UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE EDUCACIÓN
Departamento de Didáctica y Organización Escolar

LO MATEMÁTICO EN EL DISEÑO Y ANALISIS DE ORGANIZACIONES DIDÁCTICAS: LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN Y LA MEDIDA DE MAGNITUDES

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Tomás Ángel Sierra Delgado

Bajo la dirección de los doctores:
Marianna Bosch Casabó y Josep Gascón Pérez

Madrid, 2006

ISBN: 978-84-669-2891-5

AGRADECIMIENTOS

Llegado el momento de rendir cuentas del trabajo realizado, debo de señalar que esta memoria es el fruto y resultado de un trabajo colectivo, donde diferentes personas e instituciones han colaborado conmigo y me han facilitado su realización. Por ello, quiero expresar mi agradecimiento:

Al Departamento de Didáctica y Organización Escolar por aceptarme la defensa de esta memoria de investigación en su programa de doctorado.

A Fundemi de la Universidad Ramón Llul por proporcionarme los medios materiales para el buen desarrollo de esta investigación durante mis estancias en Barcelona.

Al Departamento de Didáctica de las Matemáticas por brindarme elementos materiales que han permitido que el trabajo realizado fuera más fácil de sobrellevar.

Al colectivo de profesores participantes en las reuniones de Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM) con los que he compartido y discutido algunos de los elementos de que consta esta memoria.

A los compañeros del Grupo BAHUJAMA: Pilar Bolea, Marianna Bosch, Berta Barquero, Cecilio Fonseca, Javier García, Josep Gascón, Esther Rodríguez, Alicia Ruiz, Luisa Ruiz, Noemí Ruiz y Lidia Serrano, que han colaborado conmigo dedicando muchos momentos de trabajo y discusión, muy importantes para el buen desarrollo de esta investigación.

A las profesoras Pilar Bolea, Luisa Ruiz, Alicia Ruiz y Sagrario Simarro porque han apoyado este trabajo con la realización de alguna de las experimentaciones propuestas.

Al profesor de secundaria Joaquín Hernández por su disponibilidad al cederme su clase para experimentar uno de los procesos de estudio propuestos.

A todos alumnos de Magisterio y de tercero de Enseñanza Secundaria Obligatoria que han participado en las diferentes experimentaciones.

A mi amigo y antiguo compañero Antonio Valdés por sus valiosos consejos y aportaciones para la elaboración de esta memoria de investigación.

A mis amigas, Alicia Ruiz y Esther Rodríguez por haber revisado la última redacción.

A mi tutor de tesis, Antonio Bautista, por su constante ánimo y sus útiles consejos.

A mis Directores de Tesis, Marianna Bosch y Josep Gascón, a los que admiro como personas y como grandes profesionales que son. Ha sido un honor y un privilegio compartir con ellos el desarrollo de este trabajo. Mis estancias en Barcelona han resultado muy agradables e inolvidables, gracias a la buena acogida que me prestaron tanto Marianna y Marcos como María Rosa y Josep en sus respectivas familias.

A mis hijos, María y Tomás, y a mi mujer, María Elena, por todos aquellos momentos que la realización de esta memoria no me ha permitido dedicarles.

A mis hijos, María y Tomás

y

A mis padres, Agripina y Herminio

Cuando emprendas el viaje hacia Ítaca
debes pedir que el camino sea largo,
lleno de aventuras, lleno de conocimiento.
Debes pedir que el camino sea largo,
que sean muchas las madrugadas
en las que entres en un puerto que tus ojos desconocían,
y vayas a ciudades a aprender de quienes saben.
Ten siempre en el corazón la idea de Ítaca.
Has de llegar a ella, este es tu destino,
pero no fuerces jamás la travesía.
Es preferible que se prolongue muchos años,
y que hayas envejecido ya al fondear en la isla,
enriquecido por todo lo que habrás ganado en el camino
sin esperar que te ofrezca más riquezas,
Ítaca te ha dado el hermoso viaje
sin ella no habrías zarpado.
Y si la encuentras pobre, no pienses que Ítaca te engañó.
Como sabio en que te habrás convertido,
sabrás muy bien qué significan las Ítacas.

Konstantino Kaváfis (1863-1933)
Versión traducida de la 1ª estrofa de la
canción “Viatge a Ítaca” de Lluis Llach.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

CODETERMINACIÓN ENTRE LO MATEMÁTICO Y LO DIDÁCTICO EN LAS INSTITUCIONES ESCOLARES

1. INTEGRACIÓN PROGRESIVA DE LO MATEMÁTICO Y LO DIDÁCTICO[1]

En las instituciones escolares se ha identificado tradicionalmente "lo matemático" con el *contenido de la enseñanza escolar de las matemáticas*, mientras que "lo didáctico" se ha asimilado a "lo pedagógico" entendido como la *forma de enseñar* cualquiera de los contenidos escolares y, en particular, los contenidos matemáticos.

En esta memoria partimos del postulado de que este punto de vista, todavía muy influyente en las instituciones escolares, al separar el "hacer matemáticas" del "enseñar matemáticas", incide negativamente tanto en el ámbito del diseño, la gestión y evaluación de las Organizaciones Didácticas escolares como en el ámbito de la investigación didáctica. Nos proponemos poner en evidencia las consecuencias de adoptar el punto de vista inverso, esto es, considerar como inseparables, tanto para al análisis didáctico como para el desarrollo del Sistema de Enseñanza de las Matemáticas, *lo didáctico* y *lo matemático*.

En el ámbito del diseño y la gestión de las Organizaciones Didácticas (en adelante, OD), creemos que la integración entre el hacer y el enseñar matemáticas aumenta la posibilidad de organizar un proceso de estudio de una "obra matemática" de tal manera que *integre de manera central las razones de ser de dicha obra*, esto es, las cuestiones a las que la citada obra matemática viene a responder. Dicho en otras palabras, creemos que la escisión entre lo matemático y lo didáctico dificulta enormemente el estudio escolar de una obra matemática *con sentido*. Mostraremos, en el caso particular de dos organizaciones matemáticas concretas en torno a los *sistemas de numeración* y a la *medida de magnitudes continuas*, que el papel de "lo matemático" y su integración con "lo didáctico" es esencial para diseñar y gestionar en diferentes instituciones escolares OD capaces de reconstruir con sentido las citadas obras matemáticas.

[1] Utilizaremos libremente, a lo largo de todo el capítulo, muchas de las ideas de Gascón (2002, 2003) y Bosch y Gascón (2006b).

En el ámbito de la investigación didáctica, y como ya se ponía en evidencia en Gascón (2002, 2003) y en Bosch y Gascón (2006b), la citada separación entre el "hacer" y el "enseñar" matemáticas constituye uno de los principales obstáculos para interpretar las cuestiones problemáticas que surgen en la enseñanza escolar de las matemáticas. Entre dichas cuestiones se pueden citar algunas relativamente "genéricas" porque se refieren a la matemática escolar considerada como un todo:

- ¿Cómo *describir y analizar* el proceso de estudio escolar de las matemáticas?
- ¿Cómo explicar el fenómeno relativamente universal de la *alienación matemática* de los ciudadanos?
- ¿Cuáles son las posibles causas del creciente "fracaso" de los estudiantes en el paso de estudiar matemáticas en Secundaria a estudiar matemáticas en el primer curso universitario?
- ¿Por qué los profesores de matemáticas, de todos los niveles educativos, se ven abocados a llevar a cabo una *atomización progresiva de la matemática enseñada* y a proponer en los *exámenes* ejercicios cada vez más *algorítmicos*?

El punto de vista que adoptamos aquí parte del principio de que para responder a cualquiera de estas cuestiones que surgen en los Sistemas de Enseñanza de las Matemáticas es necesario considerar de manera inseparable las dimensiones "matemática" y "didáctica".

Más aún, consideramos que la distinción entre ambas dimensiones tiene una función meramente metodológica y que la necesaria reformulación del significado de "lo matemático" y de "lo didáctico" nos llevará – tal como veremos a continuación – a integrarlas en una única dimensión didáctico-matemática que constituye el núcleo del objeto de estudio de la didáctica de las matemáticas. Veremos a continuación una evolución reconstruida de cómo la didáctica de las matemáticas y, más especialmente, el *enfoque epistemológico* en el que situamos nuestra investigación, surge de la integración de estas dos dimensiones. Esta evolución nos servirá para introducir posteriormente los principales elementos del marco teórico utilizado en la investigación – la Teoría Antropológica de lo Didáctico –y para presentar finalmente los principales problemas a los que esta investigación aporta una respuesta.

1.1. El punto de partida de la Pedagogía

La Pedagogía se ha construido precisamente sobre la base de la *disociación* entre lo "*matemático*", considerado clásicamente como el contenido de la enseñanza de las matemáticas, transparente, incuestionable e independiente de la forma de enseñar, y lo "*pedagógico*", considerado como la *forma* de enseñar, independiente del contenido que se enseña. Se trata de un *mito cultural* fuertemente arraigado en nuestra cultura y que todavía tiene una gran vigencia. El investigador Yves Chevallard fundador de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, en la que situamos esta investigación, lo expresa en los términos siguientes:

> [...] l'illusion qu'il existerait, *a priori*, en matière scolaire, un domaine de décision affranchi de toute contrainte émanant des contenus de l'étude, et n'entraînant en retour aucune contrainte sur ces contenus et leur traitement « didactique ». (Chevallard 2000, p. 107).

Este mito es el que legitima culturalmente la existencia de un ámbito propio de "lo pedagógico" y, por tanto, a la Pedagogía como disciplina. En coherencia con esta idea básica, la respuesta pedagógica a los problemas de enseñanza de las matemáticas que se presentan dentro de las instituciones escolares, se caracteriza por los dos rasgos siguientes:

(a) Se asume implícitamente que "lo matemático" (como "lo lingüístico" o "lo musical") *no es problemático* y que, por lo tanto, puede ponerse entre paréntesis cuando se trata de analizar, diseñar o evaluar los procesos de enseñanza y aprendizaje. Se supone que lo matemático no debe cuestionarse ni, por tanto, modelizarse. Se acepta que los modelos epistemológicos de las matemáticas son competencia de otra disciplina y, en todo caso, responsabilidad de otra comunidad científica.

(b) En consecuencia, la respuesta pedagógica es una respuesta esencialmente *genérica* que *elimina la especificidad de las diferentes disciplinas*, sin cuestionarse cuáles son las condiciones particulares necesarias para que los sujetos de una institución escolar determinada "entren" en una obra matemática (o filosófica, o literaria o biológica) determinada.

Aun a riesgo de simplificar, podemos decir que el *problema didáctico* (en adelante PD) al que pretende responder el enfoque *pedagógico generalista* está delimitada por cuatro cuestiones:

PD_1: "¿Qué enseñar?", "¿Cuándo enseñar?", "¿Cómo enseñar?" y "¿Qué, cómo y cuándo evaluar?".

Pero, a pesar de lo que podría deducirse de tomarse en serio la primera de estas cuestiones, sin embargo, no se plantea ningún tipo de cuestionamiento sobre la naturaleza o la estructura de las obras matemáticas enseñadas. Así, dentro de este enfoque a la pregunta: ¿qué se debe enseñar de Geometría en la Enseñanza Obligatoria?, un ejemplo de respuesta posible es: "En la Enseñanza Obligatoria se debe enseñar Geometría Sintética". Además, debemos subrayar que esta respuesta no va acompañada ni es consecuencia de ningún tipo de análisis "epistemológico" de las posibles Organizaciones Matemáticas escolares en torno a la Geometría Sintética ni, mucho menos, de las diferentes relaciones que podrían establecerse entre la Geometría Sintética y el resto de las Organizaciones Matemáticas.

Hoy en día podemos afirmar que *la respuesta pedagógica a los problemas de la enseñanza de las matemáticas* que se presentan dentro de las instituciones escolares no ha proporcionado ningún avance significativo. Si esta ausencia de progreso ya afecta a las cuestiones "genéricas" que hacen referencia al proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas consideradas globalmente (como, por ejemplo, las cuestiones que hemos enunciado anteriormente), la incapacidad del generalismo pedagógico es aún más radical cuando aparecen problemas específicos del profesor de matemáticas como, por ejemplo:

- ¿Cómo se han de relacionar la Aritmética, el Álgebra y el Cálculo en la Matemática Escolar?
- ¿Cuál debería ser el papel del Álgebra elemental en la Matemática Escolar obligatoria?
- ¿Qué consecuencias tiene la desalgebrización de la Matemática Escolar?
- ¿Cuáles son las razones de ser de las ampliaciones sucesivas del campo numérico?
- ¿Cómo integrar la Geometría con regla y compás con la Geometría Analítica?
- ¿Cómo dar sentido al Cálculo Diferencial del Bachillerato?
- ¿Qué relaciones deberían establecerse entre la Estadística y el resto de áreas de la matemática escolar como, por ejemplo, la Probabilidad y el Álgebra lineal?
- ¿Qué papel debería jugar el Cálculo Numérico en la Enseñanza Secundaria de las Matemáticas?

La dificultad de abordar estos problemas desde el generalismo pedagógico radica esencialmente en que todos ellos hacen referencia a un contenido matemático a la vez concreto y suficientemente amplio y contienen en su formulación, más o menos explícitamente, todas las etapas de la *transposición didáctica* de dicha Organización Matemática (Bosch y Gascón, 2006a). Lo importante, y punto central del trabajo de investigación que presentamos aquí, es que para abordar cualquiera de estos problemas es imprescindible utilizar un *modelo epistemológico de las matemáticas como sistema* *de referencia*. Este modelo puede ser implícito y no cuestionado por el investigador. Pero, en caso de explicitarse, se convierte en un instrumento de trabajo, en un modelo *siempre provisional* desde el cual "deconstruir" y "reconstruir" los contenidos matemáticos cuya difusión intra-institucional e inter-institucional se quiere analizar. Uno de los objetivos de esta memoria consiste, precisamente, en mostrar el interés y la fecundidad de esta explicitación tanto para el análisis didáctico como para el diseño, la gestión y la evaluación de procesos de enseñanza y aprendizaje.

1.2. Ampliación de lo cognitivo y lo pedagógico con objetos matemáticos

Podemos considerar que la *Didáctica de las Matemáticas* surge ante el fracaso de la Pedagogía para dar respuesta a los problemas de la enseñanza de las Matemáticas, partiendo del postulado de la *necesidad de hacerse cargo, de forma integrada, de lo* "*pedagógico*" *y lo* "*matemático*". A esto hay que añadir que la Didáctica de las Matemáticas tiene la ambición necesaria de reformular y reconstruir "lo didáctico" como una dimensión de la realidad institucional diferenciada de lo considerado clásicamente como "lo pedagógico". Éstos son los rasgos que caracterizan inicialmente a la Didáctica de las Matemáticas.

Esta *ruptura con la Pedagogía* fue la que permitió que emergiera la Didáctica de las Matemáticas como nueva disciplina. Históricamente esta ruptura se origina en el ámbito de lo que se considera el Enfoque Cognitivo en Didáctica de las Matemáticas (Gascón 1998), cuya forma de integrar lo "pedagógico" y lo "matemático" se realiza a través del estudio de las "*concepciones*" de los sujetos de la institución escolar. En una primera etapa, las investigaciones se centraron en el estudio de las *concepciones de los alumnos*. De una forma inevitablemente reductora podríamos formular el nuevo problema didáctico tal como lo plantea el Enfoque Cognitivo en esta primera etapa en los siguientes términos:

PD$_2$: ¿Cuál es la estructura del conocimiento matemático del alumno? ¿Cuáles son las *concepciones espontáneas* de los alumnos respecto a los conceptos fundamentales de la matemática escolar? ¿De qué forma influyen dichas concepciones sobre las *dificultades y errores* que cometen los alumnos cuando realizan tareas en las que intervienen dichos conceptos? ¿Cómo podrían utilizarse las semejanzas y diferencias entre las estructuras conceptuales de los alumnos y las correspondientes estructuras de los sistemas de conceptos matemáticos, a fin de potenciar el *aprendizaje significativo*?

La problemática que se planteaban las perspectivas conceptualistas iniciales mostraba así muy claramente la estrategia inicial del Enfoque Cognitivo para integrar lo pedagógico y lo matemático a través del *aprendizaje matemático de los alumnos*.

En una segunda etapa, dicha estrategia está basada en la *enseñanza de las matemáticas* y centrada en los *conocimientos* y las *concepciones del profesor*. Se trata, con diferentes variantes, de una estrategia paralela a la que se llevó a cabo con las concepciones de los alumnos. Según Ernest (1988)[2]:

> The research literature on mathematics teachers' beliefs, although scant, indicates that teachers' approaches to mathematics teaching depend fundamentally on their systems of beliefs, in particular on their conceptions of the nature and meaning of mathematics, and on their mental models of teaching and learning mathematics.

Simplificando mucho las cosas, podríamos decir que en esta segunda etapa el Enfoque Cognitivo vuelve a ampliar el problema didáctico mediante una formulación que podemos resumir en los siguientes términos:

PD$_3$: ¿En qué forma y en qué medida el *conocimiento*[3]*, las creencias*[4] *y las actitudes del profesor* permiten explicar el *comportamiento del profesor en el aula* y, en última instancia, el *rendimiento* (o el aprendizaje matemático) de los alumnos? ¿Cómo interrelaciona dicho comportamiento con las características cognitivas y actitudinales del alumno?

[2] Citado por Thompson (1992, p. 131).
[3] El *conocimiento del profesor* tiene tres componentes: el conocimiento del *contenido matemático*; el conocimiento *pedagógico* de los métodos de enseñanza; y el conocimiento de los mecanismos mediante los cuales los alumnos *entienden* y *aprenden* un contenido particular.
[4] Las *creencias del profesor* tienen dos componentes: las creencias respecto a qué son las *matemáticas*; y las creencias respecto al proceso de *enseñanza-aprendizaje de las matemáticas*.

Así pues, la estrategia del Enfoque Cognitivo para integrar lo pedagógico y lo matemático consiste en considerar los fenómenos didácticos como fenómenos esencialmente "cognitivos" en el sentido de la Psicología Cognitiva. Esta identificación, que queda más o menos implícita, se refleja en el interés por modelizar la estructura de los *conocimientos* (Fennema y Loef, 1992) y de las *concepciones de un profesor* concreto (Thompson, 1992). A continuación se intenta relacionar esa estructura con las *prácticas docentes* que el profesor realiza efectivamente en el aula, lo que añade una dimensión "social" a los fenómenos didácticos y, por último, aparece la necesidad de considerar la especificidad del *aprendizaje matemático* lo que proporciona una nueva dimensión a dichos fenómenos.

Tenemos, en resumen, que la integración de lo pedagógico y lo matemático se produce aquí cuestionando la naturaleza clásica de "lo pedagógico", añadiéndole dimensiones y modelizándolo de tal manera que comporta, de hecho, una *ampliación de lo* "*cognitivo*". Se puede afirmar que el Enfoque Cognitivo de investigación en didáctica de las matemáticas amplía de manera relevante lo que clásicamente era considerado como "cognitivo". Si bien es cierto que considera que los fenómenos didácticos son, en primer término, fenómenos "cognitivos", también podría decirse que los considera como fenómenos "cognitivo-matemáticos" dada la ampliación de la acepción de "lo cognitivo" que se utiliza.

Una línea de investigación especialmente interesante en lo que respecta a la integración de lo pedagógico y lo matemático en el ámbito del Enfoque Cognitivo lo constituye la inaugurada por Lee Shulman (1986 y 1987) como respuesta a la pregunta: "*¿Qué conocimiento es esencial para el profesor*?". Su noción de "conocimiento pedagógico del contenido" (*pedagogical content knowledge*) es clave para responder a dicha pregunta y para interpretar adecuadamente el cuestionamiento cognitivo de lo pedagógico y su consiguiente ampliación para abarcar aspectos importantes de "lo matemático".

