Negligibilidad y cálculo subdiferencial en espacios de Banach, con aplicaciones

Daniel Azagra

Tesis doctoral dirigida por Jesús A. Jaramillo

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Octubre de 1997

Índice General

Introducción

Esta tesis doctoral puede ser clasificada dentro del marco de la teoría de diferenciabilidad en espacios de Banach, pero los principales resultados que presentamos aquí tienen también aplicaciones en otras ramas de las matemáticas, como la topología diferencial en dimensión infinita, las ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios de Banach, y las ecuaciones de Hamilton-Jacobi en dimensión infinita. A decir verdad, ninguna de las potenciales aplicaciones de los resultados que quería probar me eran conocidas al empezar este trabajo.

Aún a riesgo de aburrir al lector me gustaría contar la historia del nacimiento de esta tesis doctoral. Sirva este relato como agradecimiento a todas las personas que me ayudaron y me animaron a enfrentarme a los problemas básicos que están en el origen del presente trabajo.

Cuando estaba estudiando la teoría de subdiferenciabilidad de funciones en espacios de Banach, Juan Ferrera desvió mi atención hacia el siguiente problema: *¿el teorema de Rolle es cierto en dimensión infinita?* Juan me mostró un bello contraejemplo que había obtenido en colaboración con Juan Bès, y así fue como comencé a pensar en las posibles generalizaciones del teorema de Rolle a espacios de dimensión infinita y para funciones no necesariamente diferenciables. Fue mi director de tesis, Jesús A. Jaramillo, quien me sugirió el siguiente enunciado de una posible *versión aproximada* del teorema de Rolle: si una función diferenciable oscila menos que un número positivo 2ε en el borde de la bola unidad, debería existir un punto en el interior de la bola en el cual la diferencial de nuestra función fuera menor que ε (en norma). Con algunos esfuerzos conseguimos probar esta conjetura y después, con la ayuda de Javier Gómez Gil obtuvimos una demostración más breve y elegante (si bien quizá menos intuitiva) que la original las dos pruebas han sido incluidas en el segundo capítulo de esta tesis. A continuación, en colaboración con Robert Deville, conseguimos versiones subdiferenciales del teorema de Rolle aproximado, así como una nueva desigualdad del valor medio para funciones subdiferenciables que sólo requiere una cota para uno (y no necesariamente todos) los subgradientes de la función en cada punto.

Casi al mismo tiempo Jesús me mostró unartículo de Shkarin [62] en el cual se probaba que el teorema de Rolle falla en espacios de Banach superreflexivos de dimensión infinita por medio de la construcción de lo que puede llamarse un *difeomorfismo eliminador*, es decir, un difeomorfismo entre el espacio y el mismo espacio menos uno de sus subconjuntos (un punto en este caso). Fue entonces cuando Jesús me señaló los trabajos de Czesław Bessaga y Tadek Dobrowolski acerca de difeomorfismos eliminadores, por lo cual le estaré siempre agradecido, ya que éste fue el descubrimiento más excitante que he hecho como estudiante de doctorado. Inmediatamente comencé a pensar en las posibles generalizaciones del teorema de Bessaga [7] sobre la C^∞-equivalencia topológica del espacio de Hilbert y su esfera unidad, resultado que desde entonces no ha abandonado mi imaginación. Los espacios cuyas esferas poseen estructuras diferenciables naturales son aquéllos que tienen normas Fréchet diferenciables (resp. de clase C^p). Entonces el siguiente problema surge de una manera natural: ¿Admite todo espacio de Banach infinito dimensional con norma diferenciable un difeomorfismo entre su esfera y cualquiera de sus hiperplanos cerrados?

La clave de la demostración del impresionante resultado de Bessaga era la construcción de un difeomorfismo entre el espacio de Hilbert H y $H \setminus \{0\}$ que es la identidad fuera de una bola, lo que fue posible gracias a la existencia de una norma no completa de clase C^∞ en H. Tadek Dobrowolski [35] desarrolló la técnica de las normas no completas de Bessaga y probó que todo espacio de Banach de dimensión infinita X que tenga una norma no completa de clase C^p es C^p-difeomorfo a $X \setminus K$, donde K es un subconjunto compacto cualquiera de X. En particular esto es cierto para todos los espacios de Banach infinito dimensionales que se inyectan linealmente en algún $c_0(\Gamma)$, puesto que tales espacios poseen normas no completas de clase C^∞. Así, considerando la generalización de los resultados de Bessaga y Dobrowolski a cualquier espacio de Banach de dimensión infinita con norma Fréchet diferenciable o de clase C^p, siendo $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, es natural preguntarse: ¿todo espacio de Banach infinito dimensional con norma equivalente de clase C^p tiene también una norma no completa de clase C^p?

Curiosamente, ésta parece ser una pregunta difícil que sigue sin tener respuesta. Por mucho tiempo traté de dar una respuesta positiva a este problema, sin ningún éxito. Cuando ya había decidido dejar de pensar en estos asuntos, se me ocurrió que el problema de generalizar el teorema de Bessaga podría quizá atacarse de otra manera: tratando de sustituir la norma no completa por algún otro objeto *no completo* en el esquema de negligibilidad de Bessaga. ¿Que otra función no completa podría uno elegir? Una norma no completa y suave en un espacio de Banach puede describirse como el funcional de Minkowski de un cuerpo convexo suave simétrico que no contiene rayos y sin embargo no es acotado. En un espacio de Banach de dimensión infinita *reflexivo* tales cuerpos convexos existen siempre. Pero en el caso no reflexivo no está claro en absoluto cómo podría construirse una norma no completa suave a partir de una norma equivalente suave. Sin embargo, utilizando el teorema de James, no es difícil construir un cuerpo convexo suave y *asimétrico* que no contiene rayos y a pesar de esto no es acotado. Si tomamos el funcional de Minkowski de este cuerpo obtenemos lo que podría llamarse una *norma asimétrica no completa*. Entonces uno puede intentar reemplazar la norma no completa por esta especie de norma asimétrica no completa en el esquema de Bessaga. Este planteamiento resultó ser bastante atinado, y tuvo el éxito deseado, aunque requirió algunos otros cambios en el esquema de Bessaga; en particular fue necesario utilizar un *lema del punto fijo* específico en lugar del principio de contracción de Banach.

De este modo demostré que para todo espacio de Banach X de dimensión infinita con una norma equivalente de clase C^p existe un difeomorfismo de clase C^p entre X y $X \setminus \{0\}$ que se restringe a la identidad fuera de una bola, y deduje que para un tal espacio de Banach su esfera es C^p difeomorfa a cualquiera de sus hiperplanos. Entonces mostré este resultado a Tadek Dobrowolski, quien me había animado a continuar estudiando esta clase de problemas, sugiriéndome alguna de las aplicaciones potenciales de la negligibilidad suave, tales como el fenómeno de Garay para las ecuaciones diferenciales ordinarias. Tadek se dió cuenta pronto de que este *planteamiento asimétrico podría generalizarse para construir difeomorfismos que* extraen conjuntos compactos de un espacio de Banach infinito dimensional con norma diferenciable. En una fructífera colaboración desarrollamos juntos estas ideas y probamos los siguientes resultados. En primer lugar, todo espacio de Banach de dimensión infinita X que admita una norma de clase C^p (no necesariamente equivalente) es C^p difeomorfo a $X \setminus K$, donde K es cualquier subconjunto compacto de X. En segundo lugar, si X tiene una *seminorma* de clase C^p (resp. real analítica) cuyo conjunto de ceros sea un subespacio F de codimensión infinita entonces existe un difeomorfismo de clase C^p (resp. real analítico) entre X y $X \setminus F$. En consecuencia, todo espacio de Banach X de dimensión infinita con una norma real analítica (no necesariamente equivalente) es real analíticamente equivalente a $X \setminus \{0\}$. De estos resultados dedujimos también una clasificación topológico diferencial de los cuerpos convexos suaves de un espacio de Banach arbitrario. En particular demostramos que todo cuerpo convexo suave que no contenga rayos en un espacio de Banach infinito dimensional es difeomorfo a un semiespacio cerrado. Hay muchas más aplicaciones de estos resultados; a ellas nos referiremos después.

Dejando a un lado mi experiencia investigadora personal, creo que no es un crimen imperdonable el haber mezclado la teoría de la negligibilidad con el cálculo subdiferencial en este trabajo. Sé que puede parecer una combinación más bien artificial, pero hay un importante vínculo entre ambos: los cuerpos convexos. Por una parte, la teoría de subdiferenciabilidad de funciones no necesariamente convexas en espacios de Banach puede verse como un intento de generalización de la subdiferencial del Análisis Convexo clásico. Se aplica en particular a las funciones convexas, y tratar con funciones convexas es casi lo mismo que hablar de cuerpos convexos. Por otra parte, la existencia de un cuerpo convexo suave U que no contiene rayos en un espacio de Banach X de dimensión infinita tiene un gran impacto en las propiedades de diferenciabilidad del espacio y en particular fuerza a X a ser difeomorfo a $X \setminus \{0\}$ por medio de un difeomorfismo que se restringe a la identidad fuera de U, como mostraremos en este trabajo. Además, los resultados sobre difeomorfismos eliminadores que pueden deducirse de la existencia de cuerpos convexos suaves no triviales en un espacio de Banach infinito dimensional proporcionan a su vez una clasificación completa de los cuerpos convexos suaves de cualquier espacio de Banach. Por tanto, no sólo son los cuerpos convexos el mayor vínculo entre los principales temas de este trabajo, sino también, en un sentido más sutil, los protagonistas de esta tesis.

Antes de comenzar una explicación detallada de los contenidos y principales resultados de esta tesis, trataremos de esbozar una perspectiva de los desarrollos más importantes en las áreas en las que nuestro trabajo puede ser encuadrado.

Hasta donde sabemos, lo que podría llamarse teoría de la negligibilidad en espacios de Banach de dimensión infinita comenzó en 1951 cuando Victor L. Klee [55] probó que si X es o bien un espacio de Banach no reflexivo o bien un espacio L^p de dimensión infinita y K es un subconjunto compacto de X entonces existe un homeomorfismo entre X y $X \setminus K$ que se restringe a la identidad fuera de un entorno de K. Además, Klee demostró que la eliminación de un subconjunto compacto del espacio puede siempre suceder al final de una isotopía. El trabajo de Klee estaba motivado por el de Tychonoff [66] y el de Kakutani [53]. Del teorema del punto fijo de Tychonoff se sigue que, en la topología *débil*, la bola unidad B del espacio de Hilbert H debe tener la propiedad del punto fijo; es decir, toda aplicación débilmente continua de B en sí misma tiene al menos un punto fijo. En la topología de la norma, sin embargo, las cosas son bastante diferentes. S. Kakutani [53] construyó un homeomorfismo sin puntos fijos de B en sí misma. Utilizando este hecho mostró que la esfera unidad S de H es un retracto de deformación de B. Kakutani se hizo varias preguntas relacionadas con estos resultados. Por ejemplo, ¿son homeomorfos cualesquiera dos de los espacios H, B y S? ¿Admite B un homeomorfismo periódico sin puntos fijos? ¿Cual es la situación en espacios de Banach generales? Varios autores trataron estos problemas y dieron respuestas a algunos de ellos. J. Dugundji [38] probó que la bola unidad de un espacio normado tiene la propiedad del punto fijo solamente si el espacio es finito dimensional. P. A. Smith [63] había probado que todo autohomeomorfismo periódico de período primo del espacio Euclídeo $\mathbb{R}^n$ debe tener un punto fijo, y se preguntó [40] (p. 259) si el espacio de Hilbert H admitiría homeomorfismos de período dos sin puntos fijos. O. H. Keller [54] mostró que los subconjuntos compactos y convexos infinito dimensionales de H son mutuamente homeomorfos. W. A. Blankinship [15] probó que si K es un subconjunto relativamente compacto de H entonces $H \setminus K$ es contractible.

En su fundamental trabajo [55], utilizando sus resultados pioneros en el campo de la negligibilidad topológica, Victor L. Klee respondió a las preguntas de Kakutani y Smith, mejoró los teoremas de Keller y Blankinship, y dió una clasificación topológica completa de los cuerpos convexos del espacio de Hilbert H. En particular demostró que H es homeomorfo a su esfera unidad S. También probó que, para cada $n \geq 2$, H admite un autohomeomorfismo de período puro n sin puntos fijos.

Los resultados de Klee sobre negligibilidad topológica de subconjuntos y su clasificación de los cuerpos convexos fueron extendidos a espacios normados generales por Corson y Klee [18], y por Bessaga y Klee [10, 11]. La construcción original de Klee de los homeomorfismos e isotopías eliminadores tenía un fuerte carácter geométrico, lo que los hacía bastante difídiles de manejar analíticamente. Este planteamiento geométrico de Klee fue redescubierto y simplificado por K. Goebel y J. Wośko en [48], donde se da una receta para construir homeomorfismos que eliminan cuerpos convexos de un espacio de Banach no reflexivo. Fue C. Bessaga [7, 8, 12] quien sugirió un bello y simple procedimiento para eliminar conjuntos en espacios normados infinito dimensionales que ha llegado a ser conocido como *técnica de las normas no completas*. Bessaga probó que si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado que tiene una *norma continua no completa* ϱ y A es un subconjunto de X que es completo con respecto a ϱ (por ejemplo un subconjunto compacto de X), entonces X y $X \setminus A$ son homeomorfos. Recuérdese que si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach y $\varrho : X \longrightarrow [0, \infty)$ es una norma continua en X, la norma ϱ se dice que es *no completa* siempre que el espacio normado (X, ϱ) no sea completo. Esto es equivalente a decir que el conjunto $\{x \in X \mid \varrho(x) \leq 1\}$ es un cuerpo convexo y simétrico que no contiene rayos y sin embargo no es acotado en $(X, \|\cdot\|)$.

En este punto es natural preguntarse si todos estos resultados acerca de homeomorfismos eliminadores y clasificación topológica de cuerpos convexos pueden mejorarse hasta obtener *difeomorfismos en lugar de meros homeomorfismos*. Por ejemplo, si X es un espacio de Banach de dimensión infinita con una norma de clase C^p, ¿será X difeomorfo a $X \setminus \{0\}$? ¿Será la esfera unidad de X difeomorfa a cualquier hiperplano cerrado de X? ¿Podrá obtenerse una clasificación topológico diferencial de los cuerpos convexos de un espacio de Banach como en el caso topológico?

A primera vista estas preguntas parecen más delicadas. En la teoría de espacios de Banach hay muchos objetos que son homeomorfos pero no pueden ser difeomorfos. Recuérdese, por ejemplo, que todo espacio de Banach separable de dimensión infinita es homeomorfo al espacio de Hilbert H, pero en general no es difeomorfo a H, ya que un difeomorfismo induce un isomorfismo lineal entre los espacios tangentes. Por el mismo motivo, según los resultados de Gowers y Maurey acerca de espacios de Banach hereditariamente indescomponibles, un espacio de Banach puede ser homeomorfo y no difeomorfo a cualquiera de sus hiperplanos cerrados.

No está en absoluto claro si la construcción geométrica de Klee de los homeomorfismos eliminadores puede fortalecerse para conseguir *difeomorfismos* que eliminen conjuntos compactos de un espacio de Banach. Sin embargo, la técnica de las normas no completas de Bessaga sí que resultó ser lo suficientemente flexible como para obtener tales difeomorfismos eliminadores para una amplia clase de espacios de Banach, a saber, la de todos los espacios que tienen normas no completas diferenciables. En 1966, utilizando esta técnica suya, Bessaga demostró [7] que todo espacio de Hilbert de dimensión infinita H es C^∞ difeomorfo a $H \setminus \{0\}$ por medio de un difeomorfismo que se restringe a la identidad fuera de una bola, y dedujo que H es C^∞ difeomorfo a su esfera unidad.

Tadek Dobrowolski [35] desarrolló la técnica de las normas no completas de Bessaga en el caso diferenciable y demostró que si X es un espacio de Banach de dimensión infinita que tiene una norma no completa de clase C^p, y K es un subconjunto compacto de X, entonces X es C^p difeomorfo a $X \setminus K$. Esto es cierto en particular para todo espacio de Banach infinito dimensional que puede inyectarse linealmente en algún $c_0(\Gamma)$. Dobrowolski también usó estos resultados para dar una clasificación de los cuerpos convexos suaves de cualquier espacio WCG. Más recientemente, ha probado que todo espacio de Hilbert de dimensión infinita es no solamente C^∞ difeomorfo a su esfera unidad, sino también real analíticamente difeomorfo a ella.

El teorema de Bessaga sobre la C^∞ equivalencia topológica del espacio de Hilbert H y $H \setminus \{0\}$ fue una herramienta fundamental en el importante trabajo de D. Burghelea y N. Kuiper sobre variedades de Banach [16], el cual, junto con otros resultados debidos a J. Eells, D. Elworthy y N. Moulis [39, 57], llevó a la prueba del hecho de que las variedades de Hilbert infinito dimensionales que son equivalentes homotópicamente son de hecho C^∞ difeomorfas, entre otros resultados excepcionales.

Como dijimos más arriba, cuando uno quiere generalizar los resultados de Bessaga y Dobrowolski a la clase de espacios de Banach que tienen normas de clase C^p, se enfrenta a la siguiente pregunta: si un espacio de Banach de dimensión infinita tiene una norma equivalente de clase C^p, ¿admite también dicho espacio una norma *no completa* de clase C^p? Parece que éste es un problema difícil y permanece abierto.

Sin probar la existencia de normas no completas diferenciables, hemos conseguido probar cierto número de resultados sobre negligibilidad suave que extienden los de Bessaga y Dobrowolski a la clase de todos los espacios de Banach con normas o seminormas de clase C^p. En el primer capítulo de este trabajo probamos que si X es un espacio de Banach de dimensión infinita con una norma ϱ de clase C^p (no necesariamente equivalente), siendo $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, entonces existe un difeomorfismo $\varphi : X \longrightarrow X \setminus \{0\}$ de clase C^p tal que $\varphi(x) = x$ siempre que $\varrho(x) \geq 1$. De aquí deducimos una generalización completa del teorema de Bessaga [7]: si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach con una norma equivalente $\|\cdot\|$ de clase C^p entonces la esfera unidad de X, $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$, es C^p difeomorfa a todo hiperplano cerrado de X. Se pretende que este capítulo sirva como una introducción al esquema de negligibilidad que desarrollaremos ampliamente en el capítulo 4. Los principales resultados del capítulo 1 han sido publicados en [2]. Sin embargo, el método de negligibilidad que presentamos en esta tesis es más general que el de [2], ya que es válido para todo espacio de Banach, mientras que en [2] se trabaja esencialmente con espacios no reflexivos.

En el capítulo 4 fortalecemos este esquema de negligibilidad para obtener difeomorfismos que eliminan compactos y cilindros sobre compactos de espacios de Banach con normas o seminormas diferenciables. Los principales resultados de este capítulo son parte de un trabajo llevado a cabo en colaboración con Tadek Dobrowolski y han sido enviados para su publicación [3]. En la primera sección mostramos que, si X es un espacio de Banach de dimensión infinita con una norma ϱ de clase C^p (no necesariamente equivalente) y K es un subconjunto compacto de X, entonces existe un difeomorfismo φ de clase C^p entre X y $X \setminus K$. Además, para cada ϱ-bola abierta B que contenga a K, puede exigirse que φ sea la identidad fuera de B.

En la sección 4.2 se prueba que, si X es un espacio de Banach con una seminorma ϱ de clase C^p cuyo conjunto de ceros $F = \varrho^{-1}(0)$ es un subespacio de codimensión infinita de X, y A es un subconjunto de la forma $A = \pi^{-1}(K)$, donde K es un subconjunto compacto de X/F y $\pi : X \longrightarrow X/F$ es la proyección natural, entonces X es C^p difeomorfo a $X \setminus A$. Tales conjuntos A se llaman cilindros sobre compactos. Además, suponiendo que A está contenido en un cilindro abierto $C = \{x \in X \mid \varrho(x) < r\}$, probamos que existe un difeomorfismo φ de clase C^p entre X y $X \setminus A$ con la propiedad de que φ es la identidad fuera de C. En particular, X es C^p difeomorfo a $X \setminus F$ por medio de un difeomorfismo que se restringe a la identidad fuera de un ϱ-cilindro.

La sección 4.3 trata la negligibilidad real analítica de puntos y subespacios de codimensión infinita. Se demuestra que si X es un espacio de Banach con una seminorma real analítica ϱ cuyo conjunto de ceros $F = \varrho^{-1}(0)$ es un subespacio de X tal que el espacio cociente X/F tiene dimensión infinita, entonces X y $X \setminus F$ son real analíticamente difeomorfos.

En la sección 4.4 se observa que estos resultados caracterizan de algún modo lo que podría llamarse negligibilidad *convexa* de puntos. A saber, para un espacio de Banach X de dimensión infinita las siguientes afirmaciones son equivalentes: (i) Existe un cuerpo convexo de clase C^p en X que no contiene rayos (es decir, el espacio X tiene una norma–no necesariamente equivalente–de clase C^p); y (ii) Existe un difeomorfismo φ de clase C^p entre X y $X \setminus \{0\}$ cuyo soporte es un cuerpo convexo de clase C^p que no contiene rayos. Recuérdese que el soporte de una aplicación $\varphi : X \longrightarrow X$ se define como la adherencia del complementario del conjunto de sus puntos fijos. Estas afirmaciones siguen siendo equivalentes si cambiamos la expresión *no contiene rayos* por ***está acotado.*** También se vincula esta caracterización de la negligibilidad *convexa* de puntos a la falsedad del teorema de Rolle en muchos espacios de Banach de dimensión infinita.

Finalmente, en la sección 4.5 se demuestra que si X es un espacio de Banach de dimensión infinita con una norma Fréchet diferenciable entonces la eliminación difeomórfica de un conjunto compacto de X puede siempre efectuarse al final de una isotopía de clase C^1. Utilizando este hecho damos varios resultados acerca de negligibilidad de puntos en variedades de Banach de dimensión infinita. A saber, probamos que si $\mathcal{M}$ es una variedad de Banach de clase C^1 con borde $\partial\mathcal{M}$, modelada sobre un espacio de dimensión infinita X que tiene una norma equivalente Fréchet diferenciable, y V es un entorno abierto de x_0 en $\partial\mathcal{M}$, entonces existe un difeomorfismo del par $(\mathcal{M}, \partial\mathcal{M})$ en el par $(\mathcal{M} \setminus \{x_0\}, \partial\mathcal{M} \setminus \{x_0\})$ que tiene soporte en V. También se prueba que si $\mathcal{M}$ es una variedad de Banach de clase C^1 modelada en un espacio de Banach de dimensión infinita X que tiene una norma equivalente Fréchet diferenciable, y U es un entorno abierto de un punto $x_0 \in \mathcal{M}$ entonces existe una isotopía de clase C^1 que elimina x_0 de $\mathcal{M}$ y tiene soporte en U.

En el capítulo 5 damos la ya anunciada clasificación de los cuerpos convexos suaves de un espacio de Banach cualquiera. Recordemos que un cuerpo convexo (es decir, un subconjunto convexo y cerrado con interior no vacío) en un espacio de Banach X se dice que es un cuerpo convexo de clase C^p si es una subvariedad de X de clase C^p, con borde de codimensión uno. Dado un cuerpo convexo U en un espacio X siempre puede suponerse que el origen es un punto interior a U, y definirse el cono característico de U como el conjunto $ccU = \{x \in X \mid \forall r > 0 \quad rx \subset U\}$. Si U_1, U_2 son cuerpos convexos de clase C^p en X, diremos que U_1 y U_2 son C^p relativamente difeomorfos si existe un autodifeomorfismo φ de X de clase C^p tal que $\varphi(U_1) = U_2$. Para cualquier cuerpo convexo U de clase C^p en un espacio de Banach espacio X demostramos que: (a) Si ccU es un subespacio vectorial de codimensión finita (digamos $X = ccU \oplus Z$, donde Z es finito dimensional), entonces

U es relativamente difeomorfo a $ccU + B$, donde B es una bola euclídea en Z; y (b) Si ccU no es un subespacio vectorial o bien ccU es un subespacio vectorial tal que el cociente X/ccU tiene dimensión infinita, entonces U es C^p relativamente difeomorfo a un semiespacio cerrado. En particular, si U no contiene rayos, entonces U es relativamente difeomorfo a un semiespacio cerrado y por consiguiente X y $X \setminus U$ son difeomorfos. Todos estos resultados se demuestran en las dos primeras secciones del capítulo 5. La última sección presenta una clasificación parcial de los cuerpos estrellados de cualquier espacio de Banach WCG.

En el capítulo 6 damos una pequeña muestra de las aplicaciones de la negligibilidad suave, señalando cómo los resultados del capítulo 4 amplían la clase de espacios dentro de la cual dichas aplicaciones son válidas. En la sección 6.1 nos ocupamos del así llamado fenómeno de Garay para las ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios de Banach. B. M. Garay [45, 46] estudió las propiedades topológicas de los embudos de soluciones en espacios de Banach de dimensión infinita. Utilizando varios resultados de Dobrowolski sobre negligibilidad suave, demostró que para diversos tipos de espacios de Banach infinito dimensionales, incluyendo al espacio de Hilbert separable, todo conjunto compacto puede representarse como una sección de un embudo de soluciones para cierta ecuación diferencial ordinaria. Ahora, utilizando los resultados del capítulo 4, este teorema de Garay puede generalizarse a la clase de todo espacio de Banach infinito dimensional que tenga una norma de clase C^p, con $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

El punto de partida de la sección 6.2 es un teorema de Klee que se refiere a la existencia de homeomorfismos periódicos sin puntos fijos en el espacio de Hilbert H. Como ya hemos dicho antes, Klee [55] probó que, para cada $n \geq 2$, H admite un autohomeomorfismo periódico de período puro n y sin puntos fijos. En muchos espacios de Banach este resultado puede mejorarse para obtener autodifeomorfismos de período arbitrario sin puntos fijos. De hecho, esta versión suave del resultado de Klee la obtenemos como corolario de nuevos resultados sobre acciones libres del n-toro sobre espacios de Banach. Para espacios de Banach de la forma $X = Y \oplus Z$, donde Z es un espacio de Banach separable de dimensión infinita que es isomorfo a su cuadrado, y para todo entero positivo n, probamos que existe una acción libre real analítica del n-toro T^n sobre X.

Ahora desviaremos nuestra atención hacia el otro tema principal de esta tesis doctoral: el cálculo subdiferencial. Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de X. Una función $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es Fréchet subdiferenciable en un punto $x \in \mathcal{U}$ siempre que exista $p \in X^*$ tal que

$$\liminf_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle p, h \rangle}{\|h\|} \geq 0,$$

y el conjunto subdiferencial de f en el punto x se define por

$$D^- f(x) = \{p \in X^* | \liminf_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle p, h \rangle}{\|h\|} \geq 0\}.$$

De manera análoga, f se dice que es Fréchet superdiferenciable en x si existe $p \in X^*$

tal que

$$\limsup_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-\langle p,h\rangle}{\|h\|} \leq 0,$$

y el conjunto superdiferencial de f en x se define por

$$D^+f(x) = \{p \in X^* |\limsup_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-\langle p,h\rangle}{\|h\|} \leq 0\}.$$

La función f se dice que es Gâteaux subdiferenciable en x siempre que exista $p \in X^*$ tal que para todo $h \in X \setminus \{0\}$

$$\liminf_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)-\langle p,th\rangle}{\|th\|} \geq 0,$$

y el conjunto Gâteaux subdiferencial de f en el punto x se define como

$$D_G^-f(x) = \{p \in X^* \mid \forall h \in S_X, \liminf_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)-\langle p,th\rangle}{\|th\|} \geq 0\}.$$

La superdiferenciabilidad Gâteaux se define de manera análoga. Una función f se dice que es (Fréchet o Gâteaux) subdiferenciable (resp. superdiferenciable) en un conjunto U si lo es en cada punto x de U. Una función f es (Fréchet o Gâteaux) diferenciable en x si y sólo si es a la vez subdiferenciable y superdiferenciable en x, y en este caso se tiene $\{df(x)\} = D^-f(x) = D^+f(x)$. Por otra parte, es claro que $D^-f(x) \subset D_G^-f(x)$, de manera que toda función Fréchet subdiferenciable es también Gâteaux subdiferenciable.

Esta noción de subdiferenciabilidad generaliza la del Análisis Convexo. Recuérdese que si f es una función convexa, la subdiferencial clásica de f en un punto x de define como $\partial f(x) = \{p \in X^* \mid \langle p, y-x\rangle \leq f(y)-f(x)\ \forall y \in X\}$. En este caso $\partial f(x) = D^-f(x)$ se cumple para todo x en el dominio de f. Por otro lado, es bien conocido que toda función convexa y continua $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface $\partial f(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in D$. Por consiguiente, toda función convexa y continua es Fréchet subdiferenciable en todos los puntos de su dominio, y todos los resultados relativos a subdiferenciabilidad de funciones generales se aplican a las funciones convexas.

Además de ser una generalización útil de la teoría de subdiferenciabilidad de funciones convexas, la noción de subdiferenciabilidad que manejamos es una herramienta fundamental en el estudio de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi. No es solamente un concepto necesario para entender la noción de *solución de viscosidad* (introducido por M. G. Crandall y P. L. Lions, ver [19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28]), sino que también, de muchos resultados acerca de subdiferenciabilidad, pueden deducirse pruebas relativamente simples de la existencia, unicidad y regularidad de soluciones de viscosidad a las ecuaciones de Hamilton-Jacobi. Véase por ejemplo [30, 31, 42, 32].

En la primera sección del capítulo 3 presentamos las definiciones y resultados básicos del cálculo subdiferencial que son necesarios para entender y demostrar los resultados de las secciones 3.2 y 3.3. En la sección 3.2 probamos un teorema del *valor medio subdiferencial que es válida en cualquier espacio de Banach y presenta* algunas ventajas con respecto a otras desigualdades del valor medio subdiferenciales. En la literatura hay varios teoremas del valor medio conocidos para funciones subdiferenciables. Como uno de los más relevantes podemos citar el de Robert Deville [30]. Una característica común de todos estos resultados es que exigen una cota para todos los subgradientes de la función en cada punto. Aquí presentamos una desigualdad del valor medio para funciones continuas y Gâteaux subdiferenciables f que sólo requiere una cota para uno (y no necesariamente todos) de los subgradientes de f en cada punto $x \in \mathcal{U}$. Esto es, si $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto y convexo de X y $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua tal que para todo $x \in \mathcal{U}$ existe un $p \in D_G^- f(x)$ tal que $\|p\| \leq M$, entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\|$$

para todo $x, y \in \mathcal{U}$. De aquí puede deducirse que si una función continua $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface $0 \in D^- f(x)$ para todo $x \in \mathcal{U}$ entonces f es necesariamente constante. Este corolario no puede deducirse de otros teoremas del valor medio subdiferenciales como los de [30] o [1]. Además demostramos que si $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, $x, y \in \mathcal{U}$ y $M \geq 0$ es tal que para todo $t \in [0, 1]$ existe $p \in D_G^- f(tx + (1-t)y)$ con $\|p\| \leq M$, entonces $|f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\|$.

Antes de enunciar los resultados principales de la última sección del capítulo 3, debemos decir algo sobre el contenido del capítulo 2. El teorema de Rolle en los espacios de dimensión finita asegura que, para todo subconjunto abierto conexo y acotado $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ y para toda función continua $f : \overline{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que f es diferenciable en U y constante en $\partial\mathcal{U}$, existe un punto en $\mathcal{U}$ en el cual la diferencial de f se anula. Fue S. A. Shkarin [62] quien por primera vez demostró que el teorema de Rolle falla en una amplia clase de espacios de Banach de dimensión infinita que incluía todos los superreflexivos y los no reflexivos con norma Fréchet diferenciable (aunque no estudió el caso reflexivo pero no superreflexivo). Otros ejemplos explícitos fueron construidos en c_0 y ℓ_2 por J. Ferrera y J. Bès [13], e independientemente por J. Ferrer [44]. En la primera sección del capítulo 2 conjeturamos que el teorema de Rolle falla en un espacio de Banach infinito dimensional X si y sólo si X tiene una función meseta de clase C^1, y, relacionando el fallo del teorema de Rolle en dimensión infinita con la existencia de *difeomorfismos eliminadores*, probamos que esta conjetura es cierta dentro de la clase de todos los espacios de Banach de dimensión infinita que tienen normas Fréchet diferenciables (no necesariamente equivalentes).

Pese a la falsedad del teorema de Rolle en dimensión infinita, en la sección 2.2 probamos una interesante versión aproximada del teorema de Rolle que es cierta para cualquier espacio de Banach. Por un teorema de Rolle aproximado entendemos que si una función diferenciable oscila entre $-\varepsilon$ y ε en el borde de la bola unidad, entonces existe un punto en el interior de la bola en el cual la diferencial de la función tiene norma menor o igual que ε. Más en general, demostramos lo siguiente. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto, conexo y acotado de un espacio de Banach X, y sea $f : \overline{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y acotada, Gâteaux diferenciable en $\mathcal{U}$. Sean

$R > 0$ y $x_0 \in \mathcal{U}$ tales que $\mathrm{dist}(x_0, \partial\mathcal{U}) = R$. Supongamos que $f(\partial\mathcal{U}) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$. Entonces existe un $x_\varepsilon \in \mathcal{U}$ tal que $\|df(x_\varepsilon)\| \leq \varepsilon/R$.

En este punto es natural tratar de extender el teorema de Rolle aproximado al contexto de funciones subdiferenciables. Esto es lo que hacemos en la última sección del capítulo 3, donde presentamos versiones Fréchet y Gâteaux subdiferenciables del teorema de Rolle aproximado que son válidas dentro de la clase de espacios de Banach que tienen funciones mesetas Lipschitz y Fréchet (resp. Gâteaux) diferenciables. Se prueba que si una función Gâteaux subdiferenciable oscila entre $-\varepsilon$ y ε en el borde de la bola unidad entonces existe un punto x en el interior de la bola y existe $p \in D^-f(x)$ (resp. $p \in D^-_G f(x)$) tal que $\|p\| \leq 2\varepsilon$. De hecho, para cualquier espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ que *tenga una función meseta Lipschitz y Fréchet diferenciable*, damos un resultado más fuerte que ni siquiera exige que la función f sea subdiferenciable. A saber, si B_X es la bola unidad de X y S_X su esfera unidad, demostramos que toda función *continua* y acotada $f : B_X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que f oscila entre $-\varepsilon$ y ε en S_X satisface $\inf\{\|p\| : p \in D^-f(x) \cup D^+f(x), \|x\| < 1\} \leq 2\varepsilon$.

AGRADECIMIENTOS

Es dudoso que este trabajo hubiera llegado a escribirse sin la ayuda y el entusiasmo de las siguientes personas, a las que estoy profundamente agradecido.

Jesús A. Jaramillo, director de este trabajo, por inducirme a estudiar este tipo de problemas, por muchas valiosas conversaciones y sugerencias, y por su constante y estimulante provisión de artículos a cual más interesante.

Tadek Dobrowolski, por ayudarme y animarme a seguir estudiando los problemas básicos acerca de difeomorfismos eliminadores, y por darme la oportunidad de trabajar con él en negligibilidad suave.

Robert Deville, por sus valiosas sugerencias y una fructífera colaboración en los teoremas de Rolle y del valor medio subdiferenciales.

Javier Gómez Gil, que me ayudó con el teorema de Rolle aproximado.

Gilles Godefroy, por sus valiosas y amables sugerencias y varias estimulantes conversaciones.

Czeslaw Bessaga, por sus amables y valiosas sugerencias acerca de algunas aplicaciones de nuestros resultados (en particular por el teorema 6.8).

Juan Ferrera, por presentarme el problema del teorema de Rolle en dimensión infinita.

José Luis González Llavona, por incluirme en su grupo de investigación y facilitar mi asistencia a muchos e interesantes congresos y seminarios.

Debo también agradecer su apoyo a todos mis colegas del Departamento de Análisis de la Facultad de Matemáticas, y en especial a José Luis Gámez su amable ayuda con los ordenadores.

Capítulo 1

Difeomorphismos entre esferas e hiperplanos en espacios de Banach

En este primer capítulo veremos que todo espacio de Banach infinito dimensional con una norma equivalente suave admite un difeomorfismo entre su esfera unidad y cualquiera de sus hiperplanos cerrados. Este resultado generaliza completamente el famoso resultado de Bessaga [7] acerca de la C^∞ equivalencia topológica del espacio de Hilbert y su esfera unidad. Recuérdese que una norma en un espacio de Banach X se dice que es Fréchet diferenciable (resp. de clase C^p, con $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) si lo es en $X \setminus \{0\}$.

Teorema 1.1 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach de dimensión infinita que admite una norma $\|\cdot\|$ de clase C^p, y sea S_X su esfera unidad. Entonces, para cada hiperplano cerrado H de X, existe un difeomorfismo de clase C^p entre S_X y H.*

La clave para probar este teorema es el siguiente

Teorema 1.2 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach de dimensión infinita con una norma ϱ de clase C^p (no necesariamente equivalente). Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe un difeomorfismo $\varphi = \varphi_\varepsilon$ de clase C^p entre X y $X \setminus \{0\}$, con la propiedad de que $\varphi(x) = x$ cuando $\varrho(x) \geq \varepsilon$.*

Para demostrar este resultado modificaremos la técnica de las normas no completas de Bessaga [7, 8, 12], reemplazando la norma no completa por un tipo distinto de *función asimétrica convexa no completa*, y utilizaremos el siguiente *lema del punto fijo* en lugar del teorema de la aplicación contractiva de Banach.

Lema 1.3 *Sea $F : (0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ una función continua tal que, para todos $\beta \geq \alpha > 0$,*

$$F(\beta) - F(\alpha) \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \quad y \quad \limsup_{t \to 0^+} F(t) > 0.$$

Entonces existe un único $\alpha > 0$ tal que $F(\alpha) = \alpha$.

Demostración. Nótese que $\lim_{\beta\to\infty}[F(\beta)-\beta] \leq \lim_{\beta\to\infty}[F(1)+\frac{1}{2}(\beta-1)-\beta] = -\infty$, mientras que $\limsup_{\beta\to 0^+}[F(\beta)-\beta] > 0$. Entonces, por el teorema de Bolzano, existe un $\alpha > 0$ tal que $F(\alpha) = \alpha$. Por otro lado, la primera condición del enunciado implica que la función definida por $\beta \longrightarrow F(\beta) - \beta$ es estrictamente decreciente, lo que conlleva la unicidad de este α.

El siguiente lema muestra que, para todo espacio de Banach con una norma de clase C^p, existe una especie de *distancia asimétrica no completa* de clase C^p que actuará como una norma suave en ausencia de ésta.

