VALORES FRONTERA DE FUNCIONES ARMONICAS. GEODESICAS EN SUPERFICIES DE RIEMANN.

José González Llorente

Director de tesis:
José Luis Fernández Pérez.

Memoria para aspirar al grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas.

Departamento de Análisis Matemático.
Universidad Complutense de Madrid.

Mayo de 1993.

A mis padres,
que han compartido conmigo
alegrías y sacrificios

y a Raquel,
que siempre ha estado cerca
de mí para apoyarme.

A ellos les dedico esta tesis.

Hace poco menos de cinco años tuve la fortuna de que José Luis Fernández comenzase a dirigir mi tesis. El me ha enseñado, durante todo este tiempo, a contemplar el intrincado paisaje matemático desde diversas y variadas perspectivas. Le agradezco de corazón el esfuerzo que ha derrochado en esta tarea y la comprensión y perseverancia que ha demostrado ante mis equivocados puntos de vista. La totalidad de esta tesis está indisolublemente unida a su interés y dedicación. Pero no sólo me ha enseñado matemáticas. Me ha enseñado también a comprender el significado de dos palabras : entrega y generosidad. Puede que vaya olvidando lo primero con el paso del tiempo; esto último espero no olvidarlo nunca.

Agradezco sinceramente a mi profesor de Bachillerato y amigo, Enrique Velázquez, la confianza que depositó en mí y los consejos que siempre me ha dado. El me animó a descubrir la belleza que encerraban las matemáticas y a introducirme de lleno en ellas.

Quiero dar las gracias al prof. J.L. González Llavona por el interés que ha puesto en mi trayectoria y por la buena disposición que siempre he encontrado en él cuando le he necesitado.

Deseo expresar mi agradecimiento al prof. Ansemil por el tiempo y la ayuda que me ofreció durante la Licenciatura y por la cordialidad con que siempre me ha recibido.

Mis agradecimientos asimismo al prof. B. Rubio por su amable colaboración durante estos últimos meses.

Gracias también a toda mi familia y a mis amigos de la U. Autónoma y de la U. Complutense por su apoyo y su aliento.

El destructor de cizaña, cardos y espinas es un benefactor tanto si siembra como si no.

ROBERT G. INGERSOLL

INDICE

INTRODUCCION.

Esta memoria está formada por dos partes, la primera analítica y probabilistica y la segunda geométrica. En la primera parte se estudian propiedades frontera de funciones armónicas en el disco unidad. En la segunda parte se usan los resultados analíticos de la primera con el fin de obtener información acerca del comportamiento asintótico de geodésicas en superficies de Riemann.

El estudio de las propiedades frontera de funciones analíticas (o armónicas) en el disco unidad constituye una rama clásica en la teoría de funciones de variable compleja. El trabajo de Fatou [F] fue el primero en el que se aplicó la entonces incipiente teoría de integración de Lebesgue al análisis de problemas frontera en variable compleja. El siguiente teorema es uno de los resultados clásicos de la teoría.

Teorema (Fatou) *Si u es una función armónica acotada en el disco unidad entonces para todo $e^{i\theta}$ en la circunferencia unidad, excepto quizás un conjunto de medida de Lebesgue cero, $u(z)$ tiende a un límite finito cuando z tiende a $e^{i\theta}$ dentro de cada cono simétrico (respecto del radio correspondiente a $e^{i\theta}$) de vértice $e^{i\theta}$ y apertura inferior a π.*

Si $e^{i\theta}$ es un punto de la circunferencia unidad, $0 \le \alpha < \pi/2$ y $0 < r < 1$, se define el cono de Stolz truncado.

$$C(e^{i\theta},\alpha,r) = \{ e^{i\theta}z : |\mathrm{Arg}(1-z)| \le \alpha, \quad r \le |z| < 1 \}$$

donde Arg representa la elección del argumento en $[-\pi, \pi)$.

Si f es una función definida en el disco unidad, Δ, con valores complejos, y $p \in \hat{\mathbb{C}}$, el plano complejo ampliado, se dirá que f tiene límite no tangencial p en el punto $e^{i\theta}$ (y se denotará $e^{i\theta} \in F(u,p)$) si para cada $\alpha \in [0,\pi/2)$, $f(z)$ tiende a p cuando z tiende a $e^{i\theta}$ dentro de algún cono de Stolz $C(e^{i\theta},\alpha,r)$. El conjunto de todos los puntos de la circunferencia unidad, $\partial\Delta$, en los que f tiene límite no tangencial finito se denomina conjunto de Fatou de f y se designará $F(f)$. Así, el teorema de Fatou se puede enunciar diciendo que casi todo $e^{i\theta} \in \partial\Delta$ es un punto de Fatou de cualquier función armónica acotada en Δ.

Resulta natural preguntarse si el teorema de Fatou seguiría siendo cierto relajando las condiciones de crecimiento de

$$\max \{|u(z)| : |z| \le r\}$$

pero lo cierto es que existen funciones armónicas de crecimiento arbitrariamente lento que no tienen límite radial (finito o infinito) en ningún punto de la circunferencia unidad [Mc2], en particular su conjunto de Fatou es vacío.

Una pregunta que cabe plantearse es qué se puede decir acerca del comportamiento frontera de una función armónica cuyo conjunto de Fatou sea pequeño. Una primera respuesta viene dada por el teorema de Plessner ([Pl], [P]) que, de modo informal, dice que el comportamiento frontera de las funciones analíticas es "muy regular" o "muy irregular":

Teorema (Plessner): *Si f es analítica en Δ entonces para todo $e^{i\theta} \in \partial\Delta$, salvo quizás un conjunto de medida de Lebesgue cero, o bien $e^{i\theta} \in F(f)$ o bien la imagen por f de cualquier cono de Stolz truncado de vértice*

$e^{i\theta}$ *es densa en* $\hat{\mathbb{C}}$.

La dicotomía expresada en el teorema de Plessner puede ser formulada geométricamente como una propiedad de las geodésicas en cualquier superficie de Riemann, según se verá más adelante.

El teorema de Plessner tiene varias consecuencias interesantes:

Teorema de Fatou local. *Sea u una función armónica en el disco unidad* Δ *y sea E un subconjunto de* $\partial\Delta$ *tal que para todo* $e^{i\theta} \in E$ *existe algún cono de Stolz truncado de vértice* $e^{i\theta}$ *en el que u es acotada superior o inferiormente. Entonces casi todo punto de E es de Fatou.*

Teorema de Unicidad de Privalov: *Si f es analítica no constante en el disco unidad y* $p \in \hat{\mathbb{C}}$, *entonces f tiene límite no tangencial p en, a lo sumo, un subconjunto de medida cero de la circunferencia unidad.*

Si u es armónica en Δ, el teorema de Privalov aplicado a la función $f = e^{u+i\tilde{u}}$, donde $\tilde{u}$ es una conjugada armónica de u, proporciona el siguiente teorema de unicidad para funciones armónicas:

Corolario: *Si u es armónica en el disco unidad, entonces u tiene límite no tangencial infinito en, a lo sumo, un subconjunto de medida cero de la circunferencia unidad.*

Estos resultados muestran que cuando se analiza el comportamiento frontera de funciones analíticas o armónicas en el disco unidad surgen de forma natural, asociados a las funciones, algunos subconjuntos especiales de medida cero en la circunferencia unidad. Por ello se necesita disponer de alguna herramienta que permita distinguir el tamaño de distintos conjuntos de medida (de Lebesgue) cero. La herramienta que se utiliza en este trabajo es la dimensión de Hausdorff, que se introduce a continuación.

Si $E \subset [0,1]$ y $0 \le \alpha \le 1$, se define el contenido de Hausdorff α - dimensional, $M_\alpha(E)$, como el ínfimo de las sumas

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k|^\alpha$$

donde $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un recubrimiento por intervalos de E y $|I_k|$ es la longitud de I_k.

Cuando $\alpha = 1$, $M_1(E)$ es la medida exterior de Lebesgue de E, y se designa $|E|$.

Si en al definición de α - contenido se exige que los intervalos que forman el recubrimiento sean diádicos se obtiene el α - contenido diádico M_α^d que es comparable con el ordinario:

$$M_\alpha \le M_\alpha^d \le 3M_\alpha$$

La dimensión de Hausdorff de E se define así:

$$\dim E = \inf \{\alpha \in [0,1] : M_\alpha(E) = 0 \}$$

Nótese que la desigualdad $M_\alpha(E) > 0$ implica $\dim E \ge \alpha$.

Un procedimiento habitual para estimar inferiormente la dimensión de Hausdorff de un subconjunto de [0,1] es la construcción de una medida en [0,1] que tenga masa positiva en dicho conjunto. Concretamente:

Sea μ una medida finita positiva en [0,1] que verifica $\mu(I) \le C|I|^\alpha$ para todo intervalo I y alguna constante positiva C. Si $E \subset [0,1]$ y $\mu(E) > 0$, entonces $\dim E \ge \alpha$ (0.1)

Para probar (0.1) basta observar que si $E \subset [0,1]$, $\mu(E) > 0$ y $\{I_k\}$ es un recubrimiento de E por intervalos, entonces

$$0 < C^{-1}\mu(E) \leq \sum_k |I_k|^\alpha$$

En este trabajo se ha preferido introducir la dimensión de Hausdorff a través del contenido en lugar de la medida de Hausdorff debido a la mayor simplicidad y mejor manejabilidad de la definición. Las propiedades básicas de la medida y el contenido de Hausdorff pueden consultarse en [Ro], [C].

Una noción similar a la de α - contenido es la de α - capacidad. Si μ es una medida positiva finita en $\mathbb{C}$, se define la integral de energía $I_\alpha(\mu)$, $(0 \leq \alpha < 2)$ de la forma

$$I_\alpha = \iint \varphi_\alpha(|x - y|)\, d\mu(x)\, d\mu(y)$$

donde

$$\varphi_\alpha(t) = \begin{cases} \log \dfrac{1}{t}, & \text{si } \alpha = 0 \\ t^{-\alpha}, & \text{si } 0 < \alpha < 2 \end{cases}$$

Si F es un subconjunto de $\mathbb{C}$, la α - capacidad de F, que se designará $\text{cap}_\alpha(F)$, se define mediante la expresión:

$$\varphi_\alpha(\text{cap}_\alpha(F)) = \inf\{I_\alpha(\mu) : \mu \text{ es una probabilidad en } F\}$$

y si E es un subconjunto cualquiera de $\mathbb{C}$, se define la α - capacidad de E como

$$\text{cap}_\alpha(E) = \sup\{\text{cap}_\alpha(F) : F \subset E,\ F \text{ compacto}\}$$

Cuando $\alpha = 0$, la 0 - capacidad recibe el nombre de capacidad logarítmica. La importancia de la capacidad logarítmica reside en que los conjuntos de capacidad logarítmica cero pueden ser considerados como conjuntos de tamaño despreciable en ciertos problemas de extensión analítica.

Si $E \subset [0,1]$, la dimensión capacitaria

$$\dim_c(E) = \inf \{\alpha \in [0,1] : \mathrm{cap}_\alpha(E) = 0 \}$$

coincide con la dimensión de Hausdorff ([C], Pag. 28).

A lo largo de todo el trabajo, el intervalo $[0,1]$ se identificará sistemáticamente con la circunferencia unidad $\partial\Delta$, mediante la aplicación $t \longrightarrow e^{i2\pi t}$. La medida de Lebesgue de un subconjunto $E \subset \partial\Delta$ será denotada igualmente por $|E|$ y la identificación anterior permite hablar de α - contenido y dimensión de Hausdorff de subconjunto de $\partial\Delta$.

La adopción de puntos de vista probabilísticos constituye uno de los aspectos relevantes de esta memoria. Concretamente, ha resultado muy ventajoso interpretar problemas de valores frontera de funciones armónicas en términos del comportamiento asintótico de martingalas en el intervalo unidad.

Puesto que los ejemplos de martingalas que aparecen en el capítulo I son bien concretos, se elude dar la definición abstracta de martingala, que puede consultarse en [Sh], [St]. Algunos casos particulares son las sumas de variables aleatorias independientes y las martingalas diádicas en $[0,1]$. Una martingala diádica en $[0,1]$ es una sucesión (S_n) de funciones escalonadas de forma que cada S_n es constante en los intervalos diádicos de la generación n (los intervalos $[m2^{-n},(m+1)2^{-n}]$, $0 \le m \le 2^n - 1$) y el valor que toma S_n en cada intervalo de la generación n es la medida de los valores que toma S_{n+1} en sus dos hijos diádicos de la generación $n+1$ (Obsérvese la analogía con la propiedad de la media de las funciones armónicas).

Un ejemplo muy interesante de martingalas diádicas en [0,1] lo constituye las sumas de las funciones de Rademacher. Si X_1 es la función que vale + 1 en [0,1/2) y - 1 en [1/2, 1], defínanse

$$X_k(t) = 2^k t - [2^k t] \qquad (t \in [0,1], \quad k \in \mathbb{N})$$

donde [a] denota la parte entera de a. (X_k) son las funciones de Rademacher en [0,1] y las sumas

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

forman una martingala diádica en [0,1], cuyos incrementos $S_n - S_{n-1}$ tienen siempre valor absoluto 1. La martingala (S_n) puede interpretarse probabilísticamente como la fortuna después de n jugadas de un jugador que lanza una moneda, cada una de cuyas dos caras sale con probabilidad 1/2, y gana o pierde una unidad en cada intento, según acierte o no acierte. Si, por ejemplo, los éxitos se representan por ceros y los fracasos por unos, entonces el conjunto de todas las opciones del juego se identifica con el conjunto de todas las sucesiones formadas por ceros y unos, es decir, con el intervalo [0,1]. Resultados clásicos (ver por ejemplo [Fe]) afirman que las fortunas poseen un carácter totalmente oscilante para casi todas las posibilidades del juego:

$$\limsup_{n\to\infty} S_n(t) = +\infty\ , \quad \limsup_{n\to\infty} S_n(t) = -\infty\ , \quad \text{para casi todo } t \in [0,1]$$

En particular el conjunto

$$\{t \in [0,1] \ :\ \lim_n S_n(t) = +\infty\ \}$$

en el que la fortuna tiende a infinito tiene medida cero. Sin embargo la pregunta natural que surge es la siguiente: ¿Cómo de grande es este conjunto? Por ejemplo ¿ cuál es su dimensión de Hausdorff ?

La respuesta es que se trata de un conjunto de dimensión de Hausdorff uno. El razonamiento que permite llegar a esta conclusión es especialmente ilustrativo y se ofrece a continuación.

Para empezar, se elige un número positivo a, $1/2 < a < 1$. Se construirá una medida de probabilidad en $[0,1]$ mediante un procedimiento iterativo. En el primer paso, se asigna masa a al intervalo $[0,1/2)$ y masa $1 - a$ al intervalo $[1/2, 1]$. En el segundo paso se independiza la asignación, es decir, se asigna a los intervalos $[0,1/4)$, $[1/4, 1/2)$, $[1/2, 3/4)$, $[3/4, 1]$ masas a^2, $a(1 - a)$, $(1 - a)a$, y $(1 - a)^2$ respectivamente. Habiéndose seguido este proceso hasta el paso n, la forma de continuar es clara: Si I es un intervalo diádico de la generación n, la masa asignada a sus dos "hijos" diádicos de la generación $n + 1$ es el producto de la masa asignada a I por el factor a si se trata del "hijo izquierdo" o por $1 - a$ si se trata del "hijo derecho"

Se demuestra ([Sh] Pag. 150) que esta asignación realmente define una medida de probabilidad μ en $[0,1]$. Si I es un intervalo diádico de la generación n entonces, por definición:

$$\mu(I) = a^k(1 - a)^{n-k} \tag{0.2}$$

donde k es el número de veces que se ha elegido la izquierda para llegar a I o, en lenguaje lúdico, el número de éxitos en las primeras n jugadas. En particular

$$\mu(I) \le a^n = |I|^\alpha$$

donde $\alpha = (\log \frac{1}{a})(\log 2)^{-1}$.

Las funciones de Rademacher (X_n) son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas respecto de la probabilidad μ y de la ley fuerte de los grandes números [Fe] se deduce:

$$\lim_n \frac{S_n(t)}{n} = \int_0^1 X_1 d\mu = 2a - 1 > 0$$

para casi todo $t \in [0,1]$ respecto de la medida μ. (En [Bi], Pag. 141 se utiliza el teorema ergódico. Ver también [Hw], Pag. 29). Por tanto, existe un conjunto $E \subset [0,1]$, con $\mu(E) = 1$ tal que, para todo $t \in E$, la fortuna $S_n(t)$ tiende a $+\infty$ con el máximo crecimiento.

De (0.1) y (0.2) se deduce pues:

$$\dim \{ t \in [0,1] : \lim_n S_n(t) = +\infty \} \geq \alpha$$

y el resultado anunciado se obtiene cuando a se hace tender a 1/2.

Si (n_k) es una sucesión de enteros que satisface la condición de Hadamard:

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq q > 1 \qquad (k \in \mathbb{N})$$

la sucesión $(e^{in_k\theta})$ $0 \leq \theta < 2\pi$, se comporta en muchos aspectos como una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Este hecho ha sido extensamente abordado en la literatura matemática de los últimos cuarenta años; por ejemplo se han obtenido resultados análogos a las leyes de los grandes números, el teorema central del límite y la ley del logaritmo iterado ([SZ_1], [SZ_2], [W], [K]) para las sumas trigonométricas,

$$T_n(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\theta n_k)$$

y de ellos se deducen resultados paralelos para los límites radiales de las series lacunares

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \, z^{n_k}$$

En el caso particular $n_k = 2^k$, $a_k = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene, igual que en el ejemplo del lanzamiento de la moneda:

$$\limsup_{n \to \infty} T_n(\theta) = +\infty, \quad \liminf_{n \to \infty} T_n(\theta) = -\infty \quad \text{para casi todo } \theta \in [0,2\pi]$$

y también ([Hw], Pag. 29):

$$\dim \{\theta \in [0,2\pi] : \lim_n T_n(\theta) = +\infty\} = 1$$

Si

$$u(z) = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} z^{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} r^{2^k} \cos(\theta 2^k) \qquad (z = re^{i\theta})$$

se desprende de un cálculo sencillo que existe una constante absoluta $C > 0$ tal que

$$|T_n(\theta) - u(re^{i\theta})| \le C \quad \text{si} \quad 1 - 2^{-n} \le r < 1 - 2^{-(n+1)}$$

En consecuencia:

$$\limsup_{r \to 1} u(re^{i\theta}) = +\infty, \quad \liminf_{r \to 1} u(re^{i\theta}) = -\infty \quad \text{para casi todo } \theta \in [0,2\pi]$$

y

$$\dim \{ \theta \in [0,2\pi] : \lim_{r \to 1} u(re^{i\theta}) = +\infty \} = 1$$

Una función análitica f en el disco unidad es de Bloch [P] si

$$\operatorname{Sup} \{ (1 - |z|^2)|f'(z)| : |z| < 1 \} < \infty$$

De forma análoga, se dirá que una función armónica u en el disco unidad es de Bloch si es la parte real de una función de Bloch, o equivalentemente:

$$\sup \{(1 - |z|^2)|\nabla u(z)| : |z| < 1 \} < \infty$$

donde ∇u es el gradiente de u.

Las series lacunares proporcionan ejemplos interesantes de funciones de Bloch. Una serie lacunar

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{n_k}, \qquad \frac{n_{k+1}}{n_k} \geq q > 1, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

es de Bloch si y sólo si [ACP]:

$$\sup_k |b_k| < \infty$$

El ejemplo anterior, $\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} z^{2^k}$, es un caso particular del siguiente teorema de Anderson - Pitt [AP_2], refinado posteriormente por Makarov [M_1], [M_2], que ha constituido uno de los puntos de arranque de este trabajo:

Teorema: *Si u es una función armónica de Bloch en el disco unidad, y I es un arco de la circunferencia unidad, entonces o bien* $|F(u) \cap I| > 0$ *o bien*

$$\dim \{e^{i\theta} \in I : \lim_{r\to 1} u(re^{i\theta}) = +\infty \} = 1$$

En [M_2], se aproxima la función u por una martingala diádica en [0,1]. La propiedad de Bloch se traduce en la acotación uniforme de los incrementos de la martingala y el procedimiento de aproximación permite deducir el teorema anterior del siguiente resultado análogo para martingalas:

Teorema: *Si* (S_n) *es una martingala diádica en [0,1] cuyos incrementos* $S_n - S_{n-1}$ *son uniformemente acotados, entonces o bien* $S_n(t)$ *tiene límite finito cuando n tiende a infinito en un subconjunto de [0,1] de medida positiva, o bien*

$$\dim \{t \in [0,1] : \lim_n S_n(t) = +\infty \} = 1.$$

La condición de Bloch es una fuerte restricción sobre la derivada. Por ejemplo, si una función es de Bloch, entonces crece a lo sumo como $\log(1 - |z|)^{-1}$ pero el recíproco no es cierto. De hecho, como ya se ha mencionado, existen funciones armónicas de crecimiento arbitrariamente lento que no tienen límite radial (finito o infinito) en ningún punto y en particular no son de Bloch.

Por consiguiente, si no se imponen condiciones sobre la derivada de la función, los límites radiales no ofrecen una panorámica completa del comportamiento frontera y se hace necesario el uso de formas menos restrictivas de convergencia que ayuden a describirlo,. Se dice que una función f definida en Δ tiene límite asintótico $p \in \hat{\mathbb{C}}$ en el punto $e^{i\theta} \in \partial\Delta$ si existe un camino $\gamma : [0,1) \longrightarrow \Delta$ tal que $\gamma(t) \longrightarrow e^{i\theta}$ cuando $t \to 1$ y $f(\gamma(t)) \longrightarrow p$ cuando $t \longrightarrow 1$. El conjunto de puntos en los que f tiene límite asintótico p se denota $A(f,p)$.

Para cada $\alpha \in [0,1)$, se define la clase $\mathcal{M}_\alpha$ de todas las funciones armónicas en el disco unidad que satisfacen:

$$\sup \{(1 - |z|)^\alpha u(z) : z \in \Delta \} < \infty$$

La clase $\mathcal{M}_\alpha$ es invariante por composición con funciones analíticas de Δ en Δ:

Si $u \in \mathcal{M}_\alpha$ y $f : \Delta \longrightarrow \Delta$ es analítica, entonces $u \circ f \in \mathcal{M}_\alpha$ (0.3)

En efecto, dada $f:\Delta \longrightarrow \Delta$ analítica, existe un automorfismo del disco unidad φ, y $g : \Delta \longrightarrow \Delta$ analítica, con $g(0) = 0$ tal que $f = \varphi \circ g$. Por tanto (Ver [G], Pag 2):

$$1 - |f(z)|^2 = |\varphi'(g(z))|(1 - |g(z)|^2) \geq C(1 - |z|^2) \qquad (z \in \Delta)$$

y $u \circ f \in \mathcal{M}_\alpha$.

Se ha obtenido el siguiente resultado paralelo al teorema de

Anderson - Pitt - Makarov para crecimientos más generales ([FLL_1]):

Teorema 1. *Para cada* $\alpha \in [0,1)$ *existe una constante positiva* C_α *que sólo depende de* α *tal que, si* $u \in M_\alpha$ *y* I *es un arco de la circunferencia unidad, entonces* $|F(u) \cap I| > 0$ *ó*

$$M_{1-\alpha}(A(u, +\infty) \cap I) \geq C_\alpha |I|^{1-\alpha}$$

y en particular u *tiene límite asintótico* $+\infty$ *en un subconjunto de* I *de dimensión de Hausdorff al menos* $1 - \alpha$.

Los teoremas que configuran este trabajo se distinguen por ir numerados. El resto de los teoremas que se citen no llevan número

La prueba del teorema 1 usa una adaptación de un argumento de Makarov [M_1]. Conviene señalar que Berman ha obtenido el siguiente resultado relacionado [B_1]:

Teorema *Si* f *es analítica en* Δ *y*

$$\sup \{(1 - |z|^\alpha)|f(z)| \, : \, z \in \Delta \} < \infty \qquad (0 \leq \alpha < 1)$$

entonces para cada arco I *de la circunferencia unidad,* $|F(f) \cap I| > 0$ *ó*

$$M_{1-\alpha}(A(f,\infty) \cap I) > 0$$

Nótese que el teorema de Berman, a diferencia del teorema 1, es aplicable a funciones subarmónicas de la forma $u = \log|f|$, mientras que, por otra parte, el teorema 1 proporciona una estimación uniforme del $1 - \alpha$ contenido. No se ha conseguido hasta ahora, unificar las técnicas usadas en las demostraciones de ambos resultados.

El teorema 1 tiene el siguiente análogo para capacidades:

Teorema 2. *Si* u *es armónica en* Δ *y verifica:*

$$\iint_\Delta \frac{u^2(z)}{(1 - |z|)^\beta} \, dx \, dy < \infty$$

donde $0 < \beta < 1$, *existe una constante positiva* C_β *que sólo depende de* β *tal que, si* I *es un arco de* $\partial\Delta$, *entonces* $|F(u) \cap I| > 0$ *ó*

$$cap_{1-\beta}(A(u, +\infty) \cap I) \geq C_\beta |I|^{1-\beta}$$

Las conclusiones del teorema 1 conducen a preguntarse qué restricciones sobre el gradiente se necesita imponer para poder deducir la existencia de límites radiales a partir de la existencia de límites asintóticos.

El clásico teorema de Lindelöf ([CL] Pag. 19) dice que si una función analítica acotada en Δ tiene límite asintótico en $e^{i\theta}$, entonces tiene el mismo límite no tangencial en $e^{i\theta}$. Esta conclusión sigue siendo válida con restricciones bastante menos severas sobre la función. Este hecho fue extensamente desarrollado por Lehto y Virtanen [LV], que introdujeron el concepto de función normal. Una función analítica en Δ se llama normal si

$$\sup \{(1 - |z|^2)(1 + |f(z)|^2)^{-1}|f'(z)| : |z| < 1 \} < \infty$$

Lehto y Virtanen demostraron el siguiente resultado (Ver [P], Pag.268):

<u>Teorema</u> *Si f es normal y tiene límite asintótico* $a \in \hat{\mathbb{C}}$ *en un punto de la circunferencia unidad entonces f tiene límite no tangencial a en el mismo punto.*

Si u es armónica en Δ y su gradiente satisface una condición de crecimiento del tipo

$$|\nabla u(z)| \leq C\, e^{|u(z)|} \qquad (z \in \Delta)$$

se comprueba fácilmente que la función $f = \exp(u + i\tilde{u})$, donde $\tilde{u}$ es una conjugada armónica de u, es normal. Por tanto, si u tiene límite asintótico $+\infty$, también tiene límite no tangencial $+\infty$. El próximo resultado dice que basta con que exista "alguna" restricción sobre el gradiente en términos de la función para que esto siga siendo cierto.

