Propiedad de Artin-Lang para variedades analíticas de dimensión dos

Tesis doctoral presentada por
Ana Castilla
y realizada bajo la dirección de
D. Carlos Andradas Heranz

Madrid, mayo de 1994

Departamento de Álgebra
Universidad Complutense
28040 Madrid

Agradezco la paciente dedicación y el apoyo recibidos por D. Carlos Andradas.
Quiero recordar el cariño con que Javier y Mac han compuesto y recompuesto estas páginas. A ellos les dedico esta memoria.

Las personas cambian, y tambien sus necesidades.
De modo que lo que en otro tiempo fue
espiritualidad ya no lo es. Lo que muchas veces
pasa por espiritualidad no es más que
la constancia escrita de métodos pasados.

ANTHONY DE MELLO, S.J. «El canto del pájaro»

Índice analítico

Introducción

El objetivo central de esta tesis ha sido el estudio de los conjuntos semianalíticos globales en una variedad analítica no compacta de dimensión dos. ¿Qué significado tiene y por qué la necesidad del adjetivo "globales"?

El estudio de los espacios analíticos tuvo su principal desarrollo gracias a los trabajos de H. Cartan de los años cincuenta, quien desde el comienzo señaló el distinto comportamiento entre los casos real y complejo, en aspectos tan fundamentales como la coherencia del haz estructural, los fenómenos de caída de dimensión o la carencia de sentido de la noción de componentes irreducibles en el primero de ellos.

El propio Cartan en su trabajo [C] abre una puerta para el estudio de los subconjuntos analíticos reales del espacio 'numérico' $\mathbb{R}^n$, introduciendo la noción de *complexificación*. Ahora bien, mientras que la complexificación de un germen analítico real siempre existe, la existencia de complexificación global implica que el conjunto analítico de partida puede ser definido como el conjunto de ceros de un número finito de funciones analíticas definidas sobre todo $\mathbb{R}^n$. Y recíprocamente, si un conjunto analítico $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene esta propiedad entonces existe un conjunto analítico B en un entorno abierto de Stein de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}^n$ tal que $B \cap \mathbb{R}^n = A$, de modo que muchas propiedades de B pueden trasladarse a A. Surge así por primera vez el interés y el estudio sistemático de los conjuntos analíticos definibles por ecuaciones globales, y que son, evidentemente, el primer ejemplo de los conjuntos semianalíticos globales.

El estudio de los conjuntos semianalíticos fue abordado posteriormente de modo sistemático por Lojasiewicz en su memoria [L] de 1964. Recordemos que un conjunto $S \subset M$ es semianalítico si en todo punto de M, puede expresarse localmente como una unión e intersección finita de igualdades y desigualdades de funciones analíticas definidas en un entorno adecuado del punto. Puesto que la definición es de carácter local y localmente las funciones analíticas tienen un comportamiento algebraico, los conjuntos semianalíticos comparten un buen número de propiedades con los conjuntos semialgebraicos.

En la última década, el álgebra real se ha desarrollado de modo notable. Más concretamente, la noción de *espectro real* de un anillo se ha ido imponiendo como el objeto algebraico-geométrico capaz de recoger las especifidades de los conjuntos reales y unificar el tratamiento de los mismos. Por ejemplo, los conjuntos semialgebraicos y semianalíticos pueden verse como casos particulares de una misma situación general: el estudio de los conjuntos constructibles del espectro real de un anillo A. Así si A es el anillo de polinomios, estaremos tratando con los conjuntos semialgebraicos; si A es el anillo de series convergentes estaremos hablando de los gérmenes semianalíticos; y si A es el anillo de funciones analíticas sobre una variedad analítica M estaremos hablando de los conjuntos semianalíticos definidos en M por funciones de A. Aparece así el interés por el estudio de los conjuntos semianalíticos definidos globalmente.

Para ir precisando un poco más, sean M una variedad analítica real, conexa y paracompacta, A el anillo de funciones analíticas sobre M y K su cuerpo de fracciones. Denotamos por $\text{Spec}_r(A)$ el espectro real de A (cf. [Bo-Cs-Ry]). Un conjunto $C \subset \text{Spec}_r(A)$ se dice que es constructible si es de la forma:

$$C = \bigcup_{i=1}^{p} \{\alpha \in \text{Spec}_r(A) \mid f_i(\alpha) = 0, g_{i1}(\alpha) > 0, \dots g_{is_i}(\alpha) > 0\},$$

para ciertas funciones $f_i, g_{ij} \in A$. Un conjunto $S \subset M$ se dice que es semianalítico global si es de la forma

$$S = \bigcup_{i=1}^{p} \{x \in M \mid f_i(x) = 0, g_{i1}(x) > 0, \dots g_{is_i}(x) > 0\}$$

para ciertas funciones $f_i, g_{ij} \in A$.

Evidentemente, dado un conjunto semianalítico global S podemos asociarle un conjunto constructible $\tilde{S}$ de $\text{Spec}_r(A)$, a saber: el definido por las mismas ecuaciones (o fórmula). Y recíprocamente: dado un conjunto constructible podemos considerar el conjunto semianalítico global definido por la misma fórmula. Es bien conocido que en el caso de que A sea el anillo de polinomios ([B-C-R]), o de series convergentes ([Fe-Re-Rz]), o si M es una variedad compacta ([Rz2]), la correspondencia $S \mapsto \tilde{S}$ es biyectiva. Este resultado que está en la base del desarrollo del algebra y geometría reales se conoce hoy en día, debido a sus orígenes históricos, con el nombre de *propiedad de Artin-Lang*. En efecto, fue Artin quien en primer lugar demostró un resultado similar como paso decisivo en su solución al problema 17 de Hilbert: si $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]$ son polinomios tales que existe un orden del cuerpo de funciones racionales $\mathbb{Q}(X_1, \ldots, X_n)$ en el que son positivas, entonces existe un punto $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n$ en el que $f_1(x), \ldots, f_r(x)$ son simultáneamente positivos. Más tarde este resultado fue generalizado por su discípulo Lang para extensiones finitamente generadas de un cuerpo real cerrado, obteniendo el resultado conocido en ocasiones como el teorema del homomorfismo de Lang, acuñándose posteriormente el nombre de propiedad de Artin-Lang.

Sin embargo, si M no es compacta, la biunivocidad de la correspondencia $S \mapsto \tilde{S}$ no es cierta incluso si M tiene dimensión 1, como se muestra en [An-Be]. Ello, unido a las 'malas' propiedades del anillo A si M no es compacta (en contraste con el caso compacto en el que A resulta ser un anillo excelente), ha hecho que los conjuntos semianalíticos globales en el caso no compacto estuvieran sin estudiar, del mismo modo que también el problema 17 de Hilbert permanece abierto en este contexto para dimensión mayor que dos, salvo algún resultado particular para funciones cuyo conjunto de ceros es discreto ([Bo-Kz-Sh]) o compacto ([Jw3]).

Ahora bien, en [An-Be] se demuestra que la propiedad de Artin-Lang sigue siendo cierta en dimensión uno, si se trabaja con el espectro real del cuerpo K en lugar de con el del anillo A, esto es, si se plantea en los términos originarios de Artin: *supongamos que $f_1, \ldots, f_r \in K$ verifican que son positivas en un orden de K. Entonces existe un punto $x \in M$ en el que $f_1(x), \ldots, f_r(x)$ son simultáneamente positivos.* Extender este resultado a dimensión dos ha sido el problema central de la tesis que ahora presentamos, y su demostración constituye el capítulo 4 de esta memoria.

Nuestra demostración está basada en asociar a cada orden β de K un filtro de conjuntos semianalíticos globales cerrados de M, que permite reconocer cuando determinadas funciones de K pertenecen a β. Este método ha sido utilizado también en [An-Be] y [Jw3], y sus potencialidades se pusieron ya de manifiesto al poder demostrar un criterio de caracterización, por medio de curvas analíticas, de las funciones de A con conjunto de ceros compacto que son suma de potencias $2k$-ésimas, y que engloba los resultados conocidos para el caso en que M es compacto ([Rz4]). Este criterio, que en la memoria aparece en el capítulo 3, fue presentado en el congreso de Geometría Real celebrado en La Turballe en 1991 y ha aparecido publicado en las actas del mismo en LNM 1524.

Los ingredientes fundamentales que usamos en nuestra demostración de la propiedad de Artin-Lang son, por un lado la descomposición de toda función analítica f sobre M como producto $f = \tilde{f}h$ de una función analítica *libre de cuadrados* y una suma de cuadrados. Más precisamente, aunque siempre de modo intuitivo, si Y es la unión de las componentes irreducibles de los ceros de f en las que ésta cambia de signo, i.e. tiene multiplicidad impar, $\tilde{f}$ es un generador de Y, de modo que $h = f/\tilde{f}$ tiene multiplicidad par en todos los puntos, resultando ser una suma de cuadrados, y por consiguiente positiva en todos los órdenes de K. Por otro lado, la finitud del número de pitágoras del anillo de series convergentes en dos indeterminadas (que vale exactamente 2) juega un papel decisivo. Recordemos que el número de Pitágoras de un anillo A se define como el menor entero p que permite expresar cada suma de cuadrados de A como suma de p cuadrados. Finalmente, usamos el Positivstllensatz para gérmenes de funciones analíticas y, como no podía ser de otro modo, el teorema B de Cartan para globalizar los resultados locales.

Con el teorema de Artin-Lang en nuestra manos, tenemos una exacta interpretación geométrica de los órdenes del cuerpo K de funciones meromorfas sobre M: éstos se corresponden con ultrafiltros de conjuntos semianalíticos globales abiertos de M. También tenemos a nuestra disposición una correspondencia *tilde* similar a la comentada anteriormente, que hemos llamado correspondencia *tilde genérica*, y que está definida entre los conjuntos semianalíticos globales de M y los conjuntos constructibles del $\operatorname{Spec}_r(K)$. De modo preciso, dado un conjunto semianalítico global S le asociamos el conjunto ${}^g\widetilde{S} \subset \operatorname{Spec}_r(K)$ definido por la misma fórmula. Evidentemente los conjuntos del tipo $\{f = 0\}$ carecen de sentido en $\operatorname{Spec}_r(K)$, por lo que esta correspondencia no es biyectiva. No obstante, dos conjuntos S y S' tienen la misma imagen por ella si y sólo si son *genéricamente* iguales, esto es, se diferencian en un conjunto contenido en los ceros de una función de A. Esto es suficiente para algunas aplicaciones, como las que aparecen en el capítulo 5.

Como hemos señalado anteriormente, la propiedad de Artin-Lang ha sido la llave para la resolución del problema 17 de Hilbert en diferentas contextos. Sin embargo, para variedades analíticas no compactas de dimensión dos, el problema 17 fue resuelto en los trabajos [Bo-Rs] y [Jw1] sin prestar ninguna atención a la propiedad de Artin. Queremos enfatizar que nuestra demostración de la propiedad de Artin-Lang no utiliza la solución al problema 17 de Hilbert en dimensión dos, hecho que nos parece especialmente significativo, pues devuelve el proceso a su orden 'natural'. Nuestra demostración de la propiedad de Artin-Lang fue obtenida hace aproximadamente dos años, y aparecerá en las próximas semanas en el Mathematische Zeitschrift. Para su culminación fueron de inestimable ayuda las conversaciones que mantuvimos con el profesor Jaworski en el transcurso de su visita a Madrid.

El último capítulo de la memoria se dedica a dos aplicaciones fundamentales de la propiedad de Artin-Lang: la demostración de que la adherencia y las componentes conexas de los conjuntos semianalíticos globales son de nuevo conjuntos semianalíticos globales. Curiosamente, el problema de la adherencia lo hemos resuelto también para dimensión 3, y la demostración es relativamente sencilla. La razón es la siguiente: si $\dim(M) > 2$ podemos también obtener una descomposición de una función analítica $f = \tilde{f}h$ similar a la explicada anteriormente, aunque con algunas limitaciones, fundamentalmente el hecho de que los ceros de $\tilde{f}$ no coinciden con el conjunto de puntos en los que f cambia de signo, sino que se diferencia de éste en un conjunto de codimensión ≥ 1. Sin embargo, esto es suficiente para observar que la adherencia del conjunto semianalítico global $\{f_1 > 0, \dots, f_r > 0\}$ se diferencia del conjunto $\{\tilde{f}_1 \geq 0, \dots, \tilde{f}_r \geq 0, \widetilde{f_1 f_1} \geq 0, \widetilde{f_1 f_2} \geq 0, \dots, \widetilde{f_{r-1} f_r} \geq 0\}$ en un subconjunto semianalítico de un conjunto analítico de dimesión menor o igual que 1 y que por consiguiente resulta ser global. Como todo conjunto semianalítico global es unión finita de conjuntos básicos de la forma anterior o de conjuntos de dimensión estrictamete inferior, podemos concluir el resultado.

Probablemente ha sido la demostración de la semianaliticidad global de las componentes conexas la parte de la memoria que más nos ha costado, tanto en tiempo como en esfuerzo. Para su obtención hemos tenido que hacer uso del espectro real del cuerpo K de funciones meromorfas sobre M. De modo intuitivo, dado un conjunto semianalítico global $S \subset M$, podemos asociarle el conjunto ${}^g\widetilde{S}$ según lo comentado anteriormente. Por otra parte, si T es una componente conexa de S y admitimos por un momento que es un semianalítico global, se tiene también una idea clara de quien debería ser su correspondiente conjunto ${}^g\widetilde{T}$. Así pues, hemos procedido de modo inverso: hemos considerado el candidato a ${}^g\widetilde{T}$ y hemos comprobado que es constructible en $\mathrm{Spec}_r(K)$, con lo que viene descrito por una fórmula dada por funciones globales. A continuación consideramos el conjunto semianalítico global definido por esa misma fórmula, y comprobamos que se diferencia de T en un subconjunto semianalítico de un conjunto analítico unidimensional, y que por tanto resulta ser global. A pesar de la sencillez de la idea, la demostración se convierte en bastante técnica en determinados momentos.

La memoria termina con un bonito resultado que utiliza la misma técnica de demostración que el anterior y que muestra que un conjunto semianalítico $S \subset M$

es global si y sólo su frontera es un conjunto semianalítico global.

Hemos dividido la tesis en cinco capítulos. El capítulo 1 es una recopilación de resultados y definiciones que aparecen en el resto de la tesis. Entre ellos se incluyen los Teoremas A y B de Cartan y algunas aplicaciones que usaremos en varias ocasiones (cf. proposiciones 2.5 y 2.6).

El capítulo 2 está dedicado a establecer una correspondencia biyectiva entre los ultrafiltros de conjuntos analíticos globales y los ideales maximales de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. Estudiar esta biyección fue lo primero que hicimos cunado se decidió presentar un trabajo de investigación para los cursos de doctorado. Gracias a ella demostramos que los cuerpos residuales de ideales maximales en $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ son reales cerrados (cf. proposición 2.12 y teorema 2.13).

En el capítulo 3 desarrollamos uno de los resultados básicos para la demostración de la propiedad de Artin-Lang. Asociamos a cada orden β del cuerpo de funciones meromorfas sobre un conjunto analítico irreducible X un filtro maximal $\mathcal{U}_\beta$ de subconjuntos semianalíticos cerrados de X. Como ya apuntamos, esta asociación nos permite dar algunos criterios geométricos para decidir si una función analítica es positiva en dicho orden. Estas técnicas serán las que apliquemos en el capítulo 4 para demostrar la propiedad de Artin-Lang y el problema 17 de Hilbert para variedades analíticas conexas y paracompactas de dimensión dos. Una aplicación más sencilla consiste en demostrar estos resultados para funciones meromorfas con soporte compacto (cf. proposición 3.1). Esta situación particular incluye el caso en que M sea compacta y de dimensión arbitraria.

En la sección 4 del capítulo 3 caracterizamos geométricamente mediante arcos analíticos las funciones con soporte compacto que son sumas de potencias $2k$-ésimas de funciones meromorfas. Esta caracterización generaliza el resultado de [Rz4] para gérmenes y funciones meromorfas sobre variedades analíticas compactas de dimensión arbitraria.

El contenido de los capítulos 4 y 5 ha sido expuesto ampliamente en esta introducción. En el capítulo 4 demostramos la propiedad de Artin-Lang para variedades analíticas M reales conexas y paracompactas de dimensión dos. El la sección 2 obtenemos algunos resultados técnicos necesarios. En concreto, descomponemos una función analítica en producto de una función cuasilibre de cuadrados y una suma de cuadrados (cf. proposición 2.5). Como consecuencia de este resultado obtuvimos la proposición 2.10, uno de los resultados fundamentales para la propiedad de Artin-Lang. La sección 3 incluye el llamado *teorema del ultrafiltro,* que establece una biyección entre el conjunto de órdenes del cuerpo de fracciones k

del anillo de funciones anlíticas sobre M y el conjunto de filtros maximales de la familia $\mathcal{S}$ de conjuntos semianalíticos globales abiertos de M.

El capítulo 5 está dedicado a demostrar la semianaliticidad global de la adherencia de subconjuntos semianalíticos de variedades de dimensión tres analíticas reales, conexas y paracompactas, y la semianaliticidad global de las componentes conexas de subconjuntos semianalíticos para el caso en que la variedad tenga dimensión dos (cf. teoremas 1.1 y 1.5, ambos desarrollados en sendas secciones). Además, se incluye como una consecuencia de dichos resultados un teorema de finitud para diemnsión menor o igual que tres y una caracterización de la globalidad de los conjuntos semianalíticos de dimensión dos a través de la frontera (cf. teorema 2.10 y proposición 3.11).

Quiero terminar esta introducción citando varios problemas abiertos que quedan pendientes y que sin duda deben ser el próximo paso a dar en el estudio de los conjuntos semianalíticos globales: en primer lugar la extensión de la propiedad de Artin-Lang a superficies singulares; en segundo lugar, el estudio más detallado de las posibles descripciones de los conjuntos semianalíticos globales de M, es decir los llamados invariantes s y t de Bröcker; en tercer lugar, la extensión de la propiedad de Artin-Lang a dimensiones superiores y en particular a dimensión 3. Ciertamente este último parece el más difícil de todos, pero tendría como contrapartida la solución del problema 17 de Hilbert para dimensión tres, un resultado ciertamente importante.

1

Preliminares

En este capítulo recopilamos algunos resultados y definiciones que usaremos a lo largo de las próximas páginas. Empezaremos recordando en las tres primeras secciones ciertas notaciones y terminología concernientes a espacios de órdenes y conjuntos semianalíticos reales. En la sección 2 incluímos los Teoremas A y B de Cartan tal y como aparecen en [C], así como determinadas propiedades de los conjuntos analíticos reales, también incluídas en [C].

1. Generalidades sobre subconjuntos semianalíticos reales

Sean M una variedad analítica real de dimensión m y $\mathcal{O}_M$ el haz de funciones analíticas sobre M; $\mathcal{O}(M)$ simboliza el anillo de funciones analíticas reales sobre M, y $\mathcal{O}_{M,x}$, el anillo local de gérmenes analíticos reales en x.

Sea X un conjunto analítico real de M. Los ideales $\mathcal{J}_x(X_x)$ de gérmenes de funciones analíticas que se anulan en el germen X_x definen el haz de ideales $\mathcal{J}_X$ de ceros asociado al conjunto analítico X. Denotaremos por $\mathcal{O}_X$ el haz cociente $\mathcal{O}_M/\mathcal{J}_X$ y lo llamaremos *haz de funciones analíticas sobre* X; $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{M,x}/\mathcal{J}_{X,x}$ simboliza el anillo local de gérmenes analíticos reales en un punto arbitrario $x \in X$.

Definición 1.1. *Un subconjunto $Y \subset M$ se dice que es semianalítico si para cada $y \in M$ hay un entorno abierto U^y de y tal que*

$$Y \cap U^y = \bigcup_{k=1}^{q} \{x \in U^y \mid f_k(x) = 0, g_{k1}(x) > 0, \dots, g_{kj_k}(x) > 0\}$$

para algunas funciones analíticas f_k, $g_{kj} \in \mathcal{O}(U^y)$.

Los conjuntos semianalíticos fueron estudiados por S. Łojasiewicz en su memoria «Ensembles semianalytiques», [Ł], publicada en el año 1965, donde se demuestran varias de sus propiedades, como, por ejemplo, que son subconjuntos triangulables, localmente conexos, y que sus componentes conexas y su adherencia vuelven a ser semianalíticos (cf. [Ł], §§15 y 16, pp. 65–77). En nuestra memoria estudiaremos un tipo especial de conjuntos semianalíticos, que llamaremos globales. En concreto:

Definición 1.2. *Un subconjunto $S \subset M$ es* semianalítico global *si admite una representación de la forma*

$$S = \bigcup_{i=1}^{p} \{x \in M \mid f_i(x) = 0, g_{i1}(x) > 0, \dots, g_{ij_i}(x) > 0\}$$

donde $f_i, g_{i1}, \dots, g_{ij_i} \in \mathcal{O}(M)$ para cada $i \in \{1, \dots, p\}$.

Usaremos el adjetivo global para diferenciarlo de las definiciones clásicas de subconjuntos analíticos y semianalíticos de M, cuya naturaleza es local.

Ejemplo 1.3. Sea $t \in \mathbb{N}$ y $C_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - xt = 0, x \geq t\}$. El conjunto $C = \bigcup_{t \in \mathbb{N}} C_t$ es semianalítico, pero no es semianalítico global (figura 1.3). En efecto, si $C = \bigcup_{i=1}^{p} \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f_i(x) = 0, g_{i1}(x) > 0, \dots, g_{ij_i}(x) > 0\}$ al menos uno de los conjuntos $\{x \in M \mid f_i(x) = 0, g_{i1}(x) > 0, \dots, g_{ij_i}(x) > 0\}$ cortaría infinitas semirrectas C_t en un intervalo. Pero al ser f_i analítica, ha de anularse en todas las rectas correspondientes, $C'_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - xt = 0\}$, lo que lleva a que f_i debe ser la función 0. Por consiguiente C tendría puntos interiores, lo que evidentemente es una contradicción. □

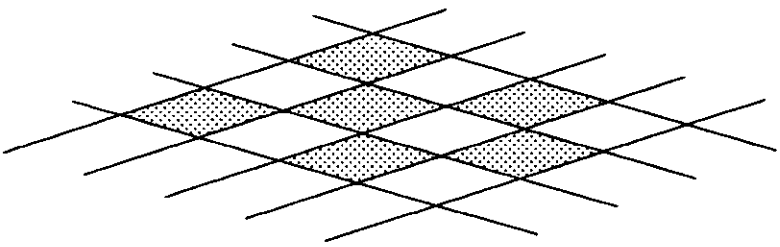

FIGURA 1.1.

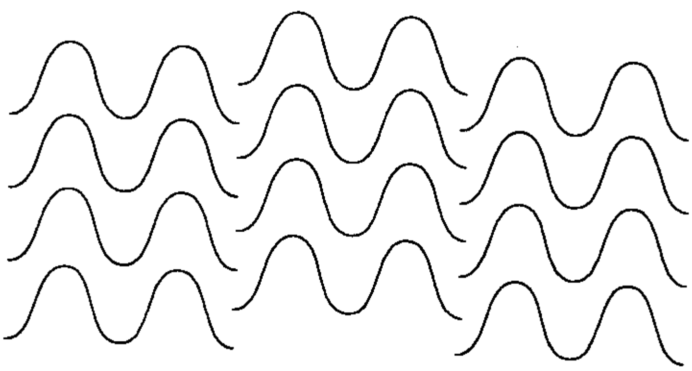

FIGURA 1.2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \cos(y - \cos x) = 0,\ \operatorname{sen} x/4 \geq 0\}$
$\cup\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \cos(y - \cos x - \frac{\pi}{2}) = 0,\ \operatorname{sen} x/4 \leq 0\}$

Ejemplos 1.4.

a) Los conjuntos semianalíticos globales presentan formas muy variadas y familiares. Por ejemplo, las baldosas de nuestra casa pueden formar un semianalítico global definido por

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \operatorname{sen}(y - x) \operatorname{sen}(y + x) \leq 0\}.$$

b) No siempre sugieren formas agradables y cotidianas, ¿qué tal una invasión de serpientes? (Véase la figura 1.2.)

c) De la propia definición se sigue que los conjuntos semianalíticos globales son cerrados por uniones e intersecciones finitas, y complementación. Sin embargo, la unión infinita de semianalíticos globales no tiene por qué ser un semianalítico global. Los conjuntos C_t y $C = \bigcup_{t \in \mathbb{N}} C_t$ del ejemplo 1.3 ilustran esta

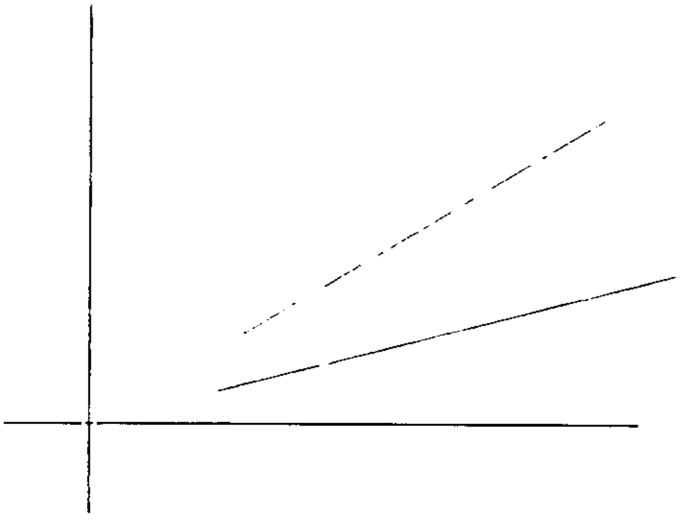

FIGURA 1.3. Obsérvese que sin embargo C es semianalítico (no global).

situación; cada uno de los C_t es semianalítico global pero no lo es C, como ya hemos probado. □

2. Generalidades sobre conjuntos analíticos reales y Teoremas A y B de Cartan

En 1957 Henri Cartan, en su artículo «Variedades analíticas reales y Variedades analíticas complejas» extendió sus resultados sobre cohomología de haces analíticos coherentes en variedades de Stein a las subvariedades analíticas de $\mathbb{R}^n$. Nos referimos a sus famosos *Teoremas A y B* relativos a la generación de las fibras de haces por secciones globales y a la anulación de los grupos de cohomología de exponente superior a 0, y cuyo enunciado recordaremos a continuación. Su demostración puede consultarse en el artículo original de Cartan.