Lema 1.4 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach infinito dimensional con una norma de clase C^p (no necesariamente equivalente) ϱ. Entonces existe un funcional continuo $\omega : X \longrightarrow [0,\infty)$ que es de clase C^p en $X \setminus \{0\}$ y satisface las siguientes propiedades:*

1. *$\omega(x+y) \leq \omega(x)+\omega(y)$, y, por tanto, $\omega(x)-\omega(y) \leq \omega(x-y)$, para todo $x, y \in X$;*
2. *$\omega(rx) = r\omega(x)$ para todos $x \in X$, $r \geq 0$;*
3. *$\omega(x) = 0$ si y solo si $x = 0$;*
4. *$\omega(\sum_{k=1}^{\infty} z_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \omega(z_k)$ para toda serie convergente $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$; y*
5. *para todo $\varepsilon > 0$, existe una sucesión de vectores (y_k) tal que*
$$\omega(y_k) \leq \frac{\varepsilon}{4^{k+1}}$$
para todo $k \in \mathbb{N}$, así como
$$\liminf_{n\to\infty} \omega(y - \sum_{j=1}^{n} y_j) > 0$$
para todo $y \in X$.

Nótese que ω no es una norma en X; en general, $\omega(x) \neq \omega(-x)$.

Demostración. Consideraremos tres casos.

Caso I: La norma ϱ es completa y el espacio X no es reflexivo.

La norma ϱ es continua con respecto a $\|\cdot\|$ (pues es de clase C^p suave en X), y completa. Entonces, por el teorema de la aplicación abierta, ϱ es una norma equivalente de clase C^p en X, y podemos suponer que $\varrho = \|\cdot\|$. Como X es no reflexivo, por el teorema de James [51], existe un funcional lineal continuo $T : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que T no alcanza su norma. Podemos suponer $\|T\| = 1$, de modo que $\sup\{T(x) : \|x\| = 1\} = 1$, y sin embargo $T(x) < \|x\|$ para todo $x \neq 0$. Definamos $\omega : X \longrightarrow [0,\infty)$ por
$$\omega(x) = \|x\| - T(x).$$

Nótese que $\omega(x) = 0$ si y solo si $x = 0$, $\omega(x+y) \leq \omega(x) + \omega(y)$ para todo $x, y \in X$, y $\omega(rx) = r\omega(x)$ para cada $r > 0$, aunque ω no es una norma en X porque $\omega(x) \neq \omega(-x)$ en general. La propiedad $\omega(z+y) \leq \omega(z) + \omega(y)$ implica que $\omega(x) - \omega(y) \leq \omega(x-y)$, así como $\omega(\sum_{k=1}^{\infty} z_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \omega(z_k)$ para toda serie convergente $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$. Entonces ω satisface las propiedades 1–4, y no queda más que comprobar que ω satisface la propiedad 5. Para un $\varepsilon > 0$ dado, como $\sup\{T(x) : \|x\| = 1\} = 1$, existe una sucesión (y_k) tal que $\|y_k\| = 1$ y $\omega(y_k) = \|y_k\| - T(y_k) \leq \frac{\varepsilon}{4^{k+1}}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Veamos que, para una tal sucesión (y_k),

$$\liminf_{n\to\infty} \omega(y - \sum_{j=1}^{n} y_j) > 0$$

se cumple para todo $y \in X$. Tenemos que

$$\omega(y - \sum_{j=1}^{n} y_j) = \|y - \sum_{j=1}^{n} y_j\| - T(y - \sum_{j=1}^{n} y_j)$$
$$\geq -T(y - \sum_{j=1}^{n} y_j) = -T(y) + \sum_{j=1}^{n} T(y_j),$$

y como $T(y_k) \to 1$ cuando $k \to \infty$, es claro que $\sum_{j=1}^{\infty} T(y_j) = \infty$, y de aquí que

$$\lim_{n\to\infty} \omega(y - \sum_{j=1}^{n} y_j) = \infty.$$

Caso II: La norma ϱ es completa y el espacio X es reflexivo.

Nos reduciremos al caso III mostrando que todo espacio de Banach reflexivo infinito dimensional tiene una norma no completa ω de clase C^∞. En efecto, para todo reflexivo espacio X existe una inyección lineal y continua $J : X \longrightarrow c_0(\Gamma)$ para algún conjunto infinito Γ (ver, e.g., [33], capítulo VI, p. 246). Es también bien sabido que para un conjunto infinito Γ, el espacio $c_0(\Gamma)$ es c_0-saturado, esto es, cada subespacio cerrado infinito dimensional de $c_0(\Gamma)$ tiene a su vez un subespacio cerrado que es isomorfo a c_0. Esto implica claramente que $c_0(\Gamma)$ no puede contener ningún subespacio reflexivo infinito-dimensional. Por tanto $J(X)$ no es un subespacio *cerrado* de $c_0(\Gamma)$. Por otra parte, el espacio $c_0(\Gamma)$ tiene una norma equivalente de clase C^∞ g ([33], capítulo V, teorema 1.5). Entonces podemos definir una norma ω de clase C^∞ en X por $\omega(x) = g(J(x))$, y esta norma ω es no completa ya que el subespacio $J(X)$ no es cerrado en $c_0(\Gamma)$.

Caso III: La norma ϱ es no completa.

Definamos $\omega = \varrho$. Como ϱ es una norma de clase C^p, es claro que ω satisface las condiciones 1–4. Veamos que ω también satisface la condición 5. Puesto que la norma ω es no completa, para todo $\varepsilon > 0$ podemos encontrar una sucesión (y_k)

en X tal que $\omega(y_k) \leq \frac{\varepsilon}{4^{k+1}}$ para cada k, y un punto $\hat{y}$ en la compleción de (X, ω), denotada por $(\hat{X}, \hat{\omega})$, tal que $\hat{y} \notin X$, y $\lim_{n\to\infty} \hat{\omega}(\hat{y} - \sum_{k=1}^{n} y_k) = 0$. Además,

$$\lim_{n\to\infty} \omega(y - \sum_{j=1}^{n} y_j) = \lim_{n\to\infty} \hat{\omega}(y - \sum_{j=1}^{n} y_j) = \hat{\omega}(y - \hat{y}) > 0,$$

porque $\hat{y} \in \hat{X} \setminus X$ e $y \in X$. En particular, $\liminf_{n\to\infty} \omega(y - \sum_{j=1}^{n} y_j) > 0$.

Utilizando las propiedades del funcional ω podemos construir un *camino eliminador* (más adelante justificaremos esta denominación) como sigue.

Lema 1.5 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, y sea ω un funcional que satisface las condiciones 1, 2, y 5 del lema 1.4. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe un camino de clase C^∞ $p = p_\varepsilon : (0, \infty) \longrightarrow X$ tal que*

1. $\omega(p(\alpha) - p(\beta)) \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ *si* $\beta \geq \alpha > 0$;
2. $\limsup_{t\to 0^+} \omega(y - p(t)) > 0$ *para todo* $y \in X$; *y*
3. $p(t) = 0$ *si* $t \geq \varepsilon$.

Demostración. Sea $\gamma : [0, \infty) \longrightarrow [0, 1]$ una función decreciente de clase C^∞ y tal que $\gamma = 1$ en $[0, \varepsilon/2]$, $\gamma = 0$ en $[\varepsilon, \infty)$ y $\sup\{|\gamma'(t)| : t \in [0, \infty)\} \leq 4/\varepsilon$. Para este ε, elijamos una sucesión de vectores (y_k) que satisfaga la condición 5 del lema 1.4. Definiremos el camino requerido $p : (0, \infty) \longrightarrow X$ por la siguiente fórmula

$$p(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(2^{k-1} t) y_k.$$

Es evidente que p es un camino bien definido de clase C^∞, y que p satisface la condición 3.

Si $\beta \geq \alpha$ entonces $\gamma(2^{k-1}\alpha) - \gamma(2^{k-1}\beta) \geq 0$ porque γ es decreciente, y también $\gamma(2^{k-1}\alpha) - \gamma(2^{k-1}\beta) \leq \frac{4}{\varepsilon}|2^{k-1}\alpha - 2^{k-1}\beta|$ porque $\sup\{|\gamma'(t)| \mid t \in [0, \infty)\} \leq 4/\varepsilon$. Teniendo esto en cuenta y utilizando las propiedades de ω enumeradas en el lema 1.4, podemos acotar

$$\begin{aligned}
&\omega(p(\alpha) - p(\beta)) = \omega(\sum_{k=1}^{\infty}(\gamma(2^{k-1}\alpha) - \gamma(2^{k-1}\beta)) y_k) \\
&\leq \underline{\sum_{k=1}^{\infty} \omega((\gamma(2^{k-1}\alpha) - \gamma(2^{k-1}\beta)) y_k)} = \sum_{k=1}^{\infty}(\gamma(2^{k-1}\alpha) - \gamma(2^{k-1}\beta))\omega(y_k) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\varepsilon}|2^{k-1}\alpha - 2^{k-1}\beta|\omega(y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}\omega(y_k)}{\varepsilon}|\beta - \alpha| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{\varepsilon} \frac{\varepsilon}{4^{k+1}}|\beta - \alpha| = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)
\end{aligned}$$

para todo $\beta \geq \alpha$, de modo que nuestro camino cumple la primera condición.

Veamos que p también satisface la segunda condición. Utilizando la propiedad 5 del lema 1.4, tenemos

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to 0^+} \omega(y - p(t)) \geq \limsup_{n\to\infty} \omega(y - p(\frac{\varepsilon}{2^n})) \geq \liminf_{n\to\infty} \omega(y - p(\frac{\varepsilon}{2^n})) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \omega(y - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(\varepsilon 2^{k-1-n}) y_k) = \liminf_{n\to\infty} \omega(y - \sum_{k=1}^{n} \gamma(\varepsilon 2^{k-1-n}) y_k) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \omega(y - \sum_{k=1}^{n} y_k) > 0,
\end{aligned}$$

es decir $\limsup_{t\to 0^+} \omega(y - p(t)) > 0$, para todo $y \in X$.

Ya estamos en condiciones de demostrar el teorema 1.2. Tomemos un funcional ω de clase C^p del lema 1.4, y para un $\varepsilon > 0$ arbitrario dado, escojamos un camino $p = p_\varepsilon$ de clase C^∞ del lema 1.5. Para cada $x \in X \setminus \{0\}$, definamos

$$\psi(x) = x + p(\omega(x)).$$

Demostraremos que $\psi : X \setminus \{0\} \longrightarrow X$ es un difeomorfismo de clase C^p, pero antes de dar una prueba formal de este hecho, diremos algo sobre la manera en la que actúa la aplicación ψ. Para cada $r > 0$, $x \in X$, consideremos las *esferas asimétricas* $S_\omega(x, r) = \{y \in X \mid \omega(y - x) = r\}$, las *bolas abiertas asimétricas* $B_\omega(x, r) = \{y \in X \mid \omega(y - x) < r\}$, y las *bolas cerradas asimétricas* $\overline{B}_\omega(x, r) = \{y \in X \mid \omega(y - x) \leq r\}$. Es obvio que ψ es una mera traslación cuando se la restringe a la *esfera* $S_\omega(0, r)$; en particular ψ es inyectiva cuando se restringe a $S_\omega(0, r)$. Además, ψ transforma difeomórficamente el conjunto $S_\omega(0, r)$ en el conjunto $S_\omega(p(r), r)$. Entonces, para ver que ψ es inyectiva, bastaría probar que las *esferas* $S_\omega(p(r), r)$ tienen la siguiente propiedad: si $0 < r < s$ entonces $S_\omega(p(r), r) \subset B_\omega(p(s), s)$. Esto es, deberíamos ver que los conjuntos $\overline{B}_\omega(p(s), s)$ forman una torre descendente (cuando s tiende a 0). Utilizando las propiedades de convexidad de nuestro funcional ω, esto no es difícil de comprobar. En efecto, si $0 < r < s$ y $\omega(y - p(r)) \leq r$ entonces

$$\begin{aligned}
&\omega(y - p(s)) = \omega(y - p(r) + p(r) - p(s)) \leq \omega(y - p(r)) + \omega(p(r) - p(s)) \\
&\leq \omega(y - p(r)) + \frac{1}{2}(s - r) \leq r + \frac{1}{2}(s - r) < s,
\end{aligned}$$

de modo que $B_\omega(p(r), r) \subset B_\omega(p(s), s)$, y ψ es inyectiva. Además, la torre descendente $\overline{B}_\omega(p(s), s)$ tiene intersección vacía,

$$\bigcap_{s>0} \overline{B}_\omega(p(s), s) = \emptyset,$$

ya que de otro modo existiría algún $y \in X$ tal que $0 \leq \omega(y - p(s)) \leq s$ para todo $s > 0$, y por tanto $\lim_{t\to 0^+} \omega(y - p(t)) = 0$, lo que contradice la condición 2 del lema 1.5. Así, las *esferas* $\{S_\omega(p(s), s)\}_{s>0}$ cubren la totalidad del espacio X, y esto implica que la aplicación ψ es sobreyectiva. De este modo acabamos de ver que ψ es una biyección de $X \setminus \overline{B}_\omega(0, s)$ sobre $X \setminus \overline{B}_\omega(p(s), s)$ para todo $s > 0$, y como $\bigcap_{r>0} \overline{B}_\omega(0, r) = \{0\}$ mientras que $\bigcap_{r>0} \overline{B}_\omega(p(r), r) = \emptyset$, podemos concluir que ψ es una biyección de $X \setminus \{0\}$ sobre X. Por consiguiente, es claro geométricamente que ψ debe ser un difeomorfismo entre $X \setminus \{0\}$ y X, con la interesante propiedad adicional de que ψ es la identidad en el conjunto $\{x \in X \mid \omega(x) \geq \varepsilon\}$. Así se ve como actúa nuestra aplicación ψ: va trasladando *esferas asimétricas* concéntricas en *esferas asimétricas* cuyos centros se mueven a lo largo de un camino que lleva ... a ninguna parte. El origen, centro de las primeras, se ve arrastrado a lo largo de dicho camino, y se pierde así en la nada. Por esta razón no creemos descabellado llamar a p *camino eliminador*, y a ψ (así como a toda aplicación que arranque suavemente un punto o un subconjunto no vacío del espacio), un *difeomorfismo eliminador*.

Ahora daremos una prueba analítica más rigurosa del hecho de que la aplicación ψ es un difeomorfismo. Sea y un vector arbitrario de X, y definamos $F_y : (0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ por $F_y(\alpha) = \omega(y - p(\alpha))$ para $\alpha > 0$. Veamos que $F_y(\alpha)$ satisface las condiciones del lema 1.3. Utilizando las propiedades del funcional ω y la condición 1 del lema 1.5, tenemos que

$$\begin{aligned} F_y(\beta) - F_y(\alpha) &= \omega(y - p(\beta)) - \omega(y - p(\alpha)) \leq \omega\big((y - p(\beta)) - (y - p(\alpha))\big) \\ &= \omega(p(\alpha) - p(\beta)) \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

para todo $\beta \geq \alpha$. Por tanto F_y satisface la primera condición.

Por otro lado, la condición 2 del lema 1.5 dice que

$$\limsup_{t \to 0^+} F_y(t) = \limsup_{t \to 0^+} \omega(y - p(t)) > 0,$$

de manera que F_y también satisface la segunda condición.

Entonces, aplicando el lema 1.3, deducimos que la ecuación $F_y(\alpha) = \alpha$ tiene una única solución. Esto significa que para cualquier $y \in X$, existe un único número $\alpha(y) > 0$ con la propiedad

$$\omega\big(y - p(\alpha(y))\big) = \alpha(y).$$

Esto implica que la aplicación

$$\psi(x) = x + p(\omega(x))$$

es una biyección de $X \setminus \{0\}$ sobre X cuya inversa satisface

$$\psi^{-1}(y) = y - p(\alpha(y)).$$

En efecto, si $\psi(x) = \psi(z) = y$ entonces $\omega(y - p(\omega(x))) = \omega(x)$ y también $\omega(y - p(\omega(z))) = \omega(z)$, de modo que $\omega(x) = \omega(z) = \alpha(y) > 0$ por la unicidad de $\alpha(y)$, y por tanto $x = y - p(\alpha(y)) = z$. Además, para cada $y \in X$, como $\psi(y - p(\alpha(y))) = y - p(\alpha(y)) + p(\omega(y - p(\alpha(y)))) = y - p(\alpha(y)) + p(\alpha(y))$, el punto $x = y - p(\alpha(y))$ satisface $\psi(x) = y$, así como $x \neq 0$ (porque $\omega(x) = \alpha(y) > 0$ y $\omega^{-1}(0) = \{0\}$).

Como ω es C^p suave en $X \setminus \{0\}$ y p es C^p suave, también lo es ψ. Definamos $\Phi : X \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Phi(y, \alpha) = \alpha - \omega(y - p(\alpha)).$$

Puesto que para cualquier $y \in X$ tenemos $y - p(\alpha(y)) \neq 0$, la aplicación Φ es diferenciable en un entorno de cualquier punto $(y_0, \alpha(y_0))$ en $X \times (0, \infty)$. Por otra parte, como $F_y(\beta) - F_y(\alpha) \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ para cada $\beta \geq \alpha > 0$, es claro que $F_y'(\alpha) \leq \frac{1}{2}$ para todo α en un entorno de $\alpha(y)$, y así

$$\frac{\partial \Phi(y, \alpha)}{\partial \alpha} = 1 - F_y'(\alpha) \geq 1 - 1/2 > 0.$$

Por consiguiente, utilizando el teorema de la función implícita, obtenemos que la aplicación $y \to \alpha(y)$ es de clase C^p y por tanto $\psi : X \setminus \{0\} \longrightarrow X$ es un difeomorfismo de clase C^p. Además, es obvio que $\psi(x) = x$ siempre que $\omega(x) \geq \varepsilon$. Así, para todo $\varepsilon > 0$ hemos construido un difeomorfismo $\psi_\varepsilon : X \setminus \{0\} \longrightarrow X$ de clase C^p tal que ψ_ε es la identidad fuera del conjunto $\{x \in X \mid \omega(x) \leq \varepsilon\}$.

Para concluir la demostración del teorema 1.2, sólo tenemos que componer ψ_ε con un difeomorfismo $g : X \longrightarrow X$ de clase C^p que transforme el conjunto $\{x \in X : \varrho(x) \leq \varepsilon\}$ en $\{x \in X : \omega(x) \leq \varepsilon\}$. La existencia de un tal difeomorfismo está asegurada por el siguiente lema 1.6. Definamos pues $\varphi = \varphi_\varepsilon = g^{-1} \circ \psi_\varepsilon^{-1} \circ g$. Es claro que φ es un difeomorfismo de X sobre $X \setminus \{0\}$ de clase C^p, tal que $\varphi(x) = x$ siempre que $\varrho(x) \geq \varepsilon$.

Ahora enunciemos formalmente el resultado que hemos utilizado en la parte final de la demostración precedente (y que volveremos a usar más adelante). Primero, recordemos que un *cuerpo convexo* U (esto es, un subconjunto cerrado y convexo con interior no vacío) en un espacio de Banach X se dice que es un *cuerpo de clase* C^p siempre que U sea una subvariedad de clase C^p cuyo borde, ∂U, tiene codimensión uno. Por simplicidad, y sin pérdida de generalidad supondremos siempre que $0 \in intU$, y escribiremos $ccU = \{x \in X \mid \forall r > 0 \;\; rx \in U\}$, que denota el *cono característico* de U. Si U_1, U_2 son cuerpos convexos de clase C^p en un espacio de Banach X, diremos que U_1 y U_2 son C^p *relativamente difeomorfos* siempre que exista un difeomorfismo $\varphi : X \longrightarrow X$ de clase C^p tal que $\varphi(U_1) = U_2$.

Para cada cuerpo convexo U en un espacio de Banach X podemos definir el funcional de Minkowski de U, $q_U : X \longrightarrow [0, \infty)$, por

$$q_U(x) = \inf\{\lambda > 0 \mid \frac{1}{\lambda}x \in U\}.$$

Es fácil ver que para todo cuerpo convexo U su funcional de Minkowski q_U es una función lipschitziana que satisface $q_U(x + y) \leq q_U(x) + q_U(y)$ y $q_U(rx) = rq_U(x)$ para todo $r \geq 0$; $x, y \in X$. Nótese también que

$$ccU = \{x \in X \mid q_U(x) = 0\}, \quad \text{y} \quad U = \{x \in X \mid q_U(x) \leq 1\}.$$

Además, una aplicación rutinaria del teorema de la función implícita muestra que si U es un cuerpo convexo de clase C^p en X entonces su funcional de Minkowski q_U es de clase C^p en el conjunto $X \setminus ccU = X \setminus q_U^{-1}(0)$.

Lema 1.6 *Sea X un espacio de Banach, y sean U_1, U_2 cuerpos convexos de clase C^p tales que el origen es un punto interior a ambos y además $ccU_1 = ccU_2$. Entonces existe un difeomorfismo de clase C^p $g : X \longrightarrow X$ tal que $g(U_1) = U_2$, $g(0) = 0$, y $g(\partial U_1) = \partial U_2$, en donde ∂U_j denota el borde de U_j. Además, $g(x) = \mu(x)x$, donde $\mu : X \longrightarrow [0, \infty)$, y por consiguiente g preserva los rayos que emanan del origen.*

Demostración. Antes que nada veamos que el enunciado es cierto si suponemos además que $U_1 \subseteq U_2$. esto es, supongamos que U y V son cuerpos convexos de clase C^p tales que el origen es un punto interior a ambos, y que $ccU = ccV$, y $U \subseteq V$ (de manera que $q_V(x) \leq q_U(x)$ para todo x), y veamos que existe un difeomorfismo $g : X \longrightarrow X$ de clase C^p tal que $g(U) = V$, $g(0) = 0$, y $g(\partial U) = \partial V$.

Sea $\lambda(t)$ una función real creciente de clase C^∞ definida para $t > 0$, tal que $\lambda(t) = 0$ si $t \leq 1/2$ y $\lambda(t) = 1$ si $t \geq 1$. Sea

$$g(x) = \left[\lambda(q_U(x))\frac{q_U(x)}{q_V(x)} + 1 - \lambda(q_U(x))\right]x$$

para $x \notin ccV$, y $g(x) = x$ cuando $q_V(x) = 0$. Es claro que g es una aplicación de clase C^p. Sea $y \notin ccV$ un vector arbitrario de X y pongamos

$$G_y(t) = \left[\lambda(tq_U(y))\frac{q_U(y)}{q_V(y)} + 1 - \lambda(tq_U(y))\right]t$$

para $t > 0$. Nótese que $G_y(t)$ es estrictamente creciente y además satisface

$$\lim_{t\to 0^+} G_y(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to\infty} G_y(t) = \infty.$$

Esto implica que para todo $y \in X \setminus ccV$, existe un único número $t(y) > 0$ tal que $G_y(t(y)) = 1$, lo que significa que g es una biyección de $X \setminus ccV$ sobre $X \setminus ccV$, con $g^{-1}(y) = t(y)y$. También es claro que g fija todos los puntos de ccV, de manera que g es una biyección de X sobre X. Definamos $\Phi : (X \setminus ccV) \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Phi(y, t) = \left[\lambda(tq_U(y))\frac{q_U(y)}{q_V(y)} + 1 - \lambda(tq_U(y))\right]t.$$

Teniendo en cuenta que $q_V(x) \leq q_U(x)$ y que λ es creciente, puede comprobarse fácilmente que $\frac{\partial\Phi}{\partial t}(y, t) \geq 1 > 0$. Entonces, utilizando el teorema de la función implícita, obtenemos que $y \longrightarrow t(y)$ es una función de clase C^p en $X \setminus ccV$, y por tanto también lo es g^{-1}. Por otra parte, de la definición anterior es claro que la aplicación g se restringe a la identidad en un entorno del subespacio ccV, y de aquí se deduce que tanto g como g^{-1} son de clase C^p en la totalidad del espacio X. Por consiguiente, g es un autodifeomorfismo de clase C^p de X, y es obvio que g

transforma el cuerpo $U = \{x \in X \mid q_U(x) \leq 1\}$ en $V = \{x \in X \mid q_V(x) \leq 1\}$, y su borde $\partial U = \{x \in X \mid q_U(x) = 1\}$ en $\partial V = \{x \in X \mid q_V(x) = 1\}$.

Ahora consideremos el caso general. Sea $U = \{x \in X \mid q_{U_1}(x) + q_{U_2}(x) \leq 1\}$, que es un cuerpo convexo suave de clase C^p que satisface $ccU = ccU_j$, y $U \subsetneq U_j$, para $j = 1, 2$. Por la primera parte de esta demostración sabemos que existen auto-difeomorfismos de X, g_1 y g_2, tales que $g_j(U) = U_j$ y $g_j(\partial U) = \partial U_j$, $j = 1, 2$. Entonces, si ponemos $g = g_2 \circ g_1^{-1}$, obtenemos un auto-difeomorfismo de X que transforma U_1 en U_2, y ∂U_1 en ∂U_2.

Completemos ahora la prueba del teorema 1.1. No haremos otra cosa que adaptar las ideas de Bessaga [7] al contexto más general de una norma $\|\cdot\|$ diferenciable de clase C^p cuya esfera podría contener segmentos y en consecuencia la proyección estereográfica usual podría no estar bien definida para la totalidad de la esfera.

Elijamos un punto $x_0 \in S_X$ y veamos primero que $S_X \setminus \{x_0\}$ es difeomorfo a cualquier hiperplano cerrado H en X. Pongamos $x^* = d\|\cdot\|(x_0)$, $Z = \ker x^*$, y consideremos la descomposición del espacio $X = [x_0] \oplus Z = \mathbb{R} \times Z$. Tomemos un cuerpo convexo U de clase C^∞ en el plano $\mathbb{R}^2$ tal que el conjunto

$$\{(t, s) : t^2 + s^2 = 1, t \geq 0\} \cup \{(-1, s) : |s| \leq 1/2\}$$

esté contenido en ∂U, el borde de U. Consideremos el funcional de Minkowski de U, $q_U(t, s) = \inf\{\lambda > 0 : (t, s) \in \lambda U\}$, que es de clase C^∞ fuera de $(0, 0)$. Definamos $p(t, z) = q_U(t, \|z\|)$ para todo $(t, z) \in \mathbb{R} \times Z$. Es claro que p es una función de clase C^p fuera del rayo $\{\lambda x_0 : \lambda > 0\}$ (y p es C^1 en $X \setminus \{0\}$). Ahora consideremos el cuerpo convexo $V = \{(t, z) \in X : p(t, z) \leq 1\}$ y su borde ∂V. La demostración del lema 1.6 prueba que los conjuntos $\partial V \setminus \{x_0\}$ y $S_X \setminus \{x_0\}$ son C^p difeomorfos (mientras que ∂V y S_X son C^1 difeomorfos). Nótese que para todo $z \in Z$ el rayo que une z con x_0 corta al conjunto ∂V en un único punto. Esto significa que la proyección estereográfica $\pi : \partial V \setminus \{x_0\} \longrightarrow Z_{-1}$ (donde $Z_{-1} = \{x \in X : x^*(x) = -1\}$ es el hiperplano tangente a ∂V en $-x_0$), definida por medio de los rayos que emanan de x_0, es una biyección de $\partial V \setminus \{x_0\}$ sobre Z_{-1}, y es fácil comprobar que π es un difeomorfismo de clase C^p entre $\partial V \setminus \{x_0\}$ y Z_{-1}. Puesto que cualesquiera dos hiperplanos cerrados de X son isomorfos, esto prueba que $\partial V \setminus \{x_0\}$ es C^p difeomorfo a cada hiperplano cerrado H de X, y por tanto tambin lo es $S_X \setminus \{x_0\}$.

Así, para concluir la demostración del teorema 1.1 sólo queda probar que $S_X \setminus \{x_0\}$ y S_X son C^p difeomorfos, lo que podemos hacer eligiendo un atlas adecuado para S_X y utilizando el teorema 1.2. Recuérdese que $x^* = d\|\cdot\|(x_0)$ y $Z = \ker x^*$. Definamos $D_1 = \{x \in S_X : x^*(x) > -1/2\}$ y $D_2 = \{x \in S_X : x^*(x) < 1/2\}$, y sea $\pi_1 : D_1 \longrightarrow Z$ la proyección estereográfica definida por medio de los rayos que emanan de $-x_0$, y $\pi_2 : D_2 \longrightarrow Z$ la proyección estereográfica definida por medio de los rayos que salen de x_0. Nótese que, aunque la esfera S_X podría contener segmentos, estas proyecciones estereográficas están bien definidas porque las hemos restringido a D_1 y D_2, conjuntos que no pueden contener segmentos que pasen por $-x_0$ y x_0 respectivamente. Sea $G_1 = \{x \in D_1 : x^*(x) > 1/2\}$ y consideremos $\pi_1(G_1) \subsetneq Z$. Como $\pi_1(G_1)$ es un subconjunto abierto de Z que contiene a 0, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\{z \in Z : \|z\| \leq \varepsilon\} \subseteq \pi_1(G_1)$. Ahora bien, por el teorema 1.2 obtenemos un difeomorfismo de clase C^p, $\varphi : Z \longrightarrow Z \setminus \{0\}$, tal que $\varphi(z) = z$ siempre que $\|z\| \geq \varepsilon$. Finalmente, definamos $g : S_X \longrightarrow S_X \setminus \{x_0\}$ por

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in D_2 \\ \pi_1^{-1}(\varphi(\pi_1(x))) & \text{si } x \in D_1 \end{cases}$$

Es fácil comprobar que g es un difeomorfismo de clase C^p de S_X sobre $S_X \setminus \{x_0\}$. Esto concluye la prueba del teorema 1.1.

Es interesante observar que los *difeomorfismos eliminadores* obtenidos en el teorema 1.2 pueden encontrarse arbitrariamente próximos a la identidad, la cual sin embargo es todo lo contrario de un difeomorfismo eliminador. Con más precisión,

Teorema 1.7 *Sea X un espacio de Banach infinito dimensional con una norma equivalente $\|\cdot\|$ de clase C^p. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe un difeomorfismo de clase C^p $\varphi_\varepsilon : X \longrightarrow X \setminus \{0\}$ tal que $\|\varphi_\varepsilon(x) - x\| \leq \varepsilon$ para todo $x \in X$.*

Demostración. Basta tomar un difeomorfismo de clase C^p, $\varphi = \varphi_\varepsilon : X \longrightarrow X \setminus \{0\}$, tal que $\varphi(x) = x$ si $\|x\| \geq \varepsilon/2$. Con esta elección, si $\|x\| \geq \varepsilon/2$ entonces $\|\varphi(x) - x\| = 0$, mientras que, si $\|x\| \leq \varepsilon/2$ también tenemos $\|\varphi(x)\| \leq \varepsilon/2$, y por tanto $\|\varphi(x) - x\| \leq \varepsilon$.

Observación 1.8 Sea $(X, \|.\|)$ un espacio de Banach infinito dimensional que admite una norma ϱ Fréchet diferenciable (no necesariamente equivalente). Es natural considerar la esfera unidad $S_\varrho = \{x \in X : \varrho(x) = 1\}$ y preguntarse se S_ϱ es difeomorfa a cualquier hiperplano cerrado H en X. Puede demostrarse fácilmente que éste es el caso, empleando el teorema 1.2 como en la prueba de 1.1.

Antes de cerrar este capítulo debemos observar que en general no puede obtenerse un difeomorfismo entre la totalidad de un espacio de Banach X con una norma diferenciable $\|\cdot\|$ y su esfera unidad $S_X = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$. Esto es una consecuencia obvia de la existencia de los llamados espacios hereditariamente indescomponibles.

Observación 1.9 Sea X el espacio de Banach construido por W. T. Gowers y B. Maurey en [50]. X es reflexivo y es otro contraejemplo aparte del de [49] al problema del hiperplano de Banach. Es decir, X no es isomorfo a ninguno de sus hiperplanos. Siendo reflexivo, X tiene una norma equivalente Fréchet diferenciable $\|.\|$ (ver [33], o [65] por ejemplo). Entonces su esfera unidad $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ es difeomorfa a cualquier hiperplano cerrado H en X, pero S no es difeomorfa a X. En efecto, si existiera un difeomorfismo $f : X \longrightarrow S$ entonces, para cada punto $x \in X$, la diferencial de f en x, $df(x)$, induciría un isomorfismo lineal entre los espacios tangentes a X y S en los puntos x y $f(x)$ respectivamente; esto es, $df(x)$ establecería un isomorfismo lineal entre X y uno de sus hiperplanos cerrados H, lo cual es imposible. Este ejemplo sugiere que la generalización adecuada del teorema de Bessaga [7] es que para todo espacio de Banach con norma diferenciable, su esfera unidad sea difeomorfa a cada hiperplano cerrado, en lugar de ser difeomorfa a la totalidad del espacio.

Capítulo 2

El teorema de Rolle en dimensión infinita

2.1 El teorema de Rolle no es cierto en dimensión infinita

El teorema de Rolle en espacios de dimensión finita asegura que, para cada subconjunto abierto conexo y acotado $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$, y para cada función continua $f : \overline{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que f es diferenciable en $\mathcal{U}$ y constante en $\partial\mathcal{U}$, existe un punto en $\mathcal{U}$ en el cual la diferencial de f se anula. Desgraciadamente, el teorema de Rolle no sigue siendo cierto en dimensión infinita. Fue S. A. Shkarin [62] quien probó por primera vez que este teorema falla para espacios de Banach infinito dimensionales superreflexivos y no reflexivos con normas equivalentes Fréchet diferenciables.

En el primer capítulo demostramos que todo espacio de Banach de dimensión infinita X con una norma equivalente de clase C^p admite un difeomorfismo de clase C^p entre X y $X \setminus \{0\}$ con soporte acotado (esto es, que se restringe a la identidad fuera de una bola centrada en el origen. Utilizando este hecho es bastante sencillo mostrar que el teorema de Rolle falla para una amplia clase de espacios de Banach infinito dimensionales, a saber, la de todos los espacios de Banach infinito dimensionales con normas equivalentes Fréchet diferenciables. En efecto, para un tal espacio $(X, \|\cdot\|)$, escojamos un difeomorfismo de clase C^1 $\varphi : X \longrightarrow X \setminus \{0\}$ tal que $\varphi(x) = x$ cuando $\|x\| \geq 1/2$, y definamos $f : B \longrightarrow [0, 1]$ por

$$f(x) = 1 - \|\varphi(x)\|$$

para todo x en la bola unidad $B = \{z \in X : \|x\| \leq 1\}$. Es obvio que f es una función acotada de clase C^1 en B que satisface $f \equiv 0$ en la esfera unidad, y es fácil comprobar que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in X$. Este contraejemplo es esencialmente el mismo que el de Shkarin [62] para espacios de Banach superreflexivos.

Por otra parte, el teorema de Rolle es trivialmente cierto en todos los espacios que no son de Asplund, debido al comportamiento armónico de las aplicaciones diferenciables en dichos espacios: si X no es un espacio Asplund, $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto conexo y acotado de X, y tenemos una función continua y acotada $f:\overline{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathbb{R}$ que es Fréchet diferenciable en $\mathcal{U}$ y $f \equiv 0$ en $\partial\mathcal{U}$, entonces necesariamente es $f \equiv 0$ en $\mathcal{U}$ (ver [33], capítulo III, página 97).

Así, en muchos espacios de Banach infinito dimensionales, el teorema de Rolle o bien falla o bien es trivial, dependiendo de las propiedades de diferenciabilidad del espacio. En este contexto, no parece demasiado arriesgado conjeturar que el teorema de Rolle será cierto en un espacio de Banach infinito dimensional si y sólo si nuestro espacio *no* tiene una función meseta de clase C^1. Probaremos que esta conjetura es cierta dentro de la clase de todos aquellos espacios de Banach X que tienen normas Fréchet diferenciables no necesariamente equivalentes. Esta es una condición muy general, puesto que es satisfecha por todo espacio WCD, todo espacio que sea linealmente inyectable en algún $c_0(\Gamma)$, e incluso por todo espacio inyectable en algún $C(K)$, donde K es un compacto disperso con $K^{(\omega_1)} = \emptyset$. Obviamente, todo espacio de Banach que sea linealmente inyectable en otro que tenga una norma Fréchet diferenciable satisfará dicha condición. No obstante, existen espacios de Banach que no poseen ninguna norma diferenciable (equivalente o no equivalente). Por ejemplo, el espacio m_0 definido en la página 76 de [33] (ver también la p. 89).

Esta conjetura está íntimamente relacionada con el problema propuesto en [35] acerca de si para todo espacio de Banach X que tenga una función meseta de clase C^1 existirá un difeomorfismo C^1 $\varphi : X \longrightarrow X \setminus \{0\}$ tal que φ sea la identidad fuera de una bola centrada en 0. A continuación damos una respuesta parcial afirmativa a esta pregunta dentro de la clase de todos los espacios de Banach que tienen normas Fréchet diferenciables no necesariamente equivalentes.

Proposición 2.1 *Para todo espacio de Banach infinito dimensional X con una norma Fréchet diferenciable no necesariamente equivalente, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *X tiene una función meseta de clase C^1.*
2. *Existe un difeomorfismo $\varphi : X \longrightarrow X\setminus\{0\}$ de clase C^1 tal que φ es la identidad fuera de una bola centrada en 0.*

Demostración. Si $\varphi : X \longrightarrow X \setminus \{0\}$ es un difeomorfismo de clase C^1 tal que $\varphi(x) = x$ cuando $\|x\| \geq r$ para algún $r > 0$, entonces, tomando $T \in X^*$ tal que $T(\varphi(0)) \neq 0$ y definiendo $f(x) = T(\varphi(x) - x)$, obtenemos una función meseta f tal que $f(0) \neq 0$ y $f(x) = 0$ si $\|x\| \geq r$, lo cual prueba que (2) implica (1).

Ahora supongamos que X tiene una función meseta de clase C^1. La proposición 5.1 de [33], capítulo II, nos da una función Q en X tal que Q es de clase C^1 en $X \setminus \{0\}$, $Q(tx) = |t|Q(x)$ para todo $x \in X$ y $t \in \mathbb{R}$, y existen constantes $a > 0$ y $b > 0$ tales que $a\|x\| \leq Q(x) \leq b\|x\|$ para $x \in X$. Sea $\lambda : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ una función creciente de clase C^∞ tal que $\lambda(t) = 0$ para $t \leq 1/2$ y $\lambda(t) = 1$ para $t \geq 1$. Sea ϱ una norma Fréchet diferenciable (no necesariamente equivalente) en X. Podemos suponer que $\varrho(x) \leq Q(x)$ para todo $x \in X$. Definamos

$$H(x) = [\lambda(Q(x))\frac{Q(x)}{\varrho(x)} + 1 - \lambda(Q(x))]x,$$

para $x \neq 0$, y $H(0) = 0$. Está bastante claro que H es una biyección de X sobre X que transforma el conjunto $\{x \in X : Q(x) \leq 1\}$ en $\{x \in X : \varrho(x) \leq 1\}$, y H es de clase C^1. Usando el teorema de la función implícita como en la demostración de 1.6, obtenemos que H^{-1} es también de clase C^1. Por el teorema 1.2, existe un difeomorfismo $\psi : X \longrightarrow X \setminus \{0\}$ que es la identidad fuera de la bola (no necesariamente acotada) $\{x \in X \mid \varrho(x) \leq 1\}$. Componiendo este difeomorfismo con H, obtenemos un difeomorfismo de clase C^1 entre X y $X \setminus \{0\}$ tal que es la identidad fuera del conjunto $\{x \in X : Q(x) \leq 1\}$, y por tanto también fuera de una bola equivalente centrada en 0.