Teorema 3. *Sea u armónica en el disco unidad y supóngase que existe* $\phi : [0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ *no decreciente, tal que*

$$(1 - |z|^2)|\nabla u(z)| \le \phi(|u(z)|) \qquad (z \in \Delta)$$

Si u tiene límite asintótico $+\infty$ *en* $e^{i\theta}$ *entonces u tiene límite no tangencial* $+\infty$ *en* $e^{i\theta}$.

El teorema 1 junto con el teorema 3 proporcionan la siguiente versión del teorema 1 con límites radiales:

Corolario 1. *Supóngase que* $u \in \mathcal{M}_\alpha$, $0 \le \alpha < 1$ *y*

$$(1 - |z|^2)|\nabla u(z)| \le \phi(|u(z)|) \qquad (z \in \Delta)$$

para alguna función $\phi : [0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ *no decreciente. Si I es un arco de* $\partial\Delta$, *entonces* $|F(u) \cap I| > 0$ *ó*

$$M_{1-\alpha}(F(u, +\infty) \cap I) \ge C_\alpha |I|^{1-\alpha}$$

donde C_α *es una constante positiva que sólo depende de* α.

La siguiente cuestión que se aborda es la construcción de funciones armónicas en las clases $\mathcal{M}_\alpha$ cuyos límites radiales presenten un comportamiento determinado. En vista del valor de la dimensión de Hausdorff que se obtiene en el teorema 1, resulta natural preguntarse si existirían funciones armónicas en la clase $\mathcal{M}_\alpha$ cuyo conjunto de Fatou tuviese medida (de Lebesgue) cero y cuyos límites radiales fuesen $+\infty$ en un conjunto de dimensión $1 - \alpha$.

Para la construcción de este tipo de ejemplos se ha aprovechado el paralelismo, ya esbozado en esta introducción, entre funciones armónicas en Δ y martinglas en $[0,1]$ mediante el cual el crecimiento de la función "se corresponde" con el crecimiento de la martingala y el comportamiento radial de la función "se corresponde" con la convergencia de la martingala. El primer paso ha sido, pues, construir martingalas en $[0,1]$ que satisfagan las propiedades paralelas a las exigidas a las funciones.

Si $\alpha \in [0,1]$, $p \in \mathbb{N}$ y δ es un número positivo, con $p^{-\alpha} \leq \delta < 1$, se define:

$$X_0(t) = \begin{cases} +1 & , \quad 0 \leq t \leq \delta \\ -\delta(1-\delta)^{-1} & , \quad \delta < t \leq 1 \end{cases}$$

$$X_k(t) = X_0(p^k t - [p^k t]) \qquad (k \in \mathbb{N},\ t \in [0,1])$$

donde $[a]$ simboliza la parte entera de a. Obsérvese que X_k "reproduce" X_0 en cada intervalo $[mp^{-k}, (m+1)p^{-k}]$ con $0 \leq m \leq p^k - 1$.

Sea

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} p^{k\alpha} X_k(t) \qquad (t \in [0,1],\ n \in \mathbb{N})$$

La martingala (S_n) posee las siguientes propiedades de convergencia (ver lema 1.3):

i) $S_n = O(p^{n\alpha})$

ii) $S_n(t)$ no tiene límite finito, cuando n tiende a infinito, para ningún $t \in [0,1]$.

iii) El conjunto

$$\{t \in [0,1] : \lim_n S_n(t) = +\infty\}$$

tiene dimensión de Hausdorff $1 - (\log\frac{1}{\delta})(\log p)^{-1}$.

Nótese que el valor de la dimensión en iii) es exactamente $1 - \alpha$ con la elección $\delta = p^{-\alpha}$.

Ahora, si $\alpha \in [0,1]$, $\beta \in (0,\alpha]$ y $p \in \mathbb{N}$ es bastante grande, elíjase $\delta \approx p^{-\beta}$ y sea h la función armónica acotada en Δ cuyos valores frontera dados por:

$$h(e^{i2\pi t}) = X_0(t) \qquad\qquad (0 \le t \le 1)$$

es decir, h vale $+1$ en el arco $\{e^{it} : 0 < t < 2\pi\delta\}$ y $-\delta(1-\delta)^{-1}$ en su complementario. Obsérvese que

$$X_k(t) = h(e^{i2\pi tp^k}) \qquad\qquad (0 \le t \le 1, \quad k \in \mathbb{N})$$

Si se define ahora la función

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p^{k\alpha} h(z^{p^k}) \qquad\qquad (z \in \Delta)$$

que depende de α, β y p, es claro que

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} p^{k\alpha}\, h(e^{i2\pi tp^k})$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $t \in [0,1]$, luego la martingala (S_n) se recupera por medio de las sumas parciales de u. Las propiedades frontera de u se reflejan en el siguiente teorema:

<u>Teorema 4</u>. *Existe una constante absoluta $C > 0$ tal que*

a) *Si $\alpha \in [0,1]$ y $\beta \in (0,\alpha] \cap (0, 1/2)$ entonces $u \in \mathcal{M}_\alpha$, u no tiene límite radial finito en ningún punto de $\partial\Delta$ y u tiene límite radial $+\infty$ en un subconjunto de $\partial\Delta$ con dimensión de Hausdorff comprendida entre $1 - \beta$ y $1 - \beta + C(\log p)^{-1}$.*

b) *Si $\alpha \in [1/2, 1)$ y $\beta \in [1/2, \alpha]$ entonces $u \in \mathcal{M}_\alpha$, u no tiene límite radial finito en ningún punto de $\partial\Delta$ y u tiene límite radial $+\infty$ en un subconjunto de $\partial\Delta$ con dimensión de Hausdorff comprendida entre β y*

$\beta + \log(C\log p)(\log p)^{-1}$.

Obsérvese que el teorema 4 proporciona valores de la dimensión siempre mayores que 1/2. Algunas modificaciones de la construcción anterior permiten eliminar los términos de error, así como obtener mejores cotas inferiores de la dimensión:

Teorema 5

a) *Si* $\alpha \in [0,1)$ *y* $\beta \in (0,\alpha] \cap (0,1/2]$, *existe* $u \in \mathcal{M}_\alpha$ *tal que u no tiene límite radial finito en ningún punto de* $\partial\Delta$ *y u tiene límite radial* $+\infty$ *en un subconjunto de* $\partial\Delta$ *de dimensión de Hausdorff* $1 - \beta$.

b) *Si* $\alpha \in (1/2, 1)$, $\beta \in (1/2, \alpha]$, *existe* $u \in \mathcal{M}_\alpha$ *tal que u no tiene límite radial finito en ningún punto de* $\partial\Delta$ *y u tiene límite radial* $+\infty$ *en un subconjunto de* $\partial\Delta$ *de dimensión de Hausdorff* $(1 + 2\beta)^{-1}$.

Examinando las conclusiones del teorema 4 se constata que el mecanismo de intercambio entre funciones y martingalas que sirvió de motivación para la construcción de estos ejemplos ha dado los resultados esperados para valores de β menores que 1/2 pero se originan distorsiones para valores de β superiores a 1/2. Esta situación se transmite al teorema 5.

El teorema 5 es una variante del teorema 4 que de más información que éste porque proporciona dimensiones menores que 1/2 además de suprimir los términos de error. El precio que se paga por ello es el de una construcción más artificiosa pero cuyos aspectos técnicos esenciales se encuentran en el teorema 4. Se ha optado, pues, por ofrecer una prueba detallada del teorema 4 y dar una prueba más esquemática del teorema 5.

La razón de considerar series del tipo

$$\sum_{k=0}^{\infty} p^{k\alpha}\, h(z^{p^k})$$

en lugar de series trigonométricas

$$\mathrm{Re} \sum_{k=0}^{\infty} p^{k\alpha}\, z^{p^k}$$

se debe a que, si p es grande (lo cual es esncial en el argumento utilizado en el teorema 4) entonces la dimensión resultante en el caso trigonométrico es prácticamente 1 (del orden de $1 - C(\log p)^{-1}$), independientemente de α. De ahí que las series trigonométricas sean demasiado "rígidas" para los propósitos que se desean y se introduzca la función h con el fin de alcanzar una mayor flexibilidad que permita obtener un intervalo más amplio de valores de la dimensión.

El interés en el tipo de problemas que se ha tratado anteriormente surge del estudio del comportamiento asintótico de geodésicas en superficies de Riemann. Antes de presentar los problemas que se abordan en el segundo capítulo, conviene comenzar exponiendo las nociones básicas que configuran el punto de partida de la teoreía de superficies de Riemann. Los detalles pueden consultarse en ([A], [Be], [BO])

Una superficie de Riemann es una variedad compleja uno - dimensional. Por ejemplo todo dominio plano es, de forma natural, una superficie de Riemann.

Si S es una superficie de Riemann cualquiera, existe una superficie de Riemann simplemente conexa $\tilde{S}$, única salvo equivalencia

conforme, y una aplicación analítica $F : \tilde{S} \longrightarrow S$ que es una aplicación recubridora en sentido topológico. En particular F es localmente bianalítica. La superficie $\tilde{S}$ se llama recubrimiento uiversal de S aunque por razones que se explican más adelante, lo usual es emplear este término para referirse a la aplicación F. Si $F : \tilde{S} \longrightarrow S$ es un recubrimiento universal de S y $g : \tilde{S} \longrightarrow \tilde{S}$ es bianalítica entonces $F \circ g$ es también un recubrimiento universal de S y todos los recubrimientos universales se obtienen de esta forma. Dado un recubrimiento universal $F : \tilde{S} \longrightarrow S$, el grupo recubridor G asociado a F está formaddo por todas las aplicaciones bianalíticas (automorfismos) $g : \tilde{S} \longrightarrow \tilde{S}$ tales que $F \circ g = F$. G actua discontinuamente y sin puntos fijos y S es conformemente equivalente a $\tilde{S}/G$ (dos puntos $\tilde{p}$, $\tilde{q} \in \tilde{S}$ son equivalentes mediante G si existe $g \in G$ tal que $g(\tilde{p}) = \tilde{q}$).
Si F es un recubrimiento universal de S y g es un automorfismo de S, el grupo recubridor G_1 asociado a $F_1 = F \circ g$ es conjugado con G, concretamente $G_1 = g^{-1}Gg$.

En virtud del teorema de uniformización, toda superficie de Riemann simplemente conexa es conformemente equivalente a la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$, el plano complejo $\mathbb{C}$ o al disco unidad Δ, por tanto el recubrimiento universal de cualquier superficie de Riemann es, salvo equivalencia conforme, una de estas tres superficies canónicas y elgrupo recubridor estará formado por transformaciones de Moebius.

Si $\tilde{S} = \hat{\mathbb{C}}$, los automorfismos de $\tilde{S}$ son todas las transformaciones de Moebius. Puesto que cada transformación de Moebius tiene algún punto fijo, no hay grupos que actuen sin puntos fijos, y S debe ser conformemente equivalente a $\hat{\mathbb{C}}$.

Si $\tilde{S} = \mathbb{C}$, el grupo de automorfismos de $\tilde{S}$ está formado por todas las transformaciones de Moebius $z \longrightarrow az + b$. Si se exige que no haya puntos fijos debe ser $a = 1$ y si se exige que el subgrupo actue discontinuamente, los únicos subgrupos que quedan son los generados por una o dos traslaciones. Las superficies que se originan, aparte de $\mathbb{C} = \tilde{S}$, son $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ y los toros.

Las superficies S cuyo recubrimiento universal $\tilde{S}$ es $\hat{\mathbb{C}}$ ó $\mathbb{C}$ son por tanto las superficies conformemente equivalentes a $\hat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ o a un toro. Todas las demás tienen como recubrimiento universal al disco unidad Δ.

En todo lo que resta de trabajo la denominación "superficie de Riemann" se otorgará exclusivamente a las superficies cuyo recubrimiento universal es Δ.

El grupo de automorfismos de Δ, $\mathrm{Aut}(\Delta)$ está formado por las transformaciones de Moebius

$$T(z) = \lambda \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \qquad a \in \Delta, \qquad |\lambda| = 1$$

y por tanto el grupo recubridor de cualquier superficie de Riemann es un subgrupo de $\mathrm{Aut}(\Delta)$ que actua discontinuamente y sin puntos fijos.

Debido a la equivalencia conforme entre Δ y el semiplano superior $U = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\ z > 0\}$ a menudo se preferirá, por comodidad, considerar U como recubrimiento universal. El grupo de automorfismos de U, $\mathrm{Aut}(U)$, está formado por las transformaciones de Moebius:

$$T(z) = \frac{\overline{az + b}}{cz + d}\ ; \qquad a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}\ , \qquad ad - bc = 1$$

Los grupos recubridores pueden considerase igualmente como subgrupos de Aut(U). Por ejemplo, los grupos generados por la traslación $z \longrightarrow z + 1$ y por las homotecias $z \longrightarrow \lambda z$ $(\lambda > 0)$ son grupos recubridores del disco menos un punto $\Delta\setminus\{0\}$ y de los anillos centrados en 0.

La observación crucial debida a Poincaré es que los automorfismos de Δ son precisamente las isometrías que conservan orientación cuando se dota a Δ de la métrica que tiene por elemento de longitud

$$ds^2 = \frac{4}{(1 - |z|^2)^2}\,(dx^2 + dy^2) \qquad \text{ó} \qquad ds = \frac{2}{1 - |z|^2}\,|dz|$$

Esta métrica se conoce con el nombre de métrica de Poincaré. Se trata de un múltiplo variable de métrica euclídea y por tanto es conforme con ella. El disco unidad con la métrica de Poincaré es una métrica completa de curvatura constante -1 y constituye el modelo de Poincaré de la geometría hiperbólica. Las geodésicas son los diámetros y los arcos de circunferencia ortogonales a $\partial\Delta$.

La distancia de Poincaré, o distancia hiperbólica, en Δ se denotará d_Δ.

Si $z \in \Delta$,

$$d_\Delta(0,z) = \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

y en general, si $z,\ w \in \Delta$:

$$d_\Delta(z,w) = \log \frac{1 + \left|\dfrac{z - w}{1 - \bar{z}w}\right|}{1 - \left|\dfrac{z - w}{1 - \bar{z}w}\right|}$$

La métrica de Poincaré es la única métrica en Δ conforme con la métrica euclídea y de curvatura constante -1.

Mediante una transformación conforme, la métrica de Poincaré en Δ se transforma en métrica en U que tiene elemento de longitud

$$ds = \frac{|dz|}{y}$$

a la que se llamará métrica de Poincaré o hiperbólica en U. Δ y U son isométricos con sus respectivas métricas de Poincaré.

Si S es una superficie de Riemann y $F : \Delta \longrightarrow S$ es un recubrimiento universal de S entonces se puede representar $S = \Delta/G$ donde G es un grupo de isometrías de Δ. La métrica de Poincaré en Δ se proyecta por medio de F en una métrica riemanniana completa de curvatura -1 en S que convierte a F en una isometría local. Esta métrica se denomina métrica de Poincaré en S. Las geodésicas son ahora las imágenes por F de las geodésicas de Δ, es decir, las imágenes de los diámetros y los arcos de circunferencia ortogonales a $\partial\Delta$.

La distancia asociada, que se denota por d_S, es en realidad la distancia cociente:

$$d_S(p,q) = \inf \{d_\Delta(z,w) : z,\ w \in \Delta,\ \ F(z) = p,\ \ F(w) = q\} \quad (p,q \in S)$$

y se verifica que, para cada $p,q \in S$ y todo $a \in \Delta$ con $F(a) = p$, existe $b \in \Delta$ con $F(b) = q$ y $d_S(p,q) = d_\Delta(a,b)$.

La distancia d_S convierte a S en un espacio métrico completo que verifica la propiedad de Heine-Borel, es decir las bolas crradas son compactas.

El lema de Schwarz admite la siguiente formulación en términos de la distancia de Poincaré : si S_1, S_2 son dos superficies de Riemann y $f : S_1 \longrightarrow S_2$ es holomorfa entonces

$$d_{S_2}(f(p),\ f(q)) \leq d_{S_1}(p,q) \qquad (p,q \in S_1) \qquad (0,4)$$

Por consiguiente las funciones holomorfas decrecen distancias hiperbólicas.

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un dominio plano (distinto de $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}\setminus\{a\}$, con $a \in \mathbb{C}$) la métrica de Poincaré en Ω tiene elemento de longitud

$$d_s = \lambda_\Omega(z)|dz|$$

donde $\lambda_\Omega(z)$ es la densidad de Poincaré. Si $F : \Delta \longrightarrow \Omega$ es un recubrimiento universal de Ω, F es una isometría local y se deduce que

$$\lambda_\Omega(F(z))|F'(z)| = \frac{2}{1 - |z|^2} \qquad (z \in \Delta) \qquad (0.5)$$

de modo que conocer la densidad de Poincaré equivale a conocer el recubrimiento universal.

Si $\Omega_1 \subset \Omega_2$, se deduce de (0.4) la siguiente propiedad de comparación:

$$\lambda_{\Omega_2}(z) \leq \lambda_{\Omega_1}(z) \qquad (z \in \Omega_1) \qquad (0.6)$$

En general resulta imposible calcular explícitamente la densidad de Poincaré, así que sólo se puede aspirar a conseguir buenas estimaciones. Si $z \in \Omega \subset \mathbb{C}$ y $\delta_\Omega(z)$ es la distancia euclídea de z a la frontera de Ω se deduce de (0.4) la siguiente desigualdad general:

$$\lambda_\Omega(z) \leq \frac{2}{\delta_\Omega(z)} \qquad (0.7)$$

Las desigualdades en sentido opuesto son por lo general más delicadas, pues dependen de las características particulares del dominio Ω. La importancia de la densidad de Poincaré reside precisamente en que la geometría del dominio Ω se traduce en la existencia de ciertas cotas inferiores de la densidad y esto permite, según (0.5), conseguir estimaciones del crecimiento del recubrimiento universal de donde se obtienen facilmente, por subordinación, estimaciones de crecimiento de cualquier función analítica de Δ en Ω. Esta forma de proceder será utilizada a lo largo de la sección II.4, en la que se da una prueba moderna de un resultado clásico de Littlewood, basada en el uso de la métrica de Poincaré. Este es uno de los ejemplos que pone de manifiesto la transparencia con la que ciertos problemas de la teoría analítica de funciones pueden ser entendidos empleando técnicas geométricas como la métrica hiperbólica.

Si F es el recubrimiento universal de una superficie de Riemann y G es su grupo recubridor asociado, la órbita G(a) de un punto $a \in \Delta$ es el conjunto $\{g(a) : g \in G\}$. Puesto que todo grupo recubridor actua transitivamente (si $F(z) = F(w)$, existe $g \in G$ tal que $g(z) = w$), la órbita G(a) coincide con el conjunto $\{z \in \Delta : F(z) = F(a)\}$. Debido al carácter discontinuo de G, la órbita de cada punto es discreta y sólo se acumula en $\partial\Delta$ y el grupo G es numerable.

Si p es un punto de la superficie de Riemann S se define el radio de inyectividad de p, $\iota_S(p)$ como el supremo de los radios $r > 0$ tales que la bola $B_S(p,r)$ es simplemente conexa. De las propiedades básicas de las aplicaciones recubridoras se deduce que $\iota_S(p)$ es el supremo de los radios $r > 0$ tales que la restricción de recubrimiento universal F a la bola hiperbólica $B_\Delta(a,r)$, con $F(a) = p$, es una isometría. El radio de inyectividad puede expresarse en términos del grupo recubridor G. Se tiene ([Bu], Pag 96):

$$\iota_s(F(z)) = \frac{1}{2}\,\eta\,(z) \qquad (z \in A) \tag{0.8}$$

donde $\eta(z) = \inf\{d_\Delta(z, g(z)) : g \in G, \ g \neq \text{identidad}\}$

La relación (0.8) tiene siguiente interpretación geométrica: el radio de inyectividad de $p \in S$ es la mitad de la longitud de la curva cerrada no trivial más corta que pasa por p.

Tras esta parte preliminar se pueden exponer ya los problemas que se tratarán en este capítulo. La cuestión básica es la siguiente:

¿Cuantas geodésicas que parten de un punto arbitrario de una superficie de Riemann se marchan a infinito en la superficie?

En términos más precisos, sea S una supericie de Riemann, se elige $p \in S$ y se considera la circunferencia de direcciones en p, C(p), es decir, la circunferencia unidad en el espacio tangente en p. Para cada dirección $v \in C(p)$, se designa por $\gamma_v(t)$ la geodésica que parte de p con velocidad inicial v, parametrizada en $\mathbb{R}$. Se define la dimensión geodésica $\gamma(S,p)$ como la dimensión de Hausdorff del conjunto

$$\{v \in C(p) : \lim_{t\to\infty} d_s(p,\gamma_v(t)) = \infty\}$$

Evidentemente, $\gamma(S,p) \in [0,1]$. Se verá (Corolario 2.5) que $\gamma(S,p)$ no depende del punto base p y se designará simplemente por $\gamma(S)$.

Si F es un recubrimiento universal de Δ en S con $F(0) = p$, las imágenes por F de los radios que parten de 0 son precisamente las geodésicas que emanan de p. La aplicación tangente es una isometría entre el espacio tangente de Δ en 0 y el espacio tangente de S en p, de ahí que se identifiquen C(p) y $\partial\Delta$. Se tiene por tanto:

$$\gamma(S) = \dim \{\theta \in [0,2\pi] : \lim_{r\to 1} d_s(p,F(re^{i\theta})) = \infty\}$$

Por ejemplo, si $\Omega = \Delta\setminus\{0\}$, la función $F(z) = e^{iz}$ es un recubrimiento universal del semiplano U en Ω. Todas las geodésicas que partan de un punto cualquiera de Ω terminan en $\partial\Omega$ y por tanto se marchan a infinito en Ω (Nótese que la frontera de un dominio plano está a distancia hiperbólica infinita). Por tanto $\gamma(\Delta\setminus\{0\}) = 1$. En Ω hay curvas cerradas de longitud hiperbólica arbitrariamente pequeña que rodean el origen, situado por supuesto a distancia infinita. El origen representa geométricamente una cúspide que se alarga hasta el infinito y se estrecha cada vez más. De hecho, los entornos de 0 en Ω son isométricos a regiones de la pseudoesfera.

Si $\Omega = \hat{\mathbb{C}}\setminus\{0,1,\infty\}$, el recubrimiento universal de Ω es la clásica función modular (Ver por ejemplo [Fu], Pag.54). Los puntos $0,1,\infty$ son aislados en $\partial\Omega$ y cada uno de ellos "origina" una cúspide. En este caso sólo hay una cantidad numerable de geodésicas que, partiendo de un punto cualquiera, terminan en 0,1, ó ∞, y por tanto $\gamma(\Omega) = 0$. En realidad casi toda geodésica se acerca arbitrariamente a cada uno de los tres puntos o, de forma más gráfica, se introduce infinitas veces en cada una de las tres cúspides y alcanza "alturas" arbitrariamente grandes. La cuestión de la frecuencia con que las geodésicas penetran en las cúspides ha sido tratada en [S_2], [MP] y esta relacionada con problemas de aproximación diofántica.

Estos ejemplos se analizarán con más detalle en la sección II.3. Una aproximación heurística al problema parece sugerir que en el caso de dominios planos debería haber más geodésicas que se marchasen a infinito cuanto más grande (en algún sentido) fuese la frontera del dominio. Un teorema clásico de Nevanlinna (Ver [N], Pag. 209) da una respuesta extraordinariamente precisa a esta cuestión:

Teorema. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio distinto de $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ con $a \in \mathbb{C}$. Supóngase que $E = \partial\Omega$ es compacto y sea $F : \Delta \longrightarrow \Omega$ un recubrimiento universal de Ω. Entonces se verifica una de las dos alternativas siguientes:*

a) E tiene capacidad logarítmica positiva, Ω tiene función de Green y para casi todo $e^{i\theta}$, $F(re^{i\theta})$ tiende a algún punto de E cuando $r \longrightarrow 1$.

b) E tiene capacidad logarítmica cero, Ω no tiene función de Green y el conjunto de Fatow de F tiene medida cero.

Obsérvese que en la situación a) casi toda geodésica tiende a infinito en Ω, luego $\gamma(\Omega) = 1$. Sin embargo en b) no se puede garantizar que $\gamma(\Omega) = 0$. En el caso a) casi toda geodésica termina en algún punto de $\partial\Omega$, en particular es euclideamente acotada. Por el contrario se verá más adelante que en el caso b) casi ninguna geodésica es acotada.

Fernández y Pestana [FP] han obtenido el siguiente sorprendente resultado sobre geodésicas acotadas:

Teorema. *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un dominio, distinto de $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}\setminus\{a\}$, con $a \in \mathbb{C}$, y $F : \Delta \longrightarrow \Omega$ es un recubrimiento universal de Ω entonces*

$$\dim\{\theta \in [0,2\pi] : \sup_{0<r<1} |F(re^{i\theta})| < \infty\} = 1$$

Por consiguiente existe siempre un conjunto de dimensión uno de geodésicas euclideamente acotadas.

Si S es una superficie de Riemann, $F : \Delta \longrightarrow S$ es un recubrimiento universal de S y G es el grupo recubridor asociado, se dice que $e^{i\theta}$ petenece al conjunto límite cónico $\Lambda_c(G)$ si existe algún cono de Stolz de vértice $e^{i\theta}$ que contiene infinitos elementos de órbita de 0.

Hablar del conjunto límite cónico y de las geodésicas divergentes es lo mismo ya que (Proposición 2.3):

$$e^{i\theta} \in \partial\Delta\backslash\Lambda_c(G) \text{ si y sólo si } d_s(F(0), F(re^{i\theta})) \to \infty \text{ cuando } r \to 1$$

Se deduce pues que $\gamma(S) = \dim(\partial\Delta\backslash\Lambda_c(G))$.

Se verá también en la proposición 2.3 que $\Lambda_c(G)$ tiene medida 0 ó 2π.

La dicotomía expresada en el teorema de Nevanlinna se generaliza a supericies de Riemann de la siguiente forma (ver corolario 2.4):

Teorema. *Si S es una superficie de Riemann, $F : \Delta \longrightarrow S$ es un recubrimiento universal de S y G es el grupo recubridor asociado, entonces se verifica una de las dos alternativas siguientes:*

a) S tiene función de Green, $|\Lambda_c(G)| = 0$ y casi toda geodésica tiende a infinito.

b) S no tiene función de Green, $|\Lambda_c(S)| = 2\pi$ y casi ninguna geodésica tiende a infinito.

En el caso b) se puede probar usando la teoría ergódica de Hopf [Ni] que casi toda geodésica es densa. Obsérvese la analogía con el teorema de Plessner.

La dimensión geodésica es un modo de medir el estrechamiento de la superficie en el infinito. Cuanto más pequeño sea $\gamma(S)$, más dificil resulta acceder al infinito o, dicho de otra forma, más se estrecha la superficie. Existe una forma geométrica de medir el estrechamiento que es transversal, en cierto modo, a la anterior y es precisando cómo decrece el radio de inyectividad en el infinito.