Teorema 2.1. *Sea X un subconjunto analítico coherente de $\mathbb{R}^n$ (que es el caso de las* subvariedades analíticas *de $\mathbb{R}^n$). Sea $\mathcal{F}$ un haz analítico coherente sobre X. Entonces:*

A) Para todo punto $x \in X$, $\mathcal{F}_x$ está generado (como módulo sobre el anillo $\mathcal{O}_x(X)$ de los gérmenes de funciones analíticas en el punto x) por las secciones globales de $\mathcal{F}$.

B) Para todo entero $q \geq 1$, se tiene que $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$.

Sin entrar en detalles, recordemos que un haz analítico $\mathcal{F}$ sobre una variedad analítica M se dice que es *coherente* si tanto él como sus haces de relaciones son finitamente generados. Una de las peculiaridades fundamentales de los conjuntos analíticos reales frente a los complejos es que mientras que el Teorema de Cartan-Oka asegura que el haz de ideales asociado a un conjunto analítico complejo es coherente, en el caso real esto no es necesariamente así. Por ejemplo el haz de ideales del *paraguas de Whitney*, $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 z = 0\}$, cf. figura 1.4, página 22 no es coherente. Ello da lugar a la siguiente definición:

Definición 2.2. *Se dice que un subconjunto analítico X de M es* coherente *si el haz de ideales $\mathcal{J}_X$ asociado a X es un haz coherente.*

Como consecuencia del Teorema de Oka, que asegura que el haz $\mathcal{O}_M$ de funciones analíticas sobre M es coherente, se sigue que X es coherente si y sólo si el haz $\mathcal{J}_X$ es finitamente generado. Una de las aplicaciones más inmediatas del Teorema B es el siguiente:

Corolario 2.3. *Sean X un conjunto analítico coherente de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{J}_X$ el haz de ideales asociado a X. Sea $\mathfrak{p}$ el ideal de las funciones que se anulan en X. Entonces $\mathcal{O}(M)/\mathfrak{p}$ coincide con las secciones globales de $\mathcal{O}_X$.*

Demostración. En primer lugar, obsérvese que $\mathfrak{p}$ es el ideal de secciones globales de $\mathcal{J}$. Ahora basta considerar la sucesión exacta de haces

$$0 \to \mathcal{J}_X \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}/\mathcal{J}_X \to 0$$

y observar que aplicando el Teorema B en la sucesión exacta larga de cohomología asociada, obtenemos una sucesión exacta al nivel de las secciones globales, de donde se sigue el corolario. □

Observación 2.4. Si X no es coherente el resultado anterior no es cierto. En cualquier caso, en nuestro estudio necesitaremos asociar a X un anillo de funciones definidas globalmente, por lo que denominaremos al anillo cociente $\mathcal{O}(M)/\mathfrak{p}$ como el anillo de *funciones analíticas reales sobre X* y lo representaremos por $\mathcal{O}(X)$.□

La siguiente aplicación del Teorema de Cartan aparecerá varias veces en las páginas sucesivas por lo que la incluímos para futuras referencias:

Proposición 2.5. *Sean $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto discreto y $\{d_x\}_{x \in X}$ una secuencia de enteros positivos. Fijemos para cada $x \in X$, un germen analítico $g_x \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n,x}$. Entonces existe $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_x \equiv g_x (\operatorname{mod} \mathfrak{m}_x^{d_x})$.*

Demostración. Consideremos el haz de ideales $\mathcal{H}$ definido por

$$\mathcal{H}_p = \begin{cases} \mathfrak{m}_x^{d_x} & \text{si } x \in X \\ \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n,x} & \text{si } x \notin X \end{cases}$$

Como $\mathcal{H}$ está finitamente generado es coherente, y por tanto también lo es el haz cociente $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}/\mathcal{H}$. Ahora,

$$G_x = \begin{cases} g_x + \mathfrak{m}_x^{d_x} & \text{si } x \in X \\ 0 & \text{si } x \notin X \end{cases}$$

define una sección global G de $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}/\mathcal{H}$. Aplicando el teorema B en la sucesión exacta de cohomología asociada a la sucesión de haces

$$0 \to \mathcal{H} \to \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n} \to \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}/\mathcal{H} \to 0$$

concluímos que existe una sección global $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ cuya clase $\operatorname{mod}(\Gamma(\mathbb{R}^n, \mathcal{H}))$ coincide con G. □

En 1958, Grauert demuestra que toda variedad analítica real M paracompacta y conexa puede sumergirse como subvariedad analítica en el espacio afín $\mathbb{R}^n$ (cf. [G], teorema 3, p. 470). Con ello se prueba, por un lado, que los Teoremas A y B de Cartan, así como las consecuencias relatadas anteriormente son aplicables en la variedad M, y por otro, que el estudio de los subconjuntos analíticos de una variedad analítica M en las condiciones anteriores se reduce al de los subconjuntos analíticos de $\mathbb{R}^n$.

Veamos otra aplicación de los teoremas de Cartan que nos será de gran utilidad en lo sucesivo:

Proposición 2.6. *Sea M una variedad analítica real paracompacta y conexa y sea X un subconjunto discreto de M. Entonces X es un subconjunto analítico global de M. Para ser más precisos, si para cada $x \in X$ fijamos un germen analítico ρ_x tal que $Z(\rho_x) = \{x\}$, entonces existe una función analítica $\xi \in \mathcal{O}(M)$ que es suma de cuadrados de funciones meromorfas sobre M y tal que para cada $x \in X$ $\xi_x \mathcal{O}_{M,x} = \rho_x \mathcal{O}_{M,x}$.*

Demostración. Por el teorema de Grauert, basta demostrar el teorema para $M = \mathbb{R}^n$. Consideremos

$$\Delta_y = \begin{cases} (\rho_y)\mathcal{O}^*_{M,y} & \text{si } y \in D \\ \mathcal{O}^*_{M,y} & \text{si } y \notin D. \end{cases}$$

Δ define un divisor, esto es una sección global del haz de divisores $\mathcal{D} = \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$ donde $\mathcal{O}^*$ (resp. $\mathcal{M}^*$) representa el haz de unidades de $\mathcal{O}$ (resp. el haz de funciones meromorfas). La sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{O}^* \to \mathcal{M}^* \to \mathcal{D} \to 0$$

nos lleva a esta otra sucesión exacta

$$\cdots \to \Gamma(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}^*) \to \Gamma(\mathbb{R}^n, \mathcal{D}) \to H^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}^*) \to \cdots$$

Por otra parte, la sucesión exacta de haces

$$0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \to \mathbb{Z}_2 \to 0,$$

donde exp es la aplicación exponencial y $\mathbb{Z}_2$ es el haz constante definido por el anillo $\mathbb{Z}_2$, conduce a una sucesión exacta:

$$\cdots \to H^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}) \to H^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}^*) \to H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{Z}_2) \to H^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}) \to \cdots$$

Por el Teorema B de Cartan, concluimos que $H^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}) = H^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}) = 0$, con lo que $H^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}^*) \simeq H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{Z}_2) = 0$. En particular, la aplicación

$$\Gamma(M, \mathcal{M}^*) \to \Gamma(\mathcal{D}, M)$$

es sobreyectiva y por consiguiente el divisor Δ está definido por una sección global ξ de $\mathcal{M}^*$. Como $\xi_x \in \mathcal{O}_x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ resulta $\xi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. Obviamente $Z(\xi) = D$, luego ξ no cambia de signo en $\mathbb{R}^n$. Cambiando ξ por $-\xi$ cuando sea necesario, podemos suponer que $\xi \geq 0$ en todo $\mathbb{R}^n$. En esta situación, el resultado de [Bo-Ku-Sh], teorema 1, asegura que ξ es suma de cuadrados de funciones meromorfas, lo que completa la demostración del resultado. □

Continuamos esta brevísima introducción a la geometría analítica real recordando la noción de complexificación.

Complexificación. Sea Z_a el germen de un conjunto analítico (real) en un punto $a \in \mathbb{R}^n$. Por estar $\mathbb{R}^n$ sumergido en $\mathbb{C}^n$ existe un germen de conjunto analítico complejo Z^*_a en $\mathbb{C}^n$, y sólo uno, que cumple:

a) $Z_a \subset Z_a^*$;

b) todo germen de función analítica en el punto a que se anula sobre Z_a también se anula sobre Z_a^*.

Entonces $Z_a^* \cap \mathbb{R}^n = Z_a$ y todo germen de conjunto analítico complejo que contiene a Z_a contiene a Z_a^*. Si $\mathcal{I}_a$ es el ideal de $\mathcal{O}_a(\mathbb{R}^n)$ formado por los gérmenes de funciones analíticas que se anulan sobre Z_a e $\mathcal{I}_a^*$ es el ideal de $\mathcal{O}_a(\mathbb{C}^n) \simeq \mathcal{O}_a(\mathbb{R}^n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ formado por los gérmenes de funciones analíticas que se anulan sobre Z_a^*, se tiene que $\mathcal{I}_a^* = \mathcal{I}_a \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Se dice que el germen Z_a^* anterior es el *complexificado* del germen Z_a.

Sea Z un conjunto analítico de $\mathbb{R}^n$. Diremos que Z admite una complexificación si existen un entorno abierto U de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}^n$ y un subconjunto analítico complejo Z^* de U que verifican:

a) $Z^* \cap \mathbb{R}^n = Z$,

b) para cualquier otro subconjunto analítico A de U que contenga a Z, existe un entorno $U' \subset U$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $Z^* \cap U' \subset A \cap U'$.

Del conjunto analítico Z^* decimos que es *un complexificado de* Z. □

Ejemplo 2.7. Los distintos gérmenes del complexificado de un conjunto analítico real no siempre son los complexificados de los gérmenes del conjunto analítico de partida. Por ejemplo, sea Z el "paraguas de Whitney", esto es, el conjunto de ceros de $f = zy^2 - x^2$ en $\mathbb{R}^3$. Un complexificado suyo es el conjunto Z^* de ceros de f en $\mathbb{C}^3$. Tomemos un punto $p \in Z$ de coordenadas $p = (0, 0, z)$ con $z < 0$. El gérmen analítico Z_p^* no es el complexificado del germen Z_p porque $g = x^2 + y^2$ se anula en Z_p pero sin embargo no se anula sobre Z_p^*.

Precisamente, una de las propiedades que caracteriza la coherencia de un conjunto analítico real es que los gérmenes de una complexificación sean los complexificados de los gérmenes reales correspondientes ([C], proposición 12). Usando este criterio es muy fácil comprobar que si $X \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto analítico de dimensión uno entonces es coherente. □

Existe una estrecha relación entre la existencia de complexificación, la coherencia y la propiedad de que el conjunto analítico sea global, esto es, definible por un un número finito de funciones analíticas en todo $\mathbb{R}^n$. Esta relación viene dada por la siguiente proposición que aparece también en [C], proposición 15.

Proposición 2.8. *Sea X un subconjunto analítico de $\mathbb{R}^n$. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

a) Existe un haz coherente de ideales $\mathfrak{J}$ sobre $\mathbb{R}^n$, tal que X es el lugar de ceros de $\mathfrak{J}$ (i.e. X es el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^n$ tales que $\mathfrak{J}_x \neq \mathcal{O}_x$).

b) Existe un entorno abierto U de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}^n$ y un subconjunto analítico complejo X^* de U tales que $X^* \cap \mathbb{R}^n = X$.

c) Existen un número finito de funciones analíticas reales f_i en $\mathbb{R}^n$ tal que X es el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones $f_i(x) = 0$

El resultado anterior pone de manifiesto las especiales propiedades de los conjuntos analíticos definibles globalmente por un número finito de funciones analíticas de $\mathbb{R}^n$ (resp. de M). Dichos conjuntos serán llamados a partir de ahora *conjuntos analíticos globales de* $\mathbb{R}^n$ (resp. *de* M). Estos conjuntos han sido estudiados por Bruhat y Whitney, quienes han demostrado que su comportamiento es más similar al de los conjuntos analíticos complejos, precisamente por tener una estrecha relación con ellos.

Una consecuencia inmediata de la proposición es que un conjunto analítico de dimensión cero es global: su complexificado coincide consigo mismo. También el ejemplo 2.7 muestra que todo conjunto analítico de dimensión uno es analítico global. Sin embargo, ésto no es cierto para dimensión mayor o igual que dos; Cartan muestra en [C] que el conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2 + y^2) = x^3 a(z)\}$$

donde $a(z)$ es un función C^∞ tal que

$$a(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq -1 \\ \exp(1/(z^2 - 1)) & \text{si } -1 < z < 1 \\ 0 & \text{si } z \geq 1 \end{cases}$$

es analítico pero no analítico global.

Una aplicación inmediata de la proposición anterior, y que nos será de utilidad en el futuro, es el siguiente

Corolario 2.9. *Sea $X \subset M$ un conjunto analítico global y sea $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ su descomposición en componentes irreducibles. Entonces, para cualquier subconjunto $J \subset I$, $Y = \bigcup_{j \in J} X_j$ es un conjunto analítico global.*

Demostración. Sin pérdida degeneralidad podemos suponer que $M = \mathbb{R}^n$. Sea X^* un conjunto analítico complejo de un entorno U de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}^n$ tal que $X^* \cap \mathbb{R}^n = X$. Entonces X^* tiene una descomposición en componentes irreducibles de la forma $X^* = \bigcup_{i \in I} X_i^*$ con $X_i^* \cap \mathbb{R}^n = X_i$ (cf. [Nh]). Entonces $Y^* = \bigcup_{j \in J} X_j$ es un conjunto analítico complejo y obviamente $Y^* \cap \mathbb{R}^n = Y$, de donde, por la proposición anterior, se sigue que Y es analítico global. □

Para terminar recordaremos las nociones de punto regular y dimensión. Sea X un subconjunto analítico de una variedad analítica M. Se dice que un punto $x \in X$ es regular de dimensión d si existe un entorno U de x tal que $X \cap U$ es una variedad analítica de dimensión d. Si a es un punto cualquiera de X, definimos la dimensión de X en a, $\dim_a(X)$, como el supremo de las dimensiones en puntos regulares de X suficientemente próximos a a. La dimensión de X se define como el supremo de las dimensiones en todos sus puntos: $\dim(X) = \sup_{a \in X}\{\dim_a(X)\}$. La existencia de puntos de distinta dimensión dentro de un mismo conjunto analítico irreducible es otro de los fenómenos característicos de los conjuntos analíticos reales frente a los complejos, véase, por ejemplo, de nuevo el paraguas de Whitney, fig. 1.4.

Los conjuntos de puntos regulares de una dimensión dada, así como los conjuntos de puntos de X de una dimensión dada son conjuntos semianalíticos. Sin embargo, incluso si partimos de un conjunto analítico global, es un problema abierto, para dimensiones mayores o iguales que 3, determinar si estos subconjuntos son semianalíticos globales. Denotaremos por $\operatorname{Reg}(X)$ el conjunto de puntos regulares de X y por $\operatorname{S}(X) = X \setminus \operatorname{Reg}(X)$ su complementario, esto es, los puntos singulares de X.

El conjunto de puntos regulares de dimensión máxima, esto es, igual a $\dim(X)$, tiene una especial importancia y será denotado por $\operatorname{Reg}^*(X)$. Obsérvese que $a \in \operatorname{Reg}^*(X)$ si y sólo si a es un punto regular de una complexificación X^* de X. En particular se sigue que $\operatorname{S}(X) \subset (X \setminus \operatorname{Reg}^*(X)) = \operatorname{S}(X^*) \cap X$, donde $\operatorname{S}(X^*)$ denota el conjunto de puntos singulares del complexicado X^*. En particular este conjunto es analítico y por consiguiente se sigue que $\operatorname{S}(X)$ está contenido en un subconjunto analítico global de M de dimensión estrictamente menor que la de X.

Sea $a \in X$. Denotamos por $\mathcal{O}_a(X) := \mathcal{O}_a(M)/\mathcal{J}_{X,a}$ el anillo de *gérmenes de funciones analíticas de X en a.* Es bien conocido que a es un punto regular regular de dimensión d si y sólo si $\mathcal{O}_a(X)$ es un anillo regular de dimensión d.

3. Generalidades sobre espacios de órdenes

Recordemos ahora algunas notaciones y propiedades referentes al espectro real.

Definición 3.1. *Sea A un anillo conmutativo y unitario. Se llama cono primo de A a todo subconjunto $\alpha \subset A$ que cumple:*

a) *si f y $g \in \alpha$, entonces $f+g$ y $fg \in \alpha$,*

b) $\sum A^2 \subset \alpha$,

c) $-1 \notin \alpha$,

d) $A = \alpha \cup -\alpha$,

e) $\alpha \cap -\alpha$ *es un ideal primo de A.*

El *espectro real* de A, que se representa por $\operatorname{Spec}_r(A)$, se define como el conjunto de todos los conos primos de A (cf. [Bo-Cs-Ry], capítulo 7). Si A es un cuerpo K, la noción de cono primo coincide con la de orden total de A, por lo que un cono primo β puede considerarse también como una relación binaria y $\operatorname{Spec}_r(K)$ no es otra cosa que el espacio de órdenes de K. En esta situación, usaremos ambos conceptos indistintamente.

Dado un cono primo α, denotamos por $\operatorname{supp}(\alpha)$ el ideal primo $\operatorname{supp}(\alpha) = \alpha \cap -\alpha$, que recibe el nombre de *soporte* de α: una comprobación inmediata a partir de la definición anterior muestra que

$$\bar{\alpha} = \left\{ \frac{f + \operatorname{supp}(\alpha)}{g + \operatorname{supp}(\alpha)} \;\middle|\; fg \in \alpha \right\}$$

es un cono primo del cuerpo de fracciones $k(\operatorname{supp}(\alpha))$ de $A/\operatorname{supp}(\alpha)$, y según lo comentado antes, un orden total en dicho cuerpo. Por consiguiente el cono primo α puede verse también como el par $(\operatorname{supp}(\alpha), \bar{\alpha})$.

Dada $f \in A$, $f(\alpha) > 0$ significa que $-f \notin \alpha$. Desde el punto de vista anterior, $f(\alpha) > 0$ si y sólo si $(f + \operatorname{supp}(\alpha)) > 0$ en el orden $\bar{\alpha}$. Si α y β son dos conos primos de A, diremos que α es una *especialización* de β si $\beta \subset \alpha$ y lo representaremos por $\beta \to \alpha$.

Ejemplos 3.2.

a) Si p es un punto de $\mathbb{R}^n$ con coordenadas $p = (p_1, \ldots, p_n)$, el conjunto de funciones $\tilde{p} = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \mid f(p) \geq 0\}$ es un cono primo de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ con soporte

$\operatorname{supp}(\tilde{p}) = \mathfrak{m}_p = (x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n)\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. En este caso $f(\tilde{p}) > 0$ si y sólo si $f(p) > 0$. Si β es un orden total de $\mathbb{R}^n$ con $\beta \to \tilde{p}$ diremos que β está centrado en p.

b) Sea k el cuerpo de fracciones del anillo local $\mathcal{O}_0(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}\{t\}$ de series de potencias convergentes en un entorno del origen de la recta real. El espectro real de k está formado por dos órdenes α_+ y α_- definidos por

$$f(\alpha_+) > 0 \text{ sii existe } \epsilon > 0 \text{ tal que } f_{|(0,\epsilon)} > 0$$
$$f(\alpha_-) > 0 \text{ sii existe } \epsilon > 0 \text{ tal que } f_{|(-\epsilon,0)} > 0.$$

En efecto, sea $f = t^p\left(a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^{p+i}\right)$ con $a_0 \neq 0$ un elemento de $\mathbb{R}\{t\}$. Si ν es 1 cuando $a_0 > 0$ y -1 cuando $a_0 < 0$ la serie $\nu\left(a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^{p+i}\right)$ es un cuadrado u^2 en el subcuerpo de las unidades de $\mathbb{R}\{t\}$. Entonces $f = \nu t^p u^2$ y el signo de f en cualquier orden de k depende solamente del signo de t. Por lo tanto si $\alpha \in \operatorname{Spec}_r(k)$ necesariamente $\alpha = \alpha_+$ o $\alpha = \alpha_-$ según $t(\alpha)$ sea > 0 o < 0, respectivamente.

c) Sean X un subconjunto analítico global irreducible de una variedad analítica M y $p \in \operatorname{Reg}^*(X)$. Entonces siempre existen órdenes totales de X centrados en p. En efecto, hay que ver que existe un orden total del cuerpo K de funciones meromorfas sobre X que contiene al conjunto $P = \{f \in \mathcal{O}(X) \mid f(p) > 0\}$, para lo cual, en virtud del criterio de Serre es suficiente comprobar que si $f_1, \dots, f_r \in P$, la ecuación

$$f_1 Y_1^2 + \cdots + f_r Y_r^2 = 0$$

no tiene en K más solución que la trivial $Y_1 = \cdots = Y_r = 0$. En efecto, supongamos que $y_1, \dots, y_r$ es una solución, que podemos suponer en $\mathcal{O}(X)$, y sea $U \subset \operatorname{Reg}^*(X)$ un entorno abierto de p en X tal que $f_i|_U > 0$. Entonces, $y_j(x) = 0$ para todo punto $x \in U$, por lo que y_j se anula en un abierto de puntos regulares de X de dimensión máxima, y como X es irreducible $y_j = 0$ sobre todo X. □

En el conjunto $\operatorname{Spec}_r(A)$ se consideran dos topologías diferentes: la *topología de Harrison*, cuya base son los conjuntos

$$\{\beta \in \operatorname{Spec}_r(A) \mid f_1(\beta) > 0, \dots, f_r(\beta) > 0\}, \qquad f_i \in A,$$

y la *topología constructible*, cuya base son los conjuntos

$$\{\beta \in \mathrm{Spec}_r(A) \mid f(\beta) = 0, g_1(\beta) > 0, \ldots, g_r(\beta) > 0\}, \qquad f, g_i \in A.$$

Si A es un cuerpo ambas topologías coinciden. En general, la topología de Harrison es más débil. Por otra parte, estas dos topologías hacen de $\mathrm{Spec}_r(A)$ un espacio topológico cuasicompacto, y con la topología constructible es Hausdorff y totalmente disconexo (cf. [Bo-Cs-Ry], definiciones 7.1.3 y 7.1.10, ejemplo 7.1.4 y observación 7.1.11).

Definición 3.3. *Un subconjunto $C \subset \mathrm{Spec}_r(A)$ se dice que es constructible si es abierto y cerrado en la topología constructible, es decir, admite una representación de la forma*

$$C = \bigcup_{i=1}^{r} \{\beta \in \mathrm{Spec}_r(A) \mid f_i(\beta) = 0, g_{i1}(\beta) > 0, \ldots, g_{ij_i}(\beta) > 0\}$$

donde $f_i, g_{i1}, \ldots, g_{ij_i} \in A$ para cada $i = 1, \ldots, r$.

4. El operador tilde

Sean M una variedad analítica real y $A = \mathcal{O}(M)$ su anillo de funciones analíticas. Cada punto $x \in M$ define un cono primo de A que denotamos $\tilde{x}$ del modo siguiente:

$$\tilde{x} = \{f \in A \mid f(x) \geq 0\}.$$

Una comprobación inmediata muestra que $\mathrm{supp}(\tilde{x}) = \mathfrak{m}_x$, el ideal maximal de las funciones que se anulan en x, por lo que $k(\mathrm{supp}(\tilde{x})) = \mathbb{R}$ y $\bar{\tilde{x}}$ es el único orden de $\mathbb{R}$. De este modo, la aplicación

$$M \to \mathrm{Spec}_r(A) : x \mapsto \tilde{x}$$

sumerge M como subespacio topológico de $\mathrm{Spec}_r(A)$ con la topología de Harrison, por lo que $\mathrm{Spec}_r(A)$ puede verse como una compactificación de M.

