UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Formas *gauge* invariantes
en el fibrado de las conexiones de un fibrado principal

por

MARCO CASTRILLÓN LÓPEZ

Memoria presentada al Departamento de Geometría y Topología
para optar al grado de

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Junio de 1999

Dirigida por: Jaime Muñoz Masqué, Investigador Científico
del Instituto de Física Aplicada, CSIC

Formas *gauge* invariantes
en el fibrado de las conexiones de un fibrado principal

por

MARCO CASTRILLÓN LÓPEZ
Licenciado en Ciencias Matemáticas
por la Universidad Complutense de Madrid

Presentada al Departamento de Geometría y Topología
para optar al grado de

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

por la

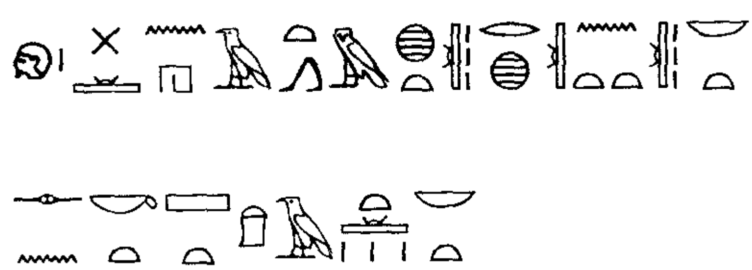
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Junio de 1999

Firma del autor

Dirigida por: Jaime Muñoz Masqué, Investigador Científico
del Instituto de Física Aplicada, CSIC

Aceptada por: Enrique Outerelo Domínguez,
Director del Departamento de Geometría y Topología
de la Universidad Complutense de Madrid



Este es un escrito fiel, una entrada al conocimiento de todas las cosas que son y de todos los oscuros secretos...

Comienzo del Papiro matemático Rhind.
Dinastía XV (s. XVII a.C.).

Agradecimientos

La presentación de esta tesis es uno de esos buenos momentos en la vida para dar las gracias a todas esas personas que han estado a cerca de mí y que ha influido en mayor o menor medida en mi vida (y por ende en este escrito). Sé también que esta página va a ser posiblemente la más leída de toda esta memoria y por ello me gustaría que todo el mundo se sintiera reflejado en las palabras de agradecimiento que expreso aquí. Como no sé si lo lograré, vaya por delante unas sinceras gracias a todos ellos.

Primeramente quisiera dar las gracias a Jaime porque, desde esa lluviosa tarde de Abril en la que me ofreció la oportunidad de trabajar con él hasta ahora, ha sido un verdadero "padre científico" del que he aprendido muchas y bonitas matemáticas. El continuo apoyo e interés que de él he recibido me han permitido entrar en el mundo de la investigación, uno de cuyos frutos ha sido la presente memoria.

A mi tutor, Ángel Miguel, por su apoyo a lo largo de mis años de estudio y en el momento en el que accecedí al intrincado mundo del becario. También por la acogida que siempre me ha dispensado cuando he pedido su ayuda.

Quiero agradecer al Departamento de Geometría Topología de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, las facilidades que me han ofrecido para desarrollar mi trabajo, pero sobre todo quiero expresar mi estima por su gente, profesores, becarios y personal, porque el encontrarse con ellos día a día ha sido verdaderamente agradable.

Es también un buen momento para dar las gracias a los profesores de matemáticas que en la primaria y en la secundaria dejaron en mí la huella que luego se transformó en la elección de estos estudios universitarios que me han llevado hasta aquí.

Como no, los amigos tienen un hueco especial en en este momento. Para que no haya líos, por orden alfabético, quiero recordar a Blanca, Carlos, David, Elia, la Eva, Gema, Irene, José, Loli, María y el grupo de Manoli, Marta, la familia Piedra, mis amigos de la Olimpiada Matématica, Alberto, Carlos, Francisco y Vicente, y mis compañeros sufridores de la carrera, Emma, Agustín, Pilar y Miguel. Esto no es una lista de nombres, sino un verdadero resumen de mi vida del que seguramente faltan muchos. A todos, gracias.

Pero sin duda, mi familia ha sido y es lo más. Yo soy lo que soy por lo que he aprendido de todos ellos.

A mi hermana mayor, la bella Doctora, que ha aguantado mis cabreos en época de estudios y pesar de ello me ha cuidado con cariño y se ha preocupado de mí siempre. Merci.

A mi padre, por la mirada de ilusión que siempre ha puesto en mis proyectos, en particular en esta tesis doctoral. Su cariño ha sido el lugar en el que he podido poner siempre mis inquietudes sabiendo que estaban en buenas manos.

A mi madre, por las miles y miles de cosas que me dado, en particular su optimismo, fuerza y cariño inagotables y, como no, esas idas y venidas al colegio cuando era niño repasando conmigo los verbos y los deberes de matemáticas...

... y pensar lo que me costó aprender la tabla de multiplicar.

Madrid, Junio de 1999.

Índice General

Introducción

El objeto de esta memoria es determinar la estructura de las formas *gauge* invariantes en el fibrado de conexiones de un fibrado principal arbitrario. En este sentido puede considerarse que el resultado básico alcanzado es el Teorema 4.3.1.

Sea $\pi : P \to M$ un fibrado principal cuyo grupo de estructura es un grupo de Lie arbitrario G y $p : C(P) \to M$ su fibrado de conexiones. Cada automorfismo $\Phi : P \to P$ induce una transformación diferenciable $\Phi_C : C(P) \to C(P)$. En particular, ello se aplica a las transformaciones *gauge*, que son los automorfismos verticales de P. Si Φ_t es el grupo uniparamétrico de un campo G-invariante $X \in \mathfrak{X}(P)$, entonces $(\Phi_t)_C$ es el grupo uniparamétrico de un campo X_C en $C(P)$. Una forma diferencial ξ_r definida en $C(P)$ se dice que es *gauge* invariante si verifica $(\Phi_C)^*\xi = \xi$ para toda transformación *gauge* $\Phi \in \mathrm{Gau}P$. Si G y M son conexos (hipótesis que supondremos en lo sucesivo), entonces la condición de invariancia equivale a la siguiente: $L_{X_C}\xi = 0$, para todo campo G-invariante y π-vertical X definido sobre el fibrado principal considerado.

Análogamente, una forma ξ definida en el fibrado de conexiones se dice que es invariante frente al grupo de todos los automorfismos de P si verifica $(\Phi_C)^*\xi = \xi$ para todo $\Phi \in \mathrm{Aut}P$, lo cual equivale a decir $L_{X_C}\xi = 0$, para todo campo G-invariante (ahora no necesariamente π-vertical) $X \in \mathfrak{X}(P)$. La estructura de las formas $\mathrm{aut}P$-invariantes se obtiene como consecuencia de las *gauge* invariantes y su expresión matemática es parecida, pero desde el punto de vista del Cálculo de Variaciones su naturaleza es muy distinta: las formas *gauge* invariantes producen problemas variacionales no triviales (véanse §5.2.3 §5.4.4) sobre $J^1(C(P))$, mientras que las funcionales inducidas por las formas $\mathrm{aut}P$-invariantes (cuando M es compacta y orientable) son constantes y, por tanto, los problemas variacionales que producen son triviales. De hecho, se prueba que las formas $\mathrm{aut}P$-invariantes vienen inducidas por polinomios de Weil y, en este sentido, se corresponden con las clases características del fibrado.

De modo más preciso, se tiene una identificación natural $(J^1P)/G \cong C(P)$ que produce un G-fibrado principal $q : J^1P \to C(P)$. En este fibrado existe una conexión canónica κ que es la definida por la estructura de contacto del fibrado de *jets* ([Gar1]).Aplicando la teoría del homomorfismo de Weil (KN) a dicha conexión se tiene que para cada polinomio de Weil f del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ del grupo G, la forma diferencial $f(\Omega_\kappa)$, siendo Ω_κ la forma de curvatura de κ, proyecta a $C(P)$. Tales formas reciben el nombre de formas características del fibrado y, en el caso $G = U(n)$, son las formas de Chern universales; esto es, si $\sigma_\Gamma : M \to C(P)$ es la sección inducida por una conexión Γ de P, entonces $\sigma_\Gamma^* f(\Omega_\kappa)$ es la forma de Chern construída con la conexión Γ y el polinomio f. Como $C(P)$ es un fibrado afín sobre M, se tiene un isomorfismo canónico en cohomología $H^\bullet(C(P);\mathbb{R}) = H^\bullet(M;\mathbb{R})$, de modo que las formas características $f(\Omega_\kappa)$, que están definidas en el fibrado de conexiones, inducen de modo natural las clases características del fibrado sin necesidad de usar ninguna conexión particular. Pues bien, se demuestra que tales formas son aut$P$-invariantes y, lo que es más importante, que todas las formas aut$P$-invariantes son formas características (véase Teorema 4.4.1).

Las clases características han sido usadas en teorías *gauge* desde sus inicios. Realmente, para $G = SU(2)$ los instantones tienen asociada su carga topológica que es un número de Chern, el extremo absoluto del funcional de Yang–Mills también es el número de Chern, la acción de Chern–Simons está dada por una clase secundaria de las conexiones planas, para el grupo unitario $G = U(n)$, la teoría del índice de operadores elípticos se sirve a menudo de las propiedades de las clases características (véase [Gil]), etc., y más recientemente tales clases han jugado un papel muy importante en las aplicaciones de las teorías *gauge* a la topología de las variedades de dimensión 4 (véase por ejemplo [Don]). El Teorema 4.4.1 de esta memoria muestra que, de hecho, existe una equivalencia entre la noción de forma diferencial característica de un fibrado principal y la noción de forma diferencial definida en su fibrado de conexiones, invariante frente al grupo de todos sus automorfismos, siempre y cuando se trabaje en el espacio adecuado, que no es la variedad base ni el fibrado principal sino su fibrado de conexiones. Así pues, una vez más en teorías *gauge*, una noción "física" se corresponde de modo natural con una noción "matemática".

Realmente, los inicios de la relación entre curvatura, formas características y teorías *gauge* deben buscarse en el famoso artículo de Utiyama [Uti], publicado hace más de cuarenta años, en el que el autor caracterizaba las lagrangianas *gauge* invariantes como aquéllas que factorizaban a través del morfismo curvatura. Fue precisamente la formulación geométrica de este resultado (véanse [Ble], [Gar2]) la que motivó, en un principio, el plan de investigación que se ha seguido (y que fue usado en [HM1], [HM2] para el caso particular del grupo $U(1)$). En efecto, entendida la geometría que subyace al teorema de Utiyama parecía razonable formularse, con toda su generalidad, cuál era la estructura del álgebra de formas *gauge*. En otras palabras, se trata de clasificar las formas invariantes de grado arbitrario sin ninguna condición de horizotalidad (recuérdes que una densidad lagrangiana es una n-forma horizontal), pero definidas en el *jet* de orden cero del fibrado de conexiones; es decir, independientes de cualquier estructura dinámica y dependientes únicamente de la geometría del fibrado.

Pasemos ahora a resumir los contenidos de la memoria.

En el Capítulo 1 se establecen las principales propiedades del grupo de automorfismos de un fibrado principal y del subgrupo *gauge* del mismo que serán necesarias en lo sucesivo y se introducen los principales fibrados asociados que aparecen en la teoría: los fibrados adjuntos. En definitiva se resume la geometría de los fibrados principales que se utiliza en teorías *gauge*.

En el Capítulo 2 se construye con cierto detalle el fibrado de conexiones, que es el objeto básico de la memoria, ya que en él están definidas las diversas clases de formas diferenciales estudiadas. Conviene observar que el fibrado de conexiones no sólo es importante en teorías *gauge* sino que aparece también de modo natural en otros contextos; por ejemplo, véanse [CD], [CRS], [Key]. El capítulo desarrolla la geometría diferencial del propio fibrado de conexiones, lo cual es novedoso ya que, de ordinario, o bien se trabaja con una conexión fija o bien con el espacio funcional de todas las conexiones (véase, por ejemplo, [MV]), pero no con el fibrado de conexiones como "espacio universal" de la teoría. En este sentido, conviene destacar que $C(P)$ posee una estructura simpléctica generalizada, definida en [Gar2] que nosotros caracterizamos de forma intrínseca en el Teorema 2.8.3.

En el Capítulo 3 se estudia la invariancia *gauge* y la invariancia frente al grupo de todos los automorfismos de P en el fibrado de 1-*jets*. Desde el punto de vista técnico este capítulo es el fundamental del trabajo. La idea es "levantar" el problema de invariancia —definido inicialmente en $C(P)$— a J^1P mediante la identificacióon $(J^1P)/G \cong C(P)$, estudiar allí y resolver el problema así planteado y, luego, proyectar el resultado de nuevo al fibrado de conexiones. La invariancia en J^1P, si bien no es físicamente relevante, sí lo es desde el punto de vista de la Geometría, pues, como la investigación ha revelado, existe una íntima relación entre invariancia *gauge* en J^1P y su estructura de contacto. Véanse los Teoremas 3.3.3, 3.4.2, que establecen los principales resultados del capítulo.

En el Capítulo 4 se alcanzan los objetivos fundamentales de esta memoria: se determina la estructura de las formas *gauge* invariantes (Teorema 4.3.1) y la estructura de las formas aut$P$-invariantes (Teorema 4.4.1) y se ilustra el contenido de tales teoremas en los ejemplos clásicos de las teorías *gauge*; esto es, para los grupos $U(1)$, $SU(2)$ y $U(2)$.

El Capítulo 5 resuelve el problema de equivalencia para las lagrangianas *gauge* invariantes definidas en $J^1(C(P))$. Este capítulo es nuestra aportación al Cálculo de Variaciones en teorías *gauge*. Básicamente, en él se demuestran tres resultados: (i) Se caracterizan las densidades lagrangianas aut$P$-invariantes por medio de los polinomios de Weil, que es el análogo al Teorema de Utiyama para la invariancia respecto del álgebra de todos los automorfismos infinitesimales (véase Teorema 5.3.7), (ii) se caraterizan las lagrangianas *gauge* invariantes y variacionalmente triviales (entre las que se encuentran las definidas por las formas aut$P$-invariantes del Capítulo 4) mediante la geometría del fibrado (véase Teorema 5.4.1) y (iii) se demuestra que tales densidades son las generadas por formas diferenciales cerradas de la base y polinomios de Weil. Para un enunciado preciso véase el Teorema 5.4.3.

En esta memoria, salvo mención explícita de lo contrario, la palabra diferenciable significará C^∞ y se seguirá el convenio de sumación de índices repetidos de Einstein.

Clasificación

Primaria: 53C05
Secundaria: 53C07, 58E30, 58D19, 58A20, 22E65, 17B65, 17B66.

Capítulo 1

Automorfismos de un fibrado principal

1.1 La estructura de fibrado principal

Definición 1.1.1 Un *fibrado principal* es el par formado por una submersión suprayectiva de variedades diferenciables $\pi : P \to M$ y una acción por la derecha de un grupo de Lie G sobre P que verifica las siguientes propiedades:

(i) La acción de G es libre; *i.e.*, la relación $u \cdot g = u$, $u \in P, g \in G$, implica $g = e$.

(ii) Las fibras de π coinciden con las órbitas de G; esto es,

$$\pi^{-1}(x) = u \cdot G, \quad \forall u \in \pi^{-1}(x), \forall x \in M.$$

Un *morfismo de fibrados principales* $\pi : P \to M$, $\pi' : P' \to M'$ de grupos G, G' es una aplicación diferenciable $\Phi : P \to P'$ y un homomorfismo de grupos de Lie $\gamma : G \to G'$ tales que:

$$\Phi(u \cdot g) = \Phi(u) \cdot \gamma(g), \quad \forall u \in P, \forall g \in G.$$

Proposición 1.1.2 *Dado un morfismo de fibrados principales $\Phi : P \to P'$, existe una única aplicación diferenciable $\varphi : M \to M'$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\Phi} & P' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{\varphi} & M' \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Como π es epiyectiva, si φ existe, es única. Para probar la existencia de φ, bastará probar que si $u, v \in P$ son dos puntos de la fibra de $x \in M$, se tiene: $\pi'(\Phi(u)) = \pi'(\Phi(v))$. En efecto, como u y v pertenecen a la misma fibra, en virtud de la condición (ii) de la definición anterior, existe $g \in G$ tal que $v = u \cdot g$, de donde

$$\pi'(\Phi(v)) = \pi'(\Phi(u \cdot g)) = \pi'(\Phi(u) \cdot \gamma(g)) = \pi'(\Phi(u)).$$

La continuidad y diferenciabilidad de φ se deducen de la propiedad característica de las submersiones epiyectivas, según la cual una aplicación $\varphi : M \to M'$ es continua (resp. diferenciable) si y sólo si la composición $\varphi \circ \pi$ lo es.

c.q.d.

Definición 1.1.3 Consideremos los siguientes casos particulares:

- Si $G = G'$ y $\gamma = \mathrm{Id}_G$, entonces se dice que Φ es un *morfismo de G-fibrados principales*. A partir de ahora en esta memoria, salvo mención explícita de lo contrario, todos morfismos que se consideren serán de G-fibrados principales.

- En el caso $P = P'$, si un morfismo de G-fibrados principales es un difeomorfismo, diremos que se trata de un *automorfismo* del fibrado $\pi : P \to M$. El conjunto de automorfismos de un fibrado principal $\pi : P \to M$ tiene la estructura de grupo bajo la composición de funciones y se le denota por $\mathrm{Aut}P$.

- Los $\Phi \in \mathrm{Aut}P$ que proyectan sobre la identidad en M (es decir, $\varphi = \mathrm{Id}_M$), se llaman *automorfismos verticales* o *transformaciones gauge*. El conjunto de transformaciones *gauge* es un subgrupo de $\mathrm{Aut}P$ que se denota por $\mathrm{Gau}P$.

Observación 1.1.1 Asignando a cada $\Phi \in \mathrm{Aut}P$ el difeomorfismo $\varphi \in \mathrm{Dif}M$ que induce en la variedad base (véase Proposición 1.1.2), se tiene una sucesión exacta de grupos

$$1 \to \mathrm{Gau}P \to \mathrm{Aut}P \to \mathrm{Dif}M.$$

Ello prueba que el grupo gauge es un subgrupo normal del grupo de todos los automorfismos.

1.1.1 Fibrado imagen inversa

Proposición 1.1.4 *Sea $\varphi : M \to M'$ una aplicación diferenciable. Dado un fibrado principal $\pi' : P' \to M'$ de grupo G', el subconjunto*

$$\varphi^* P' = \{(x, u') \in M \times P' \mid \varphi(x) = \pi'(u')\}$$

es una subvariedad de $M \times P'$, y la proyección sobre el primer factor $\mathrm{pr}_1 : \varphi^* P' \to M$, junto con la operación de G' sobre $\varphi^* P'$ definida por: $(x, u') \cdot g' = (x, u' \cdot g')$, dotan a $\varphi^* P'$ de estructura de G'-fibrado principal sobre M, que recibe el nombre de fibrado imagen inversa. *Además la proyección sobre el segundo factor $\mathrm{pr}_2 : \varphi^* P' \to P'$ es un morfismo de G'-fibrados principales tal que la aplicación inducida en las bases es φ.*

DEMOSTRACIÓN. Usaremos el conocido resultado (véase *e.g.*, [GG, II.4.4]) según el cual dada una aplicación diferenciable $f : X \to Y$ entre variedades y una subvariedad W de Y, si se verifica que f es transversal a W (es decir, si $\forall x \in X$, $T_{f(x)}Y = df_x(T_x X) + T_{f(x)}W$), tenemos que $f^{-1}(W)$ es subvariedad de X.

Tomemos en nuestro caso $X = M \times P'$, $Y = M' \times M'$, $f = \varphi \times \pi'$ y $W = \Delta' = \{(x', x') | \, x' \in M'\}$. Comprobemos que se cumple la condición de transversalidad. En efecto,

$$\begin{aligned} d(\varphi \times \pi')_{(x,u')} \left(T_{(x,u')}(M \times P')\right) &= d\varphi_x (T_x M) \oplus d\pi'_{u'} (T_{u'} P') \\ &= d\varphi_x (T_x M) \oplus T_{x'} M' \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que π' es submersión en la última igualdad. Así,

$$\begin{aligned} & d(\varphi \times \pi')_{(x,u')} \left(T_{(x,u')}(M \times P')\right) + T_{(x',x')}\Delta' = \\ & \qquad\qquad (d\varphi_x (T_x M) \oplus T_{x'} M') + T_{(x',x')}\Delta' \end{aligned}$$

que es igual al espacio total $T_{(x',x')}(M' \times M')$. Efectivamente, si

$$(X', Y') \in T_{x'} M' \oplus T_{x'} M' = T_{(x',x')}(M' \times M'),$$

podemos escribir

$$(X', Y') = (0, Y' - X') + (X', X')$$

y queda comprobada la igualdad.

Una vez tenemos la transversalidad, podemos afirmar que

$$(\varphi \times \pi)^{-1}(\Delta') = \varphi^* P'$$

es una subvariedad de $M \times P'$.

Demostremos ahora que $\mathrm{pr}_1 : \varphi^* P' \to M$ es un G'-fibrado principal con la acción indicada en el enunciado.

Primero, pr_1 es suprayectiva. En efecto, si $x \in M$, tomo un $u' \in P'$ tal que $\pi'(u') = \varphi(x)$, tenemos entonces que $\mathrm{pr}_1(x, u') = x$.

La proyección es una submersión. Sean $(x_0, u_0') \in \varphi^* P'$ cualquiera y $x_0' = \varphi(x_0)$. Como π' es submersión existe sección local alrededor de x_0', es decir, existen un entorno U' de x_0' y una aplicación diferenciable $s : U' \to P'$ tal que $\pi' \circ s' = \mathrm{Id}_{U'}$ y $s(x_0) = u_0'$. Sean ahora $U = \varphi^{-1}(U')$ y $s : U \to \varphi^* P \subset M \times P'$ definida por $s(x) = (x, s'(\varphi(x)))$. Se verifica fácilmente que s es una sección de pr_1 en torno al punto x_0 con $s(x_0) = (x_0, u_0')$. Por la caracterización de las submersiones por la existencia de secciones locales en todo punto, tenemos finalmente lo que queríamos.

Para concluir, sólo nos resta comprobar que la accíon de G' verifica las condiciones **(i)** y **(ii)** de la definición de fibrado principal.

La acción es libre pues si $(x, u') \cdot g' = (x, u')$ tendremos que $(x, u' \cdot g') = (x, u')$ y por tanto que $u' \cdot g' = u'$. Pero esto últimos sólo es posible si $g' = e'$ pues la acción en P' sí es libre.

Las órbitas coinciden con las fibras. En efecto

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_1^{-1}(x) &= \{(x, u') \mid \pi'(u') = \varphi(x)\} = \{(x, u' \cdot g') \mid g' \in G'\} = (x, u') \cdot G' \\ \forall u' &\in \pi^{-1}(x'), \forall x \in M. \end{aligned}$$

Que la aplicación inducida en las bases por pr_2 es la propia φ, es finalmente trivial.

c.q.d.

Ejemplo 1.1.5 Consideremos $i : U' \to M'$ la inclusión de un abierto U' en M', variedad base del G'-fibrado principal $\pi' : P' \to M'$. En este caso, a la construcción de la proposición anterior $i^* P'$ se la denomina *restricción de P' al abierto U'*.

1.1.2 Trivialidad local

Definición 1.1.6 Se llama *fibrado trivial* de base M y grupo G al fibrado principal formado por la proyección $\mathrm{pr}_1 : M \times G \longrightarrow M$, y a la acción $(x,g) \cdot g' = (x, g \cdot g')$, $\forall x \in M$, $\forall g, g' \in G$.

Un fibrado principal $\pi : P \longrightarrow M$ se dice que es *trivializable*, si existe un isomorfismo de G-fibrados principales sobre M con el fibrado trivial. Es decir, existe un difeomorfismo $\Phi : P \longrightarrow M \times G$ tal que :

$$\mathrm{pr}_1 \circ \Phi = \pi \qquad \text{y} \qquad \Phi(u \cdot g) = \Phi(u) \cdot g, \quad \forall u \in P, \forall g \in G.$$

Teorema 1.1.7 *Si un fibrado principal $\pi : P \longrightarrow M$ admite una sección global (esto es, existe $s : M \longrightarrow P$ diferenciable tal que $\pi \circ s = \mathrm{Id}_M$), entonces se verifica que es trivializable.*

DEMOSTRACIÓN. Nuestro fin es encontrar un isomorfismo con el fibrado trivial. Considero la aplicación $\Psi : M \times G \to P$ definida por

$$\Psi(x,g) = s(x) \cdot g,$$

que verifica trivialmente que $\Psi((x,g) \cdot g') = \Psi(x,g) \cdot g'$. La diferenciabilidad de Ψ se deduce de la diferenciabilidad de la sección s y de la acción de G en P. A su vez, al ser dicha acción libre y tener como órbitas las fibras de π, se puede ver fácilmente que es biyectiva. Para concluir que Ψ es un isomorfismo de G-fibrados principales sobre M sólo nos resta ver que es un difeomorfismo.

Como la aplicación π es una submersión, dado cualquier $u \in P$, $x = \pi(u)$, se verifica que $\dim T_u P = \dim T_x M + \dim \pi^{-1}(x)$. Pero, $\pi^{-1}(x) \simeq G$ por la naturaleza libre de la acción, por tanto podemos concluir que

$$\dim P = \dim M + \dim G.$$

Así, para ver que Ψ es difeomorfismo, como está definida entre variedades diferenciables de igual dimensión, es suficiente comprobar que es una submersión en cada punto $(x_0, g_0) \in M \times G$. Se comprueba fácilmente que dado cualquier $\sigma \in G$, se verifica que $\Psi = R_{\sigma^{-1}} \circ \Psi \circ R_\sigma$ donde, haciendo un abuso de notación, hemos llamado R_σ al difeomorfismo multiplicar por σ a la derecha tanto en $M \times G$ como en P. En particular si considero $\sigma = g_0$ y tomo diferenciales tengo $d\Psi_{(x_0,g_0)} = d(R_{g_0})_{s(x_0)} \circ d\Psi_{(x_0,e)} \circ d(R_{g_0^{-1}})_{(x_0,g_0)}$ y así $d\Psi_{(x_0,g_0)}$ será suprayectiva si y sólo si le es $d\Psi_{(x_0,e)}$. Ahora bien, con la identificación canónica $T_{(x,e)} M \times G = T_x M \oplus T_e G$ se tiene

$$d\Psi_{(x_0,e)}(X_1, X_2) = d(\Psi^e)_{x_0}(X_1) + d(\Psi^{x_0})_e(X_2),$$

donde $\Psi^{x_0}(g) = \Psi(x_0, g)$ y $\Psi^e(x) = \Psi(x, e) = s(x)$ son las funciones parciales. Pero por ser π submersión, se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \to T_{s(x_0)}(s(x_0) \cdot G) \to T_{s(x_0)}P \xrightarrow{d\pi} T_{x_0}M \to 0$$

la cual se escinde vía ds_{x_0}. Es decir, todo vector $X \in T_{s(x_0)}P$ se puede escribir como la suma

$$X = ds_{x_0}(X_1) + d(\Psi^{x_0})_e(X_2) \quad \text{para ciertos } X_1 \in T_{x_0}M,\ X_2 \in T_eG$$

donde se utiliza que $T_{s(x_0)}(s(x_0) \cdot G) = d(\Psi^{x_0})_e(T_eG)$. Con esto se concluye la demostración.

c.q.d.

Corolario 1.1.8 *Todo fibrado principal $\pi : P \to M$ es localmente trivial. es decir, para cada $x \in M$ existe un entorno abierto U tal que $\pi^{-1}(U)$ es trivializable.*

DEMOSTRACIÓN: Como la proyección π es submersión suprayectiva. para cada $x \in M$ existe un entorno U dominio de una sección diferenciable $s : U \to \pi^{-1}(U) \subset P$ que hace que la restricción de P a U sea, en virtud del último teorema, trivializable.

c.q.d.

Observación 1.1.2 Usualmente se incluye la trivialidad local en la definición de fibrado principal (ver por ejemplo [Ble, Definition 1.1.1], [KN, I.5], [Kos, Chapter 2, Definition 1]). Como vemos, exigir que π sea submersión y que la acción sea libre, es suficiente para construir un fibrado principal. Una demostración sobre la trivialidad local de los fibrados principales distinta a la del Teorema 1.1.7 y el Corolario 1.1.8 se puede encontrar en [Sha, Appendix E].

1.1.3 Representación local de automorfismos

Sea $\Phi : M \times G \to M \times G$ un automorfismo del fibrado principal trivial $\pi : M \times G \to M$ y sea $\varphi : M \to M$ su proyección a la base, es decir, el difeomorfismo de M asociado a Φ definido en la Proposición 1.1.2. Tomemos ahora un punto $(x, g) \in M \times G$ cualquiera y calculemos su imagen

$$\Phi(x, g) = \Phi((x, 1) \cdot g) = \Phi(x, 1) \cdot g = (\varphi(x), \phi(x)) \cdot g = (\varphi(x), \phi(x) \cdot g). \tag{1.1}$$

en donde hemos definido la aplicación diferenciable $\phi : M \to G$ como $\phi(x) = \mathrm{pr}_2(\Phi(x,1))$. Cada automorfismo Φ determina entonces un par de aplicaciones diferenciables φ y ϕ que verifican la expresión (1.1). El recíproco es también cierto, es decir, si tenemos un difeomorfismo $\varphi : M \to M$ y una aplicación diferenciable $\phi : M \to G$ cualesquiera, podemos construir un autmorfismo $\Phi : M \times G \to M \times G$ con $\Phi(x,g) = (\varphi(x), \phi(x) \cdot g)$.Tenemos entonces el siguiente resultado:

Proposición 1.1.9 *El conjunto de automorfismos de G-fibrados principales del fibrado trivial $M \times G$ está en biyección con el conjunto* $\mathrm{Dif}\, M \times C^\infty(M,G)$. *Igualmente, el subgrupo de las transformaciones* gauge, *es decir, los automorfismos para los cuales $\varphi = \mathrm{Id}_M$, está en biyección con $C^\infty(M,G)$.*

El caso en el que tengamos un fibrado principal $\pi : P \to M$ no trivial, en virtud de la trivialidad local (*cf.* Corolario 1.1.8), para cualquier $u \in P$, existe un entorno $U \subset M$ de $\pi(u)$ tal que $\pi^{-1}(U) \simeq U \times G$, y así, podemos representar localmente el grupo de transformaciones *gauge* como $C^\infty(U,G)$, es decir, $\mathrm{Gau}P|_U \simeq C^\infty(U,G)$.

1.2 Campos G-invariantes

Definición 1.2.1 Dado un difeomorfismo de variedades $\varphi : M \to M'$, para cada campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ se designa por $\varphi \cdot X$ el campo vectorial de M' definido por

$$(\varphi \cdot X)_{x'} = \varphi_*\left(X_{\varphi^{-1}(x')}\right), \quad \forall x' \in M'.$$

De este modo se tiene un isomorfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M')$, $X \mapsto \varphi \cdot X$. Esto es,

- $\varphi \cdot (\lambda X + \mu Y) = \lambda(\varphi \cdot X) + \mu(\varphi \cdot Y)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.
- $\varphi \cdot [X,Y] = [\varphi \cdot X, \varphi \cdot Y]$, $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Si $\psi : M' \to M''$ es otro difeomorfismo, se tiene $(\psi \circ \varphi) \cdot X = (\psi \cdot (\varphi \cdot X))$. En particular, $\mathrm{Dif}\, M$ actúa sobre $\mathfrak{X}(M)$.

Definición 1.2.2 Dado un fibrado principal $\pi : P \to M$ de grupo estructural G, se dice que un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(P)$ es *G-invariante* si

$$R_g \cdot X = X, \quad \forall g \in G.$$

Al conjunto de vectores G-invariantes se le denota por aut$P$.

Si Φ_t es el flujo de un campo X, entonces X es G-invariante si y solamente si

$$\Phi_t \circ R_g = R_g \circ \Phi_t, \forall t \in \mathbb{R}, \forall g \in G,$$

es decir, si $\Phi_t \in \mathrm{Aut}P$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Esta es la razón por la que los campos G-invariantes son llamados también *automorfismos infinitesimales* del fibrado principal; de hecho, se les puede ver como el "álgebra de Lie" del grupo Aut$P$ ([GS, §35, p.278], [MV]), lo que da sentido a que sean denotados por aut$P$.

Una propiedad esencial de los campos G-invariantes (basada en la identidad $\pi \circ R_g = \pi$, $\forall g \in G$) es que son π-proyectables ([Kos, §2.9. Proposition 5]), es decir, tiene sentido hablar de su proyección $\pi_* X \in \mathfrak{X}(M)$ para todo $X \in \mathrm{aut}P$. De todos los automorfismo infinitesimales, se destaca un subconjunto en la siguiente

Definición 1.2.3 Diremos que un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(P)$ es un *campo gauge*, o una *transformación gauge infinitesimal*, si es un campo G-invariante que al mismo tiempo es π-vertical (esto es, $\pi_* X = 0$). Al conjunto de campos *gauge* se le denota por gau$P$.

Si los campos G-invariantes son los generadores infinitesimales de los automorfismos, en particular los campos *gauge* son los generadores infinitesimales de los automorfismos verticales, es decir, de las transformaciones *gauge*.

Proposición 1.2.4 *Se tiene:*

- aut$P$ *es una subálgebra de Lie de* $\mathfrak{X}(P)$.
- gau$P$ *es un ideal de* aut$P$.

DEMOSTRACIÓN. Si $X, Y \in \mathrm{aut}P$, entonces

$$R_g \cdot [X, Y] = [R_g \cdot X, R_g \cdot Y] = [X, Y].$$

Por tanto aut$P$ es una subálgebra. Sean ahora $X \in$ aut$P$, $Y \in$ gau$P$ y $f \in C^\infty(M)$ arbitrarios. Se tiene

$$(\pi_*[X,Y])f = [X,Y](f \circ \pi) = X(Y(f \circ \pi)) - Y(X(f \circ \pi)).$$

Por una parte, $Y(f \circ \pi) = 0$ al ser $f \circ \pi$ una función constante a lo largo de las fibras de π e Y un campo vertical. Sean ahora $u \in \pi^{-1}(x)$, $x \in M$, y $g \in G$, entonces

$$X(f \circ \pi)(u) = X(f \circ \pi \circ R_g)(u) = (R_g)_*(X(f \circ \pi)(u)) = X(f \circ \pi)(u \cdot g).$$

La función $X(f \circ \pi)$ es por tanto también constante a lo largo de π. Entonces $Y(X(f \circ \pi)) = 0$, por lo que $\pi_*[X,Y] = 0$.

c.q.d.

1.3 Campos fundamentales

Definición 1.3.1 Al subfibrado $VP = \{X \in TP | \pi_* X = 0\}$ de vectores tangentes a la fibra de P es llamado *fibrado vertical* de P. Para cada $u \in \pi^{-1}(x)$, $x \in M$, se tiene una sucesión exacta de espacios vectoriales,

$$0 \to T_u\left(\pi^{-1}(x)\right) = V_u P \to T_u P \xrightarrow{\pi_*} T_x M \to 0. \qquad (1.2)$$

Definición 1.3.2 Dado un elemento $B \in \mathfrak{g}$, se define el *campo fundamental* $B^* \in \mathfrak{X}(P)$ como el campo que tiene el siguiente flujo:

$$\Phi_t^B(u) = R_{\exp(tB)}(u) = u \cdot \exp(tB).$$

Proposición 1.3.3 (ref. [KN, I.§5]) *Se verifican las siguientes propiedades:*

(1) *Los campos B^* son π-verticales.*

(2) *La aplicación $^* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$, $B \mapsto B^*$, es un monomorfismo de álgebras de Lie.*

(3) $(R_g)_* B^*_u = (\mathrm{Ad}_{g^{-1}} B)^*_{u \cdot g}$, $\forall u \in P$, $\forall g \in G$.

(4) *Para cada $u \in P$. la aplicación $^* : \mathfrak{g} \to V_u P$, $B \mapsto B^*_u$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. De hecho, el fibrado VP es canónicamente isomorfo al fibrado trivial $P \times \mathfrak{g}$ por la aplicación $(u, B) \mapsto B^*_u$.*

Los campos fundamentales surgen de forma natural de la acción de G sobre P por la derecha. En el caso particular $P = M \times G$ (fibrado trivial), el grupo G también actua por la izquiera, dando lugar a la siguiente

Definición 1.3.4 En el fibrado trivial $\pi : P = M \times G \to M$, para cada $B \in \mathfrak{g}$, se define el campo $\tilde{B}$ como aquél que tiene el siguiente flujo:

$$\Psi_t^B(x, g) = L_{\exp(tB)}(x, g) = (x, \exp(tB) \cdot g). \tag{1.3}$$

Proposición 1.3.5 *Si $P = M \times G$, se tienen las siguientes propiedades:*

(1) *Los campos $\tilde{B}$ son campos* gauge.

(2) *La aplicación $\tilde{\ }: \mathfrak{g} \to \mathrm{gau}P \subset \mathfrak{X}(P)$ es inyectiva y además antihomomorfismo de álgebras de Lie, es decir,*

$$\widetilde{[B, B']} = -[\tilde{B}, \tilde{B}'], \quad \forall B, B' \in \mathfrak{g}.$$

(3) *Para cada $u \in P$, la aplicación $\tilde{\ }_u : \mathfrak{g} \to V_uP$, $B \mapsto \tilde{B}_u$ es un isomorfismo de espacios vectoriales*

DEMOSTRACIÓN. Evidentemente los campos $\tilde{B}$ son verticales, y como su flujo Ψ_t^B conmuta con R_g para cualquier $g \in G$, tenemos que $\tilde{B} \in \mathrm{Gau}P$. Para el apartado (2), dado un punto $u = (x, g) \in P$ cualquiera, por la interpretación geométrica del corchete de Lie (por ejemplo, ver [War, Proposition 2.25-(b)]), tenemos

$$[\tilde{B}, \tilde{B}']_u = \frac{d}{dt}|_{t=0}((\Psi_{-t}^B)_* \tilde{B}'_{\Psi_t^B(u)}).$$

Pero

$$\begin{aligned}
(\Psi_{-t}^B)_* \tilde{B}'_{\Psi_t^B(u)} &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \Psi_{-t}^B(x, \exp(sB') \cdot \exp(tB) \cdot g) \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (x, \exp(-tB) \cdot \exp(sB') \cdot \exp(tB) \cdot g) \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (x, \exp(s\mathrm{Ad}_{\exp(-tB)}B') \cdot g).
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
[\tilde{B}, \tilde{B}']_u &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (x, \exp(s\mathrm{Ad}_{\exp(-tB)}B') \cdot g) \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (x, \exp(s\mathrm{ad}_{-B}B') \cdot g) \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} (x, \exp(s[-B, B']) \cdot g) = -[\tilde{B}, \tilde{B}']_u.
\end{aligned}$$

Para el partado (3), $V_{(x,g)}P \cong T_gG$, por lo que el resultado de las propiedades de la exponencial de un grupo de Lie. El partado (3) implica finalmente la inyectividad de la aplicación $\tilde{}: \mathfrak{g} \to \mathrm{gau}P$.

c.q.d.

1.4 AdP y ad$P$

Definición 1.4.1 ([KN, p.54], [Ble, §3.1]) Sea $\pi : P \to M$ un fibrado principal de grupo estructural G. Supongamos que se tiene una acción por la izquiera $(g, y) \mapsto g \star y$ de G por difeomorfismos en una variedad F. Entonces G actúa por la derecha en el espacio $P \times F$ de la siguiente manera:

$$(u, y) \cdot g = (u \cdot g, g^{-1} \star y).$$

El cociente de esta acción es un espacio fibrado sobre M

$$\pi_F : P \times^G F \to M,$$

con $\pi_F(\{u, y\}) = \pi(u)$ (en donde $\{,\}$ denota la clase de equivalencia) que se llama *fibrado asociado a P por la acción $\star$ de G sobre F.*

Proposición 1.4.2 *Las secciones s de un fibrado asociado $\pi_F : P \times^G F \to M$ están en correspondencia biunívoca con el conjunto de aplicaciones diferenciables $\hat{s} : P \to F$ que son G-equivariantes, es decir*

$$\hat{s}(u \cdot g) = g^{-1} \star \hat{s}(u).$$

DEMOSTRACIÓN. Como $M = P/G$ y $P \times^G F = (P \times F)/G$, las aplicaciones de M en $P \times^G F$ se corresponden biunívocamente con las aplicaciones de P a $P \times F$ que son equivariantes. En particular, las secciones de $\pi_F : P \times^G F \to M$

se corresponderán con aplicaciones de $\Phi : P \to P \times F$ que cumplan que $s(u) = (u, \hat{s}(u))$ para cierta $\hat{s}$ equivariante, que es precisamente lo indicado en el enunciado.

c.q.d.

Observación 1.4.1 Si F es un grupo de Lie y la acción por la izquiera de G sobre F es por automorfismos, entonces las fibras del fibrado asociado $\pi_F : P \times^G F \to M$ poseen estructura de grupo de Lie isomorfo a F con la operación

$$\{u, y\} \cdot \{u, y'\} = \{u, y \cdot y'\},$$

de modo que π_F es un fibrado en grupos de Lie.

Definición 1.4.3 En particular si considero la acción de G sobre sí mismo a través de la conjugación $c_g : G \to G$, $c_g(h) = g \cdot h \cdot g^{-1}$, el fibrado asociado $\pi_G : P \times^G G \to M$ se denota por $\mathrm{Ad}P$.

