

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Facultad de Ciencias Matemáticas

Departamento de Matemática Aplicada

Problemas de frontera libre para fluidos viscosos



Memoria para optar al Título de Doctor en Ciencias Matemáticas

Presentada por

Marco Antonio Fontelos López

Dirigida por

Juan José López Velázquez

Madrid, Octubre 1997

Desco agradecer:

- Al Profesor Juan José López Velázquez lo mucho que con él he podido aprender.
- Al Profesor Miguel Angel Herrero García por introducirme en el campo de la Matemática Aplicada.
- A la Universidad Complutense de Madrid por el apoyo económico.
- A todos los miembros del Departamento de Matemática Aplicada de la Facultad de Ciencias Matemáticas por proporcionarme unas condiciones de trabajo óptimas y un ambiente muy agradable.

Indice

Introducción	3
1 Un problema de frontera libre para el sistema de Stokes con líneas de contacto	9
1.1 Introducción	9
1.2 Notación y algunos resultados preliminares de análisis funcional	13
1.3 Reducción del problema de frontera libre linealizado a una ecuación integrodiferencial	22
1.4 Estudio de la ecuación integrodiferencial de evolución para la frontera libre	29
1.4.1 El caso en el que la velocidad de substrato es negativa o nula ($\beta_0 \leq 0$)	29
1.4.2 El caso en el que la velocidad del substrato es positiva ($\beta_0 > 0$)	40
1.5 Estimaciones refinadas para $f(r, t)$ cerca del punto de contacto	41
1.5.1 Formación de ángulos en el caso $\beta_0=0$	41
1.5.2 Comportamiento asintótico de la frontera libre para $\beta_0 \neq 0$	50
1.6 Reformulación del problema no lineal	52
1.7 Algunos resultados adicionales de análisis funcional	55
1.8 Análisis del problema de Stokes en un dominio con frontera prefijada	62
1.9 Análisis de la ecuación de evolución no lineal	67
1.9.1 Los problemas lineales no-homogéneos	67
1.9.2 Demostración del teorema de existencia y unicidad de soluciones globales	72
2 Análisis de la evolución de la superficie de tubos fluidos finos	73
2.1 Introducción	73
2.2 Límites asintóticos distinguidos	77
2.3 La formulación Lagrangiana del sistema unidimensional	81
2.4 Un teorema de existencia y unicidad local de soluciones del sistema unidimensional	85
2.5 Análisis del sistema unidimensional para fluidos ideales	91
2.5.1 Soluciones autosimilares	91
2.5.2 Formulación del problema (2.52) en el plano hodógrafo	99
2.5.3 Soluciones autosimilares en el plano hodógrafo	101
2.5.4 Combinaciones lineales de autosimilares	114
2.5.4.1 Ejemplo 1: Los perfiles autosimilares	114
2.5.4.2 Ejemplo 2: Perfiles del tipo $A_{\pm} z ^{\alpha} \log(z) ^{\beta}$	114
2.5.4.3 Ejemplo 3: Sumas discretas de autosimilares	115
2.5.4.4 Ejemplo 4: Perfiles del tipo $h_0 + A z ^{\frac{1}{3}}$	116
2.5.4.5 Ejemplo 5: Perfiles asintóticamente cilíndricos	117

2.5.5	Soluciones simétricas con velocidad inicial nula	121
2.5.6	Un resultado sobre los mecanismos de ruptura en tiempo finito	128
2.6	Análisis de sistema unidimensional para un fluido de Stokes	130
2.7	Análisis de sistema unidimensional para un fluido sin tensión superficial	132
3	Ruptura para fluidos de Stokes incompresibles	135
3.1	Introducción	135
3.2	Análisis asintótico de un mecanismo de ruptura en tiempo finito	136
3.3	Análisis del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (3.71), (3.72)	146
3.4	Estudio de la constante de tiro $C_n(\alpha)$	151
3.5	Justificación del desarrollo (3.52)	158
A	Deducción y análisis de la relación de dispersión (2.15)	163
A.1	Obtención de la relación de dispersión	163
A.2	Estudio analítico de la relación de dispersión (A.9)	165
A.3	Estudio numérico de la relación de dispersión (A.9)	171
A.4	Unicidad de la rama inestable	173
A.5	Representación gráfica de la relación de dispersión	174

Introducción

Las cuestiones que abordaremos en esta tesis hacen referencia a la evolución de superficies en cuyo interior se encuentra alojado un fluido incompresible y viscoso.

El estado dinámico del fluido se describe matemáticamente mediante un campo vectorial $\vec{v}(x, y, z, t)$ que representa físicamente la velocidad con la que se mueve un elemento del mismo centrado en (x, y, z) en un instante t . El campo \vec{v} debe satisfacer el sistema de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} \quad \text{en } \Omega(t) \quad (0.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{en } \Omega(t) \quad (0.2)$$

siendo $\Omega(t)$ el recinto ocupado por el fluido para todo tiempo y donde ρ y ν son la densidad y la viscosidad cinemática respectivamente. Hemos supuesto que las fuerzas másicas son despreciables.

Al sistema (0.1), (0.2) debemos añadir unas condiciones de contorno adecuadas. Sea $\Sigma(t)$ el borde de $\Omega(t)$ y supongamos que consiste en la unión de $\Sigma_0(t)$ y $\Sigma_1(t)$. $\Sigma_0(t)$ es la región del contorno que está en contacto con elementos sólidos y sobre ella se impone la condición de no deslizamiento:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{substrato}} \quad \text{en } \Sigma_0(t) \quad (0.3)$$

con $\vec{v}_{\text{substrato}}$ la velocidad del substrato sólido.

Sobre $\Sigma_1(t)$ actúan fuerzas de tensión superficial. Estas fuerzas están en equilibrio con los esfuerzos que el fluido ejerce sobre la superficie. Esta condición se expresa matemáticamente en la forma siguiente

$$T_{ij} n_j = -\sigma H n_i \quad \text{en } \Sigma_1(t) \quad (0.4)$$

donde se ha aplicado la convención de suma sobre índices repetidos. T_{ij} es la componente i, j del tensor de esfuerzos en coordenadas cartesianas:

$$T_{ij} = -p \delta_{ij} + \rho \nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

n_i es la componente i -ésima del vector normal a $\Sigma_1(t)$, σ representa el coeficiente de tensión superficial de la interfase y H es la curvatura media de la superficie.

Los puntos de $\Sigma_1(t)$ se mueven siguiendo el campo de velocidades definido en ellos. Si denotamos por V_N la velocidad con que se mueve un punto de $\Sigma_1(t)$ en la dirección normal, esta condición se expresa matemáticamente mediante la ecuación

$$V_N = \vec{v} \cdot \vec{n} \quad (0.5)$$

Los datos iniciales del problema son $\Sigma(0)$ y el campo de velocidades inicial $\vec{v}_0(x, y, z)$ (con $\nabla \cdot \vec{v}_0 = 0$).

Dado $\Sigma(t)$, el sistema (0.1), (0.2), (0.3) y (0.4) sería suficiente para hallar el campo de velocidades. Por otra parte, la ecuación (0.5) debería proporcionar $\Sigma(t)$ dado el campo de velocidades. Es esta interrelación entre la geometría del borde de un dominio y la solución de un sistema de ecuaciones que se satisfacen en el interior lo que caracteriza a los problemas de frontera libre y lo que dificulta su análisis matemático.

Esta tesis está dividida en tres capítulos. Cada uno de ellos se dedica al estudio de un problema del tipo descrito arriba.

El capítulo primero está dedicado al análisis de un problema con condiciones de contorno mixtas para fluidos muy viscosos en dimensión dos. El fluido lo suponemos acotado por las curvas $\Gamma_0 = (x \geq 0, y = 0)$ y $\Gamma_1 = (x \leq 0, f(x, t))$ con

$$\begin{aligned} f(0, t) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f_x(x, t) &= 0 \end{aligned}$$

donde Γ_0 es un substrato sólido que se mueve con velocidad β_0 en la dirección horizontal. Si los efectos de la viscosidad son dominantes frente a los de inercia (lo que ocurre cerca de un punto de contacto como puede verse mediante análisis dimensional) es razonable la simplificación consistente en sustituir el sistema de Navier-Stokes (0.1), (0.2) por el sistema de Stokes estacionario:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{v} \quad \text{en } \Omega(t) \quad (0.6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{en } \Omega(t) \quad (0.7)$$

Esta aproximación se denomina habitualmente aproximación cuasiestacionaria.

En [17], [18], [46] se estudiaron diversas soluciones estacionarias del sistema para las cuales la frontera libre es tangente al substrato en $\gamma_0 = \Gamma_0 \cap \Gamma_1$. El comportamiento asintótico de estas soluciones, expresado en coordenadas polares, es el siguiente:

$$\begin{aligned} \vec{v} &\sim \beta_0 \vec{i} + \vec{a}(\theta) r^{1-\rho} && \text{en el caso } \beta_0 > 0 \\ \vec{v} &\sim \beta_0 \vec{i} + \vec{b}(\theta) r^{|\rho|} && \text{en el caso } \beta_0 < 0 \end{aligned} \quad (0.8)$$

y

$$\begin{aligned} f &\sim r^{2-\rho} && \text{en el caso } \beta_0 > 0 \\ f &\sim r^{1+|\rho|} && \text{en el caso } \beta_0 < 0 \end{aligned} \quad (0.9)$$

cerca del origen, con

$$\rho = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{\beta_0}{\frac{\sigma}{2}} \right)$$

y

$$\begin{aligned} f &\sim r^\sigma && \text{con } 0 < \sigma < 1 \\ \vec{v} &\sim \beta_0 \vec{i} + \vec{c}(\theta) r^{\sigma-1} && \text{con } 0 < \sigma < 1 \end{aligned}$$

cuando $r \rightarrow \infty$.

Nuestro objetivo ha sido el análisis de la estabilidad de dichas soluciones. En el orden más bajo, las pequeñas perturbaciones de las soluciones estacionarias satisfacen un sistema lineal de

estructura análoga al sistema no lineal (0.1)-(0.5). Dicho problema se puede reformular como la siguiente ecuación de evolución integrodiferencial para $f(r, t)$:

$$f_t = -\frac{\sigma}{2\pi} V.P. \int_0^\infty d\xi \cdot f_r(\xi, t) \left(\frac{r}{\xi}\right)^{\frac{1}{2}+n} \frac{1}{r-\xi} + \beta_0 f_r \quad (0.10)$$

con $n = 0$ si $\beta_0 \leq 0$ y $n = 1$ si $\beta_0 > 0$.

En la primera parte del Capítulo 1 se desarrolla una teoría de semigrupos de evolución para ecuaciones de este tipo empleando algunas herramientas clásicas de análisis como las técnicas de Wiener-Hopf y se demuestra la contractividad de dichos semigrupos en espacios funcionales adecuados cuyas propiedades se han estudiado en detalle. El resultado principal es la existencia de soluciones de (0.10) para clases amplias de datos iniciales $f(r, 0) = f_0(r)$ y que tales soluciones tienen comportamientos asintóticos idénticos a los de las soluciones estacionarias dados en (0.9). También hemos demostrado que en el caso $\beta_0 = 0$ hay datos iniciales $f_0(r)$ tales que $f_0'(0) = 0$ y para los cuales

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial f(r, t)}{\partial r} \neq 0$$

en tiempos próximos a $t = 0$. Esto implica la formación de un ángulo de contacto variable entre fluido y substrato aunque el ángulo de contacto inicial sea π .

En la segunda parte del capítulo se demuestra un resultado de existencia y unicidad de soluciones globales del problema no lineal completo. El procedimiento de demostración se divide en dos partes. En primer lugar resolvemos el problema de Stokes con condiciones de contorno mixtas para un dominio dado y determinamos el campo de velocidades mediante un punto fijo. En segundo lugar tomamos el campo de velocidades hallado anteriormente, determinamos su valor en la frontera del dominio y lo introducimos en la ecuación (0.5). Llegamos así a una ecuación integrodiferencial no lineal para $f(r, t)$ que resolvemos mediante un nuevo punto fijo.

En los siguientes dos capítulos de la tesis se estudia la ruptura de tubos fluidos debida a las fuerzas de tensión superficial y en ausencia de interacción del fluido con paredes externas (es decir, $\Sigma_0 = \emptyset$). La experiencia cotidiana demuestra que en numerosas circunstancias el dominio $\Omega(t)$ ocupado por un fluido cambia su topología. Más concretamente, el dominio $\Omega(t)$ inicialmente simplemente conexo puede evolucionar a un dominio múltiplemente conexo. El interés por esta cuestión es antiguo y lo podemos remontar a las observaciones experimentales de Savart (ver [50]) y a los trabajos de Plateau (ver [44]) y sobre todo de Rayleigh (ver [47]). Nosotros nos restringiremos al estudio del caso en el que los dominios $\Omega(t)$ son siempre axisimétricos.

En el Capítulo segundo supondremos que $\Omega(t)$ es un tubo deformado extremadamente fino y que se extiende hasta el infinito. Cuando un cierto parámetro adimensional que mide esencialmente el espesor del tubo frente a sus dimensiones longitudinales es pequeño, es posible deducir a partir de (0.1), (0.2), (0.4) y (0.5) mediante un análisis perturbativo, el siguiente sistema aproximado

$$v_t + vv_z = \frac{h_z}{h^2} + \mu \frac{1}{h^2} \left(h^2 v_z \right)_z \quad (0.11)$$

$$h_t + vh_z = -\frac{1}{2} v_z h \quad (0.12)$$

donde se supone que el eje z es el eje de simetría, $h(z, t)$ representa la distancia de la frontera libre al eje de simetría y $v(z, t)$ es la componente en la dirección z de la velocidad (independiente de r). La ventaja de este problema aproximado frente a (0.1), (0.2), (0.4), (0.5), es que ya no

es un problema de frontera libre, sino un sistema no lineal de ecuaciones en derivadas parciales. Bajo estas hipótesis, se puede deducir mediante la ecuación de continuidad que la componente radial de la velocidad se halla a partir de $v(z, t)$ mediante la fórmula

$$v_r(r, z, t) = -\frac{r}{2} \frac{\partial v(z, t)}{\partial z}$$

El sistema (0.11), (0.12) se debe complementar con los datos iniciales

$$\begin{aligned} h(z, 0) &= h_0(z) \\ v(z, 0) &= v_0(z) \end{aligned} \quad (0.13)$$

Una descripción detallada de la deducción del sistema (0.11), (0.12) se proporciona en el Capítulo 2.

El sistema (0.11), (0.12) es conocido desde hace tiempo. Podemos citar por ejemplo el trabajo de J. B. Keller y L. Ting (ver [55]) en el caso $\mu = 0$ (fluido perfecto) y los trabajos de J. Eggers y T. Dupont en el caso general (ver [12], [13], [14]). La ruptura del dominio fluido equivale a la anulación de $h(z, t)$ en algún (z_0, t_0) para las soluciones del sistema (0.11), (0.12). El sistema (0.11), (0.12) se denomina habitualmente en la literatura sistema unidimensional.

Nosotros hemos introducido una formulación equivalente del sistema (0.11), (0.12) gracias a la cual es posible encontrar una gran cantidad de soluciones explícitas en los límites asintóticos $\mu \rightarrow 0$ y $\mu \rightarrow \infty$ y demostrar algunos teoremas de existencia y unicidad. Más concretamente, el sistema (0.11) y (0.12) es equivalente a la siguiente ecuación en derivadas parciales no lineal:

$$\begin{aligned} u_{tt} - \left(u^{-1/2}\right)_{ss} + \mu \left(u^{-1}\right)_{sst} &= 0 \\ u(s, 0) &= u_0(s) \\ u_t(s, 0) &= u_1(s) \end{aligned} \quad (0.14)$$

siendo $u(s, t)$ una función relacionada con $h(z, t)$ y tal que si $h(z, t)$ se anula en algún punto (z_0, t_0) entonces $u(s, t)$ explota en algún (s_0, t_0) .

Tras analizar algunas cuestiones sencillas de existencia y unicidad de soluciones locales en tiempo para el problema (0.14), y por tanto del sistema (0.11), (0.12) con datos iniciales (0.13), pasamos a los resultados esenciales contenidos en el Capítulo 2 que consisten en la descripción de diversos mecanismos de formación de singularidades para las soluciones del problema (0.14) en los límites asintóticos $\mu = 0$ y $\mu = \infty$ que corresponden respectivamente a viscosidad despreciable y dominante.

El límite $\mu = 0$ introducido por [55] equivale a una ecuación elíptica cuasilineal. Este tipo de ecuaciones se pueden llevar a ecuaciones lineales mediante la llamada transformación hodógrafa. De este modo el problema de evolución se convierte en un problema de Cauchy para una ecuación en derivadas parciales lineal y elíptica en un plano con datos prescritos sobre una curva que depende de los datos iniciales del problema (0.14). Este enfoque nos permite encontrar amplias familias de soluciones que dan lugar a ruptura de tubos fluidos. Los resultados hallados son esencialmente los siguientes:

En el caso $\mu = 0$ existe una familia de soluciones $(h(z, t), v(z, t))$ de (0.11), (0.12) que entre otras contiene:

- Una familia de soluciones autosimilares de (0.11), (0.12). El perfil final de la frontera libre asociada a dichas soluciones es de la forma

$$h(z, t_0) \sim A_{\pm} |z|^{\alpha} \quad , \text{ cuando } z \rightarrow 0^{\pm}$$

con $\alpha \in (0, +\infty)$.

- Soluciones tales que

$$\begin{aligned} h(z, t) &\rightarrow 1 && \text{cuando } |z| \rightarrow \infty \\ v(z, t) &\rightarrow 0 && \text{cuando } |z| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

para todo valor de $t < t_0$, que dan lugar a ruptura del tubo fluido en tiempo finito y que en dicho tiempo presentan un perfil de la forma

$$h(z, t_0) \underset{z \rightarrow 0^\pm}{\sim} A_\pm |z|^\alpha, \text{ cuando } z \rightarrow 0^\pm$$

donde α es un valor que puede escogerse arbitrariamente en el intervalo $\alpha \in [1, +\infty)$.

En el Capítulo 2 se demostrará también que el mecanismo de ruptura mencionado en segundo lugar es en cierto sentido inestable. En efecto, si denotamos como $(h(z, t), v(z, t))$ una de las soluciones mencionadas en el segundo punto, es posible construir con las mismas técnicas y para todo $\varepsilon > 0$ otra solución explícita $(\tilde{h}(z, t), \tilde{v}(z, t))$ tal que:

$$\sup_{z \in \mathbb{R}} \left(|h(z, 0) - \tilde{h}(z, 0)| + |v(z, 0) - \tilde{v}(z, 0)| \right) < \varepsilon \quad (0.15)$$

y

$$h(z, t) \underset{z \rightarrow 0^\pm, t \rightarrow \tilde{t}_0}{\sim} A_\pm |z|^{\tilde{\alpha}}$$

donde $\tilde{\alpha} > \alpha$. Más aún, $\tilde{\alpha}$ se puede seleccionar con cualquier valor arbitrario tal que $\tilde{\alpha} > \alpha$. Nótese que el nuevo perfil resultante es más plano que el inicial.

El límite de viscosidad elevada (es decir $\mu = \infty$) da lugar a una ecuación que se integra de forma explícita para todo dato inicial. Esto revela la existencia de un mecanismo nuevo muy diferente de los hallados para el caso de viscosidad despreciable ($\mu = 0$). En concreto, demostramos la formación de tubos largos e infinitamente finos previos a la ruptura. De forma más precisa, cuando tiene lugar la ruptura de tubos fluidos finos de longitud infinita se produce un estrechamiento de la región ocupada por el fluido de forma que su sección transversal antes de la ruptura se comporta asintóticamente como

$$S \sim (t_0 - t)^{\frac{1}{2}}$$

Dicho estrechamiento tiene lugar en una región cuya longitud crece indefinidamente y es de orden

$$L \sim (t_0 - t)^{-\frac{1}{2}}$$

Se concluye el capítulo segundo estudiando el límite asintótico unidimensional para un fluido sin tensión superficial. El resultado principal es la imposibilidad de que tenga lugar ruptura en tiempo finito en ausencia de este tipo de fuerzas, lo que es físicamente esperable al ser la tensión superficial el mecanismo esencial que genera la ruptura del tubo fluido.

En el capítulo tercero abordamos el estudio, mediante técnicas asintóticas formales, de los posibles mecanismos de ruptura de configuraciones axisimétricas de un fluido de Stokes. Enfocamos la cuestión de manera local siguiendo las técnicas empleadas recientemente en la resolución de numerosos problemas de formación de singularidades (ver por ejemplo [25] y [57]). El mecanismo descrito consta de dos partes, que son:

- Una región interior en la que el dominio es una perturbación de un cilindro que se cierra
- Una región más externa que determina alguna de las constantes arbitrarias que aparecían en la región interna mediante un problema de autovalores no lineal (esta situación se denomina habitualmente en la literatura similaridad de segundo orden, ver [4]).

Nosotros hemos hallado una familia de mecanismos, siendo el más estable uno cuyo perfil final en el tiempo de ruptura y cerca del punto de ruptura es de la forma

$$h(z, t_0) \sim C |z - z_0|^{5.7208} \quad \text{cuando } z \rightarrow z_0$$

donde $t = t_0$ es el tiempo en el que tiene lugar la ruptura del tubo fluido.

La tesis concluye con un Apéndice en el que estudiamos la relación de dispersión para la ecuación de evolución de las pequeñas perturbaciones axisimétricas de una distribución cilíndrica de fluido de Navier-Stokes y deducimos la existencia de una única rama de inestabilidad. Este hecho fue analizado por Lord Rayleigh en el caso de un fluido perfecto (ver [47]) y es a menudo referido en la literatura para el caso de un fluido viscoso. No es fácil encontrar sin embargo un estudio de las distintas ramas de la relación de dispersión en este último caso. Como la inestabilidad asociada a dicha relación de dispersión es la causa esencial por la que se produce la ruptura espontánea de tubos fluidos, se ha dedicado un Apéndice al análisis detallado de la misma.

Existen diversos problemas que es natural plantearse a partir de los resultados obtenidos en esta tesis. Mencionamos algunos de los más significativos:

- En el Capítulo 2 se describe una gran cantidad de mecanismos diferentes de generación de singularidades para el sistema (0.14) en el límite $\mu = 0$. Es previsible que algunos tengan más estabilidad que otros. Sería interesante tratar de estudiar en detalle qué comportamientos aparecen o son seleccionados cuando se mantienen términos tales como la viscosidad en las ecuaciones.

- Tanto en la deducción de los modelos estudiados en el Capítulo 2 como en el estudio de una de las escalas del problema en el Capítulo 3 se ha empleado un método asintótico usual en la literatura cuando se estudia la dinámica de tubos finos. Dicho límite es singular y sería interesante realizar un estudio matemático más detallado del mismo.

- En el Capítulo 3 el estudio se ha centrado en los fluidos de Stokes. Si las ecuaciones de evolución del fluido se reemplazan por las ecuaciones de Navier-Stokes el análisis es más complicado. Sería interesante averiguar si existen soluciones que den lugar a ruptura de tubos fluidos con mecanismos parecidos a los obtenidos para el flujo de Stokes en dicho capítulo.

Capítulo 1

Un problema de frontera libre para el sistema de Stokes con líneas de contacto

1.1 Introducción

El objetivo de este capítulo es el estudio de un problema de frontera libre para el sistema de Stokes en dimensión dos, y en presencia de puntos de contacto entre la frontera libre y un substrato que se mueve con velocidad constante β_0 . El problema que consideramos es el siguiente:

$$-\nabla p + \Delta \vec{v} = 0 \quad \text{en } \Omega(t) \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{en } \Omega(t) \quad (1.2)$$

El borde de $\Omega(t)$ consta de dos curvas Γ_1, Γ_0 . La curva Γ_1 es una frontera libre que evoluciona en el tiempo y sobre la que impondremos las condiciones de contorno usuales para las fronteras libres en flujos de Stokes. La curva Γ_0 es un substrato sólido y sobre ella impondremos la condición de no deslizamiento.

$$T_{ij}n_j = -\sigma H n_i \quad \text{en } \Gamma_1 = \text{frontera libre} \quad (1.3)$$

$$\vec{v} = \beta_0 \vec{i} \quad \text{en } \Gamma_0 = \text{substrato} \quad (1.4)$$

donde

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.5)$$

es el tensor de esfuerzos para un fluido de Stokes, $\Omega(t)$ es la región ocupada por el fluido, n_i son las coordenadas cartesianas del vector normal, σ es el coeficiente de tensión superficial, H es la curvatura media de la frontera libre y mediante una elección apropiada de unidades de longitud podemos considerar el coeficiente de viscosidad igual a la unidad.

Si la frontera libre esta dada mediante $y = f(x, t)$, la curvatura media es entonces

$$H = \frac{d}{dx} \frac{f_x}{(1 + f_x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (1.6)$$

Supongamos que la frontera libre viene dada en forma implícita mediante $\bar{f}(x, y, t) = y - f(x, t) = 0$, entonces la ecuación de evolución para la misma es

$$\frac{D\bar{f}}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f = 0 \quad (1.7)$$

Esto equivale a decir que las partículas de la frontera se mueven siguiendo el campo de velocidades, es decir

$$V_N = \vec{v} \cdot \vec{n} \quad (1.8)$$

donde V_N es la velocidad de la frontera libre en la dirección normal.

Si tomamos la siguiente parametrización para Γ_1 :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ f(x, t) \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

el vector normal que está dirigido hacia el exterior del dominio es

$$\vec{n} = \frac{1}{(1 + f_x^2)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} f_x \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

La velocidad en un punto de la frontera es

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_t \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

y

$$V_N = \begin{pmatrix} n_x & n_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f_t \end{pmatrix} = -f_t \cdot \frac{1}{(1 + f_x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (1.12)$$

La ecuación de evolución de la frontera se puede escribir entonces en la forma

$$f_t = v_y - v_x f_x \quad (1.13)$$

En [17], [18], [46], se describieron varias soluciones estacionarias del sistema (1.1)-(1.8) para las cuales la frontera libre es tangente al substrato en γ_0 . El comportamiento asintótico de estas soluciones, expresado en coordenadas polares, es el siguiente:

$$\begin{aligned} \vec{v} &\sim \beta_0 \vec{i} + \vec{a}(\theta)r^{1-\rho} & \text{si } \beta_0 > 0 \\ \vec{v} &\sim \beta_0 \vec{i} + \vec{b}(\theta)r^{|\rho|} & \text{si } \beta_0 < 0 \end{aligned}$$

donde β_0 es la velocidad de la pared con respecto al fluido (ver (1.4)), y

$$\begin{aligned} f &\sim r^{2-\rho} & \text{si } \beta_0 > 0 \\ f &\sim r^{1+|\rho|} & \text{si } \beta_0 < 0 \end{aligned}$$

cerca del origen, con

$$\rho = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{2\beta_0}{\sigma}\right)$$

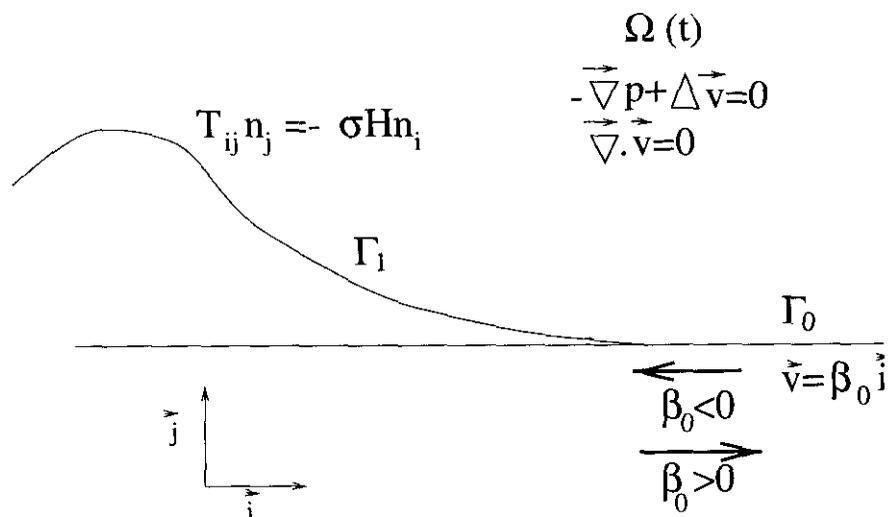


Figura 1.1: Representación del problema (1.1)-(1.8)

y

$$\begin{aligned} f &\sim r^\sigma \quad 0 < \sigma < 1 \\ \vec{v} &\sim \beta_0 \vec{i} + \vec{c}(\theta) r^{\sigma-1} \quad 0 < \sigma < 1 \end{aligned}$$

cuando $r \rightarrow \infty$.

Nótese en particular que la frontera libre para esta solución tiene un ángulo de contacto nulo con el sustrato horizontal. En este capítulo probaremos la existencia de soluciones del problema de evolución para pequeñas perturbaciones de la frontera libre plana ($f = 0$) y para las cuales el punto de contacto $\gamma_0 = \bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1$ permanece fijo. Además, veremos que el comportamiento asintótico cerca del origen es el mismo que en las soluciones estacionarias. De manera completamente análoga es posible probar un resultado idéntico para pequeñas perturbaciones de cualquier solución estacionaria (y pequeña) en la clase descrita arriba.

Tal y como acabamos de decir, el dato inicial que emplearemos será una pequeña perturbación (en un sentido que se precisará posteriormente) de la solución estacionaria plana:

$$f(x, 0) = \epsilon f_0(x)$$

donde hemos introducido un parámetro ϵ pequeño que mide el tamaño del dato inicial.

Supongamos que la solución es también pequeña y escribamos

$$f(x, t) = \epsilon \tilde{f}(x, t)$$

$$\vec{v} = \beta_0 \vec{i} + \epsilon \vec{v}$$

$$p = \epsilon \tilde{p}$$

$$\vec{n} = \frac{1}{(1 + \epsilon^2 \tilde{f}_x^2)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} \epsilon \tilde{f}_x \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + o(\epsilon)$$

$$\vec{t} = \frac{1}{(1 + \epsilon^2 \tilde{f}_x^2)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \epsilon \tilde{f}_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + o(\epsilon)$$

Dada la proximidad de la frontera libre a $(x < 0, y = 0)$ podemos aproximar el dominio variable mediante un dominio fijo $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ y las nuevas ecuaciones serán las de Stokes en las nuevas variables pero con términos no homogéneos de orden ϵ que ignoraremos en primera aproximación ($\epsilon \rightarrow 0$).

Las condiciones de contorno, ignorando términos cuadráticos y de orden superior (en ϵ) y omitiendo superíndices se convierten entonces en:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial y'} + \frac{\partial v_y}{\partial x'} &= 0 \quad \text{en } x < 0 \\ -p + 2\frac{\partial v_y}{\partial y'} &= -\frac{d}{dx} f_x \quad \text{en } x < 0 \end{aligned}$$

$$\vec{v} = 0 \quad \text{en } x > 0$$

donde la curvatura aproximada de Γ_1 es

$$H = \epsilon \frac{d}{dx} f_x$$

En este orden de aproximación la ecuación (1.13) se transforma en

$$\epsilon f_t = \epsilon v_y - \epsilon \beta_0 f_x$$

Si retenemos los términos de primer orden en ϵ , obtenemos el siguiente sistema lineal para \vec{v} , p y $f(x, t)$:

$$-\nabla p + \Delta \vec{v} = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \quad (1.14)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \quad (1.15)$$

$$T_{ij} n_j = -\sigma \frac{d^2 f(x, t)}{dx^2} n_i \quad \text{en } \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}^-\} \quad (1.16)$$

$$\vec{v} = 0 \quad \text{en } \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}^+\} \quad (1.17)$$

$$f_t = v_y - \beta_0 f_x \quad \text{en } \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}^-\} \quad (1.18)$$

donde $\vec{n} = (0, -1)$ es el vector normal linealizado en $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}^-\}$.

La primera parte del capítulo trata del análisis de este sistema y la segunda del problema no lineal completo (1.1)-(1.8).

En este capítulo se demuestra un Teorema de existencia y unicidad de soluciones globales en tiempo para el sistema no lineal (1.1)-(1.8) si los datos iniciales son pequeños. Una parte significativa del mismo se dedica al análisis del problema lineal (1.14)-(1.18). Una vez establecidas ciertas propiedades del sistema lineal, estudiamos el problema no lineal mediante un argumento de tipo perturbativo.

En la Sección 1.2 establecemos algunos resultados acerca del análisis funcional que necesitaremos en el análisis y deduciremos algunas propiedades de diversos operadores lineales que se usarán a lo largo del capítulo.

En la Sección 1.3 deducimos una fórmula para el campo de velocidades definido por (1.14), (1.15), (1.16) y (1.17) en términos de la frontera libre $f(x, t)$. Esto nos permitirá escribir (1.18) como una ecuación integrodiferencial para $f(x, t)$. Estudiamos además las soluciones estacionarias de este problema.

En la Sección 1.4 resolvemos la ecuación integrodiferencial usando el método clásico de Wiener-Hopf.

En la Sección 1.5 usamos la fórmula obtenida en la Sección 1.4 para deducir algunos comportamientos detallados de la frontera libre cerca del punto de contacto.

En la Sección 1.6 transformamos el problema no lineal completo en una Ecuación en Derivadas Parciales en un dominio fijo, lo cual hace el problema más simple para el análisis.

En la Sección 1.7 deducimos algunos resultados adicionales de análisis funcional que serán necesarios para probar la existencia y unicidad globales de soluciones para el problema de frontera libre.

En la Sección 1.8 mejoraremos los resultados de la Sección 1.3 con vistas a tratar el problema no lineal completo y finalmente, en la Sección 1.9, concluiremos la demostración del resultado principal de este capítulo: la existencia y unicidad de soluciones para el problema de frontera libre con datos iniciales pequeños mencionado anteriormente.

1.2 Notación y algunos resultados preliminares de análisis funcional

A lo largo del capítulo usaremos la siguiente notación para las distintas ramas de las potencias fraccionarias de un número complejo

$$(k)_+^\alpha = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (z)^\alpha \quad (1.19)$$

$$z = k + i\epsilon$$

$$(k)_-^\alpha = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (z)^\alpha \quad (1.20)$$

$$z = k - i\epsilon$$

$(-\pi \leq \arg(z) < \pi)$.

Introducimos la siguiente notación para la transformada de Fourier de una función f

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot e^{ikx} f(x) \quad (1.21)$$

así como para la transformada inversa

$$\overset{\vee}{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \cdot e^{-ikx} g(k) \quad (1.22)$$

El Teorema de Inversión de la transformada de Fourier establece entonces que

$$\left(\overset{\vee}{\widehat{f}} \right) = f$$

Introduzcamos el operador de proyección P_{\pm} definido por

$$P_+ f = \begin{cases} f & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

$$P_- f = \begin{cases} 0 & \text{para } x > 0 \\ f & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

para el cual la transformada de Fourier está dada por (ver [26])

$$\widehat{P_{\pm} f} = (\widehat{f})_{\pm} = \frac{1}{2}(I \pm iH)\widehat{f} = \frac{\widehat{f}(k)}{2} \pm \frac{i}{2\pi} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{\widehat{f}(\xi)}{k - \xi} \quad (1.23)$$

Recordamos el teorema clásico de Paley-Wiener (ver [40] y [48]) según el cual la función $\widehat{P_+ f}$ admite una extensión analítica al semiplano complejo $\{\text{Im}(z) > 0\}$ y $\widehat{P_- f}$ admite una extensión analítica al semiplano complejo $\{\text{Im}(z) < 0\}$. Para evitar confusión, hacemos notar que algunas veces usaremos los operadores P_{\pm} actuando sobre funciones que son transformadas de Fourier, es decir

$$(P_+ \widehat{f})(k) = \begin{cases} \widehat{f} & \text{para } k > 0 \\ 0 & \text{para } k < 0 \end{cases}$$

$$(P_- \widehat{f})(k) = \begin{cases} 0 & \text{para } k > 0 \\ \widehat{f} & \text{para } k < 0 \end{cases}$$

Entonces las correspondientes transformadas de Fourier inversas $\overset{\vee}{P_+ \widehat{f}}$ y $\overset{\vee}{P_- \widehat{f}}$ son analíticas en $\{\text{Im}(z) < 0\}$ y $\{\text{Im}(z) > 0\}$ respectivamente.

En general, dada una función f tal que $f(x) = 0$ para $x < 0$, su transformada de Fourier $\widehat{f}(k)$ es analítica para $\text{Im}(k) > 0$. Además, un cálculo directo usando (1.21) y (1.22) muestra que en este caso se tiene que

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{\widehat{f}(\lambda)}{\lambda - k} \quad (1.24)$$

para $\text{Im}(k) > 0$.

Recordamos que el espacio de Hilbert $L^2([0, \infty), u^{2\alpha})$ se define como el conjunto de funciones $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\int_0^{\infty} |f(u)|^2 u^{2\alpha} du < \infty$$

con su producto escalar natural.

Dada una función $f \in L^2([0, \infty), u^{2\alpha})$ definimos su α -transformada de Mellin por

$$\tilde{f}^\alpha(\lambda) = \int_0^\infty f(u) u^{i\lambda + \alpha - \frac{1}{2}} du \quad (1.25)$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

La correspondiente fórmula de inversión para la transformada de Mellin se escribe como

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \tilde{f}^\alpha(\lambda) u^{-i\lambda - \alpha - \frac{1}{2}} d\lambda \quad (1.26)$$

Se verifica la siguiente fórmula de Parseval (ver [26])

$$\int_0^\infty |f(u)|^2 u^{2\alpha} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |\tilde{f}^\alpha(\lambda)|^2 d\lambda$$

Usaremos la siguiente fórmula que relaciona la transformada de Mellin de una función $f \in C_c^\infty$ y la de su derivada

$$\tilde{f}_x^\alpha = - \left(i\lambda - \frac{1}{2} + \alpha \right) \tilde{f}^{\alpha-1} \quad (1.27)$$

que se puede obtener mediante integración por partes de (1.25), así como la siguiente propiedad elemental para cualquier $f \in L^2([0, \infty), u^{2\alpha})$ que se deduce a partir de la definición (1.25):

$$\widetilde{uf(u)}^{\alpha-1} = \widetilde{f(u)}^\alpha \quad (1.28)$$

Es bien conocido que los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ y $\overset{\circ}{H}^s(\mathbb{R})$ se pueden definir a través de la transformada de Fourier como el conjunto de funciones tales que

$$\|f\|_s = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dk (1 + |k|^{2s}) |\hat{f}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

$$\|f\|_s^\circ = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dk |k|^{2s} |\hat{f}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

respectivamente.

Usaremos repetidamente a lo largo del capítulo la familia de espacios de Hilbert $Z_{s,\nu}^+$ donde $s \in \mathbb{R}$ y $\nu > 0$ que se definen como el conjunto de funciones $f \in L^2([0, \infty), u^{-2s})$ tales que

$$\|f\|_{Z_{s,\nu}^+}^2 = \int_{-\infty}^\infty d\lambda \cdot (1 + |\lambda|)^{2\nu} |\tilde{f}^{-s}|^2 < \infty \quad (1.29)$$

Estos espacios aparecen de manera natural ya que son capaces de controlar simultáneamente el comportamiento asintótico y la regularidad de una función f cuyo soporte está contenido en el semieje real positivo.

Nótese que una consecuencia inmediata de la definición (1.29) es

$$Z_{s,\nu_1}^+ \subset Z_{s,\nu_2}^+ \quad \text{para } \nu_1 > \nu_2$$

Se puede ver, usando la fórmula de Parseval para las transformadas de Mellin y Fourier, que la transformación

$$g(u) = f(e^u) e^{(\frac{1}{2}-s)u} \quad u \in \mathbb{R} \quad (1.30)$$

define una isometría entre los espacios $Z_{s,\nu}^+$ y $H^\nu(\mathbb{R})$. Observemos que una consecuencia inmediata es la densidad de $C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$ en $Z_{s,\nu}^+$.

Será bastante útil en lo que sigue la siguiente caracterización de la norma en $Z_{s,\nu}^+$:

Proposición 1.1 Sea $s > -\frac{1}{2}$ y $s \neq \frac{2n+1}{2}$ con $n = 0, 1, 2, \dots$. Dada $f \in Z_{s,\nu}^+$, definimos $h_+(k) = P_+ \widehat{f}$ y $h_-(-k) = P_- \widehat{f}$ donde f se extiende como cero al semieje real negativo. Sea $A(f)$ el siguiente funcional:

$$A(f) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \cdot (1 + |\lambda|)^{2\nu-2s} \left(\left| \widetilde{h_+(k)}^s \right|^2 + \left| \widetilde{h_-(-k)}^s \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

donde $\widetilde{h_+(k)}^s$ y $\widetilde{h_-(-k)}^s$ son las transformadas de Mellin de h_+ y h_- como en (1.25).

Entonces se satisfacen las siguiente desigualdades

$$C_1 \|f\|_{Z_{s,\nu}^+} \leq A(f) \leq C_2 \|f\|_{Z_{s,\nu}^+} \quad (1.31)$$

Demostración. Es suficiente con probar las desigualdades para $f \in C_c^\infty$ por densidad. Supongamos primero que $-\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2}$.

Nótese que por (1.25) y por la definición de h_+

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \cdot (1 + |\lambda|)^{2\nu-2s} \left| \widetilde{h_+(k)}^s \right|^2 = \quad (1.32)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \cdot (1 + |\lambda|)^{2\nu-2s} \left| \int_0^{\infty} dk \cdot k^{i\lambda-\frac{1}{2}+s} \int_0^{\infty} dx \cdot e^{ikx} f(x) \right|^2 \equiv I \quad (1.33)$$

Como $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$, $\widehat{f}(k)$ es una función regular que decae más rápido que cualquier potencia de k para $|k| \geq 1$ la función

$$J(\lambda) = \int_0^{\infty} dk \cdot k^{i\lambda-\frac{1}{2}+s} \int_0^{\infty} dx \cdot e^{ikx} f(x)$$

está bien definida para cualquier valor real de λ . Tenemos entonces que

$$J(\lambda) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R dk \cdot k^{i\lambda-\frac{1}{2}+s} \int_0^{\infty} dx \cdot e^{ikx} f(x) = \int_0^{\infty} dx \cdot x^{-i\lambda-\frac{1}{2}-s} f(x) \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{Rx} du \cdot e^{iu} (u)^{i\lambda-\frac{1}{2}+s} \quad (1.34)$$

donde hemos usado el teorema de Fubini, luego el cambio de variables $kx \rightarrow u$ en la integral en k y finalmente el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

Nótese que la función $u^{i\lambda-\frac{1}{2}+s} e^{iu}$ es analítica en $\text{Im}(u) > 0$ y que podemos deformar el contorno en u hacia el contorno $u = ir$. Por tanto

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_0^\eta du \cdot u^{i\lambda-\frac{1}{2}+s} e^{iu} = e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{2}s} e^{-\frac{\pi}{2}\lambda} \Gamma(i\lambda + \frac{1}{2} + s) \quad (1.35)$$

Usando (1.32), (1.34) y (1.35) obtenemos entonces:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \cdot e^{-\pi\lambda} (1 + |\lambda|)^{2\nu-2s} \left| \Gamma(i\lambda + \frac{1}{2} + s) \right|^2 \left| \widetilde{f}^{-s} \right|^2 \quad (1.36)$$

Un cálculo análogo lleva a

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \cdot (1 + |\lambda|)^{2\nu-2s} \left| \widetilde{h_-(-k)}^s \right|^2 = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \cdot (1 + |\lambda|)^{2\nu-2s} e^{\pi\lambda} \left| \Gamma(i\lambda + \frac{1}{2} + s) \right|^2 \left| \widetilde{f}^{-s} \right|^2 \end{aligned} \quad (1.37)$$

y de (1.36) y (1.37) se deduce que

$$A(f)^2 = 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \cdot (1 + |\lambda|)^{2\nu-2s} \cosh(\lambda\pi) \left| \Gamma(i\lambda + \frac{1}{2} + s) \right|^2 |\tilde{f}^{-s}| \quad (1.38)$$

Falta por estimar $\left| \Gamma(i\lambda + \frac{1}{2} + s) \right|^2$:

Usando el hecho de que la función Gamma $\Gamma(z)$ no se anula para ningún z complejo, así como la fórmula de Stirling para valores grandes de $|z|$ se obtiene que para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{C_1 (1 + |\lambda|)^{2\nu}}{\cosh(\lambda\pi)} \leq (1 + |\lambda|)^{2\nu-2s} \left| \Gamma(i\lambda + \frac{1}{2} + s) \right|^2 \leq \frac{C_2 (1 + |\lambda|)^{2\nu}}{\cosh(\lambda\pi)} \quad (1.39)$$

Usando (1.39) en (1.38) deducimos finalmente (1.31).

Si $\frac{1}{2} < s < \frac{3}{2}$ obtenemos mediante (1.27), (1.28) y (1.29) que

$$\frac{1}{C} \|f_x\|_{Z_{s-1, \nu-1}^+}^2 \leq \|f\|_{Z_{s, \nu}^+}^2 \leq C \|f_x\|_{Z_{s-1, \nu-1}^+}^2 \quad (1.40)$$

donde $C > 1$. Teniendo en cuenta la siguiente identidad para la transformada de Fourier

$$\widehat{f_x} = -ik\widehat{f}$$

concluimos que

$$\frac{1}{C} \|f_x\|_{Z_{s-1, \nu-1}^+}^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \cdot (1 + |\lambda|)^{2\nu-2s} \left(\left| \widetilde{kh_+(k)}^{s-1} \right|^2 + \left| \widetilde{kh_-(-k)}^{s-1} \right|^2 \right) \leq C \|f_x\|_{Z_{s-1, \nu-1}^+}^2 \quad (1.41)$$

y por tanto, usando (1.28), (1.40) y (1.41), (1.31) se verifica para $\frac{1}{2} < s < \frac{3}{2}$. Una aplicación reiterada del argumento muestra que (1.31) es cierta para todo $s \neq \frac{2n+1}{2}$, $s > -\frac{1}{2}$. \square

El siguiente paso será el estudio de las propiedades de algunos operadores lineales que usaremos a lo largo del capítulo.

Lema 1.1 Consideremos el siguiente operador lineal actuando sobre funciones $f \in C_c^\infty$

$$Af(r) = r^\alpha V.P. \int_0^\infty \frac{1}{\xi^\alpha} \frac{f(\xi) d\xi}{r - \xi} \quad (1.42)$$

$\alpha \in \mathbb{R}$. Asumamos que $s \neq \alpha$ y $-\frac{1}{2} + \alpha < s < \frac{1}{2} + \alpha$. Entonces se verifican las siguientes desigualdades

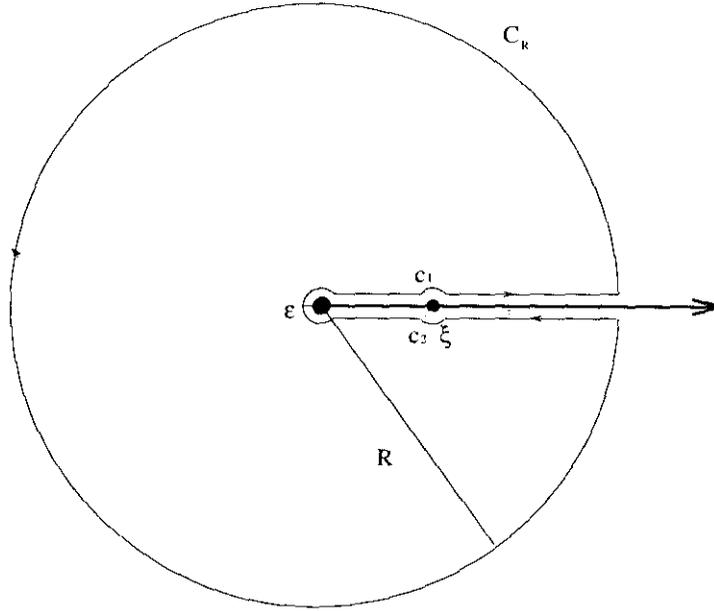
$$\frac{1}{C} \|f\|_{Z_{s, \nu}^+} \leq \|Af\|_{Z_{s, \nu}^+} \leq C \|f\|_{Z_{s, \nu}^+} \quad (1.43)$$

donde C es una constante positiva que depende de s y α .

Además, el operador A se puede extender de manera única a un operador acotado de $Z_{s, \nu}^+$ a $Z_{s, \nu}^+$ y (1.43) se verifica para todo $f \in Z_{s, \nu}^+$.

Demostración. Dada una función $f \in C_c^\infty(0, +\infty)$ multiplicamos (1.42) por $r^{i\lambda - \frac{1}{2} - s}$ e integramos desde 0 hasta ∞ . Después de cambiar el orden de integración (lo cual es posible dadas las propiedades de regularidad de la función f) obtenemos

$$\widetilde{Af}^{-s} = \int_0^\infty \frac{1}{\xi^\alpha} f(\xi) G(\xi, \lambda) d\xi \quad (1.44)$$

Figura 1.2: El contorno Γ del Lema 1.1

donde $G(\xi, \lambda) = V.P. \int_0^\infty r^{i\lambda - \frac{1}{2} - s + \alpha} \frac{1}{r - \xi} dr$ se puede calcular fácilmente mediante integración de la función $z^{i\lambda - \frac{1}{2} - s + \alpha} \frac{1}{z - \xi}$ a lo largo del contorno Γ de la figura 1.2 y tomando los límites $\epsilon \rightarrow 0$ y $R \rightarrow \infty$ en este orden.

Resulta entonces que

$$G(\xi, \lambda) = \pi \cot \left((-i\lambda + \frac{1}{2} + s - \alpha)\pi \right) \xi^{i\lambda - \frac{1}{2} - s + \alpha} \quad (1.45)$$

Llevando esta fórmula a (1.44) obtendríamos

$$\widetilde{A}f^{-s} = \pi \cot \left((-i\lambda + \frac{1}{2} + s - \alpha)\pi \right) \tilde{f}^{-s}$$

Teniendo en cuenta la desigualdad

$$\frac{1}{C} \leq \left| \cot \left((-i\lambda + \frac{1}{2} + s - \alpha)\pi \right) \right| \leq C$$

que se satisface para cualquier valor real de λ (siempre que sea $\frac{1}{2} + s - \alpha \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) y (1.29), probamos (1.43) para cualquier $f \in C_c^\infty$.

Como C_c^∞ es denso en $Z_{s,\nu}^+$, (1.43) se puede extender a todo $Z_{s,\nu}^+$. \square

Lema 1.2 Consideremos el siguiente operador lineal actuando sobre funciones $f \in C_c^\infty$

$$Bf(r) = r^\alpha \int_0^\infty \frac{1}{\xi^\alpha} \frac{f(\xi) d\xi}{r + \xi} \quad (1.46)$$

$\alpha \in \mathbb{R}$. Asumamos que $-\frac{1}{2} + \alpha < s < \frac{1}{2} + \alpha$. Entonces se verifican las siguientes desigualdades:

$$\frac{1}{C} \|f\|_{Z_{s,\nu}^+} \leq \|Bf\|_{Z_{s,\nu}^+} \leq C \|f\|_{Z_{s,\nu}^+} \quad (1.47)$$

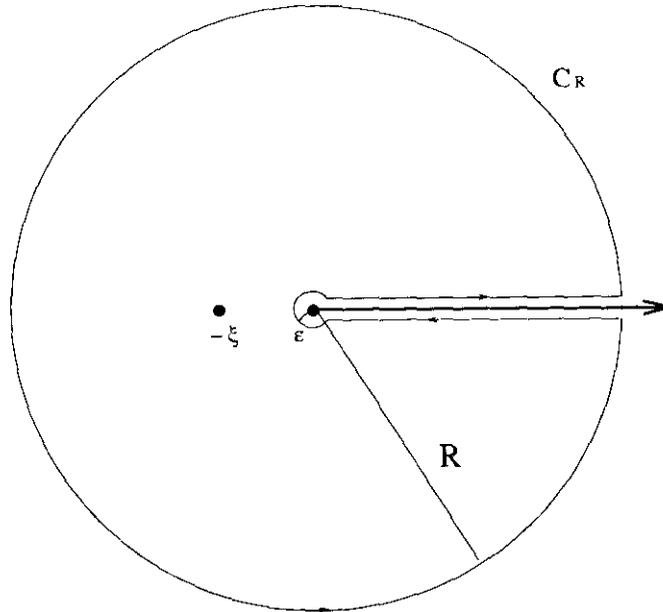


Figura 1.3: El contorno Γ del Lema 1.2

donde C es una constante positiva que depende de s y α .

Además, el operador B se puede extender de manera única a un operador acotado de $Z_{s,\nu}^+$ a $Z_{s,\nu}^+$ y (1.47) se verifica para todo $f \in Z_{s,\nu}^+$.

Demostración. Es similar a la demostración del Lema 1.1 pero ahora $G(\xi, \lambda)$ tiene la expresión

$$G(\xi, \lambda) = \int_0^\infty r^{i\lambda - \frac{1}{2} - s + \alpha} \frac{1}{r + \xi} dr$$

que se puede calcular integrando $z^{i\lambda - \frac{1}{2} - s + \alpha} \frac{1}{z + \xi}$ a lo largo del contorno Γ de la figura 1.3 y haciendo los límites $\epsilon \rightarrow 0$ y $R \rightarrow \infty$.

Obtenemos entonces

$$G(\xi, \lambda) = \frac{\pi}{\sin\left(\left(-i\lambda + \frac{1}{2} + s - \alpha\right)\pi\right)} \xi^{i\lambda - \frac{1}{2} - s + \alpha} \quad (1.48)$$

y usando el hecho de que, siempre que sea $\frac{1}{2} + s - \alpha \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ y para todo valor real de λ , se satisface la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{C} \leq \left| \frac{\pi}{\sin\left(\left(-i\lambda + \frac{1}{2} + s - \alpha\right)\pi\right)} \right| \leq C$$

donde C es una constante positiva que depende de s y α , así como (1.29), probamos (1.47). \square

Introducimos a continuación los siguientes operadores de derivación e integración fraccionarias que se definen a través de la transformada de Fourier como

$$\widehat{D^{\alpha} f} = (k)_+^{\alpha} \widehat{f} \quad (1.49)$$

donde $(k)_+^\alpha$ está definido en (1.19), y el operador $|D^\alpha|f$ definido mediante la transformada de Fourier como

$$\widehat{|D^\alpha|f} = |k|^\alpha \widehat{f}$$

Lema 1.3 El operador $C_+ = D^\alpha P_+ |D^{-\alpha}|$ que en su versión Fourier viene dado por

$$\widehat{C_+f} = (k)_+^\alpha (|\xi|^{-\alpha} \widehat{f}(\xi))_+ = \frac{1}{2} (k)_+^\alpha (I + iH)(|\xi|^{-\alpha} \widehat{f}(\xi))$$

es acotado de $Z_{s,\nu}^+$ a $Z_{s,\nu}^+$ ($-\frac{1}{2} - \alpha < s < \frac{1}{2} - \alpha$) donde f se extiende como cero para valores negativos del argumento.

Demostración. Nótese que por definición $\widehat{C_+f}$ es analítica en $\text{Im}(z) > 0$ y entonces se deduce que C_+f tiene su soporte en el semieje real positivo.

Usando el Lema 1.1 tenemos que

$$\begin{aligned} \|C_+f\|_{Z_{s,\nu}^+}^2 &\leq C \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda (1+|\lambda|)^{2\nu-2s} \left| \int_0^{\infty} dk \cdot k^{i\lambda-\frac{1}{2}+s+\alpha} (|\xi|^{-\alpha} \widehat{f})_+(k) \right|^2 + \\ &+ C \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda (1+|\lambda|)^{2\nu-2s} \left| \int_0^{\infty} dk \cdot k^{i\lambda-\frac{1}{2}+s+\alpha} (|\xi|^{-\alpha} \widehat{f})_+(-k) \right|^2 \equiv J_1 + J_2 \end{aligned}$$

Usando (1.23) podemos estimar J_1 como

$$\begin{aligned} J_1 &\leq C \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda (1+|\lambda|)^{2\nu-2s} \left| \int_0^{\infty} dk \cdot k^{i\lambda-\frac{1}{2}+s} \widehat{f}(k) \right|^2 + \\ &+ C \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda (1+|\lambda|)^{2\nu-2s} \left| \int_0^{\infty} dk \cdot k^{i\lambda-\frac{1}{2}+s+\alpha} H(|\xi|^{-\alpha} \widehat{f}) \right|^2 \equiv J_{11} + J_{12} \end{aligned} \quad (1.50)$$

Usando la definición de la transformada de Hilbert podemos escribir J_{12} como

$$\begin{aligned} J_{12} &= \\ &= C \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda (1+|\lambda|)^{2\nu-2s} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk \cdot k^{i\lambda-\frac{1}{2}+s+\alpha} \left(\int_0^{\infty} \frac{d\xi}{k+\xi} |\xi|^{-\alpha} \widehat{f}(-\xi) + \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{k-\xi} |\xi|^{-\alpha} \widehat{f}(\xi) \right) \right|^2 \end{aligned}$$

y por tanto, usando los lemas 1.1 y 1.2

$$J_{12} \leq C \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda (1+|\lambda|)^{2\nu-2s} \left(\left| \int_0^{\infty} dk \cdot k^{i\lambda-\frac{1}{2}+s} \widehat{f}(k) \right|^2 + \left| \int_0^{\infty} dk \cdot k^{i\lambda-\frac{1}{2}+s} \widehat{f}(-k) \right|^2 \right) \equiv I \quad (1.51)$$

Teniendo en cuenta (1.50) y (1.51) obtenemos que

$$J_1 \leq CI \quad (1.52)$$

Una estimación similar implica que

$$J_2 \leq CI \quad (1.53)$$

Finalmente, por el Lema 1.1 tenemos

$$I \leq C \|f\|_{Z_{s,\nu}^+}^2$$

que combinado con (1.52) y (1.53) completa la demostración. \square

Lema 1.4 Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $-\frac{1}{2} - \alpha < s < \frac{1}{2} - \alpha$. Sean A_+ y B funciones tales que

$$L_1 = \|A_+(e^t)\|_{H^{\nu-s}(\mathbb{R})} + \|A_+(-e^t)\|_{H^{\nu-s}(\mathbb{R})} < \infty \quad (1.54)$$

$$L_2 = \|B(e^t)\|_{H^{\nu-s}(\mathbb{R})} + \|B(-e^t)\|_{H^{\nu-s}(\mathbb{R})} < \infty \quad (1.55)$$

con $\nu - s > \frac{1}{2}$ y donde $H^{\nu-s}(\mathbb{R})$ son los espacios de Sobolev clásicos.

Los operadores de la forma $C_+ = A_+ D_x^\alpha (|D_x^{-\alpha}| B \cdot)_\pm$ definidos por

$$\widehat{C_+ f} = A_+(k) (k)_+^\alpha (|\xi|^{-\alpha} B(\xi) \widehat{f})_+ = \frac{1}{2} A_+(k) (k)_+^\alpha (I + iH)(|\xi|^{-\alpha} B(\xi) \widehat{f})$$

son acotados de $Z_{s,\nu}^+$ a $Z_{s,\nu}^+$.

Demostración. Sea $g(r) = \left(F^{-1}(A_+(k) (k)_+^\alpha (|\xi|^{-\alpha} B(\xi) \widehat{f}(\xi))_+) \right)(r)$ donde F^{-1} es la transformada de Fourier inversa. Argumentando como en el Lema 1.3 obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda (1 + |\lambda|^{2\nu}) |\tilde{g}^{-s}|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda (1 + |\lambda|^{2\nu}) \left| \int_0^{\infty} dr \cdot r^{i\lambda - \frac{1}{2} - s} \int_{-\infty}^{\infty} dk \cdot e^{-ikr} \widehat{g}(k) \right|^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda (1 + |\lambda|^{2\nu}) \left| \int_0^{\infty} dr \cdot r^{i\lambda - \frac{1}{2} - s} \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{\infty} \right) \right|^2 \leq \\ &\leq C \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda (1 + |\lambda|^{2\nu - 2s}) \left| \int_0^{\infty} dk \cdot k^{-i\lambda - \frac{1}{2} + s} A_+(k) |k|^\alpha (|\xi|^{-\alpha} B(\xi) \widehat{f})_+(k) \right|^2 + \\ &\quad + C \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda (1 + |\lambda|^{2\nu - 2s}) \left| \int_0^{\infty} dk \cdot k^{-i\lambda - \frac{1}{2} + s} A_+(-k) |k|^\alpha (|\xi|^{-\alpha} B(\xi) \widehat{f})_+(-k) \right|^2 \end{aligned}$$

Presentamos solamente el análisis del primer término. Si definimos ahora $k = e^t$ y recordamos la expresión para las transformadas de Fourier de las derivadas de una función, podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda (1 + |\lambda|^{2\nu - 2s}) \left| \int_0^{\infty} dk \cdot k^{-i\lambda - \frac{1}{2} + s + \alpha} A_+(k) (|\xi|^{-\alpha} B \widehat{f})_+(k) \right|^2 &= \\ = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda (1 + |\lambda|^{2\nu - 2s}) \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt \cdot e^{-i\lambda t} e^{(\frac{1}{2} + s + \alpha)t} A_+(e^t) (|\xi|^{-\alpha} B \widehat{f})_+(e^t) \right|^2 &\leq \\ \leq C \|A_+(e^t)\|_{H^{\nu-s}} \|e^{(\frac{1}{2} + s + \alpha)t} (|\xi|^{-\alpha} B \widehat{f})_+(e^t)\|_{H^{\nu-s}} &\leq CL_1 \|e^{(\frac{1}{2} + s + \alpha)t} (|\xi|^{-\alpha} B \widehat{f})_+(e^t)\|_{H^{\nu-s}} \end{aligned}$$

usando la siguiente "desigualdad de cálculo" que es a menudo referida en la literatura (ver por ejemplo [36]): si $u, v \in H^s(\mathbb{R})$, $s > \frac{1}{2}$ entonces $uv \in H^s(\mathbb{R})$ y

$$\|uv\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{H^s(\mathbb{R})} \|v\|_{H^s(\mathbb{R})} \quad (1.56)$$

La desigualdad (1.56) se demostrará posteriormente como una consecuencia de la Proposición 1.7 (ver Sección 1.7).

Esta desigualdad, junto con el Lema 1.3, nos permite escribir

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda (1 + |\lambda|^{2\nu - 2s}) \left| \int_0^{\infty} dk \cdot k^{-i\lambda - \frac{1}{2} + s + \alpha} (|\xi|^{-\alpha} B \widehat{f})_+(k) \right|^2 &= \|e^{(\frac{1}{2} + s + \alpha)t} (|\xi|^{-\alpha} B \widehat{f})_+(e^t)\|_{H^{\nu-s}}^2 \leq \\ &\leq C \|B(e^t)\|_{H^{\nu-s}}^2 \|e^{(\frac{1}{2} + s)t} \widehat{f}(e^t)\|_{H^{\nu-s}}^2 = C \|B(e^t)\|_{H^{\nu-s}}^2 \|f\|_{Z_{s,\nu}^+}^2 \leq CL_2 \|f\|_{Z_{s,\nu}^+}^2 \end{aligned}$$

y esto finaliza la demostración. La prueba para los restante casos es similar. \square

1.3 Reducción del problema de frontera libre linealizado a una ecuación integrodiferencial

El objetivo de esta Sección es calcular el campo de velocidades en el dominio ocupado por el fluido en función de la curvatura linealizada. En concreto, obtendremos \vec{v} en términos de $f(x)$ resolviendo el sistema (1.14),(1.15),(1.16) y (1.17).

Es conveniente introducir el sistema de coordenadas polares (r, θ) definido por

$$\begin{aligned}x &= r \cos(\theta) \\ y &= r \sin(\theta)\end{aligned}$$

Entonces las componentes de tensor de esfuerzos se escriben como

$$\begin{aligned}T_{rr} &= -p + 2\frac{\partial v_r}{\partial r} \\ T_{\theta\theta} &= -p + 2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_r}{r}\right) \\ T_{r\theta} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)\end{aligned}$$

Por otra parte, la ecuación (1.15) se escribe en coordenadas polares

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} = 0$$

Esto nos permite introducir la función de corriente ψ definida por

$$\begin{aligned}v_\theta &= -\frac{\partial\psi}{\partial r} \\ v_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\end{aligned}\tag{1.57}$$

Aplicando el operador rotacional a la ecuación (1.14) y teniendo en cuenta (1.57) llegamos a la siguiente ecuación equivalente

$$\Delta^2\psi = 0\tag{1.58}$$

La ecuación (1.16) es de carácter vectorial y se puede descomponer en las dos ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned}T_{r\theta} &= 0 \quad \text{en } \theta = \pi \\ T_{\theta\theta} &= -\sigma\frac{d^2f(x)}{dx^2} \quad \text{en } \theta = \pi\end{aligned}$$

En la segunda aparece un término de presión. La presión se puede eliminar derivando con respecto a r y usando (1.14) escrito en coordenadas polares. Más precisamente, la componente radial de (1.14) es

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} - \frac{v_r}{r^2}\right) = 0$$

Usando entonces (1.57) en las ecuaciones (1.16), (1.17) y escribiendo (1.58) en coordenadas polares, obtenemos

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \psi = 0 \quad \text{en } [0, +\infty] \times [0, \pi] \quad (1.59)$$

$$\psi = 0 \quad \text{en } \theta = 0 \quad (1.60)$$

$$\psi_\theta = 0 \quad \text{en } \theta = 0 \quad (1.61)$$

$$\psi_{rr} - \frac{1}{r^2} \psi_{\theta\theta} - \frac{1}{r} \psi_r = 0 \quad \text{en } \theta = \pi \quad (1.62)$$

$$-\frac{1}{r^2} \psi_{\theta\theta\theta} - \frac{3}{r} \psi_{rr\theta} + \frac{3}{r^2} \psi_{r\theta} - \frac{4}{r^3} \psi_\theta = -\sigma \frac{d^3}{dr^3} f(r) \quad \text{en } \theta = \pi \quad (1.63)$$

donde hemos escrito $f(r)$ en lugar de $f(x)$ y hemos tenido en cuenta que $\frac{d}{dx} = -\frac{d}{dr}$ en $\theta = \pi$

Nótese que en (1.60) hemos hecho una elección particular para una constante aditiva arbitraria de la función ψ .

Proposición 1.2 Sea $a \in \mathbb{R}$. Para toda $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$ existe una única función ψ solución del sistema (1.59), (1.60), (1.61), (1.62) y (1.63) y tal que

$$\int_0^\infty r^{2a+2i} \left| \frac{1}{r^j} \frac{\partial^{i-j}}{\partial r^{i-j} \partial \theta^j} \psi \right|^2 dr < \infty \quad \text{en } \theta = \pi \quad (1.64)$$

para $i=0,1,2,3,4$ y para $j \leq i$.

El valor de la función ψ_r en $\theta = \pi$ está dado por la fórmula

$$\psi_r(r, \pi) = -\frac{\sigma}{2\pi} (r)^{-\frac{3}{2}-[a]} \text{V.P.} \int_0^\infty \frac{f_r(\xi) d\xi}{(\xi)^{-\frac{3}{2}-[a]} (r-\xi)} \equiv T f \quad (1.65)$$

donde $[a]$ denota la parte entera de a , i.e. el mayor entero menor que a .

La transformada de Mellin de la función ψ en $\theta = \pi$ (ver (1.25)) se puede expresar en función de f como sigue:

$$\tilde{\psi}^a(\lambda, \pi) = \left(\frac{\sigma}{2(i\lambda + a + \frac{1}{2})} \tilde{f}_r^{a+1} \right) \tan \left((i\lambda + a + \frac{1}{2})\pi \right) \quad (1.66)$$

Demostración. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, multiplicamos las ecuaciones (1.59), (1.60), (1.61), (1.62) y (1.63) por $r^{i\lambda - \frac{1}{2} + a + 4}$, $r^{i\lambda - \frac{1}{2} + a}$, $r^{i\lambda - \frac{1}{2} + a}$, $r^{i\lambda - \frac{1}{2} + a + 2}$, $r^{i\lambda - \frac{1}{2} + a + 3}$ respectivamente, integramos en r desde 0 hasta infinito y después de realizar algunas integraciones por partes obtenemos

$$\left[\left(i\lambda + a + \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \left[\left(i\lambda + a + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \tilde{\psi}^a = 0 \quad (1.67)$$

$$\tilde{\psi}^a = 0 \quad \text{en } \theta = 0 \quad (1.68)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{\psi}^a = 0 \quad \text{en } \theta = 0 \quad (1.69)$$

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + (i\lambda - \frac{1}{2} + a + 3)(i\lambda - \frac{1}{2} + a + 1) \right] \tilde{\psi}^a = 0 \quad \text{en } \theta = \pi \quad (1.70)$$

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\partial^3}{\partial \theta^3} - (3(i\lambda - \frac{1}{2} + a + 3)(i\lambda - \frac{1}{2} + a + 1) + 4)\frac{\partial}{\partial \theta} \right] \tilde{\psi}^a = \\ & = -\sigma(i\lambda - \frac{1}{2} + a + 3)(i\lambda - \frac{1}{2} + a + 2)\tilde{f}_r^{a+1} \quad \text{en } \theta = \pi \end{aligned} \quad (1.71)$$

donde $\tilde{\psi}^a(\lambda, \theta)$ es la transformada de Mellin (ver (1.25)) de $\psi(r, \theta)$ con respecto a la variable r . Nótese que todas las manipulaciones son correctas en virtud de la hipótesis de regularidad (1.64).