Ahora podemos utilizar este resultado para probar nuestra conjetura dentro de la mencionada clase de espacios de Banach.

Teorema 2.2 *Si un espacio de Banach infinito-dimensional X tiene una norma Fréchet diferenciable (no necesariamente equivalente), las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X tiene una función meseta de clase C^1.*

2. *Existen un subconjunto de X abierto conexo y acotado $\mathcal{U}$ y una función acotada y continua $f : \overline{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que f es de clase $C^1(\mathcal{U})$, $f \equiv 0$ en $\partial\mathcal{U}$ y sin embargo $df(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathcal{U}$; esto es, el teorema de Rolle falla en X.*

3. *Existen una función acotada y de clase C^1 $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y un subconjunto abierto conexo y acotado $\mathcal{U}$ de X tales que $f \equiv 0$ en $X \setminus \mathcal{U}$ y sin embargo $df(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathcal{U}$.*

Demostración. Es obvio que (3) implica (2) se comprueba fácilmente que (2) implica (1). Probemos que (1) implica (3). Sea Q el funcional homogéneo utilizado en la demostración de la proposición 2.1. Por la proposición 2.1 obtenemos un difeomorfismo $\varphi : X \longrightarrow X \setminus \{0\}$ de clase C^1. Sea $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función par de clase C^∞ tal que $\theta(0) = 1$, $\theta'(t) < 0$ para todo $t \in (0, 1)$, y$\theta(t) = 0$ para todo $t \geq 1$. Definamos $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f = \theta \circ Q \circ \varphi$. Puesto que f es composición de las funciones de clase C^1 $\varphi : X \longrightarrow X \setminus \{0\}$, $Q : X \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, y θ, se sigue que f es de clase C^1, y f es acotada porque así lo es θ. Además, tenemos $f(x) = 0$ si $Q(\varphi(x)) \geq 1$. Sin embargo, $f'(x) \neq 0$ para todo x tal que $Q(\varphi(x)) < 1$. En efecto,

$$f'(x)(y) = \theta'(Q(\varphi(x)))dQ(\varphi(x))(\varphi'(x)(y)) \neq 0$$

para algún $y \in X$, porque $\varphi'(x)$ es un isomorfismo lineal, $dQ(z) \neq 0$ para todo $z \in X \setminus \{0\}$ y $\theta'(Q(\varphi(x))) < 0$ cuando quiera que $Q(\varphi(x)) < 1$. Así, tomando $\mathcal{U} = \{x \in X : Q(\varphi(x)) < 1\}$, la prueba de que (1) implica (3) está concluida.

2.2 Un teorema de Rolle aproximado

A pesar de que el teorema de Rolle falla en dimensión infinita, veremos que una interesante versión aproximada de este teorema vale en todo espacio de Banach.

Por un teorema de Rolle aproximado entendemos que si una función diferenciable oscila entre $-\varepsilon$ y ε en la esfera unidad, entonces existe un punto en el interior de la bola unidad en el cual la diferencial de la función tiene norma menor o igual que ε. Con más generalidad, probaremos lo siguiente. Sea $\mathcal{U}$ un abierto conexo y acotado en un espacio de Banach X. Sea $f : \overline{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y acotada, Gâteaux diferenciable en $\mathcal{U}$. Sean $R > 0$ y $x_0 \in \mathcal{U}$ tales que $\mathrm{dist}(x_0, \partial\mathcal{U}) = R$. Supongamos que $f(\partial\mathcal{U}) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$. Entonces existe un $x_\varepsilon \in \mathcal{U}$ tal que $\|df(x_\varepsilon)\| \leq \varepsilon/R$.

Presentaremos dos pruebas de este resultado, la primera de las cuales es más larga pero también más intuitiva. Los lectores aficionados a las demostraciones breves y elegantes deberían saltarse unas cuantas hojas y continuar leyendo en la página 37. En lo que sigue $B(x_0, R)$ denota la bola cerrada de centro x_0 y radio R, mientras que $S(x_0, R)$ representa su borde.

Teorema 2.3 (Teorema de Rolle aproximado) *Sean X un espacio de Banach y $R, \varepsilon > 0$. Sea $f : B(0, R) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y acotada, y supongamos que f es Gâteaux diferenciable en $intB(0, R)$ y que $f(S(0, R)) \subseteq [-\varepsilon, +\varepsilon]$. Entonces existe un $x_\varepsilon \in intB(0, R)$ tal que $\|df(x_\varepsilon)\| \leq \varepsilon/R$.*

La idea de la primera prueba de este resultado es tan simple como sigue. Supongamos que el resultado no es cierto. Entonces, para todo punto x_0 en el interior de la bola podemos encontrar un camino corto que sale de x_0 y a lo largo del cual f crece más de ε/R veces su longitud. A continuación, utilizando el lema de Zorn, obtenemos un camino que comienza en 0 y alcanza la esfera, a lo largo del cual f crece más de ε/R veces su longitud (y por tanto más que ε). De manera análoga encontramos otro camino que comienza en 0 y alcanza también la esfera, a lo largo del cual la función f decrece más que ε. Así obtenemos dos puntos en la esfera en los cuales la función f toma valores cuya diferencia excede 2ε. Y esto contradice el hecho de que f oscila entre $-\varepsilon$ y ε sobre la esfera.

En esta primera demostración necesitaremos el siguiente resultado de Teoría de la Medida, cuya prueba puede obtenerse combinando 6.3.10 y E.11 de [17].

Teorema 2.4 *Sea X un espacio de Banach y sea $F : [a, b] \longrightarrow X$ una función continua tal que:*

1. *F es diferenciable en todos los puntos de $[a, b]$ excepto quizás una cantidad contable, a lo sumo; y*

2. *F' es integrable Bochner.*

Entonces $F(t) = F(a) + \int_a^t F'(s)ds$ para cada $t \in [a, b]$.

Comenzamos ya la prueba del teorema de Rolle aproximado. Supongamos que $\|df(x)\| > \varepsilon/R$ para todo $x \in \mathrm{int}B(0, R)$, y obtendremos una contradición.

Si $\|df(0)\| > \varepsilon/R$, existe $h_0 \in S_X$ tal que $df(0)(h_0) > \varepsilon/R$. Como f es Gâteaux diferenciable en 0, existe $\delta_0 \in (0, R)$ tal que

$$\frac{| f(th_0) - f(0) - df(0)(th_0) |}{t} < \varepsilon' = df(0)(h_0) - \frac{\varepsilon}{R}$$

para todo $t \in (0, \delta_0]$. Tomando $t = \delta_0$ obtenemos

$$f(\delta_0 h_0) > f(0) + \frac{\varepsilon}{R}\delta_0 \tag{1}$$

es decir, en el segmento $[0, y_0]$, donde $y_0 = \delta_0 h_0$, f crece más que ε/R veces la longitud del segmento.

Definamos Ω como el conjunto de todos aquellos caminos $\alpha : [0, t_\alpha] \longrightarrow B(0, R)$ que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) α es continuo, y es diferenciable en todos los puntos de $[0, t_\alpha]$ excepto quizás una cantidad contable de ellos;

(ii) $\alpha(0) = y_0$, y $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in [0, t_\alpha]$ donde α es diferenciable, es decir, α viaja a lo largo de su traza con velocidad constante;

(iii) α' es integrable Bochner; y

(iv) $f(\alpha(t_\alpha)) \geq t_\alpha \varepsilon/R + f(y_0)$, esto es, a lo largo del camino α, la función f crece más que ε/R veces la longitud de α.

Ahora definamos el siguiente orden en Ω

$$\alpha \leq \beta \text{ si y sólo si } t_\alpha \leq t_\beta \text{ y } \alpha(t) = \beta(t) \text{ para todo } t \in [0, t_\alpha],$$

de manera que $(\Omega, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Por decirlo ligeramente, Ω consiste en todos los caminos continuos y diferenciables en $B(0, R)$ que empiezan en y_0 y a lo largo de los cuales f crece más que ε/R veces su longitud. Nótese que longitud$(\alpha) = t_\alpha$ para todo $\alpha \in \Omega$. Los caminos de Ω están ordenados por la inclusión de sus trazas. Es claro que $\Omega \neq \emptyset$.

Probemos ahora que todo subconjunto totalmente ordenado (cadena) de $(\Omega, \leq)$ tiene una cota superior. Sea $\{\alpha_i\}_{i \in I} \neq \emptyset$ una cadena en $(\Omega, \leq)$, y definamos

$$r = \sup\{t_{\alpha_i} \mid i \in I\}.$$

Claramente se tiene $r < \infty$ porque f es acotada en $B(0, R)$. Elijamos $(i_n) \subset I$ tal que $t_{\alpha_{i_n}}$ es una sucesión creciente y convergente a r. Será conveniente denotar $\alpha_{i_n} = \alpha_n$ siempre que no haya ambigüedad. Definamos $x_n = \alpha_n(t_{\alpha_n})$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Veamos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy. En efecto, como $\alpha_n, \alpha_{n+p} \in \{\alpha_i\}_{i \in I}$ y $t_{\alpha_n} < t_{\alpha_{n+p}}$, se tiene que $\alpha_n \leq \alpha_{n+p}$, de modo que $\alpha_{n+p} = \alpha_n$ en $[0, t_{\alpha_n}]$ y por tanto

$$\begin{aligned}
\|x_{n+p} - x_n\| &= \|\alpha_{n+p}(t_{\alpha_{n+p}}) - \alpha_n(t_{\alpha_n})\| \\
&= \|\alpha_{n+p}(t_{\alpha_{n+p}}) - \alpha_{n+p}(t_{\alpha_n})\| = \|\int_{t_{\alpha_n}}^{t_{\alpha_{n+p}}} \alpha'_{n+p}(s)ds\| \\
&\leq \int_{t_{\alpha_n}}^{t_{\alpha_{n+p}}} \|\alpha'_{n+p}(s)\|ds = |t_{\alpha_{n+p}} - t_{\alpha_n}|,
\end{aligned}$$

lo cual prueba que (x_n) es una sucesión de Cauchy, porque lo es (t_{α_n}). Nótese que aquí hemos usado el teorema 2.4.

Sea $y = \lim_n x_n \in B(0, R)$. Definamos $\alpha : [0, r] \longrightarrow B(0, R)$ por $\alpha(t) = \alpha_n(t)$ si $t \in [0, t_{\alpha_n}]$ para algún n, y $\alpha(t) = y$ si $t = r$. Es fácil comprobar que esta definición no depende de la elección de la sucesión (t_{α_n}). Además, α está bien definido porque $\alpha_m = \alpha_n$ en $[0, t_{\alpha_n}]$ si $m \geq n$.

Por su definición es obvio que α es continuo en $[0, r)$; veamos que α es también continuo en r. Sea $(t_k) \subset [0, r)$ tal que $t_k \longrightarrow r$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ podemos elegir $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $r > t_{\alpha_{n_k}} > t_k$ y $(n_k) \nearrow \infty$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\|\alpha(t_k) - y\| \leq \|\alpha(t_k) - \alpha(t_{\alpha_{n_k}})\| + \|\alpha(t_{\alpha_{n_k}}) - y\| \\
&= \|\alpha_{n_k}(t_k) - \alpha_{n_k}(t_{\alpha_{n_k}})\| + \|\alpha_{n_k}(t_{\alpha_{n_k}}) - y\| \\
&= \| \int_{t_k}^{t_{\alpha_{n_k}}} \alpha'_{n_k}(s) ds\| + \|x_{n_k} - y\| \\
&\leq \int_{t_k}^{t_{\alpha_{n_k}}} \|\alpha'_{n_k}(s)\| ds + \|x_{n_k} - y\| \\
&= |t_{\alpha_{n_k}} - t_k| + \|x_{n_k} - y\|,
\end{aligned}$$

de modo que $\lim_k \alpha(t_k) = y$.

Es fácil comprobar que α es diferenciable en todos los puntos de $[0, r]$ excepto quizás en una cantidad contable de ellos, y que α' es integrable Bochner, con $\|\alpha'\| = 1$. Además, $\alpha(0) = y_0$, y $f(\alpha(r)) \geq r\varepsilon/R + f(y_0)$, ya que

$$\begin{aligned}
f(\alpha(r)) &= f(y) = f\left(\lim_n x_n\right) = \lim_n f(x_n) \\
&= \lim_n f(\alpha_n(t_{\alpha_n})) \geq \lim_n [t_{\alpha_n}\varepsilon/R + f(y_0)] \\
&= r\varepsilon/R + f(y_0).
\end{aligned}$$

Por consiguiente, $\alpha \in \Omega$. Por otra parte, es inmediato que $\alpha \geq \alpha_i$ para todo $i \in I$, de manera que α es una cota superior para la cadena $\{\alpha_i\}$ in $(\Omega, \leq)$.

Entonces, por el lema de Zorn, podemos concluir que existe un elemento maximal β en $(\Omega, \leq)$.

Pongamos $z = \beta(t_\beta)$. Debe ser $z \in S(0, R)$. En efecto, si z estuviera en $\text{int}B(0, R)$, como f es Gâteaux diferenciable en $\text{int}B(0, R)$ y $\|df(z)\| > \varepsilon/R$, existirían un $h \in S_X$ y un $\delta > 0$ tales que $f(z + \delta h) > f(z) + \frac{\varepsilon}{R}\delta \geq f(y_0) + \frac{\varepsilon}{R}(t_\beta + \delta)$, de modo que, definiendo $\gamma : [0, t_\beta + \delta] \longrightarrow B(0, R)$ por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \beta(t) & \text{si } t \in [0, t_\beta] \\ z + (t - t_\beta)h & \text{si } t \in [t_\beta, t_\beta + \delta], \end{cases}$$

tendríamos que $\gamma \in \Omega$ y $\gamma \geq \beta$, pero $\gamma \neq \beta$, lo cual contradice la maximalidad de β.

Por tanto, $\beta \in \Omega$ une y_0 con $z \in S(0, R)$, lo que implica que

$$\begin{aligned}
\text{longitud}(\beta) = t_\beta &= \int_0^{t_\beta} \|\beta'(s)\| ds \geq \| \int_0^{t_\beta} \beta'(s) ds\| = \|\beta(t_\beta) - \beta(0)\| \\
&= \|z - y_0\| \geq \text{dist}(y_0, S(0, R)) = R - \|y_0\| = R - \delta_0,
\end{aligned}$$

y entonces tenemos $f(z) \geq f(y_0) + \frac{\varepsilon}{R}t_\beta \geq f(y_0) + \frac{\varepsilon}{R}(R - \delta_0)$, es decir,

$$f(z) \geq f(y_0) + \frac{\varepsilon}{R}(R - \delta_0). \tag{2}$$

Combinando (1) y (2) obtenemos

$$f(z) > f(0) + \varepsilon. \tag{3}$$

Un razonamiento similar sobre el conjunto Ω' de todos los caminos $\alpha : [0, t_\alpha] \longrightarrow B(0, R)$ que satisfacen

(i) α es continuo, y es diferenciable en todos los puntos de $[0, t_\alpha]$ excepto quizá una cantidad contable de ellos;

(ii) $\alpha(0) = 0$, y $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in [0, t_\alpha]$ donde α es diferenciable;

(iii) α' es integrable Bochner; y

(iv) $f(\alpha(t_\alpha)) \leq -t_\alpha\varepsilon/R + f(0)$ (i.e., a lo largo del camino α, la función f decrece más que ε/R veces la longitud de α),

equipado con la relación de orden

$$\alpha \leq \beta \text{ si y sólo si } t_\alpha \leq t_\beta \text{ y } \alpha = \beta \text{ en } [0, t_\alpha],$$

demuestra que existe $z' \in S(0, R)$ tal que

$$f(z') \leq -\varepsilon + f(0). \tag{4}$$

Finalmente, combinando (3) y (4), obtenemos

$$f(z) - f(z') > 2\varepsilon \text{ , con } z, z' \in S(0, R),$$

lo cual contradice el hecho de que $f(S(0, R)) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$. Esto concluye la demostración de 2.3.

Si examinamos la prueba del resultado anterior, es claro que el mismo método sirve para probar lo siguiente.

Teorema 2.5 *Sea $\mathcal{U}$ un abierto convexo y acotado en un espacio de Banach X. Sea $f : \overline{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y acotada, Gâteaux diferenciable en $\mathcal{U}$. Sean $R > 0$ y $x_0 \in \mathcal{U}$ tales que $dist(x_0, \partial\mathcal{U}) = R$. Supongamos que $f(\partial\mathcal{U}) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$. Entonces existe un $x_\varepsilon \in \mathcal{U}$ tal que $\|df(x_\varepsilon)\| \leq \varepsilon/R$.*

A continuación daremos una demostración más corta, aunque quizá menos intuitiva, del teorema de Rolle aproximado, basada en el principio variacional de Ekeland. La versión que necesitaremos de este principio variacional es la siguiente.

Teorema 2.6 (Principio variacional de Ekeland) *Sea X un espacio de Banach y sea $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ una función semicontinua inferiormente y propia que está acotada inferiormente. Sean $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in X$ tales que $f(x_0) < \inf\{f(x) : x \in X\} + \varepsilon$. Entonces para cualquier λ con $0 < \lambda < 1$ existe un punto $z \in Dom(f)$ tal que:*

(i) $\lambda\|z - x_0\| \leq f(x_0) - f(z)$

(ii) $\|z - x_0\| < \varepsilon/\lambda$

(iii) $\lambda\|x - z\| + f(x) > f(z)$ *siempre que* $x \neq z$.

Para una demostración de este resultado, véase el lema 3.13 en [58], o bien [41].

Deduciremos el teorema de Rolle aproximado de los dos lemas siguientes, que en sí mismos son resultados interesantes.

Lema 2.7 *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{U}$ un abierto acotado y conexo en X. Sea $f : \overline{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y acotada tal que:*

1. f es Gâteaux diferenciable en $\mathcal{U}$

2. $\inf f(\overline{\mathcal{U}}) < \inf f(\partial\mathcal{U})$ *o bien* $\sup f(\overline{\mathcal{U}}) > \sup f(\partial\mathcal{U})$.

Entonces, para todo $\alpha > 0$ existe $x \in \mathcal{U}$ tal que $\|df(x)\| \leq \alpha$.

Demostración. Podemos suponer que $\inf f(\overline{\mathcal{U}}) < \inf f(\partial\mathcal{U})$. Elijamos $x_0 \in \mathcal{U}$ tal que $f(x_0) < \inf f(\partial\mathcal{U})$, y sean α, λ tales que $0 < \alpha < \inf f(\partial\mathcal{U}) - f(x_0)$ y $0 < \lambda < \alpha/R$, donde $R = \sup\{\|x_0 - x\| : x \in \overline{\mathcal{U}}\} + 1$. Del principio variacional de Ekeland se sigue que existe $x_1 \in \overline{\mathcal{U}}$ tal que

$$f(x_1) < f(x) + \lambda\|x - x_1\| \tag{1}$$

para todo $x \neq x_1$. En particular

$$f(x_1) \leq f(x_0) + \lambda\|x_0 - x_1\| \leq f(x_0) + \lambda R < \inf f(\partial\mathcal{U})$$

y por tanto $x_1 \in \mathcal{U}$. Por otra parte, la desigualdad (1) implica que para todo h con $\|h\| = 1$,

$$df(x_1)(h) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_1 + th) - f(x_1)}{t} \geq -\lambda,$$

lo cual prueba que $\|df(x_1)\| \leq \lambda < \alpha$.

Lema 2.8 *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{U}$ un abierto acotado y conexo en X. Sea $f : \overline{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y acotada tal que:*

1. f es Gâteaux diferenciable en $\mathcal{U}$

2. $f(\overline{\mathcal{U}}) \subseteq [a, b]$, *donde* $a < b$.

Entonces, para todos $x_0 \in \mathcal{U}$ y $R > 0$ tales que $\mathrm{int}B(x_0, R) \subseteq \mathcal{U}$, existe $x_1 \in \mathrm{int}B(x_0, R)$ tal que $\|df(x_1)\| \leq (b - a)/2R$.

Demostración. Podemos suponer que $[a, b] = [-\varepsilon, \varepsilon]$. Consideraremos dos casos.

Caso I: $f(x_0) \neq 0$. Puede suponerse que $f(x_0) < 0$ (el caso $f(x_0) > 0$ es análogo). Del principio variacional de Ekeland se sigue que existe $x_1 \in \overline{\mathcal{U}}$ tal que

1. $\|x_0 - x_1\| \leq \frac{f(x_0)+\varepsilon}{\varepsilon/R} < R$, y
2. $f(x_1) < f(x) + \frac{\varepsilon}{R}\|x - x_1\|$ para todo $x \neq x_1$.

De (1) obtenemos que $x_1 \in \mathcal{U}$, y (2) implica que, para todo h con $\|h\| = 1$,

$$df(x_1)(h) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_1 + th) - f(x_1)}{t} \geq -\varepsilon/R,$$

lo cual prueba que $\|df(x_1)\| \leq \varepsilon/R$.

Caso II: $f(x_0) = 0$. Ahora podemos suponer $\|df(x_0)\| > \varepsilon/R$, puesto que en otro caso habríamos terminado. Si $\|df(x_0)\| > \varepsilon/R$, existe h con $\|h\| = 1$ tal que $df(x_0)(h) < -\varepsilon/R$ y por tanto existe $\delta > 0$ tal que $f(x_0+\delta h)/\delta < -\varepsilon/R$. Aplicando el principio variacional de Ekeland otra vez, obtenemos que existe $x_1 \in \overline{\mathcal{U}}$ tal que:

1. $\|x_1 - (x_0 + \delta h)\| \leq \frac{f(x_0+\delta h)+\varepsilon}{\varepsilon/R} < \frac{-\varepsilon\delta/R+\varepsilon}{\varepsilon/R} = R - \delta$ y
2. $f(x_1) < f(x) + \frac{\varepsilon}{R}\|x - x_1\|$ para todo $x \neq x_1$.

De (1) se sigue que $\|x_1 - x_0\| \leq \|x_1 - (x_0 + \delta h)\| + \delta < R$, de tal modo que $x_1 \in \text{int}B(x_0, R) \subseteq \mathcal{U}$, y (2) implica a su vez que $\|df(x_1)\| \leq \varepsilon/R$.

Ahora la versión general del teorema de Rolle aproximado se deduce inmediatamente como consecuencia de los lemas 2.7 y 2.8.

Teorema 2.9 (Teorema de Rolle aproximado) *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{U}$ un abierto acotado y conexo en X. Sea $f : \overline{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y acotada. Supongamos que f es Gâteaux diferenciable en $\mathcal{U}$ y que $f(\partial\mathcal{U}) \subseteq [a, b]$, con $a < b$. Entonces, para todos $R > 0$ y $x_0 \in \mathcal{U}$ tales que $dist(x_0, \partial\mathcal{U}) = R$, existe un $x_1 \in \mathcal{U}$ tal que*

$$\|df(x_1)\| \leq \frac{b-a}{2R}.$$

Antes de cerrar este capítulo enunciaremos dos resultados que son consecuencias directas del principio variacional de Ekeland y que también pueden obtenerse como corolarios inmediatos del teorema de Rolle aproximado.

Corolario 2.10 *Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto acotado y conexo de un espacio de Banach$X$. Sea $f : \overline{\mathcal{U}} :\longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, acotada, y Gâteaux diferenciable en $\mathcal{U}$. Supongamos que f es constante en $\partial\mathcal{U}$. Entonces,*

$$\inf_{x \in \mathcal{U}} \|f'(x)\| = 0.$$

Corolario 2.11 *Sean X un espacio de Banach y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, Gâteaux diferenciable y acotada en X. Entonces,*

$$\inf_{x\in X} \|f'(x)\| = 0.$$

Demostración. Sea $M > \|f\|_\infty$. Tomando $b = -a = M > 0$ y $U = B(0,n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ en el teorema 2.3, obtenemos una sucesión $x_n \in B(0,n)$ tal que $\|f'(x_n)\| \leq M/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual implica que $\inf_{x\in X} \|f'(x)\| = 0$.

Capítulo 3

Un poco de cálculo subdiferencial

3.1 Preliminares

Definición 3.1 Sean X un espacio de Banach, $D \subseteq X$ un abierto, $f : D \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $x_0 \in D(f) = \{x \in D : f(x) < \infty\}$. El conjunto Fréchet subdiferencial de f en x_0 se define por

$$D^- f(x_0) = \{p \in X^* \mid \liminf_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \langle p, h\rangle}{\|h\|} \geq 0\},$$

y el conjunto Fréchet superdiferencial de f en x_0 por

$$D^+ f(x_0) = \{p \in X^* \mid \limsup_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \langle p, h\rangle}{\|h\|} \leq 0\}.$$

La función f se dice que es Fréchet subdiferenciable en x_0 cuando $D^- f(x_0) \neq \emptyset$, y f es Fréchet superdiferenciable en x_0 siempre que $D^+ f(x_0) \neq \emptyset$. Una función f se dice que es Fréchet subdiferenciable (resp. superdiferenciable) en un conjunto $\mathcal{U}$ si f es Fréchet subdiferenciable (resp. superdiferenciable) en cada punto x de $\mathcal{U}$.

Es claro que una función f es Fréchet subdiferenciable en x_0 si y sólo si $-f$ es Fréchet superdiferenciable en x_0, y, en este caso, $D^+(-f)(x_0) = -D^- f(x_0)$.

Observación 3.2 *Una función f es Fréchet diferenciable en x_0 si y sólo si f es a la vez Fréchet subdiferenciable y superdiferenciable en x_0. En este caso, $\{df(x_0)\} = D^- f(x_0) = D^+ f(x_0)$.*

Demostración. Es claro que toda función que sea Fréchet diferenciable en un punto x_0 es a la vez Fréchet subdiferenciable y superdiferenciable en x_0.

Recíprocamente, veamos que si $D^- f(x_0) \neq \emptyset \neq D^+ f(x_0)$ entonces la función f es Fréchet diferenciable en x_0, y $\{df(x_0)\} = D^- f(x_0) = D^+ f(x_0)$. En efecto, sea

$p \in D^- f(x_0), q \in D^+ f(x_0)$, entonces tenemos

$$\liminf_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \langle p, h\rangle}{\|h\|} \geq 0$$

y

$$\limsup_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \langle q, h\rangle}{\|h\|} \leq 0,$$

es decir,

$$\liminf_{h\to 0} \frac{-f(x_0+h) + f(x_0) + \langle q, h\rangle}{\|h\|} \geq 0,$$

y sumando estas desigualdades,

$$\begin{aligned}
-\|q-p\| &= \liminf_{h\to 0} \frac{\langle q-p, h\rangle}{\|h\|} \\
&= \liminf_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \langle p, h\rangle - f(x_0+h) + f(x_0) + \langle q, h\rangle}{\|h\|} \\
&\geq \liminf_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \langle p, h\rangle}{\|h\|} \\
&+ \liminf_{h\to 0} \frac{-f(x_0+h) + f(x_0) + \langle q, h\rangle}{\|h\|} \geq 0 + 0 = 0,
\end{aligned}$$

y por tanto $\|q-p\| = 0$. De aquí que $q = p$, y

$$\begin{aligned}
0 &\leq \liminf_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \langle p, h\rangle}{\|h\|} \\
&\leq \limsup_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \langle p, h\rangle}{\|h\|} \leq 0,
\end{aligned}$$

de manera que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \langle p, h\rangle}{\|h\|} = 0,$$

y f es Fréchet diferenciable, con $df(x_0) = p = q$. Este argumento también prueba que $\{df(x_0)\} = D^- f(x_0) = D^+ f(x_0)$.

Debe observarse que la subdiferencial presentada en la definición precedente generaliza la subdiferencial del análisis convexo clásico. Recuérdese que si f es una función convexa, la subdiferencial clásica de f en un punto x se define por $\partial f(x) = \{p \in X^* \mid \langle p, y-x\rangle \leq f(y) - f(x)\ \forall y \in X\}$.

Observación 3.3 *Sea D un abierto convexo en un espacio de Banach X, y sea $f : D \subseteq X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ una función convexa. Entonces, $\partial f(x) = D^- f(x)$ para todo $x \in D$.*

Demostración. Es obvio por la definición que $\partial f(x) \subseteq D^- f(x)$. Veamos que también se tiene $D^- f(x) \subseteq \partial f(x)$. Sea $p \in D^- f(x)$. Sea $y \in X$, y definamos $h = y - x$; podemos suponer $y \neq x$. Para cada $t \in (0,1)$, como f es convexa, tenemos

$$\frac{f(x+th) - f(x)}{t} \leq f(x+h) - f(x).$$

En efecto, $f(x+th) = f(t(x+h) + (1-t)x) \leq tf(x+h) + (1-t)f(x)$, y por tanto $f(x+th) - f(x) \leq t\left(f(x+h) - f(x)\right)$. Entonces,

$$\frac{f(x+h) - f(x) - \langle p, h \rangle}{\|h\|} \geq \frac{f(x+th) - f(x) - \langle p, th \rangle}{t\|h\|}$$

para todo $t \in (0,1)$, y así

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle p, h \rangle}{\|h\|} &\geq \liminf_{t \to 0^+} \frac{f(x+th) - f(x) - \langle p, th \rangle}{t\|h\|} \\ &\geq \liminf_{\vartheta \to 0} \frac{f(x+\vartheta) - f(x) - \langle p, \vartheta \rangle}{\|\vartheta\|} \geq 0 \end{aligned}$$

porque $p \in D^- f(x)$. Por tanto, $0 \leq f(x+h) - f(x) - \langle p, h \rangle$, esto es,

$$f(y) - f(x) \geq \langle p, y - x \rangle.$$

Como esto es válido para cualquier y debemos concluir que $p \in \partial f(x)$.

Es sabido (ver por ejemplo [58]) que toda función convexa y continua $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface $\partial f(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in D$. Por tanto, de la observación precedente se sigue que toda función convexa y continua es Fréchet subdiferenciable en todo su dominio.

Definición 3.4 Sean X un espacio de Banach, $D \subseteq X$ un abierto, $f : D \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $x_0 \in D(f) = \{x \in D : f(x) < \infty\}$. El conjunto Gâteaux subdiferencial de f en x_0 se define por

$$D_G^- f(x_0) = \{p \in X^* \mid \forall h \in S_X \;\; \liminf_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0) - t\langle p, h \rangle}{|t|} \geq 0\},$$

y el conjunto Gâteaux superdiferencial de f en x_0 por

$$D_G^+ f(x_0) = \{p \in X^* \mid \forall h \in S_X \;\; \limsup_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0) - t\langle p, h \rangle}{|t|} \leq 0\}.$$

La función f se dice que es Gâteaux subdiferenciable en x_0 siempre que $D_G^- f(x_0) \neq \emptyset$, y f es Gâteaux superdiferenciable en x_0 cuando $D_G^+ f(x_0) \neq \emptyset$. Una función f se dice que es Gâteaux subdiferenciable (resp. superdiferenciable) en un conjunto $\mathcal{U}$ siempre que sea Gâteaux subdiferenciable (resp. superdiferenciable) en cada punto x de $\mathcal{U}$.

Como antes, es fácil ver que f es Gâteaux subdiferenciable y Gâteaux superdiferenciable en x_0 si y sólo si f es Gâteaux diferenciable en x_0, y en este caso, $D_G^- f(x_0) = D_G^+ f(x_0) = \{d_G f(x_0)\}$. Nótese que $D^- f(x) \subseteq D_G^- f(x)$, es decir, toda función Fréchet subdiferenciable es también Gâteaux subdiferenciable. Por otra parte, la observación 3.3 es también válida para funciones Gâteaux diferenciables. Por consiguiente, si f es una función convexa entonces $\partial f(x) = D_G^- f(x) = D^- f(x)$, y estos conjuntos son no vacíos siempre que f sea continua.

Ahora estudiaremos las propiedades básicas de las funciones subdiferenciables y superdiferenciables. Para empezar, como uno puede esperar, toda función Fréchet subdiferenciable es semicontinua inferiormente.

Proposición 3.5 *Sea $f : D \subseteq X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ una función Fréchet subdiferenciable en x_0. Entonces f es semicontinua inferiormente (s.c.i.) en x_0. Análogamente, si f es Fréchet superdiferenciable en x_0 entonces f es semicontinua superiormente (s.c.s.) en x_0.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Puesto que

$$\liminf_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \langle p, h\rangle}{\|h\|} \geq 0,$$

existe $\delta > 0$ tal que si $0 < \|h\| \leq \delta$ entonces

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \langle p, h\rangle}{\|h\|} \geq -\varepsilon,$$

de manera que

$$f(x_0+h) \geq f(x_0) + \langle p, h\rangle - \varepsilon\|h\|$$

siempre que $0 \leq \|h\| \leq \delta$, y por tanto

$$\begin{aligned} \liminf_{x \to x_0} f(x) &= \liminf_{h \to 0} f(x_0+h) \\ &\geq \liminf_{h \to 0} [f(x_0) + \langle p, h\rangle - \varepsilon\|h\|] = f(x_0), \end{aligned}$$

es decir, $\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$, lo cual significa que f es s.c.i. en x_0.

En general, una función subdiferenciable no es necesariamente continua. Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0, 1] \\ 1 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

es Fréchet subdiferenciable en todo punto de $\mathbb{R}$, y sin embargo f no es continua ni 0 ni en 1.

Ahora veamos que la suma de dos funciones subdiferenciables es también subdiferenciable.

Proposición 3.6 *Sean $f, g : D \subseteqq X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ funciones Fréchet subdiferenciables en x (resp. Gâteaux subdiferenciables). Entonces $f + g$ es Fréchet subdiferenciable en x (resp Gâteaux subdiferenciable), y*

$$D^{-}f(x) + D^{-}g(x) \subseteqq D^{-}(f+g)(x).$$

Demostración. Sean $p \in D^{-}f(x)$, $q \in D^{-}g(x)$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\liminf_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x) - \langle p+q, h\rangle}{\|h\|} = \\
&= \liminf_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle p, h\rangle + g(x+h) - g(x) - \langle q, h\rangle}{\|h\|} \geq \\
&\geq \liminf_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle p, h\rangle}{\|h\|} + \liminf_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x) - \langle q, h\rangle}{\|h\|} \\
&\geq 0 + 0 = 0,
\end{aligned}$$

de modo que $p + q \in D^{-}(f+g)(x)$.

Obviamente un resultado análogo es válido para funciones superdiferenciables. La proposición precedente tiene un recíproco aproximado debido a El Mahjoub El Haddad y Robert Deville. Este resultado nos será muy útil para deducir una versión subdiferencial del teorema de Rolle aproximado. La demostración de esta fórmula para la subdiferencial de la suma puede encontrarse en [42].

Teorema 3.7 (Fórmula para la subdiferencial de la suma) *Sea X un espacio de Banach que posee una función meseta Lipschitz de clase C^1. Sean $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que f es semicontinua inferiormente y g es uniformemente continua. Entonces, para cualesquiera $x_0 \in X, p \in D^{-}(f+g)(x_0)$ y $\varepsilon > 0$, existen $x_1, x_2 \in X, p_1 \in D^{-}f(x_1)$ y $p_2 \in D^{-}g(x_2)$ tales que:*

(i) $\|x_1 - x_0\| < \varepsilon$ *y* $\|x_2 - x_0\| < \varepsilon$.

(ii) $| f(x_1) - f(x_0) | < \varepsilon$ *y* $| g(x_2) - g(x_0) | < \varepsilon$.

(iii) $\|p_1 + p_2 - p\| < \varepsilon$.

Es claro que la subdiferenciabilidad de una función f no implica que la función $-f$ sea también subdiferenciable (sólo será así si la función es de hecho diferenciable). Por tanto, en principio no es posible obtener resultados sobre subdiferenciabilidad del producto, diferencia o composición de funciones subdiferenciables. No obstante, tales resultados son válidos si hacemos hipótesis más fuertes.

Proposición 3.8 *Sea $g : \mathcal{U} \subset X \longrightarrow Y$ una función Fréchet diferenciable en x, y $f : Y \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ una función Fréchet subdiferenciable en $g(x)$. Entonces $f \circ g : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es subdiferenciable en x, y*

$$\{p \circ dg(x) \mid p \in D^{-}f(g(x))\} \subseteq D^{-}(f \circ g)(x).$$

Demostración. Como g es diferenciable en x, existe $M > 0$ tal que $\|g(y) - g(x)\| \leq M\|y - x\|$ si $\|x - y\| \leq \delta_1$, para algún $\delta_1 > 0$. Sean $p \in D^- f(g(x))$ y $\varepsilon > 0$. Existe $\delta_2 > 0$ tal que si $\|z - g(x)\| \leq \delta_2$ entonces

$$f(z) - f(g(x)) - \langle p, z - g(x)\rangle \geq \frac{-\varepsilon}{2M}\|z - g(x)\|.$$

Por otra parte, como g es diferenciable en x, existe $\delta_3 > 0$ tal que

$$\|g(y) - g(x) - dg(x)(y - x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2(1 + \|p\|)}\|y - x\|$$

cuando $\|y - x\| \leq \delta_3$. Elijamos un $\delta_4 > 0$ tal que $\|g(y) - g(x)\| \leq \delta_2$ si $\|y - x\| \leq \delta_4$. Entonces, si $\|y - x\| \leq \delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&f(g(y)) - f(g(x)) - p(dg(x)(y - x)) \\
&= f(g(y)) - f(g(x)) - p(g(y) - g(x)) + p(g(y) - g(x) - dg(x)(y - x)) \\
&\geq \frac{-\varepsilon}{2M}\|g(y) - g(x)\| - \|p\|\,\|g(y) - g(x) - dg(x)(y - x)\| \\
&\geq \frac{-\varepsilon}{2M}M\|y - x\| - \|p\|\frac{\varepsilon}{2(1 + \|p\|)}\|y - x\| \geq -\varepsilon\|y - x\|.
\end{aligned}$$

Así, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < \|y - x\| \leq \delta$ entonces

$$\frac{f(g(y)) - f(g(x)) - p(dg(x)(y - x))}{\|y - x\|} \geq -\varepsilon.$$

Esto significa que

$$\liminf_{y \to x} \frac{f(g(y)) - f(g(x)) - p(dg(x)(y - x))}{\|y - x\|} \geq 0,$$

y por tanto $p \circ dg(x) \in D^-(f \circ g)(x)$.