Si $p \in S$, se define

$$\beta(S,p) = \inf\{t : \liminf_{d(p,q)\to\infty} i_s(q)e^{td_s(p,q)} > 0\}$$

Igual que en el caso de la dimensión geodésica, $\beta(S,p)$ no depende del punto p elegido y se designa por $\beta(S)$. Las características específicas de la geometría hiperbólica permiten probar que $\beta(S)\in[0,1]$ (Corolario 2.2).

Si el radio de inyectividad está acotado inferiormente, entonces $\beta(S) = 0$, mientras que si Ω es un dominio plano cuya frontera tiene algún punto aislado, entonces $\beta(\Omega) = 1$ (Ver sección II.3)

Hasta ahora todos los ejemplos que se han mencionado son dominios planos. En la sección II.3 se construye un ejemplo interesante de una superficie de Riemann que no es dominio plano. Se trata de una superficie que se "parece" bastante a $\mathbb{Z}$. La idea parte de contemplar el modelo del lanzamiento de la moneda comentado anteriormente desde un punto de vista dinámico. Se consideran caminos aleatorios en $\mathbb{Z}$ de modo que la probabilidad de pasar de un punto $n \in \mathbb{Z}$ a cualquiera de sus consecutivos $n \pm 1$ sea 1/2. El conjunto de todos los posibles caminos que parten de 0 se identifica con el intervalo [0,1]. Esto permite hablar de medida y dimensión de Hausdorff en el conjunto de todos los posibles caminos aleatorios. Con esta formulación, los resultados asintóticos antes citados dirían ahora que casi todo camino oscila siempre entre $+\infty$ y $-\infty$ pero existe un conjunto de dimensión uno de caminos que tienden a $+\infty$. Esta interpretación dinámica sirve de motivación para la construcción de una superficie de Riemann S que desempeña el papel de $\mathbb{Z}$ en el modelo de caminos aleatorios y cuyas geodésicas presentan el mismo comportamiento que los caminos. La superficie S se obtiene pegando infinitas copias iguales de una superficie compacta de género uno limitada por dos geodésicas simples cerradas de la misma longitud. Es esencial que el pegado se realice a lo largo de geodésicas si se quiere conservar las estructuras riemannianas. Los detalles de la construcción se explican en la sección II.3.

La periodicidad de la superficie así construida implica que el radio de inyectividad i_s está acotado inferiormente, luego $\beta(S) = 0$.

La determinación de $\gamma(S)$ se deduce a partir de la existencia de una función armónica u en S tal que

$$u(p) \longrightarrow +\infty \text{ cuando } p \longrightarrow \text{"}+\infty_s\text{"}, \quad u(p) \longrightarrow -\infty \text{ cuando } p \longrightarrow \text{"}-\infty_s\text{"}$$

Si $F : \Delta \longrightarrow S$ es un recubrimiento universal de S y $v = u_o F$, la condición $i_s \geq c > 0$ permite probar (lema 2.8) que v es una función armónica de Bloch en Δ. El conjunto de Fatou de v tiene medida cero y se verifica que

$$\limsup_{r \longrightarrow 1} v(re^{i\theta}) = +\infty, \qquad \limsup_{r \longrightarrow 1} v(re^{i\theta}) = -\infty$$

para casi todo $e^{i\theta}$. La consecuencia geométrica es que casi toda geodésica que parte de un punto cualquiera de S oscila eternamente entre $+\infty_s$ y $-\infty_s$.

Del teorema de Anderson - Pitt se deduce que v tiene límite radial $+\infty$ en un conjunto de dimensión uno, por tanto existe un conjunto de dimensión uno de geodésicas que, partiendo de cualquier punto de la superficie, se marchan a infinito. En particular $\gamma(S) = 1$. (De nuevo se remite a la sección II.3 para consultar los detalles).

Esta ejemplo ha constituido una valiosa fuente de inspiración para demostrar el siguiente teorema, que constituye el principal resultado del capítulo y del cual todos los ejemplos anteriores son casos particulares [FLL2]:

Teorema 6. *Si S es una superficie de Riemann no compacta, entonces*

$$\gamma(S) \geq 1 - \beta(S)$$

En la sección II.4 se dará una prueba simple del teorema 6 en elcaso de dominios planos (teorema 6'), basada en estimaciones de la métrica de Poincaré. La prueba del teorema 6' está relacionada con un resultado clásico de Littlewood, del que se ofrece una prueba muy sencilla.

La forma de proceder para demostrar el teorema 6 se describe brevemente a continuación. En primer lugar se construye, bajo ciertas condiciones, una función armónica propia u en la superficie S. La construcción de la función u no será, por supuesto, tan sencilla como en el caso del último ejemplo que se ha comentado, y será necesario el uso de la teoría de operadores normales desarrollada en [AS]. Si se compone u con el recubrimiento universal de S se obtiene una función armónica v en el disco unidad. Una adaptación de un argumento de Sullivan [S_1], (lema 2.8) permite probar que v pertenece a la clase $\mathcal{M}_\beta$ para cada $\beta < \beta(S)$. Del Corolario 1, capítulo I se deducirá que v tiene límite radial $+\infty$ en un conjunto de dimensión al menos $1 - \beta$, de donde se obtiene finalmente el resultado del teorma 6.

SECCION I.1. PRUEBA DEL TEOREMA 1.

Teorema 1. *Para cada α, $0 \le \alpha < 1$, existe una constante positiva C_α que sólo depende de α tal que, si $u \in \mathcal{M}_\alpha$ y I es un arco de la circunferencia unidad, entonces $|F(u) \cap I| > 0$ o bien*

$$M_{1-\alpha}\Big(A(u, +\infty)\Big) \ge C_\alpha |I|^{1-\alpha}$$

El teorema 1 es una consecuencia del siguiente caso particular:

Teorema 1'. *Para cada α, $0 \le \alpha < 1$, existe una constante positiva B_α que sólo depende de α tal que, si $u \in \mathcal{M}_\alpha$ entonces $|F(u)| > 0$ o bien*

$$M_{1-\alpha}\Big(A(u, +\infty)\Big) \ge B_\alpha$$

En la demostración del teorema 1' se necesitará el siguiente lema. Si $\Omega \subset \mathbf{C}$ es un dominio de Jordan y φ es una aplicación conforme del disco unidad Δ en Ω, el teorema de Carathéodory afirma que φ puede ser extendida a un homeomorfismo de $\bar{\Delta}$ en $\bar{\Omega}$ ([P], Pag 281). Si $z_0 \in \Omega$, y E es un subconjunto de Borel de $\partial\Omega$, se define la medida armónica (desde z_0) de E en Ω como $|\varphi^{-1}(E)|$, donde φ es conforme de Δ en Ω tal que $\varphi(0) = z_0$. La medida armónica en z_0 coincide con el valor en z_0 de la solución de Perron al problema de Dirichlet en Ω con valores frontera 1 en E y 0 en $\partial\Omega\setminus E$ ([A],[N]). La medida armónica es un invariante conforme y el hecho de que sea nula no depende del punto base elegido.

Si Ω es un dominio de Jordan contenido en Δ, $0 \in \Omega$, $\varphi = \Delta \longrightarrow \Omega$ es conforme con $\varphi(0) = 0$ y A es un subconjunto de $\partial\Delta$ tal que $\varphi(A) \subset \partial\Omega \cap \partial\Delta$ entonces el clásico Lema de distorsión de Löwner dice que $|A| \le |\varphi(A)|$. Obsérvese que esta desigualdad no es sino el Principio del Máximo aplicado a las funciones armónicas u, en Ω, y v, en Δ, que tienen valores frontera 1 en $\varphi(A)$, 0 en $\partial\Omega\backslash\varphi(A)$ y 1 en $\varphi(A)$, 0 en $\partial\Delta\backslash\varphi(A)$ respectivamente.

Lema 1.1 ([BR]). *Sea Ω un dominio de Jordan contenido en Δ, y supóngase que $0 \in \Omega$. Si $E = \partial\Omega \cap \partial\Delta$ tiene medida armónica positiva en Ω, entonces existe $F \subset E$, $|F| > 0$ tal que, para todo $\xi \in F$ existe un cono de Stolz truncado de vértice ξ que está contenido en Ω.*

Demostración del Lema 1.1

Considérese una aplicación conforme φ de Δ en Ω con $\varphi(0) = 0$. Según el teorema de McMillan ([P]), pag. 326), casi todo $e^{i\theta}$ satisface una de las dos siguientes posibilidades:

a) $\dfrac{\varphi(z) - \varphi(e^{i\theta})}{z-e^{i\theta}}$ tiene límite no tangencial finito en $e^{i\theta}$

b) Arg $\left(\varphi(z) - \varphi(e^{i\theta})\right)$ es no acotado, superior e inferiormente a lo largo de cada curva que termine en $e^{i\theta}$. Geométricamente, esto quiere decir que la imagen mediante φ de cada arco que acabe en $e^{i\theta}$ se "enrosca" y se "desenrrosca " infinitas veces alrededor de $\varphi(e^{i\theta})$ de manera que da un número de vueltas arbitrariamente grande en cada uno de los sentidos.

Puesto que $\Omega \subset \Delta$, la posibilidad b) no puede ocurrir para ningún $e^{i\theta} \in \varphi^{-1}(E)$. Por hipótesis $|\varphi^{-1}(E)| > 0$, luego existe un subconjunto $A \subset \varphi^{-1}(E)$, $|A| > 0$ tal que cada $e^{i\theta} \in A$ verifica la condición a). En particular, la imagen por φ de cada cono de Stolz truncado de vértice $e^{i\theta}$ y apertura α está contenida en un cono de Stolz de vértice $e^{i\theta}$ y apertura $(1 + \varepsilon)\alpha$. Si $F = \varphi(A)$, entonces, por el Lema de Löwner, $|F| > 0$ y los puntos de F satisfacen el requerimiento del enunciado del lema. #

El siguiente teorema de extensión de dominio de Makarov [M1] también se usará en la demostración del teorema 1':

Teorema. *Sea $\Omega \subset \Delta$ un dominio de Jordan, $0 \in \Omega$, y sea φ una aplicación conforme de Δ en Ω con $\varphi(0) = 0$. Para cada α, $0 \le \alpha \le 1$ existe una constante C_α que sólo depende de α tal que si E es un subconjunto de $\partial\Delta$ y $\varphi(E) \subset \partial\Omega \cap \partial\Delta$, entonces:*

$$M_\alpha\left(\varphi(E)\right) \ge C_\alpha M_\alpha(E)$$

Nótese que en el caso $\alpha = 1$, se obtiene precisamente el Lema de Löwner.

Demostración del teorema 1'

Supóngase que $u \le C_u(1 - |z|)^{-\alpha}$, donde C_u es una constante positiva, y $|F(u)| = 0$. Sea $\lambda > |u(o)|$ y sea Ω la componente de $\{u > -\lambda\}$ que contiene a 0. Ω es simplemente conexa porque en caso contrario existiría una componente G de $\mathbb{C}\setminus\bar{\Omega}$ estrictamente contenida en Δ. Por continuidad los valores de u serían idénticamente $-\lambda$ en ∂G y del Principio del Máximo se deduciría que u es constante, lo cual es una contradicción, ya que $|F(u)| = 0$. Por tanto Ω es simplemente conexa, y el mismo razonamiento anterior muestra que $\partial\Omega \cap \partial\Delta \ne \emptyset$. De hecho en este caso las especiales condiciones de crecimiento de u permiten asegurar que Ω es un dominio de Jordan ([B2],[Mc1]).

La medida armónica de $\partial\Omega \cap \partial\Delta$ en Ω debe ser cero, porque en caso contrario el lema 1.1 implicaría que u es no tangencialmente acotada inferiormente en un subconjunto de $\partial\Delta$ de medida positiva, y del teorema de Fatou local (ver la introducción) se deduciría $|F(u)| > 0$, contrario a la hipótesis. Por tanto, si φ es una aplicación conforme de Δ en Ω con $\varphi(0) = 0$, entonces

$$|\varphi^{-1}(\partial\Omega \cap \partial\Delta)| = 0 \tag{1.1}$$

La función $v = u(\varphi) + \lambda$ es armónica en Δ y positiva, luego existe una medida finita y positiva μ, tal que v es la integral de Poisson de μ([R], Pag. 229). La masa de μ es $v(o) = 2\pi\left(u(0) + \lambda\right)$.
La observación $v = 0$ en $\partial\Omega \cap \Delta$ junto con (1.1) implican

$$\lim_{r \to 1} v(re^{i\theta}) = 0$$

para casi todo $\theta \in [0,2\pi)$ (respecto de la medida de Lebesgue), de donde se deduce que la derivada de la medida μ respecto de la medida de Lebesgue es cero para casi todo $\theta \in [0,2\pi)$ ([R], pag. 225). En particular μ es singular y la derivada de μ respecto de la medida de Lebesgue es $+\infty$ en casi todo punto (respecto de μ) de $\partial\Delta$. ([R], pag. 147). En lo sucesivo, E denotará un subconjunto de μ-medida plena tal que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu(\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon)}{2\varepsilon} = \infty \quad \text{para todo} \quad e^{i\theta} \in E$$

donde $(\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon)$ designa el arco $\{e^{it} = \theta - \varepsilon < t < \theta + \varepsilon\}$.

La función v satisface una condición de crecimiento semejante a la de u. En efecto, por el lema de Schwarz, $|\varphi(z)| \le |z|$, luego

$$v(z) \le C_u(1 - |z|)^{-\alpha} + \lambda \qquad (z \in \Delta) \tag{1.2}$$

Sea $\theta \in [0, 2\pi]$ y fíjese ε, $0 < \varepsilon < \pi$. Si I es el arco $(\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon)$ y $a = (1 - \varepsilon/2\pi)e^{i\theta}$ se verifica, según (1.2):

$$v(a) \le C_u(2\pi)^{2\alpha}|I|^{-\alpha} + \lambda$$

Por otra parte, un cálculo directo proporciona otra desigualdad en sentido contrario:

$$v(a) \ge \frac{1}{2\pi}\int_I \frac{1 - |a|^2}{|a - e^{it}|^2}\, d\mu(e^{it}) \ge \frac{1}{2\pi}\,(1 - |a|^2)\left(\frac{2\pi}{\varepsilon}\right)^2 \mu(I) \ge 3\,\frac{\mu(I)}{|I|}$$

Luego:

$$3\,\frac{\mu(I)}{|I|} \le v(a) \le C_u(2\pi)^{2\alpha}|I|^{-\alpha} + \lambda \tag{1.3}$$

Por consiguiente:

$$\lim_{r \to 1} v(re^{i\theta}) = +\infty \qquad \text{si } e^{i\theta} \in E$$

y se obtiene también de (1.3) que para cualquier arco I se verifica:

$$\mu(I) \le 30(C_u + \lambda)|I|^{1-\alpha}$$

Ahora, de (0,1) se deduce:

$$M_{1-\alpha}(E) \ge \frac{\|\mu\|}{30(C_u + \lambda)} = \frac{\pi}{15}\,\frac{u(o) + \lambda}{C_u + \lambda}$$

El teorema de extensión de dominio de Makarov garantiza que

$$M_{1-\alpha}\left(\varphi(E)\right) \geq B_\alpha \frac{u(o) + \lambda}{C_u + \lambda}$$

para una cierta constante positiva B_α que sólo depende de α.

Si se hace tender λ a infinito y se tiene en cuenta que $\varphi(E) \subset A(u, +\infty)$ se obtiene finalmente:

$$M_{1-\alpha}\left(A(u, +\infty)\right) \geq B_\alpha$$

como se buscaba. #

Demostración del Teorema 1

Supóngase en primer lugar que $u \in \mathcal{M}_\alpha$, I es una semicircunferencia, por ejemplo $I = \{e^{it} = -\pi/2 < t < \pi/2\}$ y $|F(u) \cap I| = 0$.

Si Ω es un dominio de Jordan contenido en Δ tal que $\partial\Omega$ es suave y $\partial\Omega \cap \partial\Delta = I$, φ es una aplicación conforme de Δ en Ω con $\varphi(I) = I$ y $v = u(\varphi)$, entonces $v \in \mathcal{M}_\alpha$ por (0,3), $\partial\Delta\backslash I \subset F(v)$, $|F(v) \cap I| = 0$ y

$$M_{1-\alpha}\left(A(u, +\infty) \cap I\right) \geq CM_{1-\alpha}\left(A(v, +\infty)\right)$$

donde C es una constante absoluta positiva. Este argumento muestra que es posible suponer $\partial\Delta\backslash I \subset F(u)$.

Considérese la función armónica u^* definida por $u^*(x + iy) = u(-x + iy)$. Es claro que $u^* \in \mathcal{M}_\alpha$, $|F(u^*) \cap (\partial\Delta\backslash I)| = 0$ y $I \subset F(u)$. Si $v = u + u^*$, entonces $v \in \mathcal{M}_\alpha$ y $|F(v)| = 0$, de modo que, por el teorema 1':

$$M_{1-\alpha}\left(A(v, +\infty)\right) \geq B_\alpha$$

y por simetría:

$$M_{1-\alpha}\Big(A(u, +\infty)\Big) \ge \frac{B_\alpha}{2} = \frac{B_\alpha}{2\pi^{1-\alpha}} |I|^{1-\alpha}$$

y por tanto el resultado está probado en el caso en que I es una semicircunferencia.

Finalmente, si I es un arco cualquiera de $\partial\Delta$, $u \in \mathcal{M}_\alpha$ y $|F(u) \cap I| = 0$, se quiere probar que $M_{1-\alpha}\Big(A(u, +\infty) \cap I\Big) \ge C_\alpha |I|^{1-\alpha}$.

Sin pérdida de generalidad supóngase que 1 es el punto medio de I, esto es: $I = \{ e^{it} = -\theta < t < \theta \}$ $(0 \le \theta < \pi)$

La elección $a = \cos\theta\,(1 + \operatorname{sen}\theta)^{-1}$ hace que el automorfismo de Δ dado por

$$\phi(z) = \frac{z - a}{1 - az}$$

transforme el arco I en la semicircunferencia $I_0 = \{e^{it} = -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\}$
Si $w = u(\phi^{-1})$, entonces $w \in \mathcal{M}_\alpha$ por (0,3) y $|F(w) \cap I_0| = 0$, luego según lo anterior:

$$M_{1-\alpha}\Big(A(w, +\infty) \cap I_0\Big) \ge C_\alpha$$

Por otra parte, si J es un subarco de I, se verifica:

$$|\phi(J)| \le \frac{\pi}{2} \sup_{z\in I} |\phi'(z)|\,|J|$$

Calculando la derivada se obtiene que el supremo anterior es inferior a $12|I|^{-1}$. Finalmente, la igualdad

$$\phi\Big(A(u, +\infty) \cap I\Big) = A(w, +\infty) \cap I_0$$

junto con las estimaciones anteriores y un argumento elemental proporcional las desigualdades:

$$C_\alpha \le M_{1-\alpha}\left(A(w, +\infty) \cap I_0\right) \le \left(\frac{6\pi}{|I|}\right)^{1-\alpha} M_{1-\alpha}\left(A(u, +\infty) \cap I\right)$$

De modo que:

$$M_{1-\alpha}\left(A(u, +\infty) \cap I\right) \ge C_\alpha (6\pi)^{\alpha-1} |I|^{1-\alpha}$$

y el teorema 1 está totalmente probado. #

Comentarios al teorema 1

1. La conclusión del teorema 1 invita a pensar que se puede acotar inferiormente $M_{1-\alpha}\left(A(u, +\infty)\right)$ por alguna expresión que involucre $|\partial\Delta \setminus F(u)|$ si $u \in \mathcal{M}_\alpha$, pero esto no es así en absoluto. Elíjase una función armónica de Bloch v tal que $|F(v)| = |A(v, +\infty)| = 0$ (por ejemplo la parte real del recubrimiento universal de Δ en $\mathbb{C}\setminus(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ o la parte real de $\sum z^{2^n}$). Entonces $v \in \mathcal{M}_\alpha$ para todo $\alpha > 0$. Sea H un subconjunto abierto de $\partial\Delta$ que contiene a $A(v, +\infty)$ y cuya medida es menor que π, y sea $\{I_k\}$ una descompòsición de H en arcos disjuntos. Para cada k considérese un arco J_k contenido en Δ, cuyos extremos son los de I_k y sea Ω un dominio de Jordan contenido en Δ tal que $\partial\Omega \cap \partial\Delta = \partial\Delta \setminus H$ y $\partial\Omega \cap \Delta$ es la unión de los arcos $\{J_k\}$. Si φ es una aplicación conforme de Δ en Ω y $u = v(\varphi)$, entonces $u \in \mathcal{M}_\alpha$, para cada $\alpha > 0$, $A(u, +\infty) = \emptyset$ y $0 < |F(u)| < 2\pi$ si cada arco J_k se ha elegido próximo a I_k.

De modo que, en general, sólo puede estimarse por debajo el tamaño de $A(u, +\infty)$ cuando $|F(u)| = 0$. Sin embargo, si $F(u)$ es cerrado (o difiere de un cerrado un conjunto de medida cero) se verifica $M_{1-\alpha}\left(A(u, +\infty)\right) \ge C_\alpha |\partial\Delta \setminus F(u)|^{1-\alpha}$.

2. Si $\alpha \geq 1$, $u \in \mathcal{M}_\alpha$ y $|F(u)| = 0$, entonces $A(u, +\infty)$ es siempre denso en $\partial\Delta$ $\left([BRS], \text{ Corolario } 1\right)$, pero puede ser numerable. Un ejemplo de esta situación lo constituye la función $u = \log|F|$, donde F es la clásica función modular $\left(\text{el recubrimiento universal de } \mathbb{C}\setminus\{0,1\}\right)$. La función modular crece a lo sumo como $\exp\left\{(1 - |z|)^{-1}\right\}$ $\left([A], \text{ pag. } 19\right)$, de ahí que $u \in \mathcal{M}_1$. El conjunto de Fatou de u tiene medida cero, mientras que $A(u, +\infty)$, $\left(\text{que es exactamente } F(u,\infty) \text{ porque F es normal}\right)$ es un conjunto numerable.

SECCION I.2. PRUEBA DEL TEOREMA 2.

Teorema 2 *Sea u armónica en el disco unidad tal que:*

$$\iint_{\Delta} \frac{u^2(z)}{(1 - |z|)^{\beta}}\, dx\, dy < \infty \qquad (1.4)$$

donde $0 < \beta < 1$. Existe una constante positiva A_β que sólo depende de β de modo que si I es un arco de la circunferencia unidad entonces, $|F(u) \cap I| > 0$ o bien:

$$cap_{1-\beta}\Big(A(u, +\infty) \cap I\Big) \geq A_\beta |I|^{1-\beta}$$

En la demostración del teorema 2 se usará la siguiente relación entre la integral de energía de una medida positiva en $\partial\Delta$ y sus coeficientes de Fourier ([KS]):

$$I_\alpha(\mu) = 4\pi^2 \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{\mu}(n)|^2 \gamma_{n,\alpha} \qquad (0 < \alpha < 1)$$

donde $\hat{\mu}(n)$, $\gamma_{n,\alpha}$ son los coeficientes de Fourier de la medida μ y del núcleo $|1 - e^{it}|^{-\alpha}$ respectivamente.

Demostración del teorema 2:

Se asumirá que $I = \partial\Delta$, ya que el caso general se deduce de éste igual que en el teorema 1.

Supóngase pues que u satisface las hipótesis del teorema 3, y $|F(u)| = 0$. Se probará

$$cap_{1-\beta}\Big(A(u, +\infty)\Big) \geq K_\beta$$

siendo K_β una constante positiva que sólo depende de β.

Sea, como en el teorema 1, $\lambda > |u(0)|$, Ω la componente de $\{u > -\lambda\}$ que contiene a 0 y $v = u(\varphi) + \lambda$, donde φ es una aplicación conforme de Δ en Ω tal que $\varphi(0)=0$. Un razonamiento semejante al que se dio en el teorema 1 mostraría que v es la integral de Poisson de una medida positiva, finita y singular en $\partial\Delta$, de masa $\|\mu\| = 2\pi\left(u(o) + \lambda\right)$.

Existe análogamente un subconjunto E de $\partial\Delta$ de μ - medida plena tal que

$$\lim_{r\to 1} v(re^{i\theta}) = +\infty \quad \text{para todo} \quad e^{i\theta} \in E$$

A continuación se estimará la integral

$$\iint_\Delta \frac{v^2(z)}{(1 - |z|)^\beta}\, dx\, dy$$

Concretamente, se acotará superiormente por una expresión que dependa de λ y de la correspondiente integral de u, e inferiormente por una integral de energía asociada a la medida μ.

Respecto a la cota superior, obsérvese en primer lugar que:

$$\iint_\Delta \frac{v^2(z)}{(1 - |z|)^\beta} dx\, dy = \int_0^1 \frac{r}{(1 - r)^\beta} \left[\int_{-\pi}^{\pi} u^2\left(\varphi(re^{i\theta})\right) d\theta + \right.$$

$$\left. + 2\lambda \int_{-\pi}^{\pi} u\left(\varphi(re^{i\theta})\right) d\theta + 2\pi\lambda^2\right] dr$$

Ahora, teniendo en cuenta que $\varphi(0) = 0$ se sigue por subordinación ([D] Pag. 11):

$$\int_{-\pi}^{\pi} u^2\left(\varphi(re^{i\theta})\right) d\theta \le \int_{-\pi}^{\pi} u^2\left(re^{i\theta}\right) d\theta$$

Por otra parte, $u(\varphi)$ es armónica, luego:

$$\int_{-\pi}^{\pi} u\left(\varphi(re^{i\theta})\right) d\theta = 2\pi\, u(0)$$

Teniendo en cuenta que $|u(0)| < \lambda$ y las dos desigualdades anteriores se obtiene:

$$\iint_\Delta \frac{v^2(z)}{(1 - |z|)^\beta}\, dx\, dy < C_u + A_\beta(\lambda + \lambda^2)$$

donde C_u es la integral de (1.4) y A_β es una cierta constante positiva que sólo depende de β.