La solución general de (1.67) es

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^a(\lambda, \theta) = & A \cos\left((i\lambda + a + \frac{1}{2})\theta\right) + B \sin\left((i\lambda + a + \frac{1}{2})\theta\right) \\ & + C \cos\left((i\lambda + a + \frac{5}{2})\theta\right) + D \sin\left((i\lambda + a + \frac{5}{2})\theta\right) \end{aligned} \quad (1.72)$$

para $-\infty < \lambda < +\infty, 0 \leq \theta \leq \pi$ donde A, B, C y D son funciones de λ que determinaremos mediante las condiciones de contorno (1.68),(1.69),(1.70) y (1.71).

Si denotamos

$$\begin{aligned} b &= i\lambda + \frac{1}{2} + a \\ s &= \sin\left((i\lambda + a + \frac{1}{2})\pi\right) \\ c &= \cos\left((i\lambda + a + \frac{1}{2})\pi\right) \\ \gamma &= 2b(b+1)(b+2) \end{aligned}$$

podemos escribir (1.68),(1.69),(1.70) y (1.71) usando (1.72) como

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & b+2 \\ bc & bs & (b+2)c & (b+2)s \\ \gamma s & -\gamma c & \gamma s & -\gamma c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sigma(b+1)(b+2)\tilde{f}_r^{a+1} \end{pmatrix}$$

para el cual la solución es

$$\begin{aligned} D &= -\frac{\sigma}{4c}\tilde{f}_r^{a+1} \\ B &= \frac{b+2}{b}\frac{\sigma}{4c}\tilde{f}_r^{a+1} \\ A &= C = 0 \end{aligned} \quad (1.73)$$

Nótese que, en particular, en $\theta = \pi$

$$\tilde{\psi}^a(\lambda, \pi) = \left(\frac{\sigma}{2b}\tilde{f}_r^{a+1}\right) \tan\left((i\lambda + a + \frac{1}{2})\pi\right)$$

que lleva a (1.66). Por otra parte, por (1.27), obtenemos

$$\tilde{\psi}_r^{a+1}(\lambda, \pi) = -\left(\frac{\sigma}{2}\tilde{f}_r^{a+1}\right) \tan\left((i\lambda + a + \frac{1}{2})\pi\right) \quad (1.74)$$

Usando la fórmula de inversión para la transformada de Mellin (1.26) se obtiene tras algunos cálculos sencillos

$$\psi_r(r, \pi) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{-1}{2\pi} \int_{-R}^R d\lambda \cdot r^{-i\lambda - \frac{3}{2} - a} \left(\frac{\sigma}{2}\tilde{f}_r^{a+1}\right) \tan\left((i\lambda + a + \frac{1}{2})\pi\right) =$$

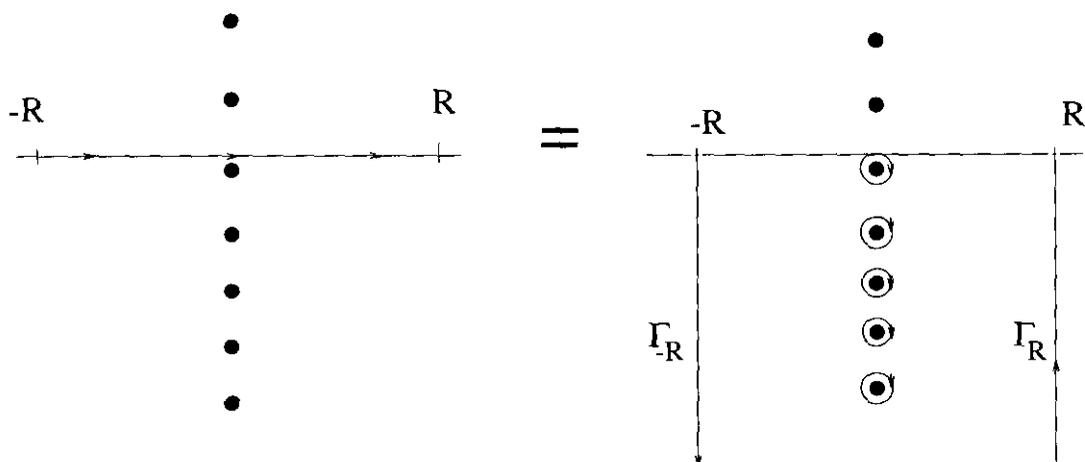


Figura 1.4: Deformación de contorno en el caso $u < 1$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{-1}{2\pi} \frac{\sigma}{2} \int_0^\infty d\xi \cdot f_r(\xi) \left(\frac{\xi}{r}\right)^{\frac{1}{2}+a} \frac{1}{r} J_{a,R} \left(\frac{\xi}{r}\right) \quad (1.75)$$

donde

$$J_{a,R}(u) = \int_{-R}^R d\lambda \cdot e^{i\lambda \log(u)} \tan\left(\left(i\lambda + a + \frac{1}{2}\right)\pi\right) \quad (1.76)$$

El integrando es claramente analítico en λ con la excepción de polos simples en los puntos

$$\lambda_n = i(a - n) \quad 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Si $u < 1$ escribimos $J_{a,R}(u)$ como

$$J_{a,R}(u) = \int_{\Gamma_R} + \int_{\Gamma_{-R}} + \int_{\text{Polos}} \equiv J_1 + J_2 + J_3$$

donde los contornos Γ_R y Γ_{-R} son como en la figura 1.4 y los polos en J_3 son tales que $\text{Im}(\lambda_n) < 0$.

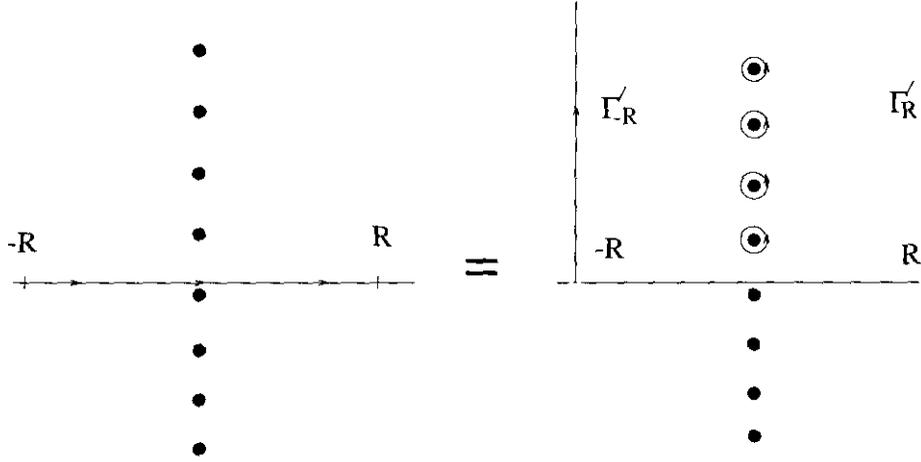
Evaluando J_3 mediante cálculo de residuos se obtiene

$$J_3 = 2 \sum_{j=0}^{\infty} e^{(-a+[a]+j+1)\log(u)} = 2(u)^{(-a+[a])} \frac{u}{1-u}$$

Por otra parte, el comportamiento asintótico de J_1 y J_2 cuando $R \rightarrow \infty$ nos da

$$J_1 = e^{iR \log(u)} \frac{1}{\log(u)} + O\left(\frac{e^{-2\pi R}}{|\log(u)|}\right)$$

$$J_2 = e^{-iR \log(u)} \frac{1}{\log(u)} + O\left(\frac{e^{-2\pi R}}{|\log(u)|}\right)$$

Figura 1.5: Deformación de contorno en el caso $u > 1$

En el caso $u > 1$ escribimos

$$J_{a,R}(u) = \int_{\Gamma_R} + \int_{\Gamma_{-R}} + \int_{\text{Polos}} \equiv J_1 + J_2 + J_3$$

donde los contornos Γ_R y Γ_{-R} son como en la figura 1.5 y los polos en J_3 son aquellos tales que $\text{Im}(\lambda_n) > 0$.

Cálculos similares a los del caso $u < 1$ llevan a

$$J_1 + J_2 = 2 \frac{\cos(R \log(u))}{\log(u)} + O\left(\frac{e^{-2\pi R}}{|\log(u)|}\right) \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty$$

$$J_3 = -2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{(-a+[a]-j) \log(u)} = 2 (u)^{(-a+[a])} \frac{u}{1-u}$$

Resumiendo, para todo $u \neq 1$ obtenemos

$$J_{a,R}(u) = 2 (u)^{(-a+[a])} \frac{u}{1-u} + 2 \frac{\cos(R \log(u))}{\log(u)} + O\left(\frac{e^{-2\pi R}}{|\log(u)|}\right) = \quad (1.77)$$

$$= K(u, R) + O\left(\frac{e^{-2\pi R}}{|\log(u)|}\right) \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty \quad (1.78)$$

Nótese que $K(u, R)$ es una función regular en $u = 1$. Sin embargo, no es uniformemente regular cuando $R \rightarrow \infty$, por lo que para tomar el límite cuando $R \rightarrow \infty$ necesitaremos efectuar un análisis más delicado.

Es conveniente reescribir (1.75) como

$$\begin{aligned} \psi_r(r, \pi) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{-\sigma}{4\pi} \int_0^\infty d\xi \cdot f_r(\xi) \left(\frac{\xi}{r}\right)^{\frac{1}{2}+a} \frac{1}{r} J_{a,R} \left(\frac{\xi}{r}\right) = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{-\sigma}{4\pi} \left(\int_{D_{R_1, R_2}} + \int_{r-e^{-R_2}}^{r+e^{-R_1}} \right) \equiv I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (1.79)$$

donde $D_{R_1, R_2} = \{ \mathbb{R}^+ \setminus [r - e^{-R_1}, r + e^{-R_2}] \}$ y $R < R_1, R_2$. Los valores de R_1 y R_2 serán precisados más tarde.

Se puede ver fácilmente de (1.76) que $|J_{a, R}(u)| \leq CR$. Usando que $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$ se sigue inmediatamente que $|I_2| \leq \frac{CR e^{-R}}{r^{\frac{1}{2}+a}}$ que converge a cero cuando $R \rightarrow \infty$.

Por otra parte, usando (1.77)

$$I_1 = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(I_{11} + O\left(\frac{e^{-2\pi R R}}{r^{\frac{1}{2}+a}}\right) \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} I_{11} \quad (1.80)$$

con

$$I_{11} = -\frac{\sigma}{4\pi} \int_{D_{R_1, R_2}} d\xi \cdot f_r(\xi) \left(\frac{\xi}{r}\right)^{\frac{1}{2}+a} \frac{1}{r} K\left(\frac{\xi}{r}, R\right)$$

Escojamos $\epsilon > 0$ pequeño pero mayor que e^{-R} y denotemos $B_\epsilon(r) = [r - \epsilon, r + \epsilon]$

$$I_{11} = -\frac{\sigma}{4\pi} \int_{D_{R_1, R_2} \cap B_\epsilon(r)} -\frac{\sigma}{4\pi} \int_{D_{R_1, R_2} \setminus B_\epsilon(r)} \equiv I_{111} + I_{112}$$

Escribimos

$$\begin{aligned} I_{111} = & -\frac{\sigma}{4\pi} \int_{D_{R_1, R_2} \cap B_\epsilon(r)} d\xi (f_r(\xi) - f_r(r)) \left(\frac{\xi}{r}\right)^{\frac{1}{2}+[a]} \frac{1}{r} K\left(\frac{\xi}{r}, R\right) - \\ & -\frac{\sigma}{4\pi} f_r(r) \int_{D_{R_1, R_2} \cap B_\epsilon(r)} d\xi \left(\frac{\xi}{r}\right)^{\frac{1}{2}+[a]} \frac{1}{r} K\left(\frac{\xi}{r}, R\right) \end{aligned} \quad (1.81)$$

Nótese que I_{112} se puede escribir como

$$\begin{aligned} I_{112} = & -\frac{\sigma}{2\pi} \int_{R^+ \setminus B_\epsilon(r)} d\xi \cdot f_r(\xi) \left(\frac{\xi}{r}\right)^{\frac{1}{2}+[a]} \frac{1}{r} \frac{\xi}{1 - \frac{\xi}{r}} - \\ & -\frac{\sigma}{2\pi} \int_{R^+ \setminus B_\epsilon(r)} d\xi \cdot f_r(\xi) \left(\frac{\xi}{r}\right)^{\frac{1}{2}+[a]} \frac{1}{r} \frac{\cos(R \log(\frac{\xi}{r}))}{\log(\frac{\xi}{r})} \end{aligned} \quad (1.82)$$

La segunda integral de la derecha se anula cuando $R \rightarrow \infty$ por el teorema de Riemann-Lebesgue.

Separamos la parte oscilatoria de $K(u, R)$ como sigue:

$$\begin{aligned} K(u, R) = & \frac{4 \sin^2\left(\frac{R \log(u)}{2}\right)}{\log(u)} + 2 \left(\frac{1}{\log(u)} + (u)^{(-a+[a])} \frac{u}{1-u} \right) = \\ = & -\frac{4 \sin^2\left(\frac{R \log(u)}{2}\right)}{\log(u)} + O(1) \equiv S(u, R) + O(1) \quad \text{cuando } u \rightarrow 1 \end{aligned} \quad (1.83)$$

Seleccionemos R_1 y R_2 de modo que $\min(R_1, R_2) > R$ y que satisfaga la siguiente desigualdad para cualquier valor fijo de ϵ :

$$\int_{D_{R_1, R_2} \cap B_\epsilon(r)} d\xi \left(\frac{\xi}{r}\right)^{\frac{1}{2}+[a]} S\left(\frac{\xi}{r}, R\right) = 0 \quad (1.84)$$

Es fácil ver que tal elección es siempre posible.

Teniendo en cuenta (1.83) y (1.84) obtenemos que el segundo término de la derecha en (1.81) se puede estimar por $C\epsilon$ para R suficientemente grande donde la constante C depende de f y r , por tanto, este término se acerca a cero cuando ϵ tiende a cero.

Por otra parte, el primer término a la derecha de (1.81) se puede estimar por $C\epsilon$ para R suficientemente grande usando el hecho de que f_r es diferenciable.

Resulta por tanto que el único término que permanece en (1.81) y (1.82) es, cuando $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_{11} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-\sigma}{2\pi} \int_{R^+ \setminus B_\epsilon(r)} d\xi \cdot f_r(\xi) \left(\frac{\xi}{r}\right)^{\frac{3}{2}+[a]} \frac{1}{r-\xi} \quad (1.85)$$

Usando (1.79),(1.80) y (1.85) obtenemos (1.65)

Finalmente, las estimaciones (1.64) se obtienen usando (1.72) y (1.73), donde después de algunos cálculos sencillos dan:

$$\int_0^\infty r^{2a+2k} \left| \frac{1}{r^j} \frac{\partial^{k-j}}{\partial r^{k-j-l} \partial \theta^l} \psi \right|^2 dr \leq C \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \cdot \left| \widetilde{f_r^{(k-j)}}^{a+1+k-j}(\lambda) \right|^2$$

Las cotas en el caso de derivadas con respecto a θ se obtienen de manera similar. \square

Probamos a continuación que el operador T definido en (1.65) es acotado en $Z_{s,\nu}^+$.

Proposición 1.3 Para todo $f \in C_c^\infty$ se tiene la siguiente desigualdad

$$\|Tf\|_{Z_{s,\nu}^+} \leq C \|f_r\|_{Z_{s,\nu}^+} \quad (1.86)$$

Además, el operador T admite una única extensión continua a $Z_{s,\nu}^+$ y (1.86) se satisface para todo $f \in Z_{s,\nu}^+$.

Demostración. Es una simple consecuencia de la definición de T en (1.65) así como del Lema 1.1. \square

Supongamos que (f, ψ) es una solución de (1.59), (1.60), (1.61), (1.62) y (1.63) y que (1.64) se satisface, así como $\|f_r\|_{Z_{s,\nu}^+} < \infty$. Entonces, usando (1.65) en (1.18), obtenemos la siguiente ecuación integrodiferencial para la frontera libre:

$$f_t - \beta_0 f_r = -\frac{\sigma}{2\pi} V.P. \int_0^\infty d\xi \cdot f_r(\xi) \left(\frac{r}{\xi}\right)^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{r-\xi} \quad (1.87)$$

con n un entero arbitrario, β_0 positivo, negativo o nulo. Toda solución de esta ecuación es solución del sistema (1.14), (1.15), (1.16), (1.17) y (1.18). Recíprocamente, dada una solución de (1.87) podemos obtener una solución de (1.59), (1.60), (1.61), (1.62) y (1.63) gracias a la Proposición 1.2.

Nuestro próximo objetivo será el análisis de la ecuación (1.87).

En primer lugar estudiamos algunas soluciones estacionarias de la ecuación (1.87). Se puede ver fácilmente que la función

$$f_\epsilon(r) = \frac{C}{n+1-\rho} r^{n+1-\rho} \quad (1.88)$$

con C una constante arbitraria, y ρ dado por

$$\rho = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{2\beta_0}{\sigma}\right) \quad (1.89)$$

satisface la siguiente ecuación integrodiferencial

$$-\frac{\sigma}{2\pi} V.P. \int_0^\infty d\xi \cdot f_r(\xi) \left(\frac{r}{\xi}\right)^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{r-\xi} + \beta_0 f_r = 0 \quad (1.90)$$

En efecto, observemos que

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{2\pi} V.P. \int_0^\infty d\xi \cdot f_{e,r}(\xi) \left(\frac{r}{\xi}\right)^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{r-\xi} &= \frac{\sigma C}{2\pi} V.P. \int_0^\infty d\xi \cdot \xi^{n-\rho} \left(\frac{r}{\xi}\right)^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{r-\xi} = \\ &= \frac{\sigma C}{2\pi} r^{n-\rho} V.P. \int_0^\infty d\tau \cdot (\tau)^{-\frac{1}{2}-\rho} \frac{1}{1-\tau} = \\ &= \frac{\sigma C}{2} r^{n-\rho} \left(\cot\left(\left(-\frac{1}{2}-\rho\right)\pi\right)\right) = \frac{\sigma C}{2} r^{n-\rho} \tan(\pi\rho) = \beta_0 f_{e,r} \end{aligned}$$

donde hemos usado

$$V.P. \int_0^\infty d\tau \cdot (\tau)^{-\frac{1}{2}-\rho} \frac{1}{1-\tau} = \pi \left(\cot\left(\left(-\frac{1}{2}-\rho\right)\pi\right)\right)$$

que se puede obtener integrando por residuos tal y como hicimos en la demostración del Lema 1.1.

Las soluciones (1.88) coinciden con el comportamiento asintótico cerca del origen que ha sido obtenido para las soluciones estacionarias (ver [17] y [46]). Las soluciones menos regulares cerca del origen son

$$\begin{aligned} f &= r^{1-\rho} \quad (n=0) \quad \text{si } \beta_0 \leq 0 \\ f &= r^{2-\rho} \quad (n=1) \quad \text{si } \beta_0 > 0 \end{aligned} \quad (1.91)$$

La elección de n en (1.91) tiene algunas características interesantes. Notemos que como $\rho < 0$ para $\beta_0 < 0$ y $|\rho| < \frac{1}{2}$ la elección (1.91) define una frontera plana cerca del punto de contacto (i.e. ángulo de contacto igual a cero). Por otra parte, con esta elección obtenemos que la tasa de disipación de energía que está dada por

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{2} \int_D dV \cdot \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2$$

es finita si D es un entorno del origen. La elección de n en (1.91) es la que corresponde a una menor tasa de crecimiento cuando $r \rightarrow \infty$ y al mismo tiempo presenta una tasa de disipación de energía finita, un hecho que será útil a la hora de llevar a cabo los argumentos perturbativos para el problema no lineal completo.

A continuación estudiaremos la ecuación integrodiferencial (1.87) con $n=0$ para $\beta_0 \leq 0$ y $n=1$ para $\beta_0 > 0$, y obtendremos soluciones para el problema de evolución que, como veremos, se comportan como las soluciones estacionarias de (1.91) cerca del origen.

1.4 Estudio de la ecuación integrodiferencial de evolución para la frontera libre

1.4.1 El caso en el que la velocidad de substrato es negativa o nula ($\beta_0 \leq 0$)

En esta sección analizaremos el problema lineal (1.87) en el caso particular $n=0$.

$$f_t = -\frac{\sigma}{2\pi} V.P. \int_0^\infty d\xi \cdot f_r(\xi, t) \left(\frac{r}{\xi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r-\xi} + \beta_0 f_r \quad (1.92)$$

con dato inicial

$$f(r, 0) = f_0(r)$$

Será conveniente desde el punto de vista técnico estudiar el problema (1.92) como una ecuación de evolución abstracta de la forma

$$f_t = Af$$

donde

$$Af = -\frac{\sigma}{2\pi} V.P. \int_0^\infty d\xi \cdot \left(\frac{\xi}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial_r f}{r - \xi} + \beta_0 \partial_r f \quad (1.93)$$

Usaremos como herramienta técnica la teoría de operadores sectoriales. Para ello comenzaremos analizando algunas propiedades del operador A en los espacios $Z_{s,\nu}^+$.

Proposición 1.4 *Supongamos que $\nu - s > \frac{1}{2}$ y $0 \leq s < \frac{1}{2} - \rho$, $s \neq \frac{1}{2}$. El operador $A : Z_{s,\nu}^+ \rightarrow Z_{s,\nu}^+$ definido mediante (1.93) con dominio $D(A) = Z_{s,\nu}^+ \cap Z_{s+1,\nu+1}^+$ es un operador cerrado con dominio denso.*

Demostración.

Es inmediato que $D(A)$ es denso en $Z_{s,\nu}^+$ ya que contiene las funciones C_c^∞ que son densas en $Z_{s,\nu}^+$.

Nótese que para $f \in C_c^\infty$

$$\widetilde{Af}^{-s}(\lambda) = \frac{\sigma}{2} (\cot((i\lambda - s)\pi) + \tan(\pi\rho)) \widetilde{f}_r^{-s}(\lambda)$$

Se deduce entonces que

$$\begin{aligned} \|Af\|_{Z_{s,\nu}^+}^2 &= \int_{-\infty}^\infty d\lambda (1 + |\lambda|)^{2\nu} \left| \int_0^\infty dr \cdot r^{i\lambda - \frac{1}{2} - s} Af \right|^2 = \\ &= \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 \int_{-\infty}^\infty d\lambda (1 + |\lambda|)^{2\nu} |\cot((i\lambda - s)\pi) + \tan(\pi\rho)|^2 \left| \int_0^\infty dr \cdot r^{i\lambda - \frac{1}{2} - s} f_r \right|^2 \end{aligned}$$

Usando entonces que

$$\frac{1}{C} \leq |\cot((i\lambda - s)\pi) + \tan(\pi\rho)|^2 \leq C$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$, se sigue entonces inmediatamente que

$$\frac{1}{C} \|Af\|_{Z_{s,\nu}^+}^2 \leq \|f_r\|_{Z_{s,\nu}^+}^2 = \int_{-\infty}^\infty d\lambda (1 + |\lambda|)^{2\nu} \left| \int_0^\infty dr \cdot r^{i\lambda - \frac{1}{2} - s} f_r \right|^2 \leq C \|Af\|_{Z_{s,\nu}^+}^2 \quad (1.94)$$

Por otra parte, combinando (1.27) y (1.29) se tiene que

$$\frac{1}{C} \|f\|_{Z_{s+1,\nu+1}^+}^2 \leq \|f_r\|_{Z_{s,\nu}^+}^2 \leq C \|f\|_{Z_{s+1,\nu+1}^+}^2 \quad (1.95)$$

Usando (1.94) y (1.95) obtenemos que la norma natural en $D(A)$ dada por

$$\|f\|_{D(A)} = \|f\|_{Z_{s,\nu}^+} + \|Af\|_{Z_{s,\nu}^+}$$

es equivalente a la norma de espacio de Banach $W \equiv Z_{s,\nu}^+ \cap Z_{s+1,\nu+1}^+$

$$\|f\|_W = \|f\|_{Z_{s,\nu}^+} + \|f\|_{Z_{s+1,\nu+1}^+}$$

Esto implica que el operador $A : D(A) \subset Z_{s,\nu}^+ \rightarrow Z_{s,\nu}^+$ es cerrado. \square

Ahora queremos estudiar la resolvente del operador A , lo cual equivale al estudio de la ecuación

$$(A + z)F = f \tag{1.96}$$

para z complejo.

Teniendo en cuenta la definición del operador A podemos escribir (1.96) como

$$-\frac{\sigma}{2\pi} V.P. \int_0^\infty d\xi \cdot F_r(\xi, z) \left(\frac{r}{\xi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r - \xi} + \beta_0 F_r(r, z) + zF(r, z) = f(r) \tag{1.97}$$

donde $F \in Z_{s,\nu}^+ \cap Z_{s+1,\nu+1}^+$ y $f \in Z_{s,\nu}^+$. Las soluciones de la ecuación (1.96) están dadas por el siguiente resultado

Proposición 1.5 Sea $f(r) \in Z_{s,\nu}^+$ con $0 \leq s < \frac{1}{2} - \rho$, $s \neq \frac{1}{2}$.

Entonces, para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{z : z = e^{\pm \pi \rho i} \xi, \xi \in \mathbb{R}^+\}$ existe una única solución $F(r, z)$ del problema (1.97) en $Z_{s,\nu}^+ \cap Z_{s+1,\nu+1}^+$. Además la transformada de Fourier de F está dada por

$$\widehat{F}(k, z) = \frac{2}{\sigma} \cos(\pi \rho) e^{-\pi \rho i} \frac{1}{(-ik)r_+(k)q_+(k, z)} \left(r_-(k)q_-(k, z) \widehat{H}f(k) \right)_+ \tag{1.98}$$

donde $(\cdot)_+$ se define como

$$(f)_+ = \frac{1}{2} (I + iH) f$$

y

$$r_+(k) = (k)_+^{-\rho}$$

$$r_-(k) = (k)_-^{-\rho}$$

donde $(k)_\pm^{-\rho}$ es como en (1.19) y (1.20).

Además, si $\nu - s > \frac{1}{2}$ entonces se satisface la siguiente desigualdad

$$\|F\|_{Z_{s,\nu}^+} \leq \frac{C}{|z|} \|f\|_{Z_{s,\nu}^+}$$

para $\arg(z) \in [\alpha\pi, (2 - \alpha)\pi]$ donde $\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + |\rho| \right)$.

En la demostración de la Proposición 1.5 se usa de forma esencial el método de Wiener-Hopf para obtener (1.98). Dividiremos la demostración de la Proposición 1.5 en los siguientes lemas.

Lema 1.5 Sea $p(k, \lambda)$ la función

$$p(k, \lambda) = \left(1 - \frac{2}{\sigma} \frac{\lambda}{|k| (1 + i \operatorname{sign}(k) \tan(\pi \rho))} \right)$$

Definamos la función $q(z, \lambda)$ como

$$q(z, \lambda) = e^{\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log(p(\tau))}{\xi - \tau} d\tau}$$

donde se escoge aquella rama de $\log(p(k))$ tal que

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} p(k, \lambda) = 0$$

La función $q(z, \lambda)$ es una función holomorfa respecto del argumento z en la región $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ y tiene los siguientes límites cuando z se aproxima al eje real:

$$q_{\pm}(k, \lambda) = \lim_{y \rightarrow \pm 0} q(k + iy, \lambda) = (p(\tau))^{\pm \frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2} H(\log(p))} \quad (1.99)$$

La función $p(k, \lambda)$ admite la siguiente representación

$$p(k, \lambda) = \frac{q_+(k, \lambda)}{\bar{q}_-(\bar{k}, \lambda)} \quad (1.100)$$

Además, las funciones $q_{\pm}(k, \lambda)$ poseen la siguiente dependencia funcional

$$q_{\pm}(k, \lambda) = Q_{\pm}\left(\frac{\lambda}{|k|}, \text{sign}(k)\right) \quad (1.101)$$

y se tienen para las funciones Q_{\pm} y para $\arg(u) = \theta \neq \pm\pi\rho$ los siguientes comportamientos asintóticos:

$$Q_+(u, \text{sign}(k)) \sim \begin{cases} g_+(\theta) |u|^{\frac{1}{2}-\rho} & \text{cuando } |u| \rightarrow \infty \\ 1 & \text{cuando } |u| \rightarrow 0 \end{cases} \quad (1.102)$$

$$Q_-(u, \text{sign}(k)) \sim \begin{cases} g_-(\theta) |u|^{-\frac{1}{2}-\rho} & \text{cuando } |u| \rightarrow \infty \\ 1 & \text{cuando } |u| \rightarrow 0 \end{cases} \quad (1.103)$$

donde $g_{\pm}(\theta)$ son funciones suaves para $\theta \neq \pm\pi\rho$.

Demostración. La descomposición en (1.100) donde q_{\pm} son como en (1.99) se sigue del teorema clásico de Cauchy para funciones analíticas (ver por ejemplo el teorema 8 en la pg.192 de [26] o el Capítulo primero de [40]). Las fórmulas (1.99) son consecuencia de las conocidas fórmulas de Plemelj-Sojotski

$$\lim_{y \rightarrow 0^{\pm}} f(x + iy) = \left(\frac{1}{2} f \pm \frac{i}{2} Hf \right) (x)$$

aplicadas a $f = \log(p)$. Nótese que f tiene una singularidad logarítmica en $k = 0$. No obstante, esto no es obstáculo para la existencia de la transformada de Hilbert de f .

La dependencia funcional (1.101) se prueba teniendo en cuenta que

$$q_{\pm}(\lambda, k) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(e^{\frac{-1}{2\pi i} I(\lambda, k \pm i\epsilon)} \right) \quad (1.104)$$

donde

$$I(\lambda, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log\left(1 - \frac{\lambda}{(1+i\text{sign}(\xi)\tan(\pi\rho)|\xi|)}\right)}{z - \xi} d\xi = \tilde{I}\left(\frac{\lambda}{|z|}, \arg(z)\right)$$

A continuación obtenemos los comportamientos asintóticos en (1.102) y (1.103). Para ello probamos la siguientes fórmulas para Q_{\pm} :

$$Q_+(u, \text{sign}(k)) = \frac{\left(1 + \frac{u}{\text{sign}(k)(1-i \tan(\pi\rho))}\right)^{\frac{1}{2} \text{sign}(k) - \frac{\rho}{2}}}{\left(1 - \frac{u}{\text{sign}(k)(1+i \tan(\pi\rho))}\right)^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sign}(k) + \frac{\rho}{2}}} e^{-\frac{\text{sign}(k)}{\pi i} \int_0^u \frac{\log(\lambda)}{1-(\lambda-i \tan(\pi\rho))^2} d\lambda} \quad (1.105)$$

$$Q_-(u, \text{sign}(k)) = \frac{\left(1 + \frac{u}{(1-i \tan(\pi\rho))}\right)^{\frac{1}{2} \text{sign}(k) - \frac{\rho}{2}}}{\left(1 - \frac{u}{(1+i \tan(\pi\rho))}\right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sign}(k) + \frac{\rho}{2}}} e^{-\frac{\text{sign}(k)}{\pi i} \int_0^u \frac{\log(\lambda)}{1-(\lambda-i \tan(\pi\rho))^2} d\lambda} \quad (1.106)$$

Nótese que (1.105) y (1.106) implican el comportamiento asintótico en (1.102) y (1.103). Para probar (1.105) y (1.106) derivamos $I(\lambda, z)$ con respecto a λ para obtener

$$\frac{\partial I(\lambda, z)}{\partial \lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\lambda - (1 + i \text{sign}(\xi) \tan(\pi\rho) |\xi|)(z - \xi))} d\xi$$

y después de algunas integraciones elementales deducimos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(\lambda, z)}{\partial \lambda} &= \frac{1}{\lambda - (1 + i \tan(\pi\rho))z} (\log(z) - \log(\lambda)) + \frac{1}{z(1 - i \tan(\pi\rho)) + \lambda} (\log(\lambda) - \log(z)) + \\ &+ \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda - (1 + i \tan(\pi\rho))z} \{ \log(\lambda - (1 + i \tan(\pi\rho))R) - \log(z - R) \} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{z(1 - i \tan(\pi\rho)) + \lambda} \{ \log(\lambda - (1 - i \tan(\pi\rho))R) - \log(z + R) \} \right) \end{aligned} \quad (1.107)$$

donde $\log(z) = \log |z| + i \arg(z)$ con $0 \leq \arg(z) < 2\pi$.

Teniendo en cuenta (1.104), solamente tenemos que calcular

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(\lambda, \text{sign}(k) \pm i\epsilon)$$

Primero analizamos $I(\lambda, \text{sign}(k) + i\epsilon)$.

Nuestra elección de la rama de la función logaritmo implica

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda - (1 + i \tan(\pi\rho))z} \{ \log(\lambda - (1 + i \tan(\pi\rho))R) - \log(z - R) \} \right) = \frac{i\pi\rho}{\lambda - (1 + i \tan(\pi\rho))z} \quad (1.108)$$

Por otra parte

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{z(1 - i \tan(\pi\rho)) + \lambda} \{ \log(\lambda - (1 - i \tan(\pi\rho))R) - \log(z + R) \} \right) = \frac{\pi(\rho - 1)i}{z(1 - i \tan(\pi\rho)) + \lambda} \quad (1.109)$$

Llevando (1.108) y (1.109) a (1.107) y usando $I(0, z) = 0$ deducimos

$$\begin{aligned} I(u, z) &= \int_0^u \left(\frac{1}{\lambda - (1 + i \tan(\pi\rho))z} (\log(z) - \log(\lambda)) + \frac{1}{z(1 - i \tan(\pi\rho)) + \lambda} (\log(\lambda) - \log(z)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\pi\rho}{\lambda - (1 + i \tan(\pi\rho))z} + \frac{\pi(\rho - 1)i}{z(1 - i \tan(\pi\rho)) + \lambda} \right) \end{aligned}$$

Particularizando para $z = \text{sign}(k) + i\epsilon$ y tomando el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0^+$ concluimos que

$$I(u, \text{sign}(k)) = \int_0^u \left(\frac{2 \text{sign}(k) \log(\lambda)}{1 - (\lambda - i \tan(\pi\rho))^2} + \frac{\pi(-\text{sign}(k) + \rho)i}{\text{sign}(k)(1 - i \tan(\pi\rho)) + \lambda} + \frac{\pi(\rho - 1 + \text{sign}(k))i}{\lambda - \text{sign}(k)(1 + i \tan(\pi\rho))} \right) d\lambda$$

y después de llevar a cabo las integraciones obtenemos (1.105).

Por otra parte, en el análisis de $I(\lambda, \text{sign}(k) - i\epsilon)$ cuando $\epsilon \rightarrow 0^+$, haciendo cálculos similares, llegamos a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda - (1 + i \tan(\pi\rho))z} \{ \log(\lambda - (1 + i \tan(\pi\rho))R) - \log(z - R) \} \right) = \frac{i\pi\rho}{\lambda - (1 + i \tan(\pi\rho))z}$$

y

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{z(1 - i \tan(\pi\rho)) + \lambda} \{ \log(\lambda - (1 - i \tan(\pi\rho))R) - \log(z + R) \} \right) = \frac{\pi(\rho + 1)i}{z(1 - i \tan(\pi\rho)) + \lambda}$$

y usando $I(0, z) = 0$ deducimos de (1.107)

$$I(u, z) = \int_0^u \left(\frac{1}{\lambda - (1 + i \tan(\pi\rho))z} (\log(z) - \log(\lambda)) + \frac{1}{z(1 - i \tan(\pi\rho)) + \lambda} (\log(\lambda) - \log(z)) + \frac{i\pi\rho}{\lambda - (1 + i \tan(\pi\rho))z} + \frac{\pi(\rho + 1)i}{z(1 - i \tan(\pi\rho)) + \lambda} \right)$$

En particular, para $z = \text{sign}(k) - i\epsilon$ y tomando el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0^+$ concluimos que

$$I(u, \text{sign}(k)) = \int_0^u \left(\frac{2 \text{sign}(k) \log(\lambda)}{1 - (\lambda - i \tan(\pi\rho))^2} + \frac{\pi(-\text{sign}(k) + \rho)i}{(1 - i \tan(\pi\rho)) + \lambda} + \frac{\pi(\rho + 1 + \text{sign}(k))i}{\lambda - (1 + i \tan(\pi\rho))} \right) d\lambda$$

que conduce, después de la integración, a (1.106). \square

Observación 1.1 Nótese que de (1.102) y (1.103) y para $\delta > 0$ arbitrariamente pequeño, existe $C > 0$ (que depende de δ) tal que

$$|q_-| \leq \frac{C}{1 + \left(\frac{|\lambda|}{k}\right)^{\frac{1}{2} + \rho}}$$

$$\left| \frac{1}{q_+} \right| \leq \frac{C}{1 + \left(\frac{|\lambda|}{k}\right)^{\frac{1}{2} - \rho}}$$

uniformemente en el sector $\arg(\lambda) \in [\pi|\rho| + \delta, 2\pi - \pi|\rho| - \delta]$.

El siguiente paso consiste en transformar la ecuación (1.97) en una expresión que nos resultará más útil.

Lema 1.6 Las funciones $f \in C_c^\infty$ y $F \in Z_{s,\nu}^+ \cap Z_{s+1,\nu+1}^+$ para algún $s \in (0, \frac{1}{2})$ satisfacen la ecuación (1.97) si y solamente si satisfacen

$$\begin{aligned}
-\frac{\sigma}{2}F_r(r, z) - \beta_0 \frac{1}{\pi} V.P. \int_0^\infty d\xi \frac{1}{r-\xi} z F_r(\xi, z) - \frac{1}{\pi} V.P. \int_0^\infty d\xi \frac{1}{r-\xi} z F(\xi, z) &= \\
= -\frac{1}{\pi} V.P. \int_0^\infty d\xi \frac{1}{r-\xi} f(\xi) & \quad (1.110)
\end{aligned}$$

Demostración. Multiplicamos la ecuación (1.97) por $r^{i\lambda - \frac{1}{2} + s}$ e integramos en la variable r desde 0 hasta ∞ . Esto lleva a

$$\left(-\frac{\sigma}{2} \tan\left((i\lambda - \frac{3}{2} - s)\pi\right) + \beta_0\right) \widetilde{F}_r^{-s} + z \widetilde{F}^{-s} = \widetilde{f}^{-s}$$

Teniendo en cuenta que $s \in (0, \frac{1}{2})$ y $\tan\left((i\lambda - \frac{3}{2} - s)\pi\right) \neq 0$ para $\lambda \in \mathbb{R}$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
-\frac{\sigma}{2} \widetilde{F}_r^{-s} + \beta_0 \cot\left((i\lambda - \frac{3}{2} - s)\pi\right) \widetilde{F}_r^{-s} + z \cot\left((i\lambda - \frac{3}{2} - s)\pi\right) \widetilde{F}^{-s} &= \\
= \cot\left((i\lambda - \frac{3}{2} - s)\pi\right) \widetilde{f}^{-s} & \quad (1.111)
\end{aligned}$$

Por otra parte, hemos probado en el Lema 1.1 que

$$\int_0^\infty dr \cdot r^{i\lambda - \frac{1}{2} - s} \left(\frac{1}{\pi} V.P. \int_0^\infty d\xi \cdot \frac{1}{r-\xi} g(\xi)\right) = -\cot\left((i\lambda - \frac{3}{2} - s)\pi\right) \widetilde{g}^{-s} \quad (1.112)$$

Podemos efectuar ahora la transformada de Mellin inversa en (1.111) y usar (1.112) con g tomando los valores F_r, F, f respectivamente para obtener que (1.97) implica (1.110). Recíprocamente (1.110) implica (1.97) como se puede demostrar de forma análoga. \square

A continuación reescribimos la ecuación (1.110) en términos de las transformadas de Fourier de las funciones F y f . Asumiremos que estas funciones, así como F_r están extendidas como cero al semieje real negativo.

Lema 1.7 *Dos cualesquiera funciones $f \in C_c^\infty$ y $F \in Z_{s,\nu}^+ \cap Z_{s+1,\nu+1}^+$ para algún $s \in (0, \frac{1}{2})$ satisfacen la ecuación (1.110) si y solamente si verifican*

$$\left(1 + i \operatorname{sign}(k) \tan(\pi\rho) - \frac{2}{\sigma} \frac{z}{|k|}\right) \widehat{F}_r(k, z) = \frac{2}{\sigma} \left(\widehat{H}f(k) + G_-(k)\right) \quad (1.113)$$

$$F(r, z) = \int_0^r d\xi F_r(\xi, z) \quad (1.114)$$

donde $G_-(k)$ es la transformada de Fourier de una cierta función definida solamente para $r < 0$.

Demostración. Definamos la función

$$\begin{aligned}
g_-(r) &= \beta_0 \frac{1}{\pi} V.P. \int_0^\infty d\xi \cdot \frac{1}{r-\xi} z F_r(\xi, z) + \frac{1}{\pi} V.P. \int_0^\infty d\xi \cdot \frac{1}{r-\xi} z F(\xi, z) - \\
&\quad - \frac{1}{\pi} V.P. \int_0^\infty d\xi \cdot \frac{1}{r-\xi} f(\xi) \quad \text{para } r < 0
\end{aligned}$$

y

$$g_-(r) = 0 \quad \text{para } r > 0$$

entonces la ecuación (1.110) es equivalente a

$$-\frac{\sigma}{2}F_r - \beta_0 HF_r - zHF = -Hf - g_- \quad \text{en } \mathbb{R} \quad (1.115)$$

Nótese que $G_-(k) = \widehat{g}_-(k)$ es una función analítica en el semiplano complejo $\{\text{Im}(k) < 0\}$.

Por tanto, (1.113) se deduce tomando la transformada de Fourier de (1.115), y usando el hecho de que $\tan(\pi\rho) = \frac{2\beta_0}{\sigma}$. \square

Lema 1.8 Las funciones $f \in Z_{s,\nu}^+$ y $F \in Z_{s,\nu}^+ \cap Z_{s+1,\nu+1}^+$ para algún $s \in (0, \frac{1}{2})$ satisfacen (1.113) y (1.114) si y solamente si:

$$\widehat{F}(k, z) = i \cos(\pi\rho) e^{-\pi\rho i} \frac{2}{\sigma} \frac{1}{(-ik)r_+(k)q_+(k, z)} \left(r_-(k)q_-(k, z) \text{sign}(k) \widehat{f}(k) \right)_+ \quad (1.116)$$

donde $(\cdot)_+$ denota el operador de proyección sobre L_+^2

$$(f)_+ = \frac{1}{2} (I + iH) f$$

Demostración. Demostramos este resultado usando la técnica clásica de Wiener-Hopf. Es sencillo verificar la siguiente identidad

$$(1 + i \text{sign}(k) \tan(\pi\rho)) = \frac{1}{\cos(\pi\rho)} e^{\pi\rho i} \frac{r_+(k)}{r_-(k)} \quad (1.117)$$

donde $r_+(k) = (k)_+^{-\rho}$, $r_-(k) = (k)_-^{-\rho}$ se definen como en (1.19) y (1.20).

Usando el Lema 1.5 obtenemos

$$\begin{aligned} & \left(1 + i \text{sign}(k) \tan(\pi\rho) - \frac{2}{\sigma} \frac{z}{|k|} \right) = \\ & = (1 + i \text{sign}(k) \tan(\pi\rho)) \left(1 - \frac{2}{\sigma} \frac{z}{|k| (1 + i \text{sign}(k) \tan(\pi\rho))} \right) = \\ & = \frac{1}{\cos(\pi\rho)} e^{\pi\rho i} \frac{r_+(k)q_+(k, z)}{r_-(k)q_-(k, z)} \end{aligned}$$

Podemos escribir entonces (1.113) como

$$\begin{aligned} & r_+(k)q_+(k, z) \widehat{F}_r(k, z) - \frac{2}{\sigma} \cos(\pi\rho) e^{-\pi\rho i} \left(r_-(k)q_-(k, z) \widehat{H}f(k) \right)_+ = \\ & = \frac{2}{\sigma} \cos(\pi\rho) e^{-\pi\rho i} \left(r_-(k)q_-(k, z) \widehat{H}f(k) \right)_- + \frac{2}{\sigma} \cos(\pi\rho) e^{-\pi\rho i} r_-(k)q_-(k, z) G_-(k) \quad (1.118) \end{aligned}$$

Como $F_r = 0$ para $r < 0$, $\widehat{F}_r(k, z)$ es analítica en el semiplano complejo superior. Entonces el término a la izquierda de (1.118) es analítico sobre el semiplano complejo superior y el de la derecha es analítico en el semiplano complejo inferior. Por tanto, ambos términos deben ser idénticamente nulos. Se tiene entonces que

$$\widehat{F}_r(k, z) = \cos(\pi\rho) e^{-\pi\rho i} \frac{2}{\sigma} \frac{1}{r_+(k)q_+(k, z)} \left(r_-(k)q_-(k, z) \widehat{H}f(k) \right)_+ \quad (1.119)$$

y usando que $\widehat{F}_r = -ik\widehat{F}$ y $\widehat{H}f = i \text{sign}(k)\widehat{f}$, se obtiene (1.116). \square

Observación 1.2 Los comportamientos asintóticos de q_{\pm} dados en (1.102) y (1.103) implican que (1.116) define una función continua F como puede verificarse a partir de la expresión de la transformada de Fourier inversa. Además, $\widehat{F}(k, z)$ es analítica para $\text{Im}(k) < 0$ por lo que $F(r, z) = 0$ para $r < 0$, de donde por continuidad $F(0, z) = 0$.

Lema 1.9 Dada $f \in C_c^{\infty}$ y $\nu - s > \frac{1}{2}$, las funciones definidas por (1.116) pertenecen a $Z_{s,\nu}^+$ para todo $0 \leq s < \frac{1}{2} + |\rho|$. Además, para todo $\delta > 0$ arbitrariamente pequeño, existe una constante C que depende de δ tal que

$$\|F_r\|_{Z_{s,\nu}^+} \leq C \|f\|_{Z_{s,\nu}^+} \quad (1.120)$$

$$\|F\|_{Z_{s,\nu}^+} \leq \frac{C}{|z|} \|f\|_{Z_{s,\nu}^+} \quad (1.121)$$

uniformemente en el sector $\arg(z) \in [\pi|\rho| + \delta, 2\pi - \pi|\rho| - \delta]$.

Demostración. Nótese que (1.116) se puede escribir como

$$\widehat{F}(k, z) = \frac{(z)_-^{-\rho-\frac{1}{2}}}{(z)_+^{\frac{1}{2}-\rho}} A_+\left(\frac{k}{z}, \text{sign}(k)\right) \frac{1}{(k)_+^{\frac{1}{2}}} \left(|k|^{\frac{1}{2}} B\left(\frac{k}{z}, \text{sign}(k)\right) \widehat{f}(k) \right)_+ \quad (1.122)$$

donde

$$A_+\left(\frac{k}{z}, \text{sign}(k)\right) \equiv \frac{\cos(\pi\rho) e^{-\pi\rho i} 2}{\sigma k \cdot r_+\left(\frac{k}{z}\right) Q_+\left(\frac{z}{|k|}, \text{sign}(k)\right)} \frac{(k)_+^{\frac{1}{2}} (z)_+^{\frac{1}{2}}}{\sigma}$$

$$B\left(\frac{k}{z}, \text{sign}(k)\right) = \frac{(z)_-^{\frac{1}{2}}}{|k|^{\frac{1}{2}}} \text{sign}(k) r_-\left(\frac{k}{z}\right) Q_-\left(\frac{z}{|k|}, \text{sign}(k)\right)$$

Se puede comprobar inmediatamente, usando (1.102) y (1.103) que para $\nu - s > \frac{1}{2}$, A_+ y B satisfacen las hipótesis del Lema 1.4 uniformemente en z . Por tanto

$$\|F\|_{Z_{s,\nu}^+} \leq \frac{C}{|z|} \|f\|_{Z_{s,\nu}^+}$$

uniformemente en el sector $\arg(z) \in [\pi|\rho| + \delta, 2\pi - \pi|\rho| - \delta]$.

Por otra parte, podemos escribir (1.119) como

$$\widehat{F}_r(k, z) = \widetilde{A}_+\left(\frac{k}{z}, \text{sign}(k)\right) \frac{1}{(k)_+^{-\rho}} \left(|k|^{-\rho} \widetilde{B}\left(\frac{k}{z}, \text{sign}(k)\right) \widehat{f}(k) \right)_+ \quad (1.123)$$

con

$$\widetilde{A}_+\left(\frac{k}{z}, \text{sign}(k)\right) = i \cos(\pi\rho) e^{-\pi\rho i} \frac{2}{\sigma Q_+\left(\frac{z}{|k|}, \text{sign}(k)\right)}$$

$$\widetilde{B}\left(\frac{k}{z}, \text{sign}(k)\right) = \frac{i \text{sign}(k)}{|k|^{-\rho}} r_-(k) Q_-\left(\frac{z}{|k|}, \text{sign}(k)\right)$$

De nuevo \widetilde{A}_+ y \widetilde{B} satisfacen las hipótesis del Lema 1.4 uniformemente en z y por tanto (1.120) se sigue inmediatamente. \square

Fin de la demostración de la Proposición 1.5

Dada $f \in C_c^\infty$, (1.116) define una solución de (1.97) por los lemas 1.6, 1.7 y 1.8. Dada una función $f \in Z_{s,\nu}^+$ con $0 \leq s < \frac{1}{2} - \rho$, $s \neq \frac{1}{2}$ podemos aproximarla mediante funciones en C_c^∞ y usando las estimaciones del Lema 1.9 obtenemos que (1.116) define una solución de (1.97) mediante un argumento de densidad. Por otra parte, por los Lemas 1.6, 1.7 y 1.8 la única función F solución de la ecuación (1.97) tal que $F \in Z_{s,\nu}^+$ es $F \equiv 0$, lo cual prueba el resultado de unicidad de la Proposición 1.5. \square

Podemos usar los resultados precedente para resolver la ecuación (1.97) para una clase amplia de datos iniciales

Teorema 1.1 *Fijemos $s \in [0, \frac{1}{2} + |\rho|)$ $s \neq \frac{1}{2}$ y sea $\nu - s > \frac{1}{2}$. El operador*

$$A = -\frac{\sigma}{2\pi} V.P. \int_0^\infty d\xi \cdot \left(\frac{\xi}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial_r}{r=\xi} + \beta_0 \partial_r$$

con dominio $D(A) = \{f \in Z_{s,\nu}^+ : f_r \in Z_{s,\nu}^+\}$ es sectorial en $Z_{s,\nu}^+$.

Demostración. El operador A es cerrado en virtud de la Proposición 1.4 y (1.94). Además, (1.121) implica

$$\|(A+z)^{-1}f\|_{Z_{s,\nu}^+} \leq \frac{C}{|z|} \|f\|_{Z_{s,\nu}^+} \quad (1.124)$$

uniformemente en el sector $\arg(z) \in [\pi|\rho| + \delta, 2\pi - \pi|\rho| - \delta]$ y esto prueba el teorema. \square

Podemos ahora usar los resultados clásicos de la teoría de operadores sectoriales (ver [24]) para obtener los siguientes resultados:

Corolario 1.1 *El operador A es el generador infinitesimal de un semigrupo analítico de evolución $\{e^{At}\}_{t \geq 0}$. Además se verifican las siguiente estimaciones:*

$$\|e^{At}f\|_{Z_{s,\nu}^+} \leq C \|f\|_{Z_{s,\nu}^+} \quad (1.125)$$

$$\|A^n e^{At}f\|_{Z_{s,\nu}^+} \leq \frac{C}{t^n} \|f\|_{Z_{s,\nu}^+} \quad (1.126)$$

Corolario 1.2 *El semigrupo e^{At} tiene la siguiente fórmula de representación*

$$e^{At}f = -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma dz \cdot e^{-zt} (A+z)^{-1} f$$

donde γ es un circuito en el plano complejo que permanece a la izquierda del cono contenido entre las líneas $(\frac{\sigma}{2} \pm \beta_0 i)\xi$ ($0 < \xi < \infty$) y que tiende asintóticamente a $+\infty e^{\pm i\theta}$ con $\theta \in (-\arctan(\frac{2\beta_0}{\sigma}), 2\pi + \arctan(\frac{2\beta_0}{\sigma}))$.

Combinando (1.126) con (1.94) se sigue que

Corolario 1.3 *La función $f(\cdot, t) = (e^{At}f)(\cdot) \in C^\infty(0, \infty)$.*

Podemos usar los resultados previos para obtener alguna información acerca del comportamiento asintótico del la función $f(r, t)$ cerca del origen

Corolario 1.4 Se satisface la siguiente desigualdad:

$$\sup_{r \in (0,1)} r^{-s-\frac{1}{2}} \left| e^{At} f \right| \leq \frac{K}{t} \|f\|_{Z_{s,\nu}^+} \quad (1.127)$$

Demostración. Por (1.126) con $n = 1$ y (1.94) se tiene que

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda (1 + |\lambda|^{2\nu+2}) \left| e^{\widetilde{A}t} f^{-s-1}(t) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{K}{t} \|f\|_{Z_{s,\nu}^+} \quad (1.128)$$

Recordamos ahora la isometría entre los espacios $Z_{s+1,\nu+1}^+$ y $H^{\nu+1}(\mathbb{R})$ dada por (1.30) que combinada con la inclusión clásica $H^{\nu+1} \subset L^\infty$ lleva a la estimación

$$\left| e^{(-\frac{1}{2}-s)u} (e^{At} f) (e^u) \right| \leq \frac{K}{t} \|f\|_{Z_{s,\nu}^+}$$

que implica (1.127). \square

Será útil más tarde (en el análisis del problema no lineal) tener una fórmula de representación para AF en función del dato inicial f . Por conveniencia definimos

$$\gamma(k) = 1 + i \operatorname{sign}(k) \tan(\pi\rho)$$

Probamos entonces el siguiente Lema:

Lema 1.10 Supongamos que $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$. La solución del problema lineal (1.96) dada por (1.98) satisface

$$\widehat{AF} = \cos(\pi\rho) e^{-\pi\rho i} \frac{1}{(-ik)r_+(k)q_+(k,z)} \left(r_-(k)q_-(k,z)(-ik)\gamma(k)\widehat{f}(k) \right)_+ \quad (1.129)$$

Demostración. Teniendo en cuenta que $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$ obtenemos que $\widehat{f}(k)$ decae más rápido que cualquier potencia cuando $|k| \rightarrow \infty$ para $\operatorname{Im}(k) \geq 0$. Usando la analiticidad de $r_+(k)q_+(k,z)(-ik)$ en $\operatorname{Im}(k) > 0$ se puede obtener:

$$\widehat{f} = \frac{1}{(-ik)r_+(k)q_+(k,z)} \left(r_+(k)q_+(k,z)(-ik)\widehat{f}(k) \right)_+ \equiv K$$

Usando la definición de $\gamma(k)$ así como (1.100) y (1.117) tenemos

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{(-ik)r_+(k)q_+(k,z)} \left(r_-(k)q_-(k,z) \frac{r_+(k)q_+(k,z)}{r_-(k)q_-(k,z)} (-ik)\widehat{f}(k) \right)_+ = \\ &= \cos(\pi\rho) e^{-\pi\rho i} \frac{1}{(-ik)r_+(k)q_+(k,z)} \left(r_-(k)q_-(k,z)(-ik) \left(\gamma(k) - \frac{z}{|k|} \frac{2}{\sigma} \right) \widehat{f}(k) \right)_+ \end{aligned} \quad (1.130)$$

La representación en versión Fourier de la transformada de Hilbert (i.e. $\widehat{H}f = i \operatorname{sign}(k)\widehat{f}$) conduce entonces a

$$\begin{aligned} K &= \cos(\pi\rho) e^{-\pi\rho i} \frac{1}{(-ik)r_+(k)q_+(k,z)} \left(r_-(k)q_-(k,z)(-ik)\gamma(k)\widehat{f}(k) \right)_+ + \\ &\quad + z \cos(\pi\rho) e^{-\pi\rho i} \frac{2}{\sigma} \frac{1}{(-ik)r_+(k)q_+(k,z)} \left(r_-(k)q_-(k,z)\widehat{H}\widehat{f}(k) \right)_+ \end{aligned} \quad (1.131)$$

Nótese que el último término a la derecha de (1.131) coincide con $\widehat{F}(k,z)$ por (1.98), y entonces

$$\widehat{f}(k) = \cos(\pi\rho) e^{-\pi\rho i} \frac{1}{(-ik)r_+(k)q_+(k,z)} \left(r_-(k)q_-(k,z)(-ik)\gamma(k)\widehat{f}(k) \right)_+ + z\widehat{F}(k,z)$$

Por tanto, combinando esta fórmula con (1.96), se obtiene (1.129). \square

1.4.2 El caso en el que la velocidad del substrato es positiva ($\beta_0 > 0$)

Como se indicó en la Sección 1.3, en el caso $\beta_0 > 0$ estamos interesados en resolver la siguiente ecuación

$$f_t - \beta_0 f_r = -\frac{\sigma}{2\pi} V.P. \int_0^\infty d\xi \cdot f_r(\xi) \left(\frac{r}{\xi}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{r-\xi} \quad (1.132)$$

con dato inicial

$$f(r, 0) = f(r)$$

Estamos interesados en construir soluciones que satisfagan

$$f(0) = 0 \quad (1.133)$$

Podemos reducir el análisis de (1.132) al análisis de (1.92). De hecho, derivando (1.132) con respecto a r obtenemos

$$f_{rt} - \beta_0 f_{rr} = -\frac{\sigma}{2\pi} V.P. \int_0^\infty d\xi \cdot f_{rr}(\xi) \left(\frac{r}{\xi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r-\xi} \quad (1.134)$$

que coincide con la ecuación (1.92) para la función f_r . La solución de (1.132) se obtendrá integrando la solución (1.134) (comenzando en $r = 0$). La ecuación de la resolvente es entonces

$$-\frac{\sigma}{2\pi} V.P. \int_0^\infty d\xi \cdot F_{rr}(\xi, z) \left(\frac{r}{\xi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r-\xi} + \beta_0 F_{rr}(r, z) + z F_r(r, z) = f_r(r) \quad (1.135)$$

Podemos repetir el análisis llevado a cabo en el caso $\beta_0 \leq 0$ para obtener la función f_r y luego deducir f por simple integración junto con (1.133). La principal diferencia es que en este caso el número ρ definido en (1.89) se encuentra ahora en el intervalo $(0, \frac{1}{2})$.

Deducimos los siguientes resultados cuyas demostraciones son ligeras modificaciones de las dadas en la subsección anterior.

Proposición 1.6 Sea $f(r) \in Z_{s,\nu}^+$ con $1 \leq s < \frac{3}{2} - \rho$, $s \neq \frac{1}{2}$.

Entonces para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{z : z = e^{\pm\pi\rho i} \xi, \xi \in \mathbb{R}^+\}$ existe una única solución del problema (1.135) en $Z_{s,\nu}^+ \cap Z_{s+1,\nu+1}^+$. Además la transformada de Fourier de F está dada por:

$$(\widehat{F}_r)_+(k, z) = \cos(\pi\rho) e^{-\pi\rho i} \frac{2}{\sigma(-ik) r_+(k) q_+(k, z)} \left(r_-(k) q_-(k, z) \widehat{H} f_r(k) \right)_+ \quad (1.136)$$

Por otra parte, si $\nu - s > \frac{1}{2}$, entonces se verifica la siguiente desigualdad

$$\|F_r\|_{Z_{s,\nu}^+} \leq \frac{C}{|z|} \|f_r\|_{Z_{s,\nu}^+}$$

para $\arg(z) \in [\alpha\pi, (2-\alpha)\pi]$ donde $\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \rho\right)$.

Teorema 1.2 Fijemos $s \in \left[1, \frac{3}{2} - \rho\right)$ $s \neq \frac{1}{2}$ y sea $\nu - s > \frac{1}{2}$. El operador

$$A = -\frac{\sigma}{2\pi} V.P. \int_0^\infty d\xi \cdot \left(\frac{\xi}{r}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial_r}{r-\xi} + \beta_0 \partial_r$$

con dominio $D(A) = \left\{f \in Z_{s,\nu}^+ : f_r \in Z_{s,\nu}^+\right\}$ es sectorial en $Z_{s,\nu}^+$.

Corolario 1.5 La función $f(\cdot, t) = (e^{At}f)(\cdot) \in C^\infty(0, \infty)$.

Podemos usar al igual que en el caso $\beta_0 \leq 0$ los resultados precedentes para obtener estimaciones sobre el comportamiento asintótico de la función $f(r, t)$ cerca del origen.

Corolario 1.6 Se verifica la siguiente estimación

$$\sup_{r \in (0,1)} r^{-s-\frac{1}{2}} |e^{At}f| \leq \frac{K}{t} \|f\|_{Z_{s,\nu}^+} \quad (1.137)$$

Finalmente, es posible probar un resultado análogo al del Lema 1.10 para el caso $\beta_0 > 0$:

Lema 1.11 Supongamos que $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$. La solución del problema lineal (1.134) dada por (1.136) satisface

$$\widehat{AF}_r = \cos(\pi\rho)e^{-\pi\rho i} \frac{1}{(-ik)r_+(k)q_+(k, z)} \left(r_-(k)q_-(k, z)(-ik)\gamma(k)\widehat{f}_r(k) \right)_+ \quad (1.138)$$

1.5 Estimaciones refinadas para $f(r, t)$ cerca del punto de contacto

Las estimaciones (1.127) y (1.137) no son óptimas cerca del origen. En esta sección obtendremos algunos desarrollos asintóticos más detallados para la frontera libre $f(r, t)$ cerca del punto de contacto $r = 0$.

1.5.1 Formación de ángulos en el caso $\beta_0=0$

Teorema 1.3 Sea $\beta_0 = 0$. Supongamos que el dato inicial $f_0(r)$ pertenece a $D(A) = Z_{s,\nu}^+ \cap Z_{s+1,\nu+1}^+$. Sea $f(r, t)$ la solución de (1.92) definida por el teorema 1.1. Entonces

$$|f_r(0, t)| \leq \frac{C}{t} \|f_0\|_{D(A)} \quad (1.139)$$

Más aún, $v_y(0, 0, t) = 0$ para todo $t > 0$.

Si f_0 tiene una derivada nula en el origen y además

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi |\xi|^{\frac{3}{2}} |\widehat{f_0}(\xi)| < \infty \quad (1.140)$$

entonces $f_r(0, t)$ tiene el comportamiento asintótico

$$f_r(0, t) \sim B\sqrt{t} \log(t) + O(\sqrt{t}) \quad \text{cuando } t \rightarrow 0^+ \quad (1.141)$$

donde $B = \frac{2}{\pi^2} e^{-i3\pi/4} \Gamma(1/2) (\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \cdot \xi(\xi)^{\frac{1}{2}} \widehat{f_0}(\xi))$.

Observación 1.3 Nótese que el significado de este teorema es que para una clase muy amplia de datos iniciales, para los que la interfase forma un ángulo de contacto π en $t = 0$ se forma para $t > 0$ un ángulo de contacto distinto de π .

Demostración. Nótese que la fórmula (1.98) se puede escribir como

$$\begin{aligned}\widehat{F}_r &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(-\frac{2}{\sigma} \frac{1}{q(w_\epsilon, z)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{1}{w_\epsilon - \xi} \left(q_-(\xi, z) \widehat{H} f_0(\xi) \right) \right) = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(-\frac{2}{\sigma} \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{w_\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi q_-(\xi, z) \widehat{H} f_0(\xi) \right) + \\ &+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(-\frac{2}{\sigma} \left(\frac{1}{q(w_\epsilon, z)} - 1 \right) \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{w_\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi q_-(\xi, z) \widehat{H} f_0(\xi) \right) + \\ &+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(-\frac{2}{\sigma} \frac{1}{q(w_\epsilon, z)} \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{w_\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{\xi}{w_\epsilon - \xi} \left(q_-(\xi, z) \widehat{H} f_0(\xi) \right) \right) = \\ &= \widehat{J}_1(k, z) + \widehat{J}_2(k, z) + \widehat{J}_3(k, z)\end{aligned}$$

donde $w_\epsilon = k + i\epsilon$.

Observemos además que las funciones $\widehat{J}_2(k, z)$ y $\widehat{J}_3(k, z)$ admiten una extensión analítica a $\text{Im}(k) > 0$ y decaen a cero cuando $|k| \rightarrow \infty$ más rápido que $\frac{1}{|k|^{1+\delta}}$. Entonces las transformadas de Fourier inversas $J_2(r, z)$ y $J_3(r, z)$ son continuas y se anulan para $r \leq 0$. Por tanto $\lim_{r \rightarrow 0^+} (F_r(r, z)) = \lim_{r \rightarrow 0^+} J_1(r, z)$ donde $J_1(r, z)$ es la transformada de Fourier inversa de $\widehat{J}_1(k, z)$.

Podemos escribir

$$J_1(r, z) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{\sigma} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} dw \cdot e^{-iwr} \frac{1}{w} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi q_-(\xi, z) \widehat{H} f_0(\xi) \right) \\ w = k + i\epsilon$$

Calculando la integral en w por residuos (deformando el contorno de integración como en la figura 1.6 y haciendo $R \rightarrow \infty$) obtenemos

$$J_1(r, z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi q_-(\xi, z) \widehat{H} f_0(\xi) \quad \text{para } r > 0$$

y

$$J_1(r, z) = 0 \quad \text{para } r < 0$$

Por tanto

$$f_r(0^+, t) = -\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} dz \cdot e^{-zt} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi q_-(\xi, z) \widehat{H} f_0(\xi) \right) \quad (1.142)$$

donde el contorno γ rodea el semieje real positivo. Obtenemos fácilmente a partir de esta expresión las estimaciones

$$\begin{aligned}|f_r(0, t)| &\leq C \int_{\gamma} d|z| \cdot e^{-\text{Re}(z)t} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi |q_-(\xi, z)| |\widehat{f}_0| \leq \\ &\leq \frac{C}{t} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi |\widehat{f}_0| \leq \frac{C}{t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left(|\xi|^{2s} + |\xi|^{2s+2} \right) |\widehat{f}_0|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{|\xi|^{2s} + |\xi|^{2s+2}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{C}{t} \left(\|f_0\|_{Z_{s,\nu}^+} + \|f_{0,r}\|_{Z_{s,\nu}^+} \right)\end{aligned} \quad (1.143)$$

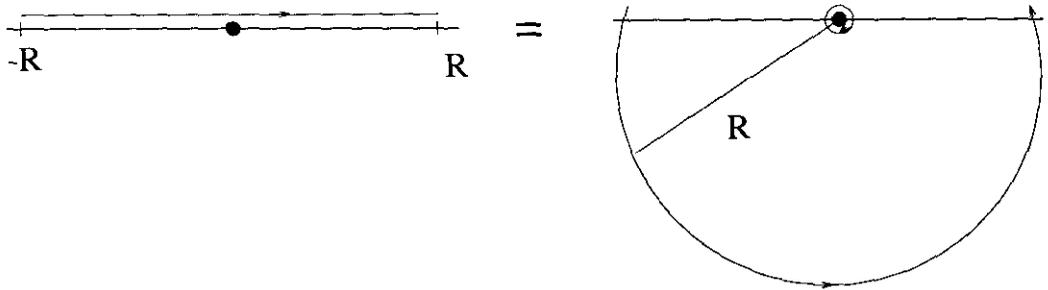


Figura 1.6: Deformación de contorno para evaluar $J_1(r, z)$

donde hemos usado para la segunda desigualdad la acotación de $|q_-(\xi, z)|$ y en la última hemos usado el hecho de que $0 < s < \frac{1}{2}$. Esto prueba (1.139).

Por otra parte, nótese que $\psi_r(0, t) = (Af)(0, t)$. Usando la transformada de Fourier inversa deducimos

$$\psi_r(0, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{Af}(k, t) \cdot dk \quad (1.144)$$

Podemos calcular $\widehat{Af}(k, t)$ usando (1.129). Nótese que teniendo en cuenta los comportamientos asintóticos de $q_{\pm}(k, z)$, $r_{\pm}(k, z)$ cuando $|k| \rightarrow \infty$ y $|k| \rightarrow 0$, deducimos que la función $\widehat{AF}(k, z)$ es integrable en la variable k y decae más rápido que $\frac{1}{|k|}$. Finalmente, $\widehat{AF}(k, z)$ es analítica en el semiplano superior y deformando el camino de integración en (1.144) obtenemos que $\psi_r(0, t) = 0$.

Usando (1.101) en (1.142) y haciendo el cambio de variables $\frac{z}{\sigma} \cdot z \rightarrow z$ deducimos

$$f_r(0, t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi (i \operatorname{sign}(\xi)) |\xi| \widehat{f_0}(\xi) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} dz \cdot e^{-z \frac{\sigma}{2} |\xi| t} Q_-(z, \operatorname{sign}(\xi)) \quad (1.145)$$

Teniendo en cuenta el cambio de signo de la raíz cuadrada a ambos lados del semieje real positivo deducimos, después de varios cálculos, que en el caso $\operatorname{sign}(\xi) = 1$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} dz \cdot e^{-z \frac{\sigma}{2} |\xi| t} Q_-(z, 1) &= \pi i e^{-\frac{\sigma}{2} |\xi| t} \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{8}} + V.P. \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{1+x}}{1-x} e^{-\frac{\sigma}{2} |\xi| t x} e^{-\frac{1}{\pi i} \int_0^x \frac{\log(s)}{1-s^2} ds} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}} e^{-\frac{\sigma}{2} |\xi| t x} e^{-\frac{1}{\pi i} \int_0^x \frac{\log(s)}{1-s^2} ds} dx \\ &= \pi i e^{-\frac{\sigma}{2} |\xi| t} \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{8}} + W_1\left(\frac{\sigma}{2} |\xi| t\right) \end{aligned} \quad (1.146)$$

donde

$$W_1(a) = V.P. \int_0^{\infty} \frac{2x}{\sqrt{1+x}(1-x)} e^{-ax} e^{-\frac{1}{\pi i} \int_0^x \frac{\log(s)}{1-s^2} ds} dx$$

y para $\operatorname{sign}(\xi) = -1$ podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} dz \cdot e^{-z \frac{\sigma}{2} |\xi| t} Q_-(z, -1) &= \\ &= \pi i e^{-\frac{\sigma}{2} |\xi| t} \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{8}} + W_2\left(\frac{\sigma}{2} |\xi| t\right) \end{aligned} \quad (1.147)$$

donde

$$W_2(a) = V.P. \int_0^\infty \frac{2x}{\sqrt{1+x(1-x)}} e^{-ax} e^{-\frac{1}{\pi i} \int_0^x \frac{\log(s)}{1-s^2} ds} dx$$

Estudiamos ahora el comportamiento asintótico de las funciones W_1, W_2 cuando a tiende a cero.