De modo más general, si

$$S = \bigcup_{i=1}^{r} \{x \in M \mid f_i(x) = 0, g_{i1}(x) > 0, \ldots, g_{ij_i}(x) > 0\},$$

es un conjunto semianalítico global de M definimos

$$\widetilde{S} = \bigcup_{i=1}^{r} \{\beta \in \operatorname{Spec}_r(A) \mid f_i(\beta) = 0, g_{i1}(\beta) > 0, \ldots, g_{ij_i}(\beta) > 0\}.$$

Obviamente $\widetilde{S}$ es un conjunto constructible de $\operatorname{Spec}_r(A)$ y $\widetilde{S} \cap M = S$

Es bien conocido que si M es compacta el operador tilde define un isomorfismo entre los retículos de los conjuntos semianalíticos globales y los conjuntos constructibles de $\operatorname{Spec}_r(A)$, y que conserva adherencias e interiores (cf. [Rz2], [An-Br-Rz2]). Sin embargo ya esto es falso en dimensión 1 si M no es compacta, como pone de manifiesto el siguiente ejemplo que aparece en [An-Be] (ejemplo 6.2): se consideran las funciones analíticas de $\mathbb{R}$, $f = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n^2}\right)^n$, y $g = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n^2}\right)^2$. Evidentemente ambas funciones se anulan en el conjunto $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$, por lo que $S = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0, g(x) > 0\}$ es vacío. Sin embargo, el conjunto $\widetilde{S} = \{\beta \in \operatorname{Spec}_r(\mathcal{O}(\mathbb{R})) \mid f(\beta) = 0, g(\beta) > 0\}$ no es vacío.

Ello hace que en el estudio de los conjuntos semianalíticos globales la aplicación tilde sea reemplazada por la *tilde genérica*: dado

$$S = \bigcup_{i=1}^{r} \{x \in M \mid f_i(x) = 0, g_{i1}(x) > 0, \ldots, g_{ij_i}(x) > 0\},$$

como antes, definimos

$${}^g\widetilde{S} = \bigcup_{i=1}^{r} \{\beta \in \operatorname{Spec}_r(K) \mid f_i(\beta) = 0, g_{i1}(\beta) > 0, \ldots, g_{ij_i}(\beta) > 0\},$$

donde K es el cuerpo de funciones meromorfas de M, esto es, el cuerpo de fracciones de A. ${}^g\widetilde{S}$ es un conjunto constructible de $\operatorname{Spec}_r(K)$, esto es, el espacio de órdenes de K. En lo sucesivo omitiremos el superíndice g en la notación anterior, puesto que nos referiremos siempre a esta aplicación tilde, salvo mención expresa de lo contrario. Obsérvese que la condición $f_i(\beta) = 0$ para $\beta \in \operatorname{Spec}_r(K)$ equivale a que la función f_i sea idénticamente nula, por lo que ${}^g\widetilde{S}$ queda reducido a la unión de los pedazos

$$\{g_{i1}(\beta) > 0, \ldots, g_{ij_i}(\beta) > 0\}$$

en los que f_i es la función cero. Dicho de otro modo, no tiene en cuenta aquellos pedazos no abiertos, o más concretamente, contenidos en los ceros de una función

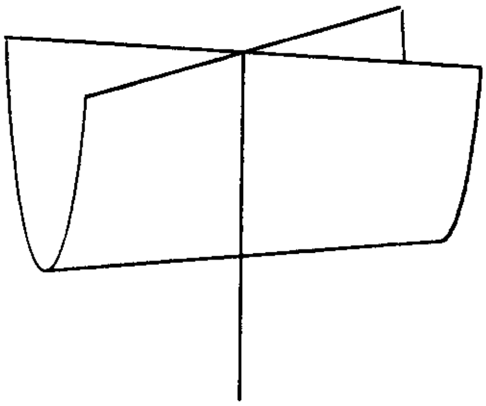

FIGURA 1.4.

analítica. Esto da una idea del origen de la denominación como aplicación tilde genérica, puesto que dos conjuntos semianalíticos con la misma tilde genérica van a diferenciarse en algo contenido en los ceros de una función y por tanto de dimensión menor, esto es, van a ser genéricamente iguales. De modo más preciso, si X es un subconjunto analítico global de una variedad analítica M definimos:

Definición 4.1. *Sean S y T dos conjuntos semianalíticos globales de X. Decimos que S y T son genéricamente iguales si existe una función $h \in \mathcal{O}(X) \setminus \{0\}$ tal que $(S \setminus T) \bigcup (T \setminus S) \subset \{h = 0\}$.*

Ejemplo 4.2. El paraguas de Whitney de ecuación $zy^2 = x^2$ tiene un "mango" (el eje de las z) que interseca la "tela" en toda una semirrecta. Sirviéndonos de él podemos construir un 'auténtico' paraguas definido por

$$\begin{aligned} S = &\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid zy^2 - x^2 = 0, -1 \leq z \leq 5\} \\ &\cup \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5 \leq z \leq 10\} \\ &\cup \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y-1)^2 + (z-10)^2 = 1, z \geq 10\} \end{aligned}$$

Pero hemos de tener cuidado con el viento, ya que puede voltearlo en otro *genéricamente igual* en el cual el agua no escurre (véanse figuras 1.5 y 1.6)

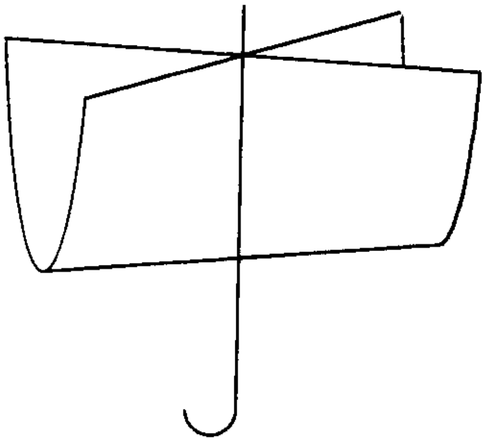

FIGURA 1.5. $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid zy^2 = x^2, -10 \leq z \leq 5\}$
$\cup\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y+1)^2 + (z+10)^2 = 1, z \leq -10\}$

Y para convencerse de que son genéricamente iguales basta tomar

$$h = ((y+1)^2 + (z+10)^2 - 1)((y-1)^2 + (z-10)^2 - 1)(x^2 + y^2).$$

Si ahora aplicamos la tilde genérica a estos paraguas obtenemos ${}^g\widetilde{S} = {}^g\widetilde{T} = \{\alpha \in \operatorname{Spec}_r(\mathcal{O}(X)) \mid 0 < z(\alpha) < 5\}$, siendo $X = Z(zy^2 - x^2)$. $\square$

El resultado que apuntábamos más arriba es:

Proposición 4.3. *Si dos conjuntos semianalíticos globales S y T tienen la misma tilde genérica, esto es, ${}^g\widetilde{S} = {}^g\widetilde{T}$, entonces son genéricamente iguales.*

Demostración. En efecto, sean

$$S = \bigcup_{i=1}^{p} \{x \in M \mid g_i(x) = 0, g_{i1}(x) > 0, \ldots, g_{ik_i}(x) > 0\}$$

$$T = \bigcup_{j=1}^{q} \{x \in M \mid l_i(x) = 0, l_{j1}(x) > 0, \ldots, l_{jm_j}(x) > 0\}$$

y supongamos que g_i es la función cero para $i = 1, \ldots, s$ y distinta de cero para $i > s$, y que l_j es la función cero para $j = 1, \ldots, t$ y distinta de cero para $j > t$.

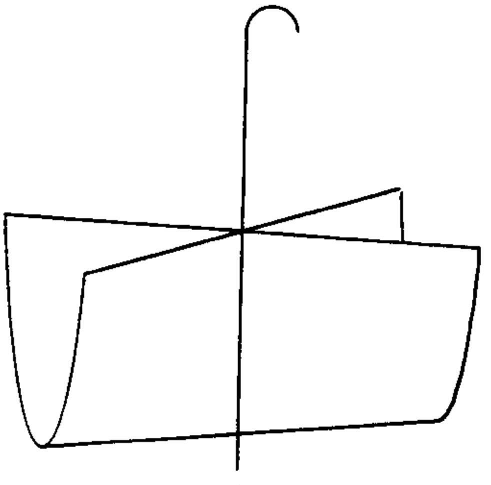

FIGURA 1.6.

En particular se tiene

$$
\begin{aligned}
{}^g\widetilde{S} &= \bigcup_{i=1}^{s} \{\beta \in \operatorname{Spec}_r(K) \mid g_{i1}(\beta) > 0, \dots, g_{ik_i}(\beta) > 0\} \\
{}^g\widetilde{T} &= \bigcup_{j=1}^{t} \{\beta \in \operatorname{Spec}_r(K) \mid l_{j1}(\beta) > 0, \dots, l_{jm_j}(\beta) > 0\}
\end{aligned}
$$

Supongamos ${}^g\widetilde{S} = {}^g\widetilde{T}$. Vamos a comprobar que $(S\setminus T)\cup(T\setminus S)$ está contenido en el producto

$$h = \Big(\prod_{i=s+1}^{p} g_i\Big)\Big(\prod_{i=1}^{s} g_{ik_i}\Big)\Big(\prod_{j=t+1}^{q} l_j\Big)\Big(\prod_{j=1}^{t} l_{jk_j}\Big)\delta,$$

donde $\delta = 0$ es una ecuación del conjunto analítico $X \setminus \operatorname{Reg}^*(X)$. En efecto, sea $x \in S \setminus T$ con $h(x) \neq 0$. En particular $x \in \operatorname{Reg}^*(X)$. Además, como $x \in S$, existe un $i = 1, \dots, s$ tal que $x \in \{g_{i1}(x) > 0, \dots, g_{ik_i}(x) > 0\}$, y como $x \notin T$ resulta que para todo $j = 1, \dots, t$ existe un r_j tal que $l_{r_j}(x) < 0$. Como x es regular, por el ejemplo 3.2 *c*, existe un orden $\beta \in \operatorname{Spec}_r(K)$ centrado en x, y por consiguiente $g_{i1}(\beta) > 0, \dots, g_{ik_i}(\beta) > 0$ y $l_{jr_j}(\beta) < 0$ para todo $j = 1, \dots, t$. Pero esto significa que $\beta \in {}^g\widetilde{S} \setminus {}^g\widetilde{T}$ en contra de nuestra hipótesis. □

Observación 4.4. El recíproco de la proposición anterior es inmediato una vez demostrado que la aplicación tilde genérica está bien definida, esto es, no depende de la escritura elegida para S, o equivalentemente, que si ${}^g\widetilde{S} \neq \varnothing$ entonces $S \neq \varnothing$. Esta es precisamente la propiedad de Artin-Lang, que demostraremos en el capítulo 4 para variedades de dimensión 2. Volveremos, pues, sobre ello al final de dicho capítulo. □

5. Gérmenes analíticos y semianalíticos

En esta sección recordamos de forma sumarísima algunos de los resultados sobre gérmenes analíticos y semianalíticos que usaremos a lo largo de la memoria. Para comenzar recordemos que si $a \in M$, un germen semianalítico en a es el germen de un conjunto semianalítico definido en un entorno de a, o equivalentemente el germen definido por una combinación booleana de igualdades y desigualdades de gérmenes de funciones en $\mathcal{O}_a(M)$. Como ya señalamos antes, este anillo es isomorfo al anillo de series convergentes $\mathbb{R}\{X_1, \dots, X_n\}$, por lo que reduciéndonos al caso (evidentemente suficiente al tratarse de cuestiones locales) en que $M = \mathbb{R}^n$ y a el origen, un germen semianalítico puede describirse del modo

$$X_a = \bigcup_{i=1}^{p} \{f_i = 0, g_{i1} > 0, \dots, g_{ik_i} > 0\}$$

donde $f_i, g_{ij} \in \mathbb{R}\{X\}$. Gracias al teorema de preparación de Weierstrass, el comportamiento de las series es en muchos aspectos similar al de los polinomios, y ello hace que el comportamiento y propiedades de los gérmenes semianalíticos sea similar al de los conjuntos semialgebraicos.

En concreto, si X_a es un germen semianalítico, X_a tiene un número finito de componentes conexas, que son todas ellas gérmenes semianalíticos. Del mismo modo la adherencia de un germen semianalítico es un germen semianalítico. El teorema de Finitud también es válido para gérmenes semianalíticos: si X_a es abierto (resp. cerrado) entonces admite una representación por medio únicamente de desigualdades estrictas (resp. laxas).

De mayor importancia para nosotros es el siguiente

Teorema 5.1. Positivstellensatz. *Sean $(f_j)_{j=1,\dots,s}, (g_k)_{k=1,\dots,t}, (h_l)_{l=1,\dots,u}$ gérmenes analíticos en $\mathbb{R}\{X_1, \dots, X_n\}$. Sea P el cono positivo generado por $(f_j)_{j=1,\dots,s}$, sea N el sistema multiplicativo generado por $(g_k)_{k=1,\dots,t}$, y sea I*

el ideal generado por $(h_l)_{l=1,\ldots,u}$. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) *El germen semianalítico*

$$S = \{f_j \geq 0; g_k \neq 0; h_l = 0; j = 1, \ldots, s; k = 1, \ldots, t; l = 1, \ldots, u\}$$

es vacío.

b) *Existen* $f \in P$, $g \in N$, $h \in I$ *tales que* $f + g^2 + h = 0$.

Demostración. [Fe-Re-Rz], §4; [An-Br-Rz2]. □

Terminamos recordando que el problema 17 de Hilbert tiene una solución afirmativa para gérmenes analíticos, esto es, si X_a es un germen analítico irreducible y f es un germen de función analítica que es no negativa sobre X_a, entonces f es suma de cuadrados de gérmenes de funciones meromorfas en a. Un problema de mucha mayor dificultad y que permanece aun sin resolver, es la estimación de los números de Pitágoras $p(X_a)$ incluso en el caso de gérmenes analíticos lisos. En efecto, los únicos resultados conocidos son en el caso liso y para dimension menor o igual que 3, en donde se tiene $p(\mathbb{R}_0) = 1$, $p(\mathbb{R}_0^2) = 2$, $p(\mathbb{R}_0^3) \leq 8$ (cf. [Jw1]). Como veremos, la finitud de los números de Pitágoras juega un papel importantísimo en nuestra demostración de la propiedad de Artin-Lang en el caso no compacto.

2

Descripción geométrica de los ideales maximales de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$

1. Introducción

En este capítulo estableceremos una correspondencia biyectiva entre los ultrafiltros de conjuntos analíticos globales y los ideales maximales de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. Esta correspondencia nos permitirá demostrar que los cuerpos residuales de ideales maximales en $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ son reales cerrados. Todos los resultados de este capítulo se extienden de modo inmediato si sustituímos $\mathbb{R}^n$ por un subconjunto analítico global $X \subset \mathbb{R}^n$, y por lo tanto para variedades analíticas reales paracompactas y conexas.

En el próximo capítulo definiremos una correspondencia similar entre los ideales maximales del anillo de las funciones analíticas acotadas, $\mathcal{O}_b(M)$. En este caso la biyección se establecerá con los ultrafiltros de conjuntos semianalíticos globales cerrados de M.

2. Descripción geométrica de los ideales maximales de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$

Se denotará por $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$ la clase de subconjuntos analíticos globales cerrados, esto es, aquellos que son intersección finita de ceros de funciones de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. En particular, si $X \in \mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$X = Z(f_1) \cap \cdots \cap Z(f_r) = Z(g),$$

con $g = f_1^2 + \cdots + f_r^2$, y por tanto

$$\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n) = \{Z(f) \mid f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)\}.$$

$\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$ verifica:

a) $\varnothing, \mathbb{R}^n \in \mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$;

b) $A, B \in \mathcal{Z}(\mathbb{R}^n) \implies A \cup B, A \cap B \in \mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$.

Esto permite hablar de filtros en la familia de $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$-filtros. En concreto,

Definición 2.1. *Un $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$-filtro $\mathcal{F}$ es una familia de elementos de $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$ que verifica:*

a) $\varnothing \notin \mathcal{F}$, $\mathbb{R}^n \in \mathcal{F}$;

b) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$;

c) $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$, $A \subset B \implies B \in \mathcal{F}$.

Definición 2.2. *Un $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$-filtro $\mathcal{F}$ maximal es llamado $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$-ultrafiltro. Se denotará por $\mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$ la familia de $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$-ultrafiltros.*

Es bien conocido que la familia $\{U(S) \mid S \in \mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)\}$, donde $U(S) = \{\mathcal{F} \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^n) \mid S \notin \mathcal{F}\}$, es base de una topología T para $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$ según la cual el espacio topológico $(\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n), T)$ es cuasicompacto.

Proposición y Definición 2.3. *Sea I un ideal propio de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. Entonces la familia $\mathcal{Z}(I) = \{Z(f) \mid f \in I\}$ es un $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$-filtro que llamaremos* filtro de ceros de I.

Demostración. En efecto:

a) $\varnothing \in \mathcal{Z}(I)$ si y sólo si existe $f \in I$ no nulo en ningún punto de $\mathbb{R}^n$, esto es, si y sólo si $1/f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, lo que equivale a $I = \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$.
$\mathcal{Z}(0) = \mathbb{R} \in \mathcal{Z}(I)$.

b) Sean $Z(f), Z(g) \in \mathcal{Z}(I)$ con $f, g \in I$. En particular $f^2 + g^2 \in I$, luego $Z(f^2 + g^2) = Z(f) \cap Z(g) \in \mathcal{Z}(I)$.

c) Sean $Z(f) \in \mathcal{Z}(I)$, $f \in I$ y $Z(g) \in \mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$ de modo que $Z(f) \subset Z(g)$. Se tiene $fg \in I$ y $Z(g) = Z(f) \cup Z(g) = Z(fg) \in \mathcal{Z}(I)$. □

Recíprocamente, tenemos:

Proposición y Definición 2.4. *Sea* $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$*-filtro. Entonces* $\mathcal{I}(\mathcal{F}) = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \mid Z(f) \in \mathcal{F}\}$ *es un ideal propio de* $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ *que llamaremos ideal de* $\mathcal{F}$.

Demostración.
a) $\mathcal{I}(\mathcal{F}) = \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ si y solamente si existe $f \in \mathcal{I}(\mathcal{F}) \cap \operatorname{Unid} \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, es decir, $\varnothing \in \mathcal{F}$.

b) f y $g \in \mathcal{I}(\mathcal{F})$ es equivalente a que $Z(f)$ y $Z(g) \in \mathcal{F}$. Como $Z(f) \cap Z(g) \subseteq Z(f-g)$, se sigue que $Z(f-g) \in \mathcal{F}$, lo que significa que $f - g \in \mathcal{I}(\mathcal{F})$.

c) Sean $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ y $g \in \mathcal{I}(\mathcal{F})$. Entonces $Z(f) \in \mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$, $Z(g) \in \mathcal{F}$ y como $Z(fg) \supseteq Z(g)$ resulta que $Z(fg) \in \mathcal{F}$, y así $fg \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$. □

Observación y Ejemplos 2.5. Si I es un ideal finito generado, digamos, por $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ todos los elementos de $\mathcal{Z}(I)$ contienen a $Z(f_1^2 + \cdots + f_r^2)$, y por consiguiente

$$\bigcup_{f \in I} Z(f) = Z(f_1^2 + \ldots + f_r^2) \neq \varnothing,$$

Sin embargo, no es cierto que todo ideal cuyo $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$-filtro verifique esta propiedad sea finito generado. Veamos algunos ejemplos.

a) Sea I el ideal de $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ generado por las funciones analíticas

$$f_\lambda = \operatorname{sen}((x + 3^\lambda \pi)/2 \cdot 3^\lambda) \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Puede comprobarse fácilmente que $\mathcal{Z}(I)$ es un filtro de $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$ no principal; entonces está claro que I no es de generación finita. Tomemos $g \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$. El ideal $gI = (gf_0, \ldots, gf_\lambda, \ldots)\mathcal{O}(\mathbb{R})$ no es de generación finita y todos los elementos de $\mathcal{Z}(gI)$ contienen $Z(g)$.

b) Si tenemos $J = (\operatorname{sen} x, \operatorname{sen}(x/2), \ldots, \operatorname{sen}(x/2^\lambda), \ldots)\mathcal{O}(\mathbb{R})$ entonces el $\mathcal{Z}(\mathbb{R})$-filtro definido por J es principal. Cada función $\operatorname{sen}(x/2^\lambda)$ está generada por $\operatorname{sen}(x/2^{\lambda+1})$; por lo tanto, si J fuese finito generado bastaría tan sólo una de las funciones $\operatorname{sen}(x/2^\lambda)$ a para generar todo el ideal, lo cual no es posible.

c) Sean $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones analíticas reales $f_k = \operatorname{sen}^2 x/(x - k\pi)$, con k recorriendo todos los enteros. Obsérvese que f_k se anula en el punto $k\pi$ con multiplicidad 1 y en todos los puntos $n\pi$, $n \neq k$ con multiplicidad 2. Si I es el ideal $I = (f_0, f_1, f_{-1}, \ldots, f_k, \ldots)\mathcal{O}(\mathbb{R})$ entonces $\mathcal{Z}(I) = \pi\mathbb{Z}$ e I no está finitamente generado pues de lo contrario existirían infinitos enteros en los cuales todas las funciones analíticas del ideal I tendrían multiplicidad mayor que 1.

d) Sin embargo, si $X \subset \mathbb{R}^n$ es *discreto* y $\mathcal{F}_X$ es el filtro principal formado por los ceros de las funciones que se anulan en X entonces $\mathcal{I}(\mathcal{F}_X)$ está generado por un número finito de funciones de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. En efecto, al ser X un conjunto discreto, el haz analítico $\mathcal{J}$ definido por

$$\mathcal{J}_x = \begin{cases} \mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n,x} & \text{si } x \in X \\ \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n,x} & \text{si } x \notin X \end{cases}$$

es un haz de ideales coherente sobre $\mathbb{R}^n$ cuyos gérmenes están generados por un número acotado de elementos, concretamente el número de generadores de cada $\mathcal{J}_x$ es n o 1. Entonces el ideal de las secciones globales del haz $\mathcal{J}$ está finitamente generado, pongamos $\Gamma(\mathcal{J}, \mathbb{R}^n) = (f_1, \ldots, f_k)\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ (cf. [Co], teorema 3.1). Ahora basta observar que este ideal coincide con $\mathcal{I}(\mathcal{F}_X)$. Obsérvese que si tomamos $g = f_1^2 + \cdots + f_k^2$ tenemos que $Z(g) = X$.

e) Si $\mathcal{J}$ es el ideal de las funciones de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ que se anulan en un conjunto analítico X de $\mathbb{R}^2$ entonces $\mathcal{J}$ también está finitamente generado.

En efecto, sea $X^* \subset U \subset \mathbb{C}^2$ un complexificado de X, donde U es un entorno abierto de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{C}^2$. El haz analítico complejo $\mathcal{J}^*$ de ceros de X^* es coherente. Sea $Y^{(n)} \subset X^*$ una componente analítica irreducible de X^*. Si $\dim Y^{(n)} = 0$ entonces $Y^{(n)} = \{x\}$ es un punto aislado de X^* y el ideal $\mathcal{J}_x^* = \mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,x}$ es el maximal del anillo local $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,x}$, que está generado por dos elementos.

Sea ahora Y la unión de las componentes irreducibles de X^* de dimensión 1 y tomemos un punto $a \in Y$. Como $\mathcal{O}_a(\mathbb{C}^2)$ es un dominio de factorización única el ideal $\mathcal{I}(Y_a)$ de los gérmenes que se anulan en Y_a es principal, digamos $\mathcal{I}(Y_a) = (g_a)\mathcal{O}_a(\mathbb{C}^2)$. En conclusión $\mathcal{J}^*$ es un haz coherente cuyos gérmenes están generados por uno o dos elementos. Por lo tanto, el ideal de las secciones globales de $\mathfrak{J}^*$ está finitamente generado, digamos, por $g_1, \ldots, g_s$. Se sigue que $\mathfrak{J}$ está generado por las partes reales e imaginarias de $g_1, \ldots, g_s$. □

De las definiciones se deduce sin ninguna dificultad:

Proposición 2.6.

a) $\mathcal{F} = \mathcal{Z}(\mathcal{I}(\mathcal{F}))$, $\quad I \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{Z}(I))$.

b) Si I *es ideal maximal entonces* $I = \mathcal{I}\mathcal{Z}(I)$.

c) La unión de $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$*-filtros que forman una cadena es un* $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$*-filtro, lo que nos permite aplicar el lema de Zorn y afirmar que todo* $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$*-filtro está contenido en un* $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$*-filtro maximal.*

d) La inclusión de ideales, $I \subseteq J$*, nos lleva, claramente, a una inclusión de* $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$*-filtros,* $\mathcal{F}(I) \subseteq \mathcal{F}(J)$*. Por otra parte, si* $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$*, entonces* $\mathcal{I}(\mathcal{F}) \subsetneq \mathcal{I}(\mathcal{G})$. □

Observación 2.7. El contenido del apartado *a* de la proposición puede ser estricto: por ejemplo, si $I = (x_1^2, \ldots, x_n^2)\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\mathcal{Z}(I)$ es el ultrafiltro de elementos de $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$ que contienen 0 e $\mathcal{I}\mathcal{Z}(I) = (x_1, \ldots, x_n)\mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \supsetneq I$. □

Llegamos así al siguiente resultado:

Proposición 2.8. *La restricción*

$$\mathcal{Z}| : (\operatorname{Spec Max} \mathcal{O}(\mathbb{R}^n),\ \mathrm{T}_{\mathrm{Zar}}) \to (\mathcal{U}(\mathbb{R}^n),\ \mathrm{T})$$

es un homeomorfismo con inversa $\mathcal{I}$*, siendo* T_{Zar} *la topología de Zariski del* Spec Max $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Veamos primero que la aplicación $\mathcal{Z}|$ está definida y es biyectiva:

a) Sea $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec Max} \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ y supongamos que existe un $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$-filtro $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{Z}(\mathfrak{m}) \subsetneq \mathcal{F}$, entonces $\mathfrak{m} = \mathcal{I}(\mathcal{Z}(\mathfrak{m})) \subsetneq \mathcal{I}(\mathcal{F})$, en contradicción con la hipótesis de que $\mathfrak{m}$ es maximal.

b) Sean $\mathcal{U} \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$ e I ideal de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathcal{I}(\mathcal{U}) \subseteq I$, entonces $\mathcal{Z}(\mathcal{I}(\mathcal{U})) \subseteq \mathcal{Z}(I)$ si y solamente si $\mathcal{U} = \mathcal{Z}(I) \implies \mathcal{I}(\mathcal{U}) = \mathcal{I}\mathcal{Z}(I) \supseteq I$. Por tanto $I = \mathcal{I}(\mathcal{U})$ es ideal maximal.

c) Si $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec Max} \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{I}(\mathcal{Z}(\mathfrak{m})) = \mathfrak{m}$, y

d) si $\mathcal{U} \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{Z}(\mathcal{I}(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$.

