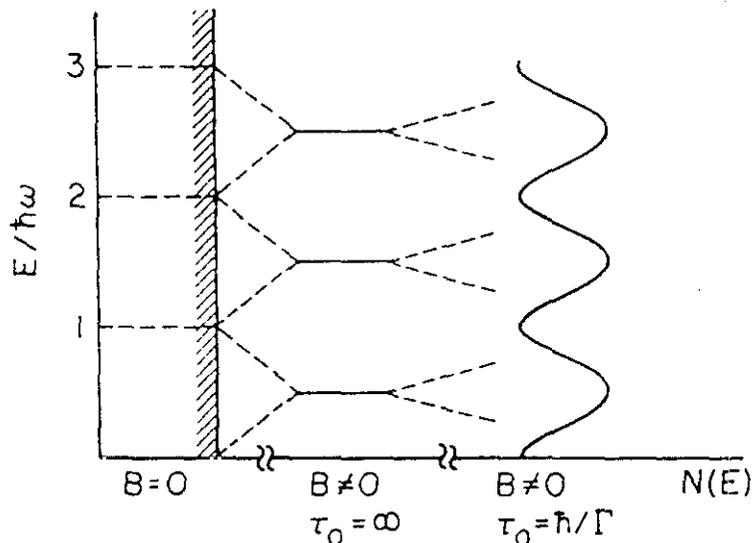


Figura 2.5: Niveles de Landau en presencia de campo magnético y de impurezas

La energía de los estados originales que teníamos en ausencia del potencial de impurezas se ve modificada por la presencia de éste. Las energías de los estados

perturbados están entre los niveles de Landau sin perturbar<sup>4</sup>, desplazados hacia arriba o hacia abajo según el potencial sea repulsivo o atractivo. Estos estados están localizados y no transportan corriente. Hay algunos niveles de energía que quedan muy próximos a los niveles sin perturbar, y podríamos aproximarlos por los niveles  $n\hbar\omega_c$  originales, estos estados están extendidos y pueden portar corriente. Las impurezas reducen el número de estados portadores de corriente, pero ésta permanece constante mientras todos los estados extendidos estén ocupados (veremos más adelante que esto se debe a que la impureza capaz de ligar -localizar- un estado, acelera los otros electrones de forma que se compensa la corriente que deja de portar el estado localizado). La forma y cantidad de estados localizados y extendidos dependerá del potencial de impurezas que se considere, debiendo quedar siempre al menos un estado extendido en cada nivel de Landau para que se produzca el efecto Hall cuántico.

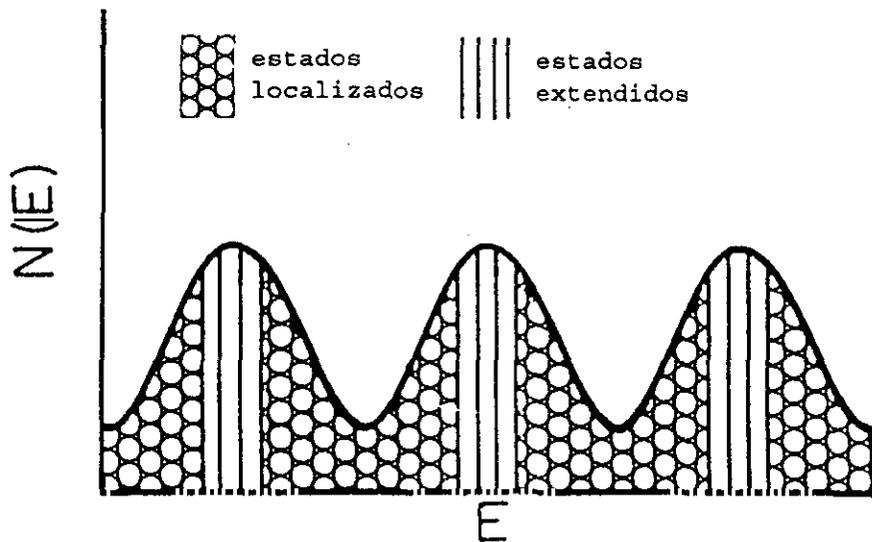


Figura 2.6: Niveles de Landau: estados localizados y extendidos.

La figura (2.6) resume el párrafo anterior: la densidad de estados, que en presencia del campo magnético es una serie de niveles de Landau estrechos y bien definidos, pasa a ser, como consecuencia del potencial de las impurezas, una sucesión de niveles ensanchados y centrados en las energías originales. Además, hay dos tipos de niveles: los estados extendidos que ocupan el centro, donde estaban los niveles de Landau originales y los estados localizados, más extendidos en energía. Los estados

<sup>4</sup>Excepto posiblemente para un nivel que quedaría por debajo de todos los niveles sin perturbar (Prange, 1981)

extendidos de cada nivel de Landau están separados de los de otros niveles por un gap de energía que contiene sólo estados localizados: es el “gap de movilidad”.

La presencia del gap de movilidad permite explicar cualitativamente el efecto Hall cuántico. Cuando la densidad de portadores va aumentando (variando el voltaje de puerta), o el campo magnético varía, los estados localizados se van llenando gradualmente sin modificar la población de los estado extendidos y por tanto sin cambios en la conductancia Hall. Para estas densidades, la conductancia Hall está en uno de los plateaus y la conductancia longitudinal desaparece. Cuando el nivel de Fermi pasa por la zona de estados extendidos, entonces la conductancia longitudinal se hace apreciable y la conductancia Hall efectúa una transición de un plateau al siguiente. Los estados localizados proporcionan la posibilidad de mantener el nivel de Fermi alejado de los estados extendidos para ciertos intervalos de la densidad de portadores<sup>5</sup> (o del campo magnético).

*Argumento de Laughlin sobre la invariancia gauge:*

Existe un elegante argumento, basado en consideraciones tipo “gauge”, que prueba la existencia de los estados extendidos en el centro del nivel de Landau y cómo estos estados, si están llenos, (nivel de Fermi en el gap de movilidad), portan exactamente la corriente cuantizada dada por la ecuación (2.63) (Laughlin, 1981; Halperin 1982). Supongamos un experimento ideal en que tenemos una muestra con la geometría de Corbino (anillo en el plano  $xy$  el campo  $B$  perpendicular a él) con un flujo magnético variable  $\Phi$  que atraviesa el agujero del centro. Distinguiremos tres regiones en el anillo, una central alejada de los bordes donde tenemos las impurezas y otras dos, próximas a los bordes<sup>6</sup> y libres de impurezas (Fig 2.7a). La densidad de portadores es tal que tenemos exactamente un número entero de niveles de Landau llenos en las zonas libres de impurezas (allí están claramente delimitados) y el nivel de Fermi está en el gap

<sup>5</sup> Se ha propuesto la existencia de estados localizados también fuera del nivel de Landau, anclados a impurezas alejadas del canal bidimensional (unos 100Å). Estos estados existen, pero su influencia para establecer el nivel de Fermi es muy reducida (Tsui, 1981)

<sup>6</sup> Estos bordes pueden mantenerse a diferente potencial (como se indicaba en el argumento original de Laughlin), pero esto no es estrictamente necesario.

que hay entre dos de ellos. Imaginemos ahora que variamos adiabáticamente el flujo  $\Phi$ . Hay entonces un campo eléctrico que satisface:

$$\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{c} \int dA \cdot \frac{\partial B}{\partial t} = \oint_C dl \cdot E = \oint_C dl \cdot \rho \cdot j \quad (2.70)$$

donde la integral de línea se efectúa a lo largo de un contorno  $C$  que rodee el agujero. Si hay una corriente Hall perpendicular al campo, habrá una transferencia de carga a través del contorno  $C$ . Si el cambio total de flujo es una unidad de flujo cuántico  $\phi_0 = hc/e$ , entonces veremos que la carga total que se transfiere a través de  $C$  es  $ie$  donde  $i$  es un entero.

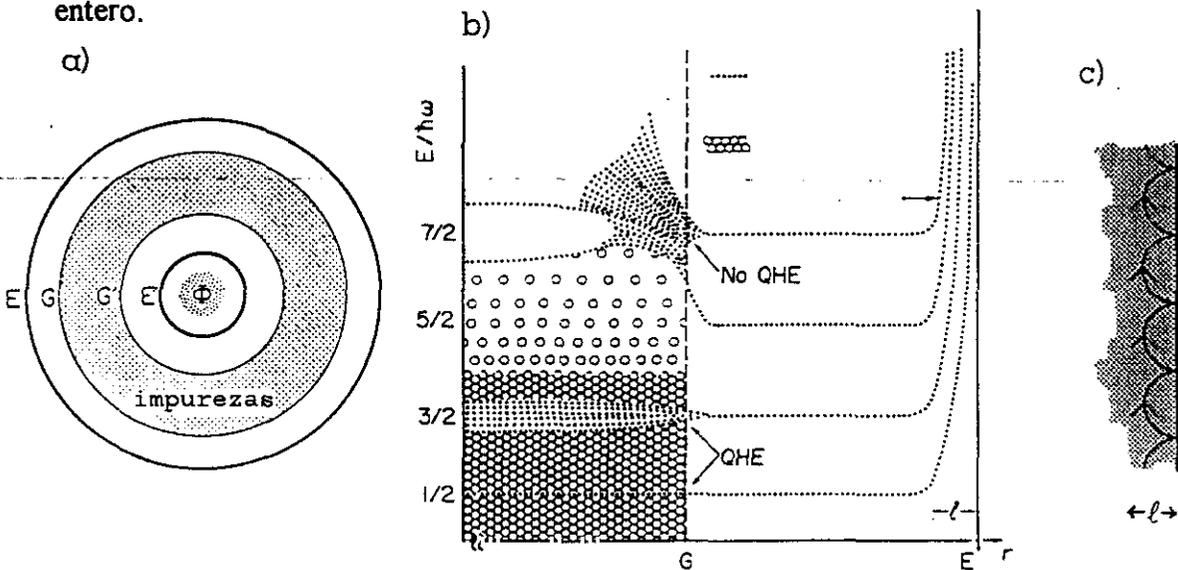


Figura 2.7: La geometría del argumento de Laughlin (a), los niveles de energía en el interior de la muestra (b) y los estados de borde (b y c).

Si el contorno  $C$  está en uno de los anillos sin impurezas (EG), en estas regiones ideales  $\rho_H = h/ie^2$  (ya que hemos supuesto exactamente  $i$  niveles de Landau llenos), los electrones transportados deben provenir de uno de los bordes (pongamos E) y ser transferidos a la región de las impurezas (en G). En los bordes (como E) hay un cuasi-continuo de estados de borde (para cada nivel de Landau) que son reflejo de los estados extendidos de volumen (Fig 2.7b). Halperin (1982) demostró que esto se mantiene aún en presencia de impurezas en los bordes. Los estados de borde estarán llenos hasta el nivel de Fermi. Según el flujo  $\Phi$  cambia, el estados etiquetado con  $n$  se transforma adiabáticamente en el  $n+1$ , después del cambio de un cuanto de flujo, los estados tendrán su energía y función de onda originales, ya que un cambio en una unidad entera de flujo cuántico puede ser "eliminada" mediante una transformación "gauge". Sin embargo, un

electrón ha sido transportado a través de esta región, y por tanto, al nivel de Fermi habrá un estado lleno menos en el borde.

Se trata ahora de extender el razonamiento de la región “ideal” libre de impurezas a la “real”. Suponemos que no hay disipación en la región de impurezas  $GG'$ , esto puede suceder si el nivel de Fermi está en un gap de movilidad, es decir, los estados al nivel de Fermi están localizados (o no existen): cualquier corriente es entonces perpendicular al campo magnético (la conductividad diagonal desaparece). Hay dos posibilidades: una, que los electrones que se suministraban a la región de impurezas (en  $G$ ) pasen a través de ella sin acumular carga en sus bordes: este es el caso del efecto Hall cuántico, el comportamiento de la región con impurezas es equivalente al de la región ideal con un número entero de niveles de Landau llenos, y viene descrito por la ecuación (2.63). La otra posibilidad es que no se transfiera ningún electrón, que vayan o provengan de estados de impureza o de intercara que estén al nivel de Fermi (esto sucedería, por ejemplo, con un aislante fuerte en la región de impurezas), no hay efecto Hall cuántico. Para que se dé el efecto, el potencial de impurezas debe ser suficientemente débil, de forma que permita una conexión suave con la región libre de ellas.

Destacaremos la idea de que sólo los estados cuya amplitud es apreciable a lo largo de todo el contorno  $C$  son afectados por el cambio de flujo  $\Phi$ , éstos son los estados extendidos. Los estados localizados no son afectados por  $\Phi$ , no cambia su naturaleza ni su nivel de ocupación. Esto implica que si no hay estados extendidos al nivel de Fermi en la región de impurezas, debe haberlos con energías lejos del nivel de Fermi, y si cualquier potencial de impurezas es suficientemente fuerte como para destruir los estados extendidos en el interior de la región será capaz de crearlos en su borde cerca de la energía de Fermi. La existencia de los estados extendidos de borde se puede demostrar también indicando que se suprimen todas las posibilidades de scattering salvo el scattering “hacia adelante” (Büttiker 1989, 1993). Desde un punto de vista semiclásico, las órbitas ciclotrón en el borde se acoplan unas con otras dando lugar a una órbita que recorre todo el borde de la muestra (Fig 2.7c).

### 2.2.3 Efectos de la temperatura y renormalización

Como efecto de una temperatura finita, aparece una pequeña conductividad longitudinal entre los estados localizados que están al nivel de Fermi. A diferencia de la superconductividad, estas corrientes longitudinales no son cortocircuitadas por la “supercorriente”, ya que en este caso son perpendiculares entre si y por tanto será necesario tenerlas en cuenta. Estudiaremos el efecto de ésta temperatura en las componentes diagonal y no-diagonal de la resistividad:

Veámos en la figura 2.4 las grandes oscilaciones Shubnikov-de Haas que se producen en la componente diagonal de la resistencia,  $R_{xx}$ ; y que estas oscilaciones alcanzan su mínimo, haciéndose muy pequeño (eventualmente cero) en las regiones correspondientes a los plateaus Hall. Por tanto  $\rho_{xx} = (W/L)R_{xx}$  también se hace muy pequeño (asumiendo un medio homogéneo, por lo que los datos experimentales de  $\rho_{xx}$  deben ser tratados con precaución). Las teorías habituales para los valores mínimos de  $\rho_{xx}$  indican que a altas temperaturas la disipación es activada térmicamente con energía  $E_g/2$  a través del gap de movilidad y por tanto varía exponencialmente como  $\exp(-E_g/2k_B T)$ . Para temperaturas menores, cuando este mecanismo “se congela”, domina un proceso basado en el hopping de rango variable entre los estados localizados, este da lugar a una resistividad que varía exponencialmente como  $\exp\left[-(T_0/T)^\nu\right]$ , donde  $\nu$  se predice que debe ser  $1/3$  en ausencia de campo magnético (Mott, 1979) o  $1/2$  en presencia de un fuerte campo (Ono, 1982). El modelo de hopping de rango variable funciona bastante bien para heteroestructuras de semiconductores en el rango de temperatura que va de  $10mK$  hasta los  $4K$ , habiendo una ligera preferencia por  $\nu=1/2$  (Ebert 1983a, Polyakov 1993a,b). A temperaturas más bajas,  $\rho_{xx}$  se hace tan pequeño que resulta difícil de medir, obteniéndose valores un orden de magnitud menores que los de cualquier otro material no superconductor, hay medidas con  $\rho_{xx} < 10^{-10} \Omega$ , que correspondería a una corriente persistente con un tiempo de decaimiento de  $300s$  (Haavasoja 1984), los picos se hacen enormemente estrechos, extendiéndose los mínimos, lo que corresponde con unos plateaus Hall muy anchos y con transiciones abruptas entre ellos.

En lo que respecta a los plateaus, se ha comprobado que por encima de unos 5K presentan una ligera pendiente, von Klitzing (1984) ha encontrado que estas pendientes ( $d\rho_{xy}/dB$ ) varían de forma exponencial como  $\exp(-T_0/T)$ , que es un comportamiento activado (aun cuando  $\rho_{xx}$  todavía no haya alcanzado ese régimen activado).

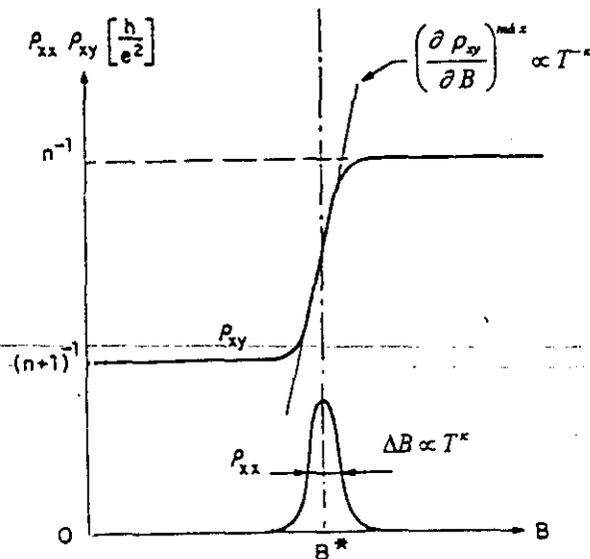


Figura 2.8: Comportamiento con la temperatura de  $R_{xy}$  y  $R_{xx}$  en la transición entre dos plateaus.

La dependencia con la temperatura en la zona de transición entre los plateaus Hall, que corresponde con los picos de las oscilaciones Shubnikov-de Haas es otro de los campos de estudio en función de la temperatura. En este caso aparecen fuertes implicaciones con la teoría básica a través de modelos como el “scaling” (ver apéndice 4). El comportamiento aparece resumido en la figura (2.8), se analiza la anchura de los picos en  $\rho_{xx}$  y la pendiente de  $\rho_{xy}$  entre dos plateaus Hall, el comportamiento parece regido por el “scaling de dos parámetros”:

$$\Delta B \propto T^\kappa \quad ; \quad \left( \frac{\partial \rho_{xy}}{\partial B} \right)^{\text{máx}} \propto T^{-\kappa} \quad (2.71)$$

donde  $\Delta B$  es la semianchura del pico  $\rho_{xx}$  a la semialtura y  $( )^{\text{máx}}$  se refiere a la pendiente máxima entre los plateaus. El exponente  $\kappa$  se ha obtenido experimentalmente, hayándose  $\kappa=0.42\pm 0.04$  con comportamiento universal (Wei 1985, 1988). Sin embargo von Klitzing (von Klitzing, 1990; Koch *et al*, 1991a,b, 1992) observa un comportamiento no universal con un  $\kappa$  que depende del dopaje y del nivel de Landau, variando entre:

$0.28 \pm 0.06 < \kappa < 0.81 \pm 0.03$ . Existe una estrecha relación entre este exponente y el correspondiente al comportamiento crítico de la longitud de localización:

$$\xi \propto |B - B_c|^{-\nu} \propto |E - E_c|^{-\nu} \quad (2.72)$$

que se establece utilizando un tercer exponente,  $p$ , definido mediante el comportamiento de la longitud del scattering inelástico  $L_{in} = L_0 T^{p/2}$  (o también  $1/\tau_i = T^p$ ). La relación es  $\kappa = p/2\nu$ . Para el exponente  $\nu$ , los experimentos efectuados coinciden en concederle un comportamiento universal dado por  $\nu = 2.3 \pm 0.1$  (aprox.  $7/3$ ). Si  $\nu$  es universal y  $p$  depende del mecanismo de scattering (varía entre 2.7 y 1.4) entonces  $\kappa$  no sería universal. Estos comportamientos son indicativos de una transición de fase metal-aislante que se produce en el paso de un plateau a otro.

Esta cuestión se puede abordar desde la Teoría Cuántica de Campos, en el Apéndice 4 se hace una introducción a los trabajos que en este sentido se han hecho. Por un lado se hacen unas consideraciones topológicas del Efecto Hall Cuántico y por otro una aproximación a la teoría de "scaling" de dos parámetros. A continuación, y retomando los resultados del Apéndice 4, indicamos las aplicaciones al estudio de los diagramas de renormalización que se obtienen para  $\sigma_{xx}$  y  $\sigma_{xy}$ .

Estos resultados se pueden interpretar utilizando los parámetros de conductividad, que se obtienen de la teoría usando un formalismo con "términos fuente"<sup>7</sup> (Pruisken 1984, 1985a). Podemos obtener una expresión para los parámetros de la conductividad renormalizada en términos de las fluctuaciones críticas de los campos  $Q(r)$ , que aparecen en expresiones del tipo  $Tr\langle \hat{\tau}_x \tilde{Q} \hat{\tau}_x \tilde{Q} \rangle$ , donde  $\tau_x$  son las matrices de Pauli. Los valores esperados se evalúan con respecto  $L_{eff}$  y queda la siguiente relación entre las conductividades desnudas y renormalizadas:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^0 + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(2\pi n \sigma_{xy}^0) \quad (2.73)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xy}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \sin(2\pi n \sigma_{xy}^0) \quad (2.74)$$

<sup>7</sup>  $U(x, y) = \exp[ixj_x \tilde{\tau}_x + iyj_y \tilde{\tau}_y]$  donde  $j_\mu$  son las "fuentes" y  $\tau_\mu$  son las matrices de Pauli.

donde los coeficientes  $c_n$  y  $\theta_n$  son funciones<sup>8</sup> únicamente de  $\sigma_{xx}^0$ . Se ve que sobre las líneas  $\sigma_{xy}^0 = \text{entero}$  la conductividad Hall no está renormalizada. La teoría es invariante bajo el desplazamiento  $\sigma_{xy}^0 \rightarrow \sigma_{xy}^0 + \text{entero}$  y también bajo la introducción de un campo de fondo  $Q(r)$  que varíe lentamente; no aparecen transiciones de fase para  $\sigma_{xy}^0$  cerca de valores enteros, entonces una correlación o longitud de localización debe mantenerse finita. Diríamos que los parámetros desnudos “escalan” hacia  $\sigma_{xx} = 0$  y  $\sigma_{xy} = \text{entero}$ . También se tiene que la conductancia Hall se mantiene sin renormalizar a lo largo de las líneas  $\sigma_{xy}^0 = \text{semientero}$ . Esto corresponde a funciones de onda deslocalizadas cerca del nivel de Fermi.

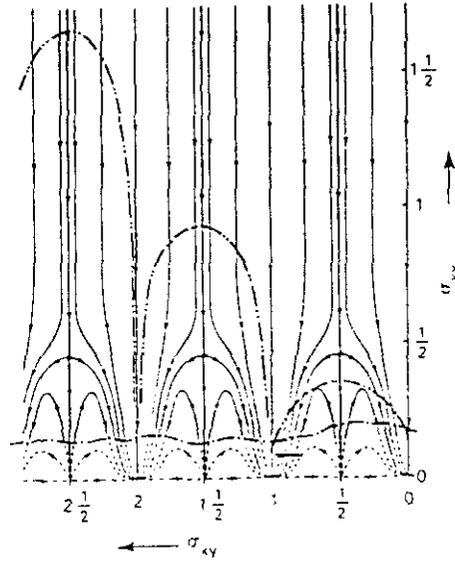


Figura 2.9: Diagramas de renormalización

Estos resultados se pueden trasladar a las ecuaciones del grupo de renormalización, obteniéndose:

$$\beta_{xx} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \ln L} = \frac{-1}{2\pi^2 \sigma_{xx}} - \sigma_{xx} D e^{-2\pi \sigma_{xx}} \cos(2\pi \sigma_{xy}) \quad (2.75)$$

$$\beta_{xy} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \ln L} = -\sigma_{xx} D e^{-2\pi \sigma_{xx}} \sin(2\pi \sigma_{xy}) \quad (2.76)$$

donde  $D$  es una constante positiva, hemos considerado sólo los primeros términos de las series infinitas de las ecuaciones (2.73) y (2.74). Extrapolando al régimen de acoplo fuerte, se obtiene el diagrama del flujo de renormalización dado por la figura (2.9). Es de destacar los puntos fijos intermedios que se obtienen en el diagrama para valores semienteros de la conductividad Hall, físicamente, estos puntos fijos pueden asociarse

<sup>8</sup> A un nivel clásico, esta dependencia es exponencial:  $\exp(-4\pi |n| \sigma_{xx}^0)$ .

con una deslocalización de la función de onda electrónica, se obtiene una longitud de localización cuyo comportamiento crítico puede ser descrito mediante:

$$\xi(\tilde{\theta}, \tilde{\sigma}) = b\xi(b^\nu \tilde{\theta}, b^{-\nu} \tilde{\sigma}) \quad (2.77)$$

donde  $\theta$  y  $\sigma$  indican las desviaciones lineales respecto a los puntos fijos  $\sigma_{xy}^*$  y  $\sigma_{xx}^*$  respectivamente y el exponente crítico  $\nu$ , que se utiliza habitualmente, viene dado por  $\nu = \gamma^t$ . El diagrama de flujo muestra una transición de fase para  $\sigma_{xy} = 1/2$  ( $\theta = \pi$ ), en la aproximación de campo magnético fuerte y desorden débil, esto ocurre en el centro de los niveles de Landau, donde encontramos los estados extendidos; para campos intermedios parece que este comportamiento se mantiene y en el límite de campos nulos estos estados extendidos deberían desaparecer para “conectar” con la situación descrita por el modelo de Anderson; cómo sucede esto, no está actualmente aclarado.

Este comportamiento de “scaling” de dos parámetros ha recibido confirmación experimental, es posible obtener diagramas de flujo experimentales para varias temperaturas, lo que viene a confirmar la existencia de una transición de fase cerca de los valores semienteros de la conductividad Hall. Sin embargo aún se mantiene en debate el hecho de que sea un comportamiento universal.

## Capítulo 3

# CALCULO DE LA MAGNETOCONDUCTIVIDAD

### 3.1 Consideraciones generales

En primer lugar hay tres restricciones, muy generales, que asumiremos para desarrollar el formalismo básico, que es independiente de las consideraciones que se hagan posteriormente sobre las condiciones del sistema o la forma del potencial de las impurezas. Estas condiciones son (Luttinger 1964, Smrcka *et al* 1977):

- Modelo de electrones independientes, no se considera interacción entre electrones.
- El scattering de los electrones con las impurezas es elástico, es decir, no cambian su energía.
- La respuesta del sistema a los campos es lineal.

Escribimos entonces las ecuaciones generales de transporte:

$$I = L_{11} \left[ E - \frac{T}{e} \nabla \left( \frac{\mu}{T} \right) \right] + L_{12} \left[ T \nabla \left( \frac{1}{T} \right) - \frac{1}{c^2} \nabla \Psi \right] \quad (3.1)$$

$$I_E = L_{21} \left[ \varepsilon - \frac{T}{e} \nabla \left( \frac{\mu}{T} \right) \right] + L_{22} \left[ T \nabla \left( \frac{1}{T} \right) - \frac{1}{c^2} \nabla \Psi \right] \quad (3.2)$$

donde:

$I$  es la corriente eléctrica macroscópica.

$I_E$  es la corriente de energía.

$E = -\nabla\Phi$ , es la "fuerza dinámica".

$\Phi = -\vec{E} \cdot \vec{r}$ , es el campo eléctrico.

$\psi = \vec{r} \vec{\nabla} \Psi$ , es el campo gravitacional, de donde:  $\varepsilon = -\nabla\Psi/c^2$ .

Nosotros solamente emplearemos la ecuación (3.1).

Los coeficientes de transporte  $L_{ij}$  en general serán tensoriales. Si particularizamos vamos obteniendo los diversos coeficientes que se emplean comunmente:

$$\sigma = L_{11} \quad \text{conductividad eléctrica.} \quad (3.3)$$

$$K = T^{-1} (L_{22} - L_{21} L_{11}^{-1} L_{12}) \quad \text{conductividad del calor.} \quad (3.4)$$

$$S = T^{-1} (L_{12} L_{11}^{-1} - \mu/e) \quad \text{poder termoeléctrico.} \quad (3.5)$$

Para el cálculo, utilizaremos los pasos que viene descritos a continuación:

i) Se plantea el hamiltoniano:  $H = H_0 + H_1$ , las diversas interacciones (eléctrica, gravitatoria, ... ) se incluyen en  $H_1$ .

ii) Evolución temporal dada por:  $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [ \cdot, H_T ] = -\text{div} \vec{j}()$ , obteniéndose las corrientes, principios de conservación: número de partículas, energía, etc.

iii) Distribución de Fermi-Dirac:

$$\rho_0(H) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{H - \mu}{k_B T}\right)} \quad (3.6)$$

iv) Matriz densidad:

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad (3.7)$$

donde  $\rho_0$  es la distribución de Fermi-Dirac y  $\rho_1$  son las desviaciones del equilibrio debido a la presencia de los campos. Con esto obtenemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [\rho, H_0 + H_1 e^{-\sigma}] = 0 \quad (3.8)$$

$$\rho = \rho_0 + \frac{i}{\hbar} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} e^{-\frac{1}{\hbar} H_0 t} [\rho_0, H_1] e^{\frac{1}{\hbar} H_0 t} dt \quad (3.9)$$

el término  $e^{-\varepsilon t}$  es la atenuación introducida por las interacciones.

v) Para obtener valores macroscópicos es necesario promediar los microscópicos de la siguiente forma:

$$\langle j(\vec{r}) \rangle = Tr[\rho j(\vec{r})] \quad (3.10)$$

y a partir de aquí:

$$I = \frac{1}{V} \int_V \langle j(\vec{r}) \rangle d\vec{r} \quad (3.11)$$

siendo  $I$  la intensidad de corriente eléctrica macroscópica. Así podríamos obtener todos los coeficientes de transporte  $L_{ij}^{\alpha\beta}$ , donde  $\alpha, \beta = x, y, z$  y  $i, j = 1, 2$ .

Si consideramos sólo la conductividad eléctrica:

$$j_1^\alpha = e v^\alpha \quad (3.12)$$

$$v^\alpha = \frac{1}{i\hbar} [r^\alpha, H_0] \quad (3.13)$$

y recordamos algunas expresiones útiles:

$$\delta(\eta - H) = -\frac{1}{2\pi i} (G^+ - G^-) \quad (3.14)$$

donde  $G^\pm = G(\eta \pm i\varepsilon)$ , con

$$G(z) = (z - H_0)^{-1} \quad (3.15)$$

siendo  $G(z)$  la función de Green; podemos escribir:

a) Parte diagonal:

$$L_{11}^{\alpha\alpha} \equiv \sigma^{\alpha\alpha} = \pi \hbar e^2 Tr[v^\alpha \delta(\mu - H) v^\alpha \delta(\mu - H)] \quad (3.16)$$

b) Parte no diagonal:

$$L_{11}^{\alpha\beta} \equiv \sigma^{\alpha\beta} = e^2 \int_{-\infty}^{\mu} i\hbar Tr \left[ v^\alpha \frac{dG^+}{d\eta} v^\beta \delta(\eta - H) - v^\alpha \delta(\eta - H) v^\beta \frac{dG^-}{d\eta} \right] d\eta \quad (3.17)$$

vi) La temperatura se introduce en todos los casos mediante la integración:

$$L_{ij}^{\alpha\beta}(T, \mu) = - \int_0^\infty \frac{d\rho_0(\eta)}{d\eta} L_{ij}^{\alpha\beta}(0, \mu) d\eta \quad (3.18)$$

siendo  $\rho_0$  la función de distribución de Fermi-Dirac dada por la ecuación (3.6).

Como el caso que nos ocupa es el cálculo de la conductividad eléctrica, podemos particularizar las ecuaciones (3.16) y (3.17) de la siguiente manera:

$$\sigma_{xx}(\varepsilon, 0) = \frac{i\hbar e^2}{V} \left\langle \text{Tr} \left[ v_x \delta(\varepsilon - H) v_x \delta(\varepsilon - H) \right] \right\rangle \quad (3.19)$$

$$\sigma_{xy}(\varepsilon, 0) = \frac{ec}{V} \frac{\partial N(\varepsilon, 0)}{\partial B} + \frac{i\hbar e^2}{2V} \left\langle \text{Tr} \left[ v_x G^+(\varepsilon) v_y \delta(\varepsilon - H) - v_x \delta(\varepsilon - H) v_y G^-(\varepsilon) \right] \right\rangle \quad (3.20)$$

para obtener la ecuación (3.20) hemos efectuado una integración por partes de la ecuación (3.17). La cantidad  $N(\varepsilon, 0)$  es el número de electrones con energía menor que  $\varepsilon$  y viene dada por:

$$N(\varepsilon, 0) = \int_{-\infty}^{\varepsilon} \delta(\varepsilon' - H) d\varepsilon' \quad (3.21)$$

Hasta aquí no se ha hecho ninguna suposición sobre la forma del potencial, las expresiones son válidas para corto o largo alcance, todas las posibles configuraciones de impurezas o formas de la superficie de Fermi. Las únicas condiciones impuestas son las tres que se indicaron al principio, nada más.

La introducción de la impurezas en los modelos ha sido acometida de diferentes modos, cada uno de los cuales conduce a una forma determinada de los niveles de Landau, es decir, de la densidad de estados. Hacemos un repaso de ellos:

### 3.1.1 Ausencia de impurezas.

Exponemos aquí el caso más sencillo, un medio isótropo, caracterizado por una masa efectiva  $m^*$ , en ausencia de impurezas (no hay "scattering").

Recordaremos brevemente los resultados de la sección 1.1.2, reescribiendo aquí las expresiones simplificadas que obtuvimos en el apéndice 1 para el caso en que el

campo magnético es estrictamente perpendicular al gas bidimensional de electrones, habiendo elegido para el cálculo el gauge de Landau.

En presencia del campo magnético tenemos el Hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2m^*} \left[ \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right]^2 \quad (3.22)$$

que conduce a funciones de onda de la forma:

$$\Psi_{nk}(y) \propto H_{nk} \left( \frac{y}{l} - lk \right) \exp \left[ -\frac{(y - l^2/k)}{2l^2} \right] \quad (3.23)$$

cuya energía viene dada por:

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c \quad (3.24)$$

La densidad de estados es una sucesión de niveles tipo delta de Dirac igualmente espaciados en energía (Fig 1.5):

$$D(E) = \frac{1}{2\pi l^2} \sum_n \delta(E - E_n) \quad (3.25)$$

A partir de aquí, será necesario ir desarrollando el modelo para que responda a la realidad física: los niveles no son deltas de Dirac puras, sino que tienen una cierta anchura y forma, dando lugar a picos más o menos redondeados, estados en las bandas de energía prohibida, etc... Este será el efecto sobre la densidad de estados que provoca la presencia de impurezas, defectos de intercara u otro tipo de imperfecciones que hacen que la simetría de traslación esté rota. Sin embargo, los resultados anteriores mantienen cierta validez, siendo el esquema básico a partir del cual se van desarrollando los diferentes modelos: para energías dentro de ciertas bandas cuya forma está por definir, la densidad de estados es grande y corresponde a estados conductores, para otras energías, la densidad de estados se hace mucho menor, conteniendo estados localizados, incapaces de conducir a  $T=0K$ .

### 3.1.2 Efecto de las imperfecciones y el desorden:

Para que se pueda producir el efecto Hall cuántico es necesario romper la invariancia traslacional. En la práctica, en un material real esto sucede siempre: las muestras presentan imperfecciones. En esta sección, presentaremos primero una descripción general del potencial de las impurezas, indicando cómo da lugar a la aparición de un "gap de movilidad" al nivel de Fermi, ésta es la situación en la que no hay estados extendidos capaces de transportar corriente al nivel de Fermi, son los que llamaremos estados localizados. La existencia de un gap de movilidad es la condición esencial para que se produzca el efecto Hall cuántico como vimos en la sección 2.2. Después haremos un breve repaso a los distintos modelos de imperfecciones propuestos.

En ausencia del campo magnético, el potencial de las impurezas se caracteriza por un recorrido libre medio  $\ell_0$  y su fuerza por  $1/k_F \ell_0$ , la razón entre la longitud de onda del electrón al nivel de Fermi y el recorrido libre medio. Sin embargo, en presencia del campo magnético, ni el número de onda  $k_F$  ni el recorrido libre medio sirven para caracterizar el tipo de potencial. Las magnitudes relevantes en este caso son la longitud magnética  $\ell$  y la escala característica de energía es  $\hbar\omega_C$  y será con éstas con las que deberemos caracterizar el potencial.

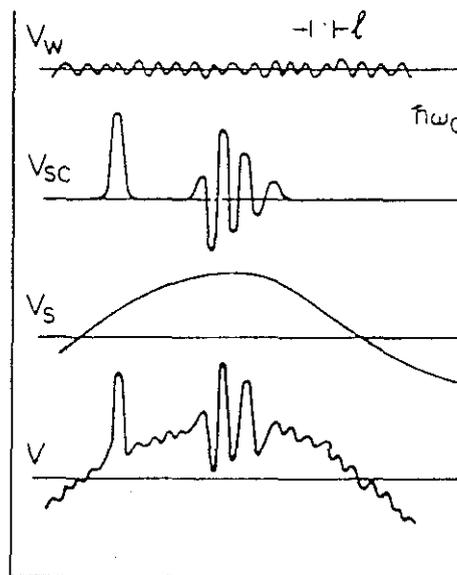


Figura 3.1: Los potenciales de impurezas

Las condiciones para que se produzca el efecto Hall cuántico se satisfacen si el potencial de las impurezas  $V(r)$  puede escribirse como suma de tres términos (Fig 3.1), cada uno de los cuales describiremos a continuación:

$$V = V_D + V_{SC} + V_S \quad (3.26)$$

El primer término,  $V_D$ , se caracteriza por una condición de “debilidad”:

$$\max|V_D(r)| \equiv V^{max} \ll \hbar\omega_c \quad (3.27)$$

pero puede, sin embargo, presentar fuertes y rápidas variaciones arbitrarias. Una forma de tratarlo es mediante la teoría de perturbaciones (Thouless, 1982): se considera la función de Green evaluada a una energía a mitad de camino entre dos niveles de Landau, se calcula en series de potencias de  $V_D$ , y se obtiene que la serie converge bajo la condición (3.27), decreciendo los sucesivos términos por factores menores que  $2V^{max} / \hbar\omega_c$ , resultando que los propagadores son tan suaves que no puede haber ningún estado a esas energías. Es decir, hay un gap en el espectro del hamiltoniano  $H_0 + V_D$ , entre niveles de Landau sucesivos. Si hay un gap, ciertamente habrá un gap de movilidad. Estos resultados, junto con el argumento de Laughlin-Halperin sobre la invariancia gauge, implica que existe algún estado extendido en cada nivel de Landau; esto contrasta con la creencia de que en ausencia de campo magnético, cualquier potencial aleatorio localiza todos los estados en dos dimensiones. Indicaremos que la condición (3.27) es más fuerte que lo necesario, bastaría requerir que  $V^{max} < \hbar\omega_c / 2$ , sin embargo, cuando se combinan los efectos de  $V_D$  con  $V_S$  se necesita una condición más fuerte, que (3.27) asegura.

El segundo término,  $V_{SC}$ , es una suma de potenciales de scattering, considerando como tales aquellos que pueden tener una fuerza y variación arbitrarias pero que se desvanecen fuera de una determinada región. La condición que se impone en este caso es que debe haber una región libre de potencial con una anchura mínima  $d \gg \ell$ , que mediante percolación se extienda a toda la muestra, si esto se respeta no es necesario imponer ninguna otra restricción sobre la fuerza o extensión del potencial de scattering. Para analizarlo consideraremos primero un potencial fuerte rodeado por una región libre de potencial y de grosor mucho mayor que  $\ell$ . Con esto mostraremos que imperfecciones

violentas, pero aisladas, no destruyen el efecto Hall cuántico, después es fácil mostrar que una combinación con otros potenciales tampoco lo destruyen.

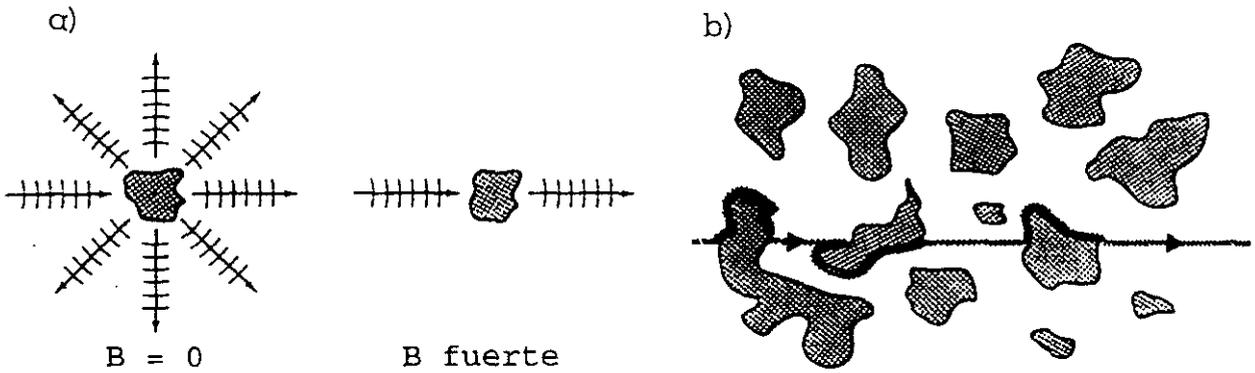


Figura 3.2: Scattering hacia adelante.

Suponemos que un campo eléctrico se aplica a la muestra y consideramos un paquete de ondas (formado por superposición de estados degenerados  $\psi_{nk}$ , ver capítulo 1) que incide sobre el potencial con una velocidad de grupo  $v$  en la dirección  $x$ . El paquete se mueve por efecto del campo eléctrico y tiene una energía potencial debido a la localización a lo largo de la línea de potencial constante (por la presencia del campo magnético). Tras incidir en el potencial de scattering, el paquete de onda se encontrará en un estado con la misma energía, pero alejándose del lugar del scattering. Este scattering forzosamente ha de ser "hacia adelante", en la misma dirección de incidencia, puesto que ningún otro estado "saliente" tiene la energía correcta. Esta idea se puede demostrar formalmente (Prange 1981, 1982). En presencia de varios centros de scattering el paquete avanzará sorteando las regiones donde el potencial es fuerte<sup>1</sup> (Fig. 3.2).

Analizaremos brevemente el cambio que se produce en la fase de la función de onda tras sufrir el scattering:

$$\psi_{nk}^{fin} = \psi_{nk}^{ini} e^{i\delta(k)} \quad (3.28)$$

si la fase disminuye (al aumentar  $k$ )<sup>2</sup> de forma que  $\Delta\delta(k) = 2\pi p$ , con  $p$  entero, y aplicamos condiciones de periodicidad<sup>2</sup> en  $x$ , obtenemos  $p$  soluciones menos para la

<sup>1</sup> Si pasa por debajo o por encima de estas regiones dependerá del signo de  $V_{sc}$

<sup>2</sup>  $kL + \delta(k) = 2\pi n$ , con  $n$  entero. Para cada  $n$  hay un  $k$  permitido, hay un orden natural de los estados, que coincide con el orden en que son localizados en la dirección  $y$  por el campo magnético.

función de onda saliente que las que hubiéramos obtenido si la fase no cambia. Estas soluciones “perdidas” son estados que quedan anclados en el potencial de scattering dado que el numero total de autoestados se debe conservar, son estados localizados que quedan confinados dentro de una distancia  $\ell$  del centro de scattering. La forma de estos estados dependerá de la forma concreta para el potencial de scattering que se haya considerado. Como un número negativo de estados ligados no tiene sentido, el cambio neto en la fase debe ser cero o negativo si la energía se incrementa en el rango en que el scattering sucede. Si consideramos ahora el retraso temporal del paquete de onda (construido cerca de la energía  $E_0$ ), tenemos:

$$e^{i(\delta(E)-Et)} \equiv e^{i(\delta(E_0)-E_0t)} e^{-i(E-E_0)(t-d\delta/dE)} \quad (3.29)$$

y dado que en este caso  $d\delta/dE$  es negativo si hay estados ligados, hay un “avance” temporal. Esto explica de forma intuitiva como funciona el efecto Hall cuántico. Si hay estados ligados, habrá menos estados portadores de corriente, pero el paquete de ondas aparecerá *antes* al otro lado del potencial de scattering, esto implica que aunque haya menos estados extendidos, éstos se están moviendo más rápido y portan más corriente. Los estados extendidos se mantienen en los niveles de Landau originales, apareciendo entre ellos los estados localizados ligados a las impurezas (potencial de scattering), hay también en este caso un gap de movilidad.

El tercer término,  $V_s$ , es un potencial “suave” en el sentido de que no presente fuertes variaciones:

$$|\nabla V_s| \ll \frac{\hbar\omega_c}{\ell} \quad (3.30)$$

Un potencial suave puede considerarse como un campo eléctrico local, y los electrones se moverán perpendicularmente a él. Las funciones de onda serán confinadas a una distancia del orden de  $\ell$  desde las líneas equipotenciales. Será necesario analizar la estructura de las líneas equipotenciales que genera el potencial “suave”. Dado que es suave, debe ser finito y por tanto tendrá un máximo y un mínimo con cierta separación. Las líneas equipotenciales para energías altas serán curvas cerradas alrededor de dichos máximos, mientras que para las energías bajas las curvas se cerrarán alrededor de los mínimos. En general éstas curvas cerradas serán bastante largas en relación a  $\ell$ , de forma que los argumentos semiclásicos serán válidos para discutir éste caso.

Los estados que siguen líneas equipotenciales cerradas están localizados y por tanto no pueden transportar corriente a lo largo de la muestra. Este es un tipo de localización diferente de la localización de Anderson que se encuentra para el caso con  $B=0$ . Consideramos ahora la existencia de estados extendidos, las líneas equipotenciales  $V(x,y)=\varepsilon$  serán cerradas para energías  $\varepsilon$  tanto grandes como pequeñas, sin embargo puede haber estados extendidos a lo largo de toda la muestra para al menos una energía  $\varepsilon$  (Fig. 3.3). Tenemos entonces que hay energías de Fermi para las que tendremos un gap de movilidad y otras para las que encontramos estados extendidos; de nuevo se cumplen las condiciones para que se produzca el efecto Hall cuántico.

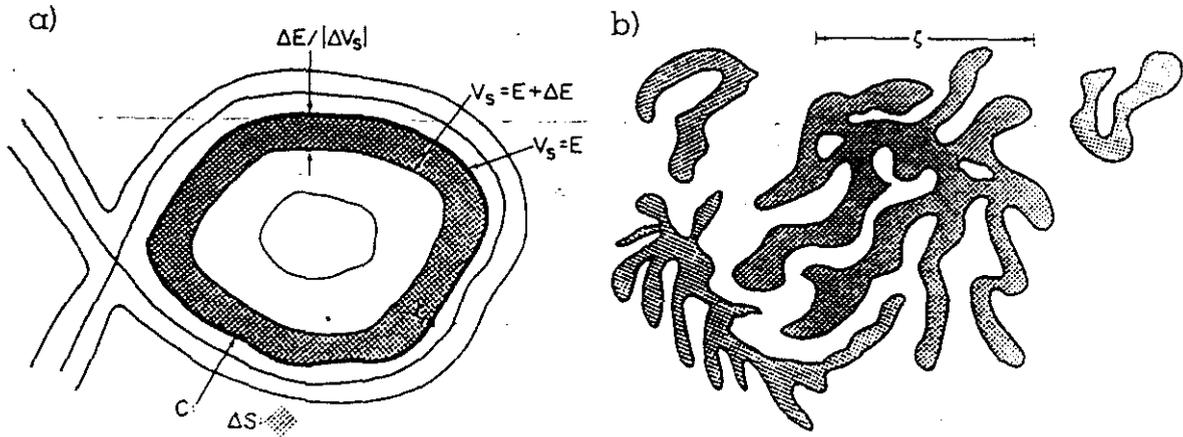


Figura 3.3: Forma del potencial suave (a) y su relación con la percolación (b).

En ausencia del campo eléctrico, la energía para la que hay estados extendidos es única, esto es consecuencia de la simetría entre  $x$  e  $y$  que asumimos para el potencial aleatorio  $V_s$ . Si una línea se extiende en la dirección  $x$ , también debe hacerlo en la dirección  $y$ , y dado que líneas equipotenciales de diferente energía no se pueden cortar nunca, es obvio que sólo puede existir una única energía para el estado extendido. La presencia del campo eléctrico rompe esta simetría e incrementa el número de líneas equipotenciales extendidas. Estos argumentos se pueden relacionar con la teoría de percolación (Trugman, 1983), consideramos la probabilidad de que  $V(x,y)=\varepsilon$  como una función de distribución  $\rho(\varepsilon)$ , continua, acotada e independiente de  $x$  e  $y$ . Si el alcance  $b$  (o correlación) del potencial  $V_s$  es finito, podemos asumir que  $\langle V_s(r)V_s(r+r') \rangle - \langle V_s^2(r) \rangle$  se desvanece rápidamente para  $r > b$ . Para campos magnéticos grandes, la densidad de estados coincide con  $\rho(\varepsilon)$ , si en la figura (3.3b) coloreamos las

áreas para las que  $V_S < E$ , entonces los estados de energía  $E$  coinciden con los bordes de las zonas coloreadas. La teoría de percolación implica entonces que hay una única energía  $E_C$  para la cual hay una región conexa de extensión infinita: esta es la energía única de los estados extendidos. Hay una longitud:

$$\xi(E) \propto |E - E_C|^{-\nu} \quad \text{para } E \rightarrow E_C \quad (3.31)$$

que describe la escala de la máxima región conexa de energía  $E$  (en dos dimensiones  $\nu=4/3$ ). Para este modelo, la longitud de localización  $\xi$  diverge a  $E_C$  como una potencia<sup>3</sup>. Los distintos modelos coinciden en que hay un único estado extendido en ausencia de campo eléctrico, introducir este campo ionizará algunos de los estados localizados y dará lugar a estados extendidos adicionales.

El potencial total que resulta de la suma de estos tres, dará lugar a una estructura de niveles que contiene un gap de movilidad entre los niveles de Landau originales (en donde se sitúan los estados extendidos), y por tanto se producirá el efecto Hall cuántico. En las heteroestructuras de semiconductores, las tres componentes del potencial existen: el potencial “débil” proviene de impurezas que están a una distancia del orden de  $\ell$  del canal bidimensional (por ejemplo: las impurezas dopantes en muestras con modulación de dopado y una capa espaciadora de ese orden). El potencial “de scattering” proviene de impurezas que se pueden encontrar en el canal bidimensional o de fuertes rugosidades de intercara. Finalmente el potencial “suave” provienen de inhomogeneidades macroscópicas en la muestra y fluctuaciones en la densidad de las impurezas dopantes a una distancia mayor que  $\ell$  del canal bidimensional.

Varios modelos para potenciales de impurezas han sido presentados. A continuación enumeramos las características principales de algunos de ellos, cuya descripción más detallada se hace en el Apéndice 6 y nos extenderemos más en la aproximación del potencial coherente (CPA) que es la que nosotros utilizaremos en el cálculo.

---

<sup>3</sup>Ono (1982) encuentra  $\xi \propto \exp(\Gamma^2/|E - E_C|^2)$  donde  $\Gamma = \hbar / \tau_0$  y  $\tau_0$  es el tiempo de scattering a campo magnético nulo.

La aproximación autoconsistente de Born (SCBA), es un desarrollo perturbativo del esquema de impurezas arriba expuesto, un modelo simplificado fué dado por Ando y Uemura (1974). Se trata de un método autoconsistente aplicado a la aproximación de Born (hasta segundo orden) para un potencial desordenado, el desorden se introduce suponiendo una distribución aleatoria de impurezas. La densidad de estados que se obtiene es un conjunto de semielipses centradas en los niveles de Landau que teníamos en ausencia de impurezas y con una anchura a la semialtura dada por  $\Gamma_n$ . Esta anchura dependerá del tipo de potencial de scattering que se considere, en el Apéndice 6 se analizan dos casos, un potencial de corto alcance, que nos dá para la anchura de los niveles la siguiente expresión (Ap. 6.10):

$$\Gamma_n^2 = \Gamma^2 = 4 \sum_{\mu} \int dz N_i^{(\mu)}(z) \frac{|V^{(\mu)}(z)|^2}{2\pi l^2} = \frac{2}{\pi} \hbar \omega_c \frac{\hbar}{\tau_0} \quad (3.32)$$

donde  $\tau_0$  es el tiempo de relajación a campo nulo, relacionamos así la anchura del nivel con su vida media. (La dependencia con el campo magnético es  $\Gamma \propto \left(\frac{B}{\mu}\right)^{1/2}$ ); si consideramos un potencial de largo alcance se obtiene otra anchura, relacionada en este caso con las fluctuaciones del potencial. El cálculo también fue efectuado por Kubo sumando diagramas para el potencial de largo alcance, obteniendo para la anchura una dependencia con las fluctuaciones del gradiente de la energía potencial local. Se puede dar una interpretación física de éstas fluctuaciones como los “saltos” del centro de coordenadas de la órbita ciclotrón debido al scattering, existe además una relación entre el radio de la órbita y el alcance del potencial.

También se han propuesto (Coleridge 1989) niveles de Landau de forma lorentziana (Ap. 6.15). Gerhardtts (1976) mediante un cálculo basado en integrales de camino, llega a la conclusión de que los niveles tienen forma gaussiana (Ap. 6.20). Mencionaremos también el modelo de conductividad dinámica de Ando (1982) donde la anchura de los niveles se relaciona con las fluctuaciones de un potencial local (Ap. 6.21), lo que introduce una asimetría en la forma de los niveles.

Aproximación del potencial coherente (CPA):

Esta es la aproximación que nosotros emplearemos en nuestro cálculo, por ello nos extenderemos más en esta sección, resaltando las implicaciones físicas de las condiciones de validez de dicha aproximación (Smrcka 1977, Isihara *et al* 1986).

Consideramos un pseudopotencial de corto alcance que representa una impureza:

$$\Delta u = u_I + |b\rangle(\varepsilon - \varepsilon_b)\langle b| + \gamma|b\rangle \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_b} \langle b| \quad (3.33)$$

donde el primer sumando indica un aumento lineal del potencial de la impureza con la energía, es decir, los electrones se acercan más a la impureza cuando aumentan su energía; el segundo sumando es el scattering resonante que se produce cuando la energía del electrón es próxima a la del estado localizado de energía  $\varepsilon_b$  indicado por  $|b\rangle$ ; y el tercero indica, mediante el parámetro  $\gamma$  la posible hibridación entre estados localizados y deslocalizados (se asume un único estado localizado para cada impureza).

Definimos:

$$\delta = \langle 0|\Delta u|0\rangle = \frac{1}{\Omega} \left[ B + A(\varepsilon - \varepsilon_b) + \frac{C}{\varepsilon - \varepsilon_b} \right] \quad (3.34)$$

donde

$$\Omega = \frac{2\pi \hbar^2}{m\varepsilon_M} \quad (3.35)$$

es el área ocupada por cada estado y  $\varepsilon_M$  es la energía máxima de la banda. Si  $\delta < 0$ , el potencial es atractivo; si  $\delta > 0$  es repulsivo.

Debemos calcular ahora la función de Green que se obtiene suponiendo esta forma para el potencial de las impurezas. Por definición:

$$G^\pm = (\varepsilon - H \pm i0)^{-1} \quad (3.36)$$

si consideramos el promedio sobre todas las posibles configuraciones de impurezas, la función de Green queda:

$$\langle G(z) \rangle = (z - H_0 - \Sigma)^{-1} \quad (3.37)$$

siendo  $H_0$  el hamiltoniano en ausencia de impurezas y  $\Sigma$  la autoenergía, que aparece al hacer el promedio (a consecuencia del scattering con las impurezas), y que podemos descomponer en dos partes:

$$\Sigma = \Delta - i\Gamma \quad (3.38)$$

donde  $\Delta$  indica un corrimiento en energía y  $\Gamma$  una anchura en energía, esta anchura nos permitirá definir una vida media de los estados, que vendrá dada por:

$$\tau = \frac{\hbar}{2\Gamma} \quad (3.39)$$

Por comodidad en el cálculo se introduce la siguiente función  $K(z)$ , que sustituirá en su manejo a las funciones de Green:

$$K(z) = \frac{\Omega}{V} \text{Tr}[G(z)] \quad (3.40)$$

con  $\Omega$  dado por la ecuación (3.35). Si descomponemos en parte real e imaginaria:

$$K = \frac{\Omega}{V} \sum_n (R_n + iF_n) \quad (3.41)$$

Consideramos ahora dos condiciones sobre las impurezas:

- Las impurezas causan estados localizados justo por debajo de la banda de conducción.
- La función de onda de los estados de impurezas (localizados) se consideran ortogonales a los estados deslocalizados.

Con estas dos condiciones podemos resolver la ecuación de Soven (1967) de forma autoconsistente para obtener la autoenergía  $\Sigma$ , a partir de la cual podremos obtener  $K(z)$ , que es equivalente a conocer la función de Green y por tanto la densidad de estados:

$$\Sigma = c\delta + \frac{c(1-c)\delta^2 K(z-\Sigma)}{1 + [\Sigma + (c-1)\delta]K(z-\Sigma)} \quad (3.42)$$

donde  $c$  es la concentración de impurezas (distribuidas al azar) y  $\delta$  es la "fuerza" del potencial de impurezas dado por la ecuación (3.34).

Podemos expresar las ecuaciones de la conductividad (Ec.3.19 y 3.20) en función de las partes real e imaginaria de  $K(z)$  y de la autoenergía  $\Sigma$ , queda:

$$\sigma_{xx} = \frac{e^2}{m} \frac{\tau}{1 + \omega_c^2 \tau^2} N_{\text{eff}} \quad (3.43)$$

$$\sigma_{xy} = -ec \frac{\partial N}{\partial B} - \omega_c \tau \sigma_{xx} \quad (3.44)$$

donde:

$$N_{\text{eff}} = -\frac{1}{\pi V} \sum_n \left[ \hbar \omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) F_n - \Gamma R_n \right] \quad (3.45)$$

es el número efectivo de electrones por unidad de área participando en el transporte, y

$$N = -\frac{1}{\pi V} \sum_n \int_{-\infty}^{\epsilon_f} F_n[\epsilon - \Sigma(\epsilon)] d\epsilon \quad (3.46)$$

es el número de estados por unidad de área por debajo de la energía de Fermi, estos estados estarán llenos.

Hasta este momento no hemos hecho ninguna restricción sobre el campo magnético, introducimos ahora las siguientes aproximaciones:

- Campos magnéticos medios o bajos:

$$\hbar \omega_c \ll \epsilon_f \quad (3.47)$$

esto indica que siempre habrá al menos un nivel de Landau por debajo del nivel de Fermi, es decir, que estaremos lejos del “límite cuántico”. También se conoce esto como “aproximación de Lifshitz-Kosevich (1955)” y que permite definir:

$$K(z - \Sigma) \equiv \frac{m \omega_c \Omega}{2\pi \hbar} \sum_{n=0}^{n_M} \frac{1}{z - \hbar \omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) - \Sigma} \quad (3.48)$$

donde:

$$n_M = \frac{\epsilon_M}{\hbar \omega_c} - \frac{1}{2} \quad (3.49)$$

es un entero que indica el nivel de Landau lleno más alto.

Con esta aproximación podemos separar en todas las cantidades consideradas una parte “suave”, que es la que tenemos en ausencia de campo magnético, y una parte “oscilatoria” que es la que aparece en presencia del campo magnético:

$$K(z - \Sigma) = K_0(z - \Sigma) + \Delta K(z - \Sigma) \quad (3.50)$$

- Si consideramos además:

$$0 \ll |z - \Sigma| \ll \varepsilon_M \quad (3.51)$$

que indica que la anchura en energía de los niveles no es tan grande como para provocar la mezcla de varias subbandas (recordemos que  $\varepsilon_M$  es la energía máxima de la subbanda), podemos expresar, separando partes real e imaginaria:

$$K_0(z - \Sigma) = R_0(z - \Delta) + iF_0(z - \Delta) \quad (3.52)$$

$$\Delta K = -\frac{2\pi i}{\varepsilon_M} \sum_{s=1}^{\infty} \exp\left[\frac{2\pi i s}{\hbar\omega_C}(z - \Sigma) - i\pi s\right] \quad (3.53)$$

y a partir de aquí podemos expresar la densidad de estados:

$$g(\varepsilon) \equiv -\frac{1}{\pi} \text{Im} K[\varepsilon - \Sigma(\varepsilon)] \quad (3.54)$$

y si separamos la parte “suave” de la “oscilatoria”:

$$\begin{cases} g_0(\varepsilon) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} K_0 = -\frac{1}{\pi} F_0 \\ \Delta g(\varepsilon) = \frac{2}{\varepsilon_M} \sum_{s=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi s}{\omega_C \tau}\right) \cos\left[\frac{2\pi s}{\hbar\omega_C}(\varepsilon - \Delta(\varepsilon)) - \pi s\right] \end{cases} \quad (3.55)$$

- Finalmente consideraremos un último grupo de aproximaciones que atañen al potencial de las impurezas y que nos permitirán aproximar las soluciones de la ecuación de Soven para la autoenergía. Estas son:

i)  $0 < \varepsilon \ll \varepsilon_M$ , lo que indica que estamos trabajando en un rango de energías lejos del máximo de la banda, lo que es una vez más indicativo de la ausencia de mezcla de subbandas. En particular, esto implicará:

$$F_0(z) \ll R_0(z) \quad (3.56)$$

ii)  $|\delta| \gg 0$ , el potencial de las impurezas, ya sea atractivo o repulsivo es relativamente fuerte. Serían impurezas “tipo delta”.

iii)  $c$  es pequeño, es decir, la concentración de impurezas es baja, lo que nos permitirá considerar:

$$c^2 \ll 1, \quad \text{y} \quad |\Sigma_0 + c\delta| \ll \delta \quad (3.57)$$

Con todo esto tenemos:

$$\Sigma = \Sigma_0 + \Delta\Sigma \quad (3.58)$$

$$\Sigma_0 = c\delta + \frac{c(1-c)\delta^2 K_0(z - \Sigma_0)}{1 + [\Sigma_0 + (c-1)\delta] K_0(z - \Sigma_0)} = \Delta_0 + i\Gamma_0 \quad (3.59)$$

$$\Delta\Sigma = \frac{c(1-c)\delta^2 \Delta K(z - \Sigma_0)}{1 + [\Sigma_0 + (c-1)\delta] \Delta K(z - \Sigma_0)} \quad (3.60)$$

Recordaremos que  $K_0 = R_0 + iF_0$ , ahora con  $F_0 \ll R_0$ , y podemos expresar:

$$\Delta_0 = -c \frac{1}{R_0(\varepsilon)} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\delta R_0(\varepsilon)}\right)} \approx -c \frac{1}{R_0(\varepsilon)} \left(1 + \frac{1}{\delta R_0(\varepsilon)} + \dots\right) \quad (3.61)$$

$$\Gamma_0 = -c \frac{F_0(\varepsilon)}{[R_0(\varepsilon)]^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\delta R_0(\varepsilon)}\right)^2} \approx -c \frac{F_0(\varepsilon)}{[R_0(\varepsilon)]^2} \left(1 + \frac{2}{\delta R_0(\varepsilon)} + \dots\right) \quad (3.62)$$

Es decir, el corrimiento de energía y el amortiguamiento son, en primera aproximación, independientes del potencial. Además se tiene:

$$\Gamma_0 = -\frac{F_0}{c} \Delta_0^2 = \frac{\pi}{c\varepsilon_M} \Delta_0^2 \quad (3.63)$$

Si consideramos la parte oscilatoria de  $\Gamma$ :

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma_0} = \frac{\Delta g}{g_0} \quad (3.64)$$

$$\tau_0 = \frac{\hbar}{2\Gamma_0} \quad (3.65)$$

y finalmente, si lo expresamos en función de los tiempos de relajación (“lenguaje” totalmente equivalente al de las anchuras  $\Gamma$ ) obtenemos:

$$\tau \equiv \tau_0 + \Delta\tau = \tau_0 \left(1 + \frac{\Delta\tau}{\tau_0}\right) = \tau_0 \left(1 - \frac{\Delta g}{g_0}\right) \quad (3.66)$$

También podemos separar parte “suave” y “oscilatoria” en la ecuación (3.65) que teníamos para  $N_{eff}$ , sustituyendo además las ecuaciones (3.81), (3.82) y (3.84) se obtiene:

$$N_{eff}(\varepsilon) = N_0(\varepsilon) + \frac{1}{\Omega} (\varepsilon - \Delta_0) \Delta g \quad (3.67)$$

donde:

$$N_0(\varepsilon) = \frac{1}{\Omega} (\varepsilon - \Delta_0) g_0(\varepsilon) \quad (3.68)$$

que expresa el número de portadores por debajo de la energía  $\varepsilon$  a campo magnético nulo.

Finalmente, sustituyendo, obtenemos:

$$N_{\text{eff}} = N_0 \left( 1 + \frac{\Delta g}{g_0} \right) \quad (3.69)$$

y si utilizamos la ecuación (3.86), podemos escribir:

$$N_{\text{eff}} \tau = N_0 \tau_0 \quad (3.70)$$

que podemos relacionar con la conductividad a campo cero dada por la relación de Drude:

$$\sigma_0 = \frac{e^2}{m} N_0 \tau_0 \quad (3.71)$$

### 3.2 El tensor de la magnetoconductividad transversa:

A partir de los resultados de la sección anterior, donde hemos establecido las bases del cálculo y las condiciones de validez, vamos a calcular el tensor de la magnetoconductividad transversa, es decir, la componente diagonal,  $\sigma_{xx}$ , y la no-diagonal,  $\sigma_{xy}$ , de la magnetoconductividad de un gas de electrones bidimensional sometido a un campo magnético perpendicular a dicho gas y a la corriente. Recordaremos brevemente resultados anteriores: el marco general es el gas bidimensional de electrones que no interaccionan entre sí y la ruptura de la simetría traslacional, bien por impurezas o por los bordes de la muestra finita. El espectro energético del gas de electrones bidimensional con un campo magnético aplicado perpendicularmente está dado por los niveles de Landau, regularmente espaciados en energía. En un cristal real, la simetría de traslación está rota por efectos del tamaño finito o la presencia de imperfecciones (estructurales o de composición). El tamaño finito del sistema modifica el espectro energético: los niveles de Landau que se encuentran por debajo del nivel de Fermi en "el volumen", aparecen al nivel de Fermi en los bordes de la muestra (Halperin 1981). Las imperfecciones tienen otros efectos en el espectro energético: algunas de ellas, como las impurezas de la región dopante, cuyo efecto se traduce en un potencial de variación suave (sección 3.1.2) modifican la forma de los niveles de Landau, éstos adquieren una anchura finita en energía, con unas "colas" que pueden prolongarse en energía e incluso provocar la mezcla de varios niveles de Landau, esto provoca también el levantamiento de la alta degeneración que teníamos inicialmente en los niveles. Impurezas cargadas que se encuentran en la capa de inversión o los grandes defectos de intercara provocan un potencial de fuerte variación cuyos efectos son similares a los de un borde (topológicamente son equivalentes): los niveles de Landau "de volumen" aparecen al nivel de Fermi alrededor de esas imperfecciones (Joynt y Prange 1984). La estructura de niveles de Landau al nivel de Fermi es complicada, todos éstos niveles contribuyen a la magnetoconductividad, aunque su contribución es diferente. Será necesario distinguir entre estados extendidos y localizados. Esto será posible gracias a su diferente comportamiento con la temperatura, lo que además permitirá contrastar el cálculo con resultados experimentales y tratar de discernir así la contribución de unos y otros.

