

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**

**Departamento de Matemática Aplicada**



**DINÁMICA EN DIMENSIÓN INFINITA:  
MODELOS DE CAMPOS DE FASE  
Y UN TERMOSIFÓN CERRADO**



\* 5 3 0 9 8 2 1 0 1 4 \*  
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

Memoria para optar al título de doctor en Ciencias Matemáticas

Presentada por

**Angela Jiménez Casas**

Dirigida por

**Dr. D. Aníbal Rodríguez Bernal**

Noviembre, 1996

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**

**Departamento de Matemática Aplicada**



**DINÁMICA EN DIMENSIÓN INFINITA:  
MODELOS DE CAMPOS DE FASE  
Y UN TERMOSIFÓN CERRADO**

Memoria para optar al título de doctor en Ciencias Matemáticas

Presentada por

**Angela Jiménez Casas**

Dirigida por

**Dr. D. Aníbal Rodríguez Bernal**

Noviembre, 1996

**21.406**

*a Felipe, mi compañero, mi amigo...*

Deseo expresar mi agradecimiento a todas las personas que me han ayudado, de alguna forma, a llevar a cabo esta memoria. En especial

a Aníbal Rodríguez Bernal, por haberme permitido trabajar en un campo que me apasiona, por su apoyo y sus constantes consejos;

a los miembros del Departamento de Matemática Aplicada de la U.C.M. por su acogida y enseñanzas durante estos años, así como a mis compañeros de doctorado: Lourdes, Gonzalo, Paco, Julio y Elena, por su estima y sus constantes ánimos;

a la Universidad Pontificia de Comillas (I.C.A.I.), en particular al profesor Agustín de la Villa;

a los miembros del Departamento de Matemática Aplicada de la E.U.I.T. Industriales de la Universidad Politécnica de Madrid;

a mis compañeros y amigos: Lucía, Félix, Loli, César, Santiago, Mercedes e Isabel, que de una u otra forma han estado siempre a mi lado.

Y finalmente,

a mi familia por todo el tiempo que les debí dedicar y no lo hice.


# INDICE

<b>I INTRODUCCION Y DESCRIPCION DE RESULTADOS</b>	<b>1</b>
<b>1 CAMPOS DE FASE</b>	<b>5</b>
1.1 Origen del modelo . . . . .	5
1.1.1 Modelo clásico de Stefan . . . . .	5
1.1.2 Objeciones al modelo clásico de Stefan . . . . .	7
1.1.3 Transiciones de fase. Funcional de Energía Libre de Landau-Ginzburg	8
1.1.4 Ecuaciones de campos de fase . . . . .	11
1.2 Descripción de resultados . . . . .	13
<b>2 UN MODELO DE TERMOSIFON CERRADO</b>	<b>23</b>
2.1 Origen del modelo . . . . .	23
2.1.1 Preliminares . . . . .	23
2.1.2 Modelo general de termosifón . . . . .	24
2.1.3 Ecuaciones del modelo general con efecto Soret . . . . .	28
2.2 Descripción de resultados . . . . .	31
<b>II ECUACIONES DE CAMPOS DE FASE</b>	<b>35</b>
<b>1 EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES</b>	<b>37</b>
1.1 Preliminares . . . . .	37
1.2 Marco Funcional . . . . .	39
1.3 El semigrupo lineal . . . . .	40
1.4 Problema no lineal: Existencia y Unicidad Local de Soluciones . . . . .	43
1.4.1 Existencia local . . . . .	43
1.4.2 Regularidad . . . . .	58
1.5 Funcional de Lyapunov. Solución Global en $H_B^1 \times L_B^2$ . . . . .	61

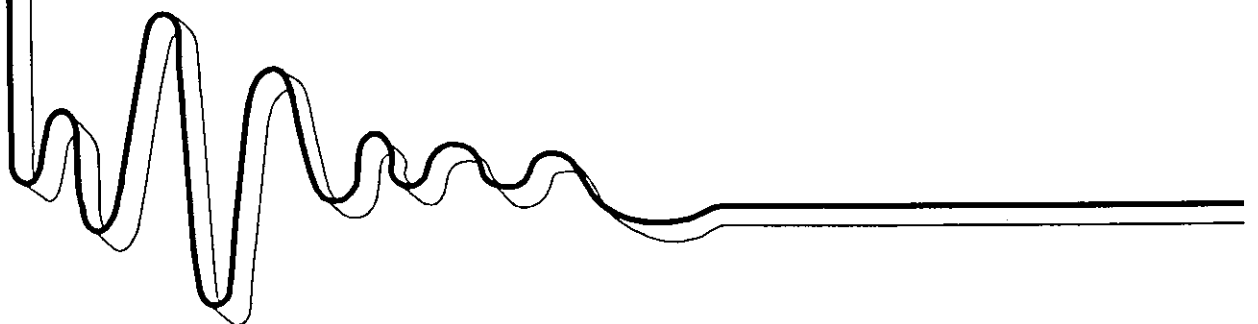
1.6	Regiones invariantes . . . . .	65
1.7	Existencia global de soluciones en $W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$ , $p \neq 1, n \geq 1$ . . . . .	69
<b>2</b>	<b>COMPORTAMIENTO ASINTOTICO</b>	<b>73</b>
2.1	Atractor Maximal en $H_B^1 \times L_B^2$ . . . . .	73
2.2	Atractor Maximal en $W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$ , $p \neq 1, n \geq 1$ . . . . .	77
<b>3</b>	<b>ESTABILIDAD LINEAL DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO</b>	<b>89</b>
3.1	Ecuaciones linealizadas . . . . .	89
3.2	Funcional de Lyapunov linealizado $\mathcal{F}_L$ . . . . .	93
3.3	Estabilidad e inestabilidad lineal . . . . .	97
<b>4</b>	<b>SOLUCIONES ESTACIONARIAS</b>	<b>103</b>
4.1	Soluciones Estacionarias Constantes . . . . .	104
4.2	Soluciones Estacionarias con $B = N$ en $\Omega = (0, L)$ . . . . .	108
4.3	Soluciones Estacionarias con $B = D$ en $\Omega = (0, L)$ . . . . .	124
<b>5</b>	<b>SOLUCIONES METAESTABLES</b>	<b>129</b>
5.1	Naturaleza de las soluciones metaestables . . . . .	129
5.2	Movimiento lento de la transición de fase . . . . .	134
<b>III</b>	<b>UN MODELO DE TERMOSIFON CERRADO</b>	<b>141</b>
<b>1</b>	<b>EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES</b>	<b>143</b>
1.1	Preliminares . . . . .	143
1.2	Existencia y unicidad local de soluciones . . . . .	148
1.3	Existencia global de soluciones . . . . .	154
<b>2</b>	<b>COMPORTAMIENTO ASINTOTICO</b>	<b>163</b>
2.1	Atractor maximal . . . . .	163
2.2	Variedad inercial . . . . .	177
<b>IV</b>	<b>APENDICE</b>	<b>185</b>
0.1	Operadores sectoriales . . . . .	187
0.1.1	Definición de operador sectorial . . . . .	187
0.1.2	Escala de espacios de interpolación . . . . .	187
0.2	Ecuaciones semilineales: Existencia y unicidad . . . . .	193

0.3	Semigrupos disipativos . . . . .	195
0.4	Principio de estabilidad linealizada . . . . .	198
0.5	Regla de L'Hopital . . . . .	200

<b>V</b>	<b>REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS</b>	<b>201</b>
----------	-----------------------------------	------------



**INTRODUCCION Y  
DESCRIPCION DE  
RESULTADOS**







# INTRODUCCION

En esta memoria se estudian dos modelos diferentes de sistemas dinámicos en dimensión infinita, representados por dos sistemas acoplados de ecuaciones en derivadas parciales semilineales que modelizan distintos fenómenos físicos.

El primer modelo, denominado “**Modelo de campos de fase**”, rige las transiciones de fases en las que se considera una región de interfase con grosor. El segundo es un modelo de flujo de un fluido en un “**Termosifón con efecto Soret**”, que consiste en un dispositivo formado por un circuito cerrado por el que circula un fluido en el que se ha disuelto un soluto, a temperatura variable.

En los dos siguientes capítulos de esta Introducción se expone el origen físico de estos problemas y se describen los principales resultados obtenidos sobre la existencia y unicidad de soluciones de ambos sistemas, así como del comportamiento asintótico de las mismas cuando el intervalo de tiempo en el que están definidas tiende a infinito.

El resto de esta memoria ha sido estructurada en dos partes que constan a su vez de varios capítulos y de un apéndice. Cada una de estas partes está dedicada al estudio matemático de uno de los modelos mencionados. En el apéndice se recogen algunas definiciones y resultados, que son utilizados en el desarrollo de las partes anteriores. Finalmente, se describen las referencias bibliográficas a las que se han hecho mención en algún momento del desarrollo de esta memoria.

La primera parte está dedicada a las ecuaciones de campo de fase y consta de cinco capítulos. El primer capítulo recoge los resultados de existencia y unicidad de las soluciones del sistema. En primer lugar se establece el marco funcional de trabajo, se prueban resultados de existencia local y regularidad de las soluciones, y finalmente se prueba que dichas soluciones están definidas globalmente, es decir para todo instante de tiempo positivo.

A continuación, se prueba en el capítulo dos la existencia de un atractor global compacto y conexo para dichas soluciones en un espacio funcional adecuado, lo que nos permite tener información sobre la dinámica del sistema. En particular, se tiene que las soluciones que parten de un conjunto acotado en dichos espacios son atraídas por dicho conjunto con el transcurrir del tiempo. Como consecuencia, nos interesamos por el estudio de este atractor, lo que nos lleva a su vez al estudio de los puntos de equilibrio y su estabilidad, a lo que dedicamos el capítulo tres y el capítulo cuatro de esta memoria.

En el capítulo cuatro se estudian los puntos de equilibrio constantes respecto de la variable espacial, y a continuación la existencia de soluciones o puntos de equilibrio no

constantes.

En el capítulo tres, donde se estudia la estabilidad de los puntos de equilibrio se prueba, gracias a un resultado de Matano, [40], que bajo unas determinadas condiciones de los parámetros físicos del sistema, las únicas soluciones estacionarias estables, en dominios convexos son las constantes. No obstante, se prueba en el capítulo cinco, la existencia de un tipo especial de soluciones no constantes, que sin llegar a ser estables, evolucionan muy lentamente, denominadas soluciones metaestables.

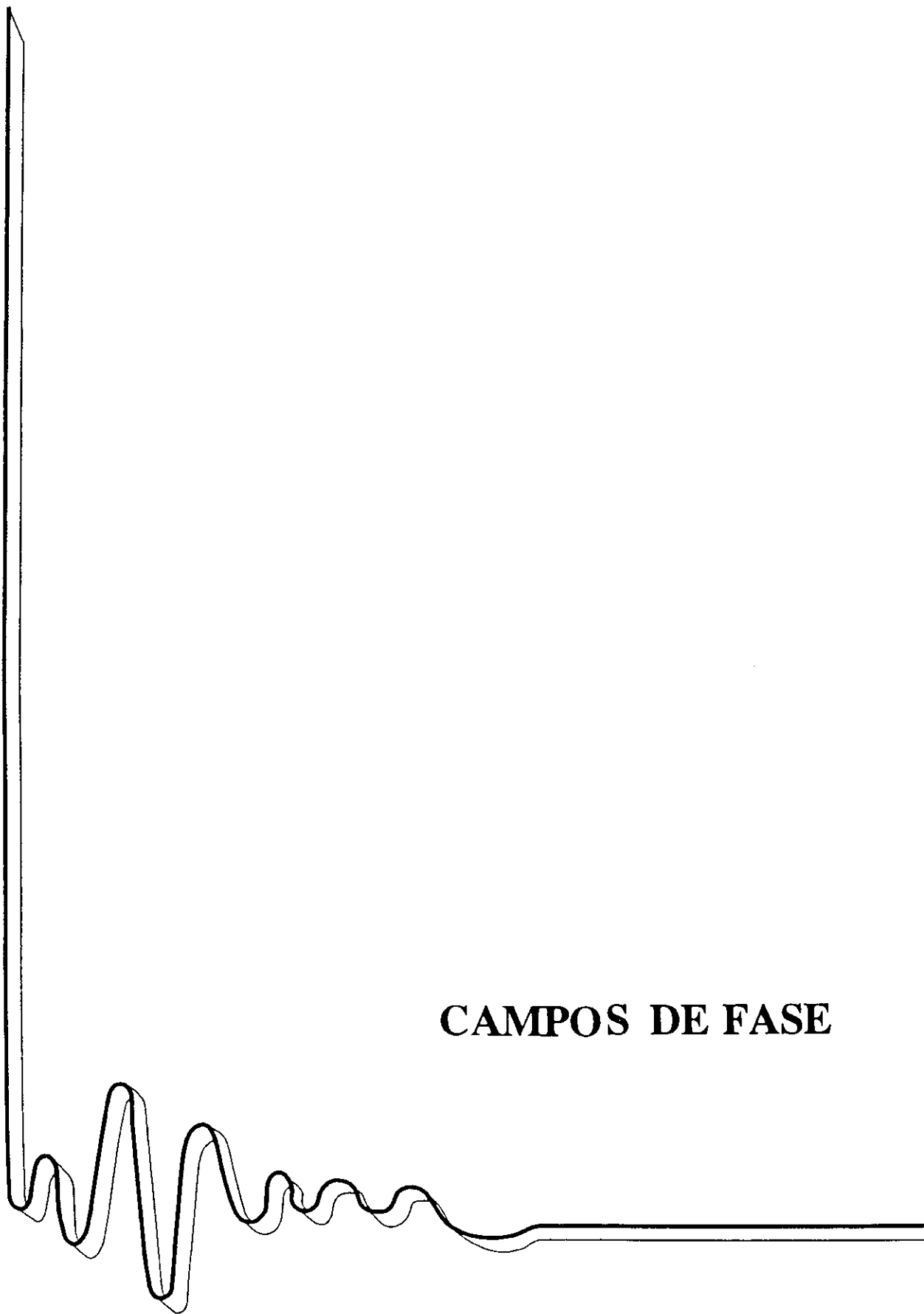
La segunda parte está dedicada a un modelo de termosifón cerrado con efecto Soret, nombre con el que se conoce el fenómeno que consiste en el transporte de materia inducido por flujo de calor, [27], y se ha dividido en dos capítulos.

En el primer capítulo, al igual que en la primera parte, se fija el marco funcional de trabajo, en el cual se prueban en primer lugar resultados de existencia local de soluciones. A continuación, se prueba que dichas soluciones están definidas globalmente, basándonos en estimaciones de la norma de la solución en un intervalo de tiempo finito.

El segundo capítulo está dedicado al estudio de la dinámica del sistema probando al igual que en el primer problema, la existencia de un atractor maximal compacto y conexo que atrae a las soluciones cuando el tiempo tiende a infinito, uniformemente cuando el dato inicial se mueve en un conjunto acotado.

En esta ocasión además, hemos conseguido probar la existencia de una variedad inercial para el sistema, ayudándonos del sistema equivalente para los modos de Fourier complejos, de las funciones incógnitas del sistema inicial. En este sentido hemos visto cómo construir una variedad de dimensión finita, dependiendo de la temperatura ambiente y de la geometría del circuito, que son datos del problema, capaz de reproducir la dinámica del sistema. De esta forma reducimos la dinámica de dimensión infinita del sistema inicial al estudio de una dinámica en dimensión finita, representada por las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias asociado a un número finito de modos de Fourier que podemos determinar de forma exacta.

Además la temperatura ambiente y la geometría del circuito pueden diseñarse fácilmente de forma que se obtenga un sistema con  $4n + 1$  grados de libertad con  $n = 0, 1, 2, \dots$  prefijado a voluntad.



**CAMPOS DE FASE**

# CAPITULO 1

## CAMPOS DE FASE

### 1.1 Origen del modelo

Las ecuaciones de campo de fase surgen como un “refinamiento” del problema clásico de Stefan [55], en un intento de explicar algunos fenómenos que aparecen experimentalmente próximos al equilibrio y que escapan a este modelo clásico. Por esta razón describiremos en primer lugar este modelo.

#### 1.1.1 Modelo clásico de Stefan

Supongamos que tenemos una sustancia en una región del espacio  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N = 2$  ó  $3$ , que tiene la capacidad de adquirir dos fases diferentes, por ejemplo sólido y líquido. Sea  $T(t, x)$  la función que representa la temperatura del punto  $x$  en el instante de tiempo  $t$ . Supondremos que existe una temperatura crítica representada por una constante  $T_c$ , que representa la temperatura de fusión en el equilibrio, es decir la temperatura en la que el sólido y el líquido pueden coexistir. Podemos siempre suponer que la temperatura crítica es nula, considerando la función temperatura  $u(t, x) = T(t, x) - T_c$ .

En el problema clásico de Stefan se supone que la temperatura de la región de interfase es la temperatura crítica  $T_c$ , es decir  $u = 0$ . De esta forma se define la interfase o región de transición como la curva formada por aquellos puntos que se encuentran a temperatura cero, es decir, la región de interfase es:

$$\Gamma(t) = \{x \in \Omega \text{ tal que } u(t, x) = 0\}$$

de forma que la fase líquida viene dada por:

$$\Omega_1(t) = \{x \in \Omega \text{ tal que } u(t, x) > 0\}$$

y la fase sólida por:

$$\Omega_2(t) = \{x \in \Omega \text{ tal que } u(t, x) < 0\}.$$

En este problema clásico de Stefan, se estudia por una parte la evolución de una única función incógnita que es la temperatura,  $u(t, x)$ , que verifica una ecuación de difusión de calor del tipo

$$u_t = k\Delta u \text{ en } \Omega_1(t) \cup \Omega_2(t) \quad (I.1.1)$$

donde  $k > 0$  representa la difusividad térmica (cociente entre la conductividad térmica y la capacidad calorífica por unidad de volumen), que se supone constante e igual en ambas fases. Por otra parte, se estudia también la evolución del conjunto de puntos dado por la interfase. Teniendo en cuenta que a través de la interfase  $\Gamma(t)$ , el calor latente de fusión (por unidad de masa),  $l$ , debe quedar compensado con el flujo de calor, se tiene según [9]:

$$lv \cdot n = k(\nabla u_s - \nabla u_l) \cdot n, \quad x \in \Gamma(t) \quad (I.1.2)$$

donde  $n$  es el vector normal y unitario a  $\Gamma(t)$  en la dirección sólido-líquido,  $v(t, x)$  es la velocidad local de la interfase,  $\nabla u_s$  es el límite del gradiente de  $u$  en un punto  $x \in \Gamma$  calculado desde la fase sólida  $\Omega_2$  y  $\nabla u_l$  calculado desde la fase líquida,  $\Omega_1$ . De esta forma llegamos al planteamiento matemático del problema clásico de Stefan, que consiste en encontrar  $u(t, x)$  y  $\Gamma(t)$  satisfaciendo (I.1.1) y (I.1.2), junto con unas condiciones iniciales y de frontera sobre el borde de  $\Omega$  dadas.

Un método para estudiar este problema clásico de Stefan es el de la entalpía o  $H$ -método [45], [55], en el que se considera un balance de calor, dado por una única ecuación de difusión:

$$\frac{\partial}{\partial t} H(u) = k\Delta u \quad (I.1.3)$$

que sustituye a la ecuación de difusión de calor (I.1.1) y a la del calor latente (I.1.2). La idea básica consiste en considerar una función  $H$ , denominada función de "entalpía", que depende, en principio, sólo de la temperatura y que representa la energía en un instante de tiempo  $t$  y en un punto  $x$ . La función  $H$  se obtiene como la suma de la energía calorífica y la energía química debida a las propiedades microscópicas de los puntos del medio y está definida por  $H(u) = u + \frac{l}{2}\varphi$ . En la expresión anterior  $l$  es una constante positiva que representa el calor latente de fusión y  $\varphi$  una función de la temperatura  $u$ , asociada al cambio de fase, definida por:

$$\varphi = \text{sig}(u) = \begin{cases} +1, & u > 0 \\ -1, & u < 0. \end{cases}$$

De esta forma cuando  $\varphi = 1$  la sustancia está en fase sólida y cuando  $\varphi = -1$  está en fase líquida.

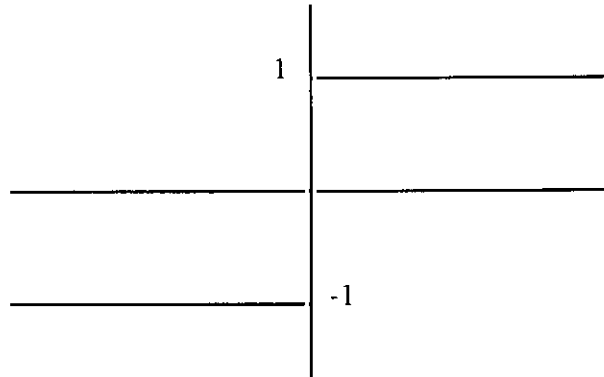


figura 1.1: Función escalera de cambio de fase

### 1.1.2 Objeciones al modelo clásico de Stefan

El estudio de los fenómenos físicos descritos por estas ecuaciones, presentan a menudo comportamientos anómalos, de forma que aparece con frecuencia experimentalmente una región de interfase plana de espesor  $\xi$ , en lugar de la **curva** de interfase (sin espesor), que se supone en el problema de Stefan. Estos fenómenos que se presentan en el equilibrio, se conocen con el nombre de supercongelación (o supercalentamiento), y son los que dan lugar a inestabilidades de tipo dendrítico, es decir aumento (o disminución) de la parte sólida en forma de ramificaciones [17], [23]. Estos fenómenos van asociados a la aparición de la tensión superficial  $\sigma$  que aumenta al aumentar el espesor  $\xi$  de la interfase y que actúa como una fuerza estabilizante, frenando el proceso de supercongelación (supercalentamiento).

Vamos a ver como el hecho de considerar una interfase de espesor  $\xi$ , en el H-método nos va a llevar a las ecuaciones de campo de fase. La idea básica es que una interfase **curva**, sin espesor, tal y como aparece en el problema clásico de Stefan, corresponde a una función de fase  $\varphi$  que es de tipo escalera tomando valores  $+1$  y  $-1$ , mientras que una interfase **plana**, con espesor, podría tener asociada una función regular  $\varphi$ , que debe variar suavemente entre las fases, es decir, entre los valores  $\varphi = 1$  y  $\varphi = -1$ . Esto significa que el cambio de fase está ocurriendo continuamente dentro de un rango finito.

Aparece así una nueva función incógnita  $\varphi(t, x)$  llamada campo de fase o parámetro de orden. El campo de fase, con esta interpretación es básicamente una media local de la

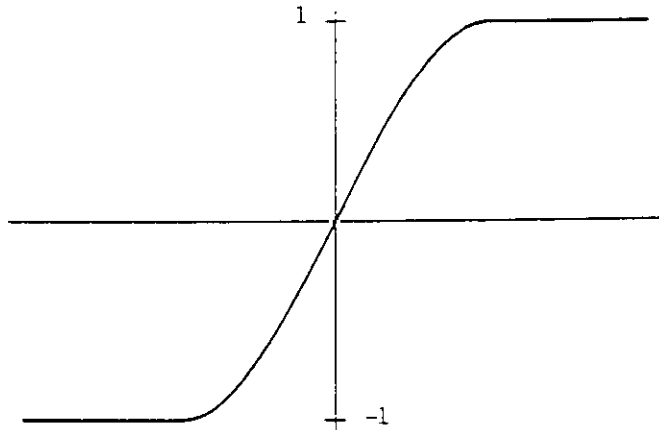


figura 1.2: Función campo de fase o parámetro de orden

fase.

Necesitamos ahora una ecuación que rige la evolución de esta nueva incógnita  $\varphi$ , que unida a (1.1.3), nos dará el sistema evolutivo que buscamos. Para ver la idea de la formulación de la ecuación diferencial para el parámetro de orden, vamos a comentar en primer lugar, algunas ideas básicas de la teoría de campo de fase en las transiciones de fases.

### 1.1.3 Transiciones de fase. Funcional de Energía Libre de Landau-Ginzburg

El parámetro de orden o campo de fase  $\varphi$  es normalmente una función escalar del tiempo y de la posición del punto, es decir,  $\varphi(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$ , la cual toma diferentes valores en dos (o más) fases distintas y es el concepto central en el estudio de las transiciones de fases. Hay muchos ejemplos diferentes de transiciones de fases descritos por un parámetro de orden  $\varphi$ , pero en todos ellos se tiene una magnitud física que adopta dos (o más) fases diferentes, de forma que la función parámetro de orden rige la competición entre ambas, asociando en cada instante la razón de ambas magnitudes en un punto determinado. Vamos a considerar el caso de transiciones de **sólido - líquido**, pero existen otros muchos ejemplos regidos por un parámetro de orden que representaría por ejemplo la densidad en las transiciones de **líquido - vapor**, la concentración de uno de los dos componentes de una **aleación**, o la **magnetización** (momento magnético por unidad de volumen) en ferromagnetismo, entre otros, ver por ejemplo [47].

Aunque en cada caso la escala en la que se mide  $\varphi$  varía, siempre se encuentra entre dos valores que corresponden a cada una de las fases y se puede reescalar para que su



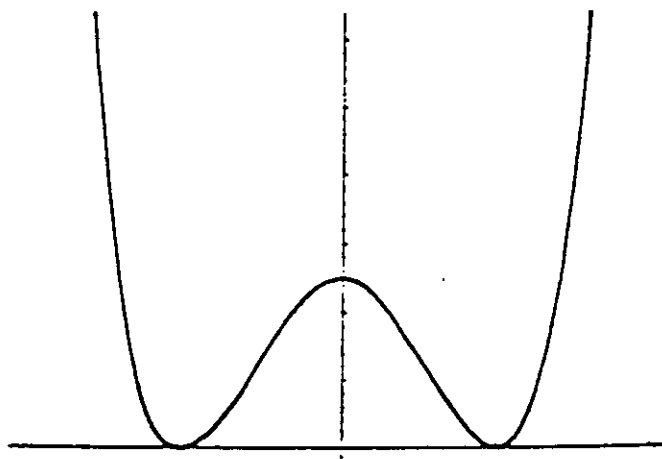


figura 1.3: Función densidad de doble pozo

rango esté, por ejemplo, entre  $-1$  y  $+1$ . De esta forma la energía libre asociada al sistema mirada como una función de  $\varphi$ , tiene un mínimo local en la fase completamente ordenada ( $\varphi = +1$  o  $\varphi = -1$ ) y alcanza el máximo en algún valor intermedio, correspondiente a una fina mezcla de dos fases.

El proceso de separación de fases se puede describir fenomenológicamente de la siguiente manera:

Inicialmente la sustancia se encuentra a una temperatura elevada (supercrítica) de forma que toda ella está en fase líquida de forma estable; un rápido descenso de la temperatura (“quenching”) por debajo de la temperatura crítica ( $u = 0$ ) produce la pérdida de la estabilidad de la mezcla y se produce así una separación de fases y la aparición de la fase sólida en algunas subregiones de  $\Omega$ .

Podemos dar una interpretación del fenómeno físico descrito en términos de una cierta energía libre asociada al sistema. Consideramos la energía libre total dada por

$$\mathcal{F}(\varphi) = \int_{\Omega} G(\varphi) - u\varphi$$

donde  $G$  representa una función densidad de “doble pozo”, siendo los “pozos”, los valores distintos que minimizan el funcional y que corresponden a las dos fases distintas. Así el sistema estará en equilibrio para aquellas funciones  $\varphi$  que minimicen la energía libre  $\mathcal{F}$ .

Observamos que si partimos de una temperatura supercrítica constante,  $u > 0$ , el sistema estaría en equilibrio en una sola fase, la asociada al valor de  $\varphi$  donde  $G(\varphi) - u\varphi$  alcanza el único mínimo absoluto, como se puede ver en la figura 1.4 puesto que  $\mathcal{F}$  se minimiza cuando  $\varphi$  toma ese valor en todo  $\Omega$ . Si la temperatura  $u$  es subcrítica,  $u < 0$ , el sistema estará en equilibrio en la otra fase, asociada de nuevo al único mínimo absoluto de  $G(\varphi) - u\varphi$ .

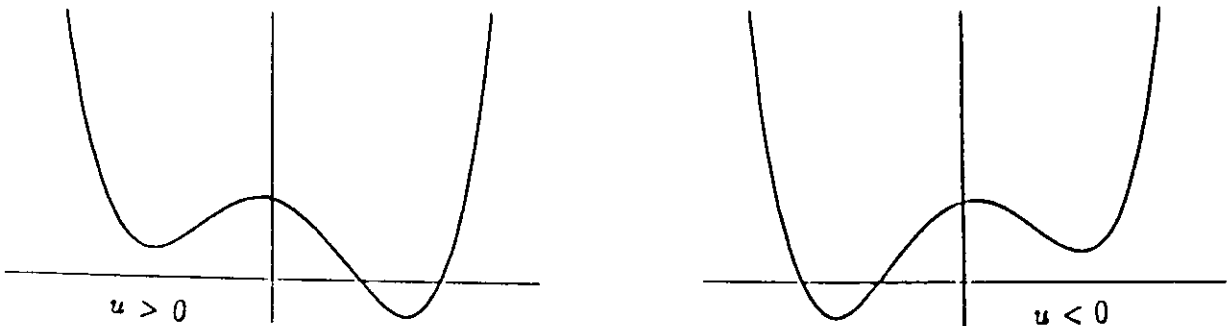


figura 1.4: Funcional de energía libre

Al descender la temperatura, se llega al valor crítico  $u = 0$  en el cual el funcional de energía libre  $\mathcal{G}$ , alcanza su valor mínimo cuando  $\varphi$  toma los valores distintos asociados a las distintas fases, que se corresponden con los dos mínimos de  $G(\varphi)$ . De esta forma se tiene en el equilibrio la coexistencia de ambas fases y la aparición en la mezcla de zonas donde alguna de las fases es dominante.

Se observa cómo todas las configuraciones de la forma  $\varphi = +1$  en  $\Omega_i^+$  y  $\varphi = -1$  en  $\Omega_i^-$ , donde  $\cup_i(\Omega_i^+ \cup \Omega_i^-)$  es una partición de  $\Omega$ , son energéticamente equivalentes en términos de  $\mathcal{F}$  y son minimizadores absolutos, independientemente de la longitud de la “interfase”, de la forma y tamaño de  $\Omega_i^+$ ,  $\Omega_i^-$ , lo cual nos es razonable por consideraciones de entropía, ya que a mayor número de subdivisiones mayor es el grado de desorden del sistema. Esto es debido a que  $\mathcal{F}$  no tiene en cuenta la configuración ni la distribución espacial de las fases, lo que sugiere que hay que considerar por tanto las inhomogeneidades espaciales, de forma que  $\mathcal{F}$  ha de depender no sólo de  $\varphi$  sino también de sus derivadas  $\nabla\varphi$ .

Un refinamiento en la teoría de transiciones de fases consiste en considerar un potencial generalizado, en el que aparece un nuevo sumando  $\frac{1}{4}\xi^2|\nabla\varphi|^2$ , asociado a las variaciones espaciales de  $\varphi$ , que involucra el espesor  $\xi$  de la interfase. De esta forma se obtiene la expresión de la energía libre del sistema para una temperatura dada  $u$  [37],

$$\mathcal{F}(\varphi) = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{4}\xi^2|\nabla\varphi|^2 + G(\varphi) - u\varphi \right] dx \quad (1.1.4)$$

donde  $\xi$ , como hemos comentado, representa una escala de longitud, asociada a una anchura típica de la interfase.

Si recordamos la relación termodinámica

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S$$

que nos dice que el incremento de energía libre es igual al incremento de entalpía menos la temperatura por el incremento de entropía, se tiene por analogía que el primer término del funcional de Landau-Ginzburg

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{1}{4} \xi^2 |\nabla \varphi|^2 + G(\varphi) \right] dx$$

representa la entalpía del sistema, mientras que el último término  $u\varphi$ , introduce el acoplamiento entre  $u$  y  $\varphi$ , y puede ser entendido como la parte de energía libre que corresponde a la temperatura por cambio de entropía. La teoría de Landau-Ginzburg, [37], sobre transiciones de fase nos dice que la situación de equilibrio, con una temperatura dada  $u$ , se alcanza para aquellas funciones  $\varphi$ , que minimizan la energía, en alguna clase adecuada de funciones. Por tanto, el sistema estudiado está en equilibrio, si se verifica la ecuación de Euler-Lagrange, asociada al funcional de energía libre (I.1.4.), unida al balance de calor (I.1.3), independiente del tiempo. De esta forma el sistema está en equilibrio si  $(u, \varphi)$  verifica:

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{2} \xi^2 \Delta \varphi + G'(\varphi) + u \\ 0 = \Delta u \end{cases} \quad (I.1.5)$$

unido claro está con las condiciones de frontera en el borde de  $\Omega$ .

### 1.1.4 Ecuaciones de campos de fase

La idea básica que nos permite llegar ahora a la ecuación que ha de verificar  $\varphi$  fuera del equilibrio, tiene su motivación en la mecánica Newtoniana. De forma que en las situaciones dependientes del tiempo  $\varphi$  no tiene por qué minimizar  $\mathcal{F}(\varphi)$ , pero la velocidad de variación de  $\varphi$  se supone proporcional al “gradiente” de  $\mathcal{F}(\varphi)$  con respecto a  $\varphi$ , llegando así a la ecuación conocida como modelo A en la teoría de Landau-Ginzburg, dada por

$$\tau \varphi_t = \xi^2 \Delta \varphi + 2G'(\varphi) + 2u \quad (I.1.6)$$

donde  $\tau$  se denomina tiempo de relajación y representa un escala de tiempo. Esta ecuación está acoplada con la ecuación de entalpía (I.1.3) dada por

$$u_t + \frac{l}{2} \varphi_t = k \Delta u \quad (I.1.7)$$

de forma que ambas ecuaciones (I.1.6) y (I.1.7), unidas a las condiciones iniciales y de frontera, nos dan el siguiente sistema de ecuaciones conocido como ecuaciones de campo de fase

$$\begin{cases} \tau\varphi_t &= \xi^2\Delta\varphi - g(\varphi) + 2u & \text{en } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u_t + \frac{l}{2}\varphi_t &= k\Delta u & \text{en } \Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (I.1.8)$$

donde  $\Omega$  es un abierto acotado de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$  con frontera regular,  $2G'(\varphi) = g(\varphi)$  es típicamente  $\frac{1}{2}(\varphi^3 - \varphi)$ , aunque nosotros consideraremos una función más general, suficientemente regular. Como hemos visto anteriormente,  $l$  y  $k$  son constantes positivas que hacen referencia al calor latente y a la difusividad, respectivamente, mientras que  $\tau$  y  $\xi$  son parámetros positivos que hacen referencia a escalas de tiempo y longitud.

Consideraremos junto a (1.1.1) alguna de las siguientes condiciones de frontera, consideradas en la literatura existente:

Condiciones de Dirichlet

$$u = \varphi = 0 \text{ en } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \quad (I.1.9)$$

consideradas en [6], [7],[4], [9] y [20] entre otros.

Condiciones de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \quad (I.1.10)$$

donde  $n$  representa el vector normal exterior en  $\partial\Omega$ , como se pueden encontrar en [6], [7], [4], [20] y [64].

Condiciones Periódicas sobre  $\Omega = \prod_{i=1}^N (0, L_i)$ ,  $L_i > 0$

$$\varphi|_{x_i=0} = \varphi|_{x_i=L_i}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}|_{x_i=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}|_{x_i=L_i}, \quad i = 1, \dots, N$$

$$u|_{x_i=0} = u|_{x_i=L_i}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}|_{x_i=0} = \frac{\partial u}{\partial x_i}|_{x_i=L_i}, \quad i = 1, \dots, N$$

es decir  $u, \varphi$  y sus derivadas coinciden en caras opuestas de  $\partial\Omega$ . Estas condiciones de frontera son consideradas entre otros en [6], [7] y [20].

Finalmente, consideraremos la condición inicial en  $t = 0$ , que viene dada por:

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega$$

Para ver un desarrollo más detallado, de los resultados expuestos en esta sección, nos remitimos a [9], [10], [12], [37], [47], [46] y [55].

## 1.2 Descripción de resultados

La primera parte de esta memoria está dedicada al estudio de los “**Modelos de campos de fase**” y se ha estructurado en cinco capítulos.

Existen numerosos autores que se han dedicado al estudio matemático de estas ecuaciones, entre los que están los trabajos de G. Caginalp [9], [10], [11], junto con P.C. Fife [12]. Podemos señalar también a C.M. Elliott junto con S. Zheng [20], S. Zheng de nuevo [64], O. Penrose junto con P.C. Fife [46], D. Brochet y D. Hilhorst [7], junto con X. Chen [6].

En estas referencias las técnicas utilizadas para establecer el buen planteamiento del problema de valor inicial de (I.1.8) son, por una parte el método de Galerkin, utilizado en [6] y en [7] entre otros, con el que se prueba la existencia de soluciones en el espacio  $L^2(\Omega)^2$  con  $g$  un polinomio de grado  $r \geq 3$  ó el método de las regiones invariantes, [58], [19], utilizado por G. Caginalp en [9], donde se exponen resultados de existencia a los que se remiten otros autores como C.M. Elliot, S. Zheng y P. W. Bates. El método expuesto en [9], se basa en la prueba de la existencia de regiones invariantes para el sistema (I.1.8), utilizando las técnicas de [58]. Estas regiones invariantes se utilizan para encontrar estimaciones a priori de las soluciones con dato inicial en espacios de funciones continuas. Además la prueba de su existencia en [9] es válida sólo para condiciones de frontera de tipo Dirichlet, y bajo las hipótesis adicionales sobre los parámetros físicos del sistema  $\frac{\xi^2}{\tau} > k$ , además de considerar el caso particular  $g(\varphi) = \frac{1}{2}(\varphi^3 - \varphi)$ .

Por contra, el primer objetivo de esta memoria es utilizar métodos diferentes que nos permitan obtener resultados de existencia, unicidad y regularidad de soluciones para (I.1.8), en las situaciones donde no son válidos los métodos anteriores. En ese sentido, consideraremos  $g$  una función regular más general, condiciones de contorno de tipo Dirichlet ( $B = D$ ), Neumann ( $B = N$ ) o bien periódicas ( $B = P$ ) y datos iniciales en otros espacios dependientes de la condición de contorno, como  $L^2_B(\Omega) \times H^{-1}_B(\Omega)$  y los de Sobolev de la forma  $W^{n,p}_B \times W^{n-1,p}_B$  para  $1 < p < \infty$  con  $n \geq 1$  dependiendo de la regularidad de  $g$ . La letra  $B$  en la notación hace referencia a las condiciones de contorno que se consideran en cada momento.

En primer lugar se estudia la existencia local de soluciones. Una de las claves en la consecución de estos resultados, consiste en escribir el sistema (I.1.8), como una ecuación de evolución

$$U_t + AU = G(U) \text{ donde } U = (\varphi, v)$$

donde  $A$  es un operador sectorial, actuando en un espacio funcional “adecuado”. Para esto tomamos  $v = u + \frac{1}{2}\varphi$  en la segunda ecuación, lo cual da lugar a una ecuación para  $v$

que es:

$$v_t = k\Delta v - \frac{kl}{2}\Delta\varphi.$$

Para probar que  $A$  es un operador sectorial y por tanto genera un semigrupo analítico, hemos utilizado un resultado de perturbación. La dificultad principal de la prueba se debe al término  $\frac{kl}{2}\Delta\varphi$  en la segunda ecuación que es del mismo orden que la parte diagonal de  $A$ . Eso nos obliga a trabajar en un espacio ambiente  $Y = W_B^{2\alpha,p} \times W_B^{2\beta,p}$  con distintas potencias  $\alpha$  y  $\beta$ , de forma que trabajando con distintas normas en cada componente se puede compensar la dificultad.

Como consecuencia de este hecho, hemos podido utilizar técnicas abstractas de semigrupos analíticos y la fórmula de variación de las constantes, para la obtención de los resultados de existencia y regularidad de soluciones para el sistema (I.1.8), expuestos en este primer capítulo. Primeramente lugar se prueba la existencia de soluciones del sistema (I.1.8) con  $g \in C^1$  y datos iniciales en el espacio  $W_B^{1,p} \times L_B^p$  y con  $g \in C^2$  y datos iniciales  $W_B^{2,p} \times W_B^{1,p}$  para todo  $p \neq 1$  siempre que  $g$  verifique algunas restricciones sobre su crecimiento, y si  $g \in C^n$  en los espacios  $W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$  para  $n \geq 3$  y  $N < (n-1)p$ ,  $p \neq 1$  sin restricciones en el crecimiento de  $g$ .

A continuación se estudia el caso particular de soluciones con dato inicial en  $H_B^1 \times L_B^2$ , espacio en el cual existe un funcional de Lyapunov, (ya descrito en [4]), vía el cual se prueba que las órbitas del sistema están globalmente definidas y acotadas en este espacio.

Posteriormente vamos a utilizar las “buenas” propiedades de las solución en este espacio, junto con los resultados “finos” de regularidad, para obtener resultados sobre el comportamiento de estas soluciones, tal y como comentamos a continuación. El siguiente objetivo consiste en probar que las soluciones del sistema (I.1.8) con datos iniciales en los espacios  $W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$ ,  $n \geq 1$ ,  $p \neq 1$  están globalmente definidas. Para ello, según el Teorema 1.4.1, hemos de probar que la solución permanece acotada en tiempo finito. Puesto que no es fácil obtener estimaciones de esta norma directamente de las ecuaciones (I.1.8) multiplicando por funciones test adecuadas e integrando por partes, elegimos un camino indirecto, basado en el efecto regularizante del sistema (I.1.8).

Supondremos que las soluciones en  $H_B^1 \times L_B^2$  están globalmente definidas, para lo cual ciertas restricciones sobre  $g$  son necesarias, como se ve en el Corolario 1.5.1. Para datos iniciales en  $W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$  utilizaremos el hecho de que la solución local estará en  $H_B^1 \times L_B^2$  para todo instante de tiempo  $t > 0$  y como consecuencia estará globalmente definida en  $H_B^1 \times L_B^2$ . A continuación el resultado de regularidad de la Proposición 1.4.3, indica que para todo instante  $t > 0$  la solución con dato inicial en  $H_B^1 \times L_B^2$  también está en  $W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$  con lo cual ambas soluciones coinciden y están por tanto, globalmente

definidas.

También probaremos la existencia de regiones invariantes del tipo de las de [9], siguiendo las técnicas de [58], para condiciones de frontera de tipo Dirichlet, con  $\frac{\xi^2}{\tau} > k$ , para soluciones que parten de datos iniciales en espacios de funciones no necesariamente continuas.

En este sentido observamos que estas regiones invariantes no sólo son válidas para el semigrupo generado por las soluciones que parten de datos iniciales en el espacio  $W_D^{n,p} \times W_D^{n-1,p}$ , con  $n, p$  tal que  $W_D^{n-1,p} \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$ , lo cual es equivalente, por las inclusiones de Sobolev, a tener  $N < p(n-1)$ , sino que podemos considerar también las soluciones que parten de datos iniciales en el espacio  $W_D^{1,p} \times L_D^p$ .

En efecto dado  $(\varphi_0, v_0) \in W_D^{1,p} \times L_D^p$  de nuevo por el efecto regularizante, para todo  $t_0 > 0$  la solución del sistema (1.1.8) que parte de ese dato inicial verifica  $\varphi(t), v(t) \in C(\bar{\Omega})$ , para todo  $t \geq t_0$ , de forma que es posible construir un región  $\Sigma$  del tipo [58] tal que  $(\varphi(t_0), v(t_0)) \in \Sigma$  para todo  $x \in \Omega$ , de donde se tendría por el Teorema 1.6.2, que  $(\varphi(t), v(t)) \in \Sigma$  para todo  $t \geq t_0$ , lo cual proporciona estimaciones de la norma en  $L^\infty$ , uniformes en  $t \geq t_0$  para las soluciones del sistema (1.1.8). No obstante la Proposición 2.2.1 nos proporciona estimaciones de este tipo, sin necesidad de utilizar las regiones invariantes y por tanto válida para cualquier valor de  $\frac{\xi^2}{\tau}$  y  $k$ .

Observamos por tanto que los resultados de regularidad sobre la solución del sistema con datos iniciales débiles, recogidos en la Sección 1.4.2, son la clave para probar la existencia global de la solución, y además nos van a permitir obtener información sobre las soluciones y su comportamiento asintótico en los espacios  $W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$ , que estudiamos en el capítulo dos.

En el segundo capítulo estudiamos la existencia de un atractor global, compacto y conexo para las soluciones del sistema (1.1.8), en estos espacios  $W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$ , el cual contiene la información sobre la dinámica asintótica de las soluciones.

Para ello en primer lugar probamos en la Proposición 2.1.1, la existencia de un atractor maximal para el semigrupo generado por las soluciones de (1.1.1) en el espacio  $H_B^1 \times L_B^2$ , para lo cual utilizamos métodos de operadores disipativos. Para funciones  $g$  polinómicas de grado impar y coeficiente principal positivo esto ha sido ya probado en [7]. Para el caso general introducimos una condición de disipatividad más o menos clásica, [28], sobre  $g$ :

$$\liminf_{|s| \rightarrow \infty} \frac{g(s)}{s} > 0.$$

Posteriormente utilizamos esta información, junto con estimaciones uniformes sobre la norma de las soluciones en  $W_B^{1,p} \times L_B^p$  para  $p \geq 2$ , y en otros espacios más regulares,

basadas en la técnica de la Proposición 1.4.3 y en la fórmula de variación de las constantes, para demostrar que el atractor maximal en  $H_B^1 \times L_B^2$  dado por la Proposición 2.1.1 es también atractor maximal sobre estos espacios. Estas estimaciones uniformes sobre la norma de la solución con datos iniciales en  $W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$  obtenidas a partir de la fórmula de variación de las constantes, están basadas de nuevo en el efecto regularizante de estas soluciones, lo que “cubre” la ausencia de estimaciones de energía por métodos directos, nada fáciles de conseguir en esta situación.

En el estudio de la existencia del atractor maximal, es importante observar que si  $B = D$ , es decir, si trabajamos con condiciones de contorno de tipo Dirichlet, es posible encontrar un atractor maximal compacto y conexo, en el sentido usual. Es decir, que atrae a las soluciones del sistema partiendo de datos iniciales en un acotado del espacio de fases, cuando el tiempo transcurrido tiende a infinito.

Por el contrario si  $B = N$  ó  $B = P$ , es decir si trabajamos con condiciones de contorno de tipo Neumann ó periódicas, se prueba que la solución verifica la propiedad de conservación de la masa, es decir,  $\int_{\Omega} (u + \frac{1}{2}\varphi)$  es constante respecto de  $t$ , y como consecuencia no existe un atractor maximal en el sentido clásico. En estos casos el espacio ambiente  $(\varphi, v = u + \frac{1}{2}\varphi)$ , está dividido en una familia de hiperplanos afines invariantes,

$$Y(m) = H_B^1 \times \{v \in L_B^2(\Omega), \int_{\Omega} v = m\}$$

para cada  $m \in \mathbb{R}$ , de forma que cada uno de estos hiperplanos contiene a un atractor  $\mathcal{A}(m)$ , compacto y conexo que atrae a los acotados de  $Y(m)$ .

De hecho probaremos que hay un atractor maximal  $\mathcal{A}_m$  en

$$Y_m = H_B^1 \times \{v \in L_B^2(\Omega), \left| \int_{\Omega} v \right| \leq m\}$$

para cada  $m \in \mathbb{R}^+$ . Como consecuencia se tiene en primer lugar, que para todo  $m_0 \in \mathbb{R}^+$  y  $|m| \leq m_0$  existe un Atractor Maximal en cada hiperplano que tiene que venir dado por  $\mathcal{A}(m) = \mathcal{A}_{m_0} \cap Y(m)$ .

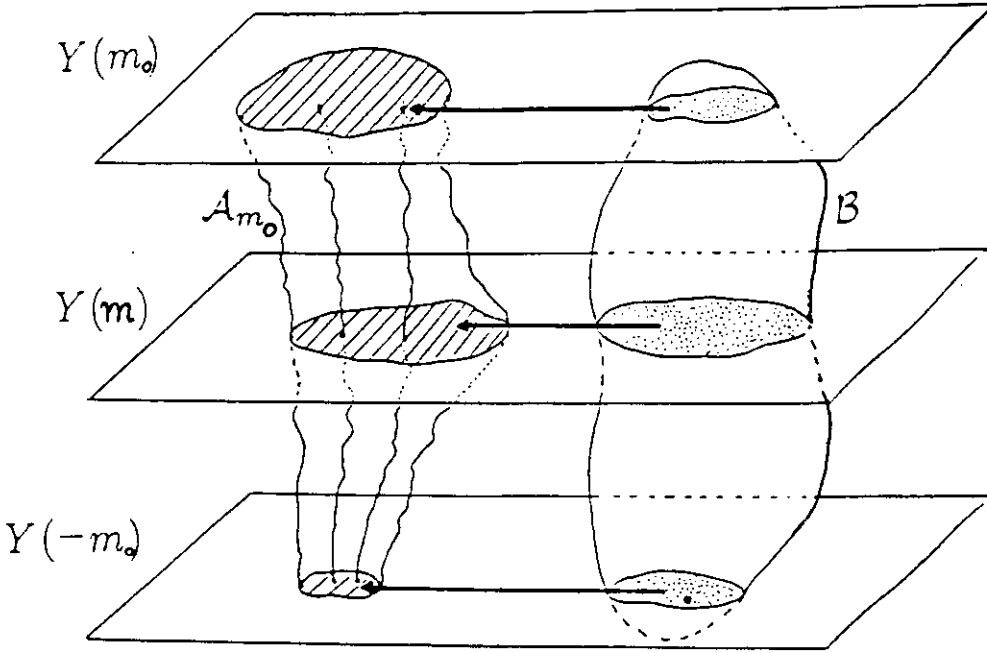
La razón fundamental de considerar  $\mathcal{A}_{m_0} = \cup_{|m| \leq m_0} \mathcal{A}(m)$  en vez de  $\mathcal{A}(m)$ , es que este atractor tiene una propiedad de atracción uniforme en  $|m| \leq m_0$ , es decir si  $\mathcal{B}(m)$  es un acotado de  $Y(m)$  entonces

$$\text{dist}(S(t)\mathcal{B}(m), \mathcal{A}(m)) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow \infty,$$

pero lo que demostraremos es que si además  $\mathcal{B}_{m_0} = \cup_{|m| \leq m_0} \mathcal{B}(m)$  es acotado en  $Y_{m_0}$  obtenemos que

$$\text{dist}(S(t)\mathcal{B}_{m_0}, \mathcal{A}_{m_0}) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow \infty \quad (\text{ver figura}).$$





Observamos además que  $\cup_{m \in \mathbb{R}} \mathcal{A}(m)$  no es acotado en  $\mathcal{Y}$ .

A continuación probaremos que el atractor maximal  $\mathcal{A}$  en  $H_0^1 \times L^2$  dado por la Proposición 2.1.1, es también un atractor maximal en  $W_D^{n,p} \times W_D^{n-1,p}$  para todo  $p \neq 1$  si  $n = 1$ ,  $p \geq \frac{2N}{N+2}$  si  $n = 2$  y para  $N < (n - 1)p$  si  $n \geq 3$ .

Esta prueba se puede trasladar a las condiciones de contorno de tipo Neumann y periódicas, teniendo en cuenta que de nuevo el espacio  $W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$  con  $B = N$  ó  $P$ , está dividido en hiperplanos afines invariantes  $X(m)$  con  $m \in \mathbb{R}$

$$X(m) = W_B^{n,p} \times \{v \in W_B^{n-1,p}(\Omega), \int_{\Omega} v = m\}.$$

de forma que fijado  $m \in \mathbb{R}^+$ , el atractor maximal en  $H_B^1 \times L_B^2$ ,  $\mathcal{A}_m$  dado por la Proposición 2.1.1, es también en los casos anteriores, un atractor maximal en

$$X_m = W_B^{n,p} \times \{v \in W_B^{n-1,p}(\Omega), |\int_{\Omega} v| \leq m\}$$

que atrae uniformemente en  $n$  a todos los acotados de  $X(n)$  con  $|n| \leq m$ .

La existencia de un atractor maximal para el sistema (I.1.8) con condiciones de Dirichlet en  $H_0^1 \times L^2$  y  $g$  una función polinómica de grado impar mayor igual que 3, y coeficiente dominante positivo, se puede encontrar en [6], pero el método utilizado consiste en la construcción de una bola absorbente, por estimaciones de energía, el cual,

al contrario del método de semigrupos disipativos descrito en esta sección, **no** permite obtener información sobre la existencia del atractor maximal cuando se trabaja en un espacio  $W_0^{1,p} \times L^p$  con  $p \neq 2$ .

El siguiente objetivo en el estudio de la dinámica del sistema (I.1.8), consiste en estudiar la estructura del atractor maximal. Puesto que el sistema posee una función de Lyapunov en  $H_B^1 \times L_B^2$ , el atractor viene dado por la variedad inestable del conjunto de puntos de equilibrio, [28]. Esto nos lleva en el capítulo 3, al estudio de la estabilidad del sistema linealizado en un entorno de un punto de equilibrio. Mostraremos que existe un funcional de Lyapunov para el flujo del sistema linealizado,  $\mathcal{F}_L$ , dado por la Proposición 3.2.1, cuyo signo, según se prueba en el Teorema 3.2.1, determina la estabilidad del origen en el sistema linealizado. El principal resultado es el Teorema 3.3.1, en el que se prueba que dicha estabilidad lineal, está determinada por el espectro del operador elíptico de segundo orden,  $L_0 = -\frac{\xi^2}{\tau} \Delta_B + \frac{1}{\tau} g'(\varphi_0)I$ , de forma que si  $\mu_1$  es el primer autovalor de  $L_0$ , se tiene que si  $\mu_1 \geq 0$  el origen es estable, de hecho si  $\mu_1 > 0$  es asintóticamente estable, y si  $B = D$  la inestabilidad del origen equivale al hecho de que  $\mu_1 < 0$ . En el caso  $B = N$  ó  $P$  el origen es inestable si y sólo si el primer autovalor de  $M_0$  es negativo, donde  $M_0(\varphi) = L_0(\varphi) + \frac{1}{\tau|\Omega|} \int_{\Omega} \varphi$ . Se prueban también condiciones suficientes de inestabilidad en estos casos ( $B = N$  ó  $P$ ), por ejemplo, se tiene que si  $\mu_1 < 0$ , y  $\frac{1}{\tau} < |\mu_1|$  entonces el origen es inestable. La demostración de estos resultados está basada en la relación entre el primer autovalor de estos operadores, dada por los cocientes de Rayleigh, y el signo del funcional de Lyapunov  $\mathcal{F}_L$ , para el sistema linealizado.

Como consecuencia, la estabilidad lineal de un punto de equilibrio  $(\varphi_0, u_0)$  del sistema (I.1.8), va a depender sólo de la primera componente  $\varphi_0$ , es decir del campo de fase; más específicamente de  $g'(\varphi_0)$ , según se prueba en el Corolario 3.3.1, lo que nos va a permitir aplicar los resultados de [40] para probar que si consideramos dominios especiales, por ejemplo dominios convexos, para valores de  $\frac{1}{\tau}$  suficientemente pequeños, se tiene que las únicas soluciones estacionarias estables son las constantes.

En el capítulo 4, estudiamos la existencia de soluciones estacionarias del sistema (I.1.8). Para ello, observamos si  $B = N, P$  toda solución estacionaria del sistema (I.1.8), verifica una condición entre sus componentes que nos permite pasar el estudio del sistema de las soluciones estacionarias, al estudio de una sólo ecuación en  $\varphi$  que depende de un parámetro real  $\lambda$ . En primer lugar se establece el diagrama de bifurcación de las soluciones estacionarias constantes, en función del parámetro  $\lambda$ . En la Proposición 4.1.2 se establecen condiciones bajo las cuales las únicas soluciones estacionarias del sistema (I.1.8), son las constantes.

A continuación, consideramos el caso unidimensional con  $\Omega = (0, L)$  y utilizamos

el método del “disparo” para estudiar el número de estas soluciones estacionarias no constantes, bajo condiciones de contorno de tipo Neumann. En el Teorema 4.2.1 se prueba que bajo ciertas condiciones para  $g$  y con  $\lambda$  moviéndose en un intervalo acotado que depende de  $g$ , fijado  $L \in \mathbb{R}^+$ , el número de soluciones estacionarias **no constantes** está por encima de un número determinado por  $\lambda$  y  $g$ .

La dificultad de la demostración del resultado anterior radica principalmente en la dependencia de la no linealidad del parámetro  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Esta dependencia de  $\lambda$ , se refleja en la función potencial, la cual cambia “cualitativamente” para los distintos valores de  $\lambda$  (crecimiento, concavidad, puntos críticos ..., se ven modificados al cambiar  $\lambda$ ), lo que representa una dificultad añadida a este método, en comparación con problemas similares como los que se pueden encontrar por ejemplo en [16], [31] ó [59].

En el caso en el que se consideran condiciones de frontera de tipo Dirichlet, es decir,  $B = D$ , se tiene que  $\lambda = 0$ , y podemos remitirnos al problema de N. Chafee-E.F. Infante, [16], para determinar el número exacto de soluciones estacionarias no constantes, aunque por completitud de la memoria vamos a hacerlo tomando como parámetro la longitud del intervalo  $L$  y utilizando los resultados técnicos del caso anterior. Establecemos así en el Teorema 4.3.1 el número exacto de soluciones estacionarias no constantes respecto de  $L$ .

A pesar de que hemos probado, gracias a los resultados de Matano, [40], que para valores de  $\frac{L}{\tau}$  suficientemente pequeños, cuando se consideran dominios convexos las únicas soluciones estacionarias estables bajo condiciones de tipo Neumann son las constantes, vamos a probar en el siguiente capítulo la existencia de soluciones no constantes y no estacionarias que permanecen durante mucho tiempo con la misma estructura inicial. Estas soluciones están además asociadas a valores muy pequeños de uno de los parámetros físicos del sistema, tal y como pasamos a comentar.

En efecto, en el capítulo 5 consideramos el sistema (I.1.8) en el caso unidimensional, bajo condiciones de contorno de tipo Neumann homogéneas y estudiamos el comportamiento asintótico de la solución  $(\varphi, u)$  del sistema (I.1.8), cuando el espesor de la región de interfase, representado por el parámetro  $\xi$ , tiende a cero.

Probaremos que las soluciones que parten de condiciones iniciales  $(\varphi_0^\xi, u_0^\xi)$ , donde  $\varphi_0^\xi$  tiene estructura de transición de fase, es decir,  $\varphi_0^\xi \sim \pm 1$  excepto en los puntos de transición, y  $u_0^\xi \sim 0$ , tienen la propiedad de mantenerse cerca de esta estructura, durante un intervalo de tiempo que tiende a  $\infty$  cuando  $\xi$  tiende a cero. Estas soluciones que sin ser puntos de equilibrio ni mínimos de energía tienen una evolución muy lenta se denominan **metaestables**.

La idea intuitiva que subyace en la existencia de estas soluciones, proviene del siguiente problema.

Consideramos  $\varphi(t, x)$  solución de regular de la ecuación

$$\varphi_t - \xi^2 \Delta_N \varphi + f(\varphi) = 0,$$

partiendo de un dato inicial muy regular siendo  $f$  una función que se anula en  $1, -1$  y  $0$ , de forma que  $\pm 1$  sean soluciones estacionarias estables y  $0$  inestable. Supongamos  $\xi \ll 1$  de forma que el término  $-\xi^2 \Delta_N \varphi \ll 1$  al menos en intervalo finito de tiempo. Teniendo en cuenta que cualquier solución no nula de la ecuación ordinaria

$$\dot{\psi} + f(\psi) = 0$$

verifica que  $\psi(t) \mapsto \pm 1$  si  $t \mapsto \infty$ , cabe esperar que la solución  $\varphi(t, x)$ , se aproxime a una función suave que toma los valores  $+1$  y  $-1$ .

La existencia de soluciones **metaestables** ha sido abordada anteriormente para ecuaciones de tipo *Cahn – Hilliard*, *Cah – Allen* entre otras, por numerosos autores como J. Carr, R. Pego, [13], [14], [15], G. Fusco, J.K. Hale, [22], L. Bronsard, R. V. Khon, [8], y C.P. Grant, [25].

En [13], [14], [15] se prueba la existencia de soluciones metaestables para ecuaciones del tipo  $u_t = \xi^2 u_{xx} + f(u)$ ,  $x \in (0, 1)$  bajo condiciones de Neumann, que se mueven con velocidades del orden  $e^{-C \frac{1}{\xi}}$ , donde  $C$  es una constante positiva y  $l$  es la mínima distancia entre las transiciones del dato inicial, el cual se toma en una clase de funciones regulares “suficientemente” próxima a una función constante a trozos. En [8], se obtienen soluciones metaestables para el mismo tipo de ecuaciones con restricciones sobre los datos iniciales menos fuertes, pero con una evolución menos lenta, de orden  $\xi^k$  para cualquier  $k$ , sin embargo las técnicas utilizadas en [8], son mucho más elementales a las utilizadas por J. Carr, R. Pego, G. Fusco y J.K. Hale y consisten en **métodos de energía**. Estos métodos han sido utilizados por C. Grant en [25] para probar la existencia de soluciones metaestables para un sistema de tipo Cahn-Hilliard y con evoluciones muy lentas de tipo exponencial, análogas a las obtenidas por J. Carr y R. Pego, por el método de las aproximaciones geométricas, bastante más complicado.

En esta memoria se prueba la existencia de estas soluciones de evolución lenta, para el sistema (I.1.8). El método está basado en que el funcional de energía para el sistema contiene muy poco exceso de energía para disipar (cambiar de fase) cuando  $\xi \mapsto 0$ . De esta forma como la velocidad de variación de la solución está ligada a la disipación de energía, una excasez de energía nos lleva a una evolución muy lenta de la solución. Este es el principio subyacente en [8], [25].

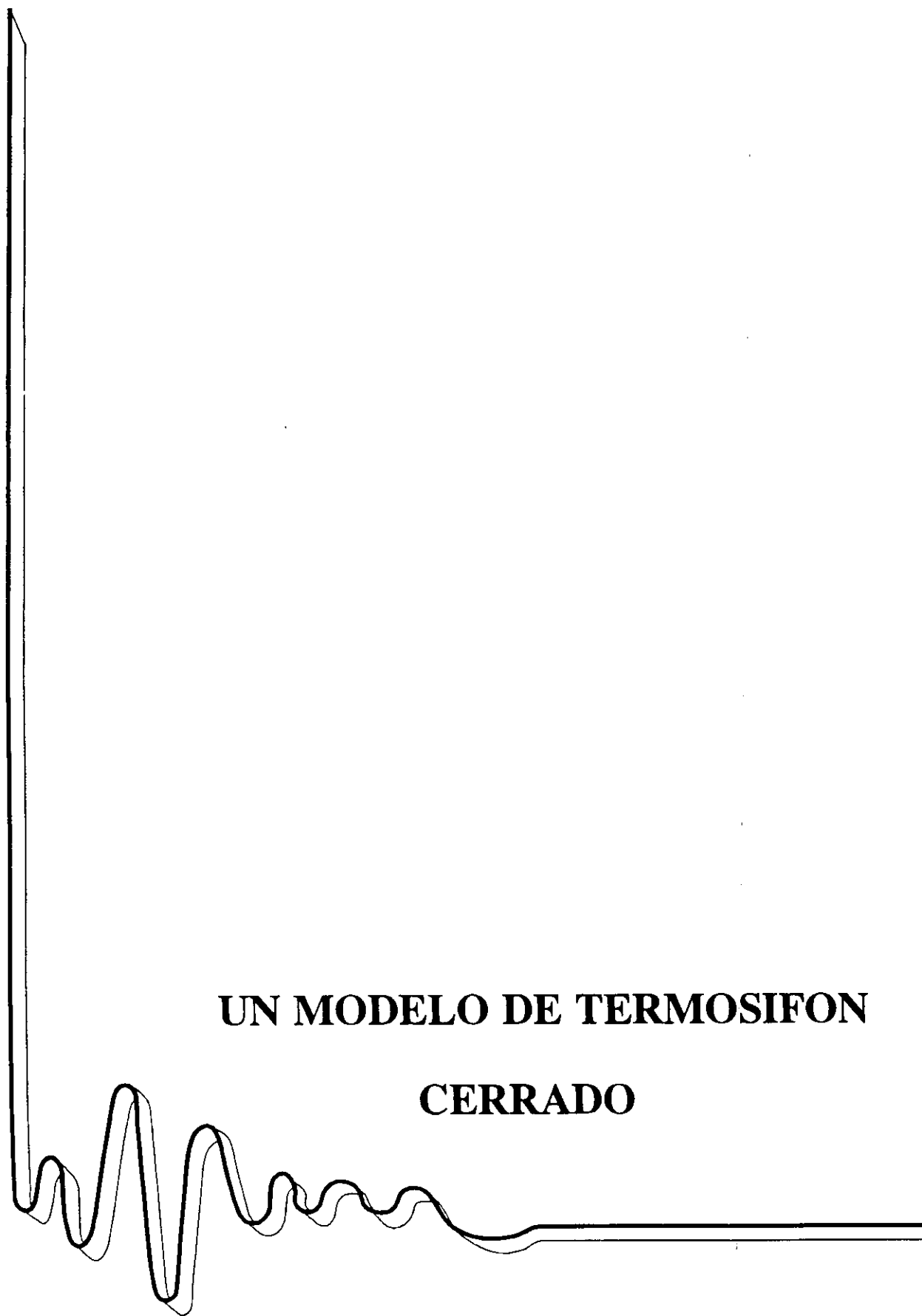
Consideramos el funcional de energía dado por el funcional de Lyapunov del sistema (I.1.8) de la Proposición 1.5.1, escrito de forma que aparece un sumando dependiente sólo

del campo de fase  $\varphi$ , análogo al funcional de energía utilizado por [25]. Como consecuencia hemos podido utilizar algunos lemas técnicos sobre dicho funcional probados en [25] y que son fundamentales para la obtención de estos resultados. De esta forma hemos probado de una forma muy sencilla, la existencia de soluciones de las mismas características para la soluciones  $(\varphi^\xi, u^\xi)$  del sistema (I.1.8), a pesar de trabajar con dos componentes que satisfacen ecuaciones de evolución diferentes.



**UN MODELO DE TERMOSIFON**

**CERRADO**



# CAPITULO 2

## UN MODELO DE TERMOSIFON CERRADO

### 2.1 Origen del modelo

#### 2.1.1 Preliminares

Se conoce con el nombre de **termosifón** a varios modelos de dispositivos formados por circuitos cerrados por los que circula un fluido a temperatura variable.

En estos dispositivos las diferencias de temperatura entre las diferentes partes del circuito y las fuerzas de gravedad inician el movimiento del fluido, observándose la aparición de movimientos convectivos naturales.

De esta forma en estos modelos, junto con la distribución de la temperatura  $T$  dentro del fluido, es necesario estudiar también la de la velocidad de éste  $v$ .

Si además hacemos circular un fluido con dos componentes por el circuito, (fluido binario), es decir añadimos un soluto al líquido inicial, es necesario estudiar además la distribución de la concentración de soluto  $S$ .

Se han obtenido y estudiado varios modelos de termosifón como se pueden ver en [29], [30], [34],[32], [35],[36], [62] y [63]; de todos ellos sólo en [29] se considera un fluido binario. El modelo de termosifón que vamos a estudiar se obtiene a partir del modelo expuesto por [62], al cual nos vamos a referir como **modelo general**. En este modelo se considera un dispositivo cerrado muy "general" por el que circula un fluido con un sólo componente. Considerando un fluido binario circulando por un dispositivo como el descrito en este modelo general, y teniendo en cuenta los experimentos obtenidos con fluidos de este tipo, aunque en dispositivos de geometría más particular (toroidal) [29],



llegaremos al **modelo general de termosifón con efecto Soret**, nombre con el que se conoce en física al fenómeno que consiste en el transporte de materia inducido por flujo de calor, como se puede ver en [27], y que constituye el modelo de termosifón que hemos estudiado. A continuación pasamos a describir el modelo general [62].

### 2.1.2 Modelo general de termosifón

Llamamos modelo general de termosifón a un dispositivo formado por un tubo cerrado de paredes impermeables, por el que circula un fluido incompresible. Suponemos que la sección diametral del dispositivo es constante y pequeña comparada con la dimensión del dispositivo físico, de forma que la geometría queda reducida a una dimensión, es decir, el circuito ha sido reducido a una curva cerrada en el espacio. De esta forma la variable espacial va a ser unidimensional, ya que la posición de un punto del circuito viene dada por la longitud de arco de curva  $s$ , medido desde un punto de referencia arbitrariamente elegido y fijo sobre la curva. Para estudiar el movimiento de dicho fluido, partimos de las ecuaciones de conservación de la masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial s}(\rho u) = 0 \quad (I.2.1)$$

y del momento azimutal

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\partial U}{\partial s} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} u^2 - G(\lambda, |u|)u \quad (I.2.2)$$

como se puede ver en [38], y donde  $\tau$  representa el tiempo,  $s$  la longitud de arco medida desde algún punto de referencia en el circuito,  $\rho(s, \tau)$ ,  $p(s, \tau)$  y  $u(s, \tau)$  denotan respectivamente la densidad, presión y velocidad del fluido.  $U(s)$  representa el potencial debido a las fuerzas de gravedad de forma que  $f_m(s) = -\frac{\partial U}{\partial s}$  representa la componente de las fuerzas de gravedad actuando a lo largo del circuito por unidad de masa. La función  $G$  está asociada a la fricción y depende, además de la velocidad del fluido, del diámetro del circuito,  $D$ , y del llamado coeficiente de Darcy-Weissbach,  $\lambda$ , el cual es una función del número de Reynolds, [62].

La ecuación (I.2.2) se puede deducir de la segunda ley de Newton aplicada a un elemento diferencial de masa  $dm = \rho ds$ . En efecto, multiplicando la ecuación (I.2.2) por el elemento de masa, tendríamos que la fuerza que produce el movimiento del fluido (masa por aceleración) es la resultante entre las fuerzas de presión  $-\frac{\partial p}{\partial s} ds$ , las fuerzas másicas debidas a la gravedad  $-\rho \frac{\partial U}{\partial s} ds$ , las fuerzas de fricción representadas por  $G(\lambda, |u|)u \rho ds$ , y las fuerzas inerciales  $-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} u^2 \rho ds$ .

Por último utilizando resultados estándar de termodinámica, como se puede ver por ejemplo en [33], se tiene la siguiente ecuación para la función de entropía  $\bar{S}(s, \tau)$ :

$$\theta \left( \frac{\partial \bar{S}}{\partial \tau} + u \frac{\partial \bar{S}}{\partial s} \right) = H(\lambda, u, D, \rho) \quad (I.2.3)$$

donde  $\theta = \theta(s, \tau)$  es la temperatura del fluido.

Para llegar a las ecuaciones que modelizan este proceso introduciremos algunas simplificaciones en (I.2.1), (I.2.2) y (I.2.3), que pasamos a describir. En este sentido las funciones  $G$  y  $H$  se eligen de forma que se adapten a los resultados obtenidos experimentalmente.

En primer lugar consideraremos la aproximación clásica de Boussinesq utilizada en los movimientos convectivos de fluidos, como se hizo en [62], según la cual se imponen las dos siguientes condiciones sobre la densidad.

- i) En la ecuación (I.2.1), suponemos que la densidad es constante, de esta forma se tiene que  $\frac{\partial u}{\partial s} = 0$ , es decir la velocidad del fluido  $u$  depende únicamente del tiempo,  $u = u(\tau)$ .
- ii) En la ecuación del momento (I.2.2) consideramos una aproximación lineal de la función densidad en función de  $\theta - \theta_0$ , dada por:

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(\theta - \theta_0)) \quad (I.2.4)$$

donde  $\rho_0$  es constante,  $\theta_0$  representa una temperatura media y  $\alpha$  es el coeficiente de expansión térmica.

De esta forma introduciendo algunas simplificaciones más en la ecuación del momento (I.2.2), llegaremos una ecuación que rige la evolución de la velocidad en función únicamente de la temperatura, y de la geometría del dominio.

- iii) En cuanto a la presión, supondremos que las variaciones de presión son también muy pequeñas comparadas con la presión hidrostática en el equilibrio  $p_h$ , la cual según [62], verifica

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial s} = 0.$$

De esta forma si escribimos  $p = p_h + \bar{p}$ , donde  $\bar{p} \ll p_h$ , tenemos que

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial s} \approx \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial s} + \alpha(\theta - \theta_0) f_m \text{ con } f_m = -\frac{\partial U}{\partial s}. \quad (I.2.5)$$

Por lo tanto, introduciendo las consideraciones anteriores en la ecuación del momento (I.2.2) y teniendo en cuenta que  $\frac{\partial u}{\partial s} = 0$ , obtenemos

$$\frac{du}{d\tau} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial s} + \alpha(\theta - \theta_0) f_m = -G(\lambda, |u|)u. \quad (I.2.6)$$

En cuanto a la geometría del circuito, suponemos que viene descrita por la función  $\bar{z} = \bar{z}(s)$  que representa la variación de altura a lo largo del circuito, por lo tanto llamando  $f_m = -\frac{\partial U}{\partial s}$ , se tiene que  $f_m = -g\frac{d\bar{z}}{ds}$ . De esta forma integrando (I.2.6) a lo largo del circuito, llegamos a la ecuación que rige el movimiento del fluido descrito por una función escalar  $u(\tau)$  que satisface

$$L\frac{du}{d\tau} = g\alpha \int_0^L (\theta - \theta_0)\bar{z}'(s)ds - G(\lambda, |u|)uL \quad (I.2.7)$$

donde  $L$  representa la longitud total del circuito. La ecuación (I.2.7), nos dice que la fuerza que produce el movimiento es el balance entre la fuerza debida a la gravedad (flotación) y la fuerza de fricción representada por el término  $G(\lambda, |u|)uL$ .

Observamos que en el caso particular de un circuito circular, como el descrito en [26], [29], [57] y [39] entre otros, se tiene que  $\frac{d\bar{z}}{ds} \sim \cos(s)$ , y si está situado en un plano inclinado, entonces  $\frac{d\bar{z}}{ds} \sim a\cos(s) + b\sin(s)$ . En un circuito rectangular como en [18], [36], [30] y  $\frac{d\bar{z}}{ds}$  es una función escalonada que toma los valores 0, +1 y -1.

Vamos a ver ahora como introduciendo algunas simplificaciones en la ecuación de la entropía (I.2.3), vamos a llegar a una ecuación que rige la evolución y distribución de la temperatura, dentro del circuito, dependiendo únicamente de la velocidad (y por tanto de la fricción).

iv) Para ello, consideramos la aproximación para la función de entropía dada por [33]:

$$\bar{S} = c_l \log \theta + \bar{S}_0 \quad (I.2.8)$$

con  $\bar{S}_0$  constante. De esta forma de la ecuación (I.2.3), llegamos a la ecuación

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u(\tau)\frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{H}{c_l} \quad (I.2.9)$$

donde  $c_l$  es el calor específico del líquido.

v) Consideramos ahora una función  $H$  tal que

$$\frac{H}{c_l} = h(u)(\theta_a - \theta)$$

donde  $\theta_a$  es la temperatura de la pared, tal y como se puede encontrar en [62], donde se considera el caso particular  $h(u) = G(\lambda, |u|)$ . De esta forma de la ecuación (I.2.3), llegamos a la ecuación que nos describe la distribución de temperatura dentro del circuito, como podemos ver en [62], dada por

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u(\tau)\frac{\partial \theta}{\partial s} = h(u)(\theta_a - \theta) \quad (I.2.10)$$

Consideramos ahora las nuevas variables adimensionales:

$$t = \frac{\tau}{t_0}, x = \frac{s}{L}, v = \frac{u}{v_c}, z = \frac{\bar{z}}{L}, T = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_c} \text{ y } T_a = \frac{\theta_a - \theta_0}{\theta_c} \quad (I.2.11)$$

donde  $\theta_c$  es la temperatura característica,  $v_c$  es la velocidad característica y  $t_0 = \frac{L}{v_c}$ . De esta forma las ecuaciones que gobiernan el movimiento del fluido  $v$  y la distribución de la temperatura  $T$ , dentro del circuito, equivalentes a (I.2.7) y (I.2.10), vienen dadas, sin dimensiones y normalizadas por:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + G(v)v = \oint T \cdot f, & v(0) = v_0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} = h(v)(T_a - T), & T(0, x) = T_0(x) \end{cases} \quad (I.2.12)$$

donde  $x \in (0, 1)$  es la longitud de arco y  $\oint = \int_0^1 dx$ , representa la integración a lo largo de la curva cerrada, que representa "la silueta" del circuito. La función  $f(x)$  es proporcional a  $z'(x)$ , por lo que  $\oint f = 0$  y  $T_a(x)$  es una función dada que representa la temperatura ambiente. Este modelo generaliza los obtenidos en [18], [38],[39], [57].

El tratamiento matemático de estos modelos ha sido llevado a cabo por varios autores entre los que están M.A. Herrero, J.J.L. Velázquez, A. Liñan, A. Rodríguez y E. S. Van Vleck, con los trabajos [32], [38], [39], [51], [52], [53] y [62].

En [32], se prueban resultados de existencia y unicidad de soluciones del modelo descrito por las ecuaciones:

$$\begin{cases} kv|v| = \oint T \cdot f, & k > 0 \quad v(0) = v_0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} = h(x), & T(0, x) = T_0(x) \end{cases}$$

y se analiza la estabilidad de las soluciones estacionarias del problema, probando que son inestables bajo pequeñas perturbaciones de la geometría del circuito o del calentamiento del mismo.

En [62] se deducen las ecuaciones de (I.2.12) y se describe un marco funcional donde se obtienen resultados de existencia global soluciones. En este trabajo se expone la dependencia de la función  $h(v)$  del número de Reynolds, y se caracterizan las soluciones estacionarias cuando el número de Reynolds es muy grande, haciendo un estudio exhaustivo de su estabilidad.

En [51], se prueba que (I.2.12) define una única solución, para datos iniciales de velocidad y temperatura en un espacio de fases muy general, que viene determinado por las propiedades de las funciones  $f$  y  $T_a$ . Se prueba también la existencia de un atractor global y de una variedad inercial para el sistema (I.2.12), es decir una variedad invariante

que atrae exponencialmente al flujo del sistema (I.2.12). Se prueba la existencia de un conjunto explícito de ecuaciones diferenciales ordinarias que describen el comportamiento asintótico del sistema. Además se puede conseguir que el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias esté formado por un número impar de ecuaciones (arbitrariamente elegido a priori), eligiendo convenientemente las funciones  $f$  y/o  $T_a$ , es decir diseñando adecuadamente la geometría y/o el calentamiento  $T_a$ .

En [52] se analiza el comportamiento de las soluciones para diferentes rangos de los parámetros físicos del sistema, obteniendo modelos de Lorenz para un determinado rango de dichos parámetros. Finalmente se desarrollan experimentos numéricos para modelos en los que se consideran tres o cinco modos del desarrollo de Fourier asociado a las funciones  $f$  y  $T_a$ . En [53], se hace un estudio paralelo para las ecuaciones que se obtienen al considerar un término de difusión en la ecuación del sistema (I.2.12) que describe la temperatura.

El siguiente objetivo de esta memoria, es conseguir probar resultados análogos a los expuestos en [51], para el modelo con un fluido binario, que pasamos a describir a continuación, en el que se estudia además la evolución de una nueva función incógnita que representa la concentración de una de las sustancias del fluido.

### 2.1.3 Ecuaciones del modelo general con efecto Soret

Recientemente hay un interés considerable en los fenómenos convectivos de doble difusión que aparecen al considerar en el termosifón un fluido binario, con dos componentes, agua y anticongelante, por ejemplo, y que llamaremos disolvente y soluto. Por esa razón en un circuito cerrado como el descrito en la sección anterior, denominado modelo general de termosifón, vamos a hacer circular un fluido binario, llegando así al termosifón denominado modelo general con efecto Soret, que pretendemos estudiar.

En este modelo aparecen por una parte las fuerzas convectivas debidas al intercambio de calor entre el fluido y el medio ambiente, en las que intervienen las fuerzas de gravedad, y por otra parte las fuerzas de doble difusión debidas al intercambio molecular entre los dos componentes del fluido (se supone que no hay reacción entre los componentes) y la difusión de calor.

Vamos a considerar los movimientos convectivos debidos a fluctuaciones internas de soluto generadas por un gradiente de temperatura. Este hecho se conoce con el nombre de efecto Soret y ha sido estudiado experimentalmente por varios autores entre los que se encuentra J.E. Hart [30], [29]. En estos modelos además de la distribución de la temperatura  $T$  y la velocidad del fluido  $v$ , se estudia la concentración del soluto en tanto por ciento  $S$ , que llamaremos salinidad, aunque el soluto podría ser cualquier sustancia

soluble. Vamos a ver como surge la ecuación que rige la evolución de la salinidad  $S$ , y como influye dicha salinidad en la variación de la velocidad del fluido.