Si se tienen en cuenta ahora las respectivas topologías de $\operatorname{Spec Max} \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$, la aplicación $\mathcal{Z}|$ es un homeomorfismo. Comprobémoslo:

Sea $D(f) = \{\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec Max} \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \mid f \notin \mathfrak{m}\}$. Como $f \notin \mathfrak{m}$ equivale a decir que $Z(f) \notin \mathcal{Z}(\mathfrak{m})$, resulta

$$\mathcal{Z}|(D(f)) = U(Z(f)) \in T$$

lo que prueba que $\mathcal{Z}|$ es homeomorfismo. □

Una vez probada la biyección que la aplicación $\mathcal{Z}$ establece entre los ultrafiltros de conjuntos analíticos globales e ideales maximales de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, demostraremos que los cuerpos residuales son reales cerrados.

Definición 2.9. *Sea* $\mathcal{U} \in \mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$*; se dice que* $\mathcal{U}$ *es libre si* $\bigcap_{X \in \mathcal{U}} X = \varnothing$ *y se dice que* $\mathcal{U}$ *es fijo si* $\bigcap_{X \in \mathcal{U}} X \neq \varnothing$*, en cuyo caso* $\bigcap_{X \in \mathcal{U}} X$ *es un único punto de* $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 2.10. Si $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ y existe $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathfrak{m} = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \mid f(p) = 0\}$, entonces $\mathcal{Z}(\mathfrak{m})$ es fijo y $\bigcap_{X \in \mathcal{Z}(\mathfrak{m})} X = \{p\}$. Además $k(\mathfrak{m}) = \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)/\mathfrak{m} \simeq \mathbb{R}$. Recíprocamente, todo ultrafiltro fijo es la imagen por $\mathcal{Z}$ de un ideal maximal de este tipo. En consecuencia $\mathfrak{m}$ es finito generado si y sólo si existe $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathfrak{m} = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \mid f(p) = 0\} = (x_1 - p_1, \dots x_n - p_n)\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. □

Si $\mathcal{U}$ es libre ningún elemento de $\mathcal{U}$ es finito, pero sí admite un elemento X discreto, lo que nos permitirá llegar al teorema 2.13.

Lema 2.11. *Sea* $X = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ *discreto. Entonces*

a) $X \in \mathcal{Z}(\mathbb{R}^n)$, *y*

b) *si* $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ *es una sucesión de números reales existe* $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $f(x_i) = a_i$.

Demostración.

a) Fue ya demostrado en el apartado *d* de la observación y ejemplos 2.5.

b) Es un caso particular de la Proposición 2.5 del capítulo 1. □

El resultado esencial para la demostración de que los cuerpos residuales de los ideales maximales son reales cerrados es la siguiente:

Proposición 2.12. *Todo* $Z(\mathbb{R}^n)$*-ultrafiltro* $\mathcal{U}$ *contiene un elemento discreto.*

Demostración. Sea Y un elemento no discreto de $\mathcal{U}$. Demostraremos que existe existe otro elemento $U \in \mathcal{U}$ distinto de Y con $\dim U < \dim Y$, lo que evidentemente prueba la proposición. En efecto, sea $Y = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Y_i$ la descomposición de Y en la familia localmente finita que forman sus componentes irreducibles. Escojemos un punto $x_i \in Y_i \setminus \bigcup_{j \neq i} Y_j$ en cada componente y con ellos formamos el conjunto discreto $X = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$. Sea ahora $Z(f) \in \mathcal{U}$ cualquiera. Necesariamente $\varnothing \neq Z(f) \cap Y \in \mathcal{U}$ y $\dim(Z(f) \cap Y) \leq \dim Y$. Si para algún $Z(f) \in \mathcal{U}$ la dimensión de $Z(f) \cap Y$ es menor que la dimensión de Y, basta tomar $U = Z(f) \cap Y$. En otro caso tomemos un $Z(f) \in \mathcal{U}$ arbitrario. Tenemos $\dim Y = \dim(Z(f) \cap Y)$, por lo que existe al menos una componente irreducible Y_{i_0} de Y tal que $\dim Y_{i_0} = \dim(Z(f) \cap Y_{i_0})$. Como Y_{i_0} es irreducible se sigue que $Y_{i_0} \subset Z(f)$. En particular $x_{i_0} \in Z(f)$, y deducimos que $Z(f) \cap X \neq \varnothing$. Como esto se verifica para todo $Z(f) \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}$ es ultrafiltro, concluimos que $X \in \mathcal{U}$. □

Teorema 2.13. *Sean* $\mathfrak{m}$ *un ideal maximal de* $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ *y* $k(\mathfrak{m})$ *su cuerpo residual. Si* $\mathfrak{m}$ *es finitamente generado entonces* $k(\mathfrak{m}) = \mathbb{R}$*. En caso contrario* $k(\mathfrak{m}) = \mathbb{R}^*$*, una ultrapotencia*[1] *de los reales. En cualquier caso* $k(\mathfrak{m})$ *es real cerrado.*

Demostración. Si $\mathfrak{m}$ está finitamente generado entonces $\mathcal{Z}(\mathfrak{m})$ es un ultrafiltro fijo, $\mathfrak{m}$ es el ideal de un punto $x \in \mathbb{R}^n$ y $k(\mathfrak{m}) = \mathbb{R}$. Supongamos ahora que $\mathfrak{m}$ no está finitamente generado. Entonces $\mathcal{U} = Z(\mathfrak{m})$ no es fijo. Sabemos por la proposición anterior que hay un conjunto discreto $X \in \mathcal{U}$ no finito. Fijemos una biyección $\varphi : X \to \mathbb{N}$.

A partir de φ, X y $\mathcal{U}$ se define el siguiente ultrafiltro en $\mathbb{N}$:

$$\mathcal{U}_{|X} := \{A \subset \mathbb{N} \mid \exists Y \in \mathcal{U} \text{ con } \varphi(Y \cap X) \subset A\}$$

Fácilmente se observa que $\mathcal{U}_{|X}$ es un filtro en $\mathbb{N}$. Para demostrar que es ultrafiltro se considera $B \subset \mathbb{N}$ tal que $B \cap \varphi(Y \cap X) \neq \varnothing$ para todos los $Y \in \mathcal{U}$; aplicando

[1] Para la definición del concepto de ultraproducto y ultrapotencia, así como para el resultado de que una ultrapotencia de un cuerpo real cerrado es real cerrado, puede consultarse [Pr].

φ^{-1},

$$\varphi^{-1}(B) \cap (Y \cap X) \neq \varnothing \quad \text{para cualquier} \quad Y \in \mathcal{U} \Longleftrightarrow \varphi^{-1}(B) \in \mathcal{U}$$

y $\varphi^{-1}(B)$ es analítico discreto contenido en X. Por otra parte $\mathcal{U}_{|X}$ es libre pues si existiese $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \in A$ para todo A de $\mathcal{U}_{|X}$, necesariamente $\varphi^{-1}(n) = p$ pertenecería a todo elemento de $\mathcal{U}$.

Por consiguiente, tenemos que $f,\ g \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ son iguales $\operatorname{mod} \mathfrak{m}$ si y sólo si existe $Y \in \mathcal{U}$ tal que $f_{|Y} = g_{|Y}$. Así $k(\mathfrak{m}) = \varinjlim_{Y \in \mathcal{U}} \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)_{|Y}$ que coincide con $\varinjlim_{Y \in \mathcal{U}} \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)_{|Y \cap X}$ pues $X \in \mathcal{U}$. Según el lema 2.11 *b*, $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)_{|Y \cap X} = \{f : Y \cap X \to \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{Y \cap X}$, y por tanto

$$k(\mathfrak{m}) = \varinjlim_{Y \in \mathcal{U}} \mathbb{R}^{Y \cap X} = \varinjlim_{B \in \mathcal{U}_{|X}} \mathbb{R}^B = \varinjlim_{B \in \mathcal{U}_{|X}} (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})_{|B} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}_{|X} = \mathbb{R}^*.$$

Finalmente es bien sabido que una ultrapotencia $\mathbb{R}^*$ de $\mathbb{R}$ es un cuerpo real cerrado (cf. [Pr]). □

Corolario 2.14. *La correspondencia que envía el ideal maximal* $\mathfrak{m}$ *al cono primo* $(\mathfrak{m}, k(\mathfrak{m})^2)$ *define una inclusión de* $\operatorname{Spec}\operatorname{Max} \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ *en el conjunto* $\operatorname{Max}_r \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ *de conos maximales de* $\operatorname{Spec}_r(\mathcal{O}(\mathbb{R}^n))$.

3

Sumas de potencias $2k$-ésimas de funciones meromorfas con conjunto de ceros compacto

1. Introducción

En este capítulo desarrollamos la herramienta fundamental que usaremos repetidamente en esta memoria. En concreto, asociaremos un ultrafiltro de conjuntos semianalíticos a cada orden total del cuerpo de funciones meromorfas sobre un conjunto analítico irreducible. Ésto nos permitirá dar algunos criterios geométricos para decidir cuando una función analítica es positiva en dicho orden. Como una primera aplicación de estas técnicas obtenemos demostraciones de los teoremas de Artin-Lang y el problema 17 de Hilbert para determinada familias de funciones meromorfas. Estos resultados han sido obtenidos independientemente también por P. Jaworski usando técnicas similares (cf. [Jw3]). Terminamos el capítulo con una caracterización geométrica mediante arcos analíticos de las funciones con soporte compacto que son sumas de potencias $2k$-ésimas de funciones meromorfas y que generaliza el resultado de [Rz4].

Para concretar, y siguiendo con la notación que dimos en el capítulo de preliminares, sean M una variedad analítica real, paracompacta y conexa, y X un conjunto analítico global e irreducible de M. Sea $\mathrm{Reg}(X)$ el conjunto de puntos regulares de X. Denotaremos por $\mathrm{S}(X) = X \setminus \mathrm{Reg}(X)$ el lugar de puntos singulares de X, y por $\mathrm{Reg}^*(X)$ el conjunto de puntos de X de dimensión máxima.

Denotaremos por $\mathcal{O}_b(M)$ el subanillo de $\mathcal{O}(M)$ de las funciones acotadas. Obviamente, el anillo total de fracciones de $\mathcal{O}_b(M)$ y $\mathcal{O}(M)$ coincide, ya que

$$f = \frac{f/(1+f^2)}{1/(1+f^2)}.$$

La misma igualdad prueba que para todo ideal primo $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}(M)$ si $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap \mathcal{O}_b(M)$, entonces $\mathcal{O}_b(M)_\mathfrak{q} = \mathcal{O}(M)_\mathfrak{p}$.

Sean $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}(M)$ el ideal primo de funciones que se anulan en X, $\mathcal{O}(M)/\mathfrak{p} = \mathcal{O}(X)$ el anillo de funciones analíticas sobre X y K el cuerpo de funciones meromorfas sobre X, esto es, el cuerpo de fracciones de $\mathcal{O}(X)$. Denotaremos por $\mathcal{O}_b(X) = \mathcal{O}_b(M)/(\mathfrak{p} \cap \mathcal{O}_b(M))$ el subanillo de las funciones analíticas acotadas sobre X. Recordemos que la hipótesis de irreducibilidad de X implica que éste es conexo (cf. [Rs]).

2. Ultrafiltro asociado a un orden β

Denotaremos por $\mathcal{C}$ la familia formada por los subconjuntos semianalíticos globales *cerrados* de X. Se sigue de la definición que $\mathcal{C}$ es cerrado por uniones e intersecciones finitas, de forma que tiene sentido considerar filtros de conjuntos de esta familia en la misma forma que en la definición 2.1 del capítulo 2.

Recordemos que dado un filtro $\mathcal{F}$ de elementos de $\mathcal{C}$, decimos que $a \in X$ es *un punto límite de* $\mathcal{F}$ si $a \in \overline{Y}$ para todo $Y \in \mathcal{F}$. Se sigue inmediatamente que si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro entonces hay a lo más un punto límite, y $\mathcal{F}$ es el ultrafiltro principal definido por este punto. Por otra parte, si $f : X \to \mathbb{R}$ es una aplicación analítica definimos el filtro imagen de $\mathcal{F}$ por f como

$$f(\mathcal{F}) = \{R \subset \mathbb{R} \mid f(Y) \subset R \text{ para algún } Y \in \mathcal{F}\}.$$

Adviértase que si $f \in \mathcal{O}_b(X)$ entonces $\overline{f(Y)}$ es compacto para cada $Y \in \mathcal{F}$ y por tanto $f(\mathcal{F})$ tiene algún punto límite.

Proposición 2.1. *Sea* $\mathfrak{m}$ *un ideal maximal de* $\mathcal{O}_b(X)$*. La familia*

$$\mathcal{U}_\mathfrak{m} = \{Y \in \mathcal{C} \mid Y \cap f^{-1}([-\delta, \delta]) \neq \varnothing \textit{ para todo } \delta > 0 \textit{ y todo } f \in \mathfrak{m}\}$$

es un filtro maximal entre los filtros de conjuntos pertenecientes a la familia $\mathcal{C}$*. Recíprocamente, si* $\mathcal{U}$ *un filtro maximal en la familia* $\mathcal{C}$*,*

$$\mathfrak{m}_\mathcal{U} = \{f \in \mathcal{O}_b(X) \mid f^{-1}([-\delta, \delta]) \cap Y \neq \varnothing \textit{ para todo } \delta > 0 \textit{ y todo } Y \in \mathcal{U}\}$$

es un ideal maximal de $\mathcal{O}_b(X)$. Las correspondencias anteriores son mutuamente inversas, y por consiguiente definen una biyección entre los filtros maximales de elementos de $\mathcal{C}$ y los ideales maximales de $\mathcal{O}_b(M)$.

Demostración. Veamos primero que $\mathcal{U}_{\mathfrak{m}}$ es un filtro maximal. Sea $f \in \mathcal{O}_b(X)$ tal que existe un $\delta > 0$ con $f^{-1}([-\delta, \delta]) = \varnothing$. En particular f no se anula en X y $-1/\delta < 1/f < 1/\delta$, con lo que $1/f \in \mathcal{O}_b(X)$. Por tanto f es una unidad en $\mathcal{O}_b(X)$ y $f \notin \mathfrak{m}$. Se sigue pues que $\varnothing \notin \mathcal{U}_{\mathfrak{m}}$.

Sean ahora f y $g \in \mathfrak{m}$, y $\delta_1, \delta_2 > 0$. Si tomamos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ entonces $f^{-1}([-\delta_1, \delta_1]) \cap g^{-1}([-\delta_2, \delta_2]) \supseteq (f^2 + g^2)^{-1}([-\delta^2, \delta^2])$. Además, si $Y \in \mathcal{U}_{\mathfrak{m}}$ e $Y \subset Y' \in \mathcal{C}$, la propia definición de $\mathcal{U}_{\mathfrak{m}}$ nos dice que $Y' \in \mathcal{U}_{\mathfrak{m}}$. Lo anterior muestra que $\{f^{-1}([-\delta, \delta]) \mid f \in \mathfrak{m} \text{ y } \delta > 0\}$ genera un filtro $\mathcal{F}$ que está contenido en $\mathcal{U}_{\mathfrak{m}}$.

Veamos ahora que $\mathcal{F}$ es maximal y por tanto coincide con $\mathcal{U}_{\mathfrak{m}}$. Sean Y_1 e Y_2 dos elementos disjuntos de $\mathcal{C}$ tales que $Y_1 \cup Y_2 \in \mathcal{U}_{\mathfrak{m}}$. Existe a una función analítica acotada $f \in \mathcal{O}_b(X)$ tal que $Y_1 \subset \{f > 1\}$ e $Y_2 \subset \{f < -1\}$ (podemos obtener esta función tomando una aproximación analítica g de una función continua y acotada que sea igual a 2 sobre Y_1 y -2 sobre Y_2 (cf. [H], teorema 5.1, p. 109). Pero el filtro imagen de f por $\mathcal{F}$ tiene algún punto límite, por ejemplo r. Por consiguiente, para todo $\epsilon > 0$ y todo $Y \in \mathcal{F}$, $(f - r) \cap Y \neq \varnothing$. En particular $(f - r)^{-1}([-1/2, 1/2]) \in \mathcal{U}_{\mathfrak{m}}$, por lo que corta a $Y_1 \cup Y_2$. Ahora bien, por construcción sólo puede cortar a uno de ellos, digamos Y_1, de donde se sigue que $Y_1 \in \mathcal{U}_{\mathfrak{m}}$ e $Y_2 \notin \mathcal{U}_{\mathfrak{m}}$.

Recíprocamente, sea $\mathcal{U}$ un filtro maximal en la familia $\mathcal{C}$; veamos que $\mathfrak{m}_{\mathcal{U}}$ es un ideal maximal. En primer lugar, por la definición de $\mathfrak{m}_{\mathcal{U}}$, $1 \notin \mathfrak{m}_{\mathcal{U}}$, luego $\mathfrak{m}_{\mathcal{U}} \neq \mathcal{O}(X)$. Ahora, si $f, g \in \mathfrak{m}_{\mathcal{U}}$ entonces $f^{-1}([-\delta/2, \delta/2])$ y $g^{-1}([-\delta/2, \delta/2])$ están en $\mathcal{U}$ ya que éste es un ultrafiltro, y como $f^{-1}([-\delta/2, \delta/2]) \cap g^{-1}([-\delta/2, \delta/2]) \subset (f-g)^{-1}([-\delta, \delta])$ se tiene que $f - g \in \mathfrak{m}_{\mathcal{U}}$. Finalmente, para cualquier $h \in \mathcal{O}_b(X)$, si $|h(X)| < k$ se tiene que $g^{-1}([-\delta/k, \delta/k]) \subset (hg)^{-1}([-\delta, \delta])$ con lo que $hg \in \mathfrak{m}_{\mathcal{U}}$ y por tanto $\mathfrak{m}_{\mathcal{U}}$ es un ideal.

Para demostrar que $\mathfrak{m}_{\mathcal{U}}$ es maximal basta suponer que $\mathfrak{m}_{\mathcal{U}} \subset \mathfrak{p}$ con $\mathfrak{p}$ maximal y considerar el ultrafiltro $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ asociado a $\mathfrak{p}$ definido anteriormente. Por la definición de $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ se sigue que $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ y como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, necesariamente $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}} = \mathcal{U}$. Por la definición de $\mathfrak{m}$ obtenemos ahora que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$ y por tanto la igualdad entre ambos. □

Sea β un orden de K. Vamos a asociar a β un ultrafiltro de elementos de $\mathcal{C}$

de la manera siguiente. Sea W_β la envoltura convexa de $\mathbb{R}$ en K con respecto a β, esto es,

$$W_\beta = \{f \in K \mid -r <_\beta f <_\beta r \text{ para algún } r \in \mathbb{R}\}.$$

W_β es un anillo de valoración con cuerpo residual $\mathbb{R}$ y $\mathcal{O}_b(X) \subset W_\beta$. Sea $\mathfrak{m}_\beta$ el centro de W_β en $\mathcal{O}_b(X)$, es decir, $\mathfrak{m}_\beta = \mathfrak{n}_\beta \cap \mathcal{O}_b(X)$ donde $\mathfrak{n}_\beta$ es el ideal maximal de W_β. Como el cuerpo residual de W_β es $\mathbb{R}$, llegamos a que $\mathfrak{m}_\beta$ es un ideal maximal. Definimos:

Definición 2.2. *Llamamos ultrafiltro asociado a β al filtro maximal $\mathcal{U}_{\mathfrak{m}_\beta}$ asociado al ideal maximal $\mathfrak{m}_\beta$. Por simplicidad lo representaremos simplemente por $\mathcal{U}_\beta$.*

De la propia definición se sigue que dos órdenes "centrados" en el mismo ideal maximal tienen el mismo ultrafiltro asociado. El ultrafiltro $\mathcal{U}_\beta$ nos va a permitir dar algunos criterios geométricos para que una función sea positiva en β. Denotemos por $\lambda_\beta : W_\beta \to \mathbb{R}$ el lugar definido por W_β. Al ser W_β convexo respecto a β se sigue que λ_β es compatible con él, esto es, para $f \in W_\beta$ con $f \geq_\beta 0$ tenemos que $\lambda_\beta(f) \geq 0$. Usando esto, seremos capaces de interpretar geométricamente algunos resultados sobre β en términos de λ_β y $\mathcal{U}_\beta$.

Proposición 2.3. *Para cada $f \in \mathcal{O}_b(X)$, $\lambda_\beta(f)$ es el punto límite del ultrafiltro imagen de $\mathcal{U}_\beta$ por f.*

Demostración. Sea $g \in \mathfrak{m}_\beta$ tal que $f = \lambda_\beta(f) + g$. Entonces es suficiente demostrar que el punto límite de $g(\mathcal{U}_\beta)$ es cero. Sea R un elemento de $g(\mathcal{U}_\beta)$ y sea δ un número real positivo. Como $g \in \mathfrak{m}_\beta$, $g^{-1}([-\delta, \delta]) \in \mathcal{U}_\beta$ y por otra parte existe $Y \in \mathcal{U}_\beta$ tal que $g(Y) \subset R$, entonces $Y \cap g^{-1}([-\delta, \delta]) \neq \varnothing$ y además $R \cap [-\delta, \delta] \neq \varnothing$. Así $0 \in \overline{R}$ como queríamos. □

Corolario 2.4. *Una función $f \in \mathcal{O}_b(X)$ es una unidad en W_β si y sólo si existe un elemento $Y \in \mathcal{U}_\beta$ y algún $\delta > 0$ tal que $|f(x)| > \delta$ para todo $x \in Y$.*

Demostración. Si $|f(x)| > \delta$ para todo $x \in Y$ entonces el punto límite de $f(\mathcal{U}_\beta)$ es distinto de cero, esto es, $\lambda_\beta(f) \neq 0$, lo que equivale a decir que f es una unidad en W_β.

Recíprocamente, si el punto límite de $f(\mathcal{U}_\beta)$ es distinto de cero basta tomar $Y = (f - \lambda_\beta(f))^{-1}([-|\lambda_\beta(f)|/2, |\lambda_\beta(f)|/2]) \in \mathcal{U}_\beta$ y $\delta = |\lambda_\beta(f)|/3$. □

Otra consecuencia inmediata de este resultado es la siguiente caracterización geométrica de las unidades positivas en β:

Corolario 2.5. *Sea $u \in \mathcal{O}_b(X)$, $u \notin \mathfrak{m}_\beta$. Entonces $u >_\beta 0$ si y sólo si $u_{|Y} > 0$ para algún $Y \in \mathcal{U}_\beta$.*

Demostración. Como u es una unidad tenemos que $\lambda_\beta(u) \neq 0$ y además $u >_\beta 0$ si y sólo si $\lambda_\beta(u) > 0$. Por tanto tenemos que probar que $\lambda_\beta(u) > 0$ si y sólo si $u_{|Y} > 0$ para algún $Y \in \mathcal{U}_\beta$.

