UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS ECONÓMICO

PROGRAMACIÓN ESTOCÁSTICA: ALGUNAS APORTACIONES TEÓRICAS Y COMPUTACIONALES

Tesis Doctoral presentada por

MARÍA DEL MAR MUÑOZ MARTOS

y dirigida por los doctores

D. EMILIO CERDÁ TENA y

D. RAFAEL CABALLERO FERNÁNDEZ

Madrid, octubre de 1998.

ÍNDICE

PRÓLOGO

En esta tesis se estudia la resolución de problemas de programación matemática en los que algunos o todos los parámetros del problema son variables aleatorias. Se aborda este análisis para problemas de estas características con una y varias funciones objetivo. Como se verá a lo largo del trabajo, la mayor dificultad en la resolución de los problemas que planteamos está en la especificación de un concepto de solución para los mismos. En las publicaciones existentes se han definido distintos conceptos de solución. Estas definiciones surgen a partir de problemas que se obtienen al transformar el problema de programación estocástica o de programación estocástica multiobjetivo en determinista, lo que hace que la evaluación de una solución como "buena" o "mala" sea difícil. Esto nos ha llevado a considerar algunos de los conceptos de solución definidos hasta ahora y a estudiar la posible existencia de relaciones entre ellos. Esta cuestión es el objetivo fundamental de esta tesis, que ha sido estructurada de la siguiente forma:

En el capítulo uno se estudian conceptos básicos de programación estocástica y de programación multiobjetivo que serán utilizados a lo largo del trabajo.

El capítulo dos se dedica al estudio de la programación estocástica con restricciones probabilísticas o de azar. A lo largo de todo el capítulo se considera la obtención del que se denomina problema determinista equivalente. Dicho problema se obtiene a partir de las características estadísticas del problema de programación estocástica de partida y, siempre, en base a las preferencias del decisor. En primer lugar, se analiza la obtención del conjunto de oportunidades del problema determinista equivalente y, posteriormente, se considera la transformación del objetivo estocástico. Para llevar a cabo esta transformación se consideran cinco posibles criterios, todos ellos definidos y estudiados en la literatura y se analiza su transformación para funciones objetivo estocásticas de tipo lineal con determinadas características estadísticas.

Hasta aquí el trabajo se ha dedicado a una recopilación y estructuración de los conceptos necesarios para el desarrollo de esta tesis. Los siguientes cuatro capítulos recogen nuestras aportaciones al campo de la programación estocástica en sus vertientes monobjetivo y multiobjetivo.

En el capítulo tres, se define un problema de programación estocástica al que hemos denominado problema estocástico con función objetivo cuadrática. Dicho problema se define en este trabajo y se analiza, además, su resolución mediante los criterios anteriormente mencionados. La razón fundamental que nos ha llevado a plantear este tipo de función objetivo es que mediante este tipo de funciones se pueden plantear problemas de programación estocástica en los que el objetivo mida diferencias cuadráticas entre variables de decisión y parámetros aleatorios. Creemos que este tipo de funciones objetivo son de utilidad en problemas de ámbito económico, en los que las funciones objetivo de tipo cuadrático se utilizan con frecuencia. Finalmente, se cierra el capítulo con un análisis de las relaciones existentes entre los distintos criterios existentes para transformar el la función objetivo estocástica en su determinista equivalente. En él se determina bajo qué condiciones la aplicación de criterios distintos da lugar a la misma solución para el problema de programación estocástica, de lo cual se deduce que la aplicación de criterios que surgen desde ópticas distintas están estrechamente relacionados.

Los capítulos cuatro y cinco se dedican a la resolución de problemas de programación estocástica multiobjetivo. Para resolver estos problemas se han definido en la literatura distintos conceptos de solución y se han establecido distintas técnicas. Ben Abdelaziz (1992) clasifica éstas en función de las transformaciones que se llevan a cabo para resolver el problema. Esta clasificación es la que se sigue en este trabajo. El capítulo cuatro analiza lo que Ben Abdelaziz denomina *Enfoque Multiobjetivo*, en el que se engloban todas las técnicas que, para resolver el problema de programación estocástica multiobjetivo, transforman éste en uno multiobjetivo determinista equivalente, aplicando a cada objetivo, por separado, un criterio de transformación. A partir de este problema multiobjetivo determinista equivalente se han definido varios conceptos de solución eficiente de problemas de programación estocástica multiobjetivo. Cada uno de ellos es una extensión de los conceptos existentes en la literatura para los problemas de programación estocástica. En este trabajo se recogen estos conceptos y se establecen relaciones entre ellos. Los resultados que se obtienen sobre los conjuntos soluciones eficientes que se pueden asociar a un mismo problema son paralelos a los que se obtienen en el capítulo tres.

El capítulo cinco se dedica al *Enfoque Estocástico*. Se denomina así al conjunto de técnicas que resuelven el problema de programación estocástica multiobjetivo transformando el problema multiobjetivo estocástico en uno de programación estocástica con una función objetivo, obtenida a partir del conjunto de objetivos estocásticos del problema de partida, y, posteriormente, se resuelve el problema obtenido eligiendo algún criterio de la programación estocástica. Consideramos la aplicación del método de las ponderaciones y la resolución posterior del problema resultante aplicando algunos de los criterios de la programación estocástica. Una vez obtenidos los problemas deterministas equivalentes aplicando distintos criterios, se analiza las relaciones entre las soluciones de éstos y los conceptos de solución eficiente definidos en el capítulo cuatro de este trabajo.

Por otro lado, de nuestro estudio se deduce que la resolución de cualquier problema de programación estocástica es, en general, complicada, debido a la existencia de distintos criterios para resolver el problema. Incluso en problemas con un solo objetivo y con pocas variables, lo normal es que, dado un problema de programación estocástica, se desee conocer las soluciones del mismo mediante más de un criterio. Esto nos ha llevado a la implementación computacional de los problemas analizados en este trabajo En el capítulo seis se explica el funcionamiento de estos programas. Los listados de estos programas aparecen en el anexo, así como las soluciones obtenidas para distintos ejemplos.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1. PROGRAMACIÓN ESTOCÁSTICA.

Muchos problemas de programación matemática incorporan parámetros que se suponen conocidos en el momento de resolver el problema y, por tanto, constantes a la hora de resolverlo. Sin embargo, si el problema de optimización es el resultado de la representación mediante un modelo de una situación real en la que hemos de tomar una decisión, es frecuente que se desconozcan los valores de algunos de los parámetros que intervienen en él. Este desconocimiento da lugar a que en el momento de adoptar una decisión se desconozcan las posibles consecuencias de la misma.

En base a la información disponible acerca de los posibles resultados de una acción en cualquier proceso de toma de decisiones, podemos decir que cuando tomamos una decisión estamos ante una situación de:

- Certidumbre: Si cada acción da lugar a un resultado conocido e invariable.

- Riesgo: Si cada acción lleva a un posible resultado y cada resultado lleva asociada una probabilidad de que ocurra, conocida para el decisor. La situación de certidumbre es un caso degenerado de una situación de riesgo con probabilidades cero y uno.

- Incertidumbre: Si cada acción tiene una consecuencia de entre un conjunto de posibles resultados, pero se desconocen las probabilidades de éstos.

Para resolver problemas en los que se desconocen los valores de algunos de los parámetros que intervienen en el mismo (situaciones de riesgo o de incertidumbre), es posible adoptar distintas "soluciones". En determinadas circunstancias, y en base a la información disponible acerca de ellos, es posible "sustituir" estos valores por una estimación que se ajuste bien a datos históricos de los mismos, una medición no exacta de su valor esperado,....Otra posibilidad es tratar estos parámetros como variables aleatorias.

La programación estocástica analiza la resolución de problemas de programación matemática en los que algunos parámetros son desconocidos pero se conoce la distribución de probabilidad asociada a ellos y, por tanto, las situaciones que se analizan mediante la misma son situaciones de riesgo.

Prékopa (1995) define la programación estocástica como "*la resolución de problemas de programación matemática en los que algunos o todos los parámetros son variables aleatorias*".

En programación estocástica se relaja, por tanto, la hipótesis de que todos los parámetros del problema son deterministas, permitiendo tratar como variables aleatorias parámetros sujetos a incertidumbre o a posibles errores en su medición o estimación y de los que se conoce su distribución de probabilidad.

Los problemas de programación estocástica pueden dividirse en modelos estáticos y dinámicos. Nos centraremos en el estudio de los modelos estáticos.

La formulación general de un problema estático de programación estocástica es:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{"Opt"}} & \tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \\ \text{s.a} & \tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \leq 0,\ i = 1,2,\ldots,m \\ & \mathbf{x} \in D \end{array}$$

donde $\tilde{\xi}$ es un vector aleatorio definido sobre un conjunto $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^s$. Suponemos dada la familia $\mathbb{F}$ de eventos, es decir, subconjuntos de $\mathbb{E}$, y la distribución de probabilidad P definida sobre $\mathbb{F}$, de manera que para cualquier subconjunto de $\mathbb{E}$, $A \subset \mathbb{E}$, $A \in \mathbb{F}$, la probabilidad de A, $P(A)$, es conocida. Además, se mantiene la hipótesis de que la distribución de probabilidad, P, es independiente de las variables de decisión, $x_1,\ldots,x_n$.

Suponemos que las funciones $\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}), \tilde{g}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi}), \tilde{g}_2(\mathbf{x},\tilde{\xi}),\ldots, \tilde{g}_m(\mathbf{x},\tilde{\xi})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, están definidas en todo el espacio $\mathbb{R}^n \times \mathbb{E}$.

Si analizamos el problema de programación estocástica, el hecho de que algunos parámetros del problema sean aleatorios da lugar a que la función objetivo y las funciones $\tilde{g}_i$, $i = 1, 2,\ldots,q$, sean variables aleatorias, lo que implica *que el problema no esté bien definido matemáticamente*. Nótese que si bien la elección de un vector $\mathbf{x}$ es determinista, puesto que las decisiones que adopta el decisor no están sujetas a incertidumbre, el hecho de que los parámetros del problema sean variables aleatorias puede dar lugar a que la decisión adoptada sea no factible una vez que se resuelve la incertidumbre o que, aún siendo factible, no sea óptima.

Así, para cada realización ξ de $\tilde{\xi}$ el problema de programación estocástica es un problema determinista de programación matemática, pero, si se ha de elegir un vector $\mathbf{x}$ antes de que se realicen las variables aleatorias, el término "opt" no tiene sentido, puesto que el conjunto de soluciones factibles del problema será distinto para cada realización de $\tilde{\xi}$.

En cuanto a la función objetivo, al estar afectada por parámetros aleatorios, es ella misma una variable aleatoria, y, puesto que un conjunto de valores aleatorios no admite una relación de orden, podemos tener una realización de $\tilde{\xi}$, ξ_1, para la que:

$$z(\mathbf{x}_1, \xi_1) < z(\mathbf{x}_2, \xi_1)$$

y otra realización, ξ_2, para la cual:

$$z(\mathbf{x}_1, \xi_2) > z(\mathbf{x}_2, \xi_2).$$

Por tanto, en un problema de programación estocástica no existe un vector **x** que sea óptimo para todas las realizaciones de la variable aleatoria.

De todo ello se desprende que hemos de especificar el concepto de solución de un problema de programación estocástica.

Conceptos de solución de un problema de programación estocástica.

Distinguimos en primer lugar los conceptos de solución en las dos situaciones en las que nos podemos plantear la resolución del problema de programación estocástica, denominadas situación "**esperar y ver**" y situación "**aquí y ahora**".

La situación "**esperar y ver**" se caracteriza porque se conocen las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias que intervienen en el problema, pero, además, las variables aleatorias se realizan antes de tomar la decisión, de manera que en el momento de elegir el vector **x** óptimo del problema, se conocen los valores de todos los parámetros del mismo, por lo que el problema a resolver es determinista y su solución se puede obtener por cualquiera de las técnicas de optimización determinista.

Se podría pensar, por tanto, que en la situación "esperar y ver" no existe desconocimiento de los parámetros del problema y, por tanto, que se está en una situación de certidumbre. Sin embargo, en determinados casos se puede estar interesado en conocer la distribución del óptimo del problema o algunos de sus momentos (valor esperado, varianza,...), antes de que se realicen las variables aleatorias, con el fin de conocer la elección óptima del problema en cada una de las posibles situaciones en las que nos podamos encontrar cuando se resuelva la incertidumbre.

El estudio de problemas del tipo "esperar y ver" es denominado también en la literatura como *programación estocástica pasiva* o *resolución de problemas de distribución* y ha sido ampliamente estudiado, entre otros, por Bereanu (1980) y Vajda (1972), para problemas lineales, y por Stancu-Minasian (1984) en los casos lineal y fraccional.

La situación "**aquí y ahora**" corresponde a problemas en los que se ha de tomar una decisión antes de que se resuelva la incertidumbre a la que están sujetos los parámetros del mismo y en los que la adopción de una decisión u otra no afecta a la distribución de probabilidad de los parámetros aleatorios. Kall (1982) distingue cuatro planteamientos distintos a la hora de resolver estos problemas. A continuación describimos brevemente estos cuatro enfoques. Para ello consideramos el problema de programación estocástica:

$$
\begin{aligned}
&\text{"}\min_{\mathbf{x}}\text{"} \ \tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \\
&\text{s.a} \ \ \tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \leq 0, \quad i = 1,2,\ldots,m \\
&\qquad \mathbf{x} \in D
\end{aligned}
$$

en el que, sin pérdida de generalidad, se ha adoptado como criterio de optimización el de mínimo.

1. Resolución mediante teoría de juegos.

Corresponde a situaciones en las que no se conoce exactamente la distribución de probabilidad del vector de parámetros aleatorios del problema, $\tilde{\xi}$, y sólo puede suponerse que su función de distribución, F, pertenece a una cierta clase de funciones de distribución, $\mathbf{F}$. Para resolver el problema estocástico se puede utilizar una estrategia propuesta usualmente en teoría de juegos (en concreto en juegos bipersonales de suma cero): elegir el punto de vista más pesimista, escogiendo aquella distribución $F \in \mathbf{F}$, para la que el valor esperado del objetivo sea mayor. El problema a resolver mediante esta aproximación es:

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{x}} \max_{F \in \mathbf{F}} E\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} \\
&\text{s.a} \quad \mathbf{x} \in D
\end{aligned}
$$

Un reciente trabajo que aborda este tipo de problemas es el de Rustem y Howe (1998).

2. Obtención de soluciones eficientes.

La base de este enfoque es la definición de un concepto de solución eficiente para el problema de programación estocástica y, en base a este concepto, la obtención del conjunto de soluciones eficientes del problema. Se han definido en la literatura distintos conceptos de solución eficiente. Para ello se buscan definiciones que sean coherentes matemáticamente y, además, tengan un significado para el problema que se plantea.

Ben Abdelaziz (1992) realiza un análisis exhaustivo de este enfoque y agrupa estos conceptos de solución en dos bloques: la *eficiencia puntual* y la *eficiencia en distribución*. En el primero de ellos, *eficiencia puntual*, se encuadran todos los conceptos que se basan en la determinación de las posibles consecuencias de todos los posibles eventos o estados de la naturaleza que puedan darse en el problema y en la búsqueda del subconjunto formado por las soluciones eficientes de este conjunto de posibles resultados. Uno de los trabajos más importantes en este bloque se debe a Tammer, que define el concepto de solución ε- eficiente (véase Tammer (1978)) y analiza la obtención de soluciones de este tipo mediante la resolución de problemas paramétricos.

La *eficiencia en distribución* se basa en la teoría clásica de la utilidad esperada de von Newmann y Morgenstern. En este caso se supone que la estructura de preferencias del decisor satisface los axiomas de esta teoría, lo que implica que existe una función u, llamada función de utilidad, única salvo una transformación monótona afín positiva, tal que, dadas dos variables aleatorias $\tilde{\xi}$ y $\tilde{\eta}$, $\tilde{\xi}$ es preferida o indiferente a $\tilde{\eta}$ si y sólo si:

$$E\{u(\tilde{\eta})\} \leq E\{u(\tilde{\xi})\}$$

A partir de esto, el análisis de la eficiencia en distribución se reduce a fijar la función de utilidad del individuo y determinar la elección que maximiza su nivel de utilidad esperada:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Max}} & E\{u(\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}))\} \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array}$$

Evidentemente, la solución a este problema determinista dependerá del tipo de preferencias del individuo que se materializan en el tipo de función de utilidad del problema.

De entre los trabajos más recientes en los que se analiza eficiencia en distribución cabe destacar el de Ben-Tall y Teboulle (1986) que analizan la resolución de problemas de programación no lineal con restricciones estocásticas mediante el enfoque de la teoría de la utilidad esperada. Ben Abdelaziz (1992) analiza también problemas de eficiencia en distribución para problemas de programación estocástica y su extensión al caso multiobjetivo. Además, como veremos más adelante, este enfoque se utiliza frecuentemente en estudios de Teoría Económica de análisis de elección bajo incertidumbre.

3. Modelos que penalizan la violación de las restricciones.

La resolución de problemas de programación estocástica mediante esta técnica conlleva la transformación del problema estocástico en uno determinista denominado problema determinista equivalente. Dicha transformación se realiza en base a las características estadísticas del problema estocástico y a las preferencias del decisor. Mediante este enfoque, para obtener el problema determinista equivalente se penaliza la posible violación del conjunto de restricciones del problema. Dado el problema de programación estocástica:

$$\begin{array}{ll} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} & \tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \\ \text{s.a} & \tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq 0, \quad i=1,2,\ldots,m \\ & \mathbf{x} \in D \end{array}$$

podemos cuantificar esta penalización mediante la función $\widetilde{Q}(\mathbf{x},\widetilde{\xi})$, que se define de la siguiente forma:

$$\widetilde{Q}(\mathbf{x},\widetilde{\xi}) = \begin{cases} h(g_1(\mathbf{x},\widetilde{\xi}), g_2(\mathbf{x},\widetilde{\xi}),\dots,g_m(\mathbf{x},\widetilde{\xi})) & \text{si algun } \widetilde{g}_i(\mathbf{x},\widetilde{\xi}) > 0, i = 1,2,\dots,m. \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

con h: $\mathbb{R}^n \times \mathbf{E} \to \mathbb{R}$.

Esta función, que penaliza la violación de las restricciones, se interpreta como un coste extra o una pérdida debida a la posible infactibilidad de la solución del problema, una vez que se han realizado las variables aleatorias del mismo.

Una vez definida la función $\widetilde{Q}(\mathbf{x},\widetilde{\xi})$, se plantea el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} & \widetilde{z}(\mathbf{x},\widetilde{\xi}) + \widetilde{Q}(\mathbf{x},\widetilde{\xi}) \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array}$$

problema estocástico que se transforma en determinista siguiendo alguna regla de decisión. Generalmente, en estos modelos se utiliza el criterio de valor esperado para obtener el determinista equivalente, con lo cual el problema de decisión que hemos de resolver es:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & E\{\widetilde{z}(\mathbf{x},\widetilde{\xi}) + \widetilde{Q}(\mathbf{x},\widetilde{\xi})\} \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array}$$

La resolución de estos problemas ha sido ampliamente estudiada hasta ahora. Cabe destacar los trabajos de Kall y Wallace (1994) y de Prékopa (1995). En ambos trabajos se estudian las características de estos problemas y los métodos existentes en la literatura para resolverlos.

4. Programación con restricciones probabilísticas o de azar.

Al igual que en el enfoque anterior, estas técnicas transforman el problema estocástico en uno determinista, denominado problema determinista equivalente, cuya solución es considerada solución del problema estocástico. Para transformar las restricciones estocásticas en deterministas se fija una probabilidad y se exige que se verifiquen las restricciones estocásticas con esa probabilidad. En cuanto a la función objetivo se suele tomar su valor esperado, si bien existen distintos criterios para transformar el objetivo en una función determinista. En este trabajo nos centramos en este último enfoque: *programación estocástica con restricciones probabilísticas o de azar.*

La existencia de más de un concepto de solución de un problema de programación estocástica en la situación "**aquí y ahora**" puede dar lugar a cierta confusión. Kall (1982) señala que la elección de un método de resolución u otro depende del tipo de problema que se pretenda resolver y deberá de realizarse en base a las características del problema concreto que se pretende resolver y a las preferencias del decisor. Incluso, se puede considerar la posibilidad de combinar más de un criterio para poder recoger aspectos deseables de la solución al problema, pero, en general, no es posible ordenar estos conceptos.

De todo esto se deduce que la resolución de cualquier problema de programación estocástica lleva implícita la necesidad de elegir un concepto de solución y esta elección debe llevarse a cabo en función de las características del problema real que se desee resolver.

2. PROGRAMACIÓN MULTIOBJETIVO.

Muchos de los problemas que se resuelven mediante programación matemática reflejan, de una forma u otra, problemas reales de toma de decisiones. En estos casos, se dan situaciones en las que se ha de elegir la mejor alternativa de entre un conjunto de ellas. En estos casos el problema de decisión se realiza en base a un conjunto de objetivos que, generalmente, están en conflicto. Esto ha dado lugar a plantear la resolución de problemas de programación matemática con objetivos múltiples. Consideremos el problema:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\left(z_1(\mathbf{x}),\ldots,z_q(\mathbf{x})\right) & \\ \text{s.a} \quad \mathbf{x} \in D & \end{array} \qquad \text{(P)}$$

con $\mathbf{x}$ vector de variables de decisión del problema, D subconjunto de $\mathbb{R}^n$, y z_k, función real de n variables reales, $z_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, para todo $k \in \{1, 2, ..., q\}$.

Evidentemente, el hecho de que el número de funciones objetivo del problema (P) sea mayor que uno implica que el concepto de óptimo del problema de la programación matemática no sea adecuado y que para su resolución haya que definir conceptos de solución del mismo. Surge así el concepto de solución eficiente, que enunciamos a continuación.

Definición 1. Solución eficiente.

Un punto $\mathbf{x}^*$ se dice que es un óptimo de Pareto o solución eficiente del problema (P) si no existe ningún $\mathbf{x} \in D$ tal que:

$$z_k(\mathbf{x}) \le z_k(\mathbf{x}^*) \text{ para todo } k \in \{1,2,\ldots,q\}$$

$$z_s(\mathbf{x}) < z_s(\mathbf{x}^*) \text{ para algún } s \in \{1, 2, ..., q\}. \blacksquare$$

Es decir, $\mathbf{x}^*$ es solución eficiente del problema (P) si no existe en el espacio de decisión un punto, distinto al considerado, que mejore o mantenga todos los objetivos y mejore estrictamente alguno de ellos. Denotamos por $\mathcal{E}$ al conjunto de soluciones eficientes del problema (P).

A partir de este concepto se han considerado otros, relacionados con éste, y que pasamos a definir.

Definición 2. Solución débilmente eficiente.

Un punto $\mathbf{x}^* \in D$ *es solución débilmente eficiente si no existe* $\mathbf{x} \in D$ *tal que* $z_k(\mathbf{x}) < z_k(\mathbf{x}^*)$ *para todo* $k \in \{1, 2, ..., q\}$.■

De esta definición se desprende que un punto factible del problema (P) es óptimo débil de Pareto o solución débilmente eficiente si no existe otra alternativa factible en el problema que mejore estrictamente todos los objetivos del problema. Denotamos por $\mathcal{E}^d$ al conjunto de soluciones débilmente eficientes de (P).

Una vez definidos los conceptos de eficiencia y de eficiencia débil, consideramos ahora la posibilidad de excluir algunas de las soluciones eficientes del problema (P) que pueden no ser deseables por cuanto suponen una mejora infinita de alguno de los objetivos sin empeorar a los otros demasiado. Para excluir estos casos surgen los conceptos de eficiencia propia. Nos centramos en unos de ellos, el de eficiencia propia de Geoffrion.

Definición 3. Eficiencia propia de Geoffrion.

$\mathbf{x}^* \in D$ es solución propiamente eficiente según Geoffrion del problema (P) si es eficiente y existe algún número real positivo M tal que para todo $k \in \{1, 2, ..., q\}$ y para todo $\mathbf{x} \in D$ que verifique $z_k(\mathbf{x}) < z_k(\mathbf{x}^*)$ existe al menos un $s \in \{1, 2, ..., q\}$ tal que $z_s(\mathbf{x}^*) < z_s(\mathbf{x})$ y, además, se verifica que:

$$\frac{z_k(\mathbf{x}^*) - z_k(\mathbf{x})}{z_s(\mathbf{x}) - z_s(\mathbf{x}^*)} \leq M. \blacksquare$$

Este concepto establece una cota común sobre las tasas de intercambio de los objetivos que mejoran y los que empeoran, cuando se compara una solución eficiente con las demás soluciones factibles del problema.

Denotamos por $\mathcal{E}^{\,p}$ al conjunto de soluciones propiamente eficientes según Geoffrion del problema (P).

Existen otros conceptos de solución propiamente eficientes y se han establecido relaciones entre estos conceptos. Sawaragi, Nakayama y Tanino (1985) analizan estos conceptos, así como el de solución eficiente no propia y las relaciones entre ellos.

De las tres definiciones dadas se deduce que, en general, el conjunto de soluciones débilmente eficientes del problema (P) contiene al de soluciones eficientes y éste, a su vez, al de propiamente eficientes: $\mathcal{E}^{\,p} \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{E}^{\,d}$.

Una vez definidos los conceptos de solución eficiente, débilmente y propiamente eficiente, analizamos las condiciones para las que podemos asegurar que el podemos asegurar la existencia de soluciones eficientes del problema (P).

Teorema 1. (Sawaragi, Nakayama y Tanino, (1985, pág. 59).

Sea $\mathbf{z}$ una función vectorial, $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_q)^t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ y sea D un subconjunto compacto y no vacío de $\mathbb{R}^n$. Si cada componente de $\mathbf{z}$, z_k, es una función continua, entonces el problema multiobjetivo (P):

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\left(z_1(\mathbf{x}), \ldots, z_q(\mathbf{x})\right) & \\ \text{s.a} \quad \mathbf{x} \in D & \end{array} \qquad \text{(P)}$$

tiene una solución óptima de Pareto.■

En cuanto a las técnicas existentes en la literatura para resolver el problema (P), podemos agruparlas en *técnicas o métodos generadores*, *técnicas con información a priori* y *técnicas interactivas*. Las diferencias entre estas técnicas radican en la existencia de información previa a la resolución del problema y del intercambio de información entre los dos agentes que intervienen en el proceso de decisión (analista y decisor). Así, si para resolver el problema no se utiliza información acerca de las preferencias del decisor respecto de la solución del problema, la labor del analista se centra en la obtención del conjunto de soluciones eficientes del problema o un subconjunto de éste representativo. Las técnicas que se encargan de esto se denominan *técnicas generadoras*.

Si para resolver el problema se utiliza información a priori acerca de las preferencias del decisor, las soluciones obtenidas se denominan *soluciones satisfactorias* y los métodos de resolución *técnicas con información a priori*. Finalmente, las *técnicas interactivas* se caracterizan porque la resolución del problema se lleva a cabo estableciendo un flujo de información constante entre analista y decisor. Las soluciones que se obtienen mediante estas técnicas se denominan *soluciones de compromiso*.

Estudiamos brevemente una de las técnicas generadoras: *el método de las ponderaciones*.

Método de las ponderaciones.

Para resolver el problema (P) mediante el método de las ponderaciones se asigna un peso o ponderación no negativo a cada una de las funciones objetivo del problema, y se plantea el problema de minimizar la suma de las funciones objetivo del problema (P), ponderada cada una de ellas por el peso asignada a la misma. Sea $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_q)^t$ el vector de pesos, $\mu_k \in \mathbb{R}^+$. El problema asociado al problema (P) mediante el método de las ponderaciones es:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \sum_{k=1}^{q} \mu_k z_k(\mathbf{x}) \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad (\mathrm{P}(\mu))$$

El siguiente teorema nos determina las relaciones entre las soluciones del problema (P(μ)) y las soluciones eficientes del problema (P).

Teorema 2. Sawaragi, Nakayama y Tanino (1985).

a) Supongamos que las funciones $z_1,\ldots,z_q$ son convexas y que D es un conjunto convexo. Si **x*** es solución propiamente eficiente del problema (P), existen $\mu_1,\ldots,\mu_q$, $\mu_k > 0$ para todo $k \in \{1,2,\ldots,q\}$, tales que **x*** es solución del problema (P(μ)).

b) Si **x*** es solución del problema (P(μ)), con $\mu > \mathbf{0}$, entonces **x*** es solución propiamente eficiente del problema (P).

c) Si **x*** es solución única del problema (P(μ)), con $\mu \geq \mathbf{0}$, entonces **x*** es solución eficiente el problema (P).■

A partir de este teorema podemos afirmar que si se verifica la convexidad del conjunto de oportunidades y de las funciones objetivo, el conjunto de soluciones propiamente eficientes del problema (P) se puede obtener sin más que resolver el problema (P(μ)) para todos los posibles valores del vector μ con componentes estrictamente positivas. En cambio, si no se verifica la condición de convexidad algunas de las soluciones eficientes del problema (P) pueden no obtenerse mediante este método. Además, a partir del apartado (c) de este teorema, si consideramos vectores de pesos con alguna componente nula (lo que implica que la función objetivo asociada a esa componente no se considera cuando se resuelve el problema (P(μ))) podemos asegurar que la solución obtenida es eficiente sólo si es solución única de (P(μ)). En otro caso, sólo podemos asegurar que las soluciones obtenidas son débilmente eficientes.

3. LA PROGRAMACIÓN ESTOCÁSTICA Y LA PROGRAMACIÓN MULTIOBJETIVO EN LA ECONOMÍA.

Una vez analizados los conceptos de solución de problemas de programación estocástica y de programación estocástica multiobjetivo, nos centramos en este apartado en la aplicación de éstos en la resolución de problemas económicos.

A partir de la definición de Prékopa (1995), señalada anteriormente, de que la programación estocástica se refiere "al estudio de problemas de programación matemática en los que algunos o todos los parámetros son variables aleatorias", es clara tanto su aplicación a problemas de naturaleza económica como el interés que la programación estocástica tiene para la economía. En este sentido amplio, consideramos que ello aparece reflejado en importantes libros actuales de economía como, por ejemplo: Sargent (1987a y 1987b), Conrad y Clark (1987), Duffie (1988), Laffont (1989), Zenios (1993), Dixit y Pindyck (1994), Takayama (1994), Mas-Collel, Whinston y Green (1995) y Tapiero (1998).

Referencias importantes en la literatura económica que incorporan modelos de optimización estocástica, específicamente dinámica, son, por ejemplo, las siguientes: Chow (1975, 1981 y 1997), Kendrick (1981 y 1988), Mangel (1985), Stockey y Lucas (1989), Bertsekas (1995), Amman, Kendrick y Rust (1996), Sengupta y Fanchón (1997).

Tal y como comentan Gravelle y Rees (1984), muchos aspectos de la actividad económica no pueden modelizarse si el marco teórico mediante el que se analizan no incorporan la aleatoriedad inherente a ésta. En este sentido, cabe señalar que muchos problemas económicos, modelizados en un ambiente de certidumbre, admiten, de manera natural, una formulación como problemas estocásticos, puesto que en estos problemas algunos parámetros que se suponen conocidos pueden no serlo en el momento de tomar la decisión. En situaciones de este tipo, si el problema de decisión se formula mediante un modelo de programación matemática, la cuestión anterior puede traducirse en la existencia de parámetros en el problema con valor desconocido y que pueden ser tratados como variables aleatorias, con lo cual, el problema a resolver es un problema de programación estocástica.

La mayoría de los modelos teóricos en teoría económica, en el ámbito que estamos comentando, utilizan, para resolver los problemas, la teoría de la utilidad esperada de von Newman-Morgenstern (1947). Apoyándose en el llamado Principio de Bernouilli, que Daniel Bernouilli sugirió para superar la famosa paradoja de San Petesburgo, von Newmann y Morgenstern, en la segunda edición de su importante libro, que daría origen a la Teoría de Juegos, demostraron que si se cumplen determinados axiomas, las preferencias sobre loterías pueden ser expresadas en términos de utilidad esperada, para problemas de decisión en ámbito de riesgo. Diferentes formulaciones de estos axiomas se encuentran también en Herstein y Milnor (1953) y Hausner (1954). Estos conceptos, así como una nueva formulación axiomática, fueron divulgados y difundidos por Luce y Raiffa (1957).

En otros trabajos de economía, más aplicados, encontramos también los otros tratamientos y métodos de solución de problemas estocásticos comentados en el apartado uno. Ya en 1976, Stancu-Minasian y Wets, en una descripción exhaustiva de publicaciones de trabajos de investigación sobre programación estocástica entre 1955 y 1975, señalan, como aplicaciones en economía, 11 trabajos sobre economía agraria, 26 sobre planificación económica, 49 sobre economía financiera, 6 sobre modelos de inventario, 21 sobre planificación de la producción, 11 sobre economía de recursos naturales y 14 sobre diferentes problemas de asignación o transporte. Desde entonces, han aparecido muchas más publicaciones. Citemos, por ejemplo, las siguientes: Prékopa, Gankzer, Deak y Patyi (1980), Coté y Laughton (1982), Kelle (1984), Sherali, Soyster, Murphy y Sen (1984), Markowitz (1987), Bloom (1988), Dempster e Ireland (1988), Black, Derman y Toy (1990), Konno y Yamazaki (1990), Dupacova (1991a y 1991b), Dupacova, Gaivoronski, Kos y Szantai (1991), Pinter (1991), MacLean y Ziemba (1991), Escudero, Kaseman, King y Wets (1993), Golub, Holmer, Mackendall, Pohlman y Zenios (1994), Zenios (1995), Ahn, Escudero y Guignard-Spielberg (1995), Metters (1998).

Por otro lado, muchos problemas de naturaleza económica se caracterizan también porque en la elección de la mejor decisión se han de tener en cuenta varios criterios y, por tanto, se desea alcanzar más de un objetivo. La programación multiobjetivo y, en general, la teoría de la decisión multicriterio, se encarga de la resolución de problemas de este tipo y, por tanto, su aplicación a problemas económicos es clara. Así, tal y como comenta Romero (1993), Milton Friedman, en el primer capítulo de su libro *Teoría de Precios*, publicado en 1962, enfatiza el carácter multicriterio de los problemas económicos, al considerar como económicos sólo los problemas en los que subyace la existencia de criterios múltiples. Cuando el problema de decisión se establece en base a un solo criterio, nos encontramos ante lo que Friedman llama un problema tecnológico, en el que no existen problemas de elección propiamente dichos. De hecho, uno de los conceptos más importantes en teoría de la decisión multicriterio es el de solución eficiente, que se debe al economista Vilfredo Pareto, quien introdujo este concepto en el siglo XIX.

En este sentido, hay que señalar que existen muchos trabajos en los que se aplica la teoría de la decisión multicriterio a problemas de naturaleza económica. Así, en el apéndice bibliográfico del libro de Romero (1993) se dan muchas referencias de aplicaciones a diferentes áreas de la economía, tales como finanzas, inversión, mercadotecnia, producción, programación económica o recursos ambientales o naturales. Por otra parte, un libro reciente de Ballesteros y Romero (1998) estudia la conexión entre el análisis económico y la teoría de la decisión multicriterio.

En este trabajo nos proponemos profundizar en la programación estocástica (con una sola función objetivo) así como estudiar problemas de programación matemática que incorporan los dos aspectos comentados (estocástico y multiobjetivo). A partir de las consideraciones anteriores, queda claro el interés que tiene para la economía los temas que vamos a tratar.

El desarrollo de la programación estocástica multiobjetivo es relativamente reciente. Uno de los primeros trabajos que se ocupan de problemas de este tipo es el de Contini (1968), en el que se analiza la resolución de problemas de programación por metas con parámetros aleatorios. En los años 80 aparecen trabajos que analizan la resolución de estos problemas, como los de Leclerq (1981a, 1981b y 1982). Stancu-Minasian en su libro *"Stochastic Programming with Multiple Objective Functions"* recoge los trabajos existentes en este campo hasta 1984 y analiza las posibles formas de resolver problemas de esta naturaleza. Cabe destacar también el capítulo 8 del texto de Goicoechea, Hansen y Duckstein (1982), en el que se describe el método PROTRADE, método interactivo para problemas de programación estocástica multiobjetivo. Surgen, posteriormente, otros trabajos como los de Teghem, Dufrane, Thauvoye, y Kunsch (1986), Stancu-Minasian y Tigan (1984, 1988), Stancu-Minasian (1992), Slowinski y Teghem (1990), Urli y Nadeau (1990) y los trabajos más recientes de Ben Abdelaziz (1992) y Ben Abdelaziz, Lang y Nadeau (1994 y 1995).

Debemos destacar, además, que la programación estocástica y la programación estocástica multiobjetivo ha sido aplicada a problemas reales. Así, Goicoechea, Hansen y Duckstein (1982) formulan un problema de programación estocástica multiobjetivo correspondiente a un modelo Input-Output en el que existen parámetros que son variables aleatorias y lo resuelven mediante el método interactivo PROTRADE. Teghem y Kunsh (1985) aplican resultados de la programación estocástica multiobjetivo en la planificación de un sistema de producción de energía. Easton y Rossin (1996) proponen un modelo de planificación del empleo que resuelven mediante programación por metas estocástica. García Aguado (1998) estudia, mediante programación por metas estocástica, un problema de planificación de la producción y un problema de financiación de una empresa multinacional.

CAPÍTULO 2

PROGRAMACIÓN ESTOCÁSTICA (I)

En este capítulo abordamos la resolución de problemas de programación estocástica mediante restricciones probabilísticas o de azar separadas. En primer lugar estudiaremos la transformación del conjunto de oportunidades en su determinista equivalente, centrándonos en el apartado dos en restricciones estocásticas lineales. Posteriormente, en el apartado tres, veremos cómo se transforma la función objetivo estocástica en su determinista equivalente. Para ello se consideran distintos criterios de transformación definidos en la literatura y se aplican a funciones objetivo de tipo lineal. Este análisis nos permitirá obtener, a partir de un problema de programación estocástica, su determinista equivalente, problema cuya solución es considerada óptima para el problema de partida.

1. RESTRICCIONES PROBABILÍSTICAS O DE AZAR.

Consideremos el problema de programación estocástica:

$$\begin{aligned} &\text{"}\underset{\mathbf{x}}{\mathrm{Min}}\text{"}\ \tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \\ &\text{s.a}\ \ \tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \leq 0, i = 1,2,\ldots,m \\ &\quad\ \ \mathbf{x} \in D \end{aligned} \tag{PE}$$

con $\tilde{\xi}$ vector aleatorio, definido sobre un conjunto $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^s$. Suponemos dada la familia $\mathbb{F}$ de eventos, es decir, subconjuntos de $\mathbb{E}$, y la distribución de probabilidad P definida sobre $\mathbb{F}$, de manera que para cualquier subconjunto de $\mathbb{E}$, $A \subset \mathbb{E}$, $A \in \mathbb{F}$, la probabilidad de A, $P(A)$, es conocida. Además, se mantiene la hipótesis de que la distribución de probabilidad, P, es independiente de las variables de decisión, $x_1,\ldots,x_n$.

Suponemos que las funciones $\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}), \tilde{g}_1(\mathbf{x}, \tilde{\xi}), \tilde{g}_2(\mathbf{x}, \tilde{\xi}), \ldots, \tilde{g}_m(\mathbf{x}, \tilde{\xi})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, están definidas en todo el espacio $\mathbb{R}^n \times \mathbb{E}$.

Charnes, Cooper y Symonds introducen en 1958 en su trabajo "*Cost Horizons and Certainty Equivalents: An Approach to Stochastic Programming of Heating Oil*" la aproximación probabilística o de azar para resolver problemas de programación estocástica. La idea básica de este enfoque es la de exigir que se verifiquen las restricciones estocásticas del problema con una determinada probabilidad o en una proporción de casos.

Así, dado el problema de programación estocástica:

$$\begin{aligned} &\text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"}\ \tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \\ &\text{s.a}\ \ \tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \leq 0,\ i = 1,2,\ldots,m \\ &\qquad \mathbf{x} \in D \end{aligned} \tag{PE}$$

su resolución mediante restricciones probabilísticas o de azar consiste en obtener a partir del problema estocástico, un problema determinista, denominado problema determinista equivalente, cuya solución es considerada solución del problema estocástico. Para obtener el problema determinista equivalente mediante restricciones probabilísticas o de azar se exige que las restricciones del problema se satisfagan al menos en una proporción de casos o con una determinada probabilidad, fijada a priori.

La transformación del objetivo estocástico en determinista se realiza en base a las propiedades estadísticas del objetivo y depende de las preferencias del decisor. Existen distintos criterios para llevar a cabo esta transformación. En los primeros trabajos de programación estocástica con restricciones de azar se fijaba como criterio el valor esperado de la función objetivo, posteriormente se han establecido otros criterios. Todo esto será objeto de estudio más adelante. Nos centramos ahora en la obtención del conjunto de oportunidades del problema determinista equivalente a partir del conjunto de oportunidades del problema de programación estocástica.

Como se ha señalado anteriormente, para obtener el conjunto de oportunidades del problema determinista equivalente se exige que las restricciones del problema se verifiquen con una determinada probabilidad o en una proporción de casos. Esta probabilidad puede ser fijada para que la verifiquen todas las restricciones conjuntamente, y el problema resultante es un problema con una restricción de azar conjunta, o bien, de manera separada, estableciendo una probabilidad por restricción y un problema al que se denomina de restricciones de azar separadas. En ambos casos el resultado es que cualquier solución del problema determinista equivalente es factible al menos con una determinada probabilidad o en una proporción de casos. Además, el conjunto de oportunidades del problema determinista equivalente resultante variará en función de la probabilidad fijada.

Si se desea que el conjunto de restricciones estocásticas del problema se verifique con una probabilidad fijada a priori, $\alpha \in (0, 1)$, el conjunto de restricciones estocásticas del problema (PE) se sustituye, en el problema determinista equivalente, por la siguiente restricción, a la que se denomina *restricción probabilística o de azar conjunta*:

$$P(\tilde{g}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq 0,\ \tilde{g}_2(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq 0,\ldots,\tilde{g}_m(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq 0) = \int_{\Omega} dF(t) \geq \alpha \tag{1}$$

donde F es la función de distribución conjunta del vector:

$$(\tilde{g}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi}),\ \tilde{g}_2(\mathbf{x},\tilde{\xi}),\ldots,\tilde{g}_m(\mathbf{x},\tilde{\xi})),$$

$\Omega = \{\mathbf{t}:(g_1(\mathbf{x},\mathbf{t}) \leq 0,\ g_2(\mathbf{x},\mathbf{t}) \leq 0,\ldots,g_m(\mathbf{x},\mathbf{t}) \leq 0)\}$ y $1 - \alpha$ es el riesgo admisible para el decisor de que la solución del problema sea no factible, puesto que:

$$P(\tilde{g}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi}) > 0 \text{ ó } \tilde{g}_2(\mathbf{x},\tilde{\xi}) > 0 \text{ ó},\ldots, \text{ó } \tilde{g}_m(\mathbf{x},\tilde{\xi}) > 0) < 1 - \alpha$$

Obsérvese que si para todo $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$, las variables aleatorias $\tilde{g}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi}),\ \tilde{g}_2(\mathbf{x},\tilde{\xi}),\ldots,\tilde{g}_m(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ son mutuamente estadísticamente independientes, la restricción (1) se transforma en la restricción:

$$P(\widetilde{g}_1(\mathbf{x},\widetilde{\xi}) \leq 0,\ \widetilde{g}_2(\mathbf{x},\widetilde{\xi}) \leq 0, \ldots, \widetilde{g}_m(\mathbf{x},\widetilde{\xi}) \leq 0) = \prod_{i=1}^{m} P(\widetilde{g}_i(\mathbf{x},\widetilde{\xi}) \leq 0) \geq \alpha$$

En el caso de que se desee que cada restricción se verifique con una determinada probabilidad $\alpha_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, (restricciones probabilísticas o de azar separadas) tendremos en el problema determinista equivalente m restricciones deterministas de la forma:

$$P(\widetilde{g}_i(\mathbf{x},\widetilde{\xi}) \leq 0) = \int_{\Omega_i} dF_i(t) \geq \alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots m \qquad (2)$$

donde F_i es la función de distribución de la variable aleatoria $\widetilde{g}_i(\mathbf{x},\widetilde{\xi})$ y $\Omega_i = \{\mathbf{t}: \widetilde{g}_i(\mathbf{x},\mathbf{t}) \leq 0\}$. En este caso, al fijar una probabilidad α_i, se considera que el riesgo admisible en el problema para la restricción i-ésima es $1 - \alpha_i$. Al mismo tiempo, se tiene que el riesgo de que una solución sea no factible, es decir, el riesgo de que no se verifique alguna de las restricciones del problema, será menor o igual que $\sum_{i=1}^{m}(1-\alpha_i)$.

De todo lo anterior se deduce que dado un problema de programación estocástica, si se decide resolver éste mediante programación con restricciones probabilísticas o de azar se deberá determinar si se desea resolver mediante una restricción de azar conjunta, del tipo (1), o mediante restricciones de azar separadas, del tipo (2). La elección dependerá en buena medida del tipo de problema que se desee resolver y de la situación que estemos modelizando mediante el mismo. Evidentemente, la elección de restricción conjunta o de restricciones separadas es importante, puesto que las restricciones (1) y (2) son distintas y, por tanto, para un mismo problema de programación estocástica se tienen problemas deterministas equivalentes con conjuntos de oportunidades distintos, dependiendo de que se elija restricción de azar conjunta o restricciones de azar separadas.

En general, la resolución de problemas con una restricción probabilística conjunta es más complicada que la de problemas con restricciones probabilísticas separadas. Esto da lugar a que en muchos casos, en los que inicialmente se considera apropiado plantear el problema mediante una restricción conjunta, se reemplace ésta por restricciones separadas a la hora de resolver el problema. En estos casos, fijado un valor para $\alpha \in (0, 1)$, hemos de sustituir la restricción conjunta:

$$P(\tilde{g}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq 0,\ \tilde{g}_2(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq 0, \ldots, \tilde{g}_m(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq 0) \geq \alpha \tag{1}$$

por el conjunto de restricciones:

$$P(\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq 0) \geq \alpha_i,\quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{2}$$

y surge el problema de determinar los valores que hemos de asignar a las probabilidades de las restricciones probabilísticas separadas: $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, de manera que se verifique la restricción probabilística conjunta. Pues bien, si se eligen valores para estas probabilidades que verifiquen la desigualdad:

$$\sum_{i=1}^{m}(1-\alpha_i) \leq 1-\alpha$$

podemos afirmar que cualquier $\mathbf{x} \in D$ que satisfaga el conjunto de restricciones de azar separadas (2):

$$P(\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq 0) \geq \alpha_i,\quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{2}$$

verificará también la restricción de azar conjunta (1):

$$P(\tilde{g}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq 0,\ \tilde{g}_2(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq 0, \ldots, \tilde{g}_m(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq 0) \geq \alpha \tag{1}$$

puesto que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, si definimos Ω_i como el suceso $g_i(\mathbf{x},\xi) \leq 0$, se verifica que:

$$P(\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq 0) = P(\Omega_i) \geq \alpha_i$$

y, por tanto:

$$\sum_{i=1}^{m} P(\Omega_i) - m \geq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i - m \tag{3}$$

Dado que exigimos que se verifique $\sum_{i=1}^{m}(1-\alpha_i) \leq 1-\alpha$, o de manera equivalente: $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i - m \geq \alpha - 1$, a partir de (3) tenemos

$$\sum_{i=1}^{m} P(\Omega_i) - m \geq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i - m \geq \alpha - 1 \tag{4}$$

Finalmente, aplicando la desigualdad de Boole[1]:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{m} \Omega_i\right) - 1 \geq \sum_{i=1}^{m} P(\Omega_i) - m$$

a (4) tenemos que:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{m} \Omega_i\right) - 1 \geq \sum_{i=1}^{m} P(\Omega_i) - m \geq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i - m \geq \alpha - 1$$

[1] **Desigualdad de Boole** (Prékopa (1995), pág. 179):
Dados $A_1,\ldots,A_m$ eventos arbitrarios de un espacio de probabilidad arbitrario, se verifica:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} P(A_i).$$

Si aplicamos esta desigualdad a los eventos complementarios $A_1^c,,\ldots,A_m^c$, a partir de la desigualdad anterior se verifica:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{m} P(A_i) - (m-1).$$

■

y por tanto:

$$P(\tilde{g}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq 0,\ \tilde{g}_2(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq 0, \ldots, \tilde{g}_m(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq 0) = P\left(\bigcap_{i=1}^{m} \Omega_i\right) \geq \alpha$$

Evidentemente, la elección del valor de la(s) probabilidad(es) influye en el conjunto de oportunidades del determinista equivalente y, por tanto, en el conjunto de soluciones factibles del problema.

La resolución de problemas de programación estocástica mediante restricciones probabilísticas o de azar es, en general, difícil, ya que en la mayoría de los casos estas restricciones no definen un conjunto de oportunidades convexo y requieren métodos de integración numérica para obtener el conjunto de puntos factibles del problema. Para un análisis de las propiedades de estas restricciones y de los métodos de resolución existentes de estos problemas véase Prékopa (1995, caps. 10 y 11) y Kall y Wallace (1994, caps. 1 y 4).

En este trabajo nos centraremos en la resolución de problemas de programación estocástica y de programación estocástica multiobjetivo mediante el enfoque de restricciones probabilísticas o de azar separadas.

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ las probabilidades fijadas para las restricciones del problema (PE), $\alpha_i \in (0,1)$, i = 1, 2, ..., m. En ese caso, la transformación de este conjunto de restricciones estocásticas en su determinista equivalente mediante este criterio es, como hemos visto anteriormente:

$$P(\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq 0) = \int_{\Omega_i} dF_i(t) \geq \alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots m$$

donde F_i es la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ y $\Omega_i = \{\mathbf{t}: \tilde{g}_i(\mathbf{x},\mathbf{t}) \leq 0\}$. En este caso, al fijar una probabilidad α_i, se considera que el riesgo admisible en el problema para la restricción i-ésima es 1 - α_i.

Como hemos visto antes, la obtención de restricciones probabilísticas o de azar es, en general, complicada. Sin embargo, en determinados casos, es posible obtener expresiones equivalentes a la anterior, fácilmente manejables a la hora de resolver el problema de programación estocástica. A continuación veremos estos casos. Para ello, se establecen determinadas hipótesis acerca de la distribución de probabilidad de los parámetros aleatorios del problema y acerca de la estructura del mismo En concreto, analizaremos estas restricciones para problemas estocásticos lineales, fijando determinadas hipótesis acerca de la distribución de probabilidad de los parámetros aleatorios del problema, que dan lugar a conocer la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})$. Además, analizaremos la aplicación de una desigualdad estadística, la desigualdad de Cantelli, que nos permitirá obtener una cota superior de la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})$. La aplicación de esta desigualdad a las restricciones probabilísticas nos permitirá obtener un subconjunto del conjunto de puntos que verifican las restricciones de azar, para los casos en los que se desconoce la distribución de probabilidad de esta variable aleatoria.

2. RESTRICCIONES PROBABILÍSTICAS LINEALES.

Consideremos el problema de programación estocástica lineal, cuya formulación general es:

$$\begin{aligned} &\text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"}\ \tilde{\mathbf{c}}'\mathbf{x} \\ &\text{s.a}\ \ \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} \leq \tilde{\mathbf{b}} \\ &\qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \qquad \text{(PEL)}$$

donde $\tilde{\mathbf{A}}$ es una matriz de orden mxn cuyos elementos, $\tilde{a}_{ij}$, i =1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n, son variables aleatorias, y $\tilde{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^m$ y $\tilde{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^n$ son vectores cuyas componentes son también variables aleatorias.

Suponemos que se conoce la distribución de probabilidad de todos los parámetros aleatorios del problema y que todos estos parámetros son variables aleatorias continuas.

La transformación de cada una de estas restricciones estocásticas en su determinista equivalente mediante el criterio de restricciones probabilísticas separadas es:

$$\begin{aligned} &P(\tilde{\mathbf{a}}_1\mathbf{x} \leq \tilde{b}_1) \geq \alpha_1 \\ &P(\tilde{\mathbf{a}}_2\mathbf{x} \leq \tilde{b}_2) \geq \alpha_2 \\ &\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &P(\tilde{\mathbf{a}}_m\mathbf{x} \leq \tilde{b}_m) \geq \alpha_m \end{aligned}$$

donde $\tilde{\mathbf{a}}_i = (\tilde{a}_{i1}, \dots, \tilde{a}_{in})$ es el i-ésimo vector fila de la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ y $\alpha_i \in (0, 1)$ es la probabilidad con la que se desea que se verifique la restricción i-ésima, i = 1, 2, ..., m.

En adelante, estudiaremos la transformación de las restricciones probabilísticas $P(\tilde{\mathbf{a}}_i\mathbf{x} \leq \tilde{b}_i) \geq \alpha_i$ en otras equivalentes a éstas. Dividimos este análisis en función de que el vector de coeficientes técnicos de cada restricción sea determinista, $\mathbf{a}_i$, con lo cual sólo el recurso de la restricción, $\tilde{b}_i$, es una variable aleatoria, o bien algunas de las componentes del vector de coeficientes técnicos sean variables aleatorias, $\tilde{\mathbf{a}}_i$.

2.1 RECURSO ESTOCÁSTICO Y COEFICIENTES TÉCNICOS DETERMINISTAS.

Supongamos que la restricción i-ésima del problema estocástico lineal es de la forma:

$$\mathbf{a}_i\mathbf{x} \leq \tilde{b}_i$$

con $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, j = 1, 2, ..., n. Su determinista equivalente mediante el criterio de restricciones probabilísticas separadas, fijando una probabilidad para la restricción $\alpha_i \in (0,1)$, es:

$$P\left(\mathbf{a}_i\mathbf{x} \leq \tilde{b}_i\right) \geq \alpha_i$$

Puesto que se verifica que $P\left(\mathbf{a}_i\mathbf{x} \leq \tilde{b}_i\right) = 1 - P\left(\tilde{b}_i \leq \mathbf{a}_i\mathbf{x}\right)$, la restricción de azar anterior es equivalente a:

$$P\left(\tilde{b}_i \leq \mathbf{a}_i\mathbf{x}\right) = F_{\tilde{b}_i}(\mathbf{a}_i\mathbf{x}) \leq 1 - \alpha_i$$

donde $F_{\tilde{b}_i}$ es la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{b}_i$.

Obsérvese que la restricción del problema determinista equivalente depende de las características de la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{b}_i$, $F_{\tilde{b}_i}$.

Si la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{b}_i$ es estrictamente creciente, tal y como la que aparece en la figura 1, para transformar la restricción anterior basta con determinar el valor η del soporte de distribución de la variable aleatoria $\tilde{b}_i$ tal que $F_{\tilde{b}_i}(\eta) = 1 - \alpha_i$, con lo cual $F_{\tilde{b}_i}^{-1}(1 - \alpha_i) = \eta$ y la restricción probabilística del problema se transforma en:

$$P(\mathbf{a}_i\mathbf{x} \leq \tilde{b}_i) \geq \alpha_i \Rightarrow F_{\tilde{b}_i}(\mathbf{a}_i\mathbf{x}) \leq 1 - \alpha_i$$

lo que implica que:

$$\mathbf{a}_i\mathbf{x} \leq F_{\tilde{b}_i}^{-1}(1 - \alpha_i) = \eta$$

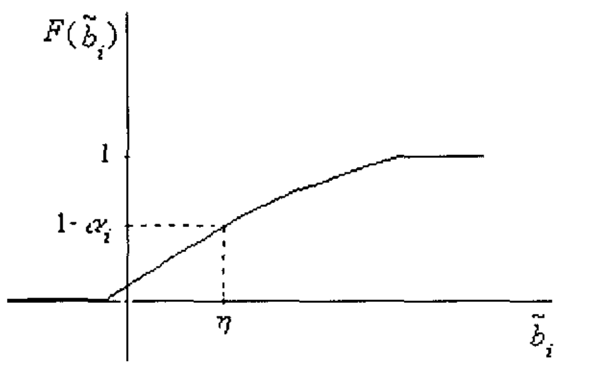


FIGURA 1

Sin embargo, tal y como señala Vajda (1972) en general, la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{b}_i$ no tiene por qué ser estrictamente creciente. Consideremos el caso en el que la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{b}_i$ no es estrictamente creciente, sino sólo no decreciente, como, por ejemplo, la que aparece en la figura dos.

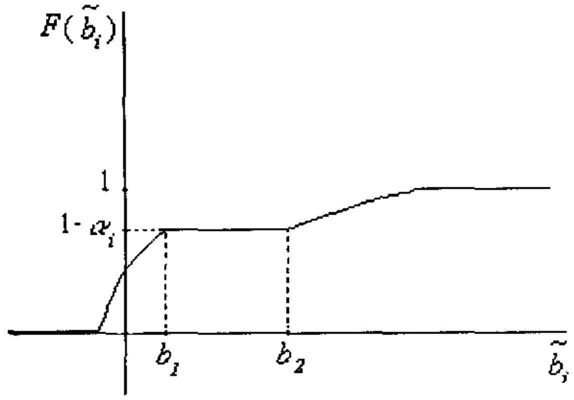


FIGURA 2

En ese caso, cualquier $\eta \in [b_1, b_2]$ es tal que $F_{\tilde{b}_i}(\eta) = 1 - \alpha_i$. Puesto que lo que se desea es que $P(\mathbf{a}_i\mathbf{x} \leq \tilde{b}_i) \geq \alpha_i$, elegimos en este caso el mayor η tal que $F_{\tilde{b}_i}(\eta) = 1 - \alpha_i$.

Así, definimos $\hat{F}_{\tilde{b}_i}^{-1}(\theta)$ como el mayor valor η tal que $F_{\tilde{b}_i}(\eta) \leq \theta$, es decir:

$$\hat{F}_{\tilde{b}_i}^{-1}(\theta) = \sup\left\{\eta : F_{\tilde{b}_i}(\eta) \leq \theta\right\}$$

y la restricción probabilística del problema es ahora:

$$\mathbf{a}_i\mathbf{x} \leq \hat{F}_{\tilde{b}_i}^{-1}(1 - \alpha_i),$$

puesto que:

$$\mathbf{a}_i\mathbf{x} \leq \sup\left\{\eta : F_{\tilde{b}_i}(\eta) \leq 1 - \alpha_i\right\} = \hat{F}_{\tilde{b}_i}^{-1}(1 - \alpha_i)$$

De esta forma, exigiendo $\mathbf{a}_i\mathbf{x} \leq \hat{F}_{\tilde{b}_i}^{-1}(1-\alpha_i)$, se tiene que $\mathbf{a}_i\,\mathbf{x}$ será menor o igual que cualquier η menor o igual que $\hat{F}_{\tilde{b}_i}^{-1}(1-\alpha_i)$ que pueda alcanzar la variable aleatoria $\tilde{b}_i$ y que sea tal que $F_{\tilde{b}_i}(\eta) = 1-\alpha_i$.

Por tanto, si la restricción i-ésima del problema es tal que los coeficientes técnicos de la misma son parámetros deterministas y sólo el recurso, $\tilde{b}_i$, es variable aleatoria, la restricción probabilística asociada a la restricción estocástica es lineal y de la forma:

$$\mathbf{a}_i\mathbf{x} \leq \hat{F}_{\tilde{b}_i}^{-1}(1-\alpha_i)$$

con $\hat{F}_{\tilde{b}_i}^{-1}(1-\alpha_i) = \sup\left\{\eta : F_{\tilde{b}_i}(\eta) \leq 1-\alpha_i\right\}$ para el caso en el que la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{b}_i$ sea no decreciente y $\hat{F}_{\tilde{b}_i}^{-1}(1-\alpha_i) = F_{\tilde{b}_i}^{-1}(1-\alpha_i)$ para el caso en el que la función de distribución de $\tilde{b}_i$ sea estrictamente creciente.

Ejemplo.

Supongamos una restricción estocástica lineal de la forma:

$$-3x_1 - 2x_2 \leq \tilde{b}_1$$

donde $\tilde{b}_1$ es una variable aleatoria que sigue la distribución uniforme sobre el intervalo (-3, 1), $\tilde{b}_1$~U(-3, 1). La restricción de azar correspondiente, para una probabilidad α_1 es:

$$P(-3x_1 - 2x_2 \leq \tilde{b}_1) \geq \alpha_1$$

que podemos expresar también como:

$$P(\widetilde{b}_1 \leq -3x_1 - 2x_2) = F_{\widetilde{b}_1}(-3x_1 - 2x_2) \leq 1 - \alpha_1$$

Puesto que $\widetilde{b}_1 \sim U$ (-3, 1), si fijamos $\alpha_1 = 0.85$ tenemos que $F^{-1}_{\widetilde{b}_1}(1-\alpha_1) = F^{-1}_{\widetilde{b}_1}(0.15) = -2.4$, con lo cual la restricción probabilística es equivalente a:

$$3x_1 + 2x_2 \geq 2.4$$

Como ya se ha comentado anteriormente, en este caso se mantiene la linealidad de las restricciones.■

Antes de pasar a ver el caso en el que los coeficientes técnicos son variables aleatorias, obsérvese que, si bien en este apartado hemos supuesto que las restricciones del problema son lineales, $\widetilde{g}_i(\mathbf{x},\widetilde{b}_i) = \mathbf{a}_i\mathbf{x} - \widetilde{b}_i \leq 0$, las transformaciones anteriormente realizadas serían semejantes para restricciones no lineales del tipo: $g_i(\mathbf{x}) - \widetilde{b}_i \leq 0$. En ese caso, la restricción de azar para una probabilidad $\alpha_i \in (0,1)$ sería la restricción no lineal:

$$g_i(\mathbf{x}) \leq \hat{F}^{-1}_{\widetilde{b}_i}(1-\alpha_i)$$

con $\hat{F}^{-1}_{\widetilde{b}_i}(1-\alpha_i) = \sup\{\eta : F_{\widetilde{b}_i}(\eta) \leq 1-\alpha_i\}$.

2.2. COEFICIENTES TÉCNICOS ESTOCÁSTICOS.

Consideramos ahora el caso en el que algunos o todos los elementos de la fila i-ésima de la matriz $\widetilde{\mathbf{A}}$, $\widetilde{\mathbf{a}}_i = (\widetilde{a}_{i1}, \ldots, \widetilde{a}_{in})$ son variables aleatorias, lo que da lugar a que la restricción i-ésima del problema de programación estocástica sea del tipo:

$$\widetilde{\mathbf{a}}_i \mathbf{x} \le b_i$$

si el recurso es determinista, o bien de la forma:

$$\widetilde{\mathbf{a}}_i \mathbf{x} \le \widetilde{b}_i$$

en caso de que el recurso de la restricción sea también variable aleatoria.

En el primer caso, la restricción de azar asociada a la restricción estocástica es, para una probabilidad $\alpha_i \in (0, 1)$:

$$P(\widetilde{\mathbf{a}}_i \mathbf{x} \le b_i) = P(\widetilde{\mathbf{a}}_i \mathbf{x} - b_i \le 0) = F_{\widetilde{y}_i(\mathbf{x})}(0) \ge \alpha_i$$

con $\widetilde{y}_i(\mathbf{x}) = \widetilde{\mathbf{a}}_i \mathbf{x} - b_i$ y $F_{\widetilde{y}_i(\mathbf{x})}$ su función de distribución.

Por otro lado, si el recurso es una variable aleatoria, la restricción de azar asociada a la restricción $\widetilde{\mathbf{a}}_i \mathbf{x} \le \widetilde{b}_i$, fijando una probabilidad $\alpha_i \in (0, 1)$, es:

$$P(\widetilde{\mathbf{a}}_i \mathbf{x} \le \widetilde{b}_i) = P(\widetilde{\mathbf{a}}_i \mathbf{x} - \widetilde{b}_i \le 0) = F_{\widetilde{y}_i(\mathbf{x})}(0) \ge \alpha_i$$

con $\widetilde{y}_i(\mathbf{x}) = \widetilde{\mathbf{a}}_i \mathbf{x} - \widetilde{b}_i$ y $F_{\widetilde{y}_i(\mathbf{x})}$ la función de distribución de la variable aleatoria $\widetilde{y}_i(\mathbf{x}) = \widetilde{\mathbf{a}}_i \mathbf{x} - \widetilde{b}_i$.

A partir de aquí se deduce que si los coeficientes técnicos de la restricción son variables aleatorias, la restricción de azar correspondiente depende, no sólo de la distribución de probabilidad de los parámetros aleatorios de la restricción $\tilde{\mathbf{a}}_i$, sino también del vector $\mathbf{x}$. Esto da lugar a que la transformación de la restricción de azar sea complicada. Sin embargo, como veremos a continuación, si se establecen determinadas hipótesis sobre la distribución de probabilidad de las variables aleatorias de la restricción, es posible transformar estas restricciones de manera similar al caso en el que sólo el recurso de la restricción es variable aleatoria.

A continuación analizamos dos casos en los que es posible transformar las restricciones probabilísticas de este tipo. En primer lugar supondremos que la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $\tilde{y}_i(\mathbf{x})$ es normal y posteriormente se analizará qué ocurre cuando la variable aleatoria $\tilde{y}_i(\mathbf{x})$ depende linealmente de una variable aleatoria $\tilde{t}$.

a) Distribuciones estables. Caso normal.

Existen algunas distribuciones de probabilidad, denominadas estables, para las que la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $\tilde{y}_i(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{a}}_i\mathbf{x} - \tilde{b}_i$ no depende de $\mathbf{x}$ sino sólo de las distribuciones de probabilidad de los parámetros aleatorios $\tilde{\mathbf{a}}_i = (\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2}, \ldots, \tilde{a}_{in})$ y $\tilde{b}_i$. Definimos, en primer lugar, el concepto de distribución estable y posteriormente nos centramos en una de estas distribuciones.

Definición 1: Distribución de probabilidad estable.(Patel y Read, 1982, pág. 28).

Sean $\tilde{\xi}, \tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \ldots, \tilde{\xi}_n$ $n+1$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.).

Sea $\tilde{S} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\xi}_i$. Se dice que la distribución de $\tilde{\xi}$ es estable si:

(i) existen constantes c y γ tales que la variable aleatoria $\widetilde{S} = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\xi}_i$ tiene la misma distribución que la variable aleatoria $c\widetilde{\xi} + \gamma$.

(ii) la distribución de $\widetilde{\xi}$ no está centrada en el origen.■

En definitiva, el concepto de estabilidad de una distribución de probabilidad se traduce en que una combinación lineal de variables aleatorias que sigan esta distribución, sigue la misma distribución que las variables aleatorias que la forman.

Una de las distribuciones estables es la normal, lo que explica que en muchos de los estudios realizados hasta ahora en programación estocástica con restricciones de azar se establezca la hipótesis de normalidad en la distribución de probabilidad de los parámetros aleatorios del problema.

Caso normal.

Para analizar la transformación de la restricción probabilística anterior, consideraremos que tanto el vector de coeficientes técnicos $\widetilde{\mathbf{a}}_i = (\widetilde{a}_{i1}, \widetilde{a}_{i2}, \ldots, \widetilde{a}_{in})$ como el recurso $\widetilde{b}_i$ son variables aleatorias, es decir, suponemos que la restricción estocástica i-ésima del problema de programación estocástica es del tipo:

$$\widetilde{\mathbf{a}}_i \mathbf{x} \leq \widetilde{b}_i$$

Para esta restricción, la restricción probabilística o de azar asociada es:

$$P(\widetilde{\mathbf{a}}_i \mathbf{x} \leq \widetilde{b}_i) \geq \alpha_i$$

Posteriormente, una vez analizada la transformación de esta restricción, consideraremos el caso en el que el recurso, b_i, es un parámetro determinista de valor conocido.

Este caso es el que analizaron Charnes, Cooper y Symonds (1958) en el trabajo en el que introducen el concepto de restricción probabilística o de azar.

Supongamos que el vector $(\tilde{\mathbf{a}}_i, -\tilde{b}_i) = (\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2}, \ldots, \tilde{a}_{in}, -\tilde{b}_i)$, sigue la distribución normal multivariante, con valor esperado $(\bar{\mathbf{a}}_i, -\bar{b}_i)$, $\bar{\mathbf{a}}_i = (\bar{a}_{i1}, \bar{a}_{i2}, \ldots, \bar{a}_{in})$, y matriz de varianzas y covarianzas $\mathbf{V}_i$, cuadrada, de orden $n+1$ y definida positiva.

Bajo estas hipótesis, puesto que la distribución normal es estable, para cada $\mathbf{x}$ se tiene que $\tilde{\mathbf{a}}_i\mathbf{x}$ es una variable aleatoria normal, y, además, la variable aleatoria $\tilde{y}_i(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{a}}_i\mathbf{x} - \tilde{b}_i$ sigue también la distribución normal de valor esperado $\bar{y}_i(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{a}}_i\mathbf{x} - \bar{b}_i$ y varianza $\mathrm{Var}\{\tilde{y}_i(\mathbf{x})\} = (\mathbf{x}',1)\mathbf{V}_i(\mathbf{x}',1)'$.

Si estandarizamos la variable aleatoria $\tilde{y}_i(\mathbf{x})$, restándole su valor esperado y dividiendo esta diferencia por su desviación estándar, obtenemos la variable aleatoria $\dfrac{\tilde{y}_i(\mathbf{x}) - \bar{y}_i(\mathbf{x})}{\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{y}_i(\mathbf{x})\}}}$ que sigue la distribución normal de valor esperado cero y varianza uno. Dado que:

$$P(\tilde{y}_i(\mathbf{x}) \leq 0) = P\left(\frac{\tilde{y}_i(\mathbf{x}) - \bar{y}_i(\mathbf{x})}{\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{y}_i(\mathbf{x})\}}} \leq \frac{-\bar{y}_i(\mathbf{x})}{\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{y}_i(\mathbf{x})\}}}\right) = \Phi\left(\frac{-\bar{y}_i(\mathbf{x})}{\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{y}_i(\mathbf{x})\}}}\right)$$

con Φ la función de distribución de la normal de valor esperado cero y varianza uno, tenemos que la restricción de azar:

$$P(\tilde{\mathbf{a}}_i\mathbf{x} \leq \tilde{b}_i) = P(\tilde{y}_i(\mathbf{x}) \leq 0) \geq \alpha_i$$

es equivalente a:

$$\Phi\left(\frac{-\bar{y}_i(\mathbf{x})}{\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{y}_i(\mathbf{x})\}}}\right) \geq \alpha_i$$

Puesto que la función de distribución Φ es estrictamente creciente, podemos transformar la desigualdad anterior de la forma:

$$\frac{-\bar{y}_i(\mathbf{x})}{\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{y}_i(\mathbf{x})\}}} \geq \Phi^{-1}(\alpha_i)$$

o bien como:

$$\Phi^{-1}(\alpha_i)\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{y}_i(\mathbf{x})\}} + \bar{y}_i(\mathbf{x}) \leq 0$$

Sustituyendo las expresiones del valor esperado y la varianza de la variable aleatoria $\tilde{y}_i(\mathbf{x})$, $\bar{y}_i(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{a}}_i\mathbf{x} - \bar{b}_i$ y varianza $\mathrm{Var}\{\tilde{y}_i(\mathbf{x})\} = (\mathbf{x}^t,1)\mathbf{V}_i(\mathbf{x}^t,1)^t$, obtenemos:

$$\Phi^{-1}(\alpha_i)\sqrt{(\mathbf{x}^t,1)\mathbf{V}_i(\mathbf{x}^t,1)^t} + \bar{\mathbf{a}}_i\mathbf{x} - \bar{b}_i \leq 0.$$

Así pues, bajo las hipótesis establecidas, tenemos que la restricción probabilística $P(\tilde{\mathbf{a}}_i\mathbf{x} \leq \tilde{b}_i) \geq \alpha_i$ es equivalente a la restricción no lineal:

$$\Phi^{-1}(\alpha_i)\sqrt{(\mathbf{x}^t,1)\mathbf{V}_i(\mathbf{x}^t,1)^t} + \bar{\mathbf{a}}_i\mathbf{x} - \bar{b}_i \leq 0$$

Por otro lado, si el recurso de la restricción no es una variable aleatoria, sino un parámetro del problema con valor conocido, si el vector $\tilde{\mathbf{a}}_i = (\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2}, \ldots, \tilde{a}_{in})$, sigue la distribución normal multivariante, con valor esperado $\bar{\mathbf{a}}_i = (\bar{a}_{i1}, \bar{a}_{i2}, \ldots, \bar{a}_{in})$ y matriz de varianzas y covarianzas $\mathbf{V}_i$, cuadrada, de orden n y definida positiva, la variable aleatoria $\tilde{y}_i(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{a}}_i\mathbf{x} - b_i$ sigue también la distribución normal de valor esperado $\bar{y}_i(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{a}}_i\mathbf{x} - b_i$ y varianza $\mathrm{Var}\{\tilde{y}_i(\mathbf{x})\} = \mathbf{x}^t\mathbf{V}_i\mathbf{x}$. En ese caso, la transformación de la restricción probabilística $P(\tilde{\mathbf{a}}_i\mathbf{x} \leq b_i) \geq \alpha_i$ es semejante al caso analizado y se obtiene la restricción no lineal:

$$\Phi^{-1}(\alpha_i)\sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}_i\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{a}}_i\mathbf{x} - b_i \leq 0$$

Como puede observarse, en ambos casos las restricciones que se obtienen son no lineales. El siguiente teorema nos permite determinar bajo qué condiciones estas restricciones definen conjuntos convexos.

Teorema 1. (Stancu-Minasian (1984), págs. 94-95).

Sea **V** es una matriz de orden nxn al menos semidefinida positiva, entonces la función $\varphi(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}}$ es una función convexa.■

Así pues, a partir de este resultado, tenemos que las restricciones anteriormente obtenidas definen conjuntos convexos para valores de $\Phi^{-1}(\alpha_i)$ mayores o iguales que cero. Como la función Φ es la función de distribución de la normal cero uno, se verifica que $\Phi^{-1}(\alpha_i)$ es mayor o igual que cero para valores de α_i mayores o iguales que 0.5. Esto implica que la probabilidad con que se desea que se verifique la restricción estocástica, α_i, ha de ser mayor o igual que 0.5 para que el conjunto que define la restricción sea convexo, condición que no es muy fuerte, puesto que es normal que la probabilidad fijada para la restricción estocástica sea alta.

Antes de pasar a ver un ejemplo en el que se obtienen las restricciones de azar para dos restricciones estocásticas del tipo que hemos visto en este apartado, hemos de señalar que en caso de que la restricción estocástica sea no lineal, del tipo $\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq 0$, si la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ es la normal, la transformación de la restricción probabilística es semejante al caso lineal, que acabamos de analizar. Sin embargo, en general, es difícil encontrar restricciones no lineales tales que la variable aleatoria $\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ sea normal, aún cuando el vector de parámetros aleatorios $\tilde{\xi}$ siga la distribución normal multivariante. Eso nos ha llevado a considerar sólo el caso lineal, puesto que la transformación que habría que llevar a cabo para restricciones no lineales es semejante a la que acabamos de realizar.

Ejemplo.

Consideremos la restricción estocástica:

$$\tilde{a}_{21}x_1 + \tilde{a}_{22}x_2 \leq \tilde{b}_2$$

donde el vector $(\tilde{a}_{21}, \tilde{a}_{22}, -b_2)^t$ sigue una distribución normal multivariante de valor esperado $(4, 5, -20)^t$ y matriz de varianzas y covarianzas $\mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ y, por tanto, la variable aleatoria $\tilde{a}_{21}x_1 + \tilde{a}_{22}x_2 - b_2$ sigue la distribución normal con valor esperado $4x_1 + 5x_2 - 20$ y varianza $3x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_2 + 9$.

Para una probabilidad $\alpha_2 \in (0, 1)$, la restricción probabilística asociada a la restricción estocástica anterior es:

$$P(\tilde{a}_{21}x_1 + \tilde{a}_{22}x_2 - \tilde{b}_2 \leq 0) \geq \alpha_2$$

A partir de los resultado anteriores tenemos que esta restricción es equivalente a:

$$\Phi^{-1}(\alpha_2)\sqrt{3x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_2 + 9} + 4x_1 + 5x_2 \leq 20$$

Fijando una probabilidad $\alpha_2 = 0.925$, puesto que $\Phi^{-1}(0.925) = 1.43953$, obtenemos:

$$1.43953\sqrt{3x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_2 + 9} + 4x_1 + 5x_2 \leq 20$$

Se obtiene, por tanto, una restricción no lineal, que, para la probabilidad fijada, define un conjunto convexo.

b) Aleatoriedad simple.

Analizamos en este apartado la transformación de restricciones de azar cuando todos los parámetros aleatorios de la restricción dependen linealmente de una única variable aleatoria $\tilde{t}$. Esta hipótesis ha sido formulada por Stancu-Minasian en distintos trabajos (véase, por ejemplo Stancu-Minasian (1984), pág. 189), para funciones objetivo estocásticas de tipo lineal. Nosotros consideramos a continuación su aplicación sobre restricciones probabilísticas lineales.

La mayor ventaja de este caso es que da lugar a la transformación de la restricción probabilística en una restricción lineal de manera fácil, tal y como vemos a continuación. Analizaremos, en primer lugar, qué ocurre si el recurso de la restricción es un parámetro determinista. Posteriormente se estudiará el problema con recurso aleatorio.

Consideremos de nuevo la restricción estocástica:

$$\tilde{\mathbf{a}}_i \mathbf{x} \leq b_i$$

Supongamos que el vector fila $\tilde{\mathbf{a}}_i$ depende linealmente de una variable aleatoria continua, $\tilde{t}$, con distribución conocida y función de distribución F_t estrictamente creciente, de manera que $\tilde{\mathbf{a}}_i = \mathbf{a}_i^1 + \tilde{t}\mathbf{a}_i^2$, con $\mathbf{a}_i^1, \mathbf{a}_i^2$, vectores fila de n componentes reales, $\mathbf{a}_i^{1t}, \mathbf{a}_i^{2t} \in \mathbb{R}^n$. Supongamos, además, que el conjunto de oportunidades del problema determinista equivalente es tal que se verifica que $\mathbf{a}_i^2\mathbf{x} > 0$.

Con estas condiciones se tiene que:

$$P(\tilde{\mathbf{a}}_i\mathbf{x} \leq b_i) = P((\mathbf{a}_i^1 + \tilde{t}\mathbf{a}_i^2)\mathbf{x} \leq b_i) = P(\tilde{t}\mathbf{a}_i^2\mathbf{x} \leq b_i - \mathbf{a}_i^1\mathbf{x}) =$$
$$= P\left(\tilde{t} \leq \frac{b_i - \mathbf{a}_i^1\mathbf{x}}{\mathbf{a}_i^2\mathbf{x}}\right) = F_t\left(\frac{b_i - \mathbf{a}_i^1\mathbf{x}}{\mathbf{a}_i^2\mathbf{x}}\right)$$

puesto que suponemos que $\mathbf{a}_i^2\mathbf{x} > 0$. Dado que se mantiene la hipótesis de que función de distribución de la variable aleatoria, $\tilde{t}$, F_t, es estrictamente creciente, tenemos que la restricción probabilística:

$$P\left(\tilde{\mathbf{a}}_i\mathbf{x} \leq b_i\right) \geq \alpha_i$$

es equivalente a la restricción lineal:

$$\mathbf{a}_i^1\mathbf{x} + F_t^{-1}(\alpha_i)\mathbf{a}_i^2\mathbf{x} - b_i \leq 0$$

Supongamos ahora que el recurso de la restricción estocástica es aleatorio:

$$\tilde{\mathbf{a}}_i\mathbf{x} \leq \tilde{b}_i$$

y que el vector fila $\tilde{\mathbf{a}}_i$ depende linealmente de una variable aleatoria continua, $\tilde{t}$, con distribución conocida y función de distribución F_t estrictamente creciente, de manera que $\tilde{\mathbf{a}}_i = \mathbf{a}_i^1 + \tilde{t}\mathbf{a}_i^2$, con $\mathbf{a}_i^1, \mathbf{a}_i^2$, vectores fila de n componentes reales, $\mathbf{a}_i^{1t}, \mathbf{a}_i^{2t} \in \mathbb{R}^n$. Además, se verifica que la variable aleatoria $\tilde{b}_i$ depende también linealmente de la variable aleatoria $\tilde{t}$, de tal forma que $\tilde{b}_i = b_i^1 + \tilde{t}b_i^2$, con $b_i^1, b_i^2 \in \mathbb{R}$.

Si se verifican las hipótesis anteriores tenemos que:

$$P\left(\tilde{\mathbf{a}}_i\mathbf{x} \leq \tilde{b}_i\right) = P\left(\mathbf{a}_i^1\mathbf{x} + \tilde{t}\mathbf{a}_i^2\mathbf{x} \leq b_i^1 + \tilde{t}b_i^2\right) = P\left(\tilde{t}(\mathbf{a}_i^2\mathbf{x} - b_i^2) \leq b_i^1 - \mathbf{a}_i^1\mathbf{x}\right)$$

Supongamos, además, que el conjunto de oportunidades del problema determinista equivalente es tal que se verifica que $\mathbf{a}_i^2\mathbf{x} - b_i^2 > 0$.

Entonces, a partir de la igualdad anterior obtenemos:

$$P(\tilde{\mathbf{a}}_i\mathbf{x} \le \tilde{b}_i) = P(\tilde{t}(\mathbf{a}_i^2\mathbf{x} - b_i^2) \le b_i^1 - \mathbf{a}_i^1\mathbf{x}) = P\left(\tilde{t} \le \frac{b_i^1 - \mathbf{a}_i^1\mathbf{x}}{\mathbf{a}_i^2\mathbf{x} - b_i^2}\right) = F_t\left(\frac{b_i^1 - \mathbf{a}_i^1\mathbf{x}}{\mathbf{a}_i^2\mathbf{x} - b_i^2}\right)$$

y la restricción de azar $P(\tilde{\mathbf{a}}_i\mathbf{x} \le \tilde{b}_i) \ge \alpha_i$ es equivalente a la restricción lineal:

$$\mathbf{a}_i^1\mathbf{x} + F_t^{-1}(\alpha_i)\mathbf{a}_i^2\mathbf{x} - b_i^1 - F_t^{-1}(\alpha_i)b_i^2 \le 0.$$

De todo esto se deduce que si el conjunto de parámetros aleatorios de la restricción estocástica lineal depende linealmente de una variable aleatoria que verifica determinadas condiciones, la restricción de azar del problema puede transformarse en una restricción lineal. Ilustramos esto mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo.

Consideremos la siguiente restricción estocástica:

$$\tilde{a}_{31}x_1 + \tilde{a}_{32}x_2 \le \tilde{b}_3$$

Supongamos que el vector $(\tilde{a}_{31}, \tilde{a}_{32}, -\tilde{b}_3)$ depende linealmente de una única variable aleatoria $\tilde{t}$, de manera que:

$$(\tilde{a}_{31}, \tilde{a}_{32}, -\tilde{b}_3) = (5, -3, -5) + \tilde{t}(1,1,2).$$

Supongamos, además, que la variable $\tilde{t}$ sigue la distribución exponencial de parámetro $\lambda = 4$.

A partir de los resultados previos, si se verifica la condición $x_1 + x_2 > -2$, tenemos que la siguiente restricción probabilística:

$$P(\tilde{a}_{31}x_1 + \tilde{a}_{32}x_2 \le \tilde{b}_3) \ge \alpha_3$$

es equivalente a la siguiente restricción lineal:

$$(5+F_t^{-1}(\alpha_3))x_1+(-3+F_t^{-1}(\alpha_3))x_2 \leq 5-2F_t^{-1}(\alpha_3)$$

donde F_t es la función de distribución de $\tilde{t}$, $F_t(\eta)=\begin{cases}1-e^{-4\eta} & \eta>0\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$.

Si fijamos $\alpha_3=0.9$ tenemos que $F_t^{-1}(0.9)=0.575646$ y la expresión de la restricción anterior es:

$$5.575646x_1-2.424654x_2 \leq 3.848708.$$

Una vez analizada la transformación de las restricciones probabilísticas en los apartados 2.1 y 2.2 se observa dada una restricción estocástica, su equivalente determinista mediante restricciones probabilísticas depende en buena medida de la probabilidad, α_i, que se fije para el cumplimiento de la misma, de tal forma que en el problema determinista equivalente, un punto pude ser o no factible en función de la probabilidad fijada. En siguiente ejemplo se recogen las restricciones probabilísticas que se han obtenido hasta ahora en los ejemplos planteados y se ilustra este hecho.

Ejemplo.

Consideremos el siguiente problema de programación estocástica lineal:

$$\begin{aligned} "\operatorname*{Min}_{\mathbf{x}}" \ & \tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\mathbf{c}}) = \tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2 \\ \text{s.a} \quad & -3x_1 - 2x_2 \le \tilde{b}_1 \\ & \tilde{a}_{21}x_1 + \tilde{a}_{22}x_2 \le \tilde{b}_2 \\ & \tilde{a}_{31}x_1 + \tilde{a}_{32}x_2 \le \tilde{b}_3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

donde $\tilde{b}_1$ es una variable aleatoria que sigue la distribución uniforme en el intervalo (-3, 1), $(\tilde{a}_{21},\tilde{a}_{22},-b_2)^t$ sigue una distribución normal multivariante de valor esperado $(4,5,-20)^t$ y matriz de varianzas y covarianzas $\mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ y el vector $(\tilde{a}_{31},\tilde{a}_{32},-\tilde{b}_3)$ depende linealmente de la variable aleatoria $\tilde{t}$, de manera que $(\tilde{a}_{31},\tilde{a}_{32},-\tilde{b}_3) = (5,-3,-5) + \tilde{t}(1,1,2)$, donde $\tilde{t}$ sigue la distribución exponencial de parámetro $\lambda = 4$.

Como puede observarse, estas tres restricciones son las que se han utilizado como ejemplos anteriormente. El conjunto de restricciones probabilísticas separadas asociado a estas restricciones estocásticas es:

$$\begin{aligned} & P\left(-3x_1 - 2x_2 \le \tilde{b}_1\right) \ge \alpha_1 \\ & P\left(\tilde{a}_{21}x_1 + \tilde{a}_{22}x_2 \le 1\right) \ge \alpha_2 \\ & P\left(\tilde{a}_{31}x_1 + \tilde{a}_{32}x_2 \le \tilde{b}_3\right) \ge \alpha_3 \end{aligned}$$

Como se ha visto anteriormente, si se fijan las probabilidades $\alpha_1 = 0.85$, $\alpha_2 = 0.925$ y $\alpha_3 = 0.9$, el conjunto de oportunidades del problema determinista equivalente es:

$$D_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \;/\; 3x_1 + 2x_2 \geq 2.4,\; 1.43953\sqrt{3x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_2 + 9} + 4x_1 + 5x_2 \leq 20,$$
$$5.55646x_1 - 2.424654x_2 \leq 3.848708, x_1, x_2 \geq 0\}$$

y su representación gráfica es la de la figura 3.

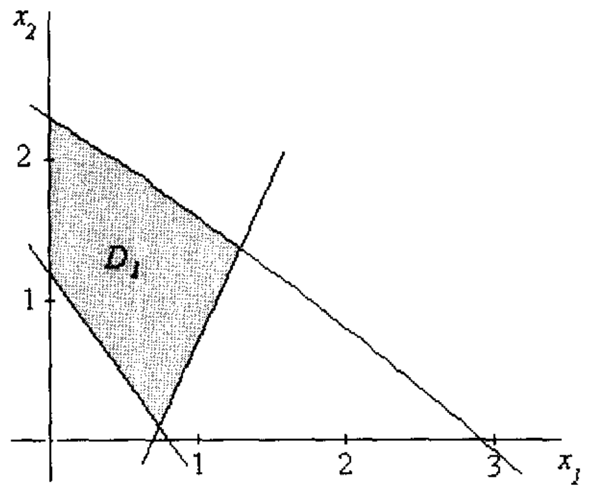


FIGURA 3

Ahora bien, si relajamos los valores correspondientes a las probabilidades con que se deben verificar las restricciones, el conjunto de oportunidades de nuestro ejemplo puede cambiar. Así, supongamos ahora que las probabilidades fijadas son: $\alpha_1 = 0.7$, $\alpha_2 = 0.7$ y $\alpha_3 = 0.75$, entonces el conjunto de oportunidades del problema determinista equivalente es ahora:

$$D_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \;/\; 3x_1 + 2x_2 \geq 1.8,\; 0.524406\sqrt{3x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_2 + 9} + 4x_1 + 5x_2 \leq 20,$$
$$5.346573x_1 - 2.653426x_2 \leq 4.306854, x_1, x_2 \geq 0\}$$

y la gráfica de este conjunto es la siguiente:

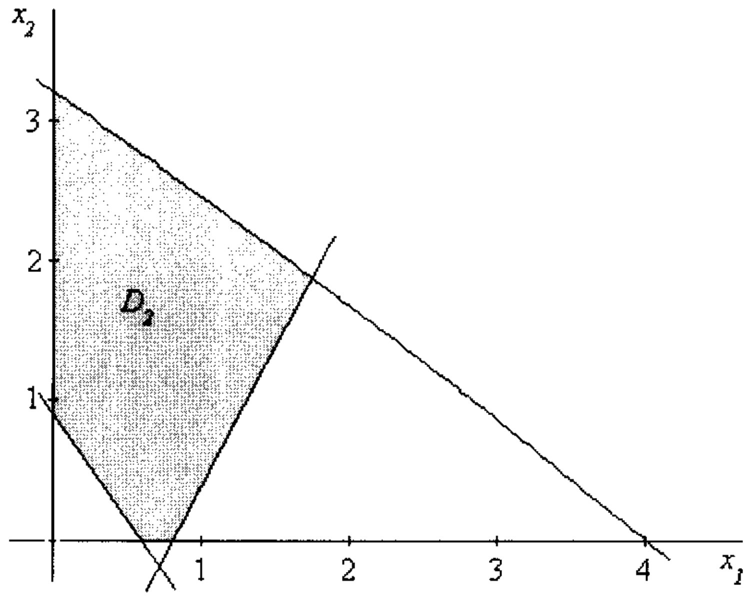


FIGURA 4

En la figura 5 aparecen las gráficas de los conjuntos de oportunidades de los problemas deterministas correspondientes a los probabilidades distintas.

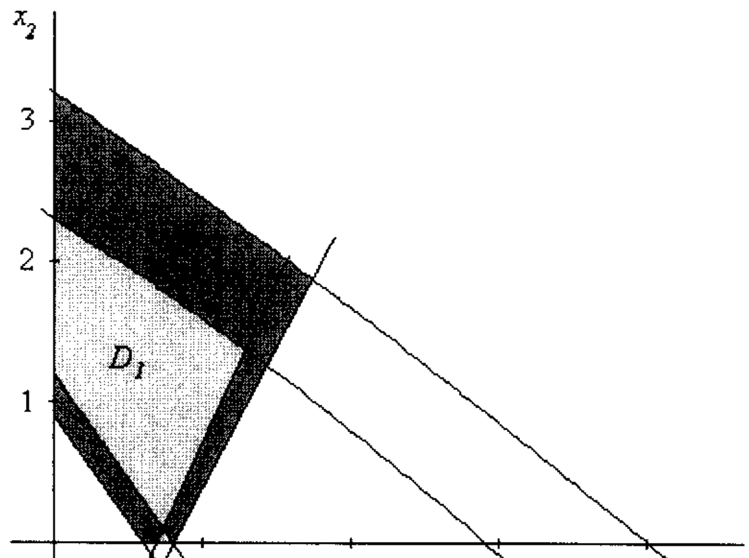


FIGURA 5

Como puede observarse, el hecho de relajar las probabilidades con las que se desea que se verifiquen las restricciones estocásticas del problema, da lugar a que el conjunto de oportunidades del problema determinista equivalente contenga más puntos. Esto muestra cómo la solución del problema de programación estocástica dependerá, en general, de las probabilidades fijadas para las restricciones probabilísticas del problema determinista equivalente.

2. 3. APLICACIÓN DE LA DESIGUALDAD DE CANTELLI A LAS RESTRICCIONES PROBABILÍSTICAS.

A partir de todo lo estudiado hasta ahora, sabemos que dada una restricción estocástica, si se obtiene su equivalente determinista mediante el criterio de *restricciones de azar*, la transformación de ésta es, en general, complicada. En el caso lineal, como acabamos de ver, esta transformación es posible si se verifica la hipótesis de normalidad o de aleatoriedad simple del vector de coeficientes técnicos de la restricción. En otros casos la complejidad de la restricciones que se obtienen hace difícil su tratamiento. Esto ha dado lugar a que se considere la posibilidad de aplicar una desigualdad estadística sobre la función de distribución, que acota el valor de ésta. Así, Stancu-Minasian (1992), plantea un problema de programación estocástica en el que aparece una restricción estocástica lineal y aplica sobre ella la desigualdad de Cantelli que enunciaremos a continuación. De la aplicación de esta desigualdad se obtiene un conjunto de puntos, subconjunto del conjunto que define la restricción probabilística de partida. Esto hace posible que, bajo determinadas condiciones, se pueda aproximar el conjunto de puntos que define la restricción probabilística de partida. Analizaremos la aplicación de esta desigualdad para restricciones probabilísticas en general y, posteriormente, se considera el caso lineal. Antes, enunciaremos la desigualdad de Cantelli, que acota el valor de la función de distribución de una variable aleatoria.

Desigualdad de Cantelli (Rao, 1973, pág. 145)[1].

Sea $\tilde{\xi}$ una variable aleatoria con valor esperado $\bar{\xi}$ y varianza σ_ξ^2, finita, entonces:

$$P\left(\tilde{\xi} - \bar{\xi} \leq \lambda\right) \begin{cases} \leq \dfrac{\sigma_\xi^2}{\sigma_\xi^2 + \lambda^2} & \text{si } \lambda < 0 \\ \geq 1 - \dfrac{\sigma_\xi^2}{\sigma_\xi^2 + \lambda^2} = \dfrac{\lambda^2}{\sigma_\xi^2 + \lambda^2} & \text{si } \lambda \geq 0 \end{cases}$$

■

[1] Para la demostración de esta desigualdad véase, por ejemplo, Cramér (1968, pág. 295).

Consideremos de nuevo la restricción estocástica:

$$\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq 0$$

y su restricción probabilística asociada, para una probabilidad $\alpha_i \in (0, 1)$:

$$P\left(\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq 0\right) \geq \alpha_i$$

Supongamos que conocemos el valor esperado de la variable aleatoria $\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})$, $E\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}$, su varianza, $\mathrm{Var}\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}$ y que el conjunto de oportunidades del problema determinista equivalente es tal que la varianza es finita y su valor es distinto de cero para todo $\mathbf{x}$ factible.

Consideramos dos formas distintas de aplicar la desigualdad de Cantelli a la restricción probabilística anterior. En primer lugar la aplicaremos tipificando la variable aleatoria $\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})$. Posteriormente se aplicará de manera directa. Estas dos formas de aplicar la desigualdad de Cantelli darán lugar a dos desigualdades distintas, pero que definen el mismo conjunto de puntos, como demostraremos más adelante.

a) Aplicación de la desigualdad de Cantelli tipificando la variable aleatoria.

Basándonos en los resultados de Stancu-Minasian (1992), para aplicar la desigualdad de Cantelli sobre la restricción comenzamos tipificando la variable aleatoria $\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})$, y obtenemos una nueva variable:

$$\frac{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi}) - E\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}{\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}}$$

con valor esperado cero y varianza uno.

Aplicamos sobre esta variable aleatoria la desigualdad de Cantelli, para $\lambda_i \geq 0$, y obtenemos:

$$P\left(\frac{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi}) - E\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}{\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}} \leq \lambda_i\right) \geq \frac{\lambda_i^2}{1+\lambda_i^2} \tag{5}$$

puesto que la variable aleatoria $\dfrac{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi}) - E\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}{\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}}$ es de valor esperado cero y varianza uno.

Además, como suponemos que la varianza de la variable aleatoria $\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ es estrictamente positiva, a partir de (5) se obtiene:

$$P\left(\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq \lambda_i\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right) \geq \frac{\lambda_i^2}{1+\lambda_i^2} \tag{6}$$

Una vez obtenido este resultado volvemos a nuestra restricción de partida. Deseamos que se verifique la restricción de azar:

$$P\left(\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq 0\right) \geq \alpha_i$$

y, para obtener puntos que la verifican procedemos de la siguiente forma:

1. Exigimos que se verifique la desigualdad:

$$\lambda_i\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \leq 0,\ \lambda_i \geq 0 \tag{7}$$

ya que de esta forma tenemos en (6) que:

$$P\left(\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq \lambda_i \sqrt{\operatorname{Var}\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \leq 0\right) \geq \frac{\lambda_i^2}{1+\lambda_i^2}$$

2. Hacemos $\lambda_i^2 = \dfrac{\alpha_i}{1-\alpha_i} \geq 0$, ya que:

$$\frac{\lambda_i^2}{1+\lambda_i^2} = \frac{\dfrac{\alpha_i}{1-\alpha_i}}{1+\dfrac{\alpha_i}{1-\alpha_i}} = \frac{\dfrac{\alpha_i}{1-\alpha_i}}{\dfrac{1-\alpha_i+\alpha_i}{1-\alpha_i}} = \alpha_i$$

con lo cual se verifica que $\lambda_i = \sqrt{\dfrac{\alpha_i}{1-\alpha_i}} \geq 0$. Sustituyendo el valor de λ_i en (7) obtenemos:

$$\sqrt{\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}} \sqrt{\operatorname{Var}\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \leq 0$$

Por tanto, por la desigualdad de Cantelli, podemos afirmar que todo vector $\mathbf{x}$ que verifique la condición:

$$\sqrt{\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}} \sqrt{\operatorname{Var}\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \leq 0$$

verificará la restricción de azar:

$$P\left(\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq 0\right) \geq \alpha_i$$

Sea, pues, $S_i = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,/\, \sqrt{\dfrac{\alpha_i}{1-\alpha_i}} \sqrt{\operatorname{Var}\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \leq 0 \right\}$. De los resultados anteriores se desprende que, bajo las hipótesis establecidas se verifica que $S_i \subset \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,/\, P\left(\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq 0\right) \geq \alpha_i \right\}$.

b) Aplicación directa de la desigualdad de Cantelli.

Consideremos de nuevo la restricción probabilística:

$$P\left(\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq 0\right) \geq \alpha_i$$

Como:

$$P\left(\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq 0\right) = P\left(\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi}) - E\left\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right\} \leq -E\left\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right\}\right)$$

si aplicamos la desigualdad de Cantelli sobre la expresión anterior para $\lambda_i = -E\left\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right\}$ exigiendo que $E\left\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right\} \leq 0$, obtenemos:

$$\begin{aligned} P\left(\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq 0\right) &= P\left(\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi}) - E\left\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right\} \leq -E\left\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right\}\right) \geq \\ &\geq \frac{\left(E\left\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right\}\right)^2}{\operatorname{Var}\left\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right\} + \left(E\left\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right\}\right)^2} \end{aligned}$$

Puesto que deseamos que se verifique la restricción de azar:

$$P\left(\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq 0\right) \geq \alpha_i$$

si exigimos la condición:

$$\frac{\left(E\left\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right\}\right)^2}{\operatorname{Var}\left\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right\} + \left(E\left\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right\}\right)^2} \geq \alpha_i$$

equivalente a:

$$\alpha_i \operatorname{Var}\left\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right\} - (1-\alpha_i)\left(E\left\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right\}\right)^2 \leq 0$$

con $E\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \le 0$, por la desigualdad de Cantelli, tenemos asegurado que se verifica la restricción de azar de partida.

Así pues, a partir de los resultados obtenidos, si definimos el conjunto:

$$S_2 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,/\, E\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \le 0,\ \alpha_i \mathrm{Var}\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} - (1-\alpha_i)\left(E\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2 \le 0 \right\}$$

bajo las hipótesis establecidas, se verifica que:

$$S_2 \subset \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,/\, P\left(\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \le 0\right) \ge \alpha_i \right\}$$

Obsérvese que la aplicación de la desigualdad de Cantelli de manera directa y tipificando la variable aleatoria da lugar, en principio, a dos conjuntos que aparentemente son distintos. Mediante la siguiente proposición demostramos que ambos conjuntos definen los mismos puntos y, por tanto, es indistinto aplicar la desigualdad de Cantelli sobre la variable aleatoria tipificada o aplicarla directamente.

Proposición 1.

Sean:

$$S_1 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,/\, \sqrt{\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}} \sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \le 0 \right\}$$

$$S_2 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,/\, E\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \le 0,\ \alpha_i \mathrm{Var}\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} - (1-\alpha_i)\left(E\{\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2 \le 0 \right\}$$

entonces $S_1 \equiv S_2$.■

Demostración.

Hemos de demostrar que $S_1 \subset S_2$ y $S_2 \subset S_1$.

a) $S_1 \subset S_2$.

Sea $\mathbf{x} \in S_1$. Entonces, se verifica:

$$E\{\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} \leq -\sqrt{\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}}\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}}$$

con lo cual, puesto que $\mathrm{Var}\{\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} > 0$ se verifica que $E\{\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} \leq 0$.

Multiplicando por -1 la desigualdad anterior obtenemos:

$$\sqrt{\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}}\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}} \leq -E\{\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}$$

y, elevando al cuadrado a ambos lados de la desigualdad tenemos que se verifica:

$$\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}\mathrm{Var}\{\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} \leq \left(E\{\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}\right)^2$$

que podemos expresar también como:

$$\alpha_i \mathrm{Var}\{\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} - (1-\alpha_i)\left(E\{\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}\right)^2 \leq 0$$

y, por tanto, $\mathbf{x} \in S_2$.

b) $S_2 \subset S_1$.

