UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA

POLINOMIOS ORTOGONALES DE LAGUERRE-HAHN

EDUARDO PRIANES MUÑOZ

Director: Dr. FRANCISCO MARCELLAN ESPAÑOL

Memoria presentada para optar al Grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

1996.

RECONOCIMIENTOS

Quiero expresar el agradecimiento más sincero al Profesor Francisco Marcellán Español de la Universidad Carlos III de Madrid , Director de esta Tesis , sin cuyo apoyo, consejo y desinteresada ayuda esta Memoria no habría salido a la luz.

Igualmente mi agradecimiento al Profesor Ildefonso Diaz Diaz de la Universidad Complutense de Madrid por su comprensión hacia este proyecto de trabajo.

Mi reconocimiento al Profesor Pascal Maroni de la Universidad Pierre et Marie Curie , Paris VI, por tener a bien formar parte del Tribunal que ha de juzgar esta Memoria.

Por último , mi gratitud a los Profesores Luis Vazquez Martinez (Universidad Complutense de Madrid), Rodolfo Bermejo Bermejo (Universidad Complutense de Madrid),Alicia Cachafeiro (Universidad de Vigo), Jesús Sanchez Dehesa (Universidad de Granada), Gregorio Diaz Diaz (Universidad Complutense de Madrid) y Paloma García Lázaro (Universidad Politécnica de Madrid) , miembros del Tribunal por aceptar formar parte del mismo.

POLINOMIOS ORTOGONALES DE LAGUERRE-HAHN

INDICE.

INTRODUCCION.

En un gran número de problemas de la Física-Matemática aparece la ecuación diferencial $y''+\frac{\tau}{\sigma}y'+\frac{\sigma^{\bullet}}{\sigma^2}y=0$, en donde $\sigma(x)$ y $\sigma^{\bullet}(x)$ son polinomios de grado no superior a dos y $\tau(x)$ un polinomio de grado no superior a uno.Se encuentran ecuaciones de este tipo en la resolución de las ecuaciones de Laplace y de Helmholtz en coordenadas curvilíneas por separación de variables , en problemas fundamentales de la Mecánica Cuántica, movimiento de una partícula en un campo con simetría esférica, oscilador armónico , etc.

La mencionada ecuación aparece igualmente en problemas de la Física atómica, molecular y nuclear.

Esta ecuación admite como solución particular , entre otras, a los polinomios ortogonales clásicos.

Los orígenes de los polinomios ortogonales se encuentran en los trabajos de Legendre sobre el movimiento de los planetas , pero fueron T.J. Stieltjes, P.L. Tchebichev , A. Markov y E. Heine , los primeros en establecer un tratamiento general de esta teoría.

En la actualidad los trabajos sobre polinomios ortogonales han experimentado un gran avance debido a sus múltiples aplicaciones, como por ejemplo, Aproximación Padé, Fracciones Continuas,Análisis Numérico, Física del Estado Sólido , Teoría de la Señal , etc. La manera más general de considerar la ortogonalidad se establece a partir de un funcional lineal $\underline{u}$ en el espacio **P** de los polinomios con coeficientes complejos.

Este funcional queda definido por su actuación sobre los monomios $x^n;n=0,1,2,..$ y, por tanto, por la sucesión de valores $\{(u)_n\}_{n\geq 0}, (u)_n=<u,x^n>$, llamados momentos.El producto escalar que define la ortogonalidad viene dado por $<p,q>=<u,pq>\quad,\forall p,q\in \mathbf{P}$.

Todos los polinomios ortogonales clásicos tienen en común diferentes propiedades que los caracterizan.Una de ellas , debida a P. Maroni, es que el correspondiente funcional de momentos $\underline{u}$ satisface una ecuación de la forma $D(\Phi u)+\Psi u=0$, donde Φ(x) es un polinomio de grado menor o igual a dos , Ψ(x) un polinomio de grado exactamente uno y D(.) representa el operador derivada.

Si en la ecuación funcional se da libertad a los polinomios Φ(x) y Ψ(x) de tener grados mayores a dos y uno , respectivamente, aparecen funcionales que dan lugar a nuevas familias de polinomios ortogonales que se denominan semiclásicas.

Recientemente en Mecánica Cuántica se acostumbra a escribir el operador hamiltoniano H, en forma de matriz tridiagonal, lo que constituye el denominado modelo de cadena del sistema.De esta manera se puede transformar la búsqueda de autovalores del problema asociado a H , en encontrar los autovalores de una matriz de Jacobi (tridiagonal simétrica), que es equivalente a determinar los ceros de los polinomios ortogonales a partir de la relación de recurrencia a tres términos asociada , ya que los polinomios característicos de las submatrices principales forman un sistema de polinomios ortogonales.

Una perturbación del sistema físico puede ser simulada por una perturbación en los coeficientes de intervienen en la relación de recurrencia a tres términos.Los nuevos polinomios ortogonales que aparecen son llamados co-recursivos, co-dilatados y co-modificados generalizados.

El funcional de momentos $\underline{u}$, asociado a estas nuevas familias de polinomios ortogonales, cumple una ecuación funcional de la forma:

$$D(\Phi u) + \Psi u + B(x^{-1}u^2) = 0 \qquad (1)$$

que es equivalente a que la función de Stieltjes S(z) (transformada Z de la sucesión de momentos),correspondiente al funcional $\underline{u}$ cumpla la ecuación de Riccati:

$$\Phi(z)S'(z) = B(z)S^2(z) + C(z)S(z) + D(z) \qquad (2)$$

siendo Φ,Ψ,B,C y D polinomios sujetos a diversas condiciones.

Estos nuevos polinomios son llamados de **Laguerre-Hahn** y que constituyen el objeto de nuestro trabajo.

La organización de esta Memoria se presenta como sigue:

Capítulo I.

Se describen los resultados más generales de la ortogonalidad, marco topológico adecuado, álgebra y cálculo operacional , bases duales, relación de recurrencia a tres términos , etc.

También se ofrecen las caracterizaciones más importantes de los polinomios clásicos y semiclásicos , así como la definición y propiedades de la función de Stieltjes asociada a un funcional.

A continuación se tratan las perturbaciones en los coeficientes de la relación de recurrencia, polinomios asociados, co-recursivos, co-dilatados y co-modificados generalizados, demostrándose las relaciones entre las diferentes funciones de Stieltjes implicadas.

El capítulo finaliza con la aplicación de una cierta clase de polinomios co-recursivos a la solución de un problema de potencial disperso.

Capítulo II.

Este capítulo está dedicado especificamente a los polinomios ortogonales de Laguerre-Hahn, así como a la determinación de la clase.

Se dan las características de los polinomios de Laguerre-Hahn, demostrándose la equivalencia entre ellas, e indicándose expresamente la ecuación diferencial ordinaria de cuarto orden que cumple cada polinomio $P_n^{(1)}$, n≥0 ,polinomio asociado de primera especie a la familia de polinomios ortogonales clásicos , (Anexo 2).

En las caracterizaciones (1) y (2) se observa que no existe unicidad en la representación y conseguiremos la unicidad imponiendo condiciones de minimalidad.Un teorema con su consiguiente Corolario, resuelven el problema.

Se demuestra la invarianza de los polinomios de Laguerre-Hahn respecto a perturbaciones realizadas en los coeficientes de la relación de recurrencia a tres términos,respecto a la asociación, a la co-recursividad , etc.El orden de la clase de los polinomios perturbados sí varia, por lo que se dan acotaciones relativas al orden de la clase de los nuevos polinomios , presentándose ejemplos que complementan los Teoremas obtenidos.

El capítulo finaliza con tres anexos.Uno en donde se da una relación de los polinomios que intervienen en las caracterizaciones de las familias de polinomios ortogonales clásicos, así como de sus momentos.El segundo ya ha sido mencionado y en el tercero y último se describen los polinomios de Laguerre-Hahn de clase cero , (ver [12])

Capítulo III.

Con objeto de obtener nuevas familias de polinomios ortogonales de Laguerre-Hahn , se efectúan diversas modificaciones del funcional de momentos.Se le suma una masa de Dirac, se le suma la derivada de una masa de Dirac y se estudia el funcional $\underline{u}$ definido mediante $(x-c)u=\mu v$, siendo $\underline{v}$ de Laguerre -Hahn .

En todos los casos se dan condiciones para determinar el orden de la clase de los nuevos funcionales que aparecen.

Diversos ejemplos ilustran el capítulo.

Capítulo IV.

Siguiendo los estudios de P. Maroni , (ver [54] y [56]),en este capítulo se estudian los funcionales de segundo grado, pormenorizando definiciones y equivalencias, e indicando bajo qué condiciones un funcional semiclásico es de segundo grado.

También se detalla la invarianza de los funcionales de segundo grado respecto a diversas modificaciones del mismo, traslaciones, homotecias , co-recursividad, etc.

Por último, se muestran las condiciones que debe cumplir un funcional de Laguerre-Hahn para ser de segundo grado y, por tanto, reducible a semiclásico. Ejemplos relativos a la teoría descrita complementan el capítulo.

Nuestras aportaciones al tema se desarrollan en los capítulo II, III y IV, dividiéndose en tres grandes apartados.

En el primero de ellos se establecen condiciones necesarias y suficientes para la determinación del orden de la clase de los funcionales de Laguerre-Hahn.El estudio se realiza mediante la ecuación que cumple el funcional de momentos y a través de la ecuación de Riccati que satisface la correspondiente función de Stieltjes.

En un segundo lugar se efectúan modificaciones al funcional de momentos que dan lugar a nuevos funcionales de Laguerre-Hahn, de los que se determina el orden de la clase, presentándose numerosos ejemplos en donde se exponen explícitamente las ecuaciones que cumple el funcional y las que cumple la función de Stieltjes.

En el tercer apartado se estudia bajo qué condiciones un funcional semiclásico es de segundo grado e igualmente cuando un funcional de Laguerre-Hahn es de segundo grado y por tanto semiclásico. Trabajando con los polinomios de Tchebichev se indican ejemplos que complementan y muestran los resultados obtenidos.

CAPITULO I.

PRELIMINARES Y NOTACIONES.

1.PRELIMINARES Y NOTACIONES.

1.1. El espacio vectorial P y su dual P´

Llamaremos P al espacio vectorial de los polinomios (de una variable real) con coeficientes en C (cuerpo de los números complejos).

Dotaremos a P de su topología natural , límite inductivo estricto de los espacios P_n , con $P_{n+1} \supset P_n$, $n \geq 0$, $P = \cup_{n \geq 0} P_n$, donde P_n es el subespacio vectorial de los polinomios de grado a lo más n , dotado de su topología natural .

Sea P´ su dual topológico.Se designará mediante $\langle u , p(x)\rangle$ el producto de dualidad entre P y P´ , $u \in P'$, $p(x) \in P$.

Dado $u \in P'$, los números complejos $(u)_n$, $n \geq 0$, definidos por $(u)_n = \langle u , x^n \rangle$, $n \geq 0$ se denominan momentos de orden n del funcional u respecto a la sucesión $(x^n)_{n \geq 0}$.

La topología dual débil de P´ está definida por la familia de seminormas

$|u|_n = \sup_{0 \leq k \leq n} |(u)_k|$, $n \geq 0$, que coincide con la topología dual fuerte.P´es un espacio de **Fréchet.**

Sea $\mathcal{E}$ el espacio vectorial $C^\infty(R)$ dotado de la topología natural , (topología de la convergencia uniforme sobre compactos).Se tiene que $\mathcal{E} \supseteq P$ y $\mathcal{E} = \overline{P}$ donde con $\supseteq$ indicamos la inyección continua ; se sigue de manera inmediata que $P' \supseteq \mathcal{E}'$.

Sea Δ el subespacio vectorial de $\mathcal{E}'$ generado por $\{D^n \delta\}$ $n \geq 0$, (derivada n-ésima de la delta de Dirac en el origen : $<\delta,\phi>_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}=\phi(0)$.

Introduciremos la aplicación lineal $F:\Lambda\rightarrow P$ definida por

$$d=\sum_{k=0}^{n}d_k(-1)^k(1/k!)D^k\delta \quad \rightarrow \quad F(d)(z)=\sum_{k=0}^{n}d_k z^k$$

Dotamos a Λ de la topología inicial respecto a P. Se tiene que $\mathcal{E}'\supseteq\Lambda$ y que $\overline{\Lambda}=P'$.

Es fácil comprobar que

i) F es isomorfismo de Λ en P

ii) ${}^tF$ es isomorfismo de P' en Λ'

iii) ${}^tF=F$ sobre Λ. Por tanto, también sobre P'

Se tiene así que $<F(u),d>_{\Lambda',\Lambda}=<u,F(d)>_{P',P}$,$u\in P'$, $d\in\Lambda$

Dado que la sucesión de funcionales lineales $\{(-1)^n(1/n!)D^n\delta\}_{n\geq 0}$ constituye una base universal de P' , un funcional u se puede representar mediante $u=\sum_{n\geq 0}(u)_n(-1)^n\ (1/n!)D^n\delta$; por tanto $F(u)(z)=\sum_{n\geq 0}(u)_n z^n$. (1.1.)

El dual Λ' aparece como el espacio vectorial de las series formales sobre C

Para más detalles sobre la identificación de ciertos subespacios de P',ver [46],[49],[57],[64],[67].

□

1.2. Algebra y cálculo operacional de funcionales lineales.

El isomorfismo F entre el espacio de las series formales Λ' y el espacio P' , permite dar sentido al producto de dos elementos de P'.Para establecer este producto deberemos previamente definir la multiplicación a la derecha de un funcional lineal por un polinomio.

Definición 1.2.1.

Sea $p \in P$, $p(x)=\sum_{j=0}^{q} a_j x^j$, $a_j \in C$, $j=0,1,..q$, *y sea* $u \in P'$.

El producto a la derecha de u por p que denotaremos por [up](x) es un polinomio definido por:

$$[up](x)=\sum_{n=0}^{q} \left(\sum_{j=n}^{q} a_j (u)_{j-n}\right) x^n \qquad (1.2.)$$

□

Definición 1.2.2.

La transpuesta de la aplicación lineal continua

$P \to P$: $p(x) \to [up](x)$, *define el producto de dos elementos de* P' *de la forma siguiente:*

$$\langle uv , p(x)\rangle = \langle v , up(x)\rangle \quad u,v, \in P' \ , \ p(x) \in P \qquad (1.3.)$$

□

Nota: Reemplazando p(x) por x^n en la definición anterior se tienen los momentos del funcional producto uv en función de los momentos de u y v , $(uv)_n = \sum_{i+j=n} (u)_i (v)_j$, $n \geq 0$.

Si el producto a la derecha de *u* por p(x), [up](x) es un polinomio, el producto a la izquierda de u por p(x), denotado por *p(x)u* , es un funcional lineal dado por

Definición 1.2.3.

$$\langle pu , q(x)\rangle = \langle u, p(x)q(x)\rangle \ , \ \forall p , q \in P , \forall u \in P'. \qquad (1.4.)$$

□

Si por D entendemos el operador derivada en $\mathbf{P}'$ y por θ_c el operador lineal ($c\in\mathbb{C}$) en $\mathbf{P}$ definidos respectivamente por:

$<Du , p> = -<u , p'>$ $\forall$ $u\in \mathbf{P}'$ y $\forall$ $p \in \mathbf{P}$

θ_c ; $\mathbf{P}\rightarrow\mathbf{P}$ $\quad \theta_c p(x)= \dfrac{p(x)-p(c)}{x-c}$, se siguen las siguientes propiedades:

Sean u ,v dos elementos de $\mathbf{P}'$ y p(x) un elemento de P.Se tiene que:

a) $[\delta p](x)=p(x)$ $\quad\forall$ $p(x)\in\mathbf{P}$

b) $(vu)p(x)=v[up(x)]$ $\quad\forall$ $u , v \in \mathbf{P}'$ y $\forall$ $p(x)\in \mathbf{P}$ (1.5)

c) $D[up(x)]=(Du)p(x)+uDp(x)+u\theta_0 p(x)$ $\quad\forall$ $u\in \mathbf{P}'$ y $\forall$ $p(x)\in \mathbf{P}$

d) $(\tau_\beta p)(x)= p(x-\beta)$ $\quad\forall$ $p(x)\in \mathbf{P}$

e) $(h_\alpha p)(x)=p(\alpha x)$ $\quad\forall$ $p(x)\in \mathbf{P}$

f) $(\sigma p)(x) =p(x^2)$ $\quad\forall$ $p(x)\in \mathbf{P}$

Por transposición se deducen de manera inmediata propiedades sobre los elementos de $\mathbf{P}'$. Si por x^{-1} designamos el operador transpuesto de θ_0 tenemos:

g) $\delta u=u$ $\quad\forall u\in \mathbf{P}'$

h) $(vu)w=v(uw)$, $\forall$ $u ,v, w \in \mathbf{P}'$ (1.6.)

i) $D(uv)=(Du)v+u(Dv)+x^{-1}(uv)$, $\forall$ $u, v \in \mathbf{P}'$

j) $x^{-1}(uv)=(x^{-1}u)v=u(x^{-1}v)$ $\quad ,\forall$ $u , v \in \mathbf{P}'$

k) $x(uv)=(xu)v+(xv)$ $\quad , \forall$ $u, v \in\mathbf{P}'$

l) $x^{-1}(xu)=u-\delta$, $\forall$ $u\in \mathbf{P}'$

m) $x(x^{-1}u)=u$, $\forall\ u\in P'$

n) $<\tau_{\beta}u\ ,p>=<u\ ,\tau_{-\beta}p>$ $\forall\ u\in P'$ y $\forall$ $p(x)\in P$

ñ) $<h_{\alpha}u\ ,p>=<u\ ,h_{\alpha}p>$ $\forall\ u\in P'$ y $\forall$ $p(x)\in P$ (1.6.)

o) $<\sigma u\ ,p>\ =<u\ ,\sigma p>$ $\forall\ u\in P'$ y $\forall$ $p(x)\in P$

en donde hemos normalizado el funcional mediante $(u)_0=1$.

□

Los siguientes Lemas serán precisos para posteriores demostraciones.

Lema 1.2.1.

$\forall$ $g\in P$ y $\forall$ $u\in P'$ se tiene $x^{-1}[g(x)u]+<u\ ,\theta_0 g(x)>\delta=g(x)(x^{-1}u)$ (1.7.)

DEMOSTRACION:

Sea $f(x)\in P$, $\theta_0(f.g)=\dfrac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x}=g(x)\dfrac{f(x)-f(0)}{x}+f(0)\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=g\theta_0 f+f(0)\theta_0 g$

entonces $<x^{-1}(gu),f>\ =\ <u\ ,g\theta_0 f>\ =\ <u\ ,\theta_0(f.g)>-<u\ ,f(0)\theta_0 g>=<g(x^{-1}u)\ ,\ f>-<u\ ,\theta_0 g><\delta\ ,f>$

de aquí (1.7.).

□

Lema 1.2.2.

$\forall$ $p\ ,q\in P$, y $\forall$ $u\in P'$ se tiene

$q(x)[u\theta_0 p(x)]-u\theta_0[q(x)p(x)]=-\theta_0[(p(x)u)q(x)]$ (1.8.)

DEMOSTRACION;

Por linealidad basta demostrar el lema para $p(x)=x^n$ y $q(x)=x^m$, $n,m\geq 0$

$$x^{m}(u\theta_0 x^{n})-u\theta_0(x^{m+n})=-\theta_0[(x^{n}u)x^{m}]\ ,\ n,m\geq 0$$

de donde $x^{m}(ux^{n-1})-ux^{m+n-1}=-\theta_0[(x^{n}u)x^{m}]$

$$x^{m}\sum_{j=0}^{n-1}(u)_j\,x^{n-1-j}-\sum_{j=0}^{m+n-1}(u)_j\,x^{m+n-1-j}=\sum_{j=0}^{n-1}(u)_j\,x^{m+n-1-j}-\sum_{j=0}^{m+n-1}(u)_j\,x^{m+n-1-j}=-$$

$$-\sum_{j=n}^{m+n-1}(u)_j\,x^{m+n-1-j}=-\sum_{t=0}^{m-1}(u)_{t+n}x^{m-t-1}=-\theta_0[(x^{n}u)x^{m}]$$

□

<u>Lema 1.2.3.</u>

$\forall\ u\in P'$ y $\forall\ p\in P$ se tiene que $\theta_0[up(x)]=u[\theta_0 p(x)]$ (1.9)

DEMOSTRACION:

Por linealidad es suficiente demostrar el lema para $p(x)=x^{n}$

$$\theta_0(ux^{n})=\theta_0\sum_{j=0}^{n}(u)_j\,x^{n-j}=\sum_{j=0}^{n-1}(u)_j\,x^{n-j-1}=ux^{n-1}=u(\theta_0 x^{n})$$

□

<u>Lema 1.2.4.</u>

$\forall\ u\in P'$ y $\forall\ p\ ,\ q\in P$ se tiene que $[u(pq)](x)=[(pu)q](x)+xq(x)(u\theta_0 p)(x)$

(1.10.)

DEMOSTRACION:

Por linealidad tomaremos $p(x)=x^{n}$ y $q(x)=x^{m}$, m , n ≥0

$$ux^{n+m}=\sum_{i=0}^{n+m}(u)_{n+m-i}\,x^{i}=\sum_{i=0}^{m}(u)_{m+n-i}x^{i}+\sum_{i=0}^{n-1}(u)_{n-i-1}x^{m+i+1}$$

□

Lema 1.2.5.

$\forall$ u , v $\in$ P´ y $\forall$ p $\in$P se tiene que

$$p(x)(uv)= [p(x)v]u + x(v\theta_0 p)(x)u \qquad (1.11.)$$

DEMOSTRACION:

Sea $q \in P$; $<p(uv) , q> = <uv ,pq > =<u, vpq > = <u ,(pv) q > + <u , xq(v\theta_0 p)>$

□

1.3.Base dual en P´de una base de P. ([42],[43]).

Sea $\{B_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de polinomios tales que grado de $B_n \leq n$, $n\geq 0$.

La sucesión $\{B_n\}_{n\geq 0}$ se dirá linealmente independiente si y solamente si el grado de B_n es n , $n\geq 0$.En este caso se puede normalizar cada polinomio de la sucesión considerando $B_n(x)=x^n+b_n x^{n-1}+\ldots$ .Se dirá ahora que la sucesión está normalizada.

Definición 1.3.1.

Se define como sucesión dual de la sucesión normalizada $\{B_n\}_{n\geq 0}$, a la sucesión de funcionales lineales $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dada por $<\alpha_n , B_m> = \delta_{n,m}$, $n,m\geq 0$.

La sucesión $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ es linealmente independiente y única, constituyendo una base universal de P´.

□

2.FUNCIONALES LINEALES REGULARES.POLINOMIOS ORTOGONALES

2.1.Funcionales lineales regulares.Polinomios ortogonales.

Definición 2.1.1.

Sea $\{P_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión en **P** *con grado de $P_n=n$ y sea u un elemento de* **P´** *.La sucesión $\{P_n\}_{n\geq 0}$ se dice ortogonal respecto a u si:*

i) $\langle u , P_m P_n\rangle=0$, $m\neq n$

ii) $\langle u , P_n^2\rangle\neq 0$, $n\geq 0$

□

Nota: Si $\langle u , P_n^2\rangle =1$, $n\geq 0$ la sucesión se dice ortonormal y cuando el coeficiente del término de mayor grado de cada P_n es la unidad , la sucesión se denomina mónica ,(S.P.O.M.).Si sólo se impone la condición i) diremos que $\{P_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión débilmente ortogonal, (ver [32]).

Teorema 2.1.1. ([14])

Los siguientes enunciados son equivalentes

i) La sucesión $\{P_n\}_{n\geq 0}$ es ortogonal respecto al funcional u.

ii) $\langle u , qP_n\rangle=0$ para todo polinomio q de grado m , donde $0\leq m\leq n-1$, mientras que $\langle u ,qP_n\rangle\neq 0$ si grado q=n.

$$iii)\quad \begin{cases} \langle u\ ,\ x^m P_n\rangle = 0 \quad 0\le m\le n-1\ ,\ n\ge 1 \\ \langle u\ ,\ x^n P_n\rangle \ne 0 \end{cases}$$

□

Nota: Una sucesión $\{P_n\}_{n\ge 0}$ ortogonal respecto a un funcional *u* es necesariamente linealmente independiente, de manera que siempre se la puede suponer normalizada (mónica).Tal sucesión, ahora, es única

Definición 2.1.2. ([16])

Un funcional lineal u se dice regular [51] *o cuasi-definido* [16] *,si existe una sucesión de polinomios ortogonales respecto a u.*

□

Un funcional lineal en general no admite una sucesión ortogonal en el sentido fuerte.Basta con considerar el funcional u definido por $(u)_n = a^n$, $a>0$, $n\ge 0$ .Si $P_0(x)=1$ y $P_1(x)=x-\beta_0$, $\langle u , P_0P_1\rangle = a-\beta_0 = 0$ y $\langle u , P_1^2\rangle = (a-\beta_0)^2 = 0$, que contradice a ii) de la Definición 2.1.1.

Teorema 2.1.2. ([14])

Un funcional lineal u es regular si y solamente si $\Delta_n(u)=\det[\,(u)_{i+j}]_{i,j=0}^{n} \ne 0$, $n\ge 0$

□

Toda sucesión ortogonal respecto a un funcional lineal verifica una relación de recurrencia lineal homogénea de orden 2.Esta relación de recurrencia constituye una caracterización de los polinomios ortogonales con respecto a un funcional lineal.

Teorema 2.1.3.

Sea **u** *un funcional regular de* P' *y sea* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *la correspondiente S.P.O.M.*

Entonces existen dos sucesiones de números complejos $\{\beta_n\}_{n\geq 0}$ *y* $\{\gamma_n\}_{n\geq 0}$, $\gamma_n\neq 0$, $\forall n\geq 0$ *tales que:*

$$P_0(x)=1 \qquad P_1(x)=x-\beta_0$$

$$P_{n+2}(x)=(x-\beta_{n+1})P_{n+1}(x)-\gamma_{n+1}P_n(x) \quad , \quad n\geq 0 \tag{2.1.}$$

□

Nota: El recíproco del Teorema 2.1.3. es válido y fue probado por Favard **[23]**,(ver también [16])

En 1.3. introdujimos el concepto de base dual de una sucesión de polinomios linealmente independientes.Tomaremos ahora como base en P' la base dual de una S.P.O.M. $\{P_n\}_{n\geq 0}$ .La notaremos por $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$.Sea $u\in P'$ el funcional lineal regular respecto al cual la sucesión $\{P_n\}_{n\geq 0}$es ortogonal.

Hacemos $u=\sum_{i=0}^{\infty} a_i\,\alpha_i$.

Proposición 2.1.1.

$$u=(u)_0\alpha_0 \qquad ; \qquad \alpha_i=\frac{P_i(x)}{\langle u\ ,\ P_i^2\rangle}\,u \tag{2.2}$$

DEMOSTRACION:

$$<\alpha_i \, , P_j(x)> = <\frac{P_i(x)}{<u \, , P_i^2(x)>} u \, , P_j(x)> = <u \, , \frac{P_i(x)P_j(x)}{<u \, , P_i^2>}> = \delta_{i,j}$$

□

~~2.2.Sucesiones de polinomios ortogonales clásicos y semiclásicos.~~

Entre las diferentes clases de polinomios ortogonales , los modelos más estudiados son los polinomios ortogonales clásicos , (Hermite ,Laguerre , Jacobi y Bessel),véase [16],[34] ,[42],[51],[52],[50] y [55].Partiendo de la ecuación distribucional que cumple el funcional de momentos , en la Proposición 2.2.1. indicamos caracterizaciones equivalentes.

~~Definición 2.2.1.~~

Se denomina funcional lineal clásico a toda solución regular de la ecuación

$D(\Phi u)+\Psi u=0$ donde $\phi(x)$ y $\Psi(x)$ son polinomios tales que $0 \leq$ grado$\Phi \leq 2$ y grado $\Psi=1$. (2.3.)

La S. P.O.M. correspondiente se dice sucesión clásica.

□

De manera equivalente a la definición 2.2.1. los polinomios ortogonales clásicos pueden ser caracterizados por:

Proposición 2.2.1.

i)Son polinomios ortogonales tales que la sucesión de sus derivadas también es ortogonal , ([27]).

ii)Son polinomios ortogonales que verifican una relación de recurrencia diferencial de *la forma* $\Phi(x)P'_n(x) = a_n P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + c_n P_{n-1}(x)$; $n \geq 1$

siendo a_n, b_n, c_n *constantes reales , con* $c_n \neq 0$ *y grado de* $\Phi(x) \leq 2$, ([3],[16],[42]).

iii)Cada P_n *verifica una ecuación diferencial*

$$A_2(x)P''_n(x) + A_1(x)P'_n(x) + A_0(n)P_n(x) = 0 \quad , \; n \geq 0$$

donde grado de $A_2(x) \leq 2$, *grado de* $A_1(x) = 1$ *y* $A_0(n) = -n\,[A'_1 + \frac{(n-1)A''_2}{2}] \neq 0$,([11],[60]).

□

La definición de un funcional clásico dada en 2.2.1. se generaliza de forma natural dando lugar a los polinomios ortogonales semiclásicos.

~~**Definición 2.2.2. ([30],[48]).**~~

Se denomina funcional lineal semiclásico a toda solución regular de la ecuación

$$D(\Phi u) + \Psi u = 0 \qquad (2.4.)$$

donde $\phi(x)$ *y* $\Psi(x)$ *son polinomios cuyos grados verifican la condición*

grado $\Phi = t \geq 0$ *y grado* $\Psi = p \geq 1$.

La S. P.O.M. correspondiente se dice que es sucesión semiclásica o Laguerre-Hahn afín , ([26]).

<u>Nota:</u>Si la ecuación (2.4.) admite soluciones regulares ,el par [Φ,Ψ] se dice par admisible. En general dicho par no es único.Asociando a cada par admisible el número natural h(u)=máx{ t-2,p-1}, definimos como clase "s" del funcional u al elemento mínimo de h(u), s=mín[h(u)].

Proposición 2.2.2.

Equivalentemente a la Definición 2.2.2. los polinomios ortogonales semiclásicos pueden ser caracterizados por:

i)*Existe un polinomio $\Phi(x)$ de grado $t \leq s+2$ tal que*

$$\Phi(x)P'_{n+1}(x) = \sum_{k=n-s}^{n+t} a_{n,k}P_k(x) \quad , \quad n \geq s,$$

con $a_{n,n-s} \neq 0$, $n \geq s+1$, ([49]).

ii)Existen polinomios $J(x,n)$, $K(x,n)$ y $L(x,n)$ cuyos grados son independientes de n ,

tales que $J(x,n)P''_n(x)+K(x,n)P'_n(x)+L(x,n)P_n(x)=0$, $n \geq 0$, *donde grado* $J \leq 2s+2$, *grado* $K \leq 2s+1$ *y grado* $L \leq 2s$, ([28]).

□

3.FUNCION DE STIELTJES ASOCIADA A UN FUNCIONAL LINEAL

3.1.Definición y propiedades.

Definición 3.1.1.

Dado $u \in P'$.La función de Stieltjes del funcional u, que denotaremos mediante $S(u)(z)$ se define mediante

$$S(u)(z) = - \sum_{n \geq 0} (u)_n / z^{n+1} \tag{3.1}$$

Nota: $-S(u)(z)$ es la Z-transformada de la sucesión de momentos asociada a u,(ver **[68]**).En lo que sigue, siempre que trabajemos con funciones de Stieltjes utilizaremos la z como variable independiente , reservando la variable **x** para el trabajo con las ecuaciones funcionales.

□

Veamos cómo se traducen las operaciones algebraicas para funcionales introducidas en 1.2. en términos de las funciones de Stieltjes.

Lema 3.1.1.

Sea $u \in P'$ y $B(x) \in P$.Considérese el isomorfismo F entre P' y Λ' (espacio de las series formales) dado por $F(u)(z) = \sum_{n \geq 0} (u)_n z^n$ .Se verifica que:

$$
\begin{array}{ll}
i) & zF(u)(z) = -S(u)(1/z) \\
ii) & S'(u)(z) = S(Du)(z) \\
iii) & S(u.v)(z) = -zS(u)(z)S(v)(z) \\
iv) & S(Bu)(z) = B(z)S(u)(z) + (u\theta_0 B)(z) \\
v) & S(x^{-1}u)(z) = (1/z)S(u)(z) \\
vi) & (1/z)(u\theta_0 B)(z) = -(1/z^2)S(\langle u, \theta_0 B \rangle \delta)(1/z) + (u\theta_0^2 B)(z)
\end{array}
\tag{3.2.}
$$

DEMOSTRACION:

i) Directamente de las definiciones de S(u)(z) y F(u)(z).

ii) Sea $u\in P'$, tenemos que $(Du)_n = \langle Du , x^n\rangle = -\langle u , nx^{n-1}\rangle = -n(u)_{n-1}$ con $(Du)_0=0$, luego

$$F(Du)(z) = \sum_{n\geq 0} (Du)_n z^n = -\sum_{n\geq 1} n(u)_{n-1} z^n = -\sum_{n\geq 0} (n+1)(u)_n z^{n+1}$$

De la definición de $S(u)(z)$ tenemos:

$$S(u)(1/z) = -z \sum_{n\geq 0} (u)_n z^n = -zF(u)(z) \text{ y}$$

$$S'(u)(1/z) = z \sum_{n\geq 0} (n+1)(u)_n z^{n+1} \quad \text{de aquí}$$

$$F(Du)(z) = -(1/z)S'(u)(1/z) \quad , \quad S'(u)(z) = -(1/z)F(Du)(1/z) = S(Du)(z)$$

iii) Sean $u , v\in P'$. Tenemos que $F(u.v)=F(u).F(v)$ pues

$$\sum_{n\geq 0} (u.v)_n z^n = \sum_{n\geq 0} (u)_n z^n . \sum_{n\geq 0} (v)_n z^n \qquad \text{al ser } (u.v)_n = \sum_{i+j=n} (u)_i (v)_j \quad , n\geq 0 .$$

Por tanto $F(u.v) = -(1/z) S(u.v)(1/z) = (1/z^2)S(u)(1/z)S(v)(1/z)$

$S(u.v)(z) = -zS(u)(z)S(v)(z)$.

iv) Demostraremos este apartado para $B(z)=z^n$ extendiendo el resultado a cualquier polinomio por linealidad. $Bu=z^n u$, luego $(Bu)_m = (u)_{n+m}$

Por otra parte $u\theta_0 B = u\theta_0 z^n = uz^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (u)_j z^{n-1-j}$

y $\sum_{m\geq 0} (u)_{n+m} z^m = (1/z^n) \sum_{m\geq 0} (u)_m z^m - (1/z) \sum_{j=0}^{n-1} (u)_j z^{1+j-n}$,luego

$$F(Bu)(z) = \sum_{m\geq 0} (u)_{n+m} z^m = (1/z^n) \sum_{m\geq 0} (u)_m z^m - (1/z) \sum_{j=0}^{n-1} (u)_j z^{1+j-n} = B(1/z)F(u)(z) - (1/z)(u\theta_0 B)(1/z)$$

$$-(1/z)S(Bu)(1/z) = B(1/z)(-1/z)S(u)(1/z) - (1/z)(u\theta_0 B)(1/z)$$

$$S(Bu)(z) = B(z)S(u)(z) + (u\theta_0 B)(z)$$

v) Sea $u \in P'$ y $p(x) \in P$.Entonces $\langle x^{-1}u , p(x)\rangle = \langle u , \theta_0 p(x)\rangle = \langle u , \frac{p(x)-p(0)}{x}\rangle$, luego

$$(x^{-1}u)_n = \langle x^{-1}u , x^n\rangle = \langle u , x^{n-1}\rangle = (u)_{n-1} \quad \text{con} \quad (x^{-1}u)_0 = 0$$

$$F(x^{-1}u)(z) = \sum_{n\geq 1} (x^{-1}u)_n z^n = \sum_{n\geq 1} (u)_{n-1} z^n = z \sum_{n\geq 0} (u)_n z^n = zF(u)(z).$$

$$(-1/z)S(x^{-1}u)(1/z) = -S(u)(1/z) \quad , \; S(x^{-1}u)(z) = (1/z)S(u)(z).$$

vi) Como en el apartado iv), lo demostraremos para $B(z)=z^p$ extendiendo el resultado por linealidad.Supondremos además que $p\geq 2$, pues para $p=0$ y $p=1$ el resultado es evidente.

$$\theta_0 B = \theta_0 z^p \; ; \quad uz^{p-1} = \sum_{j=0}^{p-1} (u)_j \, z^{p-1-j} \qquad \text{luego}$$

$$(1/z)(u\theta_0 z^p) = (1/z) \sum_{j=0}^{p-1} (u)_j \, z^{p-1-j}$$

Por otra parte $F(\langle u , \theta_0 z^p\rangle \delta) = (u)_{p-1}$ y $u\theta_0^2 z^p = uz^{p-2} = \sum_{j=0}^{p-2} (u)_j \, z^{p-2-j}$

$$(1/z) \sum_{j=0}^{p-1} (u)_j \, z^{p-1-j} = (1/z)(u)_{p-1} + \sum_{j=0}^{p-2} (u)_j \, z^{p-2-j} \text{ de donde vi).}$$

□

Las fracciones continuas constituyen uno de los orígenes de los polinomios ortogonales.Trataremos , a continuación , su relación con la función de Stieltjes.