Para llegar a las ecuaciones que modelizan este proceso haremos algunas simplificaciones. Consideramos un modelo de dispositivo físico por el que circula el fluido de las mismas características que en el modelo general de la sección anterior, por lo que las funciones que describen la distribución de temperatura y de soluto, son funciones cuya variación espacial es unidimensional.

Consideramos, al igual que en el modelo anterior (I.2.12), que la velocidad depende sólo del tiempo y que la fricción está representada por una función continua y positiva  $G(v)$ .

Supondremos también que tiene una difusividad térmica y una difusividad del soluto, constantes. De esta forma tenemos la siguiente ecuación de estado, [29]:

$$\rho = \rho_0[1 - \alpha(\theta - \theta_0) + \beta(S^* - S_0^*)] \quad (I.2.13)$$

donde  $\theta$  y  $S^*$  representan la temperatura y salinidad, respectivamente, con  $\theta_0$  y  $S_0^*$  temperatura y salinidad media,  $\alpha$  es el coeficiente de expansión térmica y  $\beta$  es el de expansión volumétrica. En esta ecuación queda de manifiesto el siguiente hecho:

*Un aumento de la temperatura representa una disminución de la densidad (y como consecuencia de la fricción), mientras que una mayor concentración de soluto implica un aumento de la densidad (y por tanto de la fricción).*

Como consecuencia aparece una fuerza ascensional (fuerza de flotación) ejercida por la salinidad y la temperatura, que induce el movimiento del fluido.

De este modo, partiendo de la ecuación del momento (I.2.2), y considerando ahora la aproximación lineal de la función densidad dada por (I.2.13) como se puede ver en [29]. Un desarrollo paralelo al del modelo anterior, nos permite obtener la ecuación

$$\frac{du}{d\tau} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial s} + [\alpha(\theta - \theta_0) - \beta(S^* - S_0^*)]f_m = -G(\lambda, |u|)u \quad (I.2.14)$$

donde la función  $\bar{z} = \bar{z}(s)$  representa la variación de altura a lo largo del circuito, por lo tanto llamando  $f_m = -\frac{\partial U}{\partial s}$ , se tiene que  $f_m = -g \frac{d\bar{z}}{ds}$ . De esta forma integrando (I.2.14) a lo largo del circuito, llegamos a la ecuación que rige el movimiento del fluido y que viene dada por

$$L \frac{du}{d\tau} = g \int_0^L [\alpha(\theta - \theta_0) - \beta(S^* - S_0^*)] \bar{z}'(s) ds - G(\lambda, |u|)uL \quad (I.2.15)$$

donde  $L$  representa la longitud total del circuito.

Llegamos así a la ecuación sin dimensiones y normalizada que rige las variaciones de velocidad en el fluido

$$\frac{dv}{dt} + G(v)v = \phi(T - S).f, v(0) = v_0$$

donde  $T$  y  $v$  vienen dadas por (I.2.11),  $S$  es proporcional a  $S^* - S_0^*$  y  $f$  a  $z'(s)$ .

Esta ecuación pone de manifiesto el hecho siguiente:

*La circulación media es generada por la fuerza de ascensión (o flotación) debida a la temperatura, y es retardada por la fricción de la pared y la salinidad.*

ii) Supondremos como en [29], que el soluto no influye en la variación de la temperatura, por lo que las variaciones de temperatura vienen regidas por la segunda ecuación de (I.2.12) deducida para el modelo anterior, es decir

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} = h(v)(T_a - T)$$

iii) Para llegar a la ecuación de la distribución de soluto dentro del circuito, partimos de la ley de conservación de la cantidad de soluto

$$\frac{d}{dt} \int_W S(t, x) dx = - \int_{\partial W} (J.n) ds \quad (I.2.16)$$

donde  $n$  representa el vector normal exterior al borde de  $W$ , para cualquier  $W$  regular cuyo cierre esté contenido en el dominio y  $J$  representa la velocidad del flujo de soluto.

Aplicando ahora el teorema de Gauss-Ostrogadsky, es decir

$$\int_W \operatorname{div}(J) dx = \int_{\partial W} (J.n) ds$$

se tiene que (I.2.16) es equivalente a:

$$\int_W \left[ \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(J) \right] dx = 0 \text{ para todo } W \subset \subset \Omega$$

de donde llegamos a:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(J) = 0 \text{ para todo } x \in \Omega, t \geq 0. \quad (I.2.17)$$

En nuestro caso la variable espacial  $x$  es unidimensional, y como consecuencia el flujo  $J$  vendrá representado por una función escalar.

Como se puede ver en [34] el flujo molecular de salinidad  $F_s$ , en un fluido no isotérmico viene dado por:

$$F_s = D_s [\Gamma \nabla T - \nabla S] \text{ con } \Gamma = \Gamma^* S_0 (1 - S_0) \quad (I.2.18)$$

donde  $D_s$  es la constante de difusividad de soluto,  $S_0$  es la salinidad de referencia y  $\Gamma^*$  es el coeficiente de Soret.

Supondremos también que las fluctuaciones de salinidad son *generadas por la difusión de Soret y reducidas por la difusión molecular*, lo que se recoge en la expresión de  $F_s$ , y además al igual que las de la temperatura, *transportadas con ayuda de la velocidad*. Por esta razón, para llegar a la ecuación normalizada que nos proporciona la distribución del soluto, tomaremos como función de flujo  $J$ , en la ecuación (I.2.17) de conservación de soluto

$$J(t, x, S) = F_s(t, x) + vS \quad \text{con} \quad F_s = b \frac{\partial T}{\partial x} - c \frac{\partial S}{\partial x} \quad (I.2.19)$$

De esta forma teniendo en cuenta que  $\overline{\text{div}(J)} = \frac{\partial J}{\partial x} = b \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - c \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + v \frac{\partial S}{\partial x}$ , de la ecuación (I.2.17), se obtiene

$$\frac{\partial S}{\partial t} + v \frac{\partial S}{\partial x} = c \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - b \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Llegamos así a las ecuaciones que gobiernan el movimiento del fluido y las distribuciones de la temperatura y la concentración de soluto, dentro del circuito, que sin dimensiones y normalizadas vienen dadas por:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + G(v)v = \phi(T - S).f, & v(0) = v_0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} = h(v)(T_a - T), & T(0, x) = T_0(x) \\ \frac{\partial S}{\partial t} + v \frac{\partial S}{\partial x} = c \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - b \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, & S(0, x) = S_0(x) \end{cases} \quad (I.2.20)$$

con  $b, c > 0$ .

Consideraremos  $G$  y  $h$ , funciones continuas conocidas, tales que  $G(v) \geq G_0 > 0$ , y  $h(v) \geq h_0 > 0$ , para  $G_0$  y  $h_0$  constantes positivas dadas. Es importante además observar que todas las funciones, son periódicas respecto de la variable espacial, de período uno.

## 2.2 Descripción de resultados

La segunda parte de esta memoria está dedicada al estudio de las ecuaciones (I.2.20) y está dividida en dos capítulos. En el primer capítulo, se prueba que (I.2.20) define una única solución, para datos iniciales de velocidad, temperatura y salinidad, en un espacio de fases adecuado.

La elección de estos espacios funcionales, que constituirán nuestro marco de trabajo, va a depender de las propiedades de las funciones  $f$  y  $T_a$ , las cuales a su vez están relacionadas con la geometría del circuito y la temperatura ambiente, respectivamente.



En particular en el Teorema 1.3.1, se prueba la existencia global de soluciones para el sistema (1.2.20), bajo las hipótesis de que  $H(r) = rG(r)$  sea localmente Lipschitz,  $T_a \in H_{per}^2$ ,  $f \in L_{per}^2$  y que los datos iniciales de velocidad  $v_0$ , temperatura  $T_0$  y salinidad  $S_0$ , verifican  $(v_0, T_0, S_0) \in \mathbb{R} \times H_{per}^2 \times L_{per}^2$ . Para demostrar estos resultados de existencia global, se prueban inicialmente resultados de existencia local, mediante la aplicación de un Teorema de punto fijo, y a continuación se prueban estimaciones de la norma de cada una de las tres componentes de la solución en intervalos de tiempo finito, que permiten asegurar la existencia de la solución para todo instante de tiempo positivo.

Al final de este primer capítulo, en la Proposición 1.3.1, se estudia la existencia y el comportamiento asintótico con  $t \mapsto \infty$  de soluciones que son constantes respecto de la variable espacial.

Por último en el capítulo 2, estudiamos el comportamiento asintótico de las soluciones del sistema (1.2.20). En primer lugar observamos que como consecuencia de la periodicidad de  $S$  y  $T$ , se tiene que  $\oint S$  es constante respecto del tiempo  $t$ . Por tanto  $\oint S(t) = \oint S_0$  para todo  $t \geq 0$  y por consiguiente **no existe** un atractor global en el sentido clásico, para el flujo dado por el sistema (1.2.20) en el espacio  $\mathbb{R} \times H_{per}^2 \times L_{per}^2$ , tal y como ocurría en el estudio de la dinámica de las ecuaciones de campo de fase cuando  $B = N$  ó  $B = P$ , estudiadas en la primera parte de esta memoria. Debido a esta propiedad de conservación de la masa para la salinidad  $S$ , para cada  $m_0$  constante, tendríamos que estudiar la existencia de un atractor  $\mathcal{A}_{m_0}$  en el espacio  $\mathbb{R} \times H_{per}^2 \times V_{m_0}$  donde  $V_{m_0} = \{S \in L_{per}^2, \oint S = m_0\}$ . A continuación se prueba que si  $\oint T_a = 0$ , entonces el espacio de fases que se obtiene considerando las dos últimas componentes de media nula, es decir,  $\mathbb{R} \times \dot{H}_{per}^2 \times \dot{L}_{per}^2$  es invariante. Más aún se puede reducir el estudio del comportamiento de las soluciones a este caso, con un simple cambio de variables. Por lo tanto en este capítulo consideraremos que todas las funciones periódicas del sistema tienen media nula, es decir trabajaremos en  $\mathcal{Y} = \mathbb{R} \times \dot{H}_{per}^2 \times \dot{L}_{per}^2$ .

Consideramos el semigrupo  $S^*(t)$  generado por las soluciones de (1.2.20) dado por el Teorema 1.3.1 sobre el espacio  $\mathcal{Y}$ , y probaremos en el Teorema 2.1.1, la existencia de un atractor maximal para el flujo dado por  $S^*(t)$  en  $\mathcal{Y}$ . Para ello vamos a aplicar la Proposición 0.3.2 y el Teorema 0.3.1 del apéndice, siguiendo las técnicas utilizadas en el trabajo [51] para el termosifón sin efecto Soret. Para ésto probamos en primer lugar que  $S^*(t)$  es un semigrupo **puntualmente disipativo** sobre  $\mathcal{Y}$ , es decir que existe un conjunto acotado  $B \subset \mathcal{Y}$  que atrae a las soluciones del sistema cuando  $t \mapsto \infty$ . Para probar esta propiedad establecemos estimaciones de la norma de la solución  $(v, T, S)(t)$  en función de las normas de  $T_a$  y  $f$  e independientes de  $v_0, T_0$  y  $S_0$ . En segundo lugar, observamos que  $S^*(t)$  no es un semigrupo compacto, ya que tenemos en el sistema una ecuación de

transporte (para  $T$ ), pero se puede descomponer como suma de dos operadores, de forma que uno de ellos tiende a cero, sobre acotados, cuando  $t \mapsto \infty$ , y el otro es completamente continuo, lo cual es suficiente para concluir el resultado. Este tipo de técnica se ha empleado ya en [51] y también en el contexto de las ecuaciones hiperbólicas, situación en la que tampoco se tiene que el semigrupo es compacto, [28], [54], [65].

A continuación se consideran los desarrollos de Fourier complejos asociados a las funciones que intervienen en el sistema (I.2.20), representando temperatura y salinidad. En la Proposición 2.1.2, se obtienen las ecuaciones que verifican los coeficientes o modos de Fourier, correspondientes a estos desarrollos y trabajando con ellos, obtenemos en el Corolario 2.1.1, estimaciones de la norma de la solución, que recuperan y mejoran, de forma considerable en algunos casos, las obtenidas por los métodos de estimaciones de energía.

Estas estimaciones de la norma nos permitirán ver en primer lugar un efecto regularizante asintótico sobre la solución, a pesar de que la segunda componente  $T$  verifica una ecuación de transporte, lo cual nos llevará a probar en el Corolario 2.1.1, un resultado sobre la regularidad del atractor maximal del Teorema 2.1.1.

En una segunda instancia, estas estimaciones sobre la norma de los modos de Fourier, nos llevarán a probar en el Teorema 2.2.1, la existencia de una variedad inercial (variedad invariante que atrae con tasa exponencial a las soluciones del sistema con  $t \mapsto \infty$ ) para el flujo generado por las soluciones del sistema (I.2.20). Veremos que esta variedad tiene una dimensión no necesariamente finita y depende principalmente de la temperatura ambiente  $T_a$ . Como consecuencia de la existencia de esta variedad se tiene la reducción del número de modos relevantes en el comportamiento asintótico de las funciones incógnitas  $T$  y  $S$  del sistema. De tal forma que es posible la construcción explícita de estas variedades para una elección de un número de modos relevantes de  $T_a$  y  $f$ . Como consecuencia podemos describir la dinámica del sistema inicial por un subsistema reducido que está formado por un número impar de ecuaciones diferenciales ordinarias.

En efecto, se prueba que la dinámica del sistema (I.2.20), va a depender únicamente de los coeficientes de  $T$  y  $S$ , que pertenecen al conjunto  $K \cap J$ , donde  $K$  representa el conjunto de coeficientes no nulos del desarrollo de Fourier de  $T_a$  (temperatura ambiente) y  $J$  al de los coeficientes no nulos de  $f$  (función asociada a la geometría del dominio). Por otra parte, puede que  $K$  y  $J$  sean conjuntos infinitos pero su intersección sea finita, como ocurre por ejemplo en el caso de geometría circular donde  $J = \{\pm 1\}$ . En este caso, se prueba en el Corolario 2.2.2, que entonces su cardinal es par, es decir  $\text{card}(K \cap J) = 2n_0$ , y el comportamiento asintótico del sistema (I.2.20), viene dado por un sistema de  $N = 4n_0 + 1$ , número impar de ecuaciones, acopladas en  $\mathbb{R}^N$ , que determinan  $(v, a_k, d_k)$ ,  $k \in$

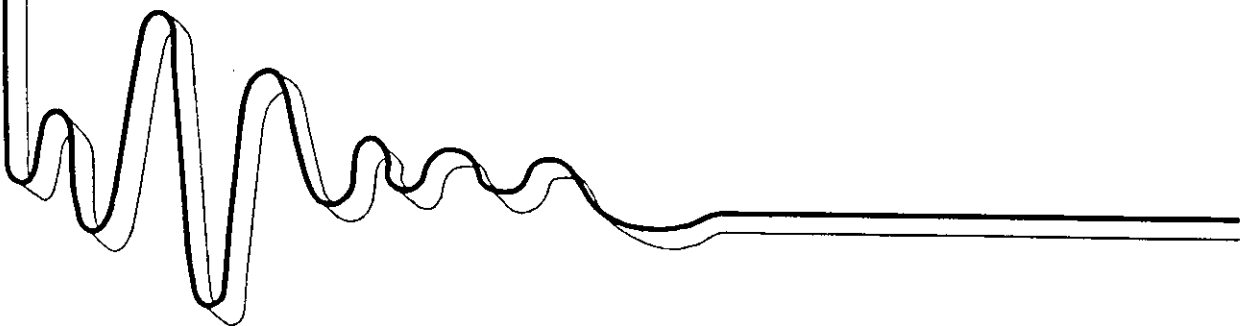
$K \cap J$ , y una familia de  $K \setminus (K \cap J)$  ecuaciones lineales no autónomas, desacoplada con el sistema anterior, donde  $a_k$  y  $d_k$  representan los modos de Fourier correspondientes a la temperatura  $T$  y la salinidad  $S$ , respectivamente.

Por lo tanto el estudio del comportamiento asintótico de las soluciones del sistema, se reduce en una primera etapa a la variedad inercial determinada de forma explícita y en una segunda etapa, el estudio sobre la variedad queda reducido a un sistema de ecuaciones ordinarias dadas de forma explícita, con muchas menos variables. El número de estas variables, es el cardinal de la intersección de los conjuntos de modos no nulos de  $T_a$  y  $f$ , de forma que el conjunto de modos se puede elegir arbitrariamente fijando  $T_a$  ó  $f$  y “diseñando” la otra. Una vez resuelto este sistema reducido los demás modos verifican ecuaciones lineales no autónomas.

Finalmente, se prueba en el Corolario 2.2.2, que si  $K \cap J = \emptyset$ , entonces el atractor maximal se reduce a un punto, a saber  $\mathcal{A} = \{(0, T_a, \frac{b}{c}T_a)\}$ .

# I PARTE

**ECUACIONES DE CAMPOS DE FASE**







**EXISTENCIA Y UNICIDAD  
DE SOLUCIONES**

# CAPITULO 1

## EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES

### 1.1 Preliminares

En este capítulo estudiamos en primer lugar la existencia de soluciones del sistema de ecuaciones de campo de fase dado por:

$$\begin{cases} \tau \varphi_t &= \xi^2 \Delta \varphi - g(\varphi) + 2u & \text{en } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u_t + \frac{l}{2} \varphi_t &= k \Delta u & \text{en } \Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (1.1.1)$$

donde  $\Omega$  es un abierto acotado de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$  con frontera regular,  $g(\varphi)$  es típicamente  $\frac{1}{2}(\varphi^3 - \varphi)$ , aunque nosotros consideraremos una función más general, suficientemente regular. Por último  $l$  y  $k$  son constantes positivas que hacen referencia al calor latente y a la difusividad, respectivamente, mientras que  $\tau$  y  $\xi$  son parámetros positivos que hacen referencia a escalas de tiempo y longitud.

Consideraremos junto a (1.1.1) alguna de las siguientes condiciones de frontera, consideradas en la literatura existente:

Condiciones de Dirichlet

$$u = \varphi = 0 \text{ en } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \quad (1.1.2)$$

consideradas en [4], [6], [7], [9] y [20] entre otros.

Condiciones de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \quad (1.1.3)$$

donde  $n$  representa el vector normal exterior en  $\partial\Omega$ , como se pueden encontrar en [4], [6], [7], [20] y [64].

Condiciones Periódicas sobre  $\Omega = \prod_{i=1}^N (0, L_i)$ ,  $L_i > 0$

$$\varphi|_{x_i=0} = \varphi|_{x_i=L_i}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}|_{x_i=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}|_{x_i=L_i}, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.1.4)$$

$$u|_{x_i=0} = u|_{x_i=L_i}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}|_{x_i=0} = \frac{\partial u}{\partial x_i}|_{x_i=L_i}, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.1.5)$$

es decir  $u, \varphi$  y sus derivadas coinciden en caras opuestas de  $\partial\Omega$ . Estas condiciones de frontera son consideradas entre otros en [6], [7] y [20].

Finalmente, consideraremos la condición inicial en  $t = 0$ , que viene dada por:

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (1.1.6)$$

En primer lugar vamos a realizar un cambio de variable en dicho sistema, que lo transforme en una ecuación de evolución. Consideramos la función de entalpía  $v = u + \frac{l}{2}\varphi$  que nos permite expresar el sistema (1.1.1) de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \tau \varphi_t = \xi^2 \Delta \varphi - g(\varphi) - l\varphi + 2v & \text{en } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ v_t = k \Delta v - \frac{kl}{2} \Delta \varphi & \text{en } \Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (1.1.7)$$

donde  $\varphi, v$  satisfacen una de las condiciones de frontera mencionadas anteriormente, (1.1.2), (1.1.3), o (1.1.4)-(1.1.5) y con condición inicial  $\varphi_0$  y  $v_0 = u_0 + \frac{l}{2}\varphi_0$ . Podemos expresar así el sistema (1.1.7) como:

$$\begin{cases} \varphi_t = k_1 \Delta \varphi - h(\varphi) - b\varphi + av \\ v_t = k_2 \Delta v - c \Delta \varphi \end{cases} \quad (1.1.8)$$

donde:

$$k_1 = \frac{\xi^2}{\tau} > 0, \quad k_2 = k > 0, \quad a = \frac{2}{\tau} > 0, \quad b = \frac{l}{\tau} > 0, \quad c = \frac{kl}{2} > 0, \quad h(\varphi) = \frac{1}{\tau}g(\varphi). \quad (1.1.9)$$

De esta forma tenemos una ecuación de evolución que puede ser escrita en forma abstracta como

$$U_t + AU = G(U)$$

donde  $U = (\varphi, v)$ .  $A$  representa la parte lineal y  $G$  la no lineal. La condición inicial es  $U(x, 0) = (\varphi_0(x), v_0(x))$ , y además se verifica alguna de las condiciones de frontera definidas anteriormente.



## 1.2 Marco Funcional

Vamos a denotar por  $-\Delta_D$  el operador laplaciano en  $L^p(\Omega)$ ,  $1 < p < \infty$  con condiciones de frontera de tipo Dirichlet (1.1.2), es decir definido en

$$W_D^{2,p} = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega).$$

Análogamente  $-\Delta_N$  representa al laplaciano en  $L^p(\Omega)$ ,  $1 < p < \infty$  con condiciones de frontera de tipo Neumann (1.1.3), es decir definido en

$$W_N^{2,p} = \{u \in W^{2,p}(\Omega), \frac{\partial u}{\partial n} = 0\}.$$

Finalmente  $-\Delta_P$  representa al laplaciano con condiciones de frontera periódicas (1.1.4)-(1.1.5), en

$$L_{per}^p(\Omega) = \{u \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^N), u(x + L_i e_i) = u(x), c.t.p. \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad \forall i = 1, \dots, N\}$$

con dominio  $W_P^{2,p} = W_{per}^{2,p}(\Omega)$ , donde  $\Omega = \prod_{i=1}^N (0, L_i)$ ,  $L_i > 0$  y

$$W_{per}^{m,p}(\Omega) = W_{loc}^{m,p}(\mathbb{R}^N) \cap L_{per}^p(\Omega)$$

dotado de la topología de  $W^{m,p}(\Omega)$ , siendo

$$W_{loc}^{m,p}(\mathbb{R}^N) = \{u \in W^{m,p}(\omega), \forall \omega \subset\subset \mathbb{R}^N\}.$$

Muchos de los resultados que vamos a exponer son válidos en cualquiera de los tres tipos de condiciones de frontera que hemos mencionado, por ello para considerar los tres casos simultáneamente, usaremos la notación  $-\Delta_B$  donde  $B$  representa cualquiera de los tres tipos de condiciones de frontera considerados, es decir,  $D$ ,  $N$  o  $P$ .

Vamos a utilizar notaciones y resultados conocidos sobre espacios funcionales asociados a un operador sectorial, que se pueden encontrar en el apéndice. En particular por la Proposición 0.1.2 del apéndice, si  $1 < p < \infty$ , el operador  $-\Delta_B$  en  $L_B^p$  con dominio  $W_B^{2,p}$ , es un operador sectorial con resolvente compacta y sus espacios de potencias fraccionarias son  $W_B^{2\alpha,p} = X^\alpha = D[(-\Delta_B + \mu I)^\alpha] \hookrightarrow W^{2\alpha,p}$  espacio de Sobolev. Además según se ve también en el apéndice, por ser  $p \neq 1$  se pueden definir los espacios de exponente negativo por (0.1.19), i.e.  $W_B^{2\alpha,p}(\Omega) = (W_B^{-2\alpha,p'}(\Omega))'$  con  $p' = \frac{p}{p-1}$  y  $\alpha < 0$ , gracias a los resultados sobre interpolación y extrapolación de semigrupos, en particular los resultados recogidos en el Teorema 8.1, página 229 de [1].

Con estas notaciones, podemos escribir el sistema (1.1.8), sujeto a alguna de las condiciones de frontera mencionadas (1.1.2), (1.1.3) o (1.1.4)-(1.1.5), como

$$U_t + A_B U = G(U) \quad (1.2.1)$$

donde

$$U = (\varphi, v), \quad A_B = \begin{pmatrix} -k_1 \Delta_B & -aI \\ c\Delta_B & -k_2 \Delta_B \end{pmatrix} \quad (1.2.2)$$

y

$$G(U) = G \begin{pmatrix} \varphi \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h(\varphi) - b\varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.2.3)$$

### 1.3 El semigrupo lineal

En primer lugar vamos a ver que el operador  $A_B$  genera un semigrupo analítico, para lo cual probaremos que  $A_B$  es un operador sectorial si se considera actuando sobre espacios de funciones "adecuados". En esta prueba utilizaremos el resultado de perturbación dado por el Lema 0.1.3 del apéndice. Para ello consideramos  $A_B$  como suma del operador sectorial dado por la parte diagonal,  $A_0$ , y la perturbación subordinada,  $P$ . La dificultad principal de la prueba se debe al hecho de tener una perturbación  $P$  con un término  $c\Delta_B \varphi$  que es del mismo orden que la parte diagonal de  $A_B$ . Eso nos obliga a trabajar en un espacio ambiente  $Y_B = W_B^{2\alpha,p} \times W_B^{2\beta,p}$  con distintas potencias  $\alpha$  y  $\beta$ , de forma que trabajando con distintas topologías en cada componente se puede compensar la dificultad que presenta  $P$ .

**Proposición 1.3.1** *Si  $1 < p < \infty$ , para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tales que  $0 < \alpha - \beta < 1$ , el operador*

$$A_B = \begin{pmatrix} -k_1 \Delta_B & -aI \\ c\Delta_B & -k_2 \Delta_B \end{pmatrix} \quad (1.3.1)$$

*es sectorial en  $W_B^{2\alpha,p} \times W_B^{2\beta,p}$  con dominio  $D(A_B) = W_B^{2(\alpha+1),p} \times W_B^{2(\beta+1),p}$ .*

*De esta forma  $-A_B$  genera un semigrupo analítico en  $W_B^{2\alpha,p} \times W_B^{2\beta,p}$ , que denotamos  $\{e^{-A_B t}\}_{t \geq 0}$ , y los espacios de potencias fraccionarias de  $A_B$  vienen dados por  $(W_B^{2\alpha,p} \times W_B^{2\beta,p})^\epsilon = W_B^{2(\alpha+\epsilon),p} \times W_B^{2(\beta+\epsilon),p}$  para todo  $0 \leq \epsilon \leq 1$ .*

**Demostración:**

Podemos escribir el operador  $A_B = A_0 + P$  con

$$A_0 = \begin{pmatrix} k_1(-\Delta_B + I) & 0 \\ 0 & k_2(-\Delta_B + I) \end{pmatrix} \text{ y } P \begin{pmatrix} \varphi \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 \varphi - av \\ c\Delta_B \varphi - k_2 v \end{pmatrix}.$$

Como de la Proposición 0.1.2 del apéndice se tiene que para todo  $\delta > 0$ , el operador  $\delta(-\Delta_B + I)$  es sectorial en  $W_B^{2\gamma,p}$  con dominio  $W_B^{2(\gamma+1),p}$ , y como consecuencia del Teorema 8.1, pag. 229, de [1],  $A_0$  es un operador sectorial en  $Y_B = W_B^{2\alpha,p} \times W_B^{2\beta,p}$  para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  con  $Y_B^\nu = D(A_0^\nu) = W_B^{2(\alpha+\nu),p} \times W_B^{2(\beta+\nu),p}$ ,  $\nu \geq 0$ .

Si  $\beta < \alpha < \beta + 1$ , vamos a probar que el operador  $P$  está “subordinado” al operador  $A_0$ , es decir, verifica las hipótesis del Lema 0.1.3 del apéndice. En efecto  $P$  es un operador lineal en  $Y_B = W_B^{2\alpha,p} \times W_B^{2\beta,p}$  con dominio

$$\begin{aligned} D(P) &= \{(\varphi, v) \in W_B^{2\alpha,p} \times W_B^{2\beta,p} / -k_1\varphi - av \in W_B^{2\alpha,p} \text{ y } c\Delta_B\varphi - k_2v \in W_B^{2\beta,p}\} = \\ &= (W_B^{2\alpha,p} \cap W_B^{2(\beta+1),p}) \times (W_B^{2\beta,p} \cap W_B^{2\alpha,p}) = W_B^{2(\beta+1),p} \times W_B^{2\alpha,p}. \end{aligned}$$

Como  $0 < \alpha - \beta < 1$  existe  $\nu \in [\frac{1}{2}, 1)$  con  $0 < 1 - \nu \leq \alpha - \beta \leq \nu < 1$  y por lo tanto  $W_B^{2(\alpha+\nu),p} \subset W_B^{2(\beta+1),p}$  y  $W_B^{2(\beta+\nu),p} \subset W_B^{2\alpha,p}$ , de donde obtenemos que  $Y_B^\nu \subset D(P)$ .

Por tanto sólo queda por probar que existe una constante positiva  $C$  tal que  $\|P(\varphi, v)\|_{Y_B} \leq C\|(\varphi, v)\|_{Y_B^\nu}$ , para todo  $(\varphi, v) \in Y_B^\nu$ , donde  $\|(\varphi, v)\|_{Y_B^\nu} = k_1\|\varphi\|_{\alpha+\nu} + k_2\|v\|_{\beta+\nu}$ . En efecto

$$\begin{aligned} \|P(\varphi, v)\|_{Y_B} &= k_1\| -k_1\varphi - av\|_\alpha + k_2\|c(\Delta_B - I)\varphi + c\varphi - k_2v\|_\beta \leq \\ &\leq k_1^2\|\varphi\|_\alpha + ak_1\|v\|_\alpha + k_2c\|\varphi\|_{\beta+1} + k_2c\|\varphi\|_\beta + k_2^2\|v\|_\beta \leq c_1(\|v\|_\alpha + \|\varphi\|_{\beta+1}) \end{aligned}$$

para algún  $c_1 > 0$ , ya que por ser  $\beta < \alpha < \beta + 1$  es posible encontrar constantes  $c_2, c_3 > 0$ , tales que  $\|v\|_\beta \leq c_2\|v\|_\alpha$ ,  $\|\varphi\|_\beta \leq c_2\|\varphi\|_\alpha \leq c_3\|\varphi\|_{\beta+1}$ .

Por último, como  $\nu$  verifica  $\alpha < \beta + \nu$  y  $1 + \beta \leq \alpha + \nu$ , podemos encontrar una constante  $C > 0$  tal que

$$\|P(\varphi, v)\|_{Y_B} \leq C(\|\varphi\|_{\alpha+\nu} + \|v\|_{\beta+\nu}) = C\|(\varphi, v)\|_{Y_B^\nu}. \square$$

Observamos de nuevo cómo el elegir distintas topologías para  $\varphi$  y  $v$ , (más fina la primera), permite probar que  $P$  es una perturbación subordinada a  $A_0$ , a pesar de aparecer  $-\Delta$  en él. Típicamente se puede elegir  $\beta = 0, \alpha = \frac{1}{2}$  es decir,  $W_B^{1,p}(\Omega) \times L_B^p(\Omega)$  o bien  $\alpha = 0, \beta = -\frac{1}{2}$  es decir,  $L_B^p(\Omega) \times (W_B^{1,p'})'$ , con  $p' = \frac{p}{p-1}$ . Observemos también que con estas técnicas nunca podemos obtener el resultado usando el mismo espacio para  $\varphi$  y para  $v$ , es decir con  $\alpha = \beta$ .

**Corolario 1.3.1** Consideramos el sistema lineal homogéneo dado por

$$\begin{cases} \varphi_t - k_1\Delta_B\varphi - av & = 0 \text{ en } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ v_t + c\Delta_B\varphi - k_2\Delta_Bv & = 0 \text{ en } \Omega \times \mathbb{R}^+ . \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tales que  $0 < \alpha - \beta < 1$ , consideramos  $(\varphi_0, v_0) \in W_B^{2\alpha, p} \times W_B^{2\beta, p}$ . Entonces, existe una única solución del sistema (1.3.2), dada por  $(\varphi(t), v(t)) = e^{-A_B t}(\varphi_0, v_0)$ , verificando (1.3.2) como una igualdad en el espacio  $W_B^{2\alpha, p} \times W_B^{2\beta, p}$  y tal que  $(\varphi, v) \in C^\omega((0, \infty); W_B^{2(\alpha+\gamma), p} \times W_B^{2(\beta+\gamma), p})$  para todo  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Además  $\varphi, v \in C^\infty((0, \infty) \times \bar{\Omega})$ .  $\square$

### Demostración:

La existencia de solución de (1.3.2) se tiene como consecuencia de la Proposición 1.3.1 y de los resultados conocidos sobre operadores sectoriales, [1], [2], [31]. En cuanto a la regularidad de la solución de (1.3.2), por un argumento usual de *bootstrap*, tenemos que  $(\varphi, v) \in C^\omega((0, \infty); W_B^{2(\alpha+\gamma), p} \times W_B^{2(\beta+\gamma), p})$  para todo  $\gamma \in \mathbb{R}$ , y a partir de aquí gracias a las inclusiones de Sobolev, tenemos que  $\varphi, v \in C^\infty((0, \infty) \times \bar{\Omega})$ .  $\square$

El resultado anterior se puede extender al sistema (1.1.8) para el caso en el que  $h$  es una función lineal, obteniéndose así el siguiente resultado:

**Corolario 1.3.2** *Supongamos que  $h(\varphi) = e\varphi$  y sea  $d = e + b$ . entonces el sistema (1.1.8) se transforma en el sistema lineal homogéneo dado por*

$$\begin{cases} \varphi_t - k_1 \Delta_B \varphi + d\varphi - av = 0 & \text{en } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ v_t + c \Delta_B \varphi - k_2 \Delta_B v = 0 & \text{en } \Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (1.3.3)$$

En esta situación, dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tales que  $0 < \alpha - \beta < 1$ , consideramos  $(\varphi_0, v_0) \in W_B^{2\alpha, p} \times W_B^{2\beta, p}$ . Entonces, existe una única solución del sistema (1.3.3), dada por  $(\varphi(t), v(t)) = e^{-A_L t}(\varphi_0, v_0)$ , donde  $A_L$  representa al operador definido por:

$$A_L = \begin{pmatrix} -k_1 \Delta_B + dI & -aI \\ c \Delta_B & -k_2 \Delta_B \end{pmatrix}.$$

que es un operador sectorial en  $W_B^{2\alpha, p} \times W_B^{2\beta, p}$  con dominio  $D(A_L) = W_B^{2(\alpha+1), p} \times W_B^{2(\beta+1), p}$ .

Esta solución verifica (1.3.3) como una igualdad en el espacio  $W_B^{2\alpha, p} \times W_B^{2\beta, p}$ , verificando  $(\varphi, v) \in C^\omega((0, \infty); W_B^{2(\alpha+\gamma), p} \times W_B^{2(\beta+\gamma), p})$  para todo  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Además  $\varphi, v \in C^\infty((0, \infty) \times \bar{\Omega})$ .

### Demostración:

La demostración de este resultado es análoga a la del Corolario 1.3.1, y está basada en el hecho de que  $A_L$  es un operador sectorial en  $W_B^{2\alpha, p} \times W_B^{2\beta, p}$  con dominio  $D(A_L) = W_B^{2(\alpha+1), p} \times W_B^{2(\beta+1), p}$ . Para probar este hecho basta con observar, que  $A_L$  se obtiene

añadiendo al operador sectorial  $A_0$ , definido en la Proposición 1.3.1, la perturbación  $P_L$ , definida por

$$P_L \begin{pmatrix} \varphi \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (d - k_1)\varphi - av \\ c\Delta_B\varphi - k_2v \end{pmatrix}.$$

Por último observando que  $P_L$  es una perturbación subordinada al operador  $A_0$ , la Proposición 0.1.3 nos dice que  $A_L$  es también un operador sectorial.  $\square$

## 1.4 Problema no lineal: Existencia y Unicidad Local de Soluciones

### 1.4.1 Existencia local

En esta sección vamos a probar resultados de existencia y unicidad local de las soluciones de (1.1.8). Para ello tendremos en cuenta los resultados anteriores y aplicaremos además resultados de la teoría de operadores sectoriales, [1], [2], [31], [56], entre los que destacaremos la fórmula de variación de constantes (0.2.4), el Teorema 0.2.1 y la Proposición 0.2.1 del apéndice.

**Teorema 1.4.1** *Supongamos que  $\alpha$  y  $\beta \in \mathbb{R}$  son tales que  $0 < \alpha - \beta < 1$  y que para algún  $\epsilon \in [0, 1)$  la aplicación*

$$\begin{aligned} h : W_B^{2(\alpha+\epsilon),p} &\longrightarrow W_B^{2\alpha,p} \\ \varphi &\longmapsto h(\varphi) \end{aligned}$$

*es localmente Lipschitz.*

*Entonces para cada  $(\varphi_0, v_0) \in W_B^{2(\alpha+\epsilon),p} \times W_B^{2(\beta+\epsilon),p}$ , existe un instante de tiempo positivo  $T = T(\varphi_0, v_0) > 0$  tal que el problema (1.1.8) admite una única solución en el intervalo de tiempo  $[0, T)$ , verificando la condición inicial, es decir, con  $(\varphi(0), v(0)) = (\varphi_0, v_0)$  y satisfaciendo además:*

$$(\varphi, v) \in C([0, T); W_B^{2(\alpha+\epsilon),p} \times W_B^{2(\beta+\epsilon),p}) \cap C((0, T); W_B^{2(\alpha+1),p} \times W_B^{2(\beta+1),p})$$

y

$$(\varphi_t, v_t) \in C((0, T); W_B^{2(\alpha+\theta),p} \times W_B^{2(\beta+\theta),p})$$

para todo  $0 \leq \theta < 1$ . Además la solución  $(\varphi, v)$  verifica (1.1.8) como una igualdad en el espacio  $W_B^{2\alpha,p} \times W_B^{2\beta,p}$ .

Si  $h$  transforma acotados en acotados y  $[0, T_{max})$  es el intervalo maximal de definición de la solución  $(\varphi, v)$ , se tiene que  $T_{max} = +\infty$  es decir, la solución es global, o bien la norma de la solución explota en tiempo finito, es decir

$$\|(\varphi, v)\|_{W_B^{2(\alpha+\epsilon),p} \times W_B^{2(\beta+\epsilon),p}} \mapsto \infty \text{ si } t \mapsto T_{max}.$$

**Demostración:**

De la Proposición 1.3.1, se tiene que  $A_B$  es un operador sectorial en  $Y_B = W_B^{2\alpha,p} \times W_B^{2\beta,p}$ , y por la hipótesis sobre  $h$ , la aplicación

$$G : Y_B^\epsilon = W_B^{2(\alpha+\epsilon),p} \times W_B^{2(\beta+\epsilon),p} \mapsto W_B^{2\alpha,p} \times W_B^{2\beta,p} = Y_B$$

definida como en (1.2.3), es decir

$$G \begin{pmatrix} \varphi \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h(\varphi) - b\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

es localmente Lipschitz. La demostración se concluye aplicando el Teorema 0.2.1 y la Proposición 0.2.1, ambos del apéndice, lo que nos dice en particular que la solución viene dada por la fórmula de variación de las constantes (0.2.4), es decir

$$(\varphi(t), v(t)) = e^{-A_B t}(\varphi_0, v_0) + \int_0^t e^{-A_B(t-s)} G(\varphi(s), v(s)) ds. \quad \square \quad (1.4.1)$$

Si  $p \neq 1$  podemos considerar el caso más natural  $\alpha = 0$  con  $\beta \in (-1, 0)$  que corresponde a tomar como espacio ambiente  $L_B^p \times W_B^{2\beta,p}$ . Vamos a ver en el corolario siguiente unas hipótesis de crecimiento para la función  $h$ , que nos aseguran la Lipschitzianidad sobre acotados de

$$h : W_B^{2\epsilon,p} \mapsto L_B^p$$

para algún  $\epsilon \in [0, 1)$ , lo cual permitirá tomar datos iniciales  $(\varphi_0, v_0) \in W_B^{2\epsilon,p} \times W_B^{2(\beta+\epsilon),p}$ .

**Corolario 1.4.1** *Sea  $p \neq 1$  y supongamos que la aplicación  $h$  verifica,  $h \in C^1(\mathbb{R})$  si  $N < 2p$ , y si  $N \geq 2p$  que  $h$  verifica además*

$$|h(s)| \leq C(1 + |s|^r) \text{ y } |h'(s)| \leq C(1 + |s|^{r-1}) \quad (1.4.2)$$

para todo  $s \in \mathbb{R}$  y alguna constante  $C > 0$ , siendo  $r$  tal que

$$\begin{aligned} 1 \leq r < \infty & \quad \text{si } N = 2p \\ 1 \leq r < \frac{N}{N-2p} & \quad \text{si } N > 2p \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Consideramos ahora  $\epsilon \in [0, 1)$  tal que

$$\begin{aligned} \frac{N}{2p} < \epsilon < 1, & \quad \text{si } N < 2p, \\ \frac{N(r-1)}{2rp} \leq \epsilon < 1 & \quad \text{si } N \geq 2p. \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

Entonces, el Teorema 1.4.1 se verifica con  $\alpha = 0$  y  $\beta \in (-1, 0)$ . Por tanto para cada condición inicial  $(\varphi_0, v_0) \in W_B^{2\epsilon, p} \times W_B^{2(\beta+\epsilon), p}$  existe un tiempo positivo  $T = T(\varphi_0, v_0)$  de forma que el problema (1.1.8) admite una única solución en  $[0, T)$  satisfaciendo la condición inicial  $(\varphi(0), v(0)) = (\varphi_0, v_0)$  y tal que si  $[0, T_{\max})$  es el intervalo maximal de definición, o bien  $T_{\max} = \infty$ , es decir la solución está globalmente definida, o bien  $\|(\varphi(t), v(t))\|_{W_B^{2\epsilon, p} \times W_B^{2(\beta+\epsilon), p}} \mapsto \infty$  si  $t \mapsto T_{\max}$ . Esta solución verifica además

$$(\varphi, v) \in C([0, T); W_B^{2\epsilon, p} \times W_B^{2(\beta+\epsilon), p}) \cap C((0, T); W_B^{2, p} \times W_B^{2(\beta+1), p}).$$

Además  $(\varphi_t, v_t) \in C((0, T); W_B^{2\theta, p} \times W_B^{2(\beta+\theta), p})$  para todo  $0 \leq \theta < 1$  y (1.1.8) se verifica como una igualdad en el espacio  $L_B^p \times W_B^{2\beta, p}$ .

En particular, siempre se puede tomar  $\beta = -\epsilon$ , y por tanto se tiene la existencia de solución asociada al dato inicial  $(\varphi_0, v_0) \in W_B^{2\epsilon, p} \times L_B^p$ .

### Demostración:

Veamos que se verifican las hipótesis del Teorema 1.4.1 con  $\alpha = 0$  y  $\beta \in (-1, 0)$ , para lo cual basta probar que  $h : W_B^{2\epsilon, p} \mapsto L_B^p$  es Lipschitz sobre acotados, para algún  $\epsilon \in [0, 1)$  a elegir.

En primer lugar observamos que si  $N < 2p$  entonces existe  $\epsilon \in [0, 1)$  tal que  $\frac{N}{2p} < \epsilon < 1$ , lo que implica, por las inclusiones de Sobolev que  $W_B^{2\epsilon, p} \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$ , como consecuencia dado  $K$ , conjunto acotado en  $W_B^{2\epsilon, p}$  se tiene que  $\|\varphi\|_{L^\infty} \leq c_1$ , para algún  $c_1 > 0$ , y para todo  $\varphi \in K$ . De esta forma por el Teorema del valor medio, junto con el hecho de que  $h \in C^1$ , se tiene que

$$\|h(\varphi_1) - h(\varphi_2)\|_{L_B^p} \leq c_2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_B^p} \leq c_3 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W_B^{2\epsilon, p}}$$

con  $c_i, i \in \{2, 3\}$ , constantes positivas, lo que nos permite concluir que  $h : W_B^{2\epsilon, p} \mapsto L_B^p$  es Lipschitz sobre acotados.

Observemos que si  $h(s)$  verifica (1.4.2) entonces la aplicación  $h : L^{pr}(\Omega) \mapsto L^p(\Omega)$  (o respectivamente  $L_{per}^p(\Omega)$  si  $B = P$ ), transforma subconjuntos acotados de  $L^{pr}(\Omega)$  en subconjuntos acotados de  $L^p(\Omega)$  (o  $L_{per}^p(\Omega)$  respectivamente) y es Lipschitz sobre acotados. Entonces si probamos que  $W_B^{2\epsilon, p} \subset L^{pr}(\Omega)$  (o  $L_{per}^{pr}(\Omega)$ ), tendremos que la aplicación  $h : W_B^{2\epsilon, p} \mapsto L_B^p$ , es Lipschitz sobre acotados, lo cual permite concluir el resultado.

Si  $N \geq 2p$ , entonces por las inclusiones de Sobolev se tiene que  $W_B^{2\epsilon, p} \subset L^{pr}(\Omega)$  siempre que  $2\epsilon - \frac{N}{p} \geq -\frac{N}{pr}$ , o equivalentemente, si

$$\epsilon \geq \frac{N(r-1)}{2rp}. \quad (1.4.5)$$

Teniendo en cuenta que necesariamente  $\epsilon < 1$ , si  $2p = N$  entonces (1.4.5) se verifica para todo  $r$  tal que  $1 \leq r < \infty$ , y si  $2p < N$ , entonces (1.4.5) unido a la condición  $\epsilon < 1$  nos dice que  $1 > \frac{N(r-1)}{2rp}$  es decir  $r < \frac{N}{N-2p}$ .  $\square$

A continuación vamos a ver resultados de existencia de soluciones para el sistema (1.1.8), para datos iniciales más regulares, suponiendo que  $h \in C^n$ . En este caso el Teorema 1.4.1 nos proporcionará la existencia de solución para el sistema (1.1.8) con dato inicial  $(\varphi_0, v_0)$  en el espacio  $W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$ .

Para probar la existencia de soluciones del sistema (1.1.8) que verifican las ecuaciones del sistema como igualdades en el espacio ambiente  $W_B^{n-1,p} \times W_B^{n-2,p}$ , con datos iniciales en  $W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$ , vamos a empezar por el caso  $n = 1$  el cual, siguiendo las notaciones del Teorema 1.4.1, corresponde a considerar  $\alpha = 0, \epsilon = \frac{1}{2}$  y  $\beta = -\frac{1}{2}$ . Observemos que esto requiere imponer condiciones sobre  $h$  que aseguren que  $h : W_B^{1,p} \mapsto L_B^p$  sea localmente Lipschitz.

En el caso  $n \geq 2$  tendremos que imponer condiciones de crecimiento y regularidad para  $h$  que nos aseguren que  $h : W_B^{n,p} \mapsto W_B^{n-1,p}$  es localmente Lipschitz sobre acotados.

**Corolario 1.4.2** *Sea  $p \neq 1$  y supongamos que la aplicación  $h$  verifica alguna de las siguientes condiciones:*

- i)  $h \in C^1(\mathbb{R})$  si  $N < p$ .
- ii)  $h \in C^1(\mathbb{R})$  verifica (1.4.2) si  $N \geq p$ , con  $r$  tal que

$$\begin{aligned} 1 \leq r < \infty & \quad \text{si } N = p \\ 1 \leq r \leq \frac{N}{N-p} & \quad \text{si } N > p. \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

Entonces el Teorema 1.4.1 se verifica con  $\alpha = 0, \epsilon = \frac{1}{2}$  y  $\beta = -\frac{1}{2}$  y por tanto dada una condición inicial  $(\varphi_0, v_0) \in W_B^{1,p} \times L_B^p$  existe una única solución local  $(\varphi, v) \in C([0, T]; W_B^{1,p} \times L_B^p)$  de (1.1.8) verificando las ecuaciones del sistema como una igualdad en el espacio ambiente  $L_B^p \times W_B^{-1,p}$  donde  $W_B^{-1,p} \doteq (W_B^{1,p'})'$  con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  y satisfaciendo la condición inicial  $(\varphi(0), v(0)) = (\varphi_0, v_0)$ . Esta solución está definida en  $[0, T)$  con  $T = \infty$  o bien  $\|(\varphi(t), v(t))\|_{W_B^{1,p} \times L_B^p} \mapsto \infty$  cuando  $t \mapsto T$ .

Además para todo  $0 < \theta \leq 1$  se tiene que

$$(\varphi, v) \in C((0, T); W_B^{2,p} \times W_B^{1,p}) \text{ y } (\varphi_t, v_t) \in C((0, T); W_B^{2-\theta,p} \times W_B^{1-\theta,p}).$$



**Demstración:**

Si hacemos  $\alpha = 0$ ,  $\epsilon = \frac{1}{2}$  y  $\beta = \frac{-1}{2}$ , bastará con probar que la aplicación  $h : W_B^{1,p} \mapsto L_B^p$  es localmente Lipschitz y lleva acotados en acotados, para estar en las hipótesis del Teorema 1.4.1 que nos proporciona la solución local en el espacio ambiente  $L_B^p \times W_B^{-1,p}$  y con dato inicial en  $W_B^{1,p} \times L_B^p$ .

Si  $N < p$ , por las inclusiones de Sobolev,  $W_B^{1,p} \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$  lo que unido al hecho de que  $h \in C^1$  termina la demostración. En caso contrario por la hipótesis de restricción sobre el crecimiento de  $h$ , (1.4.2) y (1.4.6), se tiene que  $h : L^{pr} \mapsto L^p$  es localmente Lipschitz y lleva acotados en acotados. Además si  $N = p$ , por las inclusiones de Sobolev,  $W_B^{1,p} \hookrightarrow L^s$  para todo  $s \in (1, \infty)$ , y por tanto tomando  $s = pr$  concluimos de nuevo la demostración. Si  $N > p$ , de nuevo por las inclusiones de Sobolev,  $W_B^{1,p} \hookrightarrow L^{pr}$  puesto que  $r \leq \frac{N}{N-p}$ . De esta forma, en cualquier caso, estamos en las hipótesis del Teorema 1.4.1.  $\square$

Si consideramos ahora en el Corolario 1.4.2 el caso particular  $p = 2$ , es decir, tomamos datos iniciales en  $H_B^1 \times L_B^2$ , donde la ecuación presenta una propiedad de estructura que veremos más adelante, se tiene el siguiente resultado.

**Corolario 1.4.3** *Supongamos que la aplicación  $h$  verifica alguna de las siguientes condiciones:*

- i)  $h \in C^1(\mathbb{R})$  si  $N = 1$ .
- ii)  $h \in C^1(\mathbb{R})$  verifica (1.4.2) con  $1 \leq r < \infty$  si  $N = 2$ .
- iii)  $h \in C^1(\mathbb{R})$  verifica (1.4.2) con  $1 \leq r \leq \frac{N}{N-2}$  si  $N \geq 3$ .

Entonces, para todo  $(\varphi_0, v_0) \in H_B^1 \times L_B^2$  existe una única solución local  $(\varphi, v)$  de (1.1.8) en  $L_B^2 \times H_B^{-1}$ , definida en  $[0, T)$ ,  $T > 0$ , de forma que si  $[0, T)$  es el intervalo maximal de definición de la solución, entonces  $T = +\infty$  o bien  $\|(\varphi, v)\|_{H_B^1 \times L_B^2} \mapsto +\infty$  si  $t \mapsto T$ .

Además para todo  $0 < \theta \leq 1$  se verifica:

$$(\varphi, v) \in C([0, T); H_B^1 \times L_B^2) \cap C((0, T); H_B^2 \times H_B^1) \text{ y } (\varphi_t, v_t) \in C((0, T); H_B^{2-\theta} \times H_B^{1-\theta}). \square$$

A continuación vamos a ver que si  $h \in C^2$ , podemos probar la existencia local de soluciones para el sistema (1.1.8), partiendo de datos iniciales  $(\varphi_0, v_0) \in W_B^{2,p} \times W_B^{1,p}$ , siguiendo el mismo razonamiento del caso anterior. Para ello vamos aplicar de nuevo el Teorema 1.4.1 considerando ahora el espacio ambiente  $W_B^{1,p} \times L_B^p$ . Observamos que el espacio  $W_B^{2,p} \times W_B^{1,p}$  donde tomamos el dato inicial, corresponde al caso particular  $\alpha = \epsilon = \frac{1}{2}$  y  $\beta = 0$ . Recordamos que para aplicar el Teorema 1.4.1 en este caso necesitamos probar que  $h : W_B^{2,p} \mapsto W_B^{1,p}$  es localmente Lipschitz.

**Proposición 1.4.1** Sea  $p \neq 1$  y supongamos que  $h$  verifica alguna de las hipótesis siguientes:

i)  $h \in C^2$  si  $N < 2p$ .

ii) Si  $N = 2p$ ,  $h \in C^2$  y verifica

$$|h(s)| \leq C(1 + |s|^r), \quad |h'(s)| \leq C(1 + |s|^{r-1}) \quad \text{y} \quad |h''(s)| \leq C(1 + |s|^{r-2}) \quad (1.4.7)$$

si  $r \geq 2$  o bien  $|h''(\varphi)| \leq C$  si  $1 \leq r < 2$ , con  $C > 0$ .

iii) Si  $N > 2p$ , entonces  $h \in C^2$  verifica (1.4.7), para  $2 \leq r \leq \frac{N-p}{N-2p}$  o bien  $1 \leq r \leq \frac{N-p}{N-2p}$  y  $|h''(\varphi)| \leq C$  si  $1 \leq r < 2$ , con  $C > 0$ .

Entonces dado  $(\varphi_0, v_0) \in W_B^{2,p} \times W_B^{1,p}$ , y supuesto que  $h(0) = 0$  si  $B = D$ , existe  $(\varphi, v)$  solución local de (1.1.8) verificando las ecuaciones como una igualdad en el espacio ambiente  $W_B^{1,p} \times L_B^p$ , y la condición inicial, es decir  $(\varphi(0), v(0)) = (\varphi_0, v_0)$ , tal que

$$(\varphi, v) \in C([0, T]; W_B^{2,p} \times W_B^{1,p}) \cap C((0, T); W_B^{3,p} \times W_B^{2,p})$$

y

$$(\varphi_t, v_t) \in C((0, T); W_B^{3-\theta,p} \times W_B^{2-\theta,p}).$$

para todo  $\theta \in (0, 1]$ . Además si  $[0, T_{max})$ ,  $T_{max} > 0$  es el intervalo maximal de definición, se tiene que  $T_{max} = \infty$  o bien  $\lim_{t \rightarrow T_{max}} \|(\varphi(t), v(t))\|_{W_B^{2,p} \times W_B^{1,p}} = \infty$ .

**Demostración:**

Basta probar que estamos en las hipótesis del Teorema 1.4.1 con  $\alpha = \epsilon = \frac{1}{2}$  y  $\beta = 0$ , para lo cual es suficiente que la aplicación:

$$h : W_B^{2,p} \mapsto W_B^{1,p}$$

sea localmente Lipschitz y lleve acotados en acotados. Para esto fijado  $K \subset W_B^{2,p}$  acotado, vamos a ver que existe  $C > 0$  tal que

$$\|h(\varphi_1) - h(\varphi_2)\|_{W_B^{1,p}} \leq C \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W_B^{2,p}} \quad \text{para todo } \varphi_1, \varphi_2 \in K. \quad (1.4.8)$$

Para ello teniendo en cuenta que

$$\|h(\varphi_1) - h(\varphi_2)\|_{W_B^{1,p}} = \|h(\varphi_1) - h(\varphi_2)\|_{L_B^p} + \|\nabla(h(\varphi_1) - h(\varphi_2))\|_{L_B^p}$$

vamos a probar (1.4.8) en dos etapas. En primer lugar veremos que existe  $C_1 = C_1(K) > 0$  tal que

$$\|h(\varphi_1) - h(\varphi_2)\|_{L_B^p} \leq C_1 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W_B^{2,p}} \quad (1.4.9)$$

es decir que la aplicación:

$$h : W_B^{2,p} \mapsto L_B^p$$

es Lipschitz sobre acotados. A continuación probaremos la existencia de  $C_2 = C_2(K) > 0$  tal que:

$$\|\nabla(h(\varphi_1)) - \nabla(h(\varphi_2))\|_{L_B^p} \leq C_2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W_B^{2,p}}. \quad (1.4.10)$$

Por otra parte, para probar (1.4.10) tendremos en cuenta que

$$\begin{aligned} \|\nabla(h(\varphi_1)) - \nabla(h(\varphi_2))\|_{L_B^p} &= \|h'(\varphi_1)\nabla\varphi_1 - h'(\varphi_2)\nabla\varphi_2\|_{L_B^p} \leq \\ &\|h'(\varphi_1)(\nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2)\|_{L_B^p} + \|(h'(\varphi_1) - h'(\varphi_2))\nabla\varphi_2\|_{L_B^p}. \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

Observemos que las funciones de  $W_B^{1,p}$  verifican ciertas condiciones de contorno, según  $B = D, N$  o  $P$ , de forma que la propiedad  $h : W_B^{2,p} \mapsto W_B^{1,p}$ , implica que  $h(\varphi)$  debe verificar estas condiciones de contorno. Esto a su vez se traduce en ciertas condiciones sobre  $h$ :

Si  $B = P$  y  $\varphi$  es una función periódica, entonces  $h(\varphi)$  también lo es. Si  $B = N$ , entonces  $W_N^{1,p} = W^{1,p}$  y no hay condiciones de contorno adicionales. Por último si  $B = D$ , entonces  $W_D^{1,p} = W_0^{1,p}$  y  $h$  ha de verificar  $h(0) = 0$ . En efecto, si  $\varphi \in W_D^{2,p} = W^{2,p} \cap W_0^{1,p}$ , se tiene que  $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$ , de donde se obtiene que  $h(\varphi)|_{\partial\Omega} = h(\varphi|_{\partial\Omega}) = h(0) = 0$ .

i) Si  $N < 2p$  por las inclusiones de Sobolev  $W_B^{2,p} \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$ , de donde  $\|\varphi\|_{L^\infty} \leq c_1$ , para algún  $c_1 > 0$ , y para todo  $\varphi \in K$ . De esta forma por el Teorema del valor medio, junto con el hecho de que  $h \in C^1$ , se tiene que

$$\|h(\varphi_1) - h(\varphi_2)\|_{L_B^p} \leq c_2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_B^p} \leq c_3 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W_B^{2,p}}$$

con  $c_i, i \in \{2, 3\}$  constantes positivas, lo cual prueba (1.4.9). Para obtener (1.4.10) observamos que

$$\|h'(\varphi_1)(\nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2)\|_{L_B^p} \leq \|h'(\varphi_1)\|_{L^\infty} \|\nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2\|_{L_B^p} \leq c_4 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W_B^{2,p}}.$$

Por último

$$\|(h'(\varphi_1) - h'(\varphi_2))\nabla\varphi_2\|_{L_B^p} \leq \|h'(\varphi_1) - h'(\varphi_2)\|_{L^\infty} \|\nabla\varphi_2\|_{L_B^p}$$

y de nuevo por el Teorema del valor medio, junto con el hecho de que  $h \in C^2$  se tiene

$$\|h'(\varphi_1) - h'(\varphi_2)\|_{L^\infty} \leq c_5 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^\infty} \leq c_6 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W_B^{2,p}}$$

con  $c_i, i \in \{4, 5, 6\}$ , constantes positivas. De esta forma teniendo en cuenta (1.4.11), se obtiene el resultado buscado.

ii) Si  $N \geq 2p$ , como consecuencia de la hipótesis de restricción sobre el crecimiento de  $h$ , se tiene que la aplicación

$$h : L_B^{pr} \mapsto L_B^p$$

es Lipschitz sobre acotados, por tanto si probamos ahora que  $W_B^{2,p} \hookrightarrow L_B^{pr}$ , tendremos demostrado este mismo resultado para

$$h : W_B^{2,p} \mapsto L_B^p$$

lo cual concluiría la primera etapa (1.4.9).

En efecto, si  $N = 2p$ , por las inclusiones de Sobolev se tiene que  $W_B^{2,p} \hookrightarrow L_B^s$ , para todo  $s < \infty$ . Si  $N > 2p$ , entonces  $W_B^{2,p} \hookrightarrow L_B^{pr}$ , por las inclusiones de Sobolev, siempre que  $2 - \frac{N}{p} \geq -\frac{N}{pr}$  lo cual se verifica puesto que  $r \leq \frac{N-p}{N-2p} \leq \frac{N}{N-2p}$ .

Para terminar la demostración hemos de probar que se verifica (1.4.10). Teniendo en cuenta (1.4.11) y aplicando la desigualdad de Hölder se obtiene que

$$\begin{aligned} \|\nabla(h(\varphi_1) - h(\varphi_2))\|_{L_B^p} &\leq \|h'(\varphi_1)\|_{L^q} \|\nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2\|_{L_B^{q'}} + \\ &\quad + \|h'(\varphi_1) - h'(\varphi_2)\|_{L^q} \|\nabla\varphi_2\|_{L_B^{q'}} \end{aligned}$$

para todo  $q, q' > p$  con  $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{p}$  tales que  $h'(\varphi_i) \in L_B^q$  y  $\nabla\varphi_i \in L_B^{q'}$ . Vamos a ver que es posible elegir  $q$  y  $q'$  en esa situación. Como  $\varphi_i \in W_B^{2,p}$  se tiene que  $\nabla\varphi_i \in W_B^{1,p} \hookrightarrow L_B^{q'}$  por las inclusiones de Sobolev, siempre que  $1 - \frac{N}{p} \geq -\frac{N}{q'}$  y por tanto podemos tomar ahora  $q' = \frac{Np}{N-p}$  y por tanto  $q = N$ . De esta forma bastará con probar que la aplicación:

$$h' : W_B^{2,p} \mapsto L_B^N$$

es Lipschitz sobre acotados. Teniendo en cuenta ahora que

$$h' : L_B^{N(r-1)} \mapsto L_B^N$$

lo es, si probamos además que  $W_B^{2,p} \hookrightarrow L_B^{N(r-1)}$ , tendremos el resultado buscado. Si  $N = 2p$ , por las inclusiones de Sobolev se tiene que  $W_B^{2,p} \hookrightarrow L_B^s$ , para todo  $s < \infty$ , y por tanto concluimos.

Si  $N > 2p$ , entonces de nuevo por las inclusiones de Sobolev se tiene que  $W_B^{2,p} \hookrightarrow L_B^{N(r-1)}$ , siempre que se verifique  $2 - \frac{N}{p} \geq -\frac{N}{N(r-1)}$ , lo cual se verifica como consecuencia de que  $r \leq \frac{N-p}{N-2p}$ .  $\square$

Este resultado se puede extender al caso en el que  $h \in C^n$ ,  $n \geq 3$ , de forma que el Teorema 1.4.1 nos proporcione la solución local del sistema (1.1.8) con datos iniciales en

el espacio  $W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$  y trabajando en el espacio ambiente  $W_B^{n-1,p} \times W_B^{n-2,p}$ . Siguiendo con la notación del Teorema 1.4.1 esta situación se corresponde con el caso particular  $\alpha = \frac{n-1}{2}$ ,  $\epsilon = \frac{1}{2}$  y  $\beta = \frac{n}{2} - 1$ , por lo que para la obtención de este resultado de existencia local se necesita que la aplicación

$$h : W_B^{n,p} \mapsto W_B^{n-1,p} \quad (1.4.12)$$

sea localmente Lipschitz y transforme acotados en acotados.

Observemos que si tenemos que  $h : W_B^{n,p} \mapsto W_B^{n-1,p}$  es localmente Lipschitz, y puesto que el espacio  $W_B^{n-1,p}$  contiene ciertas condiciones de contorno, entonces serán necesarias algunas condiciones sobre  $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ , para asegurar que la restricción verifica  $h : W_B^{n,p} \mapsto W_B^{n-1,p}$ .

Como veremos el caso más complejo es el de condiciones de Neumann  $B = N$ , para valores grandes de  $n$  puesto que las condiciones de contorno son en este caso de la forma  $\frac{\partial}{\partial n}(\Delta^j u) = 0$ . La dificultad para  $n > 5$  radica en el cálculo de  $\frac{\partial}{\partial n} \Delta^j(h(u))$  en términos de  $\frac{\partial}{\partial n} \Delta^j u$ .

**Lema 1.4.1** *Supongamos que la aplicación*

$$h : W_B^{n,p} \mapsto W_B^{n-1,p}$$

*es localmente Lipschitz (respectivamente Lipschitz sobre acotados) y  $n \geq 3$ .*

a) *Si  $B = P$ , la aplicación*

$$h : W_P^{n,p} \mapsto W_P^{n-1,p}$$

*también lo es.*

b) *Si  $B = D$ , supongamos que se verifica además:*

$$n = 3 \text{ y } h(0) = 0, \text{ o bien } n = 2k, \text{ o } 2k + 1 \text{ con } k \geq 2 \text{ y } h^j(0) = 0, j = 0, 2, 3, 4, \dots, k. \quad (1.4.13)$$

*Entonces*

$$h : W_D^{n,p} \mapsto W_D^{n-1,p}$$

*es localmente Lipschitz (respectivamente Lipschitz sobre acotados).*

c) *Si  $B = N$ , supongamos que  $n \leq 4$ , y en caso contrario,  $n > 4$ , supongamos que se verifican las siguientes condiciones:*

$$\text{Si } u \in W_N^{2k,p}, \text{ se tiene } \frac{\partial[h(u)]}{\partial n} = \frac{\partial[\Delta(h(u))]}{\partial n} = \dots = \frac{\partial[(\Delta)^{k-2}(h(u))]}{\partial n} = 0, \text{ en } \partial\Omega. \quad (1.4.14)$$

$$\text{Si } u \in W_N^{2k+1,p}, \text{ se tiene } \frac{\partial[h(u)]}{\partial n} = \frac{\partial[\Delta(h(u))]}{\partial n} = \dots = \frac{\partial[(\Delta)^{k-1}(h(u))]}{\partial n} = 0, \text{ en } \partial\Omega. \quad (1.4.15)$$

Entonces

$$h : W_N^{n,p} \mapsto W_N^{n-1,p}$$

es localmente Lipschitz (respectivamente Lipschitz sobre acotados).

### Demostración de a)

Basta con observar que si  $\varphi \in W_P^{n,p} = W_{per}^{n,p}(\Omega)$ , es decir  $\varphi$  y  $D^\alpha\varphi, |\alpha| \leq n$ , son periódicas, entonces  $h(\varphi)$  y  $D^\beta[h(\varphi)], |\beta| \leq n-1$ , también lo son.

### Demostración de b):

Recordando de nuevo la definición de los espacios de potencias fraccionarias del apéndice (0.1.5), (0.1.6) y (0.1.7), observamos que:

$$W_D^{1,p} = W_0^{1,p} = \{u \in W^{1,p}, \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega\}, \quad W_D^{2,p} = W^{2,p} \cap W_0^{1,p},$$

$$W_D^{2k,p} = \{u \in W^{2k,p}, \quad u = \Delta u = \dots = (\Delta u)^{k-1} = 0 \text{ en } \partial\Omega\},$$

$$W_D^{2k+1,p} = \{u \in W^{2k+1,p}, \quad u = \Delta u = \dots = (\Delta u)^k = 0 \text{ en } \partial\Omega\}.$$

i) Si  $h(0) = 0$  y  $\varphi \in W_0^{1,p}$ , entonces  $h(\varphi) \in W_0^{1,p}$ . Por tanto si  $n = 3$ ,  $\varphi \in W_D^{3,p}$  y  $h(\varphi) \in W^{2,p}$ , entonces se tiene que  $h(\varphi) \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p} = W_D^{2,p}$ .

ii) Si  $n = 4$ , entonces dado  $\varphi \in W_D^4$  con  $h(\varphi) \in W^{3,p}$ , vemos que puesto que  $h''(0) = 0$ , se tiene que  $h(\varphi) \in W_D^{3,p}$ .

En efecto,  $h(\varphi)|_{\partial\Omega} = 0$  y se tiene que  $h(\varphi) \in W_D^{3,p}$  siempre que  $\Delta[h(\varphi)] \in W_0^{1,p}$ . Teniendo en cuenta ahora que

$$\Delta[h(\varphi)] = h''(\varphi)|\nabla u|^2 + h'(\varphi)\Delta\varphi$$

y que  $\Delta\varphi \in W_D^{2,p} = W^{2,p} \cap W_0^{1,p}$ , por lo que  $\Delta\varphi = 0$  sobre el borde de  $\Omega$ , se concluye el resultado.

Con estas mismas hipótesis sobre  $h$ , se obtiene el resultado para  $n = 5$ , ya que en este caso  $h(\varphi) \in W_D^{4,p}$ , siempre que  $\Delta(h(\varphi)) \in W_D^{2,p}$  y la condición de contorno a verificar es de nuevo  $\Delta h(\varphi) = 0$  en  $\partial\Omega$ .

En general, si  $\varphi \in W_D^{2k,p}$ , se tiene que  $(\Delta\varphi)^j = 0, j = 0, \dots, k-1$ , en  $\partial\Omega$ , y por lo tanto, si suponemos además que  $h(\varphi) \in W^{2k-1,p}$ , vamos a probar que  $h(\varphi) \in W_D^{2k-1,p}$ , para lo cual basta con observar que

$$(\Delta)^m[h(\varphi)] = h'(\varphi)(\Delta)^m[\varphi] + \sum_{j=2}^{2m} h^{(j)}(\varphi)S_j$$

donde  $S_j$  representa un sumatorio de funciones dependientes de las derivadas de  $\varphi$ . Por tanto para todo  $m \leq k - 1$ , puesto que  $(\Delta)^m \varphi = 0$  y  $h^j(\varphi) = 0, j = 2, \dots, 2m$  sobre el borde de  $\Omega$ , se tiene que  $(\Delta)^m [h(\varphi)] = 0, m = 0, 1, \dots, k - 1$ , sobre  $\partial\Omega$ , lo que concluye la demostración. Análogamente se prueba el caso en el que  $\varphi \in W_D^{2k+1,p}$ .

**Demostración de c):**

Recordando la definición de los espacios de potencias fraccionarias del apéndice (0.1.8), (0.1.9) y (0.1.10), observamos que:

$$W_N^{1,p} = W^{1,p}, \quad W_N^{2,p} = \{u \in W^{2,p}, \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial\Omega\},$$

$$W_N^{2k,p} = \{u \in W^{2k,p}, \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = \dots = \frac{\partial (\Delta u)^{k-1}}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial\Omega\},$$

$$W_N^{2k+1,p} = \{u \in W^{2k+1,p}, \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = \dots = \frac{\partial (\Delta u)^{k-1}}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial\Omega\}.$$

Si  $n = 3$ , supongamos que  $\varphi \in W_N^{3,p}$ , lo que implica que  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$  sobre el borde de  $\Omega$ , y supongamos también que  $h(\varphi) \in W^{2,p}$ . Entonces, se tiene que

$$\frac{\partial h(\varphi)}{\partial n} = h'(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0,$$

y como consecuencia  $h(\varphi) \in W_N^{2,p}$ .

Si  $n = 4$ , supongamos que  $\varphi \in W_N^{4,p}$ , lo que implica que  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ , y supongamos también que  $h(\varphi) \in W^{3,p}$ . Entonces, de nuevo  $\frac{\partial h(\varphi)}{\partial n} = 0$  y como consecuencia  $h(\varphi) \in W_N^{3,p}$ .

Sea  $\varphi \in W_N^{n,p}$  con  $n = 2k, k \geq 3$ , tal que  $h(\varphi) \in W^{n-1,p}$ , entonces por (1.4.14)  $h(\varphi)$  verifica la condición de contorno exigida para que  $h(\varphi) \in W_N^{n-1,p}$ . Análogamente como consecuencia de (1.4.15), se tiene el caso  $n = 2k + 1, k \geq 2$ .  $\square$

**Observación 1.4.1** *La no linealidad  $h(\varphi) = \frac{1}{2}(\varphi^3 - \varphi)$  de clase  $C^\infty$ , verifica las hipótesis del Lema 1.4.1 apartado b) con  $n \leq 5$ , ya que  $h(0) = 0$  y  $h''(0) = 0$  pero  $h'''(0) \neq 0$ .*

El siguiente resultado establece la Lipschitzianidad de la aplicación  $h$  en espacios de Sobolev  $W^{n,p}$ .

**Lema 1.4.2** *i) Supongamos que  $h \in C^n$ , entonces la aplicación:*

$$h : W^{n,p} \cap L^\infty \mapsto W^{n,p} \cap L^\infty$$

*está bien definida, y existe una constante  $C > 0$ , dependiendo de  $\|\varphi\|_{L^\infty}$ , tal que para todo multiíndice  $\alpha$  con  $|\alpha| = k \leq n$ ,*

$$\|D^\alpha h(\varphi)\|_{L^p} \leq C \sum_{|\alpha^*|=k} \|D^{\alpha^*} \varphi\|_{L^p}.$$

ii) Supongamos ahora que  $h \in C^{n+1}$ ,  $n \geq 1$ . Entonces la aplicación:

$$h : W^{n,p} \cap W^{1,\infty} \mapsto W^{n,p} \cap W^{1,\infty}$$

es Lipschitz sobre acotados, es decir para todo  $K \subset W^{n,p} \cap W^{1,\infty}$  acotado, existe una constante  $C = C(K)$  verificando

$$\|h(\varphi_1) - h(\varphi_2)\|_{W^{n,p}} + \|h(\varphi_1) - h(\varphi_2)\|_{W^{1,\infty}} \leq C(\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W^{n,p}} + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W^{1,\infty}}).$$

**Demostración:**

i) Se puede encontrar en [42]

ii) Observamos que la norma de  $W^{n,p} \cap W^{1,\infty}$ , viene dada por

$$\|\varphi\|_{W^{n,p} \cap W^{1,\infty}} = \|\varphi\|_{W^{n,p}} + \|\varphi\|_{W^{1,\infty}}.$$

Por otra parte si  $K$  es acotado en  $L^\infty$ , como consecuencia del Teorema del valor medio, junto con el hecho de que  $h \in C^1$ , se tiene que existe  $c_1 > 0$  tal que:

$$\|h(\varphi_1) - h(\varphi_2)\|_{L^\infty} \leq c_1 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^\infty} \quad (1.4.16)$$

para todo  $\varphi_1, \varphi_2 \in K$ .

Si además se tiene que  $h \in C^2$ , y  $K$  es acotado en  $W^{1,\infty}$ , vamos a probar que existe  $c_2 > 0$  tal que:

$$\|h(\varphi_1) - h(\varphi_2)\|_{W^{1,\infty}} \leq c_2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W^{1,\infty}} \quad (1.4.17)$$

para todo  $\varphi_1, \varphi_2 \in K$ , para lo cual teniendo en cuenta (1.4.16) es suficiente con probar que existe  $c_3 > 0$ , tal que

$$\|\nabla(h(\varphi_1) - h(\varphi_2))\|_{L^\infty} \leq c_3 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W^{1,\infty}}.$$

Para cada  $i \in \{1, \dots, N\}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(h(\varphi_1) - h(\varphi_2)) &= h'(\varphi_1) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} - h'(\varphi_2) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} = \\ &= (h'(\varphi_1) - h'(\varphi_2)) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + h'(\varphi_2) \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i}(h(\varphi_1) - h(\varphi_2)) \right\|_{L^\infty} \leq \|h'(\varphi_2)\|_{L^\infty} \left\| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty} + \left\| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty} \|h'(\varphi_1) - h'(\varphi_2)\|_{L^\infty}.$$

Teniendo en cuenta ahora que  $K$  es acotado en  $L^\infty$ ,  $h \in C^2$  y por tanto  $h' \in C^1$  verifica (1.4.16), es decir

$$\|h'(\varphi_1) - h'(\varphi_2)\|_{L^\infty} \leq c_1 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^\infty}$$



y se obtiene  $c_3 > 0$  tal que  $\|\nabla(h(\varphi_1) - h(\varphi_2))\|_{L^\infty} \leq c_3\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W^{1,\infty}}$ , como queríamos probar.

Como consecuencia de (1.4.17), para obtener el resultado, basta probar que

$$\|h(\varphi_1) - h(\varphi_2)\|_{W^{n,p}} \leq C(\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W^{n,p}} + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W^{1,\infty}}).$$

Vamos a aplicar el método de inducción sobre  $n$ , para probar el resultado. Con este fin, empezaremos por probar que se verifica para  $n = 1$ , es decir que la aplicación

$$h : W^{1,\infty} = W^{1,p} \cap W^{1,\infty} \mapsto W^{1,p} \cap W^{1,\infty} = W^{1,\infty}$$

es Lipschitz sobre acotados, lo cual es consecuencia de (1.4.17).

Supongamos ahora que es cierto el resultado para  $n - 1$ , y vamos a probar que se verifica también para  $n$ . Consideramos  $h \in C^{n+1}$  y vamos a probar que la aplicación:

$$h : W^{n,p} \cap W^{1,\infty} \mapsto W^{n,p} \cap W^{1,\infty}$$

es Lipschitz sobre acotados. Con este propósito, dado  $K \subset W^{n,p} \cap W^{1,\infty}$  acotado, consideramos  $\varphi_j \in K, j = 1, 2$ . Sea  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  con  $|\alpha| = n$ , y sea  $i$  tal que  $\alpha_i \geq 1$ , lo que nos permite escribir:

$$D^\alpha[h(\varphi_1) - h(\varphi_2)] = D^\beta \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (h(\varphi_1) - h(\varphi_2)) \right]$$

con  $\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_i - 1, \dots, \alpha_N)$  y por tanto  $|\beta| = n - 1$ . Teniendo en cuenta ahora que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (h(\varphi_1) - h(\varphi_2)) = h'(\varphi_1) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} - h'(\varphi_2) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} = [h'(\varphi_1) - h'(\varphi_2)] \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + h'(\varphi_2) \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} \right]$$

y aplicando  $D^\beta$  a la expresión anterior, se obtiene que

$$D^\alpha[h(\varphi_1) - h(\varphi_2)] = \sum_{\sigma, \delta} D^\sigma [h'(\varphi_2)] D^\delta \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} \right] + \sum_{\sigma, \delta} D^\sigma [h'(\varphi_1) - h'(\varphi_2)] D^\delta \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} \right] \quad (1.4.18)$$

con  $\sigma, \delta$ , multiíndices tales que  $|\beta| = |\sigma| + |\delta| = n - 1$ .

Dados  $\sigma, \delta$  en esa situación, definimos  $q(\sigma) = \frac{(n-1)p}{|\sigma|} \geq p$  y  $q'(\delta) = \frac{(n-1)p}{|\delta|} \geq p$  y aplicamos la desigualdad de Hölder en cada sumando de (1.4.18), con exponentes  $q$  y  $q'$  obteniendo que:

$$\begin{aligned} \|D^\alpha(h(\varphi_1) - h(\varphi_2))\|_{L^p} &\leq \sum_{\sigma, \delta} \|D^\sigma [h'(\varphi_2)]\|_{L^q} \|D^\delta \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} \right]\|_{L^{q'}} + \\ &+ \sum_{\sigma, \delta} \|D^\sigma [h'(\varphi_1) - h'(\varphi_2)]\|_{L^q} \|D^\delta \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} \right]\|_{L^{q'}}. \end{aligned} \quad (1.4.19)$$

ya que  $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{p}$ .

En primer lugar vamos a probar la existencia de  $C_1 > 0$  tal que:

$$\|D^\delta \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} \right]\|_{L^{q'}} \leq C_1 (\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W^{n,p}} + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W^{1,\infty}}) \quad (1.4.20)$$

En efecto, podemos escribir

$$\frac{1}{q'} = \frac{j}{(n-1)} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r}$$

para  $r = \infty$  y  $j = |\delta|$ , y aplicando las desigualdades de interpolación de tipo Gagliardo-Nirenberg, recogidas en el Lema 0.1.2 del apéndice, (ver [42]) para la función  $u = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i}$ , obtenemos

$$\|D^\delta \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} \right]\|_{L^{q'}} \leq C_2 \sum_{|\delta^*|=n-1} \|D^{\delta^*} \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} \right]\|_{L^p}^{\frac{p}{q'}} \left\| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty}^{1-\frac{p}{q'}}$$

ya que  $\frac{j}{(n-1)} = \frac{|\delta|}{(n-1)} = \frac{p}{q'}$ .

Teniendo en cuenta ahora que

$$\|D^{\delta^*} \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} \right]\|_{L^p} \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W^{n,p}} \text{ y } \left\| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty} \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W^{1,\infty}}$$

y aplicando la desigualdad de Young, para  $l = \frac{q'}{p}$  y  $l' = \frac{q'}{q'-p}$ , se deduce la existencia de  $C_i, i = 3, 4$  constantes positivas, tales que

$$\|D^\delta \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} \right]\|_{L^{q'}} \leq C_3 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W^{n,p}} + C_4 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W^{1,\infty}}$$

ya que  $\frac{p}{q'} \cdot l = 1$  y  $(1 - \frac{p}{q'}) \cdot l' = 1$ , de forma que queda demostrado (1.4.20).