Por la Observación 1.4.1, el fibrado $\pi_G : \mathrm{Ad}P \to M$ es un fibrado en grupos de Lie. Como consecuencia, el conjunto $\Gamma(M, \mathrm{Ad}P)$ de secciones de π_G tiene estructura de grupo con la operación

$$(s \cdot s')(x) = s(x) \cdot s'(x), \quad \forall x \in M. \tag{1.4}$$

Proposición 1.4.4 *El conjunto* Gau$P$ *de transformaciones* gauge *está en biyección natural con el conjunto* $\Gamma(M, \mathrm{Ad}P)$ *de secciones del fibrado* AdP. *Con la estructura de grupo de* $\Gamma(M, \mathrm{Ad}P)$ *definida en* (1.4) *y la estructura de grupo de* Gau$P$ *como grupo de transformaciones, dicha biyección es un isomorfismo de grupos.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 1.4.2, el conjunto $\Gamma(M, \mathrm{Ad}P)$ se corresponde biunívocamente con el de funciones equivariantes $\hat{\Phi} : P \to G$. Dada una $\hat{\Phi}$ equivariante, defino $\Phi : P \to P$ como

$$\Phi(u) = u \cdot \hat{\Phi}(u). \tag{1.5}$$

La equivariancia implica que Φ es una transformación *gauge*. Viceversa, si tengo $\Phi \in \mathrm{Gau}P$, se define $\hat{\Phi} : P \to G$ como la única aplicación que verifica

(1.5). La equivariancia es consecuencia directa de la propiedad de morfismo de fibrado principal. A su vez, la expresión

$$\begin{aligned}(\Phi \circ \Psi)(u) &= \Phi(\Psi(u)) = \Phi(u \cdot \hat{\Psi}(u)) = \Phi(u) \cdot \hat{\Psi}(u) \\ &= u \cdot \hat{\Phi}(u) \cdot \hat{\Psi}(u) = u \cdot (\hat{\Phi} \cdot \hat{\Psi})(u)\end{aligned}$$

asegura que la correspondencia Gau$P \cong \Gamma(M, \mathrm{Ad}P)$ es un morfismo de grupos.

c.q.d.

Observación 1.4.2 Si V es un álgebra de Lie y la acción por la izquiera de G sobre V es por automorfismos de álgebras de Lie, entonces las fibras del fibrado asociado $\pi_V : P \times^G V \longrightarrow M$ poseen estructura de álgebra de Lie isomorfa a V con el corchete

$$[\{u. B\}, \{u, B'\}] = \{u, [B, B']\}, \tag{1.6}$$

de modo que π_V es un fibrado en álgebras de Lie.

Definición 1.4.5 En particular si considero la acción de G sobre su álgebra $\mathfrak{g}$ a través de la aplicación adjunta $\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, el fibrado asociado $\pi_\mathfrak{g}$: $P \times^G \mathfrak{g} \longrightarrow M$ se llama *fibrado adjunto* y se denota por ad$P$. Las clases de equivalencia de ad$P = (P \times \mathfrak{g})/G$ serán denotadas por $(u, B)_{\mathrm{ad}}$, $u \in P$, $B \in \mathfrak{g}$.

Por la Observación 1.4.2, el fibrado $\pi_\mathfrak{g}$: ad$P \longrightarrow M$ es un fibrado en álgebras de Lie. Como consecuencia, el conjunto $\Gamma(M, \mathrm{ad}P)$ de secciones de π_G tiene estructura de álgebra con el corchete

$$[s, s'](x) = [s(x), s'(x)], \quad \forall x \in M. \tag{1.7}$$

Proposición 1.4.6 *El conjunto* gau$P$ *de campos* gauge *está en biyección natural con el conjunto* $\Gamma(M, \mathrm{ad}P)$ *de secciones del fibrado* ad$P$. *Con la estructura de álgebra en* $\Gamma(M, \mathrm{ad}P)$ *definida en* (1.7) *y la estructura de álgebra en* gau$P$ *como subálgebra de* $\mathfrak{X}(P)$, *dicha biyección es un antiisomorfismo de álgebras de Lie.*

DEMOSTRACIÓN. El conjunto $\Gamma(M, \mathrm{ad}P)$, en virtud de la Proposición 1.4.2, está en biyección con el conjunto de funciones $\hat{\chi} : P \longrightarrow \mathfrak{g}$ tales que

$$\hat{\chi}(u \cdot g) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\hat{\chi}(u). \tag{1.8}$$

Dada una aplicación equivariante $\hat{\chi}$, defino el campo X como

$$X_u = (\hat{\chi}(u))^*_u. \tag{1.9}$$

Este campo es vertical por definición y por la Proposición 1.3.3-(3) y (1.8), $(R_g)_* X_u = X_{u \cdot g}$, por lo que $X \in \mathrm{gau}P$. Viceversa, por la biyección de la Proposición 1.3.3-(4), dado un campo *gauge* X, existe una única aplicación $\hat{\chi} : P \to \mathfrak{g}$ tal que (1.9) se satisface. La equivariancia de $\hat{\chi}$ se deduce de la Proposición 1.3.3-(3). Para probar el resto, consideremos primero que el fibrado P es el trivial $M \times G$. Si $s(x) = ((x,1), B(x))_{\mathrm{ad}}$ es una sección de $\mathrm{ad}P|_U$, entonces se tiene que $(\mathrm{Ad}_{g^{-1}} B(x))^*_{(x,g)}$ es su campo *gauge* asociado. Por definición, su flujo es

$$\varphi_t(x,g) = (x, h \cdot \exp(t\mathrm{Ad}_{g^{-1}} B)) = (x, g \cdot g^{-1} \cdot \exp(tB) \cdot g),$$

es decir, el flujo de $\tilde{B}$ (ver la Definición 1.3.4). Sea $s'(x) = ((x,1), B'(x))_{\mathrm{ad}}$ otra sección de $\mathrm{ad}P|_U$. Por una parte, teniendo en cuenta la Proposición 1.3.5-(2),

$$[\tilde{B}, \tilde{B}']_{(x,g)} = -\widetilde{[B, B']}_{(x,g)}.$$

Pero sin embargo, el campo asociado a $[s, s'](x) = ((x,1), [B(x), B'(x)])_{\mathrm{ad}}$ es $\widetilde{[B, B']}$, lo que nos da el antiisomorfismo en el caso trivial. Debido a que los corchetes son objetos locales, para un fibrado P no trivial, la demostración se concluye considerando un abierto $U \subset M$ tal que $\pi^{-1}(U)$ sea trivializable.

c.q.d.

Observación 1.4.3 La Proposición (1.4.4) establece un isomorfismo entre los grupos de Lie infinitos $\Gamma(M, \mathrm{Ad}P)$ y $\mathrm{Gau}P$. Sin embargo, la Proposición (1.4.6) afirma que el álgebra de Lie de $\Gamma(M, \mathrm{Ad}P)$, esto es, $\Gamma(M, \mathrm{ad}P)$, es antiisomorfa a $\mathrm{gau}P$ con el corchete inducido como subálgebra de $\mathfrak{X}(P)$. Ello no supone ninguna contradicción ya que, en principio, el corchete de $\mathrm{gau}P$ como álgebra de Lie del grupo de Lie infinito $\mathrm{Gau}P$ no tiene por qué coincidir con el inducido por $\mathfrak{X}(P)$ y, de hecho, la Proposición (1.4.6) debe considerarse como el cálculo del corchete del álgebra de Lie de $\mathrm{Gau}P$. Este fenómeno no tiene parangón en el caso de los grupos de Lie de dimensión finita, ya que el espacio tangente en el neutro a un grupo de Lie G (al que habitualmente se identifica el álgebra de Lie de G) no está provisto de ningún corchete natural. Ello indica que, de modo preciso, $\mathrm{gau}P$ debe considerarse como el álgebra de

Lie de campos invariantes *por la derecha* del grupo Gau$P$. Este fenómeno es general: se da también para el grupo de los difeomorfismos de una variedad diferenciable cualquiera respecto del álgebra de Lie de sus campos vectoriales. Véase, por ejemplo, [KM, 43.1].

1.4.1 Expresión local de los campos G-invariantes

Consideremos un abierto coordenado $U \subset M$ tal que el fibrado P sea trivializable sobre él, es decir, $\pi^{-1}(U) \cong U \times G$ y sea $\{B_1, ..., B_m\}$ una base de $\mathfrak{g}$. Los campos $\tilde{B}_1, ..., \tilde{B}_m$ son m campos *gauge* linealmente independientes en cada punto. Forman por tanto una base del $C^\infty(U)$-módulo de secciones de ad$P|_U$ (*cf.* Proposición 1.4.6), es decir, cualquier campo $X \in$ gau$P$ se puede escribir

$$X = g^\alpha \tilde{B}_\alpha, \quad g^\alpha \in C^\infty(M), 1 \leq \alpha \leq m, \tag{1.10}$$

en el abierto fibrado $\pi^{-1}(U)$. De forma más general, en el caso en que se tenga un automorfismo infinitesimal $X \in$ aut$P$, la expresión local del mismo en $\pi^{-1}(U)$ es

$$X = f^j \frac{\partial}{\partial x^j} + g^\alpha \tilde{B}_\alpha, \quad g^\alpha, f^j \in C^\infty(M), 1 \leq \alpha \leq m, 1 \leq j \leq n. \tag{1.11}$$

La expresión de la proyección de X sobre M es por tanto

$$X' = \pi_* X = f^j \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

1.5 Conexiones principales

Debido al continuo uso que del concepto de conexión en un fibrado principal vamos a hacer a lo largo de la presente memoria, enunciamos a continuación las tres definiciones más comunes que del mismo se tiene (*cf.* [Kos, §3.1], [KN, Chapter II.§1], [Sha, Definition 6.2.4]).

Definición I. Una conexión en un fibrado principal $\pi : P \to M$ es un homomorfismo de fibrados vectoriales $\Gamma : TP \to VP$ tal que:

- Γ es un retracto de inclusión, es decir, $\Gamma|_{VP} = \mathrm{Id}_{VP}$.

- Γ es compatible con la acción acción del grupo G, esto es, $\Gamma \circ (R_g)_* = (R_g)_* \circ \Gamma$, $\forall g \in G$.

Definición II. Una conexión en un fibrado principal $\pi : P \to M$ es una distribución H (llamada *parte horizontal*) suplementaria a la distribución vertical V e invariante por la acción del grupo G en P. Es decir,

$$\begin{aligned} T_uP &= H_u \oplus V_uP, \quad \forall u \in P, \\ (R_g)_* H_u &= H_{u \cdot g}, \quad \forall u \in P, \forall g \in G. \end{aligned}$$

Definición III. Una conexión Γ es equivalente a dar una 1-forma ω_Γ en P con valores en $\mathfrak{g}$ que verifique

- $\omega_\Gamma(B_u^*) = B, \forall B \in \mathfrak{g}, \forall u \in P$.
- $(R_g)^* \omega_\Gamma = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \omega_\Gamma$.

Las tres definiciones anteriores son lógicamente equivalentes, es decir, cada una determina unívocamente a las otras dos. Las correspondencias entre cada una de las versiones son esquemáticamente de la siguiente manera:

I—II. Dada una conexión de la Definición I, si defino $H_u = \ker(\Gamma_u)$, entonces la distribución H verifica las propiedades de la Definición II. A la inversa, si tengo un distribución H, para cada $u \in P$, tengo $T_uP = H_u \oplus V_uP$ por lo que puedo definir Γ_u como la proyeccíon en el subespacio vertical. La aplicación Γ así definida cumple lo enunciado en la Definición I.

I—III. Para obtener la forma de la Definición III, simplemente hay que componer $\Gamma_u : T_uP \to V_uP$ con el isomorfismo $V_uP \simeq \mathfrak{g}$ definido en la Proposición 1.3.3–(4) para obtener punto a punto la forma ω_Γ. Las propiedades de ω_Γ se verifican rápidamente. Viceversa, dada una forma ω_Γ, defino $\Gamma_u(X) = (\omega_\Gamma(X))_u^*$, lo que nos da un homomorfismo de fibrados vectoriales como en la Definición I.

1.6 La sucesión de Atiyah

La acción del grupo G sobre un fibrado principal $\pi : P \to M$, define de forma natural una acción también por la derecha sobre TP definida como

$$(X_u, g) \mapsto (R_g)_* X_u,$$

para cualquier $X_u \in T_uP$, $u \in P$, y $g \in G$. El cociente $T_GP = (TP)/G$ existe como variedad diferenciable fibrada sobre M (ver [Ati1]) a través de la proyección

$$\pi_G(\{X_u\}) = \pi_*(X_u),$$

en donde $\{X_u\}$ representa la clase de equivalencia de X_u. El subfibrado $VP \overset{i}{\hookrightarrow} TP$ queda invariante por la acción definida en TP y su cociente vuelve a ser una variedad diferenciable, que denotaremos por V_GP.

Proposición 1.6.1 (*cf.* [Ati1], [Eck, Theorem 4.3], [MM, 3.5], [Sar, §6.1]) *Se tiene la siguiente sucesión exacta corta de fibrados vectoriales sobre M,*

$$0 \longrightarrow V_GP \xrightarrow{i_G} T_GP \xrightarrow{\pi_G} TM \longrightarrow 0 \tag{1.12}$$

con $\pi' = \pi_M \circ \pi_G$. A esta suceción se la conoce como sucesión de Atiyah.

Sea $\pi_{\mathfrak{g}} : \mathrm{ad}P \to M$ el fibrado adjunto de P. En la sucesión de Aityah (1.12) es muy común encontrar al espacio $\mathrm{ad}P$ ocupando el lugar de V_GP. Eso es debido a la siguiente identificación:

Proposición 1.6.2 *La aplicación*

$$\xi : \mathrm{ad}P \to V_GP, \quad \xi((u, B)_{\mathrm{ad}}) = \{B^*_u\},$$

es un isomorfismo de fibrados vectoriales sobre M.

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero que la aplicación está bien definida. Sean (u, B), $(u', B') \in P \times \mathfrak{g}$ tales que $(u, B)_{\mathrm{ad}} = (u', B')_{\mathrm{ad}}$. Esto implica que existe un $g \in G$ tal que $u' = u \cdot g$ y $B' = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}B$. Entonces, en virtud de la Proposición 1.3.3–(3), $(B')^*_{u'} = (\mathrm{Ad}_{g^{-1}}B)^*_{u \cdot g} = (R_g)_*(B^*)_u$, por lo que $\{B^*_u\} = \{B'^*_{u'}\}$. Finalmente, la biyectividad de ξ es consecuencia directa de la biyección $\mathfrak{g} \to V_uP$ definida la Proposición 1.3.3–(4).

c.q.d.

Proposición 1.6.3 *Las secciones globales del fibrado $T_GP \to M$ se corresponden de modo natural y biunívoco con los campos G-invariantes de P, esto es,*

$$\Gamma(M, T_GP) \cong \mathrm{aut}P. \tag{1.13}$$

Análogamente,

$$\Gamma(M, V_GP) \cong \mathrm{gau}P. \tag{1.14}$$

DEMOSTRACIÓN. Una clase $\{X_u\} \in T_G P$ corresponde a una asignación G-invariante de vectores tangentes a lo largo de la fibra $\pi^{-1}(x)$, con $x = \pi(u)$. Por tanto, una sección global del fibrado $T_G P \to M$ nos da un campo G-invariante definido en todo P. Viceversa, un campo G-invariante X de P restringido a una fibra cualquiera $\pi^{-1}(x)$, $x \in M$, determina una clase de equivalencia $\{X_u\} \in (T_G P)_x$. La aplicación $x \longmapsto \{X_u\}$ es una sección de $T_G P$. Si nos restringimos a vectores verticales, obtenemos (1.14), aunque esta identificación se deduce también de las Proposiciones 1.4.6 y 1.6.2.

c.q.d.

Observación 1.6.1 Si tomamos secciones globales de fibrados sobre M en la sucesión (1.12), se obtiene una sucesión exacta de $C^\infty(M)$-módulos y álgebras de Lie

$$0 \longrightarrow \mathrm{gau}P \longrightarrow \mathrm{aut}P \xrightarrow{\pi_*} \mathfrak{X}(M) \longrightarrow 0, \tag{1.15}$$

que es equivalente a la sucesión de Atiyah.

Capítulo 2

Geometría del fibrado de conexiones

2.1 Definición del fibrado de conexiones

Definición 2.1.1 Una conexión Γ en un fibrado principal $\pi : P \to M$ nos permite:

- Descomponer un vector tangente $X \in T_uP$, $u \in P$, en la *parte vertical* X^v y la *parte horizontal* X^h en virtud de la descomposición $T_uP = H_uP \oplus V_uP$ (*cf.* §1.5-I).
- Definir la *elevación horizontal de un vector* tangente $Y \in T_xM$ a un $u \in \pi^{-1}(x)$ como el único vector $Y^h \in T_uP$ horizontal tal que $\pi_* Y^h = Y$.
- Definir la *elevación horizontal de un campo* vectorial $Y \in \mathfrak{X}(M)$ como aquel campo Y^h de P tal que en cada $u \in P$ es la elevación horizontal de Y_x, $x = \pi(u)$. La G-invariancia de la distribución H_uP (*cf.* §1.5-II) hace que el campo Y^h sea G-invariante.

Proposición 2.1.2 *Hay una correspondencia biunívoca entre las escisiones del la sucesión de Atiyah* (1.12) *y el conjunto de conexiones del fibrado principal* $\pi : P \to M$.

DEMOSTRACIÓN. Sea Γ una conexión del fibrado principal $\pi : P \to M$ y sea ${}^h : T_xM \to T_uP$, $u \in \pi^{-1}(x)$, $x \in M$, la elevación horizontal de vectores definida por Γ (Definición 2.1.1). Si $Y \in T_xM$ es un vector tangente, el campo Y_u^h, $u \in \pi^{-1}(x)$, es G-invariante a lo largo de la fibra de x y por tanto determina un elemento $\{Y^h\}$ de $(T_GP)_x$. De esta manera tenemos una sección $\sigma_\Gamma : TM \to T_GP$ de π_* definida como $\sigma_\Gamma(Y) = \{Y_u^h\}$. Reciprocamente, con una escisión de la sucesión de Atiyah $\sigma_\Gamma : TM \to T_GP$, dado un $Y \in T_xM$, se define su elevación horizontal a T_uP, $u \in \pi^{-1}(x)$, como el único vector Y_u^h cuya clase $\{Y_u^h\}$ en T_GP coincide con $\sigma_\Gamma(Y)$. La elevación ${}^h\colon T_xM \to T_uP$, $Y \longmapsto Y_u^h$, $u \in \pi^{-1}(x)$, proviene de la conexión que tiene como subespacio horizontal en $u \in P$ a $H_u = (T_xM)_u^h$, $x = \pi(x)$, imagen de T_xM por ^{h}. Al ser $\{Y_u^h\}$ clases de vectores G-invariantes, la G-invariancia de H_u queda asegurada.

c.q.d.

Esta última Proposición nos da pie para establecer la siguiente

Definición 2.1.3 Dado un fibrado principal $\pi : P \to M$, se define el *fibrado de las conexiones*

$$p : C(P) \to M$$

como el subfibrado de $\mathrm{Hom}(TM, T_GP)$ determinado por todas las aplicaciones $\mathbb{R}$-lineales $\Gamma_x : T_xM \to (T_GP)_x$, $x \in M$, tales que $\pi_* \circ \Gamma_x = \mathrm{Id}_{T_xM}$ (*cf.* [CD], [Eck, Definition 4.5], [Gar2]).

Por tanto, como consecuencia de la Proposición 2.1.2 las secciones globales del fibrado de las conexiones $p : C(P) \to M$ se identifican de forma natural con las conexiones de P.

Proposición 2.1.4 *El fibrado* $p : C(P) \to M$ *tiene estructura de fibrado afín modelado sobre el fibrado vectorial* $\mathrm{Hom}(TM, \mathrm{ad}P) \cong T^*M \otimes \mathrm{ad}P$.

DEMOSTRACIÓN. Dado un elemento $\Gamma_x : T_xM \to ((TP)/G)_x$ de $C(P)$, volviendo otra vez a la sucesión de Atiyah, es evidente que cualquier otro elemento de $(C(P))_x = p^{-1}(x)$ se puede escribir como $\Gamma'_x = \Gamma_x + \lambda$ siendo $\lambda : T_xM \to (\mathrm{ad}P)_x$ una aplicación lineal.

c.q.d.

Observación 2.1.1 Un elemento $\Gamma_x : T_xM \to (T_GP)_x$ de $C(P)$ se puede entender como una "conexión sobre el punto x" en cualquiera de las nociones que de conexión se da en §1.5. Concretamente:

- La imagen de Γ_x es un subespacio de $(T_G P)_x$ que induce una distribución de subespacios H_u complementario del subespacio vertical $V_u \subset T_u P$ para cualquier $u \in \pi^{-1}(x)$ tal que $(R_g)_* H_u = H_{u \cdot g}$.

- Γ_x define también una forma de conexión sobre el punto x, es decir, una aplicación lineal $\omega_{\Gamma_x} : TP|_{\pi^{-1}(x)} \to \mathfrak{g}$ tal que $(\ker(\omega_{\Gamma_x}))_u = H_u$ y $R_g^* \circ \omega_{\Gamma_x} = Ad_{g^{-1}} \circ \omega_{\Gamma_x}$ de la misma forma que una conexión define una forma de conexión. Esto es, dado un $X \in T_u P$, el vector $X - (\Gamma_x(\pi_* X))_u$ es evidentemente vertical, por tanto (Proposición 1.3.3-(4)) existe un único $B \in \mathfrak{g}$ tal que $X - (\Gamma_x(\pi_* X))_u = B_u^*$. Definimos $\omega_{\Gamma_x}(X) = B$.

2.2 Coordenadas en el fibrado de conexiones

Sea $(U; x^1, ..., x^n)$ un sistema de coordenadas en M de tal manera que $\pi^{-1}(U)$ sea trivializable (ver Corolario 1.1.8). Escojamos una trivialización y pongamos $\pi^{-1}(U) = U \times G$. Si $\{B_1, \dots, B_m\}$ es una base de $\mathfrak{g}$, entonces los campos $\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_m$ (ver Definición 1.3.4) forman una base del $C^\infty(U)$-módulo de campos *gauge*, o lo que es lo mismo, del $C^\infty(U)$-módulo $\Gamma(U, \mathrm{ad}P)$ (*cf.* Proposición 1.4.6). Si σ_Γ es una sección local de π_*, para cada campo vectorial coordenado $\partial/\partial x^j$, existen funciones $A_i^\alpha(\Gamma) \in C^\infty(U)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq \alpha \leq m$, unívocamente determinadas por las siguientes condiciones

$$\sigma_\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^{h_\Gamma} = \frac{\partial}{\partial x^i} - A_i^\alpha(\Gamma)\tilde{B}_\alpha, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{2.1}$$

Si $\Gamma_x : T_x M \to (T_G P)_x$ es un elemento de $C(P)$ tal que $\Gamma_x = \sigma_\Gamma|_{T_x M}$, los números $A_i^\alpha(\Gamma_x)$ determinan unívocamente la aplicación Γ_x, por lo que podemos afirmar que las funciones

$$(x^i; A_j^\alpha), \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq \alpha \leq m,$$

definen un sistema de coordenadas en $p^{-1}(U) = C(P)|_U$.

Observación 2.2.1 Por tanto, si $n = \dim M$ y $m = \dim G$, la dimensión de $C(P)$ es $n(m+1)$.

Ejemplo 2.2.1 ([Gar1], [NS, 7.15]) Consideremos el fibrado principal de las referencias lineales $\pi : F(M) \to M$ sobre una variedad cualquiera. Este fibrado tiene grupo estructural $GL(n;\mathbb{R})$. En un abierto coordenado $(U;x^i)\subset M$ tal que $\pi^{-1}(U)=U\times GL(n;\mathbb{R})$ definimos el sistema de coordenadas $(x^i;z_j^k)$, $1\leq j,k\leq n$ en P, en donde $z_j^k(Z)=Z_j^k$ es igual a la entrada k-ésima de la columna j-ésima de $Z\in GL(n;\mathbb{R})$. Sea $\{E_\alpha^\beta\}_{\alpha,\beta=1,\dots,n}$ la base estándar de $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$ formada por las matrices tales que

$$z_j^k(E_\alpha^\beta)=\delta_j^\beta\delta_\alpha^k.$$

El flujo del campo $\tilde{E}_\alpha^\beta$ es

$$\Phi_t(x,Z)=(x,\exp(tE_\alpha^\beta)\cdot Z)=(x,e^{tE_\alpha^\beta}Z).$$

Si escribimos

$$\tilde{E}_\alpha^\beta=\sum f_{\alpha j}^{\beta k}(\partial/\partial z_j^k),$$

se tiene

$$f_{j\alpha}^{k\beta}=\tilde{E}_\alpha^\beta(z_j^k)=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(z_j^k(\Phi_t(x,Z)))=(E_\alpha^\beta Z)_j^k=\delta_\alpha^k z_j^\beta,$$

y por tanto

$$\tilde{E}_\alpha^\beta=z_l^\beta\frac{\partial}{\partial z_l^\alpha}. \tag{2.2}$$

Si Γ es una conexión, de (2.1) y (2.2) tenemos

$$\sigma_\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)-A_{j\beta}^\alpha\tilde{E}_\alpha^\beta=\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)-A_{j\beta}^\alpha z_l^\beta\frac{\partial}{\partial z_l^\alpha}.$$

Por otra parte es conocido (por ejemplo, ver [KN, p.143]) que la elevación horizontal de una campo por una conexión lineal tiene la expresión

$$\sigma_\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)-\Gamma_{jk}^i z_l^k\frac{\partial}{\partial z_l^i},$$

siendo Γ_{jk}^i los símbolos de Christoffel de la conexión lineal Γ. Se tiene por lo tanto la siguiente igualdad de funciones en U :

$$A_{i\beta}^\alpha=\Gamma_{i\beta}^\alpha,\quad \alpha,\beta,i=1,\dots,n.$$

Ello justifica la terminología utilizada.

2.3 Acción de los automorfismos en $C(P)$

El grupo de automorfismo Aut$P$ actúa por la izquierda en el conjunto de todas las conexiones. Dado $\Phi \in$ Aut$P$ y una conexión Γ con forma de conexión ω_Γ, se define $\Gamma' = \Phi(\Gamma)$ como aquella conexión que tiene por 1-forma de conexión a

$$\omega_{\Gamma'} = (\Phi^{-1})^* \omega_\Gamma.$$

De forma equivalente, si la conexión Γ se entiende como una distribución $H_u \subset T_uP$, $u \in P$, de subespacios horizontales en P, la distribución que corresponde a Γ' es la imagen directa por Φ, es decir, $\Phi_*(H_u) \subset T_{\Phi(u)}P$ (*cf.* [KN, II.Proposition 6.2]). Sea φ el difeomorfismo de M inducido por Φ. Si ahora vemos la conexión Γ como una escisión σ_Γ de la sucesión de Atiyah (Proposición 2.1.2), entonces la escisión $\sigma_{\Gamma'}$ asociada a Γ' es aquella que tiene por expresión

$$\sigma_{\Gamma'} = \Phi_* \circ \sigma_\Gamma \circ (\varphi^{-1})_*,$$

en donde, por abuso de notación, Φ_* aplicada a una clase de equivalencia $\{X_u\}$ de vectores G-invariantes es simplemente tomar la clase de $\Phi_*(X_u)$. Todas estas consideraciones nos permiten dar la siguiente

Definición 2.3.1 Cada automorfismo $\Phi \in$ Aut$P$ define una aplicación

$$\Phi_C : C(P) \to C(P),$$

mediante la expresión

$$\Phi_C(\Gamma_x) = \Phi_* \circ \Gamma_x \circ (\varphi^{-1})_*, \quad \Gamma_x \in C(P),$$

$\Gamma_x : T_xM \to (T_GP)_x$, $x \in M$, siendo φ el difeomorfismo en M inducido por Φ. Esto es equivalente a definir $\Phi_C(\Gamma_x)$ como aquel elemento de $C(P)$ que tiene por "forma de conexión en un punto" (Observación 2.1.1) a

$$(\Phi^{-1})^* \omega_{\Gamma_x}.$$

De una manera más geométrica, si $H_u^{\Gamma_x}P$, $u \in \pi^{-1}(x)$, es la distribución horizontal definido por Γ_x (Observación 2.1.1), $\Phi_C(\Gamma_x)$ no es más que aquel elemento de $C(P)$ cuya distribución horizontal a lo largo de $\pi^{-1}(\varphi(x))$ es

$$\Phi_*(H_u^{\Gamma_x}P).$$

Observación 2.3.1 Si $\Phi \in \mathrm{Aut}P$, directamente de la definición de Φ_C se comprueban las siguientes propiedades:

- Φ_C es una aplicación fibrada sobre M, es decir,

$$p \circ \Phi_C = \varphi \circ p.$$

- Φ_C es un difeomorfismo de $C(P)$ con inversa $(\Phi_C)^{-1} = (\Phi^{-1})_C$.

- La aplicación $\mathrm{Aut}P \to \mathrm{Dif}C(P)$, $\Phi \mapsto \Phi_C$, es un homomorfismo de grupos.

- Si Γ es una conexión sobre $\pi : P \to M$ y σ_Γ es la sección de $p : C(P) \to M$ que induce, entonces

$$\Phi_C \circ \sigma_\Gamma = \sigma_{\Phi(\Gamma)}.$$

Definición 2.3.2 Para cada campo G-invariante $X \in \mathrm{aut}P$, se define su *levantamiento al fibrado de las conexiones* como el campo X_C generado por el grupo uniparamétrico $\{(\Phi_t)_C\}$, siendo $\{\Phi_t\}$ el flujo de X.

Observación 2.3.2 Dado un $X \in \mathrm{aut}P$, puesto que se verifica $p \circ (\Phi_t)_C = \varphi_t \circ p$ para todo t, el campo X_C es p-proyectable al campo X', proyección de X a M.

Proposición 2.3.3 *Si*

$$X = f^j \frac{\partial}{\partial x^j} + g^\alpha \tilde{B}_\alpha$$

es la expresión local de un automorfismo infinitesimal (cf. *fórmula* (1.11)), *en el sistema de coordenadas definido en* §2.2, *la expresión del levantamiento de X al fibrado de las conexiones es*

$$X_C = f^j \frac{\partial}{\partial x^j} - \left(\frac{\partial g^\alpha}{\partial x^j} - c^\alpha_{\beta\gamma} g^\beta A^\gamma_j + \frac{\partial f^i}{\partial x^j} A^\alpha_i \right) \frac{\partial}{\partial A^\alpha_j} \tag{2.3}$$

en donde $c^\alpha_{\beta\gamma}$ son las constantes de estructura: $[B_\beta, B_\gamma] = c^\alpha_{\beta\gamma} B_\alpha$.

DEMOSTRACIÓN. Estamos en un abierto coordenado $U \subset M$ trivializable, es decir, $\pi^{-1}(U) \cong U \times G$. Si $X \in \mathrm{aut}P$, para t suficientemente pequeño, su flujo tendrá la forma (*cf.* §1.1.3)

$$\Phi_t(x,g) = (\varphi_t(x), \phi_t(x) \cdot g),$$

en un cierto entorno $V \subset U$, para cierta familia de aplicaciones $\phi_t : V \to G$. Sea $\Gamma_x : T_xM \to (T_GP)_x$ un elemento de $C(P)_x$, $x \in V$. Si $\Gamma'_{\varphi_t(x)} = (\Phi_t)_C(\Gamma_x)$, su levantamiento horizontal (*cf.* fórmula (2.1)) tendrá por expresión

$$\Gamma'_{\varphi_t(x)}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j} - A_j^\alpha((\Phi_t)_C(\Gamma_x))\tilde{B}_\alpha, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Por otra parte, (Observación 2.1.1) tenemos

$$\omega_{\Gamma_{\varphi_T(X)}}(\Gamma'_{\varphi_t(x)}(\partial/\partial x^j)) = 0, \quad \forall j = 1, ..., n.$$

De la definición de Φ_C (Definición 2.3.1) se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= (\Phi_{-t})^*\omega_{\Gamma_x}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} - A_j^\alpha((\Phi_t)_C(\Gamma_x))\tilde{B}_\alpha\right) \\ &= \omega_{\Gamma_x}\left((\varphi_{-t})\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) - A_j^\alpha((\Phi_t)_C(\Gamma_x))(\Phi_{-t})\cdot\tilde{B}_\alpha\right). \end{aligned}$$

Derivando respecto t y evaluando en Γ_x,

$$0 = \omega_{\Gamma_x}\left([X, \partial/\partial x^j] - X_C(A_j^\alpha)\tilde{B}_\alpha - A_j^\alpha[X, \tilde{B}_\alpha]\right),$$

con $X = f^i\partial/\partial x^i + g^\alpha\tilde{B}_\alpha$. Desarrollando lo corchetes y teniendo en cuenta que $\widetilde{[B, B']} = -[\tilde{B}, \tilde{B}']$ (*cf.* Proposición 1.3.5) se tiene

$$0 = \omega_{\Gamma_x}\left(-\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} + \left(-\frac{\partial g^\alpha}{\partial x^j} - X_C(A_j^\alpha) - c_{\gamma\beta}^\alpha g^\beta A_j^\gamma\right)\tilde{B}_\alpha\right). \tag{2.4}$$

Si hacemos uso otra vez de $\omega_{\Gamma_x}(\Gamma_x(\partial/\partial x^i)) = 0$ y de la fórmula (2.1), podemos substituir $\omega_{\Gamma_x}(\partial/\partial x^i)$ por $\omega_{\Gamma_x}(A_i^\alpha\tilde{B}_\alpha)$ en la expresión (2.4) para obtener

$$0 = \omega_{\Gamma_x}\left(\left(-\frac{\partial f^i}{\partial x^j}A_i^\alpha - \frac{\partial g^\alpha}{\partial x^j} - X_C(A_j^\alpha) - c_{\gamma\beta}^\alpha g^\beta A_j^\gamma\right)\tilde{B}_\alpha\right),$$

lo que prueba que el vector entre paréntesis es horizontal en P respecto Γ_x. Ya que también es vertical (pues es combinación de $\tilde{B}_\alpha$), debe ser nulo y por tanto

$$X_C(A_j^\alpha) = -\left(\frac{\partial g^\alpha}{\partial x^j} - c_{\beta\gamma}^\alpha g^\beta A_j^\gamma + \frac{\partial f^i}{\partial x^j} A_i^\alpha\right).$$

Puesto que el campo X_C es proyectable a X' (*cf.* Observación 2.3.2) se tiene que $X_C(x^j) = f^j$, lo que finaliza la demostración.

c.q.d.

Proposición 2.3.4 *La aplicación*

$$\mathrm{aut}(P) \to \mathfrak{X}(C(P)), \quad X \mapsto X_C. \tag{2.5}$$

es un homomorfismo de álgebras de Lie.

DEMOSTRACIÓN. De la expresión local de X_C (ver fórmula (2.3)) se deduce directamente la $\mathbb{R}$-linealidad de la aplicación $X \mapsto X_C$. La propiedad

$$[X, Y]_C = [X_C, Y_C]$$

se puede deducir igualmente de (2.3), pero después de una muy larga serie de, por otra parte fáciles, cálculos. Sin embargo una demostración intrínseca y mucho más sencilla se derivará del Corolario 2.6.4 y la Proposición 2.6.5. por lo que no presentamos dicha deducción en coordenadas.

Nótese finalmente que la aplicación $X \mapsto X_C$ no es $C^\infty(M)$-lineal. Basta observar la expresión local de X_C para comprobarlo.

c.q.d.

Proposición 2.3.5 *El núcleo del homomorfismo* (2.5) *se puede identificar con el centro de* $\mathfrak{g}$.

DEMOSTRACIÓN. De la expresión local (2.3) se sigue que el núcleo se caracteriza por $f^i = 0$, $\partial g^\alpha/\partial x^i = 0$ (es decir, g^α constantes) y $c_{\beta\gamma}^\alpha g^\beta A_i^\gamma = 0$. Esta última ecuación indica que $[g^\beta \tilde{B}_\beta, A_i^\gamma \tilde{B}_\gamma] = 0$ para cualquier elección de valores A_i^γ. Como al ser g^α constantes constantes $g^\beta \tilde{B}_\beta = \widetilde{(g^\beta B_\beta)}$, podemos afirmar que $B = g^\beta B_\beta$ está en el centro de $\mathfrak{g}$ y que $X = \tilde{B} = B^*$.

c.q.d.

2.4 El fibrado de 1-*jets*

2.4.1 Definición

Se dice que dos secciones locales s, s' de un fibrado $\pi : E \to M$ definidas en un entorno de un punto $x \in M$ tiene el mismo 1-*jet* (y se denota por $j_x^1 s = j_x^1 s'$) si $s(x) = s'(x)$ y $s_* X = s'_* X$ para cualquier $X \in T_x M$. El espacio de clases de esta relación de equivalencia se le denota por $J^1 E$. Este conjunto tiene estructura de variedad diferenciable fibrada sobre E que denotaremos por

$$\pi_{10} : J^1 E \to E, \quad \pi_{10}(j_x^1 s) = s(x).$$

La composición $\pi \circ \pi_{10} = \pi_1 : J^1 E \to M$ vuelve a ser un fibrado que se llama *fibrado de* 1-jets *de* π (*cf.* [Sau, §4.1]).

2.4.2 Coordenadas en $J^1 E$

A partir de un abierto coordenado $(U; x^1, \ldots, x^n)$ en M tal que $\pi^{-1}(U)$ sea trivializable y un sistema de coordenadas $(V; y^j)$, $1 \leq j \leq m$, en la fibra tipo F del fibrado, se puede definir coordenadas $(x^i; y^j; y_i^j)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ de forma natural en $J^1 E|_U = \pi_1^{-1}(U)$ por la condición

$$y^j(j_x^1 s) = y^j(s(x)), \quad y_i^j(j_x^1 s) = (s^j)_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x = \frac{\partial s^j}{\partial x^i}(x).$$

Por tanto, si $n = \dim M$ y $m = \dim F$, la dimensión de $J^1 E$ es $n + m + n \cdot m$. (*cf.* [Sau, §4.2])

2.5 La identificación $(J^1 P)/G \simeq C(P)$

Consideremos ahora el fibrado de 1-*jets* de un G-fibrado principal $\pi : P \to M$. El grupo estructural G actúa por la derecha en $J^1 P$ definiendo

$$j_x^1 s \cdot g = j_x^1 (R_g \circ s), \tag{2.6}$$

para cualquier sección local s de π y cualquier $x \in M$, en donde recordemos $R_g : P \to P$ denota la translación por la derecha inducida por $g \in G$.

El espacio cociente $(J^1P)/G$ de dicha acción resulta ser una variedad diferenciable que se puede identificar con $C(P)$ (por ejemplo, ver [Gar1] para una descripción detallada de esta construcción). Someramente, la fibración $q : J^1P \to C(P)$ se define de la siguiente manera. Un elemento $j^1_x s \in J^1P$ determina un retracto $\Gamma_{s(x)} : T_{s(x)}P \to V_{s(x)}P$ de la inclusión $V_{s(x)}P \subset T_{s(x)}P$ poniendo

$$\Gamma_{s(x)}X = X - s_* (\pi_* X), \quad \forall X \in T_{s(x)}P.$$

Dado un $u \in \pi^{-1}(x)$ arbitrario, existe un único $g \in G$ tal que $s(x) \cdot g = u$. Definimos $\Gamma_u : T_uP \to V_uP$ como el trasladado de $\Gamma_{s(x)}$ por R_g, es decir, $\Gamma_u = (R_g)_* \circ \Gamma \circ (R_{g^{-1}})_*$. De esta manera, hemos obtenido una "conexión en el punto" $x \in M$, esto es, un elemento Γ_x de $C(P)$ que depende únicamente de $j^1_x s$. Ponemos por tanto $q(j^1_x s) = \Gamma_x$.

Proposición 2.5.1 ([Gar1]) *La fibración $q : J^1P \to C(P)$ es un fibrado principal de grupo estructural G. Además, la aplicación $j^1_x s \mapsto (q(j^1_x s), s(x))$ es un isomorfismo de G-fibrados principales entre J^1P y $C(P) \times_M P = p^*P$ (fibrado imagen inversa, ver* §1.1.1) *es decir, se tiene el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} J^1P = p^*P & \xrightarrow{\pi_{10}} & P \\ \downarrow^{q} & & \downarrow^{\pi} \\ C(P) & \xrightarrow{p} & M \end{array}$$

Observación 2.5.1 De una manera más geométrica, la identificación

$$(J^1P)/G = C(P)$$

se puede ver de la siguiente manera. Un elemento $j^1_x s$ de J^1P se puede identificar con la imagen $s_*(T_xM) \subset T_uP$, $u = s(x)$. Al ser s una sección local de π, este subespacio vectorial es un complementario "horizontal" H_uP de V_uP. Por otra parte, la acción de G en J^1P no es más que llevar este subespacio vectorial al subespacio $(R_g)_*(H_uP)$. Así, una clase de equivalencia de esta acción es una colección de subespacios horizontales G-invariantes a lo largo de $\pi^{-1}(x)$, es decir, un elemento de $C(P)_x$.

Observación 2.5.2 La idea de conexión se puede extender a cualquier fibrado $\pi : E \to M$ (no necesariamente principal). Basta eliminar en la definición de conexión toda propiedad que se derive del grupo estructural para obtener las llamadas *conexiones generalizadas*. En una versión análoga a la Definición II de §1.5, una conexión generalizada se define entonces como una distribución de subespacios horizontales complementarios a VE (*cf.* [MM, §3.5]). Es fácil comprobra que en este caso las conexiones están en biyección con las secciones globales del fibrado $J^1E \to M$ ([Sau, Proposition 4.6.3], [Sar, Definition 2.11]). Si $E = P$ es un G-fibrado principal, podemos recuperar el concepto usual de conexión (que básicamente consiste en añadir la condición de G-invariancia a la definición de conexión generalizada) simplemente tomando secciones $s : P \to J^1P$ equivariantes respecto la acción de G. Esto no es más que dar una sección $s : P/G = M \to J^1P/G = C(P)$, tal como se expresa en la Observación 2.3.1.