Sea $\mathbf{x} \in S_2$, luego:

$$\alpha_i \operatorname{Var}\{\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} - (1-\alpha_i)\left(E\{\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}\right)^2 \leq 0$$

y, como $\alpha_i > 0$ y la varianza de cualquier variable aleatoria es no negativa, se verifica que:

$$0 \leq \alpha_i \operatorname{Var}\{\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} \leq (1-\alpha_i)\left(-E\{\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}\right)^2$$

Si calculamos la raíz cuadrada a ambos lados de la desigualdad tenemos:

$$0 \leq \sqrt{\alpha_i}\sqrt{\operatorname{Var}\{\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}} \leq -\sqrt{1-\alpha_i}\, E\{\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}$$

con $0 \leq -\sqrt{1-\alpha_i}\, E\{\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}$, puesto que $\alpha_i \in (0, 1)$ y para cualquier $\mathbf{x} \in S_2$ se verifica que $E\{\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} \leq 0$.

Si sumamos en la desigualdad anterior $\sqrt{1-\alpha_i}\, E\{\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} \leq 0$, obtenemos:

$$\sqrt{\alpha_i}\sqrt{\operatorname{Var}\{\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}} + \sqrt{1-\alpha_i}\, E\{\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} \leq 0$$

y, por tanto:

$$\sqrt{\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}}\sqrt{\operatorname{Var}\{\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} \leq 0$$

y $\mathbf{x} \in S_1$.

Queda demostrado que $S_l \equiv S_2$.■

Los resultados obtenidos son aplicables a cualquier restricción estocástica del tipo $\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \leq 0$, si se verifican las hipótesis establecidas anteriormente. A lo largo de este trabajo nos referiremos a la aplicación de esta desigualdad y en adelante, siempre que se aplique esta desigualdad se supone que se verifican las hipótesis necesarias para ello. A continuación veremos su aplicación para restricciones lineales. Puesto que la proposición anterior demuestra que su aplicación directa y su aplicación tipificando la variable aleatoria definen el mismo conjunto de puntos, en adelante aplicaremos la desigualdad tipificando la variable aleatoria $\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi})$, con lo cual, la expresión del subconjunto de puntos que verifican la restricción probabilística que consideraremos es:

$$\sqrt{\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}}\sqrt{\operatorname{Var}\{\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} \leq 0$$

Esta desigualdad define un conjunto convexo si las funciones $E\{\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}$ y $\sqrt{\operatorname{Var}\{\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}}$ son convexas, condición que se cumple en el caso lineal, como veremos a continuación.

En cualquier caso, si en un problema de programación estocástica se "sustituye" una restricción probabilística por la desigualdad obtenida, se ha de tener presente que la nueva restricción define un subconjunto del conjunto de puntos que verifican la restricción probabilística y, por tanto, no es más que una aproximación de ésta.

Consideremos la restricción estocástica lineal $\tilde{\mathbf{a}}_i\mathbf{x} \leq \tilde{b}_i$ y su restricción probabilística asociada, para una probabilidad $\alpha_i \in (0, 1)$:

$$P\left(\tilde{\mathbf{a}}_i\mathbf{x} \leq \tilde{b}_i\right) \geq \alpha_i$$

Supongamos que desconocemos la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $\tilde{\mathbf{a}}_i\mathbf{x} - \tilde{b}_i$ pero conocemos el valor esperado y la matriz de varianzas y covarianzas del vector $(\tilde{\mathbf{a}}_i, -\tilde{b}_i) = (\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2}, \ldots, \tilde{a}_{in}, -\tilde{b}_i)$, $(\bar{\mathbf{a}}_i, -\bar{b}_i) = (\bar{a}_{i1}, \bar{a}_{i2}, \ldots, \bar{a}_{in}, -\bar{b}_i)$ y $\mathbf{V}_i$, respectivamente, con $\mathbf{V}_i$ matriz cuadrada, de orden $n+1$ y definida positiva.

Si aplicamos la desigualdad de Cantelli sobre la restricción probabilística, podemos asegurar, por los resultados anteriores, que el conjunto de puntos definido por la desigualdad:

$$\sqrt{\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}}\sqrt{(\mathbf{x}^t,1)\mathbf{V}_i(\mathbf{x}^t,1)^t} + \bar{\mathbf{a}}_i\mathbf{x} - \bar{b}_i \leq 0$$

es un subconjunto del conjunto de puntos que verifican la restricción probabilística $P(\tilde{\mathbf{a}}_i\mathbf{x} \leq \tilde{b}_i) \geq \alpha_i$.

Obsérvese que la restricción obtenida define un conjunto convexo, puesto que $\alpha_i \in (0, 1)$ y, por el teorema 1, la función $\sqrt{(\mathbf{x}^t,1)\mathbf{V}_i(\mathbf{x}^t,1)^t}$ es una función convexa, al ser la matriz $\mathbf{V}_i$ definida positiva.

2.4. ANÁLISIS DE LA APLICACIÓN DE LA DESIGUALDAD DE CANTELLI.

Como se ha comentado anteriormente, la resolución de problemas de programación estocástica mediante restricciones probabilística o de azar es, en general, complicada. La resolución de problemas con restricciones de este tipo requiere combinaciones de programación no lineal y de simulación, lo que los hace complicados computacionalmente (véase Prékopa (1995), cap. 11).

En este trabajo proponemos la aplicación de la desigualdad de Cantelli sobre restricciones probabilísticas, en los casos en los que se desconoce la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $\tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi})$. La aplicación de esta desigualdad da lugar a la obtención de un subconjunto del conjunto de puntos que verifican la restricción de azar, de tal forma que si se sustituye la restricción probabilística por la expresión obtenida en el apartado anterior, el conjunto de puntos factibles del problema resultante es un subconjunto del conjunto factible del problema determinista equivalente con restricciones de azar. Esto da lugar a cuestionarnos la bondad de la aplicación de la desigualdad de Cantelli sobre una restricción probabilística.

Una posible forma de analizar la bondad de esta desigualdad es la de comparar la función de distribución de alguna variable aleatoria con la cota obtenida. Es decir, dado que a partir de la desigualdad de Cantelli sabemos que dada una variable aleatoria $\tilde{\xi}$ con valor esperado $\bar{\xi}$ y varianza σ_{ξ}^2, finita, entonces::

$$P\left(\tilde{\xi} \leq u\right) \geq \frac{(u-\bar{\xi})^2}{\sigma_{\xi}^2 + (u-\bar{\xi})^2} \quad \forall u \geq \bar{\xi}$$

podemos considerar alguna variable aleatoria conocida y comparar la funicón de distribución de ésta con la cota de Cantelli. Hemos llevado a cabo esta comparación para algunos casos (exponencial, uniforme, beta, normal). En los casos analizados se observa que a medida que crece el valor de u, la cota se aproxima más a la función de distribución de la variable aleatoria.

Por otro lado, a raíz de este estudio hemos considerado interesante comparar las restricciones que se obtienen al aplicar la desigualdad de Cantelli sobre alguna de las restricciones obtenidas en el apartado 2.2 de este trabajo. En concreto, realizaremos la comparación para el caso lineal normal.

Consideremos, pues, la restricción probabilística:

$$P(\tilde{\mathbf{a}}_i \mathbf{x} \leq \tilde{b}_i) \geq \alpha_i$$

Supongamos que el vector $(\tilde{\mathbf{a}}_i, -\tilde{b}_i) = (\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2}, \ldots, \tilde{a}_{in}, -\tilde{b}_i)$, sigue la distribución normal multivariante, con valor esperado $(\bar{\mathbf{a}}_i, -\bar{b}_i)$, $\bar{\mathbf{a}}_i = (\bar{a}_{i1}, \bar{a}_{i2}, \ldots, \bar{a}_{in})$ y matriz de varianzas y covarianzas $\mathbf{V}_i$, cuadrada, de orden $n+1$ y definida positiva. A partir de los resultados obtenidos en el apartado 2.2, sabemos que, bajo las hipótesis establecidas, la restricción probabilística anterior es equivalente a la restricción:

$$\Phi^{-1}(\alpha_i)\sqrt{(\mathbf{x}^t, 1)\mathbf{V}_i(\mathbf{x}^t, 1)^t} + \bar{\mathbf{a}}_i \mathbf{x} - \bar{b}_i \leq 0$$

donde Φ es la función de distribución de la normal cero uno.

Por otro lado, si nos olvidamos momentáneamente de que conocemos la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $\tilde{\mathbf{a}}_i \mathbf{x} - \tilde{b}_i$ y aplicamos desigualdad de Cantelli sobre la restricción de azar anterior, obtenemos la restricción:

$$\sqrt{\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}}\sqrt{(\mathbf{x}^t, 1)\mathbf{V}_i(\mathbf{x}^t, 1)^t} + \bar{\mathbf{a}}_i \mathbf{x} - \bar{b}_i \leq 0$$

Por tanto, en este caso, la diferencia entre ambas restricciones es el factor que multiplica a la desviación estándar de nuestra variable aleatoria que en un caso es $\Phi^{-1}(\alpha_i)$ y en el otro $\sqrt{\dfrac{\alpha_i}{1-\alpha_i}}$, con $\alpha_i \in (0,1)$.

La siguiente figura muestra las gráficas de las funciones $\Phi^{-1}(\alpha_i)$ y $\sqrt{\dfrac{\alpha_i}{1-\alpha_i}}$. El eje de abcisas corresponde a la probabilidad fijada para la restricción de azar, $\alpha_i \in (0,\ 1)$. En el eje de ordenadas corresponde a la función $\sqrt{\dfrac{\alpha_i}{1-\alpha_i}}$ y la inversa de la función de distribución de la normal cero uno, $\Phi^{-1}(\alpha_i)$, es decir, el valor del soporte de distribución de la normal cero uno para el que la probabilidad acumulada es α_i.

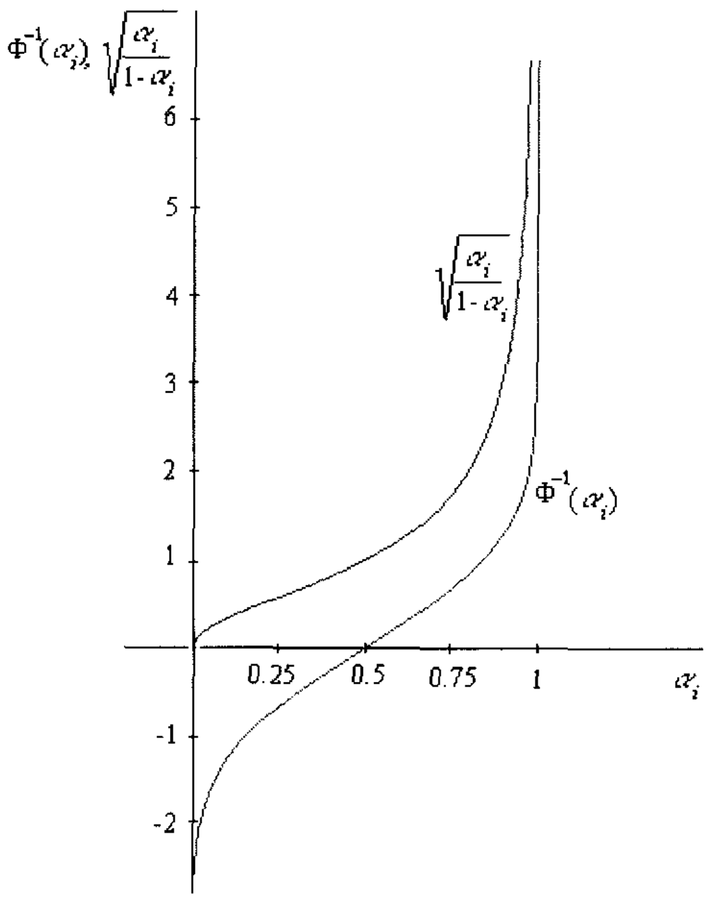


FIGURA 6

En la gráfica se observa que para valores de la probabilidad entre 0 y 0.5, se verifica que $\sqrt{\dfrac{\alpha_i}{1-\alpha_i}} \geq 0$ mientras que $\Phi^{-1}(\alpha_i) \leq 0$, es decir, si aplicamos la desigualdad de Cantelli estamos ponderando la desviación estándar con un valor positivo, si bien el valor del soporte de distribución de la normal cero uno es, en ese caso, menor o igual que cero. En cambio, para valores de la probabilidad próximos a uno, las gráficas de las funciones $\Phi^{-1}(\alpha_i)$ y $\sqrt{\dfrac{\alpha_i}{1-\alpha_i}}$ son casi iguales. Hemos de señalar que lo lógico es fijar valores para α_i próximos a uno, puesto que representa la probabilidad con que se desea que se verifique la restricción estocástica del problema.

Una vez analizado todo esto, pasamos a ver la transformación del objetivo estocástico en su determinista equivalente.

3. TRANSFORMACIÓN DEL OBJETIVO ESTOCÁSTICO EN SU EQUIVALENTE DETERMINISTA. CASO LINEAL.

Una vez analizada la transformación de las restricciones estocásticas en su determinista equivalente mediante restricciones de azar, abordamos ahora la transformación del objetivo estocástico en su determinista equivalente. Con ello, conseguimos construir el problema determinista equivalente al problema estocástico. Como se ha comentado anteriormente, la solución del problema determinista equivalente es considerada solución óptima del problema estocástico de partida.

Además, veremos a continuación que la transformación del objetivo estocástico no es única, en el sentido de que existen distintos criterios posibles de transformación del objetivo estocástico en su determinista equivalente. Este hecho hace que la transformación del objetivo sea distinta de la transformación de las restricciones estocásticas en su determinista equivalente, en la que el criterio de transformación es exigir que se verifiquen las restricciones estocásticas con una determinada probabilidad y únicamente se ha de fijar la probabilidad para las restricciones.

Los criterios de transformación existentes en la literatura para transformar el objetivo estocástico son múltiples. En este trabajo abordaremos los criterios que hemos considerado más importantes. Todos ellos recogen, de una forma u otra, características estadísticas del objetivo estocástico y, en ese sentido, la elección de un criterio u otro refleja, de alguna forma, la actitud del decisor ante el proceso de decisión con incertidumbre que se modeliza mediante el problema de programación estocástica.

De la necesidad de fijar probabilidades para obtener las restricciones probabilísticas y de la elección de un criterio de transformación del objetivo estocástico en determinista se desprende que la resolución de problemas de programación estocástica pasa por un proceso de toma de decisiones previo a la resolución del problema determinista equivalente.

A continuación veremos los criterios básicos de transformación del problema estocástico en su determinista equivalente y una vez analizados éstos, nos centraremos en el caso lineal, imponiendo, además, cuando así lo requiera el problema, hipótesis adicionales acerca de la distribución de probabilidad del vector de parámetros aleatorios del objetivo estocástico.

3.1. CRITERIOS BÁSICOS DE TRANSFORMACIÓN DEL OBJETIVO ESTOCÁSTICO.

Consideremos el problema de programación estocástica:

$$\begin{array}{ll} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} & \tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{(PE)}$$

en el que suponemos que el conjunto de oportunidades $D \subset \mathbb{R}^n$ es determinista o bien ha sido transformado en su determinista equivalente mediante el criterio de restricciones probabilísticas o de azar. Suponemos además que D es un conjunto compacto, convexo y no vacío.

Suponemos que el vector $\tilde{\xi}$, aleatorio, está definido sobre un conjunto $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^s$. Suponemos dada la familia $\mathbb{F}$ de eventos, es decir, subconjuntos de $\mathbb{E}$, y la distribución de probabilidad P definida sobre $\mathbb{F}$, de manera que para cualquier subconjunto de $\mathbb{E}$, $A \subset \mathbb{E}$, $A \in \mathbb{F}$, la probabilidad de A, $P(A)$, es conocida. Además, se mantiene la hipótesis de que la distribución de probabilidad, P, es independiente de las variables de decisión, $x_1,\ldots,x_n$.

Sea $F_{\tilde{z}}$ la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ y Θ su soporte de distribución. Suponemos que la variable aleatoria $\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ es continua para todo $\mathbf{x} \in D$, y que se conocen su valor esperado, $E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}$, y su varianza $\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}$.

Veamos los criterios básicos de transformación del objetivo estocástico en su determinista equivalente, definidos en la literatura, y el problema determinista equivalente que se obtienen al ser aplicados al problema de programación estocástica (PE).

a) Criterio del valor esperado.

Este criterio fue el que inicialmente consideraron Charnes, Cooper y Symonds (1958) en el trabajo en el que introducen el concepto de restricciones probabilísticas o de azar y denominaron al modelo obtenido *Modelo E.* Según este criterio, la función objetivo del problema determinista equivalente es:

$$E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\ \tilde{\xi})\} = \int_{\Theta} z(\mathbf{x},\mathbf{t})dF_{z(\mathbf{x})}(t)$$

donde $F_{z(\mathbf{x})}$ y Θ son, respectivamente, la función de distribución y el soporte de distribución de la variable aleatoria $\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})$.

La idea es, por tanto, construir el problema determinista equivalente optimizando el valor esperado de la función objetivo estocástica y manteniendo el criterio de optimización del problema estocástico, esto es, si el problema estocástico es de mínimo (máximo), en el problema valor esperado se minimiza (maximiza) el valor esperado de la función objetivo estocástica.

Así pues, en nuestro problema, como el criterio de optimización que se mantiene para el problema de programación estocástica es el de mínimo, el problema determinista equivalente que se obtiene para el problema (PE) siguiendo el criterio valor esperado es:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\ \tilde{\xi})\} \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{(E)}$$

Obsérvese, además, que para resolver el problema de programación estocástica siguiendo este criterio, basta con conocer el valor esperado de la función objetivo estocástica y, por tanto, es aplicable aún en el caso en el que se desconozca la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})$.

Sin embargo, este criterio no siempre puede considerarse un criterio "apropiado", puesto que el valor esperado no es más que una medida de tendencia central de la variable aleatoria y su aplicación como criterio de transformación del objetivo estocástico puede dar lugar a no considerar determinadas características de la función objetivo estocástica del problema. Así, Prékopa (1995, pág. 243-244) señala que para que este criterio sea considerado "apropiado" se deben cumplir dos condiciones:

1) El evento aleatorio debe repetirse un gran número de veces para asegurar que la media de los resultados sea bastante próxima al valor esperado.

2) La magnitud de la variación del resultado alrededor del valor esperado debe ser pequeña. En otro caso el criterio de valor esperado puede no ser acertado.

Por otro lado, Kataoka (1963), señala que este criterio no tiene por qué ser una buena medida para optimizar la función objetivo estocástica, puesto que la solución valor esperado mínimo puede ser arriesgada en el sentido de que la probabilidad de que el objetivo estocástico alcance un valor mayor que el valor esperado mínimo puede ser mayor que para otras soluciones, debido a la dispersión de la distribución.

b) Criterio mínima varianza.

En este caso, se considera como criterio para resolver el problema de programación estocástica, minimizar la varianza de la función objetivo estocástica $\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})$.

Puesto que la varianza de una variable aleatoria se define como el valor esperado del cuadrado de la desviación de la variable aleatoria alrededor de su valor esperado, la elección de este criterio da lugar a elección de aquel vector **x** para el que la variable aleatoria $\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ está más concentrada alrededor de su valor esperado, de manera que el determinista equivalente mínima varianza puede interpretarse como una medida de error cuadrático.

De todo lo dicho se desprende que el criterio de optimización es el de mínima varianza, independientemente de que el problema de optimización sea de mínimo (hipótesis que mantenemos en este trabajo) o de máximo.

Así, la función objetivo del problema determinista equivalente es:

$$\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} = E\left\{(\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}))^2\right\} - \left(E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2 = \int_{\Theta}(z(\mathbf{x},\mathbf{t}))^2\,dF_{z(\mathbf{x})}(t) - \left(\int_{\Theta} z(\mathbf{x},\mathbf{t})\,dF_{z(\mathbf{x})}(t)\right)^2$$

luego, el problema determinista equivalente al problema (PE) siguiendo el criterio mínima varianza es:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} = \int_{\Theta}(z(\mathbf{x},\mathbf{t}))^2\,dF_z(t) - \left(\int_{\Theta} z(\mathbf{x},\mathbf{t})\,dF_{z(\mathbf{x})}(t)\right)^2 \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad (\sigma^2)$$

Señalemos, además, que, al igual que en el problema de valor esperado, siempre que se conozca la varianza de la función objetivo $\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})$, podremos plantear y resolver el problema estocástico mediante este criterio, aunque se desconozca la distribución de probabilidad de esta variable aleatoria.

c) Eficiencia valor esperado desviación estándar.

Este concepto de eficiencia fue introducido por Markowitz (1952) para resolver problemas de selección de cartera dentro del campo de la economía financiera.

Dado el problema de programación estocástica:

$$\begin{array}{ll} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} & \tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{(PE)}$$

se dice que una cartera es eficiente en el sentido de Markowitz si es solución eficiente en el sentido de Pareto del problema biobjetivo:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \left(E\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}, \text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}\right) \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array}$$

De esta forma, Markowitz recoge una medida de tendencia central y una de dispersión del objetivo estocástico y busca soluciones eficientes para estos dos criterios. Este criterio de resolución de problemas de programación estocástica ha sido ampliamente utilizado en modelos de selección de cartera, dentro del campo de la Economía Financiera, para resolver problemas de programación estocástica correspondientes a modelos económicos.

Posteriormente, Prékopa (1995, pág. 245) propone la búsqueda de soluciones eficientes valor esperado desviación estándar, que se definen como el conjunto de soluciones eficientes en el sentido de Pareto del siguiente problema biobjetivo determinista equivalente:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \left(E\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}, \sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}}\right) \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{(E}\sigma\text{)}$$

que recoge el valor esperado y la desviación estándar de la función objetivo estocástica. Prékopa considera que este criterio es más adecuado que el anterior puesto que, de esta forma, los dos criterios vienen dados en las mismas unidades de medida.

Evidentemente, el conjunto de soluciones eficientes de ambos problemas es el mismo, puesto que la función raíz cuadrada es una función estrictamente creciente.

En adelante, seguiremos el criterio valor esperado desviación estándar. Obsérvese, además, que este concepto da lugar a la obtención de todo un conjunto de soluciones incomparables, a diferencia de los criterios valor esperado, mínima varianza y de los criterios de máxima probabilidad, que veremos a continuación, puesto que mediante todos ellos se obtiene una solución óptima para el problema de programación estocástica. Por otro lado, y al igual que en los dos criterios anteriores, este criterio es aplicable si se conocen el valor esperado y la desviación estándar de la función objetivo estocástica, aún en el caso en el que se desconozca la distribución de probabilidad de la misma.

d) Criterios de máxima probabilidad.

En este apartado se recogen dos criterios de transformación del objetivo estocástico en su determinista equivalente que, de una forma u otra, den lugar a soluciones buenas en términos de probabilidad. Los dos criterios de máxima probabilidad existentes, también llamados criterios satisfacientes, son el criterio mínimo riesgo y el criterio de Kataoka.

Para resolver el problema de programación estocástica (PE), manteniendo como criterio de optimización el de minimizar la función objetivo estocástica, los criterios de máxima probabilidad transforman el objetivo estocástico en determinista maximizando la probabilidad de que el objetivo no supere un nivel dado (criterio mínimo riesgo) o determinando el mínimo nivel que puede alcanzar el objetivo con una determinada probabilidad (criterio de Kataoka o β-fractil). En ambos casos se ha de fijar un nivel a alcanzar para el objetivo o bien un nivel de probabilidad que resulte satisfactorio para el decisor.

d1) Criterio mínimo riesgo.

Los primeros trabajos en los que se propone este criterio, denominado también modelo *P*, para obtener un determinista equivalente para la función objetivo de un problema estocástico, se deben a Charnes y Cooper (1963) y Bereanu (1964).

Para resolver el problema de programación estocástica (PE) mediante este criterio se ha de fijar un nivel para la función objetivo estocástica, $u \in \mathbb{R}$, al que se denomina nivel de aspiración, y se maximiza la probabilidad de que el objetivo sea menor o igual que ese nivel:

$$P\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq u\}.$$

De esta forma, el nivel fijado, *u*, puede interpretarse como el mayor nivel que el decisor está dispuesto a admitir para el objetivo estocástico que se desea minimizar.

Así, el problema determinista equivalente que se plantea es:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Max}}\ P\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq u\} = F_{\tilde{z}(\mathbf{x})}(u) = \displaystyle\int_{\Theta_1} dF_{\tilde{z}(\mathbf{x})}(t) & \\ \text{s. a} \quad \mathbf{x} \in D & \end{array} \qquad \text{(MR(u))}$$

donde $\Theta_1 = \{\mathbf{t}\colon z(\mathbf{x},\mathbf{t}) \leq u\}$ y $F_{\tilde{z}(\mathbf{x})}$ es la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})$.

La solución al problema (MR(u)) es denominada solución mínimo riesgo de nivel *u*.

Puesto que $P\left(\tilde{z}\left(\mathbf{x},\tilde{\xi}\right)\leq u\right)=1-P\left(\tilde{z}\left(\mathbf{x},\tilde{\xi}\right)>u\right)$, se puede interpretar el problema (MR(u)) como minimizar el riesgo de que el valor de la función objetivo $\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ sea mayor que el nivel de aspiración, u, puesto que:

$$\underset{\mathbf{x}\in D}{\text{Max}}\, P\left\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\leq u\right\}\equiv\underset{\mathbf{x}\in D}{\text{Max}}\left\{1-P\left\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})>u\right\}\right\}\equiv 1-\underset{\mathbf{x}\in D}{\text{Min}}\left\{P\left(\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})>u\right)\right\}$$

con lo cual, puede afirmarse que el vector $\mathbf{x}\in D$ solución del problema (MR(u)) también lo es de:

$$\begin{array}{l}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\, P\left(\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})>u\right)\\ \text{s.a}\ \ \mathbf{x}\in D\end{array}$$

En caso de que el criterio de optimización del problema de programación estocástica sea el de máximo, es decir, se desee resolver el problema de programación estocástica:

$$\begin{array}{ll}\text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Max}}\text{"} & \tilde{z}(\mathbf{x},\ \tilde{\xi})\\ \text{s.a} & \mathbf{x}\in D\end{array}$$

el problema mínimo riesgo determinista equivalente es:

$$\begin{array}{ll}\underset{\mathbf{x}}{\text{Max}}\, P\left\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\geq u\right\} & \\ \text{s. a} & \mathbf{x}\in D\end{array}$$

en el que se trata de maximizar la probabilidad de que la variable aleatoria $\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ supere el nivel de aspiración fijado, u, para la función objetivo estocástica que se desea maximizar.

d2) Criterio de Kataoka o criterio β-fractil.

El criterio β-fractil o de Kataoka fue introducido por Kataoka en 1963, en su artículo *"A Stochastic Programming Model"*. En este trabajo, Kataoka considera la resolución de problemas de programación estocástica y propone el siguiente problema determinista equivalente al problema (PE):

$$\begin{aligned} &\operatorname*{Min}_{(\mathbf{x}^t, u)} u \\ \text{s.a}\quad &P(\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq u) = \beta \\ &\mathbf{x} \in D \end{aligned} \qquad (\mathrm{K}(\beta))$$

donde β es una probabilidad fijada por el decisor, $\beta \in (0, 1)$. Mediante este criterio se fija, por tanto, una probabilidad para el objetivo y se determina el menor nivel que puede alcanzar la función objetivo con esa probabilidad. La función objetivo del problema estocástico pasa a formar parte del conjunto de oportunidades como una restricción probabilística o de azar y el problema determinista equivalente es un problema con n+1 variables de decisión: las n variables de decisión del problema de programación estocástica, recogidas en el vector $\mathbf{x}$ y la variable u, que determina el menor nivel que puede alcanzar la función objetivo estocástica $\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ con una probabilidad β.

Obsérvese que el problema determinista planteado corresponde al caso en el que el problema de programación estocástica es un problema de mínimo. Si el problema de programación estocástica que se pretende resolver es un problema de máximo:

$$\begin{aligned} &\text{"}\operatorname*{Max}_{\mathbf{x}}\text{"}\ \tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \\ \text{s.a}\quad &\mathbf{x} \in D \end{aligned}$$

el problema de Kataoka asociado al mismo es:

$$\begin{aligned} &\operatorname*{Min}_{(\mathbf{x}^t, u)} u \\ \text{s.a}\quad &P(\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \geq u) = \beta \\ &\mathbf{x} \in D \end{aligned} \qquad (\mathrm{K}(\beta))$$

en el que se busca el mayor valor u tal que la probabilidad de que el objetivo no supere ese valor sea igual a la probabilidad fijada, $\beta \in (0,1)$.

Obsérvese que, de esta forma, en el problema determinista equivalente (K(β)) se incorpora la probabilidad de la función objetivo estocástica como una restricción probabilística de igualdad y se busca el menor nivel que puede alcanzar la función objetivo estocástica para esa probabilidad. En trabajos posteriores al de Kataoka (1963), se considera este criterio de forma algo distinta a como lo definió Kataoka. Así, Stancu-Minasian (1984, pág. 92), plantea el siguiente problema determinista equivalente al problema estocástico:

$$\begin{array}{ll} & \underset{(\mathbf{x}^t, u)}{\text{Min}}\ u \\ \text{s.a} & P(\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \leq u) \geq \beta \\ & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad (\text{K'}(\beta))$$

en el que se exige que el objetivo estocástico sea menor o igual que el nivel u con al menos la probabilidad fijada, β. A partir de la siguiente proposición, podemos afirmar que bajo determinadas condiciones, los dos problemas son equivalentes.

Proposición 2.

Supongamos que la variable aleatoria $\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})$ es continua. Si $(\mathbf{x}^t, u)^t$ es solución óptima de (K'(β)), se verifica que:

$$P\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \leq u\} = \beta .$$

■

Demostración.

Demostramos la proposición por reducción al absurdo.

Por hipótesis $(\mathbf{x}^t, u)^t$ es solución óptima del problema K'(β), luego, se verifica:

a) Es factible en (K'(β)): $\mathbf{x} \in D$ y $P\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq u\} \geq \beta$

b) Si $(\mathbf{x}'^t, u')^t$ verifica que $\mathbf{x}' \in D$ y $P\{\tilde{z}(\mathbf{x}',\tilde{\xi}) \leq u'\} \geq \beta$, entonces $u \leq u'$.

Supongamos que la solución $(\mathbf{x}^t, u)^t$ verifica la restricción probabilística con desigualdad estricta, es decir:

$$P\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq u\} > \beta$$

Entonces, por ser la variable aleatoria $\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ continua existe un real u', $u' < u$, tal que:

$$P\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq u'\} = \beta \quad \text{y} \quad P\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq u\} = P\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq u'\} + P\{u' < \tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq u\}$$

Luego, la solución $(\mathbf{x}^t, u')^t$ es solución factible del problema K'(β) y $u' < u$, lo que contradice la hipótesis (b).■

A partir de esta proposición tenemos que si se verifica que la variable aleatoria $\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ es continua para todo $\mathbf{x} \in D$ (hipótesis que mantenemos en este trabajo), los problemas (K(β)) y (K'(β)) son equivalentes. En adelante se planteará el problema correspondiente al criterio de Kataoka tal y como lo definió éste, es decir, con igualdad en la probabilidad. Sin embargo, en determinados casos, las dificultades para trabajar con la restricción probabilística:

$$P(\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq u) = \beta$$

nos llevarán a aplicar la desigualdad de Cantelli a la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})$, de manera semejante a como lo hemos hecho en restricciones probabilísticas. En esos casos, el problema de Kataoka que plantearemos es el que corresponde a la restricción de desigualdad, es decir:

$$\begin{aligned} &\underset{(\mathbf{x}^t,u)}{\text{Min}}\ u \\ \text{s.a}\quad & P(\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq u) \geq \beta \\ & \mathbf{x} \in D \end{aligned}$$

Del análisis comparativo de los dos criterios de máxima probabilidad con los otros tres criterios analizados se observan dos diferencias fundamentales entre ellos:

1. Para la aplicación de los criterios de máxima probabilidad es necesario fijar previamente un parámetro: el nivel, si aplicamos el criterio mínimo riesgo y la probabilidad, si aplicamos el criterio de Kataoka, mientras que en los tres primeros criterios vistos esto no es necesario. Además, las soluciones óptimas de los problemas mínimo riesgo y de Kataoka dependerán, en general, de los valores que se les dé a estos parámetros.

2. Mientras que en los tres primeros criterios (valor esperado, mínima varianza y eficiencia valor esperado desviación estándar) la resolución del problema determinista equivalente puede realizarse siempre que se conozcan el valor esperado y la varianza de la función objetivo, los dos criterios de máxima probabilidad dependen de la función de distribución de la función objetivo estocástica y, por tanto, para su resolución se requiere conocer ésta.

Una vez vistos los criterios básicos de resolución del objetivo estocástico, se observa que la diversidad de criterios da lugar a la necesidad de elegir uno u otro para resolver problemas de programación estocástica y, en este sentido, podemos afirmar que la resolución de los mismos lleva implícito siempre un proceso de decisión. Evidentemente, la elección del criterio deberá realizarse siempre en función de las características del problema que se desea resolver y de las preferencias del decisor. Sin embargo, como veremos más adelante, estos criterios de resolución de problemas de programación estocástica están relacionados unos con otros, a pesar de que, en principio, podría pensarse lo contrario, debido a que cada uno de ellos recoge características estadísticas distintas del objetivo estocástico.

A continuación nos centraremos en la resolución de problemas de programación estocástica lineal mediante los criterios que acabamos de ver.

Consideremos, pues, el problema de programación estocástica con función objetivo lineal, cuya formulación general es:

$$\begin{aligned} &\text{"}\underset{\mathbf{x}}{\mathrm{Min}}\text{"} \ \ \tilde{\mathbf{c}}^{t}\mathbf{x} \\ &\text{s.a} \ \ \mathbf{x} \in D \end{aligned} \qquad \text{(PEL)}$$

donde $\tilde{\mathbf{c}}$ es un vector cuyas componentes, $\tilde{c}_j$, j = 1, 2, ..., n, son variables aleatorias. Suponemos conocida la distribución de probabilidad del vector $\tilde{\mathbf{c}}$, así como su valor esperado: $E\{\tilde{\mathbf{c}}\} = E\left\{\left(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_n\right)^t\right\} = \bar{\mathbf{c}} = \left(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n\right)^t$ y su matriz de varianzas y covarianzas, **V**, matriz de orden nxn y definida positiva.

A partir de las hipótesis anteriores tenemos que el valor esperado de la función objetivo estocástica $\tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}$ es $\bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}$ y su varianza es $\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}$, con lo cual, en el caso lineal, si se conocen el vector de valor esperado, $\bar{\mathbf{c}}$, y la matriz de varianzas y covarianzas **V** del vector $\tilde{\mathbf{c}}$, conocemos también el valor esperado y la varianza de la función objetivo estocástica y podremos resolver los problemas correspondientes a estos dos criterios.

Así, el problema valor esperado asociado al problema (PEL) es:

$$\begin{aligned} &\underset{\mathbf{x}}{\mathrm{Min}} \ \ \bar{\mathbf{c}}^{t}\mathbf{x} \\ &\text{s.a} \ \ \mathbf{x} \in D \end{aligned}$$

En cuanto al problema mínima varianza, se obtiene el siguiente problema con objetivo cuadrático, determinista equivalente del problema (PEL):

$$\begin{aligned} &\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} \ \mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x} \\ &\text{s.a} \ \mathbf{x} \in D \end{aligned}$$

El problema de eficiencia valor esperado desviación estándar es:

$$\begin{aligned} &\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} \ \left(\bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}, \sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}}\right) \\ &\text{s.a} \ \mathbf{x} \in D \end{aligned}$$

Obsérvese que la función objetivo valor esperado, $\bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}$, es lineal y las funciones varianza y desviación estándar son convexas (puesto que la matriz $\mathbf{V}$ es al menos semidefinida positiva), con lo cual, los tres problemas planteados son convexos.

Ejemplo.

Consideremos el problema de programación estocástica lineal:

$$\begin{aligned} &\text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} \quad \tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} = \tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2 \\ &\text{s. a} \quad x_1 + x_2 \geq 1 \\ &\qquad\quad 3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ &\qquad\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

donde $\tilde{\mathbf{c}} = \left(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2\right)^t$ es un vector estocástico con valor esperado $\bar{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ y matriz de varianzas y covarianzas $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, con lo cual tenemos que la variable aleatoria $\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{c}}) = \tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} = \tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2$ tiene valor esperado $\bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} = 4x_1 + 2x_2$ y varianza $\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x} = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1 x_2$ y, por tanto, el problema valor esperado determinista equivalente es:

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\ & 4x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a}\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

y el problema correspondiente al criterio mínima varianza es:

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\ & x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1x_2 \\ \text{s.a}\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

En la siguiente tabla aparecen las soluciones de estos dos problemas junto con los valores que alcanzan el valor esperado y la varianza en las mismas, para, de esa forma, tener una medida de tendencia central y una de dispersión del objetivo estocástico en cada una de las soluciones:

Criterio	**Solución**	**Valor esperado**	**Varianza**
Valor Esperado	(0, 1)	2	4
Varianza	(1, 0)	4	1

■

Pasamos a analizar los criterios de máxima probabilidad. Los problemas mínimo riesgo, de nivel de aspiración u, y de Kataoka, de probabilidad β, asociados al problema estocástico (PEL) son:

$$\begin{aligned} &\underset{\mathbf{x}}{\text{Max}}\ P\left(\tilde{\mathbf{c}}^{\mathbf{t}}\mathbf{x} \leq u\right) \\ &\text{s. a} \quad \mathbf{x} \in D \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} &\underset{(\mathbf{x}^{\mathbf{t}},u)}{\text{Min}}\ u \\ \text{s.a}\quad &P(\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq u) = \beta \\ &\mathbf{x} \in D \end{aligned}$$

respectivamente. Puesto que en ambos problemas interviene la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{\mathbf{c}}^{\mathbf{t}}\mathbf{x}$, para su resolución hemos de establecer hipótesis acerca de la distribución de probabilidad del vector $\tilde{\mathbf{c}}$, puesto que ésta depende del vector de variables de decisión, $\mathbf{x}$, al igual que ocurre en las restricciones probabilísticas lineales con coeficientes técnicos estocásticos. Analizaremos a continuación el caso normal y de aleatoriedad simple. Además, estudiaremos también la aplicación de la desigualdad de Cantelli para los dos problemas anteriores en los casos en los que se desconoce la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $\tilde{\mathbf{c}}^{\mathbf{t}}\mathbf{x}$.

3.2. CASO NORMAL.

Consideremos el problema de programación estocástica con función objetivo lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\mathrm{Min}}\text{"} & \tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{(PEL)}$$

Supongamos que el vector $\tilde{\mathbf{c}}$ se distribuye según la distribución normal multivariante con valor esperado $\bar{\mathbf{c}}$ y matriz de varianzas y covarianzas **V**, definida positiva.

En ese caso la variable aleatoria $\tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}$ sigue la distribución normal de valor esperado $\bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}$ y varianza $\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}$, con lo cual, si tipificamos esta variable, tenemos que $\dfrac{\tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} - \bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}}}$ es una variable aleatoria normal de valor esperado cero y varianza uno.

De todo esto se desprende que:

$$P(\tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} \le u) = P\left(\frac{\tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} - \bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}}} \le \frac{u - \bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}}}\right) = \Phi\left(\frac{u - \bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}}}\right)$$

donde Φ es la función de distribución de la variable aleatoria normal de valor esperado cero y varianza uno.

Veamos la obtención del determinista equivalente mediante los criterios mínimo riesgo y de Kataoka.

a) Criterio mínimo riesgo.

A partir de los resultados obtenidos, bajo la hipótesis de normalidad del vector $\tilde{\mathbf{c}}$, si se elige como criterio de resolución del problema de programación estocástica el criterio mínimo riesgo de nivel u, el problema determinista equivalente al problema estocástico es:

$$\begin{aligned} &\operatorname*{Max}_{\mathbf{x}} \; P(\tilde{\mathbf{c}}^{\mathsf{t}}\mathbf{x} \le u) = \Phi\left(\frac{u - \bar{\mathbf{c}}^{\mathsf{t}}\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^{\mathsf{t}}\mathbf{V}\mathbf{x}}}\right) \\ &\text{s. a} \quad \mathbf{x} \in D \end{aligned}$$

Puesto que la función Φ es estrictamente creciente, tenemos que

$$\operatorname*{Max}_{\mathbf{x}\in D} \; P(\tilde{\mathbf{c}}^{\mathsf{t}}\mathbf{x} \le u) \equiv \operatorname*{Max}_{\mathbf{x}\in D} \; \Phi\left(\frac{u - \bar{\mathbf{c}}^{\mathsf{t}}\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^{\mathsf{t}}\mathbf{V}\mathbf{x}}}\right) \equiv \Phi\left(\operatorname*{Max}_{\mathbf{x}\in D} \frac{u - \bar{\mathbf{c}}^{\mathsf{t}}\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^{\mathsf{t}}\mathbf{V}\mathbf{x}}}\right)$$

Por tanto, para obtener la solución al problema determinista equivalente del problema mínimo riesgo de nivel u, en el caso lineal normal hemos de resolver el siguiente problema fraccional no lineal:

$$\begin{aligned} &\operatorname*{Max}_{\mathbf{x}} \; \frac{u - \bar{\mathbf{c}}^{\mathsf{t}}\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^{\mathsf{t}}\mathbf{V}\mathbf{x}}} \\ &\text{s. a} \quad \mathbf{x} \in D \end{aligned}$$

Una vez resuelto este problema, la probabilidad máxima para la que se puede asegurar que la función objetivo estocástica es menor o igual que el nivel de aspiración fijado u, es:

$$\Phi\left(\operatorname*{Max}_{\mathbf{x}\in D} \frac{u - \bar{\mathbf{c}}^{\mathsf{t}}\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^{\mathsf{t}}\mathbf{V}\mathbf{x}}}\right).$$

Mediante el siguiente teorema determinaremos bajo qué condiciones la función objetivo de este problema es explícitamente cuasicóncava.

Teorema 2. (Stancu-Minasian (1997), pág. 133)

Sea $\theta(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})/\sigma(\mathbf{x})$ una función numérica definida sobre un conjunto convexo $D \subset \mathbb{R}^n$. Si $\rho(\mathbf{x})$ es cóncava y $\rho(\mathbf{x}) > 0$ y $\sigma(\mathbf{x})$ es convexa y $\sigma(\mathbf{x}) > 0$, entonces θ es explícitamente cuasicóncava.■

A partir de este teorema tenemos que si el nivel de aspiración fijado u es tal que $\bar{\mathbf{c}}'\mathbf{x}^* < u$, con $\mathbf{x}^*$ solución del problema mínimo valor esperado, $\bar{\mathbf{c}}\mathbf{x}^* = \underset{\mathbf{x}\in D}{\text{Min}}\ \bar{\mathbf{c}}\mathbf{x}$, y $\mathbf{0} \notin D$, la función objetivo del problema:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Max}} & \dfrac{u - \bar{\mathbf{c}}'\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x}}} \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array}$$

es una función explícitamente cuasicóncava, puesto que la función $\sqrt{\mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x}}$ es convexa y estrictamente positiva para todo $\mathbf{x} \in D$.

Por otro lado, podemos asegurar que, bajo la condición $\bar{\mathbf{c}}'\mathbf{x}^* < u$, y si se verifica que el conjunto de oportunidades del problema es convexo, todo máximo local del problema anterior es global, a partir del teorema que enunciamos a continuación.

Teorema 3. (Stancu-Minasian, 1997, pág. 48)

Si $\theta : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, es explícitamente cuasicóncava sobre D convexo, todo máximo local es global.■

Ejemplo.

Consideremos el problema de programación estocástica lineal:

$$\begin{aligned} &\text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} \quad \tilde{\mathbf{c}}^{\mathbf{t}}\mathbf{x} = \tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2 \\ &\text{s. a} \quad x_1 + x_2 \geq 1 \\ &\qquad\quad 3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ &\qquad\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

donde $\tilde{\mathbf{c}} = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2)^{\mathbf{t}}$ sigue la distribución normal multivariante con valor esperado $\bar{\mathbf{c}} = (4{,}2)^{\mathbf{t}}$ y matriz de varianzas y covarianzas $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, con lo cual tenemos que la variable aleatoria $\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{c}}) = \tilde{\mathbf{c}}^{\mathbf{t}}\mathbf{x} = \tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_1$ se distribuye según la distribución normal de valor esperado $\bar{\mathbf{c}}^{\mathbf{t}}\mathbf{x} = 4x_1 + 2x_2$ y varianza $\mathbf{x}^{\mathbf{t}}\mathbf{V}\mathbf{x} = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1 x_2$ y, por tanto, la solución mínimo riesgo de nivel de aspiración u, es la del problema:

$$\begin{aligned} &\underset{\mathbf{x}}{\text{Max}} \frac{u - 4x_1 - 2x_2}{\sqrt{x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1 x_2}} \\ &\text{s.a } x_1 + x_2 \geq 1 \\ &\qquad 3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ &\qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

En la siguiente tabla aparecen las soluciones de este problema para distintos niveles de aspiración. En la tercera columna aparece el nivel de probabilidad máximo con el que se puede asegurar que la solución obtenida no supera el nivel fijado. Además, la cuarta y quinta columnas recogen los valores que alcanzan el valor esperado y la varianza en cada solución, para, de esa forma, tener una medida de tendencia central y una de dispersión del objetivo estocástico en cada una de las soluciones:

Nivel de aspiración	**Solución**	**Probabilidad máxima**	**Valor esperado**	**Varianza**
$u = -5$	(0, 4)	0.0520812	8	64
$u = -0.1$	(0, 4)	0.155649	8	64
$u = 0.1$	(0, 1)	0.171056	2	4
$u = 3$	(0,1)	0.691462	2	4
$u = 4.6$	(0,1)	0.9032	2	4
$u = 4.7$	(0.0476,09523)	0.911540	2.095	3.721
$u = 5$	(1/3, 2/3)	0.936685	2.6666	2.3333
$u = 7$	(0.7777, 0.2222)	0.999348	3.5555	1.148148

En la tabla anterior se observa que las soluciones del problema dependen del nivel de aspiración que se fije para el problema mínimo riesgo. A medida que aumenta el nivel de aspiración crece la probabilidad máxima y disminuye la varianza del objetivo estocástico en el óptimo. En cambio, el valor esperado decrece a medida que aumenta el nivel de aspiración y, posteriormente, crece al igual que la probabilidad máxima y la varianza.

Obsérvese, además, que la solución óptima del problema coincide para algunos niveles de aspiración. En concreto, para $u = -5$ y $u = -0.1$ la solución óptima es la misma y aunque la probabilidad máxima cambia en función del nivel de aspiración, la solución óptima así como el valor esperado y la varianza coincide en ambas. Esto mismo ocurre para los niveles $u = 3$ y $u = 4.6$.

b) Criterio de Kataoka.

Consideremos el problema de Kataoka, para una probabilidad $\beta \in (0, 1)$, determinista equivalente del problema (PEL):

$$\begin{aligned} &\underset{(\mathbf{x}^t,u)}{\text{Min}} \quad u \\ &\text{s.a } P(\tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} \leq u) = \beta \\ &\mathbf{x} \in D \end{aligned}$$

Bajo la hipótesis de normalidad del vector $\tilde{\mathbf{c}}$ tenemos que:

$$P(\tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} \leq u) = P\left(\frac{\tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} - \bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}}} \leq \frac{u - \bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}}}\right) = \Phi\left(\frac{u - \bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}}}\right)$$

con lo cual, si deseamos que la probabilidad sea igual a β obtenemos:

$$\Phi\left(\frac{u - \bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}}}\right) = \beta$$

que podemos expresar también como:

$$\frac{u - \bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}}} = \Phi^{-1}(\beta)$$

o de manera equivalente:

$$u = \Phi^{-1}(\beta)\sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}$$

Sustituyendo la restricción probabilística por la expresión que hemos obtenido en el problema de Kataoka, tenemos que el determinista equivalente del problema estocástico lineal bajo la hipótesis de normalidad es:

$$\begin{aligned} &\underset{(\mathbf{x}^t,u)}{\text{Min}} \quad u \\ &\text{s.a} \quad u = \Phi^{-1}(\beta)\sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} \\ &\qquad \mathbf{x} \in D \end{aligned}$$

problema equivalente al problema en n variables:

$$\begin{aligned} &\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} \quad \Phi^{-1}(\beta)\sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} \\ &\text{s. a} \qquad \mathbf{x} \in D \end{aligned}$$

Una vez resuelto este problema, el menor nivel u, para el que podemos afirmar que la función objetivo no supera ese nivel con probabilidad β es:

$$u = \underset{\mathbf{x}\in D}{\text{Min}} \quad \Phi^{-1}(\beta)\sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}$$

Puesto que la matriz **V** es definida positiva, a partir del teorema 1 podemos afirmar que el problema anterior es un problema convexo si se verifica que $\Phi^{-1}(\beta)$ es mayor o igual que cero, lo que equivale a exigir que la probabilidad fijada para la función objetivo estocástica sea mayor o igual que 0.5. Obsérvese, además, que si la probabilidad fijada es $\beta = 0.5$, dado que $\Phi^{-1}(0.5) = 0$, el problema que se resuelve es el problema valor esperado mínimo.

Ejemplo.

Consideremos de nuevo el problema de programación estocástica lineal:

$$\begin{aligned} &\text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} \quad \tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} = \tilde{c}_1x_1 + \tilde{c}_2x_2 \\ &\text{s. a} \quad x_1 + x_2 \geq 1 \\ &\qquad 3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ &\qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

donde $\tilde{\mathbf{c}} = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2)^t$ sigue la distribución normal multivariante con valor esperado $\bar{\mathbf{c}} = (4,2)^t$ y matriz de varianzas y covarianzas $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, con lo cual tenemos que la variable aleatoria $\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{c}}) = \tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} = \tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2$ se distribuye según la distribución normal de valor esperado $\bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} = 4x_1 + 2x_2$ y varianza $\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x} = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1x_2$ y, por tanto, la solución de Kataoka de probabilidad β es la del problema:

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Min}_{\mathbf{x}} \ & \Phi^{-1}(\beta)\sqrt{x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1x_2} + 4x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \geq 1 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

En la siguiente tabla aparecen las soluciones a este problema para distintas probabilidades. En la tercera columna aparece el nivel u mínimo que puede alcanzar la función objetivo estocástica con la probabilidad fijada. Además, al igual que en el ejemplo correspondiente al criterio mínimo riesgo, en la cuarta y quinta columnas se recogen los valores que alcanzan el valor esperado y la varianza en cada solución.

De las soluciones obtenidas se observa que a medida que aumenta la probabilidad, el nivel mínimo que puede alcanzar la función objetivo estocástica es también mayor y disminuye la varianza, con lo cual probabilidades más altas corresponden a soluciones peores en términos de nivel (recuérdese que se desea minimizar la función objetivo estocástica) y mejores en términos de varianza. Al igual que en el problema mínimo riesgo el valor esperado de la función objetivo estocástica decrece con la probabilidad fijada cuando ésta es baja y posteriormente crece.

Además, de manera semejante a lo que ocurre cuando se aplica el criterio mínimo riesgo la solución del problema coincide para probabilidades distintas, y, aunque los niveles mínimos cambian para estas probabilidades, la decisión que se ha de tomar en estos casos es la misma.

Probabilidad	**Solución**	**Nivel u mínimo**	**Valor esperado**	**Varianza**
$\beta = 0.1$	(0, 4)	-2.252320	8	64
$\beta = 0.15$	(0, 4)	-0.29144	8	64
$\beta = 0.2$	(0, 1)	0.316766	2	4
$\beta = 0.3$	(0, 1)	0.951188	2	4
$\beta = 0.6$	(0, 1)	2.506686	2	4
$\beta = 0.8$	(0, 1)	3.683234	2	4
$\beta = 0.9$	(0, 1)	4.56308	2	4
$\beta = 0.95$	(0.4308, 0.5691)	5.171409	2.861753	1.971705
$\beta = 0.99$	(0.6698, 0.3301)	6.01953	3.339782	1.326916

■

3.3. ALEATORIEDAD SIMPLE.

Como ya vimos en el estudio de las restricciones probabilísticas, la hipótesis de aleatoriedad simple, frecuente en la resolución de problemas de programación estocástica, establece que el vector de parámetros aleatorios del problema depende linealmente de una única variable aleatoria $\tilde{t}$, con distribución conocida y cuya función de distribución F_t es estrictamente creciente.

Supongamos, pues, que el vector de parámetros aleatorios del problema (PEL), $\tilde{\mathbf{c}}$, depende linealmente de una única variable aleatoria, $\tilde{t}$, con distribución conocida y cuya función de distribución F_t es estrictamente creciente, de tal forma que:

$$\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c}^1 + \tilde{t}\,\mathbf{c}^2$$

donde $\mathbf{c}^1, \mathbf{c}^2 \in \mathbb{R}^n$.

Supongamos además que $\mathbf{c}^{2t}\mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \in D$.

Si se verifican estas hipótesis tenemos que:

$$P\left(\tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} \le u\right) = P\left((\mathbf{c}^1 + \tilde{t}\,\mathbf{c}^2)^t\,\mathbf{x} \le u\right) = P\left(\tilde{t} \le \frac{u - \mathbf{c}^{1t}\mathbf{x}}{\mathbf{c}^{2t}\mathbf{x}}\right) = F_t\left(\frac{u - \mathbf{c}^{1t}\mathbf{x}}{\mathbf{c}^{2t}\mathbf{x}}\right)$$

A partir de esta igualdad, obtenemos los problemas mínimo riesgo y de Kataoka.

a) Criterio mínimo riesgo.

Bajo las hipótesis establecidas, la solución al problema:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Max}} & P\{\tilde{\mathbf{c}}^{t}\mathbf{x} \leq u\} \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array}$$

coincide con la del siguiente problema fraccional lineal:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Max}} & \dfrac{u - \mathbf{c}^{1t}\mathbf{x}}{\mathbf{c}^{2\,t}\mathbf{x}} \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array}$$

tal y como establece el siguiente teorema:

Teorema 4. (Stancu-Minasian, 1984, pág. 189)

Supongamos que:

(i) las componentes del vector $\tilde{\mathbf{c}} = \left(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, ..., \tilde{c}_n\right)^t$ dependen de una variable aleatoria $\tilde{t}$ de la siguiente forma:

$$\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c}^1 + \tilde{t}\,\mathbf{c}^2$$

donde $\mathbf{c}^1$, $\mathbf{c}^2 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c}^{2t}\mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \in D$.

(ii) La función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{t}$, $F_t(.)$ es continua.

Entonces la solución del problema

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Max}}\, P\{\tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} \leq u\} & \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array}$$

no depende de F_t (.) y se obtiene resolviendo el siguiente problema fraccional:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Max}} & \dfrac{u - \mathbf{c}^{1t}\mathbf{x}}{\mathbf{c}^{2\,t}\mathbf{x}} \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array}$$

■

El siguiente teorema determina cómo es la función objetivo del problema anterior:

Teorema 5. (Stancu-Minasian, 1997, pág. 133)

Sea θ (**x**) = ρ(**x**)/σ(**x**) una función numérica definida sobre un conjunto convexo $D \subset. \mathbb{R}^n$. Si ρ (**x**) y σ (**x**) son funciones lineales y σ (**x**) > 0, entonces θ es explícitamente cuasicóncava y explícitamente cuasiconvexa.■

Así pues, la solución del problema (PEL) mediante el criterio mínimo riesgo, bajo la hipótesis de aleatoriedad simple coincide con la del problema:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Max}} & \dfrac{u - \mathbf{c}^{1t}\mathbf{x}}{\mathbf{c}^{2\,t}\mathbf{x}} \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array}$$

y la probabilidad máxima de que el objetivo estocástico no supere el nivel de aspiración fijado u es:

$$F_t\left(\underset{\mathbf{x}\in D}{\text{Max}} \; \frac{u - \mathbf{c}^{1t}\mathbf{x}}{\mathbf{c}^{2\,t}\mathbf{x}}\right)$$

b) Criterio de Kataoka.

En este caso, si consideramos la resolución del problema (PEL) mediante el criterio de Kataoka, para una probabilidad $\beta \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned} &\underset{(\mathbf{x}^t, u)}{\text{Min}} \quad u \\ &\text{s.a} \quad P(\widetilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} \leq u) = \beta \\ &\qquad \mathbf{x} \in D \end{aligned}$$

a partir de la hipótesis de aleatoriedad simple, puesto que:

$$P\left(\widetilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} \leq u\right) = P\left((\mathbf{c}^1 + \widetilde{t}\,\mathbf{c}^2)^t\,\mathbf{x} \leq u\right) = P\left(\widetilde{t} \leq \frac{u - \mathbf{c}^{1t}\mathbf{x}}{\mathbf{c}^{2t}\mathbf{x}}\right) = F_t\left(\frac{u - \mathbf{c}^{1t}\mathbf{x}}{\mathbf{c}^{2t}\mathbf{x}}\right)$$

tenemos que la igualdad:

$$P\left(\widetilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} \leq u\right) = F_t\left(\frac{u - \mathbf{c}^{1t}\mathbf{x}}{\mathbf{c}^{2t}\mathbf{x}}\right) = \beta$$

es equivalente a:

$$\frac{u - \mathbf{c}^{1t}\mathbf{x}}{\mathbf{c}^{2t}\mathbf{x}} = F_t^{-1}(\beta)$$

puesto que la función de distribución, F_t, es estrictamente creciente. Esto implica que el problema de Kataoka:

$$\begin{aligned} &\underset{(\mathbf{x}^t, u)}{\text{Min}} \quad u \\ &\text{s.a} \quad P(\widetilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} \leq u) = \beta \\ &\qquad \mathbf{x} \in D \end{aligned}$$

es equivalente a:

$$\begin{aligned} &\underset{(\mathbf{x}^t,u)}{\text{Min}} \ u \\ &\text{s.a} \ \ u = F_l^{-1}(\beta)\mathbf{c}^{2t}\mathbf{x} + \mathbf{c}^{1t}\mathbf{x} \\ &\qquad \mathbf{x} \in D \end{aligned}$$

La solución de este último problema coincide con la del siguiente problema con función objetivo lineal:

$$\begin{aligned} &\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} \ \ F_l^{-1}(\beta)\mathbf{c}^{2t}\mathbf{x} + \mathbf{c}^{1t}\mathbf{x} \\ &\text{s.a} \ \ \ \mathbf{x} \in D \end{aligned}$$

Ilustramos mediante el siguiente ejemplo la obtención de estos problemas.

Ejemplo.

Consideremos el problema:

$$\begin{aligned} &\text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} \ \ \tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} = \tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2 \\ &\text{s. a} \quad 3x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ &\qquad\ \ 2x_1 - 3x_2 \leq 8 \\ &\qquad\ \ x_1 + \ x_2 \leq 5 \\ &\qquad\ \ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

donde $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c}^1 + \tilde{t}\mathbf{c}^2$, donde $\mathbf{c}^1 = (4, -4)^t$, $\mathbf{c}^2 = (1, 12)^t$ y $\tilde{t}$ variable aleatoria exponencial de parámetro $\lambda = 2$.

El valor esperado y la varianza la variable aleatoria $\tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}$ son $E(\mathbf{c}^t\mathbf{x}) = 4.5x_1 + 2x_2$ y $\text{Var}(\mathbf{c}^t\mathbf{x}) = \frac{1}{4}(x_1 + 12x_2)^2$, respectivamente. Una vez obtenidos estos dos momentos podemos resolver los problemas valor esperado y mínima varianza. En la siguiente tabla aparecen las soluciones de estos dos problemas. Para cada solución aparecen el valor esperado y la varianza de la función objetivo evaluados en los óptimos.

Criterio	Solución	Valor esperado	Varianza
Valor Esperado	(0, 1)	2	36
Varianza	(2/3, 0)	3	1/9

Consideremos ahora la resolución del problema mediante los dos criterios de máxima probabilidad. Para ello, los puntos factibles del problema deben verificar $\mathbf{c}^{2t}\mathbf{x} > 0$. En este ejemplo $\mathbf{c}^{2t}\mathbf{x} = x_1 + 12x_2$ y es fácil probar que los puntos factibles del problema la verifican.

La solución del problema mínimo riesgo de nivel de aspiración u coincide con la del siguiente problema fraccional lineal:

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}}{\text{Max}} \quad & \frac{u - 4x_1 + 4x_2}{x_1 + 12x_2} \\ \text{s. a} \quad & 3x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & 2x_1 - 3x_2 \leq 8 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

En la siguiente tabla aparecen las soluciones de este problema para distintos valores del nivel de aspiración, u:

Nivel de aspiración	Solución	Probabilidad máxima	Valor esperado	Varianza
u = -10	(0, 5)	0.2834687	10	900
u = -2	(0, 5)	0.451188	10	900
u = -0.1	(0, 5)	0.4848686	10	900
u = 0.1	(0, 1)	0.4944783	2	36
u = 3	(0, 1)	0.688596	2	36
u = 3.1	(2/3, 0)	0.727468	3	1/9
u = 8	(2/3, 0)	0.999999	3	1/9

Al igual que en el ejemplo resuelto en el caso normal de los resultados obtenidos se desprende que la solución del problema depende del nivel de aspiración que se fije para el problema. Como se observa en la tabla, la probabilidad máxima de las soluciones crece con el nivel de aspiración y, además, la varianza va disminuyendo. En cuanto al valor esperado de la función objetivo en el óptimo se observa que su valor decrece para determinados valores de u y, posteriormente, crece. De nuevo, para determinados valores del nivel de aspiración la solución que se obtiene es la misma (en concreto, $u = -10$, $u = -2$, $u = -0.1$ y $u = 0.1$, $u = 3$), y, en esos casos, el valor esperado y la varianza de la función objetivo también coincide, aunque, como es lógico, la probabilidad máxima cambia.

Finalmente, las soluciones del problema determinista equivalente correspondiente a la aplicación del criterio de Kataoka con probabilidad β, son las del siguiente problema lineal:

$$\begin{aligned} &\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\ \ F_t^{-1}(\beta)(x_1+12x_2)+4x_1-4x_2 \\ &\text{s. a}\quad 3x_1+2x_2\geq 2 \\ &\qquad\ \ 2x_1-3x_2\leq 8 \\ &\qquad\ \ x_1+\ x_2\leq 5 \\ &\qquad\ \ x_1,x_2\geq 0 \end{aligned}$$

Las soluciones de este problema para distintas probabilidades son las que aparecen en la siguiente tabla:

Probabilidad	**Solución**	**Nivel *u* mínimo**	**Valor esperado**	**Varianza**
$\beta = 0.1$	(0, 5)	-16.83919	10	900
$\beta = 0.3$	(0, 5)	-9.29978	10	900
$\beta = 0.5$	(0, 1)	0.1588831	2	36
$\beta = 0.6$	(0, 1)	1.49774	2	36
$\beta = 0.7$	(2/3, 0)	3.067991	3	1/9
$\beta = 0.8$	(2/3, 0)	3.203145	3	1/9
$\beta = 0.95$	(2/3, 0)	3.66524	3	1/9

Las soluciones obtenidas muestran, de nuevo, que las soluciones del problema dependen de la probabilidad fijada. Al igual que en el criterio mínimo riesgo, las soluciones del problema dan un nivel de aspiración más bajo y una varianza más alta cuanto más pequeña sea la probabilidad fijada. El valor esperado de la función objetivo en el óptimo sigue el mismo comportamiento que en el criterio mínimo riesgo: decrece para valores de la probabilidad bajos ($\beta = 0.1$ y $\beta = 0.3$) y, posteriormente, crece con la probabilidad.■

De todo lo estudiado hasta ahora en este epígrafe se deduce que si se desea resolver el problema de programación estocástica lineal mediante el criterio mínimo riesgo o el criterio de Kataoka, bajo las hipótesis de normalidad o de aleatoriedad simple del vector $\tilde{\mathbf{c}}$, es posible obtener los problemas deterministas equivalentes. Los problemas que se obtienen con el criterio mínimo riesgo son, en ambos casos problemas fraccionales y con funciones explícitamente cuasicóncavas si se establecen las hipótesis adecuadas. Si se aplica el criterio de Kataoka, bajo la hipótesis de normalidad se obtiene un problema convexo, si la probabilidad fijada es mayor que 0.5 y, bajo la hipótesis de aleatoriedad simple se obtiene un problema lineal.

3.4. APLICACIÓN DE LA DESIGUALDAD DE CANTELLI.

Como ya se ha comentado anteriormente, la resolución de problemas de programación estocástica mediante el criterio mínimo riesgo y el de Kataoka es, en general, complicada, puesto que en la resolución de estos problemas interviene la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}$ y, generalmente, esta distribución depende del vector de decisión $\mathbf{x}$. Al igual que en el análisis de las restricciones probabilísticas con coeficientes técnicos aleatorios, consideramos la aplicación de la desigualdad de Cantelli a la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}$ en los problemas mínimo riesgo y de Kataoka. Realizaremos el estudio para funciones objetivo estocásticas en general, y, una vez obtenidos los resultados, los aplicaremos al caso lineal, del que nos ocupamos en este apartado. Comenzamos analizando la aplicación de esta desigualdad para el problema mínimo riesgo y, posteriormente, para el criterio de Kataoka.

a) Criterio mínimo riesgo.

Consideremos el problema de programación estocástica:

$$\begin{array}{ll} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} & \tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{(PE)}$$

Si para su resolución aplicamos el criterio mínimo riesgo, para un nivel de aspiración u, el problema determinista equivalente a este problema de programación estocástica es:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Max}} & P\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \leq u\} \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{(MR(u))}$$

Supongamos que conocemos el valor esperado y la varianza de la variable aleatoria $\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})$, $E\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}$ y $\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}$, respectivamente y que para todo $\mathbf{x} \in D$ el valor de la varianza de $\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})$, $\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}$, es finito.

Puesto que:

$$P\left(\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq u\right) = P\left(\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) - E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \leq u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)$$

a partir de la desigualdad de Cantelli, enunciada en el apartado 2.3. de este capítulo, si se verifican las hipótesis establecidas tenemos que para $u \geq E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}$, haciendo $\lambda = u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \geq 0$, se verifica que:

$$\begin{aligned} P\left(\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq u\right) &= P\left(\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) - E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \leq u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right) \\ &\geq \frac{\left(u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2}{\operatorname{Var}\left(\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right) + \left(u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2} \end{aligned}$$

A partir de este resultado, puesto que tenemos una cota inferior de la función de distribución de la variable aleatoria, para obtener una solución "aproximada" del problema mínimo riesgo podemos maximizar esta cota, es decir, resolver el problema:

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}}{\text{Max}} \quad & \frac{\left(u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2}{\operatorname{Var}\left(\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right) + \left(u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2} \\ \text{s.a} \quad & E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \leq u \qquad\qquad \text{(AMR(u))} \\ & \mathbf{x} \in D \end{aligned}$$

Obsérvese que en el problema propuesto exigimos que se verifique la desigualdad:

$$E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \leq u$$

puesto que, en otro caso, la función objetivo del problema propuesto no sería cota inferior de la función objetivo del problema mínimo riesgo. Así, esta desigualdad acota superiormente el valor esperado de la función objetivo del problema de programación estocástica, lo que implica que la solución del problema (AMR(u))

es tal que el valor esperado de la función objetivo estocástica será siempre menor que el nivel de aspiración fijado.

A partir de la desigualdad de Cantelli podemos asegurar, por tanto, que dado un nivel de aspiración para la función objetivo, u, si $\mathbf{x}^*$ es la solución óptima del problema (AMR(u)), se verifica:

$$\frac{\left(u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*, \tilde{\xi})\}\right)^2}{\operatorname{Var}\left(\tilde{z}(\mathbf{x}^*, \tilde{\xi})\right) + \left(u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*, \tilde{\xi})\}\right)^2} \leq \underset{\mathbf{x} \in D}{\operatorname{Max}}\ P\left(\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \leq u\right)$$

Los siguientes teoremas nos sirven para determinar cómo es la función objetivo del problema (AMR(u)).

Teorema 6 (Stancu-Minasian (1997), pág. 43)

Sea θ una función numérica definida sobre un conjunto convexo $D \subset \mathbb{R}^n$.

Sea $\Omega_\alpha = \{\mathbf{x} \,/\, \mathbf{x} \in D,\ \theta(\mathbf{x}) \geq \alpha\}$

Entonces θ es cuasicóncava si y sólo si Ω_α es convexo o vacío para $\alpha \in \mathbb{R}$.■

Teorema 7.

Consideremos la función $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con D convexo.

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\left(u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}\right)^2}{\operatorname{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} + \left(u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}\right)^2}$$

donde u es una constante, $u \in \mathbb{R}$. Si para todo $\mathbf{x} \in D$ se verifican las siguientes hipótesis:

- $\sqrt{\operatorname{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}$ y $E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}$ son funciones convexas.

- $E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \leq u$ y $\operatorname{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} > 0$.

entonces $f(\mathbf{x})$ es una función cuasicóncava.■

Demostración.

A partir del teorema 6, para poder asegurar que la función f es cuasicóncava hemos de demostrar que el conjunto $\Omega_\alpha = \{\mathbf{x} \,/\, \mathbf{x} \in D, f(\mathbf{x}) \geq \alpha\}$ es un conjunto convexo para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Bajo las hipótesis establecidas, la función f tomará valores entre 0 y 1, es decir, $f : D \subset \mathbb{R}^n \to [0, 1)$.

Para analizar la convexidad del conjunto Ω_α, a partir del recorrido de la función f, consideraremos distintos posibles conjuntos de valores para el parámetro α: $\alpha < 0$, $\alpha \in [0, 1)$ y $\alpha \geq 1$.

Así:

- Para $\alpha < 0$ tenemos que:

$$\Omega_\alpha = \left\{ \mathbf{x} \in D \,/\, \alpha < 0 \leq \frac{\left(u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2}{\operatorname{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} + \left(u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2} \right\} \equiv D$$

luego, para $\alpha < 0$, $\Omega_\alpha \equiv D$, conjunto convexo por hipótesis de partida.

• Si $\alpha \in [0, 1)$ tenemos que $f(\mathbf{x}) \geq \alpha$ es equivalente a la desigualdad:

$$\alpha \mathrm{Var}\left\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\right\} \leq (1-\alpha)\left(u - E\left\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\right\}\right)^2$$

y, tomando raíz cuadrada a ambos lados de la desigualdad anterior, puesto que $\alpha \mathrm{Var}\left\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\right\} \geq 0$, obtenemos el conjunto:

$$\Omega_\alpha = \left\{\mathbf{x} \in D \,/\, \sqrt{\alpha}\sqrt{\mathrm{Var}\left\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\right\}} - \sqrt{1-\alpha}\left(u - E\left\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\right\}\right) \leq 0\right\}$$

que es un conjunto convexo puesto que $\alpha \in [0, 1)$ y las funciones $E\left\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\right\}$ y $\sqrt{\mathrm{Var}\left\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\right\}}$ son convexas por hipótesis de partida.

• Finalmente, para $\alpha \geq 1$ obtenemos el conjunto:

$$\Omega_\alpha = \left\{\mathbf{x} \in D \,/\, 1 \leq \alpha \leq \frac{\left(u - E\left\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\right\}\right)^2}{\mathrm{Var}\left\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\right\} + \left(u - E\left\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\right\}\right)^2}\right\} \equiv \varnothing$$

puesto que el recorrido de la función f es el intervalo $[0, 1)$.■

Por tanto, queda demostrado que para cualquier valor real de α, el conjunto Ω_α es un conjunto convexo y, a partir del teorema 6, podemos asegurar que la función

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\left(u - E\left\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\right\}\right)^2}{\mathrm{Var}\left\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\right\} + \left(u - E\left\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\right\}\right)^2}$$

es cuasicóncava.

Una vez obtenido el problema (AMR(u)), si nos plantemos el problema estocástico con función objetivo lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} & \tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \tag{PEL}$$

y su determinista equivalente mediante el criterio mínimo riesgo para un nivel de aspiración u:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Max}} & P\{\tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} \leq u\} \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array}$$

con $\tilde{\mathbf{c}}$ vector cuyas componentes, $\tilde{c}_j$, j = 1, 2, ..., n, son variables aleatorias, de valor esperado $\bar{\mathbf{c}}$ y matriz de varianzas y covarianzas **V**, definida positiva, puesto que el valor esperado de la función objetivo estocástica $\tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}$ es $\bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}$ y su varianza es $\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}$, podemos obtener una cota inferior al problema anterior aplicando la desigualdad de Cantelli, si resolvemos el problema:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Max}} & \dfrac{(u - \bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x})^2}{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x} + (u - \bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x})^2} \\ \text{s.a} & \bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} \leq u \\ & \mathbf{x} \in D \end{array}$$

Ejemplo.

Consideremos el problema de programación estocástica lineal planteado en el caso normal:

$$\begin{array}{ll} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} & \tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} = \tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2 \\ \text{s. a} & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

donde $\tilde{\mathbf{c}} = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2)^t$ es un vector aleatorio con valor esperado $\bar{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ y matriz de varianzas y covarianzas $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, con lo cual tenemos que la variable aleatoria $\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{c}}) = \tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} = \tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2$ tiene valor esperado $\bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} = 4x_1 + 2x_2$ y varianza $\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x} = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1x_2$. Supongamos que se desconoce la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $\tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}$ y que para obtener soluciones a este problema mediante este criterio se aplica la desigualdad de Cantelli a la función de distribución de la misma. El problema que se ha de resolver es, para un nivel de aspiración u:

$$
\begin{array}{ll}
\underset{\mathbf{x}}{\text{Max}} & \dfrac{(u - 4x_1 - 2x_2)^2}{x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1x_2 + (u - 4x_1 - 2x_2)^2} \\
\text{s.a} & 4x_1 + 2x_2 \leq u \\
& x_1 + x_2 \geq 1 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

En la siguiente tabla aparecen las soluciones a este problema para distintos niveles de aspiración. Al igual que en casos anteriores, en la tercera columna aparece la cota inferior para la probabilidad que nos proporciona el problema. Además, en la cuarta y quinta columnas se recogen los valores que alcanzan el valor esperado y la varianza en cada solución.

Nivel de aspiración	**Solución**	**Probabilidad (cota inferior)**	**Valor esperado**	**Varianza**
$u = 2.5$	(0, 1)	0.0588	2	4
$u = 3$	(0, 1)	0.2	2	4
$u = 5$	(1/3,2/3)	0.7	8/3	7/3
$u = 7$	(0.7783, 0.2216)	0.9117647	3.5566	1.147418

Como puede observarse las soluciones que se obtienen son tales que a medida que aumenta el nivel de aspiración fijado, la probabilidad y el valor esperado aumentan a la vez que disminuye la varianza del objetivo estocástico. En este caso, el problema correspondiente a niveles de aspiración menores que 2 ($u < 2$) no tiene solución. Esto se debe a la restricción $4x_1 + 2x_2 \leq u$ que ha de incluirse en el problema al aplicar la desigualdad de Cantelli. Dado que este ejemplo es el que se ha resuelto anteriormente en el caso normal, podemos comparar las soluciones obtenidas entonces y las que nos proporciona la cota. Como puede observarse, las soluciones que se obtienen mediante la cota se asemejan más a las reales cuanto más alto es el nivel de aspiración.

■

b) Criterio de Kataoka.

Consideremos de nuevo el problema de programación estocástica:

$$\begin{array}{ll} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} & \tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{(PE)}$$

Supongamos que para su resolución aplicamos el criterio de Kataoka con una probabilidad $\beta \in (0, 1)$. En este caso, consideraremos el problema de Kataoka con desigualdad en la restricción probabilística, es decir, planteamos el problema determinista equivalente como:

$$\begin{array}{ll} & \underset{(\mathbf{x}^t, u)}{\text{Min}} \; u \\ \text{s.a} & P(\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \leq u) \geq \beta \\ & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad (\text{K}(\beta))$$

Supongamos que conocemos el valor esperado y la varianza de la variable aleatoria $\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})$, $E\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}$ y $\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}$, respectivamente y que para todo $\mathbf{x} \in D$ el valor de la varianza de $\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})$, $\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}$, es finito.

A partir de los resultados obtenidos en el apartado 2.3 de este capítulo, en el que se aplica la desigualdad de Cantelli a la restricción probabilística:

$$P\left(\tilde{g}_i(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \leq 0\right) \geq \alpha_i$$

podemos asegurar que todo vector $\mathbf{x}$ que verifique:

$$\sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}} \sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} \leq u$$

verificará también la restricción $P(\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \leq u) \geq \beta$ del problema (K(β)).

Consideremos, pues, el problema:

$$\begin{aligned} &\underset{(\mathbf{x}^t,u)}{\text{Min}} \ u \\ &\text{s.a} \ \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \le u \\ &\mathbf{x} \in D \end{aligned}$$

Definimos el conjunto S_3 como:

$$S_3 = \left\{ (\mathbf{x}^t, u)^t \in \mathbb{R}^{n+1} \,/\, \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \le u, \mathbf{x} \in D \right\}$$

Puesto que, a partir de la aplicación de la desigualdad de Cantelli sabemos que el conjunto S_3 es un subconjunto del conjunto de oportunidades del problema de Kataoka:

$$S_3 \subset \left\{ (\mathbf{x}^t, u)^t \,/\, P\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \le u\} \ge \beta, \mathbf{x} \in D \right\}$$

podemos asegurar que si $(\mathbf{x}^{*t}, u^*)^t$ es solución del problema

$$\begin{aligned} &\underset{(\mathbf{x}^t,u)}{\text{Min}} \ u \\ &\text{s.a} \ \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \le u \\ &\mathbf{x} \in D \end{aligned}$$

entonces $u^* \ge u'$, con u' solución del problema de Kataoka:

$$\begin{aligned} &\underset{(\mathbf{x}^t,u)}{\text{Min}} \ u \\ &\text{s.a} \ P(\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \le u) \ge \beta \\ &\mathbf{x} \in D \end{aligned}$$

Por otro lado, puesto que el vector **x*** solución del problema

$$\begin{aligned}&\underset{(\mathbf{x}^t,u)}{\text{Min}}\ u\\ &\text{s.a}\ \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}+E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\le u\\ &\mathbf{x}\in D\end{aligned}$$

es también solución del problema:

$$\begin{aligned}&\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} && \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}+E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\\ &\text{s.a} && \mathbf{x}\in D\end{aligned} \qquad (\text{AK}(\beta))$$

en adelante, para obtener una solución aproximada del problema de Kataoka (K(β)) resolveremos el problema (AK(β)), con lo cual se tiene que:

$$u'\le \underset{\mathbf{x}\in D}{\text{Min}}\left\{\sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}+E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right\}$$

con $u'\in\mathbb{R}$, $(\mathbf{x}'^t, u')^t$ solución óptima del problema de Kataoka.

Así pues, como aproximación a la solución óptima al problema de Kataoka, proponemos la resolución del problema:

$$\begin{aligned}&\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} && \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}+E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\\ &\text{s.a} && \mathbf{x}\in D\end{aligned} \qquad (\text{AK}(\beta))$$

Si las funciones $\sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}$ y $E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}$ son funciones convexas, el problema (AK(β)) es un problema convexo. Además, la función objetivo de este problema puede expresarse también como:

$$\sqrt{\beta}\ \sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} + \sqrt{1-\beta}\,E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}$$

con lo cual, mediante la desigualdad de Cantelli se resuelve el problema de Kataoka minimizando una combinación lineal de la desviación estándar y el valor esperado de la función objetivo estocástica, ponderando cada uno de estos términos con $\sqrt{\beta}$ y $\sqrt{1-\beta}$, de manera que cuanto mayor sea la probabilidad fijada, β, se pondera más la desviación estándar y menos el valor esperado de la función objetivo estocástica.

Para finalizar este apartado, construiremos el problema que resulta al aplicar la desigualdad de Cantelli al problema (K(β)) en el caso lineal. Consideremos, pues, el problema de programación estocástica con función objetivo lineal:

$$\begin{aligned} &\text{"}\underset{\mathbf{x}}{\mathrm{Min}}\text{"}\ \tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} \\ &\text{s.a}\ \ \mathbf{x}\in D \end{aligned} \qquad \text{(PEL)}$$

con $\tilde{\mathbf{c}}$ vector cuyas componentes, $\tilde{c}_j$, j = 1, 2, ..., n, son variables aleatorias, de valor esperado $\bar{\mathbf{c}}$ y matriz de varianzas y covarianzas **V**, definida positiva, lo que implica que el valor esperado de la función objetivo estocástica $\tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}$ es $\bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}$ y su varianza es $\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}$.

El determinista equivalente al problema anterior mediante el criterio de Kataoka, para un probabilidad $\beta \in (0, 1)$, es:

$$\begin{aligned} &\underset{(\mathbf{x}^t,u)}{\mathrm{Min}}\ u \\ &\text{s.a}\ P(\tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}\le u)\ge\beta \\ &\mathbf{x}\in D \end{aligned}$$

Si aplicamos a la restricción probabilística de este problema la desigualdad de Cantelli, el valor de la función objetivo en el óptimo del siguiente problema nos proporciona una cota superior de óptimo del problema anterior:

$$\begin{aligned} &\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} \quad \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{\mathbf{x}^{\mathbf{t}}\mathbf{V}\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{c}}^{\mathbf{t}}\mathbf{x} \\ &\text{s.a} \qquad \mathbf{x} \in D \end{aligned}$$

Obsérvese, además, que, puesto que la matriz $\mathbf{V}$ es definida positiva por hipótesis, y dado que $\beta \in (0, 1)$, este problema es convexo.

Antes de pasar a analizar la transformación del objetivo estocástico en su equivalente determinista para el caso cuadrático, planteamos un ejemplo de la resolución del problema estocástico aplicando la desigualdad de Cantelli al problema de Kataoka.

Ejemplo.

Consideremos de nuevo el problema de programación estocástica lineal planteado en el caso normal:

$$\begin{aligned} &\text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} \quad \widetilde{\mathbf{c}}^{\mathbf{t}}\mathbf{x} = \widetilde{c}_1 x_1 + \widetilde{c}_2 x_2 \\ &\text{s. a} \qquad x_1 + x_2 \geq 1 \\ &\qquad\qquad 3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ &\qquad\qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

donde $\widetilde{\mathbf{c}} = (\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2)^{\mathbf{t}}$ es un vector aleatorio con valor esperado $\overline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ y matriz de varianzas y covarianzas $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, con lo cual tenemos que la variable aleatoria $\widetilde{z}(\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{c}}) = \widetilde{\mathbf{c}}^{\mathbf{t}}\mathbf{x} = \widetilde{c}_1 x_1 + \widetilde{c}_2 x_2$ tiene valor esperado $\overline{\mathbf{c}}^{\mathbf{t}}\mathbf{x} = 4x_1 + 2x_2$ y varianza $\mathbf{x}^{\mathbf{t}}\mathbf{V}\mathbf{x} = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1 x_2$. Supongamos que se desconoce la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $\widetilde{\mathbf{c}}^{\mathbf{t}}\mathbf{x}$ y que para obtener soluciones a este problema mediante el criterio de Kataoka se aplica la desigualdad de Cantelli a la función de distribución de la misma. El problema que se ha de resolver es, para una probabilidad β:

$$
\begin{array}{ll}
\underset{x}{\text{Min}} & \sqrt{\dfrac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{x_1^2 + 4x_2^2 2x_1x_2} + 4x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} & x_1 + x_2 \geq 1 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

En la siguiente tabla aparecen las soluciones a este problema para distintos niveles de aspiración. Al igual que en casos anteriores, la tercera columna aparece la cota superior para el nivel mínimo que puede alcanzar la función objetivo con al menos la probabilidad fijada. Además, en la cuarta y quinta columnas se recogen los valores que alcanzan el valor esperado y la varianza en cada solución.

Probabilidad	**Solución**	**Nivel *u* mínimo (Cota superior)**	**Valor esperado**	**Varianza**
$\beta = 0.3$	(0, 1)	3.309307	2	4
$\beta = 0.6$	(0, 1)	4.44949	2	4
$\beta = 0.8$	(0.591, 0.40825	5.63299	3.1835	1.50005
$\beta = 0.9$	(0.7592, 0.2407)	6.768875	3.5184	1.17391

Las soluciones obtenidas mantienen las mismas características que las del problema correspondiente a aplicar la desigualdad de Cantelli sobre la función de distribución en el criterio mínimo riesgo: a mayor probabilidad, mayor nivel, mayor valor esperado y varianza más pequeña. Puesto que el problema que hemos resuelto es el que se planteó para ilustrar el caso normal, cabe señalar ahora que tal y como se comentó en el apartado 2.4 de este capítulo, la aplicación de la desigualdad de Cantelli es "mejor" cuanto más alta es la probabilidad fijada, tal y como puede observarse si se comparan la tabla de las soluciones obtenidas en el caso normal y la que acabamos de ver.

CAPÍTULO 3

PROGRAMACIÓN ESTOCÁSTICA (II)

Siguiendo con el estudio del capítulo dos, y tras haber considerado la transformación del conjunto de oportunidades en su determinista equivalente así como los criterios de transformación del objetivo estocástico en determinista y su aplicación al caso lineal, consideramos ahora la obtención del determinista equivalente del objetivo estocástico en el caso cuadrático. Como veremos a continuación, este tipo de función puede ser de utilidad para problemas de programación matemática en los que se desea minimizar la diferencia cuadrática entre términos lineales y valores aleatorios. Para obtener el determinista equivalente se consideran los cuatro criterios básicos de transformación del mismo, analizados en el capítulo dos: valor esperado, mínima varianza y los criterios de máxima probabilidad (mínimo riesgo y de Kataoka). Una vez analizado esto, nos planteamos que la existencia de distintos criterios de transformación del objetivo estocástico puede dar lugar a cierta confusión a la hora de resolver el problema. Como se ha señalado anteriormente, esto hace que la resolución de cualquier problema lleve implícita la necesidad de elegir un concepto de solución. Esto nos ha motivado a analizar la posible existencia de relaciones entre unos conceptos de solución y otros. El epígrafe dos de este capítulo se dedica a este estudio.

1. TRANSFORMACIÓN DEL OBJETIVO ESTOCÁSTICO EN SU EQUIVALENTE DETERMINISTA. CASO CUADRÁTICO.

Consideramos ahora la resolución de problemas con función objetivo estocástica tipo cuadrática. Denominamos así a aquella función objetivo suma de una forma cuadrática en las variables de decisión del problema, **x**, una forma cuadrática en el vector de parámetros aleatorios, $\tilde{\xi}$, y un término lineal formado por el vector de variables de decisión y el de parámetros aleatorios. El problema que planteamos es, por tanto:

$$\begin{array}{lll} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} & \tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} - \tilde{\xi}'\mathbf{x} + \tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi} & \\ & & \text{(PEC)} \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D & \end{array}$$

con **B** matriz de orden nxn, al menos semidefinida positiva, **H** matriz de orden nxn, simétrica y al menos semidefinida positiva.

Suponemos que el conjunto D, subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ es convexo, compacto y no vacío y que este conjunto es determinista o bien ha sido transformado en *su determinista equivalente siguiendo el criterio de restricciones de azar separadas*.

Sea $\tilde{\xi}$ vector aleatorio definido sobre un conjunto $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$. Suponemos dada la familia $\mathbb{F}$ de eventos, es decir, subconjuntos de $\mathbb{E}$, y la distribución de probabilidad P definida sobre $\mathbb{F}$, de manera que para cualquier subconjunto de $\mathbb{E}$, $A \subset \mathbb{E}$, $A \in \mathbb{F}$, la probabilidad de A, $P(A)$, es conocida. Además, se mantiene la hipótesis de que la distribución de probabilidad, P, es independiente de las variables de decisión, $x_1, \ldots, x_n$.

Obsérvese que si la matriz **H** es nula, la función objetivo del problema anterior es $\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) = \mathbf{x}^t\mathbf{B}\mathbf{x} - \tilde{\xi}^t\mathbf{x}$, en la que el vector de parámetros aleatorios afecta sólo al término lineal de la función. Esto implica que la resolución del problema es muy parecida a todo lo analizado ya para problemas estocásticos con función objetivo lineal, al menos en lo que se refiere a la transformación del objetivo estocástico en su determinista equivalente. Así, el valor esperado de la función objetivo estocástica cambia, aunque no la varianza del objetivo (recuérdese que la varianza de una constante es nula). En lo que se refiere a los criterios de máxima probabilidad (mínimo riesgo y de Kataoka) los problemas deterministas equivalentes que se obtienen para el problema estocástico varían de los obtenidos en el caso lineal, pero los mecanismos de transformación de la función objetivo del problema determinista equivalente son paralelos a los estudiados en el epígrafe 3 del capítulo 2.

El planteamiento del problema (PEC) surge a partir de la idea de resolver problemas de programación estocástica con función objetivo estocástica del tipo:

$$\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{t}}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i x_i - \beta_i \tilde{t}_i\right)^2$$

$\alpha_i, \beta_i \in \mathbf{R}$, $\alpha_i, \beta_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, en la que se mide la suma de la diferencia cuadrática de términos lineales y deterministas respecto de parámetros aleatorios. Puesto que:

$$\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{t}}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i x_i - \beta_i \tilde{t}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \tilde{t}_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 \tilde{t}_i^2$$

si definimos:

- $\tilde{t}_i = 2\alpha_i \beta_i \tilde{\xi}_i \Rightarrow \tilde{t}_i = \dfrac{\tilde{\xi}_i}{2\alpha_i \beta_i} \Rightarrow \tilde{t}_i^2 = \dfrac{\tilde{\xi}_i^2}{4\alpha_i^2 \beta_i^2}, i = 1,2,\ldots,n$

- $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n^2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4\alpha_1^2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{4\alpha_2^2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \dfrac{1}{4\alpha_n^2} \end{pmatrix}$

la expresión matricial de la función anterior es:

$$\begin{aligned} \tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{t}}) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \tilde{t}_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 \tilde{t}_i^2 = \\ \tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \frac{\tilde{\xi}_i}{2\alpha_i \beta_i} x_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 \frac{\tilde{\xi}_i^2}{4\alpha_i^2 \beta_i^2} = \\ &= \mathbf{x}^t \mathbf{B} \mathbf{x} - \tilde{\xi}^t \mathbf{x} + \tilde{\xi}^t \mathbf{H} \tilde{\xi} \end{aligned}$$

Así, pues, abordamos a continuación la resolución del problema:

$$\begin{array}{lll} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} & \tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) = \mathbf{x}^t \mathbf{B} \mathbf{x} - \tilde{\xi}^t \mathbf{x} + \tilde{\xi}^t \mathbf{H} \tilde{\xi} & \\ & & \text{(PEC)} \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D & \end{array}$$

Para ello comenzamos calculando el valor esperado y la varianza de la función objetivo estocástica. Como veremos a continuación, el valor esperado de la función cuadrática planteada depende del vector valor esperado de $\tilde{\xi}$, $\bar{\xi}$, y de su matriz de varianzas y covarianzas, **V**, lo que implica que si se conocen $\bar{\xi}$ y **V**, se puede determinar el valor esperado de la función objetivo estocástica y, por tanto, se puede resolver el problema de programación estocástica mediante el criterio valor esperado.

En cuanto a la varianza de la variable aleatoria $\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} - \tilde{\xi}'\mathbf{x} + \tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi}$, obtendremos una expresión de la misma que depende de los momentos de orden tres y cuatro de la variable aleatoria $\tilde{\xi}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, y de momentos del tipo $E\left(\tilde{\xi}_i^{\alpha}\,\tilde{\xi}_j^{\beta}\right)$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Esto da lugar a la necesidad de establecer hipótesis acerca de la distribución de probabilidad del vector $\tilde{\xi}$. Se consideran en este trabajo dos casos distintos: normal y de aleatoriedad simple, añadiendo, además, hipótesis adicionales acerca de la matriz **H**. Para estos casos obtenemos la varianza del objetivo estocástico, lo que nos permite resolver el problema (PEC) mediante el criterio mínima varianza y, además, plantear el problema correspondiente al conjunto de soluciones eficientes valor esperado desviación estándar.

En cuanto a la aplicación de los criterios de máxima probabilidad para resolver el problema (PEC), las dificultades para determinar la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} - \tilde{\xi}'\mathbf{x} + \tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi}$ (aún cuando se mantienen las hipótesis de normalidad y de aleatoriedad simple para el vector $\tilde{\xi}$) nos ha llevado a considerar la aplicación de la desigualdad de Cantelli, estudiada en el apartado 3.4. del capítulo 2, para resolver el problema mínimo riesgo y de Kataoka.

A continuación obtenemos el valor esperado y la varianza de la función objetivo estocástica. Posteriormente, plantearemos los problemas deterministas equivalentes al problema estocástico para los dos casos señalados anteriormente: normal y aleatoriedad simple, siguiendo los criterios valor esperado, mínima varianza, mínimo riesgo y de Kataoka.

1.1. CÁLCULO DEL VALOR ESPERADO Y LA VARIANZA DE LA FUNCIÓN OBJETIVO ESTOCÁSTICA CUADRÁTICA.

VALOR ESPERADO.

Sea la función estocástica $\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} - \tilde{\xi}'\mathbf{x} + \tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi}$. Sea $\bar{\xi} = E\{\tilde{\xi}\}$, el valor esperado de $\tilde{\xi}$, $\bar{\xi}_i = E\{\tilde{\xi}_i\}$, $i = 1,2,\ldots,n$, y $\mathbf{V}$ su matriz de varianzas y covarianzas:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

con $\sigma_i^2 = \mathrm{Var}\{\tilde{\xi}_i\} = E\left\{\left(\tilde{\xi}_i - \bar{\xi}_i\right)^2\right\}$, $\sigma_{ij} = \mathrm{Cov}\{\tilde{\xi}_i,\tilde{\xi}_j\} = E\{\tilde{\xi}_i\tilde{\xi}_j\} - \bar{\xi}_i\bar{\xi}_j$.

Puesto que el valor esperado de una suma es igual a la suma del valor esperado, tenemos que:

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} + \tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi} - \tilde{\xi}'\mathbf{x}\} &= \mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} + E\{\tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi}\} - E\{\tilde{\xi}'\mathbf{x}\} = \\ &= \mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} + E\{\tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi}\} - \bar{\xi}'\mathbf{x} \end{aligned}$$

Hemos de calcular, por tanto, $E\{\tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi}\}$:

$$\begin{aligned} E\{\tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi}\} &= E\left\{\sum_{i=1}^{n} h_{ii}\tilde{\xi}_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} h_{ij}\tilde{\xi}_i\tilde{\xi}_j\right\} = \sum_{i=1}^{n} h_{ii}E\{\tilde{\xi}_i^2\} + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} h_{ij}E\{\tilde{\xi}_i\tilde{\xi}_j\} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} h_{ii}\left(\sigma_i^2 + \bar{\xi}_i^2\right) + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} h_{ij}\left(\sigma_{ij} + \bar{\xi}_i\bar{\xi}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} h_{ii}\bar{\xi}_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} h_{ij}\bar{\xi}_i\bar{\xi}_j + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} h_{ii}\sigma_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} h_{ij}\sigma_{ij} = \bar{\xi}'\mathbf{H}\bar{\xi} + \mathrm{tr}(\mathbf{HV}) \end{aligned}$$

donde tr (**HV**) es la traza de la matriz **HV**.

Por tanto, el valor esperado del objetivo es la función cuadrática:

$$E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} = \mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} - \bar{\xi}'\mathbf{x} + \bar{\xi}'\mathbf{H}\bar{\xi} + \mathrm{tr}(\mathbf{HV}) \tag{1}$$

Puesto que suponemos que la matriz **B** es al menos semidefinida positiva, tenemos que la función obtenida es convexa.

VARIANZA.

Calculamos la varianza del objetivo estocástico $\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})$, a partir de las varianzas de cada uno de los sumandos de la variable aleatoria y las covarianzas entre ellos. Puesto que:

$$\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} - \tilde{\xi}'\mathbf{x} + \tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi}.$$

tenemos que:

$$\mathrm{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} = \mathrm{Var}\{-\tilde{\xi}'\mathbf{x}\} + \mathrm{Var}\{\tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi}\} + 2\,\mathrm{cov}\{-\tilde{\xi}'\mathbf{x},\tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi}\}$$

De los tres sumandos de la varianza, conocemos el valor de la varianza de $-\tilde{\xi}'\mathbf{x}, \mathrm{Var}\{-\tilde{\xi}'\mathbf{x}\} = \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x}$, por ser **V** la matriz de varianzas y covarianzas de $\tilde{\xi}$. Calculamos a continuación los valores de la varianza de la variable aleatoria $\tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi}$ y de la covarianza entre las variables $\tilde{\xi}'\mathbf{x}$ y $\tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\{\tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi}\} &= E\left\{\left(\tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi} - \bar{\xi}'\mathbf{H}\bar{\xi} - \mathrm{tr}(\mathbf{HV})\right)^2\right\} = \\ &= E\left\{\left(\tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi}\right)^2\right\} - (\bar{\xi}'\mathbf{H}\bar{\xi})^2 - \left(\mathrm{tr}(\mathbf{HV})\right)^2 - 2\mathrm{tr}(\mathbf{HV})\bar{\xi}'\mathbf{H}\bar{\xi} \end{aligned} \tag{2}$$

y

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}\left\{-\tilde{\xi}'\mathbf{x}, \tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi}\right\} &= E\left\{\left(-\tilde{\xi}'\mathbf{x} + \bar{\xi}'\mathbf{x}\right)\left(\tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi} - \bar{\xi}'\mathbf{H}\bar{\xi} - \operatorname{tr}(\mathbf{HV})\right)\right\} = \\ &= -E\left\{\tilde{\xi}'\mathbf{x}\tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi}\right\} + \bar{\xi}'\mathbf{x}\left(\bar{\xi}'\mathbf{H}\bar{\xi} + \operatorname{tr}(\mathbf{HV})\right)\end{aligned} \tag{3}$$

con:

$$\begin{aligned}E\left\{\left(\tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi}\right)^2\right\} &= E\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} h_{ii}\tilde{\xi}_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} h_{ij}\tilde{\xi}_i\tilde{\xi}_j\right)^2\right\} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} h_{ii}^2 E\left\{\tilde{\xi}_i^4\right\} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} h_{ii}h_{jj} E\left\{\tilde{\xi}_i^2\tilde{\xi}_j^2\right\} + E\left\{\left(\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} h_{ij}\tilde{\xi}_i\tilde{\xi}_j\right)^2\right\} + \\ &\quad + 2E\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} h_{ii}\tilde{\xi}_i^2\right)\left(\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} h_{ij}\tilde{\xi}_i\tilde{\xi}_j\right)\right\}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}E\left\{\left(\tilde{\xi}'\mathbf{x}\right)\left(\tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi}\right)\right\} &= E\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\tilde{\xi}_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} h_{ii}\tilde{\xi}_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} h_{ij}\tilde{\xi}_i\tilde{\xi}_j\right)\right\} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} h_{ii} E\left\{\tilde{\xi}_i^3\right\}x_i + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} h_{ii} E\left\{\tilde{\xi}_i^2\tilde{\xi}_j\right\}x_j + E\left\{\sum_{i=1}^{n}\tilde{\xi}_i x_i \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} h_{ij}\tilde{\xi}_i\tilde{\xi}_j\right\}\end{aligned}$$

Como puede observarse, la expresión de la varianza de la función $\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ es complicada. A diferencia del caso lineal, en el que basta conocer la matriz de varianzas y covarianzas del vector de parámetros aleatorios para conocer la varianza de la función objetivo, en el caso que planteamos, para conocer ésta hemos de conocer la función de distribución del vector de parámetros aleatorios y momentos de orden superior a dos de los mismos. Esto nos lleva a la necesidad de especificar la distribución de probabilidad de $\tilde{\xi}$ y a establecer hipótesis adicionales acerca de la estructura del problema que planteamos.

Los dos casos que consideraremos son el caso normal con matriz **H** diagonal y el caso de aleatoriedad simple, con variable aleatoria normal.

Como veremos a continuación, la hipótesis de normalidad se mantiene debido a que con esta distribución de probabilidad los momentos de orden tres y cuatro respecto al origen de la variable aleatoria $\tilde{\xi}_i$, $i = 1, 2, ..., n$, vienen dados en función del valor esperado y de la varianza de $\tilde{\xi}_i$. Existen otras distribuciones de probabilidad para las que esto ocurre también tales como la beta, la uniforme o la exponencial, entre otras. Para estas distribuciones puede obtenerse de igual forma la varianza de la variable aleatoria $\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \mathbf{x}^t\mathbf{B}\mathbf{x} - \tilde{\xi}^t\mathbf{x} + \tilde{\xi}^t\mathbf{H}\tilde{\xi}$, y lo que desarrollamos a continuación puede extenderse a estos casos, aunque, evidentemente, la expresión de la varianza variará de unos a otros.

a) Caso normal.

Supongamos que se verifican las siguientes hipótesis:

H1) $h_{ij} = 0$, para todo $i, j \in \{1, 2, ..., \text{n}\}$, $i \neq j$, es decir, la matriz **H** es diagonal.

H2) Las variables aleatorias $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, ..., \tilde{\xi}_n$ son mutuamente estadísticamente independientes.

H3) El vector $\tilde{\xi}$ se distribuye según la distribución normal multivariante de valor esperado $\bar{\xi} = \left(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_n\right)^t$ y matriz de varianzas y covarianzas **V** definida positiva.[1]

[1] Esta tercera hipótesis nos sirve para determinar los valores de los momentos tres y cuatro respecto al origen de las variables aleatorias ($E\{\tilde{\xi}_i^3\}$ y $E\{\tilde{\xi}_i^4\}$). La hipótesis de normalidad podría haberse reemplazado por la de otras distribuciones, tales como la uniforme, beta, exponencial,....