Desde hace muchos años aparece como evidente que el conocimiento del *contenido matemático* no es una garantía suficiente para que el profesor enseñe dicho contenido de una manera eficaz. Pero lo que provoca el cuestionamiento de lo pedagógico, en el ámbito del Enfoque Cognitivo, es la evidencia de que *el conocimiento pedagógico que pueda tener el profesor de los métodos de enseñanza* (*independientes de la disciplina a* *enseñar*) *no mejora las cosas significativamente*. El *conocimiento pedagógico del contenido* incluye aquellos conocimientos del profesor relativos al aprendizaje de los estudiantes de un contenido específico y, en particular, el conocimiento que tienen los profesores de las dificultades típicas de los estudiantes en cada contenido (matemático) concreto y de la manera de preverlas y remediarlas. De esta manera se amplía la noción de *conocimiento pedagógico* incluyendo componentes "*matemáticos*".

Según Alan H. Schoenfeld, esta idea constituye el origen de un nuevo programa de investigación en el que ya se ha llevado a cabo un importante volumen de trabajo y que, sobre todo, plantea cuestiones muy interesantes para futuras investigaciones (Schoenfeld 2000, p. 247):

> The idea of the *pedagogical content knowledge* has been elaborated in numerous studies (e. g., Carpenter, Fennema, Peterson & Carey, 1988; Grossman, 1990; Ma, 1999; Sherin, 1996; Stein, Baxter & Leinhart, 1990). Such studies indicate ways in which teachers' knowledge shapes what the teachers are to do in the classroom at times constraining their options, at times providing the support-structure for a wide range of activities. But there are many open questions as one considers the nature of teachers' knowledge. What forms does such knowledge take? How is it organized? How is it accessed? A comprehensive model of teaching needs to address such issues.

1.3. Cuestionamiento y ampliación de lo matemático

La ruptura con la Pedagogía protagonizada por el Enfoque Cognitivo va indisolublemente unida a otra que es menos explícita pero no por ello menos importante: se trata de la ruptura con el modelo epistemológico ingenuo del saber matemático y, en particular, con el *modelo popular* de las matemáticas que, según Thurston (1994), es predominante en las instituciones escolares. De hecho, veremos que es imposible integrar completamente "lo matemático" y "lo pedagógico" sin cuestionar simultáneamente ambas dimensiones de la realidad social. Esto es lo que acaba sucediendo cuando el cuestionamiento (de cualquiera de ellas) se lleva hasta sus últimas consecuencias lógicas.

Una de las diferencias básicas entre los distintos enfoques en Didáctica de las Matemáticas consiste, precisamente, en la forma particular en que cada uno de ellos lleva a cabo esa doble ruptura (más o menos completa) y consiguiente ampliación mediante la *didactificación conjunta de lo pedagógico y lo matemático*. De hecho, las diferentes formas de “didactificación” pueden comportar cambios importantes en la amplitud del objeto de estudio de la didáctica de las matemáticas y hasta en la naturaleza de los fenómenos que deben tomarse en consideración.

Simplificando mucho las cosas, postulamos que existen, esencialmente, dos maneras diferentes de llevar a cabo este proceso de integración o *didactificación conjunta de lo pedagógico y lo matemático* que se corresponden con los dos Programas de Investigación en Didáctica de las Matemáticas que aparecen en Gascón (1998) utilizando la *reconstrucción racional* (Lakatos, 1971): el Programa o Enfoque Cognitivo, del que ya hemos dicho cómo integra lo pedagógico y lo matemático, y el Programa Epistemológico en el que, explícitamente, nos situamos.

Dentro del Enfoque o Programa Epistemológico, la forma de integrar “lo pedagógico” y “lo matemático” se lleva a cabo partiendo del *cuestionamiento* y la *ampliación* de lo que se considera “matemático” en el modelo popular de las matemáticas.

El “modelo popular” de las matemáticas es un modelo epistemológico general que, según el matemático William P. Thurston (1994), es el modelo dominante en las instituciones en las que se manipula el saber matemático, incluyendo especialmente las instituciones universitarias y la comunidad productora del conocimiento matemático. Se trata de un modelo muy simplista que suele estar implícito y casi transparente y, como tal, no se cuestiona. Thurston lo describe y caricaturiza en los siguientes términos:

(1) Los matemáticos parten de algunas estructuras matemáticas fundamentales y de una colección de axiomas “dados” que caracterizan dichas estructuras.

(2) Respecto de dichas estructuras existen cuestiones importantes y variadas que pueden expresarse en forma de proposiciones matemáticas formales.

(3) La tarea de los matemáticos es la de buscar una serie de deducciones que enlacen los axiomas con dichas proposiciones o con la negación de éstas.

(4) Para dar razón del origen de las cuestiones problemáticas se añade la *especulación* como un ingrediente importante y suplementario de dicho modelo. *Especular* consiste en emitir conjeturas, plantear preguntas, hacer suposiciones inteligentes y desarrollar argumentos heurísticos sobre lo que es verosímil. Se obtiene así el modelo *definición-especulación-teorema-prueba* (DSTP).

El “modelo popular” constituye, en definitiva, una forma ingenua y simplista de interpretar el conocimiento matemático y puede considerarse como una variedad del “euclideanismo” en el sentido propuesto por Lakatos (1978). El euclideanismo pretende que los conocimientos matemáticos pueden deducirse de un conjunto finito de proposiciones trivialmente verdaderas (axiomas) que constan de términos perfectamente conocidos (términos primitivos). La verdad de los axiomas fluye entonces desde los axiomas hasta los teoremas por los canales deductivos de transmisión de verdad (pruebas).

Como todo euclideanismo, el modelo popular “trivializa” el conocimiento matemático y lo considera transparente, dificultando así la ruptura con la Pedagogía y la emergencia plena de la Didáctica de las Matemáticas como nueva disciplina. De hecho, el propio Thurston, en total desacuerdo con la naturaleza del trabajo matemático que se desprende del modelo DSTP (demostración, especulación, teorema, prueba), propone la elaboración de un modelo epistemológico alternativo que ponga el acento en que el trabajo del matemático consiste en *hacer avanzar la comprensión humana de las matemáticas* y en mejorar la *comunicación* de dicha comprensión.

El cuestionamiento de la transparencia de lo “matemático” y la asunción inequívoca de que *el misterio está, en primer lugar, en las propias matemáticas* constituye, precisamente, el nacimiento del Programa Epistemológico y comporta que se tome la *actividad matemática* como objeto primario de estudio, como nueva “puerta de entrada” del análisis didáctico. El primer paso en esta dirección fue protagonizado históricamente por la *Teoría de las Situaciones Didácticas* (TSD) que integró “lo matemático” y “lo pedagógico” modelizando de manera inseparable los conocimientos matemáticos y las *condiciones de su utilización en situación escolar*. Siguiendo a Chevallard (2001, pág. 2):

> El principio fundador de las didácticas, al menos en el sentido brousseauniano de la palabra, es que no sólo lo transmitido depende de la herramienta con la que se pretende conseguir su transmisión, sino al revés que las organizaciones “transmisoras”, es decir didácticas, se configuran de manera estrechamente vinculada a la estructura dada a lo que hay que transmitir. En otros términos, las organizaciones didácticas dependen fuertemente de las organizaciones por enseñar –las organizaciones matemáticas–.

Pero, a medida que se iba desarrollando este programa, se puso de manifiesto que no era posible interpretar adecuadamente la *actividad matemática escolar* sin tener en cuenta los fenómenos relacionados con la *reconstrucción escolar de las matemáticas* que tienen su origen en la propia institución productora del saber matemático. Aparecieron así los fenómenos de *Transposición Didáctica* (Chevallard, 1985) y, posteriormente, los sucesivos desarrollos de la *Teoría Antropológica de lo Didáctico* (en adelante, TAD).

Tenemos, en resumen, que la integración o *didactificación conjunta de lo pedagógico y lo matemático* se produce en el Programa Epistemológico cuestionando y ampliando radicalmente lo considerado tradicionalmente como "matemático". De modo que se cambia el problema didáctico de caracterizar los conocimientos y las concepciones del profesor y la incidencia de éstos sobre las prácticas docentes y sobre el aprendizaje matemático de los alumnos (tal como ha sido descrito en $\mathbf{PD_3}$), por un nuevo problema didáctico que no se reduce únicamente al ámbito de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, puesto que postula que éstas son inseparables del resto de las formas de manipulación social de los conocimientos matemáticos (de entre las cuales la enseñanza es sólo un caso particular, aunque muy importante).

Consecuentemente, la nueva formulación del problema didáctico hace referencia al conjunto de dichas instituciones y no únicamente a las instituciones escolares. De una forma muy esquemática podríamos enunciar el problema didáctico, tal como se reformula en el Programa Epistemológico, en los siguientes términos (Chevallard 2006):

$\mathbf{PD_4}$**:** ¿*Cuáles son las condiciones y restricciones bajo las cuales los conocimientos matemáticos se generan, viven, se desarrollan, se transforman, se debilitan, se difunden, desaparecen, etc., en el seno de las instituciones humanas*?

En particular, el problema didáctico incluye el estudio de las condiciones y restricciones originadas por una *intención didáctica* en el seno de una *institución escolar*. Pero para estudiar este sistema de condiciones y restricciones que sufren los conocimientos matemáticos para ser enseñados en una institución docente, esto es, para estudiar una *Organización Didáctica* determinada, es imprescindible tomar en consideración condiciones y restricciones que no han sido creadas ni por el profesor ni por el Sistema de Enseñanza y que no provienen de ninguna intención "didáctica" claramente identificable.

Es por esta razón que el planteamiento del problema didáctico en la versión del Programa Epistemológico engloba un ámbito mucho más amplio que el de las condiciones y restricciones de origen "didáctico" en las instituciones docentes. Esta ampliación de la problemática didáctica provoca una *despersonalización* de la misma situándola a un nivel *institucional*, relativamente independiente de la *voluntad*, la *formación*, la *motivación* y las restantes *características individuales* de los sujetos de las instituciones.

1.4. Confluencia de los problemas epistemológico y didáctico

¿*Por qué* y el *cómo* debe ampliarse "lo matemático", esto es, *por qué* son insuficientes las tareas que son consideradas como "actividades matemáticas" en el modelo "popular" y *cómo* deben ampliarse? ¿Qué nuevas tareas (además de "definir", "especular", "enunciar teoremas" y "probarlos") deben ser consideradas como "matemáticas"?

Son diversas y poderosas las razones por las cuales es necesario rechazar la reducción de la actividad "matemática" a las tareas del tipo DSTP. Dichas razones provienen, por un lado, de la evolución interna de la epistemología de las matemáticas y, por otro, de la necesidad de formular adecuadamente y responder al *problema didáctico* en cualquiera de sus formulaciones. En esta memoria nos centraremos principalmente en estas últimas.

Por lo que se refiere a las primeras, esto es, a las necesidades de origen epistemológico, diremos únicamente que la inclusión de nuevas actividades "matemáticas", más allá de las que acepta el modelo popular, es una necesidad que surge del esclarecimiento progresivo de la naturaleza del conocimiento matemático y, simultáneamente, de las leyes que rigen la producción y difusión institucional y personal de los conocimientos matemáticos[5].

En cuanto a la necesidad de responder al problema didáctico, una vez fijado su enunciado, hay que decir que el tratamiento que se haga del mismo dependerá en gran

[5] Dicha evolución se basa en la reconstrucción racional que propone Lakatos (1978). En Gascón (2001) se describe con detalle esta evolución y se muestra que el problema *epistemológico* de las matemáticas acaba confluyendo con el problema *didáctico* de la Educación Matemática.

parte de la *base empírica* que se utilice. En este punto las epistemologías *constructivistas*, así como las teorías didácticas que sustentan, postulan la necesidad de utilizar como base empírica, al lado de los datos que provienen de la historia de la ciencia, los que proporciona el estudio del *desarrollo psicogenético*. En este sentido Piaget y García (1982) critican duramente a Khun porque éste no tiene en cuenta los datos que proporcionan las investigaciones empíricas de la psicología genética. Este mismo argumento permite criticar la ideología de Piaget y García que les impide interesarse por los datos empíricos que se producen en las diferentes instituciones (por ejemplo, *escolares*) en las que se manipulan los conocimientos matemáticos. Para resolver el problema didáctico, incluso en su versión $\mathbf{PD_3}$, la base empírica del constructivismo continúa siendo insuficiente, porque el conocimiento, las creencias y las actitudes del profesor respecto a los objetos matemáticos y respecto de su enseñanza dependen, en gran medida, de condiciones y restricciones que se originan en ámbitos muy alejados del círculo de influencia del profesor como tal profesor.

Es en este punto en el que confluyen los problemas epistemológico y didáctico al confluir sus respectivas bases empíricas: tanto para abordar el problema didáctico (incluso en su versión constructivista $\mathbf{PD_3}$) como el problema epistemológico subyacente, es esencial tomar en consideración los datos empíricos que se producen en las *instituciones intermedias* entre el individuo (sujeto de la psicogénesis) y la comunidad matemática (sujeto de la historia). Entre dichas *instituciones intermedias* hay que citar el aula, el Sistema de Enseñanza de las Matemáticas y la Escuela así como todas las restantes instituciones sociales en las que se manipulan los conocimientos matemáticos (como las instituciones financieras y las comunidades científicas de todo tipo, entre otras).

Esta ampliación de la base empírica común a la didáctica y a la epistemología de las matemáticas provoca una nueva reformulación y ampliación del *problema epistemológico* que se presenta ahora como un problema *antropológico* que confluye, en cierta forma, con el *problema didáctico*. Aparece así una primera explicación del porqué Guy Brousseau denominó inicialmente “*Epistemología Experimental*” a la Didáctica de las Matemáticas.

De hecho, desde sus orígenes, la Teoría de las Situaciones Didácticas[6] se planteó este problema didáctico-epistemológico en el caso particular de los conocimientos matemáticos *escolares*. Guy Brousseau postula que cuando un alumno lleva a cabo una *actividad matemática*:

(a) *Formula* enunciados y *prueba* proposiciones.

(b) *Construye* modelos, lenguajes, conceptos y teorías.

(c) Los *pone a prueba* y los *intercambia* con otros.

(d) *Reconoce* los que están conformes con la cultura matemática.

(e) Y *toma los que le son útiles* para continuar su actividad.

Esta posición epistemológica provoca una importante ampliación del reducido conjunto de tareas que el modelo popular considera como *tareas matemáticas*. Brousseau tomó los hechos didáctico-matemáticos relativos a este amplio conjunto de actividades matemáticas como una parte imprescindible de la base empírica necesaria para abordar el problema didáctico-epistemológico y, por esta razón, denominó inicialmente *Epistemología Experimental* (de las Matemáticas) a la Didáctica de las Matemáticas.

Si bien es cierto que el problema didáctico-epistemológico nunca ha sido considerado por la comunidad matemática nuclear como un problema propiamente *matemático*, no es menos cierto que la ampliación de lo matemático en la dirección indicada responde a una necesidad intrínseca del desarrollo institucional de las matemáticas que es absolutamente imprescindible para que, como dice Thurston, pueda seguir avanzando la *comprensión humana de las matemáticas* y mejorando la *comunicación* (personal e institucional) de dicha comprensión.

Podríamos resumir lo anterior diciendo que para abordar el problema epistemológico-didáctico es imprescindible *ampliar lo matemático hasta hacerlo "denso" en lo didáctico*. Pero, dado el carácter metafórico de la noción de "densidad" tal como aquí la hemos empleado, deberíamos añadir algunos argumentos[7] que justifiquen que dicha metáfora tiene suficiente consistencia como para guiar un Programa de Investigación en Didáctica de las Matemáticas: el que denominamos Programa Epistemológico,

[6] En Brousseau (1998) se encuentra una recopilación de los trabajos, publicados entre 1970 y 1990, fundadores de la Teoría de las Situaciones Didácticas.
[7] Dichos argumentos pueden encontrarse, por ejemplo, en Chevallard (1991) y Gascón (1993).

inaugurado por la Teoría de las Situaciones Didácticas y desarrollado, paralelamente, por la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Hemos visto que las tareas DSTP del modelo popular constituyen una abstracción que simplifica abusivamente la actividad matemática reduciéndola a un "esqueleto" que no ha existido nunca, aisladamente, en ninguna institución humana. De hecho, toda actividad matemática "real" (esto es, efectivamente desarrollada en una institución humana en algún periodo histórico) es una actividad que, en mayor o menor medida:

(a) *Construye* el conocimiento matemático.

(b) Lo *difunde* en dicha institución.

(c) Lo *utiliza* en una situación determinada.

(d) Lo *transpone* a otras instituciones.

Esta *inseparabilidad* entre las diferentes formas de manipular los conocimientos matemáticos (construir, difundir, utilizar y transponer), constituye uno de los postulados de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1991). Dichas manipulaciones son necesarias e inseparables para que puedan satisfacerse las crecientes necesidades matemáticas de la sociedad.

2. PRERREQUISITOS: ELEMENTOS DE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA

En esta sección resumiremos brevemente las aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante, TAD) que constituyen los prerrequisitos necesarios para formular adecuadamente el tipo particular de problemas didácticos que trataremos en esta memoria. Dichos problemas serán enunciados en la tercera y última sección de este capítulo.

2.1. El modelo unitario de las Organizaciones Matemático-Didácticas

Hemos visto que la Teoría de la Transposición Didáctica muestra que las diferentes formas de manipulación social de las Matemáticas deben estudiarse de forma conjunta, pues *la enseñanza de un saber*, o sea, su *manipulación didáctica*, no puede comprenderse en muchos de sus aspectos si no se tienen en cuenta *sus utilizaciones*, *su* *producción* y los *procesos transpositivos* de dicho saber hasta desembocar en la institución considerada y dentro de ésta.

Se pasa así a considerar *la actividad matemática escolar* dentro de una problemática más amplia la de las *actividades matemáticas institucionales* que se convierten en el objeto primario de investigación didáctica. De este modo la Didáctica de las Matemáticas amplía como ya hemos indicado su ámbito de estudio más allá de las instituciones escolares para extenderse a todas las instituciones donde tiene lugar algún tipo de manipulación del saber matemático. Así es como el desarrollo de la Teoría de la Transposición Didáctica dio lugar al Enfoque Antropológico y, posteriormente, a la *Teoría Antropológica de lo Didáctico*. Esta teoría propugna que la actividad matemática debe ser interpretada o, mejor dicho, modelizada como una actividad humana como las demás, en lugar de considerarla como un *sistema de conceptos* o como un *proceso cognitivo*. La TAD propone un *modelo de la actividad matemática institucional*, que incluye la *actividad matemática escolar* como caso particular, y un *modelo del saber matemático* que permite describir *la matemática escolar* como caso particular. Lo *didáctico* aparece, dentro de este enfoque, como todo aquello que tiene relación con el estudio, la producción y la difusión (o reproducción) del saber matemático en las distintas instituciones sociales, lo que sitúa la enseñanza y aprendizaje escolares de las matemáticas como un caso particular de *proceso didáctico*.

En lo que sigue esquematizaremos brevemente estos modelos centrándonos esencialmente en aquellos aspectos que serán utilizados a lo largo de esta memoria. Nos basamos esencialmente en el artículo de Bosch, Espinoza y Gascón (2003).

2.1.1. *La didáctica como ciencia del "estudio" y el profesor como "director de estudio"*

La TAD identifica *lo didáctico* con todo lo relativo al *estudio*, tomando la palabra "estudio" en un sentido muy amplio que engloba las nociones de enseñanza y aprendizaje comúnmente utilizadas en la cultura pedagógica. Se habla de *estudio* para referirse a todo aquello que se hace en una determinada institución para aportar respuestas a las cuestiones o para llevar a cabo las tareas problemáticas que se plantean. La actividad de estudio no debe circunscribirse al ámbito escolar o de la enseñanza reglada: hay estudio en todas las instituciones de la sociedad en la medida en que se haga algo para cambiar las prácticas institucionales que se consideran problemáticas.

En el caso de las Matemáticas, la noción de estudio aparece como una noción integradora que permite analizar bajo un mismo prisma el trabajo que realiza el matemático investigador, el que realiza el profesor cuando enseña matemáticas o el del alumno que las aprende en la escuela: el investigador plantea y estudia problemas con el objetivo de construir matemáticas nuevas que aporten una solución a dichos problemas; el profesor y sus alumnos también estudian matemáticas conocidas que permitan aportar respuestas a cuestiones problemáticas consideradas importantes en determinadas instituciones de la sociedad.