En cuanto a la cota inferior, recuérdese que v es la integral de Poisson de la medida μ. Una manipulación con el núcleo de Poisson conduce a la igualdad

$$\int_{-\pi}^{\pi} v^2\left(re^{i\theta}\right)d\theta = 2\pi\sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{\mu}(n)|^2 r^{2|n|} = \|\mu\|^2 + 4\pi\sum_{1}^{\infty} |\hat{\mu}(n)|^2 r^{2n}$$

de modo que

$$\iint_\Delta \frac{v^2(z)}{(1 - |z|)^\beta}\, dx\, dy = \int_0^1 \frac{r}{(1 - r)^\beta}\left(\|\mu\|^2 + \sum_1^\infty |\hat{\mu}(n)|^2 r^{2n}\right)dr$$

Una estimación directa proporciona la desigualdad

$$\int_0^1 \frac{r^{2n+1}}{(1 - r)^\beta}\, dr \geq B_\beta \frac{1}{n^{1-\beta}}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y alguna constante positiva B_β que sólo depende de β. Si se tiene en cuenta que los coeficientes de Fourier $\gamma_{n,1-\beta}$ son comparables a $n^{\beta-1}$ cuando $n \longrightarrow \infty$ ([KS] Pag. 40), entonces de la expresión de la integral de energía en función de los coeficientes de Fourier $\hat{\mu}(n)$, $\gamma_{n,1-\beta}$ se deduce:

$$\iint_\Delta \frac{v^2(z)}{(1 - |z|)^\beta}\, dx\, dy \geq C_\beta\, 4\pi^2 \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{\mu}(n)|^2\, \gamma_{n,1-\beta} = C_\beta\, I_{1-\beta}(\mu)$$

para alguna constante positiva C_β que sólo depende de β.

Resumiendo, se han obtenido las desigualdades:

$$C_\beta\, I_{1-\beta}(\mu) \leq \iint_\Delta \frac{v^2(z)}{(1 - |z|)^\beta}\, dx\, dy \leq c_u + A_\beta(\lambda + \lambda^2) \tag{1.5}$$

Obsérvese ahora que si F es un subconjunto de E y μ_F es la medida obtenida restringiendo μ a F, entonces

$$\left(\mathrm{cap}_{1-\beta}(E)\right)^{\beta-1} \leq \left(\mathrm{cap}_{1-\beta}(F)\right)^{\beta-1} \leq I_{1-\beta}\left(\frac{\mu_F}{\mu(F)}\right) \leq \frac{1}{\mu^2(F)}\, I_{1-\beta}(\mu)$$

de donde

$$\left(\mathrm{cap}_{1-\beta}(E)\right)^{1-\beta} \geq \frac{\|\mu\|^2}{I_{1-\beta}(\mu)}$$

y por tanto, si se recuerda que $\|\mu\| = 2\pi\left(u(o) + \lambda\right)$ y (1.5), resulta:

$$\operatorname{cap}_{1-\beta}(E) \left[C_\beta^{-1} \cdot \frac{4\pi^2 \left(u(o) + \lambda\right)^2}{C_u + A_\beta(\lambda + \lambda^2)} \right]^{\frac{1}{1-\beta}}$$

Ahora bien, $\varphi : \Delta \longrightarrow \Omega$ es univalente, luego tiene límite radial salvo, quizás, en un subconjunto de $\partial\Delta$ de capacidad logarítmica cero ([CL] Pag. 56), en particular despreciable respecto a la $1 - \beta$ - capacidad.

Por tanto, si $\varphi(E)$ designa el conjunto

$$\{\xi \in \partial\Delta : \lim_{r \to 1} \varphi(r\, e^{i\theta}) = \xi \qquad \text{para algún } e^{i\theta} \in E\}$$

entonces, por el teorema de extensión de dominio de Hamilton [H] - análogo al teorema de Makarov para capacidades - se obtiene:

$$\operatorname{cap}_{1-\beta}\left(\varphi(E)\right) \geq D_\beta \left[\frac{4\pi^2 \left(u(o) + \lambda\right)^2}{C_u + A_\beta(\lambda + \lambda^2)} \right]^{\frac{1}{1-\beta}}$$

para alguna constante D_β que sólo depende de β. Si se tiene en cuenta que $\varphi(E) \subset A(u, +\infty)$ el resultado se concluye, como en el teorema 1, haciendo tender λ a infinito. #

SECCION I.3 PRUEBA DEL TEOREMA 3.

Teorema 3. *Sea u una función armónica en el disco unidad que verifica:*

$$(1 - |z|^2)|\nabla u(z)| \leq \phi(|u(z)|) \qquad (z \in \Delta) \qquad (1.6)$$

donde $\phi : [0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ es no decreciente. Entonces, si u tiene límite asintótico $+\infty$ en $e^{i\theta}$, u tambien tiene límite no tangencial $+\infty$ en $e^{i\theta}$.

Demostración del teorema 3.

Supóngase que u tiene límite asintótico $+\infty$ en el punto 1 y sea $\Gamma : [0,1) \longrightarrow \Delta$ un camino que acaba eb 1 tal que $u(\Gamma(t))$ tiende a $+\infty$ cuando t tiende a 1. Un argumento semejante al que se dará a continuación mostraría que no se pierde generalidad si se supone que Γ está contenido en el semidisco $\Delta^+ = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$

El teorema es una consecuencia directa del siguiente principio del mínimo. Algunas de las ideas que aparecen en la prueba están inspiradas en el teorema 9.1 de [P].

Lema 1.2. *Sea u una función armónica en Δ que satisface (1.6) para una cierta función ϕ no decreciente. Si $\Gamma : [0,1] \longrightarrow \Delta^+$ es un camino que acaba en 1 y $u \geq M > 0$ en Γ, entonces para cada α, $0 < \alpha\ \pi/2$ existen constantes positivas $a(\alpha)$, $b(\alpha)$ que sólo dependen de α tales que, para todo $z \in \Delta$ con $Arg(1 - z) = \alpha$ y $a(\alpha)|z - 1| \leq |\Gamma(0) - 1|$ se verifica:*

$$u(z) \geq t_M$$

donde $t_M = \sup\{t \in [0,M/2] : \varnothing(t) \leq b(\alpha)M/2\}$.

Demostración del Lema 1.2.

Con argumentos geométricos elementales se comprueba que para cada α, $0 < \alpha < \pi/2$, existen constantes positivas $a(\alpha)$, $\delta(\alpha)$ sólo dependientes de α tales que, si $z \in \Delta$, y $\mathrm{Arg}(1 - z) = \alpha$, entonces el diámetro del círculo $C(z,\delta(\alpha))$ tangente en z al rayo $\{w : \mathrm{Arg}(1 - w) = \alpha\}$ y cuyo exterior corta a $\partial\Delta$ con ángulo $\delta(\alpha)$, es menor que $a(\alpha)|z - 1|$.

Elíjase z como en el enunciado del lema. Nótese que Γ atraviesa $C(z,\delta(\alpha))$.

Sea $b(\alpha) = 2[\pi - \delta(\alpha)]^{-1}$ sen $\delta(\alpha)$. A partir de ahora se escribirá $\delta = \delta(\alpha)$, $b = b(\alpha)$, $C(\delta) = C(z,\delta(\alpha))$.

Sean P,Q los puntos de corte de $\partial C(\delta)$ con $\partial\Delta$. Si $\delta < \delta' < \pi$, el interior de la circunferencia que pasa por P,Q y cuyo exterior corta a $\partial\Delta$ con ángulo δ' se designará $C(\delta')$.

Puesto que $u \geq M$ en Γ, $t_M \leq M/2$ y la intersección de Γ con el círculo $C(\delta)$ está estrictamente contenida en Δ, existe δ', $\delta \leq \delta' < \pi$ tal que, para toda componente Ω de $C(\delta') \cap \Delta\backslash P$ cuya adherencia no corte al segmento (P,Q) se tiene:

$$u \geq t_M \quad \text{en} \quad \Omega$$

Supóngase que la conclusión del lema fuera falsa, y sea δ' el número más pequeño con la propiedad anterior. Obsérvese que $\delta < \delta' < \pi$ y existe una componente Ω de $C(\delta') \cap \Delta\backslash\Gamma$ y $z_o \in \partial C(\delta') \cap \partial\Omega \cap \Delta\backslash\Gamma$ tal que

$$\min_{\Omega} u = u(z_o) = t_M$$

por el principio del mínimo.

Sea φ el automorfismo del disco unidad tal que $\varphi(0) = z_o$, y la antiimagen por φ de $\partial C(\delta') \cap \Delta$ es el arco de la circunferencia que pasa por 0, es simétrica respecto del radio (0,1) y cuyo exterior corta a $\partial\Delta$ con ángulo δ'. Este arco de circunferencia se designará γ.

Un argumento geométrico simple revela que la intersección de $\partial\Delta$ con el interior de la circunferencia γ es el arco $I = \{e^{it} : -\delta' < t < \delta'\}$. Si v es la función armónica (positiva) en Δ que tiene valores frontera 0 en I y $\pi(\pi - \delta')^{-1}$ en $\partial\Delta\backslash I$, entonces v toma el valor 1 en γ.

Sean $\Omega' = \varphi^{-1}(\Omega)$, $\Gamma' = \varphi^{-1}(\Gamma)$ y $h = u(\varphi)$. Obsérvese que

$$h(0) = u(z_o) = \min_{\Omega'} h = t_M$$

y de nuevo del principio del mínimo se deduce la desigualdad:

$$h + \Big(M - u(z_o)\Big)v \geq M = h(0) + \Big(M - u(z_o)\Big)v(0) \qquad \text{en } \Omega'$$

Nótese que Ω' contiene algún segmento de la forma $(0,\varepsilon)$. La desigualdad anterior implica por tanto:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0) + \Big(M - u(z_o)\Big)\frac{\partial v}{\partial x}(0) \geq 0$$

Un cáculo de la derivada de v en o da el valor:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0) = -2\frac{\operatorname{sen}\delta'}{\pi - \delta'} < -2\frac{\operatorname{sen}\delta}{\pi - \delta} = -b$$

Por consiguiente.

$$|\nabla h(0)| > \Big(M - u(z_o)\Big)b$$

Ahora bien, la expresión $|\nabla u(z)|(1 - |z|^2)$ es invariante por automorfismos de Δ ([G], Pag. 3), luego $|\nabla h(0)| = |\nabla u(z_o)(1 - |z_o|^2)$ y teniendo en cuenta que $u(z_o) = t_M \geq 0$ y (1.6) resulta:

$$(M - t_M)b < |\nabla u(z_o)|(1 - |z_o|^2) \le \varnothing\left(|u(z_o)|\right) = \phi(t_M)$$

De forma que:

$$M < t_M + \frac{1}{b}\,\varnothing(t_M) \le \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M$$

y esta contradicción termina con la prueba del lema. #

Seccion 1.4. Prueba del Teorema 4.

Si $\alpha\in [0,1)$, $p \in \mathbb{N}$, $p^{-\alpha} \le \delta \le 1/4$ se definieron en la introducción $X_0(t) = \chi_{[0,\delta]} - \delta(1-\delta)^{-1}\chi_{(\delta,1]}$ y $X_k(t) = X_0\left(p^k t - [p^k t]\right)$, $k \in \mathbb{N}$, donde $[a]$ representa la parte entera de a. Se definió también la martingala (S_n) en $[0,1)$ que viene dada por:

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} p^{k\alpha} X_k(t) \qquad (0 \le t \le 1,\ n \in \mathbb{N})$$

Si $\alpha \in (0,1]$, $\beta \in (0,\alpha]$ y se elige $\delta = 8p^{-\beta}$ se define la función h, armónica acotada en Δ cuyos valores frontera son:

$$h\left(e^{i2\pi t}\right) = X_0(t) \qquad (0 \le t \le 1)$$

es decir, h vale $+1$ en el arco $\{\ e^{it} = 0 < t < 2\pi\delta\ \}$ y vale $-\delta(1-\delta)^{-1}$ en el arco $\{\ e^{it} = 2\pi\delta < t < 2\pi\ \}$.

Se considera la función:

$$u(z) = \sum_{k=0}^{n} p^{k\alpha}\, h(z^{p^k}) \qquad (z \in \Delta)$$

Teorema 4. *Existe una constante absoluta $C > 0$ tal que:*

a) Si $\alpha \in [0,1)$, $\beta \in (0,\alpha] \cap (0,1/2)$ y p es suficientemente grande, entonces $u \in \mathcal{M}_\alpha$, u no tiene límite radial finito en ningún punto de $\partial\Delta$, y u tiene límite radial $+\infty$ en un subconjunto de $\partial\Delta$ con dimensión de Hausdorff comprendida entre $1-\beta$ y $1-\beta+C(\log p)^{-1}$.

b) Si $\alpha \in [1/2,1)$, $\beta \in [1/2,\alpha]$ y p es suficientemente grande, entonces $u \in \mathcal{M}_\alpha$, u no tiene límite radial finito en ningún punto de $\partial\Delta$ y u tiene límite radial $+\infty$ en un subconjunto de $\partial\Delta$ con dimensión de Hausdorff comprendida entre β, y $\beta + \log(C\log p)(\log p)^{-1}$.

Las propiedades de convergencia de la martingala (S_n) se recogen en el siguiente lema:

<u>Lema 1.3.</u> *(S_n) verifica las siguientes propiedades:*

i) $S_n(t) = O(p^{n\alpha})$ *cuando* $n \longrightarrow \infty$ $\quad (0 \le t \le 1)$

ii) *$S_n(t)$ no tiene límite finito para ningún $t \in [o,1]$*

iii) *El conjunto $\{ t \in [0,1] = \lim_n S_n(t) = +\infty \}$ tiene dimensión de Hausdorff* $1 - \left(\log\frac{1}{\delta}\right)(\log p)^{-1}$.

<u>Demostración del lema 1.3.</u>

Las propiedades i) y ii) son obvias. Debido a la desigualdad $\delta \ge p^{-\alpha}$, un cálculo sencillo muestra que para cada $n \in \mathbb{N}$, $S_n(t) > 0$ si y sólo si $X_n(t) > 0$. Considérese, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$E_n = \{ t \in [0,1] : X_k(t) = +1 \quad \forall\, k \ge n\}$$

Entonces

$$\{t \in [0,1] : \lim_n S_n(t) = +\infty\} = \bigcup_n E_n$$

Sea $\gamma = 1 - \left(\log\frac{1}{\delta}\right)\left(\log p\right)^{-1}$. Por la autosemejanza de los conjuntos E_n y las propiedades básicas de la dimensión de Hausdorff basta probar que $\dim E_o = \gamma$. Con el fin de clarificar la demostración se supondrá en el resto de la prueba del lema que $p\delta$ es entero.

a) $\quad \dim E_0 \le \gamma$

El conjunto $\{t : X_0(t) = +1\}$ consta de un intervalo de longitud $\delta = p\delta/p$. El conjunto $\{t : X_0(t) = X_1(t) = +1\}$ consta de $p\delta$ intervalos de longitud δp^{-1}. Repitiendo el proceso se observa que para cada $k \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{t : X_0(t) = \dots = X_k(t) = +1\}$ consta de $(p\delta)^k$ intervalos de longitud δp^{-k} de donde:

$$M_{\gamma+\varepsilon}\{t : X_0(t) = \dots = X_k(t) = +1\} \le (p\delta)^k \delta^{\gamma+\varepsilon}\, p^{-k(\gamma+\varepsilon)} = \delta^{\gamma+\varepsilon}\, p^{-k\varepsilon}$$

Por tanto $M_{\gamma+\varepsilon}(E_0) = 0$ para todo $\varepsilon > 0$ y $\dim E_0 \le \gamma$.

b) $\dim E_0 \ge \gamma$

Para demostrar esta desigualdad se construye una medida de probabilidad en $[0,1]$ de la forma siguiente:

En el primer paso se asigna masa 1 al intervalo $[0,\delta] = \{X_0 > 0\}$. En el segundo paso se asigna masa $(p\delta)^{-1}$ a cada uno de los $p\delta$ intervalos de que consta el conjunto $\{X_0 > 0,\ X_1 > 0\}$. En el tercer paso se asigna masa $(p\delta)^{-2}$ a cada uno de los $(p\delta)^2$ intervalos que componen el conjunto $\{X_0 > 0,\ X_1 > 0,\ X_2 > 0\}$, etc...

Este proceso define una medida de probabilidad μ en $[0,1]$ ([Sh] Pag 150) concentrada en E_0 tal que, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, cada uno de los $(p\delta)^{-k}$ intervalos de que consta el conjunto $\{X_0 > 0,\ X_1 > 0, \ldots, X_k > 0\}$ tiene μ - medida $(p\delta)^{-k}$. Obsérvese que si I_k es uno de estos intervalos, entonces $|I_k| = \delta p^{-k}$ y, dada la relación que existe entre p, δ γ, se tiene:

$$\mu(I_k) = p^{-\gamma} = \delta^{-1}|I_k|^{\gamma}$$

Se comprueba fácilmente que existe una constante C que sólo depende de δ tal que

$$\mu(I) \le C|I|^{\gamma}$$

para cualquier intervalo I de $[0,1]$. Por tanto, según (0,1)

$M_\alpha[E) > 0$ y $\dim E_0 \ge \gamma$. #

Antes de entrar en la demostración del teorema 4 se darán tres lemas. El primero de ellos proporciona una amplia familia de funciones pertenecientes a las clases $\mathcal{M}_\alpha$.

<u>Lema 1.4</u>. *Sea $\alpha \in [0,1)$ y sea g una función armónica en Δ tal que*

$g(0) = 0$ y $|g| \leq 1$. Sea (a_n) una sucesión de números reales y considérese la función

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(z^n)$$

Entonces $u \in \mathcal{M}_\alpha$ si y sólo si $a_n = O(n^\alpha)$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

<u>Demostración:</u>

Si $u \in \mathcal{M}_\alpha$ entonces su conjugada armónica también pertenece a $\mathcal{M}_\alpha$ ([D], Pag 83) por tanto u es la parte real de una función f, analítica en Δ, que verifica:

$$\max\left\{|f(re^{i\theta})| \ :\ \theta\in[0,2\pi]\right\} = O\left((1 - r)^{-\alpha}\right)$$

La estimación $a_n = O(n^\alpha)$ se deduce de la fórmula de Cauchy:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} z^{-n-1} f(z)dz$$

tomando, por ejemplo, $r = 1 - n^{-1}$.

Recíprocamente, supóngase que $a_n = O(n^\alpha)$. Se probará que $u \in \mathcal{M}_\alpha$. Puesto que $g(0) = 0$, existe una constante $C = C(g) > 0$ tal que:

$$|g(z)| \leq C|z| \qquad\qquad (z \in \Delta)$$

Sea $z \in \Delta$ y $r = |z|$. Elíjase $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\exp\left\{-\frac{1}{N}\right\} \leq r < \exp\left\{-\frac{1}{N+1}\right\}$$

Entonces:

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\, g(z^n)\right| \leq C \sum_{n=N+1}^{\infty} n^\alpha r^n \leq C \sum_{n=N+1}^{\infty} n^\alpha \exp\left\{-\frac{n}{N}\right\} =$$

$$= C(N + 1)^\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{N + k}{N + 1}\right)^\alpha \exp\left\{-\frac{N + k}{N}\right\} \leq C\ (N + 1)^\alpha \sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha e^{-k}$$

La última desigualdad está basada en que la función $x^\alpha e^{-x}$ es decreciente si $x > 1$.

En definitiva

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\, g(z^n)\right| = O\left((N + 1)^\alpha\right)$$

Respecto a la primera parte de la serie basta recordar que $|g| \leq 1$, luego

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n\ g(z^n)\right| \le \sum_{n=0}^{N} n^{\alpha} = O\left((N+1)^{\alpha}\right)$$

Debido a al elección de r se concluye finalmente:

$$|u(z)| \le C_1\left(\log \frac{1}{r}\right)^{\alpha}$$

y el resultado se deduce de la desigualdad $\log \frac{1}{r} \le C_2(1 - r)^{-1}$ si r es próximo a 1. #

En el siguiente lema se recopilan las propiedades geométricas de la función auxiliar h que se necesitarán en la prueba del teorema 4. Por comodidad se supondrá en lo sucesivo que los arcos de circunferencia involucrados en la definición de h son simétricos respecto de $\mathbb{R}$.

<u>Lema 1.5</u> *Sea $0 < \delta \le 1/4$ y sea h la función armónica acotada en Δ que tiene valores frontera $+ 1$ en el arco $I = \{e^{it}:\ |t| < \pi\delta\}$ y $-\delta(1 - \delta)^{-1}$ en $\partial\Delta\backslash I$. Entonces h tiene las siguientes propiedades:*

a) *Para cada $\varepsilon > 0$, con $-\delta(1 - \delta)^{-1} < \varepsilon < 1$, la curva de nivel $\{h = \varepsilon\}$ es el arco de circunferencia que pasa por los puntos $e^{i\pi\delta}$, $e^{-i\pi\delta}$ y corta al arco $\partial\Delta\backslash I$ con ángulo $\pi[\delta+\varepsilon(1-\delta)]$.*

b) *Si $0 \le r \le 1/2$, entonces $|h(re^{i\theta})| \le 8\delta r$ para todo $\theta \in [0,2\pi]$*

c) *Existen constantes absolutas $C > 0$, $0 < r_0 < 1$ tales que, para cada r, con $r_0 < r < 1$ se verifica:*

i) la longitud del arco $J = \{e^{it}:\ h(re^{it}) > -\delta/2\}$ no excede de $2\pi\delta + C(1 - r)/\delta$

ii) Si el cociente $(1 - r)/\delta$ es pequeño, entonces la longitud del arco $J' = \{e^{it}:\ h(re^{it}) > \delta/2\}$ es superior a $2\pi\delta + C(1 - r)/\delta$.

iii) Para todo $e^{it} \in J'$ *se verifica* $h(se^{it}) \geq 0$ $\forall s \in [0,r]$ *y* $h(se^{it}) \geq \delta/2$ $\forall s \in [r_0,r]$. *En particular, para todo* $e^{it} \in I$, *se verifica* $h(se^{it}) \geq 0$ $\forall s \in [0,1]$ *y* $h(se^{it}) \geq \delta/2$ $\forall s \in [r_0,1)$.

d) Existe s_0, $0 < s_0 < 1$ *(que puede depender de* δ*), y constantes absolutas* $C > 0$, $0 < r_0 < 1$ *tales que* $0 < r_0 < s_0 \leq 1 - C\delta$ *y*

$$\max\left\{\left|h(r_0e^{it})\right|, \left|h(s_0e^{it})\right|\right\} \geq \delta/2 \qquad \text{para todo } t \in [0,2\pi]$$

Demostración:

a) Considérese el automorfismo g del disco unidad tal que $g(e^{-i\pi\delta}) = +1$ y $g(I) = \partial\Delta^+ = \partial\Delta \cap \{z: \mathrm{Im}\, z > 0\}$

La aplicación conforme

$$\frac{2}{\pi} \log \frac{1 + g}{1 - g}$$

transforma Δ en la banda $\{z: -1 < \mathrm{Im}\, z < 1\}$ de forma que la imagen de I es la recta $\{y = 1\}$ y la imagen de $\partial\Delta\backslash I$ es la recta $\{y = -1\}$. Si ahora se compone la aplicación anterior con la transformación afín

$$L(z) = \frac{1}{2}(1 - \delta)^{-1}(z - i) + i$$

que transforma la banda $\{z: -1 < \mathrm{Im}\, z < 1\}$ en la banda $\{z: -\delta(1 - \delta)^{-1} < \mathrm{Im}\, z < 1\}$ de modo que la recta $\{y = 1\}$ se transforma en sí misma y la recta $\{y = -1\}$ se transforma en la recta $\{y = -\delta(1 - \delta)^{-1}\}$, resulta que la aplicación conforme

$$L\left(\frac{2}{\pi} \log \frac{1 + g}{1 - g}\right)$$

transforma Δ en la banda $\{z: -\delta(1 - \delta)^{-1} < \mathrm{Im}\, z < 1\}$ de forma que la imagen de I es la recta $\{y = 1\}$ y la imagen de $\partial\Delta\backslash I$ es la recta $\{y = -\delta(1 - \delta)^{-1}\}$. Por tanto se deduce la representación

$$h = \mathrm{Im}\, L\left(\frac{2}{\pi} \log \frac{1 + g}{1 - g}\right)$$

Ahora, si $-\delta(1 - \delta)^{-1} < \varepsilon < 1$, un cálculo elemental muestra que la antiimagen por L de la recta $\{y = \varepsilon\}$ es la recta

$\{y = -1 + 2[\delta + \varepsilon(1-\delta)]\}$, cuya antiimagen por $2/\pi \log$ es la semirecta $\{z\colon \operatorname{Arg} z = -\pi/2 + \pi[\delta + \varepsilon(1-\delta)]\}$.

Obsérvese que la antiimagen por $(1+g)/(1-g)$ de la semirecta $\{z\colon \operatorname{Arg} z = -\pi/2\}$ es el arco $\partial\Delta\backslash I$. El resultado buscado se sigue de las propiedades geométricas de las transformaciones de Moebius

b) Para probar este apartado se puede usar la serie de Fourier de h, que por razones de simetría es una serie de cosenos. Un cálculo proporciona la expansión

$$h(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\theta)$$

donde $a_0 = 0$ y $a_n = 2/\pi(1-\delta)^{-1}\operatorname{sen}(n\pi\delta).n^{-1}$ si $n \geq 1$.

Dada la forma especial de las líneas de nivel de h, se tiene:

$$\sup\{|h(re^{i\theta})|\colon \theta\in[0,2\pi)\} = h(r) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi\delta)}{n}\, r^n =$$

$$= \frac{2}{\pi}\,(1-\delta)^{-1}\operatorname{Im}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(re^{i\pi\delta})^n}{n}$$

Utilizando el desarrollo $-\log(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\, z^n$ se concluye:

$$h(r) = \frac{2}{\pi}(1-\delta)^{-1}\operatorname{Arg}\,(1 - re^{-i\pi\delta}) = \frac{2}{\pi}(1-\delta)^{-1}\operatorname{Arctg}\left(\frac{r\operatorname{sen}\pi\delta}{1 - r\cos\pi\delta}\right) \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi}(1-\delta)^{-1}\frac{r\operatorname{sen}\pi\delta}{1 - r\cos\pi\delta} \leq 8\delta r$$

si $r \leq 1/2$.

c) Considérense las líneas de nivel $\{h = -\delta/2\}$, $\{h = \delta/2\}$. Tomando $\varepsilon = \pm 1/2$ en el apartado a) se comprueba que la circunferencia $\{h = \delta/2\}$ corta a $\partial\Delta\backslash I$ con ángulo $\pi/2\ \delta(3-\delta)$ mientras que $\{h = -\delta/2\}$ corta el arco $\partial\Delta\backslash I$ con ángulo $\pi/2\ \delta(1+\delta)$. Se comprueba asimismo que los centros de las circunferencias $\{h = -\delta/2\}$, $\{h = \delta/2\}$ son, respectivamente, los puntos $\operatorname{sen}\left[\pi\delta/2\ (1+\delta)\right]\left[\operatorname{sen}\pi/2\ \delta(3+\delta)\right]^{-1}$ y $\operatorname{sen}\left[\pi/2\ (3-\delta)\right]\left[\operatorname{sen}\pi/2\ (5-\delta)\right]^{-1}$, y sus radios $\operatorname{sen}\pi\delta\left[\operatorname{sen}\pi/2\ \delta(3+\delta)\right]^{-1}$ y $\operatorname{sen}\pi\delta\ \left[\operatorname{sen}\pi/2\ \delta(5-\delta)\right]^{-1}$ respectivamente.