Sean $\{\beta_i\}_{i\geq 0}$ y $\{\gamma_i\}_{i\geq 1}$ dos sucesiones numéricas.A $K_n = \cfrac{1}{x-\beta_0 - \cfrac{\gamma_1}{x-\beta_1 - \cdots \cfrac{\gamma_{n-1}}{x-\beta_{n-1}}}} = \frac{-A_n}{B_n}$

n=1,2,3....,

le llamaremos aproximación n-ésima o convergente n-ésimo de la fracción continua

$$\cfrac{1}{x-\beta_0-\cfrac{\gamma_1}{x-\beta_1-\cdots\cfrac{\gamma_n}{x-\beta_n}\cdots}}$$

Usando las formulas de Wallis ,ver [16], se puede comprobar que el n-ésimo denominador parcial $B_n=P_n$ es un polinomio de grado n , satisfaciendo la sucesión $\{P_n\}_{n\geq 0}$ una relación de recurrencia de la forma (2.1.) , $B_0=P_0=1$ y que el n-ésimo numerador parcial $-A_n = P^{(1)}_{n-1}$ es un polinomio de grado n-1 , cumpliéndose que la sucesión $\{P^{(1)}_n\}_{n\geq 0}$ de polinomios numeradores , es también ortogonal , (son los polinomios asociados de orden uno a los P_n, que se considerarán en **4.1.**)

Para cada sucesión $\{K_n\}_{n\geq 0}$ de aproximaciones de una fracción continua , existe una subsucesión tal que , para todo $z\in$ C-{R}, converge a una integral de Stieltjes de la forma $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\Psi(z)}{z-x}$, ([65]) , en donde $\Psi(z)$ representa una función de distribución con infinitos punto de crecimiento en R , tal que $\int_{-\infty}^{\infty} z^n\, d\Psi(z)=(u)_n$.La fracción continua se dice asociada a la integral $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\Psi(z)}{z-x}$, o bien a su desarrollo formal $\sum_{n\geq 0}(u)_n/z^{n+1}$.Ahora podemos definir la función de Stieltjes en términos de fracciones continuas.

<u>Definición 3.1.2.</u>

De manera equivalente a la definición (3.1.1.)

$$S(u)(z)=-\cfrac{1}{x-\beta_0-\cfrac{\gamma_1}{x-\beta_1-\cdots}} \qquad (3.3.)$$

es la representación de la función de Stieltjes en fracción continua.

□

4. PERTURBACIONES A LA RELACION DE RECURRENCIA .

4.1. Polinomios asociados. ([47])

Definición 4.1.1.

Llamaremos sucesión de polinomios asociados de primer orden de la sucesión $\{P_n\}_{\geq 0}$ *S.P.O.M. relativa al funcional lineal u , a la sucesión* $\{P_n^{(1)}\}_{n\geq 0}$ definida por:

$$P_n^{(1)}(x) = \frac{1}{(u)_0} < u \,,\, \frac{P_{n+1}(y)-P_{n+1}(x)}{y-x} > \;,\; n\geq 0 \qquad \text{(u actuando sobre y)} \quad (4.1)$$

□

La multiplicación a la derecha de un funcional por un polinomio nos permite dar un resultado equivalente

Proposición 4.1.1.

La definición 4.1.1. es equivalente a $(u)_0 P_n^{(1)}(x)=(u\theta_0 P_{n+1})(x)$ (4.2)

□

Recordando el concepto de polinomios numeradores descrito en la sección anterior se puede obtener fácilmente la relación de recurrencia que cumplen los polinomios asociados.

Teorema 4.1.1.

Dado $u\in P'$, *sea* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *la S.P.O.M relativa al funcional lineal* **u** *, y que verifica la relación de recurrencia (2.1.).*

La sucesión $\{P_n^{(1)}\}_{n\geq 0}$ *satisface la relación de recurrencia siguiente:*

$$P_0^{(1)}(x)=1 \quad ; \quad P_1^{(1)}(x) = x-\beta_1 \qquad (4.3.)$$

$$P_{n+2}^{(1)}(x) = (x-\beta_{n+2})P_{n+1}^{(1)}(x) - \gamma_{n+2}P_n^{(1)}(x) \quad , \; n\geq 0$$

□

Por aplicación del Teorema de Favard existe un funcional lineal normalizado $u^{(1)}$, $[(u^{(1)})_0=1]$, respecto al cual la sucesión $\{P_n^{(1)}\}_{n\geq 0}$ es ortogonal.El funcional $u^{(1)}$ se conoce como el funcional asociado de primer orden del funcional lineal u.

El siguiente Teorema 4.1.2. permite obetener una representación del funcional $u^{(1)}$ en términos de u.Previamente necesitaremos dos Lemas.

__Lema 4.1.1.__

$$\forall\, u\in P' \text{ y } \forall\, p\in P \text{ se cumple que } x[u^{-1}(u\theta_0 p(x))] = p(x) \qquad (4.4.)$$

siendo u^{-1} *el funcional inverso de* u , $(u.u^{-1} = \delta)$,

DEMOSTRACION;

Por linealidad efectuaremos la demostración para $p(x)= x^{n+1}$

$$u\theta_0 x^{n+1} = \sum_{j=0}^{n} (u)_{n-j}x^j$$

$$u^{-1}\left(\sum_{j=0}^{n} (u)_{n-j}x^j\right) = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} (u)_{n-j}(u^{-1})_{j-i}\right) x^i = (u)_0(u^{-1})_0\, x^n = x^n$$

□

Nota: $(u.u^{-1})_n = \sum_{j=0}^{n} (u)_j\,(u^{-1})_{n-j} = 0$, $n\geq 1$, de acuerdo con el hecho de ser $u.u^{-1}=\delta$.

Lema 4.1.2.

Sea $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ la base dual de la S.P.O.M. $\{P_n\}_{n\geq 0}$ y sea $\{\alpha_n^{(1)}\}_{n\geq 0}$ la base dual de la S.P.O.M. asociados de primer orden $\{P_n^{(1)}\}_{n\geq 0}$ .Se tiene:

$$\alpha_n^{(1)} = (u)_0\ (x\alpha_{n+1})\, u^{-1} \tag{4.5.}$$

DEMOSTRACION :

$$<(u)_0(x\,\alpha_{n+1})\,u^{-1}\ ,\ P_m^{(1)}> = <(u)_0\ (x\,\alpha_{n+1})\,u^{-1}\ ,\ \frac{u\theta_0 P_{m+1}}{(u)_0}> =$$

$$= <x\,\alpha_{n+1}\ ,\ u^{-1}\,(u\,\theta_0 P_{m+1})> = <\alpha_{n+1}\,,\,P_{m+1}> = \delta_{n,m}\,.$$

□

En estas condiciones, obtenemos una relación explícita entre los funcionales $u^{(1)}$ y u.

Teorema 4.1.2.

Sea u un funcional lineal regular.Se tiene que $\gamma_1 u^{(1)} = -(x^2 u^{-1})$. (4.6.)

DEMOSTRACION;

Del Lema 4.1.2. y la Proposición 2.1.1 se sigue que

$$u^{(1)} = \alpha_0^{(1)}\ ,\ u = \alpha_0\ ,\ \alpha_1 = \frac{P_1(x)\ u}{<u\ ,\ P_1^2>}\ ,\ (u^{(1)})_0 = (u)_0 = 1$$

$$\alpha_0^{(1)} = (x\alpha_1)\,u^{-1} = \left(\frac{x(x-\beta_0)u}{(u)_2-2(u)_1\beta_0+(u)_0\beta_0^2}\right)u^{-1} = -\frac{x^2\,u^{-1}}{\gamma_1}$$

□

Nota: $(u)_1=\beta_0$, $(u)_2=\beta_0^2+\gamma_1$, $(xu)\,u^{-1}=x(uu^{-1})-xu^{-1}=-xu^{-1}$

$(x^2u)\,u^{-1}=x[(xu)u^{-1}]-(xu)_0(xu^{-1})=-x^2u^{-1}-(u)_1(xu^{-1})$.

Lema 4.1.3.

Sea $u\in P'$, $\{P_n\}_{n\geq 0}$ la S.P.O.M. correspondiente al funcional lineal u y sea B(x) un polinomio de grado k.Se tiene:

$$u\theta_0(BP_{m+1})=BP_m^{(1)}\quad,\quad m\geq k\quad,\quad [\gamma_0=(u)_0=1] \tag{4.7.}$$

DEMOSTRACION

Reemplazando P(x) por P_{m+1} y q(x) por B(x) en la ecuación (1.8.) y recordando la Definición 4.1.1 , (r=0) tenemos

$u\theta_0(BP_{m+1})=BP_m^{(1)}+\theta_0[(P_{m+1}u)B]$

Pero $(P_{m+1}u)B=0$ para $m\geq k$, pues si $B=\sum_{j=0}^{k} a_j x^j$ con $a_j\in C$, entonces

$(P_{m+1}u)B=\sum_{n=0}^{k}\sum_{j=n}^{k} a_j\,(P_{m+1}u)_{j-n}x^n$ donde

$(P_{m+1}u)_{j-n}=0$ si $j-n\leq m$, $n=0,1,2,,,k$

□

El Teorema 4.1.1. muestra que la asociación de orden uno conlleva una traslación de los coeficientes de la relación de recurrencia.Consideraremos de forma más general la sucesión $\{P_n^{(r)}\}_{n\geq 0}$.Es claro que $\{P_n^{(r)}\}_{n\geq 0}$ es la sucesión asociada de orden uno a la sucesión $\{P_n^{(r-1)}\}_{n\geq 0}$ hecho que nos permite la siguiente definición.

Definición 4.1.2.

De manera general se define la sucesión asociada de orden r, $r\in N$ como aquella que cumple la relación de recurrencia:

$$P_0^{(r)}(x)=1 \quad ; \quad P_1^{(r)}(x) = x-\beta_r$$

$$P_{n+2}^{(r)}(x) = (x-\beta_{n+r+1})P_{n+1}^{(r)}(x) - \gamma_{n+r+1}P_n^{(r)}(x) \quad , n\geq 0 \tag{4.8.}$$

□

Por aplicación del Teorema de Favard existe un funcional lineal normalizado $u^{(r)}$, $[(u^{(r)})_0=1]$, respecto al cual la sucesión $\{P_n^{(r)}\}_{n\geq 0}$ es ortogonal.El funcional $u^{(r)}$ se conoce como el funcional asociado de orden r del funcional u.

Como consecuencia de la Proposición 4.1.1. tenemos:

Proposición 4.1.2.

La Definición 4.1.2. es equivalente a $\quad P_n^{(r+1)}(x) = u^{(r)}\theta_0 P_{n+1}^{(r)}(x) \qquad (4.9.)$

□

Definición 4.1.3.

Los coeficientes β y γ de la relación de recurrencia (2.1.) son funciones del subíndice "n". Una extensión de la relación de recurrencia aparece cuando hacemos que los mencionados coeficientes β y γ sean funciones de "n+τ", $\tau\in C$, $\gamma(n+\tau)\neq 0$.

Esta modificación en los coeficientes de la relación de recurrencia da lugar a una nueva clase de polinomios ortogonales que los denominaremos polinomios asociados de orden τ y los representaremos por P_n^{τ} , ([4],[12],[69]).

□

4.2.Polinomios co-recursivos ([15],[17][40],[62],[66]).

Sea $\{P_n\}_{n\geq 0}$ una S.P.O.M. cumpliendo la relación (2.1).Modificando los coeficientes β_i y γ_i ,obtendremos nuevas familias de polinomios ortogonales.De estas nuevas familias estudiaremos propiedades , relación de recurrencia y relación entre las correspondientes funciones de Stieltjes.

Definición 4.2.1.

Sea $\{P_n\}_{n\geq 0}$ una S.P.O.M. cuya relación de recurrencia viene dada por (2.1).Consideremos una modificación única en el coeficiente β_k, haciendo

$$\beta_k^*=\beta_k+\mu \ , \quad \beta_i^*=\beta_i \ , \ i\neq k. \ , \quad \gamma_i^*=\gamma_i \quad , \ i\in N$$

La nueva familia de polinomios ortogonales resultante se denomina sucesión de polinomios co-recursivos generalizados y la representaremos por $\{P_n^*\}_{n\geq 0}$.

La fórmula de recurrencia para esta nueva familia es :

$$P_j^*(x) = P_j(x) \qquad 0\leq j\leq k$$

$$P_{k+1}^*(x) = (x-\beta_k-\mu)P_k^*(x) - \gamma_k P_{k-1}^*(x) = P_{k+1}(x)-\mu P_k(x) \tag{4.10.}$$

$$P_{n+2}^*(x) = (x-\beta_{n+1})P_{n+1}^*(x) - \gamma_{n+1}P_n^*(x) \ , \quad n\geq k$$

□

Nota: La solución general de la relación de recurrencia (4.10.) puede ser escrita de la forma

$\overset{*}{P}_n(x)=A_0(x)P_n(x)+B_0(x)P^{(1)}_{n-1}(x)$ o bien $\overset{*}{P}_n(x)=A_k(x)P_n(x)+B_k(x)P^{(k+1)}_{n-(k+1)}(x)$

determinándose A_k y B_k según las condiciones iniciales $\overset{*}{P}_k(x)$ y $\overset{*}{P}_{k+1}(x)$.En términos de los asociados de orden (k+1) resulta $\overset{*}{P}_n(x)=P_n(x)-\mu\, P_k(x)\, P^{(k+1)}_{n-(k+1)}(x)$ $n\geq k+1$, $\overset{*}{P}_n(x)=P_n(x)$ $n\leq k$.

Denotaremos por u* el funcional lineal normalizado ($(u^*)_0=1$) respecto al que la sucesión $\{\overset{*}{P}_n\}_{n\geq 0}$ es ortogonal.

Proposición 4.2.1.

Sea S(u)(z) la función de Stieltjes correspondiente al funcional u y $S_{\mu,k}(u^*)(z)$ la correspondiente al funcional u .Se tiene :*

$$S_{\mu,k}(u^*)(z)=\frac{A(z)S_{k+1}(z)+B(z)}{C(z)S_{k+1}(z)+D(z)} \qquad (4.11.)$$

$$A(z)=\gamma_{k+1}P^{(1)}_{k-1}(z) \qquad B(z)=P^{(1)}_{k}(z)-\mu P^{(1)}_{k-1}(z)$$

$$C(z)=-\gamma_{k+1}P_k(z) \qquad D(z)=-P_{k+1}(z)+\mu P_k(z)$$

En donde $S_{k+1}(z)$ representa la función de Stieltjes correspondiente al funcional lineal $u^{(k+1)}$, asociado de orden (k+1) del funcional lineal u.

DEMOSTRACION:

Siguiendo la Definición 3.1.2. tenemos

$$S_{\mu,k} = -\cfrac{1}{(x-\beta_0) - \cfrac{\gamma_1}{(x-\beta_1) - \dots - \cfrac{\gamma_{k-1}}{(x-\beta_{k-1}) - \cfrac{\gamma_k}{(x-\beta_k-\mu)+\gamma_{k+1}S_{k+1}}}}}$$

Sea $\dfrac{A_k}{B_k} = -\cfrac{1}{(x-\beta_0) - \cfrac{\gamma_1}{(x-\beta_1) - \dots - \cfrac{\gamma_{k-1}}{(x-\beta_{k-1})}}}$ la aproximación k-ésima

Sabemos que $\dfrac{A_k}{B_k} = -\dfrac{P_{k-1}^{(1)}}{P_k}$ .Ahora usando las formulas de Wallis , ([16] pág. 80).

$$A_{k+1} = -\gamma_{k+1} P_{k-1}^{(1)} S_{k+1} - P_k^{(1)} + \mu P_{k-1}^{(1)} \quad , \quad B_{k+1} = \gamma_{k+1} P_k S_{k+1} + P_{k+1} - \mu P_k$$

de aquí (4.11)

$\square$

Corolario 4.2.1.

Sea $S(u)(z)$ la función de Stieltjes correspondiente al funcional u y sea $S_{k+1}(z)=S(u^{(k+1)})(z)$ la correspondiente función de Stieltjes asociada al funcional lineal $u^{(k+1)}$, asociado de orden $(k+1)$ al funcional u . Se tiene que:

$$\gamma_{k+1}S_{k+1}(z)=\frac{-P_{k+1}(z)S(u)(z)\ -\ P_k^{(1)}(z)}{P_k(z)S(u)(z)+P_{k-1}^{(1)}(z)} \qquad (4.12.)$$

DEMOSTRACION:

Se sigue de la Proposición 4.2.1. haciendo μ=0.

□

Proposición 4.2.2.

Sea $S(u)(z)$ la función de Stieltjes correspondiente al funcional u y $S_{\mu,k}(u^*)(z)$ la correspondiente al funcional u^*.Se tiene que:

$$S_{\mu,k}(u^*)(z)=\frac{A(z)S(z)\ +\ B(z)}{C(z)S(z)\ +\ D(z)} \qquad (4.13.)$$

con $A(z)=\prod_{j=0}^{k}\gamma_j\ -\mu P_kP_{k-1}^{(1)}$; $B(z)=\mu(P_{k-1}^{(1)})^2$; $C(z)=\mu(P_k)^2$; $D(z)=\prod_{j=0}^{k}\gamma_j\ +\mu P_kP_{k-1}^{(1)}$

DEMOSTRACION:

Se obtiene sustituyendo (4.12.) en (4.11.). y recordando que

$$P_k^{(1)}P_k - P_{k-1}^{(1)}P_{k+1}=\prod_{j=0}^{k}\gamma_j \qquad \text{,(ver [16] pág. 86)} \qquad (4.14.)$$

□

4.3.Polinomios co-dilatados .([20],[40]).

Definición 4.3.1.

Sea $\{P_n\}_{n\geq o}$ una S.P.O.M. cuya relación de recurrencia viene dada por (2.1).Consideremos una *modificación única en el coeficiente* γ_k *haciendo:*

$$\gamma^{\bullet}_k=\lambda\gamma_k\ ,\lambda>0\ ,\quad \gamma^{\bullet}_n=\gamma_n\ ,\ n\neq k\ ,\ \beta^{\bullet}_i=\beta_i\ .$$

La nueva familia de polinomios ortogonales generada se denomina de polinomios co-dilatados generalizados y la representaremos por $\{P^{\bullet}_n\}_{n\geq 0}$. *La fórmula de recurrencia para esta familia es:*

$$P^{\bullet}_j(x)=P_j(x)\qquad ,\ 0\leq j\leq k$$

$$P^{\bullet}_{k+1}(x)=(x-\beta_k)P^{\bullet}_k(x)-\lambda\gamma_k P^{\bullet}_{k-1}(x)=P_{k+1}(x)+(1-\lambda)\gamma_k P_{k-1}(x) \tag{4.15.}$$

$$P^{\bullet}_{n+2}(x)=(x-\beta_{n+1})P^{\bullet}_{n+1}(x)-\gamma_{n+1}P^{\bullet}_n(x)\quad ,\quad n\geq k \qquad \Box$$

Notaremos por $u^{\bullet}$ el funcional lineal normalizado respecto al cual la sucesión $\{P^{\bullet}_n\}_{n\geq 0}$ es ortogonal.

Proposición 4.3.1.

Sea $S(u)(z)$ *la función de Stieltjes correspondiente al funcional* u *y* ${}_\lambda S_k(u^{\bullet})(z)$ *la correspondiente al funcional* $u^{\bullet}$. *Se tiene que:*

$${}_\lambda S_k(u^{\bullet})(z)=\frac{A(z)S(z)+B(z)}{C(z)S(z)+D(z)} \tag{4.16.}$$

siendo $A(z)=\prod_{j=1}^{k}\gamma_j+(1-\lambda)\gamma_k P^{(1)}_{k-2}(z)P_k(z)$; $B(z)=+\gamma_k(1-\lambda)P^{(1)}_{k-1}(z)\,P^{(1)}_{k-2}(z)$

$$C(z)=-\gamma_k\,(1-\lambda)P_k(z)P_{k-1}(z) \qquad ;\ D(z)=\prod_{j=1}^{k}\gamma_j\;-\;(1-\lambda)\,\gamma_k\,P^{(1)}_{k-1}(z)P_{k-1}(z)$$

DEMOSTRACION:

$$ {}_{\lambda}S_k(u^{\bullet})(z) = -\cfrac{1}{(x-\beta_0)-\cfrac{\gamma_1}{(x-\beta_1)-\ldots-\cfrac{\gamma_{k-1}}{(x-\beta_{k-1})+\lambda\gamma_k S_k}}}$$

$$\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} = -\cfrac{1}{(x-\beta_0)-\cfrac{\gamma_1}{(x-\beta_1)-\ldots-\cfrac{\gamma_{k-2}}{(x-\beta_{k-2})}}} = -\frac{P^{(1)}_{k-2}}{P_{k-1}}$$

Las formulas de Wallis junto con (4.12.) y (4.14.) dan el resultado. □

4.4. Polinomios co-modificados ([40],[51],[63]).

Definición 4.4.1.

Sea $\{P_n\}_{n\geq 0}$ una S.P.O.M. cuya relación de recurrencia viene dada por (2.1.).Consideremos una modificación de los coeficientes de la forma:

$$\overset{\circ}{\beta}_k=\beta_k+\mu \quad , \quad \overset{\circ}{\beta}_i=\beta_i \ , \quad i\neq k \quad , \quad \overset{\circ}{\gamma}_k=\lambda\gamma_k \quad , \quad \overset{\circ}{\gamma}_i=\gamma_i \quad , \quad i\neq k \quad , \quad \lambda>0 .$$

La nueva familia de polinomios ortogonales generada se denomina de polinomios co-modificados generalizados y la representaremos por $\{\overset{\circ}{P}_n\}_{n\geq 0}$.La fórmula de recurrencia para esta familia es:

$$\overset{\circ}{P}_j(x) = P_j(x) \quad , \quad 0 \leq j \leq k .$$

$$\overset{\circ}{P}_{k+1}(x) = (x-\beta_k - \mu)\, \overset{\circ}{P}_k(x) - \lambda\gamma_k \overset{\circ}{P}_{k-1}(x) \tag{4.17.}$$

$$\overset{\circ}{P}_{n+2}(x) = (x-\beta_{n+1})\overset{\circ}{P}_{n+1}(x) - \gamma_{n+1}\overset{\circ}{P}_n(x) \quad , \; n \geq k$$

□

Notaremos por $\overset{\circ}{u}$ el funcional lineal normalizado respecto al cual la sucesión $\{\overset{\circ}{P}_n\}_{n\geq 0}$ es ortogonal.

Proposición 4.4.1.

Sea $S(u)(z)$ la función de Stieltjes correspondiente al funcional u y ${}_\lambda S_{\mu,\kappa}(\overset{\circ}{u})(z)$ la correspondiente al funcional $\overset{\circ}{u}$. Se tiene que:

$${}_\lambda S_{\mu,\kappa}(\overset{\circ}{u}(z)) = \frac{A(z)S(z)+B(z)}{C(z)S(z)+D(z)} \tag{4.18.}$$

siendo $$A(z) = -\prod_{j=1}^{k} \gamma_j + P_k(z)\, [\, -(1-\lambda)\, \gamma_k P^{(1)}_{k-2}(z) + \mu\, P^{(1)}_{k-1}(z)\,]$$

$$B(z) = P^{(1)}_{k-1}(z)\, [\, \mu P^{(1)}_{k-1}(z) - \gamma_k (1-\lambda)\, P^{(1)}_{k-2}(z)\,]$$

$$C(z) = P_k(z)\, [-\mu\, P_k(z) + \gamma_k\, (1-\lambda)\, P_{k-1}(z)\,]$$

$$D(z) = -\prod_{j=1}^{k} \gamma_j + P^{(1)}_{k-1}(z)\, [\, (1-\lambda)\gamma_k P_{k-1}(z) - \mu P_k(z)\,]$$

DEMOSTRACION:

$$
{}_{\lambda}S_{\mu,\kappa} = -\cfrac{1}{(x-\beta_0) - \cfrac{\gamma_1}{(x-\beta_1) - \dots - \cfrac{\gamma_{k-1}}{(x-\beta_{k-1}) - \cfrac{\lambda\gamma_k}{(x-\beta_k-\mu)+\gamma_{k+1}S_{k+1}}}}}
$$

Sea $\dfrac{A_k}{B_k} = -\dfrac{P^{(1)}_{k-1}}{P_k}$ como en la Proposición 4.2.1.

Las formulas de Wallis , junto con (4.12.) y (4.14.) dan el resultado.

$\square$

~~Nota~~: La reiteración del caso co-modificado ha sido realizada por P.Maroni en [51].Se encuadra dentro de la teoría de perturbaciones finitas analizada para el caso particular de funcionales definidos positivos por P. Nevai y W.Van Assche [58] ,así como por F.Peherstorfer [61].

En [20] se puede encontrar una relación explícita entre los funcionales correspondientes a los polinomios perturbados y a los polinomios originales para algunos casos particulares, obteniéndose los siguientes resultados:

i) Para el caso co-recursivo k=0 , $u^* = (u^{-1} + \mu\, D\,\delta)^{-1}$.

ii)Para el caso co-dilatado k=1, $u^{\bullet} = [\,\lambda u^{-1}+(1-\lambda)\delta+(1-\lambda)\beta_0 D\delta\,]^{-1}$

iii)Para una superposición de los casos i) y ii) $u^{\circ}= \{\,\lambda u^{-1}+(1-\lambda)\delta+[(1-\lambda)\beta_0+\lambda\mu\,]D\delta\,\}^{-1}$

Por otra lado en [36] y [37] se da una representación explícita de los polinomios co-recursivos , k=0 de los asociados de orden k a los polinomios de Laguerre y de Jacobi, así como la parte absolutamente continua de la medida de ortogonalidad correspondiente

En [66] se analiza una aplicación física de las perturbaciones anteriormente estudiadas .Sea

$\{P_n\}_{n\geq 0}$ una S.P.O.M. , respecto a un funcional $\underline{u}$ definido positivo satisfaciendo la relación de recurrencia (2.1.) .

Consideremos la siguiente modificación en la relación de recurrencia

$$P^*_{n+2}(x)=(x-\beta_{n+1})P^*_{n+1}(x)-\gamma_{n+1}P^*_n(x)\ ,\ n\geq 0 \tag{4.19}$$

$$P^*_1(x)=\alpha x-\beta_0-\mu \qquad \alpha\neq 0\ ,\ P^*_0(x)=1.$$

Los polinomios P^*_n son ortogonales con respecto a un funcional u^* que es definido positivo para $\alpha>0$ y cuasi-definido para $\alpha<0$ y algunas propiedades (como teoremas de separación de ceros , verdadero intervalo de ortogonalidad $(\overset{*}{\xi}_1\ ,\overset{*}{\eta}_1)$, etc.) pueden ser determinados a partir de los $P_n(x)$. La relación entre las funciones de Stieltjes relativas a los funcionales u y u* respectivamente viene dada por $S(u^*)(z)=\dfrac{-\alpha}{(\alpha-1)z-\mu-\dfrac{1}{S(u)(z)}}$ y para $\alpha>0$ la relación de ortogonalidad para los $P^*_n(x)$ es:

$$\int_{\overset{*}{\xi}_1}^{\overset{*}{\eta}_1} P^*_n(x)P^*_m(x)d\Gamma^*(x)=\alpha\gamma_1\ldots\gamma_{n-1}\delta_{nm} \quad \text{para } n,m=0,1,2,..$$

donde $\Gamma^*(x)$ es una función de distribución que puede ser determinada por la fórmula de inversión de Stieltjes , (ver **[16]** pág 90) .

Consideremos los polinomios de Tchebichev de segunda especie $U_n(x)$,que satisfacen la relación de recurrencia (2.1.) con $\beta_n=0$, $n\geq 0$, y $\gamma_n=1/4$, $n\geq 1$.

Sea u*el funcional correspondiente a los polinomios co-recursivos $U^*_n(x)$,según (4.19) .Si u* es definido positivo la correspondiente función de distribución tiene espectro continuo contenido en [-1,1] y posiblemente un espectro puntual consistente a lo más en dos puntos.

En la física del estado sólido , en el contexto del modelo de cadena , los polinomios co-recursivos de los polinomios de Tchebichev, pueden representar el efecto (descrito por los parámetros α y μ) de un átomo situado sobre una superficie, que corresponde a la cadena constante $\beta_n=0$, $n\geq 0$, y $\gamma_n=1/4$, $n\geq 1$.

Los polinomios co-recursivos aparecen en la teoría del potencial disperso, en particular con la técnica de L^2, donde se puede dar una interpretación física a partir de las propiedades espectrales.

Refiriéndonos a la ecuación de Schrodinger

$$-\frac{h^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}\Psi+\sigma e^{(1/2)\lambda r}\Psi=E\Psi$$

las L^2 -funciones son $\Phi_n(r)=[\lambda r/(n+1)]L_n^{(1)}(\lambda r)e^{(1/2)\lambda r}$, donde $L_n^{(1)}(x)$ son los polinomios de Laguerre y $\Psi=\sum_{n\geq 0}R_n(E)\Phi_n(r)$ .Definiendo $x=[E-\lambda^2/8]/[E+\lambda^2/8]$, $R_n(E)$ es proporcional a los polinomios co-recursivos de Tchebichev con $\alpha=1+\frac{2\sigma}{\lambda^3}$ y $\mu=\alpha-1$.El espectro del Hamiltoniano para este modelo es reflejado por el espectro de $\Gamma^*(x)$, además del espectro continuo [-1,1], aparece un punto espectral aislado si $-4\sigma/\lambda^3>1/2$, $-4\sigma/\lambda^3\neq 2$, que corresponde al estado acotado, (ver [29]).

□

CAPITULO II.

POLINOMIOS DE LAGUERRE-HAHN.

1.1. Caracterizaciones y equivalencias. ([12],[13],[18],[22],[39]).

Definición 1.1.1.

Un funcional lineal u se dice de Laguerre-Hahn si la función de Stieltjes $S(u)(z)=-\sum_{n\geq 0}(u)_n/z^{n+1}$ *verifica una ecuación de Riccati*

$$\Phi(z)S'(u)(z)=B(z)S^2(u)(z)+C(z)S(u)(z)+D(z) \qquad (1.1.)$$

siendo $\Phi(z)$, $B(z)$, $C(z)$ *y* $D(z)$ *polinomios con coeficientes complejos, con*

$\Phi(z)\neq 0$, $B(z)\neq 0$ *y* $D(z)=-[(Du)\,\theta_0\,\Phi](z)+(u\,\theta_0 C)(z)-(u^2\,\theta_0^{\,2}B)(z)$

□

Nota: Cuando B(z) es idénticamente nulo , la función de Stieltjes satisface una ecuación diferencial afín de la forma $\Phi(z)S'(u)(z)=C(z)S(u)(z)+D(z)$ y los polinomios correspondientes son llamados de Laguerre-Hahn afines y también polinomios semiclásicos, (ver [26], [49],[51]).

Definición 1.1.2.

Sea $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *una S.P.O.M. relativa a un funcional lineal* u *regular.*

Diremos que $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *es de Laguerre-Hahn si u es un funcional lineal de Laguerre-Hahn.*

□

Teorema 1.1.1.

Sea u un funcional regular normalizado $[(u)_0=\gamma_0=1]$ *, y sea* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *la correspondiente S.P.O.M.*

Las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) u es un funcional de Laguerre-Hahn.Consecuentemente , $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *es una sucesión de polinomios ortogonales de Laguerre-Hahn.*

b) u verifica la ecuación funcional $D[\Phi u]+\Psi u+B(x^{-1}u^2)=0$ (1.2.)

donde $\Phi(x)$, $B(x)$ *y* $C(x)$ *son los polinomios definidos anteriormente en (1.1)*

y $\Psi(x)=-[\Phi'(x)+C(x)]$ *, siendo t el grado de* $\Phi(x)$, p el grado de $\Psi(x)\geq 1$ y r el grado de $B(x)$.

c) u satisface la ecuación funcional $D[x\Phi u]+(x\Psi-\Phi)u+Bu^2=0$ con la condición suplementaria $<u,\Psi>+<u^2,\theta_0 B>=0$ *donde* $\Phi(x)$,$\Psi(x)$ *y* $B(x)$ *son los polinomios definidos en b)*

d) Cada polinomio $P_n(x)$, $n\geq 0$ *, verifica una relación (llamada de estructura) de la forma*

$$\Phi P'_{n+1}(x)-BP_n^{(1)}(x)=\sum_{\mu=n-s}^{n+d}\theta_{n,\mu}P_\mu(x) \qquad , \; n\geq s+1 \tag{1.3.}$$

siendo $\Phi(x)$ *y* $B(x)$ *los polinomios definidos en a) y* $\{P_n^{(1)}\}_{n\geq 0}$ *la sucesión de polinomios ortogonales* asociados de primer orden relativa a $\{P_n\}_{n\geq 0}$,*siendo* $s=\text{máx}(p-1,d-2)$ y $d=\text{máx}(t,r)$.

DEMOSTRACION:

a)$\Rightarrow$b)

Usando el Lema 3.1.1. Cap.I. en términos de F(z) , (1.1.) se escribe

$$-\Phi(z)(1/z)F(Du)(1/z)=B(z)(1/z^2)F(u^2)(1/z)+C(z)[-(1/z)F(u)(1/z)]+D(z) \tag{1.4.}$$

$$-(1/z)F[\Phi Du](1/z)-[(Du)\theta_0\Phi](z)=B(z)(1/z^2)F(u^2)(1/z)-(1/z)C(z)F(u)(1/z)+D(z) \tag{1.5.}$$

$$-(1/z)F[\Phi Du](1/z)-[(Du)\theta_0\Phi](z)=(1/z^2)F(Bu^2)(1/z)+(1/z)(u^2\theta_0B)(z)-(1/z)F(Cu)(1/z)-$$

$$-(u\theta_0C)(z)+D(z) \qquad (1.6.)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que $D(uf)=(Du)f+uDf+u\theta_0 f \quad ,\forall \; u\in P' \;$ y $\forall\; f\in P$ se deduce que:

$$D(u\theta_0\Phi)=(Du)\theta_0\Phi+uD(\theta_0\Phi)+u\theta_0^2\;\Phi=(Du)\theta_0\Phi+u[D(\theta_0\Phi)+\theta_0^2\Phi]$$

pero $\qquad D(\theta_0\Phi)+\theta_0^{\,2}\Phi=\theta_0\Phi'$

entonces $D(u\theta_0\Phi)=(Du)\theta_0\Phi+u\theta_0\Phi'$

y $\qquad -[(Du)\theta_0\Phi](z)=-D(u\theta_0\Phi)(z)+(u\theta_0\Phi')(z).$

Sustituyendo estas ecuaciones en (1.6),se sigue que

$$(1/z)F[-D(\Phi u)+(\Phi'+C)u-x^{-1}(Bu^2)-<u^2,\theta_0B>\delta](1/z)+[-D(u\theta_0\Phi)+u\theta_0(\Phi'+C)-(u^2\theta_0^2B)-D](z)=0$$

De esta ecuación se deduce que todas las potencias negativas de z son nulas, de donde

$$D(z)=-D(u\theta_0\Phi)+u\theta_0(\Phi'+C)-(u^2\theta_0^2B)$$

y $\qquad -D(\Phi u)+(\Phi'+C)u-x^{-1}(Bu^2)-<u^2,\theta_0B>\delta=0$

Usando el Lema 1.2.1. Cap.I. se obtiene (1.2.) , $(\Psi=-(\Phi'+C))$.

b)$\Rightarrow$c)

Aplicando el Lema 1.2.1. a (1.2.) tenemos

$$D[\Phi u]+\Psi u+x^{-1}(Bu^2)+<u^2,\theta_0B>\delta=0.$$

Multiplicando por x concluímos el resultado.

c)$\Rightarrow$d)

Partiremos de la expresión $\Phi P'_{n+1} - u\theta_0(BP_{n+1})$ que es un polinomio de grado n+d

, luego existen números complejos $\{\theta_{n,j}\}$, $0\le j\le n+d$, tales que

$$\Phi P'_{n+1} - u\theta_0(BP_{n+1}) = \sum_{j=0}^{n+d} \theta_{n,j}P_j$$

Multiplicando por P_m , m=0,1,2,..,n+d y aplicando u

$$<u\,,\Phi P'_{n+1}P_m> - <u\,,P_m(u\theta_0(BP_{n+1}))> = \theta_{n,m}<u\,,P_m^2> \qquad (1.7.)$$

Por otra parte, aplicando $xD[\Phi u]+x\Psi u+Bu^2=0$ a $(\theta_0 P_m P_{n+1})$ tenemos

$$-<u\,,\Phi(P_mP_{n+1})'> + <u\,,\Psi P_mP_{n+1}> + <u\,,u\theta_0BP_mP_{n+1}> =0 \qquad \text{y}$$

$$<u\,,\Phi P'_{n+1}P_m> = <u\,,\Psi P_mP_{n+1}> + <u\,,u\theta_0BP_mP_{n+1}> - <u\,,\Phi P'_mP_{n+1}>\,,$$

$$0\le m\le n+d \qquad (1.8.)$$

Comparando $<u\,,\Phi P'_{n+1}P_m>$ entre (1.7.) y (1.8.) obtenemos

$$<u\,,(\Psi P_m - \Phi P'_m)P_{n+1}> - <u\,,P_m[u\theta_0(BP_{n+1})]-u\theta_0(BP_mP_{n+1})> = \theta_{n,m}<u\,,P_m^2>$$

$$<u\,,(\Psi P_m-\Phi P'_m)P_{n+1}> + <u\,,B(u\theta_0P_m)P_{n+1}> = \theta_{n,m}<u\,,P_m^2>\,, \quad 0\le m\le n+d \qquad (1.9.)$$

Estudiando los grados de los polinomios implicados en (1.9.) y recordando que $\{P_n(x)\}_{n\ge 0}$ es sucesión ortogonal respecto a u , obtenemos que $\theta_{n,m}=0$ para $m\le n-s-1$,luego

$$\Phi P'_{n+1}-u\theta_0(BP_{n+1}) = \sum_{j=n-s}^{n+d} \theta_{n,j}P_j\,, \quad n\ge s+1.$$

Del Lema 4.1.3. se sigue el resultado.

d)$\Rightarrow$a)

Consideremos el funcional lineal $v=D[\Phi u]+B(x^{-1}u^2)+(\sum_{j=0}^{s+1} A_j x^j)u$ con $A_j\in C$, j=0,1,2,..,s+1.

Para $n \geq s+2$ se tiene que

$$<v\,,P_n> = -<u\,,\Phi P'_n + BP^{(1)}_{n-1}> + <(\sum_{j=0}^{s+1} A_j x^j)u\,,P_n> = -<u\,,\sum_{j=n-s-1}^{n+d-1} \theta_{n,j}P_j> +$$

$$+<u\,,(\sum_{j=0}^{s+1} A_j x^j)P_n> =0$$, en vurtud de la ortogonalidad de $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ respecto a u.

Si queremos que $<v\,,P_n> =0 \quad \forall\, n$, los coeficientes A_j , $j=0,1,2,...,s+1$

quedan determinados unívocamente del hecho de ser $<v\,,P_n> =0$, $n=0,1,2,...,s+1$.