Análogamente se tiene la existencia de  $C_5, C_6$  constantes positivas tales que

$$\|D^\delta \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}\|_{L^{q'}} \leq C_5 (\|\varphi_1\|_{W^{n,p}} + \|\varphi_1\|_{W^{1,\infty}}) \leq C_6(K) \quad (1.4.21)$$

ya que  $\varphi_1 \in K$  y  $K$  es un conjunto acotado en  $W^{n,p} \cap W^{1,\infty}$ .

Por otra parte, teniendo en cuenta ahora que

$$\frac{1}{q} = \frac{j}{(n-1)} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r}$$

para  $r = \infty$  y  $j = |\sigma|$ , y aplicando de nuevo las desigualdades de interpolación de tipo Gagliardo-Nirenberg, recogidas en el Lema 0.1.2 del apéndice, (ver [42]) para la función  $u = h'(\varphi_1) - h'(\varphi_2)$ , se tiene que

$$\|D^\sigma [h'(\varphi_1) - h'(\varphi_2)]\|_{L^q} \leq C_7 \sum_{|\sigma^*|=n-1} \|D^{\sigma^*} [h'(\varphi_1) - h'(\varphi_2)]\|_{L^p}^{\frac{p}{q}} \|h'(\varphi_1) - h'(\varphi_2)\|_{L^\infty}^{1-\frac{p}{q}}$$

ya que  $\frac{j}{(n-1)} = \frac{|j|}{(n-1)} = \frac{p}{q}$ . Puesto que  $\|D^{\sigma^*}[h'(\varphi_1) - h'(\varphi_2)]\|_{L^p} \leq \|h'(\varphi_1) - h'(\varphi_2)\|_{W^{n-1,p}}$  y aplicando la desigualdad de Young, para  $l = \frac{q}{p}$  y  $l' = \frac{q}{q-p}$ , se deduce la existencia de  $C_i, i = 8, 9$ , constantes positivas, tales que

$$\begin{aligned} \|D^{\sigma}[h'(\varphi_1) - h'(\varphi_2)]\|_{L^q} &\leq C_8 \|h'(\varphi_1) - h'(\varphi_2)\|_{W^{n-1,p}}^{\frac{p}{q}} \|h'(\varphi_1) - h'(\varphi_2)\|_{L^{\infty}}^{1-\frac{p}{q}} < \\ &\leq C_9 (\|h'(\varphi_1) - h'(\varphi_2)\|_{W^{n-1,p}} + \|h'(\varphi_1) - h'(\varphi_2)\|_{L^{\infty}}) \end{aligned} \quad (1.4.22)$$

ya que  $\frac{p}{q} \cdot l = 1$  y  $(1 - \frac{p}{q}) \cdot l' = 1$ .

Análogamente se tiene que

$$\|D^{\sigma}[h'(\varphi_2)]\|_{L^q} \leq C_{10} (\|h'(\varphi_2)\|_{W^{n-1,p}} + \|h'(\varphi_2)\|_{L^{\infty}})$$

y por el resultado dado por el apartado i) de este lema, se tiene que

$$\|D^{\sigma}[h'(\varphi_2)]\|_{L^q} \leq C_{11}(K). \quad (1.4.23)$$

Llevando (1.4.23) y (1.4.20), junto con (1.4.21) y (1.4.22) a (1.4.19) se tiene que:

$$\begin{aligned} \|D^{\alpha}[h(\varphi_1) - h(\varphi_2)]\|_{L^p} &\leq C_{11}C_1 (\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W^{n,p}} + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W^{1,\infty}}) + \\ &+ C_6C_9 (\|h'(\varphi_1) - h'(\varphi_2)\|_{W^{n-1,p}} + \|h'(\varphi_1) - h'(\varphi_2)\|_{L^{\infty}}). \end{aligned}$$

A continuación vamos a aplicar la hipótesis de inducción. Puesto que  $h' \in C^n$ , se tiene que:

$$h' : W^{n-1,p} \cap W^{1,\infty} \mapsto W^{n-1,p} \cap W^{1,\infty},$$

es localmente Lipschitz sobre acotados y por tanto

$$\|h'(\varphi_1) - h'(\varphi_2)\|_{W^{n-1,p}} \leq C_{12} (\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W^{n-1,p}} + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W^{1,\infty}}).$$

Como consecuencia reagrupando constantes y teniendo en cuenta (1.4.16), se tiene que:

$$\|D^{\alpha}[h(\varphi_1) - h(\varphi_2)]\|_{L^p} \leq C_{13} (\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W^{n,p}} + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W^{1,\infty}}).$$

lo que concluye la demostración.  $\square$

De esta forma por un razonamiento análogo al de la demostración de la Proposición 1.4.1, se obtiene el siguiente resultado.

**Proposición 1.4.2** *Supongamos que  $h \in C^n$ ,  $n \geq 3$  y  $N < (n-1)p$  y sea  $(\varphi_0, v_0) \in W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$ . Supongamos que  $h$  verifica además (1.4.13) si  $B = D$  y (1.4.14), (1.4.15) si  $B = N$ .*

*Entonces existe  $(\varphi, v)$  solución local de (1.1.8) en el espacio  $W_B^{n-1,p} \times W_B^{n-2,p}$ , con dato inicial  $(\varphi_0, v_0)$ , tal que para todo  $\theta \in (0, 1]$ , se tiene que*

$$(\varphi, v) \in C([0, T]; W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}) \cap C((0, T); W_B^{n+1,p} \times W_B^{n,p})$$

$$(\varphi_t, v_t) \in C((0, T); W_B^{n+1-\theta,p} \times W_B^{n-\theta,p}).$$

*Además si  $[0, T_{max})$ ,  $T_{max} > 0$ , es el intervalo maximal de definición, se tiene que  $T_{max} = \infty$  o bien  $\lim_{t \rightarrow T_{max}} \|(\varphi(t), v(t))\|_{W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}} = \infty$ .  $\square$*

**Demostración:**

Basta con probar que estamos en las hipótesis del Teorema 1.4.1 con  $\alpha = \frac{n-1}{2}$ ,  $\epsilon = \frac{1}{2}$  y  $\beta = \frac{n}{2} - 1$ , para lo cual vamos a ver que la aplicación:

$$h : W_B^{n,p} \mapsto W_B^{n-1,p} \tag{1.4.24}$$

es Lipschitz sobre acotados. Por el Lema 1.4.1, y las hipótesis sobre  $h$ , bastará con probar esa misma propiedad para la aplicación:

$$h : W^{n,p} \mapsto W^{n-1,p}.$$

Teniendo en cuenta ahora que  $N < (n-1)p$ , por las inclusiones de Sobolev, se tiene que  $W^{n,p} \hookrightarrow W^{1,\infty}$  y por tanto  $W^{n,p} \hookrightarrow W^{n-1,p} \cap W^{1,\infty}$ . Aplicando ahora el Lema 1.4.2, se concluye la demostración.  $\square$

**Observación 1.4.2** *Se podría obtener (1.4.24) para el caso de  $N \geq (n-1)p$ , con restricciones adecuadas en el crecimiento de  $h$  y de sus derivadas de orden  $k \leq n$ , de forma que se verifique también en este caso la Proposición 1.4.2. La dificultad radica en obtener fórmulas explícitas para  $D^\alpha h(\varphi)$ ,  $|\alpha| = n$ , en términos de  $D^\beta \varphi$ ,  $|\beta| \leq |\alpha|$ .*

## 1.4.2 Regularidad

A continuación vamos a probar un resultado de regularidad para la solución del sistema (1.1.8) con dato inicial en el espacio  $W_B^{1,p} \times L_B^p$ .

**Proposición 1.4.3** *Supongamos que  $p \neq 1$  y que  $h \in C^1(\mathbb{R})$  verifica las hipótesis del Corolario 1.4.2. Entonces dado  $(\varphi_0, v_0) \in W_B^{1,p} \times L_B^p$ , la solución local del sistema (1.1.8) dada por el Corolario 1.4.2 verifica además:*

i) Para todo  $s > N$ ,

$$(\varphi, v) \in C((0, T); W_B^{2,s} \times W_B^{2,s}) \text{ y } (\varphi_t, v_t) \in C((0, T); W_B^{2-\theta,s} \times W_B^{1-\theta,s})$$

para todo  $0 < \theta \leq 1$ . En particular,  $(\varphi, v) \in C((0, T); C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega}))$ .

ii) Supongamos además que  $h \in C^n, n \geq 2$ , verificando las hipótesis de la Proposición 1.4.1 si  $n = 2$  y de la Proposición 1.4.2 para  $n \geq 3$ . Entonces para todo  $s > N$  se tiene que:

$$(\varphi, v) \in C((0, T); W_B^{n+1,s} \times W_B^{n+1,s}) \text{ y } (\varphi_t, v_t) \in C((0, T); W_B^{n+1-\theta,s} \times W_B^{n-\theta,s})$$

para todo  $\theta \in (0, 1]$ . En particular,  $(\varphi, v) \in C((0, T); C^n(\bar{\Omega}) \times C^n(\bar{\Omega}))$ .

**Demostración:**

i) En primer lugar vamos a probar que:

$$(\varphi, v) \in C((0, T); W_B^{2,s} \times W_B^{1,s}) \text{ y } (\varphi_t, v_t) \in C((0, T); W_B^{2-\theta,s} \times W_B^{1-\theta,s}), \quad (1.4.25)$$

con  $\theta \in (0, 1]$ , para todo  $s > N$ .

a) Supongamos que  $p \geq N$ .

Sabemos entonces que la solución de (1.1.8), con dato inicial  $(\varphi_0, v_0) \in W_B^{1,p} \times L_B^p$ , dada por el Corolario 1.4.2, verifica  $(\varphi(t), v(t)) \in W_B^{2,p} \times W_B^{1,p} \hookrightarrow W_B^{1,s} \times L_B^s$ , por las inclusiones de Sobolev, para todo  $s \in (1, \infty)$ . Dado  $t_1 > 0$  arbitrario y  $s > N$ , consideraremos la solución del sistema (1.1.8) con dato inicial  $(\varphi(t_1), v(t_1)) \in W_B^{1,s} \times L_B^s$ . Por el Corolario 1.4.2 obtenemos que:

$$(\varphi, v) \in C((t_1, T); W_B^{2,s} \times W_B^{1,s}) \text{ y } (\varphi_t, v_t) \in C((t_1, T); W_B^{2-\theta,s} \times W_B^{1-\theta,s})$$

para todo  $\theta \in (0, 1]$ , como queríamos probar.

Si  $N > p$ , vamos a aplicar una técnica estándar de “iteración” para probar que  $(\varphi(t_1), v(t_1)) \in W_B^{1,q} \times L_B^q$  con  $q \geq N$ , para  $t_1 > 0$ , lo que nos sitúa en el caso a), y de esta forma concluiríamos (1.4.25).

b) Supongamos que  $N > p$ .

Por el Corolario 1.4.2, para todo  $t > 0$ ,  $(\varphi(t), v(t)) \in W_B^{2,p} \times W_B^{1,p} \hookrightarrow W_B^{1,s} \times L_B^s$  por las inclusiones de Sobolev para todo  $s$ , tal que  $1 - \frac{N}{p} \geq -\frac{N}{s}$ , es decir,  $s \leq p^* = \frac{Np}{N-p}$ . De esta forma dado  $t_1 > 0$  arbitrario se tiene que  $(\varphi(t_1), v(t_1)) \in W^{1,p_1} \times L^{p_1}$ , donde  $p_1 = p^* = \frac{Np}{N-p}$ . Como consecuencia se tiene que:

b<sub>1</sub>) Si  $p < N \leq 2p$ , entonces  $p_1 \geq N$  y por tanto estamos en el caso a), por lo que se tiene el resultado.

En caso contrario si  $p_1 < N$ , es decir si  $2p < N$ , observamos que para aplicar el Corolario 1.4.2, con dato inicial  $(\varphi(t_1), v(t_1))$  en  $W^{1,p_1} \times L^{p_1}$ , necesitamos comprobar que

$h$  verifica (1.4.2) para  $r \leq \frac{N}{N-p_1}$ . Esto se verifica, ya que  $h$  satisface la hipótesis del Corolario 1.4.2, es decir, (1.4.2)  $|h(s)| \leq C(1 + |s|^r)$  para  $r \leq a_0 = \frac{N}{N-p}$  y  $a_0 \leq a_1$  donde  $a_1 = \frac{N}{N-p_1} = \frac{N-p}{N-2p}$ .

La solución del sistema (1.1.8), con dato inicial  $(\varphi(t_1), v(t_1)) \in W^{1,p_1} \times L^{p_1}$  verifica:

$$(\varphi, v) \in C((t_1, T); W_B^{2,p_1} \times W_B^{1,p_1}) \text{ y } (\varphi_t, v_t) \in C((t_1, T); W_B^{1+\theta,p_1} \times W_B^{\theta,p_1})$$

para todo  $0 \leq \theta < 1$ .

De nuevo por las inclusiones de Sobolev se tiene  $W_B^{1,p_1} \hookrightarrow L^{p_2}$  siempre que  $1 - \frac{N}{p_1} \geq -\frac{N}{p_2}$ ; en particular para  $p_2 = p_1^* = \frac{Np}{N-2p}$ , por lo que para  $t_2 > t_1 > 0$  arbitrario,  $(\varphi(t_2), v(t_2)) \in W_B^{1,p_2} \times L^{p_2}$ . Por tanto:

$b_2)$  Si  $2p < N \leq 3p$ , entonces  $p_2 \geq N$ , y de esta forma hemos terminado por estar de nuevo en la etapa a).

En caso contrario, es decir si  $N > 3p$  o equivalentemente, si  $N > p_2$ , consideramos la solución del sistema (1.1.8), con dato inicial  $(\varphi(t_2), v(t_2)) \in W_B^{1,p_2} \times L^{p_2}$ , lo cual es posible ya que  $r \leq a_1 \leq a_2$  con  $a_2 = \frac{N}{N-p_2} = \frac{N-2p}{N-3p}$ , lo que nos sitúa en las hipótesis del Corolario 1.4.2.

$b_k)$  De forma inductiva, dados  $N$  y  $p$  siempre existe un  $k$ , tal que  $kp < N \leq (k+1)p$ .

Consideramos ahora las sucesiones  $p_i = p_{i-1}^* = \frac{Np_{i-1}}{N-p_{i-1}} = \frac{Np}{N-ip}$  y  $a_i = \frac{p_{i+1}}{p_i} = \frac{N}{N-p_i} = \frac{N-ip}{N-(i+1)p}$  y  $t_i > t_{i-1} > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  con  $t_0 = 0$ ,  $p_0 = p$  y  $a_0 = \frac{p_1}{p_0} = \frac{N}{N-p_0}$ .

Observemos que puesto que  $N > kp$  entonces tenemos que  $N > p_i$  para todo  $i = 0, \dots, k-1$ , y además  $N \leq p_k$  puesto que  $N \leq (k+1)p$ .

Por lo tanto si vemos que  $(\varphi(t_k), v(t_k)) \in W_B^{1,p_k} \times L^{p_k}$ , se concluye el resultado, ya que  $N \leq p_k$ , nos sitúa de nuevo en la etapa a).

En efecto vamos a probar que es posible aplicar este método iterativo hasta la etapa  $k$ -ésima, para lo cual vamos a comprobar que  $r \leq a_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  con  $a_i = \frac{p_{i+1}}{p_i}$ .

Observamos ahora que  $p_i = \frac{Np}{N-ip}$  crece con  $i$  y como consecuencia  $a_i = \frac{p_{i+1}}{p_i} = \frac{N}{N-p_i}$  también, por lo tanto como por hipótesis  $r \leq \frac{N}{N-p} = a_0$ , se tiene que

$$r \leq a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k.$$

Como consecuencia,  $h$  verifica las hipótesis del Corolario 1.4.2, para cada  $i$ , de donde  $h : L_B^{p_{i+1}} \hookrightarrow L_B^{p_i}$  es localmente Lipschitz y por tanto como  $W_B^{1,p_i} \hookrightarrow L_B^{p_{i+1}}$ , entonces  $h$  también lo es entre  $W_B^{1,p_i}$  y  $L_B^{p_i}$ ,  $i = 1, \dots, k$ . De esta forma en cada paso podemos usar el Corolario 1.4.2, para obtener existencia y unicidad con dato inicial  $(\varphi(t_i), v(t_i)) \in W_B^{1,p_i} \times L^{p_i}$ ,  $i = 0, 1, \dots, k-1$ , y por la regularidad  $(\varphi(t_{i+1}), v(t_{i+1})) \in W_B^{2,p_i} \times W_B^{1,p_i} \hookrightarrow W_B^{1,p_{i+1}} \times L_B^{1,p_{i+1}}$ ,  $i = 0, 1, \dots, k-1$ . Por tanto (1.4.25) está probado para todo  $p \neq 1$  y para todo  $s > N$ .

En particular, por (1.4.25),  $v_t, \Delta\varphi \in C((0, T); L_B^s)$  y puesto que

$$k_2\Delta_B v = v_t + c\Delta_B\varphi \quad (1.4.26)$$

por los resultados de regularidad elíptica se tiene que  $v \in C((0, T); W_B^{2,s})$ .

De esta forma, ya que  $s > N$ , de nuevo por las inclusiones de Sobolev, se tiene que  $(\varphi, v) \in C((0, T); C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega}))$ .

ii) Vamos a probar que si  $h \in C^n, n \geq 2$  dado  $s > N$ , se tiene que

$$(\varphi, v) \in C((0, T); W_B^{k+1,s} \times W_B^{k,s}) \text{ y } (\varphi_t, v_t) \in C((0, T); W_B^{k+1-\theta,s} \times W_B^{k-\theta,s}), \quad (1.4.27)$$

para todos  $1 \leq k \leq n$ , y  $\theta \in (0, 1]$ , aplicando el principio de inducción sobre  $k$ .

Por el apartado i) se tiene que (1.4.27) se verifica para  $k = 1$ . Supongamos ahora que (1.4.27) se verifica para  $k$  y vamos a probar que entonces (1.4.27) es cierto también para  $k + 1$ , siempre que  $k + 1 \leq n$ .

En efecto, por la hipótesis de inducción, dado  $t_1 > 0$  arbitrario, se tiene que  $(\varphi(t_1), v(t_1)) \in W_B^{k+1,s} \times W_B^{k,s}$ , de esta forma teniendo en cuenta que  $h \in C^{k+1}$  y que  $s > N$ , como consecuencia de la Proposición 1.4.2 y de la Proposición 1.4.1 si  $n = 2$ , se tiene que la solución del sistema (1.1.8) que parte de ese dato inicial verifica (1.4.27) para  $k + 1$ .

Teniendo en cuenta ahora que  $v_t, \Delta\varphi \in C((0, T); W_B^{n-1,s})$ , de nuevo por (1.4.26), se tiene que  $v \in C((0, T); W_B^{n+1,s})$ .  $\square$

## 1.5 Funcional de Lyapunov. Solución Global en $H_B^1 \times L_B^2$

En esta sección vamos a estudiar las soluciones del sistema (1.1.7) en el espacio  $H_B^1 \times L_B^2$ , dadas por el Corolario 1.4.3. En este espacio, “manipulando” adecuadamente las ecuaciones, podemos obtener estimaciones de energía que nos llevan a la construcción de un funcional de Lyapunov para el sistema. A través de éste vamos a probar la existencia global de soluciones. La existencia de este funcional de Lyapunov se puede encontrar en [4], para el caso en que  $g(\varphi) = \frac{1}{2}(\varphi^3 - \varphi)$ . En [6] se prueba la existencia global de soluciones con dato inicial en  $H^1 \times L^2 \times L^2$  y con  $g$  una función polinómica de grado  $r \geq 3$  con  $r$  impar y coeficiente dominante positivo.

**Proposición 1.5.1** *Con las hipótesis del Corolario 1.4.3, se tiene que el funcional de Energía definido por:*

$$\mathcal{F}(\varphi, v) = \frac{k_1}{2} \|\nabla \varphi\|^2 + \frac{k_2 a}{2c} \|v\|^2 + \frac{b}{2} \|\varphi\|^2 + \int_{\Omega} H(\varphi) - a \int_{\Omega} v \varphi \quad (1.5.1)$$

y que se puede escribir como

$$\mathcal{F}(\varphi, v) = \frac{k_1}{2} \|\nabla \varphi\|^2 + \frac{b}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{a}{b} v - \varphi\right)^2 + \int_{\Omega} H(\varphi) \quad (1.5.2)$$

siendo  $H(s) = \int_0^s h(z) dz$ , es un **funcional de Lyapunov** para (1.1.8), es decir

i)  $\mathcal{F}(\varphi, v)$  es una función continua en  $H_B^1 \times L_B^2$ .

ii)  $\frac{d}{dt}(\mathcal{F}(\varphi, v)) \leq 0$  para toda solución  $(\varphi(t), v(t))$ , del sistema (1.1.8).

iii)  $(\varphi, v)$  es un punto de equilibrio si y sólo si  $\frac{d}{dt}(\mathcal{F}(\varphi, v)) = 0$ .

### Demostración:

i) Bastará con probar que si  $(\varphi_n, v_n) \mapsto (\varphi_0, v_0)$  en  $H_B^1 \times L_B^2$ , entonces  $\mathcal{F}(\varphi_n, v_n) \mapsto \mathcal{F}(\varphi_0, v_0)$  en  $\mathbb{R}$ .

Teniendo en cuenta ahora que

$$\frac{k_1}{2} \|\nabla \varphi_n\|^2 + \frac{b}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{a}{b} v_n - \varphi_n\right)^2 \mapsto \frac{k_1}{2} \|\nabla \varphi_0\|^2 + \frac{b}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{a}{b} v_0 - \varphi_0\right)^2$$

si vemos que  $H(\varphi_n) \mapsto H(\varphi_0)$  en  $L_B^1(\Omega)$  habremos terminado la demostración de este apartado.

Observamos ahora que en particular, existe una subsucesión de  $\varphi_n$  que converge en casi todo punto de  $\Omega$ , lo que por la continuidad de  $H$ , nos permite probar que  $H(\varphi_n) \mapsto H(\varphi_0)$  en casi todo punto de  $\Omega$ .

Por otra parte las hipótesis sobre  $r$  en el Corolario 1.4.3 implican que  $H_B^1 \subset L^{r+1}(\Omega)$  por las inclusiones de Sobolev, ya que  $1 - \frac{N}{2} \geq \frac{-N}{r+1}$ . Por lo tanto  $\varphi_n \mapsto \varphi_0$  en  $L^{r+1}$  y como consecuencia existe  $\psi \in L^1$ , tal que:

$$|\varphi_n(x)|^{r+1} \leq |\psi(x)| \text{ c.t.p. } x \in \Omega.$$

De esta forma teniendo en cuenta que si  $\varphi \in H_B^1$ , entonces  $H(\varphi) \in L^1(\Omega)$  y verifica que  $|H(s)| \leq C(1 + |s|^{r+1})$ , se tiene que

$$|H(\varphi_n)(x)| \leq (1 + |\psi(x)|) \text{ c.t.p. } x \in \Omega.$$

y como consecuencia del Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, se tiene que  $H(\varphi_n) \mapsto H(\varphi_0)$  en  $L_B^1$ , para una subsucesión, y como el límite es independiente de la subsucesión elegida, se tiene que la sucesión  $H(\varphi_n)$  converge a  $H(\varphi_0)$  en  $L^1(\Omega)$ .

A continuación abordamos la demostración de los siguientes apartados.



Por el Corolario 1.4.3 si  $(\varphi, v)$  es una solución del sistema (1.1.8), asociada al valor inicial  $(\varphi_0, v_0) \in H_B^1 \times L_B^2$ , se tiene que

$$(\varphi, v) \in C((0, T), H_B^2 \times H_B^1), (\varphi_t, v_t) \in C((0, T), H_B^1 \times L_B^2).$$

Por lo tanto, podemos multiplicar la primera ecuación de (1.1.8) por  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  en  $L_B^2$ , y después de integrar por partes, se obtiene

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|^2 + \frac{d}{dt} \left[ \frac{k_1}{2} \|\nabla \varphi\|^2 + \int_{\Omega} (H(\varphi) + \frac{b}{2} \varphi^2) \right] = a \int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (1.5.3)$$

ya que

$$-k_1 \int_{\Omega} \Delta \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} = k_1 \int_{\Omega} \nabla \varphi \frac{\partial(\nabla \varphi)}{\partial t} - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} \left( \frac{k_1}{2} |\nabla \varphi|^2 \right) \right]$$

puesto que,  $\int_{\partial \Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$  con cualquiera de las condiciones de contorno consideradas Dirichlet, Neumann o periódicas, ya que por la regularidad de la solución probada en el Corolario 1.4.3:

Si  $B = D$ , entonces  $\varphi_t \in H_D^1 = H_0^1$ .

Si  $B = N$ , entonces  $\varphi \in H_N^2 = \{f \in H_B^2(\Omega), \frac{\partial f}{\partial n} = 0\}$ .

Si  $B = P$ , entonces  $\varphi \in H_{per}^2$ , y  $\varphi_t \in H_{per}^1$ .

Por otra parte  $\int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{d}{dt} [\int_{\Omega} v \varphi] - \int_{\Omega} \varphi \frac{\partial v}{\partial t}$ , por tanto de (1.5.3) se obtiene

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|^2 + \frac{d}{dt} \left[ \frac{k_1}{2} \|\nabla \varphi\|^2 + \int_{\Omega} (H(\varphi) + \frac{b}{2} \varphi^2 - a v \varphi) \right] = -a \int_{\Omega} \varphi \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (1.5.4)$$

Por otra parte si  $B = N$  o  $P$  y  $(\varphi(t), v(t))$  es una solución de (1.1.8), entonces

$$v_t + c \Delta \varphi - k_2 \Delta v = 0$$

e integrando en  $\Omega$  tenemos:

$$0 = \int_{\Omega} v_t + c \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - k_2 \int_{\partial \Omega} \frac{\partial v}{\partial n} = \int_{\Omega} v_t = \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} v \right) = 0 \quad (1.5.5)$$

de esta forma  $\int_{\Omega} v(t) = \int_{\Omega} v_0$  es decir la masa se conserva.

Ahora multiplicamos la segunda ecuación de (1.1.8) por  $\frac{a}{c} (-\Delta_B)^{-1} v_t$  en  $L_B^2(\Omega)$ . Observamos que para  $B = D$ ,  $(-\Delta_B)^{-1}$  está bien definido, pero si  $B = N$  o  $B = P$ , entonces  $-\Delta_B$  no es positivo. No obstante, su núcleo es un espacio vectorial de dimensión uno, generado por las funciones constantes. Además por (1.5.5) tenemos  $\frac{d}{dt} (\int_{\Omega} v) = \int_{\Omega} v_t = 0$  y por tanto  $(-\Delta_B)^{-1} v_t$  está también bien definido, como un elemento de  $H_B^2$  de media cero. En lo sucesivo usaremos en más de una ocasión la inversa de  $-\Delta_B$  de elementos de media nula, tal y como acabamos de describir.

Veamos ahora que el resultado de multiplicar  $\frac{a}{c}(-\Delta_B)^{-1}v_t$  en  $L_B^2$  por  $v_t$  es  $\frac{a}{c}\|\frac{\partial v}{\partial t}\|_{-1}^2$ . En efecto, teniendo en cuenta las propiedades de los operadores sectoriales y la escala de espacios de potencias fraccionarias asociados, [31], si  $A = -\Delta_B$  en  $X = L^2$  si  $B = D$ , y si  $B = N$  ó  $B = P$  en  $X = \dot{L}_B^2 = \{u \in L_B^2, \int_{\Omega} u = 0\}$  con dominio  $X^1 = H^2 \cap H_0^1$  si  $B = D$ , y si  $B = N$  ó  $B = P$ , con dominio  $X^1 = \dot{H}_B^2 = \{u \in H_B^2, \int_{\Omega} u = 0\}$ , se tiene que

$$\langle A^{-1}v_t, v_t \rangle = \langle A^{-\frac{1}{2}}v_t, A^{-\frac{1}{2}}v_t \rangle = \|A^{-\frac{1}{2}}v_t\|^2 = \|v_t\|_{X^{-\frac{1}{2}}}^2 \quad (1.5.6)$$

con  $X^{-\frac{1}{2}} = \dot{H}_B^{-1}$ . De esta forma obtenemos

$$\frac{a}{c}\|\frac{\partial v}{\partial t}\|_{-1}^2 + \frac{ak_2}{2c} \frac{d}{dt}\|v\|^2 = a \int_{\Omega} \varphi \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (1.5.7)$$

Sumando las expresiones (1.5.4) y (1.5.7) obtenemos

$$\|\frac{\partial \varphi}{\partial t}\|^2 + \frac{a}{c}\|\frac{\partial v}{\partial t}\|_{-1}^2 + \frac{d}{dt}\mathcal{F}(\varphi, v) = 0 \quad (1.5.8)$$

de donde se tiene que  $\mathcal{F}(\varphi, v)$  es un funcional de Lyapunov, lo que prueba los apartados ii) y iii).

Es importante observar que de (1.1.9), se tiene una relación muy especial entre los parámetros, i.e  $\frac{k_2}{c} = \frac{a}{b}$ . Dicha relación nos permite reescribir el funcional como (1.5.2). En efecto

$$\frac{b}{2} \int_{\Omega} (\frac{a}{b}v - \varphi)^2 = \frac{b}{2} \frac{a^2}{b^2} \|v\|^2 + \frac{b}{2} \|\varphi\|^2 - a \int_{\Omega} v\varphi$$

con  $\frac{b}{2} \frac{a^2}{b^2} \|v\|^2 = \frac{a^2}{2b} \|v\|^2 = \frac{k_2 a}{2c} \|v\|^2$  por (1.1.9).  $\square$

Como consecuencia vamos a probar en primer lugar que la solución está globalmente definida, para lo cual vamos a imponer una hipótesis adicional sobre la estructura de la no linealidad, tal y como se hace por ejemplo en [28], para problemas semilineales. En efecto:

**Corolario 1.5.1** *Supongamos que  $h(s)$  verifica las hipótesis del Corolario 1.4.3 y además*

$$\liminf_{|s| \rightarrow \infty} \frac{h(s)}{s} > 0. \quad (1.5.9)$$

*Entonces toda solución de (1.1.8), verifica  $(\varphi, v) \in C_b((0, \infty); H_B^1 \times L_B^2)$ . De esta forma (1.1.8) define un semigrupo,  $S(t), t \geq 0$  en  $H_B^1 \times L_B^2$*

$$S(t)(\varphi_0, v_0) = (\varphi(t), v(t)) \quad (1.5.10)$$

*tal que todas las órbitas son acotadas.*

*Además si  $K \subset H_B^1 \times L_B^2$  es acotado, entonces  $\{S(t)K, t \geq 0\}$  también es acotado.*

**Demostración:**

Si  $h(\varphi)$  verifica (1.5.9), entonces para todo  $\delta > 0$  existe  $c(\delta) > 0$  tal que  $H(s) \geq \delta s^2 - c(\delta)$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ , y de esta forma tenemos que

$$\int_{\Omega} H(\varphi) \geq \delta \|\varphi\|^2 - c(\delta)|\Omega|. \tag{1.5.11}$$

Por otra parte, tenemos que  $\mathcal{F}$  es un funcional de Lyapunov, de donde  $\mathcal{F}(\varphi(t), v(t)) \leq \mathcal{F}(\varphi(0), v(0))$  para  $t > 0$  y esto junto con (1.5.2) y (1.5.11), nos dice que

$$\frac{k_1}{2} \|\nabla \varphi\|^2 + \frac{b}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{a}{b}v - \varphi\right)^2 + \delta \|\varphi\|^2 \leq c(\delta)|\Omega| + \mathcal{F}(\varphi_0, v_0) < \infty. \tag{1.5.12}$$

De esta forma,  $\|\nabla \varphi\|^2$ ,  $\|\varphi\|^2$  y  $\|\frac{a}{b}v - \varphi\|^2$  son finitas mientras existe la solución. Además, la norma de la solución en  $H_B^1 \times L_B^2$  permanece acotada y de esta forma por el Corolario 1.4.3, tenemos que  $\{(\varphi(t), v(t)), t \geq 0\}$  es una órbita global y acotada en  $H_B^1 \times L_B^2$ .

Además, de (1.5.12), se tiene que

$$\|S(t)(\varphi_0, v_0)\|_{H_B^1 \times L_B^2}^2 = \|(\varphi(t), v(t))\|_{H_B^1 \times L_B^2}^2 \leq c_1 + c_2 |\mathcal{F}(\varphi_0, v_0)|$$

con  $|\mathcal{F}(\varphi_0, v_0)| \leq c_3 \|\nabla \varphi_0\|^2 + c_4 \|v_0\|^2 + c_5 \|\varphi_0\|^2 + \int_{\Omega} |H(\varphi_0)|$ .

Por otra parte por las hipótesis sobre el crecimiento de  $h$ , (1.4.2), se tiene que  $\int_{\Omega} |H(\varphi_0)| \leq c_6 + c_7 \int_{\Omega} |\varphi_0|^{r+1} \leq c_6 + c_7 \|\varphi_0\|_{H_B^1}^{r+1}$ , ya que por las hipótesis del Corolario 1.4.3 tenemos  $r \leq \frac{N}{N-2} < \frac{N+2}{N-2}$ , de donde, por las inclusiones de Sobolev  $H_B^1 \hookrightarrow L^{r+1}$ . De esta forma

$$\|S(t)(\varphi_0, v_0)\|_{H_B^1 \times L_B^2} = \|(\varphi(t), v(t))\|_{H_B^1 \times L_B^2} \leq c_{10} + c_{11} \|(\varphi_0, v_0)\|_{H_B^1 \times L_B^2} + c_{12} \|\varphi_0\|_{H_B^1}^{\frac{r+1}{2}} \tag{1.5.13}$$

con  $c_i, i \in \{1, \dots, 12\}$  constantes positivas. Por tanto las órbitas de conjuntos acotados son acotadas.  $\square$

## 1.6 Regiones invariantes

Vamos a probar a continuación la existencia de regiones positivamente invariantes bajo la condición de que  $k_1 \neq k_2$ , para las soluciones del sistema (1.1.8) con condiciones de contorno de tipo Dirichlet. Para ello seguiremos las técnicas de [19], [58].

En primer lugar escribimos el sistema (1.1.8), de la forma:

$$\begin{pmatrix} \varphi_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ c & k_2 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} \varphi \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -h(\varphi) - b\varphi + av \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.6.1}$$

Llamando  $A = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ c & k_2 \end{pmatrix}$ ,  $F \begin{pmatrix} \varphi \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h(\varphi) - b\varphi + av \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $U = \begin{pmatrix} \varphi \\ v \end{pmatrix}$ , se tiene que

$$U_t = A\Delta U + F(U).$$

Observamos que  $A$  es una matriz definida positiva. En esta situación vamos a buscar regiones positivamente invariantes definidas de la forma:

$$\Sigma = \bigcap_{i=1}^m \{U \in \mathbb{R}^2 / G_i(U) \leq 0\} \quad (1.6.2)$$

siendo  $G_i : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  funciones regulares definidas sobre un conjunto acotado  $\mathcal{V}$ .

**Definición 1.6.1** Dado un conjunto cerrado  $\Sigma$  con  $\Sigma \subset \mathcal{V}$ , diremos que una solución  $(\varphi(t, x), v(t, x))$  del sistema (1.6.1), tiene condición inicial y de frontera en  $\Sigma$ , si verifica:

i)  $(\varphi(0, x), v(0, x)) \in \Sigma$  para todo  $x \in \Omega$ .

ii) Para cada  $t$  fijo, existe  $C$ , subconjunto compacto de  $\Omega$  tal que si  $x$  no pertenece a  $C$ , entonces  $(\varphi(t, x), v(t, x)) \in \text{int}(\Sigma)$ , donde  $\text{int}(\Sigma)$  representa el conjunto de los puntos interiores de  $\Sigma$ .

**Definición 1.6.2** Diremos que  $\Sigma$  es una región invariante para el sistema (1.6.1), si toda solución  $U(t, x)$  que parte de un dato inicial y de frontera en esa región, verifica que  $U(t, x) \in \Sigma$  para todo  $t \geq 0$  y para todo  $x \in \Omega$ .

**Definición 1.6.3** Diremos que  $G : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  es cuasiconvexa en  $U_0 \in \mathcal{V}$  si y sólo si para todo  $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $DG(U_0)(\eta) = 0$ , se tiene que  $D^2G(U_0)(\eta, \eta) \geq 0$ .

Donde

$$DG(U_0)(\eta) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial G}{\partial x_i}(U_0)\eta_i \text{ y } D^2G(U_0)(\eta, \eta) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j}(U_0)\eta_i\eta_j.$$

La existencia de regiones invariantes de este tipo, está basada en el siguiente Teorema, cuya demostración se puede encontrar en [19], [58]:

**Teorema 1.6.1** Bajo las notaciones anteriores, dada  $\Sigma$  definida por (1.6.2) y  $A$  matriz definida positiva, se tiene que  $\Sigma$  es una región invariante para el sistema (1.6.1) si y sólo si para cada punto de la frontera de esa región,  $U_0 \in \partial \Sigma$  (es decir,  $G_i(U_0) = 0$  para algún  $i = 1, \dots, m$ ), se tiene que:

i)  $DG_i(U_0)$  es un autovector por la izquierda de  $A$ , donde  $DG_i(U_0) = \nabla G_i(U_0)$ .

ii)  $G_i$  es cuasiconvexa en  $U_0$ .

iii)  $DG_i(F)(U_0) \leq 0$ , donde  $DG_i(F) = \nabla G_i \circ F$ .

Como consecuencia del Teorema 1.6.1, se obtiene el siguiente resultado:

**Teorema 1.6.2** *Supongamos que  $B = D$  con  $k_2 > k_1$  y  $h$  verificando:*

i)  $\frac{h(s)}{s} > 0$  para  $|s| \gg 1$ .

ii) *Existen  $D_1 < 0$  y  $D_2 > 0$  tales que  $R(D_1) < 0, R(D_2) > 0$  y para todo  $s \in (D_1, D_2)$*

$$\frac{c}{k_2 - k_1}(s - D_1) + R(D_1) < R(s) < \frac{c}{k_2 - k_1}(s - D_2) + R(D_2) \quad (1.6.3)$$

donde  $R(s) = \frac{1}{a}(h(s) + bs)$ .

Sean  $G_i : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, i = 1, \dots, 4$  definidas por

$$G_1(\varphi, v) = \varphi - D_2, \quad G_2(\varphi, v) = v - \frac{c}{k_2 - k_1}(\varphi - D_2) - R(D_2),$$

$$G_3(\varphi, v) = D_1 - \varphi, \quad G_4(\varphi, v) = \frac{c}{k_2 - k_1}(\varphi - D_1) + R(D_1) - v.$$

Entonces el conjunto

$$\Sigma = \bigcap_{i=1}^4 \{(\varphi, v) \in \mathbb{R}^2 / G_i(\varphi, v) \leq 0\}$$

es una región invariante para el sistema (1.6.1).

**Demostración:**

En primer lugar observamos que  $DG_1 = \nabla G_1 = (1, 0), DG_2 = \nabla G_2 = (-\frac{c}{k_2 - k_1}, 1), DG_3 = \nabla G_3 = (-1, 0)$  y  $DG_4 = \nabla G_4 = (\frac{c}{k_2 - k_1}, -1)$  son todos vectores propios de  $A$ . Además  $G_i$  es cuasiconvexa por ser lineal en  $\varphi$  y  $v$ . Por tanto si comprobamos que  $DG_i(F) \leq 0$  sobre los puntos del borde de  $\Sigma$ , tendríamos el resultado buscado como consecuencia del Teorema 1.6.1.

Vamos a probar por tanto que  $DG_i(F) = \nabla G_i \circ F \leq 0$  sobre el borde de  $\Sigma$ . Para ello observamos que:

$$DG_1(F) = \nabla G_1 \circ F = a(v - R(\varphi)), \quad DG_2(F) = \nabla G_2 \circ F = -\frac{ac}{k_2 - k_1}(v - R(\varphi)), \quad DG_3(F) = \nabla G_3 \circ F = -a(v - R(\varphi))$$

y  $DG_4(F) = \nabla G_4 \circ F = \frac{ca}{k_2 - k_1}(v - R(\varphi)).$

Consideramos ahora la curva  $v = R(\varphi)$  que divide al plano en dos regiones donde  $v - R(\varphi) > 0$  y  $v - R(\varphi) < 0$  respectivamente.

Como consecuencia de (1.6.3), los puntos del borde de  $\Sigma$ , es decir los puntos donde  $G_i = 0$ , para algún  $i$ , están totalmente contenidos en una de esas regiones donde  $v - R(\varphi)$  tiene signo constante. Por lo tanto, teniendo en cuenta que  $v - R(\varphi) < 0$  sobre  $G_1 = 0$  y sobre  $G_4 = 0$ , mientras que  $v - R(\varphi) > 0$  sobre  $G_2 = 0$  y  $G_3 = 0$ , la condición  $DG_i \circ F \leq 0$  se verifica, lo que concluye la demostración.  $\square$

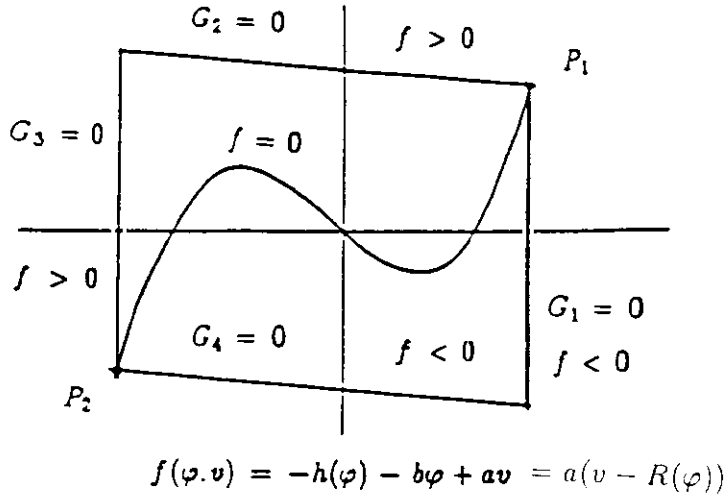


figura 1.1: Ejemplo de región invariante  $\Sigma$

**Observación 1.6.1** *En el caso  $k_1 = k_2$ , la matriz  $A$  tiene un único autovalor cuyo espacio propio asociado es unidimensional y está generado por el vector  $(1, 0)$ . Como consecuencia sólo tenemos una dirección para el gradiente de  $G_i$ , lo que no nos permite la construcción de  $\Sigma$  por las técnicas del Teorema 1.6.2.*

A continuación vamos a utilizar las regiones invariantes para encontrar estimaciones a priori de las soluciones en espacios singulares, que nos permitirán a su vez probar la existencia de soluciones globales.

En este sentido observamos que además de considerar el semigrupo generado por las soluciones que parten de datos iniciales en el espacio  $W_D^{n,p} \times W_D^{n-1,p}$ , con  $n, p$  tal que  $W_D^{n-1,p} \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$ , lo cual es equivalente, por las inclusiones de Sobolev, a tener  $N < p(n - 1)$ , es decir considerar las soluciones en espacios de funciones continuas tal y como se hace en [9], podemos considerar también las soluciones que parten de datos iniciales en el espacio  $W_D^{1,p} \times L^p$ .

En efecto dado  $(\varphi_0, v_0) \in W_D^{1,p} \times L^p$  la solución del sistema (1.1.8) que parte de ese dato inicial, dada por el Corolario 1.4.2, verifica  $\varphi(t), v(t) \in C(\bar{\Omega})$ , para todo  $t \geq t_0$ , con  $t_0 > 0$ , según probamos en la Proposición 1.4.3. De esta forma podemos elegir  $D_1, D_2$  tales que  $(\varphi(t_0), v(t_0)) \in \Sigma$  para todo  $x \in \Omega$ , de donde se tendría por el Teorema 1.7.1, que  $(\varphi(t), v(t)) \in \Sigma$  para todo  $t \geq t_0$ , lo cual proporciona estimaciones de la norma en  $L^\infty$ , uniformes en  $t \geq t_0$  para las soluciones del sistema (1.1.8), lo que nos va a permitir probar la existencia global de soluciones en dichos espacios, tal y como vamos a ver a continuación.

## 1.7 Existencia global de soluciones en $W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$ , $p \neq 1$ , $n \geq 1$

Vamos a probar que las soluciones del sistema (1.1.8) con datos iniciales en  $W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$  dadas por el Corolario 1.4.2 y las Proposiciones 1.4.1 y 1.4.2, están globalmente definidas. Para ello, según el Teorema 1.4.1, hemos de probar que la solución permanece acotada en tiempo finito.

Puesto que no es fácil obtener estimaciones de esta norma directamente de las ecuaciones (1.1.8) multiplicando por funciones test adecuadas e integrando por partes, elegimos un camino indirecto, basado en el efecto regularizante del sistema (1.1.8).

Supondremos que las soluciones en  $H_B^1 \times L_B^2$  están globalmente definidas, para lo cual ciertas restricciones sobre  $h$  son necesarias, como se vio en el Corolario 1.5.1 (una hipótesis suficiente es que  $h$  verifique (1.5.9)). Para datos iniciales en  $W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$  utilizaremos el hecho de que la solución local estará en  $H_B^1 \times L_B^2$  para todo instante de tiempo  $t > 0$  y como consecuencia estará globalmente definida en  $H_B^1 \times L_B^2$ . A continuación el resultado de regularidad de la Proposición 1.4.3, indica que para todo instante  $t > 0$  la solución con dato inicial en  $H_B^1 \times L_B^2$  también está en  $W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$  con lo cual ambas soluciones coinciden y están por tanto, globalmente definidas.

En el desarrollo de este razonamiento, además de considerar la solución local con dato inicial en estos espacios  $X = W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$ , necesitaremos considerar simultáneamente los resultados que nos aseguran la existencia local de la solución con dato inicial en  $H_B^1 \times L_B^2$  recogidos en el Corolario 1.4.3. Por esta razón en los casos en los que  $X \hookrightarrow H_B^1 \times L_B^2$ , además de las hipótesis que nos proporcionan la existencia local de la solución con dato inicial en  $X$  junto con (1.5.9), necesitamos imponer alguna hipótesis adicional sobre  $h$  para que se verifiquen las hipótesis del Corolario 1.4.3.

Veremos después que es posible probar resultados de existencia global de soluciones para aplicaciones  $h$  en las hipótesis del Teorema 1.6.2, verificando (1.5.9) junto con las hipótesis de existencia local en estos espacios  $X$ , utilizando el Teorema 1.6.2 sobre la existencia de regiones invariantes, lo que implica a su vez restringirnos por tanto al caso  $B = D$  y  $k_2 - k_1 > 0$ .

**Proposición 1.7.1** *i) Sean  $p \neq 1$  y  $h \in C^1$  verificando alguna de las siguientes condiciones:*

- a)  $p \geq 2$  y  $h$  verifica las hipótesis del Corolario 1.4.3 junto con (1.5.9).
- b)  $1 < p < 2$  y  $h$  verifica las hipótesis del Corolario 1.4.2 junto con (1.5.9).

*Entonces dado  $(\varphi_0, v_0) \in W_B^{1,p} \times L_B^p$ , la solución  $(\varphi(t), v(t))$  de (1.1.8) con dato*

inicial  $(\varphi_0, v_0)$ , dada por el Corolario 1.4.2. está globalmente definida. De esta forma tenemos definido el semigrupo

$$\begin{aligned} S(t) : W_B^{1,p} \times L_B^p &\longmapsto W_B^{1,p} \times L_B^p \\ (\varphi_0, v_0) &\longmapsto (\varphi(t), v(t)) \end{aligned} \quad (1.7.1)$$

$t \geq 0$ , donde  $(\varphi(t), v(t))$  es solución de (1.1.8) con  $(\varphi(0), v(0)) = (\varphi_0, v_0)$  en  $W_0^{1,p} \times L^p$ .

ii) Sean  $p \neq 1$  y  $h \in C^2$  verificando alguna de las siguientes condiciones:

a)  $p \geq \frac{2N}{N+2}$  y  $h$  verifica (1.5.9) junto con las restricciones dadas por (1.4.2) con  $1 \leq r < \infty$  si  $N = 2$  y las dadas por (1.4.7) con  $1 \leq r \leq \frac{N}{N-2}$  si  $N \geq 3$ .

b)  $1 < p < \frac{2N}{N+2}$  y  $h$  verifica las hipótesis de la Proposición 1.4.1 junto con (1.5.9).

Entonces dado  $(\varphi_0, v_0) \in W_B^{2,p} \times W_B^{1,p}$  la solución  $(\varphi(t), v(t))$  de (1.1.8) con dato inicial  $(\varphi_0, v_0)$  está globalmente definida y de este modo tenemos así el semigrupo correspondiente

$$\begin{aligned} S(t) : W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p} &\longmapsto W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p} \\ (\varphi_0, v_0) &\longmapsto (\varphi(t), v(t)) \end{aligned} \quad (1.7.2)$$

$t \geq 0$ , donde  $(\varphi(t), v(t))$  es solución de (1.1.8) con  $(\varphi(0), v(0)) = (\varphi_0, v_0)$  en  $W_B^{2,p} \times W_B^{1,p}$ .

iii) Supongamos que  $h \in C^n$ ,  $n \geq 3$  con  $p \neq 1$  y  $N < (n-1)p$  verifica las hipótesis de la Proposición 1.4.2 y del Corolario 1.4.3 junto con (1.5.9). Entonces dado  $(\varphi_0, v_0) \in W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$  la solución  $(\varphi(t), v(t))$  de (1.1.8) con dato inicial  $(\varphi_0, v_0)$  está globalmente definida. Tenemos así el semigrupo correspondiente

$$\begin{aligned} S(t) : W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p} &\longmapsto W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p} \\ (\varphi_0, v_0) &\longmapsto (\varphi(t), v(t)) \end{aligned} \quad (1.7.3)$$

$t \geq 0$ , donde  $(\varphi(t), v(t))$  es solución de (1.1.8) con  $(\varphi(0), v(0)) = (\varphi_0, v_0)$  en  $W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$ .

### **Demostración:**

Sea  $X = W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$ ,  $n \geq 1$  vamos a ver en primer lugar que  $h$  verifica las hipótesis del Corolario 1.4.2 si  $n = 1$ , la Proposición 1.4.1 si  $n = 2$  o la Proposición 1.4.2, si  $n \geq 3$ , que nos aseguran la existencia de solución local con dato inicial  $(\varphi_0, v_0) \in X$ , y simultáneamente en cada caso  $h$  verifica además las hipótesis del Corolario 1.4.3 que nos asegura la existencia de solución con dato inicial en  $H_B^1 \times L_B^2$ .

i) En este caso  $n = 1$ , observamos que si  $p \geq 2$  y  $h$  verifica las hipótesis del Corolario 1.4.3, entonces  $h$  verifica también las hipótesis del Corolario 1.4.2. Para ello basta con observar que si  $N > p$  entonces  $N \geq 3$  y  $\frac{N}{N-2} \leq \frac{N}{N-p}$ .



Por otra parte si  $1 < p < 2$  y  $h$  verifica las hipótesis del Corolario 1.4.2, entonces  $h$  verifica también las hipótesis del Corolario 1.4.3, ya que si  $N \geq 2$  entonces  $N > p$  y  $\frac{N}{N-p} < \frac{N}{N-2}$ .

ii) Consideramos ahora el caso  $n = 2$  y  $p \geq \frac{2N}{N+2}$  y teniendo en cuenta que  $\frac{N}{N-2} \leq \frac{N-p}{N-2p}$ , se tiene que las hipótesis impuestas sobre  $h$  nos aseguran que  $h$  verifica las hipótesis del Corolario 1.4.3 y de la Proposición 1.4.1.

Además si  $n = 2$  y  $1 < p < \frac{2N}{N+2}$ , entonces  $\frac{N-p}{N-2p} < \frac{N}{N-2}$ , de donde se tiene que  $h$  verifica también las hipótesis del Corolario 1.4.3.

Como consecuencia se tiene que por el Corolario 1.4.2, la Proposición 1.4.1 o la Proposición 1.4.2, dado  $(\varphi_0, v_0) \in W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$ , existe solución local en  $[0, T)$  de (1.1.8) con dato inicial en  $X = W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$  para cada  $n \geq 1$  y  $p \neq 1$  en las hipótesis anteriores.

Vamos a ver a continuación, que se tiene siempre una de las siguientes situaciones:

- 1.-  $X \hookrightarrow H_B^1 \times L_B^2$ .
- 2.-  $H_B^1 \times L_B^2 \hookrightarrow X$ .

En efecto, por las inclusiones de Sobolev, junto con las hipótesis impuestas sobre  $p, n$  y  $N$ , estamos en la primera situación siempre que se verifique alguna de las siguientes condiciones:

- 1.1.-  $n = 1$  y  $p \geq 2$ .
- 1.2.-  $n = 2$  y  $p \geq \frac{2N}{N+2}$ .
- 1.3.-  $n \geq 3$ .

Para ello, basta observar que si  $n \geq 3$  entonces por hipótesis  $p > \frac{N}{n-1} \geq \frac{2N}{N+2(n-1)}$ . Como consecuencia, en cualquier caso, si  $n > 1$ , se tiene que  $p \geq \frac{2N}{N+2(n-1)}$ . Esto equivale a  $n - 1 - \frac{N}{p} \geq -\frac{N}{2}$ , lo que por las inclusiones de Sobolev, implica  $X \hookrightarrow H_B^1 \times L_B^2$ .

En caso contrario, es decir:

- 2.1.-  $n = 1$  y  $1 < p < 2$ , o bien
- 2.2.-  $n = 2$  y  $1 < p < \frac{2N}{N+2}$  (en particular,  $N > 2$ )

de nuevo por las inclusiones de Sobolev se prueba que estamos en la segunda situación, es decir  $H_B^1 \times L_B^2 \hookrightarrow X$ , puesto que  $-\frac{N}{2} > (n-1) - \frac{N}{p}$ .

Vamos a ver ahora que en ambas situaciones se obtiene el resultado.

Supongamos ahora que  $X \hookrightarrow H_B^1 \times L_B^2$  y sea  $(\varphi_0, v_0) \in X$ . Entonces consideramos la solución con dato inicial  $(\varphi_0, v_0)$  en  $H_B^1 \times L_B^2$  la cual está globalmente definida, como se probó en el Corolario 1.5.1. Aplicando ahora el resultado de regularidad probado en la Proposición 1.4.3, se obtiene que la solución de (1.1.8) cuyo dato inicial pertenece al espacio  $H_B^1 \times L_B^2$  verifica que  $(\varphi(t), v(t)) \in X = W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$  para todo  $t > 0$  y por lo tanto la solución está globalmente definida en este espacio.

Supongamos ahora que  $H_B^1 \times L_B^2 \hookrightarrow X$ , de nuevo por la regularidad de la solución

probada en Proposición 1.4.3, se tiene que la solución local con dato inicial en  $X$ , verifica que  $(\varphi(t), v(t)) \in H_B^1 \times L_B^2$  para todo  $t \in (0, T)$ . Como consecuencia podemos considerar la solución de (1.1.8) que parte de  $(\varphi(t_1), v(t_1)) \in H_B^1 \times L_B^2$ ,  $t_1 > 0$ , la cual está globalmente definida, como se probó en el Corolario 1.5.1. Teniendo en cuenta de nuevo que  $H_B^1 \times L_B^2 \hookrightarrow X$ , se concluye el resultado.  $\square$

A continuación vamos a considerar el caso  $B = D$  y  $k_2 - k_1 > 0$  y  $h$  verificando las hipótesis del Teorema 1.6.2, probando que en esta situación es suficiente imponer a  $h$  la condición (1.5.9) para probar que las soluciones locales en estos espacios  $W_D^{n,p} \times W_D^{n-1,p}$  están globalmente definidas.

En esta situación el efecto regularizante del sistema nos permite probar en primer lugar que estas soluciones locales pertenecen a  $H_0^1 \times L^2$  a partir de un instante positivo, y en segundo lugar nos va a permitir la construcción de regiones invariantes para estas soluciones, las cuales a su vez nos proporcionan estimaciones de la solución en  $L^\infty$ . Este hecho nos permite estar en las hipótesis del Corolario 1.4.3 sin necesidad de imponer ninguna hipótesis adicional a  $h$ , y de esta forma por un razonamiento análogo al de la Proposición 1.7.1, se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 1.7.2** *i) Supongamos que  $k_2 - k_1 > 0$ ,  $h$  verifica las hipótesis del Teorema 1.6.2 y del Corolario 1.4.2 junto con (1.5.9) y sea  $(\varphi_0, v_0) \in W_0^{1,p} \times L^p$ . Entonces la solución  $(\varphi(t), v(t))$  de (1.1.8) con dato inicial  $(\varphi_0, v_0)$ , dada por el Corolario 1.4.2, está globalmente definida. De esta forma tenemos definido el semigrupo*

$$\begin{aligned} S(t) : W_0^{1,p} \times L^p &\longrightarrow W_0^{1,p} \times L^p \\ (\varphi_0, v_0) &\longrightarrow (\varphi(t), v(t)) \end{aligned} \quad (1.7.4)$$

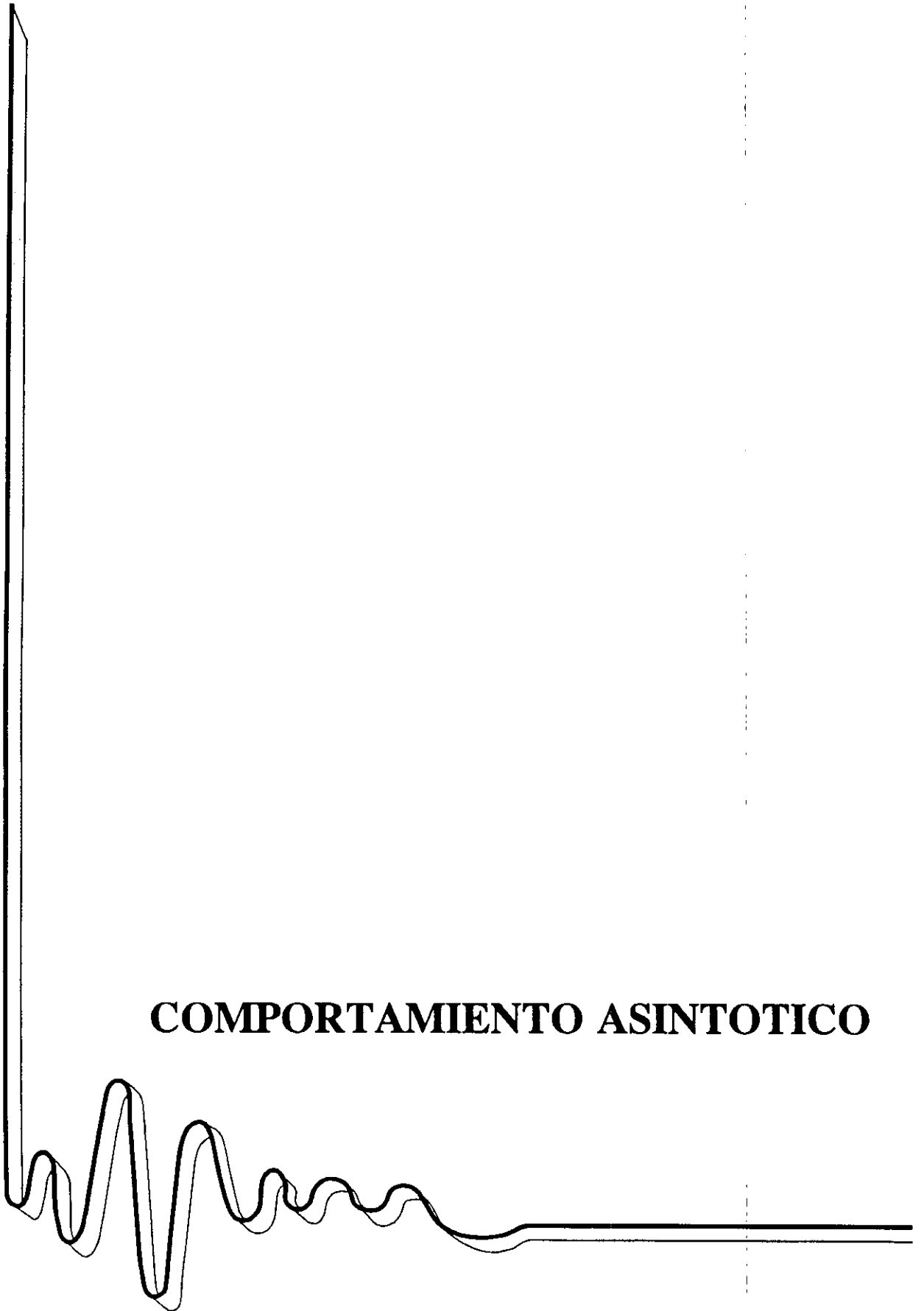
$t \geq 0$ , donde  $(\varphi(t), v(t))$  es solución de (1.1.8) con  $(\varphi(0), v(0)) = (\varphi_0, v_0)$  en  $W_0^{1,p} \times L^p$ , para todo  $p \neq 1$ .

*ii) Supongamos que  $k_2 - k_1 > 0$ ,  $h \in C^n$  verifica las hipótesis del Teorema 1.6.2, junto con de las Proposiciones 1.4.1 si  $n = 2$  o 1.4.2 si  $n \geq 3$  y  $(\varphi_0, v_0) \in W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$  para  $n$  y  $p$  tales que,  $n = 2$  y  $p \neq 1$ , o bien  $n \geq 3$  y  $p \neq 1$  verificandose además que  $N < (n - 1)p$ . Entonces la solución  $(\varphi(t), v(t))$  de (1.1.8) con dato inicial  $(\varphi_0, v_0)$  está globalmente definida. Tenemos así el semigrupo correspondiente*

$$\begin{aligned} S(t) : W_D^{n,p} \times W_D^{n-1,p} &\longrightarrow W_D^{n,p} \times W_D^{n-1,p} \\ (\varphi_0, v_0) &\longrightarrow (\varphi(t), v(t)) \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

$t \geq 0$ , donde  $(\varphi(t), v(t))$  es solución de (1.1.8) con  $(\varphi(0), v(0)) = (\varphi_0, v_0)$  en  $W_D^{n,p} \times W_D^{n-1,p}$ .

# COMPORTAMIENTO ASINTOTICO



# CAPITULO 2

## COMPORTAMIENTO ASINTOTICO

### 2.1 Atractor Maximal en $H_B^1 \times L_B^2$

Vamos a probar la existencia de un atractor global, compacto y conexo en el espacio  $Y = H_B^1 \times L_B^2$  para el semigrupo  $S(t), t \geq 0$ , bajo las hipótesis del Corolario 1.5.1.

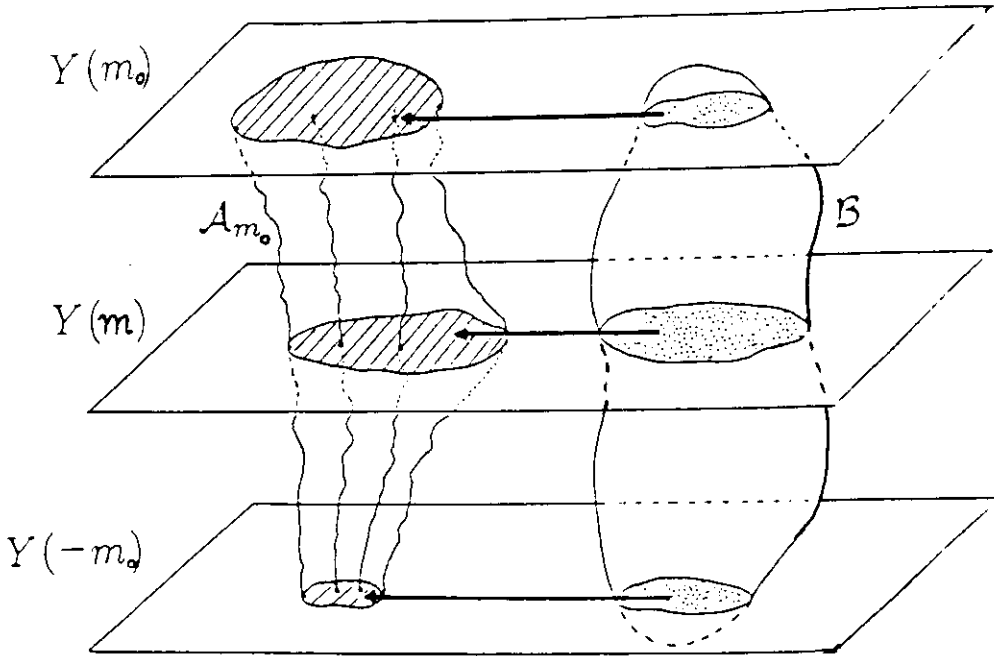
En este sentido, es importante observar que si  $B = D$ , es decir, si trabajamos con condiciones de contorno de tipo Dirichlet, probamos la existencia de  $\mathcal{A}$ , atractor maximal en  $H_0^1 \times L^2$  en el sentido usual. Por el contrario si  $B = N$  o  $B = P$ , es decir, cuando se consideran condiciones de contorno de tipo Neumann o periódicas, como consecuencia de la propiedad de conservación de la masa para  $v$ , (1.5.5), no existe un atractor maximal en el sentido usual. En estos casos el espacio ambiente está dividido en una familia de hiperplanos afines invariantes  $Y(m), m \in \mathbb{R}$  con

$$Y(m) = H_B^1 \times \{v \in L_B^2(\Omega), \int_{\Omega} v = m\}$$

de forma que cada uno de estos hiperplanos contiene a un atractor  $\mathcal{A}(m)$ , compacto y conexo que atrae a los acotados.

Probaremos que hay un atractor maximal  $\mathcal{A}_{m_0}$  en  $Y_{m_0} = H_B^1 \times \{v \in L_B^2(\Omega), |\int_{\Omega} v| \leq m_0\}$  para cada  $m_0 \in \mathbb{R}^+$ . Como consecuencia se tiene en primer lugar, que para todo  $m_0 \in \mathbb{R}^+$  y  $|m| \leq m_0$  existe un Atractor Maximal en cada hiperplano  $Y(m)$  que tiene que venir dado por  $\mathcal{A}(m) = \mathcal{A}_{m_0} \cap Y(m)$ .

La razón fundamental de considerar  $\mathcal{A}_{m_0} = \cup_{|m| \leq m_0} \mathcal{A}(m)$  en vez de  $\mathcal{A}(m)$ , es que este atractor tiene una propiedad de atracción uniforme en  $|m| \leq m_0$ , es decir si  $\mathcal{B}(m)$  es



un acotado de  $Y(m)$  entonces

$$\text{dist}(S(t)B(m), A(m)) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow \infty.$$

pero lo que demostraremos es que si además  $B_{m_0} = \cup_{|m| \leq m_0} B(m)$  es acotado en  $Y_{m_0}$  obtenemos que

$$\text{dist}(S(t)B_{m_0}, A_{m_0}) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow \infty \quad (\text{ver figura}).$$

Observamos además que  $\cup_{m \in \mathbb{R}} A(m)$  no es acotado en  $\mathcal{Y}$ .

Los métodos utilizados para la demostración de la existencia de atractor maximal, están basados en la teoría sobre semigrupos disipativos ([28]), y nos van a permitir obtener información sobre las soluciones y su comportamiento asintótico en los espacios  $W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$ , sin tener que recurrir a estimaciones de energía, que por otra parte no resultan nada fáciles de conseguir.

**Proposición 2.1.1** *Bajo las hipótesis del Corolario 1.4.3. con  $h$  verificando (1.5.9), es decir*

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{h(s)}{s} > 0.$$

*se tiene que:*

i) Si  $B = D$  existe un atractor global compacto y conexo,  $\mathcal{A}$  en  $Y = H_0^1 \times L^2$  para el semigrupo  $S(t), t \geq 0$ .

Además el atractor coincide con el conjunto inestable de los puntos de equilibrio,  $E$ , definido por:

$w \in W^u(E)$  si y sólo si  $S(-t)w$ , está definido para todo  $t \geq 0$  y  $\text{dist}(S(-t)w, E) \mapsto 0$  cuando  $t \mapsto \infty$ , donde la distancia se toma en  $H^1 \times L^2$ .

Si además  $E$  es un conjunto finito, entonces  $\mathcal{A} = \cup_{(\varphi_0, v_0) \in E} W^u((\varphi_0, v_0))$ , y para cada  $(\varphi(t), v(t))$  solución del sistema (1.1.8), existe un punto de equilibrio  $(\varphi_0, v_0) \in E$ , tal que:

$$(\varphi(t), v(t)) \mapsto (\varphi_0, v_0) \text{ en } H_0^1 \times L^2 \text{ si } t \mapsto \infty.$$

ii) Si  $B = N$  o  $B = P$ , para cada  $m \geq 0$ , existe un atractor global compacto y conexo  $\mathcal{A}_m$  en  $Y_m = H_B^1 \times \{v \in L_B^2, \int_{\Omega} v \leq m\}$  para el semigrupo  $S(t), t \geq 0$ .

Además el atractor coincide con el conjunto inestable de los puntos de equilibrio  $E_m$ , donde  $E_m = E \cap Y_m$ .

Si además el conjunto  $E(m) = E \cap \{(\varphi, v), \int_{\Omega} v = m\}$  es aislado en el espacio invariante  $Y(m) = H_B^1 \times \{v \in L_B^2, \int_{\Omega} v = m\}$ , entonces el atractor en  $Y(m)$  viene dado por  $\mathcal{A}(m) = \mathcal{A}_{|m|} \cap Y(m) = \cup_{(\varphi_0, v_0) \in E(m)} W^u((\varphi_0, v_0))$ , y para cada  $(\varphi(t), v(t))$  solución del sistema (1.1.8) con  $\int_{\Omega} v_0 = m$ , existe un punto de equilibrio  $(\varphi_0, v_0) \in E(m)$ , tal que:

$$(\varphi(t), v(t)) \mapsto (\varphi_0, v_0) \text{ en } H_B^1 \times L_B^2 \text{ si } t \mapsto \infty.$$

### Demostración:

Por el Corolario 1.5.1 y la Proposición 0.3.3 del apéndice, tenemos que  $S(t), t \geq 0$  es un sistema gradiente **asintóticamente regular** en  $H_B^1 \times L_B^2$ . Entonces si el conjunto de los puntos de equilibrio  $E$ , es acotado,  $S(t)$  es puntualmente disipativo y por el Teorema 0.3.1 del apéndice se obtiene el resultado buscado. Veamos por tanto que  $E$  está acotado.

Sea  $(\varphi_0, v_0) \in H_B^1 \times L_B^2$  un punto de equilibrio del sistema (1.1.8), es decir, verificando

$$\begin{cases} -k_1 \Delta_B \varphi_0 + h(\varphi_0) + b\varphi_0 - av_0 & = 0 \\ -k_2 \Delta_B v_0 + c\Delta_B \varphi_0 & = 0 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Si  $B = D$ , la segunda ecuación de (2.1.1) y la relación entre los coeficientes (1.1.9), nos dice que  $b\varphi_0 = av_0$  y por tanto

$$-k_1 \Delta_D \varphi_0 + h(\varphi_0) = 0 \quad (2.1.2)$$

basta entonces con probar que todas las soluciones de (2.1.2) están en un acotado de  $H_D^1 = H_0^1$ . Multiplicando (2.1.2) por  $\varphi_0$ , e integrando por partes, obtenemos:

$$k_1 \int_{\Omega} |\nabla \varphi_0|^2 + \int_{\Omega} h(\varphi_0) \varphi_0 = 0$$

además por (1.5.9), existe  $\delta > 0$ ,  $c(\delta) > 0$  con  $h(s)s \geq \delta s^2 - c(\delta)$  para todo  $s \in \mathbb{R}$  y por lo tanto

$$\int_{\Omega} h(\varphi_0)\varphi_0 \geq \delta\|\varphi_0\|^2 - c(\delta)|\Omega|. \quad (2.1.3)$$

Consecuentemente, existe  $R > 0$  tal que  $\|\varphi_0\|_{H_B^1} \leq R$ , y  $\|v_0\|_{H_B^1} \leq \frac{b}{a}R$  y por tanto el conjunto de los puntos de equilibrio  $E$  está acotado en  $H_0^1 \times H_0^1$  y en  $H_0^1 \times L^2$ .

Finalmente si  $E$  es un conjunto finito, teniendo en cuenta que el conjunto  $w$ -límite,  $w(\varphi_0, v_0)$ , está contenido en el conjunto de los puntos de equilibrio, [28], [31],[61], se concluye el resultado.

ii) Si  $B = N$  o  $B = P$  por la segunda ecuación de (2.1.1) y por la relación entre los coeficientes (1.1.9), tenemos que

$$b\varphi_0 - av_0 = \lambda \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2.1.4)$$

esto implica que

$$\begin{cases} -k_1\Delta_B\varphi_0 + h(\varphi_0) + \lambda = 0 \\ b\varphi_0 - av_0 = \lambda. \end{cases} \quad (2.1.5)$$

Como  $\lambda$  es arbitrario no es posible probar que los equilibrios son acotados. Sin embargo por (1.5.5) la ecuación de evolución de  $v$  conserva la masa, de forma que si miramos equilibrios en  $Y_m$ , esto es, con  $|\int_{\Omega} v_0| \leq m$ ,  $m$  dado, si es posible probar que son acotados.

Multiplicando la primera ecuación de (2.1.5) por  $\varphi_0$ , e integrando por partes obtenemos ahora:

$$k_1 \int_{\Omega} |\nabla\varphi_0|^2 + \int_{\Omega} h(\varphi_0)\varphi_0 + \lambda \int_{\Omega} \varphi_0 = 0.$$

Además por (2.1.3) tenemos que

$$k_1 \int_{\Omega} |\nabla\varphi_0|^2 + \delta \int_{\Omega} \varphi_0^2 + \lambda \int_{\Omega} \varphi_0 \leq c(\delta)|\Omega|.$$

Por otra parte, (2.1.4) nos dice que  $\lambda \int_{\Omega} \varphi_0 = \frac{|\Omega|}{b}\lambda^2 + \frac{a}{b}\lambda \int_{\Omega} v_0$ , de esta forma

$$k_1 \int_{\Omega} |\nabla\varphi_0|^2 + \delta \int_{\Omega} \varphi_0^2 + \frac{|\Omega|}{b}\lambda^2 \leq c(\delta)|\Omega| - \frac{a\lambda}{b} \int_{\Omega} v_0 \leq c(\delta)|\Omega| + \frac{a}{b}\lambda m.$$

Ahora, por la desigualdad de Young para cada  $\epsilon > 0$  y  $c(\epsilon) = \frac{1}{4\epsilon}$  tenemos que  $\lambda \leq \epsilon|\lambda|^2 + c(\epsilon)$ . De esta forma tomando  $\epsilon = \frac{|\Omega|}{am}$ , existe una constante  $c_1(m) = c(\delta)|\Omega| + \frac{a}{b}mc(\epsilon) > 0$  tal que

$$k_1 \int_{\Omega} |\nabla\varphi_0|^2 + \delta \int_{\Omega} \varphi_0^2 \leq c_1(m)$$

y por tanto  $\|\varphi_0\|_{H_B^1} \leq c_2(m)$  para algún  $c_2(m) > 0$ . Además, por (2.1.4) tenemos que  $|\lambda| \leq \frac{1}{|\Omega|}(b\|\varphi_0\|_{L^1} + am)$  y

$$\|v_0\| \leq \frac{b}{a}\|\varphi_0\| + \frac{|\lambda|}{a}|\Omega|^{\frac{1}{2}}.$$

Consecuentemente, existe  $c(m) > 0$  tal que  $\|\varphi_0\|_{H_B^1} + \|v_0\| \leq c(m)$  para todo  $(\varphi_0, v_0) \in E_m = Y_m \cap E$ , donde  $E_m$  representa el conjunto de puntos de equilibrio en  $Y_m$ . Esto unido al hecho de que  $Y_m$  es invariante por  $S(t)$  y además el semigrupo  $S(t)$  sobre  $Y_m$  es asintóticamente regular y puntualmente disipativo, nos permite aplicar el Teorema 0.3.1 del apéndice para concluir la demostración.

Por último teniendo en cuenta la estructura del atractor maximal que se pueden encontrar [28], [31], [61], se concluye la demostración.  $\square$

## 2.2 Atractor Maximal en $W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$ , $p \neq 1$ , $n \geq 1$

Vamos a ver unas estimaciones uniformes sobre la norma de las soluciones en  $W_B^{1,p} \times L_B^p$  para  $p \geq 2$ , y en otros espacios más regulares, basadas en la técnica de la Proposición 1.4.3 y en la fórmula de variación de las constantes. Estas estimaciones nos van a permitir demostrar que el atractor maximal en  $H_B^1 \times L_B^2$  dado por el Corolario 2.1.1 es también atractor maximal sobre estos espacios.

Para la existencia del atractor consideraremos el caso  $B = D$ , es decir trabajaremos con condiciones de contorno de tipo Dirichlet, para probar que  $\mathcal{A}$  es un atractor maximal en  $W_D^{n,p} \times W_D^{n-1,p}$  para todo  $p \neq 1$  si  $n = 1$ ,  $p \geq \frac{2N}{N+2}$  si  $n = 2$  y para  $N < (n-1)p$  si  $n \geq 3$ .

Esta prueba se puede trasladar a las condiciones de contorno de tipo Neumann y periódicas, teniendo en cuenta que en estos casos no existe un atractor maximal en el sentido habitual, como se hizo observar en la sección anterior. En estas situaciones el espacio  $W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$  con  $B = N$  ó  $P$ , está dividido en hiperplanos afines  $X(m)$  con  $m \in \mathbb{R}$

$$X(m) = W_B^{n,p} \times \{v \in W_B^{n-1,p}(\Omega), \int_{\Omega} v = m\},$$

de forma que fijado  $m \in \mathbb{R}^+$ , el atractor maximal en  $H_B^1 \times L_B^2$ ,  $\mathcal{A}_m$ , dado por el Corolario 2.1.1, es también en los casos anteriores, un atractor maximal en

$$X_m = W_B^{n,p} \times \{v \in W_B^{n-1,p}(\Omega), |\int_{\Omega} v| \leq m\}$$

que atrae uniformemente en  $n$  a todos los acotados de  $X(n)$  con  $|n| \leq m$ .

**Proposición 2.2.1** *Supongamos que  $h$  verifica las hipótesis del Corolario 1.4.2. Dado  $(\varphi_0, v_0) \in W_B^{1,p} \times L_B^p$ , supongamos que la solución del sistema (1.1.8) que parte de ese dato inicial, verifica:*

$$\sup_{t \geq 0} \|(\varphi(t), v(t))\|_{W_B^{1,p} \times L_B^p} \leq c_1 < \infty.$$



a) Entonces, para todo  $s > 1$  y  $\epsilon \in (0, 1]$  se tiene

$$\sup_{t \geq \tau} \|(\varphi(t), v(t))\|_{W_B^{2(1-\epsilon),s} \times W_B^{1-2\epsilon,s}} \leq C(\tau, \sup_{t \geq 0} \|(\varphi(t), v(t))\|_{W_B^{1,p} \times L_B^p})$$

para  $\tau > 0$  arbitrario.

b) Si  $h \in C^n$ ,  $n \geq 2$ , está en las hipótesis de la Proposición 1.4.1 si  $n = 2$  y de la Proposición 1.4.2, si  $n \geq 3$ . Entonces se tiene además que para todo  $s > 1$  si  $n = 2$ , y para todo  $s > \frac{N}{n-1}$  si  $n \geq 3$ ,

$$\sup_{t \geq \tau} \|(\varphi(t), v(t))\|_{W_B^{n+1-2\epsilon,s} \times W_B^{n-2\epsilon,s}} \leq C(\tau, \sup_{t \geq 0} \|(\varphi(t), v(t))\|_{W_B^{1,p} \times L_B^p})$$

para  $\epsilon \in (0, 1]$ ,  $\tau > 0$ .

### Demostración:

Sea  $A_B^* = A_B + \lambda I$  con  $\lambda > 0$  suficientemente grande para que  $A_B^*$  sea definido positivo, es decir para que  $Re(\sigma(A_B^* + \lambda I)) > \mu > 0$ . Además este operador sigue siendo sectorial al igual que  $A_B$  sobre los mismos espacios de potencias fraccionarias.

Como consecuencia, la solución del sistema (1.1.8) con dato inicial  $(\varphi(t_0), v(t_0))$ , viene dada por la fórmula de variación de constantes

$$(\varphi(t), v(t)) = S(t-t_0)(\varphi(t_0), v(t_0)) = e^{-A_B^*(t-t_0)}(\varphi(t_0), v(t_0)) + \int_{t_0}^t e^{-A_B^*(t-s)} G^*(\varphi(s), v(s)) ds \quad (2.2.1)$$

donde

$$A_B^* = \begin{pmatrix} -k_1 \Delta_B + \lambda I & -aI \\ c \Delta_B & -k_2 \Delta_B + \lambda I \end{pmatrix} \quad (2.2.2)$$

y

$$G^* \begin{pmatrix} \varphi \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h(\varphi) + (\lambda - b)\varphi \\ \lambda v \end{pmatrix} \quad (2.2.3)$$

y por simplicidad en la notación en lo sucesivo notaremos por  $A_B$  el operador  $A_B^*$  y por  $G$  el operador  $G^*$ .