Observación 2.5.3 La identificación $(J^1P)/G = C(P)$ se puede usar como definición alternativa del fibrado de las conexiones tal como se hace, por ejemplo, en [Sar, §6.1], [Bet], [KMS, §17.4].

2.6 Transformaciones infinitesimales de contacto

Definición 2.6.1 ([Sau, §4.4]) Sea Φ un difeomorfismo proyectable de un fibrado principal $\pi : P \to M$ (esto es, existe un difeomorfismo φ en la base tal que $\pi \circ \Phi = \varphi \circ \pi$). La *prolongación de* Φ *a* J^1P es la aplicación $\Phi^{(1)} : J^1P \to J^1P$ definida por

$$\Phi^{(1)}(j^1_x s) = j^1_{\varphi(x)}(\Phi \circ s \circ \varphi^{-1}). \tag{2.7}$$

La aplicaión $\Phi^{(1)}$ es proyectable a M y a P; es decir, $\pi_1 \circ \Phi^{(1)} = \varphi \circ \pi_1$ y $\pi_{10} \circ \Phi^{(1)} = \Phi \circ \pi_{10}$.

Proposición 2.6.2 *La aplicación* $\mathrm{Aut}P \to \mathrm{Dif}J^1P$, $\Phi \mapsto \Phi^{(1)}$. *es un homomorfismo de grupos de Lie. Por otra parte, si* $\Phi \in \mathrm{Aut}(P)$, *la aplicación* $\Phi^{(1)}$ *es un automorfismo del fibrado principal* $J^1P \to C(P)$. *El difeomorfismo que induce en la base es* Φ_C, *es decir, se tiene que el siguiente digrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} J^1P & \xrightarrow{\Phi^{(1)}} & J^1P \\ \downarrow^q & & \downarrow^q \\ C(P) & \xrightarrow{\Phi_C} & C(P) \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Se comprueba que $\Phi^{(1)}$ admite como inversa a $(\Phi^{-1})^{(1)}$ y que $(\Phi \circ \Psi)^{(1)} = \Psi^{(1)} \circ \Phi^{(1)}$. Por otra parte,

$$\begin{aligned}\Phi^{(1)}(j^1_x s \cdot g) &= \Phi^{(1)}(j^1_x(R_g \circ s)) = j^1_{\phi(x)}(\Phi \circ R_g \circ s \circ \varphi^{-1}) \\ &= j^1_{\phi(x)}(R_g \circ \Phi \circ s \circ \varphi^{-1}) = j^1_{\phi(x)}(\Phi \circ s \circ \varphi^{-1}) \cdot g = \Phi^{(1)}(j^1_x s) \cdot g,\end{aligned}$$

por lo que Φ_C es un automorfismo.
Sea $j^1_x s \in J^1 P$ y sean $\Gamma_x = q(j^1_x s)$ y $\Gamma'_{x'} = q(\Phi^{(1)}(j^1_x s)) = q(j^1_{x'}(\Phi \circ s \circ \phi^{-1}))$, con $x' = \phi(x)$. Pongamos por último $\Gamma''_{x'} = \Phi_C(\Gamma_x)$.tenemos que probar entonces que $\Gamma''_{x'} = \Gamma'_{x'}$. Para un $X \in T_{\Phi(s(x))}P$ cualquiera, sean $B' = \omega_{\Gamma'_{x'}}(X)$ y $B'' = \omega_{\Gamma''_{x'}}(X) = ((\Phi^{-1})^* \omega_{\Gamma_x})(X)$, siendo ω_{Γ_x} la forma introducida en la Observación 2.1.1 de este capítulo. De la definición de q tenemos

$$B'^*_{\Phi(s(x))} = X - (\Phi \circ s \circ \phi^{-1})_* \pi_*(X) = \Phi_*(\Phi_*^{-1} X - s_* \pi_* \Phi_*^{-1} X) = \Phi_*(B''^*_{s(x)}).$$

Basta observar que para cualquier $B \in \mathfrak{g}$, se tiene que $\Phi_*(B^*_u) = B^*_{\Phi(u)}$ para concluir que $\omega_{\Gamma'_{x'}}(X) = B' = B'' = \omega_{\Gamma''_{x'}}(X)$.

c.q.d.

Definición 2.6.3 Sea $X \in \mathfrak{X}(P)$ un campo vectorial π-proyectable y sea $\{\Phi_t\}$ su flujo. Se define *la elevación de* X a J^1P, o *tranformación infinitesimal de contacto*, como el campo $X^{(1)}$ generado por el flujo $\{\Phi^{(1)}_t\}$.

Corolario 2.6.4 *Para todo* $X \in \mathrm{aut}(P)$, $X^{(1)}$ *es un campo* G*-invariante del fibrado* $q : J^1P \to C(P)$ *cuya proyeccion a* $C(P)$ *es* X_C.

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 2.6.2, el flujo de $X^{(1)}$ está formado por automorfismos. Por tanto $X^{(1)}$ es G-invariante. Como el difeomorfismo inducido en la base por $\Phi^{(1)}$ es Φ_C, la proyección de $X^{(1)}$ en $C(P)$ es X_C.

c.q.d.

Proposición 2.6.5 ([Mu, Théorème 5]) *Se tiene que* $(\pi_{10})_* X^{(1)} = X$ *y que la aplicación* $\mathrm{aut}P \to \mathfrak{X}(J^1P)$, $X \mapsto X^{(1)}$, *es un monomorfismo de álgebras de Lie.*

2.7 Formas de contacto

El fibrado de 1-*jets* de cualquier fibrado $E \to M$ está dotado con una 1-forma canonica con valores en el fibrado vertical VE que define la geometría de contacto de J^1E (*cf.* [Mu]). El caso en el que se trate de un fibrado principal, el fibrado VP es canónicamente isomorfo a $P \times \mathfrak{g}$ (Proposición1.3.3–(4)) por lo que se puede hacer que dicha forma de contacto tome valores en el álgebra $\mathfrak{g}$. Más concretamente

Definición 2.7.1 En J^1P se define una 1-forma θ con valores en $\mathfrak{g}$ de la siguiente manera: Para cualquier $Y \in T_{j^1_x s}(J^1P)$ tenemos que $(\pi_{10})_*Y - s_* \circ \pi_* \circ (\pi_{10})_*Y$ es un vector vertical en el punto $u = s(x) \in P$. Por tanto, existe un único $B \in \mathfrak{g}$ tal que

$$B^*_u = (\pi_{10})_*Y - s_* \circ \pi_* \circ (\pi_{10})_*Y.$$

Decimos entonces que $\theta(Y) = B$. Equivalentemente, θ es aquella 1-forma definida por la expresión

$$\theta(Y) = \omega_{\Gamma_x}((\pi_{10})_*Y), \quad \forall Y \in T_{j^1_x s}(J^1P),$$

siendo $\Gamma_x = q(j^1_x s)$ y ω_{Γ_x} la forma introducida en la Observación 2.1.1. Si $\{B_1, \dots, B_m\}$ es una base de $\mathfrak{g}$, esta forma se puede expresar como

$$\theta = \theta^\alpha \otimes B_\alpha,$$

en donde $\theta^1, \dots, \theta^m$ son 1-formas ordinarias globalmente definidas en J^1P llamadas *fomas de contacto estándar.*

Observación 2.7.1 La palabra *contacto* se refiere a la siguiente propiedad: dada cualquier sección local s del fibrado $\pi : P \to M$, se tiene que

$$(j^1s)^*\theta = 0, \tag{2.8}$$

siendo j^1s la sección local de $\pi_1 : J^1P \to M$ inducida por s. La comprobación de (2.8) es consecuencia directa de la definición de θ.

Proposición 2.7.2 *La forma θ verifica las siguientes propiedades:*

(a) $(\Phi^{(1)})^*\theta = \theta$, para cualquier $\Phi \in \mathrm{Aut}P$.

(b) $R_g^*\theta = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\theta$, $\forall g \in G$.

(c) Sea $B^\bullet$ el campo fundamental asociado a $B \in \mathfrak{g}$ en el fibrado $q : J^1P \to C(P)$. Entonces $L_{B^\bullet}\theta = [\theta, B]$.

(d) $\theta(B^\bullet) = B$, $\forall B \in \mathfrak{g}$.

DEMOSTRACIÓN. (a) Dado un $Y \in T_{j^1_x s}(J^1P)$ arbitrario sean $B = \theta(Y)$ y $\bar{B} = \left((\Phi^{(1)})^*\theta\right)(Y) = \theta(\Phi_*^{(1)}Y)$. Teniendo en cuenta que $\pi_{10} \circ \Phi^{(1)} = \Phi \circ \pi_{10}$ y que $\pi \circ \Phi = \phi \circ \pi$, obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{B}^*_{\Phi(s(x))} &= (\pi_{10})_*(\Phi_*^{(1)})Y - (\Phi \circ s \circ \phi^{-1})_*\pi_*(\pi_{10})_*(\Phi_*^{(1)})Y \\ &= \Phi_*\left((\pi_{10})_*Y - s_*\pi_*(\pi_{10})_*Y\right) = \Phi_*(B^*_{s(x)}). \end{aligned}$$

Por tanto $\bar{B}^*_{\Phi(s(x))} = \Phi_* B^*_{s(x)} = B^*_{\Phi(s(x))}$.
(b) Se tiene

$$\begin{aligned} (\pi_{10})_*(R_g^{(1)})_*Y &- (R_g \circ s)_*\pi_*(\pi_{10})_*(R_g^{(1)})_*Y \\ &= (R_g)_*(\pi_{10})_*Y - (R_g \circ s)_*\pi_*(R_g)_*(\pi_{10})_*Y \\ &= (R_g)_*\left[(\pi_{10})_*Y - s_*\pi_*(\pi_{10})_*Y\right] \\ &= (R_g)_*B^*_{s(x)} \\ &= (\mathrm{Ad}_{g^{-1}}B)^*. \end{aligned}$$

Por tanto $\left((R_g^{(1)})^*\theta\right)(Y) = (\mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \theta)(Y)$.
(c) Se sigue directamente de (b) una vez que se comprueba a partir de las fórmulas (2.6) y (2.7) que el flujo de $B^\bullet$ es $R^{(1)}_{\exp(tB)}$.
(d) Basta aplicar la definición de θ y tener en cuenta que $B^\bullet$ is π_{10}-proyectable a B^*.

c.q.d.

Corolario 2.7.3 *La forma θ es una forma de conexión del fibrado principal $q : J^1P \to C(P)$.*

Definición 2.7.4 ([Gar1]) La conexión en $q : J^1P \to C(P)$ definida por la forma θ se denota por κ y se llama *conexión canónica* en J^1P.

Observación 2.7.2 Sea Γ una conexión en P y sea $\sigma_\Gamma : M \to C(P)$ la sección del fibrado de las conexiones asociada a ella. Como $J^1P \cong C(P)\times_M P$ (cf. Proposición 2.5.1), definimos la sección $\tilde{\sigma}_\Gamma : P \to J^1P$ de la proyección π_{10} por la condición

$$\tilde{\sigma}_\Gamma(u) = (\sigma_\Gamma(\pi(u)), u).$$

La conexión κ se puede considerar como una *conexión universal* en el siguiente sentido:

Proposición 2.7.5 *Para cualquier conexión Γ en P se tiene que*

$$\tilde{\sigma}_\Gamma^*\theta = \omega_\Gamma,$$

es decir, la conexión Γ es imagen inversa de κ por el morfismo de fibrados principales $\tilde{\sigma}_\Gamma : P \to J^1P$ (cf. [KN, II.Proposition 6.2]).

DEMOSTRACIÓN. ([Garl, Theorem 3]) Dado $X \in T_uP$ arbitrario, de la definición de θ y de la proyección q, tenemos

$$((\tilde{\sigma}_\Gamma^*\theta)X)^* = (\theta((\tilde{\sigma}_\Gamma)_*X))^* = X - s_*\pi_*X = (\omega_{\Gamma_x}(X))^*,$$

en donde $\Gamma_x = q(j_x^1 s)$ y $j_x^1 s = \tilde{\sigma}_\Gamma(u)$.

c.q.d.

2.8 La estructura simpléctica de $C(P)$

2.8.1 Definición de la forma Ω_2

La forma de curvatura Ω_κ de la conexión canónica κ es una 2-forma $\mathfrak{g}$-valorada de tipo horizontal tal que $(R_g)^*\Omega_\kappa = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \Omega_\kappa$. A las formas con estas propiedades se les denomina *formas tensoriales de tipo adjunto*. Estas propiedades permiten definir una 2-forma Ω_2 en $C(P)$ con valores en $\mathrm{ad}J^1P = \mathrm{ad}(C(P)\times_M P) = p^*\mathrm{ad}P$ únicamente determinada por la condición

$$\Omega_2(p_*X, p_*Y) = (q(j_x^1 s), (s(x), \Omega_\kappa(X,Y))_{\mathrm{ad}}) = (j_x^1 s, \Omega_\kappa(X,Y))_{\mathrm{ad}}, \qquad (2.9)$$

para cualquier par de vectores tangente $X, Y \in T_{j_x^1 s}J^1P$.

Observación 2.8.1 Tal como se ha hecho con la forma de curvatura Ω_κ, cualquier forma tensorial de tipo adjunto en un fibrado principal define un forma en la base con valores en el adjunto. De hecho esta construcción define una biyeccción entre ambos tipos de formas. Para más detalles, ver [KN, II.§5], [MM, p.59].

Observación 2.8.2 De la propiedad universal que posee κ expuesta en la Proposición 2.7.5, se puede concluir que si Γ es una conexión en P, entonces la forma $\sigma_\Gamma^*(\Omega_2)$ es la 2-forma en M con valores en ad$P$ inducida por la forma de curvatura Ω_Γ. La forma Ω_2 se puede ver como una *curvatura universal.*

2.8.2 La ley de derivación canónica

Es bien conocido que una conexión Γ en un fibrado principal $\pi : P \to M$ induce una derivada covariante ∇^Γ en cualquier fibrado asociado a P. En nuestro caso, tenemos una conexión privilegiada κ en $q : J^1P \to C(P)$ que por tanto induce una ley de derivación $\nabla = \nabla^\kappa$ en las secciones de ad$J^1P = p^*$ad$P \to C(P)$. Esta ley de derivación se puede caracterizar intrínsecamente en $C(P)$ sin necesidad de recurrir a J^1P. En efecto, como las secciones de ad$P$ generan sobre $C^\infty(C(P))$ las secciones de p^*ad$P$, a fin de definir una ley de derivación es suficiente determinar $\nabla_X\xi$ para cualquier $X \in \mathfrak{X}(C(P))$, $\xi \in \Gamma(M, \mathrm{ad}P)$.

Proposición 2.8.1 *Con la notación introducida anteriormente se tiene:*

$$(\nabla_X\xi)_{\Gamma_x} = (\nabla^\Gamma_{p_*X}\xi)_x$$

para cualquier $\Gamma_x \in C(P)$ *y cualquier conexión* Γ *en* P *tal que* $\Gamma|_{\pi^{-1}(x)} = \Gamma_x$.

DEMOSTRACIÓN: Existe un correspondencia biunívoca entre secciones ξ de ad$P$ y aplicaciones $\Xi : P \to \mathfrak{g}$ de tipo adjunto, esto es,

$$\Xi(u \cdot g) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\Xi(u),$$

tal como se comento en la Observación 2.8.1. Si denoto por X^h la elevación horizontal del campo $X \in \mathfrak{X}(C(P))$ a J^1P por la conexión κ, entonces $X^h(\Xi)$ es la sección de tipo adjunto asociada a $\nabla_X\xi$ (por ejemplo ver [KN, III.Proposition 1.3.]). Sean $j^1_xs \in q^{-1}(\Gamma_x)$ y $u = s(x)$. Tenemos que

$\theta(X^h_{j^1_x s}) = 0$, lo que implica por la definición de θ que $(\pi_{10})_* X^h_{j^1_x s} \in T_u P$ es un vector horizontal respecto la conexión Γ. Como

$$\pi_*(\pi_{10})_* X^h_{j^1_x s} = p_* q_* X^h_{j^1_x s} = p_* X_{\Gamma_x},$$

resulta que además $(\pi_{10})_* X^h_{j^1_x s}$ es la subida horizontal de $(p_* X)_x$ a u. Por tanto $X^h_{\bar{u}}(\Xi \circ \pi_{10}) = ((\pi_{10})_* X^h_{\bar{u}})(\Xi) = (p_* X)^{h_\Gamma}(\Xi)$ lo que implica directamente la igualdad del enunciado.

c.q.d.

Observación 2.8.3 La ley de derivación

$$\nabla : \Omega^0(C(P), p^*\mathrm{ad}P) \to \Omega^1(C(P), p^*\mathrm{ad}P)$$

define directamente una diferencial exterior

$$\mathrm{d}^\nabla : \Omega^r(C(P), p^*\mathrm{ad}P) \to \Omega^{r+1}(C(P), p^*\mathrm{ad}P), \quad \forall r,$$

de formas en $C(P)$ con valores $p^*\mathrm{ad}P$ de manera canónica, tal como se define por ejemplo en [Kos]. En nuestro caso dicha diferencial se puede entender además como la proyección de la diferencial exterior covariante D^κ de J^1P definida por la conexión canónica κ, actuando sobre formas tensoriales de tipo adjunto, según la Observación 2.8.1.

Observación 2.8.4 Teniendo en cuenta la proposición anterior y la expresión local de la derivada covariante inducida por una conexión en una fibrado asociado (por ejemplo, véase [NS, §7.12]), se comprueba fácilmente que en un sistema de coordenadas como las introducidas en §2.2, la expresión en coordenadas de ∇ es

$$\nabla_{\partial/\partial x^j}\xi = \left(\frac{\partial g^\alpha}{\partial x^j} - c^\alpha_{\beta\gamma} g^\beta A^\gamma_j\right)\tilde{B}_\alpha, \quad \nabla_{\partial/\partial A^\beta_j}\xi = \frac{\partial g^\alpha}{\partial A^\beta_j}\tilde{B}_\alpha, \tag{2.10}$$

para $\xi = g^\alpha \tilde{B}_\alpha$; $g^\alpha \in C^\infty(C(P))$, $1 \le \alpha \le m$.

2.8.3 El endomorfismo E_X

Dado un $X \in \mathrm{aut}P$ sea $E_X : p^*\mathrm{ad}P \to p^*\mathrm{ad}P$ el endomorfismo definido como

$$E_X(\Gamma_x, \xi_x) = (\Gamma_x, [\xi_x, \{X^v\}_x]),$$

donde $\{X^v\}$ representa el campo *gauge* parte vertical de X por la conexión Γ_x (*cf.* Definición 2.1.1) pero visto como elemento del fibrado adjunto gracias a la identificación $\mathrm{gau}(P) = \Gamma(M, \mathrm{ad}P)$. El corchete tomado en la fibra $(\mathrm{ad}P)_x$ es el definido por la estructura en fibrado de álgebras de Lie que tiene el fibrado adjunto (*cf.* fórmula (1.6)).

Lema 2.8.2 *La aplicación* $\mathcal{E}_X : J^1P \times \mathfrak{g} \to J^1P \times \mathfrak{g}$ *definida por*

$$\mathcal{E}_X(j^1_x s, B) = (j^1_x s, -[B, \theta(X^{(1)}_{j^1_x s})])$$

es equivariante respecto a la acción de G *en* $J^1P \times \mathfrak{g}$ *y proyecta a la aplicación* E_X.

DEMOSTRACIÓN. Sea g un elemento de G arbitrario. Teniendo en cuenta el apartado (b) de la Porposición 2.7.2, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_X(j^1_x s \cdot g, \mathrm{Ad}_{g^{-1}} B) &= (j^1_x s \cdot g, -[\mathrm{Ad}_{g^{-1}} B, \theta(X^{(1)}_{j^1_x s \cdot g})]) \\
&= (j^1_x s \cdot g, -[\mathrm{Ad}_{g^{-1}} B, \theta((R_g)_* X^{(1)}_{j^1_x s \cdot g})]) \\
&= (j^1_x s \cdot g, -[\mathrm{Ad}_{g^{-1}} B, \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \theta(X^{(1)}_{j^1_x s})]) \\
&= (j^1_x s \cdot g, -\mathrm{Ad}_{g^{-1}} [B, \theta(X^{(1)}_{j^1_x s})]) \\
&= (j^1_x s, -[B, \theta(X^{(1)}_{j^1_x s})]) \cdot g,
\end{aligned}$$

y por tanto $\mathcal{E}_X$ proyecta a un endomorfismo E'_X en $(J^1P \times \mathfrak{g})/G = \mathrm{ad}(J^1P) = p^*\mathrm{ad}P$. Sea $\Gamma_x = q(j^1_x s)$, $u = s(x)$ y sea $\xi_x = (u, B)_{\mathrm{ad}}$ un vector de la fibra $(\mathrm{ad}P)_x$. Finalmente se verifica:

$$\begin{aligned}
E'_X(\Gamma_x, \xi_x) &= (\Gamma_x, (u, -[B, \theta(X^{(1)}_{j^1_x s \cdot g})])_{\mathrm{ad}}) \\
&= (\Gamma_x, [(u, B)_{\mathrm{ad}}, (u, \theta(X^{(1)}_{j^1_x s}))_{\mathrm{ad}}]) \\
&= (\Gamma_x, [\xi_x, (u, \omega_{\Gamma_x}(X_u))_{\mathrm{ad}}]) \\
&= (\Gamma_x, [\xi_x, \{X^v\}_x]) \\
&= E_X(\Gamma_x, \xi_x),
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado

$$\theta(X^{(1)}_{j^1_x s}) = \omega_{\Gamma_x}(X_u),$$

consecuencia directa de la definición de θ y de la Observación 2.1.1.

c.q.d.

2.8.4 Caracterización de Ω_2

A continuación vamos a dar una caracterización de Ω_2 directamente en términos del fibrado $p : C(P) \to M$ sin necesidad de recurrir a la curvatura Ω_κ.

Teorema 2.8.3 *La forma 2-forma Ω_2 con valores en $p^*\mathrm{ad}P$ es la única que verifica las siguientes propiedades:*

(a) *Las fibras de $p : C(P) \to M$ son subvariedades isótropas con respecto a Ω_2, es decir, $\Omega_2(Y, Z) = 0$ para cualquier par de vectores Y, Z p-verticales.*

(b) *Si $\tau_\omega : C(P) \to C(P)$ es la traslación respecto a la estructura afín del fibrado $C(P)$ definida por una 1-forma ω cualquiera en M con valores en $\mathrm{ad}P$. entonces*

$$\tau_\omega^*\Omega_2 = \Omega_2 + \mathrm{d}^\nabla p^*\omega + \frac{1}{2}p^*[\omega, \omega],$$

en donde d^∇ es la diferencial exterior definida por la ley de derivación ∇ (cf. Observación 2.8.3).

(c) *Para cualquier $X \in \mathrm{aut}(P)$ se tiene*

$$L^\nabla_{X_C}\Omega_2 = E_X \circ \Omega_2,$$

siendo $L^\nabla_Y = i_Y \circ \mathrm{d}^\nabla + \mathrm{d}^\nabla \circ i_Y$ y $E_X : p^*\mathrm{ad}P \to p^*\mathrm{ad}P$ el endomorfismo defnido en §2.8.3.

DEMOSTRACIÓN. Primero probemos que la forma Ω_2 verifica las porpiedades (a)–(c) del enuncuado.
(a) Sean Y^h, Z^h son las elevaciones horizontales a J^1P de Y, Z respectivamente respecto la conexión canónica κ. Entonces $\pi_*(\pi_{10})_*Y^h = p_*q_*Y^h = 0$, es decir, $(\pi_{10})_*Y^h$. e igualmente $(\pi_{10})_*Z^h$, son π-verticales. Por otra parte, como $0 = \theta(Y^h_{j^1_x s})$, por la definición de θ se tiene

$$0 = (\pi_{10})_*Y^h_{j^1_x s} - s_*(\pi \circ \pi_{10})_*Y^h_{j^1_x s} = (\pi_{10})_*Y^h_{j^1_x s},$$

es decir, Y^h, Z^h (y por tanto $[Y^h, Z^h]$) son π_{10}-verticales. De la definición de Ω_2, para $\Gamma_x = q(j^1_x s)$, se tiene finalmente que

$$\Omega_2(Y_{\Gamma_x}, Z_{\Gamma_x}) = (j^1_x s, \Omega_\kappa(Y^h_{j^1_x s}, Z^h_{j^1_x s}))_{\mathrm{ad}} = (j^1_x s, -\theta([Y^h_{j^1_x s}, Z^h_{j^1_x s}]))_{\mathrm{ad}} = 0.$$

(b) La 1-forma ω con valores en ad$P$ proviene, tal como se dijo en la Observación 2.8.1, de una forma tensorial $\tilde{\omega}$ en P de tipo adjunto. Por otra parte, se define la aplicación

$$T_\omega : J^1P \to J^1P$$

como aquella que envía un elemento $j^1_x s$ al 1-*jet* $j^1_x s'$, siendo s' es cualquier sección local que verifique $s'(x) = s(x)$ y $s'_*(X) = s_*(X) - \omega(X)_{s(x)}$, $\forall X \in T_xM$, en donde se ha identificado $\omega(X) \in (\mathrm{ad}P)_x$ con un campo gauge a lo largo de $\pi^{-1}(x)$ gracias a la identificación gau$P \simeq \Gamma(M, \mathrm{ad}P)$ (ver Proposición 1.4.6). Es directo comprobar que $T_\omega \circ R_g = R_g \circ T_\omega$ (esto es, T_ω es un automorfismo del fibrado principal $q : J^1P \to C(P)$) y que T_ω induce el difeomorfismo τ_ω en la base $C(P)$. Por otra parte

$$\begin{aligned}(\pi_{10})_*(T_\omega)_*X - (s')_*(\pi)_*(\pi_{10})_*(T_\omega)_*X = \\ (\pi_{10})_*X - (s)_*(\pi)_*(\pi_{10})_*X + \omega((\pi)_*(\pi_{10})_*X)_{s(x)}.\end{aligned}$$

De la definición de θ, la última fórmula implica que $(T_\omega)^*\theta = \theta + (\pi_{10})^*\tilde{\omega}$. Entonces

$$\begin{aligned}(T_\omega)^*\Omega_\kappa &= (T_\omega)^*\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2}[(T_\omega)^*\theta, (T_\omega)^*\theta] = \mathrm{d}\theta + \mathrm{d}(\pi_{10})^*\tilde{\omega} \qquad (2.11)\\ &\quad +\frac{1}{2}[\theta, \theta] + \frac{1}{2}[(\pi_{10})^*\tilde{\omega}, (\pi_{10})^*\tilde{\omega}] + [\theta, (\pi_{10})^*\tilde{\omega}]\\ &= \Omega_\kappa + \mathrm{D}(\pi_{10})^*\tilde{\omega} + \frac{1}{2}[(\pi_{10})^*\tilde{\omega}, (\pi_{10})^*\tilde{\omega}],\end{aligned}$$

en donde hemos usado la identidad $\mathrm{D}\zeta = \mathrm{d}\zeta + [\theta, \zeta]$ para cualquier forma tensorial de tipo adjunto (*cf.* [Ble, Corollary 3.1.6]), siendo D=D$^\kappa$ diferencial exterior covariante, en nuestro caso definida en el fibrado J^1P por la conexión canónica κ. La fórmula (2.11), cuando se lee como formas en $C(P)$ con valores en $p^*(\mathrm{ad}P)$ no es más que el apartado (b) del Teorema.

(c) Tal como se vió en la Proposición 2.7.2-(a), la forma de conexión θ, y por tanto su curvatura $\Omega_\kappa = \mathrm{d}\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta]$, son invariantes por la representación del grupo Aut$P$ en J^1P. Esto implica que $\mathrm{L}_{X^{(1)}}\Omega_\kappa = 0$, $\forall X \in$ aut$P$. Teniendo en cuenta la identidad de Bianchi $\mathrm{D}\Omega_\kappa = \mathrm{d}\Omega_\kappa + [\theta, \Omega_\kappa] = 0$, esta invariancia por automorfismos quiere decir

$$\begin{aligned}0 &= i_{X^{(1)}}(\mathrm{d}\Omega_\kappa) + \mathrm{d}(i_{X^{(1)}}\Omega_\kappa)\\ &= -i_{X^{(1)}}([\theta, \Omega_\kappa]) + \mathrm{D}(i_{X^{(1)}}\Omega_\kappa) - [\theta, i_{X^{(1)}}\Omega_\kappa]\\ &= -[\theta(X^{(1)}), \Omega_\kappa] + \mathrm{D}(i_{X^{(1)}}\Omega_\kappa),\end{aligned}$$

donde volvemos a hacer uso de la formula $\mathrm{D}\zeta = \mathrm{d}\zeta + [\theta, \zeta]$. Si ahora tenemos en cuenta el Lema 2.8.2 y que la identidad de Bianchi $\mathrm{D}\Omega_\kappa = 0$ leída como formas en $C(P)$ con valores en el adjunto toma la expresión $\mathrm{d}^\nabla \Omega_2 = 0$ (en efecto, véase la Observación 2.8.3) podemos concluir finalmente que

$$\mathrm{L}^\nabla_{X_C}\Omega_2 = \mathrm{d}^\nabla(i_{X_c}\Omega_2) = E_X \circ \Omega_2.$$

Una vez se ha comprobado que Ω_2 verifica las condiciones (a)–(c), sólo queda ver la unicidad. Sea Δ_2 una 2-forma en $C(P)$ con valores $p^*\mathrm{ad}P$ que verifique las propiedades del Teorema. Tomando coordenadas en $C(P)$ como las introducidas en §2.2 e imponiendo la condición (a), la diferencia $\Delta_2 - \Omega_2$ puede ser escrita

$$\Delta_2 - \Omega_2 = (\Phi^\alpha_{jk}\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k + \Psi^{\alpha k}_{\beta j}\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}A^\beta_k) \otimes \tilde{B}_\alpha,$$

para ciertas funciones $\Phi^\alpha_{jk}, \Psi^{\alpha k}_{\beta j} \in C^\infty(C(P))$. Si $\omega = f^\alpha_i \mathrm{d}x^i \otimes \tilde{B}_\alpha$ es la expresión local de la 1-forma ω, es sencillo comprobar que las ecuaciones de la traslación $\tau_\omega : C(P) \to C(P)$ son

$$\tau_\omega(A^\alpha_j) = A^\alpha_j + f^\alpha_j. \tag{2.12}$$

La condición (b) del teorema implica $\tau^*(\Delta_2 - \Omega_2) = \Delta_2 - \Omega_2$, que expresado en estas coordenadas es

$$\begin{aligned} ((\Phi^\alpha_{jk} \circ \tau_\omega)\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k + (\Psi^{\alpha k}_{\beta j} \circ \tau_\omega)\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}(A^\beta_k + f^\beta_k)) \otimes \tilde{B}_\alpha \\ = (\Phi^\alpha_{jk}\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k + \Psi^{\alpha k}_{\beta j}\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}A^\beta_k) \otimes \tilde{B}_\alpha, \end{aligned} \tag{2.13}$$

para cualquier elección de funciones $f^\beta_k \in C^\infty(M)$, $1 \le k \le n$, $1 \le \beta \le m$. De esta igualdad se deduce directamente que $\Psi^{\alpha k}_{\beta j} \circ \tau_\omega = \Psi^{\alpha k}_{\beta j}$, y tomando f^β_k funciones constantes, que $\Phi^\alpha_{jk} \circ \tau_\omega = \Phi^\alpha_{jk}$. En vista de (2.12), se puede concluir por tanto, $\Psi^{\alpha k}_{\beta j}$, $\Phi^\alpha_{jk} \in C^\infty(M)$, $\forall \alpha$, β, j, k. Entonces (2.13) se reduce a

$$\Psi^{\alpha k}_{\beta j}\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}f^\beta_k = 0, \quad \forall \alpha. \tag{2.14}$$

Si fijamos unos índices k_0, i_0, β y tomamos ahora $f^\beta_k = \delta^\beta_{\beta_0}\delta^{k_0}_k x^{i_0}$, la igualdad (2.14) implica $\Psi^{\alpha k_0}_{\beta_0 j} = 0$, $j \neq i_0$, para cualquier α, k_0, i_0, β y por tanto se concluye que

$$\Delta_2 - \Omega_2 = (\Phi^\alpha_{jk}\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k) \otimes \tilde{B}_\alpha,\ \Phi^\alpha_{jk} \in C^\infty(M),$$

esto es, $\Delta_2 - \Omega_2$ es una 2-forma en M con valores en ad$P$. Para finalizar, si $X \in \mathrm{aut}P$ y $X' = \pi_* X$, la condición (c) afirma que

$$\mathrm{L}^{\nabla}_{X'}(\Delta_2 - \Omega_2) = E_X \circ (\Delta_2 - \Omega_2). \tag{2.15}$$

Si se toma en particular un $X \in \mathrm{gau}P$, entonces $X' = 0$ y tenemos $E_X \circ (\Delta_2 - \Omega_2) = 0$. De la definición E_X (ver §2.8.3), obtenemos

$$[\Delta_2 - \Omega_2, \{X\}] = 0, \ \forall X \in \mathrm{gau}P.$$

Esto es posible únicamente si $(\Delta_2 - \Omega_2)_x$ toma valores siempre en el centro de $(\mathrm{ad}P)_x$ para todo $x \in M$. Entonces, el segundo miembro de (2.15) es idénticamente cero y por tanto nos queda $\mathrm{L}^{\nabla}_{X'}(\Delta_2 - \Omega_2) = 0$ para todo $X \in \mathrm{aut}(P)$, o si se quiere, en vista de la suceción exacta (1.15), para todo $X' \in \mathfrak{X}(M)$. Esto sólo es posible si $\Delta_2 - \Omega_2 = 0$.

c.q.d.

Observación 2.8.5 La expresión local de la forma Ω_2 en las coordenadas definidas en §2.2 viene dada por

$$\Omega_2 = \{\mathrm{d}A^{\alpha}_j \wedge \mathrm{d}x^j + c^{\alpha}_{\beta\gamma} A^{\beta}_j A^{\gamma}_k \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k\} \otimes \tilde{B}_{\alpha}. \tag{2.16}$$

En efecto basta comprobar que así definida Ω_2 verifica la caracterización del Teorema 2.8.3, tal como se hace en [CM1].

2.9 Estructura hamiltoniana asociada a Ω_2

Estudiemos primero la polaridad asociada a la forma Ω_2, esto es, la aplicación

$$\chi : T(C(P)) \to T^*(C(P)) \otimes p^*\mathrm{ad}P$$

dada por $\chi(Y) = i_Y \Omega_2$.

Un elemento $w \in T^*_{\Gamma_x} C(P) \otimes (\mathrm{ad}P)_x$ es una 1-forma con valores en $(\mathrm{ad}P)_x$. Como $p : C(P) \to M$ es un fibrado afín modelado sobre $T^*M \otimes \mathrm{ad}P$, el subfibrado vertical del $T(C(P))$ se puede identificar con el *pull-back* de $T^*M \otimes \mathrm{ad}P$ por la aplicación p, es decir,

$$V(C(P)) = p^*(T^*M \otimes \mathrm{ad}P) = C(P) \times_M (T^*M \otimes \mathrm{ad}P).$$

Por tanto, la restricción de w a $V_{\Gamma_x}(C(P))$ define de manera natural una aplicación lineal

$$\bar{w} : T_x^* M \to \mathrm{End}(\mathrm{ad}P)_x,$$

o lo que es lo mismo, define un vector tangente en $x \in M$ con valores en $\mathrm{End}(\mathrm{ad}P)_x$. Caractericemos ahora la imagen de la polaridad χ.

Proposición 2.9.1 *Con la notación anteriormente introducida, la aplicación χ es un monomorfismo de fibrados vectoriales sobre $C(P)$ cuya imagen está formada por aquellos covectores w tales que* $\mathrm{Im}(\bar{w})$ *está contenida en los múltiplos escalares de la identidad; es decir, $\bar{w} \in T_x M$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$Y = \lambda^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\Gamma_x} + \lambda_j^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial A_j^\alpha}\right)_{\Gamma_x}, \quad \lambda^j, \lambda_j^\alpha \in \mathbb{R},$$

un vector tangente en $\Gamma_x \in C(P)$. De la expresión local de Ω_2 (formula (2.16)), se obtiene

$$\chi(Y) = \left(c_{\mu\gamma}^\alpha \lambda^k A_k^\mu A_j^\gamma dx^j + \lambda_j^\alpha dx^j - \lambda^j dA_j^\alpha\right)_{\Gamma_x} \otimes \tilde{B}_\alpha.$$

Se deduce directamente que $\ker\chi = 0$ y que

$$\overline{\chi(Y)} = -\lambda^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\Gamma_x},$$

por lo que $\overline{\chi(Y)}$ es un vector tangente.

c.q.d.

Estudiemos a continuación la ecuación de Hamilton (véase, por ejemplo, [MR, Definition 5.4.1]) que define la forma Ω_2 :

$$i_Y \Omega_2 = \mathrm{d}^\nabla H, \tag{2.17}$$

para $Y \in \mathfrak{X}(C(P))$, siendo d^∇ la diferencial exterior con respecto a la ley de derivación canónica. Al ser Ω_2 una forma simpléctica con valores en el fibrado vectorial $p^*\mathrm{ad}P$, el hamiltoniano H ya no es una función diferenciable como en el caso clásico, sino que H es ahora una sección de dicho fibrado. Como $p^*\mathrm{ad}P$ es el fibrado adjunto del fibrado principal $q : J^1P \to C(P)$ (Proposición 2.5.1), las secciones H vamos a entenderlas en lo que sigue como campos *gauge* del fibrado $J^1P \to C(P)$ a través de la identificación $\mathrm{gau}J^1P = \Gamma(C(P), p^*\mathrm{ad}P)$ (Proposición 1.4.6).

Proposición 2.9.2 *Para* $\mathrm{dim}G \geq 2$; *las parejas* (Y, H) *que verifican* (2.17) *son de la forma*

$$Y = X_C; \qquad H = -(X^{(1)})^v,$$

con $X \in \mathrm{aut}P$, *en donde* $(X^{(1)})^v$ *denota la parte vertical del campo* $X^{(1)}$ *respecto a la conexion canónica* κ; i.e., $(X^{(1)})^v = X^{(1)} - (X_C)^h = (\theta(X^{(1)}))^*$.

DEMOSTRACIÓN. Sean

$$Y = f^j \frac{\partial}{\partial x^j} + f_j^\alpha \frac{\partial}{\partial A_j^\alpha}, \quad H = h^\alpha \otimes \tilde{B}_\alpha \tag{2.18}$$

las expresiones locales de Y y H respectivamente. Teniendo en cuenta la expresión (2.16), se obtiene

$$i_Y \Omega_2 = \left(c_{\gamma\beta}^\alpha A_j^\beta A_k^\gamma f^k \mathrm{d}x^j + f_j^\alpha \mathrm{d}x^j - f^j \mathrm{d}A_j^\alpha \right) \otimes \tilde{B}_\alpha.$$

Por otra parte, considerando ahora la expresión de la ley de derivación canónica (2.10), tenemos

$$\mathrm{d}^\nabla H = \left(\mathrm{d}h^\alpha + c_{\gamma\beta}^\alpha A_j^\gamma h^\beta \mathrm{d}x^j \right) \otimes \tilde{B}_\alpha.$$

Igualando las dos últimas expresiones, obtenemos la ecuación de Hamilton (2.17) en coordenadas, la cual se expresa mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\delta_\beta^\alpha f^j = -\frac{\partial h^\alpha}{\partial A_j^\beta} \quad \forall \alpha, \beta = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n, \tag{2.19}$$

$$f_j^\alpha = \frac{\partial h^\alpha}{\partial x^j} + c_{\gamma\beta}^\alpha A_j^\gamma h^\beta + c_{\beta\gamma}^\alpha A_j^\beta A_k^\gamma f^k \tag{2.20}$$

Directamente de (2.19) se deduce

$$\frac{\partial f^j}{\partial A_k^\beta} = -\frac{\partial^2 h^\alpha}{\partial A_j^\alpha \partial A_k^\beta} = 0, \quad \forall j, k, \forall \alpha \neq \beta, \tag{2.21}$$

esto es, las funciones h^α no pueden ser arbitrarias y además $f^j \in C^\infty(M)$, $1 \leq j \leq n$. Es sencillo ver que el sistema de ecuaciones en derivadas parciales (2.21) es completamente integrable y que sus soluciones son de la forma

$$h^\alpha = -f^j A_j^\alpha - g^\alpha, \quad 1 \leq \alpha \leq m \tag{2.22}$$

para ciertas $g^\alpha \in C^\infty(M)$. Si sustituimos estas condiciones en (2.20) se tiene

$$f_j^\alpha = -\frac{\partial g^\alpha}{\partial x^j} + c^\alpha_{\beta\gamma} A_j^\gamma g^\beta - \frac{\partial f^k}{\partial x^j} A_k^\alpha. \tag{2.23}$$

Basta observar las expresiones (2.3) y (2.18) para concluir que $Y = X_C$, con $X = f^i(\partial/\partial x^i) + g^\alpha \tilde{B}_\alpha$. Por otra parte, para $j_x^1 s \in q^{-1}(\Gamma_x)$, $u = s(x)$, de la definición de θ (§2.7) y de las coordenadas A_j^α (2.1), tenemos

$$(\theta(X^{(1)}_{j_x^1 s}))^*_u = X_u - (\pi_* X_u)^{h_\Gamma} = (f^j A_j^\alpha(\Gamma) + g^\alpha) \otimes \tilde{B}_\alpha.$$

Entonces $(X^{(1)})^v_{j_x^1 s} = (\theta(X^{(1)}_{j_x^1 s}))^*_{j_x^1 s} = (f^j A_j^\alpha + g^\alpha) \otimes \tilde{B}_\alpha$, por lo que de (2.22) se concluye que $H = -(X^{(1)})^v$.

c.q.d.