Existe, pues, un polinomio $\Psi(x)=\sum_{j=0}^{s+1} A_j x^j$ tal que $<v\,,P_n>=0 \quad \forall\, n\geq 0$ de manera que $v=0$, lo que implica $D[\Phi u]+B(x^{-1}u^2)+\Psi u=0$ o bien $\Phi Du-Cu+B(x^{-1}u^2)=0$. Aplicando F , evaluando en (1/z) y teniendo en cuenta los Lemas 1.2.1. y 3.1.1. obtenemos

$$-\Phi(z)zS'(u)(z)-z[(Du)\theta_0\Phi](z)+zC(z)S(u)(z)+z(u\theta_0C)(z)+B(z)(1/z)F(u^2)(1/z)-z[(x^{-1}u^2)\theta_0B]=0.$$

Dividiendo por z y recordando que $(x^{-1}u)B=u\theta_0B \quad \forall\, u \in \mathbf{P}'$ y $\forall\, B\in \mathbf{P}$ se sigue que

$$\Phi(z)S'(u)(z)=B(z)S^2(u)(z)+C(z)S(u)(z)+D(z) \quad \text{con} \quad D(z)=-[(Du)\theta_0\Phi](z)+(u\theta_0C)(z)-(u^2\theta_0^2B)(z)\ .$$

$\square$

2. DETERMINACION DEL ORDEN DE LA CLASE.

2.1.Determinación del orden de la clase.([44])

En la caracterización (1.2.) se observa que no existe unicidad en la representación , pues basta multiplicar por cualquier polinomio los dos miembros de la ecuación.En cambio se consigue unicidad imponiendo condiciones de minimalidad en los grados de los coeficientes polinómicos ,hecho que analizamos a continuación.

Teorema 2.1.1.

Sea u un funcional lineal regular verificando $D[\Phi u]+\Psi u+B(x^{-1}u^2)=0$

siendo $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ *y* $B(x)$ *los polinomios definidos en (1.2.).*

Sea $d=\max(t,r,)$ *y* $s=\max(p-1,d-2)$. (2.1.)

Se dice que u es de Laguerre-Hahn de clase s si y sólo si

$$\prod_{a\in Z_\Phi}\{|<u,\ \Psi_a>+<u^2,\ \theta_0 B_a>|+|r_a|+|s_a|\}\neq 0$$

donde Z_Φ *representa el conjunto de raíces distintas de* $\Phi(x)$ *, estando definidos los polinomios* Φ_a ,Ψ_a *y* B_a *al igual que los valores* r_a *y* s_a *por las expresiones*

$$\Phi(x)=(x-a)\Phi_a(x)$$

$$\Psi(x)+\Phi_a(x)=(x-a)\Psi_a(x)+r_a \qquad (2.2.)$$

$$B(x)=(x-a)B_a(x)+s_a$$

DEMOSTRACION

De (1.2.) y (2.2.) tenemos $(x-a)[D(\Phi_a u)+\Psi_a u+B_a(x^{-1}u^2)]+r_a u+S_a(x^{-1}u^2)=0$

Multiplicando por $(x-a)^{-1}$

$$D(\Phi_a u)+\Psi_a u+B_a(x^{-1}u^2)-<D(\Phi_a u)+\Psi_a u+B_a(x^{-1}u^2)\ ,1>\delta_a+(x-a)^{-1}r_a u+(x-a)^{-1}s_a(x^{-1}u^2)=0$$

luego si para $a \in Z_{\Phi}$, $|<\Psi_a u+B_a(x^{-1}u^2)\ , 1>|+|r_a|+|s_a|=0$,

$D(\Phi_a u)+\Psi_a u+B_a(x^{-1}u^2)=0$ y u es ,en realidad, un funcional lineal de Laguerre-Hahn de clase menor que s.

De otro lado ,si se cumple que $D(\Phi_a u)+\Psi_a u+B_a(x^{-1}u^2)=0$ se debe verificar que

$v = -<D(\Phi_a u)+\Psi_a u+B_a(x^{-1}u^2)\ , 1> \delta_a+(x-a)^{-1} r_a u+(x-a)^{-1} s_a(x^{-1}u^2)=0$

$<v, 1>=0 \Rightarrow <\Psi_a u+B_a(x^{-1}u^2)\ , 1>=0$, $<v\ , (x-a)>=0 \Rightarrow r_a=0$ y $<v\ , (x-a)^2>=0 \Rightarrow s_a=0$,

con lo que el teorema queda demostrado.

□

Vamos a establecer un resultado equivalente al teorema 2.1.1. en donde la condición de clase vendrá dada en función de los polinomios B(x) , C(x) y D(x) definidos en (1.1.) a partir de la caracterización mediante funciones de Stieltjes

Corolario 2.1.1.

Sea u un funcional lineal de Laguerre-Hahn verificando (1.1.)

Una condición necesaria y suficiente para que u sea de clase s es que

$\prod_{a\in Z_\phi} \{ |C(a)| +|B(a)| +|D(a)| \} \neq 0$ *, esto es ,que los polinomios* $\Phi, B, C,$ *y* D *sean primos entre sí* (2.3.)

DEMOSTRACION :

Siguiendo la notación del Teorema 2.1.1. tenemos

$\Phi'(a) = \Phi_a(a)$; $r_a=\Psi(a)+\Phi'(a)= -C(a)$ y $s_a = B(a)$

Hacemos $\Phi(x)=\sum_{i=0}^{s+2} d_i x^i$; $\Psi(x)=\sum_{i=0}^{s+1} c_i x^i$ y $B(x)=\sum_{i=0}^{s+2} b_i x^i$

$$\theta_0\Phi = \sum_{i=0}^{s+1} d_{i+1}x^i \quad ; \quad u\theta_0\Phi = \sum_{n=0}^{s+1} \left(\sum_{j=n}^{s+1} d_{j+1}(u)_{j-n}\right) x^n$$

$$(u\theta_0\Phi)' = \sum_{n=0}^{s} (n+1)\left(\sum_{j=n}^{s} d_{j+2}(u)_{j-n}\right) x^n$$

$$u\theta_0\Psi = \sum_{n=0}^{s} \left(\sum_{j=n}^{s} c_{j+1}(u)_{j-n}\right) x^n \quad ; \quad u^2\theta_0^2 B = \sum_{k=0}^{s} \left[\sum_{n=k}^{s} \left(\sum_{j=n}^{s} b_{j+2}(u)_{j-n}\right)(u)_{n-k}\right] x^k$$

Por otra parte suponiendo $r_a=0$, $\langle u , \Psi_a\rangle = \sum_{j=0}^{s} \left(\sum_{i=j}^{s} c_{i+1}a^{i-j} + \sum_{k=i}^{s} d_{k+2}a^{k-j}\right)(u)_j$

así como $s_a=0$, $B_a = \sum_{j=0}^{s+1} \left(\sum_{i=j}^{s+1} b_{i+1}a^{i-j}\right) x^j$ y

$$\langle u^2 , \theta_0 B_a\rangle = \sum_{n=0}^{s} \left[\sum_{j=n}^{s} \left(\sum_{k=j}^{s} b_{k+2}a^{k-j}\right)(u)_{j-n}\right](u)_n \quad , \text{ luego}$$

$$|D(a)| = |(u\theta_0\Phi)' + (u\theta_0\Psi) + (u^2\theta_0^2 B)|(a) = |\langle u , \Psi_a\rangle + \langle u^2 , \theta_0 B_a\rangle|$$

Usando el Teorema 2.1.1. se completa la demostración.

$\square$

2.2.Perturbaciones en la relación de recurrencia.

Probaremos, a continuación , que las perturbaciones finitas en la relación de recurrencia de S.P.O.M. de Laguerre-Hahn siguen dando lugar a S.P.O.M. de Laguerre-Hahn .Se efectuarán también acotaciones del orden de la clase de los polinomios perturbados.

Teorema 2.2.1. (Invarianza por asociación)

Sea $\{P_n\}_{n\geq 0}$ una S.P.O.M. de Laguerre-Hahn de clase "s", entonces la sucesión asociada de orden uno, $\{P_n^{(1)}\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales de Laguerre-Hahn de clase s_1, con $s-2\leq s_1\leq s$.

Además se cumplen las siguientes condiciones suficientes relativas al orden de clase:

i) $|d_{s+2}|+|c_{s+1}+2b_{s+2}|\neq 0 \Rightarrow s_1=s$

ii) $|d_{s+2}|+|c_{s+1}+2b_{s+2}|=0$ *y* $|d_{s+1}|+|c_s+2(b_{s+1}+\beta_0 b_{s+2})|\neq 0 \Rightarrow s_1=s-1$

iii) $|d_{s+2}|+|c_{s+1}+2b_{s+2}|=0$ *y* $|d_{s+1}|+|c_s+2(b_{s+1}+\beta_0 b_{s+2})|=0 \Rightarrow s_1=s-2$

siendo d_i, c_i y b_i los coeficientes de los polinomios Φ,Ψ y B dados en el Corolario 2.1.1.

DEMOSTRACION:

Sea S(u) la función de Stieltjes relativa al funcional lineal u, respecto al que la sucesión $\{P_n\}_{n\geq 0}$ es ortogonal, y sea $S_1=S(u^{(1)})$ la función de Stieltjes relativa al funcional $u^{(1)}$ respecto al que $\{P_n^{(1)}\}_{n\geq 0}$ es ortogonal.

Sabemos que ambas series formales de Stieltjes están relacionadas mediante 4.12., Cap.I., que para k=0 resulta

$$\gamma_1 S_1(z) = -[S(u)(z)]^{-1} -(z-\beta_0) \qquad (2.4.)$$

Sustituyendo (2.4.) en (1.1.) tenemos

$$\Phi(z)S'_1(z)=\gamma_1 B_1(z)S_1^2(z)+C_1(z)S_1(z)+D_1(z)\gamma_1^{-1}$$

con $\quad B_1(z)=D(z) \;;\; C_1(z)=-C(z)+2(z-\beta_0)D(z) \;;\; D_1(z)=-\Phi(z)+B(z)-(z-\beta_0)C(z)+(z-\beta_0)^2D(z)$

Siguiendo las ecuaciones (1.2.) el funcional lineal $u^{(1)}$ cumple la ecuación

$$D(\Phi u^{(1)}) + \Psi_1 u^{(1)} + B_1\gamma_1(x^{-1}u^{(1)2})=0 \quad , \Psi_1=-C_1-\Phi' \tag{2.5.}$$

que es irreducible como vemos a continuación:

Sea "a" una raíz de Φ , , $B_1(a)=D(a)$, luego si $D(a)\neq 0$ (2.5.) es irreducible.

Si $D(a)=0$, $C_1(a)=-C(a)$, si $C(a)\neq 0$ (2.5.) es irreducible.

Por último si $D(a)=C(a)=0$ $D_1(a)=B(a)\neq 0$ al ser "u" de clase "s" y la ecuación (2.5.) queda irreducible.

Demostremos ahora los apartados i), ii) y iii) del enunciado

$B_1(z)=D(z)=(-(s+1)d_{s+2}-c_{s+1}-b_{s+2})\, z^s + \ldots$..(potencias de z de grado menor que s)

$\Psi_1(z)= (c_{s+1}+2b_{s+2}-2d_{s+2})\, z^{s+1} + [c_s-2(d_{s+1}+\beta_0 d_{s+2}) +2(b_{s+1}+\beta_0 b_{s+2})]\, z^s + \ldots\ldots$

$\Phi(z)= d_{s+2}\, z^{s+2}+d_{s+1}\, z^{s+1} +\ldots\ldots$

Si $d_{s+2}\neq 0$ $\quad s_1=\text{máx}\{ \text{grado}\,\Psi_1-1 \;, \text{grado}\,\Phi-2 \;, \text{grado}\,B_1-2 \} = s$

Si $d_{s+2}=0$ y $c_{s+1}+2b_{s+2}\neq 0$, $s_1= s$.

Si $d_{s+2}=0$ y $c_{s+1}+2b_{s+2}=0$ tenemos lo siguiente :

$d_{s+1}\neq 0$, $s_1 = s=1$,

$d_{s+1}=0$ y $c_s+2(b_{s+1}+\beta_0 b_{s+2})\neq 0$, $s_1= s-1$

Si $d_{s+2}=0$, $c_{s+1}+2b_{s+2}=0$, $d_{s+1}=0$ y $c_s+2(b_{s+1}+\beta_0 b_{s+2}) =0$, el coeficiente de grado $\underline{s}$ de B_1, $-(c_{s+1}+b_{s+2})$, es obligatoriamente $\neq 0$ al no poder ser nulos a la vez los coeficientes c_{s+1}, d_{s+2} y b_{s+2} y, en consecuencia, $s_1=s-2$.

□

<u>Teorema 2.2.2.</u>

Sea $\{P_n\}_{n\geq 0}$ una S.P.O.M. de Laguerre-Hahn de clase "s", entonces la sucesión asociada de orden r, $\{P_n^{(r)}\}_{n\geq 0}$ es también una sucesión de polinomios ortogonales de Laguerre-Hahn de clase s_r, con $s-2r\leq s_r\leq s$.

DEMOSTRACION:

De una manera general, siguiendo el Teorema 2.2.1. y por un razonamiento inductivo se establece la ecuación de Riccati que verifica la función de Stieltjes asociada de orden r, $S_r = S(u^{(r)})(z)$

$$\Phi(z)S'_r(z) = \gamma_r B_r(z)S_r^2(z)+C_r(z)S_r(z)+D_r(z)\gamma_r^{-1}$$

con

$$B_{r+1}(z)=D_r(z)\gamma_r^{-1} \quad , \ r\geq 0$$

$$C_{r+1}(z)=-C_r(z)+2D_r(z)(z-\beta_r)\gamma_r^{-1} \quad , \ r\geq 0$$

$$D_{r+1}(z)=-\Phi(z)+\gamma_r B_r(z)-C_r(z)(z-\beta_r)+(z-\beta_r)^2 D_r(z)\gamma_r^{-1} \quad , \ r\geq 0 \tag{2.6.}$$

$$B_0(z)=B(z) \quad ; \ D_0(z)=D(z) \quad ; C_0(z)=C(z)$$

<u>Nota:</u> De las relaciones (2.6.) se deduce que:

$$C_{r+1}^2(z)-4B_{r+1}(z)D_{r+1}(z)=C_0^2(z)+4\Phi(z)D_r^*(z)-4B_0(z)D_0(z) \quad , \qquad r\geq 0$$

donde $\quad D^{*}_{r}(z) = \sum_{j=0}^{r} D_j(z)\,\gamma_j^{-1}$

Para la acotación del orden de la nueva clase s_r , $(r\geq 1)$, tenemos que

t_r = grado de $\Phi_r \leq s+2$ $\qquad [\Phi_r = \Phi]$

r_r = grado de $B_r \leq s$

grado de $C_r \leq s+1$

grado de $D_r \leq s$

p_r =grado de $\Psi_r \leq s+1$, $\qquad [\Psi_r = (-\Phi'_r - C_r)]$

d_r =màx$(t_r, r_r) \leq s+2$

s_r =máx$(p_r-1, d_r-2) \leq s$.

La cota inferior de s_r se obtiene por aplicaciones sucesivas del Teorema 2.2.1.

□

Corolario 2.2.1.

Si $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *es una S.P.O.M. clásicos , la sucesión asociada de orden uno* $\{P_n^{(1)}\}_{n\geq 0}$ *es una sucesión de polinomios ortogonales de Laguerre-Hahn de clase 0.*

□

Nota: Hemos visto que los asociados de cualquier orden a los polinomios clásicos (semiclásicos) pierden , en general , el caracter semiclásico .En este sentido ,la familia de polinomios ortogonales semiclásicos no es invariante respecto a la asociación.

En el Capítulo IV. estudiaremos qué condiciones deben cumplirse para que los polinomios de Laguerre-Hahn sean reducibles a semiclásicos

Teorema 2.2.3.

Sea $\{P_n\}_{n\geq 0}$ una S.P.O.M. de Laguerre-Hahn de clase "s".Consideremos una perturbación de los coeficientes de la relación de recurrencia de la forma $\beta_0^*=\beta_0+\mu$, $\beta_i^*=\beta_i$ $i>0$, $\gamma_i^*=\gamma_i$, $i\geq 0$ (co-recursividad).

La familia de polinomios co-recursivos resultantes de la perturbación $\{P_n^*\}_{n\geq 0}$,es una S.P.O.M. de Laguerre-Hahn de clase $s^*=s$.

DEMOSTRACION:

Sea S(u)(z) la función de Stieltjes relativa al funcional u , que admite como S.P.O.M. $\{P_n\}_{n\geq 0}$, y sea $S^*(z)=S_{\mu,0}(u^*)(z)$ la función de Stieltjes correspondiente al funcional u* relativo a la S.P.O.M. $\{P_n^*\}_{n\geq 0}$.

La relación entre ambas series ,según Proposición 4.2.2. , Cap.I , haciendo k=0 viene dada por

$$S^*(z) = \frac{S(u)(z)}{1+\mu S(u)(z)} \qquad (2.7.)$$

Sustituyendo (2.7.) en (1.1.) tenemos que S*(z) cumple

$\Phi^*(z)S^{*\prime}(z)=B^*(z)S^{*2}(z)+ C^*(z)S^*(z)+D^*(z)$ siendo

$$\Phi^*(z)=\Phi(z) \quad ; \quad B^*(z) = B(z) -\mu C(z) +\mu^2 D(z) \quad ; \quad C^*(z)= C(z) - 2\mu D(z) \quad ; \quad D^*(z)=D(z) \qquad (2.8.)$$

u* cumple entonces la ecuación $D(\Phi^*u^*)+\Psi^*u^*+B^*(x^{-1}u^{*2})=0$, $\Psi^*=-C^*-\Phi^{*\prime}$ (2.9.)

que es irreducible como vemos a continuación .

Sea "a" raíz de $\Phi^*=\Phi$ .Sabemos que $|C(a)|+|B(a)|+|D(a)|\neq 0$

$D^*(a)=D(a)$, si $D(a)\neq 0$ (2.9.) es irreducible.

Si $D^*(a)=0$, $C^*(a)=C(a)$ y si $C(a)\neq 0$ (2.9.) es irreducible.

Si $D^*(a)=C^*(a)=0$, $B^*(a)=B(a)\neq 0$, (2.9.) es irreducible.

Por otra parte y siguiendo la notación del Corolario 2.1.1.

$\Phi^*(z)=d_{s+2}z^{s+2}$ + ...(potencias de z de orden menor a s+2)..

$\Psi^*(z)= c_{s+1}z^{s+1}$+.....(potencias de z de orden menor a s+1).

$B^*(z)= b_{s+2}z^{s+2}$+... .(potencias de z de orden menor a s+2)..

Como no pueden anularse a la vez d_{s+2} , c_{s+1} y b_{s+2} la clase resulta ser $s^*=s$.

□

Teorema 2.2.4.

Sea $\{P_n\}_{n\geq 0}$ una S.P.O.M. de Laguerre-Hahn de clase "s".Consideremos una perturbación de los coeficientes de la relación de recurrencia de la forma $\overset{\bullet}{\beta}_i = \beta_i$, $i\geq 0$, $\overset{\bullet}{\gamma}_1 =\lambda\gamma_1$,$\overset{\bullet}{\gamma}_j =\gamma_j$, $j\neq 1$,$\lambda\neq 0$ (co-dilatación).

La familia de polinomios co-dilatados resultantes de la perturbación $\{\overset{\bullet}{P}_n\}_{n\geq 0}$, es una S.P.O.de Laguerre-Hahn de clase $\overset{\bullet}{s} = s$.

DEMOSTRACION:

Sea $S(u)(z)$ la función de Stieltjes relativa al funcional u respecto al cual la sucesión $\{P_n\}_{n\geq 0}$ es ortogonal, y sea $\overset{\bullet}{S}(z)={}_{\lambda}S_1(\overset{\bullet}{u})(z)$ la correspondiente al funcional $\overset{\bullet}{u}$ respecto al cual $\{\overset{\bullet}{P}_n\}_{n\geq 0}$ es ortogonal.

La relación entre ambas series viene dada ,siguiendo la Proposición 4.3.1. ,Cap.I ,(caso k=1), por

$$S^{\bullet}(z) = \frac{-S(u)(z)}{(z-\beta_0)(1-\lambda)S(u)(z)-\lambda} \tag{2.10}$$

Sustituyendo (2.10.) en (1.1.) tenemos que $S^{\bullet}(z)$ cumple

$\Phi^{\bullet}(z)S^{\bullet\prime}(z) = B^{\bullet}(z)S^{\bullet 2}(z)+C^{\bullet}(z)S^{\bullet}(z)+D^{\bullet}(z)$ siendo

$\Phi^{\bullet}(z)=\lambda\Phi(z)$; $B^{\bullet}(z) = [\Phi(z)\lambda(1-\lambda)+\lambda^2B(z)+\lambda C(z)(z-\beta_0)(1-\lambda)+D(z)(z-\beta_0)^2(1-\lambda)^2]$

$C^{\bullet}(z)=[C(z)\lambda+2(z-\beta_0)(1-\lambda)D(z)]$; $D^{\bullet}(z)=D(z)$

En cuanto a la determinación del orden de la clase de $u^{\bullet}$ y siguiendo la notación para los polinomios Φ,Ψ y B del Corolario 2.1.1.

$\phi^{\bullet}(z)=\lambda d_{s+2}z^{s+2}$ + términos de menor grado ;

$\Psi^{\bullet}(z) = -C^{\bullet}-\Phi^{\bullet\prime} = \{\lambda c_{s+1}+2(1-\lambda)[(s+1)d_{s+2}+c_{s+1}+b_{s+2}]\}z^{s+1}$ + términos de menor grado ;

$B^{\bullet}(z)=\{\lambda(1-\lambda)d_{s+2}+\lambda^2b_{s+2}-\lambda(1-\lambda)[c_{s+1}+(s+2)d_{s+2}]-(1-\lambda)^2[(s+1)d_{s+2}+c_{s+1}+b_{s+2}]\}z^{s+2}$ +

términos de menor grado.

Los tres coeficientes de mayor grado de los polinomios $\phi^{\bullet}(z)$, $\Psi^{\bullet}(z)$ y $B^{\bullet}(z)$ no pueden ser nulos a la vez pues el sistema

$\lambda d_{s+2}=0$

$\lambda c_{s+1}+2(1-\lambda)[(s+1)d_{s+2}+c_{s+1}+b_{s+2}]=0$

$\lambda(1-\lambda)d_{s+2}+\lambda^2b_{s+2}-\lambda(1-\lambda)[c_{s+1}+(s+2)d_{s+2}]-(1-\lambda)^2[(s+1)d_{s+2}+c_{s+1}+b_{s+2}]=0$

para $\lambda\neq 0$ sólo admite la solución trivial.

Por otra parte ,la ecuación $D(\overset{\bullet}{\phi}\overset{\bullet}{u})+\overset{\bullet}{\Psi}\overset{\bullet}{u}+\overset{\bullet}{B}(z^{-1}\overset{\bullet}{u}^{2})=0$ es irreducible pues si "a" es raíz de $\overset{\bullet}{\Phi}$ tenemos

$\overset{\bullet}{D}(a)=D(a)$, y por tanto si $D(a)\neq 0$ la ecuación es irreducible.

Si $D(a)=0$, $\overset{\bullet}{C}(a)=\lambda C(a)$, si $C(a)\neq 0$ la ecuación es irreducible.

Si $D(a)=C(a)=0$ por fuerza $\overset{\bullet}{B}(a)=\lambda^2 B(a)\neq 0$, al ser u de clase s.

□

<u>Teorema 2.2.5.</u>

Sea $\{P_n\}_{n\geq 0}$ una S.P.O.M. de Laguerre-Hahn de clase "s".Consideremos una perturbación de los coeficientes de la relación de recurrencia de la forma:

$\overset{\circ}{\beta}_1=\beta_1+\mu$, $\overset{\circ}{\beta}_i=\beta_i$, $i\neq 1$, $\overset{\circ}{\gamma}_1=\lambda\gamma_1$,$\overset{\circ}{\gamma}_i=\gamma_i$, $i\neq 1$, $\lambda\neq 0$ (co-modificación). La familia de polinomios co-modificados resultantes de la perturbación $\{\overset{\circ}{P}_n\}_{n\geq 0}$, es una S.P.O. de Laguerre-Hahn de clase $\overset{\circ}{s}$, cumpliéndose $s-1\leq \overset{\circ}{s}\leq s+1$.

DEMOSTRACION:

Sea $S(u)(z)$ la función de Stieltjes relativa al funcional u respecto del cual la sucesión $\{P_n\}_{n\geq 0}$ es ortogonal y sea $\overset{\circ}{S}(z)={}_{\lambda}S_{\mu,1}(\overset{\circ}{u})(z)$ la correspondiente al funcional $\overset{\circ}{u}$ respecto del que la sucesión $\{\overset{\circ}{P}_n\}_{\geq 0}$ es ortogonal.

Aplicando la Proposición 4.3.1., Cap.I (caso k=1) , se tiene:

$$\overset{\circ}{S}(z) = \frac{[\mu(x-\beta_0)\ -\gamma_1]\ S(u)(z)+\mu}{(x-\beta_0)[-\mu(x-\beta_0)+\gamma_1(1-\lambda)]S(u)(z)\ -\mu(x-\beta_0)\ -\lambda\gamma_1} \tag{2.11.}$$

Sustituyendo (2.11.) en (1.1) se cumple

$\overset{\circ}{\Phi}(z)\overset{\circ}{S}{}'(z)=\overset{\circ}{B}(z)\overset{\circ}{S}{}^2(z)+\overset{\circ}{C}(z)\overset{\circ}{S}(z)+\overset{\circ}{D}(z)$ siendo

$$\overset{\circ}{\Phi}(z)=\lambda\gamma_1^2\Phi(z)$$

$$\overset{\circ}{B}(z)= -\Phi(z)\{\mu^2(z-\beta_0)^2+2\mu\gamma_1\lambda(z-\beta_0)-\lambda\gamma_1^2(1-\lambda)\}+B(z)[\mu(z-\beta_0)+\lambda\gamma_1]^2+$$
$$+C(z)(z-\beta_0)[\mu(z-\beta_0)+\lambda\gamma_1][-\mu(z-\beta_0)+\gamma_1(1-\lambda)]+D(z)(z-\beta_0)^2[-\mu(z-\beta_0)+\gamma_1(1-\lambda)]^2$$

$$\overset{\circ}{C}(z)= -\Phi(z)[2\mu^2(z-\beta_0)+2\mu\gamma_1\lambda]+2\mu B(z)[\mu(z-\beta_0)+\lambda\gamma_1]+C(z)\Big\{\mu(z-\beta_0)[-\mu(z-\beta_0)+\gamma_1(1-\lambda)]-$$
$$-[\mu(z-\beta_0)+\lambda\gamma_1][\mu(z-\beta_0)-\gamma_1]\Big\}-2D(z)(z-\beta_0)[-\mu(z-\beta_0)+\gamma_1(1-\lambda)][\mu(z-\beta_0)-\gamma_1] \qquad (2.12.)$$

$$\overset{\circ}{D}(z) = -\Phi(z)\mu^2+B(z)\mu^2+C(z)\Big\{-\mu[\mu(z-\beta_0)-\gamma_1]\Big\}+D(z)[\mu(z-\beta_0)-\gamma_1]^2$$

Para la acotación del orden de la clase de $\overset{\circ}{u}$ y siguiendo la notación del Corolario 2.1.1.

grado de $\overset{\circ}{\Phi} \leq s+2$, grado de $\overset{\circ}{\Psi}=-\overset{\circ}{C}-\overset{\circ}{\Phi}{}' \leq s+2$, grado de $\overset{\circ}{B} \leq s+3$, de donde $\overset{\circ}{s} \leq s+1$.

Por otra parte ,si una vez efectuada la perturbación $\overset{\circ}{\beta}_1=\beta_1+\mu$, $\overset{\circ}{\beta}_i=\beta_i$, $i\neq 1$, $\overset{\circ}{\gamma}_1=\lambda\gamma_1$ $\overset{\circ}{\gamma}_i=\gamma_i$, $i\neq 1$, $\lambda\neq 0$, efectuamos una nueva perturbación de la forma $\overset{*}{\beta}_1=\overset{\circ}{\beta}_1-\mu=\beta_1$, $\overset{*}{\beta}_i=\overset{\circ}{\beta}_i=\beta_i$, $i\neq 1$, $\overset{*}{\gamma}_1=\frac{1}{\lambda}\overset{\circ}{\gamma}_1=\gamma_1$,$\overset{*}{\gamma}_i=\overset{\circ}{\gamma}_i=\gamma_i$, $i\neq 1$, $\lambda\neq 0$, recuperamos los polinomios originales, luego en la segunda perturbación el orden de la clase debe bajar una unidad, de aquí la acotación del la clase $\overset{\circ}{s}$.

Nota 1: El coeficiente de grado s+4 del polinomio $\overset{\circ}{B}(z)$ y el de grado s+3 del polinomio $\overset{\circ}{\Psi}(z)$ son nulos.

Nota 2: Una comprobación del teorema se puede ver en el siguiente ejemplo. Sean $H_n^{(1)}(x)$ los polinomios asociados de orden uno a los clásicos de Hermite.Según el Corolario 2.2.1. estos polinomios son de Laguerre-Hahn de clase s=0, cumpliendo la correspondiente función de Stieltjes $S(z)=S(u^{(1)})(z)$

la ecuación $S'(z)=-S^2(z)-2zS-2$, (ver tabla 2.2.). Los coeficientes de la relación de recurrencia son

$\beta_n=0$, $\gamma_n=\frac{n+1}{2}$.

Efectuando la perturbación $\overset{\circ}{\beta}_1=\mu$,la nueva familia de polinomios es de Laguerre-Hahn ,cumpliendo la correspondiente función de Stieltjes $S^{\circ}(z)$ la ecuación , (fórmulas 2.12.) ,

$$S^{\circ\prime}(z)=(2\mu z^3-2\mu^2z^2-4\mu z-1)S^{\circ 2}(z) \; +[4\mu z^2-(4\mu^2+2)z-4\mu]S^{\circ}(z)+[2\mu z-(2\mu^2+2)]$$

Estos polinomios son de clase $s^{\circ}=1$.

Si efectuamos una nueva perturbación en el coeficiente $\overset{\circ}{\beta}_1$, $\overset{\circ\circ}{\beta}_1=\overset{\circ}{\beta}_1-\mu=0$ la nueva función de Stieltjes $S^{\circ\circ}(z)$ cumple la ecuación ,(fórmulas 2.12)

$S^{\circ\circ\prime}(z) = -S^{\circ\circ 2}(z) -2z\, S^{\circ\circ}(z)-2$ que conduce a $S^{\circ\circ}(z)=S(z)$.La clase $s^{\circ\circ}$ es cero, ha disminuido en una unidad recuperándose los polinomios $H_n^{(1)}(x)$.

$\square$

Ejemplos

Ejemplo 1.

Efectuaremos la perturbación a los polinomios asociados de orden uno a los polinomios generalizados de Hermite ($H_n^{(\alpha)})^{(1)}$. El correspondiente funcional de estos polinomios ,al que notaremos por $u^{(1)}$, pertenece a la familia de Laguerre-Hahn de clase $s=1$ y la correspondiente función de Stieltjes $S(z)=S(u^{(1)})(z)$, satisface la ecuación:

$$zS'(z)=-(1+2\alpha)zS^2(z)-2(z^2+\alpha)S(z)-2z$$

La relación de recurrencia es

$$(H_{n+1}^{(\alpha)})^{(1)}(x)= x\,(H_n^{(\alpha)})^{(1)}(x)- \frac{1}{2}\,(n+1+\theta_n)\,(H_{n-1}^{(\alpha)})^{(1)}(x) \quad , \; \theta_{2m+1}=0 \;\; ; \theta_{2m}=2\alpha \;\; , \; n\geq 1$$

$(H_1^{(\alpha)})^{(1)}(x)=x$; $(H_0^{(\alpha)})^{(1)}(x)=1$

Efectuaremos la perturbación $\beta^*_0=\mu$; $\beta^*_i=0$ $i\neq 0$.

Sea v el nuevo funcional .La función de Stieltjes $S^*(z)=S(v)(z)$ cumple la ecuación

$$zS^{*\prime}(z)=[-(1+2\alpha+2\mu^2)z+2\mu(z^2+\alpha)]S^{*2}(z)+[-2(z^2+\alpha)+4\mu z]\,S^*(z)-2z$$

La nueva familia de polinomios ortogonales co-recursivos es de Laguerre-Hahn , $s^*=1$.

□

Ejemplo 2

La familia $(L_n^{\alpha}(x))^{(1)}$ ($\alpha\neq -n$,$n\geq 1$),asociados de primer orden a los polinomios de Laguerre pertenece a la familia de Laguerre-Hahn de clase s=0.Los coeficientes β_0 , β_1 y γ_1 de la relación de recurrencia son $\beta_0=\alpha+3$, $\beta_1=\alpha+5$ y $\gamma_1=2(\alpha+2)$. Si notamos por $u^{(1)}$ el funcional correspondiente a estos polinomios , la función de Stieltjes $S(z)=S(u^{(1)})(z)$ satisface la ecuación:

$$zS'(z)=-(\alpha+1)S^2(z)+(-z+\alpha+2)S(z)-1$$

Estudiaremos cómo se modifica el orden de la clase efectuando una perturbación en el coeficiente β_k, (k=0 y k=1) , de la forma $\beta_k^*=\beta_k+\mu$, $\beta_i^*=\beta_i$ $i\neq k$.

En el caso de k=0 ,la nueva S.P.O.M., pertenece a la familia de Laguerre-Hahn , $s^*=0$.La correspondiente función de Stieltjes , $S^*(z)=S_{\mu,0}(z)$ cumple la ecuación:

$$z\,S^{*\prime}(z)=[\,\mu(z-\alpha-2)-\mu^2-(\alpha+1)]\,S^{*2}(z)+(-z+\alpha+2+2\mu)S^*(z)-1$$

Una representación explícita de estos polinomios co-recursivos en términos de funciones hipergeométricas se puede ver en [36] y [37] en donde ,además ,queda determinada la medida espectral y la ecuación diferencial de cuarto orden que estos polinomios cumplen.

En el caso k=1 , los coeficientes polinómicos de la ecuación de Riccati que satisface la función de Stieltjes $S_{\mu,1}(z)$, son:

$\Phi^{\circ}(z) = 4\,(\alpha+2)^2\, z$

$B^{\circ}(z) = 2\,\mu\,(\alpha+2)z^3 - 2\mu(\alpha+2)(\mu+3\alpha+10)\,z^2 + 2\mu(\alpha+2)[2(\alpha+3)\mu+3\alpha^2+16\alpha+25]\,z-$

$-2(\alpha+2)[(\alpha+3)^2\mu^2+(\alpha+3)(\alpha^2+3\alpha+4)\mu+2(\alpha+1)(\alpha+2)]$

$C^{\circ}(z) = 4\,\mu\,(\alpha+2)z^2 - 4(\alpha+2)[\,\mu^2 + (2\alpha+7)\,\mu + (\alpha+2)\,]\,z + 4(\alpha+2)[(\alpha+3)\mu^2+(\alpha^2+5\alpha+8)\mu+(\alpha+2)^2]$

$D^{\circ}(z) = 2\mu(\alpha+2)\,z - 2(\alpha+2)[\mu^2+(\alpha+4)\mu+2(\alpha+2)]$

La nueva S.P.O.M. pertenece a la familia de Laguerre-Hahn de clase $s^{\circ}=1$.

□

Ejemplo 3.

La familia $(B_n^{\alpha}(x))^{(1)}$ ($\alpha \neq -n/2$, $n \geq 0$)constituida por los polinomios asociados de primer orden a los polinomios de Bessel, es de Laguerre-Hahn de clase $s=0$. Denotando mediante $u^{(1)}$ el correspondiente funcional,la función de Stieltjes , $S(z)=S(u^{(1)})(z)$ cumple la ecuación:

$$z^2\, S'(z) = -\frac{2\alpha-1}{\alpha^2(2\alpha+1)}\, S^2(z) + 2\,(\alpha z+1-\alpha^{-1})S(z) + (2\alpha+1)$$

Efectuemos la siguiente perturbación en los coeficientes de la relación de recurrencia $\beta_0^* = \beta_0 + \mu - \frac{1-\alpha}{\alpha(\alpha+1)} + \mu$, $\beta_i^* = \beta_i$ $i\neq 0$, $\gamma_i^*=\gamma_i$ $i\geq 1$, ($k=0$),

La nueva familia de polinomios ortogonales es de Laguerre-Hahn de clase $s^*=0$, satisfaciendo la función de Stieltjes $S^*(z)= S_{\mu,0}(z)$ la ecuación:

$$z^2\, S^{*\prime}(z) = \left[-\frac{2\alpha-1}{\alpha^2(2\alpha+1)} - 2\mu\,(\alpha z+1-\alpha^{-1})+\mu^2(2\alpha-1)\,\right] S^{*2}(z) + [2(\alpha z+1-\alpha^{-1})-2\mu(2\alpha+1)]S^*(z) +$$
$$+(2\alpha+1)$$

Si efectuamos la perturbación en el coeficiente $\beta^{\circ}_1 = \beta_1 + \mu - \frac{1-\alpha}{(\alpha+2)(\alpha+1)} + \mu$,

los coeficientes polinomicos de la ecuaciòn de Ricccati que cumple la función de Stieltjes $S_{\mu,1}(z)$, son :

$$\Phi^{\circ}(z)=\gamma_1^2 z^2$$

$$B^{\circ}(z)= -2\mu(\alpha+1)\gamma_1 z^3 +\Big\{ \mu^2\Big[(6\alpha+5)\beta_0^2+6(1-\frac{1}{\alpha})\beta_0-\frac{(2\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)} \Big] +2\mu\gamma_1 \Big[- (1-\frac{1}{\alpha})+(2\alpha+1)\beta_0\Big] \Big\}z^2+$$

$$+\Big\{2\mu^2\beta_0 \Big[(3\alpha+2) \beta_0^2 + 3(1-\frac{1}{\alpha}) \beta_0 -\frac{2\alpha-1}{\alpha^2(2\alpha+1)}\Big] +2\mu\gamma_1\Big[-\alpha\beta_0^2+ 2(1-\frac{1}{\alpha})\beta_0 -\frac{2\alpha-1}{\alpha^2(2\alpha+1)} \Big] \Big\} z+$$

$$+\Big\{ \mu^2\beta_0^2 \Big[(2\alpha+1)\beta_0^2 +2(1 -\frac{1}{\alpha}) \beta_0 - \frac{2\alpha-1}{\alpha^2(2\alpha+1)} \Big] - 2\mu\beta_0\gamma_1\Big[(1-\frac{1}{\alpha}) \beta_0- \frac{2\alpha-1}{\alpha^2(2\alpha+1)} \Big] -\frac{2\alpha-1}{\alpha^2(2\alpha+1)} \gamma_1^2\Big\}$$

$$C^{\circ}(z)= -4\mu(\alpha+1)\gamma_1 z^2 + \Big\{ 2\mu^2 \Big[(4\alpha+3) \beta_0^2 + 4 (1-\frac{1}{\alpha}) -\frac{2\alpha-1}{\alpha^2(2\alpha+1)} \Big] + 4\mu\gamma_1\beta_0(2\alpha+1) +2\alpha\gamma_1^2 \Big\} z+$$

$$+\Big\{-2\mu^2\beta_0 \Big[(2\alpha+1)\beta_0^2 +2\beta_0(1-\frac{1}{\alpha})- \frac{2\alpha-1}{\alpha^2(2\alpha+1)}\Big]-2\mu\gamma_1 \Big[(2\alpha+1)\beta_0^2 + \frac{2\alpha-1}{\alpha^2(2\alpha+1)} \Big] +2(1 -\frac{1}{\alpha})\gamma_1^2\Big\}$$

$$D^{\circ}(z) = \Big\{ -2\mu^2 \Big[\beta_0(\alpha+1)+(1-\frac{1}{\alpha})\Big] -2\gamma_1 \mu (\alpha+1)\Big\} z +\Big\{ \mu^2\Big[(2\alpha+1)\beta_0^2+2(1- \frac{1}{\alpha})\beta_0- \frac{2\alpha-1}{\alpha^2(2\alpha+1)}\Big]+$$

$$+2\mu\gamma_1\Big[(2\alpha+1)\beta_0+(1- \frac{1}{\alpha})\Big] + (2\alpha+1)\gamma_1^2\Big\}$$

$$\beta_0=\frac{1-\alpha}{\alpha(\alpha-1)} \qquad \gamma_1 = \frac{-4\alpha}{(2\alpha+1)(\alpha+1)^2(2\alpha+3)}$$

La nueva S.P.O.M. pertenece a la familia de Laguerre-Hahn de clase $s^{\circ}=1$.