Partimos de la expresiones dadas en la sección anterior (Ec. 3.43 y 3.44) que reescribimos a continuación, descomponiendo  $\sigma_{xy}$  en dos contribuciones:

$$\sigma_{xx} = \frac{N_{eff} e^2 \tau}{m^*} \frac{1}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \quad (3.72)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xy}^I + \sigma_{xy}^{II} \quad (3.73)$$

$$\sigma_{xy}^I = -\omega_c \tau \sigma_{xx} \quad (3.74)$$

$$\sigma_{xy}^{II} = -e \frac{\partial N}{\partial B} \quad (3.75)$$

donde  $\sigma_{xx}$  and  $\sigma_{xy}$  son las componentes diagonal y no-diagonal de la magnetoconductividad transversa respectivamente,  $N_{eff}$  es la densidad efectiva de electrones participando en el transporte,  $\tau$  el tiempo de relajación al campo magnético aplicado  $B$  y  $N$  la densidad de electrones con energías por debajo del nivel de Fermi, que viene dada por:

$$N = \int_0^{E_F} g(E) dE \quad (3.76)$$

Siguiendo el argumento que ya en 1965 propuso Pippard, y que ha sido desarrollado, dentro de la aproximación CPA en la sección 3.1.2, podemos interpretar los resultados que obtuvimos indicando que la probabilidad de dispersión es proporcional al número de estados en los cuales el electron puede ser dispersado, tenemos entonces que  $1/\tau$  y  $N$  son proporcionales a la densidad de estados  $g(E_F)$  al nivel de Fermi. A temperatura finita podemos reescribir las ecuaciones (3.66) y (3.69) de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_0} \frac{\langle g(E_F) \rangle}{g_0} \quad (3.77)$$

$$N_{eff} = N_0 \frac{\langle g(E_F) \rangle}{g_0} \quad (3.78)$$

donde  $\tau_0$ ,  $N_0$  y  $g_0$  son respectivamente el tiempo de relajación, la densidad de electrones y la densidad de estados a campo magnético nulo y  $\langle g(E_F) \rangle$  es la ocupación de la densidad de estados al nivel de Fermi para una temperatura dada. Entonces, para la componente longitudinal tenemos:

$$\sigma_{xx} = \sigma_0 \frac{1}{1 + \omega_c^2 \tau_0^2 \left( \frac{\langle g(E_F) \rangle}{g_0} \right)^{-2}} \quad (3.79)$$

$$\sigma_0 = \frac{N_0 e^2 \tau}{m^*} \quad (3.80)$$

Donde  $\sigma_0$  es la magnetoconductividad en ausencia de campo magnético y  $\omega_c = eB/m^*$  es la frecuencia ciclotrón. Para la componente transversal:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xy}^I + \sigma_{xy}^{II} \quad (3.81)$$

$$\sigma_{xy}^I = -\omega_c \tau_0 \left( \frac{\langle g(E_F) \rangle}{g_0} \right)^{-1} \sigma_{xx} \quad (3.82)$$

$$\sigma_{xy}^{II} = -e \frac{\partial}{\partial B} \int_0^{E_F} g(E) dE \quad (3.83)$$

Hemos expresado  $\sigma_{xx}$  y  $\sigma_{xy}^I$  como función de la ocupación de la densidad de estados a  $E_F$ . Sin embargo,  $\sigma_{xy}^{II}$  está dado por una función de la integral de  $g(E)$  para todos los niveles por debajo de  $E_F$ . Por ello debemos estudiar con más detalle la densidad de estados.

### 3.2.1 La densidad de estados:

La forma habitual de los niveles de Landau para metales tridimensionales y semiconductores degenerados es una Lorentziana de anchura  $\Gamma$  a la semialtura. Para los electrones de un gas de electrones bidimensional, el comportamiento es diferente. Ando *et al.* (1975, 1982) han estudiado los estados electrónicos del gas de electrones bidimensional en presencia de un campo magnético perpendicular usando la aproximación autoconsistente de Born (SCBA) y han encontrado una densidad de estados donde cada nivel de Landau tiene una forma semi-elíptica, con un ancho que depende fuertemente del potencial de scattering al que están sometidos los electrones. Gerhardt (1975a y b, 1976), con un método de cumulantes obtuvo niveles de forma gaussiana; ésta aproximación tiene en cuenta efectos de segundo y tercer orden y no causa el abrupto corte de la forma semi-elíptica, poco justificable físicamente. Más recientemente, Raikh y Shahbazyan (1993) han estudiado la densidad de electrones para altos niveles de Landau en un campo magnético perpendicular y un potencial aleatorio suave; si el radio de correlación del potencial aleatorio  $R_c$  es mayor que la longitud magnética  $l = (\hbar/eB)^{1/2}$ , la densidad de estados es un sistema de picos gaussianos:

$$g(E) = \frac{1}{2\pi l^2} \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Gamma(E)} \exp\left(-\frac{(E - E_n)^2}{2\Gamma^2(E)}\right) \quad (3.84)$$

donde  $\Gamma(E)$  es la anchura total de los niveles a mitad de la altura de los picos gaussianos (FWHM, sus siglas en inglés). Esta anchura se puede expresar en función de un tiempo característico del problema,  $\tau_q$ , que es la vida media del nivel en cuestión y que llamaremos "tiempo cuántico" para distinguirlo del "tiempo de transporte",  $\tau_0$ , parámetro semiclassical que hemos estado manejando en las secciones anteriores. La relación entre la anchura de los niveles gaussianos y el tiempo cuántico viene dada por:

$$\Gamma = \frac{\hbar}{2\sqrt{2}\tau_q} \quad (3.85)$$

Reescribimos  $g(E)$  usando la fórmula de la suma de Poisson (Apéndice 4):

$$g(E) = \frac{m^*}{2\pi \hbar^2} \left\{ 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \cos \left[ 2\pi p \left( \frac{E}{\hbar\omega_c} - \frac{1}{2} \right) \right] R_{\Gamma,p} \right\} \quad (3.86)$$

Donde  $R_{\Gamma,p}$ , el "término de anchura" viene dado, para los niveles gaussianos<sup>1</sup>, por:

$$R_{\Gamma,p} = \exp\left(-\frac{2\pi^2 \Gamma^2(E) p^2}{\hbar^2 \omega_c^2}\right) \quad (3.87)$$

Todavía no hemos considerado el spin del electrón. Tomarlo en consideración supone considerar una amplitud neta en la ecuación (3.86), que es la amplitud original de cada término oscilatorio multiplicada por el factor de reducción  $R_{s,p}$ :

$$R_{s,p} = \cos\left(\frac{1}{2} \pi p g \frac{m^*}{m_0}\right) \quad (3.88)$$

donde  $g$  es el factor de "spin-splitting" y  $p$  es el índice del armónico, con esto obtenemos:

$$g(E) = \frac{m^*}{2\pi \hbar^2} \left\{ 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \cos \left[ 2\pi p \left( \frac{E}{\hbar\omega_c} - \frac{1}{2} \right) \right] \exp\left(-\frac{2\pi^2 \Gamma^2(E) p^2}{\hbar^2 \omega_c^2}\right) \cos\left(\frac{1}{2} \pi p g \frac{m^*}{m_0}\right) \right\} \quad (3.89)$$

Hasta aquí el cálculo ha sido hecho a temperatura cero, sin embargo cuando obtenemos resultados experimentales siempre lo hacemos a una temperatura distinta de cero, por tanto debemos introducir los efectos de temperatura en nuestro cálculo. Es ahora cuando

<sup>1</sup> esta notación permite generalizar fácilmente a otros casos, por ejemplo, para picos lorentzianos como los propuestos por Coleridge (1989, Apéndice 3), tendríamos:

$$R_{\Gamma,p} = \exp\left(-\frac{2\pi^2 \Gamma p}{\hbar\omega_c}\right)$$

donde  $\Gamma$  es la semialtura a la semianchura (HWHM) del pico lorentziano.

es necesario distinguir entre electrones localizados y extendidos, ya que su comportamiento con la temperatura es diferente.

Para electrones extendidos a temperatura finita  $T$ , la probabilidad de ocupación de un estado de energía  $E$  viene dada por la función de Fermi,  $f(E)$  y la magnetoconductividad a temperatura finita está relacionada con aquella a temperatura cero mediante:

$$\sigma_{ij}(B, T, E_F) = - \int_0^\infty \frac{\partial f(E)}{\partial E} \sigma_{ij}(B, 0, E) dE \quad (3.90)$$

A partir de esta integración y agrupando las constantes con ayuda de la siguiente relación:

$$\frac{e^2 2E_F}{h \hbar \omega_c} = \frac{e^2 2\hbar^2 \pi n m^*}{h m^* \hbar e B} = \frac{en}{B} = \frac{en}{B} \frac{e\tau_0/m^*}{e\tau_0/m^*} = \frac{\sigma_0}{\omega_c \tau_0} \quad (3.91)$$

obtenemos para cada componente del tensor de magnetoconductividad:

$$\sigma_{xx}(B, T, E_F) = \sigma_0 \frac{1}{1 + \omega_c^2 \tau_0^2 \left( \frac{\langle g(E_F) \rangle}{g_0} \right)^{-2}} \quad (3.92)$$

$$\sigma_{xy}^I(B, T, E_F) = - \frac{e^2 2E_F}{h \hbar \omega_c} \frac{(\omega_c \tau_0)^2 \langle g(E_F) \rangle / g_0}{\left[ \langle g(E_F) \rangle / g_0 \right]^2 + (\omega_c \tau_0)^2} \quad (3.93)$$

donde hemos expresado  $\sigma_{xx}(B, T, E_F)$  y  $\sigma_{xy}^I(B, T, E_F)$  como función de  $\langle g(E_F) \rangle$  dado por:

$$\frac{\langle g(E_F) \rangle}{g_0} = 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \cos \left[ 2\pi p \left( \frac{E_F}{\hbar \omega_c} - \frac{1}{2} \right) \right] \times \exp \left( - \frac{2\pi^2 \Gamma^2(E_F) p^2}{\hbar^2 \omega_c^2} \right) \frac{2\pi^2 p k_B T / \hbar \omega_c}{\sinh(2\pi^2 p k_B T / \hbar \omega_c)} \cos \left( \frac{1}{2} \pi p g \frac{m^*}{m_0} \right) \quad (3.94)$$

donde  $\langle g(E_F) \rangle$  es la ocupación de los estados a temperatura finita para los electrones extendidos en niveles de Landau Gaussianos, teniendo en cuenta la degeneración de spin. La temperatura introduce en cada término oscilatorio de  $g(B, T, E_F)$  o  $\sigma_{xy}^{II}(B, T, E_F)$ , el factor de reducción  $R_{T,p}$ :

$$R_{T,p} = \frac{2\pi^2 p k_B T / \hbar \omega_c}{\sinh(2\pi^2 p k_B T / \hbar \omega_c)} \quad (3.95)$$

Vemos que  $\sigma_{xx}$  y  $\sigma_{xy}^I$  son funciones de la ocupación de la densidad de estados al nivel de Fermi y de las constantes  $N_0$  y  $\tau_0$ . Sin embargo,  $\sigma_{xy}^{II}$  considera la densidad de estados para

todas las energías por debajo del nivel de Fermi, esto se debe a la ruptura de la invariancia de traslación: los niveles de Landau por debajo del nivel de Fermi, que no deberían contribuir al transporte, sí lo hacen, ya que en los bordes de la muestra aparecen al nivel de Fermi. Es decir, los niveles de volumen bajo  $E_F$  se “recuperan” a  $E_F$  en los bordes de la muestra: son los llamados estados de borde, su contribución al transporte queda recogida en el término  $\sigma_{xy}^H$ .

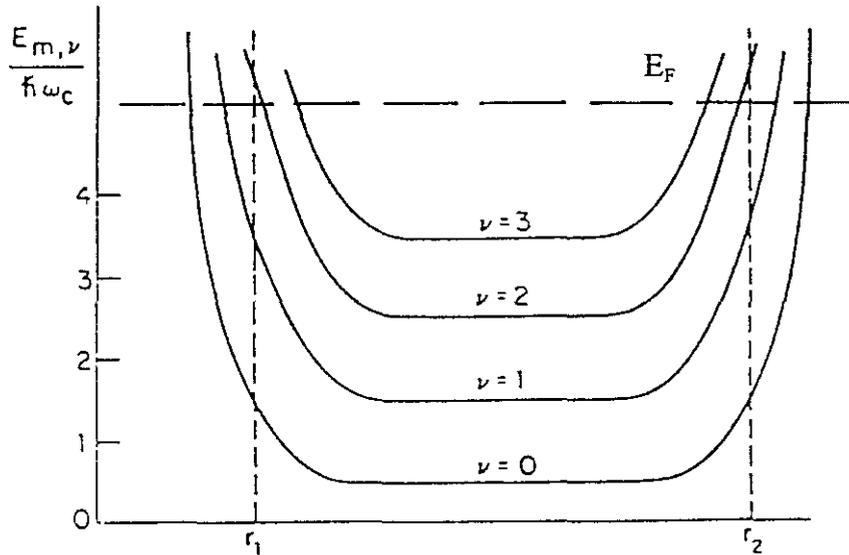


Figura 3.4: Los estados de borde

En el cálculo es necesario resolver la integral de la ecuación (3.83) con la densidad de estados dada por la ecuación (3.89) tomando  $\Gamma$  como una constante durante la integración. Después introducimos la temperatura como indica la ecuación (3.90), obtenemos  $\sigma_{xy}^H$  como suma de tres términos:

$$\sigma_{xy}^H(B, T, E_F) = \sigma_{xy}^{H1} + \sigma_{xy}^{H2} + \sigma_{xy}^{H3} \quad (3.96)$$

donde:

$$\sigma_{xy}^{H1} = \frac{e^2}{h} \sum_{p=1}^{\infty} R_{\Gamma,p} R_{s,p} R_{T,p} \frac{4E_F}{\hbar\omega_c} \cos \left[ 2\pi p \left( \frac{E_F}{\hbar\omega_c} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (3.97)$$

$$\sigma_{xy}^{H2} = -\frac{e^2}{h} \sum_{p=1}^{\infty} R_{\Gamma,p} R_{s,p} R_{T,p} \frac{2}{\pi p} \operatorname{sen} \left[ 2\pi p \left( \frac{E_F}{\hbar\omega_c} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (3.98)$$

$$\sigma_{xy}^{H3} = -\frac{e^2}{h} \hbar\omega_c \sum_{p=1}^{\infty} R_{s,p} R_{T,p} \frac{\partial R_{\Gamma,p}}{\partial (\hbar\omega_c)} \frac{2}{\pi p} \operatorname{sen} \left[ 2\pi p \left( \frac{E_F}{\hbar\omega_c} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (3.99)$$

El primer término,  $\sigma_{xy}^{II1}$ , puede expresarse en función de la fluctuación<sup>2</sup>  $\langle \Delta g(E_F) \rangle$  de la ocupación de la densidad de estados al nivel de Fermi:

$$\sigma_{xy}^{II1} = \frac{e^2}{h} \frac{2E_F}{\hbar\omega_c} \frac{\langle \Delta g(E_F) \rangle}{g_0} \quad (3.100)$$

el segundo término  $\sigma_{xy}^{II2}$  como una función de la fluctuación del número de partículas  $\delta n$ :

$$\sigma_{xy}^{II2} = -\frac{e}{B} \delta n \quad (3.101)$$

donde  $\delta n$  viene dado por:

$$\delta n = \frac{eB}{h} \sum_{p=1}^{\infty} R_{\Gamma,p} R_{s,p} R_{T,p} \frac{2}{\pi p} \operatorname{sen} \left[ 2\pi p \left( \frac{E_F}{\hbar\omega_c} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (3.102)$$

y el tercer término está relacionado con la variación de la forma de los niveles de Landau. Para niveles de Landau gaussianos:

$$\frac{\partial R_{\Gamma,p}}{\partial (\hbar\omega_c)} = \frac{2\pi^2 p^2}{(\hbar\omega_c)^3} \left( 2\Gamma^2 - \hbar\omega_c \frac{\partial \Gamma^2}{\partial (\hbar\omega_c)} \right) \quad (3.103)$$

Recordaremos aquí que tenemos dos tiempos característicos:  $\tau_0$ , el tiempo de transporte a campo magnético nulo y  $\tau_q$ , el tiempo cuántico. Ambos tienen un significado diferente,  $\tau_q$  está dado directamente por el scattering total, mientras que  $\tau_0$  es este scattering promediado a todos los ángulos. Ambos serán en general diferentes y no podrán identificarse entre sí (Coleridge, 1989). La anchura de los niveles, relacionada con  $\tau_q$ , podrá depender del campo magnético, esta dependencia puede ser de muchos tipos y será necesario contrastarla experimentalmente. Exponemos a continuación algunas de las posibles dependencias:

### 3.2.2 Forma de los niveles de Landau:

#### Anchura de los niveles constante:

La hipótesis más simple es suponer que ambos tiempos son iguales:  $\tau_0 = \tau_q$ . Esta es una fuerte restricción, ya que experimentalmente se ha comprobado (Coleridge 1989, 1990, 1991) que pueden diferenciarse hasta en un orden de magnitud. Para los niveles de Landau

<sup>2</sup> Esta fluctuación se define mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{\langle g(E_F) \rangle}{g_0} = 1 + \frac{\langle \Delta g(E_F) \rangle}{g_0}$$

lorentzianos se tiene una anchura independiente del campo magnético, en este caso, tenemos la relación:

$$\Gamma = \frac{\hbar}{2\pi \tau_q} \quad (3.104)$$

*Anchura depende del campo magnético según Ando:*

Ando (1982) ha mostrado que  $\Gamma$  depende del alcance del potencial de scattering, para potenciales de corto alcance, propone (ver Ec. 3.32 y Apéndice 6, ecuación Ap.6.10):

$$\Gamma^2 = \frac{2\hbar}{\pi \tau_0} \hbar \omega_c \quad (3.105)$$

sin embargo, para potenciales de largo alcance,  $\Gamma$  es independiente del campo magnético.

### 3.2.3 El límite de altas temperaturas:

Podemos tomar el límite de altas temperaturas en las expresiones de la magnetoconductividad:

$$\sigma_{xx}^0 = \frac{e^2}{h} \frac{2E_F}{\hbar \omega_c} \frac{\omega_c \tau_0}{1 + (\omega_c \tau_0)^2} \quad (3.106)$$

$$\sigma_{xy}^0 = -\frac{e^2}{h} \frac{2E_F}{\hbar \omega_c} \frac{(\omega_c \tau_0)^2}{1 + (\omega_c \tau_0)^2} \quad (3.107)$$

que son los valores semiclásicos que denotaremos con el superíndice "0".

Destacaremos que la contribución semiclásica de  $\sigma_{xy}^H$  es nula:

$$\sigma_{xy}^{H0} = 0 \quad (3.108)$$

lo que indica que no hay contribución de los estados de borde a alta temperatura. Podemos escribir:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xy}^0 + \sigma_{xy}^1 \quad (3.109)$$

donde  $\sigma_{xy}^0$  y  $\sigma_{xy}^1$  son la componente no diagonal de la magnetoconductividad y su valor semiclásico respectivamente. Si definimos  $\sigma_{xy}^1$  como su diferencia, obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xy}^1 = & -\frac{e^2}{h} \sum_{p=1}^{\infty} R_{\Gamma,p} R_{s,p} R_{T,p} \frac{2}{\pi p} \operatorname{sen} \left[ 2\pi p \left( \frac{E_F}{\hbar\omega_c} - \frac{1}{2} \right) \right] \\
 & - \frac{e^2}{h} \hbar\omega_c \sum_{p=1}^{\infty} R_{s,p} R_{T,p} \frac{\partial R_{\Gamma,p}}{\partial (\hbar\omega_c)} \frac{2}{\pi p} \operatorname{sen} \left[ 2\pi p \left( \frac{E_F}{\hbar\omega_c} - \frac{1}{2} \right) \right] \\
 & - \frac{e^2}{h} \frac{E_F}{\hbar\omega_c} \left[ \frac{(\omega_c \tau_0)^2 + \left( \frac{\langle g(E_F) \rangle}{g_0} \right)^2 - \left( \frac{\langle g(E_F) \rangle}{g_0} \right)^3}{(\omega_c \tau_0)^2 + \left( \frac{\langle g(E_F) \rangle}{g_0} \right)^2} - \frac{(\omega_c \tau_0)^2}{1 + (\omega_c \tau_0)^2} \right]
 \end{aligned} \tag{3.110}$$

El primer término de esta expresión está relacionado con la fluctuación del número de electrones, siendo el resto una pequeña corrección. Así que podemos ver  $\sigma_{xy}$  como la suma de un término semiclásico  $\sigma_{xy}^0$  con un número dado de electrones y un término  $\sigma_{xy}^1$  que es la fluctuación del número de electrones más una pequeña corrección:

$$\sigma_{xy}^1 = -\frac{e}{B} \delta n + \dots \tag{3.111}$$

### 3.2.4 Contribución de los estados localizados:

Hasta ahora únicamente hemos considerado estados extendidos, cuyo comportamiento con la temperatura es el dado por la ecuación (3.95). Si solamente consideramos esta contribución al cálculo de las magnetoconductividades a temperatura distinta de cero, estaremos cometiendo un error significativo que se pondrá de manifiesto cuando comparemos con resultados experimentales. Como veremos, aparece una desviación sistemática de los resultados (capítulo 6) en aquellas partes en que la contribución al transporte de los estados localizados es más significativa: las “colas” de los niveles.

Para los electrones localizados el comportamiento frente a la temperatura es diferente y depende del rango de temperatura considerado. Para poder obtener su contribución a la dependencia con la temperatura de la magnetoconductividad es necesario incluir la aportación de electrones localizados a la densidad de estados y entonces introducir los factores de temperatura correspondientes.

Los resultados experimentales obtenidos con técnicas termodinámicas en el equilibrio indican que los niveles de Landau tienen forma gaussiana con un fondo más o menos plano que contiene un número significativo de estados, (Eisenstein *et al* 1985, 1986, Goodall *et al* 1985). La forma de dicho fondo se puede ajustar mediante distintas funciones: constante, sinusoidal, sucesión de gaussianas (este caso particular se desarrolla más en el Apéndice 5, en el que a cada nivel de Landau se le asocian unas gaussianas "satélite", avanzada y retardada respecto al nivel central, cuya superposición constituye un fondo más o menos plano que se ajusta bastante a los resultados experimentales).

Consideramos ahora la ocupación de los niveles de Landau para un campo magnético, una temperatura y un nivel de Fermi determinados, es decir,  $g(B, T, E_F)$ . Laughlin (1981), en su interpretación del efecto Hall cuántico introduce un "gap" de movilidad, lo que implica suponer una densidad de estados con dos tipos de electrones: extendidos y localizados. Para poder calcular la magnetoconductividad debemos determinar la ocupación de la densidad de estados de manera que el carácter extendido o localizado de los electrones sea tenido en cuenta. Tenemos:

$$\langle g(E) \rangle = \langle g_e(E) \rangle + \langle g_l(E) \rangle \quad (3.112)$$

donde  $g_e(E)$  y  $g_l(E)$  son la densidad de estados para electrones extendidos y localizados respectivamente. (En el Apéndice 8 se asocia la gaussiana central del nivel de Landau como la parte de los electrones extendidos y los satélites avanzados y retardados como la parte de los localizados).

Para los estados extendidos a temperatura finita, la probabilidad de ocupación de un estado de energía  $E$  está dado por la distribución de Fermi-Dirac y el efecto de temperatura consiste en introducir el factor de reducción  $R_{T,p}$  (Ec. 3.95) en la parte de la densidad de estados correspondiente a los electrones extendidos,  $g_e(E)$ . Este resultado es el que obtuvimos al comienzo de la sección, cuando sólo estábamos considerando electrones extendidos.

Ahora ya podemos abordar el problema de la temperatura para los electrones localizados, estudiando qué factor dependiente de la temperatura debemos introducir en la parte de la densidad de estados correspondiente a los electrones localizados,  $g_l(E)$ .

El problema es complejo, ya que hay diversos comportamientos según sea el rango de temperaturas que estemos considerando. Para poder explicar nuestros resultados experimentales, obtenidos para temperaturas mayores que 1.5K, consideramos un mecanismo de "variable range hopping" ("salto de rango variable") para la contribución a la magnetoconductividad de los electrones localizados. Si tomamos la ley de Mott (1979,1990) tenemos:

$$\sigma_{ij}(T) = S_T \sigma_{ij}(0) \quad (3.113)$$

donde  $\sigma_{ij}(0)$  es la magnetoconductividad a temperatura cero y

$$S_T = e^{-(T_0/T)^{1/3}} \quad (3.114)$$

$T_0$  es la temperatura de activación y el coeficiente exponencial  $1/3$  es válido para electrones del gas bidimensional. Hay otros posibles mecanismos de transporte entre estados localizados, como transporte activado, percolación, etc. , la elección dependerá del rango de temperaturas considerado y sobre todo de su efectividad para ajustar los resultados experimentales.

Para la ocupación de la densidad de estados por los electrones localizados tenemos:

$$\langle g_l(B, T, E) \rangle = S_T g_l(E) \quad (3.115)$$

La ocupación total de la densidad de estados teniendo en cuenta los electrones extendidos y localizados es:

$$\langle g(B, T, E) \rangle = \langle g_e(B, T, E) \rangle + \langle g_l(B, T, E) \rangle \quad (3.116)$$

con esta ocupación de la densidad de estados "total" podemos calcular de nuevo el tensor de magnetoconductividad como se hizo en la sección 3.2.1.

Es la comparación entre los resultados teóricos y los experimentales para distintos rangos de temperatura lo que permitirá obtener una conclusión respecto a las dos cuestiones que quedan abiertas: primero, la elección de una forma correcta para la contribución de los estados localizados a la densidad total de estados y segundo, establecer cuál es el mecanismo de transporte entre estados localizados que se produce a cada rango de temperatura.

### 3.3 Resultados del cálculo:

Con el objetivo de contrastar la validez del modelo teórico, hemos realizado una serie de cálculos numéricos. En general, y salvo los casos en que se indica explícitamente, los valores utilizados han sido los siguientes: el número de portadores  $n_e=8 \cdot 10^{11} \text{cm}^{-2}$ , relativamente bajo, con una masa efectiva  $m^*=0.067m_0$ , factor giromagnético  $g=2$  y temperatura  $T=1.2\text{K}$ . Para la dependencia de la anchura con el campo magnético hemos tomado la dada por Ando<sup>1</sup>. Los tiempos de relajación utilizados (y las movilidades correspondientes) vienen dados en la Tabla 3.1, valores que van desde una movilidad muy baja, que correspondería a una muestra mediocre hasta una muy alta, que sería la “muestra ideal”.

$\tau_0$ (ps)	$\mu$ ( $\text{cm}^2/\text{Vs}$ )
0.5	13 126
2	52 504
8	210 016
32	840 066
128	3 360 266

**Tabla 3.1**

En una primera serie de gráficos mostramos los resultados que obtenemos de forma general, para un campo magnético que va de 0 a 12T, rango asequible en nuestros experimentos. Posteriormente estudiaremos algunos detalles: la resolución de los plateaus del efecto Hall cuántico en un caso ideal, es decir, una hipotética muestra de alta movilidad y con un número no muy alto de portadores, veremos cómo la compensación de distintos términos oscilatorios dan lugar al plateau. También mostramos cálculos simulando el tipo de muestras que tenemos a nuestra disposición para medir experimentalmente, con una movilidad no demasiado alta y gran número de portadores, la calidad de los plateaus se reduce, pero sin embargo podremos aproximar nuestros resultados experimentales y extraer información de ellos. Finalmente mostramos algunos cálculos del comportamiento de la magnetoconductividad con la temperatura.

<sup>1</sup> Posteriormente se verá que esto está justificado por la dependencia que se obtiene ajustando las anchuras que obtenemos experimentalmente. Se puede hacer el cálculo con otras dependencias, por ejemplo lorentzianas para los niveles, pero no añade nada cualitativamente nuevo a los resultados.

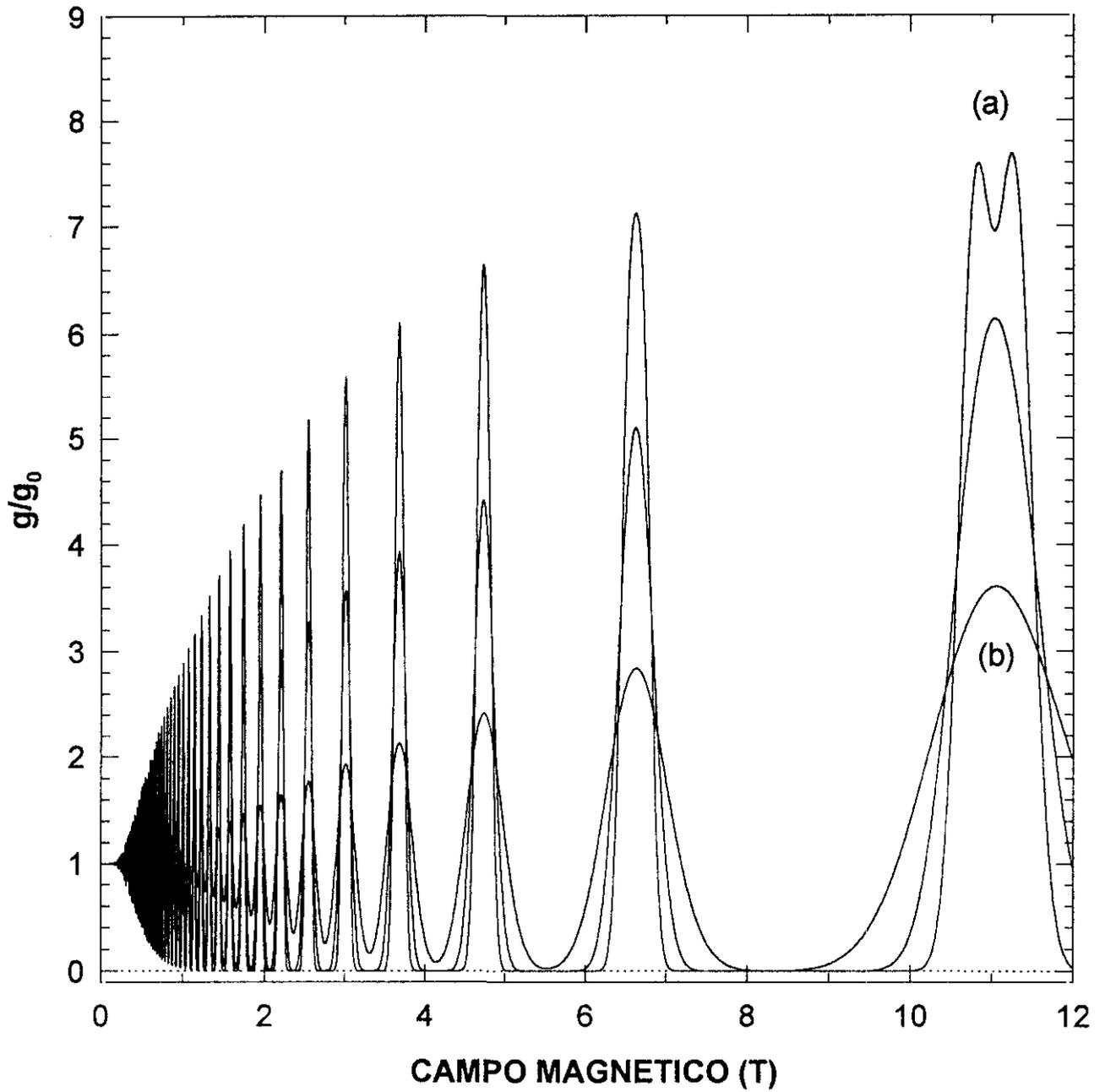


Figura 3.5: Forma de la densidad de estados, con movilidad alta (a) y baja (b)

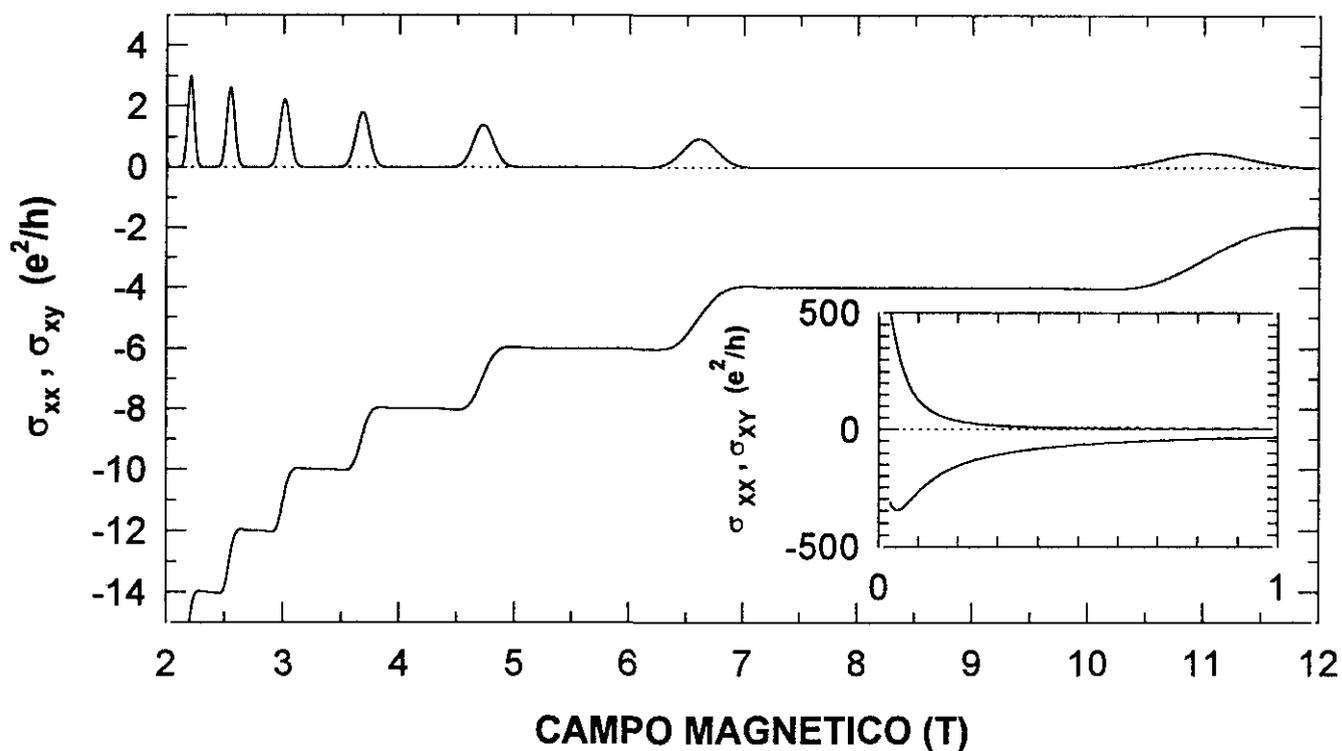


Figura 3.6:  $\sigma_{xx}$  y  $\sigma_{xy}$  en función del campo magnético para la densidad de estados de la figura (3.5). En el recuadro: detalle a bajo campo.

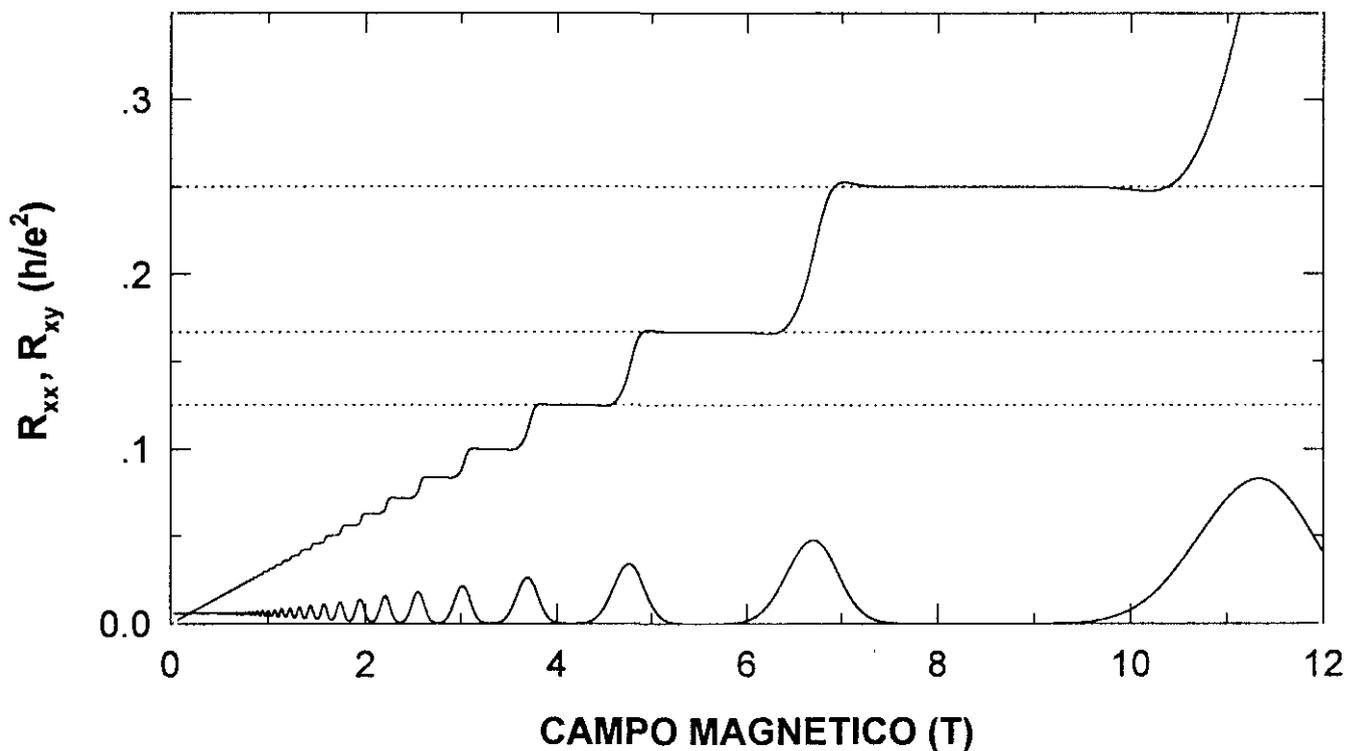


Figura 3.7: Resistencias  $R_{xx}$  y  $R_{xy}$  obtenidas por inversión de la figura 3.6.

En la figura (3.5) se muestra la forma de la densidad de estados para dos movilidades diferentes. En la parte superior, una movilidad alta, se aprecia que las oscilaciones comienzan a campo magnético más bajo e incluso el spin-splitting del último nivel de Landau ( $i=4$ ) empieza a dibujarse. Por el contrario, si la movilidad es más baja, las oscilaciones comienzan a más alto campo y no se aprecia el spin-splitting. Destacaremos que en cualquier caso, la densidad de estados no se hace nula entre los sucesivos niveles de Landau.

Las componentes diagonal y no diagonal de la magnetoconductividad transversa se muestra en la figura (3.6), la inversión de estos resultados para una hipotética muestra cuya relación largo/ancho ( $L/W$ ) es 3.5 aparece en la figura (3.7). Los plateaus que se obtienen en  $\sigma_{xy}$  ( $R_{xy}$ ) se corresponden con mínimos de  $\sigma_{xx}$  ( $R_{xx}$ ), que para altos campos magnéticos se hacen eventualmente nulos en un intervalo finito, para éstos intervalos, la densidad de estados muestra mínimos que en ningún caso llegan a anularse. Se aprecia también el característico mínimo de  $\sigma_{xy}$  para bajo campo, que se debe a un efecto de la localización débil (ver el recuadro pequeño de la figura).

Mostramos en las siguiente figuras algunos detalles de interés:

### 3.3.1 Resolución de los plateaus del efecto Hall cuántico:

Dado que la resolución experimental que se ha alcanzado en los plateaus del efecto Hall cuántico en medidas metrológicas es mejor que  $10^{-7}$ , podemos contrastar la validez de nuestro modelo calculando la resolución numérica de los plateaus. En la figura (3.8a) se muestra en detalle el plateau  $i=4$  para distintas movilidades, se aprecia que cuanto más alta es la movilidad, el plateau es más extenso, alcanzando la máxima resolución en un intervalo cada vez mayor del campo magnético. La mejor resolución alcanzada (para  $\tau_0=128ps$ ) es  $\Delta\sigma_{xy}/\sigma_{xy} = 2 \cdot 10^{-6}$  en un intervalo de campo magnético de  $\Delta B = 0.706T$ , que se corresponde con un mínimo de  $\sigma_{xx}$  para el que  $\sigma_{xx} < 10^{-12}\Omega^{-1}$ ; si consideramos una resolución de  $\Delta\sigma_{xy}/\sigma_{xy} = 10^{-3}$ , la anchura del plateau es entonces de  $\Delta B = 1.705T$ . De la misma manera, la anchura del plateau  $i = 6$  es  $\Delta B = 0.16T$  con  $\Delta\sigma_{xy}/\sigma_{xy} = 2 \cdot 10^{-6}$  y  $\Delta B = 0.58T$  con  $\Delta\sigma_{xy}/\sigma_{xy} = 10^{-3}$ . El correspondiente plateau en  $R_{xy}$  se muestra en la figura (3.8b).

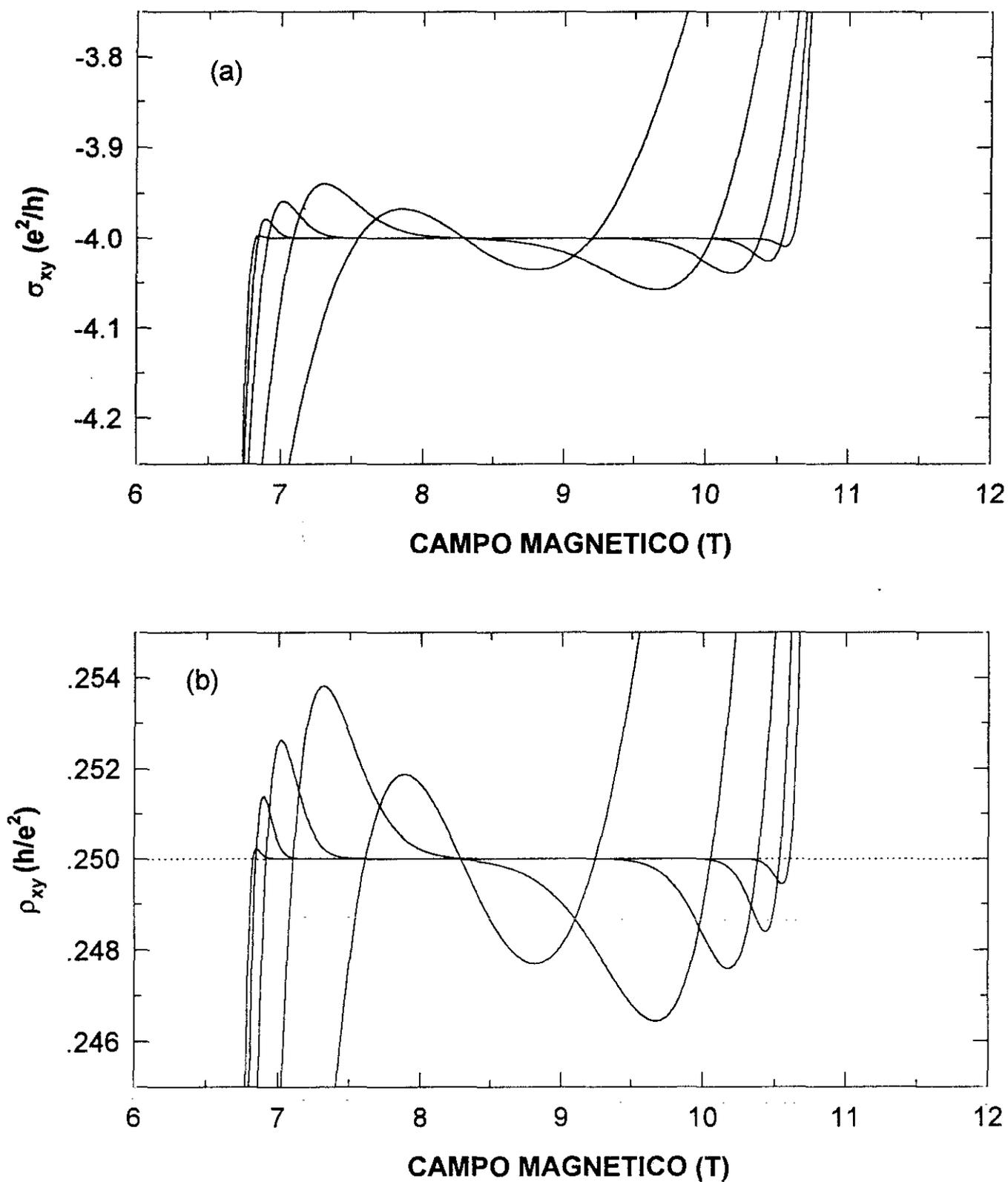


Figura 3.8: Detalle del plateau  $i=4$  en  $\sigma_{xy}$  (a) y  $R_{xy}$  (b) para varios  $\tau_0$

### 3.3.2 Los términos oscilatorios de $\sigma_{xy}$ :

Analizaremos en detalle cómo se forma el plateau en  $\sigma_{xy}$  a partir de los distintos términos oscilatorios que aparecen en las ecuaciones (3.93) y (3.96) a (3.99). En la figura (3.10) mostramos los términos  $\sigma_{xy}^I$  y  $\sigma_{xy}^{II}$  y cómo dan lugar a los plateaus, su forma cerca de los extremos así como su extensión depende fuertemente de los detalles de las oscilaciones. No es así en la parte central del plateau: su valor y estabilidad es una propiedad fuerte del modelo, que no depende de los detalles de la oscilación o de la variación de los parámetros. En la figura (3.11) aparece la descomposición de  $\sigma_{xy}^{II}$  en los tres términos  $\sigma_{xy}^{III}$ ,  $\sigma_{xy}^{II2}$ ,  $\sigma_{xy}^{III3}$ . Finalmente, mostramos (Fig. 3.9) el comportamiento semiclásico, que superpuesto al cuántico, aparece correcto a bajo campo, pero necesita una fuerte corrección a alto campo (dado por las ecuaciones (3.115) y (3.116)).

Recordaremos aquí, a la vista de las figuras, el significado físico que tiene cada uno de los términos oscilatorios en que se descompone  $\sigma_{xy}$ . Obteníamos  $\sigma_{xx}$  como una función de la ocupación de la densidad de estados al nivel de Fermi. Sin embargo  $\sigma_{xy}$  tiene dos términos, el primero,  $\sigma_{xy}^I$ , es un término semiclásico y da la contribución de los electrones de volumen al nivel de Fermi, el segundo término,  $\sigma_{xy}^{II}$  es función de la ocupación de la densidad de estados por debajo del nivel de Fermi, éste término está originado por la ruptura de la simetría de traslación; en éste caso todos los niveles de Landau bajo el nivel de Fermi aparecen al nivel de Fermi en los bordes de la muestra, dando así una contribución a la magnetoconductividad de la muestra. Podemos considerar entonces  $\sigma_{xy}^{II}$  como una cantidad de equilibrio relacionada con la magnetización (ver sección 3.4).

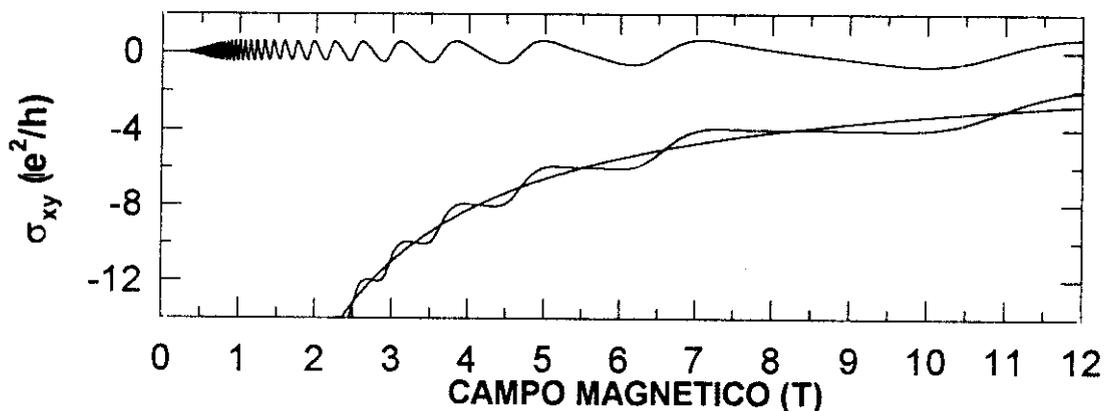


Figura 3.9: Comparación con el resultado semiclásico:  $\sigma_{xy}^0$  y  $\sigma_{xy}^I$ .

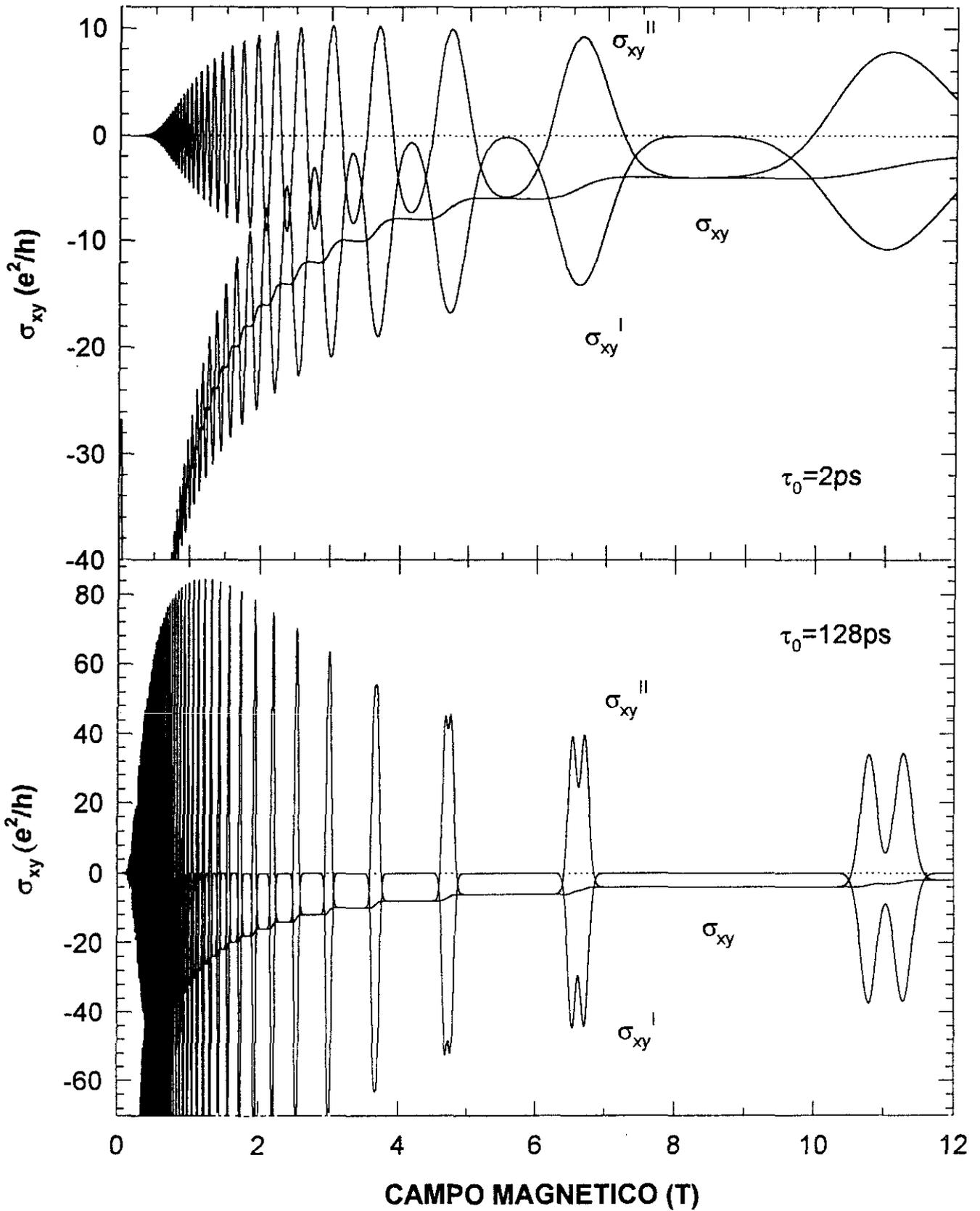


Figura 3.10: Descomposición de  $\sigma_{xy}$  en  $\sigma_{xy}^I$  y  $\sigma_{xy}^{II}$  para dos tiempos de relajación diferentes.

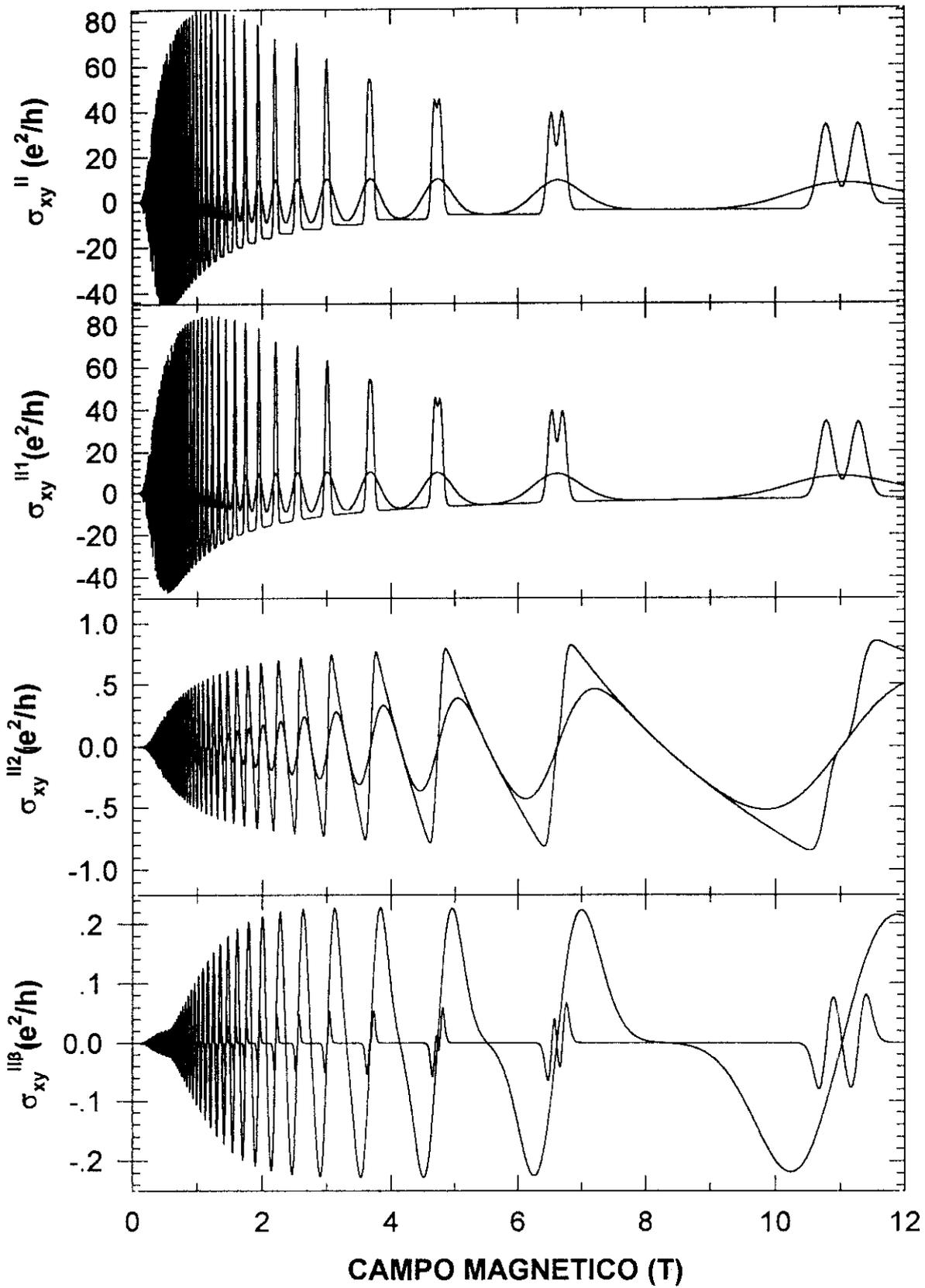


Figura 3.11: Descomposición de  $\sigma_{xy}^{II}$  en los términos  $\sigma_{xy}^{III}$ ,  $\sigma_{xy}^{II1}$  y  $\sigma_{xy}^{II2}$  para varios tiempos de relajación.

### 3.3.3 Simulación de resultados experimentales.

Para poder comparar los resultados del modelo teórico con las medidas que efectuamos sobre muestras, realizamos los cálculos con los parámetros que tienen las muestras que vamos a medir. Estas tienen una movilidad mucho más reducida que el caso “ideal” que calculamos en la sección anterior. El número de portadores del caso real, al ser elevado, no permite llegar a los plateaus más altos ( $i = 2, 4$ ) que es en los que se obtiene mejor resolución y por tanto la utilidad metroológica de estas muestras es más bien reducida. Sin embargo el interés de estos cálculo es grande ya que permite contrastar la validez del modelo con estas muestras, y en general con cualquier otra, calculando con los parámetros de densidad de portadores y tiempo de relajación correspondientes.

En ésta sección ilustraremos alguno de los resultados teóricos obtenidos, pero será en el capítulo 6 donde profundizaremos más la comparación de los resultados experimentales obtenidos por nosotros con el cálculo teórico, permitiendo obtener las anchuras de los niveles de Landau por ajuste. En la figura (3.12) mostramos un cálculo para  $\tau_0=0.5ps$ , lo que corresponde a una movilidad reducida, las oscilaciones aparecen a campos altos y los plateaus se desdibujan.

Se aprecia en la figura (3.12a) cómo se pierde estabilidad en los plateaus del efecto Hall, que se hacen más estrechos en comparación con el “caso ideal” de alta movilidad, al tiempo que los mínimos de las oscilaciones Shubnikov-de Haas ya no se anulan para intervalos amplios del campo magnético. En la figura (3.12b) vemos cómo esto se refleja en los términos oscilatorios de  $\sigma_{xy}^{II}$ : la compensación exacta que da lugar a los plateaus sólo se obtiene en el centro de los mismos, mientras que en los extremos desaparece, dibujando, en función de los distintos parámetros de movilidad y anchura de los niveles, diferentes formas para los bordes de los plateaus. - - - - -

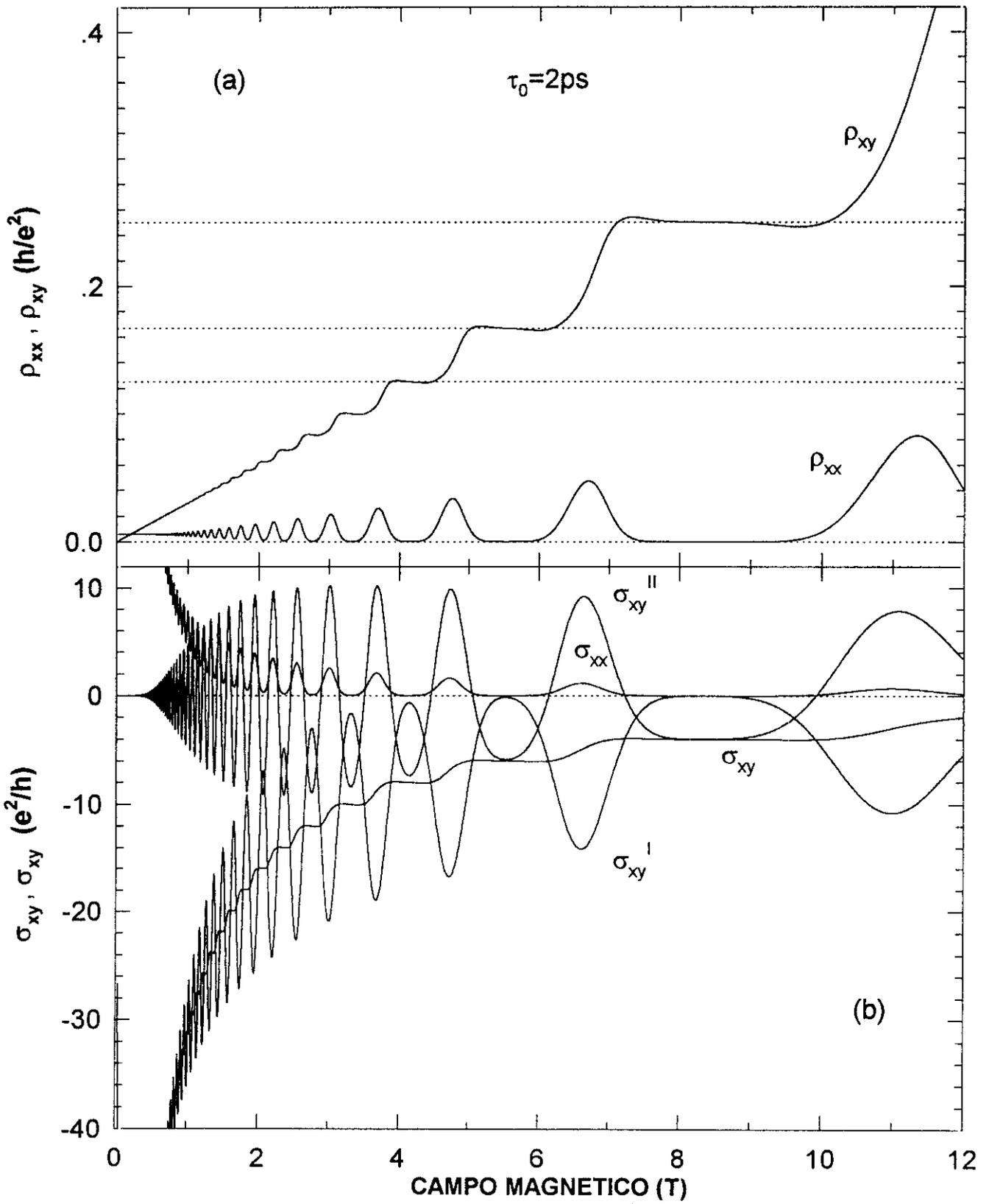


Figura 3.12: Cálculo simulando una muestra de baja movilidad: resistencias (a) y términos oscilatorios de la conductividad (b).

### 3.3.4 Diagramas de renormalización y efectos de la temperatura:

Podemos calcular el efecto de variar la temperatura sobre la magnetoconductividad. El comportamiento varía según el punto del diagrama de renormalización en que nos encontremos. Podemos distinguir dos casos extremos, los máximos de las oscilaciones Shubnikov-de Haas, que se corresponden con el punto intermedio de la transición de un plateau al siguiente en el efecto Hall cuántico; y los mínimos de dichas oscilaciones, que se corresponden con los plateaus y es donde los efectos de localización son dominantes.

Globalmente, el comportamiento queda resumido en la representación de los diagramas de renormalización, donde observamos varios puntos singulares y podemos hacer el seguimiento de los comportamientos con la temperatura. Estos diagramas se construyen representando  $\sigma_{xx}$  vs.  $\sigma_{xy}$  para diferentes temperaturas (Fig. 3.13), los resultados son consistentes con los cálculos mucho más sofisticados que se hacen mediante teoría cuántica de campos (ver sección 2.2.5), aparecen los puntos fijos correspondientes a  $\sigma_{xy} = \text{entero}$  (los plateaus), y el comportamiento para  $\sigma_{xy} = \text{semientero}$  indicativo de una transición de fase, que corresponde a la transición de un plateau al siguiente. Las líneas de flujo se obtienen cuando se unen los puntos a diferentes temperaturas para un campo magnético dado, se aprecia la evolución hacia los puntos fijos. El desdoblamiento de los niveles a alto campo debido al spin-splitting se aprecia claramente (aparece un nuevo punto fijo del diagrama entre dos de los anteriores: de plateaus para  $i = \text{par}$ , con degeneración de spin, se pasa a plateaus para  $i = \text{entero}$ ), este efecto debe tenerse en cuenta al comparar con resultados experimentales donde el spin-splitting no se observa, lo que permite expresar la diferencia de anchura entre las parábolas teóricas y experimentales.

---

En la figura (3.14a) se muestra la evolución con la temperatura de los valores de  $\sigma_{xx}$ , se pasa de un comportamiento típico de estados extendidos para los valores del máximo de la oscilación hasta un comportamiento activado con la temperatura en los mínimos, donde los efectos de localización son mayores. En las zonas intermedias, la contribución de ambos comportamientos es indicativo de una mezcla de estados

extendidos y localizados. La gradación de una curva a otra es suave. En la figura (3.14b), se aprecia el comportamiento de la pendiente máxima en la transición de un plateau a otro frente a la temperatura, el ajuste de dicho comportamiento permitirá aproximar los exponentes universales de la transición, esto se hará para los datos experimentales.