Puesto que $\pi/2\ \delta(3 - \delta) < \pi/2$ por la restricción $\delta \le 1/4$, los dos puntos de tangencia de las tangentes a la circunferencia $\{h = \delta/2\}$ desde el origen pertenecen a Δ (de hecho al semidisco de la derecha) y son simétricos respecto de $\mathbb{R}$. Si se elige una constante absoluta $r_0 < 1$ mayor que el módulo común de estos dos puntos de tangencia, entonces i) y ii) se deducen de la información mencionada antes con argumentos elementales y iii) es consecuencia de ii).

d) Sea r_0 como en c) y elíjase $\theta \in [0, \pi/2]$ tal que $z_0 = r_0 e^{i\theta}$ es un punto de intersección de las circunferencias $\{h = \delta/2\}$ y $\{|z| = r_0\}$.

Sea w el punto de intersección del radio $[0, e^{i\theta})$ con la circunferencia $\{h = - \delta/2\}$ y tómese $s_0 = |w|$. Los valores numéricos obtenidos en c) revelan que θ está acotado inferiormente por una constante absoluta positiva y por tanto lo mismo ocurre con $(1 - s_0)/\delta$, según la parte i) del apartado c).

Supóngase ahora que e^{it}, $t \in [- \pi, \pi]$ es un punto arbitrario de la circunferencia unidad. Se distinguen dos casos:

1. $t \in (- \theta, \theta)$. Entonces $r_0 e^{it}$ pertenece al interior de la circunferencia $\{h = \delta/2\}$ y por tanto $h(r_0 e^{it}) \ge \delta/2$

2. $\theta \le |t| \le \pi$. Entonces $s_0 e^{it}$ está en el exterior de la circunferencia $\{h = - \delta/2\}$ por la elección de s_0 y por tanto $h(s_0 e^{it}) \le - \delta/2$.

La conclusión es

$$\max\left\{ |h(r_0 e^{it})|,\ |h(s_0 e^{it})| \right\} \ge \delta/2 \qquad \text{para todo} \quad t \in [0, 2\pi).$$

La demostración del lema 1.4 está completa. #

El próximo lema dice que se puede elegir una sucesión de radios

(r_k) tales que, si $|z| = r_k$, la parte relevante de la serie que define $u(z)$ es el factor $p^{k\alpha}(z^{p^k})$.

<u>Lema 1.6</u> *Sea h como en el lema 1.5 y*

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p^{k\alpha} h(z^{p^k})$$

Sean $a \geq \dfrac{2 \log p}{p}$ *y* $r_k = \exp\{-ap^{-k}\}$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$. *Entonces*

$$|u(r_k e^{i\theta}) - p^{k\alpha} h(e^{-a} e^{i\theta p^k})| \leq p^{k\alpha}\frac{\delta}{3} \quad \text{para todo} \quad \theta \in [0,2\pi)$$

si p es suficientemente grande.

<u>Demostración:</u>

Si $n \geq k+1$, entonces $r_k^{p^n} \leq \exp\{-ap\} \leq 1/2$, luego según el lema 1.5b)

$$\left|h\left(r_k^{p^n} e^{i\theta p^n}\right)\right| \leq 8\delta r_k^{p^n}$$

para todo $\theta \in [0,2\pi)$ y todo $n \geq k+1$. Por otra parte, $|h| \leq 1$, luego:

$$\left|u\left(r_k e^{i\theta}\right) - p^{k\alpha} h\left(e^{-a} e^{i\theta p^k}\right)\right| \leq \sum_{n=0}^{k-1} p^{n\alpha} + 8\,\delta \sum_{n=k+1}^{\infty} p^{n\alpha} \exp\left\{-ap^{n-k}\right\} \leq$$

$$\leq p^{k\alpha}\left[p^{\alpha}(p^{\alpha}-1)^{-1} + 8\,\delta \sum_{n=1}^{\infty} p^{n\alpha} \exp\{-2\log p.p^{n-1}\}\right\} \leq$$

$$\leq p^{k\alpha}\left[\frac{\delta}{4} + 8\,\delta \sum_{n=1}^{\infty} p^{n} p^{-2p^{n-1}}\right] \leq p^{k\alpha}\frac{\delta}{3}$$

si p es suficientemente grande. #

Se procede ahora a la demostración del teorema 4.

Recuérdese que $\alpha \in [0,1)$, $\beta \in (0,\alpha]$ y $\delta = 8p^{-\beta}$. En primer lugar se deduce del lema 1.4 que $u \in \mathcal{M}_{\alpha}$. Se demuestra a continuación que u no tiene radial finito en ningún punto.

En efecto, elíjanse r_0, s_0 como en el lema 1.5, apartado d).

Sean a, b > 0 tales que $r_0 = e^{-a}$, $s_0 = e^{-b}$ y obsérvese que $a > b \geq C\delta$ para alguna constante absoluta $C > 0$. Sean

$$r_k = \exp\{ - ap^{-k}\}, \quad s_k = \exp\{ - bp^{-k}\} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

Si p es grande, entonces $b \geq C\delta \geq \frac{2 \log p}{p}$, luego según el lema 1.5

$$\max\left\{\left|u\left(r_k e^{i\theta}\right) - p^{k\alpha} h\left(r_0 e^{i\theta p^k}\right)\right|, \left|u\left(s_k e^{i\theta}\right) - p^{k\alpha} h\left(s_0 e^{i\theta p^k}\right)\right|\right\} \leq p^{k\alpha} \frac{\delta}{3}$$

para todo $\theta \in [0,2\pi)$ y todo $k \in \mathbb{N}$. Ahora bien, el lema 1.5d) y la elección de r_0, s_0 implican

$$\max\left\{\left|h\left(r_0 e^{i\theta p^k}\right)\right|, \left|h\left(s_0 e^{i\theta p^k}\right)\right|\right\} \geq \delta/2$$

para todo $\theta \in [0,2\pi)$ y todo $k \in \mathbb{N}$, luego

$$\max\left\{\left|u\left(r_k e^{i\theta}\right)\right|, \left|u\left(s_k e^{i\theta}\right)\right|\right\} \geq p^{k\alpha}\, \delta/6$$

de donde se deduce que

$$\limsup_{r\to 1} |u(r\, e^{i\theta})| = \infty$$

para todo $\theta \in [0,2\pi)$. En particular u no tiene límite radial finito en ningún punto.

Seguidamente se demuestran las afirmaciones relativas a la dimensión de Hausdorff, para lo cual se distinguen dos casos.

a) $\alpha \in [0,1)$, $\beta \in (0,\alpha] \cap (0,1/2)$

De hecho se probará un resultado más fuerte que el que figura en el enunciado del teorema. Concretamente se demostrará

$$\dim\left\{e^{i\theta} : \limsup_{r\to 1} u(r\, e^{i\theta}) > 0\right\} \leq 1 - \beta + C\, (\log p)^{-1}$$

$$\dim\left\{e^{i\theta} : \liminf_{r\to 1} (1 - r)^{\alpha} u(re^{i\theta}) > 0\right\} \geq 1 - \beta$$

Se comienza por la cota superior de la dimensión.

Sea $E = \left\{e^{i\theta} : \liminf_{r\to 1} u(r\, e^{i\theta}) > 0\right\}$

Tómese $a = \frac{2 \log p}{p}$ y sea $e^{i\theta} \in E$. para cada $k \in \mathbb{N}$, sean $r_k = \exp\{ - ap^{-k}\}$. Por el lema 1.6 se tiene:

$$\left| u\left(r_k e^{i\theta}\right) - p^{k\alpha} h\left(e^{-a} e^{i\theta p^k}\right) \right| \leq p^{k\alpha} \frac{\delta}{2}$$

y por tanto, si $u(r_k e^{i\theta}) > 0$ resulta:

$$h\left(e^{-a} e^{i\theta p^k}\right) \geq \frac{-\delta}{2}$$

luego $e^{i\theta p^k}$ pertenece al arco J definido en el lema 1.5, apartado c) i) con $r = e^a$. J contiene a I y su longitud, según el lema 1.5, es inferior a $2\pi\delta + C\, a/\delta$ para alguna constante absoluta $C > 0$ (Nótese que $1 - e^{-x}$ es comparable con x cuando $x \longrightarrow 0$). Ahora bien, el cociente

$$\frac{a}{\delta^2} = \frac{1}{32}\, p^{2\beta-1} \log p$$

es menor que 1 si p es grande, debido a la restricción $\beta < 1/2$, luego la longitud de J no supera $C\delta$ para alguna constante absoluta $C > 0$.

La conclusión final es que si $e^{i\theta} \in E$, entonces existe $k_0 = k_0(\theta)$ tal que, para todo $k \geq k_0$, $e^{i\theta p^k} \in J$, que es un arco centrado en 1 y cuya longitud es inferior a $C\delta$.

Por tanto:

$$E \subset \bigcup_n E_n$$

donde $E_n = \{e^{it} : e^{itp^k} \in J \quad \forall k \geq n\}$. La demostración del lema 1.3 muestra que todos los conjuntos E_n tienen la misma dimensión. Este valor común es, a lo sumo:

$$1 - \log\left(\frac{1}{c\delta}\right)(\log p)^{-1} \qquad = 1 - \beta + \log (8C)(\log p)^{-1}$$

así que $\dim E \leq 1 - \beta + \log (8C)(\log p)^{-1}$ como se buscaba.

En cuanto a la cota inferior, defínase

$$F = \{e^{it} : e^{itp^k} \in I \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\}$$

Según el lema 1.3, $\dim F = 1 - \beta + \log 8(\log p)^{-1}$.

Sea $e^{i\theta} \in F$ y r, $0 < r < 1$. Por la propiedad c) iii) del lema 1.5 y la definición de F se verifica:

$$h\left(r^{p^n} e^{i\theta p^n}\right) \geq 0 \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\exp\left\{p^{-k}\log r_0\right\} \leq r \leq \exp\left\{p^{-k-1}\log r_0\right\}$$

donde r_0 es la constante que aparece en el lema 1.5 c). Entonces:

$$u\left(r\ e^{i\theta}\right) \geq p^{k\alpha}\ h\left(r^{p\alpha} e^{i\theta p^k}\right) \geq p^{k\alpha}\frac{\delta}{2}$$

De la elección de k se deduce:

$$p^k \geq \frac{1}{p} \log \left(\frac{1}{r_0}\right)\left(\log \frac{1}{r}\right)^{-1}$$

En definitiva:

$$u(re^{i\theta}) \geq C(p)(1 - r)^{-\alpha} \qquad \text{si } r \text{ es próximo a } 1$$

de donde

$$\liminf_{r\to 1} (1 - r)^{\alpha}\ u(re^{i\theta}) > 0 \qquad \text{si } e^{i\theta} \in F$$

lo que concluye la prueba del teorema 4 en el caso a).

b) $\alpha \in [1/2, \alpha]$, $\beta \in [1/2, \alpha]$.

Igual que en el caso a) se obtendrán conclusiones más fuertes que las del enunciado del teorema. Concretamente:

$$\dim\left\{e^{i\theta} : \liminf_{r\to 1} u(re^{i\theta}) > 0\right\} \leq \beta + \log\ (C \log p)(\log p)^{-1}$$

$$\dim\left\{e^{i\theta} : \liminf_{r\to 1} (1 - r)^{\alpha}\ u(re^{i\theta}) > 0\right\} \geq \beta$$

Sean, como en a)

$$E = \left\{e^{i\theta} : \liminf_{r\to 1} u(re^{i\theta}) > 0\right\}, \qquad a = \frac{2\log p}{p}$$

Sea $e^{i\theta} \in E$, y $r_k = \exp\{-ap^{-k}\}$ $(k \in \mathbb{N})$. Si $u(r_k e^{i\theta}) > 0$, de los mismos cálculos que en a) se desprende que

$$h\left(e^{-a}e^{i\theta p^k}\right) > -\delta/2$$

de modo que $e^{i\theta p^k}$ pertenece al arco J definido en el lema 1.5 c) i) con $r = e^{-a}$. La longitud de J es, pues, inferior a $2\pi\delta + Ca/\delta$, y ahora la restricción $\beta \geq 1/2$ hace posible que

$$\frac{a}{\delta} = \frac{\log p}{4p^{1-\beta}} \geq \delta = \frac{8}{p^{\beta}}$$

si p es suficientemente grande.

Por consiguiente, la longitud de J es inferior a $C \log p . p^{\beta-1}$ para alguna constante absoluta $C > 0$ y siguiendo el mismo razonamiento que en a) se obtiene

$$E \subset \bigcup_n E_n$$

donde

$$E_n = \{e^{it} : e^{itp^k} \in J \quad \forall k \geq n\}$$

Del lema 1.3 finalmente se deduce:

$$\dim E \leq 1 - \log\left(\frac{p^{1-\beta}}{C \log p}\right)(\log p)^{-1} = \beta + \log (C \log p)(\log p)^{-1}$$

y el resultado acerca de la cota superior está probado.

Respecto a la cota inferior, sea J' el arco que se definió en el lema 1.5, apartado c) ii) con $r = e^{-a}$, donde $a = \frac{2 \log p}{p}$.

Entonces

$$\frac{a}{\delta} = \frac{\log p}{8\ p^{1-\beta}}$$

de modo que $(1 - e^{-a})/\delta$ es pequeño si p es grande, y la longitud de J' es mayor que $2\pi\delta + C \log p\ .\ p^{\beta-1}$para alguna constante absoluta $C > 0$, según el lema 1.5 c) ii). Ahora la restricción $\beta \geq 1/2$ permite asegurar que J' tiene longitud mayor que $C \log p \cdot p^{\beta-1}$.

Sea $\qquad F = \{e^{i\theta} : e^{i\theta p^k} \in J' \qquad \forall\ k \in \mathbb{N}\}$

Obsérvese que $\dim F \geq \beta + \log (C \log p) (\log p)^{-1}$ por el lema 1.3.

Sea $e^{i\theta} \in F$, r, con $0 < r < 1$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\exp\{ - p^{-k} \log r_0\} \le r < \exp\{ - p^{-k-1} \log r_0\}$$

donde r_0 es la constante que aparece en el lema 1.5, apartado c).

Si $n \ge k + 1$, entonces $r^{p^n} \le r_0$ y el apartado c) iii) del lema 1.5 garantiza que

$$h\left(r^{p^n} e^{i\theta p^n}\right) \ge 0$$

Si $n = k$, entonces $r_0 \le r^{p^k} \le e^{-a}$ y también del apartado c) iii) del lema 1.5 se deduce que

$$h\left(r^{p^k} e^{i\theta p^k}\right) \ge \delta/2$$

En definitiva:

$$u(re^{i\theta}) \ge p^{k\alpha}\frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{1 - \delta}\sum_{n=0}^{k-1} p^{n\alpha} \ge p^{k\alpha}\frac{\delta}{4}$$

y se concluye, igual que en a):

$$\liminf_{r\to 1} (1 - r)^{\alpha}u(re^{i\theta}) > 0 \qquad \text{si } e^{i\theta} \in F$$

luego

$$\dim\left\{e^{i\theta} : \liminf_{r\to 1} (1 - r)^{\alpha} u(re^{i\theta}) > 0\right\} \ge \beta$$

Por consiguiente, el teorema 4 está totalmente probado. #

SECCION 1.5. PRUEBA DEL TEOREMA 5.

Tal y como se menciona en la introducción, el teorema 5 es una variante, un poco más artificiosa, del teorema 4. La clave consiste en considerar funciones de la forma.

$$u(z) = \sum_{K=1}^{\infty} p^{\alpha n_k} h_k \left(z^{p^{n_k}}\right)$$

donde ahora p es un entero grande, $\{n_k\}$ es una sucesión creciente de enteros a la que se exigirá de momento que $n_{k+1} - n_k \uparrow \infty$ y h_k es la función del Lema 1-5 con $\delta = \delta_k$, siendo $\{\delta_k\}$ una sucesión de números positivos que tiende a cero y se fijará a continuación en función de $\{n_k\}$. Es decir, h_k es la función armónica en Δ, acotada por 1, que tiene valor frontera 1 en el arco

$$I_k = \left\{e^{it}: -\pi\delta_k < t < \pi\delta_k\right\}$$

y $-\delta_k(1 - \delta_k)^{-1}$ en $\partial\Delta\setminus I_k$.

Recuérdese que en el teorema 4 se elegían valores de δ de la forma $8p^{-\beta}$ donde $\beta\in(0,\alpha]$. Análogamente, en el teorema 5 interesa tomar valores de δ_k del orden de

$$p^{-(n_k - n_{k-1})}$$

Si $\alpha\in[0,1)$ y $\beta\in(0,\alpha]$, se elegirá, para todo lo que resta

$$\delta_k = 8\, p^{-\beta(n_k - n_{k-1})}$$

Los dos lemas siguientes son los análogos de los lemas 1.3 y 1.6 en la presente situación.

Lema 1.7 *Supóngase que $C > 0$, $1 \le L < \infty$ y la sucesión $\{n_k\}$ verifica las condiciones*

$$\frac{n_k}{n_{k-1}} \xrightarrow[k \to \infty]{} L$$

$$\frac{n_k}{k} \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty$$

Sean $k,\ m \in \mathbb{N},\ k \geq m$ y considérense los conjuntos

$$E_{m,k} = \left\{ t \in [0,1] = p^{tn_j} - [p^{tn_j}] \in [0, C\delta_j], \quad j = m,\ m+1, \ldots k \right\}$$

Entonces

$$\dim \bigcap_{k=m}^{\infty} E_{m,k} = \frac{L - \beta}{L(1+\beta) - \beta}$$

para todo $C > 0$ y todo $m \in \mathbb{N}$

Demostración

Como en el caso del Lema 1.3 la dimensión coincide con el valor especial que se obtiene cuando se acota superiormente el contenido de Hausdorff. Sin embargo, el argumento correspondiente a la cota inferior está revestido de bastantes complicaciones técnicas así que sólo se ofrece el argumento que permite averiguar el valor correcto de la cota superior.

Supóngase, por comodidad, que $m = 1$ (esto no influye en el resultado). Entonces $E_{1,1}$ consta esencialmente de p^{n_1} intervalos de longitud

$$C\delta_1 p^{-n_1} = \frac{C\delta_1 p^{n_2 - n_1}}{p^{n_2}}$$

en cada uno de ellos se reproduce el proceso y por tanto $E_{1,2}$ consta de $p^{n_1}\delta_1 p^{n_2-n_1}$ intervalos de longitud $C\delta_2 p^{-n_2}, \ldots$

Repitiendo el proceso se concluye que $E_{1,k}$ "consta" de $C^{k-1}\ \delta_1 \ldots \delta_{k-1}\ p^{n_k}$ intervalos de longitud $C\ \delta_k\ p^{-n_k}$.

Si se sustituye δ_j por su valor $8\ p^{-\beta(n_j - n_{j-1})}$, se obtiene la siguiente estimación para el γ - contenido:

$$M_\gamma(E_{1,k}) \le C^{k-1} \frac{p^{n_k}}{p^{\beta(n_k - n_{k-1})}} \left[\frac{C}{p^{n_k + \beta(n_k - n_{k-1})}}\right]^\gamma =$$

$$= C^\gamma\ C^{k-1} \left(p^{\frac{n_k}{n_{k-1}} - \beta - \gamma\left[\frac{n_k}{n_{k-1}}(1+\beta) - \beta\right]} \right)^{n_{k-1}}$$

observese que si en el exponente

$$\frac{n_k}{n_{k-1}} - \beta - \gamma\left[\frac{n_k}{n_{k-1}}(1 + \beta) - \beta\right]$$

se sustituye n_k/n_{k-1} por L entonces la expresión resultante se anula si sólo si γ toma el valor $(L - \beta)\left[L(1 + \beta) - \beta\right]^{-1}$. Llámase γ_0 a este valor especial. La hipótesis $n_k/\ k \longrightarrow \infty$ permitirá controlar el factor C^{k-1} y γ_0 será la dimensión correcta.

En efecto, si $\varepsilon > 0$ y k es suficientemente grande para que

$$\frac{n_k}{n_{k-1}} < L + \frac{\varepsilon}{2}$$

se comprueba que

$$\frac{n_k}{n_{k-1}} - \beta - (\gamma_0 + \varepsilon)\left[\frac{n_k}{n_{k-1}}(1 + \beta) - \beta\right] \le \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left[1 - (\gamma_0 + \varepsilon)(1 + \beta)\right] - \beta$$

$$- \beta(\gamma_0 + \varepsilon) \le -L\varepsilon(1 + \beta) + \varepsilon\beta + \frac{\varepsilon}{2}\ \beta^2\left[L(1 + \beta) - \beta\right]^{-1} \le - \frac{\varepsilon}{2}$$

Por consiguiente

$$M_{\gamma_0+\varepsilon}(E_{1,k}) \le C^{\gamma_0}\ C^{k-1}\ p^{-\varepsilon/2\ n_{k-1}}$$

y el factor de la derecha tiende a cero cuando $k \longrightarrow \infty$, para cualquier $\varepsilon > 0$, en virtud de la hipótesis $n_k\ /k \longrightarrow \infty$. Puesto que la elección de ε fue arbitraria se obtiene finalmente

$$\dim \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{1,k} \le \gamma_0. \qquad \#$$

__Lema 1.8__ *Sea* $a_k \geq 2 \log p^{n_{k+1}-n_k} \cdot p^{-(n_{k+1}-n_k)}$ *y*

$r_k = \exp\left\{ - a_k p^{-n_k}\right\}$ *para cada* $k \in \mathbb{N}$. *Entonces*

$$\left| u\left(r_k e^{i\theta}\right) - p^{\alpha n_k} h_k\left(e^{-a_k} e^{i\theta p^{n_k}}\right)\right| \leq p^{\alpha n_k} \frac{\delta_k}{3}$$

para todo $\theta \in [0,2\pi)$

Demostración:

La demostración es análoga a la del lema 1.6.

Si $j > k + 1$, entonces

$$r_k^{n_j} \leq r_k^{n_{k+1}} = \exp\left\{ - a_k\, p^{n_{k+1}-n_k}\right\} \leq 1/2$$

luego

$$\left|h_j\left(r_k^{p^{n_j}} e^{i\theta p^{n_j}}\right)\right| \leq 8\, \delta_j r_k^{p^{n_j}}$$

para todo $\theta \in [0,2\pi)$ y todo $j \geq k + 1$, según el lema 1.5b).

Por tanto:

$$\left|u\left(r_k e^{i\theta}\right) - p^{\alpha n_k} h_k\left(e^{-a_k} e^{i\theta p^{n_k}}\right)\right| \leq \sum_{j=0}^{k-1} p^{\alpha n_j} +$$

$$+ 8 \sum_{j=k+1}^{\infty} p^{\alpha n_j}\delta_j \exp\left\{ - a_k p^{n_j-n_k}\right\} \leq$$

$$\leq p^{\alpha n_k}\left[p^{\alpha}(p^{\alpha} - 1)^{-1}\, p^{-\alpha(n_k-n_{k-1})} + \right.$$

$$\left. + 8\, \delta_{k+1} \sum_{j=k+1}^{\infty} p^{n_j-n_k}\, p^{-2(n_{k+1}-n_k)p^{n_j-n_{k+1}}}\right] \leq p^{\alpha n_k} \frac{\delta_k}{3}$$

La función u pertenece a la clase $\mathcal{M}_\alpha$ por el lema 1.4, y la demostración de que u no tiene límite radial finito en ningún punto se basa en al utilización del Lema 1.8 y es por tanto paralela a la que se dio en el teorema 4 (con los consabidos cambios δ_k en lugar de δ y

h_k en lugar de h). Por ello será omitida.

A continuación se tratan las cuestiones relativas a la dimensión de Hausdorff. Se distiguirán dos casos, igual que en el teorema 4, dependiendo de si β es mayor o menor que 1/2, y se hará una elección concreta de la sucesión $\{n_k\}$ en cada uno de ellos.

Defínase

$$E = \left\{e^{i\theta} = \liminf_{r \to 1} u\left(r\, e^{i\theta}\right) > 0\right\}$$

En lo que resta de demostración se elige:

$$a_k = \frac{2\log p^{n_{k+1}-n_k}}{p^{n_{k+1}-n_k}}, \qquad r_k = \exp\left\{-\, a_k\, p^{-n_k}\right\} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

Supóngase que $\{\, n_k \,\}$ verifica la propiedad adicional:

$$\frac{a_k}{\delta_k^2} = \frac{\log p^{n_{k+1}-n_k}}{32\, p^{n_{k+1}-n_k-2\beta(n_k-n_{k-1})}} \le 1 \quad \text{si k es suf. grande} \qquad (1.7)$$

Sea $e^{i\theta} \in E$ y sea $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $u\left(r_k\, e^{i\theta}\right) > 0$.

Por lema 1.8:

$$h_k\left(e^{-a_k}\, e^{i\theta p^{n_k}}\right) > -\,\delta_k/2$$

y, al ser $a_k/\delta_k^2 \le 1$, se deduce del lema 1.5c) que $e^{i\theta p^{n_k}}$ pertenece al arco

$$J_k = \left\{e^{it} = -\,C\,\delta_k < t < C\,\delta_k\right\}$$

para alguna constante absoluta $C > 0$. En definitiva:

$$E \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} E_{m,k}$$

donde

$$E_{m,k} = \left\{e^{it} : e^{itp^{n_j}} \in J_k, \quad j = m,\ m+1,\ \ldots k\right\}$$

Supóngase que $n_k/n_{k-1} \longrightarrow L \ge 1$ cuando $k \longrightarrow \infty$. Entonces los conjuntos

$$\bigcap_{k=m}^{\infty} E_{m,k}$$

tienen dimensión $(L - \beta)\left[L(1 + \beta) - \beta\right]^{-1}$ según el Lema 1.7. Ahora bien, la función

$$[1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$L \longrightarrow (L - \beta)\left[L(1 + \beta) - \beta\right]^{-1}$$

es creciente, así que conviene elegir los valores de L más pequeños que sean compatibles con la condición (1.7).

A partir de este punto interesa distinguir dos casos:

a) $0 < \beta \le \alpha, \quad \beta \le 1/2$

Elíjase $n_k = k^3$. Entonces $L = 1$, y se verifica (1.7) ya que:

$$n_{k+1} - n_k - 2\beta\left(n_k - n_{k-1}\right) \le n_{k+1} - n_k - \left(n_k - n_{k-1}\right) = 6k$$

luego

$$\dim E \le (1 - \beta)\left[1 + \beta - \beta\right]^{-1} = 1 - \beta$$

En cuanto a la cota inferior, considérese el conjunto

$$F = \left\{e^{it} : e^{itp^{n_k}} \in I_k \ \forall\ k \in \mathbb{N}\right\}$$

que tiene dimnensión $1 - \beta$ por el lema 1.7.