Observación 2.9.1 Si $\dim G = 1$, el paso (2.21) de la anterior demostración no puede darse. En este caso, la expresión local de la ecuación de Hamilton (fórmulas (2.19), (2.20)) toma su forma usual de la mecánica clásica

$$f_j = \frac{\partial h}{\partial x^j}, \qquad f^j = -\frac{\partial h}{\partial A_j}, \tag{2.24}$$

la cual no impone ninguna restricción sobre el hamiltoniano $H = h \otimes \tilde{B}$. Para cualquier h, el sistema (2.24) tiene solución. De hecho, para $\dim G = 1$, el rango del fibrado ad$P$ es 1 y entonces la Proposición 2.9.1 nos asegura que la polaridad χ es suprayectiva. Por tanto cualquier $\mathrm{d}^\nabla H$ es la imagen de un campo vectorial Y.

Capítulo 3

Invariancia en J^1P

3.1 Formas invariantes en J^1P

Definición 3.1.1 Dado un fibrado principal $\pi : P \to M$, se dice que una r-forma diferencial Ξ_r de J^1P es invariante por transformaciones *gauge* infinitesimales (abreviadamente, *gauge invariante*) si

$$L_{X^{(1)}}\Xi_r = 0, \tag{3.1}$$

para cualquier transformación gauge infinitesimal $X \in \mathrm{gau}P.$, siendo $X^{(1)}$ el levantamiento de X al fibrado J^1P (véase la Definición 2.6.3).
El conjunto de formas gauge invariantes forma una subálgebra de $\Omega^\bullet(J^1P)$ que denotaremos por $\mathcal{I}^{(1)}_{\mathrm{gau}P}$.
Análogamente, una forma $\Xi_r \in \Omega^r(J^1P)$ se dice que es invariante por automorfismos infinitesimales (abreviadamente, $\mathrm{aut}P$-invariante) si la identidad (3.1) es cierta para cualquier $X \in \mathrm{aut}P$.
El conjunto de formas $\mathrm{aut}P$-invariantes forman una subálgebra de $\mathcal{I}^{(1)}_{\mathrm{gau}P}$ que denotaremos por $\mathcal{I}^{(1)}_{\mathrm{aut}P}$.

Proposición 3.1.2 *Si el grupo estructural G es conexo, un forma diferencial Ξ_r de J^1P es* gauge *invariante si y sólo si*

$$(\Phi^{(1)})^*\Xi_r = \Xi_r, \tag{3.2}$$

para cualquier $\Phi \in \mathrm{Gau}P$.

DEMOSTRACIÓN. Evidentemente si (3.2) es cierto $\forall\Phi \in \mathrm{Gau}P$, como

$$L_{X^{(1)}}\Xi_r = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\Phi_t^{(1)})^*\Xi_r, \tag{3.3}$$

siendo Φ_t el flujo de $X \in \mathrm{gau}P$, se cumple (3.1) y tenemos que Ξ_r es *gauge* invariante. Viceversa, si tenemos $L_{X^{(1)}}\Xi_r = 0$, por (3.3), se cumplirá que

$$(\Phi_t^{(1)})^*\Xi_r = \Xi_r, \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Dada una transformación *gauge* $\Phi \in \mathrm{Gau}P$ arbitraria, en virtud a la Proposición 1.4.4. queda determinadada unívocamente una aplicación $\tilde{\Phi} : P \to G$ equivariante frente a las acciones de G en P y en sí mismo por conjugación. Debido a que la expresión (3.2) representa un propiedad local, podemos suponer que estamos en un abierto trivializable $\pi^{-1}(U) \cong U \times G$. Es conocido (véase, por ejemplo, [Var, Remark 2, p.88]) que en un grupo de Lie, la imagen de la función exp genera la componente conexa de la identidad (o el total si el grupo es conexo). Por tanto, localmente $\tilde{\Phi}(x, e)$ se puede poner como $\exp\xi_1 \cdot \ldots \cdot \exp\xi_k$, para cierto k, con $\xi_i \in C^\infty(U)$. Sean $\chi_i : U \to \mathrm{ad}P|_U$, $1 \le i \le k$, secciones del fibrado adjunto, definidas como $\chi_i(x) = ((x, e), \xi_i(x))_{\mathrm{ad}}$. Por la Proposición 1.4.6, cada χ_i representa un campo *gauge* en $\pi^{-1}(U)$ y es sencillo comprobar que su flujo $\{\Phi_{i,t}\}_{t\in\mathbb{R}}$ verifica $\tilde{\Phi}_{i,1}(x, e) = \exp\xi_i$, $1 \le i \le k$. Por (3.4) se tiene

$$(\Phi^{(1)})^* = (\Phi_{k,1}^{(1)})^* \ldots (\Phi_{1,1}^{(1)})^*\Xi_r = \Xi_r,$$

concluyéndose.

c.q.d.

3.2 Ejemplos

Ejemplo 3.2.1 Sea v_r una r-forma diferencial en la variedad base M. Entonces, para un campo $X \in \mathrm{aut}P$ arbitrario, tenemos

$$L_{X^{(1)}}\pi_1^* v_r = \pi_1^* L_{(\pi_1)_* X^{(1)}} v_r,$$

pues $X^{(1)}$ es π_1-proyectable, siendo $\pi_1 : J^1P \to M$. Como $\pi_1 = \pi \circ \pi_{10}$ y $(\pi_{10})_* X^{(1)} = X$, tenemos entonces

$$L_{X^{(1)}}\pi_1^* v_r = \pi_1^*(L_{\pi^* X} v_r). \tag{3.5}$$

En particular, si $X \in \mathrm{gau}P$, $\pi_* X = 0$ y tenemos que $L_{X^{(1)}}\pi_1^* \upsilon_r = 0$, es decir, el conjunto $\pi_1^*\Omega^\bullet(M) = \{\pi_1^*\upsilon \mid \upsilon \in \Omega^\bullet(M)\} \subset \Omega^\bullet(J^1(P))$ es una subálgebra de $\mathcal{I}^{(1)}_{\mathrm{gau}P}$.

Ejemplo 3.2.2 Sea θ la forma de conexión canónica del fibrado $q : J^1P \to CP$ (*cf.* §2.7) y sean $\theta^1, \dots, \theta^m$ las formas de contacto estándar asociadas a la elección de una base $\{B_1, \dots, B_m\}$ de $\mathfrak{g}$ (es decir, $\theta = \theta^\alpha \otimes B_\alpha$). En virtud de las Proposiciones 2.7.2–(a) y 3.1.2, tenemos

$$L_{X^{(1)}}\theta^\alpha = 0, \quad \forall X \in \mathrm{aut}P,$$

es decir, las formas de contacto estándar son formas $\mathrm{aut}P$-invariantes y en particular *gauge* invariantes.

Ejemplo 3.2.3 Debido a que la derivada de Lie conmuta con la diferencial exterior, si Ξ_r es una forma *gauge* invariante (resp. $\mathrm{aut}P$-invariante), la forma $\mathrm{d}\Xi_r$ es también *gauge* invariante (resp. $\mathrm{aut}P$-invariante). Las subálgebras

$$\mathcal{I}^{(1)}_{\mathrm{gau}P} \text{ y } \mathcal{I}^{(1)}_{\mathrm{aut}P}$$

son cerradas bajo la diferencial exterior.

Ejemplo 3.2.4 Si Ω_κ es la forma de curvatura de la conexión canónica y Ω^α_κ son sus componentes respecto de la base $\{B_1, \dots, B_m\}$ de $\mathfrak{g}$ (es decir, $\Omega_\kappa = \Omega^\alpha \otimes B_\alpha$), entonces, de la misma definición $\Omega_\kappa = \mathrm{d}\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta]$, tenemos

$$\Omega^\alpha = \mathrm{d}\theta^\alpha + \frac{1}{2}c^\alpha_{\beta\gamma}\theta^\beta \wedge \theta^\gamma. \tag{3.6}$$

Por los Ejemplos 3.2.2 y 3.2.3, se concluye que las formas Ω^α, $1 \le \alpha \le m$, son formas $\mathrm{aut}P$-invariantes y, en particular, *gauge* invariantes.

Con los Ejemplos 3.2.1, 3.2.2 y 3.2.4 podemos construir unos subconjuntos especiales de $\mathcal{I}^{(1)}_{\mathrm{gau}P}$ y $\mathcal{I}^{(1)}_{\mathrm{aut}P}$ respectivamente. Sean

$$\mathcal{A}^{(1)}_{\mathrm{gau}P} = \pi_1^*\Omega^\bullet(M)[\theta^1, \dots, \theta^m, \Omega^1, \dots \Omega^m], \tag{3.7}$$

esto es, la subálgebra de $\Omega^\bullet(J^1P)$ formada por expresiones polinómicas en las formas θ^α, Ω^α, $1 \le \alpha \le m$, con coeficientes en $\pi_1^*\Omega^\bullet(M)$, y

$$\mathcal{A}^{(1)}_{\mathrm{aut}P} = \mathbb{R}[\theta^1, \dots, \theta^m, \Omega^1, \dots \Omega^m], \tag{3.8}$$

la subálgebra de $\Omega^\bullet(J^1P)$ de expresiones polinómicas en las formas θ^α, Ω^α, $1 \le \alpha \le m$, con coeficientes reales. Se tiene

$$\mathcal{A}^{(1)}_{\mathrm{gau}P} \subseteq \mathcal{I}^{(1)}_{\mathrm{gau}P}, \qquad \mathcal{A}^{(1)}_{\mathrm{aut}P} \subseteq \mathcal{I}^{(1)}_{\mathrm{aut}P}$$

y nuestro fin en las siguientes secciones será el de probrar que estas inclusiones son igualdades estrictas.

Observación 3.2.1 Puede ser útil notar que los conjunto $\mathcal{A}^{(1)}_{\mathrm{gau}P}$ y $\mathcal{A}^{(1)}_{\mathrm{aut}P}$ pueden representarse también como

$$\mathcal{A}^{(1)}_{\mathrm{gau}P} = \pi_1^*\Omega^\bullet(M)[\theta^1, \ldots, \theta^m, \mathrm{d}\theta^1, \ldots, \mathrm{d}\theta^m],$$

$$\mathcal{A}^{(1)}_{\mathrm{aut}P} = \mathbb{R}[\theta^1, \ldots, \theta^m, \mathrm{d}\theta^1, \ldots, \mathrm{d}\theta^m],$$

es decir, están generados por las formas de contacto estándar y sus diferenciales con coeficientes en $\pi_1^*\Omega^\bullet(M)$ o en $\mathbb{R}$, respectivamente. Efectivamente, en vista de la expresión (3.6), se trata de un simple cambio de base de álgebra. La ventaja de esta última representación estriba en que muestra manifiestamente que estos conjuntos son cerrados frente a la diferencial exterior.

3.3 Formas *gauge* invariantes en J^1P

3.3.1 Coordenadas normales en G

La fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff relaciona la multiplicación de exponenciales en un grupo de Lie G con el corchete de Lie de su álgebra $\mathfrak{g}$ a través de la siguiente fórmula (ver por ejemplo [Var, §2.15]):

$$\exp X \cdot \exp Y = \exp C(X : Y),$$

con $C(X : Y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(X : Y)$ siendo $c_n = c_n(X : Y)$ la sucesión definida por la ley de recursión

$$(n+1)c_{n+1} = \frac{1}{2}[X - Y, c_n] + \sum_{2p \le n} \sum_{k_1 + \ldots + k_{2p} = n} K_{2p}[c_{k_1}, [\cdots, [c_{k_{2p}}, X + Y] \cdots]$$

con $c_0 = 0$, siendo K_{2p} determinadas constantes racionales. En particular

$$c_0(X : Y) = 0, \quad c_1(X : Y) = X + Y, \quad c_2(X : Y) = \frac{1}{2}[X, Y] \qquad (3.9)$$

y

$$c_n(X:Y) \in \mathfrak{g}^{(n)} = \overbrace{[\mathfrak{g}, [\cdots, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cdots]}^{n)}.$$

Si $\{B_1, \ldots, B_m\}$ es un base de $\mathfrak{g}$, sabemos que la exponencial define un sistema de coordenadas $(y^1, \ldots y^m)$, llamadas *coordenadas normales*, en un entorno V de la unidad por la condición

$$g = \exp(y^\alpha(g) B_\alpha), \quad g \in V. \tag{3.10}$$

Si $g, h \in V$ y $g \cdot h \in V$ vamos a obtener un expresión para $y^\alpha(g \cdot h)$, $1 \leq \alpha \leq m$. Sea $\{B^1, \ldots, B^m\}$ la base dual a $\{B_1, \ldots, B_m\}$ y sean

$$X = y^\alpha(g) B_\alpha, \quad Y = y^\alpha(h) B_\alpha. \tag{3.11}$$

Entonces

$$\begin{aligned} y^\alpha(g \cdot h) &= y^\alpha(\exp X \cdot \exp Y) \\ &= y^\alpha(\exp C(X:Y)) \\ &= B^\alpha(C(X:Y)) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} B^\alpha(c_n(X:Y)). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las fórmulas de recurrencia (3.9), las expresiones (3.11) y que $c_n(X:Y) \in \mathfrak{g}^{(n)}$, tendremos

$$B^\alpha(c_n(X:Y)) = \sum_{a,b \in \mathbb{N}^m, |a|+|b|=n} \mathfrak{C}^\alpha_{ab} y^1(g)^{a_1} \cdots y^m(g)^{a_m} y^1(h)^{b_1} \cdots y^m(h)^{b_m},$$

en donde $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{N}^m$, $|a| = \sum_{i=1}^m a_i$; para ciertas funciones polinómicas $\mathfrak{C}^\alpha_{ab}$ (bastante complicadas) de las constantes de estructura. Por comodidad denotaremos

$$y(g)^a = y^1(g)^{a_1} \cdots y^m(g)^{a_m}.$$

Entonces

$$y^\alpha(g \cdot h) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{a,b \in \mathbb{N}^m, |a|+|b|=n} \mathfrak{C}^\alpha_{ab} y(g)^a y(h)^b. \tag{3.12}$$

En particular de (3.9) se deducen las siguientes expresiones que serán necesarias más adelante:

$$\mathfrak{C}^{\alpha}_{00} = 0, \quad \mathfrak{C}^{\alpha}_{0(\beta)} = \mathfrak{C}^{\alpha}_{(\beta)0} = \delta^{\alpha}_{\beta}, \quad \mathfrak{C}^{\alpha}_{(\beta)(\gamma)} = \frac{1}{2}c^{\alpha}_{\beta\gamma}, \tag{3.13}$$

en donde (β) denota el elemento $(0, \dots, \overset{\beta)}{1}, \dots, 0) \in \mathbb{N}^m$.

3.3.2 Notación

Sea (x^j, y^α), $1 \le j \le n = \dim M$, $1 \le \alpha \le m = \dim G$, un sistema de coordenadas fibradas en P y sea $(x^i, y^\alpha, y^\alpha_i)$ el sistema de coordenadas inducido en el fibrado J^1P (*cf.* §2.4.2).

Se llama multi-índice de orden n a un elemento cualquiera $H \in \mathbb{N}^n$. Se dice además que el multi-índice es *booleano* si toma valores en $\{0, 1\}^n$, es decir, sus componentes son unos o ceros. Si $H = (h_1, ..., h_n)$, se denota

$$|H| = h_1 + \cdots + h_n.$$

Si H es un multi-índice booleano de orden n, se denotará por $\mathrm{d}x^H$ a la expresión formal

$$\mathrm{d}x^H = (\mathrm{d}x^1)^{h_1} \wedge ... \wedge (\mathrm{d}x^n)^{h_n},$$

en donde

$$(\mathrm{d}x^i)^1 = \mathrm{d}x^i, \quad 1 \le i \le n,$$

y $(\mathrm{d}x^i)^0$ quiere decir simplemente que este término se omite. Por ejemplo, si $n = 3$ y $H = (1, 0, 1)$, se tiene que $\mathrm{d}x^H$ representa a $\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3$. Nótese que $\mathrm{d}x^H$ es una forma de grado $|H|$. De manera análoga, para un índice α fijo, $1 \le \alpha \le m$, y otro multi-índice $J^\alpha = (j^\alpha_1, ..., j^\alpha_n)$ booleano de orden n, se denotará

$$(\mathrm{d}y^\alpha)^{J^\alpha} = (\mathrm{d}y^\alpha_1)^{j^\alpha_1} \wedge ... \wedge (\mathrm{d}y^\alpha_n)^{j^\alpha_n},$$

que es una forma diferencial de grado $|J^\alpha|$ en J^1P.

En general, si se tiene una forma Ξ_r de grado r en J^1P, la notación de multi-índices booleanos nos va a servir para dar su expresión local de la siguiente manera:

$$\Xi_r = \sum_{|H|+|I|+|J^1|+\ldots+|J^m|=r} f_{HIJ^1\ldots J^m} \mathrm{d}x^H \wedge \mathrm{d}y^I \wedge (\mathrm{d}y^1)^{J^1} \wedge \ldots \wedge (\mathrm{d}y^m)^{J^m}.$$

para ciertas funciones $f_{HIJ^1\ldots J^m}$ de J^1P, en donde todos los índices en mayúscula son multi-índices booleanos, de orden m para I y de orden n para H, J^1,..., J^m. Es evidente que toda forma $\Xi_r \in \Omega^r(J^1P)$ se puede escribir en coordenadas de manera unívoca de la forma anterior.

3.3.3 Estructura de $\mathcal{I}^{(1)}_{\mathrm{gau}P}$

Lema 3.3.1 *Consideremos el fibrado trivial $\pi : M \times G \to M$. Sea Ξ una forma* gauge *invariante en $J^1(M \times G)$ y sea*

$$s_0 : M \to M \times G, \quad s(x) = (x, 1),$$

la sección unidad. Si $\Xi_{j^1_x s_0} \in (\mathcal{A}^{(1)}_{\mathrm{gau}P})_{j^1_x s_0}$, $\forall x \in M$, entonces $\Xi \in \mathcal{A}^{(1)}_{\mathrm{gau}P}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $s(x) = (x, \sigma(x))$ una sección arbitraria de $\pi : M \times G \to M$ y sea Φ la transformación *gauge* dada por $\Phi(x, g) = (x, \sigma(x) \cdot g)$. Tenemos que $\Phi \circ s_0 = s$, y como consecuencia de la Proposición 3.1.2,

$$\begin{aligned} \Xi &= (\Phi^{(1)})^* \Xi, \\ \Xi &= (\Psi^{(1)})^* \Xi, \end{aligned}$$

siendo $\Psi = \Phi^{-1}$. Entonces,

$$\Xi_{j^1_x s} = (\Psi^{(1)})^* (\Xi_{j^1_x s_0}).$$

Por la invariancia *gauge* de las formas $\pi_1^* v$, $v \in \Omega^\bullet(M)$, θ^α, Ω^α, $1 \le \alpha \le m$, tenemos que

$$(\Psi^{(1)})^* (\mathcal{A}^{(1)}_{\mathrm{gau}P})_{j^1_x s_0} = (\mathcal{A}^{(1)}_{\mathrm{gau}P})_{j^1_x s}.$$

Entonces,

$$\Xi_{j^1_x s} = (\Psi^{(1)})^* (\Xi_{j^1_x s_0}) \in (\Psi^{(1)})^* (\mathcal{A}^{(1)}_{\mathrm{gau}P})_{j^1_x s_0} = (\mathcal{A}^{(1)}_{\mathrm{gau}P})_{j^1_x s},$$

para cualquier sección s, lo que finaliza la demostración del Lema.

c.q.d.

Lema 3.3.2 *Consideremos el fibrado trivial $\pi : M \times G \to M$ y fijemos una base $\{B_1, ..., B_m\}$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Sea $s_0 : M \to M \times G$, $s_0(x) = (x, 1)$, la sección unidad. Las expresiones locales de las formas de contacto estándar*

$\theta^1, \ldots, \theta^m$ y de las componentes $\Omega^1, \ldots, \Omega^m$ de la curvatura (cf. fórmula 3.6) *a lo largo de $j^1 s_0$ respecto al sistema de coordenadas $(x^j, y^\alpha, y^\alpha_j)$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq \alpha \leq m$, inducido en $J^1(M \times G)$ por las coordenadas normales* (cf. §3.3.1) *son, respectivamente,*

$$(\theta^\alpha)_{j^1_x s_0} = (\mathrm{d}y^\alpha)_{j^1_x s_0}, \tag{3.14}$$

$$(\Omega^\alpha)_{j^1_x s_0} = (\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}y^\alpha_j)_{j^1_x s_0}, \tag{3.15}$$

con $\alpha = 1, \ldots, m$, $x \in M$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $(y^1, \ldots, y^m)$ el sistema de coordenadas normales asociada a la base $\{B^1, \ldots, B^m\}$ de $\mathfrak{g}$ en un entorno de la unidad (ver §3.3.1) y sea $(x^j, y^\alpha; y^\alpha_j)$, $1 \leq \alpha \leq m$, $1 \leq j \leq n$, el sistema de coordenadas inducido por (x^j, y^α) en $J^1(M \times G)$, es decir, $y^\alpha_j(j^1_x s) = (\partial(y^\alpha \circ s)/\partial x^j)(x)$ (cf. §2.4.2). Cada forma θ^α, $1 \leq \alpha \leq m$, es de contacto (véase la Observación 2.7.1), y por tanto es combinación lineal de las formas

$$\mathrm{d}y^\beta - y^\beta_j \mathrm{d}x^j, \quad 1 \leq \beta \leq m,$$

generadores del ideal de contacto del fibrado de 1–*jets* (*cf.* [Kr2]). Es decir, se tiene

$$\theta^\alpha = f^\alpha_\beta(\mathrm{d}y^\beta - y^\beta_j \mathrm{d}x^j), \quad 1 \leq \alpha \leq m, \tag{3.16}$$

para ciertas funciones f^α_β, $1 \leq \alpha, \beta \leq m$, de $J^1(M \times G)$, que evidentemente cumplen

$$f^\alpha_\beta = \theta^\alpha(\partial/\partial y^\beta).$$

Por la definición de θ (fórmula 2.7.1), como

$$(\pi_{10})_* \pi_*(\partial/\partial y^\beta) = (\pi_1)_*(\partial/\partial y^\beta) = 0,$$

tenemos que $\theta(\partial/\partial y^\beta)$ en un punto $j^1_x s \in J^1(M \times G)$ depende únicamente de $s(x)$, es decir, las funciones f^α_β no dependen de las variables y^α_j, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq \alpha \leq m$. De hecho si considero un $j^1_x s \in J^1(M \times G)$, $s(x) = (x, g)$, tal que g pertenezca al entorno de coordenadas normales elegido y llamo

$$K_\beta = \theta(\partial/\partial y^\beta) \in \mathfrak{g},$$

la definicíon de θ implica

$$(K_\beta)^* = \partial/\partial y^\beta,$$

en el punto $(x,g) \in M \times G$. Las coordenadas normales del flujo

$$g \mapsto g \cdot \exp(tK_\beta)$$

de $(K_\beta)^*$ son (*cf.* fórmula 3.12):

$$\begin{aligned} y^\alpha(g \cdot \exp(tK_\beta)) &= \sum_{a,b \in \mathbb{N}^m, |a|+|b|=n} \mathfrak{C}^\alpha_{ab} y(g)^a y(\exp(tK_\beta))^b \\ &= \sum_{a,b \in \mathbb{N}^m} \mathfrak{C}^\alpha_{ab} y(g)^a t^{|b|} K^b_\beta. \end{aligned}$$

Así, en el punto $(x.g)$, se tiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial y^\beta}\right)_{(x,g)} &= \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} y^\alpha(g \cdot \exp(tK_\beta)) \right) \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{(x,g)} \\ &= \sum_{a \in \mathbb{N}^m} \mathfrak{C}^\alpha_{a(\gamma)} y(g)^a K^\gamma_\beta \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{(x,g)}, \end{aligned}$$

en donde $(K^1_\beta, \dots, K^m_\beta)$ son las coordenadas de K_β respecto a la base de $\mathfrak{g}$ escogida. Por tanto

$$\sum_{a \in \mathbb{N}^m} \mathfrak{C}^\alpha_{a(\gamma)} y(g)^a K^\gamma_\beta = \delta^\alpha_\beta. \tag{3.17}$$

Si defino la matriz cuadrada

$$F^\alpha_\gamma(g) = \sum_{a \in \mathbb{N}^m} \mathfrak{C}^\alpha_{a(\gamma)} y(g)^a, \quad 1 \leq \alpha, \gamma \leq m,$$

la igualdad (3.17) se reduce a

$$F^\alpha_\gamma K^\gamma_\beta = \delta^\alpha_\beta.$$

Por la expresión (3.13), $F^\alpha_\gamma(1) = \mathfrak{C}^\alpha_{0(\gamma)} = \delta^\alpha_\gamma$, es decir, $F(1) = \mathrm{Id}$ y por tanto hay inversa en un entorno del elemento neutro $1 \in G$. En ese entorno

$$f^\gamma_\beta = \theta^\gamma(\partial/\partial y^\beta) = K^\gamma_\beta = (F^{-1})^\gamma_\beta. \tag{3.18}$$

A lo largo de la sección unidad, de las fórmulas (3.16) y (3.18) obtenemos

$$(\theta^\alpha)_{j^1_x s_0} = (\mathrm{d}y^\alpha)_{j^1_x s_0}, \quad \forall x \in M.$$

Por otra parte,

$$\mathrm{d}\theta^\alpha = \mathrm{d}(F^{-1})^\alpha_\beta \wedge (\mathrm{d}y^\beta - y^\beta_j \mathrm{d}x^j) - (F^{-1})^\alpha_\beta \mathrm{d}y^\beta_j \wedge \mathrm{d}x^j.$$

Como $\mathrm{d}F^{-1} = -F^{-1} \cdot \mathrm{d}F \cdot F^{-1}$ y $F(1) = \mathrm{Id}$, de la definición de F, en el elemento neutro se tiene

$$\frac{\partial (F^{-1})^\alpha_\beta}{\partial y^\gamma}(1) = -\frac{\partial F^\alpha_\beta}{\partial y^\gamma}(1) = -\left.\frac{\partial}{\partial y^\gamma}\right|_{g=1} \sum_{a\in\mathbb{N}^m} \mathfrak{C}^\alpha_{a(\beta)} y(g)^a = -\mathfrak{C}^\alpha_{(\gamma)(\beta)} = -\frac{1}{2}c^\alpha_{\gamma\beta},$$

en donde hemos hecho uso otra vez de (3.13). En definitiva,

$$(\mathrm{d}\theta^\alpha)_{j^1_x s_0} = -(\frac{1}{2}c^\alpha_{\gamma\beta}\mathrm{d}y^\gamma \wedge \mathrm{d}y^\beta + \mathrm{d}y^\alpha_j \wedge \mathrm{d}x^j)_{j^1_x s_0}$$

y entonces

$$(\Omega^\alpha)_{j^1_x s_0} = (\mathrm{d}\theta^\alpha + \frac{1}{2}c^\alpha_{\beta\gamma}\theta^\beta \wedge \theta^\gamma)_{j^1_x s_0} = (\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}y^\alpha_j)_{j^1_x s_0}.$$

c.q.d.

Teorema 3.3.3 *Sea $\pi : P \to M$ un fibrado principal arbitrario de grupo estructural un grupo de Lie conexo G. El álgebra de formas* gauge *invariantes en J^1P está generada por las formas θ^α, Ω^α, $1 \leq \alpha \leq m = \dim G$, sobre $\pi_1^*\Omega^\bullet(M)$. Es decir,*

$$\mathcal{I}^{(1)}_{\mathrm{gau}P} = \mathcal{A}^{(1)}_{\mathrm{gau}P} = \pi_1^*\Omega^\bullet(M)[\theta^1, \dots, \theta^m, \Omega^1, \dots \Omega^m].$$

(cf. §3.2).

DEMOSTRACIÓN. Como la propiedad de invariancia *gauge* es una propiedad local, podemos considerar que estamos en un abierto fibrado lo suficientemente pequeño para que P sea trivializable. Por tanto se puede asumir que el fibrado es trivial, esto es, $P = M \times G$. Entonces, de acuerdo con el Lema 3.3.1, únicamente hay que probar que cada forma *gauge* invariante es un elemento de $\mathcal{A}^{(1)}_{\mathrm{gau}P}$ a lo largo de la sección $j^1 s_0$, siendo $s_0(x) = (x, 1)$ la sección unidad de $M \times G \to M$.

Primero obtengamos la expresión local de la subida $X^{(1)}$ de cualquier $X \in \mathrm{gau}P$. Como estamos en el caso trivial, todo $X \in \mathrm{gau}P$ es de la forma $\tilde{B}$, con $B = h^\alpha B_\alpha$, $h^\alpha \in C^\infty(M, \mathfrak{g})$ (ver Proposición 1.3.5). Por la definición de $\tilde{B}$,

$$X_{(x,g)} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (x, \exp(tB) \cdot g), \quad B = h^\alpha B_\alpha. \tag{3.19}$$

De la fórmula (3.12) tenemos

$$y^\alpha(\exp(tB) \cdot g) = \sum_{b,a\in\mathbb{N}^m} \mathfrak{C}^\alpha_{ba}(th^1)^{b_1} \cdots (th^m)^{b_m} y(g)^a,$$

y derivando respecto t en $t = 0$,

$$X_{(x,g)} = \sum_{a\in\mathbb{N}^m} \mathfrak{C}^\alpha_{(\beta)a} h^\beta y(g)^a \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{(x,g)}.$$

Por las fórmulas de levantamiento de campos vectoriales de un fibrado a su fibrado de 1-*jets* (ver por ejemplo [Sau, p.133] o [Mu]),

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= \sum_{a\in\mathbb{N}^m} \mathfrak{C}^\alpha_{(\beta)a} h^\beta y(g)^a \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right) + \\ &\quad \sum_{a\in\mathbb{N}^m} \mathfrak{C}^\alpha_{(\beta)a} \left(\frac{\partial h^\beta}{\partial x^j} y(g)^a + h^\beta a_\gamma y(g)^{a-(\gamma)} y^\gamma_j\right) \frac{\partial}{\partial y^\alpha_j}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

en donde $a - (\gamma)$ denota la m-upla $(a_1, \ldots, a_\gamma - 1, \ldots, a_m)$.

Consideremos ahora una r-forma Ξ_r *gauge* invariante. Localmente, se podrá expresar como

$$\Xi_r = \sum_{|H|+|I|+|J^1|+\ldots+|J^m|=r} f_{HIJ^1\ldots J^m} \mathrm{d}x^H \wedge \mathrm{d}y^I \wedge (\mathrm{d}y^1)^{J^1} \wedge \ldots \wedge (\mathrm{d}y^m)^{J^m},$$

en donde se ha utilizado la notación en multi-índices booleanos introducida en §3.3.2. Fijemos un $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n) \in M$ y un índice $d \in \{1, \ldots, n\}$, y sean

$$h^1 = \frac{1}{2}(x^d - x_0^d)^2, \quad h^j = 0, j > 1,$$

en la definición (3.19) de $X \in \mathrm{gau}P$. Teniendo en cuenta la expresión local (3.20) de $X^{(1)}$, en $j^1_{x_0}s_0$ se obtiene

$$\begin{array}{ll} (L_{X^{(1)}}f)_{j^1_{x_0}s_0} = 0, & (L_{X^{(1)}}\mathrm{d}x^i)_{j^1_{x_0}s_0} = 0, \\ (L_{X^{(1)}}\mathrm{d}y^\alpha_j)_{j^1_{x_0}s_0} = \delta^\alpha_1\delta^d_j\mathrm{d}x^d, & (L_{X^{(1)}}\mathrm{d}y^\alpha)_{j^1_{x_0}s_0} = 0, \end{array}$$

para cualquier $f \in C^\infty(J^1P)$, $\alpha \in \{1,\dots,m\}$, $j \in \{1,\dots,n\}$. Luego la condición

$$(L_{X^{(1)}}\Xi_r)_{j^1_{x_0}s_0} = 0$$

se escribe localmente como

$$0 = (f_{HIJ^1\dots J^m}\mathrm{d}x^H \wedge \mathrm{d}y^I \wedge (\mathrm{d}y^1_1)^{j^1_1} \wedge \dots \wedge (\mathrm{d}y^1_{d-1})^{j^1_{d-1}} \wedge (\mathrm{d}x^d)^{j^1_1} \wedge \\ (\mathrm{d}y^1_{d+1})^{j^1_{d+1}} \wedge \dots \wedge (\mathrm{d}y^1_n)^{j^1_n} \wedge (\mathrm{d}y^2)^{J^2} \wedge \dots \wedge (\mathrm{d}y^m)^{J^m})_{j^1_{x_0}s_0}.$$

Por tanto, si $h_d = 0$ y $j^1_d = 1$, entonces $f_{HIJ^1\dots J^m}(j^1_{x_0}s_0) = 0$. Como x^0 es arbitrario, concluimos que $f_{HIJ^1\dots J^m}|_{j^1s_0} = 0$ siempre que exista un índice d tal que $h_d = 0$ y $j^1_d = 1$. Esto nos dice que a lo largo de la sección j^1s_0:

(A1) Cada componente $(\mathrm{d}y^1_d)_{j^1_{x_0}}$ aparece siempre acompañada de $(\mathrm{d}x^d)_{j^1_{x_0}s_0}$.

Elijamos ahora, para un índice $d > 1$ fijo

$$h^1 = (x^1 - x^1_0)(x^d - x^d_0), \quad h^j = 0, j > 1,$$

en la definición de X de la fórmula (3.19). De la expresión (3.20) obtenemos entonces

$$\begin{array}{ll} (L_{X^{(1)}}f)_{j^1_{x_0}s_0} = 0, & (L_{X^{(1)}}\mathrm{d}x^i)_{j^1_{x_0}s_0} = 0, \\ (L_{X^{(1)}}\mathrm{d}y^\alpha_j)_{j^1_{x_0}s_0} = \delta^\alpha_1\delta^d_j\mathrm{d}x^1 + \delta^\alpha_1\delta^1_j\mathrm{d}x^d, & (L_{X^{(1)}}\mathrm{d}y^\alpha)_{j^1_{x_0}s_0} = 0, \end{array}$$

y la condición de invariancia *gauge* ($L_{X^{(1)}}\Xi_r = 0$) en $j^1_{x_0}s_0$ es

$$0 = (f_{HIJ^1\dots J^m}\mathrm{d}x^H \wedge \mathrm{d}y^I \wedge \left(\mathrm{d}x^d\right)^{j^1_1} \wedge (\mathrm{d}y^1_2)^{j^1_2} \wedge \dots \wedge (\mathrm{d}y^m_n)^{j^m_n} + \\ f_{HIJ^1\dots J^m}\mathrm{d}x^H \wedge \mathrm{d}y^I \wedge (\mathrm{d}y^1_1)^{j^1_1} \wedge \dots \wedge (\mathrm{d}y^1_{d-1})^{j^1_{d-1}} \wedge \\ (\mathrm{d}x^1)^{j^1_d} \wedge (\mathrm{d}y^1_{d+1})^{j^1_{d+1}} \wedge \dots \wedge (\mathrm{d}y^m_n)^{j^m_n})_{j^1_{x_0}s_0}.$$

Por tanto, si

$$J^1 = (1, j_2^1, \dots, j_{d-1}^1, 0, j_{d+1}^1, \dots, j_n^1)$$

y

$$\tilde{J}^1 = (0, j_2^1, \dots, j_{d-1}^1, 1, j_{d+1}^1, \dots, j_n^1),$$

se verifica:

$$f_{HIJ^1\dots J^m}(j_{x_0}^1 s_0) = f_{HI\tilde{J}^1\dots J^m}(j_{x_0}^1 s_0).$$

De acuerdo con esto se tiene:

(A2) Si $(\Xi_r)|_{j^1s_0}$ tiene un sumando de la forma $(\Xi_{r-2}\wedge \mathrm{d}x^1\wedge \mathrm{d}y_1^1)|_{j^1s_0}$, entonces $(\Xi_r)|_{j^1s_0}$ contiene el sumando $(\Xi_{r-2}\wedge \mathrm{d}x^d\wedge \mathrm{d}y_d^1)|_{j^1s_0}$ y viceversa, siendo $d = 1, \dots, n$ un indice cualquiera.

De las afirmaciones (A1) y (A2) se deduce entonces que cada $(\mathrm{d}y_d^1)|_{j^1s_0}$ proviene de un sumando

$$(\Xi_{r-2}\wedge \mathrm{d}x^j\wedge \mathrm{d}y_j^1)|_{j^1s_0}.$$

Sustituyendo el índice 1 por $2, \dots, m$, sucesivamente en la definición de las funciones $h^1, \dots, h^m$ y recordando las expresiones (3.15), (3.19), las afirmaciones (A1) y (A2) nos permiten concluir que a lo largo de la sección unidad, la forma Ξ_r se escribe

$$(\Xi_r)|_{j^1s_0} = \big(f_{HIj_1,\dots,j_m}\mathrm{d}x^H\wedge(\theta^1)^{i_1}\wedge\dots\wedge(\theta^m)^{i_m}\wedge \\ (\Theta^1)^{j_1}\wedge\dots\wedge(\Theta^m)^{j_m}\big)\,|_{j^1s_0}.$$

lo que termina la demostración gracias al Lema 3.3.1.

c.q.d.

3.4 Formas aut$P$-invariantes en J^1P

Lema 3.4.1 *Sea*

$$\Xi_r = \sum_{I,j_1,\dots,j_m}\pi_1^*\omega_{Ij_1,\dots,j_m}\wedge(\theta^1)^{i_1}\wedge\dots\wedge(\theta^m)^{i_m}\wedge(\Omega^1)^{j_1}\wedge\dots\wedge(\Omega^m)^{j_1} \tag{3.21}$$

una r-forma perteneciente a $\mathcal{A}^{(1)}_{\mathrm{gau}P}$, $r \leq n + nm = \dim C(P)$. *con*

$$\omega_{Ij_1,\dots,j_m} \in \Omega^s(M), \quad s = r - (i_1 + \ldots + i_m) - 2(j_1 + \ldots + j_m),$$

en donde $j_1, \dots, j_m \in \mathbb{N}$ *e* I *es un multi-índice booleano* (cf. §3.3.2). *Entonces:*

(1) *Los sumandos que verifican*

$$s + j_1 + \ldots + j_m = r - (i_1 + \ldots + i_m) - (j_1 + \ldots + j_m) > n = \dim M$$

son nulos.

(2) *Eliminando los sumandos anteriores,* $\Xi_r = 0$ *si y sólo si* $\omega_{Ij_1,\dots,j_m} = 0$, $\forall j_1, \dots, j_m \in \mathbb{N}$, $\forall I$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos que estamos en un abierto trivializable de P y trabajemos con las coordenadas que hemos utilizado en la demostración del Teorema 3.3.3. Veamos primero que un sumando

$$\Xi_{Ij_1,\dots,j_m} = \pi_1^* \omega_{Ij_1,\dots,j_m} \wedge (\theta^1)^{i_1} \wedge \ldots \wedge (\theta^m)^{i_m} \wedge (\Omega^1)^{j_1} \wedge \ldots \wedge (\Omega^m)^{j_1}$$

de (3.21), o la propia expresión (3.21), es idénticamente cero si y sólo si es cero a lo largo de la sección unidad $j^1 s_0$ (siendo $s_0(x) = (x, 1)$). En efecto, tal como se hizo en la demostración del Lema 3.3.1, dada una sección $s(x) = (x, \sigma(x))$, como las formas de $\mathcal{A}^{(1)}_{\mathrm{gau}P}$ son *gauge* invariantes, se tiene

$$\Xi_{Ij_1,\dots,j_m}|_{j^1 s} = (\Psi^{(1)})^* (\Xi|_{j^1 s_0})$$

para la transformación *gauge* $\Psi(x, g) = (x, \sigma(x)^{-1} \cdot g)$. Como $\Psi^{(1)}$ es un difeomorfismo, $\Xi_{Ij_1,\dots,j_m}|_{j^1 s} = 0$ si y sólo si $\Xi_{Ij_1,\dots,j_m}|_{j^1 s_0} = 0$. Al ser s una sección arbitraria, se concluye. Por tanto basta estudiar lo que pasa en la sección unidad.