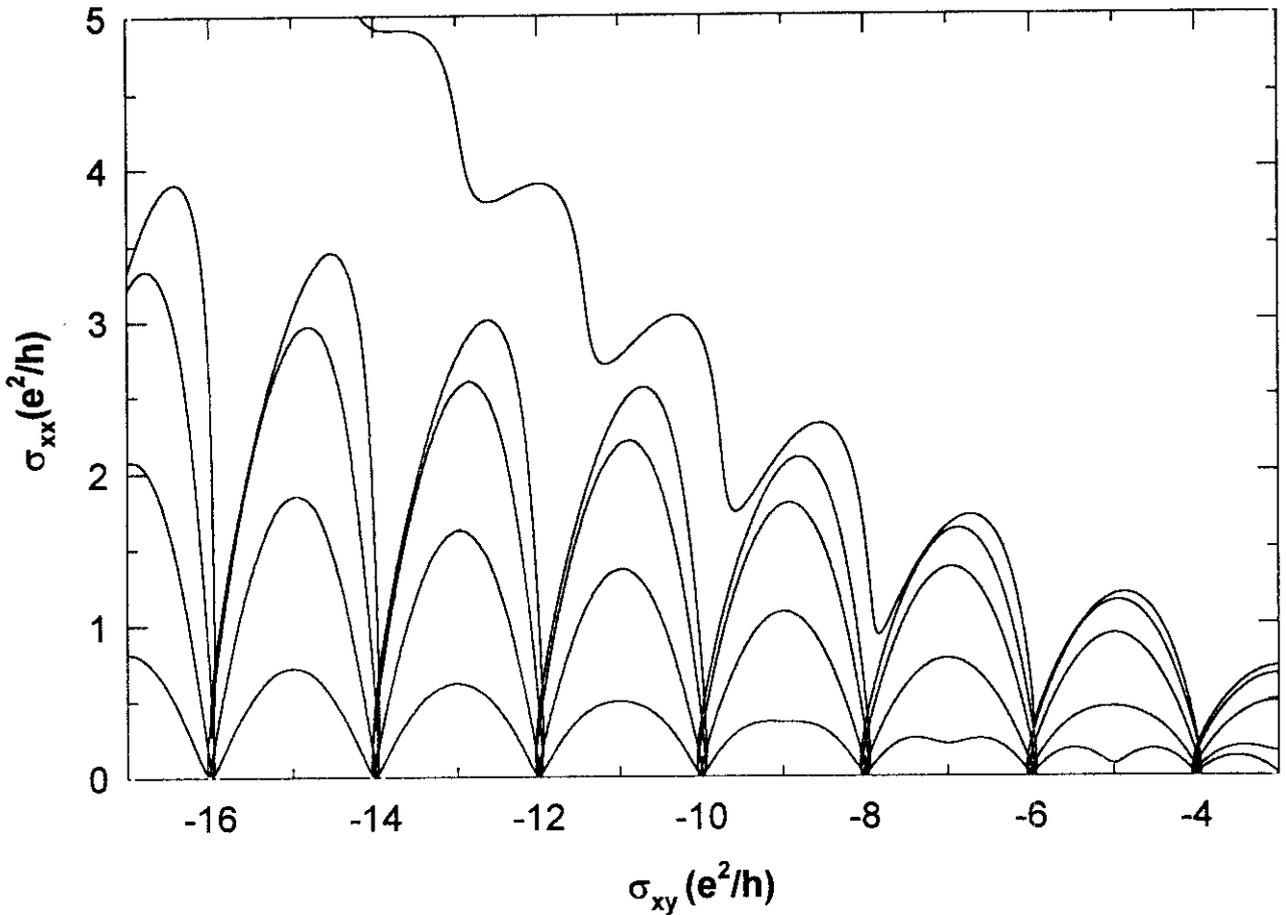


Figura 3.13: Diagrama de renormalización,  $\sigma_{xx}$  vs  $\sigma_{xy}$

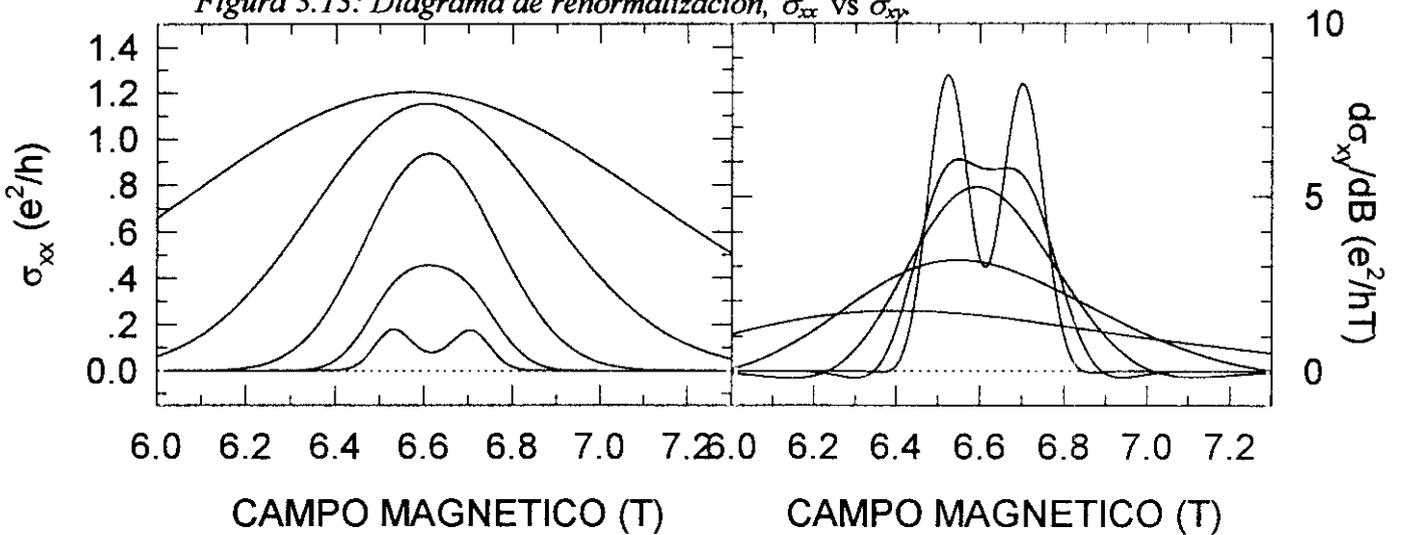


Figura 3.14: Comportamiento frente a la temperatura de  $\sigma_{xx}$  (a) y  $\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial B}$  (b).

### 3.4 Extensiones del cálculo

En ésta sección vamos a desarrollar algunas extensiones del cálculo teórico, partiendo de la densidad de estados calculada anteriormente. Primero presentamos tres cálculos, correspondientes a tres magnitudes del equilibrio, la imanación, cuyo comportamiento oscilatorio en presencia del campo magnético se conoce como Efecto de Haas-van Alphen, la magnetocapacidad y el calor específico. Después haremos una extensión del cálculo de la magnetoconductividad (volvemos al transporte) para el caso en que hay dos subbandas ocupadas.

#### 3.4.1 Imanación: el Efecto de Haas-van Alphen

Hemos obtenido expresiones analíticas para ambas conductividades como función del campo magnético, la temperatura y el nivel de Fermi. El análisis de cantidades "del equilibrio" nos permitirá profundizar en el significado físico de dichas expresiones antes de comparar los resultados numéricos con los experimentales.

Obtuvimos  $\sigma_{xx}$  como función de la densidad de estados al nivel de Fermi (Ec. 3.79), ésta ecuación es un resultado semiclásico; el efecto de las impurezas de la región dopante se observa en la forma, y para una forma dada, en la anchura de los niveles de Landau.

$\sigma_{xy}$  tiene dos términos, el primero  $\sigma_{xy}^I$  es también un resultado semiclásico que dá la contribución a la magnetoconductividad transversal de los electrones de volumen al nivel de Fermi (Ec. 3.82). El segundo,  $\sigma_{xy}^{II}$ , es función de la densidad de estados por debajo del nivel de Fermi (Ec. 3.83). Para poder interpretar mejor éste término vamos a analizar la contribución de los electrones a la imanación  $M$ , que está relacionada con la densidad de electrones mediante:

$$\frac{\partial M}{\partial E_F} = \frac{\partial n_e}{\partial B} \Big|_{E_F} \quad (3.123)$$

La imanación está dada en términos de la densidad de estados "de volumen", además, dado que los niveles de Landau "de volumen" aparecen al nivel de Fermi en los bordes de la muestra, podemos obtener la imanación a partir de una corriente de borde  $I_e$ :

$$\frac{\partial M}{\partial E_F} = \frac{\partial I_e}{\partial E_F} \quad (3.124)$$

La corriente de borde, y por tanto la imanación, está determinada por la densidad de estados de volumen por debajo del nivel de Fermi. Esta relación es general y se mantiene para todo tipo de desorden.  $\sigma_{xy}^H$  está dado por una corriente de borde, pero puede también ser visto como una cantidad de volumen, que es un parámetro de equilibrio relacionado con la imanación:

$$\sigma_{xy}^H = -e \frac{\partial M}{\partial E_F} \quad (3.125)$$

y tenemos:

$$M = -\frac{1}{e} \int_0^{E_F} \sigma_{xy}^H dE'_F \quad (3.126)$$

De unos coeficientes de transporte,  $\sigma_{xx}$  y  $\sigma_{xy}$ , hemos deducido un coeficiente de equilibrio,  $\sigma_{xy}^H$ , que está relacionado con la imanación. La corriente de borde está determinada por la densidad de estados en volumen por debajo del nivel de Fermi. Esta relación entre coeficientes de equilibrio y transporte es una consecuencia de la ruptura de la invariancia de traslación, que tiene como consecuencia que los niveles electrónicos de volumen que están por debajo del nivel de Fermi aparezcan en los bordes al nivel de Fermi.

La imanación, que presenta las características oscilaciones del efecto de Haas-van Alphen, es difícil de medir experimentalmente de forma directa. Esto mismo sucede con otras magnitudes del equilibrio, ya que en los sistemas semiconductores cuánticos debido al pequeño número de electrones presentes en el gas bidimensional (unos  $10^{16} \text{m}^{-2}$ ) la señal es muy débil y difícil de detectar (Eisenstein *et al* 1985a,b, 1986). Deducir éstas cantidades a partir de medidas de transporte permitirá avanzar en la verificación experimental de la densidad de estados por debajo del nivel de Fermi.

Obtener datos de la densidad total de estados mediante técnicas del equilibrio y compararlos con los que se obtienen a partir de las medidas de transporte permitirá discernir entre las partes de la densidad de estados correspondientes a estados extendidos y estados localizados. En el transporte, ambos tipos de estados, ocupados por electrones que se considerarán extendidos y localizados respectivamente, contribuyen de manera diferente al transporte (sección 3.2.4). En el equilibrio, todos los estados contribuyen a las magnitudes de la misma forma. Por ello, avanzar en la dirección de poder obtener datos experimentales de equilibrio es uno de nuestros propósitos, ampliando las posibilidades del sistema experimental del que ahora disponemos en esta dirección.

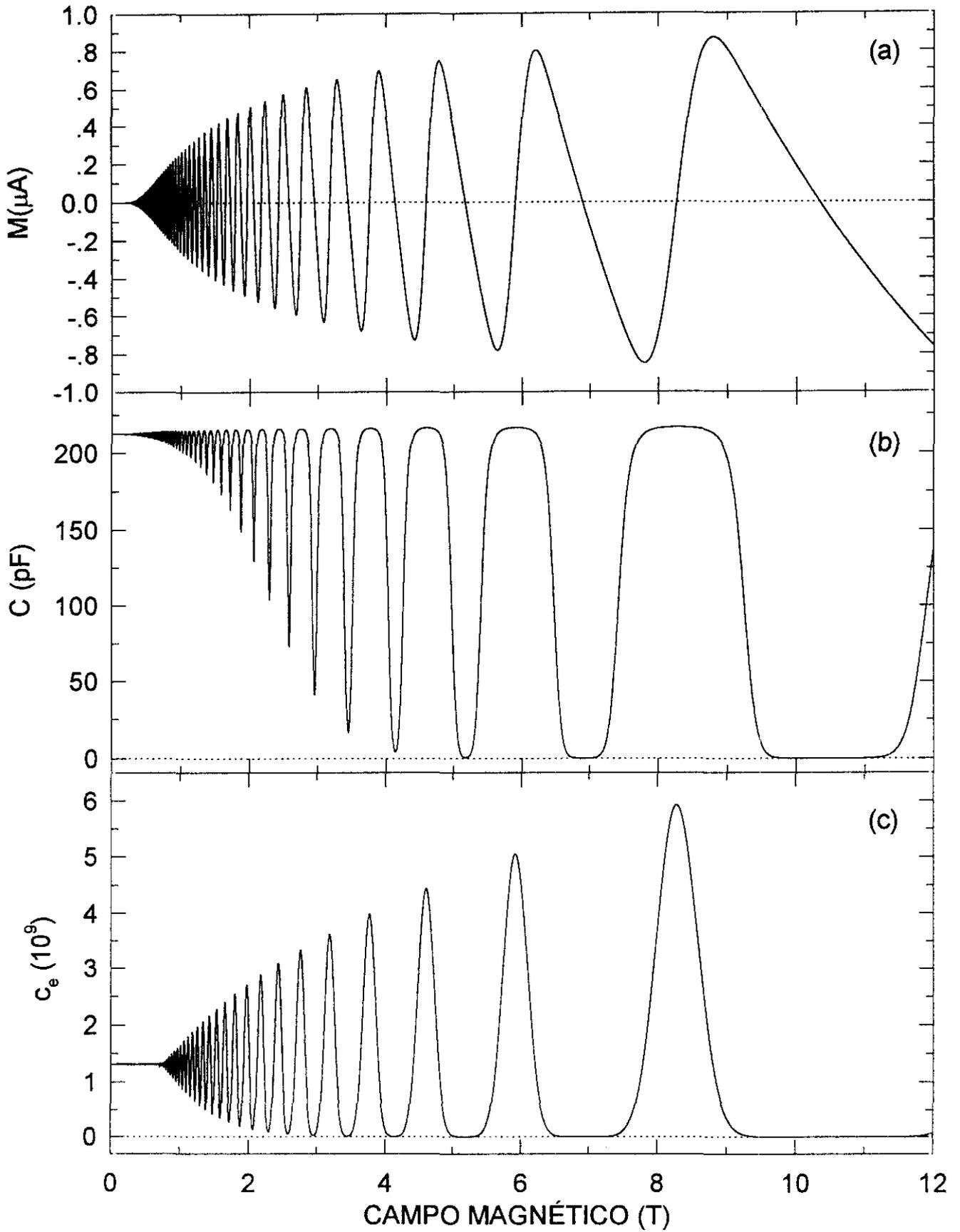


Figura 3.14: Cálculo de las magnitudes de equilibrio, imanación (a), magnetocapacidad (b) y calor específico (c)

### 3.4.2 Magnetocapacidad:

Podemos calcular otra cantidad de equilibrio a partir del conocimiento de la densidad de estados, la magnetocapacidad. Esta cantidad se puede medir experimentalmente (Smith *et al* 1985,1986), lo que permitirá contrastar las hipótesis sobre la densidad de estados obtenidas mediante técnicas experimentales fuera del equilibrio (magnetoconductividad) con aquellas del equilibrio.

La estructura MODFET puede ser considerada como un condensador, midiéndose la capacidad entre la puerta y el sustrato, actuando el gas de electrones bidimensional como dieléctrico. Resolviendo la ecuación de Poisson se obtiene:

$$V_G = \frac{eL_A}{\epsilon_i} n_s + K + \frac{E_F}{e} + \frac{E_F - E_0}{e} \quad (3.128)$$

a partir de aquí podemos calcular:

$$\frac{1}{C} = \frac{dV_G}{dQ} = \frac{dV_G}{Se dn_s} \quad (3.129)$$

siendo  $S$  el área de la puerta, es decir, el área efectiva del capacitor. Derivando la ecuación (3.147) obtenemos:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{Se} \left( \frac{eL_A}{\epsilon_i} + \frac{dE_i}{dn_s} + \frac{1}{e^2 \frac{dn_s}{d(E_F - E_0)}} \right) \quad (3.130)$$

si redefinimos la constante  $eL_A/\epsilon_i$ , asociada a la capacidad de la parte del MODFET entre la puerta y el gas de electrones bidimensional, introduciendo un parámetro ad-hoc llamado  $\gamma$ , nos queda:

$$\frac{1}{e^2 \frac{dE_0}{dn_s}} = \frac{\gamma z_0}{\epsilon_i} \quad (3.131)$$

$$\frac{S}{C} = \frac{S}{C_A} + \frac{\gamma z_0}{\epsilon_s} + \frac{1}{e^2 g(E_F)} \quad (3.132)$$

A partir de aquí, podemos considerar dos casos:

El primero, en ausencia de campo magnético,  $B=0$ :

$$\frac{S}{C_0} = \frac{S}{C_A} + \frac{\gamma z_0}{\epsilon_s} + \frac{1}{e^2 g_0(E_F)} \quad (3.133)$$

donde  $g_0(E_F)$  permanece constante, éste término indica el máximo que se obtiene cuando se calcula la capacidad en presencia del campo magnético,  $B \neq 0$ :

$$\frac{S}{C} = \frac{S}{C_0} - \frac{1}{e^2 g_0} + \frac{1}{e^2 g(E_F)} \quad (3.134)$$

con esta expresión, representada en la figura (3.15b), podremos contrastar experimentalmente la validez de las hipótesis hechas respecto a la forma de la densidad de estados de una manera directa, mediante una técnica de equilibrio (medida de la magnetocapacidad), es decir, sin la intervención de algún tiempo de relajación que es necesario introducir cuando se consideran fenómenos de fuera del equilibrio.

### 3.4.3 Calor específico:

Otra cantidad del equilibrio, asequible a los experimentos (Gornik *et al* 1985) es el calor específico. Consideraremos aquí la contribución electrónica, que nos permitirá contrastar los resultados en función de la densidad de estados electrónicos, que es la que estamos trabajando.

Por definición, el calor específico viene dado por:

$$c_v = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_n \quad (3.135)$$

donde la integración se hace manteniendo constante el número de partículas,  $u=U/V$  es la densidad de energía, que viene dada, en término de la densidad de estados, por:

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon g(\epsilon) \epsilon f(\epsilon) \quad (3.136)$$

donde  $f(\epsilon)$  es la función de distribución de Fermi. Si consideramos temperaturas bajas (pequeñas comparadas con la temperatura de Fermi) y quedándonos con términos hasta segundo orden en la temperatura, la integración, evaluada entre 0 y  $\epsilon_F$  queda:

$$u = u_0 + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 g(\epsilon_F) \quad (3.137)$$

donde  $u_0$  es la energía del estados fundamental. El calor específico será entonces:

$$c_v = \frac{\pi^2}{6} k_B T g(\epsilon_F) \quad (3.138)$$

Esta expresión (Fig 3.15c) está simplificada, habiéndose despreciado varios efectos, entre los que destacamos la contribución de las impurezas y defectos del material. Se han efectuado simulaciones numéricas, que indican que en el caso de muy bajas temperaturas, las excitaciones elementales empiezan a jugar un papel importante en la dependencia con la temperatura del calor específico. En particular, las que se piensan que pueden influir notablemente son las excitaciones provocadas por las impurezas donantes, estas excitaciones consisten en la asociación de pares de donantes (transferencia de un electrón de una impureza a otra) con una energía  $\Delta$ , en este caso, el calor específico se comporta como  $T / [\ln(\Delta / T)]^{1/2}$  cuando  $T \rightarrow 0$ .

### 3.4.4 Segunda subbanda:

Podemos calcular el efecto del llenado de la segunda subbanda sobre la componente diagonal de la magnetoresistencia,  $R_{xx}$ , a partir de la forma de la densidad de estados que hemos obtenido en la sección 3.2.1, que consideramos igual para ambas subbandas. Cada subbanda se caracterizará por un número de portadores determinado, la magnetoconductividad será la suma de la contribución de cada subbanda (como viene dado por la ecuación 2.24) y la resistividad se obtiene por inversión del tensor. Las componentes fundamentales de las oscilaciones Shubnikov-de Haas pueden escribirse como:

$$\frac{\Delta R_{xx}}{R_0} = A_1 \frac{\langle \Delta g_1 \rangle}{g_0} + A_2 \frac{\langle \Delta g_2 \rangle}{g_0} + B_{12} \frac{\langle \Delta g_1 \Delta g_2 \rangle}{g_0^2} \quad (3.139)$$

Donde  $\Delta g_i$  indica la parte oscilatoria de la densidad de estados correspondiente a cada subbanda. Aparece un término de intermodulación, producto de dos términos oscilatorios. Los coeficientes  $A_1$ ,  $A_2$  y  $B_{12}$  están relacionados con los tiempos de relajación de cada subbanda y con el scattering intersubbanda (Coleridge 1990, Schacham *et al* 1992). Los resultados del

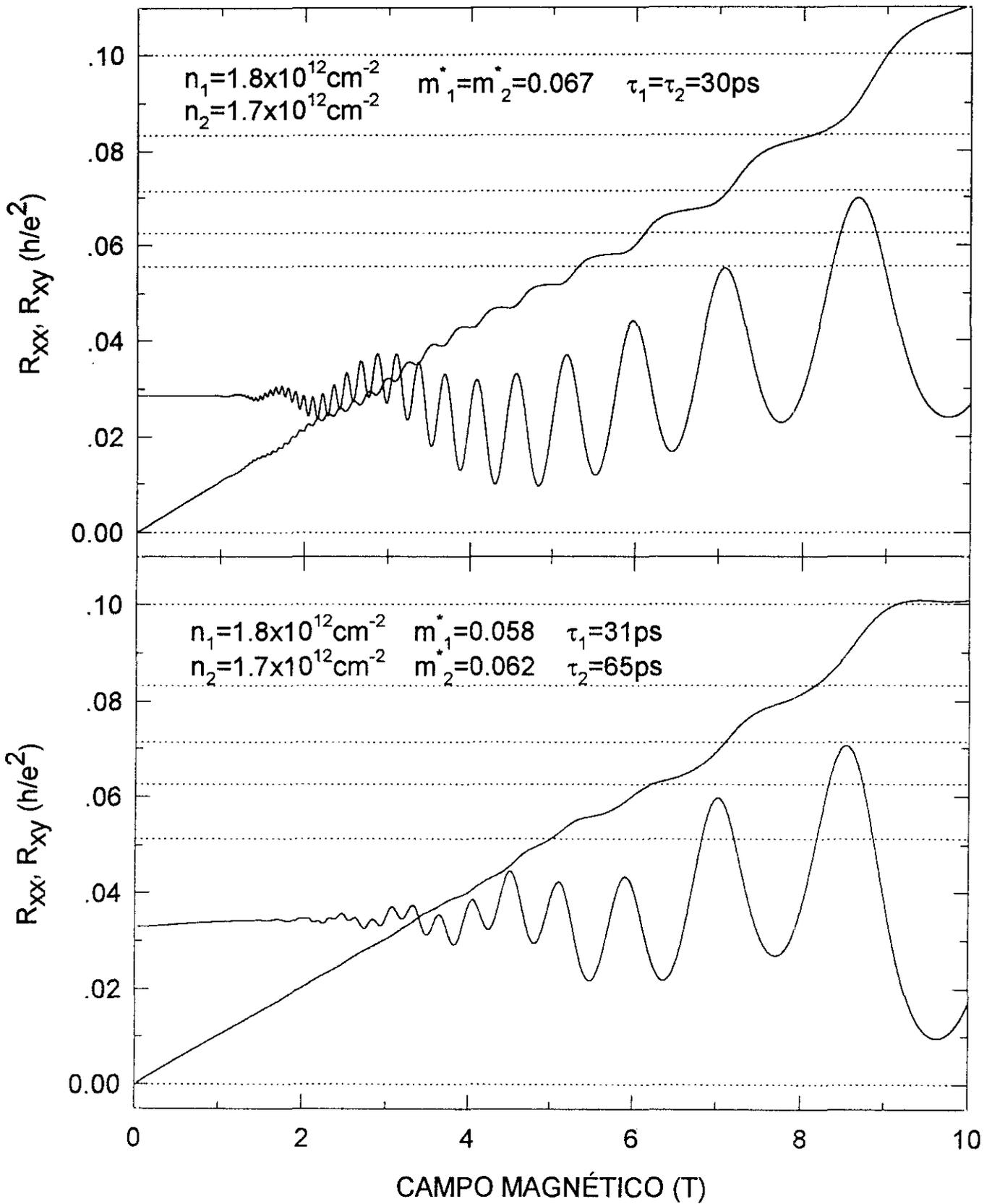


Figura 3.15: Cálculo para el caso de dos subbandas pobladas.

cálculo para dos casos en que la población de las subbandas es diferente se muestran en la figura (3.15) para dos posibles casos con diferente población en la subbanda fundamental y la primera excitada. Si en resultados experimentales se observa, mediante transformada de Fourier, la presencia de dos frecuencias en las oscilaciones Shubnikov de Haas, es inmediato calcular las poblaciones de cada subbanda (capítulo 5) y calcular con dichas poblaciones un fichero teórico como los de la figura (3.15).

## Capítulo 4

# TÉCNICA EXPERIMENTAL

### 4.1 Medida de la magnetoresistencia

El tratamiento teórico de los problemas de transporte electrónico se aborda desde el punto de vista de las conductividades, sin embargo, el tensor de conductividad no es lo que suele medirse experimentalmente.

Lo que es medido directamente son las resistencias, que se relacionan con las resistividades y por tanto con las conductividades mediante sencillas relaciones que incluyen las dimensiones de la muestra, aún en el caso de que se supongan completamente homogéneas. Sin embargo, en el efecto Hall cuántico, las cantidades fundamentales, las que están cuantizadas exactamente, son las que experimentalmente se miden de forma directa: las resistencias. Si fuera la conductividad la cuantizada exactamente, las medidas de precisión (y por tanto las aplicaciones metrológicas) no serían posibles, ya que la geometría de la muestra o sus posibles inhomogeneidades impedirían deducir, a partir de las medidas de magnitudes macroscópicas (resistencias) las correspondientes magnitudes microscópicas (conductividades) exactamente cuantizadas.

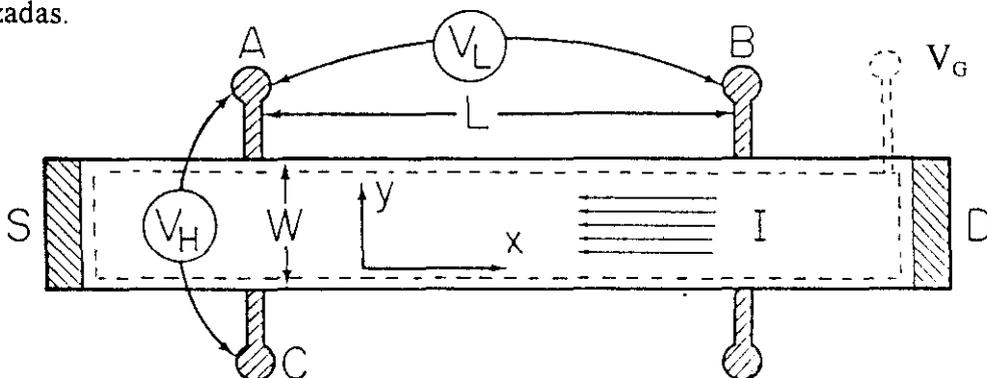


Figura 4.1: Esquema de las conexiones en una barra Hall.

Para medir las resistencias se emplea una geometría que llamaremos de “barra Hall” (Fig 4.1). Los electrones pasan desde una fuente ( $S$ ) hacia un drenaje ( $D$ ) a lo largo de una muestra de forma rectangular, dando una corriente total,  $I$ . Las conexiones se efectúan a los lados de la muestra. Las magnitudes que se miden son la corriente  $I$ , la diferencia de potencial longitudinal  $V_L$  entre los contactos  $A$  y  $B$ , y la diferencia de potencial transversa (o Hall)  $V_H$  entre los contactos  $A$  y  $C$ . La longitud  $L$  entre  $A$  y  $B$  y la anchura  $W$  de la muestra también pueden medirse, pero ésta medida no tendrá una precisión tan alta como la que se obtiene en los plateaus Hall (de unas partes por millón).

Consideramos que la densidad de corriente es uniforme y paralela al lado largo de la muestra. El campo eléctrico  $E$ , es también uniforme, pero tiene una componente, el campo Hall, perpendicular a la corriente. Esta aproximación es buena si la longitud de la muestra es grande comparada con la anchura  $W$ , y las conexiones están lejos de los extremos de la muestra. La densidad de corriente será:  $j = I/W$ . El campo eléctrico longitudinal es  $E_L = V_L/L$ . Como  $I$  es fija, nosotros medimos la resistencia:

$$\text{- La resistencia longitudinal:} \quad R_L = \frac{V_L}{I} = \rho_{xx} \left( \frac{L}{W} \right) \quad (4.1)$$

$$\text{- La resistencia Hall:} \quad R_H = \frac{V_H}{I} = \rho_{xy} \quad (4.2)$$

En este caso (dos dimensiones espaciales), las dimensiones de la resistencia son las mismas que las de la resistividad, y además, para la resistencia Hall, el factor de tamaño desaparece. Las resistencias longitudinal y Hall se definen de forma independiente a la suposición de que la corriente debe estar distribuida uniformemente.

## 4.2 El sistema experimental:

El sistema experimental en el que hemos realizado las medidas ha sido montado con una concepción de sistema abierto. Abierto en dos sentidos, por un lado, que con el equipamiento disponible en cada momento el sistema permita hacer medidas de diferente tipo, y por otro, que partiendo de unos componentes iniciales del sistema, podamos ir desarrollando el equipo con el máximo aprovechamiento de los previamente existentes. Para hacer esto posible, hemos ido acoplado los componentes provenientes de diferentes casas comerciales, fabricando algún accesorio en los talleres propios, y desarrollando un programa informático de control de la experiencia que permita incorporar los diferentes aparatos con los que vamos ampliando la experiencia.

Las medidas efectuadas son medidas de magnetotransporte a baja temperatura. Por tanto será necesario crear un “ambiente” al que se someterán las muestras con dos requisitos fundamentales: un campo magnético elevado, y temperaturas del orden de unos pocos grados Kelvin. Esto ya determina gran parte del sistema experimental. Por otro lado será necesario disponer de los aparatos que permitan efectuar las medidas de transporte. Además necesitaremos un adecuado sistema de control de la experiencia y adquisición de datos.

En la figura (4.2) se muestran de forma esquemática los diferentes componentes del sistema, así como su interconexión informática, tanto para control de la experiencia como para la adquisición de los datos. A continuación describiremos brevemente los componentes principales:

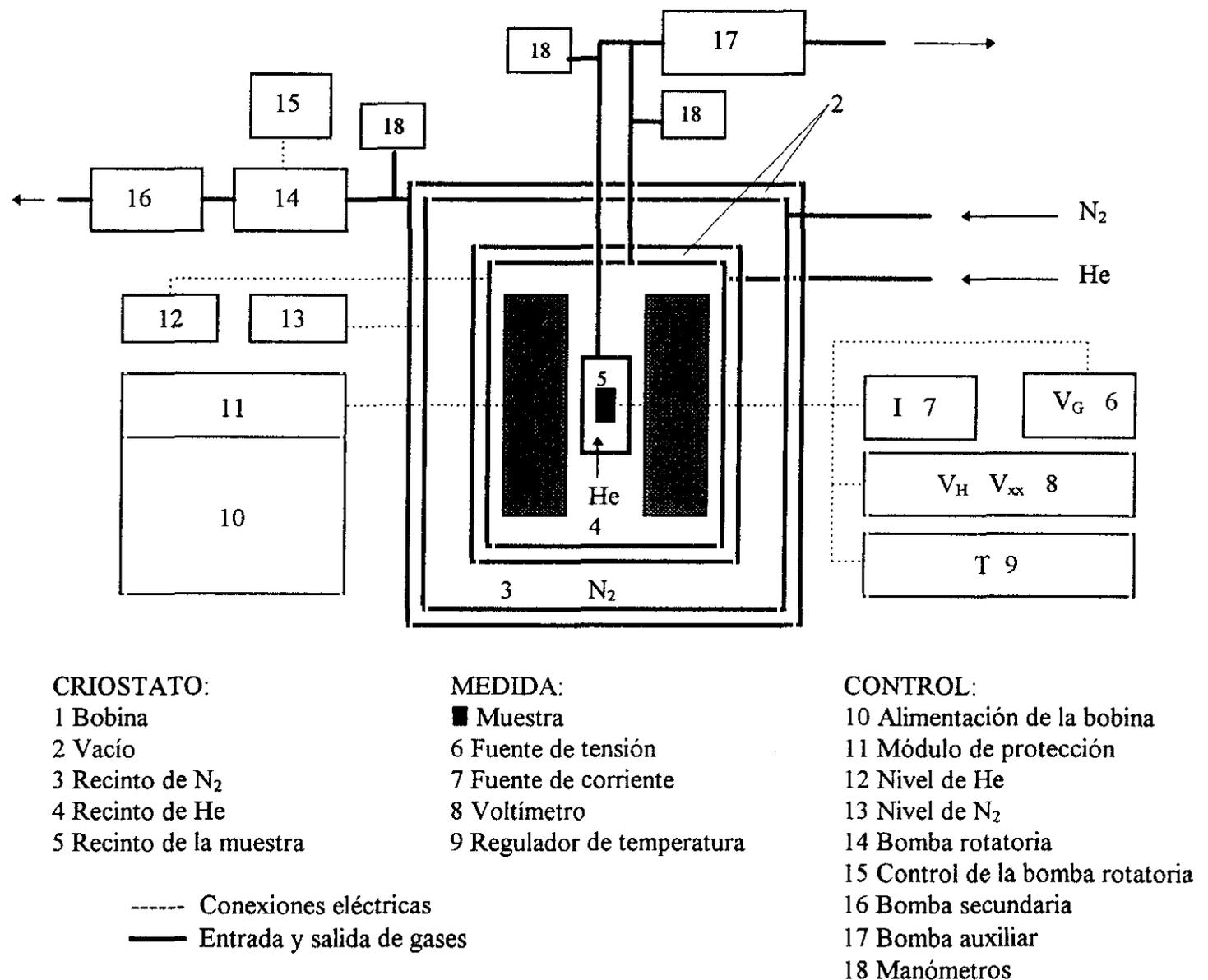


Figura 4.2. Fotografía y esquema del sistema experimental



### 4.2.1 Producción del campo magnético:

Para la producción del campo magnético disponemos de una bobina superconductora de la casa OXFORD, capaz de alcanzar 12T operando a 4.2K y 13.5 a 2.2K. La bobina está compuesta de dos conjuntos de solenoides concéntricos, montados separadamente pero formando un único bloque. La sección externa está fabricada con un cable de NbTi, mientras que la interna lo está con un cable de Nb<sub>3</sub>Sn. Ambas secciones están inmersas en una matriz que garantiza su estabilidad bajo las considerables fuerzas de Lorentz que aparecen durante su uso. La utilización de dos secciones diferentes es necesaria para alcanzar los 12T, ya que el material exterior tiene un campo crítico menor que éste y por tanto es necesario que la parte interna de la bobina, donde éstos campos son alcanzados, esté construida con otro material, de campo crítico superior. Esto produce dos problemas, por un lado la mayor fragilidad del segundo material y por otro, el gran aumento de masa de la bobina, lo que hace más costoso su enfriamiento. La razón campo magnético/corriente para la bobina es de 0.1240T/A, consiguiéndose en el centro del solenoide una gran homogeneidad en el campo magnético con fluctuaciones menores que 1 parte por 1000 sobre un diámetro esférico de 1cm.

La bobina está alimentada por una fuente de corriente OXFORD-PS126, diseñada para la alimentación de bobinas superconductoras. La fuente de corriente proporciona hasta 120 amperios de corriente continua altamente estabilizada (fluctuaciones menores de 0.01 amperios), con un voltaje para la energización de la bobina de hasta 6V. Para la desenergización es capaz de absorber hasta -5V. Disponemos también de una unidad reguladora, con los bancos de transistores y los circuitos necesarios para el control del proceso de energización de la bobina, que se puede efectuar por control remoto.

La bobina está cortocircuitada por un cable superconductor, que permite mantenerla energizada si se va a trabajar a campo magnético constante. Si se desea variar el campo magnético, es necesario calentar este cable cortocircuitador y alimentar la

bobina con una corriente variable. Si éste cable no se calienta durante el proceso de energización, toda la corriente pasa por él y no se produce el campo magnético.

La bobina dispone también de un circuito de protección con resistencias y diodos para todas las secciones, que impiden que se alcancen grandes voltajes en caso de que la bobina transite, es decir, que pase a estado normal durante la operación. Esto permite disipar gran parte de la energía almacenada en el solenoide en las resistencias externas y no en la propia bobina, evitando así el riesgo de que se deteriore en caso de una transición brusca.

Es posible reducir la temperatura de la bobina por debajo de 4.2K (helio líquido a presión normal). Esto se hace habitualmente bombeando sobre el helio líquido, al reducirse la presión, se reduce la temperatura. Este procedimiento tiene el inconveniente de que es necesario aislar bien el recinto de la bobina para evitar la formación de bloques de hielo. Esta bobina dispone de un circuito alrededor de ella que permite enfriar el helio por conducción y convección, sin reducir la presión en el recinto. El helio más frío que 4.2K es más pesado y se hunde al fondo del recinto, cuando se alcanzan 2.17K (punto lambda del helio) se produce la fase superfluida, con una muy alta conductividad térmica y por tanto sin gradientes de temperatura. La intercara entre la fase normal y la superfluida va subiendo conforme se enfría más cantidad de helio, llega un momento en que se sobrepasa la parte superior de la bobina, pero ya no baja más la temperatura. Existen resistencias de carbono debajo y encima de la bobina para confirmar la temperatura. Se puede entonces operar hasta 13.5T.

#### **4.2.2 Criogenia y accesorios:**

Disponemos de un criostato OXFORD que nos permite enfriar tanto la bobina superconductora como las muestras. El criostato consta de una serie de vasijas concéntricas, fabricadas de diferentes materiales metálicos (ver Tabla 4.1). Su disposición nos permitirá crear un vacío aislante entre sucesivos recintos y, mediante el llenado con diferentes líquidos criogénicos, la temperatura necesaria en el recinto de la bobina y en el de la muestra. En la figura (4.3) está indicado el recinto sobre el que se

efectúa un vacío (presión  $<10^{-6}$  torr), que aísla el exterior, a una temperatura ambiente de unos 300K, del recinto de nitrógeno líquido, que está a 77K; éste último del recinto de la bobina, que se llenará de helio líquido, a 4.2K, y finalmente aísla el recinto de la bobina y el de la muestra entre sí. El recinto de la muestra puede ser separado del resto del sistema y sustituido por otro según las medidas que se deseen efectuar. Los recintos se llenarán de la siguiente manera: el más exterior, de nitrógeno líquido, y el de la bobina, primero de nitrógeno líquido y después de helio líquido (ver la sección de Procedimiento), ambos tienen acceso directo desde la parte superior del criostato por diversas entradas, que permiten tanto su llenado desde las vasijas que contienen los líquidos criogénicos, como un vaciado mediante bombeo. El recinto de la muestra, o bien permanecerá vacío, o bien se llenará de helio líquido que es admitido mediante una válvula desde el recinto de la bobina, también se puede bombear sobre este recinto. Los recintos de la bobina y la muestra permiten además la entrada de gases, que será necesario ir intercambiando conforme desciende la temperatura.

RECINTO	MATERIAL
cilindro exterior	aluminio
tapa del cilindro exterior	acero inoxidable
recinto de nitrógeno líquido	aluminio
recinto de helio líquido	acero inoxidable
uniones térmicas	cobre

Tabla 4.1

La transferencia de helio líquido desde las botellas en que es suministrado hasta el criostato la efectuamos mediante una “caña” de transferencia de acero inoxidable y rodeada por un segundo tubo con un vacío de unos  $10^{-4}$  torr entre ambos. Diversos accesorios y prolongadores de la caña son necesarios para garantizar una correcta transferencia del helio líquido.

Durante el llenado de los recintos con los líquidos criogénicos y la operación de la bobina podemos controlar la cantidad de dichos líquidos mediante sendos niveles, de la casa OXFORD. El nivel de nitrógeno líquido consiste en un par de tubos coaxiales con

un dieléctrico ocupando el espacio entre ellos, una serie de agujeros en el tubo exterior permite al nitrógeno líquido acupar el espacio entre ambos tubos. La diferencia en la constante dieléctrica entre el líquido y el gas permite, mediante una medida de la capacidad eléctrica del tubo, saber la proporción del mismo que queda sumergido en el líquido. El nivel de helio líquido consiste en un cable superconductor que se sumerge en el líquido; si alimentamos el cable con corriente, la parte no sumergida del cable estará en un estado resistivo (no-superconductor), mientras que la sumergida estará en un estado superconductor; en estas condiciones, la medida de la caída de voltaje a lo largo del cable es una indicación del porcentaje del mismo que está sumergido en el líquido; para evitar la disipación de potencia en el criostato durante la medida, ésta se efectúa en pulsos, manteniéndose la última medida hasta el pulso siguiente, dos ritmos diferentes de pulsos están disponibles para utilizar según las necesidades: más rápido durante la fase de llenado o cuando se está operando con la bobina quedando poco helio líquido, y más lento durante el resto del tiempo. En ambos niveles, la lectura se presenta en porcentaje de llenado de los recintos y dada la forma de los mismos, ésta lectura no es proporcional a la cantidad de líquido que hay en ellos. También disponen de unos relés de control que avisan al usuario cuando el nivel del líquido es bajo. Los dos son susceptibles de ser programados y enviar sus lecturas al ordenador.

Para efectuar el alto vacío aislante, disponemos de una bomba turbomolecular, TURBOVAC 150 CSV, de funcionamiento vertical, que con un rotor de una aleación de aluminio endurecida, funcionando a 50.000rpm, permite alcanzar un vacío de hasta  $10^{-10}$  mbar. La bomba está refrigerada por agua circulante, la lubricación es de aceite y el control de alimentación y funcionamiento se realiza mediante el módulo TURBOTRONIK que permite convertir la frecuencia de la red (50Hz) a la de funcionamiento de la bomba de forma altamente estabilizada, al tiempo que la protege de sobrecargas al variar automáticamente la alimentación en potencia de la bomba de forma proporcional a la velocidad de giro del rotor. Esta bomba requiere de una bomba secundaria, ya que no puede operar directamente hacia el exterior, para ello disponemos de una bomba rotatoria de dos etapas, TRIVAC D5DHV, con una capacidad de bombeo de  $5\text{m}^3/\text{h}$ . Como bomba auxiliar para el bombeo de los recintos de los líquidos criogénicos disponemos de una bomba rotatoria de una etapa TRIVAC S25B, con capacidad de bombeo de  $35\text{m}^3/\text{h}$ , suficiente para vaciar el nitrógeno gas del recinto de la

bobina antes de transferir el helio líquido y también para bombear sobre el helio líquido del recinto de la muestra para hacer descender su temperatura. La medición de los diferentes vacíos obtenidos los realizamos mediante manómetros electrónicos.

### **4.2.3 Portamuestras:**

Disponemos de un portamuestras de la casa OXFORD. Éste encaja en el recinto de la muestra de forma ésta queda aislada del exterior. Por un lado, este aislamiento permite efectuar vacío y crear atmósferas de diferentes gases sobre la muestra. Por otro lado, su diseño utilizando unos discos de cobre a diferentes alturas, permite aislar térmicamente a la muestra y poder obtener las bajas temperaturas necesarias para efectuar las medidas. La plataforma sobre la que reposa la muestra, queda centrada en la bobina, de forma que se alcanza la máxima homogeneidad en el campo magnético. En el mismo bloque de cobre en que se sitúa la muestra y en equilibrio térmico con la misma, existe un termómetro calibrado (resistencia de carbono) y un calentador no-inductivo que permitirán regular la temperatura de la muestra. Para las conexiones que será necesario hacer en la muestra disponemos de diez cables aislados que terminan en un mismo conector. Todo el otro cableado de la muestra (termómetros, calentadores... ) van a un conector independiente. Utilizando éste portamuestras se puede enfriar la muestra admitiendo helio líquido desde el recinto de la bobina mediante una válvula que conecta ambos recintos. Disponemos además de otro portamuestras, fabricado en los talleres, de características similares, pero que además admite la entrada de helio líquido directamente desde el exterior.

Los portamuestras son introducidos en el criostato desde su parte superior, permitiéndose la admisión simultánea de gas helio para evitar la entrada de aire que pueda provocar la aparición de bloques de hielo en el interior del recinto, donde la temperatura es inferior.

#### 4.2.4 Regulación de la temperatura:

La temperatura en la muestra es regulada de la siguiente manera:

Partiendo de la temperatura ambiente en que la muestra es montada en el portamuestras, éste se introduce en el recinto del criostato correspondiente lo que provoca una bajada suave de la temperatura hasta llegar a unos 70K. A partir de entonces, la admisión, primero de helio gaseoso frío y posteriormente de helio líquido permite la bajada de la temperatura hasta 4.2K.

Si se quiere reducir más la temperatura será necesario bombear sobre el helio líquido, lo que disminuirá su presión de vapor y por tanto su temperatura. Este procedimiento permite alcanzar temperaturas hasta 1.2K y regular, mediante el control de la presión de vapor, la temperatura de la muestra en el rango entre 1.2K y 4.2K. Como método alternativo de regulación en este rango de temperaturas disponemos de un regulador de temperatura, cuyo funcionamiento es descrito en el siguiente párrafo.

Una vez que mediante la admisión de helio líquido se ha alcanzado la temperatura de 4.2K, se puede regular la temperatura en el rango 4.2K a 80K mediante un balance entre el frío suministrado por la admisión de helio líquido y el calor producido en el calentador, que no es más que una resistencia alimentada en corriente.

Esta regulación es efectuada mediante el regulador de temperatura ITC4 de la casa OXFORD, que se conecta al termómetro de la muestra y al calentador que hay junto a ella. Este regulador es un instrumento cuyo funcionamiento se basa en un microprocesador controlado por un programa que está contenido en un chip que lleva incorporado el instrumento, es necesario cargar en su memoria la tabla de calibración del termómetro que se va a utilizar, en nuestro caso una resistencia de carbono. Si el termómetro es una resistencia, la lectura se efectúa mediante una conexión de cuatro puntas, alimentando en corriente y leyendo un voltaje que es convertido a una temperatura mediante el procesador interno. Este regulador puede efectuar lecturas en tres diferentes termómetros conectados simultáneamente al aparato. Nosotros utilizamos

uno (la resistencia de carbono) en la mayoría de las medidas, aunque también disponemos de un termopar y una resistencia RhFe conectados al regulador. Por otro lado el regulador alimenta a la resistencia calefactora que suministrará calor de manera regulable (la salida es de 0 a 40Vdc).

El regulador es programable, nosotros lo utilizaremos de dos maneras: por un lado, a partir de una determinada temperatura, se puede programar una rampa, que en un determinado tiempo lleve a la muestra a otra temperatura, por otro lado, alcanzada una determinada temperatura se tratará de estabilizarla al máximo para efectuar las medidas. Esto se realiza mediante una adecuada calibración de los factores proporcional, integral y derivativo (PID) con los que el regulador estabilizará la temperatura alimentando la resistencia calefactora de forma diferente (dada por la relación PID) a partir de las medidas efectuadas en el termómetro, ya que exteriormente se mantiene un punto frío con el helio líquido. Será necesario calibrar cuidadosamente el PID necesario para cada rango de temperaturas. Las lecturas de temperatura efectuadas son transferidas al ordenador de control de la experiencia y grabadas en los ficheros de datos, cada punto del fichero lleva su propia temperatura, lo que permite hacer un seguimiento detallado de la estabilidad térmica durante la medida.

#### **4.2.5 Electrónica de medida:**

Las medidas efectuadas son, como veíamos en las secciones anteriores, resistencias que se miden mediante la técnica de las cuatro puntas, ya sea en función del campo magnético a un voltaje de puerta dado, o en función del voltaje de puerta a un campo magnético dado, en ambos casos a una determinada temperatura. Para efectuar estas medidas necesitamos tres aparatos: un voltímetro de alta precisión, una fuente de corriente altamente estabilizada, y una fuente de tensión. Describimos a continuación cada uno de ellos:

El voltímetro es de la casa SCHLUMBERGER, mod. 7081, capaz de medir diversas magnitudes, pero que nosotros utilizamos para medidas de voltaje en corriente

continua. Es un voltímetro de alta precisión en todos los rangos de medida en que vamos a utilizarlo (ver Tabla 4.2), además tiene una resistencia de entrada mayor que  $10G\Omega$ , lo que es una garantía de la precisión de las lecturas. El voltímetro es programable, todas las funciones pueden ser efectuadas por control remoto y transmite las medidas al ordenador de control conforme se van efectuando, aunque también tiene la posibilidad de almacenarlas en memoria.

Rango de medida	Sensibilidad
0.1V	10nV
1V	10nV
100V	100nV
1000V	1 $\mu$ V

**Tabla 4.2**

La fuente de corriente es de la casa KEITHLEY, mod.220, que suministra corriente altamente estabilizada en un amplio rango (ver Tabla 4.3). La resistencia de salida es mayor que  $10^{14}\Omega$  y la capacidad de salida menor que 20pF. La fuente es programable, pudiéndose “construir” programas de alimentación de muy diversas formas, nosotros nos limitaremos a alimentar las muestras con una corriente estable que se mantendrá fija durante toda la medida.

Rango	Precisión (1año)	Coef. de temperatura	Ruido
10mA	0.05%+50 $\mu$ A	0.005%+200nA	100ppm
1mA	0.05%+1 $\mu$ A	0.005%+20nA	100ppm
100 $\mu$ A	0.05%+100nA	0.005%+2nA	100ppm
10 $\mu$ A	0.05%+10nA	0.005%+200pA	100ppm
1 $\mu$ A	0.05%+1nA	0.01%+20pA	100ppm

**Tabla 4.3**

La fuente de tensión es también de la casa KEITHLEY, mod.230, que suministra la tensión que nosotros aplicamos a la “puerta” de las muestras (Fig 4.1), la tensión

generada es muy estable (ver Tabla 4.4) y la impedancia de salida es de  $1\text{m}\Omega+10\text{mH}$ . Nosotros emplearemos la fuente de tensión de dos formas: una, para mantener una puerta dada, fija, mientras efectuamos las medidas barriendo con el campo magnético; la otra, es un barrido en los voltajes de puerta mientras mantenemos fijo el campo magnético. En ambos casos, la fuente puede ser programada por control remoto y las lecturas se envían al ordenador de control según se van tomando.

Rango	Precisión (1año)	Coef. de temperatura	Ruido
100V	0.05%+50mV	0.005%+0.5mV	50ppm
10V	0.05%+10mV	0.005%+100 $\mu$ V	50ppm
1V	0.05%+1mV	0.005%+25 $\mu$ V	50ppm
100mV	0.075%+300 $\mu$ V	0.01%+25 $\mu$ V	50ppm

**Tabla 4.4**

#### 4.2.6 Automatización:

La experiencia está automatizada. Para ello utilizamos un ordenador TANDON, con procesador 286, y diversos accesorios informáticos necesarios para la interconexión de los aparatos: cables para IEEE-488, cables para RS232, un convertidor RS232-IEEE, tarjetas de control National, etc. El programa de control de la experiencia ha sido hecho por nosotros en QB-45, lenguaje que sin ser excesivamente rápido y compacto, si permite interactuar fácilmente con los aparatos, la adquisición de los datos en ficheros, y su presentación en pantalla de manera simultánea a la realización de las medidas.

Todos los aparatos descritos en las secciones anteriores son programables, y todos están incluidos en la automatización de la experiencia.

La fuente de alimentación de la bobina, que permite su control de funcionamiento, así como la toma de los datos de campo magnético según sean las medidas, y los niveles de helio y nitrógeno líquidos se conectan mediante RS232, utilizándose el convertidor para hacerlo todo compatible con el IEEE-488 que es el que emplean los otros aparatos.

El regulador de temperatura está conectado por IEEE-488, facilitando la lectura de la temperatura para cada punto de los ficheros.

Los tres aparatos de la electrónica de medida, voltímetro, fuente de corriente y fuente de tensión, son programable y manejados por control remoto mediante el “bus” de interconexión IEEE-488, tanto la inicialización, programación de las funciones de los aparatos y la recogida de los datos se hace de forma automatizada.

Una vez que los datos han sido grabados en los ficheros correspondientes son enviados mediante un cable a otros ordenadores (un 486 y un Pentium) para su posterior tratamiento.

El esquema de interconexión de todos los aparatos y los diferentes ordenadores puede verse en la figura (4.4):

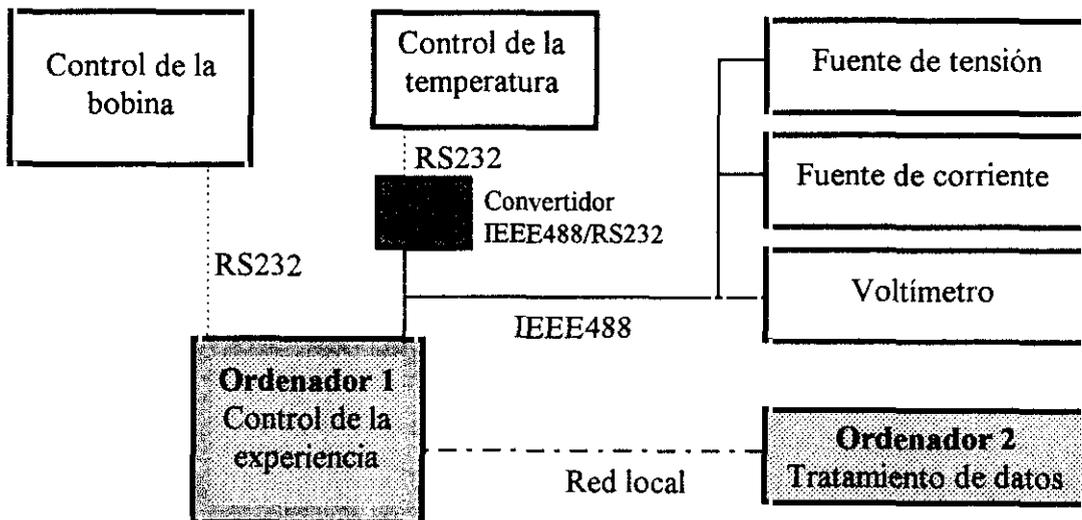


Figura 4.4: Esquema de la automatización del sistema experimental

### 4.3 Las muestras

Las muestras utilizadas no son fabricadas en nuestro laboratorio. Hemos establecido una colaboración con la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicaciones de la Universidad Politécnica de Madrid. Nosotros efectuamos las medidas de magnetotransporte arriba descritas en muestras que ellos tienen a su disposición gracias a la colaboración en proyectos europeos. Las muestras proceden de distintos laboratorios, Sheffield (Gran Bretaña), Freiburg (Alemania) y París(Francia). En los tres casos se trata de un pozo de InGaAs crecido sobre un sustrato de GaAs, las muestras difieren en las anchuras del pozo, tipo de dopaje, etc... Una descripción detallada de cada muestra se hace en el capítulo 5. El interés de este tipo de muestras, analizada desde el punto de vista teórico, pero orientado hacia sus aplicaciones prácticas, se trata más detalladamente en la sección 1.2. En este apartado nos vamos a referir únicamente a los aspectos técnicos de montaje y medida.

Un primer grupo de muestras T1, T2 y T3 tienen una litografía tipo van der Pauw y carecen de puerta. Los resultados permiten verificar el funcionamiento del sistema y el tipo de contactos. No nos extenderemos con estas muestras.

La siguiente serie T4, K4, T5, que serán estudiadas en detalle, crecidas por MBE en Sheffield, están litografiadas en barra Hall, con un factor de tamaño largo/ancho ( $L/W$ ) de 3.5, poseen una puerta metálica evaporada sobre ella, la muestra es montada en una “cacerola”, lo que simplifica su instalación y cableado en el portamuestras. En este grupo hay otras muestras, T6, T7 y T9, de similares características, de las que simplemente ilustraremos algunas medidas.

Otro grupo es S1, S2 y S3, de Freiburg las dos primeras y de París la última, también fabricadas por MBE, están litografiadas en barra Hall con un factor  $L/W=3.1$ , y tienen evaporada una puerta. Están instaladas en una “cacerola” similar a la anterior, pero con patas más flexibles y carentes de aislamiento, lo que hace necesario extremar las precauciones para evitar posibles cortocircuitos.

En la figura (4.5), se muestran las “cacerolas” de las que hablamos arriba para los tres grupos de muestras:

- 1  $V_{xx}$  (Lo)
- 2  $V_H$  (Hi)
- 7  $V_{xx}$  (Hi)
- 9  $\Gamma, V_G^-$
- 10  $V_G^+$
- 12  $V_H$  (Lo)
- 15  $\Gamma^+$

Conectado a a la muestra con hilo de Au y a los cables del portamuestras con hilo de Cu

Marco y soporte aislante

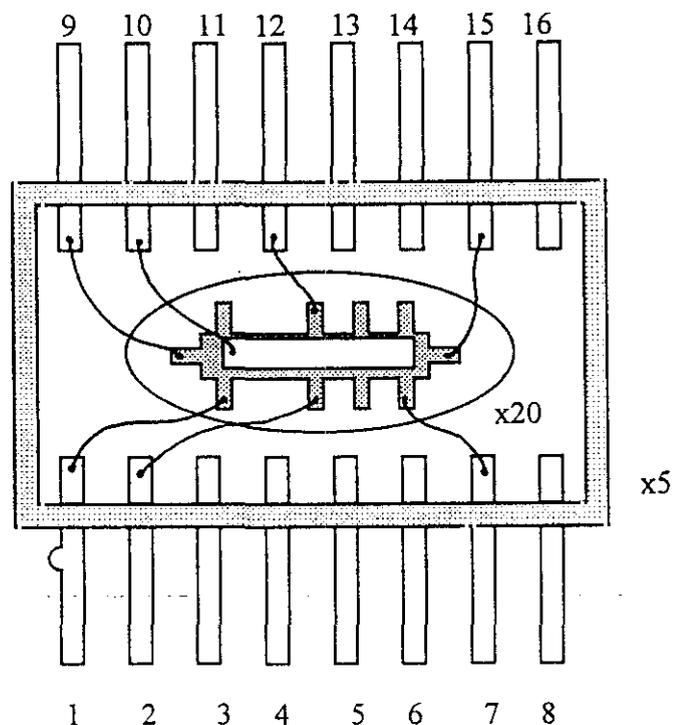


Figura 4.5: Conexiones en las muestras.

La descripción detallada de cada muestra (estructura y dopajes) y las medidas en ellas realizadas se desarrolla en la sección de Resultados Experimentales.

## 4.4 El procedimiento

Describiremos a continuación el procedimiento de medida. Consta de dos partes diferenciadas. Una son los preparativos previos, desde el comienzo, con el criostato y bobina a temperatura ambiente, hasta que el sistema queda listo para empezar a medir. Este es el proceso de vaciado, enfriamiento de bobina y muestra, cableado de la muestra, verificación de los niveles de líquidos criogénicos, etc... La otra es el proceso de la medida en si, la obtención de los datos experimentales. Finalmente estaría el tratamiento de dichos datos experimentales, pero esto será descrito en las siguientes secciones.

#### 4.4.1 Preparación del experimento:

Este proceso es continuo, ya que aunque lo que podríamos llamar obtención de los datos experimentales se concentra en diversas sesiones de una semana intensa de trabajo, la puesta a punto del sistema, su verificación, ampliación incorporando nuevos aparatos, preparación de cables, realización de los programas informáticos de control y medida y muchas otras tareas, se realiza permanentemente.

Sin embargo, lo que es la preparación inmediata de la semana de medidas, comienza la semana anterior con el bombeo de los recintos del criostato en los que hay que efectuar el vacío. Este bombeo se efectúa por las salidas de los recintos que hay en la parte superior del criostato. En el recinto más exterior del criostato, aquel que aísla el recinto del nitrógeno líquido, comenzamos haciendo un vacío previo con la bomba secundaria, hasta alcanzar un vacío del orden de  $10^{-3}$  torr. Una vez alcanzado éste, al cabo de unos veinte minutos, se puede activar la bomba turbomolecular, que tras un corto proceso de aceleración pasa a funcionar automáticamente. Cuando el vacío en el recinto exterior es bueno podemos vaciar también el que aísla el recinto del helio líquido. Al cabo de unos tres días de bombeo continuo, el vacío alcanzado es algo mejor que  $10^{-6}$  torr, esto se mide con los manómetros electrónicos, entonces podemos cerrar las salidas por las que hemos estado vaciando y desconectar las bombas, primero la turbomolecular y después la secundaria. El vacío conseguido mejorará además al enfriar, por el procedimiento de “criobombeo”, en el que las pocas impurezas que quedan en el ambiente son absorbidas por las paredes del recinto vaciado. Una precaución importante a tener en cuenta es que nunca se podrá bombear sobre el recinto que aísla el del helio líquido si previamente no se han vaciado los arriba mencionados, ya que las paredes son muy finas y no aguantarían un diferencial de presión de fuera hacia dentro tan grande: el recinto se “estrujaría” sobre sí mismo.

Una vez efectuado el vacío, el criostato está listo para comenzar el proceso de enfriado. Este comienza con el bombeo de los recintos de nitrógeno y helio con el objeto de sacar el aire, que contiene vapor de agua susceptible de formar bloques de hielo, y sustituirlo con nitrógeno gaseoso. El recinto de nitrógeno se llena de nitrógeno líquido

transferido directamente desde las vasijas en que nos es suministrado. La transferencia del nitrógeno líquido no encierra dificultad, pudiéndose hacer con una “caña” normal, y si hace falta presurizando ligeramente la vasija de partida para facilitar la transferencia. La cantidad de líquido se puede obtener de las medidas suministradas por el nivel de nitrógeno, cuando éste llega al 100%, se detiene la transferencia. A partir de entonces sólo será necesario rellenar de vez en cuando si el nivel de líquido desciende, aunque una vez enfriado con helio líquido el recinto interior, el consumo de nitrógeno es muy escaso. Conviene mantener la precaución de desbloquear de hielo periódicamente las salidas del recinto, ya que tienen tendencia a formar tapones de hielo.

Cuando ya está lleno este recinto, llenamos también de nitrógeno líquido el recinto de la bobina con el objetivo de bajar la temperatura desde unos 300K, temperatura a la que se encuentra el ambiente hasta 77K; para conseguir una buena termalización a esta temperatura, dejamos la bobina sumergida en nitrógeno líquido unos dos días. Al cabo de este tiempo es necesario vaciar bien la bobina de nitrógeno líquido, *al principio basta presurizar un poco el recinto para que el líquido salga, lo solemos aprovechar para rellenar el recinto exterior de nitrógeno líquido.* Para asegurar que todo el nitrógeno líquido sale del recinto de la bobina bombeamos con la bomba auxiliar grande hasta que la presión, que controlamos con uno de los manómetros, desciende hasta el nivel que previamente hemos verificado que es aquel en el que no queda líquido, suele ser necesario bombear varias veces admitiendo entre ellas helio gaseoso en el recinto para asegurar que efectivamente no queda nada de nitrógeno líquido. Si quedara un poco, se corre el riesgo de evaporar, al solidificar el nitrógeno, todo el helio líquido que se introducirá posteriormente. *El recinto de la muestra también es bombeado e introducimos en él helio gaseoso, es necesario comprobar que la válvula que comunica este recinto con el de la bobina no quedó bloqueada, una vez verificado esto se mantendrá cerrada durante el proceso de llenado con helio líquido.*

Todo queda listo en este momento para la transferencia de helio líquido desde las vasijas en que nos es suministrado hasta el recinto de la bobina. Para ello disponemos de una “caña” especial, que fué descrita en la sección 4.2.2. Antes de proceder es necesario introducir helio gas en dicha caña, *añadirle un prolongador que garantice que llega al fondo de la vasija y adaptar la entrada de ésta para que no se pierda presión durante la*

transferencia. Este proceso es el más delicado, conviene hacerlo a un ritmo lento, manteniendo una presurización baja pero constante, lo que permitirá consumir la mínima cantidad posible de helio líquido en el proceso de enfriado de la bobina desde 77K a 4.2K y en el posterior llenado, hasta cerca del 100%, del recinto de la misma. El proceso suele durar unas cinco horas. Durante éste tiempo podemos ir verificando el enfriamiento de la bobina midiendo un conjunto de resistencias, la de la propia bobina y otras cuatro que están distribuidas a distintas alturas en el recinto, sus valores a diferentes temperaturas están previamente verificados (ver Tabla 4.5) y nos permite controlar cómo va la transferencia del helio líquido durante el enfriamiento de la bobina. Al poco tiempo de producirse la transición a superconductora de la bobina, ésta alcanza la temperatura de 4.2K y el recinto empieza a llenarse, a partir de entonces podemos verificar la cantidad de líquido dentro del recinto mediante el nivel de helio.

<b>Resistencias</b>	<b>300K</b>	<b>77K</b>	<b>Transición</b>	<b>4.2K</b>
<b>Bobina</b>	30.8 $\Omega$	23.6 $\Omega$	8.4 $\Omega \Rightarrow 0\Omega$	0 $\Omega$
<b>R<sub>1</sub></b>	158.9 $\Omega$	181.1 $\Omega$	1090 $\Omega$	1196 $\Omega$
<b>R<sub>2</sub></b>	158.5 $\Omega$	180.0 $\Omega$	1168 $\Omega$	1192 $\Omega$
<b>R<sub>3</sub></b>	175.3 $\Omega$	194.6 $\Omega$	552 $\Omega$	1061 $\Omega$
<b>R<sub>4</sub></b>	177.6 $\Omega$	201.8 $\Omega$	490 $\Omega$	1060 $\Omega$

**Tabla 4.5**

Las muestras han de ser cableadas en el portamuestras, la mayoría de las muestras que medimos están encapsuladas en unas “cacerolas” que permiten su manipulación sin riesgo de estropear los contactos que van directamente a la muestra. Estos contactos han sido hechos con hilos de oro, soldados con indio a la muestra, verificando en cada caso que el contacto es ohmico, estos hilos van a las “patas” de la cacerola, más gruesas y que es donde nosotros soldaremos los contactos que van al portamuestras. En el portamuestras disponemos de diez cables que pueden ser utilizados para contactos en la muestra, de ellos, nosotros utilizamos ocho o nueve, según sea el caso (viene indicado en el capítulo siguiente), su soldadura es sencilla, utilizando finos hilos de cobre aislados que se sueldan con estaño o indio a las “patas” arriba mencionadas. La disposición de los contactos es tal que podemos medir las componentes diagonal y no diagonal de la

magneto-resistencia transversa, es decir, el efecto Shubnikov-de Haas y el efecto Hall respectivamente, sin más que cambiar el cable exterior del portamuestras. Esto tiene la ventaja de evitar el ruido adicional que se produce con la utilización de conmutadores o la posible interferencia al mantener contactos que no se vayan a utilizar conectados a la instrumentación. Una vez efectuadas todas las soldaduras de los contactos, éstos son verificados. Finalmente se introduce el portamuestras en el criostato por su parte superior, durante esta operación mantenemos en el recinto una ligera sobrepresión de gas helio para evitar la entrada de aire, que formaría bloques de hielo dada la baja temperatura que se alcanzará. Los cables son conectados en dos conectores de la cabeza del portamuestras, en uno van las conexiones necesarias para el termómetro y el calentador de la muestra, que se conectan al regulador de temperatura, y en el otro van las conexiones de la muestra, que se conectan a la instrumentación de medida.

La muestra debe ser enfriada antes de empezar a medir. Admitiendo helio mediante la válvula que comunica el recinto de la bobina con el recinto de la muestra podemos bajar suavemente la temperatura hasta alcanzar 4.2K, posteriormente se regulará la temperatura como se indica en la sección 4.2.2. Todo está listo entonces para empezar a medir.

#### **4.4.2 Proceso de medida:**

Cuando la temperatura de la muestra está estabilizada comenzamos las medidas. Efectuamos varios tipos de medidas, que agruparemos en dos grandes bloques. Un bloque son aquellas medidas en función del campo magnético, el otro son aquellas en función del voltaje de puerta. En cada uno de los bloques, podrán ser, a su vez, medidas del efecto Hall cuántico o del efecto Shubnikov-de Haas, podemos pasar de una medida a otra sin más que conectar el cable que corresponda.