Consecuencias de las hipótesis (H1), (H2) y (H3)

A partir de la hipótesis (H2), puesto que las variables aleatorias del problema son mutuamente estadísticamente independientes, se verifica[2]:

$$E\left\{\tilde{\xi}_i^{\alpha}\tilde{\xi}_j^{\beta}\right\} = E\left\{\tilde{\xi}_i^{\alpha}\right\}E\left\{\tilde{\xi}_j^{\beta}\right\}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Además, dado que el vector $\tilde{\xi}$ se distribuye según la distribución normal multivariante, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, la variable $\tilde{\xi}_i$ es normal con valor esperado $\bar{\xi}_i$ y varianza σ_i^2, luego[3]:

$$E\left\{\tilde{\xi}_i^3\right\} = \bar{\xi}_i\left(\bar{\xi}_i^2 + 3\sigma_i^2\right)$$
$$E\left\{\tilde{\xi}_i^4\right\} = \bar{\xi}_i^4 + 6\bar{\xi}_i^2\sigma_i^2 + 3\sigma_i^4$$

Además, bajo las hipótesis (**H1**)-(**H3**) se tiene que la matriz **H** es diagonal y también lo es la matriz **V** (puesto que se supone que las variables aleatorias $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, ..., \tilde{\xi}_n$ son mutuamente estadísticamente independientes). Esto da lugar a poder expresar la traza de la matriz **HV** como $\mathbf{e}^t\mathbf{HVe}$, donde $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$, $e_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Varianza.

Partimos de la expresión de la varianza obtenida anteriormente:

$$\mathrm{Var}\left\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\right\} = \mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x} + \mathrm{Var}\left\{\tilde{\xi}^t\mathbf{H}\tilde{\xi}\right\} + 2\,\mathrm{cov}\left\{-\tilde{\xi}^t\mathbf{x}, \tilde{\xi}^t\mathbf{H}\tilde{\xi}\right\}$$

y calculamos los valores de la varianza de $\tilde{\xi}^t\mathbf{H}\tilde{\xi}$ y de la covarianza entre las variables $\tilde{\xi}^t\mathbf{x}$ y $\tilde{\xi}^t\mathbf{H}\tilde{\xi}$, bajo las hipótesis establecidas.

---

[2] Véase Hogg y Craig (1989), cap. 2. pág. 84-85.
[3] Véase Hogg y Craig (1989), cap. 3, pág. 116.

Por (2) sabemos que:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}\{\tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi}\} &= E\left\{\left(\tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi} - \bar{\xi}'\mathbf{H}\bar{\xi} - \mathrm{tr}(\mathbf{HV})\right)^2\right\} = \\
&= E\left\{\left(\tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi}\right)^2\right\} - (\bar{\xi}'\mathbf{H}\bar{\xi})^2 - \left(\mathrm{tr}(\mathbf{HV})\right)^2 - 2\mathrm{tr}(\mathbf{HV})\bar{\xi}'\mathbf{H}\bar{\xi}
\end{aligned}
$$

A partir de las hipótesis (H1)-(H3) tenemos que:

$$
\begin{aligned}
E\left\{\left(\tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi}\right)^2\right\} &= E\left\{\sum_{i=1}^{n} h_{ii}^2 \tilde{\xi}_i^4 + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} h_{ii}\tilde{\xi}_i^2 h_{jj}\tilde{\xi}_j^2\right\} = \\
&= \sum_{i=1}^{n} h_{ii}^2 E\{\tilde{\xi}_i^4\} + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} h_{ii}h_{jj}E\{\tilde{\xi}_i^2\}E\{\tilde{\xi}_j^2\} = \\
&= \left(\bar{\xi}'\mathbf{H}\bar{\xi}\right)^2 + 2\mathrm{tr}(\mathbf{H}^2\mathbf{V}^2) + \left(\mathrm{tr}(\mathbf{HV})\right)^2 + 2\mathrm{tr}(\mathbf{HV})\bar{\xi}'\mathbf{H}\bar{\xi} + 4\bar{\xi}'\mathbf{H}^2\mathbf{V}\bar{\xi}
\end{aligned}
$$

Luego, la varianza de $\tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi}$ es:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}\{\tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi}\} = (\bar{\xi}'\mathbf{H}\bar{\xi})^2 &+ 2\mathrm{tr}(\mathbf{H}^2\mathbf{V}^2) + \left(\mathrm{tr}(\mathbf{HV})\right)^2 + 2\mathrm{tr}(\mathbf{HV})\bar{\xi}'\mathbf{H}\bar{\xi} + \\
&+ 4\bar{\xi}'\mathbf{H}^2\mathbf{V}\bar{\xi} - (\bar{\xi}'\mathbf{H}\bar{\xi})^2 - \left(\mathrm{tr}(\mathbf{HV})\right)^2 - 2\mathrm{tr}(\mathbf{HV})\bar{\xi}'\mathbf{H}\bar{\xi} = \\
&= 2\mathrm{tr}(\mathbf{H}^2\mathbf{V}^2) + 4\bar{\xi}'\mathbf{H}^2\mathbf{V}\bar{\xi}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

A partir de (3) tenemos que el valor de la covarianza es:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cov}\{-\tilde{\xi}'\mathbf{x}, \tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi}\} &= E\left\{\left(-\tilde{\xi}'\mathbf{x} + \bar{\xi}'\mathbf{x}\right)\left(\tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi} - \bar{\xi}'\mathbf{H}\bar{\xi} - \mathrm{tr}(\mathbf{HV})\right)\right\} = \\
&= -E\{\tilde{\xi}'\mathbf{x}\tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi}\} + \bar{\xi}'\mathbf{x}\left(\bar{\xi}'\mathbf{H}\bar{\xi} + \mathrm{tr}(\mathbf{HV})\right)
\end{aligned}
$$

Por las hipótesis establecidas, tenemos que:

$$E\{\tilde{\xi}'\mathbf{x}\tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi}\} = E\left\{\sum_{i=1}^{n} h_{ii}\tilde{\xi}_i^3 x_i + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} h_{ii}\tilde{\xi}_i^2\tilde{\xi}_j x_j\right\} = \xi'\mathbf{H}\xi\xi'\mathbf{x} + 2\xi'\mathbf{HVx} + \mathrm{tr}(\mathbf{HV})\xi'\mathbf{x}$$

luego, el valor de la covarianza es:

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}\{-\tilde{\xi}'\mathbf{x}, \tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi}\} &= -(\xi'\mathbf{H}\xi\xi'\mathbf{x} + 2\xi'\mathbf{HVx} + \mathrm{tr}(\mathbf{HV})\xi'\mathbf{x}) + \xi'\mathbf{x}(\xi'\mathbf{H}\xi + \mathrm{tr}(\mathbf{HV})) = \\ &= -2\xi'\mathbf{HVx}\end{aligned} \qquad (5)$$

A partir de (4) y (5) obtenemos que si se verifican las hipótesis (H1)-(H3) la varianza de la variable aleatoria $\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) = \mathbf{x}'\mathbf{Bx} - \tilde{\xi}'\mathbf{x} + \tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi}$ es:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} &= \mathbf{x}'\mathbf{Vx} + \mathrm{Var}\{\tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi}\} + 2\,\mathrm{cov}\{-\tilde{\xi}'\mathbf{x}, \tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi}\} = \\ &= \mathbf{x}'\mathbf{Vx} - 4\xi'\mathbf{HVx} + 2\mathrm{tr}(\mathbf{H}^2\mathbf{V}^2) + 4\xi'\mathbf{H}^2\mathbf{V}\xi\end{aligned}$$

Por tanto, la varianza de la función objetivo estocástica, $\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) = \mathbf{x}'\mathbf{Bx} - \tilde{\xi}'\mathbf{x} + \tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi}$:

$$\mathrm{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} = \mathbf{x}'\mathbf{Vx} - 4\xi'\mathbf{HVx} + 2\mathrm{tr}(\mathbf{H}^2\mathbf{V}^2) + 4\xi'\mathbf{H}^2\mathbf{V}\xi \qquad (6)$$

es una función cuadrática de las variables de decisión del problema, **x**, y, como la matriz **V** es definida positiva, es una función convexa.

b) Aleatoriedad simple normal.

Supongamos que se verifica la siguiente hipótesis:

H4) El vector $\tilde{\xi}$ depende linealmente de una variable aleatoria $\tilde{t}$:

$$\tilde{\xi} = \xi^1 + \tilde{t}\xi^2$$

con $\xi^1, \xi^2 \in \mathbf{R}^n$ y $\tilde{t}$ es una variable aleatoria normal de valor esperado $\bar{t}$ y varianza σ_t^2 finita, $\sigma_t^2 < \infty$.[4]

Una vez establecidas esta hipótesis, calculamos el valor esperado y la varianza de la función objetivo estocástica:

En ese caso, la función objetivo del problema (PEC) es:

$$\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) = \tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{t}) = \mathbf{x}^t\mathbf{B}\mathbf{x} - \tilde{t}\xi^{2t}\mathbf{x} - \xi^{1t}\mathbf{x} + \tilde{t}^2\xi^{2t}\mathbf{H}\xi^2 + \xi^{1t}\mathbf{H}\xi^1 + 2\tilde{t}\xi^{1t}\mathbf{H}\xi^2$$

Valor esperado.

El valor esperado de la función objetivo de nuestro problema es, en este caso:

$$E\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{t})\} = \mathbf{x}^t\mathbf{B}\mathbf{x} - (\bar{t}\xi^2 + \xi^1)^t\mathbf{x} + (\sigma_t^2 + \bar{t}^2)\xi^{2t}\mathbf{H}\xi^2 + 2\bar{t}\xi^{1t}\mathbf{H}\xi^2 + \xi^{1t}\mathbf{H}\xi^1 \quad (7)$$

Varianza.

Puesto que la varianza de una variable aleatoria es el valor esperado de la diferencia al cuadrado entre la variable aleatoria y su valor esperado:

$$\mathrm{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{t})\} = \left(E\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{t}) - E\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{t})\}\}\right)^2$$

calculamos en primer lugar la diferencia $\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{t}) - E\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{t})\}$:

$$\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{t}) - E\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{t})\} = -(\tilde{t} - \bar{t})\xi^{2t}\mathbf{x} + (\tilde{t}^2 - \sigma_t^2 - \bar{t}^2)\xi^{2t}\mathbf{H}\xi^2 + 2(\tilde{t} - \bar{t})\xi^{1t}\mathbf{H}\xi^2$$

[4] Esta hipótesis nos sirve para determinar los valores de los momentos de orden tres y cuatro respecto al origen de la variable aleatoria $\tilde{t}$, $(E\{\tilde{t}^3\}$ y $E\{\tilde{t}^4\})$, de manera que, en vez de suponer normalidad podría haberse supuesto otra distribución (uniforme, beta, exponencial,...).

Elevamos al cuadrado la expresión y calculamos el valor esperado y obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{t})\} = {} & \sigma_t^2(\xi^{2t}\mathbf{x})^2 - 2\left(E\{(\tilde{t}-\bar{t})(\tilde{t}^2-\sigma_t^2-\bar{t}^2)\}\xi^{2t}\mathbf{H}\xi^2 + 2\sigma_t^2\xi^{1t}\mathbf{H}\xi^2\right)\xi^{2t}\mathbf{x} + \\
& + E\{(\tilde{t}^2-\sigma_t^2-\bar{t}^2)^2\}(\xi^{2t}\mathbf{H}\xi^2)^2 + 4\sigma_t^2(\xi^{1t}\mathbf{H}\xi^2)^2 \\
& + 4E\{(\tilde{t}-\bar{t})(\tilde{t}^2-\sigma_t^2-\bar{t}^2)\}\xi^{1t}\mathbf{H}\xi^2\xi^{2t}\mathbf{H}\xi^2
\end{aligned}
$$

A partir de la hipótesis (H4) se tiene que los momentos de orden tres y cuatro respecto al origen de la variable aleatoria $\tilde{t}$ son:

$$
\begin{aligned}
E\{\tilde{t}^3\} &= \bar{t}(\bar{t}^2 + 3\sigma_t^2) \\
E\{\tilde{t}^4\} &= \bar{t}^4 + 6\bar{t}^2\sigma_t^2 + 3\sigma_t^4
\end{aligned}
$$

luego:

$$
\begin{aligned}
E\{(\tilde{t}-\bar{t})(\tilde{t}^2-\sigma_t^2-\bar{t}^2)\} &= E(\tilde{t}^3) - \bar{t}^3 - \bar{t}\sigma_t^2 = 2\bar{t}\sigma_t^2 \\
E\{(\tilde{t}^2-\sigma_t^2-\bar{t}^2)^2\} &= E(\tilde{t}^4) + (\sigma_t^2+\bar{t}^2)^2 = 2\sigma_t^4 + 4\bar{t}^2\sigma_t^2
\end{aligned}
$$

y, por tanto, la expresión de la varianza es:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{t})\} = {} & \sigma_t^2\mathbf{x}^t\xi^2\xi^{2t}\mathbf{x} - 4\sigma_t^2(\xi^{1t}\mathbf{H}\xi^2 + \bar{t}\xi^{2t}\mathbf{H}\xi^2)\xi^{2t}\mathbf{x} + \\
& + 2\sigma_t^2(2\bar{t}^2+\sigma_t^2)(\xi^{2t}\mathbf{H}\xi^2)^2 + 4\sigma_t^2(\xi^{1t}\mathbf{H}\xi^2)^2 + 8\bar{t}\sigma_t^2\xi^{2t}\mathbf{H}\xi^2\xi^{1t}\mathbf{H}\xi^2
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Como puede observarse, el problema que se obtiene es un problema cuadrático convexo.

Una vez obtenidas las expresiones del valor esperado y de la varianza en los casos considerados, planteamos los problemas deterministas equivalentes que se obtienen al aplicar los criterios considerados en este trabajo a la función objetivo estocástica cuadrática. En primer lugar veremos el caso normal y, posteriormente se analizará el de aleatoriedad simple normal.

1.2. CASO NORMAL.

Consideremos el problema de programación estocástica cuadrática:

$$\begin{array}{ll} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} & \tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} - \tilde{\xi}'\mathbf{x} + \tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi} \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{(PEC)}$$

con **B** matriz de orden nxn, al menos semidefinida positiva, **H** matriz de orden nxn, simétrica y al menos semidefinida positiva.

Suponemos que el conjunto D, subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ es convexo, compacto y no vacío. Suponemos que este conjunto es determinista o bien ha sido transformado en su determinista equivalente siguiendo el criterio de restricciones de azar separadas.

Supongamos que se verifican las hipótesis (H1), (H2) y (H3) del apartado anterior. Abordamos ahora la resolución del problema (PEC). Para ello consideramos su transformación en un problema determinista equivalente mediante los criterios analizados en el epígrafe 3 del capítulo 2: valor esperado, mínima varianza y los dos criterios de máxima probabilidad: criterio mínimo riesgo y criterio de Kataoka.

a) Valor esperado.

A partir de los resultados obtenidos en el apartado 4.1, sabemos que el valor esperado de la función objetivo del problema (PEC) es:

$$E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} = \mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} - \bar{\xi}'\mathbf{x} + \bar{\xi}'\mathbf{H}\bar{\xi} + \mathrm{tr}(\mathbf{HV}) \qquad (1)$$

Puesto que el criterio de optimización del problema (PEC) es el de mínimo, el problema determinista equivalente siguiendo el criterio valor esperado es el siguiente problema convexo:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} - \bar{\xi}'\mathbf{x} + \bar{\xi}'\mathbf{H}\bar{\xi} + \text{tr}(\mathbf{H}\mathbf{V}) \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array}$$

b) Mínima varianza.

Si se verifican las hipótesis (H1)-(H3), sabemos que la varianza de la función objetivo estocástica es:

$$\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} = \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} - 4\bar{\xi}'\mathbf{H}\mathbf{V}\mathbf{x} + 2\text{tr}(\mathbf{H}^2\mathbf{V}^2) + 4\bar{\xi}'\mathbf{H}^2\mathbf{V}\bar{\xi} \qquad (6)$$

y, por tanto, el determinista equivalente del problema (PEC) mediante el criterio mínima varianza es el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} - 4\bar{\xi}'\mathbf{H}\mathbf{V}\mathbf{x} + 2\text{tr}(\mathbf{H}^2\mathbf{V}^2) + 4\bar{\xi}'\mathbf{H}^2\mathbf{V}\bar{\xi} \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array}$$

cuya función objetivo es una función convexa.

c) Criterio mínimo riesgo.

Consideramos ahora la resolución del problema (PEC) mediante el criterio mínimo riesgo. Para ello hemos de fijar una nivel de aspiración u para el objetivo estocástico y resolver el problema determinista equivalente:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Max}} & P(\mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} - \tilde{\xi}'\mathbf{x} + \tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi} \leq u) \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array}$$

A partir de lo analizado en el capítulo 2, sabemos que la resolución de este problema es, en general, complicada. En este caso aplicaremos la desigualdad de Cantelli para obtener una cota inferior de la función objetivo del problema determinista equivalente y, de esa forma, obtener una aproximación a la solución óptima del problema mínimo riesgo.

Así pues, proponemos la resolución del problema que se obtuvo en el apartado 3.4 del capítulo dos:

$$\begin{array}{ll} \underset{x}{\text{Max}} & \dfrac{\left(u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2}{\text{Var}\left(\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right) + \left(u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2} \\ \text{s.a} & E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \leq u \\ & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{(AMR(u))}$$

con el valor esperado y la varianza correspondientes a la función objetivo estocástica, bajo las hipótesis (H1)-(H3):

$$E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} = \mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} - \bar{\xi}'\mathbf{x} + \bar{\xi}'\mathbf{H}\bar{\xi} + \text{tr}(\mathbf{HV})$$

$$\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} = \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} - 4\bar{\xi}'\mathbf{HV}\mathbf{x} + 2\text{tr}(\mathbf{H}^2\mathbf{V}^2) + 4\bar{\xi}'\mathbf{H}^2\mathbf{V}\bar{\xi}$$

d) Criterio de Kataoka.

Si consideramos la resolución del problema (PEC) mediante el criterio de Kataoka, para una probabilidad $\beta \in (0, 1)$, y planteando la restricción de azar asociada a éste con desigualdad, el problema que hemos de resolver es:

$$\begin{array}{ll} \underset{(\mathbf{x}',u)'}{\text{Min}} & u \\ \text{s.a} & P(\mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} - \tilde{\xi}'\mathbf{x} + \tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi} \leq u) \geq \beta \\ & \mathbf{x} \in D \end{array}$$

Al igual que en el criterio mínimo riesgo, consideramos la aplicación de la desigualdad de Cantelli a la restricción probabilística que aparece en el problema determinista equivalente. A partir del estudio realizado en el apartado 3.4 del capítulo dos, si resolvemos el problema:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}+E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \\ \text{s.a} & \mathbf{x}\in D \end{array} \qquad (\text{AK}(\beta))$$

se tiene que:

$$u^* \leq \underset{\mathbf{x}\in D}{\text{Min}}\left\{\sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}+E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right\}$$

con $u^*\in \mathbb{R}$, $(\mathbf{x}^{*t}, u^*)^t$ solución óptima del problema de Kataoka.

Así pues, como aproximación a la solución óptima al problema de Kataoka, proponemos la resolución del problema:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}+E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \\ \text{s.a} & \mathbf{x}\in D \end{array} \qquad (\text{AK}(\beta))$$

con:

$$E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}=\mathbf{x}^t\mathbf{B}\mathbf{x}-\bar{\xi}^t\mathbf{x}+\bar{\xi}^t\mathbf{H}\bar{\xi}+\text{tr}(\mathbf{HV})$$

$$\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}=\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}-4\bar{\xi}^t\mathbf{HV}\mathbf{x}+2\text{tr}(\mathbf{H}^2\mathbf{V}^2)+4\bar{\xi}^t\mathbf{H}^2\mathbf{V}\bar{\xi}$$

Ejemplo.

Consideremos el problema de programación estocástica cuadrática:

$$
\begin{aligned}
\text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} \quad & \tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\xi}_1 \\ \tilde{\xi}_2 \end{pmatrix} \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \geq 1 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

donde el vector $\tilde{\xi} = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_1 \\ \tilde{\xi}_2 \end{pmatrix}$ sigue la distribución normal multivariante de valor esperado $\bar{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y matriz de varianzas y covarianzas $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

El valor esperado y la varianza de la función objetivo del problema planteado son, respectivamente:

$$
\begin{aligned}
E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} &= x_1^2 + 2x_2^2 - x_1 - 2x_2 + 38 \\
\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} &= 9x_1^2 + 4x_2^2 - 108x_1 - 32x_2 + 1878
\end{aligned}
$$

Si consideramos la resolución de este problema mediante los criterios analizados, se obtienen los siguientes problemas deterministas equivalentes:

a) Valor esperado:

$$
\begin{aligned}
\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} \quad & x_1^2 + 2x_2^2 - x_1 - 2x_2 + 38 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \geq 1 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

b) Mínima varianza:

$$\begin{aligned}
\min_{x}\ & 9x_1^2+4x_2^2-108x_1-32x_2+1878\\
\text{s.a}\ & x_1+x_2\geq 1\\
& 3x_1+2x_2\leq 8\\
& x_1,x_2\geq 0
\end{aligned}$$

c) *Aproximación al problema mínimo riesgo.* Para un nivel de aspiración u, el problema a resolver es:

$$\begin{aligned}
\max_{x}\ & \frac{(u-x_1^2-2x_2^2+x_1+2x_2-38)^2}{9x_1^2+4x_2^2-108x_1-32x_2+1878+(u-x_1^2-2x_2^2+x_1+2x_2-38)^2}\\
\text{s.a}\ & x_1^2+2x_2^2-x_1-3x_2+38\leq u\\
& x_1+x_2\geq 1\\
& 3x_1+2x_2\leq 8\\
& x_1,x_2\geq 0
\end{aligned}$$

d) Aproximación al problema de Kataoka. Fijada una probabilidad $\beta\in(0, 1)$, el problema que se obtiene es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\min_{x}\ & \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{9x_1^2+4x_2^2-108x_1-32x_2+1878}+x_1^2+2x_2^2-x_1-2x_2+38\\
\text{s.a}\ & x_1+x_2\geq 1\\
& 3x_1+2x_2\leq 8\\
& x_1,x_2\geq 0
\end{aligned}$$

Las soluciones a estos problemas son las que aparecen en las siguientes tablas.

La primera tabla corresponde a los criterios valor esperado y mínima varianza. Además de las soluciones correspondientes a estos criterios, aparecen los valores del valor esperado y la varianza de la función objetivo estocástica evaluada en las dos soluciones óptimas. De esta forma se tiene una medida de tendencia central y una de dispersión de las soluciones.

Criterio	Solución	Valor esperado	Varianza
Valor Esperado	(0.5, 0.5)	37.25	1811.25
Varianza	(8/3, 0)	42.444	1654

Las soluciones correspondientes al criterio mínimo riesgo son las que aparecen a continuación. Se han dado distintos valores para el nivel de aspiración, *u*. La cuarta columna corresponde a la cota inferior de la probabilidad con que se puede asegurar que la función objetivo estocástica no supera el nivel de aspiración fijado. Las dos últimas columnas corresponden a los valores del valor esperado y la varianza evaluados en la solución óptima obtenida para cada nivel de aspiración. Como puede observarse, a medida que el nivel de aspiración fijado es mayor, la probabilidad y el valor esperado aumentan y la varianza disminuye, con lo cual, las soluciones obtenidas para niveles de aspiración altos son menos arriesgadas (en el sentido de que la probabilidad de que el objetivo estocástico no supere el nivel de aspiración es mayor y de que la varianza es menor), pero son peores en términos de su valor esperado, puesto que éste es más alto.

Nivel de aspiración	Solución	Probabilidad (cota superior)	Valor esperado	Varianza
$u = 50$	(0.669, 0.5246)	0.08272	37.27	1794.08
$u = 100$	(1.2624, 0.6208)	0.6896	37.8604	1737.67
$u = 150$	(1.757, 0.717)	0.8792	38.9242	1695.13

En la siguiente tabla aparecen las soluciones correspondientes a la aproximación al criterio de Kataoka cuando se aplica la desigualdad de Cantelli. Se han dado distintos valores para la probabilidad. En la cuarta columna aparece el valor del objetivo en el óptimo para el problema (AK(β)), es decir, la cota superior al nivel mínimo, u, para el que podemos asegurar que la función objetivo no supera ese nivel con la probabilidad fijada. Las dos últimas columnas corresponden a los valores del valor esperado y la varianza de la función objetivo en la solución obtenida, como medidas de tendencia central y de dispersión de la función objetivo estocástica en cada solución. Como pude observarse, al igual que ocurre en el problema mínimo riesgo, probabilidades más altas corresponden a niveles mayores y a soluciones con valor esperado más alto y varianza más pequeña para el objetivo estocástico.

Probabilidad	Solución	Nivel u	Valor esperado	Varianza
$\beta = 0.6$	(1.14, 0.599)	88.89	37.6791	1748.84
$\beta = 0.7$	(1.2788, 0.6237)	101.53	37.8871	1736.20
$\beta = 0.9$	(1.86, 0.738)	162.42	39.2128	1686.81
$\beta = 0.95$	(2.148, 0.7768)	217.98	40.1191	1665.09

■

1.3. ALEATORIEDAD SIMPLE NORMAL.

Consideremos de nuevo el problema de programación estocástica cuadrática:

$$\begin{aligned} &\text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} \ \tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) = \mathbf{x}^t\mathbf{B}\mathbf{x} - \tilde{\xi}^t\mathbf{x} + \tilde{\xi}^t\mathbf{H}\tilde{\xi} \\ &\text{s.a} \qquad \mathbf{x} \in D \end{aligned} \tag{PEC}$$

con **B** matriz de orden *n*x*n*, al menos semidefinida positiva, **H** matriz de orden *n*x*n*, simétrica y al menos semidefinida positiva.

Suponemos que el conjunto D, subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ es convexo, compacto y no vacío. Suponemos que este conjunto es determinista o bien ha sido transformado en su determinista equivalente siguiendo el criterio de restricciones de azar separadas.

Supongamos que se verifica la siguiente hipótesis:

H4) El vector $\tilde{\xi}$ depende linealmente de una variable aleatoria $\tilde{t}$:

$$\tilde{\xi} = \xi^1 + \tilde{t}\xi^2$$

con ξ^1, $\xi^2 \in \mathbb{R}^n$ y $\tilde{t}$ es una variable aleatoria con distribución normal, de valor esperado $\bar{t}$ y varianza σ_t^2 finita, $\sigma_t^2 < \infty$.

Si se verifica esta hipótesis, el valor esperado y la varianza de la función objetivo estocástica del problema (PEC) son, respectivamente:

$$E\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{t})\} = \mathbf{x}^t\mathbf{B}\mathbf{x} - (\bar{t}\xi^2 + \xi^1)^t\mathbf{x} + (\sigma_t^2 + \bar{t}^2)\xi^{2t}\mathbf{H}\xi^2 + 2\bar{t}\xi^{1t}\mathbf{H}\xi^2 + \xi^{1t}\mathbf{H}\xi^1 \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{t})\} &= \sigma_t^2\mathbf{x}^t\xi^2\xi^{2t}\mathbf{x} - 4\sigma_t^2\left(\xi^{1t}\mathbf{H}\xi^2 + \bar{t}\xi^{2t}\mathbf{H}\xi^2\right)\xi^{2t}\mathbf{x} + \\ &+ 2\sigma_t^2(2\bar{t}^2+\sigma_t^2)\left(\xi^{2t}\mathbf{H}\xi^2\right)^2 + 4\sigma_t^2\left(\xi^{1t}\mathbf{H}\xi^2\right)^2 + 8\bar{t}\sigma_t^2\xi^{2t}\mathbf{H}\xi^2\xi^{1t}\mathbf{H}\xi^2\end{aligned} \tag{8}$$

A partir de estos resultados planteamos a continuación los problemas deterministas equivalentes al problema (PEC) que se obtienen al aplicar sobre el objetivo estocástico los distintos criterios vistos en el epígrafe 3 del capítulo 2: valor esperado, mínima varianza, y los criterios de máxima probabilidad: criterio mínimo riesgo y criterio de Kataoka. Al igual que en el caso normal, para estos dos criterios consideraremos la resolución del problema correspondiente a aplicar la desigualdad de Cantelli a la función de distribución del objetivo estocástico.

a) Valor esperado.

Dado el problema (PEC), si se verifica la hipótesis (H4)), el problema determinista equivalente de éste, siguiendo el criterio valor esperado es:

$$\begin{array}{ll}\underset{\mathbf{x}}{\mathrm{Min}} & \mathbf{x}^t\mathbf{B}\mathbf{x} - (\bar{t}\xi^2 + \xi^1)^t\mathbf{x} + (\sigma_t^2 + \bar{t}^2)\xi^{2t}\mathbf{H}\xi^2 + 2\bar{t}\xi^{1t}\mathbf{H}\xi^2 + \xi^{1t}\mathbf{H}\xi^1 \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D\end{array}$$

Puesto que la matriz **B** es al menos semidefinida positiva, este problema es un problema convexo.

b) Mínima varianza.

Si seguimos el criterio mínima varianza el problema determinista equivalente al problema (PEC) es el siguiente problema con función objetivo cuadrática:

$$\begin{array}{ll}\underset{\mathbf{x}}{\mathrm{Min}} & \sigma_t^2\mathbf{x}^t\xi^2\xi^{2t}\mathbf{x} - 4\bar{t}\sigma_t^2\xi^{2t}\mathbf{H}\xi^2\xi^{2t}\mathbf{x} + 2\sigma_t^2(2\bar{t}^2+\sigma_t^2)\left(\xi^{2t}\mathbf{H}\xi^2\right)^2 \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\underset{\mathbf{x}}{\operatorname{Min}} \sigma_t^2 \mathbf{x}^t \xi^2 \xi^{2t} \mathbf{x} - 4\sigma_t^2 \left(\xi^{1t} \mathbf{H} \xi^2 + \bar{t} \xi^{2t} \mathbf{H} \xi^2 \right) \xi^{2t} \mathbf{x} + \delta \\ \text{s.a} \quad \mathbf{x} \in D \end{array}$$

con $\delta = 2\sigma_t^2 (2\bar{t}^2 + \sigma_t^2)(\xi^{2t}\mathbf{H}\xi^2)^2 + 4\sigma_t^2 (\xi^{1t}\mathbf{H}\xi^2)^2 + 8\bar{t}\sigma_t^2 \xi^{2t}\mathbf{H}\xi^2 \xi^{1t}\mathbf{H}\xi^2$.

Puesto que la matriz $\sigma_t^2 \xi^2 \xi^{2t}$ es semidefinida positiva, la función objetivo de este problema es una función convexa.

c) Criterio mínimo riesgo.

El problema correspondiente al criterio mínimo riesgo para un nivel de satisfacción u para el problema (PEC), si se verifica las hipótesis (H4) es:

$$\begin{array}{ll}\underset{\mathbf{x}}{\operatorname{Max}} & P\left(\mathbf{x}^t \mathbf{B} \mathbf{x} - \tilde{t} \xi^{2t} \mathbf{x} - \xi^{1t} \mathbf{x} + \tilde{t}^2 \xi^{2t} \mathbf{H} \xi^2 + \xi^{1t} \mathbf{H} \xi^1 \leq u \right) \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array}$$

Al igual que en el caso normal, las dificultades para resolver este problema en el que interviene la función de distribución del objetivo estocástico nos han llevado a proponer la resolución del problema:

$$\begin{array}{ll}\underset{\mathbf{x}}{\operatorname{Max}} & \dfrac{\left(u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}\right)^2}{\operatorname{Var}\left(\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\right) + \left(u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}\right)^2} \\ \text{s.a} & E\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} \leq u \\ & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{(AMR(u))}$$

analizado en el apartado 3.4 del capítulo 2. Como se ha comentado anteriormente para otros casos, puesto que la función objetivo de este problema es una cota inferior de la función objetivo del problema mínimo riesgo, la solución del mismo nos sirve como aproximación a la solución del problema mínimo riesgo.

En este caso, el valor esperado y la varianza del problema (AMR(u)) son, respectivamente:

$$E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{t})\} = \mathbf{x}^t\mathbf{B}\mathbf{x} - (\bar{t}\xi^2 + \xi^1)^t\mathbf{x} + (\sigma_t^2 + \bar{t}^2)\xi^{2t}\mathbf{H}\xi^2 + 2\bar{t}\xi^{1t}\mathbf{H}\xi^2 + \xi^{1t}\mathbf{H}\xi^1 \quad (7)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{t})\} &= \sigma_t^2\mathbf{x}^t\xi^2\xi^{2t}\mathbf{x} - 4\sigma_t^2(\xi^{1t}\mathbf{H}\xi^2 + \bar{t}\xi^{2t}\mathbf{H}\xi^2)\xi^{2t}\mathbf{x} + \\ &+ 2\sigma_t^2(2\bar{t}^2 + \sigma_t^2)(\xi^{2t}\mathbf{H}\xi^2)^2 + 4\sigma_t^2(\xi^{1t}\mathbf{H}\xi^2)^2 + 8\bar{t}\sigma_t^2\xi^{2t}\mathbf{H}\xi^2\xi^{1t}\mathbf{H}\xi^2\end{aligned} \quad (8)$$

d) Criterio de Kataoka.

Si fijamos una probabilidad β para el problema de Kataoka, el determinista equivalente del problema (PEC) es el siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\underset{(\mathbf{x},u)}{\mathrm{Min}}\ u \\ \text{s.a}\quad &P\left(\mathbf{x}^t\mathbf{B}\mathbf{x} - \tilde{t}\xi^{2t}\mathbf{x} - \xi^{1t}\mathbf{x} + \tilde{t}^2\xi^{2t}\mathbf{H}\xi^2 + \xi^{1t}\mathbf{H}\xi^1 \le u\right) \ge \beta \\ &\mathbf{x} \in D\end{aligned}$$

Al igual que en el caso normal, planteamos el problema de Kataoka exigiendo que se verifique la restricción de azar con desigualdad. Las dificultades para resolver este problema nos llevan a proponer la resolución del siguiente problema:

$$\begin{aligned}&\underset{\mathbf{x}}{\mathrm{Min}} \quad \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\xi)\} \\ &\text{s.a} \quad \mathbf{x} \in D\end{aligned} \quad (\mathrm{AK}(\beta))$$

puesto que, a partir de los resultados obtenidos en el apartado 3.4 del capítulo 2, la resolución de este problema es tal que:

$$u^* \le \underset{\mathbf{x}\in D}{\mathrm{Min}}\left\{\sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\xi)\}\right\}$$

con $u^* \in \mathbb{R}$, $(\mathbf{x}^{*t}, u^*)$ solución óptima del problema de Kataoka.

Por tanto, como aproximación del problema de Kataoka proponemos la resolución del problema:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \sqrt{\dfrac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad (\text{AK}(\beta))$$

con:

$$E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{t})\} = \mathbf{x}^t\mathbf{B}\mathbf{x} - (\bar{t}\xi^2 + \xi^1)^t\mathbf{x} + (\sigma_t^2 + \bar{t}^2)\xi^{2t}\mathbf{H}\xi^2 + 2\bar{t}\xi^{1t}\mathbf{H}\xi^2 + \xi^{1t}\mathbf{H}\xi^1 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{t})\} = {} & \sigma_t^2\mathbf{x}^t\xi^2\xi^{2t}\mathbf{x} - 4\sigma_t^2\left(\xi^{1t}\mathbf{H}\xi^2 + \bar{t}\xi^{2t}\mathbf{H}\xi^2\right)\xi^{2t}\mathbf{x} + \\ & + 2\sigma_t^2(2\bar{t}^2+\sigma_t^2)\left(\xi^{2t}\mathbf{H}\xi^2\right)^2 + 4\sigma_t^2\left(\xi^{1t}\mathbf{H}\xi^2\right)^2 + 8\bar{t}\sigma_t^2\xi^{2t}\mathbf{H}\xi^2\xi^{1t}\mathbf{H}\xi^2 \end{aligned} \quad (8)$$

Ejemplo.

Consideremos el problema de programación estocástica cuadrática:

$$\begin{array}{ll} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} & \tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\xi}_1 \\ \tilde{\xi}_2 \end{pmatrix} \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

donde el vector $\tilde{\xi} = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_1 \\ \tilde{\xi}_2 \end{pmatrix}$ depende linealmente de una variable aleatoria $\tilde{t}$, de manera que $\tilde{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tilde{t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\tilde{t}$ sigue la distribución normal de valor esperado $\bar{t} = 2$ y varianza $\sigma_t^2 = 1$.

El valor esperado y la varianza de la función objetivo del problema planteado son, respectivamente:

$$E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} = 2x_1^2 + 9x_2^2 - 5x_1 - 3x_2 + 39$$
$$\mathrm{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} = 4x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 - 104x_1 - 52x_2 + 726$$

Consideremos la resolución de este problema mediante los criterios analizados. Los problemas deterministas equivalentes que se obtienen son:

a) Valor esperado:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\mathrm{Min}} & 2x_1^2 + 9x_2^2 - 5x_1 - 3x_2 + 39 \\ \mathrm{s.a} & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

b) Mínima varianza:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\mathrm{Min}} & 4x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 - 104x_1 - 52x_2 + 726 \\ \mathrm{s.a} & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

c) Aproximación al problema mínimo riesgo. Para un nivel de satisfacción *u*, el problema a resolver es:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\mathrm{Max}} & \dfrac{(u - 2x_1^2 - 9x_2^2 + 5x_1 + 3x_2 - 39)^2}{4x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 - 104x_1 - 52x_2 + 726 + (u - 2x_1^2 - 9x_2^2 + 5x_1 + 3x_2 - 39)^2} \\ \mathrm{s.a} & 2x_1^2 + 9x_2^2 - 5x_1 - 3x_2 + 39 \leq u \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

d) Aproximación al problema de Kataoka. Fijada una probabilidad $\beta \in (0, 1)$, el problema que se obtiene es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Min}_{x} \quad & \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{4x_1^2+x_2^2+4x_1x_2-104x_1-52x_2+726+2x_1^2+9x_2^2-5x_1-3x_2+39} \\
\text{s.a} \quad & x_1+x_2 \geq 1 \\
& 3x_1+2x_2 \leq 8 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Las soluciones a estos problemas son las que aparecen en las siguientes tablas. La primera de ellas corresponde a los criterios valor esperado y mínima varianza. Además de las soluciones correspondientes a estos criterios, aparecen los valores del valor esperado y la varianza de la función objetivo estocástica evaluada en las dos soluciones óptimas.

Criterio	**Solución**	**Valor esperado**	**Varianza**
Valor Esperado	(1.25,0.1666)	31.716	486.24
Varianza	(8/3,0)	32.777	477.111

Las soluciones correspondientes a la aproximación mínimo riesgo mediante la aplicación de la desigualdad de Cantelli son las que aparecen a continuación. Se han dado distintos valores para el nivel de aspiración, *u*. La tercera columna corresponde a la probabilidad con que se puede asegurar que la función objetivo estocástica no supera el nivel de aspiración fijado. Las dos últimas columnas corresponden a los valores del valor esperado y la varianza evaluados en la solución óptima obtenida para cada nivel de aspiración.

Como puede observarse, a medida que el nivel de aspiración es mayor, la probabilidad y el valor esperado aumentan y la varianza disminuye, con lo cual, las soluciones obtenidas para niveles de aspiración altos son menos arriesgadas (en el sentido de que la probabilidad de que el objetivo estocástico no supere el nivel de aspiración es mayor y de que la varianza es menor), pero son peores en términos de su valor esperado, puesto que el éste es más alto.

Nivel de aspiración	**Solución**	**Probabilidad (cota inferior)**	**Valor esperado**	**Varianza**
$u = 50$	(1.534,0.198)	0.2625	35.7964	566.7318
$u = 70$	(1.94,0.24)	0.6781	36.631	528.54
$u = 80$	(2.147,0.266)	0.7813	37.3259	509.6
$u = 90$	(2.357,0.2897)	0.8452	38.215	490.79

En la siguiente tabla aparecen las soluciones correspondientes a la aproximación al criterio de Kataoka cuando se aplica la desigualdad de Cantelli. Se han dado distintos valores para la probabilidad. En la tercera columna aparece el valor del objetivo en el óptimo para el problema (AK(β)), es decir, el nivel u mínimo para el que podemos asegurar que la función objetivo no supera ese nivel con la probabilidad fijada. Las dos últimas columnas corresponden a los valores del valor esperado y la varianza de la función objetivo en la solución obtenida, como medidas de tendencia central y de dispersión de la función objetivo estocástica. Como pude observarse, al igual que ocurre en el problema mínimo riesgo, probabilidades más altas corresponden a niveles mayores y a soluciones con valor esperado más alto y varianza más pequeña para el objetivo estocástico.

Probabilidad	**Solución**	**Nivel *u* (cota superior)**	**Valor esperado**	**Varianza**
$\beta = 0.6$	(1.83,0.23)	64.76409	36.343	538.5
$\beta = 0.7$	(1.976,0.247)	71.7467	36.7392	525.2231
$\beta = 0.9$	(2.47,0.2948)	104.558	38.75	481.18
$\beta = 0.95$	(2.4845,0.2731)	134.3618	38.7753	480.8829

■

Como ya se ha comentado anteriormente, la diversidad de criterios para transformar el problema estocástico en su determinista equivalente da lugar a obtener distintas posibles soluciones para el problema de programación estocástica. Como sabemos, la elección de la solución dependerá siempre de las preferencias del decisor en el proceso de decisión del que se obtiene el problema de programación estocástica. Sin embargo, como veremos a continuación en el siguiente epígrafe, estos criterios de resolución del problema de programación estocástica están relacionados.

2. RELACIONES ENTRE LOS CRITERIOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN ESTOCÁSTICA.

Hasta ahora se ha analizado la resolución de problemas de programación estocástica mediante el criterio de restricciones probabilísticas o de azar. En el capítulo dos se analizó la transformación de las restricciones probabilísticas o de azar separadas y la transformación del objetivo estocástico lineal en su determinista equivalente. El mismo análisis se ha realizado en este capítulo para funciones objetivo estocásticas de tipo cuadrático.

De todo lo estudiado hasta ahora se desprende que para la resolución de problemas de programación estocástica se han de llevar a cabo transformaciones del conjunto de oportunidades y de la función objetivo. La transformación del conjunto de oportunidades en su determinista equivalente pasa por fijar una probabilidad para cada una de las restricciones estocásticas del problema. En cuanto a la transformación del objetivo estocástico, como hemos visto, existen distintos criterios de transformación en su determinista equivalente, lo que da lugar a que se puedan obtener distintos problemas deterministas equivalentes al problema estocástico, y por tanto, distintas posibles soluciones, hecho que queda también reflejado en los ejemplos planteados.

Tal y como se ha señalado anteriormente, la elección de un criterio u otro para transformar el objetivo estocástico en su determinista equivalente dependerá, en general, del problema de decisión que se esté modelizando mediante el problema de programación estocástica y de las preferencias del decisor en el proceso de decisión. Cabe plantearse, sin embargo, si, dado un problema de programación estocástica, existe alguna relación entre las soluciones óptimas que se obtienen al resolver el problema estocástico mediante los distintos criterios de transformación del objetivo estocástico en determinista analizados. En este apartado abordamos esta cuestión, es decir, consideraremos un problema de programación estocástica con conjunto de oportunidades determinista o transformado en su determinista equivalente, plantearemos la resolución de este problema mediante los criterios analizados anteriormente y estudiaremos la existencia de relaciones entre las soluciones óptimas de éstos.

Consideremos el problema de programación estocástica:

$$\begin{array}{ll} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} & \tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{(PE)}$$

en el que suponemos que el conjunto de oportunidades $D \subset \mathbb{R}^n$ es determinista o bien ha sido transformado en su determinista equivalente mediante el criterio de restricciones probabilísticas o de azar separadas. Suponemos, además, que D es un conjunto compacto, convexo y no vacío.

Consideremos los siguientes criterios de transformación del objetivo estocástico en su equivalente determinista: valor esperado, mínima varianza, eficiencia valor esperado desviación estándar, criterio mínimo riesgo y criterio de Kataoka. En primer lugar analizaremos la relación entre las soluciones óptimas de los problemas valor esperado y mínima varianza y las soluciones eficientes valor esperado desviación estándar, posteriormente se analizarán las relaciones entre la solución óptima del problema mínimo riesgo y la solución óptima del problema de Kataoka. Finalmente, se analizarán relaciones entre las soluciones eficientes valor esperado desviación estándar y las soluciones óptimas del problema de Kataoka y del problema mínimo riesgo.

2.1. RELACIÓN ENTRE LAS SOLUCIONES VALOR ESPERADO, MÍNIMA VARIANZA Y LAS SOLUCIONES EFICIENTES VALOR ESPERADO DESVIACIÓN ESTÁNDAR.

Dado el problema de programación estocástica (PE), consideremos su resolución mediante el criterio valor esperado y mediante el criterio mínima varianza, cuyas soluciones óptimas vienen dadas por los problemas (E) y (σ^2):

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & E\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{(E)}$$

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad (\sigma^2)$$

Consideremos, además, el problema biobjetivo que recoge el valor esperado y la desviación estándar del objetivo estocástico del problema (PE):

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \left(E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}, \sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}\right) \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad (E\sigma)$$

Dados estos problemas, es claro, a partir del teorema 1 del capítulo 1 que:

a) Si el problema valor esperado posee solución y ésta es única, entonces es solución eficiente valor esperado desviación estándar. En caso de que no sea única, las soluciones óptimas valor esperado son soluciones débilmente eficientes valor esperado desviación estándar.

b) Si la varianza del objetivo estocástica es una función estrictamente convexa, el problema mínima varianza posee solución única (puesto que suponemos que el conjunto D es cerrado, acotado y convexo) y, en ese caso la solución óptima del problema mínima varianza es solución eficiente valor esperado desviación estándar del problema de programación estocástica. En caso de que el problema mínima varianza posea más de una solución óptima, las soluciones mínima varianza son soluciones débilmente eficientes valor esperado desviación estándar.

A continuación analizamos las relaciones entre los problemas mínimo riesgo y de Kataoka. Posteriormente, volveremos sobre el concepto de solución eficiente valor esperado desviación estándar y lo relacionaremos con las soluciones de los problemas de Kataoka y mínimo riesgo del problema de programación estocástica.

2.2. RELACIONES ENTRE EL PROBLEMA MÍNIMO RIESGO Y EL PROBLEMA DE KATAOKA.

Dado el problema de programación estocástica:

$$\begin{array}{ll} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} & \tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{(PE)}$$

consideremos para su resolución el problema determinista equivalente *correspondiente al criterio mínimo riesgo de nivel de aspiración u*:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Max}} & P\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \leq u\} \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{(MR(u))}$$

y el problema correspondiente a aplicar el criterio de Kataoka para una probabilidad $\beta \in (0, 1)$:

$$\begin{array}{ll} & \underset{(\mathbf{x}^t, u)}{\text{Min}} \; u \\ \text{s.a} & P(\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \leq u) = \beta \\ & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{(K(β))}$$

Los siguientes teoremas nos relacionan las soluciones óptimas de estos dos problemas.

Teorema 1.

Sea $\mathbf{x}^*$ solución óptima del problema (MR(u*)) y sea β^* el valor de la función objetivo del problema en el óptimo: $\beta^* = P\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*, \tilde{\xi}) \leq u^*\}$. Si la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})$ es estrictamente creciente, $(\mathbf{x}^{*t}, u^*)^t$ es solución óptima del problema (K(β*)), es decir, del problema de Kataoka para una probabilidad $\beta = \beta^*$.■

Demostración.

Demostramos el teorema por reducción al absurdo.

Por ser **x*** solución del problema (MR(u*)) se verifica que:

$$P\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq u^*\} \leq P\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi}) \leq u^*\} = \beta^* \text{ para todo } \mathbf{x} \in D$$

Supongamos que $(\mathbf{x}^{*t}, u^*)^t$ no es solución del problema (K(β*)). Entonces existe un vector $(\mathbf{x}^t, u)^t$, factible en (K(β*)) verificando que $u < u^*$, es decir:

$$\text{existen } \mathbf{x} \in D,\ u \in \mathbb{R}, \text{ se verifica que } P\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq u\} = \beta^* \text{ y } u < u^*.$$

Pero, por ser la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ estrictamente creciente, se verifica también que:

$$P\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq u^*\} = P\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq u\} + P\{u < \tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq u^*\} = \beta^* + \theta$$

con $\theta = P\{u < \tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq u^*\} > 0$, de lo que se deduce que existe un vector $\mathbf{x} \in D$ para el que $P\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq u^*\} > \beta^*$, lo cual está en contradicción con la hipótesis.■

Teorema 2.

Sea $(\mathbf{x}^{*t}, u^*)^t$ solución óptima del problema de Kataoka de probabilidad β^*, (K(β^*)). Si la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ es estrictamente creciente, **x*** es solución óptima del problema mínimo riesgo de nivel u^*, (MR(u^*)), y el valor de la función objetivo en el óptimo es β^*.■

Demostración.

Demostramos el teorema por reducción al absurdo. Por hipótesis $(\mathbf{x}^{*t}, u^*)^t$ es solución óptima del problema de Kataoka de nivel β^*, luego, se verifica:

a) Es factible en (K(β^*)): $\mathbf{x}^* \in D$ y $P\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*, \tilde{\xi}) \leq u^*\} = \beta^*$

b) Si $(\mathbf{x}^t, u)^t$ verifica que $\mathbf{x} \in D$ y $P\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \leq u\} = \beta^*$, entonces $u^* \leq u$.

Supongamos que $\mathbf{x}^*$ no es solución óptima del problema (MR(u*)). Entonces existe un vector $\mathbf{x} \in D$ para el cual:

$$P\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \leq u^*\} > \beta^*$$

Como la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})$ es estrictamente creciente, se verifica que existe un $u < u^*$ para el cual:

$$P\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \leq u\} = \beta^*$$

lo cual está en contra de la hipótesis (b).■

A partir de estos dos teoremas podemos afirmar que, si la función de distribución del objetivo estocástico es una función estrictamente creciente, existe una reciprocidad entre las soluciones mínimo riesgo y de Kataoka, de tal forma que resolviendo uno de ellos sabemos que la solución obtenida es también solución del otro, es decir:

(1) Para cada nivel de aspiración u fijo, cualquier solución óptima del problema mínimo riesgo es también solución óptima del problema de Kataoka fijando una probabilidad β igual a la probabilidad máxima obtenida en el problema mínimo riesgo.

(2) Para cada β fijo cualquier solución óptima del problema de Kataoka es también solución del problema mínimo riesgo, si fijamos para este último un nivel de aspiración u igual al valor óptimo del problema de Kataoka.

Esta reciprocidad entre ambos problemas es comentada por Geoffrion (1967). En este trabajo, Geoffrion afirma que es fácil probar estos resultados, refiriéndose al caso lineal normal, añadiendo luego que, de hecho, los resultados son ciertos para cualquier distribución de probabilidad (no necesariamente normal).

Obsérvese que la relación establecida entre estos dos problemas no tiene porqué mantenerse si como aproximación a las soluciones a los problemas mínimo riesgo y de Kataoka se aplica la desigualdad de Cantelli. En ese caso, los problemas que se resuelven son:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Max}} & \dfrac{\left(u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2}{\text{Var}\left(\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right) + \left(u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2} \\ \text{s.a} & E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \leq u \\ & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{(AMR(u))}$$

como aproximación al problema mínimo riesgo de nivel de aspiración, u, (MR(u)) y:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \sqrt{\dfrac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad (\text{AK}(\beta))$$

como aproximación al problema de Kataoka de probabilidad β, (K(β)).

El siguiente teorema establece las relaciones entre estos dos problemas (AMR(u)) y (AK(β)).

Teorema 3.

Consideremos los problemas (AMR(u)) y (AK(β))

con $u \in \mathbf{R}$, $\beta \in (0, 1)$ constantes y $\mathrm{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} > 0$ para todo $\mathbf{x} \in D$.

(i) Si $\mathbf{x}^*$ es solución de (AMR(u)), entonces para:

$$\beta = \frac{\left(u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*, \tilde{\xi})\}\right)^2}{\mathrm{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*, \tilde{\xi})\} + \left(u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*, \tilde{\xi})\}\right)^2}$$

$\mathbf{x}^*$ es solución de (AK(β)).

(ii) Si $\mathbf{x}^*$ es solución de (AK(β)), entonces para:

$$u = \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*, \tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*, \tilde{\xi})\}$$

$\mathbf{x}^*$ es solución de (AMR(u)).■

Demostración.

(i) Por ser **x*** solución de (AMR(u)) tenemos que para todo $\mathbf{x} \in D$ se verifica:

$$\frac{\left(u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2}{\mathrm{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}+\left(u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2} \leq \frac{\left(u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\}\right)^2}{\mathrm{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\}+\left(u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\}\right)^2} = \beta$$

luego, para todo $\mathbf{x} \in D$:

$$u \leq \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}$$

Puesto que $\beta = \dfrac{\left(u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\}\right)^2}{\mathrm{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\}+\left(u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\}\right)^2}$ o, de manera equivalente $u = \sqrt{\dfrac{\beta}{1-\beta}}\mathrm{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\} + E\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\}$ tenemos que:

$$u = \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\} \leq \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}$$

para todo $\mathbf{x} \in D$, luego **x*** es solución de (AK(β)).

(ii) Por ser **x*** solución de (AK(β)),tenemos que $\mathbf{x}^* \in D$ y además:

$$u = \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\}.$$

Se tiene que $u \geq E\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\}$ y para todo $\mathbf{x} \in D$ se verifica:

$$u=\sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{\operatorname{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\}}+E\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\}\leq\sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{\operatorname{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}+E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}$$

Sea $\mathbf{x}\in D$, con $u\geq E\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\}$. Por la desigualdad anterior tenemos que:

$$\sqrt{1-\beta}\,u\leq\sqrt{\beta}\sqrt{\operatorname{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}+\sqrt{1-\beta}\,E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}$$

lo que implica que:

$$\sqrt{1-\beta}\left(u-E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)\leq\sqrt{\beta}\sqrt{\operatorname{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}$$

y elevando al cuadrado ambos lados de la desigualdad se obtiene:

$$\left(u-E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2\leq\beta\left(\operatorname{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}+\left(u-E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2\right)$$

Por tanto:

$$\frac{\left(u-E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2}{\operatorname{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}+\left(u-E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2}\leq\beta=\frac{\left(u-E\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\}\right)^2}{\operatorname{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\}+\left(u-E\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\}\right)^2}$$

y $\mathbf{x}^*$ es solución de (AMR(u)).■

A partir este teorema tenemos que si para resolver el problema:

$$\begin{array}{ll}\text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} & \tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\\ \text{s.a} & \mathbf{x}\in D\end{array}$$

mediante los criterios de máxima probabilidad (mínimo riesgo y Kataoka) aplicamos la desigualdad de Cantelli, la solución de ambos problemas, $\mathbf{x}^*$, coinciden cuando el nivel de aspiración u del problema mínimo riesgo y el valor de la probabilidad del problema de Kataoka, β, mantienen la siguiente relación:

$$u = \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\}$$

relación equivalente a:

$$\beta = \frac{\left(u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\}\right)^2}{\mathrm{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\} + \left(u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\}\right)^2}$$

Por tanto, la reciprocidad existente entre los problemas mínimo riesgo y de Kataoka se mantiene también si se aplica la desigualdad de Cantelli para obtener una cota inferior de la función de distribución del objetivo estocástico y se utiliza esta cota como aproximación a estos problemas.

2.3. RELACIONES ENTRE EL PROBLEMA DE KATAOKA Y LAS SOLUCIONES EFICIENTES VALOR ESPERADO DESVIACIÓN ESTÁNDAR.

En este apartado se analizan las relaciones entre el problema de Kataoka y el conjunto de soluciones eficientes valor esperado desviación estándar de un problema de programación estocástica. Hasta ahora, las relaciones establecidas entre los criterios de resolución de problemas de programación estocástica son relaciones generales, es decir, para cualquier problema de programación estocástica. En este apartado, sin embargo, las relaciones que se establecen son para problemas de programación estocástica con determinadas características. En concreto, se consideran problemas de programación estocástica lineal en los casos normal y de aleatoriedad simple. Para estos dos casos se establecen relaciones entre los problemas de Kataoka y las soluciones eficientes valor esperado desviación estándar de estos problemas. Además, se considera la resolución del problema resultante de aplicar la desigualdad de Cantelli a la función de distribución del problema de Kataoka y se relacionan las soluciones óptimas de este problema para distintas probabilidades con las soluciones eficientes valor esperado desviación estándar. Dividiremos nuestro estudio en distintos casos. En primer lugar veremos el caso lineal normal, posteriormente veremos el problema lineal con aleatoriedad simple y, finalmente, se considera la aproximación por Cantelli al problema de Kataoka.

a) Caso lineal normal.

Consideremos el problema de programación estocástica con función objetivo lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} & \tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{(PEL)}$$

Supongamos que el vector $\tilde{\mathbf{c}}$ se distribuye según la distribución normal multivariante con valor esperado $\bar{\mathbf{c}}$ y matriz de varianzas y covarianzas **V**, definida positiva.

En ese caso la variable aleatoria $\tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}$ sigue la distribución normal de valor esperado $\bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}$ y varianza $\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}$. El problema de Kataoka asociado al problema de programación estocástica, para una probabilidad β es:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\mathrm{Min}} & \Phi^{-1}(\beta)\sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad (\mathrm{K1}(\beta))$$

y el problema de eficiencia valor esperado desviación estándar es:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\mathrm{Min}}\left(\bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}, \sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}}\right) & \\ \text{s.a} \quad \mathbf{x} \in D & \end{array} \qquad (\mathrm{E}\sigma 1)$$

Puesto que la matriz de varianzas y covarianzas del problema, **V**, es definida positiva, la función $\sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}}$ es una función convexa, lo que implica que las dos funciones objetivo del problema (Eσ1) son convexas y, podemos afirmar que el conjunto de soluciones propiamente eficientes valor esperado desviación estándar del problema se obtienen resolviendo el problema ponderado:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\mathrm{Min}} & \mu\bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} + (1-\mu)\sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}} \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad (\mathrm{E}\sigma 2)$$

con $\mu \in (0, 1)$.

Como demostramos a continuación, los óptimos de los problemas (K1(β)) y (Eσ1) están relacionados.

Teorema 4.

x* es solución propiamente eficiente del problema (Eσ1) si y sólo si **x*** es solución óptima del problema de Kataoka (K1(β)) para un nivel de probabilidad β tal que $\Phi^{-1}(\beta) = \frac{1-\mu}{\mu}$, con $\mu \in (0, 1)$, en donde μ es el valor para el que **x*** es solución óptima en el problema (Eσ2).■

Demostración.

(⇒) Por hipótesis, **x*** es solución propiamente eficiente del problema (Eσ1), lo cual quiere decir que existe un $\mu' \in (0, 1)$ para el cual **x*** es solución óptima del problema (Eσ2), con $\mu = \mu'$, es decir:

$$\mu'\bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}^* + (1-\mu')\sqrt{\mathbf{x}^{*t}\mathbf{V}\mathbf{x}^*} \le \mu'\bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} + (1-\mu')\sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}} \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in D$$

Veamos que **x*** es solución óptima del problema (K1(β)), para β tal que $\Phi^{-1}(\beta) = \frac{1-\mu'}{\mu'}$.

Supongamos que **x*** no es solución óptima de (K1(β)), para β tal que $\Phi^{-1}(\beta) = \frac{1-\mu'}{\mu'}$. Eso quiere decir que existe un $\mathbf{x} \in D$ tal que:

$$\bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} + \Phi^{-1}(\beta)\sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}} < \bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}^* + \Phi^{-1}(\beta)\sqrt{\mathbf{x}^{*t}\mathbf{V}\mathbf{x}^*}$$

o, lo que es lo mismo:

$$\bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} + \frac{1-\mu'}{\mu'}\sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}} < \bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}^* + \frac{1-\mu'}{\mu'}\sqrt{\mathbf{x}^{*t}\mathbf{V}\mathbf{x}^*}$$

pero, por ser $0 < \mu' < 1$, esto es equivalente a:

$$\mu'\bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} + (1-\mu')\sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}} < \mu'\bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}^* + (1-\mu')\sqrt{\mathbf{x}^{*t}\,\mathbf{V}\mathbf{x}^*}$$

lo cual está en contradicción con la hipótesis.

($\Leftarrow$) Por hipótesis **x*** es solución óptima del problema (K1(β)), para un nivel de probabilidad β tal que $\Phi^{-1}(\beta) = \dfrac{1-\mu}{\mu}$, con $0 < \mu < 1$, lo cual quiere decir que:

$$\bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}^* + \Phi^{-1}(\beta)\sqrt{\mathbf{x}^{*t}\,\mathbf{V}\mathbf{x}^*} \le \bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} + \Phi^{-1}(\beta)\sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}} \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in D$$

o, lo que es lo mismo:

$$\bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}^* + \frac{1-\mu}{\mu}\sqrt{\mathbf{x}^{*t}\,\mathbf{V}\mathbf{x}^*} \le \bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} + \frac{1-\mu}{\mu}\sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}} \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in D$$

lo que es equivalente a:

$$\mu\bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}^* + (1-\mu)\sqrt{\mathbf{x}^{*t}\,\mathbf{V}\mathbf{x}^*} \le \mu\bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} + (1-\mu)\sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}} \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in D$$

por lo que existe un $\mu \in (0, 1)$ para el cual:

$$\mathbf{x}^* \in \arg\min_{\mathbf{x}\in D} \mu\bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} + (1-\mu)\sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}}$$

y, por tanto, **x*** es solución propiamente eficiente del problema (Eσ1).■

Por tanto, a partir de este teorema se concluye que en el caso lineal normal las soluciones propiamente eficientes valor esperado desviación estándar son soluciones óptimas del problema de Kataoka sin más que fijar una probabilidad, β, para el problema de Kataoka tal que $\Phi^{-1}(\beta) = \dfrac{1-\mu}{\mu}$, con $\mu \in (0, 1)$. Obsérvese, además que, puesto que $\mu \in (0, 1)$ se tiene que:

$$\Phi^{-1}(\beta)=\frac{1-\mu}{\mu}\Leftrightarrow\mu=\frac{1}{1+\Phi^{-1}(\beta)}$$

Puesto que $\mu \in (0, 1)$ tenemos que la probabilidad a fijar, β, ha de ser mayor que 0.5, ya que:

$$0<\frac{1}{1+\Phi^{-1}(\beta)}<1\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{1+\Phi^{-1}(\beta)}>0\Leftrightarrow 1+\Phi^{-1}(\beta)>0\Leftrightarrow\Phi^{-1}(\beta)>-1\\[2ex]\dfrac{1}{1+\Phi^{-1}(\beta)}<1\Leftrightarrow 1<1+\Phi^{-1}(\beta)\Leftrightarrow\Phi^{-1}(\beta)>0\end{cases}$$

Luego, el valor de la probabilidad debe ser tal que $\Phi^{-1}(\beta)>0$, lo que es equivalente a $\beta>\Phi(0)=0.5$.

Por tanto, en el caso lineal normal, las soluciones óptimas del problema de Kataoka son soluciones propiamente eficientes valor esperado desviación estándar para valores de probabilidad $\beta > 0.5$. Este resultado está en consonancia con las hipótesis que se establecen para elegir el criterio de eficiencia valor esperado desviación estándar en los modelos de selección de cartera dentro del campo de la Economía Financiera. En estos modelos se plantea un problema de programación estocástica del tipo que acabamos de ver, se mantiene la hipótesis de que el individuo es averso al riesgo y, a partir de los axiomas de la teoría de la utilidad esperada, se elige como criterio de resolución de problemas de programación estocástica, el criterio de eficiencia valor esperado varianza. Como acabamos de ver, la elección de este criterio es equivalente a la elección del criterio de Kataoka como criterio de resolución del problema de programación estocástica y la aversión al riesgo se traduce en fijar una probabilidad mayor que 0.5, sin necesidad de apoyarnos en los axiomas de la teoría de la utilidad esperada.

b) Caso lineal aleatoriedad simple.

Consideremos de nuevo el problema de programación estocástica con función objetivo lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} & \tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{(PEL)}$$

Supongamos que el vector $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c}^1 + \tilde{t}\,\mathbf{c}^2$, donde $\tilde{t}$ es una variable aleatoria continua de valor esperado $\bar{t}$, varianza $\sigma_t^2 > 0$, $\sigma_t^2 < \infty$, y función de distribución F_t, estrictamente creciente. Además suponemos que se verifica que $\mathbf{c}^{2t}\mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \in D$.

Consideremos la resolución de este problema mediante el criterio de Kataoka. El problema determinista equivalente al problema estocástico planteado es:

$$\begin{array}{ll} & \underset{(\mathbf{x}^t,u)^t}{\text{Min}} \; u \\ \text{s.a} & P\left(\tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} \le u\right) = \beta \\ & \mathbf{x} \in D \end{array}$$

A partir de las hipótesis anteriores tenemos que el problema de Kataoka es equivalente a:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \mathbf{c}^{1t}\mathbf{x} + F_t^{-1}(\beta)\,\mathbf{c}^{2t}\mathbf{x} \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{(K2(}\beta\text{))}$$

Consideremos además el problema correspondiente a la eficiencia valor esperado desviación estándar del problema de programación estocástica planteado. Puesto que, bajo las hipótesis establecidas, el valor esperado y la varianza de la función objetivo estocástica son, respectivamente:

$$E\{(\mathbf{c}^1 + \tilde{t}\mathbf{c}^2)^t \mathbf{x}\} = \mathbf{c}^{1t}\mathbf{x} + \bar{t}\mathbf{c}^{2t}\mathbf{x}$$
$$\mathrm{Var}\{(\mathbf{c}^1 + \tilde{t}\mathbf{c}^2)^t \mathbf{x}\} = \mathrm{Var}\{\tilde{t}\mathbf{c}^{2t}\mathbf{x}\} = \sigma_t^2 (\mathbf{c}^{2t}\mathbf{x})^2$$

el conjunto de soluciones eficientes valor esperado desviación estándar del problema estocástico es el del siguiente problema biobjetivo:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\mathrm{Min}} & (\mathbf{c}^{1t}\mathbf{x} + \bar{t}\mathbf{c}^{2t}\mathbf{x},\ \sigma_t \mathbf{c}^{2t}\mathbf{x}) \\ \mathrm{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad (\mathrm{E}\sigma 3)$$

y, dado que las dos funciones son lineales, el conjunto de soluciones propiamente eficientes valor esperado desviación estándar se obtiene resolviendo el problema ponderado:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\mathrm{Min}} & \mu(\mathbf{c}^{1t}\mathbf{x} + \bar{t}\mathbf{c}^{2t}\mathbf{x}) + (1-\mu)\sigma_t \mathbf{c}^{2t}\mathbf{x} \\ \mathrm{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad (\mathrm{E}\sigma 4)$$

para $\mu \in (0, 1)$.

Mediante la siguiente proposición se relacionan el conjunto de soluciones propiamente eficientes del problema estocástico y la solución óptima del problema de Kataoka para una probabilidad β.

Proposición 1.

Si existe un $\beta \in (0, 1)$ tal que $F_t^{-1}(\beta) = \bar{t} + \dfrac{1-\mu}{\mu}\sigma_t$, con $\mu \in (0, 1)$, los problemas (Eσ4) y (K2(β)) son equivalentes.■

Demostración.

Consideremos el problema (Eσ4):

$$\underset{\mathbf{x}\in D}{\text{Min}} \left\{ \mu \mathbf{c}^{1t}\mathbf{x} + (\mu\bar{t} + (1-\mu)\sigma_t)\mathbf{c}^{2t}\mathbf{x} \right\}$$

Dado que $\mu > 0$, tenemos que:

$$\underset{\mathbf{x}\in D}{\text{Min}} \left\{ \mu \mathbf{c}^{1t}\mathbf{x} + (\mu\bar{t} + (1-\mu)\sigma_t)\mathbf{c}^{2t}\mathbf{x} \right\} \equiv \mu \underset{\mathbf{x}\in D}{\text{Min}} \left\{ \mathbf{c}^{1t}\mathbf{x} + \left(\bar{t} + \frac{1-\mu}{\mu}\sigma_t \right) \mathbf{c}^{2t}\mathbf{x} \right\} \equiv$$

$$\equiv \mu \underset{\mathbf{x}\in D}{\text{Min}} \left\{ \mathbf{c}^{1t}\mathbf{x} + F_t^{-1}(\beta)\mathbf{c}^{2t}\mathbf{x} \right\}$$

Luego, las soluciones óptimas de ambos problemas coinciden.■

A partir de esta proposición y, bajo las hipótesis establecidas, tenemos que las soluciones propiamente eficientes valor esperado desviación estándar del problema planteado son soluciones del problema de Kataoka cuando se fija para éste un nivel de probabilidad tal que:

$$F_t^{-1}(\beta) = \bar{t} + \frac{1-\mu}{\mu}\sigma_t$$

Además, se verifican dos propiedades más que recogemos en las siguientes proposiciones.

Proposición 2.

Si se verifican las hipótesis establecidas en este apartado, las soluciones propiamente eficientes valor esperado desviación estándar del problema de programación estocástica (PEL), son soluciones del problema de Kataoka para un nivel de probabilidad β tal que $\beta > F(\bar{t})$.■

Demostración.

El nivel de probabilidad que hemos de fijar en el problema de Kataoka ha de ser tal que:

$$F_t^{-1}(\beta) = \bar{t} + \frac{1-\mu}{\mu}\sigma_t$$

Si despejamos de la expresión anterior μ, obtenemos:

$$\mu = \frac{\sigma_t}{F_t^{-1}(\beta) + \sigma_t - \bar{t}}$$

Puesto que $\mu \in (0,1)$, tenemos que:

$$0 < \frac{\sigma_t}{F_t^{-1}(\beta) + \sigma_t - \bar{t}} < 1$$

Luego:

$$\left.\begin{array}{l} F_t^{-1}(\beta) + \sigma_t - \bar{t} > 0 \Rightarrow \bar{t} < F_t^{-1}(\beta) + \sigma_t \\ \sigma_t < F_t^{-1}(\beta) + \sigma_t - \bar{t} \Rightarrow \bar{t} < F_t^{-1}(\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{t} < F_t^{-1}(\beta) \Rightarrow F_t(\bar{t}) < \beta \,\blacksquare$$

A partir de esta propiedad podemos concluir que si la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $\tilde{t}$ es simétrica, tenemos que $F(\bar{t}) = 0.5$, por lo que en ese caso se exige que $\beta > 0.5$, es decir, para obtener soluciones propiamente eficientes, la probabilidad que hemos de fijar en el problema de Kataoka ha de ser mayor que 0.5.

Proposición 3.

Sean $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2 \in D$, soluciones propiamente eficientes valor esperado desviación estándar del problema (PEL), para valores del parámetro μ, μ_1 y μ_2, respectivamente, con $\mu_1 < \mu_2$. Entonces, si los niveles de probabilidad que hemos de fijar en el problema de Kataoka para obtener las soluciones $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$, son β_1 y β_2, se verifica que $\beta_2 < \beta_1$.■

Demostración.

Dado que $0 < \mu_1 < \mu_2 < 1$, se verifican las siguientes desigualdades:

$$1-\mu_2 < 1-\mu_1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{\mu_2} < \frac{1}{\mu_1}$$

luego:

$$\frac{1-\mu_2}{\mu_2} < \frac{1-\mu_1}{\mu_2} < \frac{1-\mu_1}{\mu_1} \Rightarrow \frac{1-\mu_2}{\mu_2} < \frac{1-\mu_1}{\mu_1}$$

Puesto que:

$$F_t^{-1}(\beta_1) = \bar{t} + \frac{1-\mu_1}{\mu_1}\sigma_t \quad \text{y} \quad F_t^{-1}(\beta_2) = \bar{t} + \frac{1-\mu_2}{\mu_2}\sigma_t$$

tenemos que:

$$F_t^{-1}(\beta_2) < F_t^{-1}(\beta_1) \Rightarrow \beta_2 < \beta_1 \blacksquare$$

Por tanto, dado que el valor del parámetro μ indica la importancia relativa que se le da al valor esperado en relación a la varianza en el problema ponderado, mayor importancia relativa al valor esperado de la función objetivo estocástica en el problema ponderado implica una probabilidad menor en el problema de Kataoka y, por tanto, una solución más arriesgada en términos de probabilidad.

Pasamos a estudiar la existencia de relación entre las soluciones propiamente eficientes de problemas de programación estocástica y las soluciones que se obtienen al aplicar la desigualdad de Cantelli a la función de distribución del objetivo estocástico en el problema de Kataoka.

c) Aplicación de la desigualdad de Cantelli.

Consideremos el problema de programación estocástica:

$$\begin{array}{l} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"}\ \tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \\ \text{s.a}\ \ \mathbf{x}\in D \end{array} \qquad \text{(PE)}$$

y consideremos su resolución mediante el criterio de Kataoka:

$$\begin{array}{l} \underset{(\mathbf{x}^t,u)^t}{\text{Min}}\ u \\ \text{s.a}\ \ P\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\le u\}\ge\beta \\ \mathbf{x}\in D \end{array}$$

En el caso de que no se conozca la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})$, para resolver el problema de Kataoka podemos aplicar sobre la restricción de azar del mismo la desigualdad de Cantelli y obtenemos el problema:

$$\begin{array}{l} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\ \sqrt{\dfrac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}+E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \\ \text{s.a}\quad \mathbf{x}\in D \end{array} \qquad \text{(AK(}\beta\text{))}$$

Consideremos, además, el problema correspondiente al conjunto de soluciones eficientes valor esperado desviación estándar del problema (PE):

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \left(E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}, \sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}\right) \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \tag{Eσ5}$$

y el problema ponderado:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\ \mu & E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} + (1-\mu)\sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \tag{Eσ6}$$

con $\mu \in (0, 1)$.

Para cada $\mu \in (0, 1)$ la solución óptima del problema (Eσ6) es solución propiamente eficiente valor esperado desviación estándar del problema de programación estocástica (PE). El siguiente teorema nos relaciona estas soluciones (las soluciones propiamente eficientes valor esperado desviación estándar del problema (PE)) y la solución optima del problema (AK(β)).

Teorema 5.

Consideremos los problemas (AK(β)) y (Eσ6), con μ, $\beta \in (0, 1)$. Si $\mu = \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{1-\beta}}$, ambos problemas son equivalentes.■

Demostración.

$\Rightarrow$) Demostramos que cualquier solución de (Eσ6) es solución de (AK(β)).

Sea $\mathbf{x}^*$ solución óptima de (Eσ6) con $\mu = \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{1-\beta}}$. Entonces para todo $\mathbf{x} \in D$ se verifica que:

$$\mu\ E\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\} + (1-\mu)\sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\}} \le \mu\ E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} + (1-\mu)\sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}$$

Luego:

$$\frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{1-\beta}}E\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\}+\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{1-\beta}}\sqrt{\operatorname{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\}}\leq$$
$$\frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{1-\beta}}E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}+\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{1-\beta}}\sqrt{\operatorname{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}$$

y, por tanto:

$$E\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\}+\sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{\operatorname{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\}}\leq E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}+\sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{\operatorname{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}$$

Luego **x*** es solución óptima de (AK(β)).

⇐) La demostración es análoga a la anterior a partir de que $\mu=\frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{1-\beta}}\Rightarrow\sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}=\frac{1-\mu}{\mu}$.■

Así pues, toda solución óptima al problema (AK(β)), correspondiente a la aplicación de la desigualdad de Cantelli al problema de Kataoka asociado al problema (PE), es solución propiamente eficiente valor esperado desviación estándar del problema (PE).

De todo lo estudiado hasta ahora, podemos concluir que en el caso lineal las soluciones propiamente eficientes valor esperado desviación estándar del problema de programación estocástica son soluciones óptimas del problema de Kataoka, si se verifica la hipótesis de normalidad o la de aleatoriedad simple. Así mismo, se tiene que las soluciones que se obtienen al aplicar la desigualdad de Cantelli al problema de Kataoka asociado a un problema de programación estocástica, son soluciones propiamente eficientes valor esperado desviación estándar de éste.

Además, podemos afirmar que éstas son también soluciones mínimo riesgo, como puede deducirse a partir de los teoremas 1, 2 y 3 que establecen la reciprocidad entre el problema de Kataoka y el problema mínimo riesgo. Esta relación que acabamos de considerar, entre soluciones propiamente eficientes valor esperado desviación estándar y soluciones mínimo riesgo de un problema de programación estocástica ha sido analizada anteriormente en la literatura para el caso lineal normal, desde un punto de vista distinto. Abordamos en el siguiente apartado esta relación.

2.4. RELACIONES ENTRE EL PROBLEMA MÍNIMO RIESGO Y LAS SOLUCIONES EFICIENTES VALOR ESPERADO DESVIACIÓN ESTÁNDAR.

En este apartado consideramos de nuevo la relación entre las soluciones eficientes valor esperado desviación estándar y la solución óptima al problema mínimo riesgo para una determinado nivel de aspiración u. Esta relación se ha analizado ya en el apartado anterior para determinados casos, al estudiar la relación entre eficiencia valor esperado desviación estándar y el problema de Kataoka, por la reciprocidad existente entre este último y el problema mínimo riesgo. Sin embargo, abordamos ahora todo esto desde una óptica distinta, considerada ya por Charnes y Cooper (1963) y analizada posteriormente por Stancu-Minasian (1984, cap. 3 pág. 166-172) en el caso lineal normal. Consideramos los mismos casos que en el apartado anterior: caso lineal normal, caso lineal aleatoriedad simple y aproximación por Cantelli.

a) Caso lineal normal.

Consideremos el problema de programación estocástica con función objetivo lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} & \tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{(PEL)}$$

Supongamos que el vector $\tilde{\mathbf{c}}$ se distribuye según la distribución normal multivariante con valor esperado $\bar{\mathbf{c}}$ y matriz de varianzas y covarianzas $\mathbf{V}$, definida positiva.

En ese caso la variable aleatoria $\tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}$ sigue la distribución normal de valor esperado $\bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}$ y varianza $\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}$. El problema mínimo riesgo asociado al problema de programación estocástica, para un nivel de aspiración u es:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Max}} & \dfrac{u-\bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}}} \\ \text{s. a} & \mathbf{x}\in D \end{array} \qquad (\text{MR1}(u))$$

y el problema de eficiencia valor esperado desviación estándar es:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\left(\bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}, \sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}}\right) & \\ \text{s.a} \quad \mathbf{x}\in D & \end{array} \qquad (\text{E}\sigma 1)$$

Stancu-Minasian (1984) considera que, puesto que en este último problema se desea:

•Minimizar el valor esperado, lo que es equivalente a resolver el problema $\underset{\mathbf{x}\in D}{\text{Max}}\ F_1(\mathbf{x}) = u - \bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}$, con u constante, $u \in \mathbb{R}$

•Minimizar la desviación estándar: $\underset{\mathbf{x}\in D}{\text{Min}}\, F_2(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}}$

si se considera como criterio de resolución del problema biobjetivo $(\text{E}\sigma 1)$ el de maximizar el ratio $\dfrac{F_1(\mathbf{x})}{F_2(\mathbf{x})}$, el problema resultante es el problema $(\text{MR1}(u))$

En este sentido, Charnes y Cooper (1963) señalan que el hecho de maximizar la función:

$$\frac{u - \bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}}}$$

representa un esfuerzo por minimizar $\bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x}$ de forma conjunta.

b) Caso lineal aleatoriedad simple.

Consideremos el problema de programación estocástica con función objetivo lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} & \tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{(PEL)}$$

Supongamos que el vector $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c}^1 + \tilde{t}\,\mathbf{c}^2$, donde $\tilde{t}$ es una variable aleatoria continua de valor esperado $\bar{t}$, varianza $\sigma_t^2 > 0$, $\sigma_t^2 < \infty$, y función de distribución F_t, estrictamente creciente. Además suponemos que se verifica que $\mathbf{c}^{2t}\mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \in D$.

Consideremos la resolución de este problema mediante el criterio mínimo riesgo de nivel de aspiración u. El problema determinista equivalente al problema estocástico planteado es:

$$\begin{array}{l} \underset{\mathbf{x}}{\text{Max}}\ P(\tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} \le u) \\ \text{s.a}\ \mathbf{x} \in D \end{array}$$

A partir de las hipótesis anteriores tenemos que el problema mínimo riesgo es equivalente a:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Max}} & \dfrac{u - \mathbf{c}^{1t}\mathbf{x}}{\mathbf{c}^{2t}\mathbf{x}} \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{(MR2(u))}$$

Consideremos además el problema correspondiente a la eficiencia valor esperado desviación estándar del problema de programación estocástica planteado. Puesto que, bajo las hipótesis establecidas, el valor esperado y la varianza de la función objetivo estocástica son, respectivamente:

$$E\{(\mathbf{c}^1 + \tilde{t}\mathbf{c}^2)^{\mathsf{t}}\mathbf{x}\} = \mathbf{c}^{1\mathsf{t}}\mathbf{x} + \bar{t}\mathbf{c}^{2\mathsf{t}}\mathbf{x}$$
$$\mathrm{Var}\{(\mathbf{c}^1 + \tilde{t}\mathbf{c}^2)^{\mathsf{t}}\mathbf{x}\} = \mathrm{Var}\{\tilde{t}\mathbf{c}^{2\mathsf{t}}\mathbf{x}\} = \sigma_t^2(\mathbf{c}^{2\mathsf{t}}\mathbf{x})^2$$

el conjunto de soluciones eficientes valor esperado desviación estándar del problema estocástico es el del siguiente problema biobjetivo:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\mathrm{Min}} & (\mathbf{c}^{1\mathsf{t}}\mathbf{x} + \bar{t}\mathbf{c}^{2\mathsf{t}}\mathbf{x},\ \sigma_t\mathbf{c}^{2\mathsf{t}}\mathbf{x}) \\ \mathrm{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad (\mathrm{E}\sigma 3)$$

Puesto que en el problema (Eσ3) se desea:

•Minimizar el valor esperado: $\underset{\mathbf{x}\in D}{\mathrm{Min}}\ \mathbf{c}^{1\mathsf{t}}\mathbf{x} + \bar{t}\mathbf{c}^{2\mathsf{t}}\mathbf{x}$, problema equivalente a:

$$\underset{\mathbf{x}\in D}{\mathrm{Max}}\ F_l(\mathbf{x}) = u - \mathbf{c}^{1\mathsf{t}}\mathbf{x} - \bar{t}\mathbf{c}^{2\mathsf{t}}\mathbf{x}$$

con u constante, $u \in \mathbb{R}$.

•Minimizar la desviación estándar: $\underset{\mathbf{x}\in D}{\mathrm{Min}}\ \sigma_t\mathbf{c}^{2\mathsf{t}}\mathbf{x} \equiv \sigma_t\ \underset{\mathbf{x}\in D}{\mathrm{Min}}\ F_2(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{2\mathsf{t}}\mathbf{x}$, puesto que $\sigma_t > 0$.

Al igual que en el caso anterior, si, para resolver el problema (Eσ3) consideramos el problema maximizar el ratio $\frac{F_1(\mathbf{x})}{F_2(\mathbf{x})}$, tenemos que:

$$\frac{F_1(\mathbf{x})}{F_2(\mathbf{x})} = \frac{u - \mathbf{c}^{1\mathsf{t}}\mathbf{x} - \bar{t}\mathbf{c}^{2\mathsf{t}}\mathbf{x}}{\mathbf{c}^{2\mathsf{t}}\mathbf{x}} = \frac{u - \mathbf{c}^{1\mathsf{t}}\mathbf{x}}{\mathbf{c}^{2\mathsf{t}}\mathbf{x}} - \bar{t}$$

luego, se verifica que:

$$\arg\max_{\mathbf{x}\in D} \frac{F_1(\mathbf{x})}{F_2(\mathbf{x})} = \arg\max_{\mathbf{x}\in D} \frac{u - \mathbf{c}^{1t}\mathbf{x}}{\mathbf{c}^{2t}\mathbf{x}}$$

es decir la solución óptima de ambos problemas coincide.

c) Aplicación de la desigualdad de Cantelli.

Consideremos el problema de programación estocástica:

$$\begin{aligned} &\text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"}\ \tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \\ &\text{s.a}\quad \mathbf{x}\in D \end{aligned} \qquad \text{(PE)}$$

y consideremos su resolución mediante el criterio mínimo riesgo:

$$\begin{aligned} &\underset{\mathbf{x}}{\text{Max}}\ P\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \le u\} \\ &\text{s.a}\quad \mathbf{x}\in D \end{aligned}$$

En el caso de que no se conozca la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})$, para resolver el problema mínimo riesgo podemos aplicar sobre la función de distribución del objetivo estocástico la desigualdad de Cantelli y obtenemos el problema:

$$\begin{aligned} &\underset{\mathbf{x}}{\text{Max}}\ \frac{\left(u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2}{\text{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} + \left(u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2} \\ &\text{s.a}\quad E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \le u \\ &\qquad\ \mathbf{x}\in D \end{aligned} \qquad \text{(AMR(u))}$$

Consideremos el problema (AMR(u)). Supongamos que se fija un nivel de aspiración u tal que $E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \leq u$, para todo $\mathbf{x} \in D$. En ese caso, podemos expresar el problema (AMR(u)) como:

$$\operatorname*{Max}_{\mathbf{x}\in D} \frac{1}{\dfrac{\operatorname{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}{\left(u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2} + 1} \equiv \operatorname*{Min}_{\mathbf{x}\in D} \frac{\operatorname{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}{\left(u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2} \equiv$$

$$\equiv \operatorname*{Max}_{\mathbf{x}\in D} \frac{\left(u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2}{\operatorname{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} \equiv \operatorname*{Max}_{\mathbf{x}\in D} \frac{u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}{\sqrt{\operatorname{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}}$$

---

obteniendo, de nuevo, el ratio $\dfrac{F_1(\mathbf{x})}{F_2(\mathbf{x})}$, siendo en este caso $F_1(\mathbf{x}) = u - E\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}$ y $F_2(\mathbf{x}) = \sqrt{\operatorname{Var}\{\tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}$.

A partir de los resultados obtenidos en este epígrafe podemos concluir que si bien existen distintos criterios de transformación del objetivo estocástico de un problema de programación estocástica, estos criterios mantienen relaciones que ayudan a que la elección de un criterio para resolver el problema de programación estocástica, en base a las preferencias del decisor, sea más fácil, a partir de las relaciones obtenidas. De entre los criterios vistos, para los casos analizados en este trabajo, cabe destacar el criterio de Kataoka, puesto que, por un lado, las soluciones de éste son soluciones eficientes valor esperado desviación estándar, para determinados valores de la probabilidad fijada y, por otro, como hemos visto, bajo determinadas condiciones, mantiene una reciprocidad con el criterio mínimo riesgo, lo que permite, en los casos analizados, "evitar" la resolución de problemas fraccionales que se obtienen con el criterio mínimo riesgo. Además, consideramos que para resolver un problema de programación estocástica es más "fácil" fijar una probabilidad para su resolución que fijar un nivel de aspiración para el objetivo estocástico.

CAPÍTULO 4

PROGRAMACIÓN ESTOCÁSTICA MULTIOBJETIVO.

ENFOQUE MULTIOBJETIVO

1. INTRODUCCIÓN.

Nos centramos ahora en el estudio de problemas de decisión en los que el número de objetivos es múltiple y algunos o todos los parámetros del problema son variables aleatorias con distribución conocida. De esta forma, se relajan dos hipótesis frecuentes cuando se plantea un modelo de optimización tradicional para resolver problemas de decisión que se plantean en procesos reales:

- la hipótesis de que el objetivo del proceso de decisión puede representarse a través de una única función a optimizar

- y la hipótesis de que la situación en la que nos encontramos en el proceso de decisión es una situación de certidumbre, de tal forma que se conocen los valores de todos los parámetros que intervienen en el problema.

En general, un problema de programación estocástica multiobjetivo se puede formular como:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{"Opt"}} & \tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \left(\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi}), \tilde{z}_2(\mathbf{x},\tilde{\xi}), \ldots, \tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right) \\ \text{s. a} & \tilde{g}_i(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq 0,\ i = 1,2,\ldots,m \\ & \mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n \end{array}$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de variables de decisión del problema y $\tilde{\xi}$ es un vector aleatorio definido sobre un conjunto $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^s$. Suponemos dada la familia $\mathbb{F}$ de eventos, es decir, subconjuntos de $\mathbb{E}$, y la distribución de probabilidad P definida sobre $\mathbb{F}$, de manera que para cualquier subconjunto de $\mathbb{E}$, $A \subset \mathbb{E}$, $A \in \mathbb{F}$, la probabilidad de A, $P(A)$, es conocida. Además, se mantiene la hipótesis de que la distribución de probabilidad, P, es independiente de las variables de decisión, $x_1, \ldots, x_n$.

Suponemos que las funciones $\tilde{z}_1(\mathbf{x}, \tilde{\xi}), \tilde{z}_2(\mathbf{x}, \tilde{\xi}), \ldots, \tilde{z}_q(\mathbf{x}, \tilde{\xi})$ y $\tilde{g}_1(\mathbf{x}, \tilde{\xi})$, $\tilde{g}_2(\mathbf{x}, \tilde{\xi})$, $\ldots, \tilde{g}_m(\mathbf{x}, \tilde{\xi})$están definidas en todo el espacio $\mathbb{R}^n \times \mathbb{E}$.

A partir de los análisis realizados en los capítulos previos, sabemos que la resolución de problemas de programación estocástica pasa por la elección de criterios para obtener, a partir del problema estocástico, un problema determinista equivalente cuya solución es considerada solución óptima del problema original. Esto da lugar a que para un mismo problema estocástico se puedan obtener distintas soluciones, una por cada uno de los criterios de obtención del determinista equivalente, y que se puedan considerar todas ellas soluciones óptimas del problema estocástico de partida. La elección de un criterio u otro dependerá de las características del proceso de decisión a partir del cual se genera el problema.

Esta diversidad de criterios es trasladable al caso multiobjetivo, con la dificultad añadida de que el número de objetivos del problema es mayor que uno.

Los estudios realizados hasta ahora en programación estocástica multiobjetivo abordan la resolución del problema planteado desde distintos enfoques. Para clasificar los trabajos realizados distinguiremos entre problemas con variables aleatorias discretas y problemas con variables aleatorias continuas.

Dentro del caso discreto, cabe destacar los trabajos de Ben Abdelaziz (1992) y Ben Abdelaziz, Lang y Nadeau (1994 y 1995) en los que se analiza la obtención de soluciones eficientes de problemas de programación estocástica multiobjetivo con variables aleatorias discretas. En estos trabajos se dan distintos conceptos de eficiencia de problemas de programación estocástica multiobjetivo y el estudio que se realiza es paralelo al análisis de eficiencia en programación estocástica que se comentó brevemente en el capítulo uno de este trabajo.

Por otro lado existen también estudios en los que se aborda la resolución del problema planteado bajo la filosofía de la programación recurso de la programación estocástica, analizada también en el capítulo 1 de este trabajo. Así, Teghem, Dufrane, Thauvoye y Kunsch (1986) plantean la resolución de problemas de programación estocástica multiobjetivo con parámetros que son variables aleatorias discretas con distribución conocida. Estos autores proponen el método STRANGE, un método interactivo de resolución de problemas con las características descritas. En este método, basado en el método STEM de la programación multiobjetivo, se define una función que penaliza la violación de las restricciones, que se añade al resto de objetivos del problema determinista equivalente. Posteriormente, Urli y Nadeau (1990) proponen el método PROMISE para resolver problemas de programación estocástica multiobjetivo con información incompleta, esto es, para el caso en el que sólo se conoce una medida de tendencia central y una de dispersión de cada uno de los parámetros aleatorios que intervienen en el problema. Al igual que el anterior, este método es interactivo, basado en el método STEM, y se utiliza una función que penaliza la posible violación de las restricciones del problema, que se incorpora como un objetivo más del problema determinista equivalente.

En cuanto al estudio de problemas de programación estocástica multiobjetivo con parámetros que son variables aleatorias continuas existen en la literatura múltiples trabajos que lo abordan. De entre ellos cabe destacar los trabajos de Stancu-Minasian (1984), Stancu-Minasian y Tigan (1984), Leclerq (1981 y 1982), Szidarovszky, Gershon y Duckstein (1986), Goicoechea, Hansen y Duckstein (1982) y el libro de Slovinski y Teghem (1990). La mayor parte de los estudios realizados hasta ahora resuelven el problema estocástico multiobjetivo transformando el problema en uno de optimización determinista equivalente y consideran solución del problema estocástico multiobjetivo a la solución del problema transformado. En general, esta transformación consta de dos etapas que constituyen una doble transformación. En una de ellas se transforma el problema estocástico en uno determinista equivalente y en la otra se transforma el problema multiobjetivo en uno de optimización. El orden en que se lleven a cabo estas transformaciones depende del método que se siga para resolver el problema. Así, Stancu-Minasian (1984) plantea que para la resolución de estos problemas se pueden considerar dos posibles formas de abordarlo:

- Transformar el problema de programación estocástica multiobjetivo en un problema de programación estocástica con una función objetivo y resolver éste mediante alguno de los criterios vistos anteriormente.

- Transformar el problema de programación estocástica multiobjetivo en un problema multiobjetivo determinista equivalente, fijando un criterio de transformación para cada objetivo estocástico y, posteriormente, buscar soluciones eficientes del problema multiobjetivo determinista obtenido.

En este sentido, Ben Abdelaziz (1992) clasifica los métodos de resolución de los problemas en tres grupos, que denomina enfoques o aproximaciones, para la resolución de problemas de programación estocástica multiobjetivo. Esta clasificación se realiza en función del orden en el que se lleven a cabo las transformaciones anteriormente mencionadas y distingue:

- Enfoque multiobjetivo: En él se transforma el problema en uno multiobjetivo determinista equivalente y posteriormente en uno de optimización.

- Enfoque estocástico: Consiste en reducir el problema a un problema de programación estocástica con una función objetivo y, posteriormente, a uno un problema de optimización determinista equivalente.

- Enfoque interactivo: Se combinan ambos enfoques para obtener, en interacción con el decisor, una solución de compromiso.

La siguiente figura muestra las dos transformaciones básicas que generalmente se siguen para resolver problemas de programación estocástica multiobjetivo.

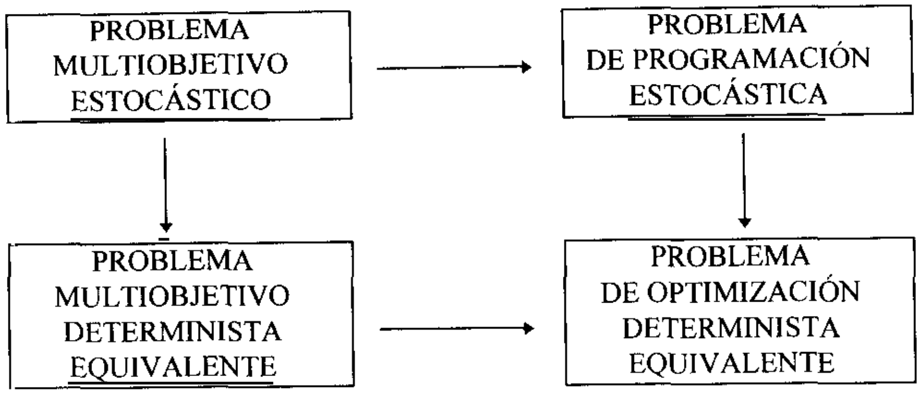


FIGURA 1.

TRANSFORMACIONES USUALES DE UN PROBLEMA MULTIOBJETIVO ESTOCÁSTICO

A esta clasificación habría que añadir los trabajos realizados para resolver el problema mediante programación estocástica por metas. El primero de ellos se debe a Contini (1968) y posteriormente aparecen otros trabajos debidos a Stancu-Minasian (1984) y Stancu-Minasian y Tigan (1988). El análisis de estos trabajos nos ha llevado a considerarlos como un bloque aparte de la clasificación anterior, si bien, algunos de los problemas planteados mediante este enfoque se podrían encuadrar dentro de alguna de los enfoques que distingue Ben Abdelaziz.

En cuanto a los métodos interactivos, hemos de señalar la importancia del método PROTRADE, (Goicoechea, Hansen y Duckstein (1982)) método basado en el método STEM, y del método MULT propuesto por Leclerq (1982), y en el que se abordan problemas de programación estocástica con restricciones estocásticas. Para resolver este problema, Leclerq transforma las restricciones estocásticas en restricciones de azar y las considera objetivos adicionales del problema. El problema resultante se resuelve mediante un método interactivo, que propone el autor.

En adelante nos centraremos en el análisis de la resolución de problemas mediante el enfoque multiobjetivo y el enfoque estocástico y las posibles relaciones que pueden existir en la resolución de problemas mediante los mismos.

El problema que abordaremos es:

$$\begin{array}{lll} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} & \tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \left(\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi}), \tilde{z}_2(\mathbf{x},\tilde{\xi}), \ldots, \tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right)^t & \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D & \end{array} \qquad \text{(PEM)}$$

en el que se supone que el conjunto de oportunidades es determinista o bien ha sido transformado en su determinista equivalente siguiendo el criterio de restricciones de azar separadas (obsérvese que la transformación del conjunto de oportunidades es igual en programación estocástica y en programación estocástica multiobjetivo) y se mantiene como criterio de optimización el de mínimo.

2. ENFOQUE MULTIOBJETIVO.

Abordamos la resolución de problemas de programación estocástica multiobjetivo mediante el enfoque multiobjetivo, es decir, siguiendo las siguientes etapas:

Etapa 1: Transformación del problema estocástico multiobjetivo en uno multiobjetivo determinista equivalente, siguiendo algún criterio que se considera apropiado.

Etapa 2: Resolución del problema multiobjetivo determinista obtenido en la etapa anterior, sin considerar el carácter estocástico del problema de partida, salvo por la transformación realizada en la primera etapa.

Evidentemente, existen muchos posibles criterios para llevar a cabo la transformación del problema estocástico multiobjetivo siguiendo las dos etapas descritas. Así, por ejemplo, en un problema de dos objetivos estocásticos es posible que se considere adecuado el criterio valor esperado para transformar el primer objetivo estocástico y el criterio mínimo riesgo para el segundo y, una vez obtenido el problema biobjetivo determinista equivalente, obtener soluciones eficientes, satisfactorias o de compromiso del mismo.

Sin embargo, existen en la literatura conceptos de solución eficiente de problemas de programación estocástica multiobjetivo que se encuadran dentro de este enfoque. Estos conceptos son generalizaciones de los criterios básicos de resolución de problemas de programación estocástica: valor esperado, mínima varianza, valor esperado desviación estándar, mínimo riesgo y Kataoka. La idea básica en todos ellos es elegir un criterio de transformación de los objetivos estocásticos, aplicarlo a cada uno de ellos y construir un problema multiobjetivo determinista equivalente con las transformaciones obtenidas.

La mayor crítica que se realiza a esta forma de resolver problemas de programación estocástica multiobjetivo es que, al aplicar el criterio de obtención del problema determinista equivalente a cada objetivo por separado, puede ocurrir que no se tenga en cuenta la posible dependencia estocástica entre unos objetivos estocásticos y otros, de manera que, en cierto modo, se prima la naturaleza multiobjetivo del problema sobre la naturaleza estocástica. Por otro lado, la mayor ventaja del enfoque multiobjetivo es que es fácilmente aplicable para la resolución de problemas estocásticos multiobjetivo.

En este capítulo se recogen algunos conceptos de solución eficiente de problemas de programación estocástica multiobjetivo y se analiza las relaciones entre ellos. Como veremos a continuación, estos conceptos de eficiencia están relacionados entre si. Puesto que anteriormente se han estudiado con detenimiento los procesos de obtención del determinista equivalente de un objetivo estocástico mediante los criterios citados, en lo que sigue no nos detendremos en esto. Tampoco entraremos en la segunda de las etapas anteriormente señaladas, esto es, la resolución del problema multiobjetivo determinista equivalente resultante de aplicar estos criterios.

3. CONCEPTOS DE SOLUCIÓN EFICIENTE.

Consideremos el problema de programación estocástica multiobjetivo:

$$\begin{array}{ll} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} & \tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \left(\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi}), \tilde{z}_2(\mathbf{x},\tilde{\xi}), \ldots, \tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right) \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{(PEM)}$$

Existen en la literatura distintos conceptos de solución eficiente de este problema multiobjetivo. Los conceptos que vamos a ver a continuación son aquellos en los que se transforma el problema estocástico multiobjetivo en uno multiobjetivo determinista equivalente, fijando algún criterio de transformación de los vistos en programación estocástica para transformar el objetivo estocástico en determinista. Todos los conceptos que analizamos transforman cada una de las funciones objetivo del problema en determinista mediante un mismo criterio de transformación, que se aplica por separado a cada una de las funciones objetivo del problema.

3.1. EFICIENCIA EN ESPERANZA.

La definición de solución eficiente en esperanza no es más que una consecuencia de uno de los métodos más utilizados para resolver el problema (PEM), que consiste en la obtención del determinista equivalente del problema estocástico tomando el valor esperado de cada una de las funciones objetivo del problema, es decir:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \left(E\{\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}, E\{\tilde{z}_2(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}, \ldots, E\{\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right) \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{(E)}$$

Una vez planteado este problema podemos definir el concepto de solución eficiente valor esperado como sigue:

Definición 1: Solución eficiente valor esperado.

Sea $\mathbf{x} \in D$. $\mathbf{x}$ es eficiente valor esperado del problema de programación estocástica multiobjetivo (PEM) si es solución eficiente en el sentido de Pareto del problema (E).■

Denotamos por $\mathcal{E}_E$ al conjunto de soluciones eficientes valor esperado.

A partir del concepto que acabamos de definir, dado un problema de programación estocástica multiobjetivo, podemos obtener soluciones eficientes del mismo sin más que considerar el problema planteado anteriormente. Los objetivos del problema determinista equivalente serán lineales si lo son las funciones objetivo estocásticas y cuadráticos y convexos en el caso de que las funciones estocásticas lo sean, tal y como se ha analizado previamente en este trabajo. Puesto que en los capítulos anteriores se ha analizado detenidamente la obtención del valor esperado de la función objetivo estocástica tanto en el caso lineal como en el caso cuadrático, no planteamos ahora los problemas multiobjetivo resultantes para estos casos. En cuanto a la bondad de este criterio para resolver problemas de programación estocástica multiobjetivo, mantenemos las mismas consideraciones que ya se hicieron en programación estocástica, esto es, consideramos que el valor esperado no es más que una medida de tendencia central de la variable aleatoria y, en este sentido, la elección de este criterio puede no ser adecuada en determinados casos, puesto que sólo se recogen determinados aspectos del objetivo estocástico.