Para el apartado (1) de la Proposición, considero las expresiones locales de θ^α, Ω^α, $1 \leq \alpha \leq m$, a lo largo de la sección s_0 (fórmulas (3.14) y (3.15)). Así obtenemos que

$$\begin{aligned}\Xi_{Ij_1,\dots,j_m}|_{j^1 s_0} = (\pi_1^* \omega_{Ij_1,\dots,j_m} \wedge (\mathrm{d}y^1)^{i_1} \wedge \ldots \wedge (\mathrm{d}y^m)^{i_m} \wedge \\ (\mathrm{d}x^{s_1} \wedge \mathrm{d}y^1_{s_1})^{j_1} \wedge \ldots \wedge (\mathrm{d}x^{s_m} \wedge \mathrm{d}y^m_{s_m})^{j_1})|_{j^1 s_0}.\end{aligned}$$

Esta expresión es evidentemente cero si

$$\begin{aligned} \mathrm{grado}(\omega_{Ij_1,\dots,j_m}) + j_1 + \dots + j_m &= \\ r - (i_1 + \dots + i_m) - (j_1 + \dots + j_m) &> n = \dim M. \end{aligned}$$

Para el apartado (2), si Ξ_r es cero, a lo largo de la sección unidad tendremos

$$\begin{aligned} \Xi_r|_{j^1 s_0} = \sum_{Ij_1,\dots,j_m} (\pi_1^* \omega_{Ij_1,\dots,j_m} \wedge (\mathrm{d}y^1)^{i_1} \wedge \dots \wedge (\mathrm{d}y^m)^{i_m} \wedge \\ (\mathrm{d}x^{s_1} \wedge \mathrm{d}y^1_{s_1})^{j_1} \wedge \dots \wedge (\mathrm{d}x^{s_m} \wedge \mathrm{d}y^m_{s_m})^{j_m})|_{j^1 s_0} = 0. \end{aligned} \tag{3.22}$$

que implica que cada sumando $\Xi_{Ij_1,\dots,j_m}|_{j^1 s_0}$ debe anularse. Quedémonos con uno de esos sumando y supongamos que, como consecuencia del apartado (1), se verifica

$$r - (i_1 + \dots + i_m) - (j_1 + \dots + j_m) \leq n.$$

Tomemos la expresión de $\omega_{Ij_1,\dots,j_m}$ en coordenadas:

$$\omega_{Ij_1,\dots,j_m} = \sum f_{l_1,\dots,l_s} \mathrm{d}x^{l_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{l_s}, \quad f_{l_1,\dots,l_s} \in C^\infty(M), \tag{3.23}$$

en donde $s = r - (i_1 + \dots + i_m) - 2(j_1 + \dots + j_m)$. Fijemos unos índices $l_1^0, \dots, l_s^0$. Como $s + j_1 + \dots + j_m \leq n$, podemos elegir otros índices $k_1, \dots, k_J$, con $J = j_1 + \dots + j_m$, tales que

$$\mathrm{d}x^{l_1^0} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{l_s^0} \wedge \mathrm{d}x^{k_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{k_J} \neq 0.$$

Teniendo en cuenta las expresiones (3.22) y (3.23), podemos asegurar que $\Xi_{I,j_1,\dots j_m}|_{j^1 s_0}$ tiene sumandos de la forma (salvo signo)

$$\begin{aligned} (f_{l_1^0,\dots,l_s^0} \mathrm{d}x^{l_1^0} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{l_s^0} \wedge \mathrm{d}x^{k_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{k_J} \wedge \\ (\mathrm{d}y^1)^{i_1} \wedge \dots \wedge (\mathrm{d}y^m)^{i_m} \wedge \mathrm{d}y^{h_1}_{k_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}y^{h_J}_{k_J})|_{j^1 s_0}, \end{aligned} \tag{3.24}$$

para ciertos índices $h_1, \dots, h_J$. Para cada eleción de $h_1, \dots, h_J$, la forma

$$\Xi_{I,j_1,\dots j_m}|_{j^1 s_0}$$

tendrá únicamente el sumando (3.24) con esa combinación de 1-formas $\mathrm{d}x^{l_1^0}$, ..., $\mathrm{d}y^{h_J}_{k_J}$, por lo que debe anularse. Eso sólo es posible si $f_{l_1^0,\dots,l_s^0}$. Como los índices $l_1^0, \dots, l_s^0$ son arbitrarios, se concluye que $\omega_{Ij_1,\dots,j_m} = 0$, para todo I, $j_1, \dots, j_m$.

c.q.d.

Teorema 3.4.2 *Sea $\pi : P \to M$ un fibrado principal arbitrario de grupo estructural un grupo de Lie conexo G. Supongamos que la variedad base M es conexa. Entonces, el álgebra de formas* aut$P$*-invariantes en J^1P está generada sobre los números reales por las formas θ^α, Ω^α, $1 \le \alpha \le m = \dim G$, es decir,*

$$\mathcal{I}^{(1)}_{\mathrm{aut}P} = \mathcal{A}^{(1)}_{\mathrm{aut}P} = \mathbb{R}[\theta^1, \dots, \theta^m, \Omega^1, \dots \Omega^m].$$

DEMOSTRACIÓN. Sea Ξ_r una forma aut$P$-invariante. En particular esta forma es *gauge* invariante y por tanto, en virtud del Teorema 3.3.3, se puede escribir de la forma

$$\Xi_r = \sum_{I, j_1, \dots, j_m} \pi_1^* \omega_{I, j_1, \dots, j_m} \wedge (\theta^1)^{i_1} \wedge \dots \wedge (\theta^m)^{i_m} \wedge (\Omega^1)^{j_1} \wedge \dots \wedge (\Omega^m)^{j_m}.$$

para ciertas $\omega_{I, j_1, \dots, j_m} \in \Omega^s(M)$, $s = r - (i_1 + \dots + i_m) - 2(j_1 + \dots + j_m)$, en donde $I = (i_1, \dots, i_m)$ es un multi-índice de orden m. Consideremos que todos los sumandos verifican la propiedad (*cf.* Lema 3.4.1–(1))

$$r - (i_1 + \dots + i_m) - (j_1 + \dots + j_m) \le n.$$

Como las formas θ^α, Ω^α, $1 \le \alpha \le m$, son aut$P$-invariantes (*cf.* Ejemplos 3.2.2 y 3.2.4), la condición de invariancia por automorfismos infinitesimales de Ξ_r se escribe como

$$0 = \sum_{I, j_1, \dots, j_m} L_{X^{(1)}}(\pi_1^* \omega_{I, j_1, \dots, j_m}) \wedge (\theta^1)^{i_1} \wedge \dots \wedge (\theta^m)^{i_m} \wedge (\Theta^1)^{j_1} \wedge \dots \wedge (\Theta^m)^{j_m}.$$

La derivada de Lie conserva el grado de formas, por lo que todos los sumandos siguen verificando la desigualdad

$$r - (i_1 + \dots + i_m) - (j_1 + \dots + j_m) \le n.$$

En virtud del Lema 3.4.1–(2), se tiene que

$$L_{X^{(1)}}(\pi_1^* \omega_{I, j_1, \dots, j_m}) = 0, \quad \forall I, \ \forall j_1, \dots, j_m. \tag{3.25}$$

Pero

$$L_{X^{(1)}}(\pi_1^* \omega_{I, j_1, \dots, j_m}) = \pi_1^*(L_{\pi_* X} \omega_{I, j_1, \dots, j_m})$$

(*cf.* (3.5)), por lo que la condición (3.25) es equivalente a $L_{\pi_* X}\omega_{I,j_1,\ldots,j_m} = 0$. Como el campo $X \in \mathrm{aut}P$ es arbitrario y $\pi_* : \mathrm{aut}P \to \mathfrak{X}(M)$ es suprayectiva (ver la sucesión (1.15)) tenemos finalmente que para cada I, $j_1,\ldots, j_m$,

$$L_{X'}\omega_{I,j_1,\ldots,j_m} = 0, \quad \forall X' \in \mathfrak{X}(M).$$

Esto sólo es posible si $\omega_{I,j_1,\ldots,j_m}$ es una función localmente constante. Como M es conexo, tenemos que la forma Ξ_r tiene la expresión

$$\Xi_r = \sum_{I,j_1,\ldots,j_m} \lambda_{I,j_1,\ldots,j_m}(\theta^1)^{i_1} \wedge \ldots \wedge (\theta^m)^{i_m} \wedge (\Theta^1)^{j_1} \wedge \ldots \wedge (\Theta^m)^{j_m},$$

para ciertos escalares $\lambda_{I,j_1,\ldots,j_m} \in \mathbb{R}$, es decir, $\Xi_r \in \mathcal{A}^{(1)}_{\mathrm{aut}P}$.

c.q.d.

Capítulo 4

Invariancia en $C(P)$

4.1 Formas invariantes en $C(P)$

Definición 4.1.1 Sea $\pi : P \longrightarrow M$ un fibrado principal arbitrario. Se dice que una r-forma diferencial ξ_r de $C(P)$ es invariante por transformaciones *gauge* infinitesimales (abreviadamente, *gauge invariante*) si

$$L_{X_C}\xi_r = 0, \tag{4.1}$$

para cualquier transformación gauge infinitesimal $X \in \mathrm{gau}P$, siendo X_C el levantamiento de X al fibrado de las conexiones (*cf.* Definición 2.3.2).
El conjunto de formas *gauge* invariantes es una subálgebra de $\Omega^\bullet(C(P))$ que se designa por $\mathcal{I}_{\mathrm{gau}P}$.
Análogamente, una forma $\xi_r \in \Omega^r(C(P))$ se dice que es invariante por automorfismos infinitesimales (abreviadamente, $\mathrm{aut}P$-invariante) si la identidad (4.1) es cierta para cualquier $X \in \mathrm{aut}P$.
El conjunto de formas $\mathrm{aut}P$-invariantes es una subálgebra de $\mathcal{I}_{\mathrm{gau}P}$ que se denota por $\mathcal{I}_{\mathrm{aut}P}$.

Proposición 4.1.2 *Si el grupo estructural G es conexo, un forma diferencial ξ_r de $C(P)$ es* gauge *invariante si y sólo si*

$$(\Phi_C)^*\xi_r = \xi_r,$$

para cualquier $\Phi \in \mathrm{Gau}P$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración es similar a la de la Proposición 3.1.2. Basta sustituir todos los levantamientos $\Phi^{(1)}$, $\Phi \in \mathrm{Gau}P$, por las aplicaciones Φ_C y los campos $X^{(1)}$, $X \in \mathrm{gau}P$, por los campos X_C para probar el resultado.

c.q.d.

Ejemplo 4.1.3 Sea ω_r una r-forma diferencial en la variedad base M. Para un campo $X \in \mathrm{aut}P$ arbitrario, tenemos

$$L_{X_C} p^* \omega_r = p^* L_{p_* X_C} \omega_r,$$

pues X_C es p-proyectable, siendo $p : C(P) \to M$ el fibrado de las conexiones. De hecho, si $X' = \pi_* X$ es la proyección de X por π, se tiene $p_* X_C = X'$ (Observación 2.3.2). Así

$$L_{X_C} p^* \omega_r = p^*(L_{X'} \omega_r). \tag{4.2}$$

En particular, si $X \in \mathrm{gau}P$, $X' = 0$ y tenemos que $L_{X_C} p^* \omega_r = 0$, es decir, el conjunto $p^*\Omega^\bullet(M) = \{p^*\omega \mid \omega \in \Omega^\bullet(M)\} \subset \Omega^\bullet(C(P))$ es una subálgebra de $\mathcal{I}_{\mathrm{gau}P}$.

Definición 4.1.4 Sea $\pi : E \to M$ una submersión suprayectiva. Una r-forma Ξ_r en E se dice que es π-proyectable a M si existe una r-forma ξ_r en M (necesariamente única) tal que

$$\Xi_r = \pi^* \xi_r.$$

En este caso, se dice que ξ_r es la proyección de Ξ_r.

Un criterio general de proyectabilidad es el siguiente:

Proposición 4.1.5 *Si las fibras de $\pi : E \to M$ son conexas, una forma diferencial Ξ_r de E es π-proyectable si y sólo si, para todo vector $X \in TE$ tangente a la fibra se tiene*

(1) $i_X \Xi_r = 0$,

(2) $i_X \mathrm{d}\Xi_r = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Es evidente que una forma proyectable verifica las condiciones (1) y (2) de la proposición. Veamos el recíproco. Sea Ξ_r una r-forma de E que cumpla (1) y (2). Consideremos un punto $x_0 \in M$ y un $y_0 \in E$ tal que $\pi(y_0) = x_0$. Como π es submersión, existe un sistema de coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$ de M en un entorno U alrededor de x_0 y un sistema $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m)$ de E en un entorno V alrededor de y_0 tal que

$$\pi(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m) = (x^1, \ldots, x^n).$$

Por la condición (1), la expresión local de la forma Ξ_r en el sistema de coordenadas $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m)$ es

$$\Xi_r = f_{i_1,\ldots,i_r} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r}, \tag{4.3}$$

para ciertas funciones $f_{i_1,\ldots,i_r} = f_{i_1,\ldots,i_r}(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m)$. Por otra parte,

$$\mathrm{d}\Xi_r = \underline{\frac{\partial f_{i_1,\ldots,i_r}}{\partial x^l} \mathrm{d}x^l \wedge \mathrm{d}x^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r} + \frac{\partial f_{i_1,\ldots,i_r}}{\partial y^s} \mathrm{d}y^s \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r},$$

y de la condición (2) conluimos que

$$\frac{\partial f_{i_1,\ldots,i_r}}{\partial y^s} = 0, \quad \forall s, i_1, \ldots, i_r, \tag{4.4}$$

es decir, las funciones $f_{i_1,\ldots,i_r}$ sólo dependen de las coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$.

Consideremos r vectores tangente $X_1, \ldots, X_r$ arbitrarios en $T_{x_0}M$ y sean $Y_1, \ldots, Y_r \in T_yE$, tales que

$$\pi_*(Y_s) = X_s, \quad 1 \leq s \leq r, \tag{4.5}$$

en cada $y \in \pi^{-1}(x_0)$. De la condición (1) de la proposición se deduce que $\Xi_r(Y_1, \ldots, Y_r)$ no depende de los vectores $Y_1, \ldots, Y_r$ escogidos con tal de que se cumpla (4.5). Además, de la expresión (4.4), se tiene que $\Xi_r(Y_1, \ldots, Y_r)$ es una función localmente constante en la fibra $\pi^{-1}(x_0)$. Como por hipótesis la fibra es conexa, esto implica que $\Xi_r(Y_1, \ldots, Y_r)$ no depende del punto $y \in \pi^{-1}(x_0)$.

Es decir, $\Xi_r(Y_1, \ldots, Y_r)$ depende únicamente de $x_0 = \pi(y)$ y de $\pi_*(Y_1), \ldots, \pi_*(Y_r) \in T_xM$. Por tanto existe una r-forma $(\xi_r)_{x_0}$ en x_0 tal que

$$(\Xi_r)_{\pi^{-1}(x_0)} = \pi^*(\xi_r)_{x_0}.$$

Como el punto $x_0 \in M$ es arbitrario, se concluye.

c.q.d.

Corolario 4.1.6 *Sea $\pi : P \to M$ un fibrado G-principal. Si G es conexo, entonces una forma diferencial Ξ_r en P es π-proyectable si y sólo si verifica las dos siguientes condiciones:*

(1) $i_{B^*}\Xi_r = 0, \forall B \in \mathfrak{g}$,

(2) $R_g^*\Xi_r = \Xi_r, \forall g \in G$.

DEMOSTRACIÓN. Por definición de fibrado principal (*cf.* Definición 1.1.1), la aplicación $\pi : P \to M$ es una submersión suprayectiva. Por tanto, se puede aplicar el criterio de la Proposición 4.1.5 y así la proyectabilidad de Ξ_r es equivalente a ver que $i_X\Xi_r = 0$ y $i_X\mathrm{d}\Xi_r = 0$ para todo vector X vertical. Por la identidad $L_X = i_X\mathrm{d} + \mathrm{d}i_X$, estas condiciones se verifican si y sólo si

$$i_X\Xi_r = 0 \quad \text{y} \quad L_X\Xi_r = 0, \quad \forall X \text{ vertical.}$$

Por la Proposición 1.3.3–(4), comprobar estas igualdades es lo mismo que ver

$$i_{B^*}\Xi_r = 0 \quad \text{y} \quad L_{B^*}\Xi_r = 0, \quad \forall B \in \mathfrak{g}.$$

Como

$$L_{B^*}\Xi_r = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (R_{\exp tB})^*\Xi_r, \tag{4.6}$$

es evidente que la condición (2) de esta proposición es suficiente para deducir que $L_{X^*}\Xi_r = 0$. Por tanto únicamente resta comprobar que esta condición es también necesaria. Si Ξ_r verifica $L_{B^*}\Xi_r = 0$, entonces

$$(R_{\exp tB})^*\Xi_r = \Xi_r, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \ B \in \mathfrak{g}.$$

Sea g un elemento de G cualquiera. Como el grupo G es conexo, $\exp \mathfrak{g}$ genera G (véase [Var, Remark 2, p.88]) y por consiguiente existirán $B_1, \ldots, B_s \in \mathfrak{g}$, para cierto s, tales que $g = \exp B_1 \cdot \cdots \cdot \exp B_s$. Así

$$(R_g)^* = (R_{\exp B_1})^* \circ \cdots \circ (R_{\exp B_s})^*,$$

por lo que se concluye.

c.q.d.

Teorema 4.1.7 *Sea $\pi : P \to M$ un fibrado principal arbitrario de grupo estructural un grupo de Lie G conexo y sea $q : J^1P \to C(P)$ el fibrado principal introducido en la* Proposición 2.5.1. *Entonces las formas* gauge *invariantes en $C(P)$* (cf. Definición 4.1.1) *son la proyección de las formas* gauge *invariantes de J^1P* (cf. Definición 3.1.1) *que son q-proyectables. Análogamente para la* aut$P$*-invariancia.*

DEMOSTRACIÓN. Sea ξ_r una r-forma *gauge* invariante en $C(P)$. Si $X \in$ gau$P$, como el campo $X^{(1)}$ proyecta al campo X_C de $C(P)$ (es decir $q_*X^{(1)} = X_C$, *cf.* Corolario 2.6.4), se tiene

$$L_{X^{(1)}}q^*\xi_r = q^*(L_{q_*X^{(1)}}\xi_r) = q^*(L_{X_C}\xi_r) = 0, \tag{4.7}$$

es decir, la forma $q^*\xi_r$ es *gauge* invariante en J^1P. A la inversa, si $q^*\xi_r$ es una forma proyectable y *gauge* invariante en J^1P, la fórmula (4.7) implica que $q^*(L_{X_C}\xi_r) = 0$, que únicamente es posible si ξ_r es *gauge* invariante en $C(P)$.

Análogamente para la aut$P$-invariancia.

c.q.d.

4.2 Formas características

Definición 4.2.1 Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de un grupo de Lie G. Una aplicación k-multilineal simétrica

$$f : \mathfrak{g}\times \overset{(k}{\ldots} \times\mathfrak{g} \to \mathbb{R},$$

se dice que es *invariante por la representación adjunta* si se verifica

$$f(\mathrm{Ad}_g A_1, \ldots, \mathrm{Ad}_g A_k) = f(A_1, \ldots, A_k), \tag{4.8}$$

para cualquier $g \in G$ y cualquier $(A_1, \ldots, A_k) \in \mathfrak{g}\times \overset{(k}{\ldots} \times\mathfrak{g}$.
El conjunto de aplicaciones k-multilineales simétricas invariantes por la representación adjunta es un espacio vectorial que se designa por I_k^G.

Observación 4.2.1 Si $f \in I_k^G$ y g$\in I_l^G$, se define $f \cdot g \in I_{k+l}^G$ como

$$f \cdot g(A_1, \ldots, A_{k+l}) = \frac{1}{(k+l)!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}} f(A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(k)})g(A_{\sigma(k+1)}, \ldots, A_{\sigma(k+l)}),$$

donde S_{k+l} denota el grupo de las permutaciones de $k+l$ elementos. Si se escribe

$$I^G = \bigoplus_{k=0}^{\infty} I_k^G,$$

el anterior producto dota a este espacio de estructura de álgebra conmutativa sobre $\mathbb{R}$. (Para más detalles, véase [KN, XII.§1]).

Observación 4.2.2 Las aplicaciones multilineales simétricas de $\mathfrak{g}$ se pueden identificar con los elementos del álgebra simétrica $S^\bullet(\mathfrak{g}^*)$ (véase por ejemplo [KN, XII.Proposition2.1]). De esta manera se comprueba que el álgebra I^G es isomorfa al álgebra de elementos de $S^\bullet(\mathfrak{g}^*)$ invariantes por la representación coadjunta ([KN, XII,Proposition2.2]), es decir,

$$I^G = (S^\bullet(\mathfrak{g}^*))^G,$$

El super-índice G denota invariancia frente a la acción del grupo G.
Por otra parte, si fijamos una base $\{B_1, \dots, B_m\}$ de $\mathfrak{g}$ y $\{B^1, \dots, B^m\}$ es su dual en $\mathfrak{g}^*$, los elementos de $S^\bullet(\mathfrak{g}^*)$ se pueden identificar con los polinomios en m variables $\{t^1, \dots, t^m\}$ a través de la aplicación

$$\lambda_{\alpha_1,\dots,\alpha_s} B^{\alpha_1} \vee \cdots \vee B^{\alpha_s} \mapsto \lambda_{\alpha_1,\dots,\alpha_s} t^{\alpha_1} \cdots t^{\alpha_s}.$$

en donde $\vee$ denota el producto simétrico en $S^\bullet(\mathfrak{g}^*)$. Por esta razón es frecuente encontrar en la literatura el nombre de *polinomios invariantes por la adjunta* o *polinomios de Weil* a los elementos de I^G.

Definición 4.2.2 Sea Γ una conexión arbitraria en un fibrado principal $\pi : P \to M$ y sea Ω_Γ su forma de curvatura. Para cada $f \in I_k^G$, se define $\hat{f}(\Omega_\Gamma)$ como la $2k$-forma en P dada por

$$\hat{f}(\Omega_\Gamma)(X_1, \dots, X_{2k}) = \tag{4.9}$$
$$\frac{1}{(2k)!} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \varepsilon(\sigma) f\left(\Omega_\Gamma(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}), \dots, \Omega_\Gamma(X_{\sigma(2k-1)}, X_{\sigma(2k)})\right),$$

para todo $X_1, \dots, X_{2k} \in T_u P$, $u \in P$.

Proposición 4.2.3 [KN, XII.Theorem 1.1] *Sea $\pi : P \to M$ un fibrado principal de grupo G y dada una conexión Γ en P, sea Ω_Γ su forma de curvatura. Entonces:*

(1) *Para cada $f \in I_k^G$, la $2k$-forma $\hat{f}(\Omega_\Gamma)$ de P proyecta a una única forma $f(\Omega_\Gamma)$ cerrada de M*, i.e.,

$$\hat{f}(\Omega_\Gamma) = \pi^*(f(\Omega_\Gamma)).$$

(2) *Si denotamos por $[f] \in H^{2k}(M;\mathbb{R})$ la clase de cohomología de de Rham definida por la $2k$-forma cerrada $f(\Omega_\Gamma)$, entonces $[f]$ es independiente de la conexión Γ y la aplicación*

$$I_k^G \to H^{2k}(M;\mathbb{R}), \quad f \mapsto [f],$$

es un homomorfismo de álgebras. A esta aplicación se la conoce como el homomorfismo de Weil.

Observación 4.2.3 Dado un fibrado principal $\pi : P \to M$ cualquiera, consideremos ahora el fibrado principal $q : J^1P \to C(P)$ (cf. Proposición 2.5.1) y la forma de curvatura Ω_κ definida por la conexión canónica κ (Definición 2.7.4). Como caso particular de la anterior proposición, dado un $f \in I_k^G$, la forma $\hat{f}(\Omega_\kappa)$ es una forma de grado $2k$ en J^1P que proyecta a una forma $f(\Omega_\kappa)$ en $C(P)$.

Proposición 4.2.4 *Para cada $f \in I^G$, la $2k$-forma $f(\Omega_\kappa)$ de $C(P)$ se puede construir también a través de la estructura simpléctica de $C(P)$ de la siguiente manera. Sea Ω_2 la 2-forma en $C(P)$ con valores en $p^*\mathrm{ad}P$ definida en* §2.8.1. *Dado un punto $\Gamma_x \in C(P)$ y $2k$ vectores tangentes*

$$X_1, \dots, X_{2k} \in T_{\Gamma_x}C(P),$$

se tiene que $\Omega_2(X_i, X_j) \in (p^*\mathrm{ad}P)_{\Gamma_x}$, $i,j = 1,\dots,2k$. Si fijamos un $u \in \pi^{-1}(x)$, estos elementos se podrán escribir como

$$\Omega_2(X_i, X_j) = (\Gamma_x, (u, \eta_{ij})_{\mathrm{ad}}),$$

para ciertos $\eta_{ij} \in \mathfrak{g}$, $i,j \in \{1,\dots,2k\}$. Sea

$$f(\Omega_2)(X_1,\dots,X_{2k}) = \frac{1}{(2k)!} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \varepsilon(\sigma) f(\eta_{\sigma(1)\sigma(2)}, \dots, \eta_{\sigma(2k-1)\sigma(2k)}). \quad (4.10)$$

Entonces $f(\Omega_2) = f(\Omega_\kappa)$.

DEMOSTRACIÓN. Si $u' \in \pi^{-1}(x)$ es otro punto cualquiera de la fibra y $u' = u \cdot g$, entonces

$$\Omega_2(X_i, X_j) = (\Gamma_x, (u', \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\eta_{ij})_{\mathrm{ad}}),$$

es decir, $\eta'_{ij} = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\eta_{ij}$. La invariancia de f por la adjunta hace que expresión (4.10) no dependa por tanto del punto $u \in \pi^{-1}(x)$ elegido, por lo que define una $2k$-forma en $C(P)$. Por la Proposición 4.2.3–(1) únicamente resta ver que $q^*f(\Omega_2) = \hat{f}(\Omega_\kappa)$. En efecto, si se tiene $2k$ vectores tangentes $Y_1, \ldots, Y_{2k}$ en un punto $j^1_x s$ de J^1P tal que $q(j^1_x s) = \Gamma_x$, por la fórmula (2.9),

$$(q^*\Omega_2)(Y_i, Y_j) = \Omega_2(q_*Y_i, q_*Y_j) = (\Gamma_x, (s(x), \Omega_\kappa(Y_i, Y_j))_{\mathrm{ad}}).$$

En vista de las expresiones (4.9) y (4.10) se concluye.

c.q.d.

Observación 4.2.4 A partir de ahora, salvo mención explícita de lo contrario, para cada polinomio de Weil $f \in I^G$, las formas $f(\Omega_\kappa)$ de $C(P)$ se denotarán por $f(\Omega_2)$ tal como se construyen en la proposición anterior.

Proposición 4.2.5 *Sea Γ una conexión en un fibrado principal $\pi : P \to M$ y sea $\sigma_\Gamma : M \to C(P)$ la sección del fibrado de las conexiones que induce* (cf. Definición 2.1.3). *Dado un $f \in I^G_k$, entonces con la notación de la* Definición 4.2.2, *se cumple la siguiente igualdad de formas en M :*

$$(\sigma_\Gamma)^* f(\Omega_2) = f(\Omega_\Gamma).$$

DEMOSTRACIÓN. Dada una conexión Γ en $\pi : P \to M$, sea $\tilde{\sigma}_\Gamma : P \to J^1P$ la sección del fibrado de $\pi_{10} : J^1P \to P$ que define (*cf.* Observación 2.7.2). Vamos a probar primero que para cualquier polinimio de Weil f, se tiene que

$$(\tilde{\sigma}_\Gamma)^* \hat{f}(\Omega_\kappa) = \hat{f}(\Omega_\Gamma). \tag{4.11}$$

En efecto, consideremos un punto $u \in P$ cualquiera y $2k$ vectores tangentes $X_1, \ldots, X_{2k} \in T_uP$. Entonces, de la Definición (4.2.2),

$$\begin{aligned}
&(\tilde{\sigma}_\Gamma)^* \hat{f}(\Omega_\kappa)(X_1, \ldots, X_{2k}) = \\
&\frac{1}{(2k)!} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \varepsilon(\sigma) f\left((\tilde{\sigma}_\Gamma{}^*\Omega_\kappa)(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}), \ldots, (\tilde{\sigma}_\Gamma{}^*\Omega_\kappa)(X_{\sigma(2k-1)}, X_{\sigma(2k)})\right) = \\
&\qquad \frac{1}{(2k)!} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \varepsilon(\sigma) f\left(\Omega_\Gamma(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}), \ldots, \Omega_\Gamma(X_{\sigma(2k-1)}, X_{\sigma(2k)})\right) = \\
&\qquad\qquad \hat{f}(\Omega_\Gamma)(X_1, \ldots, X_{2k}),
\end{aligned}$$

en donde hemos hecho uso de la igualdad $(\tilde{\sigma}_\Gamma{}^*\Omega_\kappa) = \Omega_\Gamma$, consecuencia directa de la Proposición (2.7.5).

Por la Proposición (4.2.3), $\hat{f}(\Omega_\kappa) = q^* f(\Omega_2)$ y $\hat{f}(\Omega_\Gamma) = \pi^* f(\Omega_\Gamma)$. Sustituyendo en la fórmula (4.11), como $q \circ \tilde{\sigma}_\Gamma = \sigma_\Gamma \circ \pi$, se tiene

$$\pi^*(\sigma_\Gamma^* f(\Omega_2)) = \pi^*(f(\Omega_\Gamma)),$$

que es equivalente a la igualdad del enunciado.

c.q.d.

Proposición 4.2.6 *Sea $\pi : P \to M$ un fibrado principal cualquiera. Si $\sigma : M \to C(P)$ es una sección arbitraria del fibrado de las conexiones $p : C(P) \to M$, entonces la aplicación*

$$\sigma^* : H^k(C(P); \mathbb{R}) \to H^k(M; \mathbb{R}), \quad \sigma^*[\xi_k] = [\sigma^*\xi_k],$$

en donde los corchetes denotan clase de cohomología de de Rham, es un isomorfismo de grupos para todo k cuya inversa es p^*.

DEMOSTRACIÓN. Si $p : E \to M$ es un fibrado vectorial y E_0 es el conjunto de vectores nulos (es decir, la imagen de la sección nula $s_0 : M \to E$), la aplicación

$$H(t, v) = t \cdot v, \quad t \in [0, 1], v \in E,$$

hace que los espacios E y $E_0 \overset{s_0}{\cong} M$ sean homótopos. Por tanto, los grupos de cohomología $H^k(E; \mathbb{R})$ y $H^k(M; \mathbb{R})$ son isomorfos para cada $k \geq 0$, por la aplicación s_0^*.

En nuestro caso, si $\sigma : M \to C(P)$ es una sección arbitraria del fibrado de las conexiones, como $C(P)$ es un fibrado afín sobre M, queda definida una estructura de fibrado vectorial en la que σ es la sección nula. Por tanto, σ^* es un isomorfismo de grupos de cohomología. Por último, como $p \circ \sigma = \mathrm{Id}_M$,

$$\sigma^* \circ p^* = \mathrm{Id}_{H^\bullet(M;\mathbb{R})},$$

por lo que p^* es el inverso del isomorfismo σ^*.

c.q.d.

Corolario 4.2.7 *Si $\sigma : M \to C(P)$ es un sección arbitraria del fibrado de las conexiones y f es un polinomio de Weil de grado k, entonces la clase*

$$\sigma^*[f(\Omega_2)] \in H^{2k}(M, \mathbb{R})$$

coincide con $[f]$, imagen de f por el homomorfismo de Weil (cf. Proposición 4.2.3–(2)).

DEMOSTRACION. Si $\sigma : M \to C(P)$ es una sección del fibrado de las conexiones, existe una conexión Γ en $\pi : P \to M$ tal que $\sigma_\Gamma = \sigma$. Entonces, por la Proposición 4.2.5,

$$\sigma_\Gamma^*[f(\Omega_2)] = [\sigma_\Gamma^* f(\Omega_2)] = [f(\Omega_\Gamma)].$$

Por la Proposición 4.2.3–(2), esta clase no es más que $[f]$, por lo que se concluye.

c.q.d.

Este último Corolario sirve de motivación para dar la siguiente

Definición 4.2.8 Si $\pi : P \to M$ es un fibrado principal cualquiera y Ω_2 es la 2-forma simpléctica en $C(P)$ definida en §2.8.1, a las formas $f(\Omega_2)$ de $C(P)$, siendo f un polinomio de Weil, se les denomina *formas características.*

Por tanto las formas características son unas formas en $C(P)$ que al bajar a la variedad M a través de cualquier sección σ de $p : C(P) \to M$, definen unas formas cuya clase de cohomología son las clases características del fibrado $\pi : P \to M$. Sin embargo estas formas poseen mayor información que las clases que determinan. Por ejemplo, una clase característica de un fibrado puede ser nula, en cambio su forma no tiene por qué serlo. Para más detalle, véase la Observación 4.5.3.

Teorema 4.2.9 *Si $\pi : P \to M$ es un fibrado principal cualquiera, las formas características* (cf. Definición 4.2.8) *son* aut$P$*-invariantes (y por tanto* gauge *invariantes) en $C(P)$.*

DEMOSTRACION. Por el Teorema 4.1.7, una forma característica $f(\Omega_2)$ será aut$P$-invariantes en $C(P)$ si y sólo si $q^* f(\Omega_2)$ es aut$P$-invariantes en J^1P. Como por la Proposición 4.2.4 $q^* f(\Omega_2) = \hat{f}(\Omega_\kappa)$, hay que probar que $\hat{f}(\Omega_\kappa)$ es aut$P$-invariante en J^1P. Sea Φ un automorfismo de $\pi : P \to M$ y sean $Y_1, \ldots, Y_{2k} \in \mathfrak{X}(J^1P)$ $2k$ campos vectoriales de J^1P. Como la forma de conexión θ de la conexión canónica κ verifica $(\Phi^{(1)})^*\theta = \theta$ (*cf.* Proposición 2.7.2-(a)) y $\Omega_\kappa = d\theta + \frac{1}{2}[\theta,\theta]$, se tiene que $(\Phi^{(1)})^*\Omega_\kappa = \Omega_\kappa$ y por tanto

$$\begin{aligned}
&(\Phi^{(1)})^*(\hat{f}(\Omega_\kappa))(Y_1,\dots,Y_{2k}) = \\
&\frac{1}{(2k)!}\sum_{\sigma\in S_{2k}} \varepsilon(\sigma) f\left(\Phi^{(1)*}(\Omega_\kappa)(Y_{\sigma(1)},Y_{\sigma(2)}),\dots,\Phi^{(1)*}(\Omega_\kappa)(Y_{\sigma(2k-1)},Y_{\sigma(2k)})\right) = \\
&\qquad \frac{1}{(2k)!}\sum_{\sigma\in S_{2k}} \varepsilon(\sigma) f\left(\Omega_\kappa(Y_{\sigma(1)},Y_{\sigma(2)}),\dots,\Omega_\kappa(Y_{\sigma(2k-1)},Y_{\sigma(2k)})\right) = \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\hat{f}(\Omega_\kappa))(Y_1,\dots,Y_{2k}),
\end{aligned}$$

es decir, se verifica

$$(\Phi^{(1)})^*\hat{f}(\Omega_\kappa) = \hat{f}(\Omega_\kappa),$$

para cualquier autmorfismo $\Phi \in \mathrm{Aut}P$. Esto implica que $\hat{f}(\Omega_\kappa)$ es aut$P$-invariante.

c.q.d.

4.3 Formas *gauge* invariantes en $C(P)$

Se ha visto que tanto las formas $p^*\Omega^\bullet(M)$ como las formas características son *gauge* invariantes en $C(P)$. El siguiente teorema demuestra que estás son las únicas.

Teorema 4.3.1 *Sea $\pi : P \to M$ un fibrado principal arbitrario de grupo estructural un grupo de Lie conexo G. El álgebra de formas* gauge *invariantes en $C(P)$ está generada sobre $\pi_1^*\Omega^\bullet(M)$ por las formas características $\{f(\Omega_2)\}_{f\in I^G}$. Es decir,*

$$\mathcal{I}_{\mathrm{gau}P} = (p^*\Omega^\bullet(M))\,[f(\Omega_2)]_{f\in I^G}\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el fibrado principal $q : J^1P \to C(P)$. En virtud del Teorema 4.1.7, el problema de caracterizar $\mathcal{I}_{\mathrm{gau}P}$ es equivalente al de estudiar las formas *gauge* invariantes en J^1P que son q-proyectables a $C(P)$. Sea Ξ_r una forma *gauge* invariante de J^1P e impongamos las condiciones (1) y (2) del Corolario 4.1.6 a fin de estudiar su proyectabilidad. Para evitar confusión, el campo fundamental inducido por un $B \in \mathfrak{g}$ en el fibrado principal $q : J^1P \to C(P)$, lo denotaremos por $B^\bullet$, en vez de B^*, notación que reservaremos siempre para el campo fundamental en $\pi : P \to M$.

Fijemos una base $\{B_1, \ldots, B_m\}$ de $\mathfrak{g}$ y pongamos $\theta = \theta^\alpha \otimes B_\alpha$ y $\Omega_\kappa = \Omega^\alpha \otimes B_\alpha$. Por el Teorema 3.3.3, la forma Ξ_r se podra escribir como

$$\Xi_r = \sum_I \pi_1^* \omega_{I,j_1,\ldots,j_m} \wedge (\theta^1)^{i_1} \wedge \ldots \wedge (\theta^m)^{i_m} \wedge (\Omega^1)^{j_1} \wedge \ldots \wedge (\Omega^m)^{j_m},$$

para ciertas $\omega_{I,j_1,\ldots,j_m} \in \Omega^s(M)$, $s = r - (i_1 + \ldots + i_m) - 2(j_1 + \ldots + j_m)$, en donde $I = (i_1, \ldots, i_m)$ es un multi-índice booleano de orden m (*cf.* §3.3.2). Vamos a considerar que, a la luz del Lema 3.4.1–(1), todos los sumandos verifican la desigualdad

$$s + j_1 + \ldots + j_m = r - (i_1 + \ldots + i_m) - (j_1 + \ldots + j_m) \leq n = \dim M. \tag{4.12}$$

Por la Proposición 2.7.2–(b), se tiene

$$\theta^\beta(B_\alpha^\bullet) = \delta_\alpha^\beta, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq m, \tag{4.13}$$

y al ser la curvatura Ω_κ una forma horizontal,

$$\Omega^\beta(B_\alpha^\bullet) = 0, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq m. \tag{4.14}$$

Si se tiene en cuenta las igualdades (4.13) y (4.14), entonces

$$\begin{aligned} i_{B_\alpha^\bullet}\Xi_r = \sum_{\alpha=1}^m \sum_{I>0} (-1)^{s+i_1+\cdots+i_{\alpha-1}} \pi_1^*\omega_{I,j_1,\ldots,j_m} \wedge (\theta^1)^{i_1} \wedge \\ \ldots \wedge \widehat{(\theta^\alpha)^{i_\alpha}} \wedge \ldots \wedge (\theta^m)^{i_m} \wedge (\Omega^1)^{j_1} \wedge \ldots \wedge (\Omega^m)^{j_m}, \end{aligned}$$

en donde $\widehat{(\theta^\alpha)^{i_\alpha}}$ indica simplemente que este término se suprime. En virtud del Lema 3.4.1, esta expresión es cero si y sólo si $\omega_{I,j_1,\ldots,j_m} = 0$ siempre que $|I| > 0$. Por consiguiente, la condición (1) del Corolario 4.1.6 implica que la forma Ξ_r se escribe como

$$\Xi_r = \pi_1^*\omega_{j_1,\ldots,j_m} \wedge (\Omega^1)^{j_1} \wedge \ldots \wedge (\Omega^m)^{j_m}. \tag{4.15}$$

con $\omega_{j^1,\ldots,j_m} \in \Omega^s(M)$, $s = r - 2(j_1 + \cdots + j_m)$ y de la desigualdad (4.12),

$$s + j_1 + \cdots + j_m \leq n. \tag{4.16}$$

Sea

$$\pi_1^*\Omega^\bullet(M)\,[\Omega_\kappa] = \pi_1^*\Omega^\bullet(M)\,\left[\Omega^1,\dots,\Omega^m\right]$$

el álgebra de polinomios en las componentes de la curvatura y con coeficientes en $\pi_1^*\Omega^\bullet(M)$ y sea

$$K : \pi_1^*\Omega^\bullet(M) \otimes S^\bullet(\mathfrak{g}^*) \to \pi_1^*\Omega^\bullet(M)\,[\Omega_\kappa]$$

la única aplicación $\mathbb{R}$-lineal tal que

$$K(\pi_1^*\omega \otimes f) = \pi_1^*\omega \wedge \hat{f}(\Omega_\kappa),$$

para $\omega \in \Omega^\bullet(M)$, $f \in S^k(\mathfrak{g}^*)$, en donde $S^\bullet(\mathfrak{g}^*)$ denota el álgebra simétrica de $\mathfrak{g}^*$ y $\hat{f}$ se da en la Definición 4.2.2. Trabajando con la base $\{B^1,...,B^m\}$ de $\mathfrak{g}^*$, si f tiene la expresión

$$f = B^{\alpha_1} \vee \cdots \vee B^{\alpha_k},$$

directamente de la Definición 4.2.2 se obtiene

$$\hat{f}(\Omega_\kappa) = \Omega^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \Omega^{\alpha_k}. \tag{4.17}$$

El grupo G actúa por la derecha en $\pi_1^*\Omega^\bullet(M) \otimes S^\bullet(\mathfrak{g}^*)$ y en $\pi_1^*\Omega^\bullet(M)\,[\Omega_\kappa]$ respectivamente mediante las condiciones:

$$(\pi_1^*\omega \otimes f)\cdot g = \pi_1^*\omega \otimes f^g, \quad \forall\omega \in \Omega^\bullet(M),\ \forall f \in S^k(\mathfrak{g}^*), \tag{4.18}$$

en donde $f^g \in S^k(\mathfrak{g}^*)$ es el polinomio definido por

$$f^g(A_1,\dots,A_k) = f\left(\mathrm{Ad}_g A_1,\dots,\mathrm{Ad}_g A_k\right), \quad A_1,\dots,A_k \in \mathfrak{g},$$

y

$$\Xi\cdot g = (R_{g^{-1}})^*\Xi, \quad \forall\Xi \in \pi_1^*\Omega^\bullet(M)\,[\Omega_\kappa]. \tag{4.19}$$

Nótese que, como la curvatura es una forma de tipo adjunto (*cf.* §2.8.1), se tiene

$$(R_{g^{-1}})^*\Omega_\kappa = \mathrm{Ad}_g \circ \Omega_\kappa,$$

y entonces $(R_{g^{-1}})^*\Omega^\alpha$, $1 \leq \alpha \leq m$, es combinación lineal de $\Omega^1, \dots, \Omega^m$ para cualquier $g \in G$. Por tanto, si $\Xi \in \pi_1^*\Omega^\bullet(M)\,[\Omega_\kappa]$, su imagen $\Xi \cdot g$ seguirá perteneciendo a este conjunto, por lo que la acción está bien definida.