Ejemplo 4.

En este ejemplo efectuaremos la perturbación a los asociados de primer orden a los polinomios de Jacobi, $(P_n^{(\alpha,\beta)}(x))^{(1)}$ .El correspondiente funcional para estos polinomios, que notaremos por $u^{(1)}$, es de Laguerre-Hahn de clase s=0 , cumpliendo la función de Stieltjes $S(z)=S(u^{(1)})(z)$ la ecuación:

$$(z^2-1)\, S'(z) = \Big[\frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}\Big] S^2(z) + \Big[(\alpha+\beta+2)\, z -\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta+2} \Big] S(z) +(\alpha+\beta+3)$$

Efectuemos la perturbación $\overset{*}{\beta}_0 = \beta_0 + \mu - \frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+4)} + \mu$, $\overset{*}{\beta}_i = \beta_i \quad i\neq 0$, $\overset{*}{\gamma}_i=\gamma_i \quad i\geq 1$,

(k=0).La nueva S.P.O.M., es de Laguerre-Hahn de clase $s^*=0$, satisfaciendo la función de Stieltjes $S^*(z)= S_{\mu,0}(z)$ la ecuación:

$$\Phi^*(z)S^{*\prime}(z) = B^*(z)S^{*2}(z) + C^*(z)S^*(z) + D^*(z) \quad \text{, donde}$$

$$\Phi^*(z) = (z^2-1)$$

$$B^*(z)= \left[\frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}\right] - \mu \left[(\alpha+\beta+2)\, z - \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta+2} \right] + \mu^2 (\alpha+\beta+3)$$

$$C^*(z)= \left[(\alpha+\beta+2)\, z - \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta+2} \right] -2\mu (\alpha+\beta+3)$$

$$D^*(z)= (\alpha+\beta+3)$$

Como caso particular de los polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$,haciendo $\alpha = \beta$, aparecen los polinomios de Gegenbauer ($\alpha \neq -n$,$n \geq 1$), (ver [51]).

Los asociados de primer orden a los polinomios de Gegenbauer pertenecen a la familia de Laguerre-Hahn , $s=0$ y $S(z)=S(u^{(1)})(z)$ satisface:

$$(z^2 -1)\, S'(z) = \frac{2\alpha+1}{2\alpha+3} S^2(z) + 2\, (\alpha+1) z\, S(z) + (2\alpha+3)$$

Efectuando una perturbación en el coeficiente β_0 , de la forma $\beta^*_0= \beta_0 + \mu = \mu$, $\beta_0=0$; $\beta^*_i = \beta_i =0 \quad i \neq 0$,(k=0) ,obtenemos una co-recursiva S.P.O.M.de Laguerre-Hahn , $s^*=0$,cumpliendo $S^*(z)= S_{\mu,0}(z)$, la ecuación:

$$(z^2-1)S^{*\prime}(z) = \left[-2\mu(\alpha+1)z+\mu^2(2\alpha+3) + \frac{2\alpha+1}{2\alpha+3} \right] S^{*2}(z) + \left[2(\alpha+1) -2\mu(2\alpha+3) \right] S^*(z) +(2\alpha+3)$$

En el caso de k=1 , los coeficientes polinómicos de la ecuación de Riccati que satisface la función de Stieltjes $S_{\mu,1}(z)$ son

$$\phi^{\circ}(z)=\left[\frac{4(\alpha+1)}{(2\alpha+3)(2\alpha+5)}\right]^{2}(z^{2}-1)$$

$$B^{\circ}(z)=\frac{-8\mu(\alpha+1)(\alpha+2)}{(2\alpha+3)(2\alpha+5)}\,z^{3}+4\left(\frac{\alpha+1}{2\alpha+3}\right)\mu^{2}z^{2}+\frac{32(\alpha+1)^{2}}{(2\alpha+3)^{2}(2\alpha+5)}\,\mu z+\frac{16(2\alpha+1)(\alpha+1)^{2}}{(2\alpha+3)^{3}(2\alpha+5)^{2}}$$

$$C^{\circ}(z)=\frac{-16\mu(\alpha+1)(\alpha+2)}{(2\alpha+3)(2\alpha+5)}\,z^{2}+8\frac{(\alpha+1)}{(2\alpha+3)}\left[\mu^{2}+4\frac{(\alpha+1)^{2}}{(2\alpha+3)(2\alpha+5)^{2}}\right]z+32\mu\frac{(\alpha+1)^{2}}{(2\alpha+3)^{2}(2\alpha+1)}$$

$$D^{\circ}(z)=-8\mu\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{(2\alpha+3)(2\alpha+5)}\,z+4\frac{(\alpha+1)}{(2\alpha+3)}\left[\mu^{2}+4\frac{(\alpha+1)}{(2\alpha+5)^{2}}\right]$$

La nueva co-recursiva S.P.O.M. co-recursiva es de Laguerre-Hahn de clase s°=1.

□

2.3.Anexos

Anexo 1.

Tabla 1.

La siguiente tabla da la expresión de los polinomios Φ, Ψ, C y D así como los momentos $(u)_n$ para los polinomios clásicos.

$P_n(z)$	$\Phi(z)$	$\Psi(z)$	$C(z)$	$D(z)$	$(u)_n$
H_n	1	$2z$	$-2z$	-2	$(u)^{*}_n$
$L_n^{(\alpha)}$	z	$z-\alpha-1$	$-z+\alpha$	-1	$(u)^{**}_n$
$P_n^{(\alpha,\beta)}$	z^2-1	$-(\alpha+\beta+2)z+\alpha-\beta$	$(\alpha+\beta)z+\beta-\alpha$	$\alpha+\beta+1$	$(u)^{***}_n$
$B_n^{(\alpha)}$	z^2	$-2(\alpha z+1)$	$2(\alpha-1)z+2$	$2\alpha-1$	$(u)^{****}_n$

$$(u)^{*}_{2n+1}=0 \quad , \quad (u)^{*}_{2n}=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}(u)_0$$

$$(u)^{**}_n=(\alpha+1)_n(u)_0 \quad , \quad (u)^{***}_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^k 2^k(\alpha+1)_k(\alpha+\beta+2)_k^{-1}(u)_0$$

$$(u)^{****}_n=(-2)^n(2\alpha)_n^{-1}(u)_0$$

Tabla 2.

Igualmente daremos las expresiones de los polinomios Φ, Ψ_1, B_1, C_1, D_1

de los polinomios asociados de grado uno a los clásicos.

Polinomios asociados de orden uno a los clásicos de **Hermite** , $H_n^{(1)}$

$\Phi(z)=1$	$\Psi_1(z)=2z$	$\gamma_1 B_1(z)=-1$	$C_1(z)=-2z$	$\gamma_1^{-1} D_1(z)=-2$

Polinomios asociados de orden uno a los clásicos de **Laguerre** , $(L_n^{(\alpha)})^{(1)}$

$\Phi(z)=z$, $\Psi_1(z)= z-\alpha-3$, $\gamma_1 B_1(z)= -\alpha-1$, $C_1(z)= -z+\alpha+2$

$\gamma_1^{-1} D_1(z)= -1$,

Polinomios asociados de orden uno a los clásicos de **Jacobi** , $(P_n^{(\alpha,\beta)})^{(1)}$

$\Phi(z) = z^2-1$, $\Psi_1(z) = -(\alpha+\beta+4)z+(\alpha^2-\beta^2)(\alpha+\beta+2)^{-1}$

$\gamma_1 B_1(z) = 4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+3)^{-1}(\alpha+\beta+2)^{-2}$

$C_1(z) = (\alpha+\beta+2)z-(\alpha^2-\beta^2)(\alpha+\beta+2)^{-1}$

$\gamma_1^{-1} D_1(z) = (\alpha+\beta+3)$,

Polinomios asociados de orden uno a los clásicos de **Bessel** , $(B_n^{(\alpha)})^{(1)}$

$\Phi(z)= z^2$, $\Psi_1(z) = -2[(\alpha+1)z+1-\alpha^{-1}]$

$$\boxed{\gamma_1 B_1(z) = -(2\alpha-1)\alpha^{-2}(2\alpha+1)^{-1} \quad , \quad C_1(z) = 2(\alpha z+1-\alpha^{-1}) \quad , \quad \gamma_1^{-1} D_1(z) = (2\alpha+1)}$$

Nota: $(a)_n=a(a+1)...(a+n-1)$, $(a)_0=1$.

□

Anexo 2.

Así como los polinomios ortogonales semiclásicos vienen caracterizados por ser los únicos polinomios ortogonales que satisfacen una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes polinómicos de grado independiente de n , en [12] y [18] se ha comprobado que los polinomios ortogonales de Laguerre-Hahn cumplen una ecuación diferencial lineal de cuarto orden con coeficientes polinómicos de grado independiente de n.

Como ejemplo de ecuaciones diferenciales que satisfacen los polinomios ortogonales de Laguerre-Hahn , indicamos explícitamente las ecuaciones diferenciales de cuarto orden que cumplen los asociados de primer orden a los polinomios clásicos.También se incluye la relación de estructura.

Ecuación diferencial y relación de estructura de los polinomios asociados de orden uno a los polinomios clásicos.

Polinomios asociados de orden uno a los clásicos de Hermite, $H_n^{(1)}$

Relación de estructura

$$(H_n^{(1)})'(x) = -2H_{n+1}^{(1)}(x)+2H_{n+1}(x) \quad , \quad n\geq 0$$

Ecuación diferencial

$$(H_{n+1}^{(1)})^{(IV)}(x)+4(-x^2+n+3)(H_{n+1}^{(1)})''(x)-12x(H_{n+1}^{(1)})'(x)+4(n+3)(n+1)H_{n+1}^{(1)}(x)=0 \quad ; n\geq 0$$

Polinomios asociados de orden uno a los clásicos de Laguerre , $(L_n^{(\alpha)})^{(1)}$

Relación de estructura

$$x[(L_n^{(\alpha)})^{(1)}]'(x)=-(n+2)(L_n^{(\alpha)})^{(1)}(x) - (L_{n+1}^{(\alpha)})^{(1)}(x)+L_{n+1}^{(\alpha)}(x) , \qquad n\geq 0$$

Ecuación diferencial

$$x^2[(L_{n+1}^{(\alpha)})^{(1)}]^{(IV)}(x) + 5x[(L_{n+1}^{(\alpha)})^{(1)}]^{(III)}(x)+[-x^2+2(n+\alpha+3)x-\alpha^2+4][(L_{n+1}^{(\alpha)})^{(1)}]''(x)+$$

$$+3(-x+\alpha+n+3)[(L_{n+1}^{(\alpha)})^{(1)}]'(x)+(n+3)(n+1)[(L_{n+1}^{(\alpha)})^{(1)}](x) = 0 \quad , n\geq 0$$

Polinomios asociados de orden uno a los clásicos de Jacobi , $(P_n^{(\alpha,\beta)})^{(1)}$

Relación de estructura

$$(x^2-1)[(P_n^{(\alpha,\beta)})^{(1)}]'(x) = (n+2)[\alpha-\beta-(2n+4+\alpha+\beta)x](2n+4+\alpha+\beta)^{-1}(P_n^{(\alpha,\beta)})^{(1)}(x)+$$

$$+(2n+\alpha+\beta+3)(P_{n+1}^{(a,b)})^{(1)}(x)-(\alpha+\beta+1)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) , \qquad n\geq 0.$$

Ecuación diferencial

$$(1-x^2)^2[(P_n^{(\alpha,\beta)})^{(1)}]^{(IV)}(x)-1ox(1-x^2)[(P_{n+1}^{(\alpha,\beta)})^{(1)}]^{III}(x) + \Big\{[-(\alpha+\beta)^2-2(3+n)(\alpha+\beta)-$$

$$-2n(n+5)+12\Big]x^2+2(\beta^2-\alpha^2)x-(\alpha-\beta)^2+2(3+n)(\alpha+\beta)+2n(n+5)+4\Big\}[(P_{n+1}^{(\alpha,\beta)})^{(1)}]''(x)-$$

$$-\left\{\left[3(\alpha+\beta)^2+6(n+3)(\alpha+\beta)+6n(n+5)+24\right]x+3(\alpha^2-\beta^2)\right\}[(P_{n+1}^{(\alpha,\beta)})^{(1)}]'(x)+$$

$$+(n+3)(n+1)(n+\alpha+\beta+2)(n+\alpha+\beta+4)[(P_{n+1}^{(\alpha,\beta)})^{(1)}](x)=0 \quad , \qquad n\geq 0.$$

<u>Polinomios asociados de orden unos a los clásicos de Bessel</u>, $(B_n^{(\alpha)})^{(1)}$

<u>Relación de estructura</u>

$$x^2[(B_n^{(\alpha)})^{(1)}]'(x)=-(n+2)\left[x-(n+\alpha+1)^{-1}\right](B_n^{(\alpha)})^{(1)}(x)+(2n+2\alpha+1)(B_{n+1}^{(\alpha)})^{(1)}(x)-(2\alpha-1)B_{n+1}^{(\alpha)}(x) \quad ,$$

$n\geq 0$

<u>Ecuación diferencial</u>

$$x^2[(B_{n+1}^{(\alpha)})^{(1)}]^{(IV)}+10x^3[(B_{n+1}^{(\alpha)})^{(1)}]^{(III)}(x)+$$

$$+2\left\{\left[-2\alpha^2-2(1+n)\alpha-n(n+3)+10\right]x^2-4(\alpha-1)x-2\right\}[(B_{n+1}^{(\alpha)})^{(1)}]''(x)+6\{[-2\alpha^2-2(1+n)\alpha-n(n+3)]x-$$

$$-2(\alpha-1)\}](B_{n+1}^{(\alpha)})^{(1)}]'(x)+(n+1)(n+3)(2\alpha+n)(2\alpha+n+2)(B_{n+1}^{(\alpha)})^{(1)}(x)=0 \quad , n\geq 0.$$

□

<u>Anexo 3.</u>

<u>*DESCRIPCION DE LOS POLINOMIOS DE LAGUERRE-HAHN DE CLASE CERO. ([12])*</u>

<u>Polinomios de Laguerre-Hahn de clase cero análogos de los de **Hermite**, $H_n(x)$.</u>

$\Phi(x)=1$, $\Psi(x)=a_1x+a_0$, $B(x)=b_2x^2+b_1x+b_0$

i) $\boxed{b_2=2}$ (sucesión singular)

$\beta_0=\lambda$, $\lambda\in C$; $\beta_{n+1}=0$, $n\geq 0$; $\gamma_1=(1/2)\rho$, $\rho\neq 0$; $\gamma_{n+1}=n/2$, $n\geq 1$.

$\Phi(x)=1$; $\Psi(x)=-2x$; $B(x)=2x^2-2\lambda x+1-\rho$

ii) $\boxed{b_2\neq 2}$ (Hermite, co-recursivos,co-dilatados ,perturbados y asociados generalizados a los polinomios de Hermite).

$\beta_0=\lambda$, $\lambda\in C$; $\beta_{n+1}=0$, $n\geq 0$; $\gamma_1=\rho(\frac{1+\tau}{2})$,$\rho\neq 0$;$\gamma_{n+1}=\frac{1+n+\tau}{2}$, $n\geq 1$; $\tau\neq -n$, $n\geq 1$.

$\Phi(x)=1$; $\Psi(x)=2\frac{2-\rho}{\rho}x-4\frac{\lambda}{\rho}$; $B(x)=2\frac{\rho-1}{\rho}x^2+2\lambda\frac{2-\rho}{\rho}x+1-\rho(1+\tau)-2\frac{\lambda^2}{\rho}$

τ definido por $\gamma_1=(\rho/2)(1+\tau)$

Tabla 3

Segun los valores de λ, ρ y τ, tenemos:

$\lambda\in C$, $\rho\in C^*$	sucesión singular
$\tau=0$,$\lambda=0$,$\rho=1$	polinomios de Hermite
$\tau=0$,$\lambda\neq 0$,$\rho=1$	co-recursivos de los polinomios de Hermite
$\tau=0$,$\lambda=0$,$\rho\neq 1$	co-dilatados de los polinomios de Hermite
$\tau=0$,$\lambda\neq 0$,$\rho\neq 1$	perturbados de los polinomios de Hermite
$\tau\in C^*$,$\tau\neq -n$, $n\geq 0$	
$\lambda=0$, $\rho=1$	asociados de orden τ a los polinomios de Hermite
$\lambda\neq 0$,$\rho=1$	co-recursivos de los asociados de orden τ de los polinomios de Hermite
$\lambda=0$,$\rho\neq 1$	co-dilatados de los asociados de orden τ de los polinomios de Hermite
$\lambda\neq 0$,$\rho\neq 1$	perturbados de los asociados de orden τ de los polinomios de Hermite

$C^*=C-\{0\}$.

Polinomios de Laguerre-Hahn de clase cero análogos a los polinomios de **Laguerre**, $L_n^{(\alpha)}(x)$.

$\Phi(x)=x$; $\Psi(x)=a_1x+a_0$; $B(x)=b_2x^2+b_1x+b_0$

i) $\boxed{b_2=1}$ (sucesión singular)

$\beta_0 = \alpha-1+\lambda \quad , \lambda \in C \ ; \ \beta_{n+1} = 2n+\alpha+1 \quad , n \geq 0$

$\gamma_1 = \rho \quad , \quad \rho \neq 0 \quad ; \ \gamma_{n+1} = n(n+\alpha) \quad , \ n \geq 1 \ , \alpha \neq -n \quad , n \geq 1.$

$\Phi(x) = x \quad ; \ \Psi(x) = -x+\alpha-1 \quad ; \ B(x) = x^2 + [2(1-\alpha)-\lambda]x+\alpha(\alpha-1+\lambda)-\rho$

ii) $\boxed{b_2 \neq 1}$ (Laguerre, co-recursivos,co-dilatados,perturbados y asociados generalizados de los polinomios de Laguerre)

$\beta_0 = 2\tau+\alpha+1+\lambda \quad , \lambda \in C \quad ; \ \beta_{n+1} = 2(n+\tau+1)+\alpha+1 \quad , n \geq 0$

$\gamma_1 = \rho(1+\tau)(1+\tau+\alpha) \quad , \rho \neq 0 \ ; \quad \gamma_{n+1} = (n+\tau+1)(v+\tau+1+\alpha) \quad , \ n \geq 1.$

$\alpha+\tau \neq -(n+1) \ , \ \tau \neq -(n+1) \quad , \ n \geq 0$

$\Phi(x) = x \quad ; \qquad \Psi(x) = (\frac{2}{\rho}-1)x+(1-\frac{2}{\rho})(2\tau+\alpha+1)-\frac{2}{\rho}\lambda$

$B(x) = (1-\frac{1}{\rho})x^2+\left[2(\frac{1}{\rho}-1)(2\tau+\alpha+1)+\lambda(\frac{2}{\rho}-1)\right] x+\left\{(2\tau+\alpha+1+\lambda)\left[(1-\frac{1}{\rho})(2\tau+\alpha+1)+1-\frac{\lambda}{\rho}\right] - \rho(1+\tau)(1+\tau+\alpha)\right\}$

τ definido por $\gamma_1 = \rho(1+\tau)(1+\tau+\alpha)$

Tabla 4.

Según los valores de α, τ, λ y ρ , tenemos:

$\alpha,\lambda \in C \ , \alpha \neq -n \quad , n \geq 1 \quad , \rho \in C^*$	/ sucesión singular
$\tau=0 \ , \ \alpha,\lambda \in C \ , \rho \in C^* \ , \ \alpha \neq -(n+1) \ , n \geq 0$	
$\lambda=0 \quad , \quad \rho=1$	/ polinomios de Laguerre
$\lambda \neq 0 \quad , \quad \rho=1$	/ co-recursivos de los polinomios de Laguerre
$\lambda=0 \quad , \quad \rho \neq 1$	/ co-dilatados de los polinomios de Laguerre
$\lambda \neq 0 \quad , \quad \rho \neq 1$	/perturbados de los polinomios de Laguerre
$\tau \in C^* \ , \ \alpha,\lambda \in C \ , \rho \in C^* \ , \alpha+\tau \neq -(n+1) \ , n \geq 0 \ , \tau \neq -(n+1) \ , n \geq 0$	
$\lambda = 0 \quad , \rho = 1$	/asociados de orden τ de los polinomios de Laguerre
$\lambda \neq 0 \quad , \rho = 1$	/co-recursivos de los asociados de orden τ de los polinomios de Laguerre
$\lambda = 0 \quad , \rho \neq 1$	/co-dilatados de los asociados de orden τ de los polinomios de Laguerre
$\lambda \neq 0 \quad , \rho \neq 1$	/perturbados de los asociados de orden τ de los polinomios de Laguerre

<u>Polinomios de Laguerre-Hahn de clase cero análogos a los polinomios de Jacobi</u> ,$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$

$\Phi(x)=x^2-1$; $\Psi(x)=a_1x+a_0$; $B(x)=b_2x^2+b_1x+b_0$

Teniendo en cuenta la siguiente notación:

$\mu=(3+r_0-2b_2)\beta_0-b_1$; $R=r_0\gamma_1(b_2-2-r_0)$; $r_0=\dfrac{F_0}{\gamma_1}$; $F_0=\theta_{0,0}-\gamma_1\theta_{0,2}$

$\theta_{n,n}$ según (1.3) , presentaremos los dos siguientes casos:

i) $\boxed{R=0}$ (sucesión singular)

$$\beta_0=\frac{\mu}{2-\alpha}+\lambda \ , \lambda\in C \ , \alpha\neq-2 \ ; \quad \beta_{n+1}=\frac{-\alpha\mu}{(2n+\alpha)[2(n+1)+\alpha]} \quad ,n\geq0.$$

$$\gamma_1=\rho \ , \rho\neq0 \ ; \quad \gamma_{n+1}=\frac{n(n+\alpha)(2n+\alpha-\mu)(2n+\alpha+\mu)}{(2n+\alpha+1)(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)^2} \quad ,n\geq1.$$

$\alpha\neq-n$, $n\geq0$, $\alpha\neq\pm\mu-2n$, $n\geq1$

$$\Phi(x)=x^2-1 \ ; \ \Psi(x)=(\alpha-2)x+\mu+\alpha\lambda \ ; \ B(x)=(1-\alpha)x^2-2\mu\frac{\alpha-1}{\alpha-2}\,x-\frac{1}{\alpha-2}\mu^2-\frac{2\lambda}{\alpha-2}\mu+(\lambda^2+\rho)\alpha+\rho-1$$

ii) $\boxed{R\neq0}$ (Jacobi, co-recursivos ,co-dilatados , perturbados , y asociados generalizados de los polinomios de Jacobi.)

$$\beta_0=\frac{\alpha^2-\beta^2}{[\alpha+\beta+2(\tau+1)](\alpha+\beta+2\tau)}+\lambda \ , \ \lambda\in C \ ; \quad \beta_{n+1}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{[2(n+\tau)+\alpha+\beta+2][2(n+\tau)+\alpha+\beta+4]} \quad n\geq0.$$

$$\gamma_1=4\frac{\rho(\tau+1)(\tau+1+\alpha)(\tau+1+\beta)(\tau+1+\alpha+\beta)}{(2\tau+\alpha+\beta+1)(2\tau+\alpha+\beta+3)(2\tau+\alpha+\beta+2)^2} \quad , \quad \rho\neq0 \quad .$$

$$\gamma_{n+1} = 4\frac{(n+\tau+1)(n+\tau+1+\alpha)(n+\tau+1+\beta)(n+\tau+1+a+b)}{[2(n+\tau)+\alpha+\beta+3][2(n+\tau)+\alpha+\beta+2]^2\,[2(n+\tau)+\alpha+\beta+1]} \quad , \quad n\geq 1 \ .$$

$\tau\neq-n-1$; $\tau+\alpha\neq-n-1$; $\tau+\beta\neq-n-1$, $n\geq 0$; $2\tau+\alpha+\beta\neq-n-2$, $n\geq-2$.

$\Phi(x)=x^2-1$;

$$\Psi(x) = \left[(1-\frac{2}{\rho})\ (2\tau+\alpha+\beta)-\frac{2}{\rho}\right]\ x+\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta+2\tau}+\frac{2\lambda}{\rho}(2\tau+\alpha+\beta+1)-2(1-\frac{1}{\rho})(1+\frac{1}{\alpha+\beta+2\tau})(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta+2(\tau+1)})$$

$$B(x)=(\frac{1}{\rho}-1)\ (2\tau+\alpha+\beta+1)\ x^2+\left\{2(1-\frac{1}{\rho})\ (1+\frac{1}{\alpha+\beta+2\tau})(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta+2(\tau+1)})+\lambda\left[(1-\frac{2}{\rho})(2\tau+\alpha+\beta)-2(\frac{1}{\rho}-1)\right]\right\}\ x+$$

$$+\left[\ 1+(1-\frac{1}{\rho})\ (2\tau+\alpha+\beta+1)\ \right]\beta_0^2-\left\{\ 2(1-\frac{1}{\rho})(1+\frac{1}{2\tau+\alpha+\beta})\,\mu+\lambda\left[(1-\frac{2}{\rho})(2\tau+\alpha+\beta)-2(\frac{1}{\rho}-1)\right]\right\}\beta_0-1+$$

$$+\ 4\frac{\rho(\tau+1)(\tau+1+\alpha)(\tau+1+\beta)(\tau+1+\alpha+\beta)}{(2\tau+\alpha+\beta+1)(2\tau+\alpha+\beta+2)^2} \quad ; \quad \tau \text{ definido por } r_0=-(\alpha+\beta+2\tau+3)$$

<u>Tabla5.</u>

Segun los valores de α , β , τ , λ y ρ, tenemos:

$\alpha,\lambda,\mu \in C$, $\alpha\neq-n$, $n\geq o$, $\alpha\neq\pm\mu-2n$, $n\geq 1$, $\rho\in C^*$	/ sucesión singular

$\tau=0$, $\alpha,\beta,\lambda\in C$, $\rho\in C^*$, $\alpha\neq-n-1$, $\beta\neq-n-1$, $\alpha+\beta\neq-n-2$, $n\geq 0$

$\lambda=0$	$\rho=1$	/ polinomios de Jacobi
$\lambda\neq0$	$\rho=1$	/ co-recursivos de los polinomios de Jacobi
$\lambda=0$	$\rho\neq1$	/ co-dilatados de los polinomios de Jacobi
$\lambda\neq0$	$\rho\neq1$	/ perturbados de los polinomios de Jacobi

$\tau\in C^*$, $\alpha,\beta,\lambda\in C$, $\rho\in C^*$, $\tau\neq-n-1$, $\tau+\alpha\neq-n-1$, $\tau+\beta\neq-n-1$, $n\geq 0$, $2\tau+\alpha+\beta\neq-n-2$, $n\geq 2$.

$\lambda=0$	$\rho=1$	/asociados de orden τ de los polinomios de Jacobi
$\lambda\neq0$	$\rho=1$	/co-recursivos de los asociados de orden τ de los polinomios de Jacobi
$\lambda=0$	$\rho\neq1$	/co-dilatados de los asociados de orden τ de los polinomios de Jacobi
$\lambda\neq0$	$\rho\neq1$	/perturbados de los asociados de orden τ de los polinomios de Jacobi

Polinomios de Laguerre-Hahn de clase cero análogos a los de Bessel, $B_n^{(\alpha)}(x)$.

$\Phi(x) = x^2$; $\Psi(x) = a_1x + a_0$; $B(x)=b_2x^2+b_1x+b_0$

Teniendo en cuenta la notación:

$R=r_0\gamma_1(b_2-2-r_0)+\frac{\mu^2}{4}$; $\mu=(3+r_0-2b_2)\beta_0-b_1$; $r_0=\frac{F_0}{\gamma_1}$; $F_0=\theta_{0,0}-\gamma_1\theta_{0,2}$, $\theta_{n,n}$ segun formulas (1.3.) , distinguiremos los dos soguientes casos:

i) $\boxed{R=0}$ (sucesión singular)

$\beta_0=\frac{2}{\alpha(\alpha-2)}+\lambda$, $\lambda\in C$; $\beta_{n+1}=\frac{2}{(2n+\alpha)[2(n+1)+\alpha]}$, $n\geq 0$.

$\gamma_1=\frac{\rho}{\alpha^2(\alpha-1)(\alpha+1)}$, $\rho\neq 0$; $\gamma_{n+1}=\frac{1}{(2n+\alpha-1)(2n+\alpha)^2(2n+\alpha+1)}$, $n\geq 1$

$\alpha\neq -n$, $n\geq -2$.

$\Phi(x)=x^2$; $\Psi(x)=\left[(1-\frac{2}{\rho})(\alpha-1)-1\right]x+\frac{2}{\alpha-2}\left[\frac{2}{\alpha}(1-\frac{1}{\rho})+\frac{2}{\rho}-1\right]+\frac{2\lambda}{\rho}(\alpha-1)$

$B(x)=(\frac{1}{\rho}-1)(\alpha-1)x^2+\left\{\frac{2}{\alpha}+[\alpha(1-\frac{2}{\rho})+\frac{2}{\rho}][\frac{2}{\alpha(\alpha-2)}+\lambda]\right\}x+\frac{\alpha-1}{\rho}\beta_0^2-\frac{2}{\alpha}\beta_0+\frac{\rho}{\alpha^2(\alpha-1)}$

ii) $\boxed{R\neq 0}$ (Bessel , co-recursivos , co-dilatados , perturbados y asociados generalizados de los polinomios de Bessel).

$\beta_0=\frac{1-\theta}{(\tau+\theta)(\tau+\theta-1)}+\lambda$; $\lambda\in C$; τ y θ definidos por $r_0=-2(\tau+\theta)-1$, $\mu=\frac{2(\theta-1)}{\tau+\theta}$

$$\beta_{n+1} = \frac{1-\theta}{(n+\tau+\theta)(n+\tau+\theta+1)}\ , \quad n\geq 0 \quad ; \qquad \gamma_1 = -\frac{\rho(\tau+1)(\tau+2\theta-1)}{[2(\tau+\theta)+1][2(\tau+\theta)-1](\tau+\theta)^2} \qquad \rho\neq 0 \quad ;$$

$$\gamma_{n+1} = -\frac{(n+\tau+2\theta-1)(n+\tau+1)}{[2(n+\tau+\theta)+1]\ [2(n+\tau+\theta)-1](n+\tau+\theta)^2}\ , \qquad n\geq 1$$

con $\tau+\theta \neq -\frac{n}{2}$, $n\geq -2$; $\tau+2\theta-1 \neq -n$, $n\geq 0$; $\tau+1\neq -n$, $n\geq 0$.

$\Phi(x)= x^2$;

$$\Psi(x)=2\left\{[(\tau+\theta)(1-\frac{2}{\rho})+\frac{1}{\rho}-1]\ x -[(\tau+\theta)(1-\frac{2}{\rho})+\frac{1}{\rho}]\,[\lambda+\frac{1-\theta}{(\tau+\theta)(\rho+\theta-1)}]+\frac{1-\theta}{\tau+\theta+1}-\frac{1-\theta}{\tau+\theta}+\lambda(\tau+\theta)\right\}$$

$$B(x)=(\frac{1}{\rho}-1)\,[2(\tau+\theta)-1]\,x^2+2\left\{[(\tau+\theta)(1-\frac{2}{\rho})+\frac{1}{\rho}\,][\lambda+\frac{1-\theta}{(\tau+\theta)(\tau+\theta-1)}]+\frac{1-\theta}{\tau+\theta}\right\}x+$$

$$+\left[\frac{1}{\rho}+(2-\frac{2}{\rho})(\tau+\theta)\right]\beta_0^2-2\left\{\lambda(1-\frac{1}{\rho})(\tau+\theta)+\frac{1-\theta}{\tau+\theta}+[1-\frac{2}{\rho}+\frac{1}{\rho(\tau+\theta)}]\frac{1-\theta}{\tau+\theta-1}+\frac{\lambda}{\rho}\right\}\beta_0-\frac{\rho(\tau+1)(\tau+2\theta-1)}{[2(\tau+\theta)-1](\tau+\theta)^2}$$

Tabla 6..

Segun los valores de $\alpha,\tau,\theta,\lambda$ y ρ tenemos:

$\alpha,\lambda \in C$, $\alpha\neq -n$, $n\geq -2$, $\rho \in C^*$	sucesión singular
$\tau=0$, $\theta,\lambda \in C$, $\rho \in C^*$, $\theta \neq -n/2$, $n\geq 0$	
$\lambda=0$, $\rho=1$	polinomios de Bessel
$\lambda\neq 0$, $\rho=1$	co-recursivos de los polinomios de Bessel
$\lambda=0$, $\rho\neq 1$	co-dilatados de los polinomios de Bessel
$\lambda\neq 0$, $\rho\neq 1$	perturbados de los polinomios de Bessel
$\tau \in C^*$, $\theta,\lambda \in C$, $\rho \in C^*$, $\tau+\theta \neq -n/2$, $n\geq -2$, $\tau+2\theta-1 \neq -n$, $\tau+1\neq -n$, $n\geq 0$	
$\lambda=0$, $\rho=1$	asociados de orden τ de los polinomios de Bessel
$\lambda\neq 0$, $\rho=1$	co-recursivos de los asociados de orden τ de los polinomios de Bessel
$\lambda=0$, $\rho\neq 1$	co-dilatados de los asociados de orden τ de los polinomios de Bessel
$\lambda\neq 0$, $\rho\neq 1$	perturbados de los asociados de orden τ de los polinomios de Bessel

□.

Nota: *En esta descripción se admiten como polinomios de Laguerre-Hahn aquellos cuya función de* Stieltjes cumple la ecuación (1.1.) sin la restricción $B(z)\neq 0$.

CAPITULO III.

MODIFICACIONES DE UN FUNCIONAL DE LAGUERRE-HAHN.

1.SUMA DE UNA MASA DE DIRAC.

1.1.ESTUDIO DEL NUEVO FUNCIONAL.REGULARIDAD.
1.2.DETERMINACION DEL ORDEN DE LA CLASE.
1.3.EJEMPLOS.

2.SUMA DE LA DERIVADA DE UNA MASA DE DIRAC.

2.1.ESTUDIO DEL NUEVO FUNCIONAL.REGULARIDAD.
2.2.DETERMINACION DEL ORDEN DE LA CLASE.
2.3.EJEMPLOS.

3.ESTUDIO DEL FUNCIONAL U , DONDE $(x-c)U=\mu V$, $(\mu, c \in \mathbf{C})$, V DE LAGUERRE-HAHN.

3.1.ESTUDIO DEL FUNCIONAL U.REGULARIDAD.
3.2.DETERMINACION DEL ORDEN DE LA CLASE.
3.3.EJEMPLOS.

1.SUMA DE UNA MASA DE DIRAC A UN FUNCIONAL LINEAL REGULAR DE LAGUERRE-HAHN.

Una forma de generar nuevas familias de polinomios ortogonales a partir de sucesiones conocidas es modificar los coeficientes de la relación de recurrencia, apareciendo los polinomios asociados, co-recursivos , etc. , como hemos estudiado en el Cap.II.

En este capítulo efectuaremos modificaciones en el funcional, tales como la adición de una masa de Dirac , de su derivada o la multiplicación a la izquierda por un polinomio.Se estudiará la regularidad de los nuevos funcionales , demostrando que estas transformaciones realizadas sobre funcionales de Laguerre-Hahn originan nuevos funcionales de Laguerre-Hahn.También se estudia la modificación del orden de clase resultante.

1.1. Estudio del funcional $\overline{u} = u + \mu\delta_c$.

En 1940 H.L.Krall ([33]) , obtuvo tres nuevas familias de polinomios ortogonales respecto a una medida que no es absolutamente continua .Estos polinomios satisfacen una ecuación diferencial de cuarto orden $\sum_{i=0}^{4} a_i(x) y_n^{(i)} = \lambda_n y_n$ donde $a_i(x)$ es un polinomio de grado i, siendo las respectivas medidas de ortogonalidad:

i) Caso Laguerre , $dm = e^{-x}\,dx + \mu\delta$, $\mu > 0$, soporte $(m) = R^{+}$

ii) Caso Legendre , $dm = (\alpha/2)dx + (1/2)[\delta_{-1} + \delta_{1}]$, $\alpha > 0$ soporte $(m) = [-1,1]$

iii) Caso Jacobi , $dm = (1-x)^{\alpha}\,dx + \mu\delta$, $\alpha > -1$, $\mu > 0$, soporte $(m) = [0,1]$

El análisis del comportamiento asintótico de los polinomios ortogonales con respecto a una medida positiva perturbada con la adición de masas puntuales fué realizado por P.Nevai ([59]).