Proposición 3.9 *Sean $f, g : \mathcal{U} \subset X \longrightarrow [0, \infty)$ funciones Fréchet subdiferenciables en x, y supongamos que al menos una de ellas es continua en x. Entonces fg es Fréchet subdiferenciable en x, y $f(x)D^- g(x) + g(x)D^- f(x) \subseteq D^-(fg)(x)$.*

Demostración. Nótese que si $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A \subseteq [0, \infty)$ entonces $\inf(A \cdot B) \geq (\inf A) \cdot (\inf B)$, lo que implica que, para todas las funciones $F, G : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $F \geq 0$, se tiene

$$\liminf_{y \to x} F(x)G(x) \geq (\liminf_{y \to x} F(x)) \cdot (\liminf_{y \to x} G(x)).$$

Sean $p \in D^- f(x)$, $q \in D^- g(x)$ y supongamos por ejemplo que f es continua en x. Veamos que $f(x)q + g(x)p \in D^-(fg)(x)$. Como f es continua en x y $q(h)/\|h\|$ es acotada para $h \neq 0$, tenemos que

$$\liminf_{h \to 0} \left[f(x + h) - f(x)\right]\frac{q(h)}{\|h\|} = 0.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que $f \geqq 0$, vemos que

$$\begin{aligned}
&\liminf_{h\to 0}\left[f(x+h)\cdot\left(\frac{g(x+h)-g(x)-q(h)}{\|h\|}\right)\right] \geq \\
&\geq \liminf_{h\to 0} f(x+h)\cdot \liminf_{h\to 0}\frac{1}{\|h\|}\left(g(x+h)-g(x)-q(h)\right) \geq 0\cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
&\liminf_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)-\langle f(x)q+g(x)p,h\rangle}{\|h\|} = \\
= \;&\liminf_{h\to 0}\frac{1}{\|h\|}\big[f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)-f(x+h)q(h)+ \\
+ \;& f(x+h)q(h)-f(x)q(h)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)-g(x)p(h)\big] = \\
= \;&\liminf_{h\to 0}\left[f(x+h)\left(\frac{g(x+h)-g(x)-q(h)}{\|h\|}\right)+\right. \\
+ \;&\left.[f(x+h)-f(x)]\frac{q(h)}{\|h\|}+\left(\frac{f(x+h)-f(x)-p(h)}{\|h\|}\right)g(x)\right] \geq \\
\geq \;&\liminf_{h\to 0}\left(f(x+h)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)-q(h)}{\|h\|}\right)+ \\
+ \;&\liminf_{h\to 0}[f(x+h)-f(x)]\frac{q(h)}{\|h\|}+\liminf_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-p(h)}{\|h\|}g(x) \geq \\
\geq \;& 0+0+0=0,
\end{aligned}$$

de forma que $f(x)q+g(x)p \in D^-(fg)(x)$.

A continuación hacemos una simple observación que será muy útil para demostrar versiones subdiferenciales del teorema de Rolle y del teorema del valor medio en espacios de dimensión finita.

Observación 3.10 *Consideremos una función $f : D \subseteq X \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{\infty\}$.*

(1) Supongamos que f alcanza un mínimo relativo en $x_0 \in D$. Entonces f es Fréchet subdiferenciable en x_0, y $0 \in D^- f(x_0)$.

(2) Supongamos que f alcanza un máximo relativo en $x_0 \in D$. Entonces f es Fréchet superdiferenciable en x_0, y $0 \in D^+ f(x_0)$.

(3) Supongamos que f alcanza un extremo relativo en $x_0 \in D$ y que f es Fréchet subdiferenciable en x_0 (resp. superdiferenciable en x_0). Entonces $0 \in D^- f(x_0)$ (resp., $0 \in D^+ f(x_0)$).

Demostración.

(1) Si f alcanza un mínimo relativo en $x_0 \in D$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < \|h\| < \delta$ entonces $f(x_0+h) - f(x_0) \geq 0$, y por tanto

$$\liminf_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{\|h\|} \geq 0,$$

lo que significa que $0 \in D^- f(x_0)$.

(2) La misma demostración sirve en este caso.

(3) Supongamos que f es subdiferenciable en x_0. Si f alcanza un máximo relativo en x_0 entonces $0 \in D^+ f(x_0)$. Como, además, $D^- f(x_0) \neq \emptyset$, la observación 3.2 nos permite deducir que $\{0\} = \{df(x_0)\} = D^- f(x_0) = D^+ f(x_0)$. Por otra parte, si f alcanza un mínimo relativo en x_0, entonces, de (1) se sigue que $0 \in D^- f(x_0)$. En cualquier caso, resulta que $0 \in D^- f(x_0)$.

Proposición 3.11 (Teorema de Rolle subdiferencial) *Tenemos:*

(1) Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) = f(b)$. Entonces, existe $x_0 \in (a,b)$ tal que $0 \in D^- f(x_0) \cup D^+ f(x_0)$.

(2) Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua que es subdiferenciable en (a,b). Supongamos que $f(a) = f(b)$. Entonces, existe $x_0 \in (a,b)$ tal que $0 \in D^- f(x_0)$.

(3) Sea X un espacio normado finito dimensional, y sean B_X y S_X la bola y la esfera unidad de X, respectivamente. Sea $f : B_X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que f es constante en S_X. Entonces, existe $x_0 \in \mathrm{int} B_X$ tal que $0 \in D^- f(x_0) \cup D^+ f(x_0)$. Si, además, f es subdiferenciable en $\mathrm{int} B_X$, entonces puede asegurarse que $0 \in D^- f(x_0)$.

Demostración. Bastará probar (3). Como f es continua en el conjunto compacto B_X, f alcanza un máximo y un mínimo en B_X. Si ambos están en S_X, como f es constante en S_X, se sigue que f es constante en B_X, y por tanto $\{0\} = \{df(x)\} = D^- f(x) = D^+ f(x)$ para todo $x \in \mathrm{int} B_X$. Si o bien el máximo o bien el mínimo no está en S_X entonces f alcanza un extremo relativo en algún punto $x_0 \in \mathrm{int} B_X$, y, por la observación anterior, tenemos que o bien $0 \in D^+ f(x_0)$ o bien $0 \in D^- f(x_0)$. Si, además, f es subdiferenciable en $\mathrm{int} B_X$, entonces la observación 3.10(3) nos dice que $0 \in D^- f(x_0)$.

Obviamente, enunciados análogos sonválidos para funciones superdiferenciables. El siguiente ejemplo muestra que la conclusión $0 \in D^- f(x_0)$ en el teorema de Rolle subdiferenciable no puede mejorarse para obtener que $\{0\} = D^- f(x_0)$.

Ejemplo 3.12 Sea $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$. Entonces f es continua en $[-1,1]$ y es subdiferenciable en $(-1,1)$, con $f(-1) = f(1) = 1$. Y sin embargo, si $\varepsilon < 1$, no existe ningún $x_0 \in (-1,1)$ tal que $\|p\| \leq \varepsilon$ para todo $p \in D^- f(x_0)$, puesto que para cualquier $x \in (-1,1)$ existe $p \in D^- f(x)$ de modo que $|p| = 1$. De hecho,

$$D^- f(x) = \begin{cases} \{-1\} & \text{si} \quad x \in [-1,0) \\ [-1,1] & \text{si} \quad x = 0 \\ \{+1\} & \text{si} \quad x \in (0,1]. \end{cases}$$

Ahora estudiaremos los teoremas del valor medio subdiferenciales, junto con algunas consecuencias inmediatas suyas.

Teorema 3.13 (Teorema del valor medio subdiferencial) *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua.*

(1) Existe $x_0 \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \in D^- f(x_0) \cup D^+ f(x_0).$$

(2) Supongamos que f es subdiferenciable en (a,b). Entonces existe $x_0 \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \in D^- f(x_0).$$

Demostración.

(1) Consideremos la función $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - \varphi(x)$, donde $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es

$$\varphi(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Como g es continua y $g(a) = 0 = g(b)$, del teorema de Rolle subdiferencial 3.11 obtenemos un $x_0 \in (a,b)$ tal que $0 \in D^- g(x_0) \cup D^+ g(x_0)$. Supongamos por ejemplo que $0 \in D^- g(x_0)$ (el caso $0 \in D^+ g(x_0)$ es análogo). Entonces g y φ son subdiferenciables en x_0, y por tanto también lo es $f = g + \varphi$, con $D^- g(x_0) + D^- \varphi(x_0) \subset D^- f(x_0)$. Puesto que

$$D^- \varphi(x_0) = \{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\} = \{\varphi'(x_0)\}.$$

tenemos que $0 + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \in D^- f(x_0)$, y en particular

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \in D^- f(x_0) \cup D^+ f(x_0).$$

(2) Una prueba similar funciona, utilizando (2) de 3.11).

Proposición 3.14 *Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Se tiene:*

(1) Si f es creciente en (a,b) entonces $D^- f(x) \cup D^+ f(x) \subset [0,\infty)$ para todo $x \in (a,b)$.

(2) Si f es decreciente en (a,b) entonces $D^- f(x) \cup D^+ f(x) \subset (-\infty,0]$ para todo $x \in (a,b)$.

Demostración. Probemos (1); (2) es análogo. Sean $x \in (a,b)$, y $p \in D^-f(x) \cup D^+f(x)$; veamos que $p \geq 0$. Supongamos primero que $p \in D^-f(x)$. Como f es creciente tenemos $f(x+h) - f(x) \leq 0$ para todo $h < 0$, y así

$$\liminf_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{|h|} \leq 0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
0 &\geq \liminf_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{|h|} = \liminf_{h \to 0^-} \left[\frac{f(x+h) - f(x) - ph}{|h|} + \frac{ph}{|h|} \right] \geq \\
&\geq \liminf_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x) - ph}{|h|} + \liminf_{h \to 0^-} \frac{ph}{|h|} \\
&\geq \liminf_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - ph}{|h|} + \liminf_{h \to 0^-} \frac{ph}{|h|} \\
&\geq 0 + \liminf_{h \to 0^-} \frac{ph}{|h|} = -p,
\end{aligned}$$

de manera que $p \geq 0$.

Ahora supongamos que $p \in D^+f(x)$. Entonces, como f es creciente, tenemos que $f(x+h) - f(x) \geq 0$ para todo $h > 0$, y de aquí que

$$\limsup_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{|h|} \geq 0.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \limsup_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{|h|} \\
&\leq \limsup_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x) - ph}{|h|} + \limsup_{h \to 0^+} \frac{ph}{|h|} \\
&\leq \limsup_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - ph}{|h|} + \limsup_{h \to 0^+} \frac{ph}{|h|} \\
&\leq 0 + \limsup_{h \to 0^+} \frac{ph}{|h|} = p.
\end{aligned}$$

es decir, $p \geq 0$. En cualquier caso, $p \geq 0$.

Proposición 3.15 *Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces,*

(1) Si $D^-f(x) \cup D^+f(x) \subset [0, \infty)$ para todo $x \in (a,b)$ entonces f es creciente en (a,b).

(2) Si $D^-f(x) \cup D^+f(x) \subset (-\infty, 0]$ para todo $x \in (a,b)$ entonces f es decreciente en (a,b).

(3) Si f es subdiferenciable en (a,b) y $D^-f(x) \subset [0, \infty)$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f es creciente in (a,b).

(4) Si f es subdiferenciable en (a,b) y $D^-f(x) \subset (-\infty, 0]$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f es decreciente en (a,b).

Demostración. Nótese que basta probar (1). En efecto, (3) no es más que una consecuencia de (1): si $\emptyset \neq D^-f(x) \subset [0,\infty)$ para todo $x \in (a,b)$ entonces $D^-f(x) \cup D^+f(x) \subset [0,\infty)$ para todo x, porque si $p \in D^+f(x) \neq \emptyset$ entonces f es subdiferenciable y superdiferenciable en x, y por tanto $\{p\} = D^+f(x) = D^-f(x) \subset [0,\infty)$; es decir, si $\emptyset \neq D^-f(x) \subset [0,\infty)$ para todo x, entonces también $D^+f(x) \subset [0,\infty)$, y por consiguiente $D^-f(x) \cup D^+f(x) \subset [0,\infty)$ para todo x, lo cual implica que f es decreciente por (1). Por otra parte, (2) y (4) se deducen inmediatamente de (1) y (3) sustituyendo f por $g = -f$.

Demostremos pues (1). Supongamos que $D^-f(x) \cup D^+f(x) \subset [0,\infty)$ para todo $x \in (a,b)$ y que f no fuera creciente en (a,b). Entonces existirían $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$, tales que $f(x_1) > f(x_2)$, y en consecuencia

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0.$$

Pero, por el teorema 3.13, existe $x \in (x_1, x_2)$ tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \in D^-f(x) \cup D^+f(x) \subset [0,\infty),$$

y de aquí que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0,$$

una contradicción.

Ahora diremos unas pocas palabras acerca de la topología de los conjuntos subdiferenciales $D^-f(x)$.

Proposición 3.16 *Sean X un espacio de Banach, $U \subset X$ un abierto, y $f : U \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Entonces, para todo $x \in U$, los conjuntos $D^-f(x)$ y $D^+f(x)$ son cerrados y convexos en $(X^*, \|\cdot\|)$.*

Demostración. Si $D^-f(x) = \emptyset$ no hay nada que decir. Si $D^-f(x) \neq \emptyset$, sean $p, q \in D^-f(x)$, $t \in (0,1)$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\liminf_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle tp + (1-t)q, h\rangle}{\|h\|} \\
&= \liminf_{h\to 0} \left[t\frac{f(x+h) - f(x) - \langle p, h\rangle}{\|h\|} + (1-t)\frac{f(x+h) - f(x) - \langle q, h\rangle}{\|h\|} \right] \\
&\geq t \liminf_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle p, h\rangle}{\|h\|} + (1-t)\liminf_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle q, h\rangle}{\|h\|} \\
&\geq t\cdot 0 + (1-t)\cdot 0 = 0,
\end{aligned}$$

de manera que $tp+(1-t)q \in D^- f(x)$. Esto prueba que $D^- f(x)$ es convexo. Veamos que $D^- f(x)$ es cerrado en $(X^*, \|\cdot\|)$. Sea $(p_n) \subset D^- f(x)$ tal que $\|p_n - p\| \longrightarrow 0$, y comprobemos que $p \in D^- f(x)$. tenemos que

$$\liminf_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle p_n, h\rangle}{\|h\|} \geq 0$$

para todo n, y por tanto

$$\begin{aligned}
&\liminf_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle p, h\rangle}{\|h\|} = \\
&= \liminf_{h \to 0} \left[\frac{1}{\|h\|} \left(f(x+h) - f(x) - \langle p_n, h\rangle \right) + \frac{1}{\|h\|} \langle p_n - p, h\rangle \right] \\
&\geq \liminf_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|} \left(f(x+h) - f(x) - \langle p_n, h\rangle \right) + \liminf_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|} \langle p_n - p, h\rangle \\
&\geq 0 + \liminf_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|} \langle p_n - p, h\rangle = -\|p_n - p\|
\end{aligned}$$

para todo n, es decir,

$$\liminf_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle p, h\rangle}{\|h\|} \geq -\|p_n - p\|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, y como $\|p_n - p\| \longrightarrow 0$ podemos deducir que

$$\liminf_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle p, h\rangle}{\|h\|} \geq 0,$$

lo cual significa que $p \in D^- f(x)$.

Observación 3.17 En el caso de subdiferenciabilidad Gâteaux podemos decir algo más acerca de la topología de los conjuntos subdiferencial. $D_G^- f(x)$ y $D_G^+ f(x)$ son ω^*-cerrados y convexos en X^*. La demostración es casi idéntica.

Ahora pasaremos a estudiar una definición alternativa de subdiferenciabilidad de funciones que también generaliza la subdiferencial del análisis convexo clásico y que para una amplia clase de espacios de Banach es equivalente a la que venimos manejando.

Sea $\mathcal{U} \subset X$ un subconjunto abierto no vacío de un espacio de Banach X. Sea $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ una función, y sea $x \in D(f)$. definamos los conjuntos $\mathcal{D}^- f(x) = \{\varphi'(x) \mid \varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ es Fréchet diferenciable y $f - \varphi$ alcanza un mínimo local en $x\}$; y $\mathcal{D}^+ f(x) = \{\varphi'(x) \mid \varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ es Fréchet diferenciable y $f - \varphi$ alcanza un máximo local en $x\}$.

Es fácil ver que, para una función convexa f,

$$\partial f(x) = \mathcal{D}^- f(x) = D^- f(x).$$

También es verdad que $\mathcal{D}^- f(x) \subseteq D^- f(x)$ para todo $x \in D(f)$ y toda función f; la demostración es directa. Sin embargo, la inclusión recíproca no es válida, como veremos después.

El siguiente teorema, cuya prueba podrá encontrarse en [33], capítulo VIII, muestra que existe una amplia clase de espacios de Banach en los que sucede que $D^- f(x) = \mathcal{D}^- f(x)$ para toda función f y $x \in D(f)$. Todo espacio cuya estructura diferenciable sea razonablemente rica pertenecerá a dicha clase.

Teorema 3.18 *Sea X un espacio de Banach que tiene una función meseta Lipschitz y Fréchet diferenciable. Sean $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X$, $p \in X^*$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) Existe una función Fréchet diferenciable $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f - \varphi$ alcanza un mínimo local en x_0, $\varphi'(x_0) = p$ y φ' es $\|\cdot\| - \|\cdot\|$ continua en x_0.

(ii) Existen U, un entorno abierto de x_0, y $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$, una función Fréchet diferenciable, tales que $f - \varphi$ alcanza un mínimo local en x_0 y $\varphi'(x_0) = p$.

(iii) $p \in D^- f(x_0)$.

Si X no tiene una tal función meseta, el resultado no es cierto. Elijamos por ejemplo un espacio de Banach separable $(X, \|\cdot\|)$ cuyo dual no sea separable (por ejemplo $X = \ell_\infty$), y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\|x\|^2$. Entonces f es Fréchet diferenciable en 0, con $f'(0) = 0$, y en particular $D^- f(0) = \{0\} \neq \emptyset$. Es decir, la condición (iii) del teorema 3.18 se cumple para $p = 0$. Sin embargo, la condición (i) no se cumple: de lo contrario existiría una función Fréchet diferenciable $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f - \varphi$ alcanzaría un mínimo local en 0, y $\varphi'(0) = 0$, con φ' continua en 0. Puede suponerse que $\varphi(0) = 0$. Entonces existe $r > 0$ tal que $\varphi(x) \leq -\|x\|^2$ siempre que $\|x\| \leq r$. Elijamos $\delta > 0$ tal que φ' es acotada en $B(0, \delta)$; podemos suponer $\delta < r/2$. Sea $b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función Lipschitz de clase C^1 tal que $b(0) = 1$ y $b(t) = 0$ si $t \leq -\delta$. Definamos $\psi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\psi(x) = \begin{cases} b(\varphi(x)) & \text{si} \quad \|x\| \leq \delta \\ 0 & \text{si} \quad \|x\| > \delta. \end{cases}$$

Entonces ψ es Lipschitz y Fréchet diferenciable, con $\psi(0) = 1$ y $\operatorname{supp}(\psi) \subset B(0, \delta)$, lo que contradice nuestra hipótesis sobre X, dado que X no es un espacio de Asplund y por tanto no puede poseer una función meseta Fréchet diferenciable.

El siguiente resultado, cuya prueba puede consultarse en [33], capítulo VIII, nos dice que, en muchos espacios de Banach, toda función semicontinua inferiormente es Fréchet subdiferenciable en un subconjunto denso de su dominio. Este hecho nos permite vislumbrar cuán grande es la clase de funciones subdiferenciables. Recuérdese que en la recta real hay muchas funciones continuas que no son diferenciables en ningún punto.

Teorema 3.19 *Sea X un espacio de Banach con una función meseta Lipschitz y Fréchet diferenciable. Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ una función semicontinua inferiormente, con $D(f) \neq \emptyset$. Entonces f es Fréchet subdiferenciable en un subconjunto denso de $D(f)$.*

3.2 Teorema del valor medio subdiferencial

En esta sección daremos una desigualdad del valor medio para funciones subdiferenciables que es válida en todo espacio de Banach y que presenta alguna ventaja con respecto a otras desigualdades del valor medio subdiferenciales. En la literatura hay varios teoremas del valor medio conocidos para funciones subdiferenciables. Como uno de los más relevantes podemos citar el de Robert Deville [30]:

Teorema 3.20 (Deville) *Sea X un espacio de Banach con una función meseta Lipschitz y Fréchet diferenciable, y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función semicontinua inferiormente. Supongamos que existe una constante $K > 0$ tal que para todo $x \in X$ y para todo $p \in D^- f(x)$, se tiene $\|p\| \leq K$. Entonces*

$$|f(x) - f(y)| \leq K\|x - y\| \quad \textit{para todo } x, y \in X.$$

De aquí se deduce inmediatamente el siguiente

Corolario 3.21 (Deville) *Sea X un espacio de Banach con una función meseta Lipschitz y Fréchet diferenciable, y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces*

$$\sup\left\{\|p\| : p \in D^- f(x), x \in X\right\} = \sup\left\{\|p\| : p \in D^+ f(x), x \in X\right\}.$$

Estas cantidades son finitas si y sólo si f es Lipschitz en X, y en este caso son iguales a la constante de Lipschitz de f.

Una característica común a todos los teoremas del valor medio subdiferenciales conocidos es que exigen una cota para todos los subgradientes de la función considerada en cada punto. Nosotros daremos aquí una desigualdad del valor medio para funciones Gâteaux subdiferenciables f que sólo requiere una cota para uno de los subgradientes de f en cada punto de su dominio. Es decir, si para todo $x \in \mathcal{U}$ existe $p \in D^-_G f(x)$ tal que $\|p\| \leq M$, entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\|$$

para todo $x, y \in \mathcal{U}$. De aquí puede deducirse que si una función continua $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface $0 \in D^- f(x)$ para todo $x \in \mathcal{U}$, entonces f es necesariamente constante. Este corolario no puede deducirse de otras desigualdades del valor medio subdiferenciales como el teorema 3.20 o la de [1].

Más aún, mostraremos que si $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, $x, y \in \mathcal{U}$, y $M \geq 0$ es tal que para todo $t \in [0, 1]$ existe $p \in D^-_G f(tx + (1-t)y)$ con $\|p\| \leq M$, entonces $|f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\|$.

Teorema 3.22 (Desigualdad del valor medio subdiferencial) *Sea X un espacio de Banach, $\mathcal{U}$ un abierto convexo de X, y $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que existe $M \geq 0$ tal que para todo $x \in \mathcal{U}$ existe $p \in D_G^- f(x)$ tal que $\|p\| \leq M$. Entonces*

$$|f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\|$$

para todo $x, y \in \mathcal{U}$.

Demostración. Sean $x, y \in \mathcal{U}, x \neq y$, y sea $\varepsilon > 0$. Definamos $h = y - x$ y

$$A = \{\alpha \in [0, 1] \mid f(x + \alpha h) - f(x) \geq -(M + \varepsilon)\alpha\|h\|\} .$$

Veamos que $A \neq \emptyset$. Tomando $p \in D_G^- f(x)$ tal que $\|p\| \leq M$, como

$$\liminf_{|t|\to 0} \frac{f(x + th) - f(x) - \langle p, th\rangle}{\|th\|} \geq 0,$$

existe un $\delta > 0$ tal que $f(x + th) - f(x) - \langle p, th\rangle \geq -\varepsilon|t|\|h\|$ siempre que $|t| \leq \delta$. Entonces

$$\begin{aligned} f(x + th) - f(x) &\geq \langle p, th\rangle - \varepsilon|t|\,\|h\| \geq \\ - M|t|\,\|h\| - \varepsilon|t|\,\|h\| &= \\ -(M + \varepsilon)|t|\,\|h\|; \end{aligned}$$

luego, tomando $t = \delta$, obtenemos que $f(x + \delta h) - f(x) \geq -(M + \varepsilon)\delta\|h\|$, de manera que $\delta \in A$.

Sea $\beta = \sup A \in (0, 1]$. Como $\beta = \sup A$, existe $(\alpha_n) \subset [0, \beta] \cap A$ tal que $\alpha_n \nearrow \beta$ y $f(x + \alpha_n h) - f(x) \geq -(M + \varepsilon)\alpha_n\|h\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Haciendo tender n a infinito y usando la continuidad de f, obtenemos que $f(x + \beta h) - f(x) = \lim_{n\to\infty} [f(x + \alpha_n h) - f(x)] \geq \lim_{n\to\infty} -(M + \varepsilon)\alpha_n\|h\| = -(M + \varepsilon)\beta\|h\|$, es decir,

$$f(x + \beta h) - f(x) \geq -(M + \varepsilon)\beta\|h\|. \tag{1}$$

lo cual significa que $\beta \in A$.

Veamos ahora que $\beta = 1$. Si $\beta < 1$, pongamos $z = x + \beta h$ y elijamos $p \in D_G^- f(z)$ tal que $\|p\| \leq M$. Como

$$\liminf_{|t|\to 0} \frac{f(z + th) - f(z) - \langle p, th\rangle}{\|th\|} \geq 0,$$

existe $\delta > 0$ tal que si $|t| \leq \delta$ entonces $f(z + th) - f(z) - \langle p, th\rangle \geq -\varepsilon\|th\|$, y así

$$f(z + th) - f(z) \geq -(M + \varepsilon)|t|\,\|h\| \text{ if } |t| \leq \delta. \tag{2}$$

De (1) y (2) se sigue que

$$\begin{aligned} f(x + \beta h + th) &\geq f(x + \beta h) - (M + \varepsilon)|t|\|h\| \geq \\ f(x) - (M + \varepsilon)\beta\|h\| &- (M + \varepsilon)|t|\|h\| \\ = f(x) - (M + \varepsilon)(\beta + |t|)\|h\| \end{aligned}$$

para $|t| \leq \delta$. Tomando $t = \delta$, obtenemos

$$f(x + (\beta + \delta)h) \geq f(x) - (M + \varepsilon)(\beta + \delta)\|h\|,$$

lo cual implica que $\beta + \delta \in A$. Esto es una contradicción, ya que $\beta + \delta > \beta = \sup A$. Por consiguiente, $\beta = 1$. Si sustituimos $\beta = 1$ en (1) obtenemos que $f(x+h) - f(x) \geq -(M+\varepsilon)\|h\|$, y puesto que $h = y - x$ esto significa que $f(y) - f(x) \geq -(M+\varepsilon)\|y - x\|$. Este razonamiento prueba que para todo $x, y \in \mathcal{U}$ y para todo $\varepsilon > 0$ se tiene

$$f(x) - f(y) \leq (M + \varepsilon)\|y - x\|.$$

Cambiando x por y obtenemos también que $f(y) - f(x) \leq (M + \varepsilon)\|y - x\|$. Por tanto,

$$|f(y) - f(x)| \leq (M + \varepsilon)\|y - x\|$$

para todo $x, y \in \mathcal{U}$ y para todo $\varepsilon > 0$. Finalmente, fijando $x, y \in \mathcal{U}$ y haciendo tender ε a 0, obtenemos $|f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\|$; y así está claro que $|f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\|$ para todo $x, y \in \mathcal{U}$.

Debe observarse que el razonamiento anterior de hecho prueba el siguiente resultado, que es una desigualdad del valor medio subdiferencial con un sabor parecido al clásico teorema del valor medio para funciones reales de varias variables.

Teorema 3.23 *Sean X un espacio de Banach, $\mathcal{U}$ un abierto convexo de X y $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si $x, y \in \mathcal{U}$ y $M \geq 0$ son tales que para todo $t \in [0, 1]$ existe $p \in D^-_G f(tx + (1 - t)y)$ con $\|p\| \leq M$, entonces $|f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\|$.*

Ahora podemos deducir inmediatamente el prometido corolario.

Corolario 3.24 *Sea $\mathcal{U}$ un abierto convexo en un espacio de Banach X, y sea $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $0 \in D^-_G f(x)$ para todo $x \in \mathcal{U}$. Entonces f es constante en $\mathcal{U}$.*

No es verdad que si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y subdiferenciable en un subconjunto denso $D \subseteq X$ y además $0 \in D^- f(x)$ para todo $x \in D$ entonces f sea constante. Incluso si X es finito dimensional y la medida de Lebesgue de $X \setminus D$ es cero, un resultado de esta índole no puede ser cierto, como demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.25 Sea $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de Cantor-Lebesgue (véase su definición en [17], p. 55, por ejemplo). Se tiene que f es creciente y continua en $[0, 1]$, y f es localmente constante en $D = [0, 1] \setminus C$, donde C es el conjunto de Cantor. Por tanto f es diferenciable en D, con $\{0\} = \{df(x)\} = D^-_G f(x)$ para todo $x \in D$, y sin embargo f no es constante.

No obstante, si $\dim X \geq 2$, es fácil deducir, utilizando argumentos de cardinalidad, la siguiente mejora del teorema 3.22 a partir de sí mismo.

Corolario 3.26 *Sea X un espacio de Banach de dimensión mayor o igual a dos, y sea $\mathcal{U} \subset X$ un abierto convexo de X. Sea $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, y sea C un subconjunto contable de $\mathcal{U}$. Supongamos que existe $M \geq 0$ tal que para todo $x \in \mathcal{U} \backslash C$ existe $p \in D_G^- f(x)$ con $\|p\| \leq M$. Entonces*

$$|f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\|$$

para todo $x, y \in \mathcal{U}$.

3.3 Un teorema de Rolle subdiferencial aproximado

En está sección nos ocuparemos de demostrar versiones Fréchet y Gâteaux subdiferenciales del teorema de Rolle aproximado presentado en el capítulo anterior que serán válidas dentro de la clase de todos los espacios de Banach con funciones meseta lipschitzianas y Fréchet (respectivamente Gâteaux) diferenciables. Veremos que si una función subdiferenciable oscila entre $-\varepsilon$ y ε en la frontera de la bola unidad del espacio entonces existirá un punto x en el interior de la bola y existirá un $p \in D^- f(x)$ (resp. $p \in D_G^- f(x)$) tal que $\|p\| \leq 2\varepsilon$. De hecho, para espacios de Banach con funciones meseta lipschitzianas y Fréchet diferenciables, se probará que toda función continua y acotada $f : B_X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que f oscila entre $-\varepsilon$ y ε en la esfera unidad satisface $\inf\{\|p\| : p \in D^- f(x) \cup D^+ f(x), \|x\| < 1\} \leq 2\varepsilon$.

Para demostrar los teoremas de Rolle subdiferenciales necesitaremos tres resultados auxiliares. En primer lugar, utilizaremos el siguiente enunciado equivalente de la fórmula para la subdiferencial de la suma (véase el teorema 3.7) para demostrar la versión más fuerte de dicho resultado en el caso de subdiferenciabilidad Fréchet.

Teorema 3.27 (Fórmula para la superdiferencial de la suma) *Sea X un espacio de Banach con una función meseta Lipschitz de clase C^1. Sean $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que f es semicontinua inferiormente y g es uniformemente continua. Entonces, para todos $x_0 \in X, p \in D^+(f+g)(x_0)$ y $\varepsilon > 0$, existen $x_1, x_2 \in X, p_1 \in D^+ f(x_1)$ y $p_2 \in D^+ g(x_2)$ tales que:*

(i) $\|x_1 - x_0\| < \varepsilon$ *y* $\|x_2 - x_0\| < \varepsilon$.

(ii) $| f(x_1) - f(x_0) | < \varepsilon$ *y* $| g(x_2) - g(x_0) | < \varepsilon$.

(iii) $\|p_1 + p_2 - p\| < \varepsilon$.

También necesitaremos el siguiente principio variacional, cuya prueba puede encontrarse en [33], capítulo I.

Teorema 3.28 (Principio variacional suave) *Sea X un espacio de Banach con una función meseta Lipschitz y Fréchet diferenciable (resp. Gâteaux diferenciable). Sea $F : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ una función semicontinua superiormente y acotada superiormente, $F \not\equiv -\infty$. Entonces, para todo $\delta > 0$ existe una función acotada, Lipschitz y Fréchet diferenciable (resp. Gâteaux diferenciable) $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

1. *$F + \varphi$ alcanza su máximo fuerte en X,*

2. *$\|\varphi\|_\infty = \sup_{x\in X} \mid \varphi(x) \mid < \delta$, y $\|\varphi'\|_\infty = \sup_{x\in X} \|\varphi'(x)\| < \delta$.*

Finalmente, para probar la versión más débil del teorema en el caso de subdiferenciabilidad Gâteaux, también necesitaremos la siguiente versión del principio variacional de Ekeland, que es equivalente a la dada en el capítulo anterior (ver teorema 2.6).

Teorema 3.29 (Principio variacional de Ekeland) *Sea X un espacio de Banach, y sea $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ una función propia semicontinua superiormente que está acotada superiormente. Sea $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) > \sup\{f(x) : x \in X\} - \varepsilon$. Entonces, para cualquier λ con $0 < \lambda < 1$, existe un punto $z \in Dom(f)$ tal que:*

(i) $\lambda\|z - x_0\| \leq f(z) - f(x_0)$

(ii) $\|z - x_0\| < \varepsilon/\lambda$

(iii) $\lambda\|x - z\| + f(z) > f(x)$ *siempre que* $x \neq z$.

Comencemos ya con la versión Fréchet subdiferencial del teorema de Rolle aproximado. Su enunciado es más fuerte y la prueba más simple que en el caso de subdiferenciabilidad Gâteaux caso gracias a la fórmula para la subdiferencial de la suma . De ahora en adelante el conjunto $\{x \in X : \|x\| \leq R\}$ lo denotaremos por $B(0, R)$, mientras que $S(0, R)$ representará a $\{x \in X : \|x\| = R\}$.

Teorema 3.30 *Sea X un espacio de Banach con una función meseta Lipschitz de clase $C^1(X)$, sean $B = B(0, R), S = S(0, R)$ y sea $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y continua tal que $f(S) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$. Entonces:*

(i) Si $\sup f(B) > \sup f(S)$ entonces para cada $\alpha > 0$ existen $x \in int(B)$ y $p \in D^+ f(x)$ tales que $\|p\| < \alpha$.

(ii) Si $\inf f(B) < \inf f(S)$ entonces para cada $\alpha > 0$ existen $x \in int(B)$ y $p \in D^- f(x)$ tales que $\|p\| < \alpha$.

(iii) Si $f(B) \subseteq f(S)$ entonces para cada $\alpha > 0$ existen $x_1, x_2 \in int(B)$ y $p_1 \in D^+ f(x_1), p_2 \in D^- f(x_2)$ tales que $\|p_1\|, \|p_2\| < 2\varepsilon/R + \alpha$.

Demostración.

Caso (i): sea $\eta = \sup f(B) - \sup f(S) > 0$, y consideremos $F(x) = f(x)$ si $x \in B$, $F(x) = -\infty$ en caso contrario. Como F es semicontinua superiormente y acotada superiormente, el principio variacional anterior nos da una función g de clase $C^1(X)$ tal que $\|g\|_\infty < \eta/3$, $\|g'\|_\infty < \alpha$ y $F+g$ alcanza su máximo en un punto $x \in B$. Además $x \in int(B)$: en caso contrario, tomando a tal que $f(a) > \sup f(B) - \eta/3$ obtendríamos

$$\sup f(B) - 2\eta/3 < F(a) + g(a) \leq F(x) + g(x) \leq \sup f(S) + \eta/3,$$

una contradicción. Por tanto $x \in int(B)$ y $p = g'(x) \in D^+f(x)$ satisface $\|p\| < \alpha$.

Caso (ii): la misma demostración vale.

Caso (iii): consideremos la función $\phi(x) = f(x) - (2\varepsilon + \alpha)\|x\|/R$. Esta función satisface las condiciones del caso (i), y por tanto existen $x \in int(B)$ y $p \in D^+\phi(x)$ tales que $\|p\| < \alpha$. Ahora, por la fórmula para la subdiferencial de la suma, existen $x_1, y_1 \in int(B)$ y p_1, q_1 con $p_1 \in D^+f(x_1)$, $q_1 \in D^+(-(2\varepsilon + \alpha)/R\|y_1\|)$ tales que $\|p_1 + q_1 - p\| < \alpha$, lo cual implica que

$$\|p_1\| < \alpha + \|q_1\| + \|p\| < 2\alpha + \|q_1\|.$$

Nótese que $q \in D^+(-\|.\|)(v)$ si y sólo si $-q \in D^-(\|.\|)(v)$. Además, como $\|.\|$ es convexa tenemos $\partial\|.\|(v) = D^-\|.\|(v)$, de manera que si $q \in D^-\|.\|(v)$ entonces $q(h) \leq \|v+h\| - \|v\| \leq \|h\|$ para todo h, y por tanto $\|q\| \leq 1$. Teniendo en cuenta esto podemos deducir que $\|q_1\| = \|-q_1\| \leq \frac{2\varepsilon+\alpha}{R}$ y así $\|p_1\| < 2\alpha + (2\varepsilon + \alpha)/R$.

Para encontrar x_2 y p_2 basta considerar $\phi(x) = f(x) + (2\varepsilon + \alpha)\|x\|/R$ y vale la misma demostración aplicando (ii) en vez de (i).

De este resultado puede deducirse el siguiente

Teorema 3.31 *Sea $\mathcal{U}$ un abierto convexo y acotado en un espacio de Banach X que tiene una función meseta Lipschitz de clase C^1. Sea $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y acotada y sean $R > 0$ y $x_0 \in \mathcal{U}$ tales que $dist(x_0, \partial\mathcal{U}) = R$. Supongamos que $f(\partial\mathcal{U}) \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$. Entonces:*

(i) Si $\sup f(\overline{\mathcal{U}}) > \sup f(\partial\mathcal{U})$ entonces para cada $\alpha > 0$ existen $x \in \mathcal{U}$ y $p \in D^+f(x)$ tales que $\|p\| < \alpha$.

(ii) Si $\inf f(\overline{\mathcal{U}}) < \inf f(\partial\mathcal{U})$ entonces para cada $\alpha > 0$ existen $x \in \mathcal{U}$ y $p \in D^-f(x)$ tales que $\|p\| < \alpha$.

(iii) Si $f(\overline{\mathcal{U}}) \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$ entonces para cada $\alpha > 0$ existen $x_1, x_2 \in \mathcal{U}$ y $p_1 \in D^+f(x_1), p_2 \in D^-f(x_2)$ tales que $\|p_1\|, \|p_2\| < 2\varepsilon/R + \alpha$.

En todo caso, $\inf\{\|p\| : p \in D^-f(x) \cup D^+f(x), x \in \mathcal{U}\} \leq 2\varepsilon/R$.

Y de aquí se deduce inmediatamente el siguiente

Corolario 3.32 *Sea $\mathcal{U}$ un abierto convexo y acotado de un espacio de Banach X que tiene una función meseta Lipschitz de clase C^1. Sea $f : \overline{\mathcal{U}} :\longrightarrow \mathbb{R}$ continua y acotada en $\mathcal{U}$. Supongamos que f es constante en $\partial\mathcal{U}$. Entonces,*

$$\inf\{\|p\| : p \in D^-f(x) \cup D^+f(x), x \in \mathcal{U}\} = 0.$$

así como

Corolario 3.33 *Sea X un espacio de Banach que tiene una función meseta Lipschitz de clase C^1, y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y acotada en X. Entonces,*

$$\inf\{\|p\| : p \in D^-f(x) \cup D^+f(x), x \in X\} = 0.$$

Finalmente estudiaremos el teorema de Rolle aproximado subdiferencial en el caso Gâteaux. Aquí la demostración será más larga y el enunciado más débil que en el caso Fréchet. Si la fórmula para la subdiferencial de la suma fuera válida para subdiferenciales Gâteaux dentro de la clase de espacios de Banach que tienen una función meseta Lipschitz y Gâteaux diferenciable, la demostración del teorema 3.30 serviría también en este caso, revirtiendo en una mejora sustancial del teorema 3.34 y sus corolarios. No sabemos si una tal fórmula es verdadera dentro de la mencionada clase de espacios de Banach.