Al igual que en programación estocástica, la obtención de soluciones eficientes valor esperado del problema (PEM) es posible siempre que se conozca el valor esperado de cada una de las funciones objetivo del problema, aún si se desconoce la distribución de probabilidad de alguna de las funciones objetivo estocásticas. Sin embargo, al igual que en programación estocástica, este criterio recoge sólo el valor esperado de las funciones objetivo estocásticas del problema y, por tanto, recoge sólo una de las características estocásticas de los objetivos aleatorios del problema.

3.2. EFICIENCIA MÍNIMA VARIANZA.

Al igual que hemos definido el concepto de solución eficiente en esperanza, cabe definir el concepto de solución eficiente mínima varianza sin más que plantear el problema de programación multiobjetivo de minimizar la varianza de cada una de las funciones del problema de programación estocástica multiobjetivo (PEM), es decir:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \left(\text{Var}\{\tilde{z}_1(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}, \text{Var}\{\tilde{z}_2(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}, \ldots, \text{Var}\{\tilde{z}_q(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}\right) \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad (\sigma^2)$$

Una vez planteado este problema, que será siempre de mínimo, independientemente de que el problema de partida sea de mínimo (como suponemos en este trabajo) o de máximo, podemos definir el conjunto de soluciones eficientes mínima varianza del problema de programación estocástica multiobjetivo (PEM) de la siguiente forma:

Definición 2. Solución eficiente mínima varianza.

$\mathbf{x} \in D$ es solución eficiente mínima varianza del problema de programación estocástica multiobjetivo (PEM) si es solución eficiente en el sentido de Pareto del problema (σ^2).■

Denotamos por $\mathcal{E}_{\sigma^2}$ al conjunto de soluciones eficientes del problema (σ^2).

Así pues, para la obtención de soluciones eficientes mínima varianza del problema (PEM) hemos de construir un problema de q funciones objetivo, formado por cada una de las varianzas del problema multiobjetivo estocástico de partida. Estas funciones son cuadráticas y convexas tanto en el caso de que los objetivos estocásticos del problema sean lineales como si éstos son cuadráticos. Al igual que con el criterio valor esperado, podremos obtener soluciones eficientes mínima varianza si conocemos la varianza de cada una de las funciones objetivo estocásticas del problema, independientemente de que se conozca o no la distribución de probabilidad de cada una de las funciones objetivo del problema estocástico multiobjetivo de partida. La elección del criterio mínima varianza supone buscar soluciones que acerquen el valor de cada una de las funciones objetivo estocásticas a su valor esperado y, en este sentido se puede considerar un criterio poco arriesgado.

3.3. EFICIENCIA VALOR ESPERADO DESVIACIÓN ESTÁNDAR.

Al igual que en el caso de optimización estocástica monobjetivo consideramos la transformación del problema estocástico en uno determinista biobjetivo, con objetivos el valor esperado y la desviación estándar de la función objetivo estocástica, planteamos ahora la posibilidad de establecer estos dos criterios de transformación de cada función objetivo estocástica y consideramos el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \operatorname*{Min}_{\mathbf{x}} & \left(E\{\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi})\},\ldots,E\{\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\},\sqrt{\operatorname{Var}\{\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}},\ldots,\sqrt{\operatorname{Var}\{\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} \right) \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad (\mathrm{E}\sigma)$$

Una vez planteado este problema podemos definir el concepto de solución eficiente valor esperado desviación estándar de la siguiente forma:

Definición 3.

$\mathbf{x} \in D$ es solución eficiente valor esperado desviación estándar del problema multiobjetivo estocástico (PEM) si es solución eficiente en el sentido de Pareto del problema (Eσ).■

Sea $\mathcal{E}_{\mathrm{E}\sigma}$ el conjunto de soluciones eficientes valor esperado desviación estándar del problema de programación estocástica multiobjetivo (PEM).

Este concepto ha sido ampliamente utilizado en la literatura para resolver problemas de programación estocástica. En algunos trabajos se ha considerado el criterio de eficiencia valor esperado varianza. Para ello se plantea un problema con $2q$ objetivos que recoge el valor esperado de cada función objetivo y la varianza de cada uno de ellos en lugar de su desviación estándar. En este trabajo hemos preferido definirlo mediante la desviación estándar, dado que de esta forma conseguimos establecer relaciones entre este concepto y otros conceptos de solución eficiente de problemas de programación estocástica multiobjetivo que se definen más adelante. En cualquier caso, es fácil demostrar que el conjunto de soluciones eficientes valor esperado desviación estándar coincide con el de soluciones eficientes valor esperado varianza.

Las funciones objetivo del problema que se genera para la obtención de soluciones eficientes valor esperado desviación estándar son funciones convexas, para problemas estocásticos multiobjetivo lineales, tal y como se puede deducir a partir de los resultados obtenidos previamente en este trabajo.

3.4. EFICIENCIA MÍNIMO RIESGO DE NIVELES $u_1, u_2, \ldots, u_q$.

Definido por Stancu-Minasian y Tigan (1984), este concepto de solución considera soluciones eficientes del problema de programación estocástica multiobjetivo (PEM) a las soluciones eficientes del problema multiobjetivo determinista que se obtiene al aplicar a cada una de las funciones objetivo del problema el criterio mínimo riesgo. Para aplicar este criterio hemos de fijar un nivel de aspiración mínimo a alcanzar para cada uno de los objetivos estocásticos, $u_1, u_2, \ldots, u_q$, $u_k \in \mathbf{R}$, $k = 1, 2, \ldots, q$. Una vez fijados estos valores, el problema mínimo riesgo, equivalente determinista del problema (PEM) consiste en maximizar la probabilidad de que cada uno de los objetivos estocásticos no supere el nivel de aspiración fijado, es decir:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Max}} & \left(P\left(\tilde{z}_1(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \leq u_1\right), \ldots, P\left(\tilde{z}_q(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \leq u_q\right) \right) \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad (\mathrm{MR}(\mathbf{u}))$$

Una vez planteado este problema, Stancu-Minasian y Tigan (1984) definen el concepto de solución vectorial mínimo riesgo de nivel **u** del problema (PEM) de la siguiente forma:

Definición 4. Solución eficiente mínimo riesgo de niveles $u_1, u_2, \ldots, u_q$.

$\mathbf{x} \in D$ es solución vectorial mínimo riesgo de nivel **u** si es solución eficiente en el sentido de Pareto del problema (MR(**u**)).

En adelante nos referiremos a estas soluciones como soluciones eficientes mínimo riesgo de niveles $u_1, u_2, \ldots, u_q$. Denotamos por $\mathcal{E}_{\mathrm{mr}}(\mathbf{u})$ al conjunto de soluciones eficientes del problema (MR(**u**)).

Obsérvese que el problema multiobjetivo determinista que se obtiene al aplicar este criterio, (MR(**u**)), depende, en general, del vector de niveles de aspiración fijado, **u**, de tal forma que, podemos afirmar que en general, dados **u**, **u'** $\in \mathbb{R}^q$, si $\mathbf{u} \neq \mathbf{u}'$ entonces los conjuntos de soluciones eficientes mínimo riesgo de niveles **u** y **u'** serán distintos: $\mathcal{E}_{\mathrm{mr}}(\mathbf{u}) \neq \mathcal{E}_{\mathrm{mr}}(\mathbf{u}')$.

Puesto que para aplicar este criterio de eficiencia, hemos de fijar un nivel de aspiración , $u_k \in \mathbb{R}$, para cada uno de los objetivos estocásticos del problema, es necesaria la intervención del decisor para generar soluciones eficientes mínimo riesgo. Además, dado que en el problema que se genera interviene la función de distribución de cada una de las funciones objetivo estocásticas, la aplicación de este criterio se centra en los casos que ya estudiamos en programación estocástica: problemas estocásticos multiobjetivo lineales con hipótesis de normalidad o de aleatoriedad simple. En ambos casos, los objetivos del problema determinista equivalente son fraccionales. Puesto que esto ha sido ampliamente analizado en el capítulo dos de este trabajo, no plantearemos los problemas que se generan. Por otro lado, en los casos en los que desconocemos la función de distribución de los objetivos estocásticos del problema, podemos aplicar la desigualdad de Cantelli a la función de distribución y obtener una cota inferior para la misma. Así, si sustituimos las funciones de distribución por estas cotas en el problema (MR(**u**)) obtenemos el problema:

$$\begin{array}{ll}\underset{\mathbf{x}}{\text{Max}} & \left(\dfrac{\left(u_1 - E\{\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2}{\text{Var}(\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi})) + \left(u_1 - E\{\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2}, \ldots, \dfrac{\left(u_q - E\{\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2}{\text{Var}(\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})) + \left(u_q - E\{\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2} \right) \\ \text{s.a} & E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \le u_k, \ k = 1,2,\ldots,q \\ & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad (\text{AMR}(\mathbf{u}))$$

Evidentemente, el conjunto de soluciones eficientes del problema (AMR($\mathbf{u}$)), que denotamos por $\mathcal{E}_{\text{AMR}}(\mathbf{u})$, no coincide, en general, con el conjunto de soluciones eficientes del problema (MR($\mathbf{u}$)), $\mathcal{E}_{\text{AMR}}(\mathbf{u}) \neq \mathcal{E}_{\text{MR}}(\mathbf{u})$, y sólo puede tomarse como aproximación del mismo.

3.5. EFICIENCIA CON PROBABILIDADES $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$.

Finalmente, consideramos un concepto de solución que se basa en un concepto definido por Goicoechea, Hansen y Duckstein (1982), el concepto de solución estocástica no dominada de nivel β.

Definición 5: Solución estocástica no dominada de nivel β.

Sea $z_k(\mathbf{x})$ un valor perteneciente al rango o soporte de la variable aleatoria $\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})$, $k = 1, 2, \ldots, q$.

Se dice que $\mathbf{x} \in D$ es solución estocástica no dominada de nivel $\beta \in (0, 1)$ si:

(i) $P\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \le z_k(\mathbf{x})\} = \beta$ para todo $k \in \{1,2,\ldots,q\}$

(ii) no existe ningún vector $\mathbf{y} \in D$ tal que:

$$P\left(\tilde{z}_k(\mathbf{y},\tilde{\xi}) \leq z_k(\mathbf{y})\right) = \beta \text{ para todo } k = 1,2,\ldots,q$$
$$\text{existe } l \in \{1,2,\ldots,q\} \text{ tal que } z_l(\mathbf{y}) < z_l(\mathbf{x})$$
$$z_k(\mathbf{y}) \leq z_k(\mathbf{x}), \text{ para todo } k \in \{1,2,\ldots,q\},\ k \neq l$$

■

A partir de esta definición, dado el problema de programación estocástica multiobjetivo (PEM), si aplicamos el criterio de Kataoka a cada una de las funciones objetivo estocásticas del problema para una probabilidad β, el problema que se genera es:

$$\begin{array}{ll} \operatorname*{Min}_{(\mathbf{x}^t,\mathbf{u}^t)^t} & \mathbf{u} = (u_1,\ldots,u_q) \\ \text{s.a} & P\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq u_k\} = \beta,\ k = 1,2,..,q \\ & \mathbf{x} \in D \end{array}$$

y tenemos que el conjunto de soluciones eficientes de este problema es el conjunto de soluciones no dominadas de nivel β que se ha definido anteriormente, puesto que para cada $k \in \{1, 2, ..., q\}$ la variable u_k será una función $z_k(\mathbf{x})$ que se obtiene a partir de la igualdad $P\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq u_k\} = \beta$. Así, tenemos que el conjunto de soluciones no dominadas de nivel β se obtiene a partir de aplicar el criterio de Kataoka a cada una de las funciones objetivo del problema multiobjetivo estocástico, fijando el mismo nivel de probabilidad para todas las funciones estocásticas.

A partir de aquí, cabe la posibilidad de generalizar este concepto considerando distintos niveles de probabilidad para las funciones objetivo del problema, sin más que plantearnos el problema:

$$\begin{array}{ll} \operatorname*{Min}_{(\mathbf{x}^t,\mathbf{u}^t)^t} & \mathbf{u} = (u_1,\ldots,u_q)^t \\ \text{s.a} & P\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq u_k\} = \beta_k,\ k = 1,2,..,q \\ & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad (\mathrm{K}(\beta))$$

Una vez planteado el problema, definimos el concepto de solución eficiente con probabilidades $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ de la siguiente forma:

Definición 6. Solución eficiente con probabilidades $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$.

Sea $\mathbf{x} \in D$. Se dice que $\mathbf{x}$ es solución eficiente con probabilidades $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ si existe un $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^q$ tal que $(\mathbf{x}^t, \mathbf{u}^t)^t$ es solución eficiente del problema (K(β)).■

Denotamos por $\mathcal{E}_k(\beta) \subseteq \mathbb{R}^n$ al conjunto de soluciones eficientes con probabilidades $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$.

Obsérvese que el concepto de solución eficiente con probabilidades $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ se define para los vectores $\mathbf{x}$, aunque las soluciones del problema (K(β)) sean vectores $(\mathbf{x}^t, \mathbf{u}^t)^t \in \mathbb{R}^{n+q}$.

Al igual que en el caso mínimo riesgo, este concepto de eficiencia va asociado a unos niveles de probabilidad fijados a priori, con lo cual, el problema multiobjetivo determinista mediante el que se obtienen soluciones eficientes con probabilidades $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$, (K(β)), depende, en general, del vector de probabilidades fijado, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q)'$, de tal forma que, podemos afirmar que en general, dados β, β' $\in \mathbb{R}^q$, si $\beta \neq \beta'$ entonces el conjunto de soluciones eficientes para β es distinto del que se obtiene para β': $\mathcal{E}_k(\beta) \neq \mathcal{E}_k(\beta')$.

De nuevo, para poder aplicar este criterio de eficiencia, hemos de fijar una probabilidad $\beta_k \in (0, 1)$, para cada uno de los objetivos estocásticos del problema. Esto hace necesaria la intervención del decisor para generar estas soluciones eficientes. Además, en el problema interviene la función de distribución de cada una de las funciones objetivo estocásticas. Consideramos ahora los mismos casos analizados previamente en este trabajo: funciones objetivo lineales bajo la hipótesis de normalidad o bajo la hipótesis de aleatoriedad simple. En ambos casos es posible obtener soluciones eficientes del problema de programación estocástica multiobjetivo y los problemas resultantes son, bajo determinadas hipótesis, problemas convexos, tal y como veremos más adelante en el análisis de las relaciones entre los conceptos de soluciones eficientes definidos.

Por otro lado, en los casos en los que desconocemos la función de distribución de los objetivos estocásticos del problema, podemos aplicar la desigualdad de Cantelli a la función de distribución y obtener una cota inferior para la misma. Así, si sustituimos las funciones de distribución por estas cotas en el problema (K(β)) obtenemos el problema:

$$\begin{aligned} &\underset{(\mathbf{x}^t,\mathbf{u}^t)^t}{\text{Min}} \ \mathbf{u} = \left(u_1, u_2, \ldots, u_q\right) \\ \text{s.a} \quad & E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} + \sqrt{\frac{\beta_k}{1-\beta_k}}\sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} \le u_k, \quad k = 1,2,\ldots,q \qquad (\text{AK}(\beta)) \\ & \mathbf{x} \in D \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Al igual que en el caso mínimo riesgo, el conjunto de soluciones eficientes del problema (AK(β)), que denotamos por $\mathcal{E}_{AK}(\beta)$ será distinto del conjunto de soluciones eficientes del problema (K(β)), $\mathcal{E}_{AK}(\beta) \neq \mathcal{E}_{K}(\beta)$, pero, podemos tomar este conjunto como aproximación.

4. RELACIONES ENTRE LOS CONCEPTOS DE SOLUCIÓN EFICIENTE DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN ESTOCÁSTICA MULTIOBJETIVO.

Una vez vistos los distintos conceptos de solución eficiente de un problema de programación estocástica multiobjetivo, analizamos en este apartado las relaciones existentes entre estos conceptos de solución.

Si bien, en principio, se podría pensar que los conceptos definidos previamente no mantienen conexión alguna, veremos a continuación cómo estos conceptos están estrechamente relacionados, al igual que ocurre en el caso de resolución de problemas de programación estocástica con una función objetivo. En realidad, lo que analizamos a continuación no es más que la generalización al caso de q funciones objetivo del caso $q = 1$, estudiado anteriormente.

Comenzaremos analizando la relación entre las soluciones eficientes mínimo valor esperado, las soluciones eficientes mínima varianza y las soluciones eficientes valor esperado desviación estándar, correspondientes al problema de $2q$ objetivos que recoge valor esperado y desviación estándar de los objetivos. Posteriormente, se analizará la relación existente entre solución eficiente mínimo riesgo de niveles $u_1,\ldots,u_q$ y solución eficiente con probabilidades $\beta_1,\ldots,\beta_q$. Finalmente, se analiza la relación entre las soluciones eficientes valor esperado desviación estándar y las soluciones eficientes de probabilidades $\beta_1,\ldots,\beta_q$.

4.1. RELACIONES ENTRE LAS SOLUCIONES EFICIENTES VALOR ESPERADO, LAS SOLUCIONES EFICIENTES MÍNIMA VARIANZA Y LAS SOLUCIONES EFICIENTES VALOR ESPERADO DESVIACIÓN ESTÁNDAR.

En este apartado se analiza la relación existente entre las soluciones valor esperado, las soluciones eficientes mínima varianza y las soluciones eficientes valor esperado desviación estándar. Consideramos, por tanto, los problemas:

$$\begin{aligned} &\operatorname*{Min}_{\mathbf{x}} \left(E\{\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi})\},\ldots,E\{\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \right) \\ &\text{s. a} \quad \mathbf{x} \in D \end{aligned} \qquad \text{(E)}$$

$$\begin{aligned} &\operatorname*{Min}_{\mathbf{x}} \left(\operatorname{Var}\{\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi})\},\ldots,\operatorname{Var}\{\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \right) \\ &\text{s. a} \quad \mathbf{x} \in D \end{aligned} \qquad (\sigma^2)$$

y

$$\begin{aligned} &\operatorname*{Min}_{\mathbf{x}} \left(E\{\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi})\},\ldots,E\{\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\},\sqrt{\operatorname{Var}\{\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}},\ldots,\sqrt{\operatorname{Var}\{\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} \right) \\ &\text{s. a} \quad \mathbf{x} \in D \end{aligned} \qquad (\text{E}\sigma)$$

Como puede observarse, el problema (Eσ) es un problema con $2q$ objetivos que recoge los objetivos de los problemas (E) y la raíz cuadrada de cada uno de los objetivos del problema (σ^2).

Sean $\mathcal{E}_{\mathrm{E}}$ el conjunto de soluciones eficientes del problema (E), $\mathcal{E}_{\sigma^2}$ el conjunto de soluciones eficientes del problema (σ^2) y $\mathcal{E}^d_{\mathrm{E}\sigma}$ el conjunto de soluciones débilmente eficientes del problema (Eσ). Mediante el siguiente teorema establecemos la relación existente entre estos tres conjuntos.

Teorema 1.

Consideremos los problemas:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} \left(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_q(\mathbf{x}) \right) & \\ \text{s.a} \qquad \mathbf{x} \in D & \end{array} \tag{1a}$$

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} \left(g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_q(\mathbf{x}) \right) & \\ \text{s.a} \qquad \mathbf{x} \in D & \end{array} \tag{1b}$$

y

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} \left(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_q(\mathbf{x}), \sqrt{g_1(\mathbf{x})}, \ldots, \sqrt{g_q(\mathbf{x})} \right) & \\ \text{s.a} \qquad \mathbf{x} \in D & \end{array} \tag{1c}$$

donde $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ para todo $k \in \{1, 2, ..., q\}$.

Sean $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ y $\mathcal{E}_3$ los conjuntos de puntos eficientes de los problemas (1a) y (1b) y (1c), respectivamente y sean $\mathcal{E}_1^{\mathrm{d}}$, $\mathcal{E}_2^{\mathrm{d}}$ y $\mathcal{E}_3^{\mathrm{d}}$ los conjuntos de soluciones débilmente eficientes de los problemas (1a) y (1b) y (1c), respectivamente. Entonces, se verifica:

(i) $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{E}_3$.

(ii) $\mathcal{E}_3 \subset \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$

(iii) $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{E}_3^{\mathrm{d}}$

(iv) $\mathcal{E}_1^{\mathrm{d}} \cup \mathcal{E}_2^{\mathrm{d}} \subset \mathcal{E}_3^{\mathrm{d}}$. ∎

Demostración.

(i) Sea $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$. Veamos que $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_3$ por reducción al absurdo.

Supongamos que $\mathbf{x} \notin \mathcal{E}_3$. Entonces existe un $\mathbf{x}' \in D$ tal que:

$$f_k(\mathbf{x}') \leq f_k(\mathbf{x}) \text{ y } \sqrt{g_k(\mathbf{x}')} \leq \sqrt{g_k(\mathbf{x})} \text{ para todo } k \in \{1, 2, ..., q\}$$

existiendo un $s \in \{1, 2, ..., q\}$ para el cual la desigualdad es estricta:

$$f_s(\mathbf{x}') < f_s(\mathbf{x}) \text{ o bien } \sqrt{g_s(\mathbf{x}')} < \sqrt{g_s(\mathbf{x})}.$$

Entonces, puesto que $\sqrt{g_s(\mathbf{x}')} < \sqrt{g_s(\mathbf{x})}$ implica $g_s(\mathbf{x}') < g_s(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \notin \mathcal{E}_1$ o bien $\mathbf{x} \notin \mathcal{E}_2$, en contra de que $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$.■

(ii) Sea $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_3$. Entonces no existe ningún vector $\mathbf{x}' \in D$ tal que:

$$f_k(\mathbf{x}') \leq f_k(\mathbf{x}) \text{ y } \sqrt{g_k(\mathbf{x}')} \leq \sqrt{g_k(\mathbf{x})} \text{ para todo } k \in \{1, 2, ..., q\}$$

verificando además que:

$$f_s(\mathbf{x}') < f_s(\mathbf{x}) \text{ o bien } \sqrt{g_s(\mathbf{x}')} < \sqrt{g_s(\mathbf{x})} \text{ para algún } s \in \{1, 2, ..., q\}.$$

Entonces $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_1$ o bien $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_2$. Luego $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$.■

(iii) Sea $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$. Veamos que $\mathcal{E}_3^{\mathrm{d}}$ por reducción al absurdo:

Supongamos que $\mathbf{x} \notin \mathcal{E}_3^{\mathrm{d}}$. Entonces existe un vector $\mathbf{x}' \in D$ que domina débilmente a $\mathbf{x}$ y, por tanto, verifica que:

$$f_k(\mathbf{x}') < f_k(\mathbf{x}) \text{ y } \sqrt{g_k(\mathbf{x}')} < \sqrt{g_k(\mathbf{x})} \text{ para todo } k \in \{1, 2, ..., q\},$$

por lo cual, $\mathbf{x} \notin \mathcal{E}_1$ y $\mathbf{x} \notin \mathcal{E}_2$, en contra de que $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$. ■

(iv) Sea $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_1^{\mathrm{d}} \cup \mathcal{E}_2^{\mathrm{d}}$. Veamos que $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_3^{\mathrm{d}}$, por reducción al absurdo:

Supongamos que $\mathbf{x} \notin \mathcal{E}_3^{\mathrm{d}}$. Entonces existe un vector $\mathbf{x}' \in D$ que la domina débilmente y, por tanto, verifica que:

$$f_k(\mathbf{x}') < f_k(\mathbf{x}) \ \text{ y } \sqrt{g_k(\mathbf{x}')} < \sqrt{g_k(\mathbf{x})} \text{ para todo } k \in \{1, 2, ..., q\},$$

por lo cual $\mathbf{x} \notin \mathcal{E}_1^{\mathrm{d}}$ y $\mathbf{x} \notin \mathcal{E}_2^{\mathrm{d}}$, en contra de que $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_1^{\mathrm{d}} \cup \mathcal{E}_2^{\mathrm{d}}$. ■

Es claro, a partir de (iv), que se verifica también que $\mathcal{E}_1^{\mathrm{d}} \cap \mathcal{E}_2^{\mathrm{d}} \subset \mathcal{E}_3^{\mathrm{d}}$. Además, como $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_1^{\mathrm{d}}$ y $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{E}_2^{\mathrm{d}}$ entonces $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{E}_1^{\mathrm{d}} \cup \mathcal{E}_2^{\mathrm{d}}$, por lo que (iii) se puede deducir también de (iv).

A partir de este teorema, sin más que hacer $f_k(\mathbf{x}) = E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}$ y $g_k(\mathbf{x}) = \mathrm{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}$ para todo $k \in \{1, 2, ..., q\}$, tenemos que:

(i) $\mathcal{E}_{\mathrm{E}} \cap \mathcal{E}_{\sigma^2} \subset \mathcal{E}_{\mathrm{E}\sigma}$: Toda solución que sea a la vez eficiente valor esperado y eficiente mínima varianza, es solución eficiente valor esperado desviación estándar.

(ii) $\mathcal{E}_{\mathrm{E}\sigma} \subset \mathcal{E}_{\mathrm{E}} \cup \mathcal{E}_{\sigma^2}$: Toda solución eficiente valor esperado desviación estándar es solución eficiente valor esperado o solución eficiente mínima desviación varianza.

(iii) $\mathcal{E}_{\mathrm{E}} \cup \mathcal{E}_{\sigma^2} \subset \mathcal{E}_{\mathrm{E}\sigma}^{\mathrm{d}}$: Toda solución valor esperado y toda solución eficiente mínima varianza es solución débilmente eficiente valor esperado desviación estándar.

(iv) $\mathcal{E}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{d}} \cup \mathcal{E}_{\sigma^2}^{\mathrm{d}} \subset \mathcal{E}_{\mathrm{E}\sigma}^{\mathrm{d}}$: El conjunto de soluciones débilmente eficientes valor esperado desviación estándar contiene a la unión del conjunto de soluciones débilmente eficientes valor esperado y del conjunto de soluciones débilmente eficientes mínima varianza.

4.2. RELACIÓN ENTRE LAS SOLUCIONES EFICIENTES MÍNIMO RIESGO DE NIVELES $u_1,\dots,u_q$ Y LAS SOLUCIONES EFICIENTES CON PROBABILIDADES $\beta_1,\dots,\beta_q$.

Abordamos ahora el estudio de las relaciones entre las soluciones eficientes mínimo riesgo de niveles $u_1,\dots,u_q$ y las soluciones eficientes con probabilidades $\beta_1,\dots,\beta_q$ de un problema de programación estocástica multiobjetivo.

Dado el problema (PEM), consideremos los problemas:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Max}} & \left(P\{\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \le u_1\},\dots,P\{\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \le u_q\}\right) \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad (\text{MR}(\mathbf{u}))$$

$$\begin{array}{l} \underset{(\mathbf{x}^t,\mathbf{u}^t)}{\text{Min}} \ \mathbf{u} = (u_1,\dots,u_q) \\ \text{s.a} \ P\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \le u_k\} = \beta_k \\ \qquad \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad (\text{K}(\beta))$$

correspondientes a la obtención de soluciones eficientes mínimo riesgo de niveles $u_1,\dots,u_q$ y a las soluciones eficientes con probabilidades $\beta_1,\dots,\beta_q$, respectivamente, para el problema (PEM). A continuación analizamos las relaciones entre los conjuntos de puntos eficientes de estos dos problemas.

Suponemos que los conjuntos de oportunidades de ambos problemas, $D \subset \mathbb{R}^n$ y $\left\{(\mathbf{x}^t,\ \mathbf{u}^t)^t \in D\text{x}\mathbb{R}^q \ / \ P\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \le u_k\} = \beta_k\right\}$, son cerrados, acotados y no vacíos, por lo que ambos problemas poseen soluciones eficientes.

Además suponemos que para todo $k \in \{1, 2, \dots, q\}$ y para todo $\mathbf{x} \in D$ la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ es continua y estrictamente creciente. Estas hipótesis implican, por las propiedades de la función de distribución, que para cualquier probabilidad, β_k, que se fije para la variable aleatoria $\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi})$, existe un único número real u_k, tal que $P\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \leq u_k\} = \beta_k$.

Sea $\mathcal{E}_{mr}(\mathbf{u})$ el conjunto de soluciones eficientes del problema (MR($\mathbf{u}$)) y sea $\mathcal{E}_k(\beta)$ el conjunto de soluciones eficientes del problema (K(β)). El siguiente teorema nos relaciona estos dos conjuntos de soluciones eficientes.

Teorema 2.

Supongamos que la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi})$ es continua y estrictamente creciente. Entonces $\mathbf{x}$ es solución eficiente del problema (MR($\mathbf{u}$)) si y sólo si $(\mathbf{x}^t, \mathbf{u}^t)^t$ es solución eficiente del problema (K(β)), con $\mathbf{u}$ y β tales que:

$$P\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \leq u_k\} = \beta_k \text{ para todo } k \in \{1, 2, ..., q\}. \blacksquare$$

Demostración.

Demostramos el teorema por reducción al absurdo. Obsérvese que bajo las hipótesis establecidas cualquier solución factible de uno de ellos lo es también del otro.

(⇒) Si $\mathbf{x}$ es solución eficiente del problema (MR($\mathbf{u}$)), entonces $(\mathbf{x}^t, \mathbf{u}^t)^t$ es solución eficiente del problema (K(β)).

Supongamos que $(\mathbf{x}^t, \mathbf{u}^t)^t$ no es eficiente del problema (K(β)). Entonces existe un vector factible $(\mathbf{x}'^t, \mathbf{u}'^t)^t$ que domina a $(\mathbf{x}^t, \mathbf{u}^t)^t$, es decir:

- $\mathbf{x}' \in D$

- se verifica para todo $k \in \{1,2,\ldots,q\}$ que:

$$P\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}', \tilde{\xi}) \leq u_k'\} = \beta_k = P\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \leq u_k\}$$

$\bullet u_k' \leq u_k$, $k = 1, 2, ..., q$ y $u_s' < u_s$ para algún $s \in \{1, 2, ..., q\}$.

Por las propiedades de la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi})$, tenemos que si $u_k' \leq u_k$ y $u_s' < u_s$:

$$P\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}', \tilde{\xi}) \leq u_k'\} \leq P\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}', \tilde{\xi}) \leq u_k\}$$
$$P\{\tilde{z}_s(\mathbf{x}', \tilde{\xi}) \leq u_s'\} < P\{\tilde{z}_s(\mathbf{x}', \tilde{\xi}) \leq u_s\}$$

Luego:

$$P\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \leq u_k\} = P\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}', \tilde{\xi}) \leq u_k'\} \leq P\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}', \tilde{\xi}) \leq u_k\}$$
$$P\{\tilde{z}_s(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \leq u_s\} = P\{\tilde{z}_s(\mathbf{x}', \tilde{\xi}) \leq u_s'\} < P\{\tilde{z}_s(\mathbf{x}', \tilde{\xi}) \leq u_s\}$$

Con lo cual, **x** no es solución eficiente del problema multiobjetivo (MR(**u**)) y esto está en contradicción con la hipótesis.

($\Leftarrow$) Si $(\mathbf{x}', \mathbf{u}')^t$ es solución eficiente del problema (K(β)) entonces **x** es solución eficiente del problema (MR(**u**)).

Supongamos que **x** no es eficiente del problema (MR(**u**)). Entonces existe un vector factible **x**' que domina a **x**, es decir: $\mathbf{x}' \in D$ y se verifica que:

$$\beta_k = P\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \leq u_k\} \leq P\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}', \tilde{\xi}) \leq u_k\} \quad k = 1, 2, .., q$$
$$\beta_s = P\{\tilde{z}_s(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \leq u_s\} < P\{\tilde{z}_s(\mathbf{x}', \tilde{\xi}) \leq u_s\} \text{ para algún } s \in \{1, 2, .., q\}$$

Por las propiedades de la función de distribución tenemos que existen $u_1', \ldots u_k'$, con $u_k' \leq u_k$, para todo $k \in \{1, 2, ..., q\}$ y existe al menos un $s \in \{1, 2, ..., q\}$, para el que la desigualdad es estricta $u_s' < u_s$, con:

$$\beta_k = P\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \leq u_k\} = P\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}', \tilde{\xi}) \leq u_k'\} \text{ para todo } k \in \{1, 2, .., q\}$$
$$\beta_s = P\{\tilde{z}_s(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \leq u_s\} = P\{\tilde{z}_s(\mathbf{x}', \tilde{\xi}) \leq u_s'\} \quad s \in \{1, 2, .., q\}$$

lo cual está en contradicción con la hipótesis de que $(\mathbf{x}^t, \mathbf{u}^t)^t$ es solución eficiente del problema (K(β)).■

Una vez vista esta relación entre los conjuntos de puntos eficientes de ambos problemas, podemos enunciar el siguiente corolario que relaciona la unión de los conjuntos $\mathcal{E}_{mr}(\mathbf{u})$ y $\mathcal{E}_k(\beta)$, es decir, el conjunto de soluciones eficientes del problema (MR(**u**)) y el conjunto de soluciones eficientes del problema (K(β)).

Previamente, hemos de recordar que el conjunto de soluciones eficientes $\mathcal{E}_k(\beta)$ del problema de programación estocástica multiobjetivo definido anteriormente, es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}_k(\beta) \subset \mathbb{R}^n$, tal y como puede comprobarse en la definición 6 de este capítulo.

Corolario 1.

La unión en $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^q$ de las soluciones eficientes del problema (MR(**u**)) coincide con la unión en $\beta \in B$ de las soluciones eficientes de nivel β:

$$\bigcup_{\mathbf{u}\in\mathbf{R}^q} \mathcal{E}_{mr}(\mathbf{u}) = \bigcup_{\beta\in B} \mathcal{E}_k(\beta)$$

con $B = \{\beta \in \mathbb{R}^q \,/\, \beta_k \in (0,1),\ k = 1,2,\ldots,q\}$.■

La demostración de este corolario es obvia a partir de los resultados anteriores.

A partir de estos resultados tenemos, por tanto, que las uniones de los conjuntos de puntos eficientes de ambos problemas coinciden. Además, si $\mathbf{x} \in D$ es solución eficiente del problema (K(β)), para unas probabilidades fijas, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_q)^t$, a partir del teorema 2, sabemos que es solución eficiente mínimo riesgo de niveles $u_1, \ldots, u_q$, manteniendo los niveles de aspiración y las probabilidades la relación que aparece en el teorema, y viceversa. Este resultado nos permite realizar el análisis de estas soluciones eficientes mediante uno de los dos conceptos y, a partir de la reciprocidad obtenida en el teorema 2, obtener el nivel de aspiración o la probabilidad para el que es eficiente según el otro.

Además, obsérvese que este teorema es paralelo al que relaciona en el caso $q = 1$ los óptimos de los problemas de Kataoka y mínimo riesgo, analizado anteriormente en este trabajo.

Este teorema no nos permite, sin embargo, mantener esa relación entre los conjuntos de puntos eficientes de los problemas multiobjetivo correspondientes a los casos en los que se desconoce la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})$. En estos casos, hemos propuesto en este trabajo sustituir la función de distribución de cada una de las funciones objetivo del problema por la cota inferior que se obtiene de ésta mediante la aplicación de la desigualdad de Cantelli. Esto nos lleva a la necesidad de analizar la relación entre los problemas:

$$\begin{array}{lll}
\underset{\mathbf{x}}{\text{Max}} & \left(\dfrac{\left(u_1 - E\{\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2}{\text{Var}\left(\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right) + \left(u_1 - E\{\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2}, \ldots, \dfrac{\left(u_q - E\{\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2}{\text{Var}\left(\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right) + \left(u_q - E\{\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2} \right) & \\
\text{s.a} & E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \le u_k, \quad k = 1,2,\ldots,q & \text{AMR}(\mathbf{u})) \\
 & \mathbf{x} \in D &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 & \underset{(\mathbf{x}',\mathbf{u}')}{\text{Min}} \; \mathbf{u} = \left(u_1, u_2, \ldots, u_q\right) & \\
\text{s.a} & \sqrt{\dfrac{\beta_k}{1-\beta_k}} \sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \le u_k, \quad k = 1,2,\ldots,q & (\text{AK}(\beta)) \\
 & \mathbf{x} \in D &
\end{array}$$

correspondientes a aplicar la desigualdad de Cantelli a las funciones de distribución de los objetivos estocásticos de los problemas (MR(**u**)) y (K(β)), planteados anteriormente.

Suponemos que el conjunto D es cerrado, acotado y no vacío, por lo que ambos problemas poseen soluciones eficientes.

El siguiente teorema muestra la relación existente entre las soluciones eficientes de los problemas (AMR(**u**)) y (AK(β)).

Teorema 3.

x es solución eficiente del problema (AMR(**u**)) si y sólo si $(\mathbf{x}^t, \mathbf{u}^t)^t$ es solución eficiente del problema (AK(β)) con **u** y β tales que:

$$u_k = \sqrt{\frac{\beta_k}{1-\beta_k}}\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \tag{2}$$

o, de manera equivalente:

$$\beta_k = \frac{\left(u_k - E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2}{\mathrm{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} + \left(u_k - E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2} \tag{3}$$

para $k = 1, 2, ..., q$.■

Demostración.

Demostramos el teorema por reducción al absurdo.

(⇒) Sea **x** solución eficiente del problema (AMR(**u**)), $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_{\mathrm{AMR}}(\mathbf{u})$. Supongamos que $(\mathbf{x}^t, \mathbf{u}^t)^t$ no es eficiente del problema (AK(β)), con $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_q)^t$ y β_k dado por (3) para cada $k = 1, 2, ..., q$.

En ese caso existe $(\mathbf{x}'^t, \mathbf{u}'^t)^t$, tal que:

a) $\mathbf{x}' \in D$

b) $\sqrt{\dfrac{\beta_k}{1-\beta_k}}\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}',\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}',\tilde{\xi})\} \le u_k'$ para todo $k \in \{1,2,\ldots,q\}$,

con $u_k' \le u_k$ para cada $k \in \{1,2,\ldots,q\}$ y $u_s' < u_s$ para algún $s \in \{1,2,\ldots,q\}$.

Luego:

$$\sqrt{\frac{\beta_k}{1-\beta_k}}\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}',\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}',\tilde{\xi})\} \le u_k \quad \text{para todo } k = 1,2,\ldots,q \qquad (4)$$

$$\sqrt{\frac{\beta_s}{1-\beta_s}}\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{z}_s(\mathbf{x}',\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{z}_s(\mathbf{x}',\tilde{\xi})\} < u_s \text{ para algún } s \in \{1, 2, \ldots, q\} \quad (5)$$

De (4) se obtiene que $E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}',\tilde{\xi})\} \le u_k$ para todo para $k \in \{1, 2, \ldots, q\}$.

Efectuando operaciones en (4) y (5) se obtiene que:

$$\beta_k \le \frac{\left(u_k - E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}',\tilde{\xi})\}\right)^2}{\mathrm{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}',\tilde{\xi})\} + \left(u_k - E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}',\tilde{\xi})\}\right)^2} \qquad k = 1,2,\ldots,q$$

$$\beta_s < \frac{\left(u_s - E\{\tilde{z}_s(\mathbf{x}',\tilde{\xi})\}\right)^2}{\mathrm{Var}\{\tilde{z}_s(\mathbf{x}',\tilde{\xi})\} + \left(u_s - E\{\tilde{z}_s(\mathbf{x}',\tilde{\xi})\}\right)^2} \qquad s \in \{1, 2, \ldots, q\}$$

y teniendo en cuenta por (3) a qué es igual β_k y β_s, tenemos que $\mathbf{x}$ no es solución eficiente del problema (AMR($\mathbf{u}$)), en contra de la hipótesis.

($\Leftarrow$) Sea $(\mathbf{x}^t, \mathbf{u}^t)^t$ solución eficiente del problema (AK(β)), para β dado, siendo u_k dado por (2), para cada $k = 1, 2, \ldots, q$.

Supongamos que $\mathbf{x}$ no es solución eficiente del problema (AMR($\mathbf{u}$)). Entonces existe un vector $\mathbf{x}' \in D$, verificando que $E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}', \tilde{\xi})\} \leq u_k$, para cada $k = 1, 2, ..., q$, que domina a $\mathbf{x}$, de manera que para todo $k \in \{1, 2, ..., q\}$ se verifica:

$$\frac{\left(u_k - E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}\right)^2}{\operatorname{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} + \left(u_k - E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}\right)^2} \leq \frac{\left(u_k - E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}', \tilde{\xi})\}\right)^2}{\operatorname{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}', \tilde{\xi})\} + \left(u_k - E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}', \tilde{\xi})\}\right)^2} \qquad (6)$$

y existe un $s \in \{1, 2, ..., q\}$ para el que la desigualdad es estricta:

$$\frac{\left(u_s - E\{\tilde{z}_s(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}\right)^2}{\operatorname{Var}\{\tilde{z}_s(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} + \left(u_s - E\{\tilde{z}_s(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}\right)^2} < \frac{\left(u_s - E\{\tilde{z}_s(\mathbf{x}', \tilde{\xi})\}\right)^2}{\operatorname{Var}\{\tilde{z}_s(\mathbf{x}', \tilde{\xi})\} + \left(u_s - E\{\tilde{z}_s(\mathbf{x}', \tilde{\xi})\}\right)^2} \qquad (7)$$

Pero, puesto que:

$$\beta_k = \frac{\left(u_k - E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}\right)^2}{\operatorname{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} + \left(u_k - E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}\right)^2}$$

es equivalente a:

$$u_k = \sqrt{\frac{\beta_k}{1-\beta_k}} \sqrt{\operatorname{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}$$

para todo $k \in \{1, 2, ..., q\}$, a partir de (6) tenemos que:

$$\beta_k \leq \frac{\left(u_k - E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}', \tilde{\xi})\}\right)^2}{\operatorname{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}', \tilde{\xi})\} + \left(u_k - E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}', \tilde{\xi})\}\right)^2} \quad k = 1, 2, ..., q$$

lo que implica que:

$$u_k \geq \sqrt{\frac{\beta_k}{1-\beta_k}}\sqrt{\operatorname{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}',\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}',\tilde{\xi})\} \quad k = 1,2,\ldots,q$$

y de (7) tenemos que:

$$\beta_s < \frac{\left(u_s - E\{\tilde{z}_s(\mathbf{x}',\tilde{\xi})\}\right)^2}{\operatorname{Var}\{\tilde{z}_s(\mathbf{x}',\tilde{\xi})\} + \left(u_s - E\{\tilde{z}_s(\mathbf{x}',\tilde{\xi})\}\right)^2} \quad s \in \{1, 2, ..., q\}$$

con lo cual tenemos que:

$$u_s > \sqrt{\frac{\beta_s}{1-\beta_s}}\sqrt{\operatorname{Var}\{\tilde{z}_s(\mathbf{x}',\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{z}_s(\mathbf{x}',\tilde{\xi})\} \text{ para algún } s \in \{1, 2, ..., q\}.$$

en contra de que $(\mathbf{x}^t, \mathbf{u}^t)^t$ es solución eficiente del problema (AK(β)).■

Este teorema nos asegura la equivalencia entre soluciones eficientes cuando se "sustituyen" la función de distribución de cada una de las funciones objetivo estocásticas por las cotas inferiores que se obtienen al aplicar a éstas la desigualdad de Cantelli.

Una vez analizada esta relación nos centramos brevemente en el problema (AK(β)):

$$\begin{aligned} &\operatorname*{Min}_{(\mathbf{x}^t,\mathbf{u}^t)} \ \mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_q) \\ \text{s.a} \quad &\sqrt{\frac{\beta_k}{1-\beta_k}}\sqrt{\operatorname{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \leq u_k, \quad k = 1,2,\ldots,q \qquad (\text{AK}(\beta)) \\ &\mathbf{x} \in D \end{aligned}$$

Como puede observarse, las soluciones a este problema son vectores $(\mathbf{x}^t, \mathbf{u}^t)^t \in \mathbb{R}^{n+q}$. El siguiente teorema nos permite establecer una relación entre las soluciones eficientes a este problema y las soluciones eficientes del siguiente problema multiobjetivo:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \left(\sqrt{\frac{\beta_1}{1-\beta_1}} \sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}, \ldots, \sqrt{\frac{\beta_q}{1-\beta_q}} \sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi}_q)\} \right) \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad (\text{AK1}(\beta))$$

en el que se reduce el número de variables de decisión del problema, con las ventajas que esto conlleva.

Teorema 4.

Consideremos los problemas:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_q(\mathbf{x})\right) \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad (8)$$

$$\begin{array}{ll} \underset{(\mathbf{x}^t, u^t)}{\text{Min}} & \mathbf{u} = \left(u_1, u_2, \ldots, u_q\right) \\ \text{s.a} & f_k(\mathbf{x}) \le u_k, k = 1,2,\ldots,q \\ & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad (9)$$

donde f_k: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que:

•$D \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado y acotado.

•El conjunto $\left\{(\mathbf{x}^t, \mathbf{u}^t) \in D\text{x}\mathbb{R}^q \,/\, f_k(\mathbf{x}) \le u_k\right\}$ es también cerrado y acotado.

Entonces, $\mathbf{x}$ es solución eficiente de (8) si y sólo si ($\mathbf{x}^t$, $\mathbf{u}^t = \mathbf{f}(\mathbf{x})^t$) es solución eficiente de (9).■

Demostración.

La demostración la realizaremos por reducción al absurdo. Supondremos en ambos casos que existe una solución que domina a la solución eficiente y llegaremos a una contradicción con la hipótesis de partida.

$\Rightarrow$) Si $\mathbf{x}$ es solución eficiente de (8) entonces $(\mathbf{x}^t, \mathbf{u}^t = \mathbf{f}(\mathbf{x})^t)^t$ es solución eficiente de (9).

Supongamos que $(\mathbf{x}^t, \mathbf{u}^t = \mathbf{f}(\mathbf{x})^t)^t$ no es solución eficiente de (9). Puesto que el problema (9) posee soluciones eficientes, existirá al menos una solución $(\mathbf{x}'^t, \mathbf{u}'^t)^t$ que la domina, luego:

$$u_k' \leq u_k, \;\; k = 1,2,\ldots,q \;\; \text{y} \;\; u_s' < u_s \text{ para } s \in \{1, 2, \ldots, q\}.$$

siendo $\mathbf{x}' \in D$ y $f_k(\mathbf{x}') \leq u_k'$, $k = 1,2,\ldots,q$, por lo que:

$$f_k(\mathbf{x}') \leq u_k' \leq u_k = f_k(\mathbf{x}), \;\; k = 1,2,\ldots,q \;\; \text{y}$$

$$f_s(\mathbf{x}') \leq u_s' < u_s = f_s(\mathbf{x}) \text{ para algún } s \in \{1,2,\ldots,q\}$$

lo que implica que $\mathbf{x}$ no es solución eficiente del problema (8), lo cual está en contradicción con la hipótesis.

$\Leftarrow$) Si $(\mathbf{x}^t, \mathbf{u}^t = \mathbf{f}(\mathbf{x})^t)^t$ es solución eficiente de (9) entonces $\mathbf{x}$ es solución eficiente de (8).

Supongamos que $\mathbf{x}$ no es solución eficiente de (8). Puesto que el problema (8) posee soluciones eficientes, existirá al menos una solución $\mathbf{x}'$ que la domina, es decir:

$$f_k(\mathbf{x}') \leq f_k(\mathbf{x}), \;\; k = 1,2,\ldots,q \;\; \text{y} \;\; f_s(\mathbf{x}') < f_s(\mathbf{x}) \text{ para algún } s \in \{1,2,\ldots,q\}$$

siendo $\mathbf{x}' \in D$.

Sea $u_k' = f_k(\mathbf{x}')$ y $u_k = f_k(\mathbf{x})$, $k = 1,2,\ldots,q$, tenemos que:

$$u_k' \leq u_k, \;\; k = 1,2,\ldots,q \;\; \text{y} \;\; u_s' < u_s \text{ para algún } s \in \{1,2,\ldots,q\}$$

con $\mathbf{x}' \in D$ y $u_k' = f_k(\mathbf{x}')$, $k = 1,2,\ldots,q$, luego factible en (9), con lo cual el vector ($\mathbf{x}^t$, $\mathbf{u}^t = \mathbf{f}(\mathbf{x})^t$) no es solución eficiente del problema (9), lo que está en contradicción con la hipótesis.■

A partir del teorema 4, haciendo:

$$f_k(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{\beta_k}{1-\beta_k}}\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \quad k = 1, 2, \ldots, q$$

tenemos que el conjunto de soluciones eficientes del problema (AK(β)) se obtiene a partir de las soluciones eficientes del siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \operatorname*{Min}_{\mathbf{x}} \left(\sqrt{\frac{\beta_1}{1-\beta_1}}\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi})\},\ldots,\sqrt{\frac{\beta_q}{1-\beta_q}}\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} + E\{\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi}_q)\}\right) & (\mathrm{AK1}(\beta)) \\ \text{s.a} \qquad \mathbf{x} \in D \subseteq \mathbf{R}^n & \end{array}$$

Por tanto, en adelante, obtendremos las soluciones eficientes del problema (AK(β)) mediante las soluciones eficientes del problema (AK1(β)).

Sea $\mathcal{E}_{\mathrm{AMR}}(\mathbf{u})$ el conjunto de soluciones eficientes del problema (AMR(**u**)) y sea $\mathcal{E}_{\mathrm{AK}}(\beta)$ el conjunto de soluciones eficientes del problema (AK1(β)).

A partir de los resultados obtenidos, podemos establecer el siguiente corolario que nos relaciona la unión de los conjuntos $\mathcal{E}_{\mathrm{AMR}}(\mathbf{u})$ y $\mathcal{E}_{\mathrm{AK}}(\beta)$, es decir el conjunto de soluciones eficientes del problema (AMR(**u**)) y el conjunto de soluciones eficientes del problema (AK1(β)).

Corolario 2.

La unión en $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^q$ de las soluciones eficientes del problema (AMR($\mathbf{u}$)) coincide con la unión en $\beta \in B$ de las soluciones eficientes del problema (AK(β)):

$$\bigcup_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^q} \mathcal{E}_{\mathrm{AMR}}(\mathbf{u}) = \bigcup_{\beta \in B} \mathcal{E}_{\mathrm{AK}}(\mathbf{u})$$

con $B = \left\{\beta \in \mathbb{R}^q \;/\; \beta_k \in (0,1), k = 1,2,\ldots,q\right\}$.■

La demostración de este corolario es obvia a partir de los resultados anteriores.

Antes de pasar a analizar otras relaciones, señalemos que estas relaciones entre soluciones eficientes en niveles y en probabilidades se mantienen si en el vector de objetivos estocásticos tenemos algunas componentes de las que conocemos las funciones de distribución de las variable aleatorias, y otras, para las que desconocemos la distribución y analizamos la eficiencia de la cota inferior que nos proporciona la desigualdad de Cantelli. En esos casos la equivalencia entre los dos conceptos de eficiencia se mantiene, sin más que aplicar los resultados obtenidos hasta ahora.

4.3. RELACIONES ENTRE LAS SOLUCIONES EFICIENTES VALOR ESPERADO DESVIACIÓN ESTÁNDAR Y LAS SOLUCIONES EFICIENTES CON PROBABILIDADES $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$.

En este apartado analizamos las relaciones existentes entre las soluciones eficientes valor esperado desviación estándar y las soluciones eficientes con probabilidades $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$. Dado el problema de programación estocástica multiobjetivo (PEM), consideramos, pues, el problema correspondiente a la eficiencia valor esperado desviación estándar:

$$\begin{array}{l} \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{Min}}\left(E\{\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi})\},\ldots,E\{\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\},\sqrt{\operatorname{Var}\{\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}},\ldots,\sqrt{\operatorname{Var}\{\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}\right) \\ \text{s. a } \ \mathbf{x}\in D \end{array} \qquad (\mathrm{E}\sigma)$$

y el problema correspondiente a la eficiencia con probabilidades $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$:

$$\begin{array}{rl} & \underset{(\mathbf{x}^t,\mathbf{u}^t)}{\operatorname{Min}} \ \mathbf{u}=(u_1,\ldots,u_q) \\ \text{s.a} & P\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\le u_k\}=\beta_k,\ k=1,2,..,q \\ & \mathbf{x}\in D \end{array} \qquad (\mathrm{K}(\beta))$$

Para llevar a cabo este análisis nos centraremos en tres tipos de problemas de programación estocástica multiobjetivo. Los tres casos que analizaremos son el caso lineal normal, el caso de aleatoriedad simple y el caso en el que se desconoce la función de distribución de las funciones objetivo del problema y tomamos como aproximación de las mismas la cota inferior que se obtiene de cada una de ellas al aplicar la desigualdad de Cantelli. Para estos tres problemas de programación estocástica multiobjetivo estableceremos relaciones entre las soluciones propiamente eficientes con probabilidades $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ y las soluciones eficientes y propiamente eficientes valor esperado desviación estándar.

Planteamos en primer lugar los tres casos que vamos a analizar y, posteriormente, se establecerán las relaciones entre los conjuntos de soluciones eficientes.

a) Caso lineal normal.

Supongamos que para todo $k \in \{1, 2, ..., q\}$, la función objetivo estocástica es de la forma $\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) = \tilde{\mathbf{c}}_k^t\mathbf{x}$, con $\tilde{\mathbf{c}}_k$ vector que sigue la distribución normal multivariante de valor esperado $\bar{\mathbf{c}}_k$ y matriz de varianzas y covarianzas $\mathbf{V}_k$ definida positiva. Bajo estas hipótesis, para cada $k \in \{1, 2, ..., q\}$ el valor esperado de la variable aleatoria $\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) = \tilde{\mathbf{c}}_k^t\mathbf{x}$ es $E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} = \bar{\mathbf{c}}_k^t\mathbf{x}$ y su desviación estándar es $\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}} = \sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}_k\mathbf{x}}$.

En ese caso, a partir de los resultados del capítulo 2, sabemos que el conjunto de soluciones eficientes con probabilidades $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ es el de las soluciones eficientes del problema:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\mathrm{Min}} & \left(\bar{\mathbf{c}}_1^t\mathbf{x} + \Phi^{-1}(\beta_1)\sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}_1\mathbf{x}}, \ldots, \bar{\mathbf{c}}_q^t\mathbf{x} + \Phi^{-1}(\beta_q)\sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{V}_q\mathbf{x}}\right) \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array}$$

que podemos expresar también como:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\mathrm{Min}} & \left(E\{\tilde{z}_1(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} + \alpha_1\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{z}_1(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}}, \ldots, E\{\tilde{z}_q(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} + \alpha_q\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{z}_q(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}}\right) \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \quad \mathrm{K}(\alpha)$$

con $\alpha_k = \Phi^{-1}(\beta_k)$ para $k \in \{1, 2, ..., q\}$.

b) Caso lineal con aleatoriedad simple.

Supongamos que para todo $k \in \{1, 2, ..., q\}$, la función objetivo estocástica es de la forma $\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) = \tilde{\mathbf{c}}_k^t \mathbf{x}$, con $\tilde{\mathbf{c}}_k$ vector que depende linealmente de la variable aleatoria $\tilde{t}_k$ de forma que $\tilde{\mathbf{c}}_k = \mathbf{c}_k^1 + \tilde{t}_k \mathbf{c}_k^2$. Suponemos, además que para todo $k \in \{1, 2, ..., q\}$ la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{t}_k$, F_k, es estrictamente creciente y para todo $k \in \{1, 2, ..., q\}$ y para todo $\mathbf{x} \in D$ se verifica que $\mathbf{c}_k^{2t}\mathbf{x} > 0$. En ese caso, las soluciones eficientes con probabilidades $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ son las soluciones eficientes del problema:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \left(\mathbf{c}_1^{1t}\mathbf{x} + F_1^{-1}(\beta_1)\mathbf{c}_1^{2t}\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{c}_q^{1t}\mathbf{x} + F_q^{-1}(\beta_q)\mathbf{c}_q^{2t}\mathbf{x} \right) \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array}$$

Bajo las hipótesis establecidas, tenemos que el valor esperado y la desviación estándar de la variable aleatoria $\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) = \tilde{\mathbf{c}}_k^t \mathbf{x}$ son, respectivamente, $E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} = \mathbf{c}_k^{1t}\mathbf{x} + \bar{t}_k \mathbf{c}_k^{2t}\mathbf{x}$ y $\sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}} = \sigma_k \mathbf{c}_k^{2t}\mathbf{x}$, donde $\bar{t}_k$ y σ_k son el valor esperado y la desviación estándar de la variable aleatoria $\tilde{t}_k$. Esto nos permite expresar el problema anterior de la forma:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \left(E\{\tilde{z}_1(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} + \alpha_1 \sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}_1(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}}, \ldots, E\{\tilde{z}_q(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} + \alpha_q \sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}_q(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}} \right) \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{K}(\alpha)$$

donde, en este caso, $\alpha_k = \dfrac{F_k^{-1}(\beta_k) - \bar{t}_k}{\sigma_k}$ para $k \in \{1, 2, ..., q\}$.

c) Aplicación de la desigualdad de Cantelli.

Como ya hemos visto anteriormente en el análisis de la relación entre las soluciones eficientes mínimo riesgo de niveles $u_1, u_2, \ldots, u_q$ y las soluciones eficientes con probabilidades $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$, en el caso en el que desconocemos la función de distribución de cada una de las funciones objetivo del problema estocástico y tomamos como valores aproximados de éstas las cotas inferiores que se obtienen al aplicar la desigualdad de Cantelli a cada una de ellas en el problema (K(β)), la aproximación del conjunto de soluciones eficientes del problema (K(β)) viene dado por las soluciones eficientes del siguiente problema multiobjetivo:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \left(E\{\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} + \sqrt{\dfrac{\beta_1}{1-\beta_1}}\sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}, \ldots, E\{\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} + \sqrt{\dfrac{\beta_q}{1-\beta_q}}\sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} \right) \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array}$$

que, al igual que en los casos anteriores, podemos expresar también como:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \left(E\{\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} + \alpha_1\sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}, \ldots, E\{\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} + \alpha_q\sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} \right) \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \quad \text{K}(\alpha)$$

con $\alpha_k = \sqrt{\dfrac{\beta_k}{1-\beta_k}}$ para $k \in \{1, 2, ..., q\}$.

En este caso mantenemos la hipótesis de que para todo $k \in \{1, 2, ..., q\}$ las funciones $E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}$ y $\sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}}$ son funciones convexas, hipótesis que, como ya se ha visto anteriormente, se verifica si la función $\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ es lineal.

Una vez analizados los tres problemas, tenemos que en los tres casos podemos expresar el problema como un problema de q funciones objetivo en el que cada función objetivo recoge el valor esperado del objetivo estocástico más un coeficiente que multiplica a la desviación estándar del mismo. A partir de esta idea surge, de manera natural, la comparación entre el problema obtenido, al que hemos denominado K(α) y el problema valor esperado desviación estándar.

En el estudio que realizamos a continuación nos centraremos en el caso en el que las componentes del vector α son estrictamente positivas. Como ya se comentó en un estudio previo de este trabajo y paralelo a éste para el caso $q = 1$, que las componentes del vector α sean estrictamente positivas implica, en el caso lineal normal, que la probabilidad a fijar para cada objetivo β_k, $k = 1, 2, ..., q$, sea mayor que 0.5 y en el segundo que la probabilidad fijada para cada objetivo sea mayor que el valor de la función de distribución evaluada en el valor esperado de la variable aleatoria del objetivo: $\beta_k > F_k(\bar{t})$, lo que en cierto modo puede interpretarse como aversión al riesgo. Además, obsérvese que si el valor de α es cero obtenemos en ambos casos el problema valor esperado (E). Como puede observarse, en el tercer caso se verifica siempre que α es estrictamente positivo, puesto que para todo $k \in \{1, 2, ..., q\}$ se tiene que $\beta_k \in (0, 1)$.

Pasamos a estudiar las relaciones entre el conjunto de soluciones eficientes valor esperado desviación estándar y el conjunto de soluciones eficientes del problema K(α).

Para ello consideremos los problemas:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \left(f_1(\mathbf{x}),\ldots,f_q(\mathbf{x}),g_1(\mathbf{x}),\ldots,g_q(\mathbf{x})\right) \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \tag{10a}$$

y

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \left(f_1(\mathbf{x})+\alpha_1 g_1(\mathbf{x}),\ldots,f_q(\mathbf{x})+\alpha_q g_q(\mathbf{x})\right) \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \tag{10b}$$

con f_k y g_k, $k = 1, 2, \ldots, q$, funciones reales definidas sobre el mismo conjunto $H \subset \mathbb{R}^n$ y α_k, $k = 1, 2, \ldots, q$, números reales.

Suponemos que el conjunto D es cerrado, acotado y no vacío, por lo que ambos problemas poseen soluciones eficientes. Además, suponemos que las funciones f_k y g_k, $k = 1, 2, \ldots, q$, son convexas.

Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}^p$ los conjuntos de soluciones eficientes y propiamente eficientes, respectivamente, del problema (10a). Sean $\mathcal{E}(\alpha)$ y $\mathcal{E}^p(\alpha)$ los conjuntos de soluciones eficientes y propiamente eficientes del problema (10b) para el vector α. Los siguientes teoremas nos muestran las relaciones existentes entre ambos conjuntos.

Teorema 5.

Si las componentes del vector α son números reales positivos, se verifica:

$$\mathcal{E}(\alpha) \subset \mathcal{E}. \blacksquare$$

Demostración.

Para llevar a cabo la demostración razonaremos por reducción al absurdo, suponiendo que una solución eficiente del problema (10b) no lo es del problema (10a) y llegaremos a una contradicción.

Sea $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\alpha)$. Supongamos que $\mathbf{x} \notin \mathcal{E}$. En ese caso tenemos que existe una solución $\mathbf{x}^*$ que la domina, es decir:

$$f_k(\mathbf{x}^*) \le f_k(\mathbf{x}) \text{ y } g_k(\mathbf{x}^*) \le g_k(\mathbf{x}) \text{ para todo } k \in \{1, 2, \ldots, q\}$$

y existe al menos un $s \in \{1, 2, \ldots, q\}$ para el que la desigualdad es estricta, es decir: $f_s(\mathbf{x}^*) < f_s(\mathbf{x})$ o $g_s(\mathbf{x}^*) < g_s(\mathbf{x})$.

A partir de aquí tenemos que, puesto que $f_k(\mathbf{x}^*) \le f_k(\mathbf{x})$ y $g_k(\mathbf{x}^*) \le g_k(\mathbf{x})$ se verifican las siguientes desigualdades:

$$f_k(\mathbf{x}^*) + \alpha_k g_k(\mathbf{x}^*) \le f_k(\mathbf{x}) + \alpha_k g_k(\mathbf{x}^*) \text{ para todo } k \in \{1, 2, \ldots, q\} \quad (11)$$

$$f_k(\mathbf{x}) + \alpha_k g_k(\mathbf{x}^*) \leq f_k(\mathbf{x}) + \alpha_k g_k(\mathbf{x}) \text{ para todo } k \in \{1, 2, \ldots, q\} \tag{12}$$

A partir de (11) y (12) tenemos que:

$$f_k(\mathbf{x}^*) + \alpha_k g_k(\mathbf{x}^*) \leq f_k(\mathbf{x}) + \alpha_k g_k(\mathbf{x}) \text{ para todo } k \in \{1, 2, \ldots, q\}$$

Para $k = s$:

•si $f_s(\mathbf{x}^*) < f_s(\mathbf{x})$se verifica:

$$f_s(\mathbf{x}^*) + \alpha_s g_s(\mathbf{x}^*) < f_s(\mathbf{x}) + \alpha_s g_s(\mathbf{x}^*)$$

y, por (12), obtenemos la desigualdad:

$$f_s(\mathbf{x}^*) + \alpha_s g_s(\mathbf{x}^*) < f_s(\mathbf{x}) + \alpha_s g_s(\mathbf{x})$$

•si $g_s(\mathbf{x}^*) < g_s(\mathbf{x})$ se verifica que:

$$f_s(\mathbf{x}^*) + \alpha_s g_s(\mathbf{x}^*) < f_s(\mathbf{x}^*) + \alpha_s g_s(\mathbf{x})$$

y, por ser $f_s(\mathbf{x}^*) \leq f_s(\mathbf{x})$ se tiene que:

$$f_s(\mathbf{x}^*) + \alpha_s g_s(\mathbf{x}^*) < f_s(\mathbf{x}) + \alpha_s g_s(\mathbf{x})$$

Por tanto, para todo $k \in \{1, 2, \ldots, q\}$ se verifica que:

$$f_k(\mathbf{x}^*) + \alpha_k g_k(\mathbf{x}^*) \leq f_k(\mathbf{x}) + \alpha_k g_k(\mathbf{x})$$

y existe al menos un subíndice $s \in \{1, 2, \ldots, q\}$ para el que la desigualdad es estricta:

$$f_s(\mathbf{x}^*) + \alpha_s g_s(\mathbf{x}^*) < f_s(\mathbf{x}) + \alpha_s g_s(\mathbf{x})$$

lo que implica que la solución $\mathbf{x}^*$ domina a la solución $\mathbf{x}$ y, por tanto llegamos a una contradicción con la hipótesis de que $\mathbf{x}$ es solución eficiente del problema (10b).■

Una vez demostrado que cualquier solución eficiente del problema (10b) es solución eficiente del problema (10a), probamos a continuación que esta relación se mantiene para las soluciones propiamente eficientes. Previamente definimos los problemas de optimización P(λ, μ) y $P_\alpha(\omega)$ de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \lambda^t \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mu^t \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{P}(\lambda, \mu)$$

y

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \sum_{k=1}^{q} \omega_k \left(f_k(\mathbf{x}) + \alpha_k g_k(\mathbf{x}) \right) \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{P}_\alpha(\omega)$$

Proposición 1.

Si las componentes del vector α son números reales positivos, se verifica que $\mathcal{E}^{\text{p}}(\alpha) \subset \mathcal{E}^{\text{p}}$.■

Demostración.

Para demostrar esta proposición probaremos que cualquier solución del problema de optimización $P_\alpha(\omega)$ es solución del problema P(λ, μ) para algún vector $(\lambda^t, \mu^t)^t$.

Sea $\mathbf{x} \in \mathcal{E}^p(\alpha)$. Entonces existe un vector $\omega > \mathbf{0}$ para el que $\mathbf{x}$ es solución del problema $P_\alpha(\omega)$. Haciendo $\lambda_k = \omega_k$ y $\mu_k = \omega_k \alpha_k$, λ_k, $\mu_k > 0$, puesto que ω, $\alpha > \mathbf{0}$, tenemos que $\mathbf{x}$ es solución del problema $P(\lambda, \mu)$.■

Una vez demostrado que cualquier solución propiamente eficiente del problema (10b) lo es del problema (10a), es lógico plantearse si, fijado un vector α, cualquier solución propiamente eficiente del problema (10a) lo es también del problema (10b). En general, no, como se ve en el siguiente contraejemplo, en el que para cada α el conjunto de soluciones propiamente eficientes del problema (10b) es un subconjunto estricto del conjunto de soluciones eficientes del problema (10a).

Ejemplo.

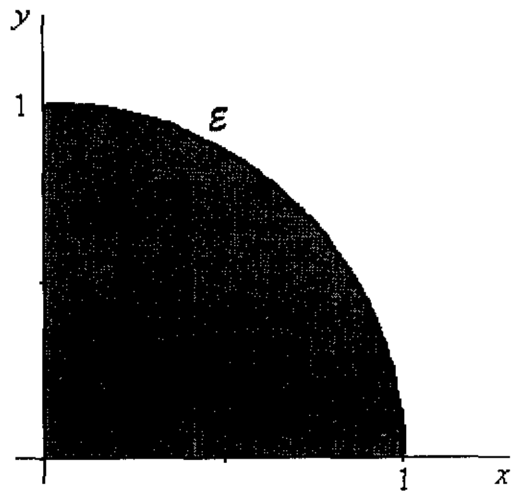
Consideremos el problema:

$$\begin{aligned} &\operatorname*{Max}_{(x,y)} \ (x,y) \\ &\text{s.a} \ \ x^2 + y^2 \leq 1 \\ &\qquad x, y \geq 0 \end{aligned}$$

El conjunto de puntos eficientes de este problema es:

$$\left\{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 = 1, \ x, y > 0\right\}$$

y viene representado en la siguiente figura:



Si planteamos ahora la resolución del problema:

$$\begin{aligned} &\underset{(x,y)^t}{\text{Max}} \;\; x+\alpha\, y \\ &\text{s.a} \;\; x^2+y^2 \leq 1 \\ &\qquad\quad x,y \geq 0 \end{aligned}$$

con $\alpha > 0$, tenemos que para cada $\alpha > 0$ que fijemos el óptimo del problema resultante es una de las soluciones eficientes del problema bicriterio original.

Por tanto, fijado $\alpha > 0$, no es cierto que $\mathcal{E}^p \subset \mathcal{E}^p(\alpha)$, sin embargo, se verifica el siguiente resultado.

Proposición 2.

Si las componentes del vector α son números reales positivos, se verifica que:

$$\mathcal{E}^p \subset \bigcup_{\alpha \in \overset{\circ}{\mathbf{R}}^{q+}} \mathcal{E}^p(\alpha). \blacksquare$$

Demostración.

Al igual que en el caso anterior, probamos la proposición demostrando que cualquier solución del problema de optimización P(λ, μ) es solución del problema $P_\alpha(\omega)$ para algún vector $\alpha > \mathbf{0}$ y para algún ω.

Sea $\mathbf{x} \in \mathcal{E}^p$. Entonces existen vectores $\lambda, \mu > \mathbf{0}$ para los que $\mathbf{x}$ es solución del problema P(λ, μ). Para $\omega_k = \lambda_k$ y $\alpha_k = \dfrac{\mu_k}{\omega_k}$, $\alpha_k > 0$, puesto que $\omega, \mu > \mathbf{0}$, tenemos que $\mathbf{x}$ es también solución del problema $P_\alpha(\omega)$.■

Obsérvese que a partir de las proposiciones uno y dos tenemos que los conjuntos de soluciones propiamente eficientes verifican para $\alpha > \mathbf{0}$, $\mathcal{E}^p(\alpha) \subset \mathcal{E}^p$ y $\mathcal{E}^p \subset \bigcup_{\alpha \in \overset{o}{\mathbf{R}}{}^{q+}} \mathcal{E}^p(\alpha)$. Uniendo ambos resultados podemos enunciar el siguiente corolario:

Corolario 3.

Si $\alpha > \mathbf{0}$ se verifica que $\mathcal{E}^p = \bigcup_{\alpha \in \overset{o}{\mathbf{R}}{}^{q+}} \mathcal{E}^p(\alpha)$.■

A partir de estos resultados tenemos que, en nuestro caso, para los problemas:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} \left(E\{\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi})\},\ldots,E\{\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\},\sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}},\ldots,\sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} \right) \\ \text{s. a } \ \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad (E\sigma)$$

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} \left(E\{\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} + \alpha_1\sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}},\ldots,E\{\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} + \alpha_q\sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} \right) \\ \text{s.a } \ \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad K(\alpha)$$

definiendo $\mathcal{E}_{E\sigma}$ y $\mathcal{E}_{E\sigma}^{p}$ como los conjuntos de soluciones eficientes y propiamente eficientes del problema (Eσ) y el conjunto $\mathcal{E}_{K}^{p}(\alpha)$ como el conjunto de soluciones propiamente eficientes del problema K(α) tenemos que:

- Toda solución propiamente eficiente del problema K(α), para $\alpha > \mathbf{0}$, es solución propiamente eficiente valor esperado desviación estándar: $\mathcal{E}_{K}^{p}(\alpha) \subset \mathcal{E}_{E\sigma}^{p}$ y, por tanto, solución eficiente valor esperado desviación estándar.

- La unión en α, para $\alpha > \mathbf{0}$, de las soluciones propiamente eficientes del problema K(α) es igual al conjunto de soluciones propiamente eficientes del problema valor esperado desviación estándar: $\bigcup_{\alpha \in \overset{\circ}{\mathbf{R}}^{q+}} \mathcal{E}_{K}^{p}(\alpha) = \mathcal{E}_{E\sigma}^{p}$.

Como ya se analizó al principio de este apartado, el hecho de que esta equivalencia entre conjuntos de puntos eficientes se dé para valores de $\alpha > \mathbf{0}$ supone que se fijan probabilidades "altas" en el problema de Kataoka, lo que se puede traducir, de alguna forma, en aversión al riesgo.

De todo lo estudiado en este capítulo se desprende que los conceptos de eficiencia existentes en la literatura para problemas que se resuelven mediante el enfoque multiobjetivo están estrechamente relacionados, a pesar de que se definen en contextos distintos y de que en cada uno de ellos se sigue un criterio de resolución de estos problemas que recoge determinadas características estadísticas de los objetivos del problema. De esta forma, los resultados obtenidos en programación estocástica, referentes a las relaciones entre criterios de transformación del objetivo estocástico son perfectamente generalizables en problemas con objetivos múltiples. En el capítulo siguiente se analiza la resolución de problemas de programación estocástica multiobjetivo mediante técnicas que siguen el enfoque estocástico.

CAPÍTULO 5

PROGRAMACIÓN ESTOCÁSTICA MULTIOBJETIVO.

ENFOQUE ESTOCÁSTICO

1. INTRODUCCIÓN.

Nos centramos ahora en la resolución de problemas de programación estocástica multiobjetivo mediante el enfoque estocástico. Como ya se ha comentado anteriormente, en la clasificación que realiza Ben Abdelaziz (1992) de los métodos de resolución de problemas de programación estocástica multiobjetivo agrupa, en lo que denomina enfoque estocástico, a todos los métodos de resolución de estos problemas en los que se siguen las dos etapas siguientes:

Etapa 1: Transformación del problema estocástico multiobjetivo en un problema de programación estocástica con una única función objetivo siguiendo alguno de los criterios existentes para ello en programación multiobjetivo.

Etapa 2: Resolución del problema de programación estocástica obtenido en la etapa uno mediante algún método de resolución de programación estocástica. La solución obtenida en esta etapa es considerada, en estos métodos, solución al problema estocástico multiobjetivo de partida.

Abordaremos ahora la resolución de problemas de programación estocástica con objetivos múltiples siguiendo estas dos etapas, tal y como se describe en la figura 1.

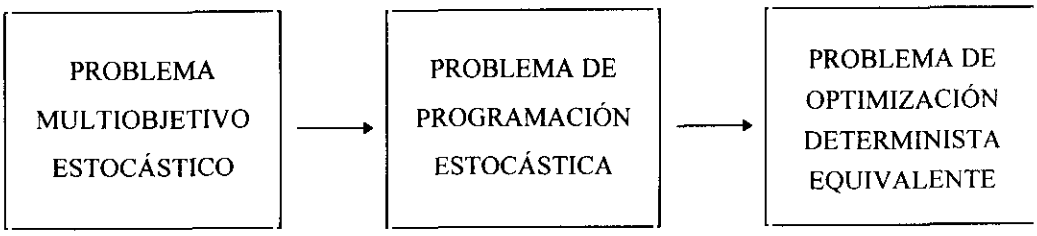


FIGURA 1.
TRANSFORMACIÓN DE UN PROBLEMA MULTIOBJETIVO ESTOCÁSTICO MEDIANTE EL ENFOQUE ESTOCÁSTICO.

Para resolver problemas de programación estocástica multiobjetivo siguiendo los pasos descritos, pueden aplicarse distintos criterios de transformación de los q objetivos estocásticos del problema en la etapa uno. Hecho esto se obtiene un problema de programación estocástica con función objetivo estocástica y, para su resolución, es posible aplicar también distintos criterios. Por tanto, el proceso de resolución de problemas de programación estocástica multiobjetivo mediante este enfoque pasa por un proceso de decisión previo en el que se ha de elegir la manera de transformar los q objetivos del problema para obtener un problema de programación estocástica y en la elección de un criterio de resolución de este problema.

De todo lo anterior, se desprende que la diversidad de criterios de transformación del problema en las dos etapas de resolución, dará lugar, en general, a todo un conjunto de posibles soluciones al problema de programación estocástica multiobjetivo que, de acuerdo con lo descrito, no son comparables.

En este trabajo hemos optado por fijar un único criterio de transformación en la etapa uno del proceso y, al llegar a la etapa dos, resolver el problema obtenido mediante algunos de los criterios analizados en el capítulo dos para la programación estocástica. Así, dado el problema de programación estocástica multiobjetivo, hemos considerado la aplicación del método de la ponderación al mismo. Hecho esto, nos hemos planteado su resolución mediante los criterios valor esperado, mínima varianza, mínimo riesgo y de Kataoka. No hemos considerado la resolución del problema ponderado mediante el criterio de eficiencia valor esperado desviación estándar, puesto que consideramos poco lógico transformar el problema multiobjetivo en un problema ponderado y, posteriormente, considerar un problema bicriterio para resolverlo. Para los criterios considerados analizaremos el problema de optimización determinista equivalente que se obtiene tras aplicar las dos etapas e intentamos establecer relaciones entre la solución obtenida mediante este proceso y los conceptos de solución eficiente de problemas de programación estocástica multiobjetivo definidos en el capítulo cuatro de este trabajo.

Consideremos, por tanto, el problema de programación estocástica multiobjetivo:

$$\begin{array}{ll} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} & \tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \left(\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi}), \tilde{z}_2(\mathbf{x},\tilde{\xi}), \ldots, \tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right)^t \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{(PEM)}$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de variables de decisión del problema y $\tilde{\xi}$ es un vector aleatorio definido sobre un conjunto $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^s$. Suponemos dada la familia $\mathbb{F}$ de eventos, es decir, subconjuntos de $\mathbb{E}$, y la distribución de probabilidad P definida sobre $\mathbb{F}$, de manera que para cualquier subconjunto de $\mathbb{E}$, $A \subset \mathbb{E}$, $A \in \mathbb{F}$, la probabilidad de A, $P(A)$, es conocida. Además, se mantiene la hipótesis de que la distribución de probabilidad, P, es independiente de las variables de decisión del problema, $x_1, \ldots, x_n$.

Suponemos que las funciones $\tilde{z}_1(\mathbf{x}, \tilde{\xi}), \tilde{z}_2(\mathbf{x}, \tilde{\xi}), \ldots, \tilde{z}_q(\mathbf{x}, \tilde{\xi})$ están definidas en todo el espacio $\mathbb{R}^n$ x $\mathbb{E}$ y que el conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ es convexo, compacto y no vacío..

Si aplicamos al problema anterior el método de las ponderaciones de la programación multiobjetivo, fijando unos pesos no negativos, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q$, $\mu_k \geq 0$, para todo $k \in \{1, 2, \ldots, q\}$, obtenemos el problema de programación estocástica:

$$\begin{array}{ll} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} & \tilde{f}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{(AE)}$$

Para resolver este problema consideramos a continuación los criterios valor esperado, mínima varianza, mínimo riesgo y de Kataoka. Dividimos nuestro estudio en función del criterio que apliquemos. Previamente, vamos a analizar las características estadísticas de la variable aleatoria $\tilde{f}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi})$, en concreto, calcularemos el valor esperado, la varianza y la función de distribución de la misma. Para la varianza y para la función de distribución se distingue entre problemas lineales y cuadráticos y, además, se establecen las hipótesis que sean necesarias acerca de la distribución de probabilidad de los parámetros aleatorios que intervienen en el problema.

Antes de ello, consideramos interesante señalar que, dado el problema (AE), la aplicación de los criterios valor esperado, mínima varianza, eficiencia valor esperado desviación estándar, mínimo riesgo y de Kataoka da lugar a problemas deterministas equivalentes cuyas soluciones óptimas mantienen las mismas relaciones que se obtuvieron en el capítulo 3 de este trabajo, siempre que se verifiquen las hipótesis necesarias para ello. Esto nos ha llevado a no considerar de nuevo el análisis de las mismas y a centrarnos en el estudio de las posibles relaciones entre las soluciones óptimas de los problemas correspondientes a estos criterios y los conceptos de soluciones eficientes definidos en el capítulo 4 para problemas de programación estocástica multiobjetivo.

2. CARACTERÍSTICAS ESTADÍSTICAS DE LA FUNCIÓN OBJETIVO DEL PROBLEMA PONDERADO.

En este apartado calcularemos, en primer lugar, el valor esperado y la varianza de la variable aleatoria $\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})$. Posteriormente, analizaremos la distribución de probabilidad de la misma, estableciendo las hipótesis necesarias sobre las variables aleatorias $\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})$, $k = 1,2,\ldots,q$, para conocer la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})$, y obtendremos también la cota inferior correspondiente a la aplicación de la desigualdad de Cantelli a la función de distribución de esta variable.

2.1. VALOR ESPERADO.

Puesto que la función valor esperado es lineal, y dado que los pesos asignados son deterministas, es obvio que:

$$E\{\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} = E\left\{\sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right\} = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \, E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}$$

Así pues, si se conoce el valor esperado de las funciones $\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi}), k = 1,2,\ldots,q$, el valor esperado de la función objetivo del problema ponderado, $\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})$, es conocido y no es más que una combinación lineal de los valores esperados de los objetivos estocásticos del problema (PEM), ponderado cada uno de ellos con el peso asignado a cada una de las funciones objetivo estocásticas del problema.

2.2. VARIANZA.

Puesto que la variable aleatoria $\widetilde{f}(\mathbf{x},\widetilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \widetilde{z}_k(\mathbf{x},\widetilde{\xi})$ una función lineal de las variables aleatorias $\widetilde{z}_1(\mathbf{x},\widetilde{\xi}), \widetilde{z}_2(\mathbf{x},\widetilde{\xi}), \ldots, \widetilde{z}_q(\mathbf{x},\widetilde{\xi})$, su varianza depende de las varianzas de estas variables aleatorias y de las covarianzas entre las mismas[1]. Así, tenemos que:

$$\mathrm{Var}\{\widetilde{f}(\mathbf{x},\widetilde{\xi})\} = \sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 \, \mathrm{Var}\{\widetilde{z}_k(\mathbf{x},\widetilde{\xi})\} + 2\sum_{\substack{k,s=1 \\ k<s}}^{q} \mu_k \, \mu_s \, \mathrm{cov}\{\widetilde{z}_k(\mathbf{x},\widetilde{\xi}), \widetilde{z}_s(\mathbf{x},\widetilde{\xi})\}$$

donde denotamos por $\mathrm{cov}\{\widetilde{z}_k(\mathbf{x},\widetilde{\xi}), \widetilde{z}_s(\mathbf{x},\widetilde{\xi})\}$ a la covarianza entre las variables aleatorias $\widetilde{z}_k(\mathbf{x},\widetilde{\xi})$ y $\widetilde{z}_s(\mathbf{x},\widetilde{\xi})$:

$$\mathrm{cov}\{\widetilde{z}_k(\mathbf{x},\widetilde{\xi}), \widetilde{z}_s(\mathbf{x},\widetilde{\xi})\} = E\{(\widetilde{z}_k(\mathbf{x},\widetilde{\xi}) - E\{\widetilde{z}_k(\mathbf{x},\widetilde{\xi})\})(\widetilde{z}_s(\mathbf{x},\widetilde{\xi}) - E\{\widetilde{z}_s(\mathbf{x},\widetilde{\xi})\})\}.$$

Obsérvese que la expresión obtenida para la varianza es la de una forma cuadrática en el vector de pesos, μ. Si definimos la matriz:

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}\{\widetilde{z}_1(\mathbf{x},\widetilde{\xi})\} & \mathrm{cov}\{\widetilde{z}_1(\mathbf{x},\widetilde{\xi}), \widetilde{z}_2(\mathbf{x},\widetilde{\xi})\} & \ldots & \mathrm{cov}\{\widetilde{z}_1(\mathbf{x},\widetilde{\xi}), \widetilde{z}_q(\mathbf{x},\widetilde{\xi})\} \\ \mathrm{cov}\{\widetilde{z}_1(\mathbf{x},\widetilde{\xi}), \widetilde{z}_2(\mathbf{x},\widetilde{\xi})\} & \mathrm{Var}\{\widetilde{z}_2(\mathbf{x},\widetilde{\xi})\} & \ldots & \mathrm{cov}\{\widetilde{z}_2(\mathbf{x},\widetilde{\xi}), \widetilde{z}_q(\mathbf{x},\widetilde{\xi})\} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{cov}\{\widetilde{z}_1(\mathbf{x},\widetilde{\xi}), \widetilde{z}_q(\mathbf{x},\widetilde{\xi})\} & \mathrm{cov}\{\widetilde{z}_2(\mathbf{x},\widetilde{\xi}), \widetilde{z}_q(\mathbf{x},\widetilde{\xi})\} & \ldots & \mathrm{Var}\{\widetilde{z}_q(\mathbf{x},\widetilde{\xi})\} \end{pmatrix}$$

matriz simétrica, dado que se verifica:

$\mathrm{cov}\{\widetilde{z}_k(\mathbf{x},\widetilde{\xi}), \widetilde{z}_s(\mathbf{x},\widetilde{\xi})\} = \mathrm{cov}\{\widetilde{z}_s(\mathbf{x},\widetilde{\xi}), \widetilde{z}_k(\mathbf{x},\widetilde{\xi})\}$, para todo $k, s \in \{1, 2, \ldots, q\}$, $k \neq s$,

[1] Véase, por ejemplo, Hogg y Craig (1989), pág. 177.

podemos expresar la varianza de la variable aleatoria $\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ como:

$$\mathrm{Var}\{\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} = \mathrm{Var}\left\{\sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right\} = \mu^t \mathbf{W}(\mathbf{x})\mu .$$

Así pues, la varianza de la función $\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ depende no sólo de las varianzas de las funciones $\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi}), \tilde{z}_2(\mathbf{x},\tilde{\xi}), \ldots, \tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ sino también de las covarianzas entre ellas. Con el objeto de llegar a resultados concretos manejables, vamos a ir estableciendo hipótesis adicionales sobre las las funciones $\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})$, $k = 1, 2, \ldots, q$. Distinguimos entre el caso lineal y el caso cuadrático.

a) Caso líneal.

Supongamos que para todo $k \in \{1, 2, \ldots, q\}$ la función objetivo $\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ es lineal: $\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \tilde{\mathbf{c}}_k^t \mathbf{x}$.

Sea $\tilde{\mathbf{c}} = \left(\tilde{\mathbf{c}}_1^t, \tilde{\mathbf{c}}_2^t, \ldots, \tilde{\mathbf{c}}_q^t\right)^t = \left(\tilde{c}_{11}, \tilde{c}_{12}, \ldots, \tilde{c}_{1n}, \tilde{c}_{21}, \tilde{c}_{22}, \ldots, \tilde{c}_{2n}, \ldots, \tilde{c}_{q1}, \tilde{c}_{q2}, \ldots, \tilde{c}_{qn}\right)^t$.

Sea $\mathbf{V}$ la matriz de varianzas y covarianzas del vector $\tilde{\mathbf{c}}$:

$$\mathbf{V} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
\mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_{12} & \cdots & \mathbf{V}_{1s} & \cdots & \mathbf{V}_{1q} \\ \hline
\mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_2 & \cdots & \mathbf{V}_{2s} & \cdots & \mathbf{V}_{2q} \\ \hline
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline
\mathbf{V}_{k1} & \mathbf{V}_{k2} & \cdots & \mathbf{V}_{ks} & \cdots & \mathbf{V}_{kq} \\ \hline
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline
\mathbf{V}_{q1} & \mathbf{V}_{q2} & \cdots & \mathbf{V}_{qs} & \cdots & \mathbf{V}_{q}
\end{array}\right)$$

matriz definida positiva, en la que:

- Cada submatriz de la diagonal principal, $\mathbf{V_k}$, es la matriz de varianzas y covarianzas del vector $\widetilde{\mathbf{c}}_\mathbf{k} = (\widetilde{c}_{kl}, \ldots, \widetilde{c}_{kn})^t$, y, por tanto, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, q\}$, recoge las varianzas y las covarianzas entre las componentes del vector $\widetilde{\mathbf{c}}_\mathbf{k}$, es decir:

$$\mathbf{V_k} = \begin{pmatrix} \sigma_{kl}^2 & \sigma_{kl\,k2} & \ldots & \sigma_{kl\,kn} \\ \sigma_{k2\,kl} & \sigma_{k2}^2 & \ldots & \sigma_{k2\,kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{kn\,kl} & \sigma_{kn\,k2} & \ldots & \sigma_{kn}^2 \end{pmatrix}$$

Suponemos que $\mathbf{V_k}$ es simétrica y definida positiva para todo $k \in \{1, 2, \ldots, q\}$.

- Cada una de las submatrices no diagonales $\mathbf{V_{ks}}$, $k, s \in \{1, 2, \ldots, q\}$, $k \neq s$, recoge las covarianzas entre las componentes de los vectores $\widetilde{\mathbf{c}}_\mathbf{s}$ y $\widetilde{\mathbf{c}}_\mathbf{k}$, con lo cual:

$$\mathbf{V_{ks}} = \begin{pmatrix} \sigma_{k1\,s1} & \sigma_{k1\,s2} & \ldots & \sigma_{k1\,sn} \\ \sigma_{k2\,s1} & \sigma_{k2\,s2} & \ldots & \sigma_{k2\,sn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{kn\,s1} & \sigma_{kn\,s2} & \ldots & \sigma_{kn\,sn} \end{pmatrix}$$

Al ser $\mathbf{V}$ simétrica, se verifica, para $k \neq s$, $\mathbf{V_{ks}} = \mathbf{V_{sk}^t}$, pero, cada una de las submatrices que no están en la diagonal principal de $\mathbf{V}$ es, en general, no simétrica, es decir, $\mathbf{V_{ks}}$ es no simétrica, $\mathbf{V_{ks}} \neq \mathbf{V_{ks}^t}$.

La varianza del objetivo k-ésimo es: $\mathbf{x^t V_k x}$ y la covarianza entre las variables aleatorias $\widetilde{\mathbf{c}}_\mathbf{k}^\mathbf{t}\mathbf{x}$ y $\widetilde{\mathbf{c}}_\mathbf{s}^\mathbf{t}\mathbf{x}$ es $\mathrm{cov}\{\widetilde{\mathbf{c}}_\mathbf{k}^\mathbf{t}\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{c}}_\mathbf{s}^\mathbf{t}\mathbf{x}\} = \mathbf{x^t V_{ks} x}$. Por tanto la expresión de la varianza de la variable aleatoria $\widetilde{f}(\mathbf{x}, \widetilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k\, \widetilde{z}_k(\mathbf{x}, \widetilde{\xi})$ es:

$$\mathrm{Var}\{\widetilde{f}(\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{c}})\} = \sum_{k=1}^{q} \mu_k^2\, \mathbf{x^t V_k x} + 2 \sum_{\substack{k,s=1 \\ k<s}}^{q} \mu_k\, \mu_s \mathbf{x^t V_{ks} x}$$

b) Caso cuadrático.

Consideremos ahora el caso en el que las funciones objetivo del problema son de tipo cuadrático:

$$\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) = \mathbf{x}^t\mathbf{B}_k\mathbf{x} - \tilde{\xi}_k^t\mathbf{x} + \tilde{\xi}_k^t\mathbf{H}_k\tilde{\xi}_k, \quad k = 1, 2, ..., q$$

En ese caso, la variable aleatoria $\tilde{f}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi})$ es de la forma:

$$\tilde{f}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \left(\mathbf{x}^t\mathbf{B}_k\mathbf{x} - \tilde{\xi}_k^t\mathbf{x} + \tilde{\xi}_k^t\mathbf{H}_k\tilde{\xi}_k\right)$$

Recordamos que en el estudio realizado en el capítulo tres de este trabajo acerca del problema estocástico cuadrático, en el caso de una única función objetivo, $\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) = \mathbf{x}^t\mathbf{B}\mathbf{x} - \tilde{\xi}^t\mathbf{x} + \tilde{\xi}^t\mathbf{H}\tilde{\xi}$, la complejidad del problema daba lugar a que en la obtención de la varianza de la función objetivo, el caso general no fuera manejable. Sin embargo, si se establecen determinadas hipótesis acerca de la distribución de probabilidad de las variables aleatorias componentes del vector $\tilde{\xi}$, $\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_q$ se obtienen resultados interesantes. En concreto, se obtienen resultados si se establece la hipótesis de que el vector $\tilde{\xi}$ sigue la distribución normal multivariante, con $\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_q$ variables aleatorias mutuamente estadísticamente independientes, y si se mantiene la hipótesis de aleatoriedad simple normal, es decir, se supone que el vector $\tilde{\xi}$ depende de una única variable aleatoria que sigue la distribución normal.

Ahora, para problemas de programación estocástica multiobjetivo, consideraremos, de nuevo, los dos casos descritos. En el primero de ellos, al que denominamos caso cuadrático normal, se establece la hipótesis de independencia entre los objetivos estocásticos. En el segundo, caso de aleatoriedad simple normal, se considera que todos los objetivos dependen de la misma variable aleatoria.

b1) Caso cuadrático normal.

Supongamos que se verifican las siguientes hipótesis:

H1) La matriz $\mathbf{H}_k$ es diagonal para todo $k \in \{1, 2, ..., q\}$.

H2) Las variables aleatorias $\tilde{\xi}_{11},\ldots,\tilde{\xi}_{1n},\tilde{\xi}_{21},\ldots,\tilde{\xi}_{2n},\ldots\tilde{\xi}_{q1},\ldots,\tilde{\xi}_{qn}$ son mutuamente estadísticamente independientes.

H3) El vector $\tilde{\xi}_k$ se distribuye según la distribución normal multivariante de valor esperado $\bar{\xi}_k=\left(\bar{\xi}_{k1},\bar{\xi}_{k2},\ldots,\bar{\xi}_{kn}\right)^t$ y matriz de varianzas y covarianzas $\mathbf{V}_k$ definida positiva, para todo $k \in \{1, 2, ..., q\}$.

Bajo las hipótesis (H1), (H2) y (H3), a partir de los resultados obtenidos en programación estocástica cuadrática en el capítulo tres, se tiene que la varianza de la función objetivo k-ésima, $\tilde{z}_k\left(\mathbf{x},\tilde{\xi}_k\right)$, viene dada por la expresión:

$$\operatorname{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi}_k)\}=\mathbf{x}^t\mathbf{V}_k\mathbf{x}-4\bar{\xi}_k^t\mathbf{H}_k\mathbf{V}_k\mathbf{x}+2\mathbf{e}^t\mathbf{H}_k^2\mathbf{V}_k^2\mathbf{e}+4\bar{\xi}_k^t\mathbf{H}_k^2\mathbf{V}_k\bar{\xi}_k$$

A partir de la hipótesis (H2) puede demostrarse que las covarianzas entre los objetivos estocásticos del problema son nulas:

$$\operatorname{cov}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi}),\tilde{z}_s(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}=0,\ \text{para todo } k,s\in\{1,2,\ldots,q\},k\neq s,$$

y, por tanto, la varianza de la variable aleatoria $\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi})=\sum_{k=1}^{q}\mu_k\,\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ depende sólo de las varianzas de las variables aleatorias $\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi}),\tilde{z}_2(\mathbf{x},\tilde{\xi}),\ldots,\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ y su expresión es:

$$\operatorname{Var}\{\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}=\operatorname{Var}\left\{\sum_{k=1}^{q}\mu_k\,\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right\}=\sum_{k=1}^{q}\mu_k^2\operatorname{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}$$

con lo cual se tiene que:

$$\mathrm{Var}\{\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} = \sum_{k=1}^{q} \mu_k^2\left(\mathbf{x}^t\mathbf{V}_k\mathbf{x} - 4\bar{\xi}_k^t\mathbf{H}_k\mathbf{V}_k\mathbf{x} + 2\mathbf{e}^t\mathbf{H}_k^2\mathbf{V}_k^2\mathbf{e} + 4\bar{\xi}_k^t\mathbf{H}_k^2\mathbf{V}_k\bar{\xi}_k\right)$$

b2) Caso cuadrático aleatoriedad simple normal.

Supongamos que para todo $k \in \{1, 2, ..., q\}$ el vector $\tilde{\xi}_k$ depende linealmente de una variable aleatoria $\tilde{t}$, de tal forma que:

$$\tilde{\xi}_k = \xi_k^1 + \tilde{t}\xi_k^2$$

con $\xi_k^1, \xi_k^2 \in \mathbb{R}^n$ y $\tilde{t}$ variable aleatoria con distribución normal, valor esperado $\bar{t}$ y varianza $\sigma_t^2 < \infty$. En ese caso, puede demostrarse, a partir de los resultados obtenidos en el capítulo tres, que la varianza de la función objetivo del problema ponderado,

$$\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k\left(\mathbf{x}^t\mathbf{B}_k\mathbf{x} - \tilde{\xi}_k^t\mathbf{x} + \tilde{\xi}_k^t\mathbf{H}_k\tilde{\xi}_k\right)$$

viene dada por la expresión:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\{\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} = {} & \sigma_t^2\left(\sum_{k=1}^{q}\mu_k\xi_k^{2t}\mathbf{x}\right)^2 - 4\sigma_t^2\left(\sum_{k=1}^{q}\mu_k\xi_k^{1t}\mathbf{H}_k\xi_k^2 + \bar{t}\sum_{k=1}^{q}\mu_k\xi_k^{2t}\mathbf{H}_k\xi_k^2\right)\sum_{k=1}^{q}\mu_k\xi_k^{2t}\mathbf{x} + \\ & + 2\sigma_t^2(\sigma_t^2 + 2\bar{t}^2)\left(\sum_{k=1}^{q}\mu_k\xi_k^{2t}\mathbf{H}_k\xi_k^2\right)^2 + 4\sigma_t^2\left(\sum_{k=1}^{q}\mu_k\xi_k^{1t}\mathbf{H}_k\xi_k^2\right)^2 \\ & + 8\bar{t}\sigma_t^2\left(\sum_{k=1}^{q}\mu_k\xi_k^{2t}\mathbf{H}_k\xi_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{q}\mu_k\xi_k^{1t}\mathbf{H}_k\xi_k^2\right)\end{aligned}$$

Obsérvese que como se mantiene la hipótesis de que los objetivos estocásticos del problema dependen todos ellos de la misma variable aleatoria, $\tilde{t}$, las covarianzas entre objetivos son, evidentemente, distintas de cero.

2.3. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN.

Como ya se ha analizado anteriormente, dado un vector de variables aleatorias, $\tilde{\xi}$, si consideramos una función de sus componentes: $\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi})$, no es inmediato el conocimiento de la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi})$. Esto nos ha llevado en este trabajo a centrarnos en el caso lineal y fijar las hipótesis de normalidad o de aleatoriedad simple para el vector de variables aleatorias $\tilde{\xi}$. Analizaremos a continuación estas cuestiones y, además, estudiaremos la aplicación de la desigualdad de Cantelli para situaciones en las que desconocemos la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ y optamos por obtener una cota inferior para la misma.

a) Caso lineal normal.

Supongamos que para todo $k \in \{1, 2, ..., q\}$ la función objetivo $\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ es lineal, es decir de la forma: $\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \tilde{\mathbf{c}}_k^t\mathbf{x}$. Sea $\tilde{\mathbf{c}}$ vector cuyas componentes son los vectores $\tilde{\mathbf{c}}_k^t$:

$$\tilde{\mathbf{c}} = \left(\tilde{\mathbf{c}}_1^t, \tilde{\mathbf{c}}_2^t, \ldots, \tilde{\mathbf{c}}_q^t\right)^t = \left(\tilde{c}_{11}, \tilde{c}_{12}, \ldots, \tilde{c}_{1n}, \tilde{c}_{21}, \tilde{c}_{22}, \ldots, \tilde{c}_{2n}, \ldots, \tilde{c}_{q1}, \tilde{c}_{q2}, \ldots, \tilde{c}_{qn}\right)^t.$$

Supongamos que el vector $\tilde{\mathbf{c}}$ sigue la distribución normal multivariante de valor esperado $\bar{\mathbf{c}} = \left(\bar{\mathbf{c}}_1^t, \bar{\mathbf{c}}_2^t, \ldots, \bar{\mathbf{c}}_q^t\right)^t = \left(\bar{c}_{11}, \bar{c}_{12}, \ldots, \bar{c}_{1n}, \bar{c}_{21}, \bar{c}_{22}, \ldots, \bar{c}_{2n}, \ldots, \bar{c}_{q1}, \bar{c}_{q2}, \ldots, \bar{c}_{qn}\right)^t$ y matriz de varianzas y covarianzas $\mathbf{V}$ simétrica y definida positiva:

$$\mathbf{V} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
\mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_{12} & \cdots & \mathbf{V}_{1s} & \cdots & \mathbf{V}_{1q} \\ \hline
\mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_2 & \cdots & \mathbf{V}_{2s} & \cdots & \mathbf{V}_{2q} \\ \hline
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline
\mathbf{V}_{k1} & \mathbf{V}_{k2} & \cdots & \mathbf{V}_{ks} & \cdots & \mathbf{V}_{kq} \\ \hline
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline
\mathbf{V}_{q1} & \mathbf{V}_{q2} & \cdots & \mathbf{V}_{qs} & \cdots & \mathbf{V}_q
\end{array}\right)$$

Suponemos que $\mathbf{V}_k$ es simétrica y definida positiva para todo $k \in \{1, 2, \ldots, q\}$.