Las medidas en función del campo magnético se realizan a un voltaje de puerta fijo. Se programa una subida de campo magnético, una intensidad de corriente que alimenta a la muestra y un valor del voltaje de puerta. Se mide el voltaje entre las conexiones de la muestra a intervalos regulares del campo magnético. Los valores se van

grabando en un fichero, cada punto tiene como coordenada “ $x$ ” el campo magnético, en tesla (el programa convierte la intensidad de la corriente con que se alimenta la bobina), como coordenada “ $y$ ” el valor de la resistencia correspondiente, en ohmios (que se calcula a partir de la medida del voltaje obtenida y del valor programado de la intensidad de corriente que alimenta a la muestra) y un tercer valor que es la temperatura correspondiente a dicho punto. En la primera subida del campo magnético es necesario tomar la precaución de hacerla a un ritmo de energización de la bobina lento, no llegando a más de 5T la primera vez, alcanzando valores mayores a ritmo aún más lento; ésto es necesario para anclar los vórtices de la bobina y evitar que ésta transite bruscamente al estado no-superconductor. Posteriores subidas pueden hacerse a ritmo paulatinamente mayor. La mayoría de las medidas las efectuamos con un ritmo de energización de la bobina de 3A/min.

Las medidas en función del voltaje de puerta se hacen a un campo magnético fijo. Se programan los valores de puerta inicial y final y el número de puntos del fichero, que quedaran uniformemente espaciados. También se programa el valor fijo del campo magnético que se desea para hacer la medida, si ya es el que tiene la bobina, la medida comenzará, si no, primero se modificará el campo hasta alcanzar dicho valor y luego se comienza a medir. El valor de la corriente que alimenta la muestra también es fijo. Los valores obtenidos se van grabando en un fichero, para la coordenada “ $x$ ”, el voltaje de puerta, en voltios, y para la coordenada “ $y$ ”, el valor de la resistencia correspondiente, en ohmios (que se calcula a partir de la medida del voltaje obtenida y del valor programado de la intensidad de corriente que alimenta a la muestra), para cada punto también se graba la temperatura correspondiente.

Para ambos tipos de medidas la temperatura se regula con el controlador ITC4 como se describe en la sección 4.2.4. Será necesario estabilizar bien las temperaturas antes de empezar a medir.

La coordenada “ $y$ ”, resistencia, que obtenemos en los dos casos anteriores podrá ser la componente diagonal (efecto Shubnikov-de Haas) o no-diagonal (efecto Hall cuántico) de la magnetoresistencia transversa según sea el cable que estemos utilizando,

no es necesario cambiar soldaduras ni usar conmutadores, simplemente cambiando de cable pasamos de una medida a la otra.

#### **4.4.3 Tratamiento de los datos:**

Los datos son grabados en un fichero conforme se van adquiriendo de forma automática. Además se graba un fichero de configuración para cada uno de datos, con información adicional sobre el proceso de medida. Al cabo de una tanda de medidas, los ficheros son enviados a otro ordenador donde serán posteriormente tratados.

El tratamiento de los datos se puede dividir en tres fases. Una primera en que son representados tal y como son obtenidos todos los ficheros, un índice de todas las medidas efectuadas se puede encontrar en el Apéndice 6. Una segunda en que a partir de éstos datos obtenemos cantidades directas: pendiente Hall por ajuste de una recta a bajo campo (antes de que se manifieste el efecto Hall cuántico) y frecuencia de las oscilaciones del efecto Shubnikov-de Haas mediante una transformada de Fourier, ambas cantidades permiten contrastar el número de portadores total y de cada subbanda ocupada respectivamente. También de manera inmediata se pueden obtener las movilidades, los tiempos de relajación y la masa efectiva para cada muestra. En una tercera fase, los ficheros de resistencias son invertidos para obtener conductividades, lo que permitirá contrastar el modelo teórico de manera más inmediata, y obtener entonces otras cantidades como la densidad de estados o la imanación. También se hace un estudio detallado del comportamiento con la temperatura, representación de diagramas de renormalización y ajuste de los exponentes universales, lo que permitirá profundizar en la discusión sobre el carácter localizado o deslocalizado de los electrones.

En las secciones siguientes desarrollamos lo expuesto arriba para una serie de muestras en particular.



## Capítulo 5

# RESULTADOS EXPERIMENTALES

### 5.1 Generalidades

Presentaremos resultados de varias muestras, todas crecidas por MBE en los laboratorios que se mencionaron anteriormente. Todas ellas tienen como estructura básica un pozo cuántico de  $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ , variando de una a otra los siguientes parámetros:

- Porcentaje de In en la aleación del pozo. Anchura del pozo.
- Composición y grosor de las paredes del pozo ( $\text{GaAs}$  ó  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ ).
- Tipo y situación del dopaje (Si en todos los casos): éste será de dos tipos, dopaje de modulación y dopaje delta, que podrán darse a ambos lados del pozo o únicamente a uno (“encima” o “debajo”, con esto queremos decir entre el pozo y la puerta o entre el pozo y el sustrato respectivamente). La densidad de impurezas dopantes también varía. Para estos tipos de dopajes, las impurezas están separadas del canal bidimensional por una capa espaciadora de material sin dopar, que podrá ser de diferentes grosores.

Para cada muestra se describirá en detalle la estructura, incluiremos un cálculo teórico autoconsistente (Gilpérez 1994, Fernández de Avila 1995) que indica el perfil del pozo, los niveles de energía de las posibles subbandas, así como la población de portadores y el nivel de Fermi previsto.

El proceso de obtención de datos experimentales ha sido indicado en la sección anterior, realizándose igual para todas las muestras, si bien para cada una, en función del interés que demuestre, se ha insistido más en un tipo de medida.

En ésta sección presentaremos también el tratamiento básico que hemos efectuado sobre los resultados obtenidos: el cálculo de magnitudes que se obtienen de manera directa a partir de los datos. Indicamos a continuación cuáles son los que aplicamos a todas las muestras:

- obtención de la densidad total de portadores: mediante un ajuste lineal de la pendiente Hall (ficheros  $R_{xy}$ ). Recordando los resultados del capítulo 3:

$$n_e (m^{-2}) = \frac{1}{e(C) \times \text{pendiente}(\Omega / T)} \quad (5.1)$$

- obtención de la densidad de portadores en cada subbanda: mediante un análisis de las oscilaciones Shubnikov-de Haas (ficheros  $R_{xx}$ ): se interpolan a valores igualmente espaciados en  $I/B$  que es la magnitud en que las oscilaciones son periódicas y se efectúa una transformación de Fourier que nos dará los picos de frecuencia ( $F(T)$ ) correspondientes a la densidad de portadores de cada subbanda (también se puede obtener la frecuencia mediante un ajuste de la gráfica en que se representa el campo a que aparece el máximo de la oscilación frente a los números enteros correspondientes a cada pico). La suma de los portadores de las subbandas debe ser coherente con los datos obtenidos mediante efecto Hall. Las expresiones que se utilizan son:

$$n_e (m^{-2}) = \frac{e(C)F(T)}{\pi \hbar} \quad (5.2)$$

- obtención de la movilidad (y tiempos de scattering) a partir de los datos de  $R_{xx}$ . Si tenemos  $R_0$  ( $R_{xx}$  a campo magnético nulo), podemos calcular:

$$R_0 = \frac{L}{W} \rho_0; \quad \tau_0 (s) = \frac{m^*}{n_e e^2 \rho_0}; \quad \mu (m^2 V^{-1} s^{-1}) = \frac{1}{n_e e \rho_0} \quad (5.3)$$

- mediante los ficheros en que variamos el voltaje de puerta,  $V_g$ , podemos obtener una relación entre  $V_g$ , la energía de Fermi, y la densidad de portadores.

- análisis de los datos en función de la temperatura: ajustando los ficheros a diferentes temperaturas, se puede obtener la masa efectiva de los portadores (este análisis hay que hacerlo para los máximos de la oscilación donde los estados están deslocalizados y presentan un comportamiento con la temperatura dependiente de la masa efectiva; para los estados localizados nos iremos a la siguiente sección). La amplitud de la oscilación en función de la temperatura está modulada por el término  $R_{T,p}$ ,

que viene dado por la ecuación (3.115), que recordamos aquí introduciendo una nueva notación:

$$R_{T,p}(T) = \frac{\chi(T)}{\sinh \chi(T)} \quad (5.4)$$

donde  $\chi(T)$  es el término que recoge la dependencia explícita con la temperatura y que viene dado por:

$$\chi(T) = \frac{2\pi p k_B T}{\hbar e B} m^* \quad (5.5)$$

si comparamos los máximos de las oscilaciones a diferentes temperaturas, manteniendo constantes todos los demás parámetros, podemos obtener la masa efectiva ajustando el cociente de dos envolventes (definidas por los máximos) a diferentes temperaturas. Todos los términos se simplifican y queda únicamente una ecuación dada por:

$$\frac{R_{T,p}(T_1)}{R_{T,p}(T_2)} = \frac{T_1 \sinh \chi(T_1)}{T_2 \sinh \chi(T_2)} \quad (5.6)$$

de donde es posible obtener un valor para la masa efectiva (a un campo magnético dado) sustituyendo la razón entre las envolventes obtenidas experimentalmente.

- análisis de plateaus. El índice del plateau indica el nivel de Landau en que se encuentra la energía de Fermi. Se obtiene la cuantificación de la componente no diagonal de la magnetoresistencia transversa, para intervalos amplios de campo magnético (o voltaje de puerta) que coinciden con intervalos nulos de la componente diagonal. Un análisis más detallado de los plateaus y su comportamiento con la temperatura se presentará en las secciones siguientes.

Para alguna muestra (por ejemplo, el caso en que hay varias subbandas pobladas) hemos efectuado un análisis más amplio, que se detalla en el apartado correspondiente a dicha muestra.

En el siguiente capítulo presentaremos resultados que requieren un tratamiento más detallado y en el que se utilizan consideraciones del modelo teórico que estamos manejando, esto supone profundizar más en la utilización de los datos experimentales, bien sea para contrastar la validez del cálculo teórico o, suponiéndolo correcto (dentro de la aproximación considerada) extraer más información de los resultados experimentales.

## 5.2 Resultados

### 5.2.1 Pozos cuánticos con modulación de dopado:

#### Muestra T4-K4:

La heteroestructura es un pozo cuántico de InGaAs con dopaje homogéneo de Si encima del pozo.

La muestra T4 ha sido crecida en Sheffield mediante la técnica de MBE (Gilpérez 1994). Posteriormente se ha evaporado sobre ella una puerta metálica y se ha sometido a un proceso de fotolitografía para crear una barra Hall cuya relación  $L/W$  es de 3.5. La muestra K4 es igual, se ha litografiado de la misma oblea y encapsulado en otra "cacerola", hemos efectuado medidas en ambas muestras para verificar los resultados obtenidos, así como el funcionamiento del sistema experimental; los resultados son reproducibles.

En detalle, la heteroestructura consta de los siguientes estratos (se pueden ver en figura (5.1a)): sobre un sustrato de GaAs está el pozo de  $\text{In}_{0.18}\text{Ga}_{0.82}\text{As}$  con una anchura de  $130\text{Å}$ , sobre él, se crece una capa de  $\text{Al}_{0.20}\text{Ga}_{0.80}\text{As}$  de  $330\text{Å}$ , de la cual, los primeros  $20\text{Å}$  carecen de dopaje y actúan como capa espaciadora, y el resto tiene un dopaje homogéneo de Si de  $3 \times 10^{18}\text{cm}^{-3}$ . Finalmente se crece una capa protectora de GaAs de  $50\text{Å}$ .

GaAs (50 Å) sin dopar (capa protectora)
$\text{Al}_{0.20}\text{Ga}_{0.80}\text{As}$ (190 Å) dopado Si ( $3 \times 10^{18}\text{cm}^{-3}$ )
$\text{Al}_{0.20}\text{Ga}_{0.80}\text{As}$ (20 Å) sin dopar
$\text{In}_{0.18}\text{Ga}_{0.82}\text{As}$ (130 Å)
GaAs sin dopar (sustrato)

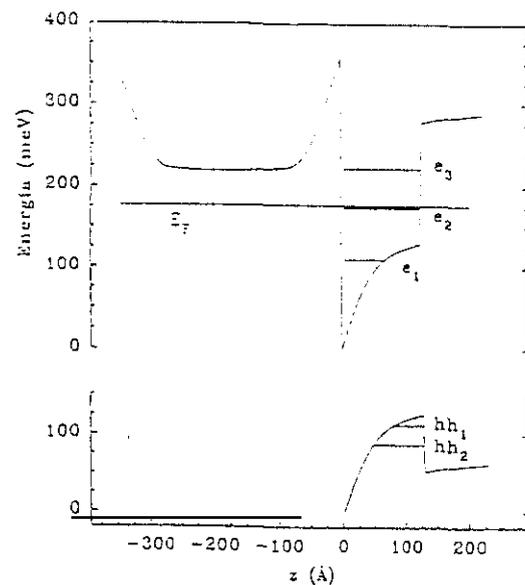


Figura 5.1: Muestra T4, heteroestructura (a) y cálculo de niveles (b)

Para ésta muestra, se ha calculado la estructura de niveles que se muestra en la figura. Se obtienen dos estados ligados en el pozo: una primera subbanda (primer estado ligado del movimiento en la dirección  $z$ ) cerca del fondo del pozo, y una segunda subbanda, muy próxima al nivel de Fermi (para  $V_g=0V$ ) que presumiblemente podría poblarse a  $T>0K$  y/o  $V_g>0V$ .

Los resultados experimentales obtenidos se resumen a continuación (la serie completa de medidas efectuadas se muestra en el Apéndice 6. Como se indica en apartados anteriores, las medidas se ordenan en dos grandes grupos, según se esté midiendo la magnetoresistencia en función del campo magnético para un voltaje de puerta fijo; o en función del voltaje de puerta para un campo magnético fijo. En ambos casos se mantiene estable la temperatura, efectuándose medidas a varias temperaturas fijas.

En la figura (5.2a) mostramos las componentes diagonal y no-diagonal ( $R_{xx}$  y  $R_{xy}$ ) de la magnetoresistencia transversa (en función de  $B$  a  $V_g=0V$ ). Se aprecia claramente el Efecto Hall Cuántico Entero, apareciendo plateaus para valores de  $R_{xy}$  dados por la ecuación (2.63) correspondientes al llenado de los niveles de Landau  $i=6,8,10,12\dots$ . Los plateaus obtenidos muestran una pequeña estructura debido a la mediana calidad de las muestras (scattering grande por rugosidad de intercara y presencia de impurezas en el canal, lo cual, como veremos más adelante dá una movilidad no muy alta). También se aprecia el Efecto Shubnikov-de Haas, con oscilaciones en  $R_{xx}$  a partir de  $1T$ ; para campos a partir de  $6T$  se aprecian intervalos del campo magnético en que  $R_{xx}$  es nulo, coincidiendo estos intervalos con los plateaus. Los máximos de las oscilaciones coinciden con el paso de un plateau al siguiente.

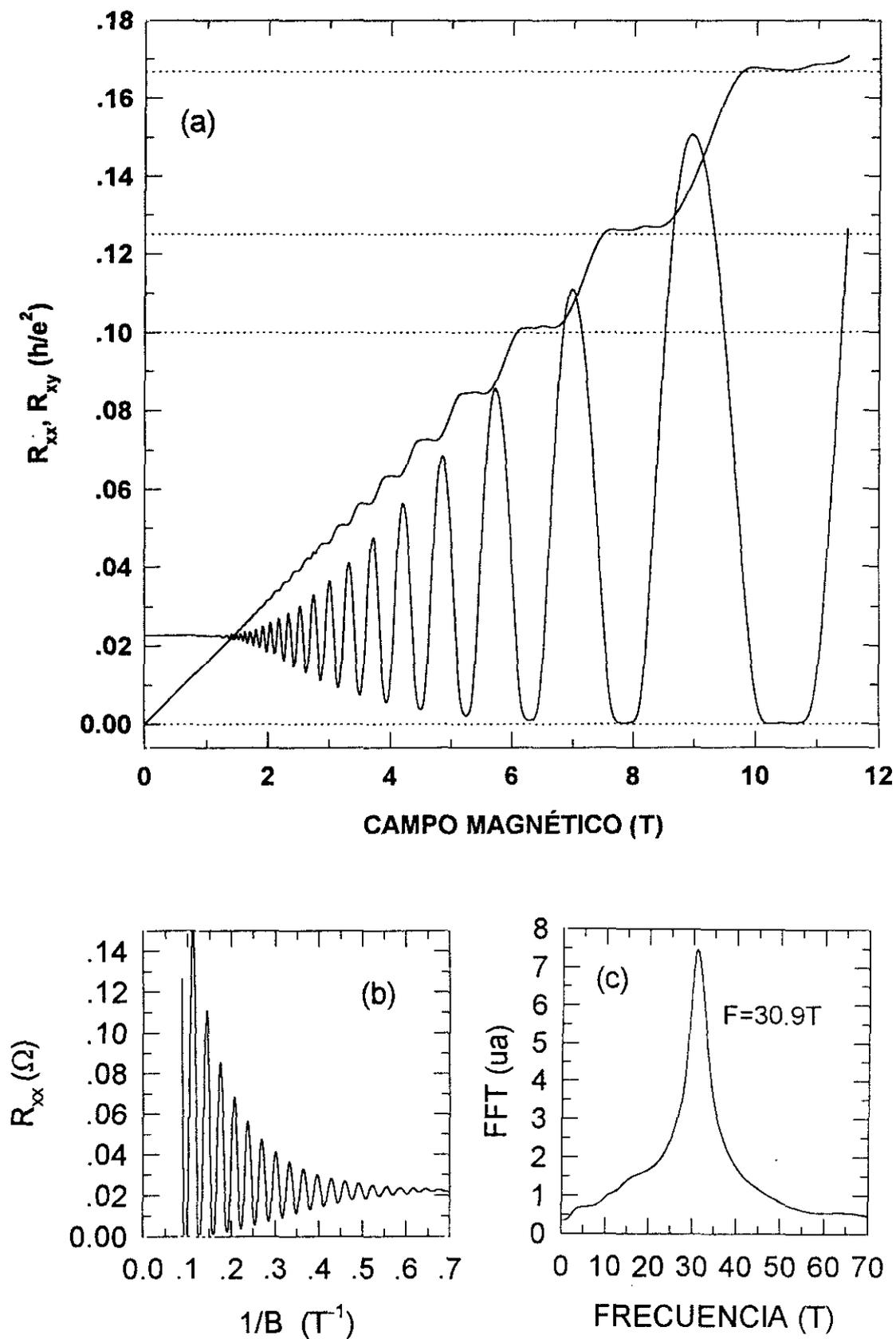


Figura 5.2: Muestra T4,  $R_{xx}$  y  $R_{xy}$  vs  $B$  a  $V_g=0$  (a),  $R_{xx}$  vs  $1/B$  (b) y FFT (c)

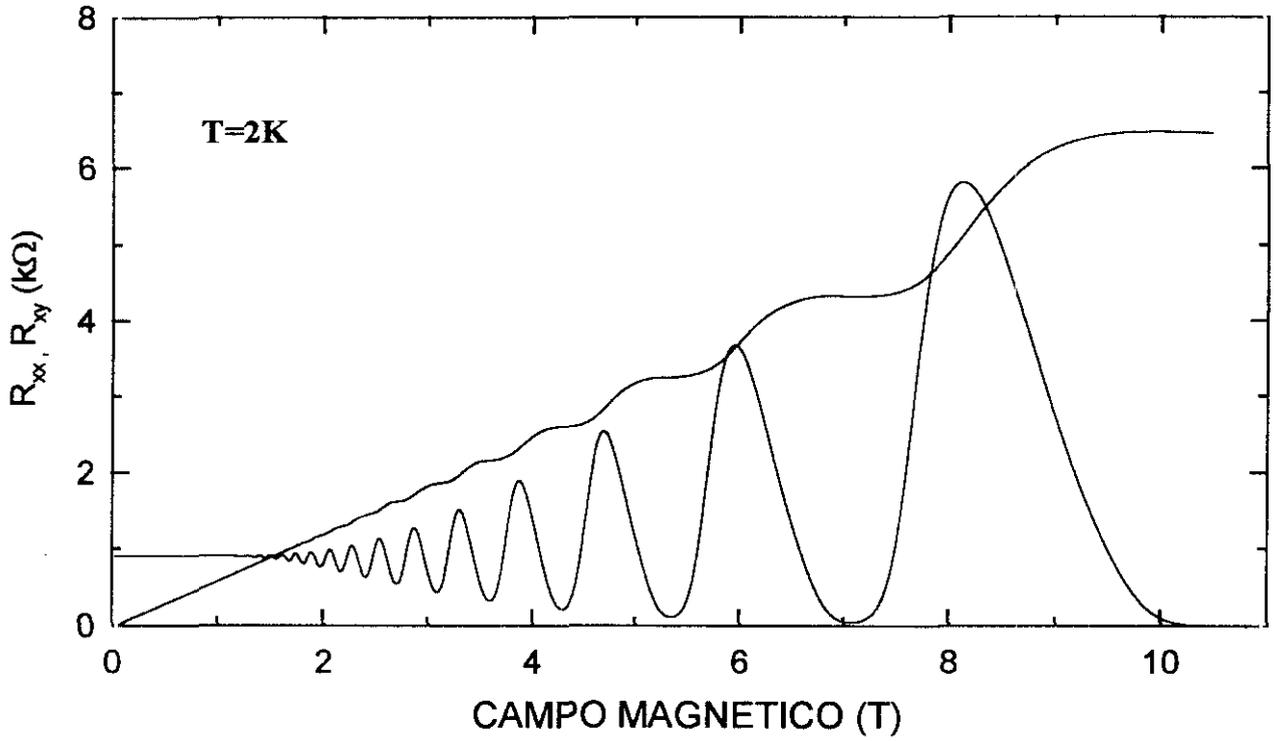


Figura 5.3: Muestra T4,  $R_{xx}$  y  $R_{xy}$  vs  $B$  a  $V_g = -0.3\text{V}$

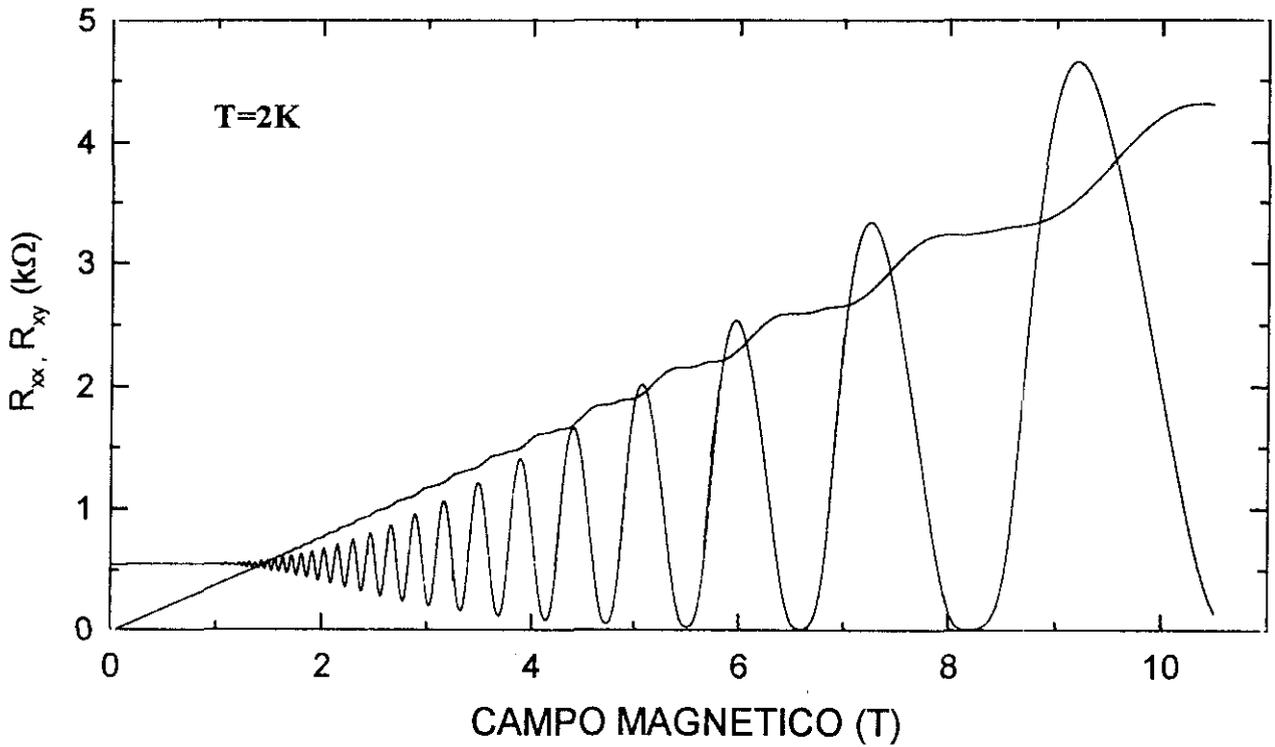


Figura 5.4: Muestra T4,  $R_{xx}$  y  $R_{xy}$  vs  $B$  a  $V_g = +0.1$

De la pendiente Hall a bajo campo podemos deducir el número total de portadores para voltaje de puerta nulo mediante la ecuación (5.1). Obtenemos  $n_{e,TOT}=1.53 \times 10^{12} \text{cm}^{-2}$ . Por otro lado, en las oscilaciones SdH se aprecia una única frecuencia,  $F=30.9T$ , lo que indica que hay una única subbanda poblada; la frecuencia se obtiene por transformada de Fourier del fichero interpolado a valores en  $1/B$  equidistantes (las oscilaciones son periódicas en  $1/B$ ). Puede apreciarse en la figura (5.2b,c). A partir de esta frecuencia y mediante la ecuación (5.2) se calcula el número de portadores en la primera subbanda, obteniéndose  $n_{e,1}=1.49 \times 10^{12} \text{cm}^{-2}$ . Este valor es ligeramente inferior al obtenido para el número total de portadores, lo cual indica, de forma indirecta, que puede haber electrones poblando la segunda subbanda, pero en una cantidad tan pequeña:  $n_{e,2}=n_{e,TOT} - n_{e,1}=4 \times 10^{10} \text{cm}^{-2}$  que no pueden ser detectados mediante las oscilaciones SdH. Hay evidencia de esta población en la segunda subbanda mediante medidas ópticas en las mismas muestras (Gilpérez 1994).

La resistencia a campo magnético nulo es  $R_0=587.7\Omega$  y si tomamos la masa efectiva como  $m^*=0.067m_0$  nos da un tiempo de relajación a campo magnético nulo de  $\tau_0=0.97 \times 10^{-12} \text{s}$ , y una movilidad de  $\mu=24650 \text{m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$ , un valor no demasiado alto.

En la figura (5.3) presentamos  $R_{xx}$  y  $R_{xy}$  en función del campo magnético para un voltaje de puerta de  $V_g=-0.3V$ , en éste caso, se obtiene el mismo número de portadores mediante la pendiente Hall y el efecto Shubnikov-de Haas,  $n_e=1.05 \times 10^{12} \text{cm}^{-2}$ , indicando que sólo hay una subbanda poblada; para el tiempo de relajación a campo magnético nulo se obtiene  $\tau_0=0.93 \times 10^{-12} \text{s}$ . En la figura 5.4 se muestran las mismas magnitudes para  $V_g=+0.1V$ , a simple vista se observa como cambia la frecuencia de las oscilaciones así como la pendiente Hall, se aprecia también cómo en este caso, en que tenemos un gran número de portadores, los plateaus presentan cierta estructura, debida a la población del canal paralelo (en la zona dopada del material). En el caso de K4 incluimos la figura (5.4b) en que se muestra para voltaje de puerta fuertemente negativo (pocos portadores) detalles de la forma de los picos Shubnikov-de Haas y los plateaus Hall, destacando la fuerte asimetría entre la parte de bajo y alto campo del pico de la oscilación.

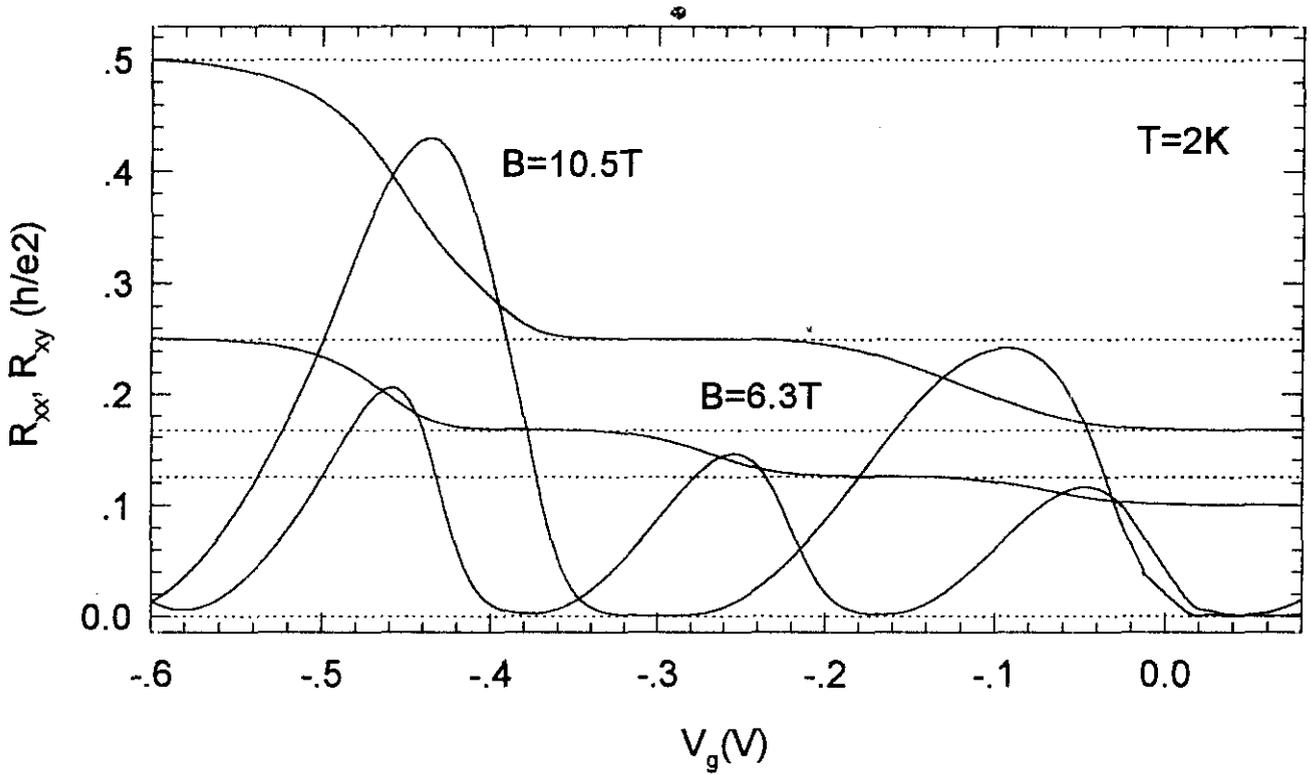


Figura 5.5: Muestra T4,  $R_{xx}$  y  $R_{xy}$  vs  $V_g$  a varios B

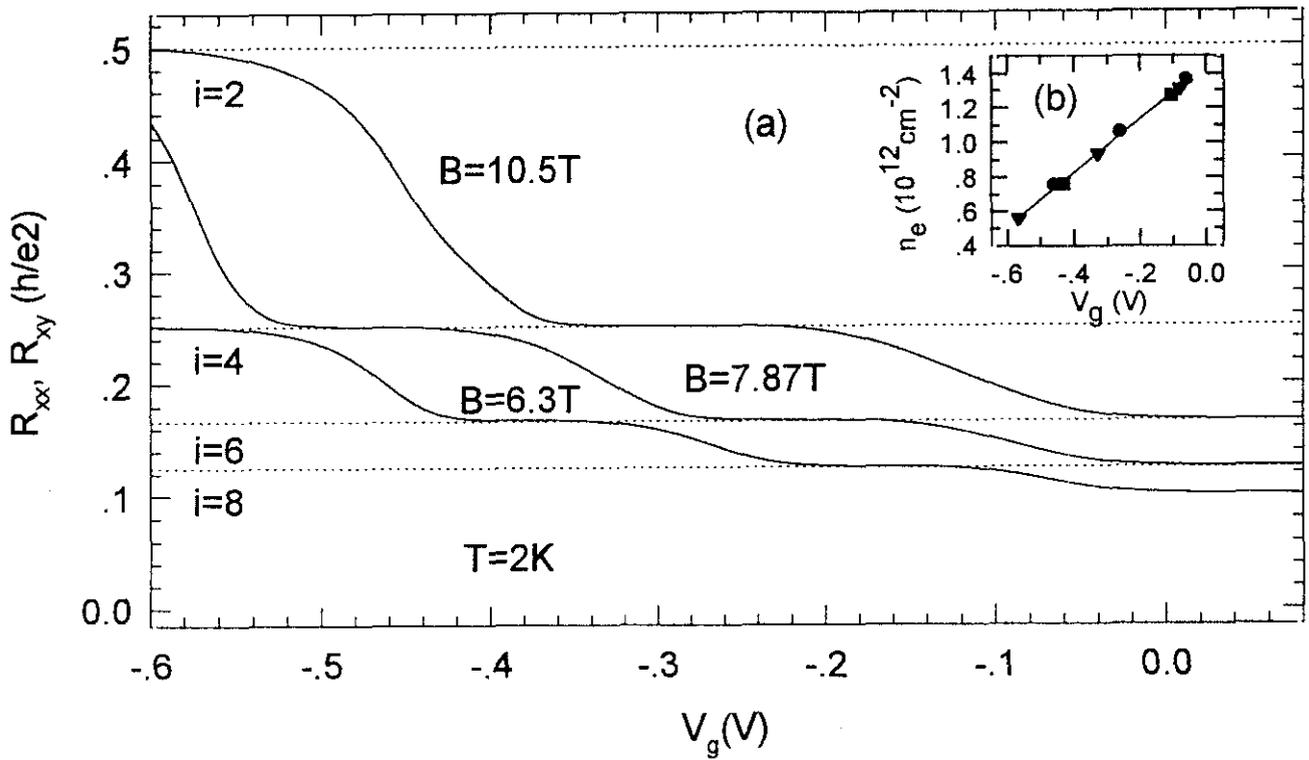


Figura 5.6: Muestra T4, detalle de  $R_{xy}$  vs  $V_g$  a varios B(a) y  $n_e$  vs  $V_g$  (b)

En las siguientes figuras mostramos los resultados obtenidos para  $R_{xx}$  y  $R_{xy}$  cuando variamos el potencial de puerta  $V_g$ , a un campo magnético dado. El rango de variación permitido viene determinado por la característica  $I-V$  obtenida con un trazador. La magnitud del campo magnético fija la estructura de niveles de Landau, y al variar el potencial de puerta vamos modificando el nivel de Fermi, que va “recorriendo” los niveles de energía a medida que éstos se pueblan o despueblan con los portadores provenientes de la zona de dopaje. El comportamiento de  $R_{xx}$  y  $R_{xy}$  en función de  $V_g$  muestra las mismas características que en función del campo magnético: aparecen plateaus en  $R_{xy}$  que corresponden con los mínimos, eventualmente ceros, de  $R_{xx}$ . En la figura (5.5) aparecen los datos a varios campos magnéticos fijos,  $B=6.3, 7.87, 10.5$  y  $11.5T$ , presentando en la figura (5.6) un sumario del comportamiento de  $R_{xy}$ , en el que se aprecia que los plateaus aparecen siempre a los mismos valores para el llenado de los correspondientes niveles de Landau, como se realiza superponiendo líneas discontinúas para los valores de la resistencia dados por  $h/e^2i$ , donde  $i$  son números enteros pares.

A partir de estos ficheros podemos obtener la dependencia del número de portadores con el voltaje de puerta. Tenemos la siguiente relación entre la densidad de electrones y el campo magnético  $B$ :

$$n_e = \frac{e}{h} B(2\nu + 1) \quad (5.7)$$

donde  $h$  y  $e$  son constantes universales y  $\nu$  es un número real. En el caso de considerar exactamente el caso en que los números son enteros impares, tenemos la relación para el Efecto Hall Cuántico:

$$R_{xy} = \frac{h}{e^2(2n+1)} \quad (5.8)$$

y obtenemos entonces:

$$n_e = \frac{B}{eR_{xy}} \quad (5.9)$$

en la figura (5.6b) representamos, para tres campos magnéticos aplicados diferentes, los valores de  $n_e$  como función de  $V_g$  obtenidos a partir de los valores de  $R_{xy}$  para dichos números enteros impares. Obtenemos la siguiente relación lineal:

$$n_e = (1.55 \times 10^{12} V_g + 1.45 \times 10^{12}) cm^{-2} \quad (5.10)$$

válida para la región en que el voltaje de puerta varía entre  $0V$  y  $-0.6V$ .

Finalmente vamos a presentar algunos resultados en función de la temperatura. Los tipos de medidas arriba comentados han sido efectuados a varias temperaturas, que se mantienen fijas durante todo el proceso de medida. En la figura 5.7, mostramos los resultados para  $R_{xx}$  y  $R_{xy}$  en función del campo magnético a varias temperaturas, en la figura 5.8, mostramos  $R_{xx}$  y  $R_{xy}$ , esta vez en función del voltaje de puerta. A partir de éstas medidas se pueden obtener varios resultados.

En primer lugar, y mediante un análisis de los máximos de las oscilaciones Shubnikov-de Haas, que decrecen al aumentar la temperatura, se obtiene, ajustando la ecuación (5.6) un valor para la masa efectiva de  $m^* = 0.067m_e$  hasta campos magnéticos de  $6T$ , a partir del cual, éste valor aumenta de forma no lineal, difiriendo este resultado del previsto para aleaciones de InGaAs. El comportamiento en función de la temperatura de  $R_{xx}$  en los mínimos, es completamente diferente, su valor aumenta al aumentar la temperatura, esta característica es típica de mecanismos de transporte activados para estados localizados. En la figura 5.8b mostramos el paulatino cambio de comportamiento en función de la temperatura de  $R_{xx}$  conforme pasamos desde el máximo hacia el mínimo (vamos variando  $V_g$ ). Este comportamiento se analizará más en detalle en la siguiente sección, trabajando con las conductividades  $\sigma_{xx}$  y  $\sigma_{xy}$ , lo que permitirá relacionar la anchura de los picos de las oscilaciones Shubnikov-de Haas con la de los plateaus del efecto Hall cuántico y construir los correspondientes diagramas de renormalización.

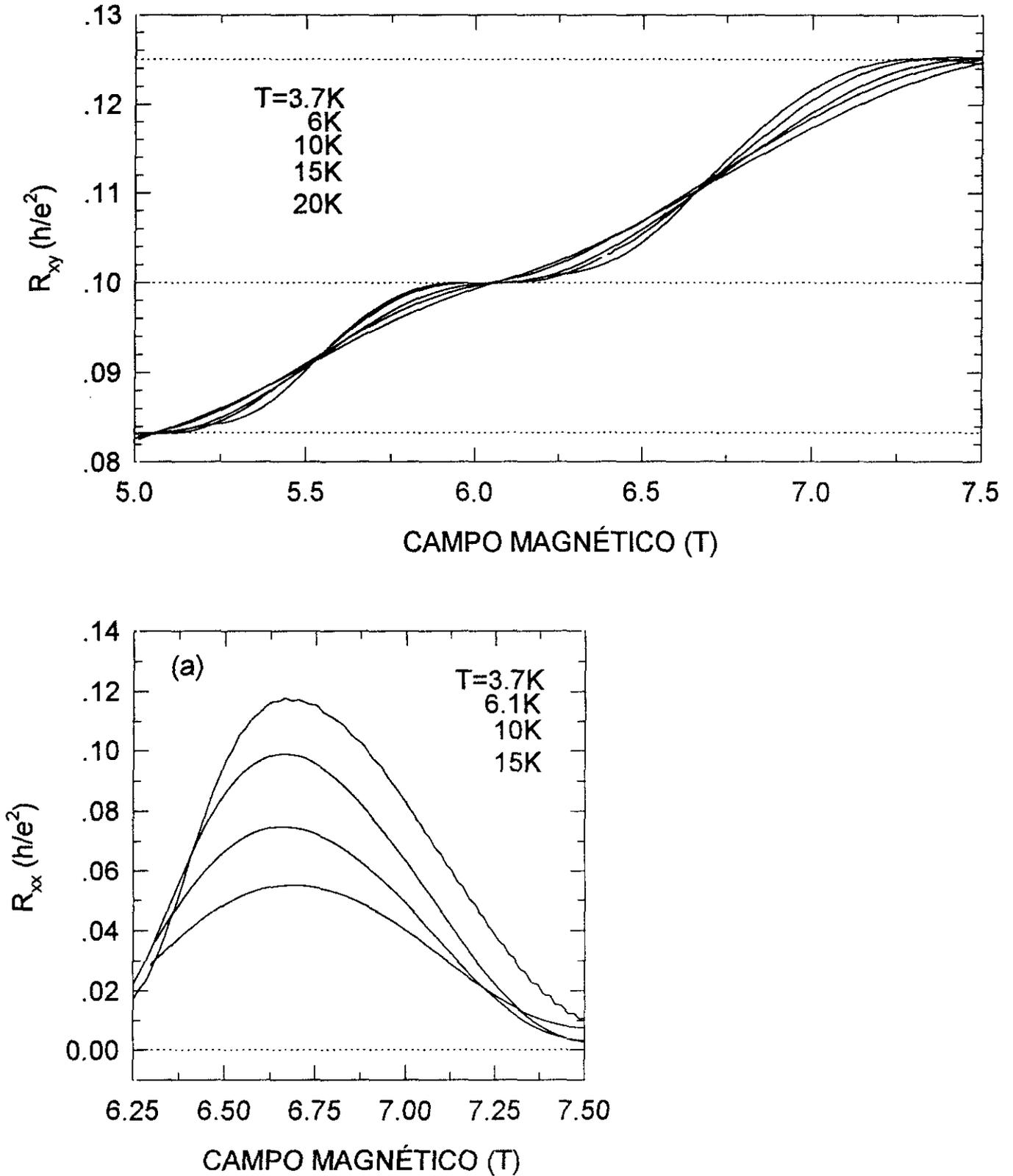


Figura 5.7: Muestra T4,  $R_{xx}$  vs  $B$  a varias temperaturas(a) y ajuste  $m_{eff}$  (b)

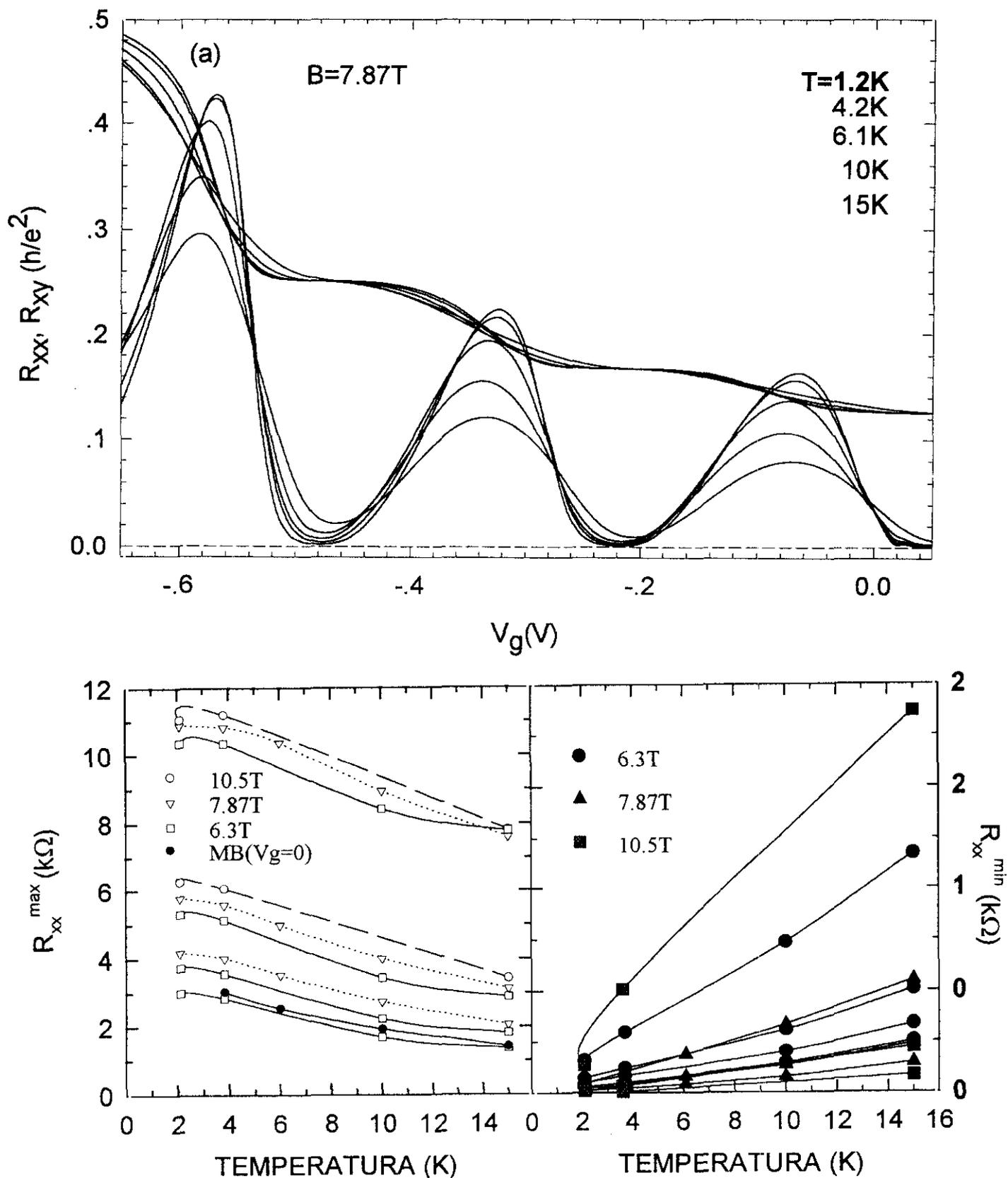


Figura 5.8: Muestra T4,  $R_{xx}$  vs  $V_g$  a varias  $T$  (a) y vs  $T$  a varias  $V_g$  (b).

Muestra T5:

La heteroestructura es un pozo cuántico de InGaAs con dopaje homogéneo de Si encima. La muestra T5 también ha sido crecida en Sheffield mediante la técnica de MBE. Posteriormente se ha evaporado sobre ella una puerta metálica y se ha sometido a un proceso de fotolitografía para crear una barra Hall cuya relación  $L/W$  es de 3.5:

GaAs (50 Å) sin dopar (capa protectora)
Al <sub>0.20</sub> Ga <sub>0.80</sub> As (190 Å) dopado Si ( $1 \cdot 10^{18} \text{cm}^{-3}$ )
Al <sub>0.20</sub> Ga <sub>0.80</sub> As (20 Å) sin dopar
In <sub>0.18</sub> Ga <sub>0.82</sub> As (130 Å)
GaAs sin dopar (sustrato)

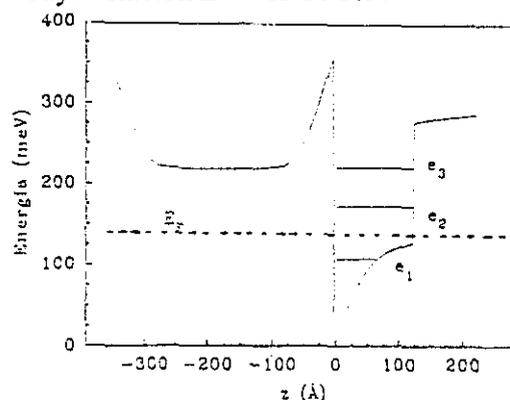


Figura 5.9: Muestra T5, heteroestructura (a) y cálculo de niveles (b)

En la figura (5.9a) se pueden ver las sucesivas capas que forman ésta heteroestructura: sobre un sustrato de GaAs está el pozo de In<sub>0.18</sub>Ga<sub>0.82</sub>As con una anchura de 130 Å, sobre él, se crece una capa de Al<sub>0.20</sub>Ga<sub>0.80</sub>As de 330 Å, de la cual, los primeros 20 Å carecen de dopaje y actúan como capa espaciadora, y el resto tiene un dopaje homogéneo de Si de  $1 \times 10^{18} \text{cm}^{-3}$ . Finalmente se crece una capa protectora de GaAs de 50 Å. Los niveles calculados para ésta muestra aparecen en la figura (5.9b).

Los resultados son cualitativamente similares a los de la muestra T4. Para T5 se obtiene una densidad de portadores menor,  $n_e = 7.46 \cdot 10^{11} \text{cm}^{-2}$ , estando ocupada una única subbanda. En la figura (5.10) mostramos  $R_{xx}$  y  $R_{xy}$  en función del campo magnético. Se puede ver hasta el plateau del Efecto Hall Cuántico correspondiente al nivel  $i=4$ . Destacamos la notable asimetría de los picos Shubnikov-de Haas, en función de la temperatura se produce una gran variación de su forma, desplazándose el máximo de la oscilación, sin embargo, los correspondientes plateaus no se ven tan afectados por la temperatura. Este hecho se ilustra en la figura (5.11a,b) para la transición entre los plateaus  $i=4$  a  $i=6$ , para un voltaje de puerta  $V_g = +0.2V$  y varias temperaturas.

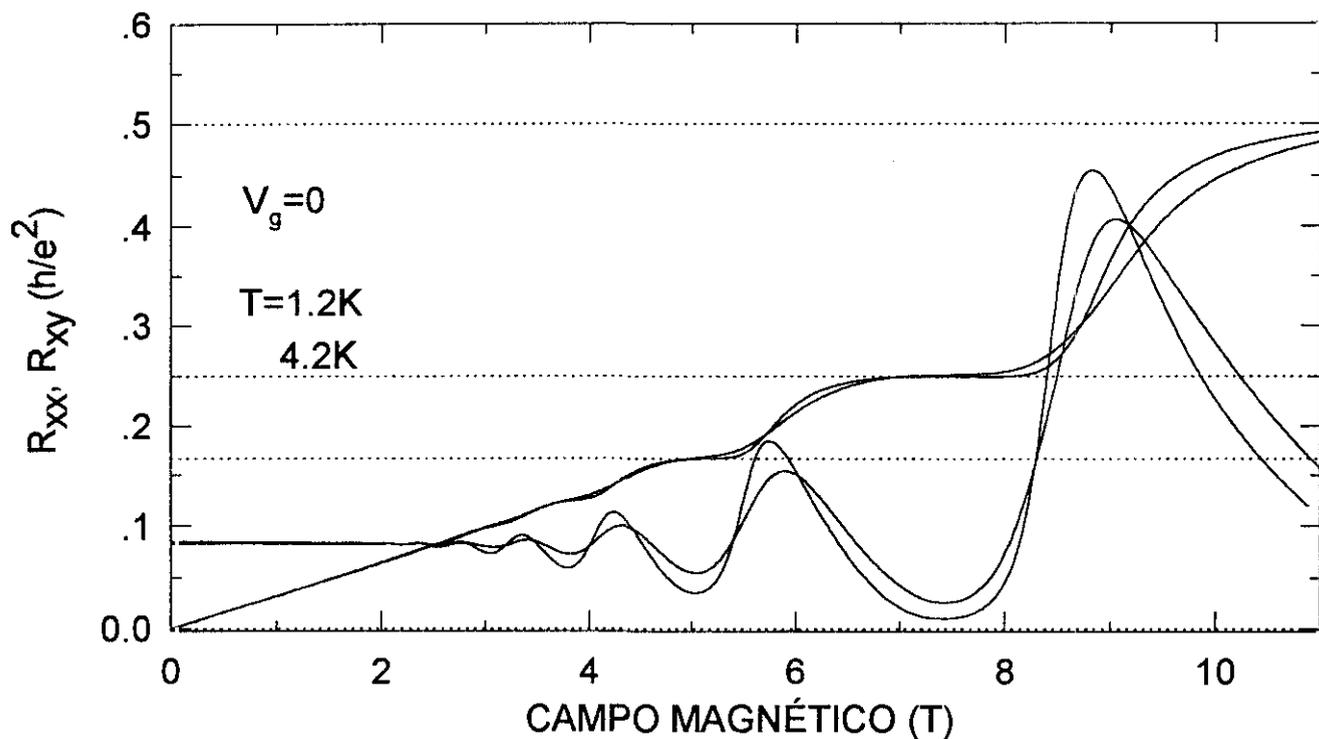


Figura 5.10: Muestra T5,  $R_{xx}$  y  $R_{xy}$  vs  $B$  a  $V_g=0$ .

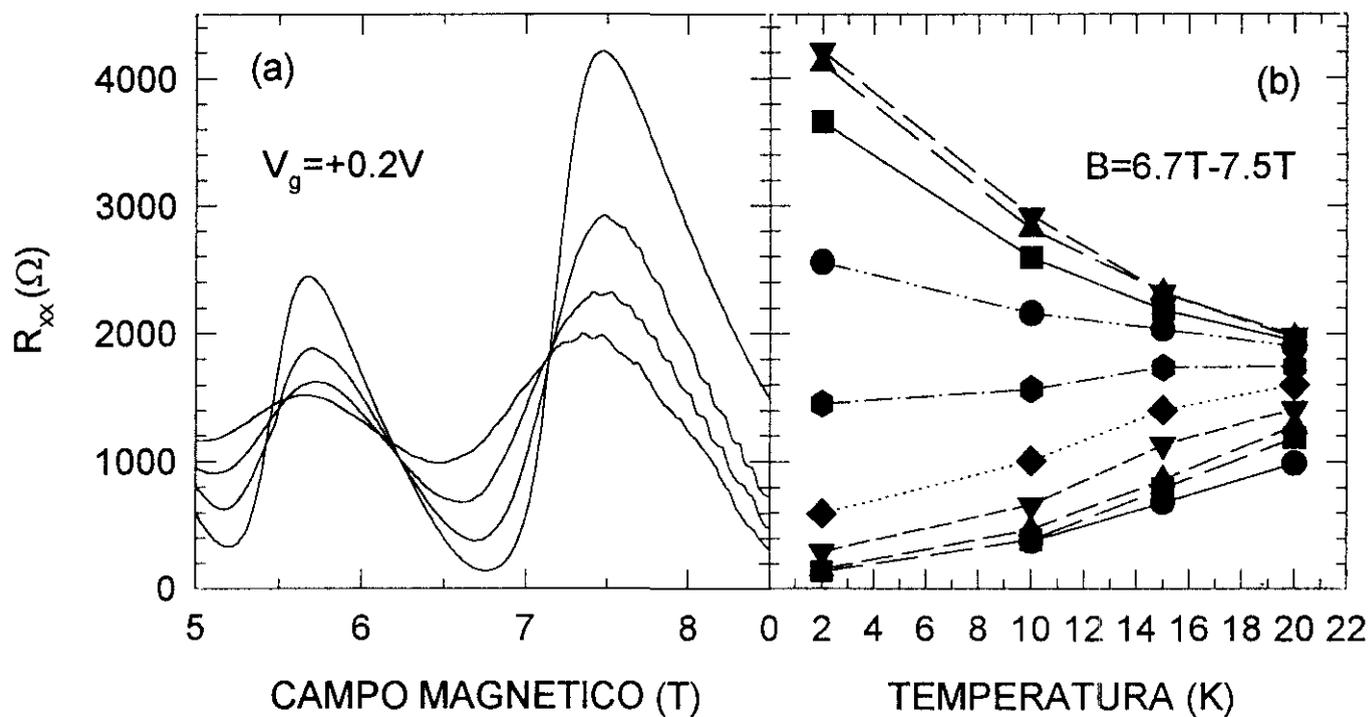


Figura 5.11: Muestra T5,  $R_{xx}$  y  $R_{xy}$  vs  $B$  a varias  $T$ (a)  
y  $R_{xx}$  vs  $T$  para a varios  $B$  a lo largo de un pico SdH(b)

### 5.2.2 Pozos cuánticos con dopado delta:

#### Muestra S1:

La heteroestructura es un pozo cuántico de InGaAs con dopaje delta de Si encima del pozo.

La muestra S1 ha sido crecida en Freiburg (Fraunhofer Institute) en un sistema Varian Gen II de Epitaxia de Haces Moleculares (MBE) sobre un sustrato semiaislante de GaAs (100). La temperatura de crecimiento fue de 550°C (para más detalles ver Fernández de Avila 1994). Posteriormente se ha evaporado sobre ella una puerta metálica y se ha sometido a un proceso de fotolitografía para crear una barra Hall cuya relación  $L/W$  es de 3.5.

GaAs (200 Å) sin dopar (capa protectora)
Al <sub>0.30</sub> Ga <sub>0.70</sub> As (600Å) sin dopar
GaAs (17Å) con dopaje $\delta Si : 3.5 \cdot 10^{12} \text{cm}^{-2}$
Al <sub>0.30</sub> Ga <sub>0.70</sub> As (50Å) sin dopar
In <sub>0.30</sub> Ga <sub>0.70</sub> As (120Å)
GaAs (6000Å) sin dopar (buffer)
GaAs (1500Å)+superred sin dopar (sustrato)

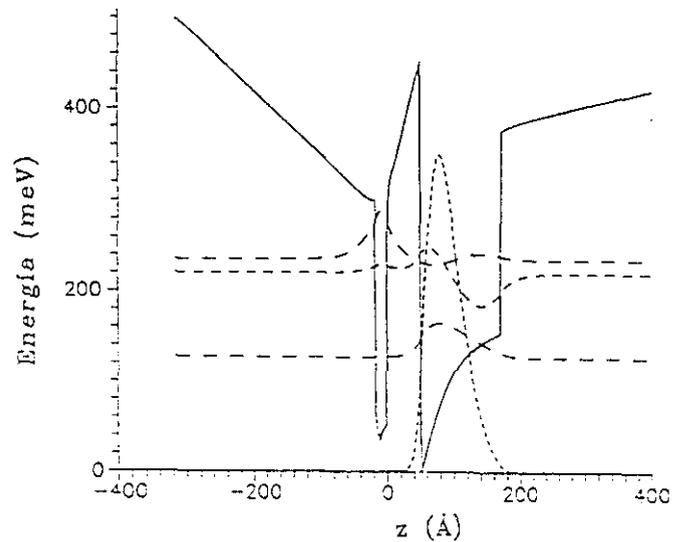


Figura 5.12: Muestra S1, heteroestructura (a) y cálculo de niveles (b)

Detallamos a continuación la heteroestructura, que se muestra en la figura (5.12a): sobre 1500Å de GaAs sin dopar, seguidos de una superred (35ÅGaAs/85ÅAl<sub>0.3</sub>Ga<sub>0.7</sub>As) y una capa de 6000Å de GaAs sin dopar, está el pozo tensionado de In<sub>0.30</sub>Ga<sub>0.70</sub>As con una anchura de 120Å, sobre él, se crece una capa espaciadora de Al<sub>0.30</sub>Ga<sub>0.70</sub>As de 50Å y a continuación un pozo de GaAs de 17Å, en cuyo interior se crece una monocapa de Si (dopaje delta  $3.5 \times 10^{12} \text{cm}^{-2}$ ), sobre éste se crecen 600Å de Al<sub>0.30</sub>Ga<sub>0.70</sub>As que actúan como barrera del pozo de GaAs. Finalmente se completa la estructura con una capa protectora de GaAs de 200Å. Esta estructura está más tensionada que las anteriores, ya que el porcentaje de In en la aleación ternaria

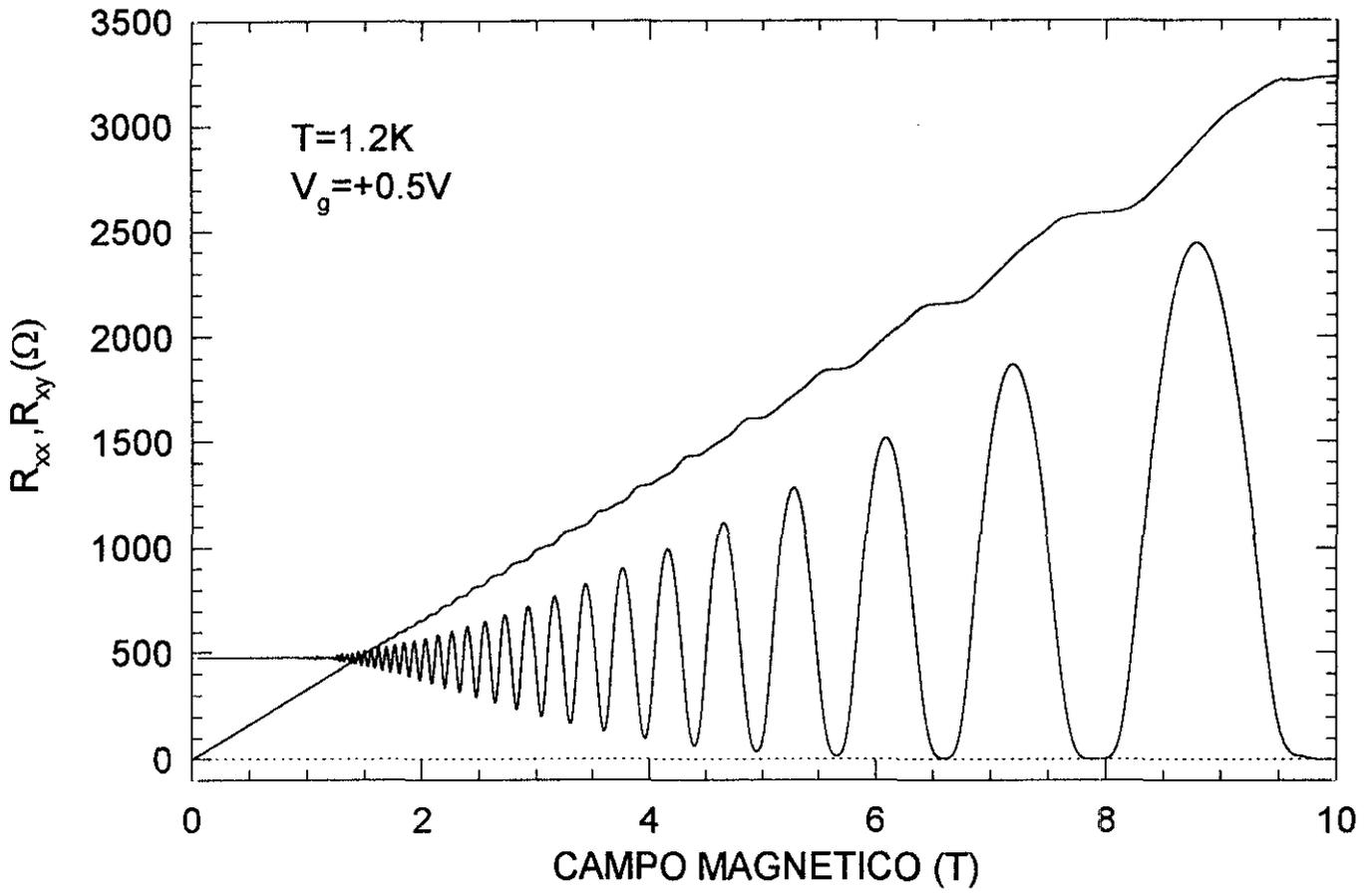


Figura 5.13: Muestra SI,  $R_{xx}$  y  $R_{xy}$  vs  $B$  para  $V_g=+0.5V$

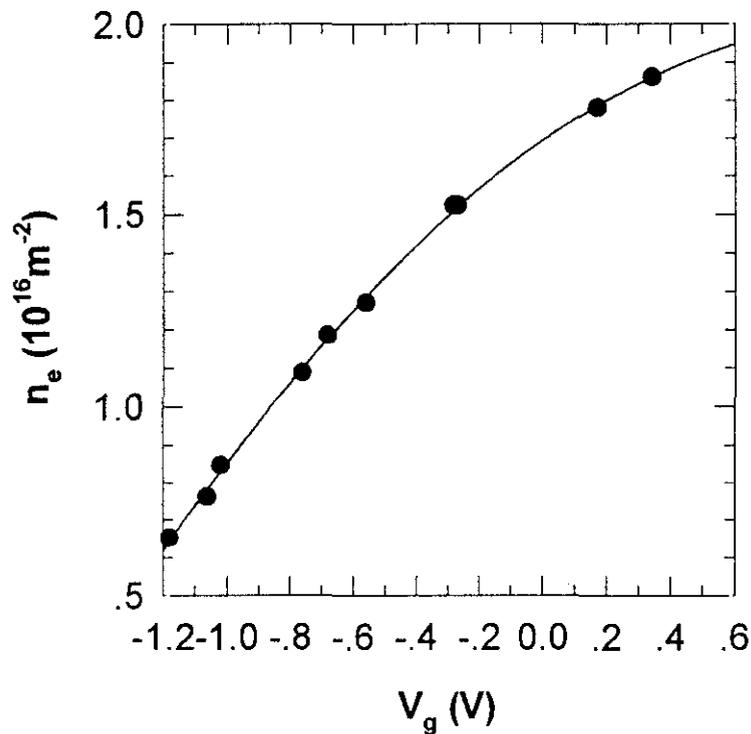


Figura 5.14: Muestra SI,  $n_e$  vs  $V_g$

del pozo es mayor. El dopaje, aunque nominalmente es tipo  $\delta$  en el interior del pozo de GaAs, presenta una pequeña difusión de Si en las barreras de  $\text{Al}_{0.30}\text{Ga}_{0.70}\text{As}$ .

Los niveles de energía y el nivel de Fermi calculados para ésta muestra a  $V_g=0$  son los de la figura (5.12b). Se obtienen tres niveles ligados en el pozo, los dos primeros tienen la función de onda centrada en el pozo de InGaAs, sin embargo el tercero aparece centrado en el pozo de GaAs cuya profundidad se ve acentuada por la presencia de la monocapa de Si, este nivel podría llegar a constituir un canal paralelo y generar problemas para las medidas de transporte del canal bidimensional que se sitúa en el pozo de InGaAs.

En la figura 5.13 mostramos el característico gráfico de  $R_{xx}$  y  $R_{xy}$  en función del campo magnético, en este caso para  $V_g=+0.5V$ , también se ha medido para distintos voltajes de puerta, encontrándose en todos los casos que tenemos una única subbanda ocupada, siendo para  $V_g=0$  de  $n_e=1.7 \times 10^{12} \text{cm}^{-2}$ . La relación entre la densidad de portadores y el voltaje de puerta se indica en la figura (5.14), esta variación se observa claramente en el desplazamiento de la frecuencia de las oscilaciones Shubnikov-de Haas, como se aprecia en la figura (5.15) donde presentamos los correspondientes picos de frecuencia que se obtienen al hacer la transformación de Fourier en los ficheros.