Teorema 3.34 *Sea X un espacio de Banach que tiene una función meseta Lipschitz y Gâteaux diferenciable, y sea $R, \varepsilon > 0$. Sea $f : B(0,R) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y acotada, y supongamos que f es Gâteaux subdiferenciable en $intB(0,R)$ y $f(S(0,R)) \subseteq [-\varepsilon, +\varepsilon]$. Entonces existen $x_\varepsilon \in intB(0,R)$ y $p \in D_G^- f(x_\varepsilon)$ tales que $\|p\| \leq 2\varepsilon/R$.*

Demostración. Supongamos primero que $\varepsilon < 2R$. Consideraremos tres casos.

Caso I: $f(B(0,R)) \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Supongamos primero que $f(0) > -\varepsilon$. Sea $\lambda = 2\varepsilon/R$. Como $f(0) > \sup\{f(x) : x \in B(0,R)\} - 2\varepsilon$, el principio variacional de Ekeland nos da un $x_1 \in B(0,R)$ tal que

(i) $\lambda\|x_1\| \leq f(x_1) - f(0)$

(ii) $\|x_1\| < 2\varepsilon/\lambda$

(iii) $\lambda\|x - x_1\| + f(x_1) > f(x)$ siempre que $x \neq x_1$,

de manera que $x_1 \in intB(0,R)$ y, tomando un $p \in D_G^- f(x_1)$, (iii) implica que $\|p\| \leq 2\varepsilon/R$. En efecto, para todo h con $\|h\| = 1$ tenemos que

$$\frac{f(x_1 + th) - f(x_1)}{|t|} < \frac{2\varepsilon}{R}$$

para todo t, y también, puesto que $p \in D_G^- f(x_1)$,

$$\liminf_{t \to 0} \frac{f(x_1 + th) - f(x_1) - tp(h)}{|t|} \geq 0$$

o equivalentemente

$$\limsup_{t \to 0} \frac{-f(x_1 + th) + f(x_1) + tp(h)}{|t|} \leq 0,$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
|p(h)| &= \limsup_{t\to 0} \frac{p(th)}{|t|} = \limsup_{t\to 0} \frac{f(x_1+th)-f(x_1)-f(x_1+th)+f(x_1)+p(th)}{|t|} \\
&\leq \limsup_{t\to 0} \frac{f(x_1+th)-f(x_1)}{|t|} + \limsup_{t\to 0} \frac{-f(x_1+th)+f(x_1)+p(th)}{|t|} \\
&\leq \limsup_{t\to 0} \frac{f(x_1+th)-f(x_1)}{|t|} \leq \frac{2\varepsilon}{R}.
\end{aligned}$$

Esto prueba que $\|p\| \leq \frac{2\varepsilon}{R}$.

Ahora supongamos que $f(0) = -\varepsilon$ y escojamos $p \in D_G^- f(0)$. Podemos suponer que $\|p\| > 2\varepsilon/R$, ya que en caso contrario habríamos terminado. Entonces existe h con $\|h\| = 1$ tal que $p(h) > 2\varepsilon/R$. Como

$$\liminf_{t\to 0} \frac{f(th)-f(0)-tp(h)}{|t|} \geq 0$$

y además $f(0) = -\varepsilon$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\frac{f(\delta h)+\varepsilon-\delta p(h)}{\delta} > \frac{2\varepsilon}{R} - p(h),$$

lo cual implica que $f(\delta h)+\varepsilon > \frac{2\varepsilon\delta}{R}$. Por tanto $f(\delta h) > \sup f(B(0,R)) - 2\varepsilon$. Tomando $\lambda = 2\varepsilon/R$ podemos usar de nuevo el principio variacional de Ekeland para obtener un $x_1 \in B(0,R)$ tal que:

(i) $\lambda\|x_1 - \delta h\| \leq f(x_1) - f(\delta h)$

(ii) $\|x_1 - \delta h\| < \varepsilon/\lambda$

(iii) $\lambda\|x - x_1\| + f(x_1) > f(x)$ para todo $x \neq x_1$.

Por (i), teniendo en cuenta que $f(\delta h) + \varepsilon > \frac{2\varepsilon\delta}{R}$ obtenemos

$$\|x_1 - \delta h\| \leq \frac{f(x_1) - f(\delta h)}{2\varepsilon/R} \leq \frac{\varepsilon - f(\delta h)}{2\varepsilon/R} < \frac{2\varepsilon - \frac{2\varepsilon\delta}{R}}{2\varepsilon/R} = R - \delta,$$

lo cual implica que $\|x_1\| \leq \|x_1 - \delta h\| + \delta < R - \delta + \delta = R$ y por consiguiente $\|x_1\| < R$. Ahora bien, como f es Gâteaux subdiferenciable en x_1, los mismos cálculos realizados arriba muestran que (iii) implica que $\|p\| \leq 2\varepsilon/R$ para cualquier $p \in D_G^- f(x_1)$.

Caso II: $\sup f(B(0,R)) > \sup f(S(0,R))$.

Elijamos un x_0 tal que $\sup f(S(0,R)) < f(x_0)$, y sea α, λ tal que $0 < \alpha < f(x_0) - \sup f(S(0,R))$, $\alpha \leq 2\varepsilon/R$ y $0 < \lambda < \alpha/(R+1)$. Por el principio variacional de Ekeland existe un $x_1 \in \operatorname{int} B(0,R)$ tal que

$$f(x) < f(x_1) + \lambda\|x - x_1\|$$

para todo $x \neq x_1$, y ya sabemos que esto implica que $\|p\| \leq \lambda < \alpha$ para cualquier $p \in D_G^- f(x_1)$.

Caso III: $\inf f(B(0,R)) < \inf f(S(0,R))$.

Este es el único caso en el que utilizaremos el principio variacional suave. Sean $\eta = \inf f(S(0,R)) - \inf f(B(0,R)) > 0$, $\alpha > 0$ tal que $\alpha \leq 2\varepsilon/R$ y consideremos $F : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ definida por $F(x) = f(x)$ si $x \in B(0,R)$ y $F(x) = +\infty$ en caso contrario. Del principio variacional suave 3.28 obtenemos una función $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que es Lipschitz, acotada y Gâteaux diferenciable, tal que $\|\varphi\|_\infty < \eta/3$, $\|\varphi'\|_\infty < \alpha$ y $F - \varphi$ alcanza su mínimo en un punto $x_0 \in B(0,R)$. Además, debe ser $x_0 \in int B(0,R)$: en caso contrario, tomando a tal que $f(a) < \inf f(B(0,R)) + \eta/3$, obtendríamos

$$\inf f(B(0,R)) + 2\eta/3 > F(a) - \varphi(a) \geq F(x_0) - \varphi(x_0) \geq \inf f(S(0,R)) - \eta/3,$$

una contradicción. Recuérdese que la suma $g+h$ de dos funciones subdiferenciables g y h es subdiferenciable, y

$$D_G^- g(x) + D_G^- h(x) \subseteq D_G^-(g+h)(x).$$

También sabemos que si una función g alcanza un mínimo en x entonces g es subdiferenciable en x y $0 \in D_G^- g(x)$. Teniendo en cuenta esto podemos deducir que

$$0 + \varphi'(x_0) \in D_G^-(F - \varphi)(x_0) + D_G^- \varphi(x_0) \subseteq D_G^- F(x_0) = D_G^- f(x_0),$$

de modo que $p = \varphi'(x_0)$ satisface $p \in D_G^- f(x_0)$ y $\|p\| < \alpha \leq 2\varepsilon/R$.

Finalmente, consideremos el caso $\varepsilon \geq 2R$. Teniendo en cuenta que $p \in D_G^- f(x)$ si y sólo si $rp \in D_G^-(rf)(x)$ para todo $r > 0$ y considerando la función $g = \varepsilon' f/\varepsilon$, donde $\varepsilon' < 2R$, podemos concluir (aplicando el razonamiento anterior a g) que existen un x en el interior de la bola, y un subgradiente $p \in D_G^- f(x)$ tales que $\|p\| \leq 2\varepsilon/R$.

Observación 3.35 Obsérvese que solamente hemos utilizado el principio variacional suave en la demostración correspondiente al caso $\inf f(B(0,R)) < \inf f(S(0,R))$. Nótese también que en el primer caso sólo utilizamos que $f(B(0,R)) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$. Entonces es claro que para cualquier espacio de Banach X y para cualquier función continua y acotada $f : B_X(0,R) \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea Gâteaux subdiferenciable en el interior de la bola y satisfaga $f \geq -\varepsilon$ y $f_{|S(0,R)} \leq \varepsilon$, existirá un punto x en el interior de la bola y un subgradiente $p \in D_G^- f(x)$ tal que $\|p\| \leq 2\varepsilon/R$.

Observación 3.36 La conclusión del teorema 3.34 no puede mejorarse para obtener un punto $x \in \text{int} B(0,R)$ tal que $\|p\| \leq 2\varepsilon/R$ para todo $p \in D^- f(x)$. Véase el ejemplo 3.12.

Del teorema anterior se deduce el más general

Teorema 3.37 *Sea $\mathcal{U}$ un abierto convexo y acotado en un espacio de Banach X que tiene una función meseta Lipschitz y Gâteaux diferenciable. Sea $f : \overline{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y acotada, y Gâteaux subdiferenciable en $\mathcal{U}$. Sean $R > 0$ y $x_0 \in \mathcal{U}$ tales que $dist(x_0, \partial\mathcal{U}) = R$. Supongamos que $f(\partial\mathcal{U}) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$. Entonces existen $x_\varepsilon \in \mathcal{U}$ y $p \in D_G^- f(x_\varepsilon)$ tales que $\|p\| \leq 2\varepsilon/R$.*

así como los dos corolarios siguientes

Corolario 3.38 *Sea $\mathcal{U}$ un abierto convexo y acotado en un espacio de Banach X que tiene una función meseta Lipschitz y Gâteaux diferenciable, y sea $f : \overline{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, acotada, y Gâteaux subdiferenciable en $\mathcal{U}$. Supongamos que f es constante en $\partial\mathcal{U}$. Entonces,*

$$\inf\{\|p\| : p \in D_G^- f(x), x \in \mathcal{U}\} = 0.$$

Corolario 3.39 *Sea X un abierto convexo y acotado en un espacio de Banach X que tiene una función meseta Lipschitz y Gâteaux diferenciable, y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, Gâteaux subdiferenciable y acotada en X. Entonces,*

$$\inf\{\|p\| : p \in D_G^- f(x), x \in X\} = 0.$$

Capítulo 4

Negligibilidad suave en espacios de Banach

En este capítulo fortaleceremos el esquema de negligibilidad presentado en el capítulo primero y obtendremos difeomorfismos que eliminan conjuntos compactos y cilindros sobre compactos en espacios de Banach de dimensión infinita que admitan normas o seminormas diferenciables. De hecho se probará que la eliminación difeomórfica de un compacto puede siempre efectuarse al final de una isotopía de clase C^1 en todos aquellos espacios de Banach infinito dimensionales que poseen normas Fréchet diferenciables. También veremos que es posible eliminar puntos o incluso subespacios de codimensión infinita mediante difeomorfismos de clase real analítica en todos los espacios de Banach que poseen normas o seminormas real analíticas. Al final del capítulo se extienden algunos resultados sobre difeomorfismos e isotopías eliminadoras al contexto de las variedades diferenciables modeladas sobre espacios de Banach de dimensión infinita que admiten normas Fréchet diferenciables.

4.1 Cómo eliminar compactos de un espacio de Banach

En esta sección daremos un método para eliminar compactos suavemente de un espacio de Banach con norma diferenciable (no necesariamente equivalente). A continuación enunciamos nuestro principal resultado de esta sección.

Teorema 4.1 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach de dimensión infinita con una norma de clase C^p (no necesariamente equivalente) ϱ. Entonces, para todo conjunto compacto $K \subset X$, existe un difeomorfismo de clase C^p φ entre X y $X \setminus K$. Además, para cualquier ϱ-bola abierta B que contenga a K, puede exigirse que φ sea la identidad fuera de B.*

Para demostrar este teorema utilizaremos el *lema del punto fijo* presentado al principio del capítulo 1, que reproducimos a continuación para mayor comodidad del lector.

Lema 4.2 *Sea $F : (0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ una función continua tal que, para todos $\beta \geq \alpha > 0$,*

$$F(\beta) - F(\alpha) \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \quad y \quad \limsup_{t\to 0^+} F(t) > 0.$$

Entonces existe un único $\alpha > 0$ tal que $F(\alpha) = \alpha$.

También necesitaremos versiones más fuertes de los lemas 1.4 y 1.5. A saber,

Lema 4.3 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach de dimensión infinita con una norma de clase C^p (no necesariamente equivalente) ϱ. Entonces existe un funcional continuo $\omega : X \longrightarrow [0,\infty)$ que es de clase C^p en $X \setminus \{0\}$ y satisface las condiciones siguientes:*

1. *$\omega(x+y) \leq \omega(x)+\omega(y)$ y, por tanto, $\omega(x)-\omega(y) \leq \omega(x-y)$, para todo $x, y \in X$;*

2. *$\omega(rx) = r\omega(x)$ para todo $x \in X$ y $r \geq 0$;*

3. *$\omega(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$;*

4. *$\omega(\sum_{k=1}^{\infty} z_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \omega(z_k)$ para todo serie convergente $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$;*

5. *Para todo $\delta > 0$, existe una sucesión de vectores linealmente independientes (y_k) que satisface*

$$\omega(y_k) \leq \frac{\delta}{4^{k+1}}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, y con la propiedad de que para todo conjunto compacto $K \subset X$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\inf\{\omega(z - \sum_{k=1}^{n} y_k) \mid n \geq n_0, z \in K\} > 0$$

Nótese que ω no es una norma en X; en general, $\omega(x) \neq \omega(-x)$.

Lema 4.4 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, y sea ω un funcional que satisface las condiciones 1, 2, y 5 del lema 4.3. Entonces, para todo $\delta > 0$, existe un camino $p = p_\delta : (0,\infty) \longrightarrow X$ de clase C^∞ tal que*

1. *$\omega(p(\alpha) - p(\beta)) \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ si $\beta \geq \alpha > 0$;*

2. *Para todo conjunto compacto $K \subset X$ existe $t_0 > 0$ tal que*

$$\inf\{\omega(z - p(t)) \mid 0 < t \leq t_0, z \in K\} > 0;$$

3. *$p(t) = 0$ si y sólo si $t \geq \delta$.*

Demostraciones de los lemas 4.3 y 4.4:

Recordaremos brevemente las demostraciones de los lemas 1.4 y 1.5, mostrando como pueden obtenerse las propiedades añadidas. Debemos distinguir tres casos:

Caso I: La norma ϱ es completa y el espacio X no es reflexivo.

En este caso podemos suponer que $\varrho = \|\cdot\|$, tomamos un funcional lineal continuo $T \in X^*$ con $\|T\| = 1$ tal que T no alcance su norma, y definimos $\omega(x) = \|x\| - T(x)$. Como vimos en 1.4, el funcional ω satisface las propiedades 1–4. En la demostración de 1.4 también se vió que para todo $\delta > 0$ existe una sucesión (y_k) tal que $\|y_k\| = 1$ y

$$\omega(y_k) = \|y_k\| - T(y_k) \leq \frac{\delta}{4^{k+1}}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, es decir, ω la primera parte de la propiedad 5. Es claro que podemos suponer que los vectores (y_k) son linealmente independientes. Sólo tenemos que comprobar que una tal sucesión (y_k) también satisfará la siguiente condición: para todo conjunto compacto $K \subset X$ existe $n_0 = n_0(K) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\inf\{\omega(z - \sum_{k=1}^{n} y_k) \mid n \geq n_0, z \in K\} > 0.$$

Sea pues K un conjunto compacto, sea $M > 0$, y tomemos $R > 0$ tal que $\|z\| \leq R$ para todo $z \in K$. Como $T(y_k) \to 1$ cuando $k \to \infty$, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=1}^{n} T(y_k) > M + R$ para todo $n \geq n_0$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\omega(z - \sum_{k=1}^{n} y_k) &= \|z - \sum_{k=1}^{n} y_k\| - T(z - \sum_{k=1}^{n} y_k) \geq -T(z - \sum_{k=1}^{n} y_k) \\
&= -T(z) + T(\sum_{k=1}^{n} y_k) \geq -\|z\| + T(\sum_{k=1}^{n} y_k) = -\|z\| + \sum_{k=1}^{n} T(y_k) \\
&\geq -R + M + R = M
\end{aligned}$$

siempre que $n \geq n_0$, $z \in K$. Esto prueba que

$$\inf\{\omega(z - \sum_{k=1}^{n} y_k) \mid n \geq n_0, z \in K\} \geq M > 0.$$

Caso II: La norma ϱ es completa y el espacio X es reflexivo.

Como vimos en la prueba del lema 1.4, todo espacio de Banach reflexivo tiene una norma no completa de clase C^∞, y por tanto podemos pasar al caso en que la norma ϱ es no completa.

Caso III: La norma ϱ es no completa.

En este caso definimos $\omega = \varrho$. En el lema 1.4 se vió que ω satisface las propiedades 1–4. También se vió que para todo $\delta > 0$ puede encontrarse una sucesión (y_k) en

X tal que $\omega(y_k) \leq \frac{\delta}{4^{k+1}}$ para cada k, y un punto $\hat{y}$ en la compleción de (X, ω), denotada por $(\hat{X}, \hat{\omega})$, tal que $\hat{y} \notin X$, y $\lim_n \hat{\omega}(\hat{y} - \sum_{k=1}^n y_k) = 0$. Así, se cumple la primera parte de la propiedad 5. Además, una revisión de la demostración de 1.4 muestra que la sucesión (y_k) puede elegirse de tal modo que $\{y_k \mid k = 1, 2, ...\}$ sea un conjunto linealmente independiente de vectores. Sólo queda comprobar que para una tal sucesión $(y_k) \subset X$ y para todo conjunto compacto $K \subset X$ existen $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\inf\{\omega(z - \sum_{k=1}^n y_k) \mid n \geq n_0, z \in K\} > 0.$$

Sea K un conjunto compacto de $(X, \|\cdot\|)$. La norma ω es continua con respecto a $\|\cdot\|$ (porque es de clase C^p). Entonces la inyección lineal de $(X, \|\cdot\|)$ en $(\hat{X}, \hat{\omega})$ es continua, y el conjunto K es también compacto en $(\hat{X}, \hat{\omega})$. Puesto que $\hat{y} \in \hat{X} \setminus X$ y $K \subset X$, tenemos que $\operatorname{dist}_\omega(\hat{y}, K) = \inf\{\hat{\omega}(z - \hat{y}) \mid z \in K\} > 0$, esto es, existe un número positivo η tal que $\hat{\omega}(z - \hat{y}) \geq 2\eta$ para todo $z \in K$. Como $\lim_n \hat{\omega}(\hat{y} - \sum_{k=1}^n y_k) = 0$ podemos tomar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\hat{\omega}(\hat{y} - \sum_{k=1}^n y_k) \leq \eta$ siempre que $n \geq n_0$. Entonces, para todo $n \geq n_0$ y $z \in K$,

$$\begin{aligned}
&\omega(z - \sum_{k=1}^n y_k) = \hat{\omega}(z - \sum_{k=1}^n y_k) = \hat{\omega}[(z - \hat{y}) - (\sum_{k=1}^n y_k - \hat{y})] \\
&\geq \hat{\omega}(z - \hat{y}) - \hat{\omega}(\sum_{k=1}^n y_k - \hat{y}) \geq 2\eta - \hat{\omega}(\sum_{k=1}^n y_k - \hat{y}) \\
&\geq 2\eta - \eta = \eta > 0,
\end{aligned}$$

y así $\inf\{\omega(z - \sum_{k=1}^n y_k) \mid n \geq n_0, z \in K\} > 0$. Esto concluye la demostración del lema 4.3.

Ahora haremos un esbozo de la demostración del lema 4.4. Para un $\delta > 0$ dado, elijamos una sucesión (y_k) que satisfaga la condición 5 del lema 4.3, y tomemos una función decreciente $\gamma : [0, \infty) \longrightarrow [0, 1]$ de clase C^∞ tal que $\gamma = 1$ en $[0, \delta/2]$, $\gamma = 0$ en $[\delta, \infty)$, y $\sup\{|\gamma'(t)| : t \in [0, \infty)\} \leq 4/\delta$. Definamos entonces un camino $p : (0, \infty) \longrightarrow X$ por

$$p(t) = \sum_{k=1}^\infty \gamma(2^{k-1}t) y_k.$$

La prueba de que p satisface la condición 1 de 4.4 es la misma que en el lema 1.5. Veamos que p satisface la condición 2 de 4.4. Para un conjunto compacto $K \subset X$, la condición 5 del lema 4.3 nos da un par de números $\eta > 0$, $m_1 \in \mathbb{N}$ tales que $\omega(z - \sum_{k=1}^n y_k) \geq 2\eta$ siempre que $n \geq m_1$ y $z \in K$. Como $\omega(y_k) \leq \delta/4^{k+1}$ para todo k, podemos encontrar un $m_2 \in \mathbb{N}$ de modo que $\sum_{k=m_2+1}^\infty \omega(y_k) \leq \sum_{k=m_2+1}^\infty \frac{\delta}{4^{k+1}} \leq \eta$. Sea $n_0 = \max\{m_1, m_2\}$, y pongamos $t_0 = \delta/2^{n_0}$. Entonces, teniendo en cuenta que $\gamma(2^{k-1}t) = 1$ siempre que $0 < t \leq t_0$ y $1 \leq k \leq n_0$, tenemos

$$
\begin{aligned}
\omega(z - p(t)) &= \omega(z - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(2^{k-1}t) y_k) \\
&= \omega[(z - \sum_{k=1}^{n_0} y_k) - (\sum_{k=1}^{\infty} \gamma(2^{k-1}t) y_k - \sum_{k=1}^{n_0} y_k)] \\
&\geq \omega(z - \sum_{k=1}^{n_0} y_k) - \omega(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma(2^{k-1}t) y_k - \sum_{k=1}^{n_0} y_k) \\
&= \omega(z - \sum_{k=1}^{n_0} y_k) - \omega(\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \gamma(2^{k-1}t) y_k) \\
&\geq \omega(z - \sum_{k=1}^{n_0} y_k) - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \gamma(2^{k-1}t) \omega(y_k) \\
&\geq \omega(z - \sum_{k=1}^{n_0} y_k) - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \omega(y_k) \geq \omega(z - \sum_{k=1}^{n_0} y_k) - \sum_{k=m_2+1}^{\infty} \omega(y_k) \\
&\geq 2\eta - \eta = \eta > 0
\end{aligned}
$$

para todo $0 < t \leq t_0$ y $z \in K$. En particular,

$$\inf\{\omega(z - p(t)) \mid 0 < t \leq t_0, z \in K\} \geq \eta > 0.$$

Por tanto la condición 2 de 4.4 también se cumple.

Además, es fácil comprobar que el hecho de que $\{y_k \mid k = 1, 2, ...\}$ sea un conjunto de vectores linealmente independientes asegura que $p(t) = 0$ si y sólo si $t > \delta$.

Por último, para poder demostrar el teorema 4.1 también necesitaremos asociar a cada conjunto compacto $K \subset X$ una función $f : X \longrightarrow [0, \infty)$ tal que f es de clase C^p en $X \setminus K$ y satisface $f^{-1}(0) = K$, y $f(x) - f(y) \leq \omega(x - y)$ para todo $x, y \in X$. La existencia de tales funciones está asegurada por el siguiente lema.

Lema 4.5 *Sea $\omega : X \longrightarrow [0, \infty)$ un funcional continuo que satisface las propiedades 1–3 del lema 4.3, y tal que ω es de clase C^p en $X \setminus \{0\}$. Sea K un subconjunto compacto de X. Para $x \in X$, escribamos $d_K(x) = \inf\{\omega(x - y) \mid y \in K\}$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe una función continua $f = f_\varepsilon : X \longrightarrow [0, \infty)$ tal que*

1. *f es de clase C^p en $X \setminus K$;*
2. *$f(x) - f(y) \leq \omega(x - y)$ para todo $x, y \in X$;*
3. *$f^{-1}(0) = K$;*
4. *$\inf\{f(x) \mid d_K(x) \geq \eta\} > 0$ para todo $\eta > 0$;*
5. *f es constante en el conjunto $\{x \in X \mid d_K(x) \geq \varepsilon\}$.*

Demostración del lema 4.5

Antes de nada veamos que la función d_K es continua y satisface $d_K^{-1}(0) = K$, y $d_K(x) - d_K(y) \leq \omega(x-y)$ para todo $x, y \in X$. En efecto, para todo $y \in X$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe $y_\varepsilon \in K$ tal que $d_K(y) + \varepsilon \geq \omega(y - y_\varepsilon)$. Entonces

$$\begin{aligned} d_K(x) - d_K(y) &= \inf\{\omega(x-z) \mid z \in K\} - \inf\{\omega(y-z) \mid z \in K\} \\ &\leq \omega(x - y_\varepsilon) - \omega(y - y_\varepsilon) + \varepsilon \leq \omega[(x - y_\varepsilon) - (y - y_\varepsilon)] + \varepsilon \\ &= \omega(x-y) + \varepsilon, \end{aligned}$$

de modo que podemos obtener $d_K(x) - d_K(y) \leq \omega(x-y)$ haciendo tender ε a cero. Como $\omega(z) \leq 2\|z\|$ para todo z, esta desigualdad implica que $d_K(x) - d_K(y) \leq 2\|x-y\|$ para todo $x, y \in X$ y así $|d_K(x) - d_K(y)| \leq 2\|x-y\|$ para todo $x, y \in X$, es decir, d_K es Lipschitz y en particular continua. El mismo argumento prueba que f es Lipschitz solamente con que satisfaga la condición 2. Por otra parte, si $d_K(x) = 0$ entonces existe una sucesión $(y_n) \subseteq K$ tal que $\lim_n \omega(x - y_n) = 0$. Como K es compacto podemos suponer que (y_n) converge a algún $y \in K$. Por la continuidad de ω, tenemos que $\omega(x-y) = 0$, lo cual implica que $x = y \in K$. Esto, junto con la obviedad de que $d_K(x) = 0$ para todo $x \in K$, implica que $d_K^{-1}(0) = K$.

Ahora definamos los conjuntos $U_n = \{x \in X \mid d_K(x) < 1/n\}$ para cada $n \in N$. Estos conjuntos son abiertos que satisfacen $U_{n+1} \subseteq U_n$ para todo n, y $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = K$. A continuación, para todo $x \in X$ y todo $r > 0$, definamos la ω-*bola asimétrica* $A(x,r)$ por

$$A(x,r) = \{z \in X \mid \omega(z-x) < r\}.$$

Debe observarse que los conjuntos U_n son ω-*abiertos*, es decir, para todo $x \in U_n$ existe $r_x > 0$ tal que $A(x, r_x) \subseteq U_n$. En efecto, si $x \in U_n$, elegimos $r = \frac{1}{n} - d_K(x) > 0$. Si $\omega(z-x) < r$ entonces $d_K(z) - d_K(x) \leq \omega(z-x) < r = \frac{1}{n} - d_K(x)$, de modo que $d_K(z) < 1/n$. Esto significa que $A(x,r)$ está contenido en U_n.

Luego, para cada $n \in N$ y cada $x \in K$ elijamos $r_x^n > 0$ tal que $r_x^n < \frac{1}{2n}$ y $A(x, r_x^n) \subseteq U_n$. Como para cada n tenemos $K \subset \bigcup_{x \in K} A(x, r_x^n)$, los conjuntos $A(x,r)$ son abiertos, y K es compacto, existen $x_j^n \in K$, $j = 1, ..., k(n)$, tales que $K \subset \bigcup_{j=1}^{k(n)} A(x_j^n, r_j^n)$, donde r_j^n es abreviatura de $r_{x_j^n}^n$.

A continuación, veamos que para todo ω-*bola* $A(x_0, r)$ existe una función $g : X \longrightarrow [0,1]$ de clase C^p tal que $A(x_0, r) = g^{-1}(0)$, $g = 1$ fuera de $A(x_0, 2r)$, y $g(x) - g(y) \leq M\omega(x-y)$ para algún $M > 0$. Sea $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función creciente de clase C^∞ tal que $h^{-1}(0) = (-\infty, r]$ y $h = 1$ en $[2r, \infty)$. Sea $M = \sup\{|h'(t)| \mid t \in \mathbb{R}\}$. Definamos $g : X \longrightarrow [0, \infty)$ por $g(y) = h(\omega(y - x_0))$ para todo $y \in X$. Es claro que $A(x_0, r) = g^{-1}(0)$ y $g = 1$ fuera de $A(x_0, 2r)$. Si $\omega(y - x_0) - \omega(x - x_0) > 0$ entonces $g(y) = h(\omega(y-x_0)) \geq h(\omega(x - x_0)) = g(x)$ ya que h es creciente, y en este caso $g(x) - g(y) \leq M\omega(x-y)$ es válida de manera trivial. Si, por el contrario, $\omega(x - x_0) - \omega(y - x_0) \geq 0$, entonces, teniendo en cuenta que $|h'(t)| \leq M$, tenemos

$$\begin{aligned} g(x) - g(y) &= h(\omega(x - x_0)) - h(\omega(y - x_0)) \\ &\leq M|\omega(x - x_0) - \omega(y - x_0)| = M(\omega(x - x_0) - \omega(y - x_0)) \\ &\leq M\omega(x-y). \end{aligned}$$

En cualquiera de los casos obtenemos $g(x) - g(y) \leq M\omega(x-y)$ para todo $x, y \in X$.

Ahora, para cada *ω-bola* $A(x_j^n, r_j^n)$ escojamos una función $g_{(n,j)} : X \longrightarrow [0,1]$ de clase C^p tal que $A(x_j^n, r_j^n) = g_{(n,j)}^{-1}(0)$, $g_{(n,j)} = 1$ fuera de $A(x_j^n, 2r_j^n)$, y $g_{(n,j)}(x) - g_{(n,j)}(y) \leq M_{(n,j)}\omega(x-y)$ para todo $x, y \in X$ y algún $M_{(n,j)} \geq 1$. Nótese que el producto de dos funciones no negativas y acotadas que satisfagan una desigualdad del tipo $g(x) - g(y) \leq M\omega(x-y)$ también satisfará una desigualdad de este tipo (quizás con una constante $M > 0$ diferente). En efecto, si $g_1(x) - g_1(y) \leq M_1\omega(x-y)$ y $g_2(x) - g_2(y) \leq M_2\omega(x-y)$ entonces

$$\begin{aligned}
&g_1(x)g_2(x) - g_1(y)g_2(y) = \\
&= g_1(x)g_2(x) - g_1(x)g_2(y) + g_1(x)g_2(y) - g_1(y)g_2(y) \\
&= g_1(x)[g_2(x) - g_2(y)] + g_2(y)[g_1(x) - g_1(y)] \\
&\leq g_1(x)M_2\omega(x-y) + g_2(y)M_1\omega(x-y) \\
&\leq (\|g_1\|_\infty M_2 + \|g_2\|_\infty M_1)\omega(x-y),
\end{aligned}$$

donde $\|g_i\|_\infty = \sup\{|g_i(z)| : z \in X\}$. Entonces, para cada n, consideremos el producto

$$\varphi_n(x) = \prod_{j=1}^{k(n)} g_{(n,j)}(x).$$

Las funciones $\varphi_n : X \longrightarrow [0,1]$ satisfacen $\varphi_n(x) - \varphi_n(y) \leq M_n\omega(x-y)$ para todo $x, y \in X$, para algún $M_n \geq 1$, así como $\varphi_n = 0$ en K, y $\varphi_n(x) = 1$ siempre que $x \in X \setminus U_n$ (en efecto, si $d_K(x) \geq 1/n$ entonces $\omega(x - x_j^n) \geq d_K(x) \geq 1/n \geq 2r_j^n$, de modo que $g_{(n,j)}(x) = 1$ para todo $j = 1, ..., k(n)$, lo que nos dice que $\varphi_n(x) = 1$).

Finalmente, elijamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $1/m < \varepsilon$. Para todo $k \geq m$ tenemos $\varphi_k(x) = 1$ siempre que $d_K(x) \geq \varepsilon$. Definamos entonces $f : X \longrightarrow [0,1]$ por

$$f(x) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k M_k}\varphi_k(x)$$

para todo $x \in X$.

Nótese que para todo $x \in X \setminus K$ existen un entorno abierto V_x de x y un número natural $n_x \geq m$ tales que $\varphi_n(y) = 1$ siempre que $y \in V_x$ y $n \geq n_x$. En efecto, para cada $x \in X \setminus K$ sea n_x tal que $1/n_x < d_K(x)$ y pongamos $V_x = \{y \in X \mid d_K(y) > 1/n_x\}$. Es claro que V_x es un entorno abierto de x, y para cada $y \in V_x$ tenemos $y \in X \setminus U_n$ para todo $n \geq n_x$, de modo que $\varphi_n(y) = 1$ cuando $n \geq n_x$. Entonces, todas excepto a lo sumo una cantidad finita de las funciones φ_n el la serie que define a f son constantes en un entorno de cada punto $X \setminus K$, lo cual implica claramente que f es una función de clase C^p en $X \setminus K$. También es claro que $f^{-1}(0) = K$, y $f(x) - f(y) \leq \omega(x-y)$ para todo $x, y \in X$. Es decir, f satisface las condiciones 1–3 del lema 4.5. Veamos que f también satisface las condiciones 4 y 5. Para un $\eta > 0$ dado, tomemos $n_0 \geq m$ tal que $1/n_0 \leq \eta$. Entonces, para todo $k \geq n_0$, tenemos que

$\varphi_k(x) = 1$ siempre que $d_K(x) \geq \eta$, y por tanto

$$\inf\{f(x) \mid d_K(x) \geq \eta\} = \inf\{\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k M_k}\varphi_k(x) \mid d_K(x) \geq \eta\}$$
$$\geq \inf\{\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^k M_k}\varphi_k(x) \mid d_K(x) \geq \eta\} = \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^k M_k} > 0.$$

Por tanto la condición 4 también se cumple. Ádemás, f es constante (igual a $\sum_{k=m}^{\infty} M_k^{-1}2^{-k}$) en el conjunto $\{x \in X \mid d_K(x) \geq \varepsilon\}$. Esto concluye la demostración del lema 4.5.

Con estas herramientas en nuestro poder podemos ya dar una demostración del teorema 4.1.

Demostración del teorema 4.1

Antes que nada tomemos una *norma asimétrica no completa* ω del lema 4.3. Asociada a este funcional ω y a un $\varepsilon > 0$ fijo, podemos elegir una función $f = f_\varepsilon$ del lema 4.5. Suponiendo $f(x) = \delta > 0$ cuando $d_K(x) \geq \varepsilon$, tomemos un camino $p = p_\delta$ del lema 4.4. A continuación, para todo $x \in X \setminus K$, definamos

$$\psi(x) = x + p(f(x)).$$

Vamos a probar que $\psi : X \setminus K \longrightarrow X$ es un difeomorfismo de clase C^p. Sea y un vector arbitrario en X, y definamos $F_y : (0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ por $F_y(\alpha) = f(y - p(\alpha))$ para $\alpha > 0$. Veamos que $F_y(\alpha)$ satisface las condiciones del lema 4.2. Tenemos que

$$F_y(\beta) - F_y(\alpha) = f(y - p(\beta)) - f(y - p(\alpha)) \leq \omega((y - p(\beta)) - (y - p(\alpha)))$$
$$= \omega(p(\alpha) - p(\beta)) \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$$

para todo $\beta \geq \alpha > 0$. Por tanto, se cumple la primera condición del lema 4.2 . Comprobemos que F_y también satisface la segunda condición. Como el conjunto $y - K = \{y - z \mid z \in K\}$ es compacto, la condición 2 del lema 4.4 nos da un $t_0 = t_0(K)$ tal que

$$\inf\{\omega(y - z - p(t)) \mid 0 < t \leq t_0, z \in K\} > 0;$$

es decir, existe un número $\eta > 0$ tal que

$$\omega(y - z - p(t)) \geq 2\eta > 0$$

para todo $0 < t \leq t_0$ y $z \in K$. Obviamente podemos suponer que $t_0 \leq \eta$. Para cada $t > 0$, escojamos un $x_t \in K$ tal que $d_K(y - p(t)) \geq \omega(y - p(t) - x_t) - t$. Entonces, para todo t con $0 < t \leq t_0$, tendremos

$$d_K(y - p(t)) \geq \omega(y - x_t - p(t)) - t$$
$$\geq 2\eta - t \geq 2\eta - \eta = \eta > 0,$$

es decir, $d_K(y - p(t)) \geq \eta$ para $0 < t \leq t_0$. Ahora recuérdese que

$$\inf\{f(x) \mid d_K(x) \geq \eta\} > 0;$$

esto significa que existe algún $r > 0$ tal que $f(x) \geq r$ siempre que $d_K(x) \geq \eta$. Entonces, para todo $0 < t \leq t_0$ tenemos $f(y - p(t)) \geq r > 0$ y por tanto

$$\limsup_{t \to 0^+} F_y(t) = \limsup_{t \to 0^+} f(y - p(t)) \geq r > 0,$$

de forma que la segunda condición también se cumple.

Luego, aplicando el lema 4.2, concluimos que la ecuación $F_y(\alpha) = \alpha$ tiene solución única. Esto significa que para cualquier $y \in X$, existe un único número $\alpha(y) > 0$ tal que

$$f(y - p(\alpha(y))) = \alpha(y).$$

Y esto implica que la aplicación

$$\psi(x) = x + p(f(x))$$

es una biyección de $X \setminus K$ en X, cuya inversa es precisamente

$$\psi^{-1}(y) = y - p(\alpha(y)).$$

En efecto, si $\psi(x) = \psi(z) = y$ entonces $f(y - p(f(x))) = f(x)$ y también $f(y - p(f(z))) = f(z)$, de modo que $f(x) = f(z) = \alpha(y) > 0$ por la unicidad de $\alpha(y)$, y por tanto $x = y - p(\alpha(y)) = z$. Además, para cada $y \in X$, como $\psi(y - p(\alpha(y))) = y - p(\alpha(y)) + p(f(y - p(\alpha(y)))) = y - p(\alpha(y)) + p(\alpha(y))$, el punto $x = y - p(\alpha(y))$ satisface $\psi(x) = y$, y también $x \in X \setminus K$ (ya que $f(x) = \alpha(y) > 0$ y $f^{-1}(0) = K$).