Tanto en el caso en que se construyen matemáticas nuevas –la situación del investigador– como cuando se enseñan y aprenden matemáticas conocidas –situación del profesor y los alumnos–, la actividad de estudio se realiza en comunidad –las *comunidades de estudio*–, con la ayuda de uno o varios *directores de estudio* –el investigador principal o el profesor–, y guiado por un *programa de estudio* –en forma de programa de investigación o de currículo–. En este esquema, el profesor aparece como el *director* (o uno de los directores) de una comunidad de estudio formada por él mismo y sus alumnos. Este punto de vista permite, entre otras cosas, considerar la figura del profesor como una más de las figuras integrantes del colectivo que estudia (la comunidad de estudio).

2.1.2. El modelo de actividad y de saber matemáticos

En la TAD se parte del principio de que el saber matemático se construye como respuesta al estudio de cuestiones problemáticas, apareciendo así como el resultado (o producto) de un proceso de estudio. Dicho proceso, en cuanto actividad que conduce a la construcción (o reconstrucción) de conocimiento matemático, forma parte de la actividad matemática. Aunque hacer matemáticas no consista únicamente en estudiar matemáticas para resolver problemas (se pueden usar matemáticas de manera rutinaria sin que aparezca problematicidad ni estudio), sí aparece un paralelismo estrecho entre la actividad matemática como proceso de estudio y el saber matemático como resultado de dicho proceso: las Matemáticas son a la vez una actividad y el producto de dicha actividad.

Este principio permite considerar las Matemáticas como construcciones y actividades institucionales, incluyendo todas las connotaciones culturales y sociales que esto puede significar. En particular, permite tomar en consideración el *relativismo institucional del conocimiento matemático,* así como el componente *material* de la actividad. Dentro de este punto de vista general del conocimiento matemático, se propone la noción de *Organización Praxeológica Matemática,* o *Praxeología Matemática* (o simplemente, *Organización Matemática*) como modelo más preciso para describir el conocimiento matemático.

La noción de Praxeología Matemática u Organización Matemática corresponde a la concepción del trabajo matemático como estudio de tipos de problemas o tareas problemáticas. Pero éste no es el único aspecto del trabajo matemático. En efecto, el matemático no aspira únicamente a plantearse buenos problemas y resolverlos, sino que pretende, además, caracterizar, delimitar e incluso clasificar los problemas en "tipos de problemas", entender, describir y caracterizar las *técnicas* que utiliza para resolverlos hasta el punto de controlarlas y normalizar su uso, se propone establecer las condiciones bajo las cuales éstas funcionan o dejan de ser aplicables y, en última instancia, aspira a construir argumentos sólidos y eficaces que sostengan la validez de sus maneras de proceder.

El saber matemático aparece así organizado en dos niveles. El primer nivel es el que remite a la práctica que se realiza, la *praxis* o *saber-hacer*, es decir, los *tipos de problemas* o *tareas* que se estudian y las *técnicas* que se construyen y utilizan para abordarlos. El segundo nivel recoge la parte descriptiva, organizadora y justificadora de la actividad, que llamaremos *logos* o, simplemente, *saber*. Incluye las descripciones y explicaciones que se elaboran para hacer inteligibles las técnicas, esto es, el discurso *tecnológico* (o *logos* sobre la técnica y, en última instancia, el fundamento de la producción de nuevas técnicas) y la *teoría* que da sentido a los problemas planteados y permite fundamentar e interpretar las descripciones y demostraciones tecnológicas a modo de justificación de segundo nivel (la teoría puede interpretarse, por tanto, como una tecnología de la tecnología).

La noción de *Praxeología* resulta de la unión de los dos términos *praxis* y *logos*. *Tipos de tareas*, *técnicas*, *tecnología* y *teoría* son pues las cuatro categorías de elementos que componen una Organización o Praxeología Matemática. Diremos ahora que *hacer*

Matemáticas consiste en poner en práctica una Praxeología Matemática para llevar a cabo un determinado tipo de tareas y que *estudiar Matemáticas* consiste en construir o reconstruir determinados elementos de una Praxeología Matemática para dar respuesta a un determinado tipo de tareas *problemáticas* (es decir un tipo de tareas para el cual no existe o no se dispone de una praxeología adecuada para resolverlo en la institución en cuestión).

2.1.3. La construcción del conocimiento matemático

Las Praxeologías Matemáticas no surgen de forma instantánea, ni aparecen acabadas de una vez por todas. Son, al contrario, el resultado de un trabajo complejo y continuado que se realiza durante largo tiempo –incluso siglos–, en cuya dinámica de funcionamiento existen ciertas relaciones invariantes y que, por tanto, es posible modelizar. Aparecen aquí los dos aspectos inseparables del trabajo matemático. Por un lado, el proceso de construcción matemática, esto es, el *proceso de estudio*, y, por otro lado, el resultado mismo de esta construcción, esto es, la *Praxeología Matemática*. En efecto, no hay Organización Matemática sin un proceso de estudio que la engendre, pero tampoco hay proceso de estudio sin una Organización Matemática en construcción. Proceso y producto son dos caras de una misma moneda: ante una tarea problemática, el matemático usa y construye matemáticas, todo a la vez.

La consideración de diversos procesos de construcción matemática permite detectar aspectos invariantes presentes en todos ellos; esto es, *dimensiones* que estructuran cualquier proceso de construcción matemática de forma relativamente independiente de sus características culturales, sociales, individuales o de otra índole. La noción de *momento didáctico* se utiliza, no tanto en el sentido cronológico, como en el sentido de *dimensión* de la actividad. Así, el proceso de estudio se sitúa en un espacio determinado por *seis momentos didácticos.*

Ahora bien, la estructura del proceso de estudio no es lineal. Cada momento puede ser vivido con distintas intensidades, en diversos tiempos, tantas veces como se necesite a lo largo del proceso de estudio e incluso es habitual que algunos de ellos aparezcan simultáneamente. Lo que sí es importante destacar es que cada uno de los seis *momentos* del estudio desempeña una función específica necesaria para llevar a buen término el proceso y que existe una *dinámica interna global* que se manifiesta en la invariancia (o presencia necesaria) de ciertas relaciones entre dichos momentos. Es decir, lo importante no es el orden en que se realicen los diferentes momentos del proceso de estudio, sino la estructura interna de las relaciones que deben establecerse forzosamente entre ellos. Los seis momentos didácticos son: el momento del primer encuentro, el momento exploratorio, el momento del trabajo de la técnica, el momento tecnológico teórico, el momento de la institucionalización, y el momento de la evaluación.

Siguiendo a Chevallard (1999, pp. 250-255), los 6 momentos del estudio de una organización praxeológica *O* se pueden describir en los términos siguientes:

> El *primer momento* del estudio es el del *primer encuentro* con la organización *O* que está en juego. Tal encuentro puede tener lugar de varias maneras, pero un modo de encuentro –o de “reencuentro”- inevitable, a menos que uno se quede en la superficie de la obra *O*, es el que consiste en encontrar *O* a través de al menos uno de los tipos de tareas T_i constitutivas de *O*. Este “primer encuentro” con el tipo de tareas T_i puede a su vez tener lugar *en varias veces*, en función sobre todo de los entornos matemáticos y didácticos en los que se produce: se puede *volver a descubrir* un tipo de tareas como se vuelve a descubrir una persona que se creía conocer. [...]
>
> El *segundo momento* es el de la *exploración* del tipo de tareas T_i y de la *elaboración de una técnica* τ_i relativa a este tipo de tareas. […] En realidad, el estudio y la resolución de un problema de un tipo determinado va siempre a la par con la constitución de al menos un embrión de técnica, a partir del cual una técnica más desarrollada podrá eventualmente emerger: el estudio de un problema *particular*, espécimen de un tipo estudiado, aparecería así, no como un fin en sí mismo, sino como un *medio* para la constitución de una técnica de resolución. Se trama así una dialéctica fundamental: estudiar problemas es un medio que permite crear y poner en marcha una técnica relativa a los problemas de un mismo tipo, técnica que será a continuación el medio para resolver de manera casi rutinaria los problemas de ese tipo.
>
> El *tercer momento* del estudio es el de la *constitución del entorno tecnológico-teórico* relativo a τ_i. De una manera general, este momento está en interrelación estrecha con *cada uno* de los otros momentos. Así, desde el primer encuentro con el tipo de tareas, se establece generalmente una relación con el entorno tecnológico-teórico anteriormente elaborado, o con gérmenes de un entorno por crear que se precisará mediante una relación dialéctica con la emergencia de la técnica. Sin embargo, por razones de economía didáctica global, a veces las estrategias de dirección de estudio tradicionales hacen en general de este tercer momento la *primera etapa* del estudio […].

> El *cuarto momento* es el del *trabajo de la técnica*, que debe a la vez mejorar la técnica volviéndola más eficaz y más fiable (lo que exige generalmente retocar la tecnología elaborada hasta entonces), y acrecentar la maestría que se tiene de ella: este momento de puesta a prueba de la técnica supone en particular uno o unos corpus de tareas adecuados tanto cualitativamente como cuantitativamente. […]
>
> El *quinto momento* es el de la *institucionalización*, que tiene por objeto precisar lo que es "exactamente" la Organización Matemática elaborada, distinguiendo claramente, por una parte, los elementos que, habiendo concurrido a su construcción, no le hayan sido integrados y, por otra parte, los elementos que entrarán de manera definitiva en la Organización Matemática considerada –distinción que buscan precisar los alumnos cuando le preguntan al profesor, a propósito de tal resultado o tal procedimiento, si hay o no "que saberlo". […]
>
> El *sexto momento* es el de la *evaluación*, que se articula con el momento de la institucionalización […]. En la práctica, llega siempre un momento en el que se debe "hacer balance": porque este momento de reflexividad donde, cualquiera que sea el criterio y el juez, se examina el *valor* de lo que se ha aprendido, este momento de verificación que, a pesar de los recuerdos de infancia, no es en absoluto invención de la Escuela, participa de hecho de la "respiración" misma de toda actividad humana.

2.1.4. El postulado fundamental de la TAD y las Organizaciones Didácticas

Desde un punto de vista antropológico es importante describir las prácticas humanas que se realizan en diversas instituciones en términos relativamente genéricos para evitar introducir distinciones culturales o ideológicas poco fundamentadas. El caso de la práctica *didáctica* no es una excepción. Es aquí donde aparece un primer postulado, que podríamos denominar el *postulado del modelo unitario* de la actividad humana y que, para el caso de la investigación que nos ocupa, resulta ser de singular interés: en la TAD se postula que *toda actividad humana puede ser descrita en términos de praxeologías*. En el caso de que la actividad considerada sea una actividad de estudio (incluyendo la dirección), se hablará de *Praxeología de Estudio* o *Praxeología Didáctica*.

Así pues, todo proceso de estudio de las Matemáticas, en cuanto actividad institucional de construcción o reconstrucción de Organizaciones Matemáticas, consiste en la utilización de una determinada *Praxeología (u Organización) Didáctica* (en adelante, OD) con su componente práctico (formado por tipos de *tareas y técnicas didácticas*) y su componente teórico (formado por una *tecnología y una teoría didácticas*).

Una OD es utilizada por una persona cada vez que estudia una OM (posición del alumno), o cuando ayuda a estudiar a otros dicha OM (posición del profesor). Una particularidad de las OD –que las distingue en cierto sentido de las OM– es la de estar formadas por tareas y técnicas *forzosamente cooperativas* puesto que la utilización efectiva de una OD requiere la cooperación, aunque sea virtual, de distintos actores que ocupan *dos posiciones claramente diferenciadas*: la del profesor y la del alumno. A pesar de existir el estudio como actividad individual, en el que una misma persona ejerce de director de estudio y de estudiante, el caso general es el de toda una comunidad de estudio con uno o varios miembros destacados que ejercen de director. Según si nos centramos en la posición del profesor en cuanto director de estudio o en la posición del alumno estudiante, podemos distinguir entre la Praxeología Didáctica que utiliza el profesor (Praxeología *Docente*) o la Praxeología Didáctica que utiliza el alumno (Praxeología *Discente*).

El hecho de distinguir las técnicas didácticas de las técnicas matemáticas por su carácter cooperativo no significa que ignoremos que muchas actividades matemáticas también requieren la cooperación de varios autores. Existen actividades matemáticas en las que se hace un uso rutinario de una OM previamente construida y pueden realizarse en solitario, a condición de tener las herramientas adecuadas para ello. Pero las actividades que se consideran más "genuinamente matemáticas", como por ejemplo plantear problemas abiertos, descubrir nuevas propiedades y demostrarlas, definir nociones nuevas, etc., forman parte del proceso de construcción de nuevas OM y, por ello, tienen un carácter claramente cooperativo y deben considerarse como actividades didáctico-matemáticas.

Digamos, para concluir esta sección, que el *modelo unitario* de las Praxeologías (que incluye, en particular, a las *Matemáticas* y a las *Didácticas*) también se extiende a la estructura de las asociaciones sucesivas de Praxeologías que originan la complejidad creciente de éstas. En efecto, las Organizaciones o Praxeologías más elementales se llaman *puntuales* y están constituidas alrededor de lo que en determinada institución es considerado como un único tipo de tareas. Cuando una Praxeología se obtiene por integración de cierto conjunto de Praxeologías *Puntuales*, tales que todas ellas aceptan un mismo discurso tecnológico θ, diremos que tenemos una Organización o Praxeología *local* caracterizada por dicha tecnología θ. En la TAD se habla también de Praxeologías *regionales*, constituidas alrededor de lo que en una institución determinadas es considerado como una “teoría” Θ, y hasta de praxeologías *globales* (formadas por la agregación de varias organizaciones regionales correspondientes a varias teorías Θ_k), pero en este trabajo nos centraremos especialmente en el paso de las Praxeologías *puntuales* a las *locales* y sólo incidentalmente nos referiremos a las Praxeologías Regionales.

Queremos subrayar la importancia y la utilidad de las nociones de Praxeología *puntual* y *local* para el caso de las Praxeologías Didácticas y para el análisis, que iniciamos en esta memoria, del paso de las OD *puntuales* (constituidas alrededor de un único tipo de tareas didácticas) a las OD *locales* (obtenidas mediante la integración de un conjunto de OD *puntuales* que comparten una misma tecnología didáctica). Veremos que los mecanismos que permiten integrar las OD *puntuales* en OD más amplias y completas requieren, como no podía ser de otra forma, una completación simultánea de las OM involucradas.

2.2. Relatividad institucional simultánea de lo matemático y lo didáctico

Una de las consecuencias más importantes de la Teoría de la Transposición Didáctica es la *relatividad institucional del saber matemático*. Dicha relatividad nos descubre el terrible secreto de la no identidad entre las Organizaciones Matemáticas “sabias” y las “efectivamente enseñadas”. Como dicen Bosch y Gascón (2006a):

> Para que cierto conocimiento sea enseñado en la escuela es necesario un *trabajo transpositivo* que haga posible que algo que no fue creado para la escuela sufra los cambios necesarios para poder ser reconstruido dentro de la escuela. El proceso de transposición didáctica comienza lejos de la escuela, en la elección de los cuerpos de conocimiento que se desea transmitir. Una vez realizada la elección, se genera un tipo de trabajo claramente creativo –no una mera “transferencia”, adaptación o simplificación–, que se puede describir como un proceso de deconstrucción y reconstrucción de los diferentes elementos de esos conocimientos, con el objetivo de hacerlos “enseñables”, preservando su potencia y funcionalidad. El trabajo transpositivo lo llevan a cabo una pluralidad de agentes –la “noosfera”– incluyendo los responsables de diseñar e implementar los planes de estudio, los matemáticos o científicos productores del conocimiento matemático, los miembros del sistema de enseñanza (profesores en particular), y todo esto bajo unas condiciones históricas e institucionales que no son siempre fáciles de discernir. Es un trabajo necesario para que la enseñanza sea posible, pero es también la fuente de muchas restricciones sobre el tipo de enseñanza que se puede

> impartir, sobre las actividades matemáticas que es posible o imposible llevar a cabo en la escuela. La limitación más fuerte ocurre cuando el proceso de transposición no es capaz de mantener o recrear una posible "razón de ser" de los conocimientos que la escuela se propone transmitir. ¿Por qué son tan importantes los triángulos? ¿Para qué sirven los límites de funciones? ¿Por qué necesitamos los polinomios?

Queda claro que la citada relatividad debe ser interpretada simultáneamente como una relatividad de la estructura de las organizaciones matemáticas (OM) enseñadas y de las formas posibles de organizar el estudio de las mismas, esto es, de las organizaciones didácticas (OD). La transposición didáctica comporta, en definitiva, una *relatividad institucional simultánea de lo matemático y de lo didáctico*. Esta relatividad institucional conjunta proviene del hecho de que las restricciones y condiciones específicas que cada institución **I** impone sobre la reconstrucción en **I** de una OM determinada, se materializan en la *relación institucional* de OM a **I**, esto es, en el *sistema de prácticas matemáticas* que pueden llevar a cabo los sujetos de **I** con los componentes de OM.

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1992) distingue entre las diferentes *posiciones institucionales* (*ideales*) *p* de los sujetos de **I** y considera diferentes relaciones institucionales $R_{\mathbf{I}}$ (*p*, OM) para cada una de dichas posiciones ideales de los sujetos. Cada una de estas relaciones institucionales está caracterizada por el *sistema de prácticas matemáticas* que puede llevar a cabo en **I**, con los componentes de OM, un sujeto en posición *p*. En esta memoria hablaremos, más genéricamente, de la relación institucional de **I** a OM, $R_{\mathbf{I}}$ (OM), entendida como el sistema de prácticas matemáticas que pueden llevar a cabo los sujetos de **I** con los componentes de la OM en cuestión, independientemente de su posición institucional.

Es obvio que las condiciones y restricciones específicas que se imponen desde dentro o son impuestas desde fuera de cada institución docente **I**, al condicionar el sistema de prácticas matemáticas que es posible realizar con OM en dicha institución, transforman simultáneamente la naturaleza de los componentes de OM (esto es, las tareas matemáticas que pueden plantearse en **I** como tareas problemáticas, las técnicas disponibles en **I** para abordar dichas tareas y el tipo de discursos que los sujetos de **I** pueden utilizar –de manera más o menos explícita– para describir, justificar e interpretar su práctica matemática) y la estructura y la dinámica de las posibles formas de organizar el estudio de OM en **I**. Así, por ejemplo, si en una institución docente determinada se restringe enormemente la posibilidad de llevar a cabo ciertas tareas matemáticas necesarias para que los sujetos de dicha institución *rutinicen* las técnicas matemáticas[8] impidiendo así el consiguiente desarrollo de las mismas en manos de los estudiantes, entonces se está dificultando la posibilidad de organizar el proceso de estudio en base al trabajo *autónomo* de los estudiantes.

Recíprocamente si, por economía didáctica, en una institución docente determinada se potencia, por ejemplo, el "encuentro cultural-mimético" con las OM y se restringe fuertemente el "encuentro en situación" (Chevallard 1999), entonces es muy difícil que los estudiantes puedan llevar a cabo determinadas *tareas matemáticas* relativas a la *planificación, gestión y evaluación del proceso*. En particular, es muy difícil que los estudiantes lleven a cabo la tarea matemática de reformular las cuestiones matemáticas que plantea el profesor y que evalúen las repuestas provisionales que van apareciendo.

Esta relatividad institucional simultánea de lo matemático y lo didáctico también puede ser interpretada como sigue: habitualmente la $R_{\mathbf{I}}$ (OM) condiciona (y está condicionada por) la manera como es interpretada OM en **I**, esto es, el *modelo epistemológico específico* de OM, *dominante* en I. Este modelo suele ser transparente e incuestionable para los sujetos de **I** y, dado que éste es el modelo que sustenta la OD *espontánea asociada* a OM en **I**, esto es, la forma espontánea de organizar en **I** el proceso de estudio de OM, es obvio que las restricciones sobre la $R_{\mathbf{I}}$ (OM) se transmitirán directamente sobre restricciones que afectan a las posibles formas de estudiar OM en **I**.