Desde el punto de vista analítico el problema en toda su generalidad ha sido tratado por F.Marcellán y P.Maroni en [41] ,en donde los autores parten de un funcional regular cualquiera y le suman una masa de Dirac en un punto c del plano complejo con un peso $\mu \neq 0$.Su enfoque se centra en el tratamiento de propiedades diferenciales de los nuevos polinomios en la hipótesis de que los originales son semiclásicos.

Los polinomios ortogonales con respecto a un funcional regular más una masa o varias masas de Dirac encuentran su aplicación en la teoría del potencial culombiano y en extensiones de cuadratura gaussiana , (Gauss-Radan,Gauss-Lobatto).

Proposición 1.1.1.

Sea u un funcional lineal regular y $\{P_n\}_{n\geq 0}$ la correspondiente S.P.O.M. Dados μ y c números complejos arbitrarios, entonces $\overline{u} = u + \mu\delta_c$ es un funcional lineal regular si y sólo si

$$\mu \neq \mu_n = -\left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k^2(c)}{< u \ , \ P_k^2(x)>} \right\}^{-1} \quad , \quad n \geq 0 \qquad (1.1.)$$

Nota: Si $\{R_n\}_{n\geq 0}$ es la S.P.O.M. correspondiente a $\overline{u}$, esta sucesión es cuasi-ortogonal de orden uno respecto al funcional $(x-c)u$, $[<(x-c)u \ , R_m R_n> =0$ si $|m-n| \geq 2$, $< (x-c)u \ , R_{n-1}R_n> \neq 0$, $n \geq 1$].

□

Teorema 1.1.1.

Sea u un funcional lineal regular de Laguerre-Hahn y sean μ y c números complejos arbitrarios.Entonces para cada $\mu\neq\mu_n$, $\overline{u} = u + \mu\delta_c$ es un funcional lineal regular de Laguerre-Hahn

DEMOSTRACION:

Sea u un funcional de Laguerre-Hahn cumpliendo la ecuación (1.2.)del Cap.II. Sustituyendo en la misma u por $\overline{u} - \mu\delta_c$ tenemos

$$D(\Phi \overline{u})+\Psi \overline{u} +B(x^{-1}\overline{u}^2) -\mu D(\Phi\delta_c) -\mu\Psi\delta_c -2\mu B[x^{-1}(\overline{u}\,\delta_c)] +\mu^2 B(x^{-1}\delta_c^2) =0 \qquad (1.2.)$$

Por otra parte $<B[x^{-1}(\overline{u}\,\delta_c)]\ ,p(x)> = <\overline{u}\ ,\theta_c(x\theta_0 Bp)>=$

$=<B(x-c)^{-1}\overline{u}\ ,p>$; de aquí $\quad B[x^{-1}(\overline{u}\,\delta_c)] = B(x-c)^{-1}\overline{u}$ (1.3.)

Análogamente $<B(x^{-1}\delta_c^2)\ ,p(x)>= \lim_{x\to c}[\frac{B(x)p(x)-B(0)p(0)}{x-c}]= <B'(c)\delta_c-B(c)\delta'_c\ ,p>$

de donde

$$B(x^{-1}\delta_c^2)=B'(c)\delta_c-B(c)\delta'_c \tag{1.4.}$$

De forma similar obtenemos $D(\Phi\delta_c)=\Phi(c)\delta'_c$ (1.5.)

y $(\Psi\delta)(c)=\Psi(c)\delta_c$ (1.6.)

Sustituyendo (1.3.),(1.4.),(1.5.) y (1.6.) en (1.2.)

$$D(\Phi\,\overline{u}) +[\Psi -2\mu B(x-c)^{-1}]\,\overline{u} + B(x^{-1}\overline{u}^2) =\mu[\Phi(c)+\mu B(c)]\delta_c' +\mu[\Psi(c)-\mu B'(c)]\delta_c\ . \tag{1.7.}$$

Multiplicando (1.7.) por (x-c) y teniendo en cuenta que $(x-c)\delta_c' = -\delta_c$ y $(x-c)\delta_c=0$

$$D[(x-c)\Phi\,\overline{u}] + [(x-c)\Psi - \Phi -2\mu B]\,\overline{u} +B(x-c)(x^{-1}\overline{u}^2) = -\mu[\Phi(c)+\mu B(c)]\delta_c. \tag{1.8.}$$

Distinguiremos dos situaciones:

i) $\Phi(c)+\mu B(c)=0$, $\overline{u}$ es de Laguerre-Hahn cumpliendo la ecuación

$$D[(x-c)\Phi\,\overline{u}] + [(x-c)\Psi - \Phi -2\mu B]\,\overline{u} +B(x-c)(x^{-1}\overline{u}^2) = 0 \tag{1.9.}$$

ii) $\Phi(c)+\mu B(c)\neq 0$, multiplicando (1.8.) por (x-c)

$$D[(x-c)^2\Phi\,\overline{u}] +(x-c)[(x-c)\Psi-2\Phi-2\mu B]\,\overline{u} +(x-c)^2 B(x^{-1}\overline{u}^2)=0 \tag{1.10.}$$

y el teorema queda demostrado.

<u>Nota</u>: $\delta_c p(x) = \theta_c[xp(x)]$, (ver **[18]** pág.55.)

La demostración del teorema también se puede realizar con ayuda de la función de Stieltjes de la siguiente forma:

Sea $S=S(u)(z)$ la función de Stieltjes correspondiente a u , verificando

$$\Phi(z)S' = B(z)S^2 + C(z)S + D(z) \tag{1.11.}$$

Sea $\overline{S} = S(\overline{u})(z)$ la correspondiente a $\overline{u}$ .De $<\overline{u}, x^n> = <u + \mu\delta_c, x^n> = (u)_n + \mu c^n$, $n\geq 0$,

se cumple que $S = \overline{S} + \frac{\mu}{(z-c)}$ .Sustituyendo en (1.11.)

$$(z-c)^2\Phi\, \overline{S}' = (z-c)^2 B\, \overline{S}^2 + (z-c)\, [2\mu B + C(z-c)\,]\, \overline{S} + [\mu\Phi + \mu^2 B + \mu(z-c)C + (z-c)^2 D\,] \tag{1.12.}$$

En la Proposición 1.2.3. , en donde estudiamos el orden de la clase del funcional $\overline{u}$,veremos que si se cumple la condición $\Phi(c)+\mu B(c)=0$, la ecuación (1.12.) es reducible y se puede dividir por $(z-c)$, resultando $(z-c)\,\Phi\, \overline{S}' = (z-c)\, B\, \overline{S}^2 + [2\mu B + C(z-c)\,]\, \overline{S} + [\mu\Phi_{c,1} + \mu^2 B_{c,1} + \mu\, C + (z-c)\, D\,]$, que concuerda con los resultado obtenidos en la demostración de esta Proposición utilizando las ecuaciones funcionales .

□

1.2.Determinación del orden de la clase.

En lo que sigue supondremos u funcional lineal regular de Laguerre-Hahn de clase "s".

Proposición 1.2.1.

Sea u un funcional lineal regular de Laguerre-Hahn de clase s, y sea $\overline{u} = u + \mu\delta_c$ .Entonces $\overline{u}$ es de Laguerre-Hahn de clase $\overline{s}$ cumpliéndose $s-2 \leq \overline{s} \leq s+2$.

DEMOSTRACION:

Sean Φ,Ψ y B como en el corolario 2.1.1. Cap.II y sea $D(\Phi^* \overline{u}) + \Psi^* \overline{u} + B^*(x^{-1}\overline{u}^2)=0$ la ecuación que cumple $\overline{u}$ con $\Phi^*=(x-c)^2\Phi$; $\Psi^*=(x-c)[(x-c)\Psi-2\Phi-2\mu B]$; $B^*=(x-c)^2B$ (1.13.)

Tenemos que el grado de $\Phi^*=t^*\leq s+4$, grado de $\Psi^*=p^*\leq s+3$ y grado de $B^*=r^*\leq s+4$ de donde $d^*=\text{máx}(t^*,r^*)\leq s+4$ y $\overline{s}=\text{máx}(p^*-1,d^*-2)\leq s+2$.

Por otra parte, como $u=\overline{u}-\mu\delta_c$, $s\leq \overline{s}+2$,de donde se sigue el resultado.

□

Proposición 1.2.2.

Sea $\overline{u}$ un funcional de Laguerre-Hahn cumpliendo la ecuación (1.10.).Entonces para cada raíz "a" de $\Phi^*(x)$ distinta de "c" , la ecuación (1.13.) es irreducible.

DEMOSTRACION:

Siguiendo el Teorema 2.1.1.Cap.II pondremos

$\Phi_a^*=(x-c)^2\Phi_a$

$\Psi_a^*=(x-c)^2\Psi_a-2(x-c)\Phi_a-2\mu(x-c)B_a+(x+a-2c)r_a-2\mu s_a$; $r_a^*=(c-a)^2r_a-2\mu(a-c)s_a$

$B_a^*=(x-c)^2B_a+(x+a-2c)s_a$; $s_a^*=(c-a)^2s_a$

luego si $s_a\neq 0$, $s_a^*\neq 0$ y (1.13.) queda irreducible.

Si $s_a=0$ y $r_a\neq 0$, $r_a^*\neq 0$, (1.13.) es irreducible.

Si $s_a=r_a=0$ evaluamos $<\overline{u},\Psi_a^*>+<\overline{u}^2,\theta_0 B_a^*>=(a-c)^2[<u,\Psi_a>+<u^2,\theta_0 B_a>]\neq 0$

□

Proposición 1.2.3.

Sea $\overline{u} = u + \mu\delta_C$ *, y sean* $\overline{s}$ *,* s *las clases de* $\overline{u}$ *y* u *, respectivamente.Se tiene que:*

$$\Phi(c)+\mu B(c)\neq 0 \;\Rightarrow\; \overline{s} = s+2$$

$$\Phi(c)+\mu B(c)=0. \Rightarrow \begin{cases} B(c)\neq 0. \Rightarrow \overline{s} = s+1 \\ B(c)=0 \Rightarrow \begin{cases} \mu B'(c)+\Phi'(c)+C(c)\neq 0 \Rightarrow \overline{s} = s+1 \\ \mu B'(c)+\Phi'(c)+C(c) = 0 \Rightarrow [1] \end{cases} \end{cases}$$

$$[1] \Rightarrow \begin{cases} 2\mu B'(c)+C(c)\neq 0 \Rightarrow \overline{s} = s \\ 2\mu B'(c)+C(c)=0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\mu^2 B''(c)+\frac{1}{2}\mu\Phi''(c)+\mu C'(c)+D(c)\neq 0 \Rightarrow \overline{s} = s \\ \frac{1}{2}\mu^2 B''(c)+\frac{1}{2}\mu\Phi''(c)+\mu C'(c)+D(c)=0 \Rightarrow [2] \end{cases} \end{cases}$$

$$[2] \Rightarrow \begin{cases} \Phi'(c)\neq 0 \Rightarrow \overline{s} = s-1 \\ \Phi'(c)=0 \Rightarrow \begin{cases} \mu B''(c)+C'(c)\neq 0 \Rightarrow \overline{s} = s-1 \\ \mu B''(c)+C'(c)=0 \Rightarrow [3] \end{cases} \end{cases}$$

$$[3] \Rightarrow \begin{cases} \frac{\mu^2}{3!} B'''(c)+\frac{\mu}{3!}\Phi'''(c)+\frac{\mu}{2} C''(c)+D'(c)\neq 0 \Rightarrow \overline{s} = s-1 \\ \frac{\mu^2}{3!} B'''(c)+\frac{\mu}{3!}\Phi'''(c)+\frac{\mu}{2} C''(c)+D'(c)=0 \Rightarrow \overline{s} = s-2 \end{cases}$$

siendo los polinomios Φ*,* B*,* C *y* D *los definidos en (1.11)*

DEMOSTRACION;

En la demostración usaremos la siguiente notación:

$$\Phi_{c,i}(z)=(z-c)\Phi_{c,(i+1)}(z)+t_{c,(i+1)} \quad , \quad \Phi_{c,o}=\Phi$$

$$B_{c,i}(z)=(z-c)B_{c,(i+1)}(z)+s_{c,(i+1)} \quad , \quad B_{c,o}=B$$

$$C_{c,i}(z)=(z-c)C_{c,(i+1)}(z)+q_{c,(i+1)} \quad , \quad C_{c,o}=C$$

$$D_{c,i}(z)=(z-c)D_{c,(i+1)}(z)+p_{c,(i+1)} \quad , \quad D_{c,o}=D$$

De forma general , $\overline{S}=S(\overline{u})(z)$ cumple la ecuación (1.12.) siendo $\overline{s}=s+2$, luego si $\Phi(c)+\mu B(c)=0$ la ecuación anterior es divisible por (z-c) disminuyendo en una unidad el orden de la clase de $\overline{u}$.

$$(z-c)\,\Phi\,\overline{S}'=(z-c)\,B\,\overline{S}^2+[2\mu B+C(z-c)]\,\overline{S}+[\mu\Phi_{c,1}+\mu^2 B_{c,1}+\mu\,C+(z-c)\,D] \quad ; \quad \overline{s}=s+1.$$

Si $B(c)=0$ y $[\Phi_{c,1}+\mu\,B_{c,1}+C](c)=0 \Leftrightarrow B(c)=0$ y $\mu B'(c)+\Phi'(c)+C(c)=0$, la ecuación anterior se puede dividir por (z-c) y $\overline{u}$ sigue disminuyendo de clase.

$$\Phi\,\overline{S}'=B\,\overline{S}^2+[2\mu B_{c,1}+C]\,\overline{S}+[\mu\Phi_{c,2}+\mu^2 B_{c,2}+\mu\,C_{c,1}+D] \quad ; \quad \overline{s}=s\,.$$

Si $\Phi(c)=B(c)=0$ (condiciones que ya se cumplen) ; $[2\mu B_{c,1}+C](c)=0$

y $[\mu\Phi_{c,2}+\mu^2 B_{c,2}+\mu\,C_{c,1}+D](c)=0 \Leftrightarrow 2\mu B'(c)+C(c)=0$ y

$\frac{1}{2}\mu^2 B''(c)+\frac{1}{2}\mu\Phi''(c)+\mu C'(c)+D(c)=0$ $\overline{u}$ sigue reduciendo su clase.

$$\Phi_{c,1}\,\overline{S}'=B_{c,1}\,\overline{S}^2+[2\mu B_{c,2}+C_{c,1}]\,\overline{S}+[\mu\Phi_{c,3}+\mu^2 B_{c,3}+\mu\,C_{c,2}+D_{c,1}] \quad ; \quad \overline{s}=s-1.$$

$$\text{Por último si } \begin{cases} \Phi_{c,1}(c)=0 \\ B_{c,1}(c)=0 \\ [2\mu B_{c,2}+C_{c,1}](c)=0 \\ [\mu\Phi_{c,3} + \mu^2 B_{c,3}+\mu\, C_{c,2} + D_{c,1}](c)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Phi'(c)=0 \\ B'(c)=0 \quad \text{(ya exigida)} \\ \mu B''(c)+C'(c)=0 \\ \dfrac{\mu^2}{3!} B'''(c)+\dfrac{\mu}{3!}\Phi'''(c)+\dfrac{\mu}{2} C''(c)+D'(c)=0 \end{cases}$$

$$\overline{S} \text{ cumple } \Phi_{c,2}\,\overline{S}'= B_{c,2}\,\overline{S}^2+ [2\mu B_{c,3}+C_{c,2}]\,\overline{S} + [\mu\Phi_{c,4} + \mu^2 B_{c,4}+\mu\, C_{c,3} +D_{c,2}] \;;\; \overline{s}=s-2.$$

$\square$

1.3.Ejemplos

Si $u^{(1)}$ es el funcional asociado de orden uno a los polinomios clásicos ,En este apartado describiremos las ecuaciones que cumple $\overline{u} = u^{(1)} + \mu\delta_c$, así como las ecuaciones de Riccati que satisfacen las correspondientes funciones de Stieltjes $\overline{S}(z)= S(\overline{u})(z)$.

Al ser un funcional lineal de Laguerre-Hahn , $u^{(1)}$ cumple una ecuación del tipo (1.2.) Cap.II. y $S(u^{(1)})(z)$ una ecuación de Riccati del tipo (1.1.) Cap.II.Los polinomios Φ , Ψ , B , C y D los tomaremos de la Tabla 2. Cap.II.

1.3.1 Polinomios de Hermite.

Sea $u^{(1)}$ el funcional correspondiente a los asociados de orden uno de los polinomios de Hermite.Sea $\overline{u} = u^{(1)} + \mu\delta_c$.Tenemos que $\Phi = 1$; $\Psi = 2x$; $B=-1$;$C=-2x$; $D=-2$.

i) Si $\mu \neq 1$, $\Phi(c)+\mu B(c)\neq 0$, $\overline{u}$ cumple la ecuación

$$D[(x-c)^2\overline{u}\,] + 2(x-c)[\,(x-c)x + \mu -1]\,\overline{u}\, -(x-c)^2(x^{-1}\overline{u}^2)=0$$

El orden $\overline{s}$, de la clase de $\overline{u}$ es $\overline{s} = 2$, cumpliendo $\overline{S}(z)$ la ecuación

$$(z-c)^2\overline{S}\,' = -(z-c)^2\overline{S}^2+[\,-2z^3+4cz^2-2(\mu+c^2)\,z+2\mu c]\,\overline{S} + [-2(1+\mu)z^2 +2c(2+\mu)z + \mu - \mu^2-2c^2]$$

ii) si $\mu =1$ $\Phi(c)+\mu B(c)=0$, como $B(c)\neq 0$, $\overline{u}$ cumple la ecuación

$$D[(x-c)\,\overline{u}\,] + [\,2(x-c)x +1]\,\overline{u}\, -(x-c)\,(x^{-1}\overline{u}^2)=0$$

El orden $\overline{s}$, de la clase de $\overline{u}$ es $\overline{s} = 1$, cumpliendo $\overline{S}(z)$ la ecuación

$$(z-c)\,\overline{S}\,' = -(z-c)\,\overline{S}^2 - 2[(z-c)z+1]\,\overline{S}\, -2(2z+c)$$

$\square$

1.3.2. Polinomios de Laguerre.

Sea $u^{(1)}$ el funcional correspondiente a los asociados de orden uno de los polinomios de Laguerre.Sea $\overline{u} = u^{(1)} + \mu\delta_c$

$\Phi=x$; $\Psi=x-\alpha-3$; $B=-\alpha-1$;$C=-x+\alpha+2$; $D=-1$.

i) Si $c\neq\mu(\alpha+1)$ $\mu B(c)+\Phi(c)\neq 0$ $\overline{u}$ cumple la ecuación

$$D[x(x-c)^2\,\overline{u}\,] + (x-c)[(x-\alpha-3)(x-c)+2\mu(\alpha+1)-2x]\,\overline{u}\, -(\alpha+1)(x-c)^2(x^{-1}\,\overline{u}^{(2)})=0$$

El orden $\bar{s}$, de la clase de $\bar{u}$ es $\bar{s}=2$, cumpliendo $\bar{S}(z)$ la ecuación

$$z(z-c)^2\,\bar{S}(z)'=-(\alpha+1)(z-c)^2\,\bar{S}(z)^2+(z-c)[-2\mu(\alpha+1)+(-z+\alpha+2)(z-c)]\,\bar{S}(z)+)$$

$$+[\mu z-\mu^2(\alpha+1)+\mu(z-c)(-z+\alpha+2)-(z-c)^2]$$

ii)Si $c=\mu(\alpha+1) \Rightarrow \mu B(c)+\Phi(c)\neq 0$, pero $B(c)=-(\alpha+1)\neq 0$ $(\alpha\neq -1)$, $\bar{u}$ cumple la ecuación

$$D[x(x-c)\,\bar{u}\,]+[2c-(x-c)(-x+\alpha+2)]\,\bar{u}-(\alpha+1)(x-c)(x^{-1}\,\bar{u}^2)=0$$

El orden $\bar{s}$, de la clase de $\bar{u}$ es $\bar{s}=1$, cumpliendo $\bar{S}(z)$ la ecuación

$$z(z-c)\,\bar{S}(z)'=-(\alpha+1)(z-c)\,\bar{S}(z)^2+[(z-c)(-z+\alpha+2)-2c]\,\bar{S}(z)+[\frac{3c}{\alpha+1}+\frac{(-z+\alpha)c}{\alpha+1}-(z-c)]$$

1.3.3. Polinomios de Jacobi.

Sea $u^{(1)}$ el funcional correspondiente a los asociados de orden uno de los polinomios de Jacobi.Sea $\bar{u}=u^{(1)}+\mu\delta_c$

$$\Phi(x)=x^2-1 \quad ; \quad \Psi(x)=-(\alpha+\beta+4)\,x+\frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta+2)} \quad ; \quad B(x)=\frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}$$

$$C(x)=(\alpha+\beta+2)x-\frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta+2)} \quad ; \quad D(x)=(\alpha+\beta+3)$$

i) Si $\mu\neq\dfrac{(1-c^2)(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}$, $\mu B(c)+\Phi(c)\neq 0 \Rightarrow \bar{s}=2$, cumpliendo $\bar{S}$ y $\bar{u}$

respectivamente

$$(z-c)^2(z^2-1)\,\overline{S}\,' = (z-c)^2\frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}\,\overline{S}^{\,2} + (z-c)\Big[\,2\mu\frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2} +$$
$$+(z-c)[(\alpha+\beta+2)z-\frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta+2)}]\Big]\,\overline{S} + \Big[\,\mu(z^2-1)+\mu^2\frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2} + \mu(z-c)[(\alpha+\beta+2)z-$$
$$-\frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta+2)}]+(z-c)^2(\alpha+\beta+3)\Big]$$

$$D\Big[(x-c)^2(x^2-1)\,\overline{u}\,\Big] + (x-c)\Big[\,(x-c)\,[-(\alpha+\beta+4)\,x+\frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta+2)}]-2\mu-(x^2-1)\Big]\,\overline{u} +$$
$$+(x-c)^2\frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}\,(x^{-1}\,\overline{u}^{\,2})=0$$

ii) Si $\mu=\dfrac{(1-c^2)(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}$, $\mu B(c)+\Phi(c)=0$ siendo $B(c)\neq 0$ ($\alpha+\beta=-1$ nos lleva al caso semiclásico), $\Rightarrow$ $\overline{s}=1$, cumpliendo $\overline{S}$ y $\overline{u}$ respectivamente

$$(z-c)(z^2-1)\,\overline{S}\,'=(z-c)\frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}\,\overline{S}^{\,2}+\Big[\,2\mu\frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2} +$$
$$+(z-c)[(\alpha+\beta+2)z-\frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta+2)}]\Big]\,\overline{S}+\Big[\,(z+c)\frac{(1-c^2)(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)} +$$
$$+\frac{(1-c^2)(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}\,(z-c)\,[(\alpha+\beta+2)z-\frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta+2)}] + (z-c)^2\,(\alpha+\beta+3)\Big]$$

$$D\Big[(x-c)(x^2-1)\,\overline{u}\,\Big]-\Big[3x^2-2cx+2c^2-3-(x-c)[(\alpha+\beta+2)x-\frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta+2)}\Big]\,\overline{u} +$$
$$+(x-c)\frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}(x^{1}\,\overline{u}^{\,2})=0$$

1.3.4. Polinomios de Bessel

Sea $u^{(1)}$ el funcional correspondiente a los asociados de orden uno de los polinomios de Bessel.Sea $\overline{u} = u^{(1)} + \mu\delta_c$

$$\Phi = x^2 \;;\; \Psi = -2[(\alpha+1)x+1-\alpha^{-1}] \;;\; B = \frac{-(2\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)} \;;\; C = 2(\alpha x+1-\alpha^{-1}) \;;\; D = (2\alpha+1)$$

i) Si $\mu \neq \frac{c^2\ \alpha^2(2\alpha+1)}{(2\alpha-1)}$ $\quad \mu B(c)+\Phi(c)\neq 0 \Rightarrow \overline{s}=2$, cumpliendo $\overline{S}$ y $\overline{u}$ respectivamente

$$z^2(z-c)^2\,\overline{S}' = (z-c)^2\frac{-(2\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)}\overline{S}^2 + (z-c)\left[2\mu\frac{-(2\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)} + (z-c)2(\alpha x+1-\alpha^{-1})\right]\overline{S} +$$

$$+\left[\mu z^2+\mu^2\frac{-(2\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)} + \mu\,(z-c)2(\alpha x+1-\alpha^{-1}) + (z-c)^2(2\alpha+1)\right]$$

$$D[x^2(x-c)^2\,\overline{u}] + (x-c)\left\{-(x-c)2[(\alpha+1)x+1-\alpha^{-1}] - 2\mu\frac{-(2\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)} - 2x^2\right\}\overline{u} +$$

$$+(x-c)2\frac{-(2\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)}(x^{-1}\,\overline{u}^{\,2})=0$$

ii) Si $\mu = \frac{c^2\ \alpha^2(2\alpha+1)}{(2\alpha-1)}$ $\quad \mu B(c)+\Phi(c)=0$ siendo $B(c)\neq 0$ ($\alpha = \frac{1}{2}$ nos lleva al caso semiclásico), $\Rightarrow \overline{s}=1$, cumpliendo $\overline{S}$ y $\overline{u}$ respectivamente

$$z(z-c)\,\overline{S}' = (z-c)\frac{-(2\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)}\overline{S}^2 + \left[-2c^2 + (z-c)2(\alpha x+1-\alpha^{-1})\right]\overline{S} + \left[(z+c)\frac{c^2\ \alpha^2(2\alpha+1)}{(2\alpha-1)} +\right.$$

$$\left. + \frac{c^2\ \alpha^2(2\alpha+1)}{(2\alpha-1)}2(\alpha x+1-\alpha^{-1}) + (z-c)(2\alpha+1)\right]$$

$$D[x(x-c)\,\overline{u}] + [-(2x-c)+2c^2-(x-c)2(\alpha x+1-\alpha^{-1})]\,\overline{u} + (x-c)\frac{-(2\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)}(x^{-1}\,\overline{u}^{\,2})=0$$

□

2.SUMA DE LA DERIVADA DE UNA MASA DE DIRAC A UN FUNCIONAL REGULAR DE LAGUERRE-HAHN.

2.1. Estudio del funcional $\overline{u} = u + \mu\delta_c'$,([1],[2],[7],[9])

El estudio de la modificación de un funcional añadiéndole derivadas de masas de Dirac , está relacionado con la teoría de la aproximación racional de funciones de tipo Markov ([38]) y ,en los últimos años, con problemas de frontera en ecuaciones diferenciales de cuarto orden ,([14]), así como extensiones de formulas de cuadratura gaussiana ([10]).

El primer acercamiento al estudio de estas modificaciones , via el funcional de momentos , se puede ver en [9] , donde se han dado condiciones necesarias y suficientes para la regularidad del funcional modificado .En este mismo trabajo se realiza un estudio exhaustivo de los nuevos polinomios ortogonales cuando el funcional de partida es semiclásico.

Más recientemente ,en [1],[2] ha sido tratada una generalización de los polinomios clásicos de Laguerre por adición de la derivada de una masa de Dirac en el punto x=0 al funcional clásico de Laguerre.En particular ,se demuestra el carácter hipergeométrico de estos nuevos polinomios.

Proposición 2.1.1([7]).

Sea u un funcional regular y $\{P_n\}_{n\geq 0}$ la correspondiente S.P.O.M..Sean μ y c números complejos arbitrarios.Entonces $\overline{u} = u + \mu\delta_c'$ es un funcional lineal regular si y sólo si

$$A_n = \begin{vmatrix} 1-\mu K_{n-1}^{(0,1)}(c,c) & -\mu K_{n-1}^{(0,0)}(c,c) \\ -\mu K_{n-1}^{(1,1)}(c,c) & 1-\mu K_{n-1}^{(0,1)}(c,c) \end{vmatrix} \neq 0 \quad , n\geq 0 \text{ , donde}$$

$$K_{n-1}^{(j,k)}(x,y) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{P_m^{(j)}(x)P_m^{(k)}(y)}{\langle u , P_m^2\rangle}$$

<u>Nota</u>: Si por $\{R_n\}_{n\geq 0}$ entendemos la S.P.O.M. correspondiente a $\overline{u}$, esta sucesión es cuasi-ortogonal de orden dos respecto al funcional $(x-c)^2u$, [$<(x-c)^2u , R_mR_n> =0$ si $|m-n| \geq 3$, $< (x-c)^2u , R_{n-2}R_n> \neq 0$, $n \geq 2$].

□

<u>Teorema 2.1.1.</u>

Sea u un funcional lineal regular de Laguerre-Hahn y sean μ y c números complejos arbitrarios.Entonces $\overline{u} = u + \mu\delta_c'$ es un funcional lineal de Laguerre-Hahn.

DEMOSTRACION;

Sea $S=S(u)(z)$ la función de Stieltjes correspondiente al funcional u verificando

$$\Phi(z)S'=B(z)S^2+C(z)S+D(z) \tag{2.1.}$$

y sea $\overline{S} = S(\overline{u})(z)$ la función de Stieltjes relativa a $\overline{u}$.Se tiene que

$< \overline{u} , x^n >= (u)_n - \mu\, n\, c^{n-1}$; $n \geq 0$.De donde $S= \overline{S} - \dfrac{\mu}{(z-c)^2}$,de manera que sustituyendo en (2.1.)

$$(z-c)^4\Phi\, \overline{S}\,' = (z-c)^4B\, \overline{S}^{\,2} + [\, (z-c)^4C - 2\mu(z-c)^2B\,]\, \overline{S} + [\, \mu^2B-2\mu(z-c)\Phi-\mu(z-c)^2C+(z-c)^4D] \tag{2.2.}$$

y ,por consiguiente, $\overline{u}$ es de Laguerre-Hahn , cumpliendo la ecuación

$$D[(z-c)^4\Phi\, \overline{u}\,] + [(z-c)^4\Psi +2\mu(z-c)^2B -4(z-c)^3\Phi\,]\, \overline{u} +(z-c)^4B(z^{-1}\, \overline{u}^{\,2})=0 \tag{2.3.}$$

□

<u>2.2.Determinación del orden de la clase.</u>

<u>Proposición 2.2.1.</u>

Sea u un funcional lineal regular de Laguerre-Hahn de clase s, y sea $\overline{u} = u + \mu\delta_c'$ .Entonces $\overline{u}$ es de Laguerre-Hahn de clase $\overline{s}$ cumpliéndose $s-4 \leq \overline{s} \leq s+4$.

DEMOSTRACION;

Sean Φ,Ψ y B como en el Corolario 2.1.1. Cap.II y sea $D(\Phi^* \overline{u}) + \Psi^* \overline{u} + B^*(x^{-1} \overline{u}^2)=0$ la ecuación que cumple $\overline{u}$ con $\Phi^*=(x-c)^4\Phi$; $\Psi^*=(x-c)^2[(x-c)^2\Psi-4(x-c)\Phi+2\mu B]$; $B^*=(x-c)^4 B$

Tenemos que grado de $\Phi^*=t^* \leq s+6$, grado de $\Psi^*=p^* \leq s+5$ y grado de $B^*=r^* \leq s+6$ de donde $d^*=\max(t^*,r^*) \leq s+6$ y $\overline{s}=\max(p^*-1,d^*-2) \leq s+4$.

Por otra parte como $u = \overline{u} - \mu\delta_c'$, $s \leq \overline{s}+4$ de aquí el resultado.

$\square$

Proposición 2.2.2.

Sea $\overline{u}$ un funcional de Laguerre-Hahn cumpliendo la ecuación (2.3.).Entonces para cada raíz "a" de $\Phi^*(x)$ distinta de "c" , las ecuaciones (2.2.) y (2.3.) son irreducibles.

DEMOSTRACION

Al suponer u de clase s , S(u)(z) cumple la ecuación (2.1.) siendo los polinomios Φ, B,C,D, primos entre sí.

Sean Φ^*,B^*, como en la Proposición 2.2.1. , $C^*(z)=(z-c)^4C - 2\mu(z-c)^2B$ y

$D^*(z)= \mu^2B-2\mu(z-c)\Phi-\mu(z-c)^2C+(z-c)^4D$

i)Si $B(a)\neq 0 \Rightarrow$, $B^*(a)\neq 0$. ii) Si $B(a)=0$ y $C(a)\neq 0 \Rightarrow C^*(a)\neq 0$. iii) Si $B(a)=C(a)=0 \Rightarrow D^*(a)\neq 0$

De donde $|B^*(a)|+|C^*(a)|+|D^*(a)|\neq 0$

$\square$

Proposición 2.2.3.

Sea $\overline{u} = u + \mu\delta_c'$ y sean $\overline{s}$ y s las clases de $\overline{u}$ y u , respectivamente.Se tiene que:

$$B(c)\neq 0 \Rightarrow \overline{s} = s+4$$

$$B(c)=0 \Rightarrow \begin{cases} \mu B'(c)-2\Phi(c)\neq 0 \Rightarrow \overline{s} = s+3 \\ \mu B'(c)-2\Phi(c)=0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\mu B''(c)-2\Phi'(c)-C(c)\neq 0 \Rightarrow \overline{s} = s+2 \\ \frac{1}{2}\mu B''(c)-2\Phi'(c)-C(c)=0 \Rightarrow [1] \end{cases} \end{cases}$$

$$[1] \Rightarrow \begin{cases} B'(c)\neq 0 \Rightarrow \overline{s} = s+1 \\ B'(c)=0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\mu}{3!} B'''(c)-\Phi''(c)-C'(c)\neq 0 \Rightarrow \overline{s} = s+1 \\ \frac{\mu}{3!} B'''(c)-\Phi''(c)-C'(c)=0 \Rightarrow \begin{cases} \Phi(c)\neq 0 \Rightarrow \overline{s} = s \\ \Phi(c)=0 \Rightarrow [2] \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$[2] \Rightarrow \begin{cases} C(c)-\mu B''(c)\neq 0 \Rightarrow \overline{s} = s \\ C(c)-\mu B''(c)=0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\mu^2}{4!} B^{iv}(c)-\frac{2\mu}{3!} \Phi'''(c) -\frac{\mu}{2} C''(c) +D(c)\neq 0 \Rightarrow \overline{s} = s \\ \frac{\mu^2}{4!} B^{iv}(c)-\frac{2\mu}{3!} \Phi'''(c) -\frac{\mu}{2} C''(c) +D(c)=0 \Rightarrow [3] \end{cases} \end{cases}$$

$$[3] \Rightarrow \begin{cases} \Phi'(c)\neq 0 \Rightarrow \overline{s} = s-1 \\ \Phi'(c)=0 \Rightarrow \begin{cases} C'(c) -\frac{2\mu}{3!} B'''(c)\neq 0 \Rightarrow \overline{s} = s-1 \\ C'(c) -\frac{2\mu}{3!} B'''(c)=0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\mu^2}{5!} B^{V}(c)-\frac{2\mu}{4!} \Phi^{iv}(c) -\frac{\mu}{3!}C'''(c)+D'(c)\neq 0 \Rightarrow \overline{s} = s-1 \\ \frac{\mu^2}{5!} B^{V}(c) -\frac{2\mu}{4!} \Phi^{iv}(c)-\frac{\mu}{3!}C'''(c)+D'(c)=0 \Rightarrow [4] \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$[4] \Rightarrow \begin{cases} \Phi''(c) \neq 0 \Rightarrow \overline{s} = s-2 \\ \Phi''(c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} B''(c) \neq 0 \Rightarrow \overline{s} = s-2 \\ B''(c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} C''(c) - \frac{2\mu}{4!} B^{iv}(c) \neq 0 \Rightarrow \overline{s} = s-2 \\ \frac{1}{2} C''(c) - \frac{2\mu}{4!} B^{iv}(c) = 0 \Rightarrow [5] \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$[5] \Rightarrow \begin{cases} \frac{\mu^2}{6!} B^{vi}(c) - \frac{2\mu}{5!} \Phi^{v}(c) - \frac{\mu}{4!} C^{iv}(c) + \frac{1}{2} D''(c) \neq 0 \Rightarrow \overline{s} = s-2 \\ \frac{\mu^2}{6!} B^{vi}(c) - \frac{2\mu}{5!} \Phi^{v}(c) - \frac{\mu}{4!} C^{iv}(c) + \frac{1}{2} D''(c) = 0 \Rightarrow [6] \end{cases}$$

$$[6] \Rightarrow \begin{cases} \Phi'''(c) \neq 0 \Rightarrow \overline{s} = s-3 \\ \Phi'''(c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} B'''(c) \neq 0 \Rightarrow \overline{s} = s-3 \\ B'''(c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3!} C'''(c) - \frac{2\mu}{5!} B^{v}(c) \neq 0 \Rightarrow \overline{s} = s-3 \\ \frac{1}{3!} C'''(c) - \frac{2\mu}{5!} B^{v}(c) = 0 \Rightarrow [7] \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$[7] \Rightarrow \begin{cases} \frac{\mu^2}{7!} B^{vii}(c) - \frac{2\mu}{6!} \Phi^{vi}(c) - \frac{\mu}{5!} C^{v}(c) + \frac{1}{3!} D'''(c) \neq 0 \Rightarrow \overline{s} = s-3 \\ \frac{\mu^2}{7!} B^{vii}(c) - \frac{2\mu}{6!} \Phi^{vi}(c) - \frac{\mu}{5!} C^{v}(c) + \frac{1}{3!} D'''(c) = 0 \Rightarrow \overline{s} = s-4. \end{cases}$$

donde los polinomios Φ ,B C y D vienen dados por (2.1.).

DEMOSTRACION:

Seguiremos la notación de la Proposición 1.2.3.