Como f es de clase C^p en $X \setminus K$ y p es también de clase C^p, lo mismo le sucede a ψ. Definamos $\Phi : X \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Phi(y, \alpha) = \alpha - f(y - p(\alpha)).$$

Puesto que para cualquier $y \in X$ se tiene $y - p(\alpha(y)) \notin K$, la aplicación Φ es diferenciable en un entorno de cada punto $(y_0, \alpha(y_0))$ en $X \times (0, \infty)$. Por otra parte, como $F_y(\beta) - F_y(\alpha) \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ para $\beta \geq \alpha > 0$, es claro que $F_y'(\alpha) \leq \frac{1}{2}$ para todo α en un entorno de $\alpha(y)$, y

$$\frac{\partial \Phi(y, \alpha)}{\partial \alpha} = 1 - F_y'(\alpha) \geq 1 - 1/2 > 0.$$

Entonces, por el teorema de la aplicación implícita obtenemos que $y \to \alpha(y)$ es de clase C^p y por tanto $\psi : X \setminus K \longrightarrow X$ es un difeomorfismo de clase C^p. Además, es obvio que $\psi(x) = x$ cuando $d_K(x) \geq \varepsilon$. Así, para todo $\varepsilon > 0$ hemos construido un difeomorfismo de clase C^p $\psi_\varepsilon : X \setminus K \longrightarrow X$ tal que ψ_ε es la identidad fuera de el conjunto $\{x \in X \mid d_K(x) \leq \varepsilon\}$. Esto muestra, en particular, la primera parte del teorema 4.1.

Ahora veamos que si K está contenido en una bola abierta $B = \{x \in X \mid \|x\| < r\}$ entonces existe un difeomorfismo $\varphi : X \longrightarrow X \setminus K$ tal que φ es la identidad fuera de B. Elijamos un difeomorfismo $G : X \longrightarrow X$ de clase C^p que transforme el conjunto $\{x \in X \mid \|x\| \leq r\}$ en $\{x \in X \mid \omega(x) \leq r\}$ (dicho difeomorfismo existe, gracias al lema 1.6). Como $G(K)$ es un conjunto compacto contenido en $\{x \in X \mid \omega(x) < r\}$, es fácil encontrar un $\varepsilon > 0$ tal que $G(K)$ está contenido en $\{x \in X \mid \omega(x) \leq r - 2\varepsilon\}$. En efecto, consideremos la torre de conjuntos abiertos $A_n = \{x \in X \mid \omega(x) < r - \frac{1}{n}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, cuya unión es $\{x \in X \mid \omega(x) < r\}$. Por la compacidad de $G(K)$, existe n_0 tal que $G(K) \subset A_{n_0}$. Basta entonces tomar un $\varepsilon > 0$ de modo que $2\varepsilon < 1/n_0$. Para el conjunto compacto $G(K)$, podemos escoger un difeomorfismo $\psi_\varepsilon : X \setminus G(K) \longrightarrow X$ tal que ψ_ε sea la identidad fuera de el conjunto $\{x \in X \mid d_{G(K)}(x) \leq \varepsilon\}$. Nótese que, como $G(K)$ está contenido en $\{x \in X \mid \omega(x) \leq r - 2\varepsilon\}$, el conjunto $\{x \in X \mid d_{G(K)}(x) \leq \varepsilon\}$ estará incluido en $\{x \in X \mid \omega(x) \leq r\}$, de modo que ψ_ε será la identidad fuera de éste último. Entonces es claro que la función $\varphi_\varepsilon : X \longrightarrow X \setminus K$ definida por $\varphi_\varepsilon = G^{-1} \circ \psi_\varepsilon^{-1} \circ G$ es un difeomorfismo de clase C^p entre X y $X \setminus K$ que satisface $\varphi_\varepsilon(x) = x$ siempre que $\|x\| \geq r$.

4.2 Negligibilidad suave de subespacios y cilindros sobre compactos

Los principales resultados de esta sección muestran cómo construir difeomorfismos entre un espacio de Banach de dimensión infinita y el mismo espacio menos uno de sus subespacios infinito dimensionales, siempre que dicho espacio tenga una seminorma suave cuyo conjunto de ceros sea el subespacio que quiere eliminarse. Recuérdese que, para un espacio vectorial real X, se dice que una función $\varrho : X \longrightarrow [0, \infty)$ es una seminorma en X siempre que ϱ satisfaga las siguientes propiedades:

(i) $\varrho(x + y) \leq \varrho(x) + \varrho(y)$ para todo $x, y \in X$; y

(ii) $\varrho(\lambda x) = |\lambda| \varrho(x)$ para todo $x \in X$ y para todo número real λ; en particular, $\varrho(0) = 0$.

Nótese que el conjunto de ceros de una tal función es siempre un subespacio vectorial. Sea ϱ una seminorma en un espacio vectorial X, sea $F = \varrho^{-1}(0)$ su conjunto de ceros, y consideremos la proyección canónica $\pi : X \longrightarrow X/F$. Es claro que ϱ induce una norma, denotada por $\tilde{\varrho}$, en el espacio cociente X/F, tal que $\varrho = \pi \circ \tilde{\varrho}$. La seminorma ϱ se dice que es no completa cuando el espacio normado $(X/F, \tilde{\varrho})$ no es completo. Para un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, una seminorma continua $\varrho : X \longrightarrow [0, \infty)$ se dice que es de clase C^p (resp. real analítica) si lo es fuera de su conjunto de ceros $F = \varrho^{-1}(0)$, que esrá un subespacio cerrado de X en este caso. Un conjunto ϱ-cilíndrico en X será cualquier subconjunto $A \subseteq X$ tal que $A = \pi^{-1}(\pi(A))$. Un conjunto A se dirá que es un ϱ-cilindro sobre un compacto K del espacio cociente X/F siempre que A sea un conjunto ϱ-cilíndrico tal que $\pi(A) = K$.

Debe observarse que la norma $\tilde{\varrho}$ inducida por una seminorma ϱ de clase C^p (resp. real analítica) en el espacio cociente $X/\varrho^{-1}(0)$ es también de clase C^p (resp. real analítica). De hecho esto es cierto si ϱ satisface las condiciones (1) y (2) del lema 4.3 y $\varrho^{-1}(0)$ es un subespacio vectorial de X. Utilizaremos este hecho para deducir una generalización del lema 4.5 que necesitaremos en la demostración del principal resultado de esta sección. Nótese que todo funcional $\omega : X \longrightarrow [0, \infty)$ que satisfaga (1) y (2) del lema 4.3 y tal que $F = \omega^{-1}(0)$ sea un subespacio vectorial de X tendrá también la siguiente propiedad: $\omega(x + z) = \omega(x)$ para todo $z \in F$, $x \in X$, y por consiguiente ω inducirá un funcional cociente $\tilde{\omega} : X/F \longrightarrow [0, \infty)$ que satisfará (1) y (2) del lema 4.3, así como $\tilde{\omega}(\tilde{x}) = 0$ si y sólo si $\tilde{x} = \tilde{0}$, y tal que $\omega = \tilde{\omega} \circ \pi$ (en donde $\pi : X \longrightarrow X/F$ es la proyección canónica).

Lema 4.6 *Sea $\omega : X \longrightarrow [0, \infty)$ un funcional que satisface (1) y (2) del lema 4.3 y tal que $F = \omega^{-1}(0)$ es un subespacio vectorial de X. Supongamos que ω es de clase C^n (resp. real analítica) en $X \setminus F$. Entonces, el funcional cociente inducido $\tilde{\omega} : X/F \longrightarrow [0, \infty)$ también es de clase C^n (resp. real analítico) en $(X/F) \setminus \{\tilde{0}\}$.*

Demostración. Los puntos de X/F serán denotados por $\tilde{x} = \pi(x)$, para algún $x \in X$. Elijamos un punto $x \in X \setminus F$. Definamos $P_k^x(y) = \frac{1}{k!} d^k\omega(x)(y)^k$ para todo $y \in X$, $1 \leq k \leq n$. Teniendo en cuenta que $\omega(x + z) = \omega(x)$ para todo $z \in F$, tenemos

$$\begin{aligned} &\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\omega(x + z + h) - \omega(x + z) - \sum_{k=1}^n P_k^x(h)}{\|h\|^n} \\ &= \lim_{\|h\| \to 0} \frac{\omega(x + h) - \omega(x) - \sum_{k=1}^n P_k^x(h)}{\|h\|^n} = 0 \end{aligned}$$

para todo $z \in F$. Por la unicidad del polinomio de Taylor esto implica que $k!P_k^x = d^k\omega(x) = d^k\omega(x + z) = k!P_k^{x+z}$ para todo $z \in F$ y $1 \leq k \leq n$. Además,

$$d\omega(x)(h) = \lim_{t \to 0} \frac{\omega(x + th) - \omega(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\omega(x + t(h + z)) - \omega(x)}{t} = d\omega(x)(h + z)$$

para todo $z \in F$ y $h \in X$. Utilizando un argumento de inducción, puede verse fácilmente de esta manera que $d^k\omega(x)(h + z)^k = d^k\omega(x)(h)^k$ para todo $z \in F$ y $h \in X$, $k = 1, \ldots, n$. Entonces está claro que cada derivada $d^k\omega(x) = k!P_k^x$ induce un polinomio k-homogéneo $\tilde{P}_k^{\tilde{x}}$ en X/F tal que $P_k^x = \tilde{P}_k^{\tilde{x}} \circ \pi$.

Vamos a ver que $\tilde{\omega}$ es de clase C^n, y $d^k\tilde{\omega}(\tilde{x})(\tilde{y})^k = d^k\omega(x)(y)^k$ para todo $x \in X \setminus F$, $y \in X$, $k = 1, \ldots, n$. Razonando por inducción, supongamos que para $0 \leq k \leq n - 1$ ya sabemos que $\tilde{\omega}$ es de clase C^k en $(X/F) \setminus \{\tilde{0}\}$, con $d^k\tilde{\omega}(\tilde{x})(\tilde{h})^k = d^k\omega(x)(h)^k$, y veamos que $\tilde{\omega}$ es también de clase C^{k+1}, con $d^{k+1}\tilde{\omega}(\tilde{x})(\tilde{y})^{k+1} = d^{k+1}\omega(x)(y)^{k+1}$. Como es habitual, $d^0\omega(x)$ denota $\omega(x)$. Sea $\varepsilon > 0$. Puesto que

$$\lim_{\|y\| \to 0} \frac{\|d^k\omega(x + y) - d^k\omega(x) - d^{k+1}\omega(x)(y)\|}{\|y\|} = 0,$$

existe un $\delta > 0$ tal que si $\|y\| \leq 2\delta$ entonces $\|d^k\omega(x + y) - d^k\omega(x) - d^{k+1}\omega(x)(y)\| \leq \varepsilon\|y\|$. Supongamos que $\|\tilde{y}\| \leq \delta$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ tenemos $\delta \geq \|\tilde{y}\| = \inf\{\|y + z\| :$

$z \in F\} = \inf\{\|y+z\| : z \in F, \|y+z\| \leq \|\bar{y}\| + 1/m\}$, de manera que podemos elegir un $z_m \in F$ que satisfaga $\|y + z_m\| \leq \min\{2\delta, \|\bar{y}\| + 1/m\}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
&\|d^k\bar{\omega}(\bar{x}+\bar{y}) - d^k\bar{\omega}(\bar{x}) - d^{k+1}\omega(x)(y)\| \\
&= \|d^k\omega(x+z_m+y) - d^k\omega(x) - d^{k+1}\omega(x)(z_m+y)\| \\
&\leq \varepsilon\|z_m + y\| \leq \varepsilon(\|\bar{y}\| + \frac{1}{m})
\end{aligned}$$

para todo m, por consiguiente, haciendo tender m a ∞, obtenemos

$$\|d^k\bar{\omega}(\bar{x}+\bar{y}) - d^k\bar{\omega}(\bar{x}) - d^{k+1}\omega(x)(y)\| \leq \varepsilon\|\bar{y}\|.$$

Así, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|d^k\bar{\omega}(\bar{x}+\bar{y}) - d^k\bar{\omega}(\bar{x}) - d^{k+1}\omega(x)(y)\| \leq \varepsilon\|\bar{y}\|$$

siempre que $\|\bar{y}\| \leq \delta$, lo cual significa que $d^k\bar{\omega}$ es diferenciable en $\bar{x}$, con $d^{k+1}\bar{\omega}(\bar{x})(\bar{y}) = d^{k+1}\omega(x)(y)$. Además, usando la continuidad de $d^{k+1}\omega$, puede verse fácilmente que $\bar{x} \to d^{k+1}\bar{\omega}(\bar{x})$ es también continua. En efecto, fijemos un punto $x \in X \setminus F$ y sea $\varepsilon > 0$; como $d^{k+1}\omega$ es continua en x, existe $\delta > 0$ tal que

$$\sup\{|d^{k+1}\omega(y)(h)^{k+1} - d^{k+1}\omega(x)(h)^{k+1}| : \|h\| \leq 2\} \leq \varepsilon$$

siempre que $\|y - x\| \leq 2\delta$. Entonces, si $\|\bar{x} - \bar{y}\| \leq \delta$, tenemos, para algún $z \in F$ tal que $\|y + z - x\| \leq 2\delta$,

$$\begin{aligned}
&\sup\{|d^{k+1}\bar{\omega}(\bar{y})(\bar{h})^{k+1} - d^{k+1}\bar{\omega}(\bar{x})(\bar{h})^{k+1}| : \|\bar{h}\| \leq 1\} \\
&\leq \sup\{|d^{k+1}\omega(y)(h+u)^{k+1} - d^{k+1}\omega(x)(h+u)^{k+1}| : \|h+u\| \leq 2, u \in F\} \\
&= \sup\{|d^{k+1}\omega(y+z)(h+u)^{k+1} - d^{k+1}\omega(x)(h+u)^{k+1}| : \|h+u\| \leq 2, u \in F\} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto $d^{k+1}\bar{\omega}$ es continua en $(X/F) \setminus \{0\}$. Esto prueba que $\bar{\omega}$ es de clase C^n.

Finalmente, veamos que si ω es real analítica entonces también lo es $\bar{\omega}$. Elijamos un punto $x \in X \setminus F$, y pongamos $P_n = P_n^x$ para todo n. Como ω es real analítica en $X \setminus F$, existe $R > 0$ tal que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(y)$ converge a $\omega(x+y)$ uniformemente en $\{y \in X \mid \|y\| \leq 2R\}$. Ahora es fácil ver que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \bar{P}_n(\bar{y})$ converge a $\bar{\omega}(\bar{x}+\bar{y})$ uniformemente en $\{\bar{y} \in X/F \mid \|\bar{y}\| \leq R\}$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y elijamos n_0 tal que

$$|\sum_{k=0}^{n} P_k(y) - \omega(x+y)| \leq \varepsilon$$

cuando $n \geq n_0$ y $\|y\| \leq 2R$. Entonces, si $\|\bar{y}\| \leq R$ y $n \geq n_0$, como $R \geq \|\bar{y}\| = \inf\{\|y+z\| \mid z \in F\} = \inf\{\|y+z\| \mid z \in F, \|y+z\| \leq 2R\}$, tenemos, para algún $z \in F$ tal que $\|y+z\| \leq 2R$,

$$|\sum_{k=0}^{n} \bar{P}_k(\bar{y}) - \bar{\omega}(\bar{x}+\bar{y})| = |\sum_{k=0}^{n} P_k(y+z) - \omega(x+y+z)| \leq \varepsilon.$$

Por tanto, para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que $|\sum_{k=0}^{n} \bar{P}_k(\bar{y}) - \bar{\omega}(\bar{x} + \bar{y})| \leq \varepsilon$ cuando $n \geq n_0$ y $\|\bar{y}\| \leq R$. Es decir, $\sum_{n=0}^{\infty} \bar{P}_n(\bar{y}) = \bar{\omega}(\bar{x} + \bar{y})$ uniformemente para todo $\bar{y}$ en un entorno de 0. Puesto que este razonamiento sirve para cualquier $x \in X \setminus F$, hemos probado que el funcional $\bar{\omega}$ es real analítico en X/F.

Como ya hemos dicho más arriba, necesitaremos una generalización (para cilindros sobre compactos) del lema 4.5.

Lema 4.7 *Sea ϱ una seminorma continua en X, y sea F su conjunto de ceros. Sea ω un funcional que satisface 1 y 2 del lema 4.3, y tal que $F = \omega^{-1}(0)$. Supongamos que ω es de clase C^p en $X \setminus F$. Sea A un ϱ-cilindro sobre un conjunto compacto $K \subset X/F$. Para cada $x \in X$, escribamos $d_A(x) = \inf\{\omega(x-y) \mid y \in A\}$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe una función continua $f = f_\varepsilon : X \longrightarrow [0, \infty)$ tal que*

1. *f es de clase C^p en $X \setminus A$;*
2. *$f^{-1}(0) = A$;*
3. *$f(x) - f(y) \leq \omega(x-y)$ para todo $x, y \in X$;*
4. *$\inf\{f(x) \mid d_A(x) \geq \eta\} > 0$ para todo $\eta > 0$; y*
5. *f es constante en el conjunto $\{x \in X \mid d_A(x) \geq \varepsilon\}$.*

Demostración: Es consecuencia inmediata de los lemas 4.5 y 4.6. En efecto, la función f requerida en 4.7 no es otra cosa que $f(x) = \bar{f}(\pi(x))$, donde $\bar{f}$ es la función correspondiente dada por el lema 4.5 para el espacio X/F y el funcional $\bar{\omega}$, que es de clase C^p gracias al lema 4.6.

Ahora ya podemos enunciar y demostrar el principal resultado de esta sección.

Teorema 4.8 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach con una seminorma ϱ de clase C^p cuyo conjunto de ceros es un subespacio F tal que el cociente X/F tiene dimensión infinita. Sea $A \subset X$ un cilindro sobre un conjunto compacto $K \subset X/F$. Entonces existe un difeomorfismo φ de clase C^p entre X y $X \setminus A$. Además, si suponiendo que A está contenido en un cilindro abierto $C = \{x \in X \mid \varrho(x) < r\}$, puede exigirse que φ sea la identidad fuera de C.*

Demostración. Para empezar fijemos un $\varepsilon > 0$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que A está contenido en el *cilindro unidad* $\{x \in X \mid \varrho(x) \leq 1\}$ y $0 \in A$. Consideremos la proyección canónica $\pi : X \longrightarrow X/F$. Como la seminorma ϱ es de clase C^p en X y $\varrho^{-1}(0) = F$, se sigue del lema 4.6 que la norma inducida $\bar{\varrho} : X/F \longrightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^p en $(X/F) \setminus \{0\}$. Entonces existe un funcional $\bar{\omega} : X/F \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^p que satisface las propiedades 1–5 del lema 4.3. Definamos $\omega : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\omega = \bar{\omega} \circ \pi$. Es fácil comprobar que el funcional ω así definido es de clase C^p en $X \setminus F$ y satisface las condiciones siguientes:

1. $\omega(x+y) \leq \omega(x) + \omega(y)$, y $\omega(x) - \omega(y) \leq \omega(x-y)$, para todo $x, y \in X$;

2. $\omega(rx) = r\omega(x)$ para todo $r \geq 0$;

3. $\omega^{-1}(0) = F$;

4. Para todo $\delta > 0$ existe una sucesión (y_k) de vectores de X que satisface $\omega(y_k) \leq \delta/4^{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y con la propiedad de que para todo conjunto compacto $K \subset X/F$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\inf\{\omega(z - \sum_{k=1}^{n} y_k) \mid n \geq n_0, z \in \pi^{-1}(K)\} > 0.$$

Para este funcional ω y nuestro $\varepsilon > 0$ fijo, elijamos una función $f = f_\varepsilon$ del lema 4.7. Supongamos $f(x) = \delta > 0$ para $d_A(x) \geq \varepsilon$. Ahora, imitando la demostración del lema 4.4, es fácil construir un camino $p = p_\delta : (0, \infty) \longrightarrow X$ que satisface las siguientes propiedades (con respecto al funcional ω de arriba):

1. $\omega(p(\alpha) - p(\beta)) \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ si $\beta \geq \alpha > 0$;

2. Para todo conjunto compacto $K' \subset X/F$ existe $t_0 > 0$ tal que

$$\inf\{\omega(z - p(t)) \mid 0 < t \leq t_0, z \in \pi^{-1}(K') = A'\} > 0;$$

3. $p(t) = 0$ si y sólo si $t \geq \delta$.

A continuación, se define $H(x) = x + p(f(x))$ para todo $x \in X \setminus A$, y se modifica la demostración del teorema 4.1 de forma adecuada para demostrar que H es el difeomorfismo deseado. Esto es, para cada $y \in X$, consideramos la función $F_y : (0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, $F_y(t) = f(y - p(t))$. Utilizando las propiedades de ω y p, se comprueba sin problemas que F_y satisface las condiciones del lema 4.2. Por tanto existe un único $\alpha = \alpha(y) > 0$ tal que $F_y(\alpha) = \alpha$. De todo esto, utilizando el teorema de la función implícita, se deduce que H es un difeomorfismo de clase C^p entre $X \setminus A$ y X, tal que $H(x) = x$ cuando $d_A(x) \geq \varepsilon$. Esto prueba, en particular, la primera parte del teorema 4.8.

Finalmente, utilizando el lema 1.6 como al final de la demostración del teorema 4.1, puede probarse que si A está contenido en un cilindro abierto $C = \{x \in X \mid \varrho(x) < r\}$ entonces existe un difeomorfismo φ de clase C^p entre X y $X \setminus A$, tal que φ es la identidad fuera de C. Esto concluye la demostración de 4.8.

En el caso de $K = \{\bar{0}\}$, donde $\bar{0}$ denota el origen en X/F, el teorema 4.8 nos dice que el subespacio F es C^p negligible en X.

Corolario 4.9 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach con una seminorma ϱ de clase C^p cuyo conjunto de ceros es un subespacio F tal que el cociente X/F es de dimensión finita. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe un difeomorfismo φ de clase C^p entre X y $X \setminus F$ que satisface $\varphi(x) = x$ cuando $\varrho(x) \geq \varepsilon$.*

4.3 Negligibilidad real analítica de puntos y subespacios

En esta sección damos un método para construir difeomorfismos real analíticos entre un espacio de Banach de dimensión infinita X y el espacio menos uno de sus subespacios de codimensión infinita F, siempre que X tenga una seminorma real analítica cuyo conjunto de ceros sea precisamente F. En particular, si X es un espacio de Banach de dimensión infinita con una norma real analítica (no necesariamente equivalente), entonces X y $X \setminus \{0\}$ son real analíticamente difeomorfos. Nótese que la clase de espacios de Banach que poseen normas (no necesariamente equivalentes) de clase real analítica es relativamente amplia. Por ejemplo, es fácil demostrar que todo espacio de Banach que se pueda inyectar linealmente en algún espacio $\ell_p(\Gamma)$, con $1 < p < \infty$, posee una norma (no necesariamente equivalente) de clase real analítica. En particular, teniendo en cuenta que todo espacio de Banach superreflexivo puede inyectarse linealmente en algún $\ell_p(\Gamma)$ con $1 < p < \infty$ (ver [52], demostración del Lema 2, p. 133), y que lo mismo ocurre con cualquier espacio separable, resulta que todos los espacios superreflexivos y todos los separables poseen normas real analíticas (no necesariamente equivalentes).

Para obtener el principal resultado de esta sección necesitaremos el siguiente lema.

Lema 4.10 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, y sea (y_k) una sucesión de vectores tal que $\|y_k\| \leq 1$ para todo k. Consideremos la función $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $G(s) = \frac{1}{1+s^2}$, y definamos un camino $p : (0, \infty) \longrightarrow X$ por*

$$p(t) = \sum_{k=1}^{\infty} G(2^{k-1}t) y_k.$$

Entonces p es una función real analítica de $(0, \infty)$ en X.

Demostración. Sea Y la complexificación del espacio X, y sea $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z > 2|\mathrm{Im} z|\}$. Es claro que Ω es un subconjunto abierto del plano complejo que contiene al intervalo $(0, \infty)$ de la recta real. Puesto que los ceros de la función compleja $z \longrightarrow \frac{1}{1+4^{k-1}z^2}$ están fuera de Ω para todo $k \in \mathbb{N}$, cada función

$$g_k(z) = \frac{y_k}{1 + 4^{k-1} z^2} = G(2^{k-1} z)$$

es holomorfa en Ω. Veamos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ converge uniformemente en los compactos de Ω. Sea $K \subset \Omega$ un conjunto compacto. Entonces existe $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que $K \subseteq \{z \in \Omega : \mathrm{Re} z \geq t_0\}$. Para cada $z \in K$ escribamos $z = a + bi$. Entonces, teniendo en cuenta que $a > 2|b|$ implica que $a^2 - b^2 \geq \frac{3}{4}a^2$, tenemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{1 + 4^{k-1} z^2} \right| &= \left| \frac{1}{1 + 4^{k-1}(a^2 + 2abi - b^2)} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\left([1 + 4^{k-1}(a^2 - b^2)]^2 + [4^{k-1} 2ab]^2 \right)^{1/2}} \right| \\ &\leq \frac{1}{1 + 4^{k-1}(a^2 - b^2)} \leq \frac{1}{1 + 4^{k-1}\frac{3}{4}a^2} \leq \frac{1}{1 + 4^{k-1}\frac{3}{4}t_0^2}, \end{aligned}$$

y así, para todo $z \in K$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k(z)\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{1+4^{k-1}z^2} \right|$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+4^{k-1}\frac{3}{4}t_0^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{4^{k-1}3t_0^2} = \frac{16}{9t_0^2}.$$

Esto significa que $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ converge uniformemente en K, para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$. En particular la función

$$z \longrightarrow p(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$$

es continua in Ω. Además, para todo $y^* \in Y^*$, las desigualdades anteriores muestran que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^*(y_k)}{1+4^{k-1}z^2}$$

converge uniformemente en los compactos de Ω, y, como las funciones

$$z \longrightarrow \frac{y^*(y_k)}{1+4^{k-1}z^2}$$

son todas holomorfas, esto implica que las funciones

$$z \longrightarrow y^*(p(z)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^*(y_k)}{1+4^{k-1}z^2}$$

son holomorfas en Ω. Es decir, $p : \Omega \longrightarrow Y$ es continua y $y^* \circ p : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa para todo $y^* \in Y^*$. De aquí se deduce que $p : \Omega \longrightarrow Y$ es también holomorfa. En particular, su restricción al intervalo $(0, \infty)$ de la recta real es real analítico.

Proposición 4.11 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach con una seminorma real analítica ϱ cuyo conjunto de ceros es un subespacio F tal que el espacio normado $(X/F, \tilde{\varrho})$ no es reflexivo. Entonces existe un difeomorfismo real analítico entre X y $X \setminus F$.*

Demostración. Sean π, ϱ y F como en las definiciones que preceden el enunciado del lema 4.6. Como el espacio normado $(X/F, \tilde{\varrho})$ es no reflexivo, por el teorema de James [51], existe un funcional lineal $S : X/F \longrightarrow \mathbb{R}$ que es continuo de $(X/F, \varrho)$ en $\mathbb{R}$ y tal que S no alcanza el supremo

$$\sup\{S(\bar{z}) \mid z \in X/F, \varrho(\bar{z}) = 1\} = 1.$$

Debe observarse que la norma ϱ es continua con respecto a la norma cociente usual de X/F (recuérdese que $\tilde{\varrho}$ es real analítica en virtud del lema 4.6, y por tanto continua en X/F). Por consiguiente, el funcional lineal S también es continuo de X/F (con su norma cociente usual) en $\mathbb{R}$.

Ahora pongamos $T = S\circ\pi \in X^*$, y definamos los funcionales $\omega : X/F \longrightarrow [0,\infty)$ y $\omega : X \longrightarrow [0,\infty)$ por

$$\omega(x) = \bar{\varrho}(\bar{x}) - S(\bar{x}), \quad \text{and} \quad \omega(x) = \varrho(x) - T(x) = \bar{\omega}(\pi(x)).$$

Es claro que estos funcionales $\bar{\omega}$ y ω son real analíticos en los conjuntos $(X/F)\setminus\{\bar{0}\}$ y $X \setminus F$ respectivamente. Podemos entonces elegir vectores (y_k) de X tales que $\varrho(y_k) = 1$ y $\omega(y_k) \leq 1/4^k$ para todo k. Para $t > 0$, escribamos $G(t) = 1/(1+t^2)$ y consideremos el camino

$$p(t) = \sum_{k=1}^{\infty} G(2^{k-1}t)y_k.$$

Por el lema 4.10, el camino $p : (0,\infty) \longrightarrow X$ es real analítico. Ahora, definamos $H : X \setminus F \longrightarrow X$ por

$$H(x) = x + p(w(x)).$$

Comprobaremos que para todo $y \in X$ la función $F_y : (0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ definida por $F_y(\alpha) = \omega(y - p(\alpha))$ satisface las condiciones del lema 4.2 y, por tanto, tiene un único punto fijo. Nótese que G es una función decreciente que satisface $\sup\{|G'(t)| : t \in (0,\infty)\} \leq 2$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
&F_y(\beta) - F_y(\alpha) = \omega(y - p(\beta)) - \omega(y - p(\alpha)) \leq \omega((y - p(\beta)) - (y - p(\alpha)))\\
&= \omega(p(\alpha) - p(\beta)) = \omega(\sum_{k=1}^{\infty}(G(2^{k-1}\alpha) - G(2^{k-1}\beta))y_k)\\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}(G(2^{k-1}\alpha) - G(2^{k-1}\beta))\omega(y_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2|2^{k-1}\alpha - 2^{k-1}\beta|\omega(y_k)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 2^k\omega(y_k)|\beta - \alpha| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k+1}\frac{1}{4^{k+1}}|\beta - \alpha| = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)
\end{aligned}$$

para todo $\beta \geq \alpha > 0$. Luego se cumple la primera condición del lema 4.2. Veamos que F_y también satisface la segunda condición. Sea $M > 0$ y elijamos $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{j=1}^{k_0} T(y_j) > 2(M + T(y))$ (esto es claramente posible, ya que $T(y_k) \to 1$ cuando $k \to \infty$). Entonces, si $0 < \alpha < 1/2^{k_0}$, $G(2^{j-1}\alpha) \geq 1/2$ para todo $j = 1, 2, ..., k_0$, lo cual implica que

$$\begin{aligned}
&F_y(\alpha) = \omega(y - p(\alpha)) = \varrho(y - p(\alpha)) - T(y) + T(p(\alpha))\\
&\geq -T(y) + T(p(\alpha)) = -T(y) + \sum_{k=1}^{\infty} G(2^{k-1}\alpha)T(y_k)\\
&\geq -T(y) + \sum_{j=1}^{k_0} G(2^{j-1}\alpha)T(y_j) \geq -T(y) + \sum_{j=1}^{k_0}\frac{1}{2}T(y_j)\\
&> -T(y) + M + T(y) = M
\end{aligned}$$

para todo $\alpha > 0$ tal que $\alpha < 1/2^{k_0}$. Esto muestra que

$$\lim_{t \to 0^+} F_y(t) = +\infty,$$

de forma que la segunda condición del lema 4.2 también se cumple. Por tanto, para todo $y \in X$, existe un único $\alpha = \alpha(y) > 0$ tal que $F_y(\alpha) = \alpha$, y esto significa que la aplicación

$$H(x) = x + p(\omega(x))$$

es una biyección entre $X \setminus F$ y X, con

$$H^{-1}(y) = y - p(\alpha(y)).$$

Como las funciones ω y p son real analíticas, también lo es H. Ahora, utilizando la versión real analítica del teorema de la función implícita, puede deducirse, como en la demostración del teorema 4.1, que H es un difeomorfismo real analítico entre $X \setminus F$ y X.

Proposición 4.12 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach de dimenisón infinita con una seminorma real analítica ϱ cuyo conjunto de ceros es un subespacio F tal que el espacio normado $(X/F, \bar{\varrho})$ es reflexivo y de dimensión infinita. Entonces existe un difeomorfismo real analítico entre X y $X \setminus F$.*

Demostración. Denotemos $Z = X/F$, y sea $\pi : X \longrightarrow Z$ la proyección canónica. Por el lema 3.1, la norma $\bar{\varrho} : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ inducida por una seminorma real analítica ϱ que satisface $\varrho^{-1}(0) = F$ es también real analítica en Z. En particular, la norma ϱ es continua con respecto a la norma cociente usual de $Z = X/F$. Por otra parte, la norma ϱ es completa (en efecto, el espacio normado $(X/F, \varrho)$ es reflexivo y, por consiguiente, completo). Entonces, $\bar{\varrho}$ es una norma equivalente real analítica en Z. En consecuencia el espacio Z es C^∞ suave, y como además es reflexivo, el teorema 4.1 del capítulo V de [33] nos da un polinomio $2k$-homogéneo h en Z y constantes $K, L > 0$ tales que $K\bar{\varrho}(z)^{2k} \leq h(z) \leq L\bar{\varrho}(z)^{2k}$ para todo $z \in Z$; en particular, para una tal aplicación real analítica $h : Z \to [0, \infty)$, tenemos que $h^{-1}(0) = 0$. Por el teorema 3 de la página 149 de [34], todo espacio reflexivo (en general, todo espacio WCG) tiene un subespacio cerrado, separable y de dimensión infinita que está complementado. Entonces podemos escribir $Z = W \times V$, donde W es un subespacio separable de dimensión infinita de Z. Como W es separable, W admite una norma no completa g tal que g^2 es real analítica en todo W (véase [35], proposición 4.1). Para todo $z = (u, v) \in Z = W \times V$, definamos ahora

$$Q(z) = \sqrt{g(u)^2 + h(v)}.$$

Está claro que la función $Q : Z \to [0, \infty)$ es real analítica en $Z \setminus \{0\}$, y satisface $Q|_W = g$ y $Q^{-1}(0) = 0$. Como la norma g es no completa podemos encontrar una sucesión $\bar{\varrho}$-acotada (u_k) en W tal que $g(u_k) \leq \frac{1}{4^{k+1}}$ para todo k, y un punto u_0 en la compleción de (W, g), denotada por $(\hat{W}, \hat{g})$, tal que $u_0 \notin W$, y $\lim_n g(u_0 - \sum_{k=1}^{n} u_k) =$

0. Elijamos una sucesión acotada (x_k) en X tal que $\pi(x_k) = (u_k, 0)$ para todo k, pongamos $G(t) = 1/(1+t^2)$, y definamos un camino $q : (0,\infty) \longrightarrow X$ por

$$q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} G(2^{k-1}t)x_k$$

para $t > 0$. Por el lema 4.10, el camino q es real analítico. Ahora definamos $H : X \setminus F \longrightarrow X$ por

$$H(x) = x + q(Q(\pi(x)))$$

para cada $x \in X \setminus F$. Veamos que H es una biyección entre $X \setminus F$ y X. Para cada $y \in X$ consideremos la función $F_y : (0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$, $F_y(t) = Q(\pi(y - q(t)))$, y comprobemos que F_y satisface las condiciones del lema 4.2. Escribiendo $\pi(y) = (u, v) \in W \times V$ y observando que $\pi(q(t)) \in W \times \{0\} \simeq W$ para todo $t > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&F_y(t) - F_y(s) = Q(\pi(y - q(t))) - Q(\pi(y - q(s))) \\
&= \sqrt{g(u - \pi(q(t)))^2 + h(v)} - \sqrt{g(u - \pi(q(s)))^2 + h(v)} \\
&\leq |g(u - \pi(q(t))) - g(u - \pi(q(s)))| \leq g(\pi(q(s) - q(t))) \\
&= g(\sum_{k=1}^{\infty}(G(2^{k-1}s) - G(2^{k-1}t))u_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} g((G(2^{k-1}s) - G(2^{k-1}t))u_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(G(2^{k-1}s) - G(2^{k-1}t))g(u_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2|2^{k-1}s - 2^{k-1}t|g(u_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 2^k g(u_k)|t - s| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k+1}\frac{1}{4^{k+1}}|t - s| = \frac{1}{2}(t - s)
\end{aligned}$$

para todo $t \geq s > 0$. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to 0^+} F_y(t) = \limsup_{t\to 0^+} Q(\pi(y - q(t))) \\
&= \limsup_{t\to 0^+} \sqrt{g(\pi(y - q(t)))^2 + h(v)} \\
&\geq \limsup_{t\to 0^+} g(\pi(y - q(t))) = \hat{g}(\pi(y) - u_0) > 0
\end{aligned}$$

ya que $u_0 \in \hat{W} \setminus W$ y $\pi(y) \in W$. Así, por el lema 4.2, para todo $y \in X$ existe un único $\alpha = \alpha(y) > 0$ tal que $F_y(\alpha) = \alpha$, y de aquí se sigue que $H : X \setminus F \longrightarrow X$ es una aplicación biyectiva, con

$$H^{-1}(y) = y - q(\alpha(y)).$$

En efecto, si $H(x) = H(z) = y$ entonces $Q(\pi(y - q(Q(\pi(x))))) = Q(\pi(x))$ y también $Q(\pi(y - q(Q(\pi(z))))) = Q(\pi(z))$, de modo que $Q(\pi(x)) = Q(\pi(z)) = \alpha(y) > 0$ por la unicidad de $\alpha(y)$, y por tanto $x = y - q(\alpha(y)) = z$. Además, para cada $y \in X$, como $Q(\pi(y - q(\alpha(y)))) = \alpha(y)$, el punto $x = y - q(\alpha(y))$ satisface $H(x) = y$, y también $x \in X \setminus F$, ya que $Q(\pi(x)) = \alpha(y) > 0$, $Q^{-1}(0) = 0$, y $\pi^{-1}(0) = F$.

Claramente, la función H es real analítica en $X \setminus F$. Además, utilizando la versión real analítica del teorema de la función implícita, puede deducirse, como en la demostración de 4.1, que H es un difeomorfismo real analítico entre $X \setminus F$ y X.

Combinando los resultados anteriores, obtenemos el siguiente

Teorema 4.13 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach de dimensión infinita que admite una seminorma real analítica ϱ cuyo conjunto de ceros es un subespacio F tal que el cociente X/F tiene dimensión infinita. Entonces existe un difeomorfismo real analítico entre X y $X \setminus F$.*

así como

Corolario 4.14 *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita que admite una norma real analítica (no necesariamente equivalente). Entonces existe un difeomorfismo real analítico entre X y $X \setminus \{0\}$.*

4.4 Una caracterización de la negligibilidad convexa de puntos en espacios de Banach

Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita con una norma ϱ de clase C^p (no necesariamente equivalente). Resumamos lo esencial de la técnica de negligibilidad que hemos usado en este capítulo. Si X es no reflexivo, escogemos un funcional lineal continuo $T \in X^*$ con $\sup_{\varrho(x)=1} T(x) = 1$ tal que T no alcanza este supremo, y ponemos $\omega(x) = \varrho(x) - T(x)$ para todo $x \in X$. Si X es reflexivo, existe una norma no completa ω de clase C^∞ en X. En cualquiera de los dos casos se construye un camino $p : (0, \infty) \longrightarrow X$ con las propiedades $p(t) = 0$ si y sólo si $t \geq 1$, $\omega(p(\alpha) - p(\beta)) \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ si $\beta \geq \alpha > 0$, y $\limsup_{t \to 0^+} \omega(y - p(t)) > 0$ para todo $y \in X$. Definimos entonces $H : X \setminus \{0\} \longrightarrow X$ por

$$H(x) = x + p(\omega(x)).$$

La aplicación $\varphi = H^{-1}$ es un difeomorfismo de clase C^p entre X y $X \setminus \{0\}$ cuyo soporte es el cuerpo convexo de clase C^p definido por $U = \{x \in X \mid \omega(x) \leq 1\}$, que cumple $ccU = \{0\}$. Recuérdese que el soporte de una aplicación $\psi : X \longrightarrow X$ se define como $\operatorname{supp}\psi = \overline{X \setminus \operatorname{Fix}\psi}$, donde $\operatorname{Fix}\psi = \{x \in X \mid \psi(x) = x\}$.