Observamos que basta con probar el resultado para  $\epsilon$  suficientemente pequeño y  $s$  grande.

### Demostración de a):

Teniendo en cuenta ahora la Proposición 1.4.3, se tiene en particular que la solución que parte de  $(\varphi_0, v_0)$ , pertenece al espacio  $W_B^{1,q} \times L_B^q$  para todo  $q \neq 1$  a partir de cualquier instante de tiempo positivo.

Recordemos los espacios de potencias asociados a  $A_B^*$ , es decir, si  $Y_q = L_B^q \times W_B^{-1,q}$ , entonces  $Y_q^{\frac{1}{2}} = W_B^{1,q} \times L_B^q$ ,  $Y_q^1 = W_B^{2,q} \times W_B^{1,q}$  e  $Y_q^{1-\epsilon} = W_B^{2(1-\epsilon)q} \times W_B^{1-2\epsilon q}$ , para  $\epsilon \in (0, 1]$ .

De esta forma por la fórmula de variación de las constantes, junto con el Lema 0.1.1 del apéndice, se tiene que

$$\|(\varphi, v)(t)\|_{Y_q^{1-\epsilon}} \leq M \frac{e^{-\mu(t-\tau)}}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}-\epsilon}} \|(\varphi(\tau), v(\tau))\|_{Y_q^{\frac{1}{2}}} + \sup_{t \geq \tau} \|G(\varphi, v)(t)\|_{Y_q} \int_{\tau}^t M \frac{e^{-\mu(t-s)}}{(t-s)^{1-\epsilon}} ds \quad (2.2.4)$$

con  $0 < \epsilon \leq \frac{1}{2}$ , para todo  $t > \tau$ . Además, tenemos que  $h$ , y como consecuencia también  $G$ , lleva acotados de  $Y_q^{\frac{1}{2}}$  en acotados de  $Y_q$ , tal y como se demostró en el Corolario 1.4.2 bajo ciertas hipótesis sobre  $q, N$  y el orden de crecimiento de  $h$ . En este sentido observamos que al ir aumentando  $q$ , las restricciones del Corolario 1.4.2 se debilitan y por tanto como son ciertas para  $p$ , en cuanto  $q \geq p$  también se dan. De esta forma si

$$\sup_{t \geq \tau} \|(\varphi, v)(t)\|_{Y_q^{\frac{1}{2}}} \leq c_q^1 < \infty \quad (2.2.5)$$

se tiene que  $\sup_{t \geq \tau} \|G(\varphi, v)(t)\|_{Y_q} \leq c_q^2 < \infty$ . Como consecuencia, dado  $\tau^* > \tau$  arbitrario, existe  $c_q^3 = c_q^3(c_q^1, \tau, \tau^*) > 0$  tal que

$$\sup_{t \geq \tau^*} \|(\varphi, v)(t)\|_{Y_q^{1-\epsilon}} \leq c_q^3 < \infty \quad (2.2.6)$$

A continuación vamos a aplicar este argumento general para ciertas elecciones de  $q$  y  $\tau$ .

$a_1$ ) Supongamos que  $p > N$ .

Aplicando (2.2.4)-(2.2.6) para  $q = p$  y  $\tau = 0$ , se tiene que para todo  $t_1 > 0$  arbitrario, obtenemos:

$$\sup_{t \geq t_1} \|(\varphi, v)(t)\|_{Y_p^{1-\epsilon}} \leq c_1 < \infty.$$

Tomando  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño tal que  $(1 - 2\epsilon)p - N \geq 0$ , y como consecuencia de las inclusiones de Sobolev, se tiene que  $Y_p^{1-\epsilon} = W_B^{2(1-\epsilon), p} \times W_B^{1-2\epsilon, p} \rightleftharpoons Y_s^{\frac{1}{2}} = W_B^{1, s} \times L_B^s$  para todo  $s$ , y por tanto:

$$\sup_{t \geq t_1} \|(\varphi, v)(t)\|_{Y_s^{\frac{1}{2}}} \leq c_2.$$

De esta forma aplicando de nuevo (2.2.4)-(2.2.6) con  $q = s$  y  $\tau = t_1 > 0$ , tendríamos

$$\sup_{t \geq t_2} \|(\varphi, v)(t)\|_{Y_s^{1-\epsilon}} \leq c_3$$

con  $t_2 > t_1 > 0$  y con  $Y_s^{1-\epsilon} = W_B^{2(1-\epsilon), s} \times W_B^{1-2\epsilon, s}$ , tal y como queríamos probar.

A continuación vamos a ver que en cualquier otra situación nos podemos remitir al caso anterior, por un procedimiento iterativo similar al utilizado en la demostración de la Proposición 1.4.3.

$a_2)$  Supongamos que  $p \leq N$ .

En primer lugar por (2.2.4) para  $q = p$  y  $\tau = 0$ , se tiene de nuevo para  $t_1 > 0$ , que

$$\sup_{t \geq t_1} \|(\varphi, v)(t)\|_{Y_p^{1-\epsilon}} \leq c_1.$$

Por las inclusiones de Sobolev se tiene que  $Y_p^{1-\epsilon} = W_B^{2(1-\epsilon), p} \times W_B^{1-2\epsilon, p} \hookrightarrow W_B^{1, s} \times L_B^s = Y_s^{\frac{1}{2}}$  para todo  $s \leq p_1(\epsilon) = \frac{Np}{N-p(1-2\epsilon)}$ . De esta forma se tiene que:

$$\sup_{t \geq t_1} \|(\varphi, v)(t)\|_{Y_{p_1(\epsilon)}^{\frac{1}{2}}} \leq c_2.$$

Por lo tanto:

$a_{21})$  Si  $p \leq N < 2p$ , entonces con  $\epsilon \in (0, 1]$  suficientemente pequeño tal que  $N < 2p - 2\epsilon p$ , se tiene que  $p_1(\epsilon) > N$  y por tanto estamos en el caso  $a_1)$  por lo que se tiene el resultado buscado.

Si  $N \geq 2p$ , entonces para todo  $\epsilon$  suficientemente pequeño tal que  $N > 2p - 2\epsilon p$ , se tiene que  $p_1(\epsilon) < N$ . Aplicando de nuevo (2.2.4)-(2.2.6) para  $q = p_1(\epsilon)$  y  $\tau = t_2 > t_1$ , se tiene que

$$\sup_{t \geq t_3} \|(\varphi, v)(t)\|_{Y_{p_1(\epsilon)}^{1-\epsilon}} \leq c_3.$$

Ahora de nuevo por las inclusiones de Sobolev, se tiene que  $Y_{p_1(\epsilon)}^{1-\epsilon} = W_B^{2(1-\epsilon), p_1(\epsilon)} \times W_B^{1-2\epsilon, p_1(\epsilon)} \hookrightarrow W_B^{1, s} \times L_B^s = Y_s^{\frac{1}{2}}$  para todo  $s \leq p_2(\epsilon) = \frac{Np_1(\epsilon)}{N-p_1(\epsilon)(1-2\epsilon)} = \frac{Np}{N-2p(1-2\epsilon)}$ .

Por tanto:

$a_{22})$  Si  $2p \leq N < 3p$ , entonces con  $\epsilon$  suficientemente pequeño, se tiene que  $p_2(\epsilon) > N$ , por lo que hemos terminado ya que estamos en el caso  $a_1)$ .

En caso contrario, si  $N \geq 3p$ , se tiene  $p_2(\epsilon) < N$  y tendríamos que aplicar de nuevo (2.2.4)-(2.2.6), ahora con  $q = p_2(\epsilon)$ .

De esta forma al igual que vimos en la Proposición 1.4.3, en un número finito  $k$  de etapas llegamos al primer caso  $a_1)$ .

En efecto, de forma inductiva dados  $N$  y  $p$  existe un  $k$ , tal que

$$a_{2k}) \quad kp \leq N < (k+1)p.$$

Definimos  $p_0 = p$ ,  $p_i(\epsilon) = \frac{Np_{i-1}}{N-p_{i-1}(1-2\epsilon)} = \frac{Np}{N-ip(1-2\epsilon)}$  para  $i = 1, \dots, k$ . Observamos que en esta situación, por ser  $N \geq kp$ , para todo  $\epsilon$  suficientemente pequeño, se tiene que  $N > p_i(\epsilon)$  para todo  $i = 0, \dots, k-1$ , y además por ser  $N < (k+1)p$ , se tiene que  $p_k(\epsilon) > N$ , para  $\epsilon$  suficientemente pequeño.

Por (2.2.4) se tiene que:

$$\sup_{t \geq t_{i-1}} \|(\varphi, v)\|_{Y_{p_i(\epsilon)}^{\frac{1}{2}}} \leq c_i$$

y por el razonamiento anterior se tiene que

$$\sup_{t \geq t_i} \|(\varphi, v)\|_{Y_{p_i(\epsilon)}^{1-\epsilon}} \leq c_i^* < \infty,$$

y por las inclusiones de Sobolev se tiene que

$$\sup_{t \geq t_i} \|(\varphi, v)\|_{Y_{p_{i+1}(\epsilon)}^{\frac{1}{2}}} \leq c_{i+1} < \infty, \quad i = 1, \dots, k.$$

De esta forma en la etapa  $k$ -ésima tenemos (2.2.5) para  $q = p_k(\epsilon) > N$ , lo que concluye el resultado pues nos sitúa de nuevo en la etapa  $a_1$ ).

**Demostración de b):**

b) Si  $h \in C^n$ ,  $n \geq 2$ , consideramos  $s > 1$  si  $n = 2$ , y  $s > \frac{N}{n-1}$  si  $n \geq 3$  arbitrario y aplicamos el principio de inducción sobre  $n$ , al igual que hicimos en la Proposición 1.4.3, para probar que ahora la siguiente estimación de la norma de la solución:

Para todos  $k \leq n$ ,  $\tau > 0$  y  $\epsilon = \frac{\delta}{n}$  con  $\delta \in (0, 1]$  arbitrario, existe una constante  $c_k = c_k(\tau) > 0$ , tal que

$$\sup_{t \geq \tau} \|(\varphi, v)(t)\|_{Y_s^{\frac{k+1}{2}-\epsilon}} \leq c_k \tag{2.2.7}$$

con  $Y_s^{\frac{k+1}{2}-\epsilon} = W_B^{k+1-2\epsilon, s} \times W_B^{k-2\epsilon, s}$ .

Observamos que por el apartado anterior, se tiene que (2.2.7) es cierto para  $k = 1$  con  $\epsilon \in (0, 1]$ . Supongamos ahora que (2.2.7) se verifica para  $1 \leq k \leq n$  y vamos a probar que entonces (2.2.7) es cierto para  $k + 1$ , siempre que  $k + 1 \leq n$ .

Observamos que ahora, para cada  $k$ , existe la solución con dato inicial en los espacios  $W_B^{k+1-2\epsilon, s} \times W_B^{k-2\epsilon, s}$ , ya que por ser  $h \in C^{k+1}$  y  $N < ks$ , si  $k > 1$ , estamos en las hipótesis de la Proposición 1.4.1 o de la Proposición 1.4.2.

Por la hipótesis de inducción se tiene (2.2.7) en el espacio  $Y_s^{\frac{k+1}{2}-\epsilon}$ , es decir

$$\sup_{t \geq t_1} \|(\varphi, v)(t)\|_{Y_s^{\frac{k+1}{2}-\epsilon}} \leq c_k$$

con  $c_k > 0$  y  $t_1 > 0$ . Como consecuencia, por un razonamiento análogo al del Lema 1.4.2,  $h(\varphi)$  y por tanto  $G(\varphi, v)$  está acotado en el espacio  $Y_s^{\frac{k}{2}-\epsilon}$ , es decir, se tiene que:

$$\sup_{t \geq t_1} \|G(\varphi, v)(t)\|_{Y_s^{\frac{k}{2}-\epsilon}} \leq c_k^*$$

siendo  $c_k^*$  una constante positiva que sólo depende de  $c_k$ . Por lo tanto, análogamente a (2.2.4)-(2.2.6), trabajando ahora en los espacios de potencias fraccionarias para  $A_B^*$ , en  $Z_s = Y_s^{\frac{k}{2}-\epsilon} = W_B^{k-2\epsilon, s} \times W_B^{k-1-2\epsilon, s}$ , tenemos  $Z_s^{\frac{1}{2}} = Y_s^{\frac{k+1}{2}-\epsilon} = W_B^{k+1-2\epsilon, s} \times W_B^{k-2\epsilon, s}$ ,

$Z_s^{1-\epsilon} = Y_s^{\frac{k}{2}+1-2\epsilon} = W_B^{k+2-4\epsilon,s} \times W_B^{k+1-4\epsilon,s}$ , y usando de nuevo el Lema 0.1.1 del apéndice, se tiene que

$$\begin{aligned} \|(\varphi, v)(t)\|_{Y_s^{\frac{k}{2}+1-2\epsilon}} &\leq M \frac{e^{-\mu(t-t_1)}}{(t-t_1)^{\frac{1}{2}-\epsilon}} \|(\varphi(t_1), v(t_1))\|_{Y_s^{\frac{k+1}{2}-\epsilon}} + \\ &+ \sup_{t \geq t_1} \|G(\varphi, v)(t)\|_{Y_s^{\frac{k}{2}-\epsilon}} \int_{t_1}^t M \frac{e^{-\mu(t-s)}}{(t-s)^{1-\epsilon}} ds \end{aligned}$$

para todo  $t \geq t_1$ , con  $2\epsilon \in (0, \frac{1}{2}]$ .

De donde

$$\sup_{t \geq t_2} \|(\varphi, v)(t)\|_{Y_s^{\frac{k}{2}+1-2\epsilon}} \leq c_{k+1}$$

para  $t_2 > t_1 > 0$  arbitrario, lo que concluye la demostración.  $\square$

De forma inmediata se obtiene el siguiente resultado, en el que hemos de imponer a  $h$ , al igual que en otros resultados siguientes, la hipótesis (1.5.9), es decir

$$\liminf_{|s| \rightarrow \infty} \frac{h(s)}{s} > 0$$

además de las hipótesis del Corolario 1.4.2, ya que necesitamos tener asegurada la existencia de solución global con dato inicial en  $H_B^1 \times L_B^2$ .

**Corolario 2.2.1** *Supongamos que  $h \in C^n$ ,  $n \geq 1$  verifica las hipótesis del Corolario 1.4.3 junto con (1.5.9), entonces se tiene que:*

a) *Dado  $(\varphi_0, v_0) \in H_B^1 \times L_B^2$ , la solución del sistema (1.1.8) con ese dato inicial, está acotada en  $W_B^{n+1-2\epsilon,s} \times W_B^{n-2\epsilon,s}$  para todo  $s > \frac{N}{n}$ , con  $\epsilon \in (0, 1]$ , en  $[t_1, \infty)$  para todo  $t_1 > 0$ .*

*En particular, esto es cierto si  $(\varphi_0, v_0) \in W_B^{1,p} \times L_B^p$  con  $p \geq 2$ .*

b) *Si  $K \subset H_B^1 \times L_B^2$  es un conjunto acotado, entonces el conjunto  $\{S(t)K, t \geq t_1 > 0\}$ , es acotado en  $W_B^{n+1-2\epsilon,s} \times W_B^{n-2\epsilon,s}$  para todo  $s > \frac{N}{n-1}$ , con  $\epsilon \in (0, 1]$ .*

*En particular, esta conclusión es válida para  $K \subset W_B^{1,p} \times L_B^p$  acotado, con  $p \geq 2$ .  $\square$*

A continuación vamos a ver un resultado sobre la regularidad del atractor maximal para el semigrupo en  $H_B^1 \times L_B^2$ , denotado por  $\mathcal{A}$  si  $B = D$ ,  $\mathcal{A}_m$  si  $B = N, P$ , cuya existencia ha sido probada en la Proposición 2.1.1.

**Corolario 2.2.2** *Supongamos que se verifican las hipótesis del Corolario 1.4.3 junto con (1.5.9), y sea  $\mathcal{A}$  si  $B = D$ ,  $\mathcal{A}_m$  si  $B = N$  ó  $P$ , el atractor maximal sobre  $H_B^1 \times L_B^2$ , dado por*

la Proposición 2.1.1. Entonces se tiene que  $\mathcal{A} \subset W_0^{1,s} \times L^s$  si  $B = D$  y  $\mathcal{A}_m \subset W_B^{1,s} \times L_B^s$  si  $B = N$  ó  $P$ , para todo  $s > 1$  y es compacto, conexo e invariante en él.

Además si  $h \in C^n$  con  $n \geq 2$ , se tiene que  $\mathcal{A} \subset W_D^{n,s} \times W_D^{n-1,s}$  si  $B = D$  (respectivamente  $\mathcal{A}_m \subset W_B^{n,s} \times L_B^s$  si  $B = N$  ó  $P$ ), y es compacto, conexo e invariante, para todo  $s > 1$  si  $n = 2$ , y para  $s > \frac{N}{n-1}$  si  $n \geq 3$ .

**Demostración:**

Por simplicidad en la notación, vamos a ver el caso  $B = D$ , análogamente se prueban los casos  $B = N$  y  $B = P$ .

Sabemos que  $\mathcal{A} \subset H_0^1 \times L^2$  y para todo  $t \geq 0$ ,  $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ . La Proposición 1.4.3 permite deducir en particular que  $\mathcal{A} \subset W_0^{1,s} \times L^s$ ,  $s > 1$ , y que si  $h \in C^n$ ,  $n \geq 2$ , también  $\mathcal{A} \subset W_D^{n,s} \times W_D^{n-1,s}$  para todo  $s$  en las hipótesis del enunciado.

Aplicando ahora el Corolario 2.2.1, puesto que  $\mathcal{A}$  es acotado en  $H_0^1 \times L^2$ , se tiene que  $\mathcal{A} = S(t)\mathcal{A}$  es acotado en  $W_D^{n+1-2\epsilon,s} \times W_D^{n-2\epsilon,s}$  para  $n \geq 1$ ,  $s$  en las hipótesis del enunciado, con  $\epsilon \in (0, 1]$  suficientemente pequeño. Teniendo en cuenta de nuevo que

$$W_D^{n+1-2\epsilon,s} \times W_D^{n-2\epsilon,s} \hookrightarrow W_D^{n,s} \times W_D^{n-1,s}$$

con inclusión continua y compacta, se tiene que  $\mathcal{A}$  es un conjunto compacto y conexo en  $W_D^{n,s} \times W_D^{n-1,s}$ .  $\square$

**Corolario 2.2.3** Consideramos  $h \in C^n$ ,  $n \geq 1$  y  $p \neq 1$ , y  $K$  un conjunto acotado de  $X = W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$ , (respectivamente de  $X_m = \{(\varphi, v) \in X, |\int_{\Omega} v| \leq m\}$ ) donde  $X$  y  $h$ , verifican alguna de las siguientes condiciones:

- i)  $X = W_B^{1,p} \times L_B^p$ , con  $p \geq 2$ ,  $n = 1$  y  $h$  verificando las hipótesis del Corolario 1.4.3 junto con (1.5.9).
- ii)  $X = W_B^{2,p} \times W_B^{1,p}$ , con  $p \geq \frac{2N}{N+2}$ ,  $n = 2$  y  $h$  verificando (1.5.9) junto con (1.4.2) para  $N = 1, 2$ ,  $1 \leq r < \infty$ , y (1.4.7) para  $N \geq 3$ ,  $1 \leq r \leq \frac{N}{N-2}$ .
- iii)  $X = W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$  con  $N < (n-1)p$ ,  $n \geq 3$  y  $h$  verificando las hipótesis del Corolario 1.4.3 junto con (1.5.9).

Entonces:

$$\text{dist}_X(S(t)K, \mathcal{A}) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty,$$

si  $B = D$  y respectivamente

$$\text{dist}_{X_m}(S(t)K, \mathcal{A}_m) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty,$$

si  $B = N$  ó  $P$ , es decir,  $\mathcal{A}$  (respectivamente  $\mathcal{A}_m$ ) atrae a los conjunto acotados de  $X$  (respectivamente de  $X_m$ .)

**Demostración:**

Consideraremos el caso  $B = D$ , análogamente se prueban los casos  $B = N, P$ .

Nótese que en cualquiera de los tres casos se tiene que  $X \hookrightarrow H_0^1 \times L^2$ , y por tanto si  $K$  es acotado en  $X$  también lo es en el espacio  $H_0^1 \times L^2$ . Por lo tanto por la Proposición 1.4.3, se tiene que  $\{S(t)K, t \geq 0\}$  es un conjunto acotado en el espacio  $H_0^1 \times L^2$ .

Aplicando ahora el Corolario 2.2.1, se tiene que  $\{S(t)K, t \geq t_1, t_1 > 0\}$  es también un conjunto acotado en el espacio  $W_D^{n+1-2\epsilon, s} \times W_D^{n-2\epsilon, s}$ ,  $n \geq 1, s > \frac{N}{n-1}$ . Como este espacio está contenido en  $W_D^{n, s} \times W_D^{n-1, s}$ , con inclusión compacta, y a su vez  $W_D^{n, s} \times W_D^{n-1, s} \hookrightarrow X$ , se tiene que existe el conjunto  $w$ -límite de  $K$  en  $X$ , [31],[61], y verifica que  $w(K) \subset X$  es compacto e invariante y

$$\text{dist}_X(S(t)K, w(K)) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow \infty.$$

Además, teniendo en cuenta de nuevo que  $w(K) \subset X \hookrightarrow H_0^1 \times L^2$ , por la maximalidad de  $\mathcal{A}$ , se tiene que  $w(K) \subset \mathcal{A}$ . Observemos también que por el Corolario 2.2.2,  $\mathcal{A} \subset X$ .

Como consecuencia se obtiene en cualquier caso

$$\text{dist}_X(S(t)K, \mathcal{A}) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow \infty. \square$$

**Corolario 2.2.4** *Bajo las hipótesis del Corolario 2.2.3, se tiene que:*

i) Si  $X = W_B^{n, p} \times W_B^{n-1, p} \hookrightarrow H_B^1 \times L_B^2$  y  $K \subset X$  es un conjunto acotado, entonces

$$w_X(K) = w_{H_0^1 \times L^2}(K).$$

ii) Si  $h \in C^n$ , denotando  $X_n = W_B^{n, p} \times W_B^{n-1, p}$ ,  $p \geq \frac{2N}{N+2(n-1)}$ , sea  $K \subset X_k = W_B^{k, p} \times W_B^{k-1, p}$  un conjunto acotado, con  $k \leq n$ . Entonces se tiene que

$$\text{dist}_{X_n}(S(t)K, \mathcal{A}) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow \infty,$$

respectivamente

$$\text{dist}_{X_n}(S(t)K, \mathcal{A}_m) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow \infty,$$

y el conjunto  $w(K)$  es independiente de  $k \leq n$ .

**Demostración:**

Consideraremos el caso  $B = D$ .

i) Como consecuencia de que  $X \hookrightarrow H_B^1 \times L_B^2$  se tiene que el conjunto  $w$ -límite de un acotado en  $X$ , está contenido en el conjunto  $w$ -límite de dicho conjunto en el espacio  $H_0^1 \times L^2$ , es decir,  $w_X(K) \subset w_{H_0^1 \times L^2}(K)$ .

Para probar la inclusión recíproca, basta con observar que  $w_X(B) = \bigcap_{t>0} \overline{\{S(r)B, r > t\}}^X$ , junto con la propiedad topológica siguiente:

Si  $R \subset X \subset Y$ , y  $R$  es relativamente compacto en  $X$ , entonces la adherencia de  $R$  en  $X$  y en  $Y$ , coinciden.

ii) Basta observar que el conjunto  $\{S(t)K, t \geq t_1 > 0\}$  es relativamente compacto en  $X_n \hookrightarrow X_k$ .  $\square$

**Teorema 2.2.1** *Supongamos que estamos bajo las notaciones e hipótesis del Corolario 2.2.3, con  $h \in C^n, n \geq 1$  verificando (1.5.9). Sea  $S(t)$  el semigrupo generado por las soluciones del sistema (1.1.8) en  $X = W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$  con  $p \neq 1$  si  $n = 1, p \geq \frac{2N}{N+2}$  si  $n = 2$  y  $N < (n-1)p$  para  $n \geq 3$ .*

*Entonces si  $B = D, S(t)$  posee un atractor maximal compacto y conexo que atrae a los acotados de  $X$ .*

*Además el atractor coincide con el atractor maximal,  $\mathcal{A}$ , en  $H_0^1 \times L^2$  dado por el Corolario 2.1.1, con  $\mathcal{A} = W^u(E)$ , es decir es el conjunto inestable asociado a los puntos de equilibrio del sistema (conjunto  $E$ .)*

*En particular si  $E$  es un conjunto finito, para toda  $(\varphi(t), v(t))$  solución del sistema (1.1.8), existe un punto de equilibrio  $(\varphi_0, v_0) \in E$ , tal que:*

$$(\varphi(t), v(t)) \mapsto (\varphi_0, v_0) \text{ en } X = W_D^{n,p} \times W_D^{n-1,p} \text{ si } t \mapsto \infty.$$

*Si  $B = N$  o  $B = P$ , dado  $m > 0, S(t), t \geq 0$  posee un atractor maximal, compacto y conexo en  $X_m = W_B^{n,p} \times \{v \in W_B^{n-1,p}, |\int_{\Omega} v| \leq m\}$  que atrae a los acotados de  $X_m$ . Además este atractor coincide con el atractor maximal,  $\mathcal{A}_m$ , en  $Y_m = H_0^1 \times \{v \in L^2, |\int_{\Omega} v| \leq m\}$  dado por la Proposición 2.1.1.*

**Demostración:**

Por simplicidad en la notación consideraremos el caso  $B = D$ .

Sabemos por el Corolario 2.2.2 que  $\mathcal{A}$  es un conjunto invariante, compacto y conexo en  $X = W_D^{n,p} \times W_D^{n-1,p}$ . Además por el Corolario 2.2.3,  $\mathcal{A}$  atrae a los conjuntos acotados de  $X$ , por tanto si vemos que es maximal habremos terminado la demostración.

En efecto, sea  $K \subset X$  un conjunto compacto e invariante, es decir  $S(t)K = K$  en  $X$ , teniendo en cuenta ahora que  $X = W_D^{n,p} \times W_D^{n-1,p} \hookrightarrow H_0^1 \times L^2$ , ya que  $p \geq \frac{2N}{N+2(n-1)}$ , con inclusión continua y compacta, se tiene que  $K = S(t)K \subset H_0^1 \times L^2$ , es decir  $K$  es también un conjunto compacto e invariante en  $H_0^1 \times L^2$ , y como consecuencia se tiene que  $K \subset \mathcal{A}$ .



Como el conjunto  $w$ -límite, de cualquier solución está contenido en  $E$ , [31], [61], si  $E$  es finito, entonces el conjunto  $w_{H_0^1 \times L^2}(\{(\varphi(t), v(t)), t \geq 0\})$ , es un punto de  $E$ . Aplicando ahora el Corolario 2.2.4 apartado i), se tiene que

$$w_X(\{(\varphi(t), v(t)), t \geq 0\}) = w_{H_0^1 \times L^2}(\{(\varphi(t), v(t)), t \geq 0\}),$$

se concluye la demostración del Teorema.  $\square$

A continuación vamos a estudiar el comportamiento de la solución que parte de un dato inicial en  $Y = W_D^{n,p} \times W_D^{n-1,p}$ , para el caso en el que no estamos en las hipótesis del Teorema anterior, es decir, para  $n = 1$  y  $p < 2$  o bien  $n = 2, N > 2$  y  $1 < p < \frac{2N}{N+2}$ .

**Proposición 2.2.2** *Consideramos el espacio  $Y = W_B^{n,p} \times W_B^{n-1,p}$ ,  $n = 1, 2$  y la aplicación  $h \in C^n$  verificando (1.5.9). Supongamos que se verifica además alguna de las siguientes condiciones:*

- i)  $n = 1, 1 < p < 2$  y  $h$  verifica las hipótesis del Corolario 1.4.2.
- ii)  $n = 2, N > 2, 1 < p < \frac{2N}{N+2}$  y  $h$  verifica las hipótesis de la Proposición 1.4.1.

*Consideramos  $K$  un conjunto acotado de  $Y$  verificando alguna de las siguientes condiciones:*

- a) Existe  $t_1 > 0$ , tal que  $S(t_1)K \subset H_B^1 \times L_B^2$ , es acotado.
- b) Existe  $t_1 > 0$ , tal que el conjunto

$$\{S(t)K, 0 \leq t \leq t_1\} \subset Y$$

es acotado en  $Y$ .

Entonces el atractor maximal en  $H_0^1 \times L^2$ ,  $\mathcal{A}$ , si  $B = D$ , o  $\mathcal{A}_m$  si  $B = N$  ó  $P$ , dado por la Proposición 2.1.1, atrae al conjunto  $K$  en la topología de  $Y$ .

### Demostración:

Consideraremos el caso  $B = D$ .

En primer lugar observamos que si  $K$  verifica b), como consecuencia de la Proposición 2.2.1, se tiene que  $K$  verifica a), por tanto bastará con probar el resultado para este caso.

Elegimos  $q$  y  $N$ , tal que  $X = W_D^{n,q} \times W_D^{n-1,q}$  verifique las condiciones del Corolario 2.2.3 y tal que  $X \hookrightarrow Y$ .

Si  $K$  verifica a), consideramos el conjunto  $K_1 = S(t_1)K \subset H_0^1 \times L^2$ , y de nuevo por la Proposición 2.2.1, el conjunto,  $K_2 = S(\epsilon)K_1 = S(t_1 + \epsilon)K$  es un conjunto acotado en  $X$ , para  $\epsilon > 0$ . De esta forma, como consecuencia del Corolario 2.2.3, se tiene que

$$\text{dist}_X(S(t)K_2, \mathcal{A}) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow \infty$$

y como  $X \hookrightarrow Y$ , también tenemos

$$\text{dist}_Y(S(t)K, \mathcal{A}) \mapsto 0 \text{ si } t \mapsto \infty. \square$$

**Proposición 2.2.3** *Supongamos que se verifican las hipótesis de la Proposición 2.2.2. Entonces el atractor maximal sobre  $H_B^1 \times L_B^2, \mathcal{A}$  (respectivamente  $\mathcal{A}_m$ ) dado por el Corolario 2.1.1, atrae a todos los conjuntos compactos de los espacios  $Y$  (respectivamente  $Y_m$ ), definidos en la Proposición 2.2.2, en la topología de estos espacios y es el mayor conjunto compacto, conexo e invariante con esa propiedad.*

**Demostración:**

Consideramos  $B = D$  sin pérdida de generalidad.

Queremos probar que  $\mathcal{A}$  atrae a los conjuntos compactos de  $Y$ , para lo cual basta con probar que si  $K \subset Y$ , es un conjunto compacto, entonces  $K$  verifica la propiedad b) de la Proposición 2.2.2. De esta forma, aplicando dicha Proposición 2.2.2, se concluye el resultado.

Vamos a probar dicha propiedad por reducción al absurdo. Supongamos que  $K$  no verifica b), entonces para todo  $t_1 > 0$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existen  $s < t_1$  y  $u \in K$ , tal que:

$$\|S(s)u\|_Y \geq n.$$

Por lo tanto, podemos tomar  $s_n \mapsto 0, n \mapsto \infty$  y  $u_n = u_n(s_n, n) \in K$ , tal que  $\|S(s_n)u_n\|_Y \geq n$ . Teniendo en cuenta ahora que  $S : \mathbb{R}^+ \times Y \mapsto Y$  es un semigrupo continuo, junto con la compacidad de  $K$ , se deduce la existencia de  $u \in K$  tal que  $u_n \mapsto u$  y  $S(s_n)u_n \mapsto S(0)u = u$ , (tomando subsucesiones si fuera necesario), y entonces  $\|u\|_Y = \infty$ , lo cual es absurdo.  $\square$

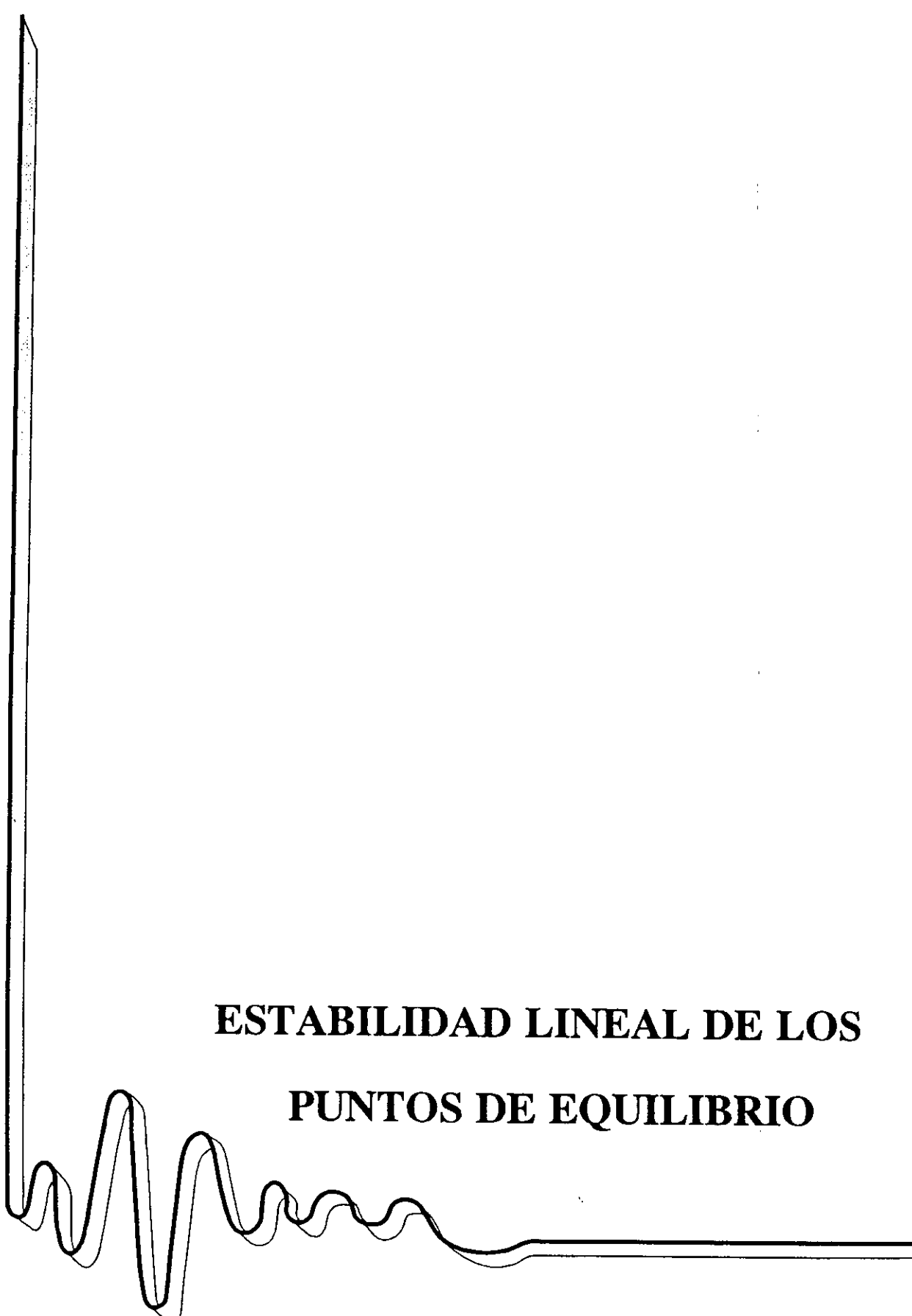
**Observación 2.2.1** *Bajo las notaciones e hipótesis del Corolario 2.2.3 y de la Proposición 2.2.2, tenemos que  $\mathcal{A}$  atrae a todos los acotados de  $X$ , los compactos de  $Y$  y a todos los acotados  $K$  que verifican alguna de las hipótesis de la Proposición 2.2.2. Observamos además que si  $K \subset Y = W_D^{n,p} \times W_D^{n-1,p}$  con  $n = 1, p < 2$  o  $n = 2, N > 2$  y  $1 < p < \frac{2N}{N-2}$ , es un acotado que no verifica las hipótesis de la Proposición 2.2.2, entonces se tiene que:*

i) *Para todo  $t > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $u \in K$ , tal que  $\|S(t)u\|_{H_B^1 \times L_B^2} \geq n$ .*

ii) *Para todo  $t > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $u \in B$ , tal que  $\|S(t)u\|_Y \geq n$ .*

*No obstante, existe  $R > 0$  tal que  $\|u\|_Y \leq R$  para todo  $u \in K$ .*





**ESTABILIDAD LINEAL DE LOS  
PUNTOS DE EQUILIBRIO**

## CAPITULO 3

# ESTABILIDAD LINEAL DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO

Por la descripción del atractor hecha anteriormente, el estudio de los puntos de equilibrio y su estabilidad es clave para comprender el comportamiento asintótico del sistema.

Observamos de nuevo que si  $B = N$  ó  $P$  y  $(\varphi(t), v(t))$ , es la solución del sistema (1.1.8), entonces (1.5.5) nos dice que

$$\int_{\Omega} v(t) = \int_{\Omega} v(0)$$

es decir la masa se conserva. De esta forma, si  $m_0 = \int_{\Omega} v_0$ , el conjunto

$$Y(m_0) = \{(\varphi, v) \in H_B^1 \times L_B^2, \int_{\Omega} v = m_0\}$$

es un hiperplano afín invariante para  $S(t)$ , que contiene al punto de equilibrio  $(\varphi_0, v_0)$ , donde  $S(t)$  es el semigrupo definido por el sistema (1.1.8). Por eso con estas condiciones de frontera ningún punto de equilibrio puede ser asintóticamente estable en  $H_B^1 \times L_B^2$ , pero sí que puede serlo en  $Y(m_0)$ . Por esta razón los resultados sobre la estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio de (1.1.8) con condiciones de frontera  $N$  o  $P$ , se referirán siempre al hiperplano afín  $Y(m_0)$ .

### 3.1 Ecuaciones linealizadas

En esta sección fijamos  $p = 2$ , consideramos  $N \leq 3$ ,  $-\Delta_B$  en  $L^2(\Omega)$  (o  $L_{per}^2(\Omega)$ ) dependiendo, como en las secciones anteriores, de la condición de contorno y notaremos

por  $(\varphi_0, v_0) \in H_B^1 \times L_B^2$  un **punto de equilibrio** del sistema, (1.1.8), es decir,  $(\varphi_0, v_0)$  verifica las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} -k_1 \Delta_B \varphi_0 + h(\varphi_0) + b\varphi_0 - av_0 & = 0 \\ -k_2 \Delta_B v_0 + c\Delta_B \varphi_0 & = 0 \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Vamos a estudiar la estabilidad lineal de  $(\varphi_0, v_0)$ , para lo cual linealizamos el sistema de ecuaciones (1.1.8), en un entorno de dicho punto. Para ello, vamos a probar en primer lugar el siguiente resultado:

**Lema 3.1.1** *Supongamos que  $h \in C^2(\mathbb{R})$  y si  $N > 1$  verifica también las hipótesis del Corolario 1.4.3, es decir (1.4.2), con  $r$  tal que  $r \geq 1$  si  $N = 2$  y  $1 \leq r \leq 3$  si  $N = 3$ , y además*

$$|h''(s)| \leq C(1 + |s|^{\lceil r-2 \rceil}) \quad (3.1.2)$$

donde  $\lceil r-2 \rceil$  representa a la parte entera de  $r-2$ , y  $C$  es una constante positiva. Entonces la aplicación

$$h^e : H_B^1 \longmapsto L_B^2, \quad h^e(\varphi) = h(\varphi)$$

es diferenciable Frechet y  $Dh^e(\varphi_0) \in \mathcal{L}(H_B^1, L_B^2)$  viene dada por.  $Dh^e(\varphi_0)\psi = h'(\varphi_0)\psi$ , es decir,

$$\lim_{\|\psi\|_{H_B^1} \rightarrow 0} \frac{\|h(\varphi_0 + \psi) - h(\varphi_0) - h'(\varphi_0)\psi\|}{\|\psi\|_{H_B^1}} = 0$$

con  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_B^2}$ .

### Demostración :

En primer lugar, la aplicación que a cada  $\varphi \in H_B^1$ , le hace corresponder  $h'(\varphi_0)\varphi$  en  $L_B^2$ , es una aplicación lineal y continua, ya que por la desigualdad de Hölder

$$\|h'(\varphi_0)\varphi\| \leq \|h'(\varphi_0)\|_{L^q} \|\varphi\|_{L^{q'}} \leq C \|\varphi\|_{H_B^1}$$

para algún  $C > 0$ , para todo  $q, q' > 2$  tal que  $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{2}$  si  $N \leq 2$ , y para  $q = \frac{6}{r-1}$  y  $q' = \frac{2q}{q-2} = \frac{12}{4-2r}$  si  $N = 3$ , ya que por las inclusiones de Sobolev, tenemos que  $H_B^1 \hookrightarrow L^q$  para todo  $q$  tal que  $1 - \frac{N}{2} \geq -\frac{N}{q}$ , es decir siempre que  $q \leq \frac{2N}{N-2}$ . Por lo tanto si  $N = 3$ , se ha de verificar  $q = \frac{6}{r-1} \leq 6$  y  $q' = \frac{2q}{q-2} = \frac{12}{4-2r} \leq 6$ , lo cual es consecuencia de  $r \leq 3$ .

Ahora, si fijamos  $\varphi_0, \psi \in H_B^1$  y  $x \in \Omega$ , entonces

$$[h(\varphi_0 + \psi) - h(\varphi_0) - h'(\varphi_0)\psi](x) = [h'(\psi_1)(x) - h'(\varphi_0)(x)]\psi(x)$$

con  $\psi_1(x) = \varphi_0(x) + \theta(x)\psi(x)$  y  $\theta(x) \in [0, 1]$ .

Análogamente,

$$h'(\psi_1)(x) - h'(\varphi_0)(x) = h''(\psi_2(x))[\psi_1(x) - \varphi_0(x)] = h''(\psi_2(x))\theta(x)\psi(x)$$

con  $\psi_2(x) = \varphi_0(x) + \delta(x)\psi_1(x)$  y  $\delta(x) \in [0, 1]$ , i.e.  $\psi_2(x) = (1 + \delta(x))\varphi_0(x) + \delta(x)\theta(x)\psi(x)$ .

De esta forma, se obtiene

$$\|h(\varphi_0 + \psi) - h(\varphi_0) - h'(\varphi_0)\psi\| = \|h''(\psi_2)\theta\psi^2\| \leq \|h''(\psi_2)\psi^2\|$$

ya que  $\|\theta\|_{L^\infty} \leq 1$ . Además, si  $N = 1$  entonces  $H_B^1 \subset L^\infty$  con  $\|\psi_2\|_{L^\infty} \leq 2\|\varphi_0\|_{L^\infty} + \|\psi\|_{L^\infty}$  y por tanto

$$\|h''(\psi_2)\psi^2\| \leq \|h''(\psi_2)\|_{L^\infty} \|\psi\|_{L^4}^2 \leq c_1 \|h''(\psi_2)\|_{L^\infty} \|\psi\|_{H_B^1}^2$$

donde  $c_1$  es una constante positiva. Si  $N \geq 2$ , entonces por (3.1.2) existen  $c_i$  con  $i \in \{2, 3\}$  tales que

$$\|h''(\psi_2)\psi^2\| \leq c_2 \|\psi\|_{L^4}^2 + c_3 \|\psi_2\|_{L^q}^{[r-2]} \|\psi\|_{L^p}^2$$

con  $p = 6, q = 6$  si  $N = 3$  y, para todo  $q, p > 2$  tal que  $\frac{1}{q} + \frac{2}{p} = \frac{1}{2}$  si  $N = 2$ .

Puesto que  $|\psi_2| \leq 2|\varphi_0| + |\psi|$  y por las inclusiones de Sobolev, en todos los casos, si  $\psi \in B_{H_B^1}(\varphi_0, R)$ , bola en  $H_B^1$  de centro  $\varphi_0$  y radio  $R$ , existe  $c_4 > 0$ , constante positiva tal que

$$\|h''(\psi_2)\psi^2\| \leq c_4 \|\psi\|_{H_B^1}^2. \square$$

Aplicando este resultado tenemos:

**Corolario 3.1.1** *Las ecuaciones (1.1.8), linealizadas en un entorno del punto  $(\varphi_0, v_0)$  vienen dadas por:*

$$\begin{cases} \varphi_t - k_1 \Delta_B \varphi + [h'(\varphi_0) + b]\varphi - av & = 0 \\ v_t - k_2 \Delta_B v + c \Delta_B \varphi & = 0 \end{cases} \quad (3.1.3)$$

o en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ v \end{pmatrix}_t + A_L \begin{pmatrix} \varphi \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.4)$$

con

$$A_L = \begin{pmatrix} -k_1 \Delta_B + [h'(\varphi_0) + b]I & -aI \\ c \Delta_B & -k_2 \Delta_B \end{pmatrix} \square \quad (3.1.5)$$

Vamos a ver a continuación, algunas propiedades del operador  $A_L$ .

**Proposición 3.1.1**  *$A_L$  es un operador sectorial en el espacio  $L_B^2 \times H_B^{-1}$ , con dominio  $H_B^2 \times H_B^1$  y con resolvente compacta. En particular,  $\sigma(A_L) = \sigma_p(A_L) = \{\mu_n\}_n$  con  $|\mu_n| \uparrow \infty$ .*

Se tiene además que dado  $(\varphi_1, v_1) \in H_B^1 \times L_B^2$ , existe una única solución del sistema (3.1.3), dada por  $\begin{pmatrix} \varphi \\ v \end{pmatrix} = e^{-A_L t} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$  donde  $e^{-A_L t}$  representa el semigrupo analítico generado por  $-A_L$ , tal que  $(\varphi(0), v(0)) = (\varphi_1, v_1)$ , verificando (3.1.3) como una igualdad en el espacio  $L_B^2 \times H_B^{-1}$  y tal que

$$(\varphi, v) \in C^\omega(0, \infty, H_B^{2\gamma} \times H_B^{2\gamma-1}) \text{ para todo } \gamma \in \mathbb{R} \text{ y } \varphi, v \in C^\infty((0, \infty) \times \bar{\Omega}).$$

### Demostración:

Vamos a demostrar que  $A_L$  es un operador sectorial aplicando el resultado de perturbación dado por el Lema 0.1.3 del apéndice. Con esta finalidad descomponemos  $A_L$  como suma del operador  $A_B$  definido por (1.2.2), esto es:

$$A_B = \begin{pmatrix} -k_1 \Delta_B & -aI \\ c \Delta_B & -k_2 \Delta_B \end{pmatrix}$$

el cual es sectorial sobre esos espacios, según vimos en la Proposición 1.3.1, y otro que está en las hipótesis del Lema 0.1.3, como probaremos a continuación.

En efecto, podemos escribir  $A_L = A_B + P$  con

$$P \begin{pmatrix} \varphi \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} DH(\varphi_0)\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h'(\varphi_0)\varphi + b\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

y por la Proposición 1.3.1, tenemos que  $A_B$  es sectorial en  $Y_B = L_B^2 \times H_B^{-1}$  con dominio  $Y_B^1 = H_B^2 \times H_B^1$ .

Por otra parte,  $P$  es un operador lineal en  $L_B^2 \times H_B^{-1}$  con dominio

$$D(P) = \{(\varphi, v) \in L_B^2 \times H_B^{-1}, \quad h'(\varphi_0)\varphi \in L_B^2\},$$

e  $Y_B^{\frac{1}{2}} = H_B^1 \times L_B^2 \subset D(P)$ .

Además la aplicación  $P : H_B^1 \times L_B^2 \mapsto L_B^2 \times H_B^{-1}$  es acotada por el Lema 3.1.1. De esta forma por el Lema 0.1.3 del apéndice,  $A_L$  es sectorial.

Por último,  $D(A_L) \subset L_B^2 \times H_B^{-1}$  con inclusión compacta, y por lo tanto  $A_L$  tiene resolvente compacta. En cuanto a la regularidad de la solución de (3.1.3), por un argumento usual de *bootstrap*, tenemos que  $(\varphi, v) \in C^\omega(0, \infty; H_B^{2\gamma} \times H_B^{2\gamma-1})$  para todo  $\gamma \in \mathbb{R}$ , y a partir de aquí gracias a las inclusiones de Sobolev, tenemos que  $\varphi, v \in C^\infty((0, \infty) \times \bar{\Omega})$ .  $\square$

**Observación 3.1.1** Para cada  $t > 0$ , el semigrupo definido por el sistema linealizado (3.1.3) nos proporciona la diferencial en el punto  $(\varphi_0, v_0)$  del semigrupo definido por el sistema no lineal (1.1.8). es decir

$$DS(t)(\varphi_0, v_0) = e^{-A_L t}.$$



Por el principio de estabilidad linealizada recogido en el Teorema 0.4.1 del apéndice, el estudio de la estabilidad del origen  $(0, 0)$  en el sistema linealizado (3.1.3), nos informa sobre la estabilidad del punto de equilibrio  $(\varphi_0, v_0)$  en el sistema no lineal (1.1.8). De tal forma que la inestabilidad del origen se traduce en inestabilidad del punto  $(\varphi_0, v_0)$  y la estabilidad asintótica del origen nos lleva a que el punto de equilibrio  $(\varphi_0, v_0)$  sea uniformemente asintóticamente estable. Por esta razón estudiaremos la estabilidad del origen en el sistema linealizado (3.1.3).

Recordamos que si  $B = N$  o  $P$  y por la condición de conservación de la masa dada por (1.5.5), ningún punto de equilibrio puede ser asintóticamente estable en  $H_B^1 \times L_B^2$ , pero sí que puede serlo en  $Y(m_0)$ . Por esta razón los resultados sobre la estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio de (1.1.8) con condiciones de frontera  $N$  ó  $P$ , se referirán siempre a la dinámica en el hiperplano afín  $Y(m_0)$ .

De esta forma el semigrupo linealizado  $DS(t)(\varphi_0, v_0) = e^{-\Lambda t}$  deja al hiperplano

$$\mathcal{V} = \{(\psi, \omega) \in H_B^1 \times L_B^2, \int_{\Omega} \omega = 0\} = H_B^1 \times \dot{L}_B^2$$

invariante. Por lo tanto bajo condiciones de frontera  $B = N$  ó  $B = P$  estudiaremos el flujo del sistema linealizado en  $H_B^1 \times \dot{L}_B^2$ , es decir consideraremos las soluciones  $(\varphi, v) \in H_B^1 \times L_B^2$ , del sistema linealizado (3.1.3), tales que  $v(t)$  verifica

$$\int_{\Omega} v(t) = 0. \tag{3.1.6}$$

### 3.2 Funcional de Lyapunov linealizado $\mathcal{F}_L$

Vamos a construir un funcional de Lyapunov, para el flujo del sistema linealizado,  $\mathcal{F}_L$ , el cual determina propiedades de estabilidad de  $(\varphi_0, v_0)$ .

**Proposición 3.2.1** *Supongamos que  $h(s)$  verifica las hipótesis del Corolario 1.4.3 junto con (3.1.2), entonces el funcional  $\mathcal{F}_L$  definido por*

$$\mathcal{F}_L(\varphi, v) = \frac{k_1}{2} \|\nabla \varphi\|^2 + \frac{k_2 a}{2c} \|v\|^2 + \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} (h'(\varphi_0) + b) \varphi^2 - av\varphi \right] \tag{3.2.1}$$

que se puede escribir como

$$\mathcal{F}_L(\varphi, v) = \frac{k_1}{2} \|\nabla \varphi\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} h'(\varphi_0) \varphi^2 + \frac{b}{2} \int_{\Omega} \left( \frac{a}{b} v - \varphi \right)^2 \tag{3.2.2}$$

verifica las siguientes propiedades:

i)  $\mathcal{F}_L$  es un funcional de Lyapunov para el flujo del sistema linealizado (3.1.3), en el espacio  $H_0^1 \times L^2$  si  $B = D$  y si  $B = N$  ó  $P$  en el espacio  $H_B^1 \times \dot{L}_B^2$ .

ii) Además para toda solución  $(\varphi(t), v(t))$  del sistema (3.1.3), tal que si  $B = N$  ó  $P$  verifica  $\int_\Omega v(t) = 0$ , se tiene que

$$\frac{d}{dt}(\|\varphi\|^2 + \frac{a}{c}\|v\|_{-1}^2) + 4\mathcal{F}_L(\varphi, v) = 0 \quad (3.2.3)$$

donde  $\|\cdot\|_{-1}$  representa a la norma en  $\dot{H}_B^{-1}$ .

### Demostración:

i) Si  $(\varphi, v)$  es una solución de (3.1.3), entonces  $h'(\varphi_0)\varphi \in L_B^2$  y  $\varphi \in H_B^1 \subset L_B^2$  implica que  $h'(\varphi_0)\varphi^2 \in L^1(\Omega)$ .

Multiplicando la primera ecuación de (3.1.3) por  $\varphi_t$  en  $L_B^2$ , y teniendo en cuenta que  $(v\varphi)_t = v_t\varphi + v\varphi_t$ , implica

$$\int_\Omega v \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{d}{dt} \int_\Omega v\varphi - \int_\Omega \varphi \frac{\partial v}{\partial t}$$

obtenemos

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|^2 + a \int_\Omega \varphi \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left\{ \frac{k_1}{2} \|\nabla \varphi\|^2 + \int_\Omega \left[ \frac{1}{2} (h'(\varphi_0) + b) \varphi^2 - av\varphi \right] \right\} = 0. \quad (3.2.4)$$

Ahora multiplicamos la segunda ecuación de (3.1.3) por  $\frac{a}{c}(-\Delta_B)^{-1}v_t$ . Observamos que si  $B = D$ ,  $(-\Delta_D)^{-1}$  está bien definido, pero si  $B = N$  o  $B = P$ , entonces  $-\Delta_B$  no es un operador positivo, pero su núcleo es un espacio vectorial unidimensional generado por las funciones constantes. Sin embargo, de (3.1.6) tenemos  $\frac{d}{dt} \int_\Omega v = \int_\Omega v_t = 0$  y por lo tanto  $(-\Delta_B)^{-1}$  está bien definido como un elemento de  $H_B^2$  con media nula, como ya vimos en la sección anterior.

Teniendo en cuenta las propiedades sobre operadores sectoriales y la escala de espacios de potencias fraccionarias asociados, [31], tal y como vimos en (1.5.6), si  $A = -\Delta_D$  en  $X = L^2$  con dominio  $X^1 = H^2 \cap H_0^1$ , o bien  $A = -\Delta_B$  en  $X = \dot{L}_B^2$  con dominio  $X^1 = \dot{H}_B^2$  si  $B = N$  ó  $P$ , se tiene que

$$\langle A^{-1}v_t, v_t \rangle = \langle A^{-\frac{1}{2}}v_t, A^{-\frac{1}{2}}v_t \rangle = \|A^{-\frac{1}{2}}v_t\|^2 = \|v_t\|_{X^{-\frac{1}{2}}}^2 \quad (3.2.5)$$

con  $X^{-\frac{1}{2}} = \dot{H}_B^{-1}$ , como consecuencia el resultado de multiplicar  $(-\Delta_B)^{-1}v_t$  en  $L_B^2$  por  $v_t$  es  $\left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{-1}^2$ . De esta forma obtenemos

$$\frac{a}{c} \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{-1}^2 - a \int_\Omega \varphi \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{k_2 a}{2c} \frac{d}{dt} \|v\|^2 = 0. \quad (3.2.6)$$

Ahora, sumando ambas expresiones (3.2.4) y (3.2.6), conseguimos

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|^2 + \frac{a}{c} \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{-1}^2 + \frac{d}{dt} \mathcal{F}_L(\varphi, v) = 0 \quad (3.2.7)$$

donde  $\mathcal{F}_L : H_0^1 \times L^2 \mapsto \mathbb{R}$ , o bien  $\mathcal{F}_L : H_B^1 \times \dot{L}_B^2 \mapsto \mathbb{R}$  si  $B = N, P$ , es el funcional definido por (3.2.1) que se puede escribir como (3.2.2) por la relación entre los coeficientes dada por (1.1.9). Por otro lado (3.2.7), nos dice que  $\mathcal{F}_L$  es un funcional de Lyapunov para (3.1.3).

ii) Multiplicando la primera ecuación de (3.1.3) por  $\varphi$  en  $L_B^2$  e integrando por partes, se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\varphi\|^2 + \int_{\Omega} [(h'(\varphi_0) + b)\varphi^2 - av\varphi] + k_1 \|\nabla \varphi\|^2 = 0 \quad (3.2.8)$$

Ahora, de nuevo por (3.1.6), podemos multiplicar la segunda ecuación por  $\frac{a}{c}(-\Delta_B)^{-1}v$  en  $L^2$  o en  $\dot{L}_B^2$  si  $B = N, P$  y procediendo análogamente, se obtiene:

$$\frac{a}{2c} \frac{d}{dt} \|v\|_{-1}^2 - a \int_{\Omega} \varphi v + \frac{k_2 a}{c} \|v\|^2 = 0 \quad (3.2.9)$$

sumando ambas expresiones, (3.2.8) con (3.2.9), tenemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\varphi\|^2 + \frac{a}{c} \|v\|_{-1}^2) - 2a \int_{\Omega} \varphi v + \frac{k_2 a}{c} \|v\|^2 + k_1 \|\nabla \varphi\|^2 + \int_{\Omega} (h'(\varphi_0) + b)\varphi^2 = 0$$

de esta forma se consigue (3.2.3).  $\square$

**Observación 3.2.1** *La expresión (3.2.3), deja evidencia de la influencia del signo de  $\mathcal{F}_L$  en el comportamiento asintótico de las soluciones del sistema linealizado, es decir en la estabilidad del origen, también ligada como sabemos al espectro de  $A_L$ ,  $\sigma(A_L)$ .*

Vamos a probar a continuación que  $\sigma(A_L) \subset \mathbb{R}$ , a pesar de que no es un operador autoadjunto.

**Lema 3.2.1** *Bajo las notaciones e hipótesis anteriores, se tiene que  $\sigma(A_L) = \sigma_p(A_L) \subset \mathbb{R}$ .*

**Demostración:**

Por la Proposición 3.1.1,  $\sigma(A_L)$  está formado únicamente por autovalores. Sea  $\lambda + i\mu \in \sigma(A_L)$  y  $(\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2, v = v_1 + iv_2) \in H_0^1 \times L^2$  (respectivamente  $H_B^1 \times \dot{L}_B^2$  si  $B = N$  ó  $P$ ) una autofunción asociada a  $\lambda + i\mu$ , sabemos que entonces se verifica

$$\begin{cases} (\lambda + i\mu)\varphi &= -k_1 \Delta_B \varphi + (h'(\varphi_0) + b)\varphi - av \\ (\lambda + i\mu)v &= -k_2 \Delta_B v + c \Delta_B \varphi \end{cases}$$

Multiplicando ahora la primera ecuación por  $\bar{\varphi} = \varphi_1 - i\varphi_2$  en  $L^2$  (respectivamente  $\dot{L}_B^2$  si  $B = N$  ó  $P$ ), obtenemos

$$(\lambda + i\mu)\|\varphi\|^2 = \int_{\Omega} [(h'(\varphi_0) + b)|\varphi|^2 - av\bar{\varphi}] + k_1\|\nabla\varphi\|^2$$

ya que

$$-\int_{\Omega} k_1\Delta\varphi\bar{\varphi} = k_1\int_{\Omega} \nabla\varphi\nabla\bar{\varphi} = k_1\|\nabla\varphi\|^2.$$

Multiplicando ahora la segunda ecuación por  $\frac{a}{c}(-\Delta_D)^{-1}\bar{v}$  en  $L^2$  (respectivamente por  $\frac{a}{c}(-\Delta_B)^{-1}\bar{v}$  en  $\dot{L}_B^2$  si  $B = N$  ó  $B = P$ ) con  $\bar{v} = v_1 - iv_2$  (ahora  $\int_{\Omega} v = 0 = \int_{\Omega} \bar{v}$ ) se obtiene:

$$-a\int_{\Omega} \varphi\bar{v} + \frac{k_2a}{c}\|v\|^2 = \frac{a}{c}(\lambda + i\mu)\|v\|_{-1}^2$$

y sumando ambas expresiones, tenemos

$$(\lambda + i\mu)(\|\varphi\|^2 + \frac{a}{c}\|v\|_{-1}^2) = \int_{\Omega} [h'(\varphi_0) + b)|\varphi|^2 - av\bar{\varphi} - a\varphi\bar{v}] + \frac{k_2a}{c}\|v\|^2 + k_1\|\nabla\varphi\|^2.$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que  $v\bar{\varphi} + \varphi\bar{v} \in \mathbb{R}$  se tiene que  $\mu = 0$ , y de esta forma tenemos probado que el espectro del operador  $A_L$  es real, es decir,  $\sigma(A_L) \subset \mathbb{R}$ . Además, se tiene

$$2\mathcal{F}_L(\varphi, v) = \lambda(\|\varphi\|^2 + \frac{a}{c}\|v\|_{-1}^2). \quad \square \quad (3.2.10)$$

En primer lugar, vamos a probar un resultado que nos muestra, como el signo del funcional  $\mathcal{F}_L$ , rige la estabilidad del origen.

**Teorema 3.2.1** *Bajo las notaciones e hipótesis anteriores, se tiene que:*

- i) Si  $(\varphi_1, v_1)$  es un punto de equilibrio de la aproximación lineal (3.1.3), i.e. es una autofunción asociada al autovalor cero, entonces  $\mathcal{F}_L(\varphi_1, v_1) = 0$ .
- ii) Si  $\mathcal{F}_L \geq 0$  en  $H_0^1 \times L^2$  (respectivamente  $H_B^1 \times \dot{L}_B^2$  si  $B = N$  ó  $P$ ), entonces  $(0, 0)$  es estable para (3.1.3).
- iii) Si  $\mathcal{F}_L > 0$ , excepto en  $(0, 0)$ , entonces el origen  $(0, 0)$  es asintóticamente estable para (3.1.3).
- iv) El origen,  $(0, 0)$ , es un punto de equilibrio inestable para (3.1.3), si y sólo si, el conjunto

$$M = \{(\varphi, v) \in H_0^1 \times L^2 \text{ tal que } \mathcal{F}_L(\varphi, v) < 0\}$$

si  $B = D$ , y respectivamente

$$M = \{(\varphi, v) \in H_B^1 \times \dot{L}_B^2, \text{ tal que } \mathcal{F}_L(\varphi, v) < 0\}$$

si  $B = N$  ó  $P$ , es distinto del vacío.

**Demostración:**

- i) Ya que, por la Proposición 3.2.1, se tiene  $\frac{d}{dt}(\|\varphi\|^2 + \frac{a}{c}\|v\|_{-1}^2) + 4\mathcal{F}_L(\varphi, v) = 0$ , si consideramos ahora un punto de equilibrio,  $(\varphi_1, v_1)$ , entonces  $\mathcal{F}_L(\varphi_1, v_1) = 0$ .
- ii) Si  $\mathcal{F}_L \geq 0$ , de (3.2.10) se tiene que  $\sigma(A_L) \geq 0$ , y el origen  $(0, 0)$  es estable.
- iii) Si  $\mathcal{F}_L > 0$ , excepto en el  $(0, 0)$ , entonces de (3.2.10) se tiene que  $\sigma(A_L) > 0$ , y como consecuencia el origen es asintóticamente estable.
- iv) Si el conjunto  $M$  es vacío, entonces  $\mathcal{F}_L \geq 0$  y tenemos estabilidad.

Más aun, si  $(\varphi_1, v_1)$  es una función sobre la cual el funcional  $\mathcal{F}_L$  es negativo, es decir,  $\mathcal{F}_L(\varphi_1, v_1) < 0$ , entonces de (3.2.3) se tiene que

$$\frac{d}{dt}(\|\varphi\|^2 + \frac{a}{c}\|v\|_{-1}^2) = -4\mathcal{F}_L(\varphi, v)$$

y por (3.2.7) se tiene  $\mathcal{F}_L(\varphi, v) \leq \mathcal{F}_L(\varphi_1, v_1) < 0$ . Como consecuencia la solución asociada a ese dato inicial,  $(\varphi, v) = e^{-A_L t}(\varphi_1, v_1)$  verifica

$$\frac{d}{dt}(\|\varphi\|^2 + \frac{a}{c}\|v\|_{-1}^2) = -4\mathcal{F}_L(\varphi, v) \geq -4\mathcal{F}_L(\varphi_1, v_1) > 0.$$

Por tanto, si integramos la expresión anterior respecto del tiempo  $t$ , llegamos a

$$\|\varphi(t)\|^2 + \frac{a}{c}\|v(t)\|_{-1}^2 \geq \|\varphi(0)\|^2 + \frac{a}{c}\|v(0)\|_{-1}^2 - 4\mathcal{F}_L(\varphi_1, v_1)t \quad \forall t \geq 0$$

de forma que el segundo miembro crece con  $t$ .

Consecuentemente, el origen,  $(0, 0)$ , es inestable en  $L_B^2 \times H_B^{-1}$  y en cualquier norma más fuerte.  $\square$

### 3.3 Estabilidad e inestabilidad lineal

A continuación vamos a probar, que la estabilidad lineal depende del signo del primer autovalor de un operador elíptico de segundo orden. De forma que la estabilidad de un punto de equilibrio  $(\varphi_0, v_0)$  va a depender de la primera componente  $\varphi_0$  y de  $b$ .

**Teorema 3.3.1** *Sea  $\mu_1$  el primer autovalor de  $L_0$ , donde  $L_0$  es el operador autoadjunto en  $L_B^2 = L_B^2(\Omega)$  definido por*

$$L_0 = -k_1 \Delta_B + h'(\varphi_0)I \tag{3.3.1}$$

con dominio  $H_B^2$ . Entonces, se tiene que:

- i) Si  $\mu_1 > 0$ , entonces  $(0, 0)$  es asintóticamente estable para (3.1.3) en  $H_0^1 \times L^2$  (respectivamente en  $H_B^1 \times \dot{L}_B^2$ , si  $B = N$  ó  $P$ ).
- ii) Si  $\mu_1 = 0$  y  $B = D$ , entonces  $(0, 0)$  es estable y no es asintóticamente estable en  $L^2 \times H^{-1}$  para (3.1.3).
- iii) Si  $\mu_1 = 0$  y  $B = N$  ó  $P$ , entonces  $(0, 0)$  es estable en  $L_B^2 \times \dot{H}_B^{-1}$  para (3.1.3), y además si  $\text{Ker}(L_0) \cap \dot{L}_B^2 = \{0\}$ , podemos asegurar que  $(0, 0)$  es asintóticamente estable.
- iv) Si  $(0, 0)$  es inestable para (3.1.3) entonces el primer autovalor  $\mu_1$  es negativo.
- v) Si  $B = D$ ,  $(0, 0)$  es inestable para (3.1.3) si y sólo si el primer autovalor es negativo,  $\mu_1 < 0$ .
- vi) Si  $B = N$  ó  $P$ , entonces  $(0, 0)$  es inestable para (3.1.3), si y sólo si existe  $\varphi \in H_B^1(\Omega)$  tal que

$$R(\varphi) + \frac{b}{|\Omega|} \int_{\Omega} \varphi^2 < 0 \quad (3.3.2)$$

con  $R(\varphi) = \langle L_0 \varphi, \varphi \rangle_0$  donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$  representa el producto escalar en  $L_B^2$  y  $\varphi \in H_B^1$ . La condición (3.3.2), es equivalente a que el primer autovalor del operador autoadjunto  $M_0$  definido por

$$M_0(\varphi) = L_0(\varphi) + \frac{b}{|\Omega|} \int_{\Omega} \varphi,$$

sea negativo.

- vii) Si  $B = N$  ó  $P$ , el primer autovalor  $\mu_1 < 0$  y además  $b < |\mu_1|$ , entonces  $(0, 0)$  es inestable para (3.1.3).
- viii) Si  $B = N$  ó  $P$ , y existe  $\varphi \in H_B^1$  de media nula tal que  $R(\varphi) < 0$ , entonces  $(0, 0)$  es inestable para (3.1.3). En particular, se puede asegurar la inestabilidad del origen en los siguientes casos:

- a) Si existe una autofunción de  $L_0$  de media nula, asociada a un autovalor negativo.
- b) Si existen dos autofunciones ortogonales de  $L_0$ ,  $\varphi_i, i = 1, 2 \in H_B^1$  asociadas a autovalores  $\mu_i, i = 1, 2$  con  $\mu_1 < 0$  y  $\mu_2 \leq 0$ , respectivamente, con la condición adicional de que si  $\mu_2 = 0$ , entonces  $\varphi_2$  tiene media no nula.

### Demostración:

- i) Si  $\mu_1 > 0$  tenemos

$$2\mathcal{F}_L(\varphi, v) = R(\varphi) + \frac{a^2}{b} \|v - \frac{b}{a} \varphi\|^2 \geq \mu_1 \|\varphi\|^2 + \frac{a^2}{b} \|v - \frac{b}{a} \varphi\|^2 > 0$$

siempre que  $(\varphi, v) \neq (0, 0)$ . Como consecuencia del Teorema 3.2.1, el origen,  $(0, 0)$  es asintóticamente estable.

Veamos ahora la demostración de los apartados ii) y iii).

Sabemos que si  $\mu_1 = 0$  entonces por ser el primer autovalor, con cualquier condición de contorno se tiene que  $R(\varphi) \geq 0$  para todo  $\varphi \in H_B^1$  y entonces  $\mathcal{F}_L \geq 0$  y por el Teorema 3.2.1 tenemos que  $(0, 0)$  es estable.

Además si  $\mu_1 = 0$ , ha de existir una autofunción asociada a  $\mu_1$ , es decir, existe  $\varphi_1 \in H_B^1$  tal que

$$-k_1 \Delta_B \varphi_1 + h'(\varphi_0) \varphi_1 = 0$$

y entonces se tiene que:

ii) Si  $B = D$  la función  $(\varphi_1, \frac{b}{a} \varphi_1) \in Ker A_L$ , como consecuencia en este caso, el cero es un autovalor de  $A_L$ , es decir,  $0 \in \sigma(A_L)$  y por tanto el origen,  $(0, 0)$ , no puede ser asintóticamente estable.

iii) Para terminar la demostración, vamos a probar que si  $Ker(L_0) \cap \dot{L}_B^2 = \{0\}$ , entonces no existe ninguna autofunción del operador  $A_L$  asociada al valor cero.

En efecto, supongamos que existe  $(\varphi_1, v_1) \in H_B^1 \times \dot{L}_B^2$  tal que  $A_L(\varphi_1, v_1) = 0$ , entonces por (3.2.10), se tiene que  $F_L(\varphi_1, v_1) = 0$  y por tanto  $R(\varphi_1) = 0$ , es decir  $\varphi_1 \in Ker(L_0)$ , y además  $\|v_1 - \frac{b}{a} \varphi_1\|^2 = 0$ , de donde  $\varphi_1 = \frac{a}{b} v_1$ . Como consecuencia se tiene que  $\varphi_1 \in Ker(L_0) \cap \dot{L}_B^2 = \{0\}$ , i.e.  $(\varphi_1, v_1) = (0, 0)$ , de donde se concluye que  $\mathcal{F}_L > 0$  y  $\sigma(A_L) > 0$ , es decir  $(0, 0)$  es asintóticamente estable.

Pasamos ahora a probar los resultados sobre la inestabilidad.

Tenemos que  $R(\varphi) = \langle L_0 \varphi, \varphi \rangle_0 = k_1 \|\nabla \varphi\|^2 + \int_{\Omega} h'(\varphi_0) \varphi^2$  y entonces por (3.2.2)

$$2\mathcal{F}_L(\varphi, v) = R(\varphi) + \frac{a^2}{b} \|v - \frac{b}{a} \varphi\|^2 < 0 \tag{3.3.3}$$

si y sólo si

$$\|v - \frac{b}{a} \varphi\|^2 < -\frac{b}{a^2} R(\varphi) \tag{3.3.4}$$

con la condición adicional de que  $\int_{\Omega} v = 0$  si  $B = N$  ó  $P$ .

iv) Si  $(0, 0)$  es inestable, por el Teorema 3.2.1, el conjunto

$$M = \{(\varphi, v) \in H_0^1 \times L^2 \quad (H_B^1 \times \dot{L}_B^2, B = N, P) \text{ tal que } \mathcal{F}_L(\varphi, v) < 0\}$$

es distinto del vacío, lo que implica la existencia de una función  $\varphi$  tal que  $R(\varphi) < 0$ , lo cual a su vez, equivale a decir que el primer autovalor del operador  $L_0$  es negativo, es decir,  $\mu_1 < 0$ , ya que por el principio del mini-max:

$$\mu_1 = \min \left\{ \frac{\langle L_0 \varphi, \varphi \rangle_0}{\|\varphi\|^2}, \varphi \in H_B^1 \text{ con } \varphi \neq 0 \right\}.$$

v) Teniendo en cuenta el apartado anterior, bastará con probar que  $\mu_1 < 0$  es una condición suficiente de inestabilidad. En efecto, si  $\mu_1 < 0$  existe  $\varphi \in H_0^1$  tal que  $R(\varphi) < 0$ , y

por (3.3.4), para todo  $v \in \mathcal{B} = B(\frac{b}{a}\varphi, \epsilon)$  donde  $\mathcal{B}$  es la bola en  $L^2$  de centro  $\frac{b}{a}\varphi$  y radio  $\epsilon$  con  $\epsilon^2 = -\frac{b}{a^2}R(\varphi)$ , se tiene que  $\mathcal{F}_L(\varphi, v) < 0$ , y aplicando ahora el apartado iv) del Teorema 3.2.1 se obtiene el resultado.

vi) En primer lugar observamos que el cuadrado de la distancia de  $\frac{b}{a}\varphi$  a  $\dot{L}^2$  es  $(\frac{b}{a})^2 \frac{1}{|\Omega|} |\int_{\Omega} \varphi|^2$ . En efecto, para todo  $w \in L^2$ , se tiene que

$$w = (w - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} w) + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} w$$

con  $w - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} w$  en el subespacio  $\dot{L}^2$  y  $\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} w$  en el subespacio ortogonal a  $\dot{L}^2$ , y en particular se tiene que

$$\frac{b}{a}\varphi = (\frac{b}{a}\varphi - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{b}{a}\varphi) + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{b}{a}\varphi$$

de donde

$$\text{dist}^2(\frac{b}{a}\varphi, \dot{L}^2) = (\frac{b}{a})^2 \frac{1}{|\Omega|} |\int_{\Omega} \varphi|^2.$$

De esta forma existe  $v \in L^2$  con  $\int_{\Omega} v = 0$  verificando (3.3.4) si y sólo si  $(\frac{b}{a})^2 \frac{1}{|\Omega|} |\int_{\Omega} \varphi|^2 < -\frac{b}{a^2}R(\varphi)$  o equivalentemente si se verifica (3.3.2).

Por último observamos que (3.3.2), equivale a su vez a la existencia de  $\varphi$  tal que

$$\langle M_0\varphi, \varphi \rangle_0 = R(\varphi) + \frac{b}{|\Omega|} (\int_{\Omega} \varphi)^2 < 0.$$

por lo que de nuevo por el principio del mini-max, se concluye el resultado.

vii) Si  $B = N$  ó  $P$  y  $\mu_1 < 0$  veamos que existe  $\varphi \in H_B^1$  verificando (3.3.2), (en particular  $R(\varphi) > 0$ ). En efecto, consideramos  $\varphi \in H_B^1$  autofunción del operador  $L_0$  asociada al autovalor  $\mu_1 < 0$ , de donde  $R(\varphi) = \mu_1 \|\varphi\|^2$  y (3.3.2) es equivalente a  $\frac{b}{|\Omega|} |\int_{\Omega} \varphi|^2 < |\mu_1| \|\varphi\|^2$ , teniendo en cuenta ahora que  $|\int_{\Omega} \varphi| \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|$  y  $b < |\mu_1|$ , se concluye el resultado.

viii) Basta con observar que si  $\int_{\Omega} \varphi = 0$  y  $R(\varphi) < 0$ , entonces  $\varphi$  verifica (3.3.2).

a) Sea  $\varphi$  de media nula, asociada a  $\mu_i < 0$ , entonces  $R(\varphi) = \mu_i \|\varphi\|^2 < 0$ , por lo que  $\varphi$  verifica (3.3.2).

b) Sean  $\varphi_i, i = 1, 2$  autofunciones ortogonales de  $L_0$  asociadas a  $\mu_1 < 0, \mu_2 \leq 0$ , respectivamente, tal que si  $\mu_2 = 0$ , entonces  $\varphi_2$  no tiene media nula. Consideramos ahora la función  $\varphi = c\varphi_1 + d\varphi_2$ , y se tiene que

$$R(\varphi) = c^2 \mu_1 \|\varphi_1\|^2 + d^2 \mu_2 \|\varphi_2\|^2 < 0$$

para todo  $c, d$ .



Podemos suponer que  $\varphi_1$  tiene media no nula ya que de lo contrario estaríamos en las hipótesis del apartado anterior. Por tanto eligiendo ahora  $c$  y  $d$  para que  $\varphi$  tenga media nula, es decir

$$c = -d \frac{\int_{\Omega} \varphi_2}{\int_{\Omega} \varphi_1},$$

se concluye la demostración.  $\square$

**Corolario 3.3.1** *Con las notaciones e hipótesis anteriores, se tiene que:*

- i) Si  $h'(\varphi_0) \geq 0$  sobre  $\Omega$ , entonces  $(\varphi_0, v_0)$  es asintóticamente estable.
- ii) Si  $B = N$  ó  $P$  y la función  $h'(\varphi_0)$  tiene media negativa, verificando además que  $b|\Omega| + \int_{\Omega} h'(\varphi_0) < 0$ , entonces  $(\varphi_0, v_0)$  es inestable.

**Demostración:**

i) Si  $h'(\varphi_0) \geq 0$ , entonces  $\mathcal{F}_L(\varphi, v) \geq 0$ . Más aun,  $\mathcal{F}_L(\varphi, v) = 0$  si y sólo si  $\|\nabla\varphi\|^2 = \int_{\Omega} h'(\varphi_0)\varphi^2 = \int_{\Omega} (av - b\varphi)^2 = 0$ , lo cual implica que  $\varphi = v = 0$  en cualquier situación. En efecto, si  $B = D$ ,  $\varphi$  es constante y por tanto nula al igual que  $v$ , y si  $B = N$  ó  $P$ , entonces  $\varphi$  es constante y por tanto  $v = \frac{b}{a}\varphi$  es constante y de media nula, por lo que ha de ser la función constantemente nula, al igual que  $\varphi$ .

De esta forma  $\mathcal{F}_L(\varphi, v) > 0$  para todo  $(\varphi, v) \in H_0^1 \times L^2$  (respectivamente  $H_B^1 \times L^2$  si  $B = N$  ó  $P$ ) excepto en el  $(0, 0)$ . Consecuentemente  $\sigma(A_L) \subset \mathbb{R}^+$  y  $(\varphi_0, v_0)$  es asintóticamente estable.

ii) Este resultado se obtiene fácilmente del Teorema 3.3.1, ya que si  $\int_{\Omega} h'(\varphi_0) < 0$ , entonces podemos tomar  $\varphi = 1 \in H_B^1$ , de forma que  $R(\varphi) = \langle L_0\varphi, \varphi \rangle_0 = \int_{\Omega} h'(\varphi_0) < 0$ , y como consecuencia  $\mu_1 < 0$ . Para concluir la demostración basta con probar que existe  $v \in B_{L_B^2}(\frac{b}{a}, -\frac{b}{a^2}R(\varphi))$  ya que entonces  $\mathcal{F}_L(\varphi, v) < 0$ , y aplicar a continuación el Teorema 3.2.1.

Por otra parte vimos en la demostración del apartado vi) del Teorema 3.3.1, que la existencia de  $v$  está asegurada siempre que exista  $\varphi$  verificando (3.3.2), tomando de nuevo  $\varphi = 1$ , equivale a  $b|\Omega| + \int_{\Omega} h'(\varphi_0) < 0$ .  $\square$

Usando las técnicas de [40], vamos a ver que si trabajamos con condiciones de frontera de tipo Neumann, en dominios especiales y para valores del parámetro  $b$  suficientemente pequeños, las únicas soluciones que pueden ser estables para nuestro problema, son las constantes.

**Teorema 3.3.2** *Bajo las hipótesis anteriores supongamos que  $\Omega$  es un dominio convexo,  $h \in C^3$ , tenemos condiciones de contorno de tipo Neumann,  $B = N$ , con  $b < |\mu_1|$  donde  $\mu_1$*

representa al primer autovalor del operado  $L_0 = -k_1\Delta_N + h'(\varphi_0)I$ , y  $(\varphi_0, v_0)$  es un punto de equilibrio para (1.1.8), con  $\varphi_0$  función no constante. Entonces  $(\varphi_0, v_0)$  es inestable.