De los resultados en función del voltaje de puerta, presentamos como ejemplo en la figura (5.16a) los obtenidos para un campo magnético fijo de 10.5T, para varias temperaturas. Se aprecia la modificación de los picos en  $R_{xx}$  y las anchuras de los plateaus en  $R_{xy}$ . Los puntos invariantes en  $R_{xy}$  están claramente definidos, sin embargo los de  $R_{xx}$  sólo lo están a un lado de la oscilación, presentamos en la figura (5.16b,c) la comparación entre ambos lados de la oscilación de  $R_{xx}$  que se produce en la transición entre los plateaus de  $R_{xy}$  correspondientes a los niveles  $i=4$  e  $i=6$ , destacamos que el máximo de la oscilación se desplaza en campo magnético al variar la temperatura. En la siguiente sección estudiaremos los diagramas de renormalización correspondientes a éste comportamiento.

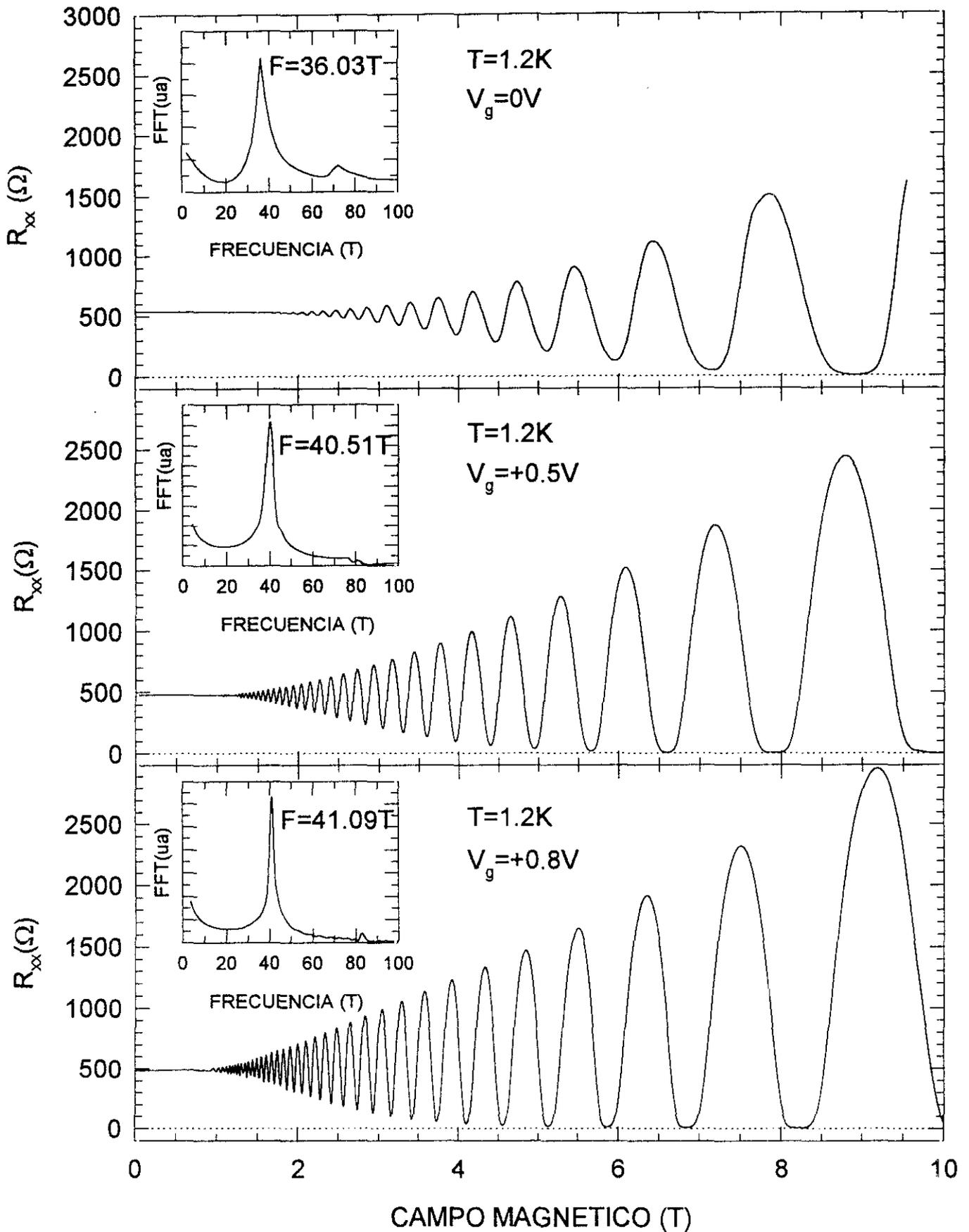


Figura 5.15: Muestra S1,  $R_{xx}$  vs  $B$  a varias  $V_g$  (a,b,c)

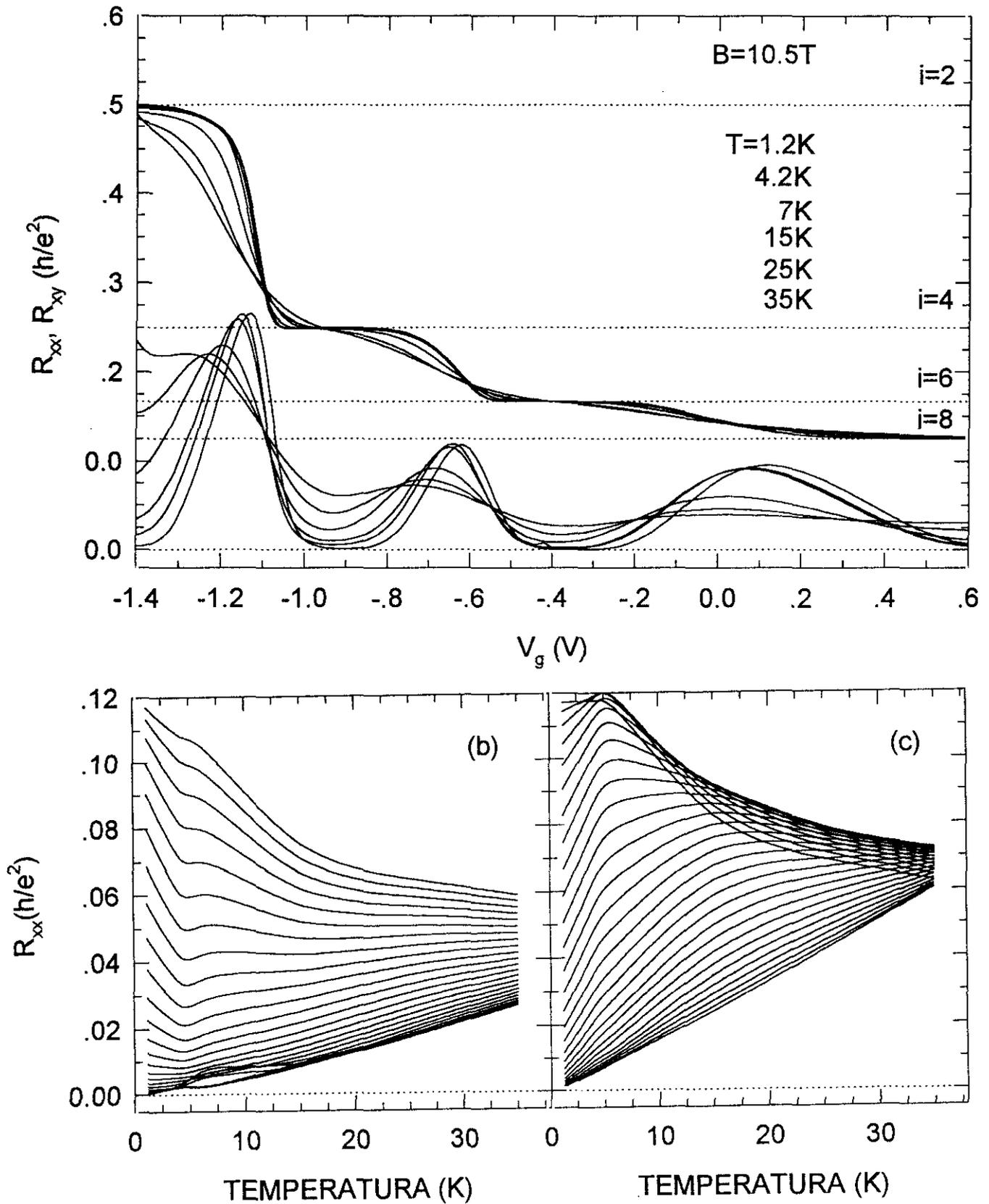


Figura 5.16: Muestra S1,  $R_{xx}$  vs  $V_g$  a varias  $T$  (a) y detalles del comportamiento a ambos lados de un pico Shubnikov-de Haas (b,c)

### 5.2.3 Pozos cuánticos con modulación de dopado a ambos lados:

#### Muestra S2:

La heteroestructura es un pozo cuántico de InGaAs con dopaje homogéneo de Si a ambos lados del pozo.

La muestra S2 ha sido crecida en París mediante la técnica de MBE (Fernández de Avila 1995). Posteriormente se ha evaporado sobre ella una puerta metálica y se ha sometido a un proceso de fotolitografía para crear una barra Hall cuya relación  $L/W$  es de 3.5.

GaAs sin dopar (capa protectora)
GaAs (300Å)
dopado Si ( $1 \cdot 10^{18} \text{cm}^{-3}$ )
GaAs (270Å) sin dopar
<b>In<sub>0.20</sub>Ga<sub>0.80</sub>As (130Å)</b>
Al <sub>0.30</sub> Ga <sub>0.70</sub> As (50Å) sin dopar
Al <sub>0.30</sub> Ga <sub>0.70</sub> As (400Å)
dopado Si ( $1 \cdot 10^{18} \text{cm}^{-3}$ )
Al <sub>0.30</sub> Ga <sub>0.70</sub> As (2000Å) sin dopar
GaAs (3000Å) sin dopar (buffer)
GaAs sin dopar (sustrato)

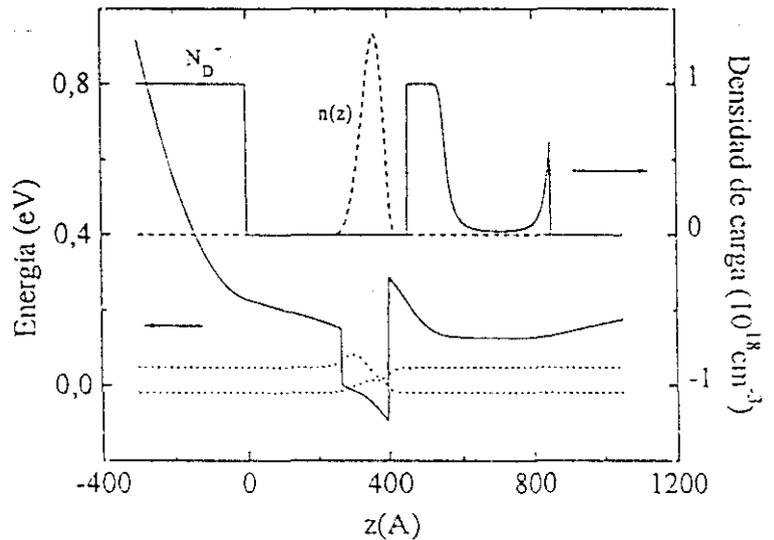


Figura 5.17: Muestra S2, heteroestructura (a) y cálculo de niveles(b)

Detallamos a continuación la heteroestructura, que se muestra en la figura (5.17a): sobre un sustrato de GaAs se crece una capa de 2450Å de Al<sub>0.30</sub>Ga<sub>0.70</sub>As, de ellos, los primeros 2000Å están sin dopar, los siguientes 400Å tienen un dopaje homogéneo de Si de  $1 \cdot 10^{18} \text{cm}^{-3}$  y los últimos 50Å son una capa espaciadora sin dopar sobre la que está el pozo de In<sub>0.20</sub>Ga<sub>0.80</sub>As que tiene una anchura de 130Å, sobre él, se crece otra capa espaciadora, esta vez de 270Å de GaAs sin dopar, seguidos de otros 300Å de GaAs dopados homogéneamente con Si  $1 \cdot 10^{18} \text{cm}^{-3}$ . En esta estructura, el pozo de InGaAs tiene dos barreras de diferente material, y el dopaje a ambos lados del pozo dará lugar a un comportamiento de la densidad de portadores en función del voltaje de puerta diferente a cuando el dopaje está a un solo lado del pozo. Los niveles calculados para ésta muestra se presentan en la figura (5.17b).

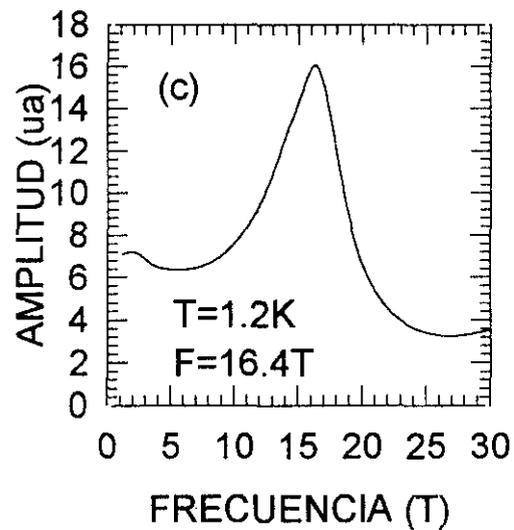
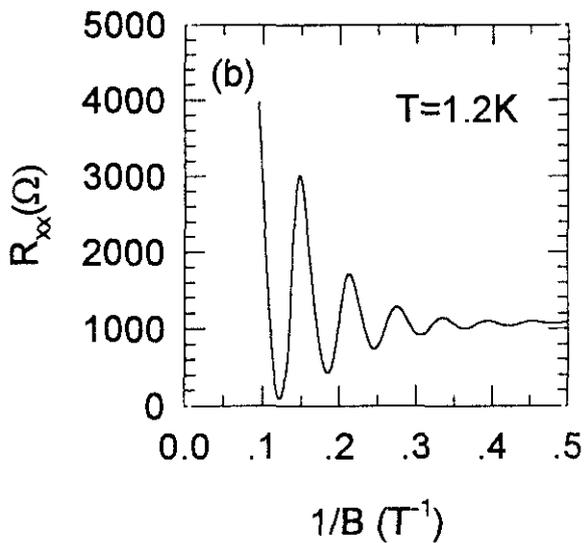
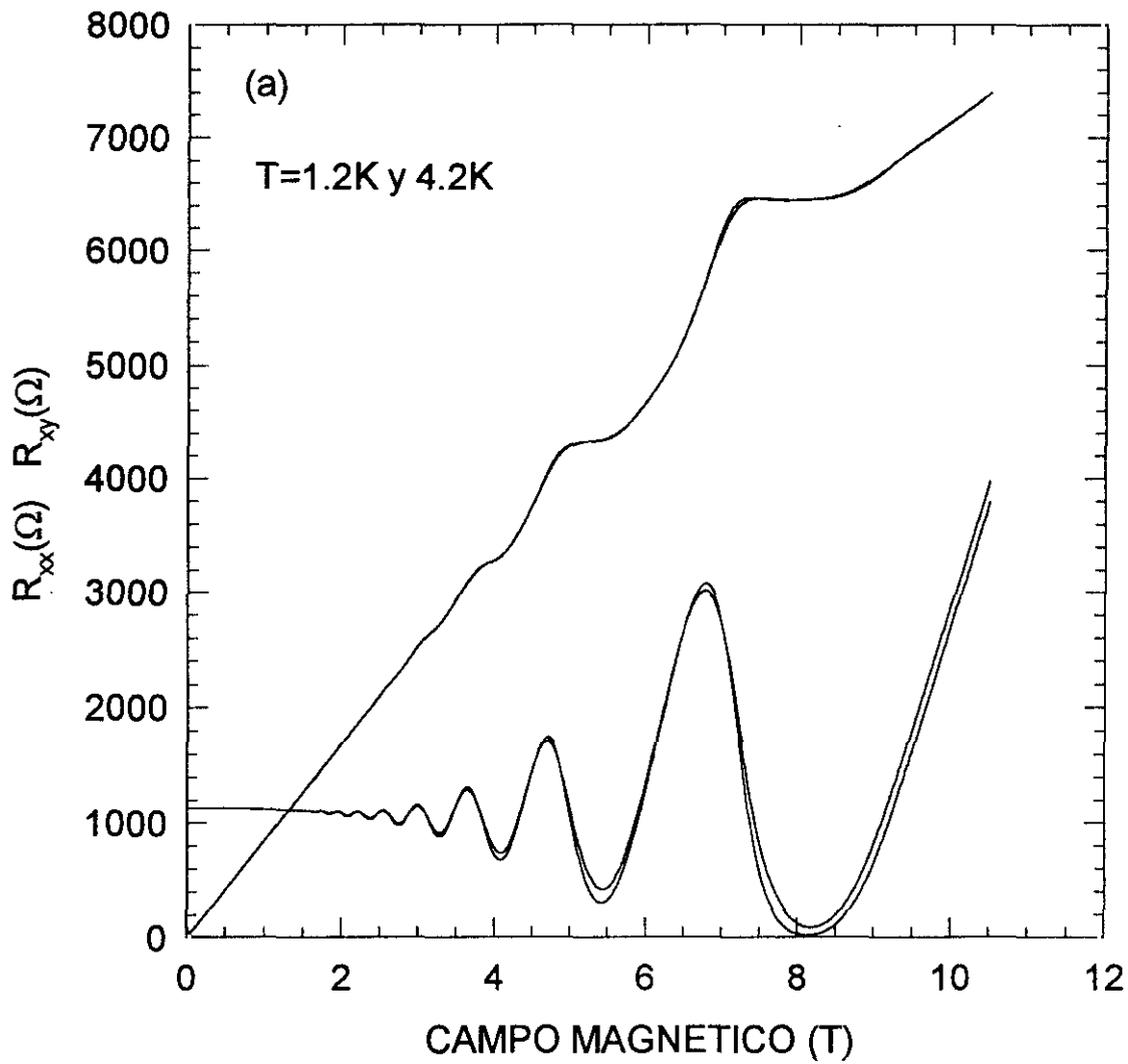


Figura 5.18: Muestra S2:  $R_{xx}$  y  $R_{xy}$  para  $V_G = 0\text{V}$  (a),  $R_{xx}$  vs  $1/B$  (b) y FFT (c)

Para ilustrar los resultados de ésta muestra, mostramos en la figura (5.18a) , las magnitudes  $R_{xx}$  y  $R_{xy}$  obtenidas en función del campo magnético para  $V_g=0$ , los datos indican que tenemos una única subbanda ocupada. La densidad de portadores obtenida a partir de la pendiente Hall y la frecuencia de las oscilaciones Shubnikov-de Haas coinciden, siendo el valor de  $n_e=7.33 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  (en la figura (5.18b) se muestran los datos en función de  $1/B$  y la transformada de Fourier correspondiente (Fig. 5.18c)) Estos datos se utilizarán en la siguiente sección para un análisis en relación con la teoría, invirtiéndose para obtener las magnetoconductividades y a partir de éstas, la densidad de estados.

Muestra S3:

La heteroestructura es un pozo cuántico de InGaAs con dopaje homogéneo de Si a ambos lados del pozo, la diferencia respecto a la muestra anterior es que el dopaje es mayor y las capas espaciadoras menores, por lo que se espera una mayor población de portadores en el canal bidimensional.

La muestra S3 también ha sido crecida en París mediante la técnica de MBE (Fernández de Avila 1995). Posteriormente se ha evaporado sobre ella una puerta metálica y se ha sometido a un proceso de fotolitografía para crear una barra Hall cuya relación  $L/W$  es de 3.5.

GaAs (50Å) sin dopar (capa protectora)
Al <sub>0.22</sub> Ga <sub>0.78</sub> As (40Å) dopado Si ( $2 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ )
Al <sub>0.22</sub> Ga <sub>0.78</sub> As (10Å) sin dopar
In <sub>0.20</sub> Ga <sub>0.80</sub> As (130Å)
Al <sub>0.22</sub> Ga <sub>0.78</sub> As (10Å) sin dopar
Al <sub>0.22</sub> Ga <sub>0.78</sub> As (40Å) dopado Si ( $4 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ )
Al <sub>0.22</sub> Ga <sub>0.78</sub> As (5000Å) sin dopar
GaAs sin dopar (sustrato)

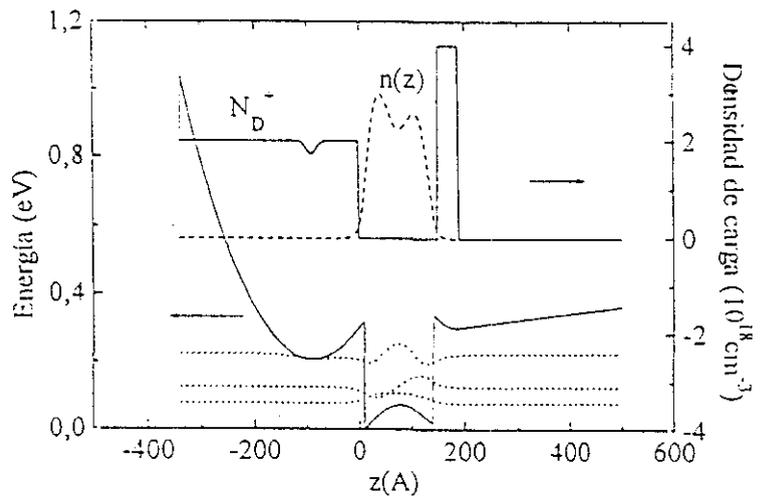


Figura 5.19: Muestra S3, heteroestructura (a) y cálculo de niveles (b).

Detallamos por capas la heteroestructura, que se muestra en la figura (5.19a): sobre un sustrato semiaislante se crece una capa de  $5050\text{\AA}$  de  $\text{Al}_{0.22}\text{Ga}_{0.78}\text{As}$ , de ellos, los primeros  $5000\text{\AA}$  están sin dopar, los siguientes  $40\text{\AA}$  tienen un dopaje homogéneo de Si de  $4 \times 10^{18} \text{cm}^{-3}$  y los últimos  $10\text{\AA}$  son una capa espaciadora sin dopar sobre la que está el pozo de  $\text{In}_{0.20}\text{Ga}_{0.80}\text{As}$  que tiene una anchura de  $130\text{\AA}$ , sobre él, se crece una capa de  $350\text{\AA}$  de  $\text{Al}_{0.22}\text{Ga}_{0.78}\text{As}$ , los primeros  $10\text{\AA}$  sin dopar son la otra capa espaciadora, estando los siguientes  $340\text{\AA}$  dopados homogéneamente con Si ( $2 \times 10^{18} \text{cm}^{-3}$ ). Por último hay una capa protectora de GaAs de  $50\text{\AA}$  sin dopar.

En la figura (5.19b) aparecen los niveles calculados para éste pozo cuántico a  $V_g=0V$ , las dos primeras subbandas, correspondientes a estados ligados del pozo, están más cercanas al fondo que en casos precedentes, es de esperar que se obtendrá una población detectable en la segunda subbanda incluso sin aplicar voltaje de puerta. Modificando la densidad de portadores será posible llenarla aún más.

A diferencia de la muestra anterior, el pozo de InGaAs tiene en este caso las dos barreras del mismo material, por lo que el pozo es más simétrico. Las capas espaciadoras son más delgadas, lo que facilitará una densidad grande de portadores, pero al mismo tiempo la menor separación entre el canal bidimensional y las impurezas dopantes hace que el scattering sea mayor y la movilidad, por tanto, menor. El dopaje a ambos lados del pozo y la posible población de varias subbandas debido a la alta densidad de portadores hará que el comportamiento de  $R_{xx}$  y  $R_{xy}$  en función del voltaje de puerta sea más complejo que en los casos anteriores.

Los resultados obtenidos confirman las previsiones arriba expuestas. A pesar de ser los esperados, ésta es la primera vez que se observa directamente, por medio de oscilaciones Shubnikov-de Haas, la presencia de portadores en la segunda subbanda para pozos de InGaAs. En las figuras (5.20), (5.21) y (5.22), mostramos la componente diagonal de la magnetoresistencia transversa ( $R_{xx}$ ) en función del campo magnético para tres diferentes voltajes de puerta:  $V_g=-0,7V$ ;  $V_g=0$ ;  $V_g+0,3V$  respectivamente. Se aprecia claramente la presencia de una sobreoscilación, indicadora de una segunda frecuencia, además de la principal en las oscilaciones.

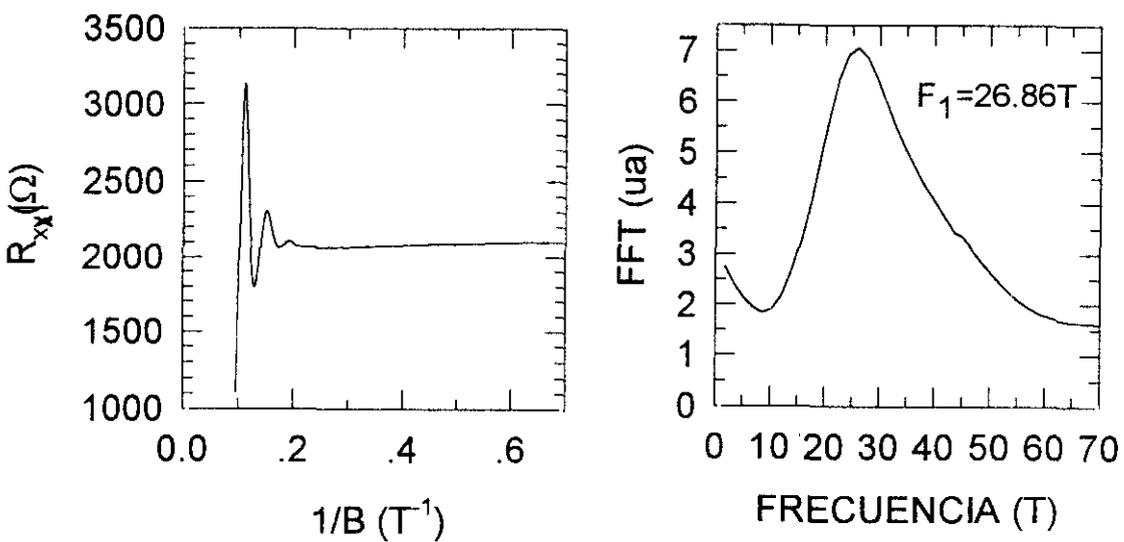
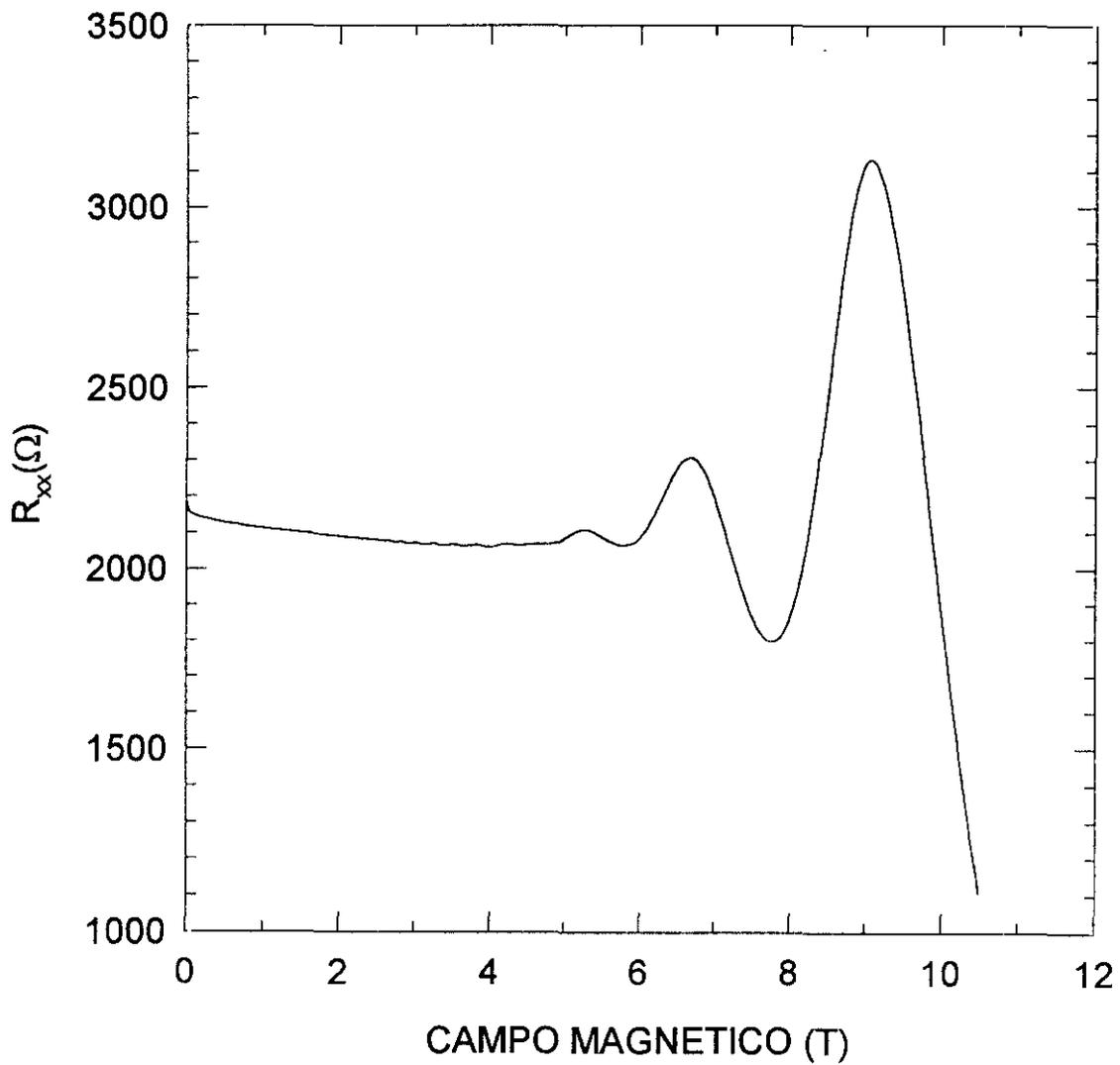


Figura 5.20: Muestra S3,  $R_{xx}$  vs  $B$  para  $V_g = -0.7V$  (a), vs  $1/B$  (b) y FFT (c)

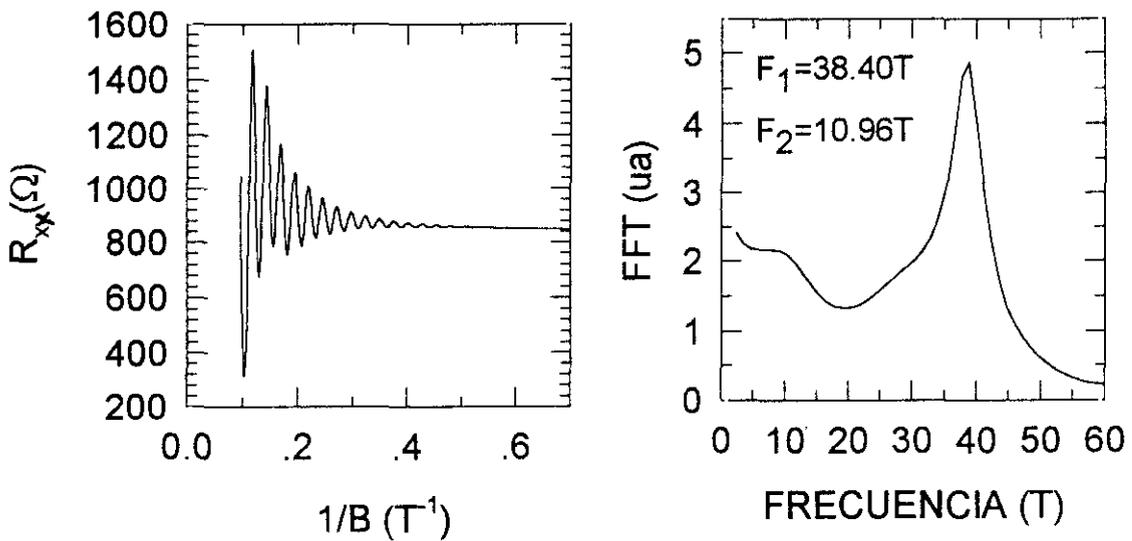
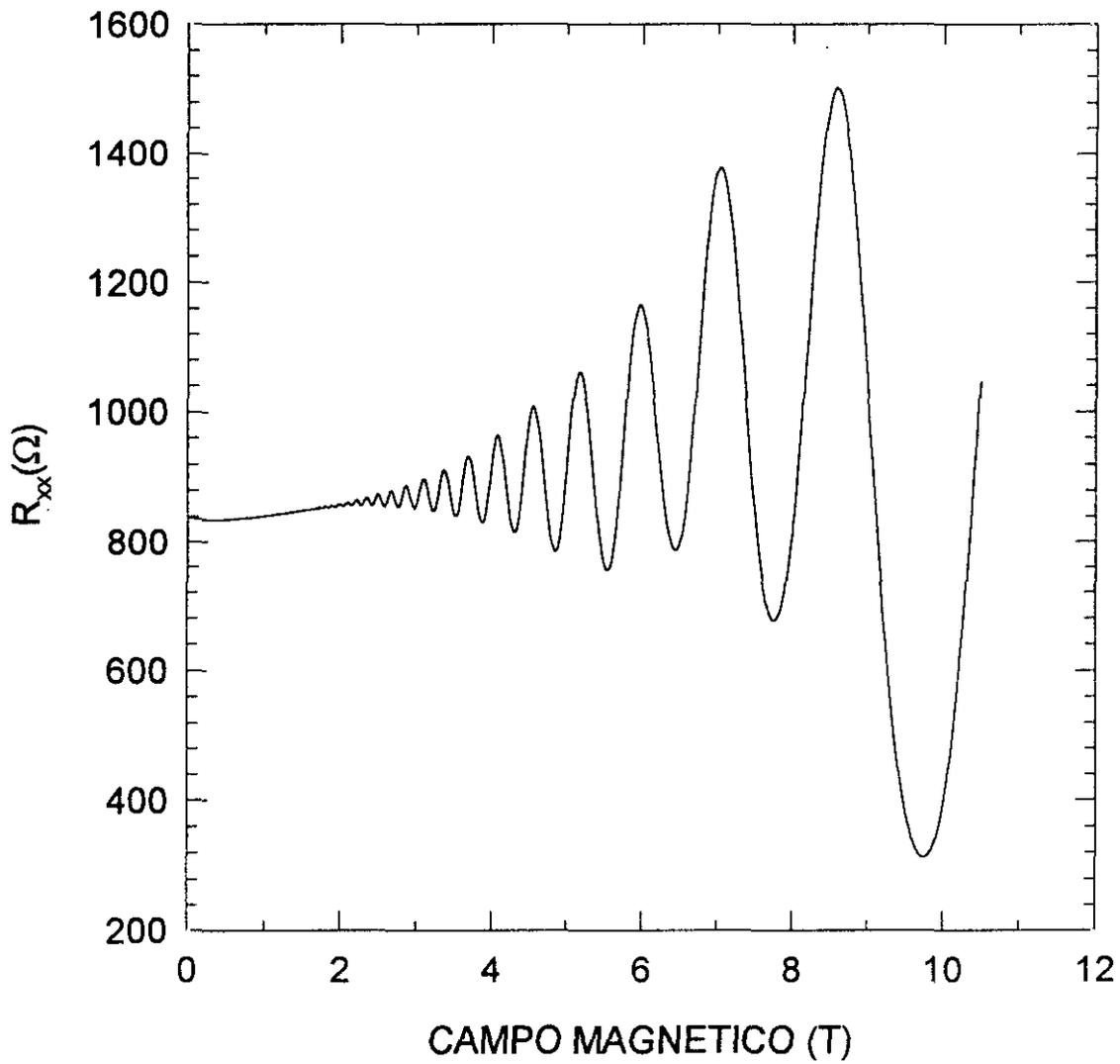


Figura 5.21: Muestra S3,  $R_{xx}$  vs  $B$  para  $V_g=0V$  (a), vs  $1/B$  (b) y FFT (c)

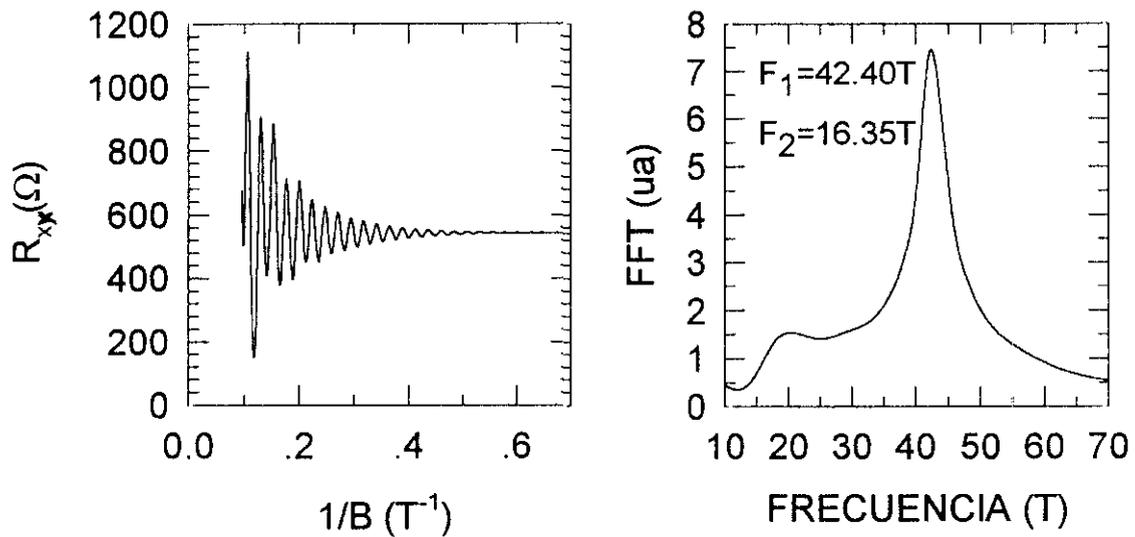
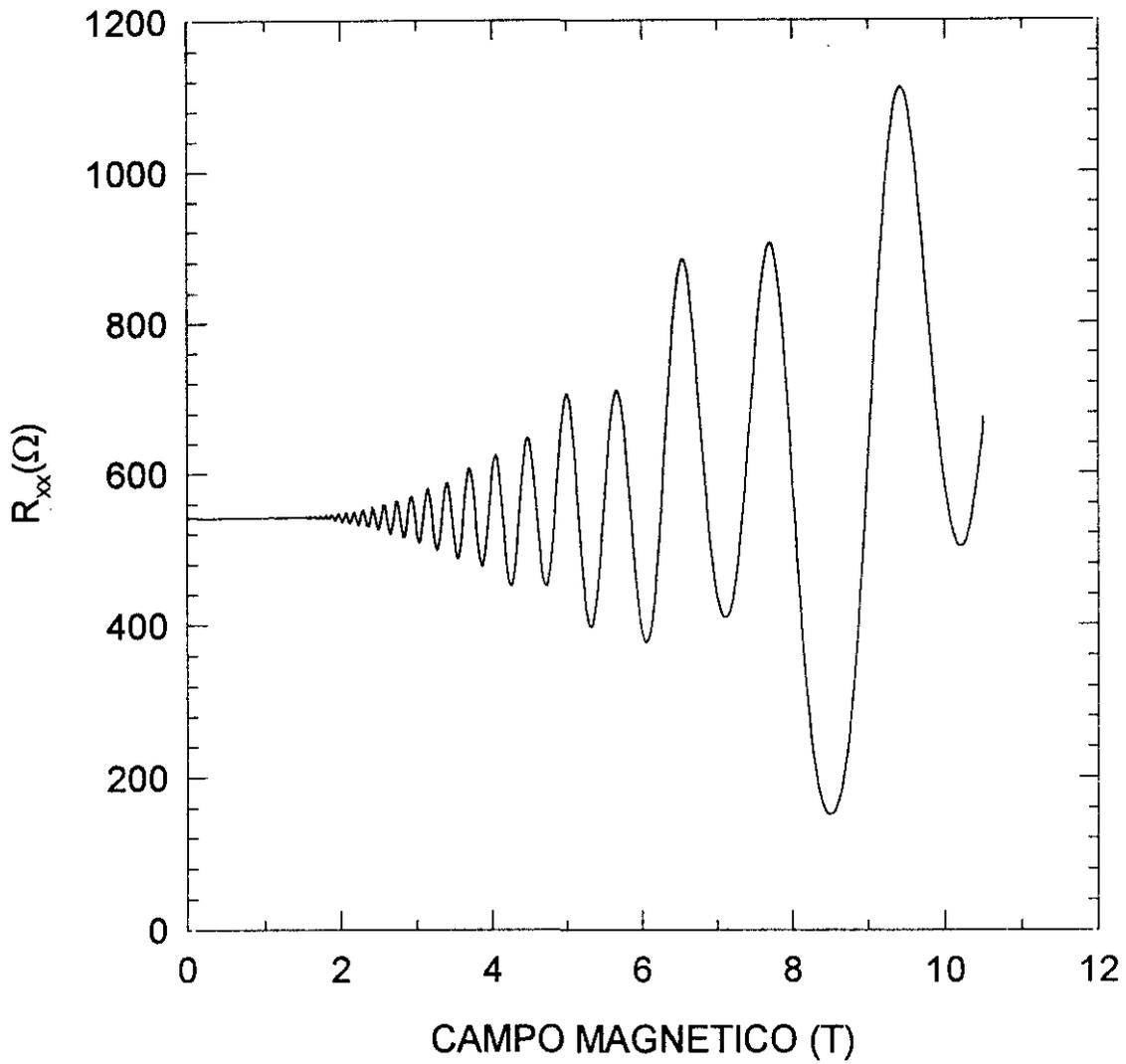


Figura 5.22: Muestra S3,  $R_{xx}$  vs  $B$  para  $V_g = +0.3V$  (a), vs  $1/B$  (b) y FFT (c)

La segunda frecuencia (la población de la segunda subbanda) se incrementa al aumentar el voltaje de puerta, cuantitativamente se obtiene mediante una transformada de Fourier de los ficheros interpolados a valores equidistantes en  $I/B$ , como puede verse en las figuras 4.39, 40 y 41.

Por otro lado, podemos obtener, para distintos valores del voltaje de puerta, la densidad total de portadores mediante la pendiente Hall de los ficheros de  $R_{xy}$  en función del campo magnético (figura 5.23a). Los resultados obtenidos son coherentes con los obtenidos mediante SdH, en la Tabla (5.1) puede verse un resumen de los datos:

Tipo de medida	$V_g$ (V)	T(K)	FFT(T)	$n_e$ ( $10^{12} \text{cm}^{-2}$ )
Hall	-0.7	1.2		$n_{\text{TOT}}$ : 1.31
SdH	-0.7	1.2	27	$n_1$ : 1.27
Hall	0	4.2		$n_{\text{TOT}}$ : 2.38
SdH	0	1.2	38.4	$n_1$ : 1.85
			10.96	$n_2$ : 0.53
Hall	+0.3	1.2		$n_{\text{TOT}}$ : 2.84
SdH	+0.3	1.2	42.4	$n_1$ : 2.06
			16.25	$n_2$ : 0.79

Tabla 5.1

A partir de éstos datos podemos obtener los tiempos de scattering, la energía y la relación entre las masas efectivas correspondientes a cada una de las subbandas.

Tenemos una sencilla relación entre la densidad de portadores y la distancia en energía desde el nivel de Fermi hasta el fondo de cada una de las subbandas:

$$E_F - E_i = \frac{n_i}{g_0} = \frac{\pi \hbar^2 n_i}{m_i^*} \quad (5.11)$$

Donde el índice  $i$  indica la subbanda correspondiente,  $n_i$  la densidad de portadores de cada subbanda y  $m_i^*$  la masa efectiva. Si particularizamos a las dos primeras subbandas: la fundamental  $i=1$  y la siguiente  $i=2$ , tenemos (restando):

$$E_2 - E_1 = \pi \hbar^2 \left( \frac{n_1}{m_1} - \frac{n_2}{m_2} \right) \quad (5.12)$$

si al aplicar el voltaje de puerta, consideramos que no varía la distancia en energía entre ambas subbandas ( $E_1-E_2$  fija) ni la masa efectiva de cada subbanda, tendremos una relación entre las correspondientes masas efectivas y las densidades de portadores en cada subbanda a un voltaje de puerta dado:

$$\frac{n_1}{m_1^*} - \frac{n_2}{m_2^*} = \frac{n_1'}{m_1^*} - \frac{n_2'}{m_2^*} \quad (5.13)$$

a partir de los datos de la Tabla (5.1), obtenemos:

$$\frac{1.85}{m_1^*} - \frac{0.53}{m_2^*} = \frac{2.06}{m_1^*} - \frac{0.79}{m_2^*}$$

lo que nos dá una relación para las masas efectivas de las dos primeras subbandas:

$$m_2^* = 1.24m_1^* \quad (5.14)$$

Si partimos de un valor para la subbanda fundamental dado por la ecuación (1.81) que reescribimos aquí:

$$\frac{m_b^*}{m_0} = 0.067(1-x) + 0.023x \quad (5.15)$$

y tomamos para  $x=0.22$ , la composición nominal de la aleación del pozo, obtenemos para las masas efectivas:

$$m_1^* = 0.058m_0 \quad m_2^* = 0.072m_0$$

y con estos datos podemos obtener la diferencia de energías entre las dos primeras subbandas y de cada una respecto al nivel de Fermi para cada voltaje de puerta. Sustituyendo los datos de la Tabla (5.1) en las ecuaciones 5.11 y 5.12 obtenemos los resultados que se presentan en la Tabla (5.2):

$V_g$	$n_0(10^{12} \text{cm}^{-2})$	$n_1(10^{12} \text{cm}^{-2})$	$E_F-E_0(\text{meV})$	$E_F-E_1(\text{meV})$	$E_1-E_0(\text{meV})$
0	1.85	0.53	75.80	17.57	58.23
0.3	2.06	0.79	84.48	26.05	58.43
-0.7	1.27		52.11		

**Tabla 5.2: Resultados experimentales.**

Los resultados experimentales obtenidos se pueden comparar con los calculados mediante la aproximación  $k,p$  (Fernández de Avila 1995) para esta misma muestra a los voltajes de puerta que estamos considerando. Se obtiene un buen acuerdo, sin embargo

hay una diferencia importante: para el cálculo se considera una única masa efectiva para las dos subbandas y se obtiene una pequeña variación de ésta con el voltaje de puerta. También se observa una sobreestimación del número de portadores en la subbanda fundamental, contrastando con los resultados bastante buenos para los de la siguiente subbanda. Los resultados teóricos se exponen en la Tabla (5.3):

$V_g$	$m^*$ ( $m_0$ )	$n_0(10^{12} \text{cm}^{-2})$	$n_1(10^{12} \text{cm}^{-2})$	$E_F - E_0(\text{meV})$	$E_F - E_1(\text{meV})$	$E_1 - E_0(\text{meV})$
0	0.069	2.22	0.57	74.70	15.96	58.74
0.3	0.069	2.40	0.80	78.84	21.62	57.22
-0.7	0.066	1.48		55.15		

Tabla 5.3: Cálculo k.p

A partir del valor de la resistencia a campo nulo,  $R_0$  y una vez conocidas las cantidades anteriores, podemos obtener una relación entre los tiempos de scattering de ambas subbandas. Tenemos:

$$R_0 = \frac{L}{W} \frac{1}{\sigma_0} \quad ; \quad \sigma_0 = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (5.16)$$

donde  $\sigma_i$  es la conductividad de cada subbanda, que viene expresada por la ecuación (2.25) que recordamos aquí:

$$\sigma_i = \frac{n_i e^2 \tau_i}{m_i^*} \quad \text{con } i=1,2 \quad (5.17)$$

sustituyendo en la ecuación (5.16), obtenemos:

$$\frac{n_1 \tau_1}{m_1^*} + \frac{n_2 \tau_2}{m_2^*} = \frac{L}{W} \frac{1}{e^2 R_0} \quad (5.18)$$

y sustituyendo los valores obtenidos experimentalmente, podemos obtener una relación entre  $\tau_1$  y  $\tau_2$  (para  $V_g=0$ ,  $\tau_1 = 0.27 \text{ps}$  y  $\tau_2 = 0.81 \text{ps}$ ).

Finalmente en la figura (5.24a,b,c) presentamos los resultados obtenidos para  $R_{xx}$  y  $R_{xy}$  en función del voltaje de puerta para tres campos magnéticos diferentes:  $B=5,8$  y  $10T$  respectivamente. El comportamiento es complejo y difiere de aquel que obteníamos (ver resultados de otras muestras) cuando solamente está poblada una subbanda. Los plateaus Hall presentan estructuras superpuestas, correspondientes a sobreoscilaciones

de  $R_{xx}$ , indicando el sucesivo llenado de niveles de Landau de las dos subbandas. A partir de estos datos podemos obtener una representación del número total de portadores en función del voltaje de puerta aplicado que presenta un comportamiento irregular y no puede ser aproximado linealmente (figura 5.23b).

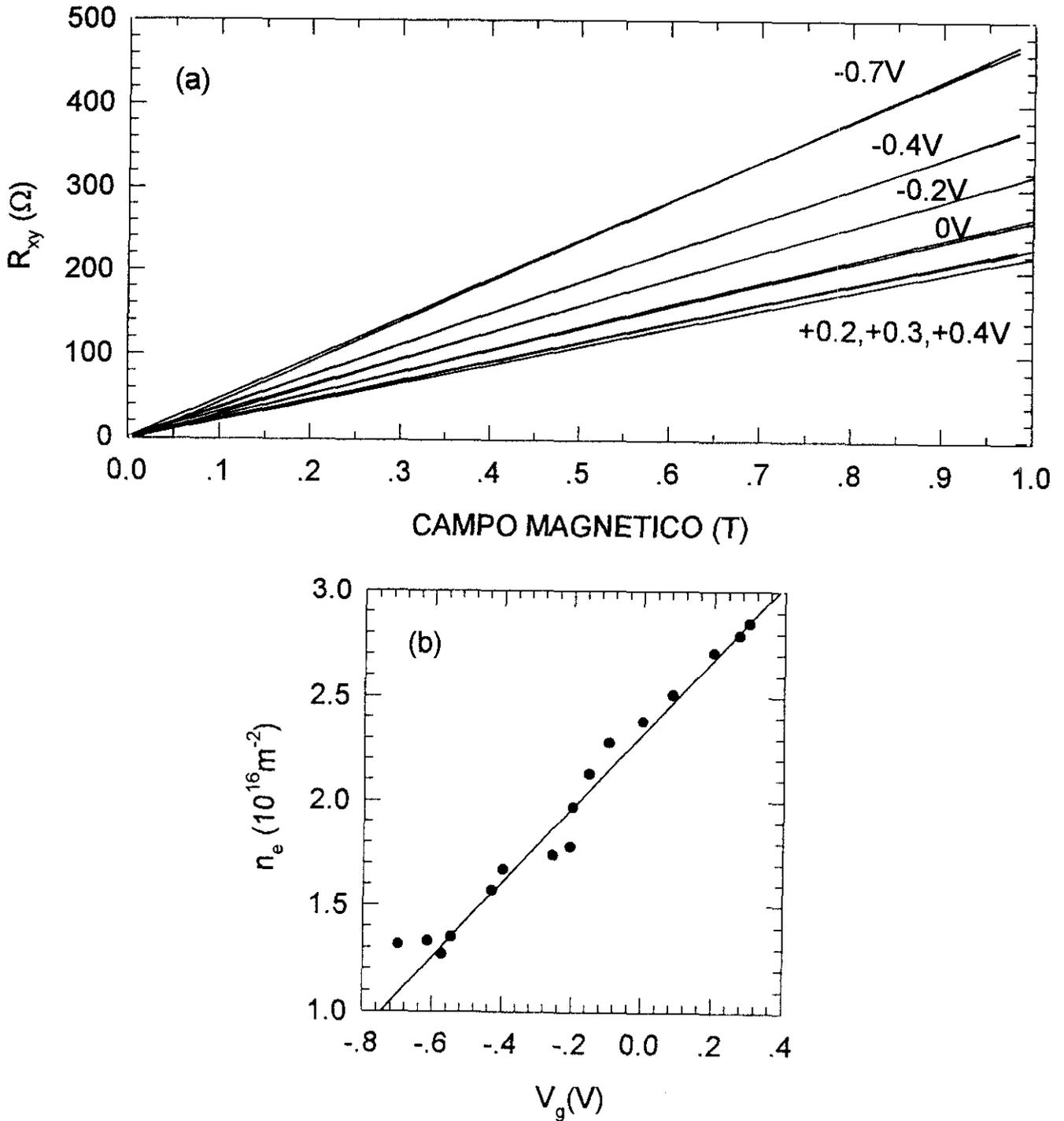


Figura 5.23: Muestra S3,  $R_{xy}$  vs  $B$  a varios  $V_g$  (a) y  $n_e$  vs  $V_g$  (b)

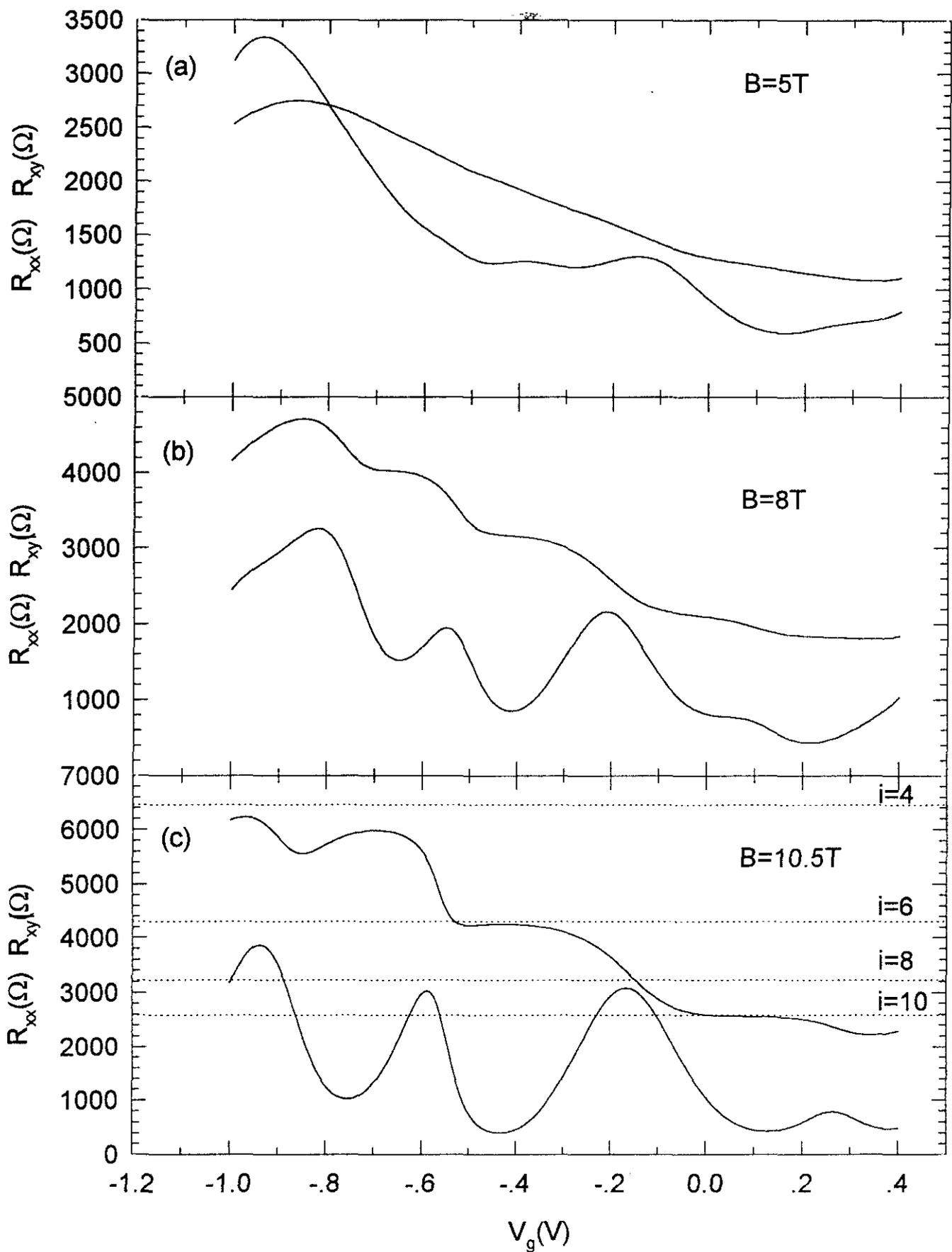


Figura 5.24: Muestra S3,  $R_{xx}$  y  $R_{xy}$  vs  $V_g$  para  $B=5T$ (a),  $8T$ (b) y  $10.5T$ (c)

## Capítulo 6

# RELACIÓN ENTRE RESULTADOS TEÓRICOS Y EXPERIMENTALES

A continuación vamos a hacer uso del modelo teórico para desarrollar más la información que se puede obtener de los resultados experimentales. Primero, a partir de la magnetoresistencia, obtendremos la magnetoconductividad por inversión de la magnetoresistividad que se deduce usando el factor de tamaño de las muestras, a continuación, empleando unas implicaciones teóricas muy poco restrictivas, obtendremos la forma de la densidad de estados a partir de la magnetoconductividad. Un segundo apartado ajustará el modelo teórico a los datos obtenidos experimentalmente, obteniendo un valor para el parámetro del potencial aleatorio que empleamos. Finalmente haremos una discusión de los resultados obtenidos en función de la temperatura y un breve comentario sobre la detección de la segunda subbanda.

### 6.1 Inversión:

Las cantidades que se obtienen directamente en los experimentos son magnetoresistencias  $R_{xx}$  y  $R_{xy}$ . A partir de ellas, y conociendo el factor tamaño ( $L/W$ ) de la muestra obtenemos de forma inmediata las magnetoresistividades:

$$R_{xx} = \rho_{xx} \frac{L}{W} \quad (6.1)$$

$$R_{xy} = \rho_{xy} \quad (6.2)$$

donde  $L$  es la distancia entre los contactos longitudinales ( $R_{xx}$ ) en la barra litografiada en la muestra y  $W$  es la anchura de dicha barra (ver Fig. 4.1.). A partir de aquí, se deducen las magnetoconductividades:

$$\sigma_{xx} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2} \quad (6.3)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{-\rho_{xy}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2} \quad (6.4)$$

para efectuar la inversión es necesario tener en cuenta la bidimensionalidad del sistema que estamos tratando, esto lleva a resultados a primera vista sorprendentes, como por ejemplo, que siempre que  $\rho_{xy} \neq 0$ , tenemos que  $\rho_{xx} = 0 \Rightarrow \sigma_{xx} = 0$ . En esta inversión no hemos hecho ninguna hipótesis especial sobre la validez del modelo. Esta operación nos permitirá trabajar a partir de ahora en magnetoconductividades, lo cual simplificará las comparaciones con los resultados obtenidos con el modelo teórico.

En la figura (6.1a,b,c) presentamos tres ejemplos de esta inversión para los resultados experimentales de las muestras T4, S1 y S2 en función del campo magnético.

El siguiente paso será hacer uso de las ecuaciones (3.113) y (3.116) a (3.119), para separar, en la componente no-diagonal de la magnetoconductividad, las dos partes, que hemos llamado  $\sigma_{xy}^I$  y  $\sigma_{xy}^{II}$ , en los ficheros experimentales de conductividades que acabamos de obtener:

$$\sigma_{xy}^I(B, T, E_F) = -\sqrt{\sigma_{xx}(B, T, E_F)[\sigma_0 - \sigma_{xx}(B, T, E_F)]} \quad (6.5)$$

$$\sigma_{xy}^{II}(B, T, E_F) = \sigma_{xy}(B, T, E_F) + \sqrt{\sigma_{xx}(B, T, E_F)[\sigma_0 - \sigma_{xx}(B, T, E_F)]} \quad (6.6)$$

obtenemos la parte  $\sigma_{xy}^I$  de su relación con  $\sigma_{xx}$  y la parte  $\sigma_{xy}^{II}$  de la diferencia entre  $\sigma_{xy}$  y  $\sigma_{xy}^I$ . En la figura (6.2) aparece la descomposición correspondiente a los datos de la figura (6.1).

Finalmente, a partir de la ecuación (3.111), y la parte diagonal de la magnetoconductividad podemos obtener una forma para la densidad de estados:

$$\frac{g(B, T, E_F)}{g_0} = \omega_c \tau_0 \sqrt{\frac{\sigma_{xx}(B, T, E_F)}{\sigma_0 - \sigma_{xx}(B, T, E_F)}} \quad (6.7)$$

Se muestran los resultados en la figura (6.3).

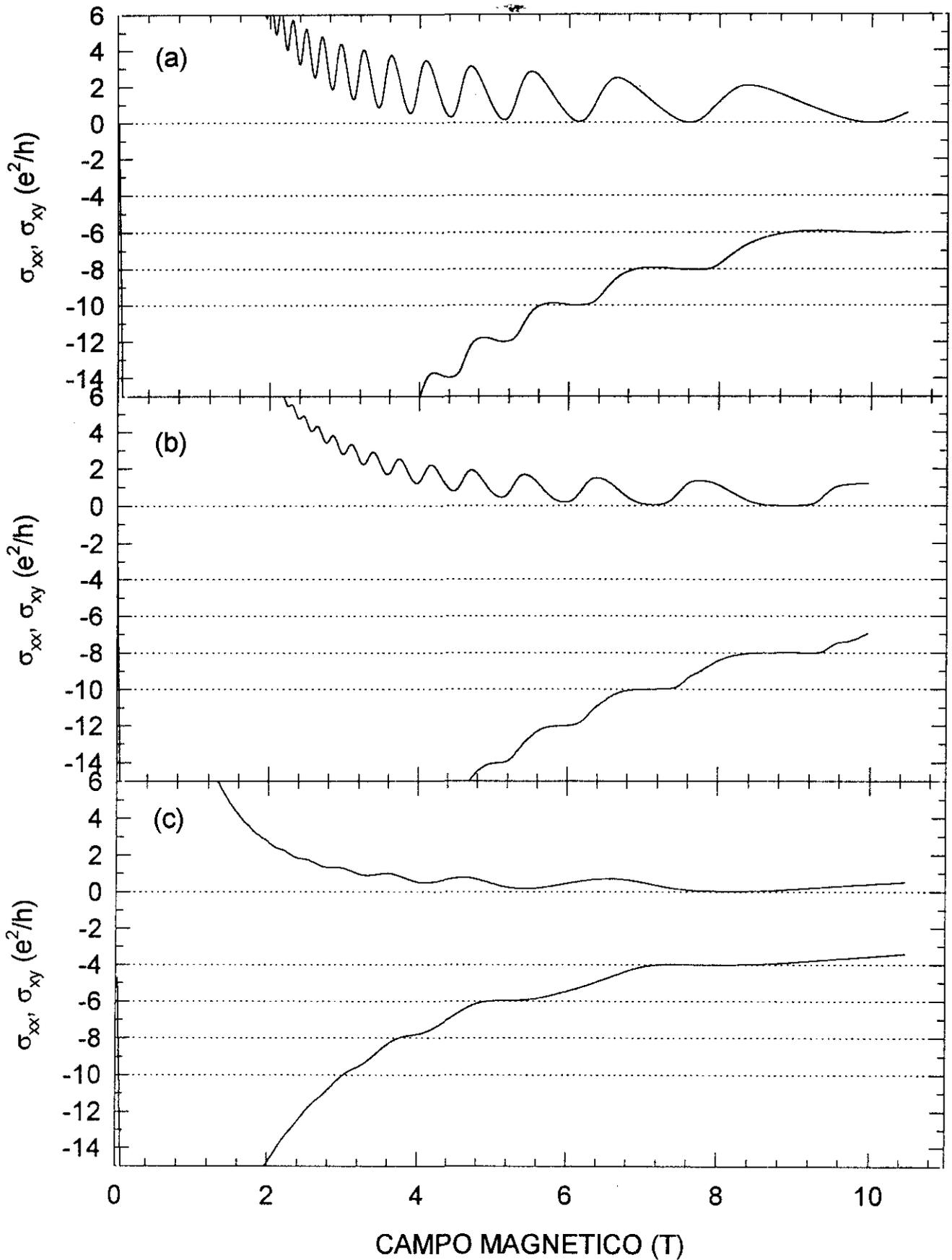


Figura 6.1: Obtención de  $\sigma_{xx}$  y  $\sigma_{xy}$  por inversión de los datos experimentales de las muestras T4(a), S1(b) y S2(c)

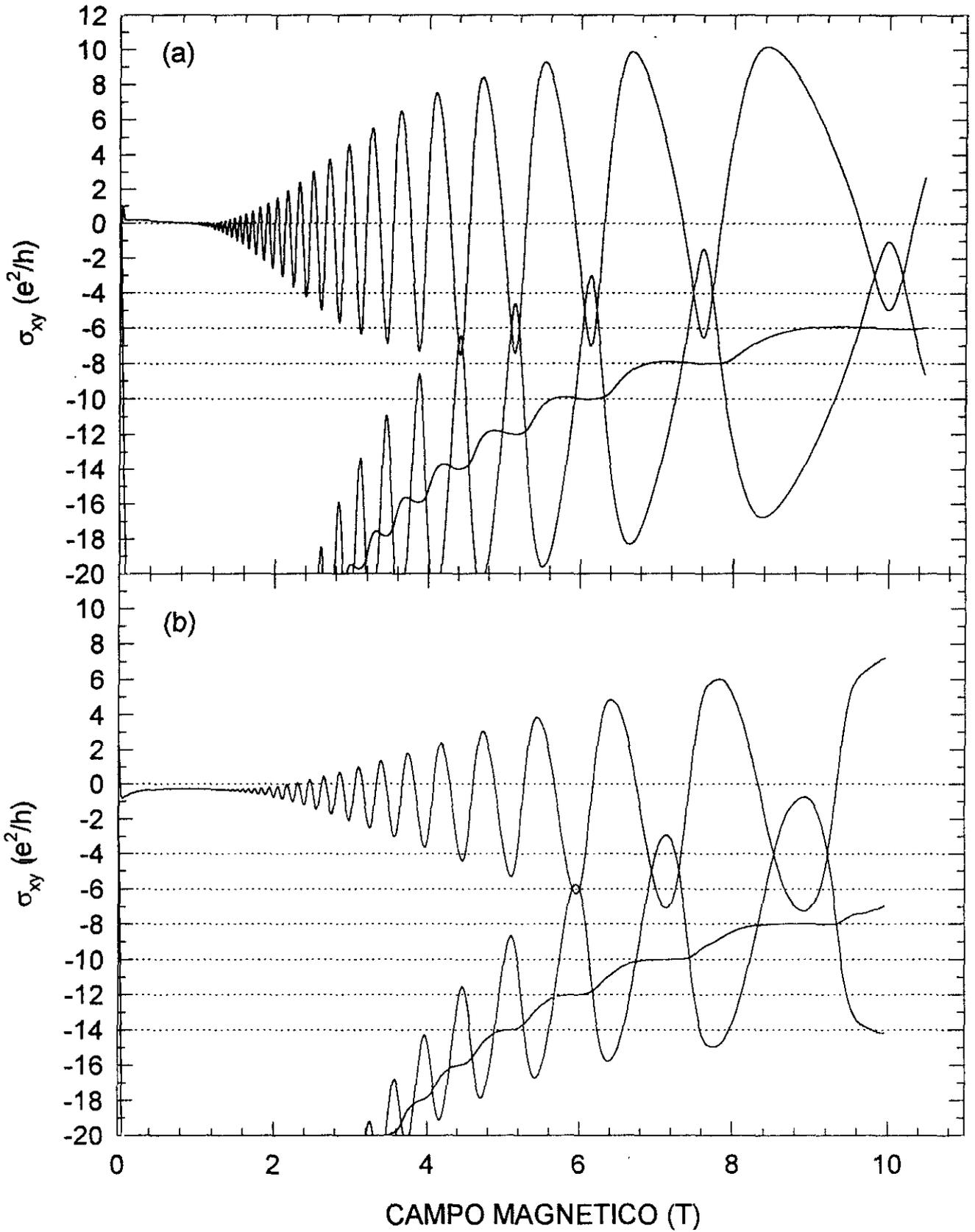


Figura 6.2: Descomposición de  $\sigma_{xy}$  en  $\sigma_{xy}^I$   $\sigma_{xy}^{II}$  a partir de los datos de la figura (6.1) para muestras T4(a), S1(b)

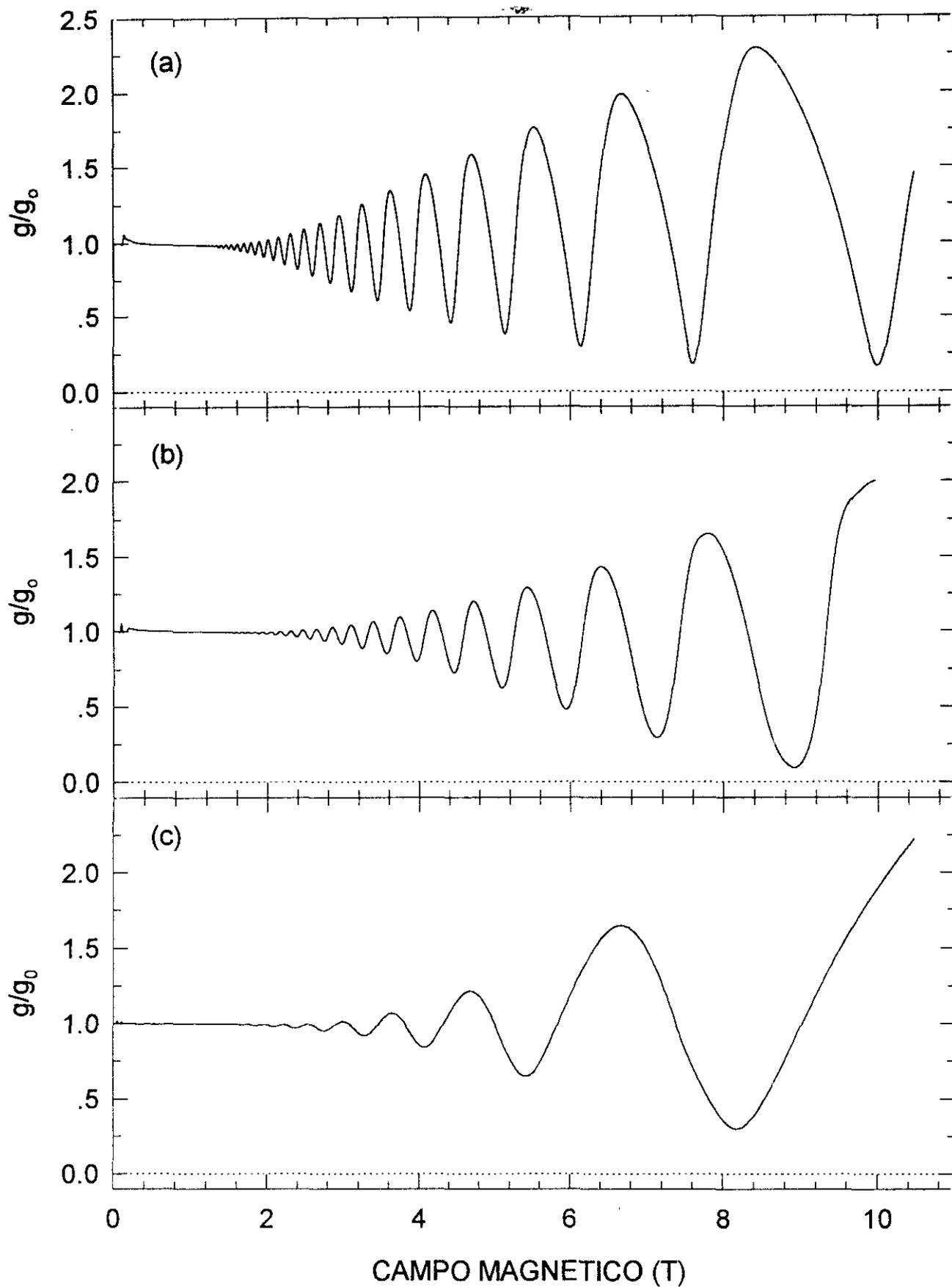


Figura 6.3: Densidad de estados para las muestras T4(a), S1(b) y S2(c).