Supongamos que $\lambda_\beta(u) > 0$. Entonces $Y_\epsilon = u^{-1}([\lambda_\beta(u) - \epsilon, \lambda_\beta(u) + \epsilon])$ pertenecen a $\mathcal{U}_\beta$ para todo $\epsilon > 0$; en particular para $\epsilon = \lambda_\beta(u)/2$ tenemos que $u_{|Y_\epsilon} > 0$. Recíprocamente, si existe $Y \in \mathcal{U}_\beta$ tal que $u_{|Y} > 0$, al ser $\lambda_\beta(u) \neq 0$, está claro que $\lambda_\beta(u) > 0$. □

En caso de que u no sea una unidad, el anterior corolario puede extenderse parcialmente del modo siguiente, lo que nos será de gran utilidad:

Lema 2.6. *Sea $f \in \mathcal{O}_b(X)$ y supongamos que $f_{|Y} > 0$ para algún $Y \in \mathcal{U}_\beta$. Entonces $f \in \beta$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $u, g \in \mathcal{O}_b(X)$ tales que u está acotada en valor absoluto sobre Y, $u_{|Y} > 0$ y $uf = g^n$.*

Demostración. Sea $v^* : M \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $v^*(x) > 0$ para todo $x \in M$, y $v^*_{|Y} = f^{n-1}_{|Y}$, la cual existe por el teorema de Tietze. Sea $v : M \to \mathbb{R}$ una aproximación analítica de v^* tal que $|v(x) - v^*(x)| < \frac{1}{4}v^*(x)$ para todo $x \in M$. Pongamos $u_1 = f^{n-1}/v$ y $u = u_1/(1 + u_1^2) \in \mathcal{O}_b(X)$. Si $x \in Y$ tenemos que $u_1(x) > 4f^{n-1}(x)/5v^*(x) = 4/5$ y llegamos a que u está acotada en valor absoluto sobre Y. Ahora, $uf = f^n/v(1 + u_1^2)$, y como $v(1 + u_1^2)$ es estrictamente positiva, tenemos que $v(1 + u_1^2) = h^n$ para algún $h \in \mathcal{O}_b(X)$. Así $uf = g^n$, donde $g = f/h$. Por último, basta tomar un número par n para concluir que $f \in \beta$. □

Corolario 2.7. *Sean $f_1, \dots, f_r \in \beta$. Entonces $\{x \in X \mid f_1(x) \geq 0, \dots, f_r(x) \geq 0\}$ pertenece a $\mathcal{U}_\beta$ y en particular es no vacío.*

Demostración. Sea f una de las funciones $f_1, \dots, f_r$. Supongamos que $Z(f) \notin \mathcal{U}_\beta$, donde $Z(f)$ es el conjunto de ceros de f. Entonces existe $Y \in \mathcal{U}_\beta$ tal que

$Z(f) \cap Y = \varnothing$ y podemos separar Y en dos conjuntos semianalíticos globales cerrados Y_1 e Y_2 definidos por

$$Y_1 = \{x \in Y \mid f(x) > 0\} \quad \text{y} \quad Y_2 = \{x \in Y \mid f(x) < 0\}.$$

Como $\mathcal{U}_\beta$ es un ultrafiltro tenemos que o bien $Y_1 \in \mathcal{U}_\beta$ o bien $Y_2 \in \mathcal{U}_\beta$. Por el lema anterior necesariamente $Y_1 \in \mathcal{U}_\beta$. En particular, hemos demostrado que para cada $i = 1, \dots, r$ existe un elemento $Y^{(i)} \in \mathcal{U}_\beta$ tal que $f_i|_{Y^{(i)}} \geq 0$. Tomando la intersección de todos ellos se concluye el resultado inmediatamente. □

3. Teorema de Artin-Lang: un caso particular

El teorema de Artin-Lang afirma que los mayores o iguales del corolario anterior pueden reemplazarse por mayores estrictos. Para variedades analíticas no compactas de dimensión arbitraria es aún un problema abierto. En esta sección demostraremos un caso restringido, pero que incluye en particular, la situación en que M es compacta.

Proposición 3.1. *Sean M una variedad analítica y X un conjunto analítico global irreducible. Sean $\mathcal{O}(X)$ el anillo de funciones analíticas sobre X y K su cuerpo de fracciones. Sean $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}(X)$ tales que $\{x \in X \mid f_1(x) \geq 0, \dots, f_r(x) \geq 0\}$ es compacto. Entonces $f_1, \dots, f_r$ son simultáneamente positivas en un orden β de K si y sólo si $\{x \in X \mid f_1(x) > 0, \dots, f_r(x) > 0\} \cap \mathrm{Reg}^*(X) \neq \varnothing$.*

Demostración. Sea $\delta \in \mathcal{O}(X)$ tal que $X \setminus \mathrm{Reg}^*(X) \subset \{\delta = 0\}$. Consideremos el ultrafiltro $\mathcal{U}_\beta$ asociado al orden β. Si $f_1, \dots, f_r \in \beta$ tenemos por el corolario 2.6 $\{x \in X \mid f_1(x) \geq 0, \dots, f_r(x) \geq 0, \delta^2(x) \geq 0\} \in \mathcal{U}_\beta$, y como este conjunto es compacto, se sigue que $\mathcal{U}_\beta$ es un ultrafiltro fijo, digamos que con punto límite $a \in X$. En particular el orden β está centrado en el punto a y se extiende a un orden β' en una de las ramas analíticas de X en a (cf. la observación 3.3 más adelante). Obviamente $f_1, \dots, f_r, \delta^2 \in \beta'$ y por el teorema de Artin-Lang para anillos de gérmenes (cf. [Rs] o [An-Br-Rz]), resulta que el gérmen de conjunto $\{x \in X \mid f_1(x) > 0, \dots, f_r(x) > 0, \delta^2(x) > 0\}_a \neq \varnothing$, de donde se sigue el resultado.

Recíprocamente, si $S = \{x \in X \mid f_1(x) > 0, \dots, f_r(x) > 0\} \cap \mathrm{Reg}(X) \neq \varnothing$ se sigue, por el criterio de Serre, que existe un orden β de K en el que $f_1, \dots, f_r$

son positivas. En efecto, consideremos la ecuación

$$\sum g_{\alpha_1,\dots,\alpha_r} T^2_{\alpha_1,\dots,\alpha_r} = 0,$$

donde $g_{\alpha_1,\dots,\alpha_r} = f_1^{\alpha_1} \cdots f_r^{\alpha_r}$ con $\alpha_i = 0, 1$, y supongamos que tiene una solución $\{h_{\alpha_1,\dots,\alpha_r}\}$. Resulta que $h_{\alpha_1,\dots,\alpha_r}(x) = 0$ para todo $x \in S$, de donde, al ser X irreducible, se sigue $h_{\alpha_1,\dots,\alpha_r} = 0$. □

Proposición 3.2. *Sea $f \in \mathcal{O}(X)$ tal que $f^{-1}(0)$ es compacto. Entonces f es una suma de cuadrados de elementos de K si y sólo si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \operatorname{Reg}^*(X)$.*

Demostración. El 'sólo si' es evidente. Supongamos ahora que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \operatorname{Reg}^*(X)$. Entonces, por la proposición anterior, f es positiva en todos los órdenes de K, y por consiguiente es una suma de cuadrados de elementos de K. □

Observación 3.3. La extensión de un orden β de K centrado en un punto $a \in X$ a un orden de una rama analítica de X en a puede verse como sigue: el anillo $\mathcal{O}(M)_a$ es local regular de dimensión $n = \dim(M)$, y por tanto su localizado $\mathcal{O}(M)_\mathfrak{p}$ es también regular y tiene K como cuerpo residual. Por consiguiente existe un anillo de valoración V que domina a $\mathcal{O}(M)_\mathfrak{p}$ y con cuerpo residual K. Elevando β via V obtenemos un orden total ψ de $\mathcal{O}(M)$ compatible con V y que se especializa en β. Obviamente, ψ está centrado en a, y una inmediata aplicación del criterio de Serre prueba que ψ se extiende a un orden ψ' del cuerpo de fracciones del dominio de gérmenes de funciones analíticas. □

4. Sumas de potencias $2k$-ésimas

Las caracterizaciones geométricas por medio de arcos analíticos de sumas de potencias $2k$-ésimas han sido estudiadas a fondo en diferentes contextos: para polinomios, [Pr]; para funciones meromorfas sobre una superficie analítica compacta, [Kz]; y finalmente, para gérmenes y funciones meromorfas sobre variedades analíticas compactas de dimensión arbitraria, [Rz4]. En todas las situaciones la demostración se basa en el llamado criterio de valoración de Becker ([Be]):

Teorema 4.1. *Sea K un cuerpo y sea $f \in K$. Entonces f es suma de $2k$-ésimas potencias de elementos de K si y sólo si f es suma cuadrados en K y para cualquier valoración real v de K se tiene que $2k | v(f)$.*

Sea X como antes, esto es, un subconjunto analítico global, irreducible, de una variedad analítica M, no necesariamente compacta. Utilizando también este criterio, nosotros caracterizaremos aquellas funciones meromorfas sobre X, con conjunto de ceros compacto, que son suma de potencias $2k$-ésimas. Nótese que de nuevo este resultado engloba todos los hasta ahora conocidos.

Teorema 4.2. *Sea $f \in \mathcal{O}(X)$ tal que su conjunto de ceros es compacto. Entonces f es suma de potencias $2k$-ésimas en K si y sólo si para cada curva analítica $c : (-\epsilon, \epsilon) \to X$ no contenida en $\mathrm{S}(X)$ tal que $f(c(t)) = at^m + \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^{m+i}$, con $a \neq 0$, se verifica que $a > 0$ y $2k|m$.*

Observación 4.3. Tenemos que considerar el lugar singular de X pues de lo contrario el teorema 1.2 sería falso. Por ejemplo, tomemos como X el "paraguas" de ecuación

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2(1 - z^2) = x^4 + y^4\} \subset \mathbb{R}^3.$$

La función analítica $f = 4 - z^2$ tiene en X un conjunto de ceros compacto (el conjunto de ceros de f acotados con X es $\{(0, 0, +2), (0, 0, -2)\}$ y es negativa en el punto singular $(0, 0, -5)$; sin embargo, $4 - z^2 = x^2 + (y/x)^2 y^2 + 3$ es suma de cuadrados en el cuerpo de funciones meromorfas de X. □

Demostración. Condición necesaria.
Tomemos una representación de f como suma de $2k$-ésimas potencias:

$$f = \sum g_i^{2k}/h^{2k}, \qquad \text{con } g_i, h \in \mathcal{O}(X), \text{ y } h \not\equiv 0.$$

Obviamente f es no negativa sobre $\mathrm{Reg}(X) \setminus \{h = 0\}$, y como X es irreducible este conjunto es denso en $\mathrm{Reg}(X)$. Por tanto lo único que tenemos que probar es la condición de divisibilidad del exponente m por $2k$. Sea $c : (-\epsilon, \epsilon) \to X$ una curva analítica no contenida en $\mathrm{S}(X)$. Ponemos $x = c(0)$. Si $(h \circ c)(t) \not\equiv 0$, como $h^{2k}(c(t)) f(c(t)) = \sum g_i(c(t))^{2k}$ entonces

$$2k \operatorname{ord}((h \circ c)(t)) + \operatorname{ord}((f \circ c)(t)) = 2k \operatorname{ord}\Big(\sum (g_i \circ c)(t)\Big)$$

y fácilmente obtenemos el resultado buscado. En general, necesitamos usar determinadas valoraciones del cuerpo K asociadas al punto x.

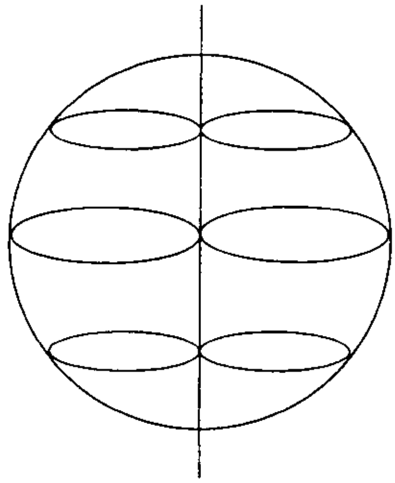

FIGURA 3.1. $S(X) = Z(x^2 + y^2)$

Sea $\mathfrak{m}_x$ el ideal maximal correspondiente a x en el anillo $\mathcal{O}(X)$. La curva c define una sucesión

$$\mathcal{O}(X)_{\mathfrak{m}_x} \hookrightarrow \mathcal{O}_x(X) \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}\{t\},$$

donde $\phi(g)$ es la expansión en 0 de $g \circ c$, y $\mathcal{O}_x(X) = \mathcal{O}_x(M)/\mathfrak{p}$ es el anillo de gérmenes de funciones analíticas sobre X en el punto x. En particular, $\phi(f_x) = at^m + \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^{m+i}$.

Sea $\mathfrak{q} = (\ker \phi) \cap \mathcal{O}(X)_{\mathfrak{m}_x} = \ker(\phi \circ i)$. El homomorfismo ϕ induce una inclusión

$$k(\mathfrak{q}) \hookrightarrow \mathbb{R}(\{t\}),$$

donde $k(\mathfrak{q})$ es el cuerpo cociente de $\mathcal{O}(X)_{\mathfrak{m}_x}/\mathfrak{q}$ y $\mathbb{R}(\{t\})$ denota el cuerpo cociente de $\mathbb{R}\{t\}$. Restrinjamos la valoración ordinaria de $\mathbb{R}(\{t\})$ a una valoración $\bar{v}$ de $k(\mathfrak{q})$. En particular, la clase de $\bar{f}_x$ en $k(\mathfrak{q})$ verifica que $\bar{v}(\bar{f}_x) = \operatorname{ord}(f \circ c) = m$.

Sea c_x el germen en x de la curva definida por c. Como por hipótesis c no está contenida en $S(X)$, podemos tomar un punto regular $y \in c_x$. Entonces los anillos $\mathcal{O}(X)_{\mathfrak{m}_y}$ y $\mathcal{O}(X)_{\mathfrak{q}} = \left(\mathcal{O}(X)_{\mathfrak{m}_y}\right)_{\mathfrak{q}}$ son anillos regulares. Por lo tanto hay una valoración w de K con cuerpo residual $k(\mathfrak{q})$. Finalmente, sea v la valoración compuesta de $\bar{v}$ y w. Tenemos que $\Gamma_w = \Gamma_v/\Gamma_{\bar{v}}$, $\Gamma_{\bar{v}}$ es un segmento convexo de Γ_v, y $v(f) = \bar{v}(\bar{f}_x)$. Como f admite una representación como suma de $2k$-ésimas potencias en K, por el criterio de Becker $2k$ divide a la vez $v(f)$ y por tanto $2k$ divide $\bar{v}(\bar{f}_x) = m = \operatorname{ord}((f \circ c)(t))$.

Condición suficiente.
Partimos de la hipótesis de que para cada curva analítica $c : (-\epsilon, \epsilon) \to X$ no contenida en $\mathrm{S}(X)$, tal que $f(c(t)) = at^m + \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^{m+i}$, con $a \neq 0$, se verifica que $a > 0$ y $2k|m$.

Veamos primero que f es una suma de cuadrados. En efecto, si no, por la proposición 3.2, existiría un punto $x \in \operatorname{Reg}(X)$, tal que $f(x) = a < 0$. Cada curva $c : (-\epsilon, \epsilon) \to X$ con $c(0) = x$ verifica que $f(c(t)) = a + \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i$ con $a < 0$, en contra de nuestra hipótesis.

Supongamos ahora que existiera una valoración real w de K para la que $w(f)$ no fuera divisible entre $2k$. Sea entonces β un orden de K compatible con w, y sea $V = W_\beta(\mathbb{R}, K)$ la envoltura convexa de $\mathbb{R}$ en K con respecto a β. Así V estaría contenido en el anillo de valoración de w. En particular $\Gamma_w = \Gamma_v/\Delta$ donde v es la valoración definida en V y Δ es un subgrupo aislado de Γ_v. Por tanto, $2k$ no divide a $v(f)$.

Sea $\mathfrak{m}_\beta$ el centro de W_β en $\mathcal{O}_b(M)$ y sea $\mathcal{U}_\beta$ el ultrafiltro de conjuntos semianalíticos globales cerrados asociado a β,

$$\mathcal{U}_\beta = \{Y \in \mathcal{C} \mid Y \cap f^{-1}([-\delta, \delta]) \neq \varnothing \text{ para todo } \delta > 0 \text{ y todo } f \in \mathfrak{m}_\beta\}.$$

Supongamos que $f^{-1}(0) \notin \mathcal{U}_\beta$. Entonces existe $Y \in \mathcal{U}_\beta$ tal que $f_{|Y} > 0$ o $f_{|Y} < 0$ y aplicando el lema 2.5 a function f o $-f$, según el caso, podemos afirmar que existe una unidad u en V, y $g \in \mathcal{O}_b(X)$ tal que $uf = g^{2k}$. En particular $2k$ divide $v(f)$, contradicción. Por consiguiente, $f^{-1}(0) \in \mathcal{U}_\beta$. Como este conjunto es compacto, se sigue que el ultrafiltro $\mathcal{U}_\beta$ tiene un punto límite $p \in X$, esto es,

$$\mathcal{U}_\beta = \{Y \in \mathcal{C} \mid, p \in Y\}.$$

En particular β está centrado en p, esto es, el ideal maximal $\mathfrak{m}_p$ de p en $\mathcal{O}(X)$ es convexo con respecto a β.

Consideremos la inclusión de anillos locales

$$(\mathcal{O}_b(X))_{\mathfrak{m}_p} = \mathcal{O}(X)_{\mathfrak{m}_p} \hookrightarrow \mathcal{O}_p(X).$$

Como el anillo V domina $\mathcal{O}(X)_{\mathfrak{m}_p}$ podemos argumentar como en [Rz4] y hallar un germen de curva analítica $c : (-\epsilon, \epsilon) \to X$ no contenida en $\mathrm{S}(X)$, con $c(0) = p$

y tal que $f(c(t)) = at^m + \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^{m+i}$, donde $2k$ no divida m, lo que contradice la hipótesis inicial. En conclusión f satisface el criterio de Becker, y por lo tanto es suma de potencias $2k$-ésimas de funciones meromorfas, lo que concluye la demostración. $\square$

4

Propiedad de Artin-Lang para variedades analíticas de dimensión dos

1. Introducción

En este capítulo alcanzaremos uno de nuestros objetivos principales: demostrar la propiedad de Artin-Lang para variedades analíticas reales conexas y paracompactas de dimensión dos.

Antes de entrar en la demostración del resultado necesitamos algunos resultados técnicos que obtendremos en la sección siguiente. En particular demostraremos cómo eliminar los cuadrados de una función f analítica.

2. Función cuasilibre de cuadrados asociada a una función dada

En esta sección, salvo que se especifique otra cosa, supondremos que la dimensión de M es arbitraria. Sea f una función analítica sobre M y sea $Z(f)$ su conjunto de ceros en M. Recordemos que $Z(f)$ se descompone en la unión de una familia localmente finita de componentes analíticas globales irreducibles. Sea $y \in M$. Denotamos por f_y el germen analítico f en y y por $Z(f)_y$ al germen de $Z(f)$ en y. Finalmente, denotamos por $\mathcal{J}_y(Z(f)_y)$ el ideal de ceros de $Z(f)_y$ en el anillo $\mathcal{O}_{M,y}$ de gérmenes de funciones analíticas en y.

Definición 2.1. *Diremos que el germen $\xi_y \in \mathcal{O}_{M,y}$ es elíptico si* codim $Z(\xi) > 1$.

Definición 2.2.

a) Diremos que el germen f_x es cuasilibre de cuadrados si factoriza en $\mathcal{O}_{M,x}$ como:

$$f_x = f_{1x} \cdots f_{sx} \xi_{1x} \cdots \xi_{tx},$$

donde ξ_{jx} son gérmenes elípticos irreducibles en $\mathcal{O}_{M,x}$ y f_{ix} son gérmenes irreducibles distintos con conjunto de ceros de codimensión 1. Diremos que f_x es libre de cuadrados si además los gérmenes elípticos ξ_{jx} son unidades.

b) Diremos que $f \in \mathcal{O}(M)$ es cuasilibre de cuadrados si f_x es cuasilibre de cuadrados para cada $x \in M$. Análogamente, decimos que $f \in \mathcal{O}(M)$ es libre de cuadrados si f_x es libre de cuadrados para cada $x \in M$.

Finalmente, consideramos la siguiente

Definición 2.3. *Decimos que f* cambia de signo en x *si los dos gérmenes semianalíticos en x $\{f > 0\}_x$ y $\{f < 0\}_x$ no son vacíos, o equivalentemente si hay una base de entornos $\{V_i\}$ de x tal que para todo i ninguno de los gérmenes $\{y \in V_i \mid f(y) > 0\}$ ni $\{y \in V_i \mid f(y) < 0\}$ sea vacío. Denotaremos por $Z(f)'$ el conjunto de puntos en los cuales f cambia de signo y por $Z(f)''$ a su complementario en $Z(f)$.*

Se sigue inmediatamente de la definición que el conjunto $Z(f)'$ de puntos donde f cambia de signo es semianalítico y cerrado. Sin embargo, en general no es analítico. Por ejemplo si $f = x^2 - zy^2$, $Z(f)'$ es la parte del paraguas de Whitney que queda en el semiespacio $z \geq 0$, esto es, la parte de dimensión dos.

Problema. ¿Es $Z(f)'$ un conjunto semianalítico global?

Veremos que si $\dim(M) = 3$ la respuesta es afirmativa. Más aún, un primer resultado que muestra las peculiaridades del caso bidimensional es el siguiente:

Lema 2.4. *Supongamos que* $\dim(M) = 2$. *Entonces*

a) $Z(f)'$ es un conjunto analítico global.

b) $\overline{Z(f)''}$ es un conjunto analítico global.

Demostración. Evidentemente, es suficiente con ver que tanto $Z(f)'$ como $\overline{Z(f)''}$ son uniones de componentes irreducibles de $Z(f)$. Por simplicidad escribiremos Z' y Z'' en lugar de $Z(f)'$ y $Z(f)''$ respectivamente.

Sea $Y \subset Z(f)$ una componente irreducible de $Z(f)$. Si $\dim Y = 0$ es obvio que $Y \subset Z''$. Supongamos ahora que $\dim Y = 1$. Puesto que Y es irreducible, es de dimension pura y conexo. Sea $D_1 = Y \cap (\bigcup Y')$ donde la union recorre el resto de las componentes irreducibles de X. D_1 es un subconjunto analítico de Y, y por consiguiente es discreto. Supongamos primero que $(Y \setminus D_1) \cap Z' \neq \varnothing$, y tomemos $a \in (Y \setminus D_1) \cap Z'$. Puesto que $\mathcal{O}_a(M)$ es un dominio de factorizacion única, el ideal $\mathcal{I}((Y)_a)$ es principal, digamos $\mathcal{I}((Y)_a) = (h_a)\mathcal{O}_a(M)$. Además, por el Teorema A de Cartan, existe una función analítica global $g \in \mathcal{O}(M)$ que se anula sobre Y, tal que $\mathfrak{J}((Y)_a) = (g_a)\mathcal{O}_a(M)$. En particular, se sigue que $\mathfrak{J}((Y)_b) = (g_b)\mathcal{O}_b(M)$ para todo $b \in (Y \setminus D_2)$, donde $D_2 \subset Y$ es un conjunto discreto.

Por construcción $f_a \in (g_a)$, y como f cambia de signo en a, tenemos que $f_a = g_a^{\alpha_a} u_a$, donde $u_a \in \mathcal{O}_a(M)$ es una unidad y α_a es un número impar positivo. Sea $\mathcal{F}$ el haz analítico coherente definido por

$$\mathcal{F} = (g^{\alpha_a}\mathcal{O}_M + f\mathcal{O}_M) / f\mathcal{O}_M$$

El soporte de $\mathcal{F}$ un conjunto analítico cerrado y tenemos

$$\operatorname{Supp}\mathcal{F} = \{x \in Z(f) | f_x\mathcal{O}_x(M) \not\supset g_x^{\alpha_a}\mathcal{O}_x(M)\}.$$

Por consiguiente, la interseccion $D_3 = \operatorname{Supp}\mathcal{F} \cap Y$ es un subconjunto analítico de Y que es propio, ya que $a \notin \operatorname{Supp}(\mathcal{F})$. Como Y es irreducible, se sigue que D_3 es discreto. Ahora, si ponemos $D = D_1 \cup D_3$, resulta que f cambia de signo en todos los puntos de $Y \setminus D$, esto es, en todo Y excepto en un subconjunto discreto. Como Z' es cerrado concluímos que $Y \subset Z'$.

Supongamos ahora que $(Y \setminus D_1) \cap Z'' \neq \varnothing$. Razonando como antes, obtenemos que $Y \setminus Z''$ está contenido en un conjunto discreto, es decir, que $Y \cap Z'$ es un subconjunto discreto de Y, y que $Y \subset \overline{Z''}$. En conclusión, resulta que o bien Y está contenida en Z' o bien lo está en $\overline{Z''}$, y la proposición queda demostrada. □

Proposición 2.5. *Sea f una función analítica sobre M y sea $Z(f)'$ el conjunto de puntos donde f cambia de signo en M. Entonces hay una única función analítica en M (salvo unidad) $\tilde{f}$ cuasilibre de cuadrados que cumple:*

a) $f = \tilde{f}\sum_{i=1}^{z} A_i^2$, *con* $A_i \in \mathcal{O}(M)$;

b) $Z(f)' \subset Z(\tilde{f}) \subset Z(f)$ *y* $\dim(Z(\tilde{f})_x) \leq n-2$ *para cada* $x \in Z(\tilde{f}) \setminus Z(f)'$;

c) Existe un conjunto analítico global $Y \subset Z(\tilde{f})$ *de codimensión* ≥ 2 *en* M *tal que* $\mathcal{I}_x(Z(\tilde{f})_x) = (\tilde{f}_x)\mathcal{O}_{M,x}$, *para todo* $x \notin Y$ *y* $Z(\tilde{f}) \setminus Z(f)' \subset Y$.

Demostración. Sea y un punto de M. Por ser $\mathcal{O}_{M,y}$ un dominio de factorización única, f_y tiene una factorización local

$$f_y = g_y^2 h_y \rho_y$$

donde ρ_y y h_y son productos

$$h_y = h_1 \cdots h_t$$
$$\rho_y = \xi_1 \cdots \xi_s$$

de gérmenes irreducibles distintos con conjunto de ceros de codimensión 1 y > 1, respectivamente.