De forma general $\overline{S} = S(\overline{u})(z)$ cumple la ecuación (2.2.) , siendo la clase

$\overline{s} = s+4$.Si B(c)=0 la ecuación anterior puede dividirse por (z-c) ,resultando

$$(z-c)^3\Phi\ \overline{S}' = (z-c)^3 B\ \overline{S}^2 + [\,(z-c)^3 C - 2\mu(z-c)\,B\,]\ \overline{S} + [\,\mu^2 B_{c,1} - 2\mu\Phi - \mu(z-c)\,C + (z-c)^3 D], \quad \overline{s} = s+3.$$

Si $\mu B_{c,1}(c) - 2\Phi(c) = 0 \Leftrightarrow \mu B'(c) - 2\Phi(c) = 0$, dividiendo por (z-c)

$$(z-c)^2\Phi\ \overline{S}' = (z-c)^2 B\ \overline{S}^2 + [\,(z-c)^2 C - 2\mu\,B\,]\ \overline{S} + [\,\mu^2 B_{c,2} - 2\mu\Phi_{c,1} - \mu\,C + (z-c)^2 D] \qquad , \quad \overline{s} = s+2.$$

Si $\mu B_{c,2}(c) - 2\Phi_{c,1}(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\mu B''(c) - 2\Phi'(c) - C(c) = 0$, dividiendo por (z-c)

$$(z-c)\Phi\ \overline{S}' = (z-c) B\ \overline{S}^2 + [\,(z-c) C - 2\mu\,B_{c,1}\,]\ \overline{S} + [\,\mu^2 B_{c,3} - 2\mu\Phi_{c,2} - \mu\,C_{c,1} + (z-c) D] \ , \qquad \overline{s} = s+1 .$$

Si $B_{c,1}(c) = 0$ y $\mu\,B_{c,3}(c) - 2\Phi_{c,2}(c) - C_{c,1}(c) = 0 \Leftrightarrow B'(c) = 0$ y $\frac{\mu}{3!} B'''(c) - \Phi''(c) - C'(c) = 0$

De nuevo, podemos seguir dividiendo por (z-c)

$$\Phi\ \overline{S}' = B\ \overline{S}^2 + [\,C - 2\mu\,B_{c,2}\,]\ \overline{S} + [\,\mu^2 B_{c,4} - 2\mu\Phi_{c,3} - \mu\,C_{c,2} + D] \ , \qquad \overline{s} = s .$$

$$\text{Si} \left\{ \begin{array}{c} \Phi(c)=0 \\ B(c)=0 \\ C(c) - 2\mu\ B_{c,2}(c) = 0 \ \Leftrightarrow\ C(c) - \mu B''(c) = 0 \\ \mu^2 B_{c,4}(c) - 2\mu\Phi_{c,3}(c) - \mu\ C_{c,2}(c) + D(c) = 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{\mu^2}{4!} B^{iv}(c) - \frac{2\mu}{3!}\Phi'''(c) - \frac{\mu}{2} C''(c) + D(c) = 0 \end{array} \right.$$

$$\Phi_{c,1}\ \overline{S}' = B_{c,1}\ \overline{S}^2 + [\,C_{c,1} - 2\mu\,B_{c,3}\,]\ \overline{S} + [\,\mu^2 B_{c,5} - 2\mu\Phi_{c,4} - \mu\,C_{c,3} + D_{c,1}]$$

$\overline{s} = s - 1$.

$$
\text{Si}\left\{\begin{array}{c}
\Phi_{c,1}=0 \Leftrightarrow \Phi'(c)=0 \\
B_{c,1}=0 \Leftrightarrow B'(c)=0 \\
C_{c,1}(c) - 2\mu\ B_{c,3}(c)=0 \Leftrightarrow C'(c) -\frac{2\mu}{3!} B'''(c) =0 \\
\mu^2 B_{c,5}(c)-2\mu\Phi_{c,4}(c)-\mu\ C_{c,3}(c)+D_{c,1}(c)=0 \Leftrightarrow \frac{\mu^2}{5!} B^{v}(c) -\frac{2\mu}{4!}\Phi^{iv}(c)-\frac{\mu}{3!}C'''(c)+D'(c)=0
\end{array}\right.
$$

$$\Phi_{c,2}\ \overline{S}\,' = B_{c,2}\ \overline{S}^{\,2} + [\, C_{c,2} - 2\mu\, B_{c,4}\,]\ \overline{S} + [\, \mu^2 B_{c,6}-2\mu\Phi_{c,5}-\mu\ C_{c,4}+D_{c,2}]$$

$\overline{s} = s - 2$

$$
\text{Si}\left\{\begin{array}{c}
\Phi_{c,2}(c)=0 \Leftrightarrow \Phi''(c)=0 \\
B_{c,2}(c)=0 \Leftrightarrow B''(c)=0 \\
C_{c,2}(c) - 2\mu\ B_{c,4}(c)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}C''(c)-\frac{2\mu}{4!} B^{iv}(c)=0 \\
\mu^2 B_{c,6}(c)-2\mu\Phi_{c,5}(c)-\mu\ C_{c,4}(c)+D_{c,2}(c)=0 \Leftrightarrow \frac{\mu^2}{6!} B^{vi}(c) -\frac{2\mu}{5!}\Phi^{v}(c)-\frac{\mu}{4!} C^{iv}(c)+\frac{1}{2} D''(c)=0
\end{array}\right.
$$

$\overline{s} = s - 3$

$$\Phi_{c,3}\ \overline{S}\,' = B_{c,3}\ \overline{S}^{\,2} + [\, C_{c,3} - 2\mu\, B_{c,5}\,]\ \overline{S} + [\, \mu^2 B_{c,7}-2\mu\Phi_{c,6}-\mu\ C_{c,5}+D_{c,3}]$$

Por último

$$\text{Si}\quad\left\{\begin{array}{rcl} \Phi_{c,3}(c)=0 & \Leftrightarrow & \Phi'''(c)=0 \\ B_{c,3}(c)=0 & \Leftrightarrow & B'''(c)=0 \\ C_{c,3}(c)\ -\ 2\mu\ B_{c,5}(c)=0 & \Leftrightarrow & \frac{1}{3!}\,C'''(c)\ -\frac{2\mu}{5!}\,B^{v}(c)=0 \\ \mu^2B_{c,7}(c)-2\mu\Phi_{c,6}(c)-\mu\ C_{c,5}(c)+D_{c,3}(c)\ =0 & \Leftrightarrow & \frac{\mu^2}{7!}\,B^{vii}(c)\ -\frac{2\mu}{6!}\,\Phi^{vi}(c)-\frac{\mu}{5!}\,C^{v}(c)+\frac{1}{3!}D'''(c)=0 \end{array}\right.$$

$$\Phi_{c,4}\ \overline{S}\,'= B_{c,4}\ \overline{S}^{\,2} + [\,C_{c,4} - 2\mu\, B_{c,6}\,]\ \overline{S} + [\,\mu^2B_{c,8}-2\mu\Phi_{c,7}-\mu\, C_{c,6}+D_{c,4}]$$

$\overline{s} = s-4.$

$\square$

2.3. Ejemplos

En este apartado describiremos las ecuaciones que cumple $\overline{u} = u^{(1)} + \mu\delta_c'$, siendo $u^{(1)}$ el funcional asociado de orden uno a los polinomios clásicos , así como las ecuaciones de Riccati que satisfacen las correspondientes funciones de Stieltjes $\overline{S}(z)= S(\overline{u})(z)$.

Como todo funcional lineal de Laguerre-Hahn , $u^{(1)}$ cumple una ecuación del tipo (1.2.) Cap.II. y $S(u^{(1)})(z)$ una ecuación de Riccati del tipo (1.1.)Cap.II.Los polinomios Φ , Ψ , B , C y D los tomaremos de la Tabla .2.Cap.II.

2.3.1 Polinomios de Hermite.

Sea $u^{(1)}$ el funcional correspondiente a los asociados de orden uno de los polinomios de Hermite.Sea $\overline{u} = u^{(1)} + \mu\delta_c'$ .Tenemos que $\Phi = 1$; $\Psi=2x$; $B=-1$;$C=-2x$; $D=-2$.

$B(c)=-1\neq 0$, $\overline{u}$ cumple la ecuación

$$D[(x-c)^4\overline{u}] + 2(x-c)^2[(x-c)^2x-\mu-2(x-c)]\overline{u} - (x-c)^4(x^{-1}\overline{u}^2)=0$$

El orden $\overline{s}$, de la clase de $\overline{u}$ es $\overline{s} = 4$, cumpliendo $\overline{S}(z)$ la ecuación

$$(z-c)^4\,\overline{S}' = -(z-c)^4\overline{S}^2+2(z-c)^2[-z(z-c)^2+\mu]\overline{S} + [-\mu^2-2\mu(z-c)+2z(z-c)^2-2(z-c)^4]$$

2.3.2. Polinomios de Laguerre.

Sea $u^{(1)}$ el funcional correspondiente a los asociados de orden uno de los polinomios de Laguerre.Sea $\overline{u} = u^{(1)} + \mu\delta_c'$.

$\Phi=x$; $\Psi=x-\alpha-3$; $B=-\alpha-1$;$C=-x+\alpha+2$; $D=-1$.

$B(c)=-(\alpha+1)\neq 0$ $\overline{u}$ cumple la ecuación

$$D[x(x-c)^4\,\overline{u}] + (x-c)^2[(x-\alpha-3)(x-c)^2-2\mu(\alpha+1)-4x(x-c)]\,\overline{u} - (\alpha+1)(x-c)^4(x^{-1}\,\overline{u}^{(2)})=0$$

El orden $\overline{s}$, de la clase de $\overline{u}$ es $\overline{s} = 4$, cumpliendo $\overline{S}(z)$ la ecuación

$$z(z-c)^4\overline{S}(z)'=-(\alpha+1)(z-c)^4\overline{S}(z)^2+(z-c)^2[+2\mu(\alpha+1)+(-z+\alpha+2)(z-c)^2]\,\overline{S}(z)+$$

$$+[-2\mu z(z-c)-\mu^2(\alpha+1)-\mu(z-c)^2(-z+\alpha+2)-(z-c)^4]$$

2.3.3. Polinomios de Jacobi.

Sea $u^{(1)}$ el funcional correspondiente a los asociados de orden uno de los polinbmios de Jacobi.Sea $\overline{u} = u^{(1)} + \mu\delta_c'$.

$$\Phi(x)=x^2-1 \quad ; \quad \Psi(x)= -(\alpha+\beta+4)\, x+ \frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta+2)} \quad ; \ B(x)=\frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}$$

$$C(x)= (\alpha+\beta+2)x- \frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta+2)} \quad ; \ D(x) = (\alpha+\beta+3)$$

$B(c)\neq0$ ($\alpha+\beta=-1$ conduce al caso semiclásico) , $\overline{s}=4$, cumpliendo $\overline{S}$ y $\overline{u}$,respectivamente,

$$(z-c)^4(z^2-1)\, \overline{S}\,' = (z-c)^4 \frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}\, \overline{S}^{\,2} +(z-c)^2\Big[-2\mu \frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2} +$$
$$+(z-c)^2[(\alpha+\beta+2)z- \frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta+2)}]\Big]\, \overline{S} + \Big[-2\mu(z^2-1)(z-c)+\mu^2 \frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2} -$$
$$-\mu(z-c)^2[(\alpha+\beta+2)z- \frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta+2)}]+(z-c)^4(\alpha+\beta+3) \Big]$$

$$D\Big[(x-c)^4(x^2-1)\, \overline{u}\Big] + (x-c)^2 \Big[[-(\alpha+\beta+4)\, x+ \frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta+2)}](x-c)^2+ 2\mu\frac{(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2} -$$
$$-4(x-c)(x^2-1)\Big]\, \overline{u} + +4(x-c)^4 \frac{(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2} (x^{-1}\overline{u}^{\,2})=0$$

2.3.4. Polinomios de Bessel

Sea $u^{(1)}$ el funcional correspondiente a los asociados de orden uno de los polinomios de Bessel.Sea $\overline{u} = u^{(1)} + \mu\delta_c'$.

$$\Phi=x^2 \ ; \ \Psi=-2[(\alpha+1)x+1-\alpha^{-1}] \ ; \quad B=\frac{-(2\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)} \ ; \quad C=2(\alpha x+1-\alpha^{-1}) \ ; \quad D=(2\alpha+1)$$

$B(c)\neq0$ ($\alpha=\frac{1}{2}$ conduce a semiclásico) , $\overline{s} = 4$, cumpliendo $\overline{S}$ y $\overline{u}$,respectivamente,

$$z^2(z-c)^4\,\overline{S}\,' = (z-c)^4\,\frac{-(2\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)}\,\overline{S}^{\,2} + (z-c)^2\left[-2\mu\,\frac{-(2\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)} + (z-c)^2\,2(\alpha x+1-\alpha^{-1})\right]\overline{S} +$$

$$+\left[-2\mu z^2(z-c)+\mu^2\,\frac{-(2\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)} - \mu\,(z-c)^2\,2(\alpha x+1-\alpha^{-1}) + (z-c)^4(2\alpha+1)\right]$$

$$D[x^2(x-c)^4\,\overline{u}\,] + (x-c)^2\left[-2(x-c)^2[(\alpha+1)x+1-\alpha^{-1}] + 2\mu\,\frac{-(2\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)} - 4x^2(x-c)\right]\overline{u} +$$

$$+(x-c)^4\,\frac{-(2\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)}\,(x^{-1}\,\overline{u}^{\,2})=0.$$

□

Nota: A diferencia del caso en que se añade una masa de Dirac al funcional correspondiente a los polinomios asociados de los clásicos , donde el nuevo funcional puede ser de clase dos o clase uno y que se ha visto en 1 del presente capítulo, al sumar la derivada de una masa de Dirac al mismo funcional, la nueva clase queda unívocamente determinada , s=4.

3.ESTUDIO DEL FUNCIONAL u CUMPLIENDOSE $(x-c)u = \mu v$, $\mu,c \in \mathbb{C}$, CON v DE LAGUERRE-HAHN.

3.1.Estudio del funcional u.Regularidad. ([7],[20],[50],[51])

Proposición 3.1.1.

Sea v un funcional lineal regular y sea $\{P_n\}_{n\geq 0}$ la S.P.O.M. correspondiente.Sean μ y $c \in \mathbb{C}$.

Para cada $\mu \neq \mu_n$, $\mu_n = \dfrac{-P_n(c)}{P^{(1)}_{n-1}(c)}$, $n\geq 1$ *y con el convenio* $\mu_0=0$ *,el funcional u tal que*

$$(x-c)u=\mu v \quad , \tag{3.1.}$$

es un funcional regular.

Nota: Si por $\{R_n\}_{n\geq 0}$ entendemos la S.P.O.M. correspondiente a u , esta sucesión es cuasi-ortogonal de orden uno respecto al funcional v , [$\langle v , R_m R_n \rangle =0$ si $m-n \geq 2$, $\langle v , R_{n-1}R_n \rangle \neq 0$, $n \geq 1$].

□

Teorema 3.1.1.

Sean u y v dos funcionales lineales regulares cumpliéndose (3.1.).Si v es de Laguerre-Hahn , u es de Laguerre-Hahn y viceversa.

DEMOSTRACION:

Sea v un funcional de Laguerre-Hahn cumpliendo la correspondiente función de Stieltjes la ecuación $\Phi S' = BS^2+CS+D$ (3.2.)

Sea $\overline{S}(z)=S(u)(z)$ la función de Stieltjes relativa al funcional u.

De $\mu(v)_n=\mu\langle v , x^n\rangle=(u)_{n+1} - c(u)_n$ tenemos que $S(z)=\frac{1}{\mu}[(z-c)\overline{S}(z)+1]$; sustituyendo en (3.2) obtenemos

$$\mu\Phi(z\text{-}c)\,\overline{S}\,' = B(z\text{-}c)^2\,\overline{S}^{\,2} + [-\mu\Phi + 2(z\text{-}c)B + \mu(z\text{-}c)C]\,\overline{S} + [\,B + \mu C + \mu^2 D] \qquad (3.3.)$$

de manera que u satisface la ecuación $D[\,\mu\,(x\text{-}c)\Phi u] + (x\text{-}c)\,[\mu\Psi\text{-}2B]\,u + (x\text{-}c)^2 B(x^{-1}u^2) = 0$

$$(\Psi = -\Phi'\text{-}C) \qquad (3.4.)$$

De la relación entre S y $\overline{S}$ obtenemos que si u es un funcional de Laguerre-Hahn, esto es,

tal que $\overline{S}$ verifica la ecuación $\overline{\phi}\ \overline{S}\,' = \overline{B}\ \overline{S}^{\,2} + \overline{C}\ \overline{S} + \overline{D}$, entonces $v = \frac{1}{\mu}(x\text{-}c)u$ es también un funcional de Laguerre-Hahn , de manera que su función de Stieltjes satisface:

$$\mu\,\overline{\phi}\,(z\text{-}c)\,S' = \mu^2\,\overline{B}\,S^2 + [\,-2\mu\,\overline{B} + \mu(z\text{-}c)\,\overline{C} + \mu\,\overline{\phi}\,]\,S + [-\,\overline{\Phi} + \overline{B} - (z\text{-}c)\,\overline{C} + (z\text{-}c)^2\,\overline{D}\,] \qquad (3.5.)$$

de donde se sigue la ecuación funcional satisfecha por v:

$$D[\mu\,\overline{\Phi}\,(x\text{-}c)v] + \mu\,[2\,\overline{B} + \overline{\Psi}\,(x\text{-}c)\,]v + \mu^2\,\overline{B}\,(x^{-1}v^2) = 0 \quad ; \quad \overline{\Psi} = -(\,\overline{\Phi}\,' + \overline{C}\,) \qquad (3.6.)$$

<u>**3.2.Determinación del orden de la clase.**</u>

<u>**Proposición 3.2.1.**</u>

Sea v un funcional de Laguerre-Hahn de clase "s" y sea (x-c) u =μv. Entonces u es un funcional de Laguerre-Hahn de clase $\overline{s}$ *cumpliéndose* $s-1 \le \overline{s} \le s+2$.

DEMOSTRACION;

Sean Φ,Ψ y B como en Corolario 2.1.1. Cap.II y sea $D[\Phi^*u] + \Psi^*u + B^*(x^{-1}u^2) = 0$ la ecuación que cumple u donde $\Phi^* = \mu(x\text{-}c)\Phi$; $\Psi^* = (x\text{-}c)(\mu\Psi\text{-}2B)$ y $B^* = (x\text{-}c)^2 B$ según nos indica la ecuación (3.4.).

grado de $\Phi^* = t^* \le s+3$; grado de $\Psi^* = p^* \le s+3$; grado de $B^* = r^* \le s+4$

de donde $d^* = \text{máx}(t^*, r^*) \le s+4$ y $\overline{s} = \text{máx}\,(p^*\text{-}1, d^*\text{-}2) \le s+2$.

Por otra parte, si u es funcional de Laguerre-Hahn de clase $\overline{s}$ satisfaciendo

$D[\,\overline{\Phi}\,u\,]\ \overline{\Psi}\,u + \overline{B}\,(x^{-1}u^2) = 0 \quad ; \quad \overline{\Psi} = -(\,\overline{\Phi}\,' + \overline{C}\,),$ v cumple la ecuación

$D[\Phi\ u]+\Psi\ u+B\ (x^{-1}u^2)=0$,

siendo $\Phi=\mu(x-c)\ \overline{\Phi}$; $\Psi=\mu[2\ \overline{B}\ +\ \overline{\Psi}\ (x-c)]$ y $B=\mu^2\ \overline{B}$ según (3.6.).

grado de $\Phi=t\leq\overline{s}+3$; grado de $\Psi=p\leq\overline{s}+2$; grado de $B=r\leq\overline{s}+2$

de donde $d=\max(t,r)\leq s+3$ y $s=\max(p-1,d-2)\leq\overline{s}+1$.

□

Proposición 3.2.2.

Sea u un funcional de Laguerre-Hahn cumpliendo la ecuación (3.4.).Para cada raíz "a" de $\Phi^*=\mu(x-c)\Phi$ distinta de "c" , la ecuación (3.4.) es irreducible.

DEMOSTRACION:

Como v es funcional de Laguerre-Hahn de clase s , S(u)(z) cumple la ecuación (3.2.) siendo

los polinomios Φ , B ,C, D primos entre sí.Sean Φ^* y B^* como en la Proposición 3.2.1. ,

$C^*(z)=-\mu\Phi+2(z-c)B+\mu(z-c)C$ y $D^*(z)=B+\mu C+\mu^2 D$

i) Si $B(a)\neq0$, $B^*(a)\neq0$. Si $B(a)=0$ y $C(a)\neq0$, $C^*(a)\neq0$.

ii)Si $B(a)=C(a)=0$, $D^*(a)\neq0$ de donde $|B^*(a)|+|C^*(a)|+|D^*(a)|\neq0$.

Proposición. 3.2.3.

Sea $(x-c)u=\mu v$, y sean $\overline{s}$ y s las clases de u y v , respectivamente. Se tiene que:

$$\Phi(c)\neq0\ \Rightarrow\ \overline{s}=s+2$$

$$\Phi(c)=0\ \Rightarrow\begin{cases} B(c)+\mu C(c)+\mu^2 D(c)\neq0 & \Rightarrow\ \overline{s}=s+2\\ B(c)+\mu C(c)+\mu^2 D(c)=0 & \Rightarrow[1]\end{cases}$$

$$[1] \Rightarrow \begin{cases} -\mu\Phi'(c)+2B(c)+\mu C(c)\neq 0 \Rightarrow \overline{s} = s+1 \\ -\mu\Phi'(c)+2B(c)+\mu C(c)=0 \Rightarrow \begin{cases} B'(c)+\mu C'(c)+\mu^2 D'(c)\neq 0 \Rightarrow \overline{s} = s+1 \\ B'(c)+\mu C'(c)+\mu^2 D'(c)=0 \Rightarrow [2] \end{cases} \end{cases}$$

$$[2] \Rightarrow \begin{cases} \Phi'(c)\neq 0 \Rightarrow \overline{s} = s \\ \Phi'(c)=0 \Rightarrow \begin{cases} B(c)\neq 0 \Rightarrow \overline{s} = s \\ B(c)=0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{-\mu}{2}\Phi''(c) +2B'(c) +\mu\, C'(c)\neq 0 \Rightarrow \overline{s} = s \\ \frac{-\mu}{2}\Phi''(c) +2B'(c) +\mu\, C'(c)=0 \Rightarrow [3] \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$[3] \Rightarrow \begin{cases} B''(c)+\mu C''(c)+\mu^2 D''(c)\neq 0 \Rightarrow \overline{s} = s \\ B''(c)+\mu C''(c)+\mu^2 D''(c)=0 \Rightarrow \overline{s} = s-1 \end{cases}$$

siendo los polinomios ϕ, B, C y D los definidos en (3.2)

DEMOSTRACION:

Seguiremos la notación de la Proposición 1.2.3.

i) Si $\Phi(c)\neq 0$, $\overline{S}(z)=S(u)(z)$ cumple la ecuación (3.3.) $\Rightarrow \overline{s}=s+2$.

ii) Si $\Phi(c)=0$ y $B(c)+\mu C(c)+\mu^2 D(c)=0$ la ecuación anterior es divisible por (z-c)

$$\mu\Phi\,\overline{S}' = B(z-c)\,\overline{S}^2 + [-\mu\Phi_{c,1} +2B+\mu C]\,\overline{S} + [B_{c,1} +\mu C_{c,1} + \mu^2 D_{c,1}] \quad \Rightarrow \overline{s}=s+1.$$

iii) Si $-\mu\Phi_{c,1}(c)+2B(c)+\mu C(c)=0$ y $B_{c,1}(c)+\mu C_{c,1}(c)+\mu^2 D_{c,1}(c)=0 \Leftrightarrow$

$-\mu\Phi'(c)+2B(c)+\mu C(c)=0$ y $B'(c)+\mu C'(c)+\mu^2 D'(c)=0$, dividiendo por (z-c)

$$\mu\Phi_{c,1}\,\overline{S}' = B\,\overline{S}^2 + [-\mu\Phi_{c,2} +2B_{c,1}+\mu C_{c,1}]\,\overline{S} + [B_{c,2} +\mu C_{c,2} + \mu^2 D_{c,2}] \quad \Rightarrow \overline{s}=s$$

$$\text{iv) Si}\left\{\begin{array}{ll} & \Phi_{c,1}=0 \Rightarrow \Phi'(c)=0 \\ & B(c)=0 \\ -\mu\Phi_{c,2}+2B_{c,1}+\mu C_{c,1}=0 \Rightarrow & \frac{-\mu}{2}\Phi''(c)+2B'(c)+\mu C'(c)=0 \\ B_{c,2}+\mu C_{c,2}+\mu^2 D_{c,2}=0 & \Rightarrow B''(c)+\mu C''(c)+\mu^2 D''(c)=0 \end{array}\right.$$

se puede volver a dividir por (z-c)

$$\mu\Phi_{c,2}\overline{S}'=B_{c,1}\overline{S}^2+[-\mu\Phi_{c,3}+2B_{c,2}+\mu C_{c,2}]\overline{S}+[B_{c,3}+\mu C_{c,3}+\mu^2 D_{c,3}] \Rightarrow \overline{s}=s-1.$$

□

3.3.Ejemplos.

Describiremos las ecuaciones que cumple u , tal que $(x-c)u=v$, donde v es el funcional asociado de orden uno a los polinomios clásicos, asi como las ecuaciones de Riccati que satisfacen las correspondientes funciones de Stieltjes $\overline{S}(z)=S(u)(z)$.

Como funcional de Laguerre-Hahn , v cumple una ecuación del tipo (1.2) Cap.II.Los polinomios Φ,Ψ,B,C y D se tomarán de la Tabla .2.Cap.II.

3.3.1.Polinomios de Hermite.

$\Phi=1$, $\Psi=2x$, $B=-1$, $C=2x$, $D=-2$.

$\Phi(c)=1\neq 0 \Rightarrow$ u cumple la ecuación:

$D[\mu(x-c)u]+2(x-c)(\mu x+1)u-(x-c)^2(x^{-1}u^2)=0$

El orden $\overline{s}$ de la clase de u es $\overline{s}=2$, cumpliendo $\overline{S}(z)$ la ecuación:

$\mu(z-c)\overline{S}'=-(z-c)^2\overline{S}^2-[\mu+2(z-c)(1+\mu z)]\overline{S}-[1+2\mu x+2\mu^2]$

3.3.2.Polinomios de Laguerre.

$\Phi=x$; $\Psi=x-\alpha-3$; $B=-\alpha-1$; $C=-x+\alpha+2$; $D=-1$.

i) Si $c\neq o$, $\Phi(c)\neq 0 \Rightarrow \overline{s}=2$ cumpliendo "u" y $\overline{S}(z)$ las ecuaciónes

$$D[\mu x(x-c)u] + (x-c)[\mu(x-\alpha-3)+2(\alpha+1)]\, u - (\alpha+1)(x-c)^2\ (x^{-1}u^2)=0$$

$$\mu z(z-c)\ \overline{S}' = -(\alpha+1)(z-c)^2\,\overline{S}^2 + [-\mu z-2(\alpha+1)(z-c)+\mu(z-c)(-z+\alpha+2)]\ \overline{S} + [-(\alpha+1)+\mu(-z+\alpha+2)-\mu^2]$$

ii) Si $c=0$ y $B(c)+\mu C(c)+\mu^2 D(c)=-(\alpha+1)+\mu(\alpha+2)-\mu^2 \neq 0 \Rightarrow \overline{s}=2$

$$D[\mu x^2 u] + x[\mu(x-\alpha-3)+2(\alpha+1)]\, u - (\alpha+1)\, x^2\ (x^{-1}u^2)=0$$

$$\mu z^2\ \overline{S}' = -(\alpha+1)\, z^2\,\overline{S}^2 + [-\mu z-2(\alpha+1)\, z+\mu\, z\,(-z+\alpha+2)]\ \overline{S} + [-(\alpha+1)+\mu(-z+\alpha+2)-\mu^2]$$

iii) Si $c=0$, $B(c)+\mu C(c)+\mu^2 D(c)=-(\alpha+1)+\mu(\alpha+2)-\mu^2=0$

y $-\mu\Phi'(c)+2B(c)+\mu C(c)=-\mu-2(\alpha+1)+\mu(\alpha+2)\neq 0 \Rightarrow \overline{s}=1$

$$D[\mu xu] + [2(\alpha+1)-\mu(-x+\alpha+2)]u-(\alpha+1)\, x\,(x^{-1}u^2)=0$$

$$\mu z\ \overline{S}' = -(\alpha+1)\, z\ \overline{S}^2 + [-\mu-2(\alpha+1)+\mu(-z+\alpha+2)]\ \overline{S} - \mu$$

iv) Si $c=0$, $B(c)+\mu C(c)+\mu^2 D(c)=-(\alpha+1)+\mu(\alpha+2)-\mu^2=0$

$-\mu\Phi'(c)+2B(c)+\mu C(c)=-\mu-2(\alpha+1)+\mu(\alpha+2)=0$, $B'(c)+\mu C'(c)+\mu^2 D'(c)=-\mu\neq 0 \Rightarrow \overline{s}=1$

($\mu=0$ está excluido por regularidad) , u y $\overline{S}(z)$ cumplen las ecuaciones

$$D[\mu xu] + \mu(x-1)u-(\alpha+1)\, x\,(x^{-1}u^2)=0$$

$$\mu z\ \overline{S}' = -(\alpha+1)\, z\ \overline{S}^2 - \mu z\ \overline{S} - \mu$$

3.3.3.Polinomios de Jacobi.

$$\Phi(x)=x^2-1 \quad ; \quad \Psi(x)= -(\alpha+\beta+4)\ x+ \frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta+2)} \quad ; \ B(x)=\frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}$$

$$C(x)= (\alpha+\beta+2)x- \frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta+2)} \quad ; \ D(x) = (\alpha+\beta+3)$$

i)Si $c\neq\pm1 \quad \Phi(c)=c^2-1\neq0 \quad \Rightarrow \quad \overline{s}=2$

$$D[\ \mu(x-c)(x^2-1)u\ ] + (x-c)\Big[\ \mu\ [-(\alpha+\beta+4)\ x+ \frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta+2)}\ ]-2\frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}\ \Big] +$$

$$+(x-c)^2\ \frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}\ (x^{-1}u^2)=0$$

$$\mu(z-c)(z^2-1)\ \overline{S}\ '= (z-c)^2\ \frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}\ \overline{S}^{\,2} +\Big[\ -\mu(z^2-1)+2(z-c)\frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2} +$$

$$+\mu(z-c)[(\alpha+\beta+2)z- \frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta+2)}]\Big]\ \overline{S}\ +\ \Big[\frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}\ +\mu[(\alpha+\beta+2)z- \frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta+2)}]+\mu^2(\alpha+\beta+3)\Big]$$

ii)Si $c=\pm1$ y $B(c)+\mu C(c)+\mu^2D(c)= \dfrac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}\ +\mu\ [\ (\alpha+\beta+2)(\pm1)- \dfrac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta+2)}\ \ ] +$

$+\mu^2\ (\alpha+\beta+3)\ \neq0 \quad \Rightarrow \quad \overline{s}=2.$

$$D[\mu(x-(\pm1))(x^2-1)u] - \Big\{2(x-(\pm1))\ \frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}\ +\mu\ (x-(\pm1))\ [(a+b+4)x- \frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta+2)}\ ]\Big\}u+$$

$$+(x-(\pm1))^2\ \frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}\ (x^{-1}u^2)=0$$

$$\mu(z-(\pm1))(x^2-1)\ \overline{S}\ '=(z-(\pm1))^2\frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}\overline{S}^{\,2}+\Big\{-\mu(z^2-1)+2\ (z-(\pm1))\ \frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}+$$

$$+\mu(z-(\pm 1))[\,(\alpha+\beta+2)z-\frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta+2)}\,]\Big\}\overline{S}+\Big\{\frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}+\mu[\,(\alpha+\beta+2)z-\frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta+2)}\,]+$$
$$+\mu^2\,(\alpha+\beta+3)\Big\}$$

iii) Si $c=\pm 1$, $B(c)+\mu C(c)+\mu^2 D(c)=0$ y $-\mu\Phi'(c)+2B(c)+\mu C(c)=-2\mu(\pm 1)+$

$$+\frac{8(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}+\mu[\,(\alpha+\beta+2)(\pm 1)-\frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta+2)}\,]\neq 0 \;\Rightarrow\; \overline{s}=1.$$

$$D[\mu\,\cancel{(x^2-1)u}]+\Big\{\frac{-8(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}+\mu\,[-(\alpha+\beta-3)x+\frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta+2)}\pm 1\,]\Big\}u+$$

$$+(x-(\pm 1))\frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}\,(x^{-1}u^2)=0$$

$$\mu\,(x^2-1)\,\overline{S}\,'=(z-(\pm 1))\,\frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}\,\overline{S}^{\,2}+\Big\{-\mu(z+(\pm 1))+\frac{8(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}+$$
$$+\mu[\,(\alpha+\beta+2)z-\frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta+2)}\,]\Big\}\,\overline{S}+\mu(\alpha+\beta+2)$$

iv) Si $c=\pm 1$, $B(c)+\mu C(c)+\mu^2 D(c)=0$, $-\mu\Phi'(c)+2B(c)+\mu C(c)=0$,

$B'(c)+\mu C'(c)+\mu^2 D'(c)=\mu(\alpha+\beta+2)\neq 0 \;\Rightarrow\; \overline{s}=1.$

$$D[\mu\,(x^2-1)u]-\mu\,[2x+(\alpha+\beta+1)(x-(\pm 1)]\,u+(x-(\pm 1))\,\frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}\,(x^{-1}u^2)=0$$

$$\mu\,(x^2-1)\,\overline{S}\,'=(z-(\pm 1))\,\frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}\,\overline{S}^{\,2}+\mu\,(\alpha+\beta+1)(z-(\pm 1)\,\overline{S}+\mu(\alpha+\beta+2)$$

3.3.4. Polinomios de Bessel.

$\Phi=x^2$, $\Psi=-2[(\alpha+1)x+1-\alpha^1]$; $B=\dfrac{-2(\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)}$; $C=2(\alpha x+1-\alpha^{-1})$; $D=(2\alpha+1)$

i) Si $c\neq 0$, $\Phi(c)\neq 0$ $\Rightarrow$ $\overline{s}=2$, cumpliendo u y $\overline{S}(z)$ respectivamente

$$D[\mu x^2(x-c)u]-2(x-c)\left\{\frac{2(\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)}+\mu\,[(\alpha+1)x+1-\alpha^1]\right\}u-(x-c)^2\frac{2(\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)}(x^{-1}u^2)=0$$

$$\mu z^2(z-x)\overline{S}\,'=-(z-c)^2\frac{2(\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)}\overline{S}^2+[-\mu z^2-2(z-c)\frac{2(\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)}+2\mu(z-c)(\alpha z+1-\alpha^{-1})\ \overline{S}+$$

$$+\left[\frac{-2(\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)}+2\mu(\alpha x+1-\alpha^{-1})+\mu^2(2\alpha+1)\right]$$

ii) Si $c=0$ y $B(c)+\mu C(c)+\mu^2D(c)=\frac{-2(\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)}+2\mu(1-\alpha^{-1})+\mu^2(2\alpha+1)\neq 0$ $\Rightarrow$ $\overline{s}=2$

$$D[\mu x^3u]-2x\left\{\frac{2(\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)}+\mu\,[(\alpha+1)x+1-\alpha^1]\right\}u-x^2\frac{2(\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)}(x^{-1}u^2)=0$$

$$\mu z^3\overline{S}\,'=-z^2\frac{2(\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)}\overline{S}^2+[-\mu z^2-2\,z\frac{2(\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)}+2\mu z(\alpha z+1-\alpha^{-1})]\ \overline{S}+$$

$$+\left[\frac{-2(\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)}+2\mu(\alpha z+1-\alpha^{-1})+\mu^2(2\alpha+1)\right]$$

iii) Si $c=0$, $B(c)+\mu C(c)+\mu^2D(c)=0$ y $-\mu\Phi'(c)+2B(c)+\mu C(c)=-2\frac{2(\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)}+2\mu(1-\alpha^{-1})\neq 0$ $\Rightarrow$ $\overline{s}=1$

$$D[\mu x^2u]-\left\{\frac{-4(\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)}+\mu[(2\alpha+1)x+2-2\alpha^1]\right\}u-x\frac{2(\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)}(x^{-1}u^2)=0$$

$$\mu z^2\overline{S}\,'=-z\frac{2(\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)}\overline{S}^2+[-\mu z-2\frac{2(\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)}+2\mu(\alpha z+1-\alpha^{-1})]\ \overline{S}+2\mu\alpha$$

iv) Si $c=0$, $B(c)+\mu C(c)+\mu^2D(c)=0$, $-\mu\Phi'(c)+2B(c)+\mu C(c)=0$ $B'(c)+\mu C'(c)+\mu^2D'(c)=2\mu\alpha\neq 0$

$\Rightarrow$ $\overline{s}=1$

$$D[\mu x^2 u]-\left\{\mu x(2\alpha+1)\right\}u-x\ \frac{2(\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)}\ (x^{-1}u^2)=0$$

$$\mu z^2\,\overline{S}\,'=-z\ \frac{2(\alpha-1)}{\alpha^2(2\alpha+1)}\ \overline{S}\,^2+[\mu z\,(2\alpha+1)\,]\ \overline{S}+2\mu\alpha$$

CAPITULO IV.

FUNCIONALES LINEALES DE SEGUNDO GRADO.

1.FUNCIONALES LINEALES DE SEGUNDO GRADO.

Tanto el funcional lineal correspondiente a los polinomios de Tchebychev de primera especie $P_n^{(-1/2,-1/2)}$, como el funcional lineal correspondiente a los polinomios de Tchebychev de segunda especie $P_n^{(1/2,1/2)}$, satisfacen una ecuación cuadrática, por lo que se les denomina funcionales de segundo grado.Otros funcionales , por ejemplo los relativos a los polinomios $P_n^{(-1/2,1/2)}$ y $P_n^{(1/2,-1/2)}$ poseen esta propiedad.

En este Capítulo definimos y caracterizamos los funcionales de segundo grado, demostrando que para las operaciones más usuales entre ellos,dicha familia de funcionales es estable.