**Demostración:**

Por ser  $(\varphi_0, v_0)$  un punto de equilibrio para el sistema (1.1.8), ha de verificar el sistema (3.1.1). Teniendo en cuenta ahora que  $B = N$ , de la segunda ecuación del sistema se tiene que  $-k_2v_0 + c\varphi_0 = b\varphi_0 - av_0 = \lambda$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ , lo cual implica que  $\varphi_0 \in C^3(\Omega)$  verifica

$$-k_1\Delta_N\varphi_0 + h(\varphi_0) + \lambda = 0. \quad (3.3.5)$$

lo que nos permite aplicar [40][Teorema 5.1, pag 440], para probar la existencia de un autovalor negativo del operador  $L_0 = -k_1\Delta_N + h'(\varphi_0)I$ , por tanto  $\mu_1 < 0$ , lo cual junto con  $b < |\mu_1|$  nos permite aplicar el Teorema 3.3.1 para concluir la demostración.  $\square$

**Observación 3.3.1** Si  $N \geq 1$  el resultado anterior es cierto para dominios que sean cuerpos de rotación con secciones convexas, y dominios acotados por esferas concéntricas [40].  $\square$



**SOLUCIONES ESTACIONARIAS**

# CAPITULO 4

## SOLUCIONES ESTACIONARIAS

### Preliminares

Recordamos que  $(\varphi, v) \in H_B^1 \times L_B^2$  es un punto de equilibrio (solución estacionaria), del sistema (1.1.8), sii verifica:

$$\begin{cases} -k_1 \Delta_B \varphi + h(\varphi) + b\varphi - av = 0 \\ -k_2 \Delta_B v + c \Delta_B \varphi = 0. \end{cases} \quad (4.0.1)$$

Si  $B = D$  el sistema (4.0.1) es equivalente a:

$$\begin{cases} -k_1 \Delta_D \varphi + h(\varphi) = 0 \\ av = b\varphi \end{cases} \quad (4.0.2)$$

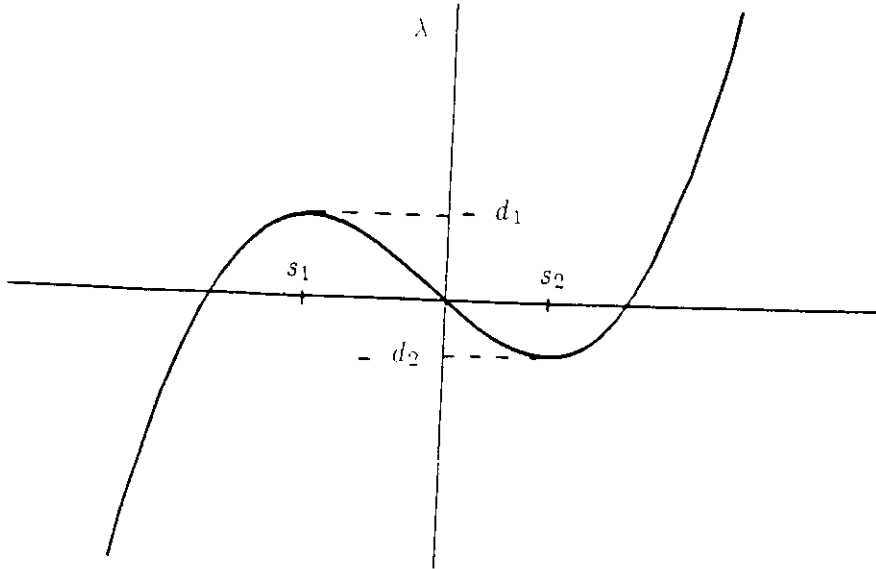
y si  $B = N$  ó  $P$  a

$$-k_1 \Delta_B \varphi + h(\varphi) + \lambda = 0 \quad (4.0.3)$$

con  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\lambda = b\varphi - av$ .

En esta sección vamos a estudiar la existencia de soluciones estacionarias no constantes respecto de la variable espacial. Para ello veremos en primer lugar condiciones necesarias para la existencia de dichas soluciones en un dominio  $N$ -dimensional. A continuación abordaremos el estudio del número de estas soluciones estacionarias en el caso unidimensional, estableciendo el correspondiente diagrama de bifurcación, respecto del parámetro  $\lambda$ . La técnica utilizada para la obtención de este diagrama es la denominada técnica del "disparo."

Buscamos soluciones en función de  $\lambda$ , de forma que no prefijamos el valor de  $\int_{\Omega} v$ , sino que "movemos"  $\lambda$  y buscamos soluciones  $\varphi = \varphi(\lambda)$ ,  $v = v(\lambda) = \frac{1}{a}(b\varphi(\lambda) - \lambda)$  con  $\int_{\Omega} v = \frac{b}{a} \int_{\Omega} \varphi - \frac{\lambda}{a} |\Omega|$ .

figura 4.1: Gráfica de  $h$ 

En primer lugar vamos a ver cual es el diagrama que nos representa el número de soluciones estacionarias constantes.

## 4.1 Soluciones Estacionarias Constantes

Supongamos que  $h$  verifica además las hipótesis del Corolario 1.4.3, las siguientes propiedades:

$$h \in C^2(\mathbb{R}) \text{ con } \liminf_{u \rightarrow \pm\infty} \frac{h(u)}{u} > 0, h(0) = 0, h'(0) < 0 \text{ y } \operatorname{sgn}(h''(u)) = \operatorname{sgn}(u) \quad (4.1.1)$$

Supondremos también que la función  $h$  alcanza el máximo local en  $s_1 < 0$  con  $d_1 = -h(s_1) < 0$ , y el mínimo local en  $s_2 > 0$  con  $d_2 = -h(s_2) > 0$ . De esta forma la gráfica de la función  $y = h(s)$  viene dada por la figura 4.1.

Observemos que si  $B = D$  la única solución estacionaria constante es  $\varphi = 0, v = 0$ , y si  $B = N$  ó  $P$  las soluciones estacionarias constantes son de la forma  $(s, \frac{b}{a}s - \frac{\lambda}{a}) \in \mathbb{R}^2$  con  $s$  y  $\lambda$  tales que  $h(s) + \lambda = 0$ .

**Proposición 4.1.1** *Supongamos  $B = N$  ó  $P$ .*

a) *Si  $\lambda \in (-\infty, d_1) \cup (d_2, +\infty)$ , entonces existe una única solución estacionaria constante  $(s(\lambda), \frac{b}{a}s(\lambda) - \frac{\lambda}{a})$ , la cual verifica  $h'(s(\lambda)) > 0$ .*

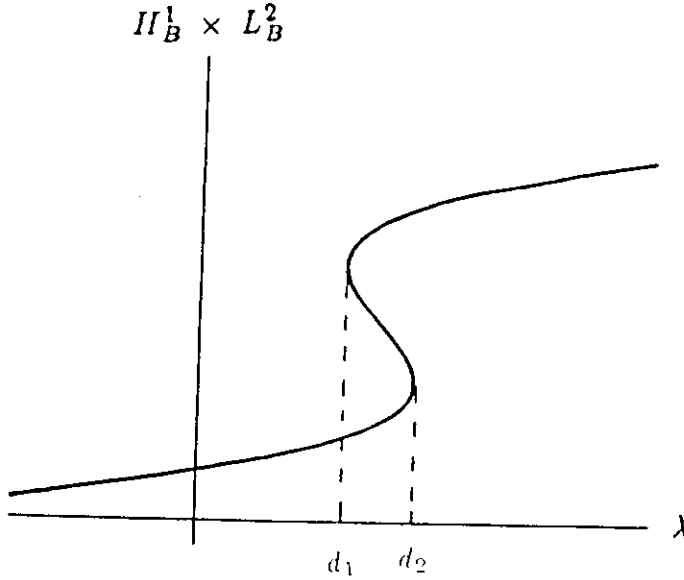


figura 4.2: Diagrama de bifurcación de las soluciones estacionarias constantes

b) Si  $\lambda = d_1$  ó  $\lambda = d_2$ , entonces existen dos soluciones estacionarias constantes  $(s_i(\lambda), \frac{b}{a}s_i(\lambda) - \frac{\lambda_i}{a})$ ,  $i = 1, 2$  las cuales verifican  $h'(s_i^\lambda) = 0$  y  $h'(s_2^\lambda) > 0$ .

c) Si  $\lambda \in (d_1, d_2)$ , entonces existen tres soluciones estacionarias constantes  $(s_i(\lambda), \frac{b}{a}s_i(\lambda) - \frac{\lambda_i}{a})$ ,  $i = 1, 2, 3$  con  $s_i^\lambda$  verificando que  $h'(s_i^\lambda) > 0$  para  $i \in \{1, 3\}$ ,  $h'(s_2^\lambda) < 0$ ,  $s_1^\lambda < 0$ ,  $s_3^\lambda > 0$  y  $\text{sgn}(s_2^\lambda) = \text{sgn}(\lambda)$ .

Además se tiene que si  $h'(s(\lambda)) \geq 0$  entonces, la solución estacionaria asociada  $(s(\lambda), \frac{b}{a}s(\lambda) - \frac{\lambda}{a})$ , es asintóticamente estable en el espacio  $H_B^1 \times \{v \in L_B^2, \int_\Omega v = m\}$  con  $m = \frac{|\Omega|}{a}(s(\lambda)b - \lambda)$ , y supuesto que  $h'(0) + b < 0$ , si  $h'(s(\lambda)) < 0$  verificando que  $b + h'(s(\lambda)) < 0$ , entonces la solución estacionaria asociada es inestable.

**Demostración:**

Basta observar que las soluciones estacionarias constantes están en correspondencia biunívoca con los ceros de  $y = h(s) + \lambda$  y aplicar el Corolario 3.3.1 para concluir que si  $h'(s_i^\lambda) \geq 0$ , entonces la solución estacionaria asociada a  $s_i^\lambda$  es asintóticamente estable (en el espacio correspondiente), y en caso contrario, siempre que  $b + h'(s_i^\lambda) < 0$ , la solución asociada es inestable.  $\square$

Tenemos así el siguiente diagrama de bifurcación de soluciones estacionarias constantes para  $B = N$  ó  $B = P$ , representado en la figura 4.2.

A continuación vamos a ver condiciones bajo las cuales las únicas soluciones estacionarias de nuestro problema son las constantes, para lo cual supondremos que  $h$  verifica

además las hipótesis del Corolario 1.4.3, es decir si  $N > 2$  entonces

$$|h(s)| \leq C(1 + |s|^r), |h'(s)| \leq C(1 + |s|^{r-1}), C > 0$$

con  $r \geq 1$  arbitraria si  $N = 2$  y  $1 \leq r \leq \frac{N}{N-2}$  si  $N \geq 3$ . Observamos que estas hipótesis sobre el crecimiento de  $h$  nos permiten afirmar que  $h$  lleva  $H_B^1$  en  $L_B^2$ .

Algunos resultados similares para el caso en que  $h$  es un polinomio cúbico se puede ver en [20].

**Proposición 4.1.2** *Sea  $h$  verificando las hipótesis anteriores.*

1.- Si  $B = N$  ó  $P$  y se verifican además alguna de las siguientes condiciones:

i)  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus (d_1, d_2)$ .

ii)  $\lambda \in (d_1, d_2)$  y  $k_1\mu_1 + h'(0) > 0$ , siendo  $\mu_1$  primer autovalor positivo del operador  $-\Delta_B$  en  $\Omega$ , es decir,  $\mu_1 = \min_{u \in H_B^1} \frac{\|\nabla u\|^2}{\|u - \bar{f}u\|^2}$  donde  $\bar{f}u = \frac{1}{|\Omega|} \int u$ .

Entonces, las únicas soluciones estacionarias del sistema (1.1.8) son las constantes.

2.- Si  $B = D$  y  $k_1\mu_1 + h'(0) > 0$ , con  $\mu_1 = \min_{u \in H_0^1} \frac{\|\nabla u\|^2}{\|u\|^2}$ , entonces, las únicas soluciones estacionarias del sistema (1.1.8) son las constantes.

**Demostración:**

1.- Supondremos que  $B = N$ , análogamente se prueba el caso  $B = P$ .

i) Consideramos el caso  $\lambda > d_2$ , análogamente se prueba el caso en el que  $\lambda < d_1$ .

Razonaremos por reducción al absurdo. Sea  $s$ , la única solución estacionaria constante, dada por la solución de  $\lambda + h(s) = 0$ . Sea  $\varphi$  una solución estacionaria asociada a  $\lambda$ . De esta forma  $(\varphi, v) = (\varphi, \frac{1}{a}(b\varphi - \lambda)) \in H^1 \times H^1$  verifica (4.0.1), de donde

$$-k_1\Delta_N\varphi + h(\varphi) + \lambda = 0 \quad (4.1.2)$$

y por tanto multiplicando (4.1.2) por  $u(x) = \varphi(x) - s$ , se tiene que

$$k_1 \int_{\Omega} \nabla\varphi \nabla u + \int_{\Omega} h(\varphi)u + \lambda \int_{\Omega} u = 0.$$

teniendo en cuenta que  $\lambda = -h(s)$  y  $\nabla\varphi = \nabla u$ , obtenemos

$$k_1 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} [h(u+s) - h(s)]u = 0. \quad (4.1.3)$$

Observando ahora la gráfica de  $h$ , y teniendo en cuenta que  $\lambda = -h(s) > d_2$ , se tiene que si  $u > 0$ , entonces  $h(u+s) \geq h(s)$  y si  $u < 0$ , entonces  $h(u+s) \leq h(s)$ .

Como consecuencia,  $\int_{\Omega} [h(u+s) - h(s)]u \geq 0$ , y por (4.1.3), se tiene que  $|\nabla u| = 0$ , de donde tendríamos que  $u \equiv cte$ . lo cual implica que  $\varphi$  ha de ser también constante y por tanto igual a  $s$ , única solución constante en esta situación.

ii) Supongamos que  $\lambda \in (d_1, d_2)$  y existe  $\varphi$ , tal que verifica la ecuación elíptica:

$$-k_1 \Delta_N \varphi + h(\varphi) + \lambda = 0.$$

Multiplicamos ahora dicha ecuación por  $u = \varphi - \bar{\varphi}$ , donde  $\bar{\varphi} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \varphi$ , de forma que  $\int_{\Omega} u = 0$ , y obtenemos que

$$k_1 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} h(\varphi)u = 0$$

lo cual teniendo en cuenta que  $u$  tiene media nula, es equivalente a

$$k_1 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega} [h(u + \bar{\varphi}) - h(\bar{\varphi})]u = 0.$$

Por otro lado fijado  $x \in \Omega$ , existe  $\tilde{u}(x) = \bar{\varphi} + \theta(x)u(x)$ , con  $\theta(x) \in [0, 1]$  tal que,

$$h(u + \bar{\varphi}) - h(\bar{\varphi}) = h'[\tilde{u}(x)]u.$$

Además por  $\text{sgn}(h''(u)) = \text{sgn}(u)$  la función  $y = h'(u)$  tiene un mínimo en el origen, y por tanto por el Teorema del valor medio, se obtiene que

$$\int_{\Omega} [h(u + \bar{\varphi}) - h(\bar{\varphi})]u = \int_{\Omega} h'[\tilde{u}(x)]u^2 \geq \int_{\Omega} h'(0)u^2.$$

Teniendo en cuenta ahora que  $u$  tiene media nula, por la desigualdad de Poincare se tiene que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \geq \mu_1 \int_{\Omega} u^2.$$

Como consecuencia se tiene que:

$$0 \geq (k_1 \mu_1 + h'(0)) \int_{\Omega} u^2,$$

por lo tanto  $u \equiv 0$ , ya que  $k_1 \mu_1 + h'(0) > 0$ , o equivalentemente  $\varphi = \bar{\varphi}$ , y por tanto  $\varphi$  es constante.

2.- Si  $B = D$ , supongamos que existe  $\varphi$  verificando la ecuación elíptica:

$$-k_1 \Delta_D \varphi + h(\varphi) = 0.$$

Multiplicamos ahora dicha ecuación por  $\varphi$ , y obtenemos que

$$k_1 \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 + \int_{\Omega} h(\varphi)\varphi = 0.$$

Por el Teorema del valor medio se tiene que  $h(\varphi) = h(0) + h'(\xi_{\varphi})\varphi = h'(\xi_{\varphi})\varphi$  ya que  $h(0) = 0$ , de donde teniendo en cuenta de nuevo que  $h'$  tiene un mínimo en el origen, se obtiene  $h(\varphi)\varphi \geq h'(0)\varphi^2$ , y por tanto aplicando la desigualdad de Poincare, se tiene que

$$0 \geq (k_1 \mu_1 + h'(0)) \int_{\Omega} \varphi^2.$$

por lo tanto  $\varphi \equiv 0$ , ya que  $k_1 \mu_1 + h'(0) > 0$ .  $\square$



**Observación 4.1.1** Recordando las definiciones de  $h$  y  $k_1$ , del primer capítulo (1.1.9), vemos que la segunda hipótesis se puede expresar como  $\xi^2 \geq -\frac{g'(0)}{\mu_1}$ . De esta forma queda de manifiesto, cómo la existencia de soluciones estacionarias no constantes para el problema descrito por el sistema (1.1.8), está relacionada con el espesor de la región de interfase  $\xi$ .

## 4.2 Soluciones Estacionarias con $B = N$ en $\Omega = (0, L)$

En [16] se estudia un problema análogo para  $B = D$  y en [59] se trata el caso en el que  $h$  es un polinomio de grado tres.

En este caso las soluciones estacionarias son los elementos  $(\varphi, v) \in (H^1(\Omega))^2$  solución del sistema:

$$\begin{cases} k_1 \varphi''(x) - (h(\varphi) + \lambda) = 0, & x \in (0, L), \quad k_1 > 0 \\ \varphi'(0) = \varphi'(L) = 0 \\ b\varphi - av = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Si introducimos el cambio de escala dado por  $y = \frac{x}{\sqrt{k_1}}$  y  $L' = \frac{L}{\sqrt{k_1}}$ , entonces  $\tilde{\varphi}(y) = \varphi(x)$  verifica:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}''(y) - (h(\tilde{\varphi}) + \lambda) = 0 & . \quad y \in (0, L') \\ \tilde{\varphi}'(0) = \tilde{\varphi}'(L') = 0. \end{cases}$$

Renombrando  $y = x$ ,  $L' = L$  y  $\tilde{\varphi} = \varphi$ , el problema consiste en buscar  $(\varphi, \lambda) \in H^1 \times \mathbb{R}$  solución de

$$(P_\lambda) \begin{cases} \varphi''(x) - h_\lambda(\varphi) = 0 & . \quad x \in (0, L) \\ \varphi'(0) = \varphi'(L) = 0 \end{cases} \quad (4.2.1)$$

con  $h_\lambda(\varphi) = h(\varphi) + \lambda$  y  $L$  dado.

De esta forma para cada solución  $(\varphi, \lambda)$  de (4.2.1) tenemos  $(\varphi, \frac{1}{a}(b\varphi - \lambda))$  solución estacionaria del problema dado por (1.1.8).

Supondremos que  $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  verifica (4.1.1), y queremos resolver (4.2.1) para lo cual consideramos el sistema conservativo:

$$\begin{cases} \varphi' & = & z \\ z' & = & h_\lambda(\varphi) \end{cases} \quad (4.2.2)$$

en el que tenemos  $zz' - h_\lambda(\varphi)\varphi' = 0$  de donde se deduce que  $\varphi$  verifica la ecuación de conservación de la energía

$$\frac{(\varphi')^2}{2} + H_\lambda(\varphi) = E \equiv \text{constante de energía.}$$

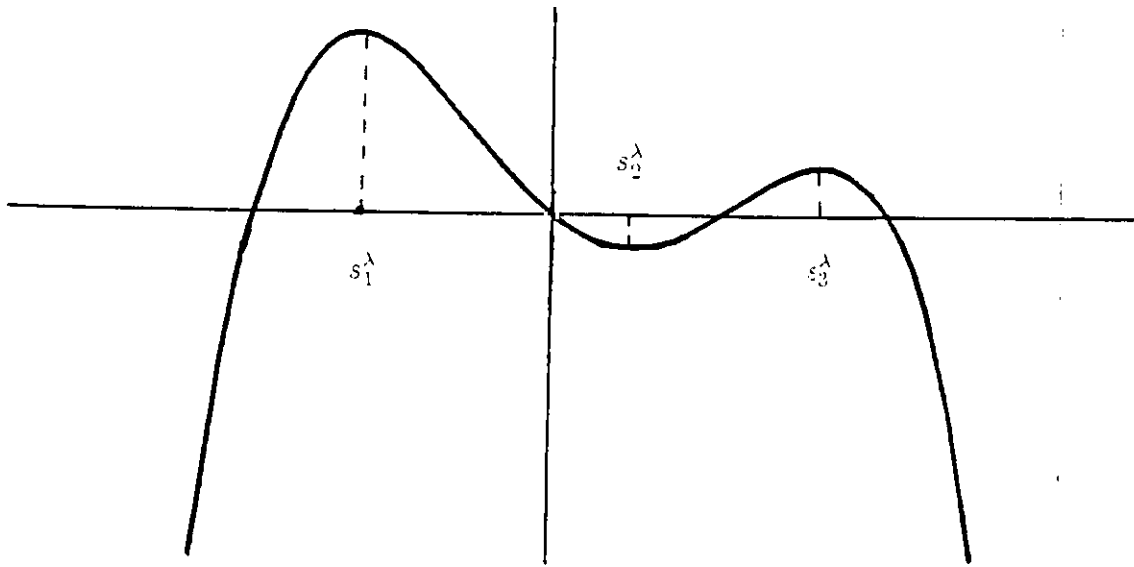


figura 4.3: Función potencial  $H_\lambda$  para  $\lambda > 0$

con la función potencial  $H_\lambda(y) = -\int_0^y h_\lambda(s)ds = -H(y) - \lambda y$  donde  $H(y) = \int_0^y h(s)ds$ , y  $E \equiv$  constante (valor de energía), tal que  $E - H_\lambda(\varphi) \geq 0$ .

Observando el diagrama de fases para el sistema conservativo (4.2.2), representado en la figura 4.4, junto con el primer apartado de la Proposición 4.1.2, se tiene el siguiente resultado:

**Lema 4.2.1** a) Una condición necesaria para la existencia de soluciones estacionarias no constantes, cualquiera que sea el valor de  $L$ , es que  $\lambda \in (d_1, d_2)$ .

b) Fijado  $\lambda \in (d_1, d_2)$  los valores de energía  $E$  que nos proporcionan órbitas correspondientes a posibles soluciones estacionarias no constantes, son:

$$H_\lambda(s_2^\lambda) \leq E \leq \min\{H_\lambda(s_1^\lambda), H_\lambda(s_3^\lambda)\}$$

donde  $s_1^\lambda$  son los ceros de  $h_\lambda$  tales que  $s_1^\lambda < 0$  y  $s_3^\lambda > 0$  son máximos relativos de  $H_\lambda$  y  $s_2^\lambda$  es el mínimo relativo con  $\text{sgn}(s_2^\lambda) = \text{sgn}(\lambda)$ .  $\square$

**Lema 4.2.2** Para estudiar el número de soluciones estacionarias no constantes en (4.2.1), fijado  $\lambda \in (d_1, d_2)$  podemos suponer que  $H_\lambda$  alcanza un mínimo relativo en el origen, es decir,  $s_2^\lambda = 0$ .

**Demostración:**

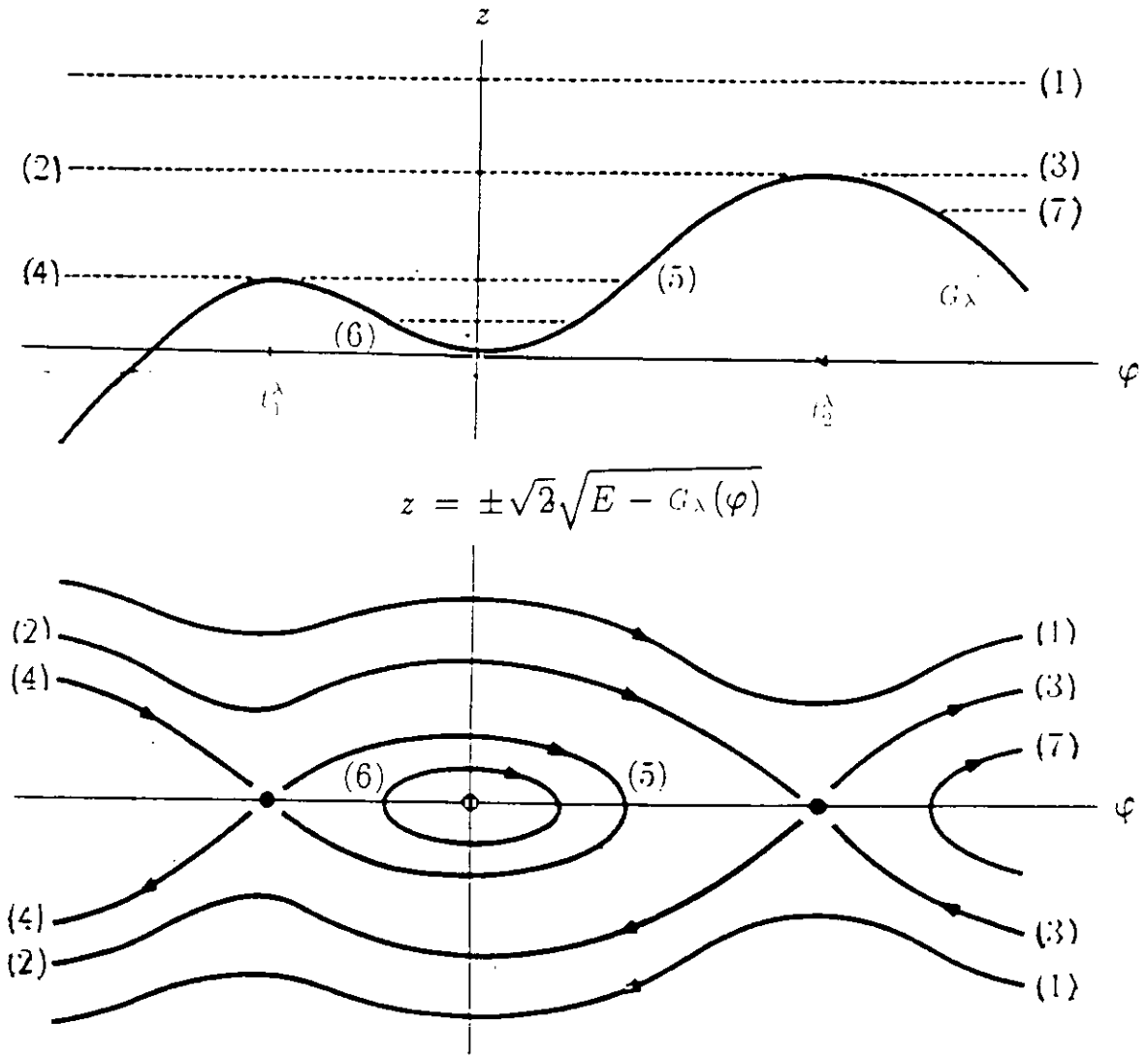


figura 4.4: Diagrama de fases

Supongamos  $s_2^\lambda \neq 0$ . entonces si  $u = \varphi - s_2^\lambda$ ; se tiene que  $u \in H^1(\Omega)$  verifica el sistema:

$$\begin{cases} u''(x) - g_\lambda(u) = 0 & , \quad x \in (0, L) \\ u'(0) = u'(L) = 0 \end{cases} \quad (4.2.3)$$

con  $g_\lambda(u) = h_\lambda(u + s_2^\lambda) = h(u + s_2^\lambda) + \lambda$ . De esta forma  $g_\lambda$  es una función que se anula en el origen, y por tanto

$$G_\lambda(s) = \int_0^s -g_\lambda(t)dt$$

tiene un mínimo relativo en el origen. Observamos que los ceros de  $g_\lambda(t)$  son

$$t_i^\lambda = s_i^\lambda - s_2^\lambda, i \in \{1, 2, 3\}$$

donde  $t_i^\lambda$  tal que  $i \in \{1, 3\}$  son máximos locales de  $G_\lambda$ , y  $t_2^\lambda = 0$  es el mínimo local de  $G_\lambda$ .

El sistema conservativo asociado a (4.2.3) es

$$\begin{cases} u' = z \\ z' = g_\lambda(u) \end{cases}$$

y la ecuación de conservación de la energía es

$$\frac{1}{2}(u')^2 + G_\lambda(u) = E$$

es decir,

$$z = \pm \sqrt{2\sqrt{E - G_\lambda(u)}}$$

y los posibles valores de energía son:

$$0 = G_\lambda(0) < E < \min\{G_\lambda(t_1^\lambda), G_\lambda(t_3^\lambda)\} = E_1 = E_1(\lambda). \quad (4.2.4)$$

□

Para estudiar el número de soluciones estacionarias no constantes hemos de resolver el problema de contorno (4.2.3), y para ello vamos a utilizar el método del “disparo.”

#### Método del “disparo”

Cada trayectoria del diagrama de fases es solución de un problema de valor inicial

$$\begin{cases} u''(x) - g_\lambda(u) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ u(x_0) = a, u'(x_0) = b & a, b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

El método del disparo consiste en considerar los problemas de valor inicial,

$$(P_{\lambda, \delta}) \begin{cases} u''(x) - g_\lambda(u) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ u(0) = \delta, u'(0) = 0, & \delta \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.2.5)$$

y determinar los valores  $\delta$  para los que la solución de  $(P_{\lambda,\delta})$ , que llamaremos  $u_{\lambda,\delta}$  verifica:

$$u'_{\lambda,\delta}(L) = 0.$$

Las únicas soluciones que toman al menos dos veces el valor  $u' = 0$  son las dadas por trayectorias periódicas encerradas por la separatriz, lo que equivale a considerar valores de energía  $E \in (0, E_1)$ . La idea es elegir entre las trayectorias periódicas aquellas que partiendo de  $(\delta, 0)$  lleguen a un punto de la forma  $(\sigma, 0)$ , de forma que la longitud del intervalo recorrido por la solución mientras completa  $n$  veces la trayectoria cerrada coincide con la longitud del intervalo, es decir  $L$ . Esta longitud va a venir dada por una función que depende de  $E$  y que pasamos a describir.

### Construcción de la función $l(E)$

Dado  $\lambda \in (d_1, d_2)$  y  $E \in (0, E_1)$ ,  $E_1 = E_1(\lambda)$  en (4.2.4) consideramos la trayectoria periódica asociada a ese valor de energía. Supongamos que dicha órbita une los puntos  $(m_-(E), 0)$  y  $(m_+(E), 0)$ , es decir llamamos  $m_-(E) < 0$  y  $m_+(E) > 0$  a la abscisa de los dos puntos de corte de  $y = G_\lambda(s)$  con  $y = E$ , más próximos al origen. Por construcción, tenemos  $G_\lambda(m_-(E)) = G_\lambda(m_+(E)) = E$ .

Dado  $E$  consideramos la solución de (4.2.5), que parte de  $(m_-(E), 0)$ , es decir,  $u(0) = m_-(E) < 0$ ,  $u'(0) = 0$ , y queremos que  $u$  aumente hasta llegar a un

$$x_0 \in (0, L) \text{ tal que } u(x_0) = m_+(E) > 0.$$

Por tanto  $z(x) = u'(x)$  es positiva en  $(0, x_0)$ , es decir,

$$z(x) = \sqrt{2} \sqrt{E - G_\lambda(u(x))} \text{ en } (0, x_0)$$

De donde el espacio recorrido por la trayectoria es

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{u(0)}^{u(x)} \frac{du}{\sqrt{E - G_\lambda(u)}}.$$

Definimos  $l_+(E) = x_0$ , es decir,  $l_+(E)$  representa la longitud recorrida hasta que la órbita  $(u, z)$  vuelve a cortar al eje  $u$  ( $z = 0$ ).

De esta forma tenemos la siguiente definición.

#### Definición 4.2.1

$$l_+(E) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{m_-(E)}^{m_+(E)} \frac{du}{\sqrt{E - G_\lambda(u)}}.$$

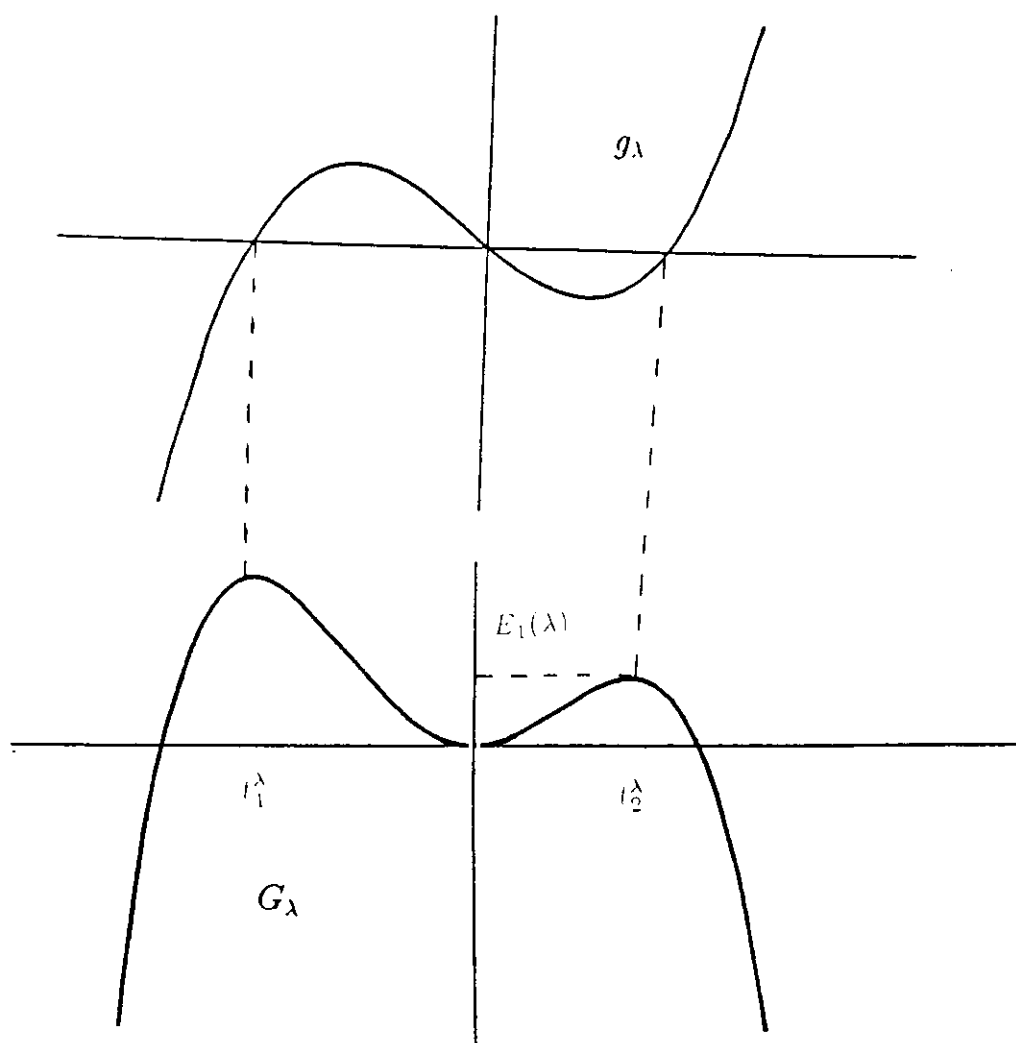


figura 4.5: Gráficas de  $g_\lambda$  y  $G_\lambda$

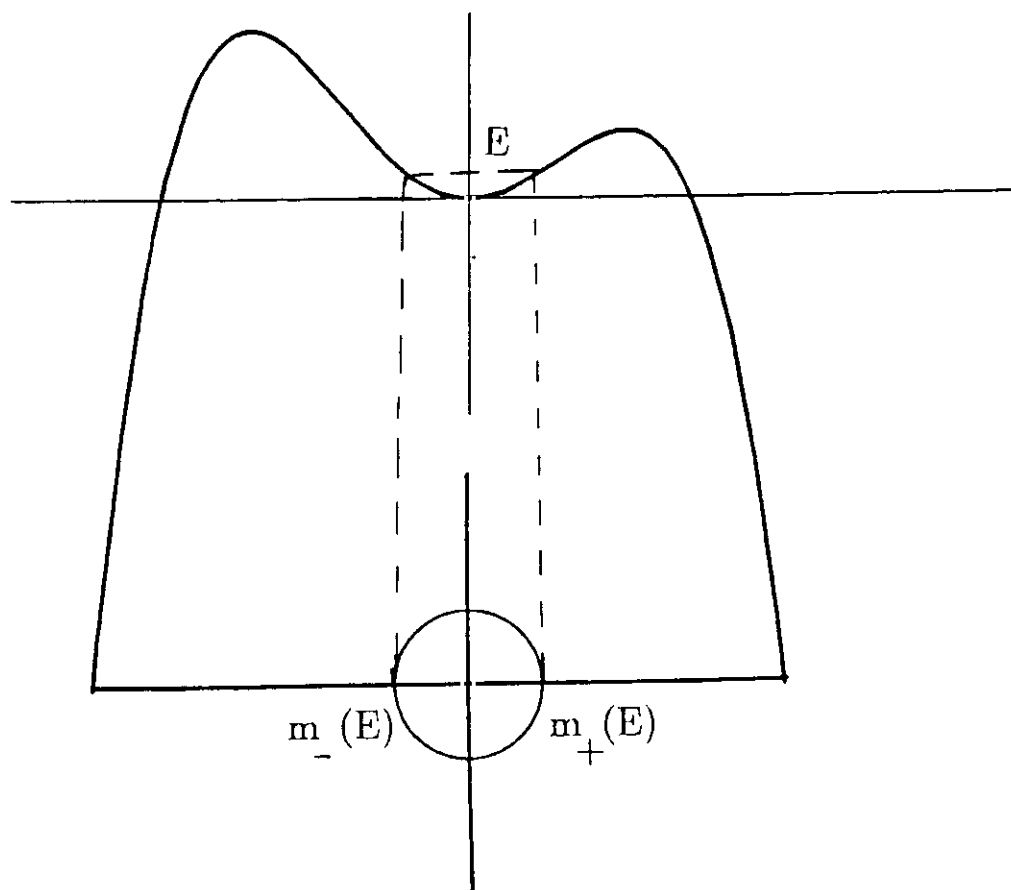


figura 4.6: Ciclo (órbita) asociada a un valor de energía dado  $E$

Análogamente, consideramos la solución  $u$  de (4.2.3), que parte de  $(m_+(E), 0)$ , es decir  $u(0) = m_+(E)$ ,  $u'(0) = 0$ , y llamamos  $l_-(E)$  a la longitud del intervalo recorrido hasta que  $(u, z)$  vuelve a cortar al eje  $u$ , es decir pasa por  $(m_-(E), 0)$ , por tanto

$$u(l_-(E)) = m_-(E) \text{ con } z(l_-(E)) = 0 \text{ y } G_\lambda(m_-(E)) = E.$$

Como

$$u(0) = m_+(E) > m_-(E) = u(l_-(E))$$

con  $0 < l_-(E)$ , entonces  $u$  decrece en  $(0, l_-(E))$  y por tanto  $z < 0$ , es decir,

$$z = -\sqrt{2}\sqrt{E - G_\lambda(u)} \text{ con } z(x) = u'(x), \text{ luego}$$

$$l_-(E) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{m_+(E)}^{m_-(E)} \frac{du}{\sqrt{E - G_\lambda(u)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{m_-(E)}^{m_+(E)} \frac{du}{\sqrt{E - G_\lambda(u)}} = l_+(E).$$

Por tanto tenemos definida la función:

**Definición 4.2.2**

$$\begin{aligned} l: (0, E_1) &\longmapsto \mathbb{R}^+ \\ E &\longmapsto l(E) = l_+(E) = l_-(E) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{m_-(E)}^{m_+(E)} \frac{du}{\sqrt{E - G_\lambda(u)}}. \end{aligned}$$

De esta forma observando las definiciones anteriores los valores de energía  $E \in (0, E_1)$  buscados son aquellos tales que  $L = nl(E)$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ . Por esa razón empezaremos por estudiar las propiedades de la función  $l(E)$ .

**Lema 4.2.3** *La función  $l(E)$  se puede escribir como:*

$$l(E) = \frac{1}{\sqrt{2}}(l_1(E) + l_2(E))$$

con

$$l_1(E) = \int_0^1 \frac{\sqrt{E}ydy}{g_\lambda(m_-(Ey))\sqrt{y(1-y)}} \tag{4.2.6}$$

y

$$l_2(E) = \int_0^1 \frac{\sqrt{E}ydy}{-g_\lambda(m_+(Ey))\sqrt{y(1-y)}}. \tag{4.2.7}$$

**Demostración:**

En efecto

$$l(E) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{m_-(E)}^{m_+(E)} \frac{du}{\sqrt{E - G_\lambda(u)}} =$$



$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \int_{m_-(E)}^0 \frac{du}{\sqrt{E - G_\lambda(u)}} + \int_0^{m_+(E)} \frac{du}{\sqrt{E - G_\lambda(u)}} \right].$$

Teniendo en cuenta ahora que  $G'_\lambda(u) = -g_\lambda(u)$ , en la primera integral hacemos el cambio de variable  $G_\lambda(u) = Ey$ ,  $u \in (m_-(E), 0)$ , es decir

$$u = G_\lambda^{-1}(Ey) = m_-(Ey), du = \frac{E dy}{-g_\lambda(m_-(Ey))}$$

de donde

$$\begin{aligned} l_1(E) &= \int_{m_-(E)}^0 \frac{du}{\sqrt{E - G_\lambda(u)}} = \int_1^0 \frac{\sqrt{E} dy}{-g_\lambda(m_-(Ey)) \sqrt{1-y}} = \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{E} y dy}{g_\lambda(m_-(Ey)) \sqrt{y(1-y)}}. \end{aligned}$$

Análogamente se obtiene el resultado para  $l_2(E)$ , ya que si  $G_\lambda(u) = Ey$  con  $u \in (0, m_+(E))$ , entonces

$$u = G_\lambda^{-1}(Ey) = m_+(Ey), du = \frac{E dy}{-g_\lambda(m_+(Ey))},$$

puesto que  $G'_\lambda = -g_\lambda$ . De esta forma

$$l_2(E) = \int_0^1 \frac{\sqrt{y} E dy}{-g_\lambda(m_+(Ey)) \sqrt{y(1-y)}}. \quad \square$$

Ahora vamos a estudiar las propiedades de estas funciones  $l_i(E)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ .

**Proposición 4.2.1** Las funciones  $l_1$  y  $l_2$  definidas por (4.2.6) y (4.2.7), verifican las siguientes propiedades:

- i)  $l_1(E)$  y  $l_2(E)$  son continuas para todo  $E \in (0, E_1)$ .
- ii)  $\lim_{E \rightarrow 0^+} l_i(E) = \frac{\pi}{\sqrt{-2h'(s_2^*)}} \geq 0$ , con  $i \in \{1, 2\}$ .
- iii)  $\lim_{E \rightarrow E_1} l(E) = +\infty$ , con  $l(E) = \frac{1}{\sqrt{2}}(l_1(E) + l_2(E))$ .
- iv)  $l_i(E)$  es derivable para todo  $E \in (0, E_1)$ , con  $i \in \{1, 2\}$ .

**Demostración:**

Probaremos las propiedades de  $l_2$  y análogamente se probarían las de  $l_1$ .

i) Para estudiar la función  $l_2(E) = \int_0^1 \frac{\sqrt{Ey}}{(-g_\lambda)(m_+(Ey)) \sqrt{y(1-y)}} dy$ , estudiaremos primero la función

$$f(s) = \frac{\sqrt{s}}{(-g_\lambda)(m_+(s))} \text{ con } s = Ey \in (0, E) \text{ y } E < E_1.$$

En primer lugar se tiene que  $f(s)$  es continua en  $(0, E]$  para todo  $E < E_1$ . Para estudiar el comportamiento de  $f(s)$  con  $s \sim 0$  desarrollamos  $-g_\lambda$  en un entorno del origen y tenemos:  $(-g_\lambda)(m_+(s)) = (-g_\lambda)(0) + (-g_\lambda)'(0)m_+(s) + o(m_+(s)^2)$  donde

$$\begin{cases} g_\lambda(0) = 0 \\ g'_\lambda(0) = h'(s_2^\lambda) < 0 \end{cases}$$

y  $m_+(s) \rightarrow 0$  si  $s \rightarrow 0$  por tanto  $(-g_\lambda)(m_+(s)) \sim -h'(s_2^\lambda)m_+(s)$  si  $s \sim 0$ .

Por otro lado desarrollando  $G_\lambda$  en un entorno del origen y puesto que  $m_+(s) = G_\lambda^{-1}(s)$ , tenemos

$$s = G_\lambda(m_+(s)) = G_\lambda(0) + G'_\lambda(0)m_+(s) + \frac{G''_\lambda(0)}{2}m_+^2(s) + o(m_+^3(s)) =$$

$$= -\frac{1}{2}g'_\lambda(0)m_+^2(s) + o(m_+^3(s))$$

donde  $g'_\lambda(0) = h'(s_2^\lambda)$ . Por tanto si  $s \rightarrow 0$ ,  $m_+(s) \sim \frac{\sqrt{2s}}{\sqrt{-h'(s_2^\lambda)}}$ . y de esta forma la función:

$$f(s) = \frac{\sqrt{s}}{-g_\lambda(m_+(s))} \sim \frac{\sqrt{s}\sqrt{-h'(s_2^\lambda)}}{-h'(s_2^\lambda)\sqrt{2s}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{-h'(s_2^\lambda)}} \text{ si } s \rightarrow 0.$$

Por tanto la función  $f(s)$  es continua en  $[0, E]$  para todo  $E < E_1$  y para todo  $\delta > 0$ , existe  $M(\delta) > 0$ , tal que  $|f(s)| \leq M$  para todo  $s \in [0, E_1 - \delta]$ , por lo tanto  $f(s) \frac{1}{\sqrt{y(1-y)}} \leq \frac{M}{\sqrt{y(1-y)}}$ , lo que nos dice que  $l_2(E) = \int_0^1 f(Ey) \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}}$  converge absoluta y uniformemente en  $E \in [0, E_1)$  y es continua para todo  $E \in [0, E_1)$ .

ii) Basta con observar que,

$$\begin{aligned} \lim_{E \rightarrow 0^+} l_2(E) &= \int_0^1 \lim_{E \rightarrow 0} f(Ey) \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{-h'(s_2^\lambda)}} \int_0^1 y^{-\frac{1}{2}}(1-y)^{-\frac{1}{2}} dy = \\ &= \frac{\beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{\sqrt{-2h'(s_2^\lambda)}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}\sqrt{-h'(s_2^\lambda)}} > 0. \end{aligned}$$

iii) Este resultado, se obtiene teniendo en cuenta que siempre se verifica una de las siguientes condiciones,  $\lim_{E \rightarrow E_1} l_1(E) = \infty$  o bien  $\lim_{E \rightarrow E_1} l_2(E) = \infty$ , dependiendo de que  $E_1 = G_\lambda(t_1^\lambda)$  ó  $G_\lambda(t_3^\lambda)$  en (4.2.4).

Supongamos que  $E_1 = \min\{G_\lambda(t_1^\lambda), G_\lambda(t_3^\lambda)\} = G_\lambda(t_1^\lambda)$  (como en la figura 4.5) y vamos a probar que entonces  $\lim_{E \rightarrow E_1} l_2(E) = \infty$ .

En efecto, en este caso  $g_\lambda(m_+(E_1)) = g_\lambda(t_1^\lambda) = 0$  y por tanto desarrollando la función  $g_\lambda(m_+(E_1y))$  en un entorno de  $y = 1$ , se tiene que:

$$-g_\lambda(m_+(E_1y)) \sim h'(s_1^\lambda)(1-y) \text{ si } y \sim 1.$$

teniendo en cuenta ahora que para todo  $\delta > 0$ ,  $\int_{1-\delta}^1 \frac{dy}{(1-y)\sqrt{1-y}} = \infty$ , se obtiene el resultado.  
 iv) La derivabilidad es consecuencia inmediata de la convergencia uniforme de  $\int_0^1 \frac{\partial}{\partial E}(f(Ey)) \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}}$  junto con el hecho de que la función  $\frac{\partial}{\partial E}(f(Ey))$ , sea continua en  $[0, E] \times [0, 1]$ , para todo  $E < E_1$ .  $\square$

Llegamos así al siguiente teorema sobre el número de soluciones estacionarias no constantes.

**Teorema 4.2.1** *Sea  $\lambda \in (d_1, d_2)$  y  $h$  verificando (4.1.1). Entonces fijado  $L \in \mathbb{R}^+$ , si  $\alpha_0 = \frac{\pi}{\sqrt{-2h'(s_2^\lambda)}}$ , con  $s_2^\lambda$  tal que  $h(s_2^\lambda) + \lambda = 0$  y  $h'(s_2^\lambda) < 0$ , se tiene que el número de soluciones estacionarias no constantes en  $\Omega = (0, L)$  es al menos:*

$$\begin{aligned} & \left\lfloor \frac{L}{\alpha_0} \right\rfloor \text{ si } L > \alpha_0 \text{ y } \frac{L}{\alpha_0} \notin \mathbb{N} \\ & \frac{L}{\alpha_0} - 1 \text{ si } L > \alpha_0 \text{ y } \frac{L}{\alpha_0} \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

con  $\lfloor \frac{L}{\alpha_0} \rfloor$  parte entera de  $\frac{L}{\alpha_0}$ .

**Demostración:**

Las soluciones estacionarias no constantes están asociadas a los valores de energía  $E$ , tales que  $L = nl(E)$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ . Para lo cual  $\frac{L}{n}$  ha de estar en el rango de  $l$ , que contiene al menos a  $[\alpha_0, \infty)$ . Además,  $\frac{L}{n} \in [\alpha_0, \infty) \iff \frac{L}{n} \geq \alpha_0$  esto es  $\frac{L}{\alpha_0} \geq n$  para algún  $n$ .

Si  $\frac{L}{\alpha_0} = n \in \mathbb{N}$  existen al menos  $n - 1$  valores de energía  $E_j$  tales que:

$$l(E_j) = \frac{L}{j} \text{ tal que } j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$$

y por tanto, existen al menos  $n - 1$  soluciones periódicas (ciclos) asociadas a los valores de energía  $E_j$ .

Si  $\frac{L}{\alpha_0} \notin \mathbb{N}$  y  $\lfloor \frac{L}{\alpha_0} \rfloor = n$  tenemos al menos  $n$  soluciones periódicas asociadas a los valores de energía  $E_j$ , tales que:

$$l(E_j) = \frac{L}{j} \text{ tal que } j \in \{1, 2, \dots, n\}. \square$$

**Observación 4.2.1** *Si la función  $l$  es estrictamente creciente, el número de soluciones es exactamente  $\lfloor \frac{L}{\alpha_0} \rfloor$  y  $\frac{L}{\alpha_0} - 1$  respectivamente, y podemos asegurar que no existen si*

$$L \leq \frac{\pi}{\sqrt{-2h'(s_2^\lambda)}}.$$

Por tanto si con alguna hipótesis adicional podemos asegurar que la función  $l$  es estrictamente creciente, entonces tendríamos así una información sobre el número exacto de soluciones estacionarias no constantes. Por esa razón vamos a estudiar el crecimiento de  $l$ , estudiando el signo de su derivada. Para lo cual vamos a expresar "adecuadamente" dicha derivada.

Tenemos así el siguiente diagrama de bifurcación respecto del parámetro  $\lambda$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longmapsto H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) && \text{multiforme} \\ \lambda &\longmapsto \Lambda_\lambda = (\varphi_\lambda, v_\lambda) = (\varphi_\lambda, \frac{b}{a}\varphi_\lambda - \frac{\lambda}{a}) \end{aligned}$$

con  $(\varphi_\lambda, v_\lambda)$  solución estacionaria no constante, de (1.1.8), con:

$\text{card}(\Lambda_\lambda) = 0$  si  $\lambda \in (-\infty, d_1] \cup [d_2, \infty)$ , y si  $\lambda \in (d_1, d_2)$  entonces

$\text{card}(\Lambda_\lambda) \geq \lfloor \frac{L}{\alpha_0} \rfloor$  si  $\alpha_0 < L$  y  $\frac{L}{\alpha_0} \notin \mathbb{N}$  y

$\text{card}(\Lambda_\lambda) \geq \frac{L}{\alpha_0} - 1$  si  $\alpha_0 < L$  y  $\frac{L}{\alpha_0} \in \mathbb{N}$

donde

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{\sqrt{-2h'(s_2^\lambda)}}$$

**Lema 4.2.4** Se tienen las siguientes expresiones para  $\frac{dl_i}{dE}$ .

$$i) \frac{dl_1}{dE} = \int_0^1 \frac{\sqrt{G_\lambda(u)}}{E(G'_\lambda(u))^3} \left| \int_u^0 G_\lambda(r) g''_\lambda(r) dr \right| \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} \tag{4.2.8}$$

con

$$u = G_\lambda^{-1}(Ey) = m_-(Ey) \in (m_-(E), 0) \text{ y } m_-(E_1) < m_-(E)$$

$$ii) \frac{dl_2}{dE} = \int_0^1 \frac{\sqrt{G_\lambda(u)}}{E(G'_\lambda(u))^3} \left[ \int_0^u G_\lambda(r) g''_\lambda(r) dr \right] \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} \tag{4.2.9}$$

con

$$u = G_\lambda^{-1}(Ey) = m_+(Ey) \in (0, m_+(E)) \text{ y } m_+(E) < m_+(E_1).$$

**Demostración:**

Por (4.2.6) tenemos

$$l_1(E) = \int_0^1 \frac{\sqrt{Ey}}{g_\lambda(m_-(Ey))} \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} = \int_0^1 f(Ey) \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}}$$

con  $f(s) = \frac{\sqrt{s}}{g_\lambda(m_-(s))}$ ,  $s = Ey$ . Por tanto

$$\frac{dl_1}{dE} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial E} (f(Ey)) \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial E} = yf'(s) = y \frac{1}{g_\lambda^2(m_-(s))} \left( \frac{q_\lambda(m_-(s))}{2\sqrt{s}} - \sqrt{s}g'_\lambda(m_-(s))(m_-(s))' \right)$$

con

$$(m_-(s))' = (G_\lambda^{-1}(s))' = \frac{1}{G'_\lambda(G_\lambda^{-1}(s))} = \frac{1}{G'_\lambda(u)}$$

ya que  $m_-(s) = G_\lambda^{-1}(s) = u$  y además  $\frac{y}{\sqrt{s}} = \frac{s}{E\sqrt{s}} = \frac{\sqrt{G_\lambda(u)}}{E}$ .

Por tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial E} &= \frac{y}{2\sqrt{s}} \frac{1}{g_\lambda^2(u)G'_\lambda(u)} [g_\lambda(u)G'_\lambda(u) - 2sg'_\lambda(u)] = \\ &= \frac{\sqrt{G_\lambda(u)}}{2E(G'_\lambda(u))^3} [-(G'_\lambda(u))^2 + 2G_\lambda(u)G''_\lambda(u)] \end{aligned}$$

ya que

$$G_\lambda(u) = \int_0^u -g_\lambda(s)ds \implies G'_\lambda(u) = -g_\lambda(u) \text{ y } G''_\lambda(u) = -g'_\lambda(u).$$

Por tanto, si probamos que

$$2G_\lambda(u)G''_\lambda(u) - (G'_\lambda(u))^2 = 2 \int_u^0 G_\lambda(r)g''_\lambda(r)dr \quad (4.2.10)$$

habremos terminado, para lo cual basta con observar que

$$\frac{d}{du} \{2G_\lambda(u)G''_\lambda(u) - (G'_\lambda(u))^2\} = 2G_\lambda G'''_\lambda = -2G_\lambda g''_\lambda$$

junto con el hecho de que  $G_\lambda(0) = 0 = G'_\lambda(0) = -g_\lambda(0)$ .Análogamente se obtiene la expresión para  $\frac{dl_2}{dE}$ . En efecto:

$$\frac{dl_2(E)}{dE} = - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial E} \left( \frac{\sqrt{Ey}}{g_\lambda(m_+(Ey))} \right) \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}}$$

ya que por (4.2.7)  $l_2(E) = \int_0^1 \frac{\sqrt{Ey}}{-g_\lambda(m_+(Ey))} \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}}$ .

Sea  $s = Ey$  y  $f(s) = \frac{\sqrt{s}}{g_\lambda(m_+(s))}$  entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial E} &= yf'(s) = y \frac{\frac{1}{2\sqrt{s}}g_\lambda(m_+(s)) - \sqrt{s}g'_\lambda(m_+(s))m'_+(s)}{g_\lambda^2(m_+(s))} = \\ &= \frac{y}{2\sqrt{s}g_\lambda^2(m_+(s))} (g_\lambda(m_+(s)) - 2sg'_\lambda(m_+(s))m'_+(s)) \end{aligned}$$

con

$$m'_+(s) = (G_\lambda^{-1}(s))' = \frac{1}{G'_\lambda(G_\lambda^{-1}(s))} = \frac{1}{G'_\lambda(u)}$$

De esta forma por ser  $s = Ey = G_\lambda(u)$ ,  $G'_\lambda(u) = -g_\lambda(u)$ , se tiene que

$$\frac{y}{2\sqrt{s}} = \frac{s}{2E\sqrt{s}} = \frac{\sqrt{s}}{2E} = \frac{\sqrt{G_\lambda(u)}}{2E}.$$

Por tanto

$$\frac{\partial f}{\partial E} = \frac{\sqrt{G_\lambda(u)}}{2E} \frac{1}{(-G'_\lambda(u))^2} \frac{[-(G'_\lambda(u))^2 + 2G_\lambda(u)G''_\lambda(u)]}{(G'_\lambda(u))}$$

$$\frac{\partial f}{\partial E} = \frac{\sqrt{G_\lambda(u)}}{2E(G'_\lambda(u))^3} [2G_\lambda(u)G''_\lambda(u) - (G'_\lambda(u))^2].$$

Con

$$2G_\lambda(u)G''_\lambda(u) - (G'_\lambda(u))^2 = -2 \int_0^u G_\lambda(r)g''_\lambda(r)dr \quad (4.2.11)$$

ya que

$$\frac{d}{du} \{2G_\lambda G''_\lambda - (G'_\lambda)^2\} = 2G'_\lambda G''_\lambda + 2G_\lambda G'''_\lambda - 2G'_\lambda G''_\lambda = 2G_\lambda G'''_\lambda = -2G_\lambda g''_\lambda$$

puesto que  $G'''_\lambda = -g''_\lambda$  y  $G_\lambda(0) = 0 = G'_\lambda(0) = -g_\lambda(0)$ .

Como consecuencia

$$\frac{dl_2}{dE} = \int_0^1 -\frac{\partial}{\partial E}(f(Ey)) \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{G_\lambda(u)}}{E(G'_\lambda(u))^3} \left| \int_0^u G_\lambda(r)g''_\lambda(r)dr \right| \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} \square$$

De esta forma se tiene el siguiente resultado sobre la monotonía de las funciones  $l_i, i \in \{1, 2\}$ .

**Proposición 4.2.2** *i) Si  $\lambda \leq 0$  la función  $l_1$  es estrictamente creciente ( $\frac{dl_1}{dE} > 0$ ).  
ii) Si  $\lambda \geq 0$  la función  $l_2$  es estrictamente creciente ( $\frac{dl_2}{dE} > 0$ ).*

**Demostración:**

En primer lugar recordamos que las funciones  $h, h_\lambda, G_\lambda$  y  $g_\lambda$ , verifican:

1.  $-\text{sgn}(h''(u)) = \text{sgn}(u)$
2.  $-G_\lambda(u) > 0, u \in (0, m_-(E)) \cup (m_+(E), 0), G_\lambda(0) = 0$
3.  $-G'_\lambda(u) = \begin{cases} -g_\lambda(u) > 0, & u \in (0, m_+(E)) \\ -g_\lambda(u) < 0, & u \in (m_-(E), 0) \end{cases}$

donde  $u = G_\lambda^{-1}(Ey)$ , con  $g_\lambda(t) = h_\lambda(t + s_2^\lambda) = \lambda + h(s_2^\lambda + t)$ , tal y como se puede ver en la figura 4.8.

Teniendo en cuenta estas propiedades, tenemos que

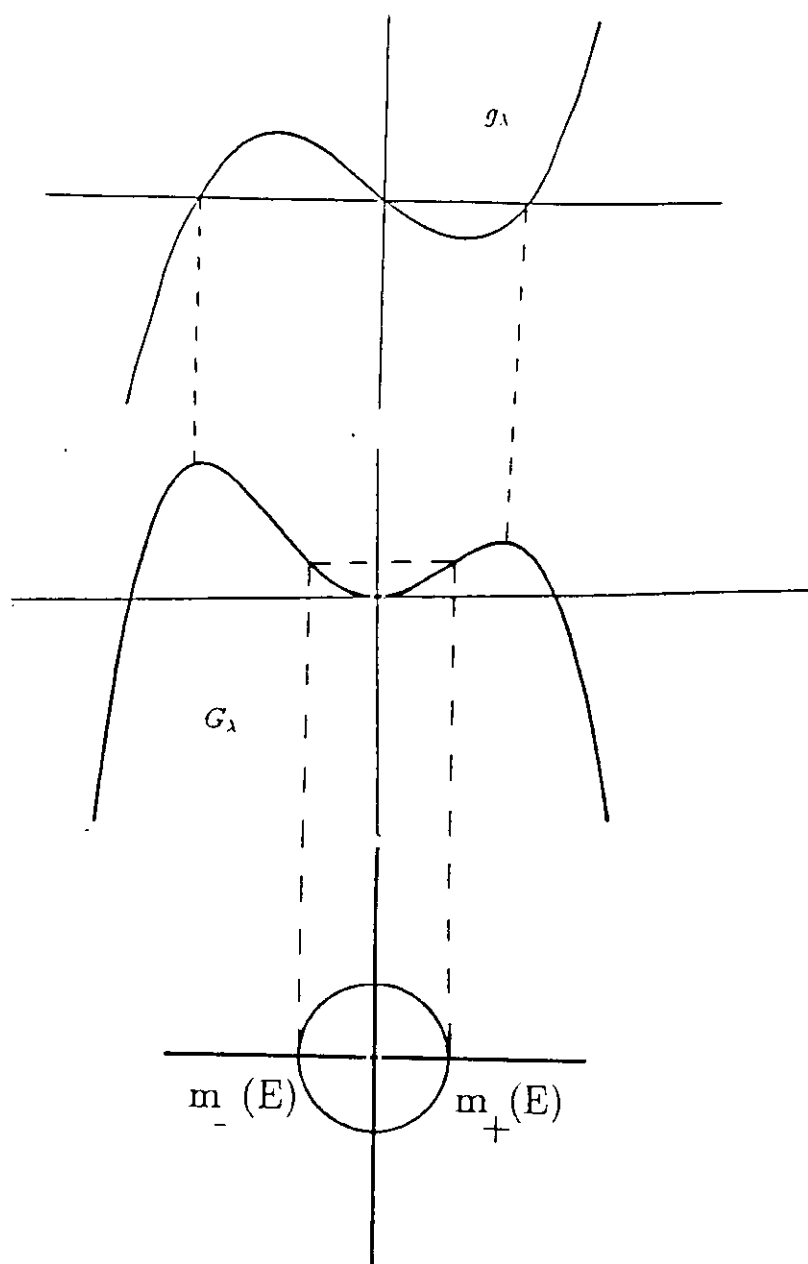


figura 4.7: Gráficas

i) Si  $\lambda \leq 0$  y  $u \in (m_-(Ey), 0) \subset (m_-(E), 0)$  entonces,  $G_\lambda(u) > 0$  y  $G'_\lambda(u) < 0$  luego por tanto, por (4.2.8), bastará con probar que

$$\int_u^0 G_\lambda(r)g''_\lambda(r)dr < 0$$

para lo cual vamos a ver que  $g''_\lambda(r) = h''(r + s_2^\lambda) < 0$ . Por otra parte observando la función  $h$ , esta última desigualdad se obtiene como consecuencia de que  $r + s_2^\lambda < 0$ , ya que  $r < 0$  y  $\text{sgn}(s_2^\lambda) = \text{sgn}(\lambda)$ , es decir,  $s_2^\lambda \leq 0$ .

ii) Si  $\lambda \geq 0$  y  $u \in (0, m_+(Ey)) \subset (0, m_+(E))$  entonces  $G_\lambda(u) > 0$  y  $G'_\lambda(u) > 0$ , por tanto teniendo en cuenta (4.2.9), si probamos que

$$\int_0^u G_\lambda(r)g''_\lambda(r)dr > 0$$

habremos terminado. Para ello al igual que en el apartado anterior estudiamos el signo de  $g''_\lambda(u)$  Ahora tenemos que  $g''_\lambda(r) = h''(r + s_2^\lambda) > 0$  por ser  $r + s_2^\lambda > 0$ , lo cual termina la demostración.  $\square$

**Corolario 4.2.1** *Bajo las notaciones e hipótesis anteriores, supongamos que  $\lambda \in (d_1^*, d_2^*)$  con  $d_1^* < 0, d_2^* > 0$ , suficientemente pequeños y que  $h$  verifica (4.1.1). Entonces fijado  $L \in \mathbb{R}^+$ , si  $\alpha_0 = \frac{\pi}{\sqrt{-2h'(s_2^\lambda)}}$ , se tiene que el número de soluciones estacionarias no constantes en  $\Omega = (0, L)$  es:*

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{L}{\alpha_0} \right] \text{ si } L > \alpha_0 \text{ y } \frac{L}{\alpha_0} \notin \mathbb{N} \\ & \frac{L}{\alpha_0} - 1 \text{ si } L > \alpha_0 \text{ y } \frac{L}{\alpha_0} \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

con  $\left[ \frac{L}{\alpha_0} \right]$  parte entera de  $\frac{L}{\alpha_0}$  y  $s_2^\lambda$  tal que

$$h(s_2^\lambda) + \lambda = 0 \text{ y } h'(s_2^\lambda) < 0.$$

**Demostración:**

Sabemos que si  $\lambda = 0$ , entonces la Proposición 4.2.2 nos dice que  $\frac{dl_i}{dE} > 0, i = 1, 2$  y por tanto la la función  $l$  es estrictamente creciente. Teniendo en cuenta ahora la dependencia continua de esta función  $l$  y de  $E$  respecto de  $\lambda$ , existe un entorno del origen  $d_1^* < \lambda < d_2^*$ , tal que  $l$  sigue siendo estrictamente creciente.

De esta forma aplicando ahora el Teorema 4.2.1 se tiene el resultado.  $\square$

**Observación 4.2.2** *La dificultad de la demostración del resultado anterior radica principalmente en la dependencia de la no linealidad del parámetro  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Esta dependencia de  $\lambda$ , se refleja en la función potencial, la cual cambia "cualitativamente" para los distintos valores de  $\lambda$  (crecimiento, concavidad, puntos críticos ..., se ven modificados al cambiar  $\lambda$ ), lo que representa una dificultad añadida a este método, en comparación con problemas similares como los que se pueden encontrar por ejemplo en [16], [31] ó [59].*



### 4.3 Soluciones Estacionarias con $B = D$ en $\Omega = (0, L)$

En el caso en el que se consideran condiciones de frontera de tipo Dirichlet, es decir,  $B = D$ , se tiene que  $\lambda = 0$ , y podemos remitirnos al problema de [16], para determinar el número exacto de soluciones estacionarias distintas de la trivial.

En efecto, en esta situación las soluciones estacionarias del sistema (1.1.8),  $(\varphi, v)$  verifican:

$$\begin{cases} k_1 \varphi''(x) - h(\varphi) = 0, & x \in (0, L) \\ \varphi(0) = \varphi(L) = 0 \end{cases} \quad \text{con } v = \frac{b}{a} \varphi$$

y por tanto aplicando el cambio de variable  $y = \frac{\pi}{L}x$ , se obtiene el problema de [16], que nos determina el número de soluciones respecto del parámetro  $\mu = \frac{L^2}{\pi^2 k_1} > 0$  del sistema

$$\begin{cases} \varphi''(y) - \mu h(\varphi) = 0, & y \in (0, \pi) \\ \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0 \end{cases} \quad \text{con } v = \frac{b}{a} \varphi.$$

Observamos que en este problema de [16],  $\mu$  es ahora un parámetro positivo a diferencia del parámetro  $\lambda \in \mathbb{R}$  del caso anterior  $B = N$ , además dicho parámetro  $\mu$  está multiplicando a la no linealidad, y por tanto no influye sobre la misma "cualitativamente".

No obstante por completitud de la memoria vamos a determinar a continuación el número de exacto de soluciones estacionarias no constantes respecto del parámetro  $L$ , haciendo uso de los resultados técnicos del apartado anterior,  $B = N$ .

Si llamamos  $y = \frac{\pi}{\sqrt{k_1}}x$  y  $L' = \frac{L}{\sqrt{k_1}}$  buscamos  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  solución de:

$$\begin{cases} \varphi''(y) - h(\varphi) = 0, & y \in (0, L') \\ \varphi(0) = \varphi(L') = 0 \end{cases}$$

no obstante, notaremos  $y \equiv x$  y  $L' \equiv L$ .

Donde  $h$  verifica (4.1.1) con

$$s_1 < 0 < s_2 \text{ tales que } h(s_1) = h(s_2) = 0.$$

Definimos

$$H(s) = \int_0^s -h(t)dt$$

con

$$H(0) = 0, \quad H'(s_i) = 0 \text{ tal que } i \in \{1, 2\} \text{ y } H''(s_i) = -h'(s_i) \leq 0, \quad i \in \{1, 2\}.$$

En este caso tenemos una única solución estacionaria constante que es la trivial,  $\varphi = 0, v = 0$ .

Vamos a buscar posibles puntos de equilibrio no constantes, para lo cual estudiamos el diagrama de fases del sistema conservativo:

$$\begin{cases} \varphi' = z \\ z' = h(\varphi) \end{cases}$$

con  $zz' - h(\varphi)\varphi' = 0$ , es decir  $\frac{z^2}{2} + H(\varphi) = E \equiv \text{cte}$  de donde  $z = \pm\sqrt{2}\sqrt{E - H(\varphi)}$  siendo  $E$  valor de energía, tal que  $H(\varphi) \leq E$ .

Además

$$z = \frac{d\varphi}{dx} = \pm\sqrt{2}\sqrt{E - H(\varphi)}$$

nos dice que

$$x = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(x)} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{E - H(\varphi)}}$$

De esta forma obtenemos el diagrama de fases análogo al caso anterior, figura 4.5, donde ahora  $\lambda = 0$ .

Buscamos soluciones  $\varphi$  tales que

$$\varphi(0) = \varphi(L) = 0$$

es decir, que cortan al menos dos veces al eje  $z$ , por lo que observando el diagrama de fases vemos que:

$$0 < E < \max\{H(s_1), H(s_2)\} = E_1 \tag{4.3.1}$$

es una condición necesaria, para que exista solución estacionaria no trivial.

Al igual que en la sección anterior vamos a utilizar el método del “disparo” para encontrar las soluciones estacionarias no constantes. Para ello dado un valor admisible de energía,  $E \in (0, E_1)$ , consideramos la trayectoria asociada que corta dos veces al eje  $z$ , en los puntos  $(0, \pm\sqrt{2E})$ . Sea  $E_0 = \min\{H(s_1), H(s_2)\} \leq E_1$ , consideraremos el caso en que  $E_0 < E_1$ , por un procedimiento análogo se estudia el caso en que  $E_0 = E_1$ .

Si  $E \in (0, E_0)$ , consideraremos los dos puntos de corte de  $y = H(s)$  con  $y = E$  más próximos al origen, que se corresponden con el ciclo buscado, y a su primera componente la notaremos por  $m_-(E) < 0$  y  $m_+(E) > 0$ . Si  $E \in (E_0, E_1)$  la trayectoria asociada sólo corta en un punto al eje  $\varphi$ , que notaremos por  $(m_-(E), 0)$  con  $m_-(E) < 0$ . Como podemos ver en la figura 4.9.

Podemos suponer que  $E_1 = H(s_1)$  lo que se corresponde con el hecho de que la trayectoria para  $E \in [E_0, E_1)$  corte al eje  $\varphi$  en un punto negativo  $m_-(E) < 0$ , el caso contrario se estudia de forma análoga.

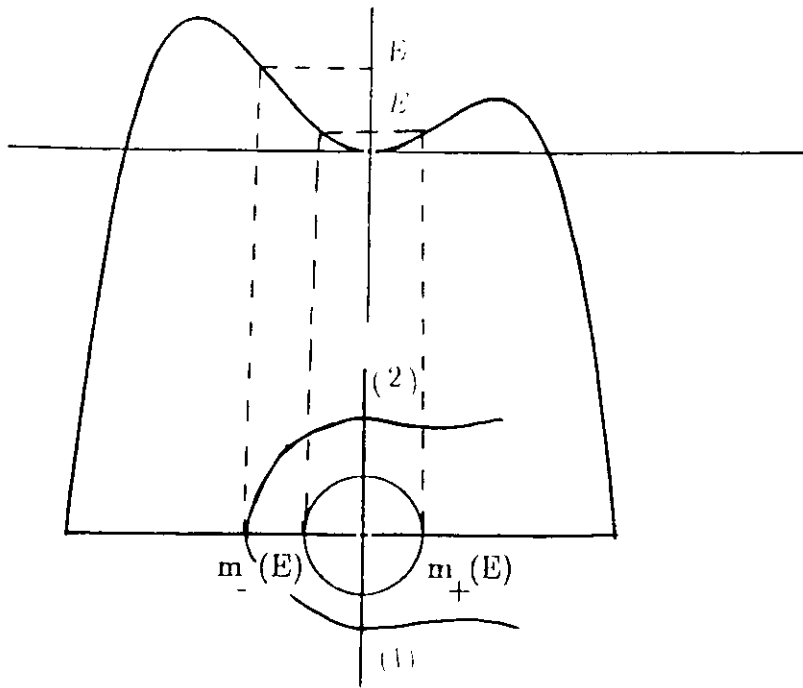


figura 4.8: Trayectorias asociadas a valores de energía admisible  $E$

Además si  $x_0 \in [0, L]$  es tal que  $\varphi(x_0) = 0$ , teniendo en cuenta que  $H(\varphi(x_0)) = 0$ , se tiene que  $z(x_0) = \pm\sqrt{2E}$ .

Por tanto si consideramos la solución  $\varphi$  tal que  $\varphi(0) = 0$  y  $\varphi'(0) = -\sqrt{2E} < 0$ , inicialmente  $\varphi$  parte de (1), es decir  $\varphi$  decrece ( $z < 0$ ) hasta que la solución alcanza el punto  $(m_-(E), 0)$  del plano de fases, y  $\varphi$  crece ( $z > 0$ ) desde ese punto hasta que la trayectoria llega al punto  $(0, \sqrt{2E})$ , de donde se tiene que el espacio recorrido por la solución  $\varphi < 0$ , hasta que la solución vuelve a cortar al eje  $z$ , notado por  $l_-(E)$  viene dado por:

$$l_-(E) = \int_0^{m_-(E)} -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{E - H(\varphi)}} + \int_{m_-(E)}^0 \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{E - H(\varphi)}}$$

de donde  $l_-(E) = \sqrt{2} \int_{m_-(E)}^0 \frac{d\varphi}{\sqrt{E - H(\varphi)}} = \sqrt{2}l_1(E)$ , siendo  $l_1(E)$  la función definida por (4.2.6).

Análogamente, en el caso en que  $E \in (0, E_0)$ , podemos considerar también la solución  $\varphi$  que parte de (2), es decir tal que:

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = \sqrt{2E} > 0$$

y  $l_+(E)$  será el espacio recorrido por la solución  $\varphi > 0$ , hasta que la solución vuelve a

cortar al eje  $z$ .

$$l_+(E) = \int_{0=\varphi(0)}^{m_+(E)} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{E-H(\varphi)}} + \int_{m_+(E)}^0 -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{E-H(\varphi)}} =$$

$= \sqrt{2} \int_0^{m_+(E)} \frac{d\varphi}{\sqrt{E-H(\varphi)}} = \sqrt{2}l_2(E)$ , donde  $l_2(E)$  es la función definida por (4.2.7). Observamos que las funciones  $l_+$  y  $l_-$  de esta sección no coinciden con las denotadas de igual forma en la sección anterior donde  $B = N$ .

Por tanto razonando de forma análoga al caso anterior tenemos, las siguientes ecuaciones de bifurcación:

**Proposición 4.3.1** *Existe solución estacionaria no trivial, sii para algún número natural  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene alguna de las siguientes situaciones:*

- i)  $L = n(l_+(E) + l_-(E))$ .
- ii)  $L = (n - 1)(l_+(E) + l_-(E)) + l_+(E) = nl_+(E) + (n - 1)l_-(E)$ .
- iii)  $L = (n - 1)(l_+(E) + l_-(E)) + l_-(E) = nl_-(E) + (n - 1)l_+(E)$ .

Observamos que las trayectorias asociadas a  $E \in [E_0, E_1)$ , nos proporcionan soluciones estacionarias no triviales sólo si  $l_-(E) = L$ , lo que se corresponde con el tercer apartado de la Proposición 4.3.1, para  $n = 1$ .

Además en el caso i) las soluciones tienen  $n$  máximos y  $n$  mínimos, en el caso ii) tienen  $n$  máximos y  $n - 1$  mínimos y en el caso iii) tienen  $n - 1$  máximos y  $n$  mínimos.

**Proposición 4.3.2** *Las funciones  $l_+$  y  $l_-$  verifican las siguientes propiedades:*

- 1.- Son derivables en sus dominios.
- 2.-  $\lim_{E \rightarrow 0^+} l_{\pm}(E) = \frac{\pi}{\sqrt{-\tilde{h}'(0)}}$ .
- 3.-  $\lim_{E \rightarrow E_0^-} l_+(E) = +\infty$ .
- 4.-  $\lim_{E \rightarrow E_1^-} l_-(E) = +\infty$ .

**Demostración:**

Basta observar que  $l_+(E) = \sqrt{2}l_2(E)$ ,  $l_-(E) = \sqrt{2}l_1(E)$  con  $\lambda = 0$ , según vimos en (4.2.6) y (4.2.7), y aplicar la Proposición 4.2.1.  $\square$

**Proposición 4.3.3** *Las funciones  $l_+$  y  $l_-$  son estrictamente crecientes.*

**Demostración:** Es consecuencia de la Proposición 4.2.2 con  $\lambda = 0$ .

**Teorema 4.3.1** Si  $B = D$ ,  $h$  verifica (4.1.1), y  $\alpha_0 = \frac{\pi}{\sqrt{-h'(0)}}$  tenemos que:

- a) Si  $L \leq \alpha_0$ , no existe ninguna solución estacionaria no trivial.
- b) Si  $L \in ((2j - 1)\alpha_0, 2j\alpha_0]$  para  $j \in \mathbb{N}$ , entonces existen exactamente  $3j$  soluciones estacionarias distintas de la trivial, de las cuales  $j$  son periódicas.
- c) Si  $L \in (2j\alpha_0, (2j + 1)\alpha_0]$  para  $j \in \mathbb{N}$ , entonces existen exactamente  $3j + 2$  soluciones estacionarias distintas de la trivial, de las cuales  $j$  son periódicas.

**Demostración:**

Sean las funciones inyectivas:

$$h_1(E) = n(l_+(E) + l_-(E)), \quad h_2^+(E) = nl_+(E) + (n-1)l_-(E) \text{ y } h_2^-(E) = nl_-(E) + (n-1)l_+(E).$$

Fijado  $n$  se tiene que  $\inf(h_1) = 2n\alpha_0$  y  $\inf(h_2^\pm) = n\alpha_0 + (n-1)\alpha_0 = (2n-1)\alpha_0$ .

Por tanto existe un ciclo (solución estacionaria periódica) si existe  $E_n$ , valor de energía que verifica la ecuación de bifurcación  $h_1(E) = L$ , dada por el primer apartado de la Proposición 4.3.1, lo cual equivale a  $L \geq 2n\alpha_0$ . Además por la inyectividad de  $h_1$   $E_n$  es único, y por tanto la solución estacionaria no trivial, también.

Para estudiar la existencia de soluciones estacionarias distintas de la trivial que no son ciclos, aplicaremos un razonamiento análogo anterior a las funciones  $h_2^\pm$ , asociadas a las ecuaciones de bifurcación de la Proposición 4.3.1,  $h_2^\pm = L$ . De esta forma tenemos que si  $L \geq (2n-1)\alpha_0$ , existen dos únicos valores de energía  $E_n^\pm$  tales que  $h_2^\pm(E_n^\pm) = L$ , y como consecuencia dos únicas soluciones estacionarias no triviales (no son ciclos).

Como consecuencia dado  $L$  y  $\alpha_0$ , se tiene que:

- a) Si  $L \leq \alpha_0$ , no existe ninguna solución estacionaria no trivial.
- b) Si  $(2j-1)\alpha_0 < L \leq 2j\alpha_0$ , entonces se verifica:
  - i)  $L \geq 2n\alpha_0$  para  $n = 1, 2, \dots, j$  y como consecuencia existen exactamente  $j$  soluciones estacionarias que son ciclos, asociadas a los  $E_n$  valores de energía que verifican  $h_1(E_n) = L$ .
  - ii)  $L \geq (2n-1)\alpha_0$  para  $n = 1, 2, \dots, j$  y como consecuencia existen exactamente  $2j$  soluciones no triviales y que no son ciclos, asociadas a los valores de energía  $E_n^\pm$  tales que  $h_2^\pm(E_n^\pm) = L$ .