Si $e^{i\theta} \in F$, y ro, $0 < r_0 < 1$ es la constante del Lema 1.5 apartado c), entonces

$$h_k\left(s\, e^{i\theta}\right) \ge 0 \qquad \text{si} \qquad s \in [0,1)$$

$$h_k\left(s\, e^{i\theta}\right) \ge \delta_k/2 \qquad \text{si} \qquad s \in [r_0,1)$$

Sea r, $0 < r < 1$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\exp\left\{p^{-n_k} \log r_0\right\} \le r < \exp\left\{p^{-n_{k+1}} \log r_0\right\}$$

Entonces:

$$u\left(r_k\, e^{i\theta}\right) \ge p^{\alpha n_k} h_k\left(r_k^{p^{n_k}} e^{i\theta p^{n_k}}\right) \ge p^{\alpha n_k} \frac{\delta_k}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\, p^{\beta}\, p^{\alpha k^3 - \beta(3k^2 - 3k + 1)}$$

Dado $\varepsilon > 0$, se verifica $\alpha k^3 - \beta(3k^2 + 3k + 1) \geq (\alpha - \varepsilon)(k + 1)^3$ si k es suficientemente grande, luego por elección de r:

$$u\left(r\, e^{i\theta}\right) \geq \frac{1}{2}\, p^{\beta}\, p^{(\alpha-\varepsilon)(k+1)^3} \geq \frac{p^{\alpha}}{2} \log\left(\frac{1}{r_0}\right)\left(\log \frac{1}{r}\right)^{\varepsilon-\alpha}$$

y por tanto, para cualquier $\varepsilon > 0$:

$$\dim\left\{e^{i\theta} : \liminf_{r \to 1} \left(1 - r\right)^{\alpha-\varepsilon} u\left(r\, e^{i\theta}\right) > 0\right\} \geq 1 - \beta$$

b) $0 < \beta \leq \alpha \qquad \beta > 1/2$

Obsérvese ahora que (1.7) obliga a que

$$n_{k+1} - n_k \geq 2\beta\left(n_k - n_{k-1}\right)$$

y de aquí se deduce que si $n_k / n_{k-1} \to L$ entonces L debe ser mayor o igual que 2β.

Elíjase $n_k = k(2\beta)^k$. Entonces $L = 2\beta > 1$ y se cumple (1.7) porque ahora

$$n_{k+1} - n_k - 2\beta\left(n_k - n_{k-1}\right) = (2\beta - 1)\ (2\beta)^k$$

Por consiguiente en este caso

$$\dim E \leq (2\beta - \beta)\ \left[2\beta(1 + \beta) - \beta\right]^{-1} = (1 + 2\beta)^{-1}$$

Respecto a la cota inferior, nótese que el conjunto

$$F = \left\{e^{it} : e^{ip^{n_k t}} \in I_k\ \forall k \in \mathbb{N}\right\}$$

tiene dimensión $(1 + 2\beta)^{-1}$ por el Lema 1.7 y si r, k, r_0 son como en a), entonces:

$$u\left(r\, e^{i\theta}\right) \geq p^{\alpha n_k}\, \frac{\delta_k}{2} = \frac{1}{2}\, p^{\alpha k(2\beta)^k - \beta\ [k(2\beta)^k - (k-1)(2\beta)^{k-1}]} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[p^{\alpha(k+1)(2\beta)^{k+1}}\right]^{\frac{(3-2\beta)k-1}{4\beta(k+1)}} \geq \frac{1}{2}\, p^{\frac{\alpha}{4}(k+1)(2\beta)^{k+1}}$$

si k es suficientemente grande. Por tanto

$$\dim\left\{e^{i\theta} : \liminf_{r \to 1} \left(1 - r\right)^{\frac{\alpha}{4}} u\left(r\, e^{i\theta}\right) > 0\right\} \geq (1 + 2\beta)^{-1}$$

El teorema 5 está totalmente demostrado. #

Seccion II.1.

En esta sección se probará que $\beta(S)$ está comprendido entre 0 y 1 y que tanto $\beta(S)$ como $\gamma(S)$ no dependen del punto de la superficie que se utilice en su definición. Se mostrará también la relación entre el conjunto límite cónico y el comportamiento asintótico de las geodésicas y se extraerán consecuencias geométricas de esta relación.

Antes de comenzar la demostración del primer lema conviene hacer un breve comentario sobre la clasificación de las transformaciones de Moebius según el número de puntos fijos. Se dice que un automorfismo del semiplano superior U es parábolico si tiene un único punto fijo $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, hiperbólico si tiene dos puntos fijos $\alpha,\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y elíptico si tiene dos puntos fijos $\alpha = a + ib$ y $\bar{\alpha} = a - ib$, con $b > 0$. Toda transformación parábolica es conjugada en el grupo de automorfismos de U con una de las traslaciones $z \longrightarrow z + 1$ ó $z \longrightarrow z - 1$, es decir, si T es parabólica existe $A \in Au\,t(U)$ tal que $ATA^{-1}(z) = z \pm 1$. Toda transformación hiperbólica es conjugada con alguna homotecia $z \longrightarrow \lambda z$, $\lambda > 1$. (Ver [JS] Pag. 219).

<u>Lema 2.1.</u> *Sea g un automorfismo de U, parabólico o hiperbólico. Entonces:*

$$\left| \log \frac{d_U(a,g(a))}{d_U(b,g(b))} \right| \le d_U(a,b)\,, \qquad (a,b\in U) \qquad (2.1)$$

En particular, si G es un grupo recubridor de una superficie de Riemann S:

$$\left| \log \frac{\eta(a)}{\eta(b)} \right| \le d_U(a,b) \qquad\qquad (a,b\in U)$$

donde $\eta(z) = \inf\{d_U(z,g(z)) : g\in G , g \neq \text{identidad}\}$.

Por consiguiente, si $p,q\in S$ *:*

$$\left|\log \frac{i_S(p)}{i_S(q)}\right| \leq d_S(p,q)$$

Demostración:

Puesto que los automorfismos de U son isometrías en la métrica hiperbólica, (2.1) es equivalente a:

$$\left|\log \frac{d_U(a,A^{-1}gA(a))}{d_U(b,A^{-1}gA(b))}\right| \leq d_U(a,b) \qquad\qquad (a,b\in U)$$

donde $A\in \mathrm{Aut}(U)$; es decir, la propiedad (2.1) es invariante por conjugación (en Aut(U)) y por tanto se puede asumir que g es una traslación $z \longrightarrow z \pm 1$ o una homotecia $z \longrightarrow \lambda z$, $\lambda > 1$.

Sean $a,b\in U$ y sea $\gamma : [0,1] \longrightarrow U$, $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ una parametrización de la geodésica en U que une a,b.

Sea $f(z) = d_U(z,g(z))$. Entonces:

$$\left|\log \frac{d_U(a,g(a))}{d_U(b,g(b))}\right| = \left|\log f(\gamma(1)) - \log f(\gamma(0))\right| \leq$$

$$\leq \int_0^1 \frac{|\nabla f(\gamma(t))||\gamma'(t)|}{f(\gamma(t))}\, dt$$

donde $|\ |$ y ∇ denotan módulo y gradiente euclídeo respectivamente.

Supóngase que se pruba la siguiente desigualdad:

$$\frac{|\nabla f(z)|}{f(z)} \leq \frac{1}{\operatorname{Im} z} \qquad (z\in U) \qquad\qquad (2.2)$$

Entonces:

$$\left|\log \frac{f(a)}{f(b)}\right| \leq \int_0^1 \frac{\overline{|\gamma'(t)|}}{\operatorname{Im} \gamma(t)}\, dt = d_U(a,b)$$

y el lema estaría demostrado.

Para probar (2.2) se distinguen los casos parábolico e hiperbólico.

i) Caso parabólico. Asúmase que $g(z) = z + \lambda$, $\lambda = +1$ ó -1.

Sea $z = x + iy$. Entonces

$$f(z) = d_U(z, z + \lambda) = \log \frac{\sqrt{1 + 4y^2} + 1}{\sqrt{1 + 4y^2} - 1}$$

luego f sólo depende de y. Un cálculo proporciona:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z) = \frac{-2}{y\sqrt{1 + 4y^2}}$$

de donde

$$\frac{|\nabla f(z)|}{f(z)} = \frac{2}{y}\left(h \log \frac{h+1}{h-1}\right)^{-1}$$

siendo $h = \sqrt{1 + 4y^2}$. La función $h \longrightarrow 2\left(h \log \frac{h+1}{h-1}\right)^{-1}$ es creciente en $(1, +\infty)$ y tiende a 1 cuando h tiende a ∞. Con esto concluye la prueba de (2.2) en el caso paraábólico.

ii) <u>Caso hiperbolico.</u> Asúmase que $g(z) = \lambda z$, $\lambda > 1$.

Sea $z = r\, e^{i\theta}$, $r > 0$, $0 < \theta < \pi$.

Ahora

$$f(r\, e^{i\theta}) = d_U(r\, e^{i\theta}, \lambda r\, e^{i\theta}) = \log \frac{h+1}{h-1}$$

donde $h = \sqrt{1 + \frac{4\lambda}{(\lambda - 1)^2} \operatorname{sen}^2\theta}$ y f no depende de r.

Un cálculo sencillo de la derivada da:

$$\left|f_\theta(z)\right| = \frac{2|\cos\theta|}{h \operatorname{sen}\theta}$$

Por tanto:

$$|\nabla f(z)| \le \frac{1}{r}\left|f_\theta(z)\right| \le \frac{2|\cos\theta|}{(r \operatorname{sen}\theta)h}$$

y

$$\frac{|\nabla f(z)|}{f(z)} \le \frac{2}{\mathrm{Im}\, z}\left(h \log \frac{h+1}{h-1}\right)^{-1} \le \frac{1}{\mathrm{Im}\, z}$$

y también se obtiene (2.2) en el caso hiperbólico.

Considérese ahora una superficie de Riemann S y un recubrimiento universal F de U en S. Sea G el grupo recubridor de F. Debido a que G actua sin puntos fijos en U, los elementos de G son parabólicos o hiperbólicos.

Sean a, b∈U. De (2.1) se deduce:

$$d_U(a,g(a)) \le e^{d_U(a,b)} d_U(b,g(b))$$

para toda g∈ G distinta de la identidad.

Tomando infimos:

$$\eta(a) \le e^{d_U(a,b)} \eta(b)$$

Intercambiando el papel de a, b se obtendría la desigualdad recíproca, luego finalmente:

$$\left|\log \frac{\eta(a)}{\eta(b)}\right| \le d_U(a,b) \qquad (a,b\in U)$$

Por tanto, si se tiene en cuenta que $i_S(F(z)) = \frac{1}{2}\eta(z)$ resulta:

$$\left|\log \frac{i_S(F(z))}{i_S(F(w))}\right| \le d_S(z,w) \qquad (z,w\in U)$$

Ahora la desigualdad

$$\left|\log \frac{i_S(p)}{i_S(q)}\right| \le d_S(p,q) \qquad (p,q\in S)$$

Es consecuencia de la definición de la distancia hiperbólica en S. #

Corolario 2.2 *Sea S una superficie de Riemann y $p_o\in S$. Entonces*

$$\beta = \beta(S,p_o) = \inf\left\{t : \liminf_{d(p,p_o)\to\infty} i_S(p)e^{td_S(p,p_o)} > 0\right\}$$

satisface $0 \le \beta \le 1$ y no depende del punto p_o elegido.

Demostración:

Si p es un punto de S, la bola $B = B_S(p, i_S(p))$ es isométrica a una bola hiperbólica en Δ, luego cualquier bola contenida en B es isométrica a alguna bola hiperbólica en Δ y en particular es simplemente conexa.

Si $i_S(p) > d_S(p,p_0)$ entonces, según el comentario anterior, la bola $B_S(p_0, i_S(p) - d_S(p,p_0))$ está contenida en B y por tanto es simplemente conexa, luego

$$i_S(p) \le i_S(p_0) + d_S(p,p_0)$$

y de esta desigualdad se deduce que el radio de inyectividad puede crecer como máximo linealmente respecto de la distancia a un punto cualquiera. En particular β es no negativo.

Si q_0 es otro punto de S, obsérvese que

$$\liminf_{d(p,p_0)\to\infty} i_S(p)e^{td_S(p,p_0)} > 0 \Leftrightarrow \liminf_{d(p,q_0)\to\infty} i_S(p)e^{td_S(p,q_0)} > 0$$

Por tanto β no depende del punto p_0 elegido.

En cuanto a la desigualdad $\beta \le 1$, nótese que la estimación

$$i_S(p) \ge i_S(p_0)e^{-d_S(p,p_0)} \qquad (p\in S)$$

que se deduce del lema 2.1, impide que β pueda ser mayor que 1. $\ast$

La siguiente proposición pone de manifiesto la relación entre las geodésicas y el conjunto límite cónico. Recuérdese que si F es un recubrimiento universal de Δ en la superficie S, el conjunto límite cónico está formado por todos los puntos $e^{i\theta}$ tales que existe algún cono de Stolz de vértice $e^{i\theta}$ que contiene infinitos elementos de órbita de 0.

<u>Proposición 2.3.</u> *Sea S una superficie de Riemann. F un recubrimiento universal de Δ en S con $F(0) = p_0\in S$, G el grupo recubridor de F y $\Lambda_c(G)$ el conjunto límite cónico de G. Entonces*

a) Si en la definición de conjunto límite cónico se usa la órbita de otro punto $a\in\Delta$ en lugar de 0, el conjunto límite cónico es el mismo.

b) $e^{i\theta} \in \partial\Delta \setminus \Lambda_c(G)$ *si y sólo si* $d_S(p_0, F(r\, e^{i\theta})) \longrightarrow \infty$ *cuando* $r \longrightarrow 1$.

c) *La medida de Lebesgue del conjunto límite cónico es 0 ó* 2π.

<u>Demostración:</u>

El punto de partida para probar a) y b) es la siguiente propiedad relevante de los conos de Stolz : dado α, $0 < \alpha < \pi/2$, existe una constante positiva $A = A(\alpha)$ tal que todos los puntos del cono de Stolz $C\,(e^{i\theta}, \alpha, r)$ están a distancia hipèrbólica a lo sumo A del radio correspondiente a $e^{i\theta}$. Y recíprocamente, los puntos cuya distancia hiperbólica al radio$(0, e^{i\theta})$ es a lo sumo A están en algún cono de Stolz $C\,(e^{i\theta}, \alpha, 0)$ donde $\alpha = \alpha(A)$.

Esta propiedad se comprueba fácilmente en el semiplano superior U. Basta observar que la distancia hiperbólica en U del punto $re^{i\theta}$ al eje imaginario es exactamente

$$\log \frac{1 + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

y por tanto, esta distancia es menor o igual que A si y sólo si $\beta \le \theta \le \pi - \beta$ donde A y β están relacionados por expresión

$$A = \log \frac{1 + \cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}$$

Ahora a) es consecuencia de la igualdad

$$d_\Delta(g(a), g(0)) = d_\Delta(0, a) \qquad (g \in G)$$

y de la propiedad anterior de los conos de Stolz.

La caracterización b) también es consecuencia de la descripción de los conos de Stolz en términos de la distancia hiperbólica. En efecto, supóngase que $e^{i\theta} \in \Lambda_c(G)$, y sea C un cono de Stolz de vértice $e^{i\theta}$ que contiene una sucesión $\{z_n\}$ con $F(z_n) = F(0)$, $z_n \longrightarrow e^{i\theta}$. Existe una constante $A > 0$ y una sucesión $r_n \longrightarrow 1$ tal que

$$d_\Delta(z_n, r_n e^{i\theta}) \le A \qquad (n\in\mathbb{N})$$

de donde se deduce:

$$d_S(p_0, F(r_n e^{i\theta})) \le A \qquad (n\in\mathbb{N})$$

En particular $d_S(p_0, F(re^{i\theta})) \not\longrightarrow \infty$ cuando $r \longrightarrow 1$.

Recíprocamente, supóngase que $d_S(p_0, F(re^{i\theta})) \not\longrightarrow \infty$ cuando $r \longrightarrow 1$. Existe entonces una constante $A > 0$ y una sucesión $\{r_n\}$ tal que $d_S(p_0, F(r_n e^{i\theta})) \le A$ para todo n. Si se elige, para cada n, $z_n \in \Delta$ tal que $F(z_n) = F(0)$ y $d_S(p_0, F(r_n e^{i\theta})) = d_\Delta(z_n, r_n e^{i\theta})$ entonces la sucesión $\{z_n\}$ pertenece a la órbita de 0 y está contenida en algún cono de Stolz de vértice $e^{i\theta}$, luego $e^{i\theta} \in \Lambda_c(G)$.

Finalmente, se prueba c). Se comienza señalando que el conjunto límite cónico es G - invariante, esto es, si $e^{i\theta} \in \Lambda_c(G)$ y $g\in G$, entonces $g(e^{i\theta}) \in \Lambda_c(G)$.

Supóngase que $|\Lambda_c(G)| > 0$. Sea u la integral de Poisson de la función característica de $\Lambda_c(G)$. Por el teorema de Fatou,

$$\lim_{r\to 1} u(re^{i\theta}) = 1$$

para casi todo $e^{i\theta} \in \Lambda_c(G)$. Sea $e^{i\theta} \in \Lambda_c(G)$ uno de los puntos en los que el límite radial es 1. Fíjese $a \in \Delta$ y sea $\{g_n\}$ una sucesión de elementos de G contenida en algún cono de vértice $e^{i\theta}$ con $g_n(a) \longrightarrow e^{i\theta}$. Entonces

$$\lim_n u(g_n(a)) = 1$$

Como $\Lambda_c(G)$ es g - invariante, también lo es u, luego $u\circ g = u$ para todo $g\in G$. Por consiguiente $u(g_n(a)) = u(a) = 1$ para todo $a \in \Delta$, y $|\Lambda_c(G)| = 2\pi$. #

La traducción geométrica de la proposición 2.3 se expresa en el siguiente corolario.

Corolario 2.4 *Sea S una superficie de Riemann, p_0 un punto arbitrario de S y F un recubrimiento universal de Δ en S con $F(0) = p_0$. Entonces tiene lugar una de las dos alternativas siguientes:*

a) Para casi todo $e^{i\theta}$ se verifica

$$\lim_{r\to 1} d_S(p_0, F(re^{i\theta})) = \infty$$

es decir, casi toda geodésica que parte de p_0 tiende a infinito.

b) Para casi todo $e^{i\theta}$ existe $A > 0$ tal que

$$\liminf_{r\to 1} d_S(p, F(re^{i\theta})) \le A$$

para todo $p\in S$, es decir, casi toda geodésica que parte de p atraviesa infinitas veces un entorno fijo de cada punto $p\in S$. En particular

$$\limsup_{r\to 1} d_S(p_0, F(re^{i\theta})) = \infty$$

para casi todo $e^{i\theta}$.

Corolario 2.5. *Si S es una superficie de Riemann, F es un recubrimiento universal de Δ en S con $F(0) = p_0$ y G es el grupo recubridor de F, entonces:*

a) $\gamma(S, p_0) = \dim(\partial\Delta\setminus \Lambda_c(G))$

b) La dimensión geodésica no depende del punto de partida, es decir

$$\gamma(S, p) = \gamma(S, p_0)$$

para todo $p\in S$.

Demostración

La parte a) es consecuencia directa de la proposición 2.3 (apartado b)). Para probar b), elíjase un punto cualquiera p de S y sea $a\in\Delta$ tal que $F(a) = p$. Si φ es un automorfismo de Δ tal que $\varphi(0) = a$, entonces

$\tilde{F} = F\circ\varphi$ es un recubrimiento universal de S con $\tilde{F}(0) = p$ y su grupo recubridor asociado es $\tilde{G} = \varphi^{-1}G\varphi$. Obsérvese que $\varphi^{-1}g\varphi(0) = \varphi^{-1}g(a)$ para cada $g\in G$. Puesto que la órbita de a sirve para definir el conjunto límite, se tiene:

$$\Lambda_c(\tilde{G}) = \varphi^{-1}(\Lambda_c(G))$$

de modo que $\partial\Delta\setminus \Lambda_c(\tilde{G}) = \varphi^{-1}(\partial\Delta\setminus \Lambda_c(G))$ y

$$\gamma(S,p) = \dim\,(\partial\Delta\setminus \Lambda_c(G)) = \gamma(S,p_o)$$

ya que φ^{-1} es regular en $\partial\Delta$. #

SECCION II.2.

En esta sección se estudia la relación entre las excursiones geodésicas en una superficie de Riemann y las propiedades de crecimiento de las funciones armónicas en la superficie.

Se comienza con una aplicación de la dicotomía expresada en el Corolario 2.4 conveniente en aplicaciones posteriores.

Proposición 2.6 *Sea S una superficie de Riemann y u una función armónica no constante en S. Si F es un recubrimiento universal de S y $v = u \circ F$, entonces se verifica una de las alternativas siguientes:*

a) Para cualquier punto $p \in S$, casi todas las geodésicas que parten de p se marchan a infinito en S.

b) Casi ninguna geodésica que parte de un punto cualquiera $p \in S$ se marcha a infinito en S y el conjunto de Fatou de v tiene medida (de Lebesgue) cero.

Demostración

Sea G el grupo recubridor de F y $\Lambda_c(G)$ el correspondiente conjunto límite cónico. Si $|\Lambda_c(G)| = 0$, entonces casi toda geodésica que parte de cualquier punto se marcha a infinito en S por la Proposición 2.3. Esta es la situación a).

En el caso b), $|\partial\Delta \setminus \Lambda_c(G)| = 0$ y casi ninguna geodésica se marcha a infinito (Proposición 2.3). Supóngase que $e^{i\theta} \in \Lambda_c(G)$ y v tiene límite no tangencial finito en $e^{i\theta}$. Sea p un punto cualquiera de S y $a \in \Delta$ tal que $F(a) = p$. Puesto que el conjunto límite cónico no depende de la órbita que se utiliza (Prop. 2.3), existe algún cono de Stolz C, de vértice $e^{i\theta}$, y una sucesión $\{z_n\}$ contenida en C, que tiende a $e^{i\theta}$, tal que $F(z_n) = p$ para todo n.

Ahora bien, $v(z_n) = u(p)$ para cualquier n, luego el límite no tangencial de v en $e^{i\theta}$ debe ser necesariamente u(p), y como p se eligió arbitrariamente, u tendría que ser constante, lo cual es una contradicción.

De modo que el conjunto de Fotov de v está contenido en el complementario del conjunto límite cónico, y de aquí se obtiene b). #

Si S es una variedad Riemanniana con métrica g, que tiene por elemento de longitud

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx^i dx^j$$

y u es una función regular en S, el gradiente de u, grad u, es el único campo vectorial en S que es métricamente equivalente a la diferencial du, es decir

$$g(\text{grad } u, X) = du(X)$$

para todo campo vectorial X en S ([Sp], Pag. 187).

La expresión de grad u respecto de un sistema de coordenadas es la siguiente:

$$\text{grad } u = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^i} \partial_j$$

donde (g^{ij}) es la matriz inversa de (g_{ij}) y $\{\partial_j\}$ son los campos coordenados. En lo sucesivo, si S es una superficie de Riemann y u es una función regular definida en S, grad u designará el gradiente respecto de la métrica de Poincaré de S.

Si $S = \Delta$ y v está definida en Δ, grad v denotará el gradiente respecto de la métrica hiperbólica en Δ, mientras que se reserva el símbolo ∇v para designar el gradiente euclídeo de v. Asimismo, en lo sucesivo $\| \ \|_S$ designará longitud respecto de la métrica de Poincaré en S y $| \ |$ designará longitud euclídea.

Nótese que en el caso del disco unidad

$$g^{11} = g^{22} = \frac{(1 - |z|^2)^2}{4}$$

$$g_{12} = g_{21} = 0$$

por tanto:

$$\text{grad } v(z) = \frac{(1 - |z|^2)^2}{4} \nabla v(z)$$

si se toman longitudes:

$$\|\text{grad } v(z)\|_\Delta = \frac{(1 - |z|^2)^2}{4} \|\nabla v(z)\|_\Delta = \frac{1 - |z|^2}{2} |\nabla v(z)|$$

Sea ahora S una superficie de Riemann, u una función regular en S, F un recubrimiento universal de Δ en S, y $v = u \circ F$.

Teniendo en cuenta que F es una isometría local y la fórmula anterior se deduce la siguiente relación entre los gradientes de u y de v:

$$\|\text{grad } u(F(z))\|_S = \|\text{grad } v(z)\|_\Delta = \frac{1 - |z|^2}{2} |\nabla v(z)|$$

Tras estos comentarios preparatorios se ofrece una aplicación del Corolario 1 del Capítulo I.

Lema 2.7 *Sea S una superficie de Riemann y u una función armónica no constante en S que verifica:*

$$\|\text{grad } u\ (p)\|_S \le A\ e^{\alpha d_s(p_0,p)} \qquad (p \in S)$$

$$\|\text{grad } u\ (p)\|_S \le \varnothing(|u(p)|)$$

donde p_0 es un punto prefijado de S, $\varnothing : [0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ es no decreciente, α es una constante con $0 \le \alpha < 1$ y A es una cierta constante positiva. Entonces

$$\gamma(S) \geq 1 - \alpha$$

Demostración:

Sea F un recubrimiento universal de Δ en S con $F(0) = p_0$ y sea $v = u\circ F$. De acuerdo con la proposición 2.3, o bien casi toda geodésica que parte de p_0 tiende a infinito, en cuyo caso $\gamma(S) = 1$, o bien casi ninguna geodésica que parte de p_0 tiende a infinito y el conjunto de Fatou de v tiene medida de Lebesgue cero. Supóngase que ocurre esta última posibilidad.

Si se tienen en cuenta los comentarios previos al lema, la desigualdad $d_S(F(0),F(z)) \leq d_\Delta(0,z)$ y las hipótesis, se deduce:

$$\|\text{grad } u\ (F(z))\|_S = \frac{1 - |z|^2}{2}\ |\nabla v(z)| \leq A\ e^{\alpha d_\Delta(0,z)} = A\left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|}\right)^{\alpha}$$

para todo $z\in\Delta$.

Por tanto:

$$|\nabla v(z)| \leq \frac{2A}{(1 - |z|)^{1+\alpha}} \qquad (z\in\Delta)$$

e, integrando se obtiene:

$$\begin{cases} |v(z)| \leq \dfrac{C}{(1 - |z|)^{\alpha}} & \text{para todo } z\in\Delta, \quad \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ |v(z)| \leq C \log \dfrac{1}{1 - |z|} & \text{para todo } z\in\Delta, \quad \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

De modo que $v \in \mathcal{M}_\alpha$

La segunda condición sobre el gradiente de u que figura en el enunciado se traduce en la siguiente desigualdad:

$$\frac{1 - |z|^2}{2}\ |\nabla v(z)| \leq \phi(|v(z)|) \qquad (z \in \Delta)$$

luego se satisfacen las hipótsis del Corolario 1, Capítulo I y se deduce que v tiene límite radial $+\infty$ en un conjunto de dimensión de Hausdorff al menos $1 - \alpha$.