Sea $\mathcal{F}$ el prehaz de ideales definido por

$$\mathcal{F}_y = g_y \mathcal{O}_y$$

para $y \in M$. Es bien conocido que si un germen analítico Y_y es irreducible, entonces Y_z es reducido y equidimensional para todo z en un entorno suficientemente pequeño de y. De aquí se sigue que $\mathcal{F}$ es un haz. Además, como para cada $y \in M$, el ideal de gérmenes $\mathcal{F}_y$ está generado por un elemento, el $\mathcal{O}(M)$-módulo $\Gamma(\mathcal{F}, M)$ de secciones globales de $\mathcal{F}$ está generado por un número finito de ellas, pongamos $l_1, \ldots, l_s$ (cf. [Co], teorema 3.1). En particular, para cada $y \in M$, tenemos que $(l_{1,y}, \ldots, l_{s,y})\mathcal{O}_{M,y} = (g_y)\mathcal{O}_{M,y}$, así que $(l_{i,y})\mathcal{O}_{M,y} = (g_y)\mathcal{O}_{M,y}$ para algún $i \in \{1, \ldots, s\}$. Por consiguiente, tomando $l = \sum_{i=1}^{s} l_i^2 \in \mathcal{O}(M)$ llegamos a que

$$l_y = g_y^2 v_y$$

donde v_y es una unidad en $\mathcal{O}_{M,y}$.

Recogiendo todo lo anterior, definimos $\tilde{f} = f/l \in \mathcal{O}(M)$. Por construcción, se sigue que $\tilde{f}_y = h_y \rho_y w_y$ en cada punto $y \in M$, donde w_y es una unidad. Esto demuestra *a* y *b*.

donde $h_{1,x}, \dots, h_{t,x}$ son gérmenes irreducibles distintos de dimensión uno, y ρ_x es una unidad o un germen elíptico. En este caso ρ_x tiene un único cero aislado en x. Sea D el conjunto de puntos $y \in M$ tales que ρ_y es un germen elíptico. Como $\dim M = 2$,para cada $y \in M$ hay un entorno U tal que si h_y es irreducible entonces h_x es irreducible para cada $x \in U$. Por consiguiente es inmediato por la proposición 2.6, capítulo 1, que existe una función analítica $\xi \in \mathcal{O}(M)$ que es suma de cuadrados y tal que $Z(\xi) = D$ y $\xi_y \mathcal{O}_{M,y} = \rho_y \mathcal{O}_{M,y}$ para cada $y \in D$. Definimos ahora la función $\tilde{f} = f'/\xi \in \mathcal{O}(M)$. Una inmediata comprobación muestra que $\tilde{f}$ verifica las condiciones del enunciado. □

Observación 2.9. Obsérvese que hemos demostrado que $\tilde{f} \in \mathcal{J}(Z(f)')$ y que su germen $\tilde{f}_x$ genera la fibra $\mathcal{J}(Z(f)'_x)$ en todos lo puntos. Puesto que estamos en dimensión 2, el haz de ideales $\mathcal{J}_{Z(f)'}$ es coherente y por tanto $\tilde{f}$ genera el ideal $\mathcal{J}(Z(f)')$ de secciones globales. En definitiva hemos visto que este ideal es principal. Esto sugiere que podríamos haber planteado la demostración de la proposición anterior directamente definiendo $\tilde{f}_x$ como un generador del ideal $\mathcal{J}(Z(f)'_x)$ intentando después, por medio del Teorema B, encolar estos representantes locales para producir la función global $\tilde{f}$. Es bien conocido que la familia $\{U_x \cap U_y, f_x/f_y\}$ define un 1-cociclo sobre M, y por tanto, este método funciona si M verifica que $H^1(M, \mathbb{Z}_2) = 0$. Sin embargo, en general no hemos visto una aproximación más directa que la dada. □

Acabamos esta sección con la siguiente consecuencia de la proposición 2.5:

Proposición 2.10. *Sean* $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}(M)$, $f_i \not\equiv 0$, $i = 1, \dots, r$, *y sea* $S = \{x \in M \mid f_1(x) > 0, \dots, f_r(x) > 0\}$. *Sean* $g_{ij} = f_i f_j$, *para* $1 \leq i < j \leq r$ *y sea* $T = \{x \in M \mid \tilde{f}_1(x) \geq 0, \dots, \tilde{f}_r(x) \geq 0, \tilde{g}_{12}(x) \geq 0, \dots, \tilde{g}_{r-1,r}(x) \geq 0\}$, *donde* $\tilde{f}_i$ *(resp.* $\tilde{g}_{ij}$*) son las funciones cuasilibres de cuadrados asociadas a* f_i *(resp.* g_{ij}*). Entonces* $T \setminus \bar{S}$ *es un subconjunto semianalítico de* M *con* $\dim(T \setminus \bar{S}) \leq n - 2$.

Demostración. Sea $F = \left(\prod_i \tilde{f}_i\right)\left(\prod_{i<j} \tilde{g}_{ij}\right)$. Demostraremos que $T \setminus \bar{S} \subset Z(F) \setminus \operatorname{Reg}^*(Z(F))$. En efecto, sea $p \in T \setminus \bar{S}$ y supongamos que $p \in \operatorname{Reg}^*(Z(F))$. En particular p está en una única componente irreducible Y de $Z(F)$. Supongamos que $Y \subset Z(\tilde{f}_1)$. Si Y no está contenida en ningún otro $Z(\tilde{f}_i)$ entonces $\tilde{f}_1(p) = 0$ y $\tilde{f}_i(p) > 0$ para todo $i > 1$. De nuevo, por ser p regular, $\tilde{f}_1$ cambia de signo en p, y se sigue que en cualquier entorno de p hay puntos del conjunto $\{\tilde{f}_1 > 0, \dots, \tilde{f}_r > 0\}$, por lo que $p \in \bar{S}$, contradicción.

Por tanto, hay otra función, pongamos $\tilde{f}_2$, que se anula en p. De nuevo usando la regularidad de p concluímos que toda la componente Y está contenida en los ceros de $\tilde{f}_2$, es decir

$$Y \subseteq Z(\tilde{f}_1) \cap Z(\tilde{f}_2).$$

Se sigue que Y es una componente de $Z(g_{12})$ y que g_{12} no cambia de signo a lo largo de Y, por lo que $Y \not\subset Z(\tilde{g}_{12})$. Usando de nuevo la regularidad de p se sigue que $\tilde{g}_{12}(p) \neq 0$, por lo que es $\tilde{g}_{12}(p) > 0$. Pero esto implica que $\tilde{f}_1$ y $\tilde{f}_2$ tienen la misma distribución de signo sobre un entorno de p. En particular, en cualquier entorno U de p se tiene que $U \cap \{\tilde{f}_1 > 0, \tilde{f}_2 > 0\} \neq \varnothing$. Si resulta que $\tilde{f}_i(p) > 0$ para todo $i > 2$, obtenemos de nuevo que $p \in \bar{S}$. De este modo llegamos a que ha de existir una tercera función, por ejemplo $\tilde{f}_3$, tal que

$$Y \subseteq \bigcap_{i=1}^{3} Z(\tilde{f}_i).$$

Argumentando como antes, con las funciones g_{13} y g_{23}, obtenemos que para cualquier entorno U de p, $U \cap \{\tilde{f}_1 > 0, \tilde{f}_2 > 0, \tilde{f}_3 > 0\} \neq \varnothing$. Así en un número finito de etapas obtenemos que $p \in \bar{S}$, en contradicción con nuestra hipótesis. Por consiguiente p debe estar en $Z(F) \setminus \operatorname{Reg}^*(Z(F))$ y la proposición queda demostrada. □

3. La propiedad de Artin-Lang para dimensión 2

A lo largo de esta sección supondremos que M tiene dimensión 2. Como antes, representamos por K el cuerpo de fracciones del anillo $\mathcal{O}(M)$ de funciones analíticas sobre M. Estamos por fin en condiciones de probar el siguiente:

Teorema 3.1. Propiedad de Artin-Lang. *Sean $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}(M)$. Existe un orden β de K en el cual son simultáneamente positivas si y sólo si $\{f_1(x) > 0, \dots, f_r(x) > 0\} \neq \varnothing$.*

Demostración. Supongamos primero que $\{f_1 > 0, \dots, f_r > 0\} \neq \varnothing$. Una aplicación inmediata del criterio de Serre prueba que existe un orden β en K en el que $f_1, \dots, f_r$ son simultáneamente positivas.

Recíprocamente, sea β un orden del cuerpo K tal que $f_1 >_\beta 0, \dots, f_r >_\beta 0$. Podemos suponer que $M \subset \mathbb{R}^n$. Igual que antes, pongamos $g_{ij} = f_i f_j$ para $i < j$.

Obviamente $g_{ij} \in \beta$ y

$$\begin{aligned}&\{x \in M \mid f_1(x) > 0, \dots, f_r(x) > 0\}\\ &\quad = \{x \in M \mid f_1(x) > 0, \dots, f_r(x) > 0, g_{12}(x) > 0, \dots, g_{(r-1)r}(x) > 0\}.\end{aligned}$$

Ahora sean $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_r, \tilde{g}_{ij}$ las funciones libres de cuadrados asociadas a ellas. Por el Corolario 2.6 hemos reducido el problema a demostrar que

$$\{x \in M | \tilde{f}_i(x) > 0, \tilde{g}_{ij}(x) > 0, i < j; i, j = 1, \dots, r\} \neq \varnothing.$$

Supongamos lo contrario. Por la proposición 2.10 el conjunto semianalítico

$$Y = \left[\bigcap_i \tilde{f}_i^{-1}([0,\infty))\right] \cap \left[\bigcap_{j<m} \tilde{g}_{jm}^{-1}([0,\infty))\right]$$

es discreto.

Sea $p \in Y$ y sea U_p un entorno de p tal que $U_p \cap Y = \{p\}$ y definamos $r_p(x) = \|x - p\|^2$, donde $\|\cdot\|$ representa la norma euclídea de $\mathbb{R}^n$. Ésta es una función analítica global de $\mathbb{R}^n$, y por tanto definie una función analítica global sobre M, con un gérmen elíptico en p. Tenemos que para cada $x \in U_p$ con $\tilde{f}_i(x) \geq 0$ y $\tilde{g}_{ij}(x) \geq 0$, entonces $r_p(x) = 0$. En otras palabras, el germen semianalítico en p

$$\{\tilde{f}_{i,p}(x) \geq 0, \tilde{g}_{jm,p}(x) \geq 0, r_p(x) \neq 0\}$$

es vacío. Por consiguiente podemos aplicar el Positivstellensatz en $\mathcal{O}_{M,p}$ y concluir que para cada $p \in Y$ existe $h_p \in P_p$ y un número natural s_p tal que

$$h_p = -r_p^{2s_p} \tag{$*$}$$

donde P_p es el cono generado por $\tilde{f}_{1,p}, \dots, \tilde{f}_{r,p}, \tilde{g}_{12,p}, \dots, \tilde{g}_{(r-1)r,p}$, es decir, h_p es una suma finita de productos de la forma

$$a_{p,ijm} \prod_i \tilde{f}_{i,p}^{\delta_i} \prod_{j,m} \tilde{g}_{jm,p}^{\delta_{jm}}$$

donde $a_{p,ijm}$ es suma de cuadrados en $\mathcal{O}_{M,p}$. Por otra parte, como cualquier suma de cuadrados en $\mathcal{O}_{M,p}$ es suma de dos cuadrados (cf. [Bo-Rs], lema 7, y [Jw3], corolario 2.i) podemos escribir $a_{p,ijm} = b_{p,ijm}^2 + c_{p,ijm}^2$, con $b_{p,ijm}, c_{p,ijm} \in \mathcal{O}_{M,p}$. Además, se sigue de la ecuación $(*)$ anterior que con la identificación $\mathcal{O}_{M,p} =$

$\mathbb{R}\{X_1, X_2\}$, h_p es un polinomio homogéneo de grado $4s_p$. Sea $t_p \in \mathcal{O}_{M,p}$ tal que $t_p \equiv h_p \pmod{\mathfrak{m}_p^{4s_p}}$. Entonces $t_p = h_p + f$, donde $f \in \mathcal{O}_{M,p}$ es una serie de grado inicial mayor que $4s_p$. En particular h_p es la forma inicial de t_p. Como h_p es un germen elíptico en p, se sigue que t_p es elíptico también y, consecuentemente, menor o igual que cero en un entorno de p.

Así para cada $b'_{p,ijm}, c'_{p,ijm} \in \mathcal{O}_{M,p}$ que verifica que

$$b'_{p,ijm} - b_{p,ijm} \in \mathfrak{m}_p^{\nu_p}, \qquad c'_{p,ijm} - c_{p,ijm} \in \mathfrak{m}_p^{\nu_p}$$

con $\nu_p \geq 4s_p$, entonces

$$t_p = \sum \prod_{i=1}^{r} \tilde{f}_{i,p}^{\delta_i} \prod_{j,m} \tilde{g}_{jm,p}^{\delta_{jm}} (b'_{p,ijm} + c'_{p,ijm})$$

tiene un cero aislado en p y $t_p(x) < 0$ para todo $x \neq p$ en un entorno de p.

Ahora, por la proposición 2.5, capítulo 1, existen funciones analíticas globales B_{ijm} y C_{ijm} tales que para cada $p \in Y$ sus gérmenes coinciden con $b_{p,ijm}$ y $c_{p,ijm}$, hasta el grado ν_p. Consideremos la función analítica global

$$H = \sum_{i,j,m} \prod_{i=1}^{r} \tilde{f}_i^{\delta_i} \prod_{i,j} \tilde{g}_{jm}^{\delta_{jm}} (B_{ijm}^2 + C_{ijm}^2)$$

Obviamente, $H \in \beta$, y por construcción, en cualquier punto de $p \in Y$ el germen H_p es elíptico y menor o igual que cero en un entorno de p. Sea $\tilde{H} \in \mathcal{O}(M)$ la función libre de cuadrados asociada a H. Tenemos que $\tilde{H} \in \beta$ mientras que $\tilde{H}_{|Y} < 0$; pero entonces

$$\{x \in M \mid \tilde{f}_i(x) \geq 0, \tilde{g}_{ij}(x) \geq 0, \tilde{H}(x) \geq 0\} = Y \cap \{x \in M \mid \tilde{H}(x) \geq 0\} = \varnothing$$

en contradicción con el corolario 2.7, capítulo 3. □

Denotemos ahora por $\mathcal{S}$ la familia de conjuntos semianalíticos globales abiertos de M. Evidentemente $\mathcal{S}$ es cerrada por uniones e intersecciones finitas, de modo que podemos considerar filtros de conjuntos de $\mathcal{S}$. Tenemos:

Teorema 3.2. Teorema del ultrafiltro. *Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de órdenes de K y el conjunto de filtros maximales de $\mathcal{S}$.*

Demostración. Sea β un orden de K. Definimos

$$\mathcal{V}_\beta = \{S \in \mathcal{S} \mid \{f_1 > 0, \ldots, f_r > 0\} \subset S \text{ para ciertas } f_1, \ldots, f_r \in \beta\}.$$

Es evidente que $\mathcal{V}_\beta$ es un filtro de elementos de $\mathcal{S}$. Comprobemos que es maximal. Sea

$$Y = \bigcup_{i=1}^{p} \{x \in M \mid h_i(x) = 0, g_{i1}(x) > 0, \ldots, g_{is_i}(x) > 0\}$$

un elemento de $\mathcal{S}$ tal que $Y \cap S \neq \varnothing$ para todo $S \in \mathcal{V}_\beta$. Supongamos que $h_1, \ldots, h_r$ no son la función cero, mientras que $h_i = 0$ para todo $i > r$. Afirmamos que al menos uno de los pedazos básicos $\{x \in M \mid g_{i1}(x) > 0, \ldots, g_{is_i}(x) > 0\}$ con $i > r$ está en $\mathcal{V}_\beta$, con lo que $Y \in \mathcal{V}_\beta$. En efecto, en caso contrario, para cada $i > r$ existe $g_{ij_i} \notin \beta$, o equivalentemente $-g_{ij_i} \in \beta$. Pero entonces

$$Y \cap \{h_1^2 > 0, \ldots, h_r^2 > 0, -g_{r+1,j_{r+1}} > 0, \ldots, -g_{pj_p} > 0\} = \varnothing$$

en contra de nuestra hipótesis sobre Y.

Recíprocamente, sea $\mathcal{V}$ un filtro maximal de conjuntos semianalíticos globales abiertos. Se sigue que $\mathcal{V}$ contiene todos los conjuntos de la forma $\{h^2 > 0\}$ para $h \in \mathcal{O}(M)$. Ahora, una comprobación inmediata muestra que

$$\beta_\mathcal{V} = \{f/g \mid f, g \in \mathcal{O}(M), \{fg > 0\} \in \mathcal{V}\}$$

es un orden de K. Obviamente las aplicaciones $\beta \to \mathcal{V}_\beta$ y $\mathcal{V} \to \beta_\mathcal{V}$ son inversas una de otra lo que demuestra el teorema. □

Observación 3.3. En el capítulo anterior asociamos a cada orden β un filtro maximal $\mathcal{U}_\beta$ de conjuntos semianalíticos globales cerrados, que ha desempeñado un papel fundamental en la demostración de la propiedad de Artin-Lang, y por consiguiente en la definición del ultrafiltro $\mathcal{V}_\beta$ definido en el teorema anterior. Cabe, pues, preguntarse cuál es la relación entre $\mathcal{U}_\beta$ y $\mathcal{V}_\beta$. Veremos en el capítulo próximo que en una variedad analítica de dimensión dos la adherencia de un subconjunto analítico global es un conjunto analítico global. En particular, ésto significa que la adherncia de un elemento cualquiera de $\mathcal{S}$ pertenece a $\mathcal{C}$. Ahora una comprobación inmediata muestra que si denotamos por $\overline{\mathcal{V}}_\beta$ la familia de las adherencias de todos los elementos de $\mathcal{V}_\beta$, entonces $\overline{\mathcal{V}}_\beta$ es un filtro de $\mathcal{C}$ contenido en $\mathcal{U}_\beta$, pero que en general no coincide con él. □

5

Sobre la adherencia y las componentes conexa de subconjuntos semianalíticos globales

1. Introducción

Es bien sabido desde [L] que la adherencia y las componentes conexas de conjuntos semianalíticos también son semianalíticos. Sin embargo, ambas cuestiones están abiertas en la clase de los conjuntos semianalíticos globales. El mejor resultado proviene de [Rz3], donde se demuestra que si S es un conjunto semianalítico global relativamente compacto, entonces sus clausura y componentes conexas son también semianalíticos globales.

En este último capítulo estudiamos la adherencia y las componentes conexas de un conjunto semianalítico global S cualquiera cuando $\dim M \leq 3$ y $\dim M = 2$, respectivamente. Demostraremos:

Teorema 1.1. *Supongamos que* $\dim M \leq 3$ *y que S es un subconjunto semianalítico global de M. Entonces la adherencia $\bar{S}$ es también semianalítico global.*

Teorema 1.2. *Supongamos que* $\dim M = 2$ *y que S es un subconjunto semianalítico global de M. Entonces las componentes conexas de S son también subconjuntos semianalíticos globales de M.*

Nuestra demostración se basa en la propiedad de Artin-Lang para dimensión dos que acabamos de probar en el teorema 3.1 del capítulo anterior.

2. Semianaliticidad global de la adherencia

En esta sección probaremos la semianaliticidad de la adherencia de subconjuntos semianalíticos de variedades de dimensión tres analíticas reales, conexas y paracompactas, a las que seguiremos denotando por M.

Comenzamos con el siguiente resultado elemental, que nos será de gran utilidad:

Proposición 2.1. *Sea Y un subconjunto semianalítico de un conjunto analítico $C \subset M$ de dimensión 1. Entonces Y es un subconjunto semianalítico global de M.*

Demostración. Podemos suponer desde un principio que M está sumergida como subvariedad en algún espacio $\mathbb{R}^n$, por lo que podemos suponer $M = \mathbb{R}^n$. (cf. capítulo 1 de esta tesis). Puesto que los conjuntos discretos son semianalíticos globales, podemos suponer también que C es de dimensión pura 1 y que Y es cerrado. Como C es coherente (cf. ejemplo 2.7, capítulo 1) se sigue que está definida por ecuaciones globales, y tomando la suma de cuadrados de éstas podemos suponer que $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$. Sea ahora $D = \bar{Y} \setminus \mathring{Y}$, donde $\mathring{Y}$ representa el interior relativo de Y. D es un subconjunto discreto de $\mathbb{R}^n$ y para cada $p \in D$ los gérmenes Y_p y $Z_p = \overline{C_p \setminus Y_p}$ son cerrados de dimensión 1 y $Y_p \cap Z_p = \{p\}$. Entonces, de acuerdo con [Rz1], teorema 1.1, existe un polinomio $h_p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ tal que

$$h_{p|_{Z_p \setminus \{p\}}} < 0 \text{ y } h_{p|_{Y_p \setminus \{p\}}} > 0,$$

esto es, hay una bola W_p de p en $\mathbb{R}^n$ que verifica

$$W_p \cap Y = \{x \in W_p \mid h_p(x) \geq 0\} \cap C.$$

Obviamente, podemos tomar $W_p \cap W_q = \varnothing$ si $p \neq q$. Sea $H \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ una función analítica tal que para todo $p \in D$ $H_p \equiv h_p$ hasta el grado de h_p. Posiblemente reduciendo W_p podemos suponer que

$$W_p \cap Y = \{x \in W_p \mid H(x) \geq 0\} \cap C.$$

Sean ahora $B_p \subset B'_p \subset W_p$ bolas con centro en p tales que $\bar{B}_p \subset B'_p \subset \bar{B}'_p \subset W_p$ y consideremos $K = \bigcup_{p \in D} \bar{B}'_p$ y $L = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{p \in D} W_p$. K y L son cerrados disjuntos por lo que existe una función analítica $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $g > 0$ sobre K y $g < 0$ sobre L. Por construcción tenemos que $Y \cap \{g \geq 0\} = \{H \geq 0, g \geq 0, f = 0\}$. Análogamente, sean $N = \bigcup_{p \in D} \bar{B}_p$ y $T = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{p \in D} B'p$, y sea $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función analítica tal que $b > 0$ sobre N y $b < 0$ sobre T. Por construcción, $Y \cap (\overline{\mathbb{R}^n \setminus N})$ y $(C \setminus Y) \cap (\overline{\mathbb{R}^n \setminus N})$ son cerrados disjuntos, luego existe una función analítica $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $a > 0$ sobre el primero y $a < 0$ sobre el segundo. Se sigue que $Y \cap (\overline{\mathbb{R}^n \setminus N}) = Y \cap \{a \geq 0\}$. Poniendo todo lo anterior conjuntamente resulta que $Y = \{f = 0, g \geq 0, H \geq 0\} \cup \{f = 0, b \leq 0, a \geq 0\}$.□

Observaciones 2.2.

a) Obsérvese que en particular la demostración anterior muestra que todo subconjunto semianalítico cerrado de una curva analítica puede definirse usando únicamente desigualdades laxas $\geq$.

b) La hipótesis de que Y sea un subconjunto de un conjunto analítico global de dimensión 1 es fundamental. El ejemplo 1.3, capítulo 1, es una muestra de un subconjunto semianalítico de dimensión 1 del plano que sin embargo no es global.

c) La proposición puede refinarse demostrando que de hecho Y es genéricamente básico (es decir, salvo un conjunto discreto). Esto puede verse del modo siguiente: suponemos como antes que Y es cerrado. Sea C^ν la normalización de C y $\pi : C^\nu \to C$ el morfismo analítico propio correspondiente. Como $\dim(C^\nu) = 1$, C^ν es una variedad analítica. Sea $Y^\nu = \pi^{-1}(Y)$. Es conocido que $Y^\nu = \{x \in C^\nu \mid h(x) \geq 0\}$ con $h \in \mathcal{O}(C^\nu)$. Ahora, h es una función meromorfa de C, digamos $h = f/g$ con $f, g \in \mathcal{O}(C)$. Es inmediato comprobar que $Y' = \{x \in C \mid g(x)f(x) \geq 0\}$ difiere de Y en un conjunto discreto contenido en los ceros de g. □

Lema 2.3. *Sea* $\dim M = 2$ *y sea* S *un subconjunto semianalítico global básico y abierto de* M*. Entonces su adherencia* $\bar{S}$ *es un subconjunto semianalítico global.*

Demostración. Sea

$$S = \{x \in M \mid f_1(x) > 0, \ldots, f_r(x) > 0\}$$

para ciertos $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{O}(M)$, y sean $\tilde{f}_i$, $\tilde{g}_{i,j}$, con $i, j \in \{1, \ldots, r\}$, las funciones libres de cuadrados definidas en la proposición 2.5, capítulo 4. Por la proposición 2.10, capítulo 4

$$\bar{S} = \{x \in M \mid \tilde{f}_1(x) \geq 0, \ldots, \tilde{f}_r(x) \geq 0, \tilde{g}_{12}(x) \geq 0, \ldots, \tilde{g}_{(r-1)r}(x) \geq 0\} \setminus Y$$

donde Y es un subconjunto semianalítico de dimensión 0, esto es, un conjunto discreto de puntos. Como Y es seminanalítico global se sigue que $\bar{S}$ es seminanlítico global. □