Como consecuencia el número de soluciones estacionarias no triviales es  $3j$ .

- c) Si  $2j\alpha_0 < L \leq (2j+1)\alpha_0$ , entonces se verifica:
  - i)  $L \geq 2n\alpha_0$  para  $n = 1, 2, \dots, j$  y como consecuencia existen exactamente  $j$  soluciones estacionarias que son ciclos, al igual que en el caso anterior.
  - ii)  $L \geq (2n-1)\alpha_0$  para  $n = 1, 2, \dots, j+1$  y como consecuencia existen exactamente  $2(j+1)$  soluciones no triviales y que no son ciclos.

Por tanto en esta situación existen exactamente  $3j + 2$  soluciones estacionarias distintas de la trivial.  $\square$



**SOLUCIONES METAESTABLES**

# CAPITULO 5

## SOLUCIONES METAESTABLES

### 5.1 Naturaleza de las soluciones metaestables

Estudiamos el comportamiento de las soluciones del problema:

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} \tau \varphi_t = \xi^2 \varphi''(x) - \frac{1}{2}(\varphi^3 - \varphi) - l\varphi + 2v \quad , \quad x \in (a, b) \\ v_t = kv''(x) - \frac{k\xi}{2} \varphi''(x) \quad , \quad x \in (a, b) \\ \varphi'(a) = \varphi'(b) = 0 \\ v'(a) = v'(b) = 0 \\ \varphi^\xi(0, x) = \varphi_0^\xi(x) \\ v^\xi(0, x) = v_0^\xi(x) \end{array} \right.$$

cuando  $\xi \rightarrow 0$ .

Pretendemos buscar soluciones  $(\varphi(t, x), v(t, x))$  de  $\mathcal{P}$  que sin ser estacionarias, persistan por un largo período de tiempo, (**soluciones metaestables**) para valores pequeños de  $\xi$ , mediante el **método de energía**.

Este método consiste en la construcción de un funcional de energía para el sistema con muy poco exceso de energía para disipar (cambiar de fase). De esta forma, como la velocidad de variación de la solución está ligada a la disipación de energía, una escasez de energía nos lleva a una evolución muy lenta de la solución.

Consideramos el funcional de energía dado por el funcional de Lyapunov del sistema (1.1.8) de la Proposición 1.5.1 definido por

$$W_\xi(\varphi, v) = \int_a^b \left[ \frac{\xi^2}{2} \varphi_x^2 + \frac{1}{8} (\varphi^2 - 1)^2 \right] dx + \frac{1}{2c} \int_a^b (cv - \varphi)^2 dx$$

con  $c = \frac{2}{l}$  y  $G(s) = \frac{1}{8}(s^2 - 1)^2 \geq 0$ , tal que  $G'(s) = g(s) = \frac{1}{2}(s^3 - s)$ , el cual verifica las siguientes propiedades:

i)  $W_\xi(\varphi, v) \geq 0$ .

ii) Los mínimos absolutos de  $W_\xi$  son los puntos donde  $W_\xi$  se anula, es decir  $(1, \frac{1}{c})$  y  $(-1, -\frac{1}{c})$ , para todo  $\xi \geq 0$ , y se corresponden con soluciones estacionarias estables del problema  $(\mathcal{P})$ .

iii) La región donde el funcional toma valores pequeños, para  $\xi \ll 1$ , es muy grande, es decir  $W_\xi$  posee “un valle extenso y poco profundo de energía”. En efecto:

Sea  $h(\xi)$  un infinitésimo en  $\xi$ , es decir  $h(\xi) \mapsto 0$  si  $\xi \mapsto 0$ . La región

$$I_\xi = \{(\varphi, v), W_\xi(\varphi, v) \leq h(\xi)\} \subset H^1 \times L^2$$

con  $\xi \ll 1$  contiene muchas funciones además de las constantes minimizadores del funcional. En particular incluye las **transiciones**, que son aquellas funciones  $(\varphi, v)$  donde  $\varphi \sim \pm 1$  con  $\nabla\varphi$  “grande”, en una región pequeña y  $v \sim \pm \frac{1}{c}$ .

El “valle” es una región grande de energía pequeña y además como  $W_\xi$  disipa energía de (1.1.8), es invariante, ya que si partimos de un dato inicial  $(\varphi^\xi(0, x), v^\xi(0, x)) \in I_\xi$ , la solución de (1.1.8) verifica

$$0 \leq W_\xi(\varphi^\xi(t, x), v^\xi(t, x)) \leq W_\xi(\varphi^\xi(0, x), v^\xi(0, x)) \leq h(\xi)$$

para todo  $t \geq 0$ . De esta forma teniendo en cuenta que  $W_\xi$  decrece con  $t$ , si consideramos  $h(\xi) \mapsto 0$  cuando  $\xi \mapsto 0$ , observamos que el funcional de energía tiene muy poco exceso de energía para disipar en el “valle”, lo cual sugiere que las soluciones evolucionan muy lentamente.

Buscamos pues soluciones **metaestables** (de evolución muy lenta) para valores pequeños de  $\xi$ , próximas a la estructura de **N-transiciones de fases**, que pasamos a definir.

### Definición 5.1.1 Función N-transiciones

Llamaremos función N – escalera, y la representaremos por  $\varphi^0 : [a, b] \mapsto \{-1, +1\}$ , a toda función con N puntos de transición, que notaremos  $z_i, i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , que toma los valores +1 y -1.

Llamamos función de N – transiciones a toda función de  $H^1$ , próxima en  $L^1$  a una función N – escalera.

**Observación 5.1.1** i) Para que efectivamente existan soluciones metaestables en  $I_\xi, \xi \ll 1$ , la función  $h(\xi)$ , no puede ser demasiado pequeña, de tal forma que si  $\frac{h(\xi)}{\xi} \mapsto 0$  cuando  $\xi \mapsto 0$ , entonces en la región  $I_\xi$  no hay transiciones para valores  $\xi \ll 1$ . En este caso cualquier solución  $(\varphi^\xi, v^\xi) \in I_\xi$  de (1.1.8) cuando  $\xi \mapsto 0$  se acerca necesariamente a uno



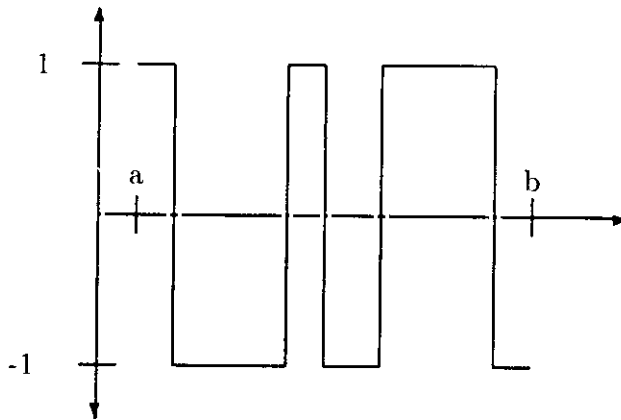


figura 5.1: función  $N$  - escalera

de los puntos de equilibrio  $(\pm 1, \pm \frac{1}{c})$ . Por tanto para incluir las transiciones es necesario que

$$\liminf_{\xi \rightarrow 0} \frac{h(\xi)}{\xi} \geq h_0 > 0$$

con  $h_0 > 0$  y  $\xi \sim 0$ .

En efecto, si  $(\varphi^\xi, v^\xi) \in I_\xi$  en primer lugar,  $W_\xi(\varphi^\xi, v^\xi) \leq h(\xi) \mapsto 0$  cuando  $\xi \mapsto 0$  por lo tanto  $(\varphi^\xi)^2 \mapsto 1$  en  $L^2$  y  $v^\xi \mapsto \frac{1}{c}\varphi^\xi$  en  $L^2$ , luego existe una subsucesión tal que  $(\varphi^\xi, v^\xi) \mapsto (\pm 1, \pm \frac{1}{c})$  en casi todo punto.

Además  $\frac{h(\xi)}{\xi} \geq \frac{\xi}{2} \int_a^b |\nabla \varphi^\xi|^2 + \frac{1}{8\xi} \int_a^b ((\varphi^\xi)^2 - 1)^2 + \frac{1}{2c\xi} \int_a^b (cv^\xi - \varphi^\xi)^2$  y por la desigualdad de Young

$$\frac{\xi}{2} \int_a^b |\varphi_x^\xi|^2 + \frac{1}{8\xi} \int_a^b [(\varphi^\xi)^2 - 1]^2 \geq \frac{1}{2} \int_a^b |(\varphi^\xi)^2 - 1| |\varphi_x^\xi| = \frac{1}{2} \int_a^b \left| \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{(\varphi^\xi)^3}{3} - \varphi^\xi \right) \right|$$

por tanto si  $\frac{h(\xi)}{\xi} \mapsto 0$ , se tiene que  $(\frac{(\varphi^\xi)^3}{3} - \varphi^\xi) = \varphi^\xi (\frac{(\varphi^\xi)^2}{3} - 1) \mapsto c_0$  en  $L^1$ , con  $c_0$  constante, y como  $(\varphi^\xi)^2 \mapsto 1$ , necesariamente

$$\varphi^\xi \mapsto +1, \text{ o } \varphi^\xi \mapsto -1, \text{ y respectivamente } v^\xi \mapsto \frac{1}{c}, \text{ o } v^\xi \mapsto -\frac{1}{c}.$$

ii) En vista de lo anterior, necesitamos considerar funciones  $(\varphi^\xi, v^\xi)$  tal que  $W_\xi(\varphi^\xi, v^\xi) = h(\xi) \mapsto 0$  si  $\xi \mapsto 0$  pero  $\liminf_{\xi \rightarrow 0} \frac{h(\xi)}{\xi} \geq h_0$ .

Consideramos el funcional de energía normalizado  $V_\xi = \frac{1}{\xi}W_\xi$ , que sigue siendo positivo y escribimos

$$V_\xi(\varphi, v) = E_\xi(\varphi) + \frac{1}{2c\xi} \int_a^b (cv - \varphi)^2 dx \quad (5.1.1)$$

donde  $E_\xi(\varphi)$  viene dado por

$$E_\xi(\varphi) = \int_a^b \left[ \frac{\xi}{2} \varphi_x^2 + \frac{1}{8\xi} (\varphi^2 - 1)^2 \right] dx.$$

Vamos a ver algunos lemas previos a la elección del conjunto de datos iniciales verificando las propiedades anteriormente mencionadas, cuya solución asociada tiene la propiedad de evolución lenta (metaestabilidad) que buscamos. Estos lemas son consecuencia directa de la definición del funcional, de forma que la ecuación de evolución no juega ningún papel. Su demostración se puede encontrar en [8], [25], pero no obstante vamos a ver a continuación que el límite inferior del funcional  $E_\xi$  actuando sobre funciones de  $N$ -transiciones es una constante que depende del número de transiciones. De tal forma que el valor mínimo de energía sobre estas funciones de  $N$ -transiciones, va a depender de  $N$  y no de las posiciones de los puntos de transición.

**Lema 5.1.1** Si  $\{\varphi^\xi\} \subset H^1$ ,  $\varphi^\xi \rightarrow \varphi^0$  en  $L^1(a, b)$ , cuando  $\xi \rightarrow 0$ , con  $\varphi^0 \equiv N$ -escalera, con transiciones entre  $-1$  y  $1$ , entonces:

$$\liminf_{\xi \rightarrow 0^+} E_\xi[\varphi^\xi] \geq NC_0 \text{ con } C_0 = \int_{-1}^1 (1 - s^2) ds = \frac{2}{3}$$

alcanzándose la igualdad para ciertas sucesiones  $\varphi^\xi$ .

**Demostración:**

Si  $\varphi_\xi \rightarrow \varphi^0$  en  $L^1(a, b)$  con  $\varphi^0$  una función  $N$ -escalera entre  $1$  y  $-1$ , por el Lema de Egorov, para todo  $\delta > 0$  existe  $A \subset (a, b)$  con  $\mu(A^c) \leq \delta$ , tal que  $\varphi_\xi \rightarrow \varphi^0$  uniformemente en  $A$ . Por esta razón podemos considerar, sin pérdida de generalidad,  $N$ -intervalos  $(a_i, b_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$  suficientemente pequeños que contienen a los  $N$ -puntos de transición de  $\varphi^0$  tales que

$$\varphi^\xi(a_i) \rightarrow \varphi^0(a_i) = -1, \text{ y } \varphi^\xi(b_i) \rightarrow \varphi^0(b_i) = 1.$$

De esta forma se tiene que:

$$E_\xi(\varphi^\xi) = \frac{\xi}{2} \int_a^b |(\varphi^\xi)_x|^2 + \frac{1}{8\xi} \int_a^b |(\varphi^\xi)^2 - 1|^2 \geq \sum_{i=1}^N \frac{\xi}{2} \int_{a_i}^{b_i} |(\varphi^\xi)_x|^2 + \frac{1}{8\xi} \int_{a_i}^{b_i} |(\varphi^\xi)^2 - 1|^2.$$

Por la desigualdad de Young

$$\int_{a_i}^{b_i} \xi |(\varphi^\xi)_x|^2 + \frac{1}{4\xi} |(\varphi^\xi)^2 - 1|^2 \geq \int_{a_i}^{b_i} (\varphi^\xi)_x |\varphi_\xi^2 - 1| = \int_{a_i}^{b_i} (H(\varphi^\xi))_x = H(\varphi^\xi(b_i)) - H(\varphi^\xi(a_i))$$

con  $H(s) = \int_0^s |x^2 - 1| dx$ . Como consecuencia, se obtiene que

$$\liminf_{\xi \rightarrow 0^+} \int_{a_i}^{b_i} \xi |(\varphi^\xi)_x|^2 + \frac{1}{4\xi} |(\varphi^\xi)^2 - 1|^2 \geq H(1) - H(-1) = \frac{2}{3} = C_0.$$

La existencia de sucesiones donde se alcanza este valor mínimo de energía está probada en [43], [44], [60],[25].  $\square$

**Observación 5.1.2** *Observemos que si  $N = \infty$ , entonces el argumento anterior nos dice que  $\liminf_{\xi \rightarrow 0} E_\xi(\varphi^\xi) = +\infty$ .*

**Definición 5.1.2**  *$N$ -transiciones eficientes*

*Diremos que  $\varphi_\xi \mapsto \varphi^0$  en  $L^1$  con  $\varphi_\xi \in H^1$  y  $\varphi^0$  función  $N$ -escalera, tiene  $N$ -transiciones "eficientes" si*

$$\liminf_{\xi \rightarrow 0} E_\xi(\varphi^\xi) = NC_0$$

*es decir si toda la energía se acumula en los saltos.*

**Observación 5.1.3** *La existencia de las funciones de  $N$ -transiciones eficientes que está demostrada en [25], [43], [44],[60], no es nada elemental.*

*De hecho se tiene que ni las funciones lineales a trozos, ni polinómicas de grado mayor, a trozos, son transiciones eficientes. En efecto si consideramos  $\varphi^\xi$  función que toma los valores 1 y  $-1$  alternativamente en todo el intervalo  $(a, b)$ , salvo en intervalos centrados en los puntos de transición  $z_i, i = 1, \dots, N$  de amplitud  $2\delta, \delta = \delta(\xi)$  donde está definida de la siguiente forma:*

$$\varphi^\xi(x) = \pm \frac{1}{\delta^n} (x - z_i)^n$$

*eligiendo el signo de forma que sea continua, se tiene que:*

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} E_\xi(\varphi^\xi) = 2\sqrt{2} \frac{n^2}{\sqrt{(4n+1)(4n^2-1)}} N > NC_0$$

*para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

El siguiente lema se ha probado en [25], y nos va a permitir probar la existencia de soluciones metaestables para el sistema (1.1.8), cuya evolución es más lenta que la

conseguida por las técnicas de [8], para la solución de la ecuación  $u_t = \xi^2 u_{xx} + f(u)$ ,  $x \in (0, 1)$ , de hecho la solución que parte de datos iniciales próximos a  $(\varphi^0, \frac{1}{c}\varphi^0)$  permanece invariante durante un intervalo de tiempo de longitud  $T$ , con  $T \geq Ce^{-\frac{D}{\xi}}$ ,  $C, D > 0$ , mientras que en [8] el orden de evolución de la solución,  $u^\xi$ , respecto de  $\xi$  es potencial.

Para esto notaremos  $\hat{\varphi}(x) = \int_a^x \varphi(s) ds$  y observamos que dada  $\varphi \in L^1(a, b)$  se tiene que  $\hat{\varphi} \in H^1(a, b)$ , verifica  $\hat{\varphi}(a) = 0$  y  $|\hat{\varphi}(x)| \leq \|\varphi\|_{L^1(a, b)}$  de donde:

$$\|\hat{\varphi}\|_{L^1(a, b)} \leq (b - a)\|\varphi\|_{L^1(a, b)}. \quad (5.1.2)$$

**Lema 5.1.2** *Sea  $\varphi^0$  una función  $N$ -escalera con  $z_i, i = 1, \dots, N$  puntos de transición y sea  $r > 0$ , tal que los intervalos,  $(z_i - r, z_i + r)$  son disjuntos entre sí, y están contenidos en  $(a, b)$ . Entonces para cada  $C > 0$ , tal que  $C \leq r$ , existe  $\delta^* > 0$  y  $C_1^* > 0$ , que depende sólo de  $\varphi^0$  y de  $C$ , tales que:*

*Si  $\varphi \in H^1$  verifica  $\int_a^b |\hat{\varphi} - \hat{\varphi}^0| dx \leq \delta^*$ , entonces*

$$E_\xi[\varphi] \geq NC_0 - C_1^* \varepsilon^{-\frac{C}{\xi}} \quad \square$$

## 5.2 Movimiento lento de la transición de fase

Vamos a ver una estimación de la norma de la solución, que parte de un dato inicial próximo a la estructura de  $N$ -transiciones, en el espacio producto  $L^2 \times H_N^{-1}$  lo que nos va a permitir probar el resultado de metaestabilidad.

Consideraremos a partir de ahora  $\varphi^0$  una función  $N$ -escalera como en el Lema 5.1.2, es decir con  $z_i, i = 1, \dots, N$  puntos de transición y  $r$  tal que  $(z_i - r, z_i + r) \subset (a, b)$  y son disjuntos entre sí, y una constante positiva  $C \leq r$ .

Vamos a partir de datos iniciales cuya primera componente  $\varphi_0^\xi$  verifica las propiedades:

- i)  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \varphi_0^\xi(x) = \varphi^0(x)$  en  $L^1(\Omega)$ .
- ii)  $E_\xi[\varphi_0^\xi] \leq NC_0 + \frac{1}{2}g(\xi)$ , con  $\xi g(\xi) \rightarrow 0$  para  $\xi \rightarrow 0$  cuya existencia está probada en [25].

**Proposición 5.2.1** *Supongamos que el dato inicial  $(\varphi_0^\xi(x), v_0^\xi(x))$  verifica:*

- i)  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \varphi_0^\xi(x) = \varphi^0(x)$  en  $L^1(\Omega)$ .
- ii)  $E_\xi[\varphi_0^\xi] \leq NC_0 + \frac{1}{2}g(\xi)$ , con  $\xi g(\xi) \rightarrow 0$  para  $\xi \rightarrow 0$ .
- iii)  $\frac{1}{c} \int_a^b |cv_0^\xi - \varphi_0^\xi|^2 dx \leq \xi g(\xi)$ .

*Entonces, existen  $C_1, C_2$  constantes positivas, independientes de  $\xi$ , tales que la solución  $(\varphi^\xi, v^\xi)$  verifica*

$$\int_0^T \int_a^b [(\varphi_t^\xi)^2 + |(-\Delta)^{-1}(v_t^\xi)|^2] dx dt \leq C_1(2\xi g(\xi) + \xi \varepsilon^{-\frac{C}{\xi}})$$

para  $\xi$  suficientemente pequeño, y  $T$  se puede elegir tal que  $T \geq \frac{C_2}{C_1(\xi g(\xi) + \xi e^{-\frac{C}{\xi}})}$ .

En particular si  $g(\xi) = C_3 e^{-\frac{C}{\xi}}$ , entonces  $T \geq C_4 e^{\frac{C}{\xi}}$ ,  $C_i > 0$ ,  $i = 3, 4$ .

**Demostración:**

En primer lugar consideramos  $\delta = \frac{\delta^*}{b-a} > 0$ , con  $\delta^*$  dado por el Lema 5.1.2, de forma que por (5.1.2), si  $\int_a^b |\varphi^\xi - \varphi^0| \leq \delta$ , entonces  $\int_a^b |\hat{\varphi}^\xi - \hat{\varphi}^0| \leq \delta^*$ . A continuación consideramos  $\xi_0$  tal que para todo  $\xi \leq \xi_0$

$$\int_a^b |\varphi^\xi(x, 0) - \varphi^0(x)| dx \leq \frac{1}{2} \delta.$$

Ahora por la continuidad del semigrupo asociado a las soluciones del sistema (1.1.8), para cada  $\xi$  fijo existe  $T = T(\xi) > 0$  dependiendo del dato inicial, tal que  $\int_a^b |\varphi^\xi(t) - \varphi^0| \leq \delta$  para todo  $0 \leq t \leq T(\xi)$ . Por tanto por el Lema 5.1.2, existe una constante  $C_1^* > 0$  tal que

$$E_\xi[\varphi^\xi](t) \geq NC_0 - C_1^* e^{-\frac{C}{\xi}}$$

para todo  $0 \leq t \leq T(\xi)$ .

Como consecuencia se tiene que para todo  $0 \leq t \leq T(\xi)$

$$NC_0 - C_1^* e^{-\frac{C}{\xi}} \leq E_\xi[\varphi^\xi](t) \leq V_\xi[\varphi^\xi, v^\xi](t) \leq V_\xi[\varphi_0^\xi, v_0^\xi].$$

Teniendo en cuenta ahora que:

$$V_\xi[\varphi_0^\xi, v_0^\xi] = E_\xi[\varphi_0^\xi] + \frac{1}{2c\xi} \int_a^b (cv_0^\xi - \varphi_0^\xi)^2 \leq NC_0 + g(\xi),$$

se tiene que para todo  $0 \leq t \leq T(\xi)$

$$V_\xi[\varphi_0^\xi, v_0^\xi] - V_\xi[\varphi^\xi, v^\xi](t) \leq g(\xi) + C_1^* e^{-\frac{C}{\xi}}. \tag{5.2.1}$$

Observemos que (5.2.1) nos mide la poca variación de la energía en  $0 \leq t \leq T(\xi)$ .

Además, de (1.5.8), probada en la Proposición 1.5.1, tenemos

$$\frac{dV_\xi(\varphi^\xi, v^\xi)}{dt} = -\xi^{-1}(\tau \|\varphi_t^\xi\|^2 + d \| [(-\Delta)^{-1} v_t^\xi] \|^2)$$

con  $d = \frac{4}{kl} > 0$ , por tanto integrando de 0 a  $T = T(\xi)$ , se tiene que:

$$V_\xi[\varphi_0^\xi, v_0^\xi] - V_\xi[\varphi^\xi, v^\xi](T) = \xi^{-1} \int_0^T \int_a^b \tau (\varphi_t^\xi)^2 + d [(-\Delta)^{-1} v_t^\xi]^2.$$

De donde aplicando (5.2.1) obtenemos

$$\xi^{-1} \int_0^T \int_a^b \tau (\varphi_t^\xi)^2 + d [(-\Delta)^{-1} v_t^\xi]^2 \leq g(\xi) + C_1^* e^{-\frac{C}{\xi}}$$

es decir:

$$\int_0^T \int_a^b (\varphi_t^\xi)^2 + |(-\Delta)^{-1} v_t^\xi|^2 \leq C_1(\xi g(\xi) + \xi e^{-\frac{c}{\xi}}), \quad (5.2.2)$$

con  $C_1 = \max\{C_1^*, (\min\{\tau, d\})^{-1}, (\min\{\tau, d\})^{-1}\}$ .

Observemos que (5.2.2) es válido para todo instante de tiempo  $t$ , tal que  $\int_a^b |\varphi^\xi(t) - \varphi^0(x)| dx \leq \delta, 0 \leq t \leq T$ .

Para terminar la demostración hemos de probar que se puede tomar  $T = T(\xi) \geq \frac{C_2}{C_1(\xi g(\xi) + \xi e^{-\frac{c}{\xi}})}$  con  $C_2 > 0$  e independiente del dato inicial.

Si  $\int_0^\infty \int_a^b |\varphi_t^\xi| \leq \frac{1}{2}\delta$  entonces no hay nada que probar, ya que para todo  $t$  se tiene que

$$\int_a^b |\varphi^\xi(t) - \varphi^0| \leq \int_0^t \int_a^b |\varphi_t^\xi| + \int_a^b |\varphi_0^\xi - \varphi^0| \leq \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta = \delta. \quad (5.2.3)$$

Por tanto supongamos que  $\int_0^\infty \int_a^b |\varphi_t^\xi| > \frac{1}{2}\delta$ , eso nos dice que existe un tiempo  $T(\xi) > 0$ , (dependiente del dato inicial), tal que

$$\frac{1}{2}\delta = \int_0^{T(\xi)} \int_a^b |\varphi_t^\xi|$$

y por (5.2.3) se tiene que  $\int_a^b |\varphi^\xi(t) - \varphi^0| \leq \delta$  para todo  $t \in [0, T(\xi)]$  lo que nos permite usar (5.2.2). Aplicando ahora la desigualdad de Hölder tenemos

$$\frac{1}{2}\delta \leq \left( \int_0^{T(\xi)} \int_a^b |\varphi_t^\xi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} (T(\xi))^{\frac{1}{2}} (b-a)^{\frac{1}{2}} \leq \xi^{\frac{1}{2}} [C_1(g(\xi) + e^{-\frac{c}{\xi}})]^{\frac{1}{2}} T(\xi)^{\frac{1}{2}} (b-a)^{\frac{1}{2}}$$

por tanto

$$T(\xi) \geq \frac{C_2}{C_1(\xi g(\xi) + \xi e^{-\frac{c}{\xi}})} \text{ con } C_2 = \frac{\delta^2}{4(b-a)}$$

y el segundo miembro es independiente del dato inicial. El resto es inmediato.  $\square$

**Observación 5.2.1** De esta forma tenemos una cota para  $T(\xi)$ , independiente del dato inicial, que depende de  $\xi$ , de forma que  $T(\xi)$  crece al disminuir  $\xi$ .

Vamos a ver que en una escala de tiempo de longitud  $T$  con  $T \geq M e^{\frac{c}{\xi}}$ , donde  $M$  es cualquier constante positiva, la estructura inicial de  $N$ -transiciones de la solución, permanece invariante.

**Teorema 5.2.1** Supongamos que el dato inicial  $(\varphi_0^\xi(x), v_0^\xi(x))$  verifica las hipótesis de la Proposición 5.2.1. Entonces para todo  $M > 0$

$$i) \lim_{\xi \rightarrow 0} \sup_{\{0 \leq t \leq \frac{M}{g(\xi) + e^{-\frac{c}{\xi}}}\}} \|\varphi^\xi(t) - \varphi^0\|_{L^1} = 0.$$

$$ii) \lim_{\xi \rightarrow 0} \sup_{\{0 \leq t \leq \frac{M}{g(\xi) + e^{-\frac{C}{\xi}}}\}} \|cv^\xi(t) - \varphi^\xi(t)\|_{L^2} = 0.$$

$$iii) \lim_{\xi \rightarrow 0} \sup_{\{0 \leq t \leq \frac{M}{g(\xi) + e^{-\frac{C}{\xi}}}\}} \|v^\xi(t) - \frac{1}{c}\varphi^0\|_{L^1} = 0.$$

En particular, si  $g(\xi) = ke^{-\frac{C}{\xi}}$  para algún  $k$ , entonces:

$$iv) \lim_{\xi \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq Me\frac{C}{\xi}} \|\varphi^\xi(t) - \varphi^0\|_{L^1} = 0.$$

$$v) \lim_{\xi \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq Me\frac{C}{\xi}} \|cv^\xi(t) - \varphi^\xi(t)\|_{L^2} = 0.$$

$$vi) \lim_{\xi \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq Me\frac{C}{\xi}} \|v^\xi(t) - \frac{1}{c}\varphi^0\|_{L^1} = 0.$$

**Demostración:**

i) Por la Proposición 5.2.1, sabemos en particular que podemos elegir  $T(\xi)$ , suficientemente grande, verificándose además que  $\int_0^{T(\xi)} \int_a^b |\varphi_t^\xi|^2 dx dt \leq C_1 \xi (g(\xi) + e^{-\frac{C}{\xi}})$ . Además

$$\int_a^b |\varphi^\xi(t) - \varphi_0^\xi| dx \leq \int_a^b \int_0^t |\varphi_s^\xi| dx ds \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} [C_1 \xi (g(\xi) + e^{-\frac{C}{\xi}})]^{\frac{1}{2}},$$

de esta forma dado  $t \leq T(\xi)$  se tiene que

$$\|\varphi^\xi(t) - \varphi_0^\xi\|_{L^1} \leq C_2 [T(\xi) \xi (g(\xi) + e^{-\frac{C}{\xi}})]^{\frac{1}{2}}$$

con  $C_2 = (C_1(b-a))^{\frac{1}{2}}$ . Por tanto eligiendo  $T(\xi)$  tal que  $T(\xi) \xi (g(\xi) + e^{-\frac{C}{\xi}}) \rightarrow 0$  si  $\xi \rightarrow 0$ , por ejemplo  $T(\xi) = \frac{M}{g(\xi) + e^{-\frac{C}{\xi}}}$ , tenemos

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq T(\xi)} \|\varphi^\xi(t) - \varphi_0^\xi\|_{L^1} = 0$$

de esta forma teniendo en cuenta que  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \|\varphi_0^\xi - \varphi^0\|_{L^1} = 0$  se concluye la demostración del primer apartado.

ii) Este resultado es consecuencia del siguiente hecho:

$$\sup_{t \in [0, T(\xi)]} \|cv^\xi(t) - \varphi^\xi(t)\|_{L^2} \leq C_3 \xi (g(\xi) + e^{-\frac{C}{\xi}}) \tag{5.2.4}$$

con  $C_3$  constante positiva independendiente de  $\xi$  y de  $t$ .

Para probar (5.2.4), tenemos en cuenta de nuevo la Proposición 5.2.1, en la que probamos que

$$\int_a^b |\varphi^\xi(t) - \varphi^0| dx \leq \delta, \forall t \in [0, T(\xi)] \text{ con } T(\xi) \geq \frac{C_2}{C_1 \xi (g(\xi) + e^{-\frac{C}{\xi}})}$$

de donde para cada  $t \in [0, T(\xi)]$ ,  $\varphi^\xi(t)$ , está en las hipótesis del Lema 5.1.2 según el cual  $E_\xi(\varphi^\xi)(t) \geq NC_0 - C_1^* e^{-\frac{C}{\xi}}$ .

Teniendo en cuenta ahora (5.1.1) y las hipótesis sobre  $(\varphi_0^\xi, v_0^\xi)$ , se tiene que

$$V_\xi(\varphi^\xi, v^\xi)(t) = E_\xi(\varphi^\xi)(t) + \frac{1}{2\xi c} \int_a^b (cv^\xi - \varphi^\xi)^2(t) \leq V_\xi(\varphi_0^\xi, v_0^\xi) \leq NC_0 + g(\xi),$$

por tanto

$$\frac{1}{2\xi c} \int_a^b |cv^\xi - \varphi^\xi|^2 \leq NC_0 + g(\xi) - E_\xi(\varphi^\xi)(t) \leq g(\xi) + C_1^* e^{-\frac{t}{\xi}}$$

con  $C_1^*$  constante positiva que no depende de  $\xi$  ni de  $t$  y (5.2.4) queda probado.

iii) Observamos que

$$\|cv^\xi(t) - \varphi_0^\xi\|_{L^1} \leq \|(cv^\xi - \varphi^\xi)(t)\|_{L^1} + \|\varphi^\xi(t) - \varphi_0^\xi\|_{L^1}$$

y por la desigualdad de Hölder

$$\|(cv^\xi - \varphi^\xi)\|_{L^1}(t) \leq \|(cv^\xi - \varphi^\xi)(t)\|_{L^2}(b-a)^{\frac{1}{2}}$$

por tanto el apartado i) junto con (5.2.4), concluyen la demostración del Teorema 5.2.1.  $\square$

A continuación vamos a ver un resultado que nos muestra como los puntos de transición de  $\varphi^\xi(t)$  se mueven lentamente.

Teniendo en cuenta que las fases están localizadas en los valores  $\varphi = -1, v = \frac{-1}{c}$  y  $\varphi = +1, v = \frac{1}{c}$ , la evolución de las fases está reflejada en la evolución del número de ceros de  $\varphi^\xi(t)$ .

En [8], para la ecuación  $(\varphi^\xi)_t - \xi^2 \Delta \varphi^\xi + h(\varphi^\xi) = 0$ , se estudia la evolución del número de ceros de la solución, y se prueba que los ceros de  $\varphi^\xi(t)$ , o puntos de transición, van disminuyendo progresivamente, (colapsando dos a dos ó uno a uno con los extremos del intervalo), acercándose así la solución, a las soluciones estacionarias estables.

En [8], la evolución del número de ceros de la solución es conocida por tratarse de una ecuación parabólica semilineal de segundo orden, de las estudiadas por ejemplo en [3] y [41]. En estos trabajos se demuestra que el número de ceros es una función no creciente en  $t$ . Sin embargo, estos resultados están basados en el principio del máximo y no son aplicables a nuestro caso. De hecho, estos resultados sobre la evolución del número de ceros en [3], se refieren a la solución de una ecuación del tipo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + f(t, u, \frac{\partial u}{\partial x})$$

donde es fundamental el hecho de que  $f$  no dependa explícitamente de  $x$ , por lo que no es aplicable a las soluciones de (1.1.8).



Para estudiar la evolución de la estructura de  $N$  - transiciones, de las soluciones del sistema (1.1.8), vamos a aplicar las técnicas de [25], que han sido aplicadas en el contexto de las ecuaciones de Cahn- Hilliard y para sistemas de ecuaciones de Cahn-Morral, donde el principio del máximo tampoco se verifica. En particular usaremos los resultado del siguiente Lema técnico, basado únicamente en la expresión del funcional  $E_\xi$ .

Fijado  $\rho$  suficientemente pequeño, elegimos  $K \subset \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$ , un conjunto cerrado y definimos el conjunto de transición de una función  $u$  por:

**Definición 5.2.1**

$$T_r(u) = u^{-1}(K) = \{x \in (a, b), u(x) \in K\}.$$

Observamos que  $u^{-1}(K)$  describe los puntos donde  $u$  no es próxima a  $+1$  y  $-1$  y por tanto, en cierta forma, el conjunto donde  $u$  transita entre las fases  $\pm 1$ .

Vamos a ver la rapidez con que se mueven las transiciones de fases, analizando la velocidad de cambio de la función transición.

Denotamos por  $dist(A, B)$  la distancia de Hausdorff entre los conjuntos  $A$  y  $B$ , es decir:

$$dist(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} dist(a, B), \sup_{b \in B} dist(b, A)\}.$$

Con estas notaciones, se tiene el siguiente resultado, cuya demostración se puede encontrar en [25].

**Lema 5.2.1** *Fijado  $K$ , como antes y  $\alpha > 0$ , existe  $\delta^*$  suficientemente pequeño, tal que para toda  $\varphi \in H^1$ , verificando*

$$\int_a^b |\hat{\varphi}(x) - \hat{\varphi}^0(x)| dx \leq \delta^* \text{ y } E_\xi(\varphi) \leq NC_0 + ke^{-\frac{c}{\xi}}$$

para algún  $k > 0$ , se tiene que

$$dist(T_r\{u\}, \{z_j\}_{j=1 \dots N}) < \frac{\alpha}{2}$$

donde  $z_j$  representa los puntos de transición de  $\varphi^0$ .  $\square$

Es decir si  $\hat{\varphi}$  es próximo en  $L^1$  a  $\hat{\varphi}^0$  y es "eficiente" en términos de energía, entonces su conjunto de transición es próximo el de  $\varphi^0$  es decir  $\{z_j, j = 1, \dots, N\}$ .

Este resultado, junto con la Proposición 5.2.1 nos permite probar, de forma casi inmediata, que la evolución de los puntos de transición de  $\varphi^\xi(t)$  es lenta en intervalos grandes de tiempo.

**Teorema 5.2.2** Para toda familia de datos iniciales  $\{(\varphi_0^\xi(x), v_0^\xi(x)) \in H^1 \times L^2, 0 \leq \xi \leq \xi_0\}$  verificando las hipótesis de la Proposición 5.2.1 con  $g(\xi) = C_3 e^{-\frac{C}{\xi}}$ , dados  $\alpha > 0$  y  $\delta^*$  como en el Lema 5.2.1, existen  $C, \xi_0 > 0$  tales que:

$$\int_a^b |\varphi^\xi(x) - \varphi^0(x)| dx \leq \delta = \frac{\delta^*}{b-a} \text{ para todo } \xi \leq \xi_0$$

y se tiene que el tiempo  $T(\alpha)$  necesario para que

$$\text{dist}(T_r[\varphi^\xi(\cdot, T(\alpha))], T_r[\varphi_0^\xi(\cdot)]) \geq \alpha$$

satisface la condición  $T(\alpha) > M e^{\frac{C}{\xi}}$ , para todo  $M > 0$ .

**Demostración:**

Por las hipótesis del enunciado existe  $\xi_0$  tal que

$$\int_a^b |\varphi_0^\xi(x) - \varphi^0(x)| dx \leq \delta \text{ de donde } \int_a^b |\hat{\varphi}_0^\xi(x) - \hat{\varphi}^0(x)| dx \leq \delta^* \quad \forall \xi \leq \xi_0.$$

Observamos que  $V_\xi(\varphi_0^\xi, v_0^\xi) \leq N C_0 + k e^{-\frac{C}{\xi}}$  para algún  $k > 0$ , y en particular,  $E_\xi(\varphi_0^\xi) \leq N C_0 + \frac{k}{2} e^{-\frac{C}{\xi}}$ , y por tanto  $\varphi_0^\xi(x)$ , satisface las hipótesis del Lema 5.2.1, según el cual se tiene que

$$d(T_r[\varphi_0^\xi], \{z_j\}_{j=1, \dots, N}) < \frac{\alpha}{2}$$

donde  $z_j$  representa los puntos de transición de  $\varphi^0$ .

Por el Teorema 5.2.1, podemos considerar  $\xi_0$ , suficientemente pequeño y  $T(\xi) \geq M e^{\frac{C}{\xi}}$ , para que

$$\sup_{0 \leq t \leq T(\xi)} \|\varphi^\xi(t) - \varphi^0\|_{L^1} \leq \delta, \text{ y por tanto } \sup_{0 \leq t \leq T(\xi)} \|\hat{\varphi}^\xi(t) - \hat{\varphi}^0\|_{L^1} \leq \delta^*$$

además como  $V_\xi$  decrece a lo largo de la trayectoria, se tiene que

$$E_\xi(\varphi^\xi(t)) \leq V_\xi(\varphi^\xi(t), v^\xi(t)) \leq N C_0 + k e^{-\frac{C}{\xi}}$$

de esta forma de nuevo por el Lema 5.2.1, se tiene que

$$d(T_r[\varphi^\xi(\cdot, t)], \{z_j\}_{j=1, \dots, N}) < \frac{\alpha}{2},$$

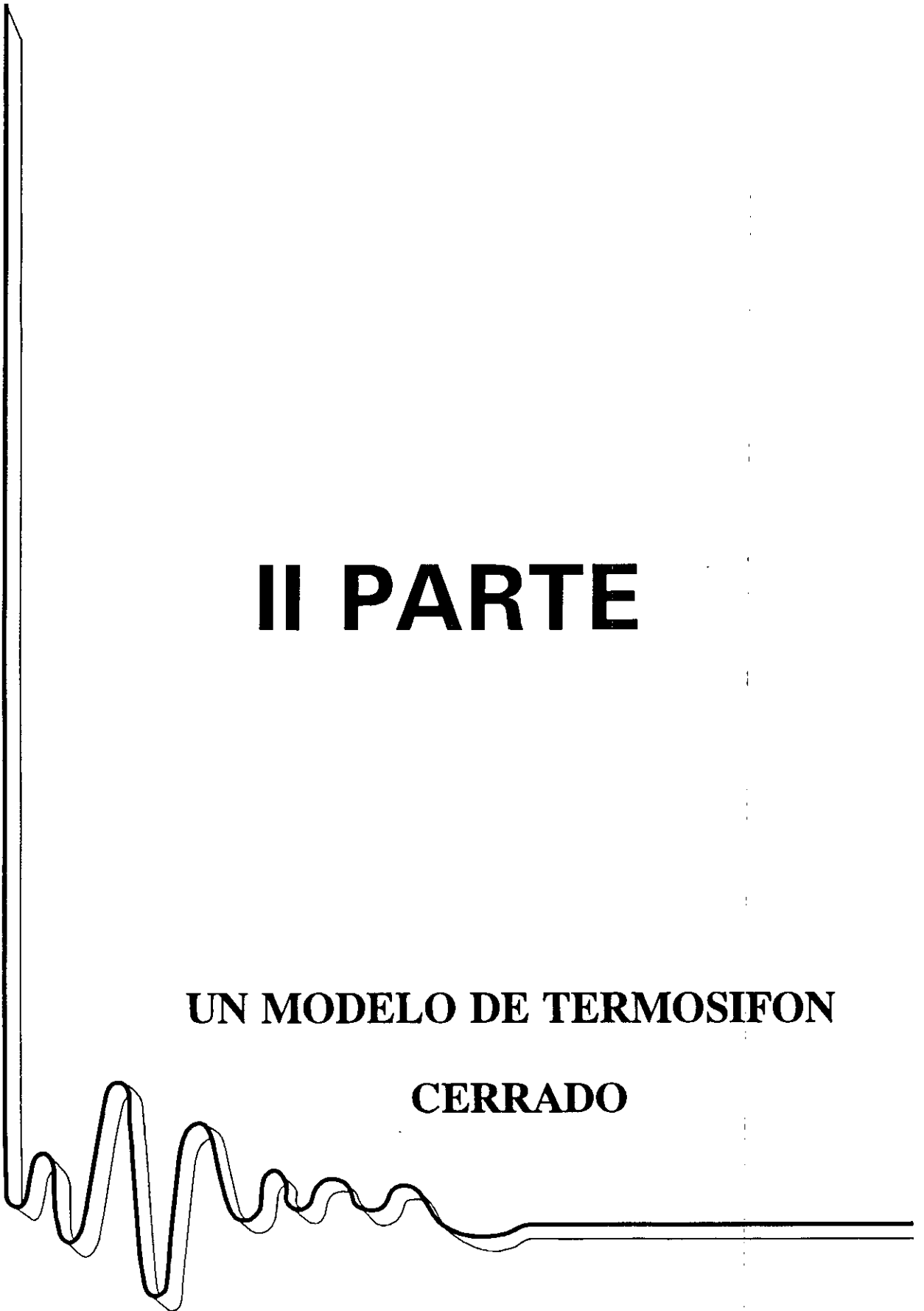
y aplicando ahora la desigualdad triangular se tiene, que para todo instante de tiempo  $0 \leq t \leq M e^{\frac{C}{\xi}}$

$$d(T_r[\varphi^\xi(\cdot, t)], T_r[\varphi_0^\xi(\cdot)]) < \alpha. \square$$

# **II PARTE**

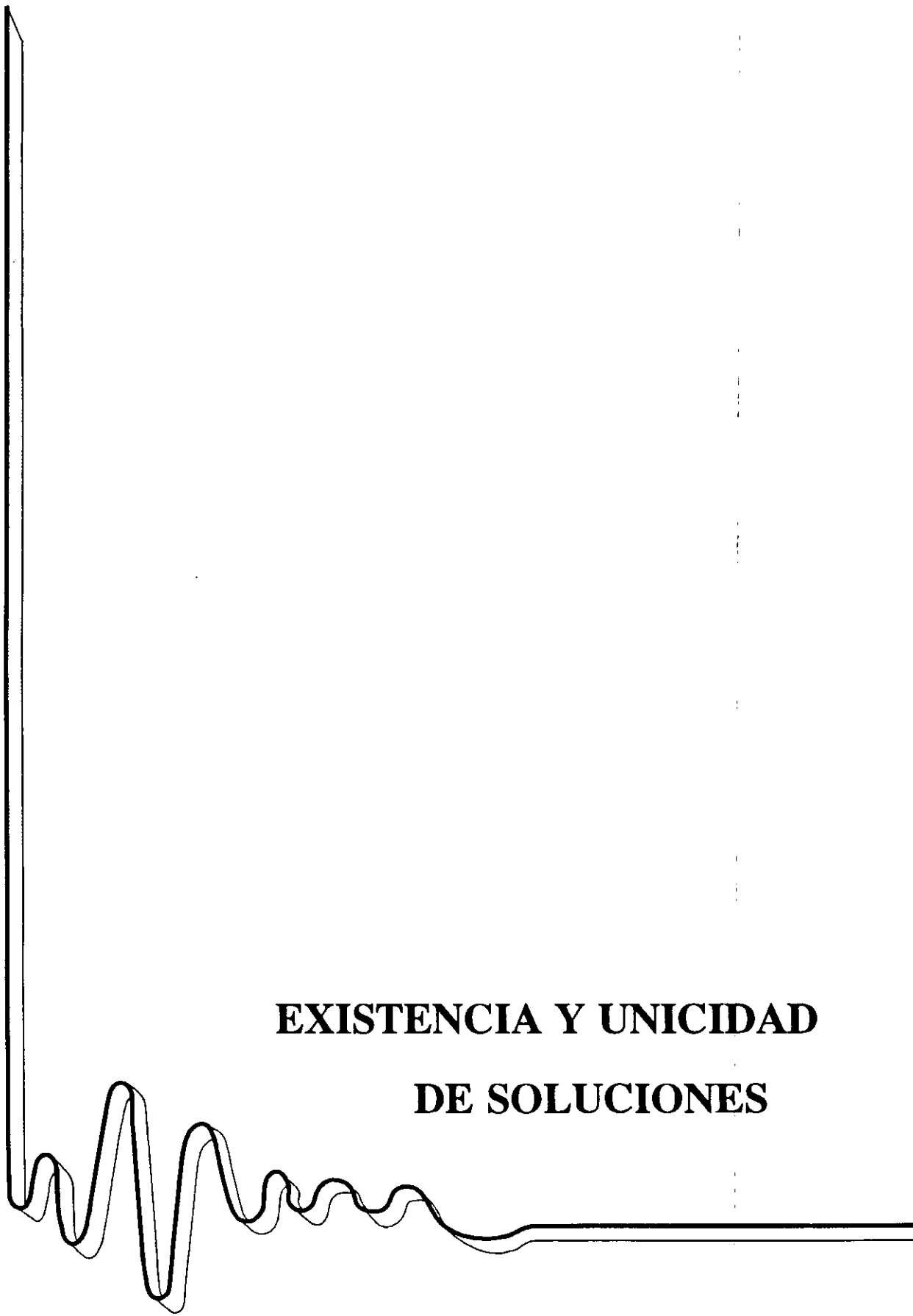
**UN MODELO DE TERMOSIFON**

**CERRADO**





**EXISTENCIA Y UNICIDAD  
DE SOLUCIONES**



# CAPITULO 1

## EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES

### 1.1 Preliminares

Consideramos el sistema (1.1.1) dado por

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + G(v)v = \oint (T - S) \cdot f, & v(0) = v_0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} = h(v)(T_a - T), & T(0, x) = T_0(x) \\ \frac{\partial S}{\partial t} + v \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{c}{\partial x^2} - b \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, & S(0, x) = S_0(x). \end{cases} \quad (1.1.1)$$

En este sistema  $x \in (0, 1)$  es la longitud de arco y  $\oint = \int_0^1 dx$ , representa la integración a lo largo de la curva cerrada, que representa "la silueta" del circuito. La función  $f$  está asociada a la variación de altura a lo largo del circuito, y será una función conocida, al igual que la función  $T_a$  que representa a la temperatura ambiente.

Las incógnitas  $v$ ,  $T$  y  $S$  representan la velocidad, temperatura y concentración del soluto, en el fluido.

Consideraremos  $G$  y  $h$ , funciones continuas, tales que  $G(v) \geq G_0 > 0$ , y  $h(v) \geq h_0 > 0$ , para  $G_0$  y  $h_0$  constantes positivas. Observamos que todas las funciones, son periódicas respecto de la variable espacial, de período uno.

Pretendemos probar la existencia de la solución del sistema (1.1.1) fijada una condición inicial en un espacio de fases  $\mathcal{Y}$ , es decir, dado  $(v_0, T_0, S_0) \in \mathcal{Y}$ . Para ello vamos a utilizar un argumento de punto fijo. Observemos que si  $v(t)$  es conocida, la segunda ecuación de (1.1.1) se puede integrar de forma explícita por características, obteniendo una función  $T^v(t, x)$ . Esto permite abordar las soluciones de (1.1.1) por el siguiente pro-

cedimiento. Construiremos  $J$ , un operador que actúa sobre el espacio de las funciones continuas en tiempo, con valores en un espacio producto  $\mathbb{R} \times Z$  a elegir adecuadamente, de forma que dada una función  $(v, S) \in C([0, \tau]; \mathbb{R} \times Z)$  vamos a definir una función  $J(v, S) \in C([0, \tau]; \mathbb{R} \times Z)$ . Probaremos que  $J$  es contractiva y que su punto fijo  $(v, S)$  es la solución del sistema parabólico semilineal dado por

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + G(v)v = f(T^v - S).f & , v(0) = v_0 \\ \frac{\partial S}{\partial t} + v \frac{\partial S}{\partial x} = c \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - b \frac{\partial^2 T^v}{\partial x^2} & , S(0, x) = S_0(x) \end{cases} \quad (1.1.2)$$

donde  $T^v$  representa la solución (en un sentido débil que especificaremos) de la segunda ecuación del sistema (1.1.1).

Para resolver la segunda ecuación supondremos que  $T_0, T_a \in X$ , donde  $X$  representa a un "espacio admisible" adecuado que definiremos más adelante y que  $f \in X'$ , el espacio dual de  $X$ . Con estas hipótesis y dada  $v \in C[0, \tau]$ , probaremos que existe una única  $T = T^v \in C([0, \tau], X)$  solución integral de la segunda ecuación de (1.1.1), que verificará la ecuación en c.t.p.  $(t, x)$ , dependiendo de la regularidad de  $T_0, T_a$ . Esta función  $T^v$  se obtiene integrando a lo largo de características la ecuación

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} = h(v)(T_a - T)$$

y viene dada por

$$T^v(t, x) = T_0(x - \int_0^t v) e^{-\int_0^t h(v)} + \int_0^t [h(v(r)) e^{-\int_r^t h(v)} T_a(x - \int_r^t v)] dr.$$

Veremos en primer lugar las propiedades de la función  $T^v$ . Después abordaremos la resolución del sistema (1.1.2) en  $(v, S)$ , utilizando el semigrupo generado por el operador sectorial  $A$  en  $\mathbb{R} \times Z$ , definido por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I) \end{pmatrix} \quad (1.1.3)$$

y la fórmula de variación de constantes correspondiente.

Para esto en primer lugar escribimos el sistema (1.1.2) como una ecuación de evolución en  $U = \begin{pmatrix} v \\ S \end{pmatrix}$ , de la forma siguiente:

$$U_t + AU = F(t, U), \text{ con } U(0) = U_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ S_0 \end{pmatrix} \quad (1.1.4)$$

donde  $A$  es el operador definido por (1.1.3) actuando sobre  $U(t, x) = \begin{pmatrix} v(t) \\ S(t, x) \end{pmatrix}$  y la no linealidad viene dada por la aplicación  $F$ , definida por

$$F(t, U) = \begin{pmatrix} F_1(t, U) \\ F_2(t, U) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G(v)v + \mathcal{f}(T^v(t) - S)f \\ -v \frac{\partial S}{\partial x} - b \frac{\partial^2}{\partial x^2} T^v(t, x) + cS(t, x) \end{pmatrix}. \quad (1.1.5)$$

De esta forma la solución del sistema (1.1.2) viene dada por la fórmula de variación de las constantes, es decir:

$$U(t) = e^{-At}U_0 + \int_0^t e^{-A(t-r)}F(r, U(r))dr \text{ con } U(t, x) = \begin{pmatrix} v(t) \\ S(t, x) \end{pmatrix} \in C([0, \tau], \mathbb{R} \times Z) \quad (1.1.6)$$

siendo  $Z$  un espacio adecuado que elegiremos a continuación. Observemos que a su vez esto es equivalente a:

$$v(t) = v_0 - \int_0^t G(v)v - \int_0^t \mathcal{f}(T - S).f \quad (1.1.7)$$

$$S(t, x) = e^{c(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I)}S_0(x) + \int_0^t e^{c(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I)(t-r)}[cS(r) - v(r)\frac{\partial S}{\partial x}(r) - b\frac{\partial^2 T^v}{\partial x^2}(r)]dr. \quad (1.1.8)$$

Por tanto definiendo

$$J(U(t)) = e^{-At}U_0 + \int_0^t e^{-A(t-r)}F(r, U(r))dr$$

buscamos un punto fijo de  $J$  en  $C([0, \tau]; \mathbb{R} \times Z)$ .

Observemos también que hemos escrito la ecuación semilineal para  $S$  sumando y restando  $cS$ , de forma que el operador  $c(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I)$  sea un operador positivo, ya que  $c(-\frac{\partial^2}{\partial x^2})$  con condiciones periódicas contiene a las funciones constantes en su núcleo, es decir no es positivo.

Vamos a ver algunos resultados previos a la demostración de la existencia y unicidad de soluciones del sistema (1.1.1) que nos ayudarán en la elección de los espacios  $X$  y  $Z$ , y por tanto en la determinación del espacio de fases  $\mathcal{Y}$ , que constituirá el marco funcional con el que vamos a trabajar. Siguiendo la notación de [51], tenemos la siguiente definición.

**Definición 1.1.1** *Llamamos espacio admisible  $X$  a todo espacio de Banach  $X$  de funciones 1-periódicas, verificando las siguientes propiedades:*

- i)  $\|g(\cdot + k)\|_X = \|g\|_X$ , para todo  $k \in \mathbb{R}$  y  $g \in X$ .
- ii) Fijada  $g \in X$ , la aplicación de  $\mathbb{R} \mapsto X$ , definida por  $k \mapsto g(\cdot + k) \in X$  es continua.



Ejemplos de espacios admisibles  $X$  son  $W_{per}^{m,p}(0,1)$ ,  $C_{per}^k(0,1)$  o  $C_{per}^{k,\alpha}(0,1)$  entre otros. Supondremos  $\Omega = (0,1)$  y en lo sucesivo suprimiremos la referencia a  $\Omega$  al hablar de los espacios funcionales.

**Lema 1.1.1** *Sea  $\tau > 0$ , fijada  $v \in C[0, \tau]$  consideramos  $T_0, T_a \in X$  siendo  $X$  un espacio admisible, entonces la función  $T^v$  definida por*

$$T^v(t, x) = T_0(x - \int_0^t v) e^{-\int_0^t h(v)} + \int_0^t [h(v(r)) e^{-\int_r^t h(v)} T_a(x - \int_r^t v)] dr \quad (1.1.9)$$

es solución integral de:

$$\frac{\partial T^v}{\partial t} + v \frac{\partial T^v}{\partial x} = h(v)(T_a - T^v) \text{ con } T^v(0, x) = T_0(x) \quad (1.1.10)$$

y verifica las siguientes propiedades:

- i)  $T^v \in C([0, \tau], X)$  y verifica la ecuación (1.1.10) en c.t.p.  $x \in (0,1), [0, \tau]$  siempre que  $T_0$  y  $T_a$  sean diferenciables.
- ii)  $\|T^v(t)\|_X \leq \max\{\|T_0\|_X, \|T_a\|_X\}$  para todo  $t \in [0, \tau]$ .
- iii) Supongamos que las traslaciones de  $T_a$  y  $T_0$  son Lipschitz en  $X$ , es decir existen constantes positivas  $c_d > 0$  con  $d = a$  y  $d = 0$  tales que:

$$\|T_d(\cdot + k) - T_d(\cdot)\|_X \leq c_d |k| \text{ para todo } k \in \mathbb{R}.$$

Entonces la función  $T^v$  definida por (1.1.9) verifica:

$$\|T^v(t+k) - T^v(t)\|_X \leq C|k|$$

con  $0 < k < \tau$ ,  $t \in [0, \tau - k]$  y  $C = C(\|v\|_\infty, \|T_a\|_X)$  constante positiva, independiente de  $t$ . En otras palabras  $T^v$  es Lipschitz en  $t$  con valores en  $X$ .

iv) Supongamos que  $X \hookrightarrow L_{per}^2$  y que las traslaciones de  $T_0$  y  $T_a$  sean Lipschitz en  $L_{per}^2$ , lo cual equivale a que  $T_0, T_a \in H_{per}^1$ . Si además  $v_i \in C[0, \tau]$  con  $i \in \{1, 2\}$ , entonces

$$\sup_{r \in [0, \tau]} \|T^{v_1}(r) - T^{v_2}(r)\|_{L_{per}^2} \leq L\tau \|v_1 - v_2\|_\infty$$

para cierta  $L > 0$ , donde

$$\|v_1 - v_2\|_\infty = \sup_{t \in [0, \tau]} |v_1(t) - v_2(t)|.$$

v) Si  $T_0, T_a \in H_{per}^2$ , dadas  $v_i \in C[0, \tau]$  con  $i \in \{1, 2\}$ , se tiene que

$$\sup_{r \in [0, \tau]} \left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} T^{v_1}(r) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} T^{v_2}(r) \right\|_{H_{per}^{-1}} \leq M\tau \|v_1 - v_2\|_\infty$$

para cierta  $M > 0$ , con  $H_{per}^{-1} = (H_{per}^1)'$ .

**Demostración:**

Las afirmaciones i), ii) y iv) son consecuencia de los resultados obtenidos en [51]. Pasamos pues a ver la demostración del apartado iii), a lo largo de la cual notaremos por  $\|\cdot\|$  la norma en el espacio admisible  $X$ .

Vamos a probar que la función  $T^v$ , que notaremos por simplicidad por  $T$ ,

$$T(t, x) = T_0(x - \int_0^t v) e^{-\int_0^t h(v)} + \int_0^t [h(v) e^{-\int_r^t h(v)} T_a(x - \int_r^t v)] dr$$

es Lipschitz en la variable  $t$ . En efecto, si suponemos  $k > 0$  y  $t \leq \tau - k$  se tiene

$$\begin{aligned} \|T(t+k) - T(t)\| &\leq \|T_0(x - \int_0^{t+k} v) e^{-\int_0^{t+k} h(v)} - T_0(x - \int_0^t v) e^{-\int_0^t h(v)}\| + \\ &\| \int_0^{t+k} h(v) e^{-\int_r^{t+k} h(v)} T_a(x - \int_s^{t+k} v) - \int_0^t h(v) e^{-\int_r^t h(v)} T_a(x - \int_s^t v) \| \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

Llamando  $I_1$  e  $I_2$  a los dos sumandos de la expresión anterior, para el primer sumando se tiene que:

$$\begin{aligned} I_1 &= \|T_0(x - \int_0^{t+k} v) e^{-\int_0^{t+k} h(v)} - T_0(x - \int_0^t v) e^{-\int_0^t h(v)}\| \leq \\ &\|T_0(x - \int_0^{t+k} v) e^{-\int_0^t h(v)} - T_0(x - \int_0^t v) e^{-\int_0^t h(v)}\| + \\ &+ \|T_0(x - \int_0^{t+k} v) e^{-\int_0^{t+k} h(v)} - T_0(x - \int_0^{t+k} v) e^{-\int_0^t h(v)}\| \leq \\ &\leq e^{-\int_0^t h(v)} \|T_0(x - \int_0^{t+k} v) - T_0(x - \int_0^t v)\| + \|T_0(x - \int_0^{t+k} v)\| |e^{-\int_0^{t+k} h(v)} - e^{-\int_0^t h(v)}| \leq \\ &\leq c_0 \int_t^{t+k} |v| + \|T_0\| \int_t^{t+k} |h(v)| \leq (c_0 \|v\|_\infty + \|T_0\| \|h(v)\|_\infty) |k| \end{aligned}$$

ya que  $e^{-\int_0^t h(v)} \leq 1$ ,  $|e^{-\int_0^{t+k} h(v)} - e^{-\int_0^t h(v)}| \leq \int_t^{t+k} |h(v)|$ .

Para el segundo sumando de (1.1.11), tenemos

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \| \int_0^t [h(v) e^{-\int_r^{t+k} h(v)} T_a(x - \int_s^{t+k} v) - h(v) e^{-\int_r^t h(v)} T_a(x - \int_s^t v)] dr \| + \\ &+ \| \int_t^{t+k} [h(v) e^{-\int_r^{t+k} h(v)} T_a(x - \int_s^{t+k} v)] dr \|. \end{aligned}$$

De aquí obtenemos

$$\| \int_t^{t+k} [h(v) e^{-\int_r^{t+k} h(v)} T_a(x - \int_s^{t+k} v)] dr \| \leq \|T_a\| \|h(v)\|_\infty |k|$$

ya que  $e^{-\int_r^{t+k} h(v)} < 1$ , por ser  $h(v) > 0$  y además:

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t h(v) e^{-\int_r^{t+k} h(v)} T_a(x - \int_s^{t+k} v) - h(v) e^{-\int_r^t h(v)} T_a(x - \int_s^t v) \right\| \leq \\ & \leq \int_0^t h(v) e^{-\int_r^t h(v)} \|T_a(x - \int_s^{t+k} v) - T_a(x - \int_s^t v)\| + \\ & \quad + \|T_a\| \int_0^t |h(v)| \cdot |e^{-\int_r^{t+k} h(v)} - e^{-\int_r^t h(v)}| \leq \\ & \leq \|h(v)\|_{\infty} c_a \|v\|_{\infty} |k| \tau + \|T_a\| \|h(v)\|_{\infty}^2 \tau |k| \end{aligned}$$

lo que termina la demostración.

v) La demostración de este resultado es consecuencia del apartado iv) y del siguiente hecho. Si derivamos respecto de  $x$  la ecuación de (1.1.10) que describe la evolución de  $T$ , observamos que  $\frac{\partial T}{\partial x}$  verifica la misma ecuación (1.1.10) con  $\frac{\partial T_a}{\partial x}$  en vez de  $T_a$  y con dato inicial  $\frac{\partial T_0}{\partial x}$ . Por otra parte si  $T_0, T_a \in H_{per}^2$ , entonces  $\frac{\partial T_0}{\partial x}, \frac{\partial T_a}{\partial x} \in H_{per}^1$ , y por tanto sus traslaciones son Lipschitz en  $L_{per}^2$ . De esta forma de nuevo por el apartado iv), se tiene que

$$\sup_{r \in [0, \tau]} \left\| \frac{\partial T^{v_1}}{\partial x}(r) - \frac{\partial T^{v_2}}{\partial x}(r) \right\|_{L_{per}^2} \leq L \tau \|v_1 - v_2\|_{\infty}.$$

Usando ahora que

$$\left\| \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right\|_{H_{per}^{-1}} \leq d_1 \|T\|_{H_{per}^1}$$

con cierta constante positiva,  $d_1$ , se sigue el resultado.  $\square$

## 1.2 Existencia y unicidad local de soluciones

A continuación vamos a probar un resultado de existencia y unicidad de soluciones para (1.1.1), con  $T_0, T_a$  pertenecientes al espacio admisible  $X = H_{per}^2$  y  $S_0 \in L_{per}^2$ .

Para justificar esta elección observamos que por los resultados anteriores si  $T_0, T_a \in H_{per}^2$ , entonces la aplicación  $t \mapsto \frac{\partial^2 T^v}{\partial x^2}(t, x) \in L_{per}^2$  es continua. Sin embargo sólo sabemos que la correspondencia  $v \mapsto \frac{\partial^2 T^v}{\partial x^2}$  es Lipschitz en  $H_{per}^{-1}$ , donde  $H_{per}^{-1} = (H_{per}^1)'$ , y como necesitamos Lipschitzianidad de  $J$ , entonces la segunda ecuación de (1.1.2) ha de ser considerada en  $H_{per}^{-1}$ . Por otra parte se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial x} : L_{per}^2 \mapsto H_{per}^{-1}$$

y en vista del término  $v \frac{\partial S}{\partial x}$  en la segunda ecuación de (1.1.2), bastaría con que  $S(t)$  esté en  $L^2_{per}$  y por tanto podremos tomar  $S_0 \in L^2_{per}$ . Es decir, trabajaremos en el espacio de fases  $\mathcal{Y} = \mathbb{R} \times H^2_{per} \times L^2_{per}$ .

Pasamos a continuación a probar la existencia local de soluciones para el sistema (1.1.1) en el espacio de fases  $\mathcal{Y}$ .

**Teorema 1.2.1** *Supongamos que  $H(r) = rG(r)$  es localmente Lipschitz,  $T_a \in H^2_{per}$  y  $f \in L^2_{per}$ . Entonces dado  $(v_0, T_0, S_0) \in \mathcal{Y} = \mathbb{R} \times H^2_{per} \times L^2_{per}$ , existe una única solución local  $(v, T, S) \in C([0, \tau], \mathcal{Y})$ , de (1.1.1).*

**Demostración:**

Queremos usar un argumento de punto fijo, para lo cual consideramos el espacio

$$W = \{(v, S) \in C([0, \tau]; \mathbb{R} \times L^2_{per}), v(0) = v_0, S(0) = S_0 \text{ tal que}$$

$$|v(t) - v_0| \leq \gamma_1, \|S(t) - S_0\|_{L^2_{per}} \leq \gamma_2 \text{ para todo } t \in [0, \tau]\}$$

siendo  $\tau, \gamma_i, i \in \{1, 2\}$ , constantes positivas fijas a elegir. Entonces  $(W, \|\cdot\|_\infty)$  es un espacio de Banach con la norma

$$\|(v, S)\|_\infty = \sup_{t \in [0, \tau]} \|(v(t), S(t))\|_{\mathbb{R} \times L^2_{per}}.$$

Sea  $U = (v, S) \in W$  y  $J(U(t)) = (w(t), R(t, x))$  la solución del sistema

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} &= -G(v)v + \oint (T^v - S) \cdot f, & w(0) = v_0 \\ \frac{\partial R}{\partial t} - c \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + cR &= cS - v \frac{\partial S}{\partial x} - b \frac{\partial^2 T^v}{\partial x^2}, & R(0, x) = S_0(x) \end{cases}$$

es decir

$$J(U(t)) = e^{-At}U_0 + \int_0^t e^{-A(t-r)}F(r, U(r))dr \tag{1.2.1}$$

donde  $A$  es el operador definido por (1.1.3), la no linealidad  $F$  viene dada por (1.1.5), es decir

$$F(t, U) = \begin{pmatrix} F_1(t, U) \\ F_2(t, U) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G(v)v + \oint (T^v(t) - S(t))f \\ -v \frac{\partial S}{\partial x} + b \frac{\partial^2 T^v}{\partial x^2}(t) + cS(t, x) \end{pmatrix}$$

y  $T^v$  viene dada por (1.1.9).

Observamos que la dependencia del tiempo de la no linealidad  $F$ , se debe a la función  $T^v$ . Observamos también que

$$J(v(t), S(t, x)) = \begin{pmatrix} J_1(U(t)) \\ J_2(U(t)) \end{pmatrix}$$

con

$$J_1(U(t)) = v_0 - \int_0^t G(v)vd\bar{r} + \int_0^t |\phi(T^v(r) - S(r))f|dr \quad (1.2.2)$$

$$J_2(U(t)) = e^{-c(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I)t}S_0 + \int_0^t e^{-c(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I)(t-r)}[cS(r) - v(r)\frac{\partial S}{\partial x} - b\frac{\partial^2}{\partial x^2}T^v(r)]dr. \quad (1.2.3)$$

Dado que  $T_a, T_0 \in H_{per}^2$  por el Lema 1.1.1 la función dada por integración a lo largo de características de la ecuación (1.1.10),  $T^v(t, x)$  descrita en (1.1.9), verifica  $T^v \in C([0, \tau], H_{per}^2)$  y  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}T^v \in C([0, \tau], L_{per}^2)$ . De esta forma por la continuidad de  $G$  tenemos que  $J_1(U(t)) \in C([0, \tau]; \mathbb{R})$ . Además  $e^{-c(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I)t}S_0 \in C([0, \tau]; L_{per}^2)$  y  $cS(t) - v(t)\frac{\partial S}{\partial x} - b\frac{\partial^2}{\partial x^2}T^v(t) \in L^\infty(0, \tau, H_{per}^{-1})$ , por lo que aplicando el Lema 0.2.1 de regularidad del apéndice [50], [54], se tiene que:

$$\int_0^t e^{-c(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I)(t-r)}[cS(r) - v(r)\frac{\partial S}{\partial x} - b\frac{\partial^2}{\partial x^2}T^v(r)]dr \in C([0, \tau], L_{per}^2),$$

por tanto  $J(U(t)) \in C([0, \tau]; \mathbb{R} \times L_{per}^2)$ .

Vamos a probar que existen  $\tau > 0$ ,  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  suficientemente pequeños tales que:

$$J : (W, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (W, \|\cdot\|_\infty) \text{ es una contracción.}$$

i) En primer lugar vamos a ver que  $J$  está bien definida, es decir  $J(W) \subset W$ .

Sea  $(v, S) \in W$ , entonces

$$\|J(v, S)(t) - (v_0, S_0)\|_{\mathbb{R} \times L_{per}^2} = |J_1(v, S)(t) - v_0| + \|J_2(v, S)(t) - S_0\|_{L_{per}^2}$$

Notando por  $\|\cdot\|$  la norma en  $\|\cdot\|_{L_{per}^2}$ , se tiene

$$|J_1(v, S)(t) - v_0| \leq \int_0^t |H(v(r))|dr + \int_0^t \|T^v(r) - S(r)\| \|f\|dr.$$

La función  $H(v(\cdot))$  está acotada en  $[0, \tau]$ , por ser continua, y además la cota es independientemente de  $v$ , ya que  $|v(t)| \leq \gamma_1 + \|v_0\|$  y  $\|S(t)\| \leq \|S(t) - S_0\| + \|S_0\| \leq \gamma_2 + \|S_0\|$  para todo  $t \in [0, \tau]$  y por el Lema 1.1.1,  $\|T^v\| \leq \max\{\|T_0\|, \|T_a\|\}$ . De esta forma, existe  $\tau$  independiente de  $(v, S)$ , suficientemente pequeño tal que  $|J_1(v, S)(t) - v_0| \leq \gamma_1$  para todo  $t \in [0, \tau]$ .

Veamos ahora que es posible tomar  $\tau$  suficientemente pequeño tal que, para todo  $t \in [0, \tau]$

$$\|J_2(v, S)(t) - S_0\| \leq \gamma_2.$$

En efecto,

$$\|J_2(v, S)(t) - S_0\| \leq \|(e^{-c(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I)t} - I)S_0\| + \int_0^t \|e^{-c(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I)(t-r)}\|_{\mathcal{L}(H_{per}^{-1}, L_{per}^2)} \|F_2(r, U(r))\|_{H_{per}^{-1}} dr.$$

Ahora por el Lema 0.1.1 del apéndice, se tiene que

$$\|e^{-c(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I)(t-r)}\|_{\mathcal{L}(H_{per}^{-1}, L_{per}^2)} \leq k_1 \frac{e^{-\delta(t-r)}}{(t-r)^{\frac{1}{2}}} \quad (1.2.4)$$

con  $k_1, \delta$  constantes positivas, y por lo tanto

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^t \|e^{-[c(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I)](t-r)}\|_{\mathcal{L}(H_{per}^{-1}, L_{per}^2)} \|F_2(r, U(r))\|_{H_{per}^{-1}} dr \leq \\ &\leq k_1 \int_0^t \frac{e^{-\delta(t-r)}}{(t-r)^{\frac{1}{2}}} \|F_2(r, U(r))\|_{H_{per}^{-1}} dr. \end{aligned}$$

Supongamos momentáneamente que existe una constante positiva  $k_2$  tal que

$$\|F_2(r, U(r))\|_{H_{per}^{-1}} \leq k_2 \text{ para todo } U = (v, S) \in W, \text{ y para todo } r \in [0, \tau] \quad (1.2.5)$$

entonces, tendríamos que

$$I_0 \leq k_1 k_2 \int_0^t \frac{dr}{(t-r)^{\frac{1}{2}}}$$

y teniendo en cuenta que las expresiones:

$$\|(e^{-[c(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I)t} - I]S_0)\| \text{ y } \int_0^t \frac{dr}{(t-r)^{\frac{1}{2}}}$$

tienden a cero cuando  $t \rightarrow 0$ , fijada  $\gamma_2 > 0$ , tendríamos probado la existencia de  $\tau > 0$  suficientemente pequeño tal que  $\sup_{t \in [0, \tau]} \|J_2(v, S)(t) - S_0\| \leq \gamma_2$ , y concluiríamos que  $J(W) \subset W$ .

Por tanto si probamos (1.2.5) habremos terminado. En efecto:

$$\|F_2(r, U(r))\|_{H_{per}^{-1}} \leq c\|S(r)\|_{H_{per}^{-1}} + \|v(r)\| \left\| \frac{\partial S(r)}{\partial x} \right\|_{H_{per}^{-1}} + b \left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} T^v(r) \right\|_{H_{per}^{-1}}.$$

Por tanto teniendo en cuenta el Lema 1.1.1 y la existencia de  $k_3 > 0$ , con la propiedad  $\left\| \frac{\partial S}{\partial x} \right\|_{H_{per}^{-1}} \leq k_3 \|S\|_{L_{per}^2}$ ,  $\|S\|_{H_{per}^{-1}} \leq k_3 \|S\|_{L_{per}^2}$  para todo  $S \in H_{per}^{-1}$  y

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} T^v \right\|_{H_{per}^{-1}} \leq k_3 \left\| \frac{\partial}{\partial x} T^v \right\|_{L_{per}^2} \leq \max\{\|T_0\|_{H_{per}^1}, \|T_a\|_{H_{per}^1}\},$$

concluimos (1.2.5).

ii) Probaremos ahora que  $J$  es una contracción en  $W$ .

En efecto, sean  $U_i = (v_i, S_i) \in W$  para  $i \in \{1, 2\}$ , entonces para todo  $t \in [0, \tau]$

$$\|J(U_1)(t) - J(U_2)(t)\|_{B_X \times L_{per}^2} = |J_1(U_1)(t) - J_1(U_2)(t)| + \|J_2(U_1)(t) - J_2(U_2)(t)\|_{L_{per}^2}.$$

Teniendo en cuenta la definición de  $J_1$ . (1.2.2), es decir

$$J_1(U_i(t)) = v_0 - \int_0^t G(v_i)v_i dr + \int_0^t [\phi(T^{v_i}(r) - S_i(r))]f dr$$

se tiene que

$$|J_1(U_1)(t) - J_1(U_2)(t)| \leq \int_0^t |H(v_1) - H(v_2)| dr + \int_0^t [\|T^{v_1}(r) - T^{v_2}(r)\| + \|S_1(r) - S_2(r)\|] \|f\| dr$$

Ahora por el Lema 1.1.1, tenemos para todo  $t \in [0, \tau]$

$$\|T^{v_1}(t) - T^{v_2}(t)\|_{L^2_{per}} \leq L\tau \|v_1 - v_2\|_{\infty}$$

con  $L$  constante positiva. De esta forma teniendo en cuenta la Lipschitzianidad local de  $H$ , se obtiene una constante positiva  $L_1$  tal que para todo  $t \in [0, \tau]$

$$|J_1(U_1)(t) - J_1(U_2)(t)| \leq L_1\tau (\|v_1 - v_2\|_{\infty} + \|S_1 - S_2\|_{\infty}). \quad (1.2.6)$$

Por la definición de  $J_2$ , (1.2.3),

$$J_2(U_i(t)) = e^{-c(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + I)t} S_0 + \int_0^t e^{-c(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I)(t-r)} F_2(r, U_i(r)) dr$$

con  $F_2(r, U_i(r)) = cS_i(r) - v_i(r)\frac{\partial S_i}{\partial x}(r) - b\frac{\partial^2}{\partial x^2} T^{v_i}(r)$  y tenemos que para todo  $t \in [0, \tau]$

$$\|J_2(U_1)(t) - J_2(U_2)(t)\| \leq \int_0^t \|e^{-c(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I)(t-r)}\|_{\mathcal{L}(H_{per}^{-1}, L^2_{per})} \|F_2(r, U_1(r)) - F_2(r, U_2(r))\|_{H_{per}^{-1}} dr. \quad (1.2.7)$$

Además

$$\begin{aligned} & \|F_2(s, U_1(s)) - F_2(s, U_2(s))\|_{H_{per}^{-1}} \leq c\|S_1(r) - S_2(r)\|_{H_{per}^{-1}} + \\ & + \|v_1(r)\frac{\partial S_1}{\partial x}(r) - v_2(r)\frac{\partial S_2}{\partial x}(r)\|_{H_{per}^{-1}} + b\|\frac{\partial^2}{\partial x^2} T^{v_1}(r) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} T^{v_2}(r)\|_{H_{per}^{-1}}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta ahora que

$$\begin{aligned} & \frac{\|v_1(r)\frac{\partial S_1}{\partial x} - v_2(r)\frac{\partial S_2}{\partial x}\|_{H_{per}^{-1}}}{\|v_1(r) - v_2(r)\|_{\infty}} \leq \\ & \leq \|v_1(r) - v_2(r)\| \|S_2(r)\|_{H_{per}^{-1}} + \|v_2(r)\| \|S_1(r) - S_2(r)\|_{H_{per}^{-1}} \end{aligned}$$

y que  $\|S\|_{H_{per}^{-1}} \leq k_3\|S\|_{L^2_{per}}$ . Aplicando el punto vi) del Lema 1.1.1, se deduce la existencia de una constante positiva  $k_4 = k_4(\gamma_1, \gamma_2)$  tal que

$$\|F_2(s, U_1(s)) - F_2(s, U_2(s))\|_{H_{per}^{-1}} \leq k_4\|U_1 - U_2\|_{\infty}.$$

De esta forma, llevando esto a (1.2.7) y aplicando (1.2.4), se tiene que

$$\|J_2(U_1)(t) - J_2(U_2)(t)\|_{H_{per}^{-1}} \leq L_2 \|U_1 - U_2\|_\infty \int_0^t \frac{e^{-\delta(t-r)}}{(t-r)^{\frac{1}{2}}} dr \quad (1.2.8)$$

para todo  $t \in [0, \tau]$ . Por (1.2.6) y (1.2.8) es posible elegir  $\tau$  suficientemente pequeño, de forma que  $J$  sea una contracción.

Sea  $(v, S) \in C([0, \tau]; \mathbb{R} \times L_{per}^2)$  el punto fijo de  $J$ . Entonces  $T = T^v$  definida por (1.1.9) verifica la segunda ecuación del sistema (1.1.1), y  $T \in C([0, \tau], H_{per}^2)$ . La función  $(v, S)$  verifica la fórmula de variación de las constantes (1.1.6) y es continua con valores en el espacio  $\mathbb{R} \times L_{per}^2$ , luego  $(v, S)$  representa la solución del sistema (1.1.2) en  $\mathbb{R} \times L_{per}^2$ . De esta forma, se tiene  $(v, S, T) \in \mathcal{Y}$  solución del sistema (1.1.1), en  $[0, \tau]$ .  $\square$

A continuación vamos a ver un resultado de regularidad para la solución local del sistema (1.1.1), dada por el Teorema 1.2.1.

**Corolario 1.2.1** *Bajo las hipótesis del Teorema 1.2.1, si  $(v, T, S)$  es la solución del sistema (1.1.1) en  $[0, \tau]$ , se tiene que:*

$$v \in C^1(0, \tau), T \in C([0, \tau], H_{per}^2) \cap C^1((0, \tau); H_{per}^1)$$

$$S \in C([0, \tau]; L_{per}^2) \cap C((0, \tau); H_{per}^2) \text{ y } S_t \in C((0, \tau); H_{per}^{1-\epsilon})$$

para todo  $\epsilon > 0$ . Además que si  $h \in C^1$ , entonces  $T \in C^2((0, \tau); L_{per}^2)$ .

En particular  $(v, T, S)$  verifican las ecuaciones del sistema (1.1.1) en casi todo punto.

**Demostración:**

La regularidad de  $v$  se obtiene como consecuencia de (1.1.7). En cuanto a la función  $T$ , la primera afirmación sobre su continuidad está recogida en el Lema 1.1.1, y la continuidad de su derivada temporal, como una función de  $H_{per}^1$  se obtiene a partir de la expresión (1.1.10) para  $T$ , esto es

$$\frac{\partial T^v}{\partial t} = -v \frac{\partial T^v}{\partial x} + h(v)(T_a - T^v)$$

de donde observamos que además que si  $h \in C^1$ , entonces  $T \in C^2((0, \tau); L_{per}^2)$ .