Escribimos $W_1(a)$ en la forma

$$W_1(a) = \frac{1}{\sqrt{a}} V.P. \int_0^\infty \frac{2x}{\sqrt{a+x(a-x)}} e^{-x} e^{-\frac{1}{\pi i} \int_0^{x/a} \frac{\log(s)}{1-s^2} ds} dx =$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\int_0^{a-\epsilon} \frac{2x}{\sqrt{a+x(a-x)}} e^{-x} e^{-\frac{1}{\pi i} \int_0^{x/a} \frac{\log(s)}{1-s^2} ds} dx + \int_{a+\epsilon}^\infty \frac{2x}{\sqrt{a+x(a-x)}} e^{-x} e^{-\frac{1}{\pi i} \int_0^{x/a} \frac{\log(s)}{1-s^2} ds} dx \right) =$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (I_{1\epsilon} + I_{2\epsilon})$$

Haciendo el cambio de variables $x \rightarrow xa$ obtenemos

$$I_{1\epsilon} = \int_0^{1-\epsilon/a} \frac{2x}{\sqrt{1+x(1-x)}} e^{-ax} e^{-\frac{1}{\pi i} \int_0^x \frac{\log(s)}{1-s^2} ds} dx \quad (1.148)$$

Por otra parte

$$I_{2\epsilon} = -\frac{1}{\sqrt{a}} \int_{a+\epsilon}^\infty \frac{2/\sqrt{x}}{\sqrt{1+a/x(1-a/x)}} e^{-x} e^{-\frac{1}{\pi i} \int_0^{x/a} \frac{\log(s)}{1-s^2} ds} dx =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{a}} \int_{a+\epsilon}^\infty \frac{2/\sqrt{x}}{\sqrt{1+a/x}} \left(1 + \frac{a}{x} + \frac{\left(\frac{a}{x}\right)^2}{1-\frac{a}{x}} \right) e^{-x} e^{-\frac{1}{\pi i} \int_0^{x/a} \frac{\log(s)}{1-s^2} ds} dx =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{a}} \int_{a+\epsilon}^\infty \frac{2}{\sqrt{x}} \sqrt{1+\frac{a}{x}} e^{-x} e^{-\frac{1}{\pi i} \int_0^{x/a} \frac{\log(s)}{1-s^2} ds} dx - \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{a+\epsilon}^\infty \frac{2/\sqrt{x} \left(\frac{a}{x}\right)^2}{\sqrt{1+a/x} \left(1-\frac{a}{x}\right)} e^{-x} e^{-\frac{1}{\pi i} \int_0^{x/a} \frac{\log(s)}{1-s^2} ds} dx =$$

$$= I_{2\epsilon}^{(1)} + I_{2\epsilon}^{(2)}$$

donde

$$I_{2\epsilon}^{(2)} = \int_{1+\epsilon/a}^\infty \frac{2}{x\sqrt{1+x} \sqrt{1-x}} e^{-ax} e^{-\frac{1}{\pi i} \int_0^x \frac{\log(s)}{1-s^2} ds} dx$$

Nótese que $K(a) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (I_{1\epsilon} + I_{2\epsilon}^{(2)})$ se puede escribir como

$$K(a) = V.P. \int_0^\infty \frac{1}{x-1} g(x, a) dx \quad (1.149)$$

donde $g(x, a)$ es una familia de funciones uniformemente Lipschitz que satisfacen la cota $|g(x, a)| \leq \frac{C}{1+x^{3/2}}$. Además, derivando $K(a)$ se obtiene fácilmente

$$\frac{dK(a)}{da} = V.P. \int_0^\infty \frac{x}{x-1} g(x, a) dx$$

y teniendo en cuenta que $|xg(x, a)| \leq Cx^{-1/2}e^{-ax}$ obtenemos finalmente que $\left| \frac{dK(a)}{da} \right| \leq C$, de donde integrando respecto de la variable a deducimos que

$$K(a) = C_1 + O(a) \quad \text{cuando } a \rightarrow 0 \quad (1.150)$$

para alguna constante apropiada C_1 .

Por otra parte, denotando $\widetilde{K}(a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_{2\epsilon}^{(1)}$, es fácil deducir

$$\begin{aligned}\widetilde{K}(a) &= -\frac{1}{\sqrt{a}} \int_a^\infty \frac{2}{\sqrt{x}} e^{-x} e^{-\frac{1}{\pi i} \int_0^{x/a} \frac{\log(s)}{1-s^2} ds} dx - \frac{1}{\sqrt{a}} \int_a^\infty \frac{2}{\sqrt{x}} j(a/x) e^{-x} e^{-\frac{1}{\pi i} \int_0^{x/a} \frac{\log(s)}{1-s^2} ds} dx = \\ &= \widetilde{K}_1(a) + \widetilde{K}_2(a)\end{aligned}$$

donde $|j(s)| = \left| \sqrt{1+s} - 1 \right| \leq C|s|$. Haciendo el cambio de variables $\frac{x}{a} \rightarrow x$ dentro de la segunda integral y usando el hecho de que $e^{-ax} = 1 + O(ax)$ para $ax > 0$ obtenemos

$$\widetilde{K}_2(a) = C_2 + O(a^{\frac{1}{2}}) \quad \text{cuando } a \rightarrow 0 \quad (1.151)$$

Usando que $\int_0^\infty \frac{\log(s)}{1-s^2} ds = \frac{\pi^2}{4}$ podemos escribir $\widetilde{K}_1(a)$ como

$$\widetilde{K}_1(a) = -2e^{-i\frac{\pi}{4}} \Gamma(1/2) \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_a^\infty \frac{2}{\sqrt{x}} e^{-x} \left(e^{h(\frac{x}{a})} - 1 \right) dx$$

donde

$$h(x) = -\frac{1}{\pi i} \int_0^x \frac{\log(s)}{1-s^2} ds + i\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\pi i} \int_x^\infty \frac{\log(s)}{1-s^2} ds$$

Se obtiene entonces el siguiente desarrollo asintótico

$$h(x) \sim -\frac{1}{\pi i} \frac{\log(x)}{x} + O(x^{-1}) \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty \quad (1.152)$$

Podemos escribir

$$\begin{aligned}\widetilde{K}_3(a) &= \widetilde{K}_1(a) + 2e^{-i\frac{\pi}{4}} \Gamma(1/2) \frac{1}{\sqrt{a}} = -e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_1^\infty \frac{2}{\sqrt{x}} \left(e^{h(x)} - 1 \right) dx = \\ &= e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_1^\infty \frac{2}{\sqrt{x}} e^{-ax} \left(e^{h(x)} - 1 \right) dx - e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{a}} \int_a^\infty \frac{2}{\sqrt{x}} (e^{-x} - 1) \left(e^{h(x/a)} - 1 \right) dx =\end{aligned} \quad (1.153)$$

donde, en la primera integral del término de la derecha de (1.153) hemos realizado el cambio de variables $\frac{x}{a} \rightarrow x$. Usando (1.152) en el segundo término de la derecha de (1.153) obtenemos el siguiente desarrollo asintótico:

$$\widetilde{K}_3(a) = C_3 + \frac{4}{\pi i} e^{-i\frac{\pi}{4}} \Gamma(1/2) \sqrt{a} \log(a) + O(\sqrt{a}) \quad \text{cuando } a \rightarrow 0$$

donde hemos usado el hecho de que $\int_0^\infty x^{-\frac{3}{2}} (e^{-x} - 1) dx = -2\Gamma(1/2)$, que se deduce de una integración por partes.

Resumiendo, hemos obtenido el siguiente desarrollo:

$$W_1(a) = -2e^{-i\frac{\pi}{4}} \Gamma(1/2) \frac{1}{\sqrt{a}} + (C_1 + C_2 + C_3) + \frac{4}{\pi i} e^{-i\frac{\pi}{4}} 4\Gamma(1/2) \sqrt{a} \log(a) + O(\sqrt{a}) \quad \text{cuando } a \rightarrow 0 \quad (1.154)$$

Para calcular la constante $C_4 = C_1 + C_2 + C_3$ argumentamos como sigue: teniendo en cuenta que

$$\int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{x}} e^{-i\pi/4} e^{-ax} dx = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} \Gamma(1/2) \frac{1}{\sqrt{a}}$$

deducimos

$$C_4 = \lim_{a \rightarrow 0} \left(V.P. \int_0^\infty \left(\frac{2x}{\sqrt{1+x(1-x)}} e^{-\frac{1}{\pi i} \int_0^x \frac{\log(s)}{1-s^2} ds} + \frac{2}{\sqrt{x}} e^{-i\pi/4} \right) e^{-ax} dx \right)$$

y por tanto

$$C_4 = V.P. \int_0^\infty \left(\frac{2x}{\sqrt{1+x(1-x)}} e^{-\frac{1}{\pi i} \int_0^x \frac{\log(s)}{1-s^2} ds} + \frac{2}{\sqrt{x}} e^{-i\pi/4} \right) dx \quad (1.155)$$

Dividimos (1.155) como sigue

$$\begin{aligned} C_4 &= V.P. \int_0^\infty \left(\frac{2x}{\sqrt{1+x(1-x)}} + \frac{2}{\sqrt{x+1}} \right) e^{-\frac{1}{\pi i} \int_0^x \frac{\log(s)}{1-s^2} ds} dx + \\ &+ \int_0^\infty \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x+1}} \right) e^{-i\pi/4} dx + \int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{x+1}} \left(e^{-i\pi/4} - e^{-\frac{1}{\pi i} \int_0^x \frac{\log(s)}{1-s^2} ds} \right) dx = \\ &= S_1 + S_2 + S_3 \end{aligned}$$

Podemos escribir

$$S_1 = V.P. \int_0^\infty \left(\frac{2}{\sqrt{1+x(1-x)}} \right) e^{-\frac{1}{\pi i} \int_0^x \frac{\log(s)}{1-s^2} ds} dx$$

Para calcular S_1 usamos teoría elemental de variable compleja. Consideremos la integral a lo largo del semieje real positivo de la función $f(z)g(z)$ donde

$$f(z) = \frac{\sqrt{1+z}}{1-z} \frac{1}{z} \quad (1.156)$$

con $\sqrt{1+z} = \sqrt{|1+z|} e^{i(\arg(1+z))/2}$, $\arg(1+z) \in (-\pi, \pi)$, y donde

$$g(z) = e^{-\frac{1}{\pi i} \int_0^z \frac{\log(s)}{1-s^2} ds} \quad (1.157)$$

que es una función analítica en el plano complejo excepto en los intervalos $(-\infty, -1] \cup [0, \infty)$. Nótese que

$$g(re^{i0^+}) = e^{-\frac{1}{\pi i} \int_0^r \frac{\log(s)}{1-s^2} ds} \quad (1.158)$$

$$g(re^{i\pi}) = \sqrt{\frac{1-r}{1+r}} e^{-\frac{1}{\pi i} \int_0^r \frac{\log(s)}{1-s^2} ds} \quad (1.159)$$

$$g(re^{i2\pi^-}) = \frac{1-r}{1+r} e^{-\frac{1}{\pi i} \int_0^r \frac{\log(s)}{1-s^2} ds} \quad (1.160)$$

donde la función $\log(s)$ es el logaritmo real usual.

La función $f(z)g(z)$ es analítica en todo el plano complejo excepto en el semieje real positivo. Calculamos a continuación la siguiente integral:

$$\int_\Gamma dz \cdot f(z)g(z) = \sum_{i=1}^8 \int_{\Gamma_i} dz \cdot f(z)g(z) = 0 \quad (1.161)$$

donde los contornos Γ, Γ_i son como en la figura 1.7.

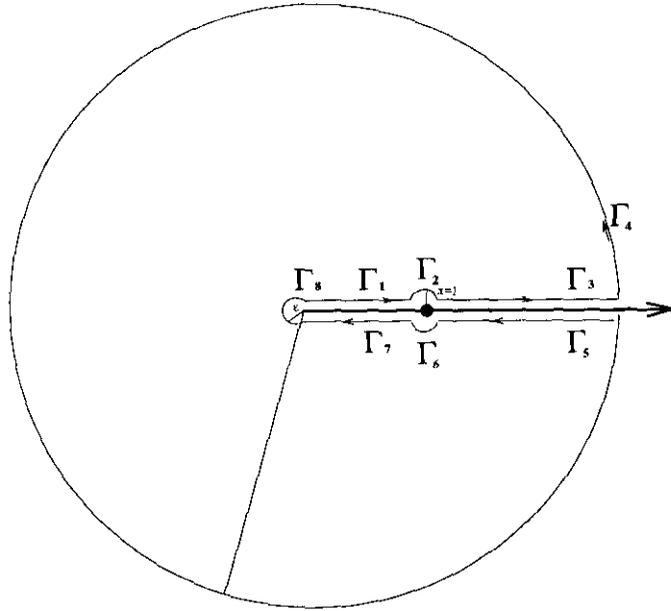


Figura 1.7: El contorno Γ en $\int_{\Gamma} dz \cdot f(z)g(z)$

Combinando (1.156) con (1.158) y (1.159) se deduce fácilmente que

$$\int_{\Gamma_1} dz \cdot f(z)g(z) + \int_{\Gamma_3} dz \cdot f(z)g(z) + \int_{\Gamma_5} dz \cdot f(z)g(z) + \int_{\Gamma_7} dz \cdot f(z)g(z) \rightarrow S_1$$

cuando $R \rightarrow \infty$ y $\epsilon \rightarrow 0$. Por otra parte

$$\int_{\Gamma_2} dz \cdot f(z)g(z) \rightarrow \sqrt{2}\pi i e^{-i\pi/8} \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0$$

donde hemos usado que $\int_0^1 \frac{\log(s)}{1-s^2} ds = \frac{\pi^2}{8}$.

Teniendo en cuenta (1.156) y (1.160) obtenemos

$$\int_{\Gamma_6} dz \cdot f(z)g(z) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0$$

Una integración sencilla conduce a

$$\int_{\Gamma_8} dz \cdot f(z)g(z) \rightarrow -2\pi i \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0$$

$$\int_{\Gamma_4} dz \cdot f(z)g(z) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty$$

Deducimos entonces a partir de (1.161) y las integrales calculadas arriba que

$$S_1 = -\pi i \sqrt{2} e^{-i\pi/8} + 2\pi i \tag{1.162}$$

Un cálculo elemental lleva a

$$S_2 = 4e^{-i\pi/4} \tag{1.163}$$

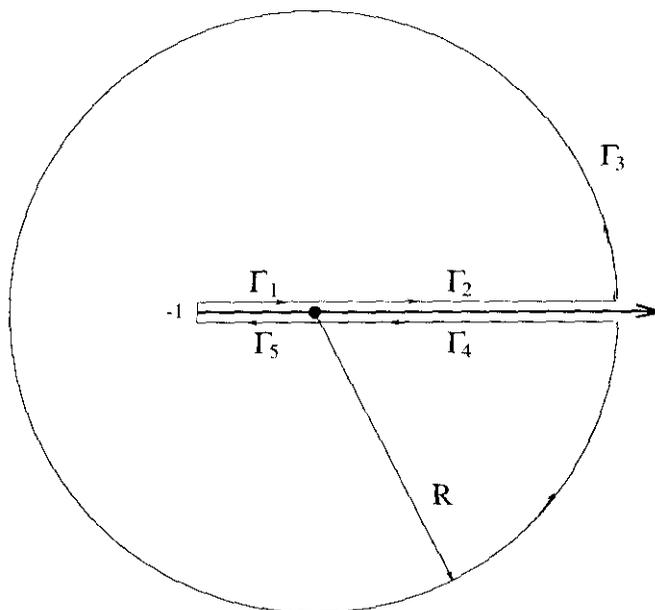


Figura 1.8: El contorno Γ en $\int_{\Gamma} dz \cdot h(z)$

Para calcular S_3 integramos a lo largo del circuito Γ de la figura 1.8

$$\int_{\Gamma} h(z) dz \equiv \int_{\Gamma} \left(e^{-i\pi/4} j(z) - (1-z)f(z)g(z) \right) dz = \sum_{i=1}^5 \int_{\Gamma_i} h(z) dz = 0$$

donde $j(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z}} = \frac{1}{\sqrt{|1+z|}} e^{-i(\arg(1+z))/2}$, $\arg(1+z) \in (0, 2\pi)$. Obsérvese que la función $h(z)$ es analítica fuera del conjunto $[-1, \infty)$.

Usando (1.156) y (1.160) se obtiene fácilmente que

$$\int_{\Gamma_2} h(z) dz + \int_{\Gamma_4} h(z) dz \rightarrow S_3 \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty \quad \text{y } \epsilon \rightarrow 0$$

Por otra parte

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Gamma_1} h(z) dz + \int_{\Gamma_5} h(z) dz \right) = 2e^{-i\pi/4} \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = 4e^{-i\pi/4}$$

Finalmente, se deduce inmediatamente que

$$\int_{\Gamma_3} h(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty$$

y juntando todos los resultados precedentes obtenemos

$$S_3 = -4e^{-i\pi/4} \quad (1.164)$$

Sumando (1.162), (1.163) y (1.164) se sigue que

$$C_4 = -\pi i \sqrt{2} e^{-i\pi/8} + 2\pi i \quad (1.165)$$

Usando (1.154) en (1.146) donde $\frac{\sigma}{2}|\xi|t = a$, así como (1.165) deducimos el desarrollo asintótico

$$\int_{\gamma} dz \cdot e^{-az} Q_{-}\left(\frac{z}{|\xi|}, 1\right) = -\frac{2}{\sqrt{a}}e^{-i\pi/4}\Gamma(1/2) + 2\pi i + \frac{4}{\pi i}\sqrt{a}\log(a)e^{-i\pi/4}\Gamma(1/2) + O(\sqrt{a}) \quad (1.166)$$

cuando $a \rightarrow 0$.

Cálculos similares producen un desarrollo para la función $W_2(a)$ definida en (1.147). Se obtiene entonces que

$$\int_{\gamma} dz \cdot e^{-az} Q_{-}\left(\frac{z}{|\xi|}, -1\right) = \frac{2}{\sqrt{a}}e^{i\pi/4}\Gamma(1/2) + 2\pi i - \frac{4}{\pi i}\sqrt{a}\log(a)e^{i\pi/4}\Gamma(1/2) + O(\sqrt{a}) \quad (1.167)$$

cuando $a \rightarrow 0$.

Llevando (1.166) y (1.167) a (1.145) llegamos a

$$f_x(0^+, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \cdot \widehat{\xi f_0(\xi)} \left(P_1(\xi, t) + 2\pi i + P_2(\xi, t) + O(\sqrt{|\xi|t}) \right) \quad (1.168)$$

donde

$$P_1(\xi, t) = -\frac{2 \operatorname{sign}(\xi)}{\sqrt{|\xi|t}} e^{-i \operatorname{sign}(\xi)\pi/4} \Gamma(1/2)$$

$$P_2(\xi, t) = \frac{4}{\pi i} \operatorname{sign}(\xi) \sqrt{|\xi|t} \log(t) e^{-i \operatorname{sign}(\xi)\pi/4} \Gamma(1/2)$$

Nótese que

$$i \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \cdot \widehat{\xi f_0(\xi)} P_1(\xi, t) = -2i \Gamma(1/2) \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \widehat{f_0(\xi)} \frac{1}{\sqrt{t}} (\xi)_{+}^{\frac{1}{2}} \quad (1.169)$$

para todo $t > 0$.

Afirmamos ahora que

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \widehat{f_0(\xi)} (\xi)_{+}^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (1.170)$$

Para probar (1.170) reescribimos (1.24) como

$$\widehat{f_0}(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{\widehat{f_0}(\lambda)}{\lambda - k} = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \widehat{f_0}(\lambda) + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{\lambda \widehat{f_0}(\lambda)}{\lambda - k}$$

Como f_0 es una función continua por (1.140) obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \widehat{f_0}(\lambda) = 0$$

y por tanto

$$\widehat{f_0}(k) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{\lambda \widehat{f_0}(\lambda)}{\lambda - k} \quad (1.171)$$

Usando (1.140) y el hecho de que $f_0 \in D(A)$ así como (1.171) podemos escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \widehat{f_0(\xi)} (\xi)_{+}^{\frac{1}{2}} = \int_{\Gamma} dk \widehat{f_0(k)} (k)_{+}^{\frac{1}{2}} \quad (1.172)$$

donde $\Gamma = R + ia$ para $a > 0$. Introduciendo (1.171) en (1.172), donde hemos usado (1.140) para justificar el cambio de orden en las integraciones y tomando el límite $a \rightarrow +\infty$, se sigue (1.170).

Por otra parte,

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}i\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\cdot\xi\widehat{f_0(\xi)}2\pi i=f_{0,r}(0)=0 \quad (1.173)$$

donde hemos usado que $f_{0,r}$ es una función continua en R por (1.140).

Finalmente

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2\pi}}i\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\cdot\xi\widehat{f_0(\xi)}\frac{4}{\pi i}\operatorname{sign}(\xi)\sqrt{|\xi|}t\log(t)e^{-i\operatorname{sign}(\xi)\pi/4}\Gamma(1/2)= \\ &= \left(e^{-i\cdot 3\pi/4}\frac{2}{\pi^2}\Gamma(1/2)\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\cdot\xi(\xi)_+^{\frac{1}{2}}\widehat{f_0(\xi)} \right) \end{aligned} \quad (1.174)$$

Juntando (1.170), (1.173), (1.174) y (1.140); se obtiene (1.141). \square

1.5.2 Comportamiento asintótico de la frontera libre para $\beta_0 \neq 0$

El siguiente paso será la discusión del comportamiento asintótico detallado de las soluciones de (1.92) y (1.132). Comenzamos con el caso $\beta_0 < 0$.

Teorema 1.4 *Sea $f_0(r) \in D(A)$ donde A es como en el Teorema 1.1. Entonces la solución de (1.92) con dato inicial $f_0(r)$ satisface*

$$f_r(r, t) \sim a(t)r^{|\rho|} \quad \text{cuando } r \rightarrow 0 \quad (1.175)$$

donde

$$|a(t)| \leq \frac{C}{t} \left(\|f_0\|_{Z_{s,\nu}^+} + \|f_{0,r}\|_{Z_{s,\nu}^+} \right) \quad \text{para } t > 0$$

Además se tiene que

$$v_y(r, 0, t) \sim b(t)r^{|\rho|} \quad \text{cuando } r \rightarrow 0$$

con $b(t)$ acotada para $t > 0$.

Demostración. Teniendo en cuenta (1.98) podemos escribir

$$\begin{aligned} \widehat{F}_r &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(-\frac{2}{\sigma} \cos(\pi\rho) e^{-\pi\rho i} \frac{1}{r(w_\epsilon)q(w_\epsilon, z)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{1}{w_\epsilon - \xi} \left(r_-(\xi)q_-(\xi, z)\widehat{H}f_0(\xi) \right) \right) = \\ &= \cos(\pi\rho) e^{-\pi\rho i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(-\frac{2}{\sigma} \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{w_\epsilon r(w_\epsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi q_-(\xi, z) r_-(\xi)\widehat{H}f_0(\xi) \right) + \\ &+ \cos(\pi\rho) e^{-\pi\rho i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(-\frac{2}{\sigma} \frac{1}{w_\epsilon r(w_\epsilon)} \left(\frac{1}{q(w_\epsilon, z)} - 1 \right) \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi q_-(\xi, z) r_-(\xi)\widehat{H}f_0(\xi) \right) + \\ &+ \cos(\pi\rho) e^{-\pi\rho i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(-\frac{2}{\sigma} \frac{1}{r(w_\epsilon)q(w_\epsilon, z)} \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{w_\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{\xi}{w_\epsilon - \xi} \left(q_-(\xi, z) r_-(\xi)\widehat{H}f_0(\xi) \right) \right) = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (I_1 + I_2 + I_3) = \widehat{J}_1 + \widehat{J}_2 + \widehat{J}_3 \end{aligned}$$

donde $w_\epsilon = k + i\epsilon$.

Teniendo en cuenta que $|\widehat{J}_2| + |\widehat{J}_3| \leq \frac{C}{1+|k|^{1+|\rho|+\delta}}$ se obtiene fácilmente que $J_2 + J_3 = 0$ para $r < 0$ así como la cota de Hölderianidad

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(r^{-(|\rho|+\delta)} (J_2 + J_3) \right) = 0$$

Por otra parte, $-ik\widehat{J}_1$ es la transformada de Fourier (en el sentido de las distribuciones temperadas) de

$$K \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\xi q_-(\xi, z) r_-(\xi) \widehat{H} f_0 \right) r^{-\rho}$$

donde $K = -\frac{\sqrt{2}}{\sigma\pi^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{\pi|\rho|t}{2}} \sin(2\pi|\rho|) \Gamma(|\rho| + 1)$.

Por tanto, tomando la transformada de Laplace inversa, obtenemos (1.175) con

$$a(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} dz \cdot e^{-zt} K \int_{-\infty}^{\infty} d\xi q_-(\xi, z) r_-(\xi) \widehat{H} f_0$$

donde γ es el contorno: $\left\{ e^{(2-|\rho|-\delta)\pi i} s, 0 < s < \infty \right\} \cup \left\{ e^{(|\rho|+\delta)\pi i} s, 0 < s < \infty \right\}$ recorrido en el sentido de las agujas del reloj

$$\begin{aligned} a(t) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{i\pi\rho} ds \cdot e^{-e^{i\pi\rho} st} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi q_-(\xi, e^{i\pi\rho} s) r_-(\xi) \widehat{H} f_0(\xi) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{(2-\rho)\pi i} ds \cdot e^{-e^{(2-\rho)\pi i} st} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi q_-(\xi, e^{(2-\rho)\pi i} s) r_-(\xi) \widehat{H} f_0(\xi) \end{aligned}$$

y argumentando como en el caso $\beta_0 = 0$ llegamos fácilmente a

$$\begin{aligned} |a(t)| &\leq C \int_{\gamma} d|z| \cdot e^{-\operatorname{Re}(z)t} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi |q_-(\xi, z)| |r_-(\xi)| |\widehat{f}_0| \leq \\ &\leq \frac{C}{t} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi |\xi|^{|\rho|} |\widehat{f}_0| \leq \frac{C}{t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\xi (|\xi|^{2s} + |\xi|^{2s+2}) |\widehat{f}_0|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\xi|^{2|\rho|} d\xi}{|\xi|^{2s} + |\xi|^{2s+2}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{C}{t} \left(\|f_0\|_{Z_{s,\nu}^+} + \|f_{0,r}\|_{Z_{s,\nu}^+} \right) \end{aligned} \quad (1.176)$$

El comportamiento asintótico de v_y se puede deducir de forma idéntica al de f usando la fórmula (1.129)

$$\begin{aligned} (-iw_{\epsilon}) \widehat{A} \widehat{F} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\cos(\pi\rho) e^{-\pi\rho i} \frac{1}{r(w_{\epsilon})q(w_{\epsilon}, z)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{1}{w_{\epsilon} - \xi} \left(r_-(\xi) q_-(\xi, z) (-i\xi) \gamma(\xi) \widehat{f}_0(\xi) \right) \right) = \\ &= \cos(\pi\rho) e^{-\pi\rho i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{w_{\epsilon} r(w_{\epsilon})} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi q_-(\xi, z) r_-(\xi) (-i\xi) \gamma(\xi) \widehat{f}_0(\xi) \right) + \\ &+ \cos(\pi\rho) e^{-\pi\rho i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{w_{\epsilon} r(w_{\epsilon})} \left(\frac{1}{q(w_{\epsilon}, z)} - 1 \right) \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi q_-(\xi, z) r_-(\xi) (-i\xi) \gamma(\xi) \widehat{f}_0(\xi) \right) + \\ &+ \cos(\pi\rho) e^{-\pi\rho i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{r(w_{\epsilon})q(w_{\epsilon}, z)} \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{w_{\epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{\xi}{w_{\epsilon} - \xi} \left(q_-(\xi, z) r_-(\xi) (-i\xi) \gamma(\xi) \widehat{f}_0(\xi) \right) \right) = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (I_1 + I_2 + I_3) = \widehat{J}_1 + \widehat{J}_2 + \widehat{J}_3 \end{aligned}$$

donde $w_\epsilon = k + i\epsilon$. Argumentando como en el caso anterior podemos concluir que

$$Af \underset{r \rightarrow 0}{\sim} c(t)r^{1+|\rho|}$$

y por tanto

$$v_y \underset{r \rightarrow 0}{\sim} b(t)r^{|\rho|}$$

y esto concluye la demostración de este Lema. \square

Procedemos a continuación a obtener un resultado similar para el caso $\beta_0 > 0$.

Teorema 1.5 *Sea $f_0(r) \in D(A)$ donde A es como en el Teorema 1.2. Entonces la solución de (1.132) con dato inicial $f_0(r)$ satisface*

$$f_{rr}(r, t) \sim \tilde{a}(t)r^{-\rho} \quad \text{cuando } r \rightarrow 0 \quad (1.177)$$

donde

$$|\tilde{a}(t)| \leq \frac{C}{t} \left(\|f_0\|_{Z_{s,\nu}^+} + \|f_{0,r}\|_{Z_{s,\nu}^+} \right) \quad \text{para } t > 0$$

Además se tiene que

$$v_{y,r}(r, 0, t) \sim \tilde{b}(t)r^{-\rho} \quad \text{cuando } r \rightarrow 0$$

con $\tilde{b}(t)$ acotada para $t > 0$.

Demostración. La prueba es análoga a la del Teorema 1.4, siendo el único cambio que en lugar de usar (1.98) usamos ahora (1.136) como punto de partida. \square

1.6 Reformulación del problema no lineal

Procedemos a continuación al estudio del problema no lineal completo (1.1)-(1.13), para datos iniciales pequeños y en el caso $\beta_0 \neq 0$.

Escribamos

$$\vec{v}(x, y, t) = \beta_0 \vec{i} + \vec{w}(x, y, t) \quad (1.178)$$

El paso siguiente consiste en transformar el dominio $\Omega(t)$ en el dominio fijo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ haciendo el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y - \eta(x, y) \cdot f(x) \end{aligned} \quad (1.179)$$

donde $\eta(x, y) = \eta(y/x)$ es una función C^∞ definida como

$$\eta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in \Omega_1 = \left\{ (x, y) : \frac{5\pi}{6} < \arctan\left(\frac{y}{x}\right) < \frac{7\pi}{6} \right\} \\ 0 & \text{si } (x, y) \in \Omega_2 = \left\{ (x, y) : -\frac{2\pi}{3} < \arctan\left(\frac{y}{x}\right) < \frac{2\pi}{3} \right\} \end{cases}$$

y donde $0 \leq \eta(x, y) \leq 1$.

En términos de estas nuevas variables

$$\begin{aligned} \partial_x &= \partial_{x'} + (-\partial_x(\eta f)) \partial_{y'} = \partial_{x'} + g_1(f, f_x, x, y) \partial_{y'} \\ \partial_y &= \partial_{y'} + (-\partial_y(\eta f)) \partial_{y'} = \partial_{y'} + g_2(f, f_x, x, y) \partial_{y'} \end{aligned} \quad (1.180)$$

donde g_1, g_2 tienen una dependencia lineal en f y f_x .

Diremos que una función $h(f, f_x, \dots, D_x^k f, x, y)$ es homogénea de grado α si haciendo formalmente el cambio de variables

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \lambda x \\ y &\rightarrow \lambda y \\ f &\rightarrow \lambda f \\ f_x &\rightarrow f_x \\ &\dots \\ D_x^k f &\rightarrow \lambda^{-k+1} D_x^k f \end{aligned}$$

en todas las variables de la función h , ésta se convierte en $\lambda^\alpha h(f, f_x, \dots, D_x^k f, x, y)$. Se puede ver fácilmente que las funciones g_1, g_2 son homogéneas de grado cero.

En términos de estas nuevas variables las ecuaciones (1.1) y (1.2) se pueden escribir como

$$\begin{aligned} -\nabla' p + \Delta' \vec{v} &= \vec{J} [p, \vec{v}, f] \\ \nabla' \cdot \vec{v} &= J_3 [\vec{v}, f] \end{aligned} \quad (1.181)$$

donde

$$\begin{aligned} \vec{J} [p, \vec{v}, f] &= \vec{b}_1(x, y, f, f_x) \frac{\partial p}{\partial y'} + a_1(x, y, f, f_x, f_{xx}) \frac{\partial \vec{v}}{\partial y'} + \\ &+ a_2(x, y, f, f_x) \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y'^2} + a_3(x, y, f, f_x) \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x' \partial y'} \end{aligned}$$

y

$$J_3 [\vec{v}, f] = g_1(f, f_x, x, y) \partial_{y'} v_x + g_2(f, f_x, x, y) \partial_{y'} v_y$$

donde \vec{b}_1, a_2, a_3 son homogéneas de orden cero y a_1 es homogénea de grado -1 y las primas en los operadores diferenciales de (1.181) significan que las derivadas se toman con respecto a las nuevas variables.

La condición de contorno sobre el substrato (1.4) es aún

$$\vec{v} = \beta_0 \vec{i} \quad (1.182)$$

Los vectores normal y tangente se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \vec{n} &= (0, -1) + \vec{n}' \\ \vec{t} &= (1, 0) + \vec{t}' \end{aligned}$$

donde

$$\vec{n}' = -(0, -1) + \frac{1}{(1 + f_x^2)^{\frac{1}{2}}} (f_x, -1) \quad (1.183)$$

y

$$\vec{t}' = -(1, 0) + \frac{1}{(1 + f_x^2)^{\frac{1}{2}}} (1, f_x) \quad (1.184)$$

Por otra parte podemos escribir el tensor de esfuerzos (1.5) como

$$T_{ij} = -p \delta_{ij} + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x'_i} \right) + \sum_l a_{ilj}(x, y, f, f_x) \frac{\partial v_l}{\partial y'} \quad (1.185)$$

donde $a_{ij}(x, y, f, f_x)$ son funciones lineales de f, f_x y homogéneas de grado cero.

Usando (1.183), (1.184) y (1.185) podemos escribir las condiciones de contorno (1.3) sobre Γ_1 en la forma

$$\frac{\partial v_x}{\partial y'} + \frac{\partial v_y}{\partial x'} = \tilde{h}_1(\vec{v}, f) \quad (1.186)$$

$$-p + 2\frac{\partial v_y}{\partial y'} = -\sigma H + \tilde{h}_2(\vec{v}, f) \quad (1.187)$$

donde

$$\tilde{h}_i(\vec{v}, f) = \sum_l c_{il}(x, f, f_x) \frac{\partial v_l}{\partial y'} + \sum_l d_{il}(x, f, f_x) \frac{\partial v_l}{\partial x'} \quad i = 1, 2$$

y donde c_{il} y d_{il} son funciones homogéneas de grado cero. Además, las funciones $c_{il}(x, f, f_x)$ y $d_{il}(x, f, f_x)$ son analíticas en las variables f, f_x , y satisfacen

$$c_{il}(x, 0, 0) = d_{il}(x, 0, 0) = 0$$

Reemplazamos ahora (1.178) en (1.181), (1.182), (1.186) y (1.187) para obtener el siguiente conjunto de ecuaciones

$$-\nabla' p + \Delta' \vec{w} = J_i(p, \vec{w}, f) \quad \text{en } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad (1.188)$$

$$\nabla' \cdot \vec{w} = J_3(f, \vec{w}) \quad \text{en } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad (1.189)$$

$$\vec{w} = 0 \quad \text{en } y' = 0, x' > 0 \quad (1.190)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial y'} + \frac{\partial w_y}{\partial x'} = h_1(\vec{w}, f) \quad \text{en } y' = 0, x' < 0 \quad (1.191)$$

$$-p + 2\frac{\partial w_y}{\partial y'} = -\sigma f_{x'x'} + h_2(\vec{w}, f) \quad \text{en } y' = 0, x' < 0 \quad (1.192)$$

donde hemos usado la expresión para la curvatura dada por (1.6), así como la linealidad de las funciones $J_i, h_1 = \tilde{h}_1$ con respecto a la velocidad y la presión. Hemos incluido en h_2 los términos de \tilde{h}_2 así como la diferencia entre la curvatura y $f_{x'x'}$. Por otra parte, la ecuación de evolución de la frontera libre (1.13) tiene la forma

$$f_t = -w_y - \beta_0 f_{x'} + f_{x'} w_x \quad (1.193)$$

Despreciando formalmente los términos cuadráticos y de órdenes superiores en las ecuaciones (1.188), (1.189), (1.190), (1.191), (1.192) y (1.193) obtendríamos el sistema lineal (1.14), (1.15), (1.16), (1.17), (1.18) que hemos estudiado en las secciones precedentes.

Nuestro objetivo es resolver el problema no lineal (1.188), (1.189), (1.190), (1.191), (1.192) y (1.193) para datos iniciales pequeños. Para ello usaremos un argumento clásico de punto fijo. Probaremos existencia y unicidad de soluciones del problema en el espacio

$$H^{\frac{1}{2}+\delta}([0, +\infty); Y) \quad (1.194)$$

donde

$$Y = Z_{s_1, \frac{\delta}{2}}^+ \cap Z_{s_2, \frac{\delta}{2}}^+ \quad (1.195)$$

para una elección adecuada de s_1, s_2 . El número $\delta > 0$ es pequeño y lo precisaremos más tarde. La elección de los espacios (1.194) y (1.195) está motivada por el hecho de que Y controla el

comportamiento asintótico de la frontera libre $f(x, t)$ tanto cerca del origen como del infinito así como la regularidad con respecto a las variables espaciales. La elección de $\frac{1}{2} + \delta$ derivadas en tiempo (1.194) es debido al hecho de que esto implica cotas L^∞ mediante las estimaciones usuales, y esto será conveniente para estimar los términos no lineales.

1.7 Algunos resultados adicionales de análisis funcional

Empezamos recordando el siguiente Lema clásico:

Lema 1.12 Sea $S(t)$ el semigrupo de translaciones de amplitud t y

$$\Delta_t f = (S(-t) - I)f$$

Entonces

$$\|D^s f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{s} \cos(\pi s) \Gamma(1 - 2s) \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+2s}} \|\Delta_t f\|_{L^2}^2$$

para $0 < s < 1$, donde $D^s f$ está definida por (1.49).

Demostración. Usando la desigualdad clásica de Plancherel, así como el hecho de que el grupo de translaciones $S(-t)$ es en espacio de Fourier el multiplicador e^{-ikt} obtenemos inmediatamente

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+2s}} \|(S(-t) - I)f\|_{L^2}^2 = \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+2s}} \int_{-\infty}^\infty dk \left| (e^{-ikt} - 1) \hat{f}(k) \right|^2 \equiv J$$

Partimos la integración en la variable k en dos trozos $\int_{-\infty}^0 + \int_0^\infty$, y hacemos el cambio de variable $|k|t \rightarrow t$. Esto lleva a

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+2s}} \left| (e^{-it} - 1) \right|^2 \int_0^\infty dk \cdot k^{2s} \left| \hat{f}(k) \right|^2 + \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+2s}} \left| (e^{it} - 1) \right|^2 \int_{-\infty}^0 dk \cdot |k|^{2s} \left| \hat{f}(k) \right|^2 = \\ &= C \|D^s f\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

con

$$C = 4 \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+2s}} \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{s} \cos(\pi s) \Gamma(1 - 2s)$$

y teniendo en cuenta la analiticidad de la función $\frac{1}{s} \cos(\pi s) \Gamma(1 - 2s)$ en el intervalo $s \in (0, 1)$ concluimos la demostración. \square

Deducimos a continuación algunas propiedades de los espacios \mathring{H}^s que hemos definido en la Sección 1.2.

Proposición 1.7 Sean $f, g \in \mathring{H}^s(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ con $0 < s < 1$. Entonces se verifica la siguiente desigualdad:

$$\|D^s(fg)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \left(\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|D^s g\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|D^s f\|_{L^2(\mathbb{R})} \right) \quad (1.196)$$

Además, si $s > \frac{1}{2}$ y $f, g \in H^s(\mathbb{R})$ entonces

$$\|fg\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{H^s(\mathbb{R})} \|g\|_{H^s(\mathbb{R})} \quad (1.197)$$

Demostración. Nótese que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+2s}} \int_{-\infty}^\infty dx |\Delta_t(fg)|^2 &= \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+2s}} \int_{-\infty}^\infty dx |f(x-t)g(x-t) - f(x)g(x)|^2 = \\ &= \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+2s}} \int_{-\infty}^\infty dx |S(-t)f\Delta_t g + g(x)\Delta_t f|^2 = \\ &\leq 2 \sup |f|^2 \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+2s}} \int_{-\infty}^\infty dx |\Delta_t g|^2 + 2 \sup |g|^2 \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+2s}} \int_{-\infty}^\infty dx |\Delta_t f|^2 \end{aligned}$$

y por tanto, por el Lema 1.12, deducimos que

$$\|D^s(fg)\|_{L^2}^2 \leq C(\sup |f|^2 \|D^s g\|_{L^2}^2 + \sup |g|^2 \|D^s f\|_{L^2}^2)$$

donde C es una constante positiva que depende de s , y (1.196) se sigue.

La desigualdad (1.197) se deduce de (1.196) así como de la clásica inclusión de Sobolev

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \leq \|f\|_{H^s(\mathbf{R})}$$

que es válida para $s > \frac{1}{2}$ (ver [2]). \square

Proposición 1.8 Sea $f, g \in Z_{s,\nu}^+ \cap Z_{\frac{1}{2},\nu}^+$ con $\nu = n + \eta$, $n = 1, 2, \dots$; $0 \leq \eta < 1$. Entonces se verifica la siguiente desigualdad:

$$\|fg\|_{Z_{s,\nu}^+}^2 \leq C \left(\|g\|_{Z_{\frac{1}{2},\nu}^+}^2 \|f\|_{Z_{s,\nu}^+}^2 + \|f\|_{Z_{\frac{1}{2},\nu}^+}^2 \|g\|_{Z_{s,\nu}^+}^2 \right) \quad (1.198)$$

Demostración. Teniendo en cuenta (1.29) y (1.30) podemos escribir

$$\begin{aligned} \|fg\|_{Z_{s,\nu}^+}^2 &= \int_{-\infty}^\infty d\lambda \left| \int_{-\infty}^\infty du \cdot e^{i\lambda u} e^{(\frac{1}{2}-s)u} f(e^u)g(e^u) \right|^2 + \\ &+ \int_{-\infty}^\infty d\lambda |\lambda|^{2\nu} \left| \int_{-\infty}^\infty du \cdot e^{i\lambda u} e^{(\frac{1}{2}-s)u} f(e^u)g(e^u) \right|^2 \equiv J_1 + J_2 \end{aligned}$$

Por las propiedades clásicas de la transformada de Fourier, y usando que $\nu = n + \eta$, obtenemos

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{-\infty}^\infty d\lambda |\lambda|^{2\eta} \left| \int_{-\infty}^\infty du \cdot e^{i\lambda u} \frac{\partial^n}{\partial u^n} \left(e^{(\frac{1}{2}-s)u} f^{(i)}(e^u)g^{(j)}(e^u) \right) \right|^2 \leq \\ &\leq C \sum_{i+j \leq n} \int_{-\infty}^\infty d\lambda |\lambda|^{2\eta} \left| \int_{-\infty}^\infty du \cdot e^{i\lambda u} e^{(\frac{1}{2}-s)u} f^{(i)}(e^u)g^{(j)}(e^u) \right|^2 \end{aligned}$$

y por tanto

$$J_1 + J_2 \leq C \sum_{i+j \leq n} \|g^{(j)} f^{(i)}\|_{Z_{s,\eta}^+}^2$$

Sea $j \leq i$. Tenemos entonces la siguiente cadena de desigualdades:

$$\int_{-\infty}^\infty d\lambda \left| \int_{-\infty}^\infty du \cdot e^{i\lambda u} e^{(\frac{1}{2}-s)u} f^{(i)}(e^u)g^{(j)}(e^u) \right|^2 \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup |g^{(j)}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \left| \int_{-\infty}^{\infty} du \cdot e^{i\lambda u} e^{(\frac{1}{2}-s)u} f^{(i)}(e^u) \right|^2 \leq \\
&\leq C \sup |g^{(j)}|^2 \sum_{l \leq i} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \left| \int_{-\infty}^{\infty} du \cdot e^{i\lambda u} \frac{\partial^l}{\partial u^l} \left(e^{(\frac{1}{2}-s)u} f(e^u) \right) \right|^2 = \\
&= C \sup |g^{(j)}|^2 \sum_{l \leq i} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda |\lambda|^{2l} \left| \int_{-\infty}^{\infty} du \cdot e^{i\lambda u} e^{(\frac{1}{2}-s)u} f(e^u) \right|^2 \leq \\
&\leq C \sup |g^{(j)}|^2 \|f\|_{Z_{s,\nu}^+}^2
\end{aligned}$$

Por otra parte, usando el Lema 1.12:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda |\lambda|^{2\eta} \left| \int_{-\infty}^{\infty} du \cdot e^{i\lambda u} e^{(\frac{1}{2}-s)u} f^{(i)}(e^u) g^{(j)}(e^u) \right|^2 = \\
&= C \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^{1+2\eta}} \int_{-\infty}^{\infty} du \left| \Delta_t(e^{(\frac{1}{2}-s)u} f^{(i)}(e^u) g^{(j)}(e^u)) \right|^2 \leq \\
&\leq 2C \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^{1+2\eta}} \int_{-\infty}^{\infty} du \left| f^{(i)}(e^{u-t}) e^{(\frac{1}{2}-s)(u-t)} \Delta_t g^{(j)}(e^u) \right|^2 + \\
&+ 2C \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^{1+2\eta}} \int_{-\infty}^{\infty} du \left| g^{(j)}(e^u) \Delta_t(e^{(\frac{1}{2}-s)u} f^{(i)}(e^u)) \right|^2 = L_1 + L_2 \quad (1.199)
\end{aligned}$$

La isometría entre los espacios $H^{i+\eta}(\mathbb{R})$ y $Z_{s,i+\eta}^+$ implica

$$L_2 \leq C \sup |g^{(j)}|^2 \|f^{(i)}\|_{Z_{s,i}^+}^2 \leq C \sup |g^{(j)}|^2 \|f\|_{Z_{s,i+\eta}^+}^2 \leq C \|g\|_{Z_{\frac{1}{2},\nu}^+}^2 \|f\|_{Z_{s,i+\eta}^+}^2 \quad (1.200)$$

donde hemos usado la desigualdad $\sup |g^{(j)}| \leq C \|g\|_{Z_{\frac{1}{2},\nu}^+}$ que es válida al ser $j \leq \nu - 1$.

Si aplicamos la siguiente desigualdad de Sobolev

$$\|h(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|h(\cdot)\|_{W^{1,1}(\mathbb{R})}$$

a la función

$$h(u) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^{1+2\eta}} \left| g^{(j)}(e^{u+t}) - g^{(j)}(e^u) \right|^2$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\sup_u \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^{1+2\eta}} \left| g^{(j)}(e^{u+t}) - g^{(j)}(e^u) \right|^2 \leq \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} du \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^{1+2\eta}} \left| g^{(j)}(e^{u+t}) - g^{(j)}(e^u) \right|^2 + \int_{-\infty}^{\infty} du \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^{1+2\eta}} \left| g^{(j+1)}(e^{u+t}) - g^{(j+1)}(e^u) \right|^2 \quad (1.201)
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables $u - t \rightarrow u$ en la integral L_1 (ver fórmula 1.199) obtenemos

$$\begin{aligned}
L_1 &= 2C \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^{1+2\eta}} \int_{-\infty}^{\infty} du \left| f^{(i)}(e^u) e^{(\frac{1}{2}-s)u} (g^{(j)}(e^{u+t}) - g^{(j)}(e^u)) \right|^2 \leq \\
&\leq 2C \left(\sup_u \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^{1+2\eta}} \left| g^{(j)}(e^{u+t}) - g^{(j)}(e^u) \right|^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} du \left| f^{(i)}(e^u) e^{(\frac{1}{2}-s)u} \right|^2
\end{aligned}$$

Finalmente, teniendo en cuenta (1.201) así como el Lema 1.12 y el hecho de que $j \leq \nu - 1$ se deduce que

$$L_1 \leq 2C \|f\|_{Z_{s,i}^+}^2 \|g\|_{Z_{\frac{1}{2},\nu}^+}^2 \quad (1.202)$$

Sumando (1.202) y (1.200) obtenemos

$$\|g^{(j)} f^{(i)}\|_{Z_{s,n}^+}^2 \leq C \|f\|_{Z_{s,\nu}^+}^2 \|g\|_{Z_{\frac{1}{2},\nu}^+}^2$$

para $\nu > \frac{1}{2}$ y $j \leq i$.

En el caso $j > i$ intercambiamos los papeles de las funciones f y g para obtener la siguiente desigualdad

$$\|g^{(j)} f^{(i)}\|_{Z_{s,n}^+}^2 \leq C \|g\|_{Z_{s,\nu}^+}^2 \|f\|_{Z_{\frac{1}{2},\nu}^+}^2$$

y esto completa la demostración. \square

Lema 1.13 Consideremos el espacio $X_{\alpha,\beta}^\nu = Z_{\alpha,\nu}^+ \cap Z_{\beta,\nu}^+$ con $\alpha < \frac{1}{2}$, $\beta > \frac{1}{2}$ y $\nu \geq \beta$. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que, dadas $f, g \in X_{\alpha,\beta}^\nu$ se tiene que

$$\|fg\|_{X_{\alpha,\beta}^\nu} \leq C \|f\|_{X_{\alpha,\beta}^\nu} \|g\|_{X_{\alpha,\beta}^\nu} \quad (1.203)$$

Además, se verifica la siguiente desigualdad:

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \leq C \|f\|_{X_{\alpha,\beta}^\nu} \quad (1.204)$$

Demostración. Solamente tenemos que usar la Proposición 1.8 y el hecho de que

$$Z_{\alpha,\nu}^+ \cap Z_{\beta,\nu}^+ \subset Z_{\frac{1}{2},\nu}^+$$

que se sigue de

$$\begin{aligned} \|f\|_{Z_{\frac{1}{2},\nu}^+} &= \|f(e^u)\|_{H^\nu(\mathbb{R})} \leq \left\| (e^{(\alpha-\frac{1}{2})u} + e^{(\beta-\frac{1}{2})u})^{-1} (e^{(\alpha-\frac{1}{2})u} + e^{(\beta-\frac{1}{2})u}) f(e^u) \right\|_{H^\nu(\mathbb{R})} \leq \\ &\leq C \left\| (e^{(\alpha-\frac{1}{2})u} + e^{(\beta-\frac{1}{2})u})^{-1} \right\|_{H^\nu(\mathbb{R})} \left\| (e^{(\alpha-\frac{1}{2})u} + e^{(\beta-\frac{1}{2})u}) f(e^u) \right\|_{H^\nu(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{Z_{\alpha,\nu}^+ \cap Z_{\beta,\nu}^+} \end{aligned} \quad (1.205)$$

donde hemos usado para la segunda desigualdad la propiedad (1.197) del espacio $H^\nu(\mathbb{R})$.

La desigualdad (1.204) es consecuencia de las desigualdades en (1.205) y de la bien conocida fórmula

$$\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \leq C \|g\|_{H^\nu(\mathbb{R})}^2$$

para $\nu > \frac{1}{2}$. \square

Necesitaremos también los siguientes espacios:

$$W_{\alpha_1,\alpha_2}^\nu = \left\{ f : [0, \pi] \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \|f\|_{W_{\alpha_1,\alpha_2}^\nu} < \infty \right\} \quad (1.206)$$

con la norma

$$\|f\|_{W_{\alpha_1,\alpha_2}^\nu}^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda (1 + |\lambda|^{2\nu} + |n|^{2\nu}) \left(|\tilde{f}_n^{-\alpha_1}|^2 + |\tilde{f}_n^{-\alpha_2}|^2 \right)$$

y donde

$$f_n(r) = \int_0^\pi d\theta \cdot e^{in\theta} f(\theta, r)$$

Lema 1.14 Consideremos el espacio $W_{\alpha_1, \alpha_2}^\nu$ con $\alpha_1 < \frac{1}{2}, \alpha_2 > \frac{1}{2}$ y $\nu > \max(1, \alpha_2)$. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que, dadas $f, g \in W_{\alpha_1, \alpha_2}^\nu$ se tiene

$$\|fg\|_{W_{\alpha_1, \alpha_2}^\nu} \leq C \|f\|_{W_{\alpha_1, \alpha_2}^\nu} \|g\|_{W_{\alpha_1, \alpha_2}^\nu} \quad (1.207)$$

Además, se verifica la siguiente desigualdad:

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \leq C \|f\|_{W_{\alpha_1, \alpha_2}^\nu} \quad (1.208)$$

así como la siguiente desigualdad de traza

$$\|f(\theta = 0, \cdot)\|_{X_{\alpha_1, \alpha_2}^{\nu-\frac{1}{2}}} + \|f(\theta = \pi, \cdot)\|_{X_{\alpha_1, \alpha_2}^{\nu-\frac{1}{2}}} \leq \|f\|_{W_{\alpha_1, \alpha_2}^\nu} \quad (1.209)$$

Demostración. La demostración del Lema 1.14 consiste en realizar un análisis de Fourier usando los métodos de los espacios de Sobolev con derivaciones fraccionarias y será omitida (argumentos de este tipo se pueden encontrar en [35]).□

Queremos probar que el problema (1.1)-(1.13) está bien puesto en los espacios $H^\alpha((-\infty, +\infty); X_{\beta_1, \beta_2}^\nu)$ donde $\frac{1}{2} < \alpha < 1, \beta_1 < \frac{1}{2}, \beta_2 > \frac{1}{2}$. Para ello serán necesarias como herramientas auxiliares algunas propiedades de los espacios $H^\alpha((-\infty, +\infty); W_{\beta_1, \beta_2}^\nu)$. Es conveniente entonces estudiar algunas propiedades de espacios abstractos $H^\alpha((-\infty, +\infty); Y)$. Recordamos que dado un espacio de Hilbert Y podemos definir el espacio $H^\alpha((-\infty, +\infty); Y)$ con la norma

$$\|f\|_{H^\alpha((-\infty, +\infty); Y)}^2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt \|f\|_Y^2 + \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^{1+2\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \|\Delta_\tau f\|_Y^2 < \infty \quad (1.210)$$

Recordamos que dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow Y$, donde Y es un espacio de Hilbert, es posible definir la transformada de Fourier $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow Y$ de forma análoga a la transformada de Fourier estándar para las funciones de variable real (ver [54], pg. 45). Esto nos permite dar una expresión para la norma de los espacios $W = H^\alpha((-\infty, +\infty); Y)$:

Lema 1.15 La norma del espacio W se puede escribir para $0 < \alpha < 1$ como

$$\|f\|_{H^\alpha((-\infty, +\infty); Y)}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(1 + \frac{\alpha}{\cos(\pi\alpha)\Gamma(1-2\alpha)} |\omega|^{2\alpha}\right) \|\hat{f}(\omega)\|_Y^2 \quad (1.211)$$

donde \hat{f} es la transformada de Fourier de f .

Además existe una constante C tal que se verifica la siguiente desigualdad:

$$\|f\|_{L^\infty((-\infty, +\infty); Y)} \leq C_1 \|f\|_W \quad (1.212)$$

Demostración. La ecuación (1.211) se puede obtener siguiendo exactamente los mismos pasos que los de la demostración del Lema 1.12 usando la teoría de las transformadas de Fourier para funciones con argumento en un espacio de Hilbert (ver [54]) para las cuales se verifican tanto la desigualdad de Plancherel como otras propiedades clásicas de la transformada de Fourier.

La desigualdad (1.212) se puede deducir como sigue:

$$\sup_t \|f\|_Y^2 \leq C \left| \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \hat{f}(\omega) \right|^2 \leq C \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(1 + |\omega|^{2\alpha}\right) \|\hat{f}(\omega)\|_Y^2 \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{1 + |\omega|^{2\alpha}} \right)$$

y por tanto, usando (1.211), obtenemos (1.212).□

Serán útiles para el análisis del problema no lineal las siguiente propiedades del espacio W :

Lema 1.16 Sea α tal que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ e Y un espacio de Hilbert con la propiedad

$$\|fg\|_Y \leq C \|f\|_Y \|g\|_Y$$

Entonces existe una constante positiva C_1 tal que:

$$\|fg\|_W^2 \leq C_1 \|f\|_W^2 \|g\|_W^2 \quad (1.213)$$

Además, si $f \in Y$ es una función que depende solamente de la variable x y $g \in W$, entonces $fg \in W$ y se tiene que

$$\|fg\|_W^2 \leq C_2 \|f\|_Y^2 \|g\|_W^2 \quad (1.214)$$

para alguna constante positiva C_2 independiente de f y g .

Demostración. Usando la definición (1.210) deducimos

$$\begin{aligned} \|fg\|_{H^\alpha((-\infty, +\infty); Y)}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \|fg\|_Y^2 + \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^{1+2\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \|\Delta_\tau(fg)\|_Y^2 \leq \\ &\leq C \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt \|f\|_Y^2 \|g\|_Y^2 + \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^{1+2\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\|f\|_Y^2 \|\Delta_\tau g\|_Y^2 + \|g\|_Y^2 \|\Delta_\tau f\|_Y^2 \right) \right) \leq \\ &\leq C \|f\|_{L^\infty((-\infty, +\infty); Y)}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt \|g\|_Y^2 + \\ &+ C \|f\|_{L^\infty((-\infty, +\infty); Y)}^2 \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^{1+2\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \|\Delta_\tau g\|_Y^2 + C \|g\|_{L^\infty((-\infty, +\infty); Y)}^2 \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^{1+2\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \|\Delta_\tau f\|_Y^2 \leq \\ &\leq C_1 \|f\|_{H^\alpha((-\infty, +\infty); Y)}^2 \|g\|_{H^\alpha((-\infty, +\infty); Y)}^2 \end{aligned}$$

donde hemos usado el Lema 1.13 en la primera desigualdad y (1.212) en la tercera.

La desigualdad (1.214) es un caso particular de (1.213) ya que la hipótesis $f(x, t) = f(x)$ implica

$$\sup_t \|f\|_Y^2 = \|f\|_Y^2$$

y esto concluye la demostración del Lema 1.16. \square

Lema 1.17 Si $f, g \in H^\alpha \left((-\infty, +\infty); X_{\beta_1, \beta_2 + \delta}^\nu \right)$ donde $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, $\beta_1 < \frac{1}{2}$, $\beta_2 > \frac{1}{2}$, $\delta > 0$ entonces

$$\|fg\|_{H^\alpha \left((-\infty, +\infty); X_{\beta_1, \beta_2 + 2\delta}^\nu \right)} \leq C \|f\|_{H^\alpha \left((-\infty, +\infty); X_{\beta_1, \beta_2 + \delta}^\nu \right)} \|g\|_{H^\alpha \left((-\infty, +\infty); X_{\beta_1, \beta_2 + \delta}^\nu \right)} \quad (1.215)$$

Demostración. La desigualdad (1.215) es consecuencia de

$$\|fg\|_{X_{\beta_1, \beta_2 + 2\delta}^\nu} = \|fg\|_{Z_{\beta_1, \nu}^+} + \left\| r^{-2\delta} f(r)g(r) \right\|_{Z_{\beta_2, \nu}^+} \leq C \|f\|_{X_{\beta_1, \beta_2 + \delta}^\nu} \|g\|_{X_{\beta_1, \beta_2 + \delta}^\nu}$$

así como de (1.210). \square

Usaremos, en lugar de funciones para las cuales el tiempo t recorre el intervalo $(-\infty, +\infty)$, funciones $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow Y$. Para hacer uso de los resultados demostrados anteriormente extendemos estas funciones de manera par a todo \mathbb{R} .

Más precisamente, dada $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow Y$, definimos $Pf : \mathbb{R} \rightarrow Y$ de la siguiente forma:

$$Pf = \begin{cases} f(t) \in Y, & \text{para } t \geq 0 \\ f(-t) \in Y, & \text{para } t < 0 \end{cases} \quad (1.216)$$

Definimos el espacio de Banach $H^\alpha([0, +\infty); Y)$ como el conjunto de funciones f tales que $Pf \in H^\alpha((-\infty, +\infty); Y)$, siendo la norma en ambos espacios la misma.

Estamos interesados en alguna expresión equivalente de esta norma que resulte más fácilmente manejable. Para ello introducimos la siguiente notación:

$$E(f) = \begin{cases} f(t) \in Y, & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases} \quad (1.217)$$

La equivalencia de normas requerida está dada por el siguiente Lema:

Lema 1.18 Sea $f(t) \in H^\alpha([0, +\infty); Y)$. Supongamos que $f_t, \widehat{E(f_t)}$ existen. El conjunto de funciones f tales que $Pf \in H^\alpha(\mathbb{R}; Y)$ ($\frac{1}{2} < \alpha < 1$) es un espacio de Banach con la norma $\|Pf\|_{H^\alpha(\mathbb{R}; Y)}$ y esta norma es equivalente a

$$\|f\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^+; Y)} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dz \left(\|\widehat{E(f)}(z)\|_Y^2 + \frac{\|\widehat{E(f_t)}(z)\|_Y^2}{|z|^{2-2\alpha}} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Demostración. Como Pf es una función par, $\frac{d}{dt}(Pf)$ es una función impar y

$$\widehat{\frac{d}{dt}(Pf)}(k) = \widehat{E\left(\frac{df}{dt}\right)}(k) - \widehat{E\left(\frac{df}{dt}\right)}(-k) \quad (1.218)$$

Por otra parte, dada fórmula para la transformada de Fourier de la derivada de una función:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk |k|^{2\alpha} \|\widehat{Pf}\|_Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk |k|^{2\alpha-2} \left\| \widehat{\frac{d}{dt}(Pf)} \right\|_Y^2$$

y entonces, usando (1.218)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk |k|^{2\alpha-2} \left\| \widehat{\frac{d}{dt}(Pf)} \right\|_Y^2 \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} dk |k|^{2\alpha-2} \left\| \widehat{E\left(\frac{df}{dt}\right)} \right\|_Y^2 \quad (1.219)$$

Nótese que como $f(t) \in H^\alpha([0, +\infty); Y)$, y $\alpha > \frac{1}{2}$ entonces existe $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$. Definimos $g(t) = f(t) - f(0)$ para $t \geq 0$. Tenemos entonces trivialmente que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk |k|^{2\alpha-2} \|\widehat{E(f_t)}\|_Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk |k|^{2\alpha-2} \|\widehat{E(g_t)}\|_Y^2$$

Al ser $g(0) = 0$, se puede ver que

$$(E(g))_t = E(g_t) \quad \text{a.e. } t \in \mathbb{R}$$

Deducimos entonces que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk |k|^{2\alpha-2} \|\widehat{E(g_t)}\|_Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk |k|^{2\alpha-2} \|(\widehat{E(g)})_t\|_Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk |k|^{2\alpha} \|\widehat{Eg}\|_Y^2$$

En la demostración de (1.211) hemos obtenido la siguiente identidad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk |k|^{2\alpha} \|\widehat{Eg}\|_Y^2 = C \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^{1+2\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \|Eg(t+\tau) - Eg(t)\|_Y^2$$

Entonces, usando que $E(g)$ se anula para $t < 0$, deducimos que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dk |k|^{2\alpha} \|\widehat{Eg}\|_Y^2 = C \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^{1+2\alpha}} \int_0^{\infty} dt \|g(t+\tau) - g(t)\|_Y^2 = \\ & = C \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^{1+2\alpha}} \int_0^{\infty} dt \|f(t+\tau) - f(t)\|_Y^2 \leq C \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^{1+2\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \|Pf(t+\tau) - Pf(t)\|_Y^2 \\ & \leq C \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^{1+2\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \|Pf(t+\tau) - Pf(t)\|_Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk |k|^{2\alpha} \|\widehat{Pf}\|_Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk |k|^{2\alpha-2} \left\| \frac{d}{dt} (\widehat{Pf}) \right\|_Y^2 \end{aligned} \quad (1.220)$$

Por otra parte

$$\|Pf\|_{L^2(\mathbb{R}, Y)} = 2 \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+, Y)} \quad (1.221)$$

Entonces, usando (1.219), (1.220) y (1.221), (1.211) así como la definición de la norma en $H^\alpha(\mathbb{R}^+; Y)$ obtenemos

$$C^{-1} \|f\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^+; Y)} \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} dz \left(\|\widehat{E(f)}(z)\|_Y^2 + \frac{\|\widehat{E(f_t)}(z)\|_Y^2}{|z|^{2-2\alpha}} \right) \right) \leq C \|f\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^+; Y)}$$

para alguna $C > 1$, lo que concluye la demostración. \square

1.8 Análisis del problema de Stokes en un dominio con frontera prefijada

En esta Sección probaremos existencia y unicidad de soluciones del sistema (1.188), (1.189), (1.190), (1.191), (1.192) para datos iniciales pequeños y para $f(r, t)$ dada y también pequeña.