Por otra parte, es claro que la existencia en X de un cuerpo convexo U de clase C^p que satisfaga $ccU = \{0\}$ implica la existencia de una norma ϱ de clase C^p (no necesariamente equivalente) en X (basta tomar el funcional de Minkowski q_U de U, y definir $\varrho(x) = q_U(x) + q_U(-x)$). Por consiguiente, para un espacio de Banach X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) X tiene una norma de clase C^p (no necesariamente equivalente); y

(b) existe un difeomorfismo $\varphi : X \longrightarrow X \setminus \{0\}$ de clase C^p cuyo soporte es un cuerpo convexo de clase C^p que no contiene rayos.

Además, estas afirmaciones continúan siendo equivalentes si cambiamos las palabras *que no contiene rayos* y *no necesariamente equivalente* por *acotado* y *equivalente*, respectivamente. Es decir, para un espacio de Banach X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) X tiene una norma equivalente de clase C^p; y

(ii) existe un difeomorfismo $\varphi : X \longrightarrow X \setminus \{0\}$ de clase C^p cuyo soporte es un cuerpo convexo y acotado de clase C^p.

En este último caso, podemos añadir una tercera condición equivalente relacionada con la falsedad del teorema de Rolle en dimensión infinita. Recuérdese que, como demostramos en el capítulo 2, el teorema de Rolle falla para todos los espacios de Banach suaves de dimensión infinita que pueden inyectarse en un espacio de Banach con norma diferenciable, aunque existe un teorema de Rolle aproximado que es cierto para todos los espacios de Banach. A continuación mostramos que la falsedad del teorema de Rolle en dimensión infinita puede verse como otra condición equivalente a (i) y (ii) de arriba.

Proposición 4.15 *Para cualquier espacio de Banach X de dimensión infinita, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) X tiene una norma equivalente de clase C^p;

(ii) existe un difeomorfismo $\varphi : X \longrightarrow X \setminus \{0\}$ de clase C^p, cuyo soporte es un cuerpo convexo y acotado de clase C^p; y

(iii) existe una función $f : X \longrightarrow [0,\infty)$ de clase C^p tal que el conjunto $U = f^{-1}([0,1])$ es un cuerpo convexo y acotado cuya frontera es $f^{-1}(1)$, y sin embargo $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in X$. En particular, el teorema de Rolle falla en el espacio X.

Demostración. Ya sabemos que (i) y (ii) son equivalentes, y es claro que (i) se sigue de (iii) (en efecto, consideremos el funcional de Minkowski de U, $q_U(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda U\}$, y definamos $\|x\| = q_U(x) + q_U(-x)$; una aplicación rutinaria del teorema de la función implícita muestra que las condiciones sobre U y f implican que el funcional q_U es de clase C^p, y por consiguiente también lo es la norma equivalente $\|\cdot\|$). Veamos ahora que (i) implica (iii). Sea $\|\cdot\|$ una norma equivalente de clase C^p en X. Por el teorema 4.1 podemos encontrar un difeomorfismo $\varphi : X \longrightarrow X \setminus \{0\}$ tal que $\varphi(x) = x$ cuando $\|x\| \geq 1/2$. Definamos entonces $f : X \longrightarrow [0,\infty)$ por $f(x) = \|\varphi(x)\|$ para todo $x \in X$. Es fácil ver que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, y el conjunto $f^{-1}([0,1]) = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ es obviamente acotado y convexo.

4.5 Isotopías eliminadoras en variedades de Banach

En lo que queda de capítulo nos ocuparemos de extender algunos resultados sobre isotopías eliminadoras obtenidas en el caso de variedades hilbertianas por D. Burghelea y N. H. Kuiper en [16] al contexto de variedades diferenciables modeladas sobre cualquier espacio de Banach con una norma equivalente Fréchet diferenciable.

Antes de enunciar rigurosamente estos resultados recordaremos algunos conceptos de topología. Una *homotopía* de un espacio topológico $\mathcal{X}$ en otro espacio topológico $\mathcal{Y}$ es una aplicación continua $G : \mathcal{X} \times I \longrightarrow \mathcal{Y}$, donde $I = [0,1]$. La homotopía G determina una familia paramétrica de aplicaciones $(g_t)_{t\in I}$ definidas por

$$g_t(x) = G(x,t)$$

para todo $x \in \mathcal{X}$, $t \in I$. En este caso decimos que G conecta la aplicación g_0 con la aplicación g_1. A menudo se identifica la homotopía G con la familia $(g_t)_{t\in I}$. Dos aplicaciones $f, g : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ se dicen que son *homótopas* si existe una homotopía de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$ que conecte f con g. Por una *isotopía* (invertible) en un espacio topológico $\mathcal{X}$ se entiende una homotopía $G : \mathcal{X} \times I \longrightarrow \mathcal{X}$ tal que la aplicación $\overline{G} : \mathcal{X} \times I \longrightarrow \mathcal{X} \times I$ definida por

$$\overline{G}(x,t) = (G(x,t), t)$$

es un homeomorfismo.

Si $\mathcal{M}$ es una variedad de clase C^1, modelada sobre un espacio de Banach X, y K es un subconjunto de $\mathcal{M}$, entonces, por una *isotopía que elimina K de $\mathcal{M}$* se entenderá una aplicación $G : \mathcal{M} \times I \longrightarrow \mathcal{M}$ tal que G satisface las condiciones siguientes:

(i) La aplicación $g_0(x) = G(x,0)$ es la identidad en $\mathcal{M}$.

(ii) Para todo $t \in (0,1)$, la aplicación $g_t(x) = G(x,t)$ es un autodifeomorfismo de $\mathcal{M}$.

(iii) Para $t = 1$, la aplicación $g_1(x) = G(x,1)$ es un difeomorfismo de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M} \setminus K$.

(iv) La aplicación H definida por $H(x,t) = (G(x,t), t)$ es un difeomorfismo de clase C^1 de $\mathcal{M} \times I$ en $(\mathcal{M} \times I) \setminus (K \times \{1\})$.

Si U es un entorno abierto del conjunto K, diremos que la isotopía G tiene soporte en U siempre que $G(x,t) = x$ cuando $x \in \mathcal{M} \setminus U$, $t \in I$.

Enunciemos ahora los principales resultados de esta sección.

Teorema 4.16 *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita con una norma equivalente Fréchet diferenciable $\|\cdot\|$. Para todo $x_0 \in U \subset X$, donde U es un entorno abierto de x_0, existe una isotopía de clase C^1 que elimina x_0 de X y tiene soporte en U.*

Teorema 4.17 *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita con una norma equivalente Fréchet diferenciable $\|\cdot\|$.*

(1) Si $\mathcal{M}$ es una variedad diferenciable de clase C^1 modelada sobre el espacio X, y U es un entorno abierto de un punto $x_0 \in \mathcal{M}$, entonces existe una isotopía de clase C^1 que elimina x_0 de $\mathcal{M}$ y tiene soporte en U.

(2) Si $\mathcal{M}$ es una variedad diferenciable de clase C^1 con borde $\mathcal{N} = \partial\mathcal{M}$, modelada sobre el espacio X, y V es un entorno abierto de un punto x_0 en $\partial\mathcal{M}$, entonces existe un difeomorfismo del par $(\mathcal{M}, \partial\mathcal{M})$ en el par $(\mathcal{M} \setminus \{x_0\}, \partial\mathcal{M} \setminus \{x_0\})$, que tiene soporte en V.

Demostración del teorema 4.16:
Podemos suponer que $x_0 = 0$. Por los lemas 1.4 y 1.5, podemos encontrar una *norma asimétrica no completa* ω de clase C^1 y un camino eliminador p asociado a esta ω y que satisface $p(t) = 0$ para todo $t \geq 1/\sqrt{2}$. Definamos $\Psi : (X \times I) \setminus \{(0,1)\} \longrightarrow X$ por

$$\Psi(x,t) = x + p(f_t(x)),$$

donde $f_t(x) = \left(t^2\omega(x)^2 + (1-t)^2\right)^{1/2}$, y pongamos $\varphi_t(x) = \Psi(x,t)$. Antes de nada veamos que, para $0 \leq t < 1$, φ_t es un difeomorfismo de X en X, mientras que para $t = 1$, φ_1 es un difeomorfismo de $X \setminus \{0\}$ en X.

Sea (y,t) un punto arbitrario de $X \times I$, y definamos $F = F_{(y,t)} : (0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ por $F(\alpha) = f_t(y - p(\alpha))$ para $\alpha > 0$. Veamos que $F_{(y,t)}(\alpha)$ satisface las condiciones del lema 1.3. Para comprobar que F satisface la primera condición, puesto que $F(\beta) - F(\alpha) \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ es trivial para $\beta \geq \alpha > 0$ cuando $F(\beta) - F(\alpha) < 0$, podemos suponer que $F(\beta) - F(\alpha) \geq 0$. Esto conlleva que $\omega(y - p(\beta)) \geq \omega(y - p(\alpha))$. Entonces, teniendo en cuenta las propiedades de ω y p enumeradas en los lemas 1.4 y 1.5, podemos deducir que

$$\begin{aligned}
F(\beta) - F(\alpha) &= f_t(y - p(\beta)) - f_t(y - p(\alpha)) \\
&= \left(t^2\omega(y - p(\beta))^2 + (1-t)^2\right)^{1/2} - \left(t^2\omega(y - p(\alpha))^2 + (1-t)^2\right)^{1/2} \\
&\leq |t\omega(y - p(\beta)) - t\omega(y - p(\alpha))| = t\big(\omega(y - p(\beta)) - \omega(y - p(\alpha))\big) \\
&\leq t\omega(p(\alpha) - p(\beta)) \leq \omega(p(\alpha) - p(\beta)) \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha)
\end{aligned}$$

para todo $\beta \geq \alpha > 0$. Por tanto se cumple la primera condición del lema 4.2. Por otra parte, para $t > 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\limsup_{\alpha \to 0^+} F_{(y,t)}(\alpha) &= \limsup_{\alpha \to 0^+} \left(t^2\omega(y - p(\alpha))^2 + (1-t)^2\right)^{1/2} \\
&\geq t \limsup_{\alpha \to 0^+} \omega(y - p(\alpha)) > 0,
\end{aligned}$$

mientras que para $t = 0$ tenemos $F_{(y,0)}(\alpha) \equiv 1$. En cualquiera de los dos casos, F satisface la segunda condición del lema 4.2.

Entonces, por el lema 4.2, la ecuación $F_{(y,t)}(\alpha) = \alpha$ tiene una única solución. Esto significa que para cada $(y,t) \in X \times I$, existe un único número $\alpha(y,t) > 0$ con la propiedad de que

$$f_t(y - p(\alpha(y,t))) = \alpha(y,t).$$

Esto implica que, para $0 \leq t < 1$, la aplicación $\varphi_t(x) = x + p(f_t(x))$ es una biyección de X sobre X, mientras que para $t = 1$, $\varphi_1(x) = x + p(\omega(x))$ define una biyección de $X \setminus \{0\}$ en X. Y en cualquiera de los casos la inversa de φ_t satisface

$$\varphi_t^{-1}(y) = y - p(\alpha(y,t)).$$

En efecto, si $\varphi_t(x) = \varphi_t(z) = y$ entonces $f_t(y - p(f_t(x))) = f_t(x)$ y también $f_t(y - p(f_t(z))) = f_t(z)$, de manera que $f_t(x) = f_t(z) = \alpha(y,t) > 0$ por la unicidad de $\alpha(y,t)$, y por tanto $x = y - p(\alpha(y,t)) = z$. Además, para cada $y \in X$, puesto que $\varphi_t(y - p(\alpha(y,t))) = y - p(\alpha(y,t)) + p(f_t(y - p(\alpha(y,t)))) = y - p(\alpha(y,t)) + p(\alpha(y,t))$, el punto $x = y - p(\alpha(y,t))$ satisface $\varphi_t(x) = y$. Nótese que este punto x está en X cuando $t < 1$, mientras que para $t = 1$ tenemos $x \in X \setminus \{0\}$ (ya que $f_1(x) = \alpha(y,1) > 0$ y $f_1^{-1}(0) = \omega^{-1}(0) = \{0\}$).

Es claro que Ψ y φ_t son de clase C^1, para cada t. Veamos ahora que la aplicación $(y,t) \to \alpha(y,t)$ es de clase C^1. Definamos $\Phi : X \times I \times (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Phi(y,t,\alpha) = \alpha - \left[t^2\omega(y - p(\alpha))^2 + (1-t)^2\right]^{1/2} = \alpha - F_{(y,t)}(\alpha).$$

Es obvio que $t^2\omega(y - p(\alpha))^2 + (1-t)^2 > 0$ en un entorno de cualquier punto $(z,s,\alpha(z,s))$ en $X \times I \times (0,\infty)$. Entonces Φ es diferenciable en un entorno de cada punto $(y,t,\alpha(y,t))$ en $X \times I \times (0,\infty)$. Por otra parte, como $F_{(y,t)}(\beta) - F_{(y,t)}(\alpha) \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ para $\beta \geq \alpha > 0$, es claro que $F'_{(y,t)}(\alpha) \leq \frac{1}{2}$ para todo α en un entorno de $\alpha(y,t)$, y

$$\frac{\partial\Phi(y,t,\alpha)}{\partial\alpha} = 1 - F'_{(y,t)}(\alpha) \geq 1 - 1/2 > 0.$$

Entonces, por el teorema de la función implícita obtenemos que la función $(y,t) \mapsto \alpha(y,t)$ es de clase C^1. En particular φ_t^{-1} también es de clase C^1 para todo $t \in I$.

Hasta aquí hemos probado que las aplicaciones φ_t son autodifeomorfismos de X de clase C^1 para $0 \leq t < 1$, y φ_1 es un difeomorfismo de clase C^1 de $X \setminus \{0\}$ en X. Debe observarse que, para todo $t \in I$, $\varphi_t(x) = x$ siempre que $\omega(x) \geq 1$. Además, φ_0 es la identidad en X. Ahora fijemos un $\varepsilon > 0$ tal que $\{x \in X \mid \|x\| \leq \varepsilon\} \subset U$, y, por el lema 1.6, tomemos un difeomorfismo $h : X \longrightarrow X$ de clase C^1 que lleve el conjunto $\{x \in X \mid \|x\| \leq \varepsilon\}$ en $\{x \in X \mid \omega(x) \leq 1\}$ y preserve los rayos que emanan del origen. Definamos $g_t = h^{-1} \circ \varphi_t^{-1} \circ h$. Es claro que g_t es un autodifeomorfismo de X para $0 \leq t < 1$, y g_1 es un difeomorfismo de X en $X \setminus \{0\}$. Además, $g_t(x) = x$ siempre que $x \in X \setminus U$, para todo $t \in I$; y $g_0(x) = x$ para todo $x \in X$.

Finalmente, definamos $G : X \times I \longrightarrow X$ por $G(y,t) = g_t(y)$. Teniendo en cuenta que las aplicaciones p, h, $(y,t) \longrightarrow \alpha(y,t)$, y $(x,t) \longrightarrow f_t(x)$ son de clase C^1, es claro que la aplicación H definida por $H(x,t) = (G(x,t),t)$ es un difeomorfismo de clase C^1 entre $X \times I$ y $(X \times I) \setminus \{(0,1)\}$. Por consiguiente G es la isotopía deseada.

Demostración del teorema 4.17:

(1) Podemos tomar una carta que lleve x_0 en $0 \in X$ y tal que la bola unidad de X está contenida en la imagen de U. Entonces podemos transportar una isotopía de las del teorema 4.16, que elimine 0 de X y tenga soporte en la bola unidad, a nuestra

variedad $\mathcal{M}$, y podemos extenderla por la identidad constantemente en todos los puntos restantes de $\mathcal{M} \times I$. De esta manera obtenemos una isotopía que elimina x_0 de $\mathcal{M}$ y tiene soporte en U.

(2) Consideramos (e identificamos) una corona

$$\mathcal{N} \times I \subset \mathcal{M}$$

del borde $\mathcal{N} \times \{1\} = \partial\mathcal{M}$, suficientemente delgada cerca de $x_0 \in \partial\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ como para que exista un conjunto abierto $U \subset \mathcal{N}$ tal que

$$x_0 \in U \times \{1\} \subset U \times I \subset V \subset \mathcal{M}.$$

Entonces aplicamos una isotopía del teorema 4.16, pero considerándola como un difeomorfismo

$$\mathcal{N} \times I \longrightarrow (\mathcal{N} \times I) \setminus (\{(x_0, 1)\},$$

y la extendemos por la identidad fuera de la corona. El difeomorfismo $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \setminus \{x_0\}$ obtenido por este procedimiento cumple todos los requisitos del enunciado del teorema.

Debe observarse que el teorema 4.16 puede generalizarse para conseguir eliminar isotópicamente conjuntos compactos en espacios de Banach de dimensión infinita con normas Fréchet diferenciables. En efecto, sea K un subconjunto compacto de X. Por el lema 1.4 existe una *norma asimétrica no completa* ω de clase C^1. Asociado a esta ω, existe una función f del lema 4.5 que satisface:

1. f es de clase C^p en $X \setminus K$, y Lipschitz continua en X;
2. $f(x) - f(y) \leq \omega(x - y)$ para todo $x, y \in X$;
3. $f^{-1}(0) = K$;
4. $\inf\{f(x) \mid d_K(x) \geq \eta\} > 0$ para todo $\eta > 0$;
5. f es constante en el conjunto $\{x \in X \mid d_K(x) \geq \varepsilon\}$.

Entonces, suponiendo $f(x) = \delta > 0$ siempre que $d_K(x) \geq \varepsilon$, escojamos un camino $p = p_\delta$ del lema 4.4. Con estos elementos definamos $\Psi : (X \times I) \setminus \{(0, 1)\} \longrightarrow X$ por

$$\Psi(x, t) = x + p(f_t(x)),$$

donde $f_t(x) = \left(t^2 f(x)^2 + (1 - t)^2\right)^{1/2}$, y pongamos $\varphi_t(x) = \Psi(x, t)$.

Es fácil comprobar que para toda función lipschitziana f que sea 0 en un conjunto compacto K y sea de clase C^1 fuera de K, la función f^2 es de clase C^1 en la totalidad de X. Por esta razón la aplicación $(x, t) \mapsto f_t(x)$ es de clase C^1, y por tanto también lo es Ψ. Combinando las ideas de las demostraciones de los teoremas 4.1 y 4.16 puede mostrarse fácilmente que, para $0 \leq t < 1$, φ_t es un difeomorfismo de X en X, mientras que para $t = 1$, φ_1 es un difeomorfismo de $X \setminus K$ en X. Imitando la parte final de la demostración de 4.16 puede entonces deducirse el siguiente resultado.

Teorema 4.18 *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita con una norma equivalente Fréchet diferenciable $\|\cdot\|$, y sea K un compacto de X. Entonces, para toda bola U que contenga a K, existe una isotopía de clase C^1 que elimina K de X y tiene soporte en U.*

Finalizaremos este capítulo con una observación sobre la posibilidad de obtener resultados análogos a los teoremas 4.17 y 4.16 para grados de suavidad más altos. Supongamos que nuestro espacio X es C^m suave, y supongamos que tenemos una norma no completa (quizás *asimétrica*) $\omega : X \longrightarrow [0,\infty)$ tal que $\omega(\cdot)^p$ es de clase C^m en la totalidad de X para ciertos $p > 1$. Entonces, cambiando f_t por

$$f_t(x) = \left(t^p\omega(x)^p + (1-t)^p\right)^{1/p}$$

en la demostración de 4.16, obtenemos una isotopía de clase C^m que elimina x_0 de X. Es fácil ver que, si X es o bien un espacio separable o bien un espacio superreflexivo, y X es de dimensión infinita, entonces X tiene una norma no completa ω tal que $\omega(\cdot)^p$ es del mismo orden de suavidad que X *en la totalidad del espacio* X, para algún $p > 0$. En efecto, para cualquier superreflexivo X, de acuerdo con [52] (demostración del Lema 2, p. 133) existe una inyección lineal y continua de X en algún $\ell_q(\Gamma)$, el cual a su vez es un subespacio denso de algún $\ell_{2n}(\Gamma)$. Por tanto, existe una inyección lineal y continua $T : X \longrightarrow \ell_{2n}(\Gamma)$ de modo que $T(X)$ es un subespacio denso pero no cerrado de $\ell_{2n}(\Gamma)$. Por otra parte, es claro que todo espacio de Banach separable de dimensión infinita admite una inyección lineal y continua con imagen densa pero no cerrada en ℓ_2. En cualquiera de los casos, tomando la norma usual $\|\cdot\|$ de $\ell_{2n}(\Gamma)$ o ℓ_2, que es de clase C^∞, y definiendo $\omega(x) = \|T(x)\|$ para todo $x \in X$, obtenemos *una norma no completa* ω de clase C^∞ en X. Por consiguiente nos es lícito enunciar el siguiente resultado, cuya demostración es casi la misma que las de 4.16 y 4.17.

Teorema 4.19 *Sea X o bien un espacio de Banach separable de dimensión infinita o bien un espacio superreflexivo también de dimensión infinita. Supongamos que el espacio X tiene una función meseta de clase C^m.*

(1) Si $x_0 \in U \subset X$, donde U es un entorno abierto de x_0, entonces existe una isotopía de clase C^m que elimina x_0 de X y tiene soporte en U.

(2) Si $\mathcal{M}$ es una variedad diferenciable de clase C^m modelada sobre el espacio X, y U es un entorno abierto de un punto $x_0 \in \mathcal{M}$, entonces existe una isotopía de clase C^m que elimina x_0 de $\mathcal{M}$ y tiene soporte en U.

(3) Si $\mathcal{M}$ es una variedad diferenciable de clase C^m con borde $\mathcal{N} = \partial\mathcal{M}$, modelada sobre el espacio X, y V es un entorno abierto de un punto x_0 en $\partial\mathcal{M}$, entonces existe un difeomorfismo de clase C^m del par $(\mathcal{M},\partial\mathcal{M})$ en el par $(\mathcal{M}\setminus\{x_0\},\partial\mathcal{M}\setminus\{x_0\})$ que tiene soporte en V.

Capítulo 5

Clasificación de los cuerpos convexos de un espacio de Banach

En este capítulo daremos una clasificación difeomórfica de los cuerpos convexos de cualquier espacio de Banach. En particular veremos que todo cuerpo convexo suave cuyo cono característico sea un subespacio vectorial de codimensión infinita es relativamente difeomorfo a un semiespacio cerrado. Como consecuencia, tales cuerpos convexos son suavemente negligibles. También damos una clasificación parcial de los cuerpos estrellados de todo espacio de Banach WCG.

5.1 Clasificación de los cuerpos convexos suaves

Utilizando sus resultados pioneros acerca de negligibilidad topológica de puntos y otros conjuntos en espacios de Banach, V. L. Klee [55] obtuvo una clasificación topológica completa de los cuerpos convexos en un espacio de Hilbert. Su resultado fue generalizado a espacios de Banach arbitrarios con ayuda de la técnica de las normas no completas debida a Bessaga (ver el libro de Bessaga y Pelczynski [12]). Para hacerse una idea de la historia de la clasificación topológica de los cuerpos convexos el lector debería consultar asimismo los artículos de Stocker [64], Corson y Klee [18], y Bessaga y Klee [10, 11]. En [37], T. Dobrowolski presentó una versión C^p suave de dicho resultado, que era válida dentro de la clase de los espacios WCG. Nuestros resultados del capítulo 4 nos permiten ahora eliminar esta restricción, obteniendo un resultado general de clasificación de los cuerpos convexos de cualquier espacio de Banach.

Recuérdese que un cuerpo convexo U en un espacio de Banach X se dice que es un cuerpo convexo de clase C^p siempre que U sea una subvariedad de clase C^p con borde de codimensión uno ∂U. Si U_1, U_2 son cuerpos convexos de clase C^p en un espacio de Banach X, diremos que U_1 y U_2 son C^p relativamente difeomorfos siempre que exista un difeomorfismo $\varphi : X \longrightarrow X$ de clase C^p tal que $\varphi(U_1) = U_2$.

Dado un cuerpo convexo U de clase C^p en un espacio de Banach X, puede siempre suponerse sin pérdida de generalidad que $0 \in \mathrm{int}U$, y definirse el cono característico de U por $ccU = \{x \in X \mid rx \in U \text{ para todo } r > 0\}$. Para la definición del funcional de Minkowski de un cuerpo convexo y las propiedades elementales de los cuerpos convexos, remitimos al lector al texto que precede el lema 1.6 en la página 23.

Teorema 5.1 *Sea U un cuerpo convexo de clase C^p en un espacio de Banach X.*

(a) Si ccU es un subespacio vectorial de codimensión finita (digamos $X = ccU \oplus Z$, con Z finito dimensional), entonces U es C^p relativamente difeomorfo a $ccU + \{z \in Z : |z| \leq 1\}$, donde $|\cdot|$ es una norma euclídea en Z.

(b) Si ccU no es un subespacio vectorial o bien ccU es un subespacio vectorial tal que el cociente X/ccU tiene dimensión infinita, entonces U es C^p relativamente difeomorfo a un semiespacio cerrado (esto es, $\{x \in X \mid x^*(x) \geq 0\}$, para algún $x^* \in X^*$).

Demostración: Seguiremos el razonamiento de [37], haciendo los cambios apropiados cuando sea necesario.

(a) Basta aplicar el lema 1.6 para $U_1 = U$ y $U_2 = ccU + \{z \in Z : |z| \leq 1\}$.

(b) Consideraremos dos casos.

Caso I: ccU no es un subespacio vectorial.

Recordemos que $0 \in \mathrm{int}U$. Puede procederse como sigue. Escojamos un $y \in \mathrm{int}U$ tal que $-y \in \partial U$ y $\{ry \mid r \in \mathbb{R}^+\} \subset U$. Sea f un funcional soporte de U en $-y$, digamos $f(-y) = -1$, y sea $X_1 = \mathrm{Ker} f$, de manera que $-y + X_1$ es el hiperplano soporte de U en $-y$. Tenemos que $U \subset [-1, \infty) \times X_1$, $(-1, 0) \in U$ y $(-1, \infty) \times \{0\} \subset \mathrm{int}U$. Ahora tomemos una función $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ con las siguientes propiedades:

(i) $\gamma(t) = 0$ si t pertenece a cierto entorno de 0;

(ii) $\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = \infty$; y

(iii) $0 < \gamma'(t) \leq \frac{\gamma(t)+1}{t}$ para $t > 0$.

También necesitaremos una función real creciente λ de clase C^∞, definida para $t > 0$, tal que $\lambda(t) = 0$ para $t \leq 1/2$ y $\lambda(t) = 1$ para $t \geq 1$. Definamos $q_1 : U \times X \longrightarrow [0, \infty)$ por

$$q_1(u, x) = \inf\{\lambda > 0 \mid u + \frac{1}{\lambda}(x - u) \in U\},$$

y definamos también $q_2 : U \times X \longrightarrow [0, \infty)$ por

$$q_2(u, x) = \inf\{\lambda > 0 \mid u + \frac{1}{\lambda}(x - u) \in [-1, \infty) \times X_1\}.$$

Nótese que $q_1(u, \cdot)$ y $q_2(u, \cdot)$ son los funcionales de Minkowski de los conjuntos U y $[-1, \infty) \times X_1$ con respecto al punto $u \in U$. Entoces pongamos

$$u(x) = (\gamma(q_1(0, x)), 0).$$

Utilizando las propiedades de γ enumeradas anteriormente, y el teorema de la función implícita, es fácil ver que la aplicación

$$\Phi(s,z) = u(z) + s\big((-1,z) - u(z)\big)$$

define un difeomorfismo de clase C^p entre $(0,\infty)\times X_1$ y $V = \big(\mathbb{R}\times X_1\big)\setminus\big([0,\infty)\times\{0\}\big)$. Sea $\pi_1 : X \longrightarrow X_1$ la proyección $\pi_1(s,y) = y$ y, para cada $x \in V$, póngase $z = \pi_1 \circ \Phi^{-1}(x)$. A continuación definamos

$$H(x) = u(z) + \left[\lambda \circ q_1(u(z),x)\frac{q_1(u(z),x)}{q_2(u(z),x)} + 1 - \lambda \circ q_1(u(z),x)\right](x - u(z))$$

para $x \in V$, y $H(x) = x$ para $x \in X \setminus V$. No es difícil ver que H es un autodifeomorfismo de X de clase C^p tal que $H(U) = [-1,\infty) \times X_1$.

Caso II: ccU es un subespacio vectorial tal que el cociente X/ccU tiene dimensión infinita.

Pongamos $F = ccU$. De nuevo podemos escribir $X = \mathbb{R} \times X_1$, donde X_1 tiene codimensión uno, y $F = ccU \subset \{0\} \times X_1$. Sea $\pi_1 : X \longrightarrow X_1$ la proyección $\pi_1(s,z) = z$. Sea $q = q_{\pi_1(U)} : X_1 \longrightarrow [0,\infty)$ el funcional de Minkowski del conjunto $\pi_1(U)$, y definamos

$$\varrho(x) = q_{\pi_1(U)}(x) + q_{\pi_1(U)}(-x)$$

para todo $x \in X_1$. Entonces ϱ es una seminorma en X_1 tal que $\varrho^{-1}(0) = F$ y ϱ es de clase C^p en $X_1 \setminus F$; identificaremos F con su proyección sobre X_1. Definamos ahora los cuerpos convexos de clase C^p

$$V = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times X_1 \mid t^2 + \varrho^2(x) \leq 1\}, \quad \text{y} \quad V_1 = \{x \in X_1 \mid \varrho(x) \leq 1\}.$$

Vamos a construir los siguientes difeomorfismos de clase C^p:

(1) $H_1 : \mathbb{R} \times X_1 \setminus F \longrightarrow \mathbb{R} \times X_1$, con $H_1(V \setminus F) = V$;

(2) $H_2 : \mathbb{R} \times X_1 \setminus F \longrightarrow \mathbb{R} \times \partial V$, con $H_2(V \setminus F) = [0,\infty) \times \partial V$; y

(3) $H_3 : \partial V \longrightarrow X_1$.

Supongamos que H_1, H_2, y H_3 estuvieran ya construidos. Entonces es claro que la composición

$$H = (\mathrm{id} \times H_3) \circ H_2 \circ H_1^{-1} : \mathbb{R} \times X_1 \longrightarrow \mathbb{R} \times X_1$$

sería un autodifeomorfismo de X que satisfaría $H(V) = [0,\infty) \times X_1$. Por tanto, aplicando el lema 1.6 para $U_1 = U$ y $U_2 = V$, el teorema estaría probado.

Expliquemos pues cómo puede uno obtener estos difeomorfismos H_i, $i = 1,2,3$. Puesto que X_1 tiene una seminorma ϱ de clase C^p tal que $\varrho^{-1}(0) = F$, la existencia de H_1 se sigue del corolario 4.9. Por otra parte, H_2 puede definirse por

$$H_2(z) = \left(-\log(q_V(z)), \frac{1}{q_V(z)}z\right)$$

para $z \in \mathbb{R} \times X_1 \setminus F$. Describamos por último H_3. Por el corolario 4.9, existe un difeomorfismo $H_0 : X_1 \setminus F \longrightarrow X_1$ de clase C^p con $H_0(x) = x$ para $\varrho(x) \geq \frac{1}{4}$. Entonces la aplicación

$$G_0(t,x) = \begin{cases} \left(\sqrt{1-\varrho^2(H_0(x))},\ H_0(x)\right) & \text{si } t > 0 \\ (t,x) & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

establece un difeomorfismo de clase C^p entre $\partial V \setminus \{1\} \times F$ y ∂V. Tomemos ahora un cuerpo convexo U_0 de clase C^∞ en el plano $\mathbb{R}^2$ tal que

$$\{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \mid t^2 + s^2 = 1, t \geq 0\} \cup \{(-1,s) \in \mathbb{R}^2 \mid |s| \leq 1/2\} \subset \partial U_0,$$

y pongamos $p(t,x) = q_{U_0}(t, \varrho(x))$ para $(t,x) \in \mathbb{R} \times X_1$, donde q_{U_0} es el funcional de Minkowski del conjunto U_0. Por el lema 1.6 existe un difeomorfismo $G_1 : X \longrightarrow X$ de clase C^p tal que $G_1(\partial V) = D = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times X_1 \mid p(t,x) = 1\}$. La proyección estereográfica G_2 definida por medio de los rayos que salen de $(1,0) \in D$, seguida de una traslación adecuada, define un difeomorfismo de clase C^p entre $D \setminus \{1\} \times F$ y X_1. Entonces, si ponemos

$$H_3 = G_2 \circ G_1 \circ G_0^{-1},$$

obtenemos el difeomorfismo de clase C^p deseado entre ∂V y X_1.

5.2 Cómo eliminar suavemente cuerpos convexos de un espacio de Banach

Una vez que sabemos cómo eliminar puntos o subespacios en espacios de Banach que tienen normas o seminormas suaves, no es difícil encontrar el modo de eliminar también cuerpos convexos suaves. Podríamos dar una demostración directa de este hecho, pero será más cómodo para nosotros deducirlo del teorema 5.1.

Teorema 5.2 *Sea X un espacio de Banach, y sea U un cuerpo convexo de clase C^p tal que su cono característico, ccU, es o bien un subespacio vectorial de codimensión infinita de X o bien no es un subespacio vectorial de X. Entonces existe un difeomorfismo de clase C^p entre X y $X \setminus U$.*

Demostración. Por el teorema 5.1 sabemos que existe un autodifeomorfismo de X de clase C^p que transforma U en un semiespacio cerrado. Por consiguiente $X \setminus U$ es C^p difeomorfo a un semiespacio abierto. Como cualquier semiespacio abierto es C^∞ difeomorfo a la totalidad del espacio, podemos deducir que $X \setminus U$ y X son C^p difeomorfos.

En el caso de que nuestro cuerpo convexo U sea acotado, podemos encontrar un difeomorfismo entre X y $X \setminus U$ que se restringe a la identidad fuera de una bola suficientemente grande.

Teorema 5.3 *Sea X un espacio de Banach infinito dimensional, y sea U un cuerpo convexo de clase C^p y acotado. Entonces existe un difeomorfismo de clase C^p entre X y $X \setminus U$ que tiene soporte acotado.*

Demostración. Por un lado es claro que la existencia en X de un cuerpo convexo y acotado U de clase C^p implica la existencia de una norma equivalente $\|\cdot\|$ de clase C^p en X (basta tomar el funcional de Minkowski q_U de U, y definir $\|x\| = q_U(x) + q_U(-x)$). Entonces, por el teorema 1.2, existe un difeomorfismo φ de clase entre X y $X \setminus \{0\}$ tal que $\varphi(x) = x$ siempre que $\|x\| \geq 1$. Como U es acotado puede suponerse que U está contenido en la bola unidad de X. Entonces $\|x\| \leq q_U(x)$ para todo $x \in X$, donde q_U es el funcional de Minkowski de U.

Por otro lado, es fácil construir un difeomorfismo de clase C^p entre $X \setminus \{0\}$ y $X \setminus U$ que satisfaga $g(x) = x$ cuando $\|x\| \geq 2$ (en efecto, tomemos una función creciente $\lambda : (0, \infty) \longrightarrow (1, \infty)$ de clase C^∞ tal que $\lambda(t) = t$ para $t \geq 2$, y pongamos

$$g(x) = \frac{\lambda(q_U(x))}{q_U(x)} x$$

para $x \in X \setminus \{0\}$). Entonces la aplicación $H = g \circ \varphi$ establece un difeomorfismo de clase C^p entre X y $X \setminus U$ tal que $H(x) = x$ siempre que $\|x\| \geq 2$.

5.3 Clasificación de los cuerpos estrellados suaves

En esta sección daremos una clasificación parcial de los conjuntos estrellados suaves de un espacio de Banach WCG. Como veremos, tal resultado puede deducirse fácilmente del teorema 5.1 si se observa que todos los espacios WCG tienen normas de clase C^∞ no necesariamente equivalentes. Sin embargo, nuestro resultado no clasifica todos los cuerpos estrellados suaves de un espacio WCG. A primera vista podría pensarse que el teorema 5.1 debería extenderse sin problemas a la categoría de los cuerpos estrellados suaves, pero unos instantes de reflexión nos mostrarán que la parte (b) del teorema 5.1 no es verdad para conjuntos estrellados suaves cuyo cono característico no sea un subespacio vectorial. La convexidad resulta ser aquí una condición esencial. Existe una amplia variedad de cuerpos estrellados suaves ninguno de los cuales es difeomorfo a un semiespacio o incluso a cualquier otro cuerpo estrellado fijo. Esto es debido al hecho de que el cono característico de un cuerpo estrellado puede ser un conjunto bastante complicado que en general no guardará ningún parecido con el cono característico de un cuerpo convexo.

Para ser más precisos necesitaremos algunas definiciones. Un subconjunto cerrado y no vacío A de un espacio de Banach X diremos que es un cuerpo estrellado siempre que A tenga interior no vacío y exista un punto $x_0 \in X$ tal que todo rayo *que emana de x_0 toca a la frontera de A a lo sumo en un solo punto.* Diremos que A es *estrellado con respecto a x_0*. En lo sucesivo, al hablar de cuerpos estrellados supondremos que lo son con respecto al origen. Para todo cuerpo estrellado A definimos su cono característico por

$$ccA = \{x \in X \mid rx \in A \text{ para todo } r > 0\},$$

y el funcional de Minkowski de A por

$$q_A(x) = \inf\{\lambda > 0 \mid \frac{1}{\lambda}x \in A\}$$

para todo $x \in X$. Es fácil ver que para cualquier cuerpo estrellado A, su funcional de Minkowski q_A es una función continua que satisface $q_U(rx) = rq_U(x)$ para todo $r \geq 0$ y $q_A^{-1}(0) = ccA$.