Recíprocamente, el modelo docente espontáneo en **I** puede llegar a modificar la relación institucional $R_{\mathbf{I}}$ (OM) (para todas las OM) y, en consecuencia, transformar la manera como los sujetos de **I** interpretan OM.

Así, por ejemplo, si el modelo docente espontáneo tiene un fuerte componente *modernista* (Gascón 1994 y 2001), entonces en el modelo epistemológico específico (dominante en **I**) de una OM, tenderán a desaparecer los *tipos de problemas* y las estrategias sistemáticas y compartidas, útiles para resolver cada uno de dichos tipos de problemas. En su lugar, OM tenderá a ser interpretada en **I** como un universo de

[8] Esta restricción es muy poderosa en las instituciones docentes actuales y tiene su origen en el nivel pedagógico. Se basa en uno de los eslóganes o consignas que componen una ideología que, para simplificar, se ha denominado "*generalismo pedagógico*" y que ocupa una posición dominante en la cultura escolar (Bosch y Gascón 2006a). Según esta ideología, el trabajo rutinario es aburrido, mata la "creatividad" y provoca, presuntamente, la alienación matemática de los estudiantes.

problemas aislados y “abiertos” cuya resolución requiere en cada caso la elaboración creativa de una estrategia específica.

2.3. Unidad de análisis de los procesos didácticos

La relatividad institucional simultánea del saber matemático constituye un aspecto importante de la determinación recíproca (o codeterminación) entre lo matemático y lo didáctico. Pero sólo puede ser analizada adecuadamente si, tomando distancia, el didacta se sitúa en una posición que le posibilite la necesaria *emancipación epistemológica e institucional* en relación a las instituciones que sirven de hábitat a sus objetos de estudio (Chevallard, 2006). Es desde esta posición “exterior” a las instituciones que forman parte de su objeto de estudio desde la que se debe elaborar el Modelo Epistemológico de Referencia que permite al investigador estudiar la vida intrainstitucional e interinstitucional de las OM a lo largo de todas las etapas de la transposición didáctica:

OM sabia	→	**OM a enseñar**	→	**OM enseñada**	→	**OM “aprendida”**
I_1		**I_2**		**I_3**		**I_4**

En este esquema, tomado de Bosch y Gascón (2005), **I_1** es la institución *productora* del saber matemático, **I_2** la *noosfera*, **I_3** la institución *escolar* e **I_4** la *comunidad de estudio* protagonista del proceso didáctico. El “saber aprendido” está compuesto por aquellos elementos praxeológicos que, al final del proceso didáctico, integrarán el *medio matemático del grupo* y que, por lo tanto, podrán ser utilizados (por la comunidad de estudio) de manera relativamente no problemática para la realización de nuevos tipos de tareas y para el estudio de nuevas cuestiones. Mientras que algunas teorías didácticas tienden a circunscribir en **I_4** la *unidad de análisis* de los procesos didácticos (incluyendo, a lo sumo, algunos aspectos de **I_3**), la TAD postula que no es posible explicar las características del “saber aprendido” (ni ninguno de los fenómenos didácticos que emergen en **I_4**) sin tomar en consideración todas las etapas de la transposición (Bosch y Gascón, 2005).

En este trabajo los autores citados muestran que la unidad de análisis elegida ocupa un lugar central y privilegiado en la relación entre la teoría y los datos empíricos y constituye así uno de los rasgos esenciales para caracterizar la disciplina en cuestión puesto que determina en gran parte:

- El tipo de *datos empíricos* que se van a tener en cuenta (y los que se van a ignorar).
- Las formas posibles de interpretar dichos datos.
- El tipo de relaciones que se van a priorizar en el análisis y que serán, en última instancia, relaciones entre elementos constitutivos de la unidad elegida.
- El tipo de problemas que la disciplina va a considerar.

En la TAD se postula que la *unidad de análisis* de los procesos didácticos debe contener una organización didáctica escolar que permita construir, como mínimo, una OM *local relativamente completa*. Dicho en otras palabras, para describir e interpretar los hechos didácticos hay que referirlos a una secuencia del proceso didáctico que incluya, por lo menos, el proceso de reconstrucción escolar de una tal OM local relativamente completa. En Fonseca (2004) se introduce la noción de "*completitud relativa*" de una OM local. No existen OM locales "*completas*" ni "*incompletas*" en un sentido absoluto. Se trata, en todos los casos, de una cuestión relativa, de grado: existen OM locales más o menos "completas" que otras en función del grado en que sus componentes cumplen las condiciones descritas por los siete indicadores siguientes:

(1) Integración de los diferentes tipos de tareas.
(2) Existencia de diferentes técnicas para realizar un mismo tipo de tareas y posibilidad de elegir entre ellas.
(3) Independencia (relativa) entre las técnicas matemáticas y los ostensivos que se utilizan para describirlas y para aplicarlas.
(4) Posibilidad de invertir las técnicas matemáticas para realizar las tareas "inversas".
(5) Existencia de las tareas consistentes en interpretar el resultado de aplicar las técnicas.
(6) Existencia de tareas matemáticas "abiertas" de modelización.
(7) Incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica matemática.

Si nos fijamos en el *proceso* de construcción, y no sólo en el *producto* construido, el grado de completitud de una OM local depende del cumplimiento de las condiciones "didácticas" formuladas en términos de los seis momentos o dimensiones de la actividad matemática, que son descritos brevemente en la sección 2.1.3. (Bosch, Fonseca y Gascón, 2004).

Además, como la *unidad de análisis* de los procesos didácticos debe contener una organización didáctica escolar que permita construir, como mínimo, una OM *local relativamente completa*, podemos precisar un poco su dinámica. En efecto, una tal OM local puede reconstruirse "artificialmente" en la institución escolar como el resultado final de un proceso de *ampliaciones* y *completaciones progresivas* que, partiendo de una praxeología *puntual*, pase por una serie de praxeologías intermedias generadas sucesivamente por un determinado desarrollo evolutivo de las cuestiones problemáticas y los tipos de tareas asociados que serán las "razones de ser" de la OM local en $\mathbf{I_3}$. Por lo tanto, la *organización* (o *praxeología*) *didáctica* OD = δ(OM), asociada a dicha OM local, contiene en cierta forma a la OM local y a todas las OM que la preceden en el proceso de construcción. Podemos tomarla, provisionalmente, como la *unidad de análisis de los procesos didácticos.*

La elección de la praxeología didáctica δ(OM), asociada a una OM local relativamente completa, como unidad de análisis de los procesos didácticos, comporta la aceptación implícita de determinadas hipótesis sobre el funcionamiento de dichos procesos y, también, sobre la naturaleza de lo que la TAD considerará como "problemas didácticos".

El principal argumento para justificar esta elección está basado en la unidad estructural de los componentes matemático-didácticos de δ(OM), esto es:

(a) En el carácter indisociable de los diferentes elementos que componen una OM local relativamente completa, tanto entre los bloques práctico-técnico y tecnológico teórico, como entre los componentes internos de cada uno de los bloques.

(b) En la unidad funcional de la praxeología didáctica que hace posible, gracias a la dinámica interna de los momentos o dimensiones del proceso de estudio, reconstruir OM locales relativamente completas en una institución escolar determinada.

Podemos decir, en resumen, que el criterio en que nos basamos para elegir la unidad de análisis de los procesos didácticos descansa sobre el postulado de la unidad estructural y funcional entre las OM locales relativamente completas y las OD = δ(OM) asociadas (Bosch, Fonseca y Gascón, 2004). Éste constituye, por tanto, un argumento adicional a favor de la *densidad de lo matemático en lo didáctico*, siempre que nos situemos, al menos, en el ámbito de las praxeologías locales relativamente completas. Es obvio que si analizamos una tarea matemática *puntual*, *completamente aislada* de las OM en las que podría tomar sentido y del proceso de reconstrucción de dichas OM en una institución determinada, entonces esta actividad aparecerá como desligada de las restricciones didácticas y el análisis tenderá prioritariamente a buscar las explicaciones de los hechos observables en factores cognitivos, motivacionales o actitudinales de los sujetos que intervienen en dicha actividad. En este contexto la *densidad de lo matemático en lo didáctico* pasará completamente desapercibida, aunque deberíamos preguntarnos hasta qué punto una tarea matemática puntual y aislada, como la que hemos descrito, puede ser considerada plenamente como una *actividad matemática* (esto es, si la comunidad matemática la considerará como tal).

Generalizando la observación anterior, podemos incluso postular una relación directa entre la amplitud (y la naturaleza) de lo que cada teoría didáctica toma como unidad de análisis de los procesos didácticos y la posición de dicha teoría en el continuo limitado por los Programas Cognitivo y Epistemológico de investigación en didáctica de las matemáticas.

A lo largo de esta memoria, en coherencia con lo que la TAD considera como posibles "problemas didácticos", todos los problemas que abordaremos se situarán en un nivel amplio que abarcará, al menos, el ámbito de las praxeologías locales relativamente completas.

3. FORMULACIÓN DE UN NUEVO TIPO DE PROBLEMAS DIDÁCTICOS

En muchas de las investigaciones desarrolladas hasta aquí en el ámbito de la TAD se han elaborado Modelos Epistemológicos de Referencia para diseñar, gestionar y evaluar determinados procesos didácticos. En cada caso se ha utilizado dicho modelo para describir y analizar el modelo epistemológico dominante en la institución docente en cuestión y, también, para dar cuenta de las restricciones que dicho modelo (reflejado en la relación institucional a la OM en cuestión) provocaba en las posibles formas de estudiar OM en la institución considerada. Pero, en todos los casos, el *problema de investigación didáctica planteado* estaba centrado en el análisis de fenómenos didácticos específicos del proceso de estudio de una OM *determinada* en una institución *particular*.

Un ejemplo paradigmático de este tipo de investigaciones se inició con el estudio de la enseñanza del *álgebra* en la Enseñanza Secundaria Obligatoria (E.S.O.) española. En este caso (Bolea, 2003 y Bolea, Bosch y Gascón, 2001) se muestra la influencia del *modelo epistemológico específico del álgebra escolar* dominante en la E.S.O. – y que hemos designado con la etiqueta de "*aritmética generalizada*" –, sobre las organizaciones didácticas que existen en esta institución escolar. Se interpreta entonces este modelo como una parte esencial del bloque tecnológico-teórico de la praxeología didáctica escolar espontánea asociada, esto es, como un componente importante del discurso que pretende justificar, interpretar y engendrar las técnicas didácticas disponibles actualmente en la institución de la E.S.O. para organizar el proceso de estudio del álgebra escolar.

En el Modelo Epistemológico de Referencia elaborado para llevar a cabo esta investigación, el álgebra escolar no aparece inicialmente como una OM al mismo nivel que las otras organizaciones que se estudian en la E.S.O.. El álgebra se describe así inicialmente como un *instrumento de modelización* de otras OM que, por tanto, deben preexistir y constituye un ejemplo paradigmático de la inseparabilidad de lo matemático y lo didáctico:

(a) Por una parte el álgebra, como instrumento de modelización, permite estudiar determinadas OM y, por tanto, puede ser considerada como una *técnica didáctica* (o *técnica de estudio*) que se integra como un componente del bloque práctico-técnico de la OD asociada.

(b) Al mismo tiempo el álgebra (inicialmente como instrumento de modelización y posteriormente las OM "algebrizadas" que se construyen con este instrumento), puede también considerarse como un "contenido" matemático que debe ser objeto de estudio en sí mismo. Se trata, en definitiva, de un buen ejemplo de *codeterminación matemático-didáctica* a un nivel poco estudiado en didáctica de las matemáticas.

De modo más general, si tenemos en cuenta el conjunto de investigaciones llevadas a cabo por nuestro equipo hasta este momento en el ámbito de la TAD (Bolea, Bosch, Gascon 2001, Bolea 2003, Bosch, Espinoza, Gascón 2003, Bosch, Fonseca, Gascón

2004, Fonseca 2004, García 2005, Rodríguez 2005), podemos afirmar que, en todas ellas:

(a) Se construye un MER como sistema de referencia relativo y provisional pero no se plantea específicamente el *problema de las fuentes y los criterios* que se utilizan en el proceso de elaboración de dicho MER.

(b) Se utiliza dicho MER para diseñar, gestionar y evaluar un proceso didáctico, pero no se plantea sistemáticamente el problema general del *papel y las funciones que desempeña el MER* en el análisis didáctico-matemático.

(c) Se postula, como consecuencia de la Teoría de la Transposición Didáctica, la *relatividad institucional* de los conocimientos matemáticos, pero no se trata explícitamente el problema teórico-experimental de contrastar dicha relatividad mediante la *variación sistemática de la institución docente* en la que se pretende reconstruir cierta OM.

(d) Se evidencia la importancia crucial de integrar la "razón de ser" de la OM que se pretende reconstruir (esto es, las cuestiones a las que dicha OM responde) en el proceso de estudio de las mismas y se estudian algunos de los fenómenos didácticos indeseables que aparecen cuando en las organizaciones didácticas espontáneas escolares se "olvida" dicha razón de ser. Pero no se propone explícitamente el problema de la *relatividad institucional* de dicha "razón de ser" ni el de las relaciones de ésta con el modelo epistemológico de OM dominante en la institución en cuestión.

(e) Se muestra, por fin, la existencia de determinados aspectos de la codeterminación entre lo matemático y lo didáctico, pero no se plantea el problema de los *mecanismos que activan dicha determinación recíproca*.

La razón por la cual no se han planteado hasta el momento este tipo de problemas didácticos deberíamos buscarla, en primera instancia, en el hecho de que las nociones que involucran (como, por ejemplo, "Modelo Epistemológico de Referencia", "relatividad institucional del saber matemático", "razón de ser de una organización matemática" y "codeterminación entre lo matemático y lo didáctico") se han utilizado como nociones "paradidácticas", esto es, como nociones que aparecían en el discurso didáctico como instrumentos para analizar y estudiar otras nociones, pero que nunca se proponían como objetos didácticos merecedores de estudio en sí mismos[9].

En lo que sigue formularemos un nuevo tipo de problemas de investigación didáctica en el cual dichas nociones ocuparán un lugar central como nociones "didácticas" de pleno derecho.

3.1. El proceso de elaboración del Modelo Epistemológico de Referencia

El problema de indagar las *fuentes y los criterios* que se utilizan en el proceso de elaboración de un Modelo Epistemológico de Referencia (MER) es completamente nuevo. Algunos trabajos anteriores han puesto de manifiesto, como ya hemos indicado, algunas condiciones metodológicas que requiere dicha elaboración como, por ejemplo, la necesidad de "tomar distancia" y situarse en una posición "exterior" a las instituciones que forman parte integrante del objeto de estudio del didacta, condición imprescindible para el estudio crítico de la ecología de las organizaciones matemáticas a lo largo de todas las etapas y en todas las instituciones que intervienen en la transposición didáctica. Pero en ningún caso se ha abordado el problema de los criterios subyacentes a la construcción de un MER ni de las fuentes que proporcionan las herramientas necesarias para llevar a cabo dicha construcción.

En esta memoria nos proponemos estudiar el proceso de construcción de ciertos Modelos Epistemológicos de Referencia en dos casos particulares: el de los Sistemas de Numeración (capítulos II, III y IV) y, en menor extensión, el de la Medida de Magnitudes Continuas (capítulo V). Para ello utilizaremos los trabajos que, sobre estos dos temas, se han desarrollado en el ámbito de la Teoría de las Situaciones Didácticas por Guy Brousseau y sus colaboradores. Mostraremos en qué forma, las herramientas que proporciona la Teoría Antropológica de lo Didáctico permiten explicitar aspectos esenciales de los MER que están en el origen de los citados trabajos y cómo, al explicitar estos modelos, se puede avanzar en el diseño, la gestión, el análisis y la evaluación de los correspondientes procesos didácticos.

Nuestra manera de interpretar, desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico, las propuestas elaboradas desde la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) se basa en un

[9] La noción de "objeto paradidáctico" fue introducida en Gascón (1998) en analogía a la de "objeto paramatemático" que proviene de la Teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard 1985).

postulado implícito no sólo de compatibilidad sino de complementariedad entre ambas teorías. De hecho, la tesis central de nuestro trabajo –la *inseparabilidad* entre lo matemático y lo didáctico– se materializa en la TSD mediante uno de sus postulados centrales: la modelización de los conocimientos matemáticos en términos de *situaciones* que incluyen las condiciones de utilización de dichos conocimientos así como las restricciones institucionales que pesan sobre los mismos. Podemos reformular lo anterior afirmando que, en la TSD, *la situación didáctica* constituye, de hecho, la *unidad de análisis* de los procesos didácticos.

A fin de interpretar adecuadamente nuestra "traducción" e interpretación de los trabajos llevados a cabo en el ámbito de la TSD es muy importante no perder de vista que, en el caso de la TAD, dicha inseparabilidad entre lo matemático y lo didáctico se materializa también en la estructura y la extensión de la *unidad de análisis de los procesos didácticos* que hemos descrito con cierto detalle en la sección anterior. Por tanto, y a pesar de que será inevitable hablar de "tareas matemáticas" (como de "tareas didácticas") y formularlas como si pudiesen existir por sí mismas, es esencial tener presente en todo momento que para la TAD las "tareas" y los "tipos de tareas" sólo toman sentido en el ámbito de una *praxeología* que, a su vez, debe ser interpretada en el seno de una institución. En última instancia, las tareas matemático-didácticas deben interpretarse en el ámbito de la OD = δ(OM) que constituye su unidad mínima de análisis.

En esta memoria evitaremos el problema de la confrontación entre teorías que requeriría situarse en un nivel de análisis meta-teórico. Muy al contrario, en el caso particular de la TSD y la TAD, consideramos que la formulación y el estudio de problemas didácticos concretos, siempre y cuando se lleve a cabo partiendo de la *base empírica que ambas teorías comparten*, permitirá iniciar el camino que contribuirá al avance conjunto de dichas teorías.

Veremos que, tanto en el caso de los Sistemas de Numeración como en el de la Medida de Magnitudes Continuas, el MER puede expresarse en forma de una sucesión de praxeologías que corresponden a la elaboración de *respuestas parciales* a una cuestión problemática inicial. Cada praxeología de la sucesión surge como ampliación o desarrollo de la praxeología anterior, ante las limitaciones de ésta para aportar respuestas a las cuestiones que se plantean. Esta dinámica es la que permite poner de manifiesto la "razón de ser" de cada praxeología, puesto que ésta radica precisamente en las limitaciones de la praxeología anterior.

Además, el hecho de que el contenido de la enseñanza de las matemáticas (lo que clásicamente se denominaba el "currículum de matemáticas") se formule en términos de sucesiones de praxeologías modifica la distinción habitual entre la *construcción del conocimiento* –considerado como "lo pedagógico" e identificado con "lo didáctico"– y el *conocimiento efectivamente construido* –que, en nuestro caso, se identificaba con "lo matemático"–. En efecto, si realmente queremos incorporar en la construcción de cada praxeología la "motivación" u origen de su razón de ser, (esto es, las cuestiones generatrices de la misma a las que dicha praxeología responde) entonces toda la sucesión construida (incluyendo las sucesivas respuestas parciales a dichas cuestiones) pasa a constituirse en objetivo de enseñanza. Dicho en otros términos, el objetivo de la enseñanza no se sitúa al final del proceso didáctico: el objetivo es el proceso didáctico en sí mismo.

3.2. Funciones del Modelo Epistemológico de Referencia (MER) en el análisis, diseño y evaluación de Organizaciones Didácticas

El papel y las funciones que desempeña el MER en el análisis didáctico son más conocidos. Algunas investigaciones anteriores desarrolladas en el ámbito de la TAD han mostrado su utilidad en lo que respecta al diseño, gestión y evaluación de determinadas Organizaciones Didácticas (Bolea 2003, Espinoza 1998, García 2005). Incluso podemos afirmar que dichas investigaciones, si bien de una manera no tan explícita, han utilizado el MER para describir y analizar, al menos "en acto", el modelo epistemológico de las matemáticas (específico de una OM determinada) dominante en una institución, así como para analizar e interpretar los fenómenos transpositivos que han transformado la OM transpuesta, dando origen a un determinado sistema de prácticas matemáticas institucionales.