Como paso preliminar estudiaremos el siguiente problema de Stokes no homogéneo:

$$-\nabla p + \Delta \vec{v} = \vec{J}(x, y, t) \quad \text{en } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad (1.222)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = J_3(x, y, t) \quad \text{en } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad (1.223)$$

$$\vec{v} = 0 \quad \text{en } y = 0, x > 0 \quad (1.224)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} = h_1(x, t) \quad \text{en } y = 0, x < 0 \quad (1.225)$$

$$-p + 2 \frac{\partial v_y}{\partial y} = h_2(x, t) \quad \text{en } y = 0, x < 0 \quad (1.226)$$

A partir de este momento consideraremos las funciones escritas en coordenadas polares. El principal resultado de esta sección es el siguiente:

Teorema 1.6 Sea ν tal que $\nu + \frac{1}{2} = 1, 2, 3, \dots$. Dadas $J_1, J_2 \in H^\alpha(\mathbb{R}^+; W_{\alpha_1-2, \alpha_2-2}^\nu)$, $J_3 \in H^\alpha(\mathbb{R}^+; W_{\alpha_1-1, \alpha_2-1}^{\nu+\frac{1}{2}})$ y $h_i \in H^\alpha(\mathbb{R}^+; X_{\alpha_1-1, \alpha_2-1}^\nu)$, entonces existe una única solución del problema (1.222), (1.223), (1.224), (1.225), (1.226) y se verifica la siguiente estimación:

$$\begin{aligned} & \|p(\theta = \pi, \cdot)\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^+; X_{\alpha_1-1, \alpha_2-1}^\nu)}^2 + \sum_{i=1}^2 \|v_i(\theta = \pi, \cdot)\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^+; X_{\alpha_1, \alpha_2}^{\nu+1})}^2 + \\ & + \|p\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^+; W_{\alpha_1-1, \alpha_2-1}^{\nu+\frac{1}{2}})}^2 + \sum_{i=1}^2 \|v_i\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^+; W_{\alpha_1, \alpha_2}^{\nu+\frac{3}{2}})}^2 \leq \\ & \leq C \left(\sum_{i=1}^2 \|J_i\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^+; W_{\alpha_1-2, \alpha_2-2}^{\nu-\frac{1}{2}})}^2 + \|J_3\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^+; W_{\alpha_1-1, \alpha_2-1}^{\nu+\frac{1}{2}})}^2 + \sum_{i=1}^2 \|h_i\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^+; X_{\alpha_1-1, \alpha_2-1}^\nu)}^2 \right) \end{aligned} \quad (1.227)$$

Demostración. Como paso preliminar, reescribiremos (1.222), (1.223), (1.224), (1.225) y (1.226) en coordenadas polares:

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right) = J_r \quad (1.228)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) = J_\theta \quad (1.229)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = J_3 \quad (1.230)$$

Obtenemos a continuación una solución particular de (1.222), (1.223) y (1.224). Como ya se indicó en la Sección 1.7, para tener en cuenta la regularidad en tiempo, extendemos de manera par las funciones J_i , v_i y p para $t < 0$. Denotemos por $\mathcal{F}(r, \theta, \omega)$ la transformada de Fourier en tiempo de una cualquiera de estas funciones. Recordemos la definición de la transformada de Mellin

$$\tilde{\mathcal{F}}^a(b, \theta, \omega) = \int_0^\infty dr \cdot r^b \mathcal{F}(r, \theta, \omega)$$

donde $b = i\lambda + a - \frac{1}{2}$, y se supone $a \in \mathbb{R}$, $a \neq n + \frac{1}{2}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Buscamos soluciones de (1.222), (1.223) y (1.224), que se puedan escribir de la siguiente forma:

$$\tilde{V}_r^{a-2} = \sum_0^\infty \tilde{V}_{r,n}^{a-2} \cos(n\theta) \quad (1.231)$$

$$\tilde{V}_\theta^{a-2} = \sum_0^\infty \tilde{V}_{\theta,n}^{a-2} \sin(n\theta)$$

$$\tilde{p}^{a-1} = \sum_0^\infty \tilde{p}_n^{a-1} \cos(n\theta)$$

Usando el hecho de que el conjunto de funciones $\{\cos(n\theta), n = 0, 1, 2, \dots\}$ así como el conjunto de funciones $\{\sin(n\theta), n = 1, 2, \dots\}$ son base ortonormal de $L^2[0, \pi]$ podemos escribir

$$\mathcal{J}_r(r, \theta) = \sum_{n=0}^\infty \mathcal{J}_{r,n} \cos(n\theta) \quad (1.232)$$

$$\mathcal{J}_\theta(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{J}_{\theta,n} \sin(n\theta) \quad (1.233)$$

$$\mathcal{J}_3(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{J}_{3,n} \cos(n\theta) \quad (1.234)$$

Insertando (1.231) y la transformada de Mellin de (1.232), (1.233), (1.234) dentro de (1.228), (1.229) y (1.230) obtenemos:

$$\begin{pmatrix} b & b^2 - (n^2 + 1) & -2in \\ -in & 2in & b^2 - (n^2 + 1) \\ 0 & -b & in \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{P}}_n^{a-1} \\ \tilde{\mathcal{V}}_{r,n}^{a-2} \\ \tilde{\mathcal{V}}_{\theta,n}^{a-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{J}}_{r,n}^a \\ \tilde{\mathcal{J}}_{\theta,n}^a \\ \tilde{\mathcal{J}}_{3,n}^{a-1} \end{pmatrix}$$

lo que implica

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{P}}_n^{a-1} \\ \tilde{\mathcal{V}}_{r,n}^{a-2} \\ \tilde{\mathcal{V}}_{\theta,n}^{a-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2n^2 - b^3 + bn^2 + b}{b^4 - 2b^2n^2 - b^2 + n^4 + n^2} & in \frac{-b^2 + n^2 + 1 + 2b}{b^4 - 2b^2n^2 - b^2 + n^4 + n^2} & \frac{b^4 - 2b^2n^2 - 2b^2 + n^4 - 2n^2 + 1}{b^4 - 2b^2n^2 - b^2 + n^4 + n^2} \\ \frac{n^2}{b^4 - 2b^2n^2 - b^2 + n^4 + n^2} & in \frac{b}{b^4 - 2b^2n^2 - b^2 + n^4 + n^2} & \frac{-b^3 + bn^2 + b - 2n^2}{b^4 - 2b^2n^2 - b^2 + n^4 + n^2} \\ in \frac{b}{b^4 - 2b^2n^2 - b^2 + n^4 + n^2} & \frac{b^2}{b^4 - 2b^2n^2 - b^2 + n^4 + n^2} & -in \frac{-2b - b^2 + n^2 + 1}{b^4 - 2b^2n^2 - b^2 + n^4 + n^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{J}}_{r,n}^a \\ \tilde{\mathcal{J}}_{\theta,n}^a \\ \tilde{\mathcal{J}}_{3,n}^{a-1} \end{pmatrix} \quad (1.235)$$

Se comprueba fácilmente que

$$\left| b^4 - 2b^2n^2 - b^2 + n^4 + n^2 \right| \geq K(1 + |\lambda|^4 + n^4)$$

para algún $K > 0$ si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq m^2 + \frac{1}{2}, m^2 + \frac{3}{2}$, $m = 0, 1, 2, \dots$

Dado el comportamiento asintótico en el infinito de todos los términos en (1.235) se deduce que

$$\begin{aligned} & (1 + |\lambda|^{2\nu+1} + |n|^{2\nu+1}) \left| \tilde{\mathcal{P}}_n^{a-1} \right|^2 + (1 + |\lambda|^{2\nu+3} + |n|^{2\nu+3}) \left(\left| \tilde{\mathcal{V}}_{r,n}^{a-2} \right|^2 + \left| \tilde{\mathcal{V}}_{\theta,n}^{a-2} \right|^2 \right) \leq \\ & \leq C \left((1 + |\lambda|^{2\nu} + |n|^{2\nu}) \left(\left| \tilde{\mathcal{J}}_{r,n}^a \right|^2 + \left| \tilde{\mathcal{J}}_{\theta,n}^a \right|^2 \right) + (1 + |\lambda|^{2\nu+1} + |n|^{2\nu+1}) \left| \tilde{\mathcal{J}}_{3,n}^{a-1} \right|^2 \right) \quad (1.236) \end{aligned}$$

Tomando ahora los valores de $a = 2 - \alpha_1, 2 - \alpha_2$, multiplicando (1.236) por $(1 + |\omega|^{2\alpha})$, integrando en λ , sumando en n e integrando en ω obtenemos que estas soluciones particulares satisfacen las estimaciones en (1.227) para el tercer y cuarto términos a la izquierda. Las estimaciones para los dos primeros términos se obtienen usando la desigualdad de traza (1.209).

Nótese que la solución particular que hemos obtenido no satisface las condiciones de contorno (1.225) y (1.226). Podemos construir una solución del problema (1.222), (1.223), (1.225), (1.226) con $\vec{\mathcal{J}}, J_3 = 0$ y la condición de contorno adicional

$$\vec{v} = (v_r, v_\theta) = (h_0, 0) \quad \text{en } y = 0, x > 0 \quad (1.237)$$

Estamos interesados en soluciones de esta forma ya que es este el tipo de términos que aparecen en la traza de las soluciones particulares de la forma (1.231).

Extendemos de manera par las soluciones y las fuentes a $t < 0$ tal y como se hizo arriba. Después de tomar la transformada de Fourier en tiempo buscamos una solución de (1.222), (1.223), (1.225), (1.226) y (1.237) en términos de la función de corriente con la forma dada en

(1.72). Argumentando como en la Sección 1.3 obtenemos que los coeficientes A, B, C, D tienen la forma

$$\begin{aligned} A &= -C \\ B &= -\frac{1}{4} \frac{(b+2)}{cb(b+1)} \widetilde{h}_2^{-a+1} - \frac{1}{2} \widetilde{h}_0^{-a} \\ C &= \frac{\widetilde{h}_1^{-a+1}}{2c(b+3)} - \frac{1}{2} \frac{s}{c} \widetilde{h}_0^{-a} \\ D &= \frac{1}{4} \frac{1}{c(b+1)} \widetilde{h}_2^{-a+1} + \frac{1}{2} \widetilde{h}_0^{-a} \end{aligned} \quad (1.238)$$

donde $s = \sin\left((i\lambda + a + \frac{1}{2})\pi\right)$ y $c = \cos\left((i\lambda + a + \frac{1}{2})\pi\right)$. Llevando (1.238) a (1.72), y agrupando los factores que están multiplicados por \widetilde{h}_0^{-a} , \widetilde{h}_1^{-a+1} y \widetilde{h}_2^{-a+1} respectivamente, obtenemos después de algunos cálculos directos la siguiente estimación:

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^j \widetilde{\Psi}^{a-2}}{d\theta^j} \right|^2 &\leq C(1+|\lambda|)^{2j-2} \left(\left| \widetilde{h}_1^{-a+1} \right|^2 + \left| \widetilde{h}_2^{-a+1} \right|^2 \right) \left(|\theta - \pi|^2 + |\theta - \pi|^4 \right) e^{2|\lambda|(\theta-\pi)} + \\ &\quad + C(1+|\lambda|)^{2j} \left| \widetilde{h}_0^{-a} \right|^2 \left(|\theta|^2 + |\theta|^4 \right) e^{2|\lambda|(\theta-\pi)} \end{aligned}$$

donde hemos usado la cancelación de los términos de orden más alto cuando $|\lambda| \rightarrow \infty$. Mediante integración en θ llegamos a

$$\int_0^\pi \left| \frac{d^j \widetilde{\Psi}^{a-2}}{d\theta^j} \right|^2 d\theta \leq C(1+|\lambda|)^{2j-5} \left(\left| \widetilde{h}_1^{-a+1} \right|^2 + \left| \widetilde{h}_2^{-a+1} \right|^2 \right) + C(1+|\lambda|)^{2j-3} \left| \widetilde{h}_0^{-a} \right|^2 \quad (1.239)$$

Tomamos ahora los valores $a = 2 - \alpha_1, 2 - \alpha_2$, y multiplicando (1.239) por $((1+|\lambda|)^{2\nu-2j+5}) \times (1+|\omega|^{2\alpha})$, integrando en λ y en ω obtenemos, usando (1.57) y la transformada de Mellin de la ecuación (1.228) con $J_r = 0$ para estimar la presión, que estas soluciones particulares satisfacen las estimaciones:

$$\|p\|_{H^\alpha(\mathbf{R}^+; W_{\alpha_1-1, \alpha_2-1}^{\nu+\frac{1}{2}})}^2 + \sum_{i=1}^2 \|v_i\|_{H^\alpha(\mathbf{R}^+; W_{\alpha_1, \alpha_2}^{\nu+\frac{3}{2}})}^2 \leq C \left(\|h_0\|_{H^\alpha(\mathbf{R}^+; X_{\alpha_1, \alpha_2}^{\nu+1})}^2 + \sum_{i=1}^2 \|h_i\|_{H^\alpha(\mathbf{R}^+; X_{\alpha_1-1, \alpha_2-1}^\nu)}^2 \right) \quad (1.240)$$

Usando el hecho de que las soluciones particulares que hemos obtenido arriba satisfacen la estimación (1.227), podemos controlar la norma de h_0 en (1.240). Sumando las dos soluciones que hemos construido a lo largo de esta demostración obtenemos las cotas enunciadas en (1.227) para el tercer y cuarto términos a la izquierda. El resto de términos se estiman usando (1.209). \square

Como siguiente paso, necesitamos estimar los términos no homogéneos y las fuentes para construir el argumento de punto fijo deseado.

Lema 1.19 Sean (\vec{w}, p, f) y $(\vec{\tilde{w}}, \tilde{p}, \tilde{f})$ un conjunto de funciones que satisfacen

$$\begin{aligned} \|f_x\|_{H^\alpha(\mathbf{R}^+; X_{\alpha_1, \alpha_2}^{\nu+1})}^2 + \|p\|_{H^\alpha(\mathbf{R}^+; W_{\alpha_1-1, \alpha_2-1}^{\nu+\frac{1}{2}})}^2 + \sum_{i=1}^2 \|w_i\|_{H^\alpha(\mathbf{R}^+; W_{\alpha_1, \alpha_2}^{\nu+\frac{3}{2}})}^2 &\leq L \\ \|\tilde{f}_x\|_{H^\alpha(\mathbf{R}^+; X_{\alpha_1, \alpha_2}^{\nu+1})}^2 + \|\tilde{p}\|_{H^\alpha(\mathbf{R}^+; W_{\alpha_1-1, \alpha_2-1}^{\nu+\frac{1}{2}})}^2 + \sum_{i=1}^2 \|\tilde{w}_i\|_{H^\alpha(\mathbf{R}^+; W_{\alpha_1, \alpha_2}^{\nu+\frac{3}{2}})}^2 &\leq L \end{aligned}$$

Denotemos por (J_i, h_i) , $(\tilde{J}_i, \tilde{h}_i)$ los correspondientes términos no homogéneos en las ecuaciones (1.188), (1.189), (1.190), (1.191) y (1.192) calculados con (\vec{w}, p, f) y $(\vec{w}, \tilde{p}, \tilde{f})$ respectivamente. Existe $L_0 > 0$ tal que para $L < L_0$ se satisface la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \|J_i\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^+; W_{\alpha_1-2, \alpha_2-2}^{\nu-\frac{1}{2}})}^2 + \|J_3\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^+; W_{\alpha_1-1, \alpha_2-1}^{\nu+\frac{1}{2}})}^2 + \sum_{i=1}^2 \|h_i\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^+; X_{\alpha_1-1, \alpha_2-1}^\nu)}^2 \leq CL^2 \\ & \left(\sum_{i=1}^2 \|J_i - \tilde{J}_i\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^+; W_{\alpha_1-2, \alpha_2-2}^{\nu-\frac{1}{2}})}^2 + \|J_3 - \tilde{J}_3\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^+; W_{\alpha_1-1, \alpha_2-1}^{\nu+\frac{1}{2}})}^2 + \sum_{i=1}^2 \|h_i - \tilde{h}_i\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^+; X_{\alpha_1-1, \alpha_2-1}^\nu)}^2 \right) \leq \\ & \leq CL \left(\|f_x - \tilde{f}_x\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^+; X_{\alpha_1, \alpha_2}^{\nu+1})}^2 + \|p - \tilde{p}\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^+; W_{\alpha_1-1, \alpha_2-1}^{\nu+\frac{1}{2}})}^2 + \sum_{i=1}^2 \|w_i - \tilde{w}_i\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^+; W_{\alpha_1, \alpha_2}^{\nu+\frac{3}{2}})}^2 \right) \end{aligned}$$

Demostración. Es una consecuencia de la analiticidad de las funciones (J_i, h_i) en las variables (\vec{w}, p, f) así como del hecho de que estas funciones son al menos cuadráticas en sus argumentos, combinado con las estimaciones para los productos de funciones que fueron demostradas en los Lemas 1.13, 1.14, 1.16 y la desigualdad de traza (1.209). \square

Dada f tal que $f_x \in H^\alpha(\mathbb{R}^+; X_{\alpha_1, \alpha_2}^{\nu+1})$ denotamos por (\vec{v}_1, p_1) la solución de (1.14)-(1.17).

Se sigue del Teorema 1.6 tomando $J_i = 0$, $h_1 = 0$ y $h_2 = f_{xx}$, la siguiente estimación a priori:

$$\|p_1\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^+; W_{\alpha_1-1, \alpha_2-1}^{\nu+\frac{1}{2}})} + \sum_{i=1}^2 \|v_{1,i}\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^+; W_{\alpha_1, \alpha_2}^{\nu+\frac{3}{2}})} \leq C \|f_x\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^+; X_{\alpha_1, \alpha_2}^{\nu+1})} \quad (1.241)$$

Concluimos la sección probando un resultado de existencia para el problema (1.188)-(1.192) para cualquier función f dada suficientemente pequeña (en algún sentido que precisaremos).

Teorema 1.7 *Existe un $\varepsilon_0 > 0$ tal que, si $\|f_x\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^+; X_{\alpha_1, \alpha_2}^{\nu+1})} \leq \varepsilon_0$, entonces existe una única solución $(\vec{w}, p) \in \left[H^\alpha(\mathbb{R}^+; W_{\alpha_1, \alpha_2}^{\nu+\frac{3}{2}}) \right]^2 \times H^\alpha(\mathbb{R}^+; W_{\alpha_1-1, \alpha_2-1}^{\nu+\frac{1}{2}})$ del problema (1.188)-(1.192). Además, esta solución satisface la siguiente estimación:*

$$\|p - p_1\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^+; W_{\alpha_1-1, \alpha_2-1}^{\nu+\frac{1}{2}})} + \sum_{i=1}^2 \|w_i - v_{1,i}\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^+; W_{\alpha_1, \alpha_2}^{\nu+\frac{3}{2}})} \leq C \|f_x\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^+; X_{\alpha_1, \alpha_2}^{\nu+1})}^2 \quad (1.242)$$

Dadas f y \tilde{f} tales que

$$\|f_x\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^+; X_{\alpha_1, \alpha_2}^{\nu+1})} + \|\tilde{f}_x\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^+; X_{\alpha_1, \alpha_2}^{\nu+1})} < \infty$$

las correspondientes soluciones (\vec{w}, p) y (\vec{w}, \tilde{p}) de (1.188)-(1.192) satisfacen la siguiente estimación:

$$\|p - \tilde{p}\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^+; W_{\alpha_1-1, \alpha_2-1}^{\nu+\frac{1}{2}})} + \sum_{i=1}^2 \|w_i - \tilde{w}_i\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^+; W_{\alpha_1, \alpha_2}^{\nu+\frac{3}{2}})} \leq C \|f_x - \tilde{f}_x\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^+; X_{\alpha_1, \alpha_2}^{\nu+1})}^2 \quad (1.243)$$

Demostración. La demostración de este resultado es un clásico punto fijo de Banach basado en las estimaciones del Teorema 1.6 y del Lema 1.19. \square

1.9 Análisis de la ecuación de evolución no lineal

En esta sección concluiremos la demostración de existencia y unicidad de soluciones del problema (1.188)-(1.193) en el caso $\beta_0 \neq 0$ y en un marco funcional adecuado. Más precisamente, probaremos existencia y unicidad de soluciones de (1.188)-(1.193) en el espacio $V = H^{\frac{1}{2}+\delta}([0, +\infty); Y)$ donde $Y = X_{s_1, s_2}^{\frac{5}{2}}$ para una elección adecuada de s_1 y s_2 que será precisada más tarde y donde el número $\delta > 0$ es pequeño.

1.9.1 Los problemas lineales no-homogéneos

Encontraremos estimaciones para la solución del problema lineal y para el problema no-homogéneo en espacios que involucran tanto la dependencia espacial como la temporal. Estas estimaciones serán cruciales en el análisis del problema no-lineal.

Usamos la siguiente notación para los espacios de soluciones, datos iniciales y términos no-homogéneos:

$$U = H^\alpha \left(\mathbb{R}^+; X_{s_1, s_2}^{\frac{5}{2}} \right)$$

$$V = X_{s_1 + \frac{1}{2} - \delta, s_2 + 1 + \delta}^{\frac{7}{2} + 2\delta}$$

$$W = X_{s_1, s_2 + 2\delta}^{\frac{5}{2} + 2\delta}$$

donde $\alpha = \frac{1}{2} + \delta$, $s_1 = 0$, $s_2 = \frac{1}{2} + |\rho| - \delta$ en el caso $\beta_0 < 0$ y $\alpha = \frac{1}{2} + \delta$, $s_1 = \frac{1}{2} - \rho + \delta$, $s_2 = \frac{3}{2} - \rho - \delta$ en el caso $\beta_0 > 0$. δ es un número positivo pequeño menor que $\frac{|\rho|}{2}$.

La ecuación de evolución (1.193) se puede reescribir como

$$f_t = -v_{1,y} - \beta_0 f_x + f_x w_x - (w_y - v_{1,y}) \quad (1.244)$$

donde la función \vec{w} es la obtenida en el Teorema 1.7 y v_1 es la solución del problema linealizado (1.14)-(1.17). Podemos escribir v_1 en función de f mediante (1.65). Por tanto, (1.244) se convierte en

$$f_t - \beta_0 f_r = -\frac{\sigma}{2\pi} V.P. \int_0^\infty d\xi \cdot \left(\frac{r}{\xi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{f_r(\xi)}{r - \xi} + Q[f] \quad (1.245)$$

donde, de (1.241) y (1.242) se deduce

$$\|Q[f]\|_U \leq C \|f_r\|_U^2 \quad (1.246)$$

Es entonces natural estudiar la siguiente versión no-homogénea de la ecuación (1.92).

$$f_t - \beta_0 f_r = -\frac{\sigma}{2\pi} V.P. \int_0^\infty d\xi \cdot \left(\frac{r}{\xi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{f_r(\xi)}{r - \xi} + j(r, t) \quad (1.247)$$

$$f(r, 0) = f_0(r) \quad (1.248)$$

donde $j(r, t)$ es un término de fuente apropiado.

Teorema 1.8 Sea $f_0 \in Y$ y sea $j(r, t)$ una función definida en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ y tal que

$$\|j(r, 0)\|_W + \|j\|_U < \infty$$

Entonces existe una única solución de (1.247) con dato inicial $f_0(r)$ y tal que

$$\|f_r\|_U < \infty$$

Además, existe una constante C tal que

$$\|f_r\|_U \leq C (\|f_0\|_V + \|j(r, 0)\|_W + \|j\|_U)$$

Demostración. Teniendo en cuenta que hemos definido en la Sección 1.7 los espacios $H^\alpha(\mathbb{R}; Y)$ mediante una extensión par en tiempo (ver fórmula 1.216) es natural considerar la función $\tilde{f}(r, t)$ definida como $\tilde{f}(r, \cdot) = P(f(r, \cdot))$ donde P es como en (1.216). Nótese que podemos obtener fácilmente una expresión para la transformada de Fourier de \tilde{f} en t como una función de la transformada de Laplace de f . Escribamos la transformada de Laplace de f como

$$F(r, z) = \int_0^\infty dt \cdot e^{-zt} f(r, t)$$

y la transformada de Fourier de \tilde{f} como

$$\tilde{F}(r, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty dt \cdot e^{i\omega t} f(r, t)$$

Un cálculo sencillo muestra entonces que

$$\tilde{F}(r, \omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} (F(r, -i\omega)) \quad (1.249)$$

De manera análoga, si denotamos por \tilde{f} la extensión impar en tiempo de $f(r, t)$, y $\tilde{F}(r, \omega)$ su correspondiente transformada de Fourier en tiempo, se tiene que

$$\tilde{F}(r, \omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} i \cdot \operatorname{Im} (F(r, -i\omega)) \quad (1.250)$$

Tomando la transformada de Laplace de (1.247) y denotando con letras mayúsculas todas las transformadas de Laplace deducimos

$$zF(r, z) = -\frac{\sigma}{2\pi} V.P. \int_0^\infty d\xi \cdot F_r(\xi, z) \left(\frac{\xi}{r}\right)^{\frac{-1}{2}} \frac{1}{r - \xi} + \beta_0 F_r(r, z) - J(r, z) + f_0(r)$$

que podemos escribir como

$$(A - z)F = J(r, z) - f_0(r) \quad (1.251)$$

donde el operador A ha sido definido en (1.93)

Podemos resolver la ecuación (1.251) exactamente igual a como se hizo en la Sección 1.4. Esto implica la siguiente fórmula

$$\begin{aligned} (\widehat{F}_r)_+(k, z) &= \cos(\pi\rho) e^{-\pi\rho i} \frac{2}{\sigma r_+(k)q_+(k, z)} \left(r_-(k)q_-(k, z)(\widehat{H}f_0 - \widehat{H}J(k, z)) \right)_+ = \\ &\equiv \widehat{K}_{1,r} + \widehat{K}_{2,r} \end{aligned} \quad (1.252)$$

$\widehat{K}_{1,r}$ y $\widehat{K}_{2,r}$ corresponden a los dos términos dentro de $(\cdot)_+$ respectivamente.

Definimos las funciones $k_1(r, t), k_2(r, t)$ tales que $k_1(0) = k_2(0) = 0$ y $k_{1,r} = F^{-1}(\widehat{k}_{1,r}), k_{2,r} = F^{-1}(\widehat{k}_{2,r})$ (donde F^{-1} es la transformada de Fourier inversa y todas las letras mayúsculas denotan transformadas de Laplace en tiempo). Las estimaciones de las funciones $k_1(r, t), k_2(r, t)$, necesarias para la construcción del argumento de punto fijo que demuestre la existencia y unicidad de soluciones del problema no lineal completo son el objeto de los dos siguientes Lemas.

Lema 1.20 Sea $f_0 \in Y$. Se verifica la siguiente estimación para $k_1(r, t)$

$$\|k_{1,r}\|_U \leq C \|f_0\|_V$$

Demostración. Por definición de la norma en el espacio X tenemos

$$\begin{aligned} \|k_{1,r}\|_U^2 &= \|k_{1,r}\|_{L^2(\mathbb{R}^+; Z_{0, \frac{5}{2}}^+)}^2 + \|k_{1,r}\|_{L^2(\mathbb{R}^+; Z_{\frac{1}{2}+|\rho|-\delta, \frac{5}{2}}^+)}^2 + \left\| D_t^{\frac{1}{2}+\delta} \widetilde{k}_{1,r} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^+; X_{0, \frac{1}{2}+|\rho|-\delta}^{\frac{5}{2}})}^2 = \\ &\equiv I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

donde \widetilde{K}_1 es la extensión par en tiempo de K_1 .

Definamos

$$A_+(k, z) = \frac{1}{q_+(k, z)} \frac{(z)_+^{\frac{1}{2}-\delta} + (z)_+^{\frac{1}{2}+\delta}}{(k)_+^{\frac{1}{2}-\delta} + (k)_+^{\frac{1}{2}+\delta}} \quad (1.253)$$

y

$$B(k, z) = q_-(k, z) \quad (1.254)$$

Entonces, aplicando el Lema 1.4 e integrando en z concluimos que

$$I_1 \leq C \|f_0\|_{X_{\frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}+\delta}^{3+\delta}}^2$$

Por otra parte, la estimación (1.94) implica

$$\int_0^\infty dt \|k_{1,r}\|_{Z_{\frac{1}{2}+|\rho|-\delta, \frac{5}{2}}^+}^2 \leq C \int_0^\infty dt \|Ak_1\|_{Z_{\frac{1}{2}+|\rho|-\delta, \frac{5}{2}}^+}^2$$

donde A es como en (1.93).

Usando la fórmula (1.129) para \widetilde{AF} y tomando A_+ y B como en (1.253) y (1.254) respectivamente deducimos por el Lema 1.4 que

$$I_2 \leq C \|f_0\|_{X_{1+|\rho|-2\delta, 1+|\rho|}^{3+\delta}}^2$$

Definamos como $k_1(r, t)$ la transformada de Laplace inversa de $K_1(r, z)$. Por la definición de la norma en el espacio U tenemos que analizar la regularidad de la función $\widetilde{k}_1(r, t)$ que es la extensión par en tiempo de k_1 . Nótese que k_1 resuelve la ecuación

$$k_{1,t} = Ak_1 \quad (1.255)$$

con dato inicial f_0 . Estamos interesados en este punto en estimar la derivada temporal de \widetilde{k}_1 que resulta ser

$$\left(\widetilde{k}_1\right)_t = \widetilde{k}_{1,t} \quad (1.256)$$

donde recordamos que $\widetilde{(\cdot)}$ denota extensión impar en t . Denotamos por $\widetilde{K}_1(r, \omega)$ la transformada de Fourier en tiempo de \widetilde{k}_1 . Tomando la transformada de Fourier en tiempo de (1.256) y usando (1.250) así como (1.255) deducimos que

$$i\omega \widetilde{K}_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} i \operatorname{Im} (AK_1(r, -i\omega)) \quad (1.257)$$

Nótese que el Lema 1.11 implica

$$\widehat{AK}_1(k, -i\omega) = \cos(\pi\rho)e^{-\pi\rho i} \frac{1}{(-ik)r_+(k)q_+(k, -i\omega)} \left(r_-(k)(-ik)q_-(k, -i\omega)\gamma(k)\widehat{f_0}(k) \right) \quad (1.258)$$

Derivando (1.257) con respecto a r , tomando su transformada de Fourier en la variable espacial e introduciendo el resultado en (1.258) obtenemos

$$\begin{aligned} i\omega \widehat{K}_{1,r} &= i \cos(\pi\rho)e^{-\pi\rho i} \frac{1}{r_+(k)q_+(k, -i\omega)} \left(r_-(k)q_-(k, -i\omega)(-ik)\gamma(k)\widehat{f_0}(k) \right)_+ - \\ &\quad - i \cos(\pi\rho)e^{-\pi\rho i} \frac{1}{r_+(k)q_+(k, i\omega)} \left(r_-(k)q_-(k, i\omega)(-ik)\gamma(k)\widehat{f_0}(k) \right)_+ \end{aligned} \quad (1.259)$$

Definimos a continuación

$$\begin{aligned} A_+(k, \pm i\omega) &= \frac{1}{q_+(k, \pm i\omega)} \\ B(k, \pm i\omega) &= q_-(k, \pm i\omega) \frac{1 \pm |\omega|^{2\delta}}{1 + |k|^{2\delta}} \end{aligned}$$

Para estimar $\left\| (i\omega)_+^{\frac{1}{2}+\delta} \widehat{K}_{1,r} \right\|_{X_{0, \frac{1}{2}+|\rho|-\delta}^{\frac{5}{2}}}$ usamos el Lema 1.4 con las elecciones de A_+ , B dadas arriba. Integración en ω y la fórmula de Plancherel conducen a

$$I_3 \leq C \|f_0\|_{X_{1, \frac{3}{2}+\delta+|\rho|}^{\frac{7}{2}+2\delta}}^2$$

Lema 1.21 Sea $j(r, t)$ una función definida en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ y tal que

$$\|j(r, 0)\|_W + \|j\|_U < \infty$$

Entonces existe una constante C tal que

$$\|k_{2,r}\|_U \leq C (\|j(r, 0)\|_W + \|j\|_U)$$

Demostración. Necesitamos estimar

$$\|k_{2,r}\|_X^2 = \|k_{2,r}\|_{L^2(\mathbb{R}^+; X_{0, \frac{1}{2}+|\rho|-\delta}^{\frac{5}{2}})}^2 + \left\| D_t^{\frac{1}{2}+\delta} \widehat{k}_{2,r} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^+; X_{0, \frac{1}{2}+|\rho|-\delta}^{\frac{5}{2}})}^2 \equiv J_1 + J_2$$

Para acotar J_1 consideramos

$$A_+(k, z) = \frac{1}{q_+(k, z)} \quad (1.260)$$

$$B(k, z) = q_-(k, z) \quad (1.261)$$

y aplicando el Lema 1.4 se sigue que

$$J_1 \leq C \|j\|_{L^2(\mathbb{R}^+; X_{0, \frac{1}{2}+|\rho|-\delta}^{\frac{5}{2}})}^2 \quad (1.262)$$

Por otra parte, para estimar J_2 escribimos

$$\begin{aligned} (-iz)_+^{\frac{1}{2}+\delta} (\widehat{K}_{2,r})_+(k, z) &= \cos(\pi\rho) e^{-\pi\rho i} \frac{2}{\sigma} \frac{1}{r_+(k)q_+(k, z)} \left(r_-(k)q_-(k, z) (-iz)_+^{\frac{1}{2}+\delta} \widehat{HJ}(k, z) \right)_+ = \\ &= \cos(\pi\rho) e^{-\pi\rho i} \frac{2}{\sigma} \frac{1}{r_+(k)q_+(k, z)} \left(r_-(k)q_-(k, z) \frac{(-iz)}{(-iz)_+^{\frac{1}{2}-\delta}} \widehat{HJ}(k, z) \right)_+ \end{aligned}$$

Usamos ahora la siguiente fórmula clásica para la transformada de Laplace de una función $f(t)$:

$$zF(z) = G(z) + f(0^+)$$

donde $g(t) = f_t(t)$ y entonces

$$\begin{aligned} (-iz)_+^{\frac{1}{2}+\delta} (\widehat{K}_{2,r})_+(k, z) &= \cos(\pi\rho) e^{-\pi\rho i} \frac{2}{\sigma} \frac{1}{r_+(k)q_+(k, z)} \left(r_-(k)q_-(k, z) \frac{\widehat{Hj}(k, t=0^+)}{(-iz)_+^{\frac{1}{2}-\delta}} \right)_+ + \\ &+ \cos(\pi\rho) e^{-\pi\rho i} \frac{2}{\sigma} \frac{1}{r_+(k)q_+(k, z)} \left(r_-(k)q_-(k, z) \frac{\widehat{HR}(k, z)}{(-iz)_+^{\frac{1}{2}-\delta}} \right)_+ \equiv \widehat{L}_{1,r} + \widehat{L}_{2,r} \end{aligned}$$

donde $\widehat{r}(k, t) = \widehat{j}_t(k, t)$.

Estimamos ℓ_1 definiendo

$$A_+(k, z) = \frac{1}{q_+(k, z)} \frac{1 + (z)_+^{2\delta}}{1 + (k)_+^{2\delta}}$$

$$B(k, z) = q_-(k, z)$$

y aplicando el Lema 1.4 de la forma usual. El resultado es

$$\|\ell_{1,r}\|_U \leq C \|j(r, 0)\|_W \quad (1.263)$$

Para estimar ℓ_2 definimos A_+ y B como en (1.260) y (1.261) y aplicamos el Lema 1.4 de nuevo. Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\|\widehat{S}(k, z)\|_{X^{\frac{s}{2}}}^2}{|z|^{1-2\delta}} \leq C \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\|\widehat{R}(z)\|_{X^{\frac{s}{2}}}^2}{|z|^{1-2\delta}} \quad (1.264)$$

donde $s = \ell_t$ y S es la transformada de Laplace en tiempo de s .

Usando (1.262) y (1.264) en el Lema 1.18 deducimos que

$$\|\ell_{2,r}\|_U \leq C \|j\|_U \quad (1.265)$$

Juntando finalmente (1.265) y (1.263), el Lema 1.21 queda demostrado. \square

1.9.2 Demostración del teorema de existencia y unicidad de soluciones globales

Como paso final procedemos a resolver el problema no lineal (1.244).

Teorema 1.9 *Sea $f_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$. Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, si $\|f_0\|_V \leq \varepsilon_0$, entonces existe una única solución del problema (1.244) en el espacio U .*

Demostración. Denotemos como $\mathcal{L}(j)$ la solución $f(r, t)$ del problema (1.247) y (1.248). Usando (1.245) podemos escribir el problema (1.244) como

$$f = \mathcal{L}(Q[f]) \quad (1.266)$$

El operador de la derecha en (1.266) es contractivo en $\{f : \|f_r\|_U \leq \varepsilon_0\}$ con la norma $\|\partial_r(\cdot)\|_U$ si ε_0 es suficientemente pequeño. Esto se deduce a partir de (1.246) y del Teorema 1.8. Un punto fijo de Banach clásico prueba el resultado. \square

Se puede demostrar un Teorema similar para el caso $\beta_0 > 0$ empleando el mismo argumento, pero usando los espacios definidos al comienzo de la Sección 1.9.

El comportamiento asintótico detallado cerca del punto de contacto en el caso $\beta_0 \neq 0$ viene dado por el siguiente resultado de regularidad para las soluciones del problema no lineal obtenidas arriba:

Teorema 1.10 *Sea $f(r, t)$ la única solución del problema (1.1)-(1.13) obtenida en el Teorema 1.9. Entonces*

$$\begin{aligned} f_r(r, t) &\sim a(t)r^{|\rho|} && \text{cuando } r \rightarrow 0 && \text{si } \beta_0 < 0 \\ f_r(r, t) &\sim \tilde{a}(t)r^{1-\rho} && \text{cuando } r \rightarrow 0 && \text{si } \beta_0 > 0 \end{aligned}$$

con $a(t)$ y $\tilde{a}(t)$ funciones acotadas.

Demostración. Nos concentramos en el caso $\rho < 0$ (el caso $\rho > 0$ es análogo). Escribimos la solución de (1.244) en la forma (1.252), tenemos en cuenta la estructura cuadrática cerca del origen del término no lineal $j = f_x w_x - (w_y - v_{1,y})$ en (1.244) (y su regularidad por lo tanto) y llevamos a cabo un análisis similar al de los teoremas 1.4 y 1.5 para concluir que los términos no lineales añaden a la solución lineal una contribución de la forma

$$\gamma(t)r^{|\rho|} \quad \text{si } \beta_0 < 0$$

en primer orden cerca del origen, con

$$\gamma(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dz \cdot e^{-zt} K \int_{-\infty}^{\infty} d\xi q_-(\xi, z) r_-(\xi) \widehat{HJ}$$

De forma análoga a (1.176) tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi q_-(\xi, z) r_-(\xi) \widehat{HJ} \leq C \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\xi (|\xi|^{2s} + |\xi|^{2s+2}) |\widehat{J}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

con $s > |\rho| - \frac{1}{2}$.

Podemos entonces escribir

$$\sup_t |\gamma(t)|^2 \leq C \|\gamma(t)\|_{H^{\frac{1}{2}+\delta}}^2 \leq C \|j\|_{H^{\frac{1}{2}+\delta}(\mathbb{R}^+; X_{0, \frac{1}{2}+|\rho|+\mu}^{\frac{5}{2}})}^2 \leq C \|f_x\|_{H^{\frac{1}{2}+\delta}(\mathbb{R}^+; X_{0, \frac{1}{2}+|\rho|-\delta}^{\frac{5}{2}})}^4$$

con $\mu > 0$ y tal que $|\rho| + \mu = 2(|\rho| - \delta)$; es decir, $\mu = |\rho| - 2\delta$ donde hemos escogido δ como en los teoremas precedentes y hemos usado el Lema 1.17 para estimar los términos analíticos. \square

Capítulo 2

Análisis de la evolución de la superficie de tubos fluidos finos

2.1 Introducción

El problema de la evolución y de la ruptura de los tubos fluidos para formar gotas ha sido estudiado desde el siglo XIX. Los orígenes se pueden encontrar en los experimentos llevados a cabo por Savart (ver [50]), quien observó la tendencia espontánea de los tubos fluidos a fragmentarse en gotas. Plateau (ver [44]) atribuyó la inestabilidad que da lugar a la ruptura a la tensión superficial. El primer estudio analítico del problema se debe a Lord Rayleigh (ver [47]) quien analizó la llamada inestabilidad de Rayleigh que describiremos a continuación. Consideremos un fluido perfecto incompresible que ocupa una región axisimétrica $\Omega(t)$ sobre el que actúan fuerzas de tensión superficial y supongamos además que la gravedad es despreciable. Las ecuaciones que gobiernan la evolución son las de Euler acopladas con la condición de equilibrio mecánico en la interfase (es decir, la presión se cancela con las fuerzas debidas a la tensión superficial) y la condición de que la interfase sea una línea fluida:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad \text{en } \Omega(t) \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{en } \Omega(t) \quad (2.2)$$

junto con la condición de contorno

$$p = \sigma H \quad \text{en } \partial\Omega(t) \quad (2.3)$$

donde σ es el coeficiente de tensión superficial y H es la curvatura media de la frontera libre que se puede escribir, para superficies axisimétricas y en términos de la distancia $h(z)$ de cada punto al eje, como

$$H = \frac{1}{h\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2}} - \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.4)$$

Nos restringiremos a estudiar soluciones con simetría cilíndrica. La simetría cilíndrica sugiere la introducción de las coordenadas cilíndricas (z, r, θ) e implica que la componente θ de cualquier

vector se anula y que podemos restringirnos al análisis de funciones que dependen únicamente en r y z .

Una masa puntual situada en un punto de la frontera libre se moverá siguiendo el campo de velocidades en ese punto para todo tiempo. Tendremos entonces que

$$V_N = \vec{v} \cdot \vec{n}$$

donde V_N es la velocidad con que se mueve la frontera en su dirección normal, o equivalentemente

$$\frac{\partial h}{\partial t} = v_r - v_z \frac{\partial h}{\partial z} \quad \text{en } \partial\Omega(t) \quad (2.5)$$

La teoría de Rayleigh describe la evolución de las pequeñas perturbaciones de la geometría cilíndrica realizando la aproximación lineal de la ecuación de evolución. En concreto, si tras linealizar las ecuaciones (2.1), (2.2), (2.3), (2.5), buscamos soluciones de la forma

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{V}(r)e^{\lambda t + ikz} \\ p &= \frac{\sigma}{R} + P(r)e^{\lambda t + ikz} \\ h &= R + Ae^{\lambda t + ikz} \end{aligned}$$

se deduce la siguiente relación de dispersión que fue obtenida por primera vez por Rayleigh

$$\lambda(k) = \pm \frac{\sqrt{\sigma\rho^{-1}}}{R} \sqrt{k(1 - k^2 R^2) \frac{I_1(kR)}{I_0(kR)}} \quad (2.6)$$

donde $I_0(x)$ e $I_1(x)$ son las funciones modificadas de Bessel de órdenes cero y uno respectivamente (ver [1]).

La relación de dispersión (2.6) consta de dos ramas. Para frecuencias bajas ($|k| < R^{-1}$) ambas ramas son reales y de signos opuestos. En particular, una de las mismas es positiva y da lugar por tanto a una inestabilidad que se denomina inestabilidad de Rayleigh. Para frecuencias $|k| > R^{-1}$ las dos ramas de (2.6) son imaginarias puras. Rayleigh evaluó la posición del máximo de la función $\lambda(k)$ es decir, el modo más inestable y a partir del valor de k en el que se alcanza calculó su longitud de onda L_{\max} :

$$L_{\max} = \frac{2\pi}{k_{\max}} = 4'508 \times 2R$$

un valor que es del mismo orden de magnitud que el tamaño de las gotas observado por Savart.

La inestabilidad de Rayleigh es la causa que explica la ruptura espontánea de tubos fluidos finos para formar gotas. Es importante observar sin embargo que el análisis realizado es un análisis linealizado que no sirve para describir la dinámica del problema de frontera libre cuando la deformación del tubo sea importante.

Los resultados que acabamos de referir conllevan la suposición de viscosidad nula (fluido perfecto). En el caso en que la viscosidad no sea despreciable es posible realizar un estudio análogo, aunque técnicamente más complicado, que da lugar a los mismos resultados cualitativos. Las ecuaciones de evolución que describen la dinámica del fluido son las de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} \quad \text{en } \Omega(t) \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{en } \Omega(t) \quad (2.8)$$

junto con las condiciones de contorno

$$T_{ij}n_i = -\sigma H n_j \quad \text{en } \partial\Omega(t) \quad (2.9)$$

donde (T_{ij}) es el tensor de esfuerzos.

(T_{ij}) viene dado, en coordenadas cilíndricas y bajo simetría cilíndrica, por

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} T_{zz} & T_{rz} \\ T_{zr} & T_{rr} \end{pmatrix} = -pI + \nu\rho \begin{pmatrix} 2\frac{\partial v_z}{\partial z} & \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} & 2\frac{\partial v_r}{\partial r} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

donde n_i es la componente i -ésima del vector normal a $\partial\Omega(t)$

$$\vec{n} = (n_z, n_r) = \frac{\left(-\frac{\partial h}{\partial z}, 1\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2}}$$

La ecuación que describe la evolución de la frontera libre sigue siendo (2.5).

El sistema completo se puede reducir, vía un adecuado reescale, a un sistema de ecuaciones análogo pero dependiendo solamente de la siguiente cantidad adimensional:

$$\mathbf{Oh} = \frac{\nu\sqrt{\rho}}{\sqrt{2\sigma}R}$$

que se conoce como número de Ohnesorge y aparece en las ecuaciones como una nueva viscosidad efectiva. El sistema es entonces

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \mathbf{Oh} \Delta \vec{v} \quad \text{en } \Omega_0(t) \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{en } \Omega_0(t) \quad (2.12)$$

junto con las condiciones de contorno

$$T_{ij}n_i = -H n_j \quad \text{en } \partial\Omega_0(t) \quad (2.13)$$

donde H es la dada por (2.4),

$$(T_{ij}) = -pI + \mathbf{Oh} \begin{pmatrix} 2\frac{\partial v_z}{\partial z} & \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} & 2\frac{\partial v_r}{\partial r} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

y $\Omega_0(t)$ es un dominio axisimétrico de sección transversal característica unidad. La ecuación de evolución de la frontera libre sigue teniendo la forma (2.5).

En ese caso es posible hacer un análisis similar al que realizó Rayleigh para la obtención de (2.6) y el resultado es la relación de dispersión dada en forma implícita por

$$\frac{1}{k} I_0(k) \lambda^2 + \left(2k I_1'(k) - \frac{4k^2 k'}{k^2 + k'^2} \frac{I_1(k)}{I_1(k')} I_1'(k') \right) \lambda - \frac{1}{2\mathbf{Oh}^2} (1 - k^2) \frac{k'^2 - k^2}{k^2 + k'^2} I_1(k) = 0 \quad (2.15)$$

con

$$k'^2 = \lambda + k^2$$

Aunque la relación de dispersión (2.15) es habitual en la literatura (ver por ejemplo [39]) no es fácil encontrar en la misma una descripción detallada de todas las ramas $\lambda = \lambda(k)$. Dicho análisis se ha incluido en el apéndice A por conveniencia del lector. Existen infinitas ramas $\lambda = \lambda(k)$, pero el resultado principal es cualitativamente similar al obtenido para la relación de dispersión de Rayleigh: de entre todas las ramas definidas por (2.15) existe una única inestable para $|k| < 1$ y la región $|k| > 1$ es de estabilidad.

El tratamiento analítico del sistema de ecuaciones en derivadas parciales (2.11), (2.12), (2.13), (2.5) no es sencillo. Por ello diversos autores han propuesto estudiar este problema en diversos límites asintóticos (ver por ejemplo [12], [13], [34], [37], [42] o [43]). El límite más usual corresponde a tubos extremadamente delgados. En este límite el problema de frontera libre (2.11), (2.12), (2.13), (2.5) se puede reducir a un sistema de ecuaciones en derivadas parciales para dos cantidades escalares $h(z, t)$ y $v(z, t)$ que describen respectivamente la altura de la frontera libre y la componente z de la velocidad y que dependen sólo de la variable espacial z .

Presentamos a continuación, a modo de ejemplo, la derivación realizada por J. B. Keller y Lu Ting (ver [55]) de uno de estos modelos simplificados en el caso particular de un fluido perfecto. La hipótesis esencial que se realiza en la derivación de este tipo de modelos "unidimensionales" es que las longitudes características en la dirección del eje de simetría son mucho mayores que la sección transversal del tubo. Escribamos el sistema (2.1), (2.2) en coordenadas cilíndricas r, θ, z :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} &= -\frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} &= 0 \end{aligned}$$

e introduzcamos la nueva variable $r = \varepsilon \tilde{r}$ así como la nueva función $v_r = \varepsilon \tilde{v}_r$ donde ε es una longitud característica pequeña del orden del diámetro del tubo. El sistema se reduce entonces, en el límite $\varepsilon \rightarrow 0$, a

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \tilde{v}_r \frac{\partial v_z}{\partial \tilde{r}} &= -\frac{\partial p}{\partial z} \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial \tilde{r}} \\ \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{v}_r}{\tilde{r}} &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución, teniendo en cuenta la condición (2.3) y en el grado de aproximación realizado, es

$$\begin{aligned} v_z(\tilde{r}, z, t) &= v_0(z, t) \\ \tilde{v}_r(\tilde{r}, z, t) &= -\frac{v_{0,z}(z, t)\tilde{r}}{2} \\ p(\tilde{r}, z, t) &= \frac{1}{h(z, t)} \end{aligned}$$

donde $v_0(z, t)$ satisface la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial z} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial z} \quad (2.16)$$

Por otra parte, la ecuación (2.5) se reduce, en este límite, a

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v_0 \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{h}{2} \frac{\partial v_0}{\partial z} \quad (2.17)$$

En [55] se estudia una familia completa de soluciones autosimilares de (2.16) y (2.17) que dan lugar a ruptura en tiempo finito.

La deducción del límite asintótico unidimensional en el caso en el que se preserva la viscosidad es algo distinta y será hecha en detalle en la segunda Sección donde deduciremos el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales para $v_0(z, t)$ y $h(z, t)$:

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial z} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial z} + \mu \frac{1}{h^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(h^2 \frac{\partial v_0}{\partial z} \right) \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v_0 \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{h}{2} \frac{\partial v_0}{\partial z} \quad (2.19)$$

donde μ es un parámetro real positivo.

Este sistema de ecuaciones ha sido obtenido por diversos autores (ver por ejemplo [13], [14] y [39]).

En este Capítulo abordaremos el estudio del sistema de ecuaciones (2.18) y (2.19) en dos casos límites del mismo: el límite $\mu = 0$ (que corresponde al sistema de [55]) y el límite asintótico $\mu \rightarrow \infty$. Se describirán diversos mecanismos de formación de singularidades en ambos casos. Para ello introducimos métodos de integración explícita usando una formulación en términos de coordenadas lagrangianas.

A continuación describiremos en detalle el plan de este Capítulo. En la segunda Sección deduciremos de forma detallada el problema (2.18) y (2.19) a partir del problema de frontera libre (2.11), (2.12), (2.13), (2.5) mediante adecuados límites asintóticos. En la Sección 2.3 obtendremos una reformulación del sistema (2.18) y (2.19) usando coordenadas lagrangianas. Dicha formulación jugará un papel esencial ya que en los límites asintóticos $\mu = 0$ y $\mu = \infty$ podemos llevar a cabo integraciones explícitas. En la cuarta Sección estudiaremos las cuestiones de existencia y unicidad locales del sistema. En la quinta Sección abordaremos el análisis del sistema (2.16), (2.17) que corresponde al límite asintótico $\mu = 0$ del sistema (2.18), (2.19). En particular se discuten en detalle diversos mecanismos de ruptura de tubos fluidos para dicho problema. En la Sección 2.6 analizamos el límite de viscosidad elevada que corresponde formalmente a hacer $\mu \rightarrow \infty$ en (2.18) y (2.19). En la Sección 2.7 se estudia un sistema parecido a (2.18), (2.19) que se obtiene cuando se realiza el mismo tipo de aproximación unidimensional en el problema de frontera libre (2.11), (2.12), (2.13), (2.5) y los efectos de la tensión superficial son despreciables.

2.2 Límites asintóticos distinguidos

El problema que estamos considerando depende de varios parámetros físicos que son la densidad ρ , la viscosidad cinemática ν y el coeficiente de tensión superficial σ . Supondremos además que los datos iniciales dependen de dos longitudes características que son el diámetro transversal D y una longitud característica en la dirección del eje del tubo L , así como de una velocidad

característica U . Si recordamos que las magnitudes físicas fundamentales son tres: masa, longitud y tiempo, es fácil concluir la existencia de un reescala que deja el sistema en función de 3 parámetros adimensionales.

El reescala en cuestión es:

$$\tilde{t} = \frac{U}{D}t, \quad \tilde{z} = \frac{z}{L}, \quad \tilde{v}_r = \frac{v_r}{U}, \quad \tilde{v}_z = \frac{D}{LU}v_z, \quad \tilde{p} = \frac{D^2}{\rho U^2 L^2}p, \quad \tilde{r} = \frac{r}{D} \quad (2.20)$$

y los parámetros adimensionales son: el número de Ohnesorge

$$\mathbf{Oh} = \frac{\nu\sqrt{\rho}}{\sqrt{\sigma D}}$$

que se puede considerar como una medida de la intensidad de las fuerzas de viscosidad en relación a las fuerzas de capilaridad, el número de Weber

$$\mathbf{We} = \frac{\rho U^2 D}{\sigma}$$

que mide la relación entre la energía cinética y la energía elástica, y un parámetro característico

$$\eta = \frac{L}{D}$$

que mide el tamaño de las perturbaciones longitudinales con respecto al diámetro del tubo.

Obtenemos así, omitiendo tildes, el sistema de Navier-Stokes que reescribimos en la forma siguiente

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta^2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{1}{\eta^2} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mathbf{Oh}}{\mathbf{We}^{\frac{1}{2}} \eta^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad \text{en } \Omega(t) \\ \frac{1}{\eta^2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mathbf{Oh}}{\mathbf{We}^{\frac{1}{2}} \eta^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} \right) \quad \text{en } \Omega(t) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0 \quad \text{en } \Omega(t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde a partir de ahora $\Omega(t)$ será un dominio axisimétrico con radio característico del orden de la unidad y con variaciones longitudinales características del orden de la unidad.

Las condiciones de contorno adquieren la forma

$$T_{ij} n_j = -\frac{1}{\eta^2 \mathbf{We}} H n_i \quad \text{en } \partial\Omega(t) \quad (2.22)$$

con

$$H = \frac{1}{h(1+h^2/\eta^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{h''}{\eta^2(1+h^2/\eta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

y

$$(T_{ij}) = -p\delta_{ij} + \frac{\mathbf{Oh}}{\mathbf{We}^{\frac{1}{2}} \eta^2} \begin{pmatrix} 2\frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial z} + \eta\frac{\partial v_z}{\partial r} \\ \frac{1}{\eta}\frac{\partial v_r}{\partial z} + \eta\frac{\partial v_z}{\partial r} & 2\frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

La ecuación de evolución de la frontera viene dada por

$$h_t = v_r - v_z h' \quad (2.23)$$

Los datos iniciales, ahora del orden de la unidad, son

$$\begin{aligned} h(z, t = 0) &= h_1(z) \\ \vec{v}(r, z, t = 0) &= \vec{h}_2(r, z) \end{aligned}$$

donde hemos de imponer $\text{div}(\vec{h}_2) = 0$.

Interesa averiguar qué ocurre en cada punto de este espacio de parámetros. Nosotros buscaremos en esta sección algunos límites asintóticos distinguidos.

El límite unidimensional: $\text{Oh} \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow \infty$

El primer límite que estudiaremos es el de tubos extremadamente finos ($D \ll L$). Si tenemos en cuenta el reescale dado por (2.20) vemos que esta situación se corresponde con $\text{Oh} \rightarrow \infty$ y $\eta \rightarrow \infty$. En el orden mas bajo el sistema (2.21) se reduce a

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) &= 0 & (2.24) \\ -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r}{r^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) &= 0 \end{aligned}$$

donde $\tilde{p} = (\text{We}^{\frac{1}{2}} \eta^2 / \text{Oh}) p$. Las soluciones del problema (2.24) acotadas en el origen son

$$\begin{aligned} v_z &= v_0(z, t) \\ v_r &= -\frac{1}{2} v_0'(z, t) r \\ \tilde{p} &= p_0(z, t) \end{aligned}$$

Las condiciones de contorno (2.22) en los órdenes más bajos son

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 \quad \text{en } r = h(z, t) \quad (2.25)$$

$$-\tilde{p} - v_0'(z, t) = -\frac{1}{\text{Oh} \cdot \text{We}^{\frac{1}{2}} h} \quad \text{en } r = h(z, t) \quad (2.26)$$

La primera se satisface trivialmente y de la segunda se obtiene \tilde{p} . La función $v_0(z, t)$ queda indeterminada en este orden. Es importante observar que el límite asintótico considerado es muy singular, ya que la condición de contorno (2.25) se satisface trivialmente para cualquier solución de la ecuación (2.24). Como consecuencia de esto será necesario acudir a órdenes superiores de desarrollo asintótico. No entraremos en un análisis matemático riguroso de este paso al límite que por otra parte se usa frecuentemente en la literatura (ver [12], [13], [14], [39].)

Buscamos a continuación correcciones al primer orden en potencias de η^{-2} . Más concretamente, introducimos

$$\begin{aligned} v_z &= v_0(z, t) + \tilde{v}_z / \eta^2 \\ v_r &= -\frac{1}{2} v_0'(z, t) r + \tilde{v}_r / \eta^2 \\ p &= \frac{\text{Oh}}{\text{We}^{\frac{1}{2}} \eta^2} \left(p_0(z, t) + \bar{p} / \eta^2 \right) \end{aligned}$$

en el sistema de Navier-Stokes para obtener, en el orden más bajo,

$$v_{0,t} + v_0 v'_0 = -\frac{\mathbf{Oh}}{\mathbf{We}^{\frac{1}{2}}} p'_0 + \frac{\mathbf{Oh}}{\mathbf{We}^{\frac{1}{2}} \eta^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial r} \right) + v''_0 \right) \quad (2.27)$$

$$\left(-\frac{1}{2} v'_{0,t} + \frac{1}{4} v''_0 - \frac{1}{2} v_0 v''_0 \right) r = -\frac{\mathbf{Oh}}{\mathbf{We}^{\frac{1}{2}} \eta^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \frac{\mathbf{Oh}}{\mathbf{We}^{\frac{1}{2}} \eta^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} \right) - \frac{r}{2} v'''_0 - \frac{\tilde{v}_r}{r^2} \right) \quad (2.28)$$

$$0 = \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{v}_r) \quad (2.29)$$

De (2.27) y (2.29) se deduce

$$\begin{aligned} \tilde{v}_z &= v_2(z, t) r^2 \\ \tilde{v}_r &= -\frac{1}{4} v'_2(z, t) r^3 \end{aligned}$$

donde $v_2(z, t)$ es una cierta función que se puede calcular en función de $v_0(z, t)$ y $p_0(z, t)$ a partir de (2.27).

De (2.28) obtenemos

$$\bar{p} = p_2(z, t) r^2$$

Las condiciones de contorno serán en el orden inferior

$$2v_2 r - \frac{1}{2} v''_0 r - 3h' v'_0 = 0 \quad \text{en } r = h(z, t) \quad (2.30)$$

$$-p_0 - v'_0(z) = -\frac{1}{\mathbf{Oh} \cdot \mathbf{We}^{\frac{1}{2}} h} \quad \text{en } r = h(z, t) \quad (2.31)$$

La ecuación de evolución es

$$h_t + v_0 h' = -\frac{1}{2} v'_0 h \quad (2.32)$$

De (2.30) y (2.31) deducimos

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{1}{4} v''_0 + 3 \frac{h'}{2h} v'_0 \\ p_0 &= -v'_0(z, t) + \frac{1}{\mathbf{Oh} \cdot \mathbf{We}^{\frac{1}{2}} h} \end{aligned}$$

que introducidos en (2.27) conduce a

$$v_{0,t} + v_0 v'_0 = \frac{1}{\mathbf{We}} \frac{h'}{h^2} + \frac{\mathbf{Oh}}{\mathbf{We}^{\frac{1}{2}} \eta^2} \left(6 \frac{h'}{h} v'_0 + 3v''_0 \right) \quad (2.33)$$

Hemos llegado así al siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$v_{0,t} + v_0 v'_0 = \mathbf{We}^{-1} \frac{h'}{h^2} + \mu \frac{1}{h^2} \left(h^2 v'_0 \right)' \quad (2.34)$$

$$h_t + v_0 h' = -\frac{1}{2} v'_0 h \quad (2.35)$$

donde $\mu = 3 \frac{\mathbf{Oh}}{\mathbf{We}^{\frac{1}{2}} \eta^2}$. Este límite lo denominaremos unidimensional y al sistema de ecuaciones (2.34), (2.35) sistema unidimensional. En los parámetros μ y \mathbf{We} podemos identificar tres casos límite interesantes que son los que consideraremos en este capítulo:

1.- Límite unidimensional perfecto ($\mu = 0$, $\mathbf{We} = 1$).

2.- Límite unidimensional de Stokes cuasiestacionario ($\mu = \infty$, $\mathbf{We} = 1$). Introducimos $h = \mu^{-1}\bar{h}$ para obtener en dicho límite el sistema

$$0 = \frac{\bar{h}'}{\bar{h}^2} + \frac{1}{\bar{h}^2} (\bar{h}^2 v_0')' \quad (2.36)$$

$$\bar{h}_t + v_0 \bar{h}' = -\frac{1}{2} v_0' \bar{h} \quad (2.37)$$

que es el (2.34), (2.35) ignorando los términos que provienen de la inercia.

3.- Límite unidimensional sin tensión superficial ($\mathbf{We} \rightarrow \infty$).

El límite unidimensional ha sido frecuentemente estudiado en la literatura. En [34], [37], [42], [43] aparecen intentos de formalizar una teoría unidimensional consistente para el problema de los tubos fluidos haciendo ciertas suposiciones ad hoc. Es en [6] y [23] donde aparece una primera justificación. Estas ecuaciones se han usado posteriormente para resolver cuestiones relativas a la formación y el control de gotas secundarias en [7], [8], [9], [10] y a la evolución de puentes líquidos en [38].

Siguiendo el modelo perfecto original de Rayleigh, en [55] se deduce un límite singular unidimensional que es precisamente el dado por (2.18) y (2.19) con $\mu = 0$.

2.3 La formulación Lagrangiana del sistema unidimensional

En esta sección describiremos una nueva representación del sistema unidimensional para la evolución de la frontera libre de un tubo fluido en términos de una única ecuación en derivadas parciales. Esto se hará escribiendo las ecuaciones (2.18), (2.19) usando la representación Lagrangiana en lugar de la Euleriana.

En la especificación Lagrangiana del estado dinámico en el interior de un fluido, estudiamos la evolución de un punto material. Asignamos a tal punto su vector posición \vec{s} en el instante inicial t_0 y consideramos toda cantidad F como una función de \vec{s} y el tiempo t . Las coordenadas z_i son también funciones de \vec{s} y t . Las componentes de la velocidad v_i y de la aceleración a_i están dadas por

$$v_i = \frac{\partial z_i}{\partial t}, \quad a_i = \frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2} \quad (2.38)$$

Recordemos que el sistema unidimensional se puede escribir como

$$(h^2)_t + (vh^2)_z = 0 \quad (2.39)$$

$$v_t + vv_z = \frac{h_z}{h^2} + \mu \frac{1}{h^2} (h^2 v_z)_z \quad (2.40)$$

y que está sujeto a dos condiciones iniciales

$$\begin{aligned} h(z, 0) &= h_0(z) \\ v(z, 0) &= v_0(z) \end{aligned}$$

Supondremos que las funciones $h_0(z)$ y $v_0(z)$ son suficientemente regulares, que existe

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} h_0(z) = K$$

y que

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} v_0(z) = 0.$$

La solución de (2.39), (2.40) que buscamos debe satisfacer también $v(z, t) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$ y una condición de estacionariedad del perfil $h(z, t)$ en el infinito y que nosotros explicitamos imponiendo

$$\frac{h(z, t)}{h_0(z)} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 1$$

En primer lugar resolvemos la ecuación (2.39) para un campo de velocidades $v(z, t)$ dado. Definimos la familia de curvas características $z(s, t)$ como las soluciones de

$$\begin{aligned} \frac{dz(s, t)}{dt} &= v(z(s, t), t) \\ z(s, 0) &= s \end{aligned} \quad (2.41)$$

Si derivamos las expresiones anteriores con respecto a s a t constante obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dz_s(s, t)}{dt} &= \frac{\partial v(z(s, t), t)}{\partial z} z_s(s, t) \\ z_s(s, 0) &= 1 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Sea $G(s, t) = h^2(z(s, t), t)z_s(s, t)$. Evaluamos su derivada con respecto a t a s constante para deducir

$$\frac{dG}{dt} = \left(\frac{\partial h^2}{\partial t} + \frac{\partial h^2}{\partial z} z_t \right) z_s + h^2 z_{st} = \left(\frac{\partial h^2}{\partial t} + \frac{\partial h^2}{\partial z} v + h^2 \frac{\partial v}{\partial z} \right) z_s = 0 \quad (2.43)$$

donde hemos utilizado (2.42) y la ecuación (2.39). De (2.43) concluimos que G es constante a lo largo de las características y por tanto, usando (2.42) llegamos finalmente a la ecuación

$$h^2(s, 0) = h^2(z(s, t), t)z_s(s, t)$$

y de ahí

$$h^2(z(s, t), t) = \frac{h^2(s, 0)}{z_s(s, t)} \quad (2.44)$$

que junto con (2.41) nos da la solución de (2.39) para un campo de velocidades $v(z, t)$ dado.

La ecuación (2.40) es de tipo convectivo con fuente. Se puede escribir como

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial z} + \mu \frac{1}{h^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(h^2 \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (2.45)$$

En términos de las características, la ecuación (2.45) es

$$\frac{dv(z(s, t), t)}{dt} = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{h} + \mu \frac{1}{h^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(h^2 \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (2.46)$$

con

$$v(s, 0) = v_0(s)$$

el campo de velocidades en $t = 0$.

Teniendo en cuenta que $\partial_z = \frac{1}{z_s} \partial_s$ y eliminando h de (2.46) mediante (2.44) obtenemos la siguiente ecuación en derivadas parciales para $z(s, t)$:

$$z_{tt} + \frac{1}{z_s} \left(\sqrt{\frac{z_s(s, t)}{h^2(s, 0)}} \right)_s - \mu \frac{z_s(s, t)}{h^2(s, 0)} \frac{1}{z_s(s, t)} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{h^2(s, 0)}{z_s^2(s, t)} \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} \right) \quad s \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} z(s, 0) &= s \\ z_t(s, 0) &= v_0(s) \end{aligned}$$

Sobre v_0 imponemos la condición

$$v_0(s) \xrightarrow{s \rightarrow \pm\infty} 0$$

que corresponde a un fluido estacionario en el infinito. Impondremos la condición de anulación de la velocidad en el infinito para todo instante, que equivale a

$$z_t(s, t) \xrightarrow{s \rightarrow \pm\infty} 0 \quad (2.47)$$

Introduzcamos la nueva variable espacial $s' = \int_0^s h^2(\xi, 0) d\xi$, en término de la cual llegamos a la siguiente ecuación

$$u_{tt} - \left(\frac{1}{\sqrt{u}} \right)_{s't'} = -\mu \left(\frac{1}{u} \right)_{s't'} \quad s' \in \mathbb{R}, t \geq 0 \quad (2.48)$$

para $u = z_{s'}$. Las condiciones iniciales son ahora

$$\begin{aligned} u(s', 0) &= \frac{1}{h^2(s', 0)} \\ u_t(s', 0) &= v_{0,s}(s') \end{aligned} \quad (2.49)$$

Observemos que el primer término de la izquierda en (2.48) proviene de los efectos inerciales y el segundo de la tensión superficial. El término de la derecha daría cuenta del efecto de la viscosidad.

Los datos iniciales $(u(s', 0), u_t(s', 0)) = (u_0(s'), u_1(s'))$ que consideraremos son regulares, con primera componente estrictamente positiva y tales que

$$\begin{aligned} u_0(s') &\rightarrow K^{-2} \text{ cuando } |s'| \rightarrow \infty \\ u_1(s') &\rightarrow 0 \text{ cuando } |s'| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.50)$$

Impondremos sobre las soluciones de (2.48) las siguientes condiciones de comportamiento asintótico en el infinito:

$$\begin{aligned} u(s', t) &\rightarrow K^{-2} \text{ cuando } |s'| \rightarrow \infty \\ u_t(s', t) &\rightarrow 0 \text{ cuando } |s'| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.51)$$

La explosión de una solución de (2.48) equivale a la ruptura del tubo (anulación de $h(z, t)$) en virtud de la ecuación (2.44).

Particularizamos a continuación las ecuaciones a los tres casos que estudiaremos en este capítulo. La formulación lagrangiana del sistema unidimensional en el caso de un fluido perfecto llevaría a una ecuación de la forma

$$u_{tt} - \left(\frac{1}{\sqrt{u}} \right)_{s's'} = 0 \quad s' \in \mathbb{R}, t \geq 0 \quad (2.52)$$

con las condiciones iniciales (2.49).

En la formulación lagrangiana del sistema unidimensional para un fluido de Stokes desaparece el término derivado de la inercia de la ecuación (2.48) y la ecuación resultante es

$$- \left(\frac{1}{\sqrt{u}} \right)_{s's'} + \mu \left(\frac{1}{u} \right)_{s's't} = 0 \quad s' \in \mathbb{R}, t \geq 0 \quad (2.53)$$

En la formulación lagrangiana del sistema unidimensional para un fluido sin tensión superficial desaparece el término derivado de la tensión superficial de la ecuación (2.48) y la ecuación resultante es

$$u_{tt} + \mu \left(\frac{1}{u} \right)_{s's't} = 0 \quad s' \in \mathbb{R}, t \geq 0 \quad (2.54)$$

con las condiciones iniciales (2.49).

Concluimos esta sección presentando una ley de conservación para las soluciones de (2.48):

Proposición 2.1 Sean $(u_0(s'), u_1(s'))$ tales que satisfacen (2.50) y sea $u(s', t)$ una solución de (2.48) con dato inicial $(u_0(s'), u_1(s'))$ y tal que verifique (2.51). Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} (u(s', t) - u_0(s')) ds' = 0$$

para todo tiempo t .

Demostración. De la ecuación (2.55) deducimos por simple integración en s'

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u ds' \right) + \frac{1}{2} \frac{u_{s'}}{u^{\frac{3}{2}}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{u_{s'}}{u^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} \right) = 0 \quad (2.55)$$

Si tenemos en cuenta que

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u ds' \right) = \frac{d^2}{dt^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (u - u_0) ds' \right)$$

y las condiciones (2.50) impuestas sobre el dato inicial obtenemos

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{-\infty}^{\infty} (u - u_0) ds' = 0$$

y por tanto $\int_{-\infty}^{\infty} (u - u_0) ds' = c_1 t + c_2$. Como $u(s', t = 0) = u_0(s')$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_t(s', t) ds' = z_t(+\infty, t) - z_t(-\infty, t) = 0$$

por (2.47), entonces $c_1 = c_2 = 0$ y esto prueba el resultado. \square

2.4 Un teorema de existencia y unicidad local de soluciones del sistema unidimensional

A continuación demostraremos un teorema de existencia y unicidad local de soluciones del problema (2.48), (2.49). Más precisamente, consideremos el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} u_{tt} - \left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)_{ss} + \mu \left(\frac{1}{u}\right)_{sst} &= 0 \quad s \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ u(0, s) &= u_0(s) \\ u_t(0, s) &= v_0(s) \end{aligned} \quad (2.56)$$

donde $\mu > 0$.

Probaremos dicho resultado en los clásicos espacios de funciones Hölder. Sea $l = n + \alpha$ con n entero y $\alpha \in (0, 1)$. Recordemos que $C^n(\mathbb{R})$ es el conjunto de funciones f reales de variable real tales que

$$\|f\|_{C^n(\mathbb{R})} = \sum_{i=0}^n \sup_{s \in \mathbb{R}} |f^{(i)}(s)| < \infty$$

$C^{n+\alpha}(\mathbb{R})$ es el conjunto de funciones f tales que

$$\|f\|_{C^{n+\alpha}(\mathbb{R})} = \|f\|_{C^n(\mathbb{R})} + \sum_{i=0}^n \sup_{s, s' \in \mathbb{R}} \frac{|f^{(i)}(s) - f^{(i)}(s')|}{|s - s'|^\alpha} < \infty$$

que si denotamos $Q_T = \mathbb{R} \times [0, T]$ entonces el espacio $C^{n, \frac{n}{2}}(Q_T)$ se define como el conjunto de funciones f tales que

$$\|f\|_{C^{n, \frac{n}{2}}(Q_T)} = \sum_{i+2j \leq n} \sup_{(s, t) \in Q_T} |D_s^i D_t^j f(s, t)| < \infty$$

y el espacio $C^{n+\alpha, \frac{n+\alpha}{2}}(Q_T)$ es el conjunto de funciones f tales que

$$\|f\|_{C^{n+\alpha, \frac{n+\alpha}{2}}(Q_T)} = \|f\|_{C^{n, \frac{n}{2}}(Q_T)} + \sum_{i+2j \leq n} \sup_{(s, t), (s', t') \in Q_T} \frac{|D_s^i D_t^j f(s, t) - D_s^i D_t^j f(s', t')|}{|s - s'|^\alpha + |t - t'|^{\frac{\alpha}{2}}} < \infty$$

Teorema 2.1 Sea $0 < \alpha < 1$ y sean $u_0(s) \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R})$ y tal que

$$0 < m < u_0(s) < M < +\infty \quad (2.57)$$

$v_0(s) \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R})$ y $T > 0$ suficientemente pequeño. Entonces existe una única solución $u(s, t)$ del problema (2.56) en el espacio $C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(Q_T)$.