Diremos que A es un cuerpo estrellado de clase C^p si su funcional de Minkowski q_A es de clase C^p en el conjunto $X \setminus ccA = X \setminus q_A^{-1}(0)$. Si A_1, A_2 son cuerpos estrellados de clase C^p en un espacio de Banach X, diremos que A_1 y A_2 son C^p relativamente difeomorfos siempre que exista un difeomorfismo $\varphi : X \longrightarrow X$ de clase C^p tal que $\varphi(A_1) = A_2$.

El siguiente ejemplo muestra que, como ya hemos dicho antes, la parte (b) del teorema 5.1 no puede extenderse a la categoría de cuerpos estrellados, y también nos permite vislumbrar cuán complicado puede llegar a ser el cono característico de un cuerpo estrellado.

Ejemplo 5.4 Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| \leq 1\}$. Es claro que A es un cuerpo estrellado en el plano $\mathbb{R}^2$, y su cono característico es el par de rectas definidas por la ecuación $xy = 0$. Entonces A no puede ser relativamente difeomorfo (ni siquiera relativamente homeomorfo) a un semiplano de $\mathbb{R}^2$. En efecto, $X \setminus A$ no es conexo, mientras que el complemento de un semiplano cerrado (es decir, un semiplano abierto) es siempre conexo. Ejemplos análogos muestran que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un cuerpo estrellado de clase C^∞ en el plano $\mathbb{R}^2$ tal que $X \setminus A_n$ tiene exactamente n componentes conexas. Por consiguiente A_n no es relativamente homeomorfo a A_m cuando $n \neq m$.

A continuación damos un resultado elemental acerca de cuerpos estrellados que nos será muy útil para probar el anunciado teorema de clasificación parcial de los cuerpos estrellados de un espacio WCG. Además, esta proposición, al asegurar que todos los cuerpos estrellados con el mismo cono característico son difeomorfos dos a dos, contribuye a desenredar un poco la maraña de los cuerpos estrellados de un espacio de Banach. Omitiremos la demostración de este resultado, ya que es una sencilla adaptación de la del lema 1.6.

Proposición 5.5 *Sea X un espacio de Banach, y sean A_1, A_2 cuerpos estrellados de clase C^p tales que $ccA_1 = ccA_2$. Entonces existe un difeomorfismo $g : X \longrightarrow X$ de clase C^p tal que $g(A_1) = A_2$, $g(0) = 0$, y $g(\partial A_1) = \partial A_2$, donde ∂A_j denota el borde de A_j. Además, $g(x) = \mu(x)x$, donde $\mu : X \longrightarrow [0, \infty)$, y por tanto g preserva los rayos que emanan del origen.*

Ahora podemos deducir del teorema 5.1 el siguiente resultado acerca de una clasificación parcial de los cuerpos estrellados de un espacio de Banach WCG.

Teorema 5.6 *Sea A un cuerpo estrellado de clase C^p en un espacio de Banach WCG X.*

(a) Si ccA es un subespacio vectorial de dimensión finita (digamos $X = ccA \oplus Z$, con Z finito dimensional), entonces A es C^p relativamente difeomorfo a $ccA + \{z \in Z : |z| \leq 1\}$, donde $|\cdot|$ es una norma euclídea en Z.

(b) Si ccA es un subespacio vectorial tal que el espacio cociente X/ccA tiene dimensión infinita, entonces A es C^p relativamente difeomorfo a un semiespacio cerrado.

Demostración.
(a) Basta aplicar la proposición 5.5 para $A_1 = A$ y $A_2 = ccA + \{z \in Z : |z| \leq 1\}$.

(b) Sea $F = ccA$, y consideremos el espacio cociente $Z = X/F$. Es fácil ver que el cociente de un espacio WCG es también WCG. Puesto que Z es WCG, puede inyectarse en algún $c_0(\Gamma)$ y, por tanto, tiene una norma de clase C^∞ no necesariamente equivalente. Si componemos esta norma con la proyección canónica $\pi : X \longrightarrow Z$ obtenemos una seminorma $\varrho : X \longrightarrow [0, \infty)$ de clase C^∞ cuyo conjunto de ceros es precisamente $F = ccA$. Ahora consideremos el cuerpo convexo de clase C^p $B = \{x \in X \mid \varrho(x) \leq 1\}$. Como $ccB = ccA = F$, por la proposición 5.5 los cuerpos estrellados A y B son C^p relativamente difeomorfos. Por otra parte, por el teorema 5.1, B es C^p relativamente difeomorfo a un semiespacio cerrado. Luego A es también C^p relativamente difeomorfo a un semiespacio cerrado.

Capítulo 6

Otras aplicaciones de la negligibilidad suave

Además de la clasificación de los cuerpos convexos y los cuerpos estrellados de un espacio de Banach y la falsedad del teorema de Rolle en dimensión infinita, la teoría de la negligibilidad ha encontrado multitud de aplicaciones en varias ramas de las matemáticas, tales como las ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios de Banach, las acciones libres de grupos en espacios de Banach, y la topología diferencial infinito dimensional. En este último capítulo daremos una muestra de estas otras aplicaciones de la negligibilidad, señalando cómo nuestros resultados del capítulo 4 amplían la clase de espacios dentro de la cual estas aplicaciones son válidas. La mayor parte de los resultados que enunciaremos a continuación eran conocidos en el caso del espacio de Hilbert separable, y algunos de ellos también lo eran para espacios de Banach WCG con normas suaves. Nuestros resultados implican que también son válidos para cualquier espacio de Banach con una norma suave (no necesariamente equivalente).

6.1 El fenómeno de Garay para EDOs en espacios de Banach

Quizás una de las aplicaciones más inesperadas de la teoría de la negligibilidad es la encontrada por Barnabas M. Garay [45, 46] acerca de varias propiedades extrañas de las secciones de embudos de soluciones a ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios de Banach de dimensión infinita. Garay utilizó la teoría de la negligibilidad para estudiar los aspectos geométricos de la falsedad de los teoremas de Knesser y Peano en espacios de Banach infinito dimensionales. Garay probó que, para varias clases de espacios de Banach de dimensión infinita que incluyen al espacio de Hilbert separable, todo conjunto compacto puede representarse como una sección temporal de un embudo de soluciones para alguna ecuación diferencial ordinaria. También encontró aplicaciones de los homeomorfismos eliminadores en sistemas dinámicos topológicos; ver [47]). Nuestros resultados del capítulo 4 nos permiten extender los teoremas de Garay a la clase de todos los espacios de Banach que tienen normas diferenciables de clase C^p, con $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Antes de enunciar rigurosamente estos resultados recordaremos algunos conceptos y estableceremos ciertas convenciones de notación. Sea X un espacio de Banach. Dada una función continua $F : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$, consideremos la ecuación diferencial ordinaria (EDO)

$$D_t x = F(t, x). \tag{1}$$

Para $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X$, una función $x \in C^1(I_x, X)$ se dice que es una solución de (1) por (t_0, x_0) siempre que I_x sea un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ que contenga a t_0, $x(t_0) = x_0$, y $D_t x(s) = F(s, x(s))$ para todo $s \in I_x$. Las soluciones cuyo dominio es $\mathbb{R}$ se llaman *globales*. De ahora en adelante $\mathcal{F}(X)$ representará la clase de todas las funciones continuas $F : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ que satisfacen las condiciones siguientes:

(2) para cada $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X$, la EDO (1) tiene al menos una solución por (t_0, x_0);

(3) Todas las soluciones de (1) pueden extenderse a soluciones globales.

Como es bien sabido, el teorema de Peano asegura que todas las funciones continuas $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfacen (2). desgraciadamente, el teorema de Peano no sigue siendo cierto en dimensión infinita. Para un contraejemplo remitimos al lector a [29]. Dado un espacio de Banach de dimensión infinita X, (2) será satisfecha sólo para aquellas funciones continuas $F : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ que cumplan algunos requisitos adicionales (normalmente hipótesis de compacidad o de tipo disipativo; ver [29]).

Para una función dada $F \in \mathcal{F}(X)$, y para un punto $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X$, la *sección temporal del embudo de soluciones* en el tiempo t es el conjunto

$$S_t(F, (t_0, x_0)) = \{x(t) \in X \mid x \text{ es una solución de (1) por } (t_0, x_0)\},$$

mientras que el *embudo de soluciones* (o el *embudo integral*) se define por

$$S(F, (t_0, x_0)) = \{(t, x(t)) \in \mathbb{R} \times X \mid x(t) \in S_t(F, (t_0, x_0))\}.$$

Fue Kneser [56] quien comenzó a estudiar las propiedades topológicas de las secciones de embudos de soluciones. Kneser probó el siguiente resultado.

Teorema 6.1 (Kneser) *Sea $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Entonces la sección del embudo de soluciones $S_t(F, (t_0, x_0))$ es un subconjunto compacto, conexo y no vacío de $\mathbb{R}^n$, para todo $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $t \in \mathbb{R}$.*

Hay una enorme cantidad de literatura acerca de generalizaciones del teorema de Kneser para ciertas clases de ecuaciones integrales y ecuaciones diferenciales funcionales en espacios de Banach, variedades, etc. Sin embargo el problema de caracterizar las secciones de los embudos de soluciones está aún lejos de ser resuelto, a pesar de varias condiciones necesarias o suficientes (formuladas en términos de topología algebraica o topología diferencial) dadas por Pugh [59] y Rogers [60]. Quizás el mejor resultado es debido a Pugh, que consideró el problema de clasificar las secciones de embudos de soluciones en términos de la teoría del cobordismo en topología algebraica. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y un conjunto compacto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice que son *embudocobordantes* en $\mathbb{R}^n$ siempre que exista una función $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ tal que $S_1(F,(0,x_0)) = A$ y $S_0(F,(1,a)) = \{x_0\}$ para todo $a \in A$.

Teorema 6.2 (Pugh)

(a) Si $\{x_0\}$ y A son embudocobordantes, entonces existe un difeomorfismo de clase C^∞ entre $\mathbb{R}^n \setminus A$ y $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$.

(b) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, y existe un difeomorfismo de clase C^∞ entre $\mathbb{R}^n \setminus A$ y $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$, entonces $\{x_0\}$ y A son embudocobordantes por medio de cierta $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

la construcción de F en [59] se basa en la existencia de un difeomorfismo de clase C^∞ entre $\mathbb{R}^n \setminus A$ y $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$ que fija todos los puntos fuera de una bola que contiene a A. Debe mencionarse que la función F construida por Pugh tiene la agradable propiedad de que (cuando A contiene al menos dos puntos), $(0,x_0)$ es el único punto de no unicidad para la ecuación (1).

En este contexto, es natural preguntarse si el teorema de Kneser sigue siendo cierto en dimensión infinita. La respuesta es negativa. Binding [14] observó que si X es un espacio de Banach de dimensión infinita entonces existe $F \in \mathcal{F}(X)$ tal que $S_1(F,(0,0)) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. Por tanto las secciones de embudos de soluciones no son necesariamente compactas. Por otra parte, Binding [14] también construyó una función continua $F : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ tal que $S_1(F,(0,0))$ es desconexo. Sin embargo, esta función F no pertenece a $\mathcal{F}(X)$. De hecho, la desconexión de $S_1(F,(0,0))$ en [14] está causada por una fuerte violación de la condición de existencia local (2).

B. M. Garay [45] investigó hasta qué punto falla el teorema de Kneser en los espacios de dimensión infinita y, al generalizar la parte (b) del teorema de Pugh 6.2, dió una amplia clase de ejemplos de embudos de soluciones cuyas secciones son desconexas en los espacios de Banach X que admiten difeomorfismos eliminadores. Garay probó que la desconexión de las secciones de los embudos de soluciones puede también ser causado por un comportamiento global muy complicado de las trayectorias, y no sólo por el incumplimiento de la condición de existencia local (2). Para varios tipos de espacios de Banach infinito dimensionales X demostró la existencia de ecuaciones diferenciales $D_t x = F(t,x)$, $F \in \mathcal{F}(X)$, con embudos de soluciones cuyas secciones son desconexas. Su construcción dependía de la existencia de difeomorfismos eliminadores y por tanto era efectiva solamente para aquellos espacios de Banach de dimensión infinita suaves que son inyectables linealmente en algún $c_0(\Gamma)$ (es decir, la clase de espacios de Banach dentro de la que los resultados de Dobrowolski [35] sobre difeomorfismos eliminadores eran válidos). Ahora, gracias a nuestros resultados de los capítulos 4 y 5 sobre negligibilidad suave de conjuntos compactos y cuerpos convexos, los resultados de Garay pueden extenderse a la clase de todos los espacios de Banach infinito dimensionales que tienen normas equivalentes Fréchet diferenciables.

La forma más general–pero menos definida– del teorema de Garay [45] es la siguiente.

Teorema 6.3 (Garay) *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y sea A un subconjunto cerrado y acotado no vacío de X. Sea $\alpha = \sup\{\|a\| : a \in A\}$. Supongamos que existe un difeomorfismo h de clase C^1 que transforma $X \setminus A$ en $X \setminus \{0\}$ y tal que $h(x) = x$ cuando $\|x\| \geq \alpha + 1$. Entonces existe una función $F \in \mathcal{F}(X)$ tal que $S_1(F, (0,0)) = A$. Además, si A contiene al menos dos puntos, entonces $F \in \mathcal{F}(X)$ puede elegirse de tal manera que $(0,0) \in \mathbb{R} \times X$ es el único punto de no unicidad para (1).*

Combinando este resultado con los teoremas 4.1 y 5.3, obtenemos lo siguiente.

Teorema 6.4 (Garay) *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita con una norma equivalente Fréchet diferenciable. Sea A o bien un subconjunto compacto de X o bien un cuerpo convexo suave en X. Entonces existe una función $F \in \mathcal{F}(X)$ tal que $S_1(F, (0,0)) = A$.*

Además, si A tiene al menos dos puntos, entonces $F \in \mathcal{F}(X)$ puede elegirse de manera que $(0,0) \in \mathbb{R} \times X$ sea el único punto de no unicidad de (1).

Finalmente, si X tiene una norma equivalente de clase C^{p+1} entonces puede exigirse que además la función F sea de clase C^p en X.

Demostración. Por los teoremas 4.1 y 5.3 sabemos que existen difeomorfismos con soporte acotado entre X y $X \setminus A$, por un lado, y entre X y $X \setminus \{0\}$, por otro lado. Por tanto existe un difeomorfismo entre $X \setminus \{0\}$ y $X \setminus A$ que se restringe a la identidad fuera de una bola. Por tanto, el resultado se sigue inmediatamente del teorema 6.3.

Llegado este punto no podemos resistir la tentación de dar un bosquejo de la prueba del teorema 6.3. Dedicaremos el resto de esta sección a explicar cómo, utilizando un difeomorfismo eliminador, puede construirse una ecuación diferencial ordinaria $D_t x = F(t, x)$ que tiene solución única y global por cada punto distinto del origen, mientras que las soluciones por $(0,0)$ no son únicas y alcanzan todos los puntos de un conjunto compacto o un cuerpo convexo predeterminados. Seguiremos el razonamiento de [9]; ver también [45].

El teorema 6.3 es una consecuencia relativamente fácil del siguiente resultado, que en si mismo es interesante.

Teorema 6.5 (Garay) *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach de dimensión infinita que admite una norma equivalente $\|\cdot\|$ de clase C^p. Sea A o bien un compacto de X o bien un cuerpo convexo y acotado de clase C^p en X. Podemos suponer que A está contenido en la bola unidad X. Entonces, existe una función $f : X \longrightarrow X$ de clase C^{p-1} tal que $f^{-1}(0) = A$, $f(x) = x$ cuando $\|x\| \geq 2$, y tal que, para todo $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times (X \setminus A)$, la ecuación diferencial*

$$x' = f(x) \tag{4}$$

tiene una única solución que pasa por (t_0, x_0), y la solución es global y no acotada.

Esbozo de la demostración. Sea h un difeomorfismo de clase C^p de $X \setminus \{0\}$ sobre $X \setminus A$ que satisface $h(x) = x$ si $\|x\| \geq 2$ (h existe gracias a los teoremas 4.1 y 5.3). Consideremos la familia de curvas

$$x(t) = h^{-1}(h(x_0)e^t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x_0 \in X \setminus \{0\}, \tag{5}$$

que son disjuntas dos a dos y cubren el conjunto $X \setminus A$. Estas curvas son la totalidad de las soluciones de la ecuación diferencial

$$x' = g(x), \tag{6}$$

donde

$$g(x) = [(Dh^{-1})(h(x))]h(x).$$

Sea $f_1 : X \longrightarrow X$ la extensión de g definida poniendo $f_1 = 0$ en el conjunto A. Entonces la ecuación diferencial

$$x' = f_1(x) \tag{7}$$

casi satisface la afirmación del enunciado, excepto que f_1 puede ser discontinua en los puntos de A. Este fallo puede corregirse poniendo

$$f(x) = \phi(x)f_1(x),$$

donde $\phi : X \longrightarrow [0,1]$ es una función de clase C^p tal que $\phi^{-1}(0) = A$ y $\phi(x) = 1$ cuando $\|x\| \geq 2$. Nótese que, si A es un conjunto compacto, la existencia de una tal ϕ puede deducirse fácilmente de los lemas 4.5 y 1.6, mientras que si A es un cuerpo convexo y acotado de clase C^p entonces ϕ puede definirse como la composición del funcional de Minkowski de A con una función real adecuada. Entonces la ecuación

$$x' = f(x) \tag{8}$$

tiene solución única por cada punto $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times (X \setminus A)$, y la solución es global y no acotada, mientras que si x es una solución global acotada de (8), entonces existe un punto $a \in A$ tal que $x(t) = a$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Como se dijo más arriba, del teorema 6.5 puede deducirse el teorema de Garay. Remitimos al lector a [45] para los detalles.

Teorema 6.6 (Garay) *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach de dimensión infinita que tiene una norma equivalente $\|\cdot\|$ de clase C^p, y sea $A \subset X$ o bien un conjunto compacto con al menos dos puntos o bien un cuerpo convexo y acotado de clase C^p. Entonces existe una aplicación $F : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ de clase C^{p-1} tal que el problema de Cauchy*

$$x'(t) = F(t,x), \quad x(t_0) = x_0$$

admite una única solución (global) por cada punto $(t_0, x_0) \neq (0,0)$, mientras que las soluciones por $(0,0)$ no son únicas, y vienen dadas por

$$x(t) = \frac{1}{2}(t^2 + t|t|)a, \quad a \in A,$$

lo que significa que en el tiempo $t = 1$ las soluciones por $(0,0)$ alcanzan todos los puntos de A.

6.2 Difeomorfismos periódicos sin puntos fijos, y acciones libres de grupos sobre espacios de Banach

V. L. Klee utilizó sus resultados sobre negligibilidad topológica [55] para demostrar que si X es o bien un espacio de Banach no reflexivo o bien un espacio L^p de dimensión infinita, existe un homeomorfismo $f: X \longrightarrow X$ de período dos sin puntos fijos. Esto fue algo sorprendente porque, para un espacio finito dimensional X, P. A. Smith [63] había probado que todo autohomeomorfismo de X periódico de período un número primo debe tener al menos un punto fijo. Klee probó incluso que para el espacio de Hilbert H y para todo entero positivo $n \geq 2$ existe un homeomorfismo $f: H \longrightarrow H$ periódico de período puro n que no tiene ningún punto fijo. Utilizando nuestros resultados del capítulo 4, estos resultados pueden afinarse y generalizarse a muchos espacios de Banach infinito dimensionales para obtener difeomorfismos periódicos real analíticos de período arbitrario n sin puntos fijos. Esto puede hacerse para todo espacio de Banach que tenga un subespacio separable y complementado que sea isomorfo a su cuadrado. Para $n = 2$ el resultado es aún más general, mientras que para $n \geq 3$ obtendremos versiones suaves y real-analíticas de los enunciados de Klee como corolarios de nuevos resultados acerca de acciones libres del n-toro sobre diversos espacios de Banach.

Teorema 6.7 *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita que tiene una norma ϱ de clase C^p no necesariamente equivalente. Entonces existe un difeomorfismo de clase C^p periódico de período dos $f: X \longrightarrow X$ tal que f no tiene puntos fijos y además f transforma la bola $\{x \in X \mid \varrho(x) \leq 1\}$ sobre sí misma. Si suponemos que X tiene una norma real analítica (no necesariamente equivalente), obtenemos un difeomorfismo real analítico $f: X \longrightarrow X$ periódico de preríodo dos sin puntos fijos.*

Demostración. Por el teorema 1.2 existe un difeomorfismo $\varphi: X \longrightarrow X \setminus \{0\}$ de clase C^p tal que φ es la identidad fuera de la bola $B = \{x \in X \mid \varrho(x) \leq 1\}$. Pongamos $A(x) = -x$ para todo $x \in X$ (nótese que A es un isomorfismo lineal de período dos cuyo único punto fijo es el origen, y A lleva la bola B sobre sí misma). Definamos $f: X \longrightarrow X$ por $f(x) = \varphi^{-1}(A(\varphi(x)))$ para todo $x \in X$. Entonces está claro que f es el difeomorfismo deseado.

Recordemos que un grupo de Lie G se dice que actúa sobre un espacio X si existe una aplicación continua $\Phi: G \times X \to X$ tal que $\Phi(e, x) = x$ y $\Phi(gh, x) = \Phi(g, \Phi(h, x))$ para todos $g, h \in G$ y para todo $x \in X$. Aquí e denota al elemento neutro del grupo G. Si X es una variedad de clase C^p (o real analítica) y Φ es de clase C^p (resp. real-analítica) diremos que G actúa sobre X de manera C^p suave (resp., de forma real analítica). En tal caso, para cada $g \in G$, $x \mapsto \Phi(g, x)$ es un autodifeomorfismo de X de clase C^p (resp. real analítico)(y G puede identificarse con un subgrupo del grupo de difeomorfismos de X). Si para todo $g \neq e$ y $x \in X$ se tiene $\Phi(g, x) \neq x$, entonces la acción se dice que es libre.

En lo que sigue T denota la circunferencia unidad $\{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$, y T^n denota el n-toro $\{(s_1, ..., s_n) \in \mathbb{C}^n : |s_j| = 1, j = 1, ..., n\}$; T^n se considera con su estructura natural de grupo. Para $n \geq 2$ podemos obtener una versión diferencial generalizada del resultado de Klee al que nos referimos antes como corolario del siguiente teorema.

Teorema 6.8 *Sea X un espacio de Banach de la forma $X = Y \times Z$, donde Z es un espacio de Banach infinito dimensional que admite una estructura compleja y es C^p difeomorfo (resp. real analítico difeomorfo) a $Z \setminus \{0\}$. Entonces existe una acción libre Φde clase C^p (resp. real analítica) de T sobre el espacio X.*

Demostración. Puesto que $X = Y \times Z$, y Z y $Z \setminus \{0\}$ son C^p (resp. real analítico) difeomorfos, es obvio que también lo son X y $X \setminus Y$. Elijamos un difeomorfismo $h : X \longrightarrow X \setminus Y$. Como Z tiene una estructura compleja, la acción natural $\varphi : T \times (Y \times Z) \longrightarrow Y \times Z$ dada por

$$\varphi(s, (y, z)) = (y, sz)$$

está bien definida. Es claro que para todo $s \in T$, $s \neq 1$, el conjunto de puntos fijos de $x \mapsto \varphi(s, x)$ es precisamente Y. Entonces, basta definir $\Phi(s, x) = h^{-1}(\varphi(s, h(x)))$ para todo $s \in T$ y $x \in X$.

Corolario 6.9 *Sea X un espacio de Banach de la forma $X = Y \times Z$, donde Z es un espacio de Banach separable de dimensión infinita que es isomorfo a su cuadrado. Entonces, pata todo entero $n \geq 2$ existe un difeomorfismo real analítico $f : X \longrightarrow X$ de período puro n tal que f no tiene ningún punto fijo.*

Demostración. Como Z es separable, Z tiene una norma no completa real analítica y es real analíticamente difeomorfo a $Z \setminus \{0\}$ (ver [35], proposición 4.1). Por otra parte, Z admite una estructura compleja, porque $Z \simeq Z \times Z$. Entonces, por el teorema 6.8, $x \mapsto \Phi(e^{2\pi i/n}, x)$ es un autodifeomorfismo de X de clase real analítica que es periódico de período puro n y no tiene puntos fijos.

Este último resultado puede mejorarse de la forma siguiente.

Teorema 6.10 *Sea X un espacio como los del corolario 6.9. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una acción libre real analítica Φ del n-toro T^n sobre X.*

Demostración. Por simplicidad escribiremos la prueba para el caso $n = 2$. El lector se dará cuenta inmediatamente de que el mismo argumento, con modificaciones obvias, es válido en el caso general. Como el espacio Z es separable podemos tomar una sucesión de funcionales lineales continuos separante $(z_n^*) \subset Z^*$ tal que $\|z_n^*\| = 1$ para todo n. Definamos $\omega : Z \times Z \longrightarrow [0, \infty)$ por

$$\omega(u, v) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (|z_n^*(u)|^2 + |z_n^*(v)|^2) \Big)^{1/2},$$

donde $(u, v) \in Z \times Z$. Es claro que ω es una norma prehilbertiana en $Z \times Z$ que es compatible con la estructura compleja natural que induce en Z la isomorfía entre Z y $Z \times Z$ (la fórmula $\omega(u+iv) = \omega(u,v)$ define una norma en Z cuando se le considera como un espacio complejo). Elijamos ahora un isomorfismo lineal $L : Z \longrightarrow Z \times Z$, definamos una norma prehilbertiana $\varrho : Z \longrightarrow [0,\infty)$ por $\varrho(z) = \omega(L(z))$, y consideremos su ϱ-esfera en X, $S = \{z \in Z \mid \varrho(z) = 1\}$. En este contexto, según [36], existe un difeomorfismo real analítico de Z sobre $S \times \mathbb{R}$. Utilizando una vez más el hecho de que Z es difeomorfo a $Z \times Z$, es claro que existe un difeomorfismo real analítico entre Z y $\mathbb{R}^2 \times S \times S$. Por medio del isomorfismo $L : Z \longrightarrow Z \times Z$ podemos identificar la esfera S con la esfera $\hat{S} = \{u+iv \mid \omega(u,v) = 1\}$ del espacio complejo Z. Como se advirtió antes, la norma ω es simétrica compleja, es decir, para todo número complejo s con $|s| = 1$, y para todo $z = u+iv \in \hat{S}$, el producto sz pertenece a $\hat{S}$. Tenemos entonces la siguiente acción libre real analítica natural del toro T^2 sobre $Y \times \mathbb{R}^2 \times \hat{S} \times \hat{S}$:

$$(g,(y,w,(z_1,z_2))) \mapsto (y,w,(s_1z_1,s_2z_2)),$$

donde $g = (s_1,s_2) \in T^2$, $y \in Y$, $w \in \mathbb{R}^2$, y $(z_1,z_2) \in \hat{S} \times \hat{S}$. Se sigue de la disquisición anterior que $Y \times \mathbb{R}^2 \times \hat{S} \times \hat{S}$ es real analítico difeomorfo a $Y \times Z = X$. Esto concluye la demostración.

Pondremos fin al capítulo con una observación sobre el teorema de Borsuk-Ulam en dimensión infinita. Es fácil ver que la siguiente versión infinito dimensional del teorema de Borsuk-Ulam se deduce inmediatamente de la versión clásica finito dimensional. Para todo $n \in \mathbb{N}$, y para toda aplicación $f : S \to \mathbb{R}^n$ de una esfera unidad S de un espacio normado de dimensión infinita X, existe un $x \in S$ tal que $f(-x) = f(x)$. Ulam [61], Problem 167, preguntó si esto puede extenderse para obtener $f(Tx) = f(x)$ para algún $x \in S$, donde T es una aplicación de S en sí misma (y X es un espacio de Hilbert). En un comentario que sigue el enunciado del problema 167 en [61], Klee contestó a esta pregunta negativamente al exhibir un autodifeomorfismo T de S y una aplicación diferenciable $f : S \to \mathbb{R}$ tales que $f(Tx) = f(x)$ no se cumple para ningún $x \in S$. A continuación mostramos que las aplicaciones T y f pueden suponerse de hecho real analíticas.

Observación 6.11 *Sea X un espacio de Banach separable de dimensión infinita y sea ω una norma real analítica en X. Entonces existen un autodifeomorfismo real analítico de $S = \{x \in X \mid \omega(x) = 1\}$ y una aplicación real analítica $f : S \to \mathbb{R}$ tales que $f(Tx) \neq f(x)$ para todo $x \in S$.*

Demostración. Por [36], S es real-analítica difeomorfa a un subespacio vectorial de codimensión uno E de X. Basta entonces exhibir los T y f requeridos en E, lo cual es trivial. En efecto, tomemos un funcional lineal continuo x^* en E^* y un vector $x_0 \in E$ tal que $x^*(x_0) \neq 0$, y sea T la traslación $Tx = x + x_0$. Es claro que $x^*(Tx) = x^*(x)$ no se cumple para ningún x.

Bibliografía

[1] D. Aussel, J.-N. Corvellec, M. Lassonde, *Mean value property and subdifferential criteria for lower semicontinuous functions*, Transactions of the Amer. Math. Soc., 347 (1995), 4147-4161.

[2] D. Azagra, *Diffeomorphisms between spheres and hyperplanes in infinite-dimensional Banach spaces*, Studia Math. 125 (2) (1997), p. 179-186.

[3] D. Azagra, T. Dobrowolski, *Smooth and real-analytic negligibility of compact sets and subspaces in infinite-dimensional Banach spaces, and applications*, Preprint.

[4] D. Azagra, R. Deville, *Subdifferential Rolle's and Mean Value Inequality Theorems*, Bull. Austral. Math. Soc. 56 (1997), p. 319-329.

[5] D. Azagra, J. Gómez, J. A. Jaramillo, *Rolle's Theorem and Negligibility of Points in Infinite Dimensional Banach Spaces*, To appear in Journal of Mathematical Analysis and Applications.

[6] D. Azagra, J. Gómez, J. A. Jaramillo, *Rolle's theorem and Negligibility of Points in Infinite-Dimensional Banach Spaces, Research Announcement*, Extracta Mathematicae, Vol. 11, Núm. 3, 480-484 (1996).

[7] C. Bessaga, *Every infinite-dimensional Hilbert space is diffeomorphic with its unit sphere*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astr. et Phys.14 (1966), pp. 27-31.

[8] C. Bessaga, *Negligible sets in linear topological spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astr. et Phys. 16 (1968), pp. 117-119.

[9] C. Bessaga, *Interplay Between Infinite-Dimensional Topology and Functional Analysis. Mappings Defined by Explicit Formulas and Their Applications*, Topology Proceedings, 19 (1994).

[10] C. Bessaga and V. L. Klee, *Two topological properties of topological linear spaces*, Israel J. Math. 2 (1964), pp. 211-220.

[11] C. Bessaga and V. L. Klee, *Every non-normable Fréchet space is homeomorphic with all of its closed convex bodies*, Math. Ann. 163 (1966), pp. 161-166.

[12] C. Bessaga and A. Pelczynski, *Selected topics in infinite-dimensional topology*, Monografie Matematyczne, Warszawa 1975.

[13] J. Bés and J. Ferrera, *private communication*.

[14] P. Binding, *On infinite-dimensional differential equations*, J. Differential Equations 24 (1977), 349-354.

[15] W. A. Blankinship, *Generalization of a construction by Antoine*, Ann. of Math. 53 (1951), pp. 276-297.

[16] D. Burghelea and N. H. Kuiper, *Hilbert manifolds*, Annals of Math. 90 (1969), pp. 379-417.

[17] D. L. Cohn, *Measure Theory*, Birkhäuser, Boston, 1980.

[18] H. H. Corson and V. L. Klee, *Topological classification of convex sets*, Proc. Symp. Pure Math. 7, Convexity, Amer. Math. Soc., Providence, R. I. (1963), pp. 37-51.

[19] M. G. Crandall, L. C. Evans and P.L. Lions, *Some properties of viscosity solutions to Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 282 (1984), 487-502.

[20] M. G. Crandall, H. Ishii and P.L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order to fully nonlinear partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc., 27 (1992), 1-67.

[21] M. G. Crandall, H. Ishii and P.L. Lions, *Uniqueness of viscosity solutions revisited*, J. Math. Soc. Japan, 39 (1987), 581-596.

[22] M. G. Crandall and P.L. Lions, *Condition d'unicité pour les solutions généralisées des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre*, C. R. Acad. Sci. Paris, 292 (1984), 183-186.

[23] M. G. Crandall and P.L. Lions, *Viscosity solutions of hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 277 (1983), 1-42.

[24] M. G. Crandall and P.L. Lions, *Solutions de viscosité non bornées des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre*, C. R. Acad. Sci. Paris, 198 (1981), 217-220.

[25] M. G. Crandall and P.L. Lions, *On existence and uniqueness of solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Non. Anal. Theor. Math. Appl., 10 (1986), 353-370.

[26] M. G. Crandall and P.L. Lions, *Unbounded viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Illinois J. Math., 31 (1987), 665-688.

[27] M. G. Crandall and P.L. Lions, *Solutions de viscosité pour les équations de Hamilton-Jacobi en dimension infinie intervenant dans le contrôle optimal de problèmes d'évolution*, C. R. Acad. Sci. Paris, 305 (1987), 233-236.

[28] M. G. Crandall and P.L. Lions, *Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions*, J. Funct. Anal., *Part I: Uniqueness of viscosity solutions*, 62 (1985), 379-396; *Part II: existence of viscosity solutions*, 65 (1986), 368-405; *Part III* 68 (1986), 214-247; *Part IV: Unbounded linear terms*, 90 (1990), 237-283; *Part V:B-continuous solutions*, 97 (1991), 417-465.

[29] K. Deimling, *Ordinary Differential Equations in Banach spaces*, Lecture Notes in Mathematics, 596, Springer Verlag, Berlin 1977.

[30] R. Deville, *A mean value theorem for the non differentiable mappings*, Serdica Math. J. 21 (1995), 59-66.

[31] R. Deville, *Stability of Subdifferentials of Nonconvex Functions in Banach Spaces*, Set-Valued Analysis 2 (1994), 141-157.

[32] R. Deville and El Mahjoub El Haddad, *The subdifferential of the sum of two functions in Banach spaces II. Second order case*, Bull. Austral. Math. Soc., 51 (1995), 235-248.

[33] R. Deville, G. Godefroy, and V. Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces*, vol. 64, Pitman Monographies and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 1993.

[34] J. Diestel, *Geometry of Banach Spaces Selected Topics*, Lecture Notes in Mathematics, 485, Springer-Verlag, New York 1975.

[35] T. Dobrowolski, *Smooth and R-analytic negligibility of subsets and extension of homeomorphism in Banach spaces*, Studia Math. 65 (1979), 115-139.

[36] T. Dobrowolski, *Every Infinite-Dimensional Hilbert Space is Real-Analytically Isomorphic with Its Unit Sphere*, Journal of Functional Analysis, 134 (1995), 350-362.

[37] T. Dobrowolski, *Relative Classification of Smooth Convex Bodies*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. 25 (1977), 309-312.

[38] J. Dugundji, *An extension of Tietze's theorem*, Pacific Journal of Mathematics, 1 (1951), pp. 353-367.

[39] J. Eells and K. D. Elworthy, *Open embeddings of certain Banach manifolds*, Ann. of Math. 91 (1970), 465-485.

[40] S. Eilenberg, *On the problems of topology*, Ann. of Math. 50 (1949), pp. 247-260.

[41] I. Ekeland, *Nonconvex minimization problems*, Bull. Amer. Math. Soc. (New series), vol. 1, no. 3 (1979), 443-474.

[42] E. M. El Haddad, *Calcul sous-differentiel et solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, Thèse doctorale présentée à l'Université Bordeaux I en 1994.

[43] M. Fabian, P. Hájek, and J. Vanderwerff, *On smooth variational principles in Banach spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 197, 153-172 (1996).

[44] J. Ferrer, *Rolle's theorem fails in ℓ_2*, Am. Math. Monthly, vol. 103, n. 2 (1996), 161-165.

[45] B. M. Garay, *Cross sections of solution funnels in Banach spaces*, Studia Math. 97 (1990), 13-26.

[46] B. M. Garay, *Deleting Homeomorphisms and the Failure of Peano's Existence Theorem in Infinite-Dimensional Banach Spaces*, Funkcialaj Ekvacioj, 34 (1991), 85-93.

[47] B. M. Garay, *Parallelizability in Banach spaces I-II-III*, Acta Math. Hungar., Proc Royal Soc. Edinburgh, Proc. Banach Center Sem.

[48] K. Goebel and J. Wośko, *Making a hole in the space*, Proc. Amer. Math. Soc. 114 (1992), 475-476.

[49] W. T. Gowers, *A solution to Banach's hyperplane problem*, Bulletin London Math. Soc. 26 (1994), 523-530.

[50] W. T. Gowers, B. Maurey, *The unconditional basic sequence problem*, J. Amer. Math. Soc. 6 (1993), 851-874.

[51] R. C. James, *Weakly compact sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 113 (1964), 129-140.

[52] K. John, H. Toruńczyck, and V. Zizler, *Uniformly smooth partitions of unity on superreflexive Banach spaces*, Studia Math. 70 (1981), 129-137.

[53] S. Kakutani, *Topological properties of the unit sphere of a Hilbert space*, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 19 (1943), pp. 269-271.

[54] O. H. Keller, *Die Homoiomorphie der kompakten konvexen Mengen im Hilbertschen Raum*, Math. Ann. 105 (1931), pp. 748-758.

[55] V. L. Klee, *Convex bodies and periodic homeomorphisms in Hilbert space*, Trans. Amer. Math. Soc. 74 (1953), 10-43.

[56] H. Kneser, *Über die Lösungen eines Systems gewöhnlichen Differentialgleichungen das der Lipschitzen Bedingung nicht genügt*, S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Math. Kl. (1923), 171-174.

[57] N. Moulis, *Sur les variétés hibertiennes et les fonctions non-dégénérées*, Indagationes Math. 30 (1968), 497-511.

[58] R. R. Phelps, *Convex functions, monotone operators and differentiability*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1364, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1993.

[59] C. C. Pugh, *Funnel sections*, J. Differential Equations 19 (1975), 270-295.

[60] J. T. Rogers, *The shape of a cross section of the solution funnel of an ordinary differential equation*, Illinois J. Math. 21 (1977), 420-426.

[61] R. D. Mauldin (Editor), *The Scottish Book*, Birkhäuser, Boston 1981.

[62] S. A. Shkarin, *On Rolle's theorem in infinite-dimensional Banach spaces*, translation from Matematicheskie Zametki, vol. 51, no.3, pp. 128-136, March, 1992.

[63] P. A. Smith, *Fixed-point theorems for periodic transformations*, Amer. J. Math., 63 (1941), 1-8.

[64] J. J. Stoker, *Unbounded convex point sets*, Amer. J. Math. 62 (1940), pp. 165-179.

[65] S. Troyanski, *On locally uniformly convex and differentiable norms in certain non-separable Banach spaces*, Studia Math. 37 (1971), 173-180.

[66] A. Tychonoff, *Ein Fixpunktsatz*, Math. Ann. 111 (1935), pp. 767-776.