Para concluir la demostración basta observar que si

$v(re^{i\theta}) = u(F(re^{i\theta}))$ tiende a $+\infty$ cuando r tiende a 1, entonces necesariamente se verifica que

$$\lim_{r\to 1} d_S\,(p_0, F(re^{i\theta})) = \infty$$

ya que las bolas de la métrica hiperbólica son relativamente compactas.

En definitiva $\gamma(S) \geq 1 - \alpha$. #

Si X, Y son espacios topológicos, se dice que una función $u : X \longrightarrow Y$ es propia si $u^{-1}(K)$ es compacto en X para cualquier compacto K de Y.

Si $Y = \mathbb{R}$, entonces $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es propia si y sólo si $u^{-1}[a,b]$ es compacto para cada $a,b\in\mathbb{R}$.

El siguiente lema relaciona el crecimiento de una función armónica propia en una superficie de Riemann con el radio de inyectividad de la superficie.

Lema 2.8 *Si u es una función armónica propia en una superficie de Riemann S, entonces existe una constante positiva A tal que*

$$\|grad\ u(p)\|_S \leq \frac{A}{min\ \{1, i_S(p)\}}$$

para todo $p\in S$.

En el caso en que $i_S(p)$ es acotado inferiormente, el Lema 2.8 aparece en [S1] en el contexto más general de variedades Riemanianas. La prueba del Lema2.8 que se da a continuación es más simple en el caso de superficie de Riemann.

Demostración del Lema 2.8.

Puesto que u es propia, las líneas de nivel de u son compactas, y para todos los valores de u con la excepción de una cantidad numerable (los valores correspondientes a los puntos críticos del gradiente), constan de un número finito de curvas cerradas regulares disjuntas.

Como en [S1], se comienza observando que la armonicidad de u implica que las integrales de línea

$$\int_{\{u=\lambda\}} \|\text{grad } u\|_S \, ds \tag{2.3}$$

son finitas e independientes de λ (ds significa elemento de longitud hiperbólica en S).

En efecto, si $a < b$ son dos valores no críticos de la función armónica u, la fórmula de Green ([Sp], Pag. 192) aplicada en $u^{-1}(a,b)$ da:

$$0 = \int_{\{u=a\}\cup\{u=b\}} \langle \text{grad } u, n \rangle ds \tag{2.4}$$

donde n es la normal exterior unitaria. Puesto que el gradiente es normal a las líneas de nivel, (2.4) no es sino:

$$\int_{\{u=a\}} \|\text{grad } u\| ds = \int_{\{u=b\}} \|\text{grad } u\|_S \, ds$$

que es precisamente (2.3).

Ahora fíjese $p \in S$ y supóngase sin pérdida de generalidad que $u(p) = 0$. Si F es un recubrimiento universal de Δ en S con $F(0) = p$ y $v = u \circ F$, entonces v es una función armónica en Δ y se verifica

$$\|\text{grad } u(F(z))\|_S = \|\text{grad } v(z)\|_\Delta = \frac{1 - |z|^2}{2} |\nabla v(z)| \qquad (z \in \Delta)$$

Si $t = \min\{1, i_S(p)\}$, F es una isometría de la bola hiperbólica $B_\Delta(0,t)$ en $B_S(p,t)$ por tanto

$$\int_{\{u=\lambda\}\cap B_S(p,t)} \|\text{grad } u\|_S ds = \int_{\{v=\lambda\}\cap B_\Delta(p,t)} \|\text{grad } v\|_\Delta dl$$

donde dl denota longitud de arco hiperbólico en Δ. Teniendo en cuenta que $dl = \frac{1}{2}(1 - |z|^2)^{-1}|dz|$ y la relación entre grad v y Δv, se deduce de (2.3) que existe una constante $A > 0$ tal que

$$\int_{\{v=\lambda\}\cap B_\Delta(0,t)} |\Delta v|\,|dz| \le A \tag{2.5}$$

para cada $\lambda \in \mathbb{R}$.

Obsérvese que $B_\Delta(0,t) = \{z = |z| < r\} = \Delta(0,r)$, siendo $r = (e^t - 1)(e^t + 1)^{-1}$.

Sea g la función analítica en $\Delta(0,r)$ cuya parte real es v y tal que $g(0) = 0$. La función f definida por $f(z) = g(rz)$ es analítica en Δ y si $\Omega = f(\Delta) = g(\Delta(0,r))$, entonces (2.5) es equivalente a:

$$\text{longitud } (\Omega \cap \{z : \operatorname{Re} z = \lambda\}) \le A$$

En particular Ω no contiene discos de diámetro superior a A. Por consiguiente, f es una función de Bloch [ACP] y existe una constante absoluta $C_0 > o$ tal que

$$\sup \left\{(1 - |z|^2)|f'(z)| \ : \ |z| < 1\right\} \le C_0 A$$

La conclusión es:

$$\|\text{grad } u(p)\|_S = \frac{1}{2}\,|\Delta v(0)| = \frac{|f'(0)|}{2r} \le \frac{C_0 A}{2}\,\frac{e^t + 1}{e^t - 1}$$

Por tanto

$$\|\text{grad } u(p)\|_S \le \frac{CA}{t}$$

para alguna constante absoluta $C > 0$ y la prueba está completa. #

La sección se concluye con un lema que pone de manifiesto la estrecha relación entre las funciones armónicas propias y el problema geométrico que se estudia de este capítulo.

<u>Lema 2.9</u> *Si existe una función armónica propia en una superficie de Riemann no compacta S, entonces*

$$\gamma(S) \ge 1 - \beta(S)$$

Demostración :

Sea u armónica propia en S, Sea $K = u^{-1}[-1,1]$ y considérese el compacto $\tilde{K} = \{q \in S : d_S(q,K) \le 1\}$.

Si $p \in S\setminus\tilde{K}$, la bola $B_S(p,1)$ está contenida en $S\setminus K$, luego:

$$u\Big|_{B_S(p,1)} \ge 1 \qquad ó \qquad u\Big|_{B_S(p,1)} \le -1$$

y se deduce de la desigualdad de Harnack que existe una constante absoluta $M > 0$ tal que

$$\|\text{grad } u(p)\|_S \le M|u(p)|$$

para todo $p \in S\setminus\tilde{K}$.

Por consiguiente,

$$\|\text{grad } u(p)\|_S \le M|u(p)| + m \tag{2.6}$$

para todo $p \in S$ y alguna constante $m > 0$.

Hágase $\beta = \beta(S)$ y sea $\varepsilon > 0$. La definición de $\beta(S)$ dice que

$$\liminf_{d(p,po)\to\infty} i_S(p)\, e^{(\beta+\varepsilon)d_s(p,po)} > 0$$

siendo po un punto cualquiera de S. Por tanto, existe una constante $A > 0$ tal que

$$i_S(p) \ge A\, e^{-(\beta+\varepsilon)d_s(p,po)} \qquad (p \in S)$$

Ahora el lema 2.8 proporciona la estimación

$$\|\text{grad } u(p)\|_s \le Ce^{(\beta+\varepsilon)d_s(p,p_0)}$$

para todo $p \in S$. El Lema 2.7, con $\varnothing(t) = Mt + m$ asegura que

$$\gamma(S) \ge 1 - \beta - \varepsilon$$

y el resultado buscado se obtiene haciendo tender ε a cero. #

SECCION II.3.

Esta sección está dedicada al estudio de algunos ejemplos. Los dos primeros son dos casos sencillos de dominios planos, aunque reflejan comportamientos válidos es casos más generales, como se verá en la proxima sección. El tercer ejemplo constituye un punto de partida muy interesante de cara al caso general, que se tratará en el teorema 6. Por último, se construyen superficies de Riemann S con $\beta(S)$ prefijado.

1. $\Omega = \Delta\setminus\{0\}$

La aplicación $F(z) = e^{iz}$ es un recubrimiento universal del semiplano superior U en Ω, con $F(i) = e^{-1}$. El grupo recubridor está generado por la transformación parabólica $z \longrightarrow z + 2\pi$ y la imagen por F de la región $\{x + iy : 0 < x < 2\pi,\ y > y_0\}$ es el entorno punteado $\Delta^{*}(0,e^{-y_0}) = z : 0 < |z| < e^{-y_0}\}$.

Las geodésicas en Ω son las imágenes por F de las circunferencias ortogonales al eje real y las rectas verticales. Puesto que $F(\mathbb{R}) = \partial\Delta$ y $F(x + iy) \longrightarrow 0$ cuando $y \longrightarrow +\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$, toda geodésica en Ω termina en $\partial\Omega$ y por tanto tiende a infinito en Ω

Se tiene pues, $\gamma(\Omega) = 1$.

Por otra parte, si $y > 0$, la imagen de la geodésica en U que une los puntos iy, $2\pi + iy$ es la curva cerrada no trivial de longitud (hiperbólica) más corta en Ω que pasa por el punto $F(iy) = e^{-y}$, por tanto

$$i_{\Omega}(e^{-y}) = \frac{1}{2}\, d_U(iy,\pi + iy) = \frac{1}{2}\log\left[1 + \frac{\pi}{y} + \frac{\pi^2}{y(y + \sqrt{\pi^2 + y^2}\,)}\right]$$

Además $d_U(i,iy) = d_\Omega(e^{-1},e^{-y}) = \log y$, luego haciendo tender y a ∞ se obtiene:

$$\lambda_\Omega(e^{-y}) \approx \frac{1}{y} = e^{-d_\Omega(e^{-1},e^{-y})}$$

de donde se deduce que $\beta(\Omega) = 1$.

En definitiva $\beta(\Omega) = \gamma(\Omega) = 1$.

En Ω hay curvas cerradas de longitud hiperbólica arbitrariamente pequeña que rodean la cúspide (ver introducción) originada por el origen.

2. $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$

Nótese que $\Omega = \hat{\mathbb{C}}\setminus\{0,1,\infty\}$ y $o,1,\infty$ son tres puntos aislados en $\partial\Omega$, cada uno de los cuales origina una cúspide.

El recubrimiento universal de Ω es la clásica función modular (ver por ejemplo [Fu], Pag. 54). Si bien el comportamiento de las geodésicas de Ω podría deducirse del estudio de los valores radiales de la función modular, resulta preferible utilizar argumentos geométricos válidos en situaciones más generales.

En general, si $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $a \in \partial\Omega$ es un punto aislado de $\partial\Omega$, la métrica hiperbólica de Ω se comporta, en un entorno de a, como la métrica hiperbólica de $\Delta\setminus\{0\}$ en un entorno de 0; de forma más precisa, existe un entorno de a que es isométrico (con la métrica hiperbólica de Ω) a algún entorno $\Delta^*(0,\varepsilon) = \{z : 0 < |z| < \varepsilon\}$ con la métrica hiperbólica de $\Delta\setminus\{0\}$. (Una demostración puede consultarse en [Kr], Pag. 53). Por consiguiente, los radios de inyectividad de Ω y de $\Delta\setminus\{0\}$ coinciden en los puntos equivalentes de dicho entorno y de $\Delta^*(0,\varepsilon)$ por dicha isometría, de donde se deduce que

$$\beta(\mathbb{C}\setminus\{0,1\}) = \beta(\Delta\setminus\{0\}) = 1$$

Por otra parte, las geodésicas que terminan en algunos de los puntos $0,1,\infty$ se corresponden con los elementos parabólicos del grupo recubridor y son por tanto una cantidad numerable, luego $\gamma(\Omega) = 0$.

En resumen: $\beta(\Omega) = 1$, $\gamma(\Omega) = 0$

3. El procedimiento que se expone a continuación muestra cómo se pueden construir superficies de Riemann pegando copias de superficies con borde más sencillas a lo largo de geodésicas de la misma longitud. Los bloques básicos de la construcción son las llamadas Piezas Y ([Bu]) cuya construcción se comenta a continuación.

Se toma en primer lugar un hexágono geodésico H en el disco unidad, es decir, un hexágono cuyos lados son geodésicas que se cortan con ángulo $\pi/2$. Si se fijan $a,b > 0$ y se numeran los lados consecutivamente por $1,2,\dots 6$ entonces se puede conseguir que el lado 1 tenga longitud (hiperbólica) $a/2$ y los lados 3, 5 longitud $b/2$.

Ahora se considera una copia H' de H y se identifican los correspondientes lados pares. Las estructuras Riemanianas encajan correctamente porque si, por ejemplo, $p\in H$, $p'\in H'$ son dos puntos equivalentes de dos lados pares 1, 1' de H, H' respectivamente entonces existen dos discos D, D' centrados en p, p' tales que $D \cap H$ es isométrico a $\Delta^+(0,\varepsilon) = \{z : |z| < \varepsilon,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ de forma que p se transforma en 0 y $D \cap 1$ se transforma en $(-\varepsilon, \varepsilon)$ y análogamente $D' \cap H'$ es isométrico a $\Delta^-(0,\varepsilon) = \{z : |z| < \varepsilon,\ \mathrm{Im}\, z < 0\}$ de modo que p' se transforma en 0 y $D' \cap 1'$ se transforma en $(-\varepsilon,\varepsilon)$. En la nueva superficie de Riemann, que se denotará $Y(a,b)$, la unión $D \cup D'$ es un entorno del punto $\tilde{p} \in Y(a,b)$ obteniendo mediante la identificación de p y p', y este entorno es isométrico al disco $\Delta(0,\varepsilon)$.

La superficie de Riemann $Y(a,b)$ fabricada de este modo tiene la forma de un pantalón cuyo borde está limitado por tres geodésicas simples cerradas, una de longitud a y las otras de longitud b.

Considérense dos piezas Y,Y' de tipo Y(1,b) y péguense las dos geodésicas de longitud b de Y con los correspondientes en Y', conservando la longitud de arco. El mismo razonamiento anterior revela que con este procedimiento de pegado se obtiene una superficie de Riemann compacta S_o, de género uno y limitada por dos geodésicas simples cerradas de longitud 1, γ_o^- y γ_o^+. Las dos partes Y,Y' están isométricamente contenidas en S_o. Conviene señalar que es esncial realizar las operaciones de pegado a lo largo de geodésicas si se quiere conservar las estructuras Riemanianas.

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ considérese una copia S_n de S_o. Si se pegan las geodésicas γ_n^-, γ_{n-1}^+ para todo $n \in \mathbb{N}$, se obtiene una superficie de Riemann S no compacta. La identificación de γ_n^-, γ_{n-1}^+ origina una geodésica simple cerrada γ_n en S.

Nótese que la periodicidad de la superficie S así construida implica que el radio de inyectividad i_s está acotado inferiormente. Por consiguiente $\beta(S) = 0$.

A continuación se construirá una función armónica propia en S y del lema 2.9 se deducirá $\gamma(S) = 1$. En este caso se aprovecharán las fuertes propiedades de simetría de la superficie S, no obstante esta forma de proceder, aunque rodeada de muchas más complicaciones, dará sus frutos en el teorema 6, de ahí que este ejemplo haya constituido una valiosa fuente de inspiración para la comprensión del caso general.

Sea u_1 la función armónica en $S_{-1} \cup S_0$ que tiene valores frontera +1 en γ_1 y -1 en γ_{-1}. Obsérvese que u_1 vale 0 en γ_0 por simetría. Si u_2 es la función armónica en $S_{-2} \cup S_{-1} \cup S_0 \cup S_1$ con valores frontera

+2 en γ_2 y -2 en γ_{-2}, entonces $u_2$vale 0 en γ_0, y de nuevo por simetría u_2 vale 1 en γ_1 y - 1 en γ_{-1}, por tanto u_2 extiende a u_1. Continuando este proceso se concluye que existe una función armónica en S tal que

$$u\Big|_{\gamma_n} = n \qquad\qquad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}$$

Por el principio del máximo $u(p) \longrightarrow +\infty$ cuando p tiende a " $+\infty$ en S" y $u(p) \longrightarrow -\infty$ cuando p tiende a " $-\infty$ en S", así que u es propia.

En definitiva $\qquad \beta(S) = 0$, $\gamma(S) = 1$.

Si F es un recubrimiento universal de Δ en S entonces $v = u\circ F$ es una función armónica de Bloch en Δ, según el Lema 2.8. No puede verificarse la alternativa a) de la proposición 2.6 porque en ese caso v tendría límite no tangencial infinito en casi todo punto de $\partial\Delta$ y esto contradice el teorema de Plessner. Por tanto debe verificarse la alternativa b) y en particular el conjunto de Fatov de v tiene medida cero.

Por el corolario 2.4 casi toda geodésica que parta de un punto cualquiera de S oscila eternamente entre " $+\infty$ " y " $-\infty$ " en S. En términos analíticos esto es simplemente:

$$\limsup_{r \longrightarrow 1} v(r\, e^{i\theta}) = +\infty \quad , \qquad \liminf_{r \longrightarrow 1} v(r\, e^{i\theta}) = -\infty$$

para casi todo $e^{i\theta}$. Del teorema de Anderson-Pitt (ver la introducción) se deduce que existe v tiene límite radial $+\infty$ en un subconjunto de dimensión uno, o equivalente, $\gamma(S) = 1$. Obsérvese la analogía con el modelo de caminos aleatorios en $\mathbb{Z}$.

4. Dado cualquier $\beta \in [0,1]$, existe una superficie de Riemann S tal que $\beta(S) = \beta$. La construcción se realiza pegando piezas Y. Sea $\{\alpha_n\}$

una sucesión de números positivos. Se consideran dos piezas de tipo $Y(\alpha_1,\alpha_2)$ y se pegan las geodésicas de longitud α_1. Se obtiene así una superficie limitada por 4 geodésicas de longitud α_2, a lo largo de cada una de las cuales se pega una pieza $Y(\alpha_2,\alpha_3)$, obteniendo una superficie limitada por 8 geodésicas de longitud α_3. Repitiendo sucesivamente este proceso se obtiene una superficie de Riemann S y si se elige convenientemente la sucesión $\{\alpha_n\}$, se puede conseguir que $\beta(S) = \beta$.

SECCION II. 4

En esta sección se ofrecerá una prueba simple del teorema 6 para dominios planos. También se dará una prueba moderna de un resultado Littlewood que proporciona una clase interesante de dominios planos.

Teorema 6': *Si Ω es un dominio plano distinto de $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ $(a \in \mathbb{C})$ y F es un recubrimiento universal de Δ en Ω, entonces*

$$dim\ \{\theta \in [0,2\pi] : \lim_{r\to 1} |F(re^{i\theta})| = \infty\} \geq 1 - \beta(\Omega)$$

En particular $\gamma(\Omega) \geq 1 - \beta(\Omega)$

Por supuesto, el mismo resultado es cierto si se sustituye ∞ por cualquier otro punto $b \in \partial\, \Omega$:

$$\dim\ \{\theta \in [0,2\pi] : \lim_{r\to 1} F(re^{i\theta}) = b\} \geq 1 - \beta(\Omega)$$

Si no hay posibilidad de confusión, la densidad de la métrica de Poincaré en Ω y el radio de inyectividad serán designados por λ, i respectivamente. La distancia euclídea de un punto $z \in \Omega$ a $\partial\, \Omega$ se denotará $\delta(z)$. El siguiente lema proporciona una relación entre λ, δ, i que necesitará en la prueba del teorema 6'.

Lema 2.10 *Existe una constante absoluta $C > 0$ tal que*

$$C^{-1} \min\ \{1, i(w)\} \leq \lambda(w)\delta(w) \leq C \min\ \{1, i(w)\}$$

para todo $w \in \Omega$.

En la prueba del lema 2.10 se usará la siguiente útil estimación de la densidad de Poincaré, debida a Beardon y Pommerenke ([BP])

Teorema: *Para todo* $w \in \Omega$:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \le \lambda(w)\delta(w)[k + B(w)] \le k + \frac{\pi}{4}$$

donde

$$B(w) = \inf \{ \,|\log|\frac{w - a}{b - a}||\, : a,b \in \partial\,\Omega,\ |w - a| = \delta(w)\}$$

y $k = 4 + \log (3 + 2\sqrt{2})$.

Demostración del Lema 2.10:

Debido a las propiedades de reescala de λ y δ se puede suponer sin pérdida de generalidad que $w = 1$, $\delta(1) = 1$ y $0 \in \partial\,\Omega$.

Sea $b \in \partial\,\Omega$ tal que $|\log|b||$ es mínimo. Entonces, por el teorema de Beardon - Pommerenke:

$$\frac{C^{-1}}{1 + |\log|b||} \le \lambda(1) \le \frac{C}{1 + |\log|b||} \qquad (2.7)$$

para alguna constante absoluta $C > 0$.

Para probar la desigualdad de la izquierda del lema se puede suponer que $\partial\Delta \subset \Omega$ porque en caso contrario $|\log|b|| = 0$ y $\lambda(1) \ge C^{-1}$. Por tanto $\partial\Delta \subset \Omega$ y $|\log|b|| > 0$. De la elección de b se deduce que el anillo

$$R = \{ z : |\log|z|| < |\log|b|| \}$$

está contenido en Ω, y la propiedad de comparación de la densidad de Poincaré dice que la longitud hiperbólica de $\partial\Delta$ en Ω es menor o igual que la longitud hiperbólica de $\partial\Delta$ en R. De un cálculo se desprende que la logitud de $\partial\,\Delta$ en R es exactamente

$$\frac{\pi^2}{|\log|b||}$$

Esto implica que la bola $B_\Omega(1,t)$ no es simplemente conexa si $t > \frac{\pi^2}{2} |\log|b||^{-1}$, luego

$$i(1) \le \frac{\pi^2}{2|\log|b||}$$

y si se tiene en cuenta (2.7) se deduce la desigualdad de la izquierda en el lema

Para demostrar la otra desigualdad, sea F un recubrimiento universal de Δ en Ω tal que $F(0) = 1$, y sea $z_0 \in \Delta$ tal que

$$d_\Delta(0, z_0) = \min \{ d_\Delta(0, z) : F(z) = 1 \}$$

Entonces $\iota(1) = \frac{1}{2} d_\Delta(0, z_0)$ según se mencionó en la introducción.

Puesto que $\delta(1) = 1$, el disco $\Delta(1, 1) = \{z : |z - 1| < 1 \}$ está contenido en Ω y por el teorema de monodromía ([Be], Pag. 110) F tiene una inversa g definitiva en $\Delta(1, 1)$ tal que $g(1) = 0$. El teorema $\frac{1}{4}$ de Koebe ([P], corolario 1.4) afirma que se verifica la inclusión:

$$g\left(\Delta(1, 1)\right) \supset \Delta\left(0, \frac{1}{4} |g'(1)|\right)$$

Por otra parte, obsérvese que F no es inyectiva en el disco $\Delta(0, |z_0|)$, luego $g\left(\Delta(1, 1)\right) \not\supset \Delta\left(0, |z_0|\right)$. Por consiguiente se deduce que

$$|z_0| \geq \frac{1}{4} |g'(1)|$$

Ahora la fórmula

$$\lambda(F(z))|F'(z)| = 2(1 - |z|^2)^{-1} \qquad (z \in \Delta) \qquad (2.8)$$

sustituida en $z = 0$ proporciona

$$\lambda(1) = 2|g'(1)|$$

y por tanto

$$\lambda(1) \leq 8|z_0| \leq 4 \log \frac{1 + |z_0|}{1 - |z_0|} = 4\, d_\Delta(0, z_0) \leq 8\, \iota(1)$$

si se recuerda que $\delta(1) = 1$ y la acotación $\lambda\delta \leq 2$ (ver la introducción) se obtiene tambien $\lambda(1) \leq 2$, y por tanto

$$\lambda(1) \leq 8 \min \{ 1, \iota(1) \}$$

Esto finaliza la prueba del lema.

Demostración del teorema 6':

Supóngase, como en el lema 2.10 que $1 \in \Omega$, $0 \in \partial\, \Omega$ y $F(0) = 1$.

Sea $\beta > \beta(\Omega)$. Se demostrará, que F cumple una condición de crecimiento del tipo $\log|F| = O((1 - |z|)^{-\beta})$.

Sea $A = A(\beta) > 0$ tal que

$$\ell(w) \geq A\, e^{-\beta d_{\Omega}(1,w)}$$

para todo $w \in \Omega$.

Del lema 2.10 se deduce que , para alguna constante $B > 0$:

$$\lambda(w)\delta(w) \geq B\, e^{-\beta d_{\Omega}(1,w)}$$

Además, puesto que $0 \in \partial\Omega$, se tiene que $\delta(w) \leq |w|$, luego

$$\lambda(w) \geq \frac{B}{|w|}\, e^{-\beta d_{\Omega}(1,w)} \qquad (2.9)$$

para cada $w \in \Omega$.

De (2.8) y de la desigualdad

$$d_{\Omega}(1,F(z)) \leq d_{\Delta}(0,z) = \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

se deduce sustituyendo en 2.9:

$$\left|\frac{F'(z)}{F(z)}\right| \leq C(1 - |z|)^{-1-\beta}$$

Integrando se obtiene en particular:

$$\Big|\log|F(z)|\Big| \leq C(1 - |z|)^{-\beta}$$

Según el teorema de Nevanlinna citado en la introducción puede suponerse que $\partial\Omega$ tiene capacidad logarítmica cero, y que el conjunto de Fatou de F tiene medida cero porque en caso contrario la imagen por F de casi todo el radio termina en $\partial\Omega$ y por consiguiente $\gamma(\Omega) = 1$.

Si $u = \log|F|$, entonces $u \in \mathcal{M}_{\beta}$ y el conjunto de Fatou de u también tiene medida cero (vease el teorema de Plessuer en la introducción), luego según el Teorema 1 (capítulo I), F tiene límite asintótico ∞ en un conjunto de dimensión $1 - \beta$. Pero F es una función normal, porque omite al menos dos valores ([Hi], Pag. 248, [P] Lema 9.2), luego los límites asintóticos son tambien radiales y se concluye que

$$\dim \left\{ \theta \in [0,2\pi] \ : \ \lim_{r \to 1} |F(r\, e^{i\theta})| = \infty \right\} \geq 1 - \beta.$$

de donde se deduce la conclusión buscada ya que $\beta > \beta(\Omega)$ es arbitrario. #

Se considera a continuación una familia interesante de dominios planos Ω, con $\beta(\Omega) = \gamma(\Omega) = 1$. Estos dominios están relacionados con un resultado clásico de Littlewood ([Lt], resultado que sigue al último teorema) del que se da una prueba moderna basada en el uso de la métrica de Poincaré

Este ejemplo pone de manifiesto la transparencia con la que ciertos problemas de la teoría analítica de funciones pueden ser entendidos utilizando técnicas geométricas como la métrica hiperbólica.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números complejos distintos que tienden a infinito y tal que los sucesivos cocientes verifican:

$$1 \leq \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq M \tag{2.10}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y alguna constante positiva fija M. Se considera el dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Del razonamiento que dio en el ejemplo 2. Sección 3 se deduce que $\beta(\Omega) = 1$, mientras que el siguiente resultado de Littlewood y el argumento usado en el final de la prueba del teorema 6' implican que $\gamma(\Omega) = 1$.