A continuación vamos a ver la regularidad de  $S$ . Para ello consideramos la tercera ecuación del sistema (1.1.1), como una ecuación de evolución en  $S$  de la forma siguiente:

$$\frac{\partial S}{\partial t} - c \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = F_2(t, S), S(0, x) = S_0(x) \quad (1.2.9)$$

donde la no linealidad  $F_2(t, S) = b \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - v \frac{\partial S}{\partial x}$ , es una función definida de  $[0, \tau] \times L_{per}^2$  en  $H_{per}^{-1}$ . Además  $T \in C([0, \tau], H_{per}^2)$  y es Lipschitz en  $t$  con valores en  $H_{per}^1$ , por lo que  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$



es Lipschitz en  $t$  con valores en  $H_{per}^{-1}$ . Como consecuencia  $F_2$  es Lipschitz en la variable temporal y localmente Lipschitz en  $S$ . Por tanto por un resultado de regularidad recogido en el Teorema 0.2.1 del apéndice, se tiene que:

$$S \in C((0, \tau); H_{per}^1) \text{ y } S_t \in C((0, \tau); H_{per}^{1-\epsilon}) \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Escribimos ahora la ecuación para  $S$  (1.2.9), como

$$-c \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = F_2(t, S) - \frac{\partial S}{\partial t},$$

de esta forma teniendo en cuenta que la regularidad anterior de  $S$  y la de  $T$  implican ahora que  $F_2(t, S) - \frac{\partial S}{\partial t} \in C((0, \tau), L_{per}^2)$ , por un conocido resultado de regularidad elíptica se tiene que  $S \in C((0, \tau); H_{per}^2)$  lo que concluye la demostración.  $\square$

### 1.3 Existencia global de soluciones

A continuación vamos a probar que la solución dada por el Teorema 1.2.1, está definida globalmente.

**Teorema 1.3.1** *Supongamos que  $H(r) = rG(r)$  es localmente Lipschitz.  $T_a \in H_{per}^2$  y  $f \in L_{per}^2$ . Entonces dado  $(v_0, T_0, S_0) \in \mathcal{Y} = \mathbb{R} \times H_{per}^2 \times L_{per}^2$ , la solución del sistema (1.1.1) dada por el Teorema 1.2.1 está definida globalmente, es decir  $(v, T, S) \in C([0, \infty), \mathcal{Y})$ , y verifica la regularidad del Corolario 1.2.1 en  $(0, \infty)$ .*

Además la aplicación:

$$S^*(t)(v_0, T_0, S_0) = (v(t), T(t), S(t)), t \geq 0$$

define un semigrupo en  $\mathcal{Y}$  de clase  $C^0$ .

#### Demostración:

Consideramos la solución local del sistema (1.1.1) dada por el Teorema 1.2.1, y por resultados estándar de prolongación, suponemos prolongada la solución hasta un intervalo maximal de definición  $[0, \tau)$ , con  $(v, T, S) \in C([0, \tau); \mathcal{Y})$ . Queremos probar que  $\tau = \infty$ , es decir que la solución está globalmente definida y lo haremos en varias etapas.

En una primera etapa, vamos a probar que la norma de la solución,  $\|(v, T, S)\|_{\mathbb{R} \times H_{per}^2 \times L_{per}^2}$  no explota en tiempo finito. Para ello teniendo en cuenta el Lema 1.1.1 según el cual  $\|T(t)\|_X \leq \max\{\|T_0\|_X, \|T_a\|_X\} = M$ , vamos a ver en primer lugar que  $\|S(t)\|$  no explota y como consecuencia probaremos a continuación que  $\{v(t)\}$  tampoco explota en tiempo finito.

Pasamos a ver en primer lugar que  $\|S(t)\|$  no explota. En efecto,  $S$  verifica la ecuación:

$$\frac{\partial S}{\partial t} - c \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = -v \frac{\partial S}{\partial x} - b \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad S(0, x) = S_0(x) \quad (1.3.1)$$

en  $L^2_{per}$ . Además por el Corolario 1.2.1 se tiene que  $\frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}, \frac{\partial S}{\partial x}$  y  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \in L^2_{per}$ . Por tanto podemos multiplicar por  $S$  en  $L^2_{per}$  la ecuación (1.3.1) e integrando por partes llegamos a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|S\|^2 + (c - \epsilon) \left\| \frac{\partial S}{\partial x} \right\|^2 \leq C_\epsilon \left\| \frac{\partial T}{\partial x} \right\|^2$$

para todo  $\epsilon > 0$  con  $C_\epsilon = \frac{1}{4\epsilon}$ , ya que por la desigualdad de Young

$$-b \oint \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} S = b \oint \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} \leq \epsilon \left\| \frac{\partial S}{\partial x} \right\|^2 + C_\epsilon \left\| \frac{\partial T}{\partial x} \right\|^2$$

y además

$$v \oint S \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{2} v \oint \frac{\partial(S^2)}{\partial x} = 0$$

por ser  $S$  periódica.

De esta forma tomando  $\epsilon = \frac{\epsilon_0}{2}$ , y teniendo en cuenta que  $\left\| \frac{\partial T}{\partial x} \right\| \leq \max\left\{ \left\| \frac{\partial T_0}{\partial x} \right\|, \left\| \frac{\partial T_\infty}{\partial x} \right\| \right\}$  obtenemos

$$\frac{d}{dt} \|S\|^2 + c \left\| \frac{\partial S}{\partial x} \right\|^2 \leq k_1 \quad (1.3.2)$$

con  $k_1 > 0$ .

Integrando ahora la ecuación (1.3.1) respecto de  $x$  se tiene que:

$$\oint \frac{\partial S}{\partial t} = -v \oint \frac{\partial S}{\partial x} - b \oint \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + c \oint \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 0$$

por ser  $T$  y  $S$  funciones periódicas. Por lo tanto  $\frac{d}{dt} [\oint S dx] = 0$  y  $\oint S$  es constante respecto de  $t$ , es decir  $\oint S = \oint S_0 = m_0$ , de donde, aplicando la desigualdad de Poincaré

$$\left\| \frac{\partial S}{\partial x} \right\|^2 \geq \mu_1 \|S\|^2 - \mu_1 m_0^2 \quad \text{con} \quad \mu_1 = \min \frac{\left\| \frac{\partial S}{\partial x} \right\|^2}{\|S - \oint S\|^2} > 0. \quad (1.3.3)$$

Llevando esto a (1.3.2), se obtiene la siguiente inecuación para  $\|S\|^2$ :

$$\frac{d}{dt} \|S\|^2 + c\mu_1 \|S\|^2 \leq k_1 + \mu_1 m_0^2$$

de donde obtenemos que  $\|S\|^2$  no explota en tiempo finito.

Veamos ahora que  $|v(t)|$  tampoco explota en tiempo finito. Teniendo en cuenta la primera ecuación de (1.1.1) observamos que  $v(t)$  verifica

$$v(t) = v_0 e^{-\int_0^t G(v)} + \int_0^t \left| \oint (T(r) - S(r)) f dx \right| e^{-\int_r^t G(v)} dr.$$

Como  $e^{-\int_r^t G(v)} \leq 1$ , para todo  $r \leq t < \tau$ , por el Lema 1.1.1  $\|T\| \leq \max\{\|T_0\|, \|T_a\|\}$ , y  $\|S\|$  está acotada en tiempo finito, entonces  $|v(t)|$ , también está acotada en tiempo finito.

A continuación vamos a probar que la solución es global por un razonamiento de reducción al absurdo. Es decir, suponemos que  $\tau < \infty$ , donde  $[0, \tau)$  es el intervalo maximal de definición. Vamos a probar que  $\{(v(t), T(t), S(t)), t \in [0, \tau)\}$  es de Cauchy en  $\mathcal{Y}$ , con  $t \mapsto \tau$ , por lo que existe  $(v_*, T_*, S_*) = \lim_{t \rightarrow \tau} (v(t), T(t), S(t))$  en  $\mathcal{Y}$ . Lo cual contradice el hecho de que  $[0, \tau)$  sea el intervalo maximal.

En efecto, con  $U = (v, S)$  se tiene que  $\|U(t) - U(s)\|_{\mathbb{R} \times L^2_{per}} = |v(t) - v(s)| + \|S(t) - S(s)\|$ , y recordando la expresión de  $v$ , (1.1.7), es decir

$$v(t) = v_0 - \int_0^t G(v)v dr + \int_0^t [\phi(T(r) - S(r))f] dr,$$

dado  $0 < t_0 \leq s < t < \tau$ , se tiene que

$$|v(t) - v(s)| \leq \int_s^t |H(v(r))| dr + \int_s^t |\phi(T(r) - S(r))f| dr \leq C|t - s|$$

ya que como  $|v|$ ,  $\|T\|$  y  $\|S\|$  están acotados en  $[0, \tau)$ , los integrandos están acotados. Por tanto si  $|t_0 - \tau| \ll 1$ ,  $v(t)$  es de Cauchy con  $t \mapsto \tau$  y por tanto existe  $\lim_{t \rightarrow \tau} v(t) \in \mathbb{R}$ , y además por el Lema 1.1.1, tenemos que  $T(t) = T^v(t)$  es de Cauchy en  $H^2_{per}$ , con  $t \mapsto \tau$ .

Recordando ahora la expresión de  $S$  dada por (1.2.3), es decir

$$S(t) = e^{-c(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I)t} S_0 + \int_0^t e^{-c(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I)(t-r)} F_2(r, v(r), S(r)) dr$$

con  $F_2(r, U(r)) = cS(r) - v(r)\frac{\partial S}{\partial x}(r) - b\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(r)$  y teniendo en cuenta el Lema 1.1.1 según el cual  $\|T\|_{H^1_{per}} \leq \max\{\|T_0\|_{H^1_{per}}, \|T_a\|_{H^1_{per}}\}$ , junto con el hecho de que  $S$  esté acotada en  $[0, \tau)$ , se tiene que

$$\|F_2(r, v(r), S(r))\|_{H^{-1}_{per}} \leq k_2 < \infty \quad (1.3.4)$$

para todo  $r \in [0, \tau)$ .

Teniendo en cuenta la teoría de espacios fraccionarios  $Z^\alpha$ , asociados al operador  $c(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I)$ , que es sectorial sobre  $Z^0 = L^2_{per}$  con dominio  $Z^1 = H^2_{per}$ , se tiene que  $Z^{\frac{1}{2}} = H^1_{per}$ , y  $Z^{-\frac{1}{2}} = H^{-1}_{per}$ , espacio dual de  $H^1_{per}$ . Entonces como consecuencia de (1.3.4), se verifica además que

$$\|S(t)\|_{Z^\beta} \leq k_3 \quad (1.3.5)$$

para  $0 < \beta < \frac{1}{2}$  y  $0 < t_0 < t < \tau$ , ya que:

$$\|S(t)\|_{Z^\beta} \leq \|e^{-c(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I)t}\|_{\mathcal{L}(L^2_{per}, Z^\beta)} \|S_0\| +$$

$$+ \int_0^t \|e^{-c(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I)(t-r)}\|_{\mathcal{L}(H_{per}^{-1}, Z^\beta)} \|F_2(r, v(r), S(r))\|_{H_{per}^{-1}} dr$$

y por el Lema 0.1.1 del apéndice, junto con (1.3.4), se obtiene que para todo  $0 < t_0 < t < \tau$

$$\|S(t)\|_{Z^\beta} \leq k_4 \{t^{-\beta} \|S_0\| + \int_0^t (t-r)^{-(\beta+\frac{1}{2})} dr\} \leq k_5 \quad (1.3.6)$$

de donde se sigue (1.3.5).

Además si  $0 < t_0 < s < t < \tau$

$$S(t) - S(s) = (e^{-c(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I)(t-s)} - I)S(s) + \int_s^t e^{-c(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I)(t-r)} F_2(r, U(r)) dr$$

de donde

$$\begin{aligned} \|S(t) - S(s)\| &\leq \|(e^{-c(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I)(t-s)} - I)S(s)\| + \\ &+ \int_s^t \|e^{-c(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I)(t-r)}\|_{\mathcal{L}(H_{per}^{-1}, L_{per}^2)} \|F_2(r, v(r), S(r))\|_{H_{per}^{-1}} dr. \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

Entonces de nuevo por el Lema 0.1.1 junto con (1.3.4) y (1.3.5) se tiene que

$$\|S(t) - S(s)\| \leq k_6(t-s)^\beta + k_7 \int_s^t (t-r)^{-\frac{1}{2}} dr \leq k_8(t-s)^\beta$$

con  $0 < \beta < \frac{1}{2}$  ya que por el Lema 0.1.1 del apéndice

$$\|(e^{-c(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I)(t-s)} - I)S(s)\| \leq k_9(t-s)^\beta \|S(s)\|_{Z^\beta} \leq k_{10}(t-s)^\beta$$

$$\|e^{-c(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I)(t-r)} F_2(r, U(r))\| \leq \|e^{-c(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I)(t-r)}\|_{\mathcal{L}(H_{per}^{-1}, L_{per}^2)} \|F_2(r, U(r))\|_{H_{per}^{-1}} \leq k_{11}(t-r)^{-\frac{1}{2}}$$

por (1.3.4) y por el Lema 0.1.1, según el cual

$$\|e^{-c(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I)(t-r)}\|_{\mathcal{L}(H_{per}^{-1}, L_{per}^2)} \leq C(t-r)^{-\frac{1}{2}}$$

con  $C, k_i, i \in \{1, \dots, 11\}$  constantes positivas.

Tomando ahora  $|t_0 - \tau| \ll 1$  obtenemos que  $S(t)$  es de Cauchy en  $L_{per}^2$  con  $t \mapsto \tau$  y por tanto  $(v(t), T(t), S(t))$  es de Cauchy en  $\mathcal{Y}$ , con  $t \mapsto \tau$ .  $\square$

**Observación 1.3.1** *El Teorema 1.3.1 se verifica también para otros espacios de datos iniciales. Es decir, es posible demostrar la existencia y unicidad global de soluciones para el sistema (1.1.1) trabajando en espacios de fases más generales.*

*En efecto, supongamos que  $T_0, T_\alpha \in X$ , donde  $X$  representa un espacio admisible arbitrario, definido al principio de este capítulo por (1.1.1). Vamos a ver en que espacio hemos de tomar  $S_0$  y  $f$ , para que exista la solución del sistema (1.1.1) con dato inicial  $(v_0, T_0, S_0)$ .*

Para ello consideramos la ecuación

$$S_t + c\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I\right)S = b\frac{\partial^2}{\partial x^2}T - v\frac{\partial S}{\partial x} + cS$$

y observamos que se puede resolver adecuadamente en los espacios de potencias fraccionarias,  $Z^\alpha$ , asociados al operador sectorial  $(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I)$ , descritos por ejemplo en la sección sobre operadores sectoriales del apéndice. Nótese que en la práctica  $Z^{\alpha+1}$  también podrá ser un espacio admisible para  $T$ . La elección de  $X$ , si embargo, vendrá determinada por los datos  $T_a$  y  $T_0$ .

La relación entre  $X$  y  $Z^\alpha$  tiene que ser adecuada para que  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}T = \frac{\partial^2}{\partial x^2}T(v)(t)$  sea un término "bueno". Es decir, sabemos que la aplicación  $t \mapsto T(t)$  es continua con valores en  $X$  y a la vez necesitamos que la aplicación  $t \mapsto \frac{\partial^2}{\partial x^2}T(t)$  tome valores en  $Z^\alpha$ , que a su vez equivale a  $t \mapsto T(t) \in Z^{\alpha+1}$ , lo cual se verifica automáticamente si imponemos la condición

$$X \hookrightarrow Z^{\alpha+1}.$$

Por otra parte se tiene que el operador

$$\frac{\partial}{\partial x} : Z^{\alpha+\frac{1}{2}} \mapsto Z^\alpha$$

por lo tanto hace falta que  $S(t) \in Z^{\alpha+\frac{1}{2}}$ , de donde  $S_0 \in Z^{\alpha+\frac{1}{2}}$ .

Por lo tanto, podemos considerar  $(v_0, T_0, S_0) \in \mathbb{R} \times X \times Z^{\alpha+\frac{1}{2}}$  con  $X \hookrightarrow Z^{\alpha+1}$ , y  $\alpha$  elegido de tal forma que se satisfagan las necesidades funcionales de la aplicación  $F(t, v, S) = b\frac{\partial^2}{\partial x^2}T - v\frac{\partial S}{\partial x} + cS$ , las cuales permiten llevar a cabo la demostración basada en un resultado de punto fijo. Siguiendo la demostración del Teorema 1.2.1 se observa que uno de los puntos claves de la misma se encuentra en la condición recogida en los apartados iv) y v) del Lema 1.1.1, y que ahora se convierte en

$$\sup_{r \in [0, \tau]} \left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} (T^{v_1}(r) - T^{v_2}(r)) \right\|_{Z^\alpha} \leq L\tau \|v_1 - v_2\|_\infty$$

lo cual, teniendo en cuenta que

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} (T^{v_1}(r) - T^{v_2}(r)) \right\|_{Z^\alpha} \leq c_1 \|T^{v_1}(r) - T^{v_2}(r)\|_{Z^{\alpha+1}}$$

se verifica siempre que se tenga la propiedad

$$\sup_{r \in [0, \tau]} \|T^{v_1}(r) - T^{v_2}(r)\|_{Z^{\alpha-1}} \leq L\tau \|v_1 - v_2\|_\infty.$$

Este resultado, es cierto a su vez siempre que  $T_0, T_a$  tengan traslaciones Lipschitz en  $Z^{\alpha+1}$ , para lo cual es suficiente que  $T_0, T_a \in Z^{\alpha-\frac{3}{2}}$ , como se deduce del punto iv) del Lema 1.1.1.

Por último, tenemos que elegir la función  $f$  en un espacio adecuado para que  $\mathfrak{f}(T - S)f$  tenga sentido. Teniendo en cuenta que  $T(t) \in X$ , y que  $S(t) \in Z^{\alpha+\frac{1}{2}}$ , basta con tomar  $f \in X' \cap (Z^{\alpha+\frac{1}{2}})'$ . De esta forma siempre que  $X \hookrightarrow Z^{\alpha+\frac{3}{2}} \hookrightarrow Z^{\alpha+\frac{1}{2}}$  bastaría en principio con considerar  $f \in (Z^{\alpha+\frac{1}{2}})'$ .

Veamos algunos casos particulares:

i) Recordando la teoría de espacios de exponente fraccionario, definidos en la Proposición 2.2.1 del apéndice, se tiene que  $-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I$  es sectorial en  $L^p_{\text{per}} = Z$  con dominio  $W^{2,p}_{\text{per}} = Z^1$  y  $Z^\alpha \subset W^{2\alpha,p}_{\text{per}}, \alpha \geq 0$ , es el dominio del operador  $(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I)^\alpha$  dotado de la norma de la gráfica. De esta forma se tiene que  $Z^{1/2} = W^{1,p}_{\text{per}}$ , y  $Z^{-1/2}$  es el espacio dual de  $W^{1,q}_{\text{per}}$ , con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Por lo tanto si consideramos el operador sectorial  $-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I$  sobre  $Z = L^p_{\text{per}}, 1 < p < \infty$ , y  $\alpha = -\frac{1}{2}$ , entonces el espacio de fases es  $\mathcal{Y} = \mathbb{R} \times X \times L^p_{\text{per}}$  con  $X \hookrightarrow W^{2,p}_{\text{per}}, T_a \in W^{2,p}_{\text{per}}$  y  $f \in L^q_{\text{per}}$ .

Esta elección en el caso particular de  $p = 2$ , coincide con las hipótesis del Teorema 1.2.1.

ii) Si consideramos ahora  $\alpha = -1$  entonces el espacio de fases es  $\mathcal{Y} = \mathbb{R} \times X \times Z^{-\frac{1}{2}}$  con  $Z^{-\frac{1}{2}} = (W^{1,q}_{\text{per}})'$  con  $X$  espacio admisible tal que  $X \hookrightarrow Z^{\frac{1}{2}} = W^{1,p}_{\text{per}}$ , con  $T_a \in W^{1,p}_{\text{per}}$  y  $f \in W^{1,q}_{\text{per}}$ . En esta situación, si consideramos  $p = 2$ , tendríamos las siguientes condiciones:  $T_a, f \in H^1_{\text{per}}$  y  $(v_0, T_0, S_0) \in \mathbb{R} \times H^1_{\text{per}} \times H^{-1}_{\text{per}}$ , bajo las cuales se tiene la existencia y unicidad de soluciones.

iii) Si consideramos ahora  $p = 2$ , es decir  $Z = L^2_{\text{per}}$  y  $\alpha = \frac{m-3}{2} \geq -\frac{1}{2}$ , i.e.  $m \geq 2$ , se tiene que  $Z^{\alpha+\frac{3}{2}} = H^m_{\text{per}}$  y  $Z^{\alpha+\frac{1}{2}} = H^{m-2}_{\text{per}}$ . Por tanto si  $f \in L^2_{\text{per}}$  y  $T_a \in X$ , con  $X$  espacio admisible contenido en  $H^m_{\text{per}}$ , el espacio de fases es  $\mathcal{Y} = \mathbb{R} \times X \times H^{m-2}_{\text{per}}$ , y en particular podemos tomar como espacio de fases  $\mathcal{Y} = \mathbb{R} \times H^m_{\text{per}} \times H^{m-2}_{\text{per}}$ .

De esta forma, razonando de forma análoga al Teorema 1.3.1, se tiene el siguiente Teorema sobre la existencia de soluciones de (1.1.1).

**Teorema 1.3.2** Supongamos que  $H(r) = rG(r)$  es localmente Lipschitz y  $T_a \in X$  siendo  $X$  un espacio admisible tal que:

i)  $X \subset W^{2,p}_{\text{per}}$  y  $f \in L^q_{\text{per}}$ , donde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  si  $1 < p < \infty$ . En este caso sea  $\mathcal{Y} = \mathbb{R} \times X \times L^p_{\text{per}}$ .

O bien

ii)  $X \subset W^{1,p}_{\text{per}}$ , y  $f \in W^{1,q}_{\text{per}}$ . En este caso sea  $\mathcal{Y} = \mathbb{R} \times X \times (W^{1,q}_{\text{per}})'$ .

iii)  $X \subset H^m_{\text{per}}, m \geq 2$ , y  $f \in L^2_{\text{per}}$ . En este caso sea  $\mathcal{Y} = \mathbb{R} \times X \times H^{m-2}_{\text{per}}$ .

Entonces, en cualquiera de esas tres situaciones, dado  $(v_0, T_0, S_0) \in \mathcal{Y}$ , existe una única solución  $(v, T, S) \in C([0, \infty), \mathcal{Y})$ . Además la aplicación:

$$S^*(t)(v_0, T_0, S_0) = (v(t), T(t), S(t)), t \geq 0$$

define un semigrupo en  $\mathcal{Y}$  de clase  $C^0$ .  $\square$

Considerando el caso  $p = 2$ , se tiene el siguiente resultado

**Corolario 1.3.1** *Supongamos que  $H(r) = rG(r)$  es localmente Lipschitz y que las funciones  $T_a$  y  $f \in H_{per}^1$ . Entonces dado  $(v_0, T_0, S_0) \in \mathcal{Y} = \mathbb{R} \times H_{per}^1 \times H_{per}^{-1}$ , existe una única solución  $(v, T, S) \in C([0, \infty), \mathcal{Y})$ . Además se tiene que*

$$v \in C^1(0, \infty), T \in C(0, \infty; H_{per}^1) \cap C^1(0, \infty; L_{per}^2)$$

$$S \in C((0, \infty); H_{per}^1), S_t \in C((0, \infty); H_{per}^{-\epsilon})$$

para todo  $\epsilon \in (0, 1)$ .

#### Demostración:

El razonamiento es análogo al desarrollado en el Corolario 1.2.1. Basta con observar ahora que la no linealidad  $F_2(t, S) = b \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - v \frac{\partial S}{\partial x}$ , de la ecuación (1.2.9) para  $S$ , es localmente Lipschitz en  $S$  y Lipschitz en  $t$ , considerada como

$$F_2 : \mathbb{R} \times H_{per}^{-1} \mapsto H_{per}^{-2}$$

con  $H_{per}^{-2}$  espacio dual de  $H_{per}^2$ , por lo que estamos en las hipótesis del Teorema 0.2.1 del apéndice, según el cual

$$S \in C((0, \tau); L_{per}^2) \text{ y } S_t \in C((0, \tau); H_{per}^{-\epsilon}), \text{ para todo } \epsilon \in (0, 1).$$

A continuación, observamos que  $S$  verifica la ecuación

$$-c \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = F_2(t, S) - \frac{\partial S}{\partial t},$$

de esta forma teniendo en cuenta que la regularidad anterior de  $S$  y  $T$  implica que  $F_2(t, S) - \frac{\partial S}{\partial t} \in C((0, \tau), H_{per}^{-1})$ , por regularidad elíptica se tiene que  $S \in C((0, \tau); H_{per}^1)$  lo que concluye la demostración.  $\square$

Vamos a ver un resultado sobre la existencia y el comportamiento de soluciones constantes respecto de la variable espacial.

**Proposición 1.3.1** *Bajo las hipótesis del Teorema de existencia 1.2.1 y supuesto que  $T_a$  es una función constante, es decir  $T_a \in \mathbb{R}$  se tiene que las únicas soluciones del sistema (1.1.1) de temperatura y concentración constantes respecto de la variable espacial, es decir  $T = T(t)$  y  $S = S(t)$ , son aquellas que tienen una concentración constante en  $(x, t)$ , es decir  $S_0 \in \mathbb{R}$ . Además estas soluciones  $(v(t), T(t), S_0)$  convergen exponencialmente a  $(0, T_a, S_0)$ .*

**Demostración:**

Si  $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial x} = 0$  teniendo en cuenta que  $\mathcal{J}f = 0$  se tiene que  $\mathcal{J}(T - S)f = 0$ . Por tanto las soluciones constantes en  $x$ , vienen dadas por el siguiente sistema:

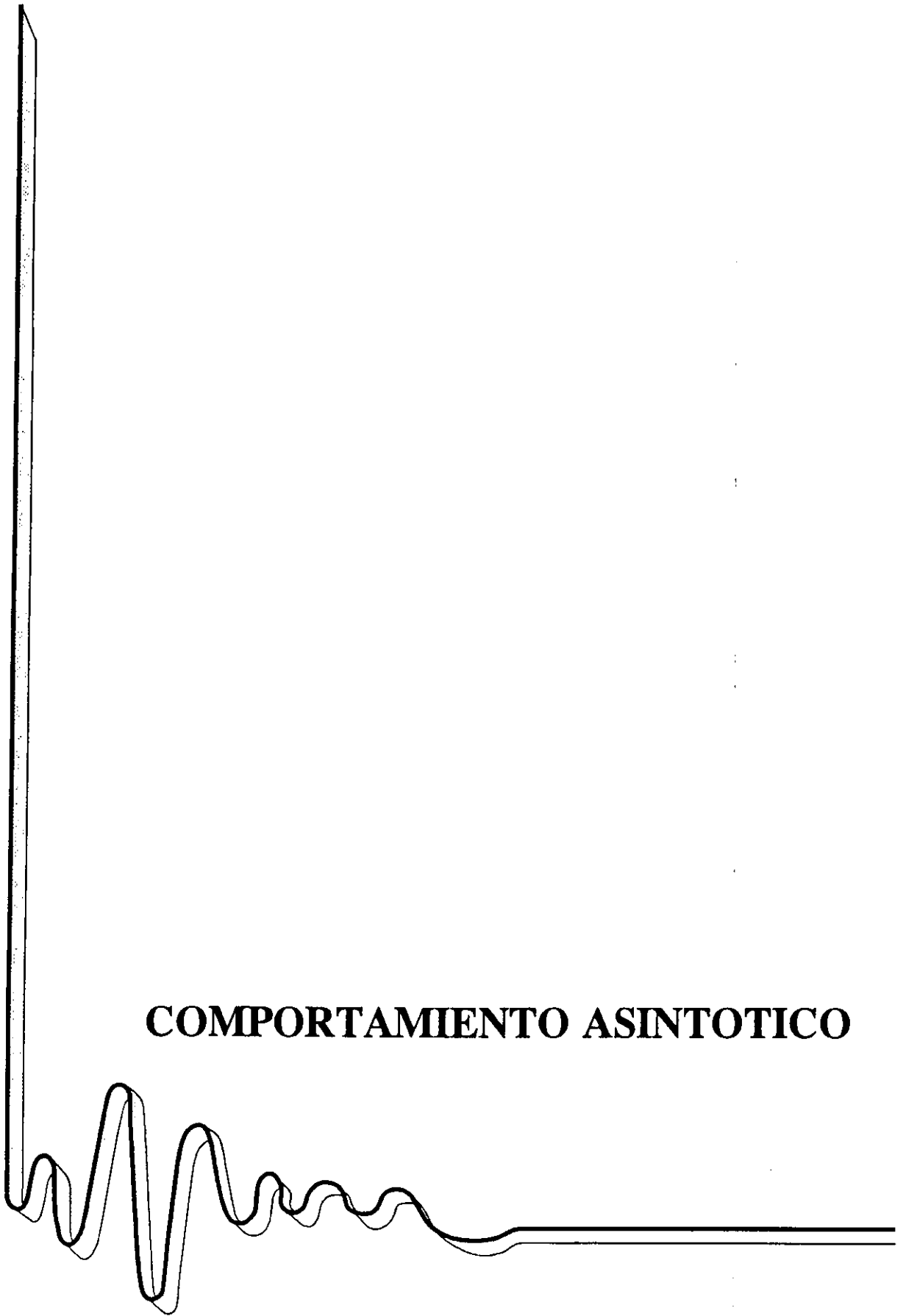
$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + G(v)v = 0 \\ \frac{dT}{dt} = h(v)(T_a - T) \\ \frac{dS}{dt} = 0 \end{cases} \quad (1.3.8)$$

es decir  $S(t) = S_0 \in \mathbb{R}$ ,  $v = v_0 e^{-\int_0^t G(v)dr}$  y  $T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-\int_0^t h(v)dr}$ , de donde  $v(t) \mapsto 0$  y  $T(t) \mapsto T_a$  exponencialmente, cuando  $t \mapsto \infty$ .  $\square$





# COMPORTAMIENTO ASINTOTICO



# CAPITULO 2

## COMPORTAMIENTO ASINTOTICO

### 2.1 Atractor maximal

En esta sección vamos a probar la existencia de un atractor para el flujo dado por (1.1.1) en el espacio  $\mathcal{Y} = \mathbb{R} \times H_{per}^2 \times L_{per}^2$ . Para ello, vamos a considerar el caso en el que todas las funciones periódicas del sistema tengan media nula, es decir trabajaremos en  $\mathbb{R} \times \dot{H}_{per}^2 \times \dot{L}_{per}^2$ , donde

$$\dot{H}_{per}^2 = \{T \in H_{per}^2 \text{ con } \oint T = 0\} \text{ y } \dot{L}_{per}^2 = \{S \in L_{per}^2 \text{ con } \oint S = 0\}.$$

En primer lugar vamos a ver las razones que nos llevan a la búsqueda del atractor global (maximal) en el espacio  $\mathbb{R} \times \dot{H}_{per}^2 \times \dot{L}_{per}^2$ . Sea  $(v, T, S)$  la solución de (1.1.1) dada por el Teorema 1.3.1. Observamos que integrando respecto de  $x$  la tercera ecuación del sistema (1.1.1), como consecuencia de la periodicidad de  $S$  y  $T$ , se tiene que  $\oint S$  es constante respecto de  $t$ , como vimos en la sección anterior. Por tanto  $\oint S(t) = \oint S_0$  para todo  $t \geq 0$ . Como consecuencia **no existe** un atractor global en el sentido clásico, para el flujo dado por el sistema (1.1.1) en el espacio  $\mathbb{R} \times H_{per}^2 \times L_{per}^2$ . Debido a esta propiedad de conservación de la masa para  $S$ , para cada  $m_0$  constante, tendríamos que estudiar la existencia de un atractor  $\mathcal{A}_{m_0}$  en el espacio  $\mathbb{R} \times H_{per}^2 \times V_{m_0}$  donde  $V_{m_0} = \{S \in L_{per}^2, \oint S = m_0\}$ .

Integrando ahora respecto de  $x$  la segunda ecuación de (1.1.1) y teniendo en cuenta de nuevo la periodicidad de  $T$ , se tiene que

$$\frac{d}{dt}(\oint T) = h(v)(\oint T_a - \oint T). \quad (2.1.1)$$

Como consecuencia si consideramos ahora  $\tau = T - \mathfrak{f}T$  y  $\sigma = S - \mathfrak{f}S_0$ , de la segunda y tercera ecuación del sistema (1.1.1), se tiene que  $\tau$  y  $\sigma$  verifican las ecuaciones:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + v \frac{\partial \tau}{\partial x} = h(v)(\tau_a - \tau), \quad \tau(0) = \tau_0 = T - \mathfrak{f}T_0 \quad (2.1.2)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} - c \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = -v \frac{\partial \sigma}{\partial x} - b \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}, \quad \sigma(0) = \sigma_0 = S_0 - \mathfrak{f}S_0. \quad (2.1.3)$$

donde  $\tau_a = T_a - \mathfrak{f}T_a$ .

Por último, como consecuencia de  $\mathfrak{f}f = 0$ , se tiene que  $\mathfrak{f}(T - S)f = \mathfrak{f}(\tau - \sigma)f$ , es decir que la primera ecuación de (1.1.1) quedaría

$$\frac{dv}{dt} + G(v)v = \mathfrak{f}(\tau - \sigma).f, \quad v(0) = v_0. \quad (2.1.4)$$

De esta forma por (2.1.3), (2.1.2) y (2.1.4) tenemos que  $(v, \tau, \sigma)$  verifica el sistema (1.1.1) con  $\tau_a$  en el lugar de  $T_a$  y ahora  $\mathfrak{f}\tau = \mathfrak{f}\sigma = \mathfrak{f}\tau_a = 0$ . Observamos que si  $T_a$  es constante, entonces  $\tau_a = 0$ .

Observamos además:

- i) De la ecuación para  $\mathfrak{f}T$ , (2.1.1), teniendo en cuenta que  $h \geq h_0 > 0$ , se tiene que  $\mathfrak{f}T$  converge exponencialmente cuando  $t \mapsto \infty$  a  $\mathfrak{f}T_a$  para cualquier valor de  $\mathfrak{f}T_0$ .
- ii) El sistema de ecuaciones en derivadas parciales en  $(v, \tau, \sigma)$  es el mismo que en  $(v, T, S)$ .
- iii) Para recuperar las variables (y la dinámica) originales hay que considerar  $v, T = \tau + \mathfrak{f}T, S = \sigma + m_0$ , ahora bien, por ii) es decir, el hecho de que las nuevas incógnitas verifican el mismo sistema, implica que la dinámica es independiente de  $m_0$ .

Notaremos de nuevo por  $T$  a la función  $\tau$  y por  $S$  a  $\sigma$  y a partir de ahora consideraremos el sistema (1.1.1) con  $\mathfrak{f}T_0 = 0, \mathfrak{f}S_0 = 0, \mathfrak{f}T_a = 0$  y  $\mathfrak{f}T(t) = \mathfrak{f}S(t) = 0$  para todo  $t \geq 0$ .

Consideramos el semigrupo  $S^*(t)$  generado por las soluciones de (1.1.1) dado por el Teorema 1.3.1, definido por

$$S^*(t)(v_0, T_0, S_0) = (v(t), T(t, \cdot), S(t, \cdot))$$

donde

$$v(t) = v_0 e^{-\int_0^t G(r)dr} + \int_0^t e^{-\int_r^t G(r)dr} (\mathfrak{f}(T - S)(r)f) dr \quad (2.1.5)$$

$$T(t, x) = T_0(x - \int_0^t v) e^{-\int_0^t h(r)dr} + \int_0^t [h(v(r)) e^{-\int_r^t h(r)dr} T_a(x - \int_r^t v)] dr \quad (2.1.6)$$

$$S(t, x) = e^{-c(-\frac{\partial^2}{\partial x^2})t} S_0(x) + \int_0^t e^{-c(-\frac{\partial^2}{\partial x^2})(t-r)} F_2(r, v(r), S(r)) dr. \quad (2.1.7)$$

Observamos que en la sección anterior sumábamos  $cS$  en la tercera ecuación, para escribir la fórmula de variación de las constantes en función del operador positivo  $-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + I$  en  $L^2_{per}$ , sin embargo ahora el operador  $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  es ya positivo en  $\dot{L}^2_{per}$ , por estar actuando sobre funciones periódicas de media nula. Por tanto escribimos la fórmula de variación de las constantes en función del operador  $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ , y la no linealidad  $F_2$  viene ahora dada por

$$F_2(r, v(r), S(r)) = -b \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(r) - v(r) \frac{\partial S}{\partial x}(r).$$

Vamos a probar la existencia de un atractor maximal para el flujo dado por  $S^*(t)$  en  $\mathcal{Y} = \mathbb{R} \times \dot{H}^2_{per} \times \dot{L}^2_{per}$ , a pesar de tener en el sistema una ecuación de transporte (para  $T$ ) lo que tiene como consecuencia que el semigrupo  $S^*(t)$  no es compacto. Para ello vamos a utilizar el efecto de regularidad asintótica sobre  $T$  y las técnicas desarrolladas para ecuaciones hiperbólicas en [28], en particular vamos a aplicar el Teorema 3.4.6 de [28], (ver [65]), siguiendo el procedimiento utilizado en el trabajo [51] para el termosifón sin efecto Soret. Con este propósito probaremos en primer lugar que  $S^*(t)$  es un semigrupo **puntualmente disipativo** sobre  $\mathcal{Y}$ , es decir que existe un conjunto acotado  $B \subset \mathcal{Y}$  que atrae a cada punto de  $\mathcal{Y}$  y en segundo lugar veremos que se puede descomponer como suma de dos términos, uno de ellos que tiende a cero sobre acotados cuando  $t \mapsto \infty$  y el otro que es completamente continuo. Para probar que  $S^*(t)$  es un semigrupo disipativo necesitamos algunos lemas previos que nos proporcionan estimaciones de la norma de la solución  $(v, T, S)(t)$  en función de las normas de  $T_a$  y  $f$  e independientes de  $v_0, T_0$  y  $S_0$ . Estas estimaciones se obtienen en tres etapas, primero para  $T$  (obtenida en [51]), después para  $S$  y finalmente para  $v$ .

En el siguiente lema, cuya demostración se puede encontrar en [51], vamos a ver estimaciones para la norma de  $T$  en función de las normas de  $T_0$  y  $T_a$ .

**Lema 2.1.1** *Dada  $v \in C[0, \infty)$ ,  $T_0$  y  $T_a \in X$  con  $X$  espacio admisible, entonces la función  $T$  dada por (1.1.9), solución de la ecuación*

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} = h(v)(T_a - T), \quad T(0, x) = T_0(x)$$

verifica:

$$\|T(t, \cdot)\|_X \leq \|T_a\|_X + (\|T_0\|_X - \|T_a\|_X) \dots e^{-h_0 t}, \quad t \geq 0 \tag{2.1.8}$$

con  $h(r) \geq h_0 > 0$ , para todo  $r$ . Como consecuencia para todo  $T_0 \in X$  se tiene que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|T(t)\|_X \leq \|T_a\|_X \quad \square$$

A continuación vamos a probar una estimación para la norma de  $S(t)$  en función de la norma de  $S_0$ .

**Lema 2.1.2** *Sea  $v_0 \in \mathbb{R}, T_0, T_a \in \dot{H}_{per}^2$  y  $f, S_0 \in \dot{L}_{per}^2$ . Entonces*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|S(t)\| \leq \frac{b\sqrt{2}\|\frac{\partial T_a}{\partial x}\|}{c\sqrt{\mu_1}}$$

donde  $\mu_1 = \min_{S \in \dot{H}_{per}^1} \frac{\|\frac{\partial S}{\partial x}\|^2}{\|S\|^2} > 0$ , es el primer autovalor de  $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  en  $\dot{L}_{per}^2$ .

Además se tiene que  $\|S(t)\|$  está uniformemente acotada para todo  $t \geq 0$ , cuando el dato inicial  $(v_0, T_0, S_0)$  se mueve en un conjunto acotado de  $\mathbb{R} \times \dot{H}_{per}^2 \times \dot{L}_{per}^2$ .

**Demostración:**

La solución  $S(t, x)$  dada por el Teorema 1.2.1 verifica la ecuación

$$\frac{\partial S}{\partial t} - c \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = -v \frac{\partial S}{\partial x} - b \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{2.1.9}$$

en el espacio  $\dot{L}_{per}^2$  y por el Corolario 1.2.1, se tiene en particular que  $\frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}, \frac{\partial S}{\partial x}$  y  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \in \dot{L}_{per}^2$ , y por tanto podemos multiplicar por  $S$  en  $\dot{L}_{per}^2$  la ecuación (2.1.9).

De esta forma integrando por partes y aplicando la desigualdad de Young para todo  $\epsilon > 0$ , al igual que hicimos para obtener (1.3.2), se tiene

$$\frac{d}{dt} \|S\|^2 + 2c \|\frac{\partial S}{\partial x}\|^2 \leq 2\frac{b^2}{4\epsilon} \|\frac{\partial T}{\partial x}\|^2 + 2\epsilon \|\frac{\partial S}{\partial x}\|^2 \tag{2.1.10}$$

con  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_{per}^2}$ . Teniendo en cuenta que  $\oint S = 0$ , por la desigualdad de Poincaré

$$\|\frac{\partial S}{\partial x}\|^2 \geq \mu_1 \|S\|^2 \text{ con } \mu_1 = \min_{S \in \dot{H}_{per}^1} \frac{\|\frac{\partial S}{\partial x}\|^2}{\|S\|^2} > 0,$$

de esta forma considerando  $\epsilon = \frac{c}{2}$ , de donde  $\frac{b^2}{2c} = \frac{b^2}{c}$ , de la ecuación (2.1.10) se tiene que:

$$\frac{d}{dt} \|S\|^2 + c\mu_1 \|S\|^2 \leq 2\frac{b^2}{c} [l_1 + l_2 e^{-2h_0 t}]$$

siendo

$$l_1 = \|\frac{\partial T_a}{\partial x}\|^2, \quad l_2 = (\|\frac{\partial T_0}{\partial x}\| - \|\frac{\partial T_a}{\partial x}\|)^2 > 0$$

ya que por (2.1.8), con  $X = \dot{H}_{per}^1$

$$\|\frac{\partial T}{\partial x}\| \leq 2[\|\frac{\partial T_a}{\partial x}\|^2 + (\|\frac{\partial T_0}{\partial x}\| - \|\frac{\partial T_a}{\partial x}\|)^2] e^{-2h_0 t}.$$

Es decir  $u(t) = \|S(t)\|^2$  verifica:

$$\frac{du}{dt} + k^2 u \leq M^2 + l_3 e^{-2h_0 t} = r(t), u(0) = \|S_0\|^2 \quad (2.1.11)$$

donde  $k^2 = c\mu_1 > 0$ ,  $M^2 = 2\frac{b^2 t_1}{c} > 0$  y  $l_3 = 2\frac{b^2 t_2}{c} > 0$ . De esta forma dado  $\epsilon > 0$ , existe  $t_0 > 0$  tal que

$$\frac{du}{dt} + k^2 u \leq (M^2 + \epsilon) \text{ para todo } t \geq t_0 \quad (2.1.12)$$

Entonces por el Lema de Gronwall se tiene que para todo  $t \geq t_0$

$$u(t) \leq \frac{u(t_0)e^{-k^2(t-t_0)} + \frac{(M^2 + \epsilon)}{k^2}(1 - e^{-k^2(t-t_0)})}{1}$$

De esta forma se obtiene que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} u(t) \leq \frac{M^2 + \epsilon}{k^2} \text{ para todo } \epsilon > 0$$

donde  $\frac{M^2}{k^2} = 2\frac{b^2 \|\frac{\partial T_a}{\partial x}\|^2}{c^2 \mu_1} > 0$ .

Por tanto si probamos ahora que  $u(t) = \|S(t)\|^2$  está uniformemente acotada cuando el dato inicial se mueve en un acotado habremos concluido la demostración.

En efecto de (2.1.11) se tiene que:

$$u(t) \leq u_0 e^{-k^2 t} + \int_0^t r(s) e^{-k^2(t-s)} ds$$

teniendo en cuenta ahora que  $\int_0^t r(s) e^{-k^2(t-s)} ds \leq (\sup_{s \geq 0} r(s)) \frac{1}{k^2} (1 - e^{-k^2 t})$ , se tiene que:

$$u(t) \leq u_0 + \frac{M^2 + l_3}{k^2}, \text{ para todo } t \geq 0$$

lo que termina la demostración.  $\square$

Por último vamos a ver como las estimaciones anteriores sobre las normas de  $T$  y  $S$  nos van a permitir conseguir una estimación para  $|v|$ .

**Lema 2.1.3** Sean  $v_0 \in \mathbb{R}$ ,  $T_0, T_a \in \dot{H}_{per}^2$ ,  $f, S_0 \in \dot{L}_{per}^2$  y  $G(v) \geq G_0 > 0$ , entonces

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |v(t)| \leq \frac{\|f\|}{G_0} (\|T_a\| + \frac{b\sqrt{2}\|\frac{\partial T_a}{\partial x}\|}{c\sqrt{\mu_1}}).$$

Además  $|v(t)|$  está uniformemente acotado, para todo  $t \geq 0$ , cuando el dato inicial  $(v_0, T_0, S_0)$  se mueve en un conjunto acotado de  $\mathbb{R} \times \dot{H}_{per}^2 \times \dot{L}_{per}^2$ .

**Demostración:**

Sabemos que  $v$  verifica

$$v(t) = v(t_0)e^{-\int_{t_0}^t G(v)} + \int_{t_0}^t [\phi(T - S) \cdot f] e^{-\int_r^t G(v)} dr \tag{2.1.13}$$

si  $t_0 \leq t$  de donde:

$$|v(t)| \leq |v(t_0)|e^{-\int_{t_0}^t G(v)} + \|f\| \int_{t_0}^t \|T(r) - S(r)\| e^{-\int_r^t G(v)} dr.$$

En primer lugar dado  $\epsilon > 0$ , por los Lemas 2.1.1 y 2.1.2 existe  $t_0 > 0$ , tal que para todo  $t \geq t_0$  se tiene que

$$\|T(r) - S(r)\| \leq \|T_a\| + M + \epsilon,$$

donde  $M = \frac{b\sqrt{2}\|\frac{\partial T_a}{\partial x}\|}{c\sqrt{\mu_1}}$ . Por tanto se tiene que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |v(t)| \leq \|f\| (\|T_a\| + M + \epsilon) \limsup_{t \rightarrow \infty} \left( \int_{t_0}^t e^{-\int_r^t G(v)} dr \right)$$

puesto que  $G \geq G_0 > 0$ .

Observamos ahora que

$$\int_{t_0}^t e^{-\int_r^t G(v)} dr = \frac{\int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^r G(v)} dr}{e^{\int_{t_0}^t G(v)}}$$

ya aplicamos la generalización de la Regla de L'Hopital para límites superiores dada por el Lema 0.5.1 del apéndice, según la cual, teniendo en cuenta que:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\left[ \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^r G(v)} dr \right]'}{\left[ e^{\int_{t_0}^t G(v)} \right]'} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{\int_{t_0}^t G(v)}}{G(v) e^{\int_{t_0}^t G(v)}} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{G(v)} \leq \frac{1}{G_0}$$

ya que  $G(v) \geq G_0 > 0$ , se obtiene que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |v(t)| \leq \frac{\|f\|}{G_0} (\|T_a\| + M + \epsilon)$$

para todo  $\epsilon > 0$ .

Por tanto si probamos ahora que  $|v(t)|$  está uniformemente acotada cuando el dato se mueve en un conjunto acotado, terminamos la demostración.

En efecto considerando en (2.1.13)  $t_0 = 0$ , se tiene que:

$$|v(t)| \leq |v_0|e^{-G_0 t} + \sup_{t \geq 0} \|f\| (\|T\| + \|S\|) \int_0^t e^{-\int_s^t G(v)} ds$$



teniendo en cuenta ahora que

$$\int_0^t e^{-\int_s^t G(v)} ds \leq \int_0^t e^{-\int_s^t G_0} ds = \frac{1}{G_0}(1 - e^{-G_0 t}) \leq \frac{1}{G_0}$$

junto con la estimación uniforme para  $\|T\|$  dada por (2.1.8) y la estimación uniforme para  $\|S\|_{L^2}$  obtenida a partir de (2.1.11), se obtiene el resultado.  $\square$

**Proposición 2.1.1** *Supongamos que  $T_a \in \dot{H}_{per}^2$ ,  $f \in \dot{L}_{per}^2$  e  $\mathcal{Y} = \mathbb{R} \times \dot{H}_{per}^2 \times \dot{L}_{per}^2$ . Entonces para todo  $\eta > 0$ , el conjunto  $\mathcal{B}_\eta$  definido por*

$$\mathcal{B}_\eta = (-\lambda_0 - \eta, \lambda_0 + \eta) \times B_{\dot{H}_{per}^2}(0, \|T_a\|_{\dot{H}_{per}^2} + \eta) \times B_{\dot{L}_{per}^2}(0, \frac{b\sqrt{2}}{c\sqrt{\mu_1}} \|\frac{\partial T_a}{\partial x}\| + \eta) \quad (2.1.14)$$

con  $\lambda_0 = \frac{\|f\|}{G_0} (\|T_a\| + \frac{b\sqrt{2}}{c\sqrt{\mu_1}} \|\frac{\partial T_a}{\partial x}\|)$ , es absorbente en  $\mathcal{Y}$ , para el flujo del sistema (1.1.1).

**Demostración:**

Vamos a ver que atrae uniformemente a todo acotado de  $\mathcal{Y}$ . Es decir, dado  $R > 0$  probaremos que existe un  $t_0(\eta, R) > 0$ , tal que cualquier solución del sistema (1.1.1) que parte de un dato inicial perteneciente a la bola del espacio  $\mathcal{Y}$ , de centro el origen y radio  $R$ , pertenece a  $\mathcal{B}_\eta$  para todo  $t \geq t_0$ .

En efecto, sea  $(v_0, T_0, S_0) \in \mathcal{Y}$ , tal que  $|v_0| + \|T_0\|_{\dot{H}_{per}^2} + \|S_0\|_{\dot{L}_{per}^2} \leq R$  y sea  $(v(t), T(t, x), S(t, x))$  la solución del sistema (1.1.1) asociada a ese dato inicial. En primer lugar por el Lema 2.1.1 tenemos que

$$\|T(t)\|_{\dot{H}_{per}^2} \leq (1 - e^{-h_0 t}) \|T_a\|_{\dot{H}_{per}^2} + \|T_0\|_{\dot{H}_{per}^2} e^{-h_0 t}$$

de donde existe  $t_1 > 0$  tal que para todo  $t \geq t_1$

$$\|T(t)\|_{\dot{H}_{per}^2} \leq \|T_a\|_{\dot{H}_{per}^2} + \eta.$$

Si partimos ahora de la ecuación (2.1.11) deducida en el Lema 2.1.2 para  $\|S\|^2$ , por el Lema de Gronwall, dado  $\epsilon = \epsilon(\eta) > 0$ , existe  $t_2(\epsilon) = t_2(\eta) > 0$ , tal que para todo  $t \geq t_2$

$$\|S\|^2 \leq (\|S_0\|^2 - \frac{M^2}{k^2}) e^{k^2(t-t_2)} + \frac{M^2 + \epsilon}{k^2}$$

donde  $\frac{M^2}{k^2} = \frac{2b^2}{c^2\mu_1} \|\frac{\partial T_a}{\partial x}\|^2$ . Como consecuencia si  $\|S_0\| \leq R$  y  $\epsilon(\eta)$  es suficientemente pequeño, existe  $t_3 \geq \max\{t_1, t_2\}$ , suficientemente grande, tal que  $\|S(t)\| \leq \frac{\sqrt{2}b}{c\sqrt{\mu_1}} (\|\frac{\partial T_a}{\partial x}\| + \eta)$  para todo  $t \geq t_3$ .

Consideramos ahora la expresión para  $v$  dada por (2.1.13), de donde para todo  $t_0 \geq 0$

$$|v(t)| \leq |v_0| e^{-G_0(t-t_0)} + \|f\| \int_{t_0}^t \|(T(r) - S(r))\| e^{-\int_r^t G_0} dr,$$

teniendo en cuenta que  $\int_{t_0}^t \epsilon^{-\int_r^{t_0} G_0} dr = \frac{1}{G_0} |1 - \epsilon^{-G_0(t-t_0)}|$ , se tiene que

$$|v(t)| \leq \|v_0\| - \frac{\|f\|}{G_0} (\sup_{t \geq t_0} (\|T\| + \|S\|)) e^{-G_0(t-t_0)} + \frac{\|f\|}{G_0} (\sup_{t \geq t_0} (\|T\| + \|S\|)).$$

Por (2.1.8) dado  $\epsilon = \epsilon(\eta) > 0$ , suficientemente pequeño, existe  $t_4(\eta) > 0$  suficientemente grande tal que  $\|T\| \leq \|T_a\| + \epsilon$  para todo  $t \geq t_4$ , por lo tanto como consecuencia del resultado anterior para la norma de  $S$ , junto con  $|v_0| \leq R$ , se obtiene  $t_0 \geq t_i, i = 1, \dots, 4$  tal que  $(v(t), T(t, x), S(t, x)) \in B_\eta$  para todo  $t \geq t_0$ .  $\square$

**Teorema 2.1.1** *Supongamos que  $T_a \in \dot{H}_{per}^2$  y  $f \in \dot{L}_{per}^2$ . Entonces existe un atractor maximal  $\mathcal{A}$  compacto y conexo en  $\mathcal{Y} = \mathbb{R} \times \dot{H}_{per}^2 \times \dot{L}_{per}^2$ , para el flujo del sistema (1.1.1). Además se tiene que  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ , donde*

$$\mathcal{B} = [-\lambda_0, \lambda_0] \times \overline{B_{\dot{H}_{per}^2}}(0, \|T_a\|_{\dot{H}_{per}^2}) \times \overline{B_{\dot{L}_{per}^2}}(0, \frac{b\sqrt{2}}{c\sqrt{\mu_1}} \|\frac{\partial T_a}{\partial x}\|)$$

$$\text{con } \lambda_0 = \frac{\|f\|}{G_0} (\|T_a\| + \frac{b\sqrt{2}}{c\sqrt{\mu_1}} \|\frac{\partial T_a}{\partial x}\|).$$

#### Demostración:

En primer lugar vamos a ver que el semigrupo generado por las soluciones de (1.1.1)

$$S^*(t)(v_0, T_0, S_0) = (v(t), T(t, \cdot), S(t, \cdot))$$

es puntualmente disipativo en  $\mathcal{Y}$ . Para ello basta observar que para todo  $\eta > 0$ , el conjunto acotado en  $\mathcal{Y}$ , dado por (2.1.14),

$$\mathcal{B}_\eta = (-\lambda_0 - \eta, \lambda_0 + \eta) \times B_{\dot{H}_{per}^2}(0, \|T_a\|_{\dot{H}_{per}^2} + \eta) \times B_{\dot{L}_{per}^2}(0, \frac{b\sqrt{2}}{c\sqrt{\mu_1}} \|\frac{\partial T_a}{\partial x}\| + \eta)$$

donde  $\lambda_0 = \frac{\|f\|}{G_0} (\|T_a\| + \frac{b\sqrt{2}}{c\sqrt{\mu_1}} \|\frac{\partial T_a}{\partial x}\|)$  es absorbente.

Como el semigrupo  $S^*(t)$  no es compacto, ya que tenemos una componente de la solución  $T$  que verifica una ecuación de transporte, vamos a utilizar el efecto de regularidad asintótica sobre  $T$  que nos va a permitir aplicar el Teorema 3.4.6. de [28]. Para ello descomponemos el semigrupo  $S^*(t)$  como suma de dos términos, de forma que uno de ellos tiende a cero sobre acotados, cuando  $t \mapsto \infty$ , y el otro es completamente continuo.

En efecto, para cada  $t \geq 0$ , descomponemos

$$S^*(t) = S_1^*(t) + S_2^*(t) \text{ con } S_i^*(t) : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y} \quad (2.1.15)$$

definidos por

$$S_1^*(t)(v_0, T_0, S_0) = (v_0 \epsilon^{-\int_0^t G_0}, T_0(x - \int_0^t v) \epsilon^{-\int_0^t h(v)}, \epsilon^{c \frac{\partial^2}{\partial x^2} t} S_0(x)) \quad (2.1.16)$$

y

$$S_2^*(t)(v_0, T_0, S_0) = \left( \int_0^t e^{-\int_r^t G(v)} (\oint (T - S)(r) f) dr, \int_0^t [h(v(r)) e^{-\int_r^t h(v)} T_a(x - \int_r^t v)] dr, \int_0^t e^{c \frac{\partial^2}{\partial x^2} (t-r)} F_2(r, v(r), S(r)) dr \right) \quad (2.1.17)$$

con

$$F_2(r, v(r), S(r)) = -b \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(r) - v(r) \frac{\partial S}{\partial x}(r).$$

Veamos en primer lugar que si  $\|(v_0, T_0, S_0)\|_{\mathcal{Y}} \leq R$ , entonces  $S_1^*(t)$  verifica:

$$\|S_1^*(t)(v_0, T_0, S_0)\|_{\mathcal{Y}} \leq K(t, R) \longrightarrow 0 \text{ si } t \longrightarrow \infty.$$

En efecto, de la definición de  $S_1^*(t)$ , (2.1.16), y teniendo en cuenta que  $G \geq G_0 > 0$ ,  $h \geq h_0 > 0$  y que la norma en  $\dot{H}_{per}^2$  es invariante por traslaciones, se tiene:

$$\|S_1^*(t)(v_0, T_0, S_0)\|_{\mathcal{Y}} \leq |v_0| e^{-G_0 t} + \|T_0\|_{\dot{H}_{per}^2} e^{-h_0 t} + \|e^{c \frac{\partial^2}{\partial x^2} t} S_0\|$$

y además por el Lema 0.1.1 del apéndice, junto con el hecho de que en  $\dot{L}_{per}^2$  el operador  $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  es positivo, se tiene  $\|e^{c \frac{\partial^2}{\partial x^2} t} S_0\| \leq N \|S_0\| e^{-\delta t}$  con  $\delta, N > 0$ , de donde se sigue el resultado.

Veamos ahora que  $S_2^*(t)$  es completamente continuo, es decir, para cada  $t \geq 0$  y  $B \subset \mathcal{Y}$  acotado, el conjunto  $\{S_2^*(s)B, 0 \leq s \leq t\}$  es acotado y  $S_2^*(t)B$  es precompacto. Para ello partiendo de (2.1.17) definimos

$$S_2^*(t)(v_0, T_0, S_0) = (v_2(t), T_2(t), S_2^2(t))$$

con

$$v_2(t) = \int_0^t e^{-\int_r^t G(v)} (\oint (T - S)(r) f) dr, \\ T_2(t) = \int_0^t [h(v(r)) e^{-\int_r^t h(v)} T_a(x - \int_r^t v)] dr$$

y

$$S_2^2(t) = \int_0^t e^{c \frac{\partial^2}{\partial x^2} (t-r)} F_2(r, v(r), S(r)) dr.$$

Por lo tanto, dado  $B \subset \mathcal{Y}$  acotado, teniendo en cuenta las expresiones de  $v_2$ ,  $T_2$  y  $S_2^2(t)$  se tiene que:

Por los Lemas anteriores, 2.1.1, 2.1.2 y 2.1.3,  $|v(t)|$ ,  $\|T(t)\|$  y  $\|S(t)\|$  están acotadas en tiempo finito, de hecho hemos visto que están uniformemente acotadas cuando el dato inicial se mueve en un acotado, lo que unido a la continuidad de las funciones  $G$ ,  $h$  y  $F_2$ , y a la propiedad de invarianza de la norma de  $T_a$  bajo traslaciones, nos permite concluir que el conjunto  $\{S_2^*(s)B, 0 \leq s \leq t\}$  está acotado en  $\mathcal{Y} = \mathbb{R} \times \dot{H}_{per}^2 \times \dot{L}_{per}^2$ .

Veamos ahora que el conjunto  $S_2^*(t)B$  es precompacto en  $\mathcal{Y} = \mathbb{R} \times \dot{H}_{per}^2 \times \dot{L}_{per}^2$ . Para lo cual estudiaremos por separado cada componente de  $S_2^*(t)$ . La primera proyección del conjunto  $S_2^*(t)B$ , que denotamos por  $v_2(t)B$ , acabamos de probar que es acotada y por tanto precompacta en  $\mathbb{R}$ , por lo que pasamos a estudiar la segunda proyección  $T_2(t)B$ .

Sea  $h^* = h^*(B)$  tal que para todo  $r \in [0, t]$  y para todo  $(v_0, T_0, S_0) \in B, 0 \leq h(v(r)) \leq h^*$ ; de aquí se tiene que

$$0 < h(v)e^{-\int_r^t h(v)} \leq h(v) \leq h^*.$$

Consideramos ahora el conjunto  $\mathcal{E}(T_a) = \{T_a(\cdot + k), k \in \mathbb{R}\}$ , que es compacto en  $\dot{H}_{per}^2$  por ser homeomorfo a la esfera  $\mathcal{E}^1$ . Entonces el integrando de la expresión de  $T_2(t)$  toma valores en  $[0, h^*].\mathcal{E}(T_a)$ , que es compacto y como consecuencia del Teorema de Mazur, se tiene que

$$\frac{1}{t} \int_0^t [h(v)e^{-\int_r^t h(v)} T_a(x - \int_r^t v)] dr \subset \overline{\text{co}}[0, h^*]\mathcal{E}(T_a)$$

donde  $\overline{\text{co}}[0, h^*]\mathcal{E}(T_a)$  es la envoltura convexa y cerrada que también es compacta en  $\dot{H}_{per}^2$ . Por lo tanto se tiene que  $T_2(t)B$  es precompacto en  $\dot{H}_{per}^2$ .

Por último veamos que  $S_2^*(t)B$  es precompacto en  $\dot{L}_{per}^2$ . De nuevo por los Lemas 2.1.1, 2.1.2 y 2.1.3, si consideramos  $F_2 : \mathbb{R}^- \times \mathbb{R} \times L_{per}^2 \rightarrow H_{per}^{-1}$ , existe una constante positiva  $K > 0$  tal que  $\|F_2(r, v(r), S(r))\|_{H_{per}^{-1}} \leq K$ , para todo  $r \in [0, t]$  y  $(v_0, T_0, S_0) \in B$ , acotado de  $\mathcal{Y}$ . Como consecuencia según vimos en (1.3.6), existe  $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$  tal que  $S_2^*(t)B$  está acotado en  $Z^\epsilon$ , espacio que representa el dominio del operador  $(-\frac{\partial^2}{\partial x^2})^\epsilon$ , dotado de la norma de la gráfica. Por lo tanto, teniendo en cuenta que  $Z^\epsilon \hookrightarrow \dot{L}_{per}^2$  con inclusión compacta (Proposición 0.1.1 del apéndice) tenemos que  $S_2^*(t)B$  es precompacto en  $\dot{L}_{per}^2$ . Como consecuencia  $S_2^*(t)B$  también lo es. De esta forma, tenemos el resultado buscado sin más que aplicar el Teorema 3.4.6. de [31]. Observamos además que por ser  $\mathcal{A}$  invariante se tiene que  $\mathcal{A} \subset \bigcap_{\eta > 0} \mathcal{B}_\eta = B$ .  $\square$

A continuación vamos a considerar los desarrollos de Fourier asociados a las funciones que intervienen en el sistema (1.1.1), representando temperatura y salinidad. Veremos las ecuaciones que verifican los coeficientes o modos de Fourier, correspondientes a estos desarrollos y trabajando con ellos obtendremos estimaciones de la norma de la solución, que recuperan y mejoran, de forma considerable en algunos casos, las obtenidas en la sección anterior por los métodos de estimaciones de energía. Estas estimaciones nos permitirán ver en primer lugar un efecto regularizante sobre la solución, a pesar de que la segunda componente  $T$  verifica una ecuación de transporte, lo cual nos llevará a probar un resultado sobre la regularidad del atractor maximal del Teorema 2.1.1. En una segunda

instancia, estas estimaciones sobre los modos de Fourier, nos llevarán a probar la existencia de variedades inerciales para el sistema. Por último veremos como determinar el comportamiento asintótico del sistema a través de “algunos” modos de  $f$  y  $T_a$ , en algunos casos.

Observemos que dada  $g \in \dot{H}_{per}^m$ , con  $m \geq 0$ , se puede desarrollar en serie de Fourier de forma que

$$g(x) = \sum_{k \in \mathcal{Z}^*} a_k e^{2\pi kix}, \text{ con } \mathcal{Z}^* = \mathcal{Z} \setminus \{0\}$$

donde  $\bar{a}_k = -a_k$ , ya que  $g$  es una función real. Además los coeficientes  $a_k$  verifican que  $\sum_{k \in \mathcal{Z}^*} k^{2m} |a_k|^2 < \infty$ , de forma que

$$\|g\|_{\dot{H}_{per}^m} = (2\pi)^m \left( \sum_{k \in \mathcal{Z}^*} k^{2m} |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En lo que sigue supondremos que las funciones  $T_a \in \dot{H}_{per}^2$  y  $f \in \dot{L}_{per}^2$  vienen dadas por los desarrollos de Fourier:

$$T_a(x) = \sum_{k \in \mathcal{Z}^*} b_k e^{2\pi kix} \text{ y } f(x) = \sum_{k \in \mathcal{Z}^*} c_k e^{2\pi kix}. \quad (2.1.18)$$

y representaremos los desarrollos de Fourier de las funciones  $T(t, x) \in \dot{H}_{per}^2$  y  $S(t, x) \in \dot{L}_{per}^2$  de la forma

$$T(t, x) = \sum_{k \in \mathcal{Z}^*} a_k(t) e^{2\pi kix}, \text{ y } S(t, x) = \sum_{k \in \mathcal{Z}^*} d_k(t) e^{2\pi kix}. \quad (2.1.19)$$

**Proposición 2.1.2** *Supongamos que la función  $h$  está acotada inferiormente por  $h_0 < 4c\pi^2$ ,  $T_a, T_0 \in \dot{H}_{per}^2$  y  $f, S_0 \in \dot{L}_{per}^2$  con  $T_0(x) = \sum_{k \in \mathcal{Z}^*} a_{k0} e^{2\pi kix}$  y  $S_0(x) = \sum_{k \in \mathcal{Z}^*} d_{k0} e^{2\pi kix}$ . Sea  $(v, T, S)$  la solución del sistema (1.1.1) dada por el Teorema 1.2.1 con este dato inicial. Entonces se tiene que*

i) *Los coeficientes  $a_k(t)$  y  $d_k(t)$  en (2.1.19), verifican las ecuaciones*

$$\dot{a}_k(t) + (2\pi kvi + h(v))a_k(t) = h(v)b_k, \quad k \in \mathcal{Z}^* \quad (2.1.20)$$

$$\dot{d}_k(t) + (2\pi kvi + 4c\pi^2 k^2)d_k(t) = -4b\pi^2 k^2 a_k(t), \quad k \in \mathcal{Z}^* \quad (2.1.21)$$

y la ecuación para  $v$  es

$$\dot{v}(t) + G(v)v = \sum_{k \in \mathcal{Z}^*} a_k(t)c_{-k} - \sum_{k \in \mathcal{Z}^*} d_k(t)c_{-k}. \quad (2.1.22)$$

ii) *Además se verifican las desigualdades*

$$|a_k(t)| \leq |a_{k0}| e^{-\int_0^t h(v)} + |b_k| \left( 1 - e^{-\int_0^t h(v)} \right). \quad (2.1.23)$$

$$|d_k(t)| \leq |d_{k0}|e^{-4c\pi^2 k^2 t} + |a_{k0}|\alpha_k(e^{-h_0 t} - e^{-4c\pi^2 k^2 t}) + \frac{b}{c}|b_k|(1 - e^{-4c\pi^2 k^2 t}) \quad (2.1.24)$$

con  $\alpha_k = \frac{4b\pi^2 k^2}{4c\pi^2 k^2 - h_0} > 0$ .

### Demostración:

i) Teniendo en cuenta que si  $U(t, x) = \sum_{k \in \mathcal{L}^*} u_k(t)e^{2\pi kix}$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t}(t, x) &= \sum_{k \in \mathcal{L}^*} \dot{u}_k(t)e^{2\pi kix}, & \frac{\partial U}{\partial x}(t, x) &= 2\pi i \sum_{k \in \mathcal{L}^*} k u_k(t)e^{2\pi kix} \\ & & \text{y } \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t, x) &= -4\pi^2 \sum_{k \in \mathcal{L}^*} k^2 u_k(t)e^{2\pi kix}, \end{aligned}$$

llevando los desarrollos de Fourier de las funciones  $T$ ,  $S$  y sus derivadas al sistema (1.1.1) respectivamente, se obtienen las ecuaciones (2.1.20) y (2.1.21) para los coeficientes de  $T$  y  $S$ .

Teniendo en cuenta ahora que

$$\oint (T - S)f = \sum_{k \in \mathcal{L}^*} (a_k(t) - d_k(t))\bar{c}_k$$

se obtiene la ecuación para  $v$ , (2.1.22).

ii) Integrando ahora (2.1.20) y (2.1.21) se tiene la expresión de los coeficientes, dada por:

$$a_k(t) = a_{k0}e^{-\int_0^t [2\pi kvi + h(v)]} + b_k \int_0^t h(v(s))e^{-\int_s^t [2\pi kvi + h(v)]} ds. \quad (2.1.25)$$

$$d_k(t) = d_{k0}e^{-4c\pi^2 k^2 t} e^{-\int_0^t 2\pi kvi} - 4b\pi^2 k^2 \int_0^t a_k(s)e^{-4c\pi^2 k^2 (t-s)} e^{-\int_s^t 2\pi kvi} ds. \quad (2.1.26)$$

La primera acotación (2.1.23) se obtiene directamente de (2.1.25), sin más que observar que

$$|e^{-\int_0^t 2\pi kvi}| = 1 \text{ y } \int_0^t h(v(s))e^{-\int_s^t h(v)} ds = 1 - e^{-\int_0^t h(v)} \quad (2.1.27)$$

Para obtener la segunda desigualdad sustituimos (2.1.25) en (2.1.26) y obtenemos que

$$|d_k(t)| \leq |d_{k0}|e^{-4c\pi^2 k^2 t} + 4b\pi^2 k^2 (|I_1(t)| + |I_2(t)|) \quad (2.1.28)$$

con

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \int_0^t a_{k0}e^{-\int_0^s [2\pi kvi + h(v)]} e^{-4c\pi^2 k^2 (t-s)} e^{-\int_s^t 2\pi kvi} ds, \\ I_2(t) &= b_k \int_0^t \left\{ e^{-4c\pi^2 k^2 (t-s)} e^{-\int_s^t 2\pi kvi} \left[ \int_0^s h(v(r))e^{-\int_r^s [2\pi kvi + h(v)]} dr \right] \right\} ds \end{aligned}$$

Observamos ahora que  $4c\pi^2 k^2 - h_0 > 0$  para todo  $k \neq 0$ , de esta forma se tiene que

$$|I_1(t)| \leq |a_{k0}| e^{-4c\pi^2 k^2 t} \int_0^t e^{(4c\pi^2 k^2 - h_0)s} ds = |a_{k0}| \beta_k (e^{-h_0 t} - e^{-4c\pi^2 k^2 t}) \quad (2.1.29)$$

con  $\beta_k = \frac{1}{4c\pi^2 k^2 - h_0} > 0$ .

Además

$$|I_2(t)| \leq |b_k| \int_0^t e^{-4c\pi^2 k^2(t-s)} \left( \int_0^s h(v(r)) e^{-\int_r^s h(v)} dr \right) ds$$

de donde, teniendo en cuenta de nuevo que

$$\int_0^s h(v(r)) e^{-\int_r^s h(v)} ds = 1 - e^{-\int_0^s h(v)} \leq 1$$

se obtiene  $|I_2(t)| \leq |b_k| \int_0^t e^{-4c\pi^2 k^2(t-s)} ds$ . Por lo tanto

$$4b\pi^2 k^2 |I_2(t)| \leq \frac{b}{c} |b_k| (1 - e^{-4c\pi^2 k^2 t}). \quad (2.1.30)$$

De esta forma sustituyendo las acotaciones para  $I_1(t)$  e  $I_2(t)$ , dadas por (2.1.29) y (2.1.30), en (2.1.28) se concluye la demostración.  $\square$

**Corolario 2.1.1** *Bajo las hipótesis y notaciones de la Proposición 2.1.2, para toda solución del sistema (1.1.1)  $(v, T, S)$  y para todo  $k \in \mathbb{Z}^*$  se tiene*

i)

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |a_k(t)| \leq |b_k|, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} |d_k(t)| \leq \frac{b}{c} |b_k|. \quad (2.1.31)$$

ii) Si  $|a_{k0}| \leq |b_k|$  y  $|d_{k0}| \leq \frac{b}{c} |b_k|$  entonces  $|a_k(t)| \leq |b_k|$  y  $|d_k(t)| \leq \frac{b}{c} |b_k|$  para todo  $t \geq 0$ .

iii) Para todo  $(v_0, T_0, S_0) \in \mathcal{A}$ , donde  $\mathcal{A}$  es el atractor maximal sobre el espacio  $\mathcal{Y} = \mathbb{R} \times \dot{H}_{per}^2 \times \dot{L}_{per}^2$ , dado por del Teorema 2.1.1, con  $T_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} a_k e^{2\pi k i x}$  y  $S_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} d_k e^{2\pi k i x}$ , se verifica

$$|a_k| \leq |b_k| \quad y \quad |d_k| \leq \frac{b}{c} |b_k|, \quad k \in \mathbb{Z}^*. \quad (2.1.32)$$

En particular si  $T_a \in \dot{H}_{per}^m$  con  $m \geq 2$ , el atractor maximal  $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathbb{R} \times \dot{H}_{per}^m \times \dot{H}_{per}^m$  y es compacto en ese espacio.

**Demostración:**

i) Este primer apartado se obtiene de forma inmediata a partir de la Proposición 2.1.2.

ii) Como consecuencia de (2.1.23) se tiene que

$$|a_k(t)| \leq |b_k| + e^{-\int_0^t h(v)} (|a_{k0}| - |b_k|)$$

de esta forma si  $|a_{k0}| \leq |b_k|$ , entonces  $|a_k(t)| \leq |b_k|$  para todo  $t \geq 0$  y para todo  $k \in \mathcal{Z}^*$ .

Llevando ahora la condición  $|a_k(t)| \leq |b_k|$  a la expresión para  $d_k$  dada por (2.1.26), se tiene que para todo  $k \in \mathcal{Z}^*$

$$|d_k(t)| \leq (|d_{k0}| - \frac{b}{c}|b_k|)e^{-4c\pi^2 k^2 t} + \frac{b}{c}|b_k|$$

de esta forma si  $|d_{k0}| \leq \frac{b}{c}|b_k|$  entonces  $|d_k(t)| \leq \frac{b}{c}|b_k|$  para todo  $t \geq 0$ .

iii) El conjunto  $\mathcal{B}_\eta$ , dado por (2.1.14), según vimos en la Proposición 2.1.1, es un acotado absorbente, de donde se tiene, [61]

$$\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B}_\eta) = \bigcap_{t>0} \overline{\bigcup_{s>t} S^*(s)\mathcal{B}_\eta}, \tag{2.1.33}$$

por tanto, dado  $(v_0, T_0, S_0) \in \mathcal{A}$  de (2.1.33), se deduce la existencia de  $(v_n, T_n, S_n) \in \mathcal{B}_\eta$  sucesión acotada (por serlo  $\mathcal{B}_\eta$ ) en  $\mathcal{Y}$  y  $t_n \rightarrow \infty$ , tal que:

$$S^*(t_n)(v_n, T_n, S_n) \rightarrow (v_0, T_0, S_0) \text{ si } n \rightarrow \infty \text{ en } \mathcal{Y}.$$

Con las notaciones de la Proposición 1.2.1, si

$$T_n(t, x) = \sum_{k \in \mathcal{Z}^*} a_k^n(t) e^{2\pi k i x} \text{ y } S_n(t, x) = \sum_{k \in \mathcal{Z}^*} d_k^n(t) e^{2\pi k i x}$$

para cada  $k \in \mathcal{Z}^*$  de (2.1.23) se obtiene

$$|a_k^n(t_n)| \leq |a_{k,0}^n| e^{-\int_0^{t_n} h(v_n(r)) dr} + |b_k| \left( 1 - e^{-\int_0^{t_n} h(v_n(r)) dr} \right).$$

y por (2.1.24)

$$\begin{aligned} |d_k^n(t_n)| &\leq |d_{k,0}^n| e^{-4c\pi^2 k^2 t_n} - |a_{k,0}^n| \alpha_k e^{-4c\pi^2 k^2 t_n} + \\ &+ |a_{k,0}^n| c_1 e^{-h_0 t_n} + \frac{b}{c}|b_k| - \frac{b}{c}|b_k| e^{-4c\pi^2 k^2 t_n} \end{aligned}$$

con  $|a_{k,0}^n| \leq M_k < \infty$ , y  $|d_{k,0}^n| \leq N_k < \infty$ .

Por tanto pasando al límite cuando  $n \rightarrow \infty$  se tiene que

$$|a_k| \leq |b_k| \text{ y } |d_k| \leq \frac{b}{c}|b_k|, k \in \mathcal{Z}^*.$$

y (2.1.32) queda probado.

Como consecuencia de (2.1.32), si  $T_a \in \dot{H}_{per}^m$ , teniendo en cuenta que  $\sum_{k \in \mathcal{Z}^*} k^{2m} |b_k|^2 < \infty$ , se tiene que  $T_0, S_0 \in \mathcal{C}$  con  $\mathcal{C} = \{T \in \dot{H}_{per}^m, |a_k| \leq d|b_k|\}$  donde  $d = \max\{1, \frac{b}{c}\}$ , que es un conjunto compacto en  $\dot{H}_{per}^m$ .  $\square$



## 2.2 Variedad inercial

En esta sección vamos a considerar el espacio de fases  $\mathcal{Y} = \mathbb{R} \times \dot{H}_{per}^m \times \dot{H}_{per}^{m-2}$ ,  $m \geq 2$  y vamos a probar que existe  $\mathcal{M}$  variedad inercial para el semigrupo  $S^*(t)$ ,  $t \geq 0$  en  $\mathcal{Y}$ , es decir,  $\mathcal{M}$  es una variedad topológica de  $\mathcal{Y}$ , ( la topología de  $\mathcal{M}$  es la inducida por  $\mathcal{Y}$ ) tal que:

i)  $S^*(t)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$  para todo  $t \geq 0$ .

ii) Existe  $M > 0$  verificando que para todo  $B \subset \mathcal{Y}$  acotado, existe  $C(B) \geq 0$  tal que:

$$dist(S^*(t), \mathcal{M}) \leq C(B)e^{-Mt}, t \geq 0$$

tal y como se puede ver en el apéndice, y en [21], [48], [49], [61].

Supondremos a partir de ahora que

$$T_a \in \dot{H}_{per}^m \text{ con } T_a(x) = \sum_{k \in K} b_k e^{2\pi kix}, \quad b_k \neq 0 \text{ para todo } k \in K \subset \mathbb{Z}$$

con  $0 \notin K$ , ya que  $\oint T_a = 0$ . Denotamos por  $V_m$  al cierre del subespacio vectorial de  $\dot{H}_{per}^m$  generado por  $\{e^{2\pi kix}, k \in K\}$ , es decir

$$\underline{V}_m = \overline{L\{e^{2\pi kix}, k \in K\}} \tag{2.2.1}$$

y por  $V_{m-2}$  al cierre de dicho subespacio vectorial en  $\dot{H}_{per}^{m-2}$ .

**Teorema 2.2.1** *Siguiendo las notaciones de la Proposición 2.1.2, supongamos que  $T_a \in \dot{H}_{per}^m$  y  $f \in \dot{L}_{per}^2$ . Entonces el conjunto*

$$\mathcal{M} = \mathbb{R} \times V_m \times V_{m-2}$$

*es una variedad inercial para el flujo de  $S^*(t)(v_0, T_0, S_0) = (v(t), T(t), S(t))$  en el espacio  $\mathcal{Y} = \mathbb{R} \times \dot{H}_{per}^m \times \dot{H}_{per}^{m-2}$ .*

*Si  $K$  es finito la dimensión de  $\mathcal{M}$  es  $2|K| + 1$ .*

**Demostración:**

Siguiendo las notaciones de la Proposición 2.1.2, sean

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} c_k e^{2\pi kix}, T_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} a_{k0} e^{2\pi kix} \text{ y } S_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} d_{k0} e^{2\pi kix}$$

con  $T(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} a_k(t) e^{2\pi kix}$  y  $S(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} d_k(t) e^{2\pi kix}$ .

i) Vamos a ver en primer lugar que  $\mathcal{M}$  es invariante.