Bajo las hipótesis establecidas, tenemos que la variable aleatoria $\tilde{f}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{c}}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \tilde{\mathbf{c}}_k^t \mathbf{x}$ sigue la distribución normal de valor esperado $E\{\tilde{f}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{c}})\} = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \bar{\mathbf{c}}_k^t \mathbf{x}$ y varianza:

$$\mathrm{Var}\{\tilde{f}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{c}})\} = \sum_{k=1}^{q} \mu_k^2\, \mathbf{x}^t \mathbf{V}_k \mathbf{x} + 2 \sum_{\substack{k,s=1 \\ k<s}}^{q} \mu_k\, \mu_s \mathbf{x}^t \mathbf{V}_{ks} \mathbf{x}.$$

Así pues, si se desea conocer la probabilidad de que la variable aleatoria $\tilde{f}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{c}}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \tilde{\mathbf{c}}_k^t \mathbf{x}$ sea menor o igual que un valor, $u \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$P\{\tilde{f}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{c}}) \le u\} = P\left\{\sum_{k=1}^{q} \mu_k \tilde{\mathbf{c}}_k^t \mathbf{x} \le u\right\} = \Phi\left(\frac{u - \sum_{k=1}^{q} \mu_k \bar{\mathbf{c}}_k^t \mathbf{x}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 \mathbf{x}^t \mathbf{V}_k \mathbf{x} + 2 \sum_{\substack{k,s=1 \\ k<s}}^{q} \mu_k\, \mu_s \mathbf{x}^t \mathbf{V}_{ks} \mathbf{x}}} \right)$$

De igual forma, si se desea conocer el valor del soporte de distribución, u, tal que la probabilidad de que la variable aleatoria $\tilde{f}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{c}}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \tilde{\mathbf{c}}_k^t \mathbf{x}$ sea igual a β, tenemos que:

$$P\{\tilde{f}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{c}}) \le u\} = \Phi\left(\frac{u - \sum_{k=1}^{q} \mu_k \bar{\mathbf{c}}_k^t \mathbf{x}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 \mathbf{x}^t \mathbf{V}_k \mathbf{x} + 2 \sum_{\substack{k,s=1 \\ k<s}}^{q} \mu_k\, \mu_s \mathbf{x}^t \mathbf{V}_{ks} \mathbf{x}}} \right) = \beta$$

lo que es equivalente a:

$$u = \Phi^{-1}(\beta)\sqrt{\sum_{k=1}^{q}\mu_k^2 \mathbf{x}^t \mathbf{V}_k \mathbf{x} + 2\sum_{\substack{k,s=1\\k<s}}^{q}\mu_k\,\mu_s \mathbf{x}^t \mathbf{V}_{ks}\mathbf{x}} + \sum_{k=1}^{q}\mu_k \bar{\mathbf{c}}_k^t \mathbf{x}$$

b) Caso lineal aleatoriedad simple.

Supongamos que para todo $k \in \{1, 2, ..., q\}$ la función objetivo $\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi})$ es lineal: $\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{c}}) = \tilde{\mathbf{c}}_k^t \mathbf{x}$ y que para todo $k \in \{1, 2, ..., q\}$ se verifica que $\tilde{\mathbf{c}}_k = \mathbf{c}_k^1 + \tilde{t}\,\mathbf{c}_k^2$, es decir, todos los objetivos del problema dependen de una variable aleatoria continua, $\tilde{t}$, con valor esperado $\bar{t}$ y varianza σ_t^2, finita, y su función de distribución, F_t, es estrictamente creciente. Supongamos, además que para todo $\mathbf{x} \in D$ y para todo $k \in \{1, 2, ..., q\}$, se verifica $\mathbf{c}_k^{2t}\mathbf{x} > 0$.

Bajo estas hipótesis tenemos que la variable aleatoria $\tilde{f}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{c}}) = \sum_{k=1}^{q}\mu_k \tilde{\mathbf{c}}_k^t \mathbf{x}$ tiene valor esperado y varianza:

$$E\{\tilde{f}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{c}})\} = \sum_{k=1}^{q}\mu_k \mathbf{c}_k^{1t}\mathbf{x} + \bar{t}\sum_{k=1}^{q}\mu_k \mathbf{c}_k^{2t}\mathbf{x}$$

$$\mathrm{Var}\{\tilde{f}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{c}})\} = \left(\sum_{k=1}^{q}\mu_k \mathbf{c}_k^{2t}\mathbf{x}\right)^2 \sigma_t^2.$$

Si se desea conocer la probabilidad de que la variable aleatoria $\tilde{f}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{c}}) = \sum_{k=1}^{q}\mu_k \tilde{\mathbf{c}}_k^t \mathbf{x}$ sea menor o igual que un valor, $u \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$P\{\tilde{f}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{c}}) \le u\} = P\left(\sum_{k=1}^{q}\mu_k \mathbf{c}_k^{1t}\mathbf{x} + \tilde{t}\sum_{k=1}^{q}\mu_k \mathbf{c}_k^{2t}\mathbf{x} \le u\right) =$$

$$= P\left(\tilde{t} \le \frac{u - \sum_{k=1}^{q}\mu_k \mathbf{c}_k^{1t}\mathbf{x}}{\sum_{k=1}^{q}\mu_k \mathbf{c}_k^{2t}\mathbf{x}}\right) = F_t\left(\frac{u - \sum_{k=1}^{q}\mu_k \mathbf{c}_k^{1t}\mathbf{x}}{\sum_{k=1}^{q}\mu_k \mathbf{c}_k^{2t}\mathbf{x}}\right)$$

De igual forma, si se desea conocer el valor del soporte de distribución, u, tal que la probabilidad de que la variable aleatoria $\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\mathbf{c}}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \tilde{\mathbf{c}}_\mathbf{k}^{\mathbf{t}}\mathbf{x}$ sea menor o igual que u, es igual a β, tenemos que:

$$P\{\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\mathbf{c}}) \leq u\} = F_t\left(\frac{u - \sum_{k=1}^{q} \mu_k \mathbf{c}_\mathbf{k}^{\mathbf{1t}}\mathbf{x}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{q} \mu_k \mathbf{c}_\mathbf{k}^{\mathbf{2t}}\mathbf{x}}}\right) = \beta$$

equivalente a:

$$u = F_t^{-1}(\beta)\sum_{k=1}^{q} \mu_k \mathbf{c}_\mathbf{k}^{\mathbf{2t}}\mathbf{x} + \sum_{k=1}^{q} \mu_k \mathbf{c}_\mathbf{k}^{\mathbf{1t}}\mathbf{x}$$

c) Aplicación de la desigualdad de Cantelli.

Como se ha señalado anteriormente en este trabajo, en los casos en los que desconocemos la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ es posible obtener una cota inferior para la misma aplicando sobre ésta la desigualdad de Cantelli.

En este caso, para la variable aleatoria $\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})$, tenemos que si aplicamos la desigualdad de Cantelli para obtener una cota inferior de la probabilidad de que la variable aleatoria $\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ sea menor o igual que un valor, $u \in \mathbb{R}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} P\left(\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq u\right) &= P\left(\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) - E\{\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \leq u - E\{\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right) \\ &\geq \frac{\left(u - E\{\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2}{\operatorname{Var}\left(\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right) + \left(u - E\{\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)^2} \end{aligned}$$

con $E\{\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \leq u$.

Como puede observarse, el valor de esta cota depende del valor esperado y de la varianza de la variable aleatoria $\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})$. Puesto que la expresión de la varianza de esta variable es:

$$\mathrm{Var}\left\{\sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right\} = \sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 \, \mathrm{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} + 2\sum_{\substack{k,s=1 \\ k<s}}^{q} \mu_k \, \mu_s \, \mathrm{cov}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi}),\tilde{z}_s(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}$$

el valor de la cota dependerá de las covarianzas entre objetivos estocásticos y se pueden considerar los casos vistos en el apartado 2.2 de este capítulo, donde se ha obtenido la varianza de la función objetivo del problema ponderado para el caso lineal y para el caso cuadrático.

Además, si lo que se desea es determinar el valor u tal que la probabilidad de que la variable aleatoria $\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ es menor o igual que u, sea mayor o igual que β, tenemos que cualquier vector $\mathbf{x}$ que verifique:

$$\sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} + \sum_{k=1}^{q} \mu_k E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \leq u$$

verificará también $P(\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq u) \geq \beta$, como se ha comprobado en el capítulo 2, aunque, como sabemos, dado que estamos tomando una cota inferior de la función de distribución, pueden existir puntos, $\mathbf{x}$, que aún no verificando la desigualdad anterior, verifiquen $P(\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq u) \geq \beta$.

Una vez analizadas las características estadísticas de la función $\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})$, pasamos a analizar la resolución del problema de programación estocástica:

$$\begin{array}{lll} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} & \tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi}) & \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D & \end{array} \qquad \text{(AE)}$$

Para ello consideramos los criterios estudiados en el capítulo de Programación Estocástica de este trabajo: valor esperado, varianza, criterio mínimo riesgo y criterio de Kataoka. Una vez aplicado cada criterio analizamos la posible relación entre la solución del mismo y los conceptos de solución eficiente de un problema de programación estocástica multiobjetivo definidos en el capítulo cuatro de este trabajo.

3. RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA PONDERADO MEDIANTE EL CRITERIO VALOR ESPERADO.

Consideremos el problema ponderado:

$$\begin{array}{ll} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} & \tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{(AE)}$$

y apliquemos sobre el mismo el criterio valor esperado. A partir de los resultados obtenidos en el apartado 2.1 de este capítulo, el problema determinista equivalente que se obtiene es:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & E\{\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} = \sum_{k=1}^{q} \mu_k E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad (1)$$

Así pues, si aplicamos el criterio valor esperado al problema (AE) el problema resultante minimiza una combinación lineal del valor esperado de los objetivos estocásticos del problema original y los coeficientes de esa combinación lineal no son más que los pesos asignados a los objetivos estocásticos en la primera etapa de la resolución del problema. Es decir, el problema obtenido es el mismo que si hubiésemos resuelto el problema de programación estocástica multiobjetivo original mediante el enfoque multiobjetivo, transformando el problema en su determinista equivalente aplicando el criterio valor esperado a cada uno de los objetivos estocásticos del problema y aplicando, posteriormente, el método de la ponderación para obtener soluciones eficientes valor esperado.

En base al concepto de solución eficiente valor esperado y de los resultados de la programación multiobjetivo determinista, puesto que los pesos, μ_k, $k \in \{1, 2, ..., q\}$ son no negativos, para cada vector, $\mu \in \mathbb{R}^{q+}$, se verifica:

a) Si la solución al problema (AE) mediante el criterio valor esperado es única, entonces es eficiente valor esperado.

b) Si la solución mediante el criterio valor esperado al problema (AE) no es única, entonces éstas son débilmente eficientes valor esperado.

c) Si los pesos fijados son todos estrictamente positivos, $\mu \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}^{q+}$, la solución obtenida al problema (AE) mediante el criterio valor esperado es solución propiamente eficiente valor esperado.

Como sabemos, en general, cuando se aplica el método de la ponderación a un problema multiobjetivo, pueden existir soluciones eficientes que no se obtienen mediante el método de la ponderación. En nuestro caso, esto se traduce en que puede existir una solución, $\mathbf{x}^* \in D$, propiamente eficiente valor esperado, y no existir un vector $\mu \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}^{q+}$ tal que $\mathbf{x}^*$ sea solución del problema:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & E\{\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} = \sum_{k=1}^{q} \mu_k E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array}$$

Sin embargo, bajo las hipótesis de convexidad del conjunto de oportunidades (hipótesis que mantenemos en este trabajo) y de las funciones objetivo del problema (hipótesis que se verifica si las funciones objetivo del problema estocástico son lineales o cuadráticas), tenemos asegurado que si $\mathbf{x}^* \in D$, es solución propiamente eficiente valor esperado, existe un vector $\mu \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}^{p+}$ tal que $\mathbf{x}^*$ es solución del problema:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & E\{\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} = \sum_{k=1}^{q} \mu_k E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array}$$

4. RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA PONDERADO MEDIANTE EL CRITERIO MÍNIMA VARIANZA.

Consideremos ahora la resolución del problema (AE):

$$\begin{array}{ll} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} & \tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{(AE)}$$

aplicando el criterio mínima varianza. Como ya se ha analizado anteriormente, la varianza de la variable aleatoria $\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ viene dada por la expresión:

$$\operatorname{Var}\left\{\sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right\} = \sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 \operatorname{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} + 2\sum_{\substack{k,s=1 \\ k<s}}^{q} \mu_k \, \mu_s \operatorname{cov}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi}), \tilde{z}_s(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}$$

con lo cual, si aplicamos el criterio mínima varianza para resolver el problema (AE), el problema que se genera es:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 \operatorname{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} + 2\sum_{\substack{k,s=1 \\ k<s}}^{q} \mu_k \, \mu_s \operatorname{cov}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi}), \tilde{z}_s(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{(AE-}\sigma^2\text{)}$$

Relacionamos las soluciones de este problema con otro de los conceptos de solución eficiente definidos en el enfoque multiobjetivo, el de solución eficiente mínima varianza, que en este trabajo denotamos como $\mathcal{E}_{\sigma^2}$ y está formado por el conjunto de soluciones eficientes del problema:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \left(\operatorname{Var}\{\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}, \operatorname{Var}\{\tilde{z}_2(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}, \ldots, \operatorname{Var}\{\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right) \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad (\sigma^2)$$

Para establecer estas relaciones distinguimos entre el caso en el que las covarianzas entre los objetivos estocásticos son todas iguales a cero y el caso en el que algunas de éstas alcancen valores no nulos.

En caso de que todas las covarianzas entre objetivos sean nulas, es decir, si se cumple que:

$$\operatorname{cov}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi}),\tilde{z}_s(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} = 0 \text{ para todo } k, s \in \{1, 2, ..., q\}, \text{ con } k \neq s$$

entonces, el problema (AE-σ^2), correspondiente a aplicar el criterio mínima varianza al problema ponderado (AE), es

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 \operatorname{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad (2)$$

es decir, el problema resultante es el que se hubiese obtenido si hubiésemos resuelto el problema de programación estocástica multiobjetivo mediante el enfoque multiobjetivo aplicando a cada objetivo estocástico el criterio mínima varianza y, posteriormente, aplicásemos al problema multiobjetivo determinista equivalente el método de la ponderación. A partir de los resultados de la programación multiobjetivo determinista, se tiene que:

a) Si la solución al problema (2) es única, entonces es eficiente mínima varianza.

b) Si la solución al problema (2) no es única, entonces éstas son débilmente eficientes mínima varianza.

c) Si los pesos fijados son todos estrictamente positivos, $\mu \in \overset{o}{\mathbb{R}}{}^{q+}$, la solución al problema (2) es solución propiamente eficiente mínima varianza.

Por otro lado, a partir de los resultados de la programación multiobjetivo determinista, vistos en el capítulo 1, sabemos, además, que si se verifica la convexidad de la funciones objetivo y del conjunto de oportunidades de un problema de programación multiobjetivo, el conjunto de soluciones propiamente eficientes de éste queda determinado por las soluciones del problema ponderado, y esto se verifica en el caso lineal y en el caso cuadrático normal bajo determinadas hipótesis, puesto que suponemos que el conjunto de oportunidades del problema, D, es convexo.

Todos estos resultados corresponden al caso en el que las covarianzas entre objetivos son nulas, con lo cual, no podemos afirmar todo esto si alguno de los objetivos estocásticos tienen covarianza no nula. En estos casos, para cada vector $\mu \in \mathbb{R}^{q+}$, la solución óptima del problema (AE-σ^2):

$$\begin{array}{ll} \operatorname*{Min}_{\mathbf{x}} \sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 \operatorname{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} + 2\sum_{\substack{k,s=1\\ k<s}}^{q} \mu_k \mu_s \operatorname{cov}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi}), \tilde{z}_s(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} & \\ \text{s. a} \quad \mathbf{x} \in D & \end{array} \qquad (\text{AE-}\sigma^2)$$

no tiene porqué ser eficiente mínima varianza, tal y como se ilustra en el siguiente contraejemplo, en el que se plantea un problema estocástico biobjetivo lineal con objetivos estocásticos y las covarianzas entre estos son no nulas.

Ejemplo.

Consideremos el siguiente problema de programación estocástica biobjetivo:

$$
\begin{array}{ll}
\text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} & \left(\tilde{c}_{11}x_1 + \tilde{c}_{12}x_2, \tilde{c}_{21}x_1 + \tilde{c}_{22}x_2\right) \\
\text{s.a} & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\
 & x_1, x_2 \leq 3 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

con $\tilde{\mathbf{c}} = (\tilde{c}_{11}, \tilde{c}_{12}, \tilde{c}_{21}, \tilde{c}_{22})^t$ vector estocástico con matriz de varianzas y covarianzas definida positiva:

$$
\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 25 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}
$$

con lo cual tenemos que $\text{Var}(\tilde{\mathbf{c}}_1^t\mathbf{x}) = 25x_1^2 + 25x_2^2$, $\text{Var}(\tilde{\mathbf{c}}_2^t\mathbf{x}) = x_1^2 + 9x_2^2$, $\text{cov}(\tilde{\mathbf{c}}_1^t\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{c}}_2^t\mathbf{x}) = 6x_1x_2$ y la varianza de la función $\mu_1\tilde{\mathbf{c}}_1^t\mathbf{x} + \mu_2\tilde{\mathbf{c}}_2^t\mathbf{x}$ es

$$
\text{Var}\left\{\mu_1\tilde{\mathbf{c}}_1^t\mathbf{x} + \mu_2\tilde{\mathbf{c}}_2^t\mathbf{x}\right\} = \mu_1^2(25x_1^2 + 25x_2^2) + \mu_2^2(x_1^2 + 9x_2^2) + 2\mu_1\mu_2(6x_1x_2)
$$

Si resolvemos el problema anterior mediante el enfoque estocástico, ponderando los objetivos estocásticos con pesos μ_1 y μ_2 y aplicando después el criterio mínima varianza el problema que obtenemos es:

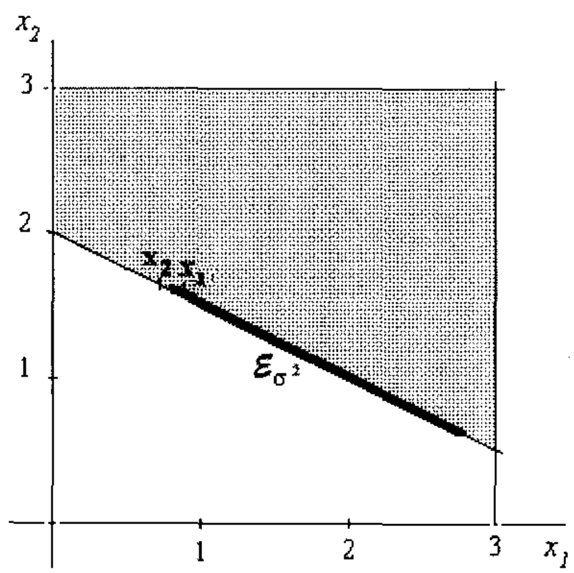
$$
\begin{array}{ll}
\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \text{Var}\left\{\mu_1\tilde{\mathbf{c}}_1^t\mathbf{x} + \mu_2\tilde{\mathbf{c}}_2^t\mathbf{x}\right\} = \mu_1^2(25x_1^2 + 25x_2^2) + \mu_2^2(x_1^2 + 9x_2^2) + 2\mu_1\mu_2(6x_1x_2) \\
\text{s.a} & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\
 & x_1, x_2 \leq 3 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array} \qquad (3)
$$

Si damos pesos $\mu_1 = 0.4$, $\mu_2 = 0.6$ a este problema obtenemos la solución $\mathbf{x}_1 = (0.9217759, 1.539112)^t$. Para los pesos $\mu_1 = 0.6$, $\mu_2 = 0.4$ la solución que obtenemos es $\mathbf{x}_2 = (0.731849, 1.634076)^t$.

Por otro lado, el conjunto de soluciones eficientes mínima varianza para este problema viene dado por el conjunto de soluciones eficientes al problema biobjetivo que recoge las varianzas de los dos objetivos estocásticos del problema. Puesto que el conjunto de oportunidades es cerrado y acotado, tenemos asegurada la existencia de soluciones eficientes para el mismo. En nuestro ejemplo, las soluciones eficientes mínima varianza son las del problema:

$$\begin{aligned}
&\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} \left(25x_1^2 + 25x_2^2, x_1^2 + 9x_2^2\right) \\
&\text{s.a} \quad x_1 + 2x_2 \geq 4 \\
&\qquad\; x_1, x_2 \leq 3 \\
&\qquad\; x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

que recoge las varianzas de los objetivos estocásticos. En la siguiente gráfica aparece este conjunto, que denotamos como $\mathcal{E}_{\sigma^2}$.



Como puede observarse, la solución $\mathbf{x}_1$ obtenida al dar pesos $\mu_1 = 0.4$, $\mu_2 = 0.6$ al problema (3) es solución eficiente mínima varianza mientras que la solución $\mathbf{x}_2$, obtenida al fijar los pesos los pesos $\mu_1 = 0.6$, $\mu_2 = 0.4$ en el problema (3) es dominada.■

A partir de este ejemplo, tenemos que si aplicamos el criterio mínima varianza al problema ponderado (AE):

$$\begin{aligned} &\text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} \quad \tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} u_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \\ &\text{s. a} \quad \mathbf{x} \in D \end{aligned} \tag{AE}$$

la solución obtenida no tiene porqué ser eficiente varianza. Esto está asegurado sólo si las covarianzas entre las funciones objetivo son nulas.

Como sabemos, la covarianza entre dos variables aleatorias es una medida de la dependencia entre ellas. En este sentido, sabemos que si dos variables aleatorias son independientes, entonces su covarianza es nula. Lo contrario, en general, no es cierto, es decir, que la covarianza sea nula no implica, en general, que las variables aleatorias sean independientes[1].

De esta forma, tenemos que mediante la aplicación del criterio mínima varianza para resolver el problema de programación estocástica multiobjetivo mediante el enfoque estocástico y aplicando el método de la ponderación, se recoge, en cierto modo, la dependencia entre los objetivos estocásticos. Recuérdese que la crítica fundamental a la aplicación del enfoque multiobjetivo es la de que, al obtener el determinista equivalente, se aplica un criterio de transformación a cada función objetivo por separado, lo que implica que, en la resolución del problema de programación estocástica de objetivos múltiples, no se tiene en cuenta la posible dependencia estocástica entre objetivos. El método propuesto sí que recoge la dependencia entre estos, aunque sólo de manera parcial en términos de covarianzas, puesto que puede ocurrir que su valor sea cero aun

[1]En el caso normal se verifica la implicación a ambos lados, es decir, la covarianza entre dos variables aleatorias normales es cero si y sólo si su covarianza es nula.

existiendo dependencia entre los objetivos estocásticos; incluso puede que los objetivos estocásticos sean independientes dos a dos y, sin embargo exista dependencia de los q objetivos, variables aleatorias, del problema, tal y como muestran, mediante un ejemplo, Hogg y Craig (1989), pág. 89.

5. RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA PONDERADO MEDIANTE LOS CRITERIOS DE MÁXIMA PROBABILIDAD.

Consideremos ahora la aplicación de los criterios de máxima probabilidad (mínimo riesgo y de Kataoka) al problema ponderado:

$$\begin{array}{ll} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} & \tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \tag{AE}$$

Para aplicar el criterio mínimo riesgo a este problema hemos de fijar un valor u (nivel de aspiración del objetivo del problema) y maximizamos la probabilidad de que la variable aleatoria $\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ no supere dicho valor. El problema determinista equivalente que se genera es:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Max}} & P\left\{ \sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \le u \right\} \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array}$$

Dado que $\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ es función de las q funciones objetivo del problema, la elección del valor u para el problema anterior no es una cuestión trivial. Obsérvese que este nivel se ha de fijar para la variable aleatoria $\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})$, pero esta variable no es un objetivo del problema de programación estocástica multiobjetivo de partida, sino que ha sido construida a partir del mismo para resolverlo, con lo cual, el valor u, que en la programación estocástica es el nivel de aspiración que el decisor fija para el objetivo estocástico, deja ahora de tener ese significado. Esto podría dar lugar a considerar que el criterio mínimo riesgo no es aplicable al problema ponderado, aunque técnicamente sí es posible aplicarlo, tal y como se deduce de los resultados obtenidos en el apartado 2.3 de este capítulo. Sin embargo, podemos plantearnos la posibilidad de determinar el valor u a partir de un nivel de aspiración para cada objetivo. En ese caso, el decisor debe determinar un nivel de aspiración, u_k, para cada función objetivo y calculamos el nivel u como la suma de los niveles fijados por el decisor, ponderando cada uno de estos niveles con el peso asignado al objetivo correspondiente, es decir: $u = \sum_{k=1}^{q} \mu_k u_k = \mu^t \mathbf{u}$. De esta forma, el nivel u queda fijado en función de los niveles de aspiración que fija el decisor para cada función objetivo, pero ponderado según la importancia que se le da a cada uno de ellos en función del peso asignado a cada objetivo y el problema determinista equivalente es:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Max}} & P\left(\sum_{k=1}^{q} \mu_k\, \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq \sum_{k=1}^{q} \mu_k u_k\right) \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad (4)$$

Por otro lado, si se considera la aplicación del criterio de Kataoka al problema ponderado (AE), el problema determinista equivalente que se genera es:

$$\begin{array}{ll} & \underset{(\mathbf{x}^t, u)}{\text{Min}} \; u \\ \text{s.a} & P\left(\sum_{k=1}^{q} \mu_k\, \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq u\right) = \beta \\ & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad (5)$$

donde β es la probabilidad que se fija para el problema. La resolución de este problema determina el menor nivel u que puede alcanzar la función objetivo del problema ponderado con probabilidad β. De nuevo surge la cuestión de si es o no conveniente aplicar este criterio para resolver el problema de programación estocástica multiobjetivo de partida, puesto que, si bien es posible técnicamente resolver el problema planteado en determinados casos (tal y como puede deducirse a partir de los resultados obtenidos en el apartado 2.3 de este capítulo), la aplicación de este criterio sobre el problema ponderado (AE) conlleva la necesidad de fijar una probabilidad sobre la variable aleatoria $\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k\, \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})$, función que se construye a partir de los objetivos estocásticos del problema de partida, que, en general, son de distinta naturaleza.

Esto puede dar lugar a que se considere poco apropiado la aplicación de este criterio. A pesar de todo esto, en este apartado analizaremos el problema determinista equivalente mediante este criterio. Para fijar la probabilidad $\beta \in (0,1)$ del problema (5), puede considerarse la posibilidad de pedir al decisor que fije una probabilidad para cada uno de los objetivos estocásticos, $\beta_k{}^* \in (0,1)$, y, suponiendo que el vector de pesos μ es de norma uno (en otro caso habría que normalizar los pesos), fijamos la probabilidad β del problema (5) como:

$$\beta = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \beta_k{}^*$$

La razón fundamental para aplicar al problema (AE) el criterio de Kataoka y plantear la resolución del problema (5), es que, como se vio en el capítulo 2 de este trabajo, existe una reciprocidad entre los problemas (4) y (5), lo que nos servirá para establecer relaciones entre las soluciones a estos problemas y alguno de los conceptos de solución eficiente de problemas de programación estocástica multiobjetivo, definidos en el capítulo 4 de este trabajo.

Así, consideremos los problemas:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Max}} & P\left(\sum_{k=1}^{q} \mu_k\, \tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \le u\right) \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \tag{4}$$

$$\begin{array}{ll} & \underset{(\mathbf{x}^t, u)}{\text{Min}} \quad u \\ \text{s.a} & P\left(\sum_{k=1}^{q} \mu_k\, \tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \le u\right) = \beta \\ & \mathbf{x} \in D \end{array} \tag{5}$$

correspondientes a la aplicación del criterio mínimo riesgo y de Kataoka al problema (AE). Suponemos que la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{f}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k\, \tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi})$ es estrictamente creciente. A partir de los teoremas 1 y 2 del capítulo 3 se verifica:

- Si $\mathbf{x}^*$ es solución del problema (4) para un nivel de aspiración u, entonces $(\mathbf{x}^{*t}, u)^t$ es solución del problema (5) para un nivel de probabilidad $\beta = P\{\tilde{f}(\mathbf{x}^*, \tilde{\xi}) \leq u\}$.

- Si $(\mathbf{x}^{*t}, u^*)^t$ es solución del problema (5) para una probabilidad β entonces $\mathbf{x}^*$ es solución del problema (4) para un nivel de aspiración $u = u^*$.

Aplicaremos estos resultados en el análisis que vamos a realizar a continuación. Además, al igual que en el estudio realizado al aplicar los criterios valor esperado y varianza, consideraremos las relaciones entre las soluciones óptimas a los problemas (4) y (5) y algunos de los conceptos de solución eficiente definidos en el enfoque multiobjetivo (capítulo 4).

Puesto que en los problemas (4) y (5) interviene la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k\, \tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi})$, para poder resolver estos problemas hemos de establecer hipótesis adicionales acerca de la estructura del problema y de la distribución de los parámetros aleatorios del mismo. A partir del análisis realizado en el apartado 2.3 de este capítulo, acerca de la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{f}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k\, \tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi})$, sabemos que podemos determinar el valor de la función objetivo del problema anterior en el caso lineal bajo la hipótesis de aleatoriedad simple o de normalidad. En otro caso, podemos obtener una cota inferior para la función objetivo del problema aplicando la desigualdad de Cantelli. Analizamos a continuación estos tres casos.

En el caso lineal con aleatoriedad simple se analiza la existencia de relación entre las soluciones al problema ponderado mediante el criterio de Kataoka (problema (5)) y el conjunto de soluciones eficientes del problema de programación estocástica multiobjetivo de partida con probabilidades $\beta_1, \ldots, \beta_q$. Una vez establecida esta relación, puesto que:

•Toda solución óptima de (5) lo es también del problema (4).

•Por el teorema 2 del capítulo 4 sabemos que si se verifica que la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})$ es continua y estrictamente creciente, para todo $k \in \{1, 2, ..., q\}$, entonces **x** es solución eficiente del problema (MR(**u**)) si y sólo si $(\mathbf{x}^t, \mathbf{u}^t)^t$ es solución eficiente del problema (K(β)), con **u** y β tales que:

$$P\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \leq u_k\} = \beta_k \text{ para todo } k \in \{1, 2, ..., q\}.$$

se obtiene también la relación entre la solución óptima al problema ponderado mediante el criterio mínimo riesgo y el conjunto de soluciones eficientes mínimo riesgo de niveles de aspiración $u_1, \ldots, u_q$.

En el caso lineal normal se analiza la relación entre la solución óptima del problema (5) y el conjunto de soluciones eficientes valor esperado desviación estándar del problema multiobjetivo estocástico. Esta misma relación se analiza también para el problema resultante de aplicar la desigualdad de Cantelli al problema (5).

Vemos a continuación estas relaciones.

5.1. CASO LINEAL ALEATORIEDAD SIMPLE.

Supongamos que para todo $k \in \{1, 2, ..., q\}$ la función objetivo $\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi})$ es lineal: $\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{c}}) = \tilde{\mathbf{c}}_k^t\mathbf{x}$ y que todos los objetivos estocásticos dependen de una misma variable aleatoria, $\tilde{t}$, de manera que para todo $k \in \{1,, 2, ...,q\}$ se verifica que $\tilde{\mathbf{c}}_k = \mathbf{c}_k^1 + \tilde{t}\,\mathbf{c}_k^2$. Suponemos que la variable aleatoria $\tilde{t}$ es continua, de valor esperado $\bar{t}$ y varianza σ_t^2, finita, y que su función de distribución, F_t, es estrictamente creciente. Suponemos, además, que para todo $\mathbf{x} \in D$ y para todo $k \in \{1, 2, ..., q\}$, se verifica $\mathbf{c}_k^{2t}\mathbf{x} > 0$.

Si se verifican estas hipótesis, a partir de los resultados obtenidos en el apartado 3.2, tenemos que la probabilidad de que la variable aleatoria $\tilde{f}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{c}}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \tilde{\mathbf{c}}_k^t\mathbf{x}$ sea menor o igual que $u = \sum_{k=1}^{q} \mu_k u_k$ es:

$$P\left(\sum_{k=1}^{q} \mu_k \mathbf{c}_k^{1t}\mathbf{x} + \tilde{t}\sum_{k=1}^{q} \mu_k \mathbf{c}_k^{2t}\mathbf{x} \leq u\right) = F_t\left(\frac{u - \sum_{k=1}^{q} \mu_k \mathbf{c}_k^{1t}\mathbf{x}}{\sum_{k=1}^{q} \mu_k \mathbf{c}_k^{2t}\mathbf{x}}\right).$$

Puesto que suponemos que la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{t}$, F_t, es estrictamente creciente y continua, maximizar esta función es equivalente a maximizar su argumento, por lo que el problema que debemos resolver bajo las hipótesis establecidas es:

$$\begin{array}{ll} \operatorname*{Max}_{\mathbf{x}} & \dfrac{u - \sum_{k=1}^{q} \mu_k \mathbf{c}_k^{1t}\mathbf{x}}{\sum_{k=1}^{q} \mu_k \mathbf{c}_k^{2t}\mathbf{x}} \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \tag{6}$$

Por otro lado, si consideramos la aplicación del criterio de Kataoka sobre el problema (AE), puesto que:

$$P\left(\sum_{k=1}^{q}\mu_k \mathbf{c}_k^{1t}\mathbf{x} + \tilde{t}\sum_{k=1}^{q}\mu_k \mathbf{c}_k^{2t}\mathbf{x} \leq u\right) = F_t\left(\frac{u - \sum_{k=1}^{q}\mu_k \mathbf{c}_k^{1t}\mathbf{x}}{\sum_{k=1}^{q}\mu_k \mathbf{c}_k^{2t}\mathbf{x}}\right) = \beta$$

implica:

$$u = \sum_{k=1}^{q}\mu_k \mathbf{c}_k^{1t}\mathbf{x} + F_t^{-1}(\beta)\sum_{k=1}^{q}\mu_k \mathbf{c}_k^{2t}\mathbf{x}$$

el problema correspondiente al criterio de Kataoka es:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \sum_{k=1}^{q}\mu_k \mathbf{c}_k^{1t}\mathbf{x} + F_t^{-1}(\beta)\sum_{k=1}^{q}\mu_k \mathbf{c}_k^{2t}\mathbf{x} \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \tag{7}$$

Una vez planteados los problemas correspondientes a los dos criterios, pasamos a analizar la relación existente entre la solución óptima del problema (7) y el conjunto de soluciones eficientes con probabilidades $\beta_1, \ldots, \beta_q$.

A partir de los resultados obtenidos en el apartado 4.3b del capítulo 4, si se verifican las hipótesis establecidas al principio de este apartado, el conjunto de soluciones eficientes con probabilidades $\beta_1, \ldots, \beta_q$ del problema multiobjetivo estocástico de partida es el del siguiente problema multiobjetivo:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \left(\mathbf{c}_1^{1t}\mathbf{x} + F_t^{-1}(\beta_1)\mathbf{c}_1^{2t}\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{c}_q^{1t}\mathbf{x} + F_t^{-1}(\beta_q)\mathbf{c}_q^{2t}\mathbf{x}\right) \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array}$$

Si la probabilidad fijada para cada uno de los objetivos es la misma e igual a la que se fijó en el problema ponderado: $\beta_1 = \ldots = \beta_q = \beta$ tenemos que el conjunto de soluciones eficientes con probabilidad β para el problema de programación estocástica multiobjetivo es el del siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{Min}} & \left(\mathbf{c}_1^{1t}\mathbf{x} + F_t^{-1}(\beta)\mathbf{c}_1^{2t}\mathbf{x}, \dots, \mathbf{c}_q^{1t}\mathbf{x} + F_t^{-1}(\beta)\mathbf{c}_q^{2t}\mathbf{x}\right) \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \tag{8}$$

A partir de aquí, si comparamos los problemas (7) y (8) se observa que si para obtener soluciones eficientes del problema (8) se aplica el método de las ponderaciones, el problema que se obtiene es el problema (7). Es decir, en este caso, si se pondera el problema de programación estocástica multiobjetivo y se aplica sobre éste el criterio de Kataoka para una probabilidad β se ha de resolver el mismo problema que si se aplica el criterio de Kataoka a cada objetivo por separado, fijando la misma probabilidad para todos los objetivos estocásticos y, para obtener soluciones eficientes de éste se aplica el método de las ponderaciones.

Así pues, a partir del concepto de solución eficiente con probabilidad β y de los resultados de la programación multiobjetivo, podemos asegurar, bajo las hipótesis establecidas, que para cada vector $\mu \in \mathbb{R}^{q+}$, se verifica:

a) Si la solución del problema (7) es única, entonces es solución eficiente del problema de programación estocástica multiobjetivo con probabilidad β.

b) Si la solución del problema (7) no es única, entonces éstas son soluciones débilmente eficientes con probabilidad β del problema de programación estocástica multiobjetivo.

c) Si todos los pesos fijados en el problema (7) son estrictamente positivos, $\mu \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^{q+}$, entonces la solución de este problema es propiamente eficiente con probabilidad β del problema de programación estocástica multiobjetivo.

d) Bajo la hipótesis de que el conjunto de oportunidades D es convexo, dado que las funciones objetivo del problema son lineales, podemos asegurar que si $\mathbf{x}^*$ es solución propiamente eficiente con probabilidad β, existe un vector de pesos con componentes estrictamente positivas $\mu \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}^{q+}$, tal que $\mathbf{x}^*$ es solución óptima del problema (7).

Además, estas relaciones se verifican también para el problema (4), correspondiente a la aplicación del criterio mínimo riesgo al problema ponderado, y el conjunto de soluciones eficientes mínimo riesgo de niveles de aspiración $u_1, \ldots, u_q$ del problema de programación estocástica multiobjetivo.

5.2. OBJETIVOS LINEALES CON DISTRIBUCIÓN NORMAL.

Supongamos que para todo $k \in \{1, 2, ..., q\}$ la función objetivo $\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi})$ es lineal: $\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) = \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{t}}\mathbf{x}$.

Sea $\tilde{\mathbf{c}} = \left(\tilde{\mathbf{c}}_1^{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{c}}_2^{\mathbf{t}}, \dots, \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{t}}\right)^{\mathbf{t}} = \left(\tilde{c}_{11}, \tilde{c}_{12}, \dots, \tilde{c}_{1n}, \tilde{c}_{21}, \tilde{c}_{22}, \dots, \tilde{c}_{2n}, \dots, \tilde{c}_{q1}, \tilde{c}_{q2}, \dots, \tilde{c}_{qn}\right)^t$. Supongamos que el vector $\tilde{\mathbf{c}}$ sigue la distribución normal multivariante de valor esperado $\bar{\mathbf{c}} = \left(\bar{\mathbf{c}}_1^{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{c}}_2^{\mathbf{t}}, \dots, \bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{t}}\right)^{\mathbf{t}} = \left(\bar{c}_{11}, \bar{c}_{12}, \dots, \bar{c}_{1n}, \bar{c}_{21}, \bar{c}_{22}, \dots, \bar{c}_{2n}, \dots, \bar{c}_{q1}, \bar{c}_{q2}, \dots, \bar{c}_{qn}\right)^t$ y matriz de varianzas y covarianzas $\mathbf{V}$, simétrica y definida positiva:

$$\mathbf{V} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \mathbf{V_1} & \mathbf{V_{12}} & \cdots & \mathbf{V_{1s}} & \cdots & \mathbf{V_{1q}} \\ \hline \mathbf{V_{21}} & \mathbf{V_2} & \cdots & \mathbf{V_{2s}} & \cdots & \mathbf{V_{2q}} \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline \mathbf{V_{k1}} & \mathbf{V_{k2}} & \cdots & \mathbf{V_{ks}} & \cdots & \mathbf{V_{kq}} \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline \mathbf{V_{q1}} & \mathbf{V_{q2}} & \cdots & \mathbf{V_{qs}} & \cdots & \mathbf{V_q} \end{array}\right)$$

Si se verifican estas hipótesis, a partir de los resultados obtenidos en el apartado 2.3 de este capítulo, tenemos que la probabilidad de que la variable aleatoria $\tilde{f}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{c}}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{t}}\mathbf{x}$ sea menor o igual que $u = \sum_{k=1}^{q} \mu_k u_k$ es:

$$P\left\{\sum_{k=1}^{q} \mu_k \tilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{t}}\mathbf{x} \le \sum_{k=1}^{q} \mu_k u_k\right\} = \Phi\left(\frac{\sum_{k=1}^{q} \mu_k \left(u_k - \bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{t}}\mathbf{x}\right)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 \mathbf{x}^{\mathbf{t}}\mathbf{V}_{\mathbf{k}}\mathbf{x} + 2\sum_{\substack{k,s=1 \\ k<s}}^{q} \mu_k \mu_s \mathbf{x}^{\mathbf{t}}\mathbf{V}_{\mathbf{ks}}\mathbf{x}}}\right)$$

Puesto que la función Φ es estrictamente creciente, maximizamos su argumento, con lo cual el problema resultante es:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{Max}} & \dfrac{\sum_{k=1}^{q} \mu_k \left(u_k - \overline{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{t}} \mathbf{x}\right)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 \mathbf{x}^{\mathbf{t}} \mathbf{V}_{\mathbf{k}} \mathbf{x} + 2 \sum_{\substack{k,s=1 \\ k<s}}^{q} \mu_k \mu_s \mathbf{x}^{\mathbf{t}} \mathbf{V}_{\mathbf{ks}} \mathbf{x}}} \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \tag{9}$$

Consideremos ahora la resolución del problema ponderado mediante el criterio de Kataoka. Fijada una probabilidad β, tenemos que:

$$P\left\{\sum_{k=1}^{q} \mu_k \widetilde{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{t}} \mathbf{x} \le u\right\} = \Phi\left(\dfrac{u - \sum_{k=1}^{q} \mu_k \overline{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{t}} \mathbf{x}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 \mathbf{x}^{\mathbf{t}} \mathbf{V}_{\mathbf{k}} \mathbf{x} + 2 \sum_{\substack{k,s=1 \\ k<s}}^{q} \mu_k \mu_s \mathbf{x}^{\mathbf{t}} \mathbf{V}_{\mathbf{ks}} \mathbf{x}}}\right) = \beta$$

lo que implica:

$$u = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \overline{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{t}} \mathbf{x} + \Phi^{-1}(\beta) \sqrt{\sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 \mathbf{x}^{\mathbf{t}} \mathbf{V}_{\mathbf{k}} \mathbf{x} + 2 \sum_{\substack{k,s=1 \\ k<s}}^{q} \mu_k \mu_s \mathbf{x}^{\mathbf{t}} \mathbf{V}_{\mathbf{ks}} \mathbf{x}}$$

con lo cual, la solución al problema ponderado (AE) mediante el criterio de Kataoka viene dada por la solución del problema:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{Min}} & \sum_{k=1}^{q} \mu_k \overline{\mathbf{c}}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{t}} \mathbf{x} + \Phi^{-1}(\beta) \sqrt{\sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 \mathbf{x}^{\mathbf{t}} \mathbf{V}_{\mathbf{k}} \mathbf{x} + 2 \sum_{\substack{k,s=1 \\ k<s}}^{q} \mu_k \mu_s \mathbf{x}^{\mathbf{t}} \mathbf{V}_{\mathbf{ks}} \mathbf{x}} \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \tag{10}$$

Puesto que la función de distribución de la normal es estrictamente creciente y continua, en este caso se mantiene la reciprocidad entre las soluciones óptimas del problema (9), correspondiente a la aplicación del criterio mínimo riesgo al problema ponderado, y del problema (10), resultado de aplicar el criterio de Kataoka.

Obsérvese que el problema (10) podemos expresarlo también como:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} & \sum_{k=1}^{q} \mu_k E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} + \alpha\sqrt{\text{Var}\{\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \tag{11}$$

con:

- $E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} = \mathbf{\bar{c}}_k^t\mathbf{x}$,

- $\text{Var}\{\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} = \sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 \text{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} + 2\sum_{\substack{k,s=1\\k<s}}^{q} \mu_k\,\mu_s \,\text{cov}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi}), \tilde{z}_s(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} =$
$= \sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 \mathbf{x}^t\mathbf{V}_k\mathbf{x} + 2\sum_{\substack{k,s=1\\k<s}}^{q} \mu_k\,\mu_s \mathbf{x}^t\mathbf{V}_{ks}\mathbf{x}$

- $\alpha = \Phi^{-1}(\beta)$.

Una vez planteados estos dos problemas, nos cuestionamos de nuevo la posible existencia de relación entre las soluciones óptimas de éstos y alguno de los conceptos de solución eficiente de problemas de programación estocástica multiobjetivo, definidos en el capítulo 4 de este trabajo. El concepto de eficiencia con el que relacionamos la solución óptima del problema (11) es el de solución eficiente valor esperado desviación estándar. Tal y como se vio en el capítulo 4, dado el problema de programación estocástica multiobjetivo (PEM), el conjunto de soluciones eficientes valor esperado desviación estándar, que denotamos como $\mathcal{E}_{E\sigma}$, es el del siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} \left(E\{\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi})\},\ldots,E\{\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}, \sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}},\ldots,\sqrt{\text{Var}\{\tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} \right) \\ \text{s. a} \;\; \mathbf{x} \in D \end{array} \tag{Eσ}$$

que recoge el valor esperado y la desviación estándar de los objetivos estocásticos del problema. La siguiente proposición nos relaciona el óptimo del problema (11), correspondiente a la resolución del problema ponderado mediante el criterio de Kataoka, con el conjunto $\mathcal{E}_{E\sigma}$.

Proposición 1.

Consideremos los problemas (11) y (Eσ). Supongamos que $\mu \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}^{q+}$, $\alpha > 0$ y para todo $k, s \in \{1, 2, ..., q\}$, $k \neq s$, se verifica que:

$$\mathrm{cov}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi}), \tilde{z}_s(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} = 0$$

Entonces, si $\mathbf{x}^*$ es solución óptima de (11), es solución eficiente de (Eσ).■

Demostración.

Realizamos la demostración por reducción al absurdo.

Sea $\mathbf{x}^* \in D$ solución óptima de (11) y supongamos que no es solución eficiente de (Eσ). En ese caso existe una solución $\mathbf{x}'$ que domina a $\mathbf{x}$, con lo cual para todo $k \in \{1, 2, \ldots, q\}$:

$$E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}', \tilde{\xi})\} \leq E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}^*, \tilde{\xi})\} \text{ y } \sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}', \tilde{\xi})\}} \leq \sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}^*, \tilde{\xi})\}}$$

y existe al menos un $s \in \{1, 2, \ldots, q\}$ para el que la desigualdad es estricta, es decir:

$$E\{\tilde{z}_s(\mathbf{x}', \tilde{\xi})\} < E\{\tilde{z}_s(\mathbf{x}^*, \tilde{\xi})\} \text{ o } \sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{z}_s(\mathbf{x}', \tilde{\xi})\}} < \sqrt{\mathrm{Var}\{\tilde{z}_s(\mathbf{x}^*, \tilde{\xi})\}}$$

Puesto que $\mu \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}^{q+}$, se verifica para todo $k \in \{1, 2, \ldots, q\}$:

$$\mu_k E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}', \tilde{\xi})\} \leq \mu_k E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}^*, \tilde{\xi})\} \tag{12}$$

$$\mu_k \sqrt{\operatorname{Var}\{\widetilde{z}_k(\mathbf{x}', \widetilde{\xi})\}} \leq \mu_k \sqrt{\operatorname{Var}\{\widetilde{z}_k(\mathbf{x}^*, \widetilde{\xi})\}} \tag{13}$$

y existe al menos un $s \in \{1, 2, \ldots, q\}$ para el que:

$$\mu_s E\{\widetilde{z}_s(\mathbf{x}', \widetilde{\xi})\} < \mu_s E\{\widetilde{z}_s(\mathbf{x}^*, \widetilde{\xi})\} \text{ o}$$

$$\mu_s \sqrt{\operatorname{Var}\{\widetilde{z}_s(\mathbf{x}', \widetilde{\xi})\}} < \mu_s \sqrt{\operatorname{Var}\{\widetilde{z}_s(\mathbf{x}^*, \widetilde{\xi})\}}$$

Puesto que la varianza es siempre no negativa, elevando al cuadrado a ambos lados de la desigualdad (13) se tiene:

$$\mu_k^2 \operatorname{Var}\{\widetilde{z}_k(\mathbf{x}', \widetilde{\xi})\} \leq \mu_k^2 \operatorname{Var}\{\widetilde{z}_k(\mathbf{x}^*, \widetilde{\xi})\} \tag{14}$$

Sumando en (12) y (14) en k obtenemos:

$$\sum_{k=1}^{q} \mu_k E\{\widetilde{z}_k(\mathbf{x}', \widetilde{\xi})\} \leq \sum_{k=1}^{q} \mu_k E\{\widetilde{z}_k(\mathbf{x}^*, \widetilde{\xi})\} \tag{15}$$

$$\sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 \operatorname{Var}\{\widetilde{z}_k(\mathbf{x}', \widetilde{\xi})\} \leq \sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 \operatorname{Var}\{\widetilde{z}_k(\mathbf{x}^*, \widetilde{\xi})\} \tag{16}$$

De (16) se deduce que:

$$\alpha \sqrt{\sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 \operatorname{Var}\{\widetilde{z}_k(\mathbf{x}', \widetilde{\xi})\}} \leq \alpha \sqrt{\sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 \operatorname{Var}\{\widetilde{z}_k(\mathbf{x}^*, \widetilde{\xi})\}} \tag{17}$$

siendo además, una de las desigualdades (15) o (17) estricta .

A partir de esto obtenemos:

$$\sum_{k=1}^{q} \mu_k E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}',\tilde{\xi})\} + \alpha\sqrt{\sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 \mathrm{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}',\tilde{\xi})\}} <$$

$$< \sum_{k=1}^{q} \mu_k E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\} + \alpha\sqrt{\sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 \mathrm{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\}}$$

lo cual está en contra de que **x*** sea solución óptima de (11).■

Esta proposición nos asegura, por tanto, que si las covarianzas entre los objetivos estocásticos del problema son nulas, la solución óptima que se obtiene al aplicar el criterio de Kataoka sobre el problema ponderado, con ponderaciones estrictamente positivas, es solución eficiente valor esperado desviación estándar del problema multiobjetivo estocástico de partida, si el valor del parámetro α es estrictamente positivo. Puesto que $\alpha = \Phi^{-1}(\beta)$, se tiene que $\alpha > 0$ si la probabilidad fijada β es mayor que 0.5. En otro caso, la solución óptima del problema (11) no tiene porqué ser eficiente valor esperado desviación estándar.

Finalmente, puesto que existe también una reciprocidad entre la solución óptima del problema (11) y la del problema (9) correspondiente a aplicar el criterio mínimo riesgo al problema ponderado, los resultados obtenidos para el criterio de Kataoka se pueden extender al criterio mínimo riesgo.

5.3. APLICACIÓN DE LA DESIGUALDAD DE CANTELLI.

Consideremos de nuevo la resolución del problema (AE) mediante el criterio mínimo riesgo:

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x}}{\text{Max}} & P\left\{\sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \leq \sum_{k=1}^{q} \mu_k u_k \right\} \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \tag{4}$$

Supongamos que desconocemos la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{f}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi})$ y aproximamos el valor de ésta mediante la cota inferior que nos proporciona la desigualdad de Cantelli.

A partir de los resultados previos obtenidos en el apartado 2.3 de este capítulo, sabemos que la probabilidad de que la variable aleatoria $\tilde{f}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi})$ sea menor o igual que $u = \sum_{k=1}^{q} \mu_k u_k$, verifica la desigualdad:

$$P\left\{\sum_{k=1}^{q} \mu_k \tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) \leq \sum_{k=1}^{q} \mu_k u_k \right\} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{q} \mu_k \left(u_k - E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}\right)\right)^2}{\operatorname{Var}\{\tilde{f}(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} + \left(\sum_{k=1}^{q} \mu_k \left(u_k - E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\}\right)\right)^2}$$

con $\sum_{k=1}^{q} \mu_k E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi})\} \leq \sum_{k=1}^{q} \mu_k u_k$.

De lo anterior se deduce que si desconocemos el valor de la función de distribución de la variable aleatoria $\tilde{f}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x}, \tilde{\xi})$ y se desea maximizar esta función, podemos plantear, como aproximación, el siguiente problema fraccional:

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}}{\text{Max}} \quad & \frac{\left(\sum_{k=1}^{q} \mu_k \left(u_k - E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)\right)^2}{\text{Var}\left(\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right) + \left(\sum_{k=1}^{q} \mu_k \left(u_k - E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}\right)\right)^2} \\ \text{s.a} \quad & \sum_{k=1}^{q} \mu_k E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \leq \sum_{k=1}^{q} \mu_k u_k \\ & \mathbf{x} \in D \end{aligned} \tag{18}$$

en el que se maximiza la cota inferior que proporciona la desigualdad de Cantelli, añadiendo al conjunto de oportunidades la restricción adicional, $\sum_{k=1}^{q} \mu_k E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \leq \sum_{k=1}^{q} \mu_k u_k$, puesto que ésta es condición necesaria para poder asegurar que la función objetivo de (18) es cota inferior de la función objetivo del problema (4). La solución al problema (18) sirve, por tanto, como aproximación al óptimo del problema (4).

Como puede observarse, en el problema (18) intervienen el valor esperado y la varianza de la variable aleatoria $\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})$:

$$E\{\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} = E\left\{\sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right\} = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \, E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}$$

$$\text{Var}\left\{\sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right\} = \sum_{k=1}^{q} \mu_k^2 \, \text{Var}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} + 2 \sum_{\substack{k,s=1 \\ k<s}}^{q} \mu_k \, \mu_s \, \text{cov}\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi}), \tilde{z}_s(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}$$

Esto implica que, en general, en el problema (18) intervienen el valor esperado y la varianza de cada uno de los objetivos estocásticos del problema de partida, así como las covarianzas entre objetivos.

Una vez obtenido el problema (18), nos planteamos, al igual que en los casos analizados hasta ahora, la posible existencia de relación entre el óptimo de éste y alguno de los conjuntos de soluciones eficientes de problemas de programación estocástica multiobjetivo definidos en el capítulo 4.

Estudiaremos esta relación a partir del problema correspondiente que se genera al aplicar la desigualdad de Cantelli sobre la restricción de azar del problema determinista equivalente correspondiente al criterio de Kataoka:

$$\begin{aligned} &\underset{(\mathbf{x}^t,u)^t}{\text{Min}} \quad u \\ &\text{s.a} \quad P\left(\sum_{k=1}^{q} \mu_k \, \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \le u\right) \ge \beta \\ &\qquad \mathbf{x} \in D \end{aligned} \tag{19}$$

Si aplicamos la desigualdad de Cantelli a la restricción de azar, podemos afirmar, a partir de los resultados obtenidos en el apartado 2.3, que todo vector $(\mathbf{x}^t, u)^t$ que verifique la siguiente desigualdad:

$$\sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{\text{Var}\{\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} + \sum_{k=1}^{q} \mu_k E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} \le u$$

verifica también la restricción de azar del problema (19). Además, si consideramos el problema:

$$\begin{aligned} &\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}} \quad \sum_{k=1}^{q} \mu_k E\{\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\} + \alpha\sqrt{\text{Var}\{\tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi})\}} \\ &\text{s.a} \quad \mathbf{x} \in D \end{aligned} \tag{20}$$

con $\alpha = \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}$ podemos asegurar, a partir de los resultados obtenidos hasta ahora en este trabajo, que si $\mathbf{x}^*$ es solución óptima del problema (20) y

$$u^* = \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}\sqrt{\text{Var}\{\tilde{f}(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\}} + \sum_{k=1}^{q} \mu_k E\{\tilde{z}_k(\mathbf{x}^*,\tilde{\xi})\}$$

se verifica que u^* es cota superior del óptimo del problema (19), con lo cual, la solución $(\mathbf{x}^{*t}, u^*)$ se puede considerar una aproximación de la solución de dicho problema.

Además, a partir del teorema 3 del capítulo 3 sabemos que si $\mathbf{x}^*$ es solución óptima del problema (20) (aproximación mediante Cantelli a la resolución del problema ponderado mediante el criterio de Kataoka), es también solución óptima del problema (18), correspondiente a cota inferior que proporciona Cantelli del óptimo del problema mínimo riesgo, para un nivel $u = u^*$.

Una vez obtenidos estos problemas, nos planteamos la existencia de relación entre la solución del problema (20) y alguno de los conjuntos de soluciones eficientes definidos en capítulo 4 para problemas de programación estocástica multiobjetivo. Obsérvese que el problema (20) es semejante al problema (11), con lo cual, los resultados que se han obtenido en el apartado 5.2 son trasladables a éste.

Podemos afirmar, a partir de la proposición 1, que si las covarianzas entre los objetivos estocásticos del problema son nulas, la solución óptima que se obtiene de la aproximación mediante Cantelli para la resolución del problema ponderado mediante el criterio de Kataoka, con ponderaciones estrictamente positivas, es solución eficiente valor esperado desviación estándar del problema, dado que el valor del parámetro α es ahora estrictamente positivo: $\alpha = \sqrt{\dfrac{\beta}{1-\beta}} > 0$, puesto que $\beta \in (0,1)$.

Finalmente, puesto que existe también una reciprocidad entre la solución óptima del problema (20) y la del problema (18) correspondiente a aplicar el criterio mínimo riesgo al problema ponderado, los resultados obtenidos para el criterio de Kataoka se pueden extender al criterio mínimo riesgo.

De todo lo estudiado en este capítulo se puede concluir que la resolución de problemas de programación estocástica multiobjetivo mediante el enfoque estocástico, aplicando el método de las ponderaciones, está estrechamente relacionada con la resolución mediante el enfoque multiobjetivo. Como acabamos de ver, las soluciones óptimas de los problemas deterministas equivalentes que se obtienen al aplicar los distintos criterios analizados en este trabajo son, bajo determinadas condiciones, soluciones eficientes del problema multiobjetivo estocástico, definidas en el capítulo 4. Los resultados obtenidos en el criterio mínima varianza y en los criterios de máxima probabilidad establecen que, para que exista relación entre las soluciones óptimas que se obtienen del problema ponderado mediante estos criterios, y alguno de los conceptos de solución eficiente de la aproximación multiobjetivo, es necesario en determinados casos que las covarianzas entre objetivos sean nulas. Esto indica, de alguna forma, que la aproximación multiobjetivo se "olvida" de la posible existencia de dependencias estocásticas entre objetivos, lo que ya se apuntaba al principio del capítulo 4. Nuestros resultados corroboran esta idea, aunque, la existencia de dependencia entre objetivos, sólo se mide aquí en términos de covarianzas.

CAPÍTULO 6

ALGORITMOS E IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

1. INTRODUCCIÓN.

Una vez analizadas las relaciones existentes entre los distintos conceptos de solución de un problema de programación estocástica tanto para problemas con una como con múltiples funciones objetivo, abordamos ahora la resolución numérica mediante procedimientos computacionales de los problemas planteados en este trabajo.

De lo estudiado hasta ahora se deduce que los criterios valor esperado, mínima varianza, eficiencia valor esperado desviación estándar , mínimo riesgo y de Kataoka para transformar el objetivo estocástico en su determinista equivalente están estrechamente relacionados, en los casos analizados en este trabajo, si bien, en principio, a partir de la formulación de los mismos, no parece que esta relación exista, puesto que estos criterios se formulan con filosofías distintas. Estas relaciones se mantienen tanto en el caso de una única función objetivo como en problemas con objetivos múltiples y este hecho se ha utilizado para la implementación de los mismos.

Además, de los resultados obtenidos en los capítulos cuatro y cinco, se deduce que la resolución de problemas de programación estocástica multiobjetivo mediante el enfoque multiobjetivo y mediante el enfoque estocástico da lugar, bajo determinadas condiciones, al mismo conjunto de soluciones eficientes, si se aplican los criterios anteriormente señalados y se aborda la obtención de estas soluciones eficientes mediante el método de las ponderaciones en ambos enfoques.

Por otro lado, cabe señalar también que la resolución de los problemas planteados a lo largo del trabajo no es una cuestión trivial. Cuando nos planteamos la resolución de uno de estos problemas, es lógico que se considere la obtención de las soluciones de éste mediante algunos de los criterios señalados anteriormente. Esto nos lleva a que, en función de las preferencias del decisor, puede que para un mismo problema de programación estocástica se tengan que resolver varios problemas deterministas equivalentes, correspondientes a distintos criterios; es más, si se aplican los criterios de máxima probabilidad (mínimo riesgo y de Kataoka), lo lógico es que se resuelva el problema para varios valores del nivel del parámetro a fijar en estos casos (nivel de aspiración, en el problema mínimo riesgo y probabilidad en el de Kataoka).

Todo esto nos ha conducido a la implementación computacional de los problemas planteados en este trabajo. Esta implementación se ha llevado a cabo utilizando el lenguaje FORTRAN sobre un ordenador VAX 3300 con soporte de la librería NAG, versión 15.

A continuación, pasamos a describir el funcionamiento de los programas. Analizamos en primer lugar los de programación estocástica y, posteriormente, los de programación estocástica multiobjetivo.

Las explicaciones sobre el funcionamiento de los programas se complementan con la resolución de un ejemplo en cada caso. Algunos de ellos son los que sirvieron para ilustrar el estudio teórico en cada capítulo y otros se han desarrollado específicamente para comprobar el funcionamiento de los programas. Todos ellos han sido resueltos, además, mediante procedimientos computacionales alternativos.

Para abordar la descripción de cada programa se formula el problema que resuelve éste y las hipótesis que se mantienen en cada uno de ellos. Esto puede resultar en determinados momentos algo repetitivo, pero, hemos preferido plantear así este capítulo, ya que pensamos que de otra forma podría haber confusión, dada la diversidad de casos tratados.

2. PROGRAMACIÓN ESTOCÁSTICA DE UN OBJETIVO.

En este apartado describimos los programas correspondientes a problemas de programación estocástica monobjetivo.

La implementación de estos problemas se ha llevado a cabo siguiendo el esquema teórico propuesto en el trabajo, que puede resumirse en el siguiente figura:

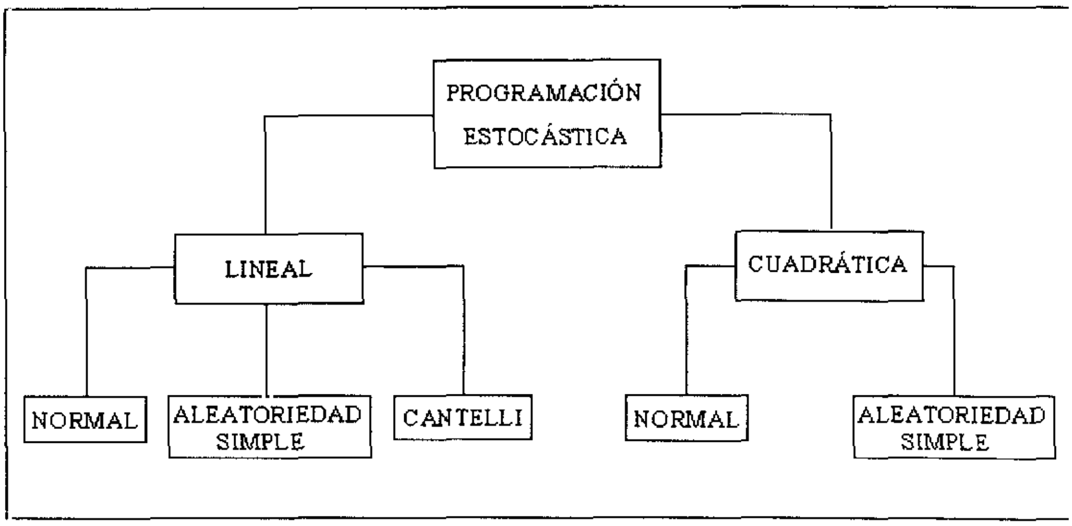


Figura 1.

Se han realizado dos programas base, uno para problemas lineales y otro para cuadráticos. En ambos casos, los programas nos dan la opción de resolver el problema para los casos analizados en el trabajo, tal y como aparece en la figura 1.

A continuación pasamos a describir ambos programas. Comenzaremos por el caso lineal y, posteriormente, analizaremos el cuadrático.

2. 1. PROBLEMAS LINEALES.

La formulación general del problema que se resuelve mediante el programa implementado para este caso es:

$$\begin{aligned} &\text{"}\underset{\mathbf{x}}{\mathrm{Min}}\text{"} \ \tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} \\ &\text{s.a} \ \ \mathbf{x} \in D \end{aligned} \qquad \text{(PEL)}$$

El conjunto de oportunidades, *D*, suponemos que es lineal y determinista. Esta hipótesis se mantiene también en el resto de este capítulo.

Mediante el programa se puede resolver el problema anterior para los criterios valor esperado, mínima varianza, mínimo riesgo y de Kataoka. No se ha considerado la resolución mediante el criterio de eficiencia valor esperado desviación estándar puesto que, como se ha demostrado en el capítulo tres, para los casos que resolveremos, el conjunto de soluciones propiamente eficientes valor esperado desviación estándar se obtiene también mediante la aplicación del criterio de Kataoka, para determinados valores de la probabilidad.

Para la resolución del problema anterior mediante los criterios valor esperado y mínima varianza sólo hemos de conocer el vector de valor esperado, $\bar{\mathbf{c}}$, y la matriz de varianzas y covarianzas, **V**, del vector $\tilde{\mathbf{c}}$. En cambio, si se desea resolver el problema mediante los criterios de máxima probabilidad, hemos de establecer hipótesis adicionales respecto de la distribución de probabilidad de $\tilde{\mathbf{c}}$. Esto nos ha llevado a dividir el programa en función del tipo de distribución de probabilidad de este vector, considerando los tres casos siguientes:

- Normal: Suponemos que $\tilde{\mathbf{c}}$ sigue la distribución normal de valor esperado $\bar{\mathbf{c}}$ y matriz de varianzas y covarianzas **V**.

- Aleatoriedad simple: $\tilde{\mathbf{c}}$ depende linealmente de una variable aleatoria continua, $\tilde{t}$, con función de distribución de conocida y estrictamente creciente, F_t, valor esperado $\bar{t}$ y varianza $\sigma_t^2 < \infty$, de tal forma que $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c}^1 + \tilde{t}\mathbf{c}^2$, con $\mathbf{c}^1$, $\mathbf{c}^2 \in \mathbb{R}^n$, y $\mathbf{c}^{2t}\,\mathbf{x} > 0$, para todo $\mathbf{x} \in D$.

- Aproximación por Cantelli: Se desconoce la distribución de probabilidad de $\tilde{\mathbf{c}}$ pero el problema verifica las hipótesis necesarias para poder aplicar sobre su función de distribución la desigualdad de Cantelli.

Realizadas estas aclaraciones, pasamos a describir el funcionamiento del programa.

Para la resolución de un problema se siguen los siguientes pasos:

1°) Se introducen los datos correspondientes al número de variables, número de restricciones, matriz de coeficientes técnicos de las restricciones, cotas sobre las variables y sobre las restricciones y estimación inicial en un fichero de datos.

2°) Una vez leídos estos datos por el programa, éste nos pregunta qué tipo de problema deseamos resolver, mostrándonos un menú con las siguientes opciones:

```
1. Normal.
2. Aleatoriedad simple.
3. Cantelli.
4. Terminar.
```

Si se elige una de las tres primeras opciones, el programa nos permite resolver el problema de programación estocástica mediante los cuatro criterios básicos de resolución del problema descritos en este trabajo: valor esperado, mínima varianza, mínimo riesgo y de Kataoka, de la forma que describiremos a continuación.

Si elegimos la opción 4. Terminar, aparecerá en pantalla el tiempo de ejecución real del programa (C. P. U.) y el nombre de un fichero de salida. Este fichero contiene la información de todos los problemas que se hayan resuelto en la ejecución del programa.

A continuación describimos las opciones 1, 2 y 3. Puesto que las opciones 1 y 3 operan de igual forma, se describen ambas en un solo apartado.

a) Caso normal y Cantelli.

Una vez leído el fichero de datos, el programa nos pide el vector de valor esperado, $\bar{\mathbf{c}}$, y la matriz de varianzas y covarianzas, **V**, del vector $\tilde{\mathbf{c}}$ y muestra las soluciones valor esperado y mínima varianza del problema. Seguidamente nos pide un nivel de aspiración para resolver el problema mediante el criterio mínimo riesgo, nos da la solución asociada a este nivel y nos da a opción de modificar éste. Finalmente, nos pide una probabilidad para resolver el problema mediante el criterio de Kataoka, muestra la solución y pregunta si se desea fijar otra probabilidad o acabar. Si la opción que se elige es la de finalizar, el programa vuelve al menú inicial, en el podemos resolver un nuevo problema de programación estocástica lineal o terminar. La figura 2 muestra un esquema del funcionamiento del programa en estas dos opciones.

Una vez finalizada la resolución del problema, aparece en pantalla de nuevo el menú inicial, en el que se tiene la opción de resolver un nuevo problema de programación estocástica lineal o de finalizar.

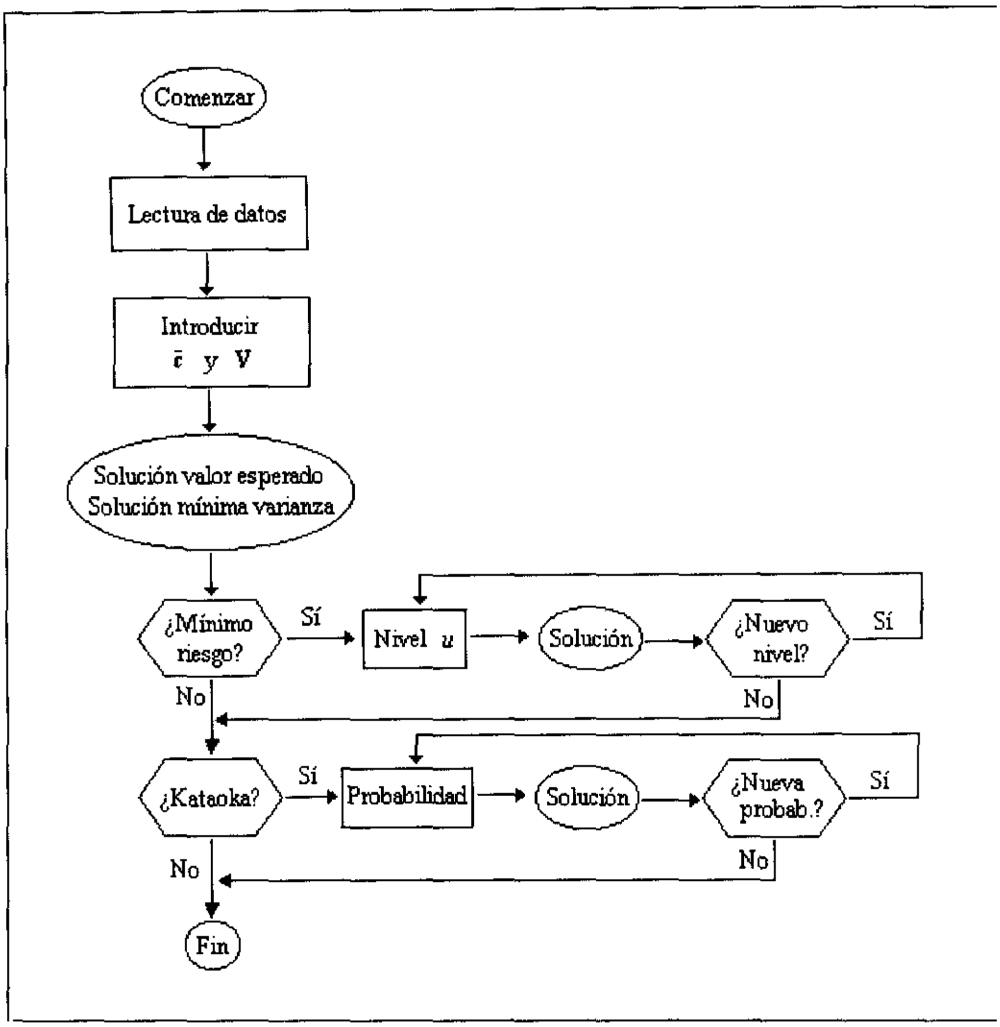


Figura 2.

Ilustramos, mediante un ejemplo, el funcionamiento del programa en estos dos casos.

Ejemplo 1.

Consideremos el problema de programación estocástica lineal:

$$
\begin{aligned}
&\text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} \quad \tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} = \tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2 \\
&\text{s. a} \quad x_1 + x_2 \geq 1 \\
&\qquad\quad 3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\
&\qquad\quad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

donde $\tilde{\mathbf{c}} = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2)^t$ es un vector estocástico con valor esperado $\bar{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ y matriz de varianzas y covarianzas $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, con lo cual tenemos que la variable aleatoria $\tilde{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} = \tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2$ valor esperado $\bar{\mathbf{c}}^t\mathbf{x} = 4x_1 + 2x_2$ y varianza $\mathbf{x}^t\mathbf{V}\mathbf{x} = x_1^2 + 4x_2^2$. Obsérvese que este problema es el que se ha utilizado en el estudio de los distintos criterios de resolución de estos problemas en el capítulo dos.

Como se ha señalado anteriormente, introducimos los datos del problema mediante un fichero de datos, que en este caso es el siguiente:

```
'Numero de Variables'
2
'Numero de Restricciones Lineales'
2
'Matriz de Restricciones Lineales por filas'
-1   -1
 3    2
'Cotas de las Variables'
0      1E10
0      1E10
```

```
'Cotas de las Restricciones'
-1E10       -1
-1E10       8
'Estimacion Inicial'
 0    1
```

Introducidos los datos, ejecutamos el programa y aparece el menú inicial. En este caso si elegimos la opción 1 ó 3, el programa nos pide el vector de valor esperado y la matriz de varianzas y covarianzas del vector $\widetilde{\mathbf{c}}$, que introducimos por teclado. El programa resuelve el problema mediante los criterios valor esperado y mínima varianza y nos pide valores para los parámetros correspondientes a los criterios de máxima probabilidad, tal y como se describe en la figura dos, mostrándonos en pantalla las soluciones correspondientes a estos criterios para los valores que se fijen de los parámetros. Además, todas estas soluciones se recogen en un fichero de salida, que veremos más adelante, tras explicar el funcionamiento del programa en el caso de aleatoriedad simple.

Finalizada la resolución del problema en los términos señalados, el programa vuelve al menú inicial.

Analizamos a continuación el funcionamiento del programa cuando se elige la opción 2, correspondiente al caso de aleatoriedad simple.

b) Aleatoriedad simple.

La segunda opción, correspondiente a aleatoriedad simple, nos obliga a modificar el esquema anterior. En este caso, como se ha comentado anteriormente, el vector $\tilde{\mathbf{c}}$ depende linealmente de una variable aleatoria, $\tilde{t}$, con distribución conocida. Para implementar la resolución de estos problemas mediante el criterio de Kataoka, se ha de especificar esta distribución, tal y como ha estudiado en el capítulo dos de este trabajo. En nuestro programa, mantenemos la hipótesis de que la variable $\tilde{t}$ sigue la distribución exponencial con parámetro λ[1]. Hecha esta aclaración, pasamos a describir el funcionamiento del programa cuando se elige la opción 2 (aleatoriedad simple).

Una vez leído el fichero de datos, el programa nos pide los valores de los vectores $\mathbf{c}^1$, $\mathbf{c}^2$ y del parámetro λ de la exponencial[2]. Introducidos estos datos, aparecen en pantalla las soluciones correspondientes a los criterios valor esperado y mínima varianza, solicita un nivel de aspiración para el problema mínimo riesgo, muestra la solución de éste y nos da la opción de resolver el problema con otro nivel de aspiración. Finalmente, nos pide una probabilidad para la resolución del problema mediante el criterio de Kataoka, nos muestra la solución para éste y nos da de nuevo la posibilidad de resolver el problema con otra probabilidad. Todo esto se resume en la figura 3.

---

[1] Es decir, la función de distribución de $\tilde{t}$ evaluada en $\eta > 0$, es $F_t(\eta) = P(\tilde{t} \leq \eta) = 1 - e^{-\lambda\eta}$.

[2] Bajo la hipótesis de que $\tilde{t}$ sigue la distribución exponencial de parámetro λ, el valor esperado y la varianza de $\tilde{t}$ son, respectivamente, $1/\lambda$ y $1/\lambda^2$.

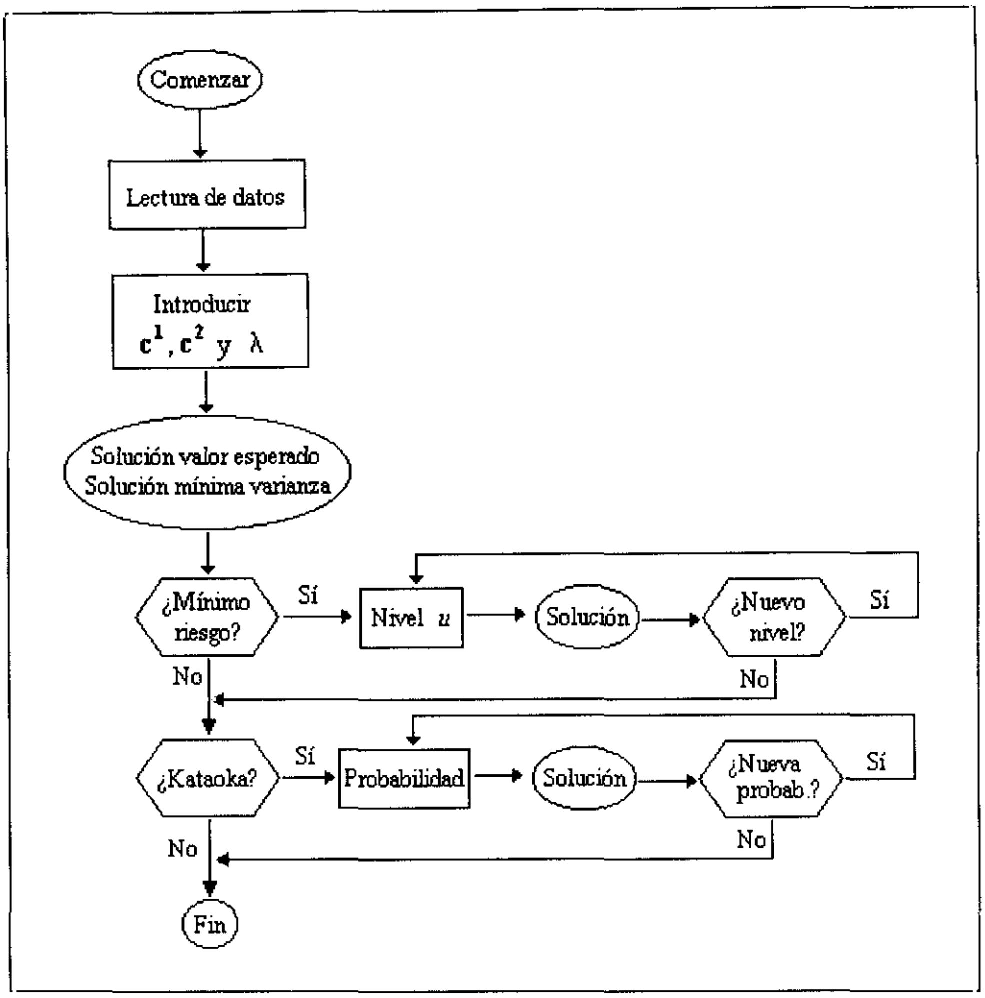


Figura 3.

Ilustramos el funcionamiento del programa mediante un ejemplo.

Ejemplo 2.

Consideremos de nuevo el ejemplo formulado anteriormente. Supongamos ahora que el vector $\tilde{\mathbf{c}}$ depende linealmente de una variable aleatoria, $\tilde{t}$, de tal forma que

$$\tilde{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \tilde{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

con $\tilde{t}$ variable aleatoria que se distribuye según una exponencial de parámetro $\lambda = 2$, con lo cual, su valor esperado y su varianza son, respectivamente $\bar{t} = 0.5$ y $\sigma_t^2 = 0.25$.

Obsérvese que el fichero de datos de este problema es el mismo que el del anterior. Introducido éste, el programa nos pide los valores de $\mathbf{c}^1$, $\mathbf{c}^2$ y λ, aparecen las soluciones valor esperado y mínima varianza del problema, nos da la opción de resolver el problema mediante los criterios de máxima probabilidad, para distintos valores de los parámetros, y aparecen en pantalla las soluciones a éstos.

Como se ha señalado anteriormente, una vez que se han obtenido las soluciones del problema mediante estos cuatro criterios en las opciones 1, 2 ó 3, el programa vuelve al menú principal:

```
1. Normal.
2. Aleatoriedad simple.
3. Cantelli.
4. Terminar.
```

dándonos así la opción de resolver un nuevo problema o de terminar. Si elegimos la opción 4, aparecerá en pantalla el tiempo de ejecución real del programa (C. P. U.) y el nombre de un fichero de salida. Este fichero contiene los resultados de todos los problemas resueltos. A continuación mostramos este fichero para los dos ejemplos presentados. El primero de ellos se resuelve en primer lugar bajo la hipótesis de normalidad del vector $\tilde{\mathbf{c}}$ y, posteriormente, suponiendo que se desconoce la distribución de $\tilde{\mathbf{c}}$ y aplicando la desigualdad de Cantelli a la función de distribución en los criterios de máxima probabilidad.

```
==============================================
                CASO NORMAL
==============================================

Calls to E04NEF
---------------
     Problem Type = LP
     Print Level = 0

SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

 0.0000000000000000E+00   1.000000000000000

Función Objetivo:    2.000000000000000

IFAIL =             0

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP1

SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

 0.8000000000000000      0.2000000000000000

Función Objetivo:   0.8000000000000000

IFAIL =             0

 Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN MÍNIMO RIESGO

Nivel U:    4.000000000000000

 0.0000000000000000E+00   1.000000000000000

Función Objetivo:    1.000000000000000

IFAIL =             0

Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Probabilidad BETA:   0.9000000000000000

 0.4101904657353322      0.5898095342646678

Función Objetivo:    4.420913733173898

IFAIL =             0
```

```
==================================================
                ALEATORIEDAD SIMPLE
==================================================

 Calls to E04NEF
 ---------------

      Problem Type = LP
      Print Level = 0
 SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

   1.000000000000000      0.0000000000000000E+00

 Función Objetivo:    3.500000000000000

 IFAIL =            0

 Calls to E04NEF
 ---------------

      Problem Type = QP1
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

   1.000000000000000      0.0000000000000000E+00

 Función Objetivo:   0.2500000000000000

 IFAIL =            0

 Calls to E04UEF
 ---------------

      Print Level = 0

 SOLUCIÓN MÍNIMO RIESGO
 Nivel U:     5.000000000000000

   1.000000000000000      0.0000000000000000E+00

 Función Objetivo:    2.000000000000000

 IFAIL =            0


 Calls to E04NEF
 ---------------

      Problem Type = LP
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN KATAOKA
 Probabilidad BETA:   0.8000000000000000

   1.000000000000000      0.0000000000000000E+00

 Función Objetivo:    3.804718971252441
 IFAIL =            0
```

```
==================================================
                    CANTELLI
==================================================
Calls to E04NEF
---------------
     Problem Type = LP
     Print Level = 0

SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

 0.0000000000000000E+00   1.000000000000000

Función Objetivo:     2.000000000000000

IFAIL =               0

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP1

SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

 0.8000000000000000       0.2000000000000000

Función Objetivo:   0.8000000000000000

IFAIL =               0

Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN MÍNIMO RIESGO
Nivel U:    8.000000000000000

 0.7272727272727298       0.2727272727272702

Función Objetivo:   0.9615384615384615

IFAIL =               0

Calls to E04UEF
---------------
     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA
Probabilidad BETA:   0.8000000000000000

 0.5999999999987286       0.4000000000012714

Función Objetivo:     5.200000000000000

IFAIL =               0
==============================================
 TIEMPO C.P.U.:   1.659999847412109     segundos
==============================================
** FINAL DE PROGRAMA **
```

2.2. PROBLEMAS CUADRÁTICOS.

En este caso se resuelven problemas de programación estocástica cuadrática, cuya formulación es:

$$\begin{array}{ll} \text{"Min"}_{\mathbf{x}} & \tilde{z}(\mathbf{x}, \tilde{\xi}) = \mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} - \tilde{\xi}'\mathbf{x} + \tilde{\xi}'\mathbf{H}\tilde{\xi} \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array}$$

con **B** matriz de orden *nxn*, al menos semidefinida positiva, **H** matriz de orden *nxn*, simétrica, al menos semidefinida positiva y $\tilde{\xi}$ vector aleatorio.

Los criterios de resolución que se han considerado son los mismos que en el caso lineal: valor esperado, mínima varianza y los dos criterios de máxima probabilidad (mínimo riesgo y de Kataoka). En este sentido, hemos de recordar que las dificultades para la determinación de la función de distribución de la función objetivo estocástica nos ha llevado en este trabajo a la aplicación de la desigualdad de Cantelli para la resolución del problema mediante los dos criterios de máxima probabilidad, con lo cual, las soluciones que se obtienen mediante el programa son aproximaciones de las soluciones reales del problema para estos criterios.

Al igual que en los problemas lineales, el programa permite resolver este problema en los dos casos analizados en este trabajo para problemas cuadráticos, es decir, caso normal y aleatoriedad simple. Las hipótesis que se mantienen acerca de la estructura del problema y de la distribución del vector $\tilde{\xi}$ son:

- Caso normal: Se supone que se verifica:

  H1) $h_{ij} = 0$, para todo $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, $i \neq j$, es decir, la matriz **H** es diagonal.

  H2) Las variables aleatorias $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \ldots, \tilde{\xi}_n$ son mutuamente estadísticamente independientes.

H3) El vector $\tilde{\xi}$ se distribuye según la distribución normal multivariante de valor esperado $\bar{\xi} = \left(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_n\right)^t$ y matriz de varianzas y covarianzas **V** definida positiva.

- Aleatoriedad simple: En este caso se supone que el vector $\tilde{\xi}$ depende linealmente de una variable aleatoria $\tilde{t}$:

$$\tilde{\xi} = \xi^1 + \tilde{t}\xi^2$$

con $\xi^1, \xi^2 \in \mathbb{R}^n$ y $\tilde{t}$ es una variable aleatoria normal de valor esperado $\bar{t}$ y varianza σ_t^2 finita, $\sigma_t^2 < \infty$.

Al igual que en el caso anterior, para la ejecución de este programa se ha de introducir un fichero de datos del problema que se desee resolver. La información que se introduce en este fichero es la siguiente: número de variables, número de restricciones, matriz de coeficientes técnicos del conjunto de oportunidades, cotas de las variables y las restricciones, matriz **B**, matriz **H** y estimación inicial. Con el fin de reducir el tiempo de ejecución del programa, se introducen, además, en el fichero el vector valor esperado, $\bar{\xi}$, y la matriz de varianzas y covarianzas, **V** de $\tilde{\xi}$, correspondientes al caso cuadrático normal. Evidentemente, si el problema a resolver es de aleatoriedad simple, el programa no lee estos dos últimos datos.

Pasamos a describir el funcionamiento del programa. Una vez leído el fichero de datos, aparece en pantalla el siguiente menú:

```
1. Normal.
2. Aleatoriedad simple.
3. Terminar.
```

a) Caso normal.

Si elegimos la opción 1 el programa resuelve directamente el problema mediante los criterios valor esperado y mínima varianza. Posteriormente nos pide un nivel de aspiración *u*, aparece en pantalla la solución mínimo riesgo y nos da la opción de resolver el problema para otro nivel de aspiración. Finalmente, nos pide una probabilidad, β, aparece en pantalla la solución del criterio de Kataoka y nos da la opción de resolver el problema con otra probabilidad. El siguiente esquema nos resume el funcionamiento del programa en este caso:

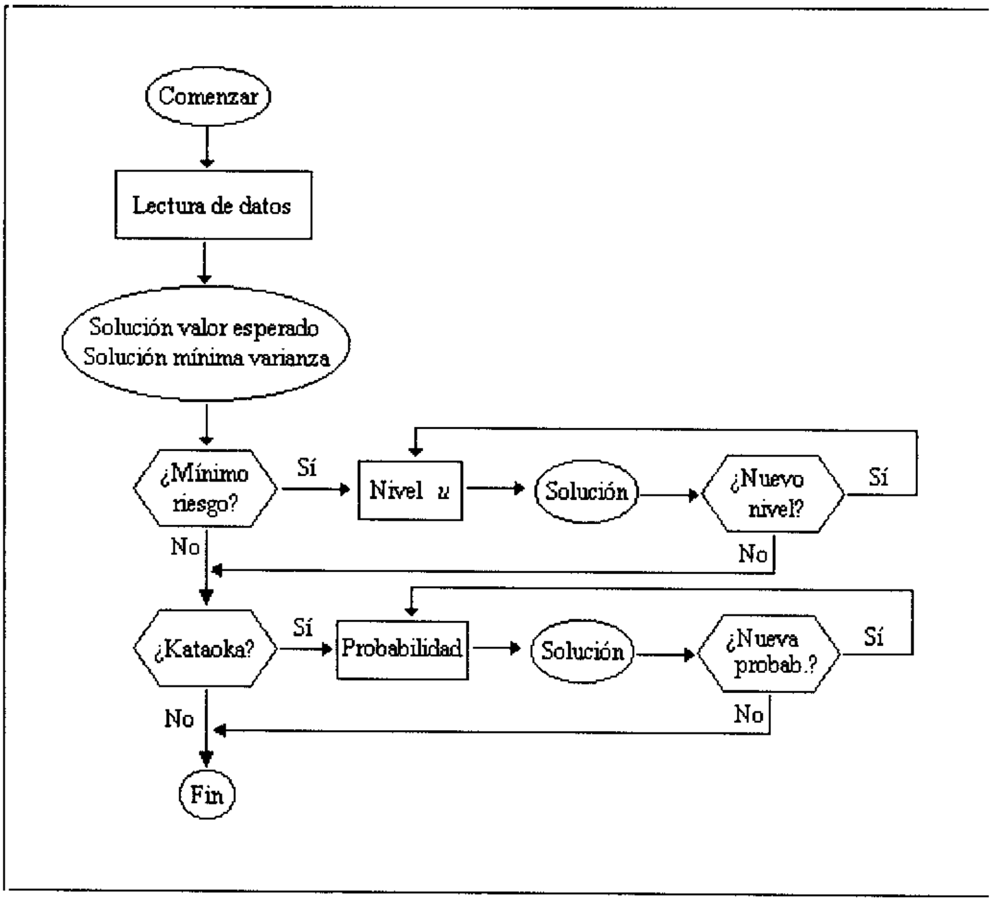


Figura 4.

Terminada esta opción, el programa vuelve al menú inicial:

```
1. Normal.
2. Aleatoriedad simple.
3. Terminar.
```

y, por tanto, nos permite resolver un nuevo problema o terminar. Si elegimos la opción 3 (terminar), el programa nos muestra el tiempo de C. P. U. así como el nombre de un fichero de salida en el que aparecen todos los resultados de los problemas resueltos.

Mostramos el funcionamiento del programa mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.

Consideremos el problema de programación estocástica cuadrática:

$$\begin{aligned} &\text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} \quad \tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\xi}_1 \\ \tilde{\xi}_2 \end{pmatrix} \\ &\text{s.a} \quad x_1 + x_2 \geq 1 \\ &\qquad 3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ &\qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

donde el vector $\tilde{\xi} = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_1 \\ \tilde{\xi}_2 \end{pmatrix}$ sigue la distribución normal multivariante de valor esperado $\bar{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y matriz de varianzas y covarianzas $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Para resolver el problema introducimos, en primer lugar, el fichero de datos, que, en este caso es:

```
'Numero de Variables'
2
'Numero de Restricciones Lineales'
2
'Matriz de Restricciones Lineales por filas'
-1.   -1.
 3.    2.
'Cotas de las Variables'
0.      1E10
0.      1E10
'Cotas de las Restricciones'
-1E10      -1.
-1E10       8.
'Matriz Cuadrática B por filas'
1.      0.
0.      2.
'Diagonal de la Matriz H'
3.      1.
'Vector de Valor Esperado'
1.      2.
'Diagonal de la Matriz de Varianzas y Covarianzas V'
9.   4.
'Estimacion Inicial'
0.   1.
```

Una vez hecho esto, elegimos del programa la opción 1 (normal) y, tal y como se ha señalado antes, el programa nos muestra en pantalla las soluciones correspondientes a los criterios valor esperado y mínima varianza. Posteriormente, nos da la opción de resolver el problema mediante los dos criterios de máxima probabilidad (mínimo riesgo y Kataoka), tal y como se describe en la figura 4.

El fichero de salida, con las soluciones del problema para los distintos criterios, es el que aparece a continuación.

```
==================================================
                  CASO NORMAL
==================================================

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP2
     Print Level = 0
*ABNORMAL EXIT from NAG Library routine E04NCF:IFAIL =1
** NAG soft failure - control returned

SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

 0.5000000000000000      0.5000000000000000

Función Objetivo:    37.25000000000000

IFAIL =             1
Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP2

SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

  2.666666666666667      0.0000000000000000E+00

Función Objetivo:    1654.000000000000

IFAIL =             0

Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN MÍNIMO RIESGO

Nivel U:     50.00000000000000

 0.6700584453460495      0.5246412585006064

Función Objetivo:   8.2726494344622009E-02

IFAIL =             0

Calls to E04UEF
---------------
SOLUCIÓN MÍNIMO RIESGO

Nivel U:     100.0000000000000

  1.262379424005579      0.6208390375022504

Función Objetivo:   0.6896449011473143
IFAIL =             0

Calls to E04UEF
```

```
---------------

     Print Level = 0
     Print Level = 0


SOLUCIÓN KATAOKA

Probabilidad BETA:     0.9000000000000000

  1.860631539546890        0.7382559794723345

Función Objetivo:      162.4255927938130
IFAIL =                0

SOLUCIÓN KATAOKA

Probabilidad BETA:     0.9500000000000000

  2.148792040985721        0.7768119385214182

Función Objetivo:      217.9863139364149

IFAIL =                0
```

b) Aleatoriedad simple.

Si la opción elegida es la 2, hemos de introducir mediante teclado los valores de los vectores ξ^1 y ξ^2, el valor esperado de la variable aleatoria $\tilde{t}, \bar{t}$, y su varianza σ_t^2. Hecho esto el funcionamiento del programa es igual que en el caso normal, y lo podemos esquematizar en la siguiente figura:

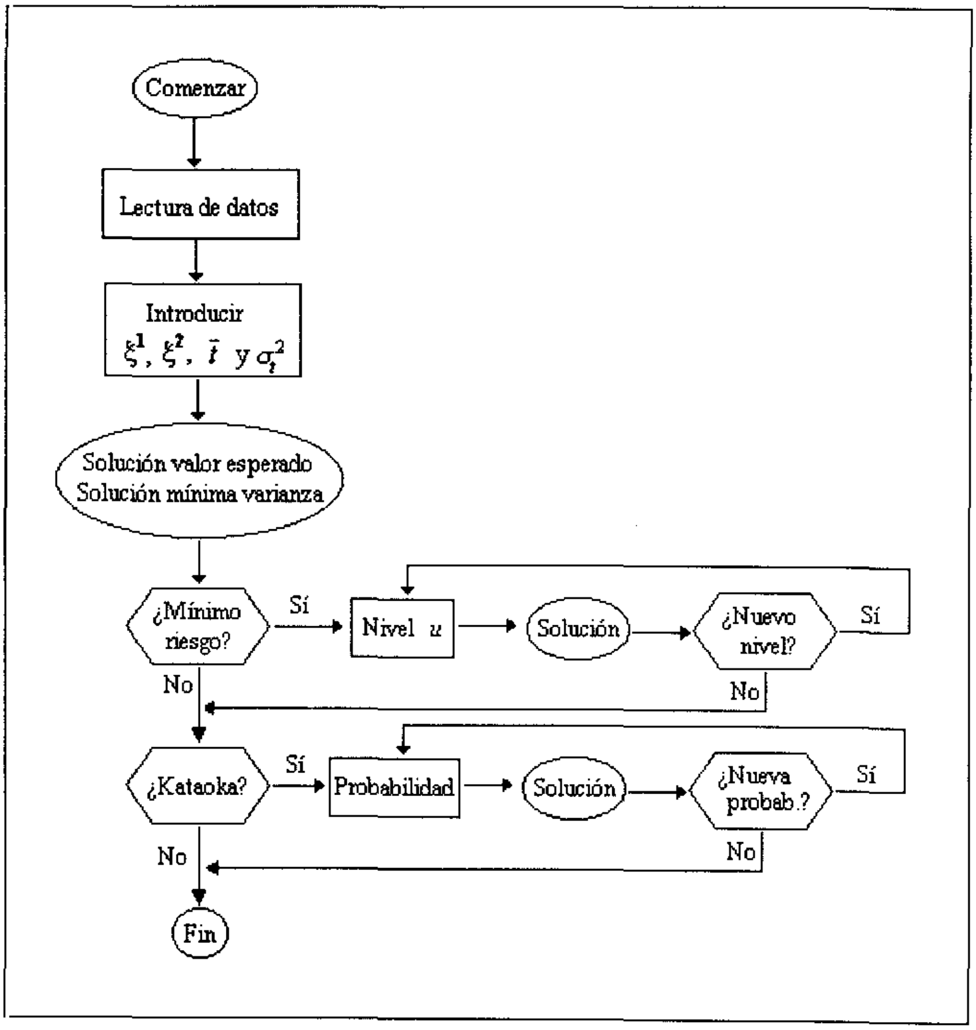


Figura 5

Terminada esta opción, el programa vuelve al menú inicial:

```
1. Normal.
2. Aleatoriedad simple.
3. Terminar.
```

Al igual que antes, mostramos el funcionamiento del programa mediante un ejemplo.

Ejemplo 4.

Consideremos el problema de programación estocástica cuadrática:

$$\text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"}\ \tilde{z}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} - (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} + (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\xi}_1\\ \tilde{\xi}_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a}\quad & x_1 + x_2 \geq 1\\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 8\\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

donde el vector $\tilde{\xi} = \begin{pmatrix}\tilde{\xi}_1\\ \tilde{\xi}_2\end{pmatrix}$ depende linealmente de una variable aleatoria $\tilde{t}$, de manera que $\tilde{\xi} = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} + \tilde{t}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ y $\tilde{t}$ sigue la distribución normal de valor esperado $\bar{t} = 2$ y varianza $\sigma_t^2 = 1$.

El fichero de datos para este problema es:

```
'Numero de Variables'
2
'Numero de Restricciones Lineales'
2
'Matriz de Restricciones Lineales por filas'
 1.    1.
 3.    2.
'Cotas de las Variables'
0.     1E10
0.     1E10
'Cotas de las Restricciones'
   1.      1E10
-1E10       8.
'Matriz Cuadrática B por filas'
```

```
2.      0.
0.      9.
'Diagonal de la Matriz H'
1.      1.
'Vector de Valor Esperado'
1.      2.
'Diagonal de la Matriz de Varianzas y Covarianzas V'
4.      2.
'Estimacion Inicial'
0.   1.
```

Introducido este fichero, el programa nos pide los valores de ξ^1, ξ^2, $\bar{t}$ y σ_t^2, que, en este caso, son: $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, 2 y 1, respectivamente, aparece en pantalla las soluciones valor esperado y mínima varianza y se resuelve el problema mediante los criterios de máxima probabilidad, tal y como se describe en la figura 5.

A continuación aparece el contenido del fichero de salida de este ejemplo.

```
 ==================================================
                ALEATORIEDAD SIMPLE
 ==================================================
Calls to E04NEF
 --------------

     Problem Type = QP2
     Print Level = 0
 SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

   1.250000000000000       0.1666666666666667
 Función Objetivo:     35.62500000000000

 IFAIL =              0

 Calls to E04NEF
 --------------

     Problem Type = QP2
     Print Level = 0

 SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

   2.666666666666667       0.0000000000000000E+00

 Función Objetivo:     477.1111111111111

 IFAIL =              0
 Calls to E04UEF
 --------------
```

```
     Print Level = 0

SOLUCIÓN MÍNIMO RIESGO
Nivel U:    80.00000000000000

  2.147621141243625      0.2664023381011985

Función Objetivo:   0.7813496420824533

IFAIL =             0
Calls to E04UEF
---------------
     Print Level = 0

SOLUCIÓN MÍNIMO RIESGO
Nivel U:    50.00000000000000

  1.534854302578344      0.1983171259125576

Función Objetivo:   0.2625222071489943

IFAIL =             0


Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA
Probabilidad BETA:   0.9000000000000000

  2.470110786319131      0.2948338205213038

Función Objetivo:    104.5578284054816

IFAIL =             0

SOLUCIÓN KATAOKA
Probabilidad BETA:   0.6000000000000000

  1.833250402712394      0.2314722669680366

Función Objetivo:    64.76409223346007

IFAIL =             0
==============================================
 TIEMPO C.P.U.:   1.460000038146973     segundos
==============================================
** FINAL DE PROGRAMA **
```

3. PROGRAMACIÓN ESTOCÁSTICA MULTIOBJETIVO.

Abordamos ahora la resolución de problemas de programación estocástica multiobjetivo, cuya formulación general es:

$$\begin{array}{ll} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} & \tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \left(\tilde{z}_1(\mathbf{x},\tilde{\xi}), \tilde{z}_2(\mathbf{x},\tilde{\xi}), \ldots, \tilde{z}_q(\mathbf{x},\tilde{\xi})\right) \\ \text{s. a} & \mathbf{x} \in D \end{array} \qquad \text{(PEM)}$$

La implementación de estos problemas se realiza, al igual que en el caso monobjetivo, siguiendo el esquema teórico de este trabajo. Hemos dividido los problemas en función del tipo de enfoque que queramos seguir para resolver el problema de partida. Estos dos bloques corresponden al enfoque multiobjetivo y al enfoque estocástico analizado en los capítulos cuatro y cinco, respectivamente. El siguiente esquema nos muestra un cuadro resumen de los programas implementados:

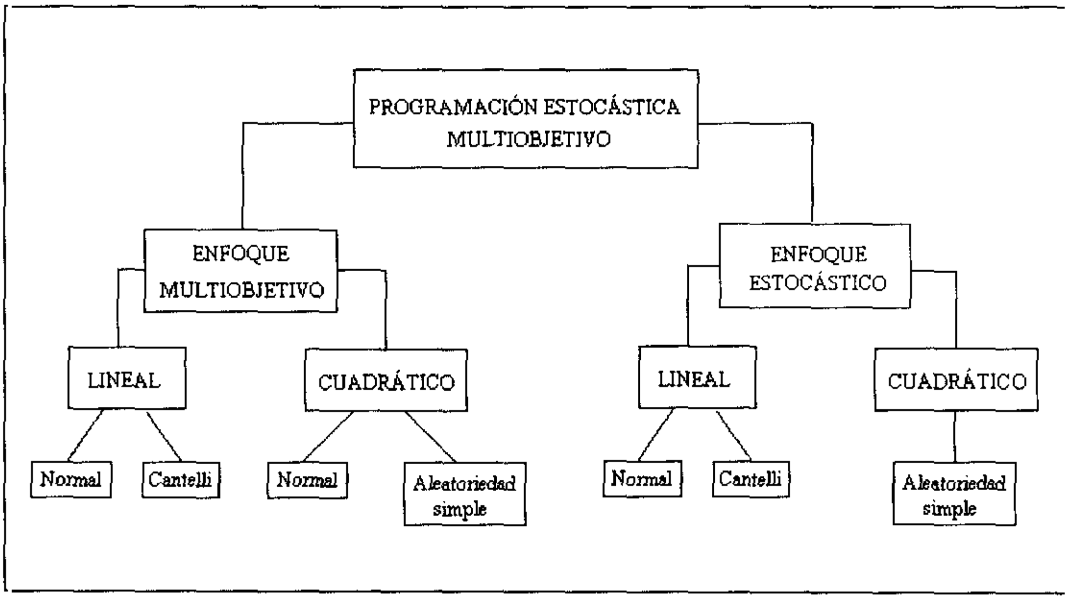


Figura 6.