## 6.2 Ajuste de la forma de los niveles de Landau:

Mediante el procedimiento descrito en el apartado anterior obtenemos una forma para la densidad de estados de cada una de las muestras medidas, esta forma es la que ajustaremos para obtener una determinada dependencia de la anchura de los niveles con el campo magnético. El procedimiento es el siguiente: en la forma experimental de la densidad de estados elegimos el punto correspondiente al máximo de cada oscilación, en este punto, el mecanismo de transporte dominante es el de los estados extendidos y el error que supone ignorar la contribución de los estados localizados es mínimo. Como ejemplo mostramos en la figura (6.4) los máximos que se obtienen en la densidad de estados para tres voltajes de puerta diferentes. Para estos puntos es fácil calcular, en la aproximación del primer armónico, un valor inicial para la anchura del nivel:

Esquemáticamente, reescribimos la ecuación para la densidad de estados (sección 3.2.1):

$$\frac{\langle g \rangle}{g_0} = 1 + 2 \sum R_T R_S R_\Gamma R_{cos} \quad (6.8)$$

si limitamos la suma al primer armónico, consideramos el máximo ( $R_{cos}=1$ ) y tomamos logaritmos, queda:

$$\ln \left( \frac{\langle g \rangle}{g_0} - 1 \right) = \ln 2 + \ln R_T + \ln R_S + \ln R_\Gamma \quad (6.9)$$

recordando la forma exponencial de  $R_\Gamma$  para niveles de Landau gaussianos (sección 3.2.2), tenemos para el logaritmo:

$$\ln R_\Gamma = -\frac{2\pi^2 p^2 \Gamma^2}{(\hbar\omega_c)^2} \quad (6.10)$$

resultando fácil despejar:

$$\Gamma^2 = -\frac{(\hbar\omega_c)^2}{2\pi^2 p^2} \left[ \ln \left( \frac{\langle g \rangle}{g_0} - 1 \right) - \ln 2 - \ln R_T - \ln R_S \right] \quad (6.11)$$

donde  $p=1$ (primer armónico),  $\ln 2$  y  $\ln R_S$  son constantes,  $\ln R_T$  está determinado para cada punto, dado un campo magnético y una temperatura.  $\langle g \rangle/g_0$  es el dato experimental que nos permite obtener un valor para la anchura en función del campo

magnético. En este procedimiento hemos aproximado al primer armónico, por lo tanto habrá desviaciones, sobre todo a alto campo. Los puntos así determinados serán buenos puntos de partida para el cálculo iterativo que hacemos considerando todos los armónicos.

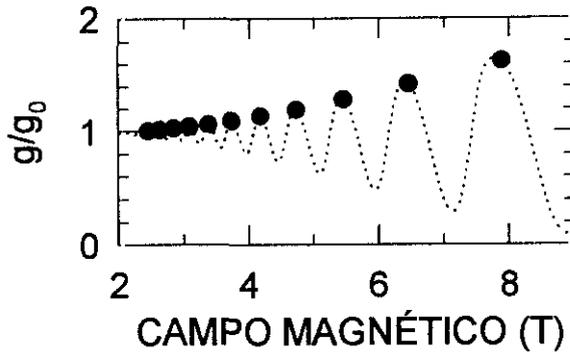


Figura 6.4: Máximos de la densidad de estados para la muestra S1.

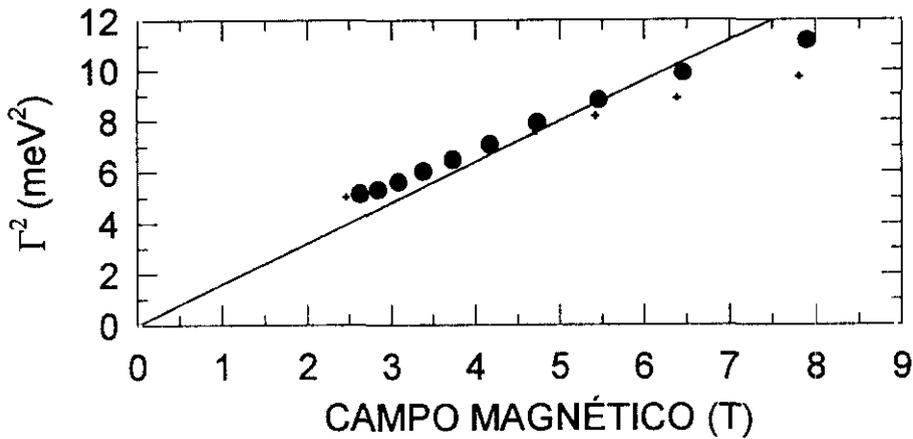


Figura 6.5: Anchura obtenida por ajuste para los niveles de la muestra S1

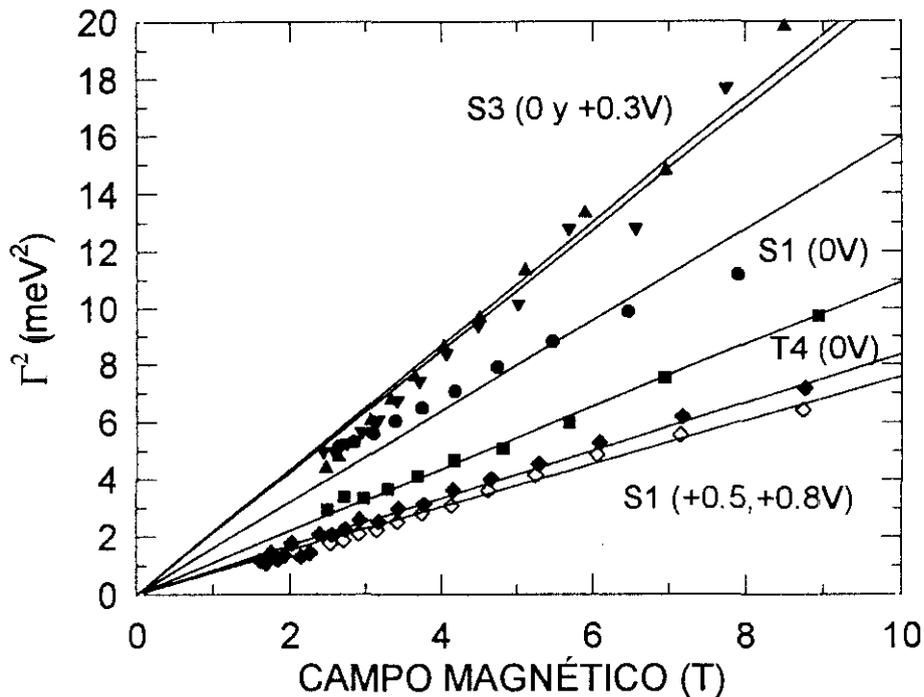


Figura 6.6: Resumen de resultados para las anchuras de los niveles.

Los resultados obtenidos son presentados, para la muestra S1, en la figura (6.5), en ella se indica, para el caso con  $V_g = +0.8V$ , el primer valor de la iteración, lo que permite apreciar la corrección introducida al considerar todos los armónicos. En la figura (6.6) se muestra un resumen de los resultados para otras muestras.

Se obtiene, para todas las muestras y voltajes de puerta un comportamiento que es el dado por Ando (1982):  $\Gamma \propto B^{1/2}$ , si bien la pendiente de la recta varía de un caso a otro. Los ajustes pasan por el origen, si bien en algún caso el ajuste sería mejor con una ligera desviación del origen, esto puede deberse a ligeras desviaciones del comportamiento gaussiano de la anchura del nivel, o también a que la pendiente del ajuste no sea la misma para todo el rango de campo magnético considerado (0 a 12T) pudiendo haber dos posibles dependencias, siempre lineales.

Con las formas de la anchura así determinadas podemos calcular teóricamente las magnetoresistencias  $R_{xx}$  y  $R_{xy}$  y comparar con los ficheros experimentales que obtuvimos directamente (Fig 6.7a). Se observa que las diferencias en el ajuste aparecen en aquellas zonas donde es de esperar una mayor contribución al transporte de los estados localizados. Para mejorar este ajuste será necesario incorporar la contribución al transporte de los estados localizados. Debemos establecer, por un lado, cuál es el mecanismo de transporte correcto para los dichos estados en cada rango de temperatura, y por otro lado, cuál es la porción de la densidad de estados que se debe considerar como estados localizados, esto podrá hacerse mediante procedimientos de ajuste de los parámetros teóricos (sección 3.2.4) a los resultados experimentales.

Ilustramos también el ajuste de los datos experimentales invertidos ( $\sigma_{xx}$  y  $\sigma_{xy}$ ) para la muestra S1 (Fig 6.7b). Cuando se realiza el ajuste en conductividades es más directa la interpretación, ya que las contribuciones a la conductividad de las distintas subbandas o de posibles efectos de localización se suman. Por ello las pequeñas desviaciones del ajuste se pueden interpretar como debido a los efectos que no estamos considerando en el cálculo: desviaciones de los niveles de la forma gaussiana o la mencionada contribución a la conductividad de los diversos mecanismos de transporte entre los estados localizados.

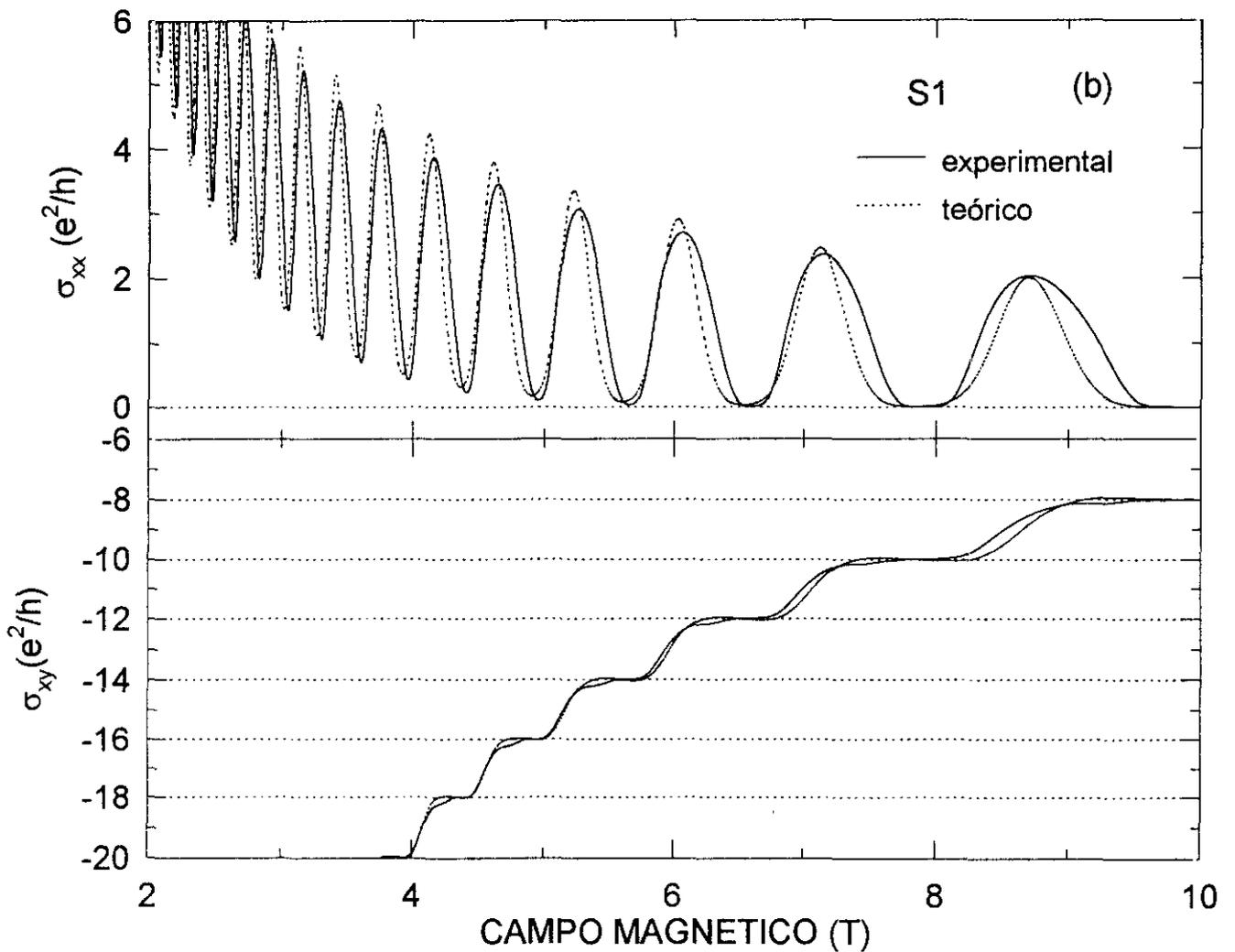
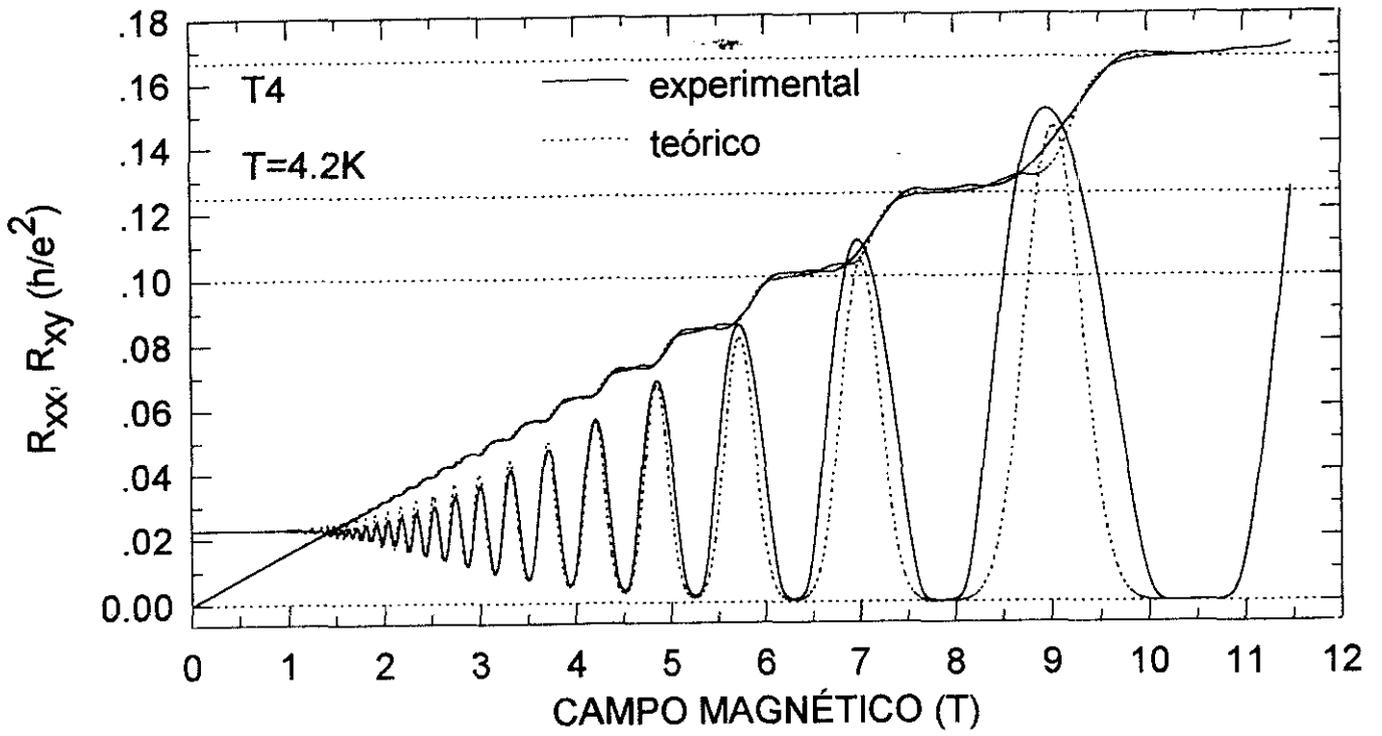


Figura 6.7: Comparación de  $R_{xx}$  y  $R_{xy}$  (a) y  $\sigma_{xx}$  y  $\sigma_{xy}$  (b) teórico y experimental

### 6.3 Efecto de la temperatura:

Con los ficheros experimentales de magnetoconductividad que obtuvimos por inversión de las magnetoresistencias podemos construir los diagramas de renormalización y estudiar su evolución en función de la temperatura. Mostramos un ejemplo para la muestra S1 en la figura (6.8). Estos diagramas son independientes del tipo de medida (vs  $B$  o vs  $V_g$ ) y podemos superponer en un mismo gráfico ambos tipos, incluso superponiendo muestras diferentes se reproducen los mismos diagramas.

A partir de la derivada respecto del campo magnético de los ficheros de  $\sigma_{xy}$  obtenidos por inversión podemos obtener el comportamiento de la pendiente máxima de la transición de un plateau a otro y efectuar un ajuste de los exponentes críticos correspondientes (Fig. 6.9). Estos datos son complementarios a los que se obtienen a partir de los datos experimentales de  $R_{xx}$  y  $R_{xy}$  de manera directa.

El rango de temperaturas estudiado, desde  $T=1.2K$  hacia temperaturas superiores no permite analizar en detalle cómo es la contribución de los estados localizados al transporte, ya que los diferentes mecanismos que entran en juego (activación hacia el borde de movilidad tras el que se encuentran los estados extendidos vacíos, hopping de rango variable entre estados localizados... ) lo van haciendo sucesivamente a temperaturas inferiores. Nosotros únicamente apreciamos indicios del cambio de comportamiento, lo cual hará difícil introducir en el cálculo teórico la contribución al transporte de los estados localizados (sección 3.2.4). Será necesario dotar al sistema experimental de la capacidad para reducir la temperatura por debajo de 1.2K, lo que nos permitirá seguir trabajando en esta dirección.

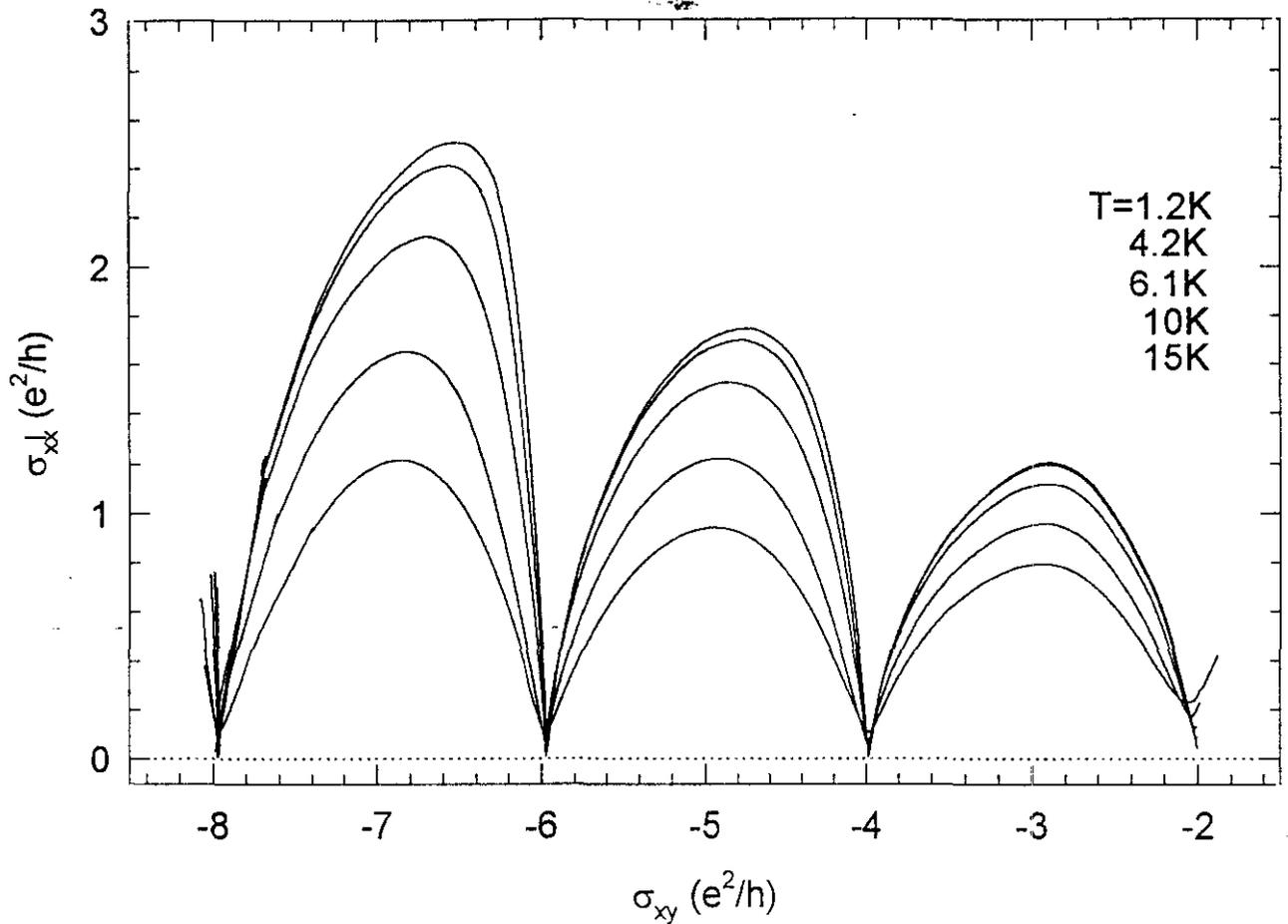


Figura 6.8: Diagrama de renormalización  $\sigma_{xx}$  vs  $\sigma_{xy}$  (datos experimentales)

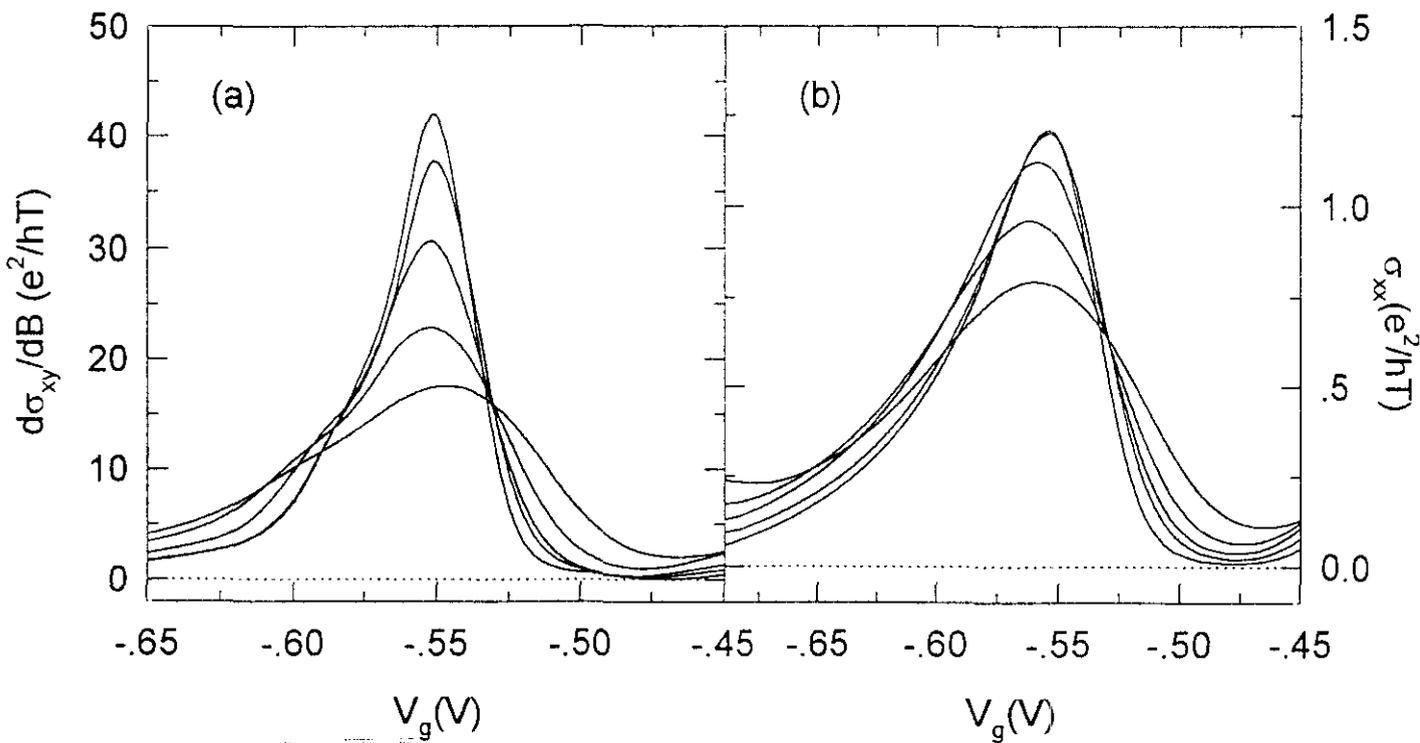


Figura 6.9: Variación de  $\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial B}$  con la temperatura (a) y comportamiento de los máximos (b)

## 6.4 Segunda subbanda:

En el capítulo anterior estudiamos detalladamente el llenado de una segunda subbanda en la muestra S3. Los datos que allí se analizaban eran las oscilaciones Shubnikov-de Haas en  $R_{xx}$ , donde aparecían claramente dos frecuencias que indicaban el número de portadores de cada subbanda su suma era consistente con el número total de portadores obtenido mediante la pendiente Hall de  $R_{xy}$ . Mostramos ahora en la figura (6.10) cómo la aparición de la segunda subbanda modifica el comportamiento de  $\sigma_{xy}$  (datos de inversión), este comportamiento es muy marcado.

Analizamos ahora los datos de la muestra S1, para la que mediante el análisis de las frecuencias en  $R_{xx}$  no se podía apreciar el llenado de la segunda subbanda (la frecuencia de la segunda subbanda para un nivel de llenado muy pequeño sería tan baja que no se apreciaría). Representamos en la figura (6.11) el comportamiento de  $\sigma_{xy}$  para tres voltajes de puerta, se aprecia cómo, al aumentar el número de portadores empieza a aparecer gradualmente una estructura superpuesta al comportamiento habitual, esto sería indicativo de que ha comenzado a llenarse la segunda subbanda. El comportamiento es especialmente marcado para  $V_g = +0.8V$ . Este método resulta más sensible que el habitual para detectar el llenado de la segunda subbanda, aunque la determinación de la población de la misma no se puede efectuar directamente a partir de los datos sino mediante un proceso de ajuste teórico más complejo.

Finalmente mostramos (Fig 6.12) el ajuste teórico para el caso de dos subbandas, se observa que el comportamiento de  $\sigma_{xy}$  se puede ajustar razonablemente, obteniéndose la desviación de los plateaus del efecto Hall cuántico del comportamiento total (ambas subbandas) como la superposición de los efectos para cada una de ellas con los plateaus en los valores correctos.

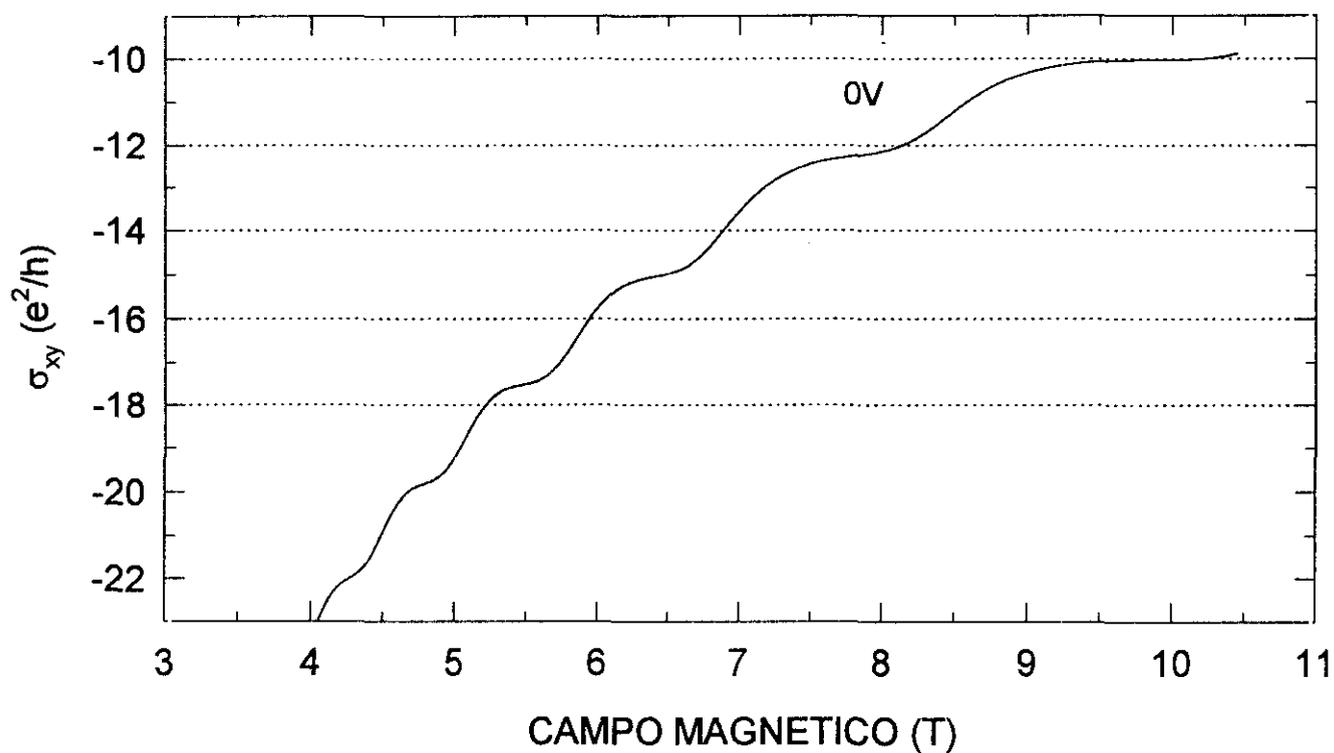


Figura 6.10: Muestra S3, detección de la segunda subbanda en  $\sigma_{xy}$ .

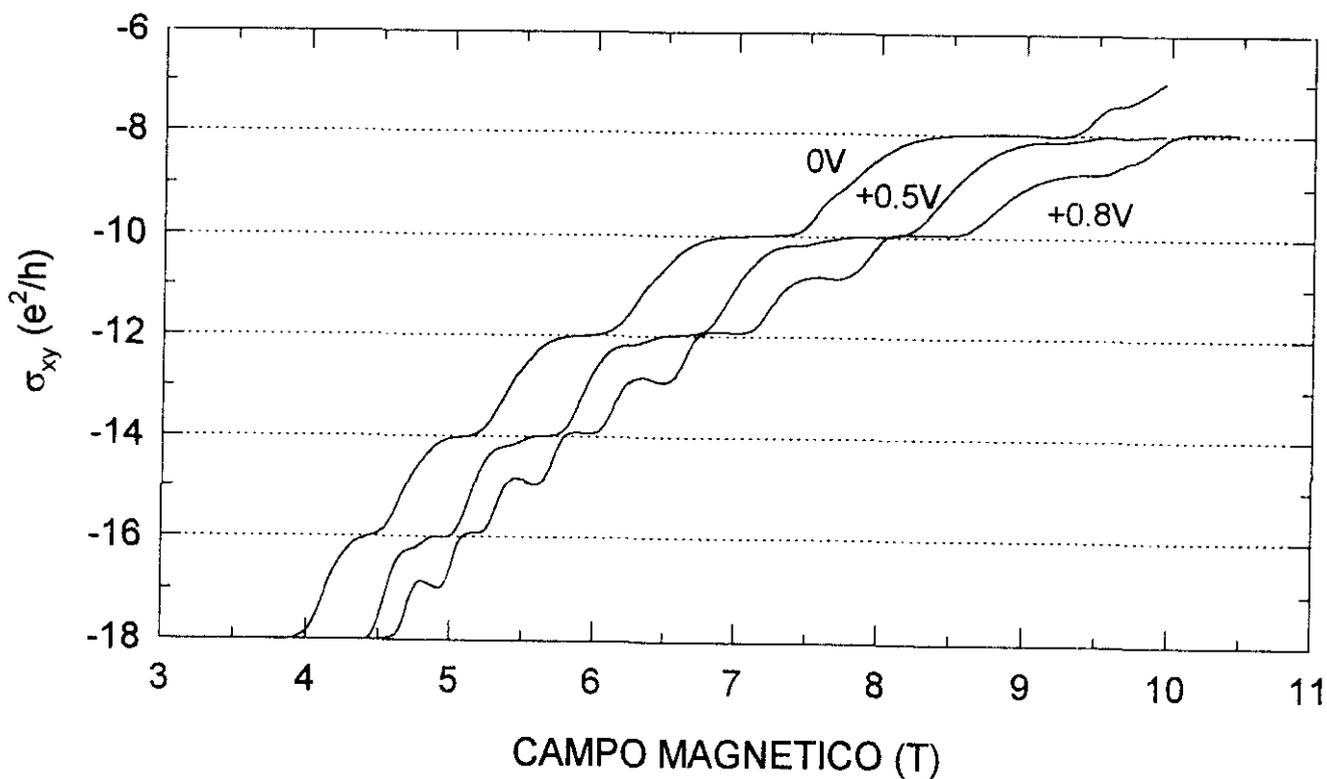
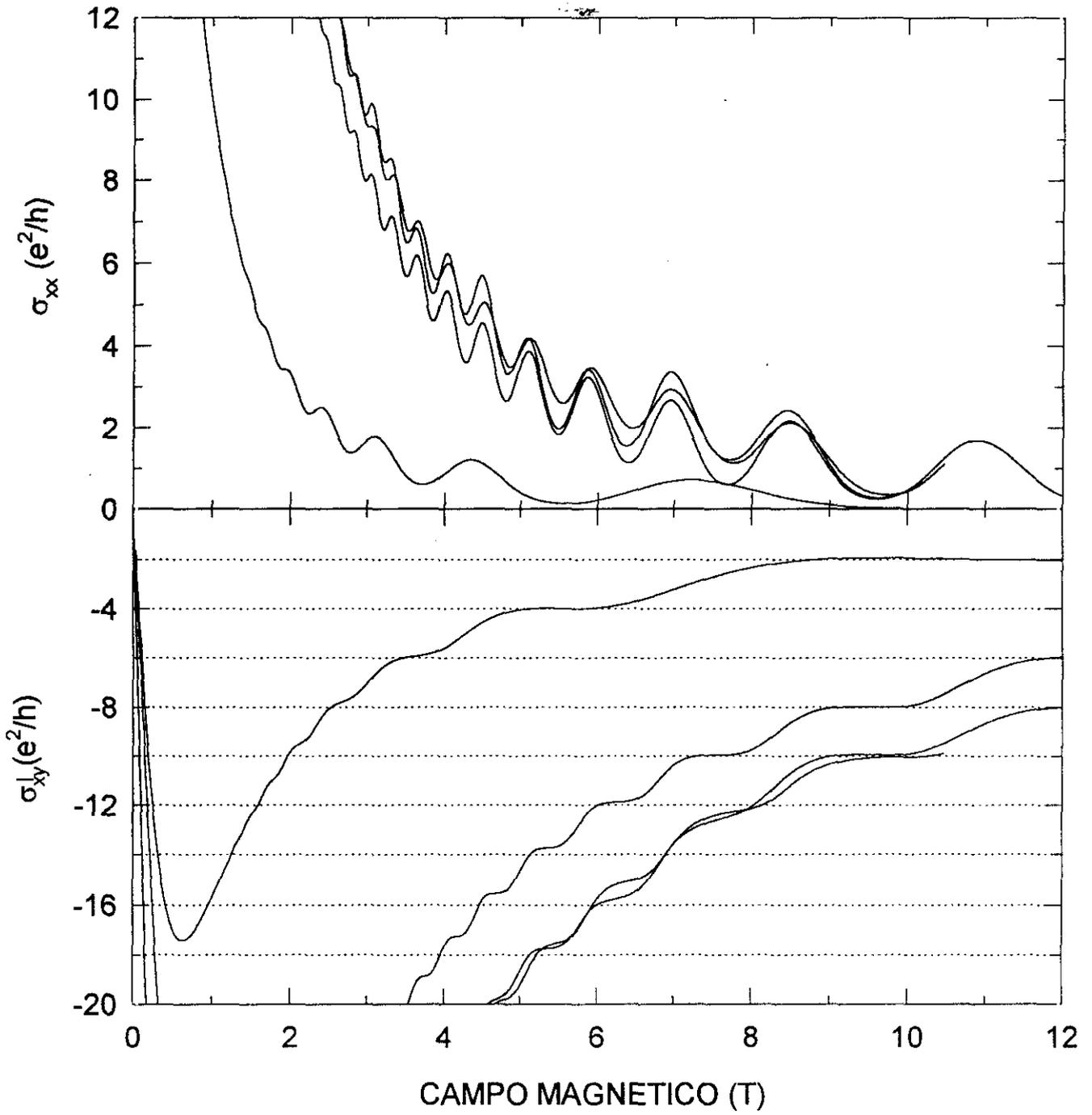


Figura 6.11: Muestra S1, indicios de la segunda subbanda en  $\sigma_{xy}$ .



*Figura 6.12: Ajuste teórico del comportamiento de  $\sigma_{xy}$  para el caso de dos subbandas pobladas (Muestra S3).*

## Capítulo 7

### CONCLUSION

Las conclusiones a éste trabajo se pueden presentar en dos bloques. Un primer bloque concerniente a los resultados del cálculo teórico y un segundo referido a los resultados experimentales. Sin embargo, y ésto podría ser considerado como una primera conclusión, ambos bloques están fuertemente relacionados; es difícil exponer las conclusiones de este trabajo separando resultados teóricos y experimentales que se deben tratar conjuntamente ya que es entonces cuando muestran su coherencia.

Hemos calculado el tensor de conductividad en presencia de campo magnético para el gas de electrones bidimensional utilizando la aproximación semiclassical e introduciendo la ruptura de la invariancia de traslación mediante la aproximación del potencial coherente (CPA) para el tratamiento de las impurezas y el desorden.

Los resultados muestran la aparición del efecto Shubnikov-de Haas para la componente diagonal del tensor de la magnetoconductividad transversa y la aparición del efecto Hall cuántico entero para la componente no-diagonal. Ambos efectos están íntimamente relacionados y deben ser tratados de forma conjunta.

La cuantificación de los plateaus del efecto Hall cuántico para valores de  $h/e^2i$  con  $i =$  entero, que se obtiene en el cálculo con una precisión de una parte por millón es una propiedad muy fuerte del gas de electrones bidimensional, independiente de la forma de los niveles, de la densidad de portadores o del tipo de muestra. La cuantificación se obtiene por compensación de términos oscilatorios que indican la existencia de un gap de movilidad entre “estados extendidos de volumen”, que se sitúan a energías próximas a

los niveles de Landau originales en ausencia de impurezas y la aparición de “estados de borde”, que son los estados extendidos de volumen cuya energía está por debajo del nivel de Fermi pero que aparecen, en los bordes de la muestra, a dicha energía. La contribución de dichos estados de borde, recogida en el cálculo por el término  $\sigma_{xy}^{II}$ , es necesaria para obtener la cuantificación exacta de los plateaus del efecto Hall cuántico entero.

Si bien una cierta dosis de impurezas y desorden es necesaria para que se produzca el efecto Hall cuántico, un exceso de ellas lo destruye, perdiéndose la exactitud en la cuantificación. Nuestros cálculos nos permiten simular también muestras alejadas del caso ideal, lo cual es necesario para poder ajustar los resultados experimentales.

En cuanto al trabajo experimental, hemos montado un sistema para efectuar medidas de transporte a altos campos magnéticos (hasta 13.5T) y bajas temperaturas (1.2K).

Se han medido heteroestructuras cuánticas pseudomórficas basadas en un pozo de  $In_xGa_{1-x}As$  con distintas formas de dopado y anchuras de los pozos. En todas ellas se detecta la presencia de un gas bidimensional de electrones, apareciendo el efecto Hall cuántico entero y el efecto Shubnikov-de Haas. Del tratamiento conjunto de las medidas de ambos efectos hemos deducido la forma de la densidad de estados. La comparación de estas medidas con los cálculos teóricos indica que la forma de los niveles de Landau es gaussiana, con una anchura que depende del campo magnético como  $\Gamma \propto B^{1/2}$ , obteniéndose la constante de proporcionalidad para cada caso mediante un ajuste lineal.

La cuantización de los plateaus del efecto Hall es buena en la parte central de los mismos, estos valores son independientes del tipo de muestra, dopado, voltaje de puerta, densidad de portadores, anchura del pozo, o materiales empleados en la heteroestructura. Las medidas se ajustan bien con los cálculos teóricos en esa parte del plateau sin necesidad de variar ningún parámetro.

El efecto de la presencia de impurezas y desorden en la forma de los niveles de Landau se manifiesta en los bordes de los plateaus. Al tratar de ajustar dicha forma a los resultados experimentales, se hace necesario incluir en el cálculo la contribución al transporte de los estados localizados. Sin dicha contribución no es posible un buen ajuste precisamente para aquellas energías en las que se sitúan los estados localizados en la densidad de estados (las “alas” de los niveles). Es decir, se produce una desviación de la forma puramente gaussiana de los niveles a la que hay que añadir un fondo más o menos plano y por tanto, ajustar otros parámetros además de la anchura del nivel.

Además de la caracterización por transporte de las muestras (número de portadores, movilidades y tiempos de relajación) se han deducido magnitudes de equilibrio a partir de los datos de las medidas de transporte, por ejemplo, la imanación oscilatoria (efecto de Haas-van Alphen).

Se ha observado, para un pozo cuántico de  $\text{In}_{0.2}\text{Ga}_{0.8}\text{As}$  con modulación de dopado a ambos lados del pozo, la población de una segunda subbanda, obteniéndose la densidad de portadores, la masa efectiva y el tiempo de relajación para dicha subbanda. La obtención de dichas magnitudes se hace mediante un análisis de los datos de las oscilaciones Shubnikov-de Haas, sin embargo, la desviación de los plateaus del efecto Hall cuántico respecto a los valores cuantificados que se obtienen cuando sólo hay una subbanda poblada, se muestra como un mecanismo más sensible para la detección del llenado de la segunda subbanda.

Finalmente mencionaremos la necesidad de continuar las medidas experimentales y ampliar las prestaciones de nuestro sistema experimental en dos direcciones:

La primera, la realización de medidas directas de magnitudes del equilibrio, tales como la magnetocapacidad o la imanación oscilatoria (aunque ésta última es más difícil debido a que la señal es muy débil al haber una densidad de electrones del orden de  $10^{12}\text{cm}^{-2}$ , muy baja para este tipo de medidas). Esto permitiría obtener simultáneamente medidas de transporte y de equilibrio sobre una misma muestra, y su comparación indicará la contribución de los estados localizados a la densidad total de estados.

La segunda, encaminada a la obtención de muy bajas temperaturas (unos pocos mK), permitirá profundizar en el estudio de los mecanismos de transporte entre estados localizados que se van dando a los diferentes rangos de temperatura. También permitiría obtener datos experimentales del efecto Hall cuántico fraccionario, lo que abre la puerta a un gran desarrollo de las medidas de magnetotransporte del gas de electrones bidimensional en el caso en que hay interacción entre los electrones.

## APÉNDICE 1

### Resolución de la ecuación de Schrödinger en presencia de campo magnético para el gauge de Landau

En éste apéndice resolveremos más detalladamente la ecuación de Schrödinger en presencia de un campo magnético en la dirección perpendicular al gas electrónico bidimensional. Para ello elegimos el gauge de Landau, la libertad de elección del gauge está garantizada por la invariancia de la ecuación bajo transformaciones gauge en el potencial vector. Para ilustrar ésto, veremos que los resultados obtenidos son equivalentes a los de la sección 1.2.

Escribimos la ecuación de Schrödinger en presencia de dicho campo magnético:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{\hbar c} \vec{A} \right)^2 \Psi = E \Psi \quad (\text{Ap.1.1})$$

si tomamos el gauge de Landau, que viene dado por la elección:  $A_x = -yB$ ,  $A_y = 0$  queda:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \left( p_x - \frac{eB}{\hbar c} y \right)^2 - p_y^2 \right] \Psi = E \Psi \quad (\text{Ap.1.2})$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \left( i \frac{\partial}{\partial x} - \frac{eB}{\hbar c} y \right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \Psi = E \Psi \quad (\text{Ap.1.3})$$

suponemos que la función de onda es de la forma  $\Psi \propto e^{ikx} \varphi(y)$ , tenemos

entonces,  $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = ik\Psi$  y  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -k^2\Psi$ , y nos queda:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left[ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{eB}{i\hbar c} y \frac{\partial}{\partial x} + \left( \frac{eB}{\hbar c} \right)^2 y^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \Psi = E\Psi \quad (\text{Ap.1.4})$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left[ k^2 e^{ikx} \varphi(y) - \frac{eB}{i\hbar c} y k e^{ikx} \varphi(y) + \left( \frac{eB}{\hbar c} \right)^2 y^2 e^{ikx} \varphi(y) - e^{ikx} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] = E e^{ikx} \varphi(y) \quad (\text{Ap.1.5})$$

introducimos ahora la "longitud magnética" que viene dada por  $\ell \equiv \left( \frac{\hbar c}{eB} \right)^{1/2}$  que es del orden de 50-100Å para los campos magnéticos considerados:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left[ k^2 - \frac{ky}{\ell^2} + \frac{y^2}{\ell^4} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \varphi(y) = E\varphi(y) \quad (\text{Ap.1.6})$$

$$\frac{\hbar^2}{2m\ell^2} \left[ \ell^2 k^2 - ky + \frac{y^2}{\ell^2} - \ell^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \varphi(y) = E\varphi(y) \quad (\text{Ap.1.7})$$

Finalmente podemos introducir la "frecuencia ciclotrón" que viene dada por  $\omega_c = \frac{eB}{mc} = \frac{\hbar}{m\ell^2}$ , tanto  $\omega_c$  como  $\ell$ , introducen unas escalas características de tiempo y longitud para el problema considerado, quedando:

$$\frac{\hbar\omega_c}{2} \left[ -\ell^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left( \frac{y}{\ell} - \ell k \right)^2 \right] \varphi(y) = E\varphi(y) \quad (\text{Ap.1.8})$$

cuya solución viene dada por:

$$\begin{cases} \varphi_{nk}(y) \propto H_{nk} \left( \frac{y}{\ell} - \ell k \right) \exp \left[ -\frac{(y - \ell^2/k)^2}{2\ell^2} \right] \\ E_{nk} = \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) \end{cases} \quad (\text{Ap.1.9})$$

siendo  $H_{nk}$  los polinomios de Hermite. Obtenemos así la conocida estructura de niveles de Landau, igualmente espaciados en energía a un campo magnético dado y que viene representada en la figura (1.5). Estas funciones de onda están localizadas en la dirección  $y$  por efecto del campo magnético, son osciladores armónicos desplazados, centrados en  $y_0 = \ell^2 k$ .

## APÉNDICE 2

### Cálculo de los coeficientes $K_{ij}$ y su relación con el tiempo de relajación

En éste apéndice desarrollaremos brevemente la forma dada por Mori y Ando (1980) para los coeficientes  $K_{ij}$ , que son los que nos permitirán relacionar el tiempo de relajación  $\tau_j$  que aparece en las ecuaciones semiclásicas con los parámetros de scattering proveniente de los distintos potenciales que se consideren.

Tenemos la expresión dada por la ecuación (2.16)

$$-\sum_{k_{\perp}\sigma} \frac{k_{\perp}^2}{m_i} \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial \varepsilon_{k_{\perp}}} = \sum_j K_{ij} \tau_j \quad (\text{Ap.2.1})$$

donde:

$$K_{ij} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\substack{k_{\perp}, k'_{\perp} \\ \sigma, \sigma'}} \delta_{ij} \left\{ \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial \varepsilon_{k_{\perp}}} \frac{k_{\perp}}{m_i} \cdot (k'_{\perp} - k_{\perp}) \delta[\varepsilon_i(k_{\perp}) - \varepsilon_i(k'_{\perp})] \left\langle \left| \langle ik_{\perp}\sigma | H_{\text{def}} | ik'_{\perp}\sigma' \rangle \right|^2 \right\rangle_{\text{promedio}} - \right. \\ \left. \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial \varepsilon_{k_{\perp}}} \frac{k_{\perp}^2}{m_i} \sum_l (1 - \delta_{il}) \delta[\varepsilon_i(k_{\perp}) - \varepsilon_i(k'_{\perp})] \left\langle \left| \langle ik_{\perp}\sigma | H_{\text{def}} | lk'_{\perp}\sigma' \rangle \right|^2 \right\rangle_{\text{promedio}} \right\} + \\ \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial \varepsilon_{k_{\perp}}} (1 - \delta_{ij}) \frac{k_{\perp} \cdot k'_{\perp}}{m_j} \delta[\varepsilon_i(k_{\perp}) - \varepsilon_i(k'_{\perp})] \left\langle \left| \langle ik_{\perp}\sigma | H_{\text{def}} | jk'_{\perp}\sigma' \rangle \right|^2 \right\rangle_{\text{promedio}} \quad (\text{Ap.2.2})$$

Consideramos ahora  $T=0K$  e introducimos las ecuaciones (2.17) y (2.18), queda:

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{T=0} = & \frac{\pi^2 \hbar^3}{m_i S} \sum_{\substack{k_{\perp}, k'_{\perp} \\ \sigma, \sigma'}} \left[ \delta_{ij} \left\{ \frac{k_{\perp}}{m_i} \cdot (k_{\perp} - k'_{\perp}) \delta[\varepsilon_F - \varepsilon_i(k'_{\perp})] \delta[\varepsilon_F - \varepsilon_i(k_{\perp})] \times \right. \right. \\
& \left. \left. \left\langle \left| \langle ik_{\perp} \sigma | H_{\text{def}} | ik'_{\perp} \sigma \rangle \right|^2 \right\rangle_{\text{promedio}} + \frac{k_{\perp}^2}{m_i} \delta[\varepsilon_F - \varepsilon_i(k_{\perp})] \times \right. \right. \\
& \left. \left. \sum_i (1 - \delta_{ii}) \delta[\varepsilon_F - \varepsilon_i(k'_{\perp})] \left\langle \left| \langle ik_{\perp} \sigma | H_{\text{def}} | lk'_{\perp} \sigma' \rangle \right|^2 \right\rangle_{\text{promedio}} \right\} - \\
& \left. (1 - \delta_{ij}) \frac{k_{\perp} \cdot k'_{\perp}}{m_j} \delta[\varepsilon_F - \varepsilon_i(k_{\perp})] \delta[\varepsilon_F - \varepsilon_i(k'_{\perp})] \left\langle \left| \langle ik_{\perp} \sigma | H_{\text{def}} | jk'_{\perp} \sigma' \rangle \right|^2 \right\rangle_{\text{promedio}} \right]
\end{aligned}
\tag{Ap.2.3}$$

Vamos a particularizar la expresión anterior al caso en que hay una sola subbanda ocupada, el único término de  $K_{ij}$  distinto de cero es  $K_{11}$ . Si recordamos la magnitud que habíamos introducido en las ecuaciones (2.30) y (2.31) y su relación con el ángulo  $\theta$ , que indicaba el cambio de dirección del momento y despreciamos los acoplamientos spin-órbita, podemos escribir  $K_{11}$  como:

$$K_{11} = - \frac{2\pi^2 \hbar^3}{m_1^2 S} \sum_{k_{\perp}, q_{\perp}} k_{\perp} \cdot q_{\perp} \delta[\varepsilon_F - \varepsilon_1(k_{\perp} + q_{\perp})] \delta[\varepsilon_F - \varepsilon_1(k_{\perp})] \left\langle \left| \langle 1k_{\perp} \sigma | H_{\text{def}} | 1k'_{\perp} \sigma \rangle \right|^2 \right\rangle_{\text{promedio}}
\tag{Ap.2.4}$$

si consideramos  $T=0K$  y efectuamos la suma, con ayuda de la Fig. 2.1, queda:

$$K_{11}^{T=0} = \frac{m_1 S}{2\pi \hbar^3} [\varepsilon_F - E_1] \int_0^{2\pi} d\theta (1 - \cos\theta) \left\langle \left| \langle 1k_{\perp} \sigma | H_{\text{def}} | 1k_{\perp} + q_{\perp} \sigma \rangle \right|^2 \right\rangle_{\text{promedio}} \Big|_{q_{\perp}=2k_{\perp} \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|}
\tag{Ap.2.5}$$

y a partir de aquí es inmediato despejar  $\frac{1}{\tau_1(\varepsilon_F)}$  en la ecuación (2.19)

## APÉNDICE 3

### Consideraciones topológicas

Los números cuánticos, enteros o racionales, que aparecen en la teoría cuántica parecen ser de dos tipos diferentes: aquellos relacionados con la simetría y aquellos determinados por la topología. El momento angular es el más claro ejemplo de cómo números cuánticos enteros aparecen como consecuencia de una simetría (en este caso rotacional), las rupturas de la simetría dan lugar al levantamiento de la degeneración y que los números cuánticos ya no puedan ser asociados con estados determinados de energía.

En la física de la materia condensada hay dos claros ejemplos de números cuánticos topológicos, muy relacionados entre sí. El primero es la cuantización de la circulación en el helio superfluido (Onsager 1949), el que la función de onda del superfluido sea monovaluada implica que la integral de la velocidad del superfluido sobre cualquier circuito cerrado es igual a un múltiplo entero de  $h/m$ , donde  $m$  es la masa del átomo de helio, el número cuántico entero es el número de veces que la fase de la función de onda completa un ciclo sobre el circuito cerrado; nos da la idea intuitiva (muy “topológica”) de un “enrollamiento”. La cuantización del flujo en los superconductores es muy similar, sobre la base de una función de onda monovaluada (London, 1950) se predice que el fluxoide (combinación del flujo contenido en un vórtice con la corriente que fluye alrededor) debe ser un entero múltiplo de  $h/2e$ . En ambos casos la cuantización se mantiene con gran precisión y de forma independiente a pequeñas variaciones de las condiciones “ambientales”: formas de la vasija, presencia de impurezas, o excitaciones térmicas.

Sin embargo la distinción entre las consideraciones de simetría o las topológicas no es tan evidente. Aunque la conservación del momento angular se pierde tan pronto como se introduce un pequeño término que rompa la simetría, se sabe que esta pérdida de simetría no provoca que el sistema recorra todo el espacio de fases, sino que permanece confinado a una superficie próxima a aquella determinada por la estricta conservación de la simetría. El número cuántico puede todavía venir determinado por la topología de esta superficie, incluso si la simetría se ha roto.

Si hubiera que clasificar la cuantización de la conductancia Hall en uno de las dos clases de números cuánticos, parece más atractivo hacerlo en la de los números cuánticos topológicos. La exacta cuantización no necesita gran pureza de las muestras (es más, una cierta dosis de impurezas es necesaria) o especiales condiciones de simetría, tampoco es evidente que se pudiera relacionar con algún grupo de simetría "interna". Sí hay sin embargo argumentos de carácter topológico, como son los dados por Laughlin (ver sección anterior): si el nivel de Fermi yace en un gap de movilidad, un cambio de una unidad cuántica en el flujo magnético que pasa por el centro de un anillo bidimensional de electrones hará que un número entero de electrones pase de un borde del anillo al otro.

Una base topológica a la explicación del efecto Hall cuántico ha sido dada por Thouless (1984 a,b). Previamente habían sido hechos varios estudios sobre la teoría cuántica de electrones que están simultáneamente en un campo magnético y un potencial periódico (Onsager 1952, Zak 1964, Pippard 1964, Hofstadter 1976). Los resultados se refieren sobre todo al problema bidimensional; se encontró que si el número de cuantos de flujo que pasan a través de una celda unidad bidimensional es un número racional  $p/q$ , cada nivel de Landau se rompe en  $p$  subbandas de energía debido al potencial periódico y cada subbanda de energía se parte a su vez en otras  $q$  subbandas debido al campo magnético (estas bandas de energía configuran la famosa "mariposa" de Hofstadter). Es decir, un nivel de Landau que porte una unidad cuántica de corriente Hall se parte en  $p$  subbandas, cada una de las cuales portará un número entero de corriente Hall; es otra forma de exponer el argumento de Laughlin.

Consideramos un sistema de electrones que no interactúan entre sí, sometidos a un campo magnético uniforme y a un potencial periódico  $V(x,y)$ , el flujo es conmensurable con la celda unidad, en el sentido de que  $p$  celdas unidad del potencial contienen  $q$  cuantos de flujo magnético. En este caso, las autofunciones se pueden escribir como:

$$u_{k_1, k_2}(x, y) \exp[i(k_1 x + k_2 y)] \quad (\text{Ap. 3.1})$$

donde  $u(x,y)$  es periódica en la coordenada  $y$  pero tiene un factor gauge extra en su condición de periodicidad para la coordenada  $x$ . Para la función  $u(x,y)$  el Hamiltoniano efectivo es:

$$H(k_1, k_2) = \frac{1}{2} \left[ \left( -i \frac{\partial}{\partial x} + k_1 \right)^2 + \left( -i \frac{\partial}{\partial y} + k_2 + x \right)^2 \right] + V(x, y) \quad (\text{Ap. 3.2})$$

utilizando la fórmula de Kubo (1957) podemos obtener (Thouless 1983, 1984a,b) una expresión para la componente no-diagonal de la conductividad transversa en función del solapamiento entre las funciones de onda (en primer orden de perturbaciones) dadas por la ecuación (Ap. 4.1):

$$\sigma_{xy} = \frac{ie^2}{(2\pi)^2} \iint \left\{ \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial k_1}, \frac{\partial u_\alpha}{\partial k_2} \right) - \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial k_2}, \frac{\partial u_\alpha}{\partial k_1} \right) \right\} dk_1 dk_2 \quad (\text{Ap. 3.3})$$

donde el producto interno  $(u, v)$  viene dado por:

$$\int u^*(x, y) v(x, y) dx dy \quad (\text{Ap. 3.4})$$

a partir de aquí, utilizando resultados generales de geometría diferencial, se demuestra que  $h\sigma_{xy}/e^2$  dado por la ecuación (Ap. 3.3) es un entero, y por tanto, cada subbanda llena contribuye con un entero a la conductancia Hall del gas de electrones bidimensional. Se dice que la expresión entre paréntesis de la ecuación (Ap. 3.3) es un invariante topológico. Esta derivación asumía que el potencial periódico era conmensurable con el flujo magnético, pero se puede generalizar la formulación para el caso inconmensurable. Se obtiene entonces la conductancia Hall de las subbandas ocupadas como un invariante topológico que se integra sobre un toro en el espacio  $k, E$ , y la única restricción es que el nivel de Fermi debe estar en un gap de energía (Thouless, 1983).

Hasta aquí hemos supuesto que el sistema es periódico y que se extiende hasta el infinito. Estas no son las condiciones en que el efecto Hall cuántico se obtiene

experimentalmente, por lo tanto esas restricciones deben ser eliminadas. Como un primer paso suponemos que el sistema es un cilindro en un campo magnético uniforme. La coordenada  $y$  se toma alrededor del cilindro y la  $x$  a lo largo del mismo, una corriente  $I$  se pasa de un extremo al otro en la dirección  $x$ . El voltaje Hall es proporcionado por un solenoide en el interior del cilindro cuyo flujo es variado para generar un campo eléctrico en la dirección  $y$  y sin afectar el campo magnético normal a la superficie del cilindro (Fig Ap. 3.1a). Tenemos unas condiciones de contorno periódicas generalizadas para la coordenada  $y$ , pero también para la  $x$ , ya que podemos generalizar las condiciones producidas por la fuente y el drenaje en los extremos del cilindro. La corriente será independiente de las fases  $\xi$  y  $\eta$  dadas por las condiciones de empalme para las funciones de onda en ambas direcciones. Aplicando de nuevo la fórmula de Kubo y promediando sobre las fases, tenemos:

$$\sigma_{xy} = \frac{ie^2}{4\pi^2 A} \sum_{\epsilon_a < E_F} \int_0^{2\pi} d\xi \int_0^{2\pi} d\eta \left\{ \left( \frac{\partial u_a}{\partial \xi}, \frac{\partial u_a}{\partial \eta} \right) - \left( \frac{\partial u_a}{\partial \xi}, \frac{\partial u_a}{\partial \eta} \right) \right\} \quad (\text{Ap. 3.5})$$

donde  $A$  es el área del cilindro y la suma se extiende a los niveles de energía por debajo del nivel de Fermi. Se obtiene el mismo invariante topológico que en la ecuación (Ap. 3.3), es decir la conductancia Hall está cuantizada en unidades enteras de  $e^2/h$ . Este argumento no se ve alterado por la presencia de pequeñas perturbaciones siempre que no modifiquen la estructura de los gaps de energía en el interior del sistema.