Observación 2.4. Obsérvese que la demostración anterior prueba que la adherencia de un semianalítico global abierto básico es un cerrado básico. En efecto, con la notación anterior, Y es un cerrado disjunto con $\bar{S}$ con lo que existe una función analítica $h : M \to \mathbb{R}$ tal que $h > 0$ sobre $\bar{S}$ y $h < 0$ sobre Y. En particular

$$\bar{S} = \{x \in M \mid \bar{f}_1(x) \geq 0, \ldots, \bar{f}_r(x) \geq 0, \bar{g}_{12}(x) \geq 0, \ldots, \bar{g}_{(r-1)r}(x) \geq 0, h(x) \geq 0\}$$

y por tanto es cerrado básico. □

Proposición 2.5. *Sea* $\dim M = 2$ *y sea* S *un subconjunto semianalítico global de* M. *Entonces su adherencia* $\bar{S}$ *es un subconjunto semianalítico global.*

Demostración. Sea

$$S = \bigcup_{i=1}^{s} \{x \in M \mid f_i(x) = 0, g_{i1}(x) > 0, \ldots, g_{ij_i}(x) > 0\}$$

para ciertos $f_i, g_{i1}, \ldots, g_{ij_i} \in \mathcal{O}(M)$. Es suficiente ver que la adherencia de cada pieza básica $S_i = \{x \in M \mid f_i(x) = 0, g_{i1}(x) > 0, \ldots, g_{ij_i} > 0\}$ es un conjunto semianalítico global. Si f_i es la función cero, entonces $S_i = \{x \in M \mid g_{i1}(x) > 0, \ldots, g_{ij_i} > 0\}$ y, por el lema anterior, $\bar{S}_i$ es semianalítico global. Por otra parte, si f_i no es idénticamente cero, $\bar{S}_i$ es un subconjunto semianalítico del conjunto $C = \{f_i = 0\}$ que tiene dimensión ≤ 1, y el resultado se sigue del la proposición 2.1. □

El caso abierto básico en dimensión tres se resuelve análogamente al de dimensión dos:

Lema 2.6. *Sea* $\dim M = 3$ *y sea* S *un subconjunto semianalítico global básico y abierto de* M. *Entonces su adherencia* $\bar{S}$ *es un subconjunto semianalítico global.*

Demostración. Sea

$$S = \{x \in M \mid f_1(x) > 0, \dots, f_r(x) > 0\}$$

para ciertos $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}(M)$, y sean $\tilde{f}_i$, $\tilde{g}_{i,j}$, con $i, j \in \{1, \dots, r\}$, las funciones cuasilibres de cuadrados definidas en la proposición 2.5, capítulo 4. Por la 2.10, capítulo 4,

$$\bar{S} = \{x \in M \mid \tilde{f}_1(x) \geq 0, \dots, \tilde{f}_r(x) \geq 0, \tilde{g}_{12}(x) \geq 0, \dots, \tilde{g}_{(r-1)r}(x) \geq 0\} \setminus Y$$

donde Y es un subconjunto semianalítico de dimensión ≤ 1. Por otra parte, $Y \subset \{\prod f_i = 0\}$, y el Lema 5.1 muestra que Y es semianalítico global. Esto prueba que también lo es $\bar{S}$. □

Observación 2.7. Veamos que del razonamiento anterior podemos deducir también que $\bar{S}$ puede describirse usando sólo desigualdades laxas. En efecto, sabemos que

$$\bar{S} = \{x \in M \mid \tilde{f}_1(x) \geq 0, \dots, \tilde{f}_r(x) \geq 0, \tilde{g}_{12}(x) \geq 0, \dots, \tilde{g}_{(r-1)r}(x) \geq 0\} \setminus Y$$

donde $\dim(Y) \leq 1$. En particular, $D = \bar{Y} \cap \bar{S}$ es un conjunto discreto. Ahora razonamos como en el lema 2.1. Para cada $p \in D$ existe un polinomio $h_p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ (suponemos que M está sumergida en $\mathbb{R}^n$), tal que $h_p \geq 0$ sobre $\bar{S}_p$ y $h_p < 0$ sobre $Y_p \setminus \{p\}$ (cf. [Rz1], teorema 1.1). Por consiguiente, hay una bola W_p de p en $\mathbb{R}^n$ que verifica

$$W_p \cap \bar{S} = \{x \in W_p \mid h_p(x) \geq 0\},$$

y podemos tomar $W_p \cap W_q = \varnothing$ si $p \neq q$. Sea $H \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ una función analítica tal que para todo $p \in D$ $H_p = h_p + t_p$ con t_p serie de orden mayor que el grado de h_p. Posiblemente reduciendo W_p podemos suponer que

$$W_p \cap \bar{S} = \{x \in W_p \mid H(x) \geq 0\}.$$

Sea ahora $B_p \subset \bar{B}_p \subset W_p$ bola con centro en p. Como en 2.1 podemos encontrar una función analítica g tal que $g > 0$ sobre $\bigcup_{p \in D} \bar{B}_p$ y $g < 0$ sobre $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{p \in D} W_p$. Por construcción tenemos que $\{g \geq 0\} \cap \bar{S} = \{H \geq 0, g \geq 0\}$ y que $\{g \leq 0\} \cap \bar{S}$ y $\{g \leq 0\} \cap \bar{Y}$ son cerrados disjuntos, por lo que existe una función analítica b tal que $b > 0$ sobre el primero y $b < 0$ sobre el segundo. Se sigue que $Y \cap (\mathbb{R}^n \setminus N) = Y \cap \{a \geq 0\}$. Poniendo todo lo anterior conjuntamente resulta que

$$\begin{aligned}\bar{S} = &\{g \leq 0, b \geq 0, \tilde{f}_1 \geq 0, \dots, \tilde{f}_r \geq 0, \tilde{g}_{12} \geq 0, \dots, \tilde{g}_{(r-1)r} \geq 0\} \\ &\cup \{g \geq 0, H \geq 0, \tilde{f}_1 \geq 0, \dots, \tilde{f}_r \geq 0, \tilde{g}_{12} \geq 0, \dots, \tilde{g}_{(r-1)r} \geq 0\}. \qquad \square\end{aligned}$$

Vayamos finalmente al caso más general:

Teorema 2.8. *Sea* $\dim M \leq 3$ *y sea* S *un subconjunto semianalítico global de* M*. Entonces su adherencia* $\bar{S}$ *es un subconjunto semianalítico global.*

Demostración. Basta con demostrar el caso $\dim(M) = 3$. Sea

$$S = \bigcup_{i=1}^{s} \{x \in M \mid f_i(x) = 0, g_{i1}(x) > 0, \dots, g_{ij_i}(x) > 0\}$$

para ciertos $f_i, g_{i1}, \dots, g_{ij_i} \in \mathcal{O}(M)$. Obviamente, es suficiente ver que la adherencia de cada pieza básica $S_i = \{x \in M \mid f_i(x) = 0, g_{i1}(x) > 0, \dots, g_{ij_i} > 0\}$ es un conjunto semianalítico global. Si $S_i = \{x \in M \mid g_{i1}(x) > 0, \dots, g_{ij_i} > 0\}$ entonces por el anterior lema $\bar{S}_i$ es semianalítico global. Por otra parte, si f_i no es idénticamente cero, es claro que

$$\bar{S}_i \subset \overline{\{x \in M \mid g_{i1}(x) > 0, \dots, g_{ij_i}(x) > 0\}} \cap Z(f_i).$$

Denotamos por B_i el conjunto $\{x \in M \mid g_{i1}(x) > 0, \dots, g_{ij_i}(x) > 0\}$. Sea $Z(f_i) = \bigcup Y_\alpha$ la descomposición de $Z(f_i)$ en componentes irreducibles, y sea L el conjunto de aquellos α para los que $Y_\alpha \cap B_i \neq \varnothing$. Por el Corolario 2.9, capítulo 1, $X = \bigcup_{l \in L} Y_l$ es un conjunto semianalítico global y

$$\bar{S}_i = \overline{\bigcup_{l \in L} B_i \cap Y_l} = \bigcup_{l \in L} \overline{B_i \cap Y_l} \subset \bar{B}_i \cap X$$

Vamos a ver que $T = \bar{B}_i \cap X \setminus \bar{S}_i$ es semianalítico global. En primer lugar nótese que para cada $l \in L$, $\bar{B}_i \cap Y_l \setminus \overline{B_i \cap Y_l} \subset Y_l$ no contiene ningún subconjunto abierto de Y_l. En efecto, si hubiese un abierto $W \subset Y_l$ tal que $W \subset \bar{B}_i \cap Y_l \setminus \overline{B_i \cap Y_l}$, entonces existiría un $j_0 \in \{1, \dots, j_i\}$ tal que $g_{ij_0|_W} \equiv 0$, y como Y_l es irreducible tendríamos que $g_{ij_0|_{Y_l}} \equiv 0$ y $B_i \cap Y_l = \varnothing$, contradicción.

De esta forma

$$T = \bar{B}_i \cap X \setminus \bar{S}_i = \bigcup_{l \in L} ((\bar{B}_i \cap Y_l) \setminus \overline{(B_i \cap Y_l)})$$

y observamos que el miembro derecho de esta expresión es un conjunto semianalítico de dimensión ≤ 1 contenido en $\bigcup_{l \in L}(Y_l \cap Z(g_{i1} \cdots g_{ij_i}))$. Como Y_l es irreducible $\dim(Y_l \cap Z(g_{i1} \cdots g_{ij_i})) \leq 1$ y podemos aplicar la proposición 2.1 para concluir que T es un conjunto semianalítico global. En definitiva, se sigue que $\bar{S}_i = \bar{B}_i \cap X \setminus T$ es semianalítico global. □

Observación 2.9. La observación anterior se aplica palabra por palabra para demostrar que la adherencia de $S_i = \{x \in M \mid f_i(x) = 0, g_{i1}(x) > 0, \dots, g_{ij_i} > 0\}$ puede representarse usando únicamente desigualdades laxas. □

Poniendo todas las anteriores observaciones juntas, obtenemos:

Teorema 2.10. Teorema de finitud. *Sea M de dimensión ≤ 3 y sea S un subconjunto analítico global abierto (resp. cerrado). Entonces S tiene una escritura del tipo*

$$S = \bigcup_{i=1}^{t} \{x \in M \mid g_{i1}(x) > 0, \dots, g_{is_i}(x) > 0\}$$

$$\text{(respectivamente} \quad S = \bigcup_{i=1}^{t} \{x \in M \mid g_{i1}(x) \geq 0, \dots, g_{is_i}(x) \geq 0\}\,).$$

Demostración. Obviamente, basta con demostrar el caso cerrado. Pero éste se sigue inmediatamente de las observaciones 2.4, 2.7 y 2.9 anteriores. □

3. Semianaliticidad global de las componentes conexas

Para terminar, demostraremos en esta última sección la semianaliticidad de las componentes conexas de un conjunto semianalítico global cualquiera C de una variedad M analítica real, conexa, paracompacta y de dimensión dos. Bien se sabe que las componentes conexas de C son semianalíticas (cf. [L], §16, teorema 2, p. 69); por tanto, la única cuestión que dilucidar es si son "globales". De acuerdo con [L], §16, proposición 2, p. 76, si C es adherente a un punto x existe un entorno abierto U de x tal que $C \cap U$ es unión finita de subconjuntos semianalíticos conexos de M. En particular, la familia de componentes conexas de X es localmente finita. Además, C es localmente conexo, por lo que sus componentes conexas son cerradas y abiertas en C.

Antes de nada, observamos que si C es cerrado el resultado es cierto en cualquier dimensión:

Lema 3.1. *Sea C un subconjunto semianalítico global cerrado de una variedad M de dimensión n. Entonces las componentes conexas de C también son cerradas y semianalíticas globales de M.*

Demostración. Al ser C cerrado, sus componentes conexas también son cerradas en M y cualquier unión $\bigcup_{i \in I} T_i$ de componentes conexas T_i de C es también cerrada. En particular, si T es una componente conexa cualquiera, T y $C \setminus T$ son cerrados. Sea h una función analítica que sea > 0 sobre sobre T y < 0 sobre $C \setminus T$. Evidentemente $T = C \cap \{h > 0\}$. □

Veamos como abordar el caso general. En lo sucesivo C representa un conjunto semianalítico que supondremos descrito por

$$C = \bigcup_{i=1}^{q} \{x \in M \mid f_i(x) = 0, g_{i1}(x) > 0, \dots, g_{ij_i} > 0\},$$

y T una componente conexa suya. La posibilidad de separar T y $C \setminus T$ con una o varias funciones es, en general, inviable, como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.2. Sea $C = \mathbb{R}^2 \setminus (\{(x,0) \mid x \leq 0\} \cup \{(0,y) \mid y \geq 0\})$. C tiene dos componentes conexas T_1 y T_2, y es inmediato comprobar que no existen funciones $g_1, \dots, g_s$ tales que $T_1 = C \cap \{g_1 > 0, \dots, g_s > 0\}$. □

Esto nos obliga a cambiar de estrategia, introduciendo $\operatorname{Spec}_r(K)$. En primer lugar asociaremos a T un subconjunto $\delta(T)$ de $\operatorname{Spec}_r(K)$ (que coincidirá con $\tilde{T}$ en caso de que T sea semianalítico global) y demostraremos que $\delta(T)$ es constructible. He aquí la definición de δ.

Definición 3.3. *Sea T un conjunto semianalítico y sea $\mathcal{V}_\beta$ el filtro maximal definido por el orden β. Definimos $\delta(T)$ como el conjunto*

$$\delta(T) = \{\beta \in \operatorname{Spec}_r(K) \mid \exists X \in \mathcal{V}_\beta \text{ con } X \subset T\}.$$

Observaciones 3.4.

a) Obsérvese que $\delta(T)$ es no vacío si y sólo si $\dim T = 2$. En efecto, supongamos que $\dim T = 2$; entonces existen $y \in T$ y un entorno abierto semianalítico U^y en M tales que $U^y \subset T$. Tomemos un orden $\beta \in \mathrm{Spec}_r(K)$ centrado en y, es decir, tal que β contiene todos los $f \in \mathcal{O}(M)$ tales que $f(x) > 0$. Entonces $\beta \in \delta(T)$. Recíprocamente, si $\delta(T)$ es no vacío, como los conjuntos de $\mathcal{V}_\beta$ son abiertos, se sigue que $\dim(T) = 2$.

b) Si S es semianalítico global, entonces $\delta(S)$ coincide con el conjunto de $\mathrm{Spec}_r(K)$ definido por la aplicación tilde genérica. En efecto, sea

$$S = \bigcup_{i=1}^{t} \{x \in M \mid f_i(x) = 0,\ g_{i1}(x) > 0, \ldots, g_{ij_i}(x) > 0\}$$

una representación de S y supongamos que f_i es idénticamente nula si $i = 1, \ldots, r$ y no lo es si $i > r$. Por definición

$$\tilde{S} = \bigcup_{i=1}^{r} \{\beta \in \mathrm{Spec}_r(K) \mid g_{i1}(\beta) > 0, \ldots, g_{ij_i}(\beta) > 0\}.$$

Sea $\beta \in \delta(S)$ y sea X un elemento de $\mathcal{V}_\beta$ contenido en S. Obviamente, $X' = X \setminus \left(\bigcup_{i=r}^{t} Z(f_i)\right) \in \mathcal{V}_\beta$ y está contenido en $\bigcup_{i=1}^{r} \{x \in M \mid g_{i1}(x) > 0, \ldots, g_{ij_i}(x) > 0\}$. Por consiguiente

$$X' = \bigcup_{i=1}^{r} X'_i,$$

donde $X'_i = X' \cap \{x \in M \mid g_{i1}(x) > 0, \ldots, g_{ij_i} > 0\}$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$, y por ser $\mathcal{V}_\beta$ maximal, existe i_0 tal que $X'_{i_0} \in \mathcal{V}_\beta$. Por lo tanto, $\beta \in \{\alpha \in \mathrm{Spec}_r(K) \mid g_{i_0 1}(\alpha) > 0, \ldots, g_{i_0 j_i}(\alpha) > 0\} \subset \tilde{S}$.

Sea ahora $\beta \in \tilde{S}$, entonces hay un $i \in \{1, \ldots, r\}$ para el que $g_{i1}(\beta) > 0, \ldots, g_{ij_i}(\beta) > 0$. Obviamente, $\{x \in M \mid g_{i1}(x) > 0, \ldots, g_{ij_i}(x) > 0\} \in \mathcal{V}_\beta$. □

Antes de entrar en la demostración del resultado fundamental necesitamos dos lemas técnicos. El primero muestra que intersecando C con un semianalítico global adecuado, podemos lograr que $\bar{T}$ y $\overline{C \setminus T}$ se corten en un conjunto discreto.

Lema 3.5. *Existe una función analítica $g \in \mathcal{O}(M)$ tal que*

$$\overline{T \cap \{g > 0\}} \cap \overline{(C \setminus T) \cap \{g > 0\}}$$

y

$$\overline{T \cap \{g < 0\}} \cap \overline{(C \setminus T) \cap \{g < 0\}}$$

están contenidos en un conjunto discreto.

Demostración. En primer lugar, observamos que $F = \bar{T} \cap \overline{C \setminus T}$ es un conjunto semianalítico de dimensión ≤ 1. Si $\dim(F) \leq 0$ necesariamente es discreto y el lema es obvio. Supongamos que $\dim(F) = 1$. Tenemos que $F \subset Y = Z\left(\prod_{i=1}^{q} g_{i1} \cdots g_{ij_ir} f_i\right)$, es decir, F es un subconjunto semianalítico de un conjunto analítico de dimensión 1. En particular, se sigue de la proposición 2.1 que $\bar{T} \cap \overline{C \setminus T}$ es global. Denotemos por $A = F \setminus \mathring{F}$ donde $\mathring{F}$ representa el interior relativo de F. A es un conjunto discreto. Por otra parte, el haz de ideales $\mathcal{I}_Y$ es coherente, y como las fibras están generadas por un único elemento se sigue que el ideal de secciones globales $\mathcal{I}(Y)$ está finitamente generado, digamos por $h_1, \ldots, h_k \in \mathcal{O}(M)$ ([Co]).

Sea $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y^{(n)}$ la descomposición de Y en componentes irreducibles. El siguiente argumento está inspirado en [Bo-Rs]. Para cada $n \in \mathbb{N}$ con $\dim Y^{(n)} = 1$ tomemos $a_n \in Y^{(n)} \setminus \bigcup_{j \neq n} Y^{(j)}$. Como para cada n $\mathcal{I}(Y_{a_n}) = \mathcal{I}(Y_{a_n}^{(n)})$ es principal, tenemos $\mathcal{I}(Y_{a_n}) = (h_{i,a_n})\mathcal{O}_{a_n}(M)$ para algún $i = 1, \ldots, k$. Por otra parte, una comprobación directa demuestra que el conjunto de k-uplas $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ para las cuales $(\lambda_1 h_1 + \cdots + \lambda_k h_k)_{a_n} \neq \mathcal{I}(Y_{a_n})$ es un hiperplano de $\mathbb{R}^k$. En efecto, supongamos que $\mathcal{I}(Y_{a_n}) = (h_1)_{a_n}\mathcal{O}_{a_n}(M)$. Entonces, para cada $i = 1, \ldots, k$ tenemos una igualdad de series convergentes $(h_i)_{a_n} = (h_1)_{a_n} u_i$ en $\mathcal{O}_{a_n}(M)$ y $(\lambda_1 h_1 + \cdots + \lambda_k h_k)_{a_n} = (\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k)(h_1)_{a_n}$, y por consiguiente la suma inicial genera $\mathcal{I}(Y_{a_n})$ si y sólo si $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k$ es una unidad, esto es,

$$\lambda_1 u_1(a_n) + \cdots + \lambda_k u_k(a_n) \neq 0,$$

según afirmábamos.

Por consiguiente, por el teorema de Baire, podemos encontrar $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ tales que $\mathcal{I}(Y_{a_n}^{(n)}) = \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i h_i\right)_{a_n} \mathcal{O}(M)_{a_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $b \in Y^{(n)}$, $\mathcal{I}(Y_b^{(n)}) = \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i h_i\right)_b \mathcal{O}_b(M)$ excepto para un subconjunto propio analítico (por tanto discreto) $D^{(n)}$.

Sean $D = (\bigcup_n D^{(n)}) \cup \operatorname{Sing}(Y)$ y $g = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i h_i$. Afirmamos que

$$\overline{T \cap \{g > 0\}} \cap \overline{(C \setminus T) \cap \{g > 0\}}$$

y

$$\overline{T \cap \{g > 0\}} \cap \overline{(C \setminus T) \cap \{g > 0\}}$$

están contenidos en $D' = A \cup (D \cap F)$. Veamos, por ejemplo, el primero. Sea $z \in Y \setminus D$. Entonces z es un punto interior de F y es regular en Y. Además, g_z genera el ideal $\mathcal{I}(Y_z)$, así que g cambia de signo en z. En consecuencia, hay un entorno U^z tal que $U^z = \{g > 0\} \cup Y \cup \{g < 0\} = (T \cup Y \cup (C \setminus T)) \cap U^z$. Así se sigue que si $z \in \overline{T \cap \{g > 0\}} \cap U^z$ entonces $(C \setminus T) \cap \{g > 0\} \cap U^z = \varnothing$ y viceversa, con lo que el lema queda demostrado. □

Podría pensarse que una vez que T y $C \setminus T$ se cortan en un conjunto discreto, las dificultades puestas de manifiesto en el ejemplo anterior desaparecen. Sin embargo esto no es así:

Ejemplo 3.6. Sea S el conjunto sombreado en la figura, menos el origen. S es un conjunto semianalítico global como puede comprobarse fácilmente de modo directo.

Sin embargo, no existe ninguna función analítica que separe (ni siquiera localmente en un entorno del origen) las dos componentes conexas T_1 y T_2 de S. Más aún, no existen funciones analíticas $f_1, \ldots, f_r$ tales que $T_1 = S \cap \{f_1 > 0, \ldots, f_r > 0\}$. Esto puede verse del siguiente modo: sea f una función analítica en el origen, y supongamos que su forma inicial es de grado p. Si p es par, entonces, f tiene localmente signo constante en cualquier recta L que pase por el origen y sobre la que no se anule su forma inicial. Por consiguiente f no separa T_1 de su sector opuesto por el vértice. Pero si f es impar, entonces f cambia de signo sobre L y por consiguiente f separa los sectores opuestos por el vértice contenidos en T_2. □

El siguiente lema muestra que, sin embargo, la separación es posible localmente por medio de conjuntos semianalíticos:

Lema 3.7. *Sea p un punto de M y sean F_p y F'_p dos gérmenes semianalíticos cerrados con $F_p \cap F'_p = \{p\}$. Entonces existen un entorno abierto U^p y un germen semianalítico abierto S^p tales que*

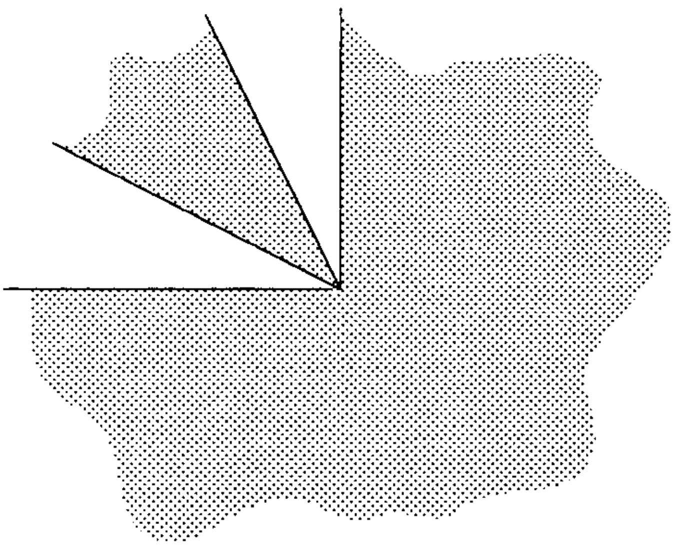

FIGURA 5.1.

a) $F'_p \subset S_p \cup \{p\}$;

b) $F_p \cap S_p = \varnothing$, *y*

c) $\bar{F}_p \cap \bar{S}_p = \overline{U^p \setminus F'_p} \cap \bar{S}_p = \{p\}$.

Además S_p *puede tomarse de la forma*

$$S_p = \bigcup_{k=1}^{4} \{(h_p)_{k,1} > 0, (h_p)_{k,2} > 0\}$$

con $(h_p)_{ki} \in \mathcal{O}_p(M)$.