Por otra parte, veremos que todo funcional de segundo grado es semiclásico , mostrando así mismo bajo qué condiciones un funcional semiclásico es de segundo grado.En particular estudiamos los polinomios clásicos, poniendo de manifiesto la imposibilidad de que sean de segundo grado en los casos de Hermite, Laguerre y Bessel , y dando una condición necesaria , en función de α, β , para que los polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}$ puedan corresponder a funcionales de segundo grado.Los casos $\alpha=\beta=-1/2$,$\alpha=\beta=1/2$, $\alpha=-\beta=1/2$ y $\alpha=-\beta=-1/2$, están detallados.

Un funcional de segundo grado (con una cierta restricción , ver Proposición 1.1.8.) es de Laguerre-Hahn.En este Capítulo también estudiamos cuándo un funcional lineal de Laguerre-Hahn es de segundo grado y por tanto semiclásico.Los asociados de orden uno a los polinomios clásicos , en general, son de Laguerre-Hahn , cumpliendo las correspondientes funciones de Stieltjes las ecuaciones dadas por la Tabla 2. , Cap.II.Para los polinomios de Bessel $B_n^{(\alpha)}$, si $\alpha=1/2$, el correspondiente coeficiente polinómico B(z) que aparece en la ecuación (1.1.) , Cap.II.,se anula ,satisfaciendo la función de Stieltjes una ecuación diferencial lineal y siendo estos polinomios, por tanto, semiclásicos.Igual razonamiento para los polinomios $P_n^{(-1/2,-1/2)}$, (ver [51] , pág.41.).Pero también pueden aparecer asociados de orden uno que son semiclásicos , sin que el polinomio B(z) se anule , por ejemplo $(P_n^{(1/2,1/2)})^{(1)}=P_n^{(1/2,1/2)}$ .La justificación de estos casos es que son polinomios correspondientes a funcionales de segundo grado.

Las ecuaciones (3.3.) del presente Capítulo dan unas condiciones necesarias y suficientes para que un funcional de Laguerre-Hahn sea ,a su vez, de segundo grado y por tanto semiclásico.Unos ejemplos relativos a modificaciones de los polinomios de Tchebychev , completan el Capítulo.

1.1. Definiciones, caracterizaciones y equivalencias.([5],[6],[51],[54],[56].)

Definición 1.1.1.

Un funcional lineal regular u se denomina de segundo grado si la función de Stieltjes correspondiente verifica una ecuación algebraica de segundo grado del tipo

$$b(z)S^2(u)(z)+c(z)S(u)(z)+d(z)=0$$

siendo b(z),c(z) y d(z) polinomios con coeficientes complejos cumpliendo

$$b(z)\neq 0 \quad , \quad c^2(z) - 4b(z)d(z)\neq 0 \quad y \quad d(z) = (u\theta_0 c)(z) - (u^2\theta_0^2 b)(z) \tag{1.1.}$$

□

Definición 1.1.2.

Un funcional lineal regular "u" se denomina de segundo grado si verifica la ecuación

$$b(z)u^2 - zc(z)u=0 \qquad \text{cumpliéndose } \langle u^2 \, , \, \theta_0 b(z)\rangle = \langle u \, , c(z)\rangle \tag{1.2.}$$

siendo b(z) y c(z) los mismos polinomios que en la Definición 1.1.1.

□

Proposición 1.1.1.

Las Definiciones 1.1.1. y 1.1.2. son equivalentes

DEMOSTRACION:

i) 1.1.1. $\Rightarrow$ 1.1.2.

Partiendo de la ecuación $b(z)S^2(u)(z)+c(z)S(u)(z)+d(z)=0$ y aplicando el Lema 3.1.1.Cap. I.

$b(z)(1/z^2)F(u^2)(1/z)-c(z)(1/z)F(u)(1/z)+d(z)=0$

$(1/z^2)F(bu^2)(1/z)+(1/z)(u^2\theta_0 b)(z)-(1/z)F(cu)(1/z)-(u\theta_0 z)(z)+d(z)=0$

$(1/z)F[z^{-1}(bu^2)](1/z)-(1/z)F(cu)(1/z)+(1/z)F(<u^2,\theta_0 b>\delta)+(u^2\theta_0^2 b)(z)-(u\theta_0 c)(z)+d(z)=0$

$(1/z)F[z^{-1}(bu^2)-cu+<u^2,\theta_0 b>\delta](1/z)+[(u^2\theta_0^2 b)-(u\theta_0 c)+d](z)=0$

de donde $z^{-1}(bu^2)-cu+<u^2,\theta_0 b>\delta=0$ (1.3.)

y $d(z)=-[(u^2\theta_0^2 b)-(u\theta_0 c)](z)$.

Multiplicando (1.3.) por z tenemos $b(z)u^2-zc(z)u=0$ y

de $<z^{-1}(bu^2)-cu+<u^2,\theta_0 b>\delta\ ,\ 1>=0$ concluímos que $<u^2,\theta_0 b>=<u,c>$.

ii) 1.1.2. $\Rightarrow$ 1.1.1.

Multiplicando $b(z)u^2-zc(z)u=0$ por z^{-1} tenemos $z^{-1}b(z)u^2-c(z)u+<c(z)u\ ,\ 1>\delta=0$

Aplicando el Lema 1.2.1. Cap. I. y usando la condición $<u^2,\theta_0 b(z)>=<u,c(z)>$ obtenemos

$b(z)(z^{-1}u^2)-c(z)u=0$, o, equivalentemente,

$S[b(z)(z^{-1}u^2)]-S[c(z)u]=0$ teniendo en cuenta el Lema 3.1.1.Cap. I.

$b(z)S(z^{-1}u^2)(z)+(z^{-1}u^2\theta_0 b)(z)-c(z)S(u)(z)-(u\theta_0 c)(z)=0$

$\frac{1}{z}b(z)S(u^2)(z)+(u^2\theta_0^2 b)(z)-c(z)S(u)(z)-(u\theta_0 c)(z)=0$

$-b(z)S^2(u)(z)+(u^2\theta_0^2 b)(z)-c(z)S(u)(z)-(u\theta_0 c)(z)=0$ de donde

$b(z)S^2(u)(z)+c(z)S(u)(z)+d(z)=0$, $d(z)=(u\theta_0 c)(z)-(u^2\theta_0^2 b)(z)$.

$\square$

Proposición 1.1.2.[51]

Las ecuaciones (1.2.) son equivalentes a

$$b(x)u + x^2 d(x)u^{-1} = 0$$

$$c(x) = (u\theta_0 b)(x) + (u^{-1}xd)(x) \qquad (1.4.)$$

siendo d(x) el polinomio definido en (1.1.)

DEMOSTRACION:

Sea $S(u)(z)$ la función de Stieltjes correspondiente al funcional u cumpliendo (1.1.) y sea $S^*(z)$ la segunda solución de (1.1.), que ,generalmente ,no es una función de Stieltjes .

$$S(u)(z)+S^*(z) = -\frac{c(z)}{b(z)} \quad \text{y} \quad S(u)(z)S^*(z) = \frac{d(z)}{b(z)}$$

$S(u^{-1})(z)S(u)(z)S^*(z) = \dfrac{d(z)}{b(z)} S(u^{-1})(z)$, recordando el Lema 3.1.1.Cap. I. y que $S(\delta)(z) = -\dfrac{1}{z}$

$$S^*(z) = z^2 \frac{d(z)}{b(z)} S(u^{-1})(z) \quad \text{y} \quad -\frac{c(z)}{b(z)} - S(u)(z) = z^2 \frac{d(z)}{b(z)} S(u^{-1})(z)$$

usando nuevamente el Lema 3.1.1. Cap. I.

$$-c(z) - S(bu)(z) + (u\theta_0 b)(z) = S(z^2 du^{-1})(z) - [u^{-1}\theta_0(z^2 d)](z)$$

de donde $b(z)u + z^2 d(z)u^{-1} = 0$ y $c(z) = (u\theta_0 b)(z) + [u^{-1}\theta_0(z^2 d)](z)$

□

Proposición 1.1.3.

Sea u un funcional de segundo grado.El funcional $u^{(k+1)}$ asociado de orden (k+1) es ,también , un funcional de segundo grado.

DEMOSTRACION:

Si u es de segundo grado la función de Stieltjes correspondiente cumple la ecuación

$b(z)S^2(u)(z)+c(z)S(u)(z)+d(z)=0$

Usando la relación entre S y $S_{k+1}=S(u^{(k+1)})(z)$ dada por (4.12.)Cap.I. obtenemos que S_{k+1} cumple la ecuación $b(k+1,z)S^2_{k+1}+c(k+1,z)S_{k+1}+d(k+1,z)=0$ siendo

$b(k+1,z)=(bN^2-cNQ+dQ^2)(z)$; $c(k+1,z)=(2MNb-MQc-NPc+2PQd)(z)$;

$d(k+1,z)=(bM^2-MPc+dP^2)(z)$

$M(z)=P^{(1)}_k(z)$; $N(z)=\gamma_{k+1}P^{(1)}_{k-1}(z)$; $P(z)=P_{k+1}(z)$; $Q(z)=\gamma_{k+1}P_k(z)$

$b(z)=b(0,z)$, $c(z)=c(0,z)$, $d(z)=d(0,z)$.

En particular para k=0 , (asociados de orden uno)

$b(1,z)=\gamma_1^2 d(z)$; $c(1,z)=[-\gamma_1 c+2\gamma_1(z-\beta_0)d](z)$; $d(1,z)=[b-(z-\beta_0)c+(z-\beta_0)^2 d](z)$

□

Proposición 1.1.4.

Sea u un funcional lineal regular y sea $u^{(k+1)}$ el funcional asociado de orden (k+1).Si $u^{(k+1)}$ es de segundo grado , u también es de segundo grado.

DEMOSTRACION:

De forma análoga a la demostración de la Proposición 1.1.3. ,se obtiene que si S_{k+1} cumple la ecuación $b(z)S^2_{k+1}+c(z)S_{k+1}+d(z)=0$, S cumple $b^*(z)S^2(u)(z)+c^*(z)S(u)(z)+d^*(z)=0$

siendo $b^*(z)=(bM^2-c\gamma_{k+1}MP+d\gamma^2_{k+1}P^2)(z)$; $c^*(z)=(2MNb-\gamma_{k+1}MQc-\gamma_{k+1}NPc+2\gamma^2_{k+1}PQd)(z)$

$d^*(z)=(bN^2-c\gamma_{k+1}NQ+d\gamma^2_{k+1}Q^2)(z)$; $M(z)=P_{k+1}(z)$;

$N(z)=P^{(1)}_k(z)$; $P(z)=P_k(z)$; $Q(z)=P^{(1)}_{k-1}(z)$

En particular ,si k=0

$b^*(z)=(b(x-\beta_0)^2-c\gamma_1(x-\beta_0)+d\gamma_1^2)(z)$; $c^*(z)=(2(x-\beta_0)b-c\gamma_1)(z)$; $d^*(z)=b(z)$. □

Proposición 1.1.5. ([54])

Sea u un funcional lineal regular ; u es de segundo grado si y sólo si existen polinomios $b(n,x)$, $n\geq 0$, tal que $b(x)u=b^*(n+1,x)\, u^{(n+1)}$ $n\geq 0$, donde

$$b^*(n+1,x)=\prod_{j=0}^{n} \gamma_{j+1}^{-1}\, b(n+1,x) \qquad ,(b(x)=b(0,x)) . \qquad (1.5.)$$

DEMOSTRACION.

i) Si u es de segundo grado cumple (1.5.)

En efecto ,sabemos que $\gamma_1 u^{(1)} = -x^2u^{-1}$, $[(u^{(1)})_0=1]$ .Sustituyendo en (1.4.).

y usando la Proposición 1.1.3. tenemos

$$b(x)u= \gamma_1 d(x)u^{(1)}=\gamma_1^{-1} b(1,x)\, u^{(1)}$$

Utilizaremos inducción. Supongamos que se cumple

$$b(x)u= \prod_{j=0}^{n-1} \gamma_{j+1}^{-1}\, b(n,x)\, u^{(n)} \qquad , n\geq 1$$

como $b(n,x)\, u^{(n)} = \gamma_{n+1}^{-1}\, b(n+1,x)\, u^{(n+1)}$, $n\geq 0$

$$b(x)\, u= \prod_{j=0}^{n} \gamma_{j+1}^{-1}\, b(n+1,x)\, u^{(n+1)} =b^*(n+1,x)\, u^{(n+1)} \quad , \quad n\geq 0 .$$

ii) Si u cumple (1.5.) , u es de segundo grado.

De la relación (1.5.) se sigue que

$S[b(z)u](z)=S[b^*(n+1,z)u^{(n+1)}](z)$ .Aplicando el Lema 3.1.1. Cap. I.

$$b(z)S(u)(z)+[u\theta_0 b(\varepsilon)](z) = b^*(n+1,z)S(u^{(n+1)})(z) + [u^{(n+1)}\theta_0 b^*(n+1,\varepsilon)](z) \qquad n\geq 0 .$$

Usando la ecuación (4.12.) Cap.I., deducimos

$$\gamma_{n+1}\{b(z)S(u)(z)+[u\theta_0 b(\varepsilon)]\,(z)\} = -b^*(n+1,z)\,\frac{P_n^{(1)}(z)+P_{n+1}(z)S(u)(z)}{P_{n-1}^{(1)}(z)+P_n(z)S(u)(z)} + [u^{(n+1)}\theta_0 b^*(n+1,\varepsilon)](z)$$

de donde se obtiene que S(u)(z) cumple una ecuación del tipo (1.1.)

□

Con objeto de obtener una nueva caracterización de los funcionales de segundo grado necesitamos el siguiente resultado previo.

<u>Proposición 1.1.6.([54])</u>

Sea $\{P_n\}_{n\geq 0}$ una S.P.O.M. con respecto a u ($(u)_0=1$) y $\{R_n\}_{n\geq 0}$ otra S.P.O.M. con respecto a v ($(v_0=1)$.Las dos siguientes afirmaciones son equivalentes.

i) Existe un polinomio B(x) y un entero $s\geq 0$ tal que

$$BR_n=\sum_{j=n-s}^{n+r}\lambda_{n,j}P_j \quad , \quad n\geq 0 \quad , \quad \lambda_{n,n-s}\neq 0 \ , \ n\geq s \quad , \text{donde} \quad r=\text{grado } B(x) \tag{1.6.}$$

ii) Existen polinomios $B(x)\neq 0$ y $\Phi(x)\neq 0$ tal que $Bu=\Phi v$, con grado de $\Phi=s$

□

<u>Proposición 1.1.7.</u>

Sea $\{P_n\}_{n\geq 0}$ una S.P.O.M.

$\{P_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de segundo grado (el funcional lineal u correspondiente es de segundo grado) si y sólo si existen un polinomio B(x) y un entero $s\geq 0$, tal que:

$$BP_n^{(1)}=\sum_{j=n-s}^{n+r}\lambda_{n,j}P_j \quad , \quad n\geq 0 \tag{1.7}$$

DEMOSTRACION:

Según la Proposición 1.1.6. la ecuación (1.7.) equivale a $Bu=\Phi u^{(1)}$, con grado de Φ=s.Pero esta igualdad caracteriza a los funcionales de segundo grado según indica la Proposición 1.1.5.

□

Proposición 1.1.8.

Un funcional de segundo grado es de Laguerre-Hahn si se cumple la condición $2b(z)c'(z) - b'(z)c(z) \neq 0$, con $b(z)$, $c(z)$ y $d(z)$ los mismos polinomios que en (1.1.)

DEMOSTRACION:

Derivando (1.1.) obtenemos $b'(z)S^2(u)(z)+[2b(z)S(u)(z)+c(z)]S'(u)(z)+c'(z)S(u)(z)+d'(z)=0$

Multiplicando por $2b(z)S(u)(z)+c(z)$ y sustituyendo los valores

$$[2b(z)S(u)(z)+c(z)]^2 =c^2(z)-4b(z)d(z) \qquad y \quad S^2(u)(z) = -\frac{c(z)S(u)(z)+d(z)}{b(z)}$$

$$[c^2(z)-4b(z)d(z)]S'(u)(z)+[2b(z)c'(z)-b'(z)c(z)]S^2(u)(z)+[c(z)c'(z)+2b(z)d'(z)-2b'(z)d(z)]S(u)(z)+$$
$$+c(z)d'(z)= 0,$$

□

Proposición 1.1.9.

Sea "u" un funcional de segundo grado , sus momentos cumplen la ecuación en diferencias

$$\sum_{i=0}^{n+p}\left(\sum_{j=i}^{n+p} b_{j-n}(u)_{j-i}\right)(u)_i-\sum_{k=n}^{n+q} c_{k-n}(u)_k=0 \quad ; \quad n\geq 0 \quad , \quad [\, b_i=0 \quad , i<0\,]$$

y la condición $$\sum_{i=0}^{p-1}\left(\sum_{j=i}^{p-1} b_{j+1}(u)_{j-i}\right)(u)_i - \sum_{k=0}^{q} c_k(u)_k=0$$

siendo $b(x)=\sum_{i=0}^{p} b_i x^i \quad ; \quad c(x)=\sum_{i=0}^{q} c_i x^i$

DEMOSTRACION:

Directamente de la ecuación (1.2.)

□

1.2.Pares primitivos.

Trataremos el problema de la simplificación de las ecuaciones (1.1.) y (1.2.).Es claro que la ecuación (1.1.) sólo podrá ser simplificada si b(x) , c(x) y d(x) tienen raíces comunes.

Lema 1.2.1.([54])

Sea u un funcional de segundo grado cumpliendo

$$b_1(z)S^2(u)(z)+c_1(z)S(u)(z)+d_1(z)=0 \tag{1.8.}$$

$$b_2(z)S^2(u)(z)+c_2(z)S(u)(z)+d_2(z)=0 \tag{1.9.}$$

Notaremos con b(z) el m.c.d. de $b_1(z)$ y $b_2(z)$.Entonces , existen polinomios c(z) y d(z) tal que "u" cumple $b(z)S^2(u)(z)+c(z)S(u)(z)+d(z)=0.$

DEMOSTRACION:

De (1.8.) y (1.9.) obtenemos $(b_2c_1-b_1c_2)S(u)+b_2d_1-b_1d_2=0$

de donde $b_2c_1-b_1c_2=0$ y $b_2d_1-b_1d_2=0$. Si hacemos $b_1=bb^*_1$ y $b_2=bb^*_2$

$b^*_2c_1-b^*_1c_2=0$ y $b^*_2d_1-b^*_1d_2=0$, como b^*_1 y b^*_2 son primos entre sí

$c_1=cb^*_1$, $c_2=cb^*_2$, $d_1=db^*_1$ y $d_2=db^*_2$. □

Proposición 1.2.1.([54])

La ecuación (1.2.) se puede simplificar si y sólo si b(z) y c(z) tienen raíces comunes y ,se cumple que $<u\,,\theta_\alpha c> - <u^2\,,\theta_0\theta_\alpha b> = 0$ *para cualquier raíz "α" común a b(z) y c(z).*

DEMOSTRACION;

Sea $b(x)=(x-\alpha)b_\alpha(x)$, $c(x)=(x-\alpha)c_\alpha(x)$

$(\theta_0 c)(x)= c_\alpha(x)-\alpha(\theta_0 c_\alpha)(x)$, $(u^2\theta_0^2 b)(x)=(u^2\theta_0 b_\alpha)(x)-\alpha\,(u^2\theta_0^2 b_\alpha)(x)$

luego $d(x)=(u\theta_0 c)(x)-(u^2\theta_0^2 b)(x) = uc_\alpha(x)-\alpha(u\theta_0 c_\alpha)(x)-(u^2\theta_0 b_\alpha)(x)+\alpha\,(u^2\theta_0^2 b_\alpha)(x)$

Por otra parte $(u\theta_0 c_\alpha)(x) - (u^2\theta_0^2 b_\alpha)(x)=\theta_0[uc_\alpha - u^2\theta_0 b_\alpha]\,(x)=$

$=\frac{1}{x}[(uc_\alpha)(x)-(u^2\theta_0 b_\alpha)(x)-<u\,,c_\alpha>+<u^2\,,\theta_0 b_\alpha>]$ (ver Lema 1.2.3. Cap. I.).

$d(x)=\frac{(x-\alpha)}{x}[(uc_\alpha)(x)-(u^2\theta_0 b_\alpha)(x)-(<u\,,c_\alpha>-<u^2\,,\theta_0 b_\alpha>)]+<u\,,c_\alpha>-<u^2\,,\theta_0 b_\alpha>=$

$=(x-\alpha)d_\alpha(x)+<u\,,\theta_\alpha c>-<u^2\,,\theta_0\theta_\alpha b>$

, con $d_\alpha(x)=\frac{1}{x}[(uc_\alpha)(x)-(u^2\theta_0 b_\alpha)(x)-(<u\,,c_\alpha>-<u^2\,,\theta_0 b_\alpha>)]$

Nota: Sea $C(x)=\sum_{j=0}^{n} c_j x^j$ .Entonces $[uC(x)](0)=\sum_{j=0}^{n} c_j (u)_j = <u\,,\sum_{j=0}^{n} c_j x^j>$

Por otra parte $(\theta_\alpha\theta_0 C)(x)=(\theta_0\theta_\alpha C)(x)$ □

Definición 1.2.1.

Un par b(z) , c(z) que no pueda ser simplificado (según Proposición 1.2.1.) se denomina par primitivo.

□

Corolario 1.2.1.

El par primitivo es único.

DEMOSTRACION:

Se sigue del Lema 1.2.1.

□

1.3.Reducción de un funcional de segundo grado a semiclásico.

Proposición 1.3.1.

Un funcional lineal u de segundo grado es un funcional lineal semiclásico verificando la ecuación $D[\Phi(x)u] + \Psi(x)u = 0$ *, en donde* $\Phi(x) = A(x)$, $\Psi(x) = -A'(x) - C(x)$

$$A(x) = b(x)[c^2(x) - 4b(x)d(x)] \tag{1.10.}$$

$$C(x) = 2b(x)[b'(x)d(x) - b(x)d'(x)] + c(x)[b(x)c'(x) - b'(x)c(x)] \tag{1.11.}$$

DEMOSTRACION

Sea u funcional lineal de segundo grado cumpliendo (1.1.) .Tenemos que

$$2b(z)S(u)(z) + c(z) = \pm [c^2(z) - 4b(z)d(z)]^{1/2} \quad \text{y} \quad S^2(u)(z) = \frac{[-c(z)S(u)(z) - d(z)]}{b(z)} \tag{1.12.}$$

Derivando (1.1.) , $2b(z)S(u)(z)S'(u)(z) + b'(z)S^2(u)(z) + c'(z)S(u)(z) + c(z)S'(u)(z) + d'(z) = 0$

$b(z)[2b(z)S(u)(z) + c(z)]S'(u)(z) + [b(z)c'(z) - b'(z)c(z)]S(u)(z) + [b(z)d'(z) - b'(z)d(z)] = 0.$

Multiplicando por $[2b(z)S(u)(z)+c(z)]$

$$b(z)[c^2(z)-4b(z)d(z)]S'(u)(z)+\left[-c(z)[b(z)c'(z)-b'(z)c(z)]+2b(z)[b(z)d'(z)-b'(z)d(z)]\right]S(u)(z)-$$
$$-2d(z)[b(z)c'(z)-b'(z)c(z)]+c(z)[b(z)d'(z)-b'(z)d(z)]=0 \qquad (1.13.)$$

que demuestra que u es semiclásico al satisfacer su función de Stieltjes una ecuación afín

$$A(z)S'(u)(z)=C(z)S(u)(z)+D(z)$$

$$A(z)=b(z)[c^2(z)-4b(z)d(z)] \quad , \quad C(z)=2b(z)[b'(z)d(z)-b(z)d'(z)]+c(z)[b(z)c'(z)-b'(z)c(z)]$$

$$D(z)=2d(z)[b(z)c'(z)-b'(z)c(z)]-c(z)[b(z)d'(z)-b'(z)d(z)]$$

De aquí se sigue que el funcional u verifica la ecuación $D[\Phi(x)u]+\Psi(x)u=0$ en donde $\Phi(x)=A(x)$, $\Psi(x)=-A'(x)-C(x)$.

Las ecuaciones (1.10.)y (1.11) son equivalentes a

$$\left.\begin{array}{l}\Phi(x)=b(x)[c^2(x)-4b(x)d(x)]\\ \Psi(x)=-\dfrac{3}{2}b(x)[c^2(x)-4b(x)d(x)]'\end{array}\right. \qquad (1.14.)$$

□

Estudiaremos el problema inverso : dado un par semiclásico admisible , (ver Definición 2.2.2.Cap. I.) ,¿bajo qué condiciones el funcional u correspondiente es de segundo grado?.

Proposición 1.3.2.

Sea u un funcional lineal semiclásico cumpliendo la ecuación $D(\Phi u)+\Psi u=0$.Para que u sea de segundo grado deben existir polinomios $p(x)$, $b(x)$, $c(x)$ y $d(x)$ que satisfagan el sistema

$$p(x)\Phi(x)=b(x)[c^2(x)-4b(x)d(x)]=b(x)M(x) \quad ; \quad M(x)=[c^2(x)-4b(x)d(x)]$$

$$-[p(x)\Phi(x)]'-C(x)p(x)=-\frac{3}{2}b(x)[c^2(x)-4b(x)d(x)]'=-\frac{3}{2}b(x)M'(x) \qquad (1.15)$$

$$p(x)D(x)=2d(x)[b(x)c'(x)-b'(x)c(x)]-c(x)[b(x)d'(x)-b'(x)d(x)] = \frac{1}{4}[M'(x)c(x)-2c'(x)M(x)]$$

$$C(x)=-\Phi'(x)-\Psi(x) \qquad ; D(x)=-(u\theta_0\Phi)'(x)-(u\theta_0\Psi)(x)$$

$$b(x)\neq 0 \quad , \quad c^2(x)-4b(x)d(x)\neq 0 \quad y \quad d(x)=(u\theta_0 c)(x)-(u^2\theta_0^2 b)(x)$$

DEMOSTRACION:

Directamente de la Proposición 1.3.1.

Cumpliendo el funcional u la ecuación $b(z)S^2(u)(z)+c(z)S(u)(z)+d(z)=0$.

□

Nota: La aparición del polinomio p(x) se justifica como sigue.La ecuación (1.13.) puede ser reducible, es decir , los polinomios A, C y D pueden NO ser primos entre sí.Llamando p(x) a su m.c.d. , S(u)(z) cumple la ecuación $(A/p)S'=(C/p)S+(D/p)$, de donde se obtiene la clase del funcional.

Si partimos de un funcional semiclásico cuya función de Stieltjes cumple la ecuación irreducible $AS'=CS+D$, y queremos comprobar su condición de segundo grado tendremos que usar, pues , las ecuaciones (1.15).

Ejemplos.

Polinomios de Hermite $H_n(x)$

Resolviendo el sistema (1.15.) tenemos

$$p=b(c^2-4bd)=bM$$

$$-p'+2xp=-\frac{3}{2}b(c^2-4bd)'=-\frac{3}{2}bM'$$

$$-2p=2d(bc'-b'c)-c(bd'-b'd)=\frac{1}{4}[M'c-2c'M]$$

$d=(u\theta_0 c)-(u^2\theta_0^2 b)$, $M=(c^2-4bd)=\frac{p}{b}$ .De donde obtenemos

$p'b-3pb'+4xbp=0$

buscando soluciones de la forma $p(x)=\sum_{j=0}^{n} p_j x^j$, $b(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j x^j$, $c(x)=\sum_{j=0}^{q} c_j x^j$ (1.16.)

obtenemos que $4b_m p_n=0$ (coeficiente del término de mayor grado) , luego $b_m=0$ ó $p_n=0$ $\forall n,m\geq 0$. Identificando coeficientes se sigue que $b(x)=0$ ó $p(x)=0$.Conclusión: el funcional u correspondiente a los polinomios de Hermite no es de segundo grado.

<u>Polinomios de Laguerre</u> $L_n^{(\alpha)}$

De forma análoga a los polinomios de Hermite, resolviendo el sistema (1.15.) obtenemos la ecuación $(-bp'+3b'p-2bp)x+(2\alpha-1)bp=0$, buscando soluciones polinómicas de la forma (1.16.), resulta $b_m p_n=0$ (coeficiente del término de mayor grado) , luego $b_m=0$ ó $p_n=0$ $\forall n,m\geq 0$. . Identificando coeficientes se sigue que $b(x)=0$ ó $p(x)=0$.Conclusión: el funcional u correspondiente a los polinomios de Laguerre no es de segundo grado.

<u>Polinomios de Jacobi</u> $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$

Resolviendo (1.15.)

$p(x^2-1)=bM$

$-p'(x^2-1)-2px-(Ax+B)p=-\frac{3}{2}bM'$

$(A+1)p=2d(bc'-b'c)-c(bd'-b'd)=\frac{1}{4}[M'c-2c'M]$

$\alpha+\beta=A$, $\beta-\alpha=B$

de donde obtenemos

$$2b(Ax+B)p+(x^2-1)(3pb'-p'b)-2xpb=0$$
$$4b^2(A+1)p+(x^2-1)(2pbc'-p'bc+b'pc)-2xpbc=0 \qquad (1.17)$$

Buscando soluciones polinómicas y siguiendo la notación de (1.16.) ,concluimos que se debe cumplir la condición $n=3m+2(A-1)$, que es equivalente a

$\alpha+\beta=A \in \{ \pm \frac{2n+1}{2} \} \cup \{-1\} \cup \{0\} \cup \mathbf{N}$, $n=0,1,2,3,..$ .Es una condición necesaria.

Estudiaremos los siguientes casos:

i)para $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$ tenemos $(x^2-1)(3b'p-p'b)-4xpb=0$,

buscando soluciones polinómicas como en el ejemplo anterior

$3mb_mp_m-n\ b_mp_m-4b_mp_m=0 \quad \Rightarrow \quad n=3m-4.$ Una solución es m=n=2. Resultando

$$3b_1p_0-b_0p_1=0$$

$$2b_1p_1+6b_2p_0+4b_0p_0-2b_0p_2=0$$

$$b_1p_2+5b_2p_1+b_1p_0+5b_0p_1=0$$

$$4b_2p_2+2b_1p_1+6b_0p_2-2b_2p_0=0$$

$$3b_1p_2-b_2p_1=0$$

Una solución del sistema es $b_0=-1$; $b_1=0$; $b_2=1$; $p_0=-4$; $p_1=0$; $p_2=4$ de donde

$p(x)=4(x^2-1)$; $b(x)=(x^2-1)$; $c(x)=0$; $d(x)=-1$.

$S(u)(z)$ cumple la ecuación cuadrática $\mathbf{(z^2-1)S^2(u)(z)-1=0}$ siendo por lo tanto el funcional u correspondiente a $P_n^{(\frac{-1}{2},\frac{-1}{2})}$ de segundo grado satisfaciendo $\mathbf{(x^2-1)u^2=0}$,

$\mathbf{(u^2)_1=0}$

ii)Para $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, (1.17.) resulta

$(x^2-1)(3pb'-p'b)=0$

$8b^2p+(x^2-1)(2pbc'-p'bc+b'pc)-2xpbc=0.$

Buscando soluciones polinómicas y estudiando el término de mayor grado en la primera de las dos últimas ecuaciones tenemos que $3m-n=0$ .Una solución es $n=m=0$, o sea , $b=b_0$ y $p=p_0$.

Sustituyendo en la segunda y haciendo $c(x)=\sum_{j=0}^{q} c_j x^j$ se deduce que $q=1$, $c(x)=c_1x+c_0$.De donde

$c_0=0$, $b_0=1$, $c_1=4$ y $p_0=16$.

El funcional "u" correspondiente a $J_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ es de segundo grado cumpliendo la ecuación

$\mathbf{u^2=4x^2u}$, $\mathbf{(u)_1=0}$ y la correspondiente función de Steiltjes $\mathbf{S^2+4zS+4=0}$.

iii)Para $\alpha=\frac{1}{2}$ $\beta=-\frac{1}{2}$, (1.17) resulta

$-2bp+(x^2-1)(3pb'-p'b)-2xpb=0$; $n=3m-2$.

Una solución es $n=m=1$, $p(x)=p_1x+p_0$, $b(x)=b_1x+b_0$, siendo $b_0=-1$, $b_1=1$,$p_0=-4$, $p_1=4$.El funcional "u" correspondiente a $P_n^{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}$ es de segundo grado cumpliendo la ecuación

$\mathbf{(x-1)u^2=2x(1-x)u}$, $\mathbf{(u)_1=\frac{1}{2}}$

y la correspondiente función de Steiltjes

$\mathbf{(z-1)S^2+2(1-z)S-2=0}$.

iv)De forma análoga para $P_n^{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ se obtiene

$$(x+1)u^2=2x(x+1)u \quad , \quad (u)_1=-\frac{1}{2} \qquad ; \quad (z+1)S^2+2(z+1)S+2=0$$

siendo por tanto de segundo grado.

Nota: Los polinomios de Tchebychev de 1^a, 2^a y 3^a especie son tratados con detalle en [25].

Polinomios de Bessel. $B_n^{(\alpha)}$

Resolviendo (1.15.) tenemos

$$px^2=bM$$

$$-(px^2)'-[2(\alpha-1)x+2]p=-\frac{3}{2}bM'$$

$$p(2\alpha-1)=\frac{1}{4}(M'c-2c'M)$$, de donde resulta

$(p'b-3b'p)x^2+2bp[1-2(\alpha-1)]x-4bp=0$, buscando soluciones de la forma (1.16.) y empezando por evaluar el término de grado cero obtenemos $b_0=0$ ó $p_0=0$.Si $b_0=0$, dividiendo por x , volviendo a evaluar el término de menor grado resulta $b_1=0$. Iterando el procedimiento concluimos que $b(x)=0$.Analogamente, si suponemos $p_0=0$, deducimos $p(x)=0$.

El funcional u correspondiente a los polinomios de Bessel no es de segundo grado.

□

Proposición 1.3.3.

Las ecuaciones (1.15.) son equivalentes a

$$\left(\frac{c(x)}{b(x)}\right)^2-4\frac{d(x)}{b(x)}=\frac{1}{f(x)}$$

$$\frac{c(x)}{b(x)} = g(x)$$

$$d(x)=(u\theta_0 c)(x)-(u^2\theta_0^2 b)(x)$$

$$f(x)= A \left[\exp \left\{ \int \frac{\Psi(x)+\Phi'(x)}{\Phi(x)} dx \right\} \right]^2$$

$$g(x)= \exp \left\{ \int \frac{\Psi(x)+\Phi'(x)}{\Phi(x)} dx \right\} \left[B+\int \exp \left\{ -\int \frac{\Psi(x)+\Phi'(x)}{\Phi(x)} dx \right\} \frac{2D(x)}{\Phi(x)} dx \right]$$

(A y B constantes)

DEMOSTRACION:

El sistema (1.15.) puede ser integrado como sigue.De (1.15.) tenemos

$p(x)\Phi(x)=b(x)M(x)$

$p(x)[\Psi(x)+\Phi'(x)]=b'(x)M(x)-(1/2)b(x)M'(x)$

$p(x)D(x)=(1/4)[M'(x)c(x)-2c'(x)M(x)]$

Eliminando p(x) obtenemos

$$-\frac{M'(x)}{2M(x)}+\frac{b'(x)}{b(x)}=\frac{\Psi(x)+\Phi'(x)}{\Phi(x)}$$

$$\left(\frac{c(x)}{b(x)}\right)'-\left[\frac{\Psi(x)+\Phi'(x)}{\Phi(x)}\right]\frac{c(x)}{b(x)}=\frac{2D(x)}{\Phi(x)}$$

Integrando ambas ecuaciones

$$\frac{b^2(x)}{M(x)} = A \left[\exp \left\{ \int \frac{\Psi(x)+\Phi'(x)}{\Phi(x)} dx \right\} \right]^2$$

$$\frac{c(x)}{b(x)} = \exp \left\{ \int \frac{\Psi(x)+\Phi'(x)}{\Phi(x)} dx \right\} \left[B+\int \exp \left\{ -\int \frac{\Psi(x)+\Phi'(x)}{\Phi(x)} dx \right\} \frac{2D(x)}{\Phi(x)} dx \right] \tag{1.18.}$$

□

Nota: De $D[\Phi(x)u] + \Psi(x)u = 0$ si $w(x)$ es una función de peso asociada a u , tenemos

$$-\int_a^b \Phi(x)p'(x)w(x)dx + \int_a^b \Psi(x)p(x)w(x)dx = 0 \quad , \forall \quad p(x)\in P$$, siendo $w(x)$ la

correspondiente función de peso.Integrando por partes

$$(\Phi(x)w(x))' + \Psi(x)w(x) = 0 \quad \text{de donde} \quad \frac{w'(x)}{w(x)} = -\frac{\Psi(x)+\Phi'(x)}{\Phi(x)}.$$

Sustituyendo en (1.18.) obtenemos $kw^2(x)=\frac{M(x)}{b^2(x)}$. De aquí deducimos que $w^2(x)$ debe ser una función racional.Por ejemplo , si buscamos que funciones de peso de los polinomios de Jacobi [$w(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$], conducen a funcionales de segundo grado , una condición necesaria es que $2\alpha\in Z$ y $2\beta\in Z$.

Además , una condición suficiente se seguiria del hecho de que

$$\frac{c(x)}{b(x)} = \exp\{-\mathrm{Ln}\, w(x)\} \left[B+\int \exp\{\mathrm{Ln}\, w(x)\}\frac{2D(x)}{\Phi(x)}\, dx \right] = \frac{1}{w(x)} \left[B+\int w(x)\frac{2D(x)}{\Phi(x)}\, dx \right] =$$

$$= \frac{B}{w(x)} + \int \frac{2D(s)w(s)}{\Phi(s)w(x)}\, ds = \frac{B}{w(x)} + \int \frac{2D(s)}{\Phi(s)} \left(\frac{(1-s)^{2\alpha}(1+s)^{2\beta}}{(1-x)^{2\alpha}(1+x)^{2\beta}} \right)^{1/2} ds$$

debe ser una función racional.

2.ESTABILIDAD DE LOS FUNCIONALES DE SEGUNDO GRADO.

2.1.Traslaciones y homotecias , ([12]).

Proposición 2.1.1.