En el caso de la investigación llevada a cabo por Pilar Bolea (2003), el modelo del álgebra como proceso de algebrización de Organizaciones Matemáticas que hemos citado anteriormente, permitió tanto delimitar como poner en evidencia el paradigma dominante en la enseñanza secundaria española que concibe el álgebra como una *aritmética generalizada*. De este modo, se pudieron analizar con precisión las restricciones transpositivas que pesan sobre la enseñanza de la modelización algebraica y que contribuyen a explicar su ausencia en la enseñanza española actual (Bolea, Bosch, Gascón 2004). El trabajo posterior de Javier García (2005) desarrolla el MER sobre el proceso de algebrización para abarcar las primeras modelizaciones funcionales de la matemática escolar de Secundaria.

Este modelo presenta la "proporcionalidad" como un modelo funcional entre magnitudes, al lado de (y en contraste con) otros posibles modelos: afín, cuadrático, exponencial. El MER propuesto sugiere posibles procesos didácticos para iniciar el estudio de la *modelización funcional* en secundaria, uno de las cuales es abordado y evaluado experimentalmente. Del mismo modo, la investigación de Espinoza (1998) sobre la enseñanza de los límites de funciones en el bachillerato, parte de la elaboración de un MER que permite describir la "bicefalia" teórico-práctica de la OM a enseñar en torno a este concepto, con una práctica basada en el álgebra de los límites y un bloque tecnológico-teórico totalmente desconectado con esta práctica y ligado a la definición topológica o analítica de la noción de límite de función.

Pero el MER cumple funciones en el análisis didáctico que son menos conocidas y que también queremos abordar, al menos parcialmente, en esta memoria. Entre éstas hemos de destacar la de analizar y cuestionar explícitamente la "epistemología espontánea del profesor" que es generalmente un reflejo del modelo epistemológico dominante en la institución escolar. Este aspecto ya fue abordado por Bolea (2003) en relación a la visión corriente del álgebra como aritmética generalizada. Veremos aquí, en el caso de los Sistemas de Numeración, cómo el MER que propondremos permitirá poner en evidencia la "parcialidad" del modelo epistemológico dominante en la institución de la Formación de Maestros (capítulo III).

También veremos cómo la explicitación previa del MER sobre los Sistemas de Numeración guía el diseño, la gestión, la evaluación y el análisis de un proceso de estudio específicamente experimentado para tal propósito (capítulo III).

En el caso de la Medida de Magnitudes Continuas (capítulo V), la construcción del modelo epistemológico que se toma como referencia permite analizar un proceso de estudio diseñado y experimentado en el ámbito de la Teoría de las Situaciones Didácticas. En este caso el MER permite de nuevo analizar y cuestionar explícitamente la “epistemología espontánea del profesor” sobre la medida de magnitudes que refleja muy claramente el modelo epistemológico dominante en la institución escolar. Este modelo no sólo separa tres ámbitos de la actividad matemática subyacente (el universo de los *objetos medibles concretos*, el universo de los *procedimientos de definición de la aplicación medida* y el universo de la *estructura numérica*) con el consiguiente empobrecimiento de la actividad matemática posible, sino que además asigna al primero la categoría de “no matemático” y al segundo la de sólo “parcialmente matemático” con lo que impide integrar en el proceso de estudio de la medida de magnitudes su “razón de ser”.

3.3. Relatividad institucional de las Organizaciones Matemático-Didácticas

El problema de la relatividad institucional de las praxeologías ha sido bastante ignorado hasta la fecha, al menos en la problemática explícitamente formulada por las investigaciones anteriores en didáctica de las matemáticas. En esta memoria nos proponemos analizar la relatividad institucional conjunta de lo matemático y lo didáctico y para ello estudiaremos los efectos provocados por la *variación de la institución docente* en la que se pretende reconstruir una OM determinada.

A fin de examinar empíricamente cómo cambian las *restricciones institucionales* que se imponen en el desarrollo del proceso de estudio de una OM, hemos experimentado el mismo proceso didáctico en dos instituciones docentes distintas pero que mantienen una relación institucional muy similar con los Sistemas de Numeración (la Formación de Maestros y la Educación Secundaria Obligatoria). Complementariamente se han mostrado las variaciones necesarias para adaptar el MER inicial a la enseñanza de los Sistemas de Numeración en otra institución, el primer ciclo de la Educación Primaria, en la que la relación institucional a la OM en torno a los Sistemas de Numeración es muy diferente.

Tanto en el caso de los Sistemas de Numeración como en el de la Medida de Magnitudes, el estudio explícito de la relatividad institucional de las praxeologías matemático-didácticas se relaciona directamente con el análisis de las *restricciones transpositivas* que inciden, en cada caso, sobre el estudio que es posible llevar a cabo en cada una de las instituciones consideradas. Se trata de analizar cómo cambian las restricciones transpositivas que inciden sobre una praxeología matemático-didáctica cuando cambiamos la institución docente (Formación de Maestros, Segunda Etapa de la Educación Secundaria Obligatoria o Primer Ciclo de Primaria) que constituye el "destino" del proceso de transposición.

Podría decirse, por tanto, que empezaremos a plantear y estudiar el problema de la relatividad institucional de los efectos de la transposición didáctica sobre una praxeología determinada. En particular, empezaremos a abordar algunas cuestiones completamente novedosas:

(a) ¿Cómo se transforma la "razón de ser" de una Organización Matemática (esto es, las cuestiones a las que responde dicha OM) cuando ésta se propone para ser estudiada en diferentes instituciones docentes?

(b) ¿Hasta qué punto las posibles formas de organizar el estudio de una OM en una institución están determinadas por lo que en dicha institución se asume, explícita o implícitamente, como la "razón de ser" de OM?

(c) ¿Qué fenómenos didácticos aparecen en una institución docente en la que, a pesar de haber "olvidado" la razón de ser de una OM, se propone sin embargo OM para ser estudiada? ¿Cómo generar el proceso de estudio de dicha OM en la institución en cuestión?

(d) ¿Cuál es la *función latente*, esto es, las consecuencias no perseguidas explícitamente pero que se siguen de manera necesaria, del olvido de las razones de ser de las OM que se estudian y de la imposición artificial de cuestiones *inertes* (sin ninguna capacidad de generación)?

Diremos para acabar, que el objetivo general de esta memoria consiste en empezar a *tematizar* algunas nociones que se han mantenido hasta la fecha como nociones "paradidácticas" (como, por ejemplo, "Modelo Epistemológico de Referencia", "razón de ser de una praxeología" y "relatividad institucional de las praxeologías matemático-didácticas") y asignarles el papel de nociones didácticas de pleno derecho. De esta forma podremos empezar a plantear y abordar explícitamente los problemas didácticos que hemos descrito brevemente al final de este capítulo. Somos conscientes de que el alcance y la complejidad de este nuevo tipo de problemas sobrepasan con mucho el ámbito de esta memoria, pero pensamos que su formulación explícita y los primeros avances en su resolución, por limitados y parciales que sean, constituirán un primer paso en una de las direcciones de la investigación de la que nos tenemos que ocupar en el futuro.

CAPÍTULO II

UN MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERENCIA DE LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

En este capítulo presentamos una posible *reconstrucción racional* de la Organización Matemática (OM) en torno a los Sistemas de Numeración que nos servirá de Modelo Epistemológico de Referencia (en adelante MER) para el diseño, experimentación y análisis de los procesos de estudio que presentamos en el próximo capítulo. Ya hemos visto que todo MER debe elaborarse en base a las Organizaciones Matemáticas sabias que legitiman epistemológicamente el proceso de enseñanza de dicha OM. Pero la propia elaboración del MER constituye al mismo tiempo una herramienta de distanciamiento de dicha institución sabia al permitir a la investigación didáctica explicitar su propio punto de vista sobre el contenido matemático en juego en los procesos didácticos que se diseñan, implementan, analizan y evalúan. En particular, el MER debe tomar en cuenta la evolución histórica de las OM sabias, aunque sin copiarlas miméticamente. Siguiendo a Lakatos (1971), podemos considerar un MER como una "reconstrucción racional" de la evolución histórica de las OM consideradas, que "corrige" en cierta manera la evolución real. Además, dado que un MER es una herramienta para el análisis de procesos didácticos concretos, su construcción también debe tomar en consideración las restricciones que provienen de las instituciones escolares en las que la OM en cuestión es designada como OM "a enseñar".

Es importante subrayar que el MER que describiremos con detalle en este capítulo será, como todos, provisional, esto es, una hipótesis que deberá contrastarse con los datos empíricos y que estará sujeta a modificaciones permanentes. Y, además de provisional, es también un modelo *relativo*, elaborado por y desde la investigación didáctica para unos fines concretos y limitados. La teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1985, 1991) nos enseña que no existe un sistema privilegiado, absoluto, desde el cual observar y analizar la vida institucional (tanto intra como interinstitucional) de las organizaciones matemáticas[1].

[1] Ver también Bosch y Gascón (2006a).

Pero, de forma bastante análoga a lo que pasa en mecánica, la ausencia de un sistema de referencia absoluto no hace menos imprescindible la utilización de sistemas de referencia relativos, adecuados a cada institución.

En el siguiente capítulo, después de describir detalladamente un posible MER dinámico en torno a los SN, lo utilizaremos para describir y analizar la OM que se propone para ser enseñada (la OM "a enseñar") en torno a los SN en la institución de Formación de Maestros y, en coherencia con nuestra tesis de la determinación recíproca entre lo matemático y lo didáctico, pondremos de manifiesto la dependencia entre la forma de organizar el proceso de estudio de los SN (la Organización Didáctica (en adelante OD) asociada) y el modelo epistemológico específico, es decir, la manera de interpretar los SN en dicha institución.

En los restantes capítulos de esta memoria, el MER aquí construido constituirá el instrumento principal para diseñar, experimentar y evaluar diferentes procesos de estudio de la OM en torno a los SN en las instituciones de Formación de Maestros y de Educación Secundaria Obligatoria.

También mostraremos en el capítulo IV que, con las modificaciones pertinentes originadas por las características de la institución en la que se ha de llevar a cabo el proceso de estudio, este MER sustenta la OD en torno a los SN propuesta y experimentada por Brousseau y sus colaboradores (Deramecourt, Olejniczak, Martin, 1984; Destouesse, 1996-1997; Gairin-Calvo, 1988) en la institución de Enseñanza Primaria.

Postulamos que la explicitación del MER subyacente al diseño de un proceso de estudio permite interpretar mejor la actividad didáctica que se lleva a cabo (esto es, las tareas didácticas que se plantean y las técnicas didácticas – de ayuda al estudio – que se utilizan para llevar a cabo dichas tareas) y, lo que es más importante, proporciona criterios explícitos para modificar la OD en función de la relación entre la respuesta que proporciona en cada momento la comunidad de estudio y la dirección de desarrollo que marca el MER que, por supuesto, también puede ser modificada.

1. LA RAZÓN DE SER DE LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

1.1. La reconstrucción escolar de una Organización Matemática

Consideremos como punto de partida la siguiente cuestión matemática:

> *¿Cómo expresar el cardinal de una colección finita (es decir, el número natural) mediante una representación escrita que sea un instrumento útil para el desarrollo de la aritmética elemental?*

Es evidente que esta cuestión puede ser considerada como una simple demanda de información y zanjarse mediante una respuesta del tipo: *Para calcular, la mejor manera de expresar los números naturales es utilizando un sistema de numeración posicional*. Pero también nos podemos situar en el caso de alguien que no dispone de ninguna técnica para expresar los números naturales de una forma sencilla y eficaz o que, aún disponiendo de ella, la utiliza de forma naturalizada sin haberse cuestionado su pertinencia ni las razones que explican su eficacia. En estos casos, la cuestión se convierte en problemática y, al intentar resolverla, genera un tipo de tareas no rutinarias que designaremos con la letra **T**. Su resolución requerirá elaborar un conjunto de técnicas matemáticas τ, que, a su vez, deberán ser descritas, explicadas y justificadas mediante un discurso matemático que denominamos tecnológico-teórico y que designamos con la notación **[θ/Θ]**. Dicho con otras palabras, si consideramos la cuestión anterior en un sentido fuerte de "cuestión problemática que debe ser estudiada" y que no puede responderse dando una simple información, entonces se requiere *una respuesta en el sentido fuerte*, basada en la construcción de toda una Organización Matemática, es decir un conjunto de tipos de tareas o problemas, de técnicas o procedimientos para resolver estos problemas y de definiciones, propiedades y teoremas que permitan describir y justificar el trabajo realizado. Tal como hemos explicado en el capítulo I, utilizaremos la notación **OM = [T/τ/θ/Θ]** para designar una Organización Matemática generada por las tareas del tipo **T** (Chevallard, 1999).

El hecho de considerar una cuestión como la anterior en su sentido "fuerte", es decir apelando a la construcción de toda una Organización Matemática como posible respuesta o solución, no se zanja generalmente con aportar, construir o reconstruir una única OM. En realidad, el proceso de elaboración de posibles respuestas – es decir el proceso de *estudio* de dicha cuestión – pone generalmente en juego *sucesivas* OM, cada una de las cuales viene a corregir, complementar y/o desarrollar las anteriores. Nuestro objetivo aquí será mostrar cómo la evolución de las respuestas que se pueden aportar a la cuestión arriba mencionada se puede expresar en términos de la *ampliación progresiva de Organizaciones Matemáticas*. Y, lo que es más importante, veremos en qué sentido esta ampliación permite poner de manifiesto las "razones de ser" de nuestro sistema de numeración posicional.

En las instituciones escolares, sin embargo, las cuestiones matemáticas no se presentan ni como cuestiones que puedan zanjarse con una simple información, ni como cuestiones vivas que requieran la *construcción primigenia o inédita* de toda una Organización Matemática. Normalmente, estudiar una cuestión matemática en una institución de enseñanza **I** (incluyendo las de nivel universitario) consiste en *estudiar la Organización Matemática que otra institución* **I'** *propone como respuesta - en el sentido fuerte - a esta cuestión*. Pero, para llevar a cabo el estudio de la organización construida en **I'**, ésta debe ser *reconstruida* en **I** mediante una reconstrucción escolar que es "artificial", en el sentido de no primigenia. En otras palabras, la organización debe ser *transportada* o *transpuesta* de **I'** a **I**. Es lo que se llama el proceso de *Transposición Didáctica* de una Organización Matemática (Chevallard, 1985 y 1991).

Surge así un gran tipo de *problemas didácticos* del que nuestro problema concreto no es más que un caso particular:

> Dada una cuestión ***q*** que queremos que sea estudiada en una institución docente **I**, ¿cómo diseñar y gestionar el proceso de reconstrucción (que es un proceso de estudio) en **I** de las Organizaciones Matemáticas **OM** = [T/ τ/ θ/ Θ] que se dan como respuesta a dicha cuestión en otra institución **I**'?

En nuestro problema didáctico concreto, los parámetros ***q***, **I**, **OM** e **I'** toman los siguientes valores:

q **=** ¿Cómo expresar los números naturales mediante una representación escrita que sea un instrumento útil para el desarrollo de la aritmética elemental?

I = **IE** = Institución Escolar (que puede concretarse en la Formación de Maestros, la ESO o Primaria)

OM = $\mathbf{OM_p}$ = Organización Matemática en torno al Sistema de Numeración posicional (por ejemplo de base 10).

I' = Institución matemática sabia.

Es necesario indicar que ni la cuestión inicial ni la Organización Matemática u Organizaciones Matemáticas a construir son entidades que puedan quedar completamente delimitadas a priori.

1. 2. Una reconstrucción racional de los Sistemas de Numeración

Para empezar a estudiar la cuestión planteada, hay que clarificar qué entendemos por "un instrumento útil para el desarrollo de la aritmética elemental". Podemos afirmar, siguiendo a Ermel (1977), que para que una representación escrita de los números naturales sea eficaz debe permitir, como mínimo:

(A) Que la escritura de los números pueda hacerse de manera unívoca y cómoda. Para ello, es necesario que se utilicen "pocos" símbolos, de modo que sea fácil memorizarlos y que la longitud de las escrituras no haga difícil su lectura.

(B) Que la comparación de los números a partir de sus escrituras sea lo más fácil posible.

(C) Que la realización de los cálculos de las distintas operaciones sea económica, sencilla y fiable.

Parece razonable pensar que las cuestiones problemáticas y las tareas asociadas que acabarán siendo las "razones de ser" de $\mathbf{OM_p}$ en una institución escolar deberán extraerse de estas condiciones. Hay que señalar que, en algunos casos, los fenómenos de transposición han dado como resultado que algunas de las cuestiones problemáticas que dichas condiciones plantean hayan desaparecido de la actividad matemática que se lleva a cabo en dicha institución[2]. Por tanto, si queremos que las tareas asociadas a dichas cuestiones

[2] Así, por ejemplo, la cuestión "¿Cómo pueden representarse simbólicamente los números naturales para que la comparación a partir de sus escrituras sea lo más fácil posible?" ha desaparecido de la actividad matemática universitaria, debido a que el SN posicional resuelve de manera transparente dicha cuestión.

formen parte de las *razones de ser* de la reconstrucción "artificial" o "escolar" de **OM$_p$** en **IE**, entonces deberán estar presentes a lo largo del proceso de estudio. Para que ello sea posible, habrá que hacer vivir en **IE** determinadas organizaciones matemáticas *intermedias* en las que dichas tareas sean problemáticas y, por lo tanto, sean visibles las *razones de ser*.

Partiremos de un modelo del desarrollo (no necesariamente histórico) de las cuestiones problemáticas que queremos que sean las generadoras del proceso que nos lleve a la reconstrucción racional de **OM$_p$**. En nuestro caso, podemos esquematizar dicha evolución guiándonos por las categorías posibles de técnicas de representación escrita u oral de los números que se denominan *Sistemas de Numeración* y que convergen en el SN *posicional decimal*. Para considerar que dos categorías de Sistemas de Numeración son diferentes, tomaremos como criterio el que hagan aparecer (o desaparecer) determinadas cuestiones problemáticas y las tareas matemáticas correspondientes.

Consideraremos *tres grandes categorías de Sistemas de Numeración* que caracterizaremos matemáticamente como tales y que posteriormente presentaremos como técnicas útiles para contestar a ciertas cuestiones problemáticas y para llevar a cabo tareas matemáticas que generarán, respectivamente, varias organizaciones matemáticas diferentes.

Por ejemplo, Bourbaki (1969) considera que la técnica más frecuente de representación de los números son los Sistemas de Numeración tales que descomponen cada número natural en una suma de múltiplos de "unidades sucesivas" $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$, cada una de las cuales es un múltiplo entero de la anterior, y denomina "*base*" de estos Sistemas de Numeración al cociente $b = b_n / b_{n-1}$ cuando es independiente de n. Aquí utilizaremos este tipo de sistemas y también otros que no cumplen esta regla. En concreto, nos basaremos en la clasificación jerarquizada de los Sistemas de Numeración que propone Guitel (1975):

(1) Sistemas de Numeración de tipo I ("aditivos"). En este primer tipo las cifras son enteramente libres ya que la posición que ocupan no juega un papel relevante. Se trata de Sistemas de Numeración que, en principio, sólo disponen de cifras para 1, $b, b^2, b^3, b^4, b^5, \dots$, y en un segundo momento disponen de cifras para 1, $a, b, ab, b^2, ab^2, b^3, ab^3, b^4, \dots$, donde b es la *base del sistema de numeración*, y $a < b$ es un divisor privilegiado de b que recibe el nombre de *base auxiliar del sistema*. Dado que los Sistemas de Numeración "aditivos" sólo disponen de símbolos para representar las distintas potencias de la base y algunos de sus múltiplos, no permiten escribir cualquier número natural con un número finito de símbolos fijado de antemano. A medida que aumentan los números, se necesitan símbolos nuevos para representarlos. La operación que corresponde a la yuxtaposición de los símbolos es la adición. Ejemplos históricos de Sistemas de Numeración *aditivos* son el *sistema egipcio* y el *sistema romano*.