Describimos en primer lugar los programas correspondientes al enfoque multiobjetivo y, posteriormente, los del enfoque estocástico.

3.1. ENFOQUE MULTIOBJETIVO.

Antes de describir el funcionamiento de los programas, recordamos que para resolver problemas de programación estocástica multiobjetivo, mediante este enfoque, elegimos un criterio para transformar todos los objetivos estocásticos en sus deterministas equivalentes, transformando cada uno de ellos por separado y obteniendo un problema multiobjetivo determinista equivalente por cada criterio. De esta forma, como vimos en el capítulo 4, para cada uno de los posibles criterios de transformación de los objetivos estocásticos se obtiene un conjunto de soluciones eficientes. En los programas se han considerado tres criterios de transformación del objetivo estocástico: valor esperado, mínima varianza y criterio de Kataoka con probabilidades $\beta_1,....,\beta_q$. De la aplicación de estos criterios se obtienen los conjuntos de soluciones eficientes valor esperado, mínima varianza y con probabilidades $\beta_1,....,\beta_q$ del problema multiobjetivo estocástico de partida.

En los problemas implementados, aplicamos el método de las ponderaciones al problema multiobjetivo determinista equivalente. La elección de este método se ha realizado por los potentes resultados que se obtienen así como por la posibilidad de asignación automática de ponderaciones y de realizar estudios más precisos en determinados casos.

Con ello pretendemos obtener una cantidad de soluciones eficientes de cada uno de los conjuntos eficientes definidos en el capítulo cuatro para un problema de programación estocástica multiobjetivo, de tal forma que el decisor pueda hacerse una idea de la estructura de cada uno de estos conjuntos.

La razón que nos han llevado a implementar sólo los criterios valor esperado, mínima varianza y con probabilidades $\beta_1,....,\beta_q$, sin considerar el criterio de eficiencia valor esperado desviación estándar y el criterio mínimo riesgo es que, a partir de los resultados teóricos obtenidos en el capítulo cuatro sabemos que:

a) Bajo determinadas condiciones, existe una reciprocidad entre el conjunto de soluciones eficientes mínimo riesgo de niveles de aspiración $u_1,...,u_q$ y el conjunto eficiente con probabilidades $\beta_1,...,\beta_q$. Esto nos ha llevado a programar sólo la obtención de soluciones eficientes con probabilidades $\beta_1,...,\beta_q$, puesto que, dada una solución de este conjunto, bajo determinadas hipótesis, existe unos niveles de aspiración $u_1,...,u_q$ para los que la solución es también eficiente mínimo riesgo.

b) En los casos analizados en este trabajo, se ha demostrado que el conjunto de soluciones propiamente eficientes valor esperado desviación estándar del problema de programación estocástica multiobjetivo se puede obtener a partir del conjunto de soluciones propiamente eficientes con probabilidades $\beta_1,....,\beta_q$.

Evidentemente, a partir de los resultados del apartado (a) podríamos haber optado por la obtención del conjunto de soluciones mínimo riesgo en vez de las del criterio de Kataoka, puesto que la equivalencia entre estos problemas se da en ambos sentidos. Sin embargo, las funciones objetivo del problema de Kataoka (no lineales, en general) son más fáciles de manejar que las del criterio mínimo riesgo (fraccionales en todos los casos) y, además, como se ha comentado anteriormente en este trabajo, consideramos que, dado un problema de programación estocástica multiobjetivo, resulta más fácil e intuitivo fijar una probabilidad por objetivo estocástico que fijar un nivel. Por todo ello hemos preferido resolver los problemas mediante el criterio de Kataoka.

Por otro lado, para la obtención del conjunto de soluciones eficientes valor esperado desviación estándar de un problema estocástico con q objetivos, el problema multiobjetivo determinista equivalente es de $2q$ objetivos (el valor esperado y la desviación estándar de cada uno de los objetivos estocásticos), mientras que el problema de eficiencia con probabilidades $\beta_1,....,\beta_q$ es de q objetivos, con lo cual, éste último da lugar a un problema más manejable y de resolución más fácil. Además, no podemos olvidar que, en algunos casos, las soluciones eficientes con probabilidades $\beta_1,....,\beta_q$ no son eficientes valor esperado desviación estándar, tal y como se estudia en el capítulo 4.

Una vez realizadas estas consideraciones pasamos a explicar el funcionamiento del programa. Para desarrollar este enfoque se han construido dos programas, uno para los problemas estocásticos lineales y otro para los cuadráticos.

3.1.1. PROBLEMAS LINEALES.

Consideremos el problema de programación estocástica multiobjetivo lineal:

$$\begin{array}{l} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} \left(\tilde{\mathbf{c}}_1^t\mathbf{x}, \ldots, \tilde{\mathbf{c}}_q^t\mathbf{x}\right) \\ \text{s.a } \mathbf{x} \in D \end{array}$$

El programa realizado para este caso permite obtener soluciones eficientes valor esperado, mínima varianza y con probabilidades $\beta_1, \ldots, \beta_q$ de este problema aplicando el método de las ponderaciones. Puesto que en la obtención de soluciones eficientes con probabilidades $\beta_1, \ldots, \beta_q$ se han de establecer hipótesis acerca de la distribución de probabilidad de los vectores $\tilde{\mathbf{c}}_k$, $k = 1,2,\ldots,q$, el programa distingue los dos casos siguientes:

- Caso normal: Suponemos que para todo $k \in \{1,2,\ldots,q\}$, el vector $\tilde{\mathbf{c}}_k$ sigue la distribución normal de valor esperado $\bar{\mathbf{c}}_k$ y matriz de varianzas y covarianzas $\mathbf{V}_k$.

- Cantelli: Suponemos que para todo $k \in \{1, 2, \ldots, q\}$, se conoce el vector de valor esperado de $\tilde{\mathbf{c}}_k$, $\bar{\mathbf{c}}_k$, y su matriz de varianzas y covarianzas $\mathbf{V}_k$, pero se desconoce la distribución de probabilidad, por lo que para obtener soluciones eficientes con probabilidades $\beta_1, \ldots, \beta_q$ se aplica la desigualdad de Cantelli a las funciones de distribución de los objetivos estocásticos. En este caso hay que tener en cuenta que el conjunto que se obtiene es una aproximación del conjunto eficiente del problema con probabilidades $\beta_1, \ldots, \beta_q$.

Pasamos a describir el funcionamiento del programa.

Para resolver un problema primero creamos un fichero de datos en el que se especifican el número de variables, funciones y restricciones del problema, la matriz de coeficientes técnicos, las cotas de las variables y de las restricciones, los vectores de valor esperado, las matrices de varianzas y covarianzas de las funciones objetivo y la estimación inicial.

Al ejecutar el programa, aparece en pantalla el siguiente menú:

```
1. Normal.
2. Cantelli.
3. Terminar.
```

En ambos casos el programa actúa de la misma forma. En primer lugar nos pide el vector de pesos. Seguidamente aparecen en pantalla las soluciones valor esperado y mínima varianza. Posteriormente nos pregunta si deseamos resolver el problema mediante el criterio de Kataoka. En caso afirmativo, nos pide las probabilidades, $\beta_1,\ldots,\beta_q$, resuelve el problema para los pesos asignados y entra en un bucle que nos permite cambiar las probabilidades del problema, mostrándonos, para cada vector de probabilidades, la solución. Finalizado este proceso, el programa vuelve a un menú en el que tenemos la opción de introducir nuevos pesos o terminar. El funcionamiento del programa puede resumirse en el siguiente esquema:

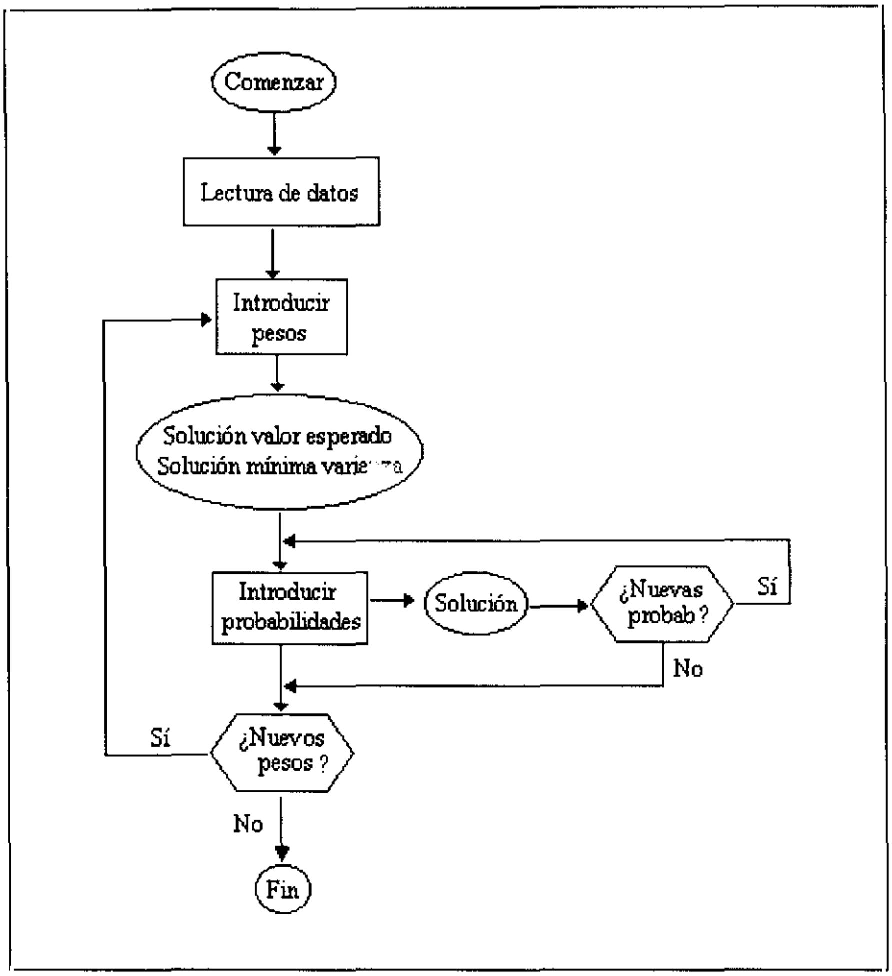


Figura 7.

Una vez que hemos terminado aparece en pantalla el tiempo de ejecución C.P.U. y el nombre de un fichero de salida en el que se resume toda la información correspondiente a las soluciones obtenidas para el problema.

Consideramos el siguiente ejemplo ilustrativo.

Ejemplo 5.

Consideremos el problema de programación estocástica multiobjetivo:

$$\begin{aligned} &\text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} \left(\widetilde{c}_{11}x_1 + \widetilde{c}_{12}x_2, \widetilde{c}_{21}x_1 + \widetilde{c}_{22}x_2\right) \\ &\text{s.a} \quad x_1 + 2\,x_2 \geq 1 \\ &\qquad 3\,x_1 + \ x_2 \leq 10 \\ &\qquad x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

donde los vectores de valor esperado de los objetivos estocásticos son $\overline{\mathbf{c}}_1 = (1, 3)^t$, $\overline{\mathbf{c}}_2 = (-2, 1)^t$ y las matrices de varianzas y covarianzas de los mismos son $\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, respectivamente.

Para la resolución de estos problemas mediante el programa, hemos de introducir el fichero de datos del problema que en este caso es:

```
'Numero de Variables'
2
'Numero de funciones objetivo'
2
'Numero de Restricciones Lineales'
2
'Matriz de Restricciones Lineales por filas'
 1    2
 3    1
'Cotas de las Variables'
0.     1E10
0.     1E10
'Cotas de las Restricciones'
   1.        1E10
-1E10        10.
'Vectores de medias por filas'
 1.     3.
-2.     1.
'Matrices de varianzas (separadas por un espacio)'
3.   1.
1.   9.

2.   0.
0.   1.

'Estimacion Inicial'
 0.    1.
```

Introducido el fichero de datos, el programa actúa según el esquema de la figura 6. Debido a que en la resolución de este problema se han de fijar distintos pesos y, además, distintas probabilidades, mostramos ahora el fichero de salida que da el programa sólo para algunos valores de estos parámetros. En concreto, aparecen las soluciones para los pesos $\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$, $\mu_1 = 0.7, \mu_2 = 0.3$, $\mu_1 = 0.3, \mu_2 = 0.7$ y $\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$. Para el criterio de Kataoka se han fijado dos vectores de probabilidades distintos $\beta_1 = \beta_2 = 0.8$ y $\beta_1 = 0.6, \beta_2 = 0.7$. En el anexo dos aparecen las soluciones de este problema para más valores de los pesos.

Las soluciones obtenidas para estos valores de los parámetros en el caso normal son las que aparecen a continuación. En el criterio de Kataoka, para cada vector de pesos aparecen las soluciones obtenidas para los dos vectores de probabilidad considerados. En primer lugar aparecen las soluciones para el problema suponiendo que los vectores $\tilde{\mathbf{c}}_1$ y $\tilde{\mathbf{c}}_2$ siguen la distribución normal y, posteriormente, para el caso en el que se desconoce la distribución de probabilidad de los mismos y se aplica la desigualdad de Cantelli.

```
==================================================
                   CASO NORMAL
==================================================

================================================
 Solución del problema de ponderaciones

 Pesos:
   1.000000000000000      0.0000000000000000E+00
================================================

Calls to E04NEF
 --------------
      Problem Type = LP
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

   1.000000000000000      0.0000000000000000E+00

 Función Objetivo:    1.000000000000000

 IFAIL =             0

 Calls to E04NEF
```

```
---------------
     Problem Type = QP1

SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

 0.4117647058823529      0.2941176470588235

Función Objetivo:    1.529411764705882

IFAIL =             0

Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de probabilidad BETA:
 0.8000000000000000      0.8000000000000000

Vector solución
 0.5922961228539814      0.2038519385730093

Función Objetivo:    2.290790685280325

IFAIL =             0

Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de probabilidad BETA:
 0.6000000000000000      0.7000000000000000

Vector solución
  1.000000000000000      0.0000000000000000E+00

Función Objetivo:    1.438810047119165

IFAIL =             0


===============================================
Pesos:
 0.7000000000000000      0.3000000000000000
===============================================

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = LP
     Print Level = 0
```

```
SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

  1.000000000000000       0.0000000000000000E+00

Función Objetivo:   9.9999999999999992E-02

IFAIL =             0

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP1

SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

 0.3561643835616438       0.3219178082191781

Función Objetivo:    1.186986301369863

IFAIL =             0

Calls to E04UEF
---------------
     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de probabilidad BETA:
 0.8000000000000000       0.8000000000000000

Vector solución
 0.8820154539914551       5.8992273004272454E-02

Función Objetivo:    1.470831375875538

IFAIL =             0


Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de probabilidad BETA:
 0.6000000000000000       0.7000000000000000

Vector solución
  1.000000000000000       0.0000000000000000E+00

Función Objetivo:   0.6296513111405405

IFAIL =             0
```

```
==========================================
Pesos:
  0.3000000000000000       0.7000000000000000
 ==========================================

 Calls to E04NEF
 ---------------

      Problem Type = LP
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

   3.333333333333333       0.0000000000000000E+00

 Función Objetivo:    -3.666666666666667

 IFAIL =              0

 Calls to E04NEF
 ---------------

      Problem Type = QP1

 SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

  0.2456140350877193       0.3771929824561404

 Función Objetivo:    0.6780701754385965

 IFAIL =              0

 Calls to E04UEF
 ---------------

      Print Level = 0

 SOLUCIÓN KATAOKA

 Vector de probabilidad BETA:
  0.8000000000000000       0.8000000000000000

 Vector solución
   1.000000000000000       0.0000000000000000E+00

 Función Objetivo:    0.1704817148927645

 IFAIL =              0

 Calls to E04UEF
 ---------------

      Print Level = 0

 SOLUCIÓN KATAOKA

 Vector de probabilidad BETA:
  0.6000000000000000       0.7000000000000000

 Vector solución
```

```
  3.333333333333333      0.0000000000000000E+00

 Función Objetivo:   -1.497423344992083

 IFAIL =            0


=============================================
Pesos:
  0.0000000000000000E+00   1.000000000000000
=============================================

 Calls to E04NEF
 ---------------

      Problem Type = LP
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

  3.333333333333333      0.0000000000000000E+00

 Función Objetivo:   -6.666666666666667

 IFAIL =            0

 Calls to E04NEF
 ---------------

      Problem Type = QP1

 SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

 0.1111111111111111      0.4444444444444444

 Función Objetivo:   0.2222222222222222

 IFAIL =            0

 Calls to E04UEF
 ---------------

      Print Level = 0

 SOLUCIÓN KATAOKA

 Vector de probabilidad BETA:
 0.8000000000000000      0.8000000000000000

 Vector solución
  3.333333333333333      0.0000000000000000E+00

 Función Objetivo:   -2.699226187122781

 IFAIL =            0

 Calls to E04UEF
 ---------------
```

```
     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de probabilidad BETA:
 0.6000000000000000       0.7000000000000000

Vector solución
  3.333333333333333       0.0000000000000000E+00

Función Objetivo:     -4.194619131587497

IFAIL =             0

============================================
 TIEMPO C.P.U.:   4.799999237060547     segundos
============================================
** FINAL DE PROGRAMA **
```

Las soluciones que aparecen a continuación corresponden al ejemplo para el caso en el que se desconoce la distribución de probabilidad de los vectores $\tilde{\mathbf{c}}_1$ y $\tilde{\mathbf{c}}_2$ y se aplica la desigualdad de Cantelli para obtener soluciones eficientes con probabilidades β_1 y β_2. Puesto que el ejemplo es el mismo que en el caso normal, no aparecen las soluciones correspondientes a los criterios valor esperado y mínima varianza. Se han mantenido los valores de los pesos y las probabilidades que se fijaron para el caso normal.

```
=============================================
            CANTELLI SOLUCIÓN KATAOKA
=============================================

==========================================
 Solución del problema de ponderaciones
 Pesos:
   1.000000000000000       0.0000000000000000E+00
 ==========================================
 Vector de probabilidad BETA:
  0.8000000000000000       0.8000000000000000

 Vector solución
  0.4850522800866299       0.2574738599566850

 Función Objetivo:     3.749251382906965

 IFAIL =            0
 Calls to E04UEF
```

```
  ---------------

       Print Level = 0


 Vector de probabilidad BETA:
  0.6000000000000000       0.7000000000000000

 Vector solución
  0.5329597067382851       0.2335201466308574

 Función Objetivo:    2.778756407543996

 IFAIL =             0
===============================================
Pesos:
 0.7000000000000000       0.3000000000000000
================================================
Calls to E04UEF
 ---------------
       Print Level = 0


 Vector de probabilidad BETA:
  0.8000000000000000       0.8000000000000000


 Vector solución
  0.4962843718852185       0.2518578140573908

 Función Objetivo:    2.849962815325700

 IFAIL =             0

 Calls to E04UEF
 ---------------

       Print Level = 0

Vector de probabilidad BETA:
  0.6000000000000000       0.7000000000000000

 Vector solución
  0.5974674496470292       0.2012662751764854

 Función Objetivo:    2.050705893907875
 IFAIL =             0
===============================================
 Pesos:
 0.3000000000000000       0.7000000000000000
================================================

Vector de probabilidad BETA:
  0.8000000000000000       0.8000000000000000

 Vector solución
  0.5244382078224750       0.2377808960887625

 Función Objetivo:    1.648951809060679
```

```
IFAIL =              0


Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

Vector de probabilidad BETA:
  0.6000000000000000        0.7000000000000000

 Vector solución
  0.8272644040771272        8.6367797961436390E-02

 Función Objetivo:      1.035309707599933

 IFAIL =              0

===============================================
Pesos:
  0.0000000000000000E+00   1.000000000000000
 ===============================================
Vector de probabilidad BETA:
  0.8000000000000000        0.8000000000000000

 Vector solución
  0.5848904725604411        0.2075547637197794

 Función Objetivo:    0.7433795288692700

 IFAIL =              0

 Calls to E04UEF
 ---------------

     Print Level = 0

  Vector de probabilidad BETA:
  0.6000000000000000        0.7000000000000000

 Vector solución
   1.000000000000000        0.0000000000000000E+00

 Función Objetivo:    0.1602468994692868

 IFAIL =              0

 ==============================================
  TIEMPO C.P.U.:    5.929998397827148      segundos
 ==============================================
 ** FINAL DE PROGRAMA **
```

Antes de pasar a describir el funcionamiento del programa correspondiente a la resolución de problemas de tipo cuadrático, señalemos que se han resuelto problemas de dimensiones más grandes con el programa que acabamos de describir. En todos los casos, se han resuelto los problemas para tres vectores de pesos distintos y, en su resolución mediante el criterio de Kataoka se han considerado dos vectores de probabilidades. En la siguiente tabla aparecen las dimensiones de estos problemas y los tiempos de ejecución del programa para el caso normal (columna 4) y cuando se aplica la desigualdad de Cantelli (columna 5).

nº variables (n)	nº f. objetivo (q)	nº restricc. (m)	tiempo de C.P.U. (caso normal)	tiempo de C.P.U. (Cantelli)
8	2	3	2.9899	3.2299
9	3	5	4.51	4.17
10	3	5	4.0999	4.3599

Los tiempos de ejecución que aparecen en la tabla son valores medios obtenidos a partir de la resolución de varios problemas con las mismas dimensiones. Consideramos, además, que estos tiempos son bajos, dado que cada problema estocástico multiobjetivo se resuelve mediante tres criterios distintos (valor esperado, mínima varianza y Kataoka).

Esto mismo se ha realizado también en el resto de programas implementados (que se van a ir comentando en lo que queda de capítulo). Para ejecutar los programas se ha utilizado un programa generador de problemas que asegura que el conjunto de oportunidades de éste es no vacío y que el resto de los datos del problema son coherentes con las hipótesis que se han de verificar en cada caso.

3.1.2. PROBLEMAS CUADRÁTICOS.

Pasamos a describir el funcionamiento del programa correspondiente a problemas multiobjetivo con funciones objetivo de tipo cuadrático, cuya formulación general es:

$$\begin{array}{ll} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} & \left(\mathbf{x}^{\mathbf{t}}\mathbf{B}_1\mathbf{x} - \tilde{\xi}_1^{\mathbf{t}}\mathbf{x} + \tilde{\xi}_1^{\mathbf{t}}\mathbf{H}_1\tilde{\xi}_1, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{t}}\mathbf{B}_q\mathbf{x} - \tilde{\xi}_q^{\mathbf{t}}\mathbf{x} + \tilde{\xi}_q^{\mathbf{t}}\mathbf{H}_q\tilde{\xi}_q\right) \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array}$$

donde, para todo $k \in \{1, 2, \ldots, q\}$, las matrices $\mathbf{B}_k$ y $\mathbf{H}_k$ son cuadradas y de orden n y el vector $\tilde{\xi}_k$ es estocástico y de n componentes.

Siguiendo el esquema teórico de este trabajo, para resolver este problema el programa distingue dos casos, en función de la estructura del problema y la distribución de probabilidad del vector $\tilde{\xi}_k$. Los dos casos considerados son:

- Caso normal: Se supone que se verifican las siguientes hipótesis:

  a) Para todo $k \in \{1, 2, ..., q\}$ la matriz $\mathbf{H}_k$ es diagonal.

  b) Las componentes del vector $\tilde{\xi}_k$ son variables aleatorias mutuamente estadísticamente independientes.

  c) Para todo $k \in \{1, 2, ..., q\}$, el vector $\tilde{\xi}_k$ se distribuye según la distribución normal multivariante de valor esperado $\bar{\xi}_k = \left(\bar{\xi}_{k1}, \bar{\xi}_{k2}, \ldots, \bar{\xi}_{kn}\right)^{\mathbf{t}}$ y matriz de varianzas y covarianzas $\mathbf{V}_k$ definida positiva.

- Aleatoriedad simple: En este caso se supone que para todo $k \in \{1, 2, ..., q\}$, el vector $\tilde{\xi}_k$ depende linealmente de una variable aleatoria $\tilde{t}_k$:

$$\tilde{\xi}_k = \xi_k^1 + \tilde{t}_k \xi_k^2$$

con $\xi_k^1, \xi_k^2 \in \mathbb{R}^n$ y $\tilde{t}_k$ variable aleatoria normal de valor esperado $\bar{t}_k$ y varianza σ_k^2 finita, $\sigma_k^2 < \infty$.

Hechas estas aclaraciones, describimos el funcionamiento del programa.

Como en casos anteriores, los datos del problema que se desee resolver se introducen en un fichero en el que se han de especificar el número de variables, funciones y restricciones del problema, la matriz de coeficientes técnicos, las cotas de las variables y de las restricciones, las matrices $\mathbf{B}_k$ y $\mathbf{H}_k$, $k = 1, 2, ..., q$. Además, para reducir el tiempo de ejecución C.P.U., en este mismo fichero se introducen los vectores de valor esperado, las matrices de varianzas y covarianzas de las funciones objetivo correspondientes a problemas cuadráticos normales. Evidentemente, si se desea resolver problemas de aleatoriedad simple, el programa obvia estos valores.

Una vez leídos los datos el programa nos pide el vector de pesos y aparece en pantalla el siguiente menú:

```
1. Normal.
2. Aleatoriedad simple.
3. Terminar.
```

Si escogemos la opción 1, el funcionamiento del programa es semejante al del caso lineal, que se ilustra en la figura 6.

En la opción 2, aleatoriedad simple, el programa nos pide los siguientes datos: $\xi_k^1, \xi_k^2, \bar{t}_k, \sigma_k^2$, $k = 1, 2, ..., q$. Tras esto, opera de la misma forma en el caso normal y en el caso de aleatoriedad simple.

En ambas opciones, al terminar nos aparece el tiempo de C.P.U. y el nombre de un fichero de salida en el que se recogen las soluciones de los problemas resueltos durante la ejecución del programa.

Hay que señalar que para el problema de Kataoka lo que se resuelve no es el problema original sino la aproximación de Cantelli a dicho problema (tal y como se expresa en los capítulos 3 y 4).

Los siguientes ejemplos muestran el funcionamiento del programa. El primero de ellos (ejemplo 6) corresponde al caso normal y el segundo (ejemplo 7) al de aleatoriedad simple.

Ejemplo 6.

Consideremos el siguiente ejemplo de programación estocástica biobjetivo cuadrático:

$$\begin{aligned}
&\text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} \left(\mathbf{x}^t\mathbf{B}_1\mathbf{x} - \tilde{\xi}_1^t\mathbf{x} + \tilde{\xi}_1^t\mathbf{H}_1\tilde{\xi}_1, \mathbf{x}^t\mathbf{B}_2\mathbf{x} - \tilde{\xi}_2^t\mathbf{x} + \tilde{\xi}_2^t\mathbf{H}_2\tilde{\xi}_2\right)\\
&\text{s.a}\quad x_1+2x_2\geq 1\\
&\qquad 3x_1+\ x_2\leq 10\\
&\qquad x_1,\ x_2\geq 0
\end{aligned}$$

con $\mathbf{B}_1=\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}_2=\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_1=\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_2=\begin{pmatrix}2&0\\0&6\end{pmatrix}$, y los vectores $\tilde{\xi}_1$, $\tilde{\xi}_2$ estocásticos, con distribución normal. Las componentes de estos vectores son variables aleatorias mutuamente estadísticamente independientes. Los vectores de valor esperado y las matrices de varianzas y covarianzas de estos vectores son:

$$\bar{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \bar{\xi}_2=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \mathbf{V}_1=\begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{V}_2=\begin{pmatrix}3&0\\0&9\end{pmatrix}$$

El fichero de datos de este problema es:

```
    'Numero de Variables'
    2
    'Número de Funciones Objetivo'
    2
    'Numero de Restricciones Lineales'
    2
    'Matriz de Restricciones Lineales por filas'
     1.    2.
     3.    1.
    'Cotas de las Variables'
    0.     1E10
    0.     1E10
    'Cotas de las Restricciones'
       1.      1E10
    -1E10       10.
    'Matrices Cuadráticas B por filas. Dejar espacios'
    2.     0.
    0.     5.

    3.     0.
    0.     2.

    'Diagonales de las Matrices H'
    3.     2.
    2.     6.
    'Vectores de Valor Esperado'
    1.     2.
    3.     4.
    'Diagonales de las Matrices de Varianzas y Covarianzas
V'
    4.     2.
    3.     9.
    'Estimacion Inicial'
    0.   1.
```

Se ha resuelto el ejemplo planteado para distintos valores de los pesos. En concreto se ha comenzado resolviendo para las ponderaciones $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$ y a partir de estos valores se ha resuelto el problema restando 0.1 el peso μ_1 y sumando la misma cantidad a μ_2, hasta llegar a los pesos $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$.

Para el criterio de Kataoka se han fijado dos vectores de probabilidades distintos $\beta_1 = 0.8, \beta_2 = 0.75$ y $\beta_1 = \beta_2 = 0.6$.

Debido a que el fichero de salida es muy grande, mostramos ahora las soluciones para los vectores de pesos $(\mu_1, \mu_2) = (1,0)$, $(\mu_1, \mu_2) = (0.7,0.3)$, $(\mu_1, \mu_2) = (0.3,0.7)$ y $(\mu_1, \mu_2) = (0,1)$. En el anexo 2 aparecen las soluciones del problema para los pesos señalados anteriormente.

```
==============================================
                   CASO NORMAL
==============================================


==============================================
        SOLUCIÓN PARA EL VECTOR DE PESOS:
    1.000000000000000      0.0000000000000000E+00
==============================================
    Calls to E04NEF
    ---------------

         Problem Type = QP2
         Print Level = 0

    SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

     0.3846153846153846      0.3076923076923077

    Función Objetivo:     26.76923076923077

    IFAIL =             0

    Calls to E04NEF
    ---------------
         Problem Type = QP2

    SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

      1.636363636363636      5.090909090909091

    Función Objetivo:     413.0909090909091

    IFAIL =             0

    Calls to E04UEF
    ---------------
         Print Level = 0

    SOLUCIÓN KATAOKA

    Vector de Probabilidades BETA:
     0.8000000000000000      0.7500000000000000

    Vector solución:
     0.7018621202230769      0.3308162864665218

    Función Objetivo:     74.06940588134253

    IFAIL =             0

    Calls to E04UEF
    ---------------
         Print Level = 0

    SOLUCIÓN KATAOKA
```

```
Vector de Probabilidades BETA:
 0.6000000000000000      0.6000000000000000

Vector solución:
 0.5332504581576452      0.2799997726085691

Función Objetivo:    55.81754460285822

IFAIL =             0

=================================================
      SOLUCIÓN PARA EL VECTOR DE PESOS:
 0.7000000000000000      0.3000000000000000
=================================================

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP2
     Print Level = 0

SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

 0.3533834586466165      0.3233082706766917

Función Objetivo:    70.40977443609023

IFAIL =             0

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP2

SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

 0.0000000000000000E+00   10.00000000000000

Función Objetivo:    6130.000000000000

IFAIL =             0

Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de Probabilidades BETA:
 0.8000000000000000      0.7500000000000000

Vector solución:
 0.6505971291775793      0.5915425772414417

Función Objetivo:    188.2063605159914

IFAIL =             0

Calls to E04UEF
```

```
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de Probabilidades BETA:
 0.6000000000000000      0.6000000000000000

Vector solución:
 0.5380089011726020      0.5012626601339727

Función Objetivo:    150.6992631848153

IFAIL =              0

================================================
      SOLUCIÓN PARA EL VECTOR DE PESOS:
 0.3000000000000000      0.7000000000000000
================================================

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP2
     Print Level = 0
SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

 0.4444444444444444      0.5862068965517242

Función Objetivo:    128.3701149425287

IFAIL =              0


Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP2

SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

 0.0000000000000000E+00   10.00000000000000

Función Objetivo:    13674.00000000000

IFAIL =              0


Calls to E04UEF
---------------
     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de Probabilidades BETA:
 0.8000000000000000      0.7500000000000000

Vector solución:
 0.5964420064884697       1.193411940304408
```

```
 Función Objetivo:     338.8514708706814

 IFAIL =              0

 Calls to E04UEF
 ---------------

      Print Level = 0

 SOLUCIÓN KATAOKA

 Vector de Probabilidades BETA:
  0.6000000000000000      0.6000000000000000

 Vector solución:
  0.5422877653288416       1.010842549469988

 Función Objetivo:     276.1212701278227

 IFAIL =              0
================================================
       SOLUCIÓN PARA EL VECTOR DE PESOS:
  0.0000000000000000E+00   1.000000000000000
================================================

Calls to E04NEF
 ---------------

      Problem Type = QP2
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

  0.5000000000000000       1.000000000000000

 Función Objetivo:     171.2500000000000

 IFAIL =              0

 Calls to E04NEF
 ---------------

      Problem Type = QP2

 SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

  0.0000000000000000E+00   10.00000000000000

 Función Objetivo:     19332.00000000000

 IFAIL =              0


 Calls to E04UEF
 ---------------

      Print Level = 0

 SOLUCIÓN KATAOKA
```

```
Vector de Probabilidades BETA:
 0.8000000000000000       0.7500000000000000

Vector solución:
 0.5623519906910245        2.125378475800765

Función Objetivo:     448.9497773811465

IFAIL =             0


Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA
Vector de Probabilidades BETA:
 0.6000000000000000       0.6000000000000000

Vector solución:
 0.5439233907443367        1.797152126716245

Función Objetivo:     368.1413123516943

IFAIL =             0

===============================================
 TIEMPO C.P.U.:   6.449999809265137  segundos
===============================================
** FINAL DE PROGRAMA **
```

Ejemplo 7.

Consideremos el problema de programación estocástica biobjetivo cuadrático:

$$\begin{aligned}
&\text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} \left(\mathbf{x}'\mathbf{B}_1\mathbf{x} - \tilde{\xi}_1'\mathbf{x} + \tilde{\xi}_1'\mathbf{H}_1\tilde{\xi}_1, \mathbf{x}'\mathbf{B}_2\mathbf{x} - \tilde{\xi}_2'\mathbf{x} + \tilde{\xi}_2'\mathbf{H}_2\tilde{\xi}_2\right)\\
&\text{s.a } \ 2x_1 + 5x_2 \geq 10\\
&\qquad 3x_1 + \ 2x_2 \leq 12\\
&\qquad x_1,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, y los vectores $\tilde{\xi}_1$, $\tilde{\xi}_2$ estocásticos, dependen linealmente de la variable aleatoria $\tilde{t}$, de tal forma que:

$$\tilde{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \tilde{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \tilde{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} + \tilde{t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con $\tilde{t}$ variable aleatoria normal de valor esperado $\bar{t} = 2$ y varianza $\sigma_t^2 = 1$.

El fichero de datos correspondiente a este problema es:

```
'Numero de Variables'
2
'Número de Funciones Objetivo'
2
'Numero de Restricciones Lineales'
2
'Matriz de Restricciones Lineales por filas'
 2.    5.
 6.    4.
'Cotas de las Variables'
0.     1E10
0.     1E10
'Cotas de las Restricciones'
   10.      1E10
-1E10      24.
'Matrices Cuadráticas B por filas. Dejar espacios'
5.     0.
0.     3.

2.     0.
```

```
0.      5.

'Diagonales de las Matrices H'
3.      3.
1.      2.
'Vectores de Valor Esperado'
1.      2.
3.      4.
'Diagonales de las Matrices de Varianzas y Covarianzas V'
4.      2.
3.      9.
'Estimacion Inicial'
0.   1.
```

Al igual que en el caso anterior, se ha resuelto este problema para distintos valores de los pesos. En concreto se ha comenzado resolviendo para las ponderaciones $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$ y a partir de estos valores se ha resuelto el problema restando 0.1 el peso μ_1 y sumando la misma cantidad a μ_2, hasta llegar a los pesos $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$. En el anexo 2 aparecen las soluciones del problema para los pesos. Ahora, debido a que el fichero de salida es muy grande, mostramos sólo las soluciones para los vectores de pesos $(\mu_1, \mu_2) = (1,0)$, $(\mu_1, \mu_2) = (0.7,0.3)$, $(\mu_1, \mu_2) = (0.3,0.7)$ y $(\mu_1, \mu_2) = (0,1)$.

Para el criterio de Kataoka se han fijado dos vectores de probabilidades distintos $\beta_1 = \beta_2 = 0.9$ y $\beta_1 = \beta_2 = 0.8$.

```
===============================================
              ALEATORIEDAD SIMPLE
===============================================

 ==============================================
        SOLUCIÓN PARA EL VECTOR DE PESOS:
   1.000000000000000      0.0000000000000000E+00
 ==============================================
 Calls to E04NEF
 ---------------

      Problem Type = QP2
      Print Level = 0

SOLUCIÓN VALOR ESPERADO
  0.5656934306569343        1.773722627737226

 Función Objetivo:    83.24635036496350

 IFAIL =             0
 Calls to E04NEF
 ---------------
      Problem Type = QP2
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA
  0.0000000000000000E+00   6.000000000000000

 Función Objetivo:    1368.000000000000

 IFAIL =             0
 Calls to E04UEF
 ---------------
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN KATAOKA
 Vector de probabilidades BETA:
  0.9000000000000000      0.9000000000000000

 Vector solución:
  0.7262754029084703        1.709489838836612

 Función Objetivo:    204.7794152159183

 IFAIL =             0


 Calls to E04UEF
 ---------------
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN KATAOKA
 Vector de probabilidades BETA:
  0.8000000000000000      0.8000000000000000

 Vector solución:
```

```
  0.6727518955411542        1.730899241783538

 Función Objetivo:     164.2997970306064

 IFAIL =              0

================================================
      SOLUCIÓN PARA EL VECTOR DE PESOS:
  0.7000000000000000      0.3000000000000000
 ================================================
Calls to E04NEF
 ---------------

      Problem Type = QP2
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

  0.8810949529512404        1.647562018819504

 Función Objetivo:     78.21988879384089

 IFAIL =              0
 Calls to E04NEF
 ---------------
      Problem Type = QP2
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

   3.636363636363636      0.5454545454545455

 Función Objetivo:     1482.166942148760

 IFAIL =              0
Calls to E04UEF
 ---------------
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN KATAOKA
 Vector de probabilidades BETA:
  0.9000000000000000      0.9000000000000000

 Vector solución:
   1.246549806194129        1.501380077522348

 Función Objetivo:     202.4418511669716

 IFAIL =              0
 Calls to E04UEF
 ---------------

      Print Level = 0

 SOLUCIÓN KATAOKA
 Vector de probabilidades BETA:
  0.8000000000000000      0.8000000000000000

 Vector solución:
   1.124891020066384        1.550043591973446
```

```
Función Objetivo:     161.1734023480328

IFAIL =               0

================================================
      SOLUCIÓN PARA EL VECTOR DE PESOS:
 0.3000000000000000      0.7000000000000000
================================================
Calls to E04NEF
 ---------------
      Problem Type = QP2
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

   1.520532741398446       1.391786903440622

 Función Objetivo:     69.31748057713651

 IFAIL =               0
 Calls to E04NEF
 ---------------
      Problem Type = QP2
      Print Level = 0


 SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA
   3.636363636363636      0.5454545454545455

 Función Objetivo:     1455.436363636364

 IFAIL =               0
 Calls to E04UEF
 ---------------
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN KATAOKA
 Vector de probabilidades BETA:
  0.9000000000000000      0.9000000000000000

 Vector solución:
   2.294816672913531       1.082073330834587

 Función Objetivo:     193.3609428687420

 IFAIL =               0
 Calls to E04UEF
 ---------------
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN KATAOKA
 Vector de probabilidades BETA:
  0.8000000000000000      0.8000000000000000

 Vector solución:
   2.037881490999047       1.184847403600381

 Función Objetivo:     152.4943539743771
```

```
 IFAIL =            0

=================================================
      SOLUCIÓN PARA EL VECTOR DE PESOS:
  0.0000000000000000E+00   1.000000000000000
==================================================
Calls to E04NEF
 ---------------

      Problem Type = QP2
      Print Level = 0

SOLUCIÓN VALOR ESPERADO
   2.321428571428571       1.071428571428571

 Función Objetivo:    59.41071428571429

 IFAIL =            0
Calls to E04NEF
 ---------------
      Problem Type = QP2
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA
   3.636363636363636      0.5454545454545454

 Función Objetivo:    1435.388429752066

 IFAIL =            0
 Calls to E04UEF
 ---------------
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN KATAOKA
 Vector de probabilidades BETA:
  0.9000000000000000      0.9000000000000000

 Vector solución:
   3.592164367841035      0.5631342528635859

 Función Objetivo:    177.9060697076182

 IFAIL =            0
 Calls to E04UEF
 ---------------
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN KATAOKA
 Vector de probabilidades BETA:
  0.8000000000000000      0.8000000000000000

 Vector solución:
   3.172883401235013      0.7308466395059949

 Función Objetivo:    139.4175257746096

 IFAIL =            0

 ==============================================
  TIEMPO C.P.U.:   6.520000457763672      segundos
```

```
=================================================
** FINAL DE PROGRAMA **
```

Para finalizar este apartado, comentemos que, al igual que en el caso lineal, se ha probado el funcionamiento del programa para problemas de dimensiones más grandes. Estos problemas se han resuelto para tres vectores de pesos y dos vectores de probabilidades distintos. En la siguiente tabla aparecen las dimensiones de algunos de los ejemplos probados y los tiempos de C. P. U. del programa. La columna cuatro corresponde al caso normal y la cinco al de aleatoriedad simple. Estos tiempos de ejecución son valores medios calculados a partir de los obtenidos para varios problemas con las mismas dimensiones.

nº variables (n)	nº f. objetivo (q)	nº restricc. (m)	tiempo de C.P.U. (caso normal)	tiempo de C.P.U. (aleat. simple)
8	2	3	4.27	5.1299
9	3	4	6.25	8.39
10	3	5	5.65	7.58

A la vista de estos resultados, consideramos que los tiempos de ejecución son relativamente bajos, teniendo en cuenta las dimensiones de los problemas y que el programa resuelve cada modelo de programación estocástica multiobjetivo mediante tres criterios distintos (valor esperado, mínima varianza y Kataoka).

3.2.ENFOQUE ESTOCÁSTICO.

Como se vio en el capítulo 5, la resolución problemas de programación estocástica multiobjetivo mediante el enfoque estocástico pasa por la transformación del problema multiobjetivo estocástico en uno de programación estocástica con una única función objetivo, la transformación posterior de ésta en su determinista equivalente y la resolución del problema resultante.

Siguiendo el desarrollo teórico de este trabajo, se ha considerado la transformación del conjunto de objetivos estocásticos mediante el método de las ponderaciones, con lo cual, mediante este enfoque se resuelven problemas del tipo:

$$\begin{array}{l} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} \ \tilde{f}(\mathbf{x},\tilde{\xi}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \ \tilde{z}_k(\mathbf{x},\tilde{\xi}) \\ \text{s. a} \quad \mathbf{x} \in D \end{array}$$

donde $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q$, $\mu_k \geq 0$, para todo $k \in \{1, 2, ..., q\}$ son los pesos fijados para las funciones objetivo estocásticas del problema de partida.

Una vez descrito el problema que vamos a resolver, hemos de señalar que de los resultados teóricos del capítulo se tiene que:

a) Si aplicamos el criterio valor esperado al problema ponderado del enfoque estocástico, el problema resultante es el mismo que si elegimos el criterio valor esperado para resolver el problema en el enfoque multiobjetivo y, posteriormente, consideramos la obtención de soluciones eficientes de éste mediante el método de las ponderaciones.

b) Si las covarianzas entre objetivos estocásticos son nulas, las soluciones del problema que resulta al resolver el problema de programación estocástica multiobjetivo mediante el enfoque estocástico, aplicando el criterio mínima varianza al problema ponderado, es semejante al que se obtiene al aplicar el método de las ponderaciones al problema resultante de la aplicación del criterio mínima varianza a cada uno de los objetivos estocásticos por separado en el enfoque multiobjetivo.

c) Si aplicamos el criterio de Kataoka al problema ponderado de la aproximación estocástica, en los casos analizados en este apartado, sabemos que si las covarianzas entre objetivos estocásticos son nulas, la solución que se obtiene de éste es solución eficiente valor esperado desviación estándar del problema multiobjetivo estocástico de partida.

Todo esto nos ha llevado a programar, dentro del grupo de problemas correspondientes a la aproximación estocástica, sólo los criterios mínima varianza y de Kataoka para los casos en los que las covarianzas entre objetivos estocásticos sean no nulas. No se ha programado la resolución del problema para el criterio mínimo riesgo, debido a la reciprocidad existente entre éste y el criterio de Kataoka, comentada anteriormente en la descripción de los programas correspondientes a problemas con una única función objetivo.

Como en casos anteriores, se han implementado dos programas, correspondientes al caso lineal y al caso cuadrático con aleatoriedad simple, que pasamos a describir.

3.2.1. PROBLEMAS LINEALES.

Consideremos el problema ponderado:

$$\begin{array}{l} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} \displaystyle\sum_{k=1}^{q} \mu_k \tilde{\mathbf{c}}_k^t \mathbf{x} \\ \text{s.a } \mathbf{x} \in D \end{array}$$

Sea $\tilde{\mathbf{c}} = \left(\tilde{\mathbf{c}}_1^t, \tilde{\mathbf{c}}_2^t, \ldots, \tilde{\mathbf{c}}_q^t\right)^t$ el vector que recoge el conjunto de vectores estocásticos del problema, con valor esperado $\bar{\mathbf{c}} = \left(\bar{\mathbf{c}}_1^t, \bar{\mathbf{c}}_2^t, \ldots, \bar{\mathbf{c}}_q^t\right)^t$ y matriz de varianzas y covarianzas **V** simétrica y definida positiva:

$$\mathbf{V} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_{12} & \cdots & \mathbf{V}_{1s} & \cdots & \mathbf{V}_{1q} \\ \hline \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_2 & \cdots & \mathbf{V}_{2s} & \cdots & \mathbf{V}_{2q} \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline \mathbf{V}_{k1} & \mathbf{V}_{k2} & \cdots & \mathbf{V}_{ks} & \cdots & \mathbf{V}_{kq} \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline \mathbf{V}_{q1} & \mathbf{V}_{q2} & \cdots & \mathbf{V}_{qs} & \cdots & \mathbf{V}_q \end{array}\right)$$

Como se ha señalado anteriormente, en el programa sólo se resuelven los problemas correspondientes a la resolución del problema ponderado mediante los criterios mínima varianza y de Kataoka.

En el fichero de datos que se ha de crear para resolver problemas mediante este enfoque se han de especificar el número de variables, funciones y restricciones del problema, la matriz de coeficientes técnicos, las cotas de las variables y de las restricciones, el de valor esperado, $\bar{\mathbf{c}}$, la matriz de varianzas y covarianzas, **V**, y la estimación inicial. Una vez hecho esto, si ejecutamos el programa aparece el siguiente menú:

```
1. Normal.
2. Cantelli.
3. Terminar.
```

Si elegimos las opciones 1 ó 2 el programa opera de la misma forma. Nos pide el vector de pesos, aparece en pantalla la solución mínima varianza y el programa entra en un bucle que nos permite resolver el problema para pesos distintos. Posteriormente, nos pide la probabilidad para resolver el problema mediante el criterio de Kataoka y, de nuevo entra en un bucle en el que podemos modificar los pesos o cambiar la probabilidad. Hecho esto, aparece en pantalla de nuevo el menú inicial, dándonos la opción de resolver un nuevo problema o terminar. El siguiente esquema nos muestra cómo funciona el programa.

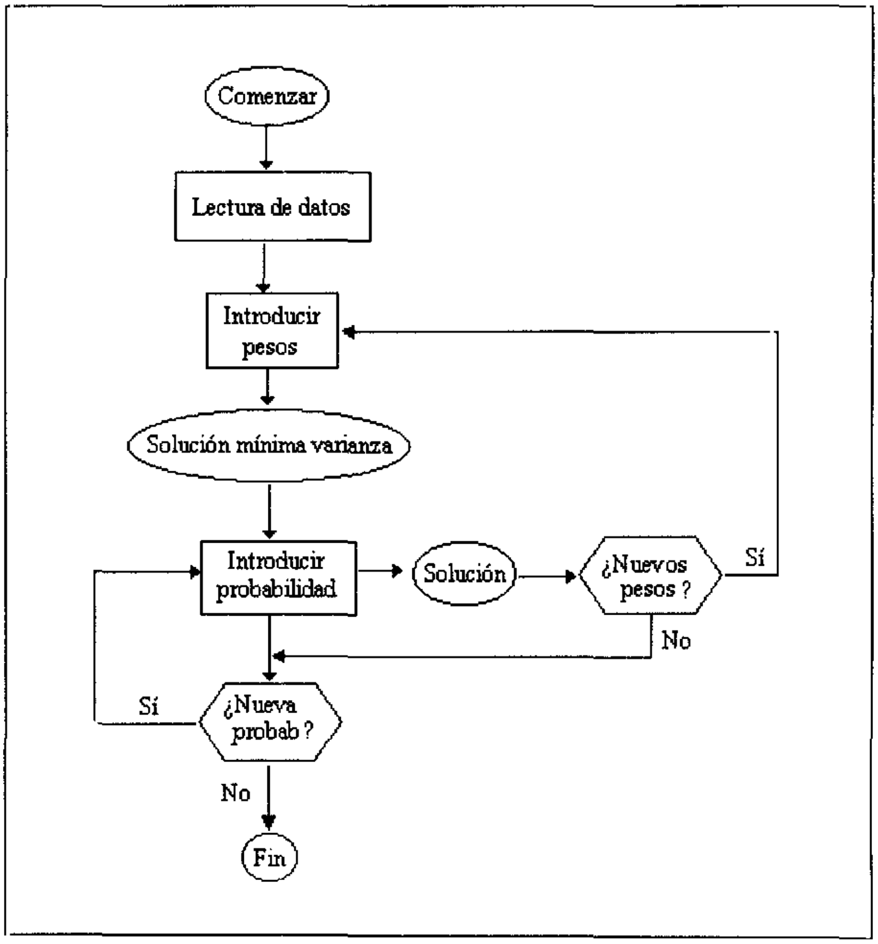


Figura 8.

Si se elige la opción 3 (terminar) aparece en pantalla el tiempo de C.P.U. del programa así como el nombre de un fichero de salida en el que se recogen los resultados de los problemas resueltos en la ejecución del problema.

Mostramos, mediante el siguiente ejemplo, cómo actúa el programa.

Ejemplo 8.

Consideremos el problema de programación estocástica biobjetivo lineal:

$$\begin{aligned} &\text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} \left(\tilde{c}_{11}x_1 + \tilde{c}_{12}x_2, \tilde{c}_{21}x_1 + \tilde{c}_{22}x_2\right) \\ &\text{s.a} \quad x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ &\qquad\; x_1, x_2 \leq 3 \\ &\qquad\; x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

donde el vector $\tilde{\mathbf{c}} = (\tilde{c}_{11}, \tilde{c}_{12}, \tilde{c}_{21}, \tilde{c}_{22})^t$ tiene valor esperado y varianza:

$$\bar{\mathbf{c}} = (3, 5, 4, 1)^t \;\; \text{y} \; \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 25 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

respectivamente. Para resolver este ejemplo introducimos, en primer lugar el fichero de datos que, en este caso, es:

```
'Numero de Variables'
2
'Número de Funciones Objetivo'
2
'Numero de Restricciones Lineales'
1
'Matriz de Restricciones Lineales por filas'
 1.    2.
'Cotas de las Variables'
0.     3.
0.     3.
'Cotas de las Restricciones'
4.      1E10
'Matriz de varianzas y covarianzas (dim. (n*p)*(n*p))'
25.   0.    0.   3.
 0.  25.    3.   0.
 0.   3.    1.   0.
 3.   0.    0.   9.
'Vector de medias (n*p)'
 3.  5.  4.  1.
'Estimacion Inicial'
0.   0.
```

Hecho esto, el programa resuelve del problema mediante los criterios mínima varianza y de Kataoka. Para ello se ha de especificar el vector de pesos.

Hemos comenzado resolviendo para las ponderaciones $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$ y a partir de estos valores se ha resuelto el problema restando 0.1 el peso μ_1 y sumando la misma cantidad a μ_2, hasta llegar a los pesos $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$.

Al igual que en casos anteriores, debido a que el fichero de salida es muy grande, mostramos ahora las soluciones para los vectores de pesos $(\mu_1, \mu_2) = (1,0)$, $(\mu_1, \mu_2) = (0.7,0.3)$, $(\mu_1, \mu_2) = (0.3,0.7)$ y $(\mu_1, \mu_2) = (0,1)$. En el anexo 2 aparecen las soluciones del problema para los pesos señalados anteriormente.

En cuanto a las probabilidades, hemos considerado los valores $\beta = 0.8$ y $\beta = 0.95$.

Las soluciones siguiente son las obtenidas para el caso normal. Aparecen, en primer lugar, las soluciones correspondientes a la varianza y, posteriormente, las del problema de Kataoka.

```
*****************************************************
                  Método Varianza
*****************************************************
Calls to E04NEF
 ---------------
      Problem Type = QP1
      Print Level = 0
 *****************************************************

 Solución para los pesos
   1.000000000000000       0.0000000000000000E+00

 Punto:
  0.8000000000000000       1.600000000000000

 Valor de la función ponderada:    80.00000000000000

 Valor de IFAIL:              0

*****************************************************
Solución para los pesos
  0.7000000000000000       0.3000000000000000
```

```
 Punto:
  0.7347507842453817        1.632624607877309

 Valor de la función ponderada:    44.49572673405368

 Valor de IFAIL:              0
**************************************************
**************************************************
 Solución para los pesos
  0.3000000000000000      0.7000000000000000

 Punto:
   1.316375198728140       1.341812400635930

 Valor de la función ponderada:    21.19020667726550

 Valor de IFAIL:              0
**************************************************
Solución para los pesos
  0.0000000000000000E+00   1.000000000000000

 Punto:
   2.769230769230769      0.6153846153846154

 Valor de la función ponderada:    11.07692307692308

 Valor de IFAIL:              0

**************************************************
                        Kataoka
**************************************************

  Calls to E04UEF
 ---------------

      Print Level = 0

**************************************************
Soluciones para la probabilidad BETA:0.9500000000
**************************************************

 Pesos:
   1.000000000000000      0.0000000000000000E+00

 Punto:
  0.7128673824731410       1.643566308763429

 Valor de la función ponderada:    25.09025075034094

 Valor de IFAIL:              0
**************************************************
Pesos:
  0.7000000000000000      0.3000000000000000

 Punto:
  0.3285767470327386       1.835711626483631

 Valor de la función ponderada:    19.32002769948082
```

```
 Valor de IFAIL:            0

************************************************
 Pesos:
  0.3000000000000000      0.7000000000000000

 Punto:
  0.0000000000000000E+00   2.000000000000000

 Valor de la función ponderada:    12.88973936861010

 Valor de IFAIL:            0

************************************************
Solución para la probabilidad BETA:   0.9500000000000000

 Pesos:
  0.0000000000000000E+00   1.000000000000000

 Punto:
  0.0000000000000000E+00   2.000000000000000

 Valor de la función ponderada:    11.86912155151367

 Valor de IFAIL:            0

 ************************************************

===========================================
  Tiempo C.P.U.:    2.959999084472656
===========================================
************************************************
                        Kataoka
************************************************

************************************************
Solución para la probabilidad BETA:   0.8000000000
************************************************

************************************************
 Pesos:
   1.000000000000000      0.0000000000000000E+00

 Punto:
  0.6289926548276509       1.685503672586175

 Valor de la función ponderada:    17.88505860039882

 Valor de IFAIL:            0

************************************************
 Pesos:
  0.7000000000000000      0.3000000000000000

 Punto:
  0.0000000000000000E+00   2.000000000000000

 Valor de la función ponderada:    13.68300622802303

 Valor de IFAIL:            0
```

```
***************************************************
 Pesos:
  0.3000000000000000       0.7000000000000000

 Punto:
  0.0000000000000000E+00   2.000000000000000

 Valor de la función ponderada:     8.743939692228431

 Valor de IFAIL:              0

***************************************************
 Pesos:
  0.0000000000000000E+00   1.000000000000000

 Punto:
  0.0000000000000000E+00   2.000000000000000

 Valor de la función ponderada:     7.049727320671082

 Valor de IFAIL:              0
==================================================
  Tiempo C.P.U.:     1.779998779296875
 ==================================================
```

Finalmente, se ha resuelto el problema correspondiente a la aplicación de la desigualdad de Cantelli al problema de Kataoka. El programa da también en este caso las soluciones mínima varianza, pero, no aparecen porque son las mismas que en el caso normal.

```
************************************************
  Kataoka. Aplicación de la desigualdad de Cantelli.
************************************************
 Solución para la probabilidad BETA:   0.9500000000
************************************************
Calls to E04UEF
 ---------------
       Print Level = 0
************************************************
Pesos:
   1.000000000000000      0.0000000000000000E+00

 Punto:
  0.7671617786966594      1.616419110651670

 Valor de la función ponderada:    49.37896868825547
 Valor de IFAIL:              0

************************************************
Pesos:
  0.7000000000000000      0.3000000000000000

 Punto:
  0.5848592766222341      1.707570361688883

 Valor de la función ponderada:    37.60000288743326
 Valor de IFAIL:              0

************************************************
Pesos:
  0.3000000000000000      0.7000000000000000

 Punto:
  0.3893038247507847      1.805348087624608

 Valor de la función ponderada:    26.71878607767400
 Valor de IFAIL:              0

************************************************
Pesos:
  0.0000000000000000E+00   1.000000000000000

 Punto:
   1.850827683391063      1.074586158304469
 Valor de la función ponderada:    24.68115133489565
 Valor de IFAIL:              0
 ==========================================
  Tiempo C.P.U.:     2.359999895095825
 ==========================================
************************************************
```

```
  Kataoka. Aplicación de la desigualdad de Cantelli.
*****************************************************
  Solución para la probabilidad BETA:    0.800000000
*****************************************************

 Calls to E04UEF
 ---------------

      Print Level = 0
*****************************************************
 Pesos:
   1.000000000000000      0.0000000000000000E+00

 Punto:
  0.7283741630574231       1.635812918471288

 Valor de la función ponderaaa:    28.27064632295094

 Valor de IFAIL:              0

*****************************************************
 Pesos:
  0.7000000000000000      0.3000000000000000

 Punto:
  0.4035406239616545       1.798229688019173

 Valor de la función ponderada:    21.73984187146081

 Valor de IFAIL:              0

*****************************************************
 Pesos:
  0.3000000000000000      0.7000000000000000

 Punto:
  0.0000000000000000E+00   2.000000000000000

 Valor de la función ponderada:    14.72279032045115

 Valor de IFAIL:              0

*****************************************************
Pesos:
  0.0000000000000000E+00   1.000000000000000

 Punto:
  0.0000000000000000E+00   2.000000000000000

 Valor de la función ponderada:    14.00000000000000

 Valor de IFAIL:              0
 *****************************************************
 ====================================================
  Tiempo C.P.U.:     2.109999656677246

                ** FINAL DE PROGRAMA **
```

Al igual que en los casos anteriores, se ha probado el funcionamiento del programa para dimensiones grandes. En la siguiente tabla aparecen las dimensiones de los problemas considerados, así como los tiempos medios de ejecución, calculados a partir de los obtenidos para varios de ellos. Los problemas se han resuelto para tres vectores de pesos y dos probabilidades distintos.

nº variables (n)	nº f. objetivo (q)	nº restricc. (m)	tiempo de C.P.U. (caso normal)	tiempo de C.P.U. (Cantelli)
8	2	3	1.72999	1.35
9	3	4	2.13	1.91
10	3	5	2.2099	2.5399

Consideramos que los tiempos de ejecución son, en términos relativos, bajos, dadas las dimensiones de los problemas estocásticos y que la resolución de cada uno se lleva a cabo mediante dos criterios distintos (mínima varianza y Kataoka). La columna 4 corresponde al tiempo de ejecución en el caso normal y la cinco al de la aplicación de la desigualdad de Cantelli.

3.2.2. PROBLEMAS CUADRÁTICOS.

El programa implementado corresponde a problemas cuadráticos bajo la hipótesis de aleatoriedad simple. La formulación del problema ponderado es, en este caso:

$$\begin{array}{ll} \text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} & \sum_{k=1}^{q} \mu_k \left(\mathbf{x}^t \mathbf{B}_k \mathbf{x} - \tilde{\xi}_k^t \mathbf{x} + \tilde{\xi}_k^t \mathbf{H}_k \tilde{\xi}_k \right) \\ \text{s.a} & \mathbf{x} \in D \end{array}$$

Suponemos que para todo $k \in \{1, 2, ..., q\}$ el vector $\tilde{\xi}_k$ depende linealmente de una variable aleatoria $\tilde{t}$, de tal forma que:

$$\tilde{\xi}_k = \xi_k^1 + \tilde{t}\xi_k^2$$

con $\xi_k^1, \xi_k^2 \in \mathbb{R}^n$ y $\tilde{t}$ variable aleatoria con distribución normal, valor esperado $\bar{t}$ y varianza $\sigma_t^2 < \infty$.

El fichero de entrada de datos del programa recoge el número de variables, funciones y restricciones del problema, la matriz de coeficientes técnicos, las cotas de las variables y de las restricciones, las matrices $\mathbf{B}_k$ y $\mathbf{H}_k$, los vectores ξ_k^1 y ξ_k^2, el valor esperado, $\bar{t}$, y la varianza σ_t^2, de la variable aleatoria $\tilde{t}$ y la estimación inicial.

El funcionamiento del programa que resuelve estos problemas es semejante al del caso lineal descrito en la figura 7. Evidentemente, en este caso, no aparece el menú inicial, dado que en este problema sólo hay un tipo de problema a resolver.

Ilustramos, de nuevo, el funcionamiento del programa mediante el siguiente ejemplo, que fue el que se planteó también para ilustrar el funcionamiento del programa en la aproximación multiobjetivo.

Ejemplo 9.

Consideremos el problema de programación estocástica biobjetivo cuadrático:

$$\begin{aligned}
&\text{"}\underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}\text{"} \left(\mathbf{x}^t\mathbf{B}_1\mathbf{x} - \tilde{\xi}_1^t\mathbf{x} + \tilde{\xi}_1^t\mathbf{H}_1\tilde{\xi}_1, \mathbf{x}^t\mathbf{B}_2\mathbf{x} - \tilde{\xi}_2^t\mathbf{x} + \tilde{\xi}_2^t\mathbf{H}_2\tilde{\xi}_2\right)\\
&\text{s.a}\quad 2x_1+5x_2 \geq 10\\
&\qquad 3x_1+\ 2x_2 \leq 12\\
&\qquad x_1,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{B}_1=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}_2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_1=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, y los vectores $\tilde{\xi}_1$, $\tilde{\xi}_2$ estocásticos, dependen linealmente de la variable aleatoria $\tilde{t}$, de tal forma que:

$$\tilde{\xi}_1 = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} + \tilde{t}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\ \tilde{\xi}_2 = \begin{pmatrix}0\\ 0.5\end{pmatrix} + \tilde{t}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$$

con $\tilde{t}$ variable aleatoria normal de valor esperado $\bar{t} = 2$ y varianza $\sigma^2 = 1$.

El fichero de datos correspondiente a este problema es:

```
'Numero de Variables'
2
'Número de Funciones Objetivo'
2
'Numero de Restricciones Lineales'
2
'Matriz de Restricciones Lineales por filas'
 2.    5.
 6.    4.
'Cotas de las Variables'
 0.      1.E10
 0.      1.E10
'Cotas de las Restricciones'
10.       1E10
-1E10      24
'Vectores C1'
1.  2.
0.  0.5
'Vectores C2'
1.  1.
3.  1.
'Matrices B'
5.  0.
0.  .3

2.  0.
0.  .5

'Media'
2.
'Varianza'
1.
'Matrices H'
3.  0.
0.  3.

1.  0.
0.  2.

'Estimacion Inicial'
0.   0.
```

Al igual que en el caso anterior, se ha resuelto este problema para distintos valores de los pesos. En concreto se ha comenzado resolviendo para las ponderaciones $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$ y a partir de estos valores se ha resuelto el problema restando 0.1 el peso μ_1 y sumando la misma cantidad a μ_2, hasta llegar a los pesos $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$. En el anexo 2 aparecen las soluciones del problema para estos pesos. Ahora, debido a que el fichero de salida es muy grande, mostramos sólo las soluciones para los vectores de pesos $(\mu_1, \mu_2) = (1,0)$, $(\mu_1, \mu_2) = (0.7, 0.3)$, $(\mu_1, \mu_2) = (0.3, 0.7)$ y $(\mu_1, \mu_2) = (0,1)$. Para el criterio de Kataoka se han fijado dos vectores de probabilidades distintos $\beta_1 = \beta_2 = 0.9$ y $\beta_1 = \beta_2 = 0.8$.

```
****************************************************
                      Varianza
****************************************************
 Solución para los pesos
   1.000000000000000       0.0000000000000000E+00
****************************************************
 Punto:
  0.0000000000000000E+00   6.000000000000000

 Valor de la función ponderada:    1368.000000000000

****************************************************
 Solución para los pesos
  0.7000000000000000       0.3000000000000000
****************************************************
 Punto:
   3.636363636363636       0.5454545454545455

 Valor de la función ponderada:    1469.417685950413

****************************************************
 Solución para los pesos
  0.3000000000000000       0.7000000000000000

 Punto:
   3.636363636363636       0.5454545454545454

 Valor de la función ponderada:    1442.687107438017

****************************************************
 Solución para los pesos
  0.0000000000000000E+00   1.000000000000000

 Punto:
   3.636363636363636       0.5454545454545454

 Valor de la función ponderada:    1435.388429752066

****************************************************


 Tiempo C.P.U.:    1.050000071525574
```

```
***************************************************
 Kataoka. Aplicación de la desigualdad de Cantelli.
***************************************************
 Solución para la probabilidad BETA:   0.900000000
***************************************************

 Calls to E04UEF
 ---------------

      Print Level = 0

***************************************************
 Pesos:
   1.000000000000000      0.0000000000000000E+00

 Punto:
  0.7262751630574231      1.709490918471288

 Valor de la función ponderada:    204.7794632295094

 Valor de IFAIL:              0

***************************************************
 Pesos:
  0.7000000000000000      0.3000000000000000

 Punto:
  1.2529936239616545      1.498803688019173

 Valor de la función ponderada:    202.1336187146081

 Valor de IFAIL:              0

***************************************************
 Pesos:
  0.3000000000000000      0.7000000000000000

 Punto:
  2.305765654654561516    1.0776942515454564

 Valor de la función ponderada:    192.9881045115

 Valor de IFAIL:              0

***************************************************
 Pesos:
  0.0000000000000000E+00   1.000000000000000

 Punto:
  3.59216355445412415454   0.563134741454545

 Valor de la función ponderada:    177.90615456421245

 Valor de IFAIL:              0
***************************************************
 ================================================
  Tiempo C.P.U.:     2.109999656677246
 ================================================
```

```
**************************************************
      Kataoka. Aplicación de la desigualdad de Cantelli.
**************************************************
 Solución para la probabilidad BETA:   0.800000000
**************************************************

 Calls to E04UEF
 ---------------

      Print Level = 0
**************************************************
 Pesos:
   1.000000000000000       0.0000000000000000E+00

 Punto:
  0.6727519630574231       1.730899918471288

 Valor de la función ponderada:    164.2998632295094

 Valor de IFAIL:             0
**************************************************
 Pesos:
  0.7000000000000000      0.3000000000000000

 Punto:
  1.1290886239616545       1.548365688019173

 Valor de la función ponderada:    160.9728187146081

 Valor de IFAIL:             0

**************************************************
 Pesos:
  0.3000000000000000      0.7000000000000000

 Punto:
  2.044794124545454514     1.182082569875154

 Valor de la función ponderada:    152.2591212045115

 Valor de IFAIL:             0

**************************************************
 Pesos:
  0.0000000000000000E+00   1.000000000000000

 Punto:
  3.172883354654654 56     0.730846612154579

 Valor de la función ponderada:    139.41752466879831

 Valor de IFAIL:             0
**************************************************
 ==================================================
  Tiempo C.P.U.:     3.32168764132187864
 ==================================================
              ** FINAL DE PROGRAMA **
```

Por último, hemos de señalar que para este programa también se han realizado pruebas para problemas de mayores dimensiones que las consideradas en los ejemplos anteriores. Estos problemas se han resuelto para tres vectores de pesos y dos probabilidades distintas. Los tiempos medios de ejecución aparecen en la siguiente tabla, junto con las dimensiones de los problemas considerados.

nº variables (n)	nº f. objetivo (q)	nº restricc. (m)	tiempo de C.P.U.
8	2	3	3.69
9	3	4	3.9299
10	3	5	4.29899

CONCLUSIONES

Los problemas de programación matemática en los que algunos parámetros son variables aleatorias constituyen una herramienta útil en los procesos de toma de decisiones, dado que en muchas situaciones, en el momento de tomar una decisión, se desconocen los valores de determinados parámetros, que influyen de forma crucial en el resultado que se obtenga. El estudio realizado nos permite abordar estos problemas de manera que algunos parámetros se puedan tratar como variables aleatorias, sin necesidad de recurrir a "sustituir" los valores de éstos por un valor aproximado, el valor medio de una serie histórica o una estimación de los mismos.

Consideramos, además, que la programación estocástica es una herramienta fundamental para resolver problemas de naturaleza económica, puesto que la incertidumbre es algo inherente a los mismos. En este sentido, cabe señalar que muchos modelos de teoría económica, desarrollados en un ambiente de certidumbre, pueden formularse, de manera natural, como problemas de programación estocástica y otros, formulados como problemas de programación estocástica, han sido resueltos sólo mediante alguno de los criterios existentes, generalmente, la teoría de la utilidad esperada, aunque, como hemos visto, cabe plantearse su resolución mediante otros criterios, lo cual puede servir para enriquecer los modelos teóricos, mejorando la capacidad de explicación y predicción de los mismos.

Tras el estudio realizado en este trabajo, consideramos que la resolución de problemas de programación estocástica multiobjetivo es un instrumento útil para resolver problemas de toma de decisiones.

Este trabajo puede ayudar para determinar qué tipo de criterio se ha de aplicar a problemas de programación estocástica con una y varias funciones objetivo. Aunque muchos de los resultados obtenidos en el trabajo han sido ya comentados, en las siguientes páginas se señalan las conclusiones más importantes del mismo, así como las posibles líneas de investigación futura.

Una de las características más importantes de un problema de programación estocástica es la diversidad de formas de abordar su resolución. Este hecho queda claramente expuesto en el capítulo uno, cuando se analizan los distintos conceptos de solución de un problema de programación estocástica, y hace que la resolución de problemas de este tipo conlleve siempre la elección de un concepto de solución (que se debe realizar en función de las características del problema y de las preferencias del decisor). Por tanto, los problemas de programación estocástica no pueden considerarse problemas tecnológicos, puesto que su resolución implica algo más allá de la búsqueda de una solución con métodos más o menos complicados.

La línea de estudio que se ha seguido en este trabajo se centra en el análisis de la transformación del problema de programación estocástica en un problema de programación matemática determinista, que se obtiene a partir del problema original y cuya solución es considerada solución del problema de programación estocástica.

La primera cuestión que se analiza en este trabajo es la de la transformación de las restricciones estocásticas en deterministas mediante el criterio de restricciones probabilísticas o de azar, exigiendo que se verifiquen las restricciones de partida con, al menos, una probabilidad. Para aplicar este criterio es necesario conocer la distribución de probabilidad de la función de la restricción estocástica, lo cual no es una cuestión trivial, dado que, en general, esta función no sólo depende de las variables aleatorias de la restricción, sino que, además, depende de las variables de decisión del problema. En este sentido cabe destacar el análisis realizado para el caso de restricciones estocásticas lineales con aleatoriedad simple, en el que suponemos que el vector de parámetros aleatorios de la restricción depende linealmente de una única variable aleatoria. Además, se ha generalizado la aplicación de la desigualdad de Cantelli a las restricciones probabilísticas. Esta desigualdad proporciona una cota inferior de la función de distribución de una variable aleatoria y fue propuesta y aplicada por Stancu-Minasian (1992) para el caso lineal. Su aplicación da lugar a la obtención de un subconjunto del conjunto de puntos que verifican la restricción probabilística. En este trabajo se generaliza su aplicación a restricciones estocásticas, lineales o no, siempre que se conozca su valor esperado, su varianza, y estas funciones verifiquen determinadas condiciones.

En cuanto a la transformación del objetivo estocástico en su equivalente determinista en problemas con una única función objetivo, en este trabajo se han considerado cinco criterios básicos, todos ellos definidos en la literatura: valor esperado, mínima varianza, eficiencia valor esperado desviación estándar y los dos criterios de máxima probabilidad: mínimo riesgo y de Kataoka. Estos criterios han sido ampliamente estudiados en la literatura para objetivos lineales. Del estudio se desprende que, en el caso lineal, la aplicación de los tres primeros es posible si se conoce el vector de valor esperado y la matriz de varianzas y covarianzas del vector de parámetros del objetivo estocástico. En cambio, la aplicación de los criterios de máxima probabilidad es aplicable sólo en los casos en los que se conoce la distribución de probabilidad de la función objetivo estocástica. El problema que se plantea para estos dos criterios es el mismo que surge en las restricciones probabilísticas o de azar. Al igual que entonces, consideramos para función objetivo estocástica lineal, los casos normal, aleatoriedad simple y, además, se considera la aplicación de la desigualdad Cantelli para funciones estocásticas, lineales o no, que verifiquen determinadas condiciones.

Por otro lado, se plantea el estudio de objetivos estocásticos de tipo cuadrático. Denominamos así a la función objetivo suma de una forma cuadrática en las variables de decisión, una forma cuadrática en un vector de variables aleatorias y un término lineal, producto escalar del vector de decisión y del vector de variables aleatorias. Esta formulación nos permite plantear problemas en los que se desee minimizar la suma de la diferencia cuadrática entre variables de decisión y variables aleatorias. En el trabajo se ha obtenido, bajo determinadas hipótesis, el valor esperado y la varianza de este tipo de funciones y se ha considerado la aplicación de la desigualdad de Cantelli para obtener una aproximación de las soluciones del problema para los criterios de máxima probabilidad, en aquellos casos en los que las dificultades para conocer la función de distribución de la variable aleatoria hace inviable la resolución de los mismos.

Del estudio realizado se deduce que la resolución de estos problemas pasa por la elección de un criterio de transformación del objetivo estocástico en su equivalente determinista. La filosofía que subyace tras la definición de los criterios considerados es distinta, lo que implica que, en general, la solución de un problema de programación estocástica depende del criterio elegido y, por tanto, esta elección es crucial en la resolución del problema. Esto nos ha motivado, por un lado, a llevar a cabo la implementación computacional de los problemas correspondientes a los criterios valor esperado, mínima varianza, mínimo riesgo y de Kataoka, y, por otro, a estudiar la posible existencia de relaciones entre los criterios considerados.

De nuestro estudio se desprende que estos criterios están estrechamente relacionados, aunque, en un primer análisis pueda dar la impresión de que son criterios que se definen con planteamientos distintos y, por tanto, al menos en apariencia, no relacionados.

De nuestro análisis se obtiene la reciprocidad existente entre los dos criterios de máxima probabilidad y la relación entre éstos y el criterio de eficiencia valor esperado desviación estándar o valor esperado varianza.

La primera de estas relaciones resulta muy útil en términos de resolución de problemas, dado que, en los casos analizados en este trabajo, la función objetivo del problema que ha de resolverse para obtener la solución mínimo riesgo es fraccional lineal, cuando la función objetivo estocástica es lineal y verifica la hipótesis de aleatoriedad simple, y fraccional no lineal, en el caso lineal normal y cuando se aplica la desigualdad de Cantelli como aproximación. Esto hace que la resolución de problemas mediante este criterio sea complicada, incluso para problemas con pocas variables de decisión. La equivalencia entre este criterio y el de Kataoka, demostrada en este trabajo, permite afirmar que las soluciones de este último criterio son también soluciones mínimo riesgo y, por tanto, se puede aplicar el criterio de Kataoka hasta que se obtenga una solución con el nivel de aspiración deseado. Recordamos, además, que el problema que ha de resolverse mediante el criterio de Kataoka, es lineal si la función objetivo estocástica es lineal y se verifica la hipótesis de aleatoriedad simple, y en el caso lineal normal y con la aplicación de la desigualdad de Cantelli, no lineal convexo, bajo determinadas condiciones.

En cuanto a la segunda relación mencionada (la existente entre los criterios de máxima probabilidad y el criterio de eficiencia valor esperado desviación estándar o valor esperado varianza), consideramos que es importante, puesto que los resultados obtenidos en los tres casos analizados (lineal normal, lineal aleatoriedad simple y aplicación de la desigualdad de Cantelli) sirven para poder ver desde una óptica distinta el análisis de eficiencia media varianza que inició Markowitz en 1952. Como se ha señalado anteriormente en este trabajo, el análisis de eficiencia media varianza se fundamenta en la teoría de la utilidad esperada y bajo la hipótesis, entre otras, de aversión al riesgo del individuo. Nuestros resultados establecen que estas soluciones son soluciones del problema de Kataoka para probabilidades "altas" o del problema mínimo riesgo con niveles de aspiración "altos". Además, de nuestro estudio se desprende que existen otras soluciones del problema de programación estocástica, que pueden considerarse más arriesgadas que la solución valor esperado y corresponden a fijar probabilidad "baja" para el objetivo estocástico y resolver el problema de Kataoka correspondiente, o bien fijar un nivel de aspiración "bajo" (menor que el valor esperado mínimo) en el problema mínimo riesgo.

A partir de todo lo expuesto, consideramos que el criterio de Kataoka es el más adecuado para la resolución de un problema de programación estocástica, puesto que permite obtener un amplio abanico de soluciones de un mismo problema de programación estocástica, en función de la probabilidad fijada. El hecho de tener que fijar la probabilidad para resolver el problema creemos que es más una ventaja que un escollo, puesto que la naturaleza arriesgada del problema requiere tomar una decisión para resolver el problema y consideramos que la probabilidad es una medida intuitiva para medir el riesgo inherente a este tipo de problemas. A esto se unen las ventajas correspondientes al tipo de problema que se genera una vez fijada la probabilidad.

Una vez señaladas las conclusiones más importantes del trabajo para problemas de programación estocástica monobjetivo, pasamos a analizar los resultados obtenidos en el caso multiobjetivo. El hecho de plantearnos la resolución de estos problemas está motivado, de nuevo, por su posible aplicación a problemas de tomas de decisiones, especialmente a problemas de índole económica. Del mismo modo que la hipótesis de certidumbre no se ajusta en muchos casos a la situación que se desea modelizar mediante un problema de programación matemática, el supuesto de que los deseos del agente decisor puedan "resumirse" en una única función objetivo es, generalmente, restrictivo y poco realista. Esto nos ha llevado al estudio de problemas de programación estocástica con objetivos múltiples.

De nuevo, nuestro análisis se centra en la transformación del problema estocástico en uno determinista equivalente. A la hora de abordar esta transformación, se observa que, ahora, ésta es "doble", y consiste, básicamente, en pasar del problema de programación estocástica multiobjetivo a uno determinista de un único objetivo. Basándonos en estudios previos, hemos adoptado la clasificación que realizan Stancu-Minasian (1984) y Ben Abdelaziz (1992) de los métodos de resolución de estos problemas. Siguiendo a Ben Abdelaziz (1992), denominamos *enfoque multiobjetivo* a la resolución del problema transformando, en una primera etapa el problema multiobjetivo estocástico en uno determinista equivalente y, posteriormente, centrándonos en la obtención de soluciones eficientes de este último, y *enfoque estocástico* al conjunto de técnicas que, en una primera etapa, transforman el problema en uno de programación estocástica con un solo objetivo y, posteriormente, resuelven el problema estocástico obtenido mediante cualquier técnica.

Evidentemente, la existencia de distintos criterios de transformación del problema en cada una de las etapas descritas da lugar a que se pueda obtener todo un abanico de posibles problemas monobjetivo deterministas equivalentes del problema multiobjetivo estocástico de partida. Esto nos ha llevado a considerar sólo determinadas formas de transformar el problema, que pasamos a ver.

En el *enfoque multiobjetivo* se han considerado cinco posibles formas de transformar el problema de programación estocástica multiobjetivo en uno multiobjetivo determinista equivalente. Estas cinco formas no son más que generalizaciones de los criterios considerados en la programación estocástica monobjetivo: valor esperado, mínima varianza, eficiencia valor esperado desviación estándar y los criterios de máxima probabilidad (mínimo riesgo y Kataoka). En concreto, se ha planteado la transformación del problema de programación estocástica multiobjetivo en su equivalente determinista eligiendo uno de estos criterios y aplicándolo a cada objetivo estocástico del problema por separado. De esta forma, se obtiene un problema determinista equivalente con tantos objetivos como el problema de partida (salvo en el criterio de eficiencia valor esperado desviación estándar, en el que el número de objetivos es el doble, puesto que se asocian dos objetivos deterministas por cada estocástico). A cada uno de los problemas obtenidos va asociado un conjunto de soluciones eficientes, consideradas soluciones eficientes del problema de partida. De esta forma, se tienen cinco conjuntos de soluciones eficientes por cada problema multiobjetivo estocástico. Hemos de señalar, además, que estos conceptos de solución eficiente están definidos en la literatura. En este trabajo se ha generalizado el de solución eficiente con probabilidad β, definido por Goicoechea, Hansen y Dukstein (1982), dando la posibilidad de fijar una probabilidad distinta a cada objetivo estocástico.

Una vez definidos estos conceptos, se analizan en este trabajo las posibles relaciones entre los mismos. Los resultados que se obtienen son paralelos a los obtenidos en el caso de una única función objetivo. Se mantienen, por tanto, las mismas relaciones entre soluciones eficientes que se obtuvieron antes, para el caso monobjetivo, entre los óptimos de los problemas de máxima probabilidad y entre éstos y las soluciones eficientes valor esperado desviación estándar. Además, se establece también una relación entre el conjunto eficiente valor esperado, el conjunto eficiente mínima varianza y el conjunto de soluciones eficientes valor esperado desviación estándar. De esta forma, se tiene, de nuevo, que los distintos conjuntos de soluciones eficientes considerados están estrechamente relacionados en los casos analizados en este trabajo.

Por otro lado, hemos de señalar también que en la implementación computacional de los problemas resueltos en este trabajo se ha aplicado el método de las ponderaciones para obtener estas soluciones eficientes, de tal forma que se pueda tener una idea lo más exacta posible de los distintos conjuntos eficientes asociados a un mismo problema.

En cuanto a la resolución del problema mediante el enfoque estocástico, en este trabajo se ha considerado la aplicación del método de las ponderaciones para transformar el problema multiobjetivo en uno de programación estocástica con una función objetivo. Al problema resultante lo hemos denominado problema ponderado. Una vez obtenido éste, se ha considerado su resolución mediante los criterios valor esperado, *mínima varianza*, *mínimo riesgo* y de Kataoka. Evidentemente, las relaciones obtenidas al principio del trabajo entre las soluciones correspondientes a estos criterios para problemas con una función objetivo estocástica se mantienen en el problema ponderado. Así, la solución mínimo riesgo y de Kataoka del problema ponderado mantienen la reciprocidad obtenida en el caso de una única función objetivo.

El interés de nuestro estudio está ahora en analizar las posibles conexiones entre las soluciones que se obtienen mediante este enfoque y los conceptos de solución eficiente definidos en el enfoque multiobjetivo.

De nuestro estudio se desprende que estas conexiones existen también ahora. En concreto se obtiene que si se aplica el criterio valor esperado y el método de las ponderaciones al problema de partida, el orden en el que se aplican éstos no altera el problema resultante.

En cambio, la aplicación de los criterios mínima varianza, mínimo riesgo y de Kataoka sí influye en el problema resultante. La aplicación de cualquiera de estos criterios sobre el problema ponderado, da lugar a un determinista equivalente en el que intervienen las covarianzas entre objetivos estocásticos.

De nuestro estudio se concluye que, si las covarianzas entre objetivos son nulas, las soluciones que se obtienen al resolver el problema ponderado, con pesos estrictamente positivos, mediante el criterio mínima varianza, es propiamente eficiente mínima varianza.

Por otro lado, si se aplica el criterio de Kataoka para una determinada probabilidad, β, al problema ponderado, y se fijan pesos estrictamente positivos, en problemas lineales y bajo la hipótesis de aleatoriedad simple, la solución del problema es eficiente con probabilidad β. Estas relaciones se mantiene también para el criterio mínimo riesgo, por la reciprocidad existente entre este criterio y el de Kataoka.

En cambio, si el problema de partida es lineal normal o si se aplica la desigualdad de Cantelli al problema de Kataoka, se tiene que si se fijan pesos estrictamente positivos, la solución del problema es eficiente valor esperado desviación estándar, si las covarianzas entre objetivos estocásticos son nulas. Además, estas relaciones se mantiene también para el criterio mínimo riesgo, por la reciprocidad existente entre este criterio y el de Kataoka. Sin embargo, si alguna covarianza es no nula, las relaciones que se acaban de señalar no tienen porqué mantenerse. Esto se debe a que cuando se utiliza el enfoque multiobjetivo, se aplica el criterio de obtención del determinista equivalente a cada objetivo por separado, sin tener en cuenta que los objetivos pueden ser estadísticamente independientes. Esta es la crítica más importante al enfoque multiobjetivo y, queda de manifiesto en este trabajo, al menos para los casos considerados en nuestro estudio, cuando se aplica el método de la ponderación al problema multiobjetivo estocástico.

De nuestro estudio se deduce también que la resolución de un problema de programación estocástica no es una cuestión trivial, ni siquiera en el caso de una única función objetivo y con pocas variables. Esto nos ha llevado a la implementación computacional de los problemas estudiados, cuyo funcionamiento ha sido explicado en el capítulo 6.

Antes de finalizar consideramos interesante señalar posibles cuestiones que pueden ser objeto de investigación en el futuro dentro de este campo.

La primera cuestión que consideramos de interés es el estudio de la resolución de problemas de programación estocástica multiobjetivo mediante programación por metas. Creemos que la naturaleza estocástica y multiobjetivo del problema hace que sea interesante abordar el problema bajo la filosofía de la programación por metas no para resolver cualquiera de los problemas deterministas equivalentes obtenidos mediante la aproximación multiobjetivo, sino desde una óptica distinta, que integre, al mismo tiempo, el carácter multiobjetivo y estocástico del problema. Esto mismo puede abordarse también mediante la aplicación de métodos interactivos específicos para este tipo de problemas.

Otra cuestión abierta es el estudio de las cuestiones analizadas para problemas con variables aleatorias discretas, dado que en este trabajo nos hemos centrado en problemas con parámetros aleatorios que son variables aleatorias continuas. Además consideramos interesante el análisis de problemas dinámicos estocásticos, incorporando algunos de los criterios que se aplican en este trabajo para la resolución de los mismos.

Finalmente, señalar que el estudio teórico realizado es susceptible de aplicación a diversos campos prácticos, aspecto éste de gran interés para nosotros y que queda abierto para futuros trabajos. Consideramos que las cuestiones analizadas sirven para abordar problemas económicos con incertidumbre desde una nueva perspectiva, proporcionando, así, una herramienta útil para la toma de decisiones.

BIBLIOGRAFÍA

Ahn, S., Escudero, L. C. y Guignard-Spielberg, M. (1995). *"On Modeling Financial Trading under Interest Rates Uncertainty"*. En Sciomachen, A. (Ed.), *Optimization in Industry 3*, pág. 127-144. John Wiley and Sons. Nueva York.

Amman, H. M., Kendrick, D. A. y Rust, J.(Ed.) (1996). *Handbook of Computational Economics.* North Holland. Amsterdam.

Ballestero, E. y Romero, C. (1998). *Multiple Criteria Decision Making and its Applications to Economic Problems.* Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.

Ben Abdelaziz, F. (1992). "*L'efficacité en Programmation Multi-objectifs Stochastique*". Ph. D. Thesis. Université de Laval. Québec.

Ben Abdelaziz, F., Lang P. y Nadeau, R. (1994). "*Pointwise Efficiency in Multiobjective Stochastic Linear Programming*". Journal of Operational Research Society, 45, 11, pág. 1324-1334.

Ben Abdelaziz, F., Lang P. y Nadeau, R. (1995). *"Distributional Efficiency in Multiobjective Linear Programming"*. European Journal of Operational Research, 85, pág. 399-415.

Ben-Israel, A., Charnes, A. y Kirby, M. J. L. (1973). "*On Stochastic Linear Approximation Problems*". Operations Research, 21, 5, pág. 555-558.

Ben-Tal, A. y Teboulle, M. (1986). "*Expected Utility, Penalty Functions and Duality in Stochastic Nonlinear Programming*". Management Science, 32, 11, pág. 1445-1466.

Bereanu, B. (1964). "*Programme de Risque Minimal en Programmation Linéaire Stochastique*". C. R. Acad. Sci. Paris, 259, pág. 981-983.

Bereanu, B. (1980). *"Some Numerical Methods in Stochastic Linear Programming Under Risk and Uncertainty"*. En: Dempster, M.H.A. (Ed.), *Stochastic programming*, pág. 169-205. Academic Press. Londres.

Bertsekas, D. P. (1995). *Dynamic Programming and Optimal Control. Vol. 1 y 2.* Athena Scientific. Belmont.

Black, F., Derman, E. y Toy, W. (1990). *"A One Factor Model of Interest Rates and its Applications to Treasure Bonds Options"*. Financial Analysts Journal.

Bloom, J. A. (1988). *Muti-Area Production Costing: Tutorial and Research Directions*. TIMS/ORSA Joint Meeting. Washington.

Chankong, V. y Haimes, Y.Y. (1983). *Multiobjective Decision Making : Theory and Methodology*. North-Holland. Nueva York.

Charnes, A. y Cooper W. W. (1959). *"Chance-Costrained Programming"*. Management Science, 6, 1, pág. 73-79.

Charnes, A. y Cooper W. W. (1963). *"Deterministic Equivalents for Optimizing and Satisfying under Chance Constraints"*. Operations Research, 11, 1, pág.18-39.

Charnes, A., Cooper W. W. y Symonds, G. H. (1958). *"Cost Horizons and Certainty Equivalents: An Approach to Stochastic Programming of Heating Oil"*. Management Science, 4, 3, pág. 235-263.

Chow, G. (1975). *Analysis and Control of Dynamic Economic Systems*. John Wiley and Sons. Nueva York.

Chow, G. (1981). *Econometric Analysis by Control Methods*. John Wiley and Sons. Nueva York.

Chow, G. (1997). *Dynamic Economics*. Oxford University Press. Nueva York.

Conrad, J. M. y Clarck, C. W. (1987). *Natural Resource Economics*. Cambridge University Press. Nueva York.

Contini B. (1968). "*A Stochastic Approach to Goal Programming*". Operations Research, 16, 3, pág. 576-586.

Coté, C. y Laughton, M. (1982). "*Stochastic Production Costing in Generation Planning A Large-Scale Mixed Integer Model*". Mathematical Programming Studi, 20.

Cramér, H. (1968). *Métodos Matemáticos de Estadística*. Aguilar. Madrid.

De Wolf, D. y Smeers, Y. (1997), "*A Stochastic Version of a Stackelberg-Nash-Cournot Equilibrium Model*". Management Science, 43, 2, pág. 190-197.

Dempster, M. A. H. e Ireland, I. M. (1988). "*A Financial Expert Support System*". En: Mitra G. (Ed.). *Mathematical Models for Decision Support*. NATO ASI Series, Vol. F48, pág. 415-440.

Dixit, A. K. y Pindyck, R. S. (1994). *Investement under Uncertainty*. Princeton University Press. Princeton.

Dragomirescu, M. (1972). "*An Algorithm for the Minimum-Risk Problema of Stochastic Programming*". Operations Research, 20, pág. 154-164.

Duffie, D. (1988). *Security Markets. Stochastic Models*. Academic Press.

Dupacova, J. (1991a). *Stochastic Programming Models in Banking*. International Institute for Applied System Analysis (IIASA).

Dupacova, J. (1991b). *"On Statistical Security Analysis in Stochastic Programming"*. Annals of Operations Research, 30, pág. 199-214.

Dupacova, J., Gaivoronski, A., Kos, Z. y Szantai, T. (1991). *"Stochastic Programming in Water Management: A Case Study and a Comparison of Solution Techniques"*. Journals of Operations Research, 52, pág. 28-44.

Easton, F. F. y Rossin, D. F. (1996). *"A Stochastic Goal Program for Employee Scheduling"*. Decision Sciences, 27. 3, pág. 541-568.

Escudero, L. F., Kaseman, P. V., King, A. y Wets, R.J.B. (1993). *"Production Planning via Scenario Modelling"*. Annals of Operations Research, 43, pág. 311-335.

García Aguado, A. (1998). *Programación Estocástica por Metas: Teoría y Aplicaciones Económicas*. Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid. Madrid.

Geoffrion, A.M. (1967). *"Stochastic Programming with Aspiration or Fractile Criteria"*. Management Science, 13, 9, pág. 672-679.

Goicoechea, A., Hansen, D. R. y Duckstein, L. (1982). *Multiobjective Decision Analysis with Engineering and Business Applications*. John Wiley and Sons. Nueva York.

Golub, B., Holmer, M., Mackendall, R., Pohlman, L. y Zenios, S. A. (1994). *"A Stochastic Model for Model Management"*. European Journal of Operational Research.

Gravelle, H. y Rees, R. (1984). *Microeconomía*. Alianza Universidad Textos. Madrid.

Hausner, M. (1954). *"Multidimensional Utilities"*. En: Thrall, Coombs y Davis (Ed.) *Decision Processes*. John Wiley and Sons. Nueva York.

Herstein, I. N. y Milnor, J. W. (1953). *"An Axiomatic Approach to Measurable Utility"*. Econometrica, 21, pág. 291-297.

Hirshleifer, J. (1971), *"The Private and Social Value of Information and the Reward to Inventive Activity"*. The American Economic Review, 61, pág. 561-575.

Hogg , R. V. y Craig, A. T. (1989). *Introduction to Mathematical Statistics*. Macmillan Publishing. Nueva York.

Kall, P. (1982). *"Stochastic Programming"*. European Journal of Operational Research, 10, pág. 125-130.

Kall, P. y Wallace, S. W. (1994). Stochastic Programming. John Wiley and Sons. Chichester.

Kataoka, S. (1963). *"A Stochastic Programming Model"*. Econometrica, 31, 1-2, pág. 181-196.

Kataoka, S. (1967). *"Stochastic Programming. Maximum Probability Model"*. Hitotsubashi Journal of Arts and Science, 8, pág. 51-59.

Kelle, P. (1984). *"On the Safety Stock Problem for Random Delivery Processes"*. European Journal of Operational Research, 17, pág. 191-200.

Kendrick, D. A. (1981). *Stochastic Control for Economic Models*. McGraw-Hill. Nueva York.

Kendrick, D. A. (1988). *Feedback: A New Framework for Macroeconomic Policy*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.

Kibzun, A. I. y Kan, Y. S. (1996). *Stochastic Programming Problems with Probability and Quantile Functions*. John Wiley and Sons. Chichester.

Konno, H. y Yamazaki, H. (1990). *Mean Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and its Application to Tokyo Stock Market*. Institute of Human and Social Sciences, Tokyo Institute of Technology IHSS 89-12.

Kreps, D. M. (1990). *A Course in Microeconomic Theory*. Harvester Wheatsheaf. Nueva York.

Laffont, J. J. (1989). *The Economics of Uncertainty and Information*. The MIT Press.

Leclerq, J.P. (1981a). "*La Programation Linéare Stochastique: Une Appoche Multicritère. Partie I: Formulation*". Cahiers du Centre Études Recherche Opérationelle, 23, 1, pág. 31-41.

Leclerq, J.P. (1981b). "*La Programation Linéare Stochastique: Une Appoche Multicritère. Partie II: Une Algorithme Interactif Adapté aux Distributions Multinormales*". Cahiers du Centre Études Recherche Opérationelle, 23, 2, pág. 121-132.

Leclerq, J.P. (1982). "*Stochastic Programming: An Interactive Multicriteria Approach*". European Journal of Operational Research, 10. pág. 33-41.

Lucas, R. y Prescott, E. (1974). "*Equilibrium Search and Unemployment*". Journal of Economic Theory, 7, pág. 188-209.

Luce, R. D. y Raiffa, H. (1957). *Games and Decisions*. John Wiley and Sons. Nueva York.

MacLean, L. C. y Ziemba, W. T. (1991). *"Growth Security Profiles in Capital Accumulation under Risk"*. Annals of Operations Research, 31, pág. 501-510.

Mangasarian, O. L. (1969). *Nonlinear Programming*. McGraw-Hill. Nueva York.

Mangel, M. (1985). *Decision and Control in Uncertain Resource Systems*. Academic Press. Londres.

Markowitz, H. (1952). *"Portfolio Selection"*. The Journal of Finance, 7, pág. 77-91.

Marckowitz, H. (1987). *Mean Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets*. Blackwell. Nueva York.

Mass-Collel, A., Whinston, M. D. y Green, J. R. (1995). *Microeconomic Theory*. Oxford University Press. Nueva York.

Metters, R. (1998). *"Producing Multiple Products with Stochastic Seasonal Demand and Capacity Limits"*. Journal of the Operational Research Society, 49, pág. 263-272.

N.A.G. (Numerical Algorithm Group Limited) (1991). *The NAG Fortran Library Introductory Guide, Mark 15*.

Patel, J. K. y Read, C. B. (1982). *Handbook of the Normal Distribution. Statistics: Textbooks and monographs, Vol. 40*. Marcel Dekker. Nueva York.

Pinter, J. (1991). *"Stochastic Modeling and Optimization for Environmental Mamagement"*. Annals of Operations Research, 31, pág. 527-544.

Prékopa, A. (1995). *Stochastic Programming*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Prékopa, A., Ganczer, S., Deak, I. y Patyi, K. (1980). *"The STABIL Stochastic Programming Model and its Experimental Application to the Electrical Energy Sector of the Hungary Economv"*. En: Dempster, M.H.A. (Ed.). *Stochastic programming*, pág. 369-385. Academic Press. Londres.

Rao, C. R. (1973). *Linear Statistical Inference and Its Applications*. John Wiley and Sons. Nueva York.

Ríos, S. (1988). *Investigación Operativa. Optimización*. Centro de Estudios Ramón Areces. Madrid.

Romero, C. (1993). *Teoría de la Decisión Multicriterio: Conceptos, Técnicas y Aplicaciones*. Alianza Universidad Textos. Madrid.

Rothschild, M. y Stiglitz, J. (1976). *"Equilibrium in Competitive Insurance Markets: An Essay on Economics of Perfect Information"*. Quarterly Journal of Economics, 90, pág. 629-650.

Rustem, B. y Howe, M. (1998). *"An approach to continuous minimax: The Basic Algorithm"*. Reprint Cefes' 98. Society for Computational Economics.

Sargent, T. (1987a). *Macroeconomic Theory*. Academic Press. Nueva York.

Sargent, T. (1987b). *Dynamic Macroeconomic Theory*. Harvard University Press. Cambridge.

Sawaragi, Y., Nakayama H. y Tanino T. (1985). *Theory of Multiobjective Optimization*. Academic Press. Nueva York.

Sengupta, J. K. y Fanchon, P. (1997). *Control Theory Methods in Economics*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.

Sherali, H. D., Soyster, A. L., Murphy, F. H. y Sen, S. (1984). *"Intertemporal Allocation of Capital Cost in Electric Utility Capacity Expansion Planning under Uncertainty"*. Management Science, 30, pág. 1-19.

Slovinski, R. y Teghem, J. (Ed.) (1990). *Stochastic Versus Fuzzy Approaches to Multiobjective Mathematical Programming Under Uncertainty*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.

Stancu-Minasian, I. M. (1984). *Stochastic Programming with Multiple Objective Functions*. D. Reidel Publishing Company. Dordrecht.

Stancu-Minasian, I. M. (1992). *"Stochastic Programming with Multiple Fractile Criteria"*. Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 37, 10, pág. 939-941.

Stancu-Minasian, I. M. (1997). *Fractional Programming. Theory, Methods and Applications*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.

Stancu-Minasian, I. y Tigan, S. (1984). "*The Vectorial Minimum Risk Problem*". Proceedings of the Colloquium on Approximation and Optimization. Cluj-Napoca, pág. 321-328.