Por otra parte, si tomo un elemento $\zeta = \pi_1^*\omega \otimes B^{\alpha_1} \vee \cdots \vee B^{\alpha_k}$ de $\pi_1^*\Omega^\bullet(M) \otimes S^\bullet(\mathfrak{g}^*)$, haciendo uso de la fórmula (4.17) y de que Ω_κ es de tipo adjunto (*i.e.*, $\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\Omega_\kappa = R_g^*\Omega_\kappa$), se tiene

$$\begin{aligned}K(\zeta \cdot g) = K(\pi_1^*\omega \otimes \mathrm{Ad}_{g^{-1}}^* B^{\alpha_1} \vee \cdots \vee \mathrm{Ad}_{g^{-1}}^* B^{\alpha_k}) = \\ \pi_1^*\omega \wedge B^{\alpha_1}(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\Omega_\kappa) \wedge \cdots \wedge B^{\alpha_k}(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\Omega_\kappa) = \\ \pi_1^*\omega \wedge B^{\alpha_1}(R_g^*\Omega_\kappa) \wedge \cdots \wedge B^{\alpha_k}(R_g^*\Omega_\kappa) = \\ \pi_1^*\omega \wedge R_g^*(\Omega^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \Omega^{\alpha_k}) = \\ K(\pi_1^*\omega \otimes B^{\alpha_1} \vee \cdots \vee B^{\alpha_k}) \cdot g.\end{aligned}$$

Por tanto la aplicación K es equivariante respecto a las acciones de G en $\pi_1^*\Omega^\bullet(M) \otimes S^\bullet(\mathfrak{g}^*)$ y $\pi_1^*\Omega^\bullet(M)\,[\Omega_\kappa]$ respectivamente.

Supongamos, por el momento, cierto el siguiente:

Lema 4.3.2 *La aplicación K es un epimorfismo de álgebras cuyo núcleo es el ideal generado por los elementos de la forma $\pi_1^*\omega_s \otimes f$, con $\omega_s \in \Omega^s(M)$, $f \in S^k(\mathfrak{g}^*)$ y $s + k > n = \dim M$.*

Impongamos ahora la condición (2) del Corolario 4.1.6 a la forma Ξ_r, es decir, suponemos que la forma Ξ_r verifica

$$(R_g)^*\Xi_r = \Xi_r, \quad \forall g \in G, \tag{4.20}$$

o lo que es lo mismo

$$\Xi_r \cdot g = \Xi_r, \quad \forall g \in G,$$

tal como se expresa en la fórmula (4.19). Por la ecuación (4.15) tenemos que $\Xi_r \in \pi_1^*\Omega^\bullet(M)\,[\Omega_\kappa]$ y por lo tanto se puede concluir que al álgebra de formas *gauge* invariantes en J^1P es de la forma

$$\mathcal{I}_{\mathrm{gau}\,P} \cong \pi_1^*\Omega^\bullet(M)\,[\Omega_\kappa]^G = \left\{\Xi_r \in \pi_1^*\Omega^\bullet(M)\,[\Omega_\kappa] \mid \Xi_r \cdot g = \Xi_r, \forall g \in G\right\}, \tag{4.21}$$

Volviendo a la expresión de Ξ_r dada en la fórmula (4.15), si considero el elemento $\zeta_r \in \pi_1^*\Omega^\bullet(M) \otimes S^\bullet(\mathfrak{g}^*)$ dado por

$$\zeta_r = \pi_1^*\omega_{j_1,\dots,j_m} \otimes (B^1)^{j_1} \vee \ldots \vee (B^m)^{j_m},$$

se cumple que $K(\zeta_r) = \Xi_r$, tal como se desprende de la fórmula (4.17). Entonces, como la aplicación K es equivariante, $\zeta_r - \zeta_r \cdot g \in \ker K$ para cualquier $g \in G$. Como hemos asumido la desigualdad (4.16), en virtud del Lema 4.3.2 se deduce

$$\zeta_r \cdot g = \zeta_r, \quad \forall g \in G.$$

Finalmente, teniendo en cuenta que G opera trivialmente en on $\pi_1^*\Omega^\bullet(M)$, se tiene

$$(\pi_1^*\Omega^\bullet(M) \otimes S^\bullet(\mathfrak{g}^*))^G = \pi_1^*\Omega^\bullet(M) \otimes (S^\bullet(\mathfrak{g}^*))^G = \pi_1^*\Omega^\bullet(M) \otimes I^G,$$

en donde el super-índice G denota, como siempre, invariancia por la acción del grupo. Es decir, las formas *gauge* invariantes en J^1P y q-proyectables a $C(P)$ son del tipo

$$\Xi_r = \pi_1^*\omega_l \wedge \hat{f}^l(\Omega_\kappa),$$

con $\omega_l \in \Omega^\bullet(M)$, y $f^l \in I^G$ polinomios de Weil, en donde la suma en l es una suma finita.

Por tanto, la expresión de las formas en $C(P)$ que son *gauge* invariantes es

$$\xi_r = q_*\Xi_r = p^*\omega_l \wedge f^l(\Omega_2),$$

con $\omega_l \in \Omega^\bullet(M)$, y $f^l \in I^G$.

c.q.d

Observación 4.3.1 Para los grupos clásicos, el álgebra de polinomios de Weil I^G es una $\mathbb{R}$-álgebra finito generada. De hecho, para un grupo de Lie semisimple complejo, I^G es una anillo de polinomios en l variables libres, siendo l el rango del álgebra (Teorema de Chevalley, véase por ejemplo [Var. §4.9]). Por tanto, la fórmula anterior prueba que $I_{\mathrm{gau}P}$ es un álgebra finito generada sobre $\Omega^\bullet(M)$.

DEMOSTRACIÓN DEL Lema 4.3.2: Sea ζ un elemento de $\pi_1^*\Omega^\bullet(M) \otimes S^\bullet(\mathfrak{g}^*)$. Dicho elemento se podrá expresar como una suma finita

$$\zeta = \pi_1^*\omega_1 \otimes f^1 + \cdots + \pi_1^*\omega_t \otimes f^t,$$

siendo $\omega_1, \dots, \omega_t$ formas diferenciales en M distintas de cero y $f^1, \dots, f^t$ polinomios de simétricos ($f^l \in S^{h_l}(\mathfrak{g}^*)$). Si se expresa cada polinomio como

$$f^l = \lambda^l_{\alpha_1,\dots,\alpha_{h_l}} B^{\alpha_1} \vee \dots \vee B^{\alpha_{h_l}},$$

de la igualdad (4.17) se tiene

$$K(\xi) = \pi_1^*\omega_l \wedge \lambda^l_{\alpha_1,\dots,\alpha_{h_l}} \Omega^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \Omega^{\alpha_{h_l}},$$

lo que prueba directamente que K es un homomorfismo. La suprayectividad es evidente. Finalmente, supongamos ahora que $K(\zeta) = 0$. Por el Lema 3.4.1, esto es posible solamente si

$$\mathrm{grado}(\omega_l) + h_l > n,$$

para todo $l = 1, \dots, t$.

c.q.d

4.4 Formas aut$P$-invariantes en $C(P)$

Teorema 4.4.1 *Sea $\pi : P \to M$ un fibrado principal arbitrario en el que el grupo estructural G la variedad base M son conexos. El álgebra de formas* aut$P$*-invariantes en $C(P)$ está generada sobre los números reales por las formas características $\{f(\Omega_2)\}_{f\in I^G}$. Es decir,*

$$\mathcal{I}_{\mathrm{aut}P} = \mathbb{R}\left[f(\Omega_2)\right]_{f\in I^G}.$$

DEMOSTRACIÓN. Según el Teorema 4.1.7, hay que caracterizar aquellas formas de J^1P que son aut$P$-invariantes y proyectables a $C(P)$ por la aplicación $q : J^1P \to C(P)$. Si Ξ_r es una forma q-proyectable y aut$P$-invariante en J^1P, en particular será *gauge* invariante en J^1P y, por el Teorema 4.3.1 (fórmula (4.21)),

$$\Xi_r \in \pi_1^*\Omega^\bullet(M)\left[\Omega_\kappa\right]^G.$$

Pero la aut$P$-invariancia en J^1P, por el Teorema 3.4.2, implica que en verdad

$$\Xi_r \in \mathbb{R}\left[\Omega_\kappa\right]^G.$$

Finalmente, tal como se muestra en el final de la demostración del Teorema 4.3.1, se tiene entonces

$$\Xi_r = \lambda_l \hat{f}^l(\Omega_\kappa),$$

siendo $\lambda_l \in \mathbb{R}$ y $f_l \in I^G$, en donde la suma en l es una suma finita.

c.q.d

4.5 Ejemplos

4.5.1 Los grupos de interés en teoría de campos

Los grupos que aparecen en la teoría de campos *gauge* son básicamente los siguientes:

- El grupo $U(1)$ que describe la simetría del electromagnetismo clásico y que surge al formalizar la condición *gauge* de Lorentz (véase, por ejemplo, [Jon, §10.1]) en las ecuaciones de Maxwell.
- El grupo $SU(2)$ es el grupo de simetrías internas del isoespín. Los campos de Yang-Mills (*cf.* [YM], [ED]) son precisamente los campos *gauge* de grupo $SU(2)$. Es el primer ejemplo importante de teoría electromagnética no abeliana.
- El grupo producto directo $U(1) \times SU(2)$, que es el grupo de simetrías del modelo de interacción electro-débil (véase [MM, §6.2]).
- El grupo $SU(3)$ es el grupo de simetría que rige la interacción fuerte de hadrones. Por ejemplo, la lagrangiana del *quark* libre tiene una simetría global respecto de $SU(3)$ ([Jon, §10.6],).
- El grupo producto directo $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ que modela la teoría unificada de las interacciones electromagnética, débil y fuerte. Esta teoría es conocida usualmente como el "modelo estándar" (véase, por ejemplo, [MM, §6.2]).

A continuación estudiaremos los grupos $U(1)$, $SU(2)$ y $U(2)$. No consideraremos los grupos producto porque la teoría se extiende trivialmente a dichos casos y tampoco los grupos $SU(n)$, con $n \geq 3$, porque las expresiones locales son muy complicadas y la técnica es la misma.

4.5.2 El grupo $U(1)$

Expresión de las formas características

Sea $\pi : P \to M$ un fibrado principal de grupo estructural el grupo $U(1)$. Como $U(1)$ es abeliano, su representación adjunta es trivial. Por tanto, el fibrado adjunto ad$P$ es un fibrado vectorial de línea real trivial sobre M, es decir, $\mathrm{ad}P = M \times \mathbb{R}$. Así pues, el fibrado de conexiones $p : C(P) \to M$ es un fibrado afín modelado sobre $T^*M \otimes \mathrm{ad}P \cong T^*M$ y, por otra parte, la forma simpléctica Ω_2 de $C(P)$ es en este caso una forma usual con valores en $\mathbb{R}$. Como el álgebra de polinomios de Weil del álgebra $\mathfrak{u}(1) \cong \mathbb{R}$ está generada por la aplicación identidad $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, los Teoremas 4.3.1 y 4.4.1 afirman que

$$\mathcal{I}_{\mathrm{gau}P} = p^*\Omega^\bullet(M)[\Omega_2] \quad \text{y} \quad \mathcal{I}_{\mathrm{aut}P} = \mathbb{R}[\Omega_2].$$

La expresión local de la forma Ω_2 dada en la fórmula (2.16) es, en este caso,

$$\Omega_2 = \mathrm{d}A_j \wedge \mathrm{d}x^j. \tag{4.22}$$

Estos resultados pueden encontarse de una forma más detallada en el estudio de la invariancia *gauge* de los $U(1)$-fibrados principales que se desarrolla en [HM1] y [HM2].

La forma Ω_2, además de ser la generadora del álgebra *gauge*, posee una estrecha relación con la estructura simpléctica canónica del fibrado T^*M. En efecto:

Proposición 4.5.1 *Consideremos un $U(1)$ fibrado principal $\pi : P \to M$. Sea Γ una conexión cualquiera en P y sea Ω_Γ la 2-forma de curvatura considerada como forma diferencial ordinaria en M* (cf. Observación 2.8.2). *Si $\chi_\Gamma : T^*M \to C(P)$ es el isomorfismo de fibrados afines dado por*

$$\chi_\Gamma(w) = \Gamma_x + w, \quad w \in T_x^*M, \ x \in M,$$

y Ω_2 es la forma simplectica de $C(P)$ (cf. Teorema 2.8.3), *entonces*

$$\chi_\Gamma^*(\Omega_2) = \mathrm{d}\omega + \pi_T^*(\Omega_\Gamma),$$

siendo $\mathrm{d}\omega$ la forma simpléctica canónica del fibrado cotangente (i.e., *la diferencial de la forma de Liouville*) *y $\pi_T : T^*M \to M$ la proyección canónica.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos un sistema de coordenadas $(x^1, \dots, x^n)$ en M y sea $(x^1, \dots, x^n; A_1, \dots, A_n)$ el sistema de coordenadas inducido en $C(P)$ (*cf.* §2.2). Se considera el sistema coordenadas $(x^1, \dots, x^n; p_1, \dots, p_n)$ usuales en el fibrado tangente, por la condición

$$w = p_j(w)\mathrm{d}x^j, \quad w \in T^*M.$$

En estos sistemas de coordenadas, la aplicación χ_Γ tiene por expresión

$$w = p_j \mathrm{d}x^j \mapsto \chi_\Gamma(w) = A_j(\Gamma_x) + p_j,$$

para $w \in T_x^* M$. Entonces, haciendo uso de la expresión (4.22),

$$\chi_\Gamma^*(\Omega_2) = \mathrm{d}(A_j(\Gamma_x) + p_j) \wedge \mathrm{d}x^j = \left(\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} \right) \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j + \mathrm{d}p_j \wedge \mathrm{d}x^j.$$

El segundo sumando es la forma simplectica de T^*M y el primer sumando no es más que la curvatura de Γ, tal como se puede ver, por ejemplo, en [NS, §7.20].

c.q.d.

Corolario 4.5.2 *Con la notación de la proposición anterior, si Γ es una conexión plana en un $U(1)$-fibrado $\pi : P \to M$, la aplicación $\chi_\Gamma : T^*M \to C(P)$ es un simplectomorfismo, es decir, $\chi_\Gamma^*(\Omega_2) = \mathrm{d}\omega$.*

En particular, si se considera la conexión plana estándar Γ_0 en el fibrado trivial $M \times U(1)$ y se identifica $C(P) \cong T^*M$ por la aplicación χ_{Γ_0}, el álgebra de formas gauge *invariantes en T^*M está generada por la forma simpléctica* $\mathrm{d}\omega$. (Véase [HM1] y [HM2]).

Ejemplo 4.5.3 Veamos un ejemplo clásico de esta situación. Sea $L(p,q) = S^3/\mathbb{Z}_p$ el espacio lenticular de tipo (p,q) donde p, q son dos números enteros positivos primos entre sí con $p \geq 2$, y la acción de $\mathbb{Z}_p$ (identificado al grupo de las raíces p-ésimas de la unidad) sobre S^3 viene dada por $(x,y) \cdot \varepsilon^k = (x\varepsilon^k, y\varepsilon^{qk})$, $0 \leq k \leq p-1$, siendo

$$\varepsilon^k = \exp\left(2\pi i \frac{k}{p}\right), \quad (x,y) \in \mathbb{C}^2, \ |x|^2 + |y|^2 = 1.$$

Es sabido ([Gre]) que tal acción es propiamente discontinua, de modo que $L(p,q)$ es una variedad diferenciable de dimensión 3. Sea $\pi : S^3 \to L(p,q)$ la proyección de paso al cociente. Consideremos la acción natural de $\mathbb{Z}_p$ en el grupo $U(1)$ y formemos el fibrado asociado

$$\pi_P : P = \left(S^3 \times U(1)\right)/\mathbb{Z}_p \to L(p,q).$$

Como $U(1)$ es abeliano, P es un fibrado $U(1)$-principal sin más que definir la acción por la fórmula $[u,z] \cdot t = [u, zt]$, donde $u = (x,y) \in S^3$, $z, t \in U(1)$, y $[u, z]$ designa la clase de equivalencia del par $(u, z) \in S^3 \times U(1)$ en P. Tal fibrado es manifiestamente no trivial porque reduce a $\pi : S^3 \to L(p, q)$. De hecho, la reducción está dada por la aplicación $\mathbb{Z}_p$-equivariante $\varphi : S^3 \to P$, $\varphi(u) = [u, 1]$. La existencia de reducción demuestra también que π_P admite una conexión plana. Por tanto, se puede aplicar el corolario anterior para deducir que la estructura simpléctica del fibrado de conexiones sobre P es canónicamente isomorfa a la del fibrado cotangente $T^* L(p, q)$.

La fibración de Hopf $S^3 \to S^2$

Sea $\pi : S^3 \to S^2$ la aplicación definida por

$$\pi(x, y) = \left(2x\bar{y}, |x|^2 - |y|^2\right),$$

donde:

1. S^3 se identifica a los pares $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ tales que $|x|^2 + |y|^2 = 1$.

2. S^2 se identifica a los pares $(x, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ tales que $|x|^2 + t^2 = 1$.

Probemos con detalle que π es un fibrado principal de grupo $U(1)$. Para ello, identifiquemos en primer lugar $U(1)$ con $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. La acción de $S^1 = U(1)$ sobre S^3 es por traslaciones a derecha; esto es, $(x, y) \cdot z = (xz, yz)$. La definición es correcta pues se tiene

$$\begin{aligned} |x \cdot z|^2 + |y \cdot z|^2 &= |x|^2 |z|^2 + |y|^2 |z|^2 = \left(|x|^2 + |y|^2\right) |z|^2 \\ &= |x|^2 + |y|^2 = 1, \end{aligned}$$

ya que $|z| = 1$, y por tanto $(x, y) \cdot z \in S^3$. Veamos que π es epiyectiva. Dado $(u, t) \in S^2$, distinguimos dos casos:

1. Si $u = 0$, entonces $t = \pm 1$ y se tiene $\pi(1, 0) = (0, 1)$, $\pi(0, 1) = (0, -1)$.

2. Si $u \neq 0$, entonces $-1 < t < 1$ y se tiene

$$\pi\left(\sqrt{\frac{1+t}{2}}\frac{u}{|u|}, \sqrt{\frac{1-t}{2}}\right) = (u, t), \quad \left(\sqrt{\frac{1+t}{2}}\frac{u}{|u|}, \sqrt{\frac{1-t}{2}}\right) \in S^3.$$

Veamos que las fibras de π coinciden con las órbitas de la acción de $U(1)$. En primer lugar, se tiene

$$\begin{aligned}\pi((x,y)\cdot z) &= \pi(xz,yz) = \left(2\,(xz)\,\overline{(yz)}, |xz|^2 - |yz|^2\right) \\ &= \left(2xz\bar{z}\bar{y}, |x|^2 - |y|^2\right) \\ &= \pi(x,y).\end{aligned}$$

Recíprocamente, si $\pi(x_1, y_1) = \pi(x_2, y_2)$, entonces se tiene

$$\text{(i) } x_1\bar{y}_1 = x_2\bar{y}_2, \quad \text{(ii) } |x_1|^2 - |y_1|^2 = |x_2|^2 - |y_2|^2 .$$

Como $(x_1, y_1) \in S^3$, o bien $x_1 \neq 0$, o bien $y_1 \neq 0$. Supongamos $x_1 \neq 0$ y sea $z = x_1^{-1}x_2$, de modo que $x_2 = x_1 z$. De (i) se deduce $\bar{y}_1 = z\bar{y}_2$, y conjugando, $y_1 = y_2\bar{z}$, de donde

$$y_2 = \frac{1}{|z|}y_1 z.$$

Por tanto, basta ver que $|z| = 1$ (o sea, $z \in U(1)$). En fecto, de (ii) se sigue

$$|x_1|^2 - |y_2\bar{z}|^2 = |x_1 z|^2 - |y_2|^2 ,$$

y dividiendo por $|x_1|^2$, se obtiene

$$1 - |x_1^{-1}y_2|^2|z|^2 = |z|^2 - |x_1^{-1}y_2|^2,$$

de donde se concluye que $|z|^2 = 1$.

Observación 4.5.1 La importancia de la fibración de Hopf reside en que dicho fibrado principal no admite conexiones planas, ya que su clase de Chern no es trivial. De hecho, $c_1(S^3)$ es un generador de $H^2(S^2; \mathbb{Z})$ (véase [Ati2], [MM, §8.2]). Por tanto, las formas gauge ya no pueden manejarse de forma canónica a partir de la estructura simpléctica del fibrado cotangente a la esfera S^2, como se sigue del último corolario.

4.5.3 El grupo $SU(2)$

Expresión de las formas características

Como es sabido (véase [KN, XII,Theorem2.5]) los polinomios de Weil del grupo $SU(2)$ están generados por un solo polinomio: el determinante en

$\mathfrak{su}(2)$. De modo preciso, el álgebra de Lie de $SU(2)$ está formada por las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes complejos de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \alpha i & a+bi \\ -a+bi & -\alpha i \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ a+bi \in \mathbb{C}.$$

Entonces $\det : \mathfrak{su}(2) \to \mathbb{R}$, $\det(A) = \alpha^2 + a^2 + b^2$, es un polinomio invariante frente a la representación adjunta que genera el álgebra de Weil:

$$I^{SU(2)} = \mathbb{R}\left[\det\right].$$

Calculemos la correspondiente forma característica $\det(\Omega_2)$ (véase [CM2]). Para ello determinemos en primer lugar la expresión local de la forma Ω_2 en $C(P)$, siendo $\pi : P \to M$ un fibrado principal cualquiera de grupo $SU(2)$.

En primer lugar, fijemos la siguiente base de $\mathfrak{su}(2)$:

$$B_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.23}$$

Obsérvese que $2iB_a, 1 \leq a \leq 3$, son las matrices de Pauli. Un simple cálculo prueba que se verifica

$$[B_1, B_2] = B_3, \quad [B_2, B_3] = B_1, \quad [B_3, B_1] = B_2.$$

Con tales notaciones y teniendo en cuenta la fórmula general dada en (2.16) para Ω_2, en el presente caso se tiene

$$\Omega_2 = \mathfrak{S}_{123}\{\mathrm{d}A_j^1 \wedge \mathrm{d}x^j + A_j^2 A_k^3 \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k\} \otimes \tilde{B}_1,$$

en donde $\mathfrak{S}_{123}$ designa la suma cíclica en los tres índices 1, 2 y 3. Por tanto, tomando determinantes, se tiene:

$$\eta_4 = \frac{1}{4}\mathfrak{S}_{123}\left(\mathrm{d}A_i^1 \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}A_j^1 \wedge \mathrm{d}x^j + 2A_j^2 A_k^3 \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}A_i^1 \wedge \mathrm{d}x^i\right). \tag{4.24}$$

Por tanto, para un $SU(2)$-fibrado principal $\pi : P \to M$ cualquiera se tiene

$$\mathcal{I}_{\mathrm{gau}P} = p^*\Omega^\bullet(M)\left[\eta_4\right], \quad \mathcal{I}_{\mathrm{aut}P} = \mathbb{R}\left[\eta_4\right].$$

Observación 4.5.2 Es este caso, los conjuntos $\mathcal{I}_{\mathrm{gau}P}$ y $\mathcal{I}_{\mathrm{aut}P}$ se pueden expresar de una manera abstracta identificando la forma η_4 con una variable muda t y formando el álgebra de polinomios sobre $\Omega^\bullet(M)$ y $\mathbb{R}$ respectivamente. Sin embargo, hay expresiones polínomicas que al ser vistas como formas en $C(P)$ son nulas. Hay que tomar cocientes por ciertos ideales, de la siguente manera:

$$\mathcal{I}_{\mathrm{gau}P} = \frac{\Omega^\bullet(M)\,[t]}{(\omega_s \cdot t^k \mid s + 2k > n)}, \quad y \quad \mathcal{I}_{\mathrm{aut}P} = \frac{\mathbb{R}\,[t]}{(t^{[\frac{n}{2}]+1})}.$$

Como el determinante es un polinomio de Weil de grado 2, es una consecuencia directa del Lema 4.3.2 comprobar que las anteriores identificaciones son correctas.

Observación 4.5.3 Si $\dim M \leq 3$, entonces $\sigma^*\eta_4 = 0$ para cualquier $\sigma : M \to C(P)$ sección del fibrado de las conexiones. En efecto, para $\dim M \leq 3$, cada fibrado principal $\pi : P \to M$ de grupo $SU(2)$ es trivial (o lo que es equivalente, admite una sección global) ya que $SU(2) \simeq S^3$ es $(m-1)$-conexo para cada $m \leq \dim M$ (cf. [Hus, Chapter 2, Theorem 7.1]). En consecuencia, todas las clases características de P son necesariamente cero. Sin embargo, la forma η_4 no se anula, si bien su imagen inversa por cualquier conexión de P es idénticamente nula. Ello prueba que, en general, las formas características de un fibrado principal poseen más información que sus clases características.

Ejemplo 4.5.4 La expresión local de η_4 dada en (4.21), en el caso en que la dimensión de la variedad base M sea 2 tiene la siguiente forma

$$\eta_4 = -\frac{1}{2}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge (\mathrm{d}A_1^1 \wedge \mathrm{d}A_2^1 + \mathrm{d}A_1^2 \wedge \mathrm{d}A_2^2 + \mathrm{d}A_1^3 \wedge \mathrm{d}A_2^3).$$

La fibración de Hopf $S^7 \to S^4$

Sea $\pi : S^7 \to S^4$ la aplicación definida por

$$\pi\,(x,y) = \left(2x\bar{y}, |x|^2 - |y|^2\right),$$

donde:

1. S^7 se identifica a los pares $(x,y) \in \mathbb{H}^2$ tales que $|x|^2 + |y|^2 = 1$, siendo $\mathbb{H}$ el cuerpo de los cuaterniones y $|\cdot|$ la norma asociada a $x \cdot \bar{x} = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, siendo $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$.

2. S^4 se identifica a los pares $(x, t) \in \mathbb{H} \times \mathbb{R}$ tales que $|x|^2 + t^2 = 1$.

Como en el caso del grupo $U(1)$ se prueba que π es un fibrado principal de grupo S^3, donde la acción de S^3 sobre S^7 es $(x, y) \cdot z = (x \cdot z, y \cdot z)$, en donde el producto es el cuaterniónico en $\mathbb{H}$.

Si consideramos ahora la proyección esterográfica de $S^4 - \{p\}$ a $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$, siendo $p = (0, 1) \in \mathbb{H} \times \mathbb{R}$, podemos utilizar la estructura cuaterniónica para escribir la forma η_4. Como $S^4 - \{p\}$ es contractible, la fibración de Hopf sobre este abierto es trivial y, por tanto, podemos introducir las coordenadas $(x^1, x^2, x^3, x^4; A_1^\alpha, A_2^\alpha, A_3^\alpha, A_4^\alpha)$, $1 \leq \alpha \leq 3$, en $C(S^7)$ (*cf.* §2.2). Realizamos la identificación

$$2B_1 = i, \quad 2B_2 = j, \quad 2B_3 = k,$$

de la base $\{B_1, B_2, B_3\}$ del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ definida en (4.23) con la base $\{i, j, k\}$ del espacio de los números imaginarios puros y denotamos

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}x^1 + \mathrm{d}x^2 \cdot i + \mathrm{d}x^3 \cdot j + \mathrm{d}x^4 \cdot k.$$

Sean

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1^1 \cdot i + A_1^2 \cdot j + A_1^3 \cdot k, \\ A_2 &= A_2^1 \cdot i + A_2^2 \cdot j + A_2^3 \cdot k, \\ A_1 &= A_3^1 \cdot i + A_3^2 \cdot j + A_3^3 \cdot k, \\ A_4 &= A_4^1 \cdot i + A_4^2 \cdot j + A_4^3 \cdot k. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &= \frac{-1}{3}(A_2 \cdot i + A_3 \cdot j + A_4 \cdot k), \\ \tilde{A}_2 &= \frac{-1}{3}(A_1 \cdot i - A_4 \cdot j + A_3 \cdot k), \\ \tilde{A}_1 &= \frac{-1}{3}(A_4 \cdot i + A_1 \cdot j - A_2 \cdot k), \\ \tilde{A}_4 &= \frac{-1}{3}(-A_3 \cdot i + A_2 \cdot j + A_1 \cdot k). \end{aligned}$$

Si se define

$$\mathrm{A} = \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 \cdot i + \tilde{A}_3 \cdot j + \tilde{A}_4 \cdot k,$$

se comprueba que la forma de curvatura Ω_2 tiene por expresión (véase [NS, §10.8])

$$\Omega_2 = \mathrm{Im}(\mathrm{dA} + (\mathrm{A}\mathrm{d}x) \wedge (\mathrm{A}\mathrm{d}x)),$$

en donde Im denota la parte imaginaria cuaterniónica. Entonces la forma $\eta_4 = \det(\Omega_2)$ tiene con esta notación la siguiente expresión cuaterniónica

$$\eta_4 = -\frac{1}{4}\Omega_2 \wedge \Omega_2 = -\frac{1}{4}\mathrm{Im}(\mathrm{dA} + (\mathrm{A}\mathrm{d}x) \wedge (\mathrm{A}\mathrm{d}x)) \wedge \mathrm{Im}(\mathrm{dA} + (\mathrm{A}\mathrm{d}x) \wedge (\mathrm{A}\mathrm{d}x)).$$

4.5.4 El grupo $U(2)$

Si bien este grupo no es relevante en la teoría de campos, vamos a explicar la estructura de sus formas invariantes, para poner de manifiesto explícitamente un ejemplo en el que existen dos generadores esenciales: la traza y el determinante.

El álgebra de Lie de $U(2)$ está formada por las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes complejos de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \alpha i & a+bi \\ -a+bi & \beta i \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ a+bi \in \mathbb{C}.$$

Entonces $\mathrm{tr} : \mathfrak{u}(2) \to \mathbb{R}$, $\mathrm{tr}(A) = \alpha + \beta$, y $\det : \mathfrak{u}(2) \to \mathbb{R}$, $\det(A) = -\alpha\beta + a^2 + b^2$, son polinomios invariantes frente a la representación adjunta que genera el álgebra de Weil:

$$I^{U(2)} = \mathbb{R}\left[\mathrm{tr}, \det\right].$$

En primer lugar, fijemos la siguiente base de $\mathfrak{u}(2)$:

$$B_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},\ B_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ B_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Un simple cálculo con la expresión (2.16) de la forma Ω_2, muestra que expresiones para las formas asociadas a la traza y el determinante son las siguientes:

$$\begin{aligned} \eta_2 &= \mathrm{d}A_j^0 \wedge \mathrm{d}x^j, \qquad (4.25) \\ \eta_4 &= -\frac{1}{4}\mathrm{d}A_i^0 \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}A_j^0 \wedge \mathrm{d}x^j \\ &\quad \frac{1}{4}\mathfrak{S}_{123}\left(\mathrm{d}A_i^1 \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}A_j^1 \wedge \mathrm{d}x^j + 2A_j^2A_k^3\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}A_i^1 \wedge \mathrm{d}x^i\right). \end{aligned}$$

en donde, de nuevo, $\mathfrak{S}_{123}$ denota la suma cíclica en los índices 1, 2 y 3.

Los Teoremas 4.3.1 y 4.4.1 afirman por tanto que, para cualquier $U(2)$-fibrado principal $\pi : P \to M$, se tiene

$$\mathcal{I}_{\mathrm{gau}P} = p^*\Omega^\bullet(M)\,[\eta_2,\eta_4]\,, \quad \mathcal{I}_{\mathrm{aut}P} = \mathbb{R}\,[\eta_2,\eta_4]\,.$$

Al igual que en el caso $SU(2)$, los conjuntos $\mathcal{I}_{\mathrm{gau}P}$ y $\mathcal{I}_{\mathrm{aut}P}$ se pueden expresar de una manera abstracta identificando las formas η_2, η_4 con un par de variables u, t y formando el cociente del álgebra de polinomios sobre $\Omega^\bullet(M)$ y $\mathbb{R}$ respectivamente por ciertos ideales, tal como se expresan en las siguientes fórmulas:

$$\mathcal{I}_{\mathrm{gau}P} = \frac{\Omega^\bullet(M)\,[u,t]}{(\omega_s \cdot u^{k_1}t^{k_2} \mid s+k_1+2k_2>n)}, \qquad \mathcal{I}_{\mathrm{aut}P} = \frac{\mathbb{R}\,[u,t]}{(u^{k_1}t^{k_2} \mid k_1+2k_2>n)}.$$

Como la traza es un polinomio de Weil de grado 1 y el determinante es de grado 2, es una consecuencia directa del Lema 4.3.2 comprobar que las anteriores identificaciones son correctas.

Capítulo 5

Equivalencia de lagrangianas *gauge* invariantes

5.1 Problemas variacionales

5.1.1 Formulación de un problema variacional

Sea $p : E \to M$ una variedad fibrada arbitraria, donde la base M es conexa y orientable y sea $p_1 : J^1(E) \to M$ el fibrado de 1-*jets* de secciones (*cf.* §2.4).

Definición 5.1.1 Una *densidad lagrangiana* sobre $p : E \to M$ es una aplicación de variedades fibradas sobre M,

$$\Lambda : J^1(E) \to \bigwedge^n T^*M,$$

siendo $n = \dim M$. Si fijamos una forma de volumen v en M, cada densidad lagrangiana se podrá escribir como $\mathcal{L}v$ para cierta función

$$\mathcal{L} : J^1(E) \to \mathbb{R},$$

llamada *lagrangiana*.

Observación 5.1.1 Se puede definir también una densidad lagrangiana como una n-forma diferencial en $J^1(E)$ del tipo $\mathcal{L}p_1^*v$. Sin embargo, para facilitar la notación, se escribe directamente $\mathcal{L}v$.

Fijada una subvariedad conexa y compacta (posiblemente con frontera) $D \subseteq M$ con $\dim D = \dim M$, una densidad lagrangiana produce una funcional sobre el conjunto de secciones de $p|_D$ como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D &: \Gamma(D, E) \to \mathbb{R}, \\ \mathcal{L}_D(s) &= \int_D \left(j^1 s\right)^* (\mathcal{L}v) . \end{aligned}$$

Definición 5.1.2 Sea $\mathfrak{X}^v_c(E) \subseteq \mathfrak{X}(E)$ la subálgebra de Lie de los campos vectoriales p-verticales de E cuyo soporte tiene imagen compacta en M. Se llama *primera variación* de la funcional asociada a $\mathcal{L}v$ en una sección $s : M \to E$ a la funcional lineal

$$\delta_s \mathcal{L} : \mathfrak{X}^v_c(E) \to \mathbb{R}$$

definida por

$$\delta_s \mathcal{L}(X) = \int_M \left(j^1 s\right)^* \left(L_{X^{(1)}} (\mathcal{L}v)\right),$$

siendo $X^{(1)}$ el levantamiento de X al fibrado $J^1(E)$ por transformaciones infinitesimales de contacto (*cf.* [Mu], [Sau, p.133]). Una sección s es *crítica* o *extremal* para $\mathcal{L}v$ si la primera variación de $\mathcal{L}v$ se anula en s; es decir, $\delta_s \mathcal{L} = 0$, o equivalentemente,

$$\int_M \left(j^1 s\right)^* \left(L_{X^{(1)}} (\mathcal{L}v)\right) = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{X}^v_c(E).$$

5.1.2 Ecuaciones de Euler–Lagrange

Como es bien sabido (véase, por ejemplo [Gar3], [GoS], [EMR]), una sección $s : M \to E$ es crítica si y sólo si verifica las ecuaciones de Euler–Lagrange; esto es,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^\alpha} \circ j^1 s - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^\alpha_i} \circ j^1 s \right) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m. \tag{5.1}$$

donde m es la dimensión de las fibras de $p : E \to M$, y (y^α_i) es el sistema de coordenadas inducido en $J^1(E)$ por un sistema fibrado de coordenadas locales $(x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^m)$ para la proyección p en el cual la forma de volumen adopte su forma estándar $v = \mathrm{d}x^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^n$.

5.1.3 Problemas variacionalmente triviales

Definición 5.1.3 El problema variacional definido por $\mathcal{L}v$ se dice que es *trivial* si todas las secciones de $p : E \to M$ definidas en un abierto cualquiera de la base son extremales del problema.

Observación 5.1.2 Nótese que un problema variacional es trivial si y sólo si las ecuaciones de Euler–Lagrange de dicho problema se satisfacen idénticamente; es decir, cualquier sección de p es una solución de las ecuaciones (5.1).

Definición 5.1.4 Dos densidades lagrangianas $\mathcal{L}v$, $\mathcal{L}'v$ se dice que son *equivalentes* si el problema variacional definido por su diferencia $\mathcal{L}v - \mathcal{L}'v = (\mathcal{L} - \mathcal{L}')v$ es trivial.

Proposición 5.1.5 *El problema variacional definido por $\mathcal{L}v$ es trivial si y sólo si $\mathcal{L}$ satisface el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales:*

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y_i^\alpha \partial y_j^\beta} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y_j^\alpha \partial y_i^\beta} = 0, \; i, j = 1, \dots, n; \; \alpha, \beta = 1, \dots, m. \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^\alpha} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^i \partial y_i^\alpha} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^\beta \partial y_i^\alpha} y_i^\beta, \; \alpha = 1, \dots, m. \tag{5.3}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea s una sección local cualquiera del fibrado $p : E \to M$ y consideremos las ecuaciones de Euler-Lagrange (5.1). Desarrolando el paréntesis por la regla de la cadena, se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^\alpha}(j_x^1 s) - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^i \partial y_i^\alpha}(j_x^1 s) - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^\beta \partial y_i^\alpha}(j_x^1 s)\frac{\partial s^\beta}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_j^\beta \partial y_i^\alpha}(j_x^1 s)\frac{\partial^2 s^\beta}{\partial x^i \partial x^j} = 0, \tag{5.4}$$

para todo $\alpha = 1, \dots m$, y x en el dominio de s. Es directo comprobar ahora que las condiciones (5.2) y (5.3) son suficientes para que se verifique (5.4). Veamos que son también necesarias. Como la elección de la sección es arbitraria. dado un punto $x \in M$ y un elemento $j_x^1 s \in (J^1 E)_x$, podemos escoger una sección local s con este 1-*jet* tal que $(\partial^2 s^\beta / \partial x^i \partial x^j)_x = 0$ para todo $i, j = 1, \dots, n$; $\beta = 1, \dots, m$. En ese caso, se deduce la ecuación (5.3) del enunciado.

Finalmente, en vista de la ecuación (5.4), si la condición (5.3) se verifica, se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_j^\beta \partial y_i^\alpha}(j_x^1 s)\frac{\partial^2 s^\beta}{\partial x^i \partial x^j}(x) = 0,$$

para cualquier sección, lo que implica inmediatamente la condición (5.2).

c.q.d.

Corolario 5.1.6 (Campo escalar) *Sea $p : E \to M$ un fibrado cuyas fibras son de dimensión* 1, *esto es*, $\dim E = \dim M + 1$ (*o sea* $m = 1$). *Entonces una densidad lagrangiana $\mathcal{L}v$ sobre $J^1(E)$ es variacionalmente trivial si y sólo la forma de Poincaré-Cartan (véanse, por ejemplo,* [Gar3], [GoS], [EMR]) *es cerrada.*

DEMOSTRACIÓN. Las ecuaciones (5.2) y (5.3) se escriben en este caso como

$$2\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y_i \partial y_j} = 0, \; i, j = 1, \ldots, n;$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^i \partial y_i} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial y_i} y_i.$$

La primera condición implica que $\mathcal{L}$ es una función afín de la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}^0 + \mathcal{L}^i y_i$ siendo $\mathcal{L}^0$, $\mathcal{L}^i$, $i = 1, \ldots, n$, funciones diferenciables de las corrdenadas $(x^1, \ldots, x^n; y)$. La segunda condición se escribe entonces como

$$\frac{\partial \mathcal{L}^0}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial x^i}. \tag{5.5}$$

Por otra parte, como es bien sabido (véanse [Gar3], [GoS], [EMR]) la expresión local de la forma de Poincaré-Cartan es

$$\Theta = (-1)^{i+1}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i^\alpha}(\mathrm{d}y^\alpha - y_j^\alpha \mathrm{d}x^j)\cdot v_i + \mathcal{L}\cdot v,$$

siendo $v = \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$, $v_i = \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$. Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Theta &= (-1)^{i+1}\mathrm{d}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i}\right) \wedge (\mathrm{d}y - y_j \mathrm{d}x^j) \wedge v_i \\ &\quad + (-1)^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i}\mathrm{d}y_j \wedge \mathrm{d}x^j \wedge v_i + \mathrm{d}\mathcal{L} \wedge v = -\frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial x^i}\mathrm{d}y \wedge v + \frac{\partial \mathcal{L}^0}{\partial y}\mathrm{d}y \wedge v.\end{aligned}$$

que es nula únicamente si la igualdad (5.5) se satisface.

c.q.d.