(2) Sistemas de Numeración de tipo II ("híbridos"). Se trata de sistemas en los que las cifras no son más que parcialmente libres ya que su posición tiene cierta importancia. Estos sistemas utilizan dos tipos de símbolos: los que representan las distintas potencias de la base b, es decir, b^0, b^1, b^2, b^3, b^4,..., y los que representan los multiplicadores de dichas potencias, o sea, 2, 3,..., $(b - 1)$, que juegan el papel de coeficientes[3] y siempre se colocan encima o delante de la potencia a la que multiplican (es aquí donde la posición es importante). En los sistemas "híbridos" cada número se representa como el valor numérico de un polinomio cuya indeterminada es la base b del sistema. Las operaciones que corresponden a la yuxtaposición de las cifras son la adición y la multiplicación, pero todavía no es posible escribir cualquier número natural con un número finito y predeterminado de símbolos. Ejemplos de Sistemas de Numeración "híbridos" son el *sistema chino* y nuestro *sistema decimal oral*.

(3) Sistemas de Numeración de tipo III ("de posición"). En este tipo de sistemas las cifras están encadenadas, es decir, su posición juega un papel esencial. Se trata de Sistemas de Numeración que sólo disponen de símbolos para representar los $b - 1$ primeros números naturales: 1, 2, 3,..., $(b - 1)$ que jugarán el papel de coeficientes de las potencias de la base b. Cada una de estas potencias b^i está representada por la posición i-ésima que ocupa un coeficiente dentro del grupo de símbolos que representa al número. Así, para indicar el número k (donde k varía entre 1 y $b - 1$) de unidades de cada b^i se utiliza un símbolo que sólo depende de k y para distinguir entre k unidades de b^i y k unidades de b^j se hace que el símbolo correspondiente ocupe la *posición i* (o la *posición j*) en la sucesión de cifras que representa el número en cuestión. Las operaciones que corresponden a la yuxtaposición de las cifras son la adición y la multiplicación. Los sistemas "de posición" permiten escribir cualquier número natural utilizando únicamente un número finito de símbolos determinado previamente.

[3] El número 1 no se utiliza como multiplicador ya que es innecesario.

Entre los Sistemas de Numeración de posición distinguiremos dos subtipos:

(3a) Los sistemas en los que un divisor *a* de la base *b* juega un papel privilegiado, y en los que sólo se dispone de símbolos para representar los números naturales 1 y *a*. Estos sistemas "de posición primitivos", como el *maya* y el *babilónico*, presentan ambigüedades ya que además, en un primer momento, no utilizan el *cero* como cifra, es decir, no utilizan ningún símbolo para indicar que faltan las unidades de un cierto orden.

(3b) Los Sistemas de Numeración "posicionales completos" que utilizamos actualmente como, por ejemplo, nuestro *sistema de numeración decimal*. Éstos aparecen cuando los anteriores *se completan con el cero* y con un símbolo para representar cada uno de los números más pequeños que la base *b*, y es por esta razón por la que hemos optado por llamarles *completos*.

Como hemos dicho anteriormente, en lugar de proponer una OM cristalizada, es decir un modelo epistemológico *estático* de $\mathbf{OM_p}$, propondremos un modelo epistemológico *dinámico* guiado por el desarrollo evolutivo de una sucesión de OM de modo que cada nueva OM amplía y "completa" relativamente los distintos componentes de la anterior hasta desembocar en $\mathbf{OM_p}$. Veremos que, en esta sucesión, cada OM encuentra su razón de ser en las limitaciones de la anterior.

La elección de las OM intermedias proviene del análisis detallado de la cuestión matemática de partida ***q*** y de las restricciones que impone el hecho que su respuesta deba ser reconstruida en una institución escolar determinada. Esto nos ha llevado a considerar *tres grandes categorías de Sistemas de Numeración*: "aditivos" ($\mathbf{OM_a}$), "híbridos" ($\mathbf{OM_h}$) y "de posición" ($\mathbf{OM_p}$), cada una de las cuales da origen a un nuevo eslabón en la sucesión de OM que, partiendo de una OM inicial rudimentaria ($\mathbf{OM_i}$), acaba desembocando en $\mathbf{OM_p}$:

$$\mathbf{OM_i} \rightarrow \mathbf{OM_a} \rightarrow \mathbf{OM_h} \rightarrow \mathbf{OM_p}$$

2. LOS SISTEMAS ADITIVOS

2.1. La Organización Matemática inicial en torno a un sistema aditivo rudimentario

El tipo de tareas que genera la Organización Matemática inicial (en adelante $\mathbf{OM_i}$) está asociado a cuestiones problemáticas muy elementales relativas a la *designación* de los números naturales que pueden describirse como sigue:

(1) ¿Cómo expresar los números naturales mediante símbolos de manera que no haya ninguna ambigüedad?

(2) ¿Cómo expresar los números naturales utilizando únicamente una “pequeña” cantidad de símbolos diferentes fijados de antemano?

(3) ¿Cómo expresar cada número natural mediante símbolos de manera que la cadena resultante no sea excesivamente “larga”?

A fin de producir una *técnica inicial* para abordar el tipo de tareas asociadas a dichas cuestiones, partiremos de *dos técnicas extremas* de representación de los números:

(a) Utilizar un único símbolo y repetirlo tantas veces como indica el número que queramos representar.

(b) Utilizar un símbolo diferente para cada número natural.

Un ejemplo de técnica **(a)** es la que consiste en la correspondencia término a término, donde cada objeto de la colección es representado por el símbolo I. Es un SN donde sólo se dispone de un símbolo y con él se puede representar cualquier número, por ejemplo, el 12 se representa IIIIIIIIIIII. Un ejemplo de técnica **(b)** es la que se utiliza en el conteo, usando las palabras-número de forma global, representando cada número por una palabra distinta: uno, dos, tres,…, diez, once, doce,…, dieciséis, etc. En esta técnica, por ejemplo, la palabra dieciséis se utiliza de forma global, sin considerar que es diez y seis, o también, para designar dieciséis se puede emplear la representación 16 como un todo, sin tener en cuenta el carácter posicional de las cifras utilizadas.

Está claro que la técnica **(a)** permite responder a **(1)** y **(2)** pero no a **(3)**, mientras que la técnica **(b)** permite responder a **(1)** y **(3)** pero no a **(2).**

Veamos ahora cómo el trabajo con estas técnicas extremas permitirá desarrollarlas y hacerlas evolucionar hacia técnicas intermedias que sean más útiles y eficaces para responder simultáneamente a las cuestiones **(1), (2)** y **(3)**. Si consideramos el uso del palote como único símbolo, el número 17 se representa mediante "IIIIIIIIIIIIIIIII". Esta técnica es la primera utilizada históricamente para describir los números, realizando muescas en un cayado o en una piedra. Es evidente que presenta fuertes limitaciones y resulta ineficaz cuando queremos describir y leer números de gran tamaño. Por ello, aparece una mejora de dicha técnica que consiste en realizar *agrupamientos* de un tipo fijo. Así, por ejemplo, para representar el número 17 haciendo grupos de 5, la aplicación de esta técnica proporciona la representación:

IIIII IIIII IIIII II

Si creamos un nuevo símbolo, por ejemplo "V", para representar al número cinco, se tiene la nueva representación "VVV II" que es más sencilla y que, por tanto, constituye una mejora de la técnica. Denominaremos τ_i a esta técnica primitiva de *un único tipo de agrupamiento* que utiliza un símbolo para designar al grupo que siempre está formado por el mismo número de objetos (en nuestro ejemplo cada grupo consta de cinco objetos) y la consideraremos como la técnica básica o *técnica inicial*. Esta técnica emplea sólo la operación de adición y es muy utilizada en la estadística descriptiva elemental para realizar recuentos de frecuencias absolutas.[4]

La técnica τ_i presenta muchas limitaciones, incluso antes de plantearse la cuestión de las operaciones aritméticas. Además de no dar una respuesta satisfactoria a la tarea **(3),** *tampoco permite la comparación sencilla de dos números* tarea que, como hemos dicho, es básica para una buena representación simbólica de éstos. De hecho, si tenemos dos números representados mediante la técnica τ_i y queremos compararlos utilizando sus expresiones

[4] En una actividad de recuento existen notaciones específicas para las agrupaciones, como: ~~||||~~.

escritas, no tendremos más remedio que acabar comparando colecciones mediante la técnica, un poco pedestre, de la *correspondencia término a término*.

Podríamos decir, en resumen, que la técnica inicial de representación de los números naturales, τ_i, sólo sirve para describir números pequeños y aporta una única novedad respecto a la representación "lineal" de los números (colección uniforme sin ningún tipo de agrupamientos): el empleo de *un único tipo de agrupamiento*, que ayuda a leerlos y describirlos un poco mejor. La primera evolución que consideraremos consistirá precisamente en repetir estos agrupamientos con los grupos de símbolos obtenidos previamente.

2.2. La Organización Matemática en torno a un sistema aditivo

Consideramos la técnica de numeración τ_a que utiliza agrupamientos de forma regular. Esto significa que τ_a utiliza sistemáticamente agrupamientos de primer orden y agrupamientos de agrupamientos de primer orden (agrupamientos de segundo orden) y así sucesivamente. Esta técnica de numeración τ_a puede ser considerada como una evolución de la técnica inicial τ_i y genera una nueva *organización*, $\mathbf{OM_a}$, desarrollada en torno a un sistema de numeración de tipo I ("aditivo") y cuya principal virtud consiste en que permite representar una gran cantidad de números naturales de una forma relativamente abreviada y sistemática. El tipo de tareas que genera $\mathbf{OM_a}$ está asociado a las cuestiones problemáticas descritas para $\mathbf{OM_i}$ y, en especial, a aquellas cuestiones problemáticas que no encontraban en $\mathbf{OM_i}$ una respuesta adecuada, tales como la cuestión **(3).** En esta nueva organización pueden plantearse nuevas cuestiones, como **(4), (5)**, **(6), (7) y (8)** aunque, como veremos, éstas tampoco pueden resolverse plenamente en $\mathbf{OM_a}$:

> **(1)** ¿Cómo expresar los números naturales mediante símbolos de manera que no haya ninguna ambigüedad?
>
> **(2)** ¿Cómo expresar los números naturales utilizando únicamente una pequeña cantidad de símbolos diferentes fijados de antemano?

(3) ¿Cómo expresar cada número natural mediante símbolos de manera que la cadena resultante no sea excesivamente larga?

(4) ¿Cómo comparar dos números mediante sus expresiones escritas?

(5) ¿Cómo representar los números naturales de manera que se simplifique el algoritmo de la operación suma?

(6) ¿Cómo representar los números naturales de manera que el algoritmo de la operación resta sea lo más sencillo posible?

(7) ¿Y para que se simplifique el algoritmo de la operación producto?

(8) ¿Y para que se simplifique el algoritmo de la operación división euclídea?

La nueva técnica $\boldsymbol{\tau_a}$ utiliza símbolos para designar "unidades de órdenes sucesivos" que se corresponden con las sucesivas potencias de la base. Si consideramos agrupamientos de 10 unidades, aparece un Sistema de Numeración similar al *egipcio* cuyos símbolos[5] I, A, B, C, D, E y F designan unidades sucesivas, cada una de las cuales es diez veces la anterior (aquí los símbolos representan a cada una de las 7 primeras potencias de la base, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5 y 10^6):

$$1 \rightarrow \text{I} \quad 10 \rightarrow \text{A} \quad 100 \rightarrow \text{B} \quad 1.000 \rightarrow \text{C}$$

$$10.000 \rightarrow \text{D} \quad 100.000 \rightarrow \text{E} \;\text{ y }\; 1.000.000 \rightarrow \text{F}$$

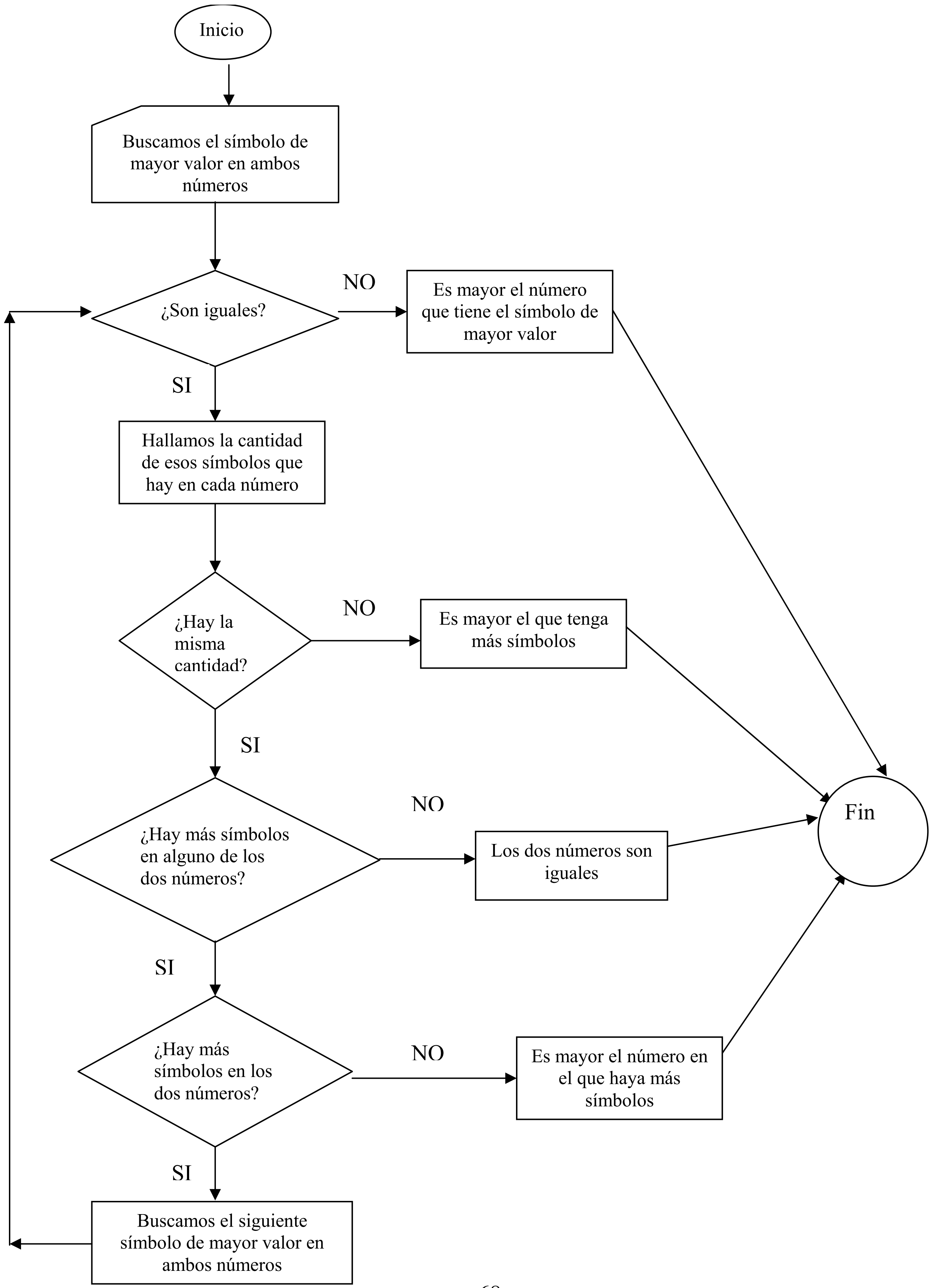
Con este sistema se resuelven las tareas asociadas a las cuestiones **(1)** y **(2)** de manera más económica y sencilla que con la técnica inicial $\boldsymbol{\tau_i}$. Pero para las tareas asociadas a la cuestión **(3),** aunque se mejora la respuesta, $\boldsymbol{\tau_a}$ sigue presentando dificultades ya que, por ejemplo, para representar el número 9.999.999 necesitamos 63 símbolos, es decir, 9 ejemplares de cada uno de los símbolos diferentes de que disponemos.

[5] Los símbolos que utilizamos en todo este trabajo generalmente no son los mismos que fueron usados históricamente. Dado que en este trabajo no pretendemos llevar a cabo un estudio histórico de los Sistemas de Numeración, nos servimos de símbolos más cómodos de representar.

2.2.1. La comparación de números en el sistema aditivo

Este sistema no permite dar una respuesta suficientemente eficaz a la cuestión **(4)** *¿Cómo comparar dos números mediante sus expresiones escritas*? Basta observar, por ejemplo, que para comparar dos números en $\mathbf{OM_a}$ no es suficiente con conocer la cantidad de símbolos necesarios para representar dichos números. El algoritmo *de comparación de dos números a partir de sus expresiones escritas* en $\mathbf{OM_a}$ se ha esquematizado en el organigrama de la página siguiente. También, cabe plantearse hasta qué punto $\mathbf{OM_a}$ responde a las tareas de cálculo en las diferentes operaciones (cuestiones **(5)**, **(6), (7) y (8)**). Veremos que, *si los números son* "*pequeños*", las tareas de sumar, restar, multiplicar y dividir pueden realizarse en $\mathbf{OM_a}$ de manera razonablemente económica, utilizando por ejemplo la designación de los números que proporciona el sistema de numeración *egipcio*. Pero estos algoritmos pierden rápidamente eficacia si se trata de calcular con números no tan "pequeños". A continuación veremos algunos ejemplos.

ALGORITMO DE COMPARACIÓN DE NÚMEROS EN OM$_a$



2.2.2. Sumar en el sistema aditivo

Para explicar un algoritmo de la suma en **OM$_a$**, lo haremos aplicándolo al caso de sumar 2675 + 3849. Para poder realizar la suma, primero será importante colocar de forma ordenada los símbolos, poniendo juntos los que son iguales.