Stancu-Minasian, I. y Tigan, S. (1988). "*A Stochastic Approach to Some Linear Fractional Goal Programming Problems*". Kybernetika, 24, 2, pág. 139-149.

Stancu-Minasian, I. M. y Wets, M. J. (1976). *"A Research Bibliography in Stochastic Programming, 1955-1975"*. Operations Research, 24, pág. 1078-1119.

Stokey, N. y Lucas, R. (1989). *Recursive Methods in Economics Dynamics.* Harvard University Press. Cambridge.

Szidarovszky, F., Gershon, M. y Duckstein, L. (1986). *Techniques for Multiobjective Decision Making in Systems Management*". Elseiver. Amsterdam.

Takayama, A. (1994). *Analytical Methods in Economics.* Harvester Wheatsheaf. Nueva York.

Tammer, K. (1978). "*Relations Between Stochastic and Parametric Programming for Decision Problems with a Random Objective Function*". Math Operationsforsch. Statist. Ser. Optimization, 9, 4, pág., 523-535.

Tapiero, C. S. (1998) *Applied Stochastic Models and Control for Finance and Insurance*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.

Teghem, J. y Kunsch, P. (1985). "*Multiobjective Decision Making Under Unvcertainty: An Example for Power Systems*". En: Haimes Y.Y. y Chankong, V. (Ed.), *Decision Making with Multiple Objective,* pág. 443-456. Springer-Verlag. Berlín.

Teghem, J., Dufrane, D., Thauvoye, M. y Kunsch, P. (1986). "*STRANGE: An Interactive Method for Multi-Objective Linear Programming Under Uncertainty*". European Journal of Operational Research, 26, 1, pág. 65-82.

Urli, B. y Nadeau, R. (1990). "*Stochastic MOLP with Incomplete Information: An Interactive Approach with Recourse*". Journal of the Operational Research Society, 41, 12, pág. 1143-1152.

Vajda, S. (1972). *Probabilistic Programming.* Academic Press. Nueva York.

von Newmann, J. y Morgenstern, O. (1947). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press. Princeton.

Zare, Y. y Daneshmand, A. (1995). "*A Linear Approximation method for solving a special class of the chance constrained programming problem*". European Journal of Operational Research, 80, pág. 213-225.

Zenios, S. A. (Ed.) (1993). *Financial Optimization.* Cambridge University Press. Nueva York.

Zenios, S. A. (Ed.) (1995). *Cuantitative Methods, Supercomputers and AJ in Finance*. UNICOM.

PROGRAMACIÓN ESTOCÁSTICA:

ALGUNAS APORTACIONES TEÓRICAS

Y COMPUTACIONALES

ANEXOS

ANEXO I

LISTADO DE PROGRAMAS

PROGRAMACIÓN ESTOCASTICA MONOBJETIVO

Caso Lineal

```
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C                PROGRAMACION  ESTOCASTICA  MONOOBJETIVO
C                              CASO  LINEAL
C
C Linkar con: NORLIN,ALELIN,CANLIN,NAGLIB/LIB
C
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C                  DECLARACION DE VARIABLES
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      PROGRAM LINEAL

INTEGER DIM1,DIM2
PARAMETER(DIM1=10, DIM2=20)
INTEGER N,NCLIN,I,J,OPC
DOUBLE PRECISION C(DIM2,DIM1),BL(DIM1+DIM2),BU(DIM1+DIM2),X(DIM1)
*                    ,T1,T2,TIEMPO
CHARACTER*20 FICHERO,COMENT
CHARACTER*30 SALIDA
EXTERNAL NORLIN,ALELIN,CANLIN,X05BAF

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C                         TIEMPO  DE  CPU
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      T1=X05BAF()

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C                       LECTURA DE DATOS
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      WRITE(*,*)'Introduce el nombre del fichero de datos'
      READ(*,*) FICHERO
      OPEN(3,FILE=FICHERO,STATUS='OLD')
      READ(3,*) COMENT
      READ(3,*) N
      READ(3,*) COMENT
      READ(3,*) NCLIN
      READ(3,*) COMENT
      DO 10 I=1,NCLIN
          READ(3,*) (C(I,J),J=1,N)
10    CONTINUE
      READ(3,*) COMENT
      DO 20 I=1,N
          READ(3,*) BL(I),BU(I)
20    CONTINUE
```

```
      READ(3,*) COMENT
      DO 30 I=1,NCLIN
          READ(3,*) BL(N+I),BU(N+I)
30    CONTINUE
      READ(3,*) COMENT
      READ(3,*) (X(I),I=1,N)
      CLOSE(3)

      SALIDA='LINEAL-'//FICHERO
      OPEN(6,FILE=SALIDA,STATUS='NEW')

C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C                                MENÚ
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

35    CONTINUE
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Elije Opción:'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'1.- Caso Normal'
      WRITE(*,*)'2.- Aleatoriedad Simple'
      WRITE(*,*)'3.- Cantelli'
      WRITE(*,*)'4.- Terminar'
40    READ(*,*) OPC
      IF((OPC.LT.1).OR.(OPC.GT.4)) GOTO 40
      IF(OPC.EQ.1) THEN
          CALL NORLIN(N,NCLIN,C,BL,BU,X)
          GOTO 35
      ENDIF
      IF(OPC.EQ.2) THEN
          CALL ALELIN(N,NCLIN,C,BL,BU,X)
          GOTO 35
      ENDIF
      IF(OPC.EQ.3) THEN
          CALL CANLIN(N,NCLIN,C,BL,BU,X)
          GOTO 35
      ENDIF

      T2=X05BAF()
      TIEMPO=T2-T1

      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'============================================'
      WRITE(6,*)' TIEMPO C.P.U.:',TIEMPO,' segundos'
      WRITE(6,*)'============================================'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'============================================'
      WRITE(*,*)' TIEMPO C.P.U.:',TIEMPO,' segundos'
      WRITE(*,*)'============================================'
      WRITE(6,*)'** FINAL DE PROGRAMA **'
      WRITE(*,*)'** FINAL DE PROGRAMA **'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Los resultados se han impreso en el fichero:'
      WRITE(*,*) SALIDA
      CLOSE(6)
END
```

```
C*****************************************************************
C                                SUBRRUTINA NORLIN
C                          CASO NORMAL. PROBLEMA LINEAL
C*****************************************************************

      SUBROUTINE NORLIN(N,NCLIN,C,BL,BU,X)

C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C        DECLARACIÓN DE VARIABLES
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

INTEGER DIM1,DIM2,LWORK,LIWORK
PARAMETER(DIM1=10,DIM2=20,LWORK=2*(DIM2+1)**2+20*DIM1+11*DIM2,
*          LIWORK=3*DIM1+DIM2)
INTEGER N,NCLIN,I,J,ISTATE(DIM1+DIM2),KX(DIM1),ITER,IWORK(LIWORK)
*         ,IFAIL,IUSER(1)
DOUBLE PRECISION C(DIM2,DIM1),BL(DIM1+DIM2),BU(DIM1+DIM2),X(DIM1)
*                  ,MED(DIM1),CVEC(DIM1),A(DIM1,DIM1),B(DIM1),OBJ,
*                  OBJE,CLAMDA(DIM1+DIM2),WORK(LWORK),V(DIM1,DIM1),
*                  U,NL(1),CJAC(1,1),OBJGRD(DIM1),R(DIM1,DIM1),
*                  USER(1),BETA,IBE

EXTERNAL E04NEF,E04NCF,E04UDM,OBJFUN,E04UEF,E04UCF,G01CEF

COMMON/DATOS/MED,V

C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C        VALOR ESPERADO
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      WRITE(6,*)

WRITE(6,*)'=============================================='
WRITE(6,*)'                   CASO NORMAL'
WRITE(6,*)'=============================================='
      WRITE(6,*)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce el vector valor esperado'
      WRITE(*,*)'(separado por espacios)'
      WRITE(*,*)
      READ(*,*) (MED(I),I=1,N)

      DO 10 I=1,N
         CVEC(I)=MED(I)
10    CONTINUE

      IFAIL=-1

      CALL E04NEF('Problem Type = LP')
      CALL E04NEF('Print Level = 0')

      CALL
E04NCF(N,N,NCLIN,DIM2,DIM1,C,BL,BU,CVEC,ISTATE,KX,X,A,B,
     *        ITER,OBJ,CLAMDA,IWORK,DIM1,WORK,LWORK,IFAIL)

      WRITE(*,*)
```

```
      WRITE(*,*)'SOLUCIÓN VALOR ESPERADO'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      OBJE=OBJ
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(6,*)'SOLUCIÓN VALOR ESPERADO'
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C        MÍNIMA VARIANZA
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce la matriz de varianzas por filas'
      DO 20 I=1,N
          READ(*,*)(V(I,J),J=1,N)
20    CONTINUE
      DO 30 I=1,N
          DO 40 J=1,N
              A(I,J)=2*V(I,J)
40        CONTINUE
30    CONTINUE

      IFAIL=-1

      CALL E04NEF('Problem Type = QP1')

CALL E04NCF(N,N,NCLIN,DIM2,DIM1,C,BL,BU,CVEC,ISTATE,KX,X,A,B,
*        ITER,OBJ,CLAMDA,IWORK,DIM1,WORK,LWORK,IFAIL)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA'
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL
```

```
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C       MÍNIMO RIESGO
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce el Nivel de Aspiración U'
      WRITE(*,*)'debe ser >= ',OBJE
      READ(*,*) U

      USER(1)=U

      CALL E04UEF('Print Level = 0')
C      CALL E04UEF('Print Level = 10')
C      CALL E04UEF('Verify Level = 3')

      IUSER(1)=1
      IFAIL=-1

CALL E04UCF(N,NCLIN,0,DIM2,1,DIM1,C,BL,BU,E04UDM,OBJFUN,ITER,
*             ISTATE,NL,CJAC,CLAMDA,OBJ,OBJGRD,R,X,IWORK,LIWORK,
*             WORK,LWORK,IUSER,USER,IFAIL)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'SOLUCIÓN MÍNIMO RIESGO'
      WRITE(*,*)'Nivel U: ',U
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)(X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'SOLUCIÓN MÍNIMO RIESGO'
      WRITE(6,*)'Nivel U: ',U
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)(X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C       KATAOKA
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce la probabilidad BETA'
      READ(*,*) BETA

      IBE=G01CEF(BETA,IFAIL)
      USER(1)=IBE

      CALL E04UEF('Print Level = 0')
C      CALL E04UEF('Print Level = 10')
```

```
C      CALL E04UEF('Verify Level = 3')

      IUSER(1)=2
      IFAIL=-1

CALL E04UCF(N,NCLIN,0,DIM2,1,DIM1,C,BL,BU,E04UDM,OBJFUN,ITER,
*             ISTATE,NL,CJAC,CLAMDA,OBJ,OBJGRD,R,X,IWORK,LIWORK,
*             WORK,LWORK,IUSER,USER,IFAIL)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'SOLUCIÓN KATAOKA'
      WRITE(*,*)'Probabilidad BETA: ',BETA
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)(X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'SOLUCIÓN KATAOKA'
      WRITE(6,*)'Probabilidad BETA: ',BETA
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)(X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL


      RETURN
      END

C*****************************************************************
C                         SUBRRUTINA OBJFUN
C              FUNCIÓN OBJETIVO PARA MÍNIMO RIESGO Y KATAOKA
C*****************************************************************

      SUBROUTINE OBJFUN(MODE,N,X,OBJF,OBJGRD,NSTATE,IUSER,USER)

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C           DECLARACIÓN DE VARIABLES
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

INTEGER MODE,N,NSTATE,IUSER(1),DIM1,DIM2,I,J
PARAMETER(DIM1=10,DIM2=20)
DOUBLE PRECISION X(N),OBJF,OBJGRD(N),USER(1),U,MED(DIM1),
*                 V(DIM1,DIM1),PROD(DIM1),PROD2,LO,IBE,CX
COMMON/DATOS/MED,V

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C           FUNCIÓN OBJETIVO
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      U=0
      IBE=0
```

```
      IF(IUSER(1).EQ.1) THEN
          U=USER(1)
      ELSE
          IBE=USER(1)
      ENDIF

      OBJF=U
      DO 10 I=1,N
          OBJF=OBJF-MED(I)*X(I)
10    CONTINUE
      LO=OBJF
      CX=U-OBJF
      DO 20 I=1,N
          PROD(I)=0
          DO 30 J=1,N
              PROD(I)=PROD(I)+V(I,J)*X(J)
30        CONTINUE
20    CONTINUE
      PROD2=0
      DO 40 I=1,N
          PROD2=PROD2+PROD(I)*X(I)
40    CONTINUE
      IF(IUSER(1).EQ.1) THEN
          OBJF=-OBJF/SQRT(PROD2)
      ELSE
          OBJF=IBE*SQRT(PROD2)+CX
      ENDIF

C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C          GRADIENTE
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      IF(((MODE.EQ.1).OR.(MODE.EQ.2)).AND.(IUSER(1).EQ.1)) THEN
          DO 50 I=1,N
              OBJGRD(I)=0
              DO 60 J=1,N
                  OBJGRD(I)=OBJGRD(I)+V(I,J)*X(J)
60            CONTINUE
              OBJGRD(I)=OBJGRD(I)*LO/(PROD2**(3./2.))
              OBJGRD(I)=(MED(I)/SQRT(PROD2))+OBJGRD(I)
50        CONTINUE
      ENDIF

      IF(((MODE.EQ.1).OR.(MODE.EQ.2)).AND.(IUSER(1).EQ.2)) THEN
          DO 70 I=1,N
              OBJGRD(I)=0
              DO 80 J=1,N
                  OBJGRD(I)=OBJGRD(I)+V(I,J)*X(J)
80            CONTINUE
              OBJGRD(I)=(OBJGRD(I)*IBE/SQRT(PROD2))+MED(I)
70        CONTINUE
      ENDIF

      RETURN
      END
C****************************************************************
```

```
C                             SUBRRUTINA ALELÍN
C                   CASO ALEATORIEDAD SIMPLE. PROBLEMA LINEAL
C*****************************************************************

      SUBROUTINE ALELIN(N,NCLIN,C,BL,BU,X)

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C       DECLARACIÓN DE VARIABLES
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

INTEGER DIM1,DIM2,LWORK,LIWORK
PARAMETER(DIM1=10,DIM2=20,LWORK=2*(DIM2+1)**2+20*DIM1+11*DIM2,
*          LIWORK=3*DIM1+DIM2)
INTEGER N,NCLIN,I,J,ISTATE(DIM1+DIM2),KX(DIM1),ITER,IWORK(LIWORK)
*       ,IFAIL,IUSER(1)
DOUBLE PRECISION C(DIM2,DIM1),BL(DIM1+DIM2),BU(DIM1+DIM2),X(DIM1)
*                 ,MED(2,DIM1),CVEC(DIM1),A(DIM1,DIM1),B(DIM1),OBJ
*                 ,CLAMDA(DIM1+DIM2),WORK(LWORK),T,SIGMA,TOL,
*                 U,NL(1),CJAC(1,1),OBJGRD(DIM1),R(DIM1,DIM1),
*                 USER(1),BETA,IBE,LAMDA,INVLAMDA
EXTERNAL E04NEF,E04NCF,E04UDM,OBJFUN1,E04UEF,E04UCF,G01FFF
COMMON/DATOS/MED

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C       VALOR ESPERADO
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      WRITE(6,*)

WRITE(6,*)'================================================'
WRITE(6,*)'                ALEATORIEDAD SIMPLE'
WRITE(6,*)'================================================'
      WRITE(6,*)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce el vector C1'
      WRITE(*,*)'(separado por espacios)'
      WRITE(*,*)
      READ(*,*) (MED(1,I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce el vector C2'
      WRITE(*,*)'(separado por espacios)'
      WRITE(*,*)
      READ(*,*) (MED(2,I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce la esperanza de T'
      WRITE(*,*)
      READ(*,*) T
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce la varianza de T'
      WRITE(*,*)
      READ(*,*) SIGMA

      DO 10 I=1,N
         CVEC(I)=MED(1,I)+T*MED(2,I)
10    CONTINUE
```

```
      IFAIL=-1

      CALL E04NEF('Problem Type = LP')
      CALL E04NEF('Print Level = 0')

CALL E04NCF(N,N,NCLIN,DIM2,DIM1,C,BL,BU,CVEC,ISTATE,KX,X,A,B,
*              ITER,OBJ,CLAMDA,IWORK,DIM1,WORK,LWORK,IFAIL)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'SOLUCIÓN VALOR ESPERADO'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)  (X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(6,*)'SOLUCIÓN VALOR ESPERADO'
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)  (X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C        MÍNIMA VARIANZA
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      DO 30 I=1,N
          DO 40 J=1,N
              A(I,J)=2.*SIGMA*MED(2,I)*MED(2,J)
40        CONTINUE
30    CONTINUE

      IFAIL=-1

      CALL E04NEF('Problem Type = QP1')
      CALL E04NEF('Print Level = 0')

CALL E04NCF(N,N,NCLIN,DIM2,DIM1,C,BL,BU,CVEC,ISTATE,KX,X,A,B,
*              ITER,OBJ,CLAMDA,IWORK,DIM1,WORK,LWORK,IFAIL)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)  (X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA'
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)  (X(I),I=1,N)
```

```
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL

C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C                            MÍNIMO RIESGO
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce el Nivel de Aspiración U'
      READ(*,*) U

      USER(1)=U

       CALL E04UEF('Print Level = 0')
C      CALL E04UEF('Print Level = 10')
C      CALL E04UEF('Verify Level = 3')

      IFAIL=-1

CALL E04UCF(N,NCLIN,0,DIM2,1,DIM1,C,BL,BU,E04UDM,OBJFUN1,ITER,
*             ISTATE,NL,CJAC,CLAMDA,OBJ,OBJGRD,R,X,IWORK,LIWORK,
*             WORK,LWORK,IUSER,USER,IFAIL)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'SOLUCIÓN MÍNIMO RIESGO'
      WRITE(*,*)'Nivel U: ',U
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)(X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',-OBJ
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'SOLUCIÓN MÍNIMO RIESGO'
      WRITE(6,*)'Nivel U: ',U
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)(X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',-OBJ
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL

C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C       KATAOKA
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce LAMDA exponencial'
      READ(*,*) LAMDA
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce la probabilidad BETA'
      READ(*,*) BETA
```

```
      INVLAMDA=1./LAMDA
      IBE=G01FFF(BETA,1.,INVLAMDA,TOL,IFAIL)

      DO 70 I=1,N
          CVEC(I)=MED(1,I)+IBE*MED(2,I)
70    CONTINUE

      IFAIL=-1

      CALL E04NEF('Problem Type = LP')
      CALL E04NEF('Print Level = 0')

CALL E04NCF(N,N,NCLIN,DIM2,DIM1,C,BL,BU,CVEC,ISTATE,KX,X,A,B,
*             ITER,OBJ,CLAMDA,IWORK,DIM1,WORK,LWORK,IFAIL)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'SOLUCIÓN KATAOKA'
      WRITE(*,*)'Probabilidad BETA: ',BETA
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)(X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'SOLUCIÓN KATAOKA'
      WRITE(6,*)'Probabilidad BETA: ',BETA
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)(X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL


      RETURN
      END


C*****************************************************************
C                          SUBRRUTINA OBJFUN1
C             FUNCIÓN OBJETIVO PARA MÍNIMO RIESGO Y KATAOKA
C*****************************************************************

      SUBROUTINE OBJFUN1(MODE,N,X,OBJF,OBJGRD,NSTATE,IUSER,USER)

C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C           DECLARACIÓN DE VARIABLES
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

INTEGER MODE,N,NSTATE,IUSER(1),DIM1,DIM2,I,J
PARAMETER(DIM1=10,DIM2=20)
DOUBLE PRECISION X(N),OBJF,OBJGRD(N),USER(1),U,MED(2,DIM1),
*                 PROD(DIM1),PROD2,LO,CX
COMMON/DATOS/MED
```

```
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C          FUNCIÓN OBJETIVO
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      U=USER(1)

      OBJF=0
      DO 10 I=1,N
          OBJF=OBJF+MED(1,I)*X(I)
10    CONTINUE
      OBJF=OBJF-U
      CX=OBJF
      LO=0
      DO 20 I=1,N
          LO=LO+MED(2,I)*X(I)
20    CONTINUE
      OBJF=OBJF/LO

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C                     GRADIENTE
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      IF((MODE.EQ.1).OR.(MODE.EQ.2)) THEN
          DO 50 I=1,N
              OBJGRD(I)=(MED(1,I)/LO)-(CX*MED(2,I)/(LO**2))
50        CONTINUE
      ENDIF

      RETURN
      END


C*****************************************************************
C                              SUBRRUTINA CANLIN
C                 PROBLEMA LINEAL APROXIMACION POR CANTELLI
C*****************************************************************

      SUBROUTINE CANLIN(N,NCLIN,C,BL,BU,X)

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C       DECLARACIÓN DE VARIABLES
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

INTEGER DIM1,DIM2,LWORK,LIWORK
PARAMETER(DIM1=10,DIM2=20,LWORK=2*(DIM2+1)**2+20*DIM1+11*DIM2+1,
*          LIWORK=3*DIM1+DIM2+1)
INTEGER N,NCLIN,I,J,ISTATE(DIM1+DIM2+1),KX(DIM1),ITER,
*        IWORK(LIWORK),IFAIL,IUSER(1)
DOUBLE PRECISION C(DIM2,DIM1),BL(DIM1+DIM2),BU(DIM1+DIM2),X(DIM1)
*                 ,MED(DIM1),CVEC(DIM1),A(DIM1,DIM1),B(DIM1),OBJ,
*                 OBJE,CLAMDA(DIM1+DIM2+1),WORK(LWORK),
*                 U,NL(1),CJAC(1,1),OBJGRD(DIM1),R(DIM1,DIM1),
*                 USER(1),BETA,V(DIM1,DIM1),CC(DIM2+1,DIM1),
*                 BBL(DIM1+DIM2+1),BBU(DIM1+DIM2+1)
```

```
EXTERNAL E04NEF,E04NCF,E04UDM,OBJFUN2,E04UEF,E04UCF
COMMON/DATOS/MED,V

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C       VALOR ESPERADO
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      WRITE(6,*)

WRITE(6,*)'=================================================='
WRITE(6,*)'                          CANTELLI'
WRITE(6,*)'=================================================='
      WRITE(6,*)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce el vector valor esperado'
      WRITE(*,*)'(separado por espacios)'
      WRITE(*,*)
      READ(*,*) (MED(I),I=1,N)

      DO 10 I=1,N
         CVEC(I)=MED(I)
10    CONTINUE

      IFAIL=-1

      CALL E04NEF('Problem Type = LP')
      CALL E04NEF('Print Level = 0')

CALL E04NCF(N,N,NCLIN,DIM2,DIM1,C,BL,BU,CVEC,ISTATE,KX,X,A,B,
*             ITER,OBJ,CLAMDA,IWORK,DIM1,WORK,LWORK,IFAIL)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'SOLUCIÓN VALOR ESPERADO'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      OBJE=OBJ
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'SOLUCIÓN VALOR ESPERADO'
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL



C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
```

```
C       MÍNIMA VARIANZA
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce la matriz de varianzas por filas'
      DO 20 I=1,N
          READ(*,*)(V(I,J),J=1,N)
20    CONTINUE
      DO 30 I=1,N
          DO 40 J=1,N
              A(I,J)=2*V(I,J)
40        CONTINUE
30    CONTINUE

      IFAIL=-1

      CALL E04NEF('Problem Type = QP1')

CALL E04NCF(N,N,NCLIN,DIM2,DIM1,C,BL,BU,CVEC,ISTATE,KX,X,A,B,
*            ITER,OBJ,CLAMDA,IWORK,DIM1,WORK,LWORK,IFAIL)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)  (X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA'
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)  (X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL

C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C       MÍNIMO RIESGO
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce el Nivel de Aspiración U'
      READ(*,*) U

      USER(1)=U

      DO 50 I=1,N
          BBL(I)=BL(I)
          BBU(I)=BU(I)
 50   CONTINUE

      DO 60 I=1,NCLIN
         DO 70 J=1,N
```

```
                CC(I,J)=C(I,J)
70          CONTINUE
            BBL(N+I)=BL(N+I)
            BBU(N+I)=BU(N+I)
60      CONTINUE
        DO 80 I=1,N
            CC(NCLIN+1,I)=MED(I)
80      CONTINUE
        BBL(N+NCLIN+1)=-1E10
        BBU(N+NCLIN+1)=U

        CALL E04UEF('Print Level = 0')
C        CALL E04UEF('Print Level = 10')
C        CALL E04UEF('Verify Level = 3')

        IUSER(1)=1
        IFAIL=-1

CALL E04UCF(N,NCLIN+1,0,DIM2+1,1,DIM1,CC,BBL,BBU,E04UDM,OBJFUN2,
*             ITER,ISTATE,NL,CJAC,CLAMDA,OBJ,OBJGRD,R,X,IWORK,
*             LIWORK,WORK,LWORK,IUSER,USER,IFAIL)

        WRITE(*,*)
        WRITE(*,*)'SOLUCIÓN MÍNIMO RIESGO'
        WRITE(*,*)'Nivel U: ',U
        WRITE(*,*)
        WRITE(*,*)(X(I),I=1,N)
        WRITE(*,*)
        WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',OBJ
        WRITE(*,*)
        WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL

        WRITE(6,*)
        WRITE(6,*)'SOLUCIÓN MÍNIMO RIESGO'
        WRITE(6,*)'Nivel U: ',U
        WRITE(6,*)
        WRITE(6,*)(X(I),I=1,N)
        WRITE(6,*)
        WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',OBJ
        WRITE(6,*)
        WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C        KATAOKA
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

        WRITE(*,*)
        WRITE(*,*)'Introduce la probabilidad BETA'
        READ(*,*) BETA

        USER(1)=BETA

        CALL E04UEF('Print Level = 0')
C        CALL E04UEF('Print Level = 10')
C        CALL E04UEF('Verify Level = 3')
```

```
      IUSER(1)=2
      IFAIL=-1

CALL E04UCF(N,NCLIN,0,DIM2,1,DIM1,C,BL,BU,E04UDM,OBJFUN2,ITER,
*             ISTATE,NL,CJAC,CLAMDA,OBJ,OBJGRD,R,X,IWORK,LIWORK,
*             WORK,LWORK,IUSER,USER,IFAIL)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'SOLUCIÓN KATAOKA'
      WRITE(*,*)'Probabilidad BETA: ',BETA
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)(X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'SOLUCIÓN KATAOKA'
      WRITE(6,*)'Probabilidad BETA: ',BETA
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)(X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL

      RETURN
      END

C*****************************************************************
C                            SUBRRUTINA OBJFUN2
C              FUNCIÓN OBJETIVO PARA MÍNIMO RIESGO Y KATAOKA
C*****************************************************************

      SUBROUTINE OBJFUN2(MODE,N,X,OBJF,OBJGRD,NSTATE,IUSER,USER)

C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C           DECLARACIÓN DE VARIABLES
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

INTEGER MODE,N,NSTATE,IUSER(1),DIM1,DIM2,I,J
PARAMETER(DIM1=10,DIM2=20)
DOUBLE PRECISION X(N),OBJF,OBJGRD(N),USER(1),U,MED(DIM1),
*                 V(DIM1,DIM1),PROD(DIM1),PROD2,LO,BETA,CX
COMMON/DATOS/MED,V

C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C           FUNCIÓN OBJETIVO
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
      U=0
      BETA=0
      IF(IUSER(1).EQ.1) THEN
          U=USER(1)
      ELSE
          BETA=USER(1)
```

```
      ENDIF

      OBJF=0
      LO=U
      DO 10 I=1,N
           LO=LO-MED(I)*X(I)
10    CONTINUE
      CX=U-LO
      DO 20 I=1,N
           PROD(I)=0
           DO 30 J=1,N
                PROD(I)=PROD(I)+V(I,J)*X(J)
30         CONTINUE
20    CONTINUE
      PROD2=0
      DO 40 I=1,N
           PROD2=PROD2+PROD(I)*X(I)
40    CONTINUE
      IF(IUSER(1).EQ.1) THEN
           OBJF=-(LO**2.)/(PROD2+(LO**2.))
      ELSE
           OBJF=SQRT(BETA/(1.-BETA))*SQRT(PROD2)+CX
      ENDIF

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C           GRADIENTE
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      IF(((MODE.EQ.1).OR.(MODE.EQ.2)).AND.(IUSER(1).EQ.1)) THEN
           DO 50 I=1,N
                OBJGRD(I)=0
                DO 60 J=1,N
                     OBJGRD(I)=OBJGRD(I)+2.*V(I,J)*X(J)
60              CONTINUE
                OBJGRD(I)=(OBJGRD(I)-
2.*LO*MED(I))/((PROD2+(LO**2.))**2.)
                OBJGRD(I)=OBJGRD(I)*(LO**2.)

OBJGRD(I)=((2.*MED(I)*LO)/(PROD2+(LO**2.)))+OBJGRD(I)
50         CONTINUE
      ENDIF
      IF(((MODE.EQ.1).OR.(MODE.EQ.2)).AND.(IUSER(1).EQ.2)) THEN
           DO 70 I=1,N
                OBJGRD(I)=0
                DO 80 J=1,N
                     OBJGRD(I)=OBJGRD(I)+V(I,J)*X(J)
80              CONTINUE
                OBJGRD(I)=(OBJGRD(I)*SQRT(BETA/(1.-
BETA))/SQRT(PROD2))
     *                          +MED(I)
70         CONTINUE
      ENDIF

      RETURN
      END
```

PROGRAMACIÓN ESTOCASTICA MONOBJETIVO

Caso Cuadrático

```
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C                PROGRAMACION  ESTOCASTICA  MONOOBJETIVO
C                              CASO  CUADRÁTICO
C
C Linkar con: NORMUL,ALECU,NAGLIB/LIB
C
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C                  DECLARACION DE VARIABLES
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      PROGRAM CUADRATICO

INTEGER DIM1,DIM2
PARAMETER(DIM1=10, DIM2=20)
INTEGER N,NCLIN,I,J,OPC
DOUBLE PRECISION C(DIM2,DIM1),BL(DIM1+DIM2+1),BU(DIM1+DIM2+1),
*                 X(DIM1),T1,T2,TIEMPO,BB(DIM1,DIM1),H(DIM1),
*                  ES(DIM1),V(DIM1)
CHARACTER*20 FICHERO,COMENT
CHARACTER*30 SALIDA
EXTERNAL NORMUL,ALECU,X05BAF

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C                      TIEMPO  DE  CPU
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      T1=X05BAF()

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C                      LECTURA DE DATOS
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      WRITE(*,*)'Introduce el nombre del fichero de datos'
      READ(*,*) FICHERO
      OPEN(3,FILE=FICHERO,STATUS='OLD')
      READ(3,*) COMENT
      READ(3,*) N
      READ(3,*) COMENT
      READ(3,*) NCLIN
      READ(3,*) COMENT
      DO 10 I=1,NCLIN
          READ(3,*) (C(I,J),J=1,N)
10    CONTINUE
      READ(3,*) COMENT
      DO 20 I=1,N
          READ(3,*) BL(I),BU(I)
20    CONTINUE
      READ(3,*) COMENT
      DO 30 I=1,NCLIN
          READ(3,*) BL(N+I),BU(N+I)
```

```
30      CONTINUE
        READ(3,*)COMENT
        DO 40 I=1,N
            READ(3,*)(BB(I,J),J=1,N)
40      CONTINUE
        READ(3,*) COMENT
        READ(3,*)(H(I),I=1,N)
        READ(3,*) COMENT
        READ(3,*)(ES(I),I=1,N)
        READ(3,*) COMENT
        READ(3,*)(V(I),I=1,N)
        READ(3,*) COMENT
        READ(3,*)(X(I),I=1,N)
        CLOSE(3)

        SALIDA='CUAD-'//FICHERO
        OPEN(6,FILE=SALIDA,STATUS='NEW')

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C                      MENÚ
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

35      CONTINUE
        WRITE(*,*)
        WRITE(*,*)'Elije Opción:'
        WRITE(*,*)
        WRITE(*,*)'1.- Caso Normal'
        WRITE(*,*)'2.- Aleatoriedad Simple'
        WRITE(*,*)'3.- Terminar'
45      READ(*,*) OPC
        IF((OPC.LT.1).OR.(OPC.GT.3)) GOTO 45
        IF(OPC.EQ.1) THEN
            CALL NORMUL(N,NCLIN,C,BL,BU,BB,H,ES,V,X)
            GOTO 35
        ENDIF
        IF(OPC.EQ.2) THEN
            CALL ALECU(N,NCLIN,C,BL,BU,BB,H,X)
            GOTO 35
        ENDIF

        T2=X05BAF()
        TIEMPO=T2-T1

        WRITE(6,*)
        WRITE(6,*)'============================================='
        WRITE(6,*)' TIEMPO C.P.U.:',TIEMPO,' segundos'
        WRITE(6,*)'============================================='
        WRITE(*,*)
        WRITE(*,*)'============================================='
        WRITE(*,*)' TIEMPO C.P.U.:',TIEMPO,' segundos'
        WRITE(*,*)'============================================='
        WRITE(6,*)'** FINAL DE PROGRAMA **'
        WRITE(*,*)'** FINAL DE PROGRAMA **'
        WRITE(*,*)
        WRITE(*,*)'Los resultados se han impreso en el fichero:'
        WRITE(*,*) SALIDA
```

```
      CLOSE(6)

      END

C*****************************************************************
C                             SUBRRUTINA NORMUL
C                      CASO NORMAL. PROBLEMA CUADRÁTICO
C*****************************************************************

      SUBROUTINE NORMUL(N,NCLIN,C,BL,BU,BB1,H1,ES1,V1,X)

C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C       DECLARACIÓN DE VARIABLES
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

INTEGER DIM1,DIM2,LWORK,LIWORK
PARAMETER(DIM1=10,DIM2=20,LWORK=2*(DIM1**2)+DIM1*DIM2+22*DIM1+
*            11*DIM2+21,LIWORK=3*DIM1+DIM2+2)
INTEGER N,NCLIN,I,J,ISTATE(DIM1+DIM2+1),KX(DIM1),ITER,
*         IWORK(LIWORK),IFAIL,IUSER(1)
DOUBLE PRECISION C(DIM2,DIM1),BL(DIM1+DIM2+1),BU(DIM1+DIM2+1),
*                X(DIM1),ES(DIM1),CVEC(DIM1),A(DIM1,DIM1),B(DIM1)
*                ,OBJ,TIND1,TIND2,CJAC(1,DIM1),ES1(DIM1),
*                CLAMDA(DIM1+DIM2+1),WORK(LWORK),V(DIM1),
*                U,NL(1),OBJGRD(DIM1),R(DIM1,DIM1),V1(DIM1),
*                USER(4),BETA,H(DIM1),BB(DIM1,DIM1),H1(DIM1),
*                BB1(DIM1,DIM1)

EXTERNAL E04NEF,E04NCF,OBJFUN,CONFUN,E04UEF,E04UCF,E04UDM

COMMON/DATOS1/ES,BB
COMMON/DATOS2/V,H

      DO 1 I=1,N
          ES(I)=ES1(I)
          V(I)=V1(I)
          H(I)=H1(I)
          DO 2 J=1,N
              BB(I,J)=BB1(I,J)
2         CONTINUE
1     CONTINUE

C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C       VALOR ESPERADO
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      WRITE(6,*)

WRITE(6,*)'=================================================='
WRITE(6,*)'                        CASO NORMAL'
WRITE(6,*)'=================================================='
      WRITE(6,*)

      DO 10 I=1,N
          CVEC(I)=-ES(I)
10    CONTINUE
```

```
      DO 20 I=1,N
          DO 30 J=1,N
              A(I,J)=2.*BB(I,J)
30        CONTINUE
20    CONTINUE

      TIND1=0.
      DO 40 I=1,N
          TIND1=TIND1+H(I)*ES(I)*ES(I)
40    CONTINUE
      DO 50 I=1,N
          TIND1=TIND1+H(I)*V(I)
50    CONTINUE

      IFAIL=-1

      CALL E04NEF('Problem Type = QP2')
      CALL E04NEF('Print Level = 0')

CALL E04NCF(N,N,NCLIN,DIM2,DIM1,C,BL,BU,CVEC,ISTATE,KX,X,A,B,
*            ITER,OBJ,CLAMDA,IWORK,DIM1,WORK,LWORK,IFAIL)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'SOLUCIÓN VALOR ESPERADO'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',OBJ+TIND1
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(6,*)'SOLUCIÓN VALOR ESPERADO'
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',OBJ+TIND1
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C       MÍNIMA VARIANZA
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      DO 60 I=1,N
          CVEC(I)=-4.*ES(I)*H(I)*V(I)
60    CONTINUE
      DO 70 I=1,N
          DO 80 J=1,N
              IF(I.EQ.J) THEN
                  A(I,J)=2.*V(I)
              ELSE
                  A(I,J)=0.
              ENDIF
80        CONTINUE
70    CONTINUE
```

```
      TIND2=0.
      DO 90 I=1,N
          TIND2=TIND2+2.*(V(I)**2.)*(H(I)**2.)
90    CONTINUE
      DO 100 I=1,N
          TIND2=TIND2+4.*(ES(I)**2.)*(H(I)**2.)*V(I)
100   CONTINUE

      IFAIL=-1

      CALL E04NEF('Problem Type = QP2')

CALL E04NCF(N,N,NCLIN,DIM2,DIM1,C,BL,BU,CVEC,ISTATE,KX,X,A,B,
*            ITER,OBJ,CLAMDA,IWORK,DIM1,WORK,LWORK,IFAIL)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)  (X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',OBJ+TIND2
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA'
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)  (X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',OBJ+TIND2
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C       MÍNIMO RIESGO
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce el Nivel de Aspiración U'
      READ(*,*) U

      USER(1)=U
      USER(2)=TIND1
      USER(3)=TIND2

      BL(N+NCLIN+1)=-1E10
      BU(N+NCLIN+1)=U-TIND1

      CALL E04UEF('Print Level = 0')
C     CALL E04UEF('Print Level = 10')
C     CALL E04UEF('Verify Level = 3')

      IUSER(1)=1
      IFAIL=-1
```

```
CALL E04UCF(N,NCLIN,1,DIM2,1,DIM1,C,BL,BU,CONFUN,OBJFUN,ITER,
*             ISTATE,NL,CJAC,CLAMDA,OBJ,OBJGRD,R,X,IWORK,LIWORK,
*             WORK,LWORK,IUSER,USER,IFAIL)

      IF(IFAIL.EQ.6) THEN
          CALL E04UEF('Warm Start')
          DO 110 I=1,N
              DO 120 J=1,N
                  IF(I.EQ.J) THEN
                      R(I,J)=1.
                  ELSE
                      R(I,J)=0.
                  ENDIF
120           CONTINUE
110       CONTINUE
          IFAIL=-1
CALL E04UCF(N,NCLIN,1,DIM2,1,DIM1,C,BL,BU,CONFUN,OBJFUN,ITER,
*                 ISTATE,NL,CJAC,CLAMDA,OBJ,OBJGRD,R,X,IWORK,
*                 LIWORK,WORK,LWORK,IUSER,USER,IFAIL)
CALL E04UEF('Cold Start')
      ENDIF

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'SOLUCIÓN MÍNIMO RIESGO'
      WRITE(*,*)'Nivel U: ',U
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)(X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',-OBJ
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'SOLUCIÓN MÍNIMO RIESGO'
      WRITE(6,*)'Nivel U: ',U
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)(X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',-OBJ
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C       KATAOKA
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce la probabilidad BETA'
      READ(*,*) BETA

      USER(4)=BETA

      CALL E04UEF('Print Level = 0')
C      CALL E04UEF('Print Level = 10')
C      CALL E04UEF('Verify Level = 3')

      IUSER(1)=2
```

```
      IFAIL=-1

CALL E04UCF(N,NCLIN,0,DIM2,1,DIM1,C,BL,BU,E04UDM,OBJFUN,ITER,
*             ISTATE,NL,CJAC,CLAMDA,OBJ,OBJGRD,R,X,IWORK,LIWORK,
*             WORK,LWORK,IUSER,USER,IFAIL)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'SOLUCIÓN KATAOKA'
      WRITE(*,*)'Probabilidad BETA: ',BETA
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)(X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'SOLUCIÓN KATAOKA'
      WRITE(6,*)'Probabilidad BETA: ',BETA
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)(X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL

      RETURN
      END


C*****************************************************************
C                               SUBRRUTINA OBJFUN
C              FUNCIÓN OBJETIVO PARA MÍNIMO RIESGO Y KATAOKA
C*****************************************************************

      SUBROUTINE OBJFUN(MODE,N,X,OBJF,OBJGRD,NSTATE,IUSER,USER)

C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C           DECLARACIÓN DE VARIABLES
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

INTEGER MODE,N,NSTATE,IUSER(1),DIM1,I,J
PARAMETER(DIM1=10)
DOUBLE PRECISION X(N),OBJF,OBJGRD(N),USER(4),U,ES(DIM1),
*                   V(DIM1),PROD(DIM1),PROD2,LO,BB(DIM1,DIM1),
*                   H(DIM1),Y,TIND1,TIND2,BX,BETA

COMMON/DATOS1/ES,BB
COMMON/DATOS2/V,H

C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C           FUNCIÓN OBJETIVO
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      U=USER(1)
      TIND1=USER(2)
```

```
      TIND2=USER(3)
      BETA=USER(4)

      LO=U
      DO 10 I=1,N
          PROD(I)=0.
          DO 20 J=1,N
              PROD(I)=PROD(I)+BB(I,J)*X(J)
20        CONTINUE
10    CONTINUE
      PROD2=0.
      DO 30 I=1,N
          PROD2=PROD2+PROD(I)*X(I)
30    CONTINUE
      LO=LO-PROD2
      DO 40 I=1,N
          LO=LO+ES(I)*X(I)
40    CONTINUE
      LO=LO-TIND1

      Y=0.
      DO 50 I=1,N
          Y=Y+V(I)*(X(I)**2.)
50    CONTINUE
      DO 60 I=1,N
          Y=Y-4.*ES(I)*H(I)*V(I)*X(I)
60    CONTINUE
      Y=Y+TIND2

      IF(IUSER(1).EQ.1) THEN
          OBJF=-(LO**2.)/(Y+(LO**2.))
      ELSE
          OBJF=SQRT(BETA/(1.-BETA))*SQRT(Y)+U-LO
      ENDIF

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C           GRADIENTE
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      IF(((MODE.EQ.1).OR.(MODE.EQ.2)).AND.(IUSER(1).EQ.1)) THEN
          DO 70 I=1,N
              BX=0.
              DO 80 J=1,N
                  BX=BX+2.*BB(I,J)*X(J)
80            CONTINUE
              OBJGRD(I)=2.*LO*(ES(I)-BX)
              OBJGRD(I)=OBJGRD(I)+2.*V(I)*X(I)
              OBJGRD(I)=OBJGRD(I)-4.*ES(I)*H(I)*V(I)
              OBJGRD(I)=(OBJGRD(I)*(LO**2.))/((Y+(LO**2.))**2.)
              OBJGRD(I)=OBJGRD(I)+(2.*LO*(BX-ES(I))/(Y+(LO**2.)))
70        CONTINUE
      ENDIF

      IF(((MODE.EQ.1).OR.(MODE.EQ.2)).AND.(IUSER(1).EQ.2)) THEN
          DO 90 I=1,N
              OBJGRD(I)=V(I)*X(I)-2.*ES(I)*H(I)*V(I)
```

```
               OBJGRD(I)=SQRT(BETA/(1.-BETA))*OBJGRD(I)/SQRT(Y)
               DO 100 J=1,N
                   OBJGRD(I)=OBJGRD(I)+2.*BB(I,J)*X(J)
100            CONTINUE
               OBJGRD(I)=OBJGRD(I)-ES(I)
90         CONTINUE
      ENDIF

      RETURN
      END


C*****************************************************************
C                            SUBRRUTINA CONFUN
C                 RESTRICCIÓN NO LINEAL PARA MÍNIMO RIESGO
C*****************************************************************

      SUBROUTINE CONFUN(MODE,NCNLN,N,NROWJ,NEEDC,X,NL,CJAC,NSTATE,
     *                  IUSER,USER)

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C          DECLARACIÓN DE VARIABLES
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

INTEGER MODE,NCNLN,N,NRWOJ,NEEDC(NCNLN),NSTATE,IUSER(1),DIM1,I,J
PARAMETER(DIM1=10)
DOUBLE PRECISION X(N),NL(NCNLN),CJAC(NROWJ,N),USER(3),ES(DIM1),
*                 BB(DIM1,DIM1),U,TIND1,PROD(DIM1),PROD2

COMMON/DATOS1/ES,BB

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C          RESTRICCIÓN
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      U=USER(1)
      TIND1=USER(2)

      DO 10 I=1,N
          PROD(I)=0.
          DO 20 J=1,N
              PROD(I)=PROD(I)+BB(I,J)*X(J)
20        CONTINUE
10    CONTINUE
      PROD2=0.
      DO 30 I=1,N
          PROD2=PROD2+PROD(I)*X(I)
30    CONTINUE
      NL(1)=PROD2
      DO 40 I=1,N
          NL(1)=NL(1)-ES(I)*X(I)
40    CONTINUE

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C          GRADIENTE
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
```

```
      DO 50 I=1,N
          CJAC(1,I)=0.
          DO 60 J=1,N
              CJAC(1,I)=CJAC(1,I)+2.*BB(I,J)*X(J)
60        CONTINUE
          CJAC(1,I)=CJAC(1,I)-ES(I)
50    CONTINUE

      RETURN
      END

C*****************************************************************
C                        SUBRRUTINA ALECU
C          CASO ALEATORIEDAD SIMPLE. PROBLEMA CUADRÁTICO
C*****************************************************************

      SUBROUTINE ALECU(N,NCLIN,C,BL,BU,BB1,H1,X)

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C       DECLARACIÓN DE VARIABLES
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

INTEGER DIM1,DIM2,LWORK,LIWORK
PARAMETER(DIM1=10,DIM2=20,LWORK=2*(DIM2+1)**2+22*DIM1+11*DIM2
*          +DIM1*DIM2+21,LIWORK=3*DIM1+DIM2+2)
INTEGER N,NCLIN,I,J,ISTATE(DIM1+DIM2+1),KX(DIM1),ITER,
*        IWORK(LIWORK),IFAIL,IUSER(2)
DOUBLE PRECISION C(DIM2,DIM1),BL(DIM1+DIM2+1),BU(DIM1+DIM2+1),
*                 X(DIM1),MED(2,DIM1),CVEC(DIM1),A(DIM1,DIM1),
*                 B(DIM1),OBJ,CLAMDA(DIM1+DIM2+1),WORK(LWORK),T,
*                 SIGMA,U,NL(1),CJAC(1,DIM1),OBJGRD(DIM1),
*                 R(DIM1,DIM1),USER(7),BETA,BB(DIM1,DIM1),LU,
*                 H(DIM1),TIND1,TIND2,LO,BB1(DIM1,DIM1),H1(DIM1)
EXTERNAL E04NEF,E04NCF,E04UDM,OBJFUN1,CONFUN1,E04UEF,E04UCF
COMMON/DATOS1/MED,BB
COMMON/DATOS2/H

      DO 1 I=1,DIM1
          H(I)=H1(I)
          DO 2 J=1,DIM1
              BB(I,J)=BB1(I,J)
2         CONTINUE
1     CONTINUE

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C       VALOR ESPERADO
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      WRITE(6,*)

WRITE(6,*)'=============================================='
      WRITE(6,*)'                 ALEATORIEDAD SIMPLE'
WRITE(6,*)'=============================================='
      WRITE(6,*)
```

```
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce el vector C1'
      WRITE(*,*)'(separado por espacios)'
      WRITE(*,*)
      READ(*,*) (MED(1,I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce el vector C2'
      WRITE(*,*)'(separado por espacios)'
      WRITE(*,*)
      READ(*,*) (MED(2,I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce la esperanza de T'
      WRITE(*,*)
      READ(*,*) T
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce la varianza de T'
      WRITE(*,*)
      READ(*,*) SIGMA

      DO 10 I=1,N
          CVEC(I)=-(MED(1,I)+T*MED(2,I))
10    CONTINUE

      DO 20 I=1,N
          DO 30 J=1,N
              A(I,J)=2.*BB(I,J)
30        CONTINUE
20    CONTINUE

      TIND1=0.
      DO 40 I=1,N
          TIND1=TIND1+H(I)*(MED(2,I)**2.)
40    CONTINUE
      TIND1=TIND1*((T**2.)+SIGMA)
      LU=0.
      DO 50 I=1,N
          TIND1=TIND1+H(I)*(MED(1,I)**2.)
          LU=LU+MED(1,I)*H(I)*MED(2,I)
50    CONTINUE
      TIND1=TIND1+LU*2.*T

      IFAIL=-1

      CALL E04NEF('Problem Type = QP2')
      CALL E04NEF('Print Level = 0')

CALL E04NCF(N,N,NCLIN,DIM2,DIM1,C,BL,BU,CVEC,ISTATE,KX,X,A,B,
*             ITER,OBJ,CLAMDA,IWORK,DIM1,WORK,LWORK,IFAIL)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'SOLUCIÓN VALOR ESPERADO'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',OBJ+TIND1
      WRITE(*,*)
```

```
      WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(6,*)'SOLUCIÓN VALOR ESPERADO'
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',OBJ+TIND1
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C       MÍNIMA VARIANZA
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      LO=0.
      DO 60 I=1,N
          LO=LO+H(I)*(MED(2,I)**2.)
60    CONTINUE

      TIND2=(LO**2.)*2.*SIGMA*(SIGMA+2.*(T**2.))+4.*SIGMA*(LU**2)+
     *       8.*T*SIGMA*LO*LU

      DO 70 I=1,N
          CVEC(I)=-4.*SIGMA*(LU+T*LO)*MED(2,I)
70    CONTINUE

      DO 80 I=1,N
          DO 90 J=1,N
              A(I,J)=2.*SIGMA*MED(2,I)*MED(2,J)
90        CONTINUE
80    CONTINUE

      IFAIL=-1

      CALL E04NEF('Problem Type = QP2')
      CALL E04NEF('Print Level = 0')

CALL E04NCF(N,N,NCLIN,DIM2,DIM1,C,BL,BU,CVEC,ISTATE,KX,X,A,B,
*             ITER,OBJ,CLAMDA,IWORK,DIM1,WORK,LWORK,IFAIL)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',OBJ+TIND2
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA'
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',OBJ+TIND2
      WRITE(6,*)
```

```
      WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL

C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C       MÍNIMO RIESGO
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce el Nivel de Aspiración U'
      READ(*,*) U

      IUSER(1)=1
      USER(1)=U
      USER(2)=TIND1
      USER(3)=TIND2
      USER(4)=T
      USER(5)=SIGMA
      USER(7)=LU

      BL(N+NCLIN+1)=-1.E10
      BU(N+NCLIN+1)=U-TIND1

       CALL E04UEF('Print Level = 0')
C      CALL E04UEF('Print Level = 10')
C      CALL E04UEF('Verify Level = 3')

      IFAIL=-1

CALL E04UCF(N,NCLIN,1,DIM2,1,DIM1,C,BL,BU,CONFUN1,OBJFUN1,ITER,
*             ISTATE,NL,CJAC,CLAMDA,OBJ,OBJGRD,R,X,IWORK,LIWORK,
*             WORK,LWORK,IUSER,USER,IFAIL)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'SOLUCIÓN MÍNIMO RIESGO'
      WRITE(*,*)'Nivel U: ',U
      WRITE(*,*)
      IF(IFAIL.EQ.3) THEN
           WRITE(*,*)'/ NO EXISTEN PUNTOS FACTIBLES PARA ESTE
NIVEL /'
      ELSE
           WRITE(*,*)(X(I),I=1,N)
           WRITE(*,*)
           WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',-OBJ
           WRITE(*,*)
           WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL
      ENDIF

      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'SOLUCIÓN MÍNIMO RIESGO'
      WRITE(6,*)'Nivel U: ',U
      WRITE(6,*)
      IF(IFAIL.EQ.3) THEN
           WRITE(6,*)'/ NO EXISTEN PUNTOS FACTIBLES PARA ESTE
NIVEL /'
      ELSE
           WRITE(6,*)(X(I),I=1,N)
           WRITE(6,*)
```

```
          WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',-OBJ
          WRITE(6,*)
          WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL
      ENDIF

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C       KATAOKA
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce la probabilidad BETA'
      READ(*,*) BETA

      USER(6)=BETA
      IUSER(1)=2

       CALL E04UEF('Print Level = 0')
C      CALL E04UEF('Print Level = 10')
C      CALL E04UEF('Verify Level = 3')

      IFAIL=-1

CALL E04UCF(N,NCLIN,0,DIM2,1,DIM1,C,BL,BU,E04UDM,OBJFUN1,ITER,
*            ISTATE,NL,CJAC,CLAMDA,OBJ,OBJGRD,R,X,IWORK,LIWORK,
*            WORK,LWORK,IUSER,USER,IFAIL)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'SOLUCIÓN KATAOKA'
      WRITE(*,*)'Probabilidad BETA: ',BETA
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)(X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'SOLUCIÓN KATAOKA'
      WRITE(6,*)'Probabilidad BETA: ',BETA
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)(X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL


      RETURN
      END
```

```
C***********************************************************************
C                              SUBRRUTINA OBJFUN1
C                FUNCIÓN OBJETIVO PARA MÍNIMO RIESGO Y KATAOKA
C***********************************************************************

      SUBROUTINE OBJFUN1(MODE,N,X,OBJF,OBJGRD,NSTATE,IUSER,USER)

C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C           DECLARACIÓN DE VARIABLES
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

INTEGER MODE,N,NSTATE,IUSER(2),DIM1,DIM2,I,J
PARAMETER(DIM1=10,DIM2=20)
DOUBLE PRECISION X(N),OBJF,OBJGRD(N),USER(7),U,MED(2,DIM1),
*                  PROD(DIM1),PROD2,LO,H(DIM1),BB(DIM1,DIM1),
*                  T,SIGMA,TIND1,TIND2,Y,ABC,BETA,BX,LU
COMMON/DATOS1/MED,BB
COMMON/DATOS2/H

C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C           FUNCIÓN OBJETIVO
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      U=USER(1)
      TIND1=USER(2)
      TIND2=USER(3)
      T=USER(4)
      SIGMA=USER(5)
      BETA=USER(6)
      LU=USER(7)

      LO=U
      DO 10 I=1,N
          PROD(I)=0.
          DO 20 J=1,N
              PROD(I)=PROD(I)+BB(I,J)*X(J)
20        CONTINUE
10    CONTINUE
      PROD2=0.
      DO 30 I=1,N
          PROD2=PROD2+PROD(I)*X(I)
30    CONTINUE
      LO=LO-PROD2
      DO 40 I=1,N
          LO=LO+(MED(1,I)+T*MED(2,I))*X(I)
40    CONTINUE
      LO=LO-TIND1

      Y=0.
      DO 50 I=1,N
          PROD(I)=0.
          DO 60 J=1,N
              PROD(I)=PROD(I)+SIGMA*X(J)*MED(2,J)*MED(2,I)
60        CONTINUE
50    CONTINUE
      PROD2=0.
```

```
      DO 70 I=1,N
          PROD2=PROD2+PROD(I)*X(I)
70    CONTINUE
      Y=PROD2
      PROD2=0.
      DO 80 I=1,N
          PROD2=PROD2+H(I)*(MED(2,I)**2.)*T
80    CONTINUE
      PROD2=4.*SIGMA*(LU+PROD2)
      ABC=0.
      DO 90 I=1,N
          ABC=ABC+MED(2,I)*X(I)
90    CONTINUE
      PROD2=PROD2*ABC
      Y=Y-PROD2+TIND2

      IF(IUSER(1).EQ.1) THEN
          OBJF=-(LO**2.)/(Y+(LO**2.))
      ELSE
          OBJF=SQRT(BETA/(1.-BETA))*SQRT(Y)+U-LO
      ENDIF

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C          GRADIENTE
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      IF(((MODE.EQ.1).OR.(MODE.EQ.2)).AND.(IUSER(1).EQ.1)) THEN
          DO 95 I=1,N
              BX=0.
              DO 100 J=1,N
                  BX=BX+2.*BB(I,J)*X(J)
100           CONTINUE
              OBJGRD(I)=2.*LO*(MED(1,I)+T*MED(2,I)-BX)
              DO 110 J=1,N

OBJGRD(I)=OBJGRD(I)+2.*MED(2,I)*MED(2,J)*X(J)*SIGMA
110           CONTINUE
              ABC=0.
              DO 120 J=1,N
                  ABC=ABC+H(J)*(MED(2,J)**2.)
120           CONTINUE
              OBJGRD(I)=OBJGRD(I)-4.*SIGMA*(LU+T*ABC)*MED(2,I)
              OBJGRD(I)=(OBJGRD(I)*(LO**2.))/((Y+(LO**2.))**2.)
              OBJGRD(I)=OBJGRD(I)+(2.*LO*(BX-MED(1,I)-
            (T*MED(2,I)))/
     *                      (Y+(LO**2.)))
95        CONTINUE
      ENDIF

      IF(((MODE.EQ.1).OR.(MODE.EQ.2)).AND.(IUSER(1).EQ.2)) THEN
          DO 125 I=1,N
              OBJGRD(I)=0.
              DO 130 J=1,N
                  OBJGRD(I)=OBJGRD(I)+SIGMA*MED(2,I)*MED(2,J)*X(J)
130           CONTINUE
              ABC=0.
```

```
              DO 135 J=1,N
                  ABC=ABC+(MED(2,J)**2.)*H(J)
135           CONTINUE
              OBJGRD(I)=OBJGRD(I)-2.*SIGMA*(LU+T*ABC)*MED(2,I)
              OBJGRD(I)=SQRT(BETA/(1.-BETA))*OBJGRD(I)/SQRT(Y)
              DO 150 J=1,N
                  OBJGRD(I)=OBJGRD(I)+2.*BB(I,J)*X(J)
150           CONTINUE
              OBJGRD(I)=OBJGRD(I)-MED(1,I)-T*MED(2,I)
125       CONTINUE
      ENDIF

      RETURN
      END


C*****************************************************************
C                              SUBRRUTINA CONFUN1
C                  RESTRICCIÓN NO LINEAL PARA MÍNIMO RIESGO
C*****************************************************************

SUBROUTINE CONFUN1(MODE,NCNLN,N,NROWJ,NEEDC,X,NL,CJAC,NSTATE,
*                    IUSER,USER)

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C           DECLARACIÓN DE VARIABLES
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

INTEGER MODE,NCNLN,N,NROWJ,NEEDC(NCNLN),NSTATE,IUSER(2),DIM1,I,J
PARAMETER(DIM1=10)
DOUBLE PRECISION X(N),NL(NCNLN),CJAC(NROWJ,N),USER(7),MED(2,DIM1),
*                  PROD(DIM1),PROD2,BB(DIM1,DIM1),T
COMMON/DATOS1/MED,BB

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C           RESTRICCIÓN
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      T=USER(4)

      DO 10 I=1,N
          PROD(I)=0.
          DO 20 J=1,N
              PROD(I)=PROD(I)+BB(I,J)*X(J)
20        CONTINUE
10    CONTINUE
      PROD2=0.
      DO 30 I=1,N
          PROD2=PROD2+PROD(I)*X(I)
30    CONTINUE
      NL(1)=PROD2
      DO 40 I=1,N
          NL(1)=NL(1)-(MED(1,I)+T*MED(2,I))*X(I)
40    CONTINUE
```

```
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C           GRADIENTE
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      DO 50 I=1,N
          CJAC(1,I)=0.
          DO 60 J=1,N
              CJAC(1,I)=CJAC(1,I)+2.*BB(I,J)*X(J)
60        CONTINUE
          CJAC(1,I)=CJAC(1,I)-(MED(1,I)+T*MED(2,I))
50    CONTINUE

      RETURN
      END
```

PROGRAMACIÓN ESTOCASTICA MULTIOBJETIVO

APROXIMACIÓN MULTIOBJETIVO

Caso Lineal

```
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C               PROGRAMACION  ESTOCASTICA  MULTIOBJETIVO
C                             CASO  LINEAL
C
C Linkar con: MULNOR,MULCAN,NAGLIB/LIB
C
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C                 DECLARACION DE VARIABLES
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      PROGRAM MEL

INTEGER DIM1,DIM2
PARAMETER(DIM1=10, DIM2=20)
INTEGER N,NFUN,NCLIN,I,J,K,OPC
DOUBLE PRECISION C(DIM2,DIM1),BL(DIM1+DIM2),BU(DIM1+DIM2),X(DIM1)
*                 ,T1,T2,TIEMPO,MEDIA(DIM1,DIM1),
*                  VARI(DIM1,DIM1,DIM1),PESOS(DIM1)
CHARACTER*20 FICHERO,COMENT
CHARACTER*30 SALIDA
EXTERNAL MULNOR,MULCAN,X05BAF

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C                       TIEMPO  DE  CPU
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      T1=X05BAF()

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C                       LECTURA DE DATOS
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      WRITE(*,*)'Introduce el nombre del fichero de datos'
      READ(*,*) FICHERO
      OPEN(3,FILE=FICHERO,STATUS='OLD')
      READ(3,*) COMENT
      READ(3,*) N
      READ(3,*) COMENT
      READ(3,*) NFUN
      READ(3,*) COMENT
      READ(3,*) NCLIN
      READ(3,*) COMENT
      DO 10 I=1,NCLIN
          READ(3,*) (C(I,J),J=1,N)
10    CONTINUE
      READ(3,*) COMENT
      DO 20 I=1,N
          READ(3,*) BL(I),BU(I)
20    CONTINUE
```

```
      READ(3,*) COMENT
      DO 30 I=1,NCLIN
          READ(3,*) BL(N+I),BU(N+I)
30    CONTINUE
      READ(3,*) COMENT
      DO 100 I=1,NFUN
          READ(3,*) (MEDIA(I,J),J=1,N)
100   CONTINUE
      READ(3,*) COMENT
      DO 110 I=1,NFUN
          DO 120 J=1,N
              READ(3,*) (VARI(I,J,K),K=1,N)
120       CONTINUE
          READ(3,*)
110   CONTINUE
      READ(3,*) COMENT
      READ(3,*) (X(I),I=1,N)
      CLOSE(3)

      SALIDA='LINEAL-'//FICHERO
      OPEN(6,FILE=SALIDA,STATUS='NEW')

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C                      MENÚ
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

35    CONTINUE

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce los pesos de las funciones objetivo'
      DO 130 I=1,NFUN
          WRITE(*,*)'Función ',I
          READ(*,*) PESOS(I)
130   CONTINUE

      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'=============================================='
      WRITE(6,*)'Solución del problema de ponderaciones'
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Pesos:'
      WRITE(6,*)(PESOS(I),I=1,NFUN)
      WRITE(6,*)'=============================================='
      WRITE(6,*)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Elije Opción:'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'1.- Caso Normal'
      WRITE(*,*)'2.- Cantelli'
40    READ(*,*) OPC
      IF((OPC.LT.1).OR.(OPC.GT.2)) GOTO 40
      IF(OPC.EQ.1) THEN
          CALL MULNOR(N,NCLIN,C,BL,BU,X,MEDIA,VARI,PESOS,NFUN)
          GOTO 70
      ENDIF
```

```
      IF(OPC.EQ.2) THEN
          CALL MULCAN(N,NCLIN,C,BL,BU,X,MEDIA,VARI,PESOS,NFUN)
          GOTO 70
      ENDIF

70    WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'1. Introducir nuevos pesos'
      WRITE(*,*)'2. Terminar'
80    READ(*,*) OPC
      IF((OPC.LT.1).OR.(OPC.GT.2)) GOTO 80
      IF(OPC.EQ.1) GOTO 35

      T2=X05BAF()
      TIEMPO=T2-T1

      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'==========================================='
      WRITE(6,*)' TIEMPO C.P.U.:',TIEMPO,' segundos'
      WRITE(6,*)'==========================================='
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'==========================================='
      WRITE(*,*)' TIEMPO C.P.U.:',TIEMPO,' segundos'
      WRITE(*,*)'==========================================='
      WRITE(6,*)'** FINAL DE PROGRAMA **'
      WRITE(*,*)'** FINAL DE PROGRAMA **'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Los resultados se han impreso en el fichero:'
      WRITE(*,*) SALIDA
      CLOSE(6)

      END

C*****************************************************************
C                          SUBRRUTINA MULNOR
C                  CASO NORMAL. PROBLEMA MULTIOBJETIVO LINEAL
C*****************************************************************

      SUBROUTINE MULNOR(N,NCLIN,C,BL,BU,X,MEDIA1,VARI1,PESOS1,NFUN)

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C      DECLARACIÓN DE VARIABLES
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

INTEGER DIM1,DIM2,LWORK,LIWORK
PARAMETER(DIM1=10,DIM2=20,LWORK=2*(DIM2+1)**2+20*DIM1+11*DIM2,
*          LIWORK=3*DIM1+DIM2)
INTEGER N,NCLIN,I,J,ISTATE(DIM1+DIM2),KX(DIM1),ITER,IWORK(LIWORK)
*         ,IFAIL,IUSER(1),NFUN,K,OPC
DOUBLE PRECISION C(DIM2,DIM1),BL(DIM1+DIM2),BU(DIM1+DIM2),X(DIM1)
*                  ,CVEC(DIM1),A(DIM1,DIM1),B(DIM1),OBJ,
*                  OBJE,CLAMDA(DIM1+DIM2),WORK(LWORK),
*                  U,NL(1),CJAC(1,1),OBJGRD(DIM1),R(DIM1,DIM1),
*                  USER(1),BETA(DIM1),IBE(DIM1),MEDIA1(DIM1,DIM1)
*                  ,MEDIA(DIM1,DIM1),VARI1(DIM1,DIM1,DIM1),
*                  VARI(DIM1,DIM1,DIM1),PESOS1(DIM1),PESOS(DIM1)
```

```
EXTERNAL E04NEF,E04NCF,E04UDM,OBJFUN,E04UEF,E04UCF,G01CEF

COMMON/DATOS/MEDIA,VARI,IBE,PESOS

      DO 1 I=1,NFUN
          PESOS(I)=PESOS1(I)
          DO 2 J=1,N
              MEDIA(I,J)=MEDIA1(I,J)
              DO 3 K=1,N
                  VARI(I,J,K)=VARI1(I,J,K)
3             CONTINUE
2         CONTINUE
1     CONTINUE

C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C       VALOR ESPERADO
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      WRITE(6,*)

WRITE(6,*)'==================================================='
WRITE(6,*)'                    CASO NORMAL'
WRITE(6,*)'==================================================='

      WRITE(6,*)

      DO 10 I=1,N
          CVEC(I)=0.
          DO 15 J=1,NFUN
              CVEC(I)=CVEC(I)+PESOS(J)*MEDIA(J,I)
15        CONTINUE
10    CONTINUE

      IFAIL=-1

      CALL E04NEF('Problem Type = LP')
      CALL E04NEF('Print Level = 0')

CALL E04NCF(N,N,NCLIN,DIM2,DIM1,C,BL,BU,CVEC,ISTATE,KX,X,A,B,
*            ITER,OBJ,CLAMDA,IWORK,DIM1,WORK,LWORK,IFAIL)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'SOLUCIÓN VALOR ESPERADO'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      OBJE=OBJ
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(6,*)'SOLUCIÓN VALOR ESPERADO'
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',OBJ
```

```
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C       MÍNIMA VARIANZA
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      DO 30 I=1,N
          DO 40 J=1,N
              A(I,J)=0.
              DO 45 K=1,NFUN
                  A(I,J)=A(I,J)+2.*PESOS(K)*VARI(K,I,J)
45            CONTINUE
40        CONTINUE
30    CONTINUE

      IFAIL=-1

      CALL E04NEF('Problem Type = QP1')

CALL E04NCF(N,N,NCLIN,DIM2,DIM1,C,BL,BU,CVEC,ISTATE,KX,X,A,B,
*             ITER,OBJ,CLAMDA,IWORK,DIM1,WORK,LWORK,IFAIL)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA'
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C       KATAOKA
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

80    CONTINUE
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce la probabilidad BETA de cada objetivo'
      WRITE(*,*)' separadas por espacios'
      READ(*,*) (BETA(I),I=1,NFUN)

      DO 50 I=1,NFUN
          IBE(I)=G01CEF(BETA(I),IFAIL)
50    CONTINUE

      CALL E04UEF('Print Level = 0')
```

```
C       CALL E04UEF('Print Level = 10')
C       CALL E04UEF('Verify Level = 3')

      IUSER(1)=NFUN
      IFAIL=-1

CALL E04UCF(N,NCLIN,0,DIM2,1,DIM1,C,BL,BU,E04UDM,OBJFUN,ITER,
*             ISTATE,NL,CJAC,CLAMDA,OBJ,OBJGRD,R,X,IWORK,LIWORK,
*             WORK,LWORK,IUSER,USER,IFAIL)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'SOLUCIÓN KATAOKA'
      WRITE(*,*)'Vector de probabilidad BETA: '
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)(BETA(I),I=1,NFUN)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Vector solución'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)(X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'SOLUCIÓN KATAOKA'
      WRITE(6,*)'Vector de probabilidad BETA: '
      WRITE(6,*)(BETA(I),I=1,NFUN)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Vector solución'
      WRITE(6,*)(X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Esta solución corresponde a un mínimo riesgo'
      WRITE(*,*)'de nivel: ',OBJ
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Si deseas mayor nivel, debes aumentar las'
      WRITE(*,*)'probabilidades BETA'
      WRITE(*,*)'Quieres cambiar las probabilidades?'
      WRITE(*,*)'1.- SI'
      WRITE(*,*)'2.- NO'
70    READ(*,*) OPC
      IF((OPC.NE.1).AND.(OPC.NE.2)) GOTO 70
      IF(OPC.EQ.1) GOTO 80

      RETURN
      END
```

```
C*****************************************************************
C                            SUBRRUTINA OBJFUN
C                       FUNCIÓN OBJETIVO PARA KATAOKA
C*****************************************************************

      SUBROUTINE OBJFUN(MODE,N,X,OBJF,OBJGRD,NSTATE,IUSER,USER)

C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C          DECLARACIÓN DE VARIABLES
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

INTEGER MODE,N,NSTATE,IUSER(1),DIM1,DIM2,I,J,NFUN,K
PARAMETER(DIM1=10,DIM2=20)
DOUBLE PRECISION X(N),OBJF,OBJGRD(N),USER(1),U,MEDIA(DIM1,DIM1),
*                 VARI(DIM1,DIM1,DIM1),PROD(DIM1),PROD2,IBE(DIM1)
*                 ,CX,PESOS(DIM1),OBJ(DIM1),GRAD(DIM1,DIM1)
COMMON/DATOS/MEDIA,VARI,IBE,PESOS

C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C          FUNCIÓNES OBJETIVO INDIVIDUALES
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      NFUN=IUSER(1)

      DO 1 K=1,NFUN
          CX=0.
          DO 10 I=1,N
              CX=CX+MEDIA(K,I)*X(I)
10        CONTINUE
          DO 20 I=1,N
              PROD(I)=0.
              DO 30 J=1,N
                  PROD(I)=PROD(I)+VARI(K,I,J)*X(J)
30            CONTINUE
20        CONTINUE
          PROD2=0.
          DO 40 I=1,N
              PROD2=PROD2+PROD(I)*X(I)
40        CONTINUE

          OBJ(K)=IBE(K)*SQRT(PROD2)+CX

C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C          GRADIENTES INDIVIDUALES
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

          IF((MODE.EQ.1).OR.(MODE.EQ.2)) THEN
              DO 70 I=1,N
                  GRAD(K,I)=0.
                  DO 80 J=1,N
                      GRAD(K,I)=GRAD(K,I)+VARI(K,I,J)*X(J)
80                CONTINUE

GRAD(K,I)=(GRAD(K,I)*IBE(K)/SQRT(PROD2))+MEDIA(K,I)
70            CONTINUE
          ENDIF
```

```
1       CONTINUE

C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C           FUNCIÓN Y GRADIENTE PONDERADOS
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

        OBJF=0.
        DO 100 K=1,NFUN
            OBJF=OBJF+PESOS(K)*OBJ(K)
100     CONTINUE

        IF((MODE.EQ.1).OR.(MODE.EQ.2)) THEN
            DO 110 I=1,N
                OBJGRD(I)=0.
                DO 120 K=1,NFUN
                    OBJGRD(I)=OBJGRD(I)+PESOS(K)*GRAD(K,I)
120             CONTINUE
110         CONTINUE
        ENDIF

        RETURN
        END

C*****************************************************************
C                              SUBRRUTINA MULCAN
C                   CANTELLI. PROBLEMA MULTIOBJETIVO LINEAL
C*****************************************************************

   SUBROUTINE MULCAN(N,NCLIN,C,BL,BU,X,MEDIA1,VARI1,PESOS1,NFUN)

C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C        DECLARACIÓN DE VARIABLES
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

INTEGER DIM1,DIM2,LWORK,LIWORK
PARAMETER(DIM1=10,DIM2=20,LWORK=2*(DIM2+1)**2+20*DIM1+11*DIM2,
*           LIWORK=3*DIM1+DIM2)
INTEGER N,NCLIN,I,J,ISTATE(DIM1+DIM2),KX(DIM1),ITER,IWORK(LIWORK)
*         ,IFAIL,IUSER(1),NFUN,K,OPC
DOUBLE PRECISION C(DIM2,DIM1),BL(DIM1+DIM2),BU(DIM1+DIM2),X(DIM1)
*                 ,CVEC(DIM1),A(DIM1,DIM1),B(DIM1),OBJ,
*                 OBJE,CLAMDA(DIM1+DIM2),WORK(LWORK),
*                 U,NL(1),CJAC(1,1),OBJGRD(DIM1),R(DIM1,DIM1),
*                 USER(1),BETA(DIM1),MEDIA1(DIM1,DIM1)
*                 ,MEDIA(DIM1,DIM1),VARI1(DIM1,DIM1,DIM1),
*                 VARI(DIM1,DIM1,DIM1),PESOS1(DIM1),PESOS(DIM1)

EXTERNAL E04NEF,E04NCF,E04UDM,OBJFUN1,E04UEF,E04UCF

COMMON/DATOS/MEDIA,VARI,BETA,PESOS

        DO 1 I=1,NFUN
            PESOS(I)=PESOS1(I)
            DO 2 J=1,N
                MEDIA(I,J)=MEDIA1(I,J)
```

```
            DO 3 K=1,N
                VARI(I,J,K)=VARI1(I,J,K)
3           CONTINUE
2         CONTINUE
1       CONTINUE

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C       VALOR ESPERADO
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      WRITE(6,*)

WRITE(6,*)'================================================='
WRITE(6,*)'                        CANTELLI'
WRITE(6,*)'================================================='

      WRITE(6,*)

      DO 10 I=1,N
          CVEC(I)=0.
          DO 15 J=1,NFUN
              CVEC(I)=CVEC(I)+PESOS(J)*MEDIA(J,I)
15        CONTINUE
10    CONTINUE

      IFAIL=-1

      CALL E04NEF('Problem Type = LP')
      CALL E04NEF('Print Level = 0')

CALL E04NCF(N,N,NCLIN,DIM2,DIM1,C,BL,BU,CVEC,ISTATE,KX,X,A,B,
*             ITER,OBJ,CLAMDA,IWORK,DIM1,WORK,LWORK,IFAIL)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'SOLUCIÓN VALOR ESPERADO'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      OBJE=OBJ
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(6,*)'SOLUCIÓN VALOR ESPERADO'
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C       MÍNIMA VARIANZA
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      DO 30 I=1,N
```

```
          DO 40 J=1,N
              A(I,J)=0.
              DO 45 K=1,NFUN
                  A(I,J)=A(I,J)+2.*PESOS(K)*VARI(K,I,J)
45            CONTINUE
40        CONTINUE
30    CONTINUE

      IFAIL=-1

      CALL E04NEF('Problem Type = QP1')

CALL E04NCF(N,N,NCLIN,DIM2,DIM1,C,BL,BU,CVEC,ISTATE,KX,X,A,B,
*             ITER,OBJ,CLAMDA,IWORK,DIM1,WORK,LWORK,IFAIL)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA'
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C       KATAOKA
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

80    CONTINUE
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce la probabilidad BETA de cada objetivo'
      WRITE(*,*)' separadas por espacios'
      READ(*,*) (BETA(I),I=1,NFUN)

      CALL E04UEF('Print Level = 0')
C      CALL E04UEF('Print Level = 10')
C      CALL E04UEF('Verify Level = 3')

      IUSER(1)=NFUN
      IFAIL=-1

CALL E04UCF(N,NCLIN,0,DIM2,1,DIM1,C,BL,BU,E04UDM,OBJFUN1,ITER,
*             ISTATE,NL,CJAC,CLAMDA,OBJ,OBJGRD,R,X,IWORK,LIWORK,
*             WORK,LWORK,IUSER,USER,IFAIL)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'SOLUCIÓN KATAOKA'
```

```
      WRITE(*,*)'Vector de probabilidad BETA: '
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)(BETA(I),I=1,NFUN)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Vector solución'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)(X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'SOLUCIÓN KATAOKA'
      WRITE(6,*)'Vector de probabilidad BETA: '
      WRITE(6,*)(BETA(I),I=1,NFUN)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Vector solución'
      WRITE(6,*)(X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Esta solución corresponde a un mínimo riesgo'
      WRITE(*,*)'de nivel: ',OBJ
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Si deseas mayor nivel, debes aumentar las'
      WRITE(*,*)'probabilidades BETA'
      WRITE(*,*)'Quieres cambiar las probabilidades?'
      WRITE(*,*)'1.- SI'
      WRITE(*,*)'2.- NO'
70    READ(*,*) OPC
      IF((OPC.NE.1).AND.(OPC.NE.2)) GOTO 70
      IF(OPC.EQ.1) GOTO 80

      RETURN
      END


C*****************************************************************
C                            SUBRRUTINA OBJFUN1
C                       FUNCIÓN OBJETIVO PARA KATAOKA
C*****************************************************************

      SUBROUTINE OBJFUN1(MODE,N,X,OBJF,OBJGRD,NSTATE,IUSER,USER)

C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C          DECLARACIÓN DE VARIABLES
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

INTEGER MODE,N,NSTATE,IUSER(1),DIM1,DIM2,I,J,NFUN,K
PARAMETER(DIM1=10,DIM2=20)
DOUBLE PRECISION X(N),OBJF,OBJGRD(N),USER(1),U,MEDIA(DIM1,DIM1),
*                VARI(DIM1,DIM1,DIM1),PROD(DIM1),PROD2,BETA(DIM1)
```

```
*                    ,CX,PESOS(DIM1),OBJ(DIM1),GRAD(DIM1,DIM1)
      COMMON/DATOS/MEDIA,VARI,BETA,PESOS

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C          FUNCIÓNES OBJETIVO INDIVIDUALES
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      NFUN=IUSER(1)

      DO 1 K=1,NFUN
          CX=0.
          DO 10 I=1,N
              CX=CX+MEDIA(K,I)*X(I)
10        CONTINUE
          DO 20 I=1,N
              PROD(I)=0.
              DO 30 J=1,N
                  PROD(I)=PROD(I)+VARI(K,I,J)*X(J)
30            CONTINUE
20        CONTINUE
          PROD2=0.
          DO 40 I=1,N
              PROD2=PROD2+PROD(I)*X(I)
40        CONTINUE

          OBJ(K)=SQRT(BETA(K)/(1.-BETA(K)))*SQRT(PROD2)+CX

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C          GRADIENTES INDIVIDUALES
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

          IF((MODE.EQ.1).OR.(MODE.EQ.2)) THEN
              DO 70 I=1,N
                  GRAD(K,I)=0.
                  DO 80 J=1,N
                      GRAD(K,I)=GRAD(K,I)+VARI(K,I,J)*X(J)
80                CONTINUE
                  GRAD(K,I)=(GRAD(K,I)*SQRT(BETA(K)/(1.-BETA(K)))
     *                      /SQRT(PROD2))+MEDIA(K,I)
70            CONTINUE
          ENDIF

1     CONTINUE

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C          FUNCIÓN Y GRADIENTE PONDERADOS
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      OBJF=0.
      DO 100 K=1,NFUN
          OBJF=OBJF+PESOS(K)*OBJ(K)
100   CONTINUE

      IF((MODE.EQ.1).OR.(MODE.EQ.2)) THEN
          DO 110 I=1,N
              OBJGRD(I)=0.
```

```
              DO 120 K=1,NFUN
                 OBJGRD(I)=OBJGRD(I)+PESOS(K)*GRAD(K,I)
120           CONTINUE
110         CONTINUE
      ENDIF

      RETURN
      END
```

APROXIMACIÓN MULTIOBJETIVO

Caso Cuadrático

```
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C               PROGRAMACION  ESTOCASTICA  MULTIOBJETIVO
C                             CASO  CUADRÁTICO
C
C Linkar con: CUADNOR,ALECUM,NAGLIB/LIB
C
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C                 DECLARACION DE VARIABLES
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      PROGRAM MULTICUAD

INTEGER DIM1,DIM2
PARAMETER(DIM1=10, DIM2=20)
INTEGER N,NFUN,NCLIN,I,J,K,OPC
DOUBLE PRECISION C(DIM2,DIM1),BL(DIM1+DIM2+1),BU(DIM1+DIM2+1),
*                X(DIM1),T1,T2,TIEMPO,BB(DIM1,DIM1,DIM1),
*                H(DIM1,DIM1),ES(DIM1,DIM1),V(DIM1,DIM1),
*                PESOS(DIM1)
CHARACTER*20 FICHERO,COMENT
CHARACTER*30 SALIDA
EXTERNAL CUADNOR,ALECUM,X05BAF

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C                     TIEMPO  DE  CPU
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      T1=X05BAF()

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C                     LECTURA DE DATOS
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      WRITE(*,*)'Introduce el nombre del fichero de datos'
      READ(*,*) FICHERO
      OPEN(3,FILE=FICHERO,STATUS='OLD')
      READ(3,*) COMENT
      READ(3,*) N
      READ(3,*) COMENT
      READ(3,*) NFUN
      READ(3,*) COMENT
      READ(3,*) NCLIN
      READ(3,*) COMENT
```

```
      DO 10 I=1,NCLIN
          READ(3,*) (C(I,J),J=1,N)
10    CONTINUE
      READ(3,*) COMENT
      DO 20 I=1,N
          READ(3,*) BL(I),BU(I)
20    CONTINUE
      READ(3,*) COMENT
      DO 30 I=1,NCLIN
          READ(3,*) BL(N+I),BU(N+I)
30    CONTINUE
      READ(3,*)COMENT
      DO 35 K=1,NFUN
          DO 40 I=1,N
              READ(3,*)(BB(K,I,J),J=1,N)
40        CONTINUE
          READ(3,*)
35    CONTINUE
      READ(3,*) COMENT
      DO 50 K=1,NFUN
          READ(3,*)(H(K,I),I=1,N)
50    CONTINUE
      READ(3,*) COMENT
      DO 60 K=1,NFUN
          READ(3,*)(ES(K,I),I=1,N)
60    CONTINUE
      READ(3,*) COMENT
      DO 70 K=1,NFUN
          READ(3,*)(V(K,I),I=1,N)
70    CONTINUE
      READ(3,*) COMENT
      READ(3,*)(X(I),I=1,N)
      CLOSE(3)

      SALIDA='CUAD-'//FICHERO
      OPEN(6,FILE=SALIDA,STATUS='NEW')

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C                      MENÚ
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

80    CONTINUE

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce los pesos de las funciones objetivo'
      DO 90 I=1,NFUN
          WRITE(*,*)'Función ',I
          READ(*,*) PESOS(I)
90    CONTINUE
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'=============================================='
      WRITE(6,*)'        SOLUCIÓN PARA EL VECTOR DE PESOS:'
      WRITE(6,*) (PESOS(I),I=1,NFUN)
      WRITE(6,*)'=============================================='
      WRITE(6,*)
```

```
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Elije Opción:'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'1.- Caso Normal'
      WRITE(*,*)'2.- Aleatoriedad Simple'
100   READ(*,*) OPC
      IF((OPC.LT.1).OR.(OPC.GT.2)) GOTO 100
      IF(OPC.EQ.1) THEN
          CALL CUADNOR(N,NCLIN,C,BL,BU,BB,H,ES,V,X,PESOS,NFUN)
          GOTO 110
      ENDIF
      IF(OPC.EQ.2) THEN
          CALL ALECUM(N,NCLIN,C,BL,BU,BB,H,X,PESOS,NFUN)
          GOTO 110
      ENDIF

110   CONTINUE
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'1.- Dar nuevos pesos'
      WRITE(*,*)'2.- Terminar'
120   READ(*,*) OPC
      IF((OPC.NE.1).AND.(OPC.NE.2)) GOTO 120
      IF(OPC.EQ.1) GOTO 80

      T2=X05BAF()
      TIEMPO=T2-T1

      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'=============================================='
      WRITE(6,*)' TIEMPO C.P.U.:',TIEMPO,' segundos'
      WRITE(6,*)'=============================================='
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'=============================================='
      WRITE(*,*)' TIEMPO C.P.U.:',TIEMPO,' segundos'
      WRITE(*,*)'=============================================='
      WRITE(6,*)'** FINAL DE PROGRAMA **'
      WRITE(*,*)'** FINAL DE PROGRAMA **'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Los resultados se han impreso en el fichero:'
      WRITE(*,*) SALIDA
      CLOSE(6)

      END

C*****************************************************************
C                              SUBRRUTINA CUADNOR
C                CASO NORMAL. PROBLEMA CUADRÁTICO MULTIOBJETIVO
C*****************************************************************

   SUBROUTINE CUADNOR(N,NCLIN,C,BL,BU,BB1,H1,ES1,V1,X,PESOS1,NFUN)

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C       DECLARACIÓN DE VARIABLES
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

INTEGER DIM1,DIM2,LWORK,LIWORK
```

```
PARAMETER(DIM1=10,DIM2=20,LWORK=2*(DIM1**2)+DIM1*DIM2+22*DIM1+
*             11*DIM2+21,LIWORK=3*DIM1+DIM2+2)
INTEGER N,NCLIN,I,J,K,NFUN,ISTATE(DIM1+DIM2+1),KX(DIM1),ITER,
*          IWORK(LIWORK),IFAIL,IUSER(1),OPC
DOUBLE PRECISION C(DIM2,DIM1),BL(DIM1+DIM2+1),BU(DIM1+DIM2+1),
*                    X(DIM1),ES(DIM1,DIM1),CVEC(DIM1),A(DIM1,DIM1),
*                    B(DIM1),OBJ,TIND1(DIM1),TIND2(DIM1),T1,T2,
*                    CJAC(1,DIM1),ES1(DIM1,DIM1),CLAMDA(DIM1+DIM2+1),
*                    WORK(LWORK),V(DIM1,DIM1),NL(1),OBJGRD(DIM1),
*                    R(DIM1,DIM1),V1(DIM1,DIM1),USER(1),BETA(DIM1),
*                    H(DIM1,DIM1),BB(DIM1,DIM1,DIM1),H1(DIM1,DIM1),
*                    BB1(DIM1,DIM1,DIM1),PESOS1(DIM1),PESOS(DIM1)

EXTERNAL E04NEF,E04NCF,OBJFUN,CONFUN,E04UEF,E04UCF,E04UDM

COMMON/DATOS1/ES,BB,V,H,PESOS,BETA,TIND1,TIND2

      DO 1 K=1,NFUN
          PESOS(K)=PESOS1(K)
          DO 2 I=1,N
              ES(K,I)=ES1(K,I)
              V(K,I)=V1(K,I)
              H(K,I)=H1(K,I)
              DO 3 J=1,N
                  BB(K,I,J)=BB1(K,I,J)
3             CONTINUE
2         CONTINUE
1     CONTINUE

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C        VALOR ESPERADO
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      WRITE(6,*)

WRITE(6,*)'================================================'
WRITE(6,*)'                        CASO NORMAL'
WRITE(6,*)'================================================'

      WRITE(6,*)

      DO 10 I=1,N
          CVEC(I)=0.
          DO 15 K=1,NFUN
              CVEC(I)=CVEC(I)-PESOS(K)*ES(K,I)
15        CONTINUE
10    CONTINUE

      DO 20 I=1,N
          DO 30 J=1,N
              A(I,J)=0.
              DO 35 K=1,NFUN
                  A(I,J)=A(I,J)+2.*PESOS(K)*BB(K,I,J)
35            CONTINUE
30        CONTINUE
20    CONTINUE
```

```
      DO 37 K=1,NFUN
          TIND1(K)=0.
          DO 40 I=1,N
              TIND1(K)=TIND1(K)+H(K,I)*ES(K,I)*ES(K,I)
40        CONTINUE
          DO 50 I=1,N
              TIND1(K)=TIND1(K)+H(K,I)*V(K,I)
50        CONTINUE
37    CONTINUE

      T1=0.
      DO 55 K=1,NFUN
          T1=T1+PESOS(K)*TIND1(K)
55    CONTINUE

      IFAIL=-1

      CALL E04NEF('Problem Type = QP2')
      CALL E04NEF('Print Level = 0')

CALL E04NCF(N,N,NCLIN,DIM2,DIM1,C,BL,BU,CVEC,ISTATE,KX,X,A,B,
*             ITER,OBJ,CLAMDA,IWORK,DIM1,WORK,LWORK,IFAIL)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'SOLUCIÓN VALOR ESPERADO'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',OBJ+T1
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(6,*)'SOLUCIÓN VALOR ESPERADO'
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',OBJ+T1
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C       MÍNIMA VARIANZA
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      DO 60 I=1,N
          CVEC(I)=0.
          DO 65 K=1,NFUN
              CVEC(I)=CVEC(I)-4.*PESOS(K)*ES(K,I)*H(K,I)*V(K,I)
65        CONTINUE
60    CONTINUE
      DO 70 I=1,N
          DO 80 J=1,N
              IF(I.EQ.J) THEN
                  A(I,J)=0.
                  DO 85 K=1,NFUN
```

```
                    A(I,J)=A(I,J)+2.*PESOS(K)*V(K,I)
85                CONTINUE
               ELSE
                  A(I,J)=0.
               ENDIF
80          CONTINUE
70       CONTINUE

         DO 95 K=1,NFUN
            TIND2(K)=0.
            DO 90 I=1,N
               TIND2(K)=TIND2(K)+2.*(V(K,I)**2.)*(H(K,I)**2.)
90          CONTINUE
            DO 100 I=1,N

TIND2(K)=TIND2(K)+4.*(ES(K,I)**2.)*(H(K,I)**2.)*V(K,I)
100         CONTINUE
95       CONTINUE

         T2=0.
         DO 105 K=1,NFUN
            T2=T2+PESOS(K)*TIND2(K)
105      CONTINUE

         IFAIL=-1

         CALL E04NEF('Problem Type = QP2')

CALL E04NCF(N,N,NCLIN,DIM2,DIM1,C,BL,BU,CVEC,ISTATE,KX,X,A,B,
*             ITER,OBJ,CLAMDA,IWORK,DIM1,WORK,LWORK,IFAIL)

         WRITE(*,*)
         WRITE(*,*)'SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA'
         WRITE(*,*)
         WRITE(*,*) (X(I),I=1,N)
         WRITE(*,*)
         WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',OBJ+T2
         WRITE(*,*)
         WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL

         WRITE(6,*)
         WRITE(6,*)'SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA'
         WRITE(6,*)
         WRITE(6,*) (X(I),I=1,N)
         WRITE(6,*)
         WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',OBJ+T2
         WRITE(6,*)
         WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C        KATAOKA
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

210      CONTINUE
         WRITE(*,*)
         WRITE(*,*)'Introduce el vector de probabilidades BETA'
```

```
      WRITE(*,*)' separado por espacios'
      READ(*,*) (BETA(K),K=1,NFUN)

       CALL E04UEF('Print Level = 0')
C      CALL E04UEF('Print Level = 10')
C      CALL E04UEF('Verify Level = 3')

      IUSER(1)=NFUN
      IFAIL=-1

CALL E04UCF(N,NCLIN,0,DIM2,1,DIM1,C,BL,BU,E04UDM,OBJFUN,ITER,
*             ISTATE,NL,CJAC,CLAMDA,OBJ,OBJGRD,R,X,IWORK,LIWORK,
*             WORK,LWORK,IUSER,USER,IFAIL)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'SOLUCIÓN KATAOKA'
      WRITE(*,*)'Vector de Probabilidades BETA: '
      WRITE(*,*)(BETA(I),I=1,NFUN)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Vector solución:'
      WRITE(*,*)(X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'SOLUCIÓN KATAOKA'
      WRITE(6,*)'Vector de Probabilidades BETA: '
      WRITE(6,*)(BETA(I),I=1,NFUN)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Vector solución:'
      WRITE(6,*)(X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Esta solución corresponde a un Mínimo Riesgo'
      WRITE(*,*)'de nivel: ',OBJ
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Si deseas mayor nivel, debes aumentar las'
      WRITE(*,*)'probabilidades BETA'
      WRITE(*,*)'Quieres cambiar las probabilidades?'
      WRITE(*,*)'1.- SI'
      WRITE(*,*)'2.- NO'
 200  READ(*,*) OPC
      IF((OPC.NE.1).AND.(OPC.NE.2)) GOTO 200
      IF(OPC.EQ.1) GOTO 210

      RETURN
      END
```

```
C*************************************************************
C                              SUBRRUTINA OBJFUN
C              FUNCIÓN OBJETIVO PARA MÍNIMO RIESGO Y KATAOKA
C*************************************************************

      SUBROUTINE OBJFUN(MODE,N,X,OBJF,OBJGRD,NSTATE,IUSER,USER)

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C           DECLARACIÓN DE VARIABLES
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

INTEGER MODE,N,NSTATE,IUSER(1),DIM1,I,J,K,NFUN
PARAMETER(DIM1=10)
DOUBLE PRECISION X(N),OBJF,OBJGRD(N),USER(1),ES(DIM1,DIM1),
*                 V(DIM1,DIM1),PROD(DIM1),PROD2,PESOS(DIM1),
*                 BB(DIM1,DIM1,DIM1),H(DIM1,DIM1),Y(DIM1),
*                 TIND1(DIM1),TIND2(DIM1),BETA(DIM1),
*                 OBJ(DIM1),GRAD(DIM1,DIM1)

COMMON/DATOS1/ES,BB,V,H,PESOS,BETA,TIND1,TIND2

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C           FUNCIONES OBJETIVO INDIVIDUALES
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      NFUN=IUSER(1)

      DO 5 K=1,NFUN
          DO 10 I=1,N
              PROD(I)=0.
              DO 20 J=1,N
                  PROD(I)=PROD(I)+BB(K,I,J)*X(J)
20            CONTINUE
10        CONTINUE
          PROD2=0.
          DO 30 I=1,N
              PROD2=PROD2+PROD(I)*X(I)
30        CONTINUE
          OBJ(K)=PROD2
          DO 40 I=1,N
              OBJ(K)=OBJ(K)-ES(K,I)*X(I)
40        CONTINUE
          OBJ(K)=OBJ(K)+TIND1(K)

          Y(K)=0.
          DO 50 I=1,N
              Y(K)=Y(K)+V(K,I)*(X(I)**2.)
50        CONTINUE
          DO 60 I=1,N
              Y(K)=Y(K)-4.*ES(K,I)*H(K,I)*V(K,I)*X(I)
60        CONTINUE
          Y(K)=Y(K)+TIND2(K)

          OBJ(K)=OBJ(K)+SQRT(BETA(K)/(1.-BETA(K)))*SQRT(Y(K))

5     CONTINUE
```

```
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C          GRADIENTES INDIVIDUALES
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      IF((MODE.EQ.1).OR.(MODE.EQ.2)) THEN
          DO 80 K=1,NFUN
              DO 90 I=1,N
                  GRAD(K,I)=V(K,I)*X(I)-2.*ES(K,I)*H(K,I)*V(K,I)
                  GRAD(K,I)=SQRT(BETA(K)/(1.-BETA(K)))*GRAD(K,I)/
     *                      SQRT(Y(K))
                  DO 100 J=1,N
                      GRAD(K,I)=GRAD(K,I)+2.*BB(K,I,J)*X(J)
100               CONTINUE
                  GRAD(K,I)=GRAD(K,I)-ES(K,I)
90            CONTINUE
80        CONTINUE
      ENDIF

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C          FUNCIÓN Y GRADIENTE PONDERADOS
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      OBJF=0.
      DO 110 K=1,NFUN
          OBJF=OBJF+PESOS(K)*OBJ(K)
110   CONTINUE
      IF((MODE.EQ.1).OR.(MODE.EQ.2)) THEN
          DO 120 I=1,N
              OBJGRD(I)=0.
              DO 130 K=1,NFUN
                  OBJGRD(I)=OBJGRD(I)+PESOS(K)*GRAD(K,I)
130           CONTINUE
120       CONTINUE
      ENDIF

      RETURN
      END


C***************************************************************
C                             SUBRRUTINA CONFUN
C                  RESTRICCIÓN NO LINEAL PARA MÍNIMO RIESGO
C***************************************************************

SUBROUTINE CONFUN(MODE,NCNLN,N,NROWJ,NEEDC,X,NL,CJAC,NSTATE,
*                  IUSER,USER)

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C          DECLARACIÓN DE VARIABLES
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

INTEGER MODE,NCNLN,N,NRWOJ,NEEDC(NCNLN),NSTATE,IUSER(1),DIM1,I,J
PARAMETER(DIM1=10)
DOUBLE PRECISION X(N),NL(NCNLN),CJAC(NROWJ,N),USER(3),ES(DIM1),
*                 BB(DIM1,DIM1),U,TIND1,PROD(DIM1),PROD2
```

```
COMMON/DATOS1/ES,BB

C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C          RESTRICCIÓN
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      U=USER(1)
      TIND1=USER(2)

      DO 10 I=1,N
          PROD(I)=0.
          DO 20 J=1,N
              PROD(I)=PROD(I)+BB(I,J)*X(J)
20        CONTINUE
10    CONTINUE
      PROD2=0.
      DO 30 I=1,N
          PROD2=PROD2+PROD(I)*X(I)
30    CONTINUE
      NL(1)=PROD2
      DO 40 I=1,N
          NL(1)=NL(1)-ES(I)*X(I)
40    CONTINUE

C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C          GRADIENTE
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      DO 50 I=1,N
          CJAC(1,I)=0.
          DO 60 J=1,N
              CJAC(1,I)=CJAC(1,I)+2.*BB(I,J)*X(J)
60        CONTINUE
          CJAC(1,I)=CJAC(1,I)-ES(I)
50    CONTINUE

      RETURN
      END

C****************************************************************
C                            SUBRRUTINA ALECUM
C           CASO ALEATORIEDAD SIMPLE. PROBLEMA CUADRÁTICO
MULTIOBJETIVO
C****************************************************************

      SUBROUTINE ALECUM(N,NCLIN,C,BL,BU,BB1,H1,X,PESOS1,NFUN)

C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C       DECLARACIÓN DE VARIABLES
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

INTEGER DIM1,DIM2,LWORK,LIWORK
PARAMETER(DIM1=10,DIM2=20,LWORK=2*(DIM2+1)**2+22*DIM1+11*DIM2
*          +DIM1*DIM2+21,LIWORK=3*DIM1+DIM2+2)
INTEGER N,NCLIN,I,J,K,ISTATE(DIM1+DIM2+1),KX(DIM1),ITER,
*         IWORK(LIWORK),IFAIL,IUSER(2),NFUN,OPC
```

```
DOUBLE PRECISION C(DIM2,DIM1),BL(DIM1+DIM2+1),BU(DIM1+DIM2+1),
*                 X(DIM1),MED(2,DIM1,DIM1),CVEC(DIM1),A(DIM1,DIM1)
*                 ,B(DIM1),OBJ,CLAMDA(DIM1+DIM2+1),WORK(LWORK),
*                 T(DIM1),SIGMA(DIM1),NL(1),CJAC(1,DIM1),LU(DIM1),
*                 OBJGRD(DIM1),R(DIM1,DIM1),USER(1),BETA(DIM1),
*                 BB(DIM1,DIM1,DIM1),H(DIM1,DIM1),TIND1(DIM1),
*                 TIND2(DIM1),LO,BB1(DIM1,DIM1,DIM1),H1(DIM1,DIM1)
*                 ,PESOS1(DIM1),PESOS(DIM1),T1,T2,TLIN(DIM1,DIM1)

EXTERNAL E04NEF,E04NCF,E04UDM,OBJFUN1,E04UEF,E04UCF
COMMON/DATOS1/MED,BB,H,PESOS,TIND1,TIND2,BETA,T,SIGMA,LU

      DO 1 K=1,NFUN
          PESOS(K)=PESOS1(K)
          DO 2 I=1,DIM1
              H(K,I)=H1(K,I)
              DO 3 J=1,DIM1
                  BB(K,I,J)=BB1(K,I,J)
3             CONTINUE
2         CONTINUE
1     CONTINUE

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C       VALOR ESPERADO
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      WRITE(6,*)

WRITE(6,*)'==============================================='
      WRITE(6,*)'                 ALEATORIEDAD SIMPLE'
WRITE(6,*)'==============================================='
      WRITE(6,*)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce los vectores C1'
      WRITE(*,*)'(separando las componentes por espacios)'
      DO 5 K=1,NFUN
          WRITE(*,*)
          WRITE(*,*)'Función: ',K
          READ(*,*) (MED(1,K,I),I=1,N)
5     CONTINUE
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce los vectores C2'
      WRITE(*,*)'(separando las componentes por espacios)'
      DO 7 K=1,NFUN
          WRITE(*,*)
          WRITE(*,*)'Función: ',K
          READ(*,*) (MED(2,K,I),I=1,N)
7     CONTINUE
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce las esperanza de T separadas por
espacios'
      WRITE(*,*)
      READ(*,*) (T(K),K=1,NFUN)
      WRITE(*,*)
```

```
      WRITE(*,*)'Introduce las varianzas de T separadas por
espacios'
      WRITE(*,*)
      READ(*,*) (SIGMA(K),K=1,NFUN)

      DO 10 I=1,N
          CVEC(I)=0.
          DO 15 K=1,NFUN
              CVEC(I)=CVEC(I)-
PESOS(K)*(MED(1,K,I)+T(K)*MED(2,K,I))
15        CONTINUE
10    CONTINUE

      DO 20 I=1,N
          DO 30 J=1,N
              A(I,J)=0.
              DO 25 K=1,NFUN
                  A(I,J)=A(I,J)+2.*PESOS(K)*BB(K,I,J)
25            CONTINUE
30        CONTINUE
20    CONTINUE

      DO 35 K=1,NFUN
          TIND1(K)=0.
          DO 40 I=1,N
              TIND1(K)=TIND1(K)+H(K,I)*(MED(2,K,I)**2.)
40        CONTINUE
          TIND1(K)=TIND1(K)*((T(K)**2.)+SIGMA(K))
          LU(K)=0.
          DO 50 I=1,N
              TIND1(K)=TIND1(K)+H(K,I)*(MED(1,K,I)**2.)
              LU(K)=LU(K)+MED(1,K,I)*H(K,I)*MED(2,K,I)
50        CONTINUE
          TIND1(K)=TIND1(K)+LU(K)*2.*T(K)
35    CONTINUE

      T1=0.
      DO 55 K=1,NFUN
          T1=T1+PESOS(K)*TIND1(K)
55    CONTINUE

      IFAIL=-1

      CALL E04NEF('Problem Type = QP2')
      CALL E04NEF('Print Level = 0')

CALL E04NCF(N,N,NCLIN,DIM2,DIM1,C,BL,BU,CVEC,ISTATE,KX,X,A,B,
*             ITER,OBJ,CLAMDA,IWORK,DIM1,WORK,LWORK,IFAIL)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'SOLUCIÓN VALOR ESPERADO'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',OBJ+T1
      WRITE(*,*)
```

```
      WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(6,*)'SOLUCIÓN VALOR ESPERADO'
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',OBJ+T1
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL

C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C       MÍNIMA VARIANZA
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      DO 57 K=1,NFUN
          LO=0.
          DO 60 I=1,N
              LO=LO+H(K,I)*(MED(2,K,I)**2.)
60        CONTINUE

          TIND2(K)=(LO**2.)*2.*SIGMA(K)*(SIGMA(K)+2.*(T(K)**2.))+
     *
4.*SIGMA(K)*(LU(K)**2.)+8.*T(K)*SIGMA(K)*LO*LU(K)

          DO 70 I=1,N
              TLIN(K,I)=-4.*SIGMA(K)*(LU(K)+T(K)*LO)*MED(2,K,I)
70        CONTINUE
57    CONTINUE

      T2=0.
      DO 65 I=1,N
          CVEC(I)=0.
          DO 75 K=1,NFUN
              CVEC(I)=CVEC(I)+PESOS(K)*TLIN(K,I)
75        CONTINUE
65    CONTINUE
      DO 77 K=1,NFUN
          T2=T2+PESOS(K)*TIND2(K)
77    CONTINUE

      DO 80 I=1,N
          DO 90 J=1,N
              A(I,J)=0.
              DO 85 K=1,NFUN
                  A(I,J)=A(I,J)+2.*PESOS(K)*SIGMA(K)*MED(2,K,I)*
     *                   MED(2,K,J)
85            CONTINUE
90        CONTINUE
80    CONTINUE

      IFAIL=-1

      CALL E04NEF('Problem Type = QP2')
      CALL E04NEF('Print Level = 0')
```

```
CALL E04NCF(N,N,NCLIN,DIM2,DIM1,C,BL,BU,CVEC,ISTATE,KX,X,A,B,
*            ITER,OBJ,CLAMDA,IWORK,DIM1,WORK,LWORK,IFAIL)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',OBJ+T2
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA'
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',OBJ+T2
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C       KATAOKA
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

110   CONTINUE
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce las probabilidades BETA'
      WRITE(*,*)'separadas por espacios'
      READ(*,*) (BETA(K),K=1,NFUN)

      IUSER(1)=NFUN

       CALL E04UEF('Print Level = 0')
C      CALL E04UEF('Print Level = 10')
C      CALL E04UEF('Verify Level = 3')

      IFAIL=-1

CALL E04UCF(N,NCLIN,0,DIM2,1,DIM1,C,BL,BU,E04UDM,OBJFUN1,ITER,
*            ISTATE,NL,CJAC,CLAMDA,OBJ,OBJGRD,R,X,IWORK,LIWORK,
*            WORK,LWORK,IUSER,USER,IFAIL)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'SOLUCIÓN KATAOKA'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Vector de probabilidades BETA: '
      WRITE(*,*)(BETA(K),K=1,NFUN)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Vector solución:'
      WRITE(*,*)(X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'IFAIL = ',IFAIL
```

```
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'SOLUCIÓN KATAOKA'
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Vector de probabilidades BETA: '
      WRITE(6,*)(BETA(K),K=1,NFUN)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Vector solución:'
      WRITE(6,*)(X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Función Objetivo: ',OBJ
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'IFAIL = ',IFAIL

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Esta solución corresponde a un mínimo riesgo'
      WRITE(*,*)'de nivel: ',OBJ
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Si deseas mayor nivel, debes aumentar las'
      WRITE(*,*)'probabilidades BETA'
      WRITE(*,*)'Quieres cambiar las probabilidades?'
      WRITE(*,*)'1.- SI'
      WRITE(*,*)'2.- NO'
100   READ(*,*) OPC
      IF((OPC.NE.1).AND.(OPC.NE.2)) GOTO 100
      IF(OPC.EQ.1) GOTO 110


      RETURN
      END


C*************************************************************
C                         SUBRRUTINA OBJFUN1
C                    FUNCIÓN OBJETIVO PARA KATAOKA
C*************************************************************

      SUBROUTINE OBJFUN1(MODE,N,X,OBJF,OBJGRD,NSTATE,IUSER,USER)

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C          DECLARACIÓN DE VARIABLES
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

INTEGER MODE,N,NSTATE,IUSER(2),DIM1,DIM2,I,J,K,NFUN
PARAMETER(DIM1=10,DIM2=20)
DOUBLE PRECISION X(N),OBJF,OBJGRD(N),USER(1),MED(2,DIM1,DIM1),
*                   PROD(DIM1),PROD2,LO,H(DIM1,DIM1),LU(DIM1),
*                   BB(DIM1,DIM1,DIM1),T(DIM1),SIGMA(DIM1),
*                   TIND1(DIM1),TIND2(DIM1),Y(DIM1),ABC,BETA(DIM1),
*                   PESOS(DIM1),OBJ(DIM1),GRAD(DIM1,DIM1)

COMMON/DATOS1/MED,BB,H,PESOS,TIND1,TIND2,BETA,T,SIGMA,LU
```

```
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C          FUNCIONES OBJETIVO INDIVIDUALES
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      NFUN=IUSER(1)

      DO 5 K=1,NFUN
          LO=0.
          DO 10 I=1,N
              PROD(I)=0.
              DO 20 J=1,N
                  PROD(I)=PROD(I)+BB(K,I,J)*X(J)
20            CONTINUE
10        CONTINUE
          PROD2=0.
          DO 30 I=1,N
              PROD2=PROD2+PROD(I)*X(I)
30        CONTINUE
          LO=PROD2
          DO 40 I=1,N
              LO=LO-(MED(1,K,I)+T(K)*MED(2,K,I))*X(I)
40        CONTINUE
          LO=LO+TIND1(K)

          Y(K)=0.
          DO 50 I=1,N
              PROD(I)=0.
              DO 60 J=1,N

PROD(I)=PROD(I)+SIGMA(K)*X(J)*MED(2,K,J)*MED(2,K,I)
60            CONTINUE
50        CONTINUE
          PROD2=0.
          DO 70 I=1,N
              PROD2=PROD2+PROD(I)*X(I)
70        CONTINUE
          Y(K)=PROD2
          PROD2=0.
          DO 80 I=1,N
              PROD2=PROD2+H(K,I)*(MED(2,K,I)**2.)*T(K)
80        CONTINUE
          PROD2=4.*SIGMA(K)*(LU(K)+PROD2)
          ABC=0.
          DO 90 I=1,N
              ABC=ABC+MED(2,K,I)*X(I)
90        CONTINUE
          PROD2=PROD2*ABC
          Y(K)=Y(K)-PROD2+TIND2(K)

          OBJ(K)=SQRT(BETA(K)/(1.-BETA(K)))*SQRT(Y(K))+LO
5     CONTINUE
```

```
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C          GRADIENTES INDIVIDUALES
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      IF((MODE.EQ.1).OR.(MODE.EQ.2)) THEN
          DO 100 K=1,NFUN
              DO 125 I=1,N
                  GRAD(K,I)=0.
                  DO 130 J=1,N
                      GRAD(K,I)=GRAD(K,I)+SIGMA(K)*MED(2,K,I)*
     *                          MED(2,K,J)*X(J)
130               CONTINUE
                  ABC=0.
                  DO 135 J=1,N
                      ABC=ABC+(MED(2,K,J)**2.)*H(K,J)
135               CONTINUE
                  GRAD(K,I)=GRAD(K,I)-
2.*SIGMA(K)*(LU(K)+T(K)*ABC)*
     *                      MED(2,K,I)
                  GRAD(K,I)=SQRT(BETA(K)/(1.-BETA(K)))*GRAD(K,I)/
     *                      SQRT(Y(K))
                  DO 150 J=1,N
                      GRAD(K,I)=GRAD(K,I)+2.*BB(K,I,J)*X(J)
150               CONTINUE
                  GRAD(K,I)=GRAD(K,I)-MED(1,K,I)-T(K)*MED(2,K,I)
125           CONTINUE
100       CONTINUE
      ENDIF

C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C          FUNCIÓN OBJETIVO Y GRADIENTES PONDERADOS
C+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      OBJF=0.
      DO 160 K=1,NFUN
          OBJF=OBJF+PESOS(K)*OBJ(K)
160   CONTINUE

      IF((MODE.EQ.1).OR.(MODE.EQ.2)) THEN
          DO 170 I=1,N
              OBJGRD(I)=0.
              DO 180 K=1,NFUN
                  OBJGRD(I)=OBJGRD(I)+PESOS(K)*GRAD(K,I)
180           CONTINUE
170       CONTINUE
      ENDIF

      RETURN
      END
```