Corolario 5.1.7 (Mecánica) *Sea $M = \mathbb{R}$ o S^1 y $p : E = M \times Q \to M$ la proyección sobre el primer factor, donde Q es una variedad de dimensión m (o sea, $n = 1$). Entonces una densidad lagrangiana $\mathcal{L}v$ sobre $J^1(E)$ es variacionalmente trivial si y sólo si la forma de Poincaré-Cartan es cerrada.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $(q^1, \ldots, q^m)$ las coordenadas de la variedad Q y $(t, q^\alpha; \dot{q}^\alpha)$ las de $J^1(E)$. Las ecuaciones (5.2) y (5.3) se escriben en este caso como

$$2\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta} = 0, \ \alpha, \beta = 1, \ldots, m,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial t \partial \dot{q}^\alpha} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q^\beta \partial \dot{q}^\alpha}\dot{q}^\beta, \ \alpha = 1, \ldots, m.$$

La primera condición implica que $\mathcal{L}$ es una transformación afín de la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_\alpha \dot{q}^\alpha$ siendo $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, m$, funciones diferenciables de las corrdenadas $(t, q^1, \ldots, q^m)$. La segunda condición se escribe entonces como

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}_\beta}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\beta = \frac{\partial \mathcal{L}_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}_\beta}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\beta, \ \alpha = 1, \ldots, m,$$

que implica

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}_\alpha}{\partial t}, \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\beta}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}_\beta}{\partial q^\alpha}, \tag{5.7}$$

para todo $\alpha, \beta = 1, \ldots, m$. Por otra parte, de la expresión local de la forma de Poincaré-Cartan, se tiene

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Theta &= \mathrm{d}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) \wedge (\mathrm{d}q^\alpha - \dot{q}^\alpha \mathrm{d}t) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha}\mathrm{d}\dot{q}^\alpha \wedge \mathrm{d}t + \mathrm{d}\mathcal{L} \wedge \mathrm{d}t \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}_\alpha}{\partial t}\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}q^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}_\alpha}{\partial q^\beta}\mathrm{d}q^\beta \wedge \mathrm{d}q^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial q^\alpha}\mathrm{d}q^\alpha \wedge \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

que es cero únicamente si se verifican (5.6) y (5.6)

c.q.d.

Observación 5.1.3 La Proposición 5.1.5 puede formularse intrinsecamente del siguiente modo. Sea $p_{10} : J^1(E) \to E$ la proyección canónica. Una densidad $\mathcal{L} \cdot v$ define un problema variacionalmente trivial si y sólo si existe una n-forma p_{10}-horizontal ω en $J^1(E)$, tal que:

(1) $d\omega = 0$.

(2) $\mathcal{L}(j_x^1 s) \cdot v_x(X^1, \ldots, X^n) = \omega_{j_x^1 s}(Y^1, \ldots, Y^n)$, $j_x^1 s \in J^1(E)$, para cualquier n-upla de vectores tangentes $X^1, \ldots, X^n \in T_x M$, siendo $Y^i \in T_{j_x^1 s} J^1(E)$, $i = 1, \ldots, n$, vectores tales que $(p_{10})_* Y^i = s_* X^i$.

La p_{10}-horizontalidad de ω hace que esta última definición no dependa de los vectores Y^i, $i = 1, \ldots, n$, elegidos. Para una demostración de este resultado, véase [Kr1].

5.2 Lagrangianas invariantes en $J^1(C(P))$

5.2.1 La noción de densidad invariante

Sea $\pi : P \to M$ un fibrado principal y sea $p : C(P) \to M$ el fibrado de las conexiones.

Definición 5.2.1 Una densidad lagrangiana $\mathcal{L}v$ definida en $J^1(C(P))$ se dice que es *invariante por transformaciones* gauge *infinitesimales* (abreviadamente, gauge *invariante*) si se verifica

$$X_C^{(1)}(\mathcal{L}) = 0, \tag{5.8}$$

para todo campo gauge $X \in \mathrm{gau}P$, en donde $X_C^{(1)}$ es la subida al fibrado $J^1(C(P))$ de 1-jets del campo $X_C \in \mathfrak{X}(C(P))$ (cf. Definición 2.3.2).
Se dice que una densidad lagrangiana es *invariante por automorfismos infinitesimales* (abreviadamente, aut$P$-invariante) si se verifica

$$L_{X_C^{(1)}}(\mathcal{L}v) = 0, \tag{5.9}$$

para todo campo $X \in \mathrm{aut}P$.

Observación 5.2.1 Si $\mathcal{L}v$ es una densidad lagrangiana aut$P$-invariante, se tiene

$$L_{X_C^{(1)}}(\mathcal{L}v) = X_C^{(1)}(\mathcal{L})v + \mathcal{L}L_{X_C^{(1)}}v = 0. \tag{5.10}$$

para todo $X \in \mathrm{aut}P$. El campo $X_C^{(1)}$ es p_{10}-proyectable al campo X_C, siendo $p_{10} : J^1(C(P)) \to C(P)$ la proyección canónica. Si $X' \in \mathfrak{X}(M)$ es la proyección de $X \in \mathrm{aut}P$ a M, el campo X_C es a su vez proyectable a X'. Entonces $p_1 X_C^{(1)} = X'$ y, como v es una forma de M, se tiene

$$L_{X_C^{(1)}}v = L_{X'}v = \mathrm{div}X' \cdot v.$$

Por tanto, la igualdad (5.10) es equivalente a

$$X_C^{(1)}(\mathcal{L}) + \mathcal{L}\mathrm{div}X' = 0,$$

para todo $X \in \mathrm{aut}P$. Si $X \in \mathrm{gau}P$, entonces $X' = 0$ y se recupera la condición de la fórmula (5.8).

Nótese finalmente que si $v' = f \cdot v$ es otra forma de volumen en M, y $\mathcal{L}v = \mathcal{L}'v'$, es directo comprobar que, para $X \in \mathrm{aut}P$, $L_{X_C^{(1)}}(\mathcal{L}v) = 0$ si y sólo si $L_{X_C^{(1)}}(\mathcal{L}'v') = 0$, lo que hace independiente la definición de invariancia respecto de la forma de volumen de M escogida.

5.2.2 Caracterización de lagrangianas *gauge* invariantes

Las densidades lagrangiana *gauge* invariantes se caracterizan geométricamente a través del Teorema de Utiyama. Para la demostración de este importante resultado, así como para las definiciones y propiedades previas que vamos a exponer a lo largo de esta sección, pueden consultarse, por ejemplo, las referencias [Ble, §10.2], [Eck], [Gar2] y [Uti].

Definición 5.2.2 Sea $\pi : P \to M$ un fibrado principal arbitrario. Se llama *fibrado de curvatura* al fibrado vectorial $\pi_\Lambda : \bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{ad}P \to M$, siendo $\pi_\mathfrak{g} : \mathrm{ad}P \to M$ el fibrado adjunto (*cf.* Definición 1.4.5).

Se define *la aplicación de curvatura* como la aplicación fibrada

$$\Omega : J^1(C(P)) \to \bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{ad}P,$$

dada por

$$\Omega(j^1_x\sigma_\Gamma) = (\Omega_\Gamma)_x,$$

en donde σ_Γ representa una sección local de $p : C(P) \to M$ (y por tanto una conexión local Γ de $\pi : P \to M$) y Ω_Γ es la 2-forma de curvatura de Γ vista como forma en M con valores en ad$P$ (cf. Observación 2.8.1).

Observación 5.2.2 Consideremos una base $B_1, \dots, B_m$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y un sistema de coordenadas $(x^1, \dots, x^n)$ definido en un entorno $U \subset M$ en el que el fibrado $\pi : P \to M$ sea trivializable. Sea (x^j, A^α_j) el sistema de coordenadas en $C(P)$ definido en §2.2 y sea $(x^j, A^\alpha_j; A^\alpha_{j,i})$ el sistema de coordenadas asociado en el fibrado de 1-jets $J^1(C(P))$ (*cf.* §2.4.2). En el fibrado de curvatura $\bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{ad}P$ se define un sistema de coordenadas (x^j, R^α_{ij}), $1 \leq i < j \leq n$, $1 \leq \alpha \leq m$, de forma natural por la condición

$$w = \sum_{i<j} R^\alpha_{ij}(w) \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \otimes \tilde{B}_\alpha, \quad w \in \bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{ad}P.$$

(Recuérdese que $\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_m$, forman una base local del fibrado ad$P$ (*cf.* §2.2)). Entonces la expresión en coordenadas de la aplicación de curvatura es la siguiente

$$R^\alpha_{ij} \circ \Omega = A^\alpha_{i,j} - A^\alpha_{j,i} - c^\alpha_{\beta\gamma} A^\beta_i A^\gamma_j. \tag{5.11}$$

Proposición 5.2.3 *La aplicación de curvatura* $\Omega : J^1(C(P)) \to \bigwedge^2 T^*M \otimes$ ad$P$, *es una submersión suprayectiva.*

Observación 5.2.3 Como el fibrado adjunto ad$P$ es un fibrado asociado a $\pi : P \to M$ (*cf.* Definición1.4.5), dada una transformación *gauge* $\Phi \in \mathrm{Gau}P$, se define de forma natural una transformación $\Phi_{\mathrm{ad}} : \mathrm{ad}P \to \mathrm{ad}P$, dada por

$$\Phi_{\mathrm{ad}}((u, B)_{\mathrm{ad}}) = (\Phi(u), B)_{\mathrm{ad}}.$$

Si $X \in \mathrm{gau}P$ es un campo *gauge* y $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ es su flujo, se designan por $X_{\mathrm{ad}} \in \mathfrak{X}(\mathrm{ad}P)$ al campo del fibrado adjunto cuyo flujo es $\{(\Phi_t)_{\mathrm{ad}}\}_{t\in\mathbb{R}}$.
Las aplicaciones gauge operan trivialmente en el fibrado $\bigwedge^2 T^*M$. Por tanto podemos definir una representación de álgebras de Lie

$$\mathrm{gau}P \to \mathfrak{X}\left(\bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{ad}P\right), \quad X \mapsto X_{\mathrm{ad}},$$

que por abuso de notación representamos igual que la representación en ad$P$. Con las coordenadas (x^j, R^α_{ij}), $1 \leq i < j \leq n$, $1 \leq \alpha \leq m$, de $\bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{ad}P$ introducidas anteriormente, es sencillo comprobar que, si $X = g^\alpha \tilde{B}_\alpha$ es la expresión local de un campo gauge (*cf.* ecuación (1.10)), campo X_{ad} tiene por expresión

$$X_{\mathrm{ad}} = c^\gamma_{\alpha\beta} g^\alpha R^\beta_{ij} \frac{\partial}{\partial R^\gamma_{ij}}. \tag{5.12}$$

Definición 5.2.4 Se dice que una función diferenciable $\bar{\mathcal{L}} : \bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{ad}P \to \mathbb{R}$ del fibrado de curvatura es *gauge invariante* si

$$X_{\mathrm{ad}}(\bar{\mathcal{L}}) = 0,$$

para todo $X \in \mathrm{gau}P$.

Teorema de Utiyama. *Una lagrangiana $\mathcal{L} : J^1(C(P)) \to \mathbb{R}$ es* gauge *invariante si y solamente si se puede expresar como*

$$\mathcal{L} = \bar{\mathcal{L}} \circ \Omega,$$

siendo Ω la aplicación de curvatura y $\bar{\mathcal{L}} : \bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{ad}P \to \mathbb{R}$ una aplicación gauge *invariante del fibrado de curvatura.*

5.2.3 Densidades definidas por formas de $C(P)$

Las formas *gauge* invariantes que se han caracterizado en el Capítulo 4, producen densidades lagrangianas que son *gauge* invariantes. Más concretamente:

Definición 5.2.5 ([HM1], [Kr3, §4.1]) Sea $\pi : P \to M$ un fibrado principal arbitrario y sea ξ_n una forma de $C(P)$ grado $n = \dim M$. La forma ξ_n define una densidad lagrangiana $\mathcal{L}_{\xi_n} v = \Lambda_{\xi_n} : J^1(C(P)) \to \bigwedge^n T^*M$ de la siguiente manera

$$\Lambda_{\xi_n}(j^1_x\sigma)(X_1, \ldots, X_n) = \xi_n(\sigma_* X_1, \ldots, \sigma_* X_n),$$

para cualquier $j^1_x\sigma \in J^1(C(P))$ y $X_1, \ldots, X_n \in T_xM$, $x \in M$. Más abreviadamente se puede poner

$$\Lambda_{\xi_n}(j^1_x\sigma) = (\sigma^*\xi_n)_x.$$

Nótese que la definición es correcta porque $(\sigma^*\xi_n)_x$ sólo depende de $j^1_x\sigma$.

Proposición 5.2.6 *Si ξ_n es una forma* gauge *invariante (respectivamente* aut$P$*-invariante) en $C(P)$ de grado $n = \dim M$* (cf. Definición 4.1.1), *entonces la densidad lagrangiana Λ_{ξ_n} es* gauge *invariante (respectivamente* aut$P$*-invariante).*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un campo $X \in \mathrm{aut}P$. Sea $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ su flujo y sea $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ el flujo que define en la variedad base M. Sean $(\Phi_t)_C : C(P) \to C(P)$ el flujo de X_C (Definición 2.3.1) y $(\Phi_t)_C^{(1)} : J^1(C(P)) \to J^1(C(P))$ su elevación al fibrado de 1-*jets* (*cf.* [Sau, §4.4]). Si ξ_n es una forma aut$P$-invariante es $C(P)$, se tiene

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\xi_n}((\Phi_t)_C^{(1)}(j^1_x\sigma)) &= \Lambda_{\xi_n}(j^1_{\varphi(x)}((\Phi_t)_C \circ \sigma \circ \varphi_t^{-1})) \\
&= ((\Phi_t)_C \circ \sigma \circ \varphi_t^{-1})^* \xi_n \\
&= (\varphi_{-t})^* \sigma^* (\Phi_t)_C^* \xi_n \\
&= (\varphi_{-t})^* \sigma^* \xi_n \\
&= (\varphi_{-t})^* \Lambda_{\xi_n}(j^1_s\sigma),
\end{aligned}$$

para cualquier $j^1_x\sigma \in J^1(C(P))$. Si tomo una forma de volumen v en M y escribo $\Lambda_{\xi_n} = \mathcal{L}_{\xi_n} \cdot v$, la anterior igualdad se escribe como

$$\mathcal{L}_{\xi_n} \circ (\Phi_t)_C^{(1)} \cdot v = \Lambda_{\xi_n} = \mathcal{L}_{\xi_n} \cdot (\varphi_{-t})^* v. \tag{5.13}$$

Consideremos ahora

$$L_{X_C^{(1)}}(\mathcal{L}_{\xi_n} \cdot v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} ((\Phi_t)_C^{(1)})^* (\mathcal{L}_{\xi_n} \cdot v).$$

Utilizando la ecuación (5.13), se tiene

$$\begin{aligned}
((\Phi_t)_C^{(1)})^* (\mathcal{L}_{\xi_n} \cdot v) &= (\mathcal{L}_{\xi_n} \circ (\Phi_t)_C^{(1)}) \cdot (\varphi_t)^* v \\
&= \mathcal{L}_{\xi_n} \cdot (\varphi_{-t})^* (\varphi_t)^* v \\
&= \mathcal{L}_{\xi_n} \cdot v,
\end{aligned}$$

y por tanto la derivada de Lie se anula, esto es, la densidad lagrangiana es aut$P$-invariante.

Si se consideran campos *gauge* $X \in \mathrm{gau}P$, la demostración es igual con la simplificación en este caso de $\varphi_t = \mathrm{Id}_M$.

c.q.d.

5.3 Densidades aut$P$-invariantes en $J^1(C(P))$

5.3.1 Lagrangiana asociada a un polinomio de Weil

Sea $f \in I_k^G = (S^k(\mathfrak{g}^*))^G$ un polinomio de Weil de grado k (*cf.* Definición 4.2.8). Se define una aplicación $\bar{f} : \mathrm{ad}P \oplus \overset{(k}{\ldots} \oplus \mathrm{ad}P \to \mathbb{R}$ multilineal simétrica por la condición

$$\bar{f}((u, A_1)_{\mathrm{ad}}, \ldots, (u, A_k)_{\mathrm{ad}}) = f(A_1, \ldots, A_k), \tag{5.14}$$

$(u, A_i)_{\mathrm{ad}} \in (\mathrm{ad}P)_x$, $1 \leq i \leq k$, $x \in A$. La invariancia de f por la transformación adjunta (fórmula 4.8) asegura que la definición anterior no depende del punto $u \in \pi^{-1}(x)$ elegido.

Definición 5.3.1 Sea $\pi : P \to M$ un fibrado principal y supongamos que la dimensión de la variedad base es par, $\dim M = 2k$. Sea

$$\bar{\Lambda}_f : \bigwedge^2 T^* M \otimes \mathrm{ad}P \to \bigwedge^n T^* M,$$

la aplicación definida por

$$\bar{\Lambda}_f(w)(X_1, \ldots, X_n) =$$
$$\frac{1}{(2k)!} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \varepsilon(\tau) \bar{f}\left(w(X_{\tau(1)}, X_{\tau(2)}), \ldots, w(X_{\tau(2k-1)}, X_{\tau(2k)})\right),$$

para cualquier $w \in \left(\bigwedge^2 T^* M \otimes \mathrm{ad}P\right)_x$, $x \in M$, vista como una 2-forma en $T_x M$ con valores en $(\mathrm{ad}P)_x$.
Cada polinomio de Weil de grado k define por tanto una densidad lagrangiana

$$\Lambda_f = \bar{\Lambda}_f \circ \Omega,$$

siendo Ω la aplicación de curvatura.

Proposición 5.3.2 *Si M es compacta y* $\dim M = 2k$, *las densidades lagrangianas del tipo $\Lambda_f = \bar{\Lambda}_f \circ \Omega$, con $f \in I_k^G$, son variacionalmente triviales.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\sigma_\Gamma : M \to C(P)$ una sección arbitraria del fibrado de las conexiones y sea Γ la conexión en P que define. La imagen de la aplicación

$$\Omega \circ j^1 \sigma_\Gamma : M \to \bigwedge^2 T^* M \otimes \mathrm{ad}P,$$

no es más que la curvatura Ω_Γ de Γ vista como 2-forma en M con valores en el fibrado ad$P$. De la Definición 4.2.2, se comprueba que $\bar{\Lambda}_f(\Omega \circ j^1\sigma_\Gamma) = f(\Omega_\Gamma)$. Por la Proposición 4.2.3-(2), si se elige otra conexión Γ', la forma $f(\Omega_{\Gamma'})$ difiere de $f(\Omega_\Gamma)$ en una forma exacta, por lo que el valor de la integral

$$\mathcal{L}_f(\sigma_\Gamma) = \int_M \bar{\Lambda}_f(\Omega \circ j^1\sigma_\Gamma) = \int_M f(\Omega_\Gamma),$$

no depende de la sección σ_Γ escogida. Sea ahora $X \in \mathfrak{X}^v_\mathcal{G}(C(P))$ un campo vertical de $C(P)$ y sea $\{\Psi_t\}$ su flujo. Sea $\sigma_t = \Psi_t \circ \sigma_\Gamma$. Tenemos $\mathcal{L}_f(\sigma_t)$ no depende de t y por tanto

$$\begin{aligned} 0 &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathcal{L}_f(\sigma_t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_M (j^1(\Psi_t\sigma_\Gamma))^*\Lambda_f = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_M (\Psi_t^{(1)} j^1\sigma_\Gamma)^*\Lambda_f \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_M (j^1\sigma_\Gamma)^*(\Psi^{(1)})^*\Lambda_f = \int_M (j^1\sigma_\Gamma)^*(L_{X^{(1)}}\Lambda_f), \end{aligned}$$

que quiere decir que el problema variacional es trivial.

c.q.d.

Proposición 5.3.3 *Si* $\dim M = 2k$, *la densidad lagrangiana* $\Lambda_f = \bar{\Lambda}_f \circ \Omega$ *asociada con un polinomio de Weil* $f \in I_k^G$ *como se da en la* Definición 5.3.1 *es igual a la densidad lagrangiana* $\Lambda_{f(\Omega_2)}$ *definida con la forma* aut$P$-*invariante* $f(\Omega_2)$ *de* $C(P)$ *que se da en la* Definición 5.2.5.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in M$ y sean $X_1, \ldots, X_n \in T_xM$ arbitrarios. Si considero la densidad lagrangiana $\Lambda_f = \bar{\Lambda}_f \circ \Omega$ tal como se da en la Definición 5.3.1, se tiene

$$\Lambda_f(j^1_x\sigma_\Gamma) = \frac{1}{(2k)!} \sum_{\tau \in S_{2k}} \varepsilon(\tau)\bar{f}\left(\Omega_\Gamma(X_{\tau(1)}, X_{\tau(2)}), \ldots, \Omega_\Gamma(X_{\tau(2k-1)}, X_{\tau(2k)})\right),$$

para cualquier $j^1_x\sigma_\Gamma \in J^1(C(P))_x$. Por otra parte, por la propiedad de curvatura universal que posee Ω_2 (*cf.* Observación 2.8.2), tenemos que $\Omega_\Gamma = \sigma_\Gamma^*\Omega_2$. Así

$$\Lambda_f(j^1_x\sigma_\Gamma) = \frac{1}{(2k)!} \sum_{\tau \in S_{2k}} \varepsilon(\tau)\bar{f}\left(\sigma_\Gamma^*\Omega_2(X_{\tau(1)}, X_{\tau(2)}), \ldots, \sigma_\Gamma^*\Omega_2(X_{\tau(2k-1)}, X_{\tau(2k)})\right).$$

Si se tiene en cuenta la ecuación (5.14), la definición de la forma $f(\Omega_2)$ (véase la Proposición 4.2.4 y la definición de densidad lagrangiana $\Lambda_{f(\Omega_2)}$ dada por una forma diferencial en $C(P)$ (Definición 5.2.5), se concluye.

c.q.d.

Corolario 5.3.4 *Las densidades lagrangianas asociadas a polinomios de Weil son* aut$P$*-invariantes.*

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia de la Proposición 5.2.6. c.q.d.

5.3.2 Estructura de las lagrangianas aut$P$-invariantes

Acabamos de probar que las densidades lagrangianas definidas por polinomios de Weil son aut$P$-invariantes. A continuación vamos a demostrar que éstas son básicamente las únicas.

Lema 5.3.5 *Si Y es una variedad diferenciable y $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times Y)$ es una función que verifica*

$$f = x^i \frac{\partial f}{\partial x^i}, \tag{5.15}$$

siendo $(x^1, \ldots, x^n)$ las variables de $\mathbb{R}^n$, entonces $\partial f/\partial x^i \in C^\infty(N)$, $i = 1, \ldots, n$.

DEMOSTRACIÓN. Fijemos un par $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times Y$ y sea $\phi(t) = f(tx, y)$. Por (5.15) se tiene $\phi(0) = 0$ y por la regla de la cadena,

$$\left.\frac{d\phi}{dt}\right|_{t=1} = x^i \frac{\partial \overline{f}}{\partial x^i} = f,$$

es decir, $f(tx, y) = \phi(t) = t \cdot f(x, y) = \sum_{i=1}^n tx^i(\partial f/\partial x^i)(tx, y)$. Así, $f(x, y) = \sum_{i=1}^n x^i(\partial f/\partial x^i)(tx, y)$ y haciendo $t = 0$,

$$f(x, y) = x^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(0, y),$$

que finaliza la demostración.

c.q.d.

Lema 5.3.6 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Sea (x^i, R^α_{ij}), $1 \leq i < j \leq n$, $\alpha = 1, \ldots, m$, el sistema de coordenadas naturales en $\bigwedge^2 T^*\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{g}$. Si $f \in C^\infty(\bigwedge^2 T^*\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{g})$ verifica*

$$f = \sum_{j,\alpha} R^\alpha_{ij} \frac{\partial f}{\partial R^\alpha_{ij}}, \quad \forall i = 1, \ldots, n, \tag{5.16}$$

donde consideramos $R^\alpha_{ij} = -R^\alpha_{ji}$ cuando $i \geq j$, entonces:

- *Si n es impar, la función f es nula.*
- *Si n es par ($n = 2k$),*

$$f = \lambda^{i_1,\dots,i_n}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k} R^{\alpha_1}_{i_1 i_2} \cdot \dots \cdot R^{\alpha_k}_{i_{n-1} i_n},$$

siendo $\{i_1, \dots, i_n\}$ cualquier permutación de $\{1, \dots, n\}$ y $\lambda^{i_1,\dots,i_n}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}$ funciones diferenciables de $\mathbb{R}^n$.

DEMOSTRACIÓN. Por inducción en la dimensión n. Para $n = 2$, se tiene

$$f = R^\alpha_{12} \frac{\partial f}{\partial R^\alpha_{12}},$$

y por el Lema 5.3.5, $\partial f / \partial R^\alpha_{12}$, $\alpha = 1, \dots, m$, son funciones diferenciables de $\mathbb{R}^n$.

Para $n = 3$ e $i = 1$ en la fórmula (5.16), se tiene

$$f = R^\alpha_{12} \frac{\partial f}{\partial R^\alpha_{12}} + R^\alpha_{13} \frac{\partial f}{\partial R^\alpha_{13}}, \tag{5.17}$$

y por el Lema 5.3.5, para cualquier $\alpha = 1, \dots, n$, $\partial f / \partial R^\alpha_{12}$ no depende de $R^1_{12}, \dots, R^m_{12}, R^1_{13}, \dots, R^m_{13}$. Para $i = 2$ en la ecuación (5.16), tenemos

$$f = R^\alpha_{21} \frac{\partial f}{\partial R^\alpha_{21}} + R^\alpha_{23} \frac{\partial f}{\partial R^\alpha_{23}},$$

y otra vez por el Lema 5.3.5, $\partial f / \partial R^\alpha_{21} = -\partial f / \partial R^\alpha_{12}$ no depende de las variables $R^1_{23}, \dots, R^m_{23}$, es decir, $\partial f / \partial R^\alpha_{12} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\alpha = 1, \dots, n$. Igual con $\partial f / \partial R^\alpha_{13}$ y $\partial f / \partial R^\alpha_{23}$. Derivemos ahora la igualdad (5.17) por R^α_{23}. Se tiene

$$\partial f / \partial R^\alpha_{23} = 0, \alpha = 1, \dots, n.$$

Igualmente con $\partial f / \partial R^\alpha_{12}$ y $\partial f / \partial R^\alpha_{13}$. Entonces $f = 0$.

Continuando con la inducción, supongamos que el lema es cierto para $n - 2$ y consideremos el caso n. Sean $f^{12}_\alpha = \partial f / \partial R^\alpha_{12}$, $\alpha = 1, \dots, m$. De la ecuación (5.16) para $i = 1$ y del Lema 5.3.5, se deduce que f^{12}_α no depende de R^β_{1k}, $k = 1, \dots, n$, $\beta = 1, \dots, m$. Como $f^{12}_\alpha = -f^{21}_\alpha$, tampoco depende de R^β_{2k}, $k = 1, \dots, n$, $\beta = 1, \dots, m$, es decir, f^{12}_α se puede ver como una función de $\bigwedge^2 T^*\mathbb{R}^{n-2} \otimes \mathfrak{g}$, con variables $(x^3, \ldots, x^n)$ en $\mathbb{R}^{n-2}$. Si derivo la ecuación (5.16) para $i > 2$ respecto de R^α_{12}, se tiene

$$f^{12}_\alpha = \sum_{j>2,\beta} R^\beta_{ij} \frac{\partial f^{12}_\alpha}{\partial R^\beta_{ij}}, \quad i > 2,$$

es decir, f^{12}_α verifica las condiciones del lema para $n-2$. Por hipótesis de inducción, si $n-2$ (y por tanto n) es impar, $f^{12}_\alpha = 0$, $\alpha = 1, \ldots, m$, y de manera análoga para $f^{ij}_\alpha = \partial f / \partial R^\alpha_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$, $\alpha = 1, \ldots, m$, por lo que $f = 0$ por (5.16). Si $n = 2k$, la hipótesis de inducción afirma

$$f^{12}_\alpha = \frac{\partial f}{\partial R^\alpha_{12}} = \lambda^{i_3 \ldots i_n}_{\alpha, \alpha_2 \ldots \alpha_k} R^{\alpha_2}_{i_3 i_4} \ldots R^{\alpha_k}_{i_{n-1} i_n},$$

siendo $\{i_3, \ldots, i_n\}$ una permutación de $\{3, \ldots, n\}$. Análogamente para f^{1j}_α, $j = 3, \ldots, n$, $\alpha = 1, \ldots, m$. En vista de la ecuación (5.16) para $i = 1$ se concluye.

c.q.d.

Teorema 5.3.7 *Sea $\pi : P \to M$ un fibrado principal. Supongamos que tanto el grupo estructural G como la variedad base M son conexas y que M es orientable. Entonces:*

(1) *Si $n = \dim M$ es impar, entonces la única densidad lagrangiana* aut$P$*-invariante es la densidad cero.*

(2) *Si la dimensión de M es par, $2k = \dim M$, las únicas densidades lagrangianas* aut$P$*-invariantes son las asociadas a polinomios de Weil $f \in I^G_k$* (cf. Definición 5.3.1).

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{L} \cdot v$ una densidad lagrangiana aut$P$-invariante. En particular, $\mathcal{L} \cdot v$ será *gauge* invariante así que, en virtud del Teorema de Utiyama, existe una función $\tilde{\mathcal{L}} : \bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{ad}P \to \mathbb{R}$ *gauge* invariante (*cf.* Definición 5.2.4) tal que

$$\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}} \circ \Omega,$$

siendo Ω la aplicación de curvatura. Consideremos un sistema de coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$ en M tal que $v = \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$ y sean $(x^i, A^\alpha_i; A^\alpha_{i,j})$, $i, j = 1, \ldots, n$, $\alpha = 1, \ldots, m$, y (x^i, R^α_{ij}), $1 \leq i < j \leq n$, $\alpha = 1, \ldots, m$, los sistemas de coordenadas inducidos en $J^1(C(P))$ y $\bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{ad}P$ respectivamente. Los automorfismos infinitesimales $X \in \mathrm{aut}P$ tiene la expresión local (*cf.* ecuación (1.11)):

$$X = f^j \frac{\partial}{\partial x^j} + g^\alpha \tilde{B}_\alpha.$$

Consideremos en particular un campo $X = f^j \partial/\partial x^j$. Su elevación al fibrado de las conexiones $C(P)$ es (*cf.* ecuación 2.3)

$$X_C = f^j \frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{\partial f^i}{\partial x^j} A_i^\alpha \frac{\partial}{\partial A_j^\alpha},$$

y, por las fórmulas de levantamiento de campos vectoriales al fibrado de 1-*jets* (ver por ejemplo [Sau, p.133] o [Mu])

$$\begin{aligned} X_C^{(1)} &= f^j \frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{\partial f^i}{\partial x^j} A_i^\alpha \frac{\partial}{\partial A_j^\alpha} - \\ &\quad - \left(\frac{\partial f^l}{\partial x^j} A_{l,i}^\alpha + \frac{\partial f^l}{\partial x^i} A_{j,l}^\alpha + \frac{\partial^2 f^l}{\partial x^j \partial x^i} A_l^\alpha \right) \frac{\partial}{\partial A_{j,i}^\alpha}. \end{aligned}$$

La condición de aut$P$-invariancia $L_{X_C^{(1)}}(\mathcal{L} \cdot v) = 0$ (o equivalentemente, por la Observación 5.2.1, $X_C^{(1)}(\mathcal{L}) + \mathcal{L}\mathrm{div}X' = 0$) para el campo en cuestión es

$$f^j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} - \frac{\partial f^i}{\partial x^j} A_i^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_j^\alpha} - \left(\frac{\partial f^l}{\partial x^j} A_{l,i}^\alpha + \frac{\partial f^l}{\partial x^i} A_{j,l}^\alpha + \frac{\partial^2 f^l}{\partial x^j \partial x^i} A_l^\alpha \right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{j,i}^\alpha} + \mathcal{L} \frac{\partial f^j}{\partial x^j} = 0. \tag{5.18}$$

Si tomamos $f^j \equiv 1$, $j = 1, \ldots, n$, se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n. \tag{5.19}$$

Escojamos un punto $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n) \in M$ arbitrario y fijemos un par de índices $i, h \in \{1, \ldots, n\}$. Si tomamos las funciones $f^j = (x^h - x_0^h)\delta_i^j$, $j = 1, \ldots, n$, la condición de aut$P$-invariancia (5.18) evaluada en puntos $j_{x_0}^1 \sigma$ es:

$$\mathcal{L}\delta_i^h = A_i^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_h^\alpha} + A_{i,l}^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{h,l}^\alpha} + A_{l,i}^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{l,h}^\alpha}, \quad \forall h, i = 1, \ldots, n. \tag{5.20}$$

en donde hemos eliminado toda alusión al punto x_0 al ser éste arbitrario. Si fijamos unos índices $i, h, l \in \{1, \ldots, n\}$ arbitrarios y definimos $f^j = (x^h - x_0^h)(x^l - x_0^l)\delta_i^j$, $j = 1, \ldots, n$, al evaluar (5.18) en puntos $j_{x_0}^1\sigma$ se tiene

$$A_i^\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{h,l}^\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{l,h}^\alpha} \right) = 0, \quad \forall i, h, l = 1, \ldots, n, \tag{5.21}$$

en donde, de nuevo, se omite la alusión al punto x_0 arbitrario.

Por otra parte, tenemos $\mathcal{L} = \bar{\mathcal{L}} \circ \Omega$. Por la regla de la cadena, teniendo en cuenta las ecuaciones de la aplicación curvatura Ω (*cf.* ecuación (5.11)), se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{i,j}^\alpha} = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial R_{ij}^\alpha} \circ \Omega,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i^\alpha} = -c_{\alpha\beta}^\gamma A_l^\beta \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial R_{il}^\gamma} \circ \Omega,$$

en donde hemos suponemos que $R_{ij}^\alpha = -R_{ji}^\alpha$ siempre que $i \not< j$. Si aplicamos estas identidades a las ecuaciones (5.19), (5.20) obtenemos

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial x^i} \circ \Omega = 0, \quad \delta_h^i \bar{\mathcal{L}} \circ \Omega = R_{hl}^\alpha \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial R_{il}^\alpha} \circ \Omega, \quad i, h = 1, \ldots, n,$$

o más simplificadamente, teniendo en cuenta que Ω es suprayectiva (*cf.* Proposición 5.2.3)

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial x^i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5.22}$$

$$\delta_h^i \bar{\mathcal{L}} = R_{hl}^\alpha \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial R_{il}^\alpha}, \quad i, h = 1, \ldots, n. \tag{5.23}$$

La ecuación (5.21) proyecta al cero.

Si ponemos $h = i$ en la ecuación (5.23), el Lema 5.3.6 afirma que si n es impar, $\bar{\mathcal{L}} = 0$, y si $n = 2k$, entonces

$$\bar{\mathcal{L}} = \lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}^{i_1 \ldots i_n} R_{i_1 i_2}^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot R_{i_{n-1} i_n}^{\alpha_k}, \tag{5.24}$$

siendo $\lambda^{i_1\dots i_n}_{\alpha_1\dots\alpha_k}$ constantes en virtud de la igualdad (5.22) y $\{i_1,\dots i_n\}$ cualquier permutación de $\{1,\dots,n\}$. Si tomamos ahora $h\neq i$ en la ecuación (5.23),

$$0=R^\alpha_{hl}\frac{\partial\bar{\mathcal{L}}}{\partial R^\alpha_{il}},\quad h\neq i.$$

Derivando la anterior igualdad por R^β_{ha} primero y luego por R^γ_{hb}, se obtiene

$$\frac{\partial^2\bar{\mathcal{L}}}{\partial R^\beta_{ia}\partial R^\gamma_{hb}}+\frac{\partial^2\bar{\mathcal{L}}}{\partial R^\gamma_{ib}\partial R^\beta_{ha}}+R^\alpha_{hl}\frac{\partial^3\bar{\mathcal{L}}}{\partial R^\alpha_{il}\partial R^\beta_{ia}\partial R^\gamma_{hb}}=0.$$

para $h\neq i, a,b=1,\dots n,\ \beta,\gamma=1,\dots,m$. El último sumando es identicamente cero pues en la expresión (5.24) no se repite ningún índice $i_1,\dots,i_n$ y estamos derivando respecto R^α_{il} y R^β_{ia}. Volviendo a la expresión (5.24), la última igualdad implica

$$\lambda^{i_1,\dots,a,\dots,b,\dots,i_n}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}+\lambda^{i_1,\dots,b,\dots,a,\dots,i_n}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}=0,\quad a,b=1,\dots,n.$$

Como las trasposiciones generan el grupo de permutaciones. se puede afirmar

$$\lambda^{\tau(1),\dots,\tau(n)}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}=\varepsilon(\tau)\lambda^{1,\dots,n}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k},$$

y por tanto

$$\bar{\mathcal{L}}=\lambda_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}\sum_{\tau\in S_n}\varepsilon(\tau)R^{\alpha_1}_{\tau(1)\tau(2)}\cdot\dots\cdot R^{\alpha_k}_{\tau(n-1)\tau(n)}. \tag{5.25}$$

De la definición de densidad lagrangiana asociada a un polinomio de Weil $f\in(S^\bullet(\mathfrak{g}^*))^G$ (*cf.* §5.3.1), es directo comprobar que en los abiertos coordenados utilizados. $\bar{\mathcal{L}}=\bar{\mathcal{L}}_f$ para

$$f=\lambda_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}B^{\alpha_1}\vee\dots\vee B^{\alpha_k},$$

en donde $\vee$ representa el producto simétrico en $S^\bullet(\mathfrak{g}^*)$. Únicamente resta comprobar que el polinomio f así definido es efectivamente invariante por la adjunta. En efecto, por el Teorema de Utiyama, $\bar{\mathcal{L}}$ es una función *gauge* invariante. Si tomo el campo *gauge* $X=\tilde{B}$, su flujo $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ es $\Phi_t(x,g)=$

$(x, \exp tB \cdot g)$. Se debe verificar por tanto $\bar{\mathcal{L}} \circ (\Phi_t)_\wedge = \bar{\mathcal{L}}$. Si $\bar{\mathcal{L}} = \bar{\mathcal{L}}_f$, de §5.3.1, se tiene

$$\bar{\mathcal{L}} \circ (\Phi_t)_\wedge = \frac{1}{(2k)!} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \varepsilon(\tau) f \left(\mathrm{Ad}_{\exp tB}\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x^{\tau(1)}}, \frac{\partial}{\partial x^{\tau(2)}} \right), \dots, \right.$$
$$\left. \mathrm{Ad}_{\exp tB}\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x^{\tau(n-1)}}, \frac{\partial}{\partial x^{\tau(n)}} \right) \right)$$

que es igual a $\bar{\mathcal{L}} = \bar{\mathcal{L}}_f$ solamente si $f \circ \mathrm{Ad}_{\exp tB} = f$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $B \in \mathfrak{g}$. Como al ser G conexo la exponencial genera al grupo entero, tenemos $f \circ \mathrm{Ad}_{\exp g} = f$ para todo $g \in G$, es decir, f es un polinomio de Weil.

c.q.d.

Como las lagrangianas definidas por polinomios de Weil son variacionalmente triviales, se concluye del Teorema 5.3.7 que el grupo de simetría Aut$P$ es demasiado grande a fin de proporcionar problemas interesentas desde el punto de vista físico. Esto podría darse como explicación del hecho por el cual nunca se impone la aut$P$-invariacia a las leyes de la física.

5.3.3 Ejemplos

El grupo $U(1)$

Sea $\pi : P \to M$ un fibrado arbitrario de grupo estructural $U(1)$. Si $\dim M = n = 2k$, el único polinomio de Weil de grado k es, salvo constante, $f(t) = t^k$. La densidad lagrangiana asociada a este polinomio de Weil es $\Lambda_f : J^1(C(P)) \to \bigwedge^n T^*M$, $\Lambda_f = \mathrm{Pf} \circ \Omega$, siendo

$$\mathrm{Pf} : \bigwedge^2 T^*M \to \bigwedge^n T^*M, \quad \mathrm{Pf}(w_2) = w_2 \wedge \overset{(k}{\dots} \wedge w_2.$$

Si consideramos un sistema de coordenadas $(x^i; A_i)$ en $C(P)$, tal que $v = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, y el sistema $(x^i; A_i, A_{i,j})$ inducido en $J^1(C(P))$, la aplicación de curvatura tiene por expresión

$$R_{ij} = A_{i,j} - A_{j,i},$$

y así

$$\mathcal{L}_f \cdot v = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in S^n} \varepsilon(\tau) R_{\tau(1)\tau(2)} \dots R_{\tau(n-1)\tau(n)} \cdot v.$$

Esta expresión no es más que (salvo constante multiplicativa) la expresión del pfaffiano del fibrado $\pi : P \to M$ en función de la curvatura de una conexión (véase, por ejemplo [KN, XII]). La clase de cohomología del pfaffiano es la clase de Euler del fibrado. Si la variedad M es compacta, el valor de la integral del pfaffiano es por tanto el número de Euler del fibrado, que no depende de la conexión escogida. La trivialidad variacional del problema definido por $\mathcal{L} \cdot v$ es manifiesta.

Para un estudio más detallado del caso $G = U(1)$, véase [CM3].

El grupo $SU(2)$

El álgebra de polinomios de Weil está generado por el determinante, es decir, $I^{SU(2)} = \mathbb{R}[\det]$. Nótese que, como el determinante es un polinomio de grado 2, cualquier polinomio invariante es de grado par.