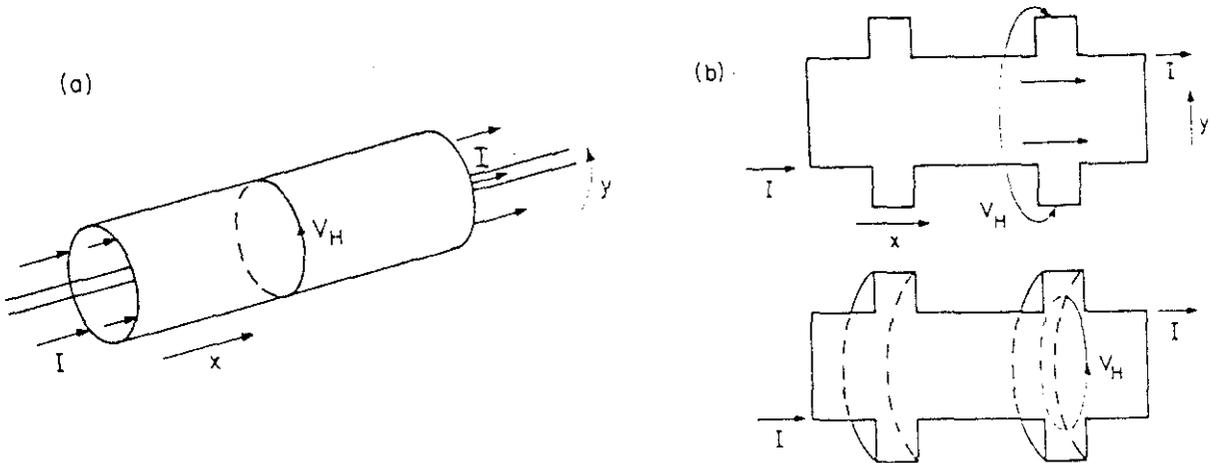


Figura Ap.3.1: Topología del QHE, cilindro(a) y barra Hall(b)

La siguiente generalización deberá ser hacia la situación habitual, en que una corriente pasa a lo largo de una cinta bidimensional con un campo magnético uniforme perpendicular a la superficie y donde se mide la diferencia de potencial entre los dos

bordes largos de la cinta. Para medir este potencial es necesario introducir unas "patas" conectadas a los bordes, podemos imaginar estas patas conectadas unas con otras mediante material bidimensional, recuperando de nuevo la geometría cilíndrica (Fig 3.1b). Deberíamos aplicar una fuerza electromotriz en las patas para prevenir que la corriente fluya de un borde a otro de la cinta, por supuesto no es así como se procede experimentalmente, pero las medidas serían en todo caso equivalentes. El requisito que habría que imponer es que la anchura de las patas sea mayor que la longitud magnética  $\ell$  para poder establecer la equivalencia topológica con el cilindro. El problema para esta generalización estriba en la corriente de borde que aparece en esta geometría y que no es tomada en consideración en los argumentos topológicos que dábamos arriba. Sin embargo muestra cómo la conductancia Hall puede ser entendida como un número cuántico topológico, lo que se ve reforzado por el hecho de que la cuantización es muy precisa e independiente de las particularidades de la muestra o el mecanismo de medida.



## APÉNDICE 4

### Aproximación desde la teoría de campos

Casi al mismo tiempo que von Klitzing efectuaba su descubrimiento del Efecto Hall Cuántico, se daba un gran avance en la teoría del desorden electrónico. Con el descubrimiento de la “localización débil”, Abrahams, Anderson, Licciardello y Ramakrishnan (1979) aplicaban ideas sobre el scaling en sistemas electrónicos desordenados al esquema de los grupos de renormalización. Numeroso trabajo teórico y experimental fué realizado en la línea de verificar la teoría del “scaling de un solo parámetro” y extender su aplicación a diversos sistemas (ver “Anderson Localization” editado por Nagaoka y Fukuyama, 1982 y Nagaoka, 1985).

Sin embargo se encontraron serias discrepancias entre el descubrimiento de von Klitzing y la teoría de localización: la cuantización de la conductancia Hall se interpretaba como un fenómeno debido a la localización de Anderson provocada por la distribución aleatoria de impurezas. Las teorías del scaling de un solo parámetro predicen en dos dimensiones que todos los estados deben estar localizados, pero en el efecto Hall cuántico debe haber también estados extendidos portadores de corriente.

Se descubrió posteriormente (Pruisken, 1984) que en los promedios estadísticos sobre las configuraciones aleatorias de impurezas, aparecían factores de fase del tipo  $\exp(2\pi \sigma_{xy}^0 q)$  señalando la presencia del campo magnético a través del parámetro  $\sigma_{xy}^0$  (conductancia Hall). El entero  $q$  es un “invariante topológico” que se asocia a las fluctuaciones de los campos (que no aparecen en los análisis de diagramas). Este factor de fase se puede considerar como una aplicación del concepto del “vacío- $\theta$ ” que aparece

en las teorías de campos gauge. Esta analogía condujo a la formulación de una teoría de “scaling de dos parámetros” (Levine, Libby y Pruisken, 1983, 1984a,b,c) cuyos resultados son consistentes con los obtenidos experimentalmente (Wei, 1985, 1986, 1988; von Klitzing, 1990; Koch *et al* 1991a,b, 1992).

En los párrafos siguientes daremos una descripción simple de dicha teoría, que nos aproxime a los conceptos de scaling y renormalización de la conductancia aplicados al efecto Hall cuántico.

Vamos a tener que calcular los propagadores,  $[E - H \pm i0^+]^{-1}$ , avanzado y retardado, que son los que contienen la información de interés físico. El hamiltoniano del problema viene dado por:

$$H = \frac{1}{2m} \left( p - \frac{e}{c} A \right)^2 + V(r) = \frac{1}{2m} \Pi^2 + V(r) = H_0 + V(r) \quad (\text{Ap. 4.1})$$

donde  $V(r)$  es el potencial de las impurezas y  $A_\mu = (0, Bx)$ . Las funciones de Green promediadas para una sola partícula describen el sistema en equilibrio termodinámico. Las propiedades de fuera del equilibrio requieren evaluar el promedio simultáneo de los propagadores avanzado y retardado, este promedio introduce una longitud característica para el transporte electrónico: la “longitud de localización”, que es la extensión espacial de la función de onda electrónica al nivel de Fermi. Esta longitud puede ser finita (sistema aislante) o infinita (sistema conductor) y el estudio de las singularidades cerca de una posible transición metal-aislante son el objetivo de las teorías de localización.

El papel que juegan los estados de borde y la necesidad de tener estados electrónicos extendidos y localizados no suelen abordarse en los tratamientos convencionales del desorden electrónico. Un formalismo que permite abordar estas cuestiones es el método del “funcional generador replicado” para calcular los promedios sobre las funciones de Green. Un punto importante es la observación de una simetría continua entre los campos avanzado y retardado en el funcional generador (Wegner, 1979, 1983), muchos de los aspectos del fenómeno de localización pueden formularse como una consecuencia directa de esta simetría. Este formalismo aplicado al efecto Hall cuántico relaciona conceptos tales como localización, cuantización de la conductancia

Hall, corrientes de borde, topología y teorema de Stokes y los presenta como consecuencia de un mismo principio.

Se parte de que los propagadores pueden obtenerse como correlaciones de variables de campo gaussianas, definidas mediante el funcional generador:

$$\int D[\bar{\psi}^+] \int D[\psi^+] \int D[\bar{\psi}^-] \int D[\psi^-] e^{L'} \quad (\text{Ap. 4.2})$$

$$L' = \int dr^2 [\bar{\psi}^+(r)(E - H + i0^+) \psi^+(r) + \bar{\psi}^-(r)(E - H + i0^+) \psi^-(r)] \quad (\text{Ap. 4.3})$$

el método de la réplica permite efectuar el promedio sobre las distribuciones de impurezas<sup>1</sup>. Si introducimos  $m$  réplicas junto con la integración sobre el potencial  $V(r)$  con un peso  $P(V)$  dado, el punto de partida del calculo es:

$$Z = \int D[V] P[V] \prod_{a=1}^m \prod_{p=\pm} \int D\bar{\psi}_a^p \int D\psi_a^p e^L \quad (\text{Ap. 4.4})$$

$$L = \int d^2r \sum_{a=1}^m \sum_{p=\pm} \bar{\psi}_a^p(r) (E - H + i\eta s^p) \psi_a^p(r) \quad (\text{Ap. 4.5})$$

donde  $\eta=0^+$ ,  $s^p$  es el signo de  $p$  (el promedio se hace simultáneamente sobre cantidades avanzadas y retardadas) y el índice  $a$  recorre las  $m$  réplicas. Las funciones de Green promediadas se obtienen en el limite  $m \rightarrow 0$ . Los campos son campos fermiónicos complejos ( $\bar{\psi} = i\psi^+$ ). La introducción de los campos fermiónicos es una elección que se hace por consideraciones de simetría. Esta simetría se refiere a la invariancia de  $L$  (Ec. Ap. 4.5) bajo rotaciones  $U(2m)$  efectuadas sobre los campos<sup>2</sup>. El término  $\eta$  rompe esta simetría al nivel  $U(m) \times U(m)$ , lo que denota una transformación unitaria sobre los índices  $p=+, -$  separadamente. Esta simetría es un aspecto esencial en la aplicación de las ideas de renormalización al transporte electrónico (Wegner, 1979): la cantidad conjugada del término que rompe la simetría, es decir  $\partial Z / \partial \eta$ , es proporcional a la densidad de estados, lo que indica que el sistema presenta una ruptura espontánea de la simetría. En el lenguaje de la teoría de campos, se puede interpretar la localización de la función de onda electrónica como la aparición de un “gap de masa”, y la ausencia de excitaciones sin masa (modos de Goldstone) implica que la simetría se restaura dinámicamente.

<sup>1</sup> Introducido por Edwards y Anderson (1975) es un método para calcular promedios sobre campos aleatorios de la función de partición, se evalúa  $\langle Z^m \rangle_{prom}$  para un entero  $m$  (arbitrario) y luego se usa:

$$F = \langle \ln Z \rangle_{prom} = \lim_{m \rightarrow 0} \langle [Z^m - 1] / m \rangle_{prom}$$

<sup>2</sup> Estas rotaciones dejan invariante la forma cuadrática  $\sum_a [\bar{\psi}_a^+ \psi_a^+ + \bar{\psi}_a^- \psi_a^-]$

Si integramos la ecuación (Ap. 4.4) sobre el potencial aleatorio (lo que en el caso de un potencial de “ruido blanco” puede hacerse analíticamente) obtenemos la siguiente interacción de los campos:

$$\frac{1}{2}g \int d^2r \sum_{pp'} \sum_{ab} \bar{\psi}_a^p(r) \psi_a^p(r) \bar{\psi}_b^{p'}(r) \psi_b^{p'}(r) \quad (\text{Ap. 4.6})$$

donde  $g$  es la varianza<sup>3</sup> de la distribución del potencial de las impurezas  $V(r)$ . Esta interacción se puede desacoplar mediante una transformación gaussiana introduciendo las matrices hermíticas  $Q(r)$  (campos bosónicos), que mantienen la simetría:  $Q \rightarrow U^1 Q U$  con  $U \in U(2m)$ . Con ello podemos escribir:

$$\int D[Q] \exp \left[ -\frac{1}{2g} \int d^2r \text{Tr} Q^2 + i \int d^2r \sum \bar{\psi}_a^p Q_{ab}^{pp'} \psi_b^{p'} \right] \quad (\text{Ap. 4.7})$$

efectuando la integral que queda sobre los campos fermiónicos, queda:

$$Z = \int D[Q] \exp \left[ -\frac{1}{2g} \text{Tr} Q^2 + \text{Tr} \ln [E - H_0 + iQ + i\eta \hat{s}] \right] \quad (\text{Ap. 4.8})$$

Una vez obtenido el funcional generador, los resultados se pueden interpretar utilizando los parámetros de conductividad, que se obtienen de la teoría usando un formalismo con “términos fuente”<sup>4</sup> (Pruisken 1984, 1985a) y que dan lugar a las ecuaciones (2.73) y (2.74) de la sección 2.2.3.

<sup>3</sup> Sea la distribución  $P$ , entonces la varianza se define mediante la expresión:

$$P[V] = \exp \left[ -\frac{1}{2g} \int d^2r V^2(r) \right]$$

<sup>4</sup>  $U(x, y) = \exp \left[ ixj_x \tilde{\tau}_x + iyj_y \tilde{\tau}_y \right]$  donde  $j_\mu$  son las “fuentes” y  $\tau_\mu$  son las matrices de Pauli.

## APÉNDICE 5

### El Efecto Hall Cuántico Fraccionario:

Al poco tiempo de descubrirse el Efecto Hall Cuántico Entero (IQHE), los experimentalistas (Tsui, Störmer y Gossard, 1982) dieron otra gran sorpresa: en algunas muestras de alta calidad, a muy bajas temperaturas, el valor del número entero que determinaba los plateaus cuánticos, podía ser sustituido por una serie jerárquica de números racionales. En otras palabras: la conductividad Hall presenta plateaus para fracciones racionales de  $e^2/h$ , no sólo para valores enteros. Estos plateaus están asociados con mínimos de la componente diagonal de la magnetoconductividad. Se le llamó Efecto Hall Cuántico Fraccionario (FQHE) o anómalo.

En ambos efectos, juega un papel crucial la bidimensionalidad del sistema y la presencia del desorden y del campo magnético, cuya combinación da lugar a la aparición de los estados extendidos. Sin embargo, mientras el IQHE se asocia a la manifestación de las propiedades de transporte en un sistema bidimensional de partículas cargadas que no interactúan entre sí y están sometidas a un fuerte campo magnético perpendicular, el FQHE resulta de la interacción repulsiva de dichas partículas que da lugar a una nueva forma de estado fundamental de muchos cuerpos. Las excitaciones elementales móviles (no localizadas) deben llevar carga fraccionaria y estar separadas por un gap de energía de dicho estado fundamental, estas excitaciones se piensa que obedecen a un nuevo tipo de estadística que no es ni la de Fermi ni la de Bose-Einstein.

#### Descripción del experimento:

Tres condiciones son necesarias para poder observar el FQHE, referidas, respectivamente al campo magnético, la temperatura y la calidad de la muestra. La

primera indica que debemos estar en el régimen cuántico, en términos semiclásicos utilizando un tiempo de scattering, se expresaría como:

$$\omega_c \tau_0 \gg 1 \quad (\text{Ap.5.1})$$

Respecto a la temperatura, debe ser lo suficientemente baja como para que:

$$\Delta \geq k_B T \quad (\text{Ap.5.2})$$

donde  $\Delta$  representa un gap de energía, que separa el estado base de las excitaciones portadoras de corriente. Si  $\Delta$  proviene de una repulsión de Coulomb entre las partículas del sistema bidimensional, se puede expresar como:

$$\Delta \approx (C e^2 / 2 \kappa) \sqrt{n} \quad (\text{Ap.5.3})$$

donde  $\kappa$  es la constante dieléctrica del medio,  $n^{-1/2}$  es el espaciado medio entre las partículas y  $C$  una constante.

La tercera condición indica que la interacción entre las partículas debe dominar sobre el efecto del desorden, es decir:

$$\Delta \geq \left( (\Delta V)^2 \right)^{1/2} \approx \hbar / \tau_0 \quad (\text{Ap.5.4})$$

lo que indica que el gap de energía debe ser mayor que la fluctuación del potencial del desorden,  $\hbar / \tau_0$  es una estimación burda de dicha fluctuación basada en el principio de incertidumbre.

En la práctica, las condiciones anteriores obligan a la utilización de muestras de alta calidad, con movilidades del orden de  $10^6 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ , y densidad de portadores de unos  $2 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ , altos campos magnéticos ( $>15\text{T}$ ) y muy bajas temperaturas ( $<0.3\text{K}$ ). Estas condiciones experimentales están lejos de lo que por el momento podemos alcanzar en nuestro laboratorio, una vía de ampliación de nuestras posibilidades debería ir en esta dirección. Sin embargo, comentaremos aquí de forma resumida los resultados experimentales que aparecen en la literatura (resumidos en la figura (Ap.5.1)), esto permitirá introducir la breve discusión teórica que haremos a continuación.

1) La resistencia Hall muestra plateaus para valores cuantizados de  $h/fe^2$ , en la vecindad del campo magnético  $B = nhc/ef$  o nivel de llenado  $\nu \approx f$ , donde  $f$  es una fracción racional. Al mismo tiempo, la resistividad longitudinal se acerca a cero. Un efecto fraccionario, correspondiente a una determinada fracción  $f$ , se observa o no se observa dependiendo de la cantidad de desorden de la muestra y de la temperatura. Las

fracciones que se han observado, con denominador impar, son:  $1/3$ ,  $2/3$ ,  $4/3$ ,  $5/3$ ,  $7/3$ ,  $8/3$ ,  $1/5$ ,  $2/5$ ,  $3/5$ ,  $4/5$ ,  $7/5$ ,  $8/5$ ,  $1/7$ ,  $2/7$ ,  $3/7$ ,  $4/7$ ,  $10/7$ ,  $11/7$ ,  $1/9$ ,  $4/9$ ,  $5/9$  y  $13/9$  (Störmer *et al* 1983, Chang *et al* 1984, Rezayi *et al* 1991, Johnson *et al* 1991, Goldman *et al* 1992, Buhmann *et al* 1990 más recientemente se han observado dos fracciones de denominador par:  $1/2$  y  $3/2$  (Halperin *et al* 1993). Estas fracciones parecen ordenarse en una secuencia jerárquica como se muestra en la figura (Ap.5.2), las de denominador par aparecen como un límite de la jerarquía: una secuencia de efectos fuertes “emana” desde  $1/3$  ( $2/3$ ) hacia  $1/2$ . La cuantización es muy exacta: para  $f=1/3$  es de 3 partes en  $10^5$ , para  $2/5$ , de 2.3 partes en  $10^4$ .

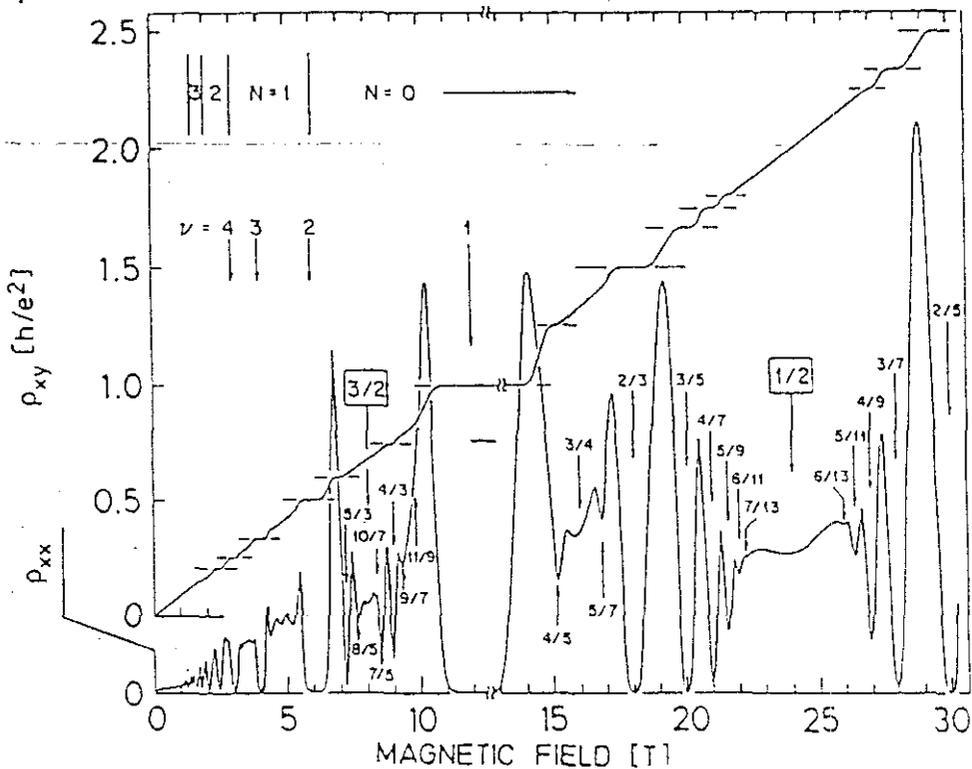


Figura Ap.5.1: El Efecto Hall Cuántico Fraccionario (Willett *et al* 1987)

2) La evolución con la temperatura del efecto para  $1/3$ ,  $2/3$ ,  $4/3$  y  $5/3$  (Tsui *et al* 1982, Ebert *et al* 1984, Kawaji *et al* 1984, Boebinger *et al* 1985) muestra un comportamiento activado para ciertos rangos de temperatura, lo que sugiere la existencia de un gap en el espectro de energía que separa el estado base de las excitaciones móviles portadoras de carga. Para  $2/5$  y  $3/5$  la situación es más complicada, pero compatible con la existencia del gap. A temperaturas extremadamente bajas, aparecen desviaciones del comportamiento activado, indicadoras de posibles mecanismos de hopping (Mott y Davies 1979, Chang 1983, Zhang *et al* 1985). Las teorías de scaling que teníamos para el IQHE han sido extendidas para incluir los efectos debidos a la interacción electrón-

electrón (Laughlin, Cohen, Kosterlitz, Levine, Libby y Pruisken 1985), en estas teorías de scaling de tres parámetros, aparece una transición orden-desorden que correspondería a la destrucción del FQHE, además predicen desplazamientos en las energías de las cuasipartículas cuando el desorden crece y se hace comparable con el gap de las excitaciones; experimentalmente hay indicios de que esto es correcto (Wei *et al* 1985a).

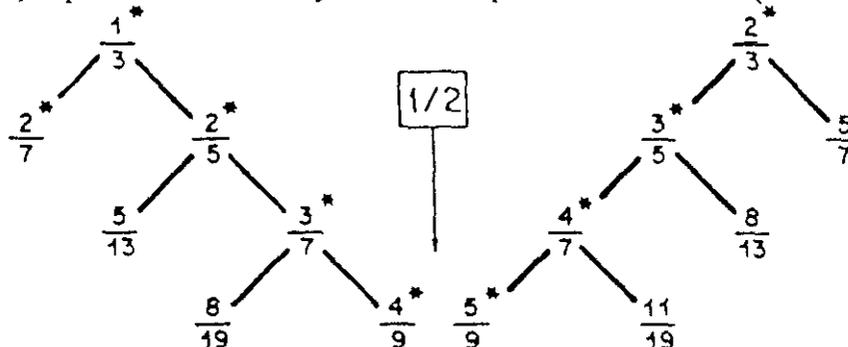


Figura Ap.5.2: Jerarquía de las fracciones del FQHE

3) El FQHE ocurre para llenados fraccionarios de los niveles de Landau, la cuantización de la resistencia Hall en  $h/fe^2$ , corresponde a la aparición de un “número cuántico fraccionario”. Si consideramos los argumentos de Laughlin sobre la invariancia gauge (sección 2.2.2) en este caso, la unidad básica de cuantización sería la carga  $e^*$  de la excitación:

$$\rho_{xy} = \frac{\phi_0}{ie^*} = \frac{h/e}{ie^*} \quad (\text{Ap.5.5})$$

donde  $i$  es un entero que corresponde al número de cargas transferidas, de aquí:

$$e^* = \frac{h/ie}{\rho_{xy}} = \frac{fe}{i} \quad (\text{Ap.5.6})$$

si consideramos el caso  $i=1$ , la carga transferida es  $fe$ , es decir, la cuasipartícula tiene una carga fraccionaria. Una cuidadosa determinación experimental de  $f$  nos indicará la carga exacta de las cuasipartículas.

4) Hay indicios de los siguientes fenómenos: la interacción electrón-electrón no es estrictamente de Coulomb en dos dimensiones, sino que es modificada por la extensión finita de la función de onda electrónica en la dirección  $z$  de las heteroestructuras (Boebinger *et al* 1985, Zhang *et al* 1989, Girvin *et al* 1985 1986 1987); el gap de energía se reduce muy rápidamente con el desorden, habría un umbral mas allá del cual el fenómeno desaparece (Chang *et al* 1983a); el comportamiento con la

temperatura del efecto  $2/3$ , sugiere la presencia de “bandas”, ensanchadas por el desorden, de cuasipartículas (electrones y huecos) que no se comportan como fermiones (Chang *et al* 1983b) ya que podría situarse más de una cuasipartícula en el mismo estado.

La teoría del fluido cuántico incompresible:

En este apartado comentaremos los rasgos principales de la teoría desarrollada por Laughlin (1983, 1984b). El efecto se explica a partir de un nuevo tipo de estado de condensación de los electrones: el fluido cuántico incompresible. Las propiedades del estado fundamental y la existencia de excitaciones que dan lugar a cuasipartículas cargadas fraccionalmente, permiten explicar el fenómeno de una forma análoga al IQHE: los plateaus del FQHE estarían debidos a la localización de éstas cuasipartículas cargadas fraccionalmente, y las reglas para combinar estas cuasipartículas para dar lugar a estados “hijos” y excitones permiten explicar las jerarquías observadas.

Se considera un hamiltoniano idealizado de la siguiente forma:

$$H = \sum_j \left( \frac{1}{2m} \left| \hbar \nabla_j - \frac{e}{c} A_j \right|^2 + V(z_j) \right) + \sum_{j < k} \frac{e^2}{|z_j - z_k|} \quad (\text{Ap.5.7})$$

donde  $z_j = x_j - iy_j$  es un número complejo que indica la posición del electrón  $j$ -ésimo,  $V(z_j)$  es el potencial generado por un fondo neutralizador dado por una densidad de carga  $\rho$ :

$$V(z) = -\rho e^2 \int \frac{dx' dy'}{|z - z'|} \quad (\text{Ap.5.8})$$

los electrones están confinados al plano  $xy$  y el campo magnético  $B$  es perpendicular a dicho plano, si el potencial vector está dado en el gauge simétrico toma la forma:

$$\vec{A} = \frac{B}{2} (y\hat{x} - x\hat{y}) \quad (\text{Ap.5.9})$$

con métodos variacionales y tras analizar previamente el caso de dos y tres electrones, Laughlin propone la siguiente forma para el estado fundamental:

$$|m\rangle = \psi_m(z_1, \dots, z_N) = \prod_{j < k} (z_j - z_k)^m \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_l^N |z_l|^2\right) \quad (\text{Ap.5.10})$$

autoestado de momento angular dado por el autovalor:

$$M = \frac{N(N-1)}{2} m^{-\dots} \quad (\text{Ap.5.11})$$

la naturaleza de estos estados se puede comprender si interpretamos el cuadrado de la función de onda como la función de distribución de probabilidad de un plasma clásico:

$$|\psi|^2 = e^{-\beta\phi} \quad (\text{Ap.5.12})$$

donde  $\beta=1/m$  es la inversa de una temperatura "ficticia", y la energía potencial clásica viene dada por:

$$\phi(z_1, \dots, z_N) = -2m^2 \sum_{j < k} \ln|z_j - z_k| + \frac{m}{2} \sum_j |z_j|^2 \quad (\text{Ap.5.13})$$

este potencial describe partículas de carga  $m$  repeliéndose una a otra logarítmicamente, que es la forma de la interacción de Coulomb en dos dimensiones, y siendo atraídas por un fondo uniforme de densidad de carga  $\rho = 1/(2\pi \ell^2)$ . El plasma tiende a ser eléctricamente neutro en todas partes, esto hace que los electrones se vean repartidos uniformemente con una densidad  $\rho_m = 1/(2\pi m \ell^2)$ . La uniformidad garantizada por esta neutralidad eléctrica es válida solo para escalas de longitud del orden de la distancia entre las partículas y mayor, para garantizarla también a escalas menores, es necesario que el plasma equivalente sea un líquido. Cálculos de Monte Carlo de plasma bidimensional de un solo componente, en función del parámetro  $\Gamma$ , que es la razón entre la energía potencial y la temperatura y que en nuestro caso podemos asimilar a  $\Gamma=2m$ , indican que para el caso  $\Gamma=2,6,10\dots$  que es el del FQHE, el plasma equivalente es incuestionablemente un líquido. Esto se confirma además representando la función radial de distribución de  $\psi_m$  del estado fundamental dada por la ecuación (Ap.5.10) y comparándolo con el cálculo Hartree-Fock para un cristal de Wigner (Fig Ap.5.3a): se obtiene un claro comportamiento de líquido, si bien quedan vestigios de la estructura de primeros y segundos vecinos.

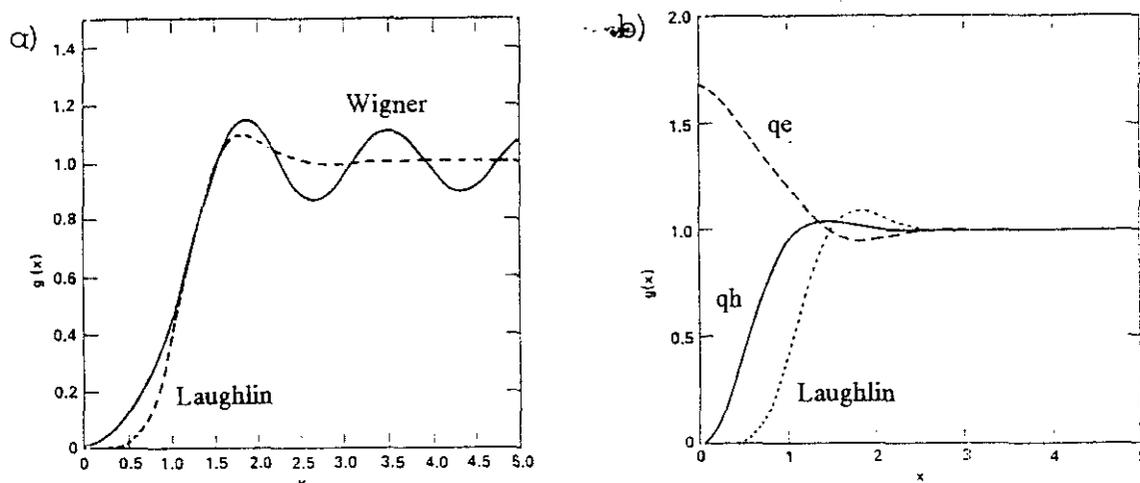


Figura Ap.5.3: Función de onda radial del estado fundamental del FQHE comparada con la del cristal de Wigner (a). Funciones de onda radiales de las cuasipartículas (b).

La existencia de excitaciones elementales cargadas fraccionalmente en este sistema proviene de las propiedades del estado fundamental arriba descrito, suponiendo que éste es no-degenerado. Imaginemos este estado fundamental atravesado por un solenoide infinitamente fino por el que adiabáticamente hacemos pasar un cuanto de flujo magnético  $\phi_0 = hc/e$ . A medida que el flujo es añadido, la función de onda evoluciona adiabáticamente de forma que siempre es un autoestado del hamiltoniano. Sin embargo, cuando un cuanto completo de flujo ha sido añadido, el hamiltoniano (via una transformación gauge) ha vuelto a su forma original, de manera que el solenoide, atravesado por  $\phi_0$ , debe ser “retirado”, dejando tras de sí un estado excitado del hamiltoniano original. Este estado excitado es una cuasipartícula. Laughlin propone que estas excitaciones pueden ser descritas aproximadamente por:

$$\psi_m^{-z_0} = S_{z_0} \psi_m = \prod_i^N (z_i - z_0) \psi_m \quad (\text{Ap.5.14})$$

$$\psi_m^{-z_0} = S_{z_0}^+ \psi_m = \prod_i^N \left( 2 \frac{\partial}{\partial z_i} - z_0^* \right) \psi_m \quad (\text{Ap.5.15})$$

para los cuasihuecos y los cuasielectrones respectivamente, ambos centrados en  $z_0$ , la función de onda  $\psi_m$  viene dada por la ecuación (2.100). Mediante cálculos numéricos se obtiene la densidad de electrones a partir de estas funciones de onda, para el caso  $m=3$  (Fig. Ap.5.3b), se ve una acumulación de un exceso de carga de  $\pm 1/3 e$  en una región de

tamaño  $l$  centrada en  $z_0$ . Para el caso de los cuasihuecos, se comprueba que corresponden a una cuasipartícula de carga  $-1/m$  electrones, escribiendo:

$$|\psi_m^{z_0}|^2 = e^{-\beta\phi'} \quad (\text{Ap.5.16})$$

con  $\beta=1/m$  y:

$$\phi'(z_1, \dots, z_N) = -2m^2 \sum_{j < k}^N \ln|z_j - z_k| + \frac{m}{2} \sum_i |z_i|^2 - 2m \sum_i \ln|z_i - z_0| \quad (\text{Ap.5.17})$$

esta ecuación describe un plasma como la ecuación (2.103), solo que en ésta aparece una partícula “fantasma” adicional, de “carga”  $l$ , localizada en  $z_0$ . Para apantallar éste “fantasma” el plasma acumula una “carga”  $-l$ , lo que equivale a una carga real de  $-1/m$  electrones. Mediante cálculo numérico, se obtienen las energías necesarias para producir un cuasihueco:  $0.026e^2/a_0$  para  $m=3$  y  $0.008e^2/a_0$  para  $m=5$ ; para los cuasielectrones se obtiene:  $0.030e^2/a_0$  para  $m=3$  y  $0.006e^2/a_0$  para  $m=5$  (Laughlin 1984).

La presencia del desorden provoca la localización de estas cuasipartículas y la aparición de un gap de movilidad, lo que explica, de manera equivalente al IQHE la aparición de plateaus, en éste caso para niveles de llenado fraccionarios. Si el potencial del desorden es demasiado fuerte y domina sobre la interacción de Coulomb, el efecto desaparece. La cuantización exacta del FQHE requiere considerar el límite de muestras macroscópicas, para asegurar la localización completa de las cuasipartículas y evitar la mezcla de diferentes niveles de Landau, pero aún en el caso de bajos campos magnéticos, cuando esta mezcla es grande, las cuasipartículas pueden existir siempre que aparezca un gap de energía de cualquier tamaño. Otra indicación del importante papel jugado por el desorden es que parece afectar fuertemente al gap de las cuasipartículas, renormalizándolo hacia abajo e incluso podría hacerlo desaparecer, destruyendo así el FQHE.

La jerarquía observada en el FQHE se puede explicar a partir de la interacción mecánico-cuántica que existe entre las diferentes cuasipartículas (del mismo o diferente signo), esto permite dar una interpretación “excitónica” de los magnetorotones, que son las excitaciones colectivas que aparecen. Las cuasipartículas del mismo signo tienen “separaciones cuantizadas” manifestación de la incompresibilidad, al igual que teníamos para los electrones del último nivel de Landau. Sus interacciones se pueden calcular a

partir de un nivel fundamental, dando lugar a un estado condensado de cuasipartículas y sus estados excitados, iterando éste proceso se puede reconstruir toda la jeraquía (Halperin 1984, 1993). Las de distinto signo no tienen su separación cuantizada, pero forman un tipo de excitón itinerante, típico del movimiento de las partículas en un fuerte campo magnético, el cuasiexcitón tiene la misma interpretación física que un excitón ordinario, excepto que la longitud magnética es  $m^{1/2}$  mayor, reflejando la carga fraccionaria de las cuasipartículas.

Haldane (1983, 1985) ha realizado una descripción del FQHE basada en un cálculo de la interacción de las partículas mediante la introducción de unos pseudopotenciales  $V_m$ , que pueden descomponerse en una parte de “corto alcance”, para  $m$  pequeño y otra de “largo alcance” para  $m$  grande. Si consideramos estos pseudopotenciales truncados, es decir, sólo la parte de corto alcance, obtenemos los estados descritos por Laughlin. A partir de aquí se puede generalizar de forma variacional introduciendo los potenciales completos. Sin embargo, el esquema jerárquico para construir los estados del fluido incompresible, descansa en el hecho de que la interacción dominante entre las cuasipartículas es la parte repulsiva de corto alcance; en este caso, y si la energía de interacción de las cuasipartículas es pequeña comparada con el gap de energía para las excitaciones colectivas del fluido incompresible original, es válido aplicar los pseudopotenciales truncados para estudiar las interacciones de este “gas” de cuasipartículas para niveles de llenado próximos a los niveles de llenado del estado incompresible original. Es decir, la construcción de la jerarquía es válida sólo si:

- 1) los pseudopotenciales de corto alcance dominan la interacción entre las cuasipartículas
- y 2) estas energías están a su vez dominadas por el gap de la excitación colectiva del fluido original.

La jerarquía se puede expresar mediante la siguiente fracción continua para el nivel de llenado del fluido incompresible:

$$\nu = \frac{1}{m + \frac{\alpha_1}{p_1 + \frac{\alpha_2}{p_2 + \frac{\alpha_3}{p_3 + \dots}}}} \quad (\text{Ap.5.18})$$

En el estudio de las excitaciones colectivas que aparecen en el FQHE hay subyacente una idea que ya ha sido empleada en otros problemas de la física, por

ejemplo, el estudio de la superfluidez del  $^4\text{He}$  hecho por Feynman: podemos expresar las energías de los modos colectivos a partir de las propiedades estáticas del estado base. Basándose en esta analogía, Girvin (1985,1986,1987) ha hecho un interesante estudio de las excitaciones colectivas del FQHE: las cuasipartículas serían equivalentes a vórtices cuantizados que “atrapan” una carga fraccionaria, además tendrían una energía finita. Aparece también un modo colectivo asociable a un “magnetofonón”, pero no sin masa como en el  $^4\text{He}$ , sino con un gap finito (“masa”) debido a la incompresibilidad del estado fundamental. Cuando este gap desaparece, nos estaríamos acercando a la aparición de un cristal de Wigner o más bien, si el desorden es grande, a un vidrio de Wigner cuya energía sería menor que la del líquido de Laughlin. La teoría indica (Laughlin 1983a, Levesque 1984, Lam y Girvin 1984) que esto sucedería a niveles de llenado bajos, entre  $1/6$  y  $1/11$ , donde el FQHE ya no podría existir y un cristal de Wigner (sin gap alguno en su espectro de energía) sería estable. Hay algunos indicios experimentales de esta cristalización (Andrei *et al* 1988, Côté *et al* 1993, Fertig *et al* 1992 1993, Jiang *et al* 1990, Kravchenko *et al* 1991, Paalanen *et al* 1992ab, Platzman *et al* 1993, Rodgers *et al* 1993a, Santos *et al* 1992 ).

Otras teorías tratan de explicar el FQHE a partir de otras funciones de onda para el estado base, citaremos sin entrar a describirlas, las de Chui (1985) que representan un pseudocristal bidimensional, Tossati (1983) a partir de un estado base cristalino, Jain (1992, 1993) que da un mecanismo para reconstruir la jerarquía de fracciones, y Kivelson (1986, 1988) que sugiere interacciones de intercambio en anillo en el cristal de Wigner.

## APÉNDICE 6

### Aproximación autoconsistente de Born (SCBA)

En la sección 3.1.2 se hace una discusión cualitativa de los efectos de las imperfecciones y el desorden sobre el gas de electrones bidimensional y en particular sobre los estados electrónicos (funciones de onda localizadas o extendidas y niveles de energía). El potencial aleatorio se introduce en el hamiltoniano como una perturbación sobre el caso libre de impurezas y desorden.

El desarrollo del esquema allí expuesto por métodos perturbativos presenta dos problemas que dificultan el cálculo:

i) la densidad de estados del sistema sin perturbar es enormemente singular (sucesiones de deltas de Dirac), esto elimina el uso de tratamientos perturbativos que no sean autoconsistentes para introducir el potencial aleatorio (reflejo del desorden).

ii) una vez que se ha incluido la autoconsistencia, los cálculos siempre se hacen hasta un orden finito de aproximación, con esto, los estados que se encuentran en las “colas” de las deltas de Dirac que se van “ancheando” en la aproximación no son tratados correctamente. Los niveles localizados necesitarían introducir el potencial desordenado hasta un orden infinito de perturbación, si no, estamos enmascarando su naturaleza localizada.

Teniendo esto en cuenta, vamos a considerar un modelo simple, que fué introducido por Ando y Uemura (1974). Se trata de un método autoconsistente aplicado a la aproximación de Born (hasta segundo orden) para el potencial desordenado. Este desorden se obtiene suponiendo una distribución aleatoria de impurezas.

Se introduce el scattering incluyendo en el hamiltoniano un potencial efectivo de las impurezas, que para una impureza determinada, situada en  $(\vec{r}_i, z_i)$  se considera de forma gaussiana (para su extensión espacial):

$$H = H_0 + H_1 \quad (\text{Ap.6.1})$$

donde  $H_0$  es el Hamiltoniano en ausencia de impurezas, y  $H_1$  es la parte añadida, dada por:

$$H_1 = \sum_i \sum_{\mu} v^{(\mu)}(\vec{r} - \vec{r}_i, z_i) \quad (\text{Ap.6.2})$$

resolviendo de manera autoconsistente (Ando 1982) mediante un desarrollo perturbativo de la siguiente forma:

$$(E - H)^{-1} = (E - H_0)^{-1} + (E - H_0)^{-1} H_1 (E - H)^{-1} + \dots$$

se obtiene:

- $\Psi_{n,X}(r)$ , autofunciones, con  $n$ =nivel de Landau y  $X$ =coordenadas  $x, y$ .
- Funciones de Green,  $G_n$ , que nos darán la densidad de estados mediante la definición:

$$D(E) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n,X} \text{Im} G_n(E + i0) \quad (\text{Ap.6.3})$$

- Autoenergía:

$$\Sigma_n(E) = \sum_{\mu} \sum_i \sum_{n', X'} \langle (nX | v^{(\mu)} | n' X') (n' X' | v^{(\mu)} | nX) \rangle G_{n'}(E) \quad (\text{Ap.6.4})$$

si despreciamos el acoplo entre distintos niveles de Landau, queda:

$$\Sigma_n(E) = \frac{1}{4} \Gamma_n^2 G_n(E) \quad (\text{Ap.6.5})$$

se expresa  $\Gamma_n$  en función del potencial efectivo  $v^{(\mu)}$  .....

$$\Gamma_n^2 = 8\pi l^2 \sum_{\mu} \int dz N_i^{(\mu)}(z) \int \frac{d\vec{r}}{2\pi l^2} \int \frac{d\vec{r}'}{2\pi l^2} v^{(\mu)}(\vec{r}, z) v^{(\mu)}(\vec{r}', z) J_{nn} \left( \frac{(\vec{r} - \vec{r}')^2}{l} \right) \quad (\text{Ap.6.6})$$

donde  $J_{nn}$  es una función asociada a los polinomios de Legendre (de las funciones de onda). Se obtiene finalmente (Ando 1982):

$$D(E) = \frac{1}{2\pi l^2} \sum_n \left[ 1 - \left( \frac{E - E_n}{\Gamma_n} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Ap.6.7})$$

que es un conjunto de semielipses centradas en los niveles de Landau que teníamos en ausencia de impurezas y con una anchura a la semialtura dada por  $\Gamma_n$ . Esta anchura

dependerá del tipo de potencial de scattering que consideremos, vamos a analizar dos casos:

a) *Potencial de corto alcance:*

El alcance del potencial viene determinado por la relación:

$$d < \frac{l}{(2n+1)^{1/2}} \quad (\text{Ap.6.8})$$

podemos escribir el potencial aproximándolo por deltas de Dirac:

$$v^{(\mu)}(\vec{r}, z) \rightarrow V^{(\mu)}(z)\delta(\vec{r}) \quad (\text{Ap.6.9})$$

y tenemos para la anchura:

$$\Gamma_n^2 = \Gamma^2 = 4 \sum_{\mu} \int dz N_i^{(\mu)}(z) \frac{|V^{(\mu)}(z)|^2}{2\pi l^2} = \frac{2}{\pi} \hbar \omega_c \frac{\hbar}{\tau_0} \quad (\text{Ap.6.10})$$

donde  $\tau_0$  es el tiempo de relajación a campo nulo, relacionamos así la anchura del nivel con su vida media. (La dependencia con el campo magnético es  $\Gamma \propto \left(\frac{B}{\mu}\right)^{1/2}$ ).

b) *Potencial de largo alcance:*

Es necesario ahora efectuar la integral sobre las coordenadas espaciales, queda para la anchura:

$$\Gamma_n^2 = 4 \sum_{\mu} \int dz N_i^{(\mu)}(z) \int d\vec{r} (v^{(\mu)}(\vec{r}, z))^2 = 4 \left\langle \left( V(\vec{r}) - \langle V(\vec{r}) \rangle \right)^2 \right\rangle \quad (\text{Ap.6.11})$$

donde  $V(r)$  es el potencial local, y el último término indica las fluctuaciones de dicho potencial local, podríamos considerar, por ejemplo:

$$v^{(\mu)}(\vec{r}, z) = \frac{V^{(\mu)}(z)}{\pi d^2} e^{-r^2/d^2} \quad \text{gaussiano}, \quad (\text{Ap.6.12})$$

$\Gamma_n$  no depende en este caso del nivel de Landau.

La resolución de los diferentes casos se ha hecho por métodos numéricos. Los resultados no permiten discernir en la naturaleza, localizada o no, de los estados. Se podría esperar que en la medida en que vamos considerando energías que se introducen en el gap, las funciones de onda se vuelvan más localizadas, es decir, que su extensión

espacial se vaya reduciendo. Si consideramos un estado extendido como aquel cuya función de onda se extiende sobre una distancia mayor que el tamaño de la muestra, entonces deberá existir una energía determinada, dentro del nivel, que marca la separación entre estados extendidos y localizados. Esto no se ha mostrado claramente mediante la resolución numérica del problema.

Otro cálculo se efectúa sumando diagramas para el potencial de largo alcance (Kubo), donde se obtiene:

$$(\Gamma_n^{xx})^2 = \langle (|\Delta V(\vec{r})|^2) \rangle \quad (\text{Ap.6.13})$$

$$(\Gamma_n^{xy})^4 = 4 \left( n + \frac{1}{2} \right) \langle (|\Delta V(\vec{r})|^2) \rangle \quad (\text{Ap.6.14})$$

obtenemos ahora una dependencia con las fluctuaciones del gradiente de la energía potencial local. Se puede dar una interpretación física de estas fluctuaciones como los "saltos" del centro de coordenadas de la órbita ciclotrón debido al scattering, existe además una relación entre el radio de la órbita y el alcance del potencial.

### OTRAS APROXIMACIONES:

Mencionaremos a continuación otras aproximaciones, diferentes de la SCBA, que han sido propuestas para la densidad de estados del gas de electrones bidimensional. Al incluirlas aquí simplemente queremos dar una idea de las muchas alternativas que se presentan a la hora de hacer los cálculos.

#### Lorentzianas:

Se han propuesto (Coleridge 1989) niveles de Landau de forma Lorentziana:

$$D(E) = \frac{1}{2\pi l^2} \sum_n \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + (E - E_n)^2} \quad (\text{Ap.6.15})$$

donde el tiempo de scattering se relaciona con la anchura mediante la siguiente expresión:

$$\tau = \frac{\hbar}{2\Gamma} \quad (\text{Ap.6.16})$$

siendo  $\Gamma$  la semianchura a la semialtura.

Gaussianas:

Gerhardts (1976), mediante un cálculo basado en integrales de camino:

$$G_n(E) = \int_0^\infty dt e^{iEt} \langle 0 | a_{n,x} K(t) a_{n,x}^\dagger | 0 \rangle \quad (\text{Ap.6.17})$$

con:

$$K(t) = \left\langle e^{-\frac{i}{\hbar} H t} \right\rangle \quad (\text{Ap.6.18})$$

desarrollado en la representación de interacción hasta términos de primer orden, obtiene:

$$K_n(t) = \langle 0 | a_{n,x} K(t) a_{n,x}^\dagger | 0 \rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} e^{-\frac{\Gamma_n^2 t^2}{8\hbar^2}} \quad (\text{Ap.6.19})$$

y queda para la densidad de estados una sucesión de gaussianas con anchura a la semialtura dada por  $\Gamma_n$ :

$$D(E) = \frac{1}{2\pi l^2} \sum_n \left( \frac{\pi}{2} \Gamma_n^2 \right)^{-1/2} e^{-2 \frac{(E-E_n)^2}{\Gamma_n^2}} \quad (\text{Ap.6.20})$$

Conductividad dinámica:

Este modelo se suele utilizar para medidas ópticas de transmisión de infrarrojos. Nosotros simplemente lo mencionaremos: los niveles de Landau son ensanchados por un potencial de scattering del tipo (Ando 1982):

$$v^{(\mu)}(\vec{r}, t) = \sum_q v_q^{(\mu)}(z) e^{iq\vec{r}} \quad (\text{Ap.6.21})$$

$$\Gamma_{CR} = \frac{\langle |\nabla V(\vec{r})|^2 \rangle}{\langle (V(\vec{r}) - \langle V(\vec{r}) \rangle)^2 \rangle^{1/2}} \quad (\text{Ap.6.22})$$

la anchura se relaciona con las fluctuaciones de un potencial local, lo que introduce una asimetría en la forma de los niveles.



## APÉNDICE 7

### Fórmula de la suma de Poisson

Partimos de una serie de funciones  $\delta$  igualmente espaciadas:

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[x - (r + \gamma)] \quad (\text{Ap.7.1})$$

donde  $\gamma$  es el espaciado,  $r$  toma valores enteros y  $x$  es la variable.

Suponemos  $\gamma = 1/2$  y hacemos la transformada de Fourier:

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[x - (r + 1/2)] = 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \cos[2\pi p(x - 1/2)] \quad (\text{Ap.7.2})$$

Ahora multiplicamos dentro del sumatorio por  $f(x)$  e integramos:

$$\int_0^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} f(x) \delta[x - (r + 1/2)] dx = \int_0^{\infty} f(x) dx + 2 \int_0^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} f(x) \cos[2\pi p(x - 1/2)] dx \quad (\text{Ap.7.3})$$

Es decir:

$$\sum_{r=0}^{\infty} f(r + 1/2) = \int_0^{\infty} f(x) dx + 2 \int_0^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} f(x) \cos[2\pi p(x - 1/2)] dx \quad (\text{Ap.7.4})$$

Además, la siguiente relación será de utilidad:

$$\frac{1}{x + i\eta} = P\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi \delta(x) \quad ; \quad \eta \rightarrow 0 \quad (\text{Ap.7.5})$$



## APÉNDICE 8

### Densidad de estados localizados

Este Apéndice es un ejemplo de como puede introducirse una densidad de estados localizados que permita mejorar el ajuste de los resultados experimentales que se obtiene cuando se consideran niveles puramente gaussianos.

Partimos de la expresión para la densidad de estados

$$\langle g(E_F) \rangle = \frac{m^*}{2\pi \hbar^2} \left\{ 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} R_{T,p} R_{s,p} R_{T,p} \cos \left[ 2\pi p \left( \frac{E_F}{\hbar\omega_C} - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \quad (\text{Ap.8.1})$$

Donde  $R_{s,p}$  es el "término de spin", dado por la ecuación (3.88) y  $R_{T,p}$  es el "término de anchura", ésta anchura de los niveles de Landau recoge la influencia del potencial aleatorio (es decir, el desorden) en la densidad de estados, y podrá presentar diversas como vimos en la sección 3.2.2. El "término de temperatura",  $R_{T,p}$ , indica los efectos de temperatura sobre la densidad de estados, será diferente según estemos considerando estados extendidos, en cuyo caso  $R_{T,p}$  viene dado por la ecuación (3.95) o localizados, cuya forma dependerá entonces del mecanismo de transporte que se suponga para los estados localizados, lo que depende rango de temperatura que estemos considerando.

Teniendo en cuenta resultados experimentales obtenidos con técnicas termodinámicas en el equilibrio que indican que los niveles de Landau tienen forma gaussiana con un fondo mas o menos plano que contiene un número significativo de estados, (Eisenstein *et al* 1985, 1986, Goodall *et al* 1985) se puede proponer la siguiente forma para la densidad de estados:

$$g(E) = g_C(E) + g_{AR}(E) \quad (\text{Ap.8.2})$$

Cada nivel de Landau está formado por tres Gaussianas, una,  $g_C(E)$ , centrada en la energía correspondiente a dicho nivel en ausencia de desorden y las otras dos  $g_{AR}(E) = g_A(E) + g_R(E)$ , una avanzada y la otra retardada respecto a dicha energía. De ésta

manera podremos introducir el término de temperatura correspondiente a los estados localizados.

$$g_c(E) = \frac{1}{2\pi l^2} \left\{ \frac{1-2\alpha}{\sqrt{2\pi}\Gamma(E)} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{(E-E_n)^2}{\Gamma^2(E)}\right) \right\} \quad (\text{Ap.8.3})$$

$$g_{AR}(E) = \frac{1}{2\pi l^2} \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}\Gamma(E)} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{(E-E_n+\Delta E)^2}{\Gamma^2(E)}\right) + \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}\Gamma(E)} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{(E-E_n-\Delta E)^2}{\Gamma^2(E)}\right) \right\} \quad (\text{Ap.8.4})$$

Usando la fórmula de Poisson (Apéndice 4) podemos escribir:

$$\frac{g_c(E)}{g_0} = (1-2\alpha) \left\{ 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} R_{\Gamma,p} R_{s,p} \cos \left[ 2\pi p \left( \frac{E}{\hbar\omega_c} - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \quad (\text{Ap.8.5})$$

$$\frac{g_{AR}(E)}{g_0} = \alpha \left\{ 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} R_{\Gamma,p} R_{s,p} \cos \left[ 2\pi p \left( \frac{E-\Delta E}{\hbar\omega_c} - \frac{1}{2} \right) \right] + 2 \sum_{p=1}^{\infty} R_{\Gamma,p} R_{s,p} \cos \left[ 2\pi p \left( \frac{E+\Delta E}{\hbar\omega_c} - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \quad (\text{Ap.8.6})$$

En ésta ecuación los dos satélites gaussianos son simétricos respecto al centro del nivel de Landau y tienen la misma área. Ahora tenemos dos nuevos parámetros libres a añadir al que teníamos en  $\Gamma(E)$ , éstos son:  $\alpha$ , el porcentaje del área de cada satélite y  $\Delta E$ , el corrimiento relativo en energía del satélite respecto al centro del nivel. En la figura (Ap.8.1) representamos el nivel de Landau como función del índice de dicho nivel. Un nivel de Landau formado por tres gaussianas puede ser visto como un nivel Gaussiano centrado en energía más un fondo plano, como parecen indicar algunos resultados experimentales.

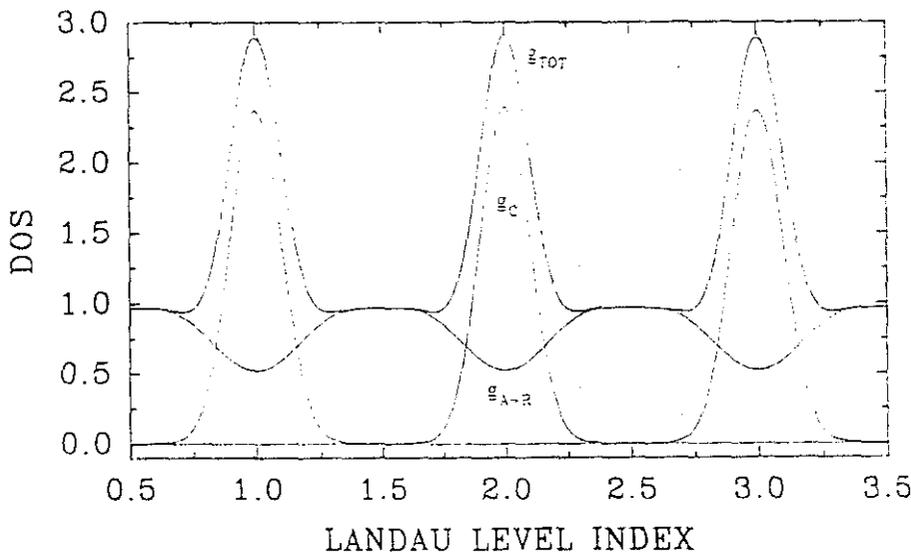


Figura Ap.8.1: Niveles de Landau contruidos con tres gaussianas

Podemos identificar la gaussiana central del nivel de Landau como la parte de los electrones extendidos y los satélites avanzados y retardados como la parte de los localizados, es decir:

$$\langle g_e(E) \rangle = \langle g_c(E) \rangle \quad (\text{Ap.8.7})$$

$$\langle g_l(E) \rangle = \langle g_{AR}(E) \rangle \quad (\text{Ap.8.8})$$

Para los electrones extendidos a temperatura finita, la probabilidad de ocupación de un estado de energía  $E$  está dado por la distribución de Fermi-Dirac y el efecto de temperatura consiste en introducir el factor de reducción  $R_{T,p}$  (Ec. 3.95) en la parte de la densidad de estados correspondiente a los electrones extendidos,  $g_e(E)$ .

Para los electrones localizados será necesario considerar un determinado mecanismo de transporte. Si tomamos, por ejemplo, la ley de Mott (1979,1990) como se indica en la sección (3.2.4) tenemos:

$$\sigma_{ij}(T) = S_T \sigma_{ij}(0) \quad (\text{Ap.8.9})$$

donde  $\sigma_{ij}(0)$  es la magnetoconductividad a temperatura cero y

$$S_T = e^{-(T_0/T)^{1/3}} \quad (\text{Ap.8.10})$$

$T_0$  es la temperatura de activación y el coeficiente exponencial  $1/3$  es válido para electrones del gas bidimensional.

Para la ocupación de la densidad de estados por los electrones localizados tenemos:

$$\langle g_l(B, T, E) \rangle = S_T g_l(E) \quad (\text{Ap.8.11})$$

y si sumamos las contribuciones de los estados localizados y extendidos obtenemos:

$$\langle g(B, T, E) \rangle = \langle g_e(B, T, E) \rangle + \langle g_l(B, T, E) \rangle \quad (\text{Ap.8.12})$$

que podemos llamar densidad de estados "total". Con ella calculamos de nuevo el tensor de magnetoconductividad, sustituyendo en las ecuaciones de  $\sigma_{xx}(B, T, E_F)$  y  $\sigma_{xy}^I(B, T, E_F)$  en función de la ocupación de la densidad de estados. Sin embargo,  $\sigma_{xy}^{II}(B, T, E_F)$  tiene en cuenta la densidad de estados para todas las energías por debajo del nivel de Fermi. Será necesario integrar la ecuación (3.83) para todas la energías por debajo del nivel de Fermi, para ello

deberemos considerar una forma determinada para los niveles de Landau (sección 3.2.2). La elección de una u otra forma dependerá de cómo el resultado del cálculo se ajuste a los resultados obtenidos experimentalmente.

Al realizar los cálculos se obtienen expresiones analíticas para las diferentes dependencias o formas de la anchura dadas en la sección (3.2.2). En este caso, además de los parámetros de la anchura de los niveles tenemos los correspondientes a los satélites avanzados y retardados,  $\alpha$  y  $\Delta E$ . Será necesario proceder a un ajuste de los datos experimentales para poder obtener dichos parámetros. Si el ajuste no es bueno habrá que reconsiderar el mecanismo de transporte entre estados localizados que estamos considerando.