2675	CC	BBB	AAA	III	*suma*
		BBB	AAA	II	
			A		
3849	CCC	BBB	AAA	III	
		BBB	A	III	
		BB		III	

Una vez representados ambos números de forma ordenada, se pasa a considerar el nuevo número que representan todos los símbolos juntos. Luego se hace un repaso por cada tipo de símbolo y cuando se tienen grupos de diez o más símbolos iguales se sustituye cada grupo de diez símbolos iguales por el símbolo que representa una unidad del agrupamiento de orden superior. Así se sustituye un grupo de diez I por una A, uno de diez A por una B, y así sucesivamente. Una vez realizadas todas las sustituciones se obtiene el resultado de la adición:

2675	CC	BBB	AAA	III
		BBB	AAA	II
			A	
3849	CCC	BBB	AAA	III
		BBB	A	III
		BB		III
6524	CCC	BBB	AA	III
	CCC	BB		I

2.2.3. Restar en el sistema aditivo

Utilizaremos el ejemplo de restar 8215 – 3627 para explicar un algoritmo de la resta en **OM$_a$**. Primero se escribe el minuendo, colocando de forma ordenada los símbolos y poniendo juntos los que son iguales:

8215	CCC	BB	A	III
	CCC			II
	CC			

A continuación, después de escribir de manera ordenada también el sustraendo, se descompone el minuendo de manera que se puedan eliminar tantos símbolos de cada orden como indica el sustraendo.

$$3627 \left\{ \begin{array}{llll} CCC & BBB & AA & III \\ & BBB & & III \\ & & & I \end{array} \right.$$

Como en nuestro caso el minuendo sólo tiene 2B, se debe descomponer una C en 10B para poder eliminar 6B. También el minuendo sólo tiene una A, para poder eliminar 2A debemos descomponer una B en 10A. Por último, como sólo tenemos 5 I en el minuendo y deben eliminarse 7 I, se descompone una A en 10 I:

$$8215 \left\{ \begin{array}{llll} CCC & B\ \cancel{B} & \cancel{A} & III \\ CCC & \left\{ \begin{array}{l} BBB \\ BBB \\ BBBB \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} AAA \\ AAA \\ AAAA \end{array} \right. & II \\ C\ \cancel{C} & & & \left\{ \begin{array}{l} IIIII \\ IIIII \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Una vez realizadas las descomposiciones, ya pueden eliminarse todos los símbolos que constituyen el sustraendo, esto es: tres C, seis B, dos A y siete I, obteniéndose:

$$4588 \left\{ \begin{array}{llll} CCC & BBB & AAAA & IIII \\ C & BB & AAAA & IIII \end{array} \right.$$

2.2.4. Multiplicar en el sistema aditivo

A continuación, se explica el funcionamiento de un algoritmo de la multiplicación realizando el cálculo: 37 × 245. El algoritmo se basa en realizar duplicaciones sucesivas de uno de los factores (el multiplicando, que se elige como el número mayor) y en agrupar estas duplicaciones hasta formar el otro término o multiplicador (el número menor). Hay que señalar que, antes de empezar a realizar el cálculo, se deben colocar de forma ordenada los símbolos de cada uno de los números que intervienen:

→ I	BB AAAA IIIII	BB AAAA IIIII ←
I I	BB AAAA A ~~IIIII~~ BB AAAA ~~IIIII~~	BB AAAA A BB AAAA
→ II II	BB AAAA BB B ~~AAAA A~~ BB ~~AAAA A~~ CC AAAA	BBBB B AAAA ← BBBB AAAA
IIII IIII	BBBB AAA B C ~~BBBBB~~ ~~AAAAA~~ ~~BBBBB~~ ~~AAAAA~~ BBBB AAA	BBBB B AAA C BBBB AAA
A ~~IIIII~~ III ~~IIIII~~ III	BBBB B CC ~~BBBBB~~ ~~AAAAA~~ ~~BBBBB~~ ~~AAAAA~~ C BBBB AA	CCC BBBBB AA BBBB
→ A A ~~IIIII~~ I A ~~IIIII~~ I	CCC BBBB AA ~~BBBBB~~ CCC C ~~BBBBB~~ BBBB AA	CCC BBBB AA ← CCCC BBBB AA

Ayudándonos de nuestro sistema de numeración posicional decimal, podemos representar de forma mucho más sencilla los cálculos anteriores:

Composición del multiplicador	Duplicaciones del multiplicando
→ 1	245 ←
2	490
→ 4	980 ←
8	1960
16	3920
→ 32	7840 ←

Para calcular 37 veces 245, se hacen sucesivas duplicaciones de 245 y se detiene el proceso en 32 veces 245, ya que la siguiente duplicación proporcionaría 64 veces 245 que supera las 37 veces 245 que se pretende calcular. Para completar desde las 32 veces 245 hasta las 37 veces 245, se buscan en la columna de la izquierda los números que sumados a 32 den 37 (son el 4 y el 1) y se señalan éstos y el 32 y sus correspondientes en la columna de la derecha (o sea, 7480, 980 y 245). Por último se suman los números señalados en la columna de la derecha y se obtiene el producto:

7840	CCC CCCC	BBBB BBBB	AA AA	
980		BBBBB BBBB	AAAA AAAA	
245		BB	AAAA	IIIII
9065	CCCCC CCCC		AAA AAA	III II

Así se obtiene que 37 × 245 = 7840 + 980 + 245 = 9065.

Como veremos en el apartado 2.2.6, este algoritmo se basa en el teorema fundamental de los Sistemas de Numeración según el cual cualquier número natural puede descomponerse como suma de potencias de 2.

2.2.5. Dividir en el sistema aditivo

Un posible algoritmo para la división consiste en realizar la operación inversa a la multiplicación anterior. Para explicarlo, utilizaremos el ejemplo de 1475 dividido entre 43. Primero debemos colocar de forma ordenada los símbolos de cada uno de los números que intervienen en el cálculo. Se hacen duplicaciones de 43 hasta acercarnos lo más posible a 1475:

I	AAAA III	AAAA III
→ I I	AAAA III AAAA III	AAAA III ← AAAA III
II II	~~AAAAA~~ AAA ~~IIIII~~ I ~~AAAAA~~ AAA ~~IIIII~~ I B A	B AAAA II AAA
IIII IIII	B B ~~AAAAA~~ AA II B ~~AAAAA~~ AA II	BBB AAAA IIII
A IIIII	BBB AAAA IIII BBB AAAA IIII	BBB AAAA IIII BBB AAAA IIII
→ AAA II	~~BBBBB~~ B ~~AAAAA~~ AAA ~~IIIII~~ III ~~BBBBB~~ B ~~AAAAA~~ AAA ~~IIIII~~ III C B A	← C BBB AAAA III AAA III

Ayudándonos, de nuevo, de nuestro sistema de numeración, podemos representar de forma mucho más sencilla los cálculos anteriores:

1	43
→ 2	86 ←
4	172
8	344
16	688
→ 32	1376 ←

Nos detenemos en 1376, en la columna de la derecha, porque la duplicación siguiente daría un número superior al dividendo 1475. A continuación se buscan en la columna de la derecha los números que sumados a 1376 se acerquen lo más posible a 1475. Obtenemos que es 86: 1376 + 86 =1462.

$$
\begin{array}{ll}
1376 & \left\{ \begin{array}{llll} \text{C} & \text{BBB} & \text{AAAA} & \text{III} \\ & & \text{AAA} & \text{III} \end{array} \right. \\[2ex]
\underline{\;86\;} & \left\{ \begin{array}{ll} \text{AAAA} & \text{III} \\ \underline{\text{AAAA}} & \underline{\text{III}} \end{array} \right. \\[2ex]
1462 & \left\{ \begin{array}{llll} \text{C} & \text{BBBB} & \text{AAA} & \text{II} \\ & & \text{AAA} & \end{array} \right.
\end{array}
$$

Como a 1462 le faltan 13 para alcanzar 1475, el *resto de la división* es 13. Y como los números que acompañan a 1376 y a 86 son, respectivamente, 32 y 2, resulta que el *cociente de la división* es 34.

2.2.6. Elementos tecnológico-teóricos del sistema aditivo

Hasta ahora podemos afirmar que $\mathbf{OM_a}$ nos proporciona una técnica de representación de los números $\boldsymbol{\tau_a}$ a la que podemos aplicar lo que numerosos autores (Roanes, 1983; Cid, D. Godino y Batanero, 2004; Damphouse, 2002) denominan el *teorema fundamental de los Sistemas de Numeración*:

> Dado un número natural $b > 1$, que llamaremos base del sistema, cualquier número natural n se escribe de manera única en la forma: $n = a_0b^0 + a_1b + a_2b^2 + a_3b^3 + \ldots + a_kb^k$ para un único k, y con $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ números naturales menores que b y $a_k \neq 0$. Los números $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ son los restos

sucesivos de la división de n y los cocientes sucesivos entre b, hasta la primera división que da un cociente nulo. De modo que si realizamos dicha división quedará como sigue:

$$\begin{array}{llllllll}
n & \underline{|\,b} & & & & & & \\
a_o & n_1 & \underline{|\,b\quad} & & & & & \\
 & a_1 & n_2 & \underline{|\,b\qquad} & & & & \\
 & & a_2 & n_3 \ldots\ldots & & & & \\
 & & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \\
 & & & & n_{k-1} & \underline{|\,b\quad} & & \\
 & & & & a_{k-1} & a_k & \underline{|\,b\quad} & \\
 & & & & & a_k & 0 &
\end{array}$$

A pesar de que la mayoría de los autores sólo aplican este teorema a los SN posicionales, es fácil observar que del teorema se desprende que todo número natural n que cumpla:

$$n \leq (b-1)b^0 + (b-1)b + (b-1)b^2 + (b-1)b^3 + \ldots\ldots + (b-1)b^h$$

tiene una única representación en un sistema aditivo con (h + 1) símbolos que designan las potencias de la base b^0, b, b^2, b^3, ……, b^h, siendo h un número natural. Nótese que:

$$(b-1)b^0 + (b-1)b + (b-1)b^2 + (b-1)b^3 + \ldots + (b-1)b^h$$

es el mayor número que se puede escribir en $\mathbf{OM_a}$.

Vemos pues que $\mathbf{OM_a}$ aporta una respuesta válida a las tareas asociadas a la cuestión **(1)**, de modo que no hay ambigüedad en la expresión escrita de los números. Pero con la peculiaridad de que los sistemas aditivos, como carecen de símbolos para los multiplicadores de las potencias de la base, en vez de los símbolos de a_0, a_1, a_2, a_3,…, a_k, aparecen a_0 veces el símbolo de b^0, a_1 veces el símbolo de b^1, a_2 veces el símbolo de b^2, a_3 veces el símbolo de b^3, y así hasta a_k veces el símbolo de b^k. Además, cuando algún a_i sea cero, entonces no se escribe el símbolo correspondiente de b^i. Por otro lado, aunque $\boldsymbol{\tau_a}$ aporta una mejor respuesta que $\boldsymbol{\tau_i}$ a las tareas asociadas a la cuestión **(3)**, ya que las cadenas de símbolos necesarias para representar cada número son de menor longitud, sigue sin dar una respuesta satisfactoria a las tareas asociadas a la cuestión **(2)**, al ser necesario un símbolo para cada una de las potencias de la base.

Como hemos visto, con esta técnica de representación de los números también se puede dar una primera respuesta "razonable", para números no muy grandes, a las tareas asociadas a las cuestiones **(4), (5)**, **(6)**, **(7)** y **(8)** relativas a la comparación de números y a las operaciones aritméticas elementales.

A continuación presentamos algunos elementos que justifican las técnicas asociadas a $\boldsymbol{\tau_a}$.

La técnica de comparación de dos números en el SN aditivo se basa en la comparación término a término de conjuntos de repeticiones de un mismo elemento: primero hay que buscar cuál es el símbolo de mayor valor en ambos números y, a igual símbolo de mayor valor, es necesario contar la cantidad de esos símbolos que hay en ambos números. Para elegir el símbolo de mayor valor se necesita comparar cada símbolo con todos los demás dentro de cada número. A continuación se comparan el símbolo de mayor valor del primer número con el símbolo de mayor valor del segundo número. En caso de que sean iguales, será necesario contar cuantos ejemplares hay de cada símbolo y volver a comparar el número de símbolos obtenidos. A continuación si hay el mismo número de símbolos de mayor valor, hay que preguntarse si hay más símbolos en ambos números y así se puede continuar hasta encontrar cuál de ellos es el mayor o si ambos son iguales. Para llevar a cabo esta técnica, la tarea queda muy facilitada si se ordenan previamente los símbolos que designan cada uno de los números, poniendo juntos aquellos que son iguales y ordenando los conjuntos de símbolos repetidos empezando por los de mayor valor. Además, hay que añadir que la cantidad de símbolos utilizados para representar un número no está relacionada con el tamaño del número designado. Por todo ello, podemos decir que el SN aditivo no garantiza una comparación satisfactoria.

La justificación de la *técnica de adición* se basa en el principio de la numeración de base 10 según el cual 10 unidades de un mismo orden equivalen a una unidad del orden inmediatamente superior.

En el caso de la *técnica de sustracción* se aplica el mismo principio pero de modo inverso, es decir, primero eliminando dentro de cada orden los símbolos correspondientes y, cuando en un orden determinado aún se tienen que eliminar más símbolos de los que se dispone, se pasa a utilizar el principio de la numeración decimal.

En lo que se refiere a la *técnica multiplicación* por duplicaciones sucesivas, hemos visto que ésta se basa en la posibilidad de expresar uno de los dos factores (el menor o multiplicador) en suma de potencias de 2. Así para multiplicar 37 × 245, lo que realizamos es expresar 37 como suma de potencias de 2, es decir,

$$37 = 2^0 + 2^2 + 2^5$$

y a continuación tenemos que

$$37 \times 245 = (2^0 + 2^2 + 2^5) \times 245 = 2^0 \times 245 + 2^2 \times 245 + 2^5 \times 245 = 245 + 980 + 7840 = 9065.$$

En cuanto a la *técnica de división*, buscamos dos números que llamamos el cociente y el resto. El cociente lo vamos a obtener expresado como suma de potencias de 2 y el resto como la diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente obtenido. Así por ejemplo para dividir 1475 entre 43, buscamos el mayor número natural expresado en suma de potencias de 2 que multiplicado por 43 nos dé un número menor o igual que 1475. Este número, que llamamos cociente de 1475 entre 43, es $(2^1 + 2^5) = 34$, pues

$$34 \times 43 = (2^1 + 2^5) \times 43 = 2^1 \times 43 + 2^5 \times 43 = 86 + 1376 = 1462.$$

Y el resto será 1475 – 1462 = 13.

El elemento teórico clave es aquí el teorema fundamental de los Sistemas de Numeración que hemos explicitado más arriba, aplicado aquí a agrupamientos en base 2, que permite mostrar que siempre es posible expresar cualquier número natural como suma de potencias de 2. De este modo, podemos asegurar que siempre van a ser posibles la multiplicación y división de cualquier par de números naturales utilizando dichas técnicas. En el caso de la división debe cumplirse además que el dividendo sea mayor o igual que el divisor.

2.2.7. Evoluciones de la técnica de representación aditiva

Los cálculos anteriores muestran muy claramente lo poco *económica* que es la técnica de numeración $\boldsymbol{\tau_a}$ a poco que aumente el tamaño[6] de los números involucrados en las operaciones aritméticas. Una de las dificultades que presenta esta técnica de representación de los números es la gran cantidad de símbolos que necesita para *designar* algunos números. Así, por ejemplo, para representar el número 999 se necesitan 27 símbolos, y para representar el número 98.765 son necesarios 35 símbolos.

Históricamente, una primera mejora de $\boldsymbol{\tau_a}$ con el fin de dar una respuesta más eficaz y económica a las tareas asociadas a **(3)** es la aportada por el sistema *romano*, cuyos símbolos I, V, X, L, C, D y M designan unidades sucesivas que son alternativamente el quíntuplo o el doble de la anterior (es decir, 10^0, 5×10^0, 10^1, 5×10^1, 10^2, 5×10^2 y 10^3). Así, con esta variación de la técnica $\boldsymbol{\tau_a}$, que llamaremos $\boldsymbol{\tau'_a}$, si queremos representar el número 999 sólo necesitaremos 15 símbolos, es decir, D CCCC L XXXX V IIII, frente a los 27 que necesitábamos en el sistema *egipcio*.

Los sistemas *aditivos* han sufrido históricamente nuevas modificaciones para responder mejor a la cuestión **(3).** El objetivo siempre es disminuir el número de símbolos necesarios para representar los números que se utilizan usualmente, como el 999, sin preocuparse demasiado de las (posibles) restantes funciones de la representación simbólica de los números. Así, por ejemplo, el sistema *romano* introdujo una nueva variación a la técnica $\boldsymbol{\tau'_a}$, que podemos denominar $\boldsymbol{\tau''_a}$, según la cual todo símbolo colocado a la izquierda de un símbolo de valor inmediatamente superior, indica que el menor debe restarse del mayor:

$$9 \rightarrow \text{IX}; \quad 4 \rightarrow \text{IV}; \quad 40 \rightarrow \text{XL}; \quad 90 \rightarrow \text{XC}; \quad 400 \rightarrow \text{CD}; \quad 900 \rightarrow \text{CM}.$$

De este modo el número “999” requiere sólo 6 símbolos CM XC IX en lugar de 27; pero todavía necesitamos 12 símbolos para designar el “888” DCCC LXXX VIII. Esta importante mejora de la técnica de representación para dar respuesta a las tareas asociadas a **(3)**, que incluye la *posición* como variable para el valor atribuido a cada símbolo, la convierte, sin

[6] Los cálculos aritméticos en $\mathbf{OM_a}$ pueden realizarse sin necesidad de tener que recurrir a las *tablas de sumar ni a las de multiplicar*. Pero esta ventaja que funciona cuando se trata de operar con números pequeños, sin embargo desaparece cuando el tamaño de los números empieza a aumentar. Más adelante daremos criterios para analizar la *economía* y la *fiabilidad* de los algoritmos.

embargo, en una técnica todavía *menos económica y menos eficaz* para realizar operaciones aritméticas, incluso con números pequeños. De ahí que se tuviera que complementar con otros Sistemas de Numeración, no escritos, para el desarrollo de las operaciones aritméticas. Como escribe el historiador francés Georges Ifrah (1987, p. 176):

> Por ello los contables romanos (y los calculadores europeos de la Edad Media, posteriormente) siempre recurrían a ábacos de fichas para practicar el cálculo.

Podemos considerar, en resumen, que el objetivo principal o "razón de ser" de los Sistemas de Numeración aditivos, o de tipo I, es la *representación de los números naturales* de manera que no haya ambigüedad y que se utilice una pequeña cantidad de símbolos, y no la simplificación de los algoritmos de las operaciones aritméticas.

En consecuencia, hemos visto que una dirección de variación de la técnica de representación de los números naturales es:

$$\tau_i \rightarrow \tau_a \rightarrow \tau'_a \rightarrow \tau''_a$$

Donde τ_i es la técnica de representación caracterizada por realizar *un único tipo de agrupamiento*, τ_a la técnica que utiliza agrupamientos de forma regular, τ'_a la primera evolución de τ_a empleada por el sistema de numeración romano y τ''_a la evolución de τ'_a también introducida por el sistema romano. Pero esta dirección de evolución de la técnica nos lleva a un callejón sin salida si consideramos que los SN deben proporcionar también herramientas para el cálculo con los números. Creemos, por lo tanto, que es necesario ampliar la problemática y hacer evolucionar la técnica de representación hacia la búsqueda de un sistema de numeración que permita una mayor *fiabilidad y economía* en la realización de los cálculos.