Sea $\pi : P \to M$ un fibrado principal de grupo estructural $SU(2)$ sobre un variedad de dimensión n par. Para poder construir una densidad lagrangiana asociada a un polinomio de Weil (véase §5.3.1) hay que partir de un polinomio de Weil de grado $n/2$. Por lo comentado anteriormente, $n/2$ debe ser por tanto un número par. A la luz del Teorema 5.3.7, hemos demostrado por tanto el siguiente resultado:

Proposición 5.3.8 *Un fibrado $\pi : P \to M$ de grupo estructural $SU(2)$ posee densidades lagrangianas* aut$P$*-invariante distintas de cero únicamente si la dimensión de M es múltiplo de cuatro.*

Ejemplo 5.3.9 Para ilustrar este resultado, consideremos que la dimensión de la base es la menor posible, es decir, $\dim M = 4$. En un sistema de coordenadas $(x^i, A_i^\alpha, A_{i,j}^\alpha)$ de $J^1(C(P))$, no es difícil comprobar (a partir de la expresión (4.24) de la forma aut$P$-invariante η_4) que la densidad lagrangiana asociada al determinante tiene por expresión

$$\mathcal{L}_{\det} \cdot v = \mathfrak{S}_{123} \sum_{\tau \in S_4} \frac{1}{4} \varepsilon(\tau) \left(A^1_{\tau(1),\tau(2)} A^1_{\tau(3),\tau(4)} - 2 A^1_{\tau(1),\tau(2)} A^2_{\tau(3)} A^3_{\tau(4)} \right) \cdot v,$$

para $v = \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^4$.

EL grupo $U(2)$

En este caso, el álgebra de polinomios de Weil tiene dos generadores, la traza y el determinante, es decir, $I^{U(2)} = \mathbb{R}[\mathrm{tr}, \det]$. La traza es un polinomio de grado uno y el determinante es de grado dos, por lo que hay polinomios de Weil de cualquier grado. Luego en el caso de fibrados principales $\pi : P \to M$ de grupo estructural $U(2)$ y dimensión de la base par, a diferencia del caso $G = SU(2)$, siempre hay densidades lagrangianas aut$P$-invariantes distintas de cero.

De hecho, en el caso particular dim $M = 4$, hay dos densidaddes lagrangianas esencialmente distintas: las asociadas los polinomios tr · tr y det. En vista de las expresiones locales de las formas aut$P$-invariantes η_2 y η_4 (*cf.* ecuación (4.25)), no es difícil comprobar que la densidad asociada a tr · tr es

$$\mathcal{L}_{\mathrm{tr}\cdot\mathrm{tr}} = \sum_{\tau\in S_4} \varepsilon(\tau) A^0_{\tau(1),\tau(2)} A^0_{\tau(3),\tau(4)},$$

y la asociada al determinante

$$\mathcal{L}_{\det} = -\frac{1}{4}\mathcal{L}_{\mathrm{tr}\cdot\mathrm{tr}} + \mathfrak{S}_{123} \sum_{\tau\in S_4} \frac{1}{4}\varepsilon(\tau)(A^1_{\tau(1),\tau(2)} A^1_{\tau(3),\tau(4)} - 2A^1_{\tau(1),\tau(2)} A^2_{\tau(3)} A^3_{\tau(4)}),$$

para $v = \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^4$.

5.4 Lagrangianas triviales *gauge* invariantes

5.4.1 Derivada de Lie respecto de un campo multivectorial

Sea $\chi = X_1 \wedge \ldots \wedge X_k \in \bigwedge^k \mathfrak{X}(M)$ un campo multivectorial descomponible. Se define entonces un endomorfismo graduado $C^\infty(M)$-lineal $i_\chi : \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(M)$ de grado $-k$ por la condición (*cf.* [CV, p.79], [BM])

$$i_\chi \omega_r = i_{X_1} \circ \ldots \circ i_{X_k} \omega_r \in \Omega^{r-k}(M), \quad \omega_r \in \Omega^r(M). \tag{5.26}$$

Para un campo multivectorial arbitrarior χ, la aplicación i_χ se define por linearidad a través de la anterior fórmula.

La derivada de Lie $L_\chi : \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(M)$ con respecto a $\chi \in \bigwedge^k \mathfrak{X}(M)$ se da por la fórmula

$$L_\chi = i_\chi \circ \mathrm{d} - (-1)^k \mathrm{d} \circ i_\chi = [i_\chi, \mathrm{d}]. \tag{5.27}$$

Nótese que L_χ es un operador de grado $-k+1$.

Sea G un grupo de Lie. Consideremos ahora el espacio $\bigwedge^{\bullet}\mathfrak{X}(M)\otimes S^{\bullet}(\mathfrak{g}^*)$, siendo $S^{\bullet}(\mathfrak{g}^*)$ el álgebra simétrica de $\mathfrak{g}^*$. Sea $\mathcal{X}=\chi\otimes f\in\bigwedge^k\mathfrak{X}(M)\otimes S^l(\mathfrak{g}^*)$ un elemento descomponible. Se define

$$L_{\mathcal{X}}:\Omega^r(M)\to\Omega^{r-k+1}(M)\otimes S^{\bullet}(\mathfrak{g}^*)$$

por la condición

$$L_{\mathcal{X}}(\omega_r)=L_{\chi}\omega_r\otimes f.$$

de modo que el polinomio f opera trivialmente. Para un elemento arbitrario $\mathcal{X}$ de $\bigwedge^{\bullet}\mathfrak{X}(M)\otimes S^{\bullet}(\mathfrak{g}^*)$, la aplicación $L_{\mathcal{X}}$ se define por linearidad.

5.4.2 Notación

Sea $\mathcal{X}_k\in\bigwedge^{2k}\mathfrak{X}(M)\otimes I_k^G=\Gamma\left(M,\bigwedge^{2k}T(M)\otimes I_k^G\right)$ para k entero tal que $0\leq k\leq[n/2]$, donde los corchetes representan la parte entera. Se define una aplicación en el fibrado de curvatura

$$\bar{\mathcal{X}}_k:\bigwedge^2 T^*M\otimes\mathrm{ad}P\to\mathbb{R},$$

de la siguiente manera. Sea $w_2\in(\bigwedge^2T^*M\otimes\mathrm{ad}P)_x$, $x\in M$, y tómese la potencia k

$$w_2\wedge\overset{(k}{\ldots}\wedge w_2\in(\bigwedge^{2k}T^*M\otimes S^k(\mathrm{ad}P))_x.$$

Nótese que se toma la potencia simétrica de $\mathrm{ad}P$ pues al tratarse de 2-formas, el producto exterior es simétrico. Entonces

$$\bar{\mathcal{X}}_k(w_2)=\left\langle\mathcal{X}_k,w_2\wedge\overset{(k}{\ldots}\wedge w_2\right\rangle_x,\tag{5.28}$$

en donde $\langle,\rangle$ representa la contracción de un elemento $\bigwedge^{2k}T(M)\otimes S^k(\mathfrak{g}^*)^G$ con un elemento de su dual. La aplicación de dualidad de $S^k(\mathfrak{g}^*)^G=I_k^G$ en $S^k(\mathrm{ad}P)$ se define por la fórmula (5.14).

En particular, si $\mathcal{X}_k=\chi\otimes f$ y $w_2=\omega_2\otimes\eta$, se tiene

$$\bar{\mathcal{X}}_k(w_2)=i_\chi(\omega_2\wedge\overset{(k}{\ldots}\wedge\omega_2)\cdot\bar{f}(\eta,\overset{(k}{\ldots},\eta).\tag{5.29}$$

En las coordenadas locales $(x^i; R^\alpha_{ij})$ introducidas en el fibrado de curvatura, si se tiene

$$\mathcal{X}_k = \chi \otimes f = \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_{2k}}} \lambda^{i_1,\dots,i_{2k}}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k} B^{\alpha_1} \vee \cdots \vee B^{\alpha_k},$$

se obtiene directamente que $\bar{\mathcal{X}}_k$ tiene por ecuación

$$\lambda^{i_1,\dots,i_{2k}}_{\alpha_1,\dots,\alpha_k} \sum_{\tau \in S_{2k}} \varepsilon(\tau) R^{\alpha_1}_{i_{\tau(1)} i_{\tau(2)}} \cdots R^{\alpha_1}_{i_{\tau(2k-1)} i_{\tau(2k)}}. \tag{5.30}$$

5.4.3 Estructura

El siguiente teorema da una caracterización de las lagrangianas *gauge* invariantes y variacionalmente triviales en función de multicampos vectoriales de "divergencia cero". Más concretamente

Teorema 5.4.1 *Sea $\pi : P \to M$ un fibrado principal de grupo estructural un grupo de Lie conexo G sobre una variedad M orientable. Sea v una forma de volumen sobre M. Entonces las lagrangianas en $J^1(C(P))$* gauge *invariantes y variacionalmente triviales son de la forma*

$$\mathcal{L} = \sum_{k=0}^{[n/2]} \bar{\mathcal{X}}_k \circ \Omega,$$

siendo Ω la aplicación curvatura y $\mathcal{X}_k \in \bigwedge^{2k} \mathfrak{X}(M) \otimes I^G_k$ tal que

$$L_{\mathcal{X}_k} v = 0, \quad k = 1, \dots, [n/2]. \tag{5.31}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{L} \cdot v$ una densidad lagrangiana *gauge* invariante y variacionalmente trivial. Por el Teorema de Utiyama, se tiene que $\mathcal{L} = \bar{\mathcal{L}} \circ \Omega$, para cierta $\bar{\mathcal{L}}: \bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{ad}P \to \mathbb{R}$ a su vez *gauge* invariante. Sea $(x^1, \dots, x^n)$ un sistema coordenado en un entorno U de M en el que π sea trivializable y tal que $v = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. En los sistemas de coordenadas inducidos en $J^1(C(P))$ y $\bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{ad}P$, la Proposición 5.1.5 implica en este caso que la lagrangiana $\mathcal{L}$ debe verificar

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial A^\alpha_{i,h} \partial A^\beta_{j,k}} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial A^\alpha_{i,k} \partial A^\beta_{j,h}} = 0, \; i,j,k,h = 1, \dots, n; \; \alpha, \beta = 1, \dots, m. \tag{5.32}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_j^\alpha} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^k \partial A_{j,k}^\alpha} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial A_i^\beta \partial A_{j,k}^\alpha} A_{i,k}^\beta, \; j = 1, \dots, n; \; \alpha = 1, \dots . m. \tag{5.33}$$

Por la regla de la cadena, utilizando la expresión local de la aplicación de curvatura (*cf.* ecuación (5.11)), se obtiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k} = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial x^k} \circ \Omega,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_j^\alpha} = c_{\tau\alpha}^\beta A_i^\tau \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial R_{ji}^\beta} \circ \Omega,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{j,k}^\alpha} = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial R_{jk}^\alpha} \circ \Omega,$$

en donde se supone $R_{ij}^\alpha = -R_{ji}^\alpha$ en el caso $i \geq j$. Con estas expresiones, la ecuación (5.32) se transforma en

$$\frac{\partial^2 \bar{\mathcal{L}}}{\partial R_{ih}^\alpha \partial R_{jk}^\beta} \circ \Omega + \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{L}}}{\partial R_{ik}^\alpha \partial R_{jh}^\beta} \circ \Omega = 0, \; i, j, k, h = 1, \dots , n; \; \alpha, \beta = 1, \dots , m, \tag{5.34}$$

y la ecuación (5.33) en

$$c_{\tau\alpha}^\beta A_i^\tau \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial R_{ji}^\beta} \circ \Omega = \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{L}}}{\partial x^k \partial R_{jk}^\alpha} + c_{\tau\beta}^\gamma A_{i,k}^\beta A_h^\tau \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{L}}}{\partial R_{ih}^\gamma \partial R_{jk}^\alpha} \circ \Omega. \tag{5.35}$$

Por otra parte, sabemos que la función $\bar{\mathcal{L}}$ es *gauge* invariante y por tanto, de la expresión local de la representación *gauge* en el fibrado de curvatura (véase la ecuación (5.12)), se verifica

$$c_{\tau\beta}^\gamma R_{ik}^\beta \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial R_{ik}^\gamma} = 0, \quad \tau = 1, \dots , m. \tag{5.36}$$

Si se hace la derivada de esta última igualdad por R_{jh}^α, se tiene

$$2 c_{\tau\alpha}^\gamma \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial R_{jh}^\gamma} + c_{\tau\beta}^\gamma R_{ik}^\beta \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{L}}}{\partial R_{ik}^\gamma \partial R_{jh}^\alpha} = 0$$

y componiendo con la aplicación curvatura

$$2c^{\gamma}_{\tau\alpha}\frac{\partial\bar{\mathcal{L}}}{\partial R^{\gamma}_{jh}}\circ\Omega+2c^{\gamma}_{\tau\beta}A^{\beta}_{i,k}\frac{\partial^2\bar{\mathcal{L}}}{\partial R^{\gamma}_{ik}\partial R^{\alpha}_{jh}}\circ\Omega-c^{\gamma}_{\tau\beta}c^{\beta}_{\mu\nu}A^{\mu}_{i}A^{\nu}_{k}\frac{\partial^2\bar{\mathcal{L}}}{\partial R^{\gamma}_{ik}\partial R^{\alpha}_{jh}}\circ\Omega=0.$$

Multiplicamos por A^{τ}_{h} y sumamos en τ y en h y obtenemos

$$2c^{\gamma}_{\tau\alpha}A^{\tau}_{h}\frac{\partial\bar{\mathcal{L}}}{\partial R^{\gamma}_{jh}}\circ\Omega+2c^{\gamma}_{\tau\beta}A^{\tau}_{h}A^{\beta}_{i,k}\frac{\partial^2\bar{\mathcal{L}}}{\partial R^{\gamma}_{ik}\partial R^{\alpha}_{jh}}\circ\Omega$$
$$-c^{\gamma}_{\tau\beta}c^{\beta}_{\mu\nu}A^{\mu}_{i}A^{\nu}_{k}A^{\tau}_{h}\frac{\partial^2\bar{\mathcal{L}}}{\partial R^{\gamma}_{ik}\partial R^{\alpha}_{jh}}\circ\Omega=0.$$

El último sumando es cero (véase el anexo al final de la demostración de este teorema). Entonces, haciendo uso además de la ecuación (5.34)

$$c^{\gamma}_{\tau\alpha}A^{\tau}_{h}\frac{\partial\bar{\mathcal{L}}}{\partial R^{\gamma}_{jh}}\circ\Omega=-c^{\gamma}_{\tau\beta}A^{\tau}_{h}A^{\beta}_{i,k}\frac{\partial^2\bar{\mathcal{L}}}{\partial R^{\gamma}_{ik}\partial R^{\alpha}_{jh}}\circ\Omega=c^{\gamma}_{\tau\beta}A^{\tau}_{h}A^{\beta}_{i,k}\frac{\partial^2\bar{\mathcal{L}}}{\partial R^{\gamma}_{ih}\partial R^{\alpha}_{jk}}\circ\Omega.$$

Con esta ecuación podemos simplificar la relación (5.35) y tenemos que $\bar{\mathcal{L}}$ debe verificar

$$\frac{\partial^2\bar{\mathcal{L}}}{\partial x^k\partial R^{\alpha}_{jk}}=0,\quad j=1,\ldots,n;\ \alpha=1,\ldots,m, \tag{5.37}$$

además de

$$\frac{\partial^2\bar{\mathcal{L}}}{\partial R^{\alpha}_{ih}\partial R^{\beta}_{jk}}+\frac{\partial^2\bar{\mathcal{L}}}{\partial R^{\alpha}_{ik}\partial R^{\beta}_{jh}}=0,\ i,j,k,h=1,\ldots,n;\ \alpha,\beta=1,\ldots,m, \tag{5.38}$$

en donde hemos suprimido la composición con Ω al ser la aplicación curvatura suprayectiva.

De la ecuación (5.38) se tiene

$$\frac{\partial^2\bar{\mathcal{L}}}{\partial R^{\alpha}_{ih}\partial R^{\alpha}_{ih}}=0,\quad i,h=1,\ldots,n;\ \alpha=1,\ldots,m,$$

por lo que la función $\bar{\mathcal{L}}$ tiene la forma $\bar{\mathcal{L}}=A+R^{\alpha}_{ih}\cdot B$ para ciertas funciones A,B que no dependen de la variable R^{α}_{ih}. Esta condición para i,h y α arbitrarios es sólo posible si $\bar{\mathcal{L}}$ es un polinomio en las variables $\{R^{\alpha}_{ih}\}^{\alpha=1,\ldots,m}_{i,h=1,\ldots,n}$

$$\bar{\mathcal{L}}=\sum_k\lambda^{i_1\ldots i_{2k}}_{\alpha_1\ldots\alpha_k}R^{\alpha_1}_{i_1i_2}\cdot\cdots\cdot R^{\alpha_k}_{i_1i_{2k}}, \tag{5.39}$$

en donde $\lambda^{i_1\dots i_{2k}}_{\alpha_1\dots\alpha_k}$ son entonces funciones de la base M. También de (5.38) se tiene

$$\frac{\partial^2 \bar{\mathcal{L}}}{\partial R^\alpha_{ih} \partial R^\alpha_{jh}} = 0, \quad i, j, h = 1, \dots, n; \ \alpha = 1, \dots, m,$$

esto es, en los índices $i_1 \dots i_{2k}$ de la expresión (5.39) no se puede repetir ninguno de ellos. Es decir, (5.39) se puede escribir como

$$\bar{\mathcal{L}} = \sum_{k=0}^{[n/2]} \lambda^{i_1\dots i_{2k}}_{\alpha_1\dots\alpha_k} R^{\alpha_1}_{i_1 i_2} \cdot \dots \cdot R^{\alpha_k}_{i_1 i_{2k}}, \tag{5.40}$$

siendo $\{i_1 \dots i_{2k}\}$ cualquier subconjunto de $\{1, \dots, n\}$ de tamaño $2k$. La condición general (5.38) más la condición $R^\alpha_{ij} = -R^\alpha_{ji}$ implica que la expresión polinómica verifica las condiciones de simetría

$$\lambda^{i_1\dots j\dots h\dots i_{2k}}_{\alpha_1\dots\alpha_k} = -\lambda^{i_1\dots h\dots j\dots i_{2k}}_{\alpha_1\cdots\alpha_k}.$$

Como las trasposiciones generan el grupo de permutaciones, se puede asegurar entonces que

$$\lambda^{i_{\tau(1)}\dots i_{\tau(2k)}}_{\alpha_1\dots\alpha_k} = \varepsilon(\tau) \lambda^{i_1\dots i_{2k}}_{\alpha_1\cdots\alpha_k}, \tag{5.41}$$

para cualquier permutación $\tau \in S_{2k}$. La expresión (5.40) se puede escribir por tanto como

$$\bar{\mathcal{L}} = \sum_{k=0}^{[n/2]} \sum_{i_1 < \dots < i_{2k}} \lambda^{i_1\dots i_{2k}}_{\alpha_1\dots\alpha_k} \sum_{\tau \in S_{2k}} \varepsilon(\tau) R^{\alpha_1}_{i_{\tau(1)} i_{\tau(2)}} \cdot \dots \cdot R^{\alpha_k}_{i_{\tau(2k-1)} i_{\tau(2k)}}.$$

Se comprueba directamente que con la notación introducida en §5.4.2

$$\bar{\mathcal{L}} = \sum_{k=0}^{[n/2]} \bar{\mathcal{X}}_k,$$

siendo $\mathcal{X}_k \in \bigwedge^{2k} \mathfrak{X}(M) \otimes S^k(\mathfrak{g}^*)$ de la forma

$$\mathcal{X}_k = \sum_{i_1 < \dots < i_{2k}} (-1)^{|I|+2k} \lambda^{i_1\dots i_{2k}}_{\alpha_1\dots\alpha_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_{2k}}} \otimes B^{\alpha_1} \vee \dots \vee B^{\alpha_k},$$

siendo $|I| = i_1 + \cdots + i_{2k}$. La invariacia *gauge* de $\bar{\mathcal{L}}$ implica que cada $\mathcal{X}_k$ es verdaderamente un elemento de $\bigwedge^{2k} \mathfrak{X}(M) \otimes (S^k(\mathfrak{g}^*))^G$. En efecto, si $\Phi_t(x, g) = (x, \exp(tB) \cdot g)$ es el flujo del campo *gauge* $\tilde{B}$ en la trivialización local escogida, se tiene

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} \bar{\mathcal{X}}_k = \bar{\mathcal{L}} = \bar{\mathcal{L}} \circ (\Phi_t)_{\mathrm{ad}} = \sum_{k=0}^{[n/2]} \bar{\mathcal{X}}_k \circ (\Phi_t)_{\mathrm{ad}},$$

es decir, $\bar{\mathcal{X}}_k = \bar{\mathcal{X}}_k \circ (\Phi_t)_{\mathrm{ad}}$ para todo $k = 1, \ldots, [n/2]$. Si $w_2 \otimes (u, A)_{\mathrm{ad}} \in \bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{ad}P$, se tiene por tanto

$$\bar{\mathcal{X}}_k(w_2 \otimes (u, A)_{\mathrm{ad}}) = \bar{\mathcal{X}}_k(w_2 \otimes (u, \mathrm{Ad}_{\exp(-tB)} \Phi_t)_{\mathrm{ad}}).$$

De la ecuación (5.29) se deduce la Ad-invariancia por elementos de la forma $\exp B$, $B \in \mathfrak{g}$. Como el grupo de Lie es conexo, la imagen de la exponencial genera todo el grupo y entonces $\mathcal{X}_k \in \bigwedge^{2k} \mathfrak{X}(M) \otimes (S^k(\mathfrak{g}^*))^G$.

Resta únicamente comprobar la condición (5.31). Tenemos

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{X}_k} v &= \mathrm{d}(\lambda^{i_1 \ldots i_{2k}}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} i_{\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_{2k}}}} v) \otimes B^{\alpha_1} \vee \cdots \vee B^{\alpha_k} \\ &= \frac{\partial(\lambda^{i_1 \ldots i_{2k}}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k})}{\partial x^{i_s}} \mathrm{d}x^{i_s} \wedge (i_{\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_{2k}}}} v) \otimes B^{\alpha_1} \vee \cdots \vee B^{\alpha_k}. \end{aligned}$$

Si fijamos unos índices $j_2 < \cdots < j_{2k}$ arbitrarios, el coeficiente del sumando $i_{\frac{\partial}{\partial x^{j_2}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_{2k}}}} v$ es

$$\sum_l \frac{\partial(\lambda^{l, j_2 \ldots j_{2k}}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k})}{\partial x^l} \otimes B^{\alpha_1} \vee \cdots \vee B^{\alpha_k}, \tag{5.42}$$

en donde siempre que los índices $l, j_2 \ldots j_{2k}$ no estén ordenados crecientemente se pone $\lambda^{l, j_2 \ldots j_{2k}}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} = \varepsilon(\tau) \lambda^{\tau(l), \tau(j_2) \ldots \tau(j_{2k})}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$, siendo τ la permutación del conjunto $\{l, j_2 \ldots j_{2k}\}$ tal que $\tau(l) < \tau(j_2) < \cdots < \tau(j_{2k})$ (véase la ecuación (5.41)). Entonces $L_{\mathcal{X}_k} v = 0$ si y sólo si cada expresión de la forma (5.42) es idénticamente cero.

Por otra parte, la condición (5.37), junto con la expresión de (5.40) de $\bar{\mathcal{L}}$, es

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \bar{\mathcal{L}}}{\partial x^l \partial R^\alpha_{jl}} &= \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{\partial(\lambda^{i_1\dots i_{2k}}_{\alpha_1\dots\alpha_k})}{\partial x^l} \frac{\partial R^{\alpha_1}_{i_1 i_2} \cdot \dots \cdot R^{\alpha_k}_{i_{2k-1} i_{2k}}}{\partial R^\alpha_{jl}} \\
&= \sum_{k=0}^{[n/2]} k \frac{\partial(\lambda^{j,l\dots i_{2k}}_{\alpha,\alpha_2\dots\alpha_k})}{\partial x^l} R^{\alpha_2}_{i_3 i_4} \cdot \dots \cdot R^{\alpha_k}_{i_{2k-1} i_{2k}}.
\end{aligned}
$$

en donde se ha tenido en cuenta la condición (5.41). Esta expresión es cero si y sólo si

$$
\sum_l \frac{\partial(\lambda^{j,l\dots i_{2k}}_{\alpha,\alpha_2\dots\alpha_k})}{\partial x^l} = 0,
$$

para cualquier elección de índices $\alpha, \alpha_2 \dots \alpha_k = 1, \dots, m$ y $j, i_3 \dots, i_{2k} = 1, \dots, n$. Esta condición es equivalente a que (5.42) se anule.

c.q.d.

ANEXO. Sea

$$
I_\alpha = c^\gamma_{\tau\beta} c^\beta_{\mu\nu} A^\mu_i A^\nu_k A^\tau_h \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{L}}}{\partial R^\gamma_{ik} \partial R^\alpha_{jh}} \circ \Omega, \quad \alpha = 1, \dots, m.
$$

Tenemos que ver que $I_\alpha = 0$, $\alpha = 1, \dots, m$. En efecto, por la identidad de Jacobi del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, se tiene

$$
c^\gamma_{\tau\beta} c^\beta_{\mu\nu} + c^\gamma_{\nu\beta} c^\beta_{\tau\mu} + c^\gamma_{\mu\beta} c^\beta_{\nu\tau} = 0, \quad \gamma = 1, \dots, m.
$$

Así,

$$
\begin{aligned}
I_\alpha &= -(c^\gamma_{\nu\beta} c^\beta_{\tau\mu} + c^\gamma_{\mu\beta} c^\beta_{\nu\tau}) A^\mu_i A^\nu_k A^\tau_h \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{L}}}{\partial R^\gamma_{ik} \partial R^\alpha_{jh}} \circ \Omega \\
&= -c^\gamma_{\nu\beta} c^\beta_{\tau\mu} A^\mu_i A^\nu_k A^\tau_h \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{L}}}{\partial R^\gamma_{ik} \partial R^\alpha_{jh}} \circ \Omega - c^\gamma_{\mu\beta} c^\beta_{\nu\tau} A^\mu_i A^\nu_k A^\tau_h \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{L}}}{\partial R^\gamma_{ik} \partial R^\alpha_{jh}} \circ \Omega \\
&= -c^\gamma_{\tau\beta} c^\beta_{\nu\mu} A^\mu_i A^\tau_h A^\nu_k \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{L}}}{\partial R^\gamma_{ih} \partial R^\alpha_{jk}} \circ \Omega - c^\gamma_{\tau\beta} c^\beta_{\nu\mu} A^\tau_h A^\nu_k A^\mu_i \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{L}}}{\partial R^\gamma_{hk} \partial R^\alpha_{ji}} \circ \Omega,
\end{aligned}
$$

donde en el último paso se han cambiado algunos índices mudos de sumación. Teniendo en cuenta que $R^\gamma_{hk} = -R^\gamma_{kh}$ y la igualdad (5.34), se tiene

$$
I_\alpha = c^\gamma_{\tau\beta} c^\beta_{\nu\mu} A^\mu_i A^\tau_h A^\nu_k \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{L}}}{\partial R^\gamma_{ik} \partial R^\alpha_{jh}} \circ \Omega - c^\gamma_{\tau\beta} c^\beta_{\nu\mu} A^\tau_h A^\nu_k A^\mu_i \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{L}}}{\partial R^\gamma_{ki} \partial R^\alpha_{jh}} \circ \Omega = -2I_\alpha.
$$

Esto implica que $I_\alpha = 0$, $\alpha = 1, \dots, m$.

5.4.4 Lagrangianas definidas por formas *gauge* invariantes

Proposición 5.4.2 *Sea v una forma de volumen en un espacio vectorial V de dimensión n. Entonces la aplicación lineal $i : \bigwedge^k V \to \bigwedge^{n-k} V^*$ determinada por la condición*

$$i(X_1 \wedge \cdots \wedge X_k) = i_{X_1} \ldots i_{X_k} v,$$

$X_i \in V$, $i = 1, \ldots, k$, es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{E_1, \ldots, E_n\}$ una base de V tal que $v = E^1 \wedge \cdots \wedge E^n$ siendo $\{E^1, \ldots, E^n\}$ la base dual. Como los espacios vectoriales $\bigwedge^k V$ y $\bigwedge^{n-k} V^*$ tienen la misma dimensión basta comprobar que la aplicación i es suprayectiva. Por linealidad es suficiente encontrar la antiimagen de elementos $\omega \in \bigwedge^{n-k} V^*$ de expresión

$$\omega = E^{i_1} \wedge \cdots \wedge E^{i_{n-k}},$$

para cualquier elección de índices $i_1 < \cdots < i_{n-k}$. Si $j_1 < \cdots < j_k$ es el conjunto complementario de $i_1 < \cdots < i_{n-k}$ dentro del conjunto $\{i, \ldots, n\}$, es directo comprobar que $i(\mathcal{X}) = \omega$ con

$$\mathcal{X} = (-1)^{j_1 + \cdots + j_k + k} E_{j_1} \wedge \cdots \wedge E_{j_k}.$$

c.q.d.

Teorema 5.4.3 *Sea $\pi : P \to M$ un fibrado principal de grupo estructural un grupo de Lie conexo G sobre una variedad orientable M de dimensión n. Las densidades lagrangianas* gauge *invariantes variacionalmente triviales en $J^1(C(P))$ son todas de la forma Λ_{ξ_n}* (véase la construcción en §5.2.3 de densidades lagrangianas a partir de formas en $C(P)$) *siendo ξ_n una n-forma* gauge *invariante en $C(P)$ cuya expresión es* (cf. Teorema 4.3.1)

$$\xi_n = p^* \omega_l \wedge f^l(\Omega_2),$$

siendo $\omega_l \in \Omega^\bullet(M)$ formas cerradas.

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 5.4.1, cada densidad lagrangiana *gauge* invariante y variacionalmente trivial es de la forma

$$\Lambda = \sum_{k=0}^{[n/2]} (\bar{\mathcal{X}}_k \circ \Omega) \cdot v,$$

siendo $\mathcal{X}_k \in \mathfrak{X}^{2k}(M) \otimes I_k^G$ tal que $L_{\mathcal{X}_k} v = 0$. Cada $\mathcal{X}_k$ se puede expresar de la forma

$$\mathcal{X}_k = \chi_l \otimes f^l, \quad \chi_l \in \mathfrak{X}^{2k}(M), \ f^l \in I_k^G.$$

Sean $\omega_l = i_\chi v$. De la condición $L_{\mathcal{X}_k} v = 0$ se sigue que $\mathrm{d}\omega_l = 0$, $\forall l$. Comprobemos ahora que $\Lambda_{\xi_n} = (\tilde{\mathcal{X}}_k \circ \Omega) \cdot v$ siendo $\xi_n = p^* \omega_l \wedge f^l(\Omega_2)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $l = 1$ e introduzcamos un sistema de coordenadas en M tal que $\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n = v$. Sea

$$\chi \otimes f = \sum_{i_1 < \cdots < i_{2k}} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_{2k}}} \lambda^{i_1, \ldots, i_{2k}}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} B^{\alpha_1} \vee \cdots \vee B^{\alpha_k},$$

la expresión local de $\chi \otimes f$. Tenemos

$$\Lambda_{\xi_n}(j^1_x \sigma_\Gamma) = \sigma^*_\Gamma(p^* \omega \wedge f(\Omega_2)) = (\omega \wedge f(\Omega_\Gamma))_x,$$

en donde hemos utilizado la identidad $\sigma^*_\Gamma f(\Omega_2) = f(\Omega_\Gamma)$ (Proposición 4.2.5). De la definición de $f(\Omega_\Gamma)$ (véase la Definición 4.2.2), se tiene

$$\begin{aligned} &\omega \wedge f(\Omega_\Gamma) = \\ &\qquad \omega \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_{2k}} \lambda^{i_1, \ldots, i_{2k}}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} \sum_{\tau \in S_{2k}} \varepsilon(\tau) \Omega^{\alpha_1}_{j_{\tau(1)} j_{\tau(2)}} \cdots \Omega^{\alpha_1}_{j_{\tau(2k-1)} j_{\tau(2k)}}. \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} &\omega \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_{2k}} \\ = \ & i_{\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_{2k}}}\right)} v \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_{2k}} = \delta^{j_1}_{i_1} \ldots \delta^{j_{2k}}_{i_{2k}} v. \end{aligned}$$

por lo que en vista de la ecuación (5.30) se tiene finalmente que $\Lambda_{\xi_n}(j^1_x \sigma_\Gamma) = (\tilde{\mathcal{X}}_k \circ \Omega)(j^1_x \sigma_\Gamma) \cdot v$.

Recíprocamente, si $\xi_n = \omega_l \wedge f(\Omega_2)$ con $\mathrm{d}\omega_l = 0$, del isomorfismo de la Proposición 5.4.2 para el espacio vectorial $T_x M$, $x \in M$, se deduce que existen $\chi_l \in \mathfrak{X}^\bullet(M)$ tales que $i_{\chi_l} v = \omega_l$. Entonces $\mathcal{X} = \chi_l \otimes f^l$ define una densidad trivial *gauge* invariante al tener $L_{\chi_l} v = 0$.

c.q.d.

Observación 5.4.1 Supongamos que M es compacta. La trivialidad variacional de las densidades de la forma Λ_{ξ_n} con $\xi_n = p^* \omega_l \wedge f^l(\Omega_2)$, $\mathrm{d}\omega_l = 0$, se puede comprobar directamente. En efecto, si $\sigma_\Gamma : M \to C(P)$ es una sección arbitraria del fibrado de las conexiones asociada a una conexión Γ, se tiene

$$(j^1\sigma_\Gamma)^*\Lambda_{\xi_n} = \sigma_\Gamma^*\xi_n = \omega_l \wedge f^l(\Omega_\Gamma).$$

Si Γ' es otra conexión, por la Proposición 4.2.3–(b), se tiene

$$f^l(\Omega_{\Gamma'}) = f^l(\Omega_\Gamma) + \mathrm{d}\nu^l, \quad \forall l,$$

para ciertas formas ν^l de M. Entonces

$$\int_M (j^1\sigma_{\Gamma'})^*\Lambda_{\xi_n} = \int_M \omega_l \wedge f^l(\Omega_{\Gamma'}) = \int_M \omega_l \wedge f^l(\Omega_\Gamma) + \int_M \omega_l \wedge \mathrm{d}\nu^l.$$

El segundo miembro del último sumando es nulo por el teorema de Stokes al ser $\omega_l \wedge \mathrm{d}\nu^l = (-1)^{\mathbf{grado}(\omega_l)}\mathrm{d}(\omega_l \wedge \nu^l)$. La independencia del funcional $\mathcal{L}$ respecto la sección σ_Γ escogida, y por tanto la variacionalidad trivial del problema, son manifiestas.

El Teorema 5.4.3 afirma sin emgargo que no hay más densidades triviales *gauge* invariantes que las anteriormente estudiadas.

Observación 5.4.2 Las formas *gauge* pueden definir por tanto problemas variacionales no triviales. Basta tomar una forma del tipo $\xi_n = p^*\omega_l \wedge f^l(\Omega_2)$, con alguna $\mathrm{d}\omega_l \neq 0$ para que se dé el caso.

Bibliografía

[Ati1] M.F. Atiyah, *Complex analytic connections in fibre bundles*, Trans. Amer. Math. Soc. **85** (1957), 181–207.

[Ati2] —, *Geometry of Yang-Mills Fields*, Accademia Nazionale dei Lincei, Scuola Normale Superiore, Pisa, 1979.

[BM] J.V. Beltrán, J. Monterde, *Graded Poisson structures on the algebra of differential forms*, Comment. Math. Helvetici **70** (1995), 383–402.

[Bet] D. Betounes, *The geometry of gauge-particle field interaction: a generalization of Utiyama's theorem*, J. Geom. Phys. **6** (1989), 107–125.

[Ble] D. Bleecker, *Gauge Theory and Variational Principles*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, MA, 1981.

[CV] A. Cabras, A.M. Vinogradov, *Extensions of the Poisson bracket to differential forms and multi-vector fields*, J. Geom. Phys. **9** (1992), 75–100.

[CD] D. Canarutto, C.T.J. Dodson, *On the bundle of principal connections and the stability of b-incompleteness of manifolds*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **98** (1985), 51–59.

[CM1] M. Castrillón López, J. Muñoz Masqué, *Structure symplectique généralisée sur le fibré des connexions*, C.R. Acad. Sci. Paris **328**, Série I (1999), 41–44.

[CM2] —, *Gauge forms on $SU(2)$-bundles*, J. Geometry and Physics, (En impresión).

[CM3] —, *Gauge-invariant variationally trivial problems on T^*M*, J. Math. Phys. **40**, n. 2 (1999), 821–829.

[CRS] M. Castrillón López, T.S. Ratiu, S. Shkoller, *Reduction in principal fiber bundles: covariant Euler-Poincaré equations*, Proc. Amer. Math. Soc. (en impresión).

[Don] S.K. Donaldson, An application of gauge theory to four dimensional topology, J. Differential Geom. **18** (1983), 279–315.

[EMR] A. Echevarría Enríquez, M. C. Muñoz Lecanda, N. Román Roy, *Geometry of Lagrangian First-order Classical Field Theories*, Fortschr. Phy. **44** (3) (1996), 235–280.

[Eck] D.J. Eck. *Gauge-natural bundles and generalized gauge theories*, Mem. Amer. Math. Soc. **247** (1981).

[ED] J.P. Elliot, P.G. Dawber, *Symmetry in Physics*, Vol I y II, MacMillan Press Ltd., London, 1979.

[Gar1] P.L. García Pérez, *Connections and 1-jet bundles*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **47** (1972), 227–242.

[Gar2] —, *Gauge algebras,curvature and symplectic structure*, J. Differential Geom. **12** (1977), 209–227.

[Gar3] —, *The Poincaré-Cartan invariant in the calculus of variations*, Symposia Math. **14** (1974), 219–246.

[Gil] P.B. Gilkey, *Invariance Theory, the Heat Equation. and the Atiyah-Singer Index Theorem*, CRC Press, Boca Raton, 1995.

[Gol] H. Goldschmidt, *Integrability criteria for systems of nonlinear partial differential equations*, J. Differential Geom. **1** (1967), 269–307.

[GG] M. Golubitsky, V. Guillemin, *Stable Mappings and Their Singularities*. Springer-Verlag New York Inc., 1973.

[Gre] M.J. Greenberg, *Lectures on Algebraic Topology*, W.A. Benjamin, Inc., Reading, MA, 1967.

[GoS] H. Goldschmidt, S. Sternberg, *The Hamiltonian-Cartan formalism in the calculus of variations*, Ann. Inst. Fourier grenoble **23** (1), (1973), 203–267.

[GS] V. Guillemin, S. Sternberg, *Symplectic techniques in physics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1984.

[HM1] L. Hernández Encinas, J. Muñoz Masqué, *Symplectic structure and gauge invariance on the cotangent bundle*, J. Math. Phys. **35** (1994), 426–434.

[HM2] —, *Gauge invariance on the bundle of connections of a $U(1)$-principal bundle*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. **318**, Série I (1994), 1133–1138.

[Hus] D. Husemoller, *Fibre Bundles*, Third Ed., Springer-Verlag New York, Inc., 1994.

[Jon] H.F. Jones, *Groups, Representations and Physics*, IOP Publishing Ltd., Bristol, U.K., 1990.

[Key] M. Keyl, *About the geometric structure of symmetry-breaking*, J. Math. Phys. **32** (1991), 1065–1071.

[KN] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, John Wiley & Sons, Inc. (Interscience Division), New York, Volume I, 1963; Volume II, 1969.

[KMS] I. Kolář, P.W. Michor, J. Slovák, *Natural Operators in Differential Geometry*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1993.

[Kos] J.L. Koszul, *Fibre Bundles and Differential Geometry*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1960.

[Kr1] D. Krupka, *On the structure of the Euler mapping*, Arch. Math. **1**, X (1974), 55–62.

[Kr2] —, *The contact ideal*, Diff. Geom. Appications **5**, (1995), 257–276.

[Kr3] —, *Variational Sequences*, Open Education & Sciences, Opava, 1995.

[KM] A. Kriegl, P.W. Michor, *The Convenient Setting of Global Analysis*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[MM] K.B. Marathe, G. Martucci, *The Mathematical Foundations of Gauge Theories*, Elsevier Science Publishers B.V., 1992.

[MR] J.E. Marsden, T.S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Simmetry*, Springer-Verlag New York, Inc., 1994.

[MV] P.K. Mitter, C.M. Viallet, *On the Bundle of Connections and the Gauge Orbit Manifold in Yang-Mills Theory*, Comm. Math. Phys. **79** (1981), 457–472.

[Mu] J. Muñoz Masqué, *Formes de structure et transformations infinitésimales de contact d'ordre supérieur*, C.R. Acad. Sci. Paris **298**, Série I, nº 8, (1984), 185–188.

[NS] C. Nash, S. Sen, *Topology and Geometry for Physicists*, Academic Press, Inc., 1982.

[Sar] G.A. Sardanashvily, *Gauge theories in Jet Manifolds*, Hadronic Press Inc., 1993.

[Sau] D.J. Saunders, *The Geometry of Jet Bundles*, Cambridge University Press, 1989.

[Sha] R.W. Sharpe, *Differential Geometry: Cartan's generalization of Klein's Erlangen Program*, Springer-Verlag New York, 1997.

[Uti] R. Utiyama, *Invariant theoretical interpretation of interaction*, Phys. Rev. **101**, (1956), 1597–1607.

[Var] V.S. Varadarajan, *Lie groups, Lie algebras, and their representations*, Springer-Verlag New York Inc., 1984.

[War] F.W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag New York, 1983.

[YM] C.N. Yang, R.L. Mills, *Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance*, Phys. Rev. **96**, (1954), 191–195.