Demostración. La ecuación (2.56) se puede escribir de la siguiente forma:

$$u_t + \mu \left(\frac{1}{u}\right)_{ss} = v_0(s) + \mu \left(\frac{1}{u_0}\right)_{ss} + \int_0^t \left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)_{ss} dt \quad (2.58)$$

Sea $w = u - u_0 - v_0 t$. Podemos entonces escribir (2.58) como

$$w_t - \mu \left(\frac{w}{u_0^2} \right)_{ss} = \mu \left(\frac{v_0}{u_0^2} \right)_{ss} t + \left(\frac{1}{\sqrt{u_0}} \right)_{ss} t + \mu \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{1}{u_0} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{w + v_0 t}{u_0} \right)^n \right) + \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{1}{\sqrt{u_0}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(n+1) \Gamma(\frac{1}{2})} \left(\frac{w + v_0 t}{u_0} \right)^n \right) \quad (2.59)$$

La ecuación (2.59) se puede escribir en la forma

$$w_t - \mu \left(\frac{w}{u_0^2} \right)_{ss} = f(s, t) \quad (2.60)$$

con

$$f(s, t) = f_1(s, t) + f_2(s, t) + f_3(s, t)$$

siendo

$$\begin{aligned} f_1(s, t) &= \mu \left(\frac{v_0}{u_0^2} \right)_{ss} t + \left(\frac{1}{\sqrt{u_0}} \right)_{ss} t \quad (2.61) \\ f_2(s, t) &= \mu \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{1}{u_0} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{w + v_0 t}{u_0} \right)^n \right) \\ f_3(s, t) &= \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{1}{\sqrt{u_0}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(n+1) \Gamma(\frac{1}{2})} \left(\frac{w + v_0 t}{u_0} \right)^n \right) \end{aligned}$$

Buscamos soluciones de (2.60) tales que $w(s, 0) = 0$. Estimaciones clásicas de la teoría de ecuaciones parabólicas (ver [16] y [32]) establecen entonces que:

$$\|w\|_{C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(Q_T)} \leq C \|f\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)}$$

con C dependiendo de $\|u_0^{-2}\|_{C^{2+\alpha}(\mathbb{R})}$.

A continuación estimaremos $\|f_i\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)}$, $i = 1, 2, 3$.

La estimación para f_1 es inmediata de la definición de norma en espacios de Hölder:

$$\|f_1\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)} \leq CT \left(\|v_0\|_{C^{2+\alpha}(\mathbb{R})} + \|u_0^{-1/2}\|_{C^{2+\alpha}(\mathbb{R})} \right) \quad (2.62)$$

f_2 se estima del siguiente modo:

$$\|f_2\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)} \leq \sum_{n=2}^{\infty} n^2 C^n \left(\|w\|_{C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(Q_T)} + \|v_0\|_{C^{2+\alpha}(\mathbb{R})} T \right)^n \quad (2.63)$$

con n^2 un factor que proviene de tomar las dos derivadas en s que aparecen en (2.61) y donde hemos usado la siguiente desigualdad para funciones w_1 y w_2 tales que $w_1(s, 0) = w_2(s, 0) = 0$:

$$\begin{aligned} & \sup \frac{|w_1(s, t)w_2(s, t) - w_1(s', t')w_2(s', t')|}{|s - s'|^\alpha + |t - t'|^{\frac{\alpha}{2}}} \leq \\ & \leq \sup |w_2(s, t)| \sup \frac{|w_1(s, t) - w_1(s', t')|}{|s - s'|^\alpha + |t - t'|^{\frac{\alpha}{2}}} + \sup |w_1(s', t')| \sup \frac{|w_2(s, t) - w_2(s', t')|}{|s - s'|^\alpha + |t - t'|^{\frac{\alpha}{2}}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= T^{\frac{\alpha}{2}} \sup \frac{|w_1(s, t) - w_1(s, 0)|}{t^{\frac{\alpha}{2}}} \sup \frac{|w_2(s, t) - w_2(s', t')|}{|s - s'|^\alpha + |t - t'|^{\frac{\alpha}{2}}} + \\
 &+ T^{\frac{\alpha}{2}} \sup \frac{|w_2(s, t) - w_2(s, 0)|}{t^{\frac{\alpha}{2}}} \sup \frac{|w_1(s, t) - w_1(s', t')|}{|s - s'|^\alpha + |t - t'|^{\frac{\alpha}{2}}} \leq 2T^{\frac{\alpha}{2}} \|w_1\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)} \|w_2\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)}
 \end{aligned}$$

gracias a la cual podemos estimar los términos de órdenes superiores al lineal en w . También hemos empleado la siguiente estimación para funciones de la forma $g(s)w(s, t)$

$$\begin{aligned}
 &\sup \frac{|g(s)w(s, t) - g(s')w(s', t')|}{|s - s'|^\alpha + |t - t'|^{\frac{\alpha}{2}}} \leq \\
 &\leq \sup |g(s)| \sup \frac{|w(s, t) - w(s', t')|}{|s - s'|^\alpha + |t - t'|^{\frac{\alpha}{2}}} + \sup |g(s')| \sup \frac{|w(s, t) - w(s', t')|}{|s - s'|^\alpha + |t - t'|^{\frac{\alpha}{2}}} = \\
 &= 2 \|g\|_{C^0(\mathbf{R})} \|w\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)} \tag{2.64}
 \end{aligned}$$

La constante C en (2.63) depende de $\|u_0^{-1}\|_{C^{2+\alpha}(\mathbf{R})}$ o, equivalentemente, de $\|u_0^{-1/2}\|_{C^{2+\alpha}(\mathbf{R})}$ ya que

$$\|u_0^{-1}\|_{C^{2+\alpha}(\mathbf{R})} \leq K \|u_0^{-1/2}\|_{C^{2+\alpha}(\mathbf{R})} \|u_0^{-1/2}\|_{C^2(\mathbf{R})} \tag{2.65}$$

en virtud de (2.64).

Finalmente estimamos f_3 :

$$\|f_3\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{\alpha}{2}} T C^n \left(\|w\|_{C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(Q_T)} + \|v_0\|_{C^{2+\alpha}(\mathbf{R})} T \right)^n \tag{2.66}$$

donde hemos usado la siguiente estimación para una función g tal que $g(s, 0) = 0$

$$\begin{aligned}
 &\sup \frac{\left| \int_0^t g(s, \tau) d\tau - \int_0^{t'} g(s', \tau) d\tau \right|}{|s - s'|^\alpha + |t - t'|^{\frac{\alpha}{2}}} = \\
 &= \sup \frac{\left| \int_0^t (g(s, \tau) - g(s', \tau)) d\tau - \int_0^{t'} (g(s', \tau) - g(s', 0)) d\tau \right|}{|s - s'|^\alpha + |t - t'|^{\frac{\alpha}{2}}} \leq CT \|g\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)}
 \end{aligned}$$

y estimaciones de los términos no lineales idénticas a las utilizadas para estimar f_2 . La constante C en (2.66) depende de $\|u_0^{-1/2}\|_{C^{2+\alpha}(\mathbf{R})}$.

De las estimaciones anteriores se deduce que para T suficientemente pequeño las series en (2.63) y (2.66) convergen y de hecho

$$\|f\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)} \leq KT + \|w\|_{C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(Q_T)} T + \|w\|_{C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(Q_T)}^2 \tag{2.67}$$

cuando $\|w\|_{C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(Q_T)} \leq R$. La constante K depende de μ , $\|v_0\|_{C^{2+\alpha}(\mathbf{R})}$, $\|u_0^{-1/2}\|_{C^{2+\alpha}(\mathbf{R})}$ y T en virtud de (2.62) y (2.65).

Para resolver el problema no lineal completo usaremos un punto fijo de Banach. Consideremos la aplicación \mathcal{L} que asigna a una función $\bar{w} \in W$ con

$$W = \left\{ w \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(Q_T) \text{ tal que } \|w\|_{C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(Q_T)} \leq R \text{ y } w(s, 0) = 0 \right\}$$

la solución de (2.60) satisfaciendo $w(s, 0) = 0$ para $f(s, t)$ basado en $\bar{w}(s, t)$. La estimación (2.67) muestra que \mathcal{L} aplica W sobre sí mismo para T suficientemente pequeño.

La aplicación \mathcal{L} es contractiva. Para probarlo tomemos $\bar{w}_1, \bar{w}_2 \in W$ y las correspondientes soluciones w_1, w_2 de (2.60) con $f(s, t)$ basado en $\bar{w}_1(s, t)$ y $\bar{w}_2(s, t)$ respectivamente. La función $w = w_2 - w_1$ satisface la ecuación (2.60) con

$$f(s, t) = F_1(s, t) + F_2(s, t)$$

$$F_1(s, t) = \sum_{n=2}^{\infty} \mu \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{1}{u_0} (-1)^{n+1} \left(\left(\frac{\bar{w}_2 + v_0 t}{u_0} \right)^n - \left(\frac{\bar{w}_1 + v_0 t}{u_0} \right)^n \right) \right) \quad (2.68)$$

$$F_2(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{1}{\sqrt{u_0}} \frac{(-1)^n \Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(n+1) \Gamma(\frac{1}{2})} \left(\left(\frac{\bar{w}_2 + v_0 t}{u_0} \right)^n - \left(\frac{\bar{w}_1 + v_0 t}{u_0} \right)^n \right) \right) \quad (2.69)$$

Efectuamos las derivaciones en s y estimamos los términos que aparecen en las series (2.68) y (2.69) del modo siguiente

$$\begin{aligned} \|g_2^n - g_1^n\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)} &\leq \left\| (g_2 - g_1) \left(\sum_{i=0}^{n-1} g_2^{n-1-i} g_1^i \right) \right\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)} \leq \\ &\leq C^n \|g_2 - g_1\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)} \end{aligned}$$

con C dependiendo de $R, T, \|v_0\|_{C^{2+\alpha}(\mathbf{R})}, \|u_0^{-1/2}\|_{C^{2+\alpha}(\mathbf{R})}$ y $\lim_{R, T \rightarrow 0} C = 0$. Se tiene entonces que para T y R suficientemente pequeños

$$\|w_2 - w_1\|_{C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(Q_T)} \leq L \|\bar{w}_2 - \bar{w}_1\|_{C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(Q_T)}$$

con $L < 1$ y por tanto la aplicación \mathcal{L} es una contracción. Bajo estas condiciones el teorema del punto fijo de Banach asegura la existencia de una única solución del problema en W .

La última observación es que las condiciones impuestas sobre $u_0(s)$ en el enunciado aseguran la acotación de $\|u_0^{-1/2}\|_{C^{2+\alpha}(\mathbf{R})}$ y $\|v_0\|_{C^{2+\alpha}(\mathbf{R})}$ de los que dependen todas las constantes que han aparecido a lo largo de la demostración. \square

c

A continuación presentaremos un teorema de existencia y unicidad de soluciones locales del problema (2.56) en el caso límite en el que la viscosidad es despreciable, es decir $\mu = 0$. Este paso al límite es extremadamente singular ya que el nuevo problema de Cauchy que resulta es elíptico. Es importante señalar que la ecuación (2.56) con $\mu = 0$ equivale al siguiente sistema

$$\begin{aligned} u_t &= v_s \\ v_t &= -\frac{1}{2} \frac{u_s}{u^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (2.70)$$

con datos iniciales

$$\begin{aligned} u(s, 0) &= u_0(s) \\ v(s, 0) &= \int_0^s v_0(\sigma) d\sigma = \bar{v}_0(s) \end{aligned} \quad (2.71)$$

Nótese que existe una diferencia esencial entre los casos $\mu > 0$ y $\mu = 0$. Mientras que el caso $\mu > 0$ se puede transformar en una ecuación parabólica cuasilínea con un único dato inicial,

el caso $\mu = 0$ conduce a una ecuación elíptica cuasilínea con dos condiciones de contorno y por tanto a un problema mal puesto en espacios clásicos (L^2 por ejemplo) en el sentido de Hadamard. En este aspecto podemos decir que el problema en el caso $\mu = 0$ pertenece a la misma familia que los problemas clásicos de Hele-Shaw y de Stefan para los cuales es posible construir soluciones en clases de funciones suficientemente restrictivas (analíticas por ejemplo). Véanse por ejemplo [27], [28], [49] y las referencias allí contenidas. Un teorema de existencia y unicidad local de soluciones para Hele-Shaw y para datos iniciales analíticos se puede encontrar en [15]. Un estudio de la existencia local de soluciones para problemas de Stefan se pueden encontrar en [56].

La demostración de existencia y unicidad de soluciones para (2.70), (2.71) es esencialmente la del teorema de Cauchy-Kovalevsky (ver [21]) con la única diferencia de que para obtener soluciones en todo el espacio se impondrá en los datos iniciales una condición de analiticidad en un entorno uniforme de \mathbb{R} . Presentamos a continuación una versión de la demostración del teorema de Cauchy-Kovalevsky adaptada a nuestro problema concreto:

Teorema 2.2 Sean $u_0(s)$ y $\bar{v}_0(s)$ dos funciones analíticas en torno de cualquier punto s_0 , i.e.

$$u_0(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (s - s_0)^n \quad |s - s_0| < \rho(u_0; s_0)$$

$$\bar{v}_0(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (s - s_0)^n \quad |s - s_0| < \rho(v_0; s_0)$$

y $|a_n| \leq M(u_0; s_0)\rho^{-n}(u_0; s_0)$, $|b_n| \leq M(\bar{v}_0; s_0)\rho^{-n}(\bar{v}_0; s_0)$. Supongamos además que las constantes $M(u_0; s_0)$, $M(\bar{v}_0; s_0)$, $\rho(u_0; s_0)$, $\rho(\bar{v}_0; s_0)$ son uniformes en s_0 ; es decir, existen para cada par $u_0(s)$, $\bar{v}_0(s)$ dos constantes M_2 , ρ_2 tales que

$$0 < M(u_0; s_0), M(\bar{v}_0; s_0) < M_2$$

$$0 < \rho_2 < \rho(u_0; s_0), \rho(\bar{v}_0; s_0)$$

Existe entonces una única solución analítica $u(s, t), v(s, t)$ del problema (2.70), (2.71) para $t < T(M_2, \rho_2, \inf_s u_0)$.

Demostración. Notemos en primer lugar que bajo las hipótesis del teorema los coeficientes a_n, b_n son menores que los coeficientes de Taylor de la función

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_2 \rho_2^{-n} (s - s_0)^n = \frac{M_2 (s - s_0)}{\rho_2 - (s - s_0)}$$

El procedimiento de demostración será el mismo que el del teorema de Cauchy-Kovalevsky. Buscamos soluciones $u(s, t), v(s, t)$ de (2.70), (2.71) en torno a $(s_0, 0)$ en la forma

$$u(s, t) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} (s - s_0)^i t^j \tag{2.72}$$

$$v(s, t) = \sum_{i,j=0}^{\infty} b_{ij} (s - s_0)^i t^j$$

expresiones que introducidas en (2.70), (2.71) proporcionan relaciones de recurrencia para los coeficientes a_{ij}, b_{ij} . Obtendremos cotas superiores para estos coeficientes y esto nos permitirá dar cotas inferiores de los radios de convergencia de las series (2.72) y por tanto de la región de existencia de soluciones analíticas. La unicidad de soluciones es clara dada la unicidad de las relaciones de recurrencia de los coeficientes.

Escribimos el sistema (2.70) en la forma

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2u^{\frac{3}{2}}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_s \quad (2.73)$$

Si introducimos para un s_0 dado

$$\begin{aligned} u(s, t) &= u_0(s_0) + \tilde{u}(\tilde{s}, t) \\ v(s, t) &= \int_0^{s_0} v_0(\sigma) d\sigma + \tilde{v}(\tilde{s}, t) \end{aligned}$$

con $\tilde{s} = s - s_0$ podemos escribir (2.73) como

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2(u_0(s_0) + \tilde{u}(\tilde{s}, t))^{\frac{3}{2}}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}_{\tilde{s}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}_{\tilde{s}}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} |a_{21}| &\leq \frac{1}{3(u_0(s_0))^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\frac{2}{3}u_0(s_0) - \tilde{u}(\tilde{s}, t)} \leq \frac{1}{3(\inf_s u_0)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\frac{2}{3}\inf_s u_0 - (\tilde{u} + \tilde{v})} \\ |a_{12}| &\leq \frac{\frac{2}{3}\inf_s u_0}{\frac{2}{3}\inf_s u_0 - (\tilde{u} + \tilde{v})} \end{aligned}$$

cuando $\tilde{u}, \tilde{v} \geq 0$. Sean $M_1 = \min \left\{ \frac{1}{3(\inf_s u_0)^{\frac{1}{2}}}, \frac{2}{3}\inf_s u_0 \right\}$ y $\rho_1 = \frac{2}{3}\inf_s u_0$.

Argumentando como en la demostración del teorema de Cauchy-Kovalevsky vemos que el valor absoluto de los coeficientes del desarrollo de Taylor de una solución local de (2.56) están mayorados por los de la solución local del siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}_t = \frac{M_1}{\rho_1 - (\tilde{u} + \tilde{v})} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}_{\tilde{s}} \quad (2.74)$$

sujeto a las condiciones iniciales siguientes:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\tilde{s}, 0) &= \frac{M_2 \tilde{s}}{\rho_2 - \tilde{s}} \\ \tilde{v}(\tilde{s}, 0) &= \frac{M_2 \tilde{s}}{\rho_2 - \tilde{s}} \end{aligned} \quad (2.75)$$

De (2.74) y (2.75) se deduce $\tilde{u} = \tilde{v} = w$ y la siguiente ecuación mayorante para w :

$$w_t = \frac{2M}{\rho - w} w_s \quad (2.76)$$

con condición inicial

$$w(\tilde{s}, 0) = \frac{M\tilde{s}}{\rho - \tilde{s}} \quad (2.77)$$

y siendo $M = \max(M_1, M_2)$, $\rho = \min(\rho_1, \rho_2)$. La solución de (2.76), (2.77) es (ver [21]):

$$w = \frac{1}{4(\rho - \tilde{s})} \left(\rho^2 + 2M\tilde{s} - \rho\tilde{s} - 2M\rho t - \sqrt{(\rho^2 + 2M\tilde{s} - \rho\tilde{s} - 2M\rho t)^2 - 8M\rho(\rho - \tilde{s})(\tilde{s} + 2Mt)} \right)$$

una función cuya serie de Taylor converge absolutamente en $|\tilde{s}| < \rho$, $t < T(M, \rho)$. \square

2.5 Análisis del sistema unidimensional para fluidos ideales

2.5.1 Soluciones autosimilares

Existe una familia biparamétrica de perfiles autosimilares para el sistema (2.16) y (2.17) tal y como se mostró numéricamente en [55]. Como estas soluciones autosimilares jugarán un papel importante en lo que se describirá posteriormente realizaremos a continuación un estudio detallado de las mismas. Introduzcamos las funciones v y h en la forma

$$v(z, t) = (t_0 - t)^\alpha \psi(\xi) \quad (2.78)$$

$$h(z, t) = (t_0 - t)^\gamma \varphi(\xi) \quad (2.79)$$

con

$$\xi = \frac{z}{(t_0 - t)^\beta}$$

Para obtener soluciones de (2.16) y (2.17) con esta forma los exponentes α, β, γ deben satisfacer las siguiente relaciones:

$$\alpha - 1 = 2\alpha - \beta = -\gamma - \beta$$

$$\gamma - 1 = \alpha + \gamma - \beta$$

es decir,

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{\gamma}{2} \\ \beta &= -1 - \frac{\gamma}{2} \end{aligned} \quad (2.80)$$

donde γ es un parámetro libre, así como el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden para φ y ψ :

$$\frac{\gamma}{2}\psi + \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)\xi\psi' + \psi\psi' = \frac{\varphi'}{\varphi^2} \quad (2.81)$$

$$-\gamma\varphi + \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)\xi\varphi' + \psi\varphi' + \frac{1}{2}\psi'\varphi = 0 \quad (2.82)$$

Las soluciones admisibles de (2.81) y (2.82) deben satisfacer

$$\psi \underset{\xi \rightarrow \pm\infty}{\sim} A_{\pm} |\xi|^{\frac{\gamma}{\gamma-2}} \quad (2.83)$$

$$\varphi \underset{\xi \rightarrow \pm\infty}{\sim} B_{\pm} |\xi|^{\frac{2\gamma}{2-\gamma}} \quad (2.84)$$

ya que solamente de este modo conseguimos funciones $v(z, t)$ y $h(z, t)$ de orden unidad en puntos z de orden unidad cerca de la singularidad.

Para que la singularidad se concentre en un punto es necesario $\beta > 0$ lo que implica $\gamma < 2$. En caso contrario se tendrían soluciones para las cuales el perfil de la función $h(z, t)$ tendería a cero cuando $t \rightarrow t_0$ en todos los puntos del espacio. Por otra parte, si queremos funciones $h(z, t)$ que se anulen en el origen cuando $t = t_0$ tenemos que imponer $\gamma > 0$.

Teorema 2.3 *Para todo $\gamma \in (0, 2)$ existe una familia biparamétrica de soluciones analíticas de (2.81) y (2.82) que satisfacen (2.83) y (2.84). Dichas soluciones se pueden escribir en la forma*

$$\begin{aligned}\psi(\xi) &= \lambda^{-1}\Psi(\lambda\xi) \\ \varphi(\xi) &= \lambda^2\Phi(\lambda\xi)\end{aligned}\tag{2.85}$$

con λ un parámetro real arbitrario y las funciones Ψ y Φ pertenecientes a sendas familias uniparamétricas de soluciones de (2.81) y (2.82). Existe una única solución Φ simétrica (Ψ antisimétrica) y un continuo de funciones Φ y Ψ asimétricas vecinas.

Si $\gamma = 0$ las soluciones de (2.81) y (2.82) que satisfacen (2.83) y (2.84) son de la forma (2.85) con $\Phi = 1$ y Ψ constante arbitraria.

Si $\gamma = 2$ las soluciones de (2.81) y (2.82) que satisfacen (2.83) y (2.84) son de la forma (2.85) y las funciones Φ y Ψ se pueden escribir en la forma

$$\begin{aligned}\Phi(\xi) &= H(\xi + C) \\ \Psi(\xi) &= G(\xi + C)\end{aligned}$$

con C un parámetro real arbitrario, $H(\xi)$ una función simétrica y analítica que explota en $\xi_{\pm} = \pm \frac{4\sqrt{2}}{3}$ y $G(\xi)$ una función antisimétrica que se anula en ξ_{\pm} . El perfil de la función H es, cerca de los puntos de explosión ξ_{\pm} ,

$$H \underset{\xi \rightarrow \xi_{\pm}}{\sim} \frac{2^{\frac{15}{4}}}{|\xi - \xi_{\pm}|^{\frac{5}{2}}}$$

Demostración. La invariancia del sistema (2.81), (2.82) ante el reescalamiento

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \lambda\psi \\ \xi &\rightarrow \lambda\xi \\ \varphi &\rightarrow \lambda^{-2}\varphi\end{aligned}$$

nos permite considerar

$$\begin{aligned}\psi(\xi) &= \lambda^{-1}\Psi(\lambda\xi) \\ \varphi(\xi) &= \lambda^2\Phi(\lambda\xi)\end{aligned}\tag{2.86}$$

con λ un parámetro real arbitrario y $\Psi(\xi)$ y $\Phi(\xi)$ soluciones de (2.81), (2.82) que satisfacen (2.83) y (2.84) así como

$$\Phi(0) = 1$$

y además sugiere la introducción de las funciones g y h definidas a través de

$$\begin{aligned}\psi &= \xi g \\ \varphi &= \frac{h}{\xi^2}\end{aligned}\tag{2.87}$$

con lo que las ecuaciones (2.81), (2.82) se transforman en

$$g_\eta + g - \frac{1}{2}\gamma g_\eta + gg_\eta + g^2 - \left(\frac{h_\eta}{h^2} - \frac{2}{h}\right) = 0 \quad (2.88)$$

$$h_\eta \left(g + \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)\right) - \left(2 + \frac{3}{2}g - \frac{1}{2}g_\eta\right) h = 0 \quad (2.89)$$

donde $\eta = \log |\xi|$.

Notemos que si $\xi > 0$ entonces

$$\begin{aligned} g(\eta) &= \frac{\psi(e^\eta)}{e^\eta} = \frac{\Psi(\lambda e^\eta)}{\lambda e^\eta} = G_1(\eta + \log \lambda) \\ h(\eta) &= \lambda^2 e^{2\eta} \Phi(\lambda e^\eta) = H_1(\eta + \log \lambda) \end{aligned}$$

con G_1 y H_1 soluciones de (2.88), (2.89) y si $\xi < 0$ entonces

$$\begin{aligned} g(\eta) &= \frac{\psi(-e^\eta)}{-e^\eta} = \frac{\Psi(-\lambda e^\eta)}{-\lambda e^\eta} = G_2(\eta + \log \lambda) \\ h(\eta) &= \lambda^2 e^{2\eta} \Phi(-\lambda e^\eta) = H_2(\eta + \log \lambda) \end{aligned}$$

con G_2 y H_2 soluciones de (2.88), (2.89).

El carácter autónomo del sistema (2.88), (2.89) nos permite construir, a partir de una solución del mismo y mediante simples traslaciones en el argumento η , todas las soluciones ψ , φ de (2.81), (2.82) en la forma (2.86).

Las funciones ψ y φ han de ser continuas en $\xi = 0$ y esto se traduce, por (2.87), en la condición

$$g^2 h \xrightarrow{g \rightarrow \pm\infty} C \quad (2.90)$$

con $C = 0$ para funciones φ simétricas.

Los comportamientos asintóticos (2.83) y (2.84) implican que las funciones h y g satisfacen:

$$h \underset{g \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{K_\pm}{g^2} \quad (2.91)$$

con $K_\pm = A_\pm^2 B_\pm > 0$.

Podemos obtener de (2.88) y (2.89) el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} h_\eta &= h \frac{16hg + 8hg^2 + 4 - 3hg\gamma + 8h - 4h\gamma}{2 + 4hg^2 + 8hg - 4hg\gamma + 4h - 4h\gamma + h\gamma^2} \\ g_\eta &= -2 \frac{g - 2\gamma + 2hg - hg\gamma + 4hg^2 + 2hg^3 - hg^2\gamma}{2 + 4hg^2 + 8hg - 4hg\gamma + 4h - 4h\gamma + h\gamma^2} \end{aligned} \quad (2.92)$$

Si observamos que

$$2 + 4hg^2 + 8hg - 4hg\gamma + 4h - 4h\gamma + h\gamma^2 = (4 - 4\gamma + \gamma^2)h + (4g^2 + (8 - 4\gamma)g)h + 2 > 0$$

podemos entonces hacer el cambio

$$d\tau = \frac{d\eta}{2 + 4hg^2 + 8hg - 4hg\gamma + 4h - 4h\gamma + h\gamma^2}$$

y concluir que las soluciones del sistema (2.92) están asociadas a las trayectorias del siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} h_\tau &= 16gh^2 + 8g^2h^2 + 4h - 3h^2\gamma g + 8h^2 - 4\gamma h^2 = f_1(g, h) \\ g_\tau &= -2g + 4\gamma - 4hg + 2hg\gamma - 8hg^2 - 4hg^3 + 2hg^2\gamma = f_2(g, h) \end{aligned} \quad (2.93)$$

Estamos interesados en encontrar dos curvas que terminen en $(g = 0, h = +\infty) = (0, +\infty)$ cuando $\tau \rightarrow +\infty$ y empiecen en $(g = \pm\infty, h = 0)$ cuando $\tau \rightarrow -\infty$, o una única curva que vaya de $(g = 2\gamma; h = 0)$ a $(g = 0, h = +\infty)$. h debe ser positivo a lo largo de esas curvas y se deben satisfacer las condiciones (2.91) y (2.90).

Si parametrizamos las soluciones en la forma $h = h(g)$ tendremos entonces

$$\frac{dh}{dg} = \frac{16gh^2 + 8g^2h^2 + 4h - 3h^2\gamma g + 8h^2 - 4\gamma h^2}{-2g + 4\gamma + (2\gamma - 4)hg - 4hg^3 + (2\gamma - 8)hg^2} = \frac{f_1(g, h)}{f_2(g, h)} \quad (2.94)$$

La función $f_1(g, h)$ se anula en las curvas

$$\begin{aligned} h &= 0 \\ h &= -\frac{4}{16g + 8g^2 - 3\gamma g + 8 - 4\gamma} \end{aligned}$$

que llamaremos Γ_1 y Γ_2 respectivamente (ver figura 2.1). Γ_2 presenta asíntotas verticales en $g_\pm = \frac{3}{16}\gamma - 1 \pm \frac{1}{16}\sqrt{(9\gamma^2 + 32\gamma)}$. Presenta además un mínimo local en $g = \frac{3\gamma-16}{16}$ para el cual $h = \frac{128}{\gamma(9\gamma+32)} > 0$

La función $f_2(g, h)$ se anula en la curva

$$h = -\frac{-2g + 4\gamma}{2\gamma g - 4g - 4g^3 + 2g^2\gamma - 8g^2}$$

que llamaremos Γ_3 . esta curva presenta asíntotas verticales en $g = 0, -1, \frac{\gamma-2}{2}$.

Es interesante averiguar en qué puntos hay extremos locales de $f_2(g, h)$. Para hacerlo encontramos los puntos en los cuales

$$\frac{d}{dg} \left(\frac{-2g + 4\gamma}{2\gamma g - 4g - 4g^3 + 2g^2\gamma - 8g^2} \right) = \frac{-16\gamma g + 4g^3 - 13g^2\gamma + 4g^2 + 2\gamma^2 - 4\gamma + 4\gamma^2 g}{g^2(-\gamma + 2 + 2g^2 - \gamma g + 4g)^2}$$

se anula y verificamos la existencia de un mínimo negativo, un mínimo positivo y un máximo negativo. Es fácil ver que los dos únicos puntos en los cuales se intersectan Γ_2 y Γ_3 son $(g, h) = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{9}{2}\right), \left(\frac{2\gamma-4}{5}, -\frac{50}{-4\gamma+1+\gamma^2}\right)$. Estos son puntos de equilibrio del sistema dinámico (2.93). Podemos llevar a cabo el siguiente ordenamiento de la primera componente de los puntos de asíntota y los de equilibrio

$$0 > \frac{2\gamma-4}{5} > g_+ > \frac{\gamma-2}{2} \geq -1 \geq g_- \geq -\frac{4}{3}$$

cuando $0 \leq \gamma \leq 2$. La conclusión obvia es que Γ_3 está rodeada por Γ_2 en el cuadrante $g < 0, h > 0$.

Necesitamos determinar si existen curvas que empiecen en $(2\gamma, 0)$ ó $(\pm\infty, 0)$, verifiquen (2.90) y terminen en $(0, +\infty)$ con el comportamiento asintótico (2.91). La consecuencia de esto sería la existencia de soluciones autosimilares tanto simétricas como asimétricas. La respuesta a esta cuestión es positiva. Para entender esto nótese que cualquier curva $h(g)$ que comience en $g = -\infty$

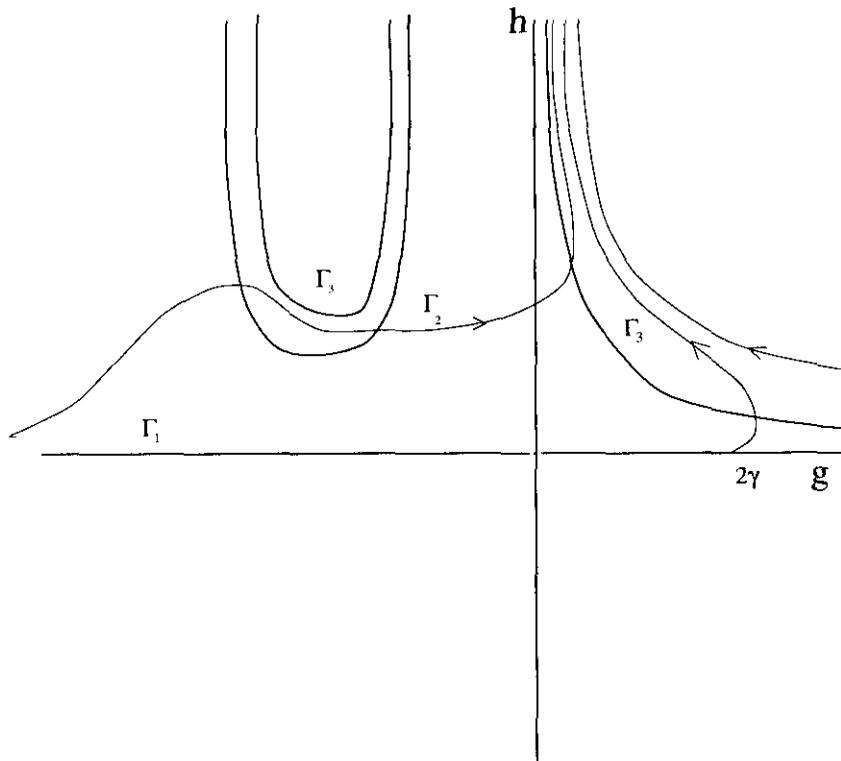


Figura 2.1: El diagrama de fases del sistema (2.93)

pasa por debajo de Γ_2 o lo interseca formando un máximo local. En esta segunda situación no puede intersectar la curva Γ_3 (solamente la podría cortar con pendiente menos infinito) y la única posibilidad es entonces cruzar Γ_2 de nuevo formando un mínimo local. La trayectoria sólo puede ahora cruzar Γ_3 y terminar en $(0, +\infty)$ satisfaciendo (2.91). Las curvas que parten de $(+\infty, 0)$ no cortan Γ_3 y terminan directamente en $(0, +\infty)$ satisfaciendo (2.91).

Nótese que hay un continuo completo de soluciones para todo $0 \leq \gamma < 2$. La única órbita que parte de $(2\gamma, 0)$ y acaba en $(0, +\infty)$ corresponde a la autosimilar simétrica (ver figura 2.1). Argumentando por continuidad, existirá para todo $0 \leq \gamma < 2$ un continuo de curvas que se aproximan a $(-\infty, 0)$ y satisfacen (2.90) con distintos valores de C así como (2.91) y para cada una de las cuales existe una curva que parte de $(+\infty, 0)$ que satisface (2.90) con idénticos valores de C y la condición (2.91).

En el caso límite $\gamma = 0$ la ecuación (2.94) se simplifica y llegamos a

$$\frac{dh}{dg} = -2\frac{h}{g} \quad (2.95)$$

cuya solución es

$$h = \frac{C}{g^2}$$

con C una constante positiva arbitraria. En las variables originales φ , ψ estas soluciones dan lugar a $\psi = C_2$ y $\varphi = C_2$, donde C_1 , C_2 son constantes arbitrarias (ver (2.81) y (2.82)).

Estudiamos a continuación el caso $\gamma = 2$. Las ecuaciones (2.81) y (2.82) son entonces

$$\begin{aligned}\psi + \psi\psi' &= \frac{\varphi'}{\varphi^2} \\ -2\varphi + \psi\varphi' + \frac{1}{2}\psi'\varphi &= 0\end{aligned}$$

y a partir de ellas obtenemos

$$\begin{aligned}\varphi' &= 5\psi \frac{\varphi^2}{1 + 2\psi^2\varphi} \\ \psi' &= -2 \frac{-2 + \psi^2\varphi}{1 + 2\psi^2\varphi}\end{aligned}\tag{2.96}$$

Si parametrizamos ψ con φ se puede obtener fácilmente la siguiente ecuación para $\psi(\varphi)$:

$$\frac{d\psi}{d\varphi} + \frac{2\psi}{5\varphi} = \frac{4}{5\psi\varphi^2}\tag{2.97}$$

La solución general de (2.97) es

$$\psi(\varphi) = \pm \sqrt{\frac{-8\varphi^{\frac{4}{5}} \pm 8C_1\varphi}{\varphi^{\frac{2}{5}}}}\tag{2.98}$$

con C_1 una constante positiva arbitraria.

Observemos que

$$\psi(\varphi) \underset{\varphi \rightarrow \infty}{\sim} \pm \sqrt{8C_1}\varphi^{-\frac{2}{5}}\tag{2.99}$$

y por tanto usando (2.96) se tendría que

$$\varphi' \sim \pm \frac{5}{2\sqrt{8C_1}}\varphi^{\frac{7}{5}}$$

lo que permite concluir que φ explota en ξ finito. El perfil cerca de un punto de explosión ξ_0 es

$$\varphi \underset{\xi \rightarrow \xi_0}{\sim} \frac{2^{\frac{15}{4}}C_1^{\frac{5}{4}}}{|\xi - \xi_0|^{\frac{5}{2}}}$$

Introduciendo (2.98) en (2.96) podemos determinar, mediante cálculos elementales, la siguiente fórmula implícita para la función $\varphi(\xi)$:

$$\frac{1}{6}\sqrt{2} \frac{9\varphi^{-\frac{1}{2}} - 13C_1\varphi^{-\frac{3}{10}} + 8C_1^3\varphi^{\frac{1}{10}} - 4C_1^2\varphi^{-\frac{1}{10}}}{\sqrt{-1 + C_1\sqrt[5]{\varphi}}} = \pm (C_2 + \xi)$$

que corresponde a un perfil $\varphi(\xi)$ simétrico con respecto a la línea $\xi = -C_2$ y con la estructura

$$\varphi(\xi) = C_1^{-5}\Phi\left(C_1^{-\frac{5}{2}}(\xi + C_2)\right)$$

siendo $\Phi(\eta)$ la función dada en forma implícita por

$$\frac{1}{6} \sqrt{2} \frac{9\Phi^{-\frac{1}{2}} - 13\Phi^{-\frac{3}{10}} + 8\Phi^{\frac{1}{10}} - 4\Phi^{-\frac{1}{10}}}{\sqrt{-1 + \sqrt[5]{\Phi}}} = |\eta|$$

que explota en los puntos $\eta = \pm \frac{4\sqrt{2}}{3}$. Con esto concluye la demostración del Teorema 2.3. \square

En las figuras 2.2, 2.3, 2.4 y 2.5 presentamos algunos de los perfiles φ -simétricos y ψ -antisimétricos calculados numéricamente

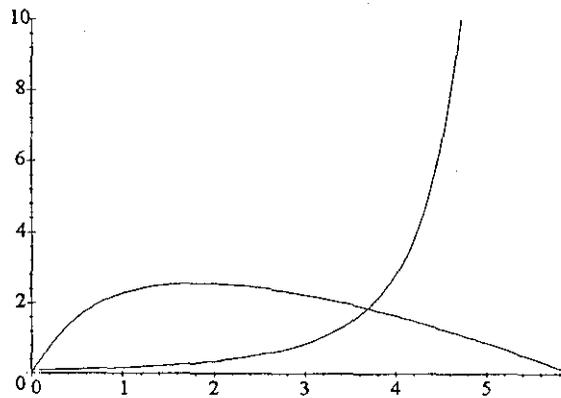


Figura 2.2: $\gamma = 2$, $\varphi(0) = 0.1$, $\psi(0) = 0$

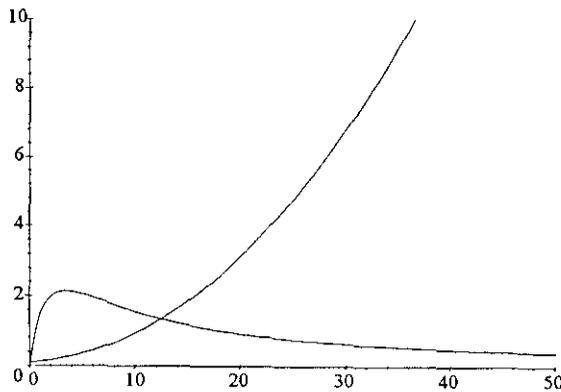


Figura 2.3: $\gamma = 1$, $\varphi(0) = 0.1$, $\psi(0) = 0$

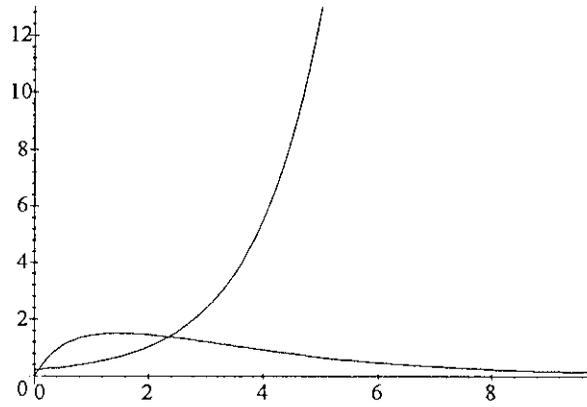


Figura 2.4: $\gamma = \frac{3}{2}$, $\varphi(0) = 0.25$, $\psi(0) = 0$

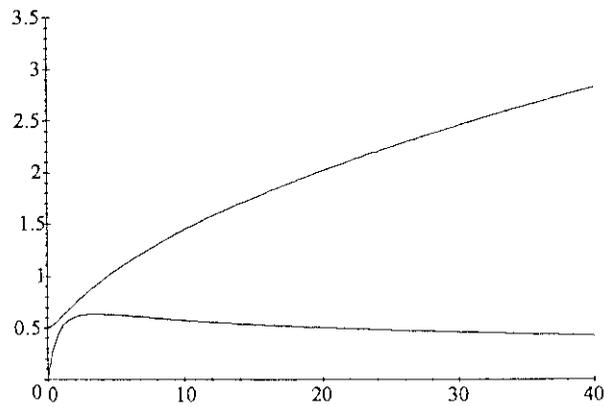


Figura 2.5: $\gamma = \frac{2}{5}$, $\varphi(0) = 0.5$, $\psi(0) = 0$

2.5.2 Formulación del problema (2.52) en el plano hodógrafo

En esta subsección presentaremos una nueva formulación de la ecuación (2.52) que jugará un papel crucial en todo el análisis posterior para análisis posteriores.

Tal y como hicimos en (2.70), podemos reescribir la ecuación (2.52) en forma del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} u_t &= v_s \\ v_t &= -\frac{1}{2} \frac{u_s}{u^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (2.100)$$

con dato inicial

$$\begin{aligned} u(s, 0) &= u_0(s) \\ v(s, 0) &= v_0(s) \end{aligned} \quad (2.101)$$

Impondremos sobre estos datos iniciales algunas condiciones de regularidad (que especificaremos más tarde) y las siguientes condiciones de comportamiento asintótico:

$$\begin{aligned} u_0(s) &\rightarrow C \\ v_0(s) &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad |s| \rightarrow \infty$$

Un modo de resolver este tipo de sistemas es mediante la aplicación de la llamada transformación hodográfica. Esta transformación ha sido aplicada con éxito a la resolución de algunos problemas relacionados con la dinámica de gases (ver por ejemplo [3] y [33]) y nos permite transformar el sistema (2.100) en un problema lineal. La idea principal consiste en intercambiar los papeles de las variables dependientes e independientes. Para llevar a cabo este cambio consideramos s y t como funciones de u y v .

$$\begin{aligned} s &= s(u, v) \\ t &= t(u, v) \end{aligned} \quad (2.102)$$

Nótese que

$$\begin{aligned} u_s &= Jt_v \\ v_s &= -Jt_u \\ u_t &= -Js_v \\ v_t &= Js_u \end{aligned}$$

con $J^{-1} = s_u t_v - s_v t_u$. Si suponemos que $J^{-1} \neq 0$, el sistema (2.100) se transforma en

$$\begin{aligned} t_u &= s_v \\ s_u &= -\frac{1}{2} \frac{t_v}{u^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (2.103)$$

donde s y t satisfacen

$$\begin{aligned} s &= u_0^{-1}(u) \\ t &= 0 \end{aligned} \quad (2.104)$$

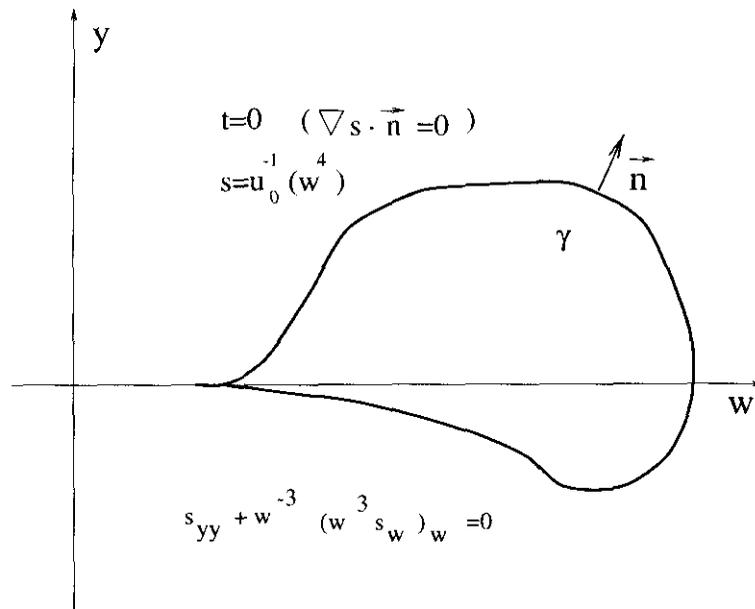


Figura 2.6: Representación del problema (2.107), (2.108), (2.110)

a lo largo de la curva γ' dada paraméricamente por (2.101). En el caso particular $v_0(s) = 0$ esa curva es el segmento $v = 0, u \in [C, u_0(s = 0)]$.

Sea

$$\begin{aligned} u &= w^4 \\ v &= 2\sqrt{2}y \end{aligned} \quad (2.105)$$

El sistema (2.103) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}w^3} t_w &= s_y \\ s_w &= -\frac{t_y}{\sqrt{2}w^3} \end{aligned} \quad (2.106)$$

o, equivalentemente, en forma de la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$s_{yy} + \frac{1}{w^3} (w^3 s_w)_w = 0 \quad \text{en } w > 0 \quad (2.107)$$

La ecuación diferencial lineal (2.107) es de tipo elíptico. Los datos (2.104) se transforman ahora en

$$\begin{aligned} s &= u_0^{-1}(w^4) \\ t &= 0 \end{aligned} \quad (2.108)$$

y deben satisfacerse a lo largo de la curva γ definida paramétricamente por

$$\begin{aligned} w(\sigma) &= u_0^{1/4}(\sigma) \\ y(\sigma) &= 2^{-3/2}v_0(\sigma) \end{aligned} \quad (2.109)$$

La segunda condición en (2.108) es equivalente a

$$0 = \frac{dt}{d\sigma} = \nabla t \cdot \vec{t} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{w_{0,s}^2 + y_{0,s}^2}} (w^3 s_y w_{0,s} - w^3 s_w y_{0,s}) = \sqrt{2}w^3 (\nabla s \cdot \vec{n})$$

donde σ es el parámetro arco de la curva γ dada por (2.109) y \vec{t} es el vector tangente. Esta condición se puede reescribir como

$$\frac{\partial s}{\partial n} = \nabla s \cdot \vec{n} = 0 \quad (2.110)$$

con \vec{n} el vector normal a γ (ver figura 2.6).

Observemos que la ecuación (2.107) es lineal. Esta propiedad nos permitirá obtener familias completas de soluciones mediante simples combinaciones lineales. Es posible recuperar a partir de una solución $s(w, y)$ de (2.107) la función $t(w, y)$ solución de (2.106). Con estas funciones y teniendo en cuenta el cambio (2.105), podemos obtener el par $u(s, t)$, $v(s, t)$ solución de (2.100) invirtiendo las relaciones (2.102).

La ecuación (2.107) junto con la primera condición en (2.108) y la condición (2.110) constituyen un problema mal puesto en el sentido de Hadamard en espacios clásicos. No obstante, es posible construir soluciones locales en el caso de tenerse datos iniciales analíticos (la función $u_0^{-1}(w^4)$ y la curva γ analíticas) vía el teorema de Cauchy-Kovalevsky y extender esta solución a otras regiones del plano hodógrafo por simple prolongación analítica. En cualquier caso, podremos encontrar una gran cantidad de soluciones explícitas del problema gracias a la linealidad de la ecuación (2.107) y de la condición de contorno (2.110).

Una vez encontrada $s(w, y)$, es posible encontrar $t(w, y)$. De hecho, el sistema (2.106) implica que las curvas de nivel $t = \text{Const.}$ son ortogonales a las curvas de nivel $s = \text{Const.}$ tal y como demuestra el siguiente cálculo

$$\nabla s \cdot \nabla t = s_w t_w + s_y t_y = \sqrt{2}w^3 s_w s_y - \sqrt{2}w^3 s_y s_w = 0$$

donde hemos usado el sistema (2.106).

La función $t(w, y)$ satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$t_{yy} - \frac{3t_w}{w} + t_{ww} = 0 \quad \text{en } w > 0 \quad (2.111)$$

como podemos deducir fácilmente a partir (2.106) derivando la primera ecuación con respecto a w , la segunda con respecto a y e igualando las expresiones de s_{wy} resultantes.

2.5.3 Soluciones autosimilares en el plano hodógrafo

En esta sección daremos una representación de las soluciones autosimilares (2.78) y (2.79) estudiadas en el teorema 2.3 en término de las variables del plano hodógrafo. Recordemos que la

familia de curvas características $z(s, t)$ definen un cambio de variables de (z, t) a (s, t) mediante las relaciones

$$\begin{aligned} z_s(s, t) &= \frac{1}{h^2(z(s, t), t)} \\ z_t(s, t) &= v(z(s, t), t) \end{aligned} \quad (2.112)$$

No es entonces difícil de verificar que para soluciones con la forma (2.78), (2.79) y teniendo en cuenta (2.80) resulta que

$$\begin{aligned} z_s(s, t) &= (t_0 - t)^{-2\gamma} \frac{1}{\varphi^2\left(\frac{z}{(t_0 - t)^{1-\frac{\gamma}{2}}}\right)} \\ z_t(s, t) &= (t_0 - t)^{-\frac{\gamma}{2}} \psi\left(\frac{z}{(t_0 - t)^{1-\frac{\gamma}{2}}}\right) \end{aligned} \quad (2.113)$$

relaciones que sugieren la siguiente estructura autosimilar para $z(s, t)$:

$$z(s, t) = (t_0 - t)^{1-\frac{\gamma}{2}} G\left(\frac{s}{(t_0 - t)^{\frac{3\gamma}{2}+1}}\right) \quad (2.114)$$

y por tanto

$$u \equiv z_s = (t_0 - t)^\chi f\left(\frac{s}{(t_0 - t)^\kappa}\right) \quad (2.115)$$

donde

$$\begin{aligned} \chi &= -2\gamma \\ \kappa &= \frac{3\gamma}{2} + 1 \end{aligned}$$

Es fácil deducir, dada una función $z(s, t)$ de la forma (2.114) y a partir de (2.113), las soluciones autosimilares φ y ψ . Así pues, para estudiar la estructura de las soluciones autosimilares en el plano hodógrafo debemos buscar soluciones u, v del sistema (2.100) de la forma

$$\begin{aligned} u &= (t_0 - t)^\chi f(\eta) \\ v &= (t_0 - t)^\rho g(\eta) \end{aligned} \quad (2.116)$$

donde

$$\eta = \frac{s}{(t_0 - t)^\kappa}$$

con lo que obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -\chi f + \kappa \xi f' &= g' \\ -\rho g + \kappa \xi g' &= -\frac{f'}{2f^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (2.117)$$

además de la siguiente relación de exponentes de similaridad:

$$\rho = \frac{\chi}{4} = -\frac{\gamma}{2} \quad (2.118)$$

Recordamos que el sistema (2.100) se transforma, mediante la transformación hodógrafa, en el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} t_u &= s_v \\ s_u &= -\frac{1}{2} \frac{t_v}{u^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (2.119)$$

De (2.116) deducimos que

$$\begin{aligned} \frac{u^{\frac{\rho}{\chi}}}{v} &= \frac{(f(\eta))^{\frac{\rho}{\chi}}}{g(\eta)} \equiv R(\eta) \\ u^{\frac{\rho}{\chi}} + v &= (t_0 - t)^{\rho} \left((f(\eta))^{\frac{\rho}{\chi}} + g(\eta) \right) = (t_0 - t)^{\rho} S(\eta) \end{aligned}$$

de donde se sigue

$$\begin{aligned} (t_0 - t)^{\rho} &= \frac{u^{\frac{\rho}{\chi}} + v}{S(\eta)} = \frac{u^{\frac{\rho}{\chi}} + v}{S\left(R^{-1}\left(\frac{u^{\frac{\rho}{\chi}}}{v}\right)\right)} \\ s &= (t_0 - t)^{\kappa} R^{-1}\left(\frac{u^{\frac{\rho}{\chi}}}{v}\right) \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} t_0 - t &= \left(\frac{u^{\frac{\rho}{\chi}} + v}{S\left(R^{-1}\left(\frac{u^{\frac{\rho}{\chi}}}{v}\right)\right)} \right)^{\frac{1}{\rho}} = u^{\lambda} T(\zeta) \\ s &= \left(u^{\frac{1}{\chi}} \varphi\left(\frac{v}{u^{\frac{\rho}{\chi}}}\right) \right)^{\kappa} R^{-1}\left(\frac{u^{\frac{\rho}{\chi}}}{v}\right) = u^{\nu} S(\zeta) \end{aligned} \quad (2.120)$$

donde se satisfacen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{v}{u^{\mu}} \\ \nu &= \frac{\kappa}{\chi} = -\frac{1}{2\gamma} - \frac{3}{4} \\ \mu &= \frac{\rho}{\chi} = \frac{1}{4} \\ \lambda &= \frac{1}{\chi} = -\frac{1}{2\gamma} \end{aligned} \quad (2.121)$$

Por simplicidad usaremos como único parámetro ν . El sistema (2.119) se puede reescribir entonces como

$$\begin{aligned} -\left(\nu + \frac{3}{4}\right) T + \frac{1}{4} \zeta T' &= S' \\ \nu S - \frac{1}{4} \zeta S' &= \frac{1}{2} T' \end{aligned} \quad (2.122)$$

Introducimos ahora el siguiente cambio de variables

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{v}{u^4} = 2\sqrt{2} \tan \theta \\ u &= r^4 \cos^4 \theta\end{aligned}\quad (2.123)$$

con $0 \leq r < \infty$ y $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, para deducir, a partir de (2.120) y (2.122),

$$s = r^{4\nu} \left(\cos^{4\nu} \theta \right) S \left(2\sqrt{2} \tan \theta \right) = r^{4\nu} f(\theta; \nu) \quad (2.124)$$

donde $f(\theta; \nu)$ satisface

$$\frac{d^2 f}{d\theta^2} - 3 \tan \theta \frac{df}{d\theta} + \left((4\nu)^2 + 12\nu \right) f = 0 \quad (2.125)$$

y

$$t_0 - t = r^{4(\nu + \frac{3}{4})} g(\theta; \nu) \quad (2.126)$$

donde g es una solución de

$$\frac{d^2 g}{d\theta^2} + 3 \tan \theta \frac{dg}{d\theta} + \left((4\nu)^2 + 12\nu \right) g = 0 \quad (2.127)$$

Estudiaremos las soluciones de (2.125), (2.127) y determinaremos a posteriori cuáles de ellas se corresponden con los perfiles autosimilares.

Proposición 2.2 *La solución general de (2.125) es una combinación lineal de las dos funciones siguientes:*

$$f_s(\theta; \nu) = \oint_{\Gamma} \cosh((\sin \theta) t) \sqrt{t} K_{|4\nu + \frac{3}{2}|}(t) dt \quad (2.128)$$

$$f_a(\theta; \nu) = \oint_{\Gamma} \sinh((\sin \theta) t) \sqrt{t} K_{|4\nu + \frac{3}{2}|}(t) dt \quad (2.129)$$

y la de (2.127) es una combinación lineal de

$$g_s(\theta; \nu) = \oint_{\Gamma} \cosh((\sin \theta) t) t^{-\frac{5}{2}} K_{|4\nu + \frac{3}{2}|}(t) dt \quad (2.130)$$

$$g_a(\theta; \nu) = \oint_{\Gamma} \sinh((\sin \theta) t) t^{-\frac{5}{2}} K_{|4\nu + \frac{3}{2}|}(t) dt \quad (2.131)$$

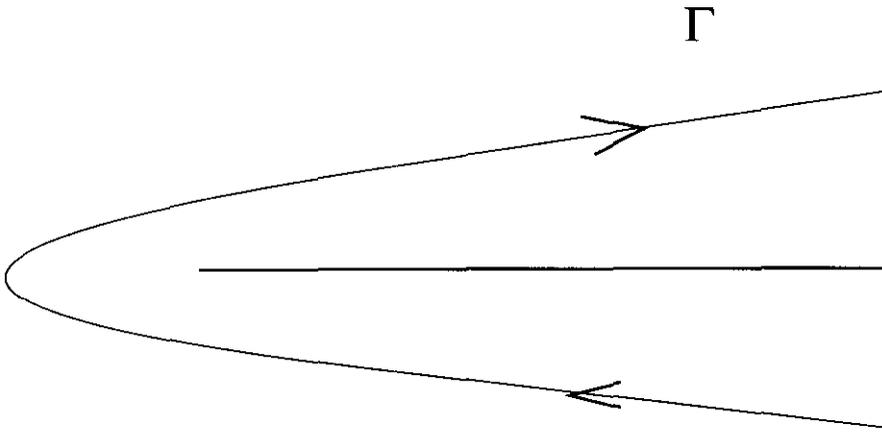
donde Γ es una curva definida en el plano complejo que rodea el semieje real positivo (ver figura 2.7) y $K_{\alpha}(t)$ es la función modificada de Bessel de orden α .

Además las funciones $f_s(\theta; \nu)$ y $f_a(\theta; \nu)$ tienen la siguiente representación en términos de las funciones hipergeométricas

$$\begin{aligned}f_s(\theta; \nu) &= C \left(F(-4\nu, 3 + 4\nu; 2; \frac{1 + \sin \theta}{2}) + F(-4\nu, 3 + 4\nu; 2; \frac{1 - \sin \theta}{2}) \right) \\ f_a(\theta; \nu) &= C \left(F(-4\nu, 3 + 4\nu; 2; \frac{1 + \sin \theta}{2}) - F(-4\nu, 3 + 4\nu; 2; \frac{1 - \sin \theta}{2}) \right)\end{aligned}$$

donde

$$C = 2^{-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{3}{2}} \frac{(4\nu + 1)(2\nu + 1)}{\sin 4\pi\nu}$$

Figura 2.7: El contorno Γ en (2.133)**Demostración.**

Introduzcamos $x = \sin \theta$. Entonces

$$f_\theta = f_x \sqrt{1 - x^2}$$

$$f_{\theta\theta} = (1 - x^2)f_{xx} - xf_x$$

La ecuación (2.125) se puede escribir pues como

$$(1 - x^2)f'' - 4xf' + \left((4\nu)^2 + 12\nu\right) f = 0 \quad (2.132)$$

Buscamos una solución de (2.132) con la forma

$$f = \oint_{\Gamma} e^{\pm xt} G(t) dt \quad (2.133)$$

donde Γ es como en la figura 2.7.

La función G debe satisfacer entonces la ecuación

$$t^2 G - (t^2 G)'' + 4(tG)' + \left((4\nu)^2 + 12\nu\right) G = 0$$

Introducimos ahora la función $h(t)$ definida por $G(t) = \sqrt{t}h(t)$. La ecuación para $h(t)$ es entonces

$$t^2 h'' + th' - \left(\left(4\nu + \frac{3}{2}\right)^2 + t^2\right) h = 0$$

Esta ecuación es la ecuación modificada de Bessel y posee una solución única que decae en el infinito: $h(t) = K_{|4\nu + \frac{3}{2}|}(t)$. Los comportamientos asintóticos de esta función son (ver por ejemplo [1])

$$K_{|4\nu + \frac{3}{2}|}(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} \Gamma\left(|4\nu + \frac{3}{2}|\right) \left(\frac{1}{2}t\right)^{-|4\nu + \frac{3}{2}|}$$

$$K_{|4\nu+\frac{3}{2}|}(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2t}} e^{-t}$$

Existe otra solución linealmente independiente: $I_{|4\nu+\frac{3}{2}|}(\theta)$. Esta función queda excluida debido a su crecimiento exponencial que hace que la integral (2.133) diverja. La conclusión de toda la discusión precedente es que las dos funciones

$$f_{\pm}(\theta; \nu) = \oint_{\Gamma} e^{\pm(\sin \theta)t} \sqrt{t} K_{|4\nu+\frac{3}{2}|}(t) dt$$

existen para $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ y son linealmente independientes, ya que $f_{-}(\theta; \nu) = f_{+}(-\theta; \nu)$ y ninguna de las funciones f_{\pm} es simétrica en θ . Observemos que

$$\begin{aligned} f_s(\theta; \nu) &= \frac{1}{2} (f_{+}(\theta; \nu) + f_{-}(\theta; \nu)) \\ f_a(\theta; \nu) &= \frac{1}{2} (f_{+}(\theta; \nu) - f_{-}(\theta; \nu)) \end{aligned}$$

son las dadas en el enunciado de la proposición 2.2.

De forma análoga podemos ver que una función g solución de (2.127) satisface

$$(1 - x^2)g'' + 2xg' + ((4\nu)^2 + 12\nu)g = 0 \quad (2.134)$$

y que

$$g_{\pm}(\theta; \nu) = \oint_{\Gamma} e^{\pm xt} t^{-\frac{5}{2}} K_{|4\nu+\frac{3}{2}|} dt = \oint_{\Gamma} e^{\pm(\sin \theta)t} t^{-\frac{5}{2}} K_{|4\nu+\frac{3}{2}|} dt$$

son solución de (2.127), que existen para todo $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y son linealmente independientes.

Las funciones descritas en el enunciado de la Proposición 2.2 vienen dadas entonces por

$$\begin{aligned} g_s(\theta; \nu) &= \frac{1}{2} (g_{+}(\theta; \nu) + g_{-}(\theta; \nu)) \\ g_a(\theta; \nu) &= \frac{1}{2} (g_{+}(\theta; \nu) - g_{-}(\theta; \nu)) \end{aligned}$$

Si realizamos en (2.132) e (2.134) el cambio de variables $x = 1 - 2z$ llegamos a las ecuaciones

$$z(1 - z)f'' + (2 - 4z)f' + ((4\nu)^2 + 12\nu)f = 0 \quad (2.135)$$

$$z(1 - z)g'' - (1 - 2z)g' + ((4\nu)^2 + 12\nu)g = 0 \quad (2.136)$$

que son casos particulares de la ecuación hipergeométrica:

$$z(1 - z)y'' + (c - (a + b + 1)z)y' - aby = 0$$

con solución $F(a, b; c; z)$, la conocida función hipergeométrica. Los índices a, b y c son $a = -4\nu$, $b = 3 + 4\nu$, $c = 2$ en el caso de la ecuación (2.135) y $a = 4\nu$, $b = -3 - 4\nu$, $c = -1$ en el caso de la ecuación (2.136). Nótese que las ecuaciones (2.132) e (2.134) son invariantes ante el cambio $x \rightarrow -x$. Esta última observación nos permite concluir que las soluciones generales de (2.132) y de (2.134) en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ son

$$f(\theta; \nu) = C_1 F(-4\nu, 3 + 4\nu; 2; \frac{1 - \sin \theta}{2}) + C_2 F(-4\nu, 3 + 4\nu; 2; \frac{1 + \sin \theta}{2})$$

$$g(\theta; \nu) = C_3 F(4\nu, -3 - 4\nu; -1; \frac{1 - \sin \theta}{2}) + C_4 F(4\nu, -3 - 4\nu; 2; \frac{1 + \sin \theta}{2})$$

respectivamente.

Usaremos en lo que sigue la fórmula 15.3.29 en [1]:

$$F(a, b, \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}; c; \frac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}b + \frac{1}{2})} \quad (2.137)$$

también la 15.2.1:

$$\frac{d}{dz} F(a, b; c; z) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1; c+1; z) \quad (2.138)$$

así como la 11.4.22

$$\int_0^\infty t^\mu K_\lambda(t) dt = 2^{\mu-1} \Gamma(\frac{\mu + \lambda + 1}{2}) \Gamma(\frac{\mu - \lambda + 1}{2}) \quad \text{Si } \text{Re}(\mu \pm \lambda) > -1 \quad (2.139)$$

que nos permite concluir

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \oint_\Gamma \cosh((\sin \theta) t) \sqrt{t} K_{|4\nu + \frac{3}{2}|}(t) dt = 2^{\frac{1}{2}} \Gamma(2\nu + \frac{3}{2}) \Gamma(-2\nu) \quad (2.140)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{d}{d\theta} \oint_\Gamma \sinh((\sin \theta) t) \sqrt{t} K_{|4\nu + \frac{3}{2}|}(t) dt = 2^{\frac{1}{2}} \Gamma(2\nu + 2) \Gamma(-2\nu + \frac{1}{2}) \quad (2.141)$$

usando eventualmente prolongación analítica en el parámetro ν cuando $\text{Re}(\frac{1}{2} - |4\nu + \frac{3}{2}|) \leq -1$; y la bien conocida fórmula

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad (2.142)$$

(ver 6.1.17 en [1]).

La función (2.128) es simétrica en θ y por tanto

$$\begin{aligned} & \oint_\Gamma \cosh((\sin \theta) t) \sqrt{t} K_{|4\nu + \frac{3}{2}|}(t) dt = \\ & = C \left(F(-4\nu, 3 + 4\nu; 2; \frac{1 + \sin \theta}{2}) + F(-4\nu, 3 + 4\nu; 2; \frac{1 - \sin \theta}{2}) \right) \end{aligned} \quad (2.143)$$

Empleamos (2.137), (2.140) y (2.142) para deducir el valor de C en (2.143) y se obtiene así

$$\begin{aligned} & \oint_\Gamma \cosh((\sin \theta) t) \sqrt{t} K_{|4\nu + \frac{3}{2}|}(t) dt = \\ & = 2^{-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{3}{2}} \frac{(4\nu + 1)(2\nu + 1)}{\sin 4\pi\nu} \left(F(-4\nu, 3 + 4\nu; 2; \frac{1 + \sin \theta}{2}) + F(-4\nu, 3 + 4\nu; 2; \frac{1 - \sin \theta}{2}) \right) \end{aligned}$$

Razonando en forma análoga, teniendo en cuenta que por (2.138)

$$\begin{aligned} & \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{d}{d\theta} \oint_\Gamma \sinh((\sin \theta) t) \sqrt{t} K_{|4\nu + \frac{3}{2}|}(t) dt = \\ & = C \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{d}{d\theta} \left(F(-4\nu, 3 + 4\nu; 2; \frac{1 + \sin \theta}{2}) - F(-4\nu, 3 + 4\nu; 2; \frac{1 - \sin \theta}{2}) \right) \\ & = \frac{2C(-4\nu)(3 + 4\nu)}{2} F(-4\nu + 1, 4 + 4\nu; 3; \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

y usando (2.137), (2.140) y (2.142) concluimos finalmente que

$$\begin{aligned} & \oint_{\Gamma} \sinh((\sin \theta) t) \sqrt{t} K_{|4\nu+\frac{3}{2}|}(t) dt = \\ & = 2^{-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{3}{2}} \frac{(4\nu+1)(2\nu+1)}{\sin 4\pi\nu} \left(F(-4\nu, 3+4\nu; 2; \frac{1+\sin \theta}{2}) - F(-4\nu, 3+4\nu; 2; \frac{1-\sin \theta}{2}) \right) \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. \square

Nótese que las funciones $f_s(\theta; \nu)$ y $g_s(\theta; \nu)$ son simétricas en θ y que las funciones $f_a(\theta; \nu)$ y $g_a(\theta; \nu)$ son antisimétricas en θ .

Denotemos $f_1(\theta; \nu) = f_s(\theta; \nu)$, $f_2(\theta; \nu) = f_a(\theta; \nu)$. Sean $g_1(\theta; \nu)$ tal que

$$s = r^{4\nu} f_2(\theta; \nu)$$

$$t = t_0 - r^{4(\nu+\frac{3}{4})} g_1(\theta; \nu)$$

satisfagan (2.119) y $g_2(\theta; \nu)$ tal que

$$s = r^{4\nu} f_1(\theta; \nu)$$

$$t = t_0 - r^{4(\nu+\frac{3}{4})} g_2(\theta; \nu)$$

satisfagan (2.119) (con r y θ definidos en (2.123)). Recordemos que las curvas de nivel de $s(r, \theta)$ y $(t_0 - t)(r, \theta)$ son ortogonales. Por tanto, la función $f_1(\theta; \nu)$ es simétrica si y solamente si la función $g_2(\theta; \nu)$ es antisimétrica y viceversa. Por esta razón las funciones $g_1(\theta; \nu)$ y $g_2(\theta; \nu)$ deben ser proporcionales a $g_s(\theta; \nu)$ y $g_a(\theta; \nu)$ respectivamente.

Para que las funciones s y $t_0 - t$ dadas por (2.124) y (2.126) sean representaciones en el plano hodógrafo de soluciones autosimilares analíticas, la función $g(\nu; \theta)$ debe ser analítica y poseer al menos dos ceros en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tal y como veremos más tarde. El siguiente Lema nos ayuda a conocer cuándo esto tiene lugar.