Sea $u_1 = (h_{1/\alpha} \circ \tau_{-\beta})\, u$ *, y sean* $S(u_1)$ *y* $S(u)$ *las respectivas funciones de Stieltjes .Se cumple*

$$S(u_1)(z) = \alpha\, S(u)(\alpha z+\beta) \quad \text{o equivalentemente} \quad S(u)(z) = \frac{1}{\alpha} S(u_1)\left(\frac{z-\beta}{\alpha}\right) \qquad (2.1.)$$

DEMOSTRACION:

Partiendo de las siguientes expresiones de fácil demostración

i) $$\frac{d^n}{dx^n}(1-\alpha x)^{-1} = n!\,\alpha^n (1-\alpha x)^{-(n+1)} \;;\; n\geq 0$$

ii) $$(u_1)_n = \frac{1}{\alpha^n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(-\beta)^{n-k}(u)_k$$

iii) Si $$p(x) = \sum_{n\geq 0} p_n x^n \quad , \quad \frac{d^k p(x)}{dx^k} = \sum_{n\geq k}\frac{n!}{(n-k)!}\, p_n x^{n-k}$$

deducimos que si

$$S(u)(z) = -\sum_{n\geq 0}\frac{(u)_n}{z^{n+1}} \qquad y \qquad S(u_1)(z) = -\sum_{n\geq 0}\frac{(u_1)_n}{z^{n+1}}$$

$$S(u_1)(z) = -\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\left[\frac{1}{\alpha^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(-\beta)^{n-k}(u)_k\right]\frac{1}{z^n} =$$

$$= -\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(u)_k\frac{1}{(-\beta z)^k}\frac{(-\beta/\alpha)^n}{z^{n-k}} = -\frac{1}{z}\sum_{k\geq 0}\frac{(u)_k}{k!(-\beta z)^k}\sum_{n\geq k}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{(-\beta/\alpha)^n}{z^{n-k}} =$$

$$= -\frac{1}{z}\sum_{k\geq 0}\frac{(u)_k}{k!(-\beta z)^k}\frac{d^k}{d(1/z)^k}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{-\beta/\alpha}{z}\right)^n = -\frac{1}{z}\sum_{k\geq 0}\frac{(u)_k}{k!(-\beta z)^k}\frac{d^k}{d(1/z)^k}\frac{1}{1+\frac{\beta/\alpha}{z}} =$$

$$= -\frac{1}{z}\sum_{k\geq 0}\frac{(u)_k}{(-\beta z)^k}(-\beta/\alpha)^k(1+\beta/\alpha z)^{-(k+1)} = -\alpha\sum_{k\geq 0}(u)_k\frac{1}{(\alpha z+\beta)^{k+1}} = \alpha\, S(u)(\alpha z+\beta).$$

□

Proposición 2.1.2.

Sea $u_1 = (h_{1/\alpha} \circ \tau_{-\beta})\, u$ *.Si* u *es un funcional de segundo grado* u_1 *también es de segundo grado, cumpliendo la correspondiente función de Stieltjes la ecuación*

$$b^*(z)S^2(u_1)(z)+c^*(z)S(u_1)(z)+d^*(z)=0 \qquad \text{, siendo}$$

$b^*(z)= \alpha^{-r}\, b(\alpha z+\beta)$, $c^*(z)=\alpha^{1-r}c(\alpha z+\beta)$, $d^*(z)=\alpha^{2-r}d(\alpha z+\beta)$,

$b(z)$, $c(z)$ y $d(z)$ los polinomios definidos en (1.1.) y "r" el grado de $b(z)$.

DEMOSTRACION:

Sustituyendo (2.1.) en (1.1.)

$$b(z)\frac{1}{\alpha^2}S^2(u_1)\left(\frac{z-\beta}{\alpha}\right)+c(z)\frac{1}{\alpha}S(u_1)\left(\frac{z-\beta}{\alpha}\right)+d(z)=0$$

$$b(\alpha z+\beta)S^2(u_1)(z)+c(\alpha z+\beta)\alpha S(u_1)(z)+\alpha^2 d(\alpha z+\beta)=0$$

dividiendo por α^r donde , r=grado de b(z) ,se obtiene el resultado.

□

~~2.2.Co-recursividad , co-dilatación y co-modificación~~

Proposición 2.2.1.

Sea u un funcional de segundo grado y sea u el funcional definido en 4.2.1.Cap. I.(polinomios co-recursivos).El funcional u* también es de segundo grado.*

DEMOSTRACION:

Usando la ecuación (4.13.) Cap.I. se deduce que si $S(u)(z)$,función de Stieltejes relativa a u, cumple la ecuación $b(z)S^2(u)(z)+c(z)S(u)(z)+d(z)=0$, $S_{\mu,k}(u^*)(z)$,función de Stieltjes relativa a u* , cumple la ecuación $b^*(z)S^2_{\mu,k}(u^*)(z)+c^*(z)\,S_{\mu,k}(u^*)(z)+d^*(z)=0$, siendo

$$b^*=bD^2-cDC+dC^2 \quad ; \quad c^*=-2bDB+cBC+cDA-2dAC \quad ; \quad d^*=bB^2-cBA+dA^2$$

con A , B , C y D los polinomios definidos en (4.13)Cap.I.

□

~~Proposición 2.2.2.~~

Sea u un funcional de segundo grado y sea u• el funcional definido en 4.3.1.Cap. I.(polinomios co-dilatados).El funcional u• también es de segundo grado.

DEMOSTRACION:

Igual que en Proposición 2.2.1. con A , B, C y D los polinomios definidos en (4.16)Cap.I.

□

~~Proposición 2.2.3.~~

Sea u un funcional de segundo grado y sea u° el funcional definido en 4.4.1.Cap. I.(polinomios co-modificados).El funcional u° también es de segundo grado.

DEMOSTRACION:

Igual que en Proposición 2.2.1. con A, B , C y D los polinomios definidos es (4.18)Cap.I.

□

2.3.Suma de una masa de Dirac y de la derivada de una masa de Dirac.

Proposición 2.3.1.

Sea u un funcional de segundo grado.Entonces $\overline{u}=u+\mu\delta_c$ *también es de segundo grado.*

DEMOSTRACION:

La relación entre las correspondientes funciones de Stieltjes viene dada en el Teorema 1.1.1.Cap. III.Luego si $S(u)(z)$ cumple la ecuación $b(z)S^2(u)(z)+c(z)S(u)(z)+d(z)=0$, $\overline{S}=S(\overline{u})(z)$ cumple

$b^*(z)\overline{S}^2+c^*(z)\overline{S}+d^*(z)=0$, siendo $b^*=b(z-c)^2$; $c^*=2\mu b(z-c)+c(z-c)^2$ y

$d^*=\mu^2b+c\mu(z-c)+d(z-c)^2$

□

Porposición 2.3.2.

Sea u un funcional de segundo grado.Entonces $\overline{u}=u+\mu\delta'_c$ *también es de segundo grado.*

DEMOSTRACION:

La relación entre las correspondientes funciones de Stieltjes viene dada en el Teorema 2.1.1.Cap.III.Luego si $S(u)(z)$ cumple la ecuación $b(z)S^2(u)(z)+c(z)S(u)(z)+d(z)=0$, $\overline{S}=S(\overline{u})(z)$ cumple $b^*(z)\overline{S}^2+c^*(z)\overline{S}+d^*(z)=0$, siendo $b^*=b(z-c)^4$; $c^*=-2\mu b(z-c)^2+c(z-c)^4$ y

$d^*=\mu^2b-c\mu(z-c)^2+d(z-c)^4$

□

2.4.Multiplicación por polinomios.

Proposición 2.4.1.

Sea u un funcional de segundo grado y sea v =p(x)u.Entonces v es un funcional de segundo grado verificando la correspondiente función de Stieltjes $S_v(z)=S(v)(z)$ la ecuación

$$b(z)S_v^2(z)+(cp-2bq)(z)S_v(z)+(bq^2-cpq+p^2d)(z)=0 \quad , \quad \text{siendo } b(z)\,,\ c(z)\,,\ d(z) \text{ los polinomios}$$

definidos en (1.1) y $q(z)=(u\theta_0 p)(z)$

DEMOSTRACION:

Nota:Efectuaremos la demostración de dos formas diferentes, a través de la función de Stieltjes y según la ecuación funcional.Por otra parte si $p(x)=\sum_{j=0}^{n} p_j x^j$ entonces $(p\,u)_m=\sum_{j=0}^{n} p_j (u)_{j+m}$.

i)Usando la función de Stieltjes.

$$S_v(z)=S(pu)(z) = -\sum_{m\geq 0} \frac{\sum_{j=0}^{n} p_j (u)_{j+m}}{z^{m+1}} =S(u)(z)\, p(z) + \sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{k=0}^{j-1} (u)_k\, z^{j-k-1} = p(z)S(u)(z)+q(z)$$

siendo $q(z)= \sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{k=0}^{j-1} (u)_k\, z^{j-k-1} =(u\theta_0 p)(z)$, véase [17]..Sustituyendo esta relación en (1.1.) se concluye la demostración.

ii) A partir de la ecuación funcional . En esta demostración usaremos los Lemas 1.2.2. , 1.2.3. , 1.2.4. y 1.2.5. Cap. I.

Sea u cumpliendo (1.2.).Multiplicando por $p^2(x)$

bp^2u^2-$xpcpu=0$

$bp[(pu)u+x\,(u\theta_0 p)\,u]\,-xcpv=0$.Esto implica que

$b[\,(pu)^2+x(u\theta_0 p)pu]+bpx(u\theta_0 p)u-xcpv=0$, o , equivalentemente

$b\,v^2-x(cp-2bq)v=0$. Cumpliéndose $\langle v^2\,,\theta_0 b\rangle-\langle v\,,cp-2bq\rangle=0$

Nota: $v^2=(pu).(pu)=p^2u^2-2xqpu$

□

2.5.Estudio del funcional "v" cumpliendo $(x-\alpha)v=\mu u$. $\alpha,\mu\in C$, siendo u de segundo grado.

Proposición 2.5.1.

Si u es un funcional de segundo grado, v cumpliendo $(x-\alpha)v=\mu u$. $\alpha,\mu\in C$, es de segundo grado.La correspondiente funciòn de Stieltjes $S^*(z)=S(v)(z)$ verifica la ecuación

$b(z-\alpha)^2S^{*2}(z)+(2b+\mu c)(z-\alpha)S^*(z)+(b+\mu c+\mu^2 d)=0$

siendo b(z) , c(z) y d(z) los polinomios definidos en (1.1.)

DEMOSTRACION:

Se sustituye en (1.1.) la ecuación (3.2.) del Cap.III.

□

2.6.El funcional u^{-1}

Proposición 2.6.1.

Sea u un funcional de segundo grado.Entonces u^{-1} también es de segundo grado.

DEMOSTRACION:

De $S(uv)=-zS(u)S(v)$ [ver Lema 3.1.1.Cap I.] , tenemos $S(uu^{-1})=S(\delta)=-(1/z)=-zS(u)S(u^{-1})$

de donde $S(u)=\dfrac{1}{z^2S(u^{-1})}$. Nuevamente si S(u) cumple la ecuación $b(z)S^2(u)(z)+c(z)S(u)(z)+d(z)=0$

$S(u^{-1})$ cumple $b^*(z)\,S^2(u^{-1})+c^*(z)\,S(u^{-1})+d^*(z)=0$, siendo $b^*=z^4d$; $c^*=z^2c$ y $d^*=b$.

□

2.7.Ejemplos

Perturbaciones a los polinomios de Tchebychev de segunda especie

Sea u el funcional correspondiente a los polinomios $P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ y S(u)(z) la función de Stieltjes correspondiente. Se cumplen las siguientes ecuaciones:

$D[(x^2-1)u]-3xu=0$

$S^2+4zS+4=0$; $u^2=4x^2u$, $(u)_1=0$.

Sea $\{P_n\}_{n\geq 0}$ la S.P.O.M. correspondiente a u.Efectuemos las siguientes perturbaciones:

i) Una modificación única en el coeficiente β_o ,según Definición 4.2.1.Cap. I. , k=0.Sea u* el funcional correspondiente a la nueva familia de polinomios ortogonales y $S_{\mu,o}$ la función de Stieltjes correspondiente. $S_{\mu,o}$ cumple $(1-4\mu z+4\mu^2)\, S^2_{\mu,o}+4(z-2\mu)\, S_{\mu,o}+4=0$

ii)Una modificación única en el coeficiente γ_1 , según Definición 4.3.1.Cap. I. k=1.Sea u• el funcional correspondiente a la nueva familia de polinomios ortogonales La función de Stieltjes correspondiente ${}_\lambda S_1$ cumple $[\lambda^2+4z^2(1-\lambda)]\ {}_\lambda S_1^2+4z(2-\lambda)\ {}_\lambda S_1+4=0$, y u• cumple

$D\{(x^2-1)[\lambda^2+4z^2(1-\lambda)]\, u\bullet\}-3x\ [\lambda^2+4z^2(1-\lambda)]\, u\bullet=0$

iii)Una modificación en el coeficiente β_1 y en el coeficiente γ_1 segùn Definición 4.4.1. Cap. I. k=1.Sea u° el funcional correspondiente a la nueva familia de polinomios ortogonales y ${}_\lambda S_{\mu,1}$ la función de Stieltjes correspondiente. ${}_\lambda S_{\mu,1}$ cumple $b^*(z)\,{}_\lambda S^2_{\mu,1}+c^*(z)\,{}_\lambda S_{\mu,1}+d^*(z)=0$, siendo

$$b^* = -\mu x^3 + \frac{4\mu^2-\lambda+1}{4}\, x^2 + \frac{\mu\lambda}{2}\, x + \frac{\lambda^2}{16}$$

$$c^* = -2\mu x^2 + \left(2\mu^2 + \frac{2-\lambda}{4}\right) x + \frac{\mu\lambda}{2}$$

$$d^* = -x + \mu + \frac{1}{4\lambda}$$

iv) Suma de una Delta de Dirac. $\overline{u} = u + \mu\delta_c$. Se cumple:

$$(z-c)^2\, \overline{S}^{\,2} + [2\mu(z-c) + 4z(z-c)^2]\, \overline{S} + [\mu^2 + 4\mu z(z-c) + 4(z-c)^2] = 0$$

v) Suma de la derivada de una Delta de Dirac. $\overline{u} = u + \mu\delta'_c$. Se cumple:

$$(z-c)^4\, \overline{S}^{\,2} + [-2\mu(z-c)^2 + 4z(z-c)^4]\, \overline{S} + [\mu^2 + 4\mu z(z-c)^2 + 4(z-c)^4] = 0$$

$\square$

3.REDUCCION DE UN FUNCIONAL DE LAGUERRE-HAHN A SEMICLASICO.

3.1.Reducción

Sea u un funcional lineal regular de Laguerre-Hahn.La función de Stieltjes correspondiente cumple la ecuación de Riccati

$$\Phi(z)S'(u)(z)= B(z)S^2(u)(z)+C(z)S(u)(z)+D(z) \qquad (3.1.)$$

según la Definición 1.1.1. Cap.II.

Estudiaremos bajo qué condiciones la función de Stieltjes cumple una ecuación cuadrática de la forma

$$b(z)S^2(u)(z)+c(z)S(u)(z)+d(z)=0 \qquad (3.2.)$$

siendo el funcional u de segundo grado y por consiguiente semiclásico.

Proposición 3.1.

Sea u un funcional de Laguerre-Hahn cumpliendo la función de Stieltjes correspondiente la ecuación (3.1).Si existen b(x) , c(x) , d(x) y p(x) polinomios de coeficientes complejos que verifiquen el sistema

$$\begin{aligned}
&c^2(x)-4b(x)d(x)=\Phi(x)p(x)\\
&-2b(x)[b'(x)d(x)-b(x)d'(x)]- c(x)[b(x)c'(x)-b'(x)c(x)] = [c(x)B(x)-b(x)C(x)]p(x) \qquad (3.3.)\\
&-2d(x)[b(x)c'(x)-b'(x)c(x)]+c(x)[b(x)d'(x)-b'(x)d(x)] = [d(x)B(x)-b(x)D(x)]p(x)\\
&d(x)=(u\theta_0 c)(x)-(u^2\theta_0^2 b)(x)
\end{aligned}$$

u cumple la ecuación (3.2.) siendo de segundo grado y por tanto semiclásico.

DEMOSTRACION:

Sustituyendo en (3.1.) el término en $S^2(u)(z)$ dado por (1.12.) obtenemos

$$b(z)\Phi(z)S'(u)(z) + [-b(z)C(z)+c(z)B(z)]S(u)(z) +[-b(z)D(z)+d(z)B(z)]=0 \qquad (3.4.)$$

Comparando (3.4) con (1.13.) obtenemos el sistema (3.4.).

□

3.2.Ejemplos

3.2.1.Asociados de orden uno a los polinomios de Jacobi

La función de Stieltjes correspondiente al funcional $u^{(1)}$ asociado de orden uno a los polinomios clásicos de Jacobi cumple la ecuación

$$(z^2-1)\,S'(u^{(1)})(z) = \frac{4(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2}S^2(u^{(1)})(z) + \left[(\alpha+\beta+2)z - \frac{(\alpha^2-\beta^2)}{(\alpha+\beta+2)}\right]S(u^{(1)})(z) + (\alpha+\beta+3)$$

Para que $u^{(1)}$ sea de segundo grado, por tanto semiclásico , deben existir polinomios $p(x)$, $b(x)$, $c(x)$ y $d(x)$ que cumplan el sistema

$$c^2(x)-4b(x)d(x)=(x^2-1)p(x)$$

$$-2b(x)[b'(x)d(x)-b(x)d'(x)]-c(x)[b(x)c'(x)-b'(x)c(x)] = \{(A+1)\gamma_1 c(x)-[(A+2)x-A\beta_0]b(x)\}p(x)$$

$$-2d(x)[b(x)c'(x)-b'(x)c(x)]+c(x)[b(x)d'(x)-b'(x)d(x)] = [(A+1)\gamma_1 d(x)-(A+3)b(x)]p(x)$$

$$d(x)=(u^{(1)}\theta_0 c)(x)-(u^{(1)2}\theta_0^2\, b)(x) \quad ; A=(\alpha+\beta) \quad ; \beta_0=\frac{\alpha-\beta}{(\alpha+\beta+2)} \quad ; \gamma_1=\frac{4(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha+\beta+2)^2(\alpha+\beta+3)}$$

Buscaremos soluciones polinómicas haciendo $p(x)=1$.

Resolviendo el anterior sistema tenemos $d=(c^2-x^2+1)/4b$, $c = \dfrac{(x^2-1)b'+[(A+1)x-A\beta_0]b}{(A+1)\gamma_1}$

$$2(x^2-1)^2bb''-(x^2-1)^2b'^2+2x(x^2-1)bb'+[-(\alpha+\beta+1)^2x^2+2(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)x+2(\alpha+\beta+1)-(\alpha-\beta)^2]b^2+$$
$$+(\alpha+\beta+1)^2(x^2-1)\gamma_1^2=0. \qquad (3.5.)$$

En primer lugar veremos que la ecuación (3.5.) no admite soluciones polinómicas de grado $n\geq 1$.

Supongamos que existe alguna solución de la forma $b=\sum_{i=1}^{n} b_i x^i$; $n\geq 1$.Estudiando el coeficiente del término de mayor grado $(2n+2)$, obtenemos $n^2-(\alpha+\beta+1)^2=0$, de donde

$n+\alpha+\beta+1=0$ (falla la regularidad)

$n-\alpha-\beta-1=0$

Por otra parte los grados de los polinomios $c(x)$ y $d(x)$ son respectivamente $n+1$ y $n+2$ .Pero el polinomio $d(x)$ debe ser igual a $(u^{(1)}\theta_0 c)(x)-(u^{(1)2}\theta_0^2 b)(x)$ y su grado $\leq$máx$(n, n-2)\leq n$, de aquí la imposibilidad de que la ecuación (3.5.) tenga soluciones polinómicas de grado $n\geq 1$.

Busquemos soluciones de la forma $b=b_0\neq 0$.Según (3.5.) se debe cumplir

$$-(\alpha+\beta+1)^2 b_0^2+(\alpha+\beta+1)^2\gamma_1^2=0 \tag{3.6.}$$

$$2(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)b_0^2=0 \tag{3.7.}$$

$$[2(\alpha+\beta+1)-(\alpha-\beta)^2]b_0^2-(\alpha+\beta+1)^2\gamma_1^2=0 \tag{3.8.}$$

De (3.6.) tenemos que $(\alpha+\beta+1)=0$ ò $b_0=\pm\gamma_1$.Excluímos el caso $(\alpha+\beta+1)=0$ pues para estos valores de α y β los polinomios asociados de orden uno a los clásicos de Jacobi NO SON DE LAGUERRE-HAHN.

De (3.7.) , $\alpha=\beta$ ó $\alpha=-\beta$

De (3.8.) , si $\alpha=\beta \Rightarrow \alpha=\beta=\frac{1}{2}$; si $\alpha=-\beta \Rightarrow \alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=-\frac{1}{2}$ ó $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$

i) $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$

$b_0=\pm\gamma_1=\pm\frac{1}{4}$ $\beta_0=0$ (tomaremos primeramente $b_0=\frac{1}{4}$)

$c(x)=x$, $d(x)=1$

$S_1=S(u^{(1)})(z)$ cumple la ecuación $\quad S_1^2+4zS_1+4=0.$

$[P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}]^{(1)}$ SON REDUCIBLES A SEMICLASICOS al ser su funcional lineal correspondiente $u^{(1)}$ un funcional de segundo grado cumpliendo la ecuación $D[(x^2-1)u^{(1)}]-3xu^{(1)}=0$ y concluyendo que $\quad [P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}]^{(1)}=[P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}]$ .Con $b_0=-\frac{1}{4}$ se obtienen los mismos resultados.

ii) $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=-\frac{1}{2}$

$b_0=\pm\gamma_1=\pm\frac{1}{4} \qquad \beta_0=\frac{1}{2}$

$c(x)=x$, $d(x)=1$

$S_1=S(u^{(1)})(z)$ cumple la ecuación $\quad S_1^2+4zS_1+4=0.$

$[P_n^{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}]^{(1)}$ SON REDUCIBLES A SEMICLASICOS al ser su funcional lineal correspondiente $u^{(1)}$ un funcional de segundo grado cumpliendo la ecuación $D[(x^2-1)u^{(1)}]-3xu^{(1)}=0$, concluyendo nuevamente que $\quad [P_n^{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}]^{(1)}=[P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}]$

iii) $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$ Se obtienen los mismos resultados que en ii) $[P_n^{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}]^{(1)}=[P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}]$,(véase [25]).

□

3.2.2.. Estudio del funcional u cumpliendo $xu=v$, siendo v el funcional correspondiente a los polinomios $[P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x)]$

En este ejemplo estudiaremos un funcional de Laguerre-Hahn de clase $s=2$ que es reducible a semiclásico.

Sea v el funcional correspondiente a los polinomios $[P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x)]$, $v^{(1)}$ asociado de orden uno cumple $v^{(1)}=v$, siendo por lo tanto v un funcional de Laguerre-Hahn.La respectiva función de Stieltjes satisface la ecuación $(z^2-1)S'(z)=\frac{1}{2}S^2(z)+3zS(z)+4$.

Por el Teorema 3.1.1. Cap. III $u=x^{-1}v+\delta$ es un funcional de Laguerre-Hahn de clase $s=2$ y su función de Stieltjes cumple $z(z^2-1)S^{*\prime}(z)=\frac{1}{2}z^2\,S^{*2}(z)+(2z^2+z+1)\,S^*(z)+(3z+\frac{9}{2})$

Aplicando las formulas (3.3.) obtenemos

$x(x^2-1)p=c^2-4bd$

$-2b[b'd-bd']-c[bc'-b'c]=p[\frac{1}{2}c\,z^2-b(2z^2+z+1)]$

$-2d[bc'-b'c]+c[bd'-b'd]=p\,[\frac{1}{2}z^2d-b(3z+\frac{9}{2})]$

Tomando $p(x)=p_1x+p_0$ el sistema tiene soluciones polinómicas resultando

$p=16x$, $b=x^2$, $c=2x(2x+1)$, $d=4x+5$

El funcional u es de segundo grado y semiclásico .La correspondiente función de Stieltjes cumple

la ecuación $z^2S^{*2}(z)+2z(2z+1)\,S^*(z)+(4z+5)=0$

PROBLEMAS ABIERTOS.

1.En [8] se ha descrito la familia de polinomios semiclásicos de clase s=1 analizando las ecuaciones distribucionales canónicas que satisface el correspondiente funcional. También , se han dado representaciones integrales para los mismos.Parece natural, tratar un problema similar en el caso de polinomios de Laguerre-Hahn de clase s=1.

A lo largo de la presente Memoria (básicamente en los capítulos II y III) hemos dado algunos ejemplos de dichos funcionales generados por perturbaciones en la relación de recurrencia y adición de funcionales discretos (deltas de Dirac y derivadas de ellas).

2.Se ha probado en el capítulo IV que la condición necesaria para que el funcional de Jacobi $u^{(\alpha,\beta)}$ sea de segundo grado , es que $\alpha+\beta\in\left\{\pm\frac{2n+1}{2}\right\}\cup\{-1\}\cup\{0\}\cup$ **N** ,n=0,1,2,3,.. y se han estudiado algunos casos particulares ($\alpha=\beta=1/2$, $\alpha=\beta=-1/2$, $\alpha=-\beta=1/2$, $\alpha=-\beta=-1/2$).Como un trabajo futuro planteamos si esta condición es también suficiente.

3.Obtener representaciones explícitas para los funcionales co-recursivos, co-dilatados y co-modificados en términos de los iniciales. Así mismo , en los casos definidos positivos estudiar las correspondientes representaciones integrales en la línea desarrollada por J.Letessier ([36] y [37]) en casos particulares.

BIBLIOGRAFIA

[1] .ALVAREZ-NODARSE R. ,MARCELLAN F.*"A generalization of the classical Laguerre polynomials"*.Rend.Circ.Mat.Palermo.

[2] .ALVAREZ-NODARSE R. ,MARCELLAN F.*"A generalization of the classical Laguerre polynomials II.Zeros, second order differential equation and a three term recurrence relation."* Applicable Anal.En prensa.

[3].AL-SALAM W., CHIHARA T.S. *"Another characterization of the classical orthogonal polynomials"*. SIAM J. Math. Anal. **3 (1)** (1992) , 65-70.

[4].ASKEY R. WIMP J. *"Associated Laguerre and Hermite polynomials"*. Proc. Royal Soc. Edimb. **96 A** (1984) , 15-37.

[5].BEGHDADI D.*"Sur qelques formes de second degré et leur inverses"*.Thèse de Doctorat.Univ.Pierre et Marie Curie.Paris ,(1995).

[6].BEGHDADI D. , MARONI P.*"Second degree classical forms"*.A paraitre.

[7].BELMEHDI S. *"Formes linéaires et polynômes orthogonaux semi-classiques de classe s=1.Description et classification"*.Thèse de Doctorat d'Etat.Univ. Pierre et Marie Curie.Paris , (1990).

[8].BELMEHDI S.*"On semiclassical linear functionals of class s=1.Classification and integral representations"*.Indag.Math.N.S. 3 (1992) , 237-275.

[9].BELMEHDI S. ,MARCELLAN F. *"Orthogonal polynomials associated to some modifications of a linear functional"*.Applicable Anal. **46(1)** (1992), 1-24.

[10]. BERNARDI C , MADAY Y. *"Some spectral approximation of monodimensional fourth order problems"*.Sometido.

[11].BOCHNER S. *" Uber Sturm-Liouvillesche polynomsysteme"*. Math. Zeit. **29** (1929) , 730-736.

[12].BOUAKKAZ H. *"Les polynômes orthogonaux de Laguerre-Hahn de classe zéro"*.Thèse de Doctorat .Univ. Pierre et Marie Curie.Paris , (1990).

[13].BOUAKKAZ H., MARONI P. *"Polynômes orthogonaux de Laguerre-Hahn"*.En Orthogonal Polynomials and their applications.C.Brezinski et al. Editors.Annals on Computing and Appl. Math. Vol. **9**.J.C.Baltzer AG. , Basel , 1991 , 189-194.

[14].BUENDIA E. ,DEHESA J.S. ,GALVEZ F.J.*"The distribution of the zeros of the polynomial eigenfunctions of ordinary differential operators of arbitrary order."*En Orthogonal Polynomials and their Applications. M.Alfaro et al. Editor s. Lecture Notes in Mathematics . Vol. **1329** , Springer-Verlag , Berlin 1988 , 222-235.

[15].CHIHARA T.S. *"On co-recursive orthogonal polynomials"*.Proc.Amer.Math.Soc.**8** (1957), 899-905.

[16].CHIHARA T.S. *"An introduction to orthogonal polynomials"*.Gordon and Breach New. York , 1978 .

[17].DEUTSCH E. *"The variation of the eigenvalues of a real symmetric tridiagonal matrix upon the variation of some of its elements"*.Linear and Multilinear Algebra **9** (1980), 51-62.

[18].DINI J. *"Sur les formes linéaires et les polynômes orthogonaux de Laguerre-Hahn"*.Thèse de Doctorat .Univ. Pierre et Marie Curie.Paris , (1988).

[19].DINI J. , MARONI P.*"Sur la multiplication d'une forme semi-classique par un polynôme"*.Publ.Labo. Anal. Num. n° 88007.Univ. Pierre et Marie Curie. C.N.R.S. Paris ,(1988).

[20].DINI J. ,MARONI P , RONVEAUX A. *"Sur une perturbation de la récurrence vérifiée par une suite de polynômes orthogonaux"*.Portugaliae Math.Vol. **46** Fasc.3 (1989),269-282.

[21].DINI J. , MARONI P. *"La multiplication d'une forme linéaire par une fraction rationelle.Application aux formes de Laguerre-Hahn"*.Ann. Polon. Math. (1990),175-185.

[22].DZOUMBA J. *"Sur les polynômes de Laguerre-Hahn"*.Thèse de Doctorat .Univ. Pierre et Marie Curie.Paris , (1987).

[23].FAVARD J. *"Sur les polynômes de Tchebichev"*.C.R.Acad. Sci. Paris **200** (1935) , 2052-2053.

[24].FREUD G. *"Orthogonal polynomials"*.Pergamon Press.Oxford, (1971).

[25].GAUTSCHI W., LI S.*"A set of orthogonal polynomials induced by a given orthogonal polynomial"*.Aeq.Math. **46** (1993), 174-198.

[26].GUERFI M. *"Les polynômes de Laguerre-Hahn affines discrets"*.Thèse de Troisième Cycle, Université Pierre et Marie Curie.Paris ,(1988).

[27].HAHN W. " *Uber die Jacobischen Polynome und Zwei Vermandte Polynomklassen"*. Math. Zeit **39** (1935) , 634-638.

[28].HAHN W. " *Uber differentialgleichungen für orthogonalpolynome"*. Monat. Math. **95** (1983) , 269-274.

[29].HAYDOCK R. *"The recursive solution of the Schrodinger equation "* .In Solid State Physics. Acad.Press.New-York Vol. **35** (1980) , 215-294.

[30].HENDRIKSEN E. , van ROSSUM H. *"Semi-classical orthogonal polynomials"*. En Polynômes Orthogonaux et Applications, C. Brezinski et al. Editors. Lecture Notes In Math. **1171**. Springer Verlag, Berlin 1985, 354-361.

[31].HENDRIKSEN E. , van ROSSUM H. *"A Padé-type approach to non-classical orthogonal polynomials "*. J. Math. An. Appl. **106** (1985) , 237-248.

[32].KWON K.H. , KIM S.S. , HAN S.S. " *Orthogonalizing weights of Tchebychev sets of polynomials"*. Bull London Math. Soc. **24** (1992) , 205-220.

[33].KRALL H.L."*On orthogonal polynomials satisfying a certain fourth order differential equation.*"The Pennsylvania State College Bulletin **6** (1940) , 1-24.

[34].KRALL H.L. , FRINK O. " *A new class of orthogonal polynomials : The Bessel polynomials*". Trans. Amer. Math. Soc. **65** (1949) , 100-115.

[35].KRALL A.M. *"Orthogonal polynomials through moment generating functionals"*.SIAM J. Math. Anal. Vol. **9** **(4)** (1978), 600-602.

[36].LETESSIER J.*"On co-recursive associated Laguerre polynomials"*. Journal of Comp. and Appl. Math. 49, (1993), 127-136.

[37] LETESSIER J. *"Some results on co-recursive associated Laguerre and Jacobi polynomials"*. SIAM. J. Math.Anal. **25** **(2)** (1994), 528-548.

[38].LOPEZ G.*"Convergence of Padé approximants of Stieltjes type meromorphic functions and comparative asymptotic for orthogonal polynomials"*.Math. USSR Sb. **64** (1989), 207-227.

[39].MAGNUS A ." *Riccati Acceleration of Jacobi continued fractions and Laguerre-Hahn orthogonal polynomials*". Lect. Notes in Math. **1071**.Springer Verlag ,Berlin 1984 ,213-230.

[40].MARCELLAN F. , DEHESA J.S. , RONVEAUX A . *"On orthogonal polynomials with perturbed recurrence relations"*.Journal of Comp. and Appl. Math. **30** (1990) , 203-212.

[41].MARCELLAN F. , MARONI P. *"Sur l´adjonction d´une masse de Dirac à une forme régulière et semi-classique"*.Ann. di Mat. Pura ed Appl. **4(162)** (1992), 1-22.

[42].MARCELLAN F. , PETRONILHO J. , BRANQUINHO A. *"Classical orthogonal polynomials.A functional approach"*.Acta Appl. Math. **33** (1993),283-303.

[43].MARCELLAN F. , PETRONILHO J. , BRANQUINHO A. *"On inverse problems for orthogonal polynomials (I)"*.J. of Comp. and Appl. Math. **49** (1993),153-160.

[44]. MARCELLAN F., PRIANES E.*"Orthogonal polynomials and Stieltjes functions:The Laguerre-Hahn case"*.Ren. di Matematica. Roma.En prensa.

[45].MARONI P. *"Une généralisation du théoreme de Favard-Shohat sur les polynômes orthogonaux"*.C.R. Acad. Sci. Paris **293** (1981) , 18-22.

[46].MARONI P. *"Sur quelques espaces de distributions qui sont des formes linéaires sur l´espace vectoriel des polynômes "*. En Polynômes Orthogonaux et Applications. C.Brezinski et al. editors. Lecture Notes in Math. Vol **1171**. Springer-Verlag Berlin 1985, 184-194.

[47].MARONI P. *"Sur la suite associée à une suite de polynômes"*. Publ. du Labo. Analyse Numérique , CNRS **86012**, Paris (1986).

[48].MARONI P. " *Prolégomènes à l´étude des polynômes orthogonaux semiclassiques*". Ann.di Mat. Pura ed Appl. **4** **(149)** (1987) , 165-184.

[49].MARONI P. *"Le calcul des formes linéaires et les polynômes orthogonaux semi-classiques"*.En Orthogonal Polynomials and their Applications.M.Alfaro et al. eds.Lecture Notes In Math~~. Vol. 1329. Springer-Verlag, Berlin (1988),279-290.~~

[50].MARONI P. *"Sur la suite de polynômes orthogonaux associée à la forme $u=\delta_c+\lambda(x-c)^{-1}L$".* Period. Math. Hung. **21 (3)** (1990),223-248.

[51].MARONI P. *"Une théorie algébrique des polynômes orthogonaux : Applications aux polynômes orthogonaux semi-classiques".*En Orthogonal Polynomials and their Applications. C.Brezinski et al. Editors.Annals on Computing and Appl. Mathematics.Vol. **9** .J.C.Baltzer AG. ,Basel 1991 ,98-130.

[52].MARONI P. *"Variations autour des polynômes orthogonaux classiques ".* C.R. Acad. Sci. Paris t. **313**. Série I (1991) , 209-212

[53].MARONI P. *" Variations around classical orthogonal polynomials : connected problems"* . J. Comp. and Appl. Math . **48** (1993) , 133-156.

[54].MARONI P. *" An introduction to second degree forms".*Advanced in Comp.Math. **3** (1995), 59-88.

[55].MARONI P. *"Modified classical orthogonal polynomials associated with oscilling function.Open problems".*Appl. Num. Math. **15** (1994) , 259-283.

[56].MARONI P. *"Tchebychev forms and their perturbed as second degree forms".* Annals of Numerical Math. **2** (1995),123-144.

[57].MORTON R.D. , KRALL A.M. *"Distributional weight functions for orthogonal polynomials".* SIAM J. Math. Anal. Vol **9** **(4)** (1978) , 6o4-626.

[58].NEVAI P. , VAN ASSCHE W.*"Compact perturbations of orthogonal polynomials".* Pacific J.Math.**153** (1992) , 163-184.

[59].NEVAI P.*"Orthogonal Polynomials".*Memoirs of the Amer. Math. Soc.Vol. **213**.Providence, Rhode Island , (1979).

[60].NIKIFOROV A. , OUVAROV V . *"Fonctions speciales de la Physique Mathématique".* MIR. Moscú, 1983 .

[61].PEHERSTORFER F. *" Finite perturbations of orthogonal polynomials".* J.of Comp. and Appl.Math. **44** (1992) , 275-302.

[62].RONVEAUX A. , MARCELLAN F. *"Co-recursive orthogonal polynomials and fourth-order differential equation"* .J. of Comp. and Appl.Math. **25 (1)** (1989), 105-109.

[63].RONVEAUX A. , BELMEHDI S. , DINI J., MARONI P.*"4th order differential equation for the co-modified of semi-classical orthogonal polynomials".* Journal Comp.Appl.Math. **29 (2)** (1989),225-231.

[64].SCHAEFER H.H. *" Espacios Vectoriales Topológicos".* Ed. Teide.Barcelona ,1974 .

[65].SHERMAN J. *"On the numerators of the convergent of the Stieltjes continued fractions".*Trans.Amer.Math.Soc. Vol. **35** 1933), 64-87.

[66].SLIM H.A. *"On co-recursive orthogonal polynomials and their application to potential scattering"*. J. of Math. Analysis and Appl. **136** (1988) , 1-19.

[67].TREVES F. *"Topological vector spaces , distributions and kernels "*. Academic. Press. New York ,1967.

[68].VICH R. *"Z-Transform theory and applications"*.D.Reidel Publishing Co.Dordrecht, 1987 .

[69].WIMP J. *"Explicit formulas for the associated Jacobi polynomials and some applications"*. Canad. J. Math. **39** (1987) , 983-1000.