Demostración. Al ser una cuestión local podemos suponer que $M = \mathbb{R}^2$, p es el origen de coordenadas y $\mathcal{O}_p(M) = \mathbb{R}\{x, y\}$. Sea

$$F_p = \bigcup_{i=1}^{s} A_i \qquad \text{y} \qquad F'_p = \bigcup_{k=1}^{r} B_k$$

donde A_i y B_k son gérmenes básicos semianalíticos que podemos suponer cerrados por el Positivstellensatz para gérmenes analíticos. Como el índice de estabilidad del anillo de series de convergentes $\mathbb{R}\{x, y\}$ es dos, sabemos que para cada pareja A_i, B_j existen gérmenes analíticos f_{ik} tales que

$$(f_{ik})_{|A_i} < 0 \qquad \text{y} \qquad (f_{ik})_{|B_k} > 0$$

(cf. [Bröl], teorema 2.2). Es inmediato comprobar que el germen semianalítico abierto

$$S_p = \bigcup_{k=1}^{r} \{f_{1k} > 0, \ldots, f_{sk} > 0\}$$

cumple las condiciones del enunciado. La condición específica sobre el número de uniones y funciones necesarias es, una vez más, consecuencia inmediata de los valores de los invariantes s y $\bar{s}$ para el anillo de series $\mathbb{R}\{x, y\}$, a saber, $s = 2$ y $\bar{s} \leq 4$. □

El último lema técnico que presentamos a continuación expresa que la separación a que hace referencia el lema anterior es estable por aproximaciones de orden suficiente:

Lema 3.8. *Sea F_p un germen semianalítico cerrado y sea S el germen semianalítico*

$$S = \bigcup_{i=1}^{q} \{f_{i1} > 0, \ldots, f_{iv_i} > 0\}$$

donde $f_{11}, \ldots, f_{qv_q} \in \mathcal{O}_p(M)$. Supongamos que $F \subset S \cup \{p\}$. Entonces existe un $\nu \in \mathbb{N}$ tal que si $f'_{ij} = f_{ij} \text{ mod}(\mathfrak{m}_p^\nu)$ entonces $F \subset S' \cup \{p\}$, donde

$$S' = \bigcup_{i=1}^{q} \{f'_{i1} > 0, \ldots, f'_{iv_i} > 0\}$$

Demostración. Demostrémoslo primero en el caso particular de que S sea básico, esto es, $S = \{f_1 > 0, \ldots, f_s > 0\}$. Evidentemente, en esta situación es suficiente considerar el caso principal $S = \{f > 0\}$. Así pues, supongamos $F \subset \{f > 0\}$. Como en el lema anterior, al tratarse de una cuestión local podemos suponer que $M = \mathbb{R}^2$, p es el origen de coordenadas y $\mathcal{O}_p(M) = \mathbb{R}\{x, y\}$. Mediante un cambio lineal de coordenadas podemos suponer que tanto f como los gérmenes que definen F pertenecen a $\mathbb{R}\{x\}[y]$. Consideremos el germen semianalítico de dimensión 1 $F \setminus \mathring{F}$, donde $\mathring{F}$ representa el interior de F. En particular $F \setminus \mathring{F}$ está formado por un número finito de raíces de un elemento $g \in \mathbb{R}\{x\}[y]$, esto es, por un series de Puiseux $\eta_1(x), \dots, \eta_m(x) \in \mathbb{R}\{x^{1/q}\}$ para un cierto $q \in \mathbb{N}$. Sean $\xi_1(x), \dots, \xi_r(x) \in \mathbb{R}\{x^{1/q}\}$ las raíces de $f(x,y)$. La hipótesis de que $F \subset \{f > 0\}$ implica que $\xi_i \neq \eta_j$ para todo i y j. Usando la continuidad de las raíces en función de los coeficientes resulta que existe un $\nu_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $f' \equiv f \pmod{\mathfrak{m}^{\nu_0}}$ las raíces de f' distan, en la topología m-ádica, de alguna de las de f menos que el mínimo de la distancias entre η_i y x_{ij} (cf. [Pu]). De este modo queda garantizado que si $f' \equiv f \pmod{\mathfrak{m}^{\nu_0}}$, entonces $\{f' = 0\} \cap F = \varnothing$.

Sean ahora $F_1, \dots, F_n$ la componentes conexas de F, y para cada $i = 1, \dots, n$, sea $\beta_i(t) = (x_i(t), y_i(t))$, $t > 0$, $x_i(t), y_i(t) \in \mathbb{R}\{t\}$ un germen semianalítico en F_i de dimensión 1. Tenemos que $f(x_i(t), y_i(t)) > 0$ para $t > 0$ suficientemente pequeño, condición que viene determinada por la forma inicial de la serie $f(x_i(t), y_i(t)) > 0$. Por consiguiente, para cada i existe un $\nu_i \in \mathbb{N}$ tal que si $f' \equiv f \pmod{\mathfrak{m}^{\nu_i}}$ entonces $f'(\beta(t)) > 0$. En definitiva se sigue que si $\nu = \text{máx}\{\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n\}$ entonces para cada $f' \in \mathbb{R}\{x,y\}$ tal que $f' \equiv f \pmod{\mathfrak{m}^{\nu}}$ $F \subset \{f' > 0\}$. En efecto, al no tener f' raíces en F, resulta que f' tiene signo constante en cada componente conexa F_i y como $f'(\beta_i(t)) > 0$ se sigue que $F_i \subset \{f' > 0\}$, como afirmábamos.

Para demostrar el caso general escribamos $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_q$ donde $S_i = \{f_{i1} > 0, \dots, f_{iv_i} > 0\}$ es básico. Ahora es suficiente ver que $F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_q$ para gérmenes cerrados F_i tales que $F_i \subset S_i$. En efecto, si ésto es así , para cada i existe un $\nu_i \in \mathbb{N}$ tal que si $f'_{ij} \equiv f'_{ij} \pmod{\mathfrak{m}^{\nu_i}}$ entonces $F_i \subset S'_i = \{f'_{i1} > 0, \dots, f'_{iv_i} > 0\}$, y es suficiente tomar $\nu = \text{máx}\{\nu_1, \dots, \nu_q\}$. Finalmente, para ver que F se puede descomponer de la forma indicada basta tomar, por ejemplo, $F_i = \left\{x \in F \cap S_i \;\middle|\; d\Big(x, F \setminus \bigcup_{j \neq i} S_j\Big) \leq d(x, F \setminus S_i)\right\}$. □

Estamos ya en condiciones de demostrar la proposición fundamental para la consecución del teorema.

Proposición 3.9. *Sea $C \subset M$ un conjunto semianalítico global y sea T una componente conexa de C. Entonces $\delta(T)$ es un subconjunto constructible de* $\text{Spec}_r(K)$.

Demostración. Demostraremos que $\delta(T)$ es abierto y cerrado en $\text{Spec}_r(K)$, de donde se sigue que es constructible. Veamos en primer lugar que $\delta(T)$ es abierto. Sea β un orden en $\delta(T)$ y sea X un elemento de $\mathcal{V}_\beta$ contenido en T. Por la propia definición de $\mathcal{V}_\beta$ podemos suponer que $X = \{x \in M \mid f_1(x) > 0, \dots, f_s(x) > 0\}$

para ciertas $f_1, \ldots, f_s \in \mathcal{O}(M)$, y $\beta \in \tilde{X}$. Sea ahora γ cualquier otro orden en $\tilde{X}$. Entonces el ultrafiltro $\mathcal{V}_\gamma$ definido por γ contiene a X y por consiguiente $\gamma \in \delta(T)$, lo que prueba que éste es abierto.

Veamos ahora que $\tilde{C} \setminus \delta(T)$ es abierto. Sea $\beta \in \tilde{C} \setminus \delta(T)$. Como $\beta \notin \delta(T)$, ningún elemento X de $\mathcal{V}_\beta$ está contenido en T. Además, por la observación 3.3 *b*, $\tilde{C} = \delta(C)$, por lo que podemos suponer que $X \subset C$. Así $X \cap (C \setminus T) \neq \varnothing$. Encontraremos un abierto semianalítico global $X' \in \mathcal{V}_\beta$ con $X' \cap T = \varnothing$. Entonces $\tilde{X}' \subset (\tilde{C} \setminus \delta(T))$ y razonando como en el párrafo anterior, resulta que $\tilde{C} \setminus \delta(T)$ es abierto.

Para ilustrar la idea escojamos primero el caso más sencillo. Supongamos que $\overline{X \cap T} \cap \overline{X \cap (C \setminus T)} = \varnothing$. Entonces existiría una función analítica global f tal que $f < 0$ sobre $X \cap T$ y $f > 0$ sobre $X \cap (C \setminus T)$. Esto implica que $f \in \beta$, ya que de otra manera $X \cap \{f < 0\} \in \mathcal{V}_\beta$, y como $X \cap \{f < 0\} \subset T$ conseguiríamos que $\beta \in \tilde{T}$, en contra de nuestra suposición. Así $X \cap \{f > 0\} \in \mathcal{V}_\beta$ y poniendo $X' = X \cap \{f < 0\}$ tenemos que $X' \cap T = \varnothing$ como queríamos.

Volviendo al caso general, no podemos asegurar que $\overline{X \cap T} \cap \overline{X \cap (C \setminus T)} = \varnothing$, pero sabemos, por el lema 3.3, que existe $g \in \beta$ y un conjunto discreto $D \in M$ tal que $\overline{X \cap T \cap \{g > 0\}} \cap \overline{X \cap (C \setminus T) \cap \{g > 0\}} \subset D$. Tomemos $p \in D$ y analicemos la situación localmente en p. Los gérmenes $(\overline{X \cap T \cap \{g > 0\}})_p$ y $(\overline{X \cap (C \setminus T) \cap \{g > 0\}})_p$ son semianalíticos cerrados y se cortan solamente en p. Por tanto, por el lema 3.7, podemos encontrar un entorno abierto U^p y un conjunto semianalítico en U_p,

$$H_p = \bigcup_{k=1}^{4} \{(h_p)_{k,1} > 0, (h_p)_{k,2} > 0\}$$

tales que en el entorno U_p se verifica:

a) $(\overline{X \cap (C \setminus T) \cap \{g > 0\}}) \subset H_p \cup \{p\}$;

b) $(\overline{X \cap T \cap \{g > 0\}}) \cap H_p = \{p\}$.

Por el lema 4.6 hay un entero $\nu_p \in \mathbb{N}$ tal que para cada $(f_p)_{kj} \in \mathcal{O}_p(M)$ con $(f_p)_{kj} \equiv (h_p)_{kj} \pmod{\mathfrak{m}_p^{\nu_p}}$, $j = 1, 2$, $k = 1, \ldots, 4$, el conjunto

$$G_p = \bigcup_{k=1}^{4} \{(f_p)_{k,1} > 0, (f_p)_{k,2} > 0\}$$

también satisface *a* y *b* (posiblemente reduciendo el entorno U_p).

Sea $H_{kj} \in \mathcal{O}(M)$ una función analítica tal que para todo $p \in D$ tengamos que $(H_{kj})_p - (h_p)_{kj} \in \mathfrak{m}_p^{\nu_p}$, cf. Proposición 2.5, capítulo 1, y sean

$$H = \bigcup_{k=1}^{4} \{x \in M \mid H_{k1}(x) > 0,\ H_{k2}(x) > 0\}$$

y
$$H' = \bigcap_{k=1}^{4} (\{H_{k1} < 0\} \cup \{H_{k2} < 0\}).$$

Obviamente, $\tilde{H} \cup \tilde{H}' = \mathrm{Spec}_r(K)$ por consiguiente $\beta \in \tilde{H}$ o $\beta \in \tilde{H}'$. Supongamos que $\beta \in \tilde{H}'$. Entonces $X' = X \cap H' \cap \{g > 0\} \in \mathcal{V}_\beta$ y por construcción $X' \cap (C \setminus T) = \varnothing$, esto es, $X' \subset T$, lo cual implica que $\beta \in \delta T$ en contra de nuestra suposición. Por lo tanto, $\beta \in \tilde{H}$ y tenemos que $X' = X \cap H \cap \{g > 0\} \in \mathcal{V}_\beta$. Como por construcción $X' \cap T = \varnothing$, la afirmación queda demostrada, y con ella la proposición. □

Teorema 3.10. *Sea M una variedad analítica de dimensión 2 y C un subconjunto semianalítico global de M. Entonces las componentes conexas de C son subconjuntos semianalíticos globales de M.*

Demostración. Manteniendo la notación de los lemas anteriores, supongamos que

$$C = \bigcup_{i=1}^{q} \{x \in M \mid f_i(x) = 0, g_{i1}(x) > 0, \ldots, g_{ij_i} > 0\}.$$

Por la proposición anterior sabemos que $\delta(T)$ es constructible en $\mathrm{Spec}_r(K)$, digamos

$$\delta(T) = \bigcup_{i=1}^{r} \{\alpha \in \mathrm{Spec}_r(K) \mid l_{i1}(\alpha) > 0, \ldots, l_{is}(\alpha) > 0\}$$

para ciertas $l_{ij} \in \mathcal{O}(M)$. Consideremos el abierto semianalítico global

$$U = \bigcup_{i=1}^{r} \{x \in M \mid l_{i1}(x) > 0, \ldots, l_{is}(x) > 0\}.$$

Una comprobación directa inmediata demuestra que los conjuntos semianalíticos

$$A = T \setminus (U \cap C) \qquad B = (U \cap C) \setminus T$$

son de dimensión uno y están contenidos en $Z\Big(\prod_{i,j} g_{ij}f_i\Big) \cup Z\Big(\prod_{i,j} l_{ij}\Big)$. Por lo tanto, según vimos en la proposición 2.1, ambos son semianalíticos globales. Como obviamente

$$T = [(U \cap C) \setminus B] \cup A$$

obtenemos que T es semianalítico global, con lo que se completa la demostración del teorema. □

El siguiente resultado, cuya demostración utiliza las mismas técnicas que el anterior, y con el que terminamos este capítulo, muestra que la condición necesaria y suficiente para la globalidad de los conjuntos semianalíticos en dimensión dos reside en la frontera.

Proposición 3.11. *Sea M una variedad analítica de dimensión 2 y $S \subset M$ un subconjunto semianalítico. Sea $F = \bar{S} \setminus \mathring{S}$ donde $\bar{S}$ y $\mathring{S}$ representan la adherencia y el interior de S en M respectivamente. Entonces S es global si y sólo si F es global.*

Demostración. El enunciado es inmediato si $\dim S \leq 1$ pues en este caso S y F se diferencian a lo más en un conjunto discreto, que es es un conjunto semianalítico global.

Así pues supongamos que $\dim S = 2$. Si S es global, admite una descripción

$$S = \bigcup_{i=1}^{q} \{x \in M \mid f_i(x) = 0, g_{i1}(x) > 0, \ldots, g_{ij_i} > 0\},$$

y es inmediato comprobar que $F \subset Z\Big(\prod_{i,j} g_{ij}f_i\Big)$, con lo que F es un subconjunto semianalítico de un conjunto analítico global de dimensión uno y por tanto es global por la proposición 2.1.

Recíprocamente, supongamos ahora que F es global. Veremos en primer lugar que $\delta(S)$ es abierto y cerrado en $\mathrm{Spec}_r(K)$ y por consiguiente constructible. Que $\delta(S)$ es abierto es inmediato. Veamos ahora que su complementario es también abierto. Sea β un orden de K con $\beta \notin \delta(S)$. Esto significa que para cualesquiera $f_1, \ldots, f_r \in \beta$, $\{f_1 > 0, \ldots, f_r > 0\} \cap (M \setminus S) \neq \varnothing$, y para probar que $\delta(S)$ es cerrado es suficiente encontrar un semianalítico global T con $\beta \in \tilde{T}$ y tal que $T \cap S = \varnothing$.

Como F es global, su clausura de Zariski Y es un subconjunto analítico de dimensión ≤ 1 y por consiguiente global. Sea $f \in \mathcal{O}(M)$ tal que f genera el ideal $\mathcal{J}_{Y,p}$ para casi todo punto $p \in Y$, esto es, salvo un conjunto discreto (cf. demostración del lema 2.4, capítulo 4). Evidentemente podemos suponer (cambiando f por $-f$ si es necesario) que $f \in \beta$. Un razonamiento idéntico al dado en la demostración del lema 3.5 muestra que

$$\overline{\{f > 0\} \cap (M \setminus S)} \cap \overline{\{f > 0\} \cap S} \subset D,$$

para un cierto conjunto discreto $D \subset M$. Aplicamos a continuación el lema 4.6 para encontrar, para cada $p \in D$, un entorno U_p y un conjunto seminalítico

$$H_p = \bigcup_{k=1}^{4} \{(h_p)_{k,1} > 0, (h_p)_{k,2} > 0\}$$

que separa $\overline{\{f > 0\} \cap (M \setminus S)}$ y $\overline{\{f > 0\} \cap S}$ localmente, esto es, en U_p se verifica:

a) $\overline{\{f > 0\} \cap (M \setminus S)} \subset H_p \cup \{p\}$;

b) $\overline{\{f > 0\} \cap S} \cap H_p = \{p\}$.

Usando los lemas 3.7 y 3.8 como en la demostración de la proposición, podemos encontrar un conjunto semianalítico global G tal que para todo $p \in D$, G_p aproxima a H_p y por tanto separa localmente $\{f > 0\} \cap (M \setminus S)$ y $\{f > 0\} \cap S$ en el sentido de las condiciones *a* y *b* anteriores. Si $\beta \notin \tilde{G}$ entonces $\beta \in \overline{\{f > 0\} \cap (M \setminus G)}$ y, al ser $\beta \notin \delta(S)$, resulta $(\{f > 0\} \cap (M \setminus G)) \cap (M \setminus S) \neq \varnothing$. Por otra parte, por construcción $(\{f > 0\} \cap (M \setminus G)) \cap S \neq \varnothing$ localmente alrededor de $p \in D$, lo que lleva a contradicción. Por consiguiente, tenemos $\beta \in \tilde{G}$, y en consecuencia $(\{f > 0\} \cap G) \cap (M \setminus S) \neq \varnothing$, lo que implica que $(\{f > 0\} \cap G) \cap S = \varnothing$. En definitiva, $T = \{f > 0\} \cap G$ es el semianalítico global que buscábamos, y la afirmación de que $\delta(S)$ es constructible queda demostrada.

Consideremos ahora una descripción arbitraria de $\delta(S)$:

$$\delta(S) = \bigcup_{i=1}^{r} \{\alpha \in \operatorname{Spec}_r(K) | l_{i1}(\alpha) > 0, \ldots, l_{is}(\alpha) > 0\}$$

para ciertas $l_{ij} \in \mathcal{O}(M)$. Como antes, el abierto semianalítico global

$$U = \bigcup_{i=1}^{r} \{x \in M | l_{i1}(x) > 0, \ldots, l_{is}(x) > 0\}).$$

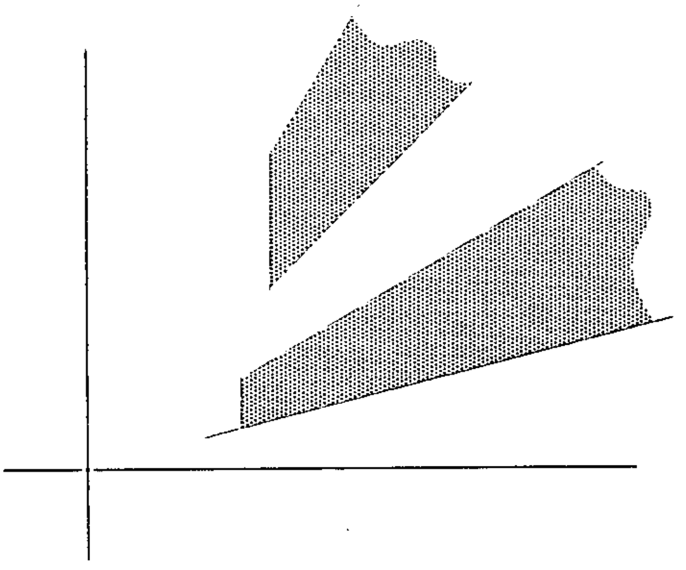

FIGURA 5.2.

difiere de S en un conjunto semianalítico de dimensión 1 contenido en $Y \cup Z\left(\prod_{i,j} l_{ij}\right)$ que por la proposición 2.1 es global. De todo ello se sigue que S es global y el resultado queda probado. □

Ejemplo 3.12. El conjunto sombreado S de la figura 5.2 es un counjunto semianalítico de dimensión 2, pero no es semianalítico global. En efecto, su frontera $F = S \setminus \overset{\circ}{S} = \bigcup_{t \in \mathbb{N}} (C_t \cup D_t)$, donde $C_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - xt = 0, \;\; x \geq t\}$ y $D_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = t2, \;\; t2 - 1 \leq y \leq t2\}$.

F es semianalítico pero no global, como puede comprobarse siguiendo el razonamiento del ejemplo 1.3, capítulo 1. □

Bibliografía

[Ab] ABHYANKAR, S.S.: *Algebraic Geometry for Scientists and engineers.* Mathematical Surveys and Monograps, **35**. American Mathematical Society.

[An-Be] ANDRADAS, C., BECKER, E.: «A note on the Real Spectrum of Analytic functions on an Analytic Manifold of dimension one.» *Proceedings of the Conference on Real Analytic and Algebraic Geometry*, Trento 1988. En *Lect. Notes Math.*, **1420**, 1–21. Springer-Verlag (1990).

[An-Br-Rz1] ANDRADAS, C., BRÖCKER, L., RUIZ, J.: «Minimal generation of basic open semianalytic sets.» *Invent. Math.*, **92** (1988), 409–430.

[An-Br-Rz2] ANDRADAS, C., BRÖCKER, L., RUIZ, J.: «Real Algebra and Analytic Geometry.» Por aparecer.

[Ar] ARTIN, E.: «Über die zerlegung definiter Funktionen n Quadrate.» *Hamb. Abh.*, **5** (1927), 100–115.

[Be] BECKER, E.: «The real holomorphic ring and sums of $2n$–th powers.» *Lect. Notes Math.*, **959**. Springer-Verlag (1982).

[Bo-Cs-Ry] BOCHNAK, J., COSTE, M., ROY, M-F.: *Géomìrie algébrique réelle.* Springer-Verlag (1986).

[Bo-Kz-Sh] BOCHNAK, J., KUCHARZ, W., SHIOTA, M.: «On Equivalence of Ideals of Real Global Analytic Functions and the 17-th Hilbert Problem.» *Wiskundig Seminarium, De Boelelaan* **1081**, HV Amsterdam (1980).

[Bo-Rs] BOCHNAK, J., RISLER, J.: «Le théorème des zéros pour les variétés analytiques réelles de dimension 2.» *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **8** (1975), 353–364.

[Brö1] BRÖCKER, L.: «On the separation of basic semialgebraic sets by polynomial.» *Manuscripta Math.*, **60** (1988), 497–508.

[Brö2] BRÖCKER, L.: «On Basic Semi-Algebraic Sets.» *Exposition Math.*, **9** (1991), 289–334.

[C] CARTAN, H.: «Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes.» *Bull. Soc. Math. France*, **85** (1957), 77–99.

[Co] COEN, S.: «Su rango dei fasci coerenti.» *Boll. Un. Mat. Ital.*, **22** (1967), 373–383.

[Fe-Re-Rz] FERNÁNDEZ, F., RECIO, T., RUIZ, J.: «Generalized Thom's Lemma in Seminanalytic Geometry.» *Bull. Acad. Polon. Sci. Mathematics*, **35/5–6** (1987), 297–301.

[G] GRAUERT, H.: «On Levi's Problem and the Imbedding of real Analytic Manifolds.» *Ann. of Math.*, **68/2** (1958).

[Gr-Rm] GRAUERT, H.; REMMERT, R.: *Coherent Analitic Sheaves*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **265**. Springer-Verlag (1984).

[H] HIRSCH, M.: *Differential Topology*. Springer-Verlag (1976).

[Jw1] JAWORSKI, P.: «Positive definite analytic functions and vector bundles.» *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **30/11–12** (1982), 501–506.

[Jw2] JAWORSKI, P.: «Extensions of orderings on fields of quotients of rings of real analytic functions.» *Math. Nachr.*, **125** (1983), 329–339.

[Jw3] JAWORSKI, P.: «The 17-th Hilbert problem for noncompact real analytic manifolds.» *Proceedings of the Conference on Real Algebraic Geometry held in Rennes, 1991*. En *Lect. Notes Math.*, **1524**. Springer-Verlag (1992).

[Kz] KUCHARZ, W.: «Sums of $2n$-th powers of real meromorphic functions.» *Monatsh. Math.*, **107** (1989), 131–336.

[Lg] LANG, S.: «The theory of real places.» *Ann. of Math.*, **57** (1953), 378–391.

[Ł] ŁOJASIEWICZ, S.: «Ensembles semianalytiques.» *Lecture Note at* IHES, Bures-sur-Yvette, reproduit 466765. Ecole Polytechnique, Paris.

[Nh] NARASIMHAN, R.: «Introduction to the Theory of Analytic Spaces.» Springer-Verlag (1966).

[Pr] PRESTEL, A.: «Model theory applied to some questions about polynomials.» *Proceedings of the Salzburg Conference*, May 29–June 1, 1986.

[Pu] DE LA PUENTE, M.J.: «Curvas de Zariski-densas en variedades algebraicas sobre un cuerpo real cerrado.» *Memoria de licenciatura*, UCM, 1984.

[Rs] RISLER, J.J.:«Le théorème des zéros en géométries algébrique et analitique réelle.» *Bull. Soc. Math. France*, **104** (1976), 113–127.

[Rz1] RUIZ, J.: «A note on a separation problem.» *Archiv der Mathematik*, **43** (1984), 422–426.

[Rz2] RUIZ, J.: «On Hilbert's 17th problem and the real nullstellensatz for global analytic functions.» *Math. Z.*, **190** (1985), 447–459.

[Rz3] RUIZ, J.: «On the connected components of a global semianalytic set.» *J. Reine Angew. Math.*, **392** (1988), 137–144.

[Rz4] RUIZ, J.: «A characterizatization of sums of $2n$-th powers of global meromorphic functions.» *Proceedings of the* AMS, **109** (1990), 915–923.