Lema 2.1 Sean

$$S = \left\{ s_n^1 = -\frac{n}{2} - 1 \right\}_{n=0}^{\infty} \cup \left\{ s_n^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}n \right\}_{n=0}^{\infty}$$

$$A = \left\{ a_n^1 = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}n \right\}_{n=0}^{\infty} \cup \left\{ a_n^2 = \frac{n}{2} \right\}_{n=0}^{\infty}$$

Si $\nu = s_n^1$ ó $\nu = s_n^2$ entonces las funciones $g_1(\theta; \nu)$, $f_2(\theta; \nu)$ son analíticas en $(0, 2\pi)$ y cada una de ellas tiene n raíces en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$.

Si $\nu = a_n^1$ ó $\nu = a_n^2$ entonces las funciones $g_2(\theta; \nu)$, $f_1(\theta; \nu)$ son analíticas en $(0, 2\pi)$ y cada una de ellas tiene n raíces en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$.

Si $\nu \in \mathbb{R} \setminus S$ entonces las funciones $g_1(\theta; \nu)$, $f_2(\theta; \nu)$ no son analíticas en $\theta = \frac{\pi}{2}$ y si $\nu \in \mathbb{R} \setminus A$ entonces las funciones $g_2(\theta; \nu)$, $f_1(\theta; \nu)$ no son analíticas en $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Si $s_{n+1}^1 < \nu < s_n^1$ ó $s_n^2 < \nu < s_{n+1}^2$ entonces las funciones $g_1(\theta; \nu)$, $f_2(\theta; \nu)$ tienen $n+1$ raíces en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$.

Si $a_{n+1}^1 < \nu < a_n^1$ ó $a_n^2 < \nu < a_{n+1}^2$ entonces las funciones $g_2(\theta; \nu)$, $f_1(\theta; \nu)$ tienen $n+1$ raíces en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$.

Demostración.

Notemos primero que la solución general de (2.127) es, localmente en la vecindad de $\theta = \frac{\pi}{2}$, una combinación lineal de dos funciones que satisfacen

$$\frac{d^2 g}{d\tilde{\theta}^2} \underset{\tilde{\theta} \rightarrow 0}{\sim} -\frac{3}{\tilde{\theta}} \frac{dg}{d\tilde{\theta}}$$

con $\theta = \frac{\pi}{2} - \tilde{\theta}$. Una de estas funciones se comporta como $g \underset{\tilde{\theta} \rightarrow 0}{\sim} C\tilde{\theta}^{-2}$ y la otra como una constante.

Encontrar las soluciones antisimétricas acotadas es equivalente a resolver la ecuación

$$\frac{d^2 g}{d\theta^2} + 3 \tan \theta \frac{dg}{d\theta} + \left((4\nu)^2 + 12\nu \right) g = 0 \quad (2.144)$$

con condiciones de contorno $g(0; \nu) = 0$, $g'(\frac{\pi}{2}; \nu) = 0$. La ecuación, junto con las condiciones de contorno, constituyen un problema del tipo Sturm-Liouville con autovalor $\lambda = (4\nu)^2 + 12\nu$.

El teorema clásico de Sturm prueba la existencia de un conjunto infinito de autovalores $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ y que estos forman una secuencia monótona creciente tal que $\lambda_n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} \infty$. Además, la autofunción que corresponde al autovalor λ_n tiene exactamente n ceros en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$.

Encontraremos a continuación los autovalores. Para ello introducimos el cambio de variables $x = \sin \theta$ y resolvemos la ecuación resultante:

$$(1 - x^2)g'' + 2xg' + \left((4\nu)^2 + 12\nu \right) g = 0 \quad (2.145)$$

usando desarrollos en serie. Si escribimos

$$g(x; \nu) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{2m+1}$$

entonces los coeficientes a_m satisfacen la siguiente relación de recurrencia:

$$a_{m+1} = \frac{1}{(2m+2)(2m+3)} \left((2m-2)(2m+1) - \left((4\nu)^2 + 12\nu \right) \right) a_m \quad (2.146)$$

La serie contendrá solamente un número finito de términos en el caso de que ν tome los valores $-\frac{3}{4} - \frac{1}{2}n$ ó $\frac{1}{2}n$ con $n = 0, 1, 2, \dots$. Resolviendo la relación de recurrencia (2.146) en estos casos obtenemos

$$g(\theta; \nu) = C \sum_{m=0}^{n+1} 4^m \frac{(-1)^m \Gamma(n+2) \Gamma\left(m+n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \Gamma(n+2-m) \Gamma(2m+2)} \sin^{2m+1} \theta \quad (2.147)$$

El número de ceros de $g(\theta; \nu)$ es una función monótona de $\lambda = (4\nu)^2 + 12\nu$ en virtud del clásico teorema de Sturm.

El mismo argumento se aplica a las soluciones simétricas. En este caso las condiciones de contorno son $g'(0; \nu) = 0$, $g(\frac{\pi}{2}; \nu) = 0$ y llegamos de nuevo a un problema de Sturm-Liouville. Con el objeto de encontrar los correspondientes autovalores resolvemos (2.145) usando el desarrollo en serie

$$g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{2m}$$

y obteniendo la siguiente relación de recurrencia

$$a_{m+1} = \frac{1}{(2m+2)(2m+1)} \left(4m^2 - 6m - \left((4\nu)^2 + 12\nu \right) \right) a_m \quad (2.148)$$

La serie será truncada en caso de ser ν igual a $-\frac{n+2}{2}$ ó a $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}n$ con $n = -1, 0, 1, 2, \dots$. La función correspondiente a $n = -1$ es $g(x; -1) = 1 + x^2$ que no satisface la condición $g(1; -1) = 0$. Todas las demás funciones la satisfacen. Resolviendo la relación de recurrencia (2.148) en estos casos obtenemos

$$g(\theta; \nu) = C \sum_{m=0}^{n+2} (-1)^m 4^m \frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2} + n\right) \Gamma(3+n)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma(3+n-m) \Gamma(2m+1)} \sin^{2m} \theta \quad (2.149)$$

El número de ceros de $g(\theta; \nu)$ es una función monótona de $\lambda = (4\nu)^2 + 12\nu$ en virtud del clásico teorema de Sturm.

Los resultados que involucran la función $f(\theta; \nu)$ se pueden obtener usando el mismo tipo de argumentos. \square

En la demostración del lema anterior se obtuvieron las expresiones explícitas de $g_1(\theta; \nu)$ cuando $\nu \in S$ y de $g_2(\theta; \nu)$ cuando $\nu \in A$ salvo por sendas constantes multiplicativas indeterminadas. En el siguiente lema damos una fórmula explícita para $f_1(\theta; \nu)$ cuando $\nu \in A$ y para $f_2(\theta; \nu)$ cuando $\nu \in S$ usando las expresiones halladas en la Proposición 2.2 y esto nos permitirá determinar esas constantes:

Lema 2.2 Sea $\nu = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}n$ ó $\nu = \frac{n}{2}$ para algún $n = 0, 1, 2, \dots$. Entonces

$$f_1(\theta; \nu) = \sum_{l=0}^n \frac{2^{2l+\frac{3}{2}}}{(2l)!(n-l)!\Gamma\left(-\frac{1}{2}-n-l\right)} \sin^{2l} \theta \quad (2.150)$$

Sea $\nu = -\frac{n}{2} - 1$ ó $\nu = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}n$ para algún $n = 0, 1, 2, \dots$. Entonces

$$f_2(\theta; \nu) = \sum_{l=0}^n \frac{2^{2l+\frac{5}{2}}}{(2l+1)!(n-l)!\Gamma\left(-\frac{3}{2}-n-l\right)} \sin^{2l+1} \theta \quad (2.151)$$

Demostración. Si $\nu = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}n$ ó $\nu = \frac{n}{2}$ para algún $n = 0, 1, 2, \dots$ entonces $\left| 4\nu + \frac{3}{2} \right| = \frac{3}{2} + 2n$ y

$$f_1(\theta; \nu) = \oint_{\Gamma} \cosh((\sin \theta) t) \sqrt{t} K_{\frac{3}{2}+2n}(t) dt = \oint_{z=\epsilon e^{i\theta}} \cosh((\sin \theta) z) z^{\frac{1}{2}} K_{\frac{3}{2}+2n}(z) dz$$

ya que $z^{\frac{1}{2}} K_{\frac{3}{2}+2n}(z)$ es analítica alrededor del semieje real positivo excepto en el punto $z = 0$ y podemos aplicar una deformación de contorno hacia una circunferencia alrededor del origen. Para calcular la integral recordemos que

$$z^{\frac{1}{2}} K_{\frac{3}{2}+2n}(z) = z^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2} \left(I_{\frac{3}{2}+2n}(z) - I_{-\frac{3}{2}-2n}(z) \right)$$

(ver [1]) y escribamos el desarrollo en serie para $z^{\frac{1}{2}} I_{\frac{3}{2}+2n}(z)$:

$$z^{\frac{1}{2}} I_{\frac{3}{2}+2n}(z) = \sqrt{2} \left(\frac{z}{2} \right)^{2+2n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} z^2 \right)^k}{k! \Gamma\left(\frac{3}{2} - 2n + k\right)}$$

y para $z^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{3}{2}-2n}(z)$:

$$z^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{3}{2}-2n}(z) = \sqrt{2} \left(\frac{z}{2}\right)^{-1-2n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}z^2\right)^k}{k! \Gamma\left(-\frac{1}{2}-2n+k\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2n-2k+\frac{3}{2}} z^{2k-2n-1}}{k! \Gamma\left(-\frac{1}{2}-2n+k\right)}$$

Introduzcamos estos desarrollos en la integral e integrando mediante el método de los residuos obtendríamos

$$\begin{aligned} & \oint_{z=\varepsilon e^{i\theta}} \cosh((\sin \theta) z) z^{\frac{1}{2}} K_{\frac{3}{2}+2n}(z) dz = \\ &= \sum_{l=0}^n \frac{1}{(2l)!} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^{2l}}{dt^{2l}} \left(\frac{2^{2l+\frac{3}{2}}}{(n-l)! \Gamma\left(-\frac{1}{2}-n-l\right)} \cosh((\sin \theta) t) \right) = \\ &= \sum_{l=0}^n \frac{2^{2l+\frac{3}{2}}}{(2l)!(n-l)! \Gamma\left(-\frac{1}{2}-n-l\right)} \sin^{2l} \theta \end{aligned}$$

Sea $\nu = -\frac{n}{2} - 1$ ó $\nu = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}n$ para algún $n = 0, 1, 2, \dots$. Entonces $\left|4\nu + \frac{3}{2}\right| = 2n + \frac{5}{2}$ y

$$\begin{aligned} f_2(\theta; \nu) &= \oint_{\Gamma} \sinh((\sin \theta) t) \sqrt{t} K_{\frac{5}{2}+2n}(t) dt = \\ &= \sum_{l=0}^n \frac{1}{(2l)!} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^{2l}}{dt^{2l}} \left(\frac{2^{2l+\frac{5}{2}}}{(n-l)! \Gamma\left(-\frac{3}{2}-n-l\right)} \frac{\sinh((\sin \theta) t)}{t} \right) = \\ &= \sum_{l=0}^n \frac{2^{2l+\frac{5}{2}}}{(2l+1)!(n-l)! \Gamma\left(-\frac{3}{2}-n-l\right)} \sin^{2l+1} \theta \end{aligned}$$

procediendo como arriba y teniendo en cuenta que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^{2l}}{dt^{2l}} \left(\frac{\sinh((\sin \theta) t)}{t} \right) = \frac{1}{2l+1} \sin^{2l+1} \theta$$

Esto concluye la demostración. \square

Observación 2.1 Si introducimos el cambio (2.123) en (2.119) y particularizamos para $\theta = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} 4\sqrt{2}\nu f(0) &= g'(0) \\ (4\nu + 3)g(0) &= -\sqrt{2}f'(0) \end{aligned} \tag{2.152}$$

A partir de (2.152) y (2.150) obtenemos el siguiente valor de C en (2.147)

$$C = 4\sqrt{2}\nu \frac{2^{\frac{3}{2}}}{(n)! \Gamma\left(-\frac{1}{2}-n\right)}$$

y a partir de (2.152) y (2.151) obtenemos el siguiente valor de C en (2.149)

$$C = -\frac{\sqrt{2}}{(4\nu + 3)} \frac{2^{\frac{5}{2}}}{(n)! \Gamma\left(-\frac{3}{2}-n\right)}$$

Observación 2.2 A continuación presentamos las funciones $f(\theta)$ y $g(\theta)$ en ciertos casos particulares interesantes:

$$f_2(\theta; -1) = 3 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sin \theta$$

$$g_1(\theta; -1) = \frac{6}{\sqrt{\pi}} \cos^4 \theta$$

$$f_2(\theta; -\frac{3}{2}) = \frac{15 \sqrt{2}}{2 \sqrt{\pi}} \left(\frac{3}{4} \sin \theta - \frac{7}{12} \sin(3\theta) \right)$$

$$g_1(\theta; -\frac{3}{2}) = -\frac{5}{\sqrt{\pi}} \left(-\frac{1}{16} + \frac{9}{32} \cos(2\theta) + \frac{9}{16} \cos(4\theta) + \frac{7}{32} \cos(6\theta) \right)$$

$$f_2(\theta; -2) = \frac{525 \sqrt{2}}{64 \sqrt{\pi}} \left(\sin \theta - \frac{9}{10} \sin(3\theta) + \frac{33}{50} \sin(5\theta) \right)$$

$$g_1(\theta; -2) = \frac{63}{512 \sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{8}{3} \cos(2\theta) + \frac{28}{3} \cos(4\theta) + 24 \cos(6\theta) + 11 \cos(8\theta) \right)$$

Es posible establecer una correspondencia entre las soluciones en el plano hodógrafo halladas y las soluciones autosimilares en el espacio físico:

Proposición 2.3 Sea $\nu < -1$. Entonces existe una familia continua de funciones $g(\theta; \nu)$ solución de (2.127) que tienen al menos dos raíces en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Sea $g(\theta; \nu)$ una cualquiera de estas funciones y $f(\theta; \nu)$ la correspondiente solución de (2.125). Entonces las funciones $s(r, \theta)$ y $(t_0 - t)(r, \theta)$ son la representación en el plano hodógrafo de una solución autosimilar en el espacio físico con comportamientos asintóticos en el infinito

$$\varphi \underset{\xi \rightarrow \pm\infty}{\sim} A_{\pm} |\xi|^{-\frac{1}{2\nu+2}}$$

$$\psi \underset{\xi \rightarrow \pm\infty}{\sim} B_{\pm} |\xi|^{\frac{1}{4\nu+4}}$$

Si $\nu = -1$ entonces

$$s = 3 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} r^{-4} \sin \theta \tag{2.153}$$

$$t_0 - t = \frac{6}{\sqrt{\pi}} r^{-1} \cos^4 \theta$$

son la representación en el plano hodógrafo de la única solución autosimilar en el espacio físico que además es simétrica y de soporte compacto.

Demostración. Una consecuencia del lema 2.1 es que existe una familia continua de funciones $g(\theta; \nu)$ solución de (2.127) con al menos dos raíces en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ para todo $\nu < -1$.

Si $g(\theta; \nu)$ tiene al menos dos raíces entonces existen curvas en el plano hodógrafo dadas de forma implícita por

$$r^{4\nu+3} g(\theta; \nu) = C \tag{2.154}$$

y que son lazos que contienen al origen. La curva definida por (2.154) con $C = C_1$ es interior a la curva definida por (2.154) con $C = C_2$ si $C_1 > C_2$. Como además las curvas de nivel de la función $s(r, \theta)$ son ortogonales a las curvas definidas por (2.154) entonces la función $s(r, \theta)$ es monótona a lo largo de ellas y recorre todos los valores reales (esta última propiedad es solamente posible cuando las curvas definidas por (2.154) son lazos que contienen al origen). De las ecuaciones

$$\begin{aligned} t_0 - t &= r^{4\nu+3} g(\theta; \nu) \\ s &= r^{4\nu} f(\theta; \nu) \end{aligned} \quad (2.155)$$

podemos despejar

$$\frac{f(\theta; \nu)}{(g(\theta; \nu))^{\frac{4\nu}{4\nu+3}}} = \frac{s}{(t_0 - t)^{\frac{4\nu}{4\nu+3}}}$$

y dada la monotonía de s a $t_0 - t$ constante podemos invertir la expresión anterior para obtener

$$\theta = \theta \left(\frac{s}{(t_0 - t)^{\frac{4\nu}{4\nu+3}}} \right) \quad (2.156)$$

Despejamos r de la primera expresión en (2.155), usamos (2.156) y se tiene entonces

$$r = (t_0 - t)^{\frac{1}{4\nu+3}} F \left(\frac{s}{(t_0 - t)^{\frac{4\nu}{4\nu+3}}} \right) \quad (2.157)$$

Usamos (2.123), (2.156) y (2.157) para concluir que u y v tienen la estructura de (2.116) y de (2.113) y (2.115) se sigue la Proposición.

En el caso $\nu = -1$ tenemos que $g(\theta; \nu) = \frac{6}{\sqrt{\pi}} \cos^4 \theta$ con raíces en $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$. Consideremos las expresiones dadas en (2.153) y tomemos, sin pérdida de generalidad, un tiempo particular $t_0 - t = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$. Debemos encontrar los valores de s a lo largo de la curva $r = \cos^4 \theta$. Notemos que de (2.153) podemos deducir

$$\frac{\pi}{18} r^8 s^2 + r^{\frac{1}{2}} = 1$$

y por tanto

$$s^2 = \frac{18}{\pi} \frac{1 - r^{\frac{1}{2}}}{r^8} \quad (2.158)$$

de donde se concluye

$$r \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} s^{-\frac{1}{4}}$$

Por otra parte

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{\pi}}{3\sqrt{2}} r^4 s$$

Deducimos entonces de (2.123) y (2.158) que

$$u = r^4 \cos^4 \theta = r^4 (1 - \sin^2 \theta)^2 = r^4 \left(1 - \frac{\pi}{18} r^8 s^2\right)^2 = r^5 \underset{|s| \rightarrow \infty}{\sim} |s|^{-\frac{5}{4}} \quad (2.159)$$

con u simétrica en s .

De (2.115) y (2.159) obtenemos

$$z_s \underset{|s| \rightarrow \infty}{\sim} |s|^{-\frac{5}{4}}$$

y por tanto

$$z \underset{s \rightarrow \pm\infty}{\sim} \pm \text{Const.}$$

mientras que por (2.113)

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{z_s}} \underset{s \rightarrow \pm\infty}{\sim} +\infty$$

y esto concluye la demostración. \square

2.5.4 Combinaciones lineales de autosimilares

La formulación descrita en las secciones precedentes nos permite generar nuevas familias de soluciones explícitas aparte de las autosimilares gracias a la linealidad de las ecuaciones en el plano hodógrafo.

Las expresiones

$$t_0 - t = \int_{-\infty}^{-1} \left(A(\nu) r^{4\nu+3} g_1(\theta; \nu) + B(\nu) r^{4\nu+3} g_2(\theta; \nu) \right) d\nu = G(r, \theta) \quad (2.160)$$

$$s = \int_{-\infty}^{-1} \left(A(\nu) r^{4\nu} f_2(\theta; \nu) + B(\nu) r^{4\nu} f_1(\theta; \nu) \right) d\nu = F(r, \theta) \quad (2.161)$$

con $A(\nu)$ y $B(\nu)$ funciones arbitrarias (o incluso distribuciones), son soluciones formales de (2.119) y (2.127) con r y θ definidas en (2.123) y nos permiten conocer la evolución de una frontera libre cuya representación en el plano hodógrafo en el instante $t = 0$ es la curva $r(\theta)$ dada en forma implícita por $G(r, \theta) = t_0$ y con dato sobre ella $s(\theta) = F(r(\theta), \theta)$.

En este apartado daremos algunos ejemplos de $A(\nu)$ y $B(\nu)$.

2.5.4.1 Ejemplo 1: Los perfiles autosimilares

Los perfiles autosimilares hallados en secciones precedentes corresponden a

$$\begin{aligned} A(\nu) &= C_1 \delta(\nu - \nu_0) \\ B(\nu) &= C_2 \delta(\nu - \nu_0) \end{aligned}$$

con δ la distribución delta de Dirac y $\nu_0 < -1$. En virtud de la Proposición 2.3 el perfil final es en el espacio físico

$$h \underset{|z| \rightarrow 0}{\sim} A_{\pm} |z|^{-\frac{1}{2\nu_0+2}}$$

2.5.4.2 Ejemplo 2: Perfiles del tipo $A_{\pm} |z|^{\alpha} |\log(z)|^{\beta}$

Consideremos unas funciones $A(\nu)$ y $B(\nu)$ regulares, con soporte en el intervalo $[\nu_1, \nu_0] \subset (-\infty, -1)$ y tales que

$$\begin{aligned} A(\nu) &\underset{\nu \rightarrow \nu_0^-}{\sim} C_1 (\nu_0 - \nu)^{\lambda} + o((\nu_0 - \nu)^{\lambda}) \\ B(\nu) &\underset{\nu \rightarrow \nu_0^-}{\sim} C_2 (\nu_0 - \nu)^{\lambda} + o((\nu_0 - \nu)^{\lambda}) \end{aligned}$$

Entonces

$$s \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \int_{\nu_0-\varepsilon}^{\nu_0} \left(C_1 (\nu_0 - \nu)^{\lambda} r^{4\nu} f_2(\theta; \nu_0) + C_2 (\nu_0 - \nu)^{\lambda} r^{4\nu} f_1(\theta; \nu_0) \right) d\nu =$$

$$= (C_1 f_2(\theta; \nu_0) + C_1 f_1(\theta; \nu_0)) r^{4\nu_0} \int_{-\varepsilon}^0 |\nu|^\lambda r^{4\nu} d\nu \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \\ \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} 4^{-1-\lambda} \Gamma(\lambda + 1) (C_1 f_2(\theta; \nu_0) + C_1 f_1(\theta; \nu_0)) r^{4\nu_0} |\log(r)|^{-1-\lambda}$$

de donde podemos deducir

$$r \underset{|s| \rightarrow 0}{\sim} C_\pm |s|^{\frac{1}{4\nu_0}} |\log(s)|^{\frac{1+\lambda}{4\nu_0}}$$

y por tanto

$$u = z_s \underset{|s| \rightarrow 0}{\sim} C_\pm^4 |s|^{\frac{1}{\nu_0}} |\log(s)|^{\frac{1+\lambda}{\nu_0}}$$

Hallamos el comportamiento local de z

$$z \underset{|s| \rightarrow 0}{\sim} D_\pm |s|^{\frac{1}{\nu_0}+1} |\log(s)|^{\frac{1+\lambda}{\nu_0}}$$

para inferir que

$$s \underset{|z| \rightarrow 0}{\sim} K_\pm |z|^{\frac{\nu_0}{\nu_0+1}} |\log(z)|^{-\frac{\nu_0(1+\lambda)}{(\nu_0+1)^2}}$$

y en consecuencia

$$h \underset{|s| \rightarrow 0}{\sim} B_\pm |s|^{-\frac{1}{2\nu_0}} |\log(s)|^{-\frac{1+\lambda}{2\nu_0}} \underset{|z| \rightarrow 0}{\sim} A_\pm |z|^{-\frac{1}{2\nu_0+2}} |\log(z)|^{-\frac{(\lambda+1)(\nu_0+\nu_0^2+1)}{2(\nu_0+1)\nu_0^2}}$$

2.5.4.3 Ejemplo 3: Sumas discretas de autosimilares

Restringiremos la discusión a las autofunciones simétricas y antisimétricas $\{r^{4\nu_n} f(\theta; \nu_n), r^{4\nu_n+3} g(\theta; \nu_n)\}_{n=0}^{\infty}$ que corresponden a los autovalores $\left\{\nu_n = -\frac{n+4}{4}\right\}_{n=0}^{\infty}$. Los autovalores con subíndice par corresponden a perfiles simétricos para $g(\theta; \nu_n)$. Las funciones $A(\nu)$ y $B(\nu)$ son entonces

$$A(\nu) = \sum_{i=0}^{\infty} C_{2i} \delta(\nu - \nu_{2i}) \\ B(\nu) = \sum_{i=0}^{\infty} C_{2i+1} \delta(\nu - \nu_{2i+1})$$

Consideremos un caso particular: $C_0 = 0, C_1 = 0, C_2 = -1, C_4 = 1, C_j = 0$ si $j > 4$. El perfil final viene representado en el plano hodógrafo por una curva $r(\theta)$ con $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$, siendo θ_0 el primer cero de $g_1(\theta; -2)$ y θ_1 el primer cero de $g_1(\theta; -\frac{3}{2})$ (ver figura 2.8). Las funciones $f_2(\theta; -2)$ y $f_2(\theta; -\frac{3}{2})$ son positivas en el intervalo de θ considerado y la función $s(r(\theta), \theta)$ es monótona. El perfil final en el espacio físico consiste en dos conos unidos por sus puntas y que se convierten progresivamente en paraboloides (ver figura 2.9).

Podemos considerar un perfil como el visto arriba pero con $C_0 = \varepsilon$, es decir, con una pequeña componente de la solución autosimilar de soporte compacto. Esta componente debe dominar en la región central y para tiempos próximos al de formación de la singularidad ya que es término más importante cuando $r \rightarrow \infty$ (ver figuras 2.10 y 2.11).

En el espacio físico representa un cilindro corto que se cierra uniformemente seguido, cuando el tiempo es próximo al de formación de la singularidad, de una capa límite en la que dominan los términos viscosos y tridimensionales. Fuera de esta pequeña región el perfil es el de arriba (ver figura 2.9).

Si consideramos $C_1 \neq 0$ entonces el perfil final será asimétrico.

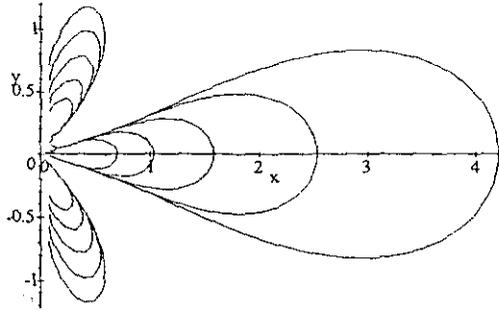


Figura 2.8: Las curvas $t_0 - t = 5^{-2}, 5^{-1}, 1, 5, 5^2$

2.5.4.4 Ejemplo 4: Perfiles del tipo $h_0 + A|z|^{\frac{1}{2}}$

Discutimos aquí un nuevo mecanismo de formación de cúspides que tiene lugar cuando la función $s(r, \theta)$ posee puntos estacionarios, es decir, puntos P tales que $\text{grad}(s)|_P = 0$. Esos puntos son también estacionarios para $t(r, \theta)$. Un ejemplo de esta situación sería

$$\begin{aligned} A(\nu) &= \delta\left(\nu + \frac{3}{2}\right) + \delta(\nu + 2) \\ B(\nu) &= 0 \end{aligned}$$

que corresponde a

$$s(r, \theta) = r^{-6}g_1\left(\theta; -\frac{3}{2}\right) + r^{-8}g_1(\theta; -2)$$

Existe un tiempo $t_1 > 0$ y un $r_1 > 0$ tales que $\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)_{r=r_1, \theta=0} = 0$ ya que para $\theta = 0$ la función $t_0 - t$ cambia de signo cuando nos movemos desde el origen (donde la función es positiva) al infinito (donde la función es negativa) y además decae en el infinito. Por (2.119) $\left(\frac{\partial t}{\partial \theta}\right)_{r=r_1, \theta=0} = \left(\frac{\partial s}{\partial r}\right)_{r=r_1, \theta=0} = \left(\frac{\partial s}{\partial \theta}\right)_{r=r_1, \theta=0} = 0$ y entonces localmente

$$\begin{aligned} |s| &= A(w - w_1)^2 + Bv^2 \\ t - t_1 &= C(w - w_1)^2 + Dv^2 \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned} w &= w_1 + A'\sqrt{t_1 - t} + B'\sqrt{|s|} \\ v &= C'\sqrt{t_1 - t} + D'\sqrt{|s|} \end{aligned}$$

y por tanto

$$u \underset{s \rightarrow 0, t \rightarrow t_1}{\sim} u_0 + A''\sqrt{t_1 - t} + B''\sqrt{|s|}$$

Teniendo en cuenta el cambio

$$\begin{aligned} z_s &= u = \frac{1}{h^2(z(s, t), t)} \\ z_t &= v(z(s, t), t) \end{aligned}$$

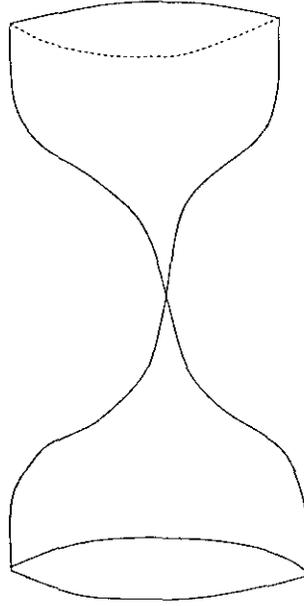


Figura 2.9: Perfil final en el Ejemplo 3

concluimos

$$z \underset{s \rightarrow 0}{\sim} |s|^{\frac{2}{3}}$$

$$h \underset{s \rightarrow 0}{\sim} h_0 + \sqrt{|s|} = h_0 + |z|^{\frac{1}{3}}$$

y esto implica que tanto la aproximación de viscosidad nula como la unidimensional no son válidas para tiempos y puntos suficientemente próximos a t_1 y 0 respectivamente. Dichas regiones no se analizarán aquí.

2.5.4.5 Ejemplo 5: Perfiles asintóticamente cilíndricos

Concluimos con un ejemplo de una solución explícita que da lugar a ruptura en tiempo finito y que satisface las condiciones de velocidad nula en el infinito y perfil asintóticamente cilíndrico en el infinito. En general, la existencia de mecanismos de ruptura autosimilares no implica que estos tengan lugar en problemas sobre los que se imponen condiciones de contorno concretas. Es por ello que presentamos a continuación la construcción de una solución con las propiedades antedichas.

El ejemplo que estudiaremos es la siguiente combinación lineal de perfiles autosimilares

$$s(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{-2n} r^{-4\frac{n+2}{2}} f_2(\theta; -\frac{n+2}{2}) \quad (2.162)$$

dónde $f_2(\theta; \nu)$ es la función dada en el Lema 2.2. La expresión (2.162) corresponde a

$$A(\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} \delta(\nu + \frac{n+2}{2})$$

$$B(\nu) = 0$$

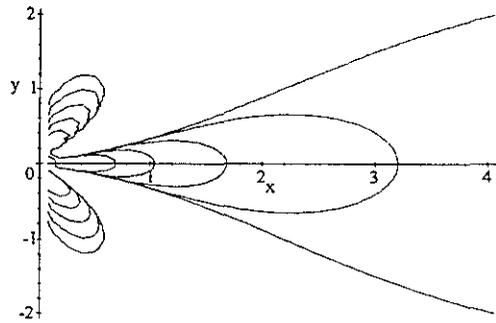


Figura 2.10: $\varepsilon = 10^{-1}$, $t_0 - t = 5^{-2}, 5^{-1}, 1, 5, 5^2$

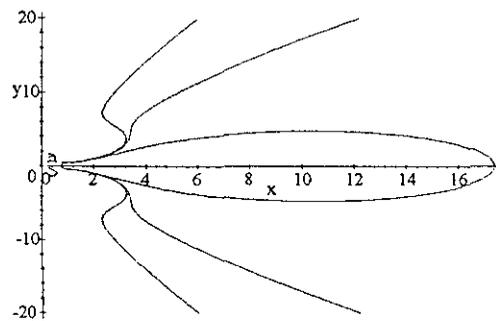


Figura 2.11: $\varepsilon = 10^{-1}$, $t_0 - t = 2 \cdot 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$

Escribamos por conveniencia

$$s(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{-2n} r^{-4\frac{n+2}{2}} f_2(\theta; -\frac{n+2}{2}) - r^{-4} f_2(\theta; -1) = s_1(r, \theta) - s_2(r, \theta)$$

Podemos evaluar

$$\begin{aligned} s_1(r, \theta) &= \frac{\sin \theta}{r^4} \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2n} (-1)^n r^{-2n} \left(\sum_{l=0}^n \frac{2^{2l+\frac{5}{2}}}{(2l+1)!(n-l)!\Gamma(-\frac{3}{2}-n-l)} \sin^{2l} \theta \right) \right) = \\ &= \frac{\sin \theta}{r^4} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=l}^{\infty} \frac{2^{2l+\frac{5}{2}}}{(2l+1)!(n-l)!\Gamma(-\frac{3}{2}-n-l)} (-1)^n (2r)^{-2n} \sin^{2l} \theta = \\ &= \frac{\sin \theta}{r^4} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=l}^{\infty} \frac{2^{2l+\frac{5}{2}} \Gamma(\frac{5}{2}+n+l) (-1)^l}{\pi \Gamma(2l+2) \Gamma(n-l+1)} (2r)^{-2n} \sin^{2l} \theta = \end{aligned}$$

$$= \frac{2^{\frac{5}{2}} \sin \theta}{\pi r^4} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2} + m + 2l\right) (-1)^l}{\Gamma(2l+2) \Gamma(m+1)} (2r)^{-2m} r^{-2l} \sin^{2l} \theta$$

Comenzamos evaluando

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2} + m + 2l\right)}{\Gamma(m+1)} (2r)^{-2m} = \Gamma\left(\frac{5}{2} + 2l\right) \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4r^2}\right)^{\frac{5}{2}+2l}}$$

y entonces

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2} + m + 2l\right) (-1)^l}{\Gamma(2l+2) \Gamma(m+1)} (2r)^{-2m} \left(\frac{\sin \theta}{r}\right)^{2l} = \\ & = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(2l + \frac{5}{2}\right)}{\Gamma(2l+2)} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4r^2}\right)^{\frac{5}{2}+2l}} (-1)^l \left(\frac{\sin \theta}{r}\right)^{2l} = \\ & = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4r^2}\right)^{\frac{5}{2}}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(2l + \frac{5}{2}\right)}{\Gamma(2l+2)} (-1)^l \left(\frac{\sin \theta}{r - \frac{1}{4r}}\right)^{2l} = \\ & = \frac{\sqrt{2}}{\left(1 - \frac{1}{4r^2}\right)^{\frac{5}{2}}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(l + \frac{5}{4}\right) \Gamma\left(l + \frac{7}{4}\right)}{\Gamma(l+1) \Gamma\left(l + \frac{3}{2}\right)} (-1)^l \left(\frac{\sin \theta}{r - \frac{1}{4r}}\right)^{2l} = \\ & = \frac{\sqrt{2}}{\left(1 - \frac{1}{4r^2}\right)^{\frac{5}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} F\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}; \frac{3}{2}; -z\right) \end{aligned}$$

con

$$z = \left(\frac{\sin \theta}{r - \frac{1}{4r}}\right)^2$$

y por tanto

$$s_1(r, \theta) = \frac{2^{\frac{1}{2}} \sin \theta}{\sqrt{\pi} r^4} \frac{3}{\left(1 - \frac{1}{4r^2}\right)^{\frac{5}{2}}} F\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}; \frac{3}{2}; -z\right)$$

y

$$\begin{aligned} s(r, \theta) &= \left(\frac{2^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \frac{3}{\left(1 - \frac{1}{4r^2}\right)^{\frac{5}{2}}} F\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}; \frac{3}{2}; -z\right) - \frac{2^{\frac{5}{2}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\pi \Gamma(2)} \right) \frac{\sin \theta}{r^4} = \\ &= 3 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4r^2}\right)^{\frac{5}{2}}} F\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}; \frac{3}{2}; -z\right) - 1 \right) \frac{\sin \theta}{r^4} \end{aligned}$$

Usando las fórmulas 15.2.1, 15.3.3 y 15.1.13 de [1] obtenemos

$$F\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}; \frac{3}{2}; -z\right) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dz} F\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; -z\right) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left((1+z)^{-\frac{1}{2}} F\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; -z\right) \right) =$$

$$= -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} \frac{d}{dz} \left((1+z)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+z}} \right)$$

demostramos que

$$f(z) \equiv F\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}; \frac{3}{2}; -z\right) = \frac{1}{3} \sqrt{2} \frac{2 \pm \sqrt{1+z}}{\sqrt{1 + \sqrt{1+z}(1+z)^{\frac{3}{2}}}} \quad (2.163)$$

Una conclusión sencilla es

$$s(r, \theta) \underset{r \rightarrow \frac{1}{2}}{\sim} \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sin \theta \left(\frac{1}{\sin^{\frac{5}{2}} \theta} - 12 \right)$$

de donde se deduce la existencia de un único valor de θ para el cual $s(\frac{1}{2}, \theta) = 0$. La función $f(z)$ es estrictamente decreciente y, por tanto, para cada r fijo la función $(1 - \frac{1}{4r^2})^{-\frac{5}{2}} f(z) - 1$ debe ser también decreciente de donde se deduce que existirá a lo más una raíz de $s(r, \theta)$ a r fijo.

Si denotamos

$$y = \left(\frac{\sin \theta}{r} \right)^2$$

podemos escribir

$$s(r, \theta) = 24 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left(\left(\frac{z}{y} \right)^{\frac{5}{4}} f(z) - 1 \right) \sqrt{y} \left(1 - \sqrt{\frac{y}{z}} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (2.164)$$

Notemos que de (2.164) y del hecho de que $\frac{y}{z} < 1$ se deduce que $s(r, \theta)$ será positivo mientras lo sea

$$\left(\left(\frac{z}{y} \right)^{\frac{5}{4}} f(z) - 1 \right) \sqrt{y} = \left(z^{\frac{5}{4}} y^{-\frac{3}{4}} f(z) - \sqrt{y} \right)$$

y que en este caso la función $s(r, \theta)$ crece a z constante cuando y decrece. Como todos los puntos del plano tales que $r \geq \frac{1}{2}$ pertenecen a una curva $z = \text{const.}$ y la función $y = \left(\frac{\sin \theta}{r} \right)^2$ crece a lo largo de una de tales curvas es entonces evidente que $s(r, \theta)$ decrece a lo largo de ella y no existen por tanto puntos en la región $r \geq \frac{1}{2}$ tales que $s(r, \theta) > 0$ y $\text{grad}(s(r, \theta)) = 0$ simultáneamente. Probamos finalmente que $s(r, \frac{\pi}{2}) < 0$ mediante el siguiente cálculo

$$\begin{aligned} s\left(r, \frac{\pi}{2}\right) &= 3 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4r^2}\right)^{\frac{5}{2}}} \frac{1}{3} \sqrt{2} \frac{2 + \sqrt{1 + \left(r - \frac{1}{4r}\right)^{-2}}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(r - \frac{1}{4r}\right)^{-2}} \left(1 + \left(r - \frac{1}{4r}\right)^{-2}\right)^{\frac{3}{2}}}} - 1 \right) \frac{1}{r^4} = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{160r^4 + 36r^2 + 3}{r^4 (4r^2 + 1)^3} < 0 \end{aligned}$$

De las propiedades que acabamos de demostrar concluimos que todas las curvas de nivel en la región en la que es $s(r, \theta) > 0$, $r \geq \frac{1}{2}$ parten del punto $r = \frac{1}{2}$, $\theta = 0$ y terminan en algún punto en $r = \frac{1}{2}$, $\theta \in \left(0, \arcsin\left(12^{-\frac{2}{5}}\right)\right)$ sin haberse cruzado ni bifurcado. Existirán también curvas ortogonales y en particular una que parte del origen y se extiende hasta el infinito. Esta curva representa el perfil final en el tiempo de ruptura y las curvas ortogonales próximas los perfiles en tiempos próximos a la ruptura.

2.5.5 Soluciones simétricas con velocidad inicial nula

En esta sección encontraremos nuevas soluciones particulares del problema (2.52): las soluciones simétricas con velocidad inicial nula.

Si la velocidad inicial es $v_0(s) = 0$ entonces la curva de datos iniciales en el plano hodógrafo es $y = 0, w \in \left[K^{\frac{1}{4}}, u_0^{\frac{1}{4}}(s=0) \right]$ y los datos sobre ella se pueden escribir, en virtud de la primera ecuación en (2.103) como

$$\begin{aligned} s &= u_0^{-1}(w^4) \\ s_v &= 0 \end{aligned} \quad (2.165)$$

Sin pérdida de generalidad podemos considerar la ecuación (2.107) con condiciones de contorno (2.108) a ser satisfecha en $y = 0, w \in [0, 1]$. Escribimos el problema en coordenadas polares definidas por

$$\begin{aligned} w &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

para obtener la siguiente ecuación

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{ds}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 s}{d\theta^2} + \frac{3}{r} \frac{ds}{dr} - \frac{3 \tan \theta}{r^2} \frac{ds}{d\theta} = 0 \quad (2.166)$$

Multiplicamos la ecuación (2.166) por $r^{\alpha+1}$ e integramos por partes asumiendo que todos los términos evaluados en 0 e ∞ se anulan, para obtener

$$\alpha^2 S + \frac{d^2 S}{d\theta^2} - 3\alpha S - 3 \tan \theta \frac{dS}{d\theta} = 0 \quad (2.167)$$

con

$$S(\alpha, \theta) = \int_0^\infty r^{\alpha-1} s(r, \theta) dr \quad (2.168)$$

la llamada transformada de Mellin de $s(r, \theta)$.

Introducimos $x = \sin \theta$ y con él

$$\begin{aligned} S_\theta &= S_x \sqrt{1-x^2} \\ S_{\theta\theta} &= (1-x^2) S_{xx} - x S_x \end{aligned}$$

La ecuación (2.167) se puede escribir como

$$(1-x^2) S'' - 4x S' + \alpha(\alpha-3) S = 0$$

Buscamos nuestra solución en la forma

$$S = \oint_{\Gamma} e^{\pm xt} G(t) dt$$

siendo Γ una curva regular en el plano complejo que rodea el semieje real positivo, e introducimos $G(t) = \sqrt{t} f(t)$. Entonces $f(t)$ satisface

$$t^2 f'' + t f' - \left(\left(\alpha - \frac{3}{2} \right)^2 + t^2 \right) f = 0$$

con $f(t) = K_{\alpha-\frac{3}{2}}(t)$ su única solución acotada en el infinito.

En este apartado consideremos la siguiente solución de (2.167)

$$S(\alpha, \theta) = C_1(\alpha) \oint_{\Gamma} e^{-\sin(\theta)t} \sqrt{t} K_{\alpha-\frac{3}{2}}(t) dt$$

Debemos imponer la condición de contorno $S(\alpha, \theta = 0) = S(\alpha, 0)$ para obtener la solución buscada de (2.167) que está dada por:

$$S(\alpha, \theta) = \frac{\oint_{\Gamma_\varepsilon} e^{-\sin(\theta)t} \sqrt{t} K_{\alpha-\frac{3}{2}}(t) dt}{\oint_{\Gamma_\varepsilon} \sqrt{t} K_{\alpha-\frac{3}{2}}(t) dt} S(\alpha, 0)$$

donde Γ_ε es un elemento de una familia de curvas regulares en el plano complejo que rodean el semieje real positivo. Estas curvas se aproximan a $\Gamma = \{x + i0 : x \in \mathbb{R}^+\} \cup \{x - i0 : x \in \mathbb{R}^+\}$ cuando el parámetro ε tiende a cero.

Escribimos en este punto $\alpha = i\lambda + a$ con $\lambda, a \in \mathbb{R}$. La fórmula (2.168) se puede invertir entonces en la forma

$$s(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r^{-\alpha} S(\alpha, \theta) d\lambda \quad (2.169)$$

que es la llamada transformada inversa de Mellin.

Observar que

$$S_\theta(\alpha, 0) = -\frac{\oint_{\Gamma_\varepsilon} t^{\frac{3}{2}} K_{\alpha-\frac{3}{2}}(t) dt}{\oint_{\Gamma_\varepsilon} \sqrt{t} K_{\alpha-\frac{3}{2}}(t) dt} S(\alpha, 0) \quad (2.170)$$

Usamos ahora la fórmula (2.139) (ver 11.4.22 de [1]):

$$\int_0^\infty t^\mu K_\nu(t) dt = 2^{\mu-1} \Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)$$

para obtener

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\oint_{\Gamma_\varepsilon} t^{\frac{3}{2}} K_{\alpha-\frac{3}{2}}(t) dt}{\oint_{\Gamma_\varepsilon} \sqrt{t} K_{\alpha-\frac{3}{2}}(t) dt} = -2 \frac{\Gamma\left(2 - \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = f(\alpha) \quad (2.171)$$

en el caso de que las integrales converjan. Notemos que $|f(\alpha)| \sim |\alpha|$ cuando $|\alpha| \rightarrow \infty$. En los casos en los que alguna de las integrales no converja, la expresión final será la misma ya que se puede obtener por prolongación analítica (en α) de la función que se obtenga en la región del plano complejo en la cual las integrales converjan.

A continuación llevaremos a cabo la clásica descomposición de Wiener-Hopf. El multiplicador $f(\alpha)$ se puede escribir en la forma $f(\alpha) = 2 \frac{q_+(\alpha)}{q_-(\alpha)}$ donde $q_+(\alpha) = -G(\alpha) \frac{\Gamma\left(2 - \frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}$ y $q_-(\alpha) = G(\alpha) \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}$. Podemos ahora probar la siguiente Proposición:

Proposición 2.4 *Existen dos conjuntos de funciones $\{\varphi_m(r)\}_{m=1}^\infty$ y $\{\psi_m(r)\}_{m=1}^\infty$ tales que (2.170) se satisface con*

$$\begin{aligned} S(\alpha, 0) &= \Phi_m(\alpha) \\ S_\theta(\alpha, 0) &= \Psi_m(\alpha) \end{aligned}$$

siendo Φ_m y Ψ_m transformadas de Mellin de φ_m y ψ_m respectivamente.
Estas funciones satisfacen

$$\begin{aligned}\varphi_m &= 0 & \text{si } r > 1 \\ \varphi_m &\underset{r \rightarrow 0}{\sim} Ar^{-2m-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_m &= 0 & \text{si } r < 1 \\ \psi_m &\underset{r \rightarrow \infty}{\sim} Br^{-2m-2}\end{aligned}$$

y admiten desarrollos en serie de la forma

$$\begin{aligned}\varphi_m(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (1-r^2)^{n+\frac{1}{2}} \\ \psi_m(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} d_n (r^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\end{aligned}\tag{2.172}$$

Demostración. La ecuación (2.170) junto con (2.171) implican que si

$$S(\alpha, 0) = \Phi_m(\alpha) = G_m(\alpha) \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}$$

entonces

$$S_\theta(\alpha, 0) = \Psi_m(\alpha) = -2G_m(\alpha) \frac{\Gamma\left(2 - \frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

Definiremos una familia apropiada de funciones $\{G_m(\alpha)\}_{m=1}^{\infty}$ y a partir de ella obtendremos las correspondientes funciones $\varphi_m(r)$, $\psi_m(r)$.

La familia $\{G_m(\alpha)\}_{m=1}^{\infty}$ se puede definir mediante la siguiente relación de recurrencia:

$$\begin{aligned}G_{m+1}(\alpha) &= \frac{\alpha - (2m+2)}{\alpha - (2m+3)} G_m(\alpha) \\ G_1(\alpha) &= \frac{1}{\alpha - 3}\end{aligned}$$

cuya solución es

$$G_m(\alpha) = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(m - \frac{1}{2}\alpha + 1\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\alpha\right)}{\Gamma\left(m - \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{1}{2}\alpha\right)}$$

La función $\Phi_m(\alpha)$ es analítica en todo $\alpha \in \mathbb{C}$ excepto en los puntos $\alpha = 3 + 2n$ para $n = 0, 1, \dots, m$ y $\alpha = -2n$ para $n \in \mathbb{N}$ donde la función posee polos simples.

La función $\Psi_m(\alpha)$ es analítica en todo $\alpha \in \mathbb{C}$ excepto en los puntos $\alpha = 2 + 2m + 2n$ para $n \in \mathbb{N}$ donde la función posee polos simples.

Notemos que todos los polos de $\Phi_m(\alpha)$ se encuentran a la izquierda de las rectas $\alpha = i\lambda + a$ para $2m+1 < a < 2m+2$ y todos los polos de $\Psi_m(\alpha)$ se encuentran a la derecha.

Escribimos $\alpha = i\lambda + a$ con $2m+1 < a < 2m+2$ e invertimos la transformada de Mellin para obtener, integrando por residuos

$$\varphi_m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r^{-\alpha} \Phi_m(\alpha) d\lambda = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \Gamma(n+m+1) \Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right)}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2} + m\right) \Gamma(n+2) \Gamma(n+1)} r^{2n} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(-1)^n \Gamma(\frac{1}{2} + m - n) \Gamma(m - n - \frac{1}{2})}{\Gamma(1 + m - n) \Gamma(\frac{1}{2} - n) \Gamma(m - n) \Gamma(n + 1)} r^{-1-2(m-n)} \quad \text{si } r < 1 \quad (2.173)$$

y

$$\varphi_m(r) = 0 \quad \text{si } r > 1$$

así como

$$\psi_m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r^{-\alpha} \Psi_m(\alpha) d\lambda = \frac{2}{\sqrt{\pi} \sqrt{r^2 - 1} r^{2m+1}} \quad \text{si } r > 1$$

$$\psi_m(r) = 0 \quad \text{si } r < 1$$

donde hemos usado

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(m+1-\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(m+\frac{3}{2}-\frac{\alpha}{2})} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(m+1-\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(m+\frac{3}{2}-\frac{\alpha}{2})} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} B(\frac{1}{2}, m+1-\frac{\alpha}{2}) = \\ &= \int_0^1 x^{-\frac{\alpha}{2}+m} \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{1-x}} dx = \int_1^{\infty} r^{\alpha-1} \frac{2}{\sqrt{\pi} \sqrt{r^2-1} r^{2m+1}} dr \end{aligned}$$

con $B(\frac{1}{2}, m+1-\frac{\alpha}{2})$ la función beta con argumentos $\frac{1}{2}$ y $m+1-\frac{\alpha}{2}$.Demostraremos finalmente que las funciones $\varphi_m(r)$ y $\psi_m(r)$ admiten desarrollos de la forma

$$\begin{aligned} \varphi_m(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (1-r^2)^{n+\frac{1}{2}} \\ \psi_m(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} d_n (r^2-1)^{n-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.174)$$

Tenemos en cuenta en primer lugar que

$$G_m(\alpha) = \sum_{l=0}^m \frac{a_l}{\alpha - (2l+1)}$$

así como

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha - (2l+1)} &= \frac{1}{\alpha+1} + \frac{(2l+2)}{(\alpha+1)(\alpha - (2l+1))} = \\ &= \frac{1}{\alpha+1} + \frac{(2l+2)}{(\alpha+1)(\alpha+3)} + \frac{(2l+2)(2l+4)}{(\alpha+1)(\alpha+3)(\alpha - (2l+1))} = \dots = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+l)!}{l!} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2} + n)} \end{aligned}$$

y

$$\int_0^1 r^{\alpha-1} (1-r^2)^{n+\frac{1}{2}} dr = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{\frac{\alpha}{2}-1} (1-x)^{n+\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} B(\frac{\alpha}{2}, \frac{3}{2} + n) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2}) \Gamma(\frac{3}{2} + n)}{\Gamma(\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2} + n)}$$

para concluir

$$\Phi_m(\alpha) = G_m(\alpha) \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2})} = \sum_{l=0}^m \frac{a_l}{\alpha - (2l+1)} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2})} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^m a_l \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+l)!}{l!} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2} + n\right)} \right)$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \varphi_m(r) &= \sum_{l=0}^m a_l \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+l+1)}{\Gamma(l+1)\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)} (1-r^2)^{n+\frac{1}{2}} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^m a_l \frac{\Gamma(n+l+1)}{\Gamma(l+1)\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)} \right) (1-r^2)^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\frac{1}{r^{2m+1}} = \frac{1}{(1+(r^2-1))^{m+\frac{1}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)} (r^2-1)^n$$

y en consecuencia

$$\psi_m(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)} (r^2-1)^{n-\frac{1}{2}}$$

lo que concluye la demostración. \square

Observación 2.3 El desarrollo en serie para $s = \varphi_m(r)$ dado en (2.172) implica que podemos invertir las funciones localmente cerca del origen y escribir

$$(1-r^2) = \left(\varphi_m^{-1}(s)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n s^{2n}$$

lo cual implica que $u = r^4$ se puede extender de manera única, analítica y simétrica a $s < 0$.

Observación 2.4 A modo de ejemplo presentamos la fórmula explícita para $\varphi_1(r)$ y $\varphi_2(r)$

$$\varphi_1(r) = \frac{1}{2} \frac{\pi + 2\sqrt{1-r^2}r - 2\arcsin r}{\sqrt{\pi}r^3} \quad \text{si } r < 1$$

$$\varphi_2(r) = \frac{1}{16} \frac{12r^3\sqrt{1-r^2} + 6r\sqrt{1-r^2} - 6\arcsin r - 8r^2\arcsin r + 4\pi r^2 + 3\pi}{\sqrt{\pi}r^5} \quad \text{si } r < 1$$

Para que las funciones $\varphi_m(r)$ sean admisibles como datos iniciales han de ser monótonas decrecientes. La demostración de este hecho la da el siguiente Lema:

Lema 2.3 Las funciones $\varphi_m(r)$, $m = 1, 2, \dots$, son monótonas decrecientes en r .

Demostración. Las funciones $\varphi_m(r)$ vienen definidas en forma de serie por (2.173). Esta expresión consta de dos sumandos $\varphi_m^{(1)}(r)$ y $\varphi_m^{(2)}(r)$. El primero

$$\varphi_m^{(1)}(r) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\Gamma(n+m+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}+m\right)\Gamma(n+2)\Gamma(n+1)} r^{2n} \quad (2.175)$$

es suma de funciones monótonas decrecientes. El segundo

$$\varphi_m^{(2)}(r) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(-1)^n \Gamma(\frac{1}{2} + m - n) \Gamma(m - n - \frac{1}{2})}{\Gamma(1 + m - n) \Gamma(\frac{1}{2} - n) \Gamma(m - n) \Gamma(n + 1)} r^{-1-2(m-n)} = \sum_{n=0}^{m-1} a(m, n) r^{-1-2(m-n)} \quad (2.176)$$

también, ya que $a(m, n) > 0$ por ser

$$\frac{(-1)^n}{\Gamma(\frac{1}{2} - n)} = \Gamma(\frac{1}{2} + n) > 0$$

(ver (2.142)) y tener el resto de las funciones gamma argumentos positivos. \square

El lema anterior muestra que las funciones $\varphi_m(r)$ son datos admisibles. Tenemos que calcular las soluciones correspondientes a tales datos y esto es lo que hacemos en el siguiente Lema:

Lema 2.4 Las funciones $\varphi_m(r)$ son el límite cuando θ tiende a cero de

$$\begin{aligned} \Phi_m(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n + m + 1) \Gamma(\frac{1}{2} + n)}{\Gamma(n + \frac{3}{2} + m) \Gamma(n + 2)} r^{2n} 2^{-\frac{3}{2}} f_1(\theta; \frac{n}{2}) + \\ &+ \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^{m+n} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2}) \Gamma(m - n - \frac{1}{2})}{\Gamma(n + 1) \Gamma(1 + m - n)} r^{-1-2(m-n)} 2^{-\frac{3}{2}} f_1(\theta; \frac{-1 - 2(m-n)}{4}) \quad \text{si } r < 1 \end{aligned} \quad (2.177)$$

$$\Phi_m(r, \theta) = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m+1} \Gamma(n + m) \Gamma(\frac{3}{2} + n)}{(1 + 2n) \Gamma(n + 1) \Gamma(\frac{3}{2} + n + m)} r^{-2(n+m+1)} 2^{-\frac{5}{2}} f_2(\theta; \frac{-n - m - 1}{2}) \quad \text{si } r \geq 1 \quad (2.178)$$

Demostración. hacemos un desarrollo en serie de Laurent de $\varphi_m(r)$ en torno a $r = 0$ para $r < 1$ y tenemos en cuenta que cada término de la serie es la traza en $\theta = 0$ de una solución autosimilar. Hacemos lo mismo con $\psi_m(r)$ en torno a $r = \infty$ para $r \geq 1$ y obtenemos así el resultado. \square

Las expresiones (2.177), (2.178) son equivalentes a la siguiente:

$$\Phi_m(r, \theta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+2m+2}^{i\infty+2m+2} d\alpha \cdot r^{-\alpha} F(\alpha, 3 - \alpha; 2; \frac{1 - \sin \theta}{2}) \frac{\Gamma(m + 1 - \frac{1}{2}\alpha) \Gamma(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\alpha) \Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(m + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\alpha)}$$

tal y como podemos comprobar mediante una simple integración por residuos. Esta última expresión será útil para probar la siguiente proposición:

Proposición 2.5 La función $\Phi_m(r, \theta)$ definida en el Lema 2.4 posee regularidad C^∞ en $r \in (0, \infty)$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$.

Demostración. Tenemos en cuenta en primer lugar que

$$\frac{\Gamma(m + 1 - \frac{1}{2}\alpha) \Gamma(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\alpha) \Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(m + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\alpha)} = \frac{(m - \frac{\alpha}{2})(m - \frac{\alpha}{2} - 1) \dots (1 - \frac{\alpha}{2})}{(m + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha)(m - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha) \dots (\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\alpha)} \frac{\pi}{\sin \frac{\alpha}{2} \pi}$$

donde usado (2.142). Empleamos a continuación la fórmula 15.3.30 en [1]:

$$F(a, b, c; z) = F\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}; \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{1}{2}; 4z - 4z^2\right)$$

para deducir, junto con el desarrollo en serie de las funciones hipergeométricas:

$$\begin{aligned} F\left(\alpha, 3 - \alpha; 2; \frac{1 - \sin \theta}{2}\right) &= F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2}; 2; \cos^2 \theta\right) = \\ &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + n\right)\Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2} + n\right)}{\Gamma(2 + n)\Gamma(1 + n)} \cos^{2n} \theta \end{aligned}$$

El siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + n\right)\Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2} + n\right)}{\Gamma(2 + n)\Gamma(1 + n)} = \\ &= \frac{\left(\frac{\alpha}{2} + n - 1\right)\left(\frac{\alpha}{2} + n - 2\right)\dots\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left(\frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2} + n - 1\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2} + n - 2\right)\dots\left(\frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}{n(n-1)(n-2)\dots 1 (n+1)n(n-1)\dots 2} = \\ &= \left[\left(1 + \frac{\frac{\alpha}{2} - 1}{n}\right) \left(1 + \frac{\frac{\alpha}{2} - 1}{n-1}\right) \dots \left(1 + \frac{\frac{\alpha}{2} - 1}{1}\right) \right] \left[\left(1 + \frac{-\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}}{n+1}\right) \left(1 + \frac{-\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{-\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

nos permite concluir

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + n\right)\Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2} + n\right)}{\Gamma(2 + n)\Gamma(1 + n)} \cos^{2n} \theta \right| &\leq C \left(\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{|\alpha|^2 \cos \theta}{4k^2} \right) \right) \cos^n \theta = \\ &= \frac{C}{|\alpha|} \sinh\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\cos \theta} |\alpha|\right) \cos^n \theta \end{aligned}$$

usando el conocido desarrollo en productos:

$$\sinh z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{k^2 \pi^2} \right)$$

Obtenemos así finalmente la siguiente acotación de la función hipergeométrica:

$$\left| F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2}, 2; \cos^2 \theta\right) \right| \leq \frac{C}{|\alpha|} \sinh\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\cos \theta} |\alpha|\right) \sum_{n=0}^{\infty} \cos^n \theta = \frac{C}{|\alpha|} \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\cos \theta} |\alpha|\right)}{1 - \cos \theta}$$

Usando la fórmula 15.2.1 en [1] (ver fórmula (2.138) en este capítulo) y procediendo como arriba es posible probar que

$$\left| \frac{d^n}{d\theta^n} F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2}, 2; \cos^2 \theta\right) \right| \leq \frac{C_n (1 + |\alpha|^{2n}) \sinh\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\cos \theta} |\alpha|\right)}{|\alpha| (1 - \cos \theta)}$$

Las derivadas de cualquier orden de las funciones $\Phi_m(r, \theta)$ se pueden entonces acotar del siguiente modo:

$$\frac{\partial^l}{\partial r^l} \frac{\partial^n}{\partial \theta^n} \frac{i}{4\pi} \int_{-i\infty+2m+2}^{i\infty+2m+2} d\alpha \cdot r^{-\alpha} F\left(\alpha, 3 - \alpha; 2; \frac{1 - \sin \theta}{2}\right) \frac{\Gamma\left(m + 1 - \frac{1}{2}\alpha\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\alpha\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(m + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\alpha\right)} \leq$$

$$\leq K \int_{-i\infty+2m+2}^{i\infty+2m+2} d|\alpha| \cdot |r^{-\alpha-l}| (1+|\alpha|^{l+2n}) \frac{1}{|\alpha|} \frac{\sinh(\frac{\pi}{2}\sqrt{\cos\theta}|\alpha|)}{1-\cos\theta} \frac{1}{\sinh\frac{|\alpha|}{2}\pi} \leq K'$$

para $r \in (0, \infty)$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Hemos tenido en cuenta que

$$\frac{\sinh(\frac{\pi}{2}\sqrt{\cos\theta}|\alpha|)}{\sin\frac{|\alpha|}{2}\pi} \underset{|\alpha| \rightarrow \infty}{\sim} e^{\frac{|\alpha|}{2}\pi(\sqrt{\cos\theta}-1)}$$

una exponencial negativa que multiplicada por cualquier potencia de $|\alpha|$ es una función integrable. Esto concluye la demostración. \square

Las funciones $\varphi_m(r)$ son monótonas decrecientes y las funciones $\Phi_m(r, \theta)$ son C^∞ fuera de $\theta = 0$. Esta continuidad nos permite afirmar que $\Phi_m(r, \theta = \theta_0)$ es monótona para todo $\theta_0 \in (0, \delta)$ con δ suficientemente pequeño. Por tanto, existen curvas de nivel $\Phi_m(r, \theta) = C$ que no se cruzan ni bifurcan localmente cerca de $\theta = 0$. Existen también curvas ortogonales (curvas de $t(r, \theta)$ constante suficientemente pequeña) sobre las cuales la función $\Phi_m(r, \theta)$ decrece monótonamente y que representan soluciones locales (para tiempos cortos) del problema (2.100). Las curvas de nivel $\Phi_m(r, \theta) = C$ pueden bifurcar únicamente en aquellos puntos (r_0, θ_0) en los que $\text{grad}(\Phi_m(r, \theta)) = 0$. Como $\Phi_m(r, \theta)$ satisface la ecuación (2.166) resulta que en un punto estacionario (r_0, θ_0) se tiene $\Delta\Phi_m = 0$ lo cual implica que es en realidad un punto de silla en (r_0, θ_0) lo que se traduce en una bifurcación de las curvas de nivel en él. En el espacio físico esta situación se traduce en la formación de la cúspide descrita en el Ejemplo 4 de 2.5.4.

Hemos construido soluciones para un conjunto de datos iniciales $\varphi_m(r)$. Cada una de estas soluciones representa un mecanismo distinto de ruptura:

Teorema 2.4 *Si $\Phi_m(r, \theta)$ no posee puntos de silla entonces es la representación en el plano hodógrafo de soluciones con ruptura en tiempo finito en el espacio físico y el perfil, cerca del punto y en el instante de ruptura, es:*

- 1) un filamento de sección transversal nula en el caso $m = 1$
- 2) dos conos en el caso $m = 2$
- 3) $h(z) \sim |z|^{\frac{1}{n-1}}$ en general.

Demostración. Simplemente tenemos que darnos cuenta que el término dominante en (2.178) es la solución autosimilar $r^{4\nu} f(\theta; \nu)$ con $\nu = \frac{-n-m-1}{2}$ y usar la Proposición 2.3. \square

Podemos formar una familia de soluciones mediante combinaciones lineales de las funciones $\varphi_n(r)$. Los coeficientes a_n de dichas combinaciones deben ser escogidos de modo que la serie

$$\varphi(r) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \varphi_m(r)$$

converja uniformemente al menos en el intervalo $(b, 1)$ con $b < 1$. En particular, podemos construir fácilmente datos iniciales $\varphi(r)$ con una singularidad en $w = b$ siendo $0 < b < 1$ y esto representaría un cilindro deformado.

2.5.6 Un resultado sobre los mecanismos de ruptura en tiempo finito

Concluimos esta sección probando el siguiente teorema que resume algunos resultados previos y añade uno nuevo:

Teorema 2.5 Existe una familia \mathcal{P} de soluciones $(h(z, t), v(z, t))$ de (2.16), (2.17) tal que:

- 1) Las soluciones autosimilares encontradas en el teorema 2.3 pertenecen a \mathcal{P} .
- 2) Para todo $\alpha \in [1, +\infty)$ existen elementos de \mathcal{P} tales que las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} h(z, t) &\xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 1 \\ v(z, t) &\xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

se satisfacen para todo t y presentan ruptura en tiempo finito con un perfil final cerca del punto de ruptura

$$h(z, t_0) \underset{z \rightarrow 0^\pm}{\sim} A_\pm |z|^\alpha$$

- 3) Dada una solución con ruptura en tiempo finito $(h(z, t), v(z, t)) \in \mathcal{P}$ tal que

$$h(z, t) \underset{z \rightarrow 0^\pm, t \rightarrow t_0}{\sim} A_\pm |z|^\alpha$$

para algún $\alpha \in (0, +\infty)$ existe otra solución con ruptura $(\tilde{h}(z, t), \tilde{v}(z, t)) \in \mathcal{P}$ tal que

$$\sup_z \left(|h(z, 0) - \tilde{h}(z, 0)| + |v(z, 0) - \tilde{v}(z, 0)| \right) < \varepsilon \quad (2.179)$$

con ε arbitrariamente pequeño y

$$h(z, t) \underset{z \rightarrow 0^\pm, t \rightarrow \tilde{t}_0}{\sim} A_\pm |z|^{\tilde{\alpha}}$$

para cualquier $\tilde{\alpha} \in (\alpha, +\infty)$. Este resultado no es cierto en general para ningún $\tilde{\alpha} \in (0, \alpha)$.

Demostración. La familia \mathcal{P} está definida por las expresiones (2.160) y (2.161). La parte 1) del teorema es el primer ejemplo de la subsección 2.5.4 que se basa a su vez en la subsección 2.5.3. La parte 2) fue demostrada en el ejemplo 5 de la subsección 2.5.4 para $\alpha = 1$ donde hemos encontrado una función $s(r, \theta)$ representación en el plano hodógrafo de una solución que satisface las hipótesis. Para los demás casos simplemente tenemos que añadir una perturbación en el plano hodógrafo a $s(r, \theta)$ de la forma

$$s_1(r, \theta) = \varepsilon r^{4\nu} g(\theta; \nu) \quad (2.180)$$

con $\nu \in \left(-\frac{3}{2}, -1\right)$ y ε suficientemente pequeño. El término (2.180) es dominante a distancias $r \geq \varepsilon^{-\frac{1}{4\nu+3}}$ y determina la forma del perfil cerca del punto de ruptura.

Para probar 3) tomamos $s(r, \theta)$, la representación de la solución en el plano hodógrafo, y sumamos una perturbación de la forma (2.180) con $\nu \in \left(-1 - \frac{1}{2\alpha}, -1\right)$ y ε suficientemente pequeño. Este término será una pequeña perturbación de $s(r, \theta)$ para $r \ll \varepsilon^{\frac{1}{2(\alpha^{-1} - \alpha^{-1})}}$ pero será dominante a distancias $r \gg \varepsilon^{\frac{1}{2(\tilde{\alpha}^{-1} - \alpha^{-1})}}$ y determina la forma del perfil cerca del punto de ruptura.