PROGRAMACIÓN ESTOCASTICA MULTIOBJETIVO

APROXIMACIÓN ESTOCASTICA

Caso Lineal

```
*******************************************************************
*                          PROGRAMA ASL                           *
****               Aproximación Estocástica.                   ****
****     Linkar con: LINVAR,KATA1,KATA2,NAGLIB/LIB             ****
*******************************************************************

      PROGRAM ASL

C******************************************************************
C   Declaración de variables
C******************************************************************

INTEGER DIM1,DIM2
PARAMETER (DIM1=10,DIM2=20)
INTEGER N,I,J,K,S,P,M,OPC
DOUBLE PRECISION RES(DIM2,DIM1),BL(DIM1+DIM2),BU(DIM1+DIM2),
*                 V(DIM1*DIM1,DIM1*DIM1),X(DIM1),MED(DIM1*DIM1),
*                 T1,T2,TIEMPO
CHARACTER*20 FICHERO,COMENT
CHARACTER*30 SALIDA1,SALIDA2
EXTERNAL LINVAR,KATA1,KATA2,X05BAF

C******************************************************************
C   Lectura de datos
C******************************************************************

      T1=X05BAF()
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce el nombre del fichero de datos'
      READ(*,*) FICHERO
      OPEN(3,FILE=FICHERO,STATUS='OLD')
      SALIDA1='NOR-'//FICHERO
      SALIDA2='CAN-'//FICHERO
      WRITE(*,*)
      READ(3,*) COMENT
      READ(3,*) N
      READ(3,*) COMENT
      READ(3,*) P
      READ(3,*) COMENT
      READ(3,*) M
      READ(3,*) COMENT
      DO 10 I=1,M
          READ(3,*) (RES(I,J),J=1,N)
10    CONTINUE
      READ(3,*) COMENT
      DO 20 I=1,N
          READ(3,*) BL(I),BU(I)
20    CONTINUE
      READ(3,*) COMENT
```

```
      DO 30 I=1,M
          READ(3,*) BL(N+I),BU(N+I)
30    CONTINUE
      READ(3,*) COMENT
      DO 40 I=1,N*P
          READ(3,*)  (V(I,J),J=1,N*P)
40    CONTINUE
      READ(3,*) COMENT
      READ(3,*)(MED(I),I=1,N*P)
      READ(3,*) COMENT
      READ(3,*)  (X(I),I=1,N)
      CLOSE(3)

C*******************************************************************
C   Elegir opción
C*******************************************************************

      WRITE(*,*)

WRITE(*,*)'////////////////////////////////////////////////////////'
      WRITE(*,*)'1.- Caso Normal'
      WRITE(*,*)'2.- Cantelli'
WRITE(*,*)'////////////////////////////////////////////////////////'

100   READ(*,*) OPC
      IF((OPC.NE.1).AND.(OPC.NE.2)) GOTO 100
      IF(OPC.EQ.1) THEN
          OPEN(6,FILE=SALIDA1,STATUS='NEW')
          WRITE(6,*)
          WRITE(6,*)'================================'
          WRITE(6,*)'            CASO NORMAL'
          WRITE(6,*)'================================'
          WRITE(6,*)
          CALL LINVAR(N,M,P,RES,BL,BU,V,X)
          CALL KATA1(N,M,P,RES,BL,BU,V,MED,X)
          WRITE(*,*)
          WRITE(*,*)'Final del Programa'
          WRITE(*,*)
          WRITE(*,*)'Los resultados se han impreso en el fichero:'
          WRITE(*,*) SALIDA1
      ELSE
          OPEN(6,FILE=SALIDA2,STATUS='NEW')
          WRITE(6,*)
          WRITE(6,*)'================================'
          WRITE(6,*)'              CANTELLI'
          WRITE(6,*)'================================'
          WRITE(6,*)
          CALL LINVAR(N,M,P,RES,BL,BU,V,X)
          CALL KATA2(N,M,P,RES,BL,BU,V,MED,X)
          WRITE(*,*)
          WRITE(*,*)'Final del Programa'
          WRITE(*,*)
          WRITE(*,*)'Los resultados se han impreso en el fichero:'
          WRITE(*,*) SALIDA2
      ENDIF
```

```
      T2=X05BAF()
      TIEMPO=T2-T1
      WRITE(6,*)

WRITE(6,*)'================================================='
WRITE(6,*)' Tiempo C.P.U.: ',TIEMPO
WRITE(6,*)'================================================='
      WRITE(6,*)
      WRITE(*,*)

WRITE(*,*)'================================================='
WRITE(*,*)' Tiempo C.P.U.: ',TIEMPO
WRITE(*,*)'================================================='

      WRITE(*,*)
      CLOSE(6)
      END

*****************************************************************
****                    SUBRRUTINA LINVAR                    ****
****      Programación Estocástica. Caso lineal, varianza    ****
*****************************************************************

      SUBROUTINE LINVAR(N,M,P,RES,BL,BU,V,X)

C****************************************************************
C   Declaración de variables
C****************************************************************

INTEGER DIM1,DIM2,LIWORK,LWORK
PARAMETER (DIM1=10,DIM2=20,LIWORK=DIM1,LWORK=2*(DIM1**2)+9*DIM1+
*                                            6*DIM2)
INTEGER N,I,J,K,S,P,M,ISTATE(DIM1+DIM2),KX(DIM1),ITER,
*         IWORK(LIWORK),IFAIL,OPC
DOUBLE PRECISION RES(DIM2,DIM1),BL(DIM1+DIM2),BU(DIM1+DIM2),
*                  V(DIM1*DIM1,DIM1*DIM1),X(DIM1),PESOS(DIM1),
*                  A(DIM1,DIM1),CVEC(DIM1),B(DIM1),OBJ,
*                  CLAMDA(DIM1+DIM2),WORK(LWORK)
EXTERNAL E04NEF,E04NCF

C****************************************************************
C   Llamada a subrrutina NAG
C****************************************************************

      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'*****************'
      WRITE(6,*)' Método Varianza'
      WRITE(6,*)'*****************'
      WRITE(6,*)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'*****************'
      WRITE(*,*)' Método Varianza'
      WRITE(*,*)'*****************'
      WRITE(*,*)
      CALL E04NEF('Problem Type = QP1')
      CALL E04NEF('Print Level = 0')
```

```
200   CONTINUE
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce los pesos de las funciones objetivo'
      WRITE(*,*)'separados por espacios.'
      READ(*,*) (PESOS(I),I=1,P)
      WRITE(*,*)
      DO 50 I=1,N
          DO 60 J=1,N
             A(I,J)=0.
             DO 70 K=1,P
           A(I,J)=A(I,J)+2.*(PESOS(K)**2)*V((K-1)*N+I,(K-1)*N+J)
70           CONTINUE
             DO 80 K=1,P-1
                 DO 90 S=K+1,P
                     A(I,J)=A(I,J)+4.*PESOS(K)*PESOS(S)*
     *                      V((K-1)*N+I,(S-1)*N+J)
90               CONTINUE
80           CONTINUE
60        CONTINUE
50    CONTINUE

      IFAIL=-1

CALL E04NCF(N,N,M,DIM2,DIM1,RES,BL,BU,CVEC,ISTATE,KX,X,A,B,ITER,
*             OBJ,CLAMDA,IWORK,LIWORK,WORK,LWORK,IFAIL)

C******************************************************************
C                       Salida de datos
C******************************************************************

      WRITE(*,*)

WRITE(*,*)'*****************************************************'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Solución para los pesos'
      WRITE(*,*) (PESOS(I),I=1,P)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Punto: '
      WRITE(*,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Valor de la función ponderada: ',OBJ
      WRITE(*,*)

WRITE(*,*)'*****************************************************'
      WRITE(*,*)

      WRITE(6,*)
WRITE(6,*)'*****************************************************'
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Solución para los pesos'
      WRITE(6,*) (PESOS(I),I=1,P)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Punto: '
      WRITE(6,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
```

```
      WRITE(6,*)'Valor de la función ponderada: ',OBJ
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Valor de IFAIL: ',IFAIL
      WRITE(6,*)

WRITE(6,*)'***************************************************'
WRITE(6,*)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'===================================='
      WRITE(*,*)'1.- Cambiar los pesos'
      WRITE(*,*)'2.- Terminar'
      WRITE(*,*)'===================================='
100   READ(*,*) OPC
      WRITE(*,*)
      IF((OPC.NE.1).AND.(OPC.NE.2)) GOTO 100
      IF(OPC.EQ.1) GOTO 200

      RETURN
      END

*****************************************************************
****                   SUBRRUTINA KATA1                      ****
****                 Caso Normal. KATAOTA                    ****
*****************************************************************

      SUBROUTINE KATA1(N,M,P,RES,BL,BU,VV,MMED,X)

C****************************************************************

C   Declaración de variables
C

INTEGER DIM1,DIM2,LIWORK,LWORK
PARAMETER (DIM1=10,DIM2=20,LIWORK=3*DIM1+DIM2,
*                             LWORK=2*(DIM1**2)+20*DIM1+11*DIM2)
INTEGER N,I,J,K,S,P,M,ISTATE(DIM1+DIM2),KX(DIM1),ITER,
*        IWORK(LIWORK),IFAIL,OPC,IUSER(1)
DOUBLE PRECISION RES(DIM2,DIM1),BL(DIM1+DIM2),BU(DIM1+DIM2),
*                 V(DIM1*DIM1,DIM1*DIM1),X(DIM1),PESOS(DIM1),
*                 A(DIM1,DIM1),CVEC(DIM1),B(DIM1),OBJF,BETA,
*                 CLAMDA(DIM1+DIM2),WORK(LWORK),IBE,C(1),
*                 USER(1),MED(DIM1*DIM1),MMED(DIM1*DIM1),
*                 VV(DIM1*DIM1,DIM1*DIM1),OBJGRD(DIM1),
*                 CJAC(1,1),R(DIM1,DIM1)
EXTERNAL E04UEF,E04UCF,E04UDM,G01CEF,OBJFUN
COMMON/DATOS/V,MED,PESOS

C****************************************************************

C   Llamada a subrrutina NAG
C
      DO 10 I=1,DIM1*DIM1
            MED(I)=MMED(I)
            DO 20 J=1,DIM1*DIM1
                V(I,J)=VV(I,J)
```

```
20          CONTINUE
10     CONTINUE

       WRITE(6,*)
       WRITE(6,*)'******************'
       WRITE(6,*)'       Kataoka'
       WRITE(6,*)'******************'
       WRITE(6,*)
       WRITE(*,*)
       WRITE(*,*)'******************'
       WRITE(*,*)'       Kataoka'
       WRITE(*,*)'******************'
       WRITE(*,*)
       CALL E04UEF('Print Level = 0')

       IUSER(1)=P


       WRITE(*,*)
       WRITE(*,*)'Introduce la probabilidad Beta'
       READ(*,*) BETA
       IBE=G01CEF(BETA,IFAIL)
       USER(1)=IBE

200    CONTINUE
       WRITE(*,*)
       WRITE(*,*)'Introduce el vector de pesos'
       WRITE(*,*)'separados por un espacio'
       READ(*,*) (PESOS(I),I=1,P)
       WRITE(*,*)

       IFAIL=-1

CALL E04UCF(N,M,0,DIM2,1,DIM1,RES,BL,BU,E04UDM,OBJFUN,ITER,
*            ISTATE,C,CJAC,CLAMDA,OBJF,OBJGRD,R,X,IWORK,LIWORK,
*            WORK,LWORK,IUSER,USER,IFAIL)

C***************************************************************
C   Salida de datos
C***************************************************************

       WRITE(*,*)

WRITE(*,*)'*****************************************************'
       WRITE(*,*)
       WRITE(*,*)'Solución para la probabilidad BETA: ',BETA
       WRITE(*,*)
       WRITE(*,*)'Pesos:'
       WRITE(*,*) (PESOS(I),I=1,P)
       WRITE(*,*)
       WRITE(*,*)'Punto: '
       WRITE(*,*) (X(I),I=1,N)
       WRITE(*,*)
       WRITE(*,*)'Valor de la función ponderada: ',OBJF
       WRITE(*,*)
       WRITE(*,*)'Valor de IFAIL: ',IFAIL
```

```
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)

WRITE(*,*)'****************************************************'
WRITE(*,*)

WRITE(6,*)

WRITE(6,*)'****************************************************'
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Solución para la probabilidad BETA: ',BETA
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Pesos:'
      WRITE(6,*) (PESOS(I),I=1,P)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Punto: '
      WRITE(6,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Valor de la función ponderada: ',OBJF
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Valor de IFAIL: ',IFAIL
      WRITE(6,*)

WRITE(6,*)'****************************************************'
      WRITE(6,*)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'===================================='
      WRITE(*,*)'1.- Cambiar los pesos'
      WRITE(*,*)'2.- Terminar'
      WRITE(*,*)'===================================='
100   READ(*,*) OPC
      WRITE(*,*)
      IF((OPC.NE.1).AND.(OPC.NE.2)) GOTO 100
      IF(OPC.EQ.1) GOTO 200

      RETURN
      END


*****************************************************************
****                  SUBRRUTINA OBJFUN                      ****
*****************************************************************

      SUBROUTINE OBJFUN(MODE,N,X,OBJF,OBJGRD,NSTATE,IUSER,USER)

C****************************************************************

C   Declaración de variables
C
INTEGER DIM1
PARAMETER (DIM1=10)
INTEGER N,I,J,K,S,P,NSTATE,MODE,IUSER(1)
DOUBLE PRECISION V(DIM1*DIM1,DIM1*DIM1),X(N),PESOS(DIM1),
*                 OBJF,IBE,USER(1),MED(DIM1*DIM1),OBJGRD(N),
*                 VKX(DIM1,DIM1),VKSX(DIM1,DIM1,DIM1),LO
```

```
      COMMON/DATOS/V,MED,PESOS
C*****************************************************************
C   Función Objetivo
C*****************************************************************

      P=IUSER(1)
      IBE=USER(1)

      DO 10 K=1,P
          DO 20 I=1,N
              VKX(K,I)=0.
              DO 30 J=1,N
                  VKX(K,I)=VKX(K,I)+V((K-1)*N+I,(K-1)*N+J)*X(J)
30            CONTINUE
20        CONTINUE
10    CONTINUE

      DO 40 K=1,P-1
          DO 50 S=K+1,P
              DO 60 I=1,N
                  VKSX(K,S,I)=0.
                  DO 70 J=1,N
                      VKSX(K,S,I)=VKSX(K,S,I)+
     *                            V((K-1)*N+I,(S-1)*N+J)*X(J)
70                CONTINUE
60            CONTINUE
50        CONTINUE
40    CONTINUE

      LO=0.
      DO 80 K=1,P
          DO 90 I=1,N
              LO=LO+(PESOS(K)**2.)*X(I)*VKX(K,I)
90        CONTINUE
80    CONTINUE

      DO 100 K=1,P-1
          DO 110 S=K+1,P
              DO 120 I=1,N
                  LO=LO+2.*PESOS(K)*PESOS(S)*X(I)*VKSX(K,S,I)
120           CONTINUE
110       CONTINUE
100   CONTINUE

      OBJF=IBE*SQRT(LO)

      DO 130 K=1,P
          DO 140 I=1,N
              OBJF=OBJF+PESOS(K)*MED((K-1)*N+I)*X(I)
140       CONTINUE
130   CONTINUE

C*****************************************************************
C                         Gradiente
C*****************************************************************
```

```
      IF(MODE.GT.0) THEN
          DO 150 I=1,N
              OBJGRD(I)=0.
              DO 160 K=1,P
                  OBJGRD(I)=OBJGRD(I)+(PESOS(K)**2.)*VKX(K,I)
160           CONTINUE
              DO 170 K=1,P-1
                  DO 180 S=K+1,P
                      OBJGRD(I)=OBJGRD(I)+2.*PESOS(K)*PESOS(S)*
     *                          VKSX(K,S,I)
180               CONTINUE
170           CONTINUE
              OBJGRD(I)=(IBE*OBJGRD(I))/SQRT(LO)
              DO 190 K=1,P
                  OBJGRD(I)=OBJGRD(I)+PESOS(K)*MED((K-1)*N+I)
190           CONTINUE
150       CONTINUE
      ENDIF

      RETURN
      END

******************************************************************
****                    SUBRRUTINA KATA2                      ****
****                    Cantelli. KATAOTA                     ****
******************************************************************

      SUBROUTINE KATA2(N,M,P,RES,BL,BU,VV,MMED,X)

C*****************************************************************

C   Declaración de variables
C
INTEGER DIM1,DIM2,LIWORK,LWORK
PARAMETER (DIM1=10,DIM2=20,LIWORK=3*DIM1+DIM2,
*                             LWORK=2*(DIM1**2)+20*DIM1+11*DIM2)
INTEGER N,I,J,K,S,P,M,ISTATE(DIM1+DIM2),KX(DIM1),ITER,
*         IWORK(LIWORK),IFAIL,OPC,IUSER(1)
DOUBLE PRECISION RES(DIM2,DIM1),BL(DIM1+DIM2),BU(DIM1+DIM2),
*                 V(DIM1*DIM1,DIM1*DIM1),X(DIM1),PESOS(DIM1),
*                 A(DIM1,DIM1),CVEC(DIM1),B(DIM1),OBJF,BETA,
*                 CLAMDA(DIM1+DIM2),WORK(LWORK),C(1),
*                 USER(1),MED(DIM1*DIM1),MMED(DIM1*DIM1),
*                 VV(DIM1*DIM1,DIM1*DIM1),OBJGRD(DIM1),
*                 CJAC(1,1),R(DIM1,DIM1)
EXTERNAL E04UEF,E04UCF,E04UDM,OBJFUN1
COMMON/DATOS/V,MED,PESOS

C*****************************************************************
C   Llamada a subrrutina NAG
C
      DO 10 I=1,DIM1*DIM1
          MED(I)=MMED(I)
          DO 20 J=1,DIM1*DIM1
              V(I,J)=VV(I,J)
20        CONTINUE
```

```
10    CONTINUE
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'******************'
      WRITE(6,*)'      Kataoka'
      WRITE(6,*)'******************'
      WRITE(6,*)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'******************'
      WRITE(*,*)'      Kataoka'
      WRITE(*,*)'******************'
      WRITE(*,*)
      CALL E04UEF('Print Level = 0')

      IUSER(1)=P


      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce la probabilidad Beta'
      READ(*,*) BETA
      USER(1)=BETA

200   CONTINUE
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce el vector de pesos'
      WRITE(*,*)'separados por un espacio'
      READ(*,*) (PESOS(I),I=1,P)
      WRITE(*,*)

      IFAIL=-1

CALL E04UCF(N,M,0,DIM2,1,DIM1,RES,BL,BU,E04UDM,OBJFUN1,ITER,
*             ISTATE,C,CJAC,CLAMDA,OBJF,OBJGRD,R,X,IWORK,LIWORK,
*             WORK,LWORK,IUSER,USER,IFAIL)

C*****************************************************************
C                          Salida de datos
C*****************************************************************

      WRITE(*,*)
  WRITE(*,*)'*****************************************************'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Solución para la probabilidad BETA: ',BETA
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Pesos:'
      WRITE(*,*) (PESOS(I),I=1,P)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Punto: '
      WRITE(*,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Valor de la función ponderada: ',OBJF
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Valor de IFAIL: ',IFAIL
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)

WRITE(*,*)'*****************************************************'
```

```
      WRITE(6,*)
WRITE(6,*)'*****************************************************'
      WRITE(6,*)
      WRITE(*,*)'Solución para la probabilidad BETA: ',BETA
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Pesos:'
      WRITE(6,*) (PESOS(I),I=1,P)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Punto: '
      WRITE(6,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Valor de la función ponderada: ',OBJF
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Valor de IFAIL: ',IFAIL
      WRITE(6,*)

WRITE(6,*)'*****************************************************'
      WRITE(6,*)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'===================================='
      WRITE(*,*)'1.- Cambiar los pesos'
      WRITE(*,*)'2.- Terminar'
      WRITE(*,*)'===================================='
100   READ(*,*) OPC
      WRITE(*,*)
      IF((OPC.NE.1).AND.(OPC.NE.2)) GOTO 100
      IF(OPC.EQ.1) GOTO 200

      RETURN
      END


*****************************************************************
****                  SUBRRUTINA OBJFUN1                     ****
*****************************************************************

      SUBROUTINE OBJFUN1(MODE,N,X,OBJF,OBJGRD,NSTATE,IUSER,USER)

C****************************************************************
C   Declaración de variables
C****************************************************************

INTEGER DIM1
PARAMETER (DIM1=10)
INTEGER N,I,J,K,S,P,NSTATE,MODE,IUSER(1)
DOUBLE PRECISION V(DIM1*DIM1,DIM1*DIM1),X(N),PESOS(DIM1),
*                  OBJF,BETA,USER(1),MED(DIM1*DIM1),OBJGRD(N),
*                  VKX(DIM1,DIM1),VKSX(DIM1,DIM1,DIM1),LO
COMMON/DATOS/V,MED,PESOS

C***************************************************************
C   Función Objetivo
C****************************************************************

      P=IUSER(1)
```

```
      BETA=USER(1)
      DO 10 K=1,P
          DO 20 I=1,N
              VKX(K,I)=0.
              DO 30 J=1,N
                  VKX(K,I)=VKX(K,I)+V((K-1)*N+I,(K-1)*N+J)*X(J)
30            CONTINUE
20        CONTINUE
10    CONTINUE

      DO 40 K=1,P-1
          DO 50 S=K+1,P
              DO 60 I=1,N
                  VKSX(K,S,I)=0.
                  DO 70 J=1,N
                      VKSX(K,S,I)=VKSX(K,S,I)+
     *                            V((K-1)*N+I,(S-1)*N+J)*X(J)
70                CONTINUE
60            CONTINUE
50        CONTINUE
40    CONTINUE

      LO=0.
      DO 80 K=1,P
          DO 90 I=1,N
              LO=LO+(PESOS(K)**2.)*X(I)*VKX(K,I)
90        CONTINUE
80    CONTINUE

      DO 100 K=1,P-1
          DO 110 S=K+1,P
              DO 120 I=1,N
                  LO=LO+2.*PESOS(K)*PESOS(S)*X(I)*VKSX(K,S,I)
120           CONTINUE
110       CONTINUE
100   CONTINUE

      OBJF=SQRT(BETA/(1-BETA))*SQRT(LO)

      DO 130 K=1,P
          DO 140 I=1,N
              OBJF=OBJF+PESOS(K)*MED((K-1)*N+I)*X(I)
140       CONTINUE
130   CONTINUE

C*****************************************************************
C                              Gradiente
C*****************************************************************

      IF(MODE.GT.0) THEN
          DO 150 I=1,N
              OBJGRD(I)=0.
              DO 160 K=1,P
                  OBJGRD(I)=OBJGRD(I)+(PESOS(K)**2.)*VKX(K,I)
160           CONTINUE
              DO 170 K=1,P-1
```

```
                DO 180 S=K+1,P
                     OBJGRD(I)=OBJGRD(I)+2.*PESOS(K)*PESOS(S)*
     *                           VKSX(K,S,I)
180             CONTINUE
170          CONTINUE
             OBJGRD(I)=(SQRT(BETA/(1-BETA))*OBJGRD(I))/SQRT(LO)
             DO 190 K=1,P
                OBJGRD(I)=OBJGRD(I)+PESOS(K)*MED((K-1)*N+I)
190          CONTINUE
150       CONTINUE
      ENDIF

      RETURN
      END
```

APROXIMACIÓN ESTOCASTICA

Caso Cuadrático. Aleatoriedad Simple

```
*******************************************************************
****                    PROGRAMA CASN                          ****
****              Programación Estocástica.                    ****
****          Caso cuadrático, aleatoriedad simple             ****
*******************************************************************

      PROGRAM CASN

C******************************************************************
C   Declaración de variables
C******************************************************************

INTEGER DIM1,DIM2,LIWORK,LWORK
PARAMETER (DIM1=10,DIM2=20,LIWORK=DIM1,LWORK=2*(DIM1**2)+10*DIM1+
*                                             6*DIM2)
INTEGER N,I,J,K,S,P,M,ISTATE(DIM1+DIM2),KX(DIM1),ITER,
*        IWORK(LIWORK),IFAIL,OPC
DOUBLE PRECISION RES(DIM2,DIM1),BL(DIM1+DIM2),BU(DIM1+DIM2),TIND,
*                 C(2,DIM2,DIM1),T,SIGMA,X(DIM1),PESOS(DIM1),LO,
*                 A(DIM1,DIM1),CVEC(DIM1),B(DIM1),OBJ,LU,
*                 CLAMDA(DIM1+DIM2),WORK(LWORK),PROD(DIM1),
*                 H(DIM2,DIM1,DIM1),MUC2(DIM1),C2HC2(DIM1),
*                 C1HC2(DIM1)
CHARACTER*20 FICHERO,COMENT
CHARACTER*30 SALIDA
EXTERNAL E04NEF,E04NCF

C******************************************************************
C                 Lectura de datos
C******************************************************************

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce el nombre del fichero de datos'
      READ(*,*) FICHERO
      OPEN(3,FILE=FICHERO,STATUS='OLD')
      SALIDA='CASN-'//FICHERO
```

```
      OPEN(6,FILE=SALIDA,STATUS='NEW')
      WRITE(*,*)
      READ(3,*) COMENT
      READ(3,*) N
      READ(3,*) COMENT
      READ(3,*) P
      READ(3,*) COMENT
      READ(3,*) M
      READ(3,*) COMENT
      DO 10 I=1,M
          READ(3,*) (RES(I,J),J=1,N)
10    CONTINUE
      READ(3,*) COMENT
      DO 20 I=1,N
          READ(3,*) BL(I),BU(I)
20    CONTINUE
      READ(3,*) COMENT
      DO 30 I=1,M
          READ(3,*) BL(N+I),BU(N+I)
30    CONTINUE
      READ(3,*) COMENT
      DO 50 I=1,P
          READ(3,*) (C(1,I,J),J=1,N)
50    CONTINUE
      READ(3,*) COMENT
      DO 60 I=1,P
          READ(3,*) (C(2,I,J),J=1,N)
60    CONTINUE
      READ(3,*) COMENT
      READ(3,*) T
      READ(3,*) COMENT
      READ(3,*) SIGMA
      READ(3,*) COMENT
      DO 70 I=1,P
          DO 80 J=1,N
              READ(3,*) (H(I,J,K),K=1,N)
80        CONTINUE
          READ(3,*)
70    CONTINUE
      READ(3,*) COMENT
      READ(3,*) (X(I),I=1,N)
      CLOSE(3)

C*****************************************************************
C   Llamada a subrrutina NAG
C*****************************************************************

      CALL E04NEF('Problem Type = QP2')
      CALL E04NEF('Print Level = 0')

400   CONTINUE
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Introduce los pesos de las funciones objetivo'
      WRITE(*,*)'separados por espacios.'
      READ(*,*) (PESOS(I),I=1,P)
      WRITE(*,*)
```

```
      DO 90 I=1,N
          MUC2(I)=0.
          DO 100 J=1,P
              MUC2(I)=MUC2(I)+PESOS(J)*C(2,J,I)
100       CONTINUE
90    CONTINUE

      DO 110 I=1,N
          DO 120 J=1,N
              A(I,J)=2.*SIGMA*MUC2(I)*MUC2(J)
120       CONTINUE
110   CONTINUE

      DO 125 K=1,P
          DO 130 I=1,N
              PROD(I)=0.
              DO 140 J=1,N
                  PROD(I)=PROD(I)+H(K,I,J)*C(2,K,J)
140           CONTINUE
130       CONTINUE
          C2HC2(K)=0.
          C1HC2(K)=0.
          DO 150 I=1,N
              C2HC2(K)=C2HC2(K)+C(2,K,I)*PROD(I)
              C1HC2(K)=C1HC2(K)+C(1,K,I)*PROD(I)
150       CONTINUE
125   CONTINUE

      LO=0.
      DO 160 I=1,P
          LO=LO-(PESOS(I)*C1HC2(I)+T*PESOS(I)*C2HC2(I))*4.*SIGMA
160   CONTINUE
      DO 170 I=1,N
          CVEC(I)=LO*MUC2(I)
170   CONTINUE

      TIND=0.
      DO 180 K=1,P
          TIND=TIND+PESOS(K)*C2HC2(K)
180   CONTINUE
      TIND=2.*SIGMA*(2.*(T**2.)+SIGMA)*(TIND**2.)
      LO=0.
      DO 190 K=1,P
          LO=LO+PESOS(K)*C1HC2(K)
190   CONTINUE
      TIND=TIND+4.*SIGMA*(LO**2.)
      LU=0.
      DO 200 K=1,P
          LU=LU+LO*PESOS(K)*C2HC2(K)
200   CONTINUE
      TIND=TIND+8.*T*SIGMA*LU

      IFAIL=-1
```

```
CALL E04NCF(N,N,M,DIM2,DIM1,RES,BL,BU,CVEC,ISTATE,KX,X,A,B,ITER,
*            OBJ,CLAMDA,IWORK,LIWORK,WORK,LWORK,IFAIL)

C*****************************************************************
C   Salida de datos
C*****************************************************************
      WRITE(*,*)
WRITE(*,*)'**************************************************'
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Solución para los pesos'
      WRITE(*,*) (PESOS(I),I=1,P)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Punto: '
      WRITE(*,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'Valor de la función ponderada: ',OBJ+TIND
      WRITE(*,*)

WRITE(*,*)'**************************************************'
      WRITE(*,*)
      WRITE(6,*)

WRITE(6,*)'**************************************************'
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Solución para los pesos'
      WRITE(6,*) (PESOS(I),I=1,P)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Punto: '
      WRITE(6,*) (X(I),I=1,N)
      WRITE(6,*)
      WRITE(6,*)'Valor de la función ponderada: ',OBJ+TIND
      WRITE(6,*)

WRITE(6,*)'**************************************************'
      WRITE(6,*)

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*)'===================================='
      WRITE(*,*)'1.- Cambiar los pesos'
      WRITE(*,*)'2.- Terminar'
      WRITE(*,*)'===================================='
300   READ(*,*) OPC
      WRITE(*,*)
      IF((OPC.NE.1).AND.(OPC.NE.2)) GOTO 300
      IF(OPC.EQ.1) GOTO 400

      CLOSE(6)
      END
```

ANEXO II

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS

A continuación se muestran el contenido de cada uno de los ficheros de salida correspondientes a los ejemplos resueltos computacionalmente mediante los programas creados para nuestros problemas. Estos ejemplos son los que se han utilizado para comprobar el funcionamiento de los programas y para ilustrar las explicaciones acerca de los mismos en el capítulo 6. Todos ellos corresponden a problemas de programación estocástica multiobjetivo, por lo que comenzamos por el ejemplo 5 de este capítulo hasta llegar al último ejemplo del mismo (ejemplo 9).

Los ejemplos se han resuelto mediante el método de las ponderaciones. Comenzamos con los pesos $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$ y se va restando 0.1 a μ_1 y sumando la misma cantidad a μ_2, hasta llegar a los pesos $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$. Para el criterio de Kataoka se han considerado distintos valores para la probabilidad en cada problema.

Soluciones del ejemplo 5.

```
==================================================
                  CASO NORMAL
==================================================

===============================================
 Solución del problema de ponderaciones

 Pesos:
   1.000000000000000      0.0000000000000000E+00
===============================================

Calls to E04NEF
 ---------------
      Problem Type = LP
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

   1.000000000000000      0.0000000000000000E+00

 Función Objetivo:     1.000000000000000
```

```
IFAIL =             0

Calls to E04NEF
---------------
     Problem Type = QP1

SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

 0.4117647058823529      0.2941176470588235

Función Objetivo:    1.529411764705882

IFAIL =             0

Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de probabilidad BETA:
 0.8000000000000000      0.8000000000000000

Vector solución
 0.5922961228539814      0.2038519385730093

Función Objetivo:    2.290790685280325

IFAIL =             0

Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA
Vector de probabilidad BETA:
 0.6000000000000000      0.7000000000000000

Vector solución
  1.000000000000000      0.0000000000000000E+00

Función Objetivo:    1.438810047119165

IFAIL =             0

===============================================
 Pesos:
 0.9000000000000000      0.1000000000000000
===============================================


Calls to E04NEF
```

```
---------------

     Problem Type = LP
     Print Level = 0

SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

  1.000000000000000       0.0000000000000000E+00

Función Objetivo:   0.7000000000000000

IFAIL =            0


Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP1

SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

 0.3950617283950617       0.3024691358024691

Función Objetivo:    1.417901234567901

IFAIL =            0


Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de probabilidad BETA:
 0.8000000000000000       0.8000000000000000

Vector solución
 0.6568563946107259       0.1715718026946371

Función Objetivo:    2.031616341586737

IFAIL =            0

Calls to E04UEF
---------------
     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA
Vector de probabilidad BETA:
 0.6000000000000000       0.7000000000000000

Vector solución
  1.000000000000000       0.0000000000000000E+00

Función Objetivo:    1.169090468459623

IFAIL =            0
```

```
=============================================

Pesos:
 0.8000000000000000      0.2000000000000000
=============================================

Calls to E04NEF
---------------
     Problem Type = LP
     Print Level = 0

SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

  1.000000000000000      0.0000000000000000E+00

Función Objetivo:    0.4000000000000000

IFAIL =            0

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP1

SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

 0.3766233766233766      0.3116883116883117

Función Objetivo:     1.303896103896104

IFAIL =            0

Calls to E04UEF
---------------
     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA
Vector de probabilidad BETA:
 0.8000000000000000      0.8000000000000000

Vector solución
 0.7448458336088113      0.1275770831955943

Función Objetivo:     1.760646932527256

IFAIL =            0


Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA
Vector de probabilidad BETA:
 0.6000000000000000      0.7000000000000000

Vector solución
  1.000000000000000      0.0000000000000000E+00
```

```
Función Objetivo:   0.8993708898000819

IFAIL =             0


==============================================
Pesos:
 0.7000000000000000      0.3000000000000000
==============================================

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = LP
     Print Level = 0

SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

  1.000000000000000      0.0000000000000000E+00

Función Objetivo:   9.9999999999999992E-02

IFAIL =             0

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP1

SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

 0.3561643835616438      0.3219178082191781

Función Objetivo:    1.186986301369863

IFAIL =             0

Calls to E04UEF
---------------
     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de probabilidad BETA:
 0.8000000000000000      0.8000000000000000

Vector solución
 0.8820154539914551      5.8992273004272454E-02

Función Objetivo:    1.470831375875538

IFAIL =             0


Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0
```

```
SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de probabilidad BETA:
 0.6000000000000000       0.7000000000000000

Vector solución
  1.000000000000000       0.0000000000000000E+00

Función Objetivo:   0.6296513111405405

IFAIL =             0


============================================
Solución del problema de ponderaciones

Pesos:
 0.6000000000000000       0.4000000000000000
============================================

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = LP
     Print Level = 0
SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

  3.333333333333333       0.0000000000000000E+00

Función Objetivo:  -0.6666666666666667

IFAIL =             0


Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP1

SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

 0.3333333333333333       0.3333333333333333

Función Objetivo:    1.066666666666667

IFAIL =             0


Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de probabilidad BETA:
 0.8000000000000000       0.8000000000000000

Vector solución
  1.000000000000000       0.0000000000000000E+00
```

```
Función Objetivo:    1.150731285922363

IFAIL =             0

Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de probabilidad BETA:
 0.6000000000000000      0.7000000000000000

Vector solución
  1.000000000000000      0.0000000000000000E+00

Función Objetivo:   0.3599317324809992

IFAIL =             0


================================================
Pesos:
 0.5000000000000000      0.5000000000000000
================================================
Calls to E04NEF
 ---------------

     Problem Type = LP
     Print Level = 0

SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

  3.333333333333333      0.0000000000000000E+00

Función Objetivo:   -1.666666666666667

IFAIL =             0

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP1

SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

 0.3076923076923077      0.3461538461538462

Función Objetivo:   0.9423076923076923

IFAIL =             0

Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA
```

```
Vector de probabilidad BETA:
 0.8000000000000000      0.8000000000000000

Vector solución
  1.000000000000000      0.0000000000000000E+00

Función Objetivo:   0.8239814289124971

IFAIL =             0

Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de probabilidad BETA:
 0.6000000000000000      0.7000000000000000

Vector solución
  1.000000000000000      0.0000000000000000E+00

Función Objetivo:   9.0212153821457794E-02

IFAIL =             0

===============================================
Pesos:
 0.4000000000000000      0.6000000000000000
===============================================

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = LP
     Print Level = 0

SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

  3.333333333333333      0.0000000000000000E+00

Función Objetivo:   -2.666666666666667

IFAIL =             0


Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP1

SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

 0.2786885245901639      0.3606557377049180

Función Objetivo:   0.8131147540983606

IFAIL =             0
```

```
Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de probabilidad BETA:
 0.8000000000000000      0.8000000000000000

Vector solución
  1.000000000000000      0.0000000000000000E+00

Función Objetivo:   0.4972315719026308

IFAIL =             0

Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de probabilidad BETA:
 0.6000000000000000      0.7000000000000000

Vector solución
  3.333333333333333      0.0000000000000000E+00

Función Objetivo:  -0.5983580827936120

IFAIL =             0

==============================================
Pesos:
 0.3000000000000000      0.7000000000000000
==============================================

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = LP
     Print Level = 0

SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

  3.333333333333333      0.0000000000000000E+00

Función Objetivo:   -3.666666666666667

IFAIL =             0

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP1

SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA
```

```
 0.2456140350877193        0.3771929824561404

Función Objetivo:    0.6780701754385965

IFAIL =              0

Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de probabilidad BETA:
 0.8000000000000000        0.8000000000000000

Vector solución
  1.000000000000000        0.0000000000000000E+00

Función Objetivo:    0.1704817148927645

IFAIL =              0

Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de probabilidad BETA:
 0.6000000000000000        0.7000000000000000

Vector solución
  3.333333333333333        0.0000000000000000E+00

Función Objetivo:    -1.497423344992083

IFAIL =              0


===============================================
Pesos:
 0.2000000000000000        0.8000000000000000
===============================================

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = LP
     Print Level = 0

SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

  3.333333333333333        0.0000000000000000E+00

Función Objetivo:    -4.666666666666667

IFAIL =              0
```

```
Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP1

SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

 0.2075471698113208      0.3962264150943396

Función Objetivo:    0.5358490566037736

IFAIL =              0

Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de probabilidad BETA:
 0.8000000000000000      0.8000000000000000

Vector solución
  3.333333333333333      0.0000000000000000E+00

Función Objetivo:  -0.5208938070570057

IFAIL =              0

Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA
Vector de probabilidad BETA:
 0.6000000000000000      0.7000000000000000

Vector solución
  3.333333333333333      0.0000000000000000E+00

Función Objetivo:   -2.396488607190554

IFAIL =              0

===============================================
Pesos:
 0.1000000000000000      0.9000000000000000
===============================================

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = LP
     Print Level = 0
```

```
SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

  3.333333333333333       0.0000000000000000E+00

Función Objetivo:   -5.666666666666667

IFAIL =             0

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP1

SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

 0.1632653061224490       0.4183673469387755

Función Objetivo:   0.3846938775510204

IFAIL =             0

Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de probabilidad BETA:
 0.8000000000000000       0.8000000000000000

Vector solución
  3.333333333333333       0.0000000000000000E+00

Función Objetivo:   -1.610059997089893

IFAIL =             0

Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de probabilidad BETA:
 0.6000000000000000       0.7000000000000000

Vector solución
  3.333333333333333       0.0000000000000000E+00

Función Objetivo:   -3.295553869389026

IFAIL =             0
```

```
==============================================
Pesos:
  0.0000000000000000E+00   1.000000000000000
==============================================

 Calls to E04NEF
 ---------------

      Problem Type = LP
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

   3.333333333333333      0.0000000000000000E+00

 Función Objetivo:   -6.666666666666667

 IFAIL =             0


 Calls to E04NEF
 ---------------

      Problem Type = QP1

 SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

  0.1111111111111111      0.4444444444444444

 Función Objetivo:   0.2222222222222222

 IFAIL =             0


 Calls to E04UEF
 ---------------

      Print Level = 0

 SOLUCIÓN KATAOKA

 Vector de probabilidad BETA:
  0.8000000000000000      0.8000000000000000

 Vector solución
   3.333333333333333      0.0000000000000000E+00

 Función Objetivo:   -2.699226187122781

 IFAIL =             0

 Calls to E04UEF
 ---------------
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN KATAOKA

 Vector de probabilidad BETA:
  0.6000000000000000      0.7000000000000000
```

```
Vector solución
  3.333333333333333        0.0000000000000000E+00

Función Objetivo:    -4.194619131587497

IFAIL =              0

============================================
 TIEMPO C.P.U.:    4.799999237060547      segundos
============================================
** FINAL DE PROGRAMA **
```

A continuación mostramos las soluciones correspondientes al ejemplo 5 para la aproximación de Cantelli:

```
===============================================
              CANTELLI SOLUCIÓN KATAOKA
===============================================

============================================
 Solución del problema de ponderaciones
 Pesos:
   1.000000000000000       0.0000000000000000E+00
============================================
 Vector de probabilidad BETA:
  0.8000000000000000       0.8000000000000000

 Vector solución
  0.4850522800866299       0.2574738599566850

 Función Objetivo:     3.749251382906965

 IFAIL =             0

 Calls to E04UEF
 ---------------

      Print Level = 0

Vector de probabilidad BETA:
  0.6000000000000000       0.7000000000000000

 Vector solución
  0.5329597067382851       0.2335201466308574

 Función Objetivo:     2.778756407543996

 IFAIL =             0
============================================
Pesos:
  0.9000000000000000       0.1000000000000000
============================================

Vector de probabilidad BETA:
  0.8000000000000000       0.8000000000000000

 Vector solución
```

```
  0.4882822471151409        0.2558588764424295

 Función Objetivo:     3.449569652651358

 IFAIL =             0


 Calls to E04UEF
 ---------------

      Print Level = 0

Vector de probabilidad BETA:
  0.6000000000000000        0.7000000000000000

 Vector solución
  0.5509426950125467        0.2245286524937267

 Función Objetivo:     2.537578896837852

 IFAIL =             0

 ===============================================
Pesos:
  0.8000000000000000        0.2000000000000000
 ===============================================
Calls to E04NEF
 ---------------
Vector de probabilidad BETA:
  0.8000000000000000        0.8000000000000000

 Vector solución
  0.4919855392097375        0.2540072303951312

 Función Objetivo:     3.149812741278524

 IFAIL =             0


 Calls to E04UEF
 ---------------

      Print Level = 0

Vector de probabilidad BETA:
  0.6000000000000000        0.7000000000000000

 Vector solución
  0.5720377453391643        0.2139811273304179

 Función Objetivo:     2.295023066246733

 IFAIL =             0


 ===============================================
Pesos:
  0.7000000000000000        0.3000000000000000
 ===============================================
Calls to E04UEF
```

```
---------------

      Print Level = 0

Vector de probabilidad BETA:
  0.8000000000000000       0.8000000000000000

 Vector solución
  0.4962843718852185       0.2518578140573908

 Función Objetivo:    2.849962815325700

 IFAIL =             0

 Calls to E04UEF
 ---------------

      Print Level = 0

Vector de probabilidad BETA:
  0.6000000000000000       0.7000000000000000

 Vector solución
  0.5974674496470292       0.2012662751764854

 Función Objetivo:    2.050705893907875

 IFAIL =             0


 ==============================================
 Pesos:
  0.6000000000000000       0.4000000000000000
 ==============================================

Vector de probabilidad BETA:
  0.8000000000000000       0.8000000000000000

 Vector solución
  0.5013503977090825       0.2493248011454587

 Función Objetivo:    2.549995500173275

 IFAIL =             0


 Calls to E04UEF
 ---------------

      Print Level = 0

Vector de probabilidad BETA:
  0.6000000000000000       0.7000000000000000

 Vector solución
  0.6292582719281018       0.1853708640359491

 Función Objetivo:    1.804043211318123

 IFAIL =             0
```

```
==============================================
Pesos:
  0.5000000000000000      0.5000000000000000
==============================================

Vector de probabilidad BETA:
  0.8000000000000000      0.8000000000000000

 Vector solución
  0.5074342361401746      0.2462828819299127

 Función Objetivo:     2.249876366919276

 IFAIL =            0


 Calls to E04UEF
 ---------------

      Print Level = 0

Vector de probabilidad BETA:
  0.6000000000000000      0.7000000000000000

 Vector solución
  0.6710894894994481      0.1644552552502759

 Función Objetivo:     1.554077601894061

 IFAIL =            0


==============================================
Pesos:
  0.4000000000000000      0.6000000000000000
==============================================
Vector de probabilidad BETA:
  0.8000000000000000      0.8000000000000000

 Vector solución
  0.5149203345986447      0.2425398327006776

 Función Objetivo:     1.949554727195140

 IFAIL =            0

 Calls to E04UEF
 ---------------
      Print Level = 0

Vector de probabilidad BETA:
  0.6000000000000000      0.7000000000000000

 Vector solución
  0.7305844375021540      0.1347077812489230

 Función Objetivo:     1.299069920949982
```

```
IFAIL =              0

============================================
Pesos:
 0.3000000000000000        0.7000000000000000
============================================

Vector de probabilidad BETA:
  0.8000000000000000        0.8000000000000000

 Vector solución
  0.5244382078224750        0.2377808960887625

 Función Objetivo:     1.648951809060679

 IFAIL =              0


 Calls to E04UEF
 ---------------

      Print Level = 0

Vector de probabilidad BETA:
  0.6000000000000000        0.7000000000000000

 Vector solución
  0.8272644040771272        8.6367797961436390E-02

 Función Objetivo:     1.035309707599933

 IFAIL =              0


 ============================================
Pesos:
  0.2000000000000000        0.8000000000000000
 ============================================
Vector de probabilidad BETA:
  0.8000000000000000        0.8000000000000000

 Vector solución
  0.5371164489557399        0.2314417755221301

 Función Objetivo:     1.347935805823071

 IFAIL =              0


 Calls to E04UEF
 ---------------

      Print Level = 0

Vector de probabilidad BETA:
  0.6000000000000000        0.7000000000000000

 Vector solución
   1.000000000000000        0.0000000000000000E+00
```

```
Función Objetivo:    0.7524615882873579

IFAIL =              0
===============================================
Pesos:
 0.1000000000000000        0.9000000000000000
===============================================
Vector de probabilidad BETA:
 0.8000000000000000        0.8000000000000000

Vector solución
 0.5552720752270234        0.2223639623864883

Función Objetivo:    1.046260934715451

IFAIL =              0
Calls to E04UEF
---------------
     Print Level = 0

Vector de probabilidad BETA:
 0.6000000000000000        0.7000000000000000

Vector solución
  1.000000000000000        0.0000000000000000E+00

Función Objetivo:    0.4563542438783224

IFAIL =              0

===============================================
Pesos:
 0.0000000000000000E+00   1.000000000000000
===============================================
Vector de probabilidad BETA:
 0.8000000000000000        0.8000000000000000

Vector solución
 0.5848904725604411        0.2075547637197794

Función Objetivo:    0.7433795288692700

IFAIL =              0

Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

 Vector de probabilidad BETA:
 0.6000000000000000        0.7000000000000000

Vector solución
  1.000000000000000        0.0000000000000000E+00

Función Objetivo:    0.1602468994692868
IFAIL =              0
===============================================
 TIEMPO C.P.U.:   5.929998397827148     segundos
===============================================
```

Soluciones del ejemplo 6.

```
==================================================
                 CASO NORMAL
==================================================

================================================
      SOLUCIÓN PARA EL VECTOR DE PESOS:
  1.000000000000000      0.0000000000000000E+00
================================================
Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP2
     Print Level = 0

SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

 0.3846153846153846      0.3076923076923077

Función Objetivo:    26.76923076923077

IFAIL =              0

Calls to E04NEF
---------------
     Problem Type = QP2

SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

  1.636363636363636       5.090909090909091

Función Objetivo:    413.0909090909091

IFAIL =              0

Calls to E04UEF
---------------
     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de Probabilidades BETA:
 0.8000000000000000      0.7500000000000000

Vector solución:
 0.7018621202230769      0.3308162864665218

Función Objetivo:    74.06940588134253

IFAIL =              0

Calls to E04UEF
---------------
     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA
Vector de Probabilidades BETA:
```

```
 0.6000000000000000       0.6000000000000000

Vector solución:
 0.5332504581576452       0.2799997726085691

Función Objetivo:    55.81754460285822

IFAIL =              0

================================================
      SOLUCIÓN PARA EL VECTOR DE PESOS:
 0.9000000000000000       0.1000000000000000
================================================

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP2
     Print Level = 0

SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

 0.3740458015267176       0.3129770992366412

Función Objetivo:    41.31679389312977

IFAIL =              0


Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP2

SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

 0.0000000000000000E+00   10.00000000000000

Función Objetivo:    2358.000000000000

IFAIL =              0

Calls to E04UEF
---------------
     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de Probabilidades BETA:
 0.8000000000000000       0.7500000000000000

Vector solución:
 0.6834829100896574       0.4065536805737651

Función Objetivo:    112.1832532688130

IFAIL =              0

Calls to E04UEF
---------------
```

```
     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de Probabilidades BETA:
 0.6000000000000000      0.6000000000000000

Vector solución:
 0.5350037476021724      0.3443152056342931

Función Objetivo:    87.49261203859229

IFAIL =              0

===============================================
      SOLUCIÓN PARA EL VECTOR DE PESOS:
 0.8000000000000000      0.2000000000000000
===============================================

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP2
     Print Level = 0

SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

 0.3636363636363636      0.3181818181818182

Función Objetivo:    55.86363636363636

IFAIL =              0

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP2

SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

 0.0000000000000000E+00   10.00000000000000

Función Objetivo:    4244.000000000000

IFAIL =              0

Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de Probabilidades BETA:
 0.8000000000000000      0.7500000000000000

Vector solución:
 0.6664475219796689      0.4926974090282237
```

```
Función Objetivo:     150.2334413119187

IFAIL =               0


Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de Probabilidades BETA:
 0.6000000000000000      0.6000000000000000

Vector solución:
 0.5365850120127269      0.4174239258212943

Función Objetivo:     119.1231206999022

IFAIL =               0

=================================================
      SOLUCIÓN PARA EL VECTOR DE PESOS:
 0.7000000000000000      0.3000000000000000
=================================================

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP2
     Print Level = 0

SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

 0.3533834586466165      0.3233082706766917

Función Objetivo:     70.40977443609023

IFAIL =               0

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP2

SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

 0.0000000000000000E+00   10.00000000000000

Función Objetivo:     6130.000000000000

IFAIL =               0

Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA
```

```
Vector de Probabilidades BETA:
 0.8000000000000000       0.7500000000000000

Vector solución:
 0.6505971291775793       0.5915425772414417

Función Objetivo:     188.2063605159914

IFAIL =              0

Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de Probabilidades BETA:
 0.6000000000000000       0.6000000000000000

Vector solución:
 0.5380089011726020       0.5012626601339727

Función Objetivo:     150.6992631848153

IFAIL =              0

===============================================
      SOLUCIÓN PARA EL VECTOR DE PESOS:
 0.6000000000000000       0.4000000000000000
===============================================

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP2
     Print Level = 0

SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

 0.3750000000000000       0.3684210526315789

Función Objetivo:     84.94671052631579

IFAIL =              0

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP2

SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

 0.0000000000000000E+00   10.00000000000000

Función Objetivo:     8016.000000000000

IFAIL =              0
```

```
Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de Probabilidades BETA:
 0.8000000000000000      0.7500000000000000

Vector solución:
 0.6357919217772751      0.7061145826402244

Función Objetivo:    226.0840068824680

IFAIL =             0

Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de Probabilidades BETA:
 0.6000000000000000      0.6000000000000000

Vector solución:
 0.5392862005849494      0.5983820155612103

Función Objetivo:    182.2081230634362

IFAIL =             0

================================================
      SOLUCIÓN PARA EL VECTOR DE PESOS:
 0.5000000000000000      0.5000000000000000
================================================

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP2
     Print Level = 0

SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

 0.4000000000000000      0.4285714285714286

Función Objetivo:    99.45714285714286

IFAIL =             0


Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP2
```

```
SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

 0.0000000000000000E+00   10.0000000000000

Función Objetivo:    9902.000000000000

IFAIL =              0


Calls to E04UEF
---------------
     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de Probabilidades BETA:
 0.8000000000000000      0.7500000000000000

Vector solución:
 0.6219066133561061      0.8404846612515702

Función Objetivo:    263.8420967469068

IFAIL =              0

Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de Probabilidades BETA:
 0.6000000000000000      0.6000000000000000

Vector solución:
 0.5404239123389108      0.7122107466729610

Función Objetivo:    213.6323370860643

IFAIL =              0

==================================================
      SOLUCIÓN PARA EL VECTOR DE PESOS:
 0.4000000000000000      0.6000000000000000
==================================================

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP2
     Print Level = 0

SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

 0.4230769230769231      0.5000000000000000

Función Objetivo:    113.9346153846154

IFAIL =              0
```

```
Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP2

SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

 0.0000000000000000E+00   10.00000000000000

Función Objetivo:    11788.00000000000

IFAIL =             0

Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de Probabilidades BETA:
 0.8000000000000000      0.7500000000000000

Vector solución:
 0.6088262775420949       1.000264581775709

Función Objetivo:    301.4471090443484

IFAIL =             0

Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de Probabilidades BETA:
 0.6000000000000000      0.6000000000000000

Vector solución:
 0.5414250096801271      0.8474694474611272

Función Objetivo:    244.9480012502970

IFAIL =             0

================================================
      SOLUCIÓN PARA EL VECTOR DE PESOS:
 0.3000000000000000      0.7000000000000000
================================================

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP2
     Print Level = 0
SOLUCIÓN VALOR ESPERADO
```

```
 0.4444444444444444       0.5862068965517242

Función Objetivo:    128.3701149425287

IFAIL =             0


Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP2

SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

 0.0000000000000000E+00   10.00000000000000

Función Objetivo:    13674.00000000000

IFAIL =             0


Calls to E04UEF
---------------
     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de Probabilidades BETA:
 0.8000000000000000       0.7500000000000000

Vector solución:
 0.5964420064884697        1.193411940304408

Función Objetivo:    338.8514708706814

IFAIL =             0

Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de Probabilidades BETA:
 0.6000000000000000       0.6000000000000000

Vector solución:
 0.5422877653288416        1.010842549469988

Función Objetivo:    276.1212701278227

IFAIL =             0

===========================================
      SOLUCIÓN PARA EL VECTOR DE PESOS:
 0.2000000000000000       0.8000000000000000
===========================================

Calls to E04NEF
```

```
---------------

     Problem Type = QP2
     Print Level = 0

SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

 0.4642857142857143       0.6923076923076923

Función Objetivo:    142.7502747252747

IFAIL =            0


Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP2

SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

 0.0000000000000000E+00    10.00000000000000

Función Objetivo:    15560.00000000000

IFAIL =            0

Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de Probabilidades BETA:
 0.8000000000000000       0.7500000000000000

Vector solución:
 0.5846459346180862        1.431600193762199

Función Objetivo:    375.9853692362402

IFAIL =            0


Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA
Vector de Probabilidades BETA:
 0.6000000000000000       0.6000000000000000

Vector solución:
 0.5430044494177897        1.212118759752839

Función Objetivo:    307.1025872449137

IFAIL =            0
```

```
==================================================
      SOLUCIÓN PARA EL VECTOR DE PESOS:
 0.1000000000000000      0.9000000000000000
==================================================

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP2
     Print Level = 0

SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

 0.4827586206896552      0.8260869565217391

Función Objetivo:    157.0545727136432

IFAIL =             0

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP2

SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

 0.0000000000000000E+00   10.00000000000000

Función Objetivo:    17446.00000000000

IFAIL =             0

Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA
Vector de Probabilidades BETA:
 0.8000000000000000      0.7500000000000000

Vector solución:
 0.5733249041510552       1.732677359488888

Función Objetivo:    412.7420657036078

IFAIL =             0


Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA

Vector de Probabilidades BETA:
 0.6000000000000000      0.6000000000000000
```

```
Vector solución:
 0.5435590405372127       1.466231270316100

Función Objetivo:    337.8163673586515

IFAIL =             0

================================================
      SOLUCIÓN PARA EL VECTOR DE PESOS:
 0.0000000000000000E+00   1.000000000000000
================================================

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP2
     Print Level = 0

SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

 0.5000000000000000       1.000000000000000

Función Objetivo:    171.2500000000000

IFAIL =             0

Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP2

SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

 0.0000000000000000E+00   10.00000000000000

Función Objetivo:    19332.00000000000

IFAIL =             0

Calls to E04UEF
---------------

     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA
Vector de Probabilidades BETA:
 0.8000000000000000      0.7500000000000000

Vector solución:
 0.5623519906910245       2.125378475800765

Función Objetivo:    448.9497773811465

IFAIL =             0

Calls to E04UEF
---------------
```

```
     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA
Vector de Probabilidades BETA:
 0.6000000000000000       0.6000000000000000

Vector solución:
 0.5439233907443367        1.797152126716245

Función Objetivo:    368.1413123516943

IFAIL =             0

==============================================
 TIEMPO C.P.U.:   6.449999809265137     segundos
==============================================
** FINAL DE PROGRAMA **
```

Soluciones del ejemplo 7.

```
==================================================
               ALEATORIEDAD SIMPLE
==================================================

==================================================
      SOLUCIÓN PARA EL VECTOR DE PESOS:
  1.000000000000000      0.0000000000000000E+00
==================================================
Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP2
     Print Level = 0

SOLUCIÓN VALOR ESPERADO
  0.5656934306569343      1.773722627737226

Función Objetivo:    83.24635036496350

IFAIL =             0
Calls to E04NEF
---------------
     Problem Type = QP2
     Print Level = 0

SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA
 0.0000000000000000E+00   6.000000000000000

Función Objetivo:    1368.000000000000

IFAIL =             0
Calls to E04UEF
---------------
     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA
Vector de probabilidades BETA:
 0.9000000000000000      0.9000000000000000

Vector solución:
 0.7262754029084703      1.709489838836612

Función Objetivo:    204.7794152159183

IFAIL =             0


Calls to E04UEF
---------------
     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA
Vector de probabilidades BETA:
 0.8000000000000000      0.8000000000000000

Vector solución:
```

```
 0.6727518955411542        1.730899241783538

Función Objetivo:     164.2997970306064

IFAIL =              0

================================================
      SOLUCIÓN PARA EL VECTOR DE PESOS:
 0.9000000000000000      0.1000000000000000
================================================
Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP2
     Print Level = 0

SOLUCIÓN VALOR ESPERADO
 0.6600153491941673        1.735993860322333

Función Objetivo:     81.67954719877206

IFAIL =              0
Calls to E04NEF
---------------
     Problem Type = QP2
     Print Level = 0

SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA
 0.0000000000000000E+00   6.000000000000000

Función Objetivo:     1415.400000000000

IFAIL =              0
Calls to E04UEF
---------------
     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA
Vector de probabilidades BETA:
 0.9000000000000000      0.9000000000000000

Vector solución:
 0.8820637871154648        1.647174485153814

Función Objetivo:     204.2963754502592

IFAIL =              0
Calls to E04UEF
---------------
     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA
Vector de probabilidades BETA:
 0.8000000000000000      0.8000000000000000

Vector solución:
 0.8080788348214307        1.676768466071428

Función Objetivo:     163.4812181574685
```

```
IFAIL =            0

 ================================================
      SOLUCIÓN PARA EL VECTOR DE PESOS:
  0.8000000000000000       0.2000000000000000
 ================================================
Calls to E04NEF
 ---------------
      Problem Type = QP2
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

  0.7645631067961165       1.694174757281553

 Función Objetivo:     80.00995145631068

 IFAIL =             0
Calls to E04NEF
 ---------------
      Problem Type = QP2
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA
  0.0000000000000000E+00   6.000000000000000

 Función Objetivo:     1462.800000000000

 IFAIL =             0
 Calls to E04UEF
 ---------------

      Print Level = 0

 SOLUCIÓN KATAOKA
 Vector de probabilidades BETA:
  0.9000000000000000       0.9000000000000000

 Vector solución:
   1.054546946424897       1.578181221430041

 Función Objetivo:     203.5330526780938

 IFAIL =             0
 Calls to E04UEF
 ---------------
       Print Level = 0

 SOLUCIÓN KATAOKA
 Vector de probabilidades BETA:
  0.8000000000000000       0.8000000000000000

 Vector solución:
  0.9579658197619200       1.616813672095232

 Función Objetivo:     162.4511115739515

 IFAIL =             0

 ================================================
```

```
        SOLUCIÓN PARA EL VECTOR DE PESOS:
  0.7000000000000000        0.3000000000000000
 ================================================
Calls to E04NEF
 ---------------

      Problem Type = QP2
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

  0.8810949529512404        1.647562018819504

 Función Objetivo:     78.21988879384089

 IFAIL =              0
 Calls to E04NEF
 ---------------
      Problem Type = QP2
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA

   3.636363636363636       0.5454545454545455

 Función Objetivo:     1482.166942148760

 IFAIL =              0
Calls to E04UEF
 ---------------
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN KATAOKA
 Vector de probabilidades BETA:
  0.9000000000000000       0.9000000000000000

 Vector solución:
   1.246549806194129        1.501380077522348

 Función Objetivo:     202.4418511669716

 IFAIL =              0
 Calls to E04UEF
 ---------------

      Print Level = 0

 SOLUCIÓN KATAOKA
 Vector de probabilidades BETA:
  0.8000000000000000       0.8000000000000000

 Vector solución:
   1.124891020066384        1.550043591973446

 Función Objetivo:     161.1734023480328

 IFAIL =              0

 ================================================
        SOLUCIÓN PARA EL VECTOR DE PESOS:
```

```
 0.6000000000000000       0.4000000000000000
 ==============================================
Calls to E04NEF
 --------------

     Problem Type = QP2
     Print Level = 0

 SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

   1.011796733212341        1.595281306715064

 Función Objetivo:    76.28738656987296

 IFAIL =              0
 Calls to E04NEF
 --------------

     Problem Type = QP2
     Print Level = 0

 SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA
   3.636363636363636       0.5454545454545454

 Función Objetivo:    1475.484297520661

 IFAIL =              0
 Calls to E04UEF
 --------------
     Print Level = 0

 SOLUCIÓN KATAOKA
 Vector de probabilidades BETA:
  0.9000000000000000       0.9000000000000000

 Vector solución:
   1.461569073334026        1.415372370666389

 Función Objetivo:    200.9637847815665

 IFAIL =              0
 Calls to E04UEF
 --------------

     Print Level = 0

 SOLUCIÓN KATAOKA
 Vector de probabilidades BETA:
  0.8000000000000000       0.8000000000000000

 Vector solución:
   1.311927063644672        1.475229174542131

 Función Objetivo:    159.6033319197242

 IFAIL =              0

 ==============================================
       SOLUCIÓN PARA EL VECTOR DE PESOS:
  0.5000000000000000       0.5000000000000000
```

```
==========================================
Calls to E04NEF
--------------
     Problem Type = QP2
     Print Level = 0

 SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

   1.159420289855072        1.536231884057971

 Función Objetivo:    74.18478260869565

 IFAIL =              0
Calls to E04NEF
--------------
     Problem Type = QP2
     Print Level = 0

 SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA
   3.636363636363636       0.5454545454545455

 Función Objetivo:    1468.801652892562

 IFAIL =              0
Calls to E04UEF
--------------
     Print Level = 0

 SOLUCIÓN KATAOKA
 Vector de probabilidades BETA:
  0.9000000000000000       0.9000000000000000

 Vector solución:
   1.703983840274774        1.318406463890090

 Función Objetivo:    199.0248672182163

 IFAIL =              0
 Calls to E04UEF
 --------------
     Print Level = 0

 SOLUCIÓN KATAOKA
 Vector de probabilidades BETA:
  0.8000000000000000       0.8000000000000000

 Vector solución:
   1.522929854663856        1.390828058134458

 Función Objetivo:    157.6846840544918

 IFAIL =              0

 ==========================================
       SOLUCIÓN PARA EL VECTOR DE PESOS:
  0.4000000000000000       0.6000000000000000
 ==========================================
Calls to E04NEF
--------------
```

```
      Problem Type = QP2
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

   1.327479338842975       1.469008264462810

 Función Objetivo:    71.87675619834711

 IFAIL =              0
 Calls to E04NEF
 ---------------
      Problem Type = QP2
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA
   3.63636363636363(      0.5454545454545455

 Función Objetivo:    1462.119008264463

 IFAIL =              0


 Calls to E04UEF
 ---------------

      Print Level = 0

 SOLUCIÓN KATAOKA
 Vector de probabilidades BETA:
  0.9000000000000000     0.9000000000000000

 Vector solución:
   1.979349670132397       1.208260131947041

 Función Objetivo:    196.5310449111748

 IFAIL =              0
Calls to E04UEF
 ---------------
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN KATAOKA
 Vector de probabilidades BETA:
  0.8000000000000000     0.8000000000000000

 Vector solución:
   1.762803766468634       1.294878493412546

 Función Objetivo:    155.3458782157769

 IFAIL =              0

 ================================================
       SOLUCIÓN PARA EL VECTOR DE PESOS:
  0.3000000000000000     0.7000000000000000
 ================================================
Calls to E04NEF
 ---------------
      Problem Type = QP2
```

```
     Print Level = 0

SOLUCIÓN VALOR ESPERADO

  1.520532741398446       1.391786903440622

Función Objetivo:    69.31748057713651

IFAIL =              0
Calls to E04NEF
---------------
     Problem Type = QP2
     Print Level = 0

SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA
  3.636363636363636      0.5454545454545455

Función Objetivo:    1455.436363636364

IFAIL =              0
Calls to E04UEF
---------------
     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA
Vector de probabilidades BETA:
 0.9000000000000000      0.9000000000000000

Vector solución:
  2.294816672913531       1.082073330834587

Función Objetivo:    193.3609428687420

IFAIL =              0
Calls to E04UEF
---------------
     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA
Vector de probabilidades BETA:
 0.8000000000000000      0.8000000000000000

Vector solución:
  2.037881490999047       1.184847403600381

Función Objetivo:    152.4943539743771

IFAIL =              0

================================================
      SOLUCIÓN PARA EL VECTOR DE PESOS:
 0.2000000000000000      0.8000000000000000
================================================
Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP2
     Print Level = 0

SOLUCIÓN VALOR ESPERADO
```

```
  1.744604316546763        1.302158273381295

Función Objetivo:    66.44640287769784

IFAIL =              0
Calls to E04NEF
---------------
     Problem Type = QP2
     Print Level = 0

SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA
  3.636363636363636       0.5454545454545454

Función Objetivo:    1448.753719008264

IFAIL =              0
Calls to E04UEF
---------------
     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA
Vector de probabilidades BETA:
 0.9000000000000000       0.9000000000000000

Vector solución:
  2.659735388782717       0.9361058444869131

Función Objetivo:    189.3552497175767

IFAIL =              0
Calls to E04UEF
---------------
     Print Level = 0

SOLUCIÓN KATAOKA
Vector de probabilidades BETA:
 0.8000000000000000       0.8000000000000000

Vector solución:
  2.356480095386103        1.057407961845559

Función Objetivo:    149.0083108357327

IFAIL =              0

===============================================
      SOLUCIÓN PARA EL VECTOR DE PESOS:
 0.1000000000000000       0.9000000000000000
===============================================
Calls to E04NEF
---------------

     Problem Type = QP2
     Print Level = 0

SOLUCIÓN VALOR ESPERADO
  2.007822685788787        1.196870925684485

Función Objetivo:    63.18181225554107
```

```
 IFAIL =             0
Calls to E04NEF
 ---------------
Problem Type = QP2
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA
   3.636363636363636       0.5454545454545455

 Función Objetivo:    1442.071074380165

 IFAIL =             0


 Calls to E04UEF
 ---------------

      Print Level = 0

 SOLUCIÓN KATAOKA
 Vector de probabilidades BETA:
  0.9000000000000000       0.9000000000000000

 Vector solución:
   3.086552781235017       0.7653788875059933

 Función Objetivo:    184.3008022369518

 IFAIL =             0
 Calls to E04UEF
 ---------------
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN KATAOKA
 Vector de probabilidades BETA:
  0.8000000000000000       0.8000000000000000

 Vector solución:
   2.729734880813462       0.9081060476746153

 Función Objetivo:    144.7242380919123

 IFAIL =             0

 ================================================
      SOLUCIÓN PARA EL VECTOR DE PESOS:
  0.0000000000000000E+00   1.000000000000000
 ================================================
Calls to E04NEF
 ---------------

      Problem Type = QP2
      Print Level = 0

SOLUCIÓN VALOR ESPERADO
   2.321428571428571       1.071428571428571

 Función Objetivo:    59.41071428571429

 IFAIL =             0
```

```
Calls to E04NEF
 ---------------
      Problem Type = QP2
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN MÍNIMA VARIANZA
   3.636363636363636       0.5454545454545454

 Función Objetivo:    1435.388429752066

 IFAIL =              0
 Calls to E04UEF
 ---------------
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN KATAOKA
 Vector de probabilidades BETA:
  0.9000000000000000       0.9000000000000000

 Vector solución:
   3.592164367841035       0.5631342528635859

 Función Objetivo:    177.9060697076182

 IFAIL =              0
 Calls to E04UEF
 ---------------
      Print Level = 0

 SOLUCIÓN KATAOKA
 Vector de probabilidades BETA:
  0.8000000000000000       0.8000000000000000

 Vector solución:
   3.172883401235013       0.7308466395059949

 Función Objetivo:    139.4175257746096

 IFAIL =              0

 ==============================================
  TIEMPO C.P.U.:   6.520000457763672     segundos
 ==============================================
 ** FINAL DE PROGRAMA **
```

Soluciones del ejemplo 8.

```
****************************************************
                  Método Varianza
****************************************************
Calls to E04NEF
 ---------------
      Problem Type = QP1
      Print Level = 0
 ****************************************************

 Solución para los pesos
   1.000000000000000      0.0000000000000000E+00

 Punto:
  0.8000000000000000      1.600000000000000

 Valor de la función ponderada:    80.00000000000000

 Valor de IFAIL:             0

****************************************************

 Solución para los pesos
  0.9000000000000000      0.1000000000000000

 Punto:
  0.7764563596049183      1.611771820197541

 Valor de la función ponderada:    66.40545051400927

 Valor de IFAIL:             0

****************************************************
 Solución para los pesos
  0.8000000000000000      0.2000000000000000

 Punto:
  0.7532603025560772      1.623369848721961

 Valor de la función ponderada:    54.56292123109025

 Valor de IFAIL:             0

****************************************************

 Solución para los pesos
  0.7000000000000000      0.3000000000000000

 Punto:
  0.7347507842453817      1.632624607877309

 Valor de la función ponderada:    44.49572673405368

 Valor de IFAIL:             0
****************************************************
 Solución para los pesos
```

```
 0.6000000000000000       0.4000000000000000

Punto:
 0.7318489835430784        1.634075508228461

Valor de la función ponderada:    36.22722168441433

Valor de IFAIL:               0
***************************************************

Solución para los pesos
 0.5000000000000000       0.5000000000000000

Punto:
 0.7719298245614035        1.614035087719298

Valor de la función ponderada:    29.75438596491228

Valor de IFAIL:               0
***************************************************
Solución para los pesos
 0.4000000000000000       0.6000000000000000

Punto:
 0.9217758985200846        1.539112050739958

Valor de la función ponderada:    24.94105708245243

Valor de IFAIL:               0

***************************************************
Solución para los pesos
 0.3000000000000000       0.7000000000000000

Punto:
  1.316375198728140        1.341812400635930

Valor de la función ponderada:    21.19020667726550

Valor de IFAIL:               0
***************************************************
Solución para los pesos
 0.2000000000000000       0.8000000000000000

Punto:
  2.042194092827004       0.9789029535864979

Valor de la función ponderada:    17.15578059071730

Valor de IFAIL:               0
***************************************************
Solución para los pesos
 0.1000000000000000       0.9000000000000000

Punto:
  2.686070686070686       0.6569646569646570

Valor de la función ponderada:    12.80798336798337

Valor de IFAIL:               0
```

```
***************************************************

Solución para los pesos
 0.0000000000000000E+00   1.000000000000000

Punto:
  2.769230769230769       0.6153846153846154

Valor de la función ponderada:    11.07692307692308

Valor de IFAIL:            0
```

```
**************************************************
                 Kataoka. CASO NORMAL.
**************************************************

  Calls to E04UEF
 ---------------

      Print Level = 0

 **************************************************
 Soluciones      para      la      probabilidad      BETA:
0.9500000000000000
 **************************************************

 Pesos:
   1.000000000000000      0.0000000000000000E+00

 Punto:
  0.7128673824731410      1.643566308763429

 Valor de la función ponderada:    25.09025075034094

 Valor de IFAIL:              0
**************************************************
 Pesos:
  0.9000000000000000      0.1000000000000000

 Punto:
  0.6159079083072992      1.692046045846350

 Valor de la función ponderada:    23.16093572619490

 Valor de IFAIL:              0

**************************************************
 Pesos:
  0.8000000000000000      0.2000000000000000

 Punto:
  0.4925140134434623      1.753742993278269

 Valor de la función ponderada:    21.23601595359070

 Valor de IFAIL:              0

**************************************************
 Pesos:
  0.7000000000000000      0.3000000000000000

 Punto:
  0.3285767470327386      1.835711626483631

 Valor de la función ponderada:    19.32002769948082

 Valor de IFAIL:              0

**************************************************
 Pesos:
  0.6000000000000000      0.4000000000000000
```

```
 Punto:
  9.5872882161270965E-02    1.952063558919365

 Valor de la función ponderada:    17.41852927970961

 Valor de IFAIL:                 0

************************************************************
 Pesos:
  0.5000000000000000       0.5000000000000000

 Punto:
  0.0000000000000000E+00    2.000000000000000

 Valor de la función ponderada:    15.59106216854287

 Valor de IFAIL:                 0

************************************************************
Pesos:
  0.4000000000000000       0.6000000000000000

 Punto:
  0.0000000000000000E+00    2.000000000000000

 Valor de la función ponderada:    14.05169673526252

 Valor de IFAIL:                 0

************************************************************
 Pesos:
  0.3000000000000000       0.7000000000000000

 Punto:
  0.0000000000000000E+00    2.000000000000000

 Valor de la función ponderada:    12.88973936861010

 Valor de IFAIL:                 0

************************************************************
 Pesos:
  0.2000000000000000       0.8000000000000000

 Punto:
  0.0000000000000000E+00    2.000000000000000

 Valor de la función ponderada:    12.15323867797852

 Valor de IFAIL:                 0

************************************************************
 Pesos:
  0.1000000000000000       0.9000000000000000

 Punto:
  0.0000000000000000E+00    2.000000000000000

 Valor de la función ponderada:    11.83322683760767
```

```
    Valor de IFAIL:            0

   ***************************************************
    Solución       para      la       probabilidad      BETA:
0.9500000000000000

    Pesos:
     0.0000000000000000E+00   1.000000000000000

    Punto:
     0.0000000000000000E+00   2.000000000000000

    Valor de la función ponderada:    11.86912155151367

    Valor de IFAIL:            0

    ***************************************************
   ==============================================
     Tiempo C.P.U.:     2.959999084472656
   ==============================================
```

```
**************************************************
              Kataoka. CASO NORMAL.
**************************************************

**************************************************
Solución para la probabilidad BETA:   0.8000000000
**************************************************

**************************************************
 Pesos:
   1.000000000000000      0.0000000000000000E+00

 Punto:
  0.6289926548276509       1.685503672586175

 Valor de la función ponderada:    17.88505860039882

 Valor de IFAIL:                0

**************************************************
Pesos:
  0.9000000000000000      0.1000000000000000

 Punto:
  0.4583346347905220       1.770832682604739

 Valor de la función ponderada:    16.55342934257062

 Valor de IFAIL:                0

**************************************************
 Pesos:
  0.8000000000000000      0.2000000000000000

 Punto:
  0.2255811890547875       1.887209405472606

 Valor de la función ponderada:    15.16191330283993

 Valor de IFAIL:                0

**************************************************
 Pesos:
  0.7000000000000000      0.3000000000000000

 Punto:
  0.0000000000000000E+00   2.000000000000000

 Valor de la función ponderada:    13.68300622802303

 Valor de IFAIL:                0

**************************************************
 Pesos:
  0.6000000000000000      0.4000000000000000

 Punto:
  0.0000000000000000E+00   2.000000000000000

 Valor de la función ponderada:    12.23872277058070
```

```
 Valor de IFAIL:            0
*************************************************
 Pesos:
  0.5000000000000000      0.5000000000000000

 Punto:
  0.0000000000000000E+00   2.000000000000000

 Valor de la función ponderada:    10.90745284815319

 Valor de IFAIL:            0

*************************************************
 Pesos:
  0.4000000000000000      0.6000000000000000

 Punto:
  0.0000000000000000E+00   2.000000000000000

 Valor de la función ponderada:    9.729142194169704

 Valor de IFAIL:            0

*************************************************
 Pesos:
  0.3000000000000000      0.7000000000000000

 Punto:
  0.0000000000000000E+00   2.000000000000000

 Valor de la función ponderada:    8.743939692228431

 Valor de IFAIL:            0

*************************************************
 Pesos:
  0.2000000000000000      0.8000000000000000

 Punto:
  0.0000000000000000E+00   2.000000000000000

 Valor de la función ponderada:    7.976430344581604

 Valor de IFAIL:            0

*************************************************
 Pesos:
  0.1000000000000000      0.9000000000000000

 Punto:
  0.0000000000000000E+00   2.000000000000000

 Valor de la función ponderada:    7.422025589368738

 Valor de IFAIL:            0
*************************************************
 Pesos:
  0.0000000000000000E+00   1.000000000000000
```

```
Punto:
 0.0000000000000000E+00   2.000000000000000

Valor de la función ponderada:    7.049727320671082

Valor de IFAIL:              0
==================================================
 Tiempo C.P.U.:    1.779998779296875
 ==================================================
```

```
***************************************************
     Kataoka. Aplicación de la desigualdad de Cantelli.
***************************************************
 Solución para la probabilidad BETA:    0.9500000000
***************************************************

 Calls to E04UEF
 ---------------

     Print Level = 0

***************************************************
 Pesos:
   1.000000000000000       0.0000000000000000E+00

 Punto:
  0.7283741630574231       1.635812918471288

 Valor de la función ponderada:    28.27064632295094

 Valor de IFAIL:              0

***************************************************
 Pesos:
  0.9000000000000000       0.1000000000000000

 Punto:
  0.6446222385390752       1.677688880730462

 Valor de la función ponderada:    26.06642465602246

 Valor de IFAIL:              0

***************************************************
 Pesos:
  0.2000000000000000       0.8000000000000000

 Punto:
  0.0000000000000000E+00   2.000000000000000

 Valor de la función ponderada:    14.00000000000000

 Valor de IFAIL:              0

***************************************************
 Pesos:
  0.8000000000000000       0.2000000000000000

 Punto:
  0.5396396385575954       1.730180180721202

 Valor de la función ponderada:    23.88490588914717

 Valor de IFAIL:              0

***************************************************
 Pesos:
  0.7000000000000000       0.3000000000000000
```

```
Punto:
 0.4035406239616545        1.798229688019173

Valor de la función ponderada:    21.73984187146081

Valor de IFAIL:                0

***************************************************
Pesos:
 0.6000000000000000       0.4000000000000000

Punto:
 0.2183009356486146        1.890849532175693

Valor de la función ponderada:    19.65335002552292

Valor de IFAIL:                0

***************************************************
Pesos:
 0.5000000000000000       0.5000000000000000

Punto:
 0.0000000000000000E+00   2.000000000000000

Valor de la función ponderada:    17.66190378969060

Valor de IFAIL:                0

***************************************************
Pesos:
 0.4000000000000000       0.6000000000000000

Punto:
 0.0000000000000000E+00   2.000000000000000

Valor de la función ponderada:    15.96289923765897

Valor de IFAIL:                0

***************************************************
Pesos:
 0.3000000000000000       0.7000000000000000

Punto:
 0.0000000000000000E+00   2.000000000000000

Valor de la función ponderada:    14.72279032045115

Valor de IFAIL:                0

***************************************************
Pesos:
 0.2000000000000000       0.8000000000000000

Punto:
 0.0000000000000000E+00   2.000000000000000

Valor de la función ponderada:    14.00000000000000
```

```
 Valor de IFAIL:              0

**************************************************
 Pesos:
  0.1000000000000000       0.9000000000000000

 Punto:
  0.0000000000000000E+00    2.000000000000000

 Valor de la función ponderada:     13.78362417419678

 Valor de IFAIL:              0

**************************************************
 Pesos:
  0.0000000000000000E+00    1.000000000000000

 Punto:
  0.0000000000000000E+00    2.000000000000000

 Valor de la función ponderada:     14.00000000000000

 Valor de IFAIL:              0

 **************************************************


 ================================================
  Tiempo C.P.U.:     2.109999656677246
 ================================================
```

```
*************************************************
     Kataoka. Aplicación de la desigualdad de Cantelli.
*************************************************
 Solución para la probabilidad BETA:   0.800000000
*************************************************

 Calls to E04UEF
 ---------------

      Print Level = 0

*************************************************
 Pesos:
   1.000000000000000      0.0000000000000000E+00

 Punto:
  0.7283741630574231      1.635812918471288

 Valor de la función ponderada:    28.27064632295094

 Valor de IFAIL:             0

*************************************************
 Pesos:
  0.9000000000000000      0.1000000000000000

 Punto:
  0.6446222385390752      1.677688880730462

 Valor de la función ponderada:    26.06642465602246

 Valor de IFAIL:             0

*************************************************
Pesos:
  0.8000000000000000      0.2000000000000000

 Punto:
  0.5396396385575954      1.730180180721202

 Valor de la función ponderada:    23.88490588914717

 Valor de IFAIL:             0

*************************************************
 Pesos:
  0.7000000000000000      0.3000000000000000

 Punto:
  0.4035406239616545      1.798229688019173

 Valor de la función ponderada:    21.73984187146081

 Valor de IFAIL:             0

*************************************************
 Pesos:
  0.6000000000000000      0.4000000000000000
```

```
Punto:
 0.2183009356486146       1.890849532175693

Valor de la función ponderada:    19.65335002552292

Valor de IFAIL:             0

***************************************************
Pesos:
 0.5000000000000000      0.5000000000000000

Punto:
 0.0000000000000000E+00   2.000000000000000

Valor de la función ponderada:    17.66190378969060

Valor de IFAIL:             0

***************************************************
Pesos:
 0.4000000000000000      0.6000000000000000

Punto:
 0.0000000000000000E+00   2.000000000000000

Valor de la función ponderada:    15.96289923765897

Valor de IFAIL:             0

***************************************************
Pesos:
 0.3000000000000000      0.7000000000000000

Punto:
 0.0000000000000000E+00   2.000000000000000

Valor de la función ponderada:    14.72279032045115

Valor de IFAIL:             0

***************************************************
Pesos:
 0.2000000000000000      0.8000000000000000

Punto:
 0.0000000000000000E+00   2.000000000000000

Valor de la función ponderada:    14.00000000000000

Valor de IFAIL:             0

***************************************************
Pesos:
 0.1000000000000000      0.9000000000000000

Punto:
 0.0000000000000000E+00   2.000000000000000

Valor de la función ponderada:    13.78362417419678
```

```
Valor de IFAIL:            0

*************************************************
Pesos:
 0.0000000000000000E+00   1.000000000000000

Punto:
 0.0000000000000000E+00   2.000000000000000

Valor de la función ponderada:    14.00000000000000

Valor de IFAIL:            0

*************************************************


=================================================
 Tiempo C.P.U.:    2.109999656677246
=================================================
```

Soluciones del ejemplo 9.

```
**************************************************
                   Varianza
**************************************************
 Solución para los pesos
   1.000000000000000      0.0000000000000000E+00
**************************************************
 Punto:
  0.0000000000000000E+00   6.000000000000000

 Valor de la función ponderada:    1368.000000000000

**************************************************
 Solución para los pesos
  0.9000000000000000      0.1000000000000000
**************************************************
 Punto:
  0.0000000000000000E+00   6.000000000000000

 Valor de la función ponderada:    1409.460000000000

**************************************************
 Solución para los pesos
  0.8000000000000000      0.2000000000000000
**************************************************
 Punto:
  0.0000000000000000E+00   6.000000000000000

 Valor de la función ponderada:    1452.240000000000

**************************************************
 Solución para los pesos
  0.7000000000000000      0.3000000000000000
**************************************************
 Punto:
   3.636363636363636      0.5454545454545455

 Valor de la función ponderada:    1469.417685950413

**************************************************
 Solución para los pesos
  0.6000000000000000      0.4000000000000000
**************************************************
 Punto:
   3.636363636363636      0.5454545454545454

 Valor de la función ponderada:    1460.913719008264

**************************************************
 Solución para los pesos
  0.5000000000000000      0.5000000000000000
**************************************************
 Punto:
   3.636363636363636      0.5454545454545454

 Valor de la función ponderada:    1453.623966942149
```

```
*************************************************
 Solución para los pesos
  0.4000000000000000      0.6000000000000000

 Punto:
   3.636363636363636      0.5454545454545454

 Valor de la función ponderada:    1447.548429752066

*************************************************
 Solución para los pesos
  0.3000000000000000      0.7000000000000000

 Punto:
   3.636363636363636      0.5454545454545454

 Valor de la función ponderada:    1442.687107438017

*************************************************
 Solución para los pesos
  0.2000000000000000      0.8000000000000000

 Punto:
   3.636363636363636      0.5454545454545454

 Valor de la función ponderada:    1439.040000000000

*************************************************
 Solución para los pesos
  0.1000000000000000      0.9000000000000000

 Punto:
   3.636363636363636      0.5454545454545454

 Valor de la función ponderada:    1436.607107438017

*************************************************
 Solución para los pesos
  0.0000000000000000E+00   1.000000000000000

 Punto:
   3.636363636363636      0.5454545454545454

 Valor de la función ponderada:    1435.388429752066

 *************************************************


 Tiempo C.P.U.:    1.050000071525574
```

```
***************************************************
  Kataoka. Aplicación de la desigualdad de Cantelli.
***************************************************
 Solución para la probabilidad BETA:   0.900000000
***************************************************

 Calls to E04UEF
 ---------------

      Print Level = 0

***************************************************
 Pesos:
   1.000000000000000      0.0000000000000000E+00

 Punto:
  0.7262751630574231       1.709490918471288

 Valor de la función ponderada:    204.7794632295094

 Valor de IFAIL:             0

***************************************************
 Pesos:
  0.9000000000000000      0.1000000000000000

 Punto:
  0.8843157385390752       1.646274880730462

 Valor de la función ponderada:    204.1710465602246

 Valor de IFAIL:             0

***************************************************
Pesos:
  0.8000000000000000      0.2000000000000000

 Punto:
  1.058965638557595 4      1.576414180721202

 Valor de la función ponderada:    203.3048588914717

 Valor de IFAIL:             0

***************************************************
 Pesos:
  0.7000000000000000      0.3000000000000000

 Punto:
  1.252993623961654 5      1.498803688019173

 Valor de la función ponderada:    202.1336187146081

 Valor de IFAIL:             0

***************************************************
 Pesos:
  0.6000000000000000      0.4000000000000000
```

```
Punto:
 1.4698249356486146       1.412070532175693      .

Valor de la función ponderada:    200.5989002552292

Valor de IFAIL:               0

**************************************************
Pesos:
 0.5000000000000000      0.5000000000000000

Punto:
 1.7137275445645454      1.314509154658684

Valor de la función ponderada:    198.628478969060

Valor de IFAIL:               0

**************************************************
Pesos:
 0.4000000000000000      0.6000000000000000

Punto:
 1.9900844545454545      1.203966554545454

Valor de la función ponderada:    196.1305923765897

Valor de IFAIL:               0

**************************************************
Pesos:
 0.3000000000000000      0.7000000000000000

Punto:
 2.305765654654561516    1.0776942515454564

Valor de la función ponderada:    192.9881045115

Valor de IFAIL:               0

**************************************************
Pesos:
 0.2000000000000000      0.8000000000000000

Punto:
 2.669646239874654     0.93214175564545454

Valor de la función ponderada:    189.049156545

Valor de IFAIL:               0

**************************************************
Pesos:
 0.1000000000000000      0.9000000000000000

Punto:
 3.0933364565484521    0.7626657154545454

Valor de la función ponderada:    184.1120654564545
```

```
Valor de IFAIL:              0

**************************************************
Pesos:
 0.0000000000000000E+00   1.000000000000000

Punto:
 3.592163554454124154   0.563134741454545

Valor de la función ponderada:    177.90615456421245

Valor de IFAIL:              0

**************************************************


=================================================
 Tiempo C.P.U.:    2.109999656677246
=================================================
```

```
*************************************************
      Kataoka. Aplicación de la desigualdad de Cantelli.
*************************************************
 Solución para la probabilidad BETA:   0.800000000
*************************************************

 Calls to E04UEF
 ---------------

      Print Level = 0

*************************************************
 Pesos:
   1.000000000000000      0.0000000000000000E+00

 Punto:
  0.6727519630574231       1.730899918471288

 Valor de la función ponderada:    164.2998632295094

 Valor de IFAIL:            0

*************************************************
 Pesos:
  0.9000000000000000      0.1000000000000000

 Punto:
  0.8095601385390752       1.676176880730462

 Valor de la función ponderada:    163.3988465602246

 Valor de IFAIL:            0

*************************************************
Pesos:
  0.8000000000000000      0.2000000000000000

 Punto:
  0.9608563385575954       1.615657180721202

 Valor de la función ponderada:    162.3018588914717

 Valor de IFAIL:            0

 *************************************************
 Pesos:
  0.7000000000000000      0.3000000000000000

 Punto:
  1.1290886239616545       1.548365688019173

 Valor de la función ponderada:    160.9728187146081

 Valor de IFAIL:            0

*************************************************
 Pesos:
  0.6000000000000000      0.4000000000000000
```

```
Punto:
 1.3172729356486146       1.473091532175693

Valor de la función ponderada:    159.3673002552292

Valor de IFAIL:              0

**************************************************
Pesos:
 0.5000000000000000      0.5000000000000000

Punto:
 1.52919454646542124     1.38832285214248754

Valor de la función ponderada:    157.4301378969060

Valor de IFAIL:              0

**************************************************
Pesos:
 0.4000000000000000      0.6000000000000000

Punto:
 1.7696481654654564 54  1.29214132154654564

Valor de la función ponderada:    155.0907923765897

Valor de IFAIL:              0

**************************************************
Pesos:
 0.3000000000000000      0.7000000000000000

Punto:
 2.04479412454545 4514     1.182082569875154

Valor de la función ponderada:    152.2591212045115

Valor de IFAIL:              0

**************************************************
Pesos:
 0.2000000000000000      0.8000000000000000

Punto:
 2.3626672254852154 55     1.05493341545454 52

Valor de la función ponderada:    148.8173215454545

Valor de IFAIL:              0

**************************************************
Pesos:
 0.1000000000000000      0.9000000000000000

Punto:
 2.7339123154545454       0.90643521879541368

Valor de la función ponderada:    144.608017419678
```

```
Valor de IFAIL:            0

***************************************************
Pesos:
 0.0000000000000000E+00   1.000000000000000

Punto:
 3.172883354654654565     0.730846612154579

Valor de la función ponderada:    139.41752466879831

Valor de IFAIL:            0

***************************************************


==================================================
 Tiempo C.P.U.:    3.32168764132187864
==================================================
             ** FINAL DE PROGRAMA **
```