Basta con observar que si  $k \notin K$ , entonces  $b_k = 0$ , y por lo tanto si  $a_{k0} = 0$ , de la acotación de  $a_k(t)$  dada por (2.1.23), se sigue que  $a_k(t) = 0$  para todo instante de tiempo  $t$ . Como consecuencia, si  $b_k = a_{k0} = d_{k0} = 0$  de la acotación de  $d_k(t)$ , dada por (2.1.24), obtenemos que  $d_k(t) = 0$  para todo  $t$ . De esta forma si  $(v_0, T_0, S_0) \in \mathcal{M}$ , entonces  $(v(t), T(t), S(t)) \in \mathcal{M}$  para todo  $t$ , es decir, es invariante.

ii) Por el apartado anterior el flujo sobre  $\mathcal{M}$  viene dado por

$$\begin{aligned} \dot{v} + G(v)v &= \sum_{k \in K} a_k(t) \cdot c_{-k} - \sum_{k \in K} d_k(t) \cdot c_{-k} \\ \dot{a}_k(t) + (2\pi kvi + h(v))a_k(t) &= h(v)b_k, \quad k \in K \\ \dot{d}_k(t) + (2\pi kvi + 4c\pi^2 k^2)d_k(t) &= -4b\pi^2 k^2 a_k(t), \quad k \in K. \\ a_k &= d_k = 0, \quad k \notin K \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Consideramos ahora la siguiente descomposición en  $\dot{H}_{per}^m$ ,  $T = T_1 + T_2$ , donde  $T_1$  es la proyección de  $T$  sobre  $V_m$  y  $T_2$  la proyección de  $T$  sobre el subespacio generado por  $\{e^{2\pi kix}, k \in \mathcal{Z}^* \setminus K\}$  es decir

$$T_1 = \sum_{k \in K} a_k e^{2\pi kix} \text{ y } T_2 = \sum_{k \in \mathcal{Z}^* \setminus K} a_k e^{2\pi kix} = T - T_1.$$

Análogamente consideramos la descomposición  $S = S_1 + S_2$  en  $\dot{H}_{per}^2$  donde  $S_1$  es la proyección de  $S$  sobre  $\underline{V}_{m-2}$ , es decir  $S_1 = \sum_{k \in K} d_k e^{2\pi kix}$ .

De esta forma dado  $(v_0, T_0, S_0) \in \mathcal{Y}$  descomponemos  $T_0 = T_{01} + T_{02}$ ,  $S_0 = S_{01} + S_{02}$  y  $T(t) = T_1(t) + T_2(t)$ ,  $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$  y consideramos  $(v(t), T_1(t), S_1(t)) \in \mathcal{M}$  de forma que

$$(v(t), T(t), S(t)) - (v(t), T_1(t), S_1(t)) = (0, T_2(t), S_2(t)).$$

Veamos que el segundo miembro tiende a cero exponencialmente, para ello observamos en primer lugar que  $T_a = T_{a1} + T_{a2}$  con  $T_{a1} = T_a$  y  $T_{a2} = 0$ , y en particular teniendo en cuenta que  $b_k = 0$  para  $k \in \mathcal{Z}^* \setminus K$  y  $h \geq h_0 > 0$ , por (2.1.23), se tiene que

$$|a_k(t)| \leq |a_{k0}| e^{-h_0 t}$$

de donde obtenemos  $\|T_2(t)\|_{\dot{H}_{per}^m} \leq \|T_{20}\|_{\dot{H}_{per}^m} e^{-h_0 t}$  es decir,  $T_2(t) \rightarrow 0$  en  $\dot{H}_{per}^m$  si  $t \rightarrow \infty$ , con tasa  $e^{-h_0 t}$ .

Por otra parte se tiene que  $S_2(t) = \sum_{k \in \mathcal{Z}^* \setminus K} d_k(t) e^{2\pi kix}$  de donde

$$\|S_2(t)\|_{\dot{H}^{m-2}}^2 = (2\pi)^{2(m-2)} \sum_{k \in \mathcal{Z}^* \setminus K} k^{2(m-2)} |d_k(t)|^2.$$

Teniendo en cuenta de nuevo que  $b_k = 0$  para  $k \in \mathcal{Z}^* \setminus K$ , por la acotación de  $d_k(t)$  (2.1.24) de la Proposición 2.1.2, junto con  $(a + b + c)^2 \leq 4(a^2 + b^2 + c^2)$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{Z}^* \setminus K} k^{2(m-2)} |d_k(t)|^2 &\leq 4 \sum_{k \in \mathcal{Z}^* \setminus K} k^{2(m-2)} |d_{k0}|^2 e^{-8c\pi^2 k^2 t} + \\ &+ 4^3 b^2 \pi^4 \sum_{k \in \mathcal{Z}^* \setminus K} k^{2m} \frac{|a_{k0}|^2}{(4c\pi^2 k^2 - h_0)^2} e^{-8c\pi^2 k^2 t} + \\ &+ 4^3 b^2 \pi^4 e^{-2h_0 t} \sum_{k \in \mathcal{Z}^* \setminus K} \frac{k^{2m} |a_{k0}|^2}{(4c\pi^2 k^2 - h_0)^2}. \end{aligned}$$

Puesto que  $h_0 < 4c\pi^2$  existe una constante  $\beta_1 > 0$  tal que,  $\frac{1}{(4c\pi^2 k^2 - h_0)^2} \leq \beta_1$  para todo  $k \in \mathcal{Z}^* \setminus K$ , además por ser  $k \neq 0$  se tiene que  $e^{-8c\pi^2 k^2 t} \leq e^{-8c\pi^2 t}$  para todo  $k \in \mathcal{Z}^*$ . De esta forma obtenemos:

$$\|S_2(t)\|_{H^{m-2}}^2 \leq 4\|S_{20}\|_{H^{m-2}}^2 e^{-8c\pi^2 t} + 64b^2 \pi^4 \beta_1 (\|T_{20}\|_{H^m}^2 e^{-8c\pi^2 t} + \|T_{20}\|_{H^m}^2 e^{-2h_0 t}). \quad (2.2.3)$$

Por lo tanto, se tiene que  $\|S_2(t)\|_{H^{m-2}} \mapsto 0$  si  $t \mapsto \infty$  con tasa exponencial  $e^{-hot}$ . Es decir

$$(v(t), T(t), S(t)) - (v(t), T_1(t), S_1(t)) \mapsto (0, 0, 0)$$

en  $\mathcal{Y}$  cuando  $t \mapsto \infty$  con tasa exponencial  $e^{-hot}$ .  $\square$

**Observación 2.2.1** *Bajo las hipótesis y notaciones del Teorema 2.2.1, supongamos además que*

$$f(x) = \sum_{k \in J} c_k e^{2\pi kix}, \quad \text{con } c_k \neq 0 \text{ para todo } k \in J \subset \mathcal{Z}$$

entonces

$$\oint (T - S)f = \sum_{k \in \mathcal{Z}^*} (a_k - d_k)(t) \bar{c}_k = \sum_{k \in J} a_k(t) \cdot c_{-k} - \sum_{k \in J} d_k(t) \cdot c_{-k}.$$

De esta forma se tiene que el flujo del sistema (1.1.1) sobre la variedad inercial  $\mathcal{M}$ , es equivalente a

$$\begin{aligned} \dot{v} + G(v)v &= \sum_{k \in K \cap J} a_k(t) \cdot c_{-k} - \sum_{k \in K \cap J} d_k(t) \cdot c_{-k} \\ \dot{a}_k(t) + (2\pi kvi + h(v))a_k(t) &= h(v)b_k, \quad k \in K \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

$$\dot{d}_k(t) + (2\pi kvi + 4c\pi^2 k^2)d_k(t) = -4b\pi^2 k^2 a_k(t), \quad k \in K.$$

En (2.2.4) vemos como la evolución de la velocidad  $v$ , va a depender únicamente de los coeficientes de  $T$  y  $S$ , que pertenecen al conjunto  $K \cap J$ . El subconjunto de ecuaciones

de (2.2.4) con  $k \in K \cap J$ , además de la ecuación de  $v$ , forman un subsistema de ecuaciones acopladas. Una vez resuelto éste, las ecuaciones correspondientes a  $k \in K \setminus (K \cap J)$  son ecuaciones lineales no autónomas. Puede ocurrir que  $K$  y  $J$  sean conjuntos infinitos pero su intersección sea finita. Este caso concreto es particularmente interesante, como vamos a ver en el Corolario siguiente y un ejemplo en el que se tiene esta situación es el caso de un circuito circular donde  $f(x) \sim a \sin(x) + b \cos(x)$ , es decir  $J = \{\pm 1\}$ .

Observamos también que  $0 \notin K \cap J$  y si  $k \in K \cap J$ , también  $-k$ , está en este conjunto, ya que  $K = -K$  y  $J = -J$ , por lo que el conjunto  $K \cap J$  tiene cardinal par, que notaremos por  $2n_0$ . De esta forma el conjunto  $(K \cap J)_+$  que representa los elementos positivos de  $K \cap J$ , tiene cardinal  $n_0$ .

**Corolario 2.2.1** *Bajo las notaciones e hipótesis del Teorema 2.2.1, supongamos además que el conjunto  $K \cap J$  es finito y que  $\text{card}(K \cap J) = 2n_0$ .*

Entonces, el comportamiento asintótico del sistema (1.1.1), viene dado por un sistema de  $N = 4n_0 + 1$  ecuaciones acopladas, en  $\mathbb{R}^N$ , que determinan  $(v, a_k, d_k)$ ,  $k \in K \cap J$ , y una familia de  $|K \setminus (K \cap J)|$  ecuaciones lineales no autónomas, desacoplada con el sistema anterior.

**Demostración:**

Teniendo en cuenta que las ecuaciones para  $a_{-k}$  y  $d_{-k}$  son conjugadas de las que determinan  $a_k$  y  $d_k$ , resolviendo el sistema que determina  $a_k$  y  $d_k$ ,  $k \in (K \cap J)_+$ , se conocen todos los coeficientes  $a_k$  y  $d_k$  para  $k \in K \cap J$ . Como consecuencia de que  $\overline{a_k(t)} = a_{-k}(t)$ ,  $\overline{d_k(t)} = d_{-k}(t)$  y  $\overline{c_k} = c_{-k}$ , se tiene además que

$$\sum_{k \in K \cap J} a_k(t) c_{-k} = \sum_{k \in (K \cap J)_+} a_k(t) c_{-k} + \sum_{k \in (K \cap J)_-} a_k(t) c_{-k} = 2 \text{Re} \left( \sum_{k \in (K \cap J)_+} a_k(t) c_{-k} \right)$$

y análogamente

$$\sum_{k \in K \cap J} d_k(t) c_{-k} = 2 \text{Re} \left( \sum_{k \in (K \cap J)_+} d_k(t) c_{-k} \right).$$

Para terminar la demostración basta con recordar que el flujo del sistema (1.1.1), sobre la variedad inercial  $\mathcal{M}$  viene dado por (2.2.2), lo cual es equivalente a:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + G(v)v = 2 \text{Re} \left( \sum_{k \in (K \cap J)_-} a_k(t) c_{-k} \right) - 2 \text{Re} \left( \sum_{k \in (K \cap J)_+} d_k(t) c_{-k} \right) \\ \dot{a}_k(t) + (2\pi k v i + h(v)) a_k(t) = h(v) b_k, \quad k \in (K \cap J)_+ \\ \dot{d}_k(t) + (2\pi k v i + 4c\pi^2 k^2) d_k(t) = -4b\pi^2 k^2 a_k(t), \quad k \in (K \cap J)_+ \end{cases} \quad (2.2.5)$$

que es un sistema acoplado de  $2n_0 + 1$  ecuaciones en  $\mathbb{R} \times \mathcal{C}^{2n_0}$ , que determinan  $v, a_k$  y  $d_k$  para  $k \in K \cap J$ , junto con la familia de ecuaciones lineales no autónomas dada por

$$\begin{cases} \dot{a}_k(t) + (2\pi kvi + h(v))a_k(t) = h(v)b_k, & k \in K \setminus (K \cap J) \\ \dot{d}_k(t) + (2\pi kvi + 4c\pi^2 k^2)d_k(t) = -4b\pi^2 k^2 a_k(t), & k \in K \setminus (K \cap J) \\ a_k = d_k = 0, k \notin K \end{cases} \quad (2.2.6)$$

Escribiendo las variables en parte real e imaginaria

$$a_k(t) = a_1^k(t) + ia_2^k(t), b_k = b_1^k + ib_2^k, c_k = c_1^k + ic_2^k, d_k(t) = d_1^k(t) + id_2^k(t)$$

el sistema (2.2.5) es equivalente al sistema en  $\mathbb{R}^N$ , con  $N = 4n_0 + 1$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} + G(v)v(t) &= 2 \sum_{k \in (K \cap J)_+} [a_2^k(t)c_2^k - a_1^k(t)c_1^k] - 2 \sum_{k \in (K \cap J)_+} [d_2^k(t)c_2^k - d_1^k(t)c_1^k] \\ \dot{a}_1^k(t) + [h(v(t))a_1^k(t) - 2\pi kv(t)a_2^k(t)] &= h(v(t))b_1^k, \quad k \in (K \cap J)_+ \\ \dot{a}_2^k(t) + [2\pi kv(t)a_1^k(t) + h(v(t))a_2^k(t)] &= h(v(t))b_2^k, \quad k \in (K \cap J)_+ \\ \dot{d}_1^k(t) + [4c\pi^2 k^2 d_1^k(t) - 2\pi kv(t)d_2^k(t)] &= -4b\pi^2 k^2 a_1^k(t), \quad k \in (K \cap J)_+ \\ \dot{d}_2^k(t) + [4c\pi^2 k^2 d_2^k(t) + 2\pi kv(t)d_1^k(t)] &= -4b\pi^2 k^2 a_2^k(t), \quad k \in (K \cap J)_+. \quad \square \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

**Corolario 2.2.2** *Supongamos además que  $K \cap J = \emptyset$ , entonces el atractor global viene dado por  $\mathcal{A} = \{(0, T_a, \frac{b}{c}T_a)\}$ . Por tanto para todo  $(v_0, T_0, S_0) \in \mathbb{R} \times \dot{H}_{per}^2 \times \dot{L}_{per}^2$  se tiene que la solución correspondiente verifica:*

$$v(t) \mapsto 0, T(t) \mapsto T_a \text{ en } \dot{H}_{per}^2 \text{ y } S(t) \mapsto \frac{b}{c}T_a \text{ en } \dot{L}_{per}^2.$$

**Demostración:**

Si  $K \cap J = \emptyset$ , entonces de la primera ecuación de (2.2.5), se tiene que la ecuación para el flujo de  $v$  sobre la variedad inercial es:

$$\frac{dv}{dt} + G(v)v = 0$$

de donde  $v(t) = v_0 e^{-\int_0^t G(v)} \mapsto 0$  si  $t \mapsto \infty$ .

En primer lugar, teniendo en cuenta que  $\int_0^\infty |v| < \infty$ , ya que  $v(t) \mapsto 0$  exponencialmente con  $t \mapsto \infty$ , dado  $\epsilon > 0$  existe  $t_0 > 0$  suficientemente grande tal que si  $t_0 \leq r \leq t$  entonces,  $|\int_r^t v|$ , es arbitrariamente pequeño, de forma que por el Lema 1.1.1 se tiene que

$$\|T_a(\cdot - \int_r^t v) - T_a(\cdot)\|_{\dot{H}_{per}^2} \leq \frac{\epsilon}{4}. \quad (2.2.8)$$

Para  $t \geq t_0$  tenemos

$$T(t, x) = T(x - \int_{t_0}^t v, t_0) e^{-\int_{t_0}^t h(v)} + \int_{t_0}^t [h(v(r)) e^{-\int_r^t h(v)} T_a(x - \int_r^t v)] dr, \quad (2.2.9)$$

como consecuencia de (2.2.8), vamos a probar que

$$T(t, x) - (1 - e^{-\int_{t_0}^t h(v)}) T_a(x) \mapsto 0 \text{ si } t \mapsto \infty \text{ en } \dot{H}_{per}^2. \quad (2.2.10)$$

De esta forma teniendo en cuenta que

$$\|T(t) - T_a\|_{\dot{H}_{per}^2} \leq \|T(t) - (1 - e^{-\int_{t_0}^t h(v)}) T_a\|_{\dot{H}_{per}^2} + \|T_a\|_{\dot{H}_{per}^2} e^{-\int_{t_0}^t h(v)}$$

junto con el hecho de que  $\|T_a\|_{\dot{H}_{per}^2} e^{-\int_{t_0}^t h(v)} \mapsto 0$  si  $t \mapsto \infty$ , se tiene que probando (2.2.10) tenemos demostrada la convergencia de  $T$  a  $T_a$  en  $\dot{H}_{per}^2$ .

Para probar (2.2.10), de (2.2.9) observamos que

$$T(t, x) - (1 - e^{-\int_{t_0}^t h(v)}) T_a(x) = T(x - \int_{t_0}^t v, t_0) e^{-\int_{t_0}^t h(v)} + \int_{t_0}^t [h(v(r)) e^{-\int_r^t h(v)} (T_a(x - \int_r^t v) - T_a(x))] dr$$

de donde

$$\begin{aligned} \|T(t) - (1 - e^{-\int_{t_0}^t h(v)}) T_a\|_{\dot{H}_{per}^2} &\leq \|T(t_0)\|_{\dot{H}_{per}^2} e^{-\int_{t_0}^t h(v)} + \\ &+ \int_{t_0}^t [h(v(r)) e^{-\int_r^t h(v)} \|T_a(\cdot - \int_r^t v) - T_a(\cdot)\|_{\dot{H}_{per}^2}] dr. \end{aligned}$$

Aplicando ahora (2.2.8), se tiene que

$$\|T(t, x) - (1 - e^{-\int_{t_0}^t h(v)}) T_a\|_{\dot{H}_{per}^2} \leq C e^{-\int_{t_0}^t h(v)} + \frac{\epsilon}{4} (1 - e^{-\int_{t_0}^t h(v)})$$

de esta forma, tomando  $t \mapsto \infty$  y utilizando el hecho de que  $\epsilon$  es arbitrario concluye la prueba de (2.2.10).

Para terminar la demostración vamos a ver que  $S \mapsto \frac{b}{c} T_a$  en  $\dot{L}_{per}^2$ . Para ello observamos en primer lugar que  $S - \frac{b}{c} T_a$  verifica la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial(S - \frac{b}{c} T_a)}{\partial t} - c \frac{\partial^2(S - \frac{b}{c} T_a)}{\partial x^2} = -v \frac{\partial S}{\partial x} - b \frac{\partial^2(T - T_a)}{\partial x^2} \quad (2.2.11)$$

multiplicando dicha ecuación por  $S - \frac{b}{c} T_a$  en  $\dot{L}_{per}^2$  y teniendo en cuenta, que por la periodicidad de  $S$ ,  $\oint \frac{\partial S}{\partial x} S = 0$ , se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|S - \frac{b}{c} T_a\|^2 + c \|\frac{\partial}{\partial x} (S - \frac{b}{c} T_a)\|^2 = \frac{b}{c} v(t) \oint \frac{\partial S}{\partial x} T_a + b \oint \frac{\partial}{\partial x} (T - T_a) \frac{\partial}{\partial x} (S - \frac{b}{c} T_a).$$

Observamos que

$$\frac{b}{c}v(t) \oint \frac{\partial S}{\partial x} T_a = -\frac{b}{c}v(t) \oint S \frac{\partial T_a}{\partial x} \mapsto 0 \text{ si } t \mapsto \infty$$

ya que  $\|S(t)\| \leq M$  para todo  $t \geq 0$  y  $v(t) \mapsto 0$  si  $t \mapsto \infty$ .

Por otro lado, aplicando la desigualdad de Young, tenemos que

$$b \left| \oint \frac{\partial}{\partial x} (T - T_a) \frac{\partial}{\partial x} (S - \frac{b}{c} T_a) \right| \leq \frac{c}{2} \left\| \frac{\partial}{\partial x} (S - \frac{b}{c} T_a) \right\|^2 + \frac{b^2}{2c} \left\| \frac{\partial}{\partial x} (T - T_a) \right\|^2.$$

Por lo tanto dado  $\epsilon > 0$  teniendo en cuenta que  $T(t) \mapsto T_a$  en  $H_{per}^2$ , y  $v(t) \mapsto 0$  si  $t \mapsto \infty$ , obtenemos  $t_0 > 0$  suficientemente grande, tal que para todo  $t \geq t_0$ , se tiene que

$$\left| \frac{b}{c}v(t) \oint \frac{\partial S}{\partial x} T_a \right| + \frac{b^2}{2c} \left\| \frac{\partial}{\partial x} (T - T_a) \right\|^2 \leq \frac{\epsilon}{4}$$

de esta forma aplicando la desigualdad de Poincare, se obtiene  $c^* > 0$  tal que  $u(t) = \|S - \frac{b}{a} T_a\|^2$  verifica

$$\dot{u} + c^* u \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ para todo } t \geq t_0.$$

De esta forma por el Lema de Gronwall se tiene que

$$u(t) \leq u(t_0) e^{-c^*(t-t_0)} + \frac{\epsilon}{2} (1 - e^{-c^*(t-t_0)})$$

de donde se deduce que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |u(t)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

para todo  $\epsilon > 0$ .  $\square$

Como consecuencia del Corolario 2.2.2, tenemos el siguiente resultado que complementa a la Proposición 1.3.1 de la sección anterior.

**Corolario 2.2.3** *Si en las variables originales suponemos que  $T_a$  es constante, entonces para todo  $(v_0, T_0, S_0) \in \mathbb{R} \times \dot{H}_{per}^2 \times \dot{L}_{per}^2$  tal que  $\oint S_0 = m_0$ , se tiene que la solución asociada a ese dato inicial verifica:*

$$v(t) \mapsto 0, T(t) \mapsto T_a \text{ en } H_{per}^2 \text{ y } S(t) \mapsto m_0 \text{ en } \dot{L}_{per}^2.$$

**Demostración:**

Si hacemos el cambio de variable  $\tau = T - \oint T$  y  $\sigma = S - m_0$ , se tiene que  $\tau_a \equiv 0$  de donde  $K \cap J = \emptyset$ , y por tanto estamos en las hipótesis del Corolario 2.2.2, según el cual se tiene que:

$$v(t) \mapsto 0, \tau(t) = T - \oint T \mapsto \tau_a = 0, \sigma(t) \mapsto \frac{b}{a} \tau_a = 0$$

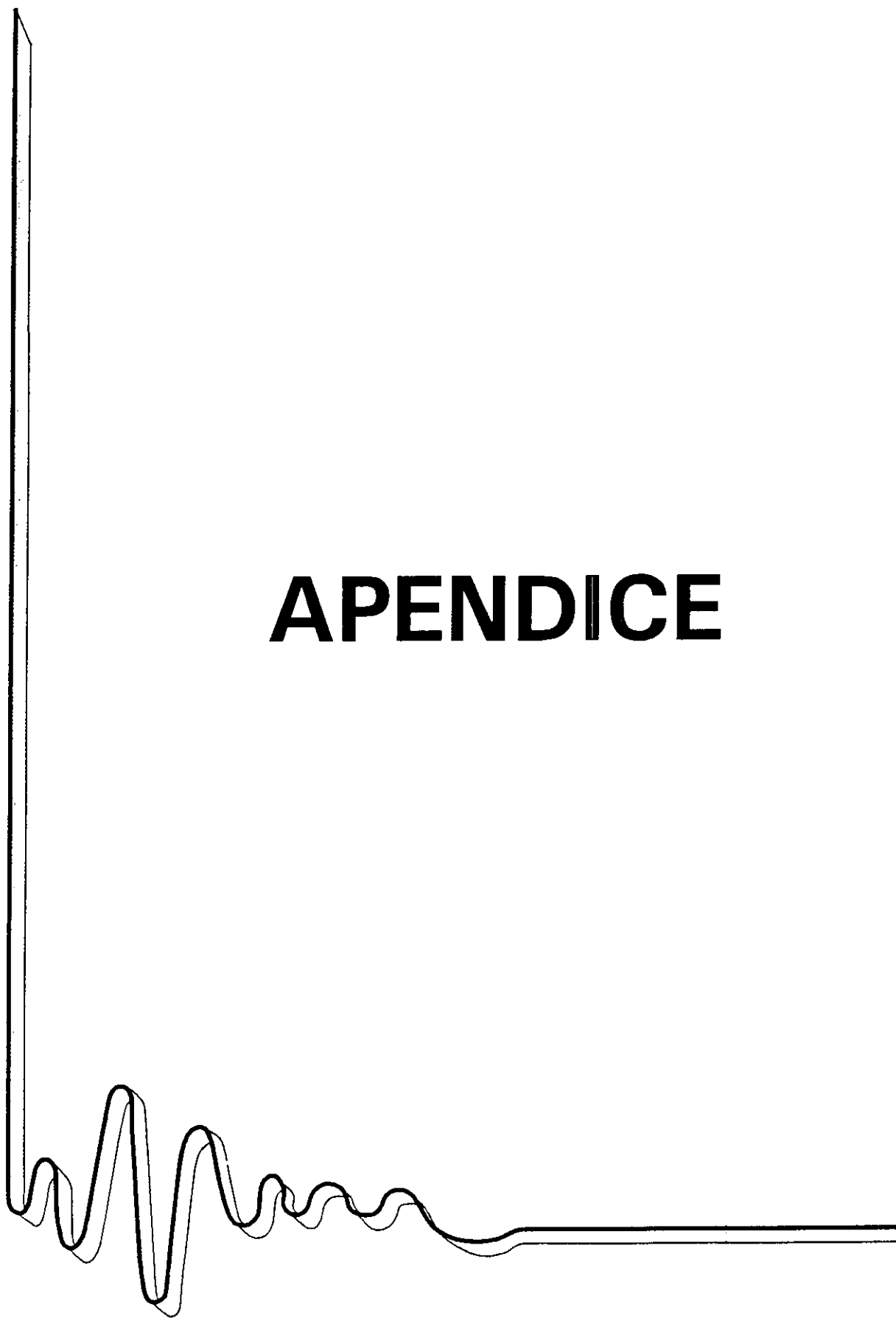
cuando  $t \mapsto \infty$ . Teniendo en cuenta ahora que  $\oint T \mapsto \oint T_a = T_a$  con  $t \mapsto \infty$ , (lo cual se obtiene como consecuencia de la ecuación para  $\oint T$  dada por (2.1.1)), se tiene que:

$$\underline{T(t) \mapsto T_a, \text{ y } S(t) \mapsto m_0}$$

lo que concluye la demostración.  $\square$



# APENDICE





## 0.1 Operadores sectoriales

### 0.1.1 Definición de operador sectorial

Diremos que un operador lineal  $A$  en un espacio de Banach  $X$  es un **operador sectorial** si es cerrado, con dominio denso y existe un  $\phi$  en  $(0, \frac{\pi}{2})$ , una constante  $M \geq 1$  y un número real  $a$ , tal que el sector

$$S_{a,\phi} = \{ \lambda \in \mathbb{C}, \quad \phi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a \}$$

está contenido en la resolvente de  $A$  y se tiene que

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|} \text{ para todo } \lambda \in S_{a,\phi}, [31].$$

### 0.1.2 Escala de espacios de interpolación

En primer lugar vamos a ver la definición de las potencias fraccionarias de operadores sectoriales y a continuación la de los espacios de interpolación asociados a un operador sectorial, [1], [2], [31], [50], [56].

**Definición 0.1.1** Dado  $A$  operador sectorial en un espacio de Banach  $X$  con  $\text{Re}\sigma(A) > 0$ , para todo  $\alpha > 0$  se define

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-At} dt.$$

$A^\alpha = (A^{-\alpha})^{-1}$  es el operador inverso de  $A^{-\alpha}$ , con  $D(A^\alpha) = R(A^{-\alpha})$ ,  $A^0 \equiv$  la identidad en  $X$ .

**Definición 0.1.2** Dado  $A$  operador sectorial en un espacio de Banach  $X$ , para cada  $\alpha \geq 0$ , se define  $X^\alpha = D(A_a^\alpha)$  con la gráfica de la norma, es decir

$$\|x\|_\alpha = \|A_a^\alpha x\|, x \in X^\alpha, \text{ donde } A_a = A + aI \text{ con } a \geq 0 \text{ tal que } \sigma(A_a) > 0. \quad (0.1.1)$$

La familia  $\{X^\alpha\}_{\alpha \geq 0}$  se denomina cadena de espacios de potencias fraccionarias asociadas al operador  $A$ .

Se tienen los siguientes resultados, probados en [31].

**Proposición 0.1.1** Si  $A$  es un operador sectorial sobre un espacio de Banach  $X$ , se tiene que:

i) Para cada  $\alpha \geq 0$ , la norma definida en (0.1.1), es independiente de la elección de  $a$ . Además  $X^\alpha$  es un espacio de Banach, con dicha norma.

ii) El espacio  $X^0 = X$ , y para  $\alpha \geq \beta \geq 0$ ,  $X^\alpha$  es un subespacio denso de  $X^\beta$  con inclusión continua.

Además si  $\alpha$  y  $\beta \in \mathbb{R}^+$  y  $\theta \in [0, 1]$ , entonces para todo  $x \in X^\gamma$  con  $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$ , existe una constante  $C > 0$  que depende de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\theta$ , denominada constante de interpolación, tal que:

$$\|x\|_{\theta\alpha+(1-\theta)\beta} \leq C \|x\|_\alpha^\theta \|x\|_\beta^{1-\theta}.$$

iii) Si  $A$  tiene resolvente compacta, la inclusión  $X^\alpha \subset X^\beta$  es compacta siempre que  $\alpha > \beta \geq 0$ .

iv) El operador  $A$  es un operador sectorial en  $X^\alpha$  para todo  $\alpha \geq 0$ .  $\square$

**Lema 0.1.1** Supongamos que  $A$  es un operador sectorial y que  $\text{Re}(\sigma(A)) > \delta > 0$ . Entonces para todo  $\alpha \geq 0$  existe  $c_\alpha > 0$  tal que:

$$\|A^\alpha e^{-At}\| \leq c_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t} \text{ para todo } t > 0$$

Si  $0 < \alpha \leq 1$ , y  $w \in D(A^\alpha)$ , entonces

$$\|(e^{-At} - I)w\| \leq \frac{1}{\alpha} c_{1-\alpha} t^\alpha \|A^\alpha w\|$$

Además  $c_\alpha$  está acotada si  $\alpha$  se mueve en cualquier intervalo compacto de  $(0, \infty)$ , incluso permanece acotada si  $\alpha \rightarrow 0^+$ , donde  $e^{-At}$  representa el semigrupo analítico asociado a  $A$ , [1], [2], [31], [50].

**Demostración:** Este resultado está probado en el Teorema 1.4.3. pag 26 de [31].

Consideraremos el caso particular en el que  $X$ , es un espacio de Sobolev,  $W^{m,p}(\Omega)$  con  $m \geq 2$  un número entero,  $p$  un número real con  $1 < p \leq \infty$  y  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . Se define según podemos ver en [5], [24].

$$W^{1,p} = \left\{ u \in L^p(\Omega), \exists g_i \in L^p(\Omega) \text{ con } \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_\Omega g_i \varphi, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall i = 1, 2, \dots, N \right\} \quad (0.1.2)$$

se nota  $g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$  y  $\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$ , con esta notación se tiene que

$$W^{1,p} = \{ u \in L^p(\Omega), \nabla u \in L^p(\Omega) \}$$

El espacio  $W^{1,p}$  dotado de la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

es un espacio de Banach reflexivo para  $1 < p \leq \infty$ , y separable para  $1 < p < \infty$ .

Notaremos  $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ , que es un espacio de Hilbert separable, con el producto escalar:

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2}.$$

Dado  $m \geq 2$ , se define por recurrencia

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega), i = 1, 2, \dots, N \right\}$$

o equivalentemente

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N), |\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i \leq m \right\} \quad (0.1.3)$$

estos espacios dotados de la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

son espacios de Banach.

Los espacios  $H^m(\Omega) = \underline{W^{m,2}(\Omega)}$  dotados del producto escalar

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$$

son espacios de Hilbert.

El siguiente resultado basado en desigualdades de interpolación de tipo Gagliardo-Nirenberg, se puede encontrar en [42], nos será de utilidad.

**Lema 0.1.2** *Dados,  $k$  un número entero positivo,  $p \geq 1, r \leq \infty$  y  $j = 0, \dots, k$ . Definimos*

$$\frac{1}{q} = \frac{j}{k} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r}.$$

*Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un dominio abierto acotado y regular, si  $u \in W^{k,p}(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ , entonces para todo multiíndice  $\sigma$ , tal que  $|\sigma| = j$ ,  $D^\sigma u \in L^q(\Omega)$ . y*

$$\|D^\sigma u\|_{L^q} \leq C \sum_{|\mu|=k} \|D^\mu u\|_{L^p}^{\frac{j}{k}} \|u\|_{L^r}^{1-\frac{j}{k}},$$

con  $C > 0$  independiente de  $u$ .  $\square$

Vamos a ver algunos resultados sobre los espacios de potencias asociados al operador sectorial  $-\Delta_B$ , donde el subíndice  $B$  del laplaciano representa la condición de frontera considerada, de forma que  $B = D$  hace referencia a una condición de tipo Dirichlet,  $B = N$  a una condición de tipo Neumann, y  $B = P$  representa a las condiciones periódicas.

**Proposición 0.1.2** Si  $1 < p < \infty$ , el operador  $-\Delta_B$  en  $X^0 = L_B^p$  con dominio  $X^1 = W_B^{2,p}$  es un operador sectorial con resolvente compacta.

Más aún, si consideramos  $\mu > 0$  tal que  $\sigma(-\Delta_B + \mu I) > 0$ , los espacios de potencias fraccionarias  $X_B^\alpha = W_B^{2\alpha,p} = D[(-\Delta_B + \mu I)^\alpha]$ , dotados con la norma del grafo que notaremos por  $\|\cdot\|_{W_B^{2\alpha,p}}$  (o simplemente  $\|\cdot\|_\alpha$ ), para  $\alpha > 0$  y  $\|\cdot\|_{L_B^p}$  (o  $\|\cdot\|$ ), están bien definidos verificando además que

$$W_B^{2\alpha,p} \subset W^{2\alpha,p}(\Omega) \quad (\text{o } W_{per}^{2\alpha,p}(\Omega) \text{ si } B = P) \quad (0.1.4)$$

con inclusión continua para todo  $\alpha \in [0, 1]$ , donde  $W^{2\alpha,p}$  es un espacio de Sobolev [1], [2], [56].  $\square$

Bajo las notaciones e hipótesis de la Proposición anterior, podemos definir los siguientes espacios de potencias fraccionarias:

i) Si  $B = P$ , entonces  $W_P^{n,p} = W_{per}^{n,p}(\Omega)$ .

ii) Si  $B = D$ , entonces

$$W_D^{1,p} = W_0^{1,p} = \{u \in W^{1,p}, \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega\}, \quad W_D^{2,p} = W^{2,p} \cap W_0^{1,p}, \quad (0.1.5)$$

$$W_D^{2k,p} = \{u \in W^{2k,p}, \quad u = \Delta u = \dots = (\Delta u)^{k-1} = 0 \text{ en } \partial\Omega\}, \quad (0.1.6)$$

$$W_D^{2k+1,p} = \{u \in W^{2k+1,p}, \quad u = \Delta u = \dots = (\Delta u)^k = 0 \text{ en } \partial\Omega\}. \quad (0.1.7)$$

iii) Finalmente, si  $B = N$  definimos:

$$W_N^{1,p} = W^{1,p}, \quad W_N^{2,p} = \{u \in W^{2,p}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial\Omega\} \quad (0.1.8)$$

$$W_N^{2k,p} = \{u \in W^{2k,p}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = \dots = \frac{\partial (\Delta u)^{k-1}}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial\Omega\} \quad (0.1.9)$$

$$W_N^{2k+1,p} = \{u \in W^{2k+1,p}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = \dots = \frac{\partial (\Delta u)^{k-1}}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial\Omega\}. \quad (0.1.10)$$

**Observación 0.1.1** Para el caso particular  $p = 2$ , tenemos que  $-\Delta_B$  es un operador sectorial sobre  $L_B^2$  que es un espacio de Hilbert, y como consecuencia, ahora tenemos una representación espectral de forma que:

$$\|x\|_\alpha = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{2\alpha} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|(-\Delta_D)^\alpha x\|_0 (= \|(-\Delta_B + I)^\alpha x\|_0 \text{ si } B = N, P)$$

define una norma hilbertiana en  $X^\alpha$  siendo la descomposición espectral de  $x$ :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n.$$

con  $e_n$  una base hilbertiana normalizada de  $L^2_B$  formada por funciones propias de  $-\Delta_D$  (respectivamente  $-\Delta_B + 1$  si  $B = N, P$ .)

Tenemos así el operador

$$-\Delta_B^\alpha : D(-\Delta_B^\alpha) = H_B^\alpha \longmapsto L^2_B$$

definido por:

$$-\Delta_B^\alpha x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^\alpha x_n e_n.$$

De esta forma tenemos la escala de espacios de interpolación extendida a todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , y la Proposición 0.1.1 sigue siendo cierta para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  con constante de interpolación  $C = 1$  en el apartado ii). Además los espacios de exponentes negativos se obtienen por dualidad, de forma que si  $p = 2$  notaremos por  $H_B^{-2\alpha} = (H_B^{2\alpha})'$ ,  $\alpha \geq 0$ , al espacio dual de  $H_B^{2\alpha,p}$ , y tenemos entonces el siguiente resultado:

**Proposición 0.1.3** *Supongamos que  $p = 2$ , entonces:*

a) Si  $B = D$

$$H_D^2 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad H_D^1 = H_0^1(\Omega), \quad L_D^2 = L^2(\Omega), \quad (0.1.11)$$

$$H_D^{-1} = H_0^1(\Omega), \quad H_D^{-2} = H^{-1}(\Omega), \quad \text{con } H_D^{-2} = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))'. \quad (0.1.12)$$

Además para todo  $k \in \mathbb{N}$

$$H_D^{2k} = \{u \in H^{2k}(\Omega), \quad u = \Delta u = \dots = (\Delta)^{k-1}u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega\} \quad (0.1.13)$$

con la topología de  $H^{2k}(\Omega)$ .

$$H_D^{2k+1} = \{u \in H^{2k+1}(\Omega), \quad u = \Delta u = \dots = (\Delta)^k u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega\} \quad (0.1.14)$$

con la topología de  $H^{2k+1}(\Omega)$ .

b) Si  $B = N$

$$H_N^2 = \{H^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial n} = 0\}, \quad H_N^1 = H^1(\Omega), \quad L_N^2 = L^2(\Omega), \quad H_N^{-1} = (H^1(\Omega))' \quad (0.1.15)$$

$$H_N^{-2} = (\{H^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial n} = 0\})'.$$

Además, para todo  $k \in \mathbb{N}$

$$H_N^{2k} = \{u \in H^{2k}(\Omega), \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} = \dots = \frac{\partial(\Delta^{k-1}u)}{\partial n} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega\} \quad (0.1.16)$$

con la topología de  $H^{2k}(\Omega)$ .

$$H_N^{2k+1} = \{u \in H^{2k+1}(\Omega), \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} = \dots = \frac{\partial(\Delta^{k-1}u)}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial\Omega\} \quad (0.1.17)$$

con la topología de  $H^{2k+1}(\Omega)$ .

c) Si  $B = P$

$$H_P^2 = H_{per}^2(\Omega), \quad H_P^1 = H_{per}^1(\Omega), \quad L_P^2 = L_{per}^2(\Omega), \quad H_P^{-1} = (H_{per}^1(\Omega))', \quad (0.1.18)$$

$$H_P^{-2} = (H_{per}^2(\Omega))' \text{ y } H_P^{2k} = H_{per}^{2k}(\Omega). \square$$

En el capítulo 2 de la primera parte, se prueba un resultado de existencia y unicidad de soluciones con datos iniciales en estos espacios  $W_B^{2\alpha,p}$  perfectamente definidos para  $\alpha \geq 0$  y si  $p = 2$  para cualquier  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Veamos ahora que también podemos considerar  $W_B^{2\alpha,p}$  con  $\alpha < 0$ , en algunos casos para valores de  $p$  distintos de 2 y de 1, siguiendo los resultados de [1], [2], [56].

En efecto si  $p \neq 1$  entonces  $L_B^p = L_B^p(\Omega)$  o  $L_{per}^p(\Omega)$  es un espacio reflexivo, y gracias a los resultados sobre interpolación y extrapolación de semigrupos, en particular los resultados recogidos en el Teorema 8.1. página 229 de [1]. podemos considerar los espacios de extrapolación  $W_B^{-2\alpha,p}$  con  $\alpha \in [0, 1]$ . de la forma siguiente.

Si  $1 < p < \infty$  y  $p' = \frac{p}{p-1}$ , el operador  $-\Delta_B$  además de ser sectorial en  $L_B^p$  con dominio  $W_B^{2,p}$ , es también un operador sectorial en  $L_B^{p'}$  con dominio  $W_B^{2,p'}$  definido anteriormente. De forma que podemos definir espacios de exponentes fraccionarios negativos por dualidad, i.e. según las notaciones anteriores tenemos

**Definición 0.1.3**

$$W_B^{-2\alpha,p} = (W_B^{2\alpha,p'})', \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (0.1.19)$$

es el espacio dual de  $W_B^{2\alpha,p'}$  con respecto al producto de dualidad de  $L^{p'}(\Omega) \times L^p(\Omega)$ . En particular se tiene que:

$$W_B^{-1,p} = (W_B^{1,p'}(\Omega))'$$

donde  $W_B^{1,p}$ , es  $W_0^{1,p}(\Omega)$  si  $B = D$ .  $W^{1,p}(\Omega)$  si  $B = N$  y  $W_{per}^{1,p}(\Omega)$  si  $B = P$ .

Como consecuencia de los resultados sobre semigrupos de interpolación y extrapolación de [1], recogidos en el Teorema 8.1. Corolario 8.2 y Teorema 8.3 páginas 228-232, podemos considerar los espacios de Banach  $X^\alpha = W_B^{2\alpha,p}$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , verificando las mismas propiedades de los espacios de interpolación  $\alpha > 0$ . Es decir, la Proposición 0.1.1 y el Lema 0.1.1, son válidas para los espacios de Banach  $X^\alpha = W_B^{2\alpha,p}$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  $\square$

El siguiente resultado, nos dice que podemos considerar "adecuadas" perturbaciones de un operador sectorial, de forma que el operador resultante sigue siendo sectorial.



**Lema 0.1.3** *Supongamos que  $A_0$  es un operador sectorial en un espacio de Banach,  $Y$ , y consideramos la escala de espacios de potencias fraccionarias asociada a este operador,  $\{Y^\nu\}_\nu$ . Sea  $P$  un operador lineal en  $Y$  con dominio  $D(P)$  tal que para algún  $\nu \in [0, 1)$  se tiene  $Y^\nu \subset D(P)$ . Supongamos además que la restricción del operador  $P$  al espacio  $Y^\nu$  es acotada de  $Y^\nu$  en  $Y$ .*

*Entonces el operador  $A_0 + P$  es sectorial en  $Y$ ,  $D(A_0 + P) = D(A_0)$ , y los espacios de potencias fraccionarias de  $A_0 + P$  coinciden, con normas equivalentes, con los de  $A_0$ , para  $0 \leq \nu \leq 1$ .*

**Demostración:**

En primer lugar, para todo  $u \in D(A_0) = Y^1 \hookrightarrow Y^\nu$ , se tiene que  $\|P(u)\| \leq C\|u\|_\nu$  para alguna constante positiva  $C$ . Por tanto, si  $\nu = 0$ , para todo  $\epsilon > 0$

$$\|P(u)\| \leq \epsilon\|u\|_1 + C_\epsilon\|u\|$$

de esta forma, el resultado de [31] [pg 19,ej 6] implica que  $A_0 + P$  es sectorial en  $Y$ .

Si  $\nu \in (0, 1)$ , entonces tenemos que  $\|u\|_\nu \leq C\|u\|_1^\nu\|u\|^{1-\nu}$  y por la desigualdad de Young, para todo  $\epsilon > 0$ , existe una constante positiva  $C_\epsilon$  tal que  $\|P(u)\| \leq \epsilon\|u\|_1 + C_\epsilon\|u\|$  y de nuevo  $A_0 + P$  es sectorial en  $Y$ .

Ahora tomamos  $\lambda$  suficientemente grande para que

$$Re(\sigma(A_0 + P + \lambda I)) \text{ y } Re(\sigma(A_0 + \lambda I)) > 0$$

de esta forma, llamando  $A_1 = A_0 + \lambda I$ ,  $A_2 = A_0 + P + \lambda I$ , se tiene que  $(A_1 - A_2)A_1^{-\nu} = -PA_1^{-\nu}$  está acotado en  $Y$ . Consecuentemente, el Teorema 1.4.8 de [31] nos da el resultado.  $\square$

## 0.2 Ecuaciones semilineales: Existencia y unicidad

Vamos ver algunos resultados de existencia, unicidad y regularidad de soluciones, para ecuaciones de evolución, descritas por un **operador sectorial**.

En primer lugar vamos un resultado sobre la regularidad de la solución de una ecuación de evolución lineal, cuya demostración se puede encontrar en [50], [54].

**Lema 0.2.1** *Dada la ecuación*

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} + Aw = f(t), t \geq t_0 \\ w(t_0) = w_0 \in X^\beta \end{cases} \tag{0.2.1}$$

donde  $A$  es un operador sectorial en un espacio de Banach  $X$ ,  $X^\alpha = D(A_\alpha^\alpha)$  con  $A_\alpha = A + \alpha I$ ,  $\alpha \geq 0$ , son los espacios de potencias fraccionarias asociadas al operador  $A$  y  $f : [t_0, T) \mapsto X^\beta$ .

i) Supongamos que  $f \in L^1(0, T; X^\beta)$ , entonces existe una solución de (0.2.1), denominada solución débil, que viene dada por la fórmula de variación de las constantes, es decir:

$$w(t) = e^{-A(t-t_0)}w_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)}f(s)ds \quad (0.2.2)$$

verificando además que  $w \in C([0, T); X^\gamma)$  para todo  $\gamma < \beta + 1$ .

ii) Supongamos ahora que  $f$  es localmente Hölder continua en  $t$  de exponente  $\theta$  y existe  $\rho > 0$  tal que  $\int_0^\rho \|f(t)\|_{X^\beta} dt < \infty$ , entonces la solución que viene dada por la fórmula de variación de las constantes verifica la ecuación (0.2.1), como una igualdad en el espacio  $X^\beta$  y en casi todo punto, además  $w_t \in X^\beta$ ,  $w(t) \in X^{\beta+1}$ ,  $t \in (0, T)$ , verificando:

$$w \in C([0, T); X^\beta) \cap w \in C^1((0, T); X^\beta) \text{ y } w \in C([0, T); X^{\beta+\theta}). \square$$

A continuación vamos a ver un resultado sobre la existencia, unicidad y regularidad para una ecuación de evolución semilineal, cuya demostración se puede encontrar en [31], [50].

**Teorema 0.2.1** Consideramos la ecuación no lineal

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} + Aw = f(t, w), t \geq t_0 \\ w(t_0) = w_0, w_0 \in X^\alpha. \end{cases} \quad (0.2.3)$$

donde  $A$  es un operador sectorial en un espacio de Banach  $X$  y  $X^\alpha = D(A_\alpha^\alpha)$  con  $A_\alpha = A + \alpha I$ ,  $\alpha \geq 0$ , los espacios de potencias fraccionarias asociadas al operador  $A$ . Supongamos que  $f$  lleva un conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R} \times X^\alpha$  en  $X^\beta$ , para algún  $0 \leq \alpha - \beta < 1$ , de forma que  $f$  es localmente Hölder continua en  $t$  de exponente  $\theta$  y localmente Lipschitz en  $w$ .

Entonces para cada  $(t_0, w_0) \in U$ , existe  $t_1 = t_1(t_0, w_0) > 0$  de forma que el problema de Cauchy dado por la ecuación (0.2.3), tiene una única solución  $w$  en  $(t_0, t_1)$ , que viene por la fórmula de variación de constantes, es decir:

$$w(t) = e^{-A(t-t_0)}w_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)}f(s, w(s))ds \quad (0.2.4)$$

tal que  $w : [t_0, t_1) \mapsto X^\beta$  es una función continua, con  $w(t_0) = w_0$ ,  $w(t) \in D(A)$ , existe  $\frac{dw}{dt}$ , y la función  $t \mapsto f(t, w(t))$  es localmente Hölder continua con valores en  $X^\beta$ .

Se verifica además que

$$w \in C([t_0, t_1); X^\alpha) \cap C([t_0, t_1); X^{\beta-\theta}).$$

Además se tiene que  $w_t : (t_0, t_1) \mapsto X^\beta$  es una función Hölder continua.  $\square$

El Teorema 3.5.2 pag 71 de [31] nos dice además:

**Teorema 0.2.2** *Siguiendo las notaciones e hipótesis del Teorema 0.2.1, si  $f : U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha \mapsto X$  con  $0 \leq \alpha < 1$  es localmente Lipschitz, entonces si  $\gamma < 1$ , la aplicación  $t \mapsto \frac{dw}{dt} \in X^\gamma$  es localmente Hölder continua para  $t_0 \leq t \leq t_1$ , con*

$$\left\| \frac{dw}{dt} \right\|_\gamma \leq C(t - t_0)^{\alpha - \gamma - 1}. \square$$

**Proposición 0.2.1** *Bajo las notaciones e hipótesis del Teorema 0.2.1, supongamos además que la aplicación  $f$  lleva acotados de  $U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$  en acotados de  $X$ . Entonces si  $(t_0, t_1)$  es el intervalo máximo de definición de la solución  $w$  dada por la teorema anterior, se tiene que  $t_1 = \infty$ , es decir la solución es global, o bien la norma de la solución explota en tiempo finito, es decir existe una sucesión de tiempos  $t_n \mapsto t_1$ , tal que  $\|w(t_n)\|_\alpha \mapsto \infty$ , [31], [50].  $\square$*

### 0.3 Semigrupos disipativos

En primer lugar vamos a ver algunas definiciones que están recogidas en [28], [48], [49].

1. Dado  $S(t), t \geq 0$  semigrupo en el espacio de Banach  $X$ . Diremos que un conjunto  $\mathcal{A} \subset X$  es un **atractor maximal (o global)** bajo el semigrupo  $S(t)$ , si es el máximo conjunto compacto e invariante  $S(t)(\mathcal{A}) = \mathcal{A}, t \geq 0$ , que atrae a los acotados de  $X$  es decir,  $dist(S(t)B, \mathcal{A}) \mapsto 0$  si  $t \mapsto \infty$  para todo  $B$  acotado de  $X$ , donde como es habitual

$$dist(x, A) = \inf \{d(x, a), a \in A\} \text{ con } x \in X, A \subset X.$$

$$dist(A, B) = \sup \{dist(a, B), a \in A\} \text{ con } A, B \subset X.$$

2. Dado  $S(t), t \geq 0$  semigrupo en el espacio de Banach  $X$  con atractor maximal  $\mathcal{A}$ . Diremos que  $\mathcal{M}$  es una **variedad inercial** de clase  $C^k$  y dimensión  $N$  para  $S(t)$ , si  $\mathcal{M}$  es una variedad topológica de dimensión  $N$  y clase  $k$ , subvariedad de  $X$  (i.e. la topología de  $\mathcal{M}$  es la inducida por  $X$ ) tal que:

- i)  $S(t)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$  para todo  $t \geq 0$ .
- ii)  $\mathcal{M}$  contiene al atractor maximal  $\mathcal{A}$  de  $S(t)$ .

iii) Existe  $M > 0$  verificando que para todo  $B \subset X$  acotado, existe  $C(B) \geq 0$  tal que:

$$\text{dist}(S(t), \mathcal{M}) \leq C(B)e^{-Mt}, t \geq 0.$$

Observamos que si  $\mathcal{M}$  es cerrada en  $X$ , entonces la tercera condición implica la segunda, por la invarianza del atractor maximal. Esta definición junto con algunas propiedades sobre las variedades inerciales, se pueden encontrar en [48], [49].

3. Diremos que el semigrupo  $S(t)$  es **puntualmente disipativo** si existe un conjunto acotado  $B \subset X$  que atrae a cada punto de  $X$ .
4. El semigrupo  $S(t) : X \rightarrow X$  es **asintóticamente regular** si, para todo subconjunto  $B$  no vacío, acotado y cerrado de  $X$ , tal que  $S(t)B \subset B$ , existe un subconjunto compacto  $J$  de  $B$  que le atrae.
5. Diremos que el semigrupo  $S(t), t \geq 0$  en el espacio de Banach  $X$  es **condicionalmente completamente continuo** para  $t \geq t_1$ , si para cada  $t \geq t_1$  y para cada acotado  $B$  de  $X$ , tal que el conjunto  $\{S(s)B, 0 \leq s \leq t\}$  es acotado, se tiene que  $S(t)B$  es precompacto.
6. Diremos que el semigrupo  $S(t), t \geq 0$  en el espacio de Banach  $X$  es **completamente continuo** para  $t \geq t_1$ , si es condicionalmente completamente continuo y además para cada acotado  $B$  de  $X$ , el conjunto  $\{S(s)B, 0 \leq s \leq t\}$  es acotado.

Vamos a ver algunos resultados que relacionan los conceptos expuestos en las definiciones anteriores. Su demostración se puede encontrar en [28].

**Proposición 0.3.1** *Todo semigrupo  $S(t), t \geq 0$  que es condicionalmente completamente continuo para  $t \geq 0$  es asintóticamente regular.*  $\square$

**Demostración:** Corolario 3.2.2. pag. 37 de [28].

**Proposición 0.3.2** *Supongamos que el semigrupo  $S(t) = T(t) + U(t)$ , con  $U(t)$  completamente continuo para  $t \geq 0$ , y tal que existe una función continua  $k(t, r)$  de  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  en  $\mathbb{R}^+$  verificando:*

- i)  $k(t, r) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , y
- ii)  $\|T(t)w\| \leq k(t, r)$ , para todo  $t \geq 0$  y  $\|w\| \leq r$ .

*Entonces el semigrupo  $S(t)$  es asintóticamente regular.*  $\square$

**Demostración:** Lema 3.2.3. pag. 37 de [28].

Como consecuencia se tiene el siguiente resultado sobre el semigrupo generado por las soluciones de una ecuación de evolución.

**Proposición 0.3.3** *Consideramos la ecuación de evolución*

$$w_t + Aw = G(w) \quad (0.3.1)$$

donde  $A$  es un operador sectorial sobre un espacio de Banach  $Y$  con resolvente compacta y  $\operatorname{Re}(\sigma(A)) > \delta > 0$ , y  $G$  es una aplicación localmente Lipschitz de un abierto de  $Y^\epsilon$ ,  $\epsilon \in [0, 1)$  en  $Y$  que transforma acotados en acotados. Supongamos que el semigrupo generado por las soluciones de (0.3.1)  $S(t)$  sobre el espacio  $Y^\epsilon$  está globalmente definido, con  $S(t)w_0 = w(t)$ , donde  $w(t)$  es la solución de (0.3.1) que verifica  $w(0) = w_0$ , y que viene dada por la fórmula de variación de constantes (0.2.4), es decir:

$$S(t)w_0 = e^{-A(t)}w_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}G(w(s))ds.$$

Entonces se tiene que:

i) El operador  $U(t)$  definido por

$$U(t)w_0 = \int_0^t e^{-A(t-s)}G(w(s))ds$$

es condicionalmente completamente continuo en  $Y^\epsilon$ .

ii) Si el semigrupo  $S(t)$  verifica además que para todo conjunto  $K \subset Y^\epsilon$  acotado, el conjunto  $\{S(t)K, 0 \leq t \leq T\}$  está acotado en  $Y^\epsilon$  para todo  $T < \infty$ . Entonces  $S(t)$  es un semigrupo asintóticamente regular sobre  $Y^\epsilon$ .  $\square$

La demostración de este resultado es consecuencia de la Proposición 0.3.2.

El Teorema 3.4.6. de [28] nos dice:

**Teorema 0.3.1** *Si el semigrupo  $S(t) : X \rightarrow X, t \geq 0$  es asintóticamente regular, puntualmente disipativo y las órbitas de conjuntos acotados son acotadas, entonces posee un atractor global. Si además  $X$  es un espacio de Banach, entonces el atractor global es conexo.*  $\square$

**Definición 0.3.1** *Dado  $S(t), t \geq 0$ , un semigrupo en un espacio métrico completo  $X$  y sea  $E$  el conjunto de puntos de equilibrio, es decir  $x \in E$  si  $S(t)x = x$  para todo  $t \geq 0$ , diremos que un punto de equilibrio es hiperbólico si el espectro de  $D(S(t)(x))$  para cada  $t > 0$  no corta al círculo unidad de centro cero en  $\mathbb{C}$ .*

Diremos que un semigrupo regular ( $C^1$ ) es un sistema gradiente si:

- i) Las órbitas positivas acotadas son precompactas.
- ii) Existe un funcional de Lyapunov para  $S(t)$ , es decir existe una función continua  $\mathcal{F} : X \mapsto \mathbb{R}$  verificando:
  - ii<sub>1</sub>)  $\mathcal{F}(x) \mapsto \infty$  cuando  $|x| \mapsto \infty$ .
  - ii<sub>2</sub>)  $\mathcal{F}(S(t)x)$  es no creciente en  $t$  para cada  $x \in X$ .
  - ii<sub>3</sub>) Si  $\mathcal{F}(S(t)x) = \mathcal{F}(x)$  para todo  $t$  ( donde está definida ) entonces  $x$  es un punto de equilibrio.

Como consecuencia del Teorema 0.3.1, teniendo en cuenta que si  $S(t)$  es un sistema gradiente las órbitas de conjuntos acotados son acotados, y si además el conjunto de los puntos de equilibrio es acotado, entonces  $S(t)$  es puntualmente disipativo, se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 0.3.2** Si  $S(t), t \geq 0$ , es un sistema gradiente, asintóticamente regular y tal que el conjunto de los puntos de equilibrio  $E$  es acotado, entonces existe un atractor global  $\mathcal{A}$  para  $S(t)$  que viene dado por  $\mathcal{A} = W^u(E)$ , donde

$$W^u(E) = \{y \in X : S(-t)y \text{ está definido para } t \geq 0 \text{ y } S(-t)y \mapsto E \text{ si } t \mapsto \infty\}.$$

Si  $X$  es un espacio de Banach, entonces  $\mathcal{A}$  es conexo, y si además los puntos de equilibrio son hiperbólicos, entonces  $E$  es un conjunto finito y

$$\mathcal{A} = \bigcup_{x \in E} W^u(x).$$

**Demostración:** Está probado en el Teorema 3.8.5, pag 51 de [28].

## 0.4 Principio de estabilidad linealizada

Sea  $A$  un operador lineal sectorial en un espacio de Banach  $X$ , y sea  $f : U \mapsto X$  donde  $U$  es un entorno en  $\mathbb{R} \times X^\alpha$  (para algún  $\alpha < 1$ ) de  $(\tau, \infty) \times w_0$ . Consideramos la ecuación de evolución

$$\frac{dw}{dt} + Aw = f(w), t > t_0 \tag{0.4.1}$$

1. Diremos que  $w_0$  es un punto de equilibrio de (0.4.1), si  $w(t) \equiv w_0$  es una solución de la ecuación (0.4.1) i.e. si  $w_0 \in D(A)$  y  $Aw_0 = f(w_0)$ , [31].

2. Una solución  $u(\cdot)$  de (0.4.1) en  $[t_0, \infty)$  es **estable** (en  $X^\alpha$ ) si, para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que toda solución  $w$  con  $\|w(t_0) - u(t_0)\|_\alpha < \delta$ , existe en  $[t_0, \infty)$  y satisface  $\|w(t) - u(t)\| < \epsilon$  para todo  $t \geq t_0$ . Es decir la aplicación  $u_0 \mapsto w(t; t_0, u_0)$  es continua ( en  $X^\alpha$  ) en el punto  $u(t_0)$ , uniformemente en  $t \geq t_0$ , [31].
3. Una solución  $u(\cdot)$  en  $[t_0, \infty)$  es **uniformemente estable** si la aplicación  $u_1 \mapsto w(t; t_1, u_1)$  es continua (en  $X^\alpha$ ) en el punto  $u(t_1)$ , uniformemente en  $t \geq t_1$  y  $t_1 \geq t_0$ , donde  $w(t; t_1, u_1)$  representa el valor en  $X^\alpha$  que toma la solución de (0.4.1) con dato inicial  $w(t_1) = u_1$  en el instante  $t \geq t_1$ , [31].
4. Una solución  $u(\cdot)$  en  $[t_0, \infty)$  es **uniformemente asintóticamente estable** si es uniformemente estable y además  $w(t; t_1, u_1) - u(t_1) \mapsto 0$  cuando  $t - t_1 \mapsto +\infty$ , uniformemente en  $t_1 \geq t_0$  y  $\|u_1 - u(t_1)\| < \delta$ , para alguna constante  $\delta > 0$ , [31].
5. Una solución  $u(\cdot)$  de (0.4.1) en  $[t_0, \infty)$  es **inestable** (en  $X^\alpha$ ) si y sólo si no es estable, [31].

Vamos a ver a continuación como el estudio de la estabilidad e inestabilidad de un punto de equilibrio de una ecuación no lineal, puede estar determinada por el estudio de la estabilidad del origen en la ecuación linealizada en un entorno de dicho punto de equilibrio. Su demostración se puede encontrar en [31].

**Teorema 0.4.1** *Dado  $A$  y  $f$  como en la definición anterior (0.4.1) y  $w_0$  un punto de equilibrio. Supongamos que*

$$f(t, w_0 + z) = f(t, w_0) + Bz + g(t, z)$$

donde  $B$  es una aplicación lineal y acotada de  $X^\alpha$  en  $X$ , y  $f(t, w)$  es localmente Hölder continua en  $t$  y localmente Lipschitz en  $w$ , sobre  $U$ . Entonces:

i) Si  $\|g(t, z)\| = o(\|z\|_\alpha)$  si  $\|z\|_\alpha \mapsto 0$ , uniformemente en  $t > \tau$ , y el espectro del operador  $A - B$  está contenido en  $\text{Re} \lambda > \gamma$  para algún  $\gamma > 0$ , o equivalentemente la linealización

$$\frac{dz}{dt} + Az = Bz \tag{0.4.2}$$

es uniformemente asintóticamente estable, entonces el punto de equilibrio  $w_0$  es uniformemente asintóticamente estable en  $X^\alpha$ . Más precisamente, existe  $\rho > 0, M \geq 1$  tal que si  $t_0 > \tau$  y  $\|w_1 - w_0\|_\alpha \leq \frac{\rho}{2M}$  entonces existe una única solución de (0.4.1)

$$\frac{dw}{dt} + Aw = f(t, w), t > t_0, w(t_0) = w_1 \tag{0.4.3}$$

definida en  $t_0 \leq t < \infty$  y satisfaciendo para  $t \geq t_0$

$$\|w(t; t_0, w_1) - w_0\|_\alpha \leq 2M e^{-\gamma(t-t_0)} \|w_1 - w_0\|_\alpha,$$

donde  $w(t; t_0, w_1)$  representa la solución asociada a la condición inicial  $w(t_0) = w_1$  en el instante  $t$ .

ii) Si  $g(t, 0) = 0$  y  $\|g(t, z_1) - g(t, z_2)\| \leq k(\rho) \|z_1 - z_2\|_\alpha$  para  $\|z_i\|_\alpha \leq \rho$  y  $k(\rho) \mapsto 0$  cuando  $\rho \mapsto 0^+$ , supongamos además que el espectro del operador  $A - B$  tiene algún elemento con parte real negativa, i.e.  $\sigma(A - B) \cap \{\operatorname{Re} \lambda < 0\}$  es no vacío. Entonces  $w_0$  es un punto de equilibrio inestable para la ecuación (0.4.1). En particular, existe  $\epsilon > 0$  y  $\{w_n, n \geq 1\}$  con  $\|w_n - w_0\|_\alpha \mapsto 0$  si  $n \mapsto \infty$  y además para todo  $n$

$$\sup_{t \geq t_0} \|w(t; t_0, w_n) - w_0\|_\alpha \geq \epsilon > 0.$$

donde el supremo se toma sobre el intervalo maximal de existencia de  $w(\cdot; t_0, w_n)$ .

**Demostración:**

i) Es consecuencia del Teorema 5.1.1 pag 98 de [31] y ii) del del Teorema 5.1.3. pag 102 de [31].  $\square$

## 0.5 Regla de L'Hopital

A continuación vamos a enunciar la generalización de la Regla de L'Hopital para límites superiores, cuya demostración se puede ver en [52].

**Lema 0.5.1** Sean  $F_1$  y  $F_2$  funciones reales y diferenciables en  $(a, b)$ ,  $b \leq \infty$ , tal que  $F_2'(t) \neq 0$  en  $(a, b)$  y tal que  $\limsup_{t \rightarrow b} F_2(t) = \infty$  (respectivamente  $\liminf_{t \rightarrow b} F_2(t) = \infty$ .) Entonces

$$\text{si } \limsup_{t \rightarrow b} \frac{F_1'(t)}{F_2'(t)} = L, \text{ se tiene } \limsup_{t \rightarrow b} \frac{F_1(t)}{F_2(t)} \leq L$$

y respectivamente

$$\text{si } \liminf_{t \rightarrow b} \frac{F_1'(t)}{F_2'(t)} = L, \text{ se tiene } \liminf_{t \rightarrow b} \frac{F_1(t)}{F_2(t)} > L$$





# **REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS**



# Bibliografía

- [1] H. Amann, "Parabolic Evolution Equations and Nonlinear Boundary Conditions", *J. of Diff. Eqns.* 72, 201-269, (1988).
- [2] H. Amann, "Nonhomogeneous Linear and Quasilinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems", in *Function Spaces, Diffe. Operat. and Nonlinear Analysis*, H. Schneisser and H. Triebel eds., Teubner-Texte Zur Math, 133, 9-126, (1993).
- [3] S. Angenent, "The zero set of a solution of a parabolic equation", *J. Reine Angew. Math.* 390, 79-96, (1988).
- [4] P.W. Bates, S. Zheng, "Inertial Manifolds and Inertial Sets for The Phase-Field Equations", *J. of Dynamics and Diff. Eqns.* vol 4,2, 375, (1992).
- [5] H. Brézis, "Análisis funcional", Alianza Editorial, (1984).
- [6] D. Brochet, X. Chen, D. Hilhorst, "Finite Dimensional Exponential Attractor for the Phase Field Model", *Appl. Analys.* vol 49, 3-4, 197, (1993).
- [7] D. Brochet, D. Hilhorst, "Universal Attractor and Inertial Sets for the Phase Field Model", *Appl. Math. Lett.* vol 4, n<sup>o</sup> 6, 59-62, (1991).
- [8] L. Bronsard, R.V. Kohn, "On the Slowness of Phase Boundary Motion in One Space Dimension", *Com. on Pure and Appl. Math.* vol 43, 987-997, (1990).
- [9] G. Caginalp, "An Analysis of a Phase Field Model of a Free Boundary", *Arch. Rat. Mech. Anal.* 92, 205-245, (1986).
- [10] G. Caginalp, "The Dynamics of a Conserved Phase Field System: Stefan-like, Hele-Shaw, and Cahn-Hilliard Models as Asymptotic Limits", *IMA J. of Appl. Math.* 44, 77-94, (1990).

- [11] G.Caginalp, "Phase Field Models and Sharp Interface Limits: Some Differences in Subtle Situations", *J. of Appl. Math.*, vol 21, n<sup>o</sup> 2, 602-617, (1991).
- [12] G.Caginalp, P.C.Fife, "Dynamics of Layered Interfaces Arising from Phase Boundaries", *SIAM.J. Appl. Math.* vol 48, n<sup>o</sup> 3, 506-518, (1988).
- [13] J.Carr, R.L.Pego, "Metastable patterns in solutions of  $u_t = \epsilon^2 u_{xx} - f(u)$ ", *Comm.Pure Appl. Math.* vol 42, 523-579, (1989).
- [14] J.Carr, R.Pego, "Very slow phase separation in one dimension", *Lecture Notes in Physics 344*, M.Rasele et al. eds., Springer-Verlag, 216-226, (1989).
- [15] J.Carr, R.Pego, "Invariant manifolds for metastable patterns in  $u_t = \epsilon^2 u_{xx} - f(u)$ ", *Proceeding of the Royal Society of Edimburgh*, 116A, 133-160, (1190).
- [16] N.Chafee, E.F.Infante, "A Bifurcation problem for a Nonlinear Partial Differential equation of Parabolic Type", *App. Ana.*, vol 4, 17-37, (1974).
- [17] B.Chalmers, "Principles of Solidification", R.E. Krieger Publishing, Huntington, New York, (1977).
- [18] K. Chen, "On the Oscillatory Instability of Closed-Loop Thermophons", *Tran. of the ASME*, vol 107, 826-977, (1985).
- [19] K.N.Chueh, C.C. Conley, J.A. Smoller, "Positively Invariant Regions for Systems of Nonlinear Diffusion Equations", *Indiana University Mathematics Journal*, vol 26, n<sup>o</sup> 2, 372-391, (1977).
- [20] C.M. Elliott, S. Zheng, "Global Existence and Stability of Solutions to the Phase field Equations", *Preprint*, (1989).
- [21] C. Foias, G.R. Sell, R. Temam, "Inertial Manifolds for Nonlinear Evolution Equations", *J. Diff. Equ.*, 73, 309-353, (1985).
- [22] G. Fusco, J.K. Hale, "Slow-Motion Manifolds, Dormant Instability, and Singular Perturbations". *J. of Dynamics and Differential Equations*, vol 1, n<sup>o</sup> 1, (1989).
- [23] J.W. Gibbs, "Collected Works". Yale University Press, New Haven, (1948).
- [24] D. Gilbard, N.S. Trudinger, "Elliptic Partial Differential Equations of Second Order", Springer-Verlag ed. New York, (1977).

- [25] C.P. Grant, "Slow motion in one-dimensional Cahn-Morral systems", *SIAM J. Math. Anal.*, vol 26, nº 1, 21-34, (1995).
- [26] R.Greif, Y. Zvirin, A. Mertol, "The Transient and Stability Behaviour of a Natural Convection Loop", *Tran. of the ASME*, vol 101, 684-688, (1979).
- [27] S.R. de Groot, P. Mazur, "Non-Equilibrium Thermodynamics", North-Holland Publishing Company-Amsterdam, (1984).
- [28] J.K. Hale, "Asymptotic Behaviour of Dissipative Systems", American Mathematical Society, (1989).
- [29] J.E. Hart, "A Model of Flow in a Closed-Loop Thermosyphon including the Soret Effect", *J. of Heat Transfer*, vol 107, 840-849, (1985).
- [30] J.E. Hart, "Observations of Complex Oscillations in a Closed Thermosyphon", *J. of Heat Transfer*, vol 107, 833-839, (1985).
- [31] D. Henry, "Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations", *Lectures Notes in Mathematics 840*, Springer-Verlag, (1981).
- [32] M.A. Herrero, J.J-L. Velazquez, "Stability analysis of a closed thermosyphon", *European J. Appl. Math.*, 1, 1-24, (1990).
- [33] J.P. Holman, "Termodinámica", Mac Graw Hill, (1975).
- [34] D.T.J. Hurle, E. Jakerman, "Soret-Driven Thermosolutal Convection", *J. Fluid Mech.*, vol 47, 667-687, (1971).
- [35] D. Japikse, "Advances in Thermosyphon Technology", *Advances in Heat TRansfer.*, vol 9, 1-111, (1973).
- [36] J.B. Keller, "Periodic oscillations in a model of thermal convection", *J. Fluid Mech.*, vol 26, 3,599-606, (1966).
- [37] L.D.Landau, E.M.Lifshitz "Statistical Physics". Addison-Wesley Publishing, Reading, Massachusetts, (1958).
- [38] A. Liñan, "Mecánica de Fluidos". Publicaciones de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronauticos, (1967).

- [39] A. Liñan, "Analytical description of chaotic oscillations in a toroidal thermosyphon", in Fluid Physics, Lecture Notes of Summer Schools, (M.G. Velarde, C.I. Christor, Eds.) pp. 507-523, World Scientific, Singapore, (1994).
- [40] H. Matano, "Asymptotic Behavior and Stability of Solutions of Semilinear Diffusion Equations", *Publi. RIMS, Kyoto Univ*, 15, 401-454, (1979).
- [41] H. Matano, "Nonincrease of the lap-number of a solution for a one-dimensional semilinear parabolic equation", *J. Math. Kyoto Univ.*, (1987).
- [42] K. McClod, A. Milani, "On some global well-posedness and asymptotic results for quasilinear parabolic equations", *NoDEA* 3, 79-114, (1996).
- [43] L. Modica, "The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion", *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 98, 123-142, (1987).
- [44] L. Modica, S. Mortola "Il limite nella  $\Gamma$ -convergenze di una famiglia di funzionali ellittici", *Boll. Un. Math. It. (3)* A14, 526-529, (1977).
- [45] O.A. Oleinik, "A Method of Solution of the General Stefan Problem", *Sov. Math. Dolk. vol. 1*, 1350-1354, (1960).
- [46] O. Penrose, P. Fife, "Thermodynamically Consistent Models of Phase-Field Type for Kinetics of Phase Transitions", *Physica D*43, 44-62, (1990).
- [47] O. Penrose, "Phase-field and related models for the kinetics of phase transitions", *Notas sobre una conferencia impartida en el Dpto. Mat. Aplic de U.C.M.*, (1995).
- [48] A. Rodríguez-Bernal, "Sistemas dinámicos infinito dimensionales. Aplicaciones a la ecuación de Kuramoto-Velarde", *Tesis doctoral, U.C.M.* (1990).
- [49] A. Rodríguez-Bernal, "Inertial Manifolds for dissipative semiflows in Banach space", *Appli. Anal.*, vol 37, 95-141, (1988-89).
- [50] A. Rodríguez-Bernal, "Sistemas dinámicos en dimensión infinita", *Notas del curso de doctorado impartido en U.C.M.* (1992-1996).
- [51] A. Rodríguez-Bernal, "Attractors and Inertial Manifolds for the Dynamics of a Closed Thermosyphon", *J. of Math. Anal. and Appl.*, 193, 942-965, (1995).

- [25] C.P. Grant, "Slow motion in one-dimensional Cahn-Morral systems", *SIAM J. Math. Anal.*, vol 26, n<sup>o</sup> 1, 21-34, (1995).
- [26] R.Greif, Y. Zvirin, A. Mertol, "The Transient and Stability Behavior of a Natural Convection Loop", *Tran. of the ASME*, vol 101, 684-688, (1979).
- [27] S.R. de Groot, P. Mazur, "Non-Equilibrium Thermodynamics", North-Holland Publishing Company-Amsterdam, (1984).
- [28] J.K. Hale, "Asymptotic Behaviour of Dissipative Systems", American Mathematical Society, (1989).
- [29] J.E. Hart, "A Model of Flow in a Closed-Loop Thermosyphon including the Soret Effect", *J. of Heat Transfer*, vol 107, 840-849, (1985).
- [30] J.E. Hart, "Observations of Complex Oscillations in a Closed Thermosyphon", *J. of Heat Transfer*, vol 107, 833-839, (1985).
- [31] D. Henry, "Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations", *Lectures Notes in Mathematics 840*, Springer-Verlag, (1981).
- [32] M.A. Herrero, J.J-L. Velazquez, "Stability analysis of a closed thermosyphon", *European J. Appl. Math.*, 1, 1-24, (1990).
- [33] J.P. Holman, "Termodinámica", Mac Graw Hill, (1975).
- [34] D.T.J. Hurle, E. Jakerman, "Soret-Driven Thermosolutal Convection", *J. Fluid Mech.*, vol 47, 667-687, (1971).
- [35] D. Japikse, "Advances in Thermosyphon Technology", *Advances in Heat TRansfer.*, vol 9, 1-111, (1973).
- [36] J.B. Keller, "Periodic oscillations in a model of thermal convection", *J. Fluid Mech.*, vol 26, 3,599-606, (1966).
- [37] L.D.Landau. E.M.Lifshitz "Statistical Physics", Addison-Wesley Publishing, Reading, Massachusetts, (1958).
- [38] A. Liñan, "Mecánica de Fluidos", Publicaciones de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronauticos, (1967).

- [39] A. Liñan, "Analytical description of chaotic oscillations in a toroidal thermosyphon", in *Fluid Physics, Lecture Notes of Summer Schools*, (M.G. Velarde, C.I. Christor, Eds.) pp. 507-523, World Scientific, Singapore, (1994).
- [40] H. Matano, "Asymptotic Behavior and Stability of Solutions of Semilinear Diffusion Equations", *Publi. RIMS, Kyoto Univ*, 15, 401-454, (1979).
- [41] H. Matano, "Nonincrease of the lap-number of a solution for a one-dimensional semilinear parabolic equation", *J. Math. Kyoto Univ.*, (1987).
- [42] K. McLeod, A. Milani, "On some global well-posedness and asymptotic results for quasilinear parabolic equations", *NoDEA* 3, 79-114, (1996).
- [43] L. Modica, "The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion". *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 98, 123-142, (1987).
- [44] L. Modica, S. Mortola "Il limite nella  $\Gamma$ -convergenze di una famiglia di funzionali ellittici", *Boll. Un. Math. It. (3)* A14, 526-529, (1977).
- [45] O.A. Oleinik, "A Method of Solution of the General Stefan Problem", *Sov. Math. Dokl.* vol. 1, 1350-1354, (1960).
- [46] O. Penrose, P. Fife, "Thermodynamically Consistent Models of Phase-Field Type for Kinetics of Phase Transitions", *Physica D*43, 44-62, (1990).
- [47] O. Penrose, "Phase-field and related models for the kinetics of phase transitions", *Notas sobre una conferencia impartida en el Dpto. Mat. Aplic de U.C.M.* (1995).
- [48] A. Rodríguez-Bernal, "Sistemas dinámicos infinito dimensionales. Aplicaciones a la ecuación de Kuramoto-Velarde", *Tesis doctoral, U.C.M.* (1990).
- [49] A. Rodríguez-Bernal, "Inertial Manifolds for dissipative semiflows in Banach space". *Appli. Anal.*, vol 37. 95-141, (1988-89).
- [50] A. Rodríguez-Bernal, "Sistemas dinámicos en dimensión infinita", *Notas del curso de doctorado impartido en U.C.M.* (1992-1996).
- [51] A. Rodríguez-Bernal. "Attractors and Inertial Manifolds for the Dynamics of a Closed Thermosyphon". *J. of Math. Anal. and Appl.*, 193, 942-965, (1995).



- [52] A. Rodríguez-Bernal, E.S. Van Vleck, "Complex Oscillations in a Closed Thermosyphon", Preprint, (1996).
- [53] A. Rodríguez-Bernal, E.S. Van Vleck, "Diffusion Induced in a Closed Loop Thermosyphon", *aparecerá en SIAM J. Appl. Math.*
- [54] A. Rodríguez-Bernal, E. Zuazua, "Parabolic Singular Limit of a Wave Equation with Localized Boundary Damping", *Disc. and Cont. Dyn. Syst.*, vol 1, n<sup>o</sup> 3, 303-346, (1995).
- [55] L.I. Rubinstein, "The Stefan Problem", *Am. Math. Soc. Transl.* 27, American Mathematical Society, Providence, (1971).
- [56] R. Seeley, "Interpolation in  $L^p$  with Boundary Conditions", *Studia Mathematica* 44, 47-60, (1972).
- [57] M. Sen, E. Ramos, C. Treviño, "On the Steady-State Velocity of the Inclined Toroidal Thermosyphon". *Trans. of the ASME* vol 107, 974-977, (1985).
- [58] J. Smoller, "Shock waves reaction-diffusion equations", Springer-Verlag, (1983).
- [59] J. Smoller, A. Wasserman, "Global Bifurcation of Steady-State Solutions", *J. of Diff. Equ.*, 39, 269-290, (1981).
- [60] P. Ssternberg, "The effect of a singular perturbation on nonconvex variational problems", *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 101, 209-260, (1988).
- [61] R. Teman, "Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics", *Appl. Math. Sci.* 68, Springer-Verlag, New York, (1988).
- [62] J.J.L. Velázquez, "On the dynamics of a closed thermosyphon, *SIAM J:Appl. Math.* 54, n<sup>o</sup> 6, 1561-1593, (1994).
- [63] P. Welander, "On the oscillatory of a differentially heated fluid loop", *J. Fluid Mech.*, vol 29, part 1, 17-30, (19967).
- [64] S. Zheng, "Global Existence for a Thermodynamically Consistent Model of Phase Field Type", *Diff. and Int. Eqns.* vol 5, n<sup>o</sup> 2, 241-253, (1992).
- [65] E. Zuazua, E. Feireisl, "Global attractors for semilinear wave equations with locally distributed damping and critical exponent", *Comm. Part. Diff. Equ.* 18, 1539-1556. (1993).