Para $\tilde{\alpha} \in (0, \alpha)$ el resultado 3) no es cierto. Consideremos por ejemplo el perfil autosimilar cuya representación en el plano hodógrafo es

$$s(r, \theta) = r^{-6} g(\theta; -\frac{3}{2}) \quad (2.181)$$

y busquemos un elemento en \mathcal{P} tal que su representación en el plano hodógrafo cuando $r \rightarrow \infty$ sea

$$\tilde{s}(r, \theta) = r^{-8} g(\theta; -2)$$

Tal elemento debe ser de la forma

$$\tilde{s}(r, \theta) = \int_{-\infty}^{-2} \left(A(\nu) r^{4\nu} f_2(\theta; \nu) + B(\nu) r^{4\nu} f_1(\theta; \nu) \right) d\nu$$

y el comportamiento cerca del punto de contacto no es el mismo que el de (2.181). Esto implica que los perfiles en el plano físico no satisfacen (2.179). \square

2.6 Análisis de sistema unidimensional para un fluido de Stokes

En esta Sección discutiremos el mecanismo de ruptura que aparece cuando estudiamos la evolución de un tubo de fluido de Stokes bajo las aproximaciones cuasiestacionaria y unidimensional. La ecuación que deseamos resolver es la (2.53):

$$\left(\frac{1}{\sqrt{u}} \right)_{ss} = \mu \left(\frac{1}{u} \right)_{sst}$$

con dato inicial

$$u(s, t = 0) = u_0(s)$$

lo que implica, integrando dos veces con respecto a s

$$\frac{1}{\sqrt{u}} = \mu \left(\frac{1}{u} \right)_t + c_1(t)s + c_2(t) \quad (2.182)$$

Imponiendo que $u \rightarrow 1$ cuando $|s| \rightarrow \infty$ para todo tiempo (condición de contorno (2.51)) resulta que $c_1(t) = 0, c_2(t) = 1$. Tenemos que resolver entonces

$$\mu u_t = u^2 - u^{\frac{3}{2}}$$

y esto se puede hacer por simple integración

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{u}} + \log \left| 1 - \frac{1}{\sqrt{u}} \right| = \frac{t}{2\mu} + f(s)$$

con $f(s) = g(u_0(s))$. La representación gráfica de la función g se encuentra en la figura 2.12:

Para un dato inicial $u_0(s)$ con un máximo absoluto en $s = 0$ es fácil concluir que u explota en $s = 0$ cuando $t = -2\mu \left(\frac{1}{\sqrt{u_0(0)}} + \log \left| 1 - \frac{1}{\sqrt{u_0(0)}} \right| \right) = t_0$. Estamos interesados ahora en conocer el perfil de tal singularidad. Si tenemos en cuenta que $u_0(s) \sim u_0(0) - as^2$ cerca de $s = 0$ podemos inferir localmente que

$$\frac{1}{\sqrt{u}} + \log \left| 1 - \frac{1}{\sqrt{u}} \right| \sim \frac{1}{2u} \sim \frac{t_0 - t}{2\mu} + \gamma s^2$$

Es decir, la singularidad es de la forma

$$u = \frac{1}{t_0 - t} f \left(\frac{s}{(t_0 - t)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

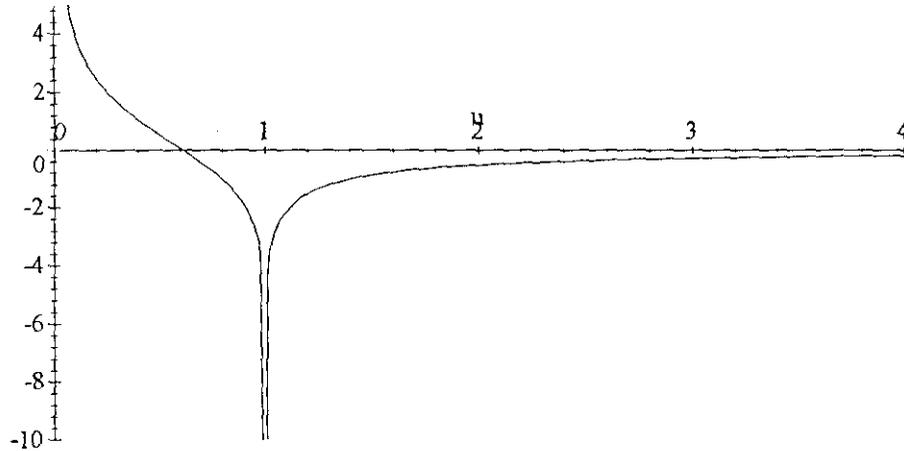


Figura 2.12: La función $g(u)$

Si recordamos la relación existente entre $u(s, t)$ y las funciones $z(s, t)$ que define las características y $h(z, t)$ que representa la frontera libre el espacio físico

$$u(s, t) = z_s(s, t) = \frac{1}{h^2(z(s, t), t)}$$

podemos deducir inmediatamente que la función $h(z, t)$ es, cerca de la singularidad, de la forma

$$h(z, t) = (t_0 - t)^{\frac{1}{2}} \phi \left((t_0 - t)^{\frac{1}{2}} z \right)$$

y representa un cilindro que se cierra. Dicho cilindro tiene una longitud

$$L \sim (t_0 - t)^{-\frac{1}{2}}$$

y una sección transversal

$$S \sim (t_0 - t)^{\frac{1}{2}}$$

Acabamos de probar el siguiente teorema con respecto a las soluciones de (2.36) y (2.37):

Teorema 2.6 Dado un dato inicial $h_0(z)$ regular, tal que

$$h_0 \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 1$$

y tal que localmente cerca del mínimo absoluto (que suponemos en z_0)

$$h_0 \underset{z \rightarrow z_0}{\sim} a + b(z - z_0)^2$$

con $b < 0$, entonces en regiones

$$z - z_0 = o((t_0 - t)^{-\frac{1}{2}})$$

se tiene

$$h(z, t) \sim (t_0 - t)^{\frac{1}{2}} \phi \left((t_0 - t)^{\frac{1}{2}} (z - z_0) \right)$$

Es importante hacer notar que la solución del límite unidimensional para el sistema de Stokes no satisface la ley de conservación de la Proposición 2.1, ya que en el tiempo de ruptura y cerca del punto de ruptura s_0

$$u \underset{s \rightarrow s_0}{\sim} (s - s_0)^{-2}$$

lo que implica que u no es una función integrable. La aproximación de inercia despreciable deja de ser válida por tanto cerca del tiempo de ruptura.

2.7 Análisis de sistema unidimensional para un fluido sin tensión superficial

El sistema sin tensión superficial equivale a la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$u_{tt} + \mu \left(\frac{1}{u} \right)_{sst} = 0$$

con datos iniciales

$$\begin{aligned} u(s, 0) &= u_0(s) \\ u_t(s, 0) &= u_1(s) \end{aligned}$$

o equivalentemente, integrando en t

$$u_t + \mu \left(\frac{1}{u} \right)_{ss} = f(s) \tag{2.183}$$

con dato inicial

$$u(s, 0) = u_0(s) \tag{2.184}$$

La ecuación (2.183) es una ecuación de difusión no lineal y no homogénea. La podemos escribir como

$$u_t = \mu \left(\frac{u_{ss}}{u^2} - \frac{2u_s^2}{u^3} \right) + f(s) \tag{2.185}$$

Consideraremos en lo que sigue funciones f y u_0 continuas y acotadas.

Proposición 2.6 1) La solución de la ecuación (2.185) con dato inicial (2.184) no explota en t finito.

2) La solución de la ecuación (2.185) con dato inicial (2.184) puede explotar en t infinito con la siguiente estructura autosimilar cerca de la explosión (que consideraremos tiene lugar en el origen)

$$u = tw \left(\sqrt{ts} \right)$$

con w una función positiva y simétrica tal que

$$w(\xi) \underset{\xi \rightarrow \infty}{\sim} C\xi^{-2}$$

Demostración. Si denotamos por $s(t)$ una curva que parte de un máximo de $u(s, t)$ y que une los máximos de la solución tendremos que a lo largo de la curva

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{ds}{dt} \frac{\partial u}{\partial s} = \mu \left(\frac{u_{ss}(s(t), t)}{(u(s(t), t))^2} - \frac{2(u_s(s(t), t))^2}{(u(s(t), t))^3} \right) + f(s(t)) \leq f(s(t))$$

y por tanto

$$\sup_s u \leq \sup_s u_0 + \left(\sup_s f \right) t$$

es decir, no existe explosión en tiempo finito.

Si tomamos $f(s) \equiv C$ e introducimos una posible solución de la forma

$$u = tw \quad (\xi = \sqrt{ts})$$

podemos escribir la ecuación (2.183) como

$$w + \frac{1}{2}\xi w' + \mu \left(\frac{1}{w} \right)'' = C \quad (2.186)$$

Introducimos la función $g = w^{-1}$ en (2.186) para obtener

$$\mu g'' = C - \frac{1}{g} + \frac{1}{2}\xi \frac{g'}{g^2}$$

Si $g(0) > \frac{1}{C}$ entonces existe una solución simétrica que es monótona creciente y que crece en la forma $g \underset{\xi \rightarrow \infty}{\sim} \frac{C}{2\mu} \xi^2$. Esto concluye la demostración. \square

Traduciendo estos resultados al espacio físico podemos probar el siguiente teorema

Teorema 2.7 1) Para un fluido sin tensión superficial y en la aproximación unidimensional no existe ruptura en tiempo finito.

2) Existe un mecanismo de ruptura en tiempo infinito (con el punto de ruptura en $z = 0$) tal que en regiones

$$z \sim \sqrt{t}$$

se tiene

$$h(z, t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}} f\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right)$$

Demostración. La primera parte es un corolario de la Proposición previa. La segunda parte se puede probar teniendo en cuenta el cambio

$$u = z_s = \frac{1}{h^2(z(s, t), t)}$$

y los resultados de la proposición anterior. Más precisamente

$$z_s \sim tw \left(\sqrt{ts} \right)$$

y entonces

$$z \sim t^{\frac{1}{2}} F(\sqrt{ts})$$

con F una función simétrica y acotada. Finalmente

$$h = u^{-\frac{1}{2}} = t^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{w(F^{-1}(\frac{z}{t^{\frac{1}{2}}}))}}$$

y esto completa la demostración. \square

Capítulo 3

Ruptura para fluidos de Stokes incompresibles

3.1 Introducción

Este capítulo está dedicado a describir un mecanismo de ruptura de tubos fluidos muy viscosos e incompresibles mediante técnicas asintóticas.

El sistema de ecuaciones que estudiaremos es el sistema de Stokes en aproximación cuasies-tacionaria que tras un adecuado reescalamiento se escribe como

$$0 = -\nabla p + \Delta \vec{v} \quad \text{en } \Omega(t) \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{en } \Omega(t) \quad (3.2)$$

junto con las condiciones de contorno

$$T_{ij}n_i = -Hn_j \quad \text{en } \partial\Omega(t) \quad (3.3)$$

donde H es la curvatura media de la frontera libre que se puede escribir, para superficies a-xisimétricas y en término de la distancia $h(z)$ de cada punto al eje, como

$$H = \frac{1}{h\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2}} - \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.4)$$

(T_{ij}) es el tensor de esfuerzos y n_i es la componente i -ésima del vector normal a $\partial\Omega(t)$.

La simetría cilíndrica sugiere la introducción de las coordenadas cilíndricas (z, r, θ) . Tendremos entonces que la componente θ de cualquier vector se anula y que podemos restringirnos al análisis de funciones que dependen únicamente de r y z .

El tensor de esfuerzos (T_{ij}) viene dado, en coordenadas cilíndricas y bajo la hipótesis de simetría cilíndrica, por

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} T_{zz} & T_{rz} \\ T_{rz} & T_{rr} \end{pmatrix} = -pI + \begin{pmatrix} 2\frac{\partial v_z}{\partial z} & \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} & 2\frac{\partial v_r}{\partial r} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

y el vector normal por

$$\vec{n} = (n_z, n_r) = \frac{\left(-\frac{\partial h}{\partial z}, 1\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2}}$$

Una masa puntual situada en un punto de la frontera libre se moverá siguiendo el campo de velocidades en ese punto para todo tiempo. Tendremos entonces que

$$V_N = \vec{v} \cdot \vec{n}$$

donde V_N es la velocidad con que se mueve la frontera en su dirección normal, o equivalentemente

$$\frac{\partial h}{\partial t} = v_r - v_z \frac{\partial h}{\partial z} \quad \text{en } \partial\Omega(t) \quad (3.6)$$

El mecanismo descrito en este capítulo empleando métodos formales se basa en el tipo de ideas que se han utilizado para el análisis de numerosos problemas de formación de singularidades (ver por ejemplo [57]). El tipo de singularidad que se obtiene aquí presenta dos regiones diferenciadas. En una región interna dominada por el flujo de Stokes la solución es aproximadamente un cilindro que se cierra. Esta solución pierde su validez en distancias $|z| \sim (t_0 - t)^\alpha$ para cierto $\alpha > 0$, pero el estudio de esta región se simplifica porque es posible emplear el tipo de aproximación unidimensional descrito en el segundo capítulo para el problema de frontera libre considerado. En este caso queda un parámetro libre que hay que determinar resolviendo un problema no-lineal de autovalores. Esta situación sucede frecuentemente en diversos problemas de formación de singularidades y se le denomina a menudo en la literatura "similaridad de segundo orden" (según la nomenclatura que se usa en [4]).

3.2 Análisis asintótico de un mecanismo de ruptura en tiempo finito

En esta sección discutiremos un mecanismo de ruptura de tubos fluidos localmente en espacio y tiempo. Comencemos escribiendo el sistema en coordenadas cilíndricas:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r} + \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right) \quad (3.7)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (3.8)$$

$$0 = \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \quad (3.9)$$

Si tenemos en cuenta que los vectores normal y tangente a la superficie se expresan como

$$\vec{n} = \frac{\left(-\frac{\partial h}{\partial z}, 1\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\vec{t} = \frac{\left(1, \frac{\partial h}{\partial z}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2}}$$

podemos entonces escribir las condiciones de contorno (3.3) en la siguiente forma:

$$\left(1 - \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2\right) \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + 2 \frac{\partial h}{\partial z} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = 0 \quad (3.10)$$

$$-p + 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - 2 \frac{\partial h}{\partial z} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2 \left(-p + 2 \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = - \left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2\right) H \quad (3.11)$$

Existe una familia de soluciones explícitas de (3.7), (3.8), (3.9), (3.10), (3.11) y (3.6) que representan cilindros que se cierran uniformemente y en tiempo finito:

$$\begin{aligned} h(z, t) &= R(t)(t_0 - t) \\ v_z &= \frac{2a(t)z}{t_0 - t} \\ v_r &= \frac{-a(t)r}{t_0 - t} \\ p &= \frac{-2a(t) + \frac{1}{R(t)}}{t_0 - t} \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde $a(t)$ es una función real arbitraria y $R(t) > 0$ satisface, en virtud de (3.6), la siguiente ecuación diferencial

$$(t_0 - t)R_t - R = -a(t)R$$

cuya solución general es

$$R(t) = R_0 e^{\int_0^t (1-a(\tau)) \frac{d\tau}{t_0 - \tau}}$$

Las soluciones obtenidas en (3.12) se caracterizan por que la frontera libre desaparece uniformemente en todo el espacio en el tiempo $t = t_0$. Esta situación es poco plausible en flujos físicamente reales. Sin embargo estas soluciones serán útiles para construir, mediante perturbaciones de (3.12), soluciones asintóticas del sistema de Stokes en las que la frontera libre se cierra a un punto.

En lo que sigue consideraremos el caso $a(t) = 1$ y por ello $R(t) = R_0$.

La fórmula explícita para v_r y v_z en (3.12) sugiere la introducción de las variables

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{z}{t_0 - t} \\ \rho &= \frac{r}{t_0 - t} \\ \tau &= -\log(t_0 - t) \end{aligned}$$

que son las variables autosimilares naturales asociadas al problema (3.7)-(3.11) y (3.6) así como las funciones \tilde{h} y \tilde{p} definidas por medio de

$$\begin{aligned} h(z, t) &= e^{-\tau} \tilde{h}(\xi, \tau) \\ p(r, z, t) &= e^{\tau} \tilde{p}(\rho, \xi, \tau) \end{aligned} \quad (3.13)$$

y en término de las cuales se puede escribir la solución (3.12) como

$$\begin{aligned}\tilde{h} &= R_0 \\ v_z &= 2\xi \\ v_r &= -\rho \\ \tilde{p} &= \left(-2 + \frac{1}{R_0}\right)\end{aligned}\tag{3.14}$$

El parámetro R_0 jugará el papel de un autovalor que se determinará posteriormente. Si sumamos a la solución (3.14) una pequeña perturbación de la forma

$$\begin{aligned}\tilde{h} &= R_0 + \varepsilon f \\ v_z &= 2\xi + \varepsilon V_z \\ v_r &= -\rho + \varepsilon V_r \\ \tilde{p} &= \left(-2 + \frac{1}{R_0}\right) + \varepsilon P\end{aligned}\tag{3.15}$$

donde ε es un parámetro pequeño que nos permitirá determinar los órdenes de magnitud de los distintos términos que aparecerán más tarde, e introducimos (3.13) y (3.15) dentro del sistema (3.7), (3.8), (3.9), (3.10), (3.11) y (3.6), llegamos al siguiente sistema para P , V_r y V_z :

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{\partial P}{\partial \rho} + \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_r}{\partial \rho} - \frac{V_r}{\rho^2}\right) \\ 0 &= -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \rho}\right) \\ 0 &= \frac{\partial V_z}{\partial \xi} + \frac{\partial V_r}{\partial \rho} + \frac{V_r}{\rho}\end{aligned}$$

con condiciones de contorno

$$(1 - \varepsilon^2 f'^2) \varepsilon \left(\frac{\partial V_r}{\partial \xi} + \frac{\partial V_z}{\partial \rho}\right) + 2\varepsilon f' \left(-3 + \varepsilon \frac{\partial V_r}{\partial \rho} - \varepsilon \frac{\partial V_z}{\partial \xi}\right) = 0\tag{3.16}$$

$$-P + 2\frac{\partial V_r}{\partial \rho} - 2\varepsilon f' \left(\frac{\partial V_r}{\partial \xi} + \frac{\partial V_z}{\partial \rho}\right) + \varepsilon^2 f'^2 \left(-P + 2\frac{\partial V_z}{\partial \xi} + \frac{6}{\varepsilon}\right) = (1 + \varepsilon f'^2) \frac{1}{\varepsilon} \left(-H + \frac{1}{R_0}\right)\tag{3.17}$$

$$f_\tau + \xi f' = V_r - 2\xi f' - \varepsilon V_z f'\tag{3.18}$$

donde la curvatura media se escribe como

$$H = \frac{1}{(R_0 + \varepsilon f)(1 + \varepsilon^2 f'^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\varepsilon f''}{(1 + \varepsilon^2 f'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

En el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ obtenemos el siguiente sistema de Stokes:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial \rho} + \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_r}{\partial \rho} - \frac{V_r}{\rho^2}\right)\tag{3.19}$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) \quad (3.20)$$

$$0 = \frac{\partial V_z}{\partial \xi} + \frac{\partial V_r}{\partial \rho} + \frac{V_r}{\rho} \quad (3.21)$$

que debe satisfacerse en un cilindro de radio R_0 ligeramente perturbado. Las condiciones de contorno (3.16), (3.17) y (3.18) linealizadas serían en este límite:

$$\left(\frac{\partial V_r}{\partial \xi} + \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) - 6f' = 0 \quad (3.22)$$

$$-P + 2\frac{\partial V_r}{\partial \rho} = \frac{f}{R_0^2} + f'' \quad (3.23)$$

$$f_\tau + 3\xi f' = V_r \quad (3.24)$$

A continuación describiremos una familia de soluciones polinómicas del sistema (3.19), (3.20) y (3.21) con condiciones de contorno (3.22), (3.23) y (3.24).

Comenzamos con las soluciones polinómicas pares para $f(z)$. Introduzcamos

$$V_z = e^{-\lambda\tau} \sum_{i=0}^n a_{2i+1,2(n-i)} \xi^{2i+1} \rho^{2(n-i)}$$

$$V_r = e^{-\lambda\tau} \sum_{i=0}^n b_{2i,2(n-i)+1} \xi^{2i} \rho^{2(n-i)+1}$$

$$P = e^{-\lambda\tau} \left(p_n + \sum_{i=0}^n d_{2i,2(n-i)} \xi^{2i} \rho^{2(n-i)} \right)$$

en (3.19), (3.20) y (3.21) para obtener el siguiente sistema de $3n + 1$ ecuaciones:

$$-2(n-i)d_{2i,2(n-i)} + (2(n-i)+2)(2(n-i))b_{2i,2(n-i)+1} + (2i+2)(2i+1)b_{2i+2,2(n-i)-1} = 0 \quad (3.25)$$

$$-2(i+1)d_{2i+2,2(n-i)-1} + 4(n-i)^2 a_{2i+1,2(n-i)} + (2i+3)(2i+2)a_{2i+3,2(n-i)-1} = 0 \quad (3.26)$$

$$(2i+1)a_{2i+1,2(n-i)} + (2(n-i)+2)b_{2i,2(n-i)+1} = 0 \quad (3.27)$$

donde $i = 0, 1, \dots, n-1$ en (3.25) y (3.26) e $i = 0, 1, \dots, n$ en (3.27).

Sea

$$f(\xi, \tau) = e^{-\lambda\tau} \sum_{i=0}^n \gamma_{2i,2n} \xi^{2i}$$

Las condiciones de contorno (3.22), (3.23) y (3.24) darían lugar al siguiente sistema de $3n + 3$ ecuaciones:

$$2ib_{2i,2(n-i)+1} + 2(n-i+1)a_{2i-1,2(n-i)+1} = \frac{12i\gamma_{2i,2n}}{R_0^{2(n-i)+1}} \quad (3.28)$$

$$-p_n R_0^{-2n} \delta_{i,0} - d_{2i,2(n-i)} + 2(2(n-i)+1)b_{2i,2(n-i)+1} = \frac{1}{R_0^{2(n-i)}} \left(\frac{-\gamma_{2i,2n}}{R_0^2} + (2i+2)(2i+1)\gamma_{2i+2,2n} \right) \quad (3.29)$$

$$(6i - \lambda)\gamma_{2i,2n} = b_{2i,2(n-i)+1}R_0^{2(n-i)+1} \quad (3.30)$$

donde $i = 0, 1, \dots, n$ en (3.28), (3.29) y (3.30) y $\gamma_{2n+2,2n} = 0$.

De (3.27) obtenemos

$$a_{2i+1,2(n-i)} = -\frac{2(n-i)+2}{2i+1}b_{2i,2(n-i)+1} \quad (3.31)$$

y de (3.26) junto con (3.31):

$$d_{2i,2(n-i)} = \frac{2}{i}(n-i+1)^2 a_{2i-1,2(n-i+1)} - (2(n-i)+2)b_{2i,2(n-i)+1} \quad (3.32)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.

Eliminando los coeficientes $d_{2i,2(n-i)}$ dados por (3.32) en (3.29) para $i = 1, 2, \dots, n$ obtenemos una ecuación que junto con (3.28) y (3.30) constituyen (para cada i) un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: $a_{2i-1,2(n-i+1)}$, $b_{2i,2(n-i)+1}$ y $\gamma_{2i,2n}$. Dicho sistema se puede representar matricialmente en la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 2(n-i+1) & 2i & -\frac{12i}{R_0^{2(n-i)+1}} \\ -\frac{2}{i}(n-i+1)^2 & 6(n-i)+4 & -\frac{1}{R_0^{2(n-i)+1}} \\ 0 & R_0^{2(n-i)+1} & \lambda-6i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{2i-1,2(n-i+1)} \\ b_{2i,2(n-i)+1} \\ \gamma_{2i,2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{(2i+2)(2i+1)}{R_0^{2(n-i)}} \gamma_{2i+2,2n} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

donde suponemos $\gamma_{2n+2,2n} = 0$. En el caso $i = 0$ obtenemos de (3.30) y (3.31)

$$-\lambda\gamma_{0,2n} = b_{0,2n+1}R_0^{2n+1} = -\frac{1}{2n+2}a_{1,2n}R_0^{2n+1} \quad (3.34)$$

Para que existan soluciones del sistema (3.33) se ha de verificar la siguiente condición de autovalores

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 2n & -\frac{12n}{R_0} \\ -\frac{2}{n} & 4 & -\frac{1}{R_0^2} \\ 0 & R_0 & \lambda-6n \end{pmatrix} = 0$$

Es decir,

$$\lambda(R_0) = \lambda_{2n}(R_0) = \frac{1}{6} \frac{36nR_0 - 1 - 12R_0}{R_0} \quad (3.35)$$

La ecuación (3.33) implica

$$\gamma_{2i,2n} = -\frac{3}{4} \frac{R_0^2}{R_0(36n^2 - 72in - 24i + 24n - 36) - n + i} (2i+2)(2i+1)\gamma_{2i+2,2n} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.36)$$

En el caso $i = 0$ obtenemos, a partir de (3.33) particularizado para $i = 1$, el valor de $a_{1,2n}$ en función de $\gamma_{4,2n}$ si $n \neq 1$ o en función de $\gamma_{2,2}$ si $n = 1$. El resultado es

$$\begin{aligned} a_{1,2n} &= -\frac{3}{2} \frac{R_0^{-2n+2}}{n(n-1)} \gamma_{4,2n} \quad \text{si } n \neq 1 \\ a_{1,2} &= \frac{1}{6} \frac{24R_0 - 1}{R_0^2} \gamma_{2,2} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Introducimos (3.37) en (3.34) para obtener

$$\begin{aligned}\gamma_{0,2n} &= -\frac{9}{2} \frac{R_0^4}{(n-1)n(n+1)(24R_0-1)} \gamma_{4,2n} \quad \text{si } n \neq 1 \\ \gamma_{0,2} &= \frac{1}{4} R_0^2 \gamma_{2,2}\end{aligned}\quad (3.38)$$

La ecuación (3.36) junto (3.38) constituyen una relación de recurrencia para los coeficientes del polinomio de grado $2n$ que es autofunción correspondiente al autovalor λ_{2n} y que denotaremos $f_{2n}(\xi)$

$$f_{2n}(\xi) = \sum_0^n \gamma_{2j,2n} \xi^{2j} \quad (3.39)$$

Si usamos la normalización $\gamma_{2n,2n} = 1$ entonces obtenemos los siguientes valores de $\gamma_{2j,2n}$ a partir de (3.36)

$$\gamma_{2j,2n} = \frac{(-3R_0^2)^{n-j}}{(1 + (-72n - 24)R_0)^{n-j}} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(j+1 + \frac{36R_0n^2+96R_0n-12R_0-n-1}{-72R_0n-24R_0+1})}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+\frac{1}{2})\Gamma(n+1 + \frac{36R_0n^2+96R_0n-12R_0-n-1}{-72R_0n-24R_0+1})}$$

A continuación evaluamos las posibles soluciones impares. Introduzcamos

$$\begin{aligned}V_z &= \sum_{i=0}^n a_{2i+2,2(n-i)} \xi^{2i+2} \rho^{2(n-i)} \\ V_r &= \sum_{i=0}^n b_{2i+1,2(n-i)+1} \xi^{2i+1} \rho^{2(n-i)+1} \\ P &= \sum_{i=0}^n d_{2i+1,2(n-i)} \xi^{2i+1} \rho^{2(n-i)}\end{aligned}$$

en (3.19), (3.20) y (3.21) para obtener el siguiente sistema de $3n+1$ ecuaciones:

$$-2(n-i)d_{2i+1,2(n-i)} + (2(n-i)+2)(2(n-i))b_{2i+1,2(n-i)+1} + (2i+3)(2i+2)b_{2i+2,2(n-i)-1} = 0 \quad (3.40)$$

$$-(2i+3)d_{2i+3,2(n-i-1)} + 4(n-i)^2 a_{2i+2,2(n-i)} + (2i+4)(2i+3)a_{2i+4,2(n-i-1)} = 0 \quad (3.41)$$

$$(2i+2)a_{2i+2,2(n-i)} + (2(n-i)+2)b_{2i+1,2(n-i)+1} = 0 \quad (3.42)$$

donde $i = 0, 1, \dots, n-1$ en (3.40) y (3.41) e $i = 0, 1, \dots, n$ en (3.42).

Sea

$$f(\xi, \tau) = e^{-\lambda\tau} \sum_{i=0}^n \gamma_{2i+1,2n+1} \xi^{2i+1}$$

Las condiciones de contorno (3.22), (3.23) y (3.24) llevan al siguiente sistema de $3n+3$ ecuaciones:

$$(2i+1)b_{2i+1,2(n-i)+1} + 2(n-i+1)a_{2i,2(n-i+1)} = \frac{6(2i+1)\gamma_{2i+1,2n+1}}{R_0^{2(n-i)+1}} \quad (3.43)$$

$$-d_{2i+1,2(n-i)} + 2(2(n-i) + 1)b_{2i+1,2(n-i)+1} = \frac{1}{R_0^{2(n-i)}} \left(\frac{\gamma_{2i+1,2n+1}}{R_0^2} - (2i+3)(2i+2)\gamma_{2i+3,2n+1} \right) \quad (3.44)$$

$$(3(2i+1) - \lambda)\gamma_{2i+1,2n+1} = b_{2i+1,2(n-i)+1}R_0^{2(n-i)+1} \quad (3.45)$$

con $i = 0, 1, \dots, n$ en (3.43), (3.44) y (3.45) y $\gamma_{2n+3,2n} = 0$.

De (3.42) obtenemos

$$a_{2i+2,2(n-i)} = -\frac{2(n-i) + 2}{2i+2} b_{2i+1,2(n-i)+1} \quad (3.46)$$

y de (3.40) junto con (3.46):

$$d_{2i+1,2(n-i)} = \frac{4(n-i+1)^2}{(2i+1)} a_{2i,2(n-i+1)} - 2(n-i+1)b_{2i+1,2(n-i)+1} \quad (3.47)$$

Introduciendo (3.47) en (3.44) obtenemos una ecuación que junto con (3.43) y (3.45) constituyen (para cada n) un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: $a_{2i,2(n-i+1)}$, $b_{2i+1,2(n-i)+1}$ y $\gamma_{2i+1,2n+1}$. Dicho sistema se puede representar matricialmente en la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 2(n-i+1) & 2i+1 & -\frac{6(2i+1)}{R_0^{2(n-i)+1}} \\ -\frac{4(n-i+1)^2}{(2i+1)} & 6(n-i)+4 & -\frac{1}{R_0^{2(n-i+1)}} \\ 0 & R_0^{2(n-i)+1} & \lambda - 3(2i+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{2i,2(n-i+1)} \\ b_{2i+1,2(n-i)+1} \\ \gamma_{2i+1,2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{(2i+3)(2i+2)}{R_0^{2(n-i)}} \gamma_{2i+3,2n+1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

donde suponemos $\gamma_{2n+3,2n+1} = 0$. Para que existan soluciones de (3.48) se ha de verificar la condición

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 2n+1 & -\frac{6(2n+1)}{R_0} \\ -\frac{4}{2n+1} & 4 & -\frac{1}{R_0^2} \\ 0 & R_0 & \lambda - 6n - 3 \end{pmatrix} = 0$$

Es decir,

$$\lambda(R_0) = \lambda_{2n+1}(R_0) = \frac{1}{6} \frac{36R_0n + 6R_0 - 1}{R_0} \quad (3.49)$$

De (3.48) obtenemos entonces

$$\gamma_{2i+1,2n+1} = -\frac{3}{4} \frac{R_0^2}{(36n^2 + 24n - 72in - 24i - 36)R_0 - n + i} (2i+3)(2i+2)\gamma_{2i+3,2n+1} \quad (3.50)$$

La fórmula (3.50) constituye una relación de recurrencia para los coeficientes del polinomio de grado $2n+1$ que es autofunción correspondiente al autovalor λ_{2n+1} y que denotaremos $f_{2n+1}(\xi)$

$$f_{2n+1}(\xi) = \sum_0^n \gamma_{2j+1,2n+1} \xi^{2j+1} \quad (3.51)$$

Si normalizamos mediante $\gamma_{2n+1,2n+1} = 1$ entonces obtenemos los siguientes valores de $\gamma_{2j+1,2n+1}$ a partir de (3.50)

$$\gamma_{2j+1,2n+1} = \frac{(-3R_0^2)^{n-j}}{(1 - (72n+24)R_0)^{n-j}} \frac{\Gamma(n + \frac{3}{2})\Gamma(n+1)\Gamma(j+1) + \frac{36R_0n^2 + 96R_0n - 12R_0 - n - 1}{-72R_0n - 24R_0 + 1}}{\Gamma(j + \frac{3}{2})\Gamma(j+1)\Gamma(n+1) + \frac{36R_0n^2 + 96R_0n - 12R_0 - n - 1}{-72R_0n - 24R_0 + 1}}$$

A continuación escribimos a modo de ejemplo los polinomios $f_m(\xi)$ de orden más bajo

$$\begin{aligned}
 f_0(\xi) &= 1 \\
 f_1(\xi) &= \xi \\
 f_2(\xi) &= \frac{1}{4}R_0^2 + \xi^2 \\
 f_3(\xi) &= -\frac{9}{2} \frac{R_0^2}{24R_0 - 1} \xi + \xi^3 \\
 f_4(\xi) &= -\frac{3}{4} \frac{R_0^4}{24R_0 - 1} + 9 \frac{R_0^2}{12R_0 + 1} \xi^2 + \xi^4 \\
 f_5(\xi) &= -\frac{135}{4} \frac{R_0^4}{(78R_0 - 1)(12R_0 + 1)} + 15 \frac{R_0^2}{12R_0 + 1} \xi^3 + \xi^5 \\
 f_6(\xi) &= -\frac{135}{32} \frac{R_0^6}{(24R_0 - 1)(120R_0 + 1)} - \frac{405}{4} \frac{R_0^4}{(60R_0 - 1)(120R_0 + 1)} \xi^2 + \\
 &\quad + \frac{45}{2} \frac{R_0^2}{120R_0 + 1} \xi^4 + \xi^6
 \end{aligned}$$

Busquemos soluciones que se describen mediante el siguiente desarrollo formal en autofunciones ¹

$$f(\xi, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n \tau} f_n(\xi) \quad (3.52)$$

Obsérvese que de entre los autovalores λ_n dados en (3.52) se tienen dos autovalores que darían inestabilidad en el desarrollo (3.52) si $R_0 > \frac{1}{24}$ y más de dos si $R_0 < \frac{1}{24}$. La existencia de autovalores inestables es frecuente en el estudio de problemas de generación de singularidades. Bajo las hipótesis de simetría de nuestro problema el primer autovalor inestable estaría asociado a un cambio en el tiempo de la formación de la singularidad y el segundo a un desplazamiento en el punto (véase [25] para una descripción de la forma en que autovalores inestables pueden modificar el tiempo de formación de la singularidad). Si $R_0 < \frac{1}{24}$ aparecerán más autovalores inestables y el mecanismo de formación de singularidades no sería estable, por lo que nos restringiremos al caso $R_0 > \frac{1}{24}$.

La función $f(\xi, \tau)$ se comporta, para valores grandes de ξ , en la forma

$$f(\xi, \tau) \sim \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n \tau} \xi^n$$

Nótese que $f(\xi, \tau)$ se hace del orden unidad en regiones de orden

$$\xi \sim e^{\min_{n \geq 2} (\frac{\lambda_n}{n}) \tau} = e^{\frac{\lambda_2}{2} \tau} \quad (3.53)$$

El proceso de linealización que condujo al sistema (3.19)-(3.24) deja de ser válido cuando se satisface (3.53).

En el caso de que las $2n - 1$ primeras autofunciones no aparezcan en la combinación lineal el desarrollo asintótico tendría la forma

$$f(\xi, \tau) \sim \sum_{m=2n}^{\infty} C_m e^{-\lambda_m \tau} \xi^m$$

¹La justificación de un desarrollo del tipo (3.52) es algo técnica y será pospuesta a la última Sección de este capítulo.

La función $f(\xi, \tau)$ se hace del orden de la unidad cuando

$$e^{-\lambda_{2n}\tau} \xi^{2n} \sim 1 \quad (3.54)$$

Denotemos

$$\alpha_n = -\frac{\lambda_{2n}}{2n} \quad (3.55)$$

La relación (3.53) sugiere la introducción de las nuevas variables $\eta = \frac{\xi}{(t_0-t)^{\alpha_n}} = \frac{z}{(t_0-t)^{1+\alpha_n}}$, $\rho = \frac{r}{t_0-t}$ así como de las funciones

$$\begin{aligned} h &= (t_0 - t) \varphi(\eta) \\ v_z &= \frac{1}{(t_0 - t)^{-\alpha_n}} W_z(\eta, \rho) \\ v_r &= W_r(\eta, \rho) \\ p &= \frac{1}{(t_0 - t)} P(\eta, \rho) \end{aligned} \quad (3.56)$$

y las condiciones de conexión

$$\begin{aligned} \varphi(\eta) &\sim R_0 + C_{2n} \eta^{2n} \quad \text{cuando } \eta \rightarrow 0 \\ W_z(\eta, \rho) &\sim 2\eta + C_{2n} a_{2n+1,0} \eta^{2n+1} \quad \text{cuando } \eta \rightarrow 0 \\ W_r(\eta, \rho) &\sim -\rho + C_{2n} a_{2n,1} \eta^{2n+1} \quad \text{cuando } \eta \rightarrow 0 \\ P(\eta, \rho) &\sim \left(-2 + \frac{1}{R_0}\right) + C_{2n} d_{2n,0} \eta^{2n+1} \quad \text{cuando } \eta \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.57)$$

donde C_{2n} una constante positiva arbitraria.

Usamos las variables (3.56) en el sistema (3.7), (3.8) y (3.9) para obtener, en el orden más bajo en potencias de $(t_0 - t)$ y para $\alpha_n < 0$,

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial \rho} + \left(\frac{\partial^2 W_r}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial W_r}{\partial \rho} - \frac{W_r}{\rho^2} \right) \quad (3.58)$$

$$0 = \frac{\partial^2 W_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial W_z}{\partial \rho} \quad (3.59)$$

$$0 = \frac{\partial W_z}{\partial \eta} + \frac{\partial W_r}{\partial \rho} + \frac{W_r}{\rho} \quad (3.60)$$

La solución general del sistema (3.58), (3.59) y (3.60) es de la forma

$$\begin{aligned} W_z &= \psi(\eta) \\ W_r &= -\frac{\rho}{2} \psi'(\eta) \\ P &= p_0(\eta) \end{aligned} \quad (3.61)$$

Las condiciones de contorno (3.10), (3.11) y la ecuación (3.6) son, en el orden más bajo en potencias de $(t_0 - t)$,

$$\frac{\partial W_z}{\partial \rho} = 0 \quad (3.62)$$

$$-P + 2 \frac{\partial W_r}{\partial \rho} = -\frac{1}{\varphi} \quad (3.63)$$

$$-\varphi + (1 + \alpha_n)\eta\varphi' = W_r - W_z\varphi' \quad (3.64)$$

La condición (3.62) se satisface automáticamente y la condición (3.63) implica

$$p_0(\eta) = -\psi'(\eta) + \frac{1}{\varphi(\eta)} \quad (3.65)$$

Observemos sin embargo que el sistema (3.58)-(3.64) no determina la función φ . La situación es bastante similar a la que se encontró en el Capítulo 2 al deducir límites unidimensionales a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes (ver la Sección 2.2). En efecto, las variables (3.56) corresponden a la descripción de un tubo casi unidimensional y es natural encontrar la misma situación que se encontró en aquel caso. Para determinar la función φ debemos calcular, al igual que se hizo allí, órdenes superiores del desarrollo.

Introduzcamos en (3.7)-(3.11) y (3.6) las expresiones

$$\begin{aligned} h &= (t_0 - t) \varphi(\eta) \\ v_z &= \frac{1}{(t_0 - t)^{-\alpha_n}} W_z(\eta, \rho) + (t_0 - t)^{-\alpha_n} w_z(\eta, \rho) + \dots \\ v_r &= W_r(\eta, \rho) + (t_0 - t)^{-2\alpha_n} w_r(\eta, \rho) + \dots \\ p &= \frac{1}{(t_0 - t)} P(\eta, \rho) + (t_0 - t)^{-1-2\alpha_n} p_2(\eta, \rho) + \dots \end{aligned}$$

para obtener en el primer orden el sistema (3.58)-(3.64) cuya solución no está completamente determinada como vimos y es de la forma (3.61), y en el segundo orden las ecuaciones

$$0 = -\frac{\partial p_2}{\partial \rho} + \left(\frac{\partial^2 w_r}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_r}{\partial \rho} - \frac{w_r}{\rho^2} - \frac{\rho}{2} \psi'''(\eta) \right) \quad (3.66)$$

$$0 = -\frac{\partial p_0}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial \rho^2} + \psi'' + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_z}{\partial \rho} \quad (3.67)$$

$$0 = \frac{\partial w_z}{\partial \eta} + \frac{\partial w_r}{\partial \rho} + \frac{w_r}{\rho} \quad (3.68)$$

junto con las siguientes condiciones de contorno

$$\frac{\partial w_z}{\partial \rho} - \frac{\rho}{2} \psi'' - 3\varphi' \psi' = 0 \quad \text{en } \rho = \varphi \quad (3.69)$$

$$-p_0 - \psi' = -\frac{1}{\varphi} \quad \text{en } \rho = \varphi \quad (3.70)$$

La solución general del sistema (3.66), (3.67) y (3.68) es

$$\begin{aligned} w_z &= v(\eta) \rho^2 \\ w_r &= -\frac{1}{4} v'(\eta) \rho^3 \\ p_2 &= \frac{1}{2} \left(-2v'(\eta) - \frac{1}{2} \psi'''(\eta) \right) \rho^2 \end{aligned}$$

con

$$v(\eta) = \frac{1}{4} (p_0'(\eta) - \psi''(\eta))$$

Despejando de (3.70) p_0 e introduciendo su expresión junto con la de w_z en (3.67) obtenemos la siguiente ecuación para ψ en función de φ

$$\frac{\varphi'}{\varphi^2} + 3\psi'' + 6\frac{\varphi'\psi'}{\varphi} = 0$$

que junto con la ecuación de evolución (3.64) en su orden más bajo nos lleva al siguiente sistema para las funciones ψ y φ :

$$\frac{\varphi'}{\varphi^2} + 3\frac{1}{\varphi^2} (\varphi^2\psi')' = 0 \quad (3.71)$$

$$-\varphi + (1 + \alpha_n)\eta\varphi' + \varphi'\psi + \psi'\frac{\varphi}{2} = 0 \quad (3.72)$$

Sobre las soluciones de (3.71), (3.72) impondremos las condiciones de conexión (3.57) que en nuestro caso darían lugar a

$$\varphi(\eta) \underset{\eta \rightarrow 0}{\sim} R_0 + C_{2n}\eta^{2n} \quad (3.73)$$

$$\psi(\eta) \underset{\eta \rightarrow 0}{\sim} 2\eta$$

así como las siguientes condiciones de comportamiento asintótico

$$\varphi \underset{|\eta| \rightarrow \infty}{\sim} A_{\pm} |\eta|^{\frac{1}{1+\alpha_n}} \quad (3.74)$$

$$\psi \underset{\eta \rightarrow \infty}{\sim} B_{\pm} |\eta|^{\frac{\alpha_n}{1+\alpha_n}}$$

que son necesarias para obtener velocidades del fluido y anchuras del tubo acotadas para $|z| \sim 1$. Solamente si $\alpha_n > -1$ la solución $\varphi(\eta)$ puede representar ruptura en tiempo finito. Este hecho, junto con la suposición $\alpha_n < 0$ que condujo al sistema (3.71), (3.72) restringe el análisis a $\alpha_n \in (-1, 0)$.

El problema es entonces el de determinar aquellos valores de α_n (o equivalentemente de R_0) tales que existen soluciones de (3.71), (3.72) satisfaciendo (3.73) y (3.74). Esto lo haremos en las próximas secciones.

3.3 Análisis del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (3.71), (3.72)

Escribamos por sencillez $\alpha_n = \alpha$. El objetivo de esta Sección es el análisis, para cada α , de las soluciones del sistema (3.71), (3.72) que satisfacen (3.73).

El sistema que han de satisfacer φ y ψ es no autónomo y de dimensión dos:

$$\frac{\varphi'}{\varphi^2} + 3\frac{1}{\varphi^2} (\varphi^2\psi')' = 0 \quad (3.75)$$

$$-\varphi + (\alpha + 1)\eta\varphi' + \psi\varphi' + \frac{1}{2}\psi'\varphi = 0 \quad (3.76)$$

y las condiciones de conexión en el origen son (ver (3.73)):

$$\begin{aligned}\varphi(\eta, \tau) &\underset{\eta \rightarrow 0}{\sim} R_0 + C_{2n}\eta^{2n} \\ \psi(\eta, \tau) &\underset{\eta \rightarrow 0}{\sim} 2\eta\end{aligned}\quad (3.77)$$

Comenzaremos estudiando el caso más estable $n = 1$.

Multiplicamos la ecuación (3.75) por φ^2 e integramos una vez para obtener

$$\varphi + 3\varphi^2\psi' = C$$

siendo $C = R_0 + 6R_0^2$. De la ecuación (3.76) podemos obtener

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{1 - \frac{1}{2}\psi'}{\psi + (\alpha + 1)\eta}$$

El valor adecuado para R_0 se fija por la condición (3.77). Supongamos

$$\begin{aligned}\psi &= 2\eta + b\eta^3 + \dots \\ \varphi &= R_0 + a\eta^2 + \dots\end{aligned}$$

e introduzcamos estas expresiones en (3.75) y (3.76) para obtener, en los órdenes más bajos:

$$\begin{aligned}R_0 + 6R_0^2 &= \varphi + 3\varphi^2\psi' \sim R_0 + 6R_0^2 + \left(a + 3(4R_0a + 3R_0^2b)\right)\eta^2 + \dots \\ 0 &= \frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{1 - \frac{1}{2}\psi'}{\psi + (\alpha + 1)\eta} \sim \left(\frac{2a}{R_0} + \frac{\frac{3}{2}b}{3 + \alpha}\right)\eta + \dots\end{aligned}$$

lo cual implica

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{R_0}(3 + \alpha) & \frac{3}{2} \\ 1 + 12R_0 & 9R_0^2 \end{vmatrix} = 0$$

y obtenemos el siguiente valor de R_0

$$R_0 = \frac{1}{12(\alpha + 2)} \quad (3.78)$$

La relación (3.78) es, por (3.55), idéntica a (3.35).

Se puede obtener fácilmente, integrando en η la ecuación (3.75), separando los términos en φ en (3.76) e introduciendo $\psi(\eta) = \eta g(\eta)$ así como la nueva variable $\zeta = \log \eta$, el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}C &= \varphi + 3\varphi^2(g_\zeta + g) \\ \frac{\varphi_\zeta}{\varphi} &= \frac{1 - \frac{1}{2}(g_\zeta + g)}{g + (\alpha + 1)}\end{aligned}\quad (3.79)$$

El sistema (3.79) es autónomo.

Introducimos a continuación el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned}G &= \log(g + (\alpha + 1)) \\ H &= \log(\varphi/R_0)\end{aligned}$$

para poder escribir el sistema en la forma

$$C = R_0 e^H + 3R_0^2 e^{2H} (e^G G' + e^G - (\alpha + 1)) \quad (3.80)$$

$$H' = e^{-G} - \frac{1}{2}(G' + 1 - (\alpha + 1)e^{-G}) \quad (3.81)$$

Haciendo el nuevo cambio de variables

$$V = H + \frac{G}{2}$$

el sistema (3.80), (3.81) se transforma en

$$G' = \frac{C}{3R_0^2} e^{-2V} - \frac{e^{-V-\frac{G}{2}}}{3R_0} + (\alpha + 1)e^{-G} - 1$$

$$V' = \left(\frac{3+\alpha}{2}\right) e^{-G} - \frac{1}{2}$$

Multiplicamos finalmente la primera ecuación por $-\frac{1}{2}e^{-\frac{G}{2}}$ y la segunda por $-e^{-V}$, introducimos las funciones

$$\begin{aligned} x &= e^{-\frac{G}{2}} \\ y &= e^{-V} \end{aligned}$$

y el valor de R_0 dado en (3.78) para llegar a

$$\begin{aligned} x' &= -(2\alpha + 5)y^2x + (2\alpha + 4)yx^2 - \frac{\alpha + 1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x \\ y' &= -\left(\frac{3 + \alpha}{2}\right)x^2y + \frac{1}{2}y \end{aligned} \quad (3.82)$$

El sistema (3.82) representa un sistema autónomo de dimensión dos. Estudiaremos la existencia de soluciones dibujando el correspondiente diagrama de fases.

La solución que buscamos debe conectar los puntos $\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha+3}}, \frac{1}{\sqrt{\alpha+3}}\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha+1}}, 0\right)$ que son puntos de equilibrio como podemos verificar fácilmente (los denotamos en la figura 3.1 por P y Q respectivamente). El carácter de estos puntos de equilibrio se puede encontrar linealizando el sistema en torno a ellos. Sea

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{\alpha+3}} + \lambda \\ y &= \frac{1}{\sqrt{\alpha+3}} + \nu \end{aligned}$$

entonces, localmente

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \nu \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \nu \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda \\ \nu \end{pmatrix}$$

lo cual implica que el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha+3}}, \frac{1}{\sqrt{\alpha+3}}\right)$ es un punto de silla, ya que 2 y -1 son los autovalores de A . La dirección principal correspondiente al primer autovalor es $(2, -1)$ y la correspondiente al segundo $(1, 1)$ (ver líneas discontinuas en torno a P en la figura 3.1).

Sea

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{\alpha+1}} + \lambda \\ y &= \nu \end{aligned}$$

entonces, localmente

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \nu \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2\alpha+4}{\alpha+1} \\ 0 & -\frac{1}{\alpha+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \nu \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \lambda \\ \nu \end{pmatrix}$$

y el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha+1}}, 0\right)$ es un punto de reposo estable, puesto que los dos autovalores de B son negativos. Todas las órbitas excepto dos entran a lo largo de las direcciones $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ (marcadas con líneas discontinuas en la figura 3.1). Las dos órbitas restantes entran a lo largo de $\left(2\frac{\alpha+2}{\alpha}, 1\right)$ y $\left(-2\frac{\alpha+2}{\alpha}, -1\right)$. Solamente aquellas órbitas que entren a lo largo de $\left(2\frac{\alpha+2}{\alpha}, 1\right)$ serán admisibles, pues son las únicas que satisfacen la condición (3.74) cuando se escriben en las variables originales.

La existencia de órbitas que unan los dos puntos de equilibrio se deduce mediante una simple inspección del mapa de fases: x' se anula en la curva $x = 0$ (Γ_1 en la figura 3.1) y en la cuádriga

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\alpha+1}{2} & -(\alpha+2) \\ -(\alpha+2) & 2\alpha+5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

que es una hipérbola (Γ_2 en la figura 3.1). y' se anula en $y = 0$ (Γ_3 en la figura 3.1) así como en $x = \pm\frac{1}{\sqrt{\alpha+3}}$ (Γ_4 en la figura 3.1). De aquí se deduce que todas las órbitas en la región $x > \frac{1}{\sqrt{\alpha+3}}, y > 0$ y en particular una que tenga su origen en $\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha+3}}, \frac{1}{\sqrt{\alpha+3}}\right)$ se aproximan asintóticamente al punto $\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha+1}}, 0\right)$.

Las soluciones que hemos hallado presentan los siguientes comportamientos asintóticos

$$\begin{aligned} |\psi| &\sim C_1(\alpha) + K_1 |\eta|^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \\ \varphi &\sim K_2 |\eta|^{\frac{1}{\alpha+1}} \end{aligned} \quad (3.83)$$

y cabe esperar que solamente para ciertos valores de α se anule $C_1(\alpha)$ (es decir, que la órbita entre en el punto de equilibrio a lo largo de la dirección principal menos atractiva). Obsérvese que esta es la situación típica de los problemas de similaridad de segundo orden.

Si en lugar de $n = 1$ consideramos el caso inestable de n arbitrario, es decir, si (ψ, φ) satisfacen:

$$\begin{aligned} \psi &= 2\eta + b\eta^{1+2n} + O(\eta^{1+4n}) \\ \varphi &= R_0 + a\eta^{2n} + O(\eta^{4n}) \end{aligned}$$

se tendría en los órdenes más bajos:

$$\begin{aligned} R_0 + 6R_0^2 &= \varphi + 3\varphi^2\psi' \sim R_0 + 6R_0^2 + \left(a + 3(4R_0a + R_0^2(1+2n)b)\right)\eta^{2n} + \dots \\ 0 &= \frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{1 - \frac{1}{2}\psi'}{\psi + (\alpha+1)\eta} \sim \left(\frac{2n}{R_0}a + \frac{2n+1}{3+\alpha}b\right)\eta^{2n+1} + \dots \end{aligned}$$

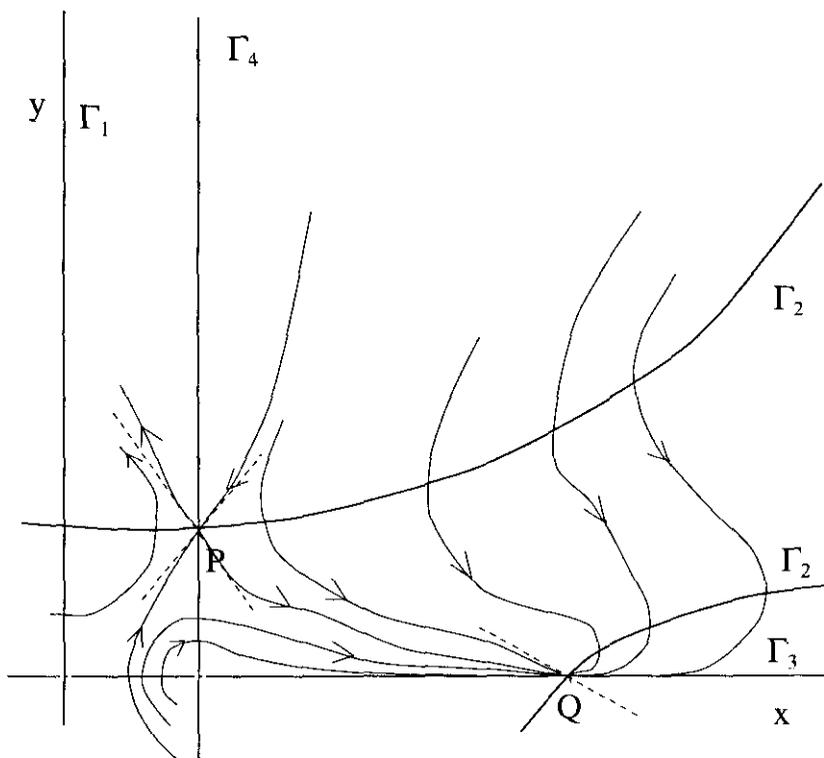


Figura 3.1: El diagrama de fases del sistema (3.82)

lo cual implica ,

$$\begin{vmatrix} \frac{2n}{R_0}(3 + \alpha) & \frac{2n+1}{2} \\ 1 + 12R_0 & 3(2n+1)R_0^2 \end{vmatrix} = 0$$

y obtenemos el siguiente valor de R_0

$$R_0 = \frac{1}{12((3 + \alpha)n - 1)} \quad (3.84)$$

La relación (3.84) es, por (3.55), idéntica a la (3.35).

Las soluciones que buscamos, serán órbitas del sistema de ecuaciones (3.82) con el valor de R_0 dado en (3.84) y que unan los puntos $(\frac{1}{\sqrt{\alpha+3}}, \frac{1}{\sqrt{\alpha+3}})$ y $(\frac{1}{\sqrt{\alpha+1}}, 0)$. Un análisis del mapa de fases análogo al realizado para $n = 1$ muestra la existencia de tales órbitas y el comportamiento de las soluciones es

$$\begin{aligned} |\psi| &\sim C_n(\alpha) + K_1 |\eta|^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \\ \varphi &\sim K_2 |\eta|^{\frac{1}{\alpha+1}} \end{aligned} \quad (3.85)$$

A continuación nuestro objetivo es calcular las constantes $C_n(\alpha)$ en (3.85) y determinar los valores de α para los que dichos coeficientes se anulan. Para ello, es importante observar que el sistema de ecuaciones (3.75), (3.76) se puede integrar explícitamente mediante las ideas que se introdujeron en el Capítulo 2, es decir, mediante el uso de coordenadas lagrangianas. Observemos que si definimos

$$h(z, t) = (t_0 - t) \varphi(\eta) \quad (3.86)$$

$$v(z, t) = \frac{1}{(t_0 - t)^{-\alpha}} \psi(\eta) \quad (3.87)$$

con

$$\eta = \frac{z}{(t_0 - t)^{1+\alpha}} \quad (3.88)$$

entonces las ecuaciones (3.75), (3.76) se pueden escribir en la forma

$$\frac{h_z}{h^2} + 3 \frac{1}{h^2} (h^2 v_z)_z = 0 \quad (3.89)$$

$$(h^2)_t + (v h^2)_z = 0 \quad (3.90)$$

3.4 Estudio de la constante de tiro $C_n(\alpha)$

En esta sección calcularemos las constantes $C_n(\alpha)$. Probaremos en primer lugar que

$$\begin{aligned} C_1(\alpha) = & \frac{12^3(\alpha+2)^2((\alpha+3)(2\alpha+5)) \Gamma(1-\alpha) \Gamma(\frac{1}{2})}{6 \Gamma(\frac{3}{2}-\alpha)} F\left(-\alpha - \frac{3}{2}, 1-\alpha; \frac{3}{2}-\alpha; -5-2\alpha\right) - \\ & \frac{-(\alpha+3) (12(\alpha+2))^3 \Gamma(-\alpha) \Gamma(\frac{1}{2})}{3 \Gamma(\frac{1}{2}-\alpha)} F\left(-\alpha - \frac{3}{2}, -\alpha; \frac{1}{2}-\alpha; -5-2\alpha\right) \end{aligned}$$

y que existe una única α_0 en el intervalo $[-2, 0]$ tal que $C_1(\alpha_0) = 0$. Recordamos que la función $F(a, b; c; z)$ es la función hipergeométrica y que $\Gamma(z)$ es la función gamma (ver [1]).

Para realizar el cálculo introducimos un cambio de variables idéntico al introducido en la Sección 2.2. Más en concreto, definimos $z(s, t)$ a través de las ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{\partial z(s, t)}{\partial s} &= \frac{1}{h^2(z(s, t), t)} \\ \frac{\partial z(s, t)}{\partial t} &= v(z(s, t), t)\end{aligned}\quad (3.91)$$

con dato inicial

$$z(s, 0) = s$$

Introduciendo las expresiones (3.86), (3.87), con η dado en (3.88), dentro de (3.91) encontramos

$$\begin{aligned}\frac{\partial z(s, t)}{\partial s} &= \frac{1}{h^2(z(s, t), t)} = \frac{1}{(t_0 - t)^2 \varphi^2\left(\frac{z}{(t_0 - t)^{1+\alpha}}\right)} \\ \frac{\partial z(s, t)}{\partial t} &= v(z(s, t), t) = \frac{1}{(t_0 - t)^{-\alpha}} \psi\left(\frac{z}{(t_0 - t)^{1+\alpha}}\right)\end{aligned}\quad (3.92)$$

lo cual sugiere la siguiente estructura autosimilar para $z(s, t)$:

$$z(s, t) = (t_0 - t)^{1+\alpha} g\left(\frac{s}{(t_0 - t)^{3+\alpha}}\right)\quad (3.93)$$

Dada una función $z(s, t)$ definida en la forma (3.93) podemos deducir de manera única las funciones φ y ψ a partir de (3.92).

El siguiente objetivo será la determinación de la ecuación que debe ser satisfecha por $z(s, t)$. Introducimos por sencillez la siguiente notación

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$$

para designar la derivada de f con respecto de x si la variable y permanece constante y efectuamos el cambio (3.91) en el sistema (3.89), (3.90). Observemos que

$$\left(\frac{\partial(h^2)}{\partial t}\right)_s = \left(\frac{\partial(h^2)}{\partial t}\right)_z + \frac{1}{z_s} z_t \left(\frac{\partial(h^2)}{\partial s}\right)_t$$

de donde se deduce, empleando (3.91),

$$\left(\frac{\partial(h^2)}{\partial t}\right)_z = \left(\frac{\partial(z_s^{-1})}{\partial t}\right)_s - \frac{1}{z_s} z_t \left(\frac{\partial(h^2)}{\partial s}\right)_t = -\frac{z_{st}}{z_s^2} + \frac{z_{ss} z_t}{z_s^3}\quad (3.94)$$

y por otra parte

$$\left(\frac{\partial(vh^2)}{\partial z}\right)_t = \frac{1}{z_s} \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{z_t}{z_s}\right)\right)_t = \frac{z_{st}}{z_s^2} - \frac{z_{ss} z_t}{z_s^3}\quad (3.95)$$

Sumando (3.94) y (3.95) concluimos que la ecuación (3.90) se satisface idénticamente

Por otra parte

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{h} \right) + 3 \frac{1}{h^2} (h^2 v_z)_z = -\frac{1}{z_s} \frac{\partial}{\partial s} (\sqrt{z_s}) + 3 z_s \frac{1}{z_s} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{z_s^2} \frac{\partial z_t}{\partial s} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{z_s}} \right)_s - 3 \left(\frac{1}{z_s} \right)_{st} \end{aligned}$$

que es la siguiente ecuación para $u = z_s$:

$$-\left(\frac{1}{\sqrt{u}} \right)_s + 3 \left(\frac{1}{u} \right)_{st} = 0 \quad (3.96)$$

Buscamos soluciones autosimilares de la ecuación (3.96). Estas soluciones son, por (3.93), de la forma

$$u = (t_0 - t)^{-2} f(\xi)$$

con

$$\xi = \frac{s}{(t_0 - t)^\beta}$$

y

$$\beta = \alpha + 3 \quad (3.97)$$

La ecuación que satisface la función f sería entonces:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{f}} \right)' + 3 \left(\frac{2}{f} + \frac{\beta \xi f'}{f^2} \right)' = 0$$

o, integrando en s :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} + 3 \left(\frac{2}{f} + \frac{\beta \xi f'}{f^2} \right) = K \quad (3.98)$$

donde K es una constante arbitraria.

Si imponemos simetría respecto del origen para la función f y usamos que por (3.91), $f(0) = R_0^{-2}$ entonces necesariamente $K = R_0 + 6R_0^2$. Consideramos ahora

$$f(\xi) = R_0^{-2} + C\xi^2 + O(\xi^4)$$

e introducimos esta expresión dentro de (3.98) para deducir la condición

$$R_0 = \frac{1}{12(\beta - 1)} \quad (3.99)$$

que es idéntica a (3.78).

La ecuación (3.98) se puede integrar fácilmente en término de $\ln \xi$ e $y = R_0 \sqrt{f}$:

$$\int \frac{dy}{((1 + 6R_0)y^3 - y^2 - 6R_0y)} = \frac{1}{6R_0\beta} \ln \xi + \tilde{C} \quad (3.100)$$

con \tilde{C} una constante arbitraria.

La integral a la derecha de (3.100) se puede calcular por métodos elementales. Se obtiene entonces, teniendo en cuenta el valor de R_0 dado en (3.99), el siguiente resultado

$$y^{-\beta} ((2\beta - 1)y + 1)^{\beta - \frac{1}{2}} (1 - y)^{\frac{1}{2}} = C\xi \quad (3.101)$$

donde $C > 0$ es una constante arbitraria. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $C = 1$ ya que la ecuación (3.98) es invariante bajo el reescalamiento $\xi \rightarrow A\xi$ para cualquier $A > 0$.

De (3.101) podemos obtener fácilmente

$$\frac{d\xi}{dy} = \frac{d}{dy} \left(y^{-\beta} ((2\beta - 1)y + 1)^{\beta - \frac{1}{2}} (1 - y)^{\frac{1}{2}} \right) = -y^{-\beta - 1} \frac{(2y\beta - y + 1)^{\beta - \frac{3}{2}}}{\sqrt{1 - y}} \frac{\beta}{\sqrt{1 - y}} \quad (3.102)$$

y deducimos entonces que la función $y(\xi)$ es simétrica y decrece cuando ξ crece.

El valor de $C_1(\alpha)$ (con $C_1(\cdot)$ la función definida en (3.83)) es, teniendo en cuenta las relaciones (3.91), (3.87) y (3.88),

$$C_1(\alpha) = \int_0^\infty z_{st} ds = \int_0^\infty u_t ds = \frac{1}{3} \int_0^\infty \left(\frac{1}{24} \frac{2\beta - 1}{(\beta - 1)^2} f^2 - f^{\frac{3}{2}} \right) d\xi$$

y por tanto

$$\begin{aligned} K_1(\beta) &\equiv \frac{3}{(12(\beta - 1))^3} C_1(\alpha) = \\ &= \int_0^1 \left(\left(\frac{2\beta - 1}{2\beta - 2} \right) y^4 - y^3 \right) \left(y^{-\beta - 1} ((2\beta - 1)y + 1)^{\beta - \frac{3}{2}} \frac{\beta}{\sqrt{1 - y}} \right) dy \end{aligned} \quad (3.103)$$

donde hemos usado (3.102).

La función $K_1(\beta)$ se puede escribir de forma explícita en término de las funciones hipergeométrica y gamma teniendo en cuenta la fórmula (ver fórmula 15.3.1 en [1]):

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt$$

que nos permite escribir $K_1(\beta)$ como

$$\begin{aligned} K_1(\beta) &= \beta \frac{\Gamma(4-\beta) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}-\beta\right)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \left(\frac{1}{2} \frac{2\beta - 1}{\beta - 1} \right) F\left(-\beta + \frac{3}{2}, 4 - \beta; \frac{9}{2} - \beta; 1 - 2\beta\right) - \\ &\quad - \beta \frac{\Gamma(3-\beta) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}-\beta\right)} F\left(-\beta + \frac{3}{2}, 3 - \beta; \frac{7}{2} - \beta; 1 - 2\beta\right) \end{aligned}$$

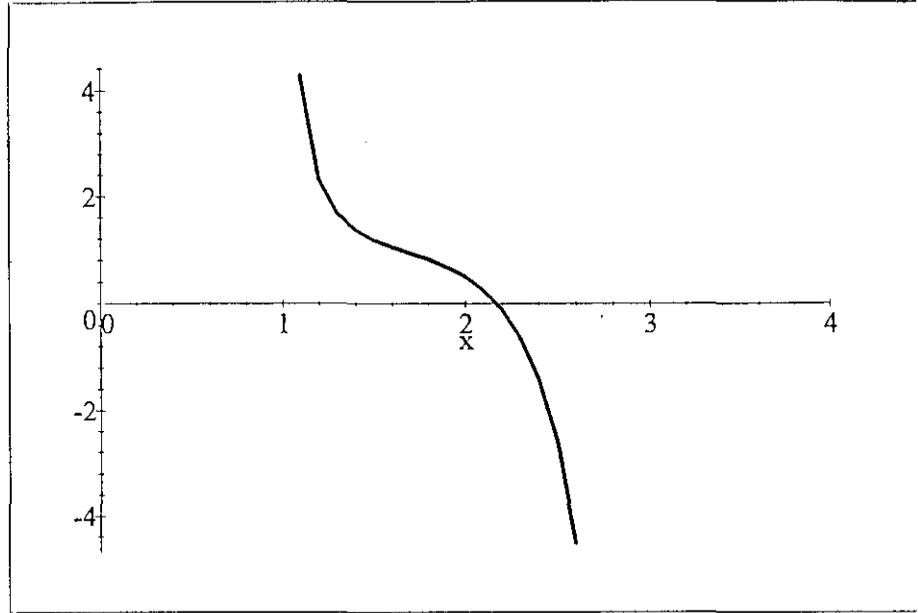
$K_1(\beta)$ es regular en el intervalo $1 < \beta < 3$. Notar que

$$K_1(\beta) \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} +\infty$$

$$K_1(\beta) \xrightarrow{\beta \rightarrow 3} -\infty$$

como se deduce fácilmente de (3.103) y esto implica, dada la continuidad de $K_1(\beta)$ en el intervalo considerado, la existencia de al menos una raíz. A modo de ejemplo se proporciona a continuación el valor numérico de $K_1(\beta)$ en ciertos casos particulares: $K_1\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{8}\pi$, $K_1(2) = \frac{1}{2}$, $K_1\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{5}{6}\pi$.

La representación gráfica de la función $K_1(\beta)$ se muestra en la figura 3.2. Obsérvese que la función $K_1(\beta)$ es monótona decreciente, por lo que tiene una única raíz en un punto que se puede calcular numéricamente y resulta ser

Figura 3.2: La función $K_1(x)$

$$\beta = 2.1748$$

Entonces, por (3.97), $\alpha_0 = -0.8252$. En el tiempo de ruptura y próximos al punto de ruptura el perfil final del tubo viene dado por

$$h(z, t = t_0) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} C |z|^{5.7208}$$

donde hemos usado (3.74).

Concluimos este apartado probando que el valor explícito de $C_n(\alpha)$ es

$$\begin{aligned} C_n(\alpha) = & (\alpha + 3) \frac{(12(n\alpha + 3n - 1))^3 \Gamma(1 - \alpha) \Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)}{3 \Gamma\left(1 + \frac{1}{2n} - \alpha\right)} \left(\frac{2n\alpha + 6n - 1}{2n\alpha + 6n - 2}\right) \times \\ & \times F\left(\frac{1}{2n} - 2 - \alpha, 1 - \alpha; 1 + \frac{1}{2n} - \alpha; 1 - 6n - 2n\alpha\right) - \\ & - (\alpha + 3) \frac{(12(n\alpha + 3n - 1))^3 \Gamma(-\alpha) \Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)}{3 \Gamma\left(\frac{1}{2n} - \alpha\right)} F\left(\frac{1}{2n} - 2 - \alpha, -\alpha; \frac{1}{2n} - \alpha; 1 - 6n - 2n\alpha\right) \end{aligned}$$

y que existe al menos un valor de α (que denominaremos α_0) en el intervalo $\left[-3 + \frac{1}{n}, 0\right]$ tal que $C_n(\alpha_0) = 0$.

Para ello introducimos un desarrollo de la forma

$$f(\xi) = R_0^{-2} + C\xi^{2n} + O(\xi^{4n})$$

dentro de (3.98) para deducir la condición

$$R_0 = \frac{1}{12(n\beta - 1)}$$

y definimos $\bar{\beta} = n\beta$. La ecuación (3.98) se puede integrar fácilmente en término de $\ln \xi$ e $y = \sqrt{f}$:

$$\int \frac{dy}{((1 + 6R_0)y^3 - y^2 - 6R_0y)} = \frac{1}{6R_0\beta} \ln \xi + \tilde{C} = \frac{1}{6R_0\bar{\beta}} \ln \xi^n + \tilde{C}$$

con \tilde{C} una constante arbitraria, y calculando la integral obtenemos

$$y^{-\beta} \left((2\bar{\beta} - 1)y + 1 \right)^{\bar{\beta} - \frac{1}{2}} (1 - y)^{\frac{1}{2}} = C\xi^n \quad (3.104)$$

donde podemos fijar, sin pérdida de generalidad, $C = 1$.