Teorema (Littlewood) *Sea f una función analítica en Δ cuya imagen está contenida en Ω. Entonces existen constantes $L, C > 0$ qoe sólo dependaen de M tales que*

$$|f(z)| \leq \frac{C}{(1 - |z|)^L} \tag{2.11}$$

para todo $z \in \Delta$.

En particular, el recubrimiento universal F de Δ en Ω satisface (2.11) y el argumento del final del teorema 6' muestra que

$$\dim \{\theta \in [0,2\pi] : \lim_{r\to 1} |F(re^{i\theta})| = \infty \} = 1.$$

<u>Demostración</u>

Por subordinación y por el teorema de simetrización de Weitsman [We] se puede asumir sin pérdida de generalidad que cada a_n es real y negativo, y $f = F$ es el recubrimiento universal de Δ en Ω con $F(0) = 1$, $F'(0) > 0$. Se puede tambien suponer, mediante una traslación, que $a_0 = 0$. Tras estas normalizaciones se observa que la imagen por F del radio (0,1) es la semirrecta $(1, +\infty)$. Además (ver [We]) :

$$F(r) = \max \{|F(z)| : |z| \le r \} \qquad (0 < r < 1)$$

Se probará que, para ciertas constantes $A,B > 0$:

$$d_\Omega(1, x) \ge A \log x - B \qquad (1 \le x < \infty) \qquad (2.12)$$

El teorema de Littlewood se deduce inmediatamente de (2.12), porque si $x = F(r)$,,entonces

$$A \log F(r) \le B + d_\Omega(1,F(r)) \le B + d_\Delta(0,r) = B + \log \frac{1+r}{1-r}$$

y se obtiene (2.11) con $L = A^{-1}$, $C = e^B$.

Para probar (2.12), sea $x \in [1, +\infty)$ tal que $|a_n| \le x \le |a_{n+1}|$. Entonces $d_\Omega(1,x) \ge d_\Omega(1,|a_n|)$ (la semirrecta $(1, +\infty)$ es una geodésica) y, debido a la condición (2.10), basta comprobar (2.11) cuando $x = |a_n|$. Para ello, es suficiente verificar que

$$d_\Omega\left(|a_{k+1}|, |a_k|\right) \ge A \log \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \qquad (2.13)$$

para todo $k \ge 1$. Fíjese n y sea $\Omega' = \mathbb{C}\setminus \left\{ \frac{a_k}{|a_n|}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Entonces, por las propiedades de comparación de la métrica hiperbólica:

$$d_\Omega\left(|a_n|, |a_{n+1}|\right) = d_{\Omega'}\left(1, \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right) \ge d_{\mathbb{C}\setminus\{-1,0\}}\left(1, \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$$

y si se tiene en cuenta la siguiente estimación de la densidad de Poincaré ([BP], Pag. 478)

$$\lambda_{\mathbb{C}\setminus\{-1,0\}}(1,t) \geq \frac{1}{t(4\sqrt{2} + \log t)} \qquad (t \geq 1)$$

se obtiene:

$$d_{\mathbb{C}\setminus\{-1,0\}}\left(1, \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right) \geq \int_1^{\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} \frac{dt}{t(4\sqrt{2}+\log t)} \geq \frac{1}{(4\sqrt{2}+\log M)} \log \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

con lo cual (2.13) queda probado y con ello la prueba del teorema Littlewood. #

Observación: Se puede demostrar que $L \longrightarrow 2$ cuando $M \longrightarrow 1$. La idea es que, cuando $M \longrightarrow 1$, Ω "tiende" al dominio $G = \mathbb{C}\setminus(-\infty,0)$ y F"tiende" a la aplicación conforme $(1 + z)^2/(1 - z)^2$ de Δ en G.

Se puede dar una formulación rigurosa de este argumento heurístico utilizando un resultado de Hejhal ([He]) sobre convergencia de recubrimientos universales de regiones variables.

SECCION II.5. PRUEBA DEL TEOREMA 6

En lo sucesivo se supondrá que S no tiene función de Green y no es compacta, es decir, S es parabólica. La prueba del teorema se divide en dos casos.

I. Existe una curva cerrada regular Γ tal que $S\backslash\Gamma$ consta de dos componentes no compactas.

Las dos componentes de $S\backslash\Gamma$ se designan por S^+ (la componente "a la derecha" de Γ) y S^- (la componente "a la izquierda" de Γ).

La dificultad, de acuerdo con el Lema 2.9, estriba en la construcción de una función armónica propia en la superficie S. El procedimiento que se utilizará puede ser descrito de manera informal como sigue. El primer paso consiste en construir dos funciones armónicas u_+ y u_- en subregiones W_+, W_- de S_+, S_- respectivamente, que serán soluciones de un problema de Dirichlet-Neumann y tales que $u_+(p) \longrightarrow +\infty$ cuando $p \in W_+$ tiende a infinito en S_+ y $u_-(p) \longrightarrow -\infty$ cuando $p \in W_+$ tiende a infinito en S_-. Este primer paso se describe en [SN] (Página 353). En un segundo paso, las condiciones frontera de las funciones u_+, u_- permiten la aplicación de la teoría de operadores normales desarrollada en [AS] (Capítulo III) y se obtiene una función armónica en toda la superficie S cuyo comportamiento en el infinito coincide con el de las funciones u_+, u_- y por tanto u es propia.

A continuación se ofrecen los detalles de la construcción.

En primer lugar, se elige una función armónica h en S^+, positiva y tal que $h(p) \longrightarrow +\infty$ cuando $p \in S^+$ tiende a infinito, es decir, cuando

$d_S(p,\Gamma) \longrightarrow \infty$. Una función con estas características se denomina una función de Evans en S^+. Su construcción puede consultarse en [SN] (Pág 350)

Sea B^+ una pequeña banda a la derecha de Γ, limitada por Γ y por una curva cerrada regular Γ^+, homóloga a Γ, y considérese la región $W^+ = S^+ \backslash B^+$. Sea g una función armónica acotada en W^+ tal que los valores de g en Γ^+ coinciden con los de h (g puede ser obtenida como límite de soluciones al problema de Dirichlet en subdominios de W^+). La función

$$u_+ = h - g$$

es armónica en W^+, acotada inferiormente y $u_+\big|_{\Gamma^+} = 0$. Puesto que S es parabólica, verifica el principio del mínimo para funciones armónicas ([AS], Pág. 204) y por tanto $u_+ \geq 0$ en W^+. Obsérvese que $u_+(p) \longrightarrow +\infty$ cuando $p \in S^+$ tiende a infinito.

Si n denota la normal exterior unitaria a W^+ en la curva Γ^+, un argumento elemental muestra que:

$$\int_{\Gamma^+} \frac{\partial u_+}{\partial n} < 0$$

y multiplicando u_+ por una constante conveniente se puede suponer que

$$\int_{\Gamma^+} \frac{\partial u_+}{\partial n} = -1$$

Razonando de manera totalmente análoga se obtiene una función armónica negativa u_- en la región $W^- = S^- \backslash B^-$, donde B^- es una pequeña banda a la izquierda de Γ, limitada por Γ y por una curva cerrada regular Γ^-, homóloga a Γ, tal que $u_-(p) \longrightarrow -\infty$ cuando $p \in S^-$ tiende a infinito en S^-. La función u_- satisface las condiciones frontera:

$$u_-\big|_{\Gamma^-} = 0\,, \qquad \int_{\Gamma^-} \frac{\partial u_-}{\partial n} = -1$$

(n, igual que antes, denota la normal exterior unitaria a W^- en la curva Γ^-)

Si $S' = W^+ \cup W^-$ y $\beta = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$, la función

$$v = u_+\chi_{W^+} + u_-\chi_{W^-}$$

(χ denota función característica) es armónica en S', continua en $\bar{S}'$, $v(p) \longrightarrow +\infty$ cuando $p \in S^+$ tiende a infinito en S^+, $v(p) \longrightarrow -\infty$ cuando $p \in S^-$ tiende a infinito en S^-, y v satisface además

$$\int_\beta \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \tag{2.14}$$

La condición (2.14) se expresa a menudo diciendo que v tiene flujo cero a través de β y se denota por $\int_\beta dv^* = 0$.

La parabolicidad de S permite definir un operador de $C(\beta)$, el espacio de las funciones continuas en β, en el espacio de las funciones armónicas en S' y continuas en $\bar{S}'$ de la forma siguiente:

Sea $f \in C(\beta)$, y $f_+ = f|_{\Gamma^+}$, $f_- = f|_{\Gamma^-}$. Sea $h_+ = h_+(f_+)$ la única función armónica acotada en W^+, continua en $\overline{W}^+$ tal que

$$h_+\big|_{\Gamma^+} = f_+$$

El hecho de que h_+ pueda ser obtenida simultáneamente como límite no decreciente y no creciente de soluciones al problema de Dirichlet en subdominios de W^+ garantiza que h_+ verifica por añadidura la siguiente condición sobre el flujo:

$$\int_{\Gamma^+} \frac{\partial h_+}{\partial n} = 0 \tag{2.15}$$

En (2.15), $\dfrac{\partial h_+}{\partial n}$ podría no existir en Γ^+ pero se entiende esta expresión como límite del flujo, a través de una curva γ cuando $\gamma \longrightarrow \Gamma^+$, siendo

γ una curva regular homóloga a Γ^+.

Análogamente, existe una única función $h_- = h_-(f_-)$, armónica en W^-, continua en $\overline{W^-}$ tal que

$$h_-\big|_{\Gamma^-} = f_-$$

y además

$$\int_{\Gamma^-} \frac{\partial h_-}{\partial n} = 0$$

Ahora se define

$$Lf = h_+\chi_{W^+} + h_-\chi_{W^-}$$

Así pues, para cada función $f \in C(\beta)$, la función Lf es armónica y acotada en S' y continua en $\bar{S}'$. El operador L satisface las siguientes propiedades:

(1) $\qquad Lf\big|_{\beta} = f$

(2) $\qquad L$ es lineal

(3) $\qquad m \le f \le M$ implica $m \le Lf \le M$

(4) $\qquad$ El flujo de Lf a través de β es nulo

El operador L es entonces operador normal, en el sentido de [AS](Capítulo III, Pag. 152), y según el Teorema de existencia III 3.A ([AS] Pag. 154), dada $v = u_+\chi_{W^+} + u_-\chi_{W^-}$, existe una función armónica u en toda la superficie S tal que

$$u - v = L(u - v\big|_{\beta})$$

De modo que $u - v$ es acotada y por tanto

$u(p) \longrightarrow +\infty$ cuando $p \in S^+$ tiende a infinito en S^+

$u(p) \longrightarrow -\infty$ cuando $p \in S^-$ tiende a infinito en S^-

En particular u es propia y, según el Lema 2.9

$$\gamma(S) \geq 1 - \beta(S)$$

Para tratar el caso general se necesitará más información sobre el caso anterior. Si $p \in S^{+}$, se denota por $D(p)$ el conjunto de direcciones w tales que

$$\begin{cases} \lim_{t\to\infty} d(p,\gamma_w(t)) = \infty \\ \gamma_w(t) \in S^{+} \qquad \forall t \in (0, +\infty) \end{cases}$$

(Recuérdese que γ_w es la geodésica que parte de p con dirección inicial w).

Se probará que

$$\limsup_{\substack{p \in s^{+} \\ d(p,\Gamma)\to\infty}} \dim D(p) \geq 1 - \beta(s) \tag{2.16}$$

Para demostrar (2.16) elíjase un punto $p_o \in \Gamma$. Sea F un recubrimiento universal de Δ en S con $F(o) = p_o$ y hágase $v = u{\circ}F$. En realidad, el caso I del teorema 6 tratado anteriormente y los lemas precedentes muestran que la dimensión de Hausdorff del conjunto

$$E_1 = \{ e^{i\theta} : \lim_{r\to1} v(r\,e^{i\theta}) = +\infty \}$$

es mayor o igual que $1 - \beta(s)$.

Fíjese $\alpha < 1 - \beta(s)$. El comportamiento asintótico de la función u permite elegir una constante positiva A tal que, si $p \in S$ y $u(p) \geq A$, entonces la bola $B_s(p,1)$ está contenida en S^{+}.

Obsérvese que

$$E_1 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \{e^{i\theta} : \lim_{r\to1} v(r\,e^{i\theta}) = +\infty, \quad v(r\,e^{i\theta}) \geq A \qquad \forall\, r \in (1 - \tfrac{1}{n}, 1)\}$$

Por tanto, existe r_o, $0 < r_o < 1$ tal que, si

$$E_2 = \{e^{i\theta} : \lim_{r\to1} v(r\,e^{i\theta}) = +\infty, \quad v(r\,e^{i\theta}) \geq A \qquad \forall\, r \in (r_o, 1)\}$$

entonces $\dim E_2 > \alpha$.

Elíjase α_o, $0 < \alpha_o < \pi/2$ de forma que los puntos de cualquier cono de Stolz truncado $C(e^{i\theta}, \alpha_o, r_o)$ estén a una distancia (hiperbólica) del radio $(0, e^{i\theta})$ inferior a 1. Por consiguiente, si $e^{i\theta} \in E_2$, $z \in C(e^{i\theta}, \alpha_o, r_o)$ y $r_o < r < 1$, la bola $B_s(F(re^{i\theta}), 1)$ está contenida en S^+, en particular $F(z) \in S^+$, ya que $d_s(F(z), F(re^{i\theta})) \leq$ $\leq d_\Delta(z, re^{i\theta}) \leq 1$. Se concluye pues que el conjunto

$$E = \{e^{i\theta} : \lim_{r\to 1} d_s(p_o, F(re^{i\theta})) = \infty, \quad F(z) \in S^+ \quad \forall\, z \in C(e^{i\theta}, \alpha_o, r_o)\}$$

tiene dimensión mayor que α.

Escójase una constante positiva t_o tal que, si $e^{i\theta} \in \partial\Delta$ y $I(\theta)$ es el arco de $\partial\Delta$ centrado en $e^{i\theta}$ de longitud t_o, entonces

$$r_o e^{i\theta} \in C(\xi, \alpha_o, r_o) \text{ para todo } \xi \in I(\theta)$$

Obsérvese que t_o sólo depende de α_o, r_o.

Ahora se elige $e^{i\theta_o} \in E$ tal que $\dim(E \cap I(\theta_o)) > \alpha$ y sea $z_o = r_o e^{i\theta_o}$. Para cada $e^{i\theta} \in E \cap I(\theta_o)$ la geodésica γ que une z_o y $e^{i\theta}$ está contenida en el cono $C(e^{i\theta}, \alpha_o, r_o)$ y su imagen mediante el recubrimiento F está contenida en S^+, por la definición de E. Así pues, se ha llegado a la conclusión de que existe un subconjunto de $\partial\Delta$ de dimensión mayor que α tal que la imagen (por F) de la geodésica que une z_o con cada punto de este conjunto está contenida en S^+ y se marcha al infinito en S^+. Esto quiere decir que

$$\dim D(F(z_o)) > \alpha$$

y se verifica (2.16).

II. Caso general

Se comienza eligiendo una geodésica Γ simple cerrada, no trivial (no homópota a cero). Se puede asumir que no se produce la situación del caso I, luego o bien $S\setminus\Gamma$ es conexo o bien una de las componentes de $S\setminus\Gamma$ es compacta (recuérdese que S es no compacta). La forma de proceder es similar en cada uno de los dos casos, así que se supondrá que $S\setminus\Gamma$ es conexo.

Se utilizará un argumento de "cortar y pegar" semejante al que se dió en los ejemplos 3, 4 de la sección II.3.

Se corta S a lo largo de Γ y se obtiene una superficie de Riemann S_1 cuyo borde consta de dos geodésicas Γ^+, Γ^-(copias de Γ). Ahora se pega una copia S_2 de S_1 a lo alrgo de las dos geodésicas y se obtiene una superficie de Riemann $\tilde{S}$ (¡Es esencial que Γ^+ y Γ^- sean geodésicas de la misma longitud !). Las correspondientes geodésicas ya pegadas en $\tilde{S}$ se denotan $\tilde{\Gamma}^+$, $\tilde{\Gamma}^-$. S_1 y S_2 están isométricamente contenidas en $\tilde{S}$, y si $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}^+ \cup \tilde{\Gamma}^-$, entonces $\tilde{S}\setminus\tilde{\Gamma}$ consta de dos componentes no compactos, que son precisamente S_1, S_2. El argumento del caso I funciona tambien en esta situación (aunque ahora $\tilde{\Gamma}$ está formado por dos curvas cerradas) y la región S_1 juega el papel de S^+.

De (2.16) se deduce que si $p \in S_1$ está suficientemente lejos de $\tilde{\Gamma}$, entonces la dimensión del conjunto de geodésicas que parten de p y divergen a infinito en S_1 sin cortar a $\tilde{\Gamma}$ es mayor o igual que $1 - \beta(\tilde{S})$. Ahora bien, puesto que $\beta(\tilde{S})$ sólo depende del comportamiento del radio de inyectividad en infinito, la construcción de $\tilde{S}$ revela que $\beta(\tilde{S}) = \beta(S)$ y

$$\gamma(S) \geq 1 - \beta(S)$$

lo que concluye la prueba del teorema. #

Observación. Durante la prueba del teorema 6, caso I se muestra que, bajo ciertas condiciones, existe una función armónica no constante en una superficie de Riemann S no compacta y sin función de Green, que satisface:

$$\log\|\text{grad } u\|_s \leq \beta\, d_s(p_0,.) + C \tag{2.17}$$

donde $\beta < \beta(S)$, p_0 es un punto cualquiera de S y C es una constante positiva. Una función armónica como esta no existe en general. Para ello, considérese una superficie de Riemann compacta R_0, cuyo borde es una geodésica simple cerrada γ de longitud 1 y una superficie de Riemann compacta S_0, de género uno cuyo cuyo borde sean dos geodésicas simples cerradas γ_0^-, γ_0^+ de longitud 1 (por ejemplo S_0 podría construirse pegando dos piezas Y(1,1), ver Sección II.3). Sean S_n $n = 1,2,3....$ copias de S_0. Si se pega γ con γ_0^- y γ_n^+ con γ_{n+1}^- para $n = 0,1,2,...$ se obtiene una superficie de Riemann S que no tiene función de Green ([Ka]) y cuyo radio de inyectividad ι_s está acotado inferiormente, luego $\beta(S) = 0$.

Supóngase que u es armónica en S y verifica (2.17) con $\beta = 0$, es decir grad u es acotado en S. Escojánse puntos $p_n \in \gamma_n^+ = \gamma_{n+1}^-$ y sea $\alpha_n = u(p_n)$. Por el principio del máximo y la acotación del gradiente, en $S_n (\subset S)$ se verifica la desigualdad:

$$|u| \leq \max\{|\alpha_n|, |\alpha_{n+1}|\} + C$$

Si $\{\alpha_n\}$ fuese acotado, entonces u seria acotada y por tanto constante (S no tiene función de Green). Pero si $n < m < k$, del principio del máximo se deduce:

$$\alpha_n - C < \alpha_m < \alpha_k + C$$

de modo que $\{\alpha_n\}$ debe converger a $+\infty$ o a $-\infty$. Si converge por ejemplo a $+\infty$ entonces u es acotada inferiormente y de nuevo esto obliga a u a ser constante ya que S no tiene función de Green.

REFERENCIAS

[A] Ahlfors,L.V. Conformal invariants.McGraw-Hill.1973.

[ACP] Anderson,J.M., Clunie,J., Pommerenke,Ch. On Bloch functions and normal functions.J.reine angew.Math.270(1974)12-37.

[AP1] Anderson,J.M., Pitt,L.D. Probabilistic behaviour of functions in the Zygmund spaces Λ^{*} and λ^{*}.Proc.London Math.Soc.(3)59(1989)558-592.

[AP2] Anderson,J.M., Pitt,L.D. The boundary behavior of Bloch functions and univalent functions.Michigan Math.J. 35(1988)313-320.

[AS] Ahlfors,L.V., Sario,L. Riemann surfaces.Princeton University Press. Princeton.1960.

[B1] Berman,R. Angular limits and infinite asymmptotic values of analytic functions of slow growth.Illinois J. of Math. 34(1990)845-858.

[B2] Berman,R. Angular limits, maximun principles and level domains in the MacLane class. Por aparecer.1992.

[Be] Beardon,A. A primer on Riemann surfaces.Cambridge university Press.1984.

[Bi] Billingsley,P. Ergodic theory and information.N.York.wiley.1967.

[Bo] Boothby,W.M. An introduction to differentiable manifolds and riemannian geometry.Academic Press.N.York.1975.

[BP] Beardon,A., Pommerenke,Ch. The Poincare metric of plane domains.J.london Math.Soc. (2)18(1978)475-483.

[BR] Barth,K.F., Rippon,P.J. Angular limits of holomorphic functions of slow growth.J.London Math.Soc. (2)45(1992)55-61.

[BRS] Barth,K.F., Rippon,P.J., Sons,L.R. Angular limits of holomorphic and meromorphic functions.J.London Math.Soc. (2)42(1990)279-291.

[Bu] Buser,P. Geometry and spectra of compact Riemann surfaces.Birkháuser 1992.

[C] Carleson,L. Selected problems on exceptional sets.Wadworth Mathematics Series.Belmont,California.1983.

[CL] Collingwood,E.F., Lohwater,A.J. The theory of cluster sets.Cambridge University Press.London.1966.

[D] Duren,P.L. Theory of H^p spaces.Academic Press.1970.

[F] Fatou,P. Séries trigonométriques et séries de Taylor.Acta Math. 30(1906)335-400.

[Fe] Feller,W. Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus aplicaciones Volumen 1.Limusa.México.1983

[FLL1] Fernández,J.L., González Llorente,J. A note on the boundary behaviour of harmonic functions.J.London Math.Soc. (2)46(1992)295-300.

[FLL2] Fernández,J.L., González Llorente,J. Geodesic excursions to infinity in Riemann surfaces. Pendiente de publicación en Journal d'Analyse Math.

[FP] Fernández,J.L., Pestana,D. Distortion of boundary sets under inner functions and applications.Indiana University Math.J.Vol.41,N.2(1992)439-448.

[Fu] Fuchs,W.H.J. Topics in the theory of functions of one complex variable.Van Nostrand 1967.

[G] Garnett,J.B. Bounded analytic functions.Academic Press.N.York.1981.

[H] Hamilton,D. Conformal distortion of boundary sets.Trans.Amer.Math.Soc. 308(1988)69-81.

[He] Hejhal,D. Universal covering maps for variable regions. Math.Z. 137(1974)7-20.

[Hi] Hille,E. Analytic function theory. Volumen 2. 2ª edición.N.York.1973.

[Hw] Hawkes,J. Probabilistic behaviour of some lacunary series. Z.Wahrsch.verw. Gebiete.53(1980)21-33.

[JS] Jones,G.A., Singerman,D. Complex functions.An algebraic and geometric viewpoint.Cambridge University Press. 1987.

[K] Kahane,J.P. Lacunary taylor and fourier series. Bull. Amer .Math. Soc. 70(1964)199-213.

[Ka] Kanai,M. Rough isometies and the parabolicity of riemannian manifolds. J.Math.Soc. 70(1964)199-213.

[Kr] Kra,I. Automorphic forms and kleinian groups.Benjamin Reading.1972.

[KS] Kahane,J.P., Salem,R. Ensembles parfaits et séries trigonométriques. Hermann.Paris. 1963.

[L] Lindelöf,E. Sur un principe géneral de l'analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme.Acta Soc.Sci.Fenn.46.N.4(1915)1-35.

[La] Landkof,N.S. Foundations of modern potential theory.Springer.1972.

[Lt] Littlewood,J.E.L. The theory of functions.Oxford University Press.1944.

[LV] Lehto,O., Virtanen,K.I. Boundary behaviour and normal meromorphic functions.Acta Math. 97(1957)47-65.

[M1] Makarov,N.G. Smooth measures and the law of the iterated logarithm. Math.USSR-Izv. 34, N.2(1990)455-463.

[M2] Makarov,N.G. Probability methods in conformal mapping.Algebra i Analiz 1.(1989)3-59

[Mc1] MacLane,G.R. Asymptotic values of holomorphic functions. Rice Univ. Studies. 49 N.1(1963).

[Mc2] MacLane,G.R. Holomorphic functions of arbitrarily slow growth without radial limits.Michigan Math.J. 9(1962)21-24.

[MP] Melián,M.V., Pestana,D. Geodesics excursions into cusps in finite volume hyperbolic manifolds. Pendiente de publicación en Michigan Math.J.

[N] Nevanlinna,R. Analytic functions. Springer-Verlag.Berlin.1970.

[Ni] Nicholls,P.J. The ergodic theory of discrete groups.Cambridge University Press.1989.

[P] Pommerenke,Ch. Univalent functions.Vandenhoeck-Ruprecht.Götingen.1975.

[Pl] Plessner,A.I. Über das Verhalten analytischer funktionen am Rande ihres Definitionbereichs.J.reine Angew.Math.158(19279219-227.

[R] Rudin,W. Análisis real y complejo.Alhambra 1979.

[Ro] Rogers,C.A. Hausdorff measures.Cambridge University Press.1970.

[S1] Sullivan,D. Growth of positive harmonic functions and kleinian group limit sets of zero planar measure and Hausdorff dimension 2.Lecture Notes in Mathematics 894,Geometry Symposium,Utrecht 1980.Springer Verlag.1981.

[S2] Sullivan,D. Disjoint spheres, approximation by imaginary quadratic numbers and the logarithm law for geodesics.Acta Math. 149(1982)215-237.

[Sh] Shiryayev,A.N. Probability.Springer Verlag 1984.

[SN] Sario,L., Nakai,M. Classification theory of Riemann surfaces.Springer Verlag 1970.

[Sp] Spivak,M. A comprehensive introduction to Differential Geometry.Volumen 4.Publisch or perisch.Inc.Berkeley.1979.

[St] Stout,W. Almost sure convergence.Academic press.1974.

[SZ1] Salem,R., Zygmund,A. On lacunary trigonometric series.Proc.Nat.Acad. Sci.USA.33(1947)333-338.

[SZ2] Salem,R., Zygmund,A. La loi du logarithme itéré pour les séries trigonométriques lacunaires.Bull des Sci. Math. 74(1950)209-224.

[T] Tsuji,M. Potential theory in modern functin theory.Maruzen Tokyo.1959.

[W] Weiss,M. The law of the iterated logarithm for lacunary trigonometric series.Trans.Amer.Math.Soc. 91(1959)444-469.

[We] Weistman,A. Symmetrization of the Poincaré metric.Annals of Math.124 (1986)159-169.