## APÉNDICE 9

### TABLAS DE FICHEROS EXPERIMENTALES

#### Muestra T4:

$$I = 10\mu\text{A} (*\Rightarrow -10\mu\text{A})$$

$$L/W = 3.5$$

Tipo	Coord "x" B(T) ó $V_g$ (V)	Mag. fija B(T) ó $V_g$ (V)	Temperatura (K)	Ficheros
M*	B: 11.5→0	$V_g$ : 0	2	T4MB001
M	B: 11.5→0	$V_g$ : 0	2	T4MB002
M	B: 0→8	$V_g$ : 0	4.2	T4MB010
M	B: 8→11	$V_g$ : 0	4.2	T4MB011
M*	B: 0→11.5	$V_g$ : 0	4.2	T4MB012
M	B: 0→11.5	$V_g$ : 0	2	T4MB013
M*	B: 0→11.5	$V_g$ : 0	2	T4MB014
M	B: 0→11.5	$V_g$ : 0	2	T4MB013
M	B: 0→7	$V_g$ : 0	4.2	T4MB050
M	B: 7→11.3	$V_g$ : 0	4.2	T4MB051
M	B: 0→8	$V_g$ : 0	2	T4MB064
M	B: 8→10.5	$V_g$ : 0	2	T4MB065
M	B: 0→8	$V_g$ : 0	2	T4MB081
M	B: 10.5→7.87	$V_g$ : 0	15	T4MB092
M	B: 7.87→6.3	$V_g$ : 0	15	T4MB095
M	B: 6.3→7.87	$V_g$ : 0	10	T4MB100
M	B: 7.87→0	$V_g$ : 0	6	T4MB105
M	B: 0→8	$V_g$ : -0.3	2	T4MB078
M	B: 8→10.5	$V_g$ : -0.3	2	T4MB079
M	B: 8→0	$V_g$ : -0.3	4.2	T4MB082
M	B: 11.5→0	$V_g$ : -0.5	4.2	T4MB027
M	B: 0→11.5	$V_g$ : -0.5	2	T4MB028
M	B: 0→11.5	$V_g$ : -5	2	T4MB032
M	B: 0→8	$V_g$ : +0.1	2	T4MB075
M	B: 8→10.5	$V_g$ : +0.1	2	T4MB076
M	B: 0→11.5	$V_g$ : +0.5	4.2	T4MB026
M	B: 6.3→0	$V_g$ : +0.6	2	T4MB038
M	B: 0→11.5	$V_g$ : +1	2	T4MB030
M	B: 11.5→0	$V_g$ : +3	2	T4MB031

Tipo (cont.)	Coord "x" B(T) ó $V_g$ (V)	Mag. fija B(T) ó $V_g$ (V)	Temperatura (K)	Ficheros
H*	B: 0→11.5	$V_g$ : 0	2	T4HB001
H	B: 0→11.5	$V_g$ : 0	2	T4HB002
H	B: 11→0	$V_g$ : 0	4.2	T4HB010
H*	B: 11.5→0	$V_g$ : 0	4.2	T4HB011
H	B: 11.5→0	$V_g$ : 0	2	T4HB012
H*	B: 11.5→0	$V_g$ : 0	2	T4HB013
H	B: 0→6	$V_g$ : 0	4.2	T4HB052
H	B: 6→9	$V_g$ : 0	4.2	T4HB053
H*	B: 9→6	$V_g$ : 0	4.2	T4HB054
H	B: 7.87→10.5	$V_g$ : 0	4.2	T4HB060
H	B: 10.5→7.87	$V_g$ : 0	2	T4HB068
H	B: 7.87→6.3	$V_g$ : 0	2	T4HB071
H	B: 6.3→0	$V_g$ : 0	2	T4HB074
H	B: 0→8	$V_g$ : 0	4.2	T4HB083
H	B: 7.7→11	$V_g$ : 0	6	T4HB084
H	B: 11→5	$V_g$ : 0	6	T4HB085
H	B: 5→11	$V_g$ : 0	10	T4HB086
H	B: 11→5	$V_g$ : 0	15	T4HB087
H	B: 5→11	$V_g$ : 0	20	T4HB088
H	B: 10.5→0	$V_g$ : -0.3	4.2	T4HB063
H	B: 10.5→0	$V_g$ : -0.3	2	T4HB080
H	B: 10.5→0	$V_g$ : +0.1	2	T4HB077
H	B: 8→10.5	$V_g$ : +0.5	4.2	T4HB021
H	B: 10.5→0	$V_g$ : +0.5	4.2	T4HB023

Tipo (cont.)	Coord "x" B(T) ó $V_g$ (V)	Mag. fija B(T) ó $V_g$ (V)	Temperatura (K)	Ficheros
M	$V_g: +1 \rightarrow -2$	B: 4	4.2	T4MV021
M	$V_g: 0 \rightarrow +1.3$	B: 4	4.2	T4MV022
M*	$V_g: -1.5 \rightarrow +1$	B: 6.3	2	T4MV037
M	$V_g: -0.9 \rightarrow +0.3$	B: 6.3	2	T4MV073
M	$V_g: -0.9 \rightarrow +0.4$	B: 6.3	4.2	T4MV057
M	$V_g: -0.9 \rightarrow +0.3$	B: 6.3	10	T4MV099
M	$V_g: -0.9 \rightarrow +0.3$	B: 6.3	15	T4MV096
M*	$V_g: -1.5 \rightarrow +1.5$	B: 7.87	2	T4MV036
M	$V_g: -0.9 \rightarrow +0.3$	B: 7.87	2	T4MV070
M	$V_g: -0.9 \rightarrow +0.3$	B: 7.87	4.2	T4MV058
M	$V_g: -0.9 \rightarrow +0.3$	B: 7.87	6	T4MV104
M	$V_g: -0.9 \rightarrow +0.3$	B: 7.87	10	T4MV101
M	$V_g: -0.9 \rightarrow +0.3$	B: 7.87	15	T4MV093
M	$V_g: +0.5 \rightarrow -0.5$	B: 8	4.2	T4MV025
M*	$V_g: -1.5 \rightarrow +1.5$	B: 10.5	2	T4MV035
M	$V_g: -0.9 \rightarrow +0.3$	B: 10.5	4.2	T4MV062
M	$V_g: -0.9 \rightarrow +0.3$	B: 10.5	15	T4MV091
M	$V_g: -0.9 \rightarrow +0.3$	B: 10.5	2	T4MV066
M	$V_g: -5 \rightarrow +5$	B: 11.5	2	T4MV033
M	$V_g: -1.5 \rightarrow +1.5$	B: 11.5	2	T4MV034

Tipo (cont.)	Coord "x" B(T) ó V <sub>g</sub> (V)	Mag. fija B(T) ó V <sub>g</sub> (V)	Temperatura (K)	Ficheros
H*	V <sub>g</sub> : -1.5→+1.5	B: 6.3	2	T4HV032
H	V <sub>g</sub> : -1.2→+0.1	B: 6.3	4.2	T4HV055
H	V <sub>g</sub> : -0.9→+0.3	B: 6.3	2	T4HV072
H	V <sub>g</sub> : -0.9→+0.4	B: 6.3	4.2	T4HV056
H	V <sub>g</sub> : -0.9→+0.3	B: 6.3	10	T4HV098
H	V <sub>g</sub> : -0.9→+0.3	B: 6.3	15	T4HV097
H*	V <sub>g</sub> : -1.5→+1.5	B: 7.87	2	T4HV033
H	V <sub>g</sub> : -0.9→+0.3	B: 7.87	2	T4HV069
H	V <sub>g</sub> : -0.9→+0.3	B: 7.87	4.2	T4HV059
H	V <sub>g</sub> : -0.9→+0.3	B: 7.87	6	T4HV103
H	V <sub>g</sub> : -0.9→+0.3	B: 7.87	10	T4HV102
H	V <sub>g</sub> : -0.9→+0.3	B: 7.87	15	T4HV094
H	V <sub>g</sub> : +0.5→-0.5	B: 8	4.2	T4HV020
H	V <sub>g</sub> : -0.5→+0.5	B: 10.5	4.2	T4HV022
H*	V <sub>g</sub> : -1.5→+2	B: 10.5	2	T4HV030
H	V <sub>g</sub> : -0.9→+0.3	B: 10.5	2	T4HV067
H	V <sub>g</sub> : -0.9→+0.3	B: 10.5	4.2	T4HV061
H	V <sub>g</sub> : -0.9→+0.3	B: 10.5	15	T4HV090
H	V <sub>g</sub> : -0.9→+0.3	B: 10.5	20	T4HV089
H	V <sub>g</sub> : -0.5→+0.3	B: 11.5	2	T4HV024
H	V <sub>g</sub> : -1.5→+1.5	B: 11.5	2	T4HV027
H*	V <sub>g</sub> : -1.5→+1.5	B: 11.5	2	T4HV028
H*	V <sub>g</sub> : 0→+3	B: 11.5	2	T4HV029

**Muestra K4:**

$I = 10\mu\text{A}$

$L/W = 3.5$

Tipo	Coord "x" B(T) ó $V_g$ (V)	Mag. fija B(T) ó $V_g$ (V)	Temperatura (K)	Ficheros
M	B: 0→6	$V_g$ : 0	4.2	K4MB001
M	B: 6→10.5	$V_g$ : 0	4.2	K4MB002
M	B: 0→4	$V_g$ : 0	4.2	K4MB004
M	B: 0→4	$V_g$ : 0	4.2	K4MB004
M	B: 10.5→5	$V_g$ : 0	4.2	K4MB011
M	B: 9→5	$V_g$ : 0	2	K4MB013
M	B: 9→5	$V_g$ : 0	2	K4MB034
M	B: 9→5	$V_g$ : 0	4.2	K4MB036
M	B: 9→5	$V_g$ : 0	7	K4MB032
M	B: 9→5	$V_g$ : 0	8-5?	K4MB030
M	B: 9→5	$V_g$ : 0	10	K4MB042
M	B: 9→5	$V_g$ : 0	15	K4MB040
M	B: 9→5	$V_g$ : 0	15	K4MB038
M	B: 9→5	$V_g$ : 0	20	K4MB028
M	B: 9→5	$V_g$ : 0	30	K4MB026
M	B: 9→5	$V_g$ : 0	27-29?	K4MB023
M	B: 5→0	$V_g$ : 0	30-34?	K4MB024
M	B: 10.5→5	$V_g$ : -0.4	2	K4MB016
M	B: 11→5	$V_g$ : -0.6	2	K4MB018
M	B: 5→0	$V_g$ : +0.15	2	K4MB019
M	B: 10.5→5	$V_g$ : +0.15	2	K4MB021

Tipo(cont.)	Coord "x" B(T) ó $V_g$ (V)	Mag. fija B(T) ó $V_g$ (V)	Temperatura (K)	Ficheros
H	B: 0→9.5	$V_g$ : 0	4.2	K4HB009
H	B: 9.5→10.5	$V_g$ : 0	4.2	K4HB010
H	B: 5→9	$V_g$ : 0	2	K4HB012
H	B: 5→9	$V_g$ : 0	2	K4HB033
H	B: 5→9	$V_g$ : 0	4.2	K4HB035
H	B: 5→9	$V_g$ : 0	7	K4HB031
H	B: 5→9	$V_g$ : 0	7-4?	K4HB029
H	B: 5→9	$V_g$ : 0	10	K4HB043
H	B: 5→9	$V_g$ : 0	10-12?	K4HB041
H	B: 5→9	$V_g$ : 0	15	K4HB039
H	B: 5→9	$V_g$ : 0	14-19?	K4HB037
H	B: 5→9	$V_g$ : 0	26	K4HB027
H	B: 0→9	$V_g$ : 0	30	K4HB025
H	B: 5→9	$V_g$ : 0	24-30?	K4HB022
H	B: 5→9	$V_g$ : -0.4	2	K4HB014
H	B: 9→10.5	$V_g$ : -0.4	2	K4HB015
H	B: 0→0.5	$V_g$ : -0.4	2	K4HB050
H	B: 5→11	$V_g$ : -0.4?	2	K4HB051
H	B: 5→11	$V_g$ : -0.6	2	K4HB017
H	B: 0→10.5	$V_g$ : +0.15	2	K4HB020
M	$V_g$ : +0.2→-0.8	B: 3	4.2	K4MV008
M	$V_g$ : +0.1→-0.7	B: 4	4.2	K4MV005
M	$V_g$ : +0.2→-0.7	B: 7	2	K4MV049
M	$V_g$ : +0.2→-0.7	B: 9	2	K4MV046
M	$V_g$ : +0.2→-0.7	B: 9	4.2	K4MV045
H	$V_g$ : +0.2→-0.8	B: 3	4.2	K4HV007
H	$V_g$ : +0.2→-0.8	B: 4	4.2	K4HV006
H	$V_g$ : +0.2→-0.7	B: 7	2	K4HV048
H	$V_g$ : +0.2→-0.7	B: 9	2	K4HV047
H	$V_g$ : +0.2→-0.8	B: 9	4.2	K4HV044

**Muestra T5:**

$I = 10\mu\text{A}$  (\* $\Rightarrow 5\mu\text{A}$ , \*\* $\Rightarrow 20\mu\text{A}$ , \*\*\* $\Rightarrow 50\mu\text{A}$ )

$L/W = 3.5$

Tipo	Coord "x" B(T) ó $V_g$ (V)	Mag. fija B(T) ó $V_g$ (V)	Temperatura (K)	Ficheros
M	B: 0→8	$V_g$ : 0	2	T5MB001
M	B: 8→11.5	$V_g$ : 0	2	T5MB002
M	B: 10.8→0	$V_g$ : 0	4.2	T5MB006
M*	B: 0→5	$V_g$ : 0	4.2	T5MB100
M*	B: 5→9	$V_g$ : 0	4.2	T5MB106
M	B: 0→11.5	$V_g$ : +0.1	2	T5MB007
M**	B: 10.5→5	$V_g$ : +0.1	4.2	T5MB114
M**	B: 0→10.5	$V_g$ : +0.2	4.2	T5MB113
M**	B: 5→10.5	$V_g$ : +0.2	2	T5MB119
M**	B: 5→0	$V_g$ : +0.2	2	T5MB127
M**	B: 5→10.5	$V_g$ : +0.2	4.2	T5MB117
M**	B: 10.5→5	$V_g$ : +0.2	10	T5MB139
M**	B: 0→10.5	$V_g$ : +0.2	12-14?	T5MB128
M**	B: 10.5→5	$V_g$ : +0.2	15	T5MB137
M**	B: 10.5→5	$V_g$ : +0.2	20	T5MB135
M**	B: 5→10.5	$V_g$ : +0.2	20	T5MB136
M**	B: 5→10.5	$V_g$ : +0.2	25	T5MB130
M**	B: 10.5→5	$V_g$ : +0.2	30	T5MB133
M	B: 0→11.5	$V_g$ : +0.25	2	T5MB013
M	B: 11.5→0	$V_g$ : +0.3	2	T5MB014
H	B: 11.5→0	$V_g$ : 0	2	T5HB003
H	B: 0→11.5	$V_g$ : 0	4.2	T5HB004
H*	B: 9→0	$V_g$ : 0	4.2	T5HB109
H**	B: 5→10.5	$V_g$ : +0.1	4.2	T5HB115
H	B: 11.5→7.9	$V_g$ : +0.2	2	T5HB011
H	B: 7.9→0	$V_g$ : +0.2	2	T5HB012
H	B: 0→9	$V_g$ : +0.2	4.2	T5HB110
H**	B: 6.8→0	$V_g$ : +0.2	4.2	T5HB112
H**	B: 10.5→5	$V_g$ : +0.2	2	T5HB118
H**	B: 1→5	$V_g$ : +0.2	2	T5HB124
H**	B: 10.5→5	$V_g$ : +0.2	4.2	T5HB116
H**	B: 5→10.5	$V_g$ : +0.2	10	T5HB140
H**	B: 10.5→5	$V_g$ : +0.2	13	T5HB129
H**	B: 5→10.5	$V_g$ : +0.2	15	T5HB138
H**	B: 5→10.5	$V_g$ : +0.2	20	T5HB134
H**	B: 10.5→0	$V_g$ : +0.2	30-28?	T5HB131
H**	B: 0→10.5	$V_g$ : +0.2	30	T5HB132

Tipo (cont.)	Coord "x" B(T) ó $V_g$ (V)	Mag. fija B(T) ó $V_g$ (V)	Temperatura (K)	Ficheros
M**	$V_g: +0.5 \rightarrow -0.1$	B: 3	4.2	T5MV143
M*	$V_g: -0.6 \rightarrow +0.3$	B: 5	4.2	T5MV101
M***	$V_g: +0.3 \rightarrow -0.3$	B: 5	4.2	T5MV102
M*	$V_g: +0.4 \rightarrow -0.3$	B: 5	4.2	T5MV103
M**	$V_g: +0.5 \rightarrow -0.1$	B: 5	2	T5MV126
M*	$V_g: +0.4 \rightarrow -0.2$	B: 9	4.2	T5MV107
M	$V_g: -0.1 \rightarrow +0.5$	B: 11.5	2	T5MV008
H*	$V_g: +0.4 \rightarrow -0.3$	B: 5	4.2	T5HV104
H*	$V_g: -0.2 \rightarrow +0.4$	B: 5	4.2	T5HV105
H**	$V_g: +0.2 \rightarrow -0.2$	B: 5	2	T5HV125
H*	$V_g: +0.4 \rightarrow -0.2$	B: 9	4.2	T5HV108
H	$V_g: -0.1 \rightarrow +0.1$	B: 11.5	4.2	T5HV005
H	$V_g: -0.05 \rightarrow +0.4$	B: 11.5	2	T5HV009

**Muestra T6:**

$I = 10\mu\text{A}$

$L/W = 3.5$

Tipo	Coord "x" B(T) ó $V_g$ (V)	Mag. fija B(T) ó $V_g$ (V)	Temperatura (K)	Ficheros
M	B: 0→11.5	$V_g$ : 0	2	T6MB001
H	B: 11.5→0	$V_g$ : 0	2	T6HB002

**Muestra T7:**

$I = 10\mu\text{A}$

$L/W = 3.5$

Tipo	Coord "x" B(T) ó $V_g$ (V)	Mag. fija B(T) ó $V_g$ (V)	Temperatura (K)	Ficheros
M	B: 0→5	$V_g$ : 0	2	T7MB001
M	B: 0→11	$V_g$ : 0	2	T7MB003
M	B: 11.5→0	$V_g$ : 0	2	T7MB006
M	B: 11.5→7	$V_g$ : 0	4.2	T7MB004
M	B: 7→11.5	$V_g$ : 0	4.2	T7MB005
M	B: 0→11.5	$V_g$ : -0.35	2	T7MB009
M	B: 11.5→0	$V_g$ : +0.2	2	T7MB011
M	B: 11.5→0	$V_g$ : +0.35	2	T7MB008
M	B: 5→0	$V_g$ : +0.5	2	T7MB002
H	B: 0→11.5	$V_g$ : 0	2	T7HB007
M	$V_g$ : -0.6→+0.4	B: 11.5	2	T7MV010

**Muestra T9:**

$I = 10\mu\text{A}$

$L/W = 3.5$

Tipo	Coord "x" B(T) ó $V_g$ (V)	Mag. fija B(T) ó $V_g$ (V)	Temperatura (K)	Ficheros
M	B: 0→11.5	$V_g$ : 0	2	T9MB001
M	B: 10→0	$V_g$ : +0.1	2	T9MB005
M	B: 0→11.5	$V_g$ : +0.25	2	T9MB003
H	B: 11.5→0	$V_g$ : 0	2	T9HB002
H	$V_g$ : -1→+0.5	B: 10	2	T9HV004

**Muestra S1:** $I = 10\mu\text{A}$  $L/W = 3.5$ 

Tipo	Coord "x" B(T) ó $V_g$ (V)	Mag. fija B(T) ó $V_g$ (V)	Temperatura (K)	Ficheros
M	B: 0→6	$V_g$ : 0	4.2	S1MB001
M	B: 6→8	$V_g$ : 0	4.2	S1MB003
M	B: 10→0	$V_g$ : 0	2	S1MB005
M	B: 0→5	$V_g$ : -1.2	2	S1MB007
M	B: 10.5→5	$V_g$ : -1	2	S1MB015
M	B: 5→0	$V_g$ : -1	2	S1MB017
M	B: 0→10	$V_g$ : +0.5	2	S1MB018
M	B: 0→10.5	$V_g$ : +0.8	2	S1MB022
H	B: 8→0	$V_g$ : 0	4.2	S1HB004
H	B: 10→0	$V_g$ : 0	2	S1HB006
H	B: 10→0	$V_g$ : +0.5	2	S1HB019
H	B: 10.5→0	$V_g$ : +0.8	2	S1HB035
M	$V_g$ : +0.3→-1	B:6	4.2	S1MV002
M	$V_g$ : +0.8→-1.2	B:3	2	S1MV021
M	$V_g$ : +0.5→-1.2	B:5	2	S1MV008
M	$V_g$ : +0.5→-1.2	B:7	2	S1MV010
M	$V_g$ : +0.5→-1.2	B:9	2	S1MV011
M	$V_g$ : +0.5→-1.2	B:10.5	2	S1MV014
M	$V_g$ : +1→-1.5	B:10.5	2	S1MV023
M	$V_g$ : +1→-1.5	B:10.5	4.2	S1MV026
M	$V_g$ : +1→-1.5	B:10.5	7	S1MV027
M	$V_g$ : +1→-1.5	B:10.5	15	S1MV030
M	$V_g$ : +1→-1.5	B:10.5	25	S1MV031
M	$V_g$ : +1→-1.5	B:10.5	35	S1MV033
H	$V_g$ : +0.8→-1.2	B:3	2	S1HV020
H	$V_g$ : +0.5→-1.2	B:5	2	S1HV016
H	$V_g$ : +0.5→-1.2	B:7	2	S1HV009
H	$V_g$ : +0.5→-1.2	B:9	2	S1HV012
H	$V_g$ : +0.5→-1.2	B:10.5	2	S1HV013
H	$V_g$ : +1→-1.5	B:10.5	2	S1HV024
H	$V_g$ : +1→-1.5	B:10.5	4.2	S1HV025
H	$V_g$ : +1→-1.5	B:10.5	7	S1HV028
H	$V_g$ : +1→-1.5	B:10.5	15	S1HV029
H	$V_g$ : +1→-1.5	B:10.5	25	S1HV032
H	$V_g$ : +1→-1.5	B:10.5	35	S1HV034

**Muestra S2:**

$I = 10\mu\text{A}$

$L/W = 3.5$

Tipo	Coord "x" B(T) ó $V_g$ (V)	Mag. fija B(T) ó $V_g$ (V)	Temperatura (K)	Ficheros
M	B:0→10.5	$V_g$ : 0	4.2	S2MB001
M	B:0→10.5	$V_g$ : 0	2	S2MB003
H	B:10.5→0	$V_g$ : 0	4.2	S2HB002
H	B:10.5→0	$V_g$ : 0	2	S2HB004

**Muestra S3:**

$I = 10\mu\text{A}$

$L/W = 3.5$

Tipo	Coord "x" B(T) ó $V_g$ (V)	Mag. fija B(T) ó $V_g$ (V)	Temperatura (K)	Ficheros
M	B:0→5.4	$V_g$ : 0	4.2	S3MB001
M	B:0.5→8	$V_g$ : 0	4.2	S3MB010
M	B:8→5	$V_g$ : 0	4.2	S3MB012
M	B:5→0	$V_g$ : 0	4.2	S3MB014
M	B:0→5	$V_g$ : +0.3	2	S3MB015
M	B:5→8	$V_g$ : +0.3	2	S3MB016
M	B:8→10.5	$V_g$ : +0.3	2	S3MB017
M	B:10.5→0	$V_g$ : -0.7	2	S3MB018
H	B:5.4→0	$V_g$ : 0	4.2	S3HB002
H	B:0→5	$V_g$ : 0	4.2	S3HB003
H	B:5→8	$V_g$ : 0	4.2	S3HB005
H	B:8→10.5	$V_g$ : 0	4.2	S3HB007
H	B:0→1	$V_g$ : +0.2	2	S3HB024
H	B:1→0	$V_g$ : +0.3	2	S3HB019
H	B:0→1	$V_g$ : +0.4	2	S3HB023
H	B:1→0	$V_g$ : -0.2	2	S3HB021
H	B:0→1	$V_g$ : -0.4	2	S3HB022
H	B:1→0	$V_g$ : -0.7	2	S3HB020
M	$V_g$ : +0.4→-1	B: 5	4.2	S3MV013
M	$V_g$ : +0.4→-1	B: 8	4.2	S3MV011
M	$V_g$ : +0.4→-1	B: 10.5	4.2	S3MV009
H	$V_g$ : +0.4→-1	B: 5	4.2	S3HV004
H	$V_g$ : +0.4→-1	B: 8	4.2	S3HV006
H	$V_g$ : +0.4→-1	B: 10.5	4.2	S3HV008



## BIBLIOGRAFÍA

Haremos una relación alfabética de los artículos, que en el texto aparecen citados por el primer nombre de los autores y la fecha de publicación. Junto a la cita aparece un conjunto de letras que indican el tema del artículo, pueden ser dos o tres indicaciones de cada uno de los grupos que enumeramos a continuación:

IQHE: efecto Hall cuántico entero  
 FQHE: efecto Hall cuántico fraccionario  
 HIIIV: heteroestructuras de semiconductores  
 TG: transporte (generalidades)  
 QFT: teoría cuántica de campos  
 SdH: efecto Shubnikov-de Haas  
 RMT: magnetotúnel resonante  
 QW: cables cuánticos (1D)  
 QD: puntos cuánticos (0D)

SCL: scaling  
 TA: activación térmica  
 DOS: densidad de estados  
 SdH: efecto Shubnikov-de Haas  
 QFT: teoría cuántica de campos  
 W: cristal de Wigner  
 BD: "breakdown" del efecto Hall cuántico  
 DL: doble capa de gas de electrones bidimensional  
 MC: magnetocapacidad

T: teórico  
 X: teórico y experimental

Ejemplo: FQHE-TA-X artículo experimental sobre activación térmica en el efecto Hall cuántico fraccionario.  
 QD- -T artículo teórico sobre "puntos cuánticos"

- Abkemeier KM, Adkins CJ, Asal R and Davis EA  
1992 J Phys C, 4, 9113 TG-TA-X
- Abrahams E, Anderson PW, Licciardello DC and Ramakrishnan TV  
1979 Phys Rev Lett, 42, 673 TG-SCL-T
- Abrahams E, Anderson PW, Lee PA and Ramakrishnan TV  
1981 Phys Rev B, 24, 6783 TG-TA-T
- Adachi S  
1985 J Appl Phys, 53, R1 HIIIIV- -X
- Alphenaar BW and Williams DA  
1994 Phys Rev B, 50, 5795 IQHE-SCL-X
- Altshul VA, Frankel A and Finkman E  
1992 J Appl Phys, 71, 482 TG- -T
- Altshuler BL, Gefen Y, Imry Y and Montambaux G  
1993 Phys Rev B, 47, 10335 QD- -T
- Anderson PW  
1983 Phys Rev B, 28, 2264 FQHE- -T
- Ando T  
1974a J Phys Soc Japan, 36, 1521 TG- -T  
1974b J Phys Soc Japan, 37, 622 TG- -T  
1982a J Phys Soc Japan, 51, 3893, 3900 HIIIIV- -T  
1982b Surf Science, 113, 182 TG- -T  
1983 J Phys Soc Japan, 52, 1740 HIIIIV- -T  
1984 J Phys Soc Japan, 53, 3101, 3126 HIIIIV- -T  
1991 Phys Rev B, 44, 8017 QD- -T
- Ando T, Matsumoto Y, Uemura Y, Kobayashi M and Komatsubara KF  
1972 J Phys Soc Japan, 32, 859 TG-DOS-T
- Ando T and Uemura Y  
1974 J Phys Soc Japan, 36, 959 TG- -T
- Ando T, Matsumoto Y and Uemura Y  
1975 J Phys Soc Japan, 39, 279 TG- -T
- Ando T, Fowler AB and Stern F  
1982 Rev Mod Phys, 54, 437 TG- -X
- Aoki H and Ando T  
1982 Surf Science, 113, 27 IQHE- -T  
1985 Phys Rev Lett, 54, 831 TG-SCL-T
- Andrada EA, Weisz JK, Kishore R and Granato E  
1993 Phys Rev B, 47, 10920 QW- -T
- Andrei EY, Deville G, Glattli DC, Williams FIB, Paris E and Etienne B  
1988 Phys Rev Lett, 60, 2765 FQHE-W-X
- Armelles G, Alonso MI, Castrillo P and Dominguez SP  
1992 Appl Phys Lett, 60, 3277 HIIIIV- -X
- Artacho E and Falicov LM  
1993 Phys Rev B, 47, 1190 TG-QFT-T
- Ashcroft NW and Mermin ND  
1976 "Solid State Physics" Ed. Saunders College. Philadelphia
- Ashoori RC, Lebens JA, Bigelow NP and Silsbee RH  
1990 Phys Rev Lett, 64, 681 RMT- -X
- Aspness DE  
1976 Phys Rev B, 14, 5331 HIIIIV- -X

- Avishai Y and Kohmoto M  
1993 Phys Rev Lett, 71, 279 QD- -T
- Bachelet GB and Christensen NE  
1985 Phys Rev B, 31, 879 HIIIIV- -T
- Band YB, Baranger, HV and Avishi Y  
1992 Phys Rev B, 45, 1488 TG- -T
- Bastard G  
1981 Phys Rev B, 24, 5693 HIIIIV- -T  
1982 Phys Rev B, 25, 7584 HIIIIV- -T  
1983 Appl Phys Lett, 43, 591 HIIIIV- -T  
1988 "Wave Mechanics applied to semiconductor heterostructures"  
Les Editions de Physique, Paris HIIIIV- -T
- Beenaker CWJ  
1990 Phys Rev Lett, 64, 216 FQHE- -T  
1991 in "Quantum Coherence in Mesoscopic Systems", Ed. by B. Kramer  
Plenum Press, Nueva York FQHE- -T
- Berthold G, Smoliner J, Roskopf V, Gornik E, Böhm G, and Weimann G  
1993 Phys Rev B, 47, 10383 HIIIIV- -X
- Beton PH, Alves ES, Main PC, Eaves L, Dellow MW, Hemini M, Hughes OH,  
Beaumont SP and Wilkinson CDW  
1990 Phys Rev B, 42, 9229 SdH- -X
- Bird JP, Grassie ADC, Lakrimi M, Hutchings KM, Meeson P, Harris JJ and Foxon CT  
1992 Surf Science, 267, 277 QW-SdH-X
- Biskupski G  
1992 Phil Mag B, 65, 723 TG-TA-T
- Blanter YM and Livanov DV  
1994a Phys Rev B, 49, 2955 IQHE- -T
- Blanter YM, Livanov DV and Rodin MO  
1994b J Phys C, 6, 1739 IQHE- -T
- Bockelmann V and Bastard G  
1992 Phys Rev B, 45, 1688 QW- -T
- Boebinger GS, Chang AM, Stormer HL and Tsui  
1985 Phys Rev Lett, 55, 1606 FQHE-TA-X
- Boebinger GS, Passner A, Pfeiffer LN and West KW  
1991 Phys Rev B, 43, 12673 HIIIIV-SdH-X
- Bonesteed NE  
1993 Phys Rev B, 48, 11484 QFT-DL-T
- Brey L, Platero G and Tejedor C  
1988 Phys Rev B, 38, 10507 RMT- -T
- Briggs A, Guldner Y, Vieren JP, Voos M, Hirtz SP and Razeghi M  
1983 Phys Rev B, 27, 6549 IQHE-TA-X
- Brown CV, Geim AK, Foster TJ, Langerak CJGM and Main PC  
1993 Phys Rev B, 47, 10935 QW- -X
- Bruus H, Flensberg K and Smith H  
1993 Phys Rev B, 48, 11144 QW- -T
- Buhmann H, Joss W, von Klitzing K, Kukushkin K, Martínez G, Plaut AS,  
Ploog K and Timofeev VB  
1990 Phys Rev Lett, 65, 1056 FQHE- -X

- Büttiker M  
 1988 Phys Rev B, 38, 9375 IQHE- -T  
 1989 Phys Rev B, 40, 3409 TG- -T
- Büttiker M; Prêtre A and Thomas H  
 1993 Phys Rev Lett, 70, 4114 TG- -T
- Butov LV, Kulakovskii VD, Andersson TG and Chen ZG  
 1990 Phys Rev B, 42, 9472 HIIIV- -X
- Cabo A and Chaichian M  
 1991 Phys Rev B, 44, 10768 QFT- -T
- Cage ME, Dziula RF, Field BF, Williams ER, Girvin SM, Gossard AC,  
 Tsui DC and Wagner RJ  
 1983 Phys Rev Lett, 51, 1374 IQHE-BD-X
- Castrillo P, Armeller G, Ruiz A and Briones F  
 1991 Jap J Applied Phys, 30, L1784 HIIIV- -X
- Chang AM, Paalanen MA, Tsui DC, Störmer HL and Hwang JCM  
 1983a Phys Rev B, 28, 6133 FQHE-TA-X  
 1983b Surf Science, 142, 173 FQHE-TA-X
- Chang LL, Mendez E, Kawai NJ and Esaki L  
 1982 Surf Science, 113, 306 SdH- -X
- Chang LL and Esaki L  
 1992 Physics Today, 36 HIIIV- -X
- Chen Y, Nicholas RJ, Sundaram GM, Heard PJ, Prewett PD, Frost JEF,  
 Jones GAC, Peacock DC and Ritchie DA  
 1993 Phys Rev B, 47, 7354 QD- -X
- Chico L  
 1993 "El gas electrónico confinado en sistemas semiconductores cuánticos"  
 Tesis doctoral (Dir. F. García-Moliner), UCM, Madrid
- Chico L, Jaskótski W, Pérez-Alvarez R and García-Moliner F  
 1993 J Phys C, 5, 9069 HIIIV- -T
- Chudinov SM, Rodicher DY, Mancini G, Stizza S, Davdi I and Ciric I  
 1991 Solid St Comm, 77, 961 IQHE- -X
- Chui ST  
 1985 Phys Rev B, 32, 1436 IQHE- -T
- Cooleridge PT  
 1990 Semicond Sc Technol, 5, 961 SdH- -X  
 1991 Phys Rev B, 44, 3793 SdH- -X
- Cooleridge PT, Stoner R and Fletcher R  
 1989 Phys Rev B, 39, 1120 SdH- -X
- Cooper NR and Chalker JT  
 1993 Phys Rev B, 48, 4530 IQHE- -T
- Costi TA and Hewson AL  
 1993 J Phys C, 5, L631 TG- -T
- Côté R and Fertig HA  
 1993 Phys Rev B, 48, 10955 FQHE-W-T
- Cuevas E and Ortuño M  
 1992 Phil Mag B, 65, 681 TG- -T
- Dai P, Zhang Y and Sarachik MP

- 1992 Phys Rev Lett, 69, 1804 TG-TA-T  
 Das Sarma S and Stern F
- 1985 Phys Rev B, 32, 8442 TG- -T  
 Davies AG, Frost JEF, Ritchie DA, Peacock DC, Newbury R, Linfield EH,  
 Pepper M and Jones GAC
- 1991 J Cryst Growth, 111, 318 HIIIIV- -X  
 Degani MH and Scalvi LVA
- 1993 Solid St Comm, 86, 301 RMT- -T  
 Demprey J, Gelfand BY and Halperin BI
- 1993 Phys Rev Lett, 70, 3639 IQHE- -T  
 Dev G and Jain JK
- 1992 Phys Rev Lett, 69, 2843 FQHE- -T  
 Dietzel F, Dietsche W and Ploog K
- 1993 Phys Rev B, 48, 4713 IQHE- -X  
 Dignam MM, Ashoori RC, Stormer HL, Pfeiffer LN, Baldwin KW and West KW
- 1994 Phys Rev B, 49, 2269 QW- -X  
 Drexler H, Leonard D, Hansen W, Kotthaus JP and Petroff PM
- 1994 Phys Rev Lett, 73, 2252 QD-MC-X  
 Dynes RC
- 1982 Surf Science, 113, 510 TG- -X
- Eaves L
- 1990 in "Electronic Properties of Multilayers and Low-dimensional  
 Semiconductor Heterostructures"  
 Plenum Press, Nueva York RMT- -X
- Edwards SF and Anderson PW
- 1975 J Phys C, 5, 965 QFT- -T  
 Ebert G, von Klitzing K, Ploog K and Weimann G
- 1983a J Phys C, 16, 5441 IQHE-BD-X  
 Efert G, von Klitzing K, Probst C, Schubert E, Ploog K and Weimann G
- 1983b Solid St Comm, 45, 625 IQHE-TA-X  
 Efros AL
- 1988a Solid St Comm, 65, 1281 IQHE-DOS-T  
 1988b Solid St Comm, 67, 1019 IQHE-DOS-T  
 1989 Solid St Comm, 70, 253 IQHE-DOS-T  
 Efros AL and Shklovskii BI
- 1975 J Phys C, 8, 1975, L49 TG-TA-T  
 Efros AL, Pikus FG and Samsonidze GG
- 1990 Phys Rev B, 41, 8295 HIIIIV- -T  
 Einevoll GT and Lütken CA
- 1993 Phys Rev B, 48, 11492 IQHE- -T  
 Eisenstein JP
- 1985 Appl Phys Lett, 46, 695 IQHE-DOS-X  
 Eisenstein JP, Störmer HL, Narayamurti V, Gossard AC and Wiegmann W
- 1984 Phys Rev Lett, 53, 2579 SdH- -X  
 Eisenstein JP, Störmer HL, Narayamurti V, Cho AY and Gossard AC and Tu CW
- 1985 Phys Rev Lett, 55, 875 IQHE-DOS-X  
 Eisenstein JP, Störmer HL, Narayamurti V, Cho AY and Gossard AC
- 1986 Surf Science, 170, 271 IQHE-DOS-X

- Eisenstein JP, Willet RL, Sörmer HL, Pfeiffer LN and West KW  
1990 Surf Science, 229, 31 FQHE-TA-X
- Eisenstein JP, Boebinger GS, Pfeiffer LN, West KW and He S  
1992a Phys Rev Lett, 68, 1383 FQHE- -X
- Eisenstein JP, Pfeiffer LN and West KW  
1992b Phys Rev Lett, 69, 3804 RMT- -X
- Engel LW, Shahar D, Kurdak Ç and Tsui DC  
1993 Phys Rev Lett, 71, 2638 IQHE-SCL-X
- Engelbrecht JR, Randeria M and Zhang L  
1992a Phys Rev B, 45, 10135 TG- QFT- T
- Engelbrecht JR and Randeria M  
1992b Phys Rev B, 45, 12419 TG- QFT- T
- Englert Th and von Klitzing K  
1978 Surf Science, 73, 70 TG- -X
- Ephron D, Xu Y and Beasley MR  
1992 Phys Rev Lett, 69, 3112 RMT- -X
- Esaki L  
1990 in "Electronic Properties of Multilayers and Low-dimensional  
Semiconductor Heterostructures"  
Plenum Press, Nueva York HIIIIV- -X
- Eto M  
1993 Phys Rev B, 48, 4933 TG- -T
- Ezawa ZF and Iwakazi  
1993 Phys Rev Lett, 70, 3119 QFT-DL-T
- Fang FF and Howard WE  
1966 Phys Rev Lett, 16, 797 TG- -X
- Fang FF and Stiles PJ  
1983a Phys Rev B, 27, 6487 IQHE- -X  
1983b Phys Rev B, 28, 6992 IQHE-DOS-X  
1984 Phys Rev B, 29, 3749 IQHE- -X
- Fang FF, Smith III TP and Wright SL  
1988 Surf Science, 196, 310 HIIIIV-SdH-X
- Fernández JM, Chen J and Wieder HH  
1992 J Vac Sci Technol B, 10, 1824 HIIIIV-SdH-X
- Fernández de Ávila S  
1995 "Transporte y mecanismos de dispersión en heteroestructuras  
HEMT pseudomórficas"  
Tesis doctoral. (Dir. F. González) UPM. Madrid HIIIIV- -X
- Fernández de Ávila S, Sánchez Rojas JL Hiesinger P, González-Sanz F,  
Calleja E, Köhler K, Jantz W and Muñoz E  
1993 Inst Phys Conf Ser 136, Ch6 (GaAs Symp, Freiburg) HIIIIV- -X
- Ferrari R  
1990 Phys Rev B, 42, 4598 TG-QFT-T
- Ferrari R and Triani MI  
1993 Phys Rev B, 47, 9577 TG-QFT-T
- Fertig HA, Côté R, MacDonald AH and Das Sarma S  
1992 Phys Rev Lett, 69, 816 FQHE-W-T

- Fertig HA and Das Sarma S  
1993 Phys Rev B, 47, 10484 FQHE-W-T
- Fletcher R, Zaremba E, D'Iorio M, Foxon CT and Harris JJ  
1988 Phys Rev B, 38, 7866 SdH- -X  
1990a Phys Rev B, 41, 10694 HIIIIV- -X  
1990b Surf Science, 229, 80 SdH- -X
- Fowler AB, Fang FF, Howard WE and Stiles PJ  
1966 Phys Rev Lett, 16, 901 SdH- -X
- Frölich J and Studer UM  
1993 Rev Mod Phys, 65, 3 QFT- -T
- Frost JEF, Simmons MV, Pepper M, Churchill AC, Ritchie DA and Jones GAC  
1993 J Phys C, 5, L559 QD- -X
- Gefen Y and Thouless DJ  
1993 Phys Rev B, 47, 10423 FQHE- -X
- Geim AK, Taboryski R, Kristensen A, Dubonos SV and Lindelof PE  
1992 Phys Rev B, 46, 4324 SdH- -X
- Gelfand BY and Halperin BI  
1994 Phys Rev B, 49, 1862 FQHE- -T
- Gerhardtts RR  
1976 Surf Science, 58, 227 SdH- -T
- Gerhardtts RR, Weiss D and von Klitzing K  
1989 Phys Rev Lett, 62, 1173 SdH- -X
- Gilpérez JM  
1994 "Propiedades ópticas en pozos cuánticos pseudomórficos con modulación de dopado"  
Tesis doctoral (Dir. E. Muñoz). UAM. Madrid HIIIIV- -X
- Giordano N  
1980 Phys Rev B, 22, 5635 TG- -X
- Girvin SM, MacDonald AH and Platzman PM  
1985 Phys Rev Lett, 54, 581 QHE- -T  
1986 Phys Rev B, 33, 2481 FQHE- -T
- Girvin SM and MacDonald AH  
1987 Phys Rev Lett, 58, 1252 FQHE- -T
- Goldman VJ, Shayegan M and Tsui DC  
1988 Phys Rev Lett, 61, 881 FQHE- -X
- Goldman VJ, Santos M, Shayegan M and Cunningham JE  
1990 Phys Rev Lett, 65, 2189 FQHE-W-X
- Goldman VJ, Wang JK, Su B, and Shayegan M  
1993a Phys Rev Lett, 70, 647 FQHE- -X
- Goldman VJ, Su B and Wang JK  
1993b Phys Rev B, 47, 10548 FQHE-TA-X
- Goodall RK, Higgins RJ and Harrang JP  
1985 Phys Rev B, 31, 6597 IQHE-MC-X
- Gornik E, Lassnig R, Strasser G, Störmer HL, Gossard AL and Wiegmann W  
1985 Phys Rev Lett, 54, 1820 IQHE-DOS-X
- Gornik E, Lassnig R, Strasser G, Störmer HL and Gossard AL

- 1986 Surf Science, 170, 277 IQHE-DOS-X  
 Götze W  
 1993 Solid St Comm, 88, 1029 TG- -T  
 Grahn HT, Schneider H and von Klitzing K  
 1990 Phys Rev B, 41, 2890 HIIIIV- -X  
 Grahn HT, von Klitzing K, Ploog K and Döhler GH  
 1991 Phys Rev B, 43, 12094 HIIIIV- -X  
 Greene SK, Pepper M, Peacock DC, Ritchie DA, Law VJ, Newbury R, Frost JEF,  
 Jones GAC, Brown RJ, Ahmed H and Hasko D  
 1991 J Phys C, 3, 1003 HIIIIV- -X  
 Grest GS and Lee PA  
 1983 Phys Rev Lett, 50, 693 TG-SCL-T
- Haavasoja T, Störmer HL, Bishop DJ, Narayamurti V, Gossard AC and Weigmann W  
 1984 Surf Science, 142, 294 IQHE-DOS-X
- Haldane FDM  
 1983 Phys Rev Lett, 51, 605 FQHE- -T  
 Haldane FDM and Rezayi EH  
 1985 Phys Rev Lett, 54, 237 FQHE- -T  
 Halperin BI  
 1982 Phys Rev B, 25, 2185 IQHE- -T  
 1984 Phys Rev Lett, 52, 1583 FQHE- -T  
 Halperin BI, Lee PA and Read N  
 1993 Phys Rev B, 47, 7312 FQHE- -T  
 Hamilton EM  
 1972 Phil Mag B, , 1043 TG- -T
- Haug RJ  
 1993 Semicond Sci Technol, 8, 131 IQHE- -X  
 Haug RJ, von Klitzing K and Ploog K  
 1987a Pphys Rev B, 35, 5933 IQHE-SdH-X  
 Haug RJ, Gerhardt RR, von Klitzing K and Ploog K  
 1987b Phys Rev Lett, 59, 1349 IQHE- -X  
 Haug RJ, Kucera J, Streda P and von Klitzing K  
 1989a Phys Rev B, 39, 10892 IQHE- -X  
 Haug RJ and von Klitzing K  
 1989b Europhys Lett, 10, 489 IQHE- -X
- Hayden RY, Maude DK, Eaves L, Valladares EC, Henini M, Sheard FW,  
 Hughes OH, Portal JC and Cury LA  
 1991 Phys Rev Lett, 66, 1749 RMT- -X  
 Hayden RY, Henini M, Eaves L, Maude DK, Portal JC, Cury LA and Hill G  
 1992a Semicond Sci Technol, 7, 1080 RMT- -X  
 Hayden RY, Takamasu T, Maude DK, Valladares EC, Eaves L, Ekenberg U,  
 Miura N, Henini M, Portal JC, Hill G and Pate MA  
 1992b Semicond Sci Technol, 7, B413 RMT- -X
- He S, Platzman PM and Halperin BI  
 1993 Phys Rev Lett, 71, 777 TG- -T
- Heionen O and Taylor PL  
 1983 Phys Rev B, 28, 6119 IQHE- -T  
 1985 Phys Rev B, 32, 633 IQHE- -T

- Helm M, Peeters FM, England P; Hayes JR and Colas E  
1989 Phys Rev B, 39, 3427 RMT- -X
- Henning JCM, Kessner YARR, Koenraad PM, Leys MR, van der Vleuten W  
Walter JM and Frens AM  
1991 Semicond Sci Technol, 6, 1079 HIIIV- -X
- Herbut JF and Tesanovic Z  
1993 Phys Rev Lett, 71, 4234 FQHE- -T
- Hoffman CA, Meyer JR, Bartoli FJ and Wang WI  
1993 Phys Rev B, 48, 1959 SdH- -X
- Hoffstadter D  
1976 Phys Rev B, 14, 2239 QFT- -T
- Hu BYK and Das Sarma S  
1992 Phys Rev Lett, 68, 1750 QW- -X
- Huang DH and Gumbs G  
1993a Phys Rev B, 48, 2835 IQHE-BD-T
- Huang DH, Gumbs G and MacDonald AH  
1993b Phys Rev B, 48, 2843 QD- -T
- Huckestein B  
1994 Phys Rev Lett, 72, 1080 IQHE-SCL-T
- Huckestein B and Kramer B  
1990 Phys Rev Lett, 64, 1437 IQHE-SCL-T
- Huckestein B and Schweitzer L  
1994 Phys Rev Lett, 72, 713 IQHE-SCL-T
- Hughes RJF, Nicholls JT, Frost JEF, Linfield EH, Pepper M, Ford CJB,  
Ritchie DA, Jones JAC, Kogan E and Kavhe M  
1994 J Phys C, 6, 4763 IQHE-SCL-X
- Huong MP, Chang YL and Wang WI  
1988 J Appl Phys, 64, 4609 HIIIV- -T
- Hwang SW, Wei HP, Engel LW, Tsui DC and Pruisken AMM  
1993 Phys Rev B, 48, 11416 IQHE-SCL-X
- Isihara A and Smrcka J  
1986 J Phys C, 19, 6777 SdH-DOS-T
- Ismail K, Chu W, Yen A, Antoniadis DA and Smith HI  
1989 Appl Phys Lett, 54, 460 RMT- -X
- Jain JK  
1992 Adv in Phys, 41, 105 FQHE- -T
- Jain JK and Goldman VJ  
1992 Phys Rev B, 45, 1255 FQHE- -T
- Jain JK, Kivelson SA and Thouless DJ  
1993 Phys Rev Lett, 71, 3003 FQHE- -T
- Jiang HW, Willet RL, Störmer HL, Tsui DC, Pfeiffer LW and West KW  
1990 Phys Rev Lett, 65, 633 FQHE-W-X
- Jiang HW, Störmer HL, Tsui DC, Pfeiffer LN and West KW  
1991 Phys Rev B, 44, 8107 FQHE-TA-X
- Jiang HW, Johnson CE, Wang KL and Hannahs ST  
1993 Phys Rev Lett, 71, 1439 IQHE-TA-X

- Johnson BL and Kirczenow G  
1993 Phys Rev B, 47, 10563 QD- -X
- Johnson MD and MacDonald AH  
1991 Phys Rev Lett, 67, 2060 FQHE- -T
- Joynt R and Prange RE  
1984 Phys Rev B, 29, 3303 IQHE- -T
- Kalmeyer V, Wei D, Arovas DP and Zhang S  
1993 Phys Rev B, 48, 11095 QFT- -T
- Kane CL, Fisher MPA  
1994 Phys Rev Lett, 72, 724 FQHE- -T
- Kawaji S  
1978 Surf Science, 73, 46 TG- -X
- Kawaji S and Wakabayashi J  
1976 Surf Science, 58, 238 TG- -X
- Kawaji S, Wakabayashi J, Namiki N and Kusuda K  
1978 Surf Science, 73, 121 TG- -X
- Kearney MJ  
1992 Semicond Sc Technol, 7, 804 TG- -T
- Kim TW, Lee JI, Kang KW, Lee KS, Yoo KH and Ihm G  
1992 J Phys C, 4, 5763 SdH- -X
- Kim TW, Yoo KH, Lee KS, Kim Y, Min SK, Yom SS and Lee SJ  
1994 J Appl Phys, 36, 2863 HIIIV- -X
- Kivelson S, Kallin C, Arovas DP and Schrieffer JR  
1986 Phys Rev Lett, 56, 873 FQHE- -T  
1988 Phys Rev B, 37, 9085 FQHE- -T
- Klinert P, Brikin VV and Schlegel H  
1993 Z Phys B, 91, 475 TG-DOS-T
- Koch S, Haug RJ, von Klitzing K and Ploog K  
1991a Phys Rev B, 43, 6828 IQHE-SCL-X  
1991b Phys Rev Lett, 67, 883 IQHE-SCL-X  
1992 Phys Rev B, 46, 1596 IQHE-SCL-X
- Koenraad PM, Barsany I, Perenboom JAAJ and Walter JM  
1992 Nato-arw on Semicond Interfaces HIIIV- -X
- Kohn W and Luttinger JM  
1957 Phys Rev, 108, 590 TG- -T
- Komijama S, Takamasu T, Hiyamizu S and Sasa S  
1985 Solid St Comm, 54, 479 IQHE-BD-X
- Komijama S, Hirai H, Ohsawa M, Matsuda Y, Sasa S and Fujui T  
1992 Phys Rev B, 45, 11085 IQHE-TA-T
- Kopietz P  
1993 Phys Rev Lett, 70, 3123 TG- -T
- Kramer b, Kabawata A, Schreiber M  
1992 Phil Mag B, 65, 595 TG-SCL-T
- Kravchenko SV, Perenboom JAAJ and Pudalov VM  
1991 Phys Rev B, 44, 13513 FQHE-W-X
- Kuchar F, Bauer G, Weimann G and Burkhard H  
1984 Surf Science, 142, 196 IQHE-BD-X
- Kukushkin IV, Fal'ko VI, Haug RJ, von Klitzing K, Eberl K and Tötenmeyer K

- 1994 Phys Rev Lett, 72, 3594 HIIIIV-W-X
- Landwehr G  
1990 in "Electronic Properties of Multilayers and Low-dimensional Semiconductor Heterostructures", Plenum Press, Nueva York TG- -X
- Laughlin RB  
1981 Phys Rev B, 23, 5632 IQHE- -T  
1982 Surf Science, 113, 22 IQHE- -T  
1983 Phys Rev Lett, 50, 1395 FQHE- -T  
1984a Phys Rev Lett, 52, 2304 IQHE-SCL-T  
1984b Surf Science, 142, 163 FQHE- -T
- Laughlin RB, Cohen ML, Kosterlitz JM, Levine H, Libby SB and Pruisken AMM  
1985 Phys Rev B, 32, 1311 FQHE-SCL-T
- Lee DH, Baskaran G and Kivelson S  
1987 Phys Rev Lett, 59, 2467 FQHE- -T
- Lee DH and Zhang SC  
1991a Phys Rev Lett, 66, 1220 FQHE- -T
- Lee DH, Kivelson S and Zhang SC  
1991b Phys Rev Lett, 67, 3302 QFT- -T  
1992 Phys Rev Lett, 68, 2386 QFT- -T
- Lee DH, Wang Z and Kivelson S  
1993 Phys Rev Lett, 70, 4130 IQHE-SCL-T
- Lee DKK, Chalker JT and Ko DYK  
1994 Phys Rev B, 50, 5272 IQHE-SCL-T
- Levine H, Libby SB and Pruisken AMM  
1983 Phys Rev Lett, 51, 1915 QFT- -T  
1984 Nucl Phys B, 240, 30, 49, 71 QFT- -T
- Li ZQ and Pötz W  
1991 Phys Rev B, 43, 12670 HIIIIV-DOS-T
- Lin SY, Zaslavsky A, Hirakawa K, Tsui DC and Klem JF  
1992 Appl Phys Lett, 60, 601 RMT- -X
- Liu CT, Lin SY, Tsui DC, Lee H and Ackley D  
1988 Appl Phys Lett, 53, 2510 HIIIIV- -X
- Liu D and Das Sarma S  
1994 Phys Rev B, 49, 2677 IQHE-SCL-T
- Lo I, Mitchel WC, Perrin RE, Messham RL and Yen MY  
1991 Phys Rev B, 43, 11787 SdH- -X
- López A and Fradkin E  
1992 Phys Rev Lett, 69, 2126 FQHE- -T
- Lütken CA and Ross GG  
1992 Phys Rev B, 45, 11837 FQHE-SCL-T  
1993 Phys Rev B, 48, 2500 QFT-SCL-T
- Luttinger JM and Kohn W  
1958 Phys Rev, 109, 1892 TG- -T
- MacDonald AH  
1990 Phys Rev Lett, 64, 220 FQHE- -T  
1991 in "Quantum Coherence and Mesoscopic Systems", 195 Ed. B. Kramer, Plenum Press, Nueva York IQHE- -T

- Malozovsky YM, Bose SM and Lange P  
1993 Phys Rev B, 47, 15242 TG- -T
- Mani RG, von Klitzing and Ploog K  
1993a Phys Rev B, 48, 4571 QW- -X
- Mani RG and von Klitzing K  
1993b Z Phys B, 92, 335 IQHE- -X
- Mantica G and Mantica S  
1992 Phys Rev B, 46, 7037 TG- -T
- Maslov DL and Loss D  
1993 Phys Rev Lett, 71, 4222 IQHE- -X
- Mast DB, Gua CJ, Stan MA, Mehrotra R, Ruan YZ and Dahm AJ  
1984 Surf Science, 142, 100 TG-W-X
- Mendez EE, Heiblum M, Chang LL and Esaki L  
1983 Phys Rev B, 28, 4886 FQHE- -X
- Mendez EE, Esaki L and Wang WI  
1986 Phys Rev B, 33, 2893 RMT- -X
- Mendez EE, Agulló F and Hong JM  
1988 Phys Rev Lett, 60, 2426 HIIIV- -X
- Meyer JR, Hoffman CA, Barbli FJ, Arnold DA, Sivananthan S and Faurie JP  
1993 Semicond Sci Technol, 8, 805 TG- -T
- Mieck B  
1993 Z Phys B, 90, 427 TG- -T
- Moon K, Yi H, Kane CL, Girvin SM and Fisher MPA  
1993 Phys Rev Lett, 71, 4381 RMT- -T
- Moore KJ, Duggan G, Jaarsma GT, Fewster PF, Woodbridge K and Nicholas RJ  
1991 Phys Rev B, 43, 12393 HIIIV- -X
- Morawicz NG, Barnham KWJ, van Houten H, Buijk OJA, Maberone MAA  
and Foxon CT  
1992 Phys Rev Lett, 68, 3765 QD- -X
- Mori S and Ando T  
1980 J Phys Soc Japan, 48, 865 TG- -T
- Mosser V, Weiss D, von Klitzing K, Ploog K and Wiegmann G  
1986 Solid St Comm, 58, 5 HIIIV-DOS-X
- Mott NF  
1979 "Electronic processes in non-crystalline materials"  
Clarendon Press. Oxford  
1990 "Metal-insulator transition"  
Taylor & Francis
- Müller W, Grahn HT, von Klitzing K and Ploog K  
1993 Phys Rev B, 48, 11176 RMT- -X
- Murphy SQ, Eisenstein JP, Boebinger GS, Pfeiffer LN and West KW  
1994 Phys Rev Lett, 72, 728 IQHE-DL-X
- Nachtwei G, Breitlow C, Jaeger A, Breitlow-Hertzfeld J  
1992 J Phys C, 4, 4003 IQHE- -X
- Nagaoka Y  
1985 Prog Th Phys (suppl), 84 QFT- -T
- Nicholas RJ, Haug RJ, von Klitzing K and Wiegmann G  
1988 Phys Rev B, 37, 1294 SdH- -X

- Niu Q, Thouless DJ  
 1984a J Phys A, 17, 2453 QFT- -T  
 1984b Phys Rev B, 30, 3561 QFT- -T
- Niu Q, Thouless DJ and Wu YS  
 1985 Phys Rev B, 31, 3372  
 FQHE- -T
- Oakeshott RBS and MacKinnon A  
 1993 J Phys C, 5, 6971, 6991 TG-DOS-T
- Ohno H, Munekata M, Penney T, von Molnar S and Chang LL  
 1992 Phys Rev Lett, 68, 2664 HIIIV- -X
- Olszakier M, Ehrenfreund E and Cohen E  
 1991 Phys Rev B, 43, 9350 HIIIV- -X
- Ono Y, Yoshioka D, Fukuyama H  
 1981 J Phys Soc Japan, 50, 2143 TG- -T
- Onsager L  
 1931a Phys Rev, 37, 405 TG- -T  
 1931b Phys Rev, 38, 2265 TG- -T  
 1952 Phil Mag, 43, 1006 TG- -T
- Ortuño M and Ruiz J  
 1992 Phil Mag B, 65, 647 TG- -T
- Paalanen MA, Tsui DC and Gossard AC  
 1982 Phys Rev B, 25, 5566 IQHE-TA-X
- Paalanen MA, Willet RL, Littlewood PB, Ruel RR, West KW, Pfeiffer LN  
 and Bishop DJ  
 1992a Phys Rev B, 45, 11342 FQHE-W-X
- Paalanen MA, Willet RL, Ruel RR, Littlewood PB, West KW and Pfeiffer LN  
 1992b Phys Rev B, 45, 13784 FQHE-W-X
- Peeters FM and Vasilopoulos P  
 1993 Phys Rev B, 47, 1466 SdH- -T
- Pippard AB  
 1964 Phil Trans Royal Soc London, A625, 317 TG- -T
- Pitaevskii L and Stringari S  
 1993 Phys Rev B, 47, 10915 FQHE- -T
- Platzman PM and Price R  
 1993 Phys Rev Lett, 70, 3487 FQHE-W-T
- Platero G, Brey L and Tejedor C  
 1989 Phys Rev B, 4, 8548 RMT- -X
- Plaut AS, Kukushkin IV, von Klitzing K and Ploog K  
 1990 Phys Rev B, 42, 5744 HIIIV- -X
- Pollak M  
 1992 Phil Mag B, 45, 657 TG- -T
- Polyakov AM  
 1975 Physics Lett, 598, 79 QFT- -T
- Polyakov DG and Shklovskii BI  
 1993a Phys Rev Lett, 70, 3796 IQHE-TA-T  
 1993b Phys Rev B, 49, 11167 IQHE-TA-T

- Prange RE  
1981 Phys Rev B, 23, 4802 IQHE- -T
- Prange RE and Joynt R  
1982 Phys Rev B, 25, 2943 IQHE- -T
- Prange RE and Girvin SM (eds.)  
1987 "The Quantum Hall Effect", Springer Verlag
- Price R, Zhu X and Platzman PM  
1993 Phys Rev B, 48, 11473 FQHE-W-T
- Pruisken AMM  
1984 Nucl Phys B, 235, 277 QFT- -T  
1985a Phys Rev B, 31, 416 QFT- -T  
1985b Phys Rev B, 32, 2636 QFT- -T  
1988 Phys Rev Lett, 61, 1297 IQHE-SCL-T
- Pruisken AMM and Schäfer L  
1981 Phys Rev Lett, 46, 490 QFT- -T
- Raikh ME  
1992 Phil Mag B, 65, 715 TG- -T
- Raikh ME and Shahbazyan TV  
1993 Phys Rev B, 47, 1522 IQHE-DOS-T  
1994 Phys Rev B, 49, 1935 IQHE-DOS-T
- Ralls KS, Ralph DC and Buhrman RA  
1993 Phys Rev B, 47, 10509 TG- -X
- Rammer J  
1991 Rev Mod Phys, 63, 781 TG-QFT-T
- Reed MA  
1993 Scientific American (Jan), 98 QD- -T
- Rezayi EM and MacDonald AH  
1991 Phys Rev B, 44, 8395 FQHE- -T
- Riess J  
1989 Z Phys B, 77, 69 IQHE-BD-T  
1993 Physica B, 190, 366 IQHE-BD-T
- Rodgers PJ, Langerak CJGM, Gallagher BL, Barraclough RJ, Henini M, Hill G,  
Wiegers SAJ and Perenboom JAAJ  
1993a J Phys C, 5, L449 FQHE-W-X
- Rodgers PJ, Gallagher BL, Henini M and Hill G  
1993b J Phys C, 5, L565 FQHE- -X
- Rogers DC, Singleton J, Nicholas RJ, Foxon CT and Woodbridge K  
1986 Phys Rev B, 34, 4002 HIIIIV- -X
- Runge E and Ehrenreich H  
1992 Phys Rev B, 45, 9145 RMT- -T
- Sajoto T, Li YP, Engel LW, Tsui DC and Shayegan M  
1993 Phys Rev Lett, 70, 2321 FQHE- -X
- Santos MB, Suen YW, Shayegan M, Li YP, Engel W and Tsui DC  
1992 Phys Rev Lett, 68, 1188 FQHE-W-X
- Schacham SE, Haughland EJ and Alterovitz SA  
1991 Phys Rev B, 45, 13417 SdH- -X

- 1992 Appl Phys Lett, 61, 551 SdH- -X
- Schmeltzer D and Birman JL
- 1993 Phys Rev B, 47, 10939 FQHE- -T
- Schneider H, Grahn MT, von Klitzing K and Ploog K
- 1990 Phys Rev Lett, 65, 2720 HIIIIV- -X
- Shäfer L and Wegner F
- 1980 Z Physik B, 38, 113 QFT- -T
- Shapiro B
- 1986 Phys Rev B, 33, 8447 IQHE- -T
- Shizaya K
- 1992 Phys Rev B, 45, 11143 QFT- -T
- Sibille A, Palmier JF, Wang H and Mollot F
- 1990 Phys Rev Lett, 64, 52 HIIIIV- -X
- Singleton J, Nicholas RJ, Rogers DC and Foxon CT
- 1988 Surf Science, 196, 429 HIIIIV- -X
- Smith III TP, Goldberg BB, Stiles PJ and Heiblum M
- 1985 Phys Rev B, 32, 2696 IQHE-DOS-X
- 1986 Surf Science, 170, 304 IQHE-DOS-X
- Smith III TP and Fang FF
- 1988 Phys Rev B, 37, 4303 SdH- -X
- Smrcka L and Streda P
- 1977 J Phys C, 10, 2153 TG-SdH-T
- Smrcka L and Junqworth T
- 1994 J Phys C, 6, 55 TG- -T
- Snell BR, Chan KS, Sheard FW, Eaves L, Toombs GA, Haude DK, Portal JC,  
Bass SL, Claxton P, Hill G and Pate MA
- 1987 Phys Rev Lett, 59, 2806 RMT- -X
- Sols F
- 1991 Phys Rev Lett, 67, 2874 TG-QFT-T
- Soven P
- 1967 Phys Rev B, 156, 809 TG- -T
- Stone M (ed.)
- 1992 "Quantum Hall Effect", World Scientific
- Störmer HL
- 1984 Surf Science, 142, 130 HIIIIV- -X
- Störmer HL, Tsui DC and Gossard AC
- 1982a Surf Science, 113, 32 IQHE- -X
- Störmer HL, Gossard AC and Wiegmann W
- 1982b Solid St Comm, 41, 707 SdH- -X
- Störmer HL, Chang A, Tsui DC, Hwang JCM, Gossard AC and Wiegmann W
- 1983 Phys Rev Lett, 50, 1953 FQHE- -X
- Suen YV, Engel LW, Santos MB, Shayegan M and Tsui DC
- 1992a Phys Rev Lett, 68, 1379 FQHE-TA-X
- Suen YV, Santos MB and Shayegan M
- 1992b Phys Rev Lett, 68, 3551 FQHE- -X
- Sundaram GM, Bassom NJ, Nicholas RJ, Rees GJ, Heard PJ, Prewett PD, Frost JEF,  
Jones GAC, Peacock DC and Ritchie DA
- 1993 Phys Rev B, 47, 7384 QD- -X
- Syphers DA, Killoran KJ, Brakewood HE, Reis F and Stiles PJ

- 1990 Surf Science, 229, 37 IQHE-SCL-T
- Taboryski R and Lindelof PE  
1990 Semicond Sci Technol, 5, 933 TG- -X
- Tadic M, Milanovic V and Ikonc Z  
1993 Phys Rev B, 47, 10415 HIIIIV- -T
- Takaoka S, Tsukagoshi K, Oto K, Sawasaki T, Murare K, Takagaki Y, Gamo K  
and Namba S  
1992 Surf Science, 297, 282 QW- -X
- Takaoka S, Oto K, Kurimoto M, Murare K, Gamo K and Nishi S  
1994 Phys Rev Lett, 72, 3080 IQHE-MC-X
- Tao R and Thouless DJ  
1983 Phys Rev B, 28, 1142 FQHE- -T
- Taylor RP, Fortin S, Sachrajda AS, Adams JA, Falahi M, Davies M, Coleridge PT  
and Zawadzki P  
1992 Phys Rev B, 45, 9149 QD- -X
- Thouless DJ  
1977 Phys Rev Lett, 71, 1879 IQHE- -T  
1983 Phys Rev B, 27, 6083 IQHE- -T  
1984a Surf Science, 142, 147 IQHE- -T  
1984b Physics Reports, 110, 279 IQHE- -T
- Thouless DJ and Li Q  
1987 Phys Rev B, 36, 4581 FQHE- -T
- Toombs GA and Sheard FW  
1990 in "Electronic Properties of Multilayers and Low-Dimensional  
Semiconductor Structures", Plenum Press, Nueva York RMT- -T
- Tossati E and Parrinello M  
1983 Lett Nuovo Cimento, 36, 289 FQHE- -T
- Trugman SA  
1983 Phys Rev B, 27, 7539 IQHE-TA-T
- Tsu R and Döhler G  
1975 Phys Rev B, 12, 680 TG-TA-T
- Tsui DC, Störmer HL and Gossard AC  
1982 Phys Rev Lett, 48, 1559 FQHE- -X
- Tsukagoshi K, Oto K, Takaoka S, Murare K, Takagaki Y, Gamo K and Namba S  
1991 Solid St Comm, 80, 797 QW-SdH-X
- van der Pauw LJ  
1958 Philips Research Rep, 13, 1 TG- -X
- van der Vaart NC, van Stevenick MPR, Kouvenhoven LP, Johnson AI,  
Nazarov VV, Harmans CJPM and Foxon CT  
1994 Phys Rev Lett, 73, 320 QD- -X
- van Houten H, Williamson JG, Broekaart MEI, Foxon CT and Harris JJ  
1988 Phys Rev B, 37, 2756 SdH- -X
- van Wees BJ, van Houten H, Beenakker CWJ, Williamson JG, Kouwenhoven LP,  
van der Marel D and Foxon CT  
1988 Phys Rev Lett, 60, 848 QD- -X
- van Wees BJ, Willems EMM, Harmans CJPM, Beenaker CWJ, van Houten H,  
Williamson JG, Foxon CT and Harris JJ

- 1989 Phys Rev Lett, 62, 1181 QD- -X
- van Wees BJ, Kouwenhoven LP, Willems EMM, Harmans CJPM, Mooij JE,  
van Houten H, Beenaker CWJ, Williamson JG and Foxon CT
- 1991 Phys Rev B, 43, 12431 QD- -X
- Varma CM, Larkin AI and Abrahams E
- 1994 Phys Rev B, 49, 13999 TG-DL-T
- Vashista P, Kalia RK and Quinn JJ
- 1984 Surf Science, 142, 120 TG-W-T
- Vignale G
- 1993 Phys Rev B, 47, 10105 FQHE-W-T
- Vischer PB and Falicov LM
- 1971 Phys Rev B, 3, 2541 TG- -T
- von Klitzing K
- 1982 Surf Science, 113, 1 IQHE- -X
- 1986 Rev Mod Phys, 58, 519 IQHE- -X
- 1990 in "Electronic Properties of Multilayers and Low-Dimensional  
Semiconductor Structures", Plenum Press, Nueva York IQHE- -X
- von Klitzing K, Dorda G and Pepper M
- 1980 Phys Rev Lett, 45, 494 IQHE- -X
- von Klitzing and Ebert G
- 1983 Physica B, 117&118, 682 IQHE- -X
- Voschenkov AM and Zemel JN
- 1974 Phys Rev B, 9, 4410 TG-MC-X
- Wang JK, Campbell JH, Tsui DC and Cho AY
- 1988 Phys Rev B, 38, 6174 IQHE-DOS-X
- Wang JK, Tsui DC, Santos M and Shayegan M
- 1992a Phys Rev B, 45, 4384 IQHE-DOS-X
- Wang JK and Goldman VJ
- 1992b Phys Rev B, 45, 13479 FQHE-TA-X
- Wang XF, Wang Z and Kotliar G
- 1992 Phys Rev Lett, 68, 2504 QFT- -T
- Wegner F
- 1979 Z Physik B, 35, 207 QFT- -T
- 1983 Z Physik B, 51, 279 QFT- -T
- Wei HP, Chang AM, Tsui DC and Razeghi M
- 1985a Phys Rev B, 32, 7016 IQHE-TA-X
- Wei HP, Chang AM, Tsui DC and Pruisken AMM
- 1985b Phys Rev B, 33, 1488 IQHE-SCL-X
- Wei HP, Tsui DC, Paalanen MA and Pruisken AMM
- 1988 Phys Rev Lett, 61, 1294 IQHE-SCL-X
- Weis J, Haug RJ, von Klitzing and Ploog K
- 1993 Phys Rev Lett, 71, 4019 QD- -X
- Weiss D
- 1990 in "Electronic Properties of Multilayers and Low-Dimensional  
Semiconductor Structures", Plenum Press, Nueva York SdH- -X
- Weiss D, Stahl E, Weimann G, Ploog K and von Klitzing K
- 1986 Surf Science, 170, 285 IQHE-DOS-X
- Weiss D, Zhang C, Gerhardtts RR, von Klitzing K and Weimann G

- 1989 Phys Rev B, 39, 13020 IQHE-DOS-X  
Weiss D, Richter K, Menschig A, Bergmann R, Schweizer H, von Klitzing K  
and Weimann G
- 1993 Phys Rev Lett, 70, 4118 QD-SdH-X  
Weisz JF and Berggren KF
- 1989 Phys Rev B, 40, 1325 QW- -T  
Wiesner V, Pillath J, Baugher W, Kohl A, Mesquida A, Küsters A, Britner S  
and Heime K
- 1994 Appl Phys Lett, 64, 2520 HIIIV-SdH-X  
Wilks SP, Cornish AE, Elliot M, Woolf DA, Westwood DI and Williams RH
- 1994 J Appl Phys, 76, 3583 HIIIV-SdH-X  
Willet RL, Eisenstein JP, Störmer HL, Tsui DC, Gossard AC and English JH
- 1987 Phys Rev Lett, 59, 1776 FQHE- -X  
Willet RL, Störmer HL, Tsui DC, Pfeiffer LN, West KW and Baldwin KW
- 1988 Phys Rev B, 38, 7881 FQHE-TA-X  
Willet RL, Ruel RR, West KW and Pfeiffer LN
- 1993 Phys Rev Lett, 71, 3846 FQHE- -X  
Williams FIB, Wright PA, Clark RG, Andrei EY, Deville G, Clattli DC, Probst O,  
Etienne B, Dorin C, Foxon CT and Harris JJ
- 1991 Phys Rev Lett, 66, 3285 FQHE-W-X  
Winkler RW, Kotthaus JP and Ploog K
- 1989 Phys Rev Lett, 62, 1177 SdH- -X  
Wu XG, Dev G and Jain JK
- 1993 Phys Rev Lett, 71, 153 FQHE- -T
- Xue DP and Xiao G
- 1992 Phys Rev B, 45, 5986 TG- -T
- Yang J and Su WP
- 1993 Phys Rev Lett, 70, 1163 FQHE- -T  
Yang SRE and MacDonald AH
- 1993 Phys Rev Lett, 70, 4110 TG-DOS-T  
Yennie DR
- 1987 Rev Mod Phys, 59, 781 IQHE- -T  
Yeyati AL, Martín-Rodero A and Flores F
- 1993 Phys Rev Lett, 71, 2991 QFT- -T
- Zachau M, Kash JA and Masselink KWT
- 1991 Phys rev B, 44, 4048 HIIIV- -X  
Zak J
- 1964 Phys Rev A, 134, 1607 TG- -T  
1968 Phys Rev, 168, 686 TG- -T  
Zaslavsky A, Li YP, Tsui DC, Santos M and Shayegan M
- 1990 Phys Rev B, 42, 1374 RMT- -X  
Zawadzki W and Lassnig R
- 1984a Surf Science, 142, 225 IQHE-DOS-T  
1984b Solid St Comm, 50, 537 IQHE-DOS-T  
Zhang SC, Hansson TM and Kivelson S
- 1989 Phys Rev Lett, 62, 82 QFT- -T

- Zhao HL and Feng S  
1993 Phs Rev Lett, 70, 4134 IQHE-SCL-T
- Zhitenev NB, Haug RJ, von Klitzing K and Ebert K  
1993 Phys Rev Lett, 71, 2292 IQHE- -X
- Zou N, Chao KA, Galperin YM  
1993 Phys Rev Lett, 71, 1756 RMT- -X
- Zheng H, Song A, Yang F and Li Y  
1993 Phys Rev, 49, 1802 RMT-DOS-X