El valor de $C_n(\alpha)$ viene dado entonces por

$$C_n(\alpha) = \int_0^\infty z_{st} ds = \int_0^\infty u_t ds = \frac{1}{3} \int_0^\infty \left(\left(\frac{1}{24} \frac{2\bar{\beta} - 1}{(\bar{\beta} - 1)^2} \right) f^2 - f^{\frac{3}{2}} \right) d\xi$$

Derivando (3.104) obtendríamos

$$\begin{aligned} n\xi^{n-1} \frac{d\xi}{dy} &= \frac{d}{dy} \left(y^{-\bar{\beta}} \left((2\bar{\beta} - 1)y + 1 \right)^{\bar{\beta} - \frac{1}{2}} (1 - y)^{\frac{1}{2}} \right) = \\ &= -y^{-\bar{\beta}-1} \left(2y\bar{\beta} - y + 1 \right)^{\bar{\beta} - \frac{3}{2}} \frac{\bar{\beta}}{\sqrt{(1 - y)}} \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} K_n(\beta) &\equiv \frac{3}{(12(\bar{\beta} - 1))^3} C_n(\alpha) = \\ &= \frac{\bar{\beta}}{n} \int_0^1 \left(\left(\frac{1}{2} \frac{2\bar{\beta} - 1}{\bar{\beta} - 1} \right) y^4 - y^3 \right) \left(y^{-\frac{n+\bar{\beta}}{n}} \left((2\bar{\beta} - 1)y + 1 \right)^{-\frac{1}{2} \frac{2n-2\bar{\beta}+1}{n}} (1 - y)^{-\frac{1}{2} \frac{2n-1}{n}} \right) dy \quad (3.105) \end{aligned}$$

La función $K_n(\beta)$ se puede escribir de forma explícita como

$$\begin{aligned} K_n(\beta) &= \beta \frac{\Gamma(4 - \beta) \Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)}{\Gamma\left(4 - \beta + \frac{1}{2n}\right)} \left(\frac{1}{2} \frac{2n\beta - 1}{n\beta - 1} \right) F\left(\frac{2n+1}{2n} - \beta, 4 - \beta; 4 - \beta + \frac{1}{2n}; 1 - 2n\beta\right) - \\ &\quad - \beta \frac{\Gamma(3 - \beta) \Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)}{\Gamma\left(3 - \beta + \frac{1}{2n}\right)} F\left(\frac{2n+1}{2n} - \beta, 3 - \beta; 3 - \beta + \frac{1}{2n}; 1 - 2n\beta\right) \end{aligned}$$

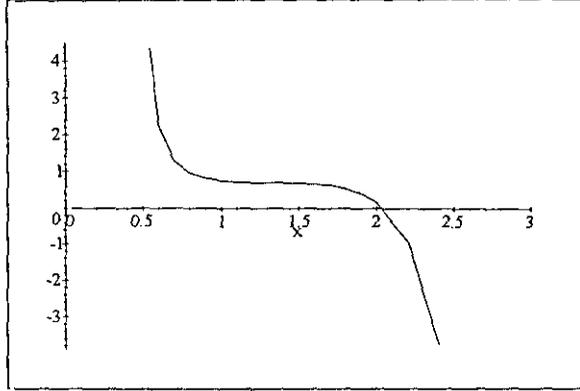
$K_n(\beta)$ es acotada para $\frac{1}{n} < \beta < 3$. Observemos que (3.105) implica

$$K_n(\beta) \rightarrow +\infty \quad \beta \rightarrow \frac{1}{n}$$

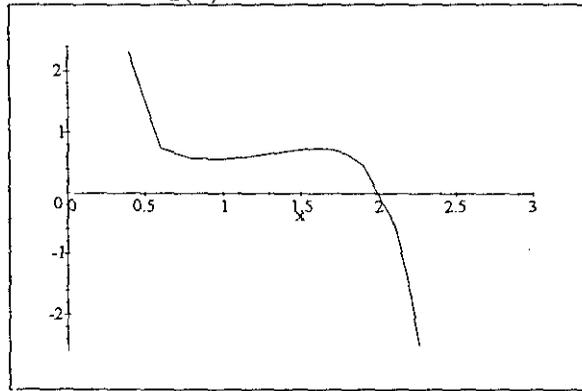
$$K_n(\beta) \rightarrow -\infty \quad \beta \rightarrow 3$$

y esto implica, dada la continuidad de $K_n(\beta)$ en el intervalo considerado, la existencia de al menos una raíz de la función $K_n(\beta)$ en dicho intervalo

A modo de ejemplo representamos las funciones $K_2(\beta)$ y $K_3(\beta)$



La función $K_2(x)$



La función $K_3(x)$

La siguiente tabla contiene los valores de las raíces β_0 de $K_n(\beta)$ que se han calculado numéricamente para varios valores de n :

n	β_0
1	2.1748
2	2.0454
3	2.0194
4	2.0105
5	2.0065
10	2.0014

Estos valores sugieren que la sucesión de las raíces de $K_n(\beta)$ converge a $\beta_0 = 2$ cuando n tiende a infinito. Para demostrarlo rigurosamente probaremos que

$$K_n\left(2 + \frac{1}{2n}\right) < 0 \quad (3.106)$$

y

$$K_n(2) > 0 \quad (3.107)$$

En efecto, nótese que

$$K_n\left(2 + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} \frac{4n+1}{n} \int_0^1 \left(\frac{4n}{4n-1} y^4 - y^3 \right) \left(y^{-\frac{1}{2} \frac{6n+1}{n}} (4ny+1) (1-y)^{-\frac{1}{2} \frac{2n-1}{n}} \right) dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \frac{4n+1}{n} \int_0^1 \left(16 \frac{n^2}{4n-1} y^{2-\frac{1}{2n}} + \left(4 \frac{n}{4n-1} - 4n \right) y^{1-\frac{1}{2n}} - y^{-\frac{1}{2n}} \right) (1-y)^{-1+\frac{1}{2n}} dy = \\
&= \frac{1}{2} \frac{4n+1}{n} \left(16 \frac{n^2}{4n-1} B\left(3 - \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right) + \left(4 \frac{n}{4n-1} - 4n \right) B\left(2 - \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right) - B\left(1 - \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right) \right) = \\
&= \frac{1}{2} \frac{4n+1}{n} \Gamma\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2n}\right) \left(16 \frac{n^2}{4n-1} \frac{\left(2 - \frac{1}{2n}\right) \left(1 - \frac{1}{2n}\right)}{\Gamma(3)} + \left(4 \frac{n}{4n-1} - 4n \right) \left(1 - \frac{1}{2n}\right) - 1 \right) = \\
&= -\frac{4n+1}{2n(4n-1)} \Gamma\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2n}\right) < 0
\end{aligned}$$

donde $B(a, b)$ es la función beta de argumentos a y b . Esto prueba (3.106)

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
K_n(2) &= 2 \int_0^1 \left(\frac{4n-1}{4n-2} y - 1 \right) \left((4n-1)y + 1 \right)^{1-\frac{1}{2n}} (1-y)^{-1+\frac{1}{2n}} dy = \\
&= 2 \int_0^1 \left(\frac{4n-1}{4n-2} y - 1 \right) \left(\frac{4ny}{1-y} + 1 \right)^{1-\frac{1}{2n}} dy = \\
&= \frac{1}{2(2n-1)} \int_0^1 \frac{d}{dy} \left(\left((4n-1)y^2 - 1 - 4ny + 2y \right) \left(\frac{4ny}{1-y} + 1 \right)^{1-\frac{1}{2n}} \right) dy = \frac{1}{2(2n-1)} > 0
\end{aligned}$$

de donde se deduce (3.107) y concluye la demostración del resultado.

3.5 Justificación del desarrollo (3.52)

En esta última sección mostraremos que para una clase bastante general de funciones las soluciones de (3.19)-(3.24) se pueden desarrollar como en (3.52). Para ello introducimos una función de corriente ψ tal que

$$V_r = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \quad (3.108)$$

$$V_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \quad (3.109)$$

Se tiene entonces que (3.21) se satisface automáticamente. Podemos eliminar P de (3.19), (3.20) derivando la primera ecuación con respecto a ξ , la segunda con respecto a ρ y restando las ecuaciones resultantes. Deducimos entonces la siguiente ecuación

$$\frac{\partial^3 V_r}{\partial \rho^2 \partial \xi} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial \xi^3} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \rho \partial \xi} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial V_r}{\partial \xi} - \frac{\partial^3 V_z}{\partial \rho^3} - \frac{\partial^3 V_z}{\partial \xi^2 \partial \rho} - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) = 0 \quad (3.110)$$

Dada una función $g(\xi)$ calculamos su transformada de Fourier con respecto a la coordenada ξ mediante

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{ik\xi} d\xi \quad (3.111)$$

Tomando la transformada de Fourier de (3.110) obtenemos

$$\frac{d^4 \hat{\psi}}{d\rho^4} - \frac{2}{\rho} \frac{d^3 \hat{\psi}}{d\rho^3} + \left(\frac{3}{\rho^2} - 2 \right) \frac{d^2 \hat{\psi}}{d\rho^2} - \left(\frac{3}{\rho^3} - \frac{2}{\rho} \right) \frac{d\hat{\psi}}{d\rho} + \hat{\psi} = 0 \quad (3.112)$$

donde hemos definido $\tilde{\rho} = |k|\rho$ y resolvemos (3.112) en el dominio $0 \leq \tilde{\rho} \leq R_0|k|$. Usando (3.108), (3.109) en (3.22) y tomando la transformada de Fourier concluimos

$$-\frac{\hat{\psi}}{\tilde{\rho}} - \frac{\hat{\psi}''}{\tilde{\rho}} + \frac{\hat{\psi}'}{\tilde{\rho}^2} = 6 \frac{(-ik)\hat{f}}{|k|^3} \quad \text{en } \tilde{\rho} = R_0|k| \quad (3.113)$$

Por otra parte podemos eliminar P de (3.23) derivando con respecto a ξ y usando entonces (3.20). Eliminamos entonces (V_r, V_z) usando ψ , y después de tomar la transformada de Fourier en la variable ξ deducimos de (3.23)

$$\frac{\hat{\psi}'''}{\tilde{\rho}} - \frac{\hat{\psi}''}{\tilde{\rho}^2} - \left(\frac{-1}{\tilde{\rho}^3} + \frac{3}{\tilde{\rho}} \right) \hat{\psi}' + \frac{2\hat{\psi}}{\tilde{\rho}^2} = ik \left(\frac{1}{R_0^2} - k^2 \right) \frac{\hat{f}}{k^4} \quad \text{en } \tilde{\rho} = R_0|k| \quad (3.114)$$

Podemos reescribir (3.113) como

$$\left(\frac{d^2}{d\tilde{\rho}^2} - \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{d}{d\tilde{\rho}} - 1 \right)^2 \hat{\psi} = 0 \quad \text{en } 0 \leq \tilde{\rho} \leq R_0|k|, \quad k \neq 0 \quad (3.115)$$

Existen dos soluciones independientes de (3.115) satisfaciendo la condición de regularidad en el origen, y se pueden elegir como

$$\hat{\psi}_1(\tilde{\rho}) = \tilde{\rho} I_1(\tilde{\rho}) \quad (3.116)$$

$$\hat{\psi}_2 = \frac{\tilde{\rho}^2}{2} I_0(\tilde{\rho}) - \tilde{\rho} I_1(\tilde{\rho}) \quad (3.117)$$

donde $I_\nu(x)$ es la función modificada de Bessel de orden ν que satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2 I_\nu}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dI_\nu}{dx} - (x^2 + \nu^2) I_\nu = 0$$

De hecho, se puede comprobar fácilmente que $\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2$ satisfacen respectivamente

$$\frac{d^2 \hat{\psi}_1}{d\tilde{\rho}^2} - \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{d\hat{\psi}_1}{d\tilde{\rho}} - \hat{\psi}_1 = 0$$

$$\frac{d^2 \hat{\psi}_2}{d\tilde{\rho}^2} - \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{d\hat{\psi}_2}{d\tilde{\rho}} - \hat{\psi}_2 = \tilde{\rho} I_1(\tilde{\rho})$$

La solución general de (3.115) satisfaciendo la condición de regularidad en $\tilde{\rho} = 0$ es de la forma

$$\hat{\psi}(\tilde{\rho}) = C_1(k) \hat{\psi}_1(\tilde{\rho}) + C_2(k) \hat{\psi}_2(\tilde{\rho}) \quad (3.118)$$

Los valores de $C_1(k), C_2(k)$ se pueden calcular fácilmente en función de $\hat{f}(k, \tau)$ usando las condiciones de contorno (3.113), (3.114). Después de algunos cálculos sencillos se obtiene

$$C_1(k) = -\frac{1}{2} \frac{i}{R_0} \left(\frac{-12R_0^2 k^2 I_0(|k|R_0) + 6R_0^3 |k|^3 I_1(|k|R_0) + 12R_0 |k| I_1(|k|R_0)}{(-I_1^2(R_0|k|) R_0^2 k^2 - I_1^2(R_0|k|) + I_0^2(R_0|k|) R_0^2 k^2) k^3} + \right. \quad (3.119)$$

$$\left. + \frac{-k^2 R_0 I_0(|k|R_0) + k^4 R_0^3 I_0(|k|R_0) \pm |k| I_1(|k|R_0) - |k|^3 R_0^2 I_1(|k|R_0)}{(-I_1^2(R_0|k|) R_0^2 k^2 - I_1^2(R_0|k|) + I_0^2(R_0|k|) R_0^2 k^2) k^3} \right) \hat{f}(k, \tau)$$

$$C_2(k) = \frac{i}{R_0} \frac{6R_0^2 k^2 I_0(|k|R_0) - 6R_0 |k| I_1(|k|R_0) - |k| I_1(|k|R_0) + |k|^3 R_0^2 I_1(|k|R_0)}{\left(k^2 R_0^2 I_0^2(|k|R_0) - I_1^2(|k|R_0) - k^2 R_0^2 I_1^2(|k|R_0)\right) k^3} \widehat{f}(k, \tau) \quad (3.120)$$

Estamos interesados en calcular $V_r(R_0, \xi)$ en (3.24). Usando (3.108) obtenemos

$$\widehat{V}_r = \frac{-ik}{R_0} \widehat{\psi} \quad \text{en } \rho = R_0$$

Usando entonces (3.118), (3.119), (3.120) deducimos

$$\widehat{V}_r(R_0, k) = G(k) \widehat{f}(k) \quad k \neq 0 \quad (3.121)$$

donde la función $G(k)$ se define como

$$G(k) = \frac{1}{2R_0} \frac{(1 - k^2 R_0^2) I_1^2(R_0 |k|) + 6k^2 R_0^3 I_0^2(R_0 |k|) - 6|k| R_0^2 I_0(R_0 |k|) I_1(R_0 |k|) - 6k^2 R_0^3 I_1^2(R_0 |k|)}{(I_1^2(R_0 |k|) R_0^2 k^2 + I_1^2(R_0 |k|) - I_0^2(R_0 |k|) R_0^2 k^2)}$$

Si recordamos que las funciones modificadas de Bessel presentan los siguientes comportamientos asintóticos (ver [1])

$$I_\nu(\tilde{\rho}) \underset{\tilde{\rho} \rightarrow 0}{\sim} \left(\frac{1}{2}\tilde{\rho}\right)^\nu \left(\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + \frac{\tilde{\rho}^2}{4\Gamma(\tilde{\nu}+2)} + O(\tilde{\rho}^4)\right) \quad (3.122)$$

$$I_\nu(\tilde{\rho}) \underset{\tilde{\rho} \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{\tilde{\rho}}}{\sqrt{2\pi\tilde{\rho}}} \left(1 - \frac{4\nu^2 - 1}{8\tilde{\rho}} + O(\tilde{\rho}^{-2})\right)$$

concluimos después de algunos cálculos los siguientes comportamientos asintóticos para la función $G(k)$

$$G(k) \sim \frac{1}{6R_0} + 2 \quad \text{cuando } |k| \rightarrow 0 \quad (3.123)$$

$$G(k) \sim -\frac{1}{2}|k| \quad \text{cuando } |k| \rightarrow \infty \quad (3.124)$$

Tomando la transformada de Fourier de (3.24) con respecto a ξ y usando (3.121) deducimos la ecuación

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \tau} - 3k \frac{\partial \widehat{f}}{\partial k} = (G(k) + 3) \widehat{f} \quad (3.125)$$

La ecuación (3.125) se puede resolver explícitamente integrando a lo largo de características. Si escribimos $\widehat{f}(k, 0) = \widehat{f}_0(k)$ obtenemos entonces

$$\widehat{f}(k, \tau) = \widehat{f}_0(ke^{3\tau}) e^{(3+G(0))\tau} e^{M(ke^{3\tau}) - M(k)} \quad (3.126)$$

donde

$$M(k) = \frac{1}{3} \int_0^k \frac{(G(s) - G(0))}{s} ds \quad (3.127)$$

Las fórmulas (3.126), (3.127) nos permiten calcular el comportamiento asintótico de $\widehat{f}(k, \tau)$ para una clase general de datos $f_0(\xi)$. Para ello multiplicamos (3.126) por una función test $\varphi(k) \in C^\infty$ y de soporte compacto. Obtenemos entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k, \tau) \varphi(k) dk = e^{(3+G(0))\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_0(ke^{3\tau}) e^{M(ke^{3\tau}) - M(k)} \varphi(k) dk =$$

$$= e^{G(0)\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_0(\zeta) e^{M(\zeta) - M(\zeta e^{-3\tau})} \varphi(e^{-3\tau}\zeta) d\zeta \quad (3.128)$$

Los comportamientos asintóticos (3.123), (3.124) implican que la integral a la derecha de (3.128) converge para datos $\hat{f}_0(k)$ muy generales. Además se tiene el siguiente comportamiento asintótico

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k, \tau) \varphi(k) dk \sim e^{G(0)\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_0(\zeta) e^{M(\zeta)} \varphi(0) d\zeta \quad \text{cuando } \tau \rightarrow \infty$$

o de forma equivalente

$$\hat{f}(k, \tau) \sim C e^{G(0)\tau} \delta(k) \quad \text{cuando } \tau \rightarrow \infty \quad (3.129)$$

donde δ es la distribución delta de Dirac y

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_0(\zeta) e^{M(\zeta)} d\zeta \quad \text{cuando } \tau \rightarrow \infty$$

Podemos calcular correcciones de orden superior a (3.129) usando los siguientes desarrollos de Taylor

$$e^{-M(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n k^{2n}$$

$$\varphi(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} k^n$$

Insertando estas series en (3.128) deducimos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k, \tau) \varphi(k) dk \sim e^{G(0)\tau} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{b_n}{m!} \varphi^{(m)}(0) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_0(\zeta) e^{M(\zeta)} \zeta^{2n+m} e^{-3(2n+m)\tau} d\zeta \quad (3.130)$$

donde asumimos que las integrales a la derecha existen. Esto ocurre para clases muy generales de datos iniciales debido al factor exponencial $e^{M(\zeta)}$ y a los comportamientos asintóticos (3.123), (3.124) que implican $M(\zeta) \sim -\frac{|\zeta|}{6}$ cuando $|\zeta| \rightarrow \infty$. Escribamos

$$\Gamma_l = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_0(\zeta) e^{M(\zeta)} (-i\zeta)^l d\zeta$$

Reordenando las sumas en (3.130) obtenemos fácilmente el siguiente comportamiento asintótico

$$\hat{f}(k, \tau) \sim \sum_{l=0}^{\infty} \Gamma_l e^{(G(0)-3l)\tau} \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \frac{b_n}{(l-2n)!} (-i)^l \frac{\partial^{(l-2n)}}{\partial k^{(l-2n)}} (\delta(k)) \quad \text{cuando } \tau \rightarrow \infty \quad (3.131)$$

Tomamos ahora la transformada de Fourier inversa de (3.131) para deducir

$$f(\xi, \tau) \sim \sum_{l=0}^{\infty} \Gamma_l e^{(G(0)-3l)\tau} \left(\sum_{n=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \frac{b_n (-1)^n (\xi)^{l-2n}}{\sqrt{2\pi} (l-2n)!} \right)$$

y no es difícil comprobar que cada una de las funciones

$$e^{(G(0)-3l)\tau} \left(\sum_{n=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \frac{b_n (-1)^n (\xi)^{l-2n}}{\sqrt{2\pi} (l-2n)!} \right)$$

resuelven (3.24). Se tiene entonces que

$$f_m(\xi) = C_m \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{b_n (-1)^n (\xi)^{m-2n}}{\sqrt{2\pi} (m-2n)!}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

donde f_m son como en (3.39), (3.51) para algunas constante apropiadas C_m . se obtiene así el comportamiento asintótico (3.52).

Apéndice A

Deducción y análisis de la relación de dispersión (2.15)

A.1 Obtención de la relación de dispersión

Las ecuaciones de Navier-Stokes en términos de \mathbf{Oh} , para funciones de la forma

$$\begin{aligned} V_r &= v_r(r)e^{\lambda \mathbf{Oh}t + ikz} \\ V_z &= v_z(r)e^{\lambda \mathbf{Oh}t + ikz} \\ P &= \mathbf{Oh}p(r)e^{\lambda \mathbf{Oh}t + ikz} \end{aligned}$$

y en aproximación lineal, se escriben como

$$\lambda v_r = -\frac{dp}{dr} + \left(\frac{d^2 v_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_r}{dr} - k^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} \right) \quad 0 < r < 1 \quad (\text{A.1})$$

$$\lambda v_z = -ikp + \left(\frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} - k^2 v_z \right) \quad 0 < r < 1 \quad (\text{A.2})$$

$$0 = ikv_z + \frac{1}{r} \frac{d(rv_r)}{dr} \quad 0 < r < 1 \quad (\text{A.3})$$

Si derivamos (A.2) con respecto a r , multiplicamos (A.1) por ik y las restamos llegamos fácilmente a la siguiente ecuación modificada de Bessel de orden uno

$$\tilde{r}^2 \frac{d^2 g}{d\tilde{r}^2} + \tilde{r} \frac{dg}{d\tilde{r}} - (\tilde{r}^2 + 1)g = 0 \quad (\text{A.4})$$

para

$$g = -ikv_r + \frac{dv_z}{dr}$$

donde $\tilde{r} = \sqrt{\lambda + k^2}r = k'r$. La única solución de (A.4) no singular en el origen es

$$g = CI_1(k'r)$$

siendo $I_1(x)$ la función modificada de Bessel de orden uno.

Usamos ahora la ecuación (A.3) para formular el sistema

$$\begin{aligned} -ikv_r + \frac{dv_z}{dr} &= CI_1(k'r) \\ ikv_z + \frac{1}{r} \frac{d(rv_r)}{dr} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

La solución más general de (A.5) es de la forma

$$\begin{aligned} v_z &= AI_0(k'r) + BI_0(kr) \\ v_r &= -\frac{ik}{k'} AI_1(k'r) - iBI_1(kr) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

donde A y B son dos constantes arbitrarias.

El campo de presiones se obtiene a partir de la ecuación (A.2)

$$ikp = -\lambda v_z + \left(\frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} - k^2 v_z \right) = -\lambda BI_0(kr) \quad (\text{A.7})$$

habida cuenta de que el segundo miembro es una ecuación del tipo Bessel de orden cero.

Las constantes A y B quedarán fijadas a partir de las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0 \quad \text{en } r = 1 \\ -P + 2\mathbf{Oh} \frac{\partial V_v}{\partial r} &= \frac{1}{2}(R + R_{zz}) \quad \text{en } r = 1 \\ f_t = v_r &\quad \text{en } r = 1 \end{aligned}$$

Introducimos las expresiones (A.6) y (A.7) para la solución general en las condiciones de contorno para obtener

$$\begin{aligned} ik \left(-\frac{ik}{k'} AI_1(k') - iBI_1(k) \right) + Ak'I_1(k') + BkI_1(k) &= 0 \\ \frac{\lambda}{ik} BI_0(k) + 2(-ikAI_1'(k') - iBkI_1'(k)) &= \frac{1}{2\mathbf{Oh}}(1 - k^2)f \\ -\frac{ik}{k'} AI_1(k') - iBI_1(k) &= \lambda\mathbf{Oh}f \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

donde hemos supuesto

$$R(z) = f(k)e^{\lambda\mathbf{Oh}t + ikz}$$

Para que exista solución de este sistema distinta de la trivial es necesario que se anule el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{k^2}{k'} I_1(k') + k' I_1(k') & 2k I_1(k) & 0 \\ -2ik I_1'(k') & \frac{\lambda}{ik} I_0(k) - 2ik I_1'(k) & -\frac{1}{2\mathbf{Oh}}(1 - k^2) \\ -\frac{ik}{k'} I_1(k') & -i I_1(k) & -\lambda\mathbf{Oh} \end{vmatrix}$$

lo cual equivale a que se satisfaga la siguiente ecuación

$$\left(\frac{\lambda}{k} I_0(k) - \frac{1}{\lambda 2\mathbf{Oh}^2} (1 - k^2) I_1(k) + 2k I_1'(k) \right) -$$

$$-\left(2kI_1'(k') - \frac{1}{\lambda} \frac{1}{2\mathbf{Oh}^2} (1-k^2) \frac{k}{k'} I_1(k')\right) \frac{2kk' I_1(k)}{k^2+k'^2 I_1(k')} = 0$$

en la que deberíamos despejar λ en función de k . Lo que es fácil hacer es, siguiendo a Middleman (ver [39]), escribir la ecuación en la forma cuadrática

$$\frac{1}{k} I_0(k) \lambda^2 + \left(2kI_1'(k) - \frac{4k^2 k'}{k^2+k'^2} \frac{I_1(k)}{I_1(k')} I_1'(k')\right) \lambda - \frac{1}{2\mathbf{Oh}^2} (1-k^2) \frac{k'^2-k^2}{k^2+k'^2} I_1(k) = 0 \quad (\text{A.9})$$

La ecuación (A.9) es la relación de dispersión para las pequeñas perturbaciones de un chorro cilíndrico (ver [22], probablemente el primer sitio donde aparece escrita). Podemos interpretarla como la ecuación implícita de la o las curvas $\lambda(k)$ solución de ella. El resto del apéndice está dedicado al análisis de dicha relación.

En el caso particular $\mathbf{Oh} \rightarrow 0$ se tiene $A = 0$ en (A.6). Este es el caso del fluido potencial (ver [47]) y sólo podemos imponer la condición de contorno para T_{rr} . La relación de dispersión resolvería la ecuación

$$\frac{1}{k} I_0(k) \tilde{\lambda}^2 - \frac{1}{2} (1-k^2) I_1(k) = 0$$

con $\tilde{\lambda} = \mathbf{Oh} \lambda$.

Es decir

$$\tilde{\lambda}(k) = \pm \sqrt{\frac{1}{2} k (1-k^2) \frac{I_1(k)}{I_0(k)}} \quad (\text{A.10})$$

La expresión (A.10) es la relación de dispersión de Rayleigh y supone un cierto límite singular de (A.9). Es de señalar que de las dos ramas, una es inestable ante perturbaciones con $|k| < 1$ y que para $|k| > 1$ resulta $\tilde{\lambda}(k)$ imaginario puro.

A.2 Estudio analítico de la relación de dispersión (A.9)

En este apartado describiremos algunas propiedades generales de las soluciones de (A.9). Dada la simetría $k \rightarrow -k$ de la relación de dispersión, resulta suficiente estudiar el semiplano $k > 0$. Sintetizamos varias propiedades en el siguiente lema

Proposición A.1 Sea Γ el conjunto de puntos $(k, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ que satisfacen (A.9). Entonces

- 1) $(1, 0) \in \Gamma$
- 2) Existen dos ramas emergentes de $(0, 0)$
- 3) Existen infinitas ramas emergentes de $\{(0, -\mu_n^2)\}$ siendo μ_n la n -ésima raíz no nula de la función de Bessel $J_1(x)$.

Existen infinitas ramas reales en la región $\text{Re}(\lambda) < -k^2$ y próximas al punto del infinito con comportamientos asintóticos

$$\lambda \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} -k^2 - \mu_n^2 - 8\mu_n^2 \frac{1}{k}$$

- 4) Aparte de las ramas del tercer apartado, existen cuatro posibles ramas emergentes del punto del infinito. Los comportamientos asintóticos son $\lambda_i \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \alpha_i k^2$, $i = 1, 2, 3$ con α_i

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{\left(\frac{136}{27} + \frac{8}{9}\sqrt{33}\right)} - \frac{8}{9\sqrt[3]{\left(\frac{136}{27} + \frac{8}{9}\sqrt{33}\right)}} - \frac{8}{3} \simeq -0.91262$$

$$\alpha_2 = \alpha_R + \alpha_I i$$

$$\alpha_3 = \alpha_R - \alpha_I i$$

siendo

$$\alpha_R = -\frac{1}{2} \sqrt[3]{\left(\frac{136}{27} + \frac{8}{9}\sqrt{33}\right)} + \frac{4}{9 \sqrt[3]{\left(\frac{136}{27} + \frac{8}{9}\sqrt{33}\right)}} - \frac{8}{3} \simeq -3.5437$$

$$\alpha_I = \frac{1}{2} \sqrt{3} \left(\sqrt[3]{\left(\frac{136}{27} + \frac{8}{9}\sqrt{33}\right)} + \frac{8}{9 \sqrt[3]{\left(\frac{136}{27} + \frac{8}{9}\sqrt{33}\right)}} \right) \simeq 2.2303$$

para tres de las ramas y $\lambda \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} -\beta k$ con β

$$\beta = 2 + \frac{1}{4\mathbf{Oh}^2}$$

para la cuarta.

Demostración. Es inmediato verificar que $(1, 0) \in \Gamma$ sustituyendo este valor en (A.9). Si aproximamos

$$\begin{aligned} I_0(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 \\ I_1(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

obtenemos la relación de dispersión en el orden más bajo en un entorno de $(0, 0)$

$$\frac{1}{k}\lambda + \frac{(\lambda + k^2)k}{\lambda + 2k^2} - \frac{1}{4\mathbf{Oh}^2} \frac{k}{\lambda + 2k^2} = 0$$

Despejamos λ y obtenemos

$$\lambda_1 = \frac{1}{8} \left(-12k^2 + 4\sqrt{4k^4 + k^4 + \frac{1}{\mathbf{Oh}^2}k^2} \right) \underset{k \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2\mathbf{Oh}}k$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{8} \left(-12k^2 - 4\sqrt{4k^4 + k^4 + \frac{1}{\mathbf{Oh}^2}k^2} \right) \underset{k \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2\mathbf{Oh}}k$$

Esto es, hay dos ramas emergentes del $k = 0$; una ofrece λ 's estrictamente negativos y otra empieza con λ 's positivos.

Escribimos ahora la ecuación (A.9) en la forma cuadrática

$$\lambda^2 + \left(2k^2 + 2k^2 \frac{I_1'(k)}{I_0(k)} \right) \lambda + \left(4k^4 \frac{I_1'(k)}{I_0(k)} - 4k^3 k' \frac{I_1(k)}{I_0(k)} \frac{I_1'(k')}{I_1(k')} \right) - \frac{1}{2\mathbf{Oh}^2} k(1-k^2) \frac{\overline{I_1(k)}}{I_0(k)} = 0 \quad (\text{A.11})$$

Resolviendo (A.11) para λ obtenemos

$$k'^2 = -k^2 \frac{I_1'(k)}{I_0(k)} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(2k \frac{I_1(k)}{I_0(k)} \right)^2 + \frac{2}{\mathbf{Oh}^2} k(1-k^2) \frac{I_1(k)}{I_0(k)} + 16k^3 \frac{I_1(k)}{I_0(k)} k' \frac{I_1'(k')}{I_1(k')}} \quad (\text{A.12})$$

Si k' es imaginario puro entonces reescribimos $k' = -i\omega$ (con ω real) y se tiene

$$f(k') = -i\omega \frac{I_0(-i\omega) - \frac{I_1(-i\omega)}{-i\omega}}{I_1(-i\omega)} = -i\omega \frac{I_0(-i\omega)}{I_1(-i\omega)} - 1 = \omega \frac{J_0(\omega)}{J_1(\omega)} - 1$$

La ecuación a resolver es entonces

$$\omega^2 = k^2 \frac{I_1'(k)}{I_0(k)} \pm \sqrt{\left(k^2 - k^2 \frac{I_1'(k)}{I_0(k)}\right)^2 + \frac{1}{2\text{Oh}^2} k(1-k^2) \frac{I_1(k)}{I_0(k)} + 4k^3 \frac{I_1(k)}{I_0(k)} \left(\omega \frac{J_0(\omega)}{J_1(\omega)} - 1\right)} \quad (\text{A.13})$$

Nótese que para cualquier valor de $k < 1$ la función de la derecha con el signo $+$ está bien definida y es positiva mientras el término bajo la raíz sea positivo y de hecho tiene infinitas singularidades. Esto implica la existencia de infinitas ramas.

Las ramas emergen de $\lambda_n = -\omega_n^2 = -\mu_n^2$, con $J_1(\mu_n) = 0$. Todas ellas son localmente de estabilidad, ya que $\omega^2 > 0$ por definición. El comportamiento asintótico de las mismas cerca de $k = 0$ será

$$\lambda_n \underset{k \rightarrow 0}{\sim} -\mu_n^2 + Ak^\gamma$$

es decir,

$$\mu_n^2 = \pm \sqrt{2k^4 \mu_n \frac{J_0(\mu_n)}{J_1'(\mu_n)} \frac{1}{2} \frac{Ak^\gamma}{\mu_n^2}}$$

lo cual fija $\gamma = 4$, el signo $+$ y un valor para A

$$A = \frac{4J_0(\mu_n)}{\mu_n J_1'(\mu_n)} = \frac{4}{\mu_n}$$

Es posible hacer corresponder todas estas ramas reales (excepto la que parte de $\omega = 0$) con ramas próximas al infinito y dentro de la región $\text{Re}(\lambda) < -k^2$. Las ramas son tales que en cada una de ellas $\sqrt{|\lambda + k^2|}$ permanece siempre entre dos ceros de J_1 y se comportan asintóticamente en la forma

$$\omega_n(k) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \mu_n + 4\mu_n \frac{J_0(\mu_n)}{J_1'(\mu_n)} \frac{1}{k} = \mu_n + 4\mu_n \frac{1}{k}$$

ya que únicamente de este modo

$$\begin{aligned} k^2 \frac{I_1'(k)}{I_0(k)} - \sqrt{\left(k^2 - k^2 \frac{I_1'(k)}{I_0(k)}\right)^2 + \frac{1}{2\text{Oh}^2} k(1-k^2) \frac{I_1(k)}{I_0(k)} + 4k^3 \frac{I_1(k)}{I_0(k)} \left(\omega \frac{J_0(\omega)}{J_1(\omega)} - 1\right)} &\sim \\ &\sim k^2 - \sqrt{4k^3 \mu_n \frac{J_0(\mu_n)}{J_1'(\mu_n)} \frac{1}{k}} = o(k^2) \end{aligned}$$

Por último, averiguaremos cuáles son las posibles ramas en la región $\text{Re}(\lambda) > -k^2$ localmente cerca del infinito. Para ello hacemos $k, k' \rightarrow \infty$.

Reteniendo los términos de orden superior obtenemos

$$\lambda + k^2 = -k^2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{16k^3 \sqrt{\lambda + k^2}}$$

y escribiendo $\lambda = \alpha k^2$ resulta

$$\alpha + 1 = -1 \pm \sqrt{4\sqrt{\alpha + 1}}$$

α debe satisfacer

$$\alpha^4 + 8\alpha^3 + 24\alpha^2 + 16\alpha = 0$$

Una de las raíces es $\alpha = 0$ y las otras tres se hallan fácilmente usando las fórmulas generales para las raíces de un polinomio de tercer grado. Las dos raíces reales corresponden al signo $-$ en (A.12) y las dos complejas al signo $+$.

Para determinar el comportamiento asintótico preciso de la rama correspondiente a la raíz $\alpha = 0$ debemos suponer

$$\lambda \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} -\beta k$$

y usar los desarrollos de las funciones modificadas de Bessel

$$\begin{aligned} I_0(k) &\underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^k}{\sqrt{2\pi k}} \left(1 + \frac{1}{8k}\right) \\ I_1(k) &\underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^k}{\sqrt{2\pi k}} \left(1 - \frac{3}{8k}\right) \end{aligned}$$

en (A.11) para obtener en el orden más bajo

$$-4\beta k^3 + (4 + 2\beta)k^3 + \frac{1}{2\mathbf{Oh}^2}k^3 = 0$$

de donde se deduce

$$\beta = 2 + \frac{1}{4\mathbf{Oh}^2}$$

y esto concluye la demostración. \square

Denotaremos por Γ_{0+}^0 la rama inestable que parte del origen, Γ_{0-}^0 la rama estable que parte del origen y Γ_n^0 la que parte de $\{(0, -\mu_n^2)\}$ siendo μ_n la n -ésima raíz no nula de la función de Bessel $J_1(x)$. Denotaremos por Γ_{-n}^∞ el conjunto de ramas con comportamiento $\lambda \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} -k^2 - \mu_n^2$, por Γ_n^∞ las que tienen comportamientos $\lambda \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \alpha_n k^2$ con $n = 1, 2, 3$ y por Γ_4^∞ la rama con comportamiento $\lambda \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} -\beta k$.

Una cuestión importante es la posible conexión de Γ_i^0 con $\Gamma_j^\infty \cup \Gamma_{-n}^\infty$. Podemos formular al respecto el siguiente lema:

Lema A.1 1) Existe una única rama real que cruza la parábola $\lambda = -k^2$

2) Sea

$$\Delta(k, \lambda) = \left(k^2 - k^2 \frac{I_1'(k)}{I_0(k)}\right)^2 + \frac{1}{2\mathbf{Oh}^2}k(1 - k^2) \frac{I_1(k)}{I_0(k)} + 4k^3 \frac{I_1(k)}{I_0(k)} \left(k' \frac{I_0(k')}{I_1(k')} - 1\right)$$

Existen en la región $R = \{\lambda < k^2\}$ infinitos puntos $(k_n, \lambda_n) \in \Gamma$ tales que $\Delta(k_n, \lambda_n) = 0$. Es posible establecer una relación biunívoca entre los puntos (k_n, λ_n) y los puntos $\{(0, -\mu_n^2)\} \cup (0, 0)$ de la Proposición anterior.

Demostración. La parábola $\lambda = -k^2$ corresponde a $k' = 0$. Los posibles puntos $(k, -k^2) \in \Gamma$ satisfacen

$$\left(k^2 - k \frac{I_1(k)}{I_0(k)}\right)^2 - \left(k \frac{I_1(k)}{I_0(k)}\right)^2 - \frac{1}{2\mathbf{Oh}^2}k(1 - k^2) \frac{I_1(k)}{I_0(k)} - 4k^3 \frac{I_1(k)}{I_0(k)} = 0 \quad (\text{A.14})$$

dato que

$$\lim_{k' \rightarrow 0} k' \frac{I_1'(k')}{I_1(k')} = 1$$

Simplificando (A.14) llegamos a $k = 0$ (que no es el punto que buscamos) y a las raíces de

$$f(k) = k^3 - \left(\frac{1}{2\text{Oh}^2}(1 - k^2) - 6k^2 \right) \frac{I_1(k)}{I_0(k)}$$

El hecho de que el comportamiento asintótico en el origen sea $-\frac{1}{4\text{Oh}^2}k$ y en el infinito k^3 implica la existencia de raíces. Que dicha raíz es única lo deducimos del hecho de que el mínimo es único. En efecto:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dk} \left(k^3 \frac{I_0(k)}{I_1(k)} - \left(\frac{1}{2\text{Oh}^2}(1 - k^2) - 6k^2 \right) \right) = \\ & = k \frac{4kI_0(k)I_1(k) + I_1(k)^2 k^2 - I_0(k)^2 k^2 + \frac{1}{\text{Oh}^2} I_1(k)^2 + 12I_1(k)^2}{I_1(k)^2} \end{aligned}$$

y la anulación del numerador equivale a la ecuación

$$1 = 4 \frac{1}{k} \frac{I_1(k)}{I_0(k)} + \frac{(k^2 + 12)}{k^2} \frac{\left(\frac{I_1(k)}{I_0(k)} \right)^2}{\left(\frac{I_1(k)}{I_0(k)} \right)^2} + \frac{1}{2\text{Oh}^2} \left(\frac{1}{k} \frac{I_1(k)}{I_0(k)} \right)^2$$

Es fácil comprobar que el tercer término de la derecha y la suma del primero y el segundo son estrictamente decrecientes. Esto implica la existencia de una única solución para todo valor de Oh .

Nótese que k'^2 es siempre negativo en la región R . Esto sugiere la introducción de $k' = -i\omega$ y $k' \frac{I_1'(k')}{I_1(k')} = \omega \frac{J_0(\omega)}{J_1(\omega)} - 1$ con lo que

$$\omega^2 = k^2 \frac{I_1'(k)}{I_0(k)} \pm \sqrt{\left(k \frac{I_1(k)}{I_0(k)} \right)^2 + \frac{1}{2\text{Oh}^2} k(1 - k^2) \frac{I_1(k)}{I_0(k)} + 4k^3 \frac{I_1(k)}{I_0(k)} \left(\omega \frac{J_0(\omega)}{J_1(\omega)} - 1 \right)}$$

Si en algún momento se hace $\Delta = 0$ será porque

$$\begin{aligned} \omega^2 &= k^2 \frac{I_1'(k)}{I_0(k)} \\ 0 &= \frac{I_1(k)}{I_0(k)} + \frac{1}{2\text{Oh}^2} \frac{1}{k} (1 - k^2) + 4k \left(\omega \frac{J_0(\omega)}{J_1(\omega)} - 1 \right) \end{aligned}$$

es decir,

$$j(k; \text{Oh}) = \frac{I_1(k)}{kI_0(k)} + \frac{1}{2\text{Oh}^2} \frac{1}{k^2} (1 - k^2) + 4 \left(k \sqrt{1 - \frac{I_1(k)}{kI_0(k)}} \frac{J_0(k \sqrt{1 - \frac{I_1(k)}{kI_0(k)}})}{J_1(k \sqrt{1 - \frac{I_1(k)}{kI_0(k)}})} - 1 \right) = 0$$

Para todo Oh la función $j(k; \text{Oh})$ tiene infinitas raíces, ya que $x = k \sqrt{1 - \frac{I_1(k)}{kI_0(k)}}$ es estrictamente creciente y el cociente $\frac{J_0}{J_1}$ diverge a $+\infty$ a la derecha de los diversos ceros de $J_1(x)$ y a $-\infty$ a la izquierda. Esto implica la existencia de raíces. Si estas raíces son únicas entre

dos ceros de J_1 , tal y como ocurre, entonces la biyección con los puntos $\{(0, -\mu_n^2)\} \cup (0, 0)$ es automática. Para demostrar la unicidad de las raíces basta darse cuenta de que la función $j(k; \mathbf{Oh})$ es estrictamente decreciente. Notemos que para todo valor de \mathbf{Oh}

$$\begin{aligned} \frac{dj}{dk} < h(k) &\equiv \frac{d}{dk} \left(\frac{I_1(k)}{kI_0(k)} + 4 \left(x \frac{J_0(x)}{J_1(x)} - 1 \right) \right) = \\ &= \frac{1}{k} - \frac{2}{k^2} \frac{I_1(k)}{I_0(k)} - \frac{1}{k} \left(\frac{I_1(k)}{I_0(k)} \right)^2 + \left(-4x + 8x \frac{J_0(x)}{J_1(x)} - 4 \left(\frac{J_0(x)}{J_1(x)} \right)^2 \right) \frac{dx}{dk} = \\ &= - \left(\frac{I_1(k)}{\sqrt{k}I_0(k)} + \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \right)^2 - \left(2\sqrt{x} \frac{J_0(x)}{J_1(x)} - 2\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 \frac{dx}{dk} + \left(\frac{4}{x} - 4x \right) \frac{dx}{dk} + \frac{1}{k^3} + \frac{1}{k} < \\ &< \left(\frac{4}{x} - 4x \right) \frac{dx}{dk} + \frac{1}{k^3} + \frac{1}{k} \equiv g(k) \end{aligned}$$

La función $g(k)$ posee una única raíz en $k = 1.484$ (calculado numéricamente) y es negativa a partir de este punto. Es por ello que podemos restringir el análisis de $h(k)$ a $k \in (0, 1.484)$. La función $h(k)$ es siempre negativa tal y como muestra la figura A.1 y esto prueba la unicidad de las raíces entre dos ceros de $J_1(x)$.

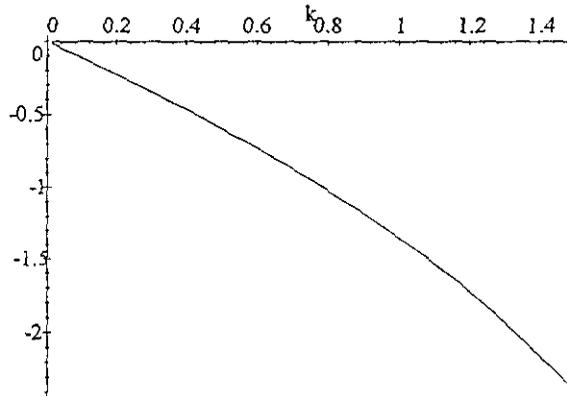


Figura A.1: Representación de la función $h(k)$

Si las raíces no fueran únicas entre dos ceros de $J_1(x)$, lo cual ocurre por ejemplo en el caso no realista $\mathbf{Oh}^{-2} < -M$ con M suficientemente grande, entonces los nuevos ceros que aparecen serían el origen de ramas complejas que podrían conectar con las ramas complejas del infinito que fueron halladas en la Proposición anterior. \square

Los puntos $(k_n, \lambda_n) \in \Gamma$ para los que $\Delta(k_n, \lambda_n) = 0$ son tales que las ramas $\Gamma_{0-}^0 \cup \{\Gamma_n^0, n = 1, 2, \dots\}$ cambian el signo $+$ por el $-$ ante la raíz en (A.13). La correspondencia biunívoca entre las ramas Γ_n^0 y Γ_{-n}^∞ con $n = 1, 2, \dots$ es automática y son por tanto la misma rama ya que comparten un punto, que es el $(k_n, \lambda_n) \in \Gamma$ tal que $\Delta(k_n, \lambda_n) = 0$.

La rama Γ_{0-}^0 no se puede continuar hasta el infinito y no se hace compleja. Necesariamente entonces deberá cruzar la parábola $\lambda = -k^2$ y lo hará en el punto hallado en el Lema anterior. Para completar el problema de conexión entre las ramas Γ_{0-}^0 , Γ_{0+}^0 y Γ_n^∞ acudimos a técnicas numéricas.

A.3 Estudio numérico de la relación de dispersión (A.9)

Para abordar las cuestiones con que cerramos la subsección precedente es necesario considerar

$$k' = re^{i\theta}$$

$$\begin{aligned} I_0(k') &= A(r, \theta) + iB(r, \theta) \\ \frac{I_1(k')}{k'} &= C(r, \theta) + iD(r, \theta) \end{aligned}$$

La ecuación (A.9) se puede entonces descomponer, para k' imaginario, en las dos siguientes ecuaciones escalares

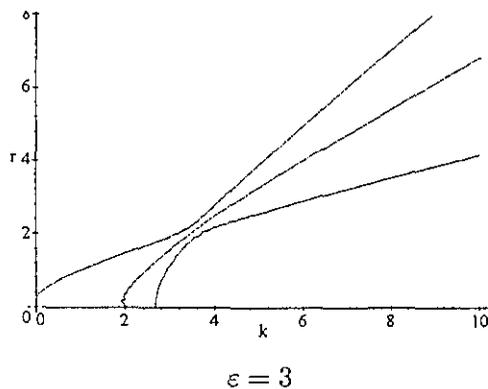
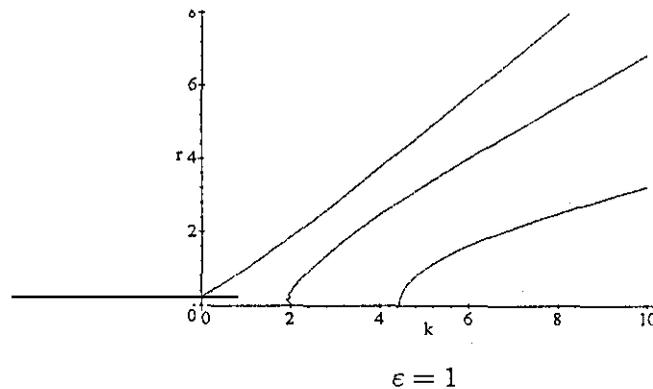
$$\left(r^2 \cos(2\theta) + R - S\right)^2 - r^4 \sin^2(2\theta) = S^2 + \varepsilon(1 - R)S + 4RSN \quad (A.15)$$

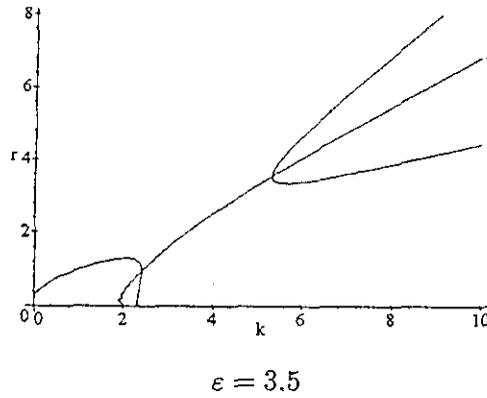
$$2\left(r^2 \cos(2\theta) + R - S\right)r^2 \sin(2\theta) = 4RSM \quad (A.16)$$

con $\varepsilon = \frac{1}{2\Omega h^2}$, $S = k \frac{I_1(k)}{I_0(k)}$, $R = k^2$, $M = \frac{BC-AD}{C^2+D^2}$, $N = \frac{AC-BD}{C^2+D^2} - 1$.

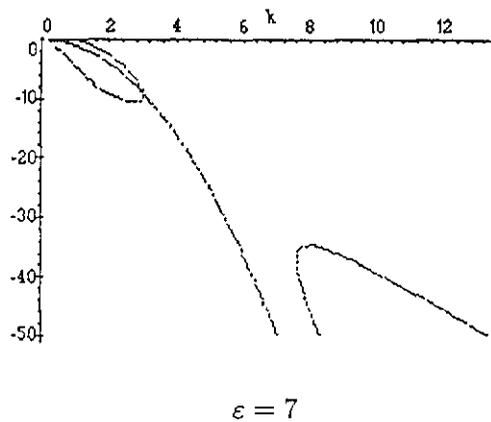
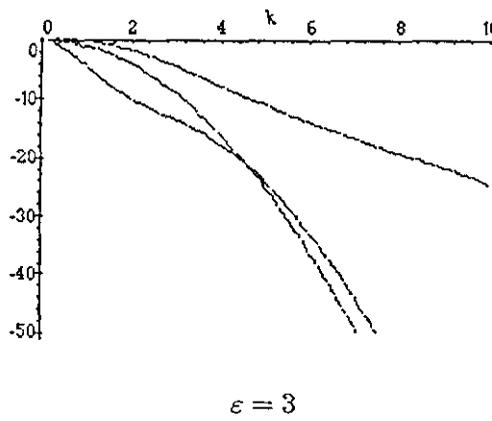
Los casos $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ son límites en los que el espectro se hace real puro y solamente es necesario estudiar la ecuación (A.15).

A continuación trazamos las curvas $r = r_1(k)$ y $r = r_2(k)$ definidas de forma implícita por (A.15) y (A.16) respectivamente para $\varepsilon = 1, 3, 3.5$ y $\theta = 0$. Ilustramos de esta manera cómo se produce la conexión de las dos ramas reales que parten del origen y su bifurcación en otras dos ramas conectadas por dos ramas complejas conjugadas (el cruce de $r_1(k)$ y $r_2(k)$ implica la aparición o desaparición de dos ramas complejas conjugadas).





Los siguientes son dibujos de las primeras ramas para $\varepsilon = 3, 7$ junto con la parábola $\lambda = -k^2$:



Esto muestra que $\Gamma_{0+}^0 = \Gamma_4^\infty$ y $\Gamma_{0-}^0 = \Gamma_1^\infty$ si $Oh > Oh_c$ un cierto número de Ohnesorge crítico y que $\Gamma_{0+}^0 = \Gamma_{0-}^0$ y $\Gamma_4^\infty = \Gamma_1^\infty$ si $Oh < Oh_c$. Además, si $Oh < Oh_c$, entonces es de hecho $\Gamma_{0+}^0 = \Gamma_4^\infty = \Gamma_{0-}^0 = \Gamma_2^\infty$ vía dos ramas complejas conjugadas. En el límite $Oh = 0$ desaparecen las ramas del infinito y las dos complejas que conectaban se hacen imaginarias puras y se extienden hasta el infinito.

A.4 Unicidad de la rama inestable

Una cuestión esencial es la de la unicidad de la rama inestable hallada arriba. A continuación probamos el siguiente lema:

Lema A.2 *Existe una única rama real en la región $\text{Re}(\lambda) > 0$.*

Demostración. Las ramas reales puras corresponden a $\theta = 0$. La ecuación (A.16) se satisface idénticamente y la ecuación (A.15) se puede escribir en la forma

$$f(k, \lambda) = (\lambda + 2R - S)^2 - S^2 - \varepsilon(1 - R)S - 4RS \left(\sqrt{\lambda + R} \frac{I_0(\sqrt{\lambda + R})}{I_1(\sqrt{\lambda + R})} - 1 \right) = 0$$

Notemos que

$$f(k, 0) = -\varepsilon(1 - R)S$$

que es una función con ceros en $k = 0, 1$ y que es positiva en $[1, +\infty)$ y negativa en $[0, 1]$.

Evaluamos a continuación

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 2(\lambda + 2R - S) - 4RS \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda + R}} \frac{I_0(\sqrt{\lambda + R})}{I_1(\sqrt{\lambda + R})} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{I_0(\sqrt{\lambda + R})}{I_1(\sqrt{\lambda + R})} \right)^2 \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} = 2 - \frac{2RS}{\sqrt{\lambda + R}} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda + R}} - \frac{2}{\sqrt{\lambda + R}} \left(\frac{I_0(\sqrt{\lambda + R})}{I_1(\sqrt{\lambda + R})} \right)^2 + \left(\frac{I_0(\sqrt{\lambda + R})}{I_1(\sqrt{\lambda + R})} \right)^3 - \frac{I_0(\sqrt{\lambda + R})}{I_1(\sqrt{\lambda + R})} \right)$$

Como la función

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \left(\frac{I_0(x)}{I_1(x)} \right)^2 + \left(\frac{I_0(x)}{I_1(x)} \right)^3 - \frac{I_0(x)}{I_1(x)}$$

es estrictamente negativa (ver figura A.2)

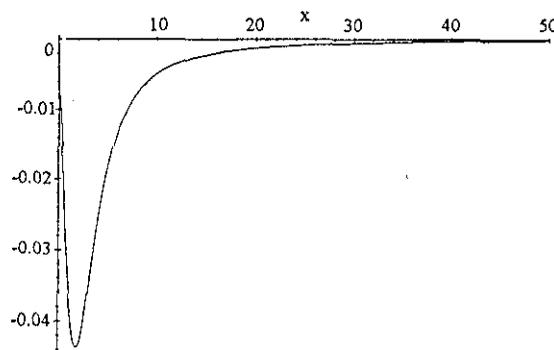


Figura A.2: La función $f(x)$

resulta que $\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} > 0$. Es por ello que $f > 0$ si $k > 1$ y f tiene una única raíz a k fijo cuando $k < 1$. Esto demuestra el enunciado. \square

El próximo paso consistirá en ver que no pueden existir otras ramas que las reales puras. Definamos $w = \text{Re}(\lambda) > 0$ y

$$\xi = \frac{r}{\sqrt{w}}$$

Entonces

$$k = \sqrt{w} \sqrt{\xi^2 \cos(2\theta) - 1}$$

Dada la periodicidad en (A.16), nos podemos restringir a $\theta \leq \frac{\pi}{4}$ y como ha de ser k real entonces debe verificarse $\xi^2 \cos(2\theta) - 1 \geq 0$.

Constatamos numéricamente que la función

$$f(\xi, w) = 2 \left(\xi^2 w \cos(2\theta) + R - S \right) \xi^2 w \sin(2\theta) - 4RSM$$

sólo se anula en $\theta = 0$ para todo valor de w . Lo hacemos hasta w moderadamente alto y comprobamos que según va creciendo w nos acercamos al perfil correspondiente a $w \rightarrow \infty$ que es de la forma

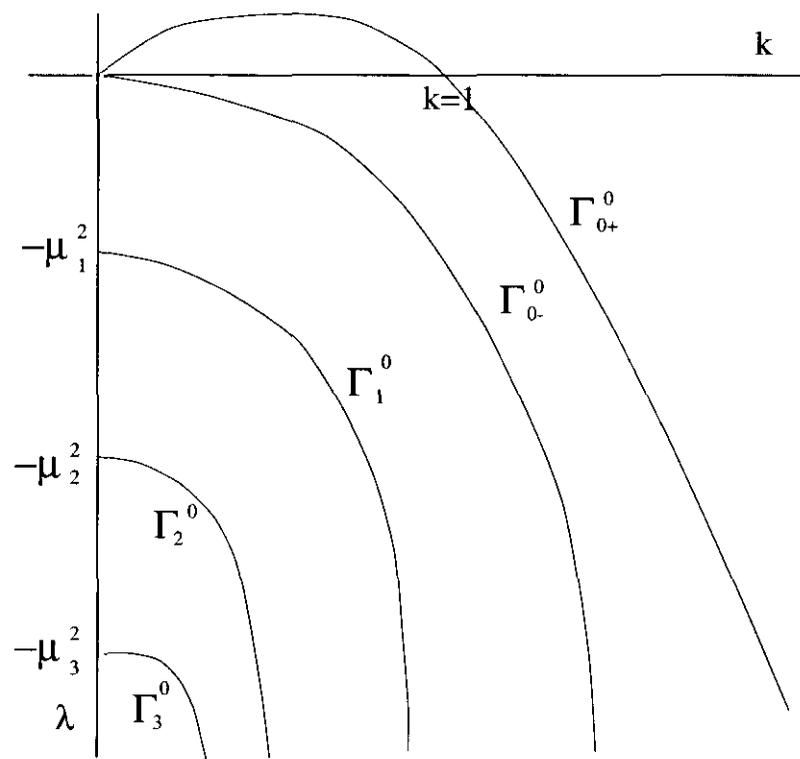
$$f(\xi, w) = w^2 \left(2 \left(2\xi^2 \cos(2\theta) - 1 \right) \xi^2 \sin(2\theta) - 4\xi \left(\xi^2 \cos(2\theta) - 1 \right)^{\frac{3}{2}} \sin \theta \right)$$

y positivo para todo valor de ξ y de $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$ en la región $\xi^2 \cos(2\theta) - 1 > 0$.

Las únicas ramas posibles son las reales puras y ya hemos visto que solamente existe una.

A.5 Representación gráfica de la relación de dispersión

En este último apartado presentamos representaciones gráficas de las relaciones de dispersión a altos y bajos números de Ohnesorge. Las representaciones han sido hechas a mano a partir de las conclusiones de los apartados anteriores. En ellas representamos con líneas discontinuas la parte real de aquellos $\lambda(k)$ imaginarios.

Figura A.3: La relación de dispersión para $Oh > Oh_c$

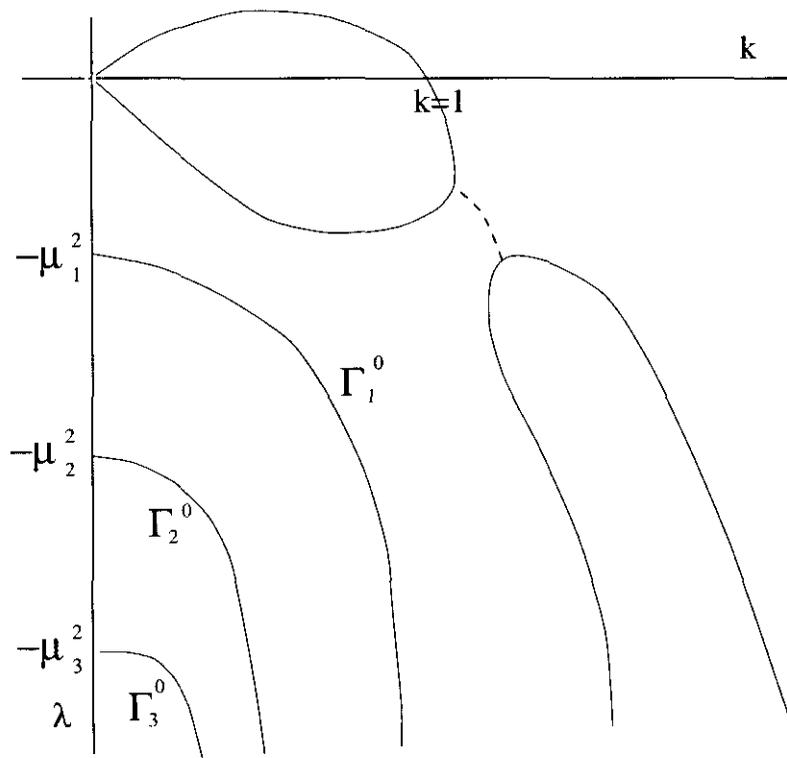


Figura A.4: La relación de dispersión para $Oh < Oh_c$

Bibliografía

- [1] M. Abramowitz, I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Pub. Inc., 1970.
- [2] R. A. Adams. *Sobolev spaces*, Academic press, 1975.
- [3] W. F. Ames. *Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering*. Academic Press, 1965.
- [4] G. I. Barenblatt. *Scaling, self-similarity and intermediate asymptotics*. Cambridge Texts in Applied Mathematics 14. Cambridge University Press, 1996.
- [5] C. M. Bender, S. A. Orszag. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. McGraw-Hill Inc., 1978.
- [6] D.B. Bogy. Use of one-dimensional Cosserat theory to study instability in a viscous jet. *Phys. Fluids*, **21** (1978), 190-197.
- [7] D.W. Bousfield, I.H. Stockel, C.K. Nativadekar. The breakup of viscous jets with large velocity modulations. *J. Fluid Mech.* **218** (1990), 601-617.
- [8] K.C. Chaudhary, T. Maxworthy. The non-linear capillary instability of a liquid jet.-Part 2. Experiments on jet behaviour before droplet formation. *J. Fluid Mech.* **96** (1980), 275-286.
- [9] K.C. Chaudhary, T. Maxworthy. The non-linear capillary instability of a liquid jet.-Part 3. Experiments on satellite formation and control. *J. Fluid Mech.* **96** (1980), 287-297.
- [10] K.C. Chaudhary, L. G. Redekopp. The non-linear capillary instability of a liquid jet.-Part 1. Theory. *J. Fluid Mech.* **96** (1980), 257-274.
- [11] S.H. Davis, S. Kistler and R. Brown (editors). *Free Boundaries in Viscous Flows*. The IMA Volumes in mathematics and its applications, Vol. **61**, Springer Verlag, 1994.
- [12] J. Eggers. Universal pinching of 3D axisymmetric free-surface flow. *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993), 3458.
- [13] J. Eggers, T. F. Dupont. Drop formation in a one-dimensional approximation of the Navier-Stokes equation. *J. Fluid Mech.* **262** (1994), 205.
- [14] J. Eggers, T. F. Dupont. Theory of drop formation. *Phys. Fluids* **7** (5) (1995), 941-952 .
- [15] R. T. Fei. A Cauchy integral approach to Hele-Shaw Problems with a Free Boundary: The Case of Zero Surface Tension. *Arch. Rational Mech. Anal.* **135** (1996), 175-196.
- [16] A. Friedman. *Partial Differential equations of parabolic type*. Prentice Hall, 1964.

- [17] A. Friedman, J.J.L. Velázquez. The analysis of Coating Flows Near the Contact Line. *Journal of Differential Equations*, Vol. **119**, No. 1 (1995), 137-208.
- [18] A. Friedman, J.J.L. Velázquez. The analysis of Coating Flows in a Strip. *Journal of Differential Equations*, Vol. **121**, No. 1 (1995), 134-282
- [19] A. Friedman, J.J.L. Velázquez. Liouville type theorems for fourth order elliptic equations in a half plane. IMA Preprint **1309**. Aparecerá en *Transactions of the AMS*.
- [20] A. Friedman, J.J.L. Velázquez. Time dependent coating flows in a strip, part I: the linearized problem. IMA Preprint **1364**. Aparecerá en *Transactions of the AMS*.
- [21] P. R. Garabedian. *Partial Differential Equations*. John Wiley&Sons, 1964.
- [22] R.P. Grant, S. Middleman. Newtonian jet stability. *AIChE J*, **12** (1966), 669.
- [23] A.E. Green. On the non-linear behaviour of fluid jets. *Int. J. Eng. Sci.* **14** (1976), 49-63.
- [24] D. Henry. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Lecture Notes in Mathematics, **840**. Springer-Verlag, 1980.
- [25] M. A. Herrero, E. Medina, J. J. L. Velázquez. Finite-time aggregation into a single point in a reaction-diffusion system. Aparecerá en *Nonlinearity*.
- [26] H. Hochstadt. *Integral Equations*. John Wiley & Sons, 1973.
- [27] S.D. Howison, A.A. Lacey, J.R. Ockendon, Hele-Shaw free-boundary problems with suction. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **41** (1988), 183-193.
- [28] S.D. Howison, A.A. Lacey, J.R. Ockendon, P. Wilmott. Irregular morphologies in unstable Hele-Shaw free-boundary problems. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **43** (1990), 387-405.
- [29] S.F. Kristel, L.E. Scriven. Chapter 8: "Coating Flows" in *Computational Analysis of Polymer Processing*, Eds. J.R.A. Pearson and S.M. Richardson. Applied Science Publishers, London, 1983, 248-299.
- [30] S.F. Kristel, L.E. Scriven. Coating flow theory by finite element and asymptotic analysis of the Navier-Stokes system. *Inter. J. for Numerical Methods in Fluids*, **4** (1984), 207-229.
- [31] P. Lafrance. Nonlinear breakup of a laminar liquid jet. *The Physics of Fluids*, Vol. **18**, No. 4 (1975), 428-432.
- [32] O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'ceva. *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23. American Mathematical Society, 1967.
- [33] L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *Mécanique des fluides*. Ed. Mir, 1984.
- [34] H.C. Lee. Drop formation in a liquid jet. *IBM J. Res. Dev.* **18** (1974), 364-369.
- [35] J.L. Lions, E. Magenes. *Non-homogeneous boundary value problems and applications*. Springer, 1972.

- [36] A. Majda. Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables. Applied Mathematics Science, **53**. Springer-Verlag, 1984.
- [37] M.A. Matovich, J.R.A. Pearson. Spinning a molten threadline. Ind. Eng. Chem. Fund. **8** (1969), 512.
- [38] J. Meseguer. The breaking of axisymmetric slender liquid bridges. J. Fluid Mech. **130** (1983), 123-151.
- [39] S. Middleman. Modeling axisymmetric flows (Dynamics of films, jets, and drops). Academic Press, 1995.
- [40] B. Noble. Methods based on the Wiener-Hopf Technique. Chelsea Publishing Company, N. Y., 1988.
- [41] C.C. Ngan, E.B. Dussan. On the dynamics of liquid spreading on solid surfaces. J. Fluid Mech., **209** (1989), 191-226.
- [42] W.T. Pimbley. Drop formation for a liquid jet. A linear one-dimensional analysis considered as a boundary value problem. IBM J. Res. Dev. **20** (1976), 148-156.
- [43] W.T. Pimbley, H.C. Lee. Satellite droplet formation in a liquid jet. IBM J. Res. Dev. **21** (1977), 21-30.
- [44] M. T. Plateau, Smithsonian Report **250** (1863).
- [45] V.V. Pukhnachev. The plane Stationary problem with free boundary for the Navier-Stokes equations. Z. Prikl. Mech. Tech. **3** (1972), 91-102.
- [46] V.C. Pukhnachev, V.A. Solonnikov. On the Problem of Dynamic Contact Angle. PMM U.S.S.R. , Vol. **46**, No. 6 (1983), 771-779.
- [47] Rayleigh, Lord (J.W. Strutt). On the instability of jets. Proc. Lond. Math. Soc. **10** (1879), 4-13.
- [48] M. Reed, B. Simon. Methods of modern mathematical physics. Academic Press, 1972.
- [49] S. Richardson. Hele-Shaw flows with time-dependent free boundaries including injection through slits. Stud. Appl. Math. **87** (1992), 2, 175-194.
- [50] F. Savart. Mémoire sur la Constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires en mince paroi. Ann. Chim. Phys. 53, **337** (1833), 337-386.
- [51] X. D. Shi, M. P. Brenner, S. R. Nagel. A cascade of Structure in a drop falling from a faucet. Science, Vol. **265** (1994), 219-222.
- [52] V.A. Solonnikov. Stability of a problem on the plane motion of heavy viscous incompressible capillary liquid partially filling a container. Math. USSR Izvest., **14** (1980), 193-221.
- [53] V.A. Solonnikov. On Some Free Boundary Problems for the Navier-Stokes Equations with Moving Contact Points and Lines. Mathematische Annalen, **302-4** (1995), 743-772.
- [54] E.M. Stein. Singular Integrals and differentiability properties of functions. Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1970.

-
- [55] Lu Ting, J.B. Keller. Slender jets and thin sheets with surface tension. *SIAM J. Appl. Math.*, **50**,6 (1990), 1533-1546.
- [56] J.J.L. Velázquez. Cusp formation for the undercooled Stefan problem in two and three dimensions. *Euro. Jnl. of Applied Mathematics*, Vol. **8** (1997), 1-21.
- [57] J.J.L. Velázquez. Blow-up for semilinear parabolic equations. *Research in Applied Mathematics, Recent Advances in Partial Differential Equations*, Editors: M.A. Herrero and E. Zuazua. John Wiley & Sons (1994), 131-145.