3. LOS SISTEMAS HÍBRIDOS COMO COMPLETACIÓN DE LOS ADITIVOS

Existen direcciones de evolución de la técnica τ_a diferentes de la anterior. Así, por ejemplo, podemos querer mejorar la descripción de los números, no para mejorar su designación, sino para aumentar la eficacia de los algoritmos de comparación de dos números – cuestión **(4)** – y optimizar la economía y la fiabilidad de los algoritmos de las operaciones aritméticas –

cuestiones **(5), (6), (7)** y **(8)**. Por ello, podemos considerar una nueva dirección de evolución de la técnica τ_a que se caracterizará por evitar la repetición de símbolos gracias a la introducción de un nuevo tipo de símbolos que harán el papel de *multiplicadores de las potencias de la base*. Obtendremos así una nueva técnica, τ_h, de representación de los números naturales que constituye un sistema *híbrido*, *aditivo-multiplicativo* o de tipo II, similar al sistema *chino* o a nuestro *sistema oral*:

$$\begin{array}{ccccccc} \tau_i & \longrightarrow & \tau_a & \longrightarrow & \tau'_a & \longrightarrow & \tau'' \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \tau_h & & & & \end{array}$$

3.1. La Organización Matemática en torno a un sistema híbrido

La nueva técnica τ_h utiliza los símbolos que utilizaba τ_a antes de ser modificada en la dirección de $\tau'_a \to \tau''_a$, esto es, un símbolo para cada una de las potencias de la base:

$$I \to 10^0;\quad A \to 10^1;\quad B \to 10^2;\quad C \to 10^3;\quad D \to 10^4;\quad E \to 10^5;\quad F \to 10^6. \ldots$$

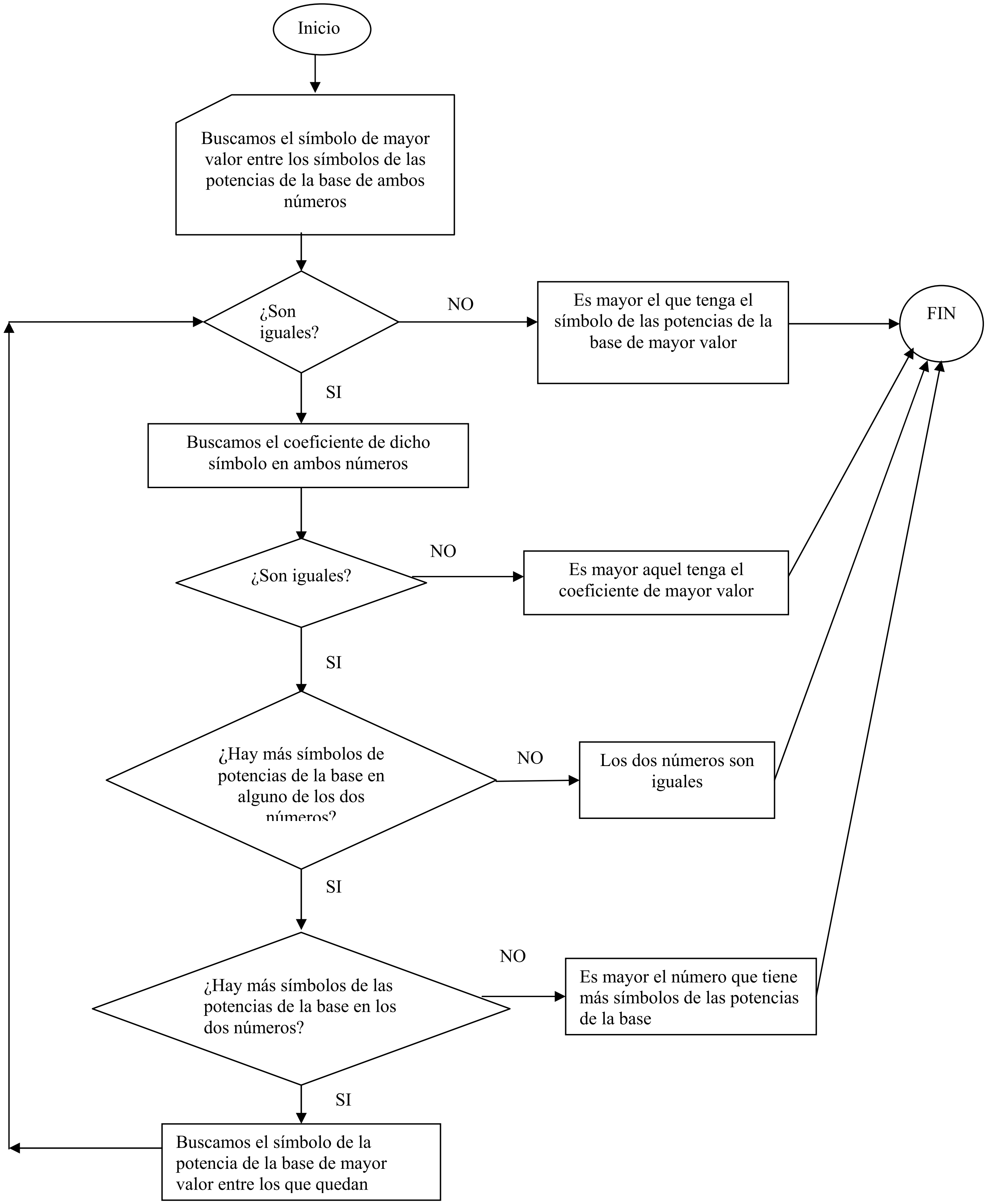
Pero, en lugar de utilizar las repeticiones de cada símbolo, utiliza unos nuevos símbolos que harán la función de multiplicadores de dichas potencias: por ejemplo los símbolos 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 (el número 1 no se utiliza como multiplicador ya que es innecesario). De este modo, el número “3589” se representa mediante la escritura “3C 5B 8A 9”.

Con esta nueva técnica de representación se evita la repetición de los símbolos I, A, B, C, D,…, que representan las potencias de la base, acortando así la cadena escrita. Pero, a cambio, se debe ampliar el conjunto de símbolos con los coeficientes o multiplicadores de las potencias de la base.

3.2. La comparación de números en el sistema híbrido

El algoritmo *de comparación de dos números a partir de sus expresiones escritas* en un sistema de representación híbrido lo hemos esquematizado mediante el organigrama de la página siguiente. Mostraremos a continuación, mediante algunos ejemplos, cómo pueden llevarse a cabo las operaciones aritméticas en un sistema híbrido. Ello nos va a permitir comprobar que este tipo de SN proporciona una respuesta más económica y eficaz a las tareas de comparación y de cálculo que los SN aditivos.

ALGORITMO DE COMPARACIÓN DE NÚMEROS EN EL SN HÍBRIDO



3.3. Sumar en el sistema híbrido

Para explicar un posible algoritmo de la adición en el sistema híbrido utilizaremos el ejemplo: 3589 + 2874. Primero, dentro de cada número, colocamos de forma ordenada los símbolos de las potencias de la base con sus correspondientes coeficientes. Luego, escribimos la representación de ambos números, uno debajo del otro, haciendo corresponder en la misma columna los símbolos correspondientes a la misma potencia de la base. Después, *se suman* los coeficientes de cada potencia de la base y, si se obtienen diez o más de una determinada potencia, se sustituyen diez unidades de una potencia de la base por una unidad de la potencia inmediatamente superior.

$$\begin{array}{ccccccc} C & & B & & A & & \\ 3C & & 5B & & 8A & & 9 \\ 2C & & 8B & & 7A & & 4 \\ \hline 6C & \cancel{C} & 4B & \cancel{B} & 6A & \cancel{A} & 3 \end{array}$$

Se simplifican mucho las expresiones escritas de los cálculos pero, a cambio, debe utilizarse la tabla de sumar de los coeficientes.

3.4. Restar en el sistema híbrido

Para explicar un algoritmo de la resta en $\mathbf{OM_h}$ vamos hacerlo con el ejemplo: 4235 – 2648. Primero colocamos de forma ordenada los símbolos de cada uno de los números y empezamos como en el ejemplo anterior. Se restan los coeficientes de la primera potencia de la base, luego los de la segunda, y así sucesivamente. Cuando para cierta potencia de la base resulte que en el minuendo hay menos unidades que en el sustraendo, se debe descomponer una unidad de la potencia inmediatamente superior (del minuendo) en diez unidades de la potencia en cuestión a fin de que en el minuendo siempre haya más unidades que en el sustraendo (de cualquier potencia de la base) y pueda efectuarse la resta:

4C 2B 3A 5
2C 6B 4A 8
→
4C 2B 2A ~~A~~ → A 5
2C 6B 4A 8
7
→

4C B ~~B~~ → B 2A A 5
2C 6B 4A 8
8A 7
→
3C ~~C~~ → C B B 2A A 5
2C 6B 4A 8
C 5B 8A 7

3.5. Multiplicar en el sistema híbrido

Para explicar el funcionamiento de un algoritmo de la multiplicación en un sistema híbrido utilizaremos el ejemplo 2745 × 389.

Para multiplicar 2C 7B 4A 5 por 3B 8A 9, se deberán utilizar dos tablas de multiplicar: la de los coeficientes y la de las potencias de la base.

Tabla de multiplicar de los coeficientes

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	A	A 2	A 4	A 6	A 8
3	3	6	9	A 2	A 5	A 8	2A 1	2A 4	2A 7
4	4	8	A 2	A 6	2A	2A 4	2A 8	3A 2	3A 6
5	5	A	A 5	2A	2A 5	3A	3A 5	4A	4A 5
6	6	A 2	A 8	2A 4	3A	3A 6	4A 2	4A 8	5A 4
7	7	A 4	2A 1	2A 8	3A 5	4A 2	4A 9	5A 6	6A 3
8	8	A 6	2A 4	3A 2	4A	4A 8	5A 6	6A 4	7A 2
9	9	A 8	2A 7	3A 6	4A 5	5A 4	6A 3	7A 2	8A 1

Tabla de multiplicar de las potencias de la base

×	A	B	C	D...
A	B	C	D	E
B	C	D	E	F
C	D	E	F	...
D	E	F	...	...

Para efectuar el producto, primero, dentro de cada número, colocamos de forma ordenada los símbolos de las potencias de la base con sus respectivos coeficientes. Luego multiplicamos cada componente del primer número, 3B 8A 9, por cada componente del segundo, 2C 7B 4A 5. Se empieza multiplicando 9 por 2C, por 7B, por 4A y por 5 y se suman los cuatro resultados obtenidos. A continuación se multiplica 8A por 2C, por 7B, por 4A y por 5 y así sucesivamente. Para obtener el resultado final se suman las cantidades obtenidas en las tres multiplicaciones parciales.

```
   2C  7B  4A  5                      2C  7B  4A  5
×      3B  8A  9      ──────►      ×               9      ──────►
───────────────────                ──────────────────
                                              4A  5
                                          3B  6A
                                      6C  3B
                                   D  8C
                                   ───────────────────
                                   2D  4C  7B        5
```

```
   2C  7B  4A  5                   2C  7B  4A  5
 ×         8A                   ×      3B
───────────────────             ─────────────────────
           4B       ──────►              C  5B
       3C  2B                          D  2C
   5D  6C                          2E  D
 E  6D                             6E
─────────────────────           ─────────────────────
 2E   D  9C  6B                    8E  2D  3C  5B
```

A continuación se suman los tres resultados parciales:

		2D	4C	7B	5
	2E	D	9C	6B	
	8E	2D	3C	5B	
F		6D	7C	8B	5

Igualmente, para realizar este algoritmo, de forma sencilla, es necesario conocer las tablas de sumar de los coeficientes.

3.6. Dividir en el sistema híbrido

Realizaremos la división de 3589 entre 74 para explicar el funcionamiento de un algoritmo de la división euclídea en **OM$_h$**. Primero colocamos de forma ordenada los símbolos de cada potencia de la base con sus respectivos coeficientes.

```
3C  5B  8A  9     | 7A  4
                  └──────
```

A continuación, se busca en la tabla de multiplicar de las potencias de la base cuál es la potencia de la base que multiplicada por A da C y resulta ser B, B × A = C, pero como el coeficiente de A es 7, B × 7A = 7C, que es mayor que 3C. Debe tomarse A que es la potencia de la base inmediatamente inferior. A continuación, se utiliza la tabla de los coeficientes para ver qué coeficiente le corresponde a A, y vemos que debe tomarse 4A. De este modo, 4A × (7A 4) = 2C 9B 6A, que restado de 3C 5B 8A 9, proporciona el dividendo parcial 6B 2A 9.

```
3C  5B  8A   9        | 7A  4
2C  9B  6A            |______
                        4A
_____________
     6B   2A   9
```

Análogamente debemos buscar qué potencia de la base, con su correspondiente coeficiente, multiplicada por 7A 4 se acerca lo más posible a 6B 2A 9. Según las tablas de multiplicar el número buscado es el "8", por lo que: 8 × (7A 4) = 5B 9A 2 y restado de 6B 2A 9 da como resto 3A 7.

```
3C  5B  8A   9        | 7A  4
2C  9B  6A            |______
                        4A  8
_____________
     6B  2A   9
     5B  9A   2
_____________
         3A   7
```

Resulta, en resumen, que el *cociente* es 4A 8 y el *resto* 3A 7, ya que

3C 5B 8A 9 = (7A 4) × (4A 8) + 3A 7

3.7. Elementos tecnológico-teóricos del sistema híbrido

Con lo que hemos visto hasta ahora, y como consecuencia del *teorema fundamental de los Sistemas de Numeración* (sección 2.2.6), podemos afirmar que la $\mathbf{OM_h}$ nos proporciona una técnica de designación de los números $\boldsymbol{\tau_h}$ en la que todo número natural n que cumpla:

$$n \leq (b-1)b^0 + (b-1)b + (b-1)b^2 + (b-1)b^3 + \ldots + (b-1)b^h$$

tiene una única representación (siendo $(b-1)b^0 + (b-1)b + \ldots + (b-1)b^h$ el mayor número que se puede escribir). La técnica $\boldsymbol{\tau_h}$ utiliza $(h+1)$ símbolos que designan las potencias de la base b^0, b, b^2, b^3,…, b^h, donde h es un número natural. Además, en este sistema, hay símbolos para cada uno de los coeficientes $a_0, a_1, a_2, a_3,\dots,a_h,$ donde los $a_i \in \{2, 3, 4, 5, 6, \dots, (b-1)\}$. Nótese que los multiplicadores 0 y 1 se omiten en el sistema, por no ser necesarios. De este modo, la escritura del número

$$a_0b^0 + a_1b + \dots + a_kb^k$$

consiste en un grupo de símbolos

$$a_0b^0\ \ a_1b\ \ a_2b^2\ a_3b^3\dots\ a_kb^k$$

formado por parejas de símbolos a_ib^i, donde cada símbolo de la potencia de la base va siempre acompañado del correspondiente símbolo de su coeficiente, salvo en los siguientes casos:

- Cuando la potencia de la base sea $b^0 = 1$, sólo aparece el símbolo del coeficiente a_0, a no ser que también sea $a_0 = 1$. En este caso se escribe sólo un 1.
- Cuando el coeficiente a_i sea cero, no aparece ningún símbolo, ni el símbolo de a_i ni el símbolo de b^i.
- Cuando el coeficiente a_i sea uno, sólo aparece el símbolo de la correspondiente potencia de la base b^i.

Hay que señalar también que el grupo de símbolos ($a_0b^0\ \ a_1b\ \ a_2b^2\ a_3b^3\dots\ a_kb^k$) no necesariamente debe estar ordenado, es decir, las parejas deben siempre permanecer juntas, pero dichas parejas pueden representarse en cualquier orden, de este modo, una representación posible sería también ($a_kb^k\dots\ a_1b\ \ a_0b^0\ a_3b^3\ a_2b^2$).

Esta técnica de representación nos aporta una respuesta válida a las tareas asociadas a la cuestión **(1)**, de modo que no se presenta ambigüedad en la expresión escrita de los números. Mejora la respuesta que da la técnica aditiva a las tareas asociadas a la cuestión **(3)**, pero sigue sin permitir una respuesta plenamente satisfactoria a las tareas asociadas a la cuestión **(2)** Además, con esta técnica $\boldsymbol{\tau_h}$ de representación de los números se puede dar una respuesta más eficaz y de mayor alcance, que con $\boldsymbol{\tau_a}$, a las tareas de comparación y de cálculo asociadas a las cuestiones **(4), (5)**, **(6)**, **(7)** y **(8)**.

La técnica de comparación de dos números en $\mathbf{OM_h}$ es más económica que la de los sistemas aditivos, puesto que ahora ya no es necesario contar cuántas veces se repite cada símbolo. Además, la tarea de ordenar los símbolos de las potencias de la base con su correspondiente coeficiente resulta más breve, debido a que las cadenas de símbolos utilizadas para representar cada número son más cortas. Una vez ordenados los símbolos de las potencias de la base con sus correspondientes coeficientes dentro de cada número, se comparan primero los símbolos de las potencias de la base (empezando por las de mayor valor) y si el símbolo de las potencias es igual en ambos números compararemos los coeficientes correspondientes. En el caso de que también sean iguales los correspondientes coeficientes, se repite el proceso, siempre que haya más símbolos. En consecuencia, en este caso sólo va a ser necesario conocer el valor de los símbolos para luego compararlos, y no será necesario contar colecciones de símbolos para compararlas.

Al igual que con el SN aditivo, la justificación de la técnica de adición y la de la sustracción se basa aquí en el principio de la numeración de base 10.

En lo que se refiere a la técnica multiplicación**,** en realidad el algoritmo que hemos realizado es análogo al de la multiplicación de polinomios cuya variable es la base n (aquí n = 10). Así para multiplicar 2745 × 389:

$$(2n^3 + 7n^2 + 4n + 5) \times (3n^2 + 8n + 9) =$$

Aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación de los naturales respecto de la adición, además de las propiedades asociativa y conmutativa de la adición

$$= (2n^3 + 7n^2 + 4n + 5) \times 9 + (2n^3 + 7n^2 + 4n + 5) \times 8n + (2n^3 + 7n^2 + 4n + 5) \times 3n^2 =$$

Aplicamos la asociativa y conmutativa de la adición, y de nuevo la propiedad distributiva

$$= (5 \times 9) + (4n \times 9) + (7n^2 \times 9) + (2n^3 \times 9) +$$

$$+ (5 \times 8n) + (4n \times 8n) + (7n^2 \times 8n) + (2n^3 \times 8n) +$$

$$+ (5 \times 3n^2) + (4n \times 3n^2) + (7n^2 \times 3n^2) + (2n^3 \times 3n^2) =$$

Aplicamos los resultados obtenidos en la tabla de multiplicar de los coeficientes y en la tabla de multiplicar de las potencias de la base, sabiendo que n = 10:

$= (4n + 5) + (3n^2 + 6n) + (6n^3 + 3n^2) + (n^4 + 8n^3) + (4n^2) + (3n^3 + 2n^2) + (5n^4 + 6n^3) + (n^5 + 6n^4) + (n^3 + 5n^2) + (n^4 + 2n^3) + (2n^5 + n^4) + (6n^5) =$

Aplicamos de nuevo las propiedades asociativa y conmutativa de la adición, la propiedad distributiva y los resultados obtenidos en la tabla de sumar

$= 5 + 8n^2 + 7n^3 + 6n^4 + n^6.$

La técnica de división también es análoga al algoritmo de la división de polinomios cuya variable es la base n (con $n = 10$). Así para dividir 3589 entre 74 procedemos del siguiente modo:

$$3n^3 + 5n^2 + 8n + 9 \quad \underline{|\ 7n + 4\ }$$

Buscamos en la tabla de multiplicar de las potencias de la base ($n = 10$) cuál es la potencia de la base que multiplicada por n da n^3 y resulta ser n^2, $n^2 \times n = n^3$. Pero como el coeficiente de n es 7, $n^2 \times 7n = 7n^3$, que es mayor que $3n^3$. Debe tomarse n que es la potencia de la base inmediatamente inferior. A continuación, se utiliza la tabla de los coeficientes para ver qué coeficiente le corresponde a n, y resulta que debe tomarse $4n$. De este modo:

$$4n \times (7n + 4) = 2n^3 + 9n^2 + 6n$$

donde hemos utilizado la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición y los resultados obtenidos en la tablas de multiplicar tanto de los coeficientes como de las potencias de la base. El resultado obtenido lo restamos de $3n^3 + 5n^2 + 8n + 9$, aplicando la técnica de sustracción y obtenemos el dividendo parcial $6n^2 + 2n + 9$.

$$\begin{array}{r|l} 3n^3 + 5n^2 + 8n + 9 & 7n + 4 \\ \cline{2-2} \underline{2n^3 + 9n^2 + 6n \quad} & 4n \\ 6n^2 + 2n + 9 & \end{array}$$

Análogamente debemos buscar qué potencia de la base, con su correspondiente coeficiente, multiplicada por $7n + 4$ se acerca lo más posible a $6n^2 + 2n + 9$. Según las tablas de multiplicar el número buscado es el "8". Entonces $8 \times (7n + 4) = 5n^2 + 9n + 2$. Este resultado lo restamos de $6n^2 + 2n + 9$ y, de este modo, tenemos el resto $3n + 7$.

$$
\begin{array}{rl}
3n^3 + 5n^2 + 8n + 9 & \underline{|\ 7n + 4} \\
2n^3 + 9n^2 + 6n & \ \ 4n + 8 \\
\hline
6n^2 + 2n + 9 & \\
5n^2 + 9n + 2 & \\
\hline
3n + 7 &
\end{array}
$$

Resulta, en resumen, que el *cociente* es $(4n + 8)$ y el *resto* $(3n + 7)$, ya que

$$3n^3 + 5n^2 + 8n + 9 = (7n + 4) \times (4n + 8) + 3n + 7$$

Podemos decir que con esta nueva técnica de representación $\boldsymbol{\tau_h}$ se pueden realizar las operaciones aritméticas de forma *más económica* que con la técnica $\boldsymbol{\tau_a}$, especialmente cuando se aumenta el tamaño de los números, aunque es necesario aquí utilizar la tabla de sumar de los coeficientes y las dos tablas de multiplicar (la de las potencias de la base y la de los coeficientes). Por ello, Ifrah afirma, refiriéndose al SN utilizado por los chinos en (Ifrah 1987, p. 222):

> Pero a pesar de este gran avance, no tuvieron la posibilidad de representar todos los números naturales. Las capacidades de este tipo de notación numérica son todavía limitadas: cuanto más elevadas eran las cantidades que se tenían que expresar, más símbolos originarios había que crear, o nuevas convenciones de escritura que forjar. Además, no siempre se podía "calcular por escrito", como se hace hoy en día con toda facilidad. Todavía había que dar un paso importante para que tal numeración pudiera adaptarse a la práctica de las operaciones aritméticas. Para poder efectuar una suma, una multiplicación o una división, había que seguir recurriendo a auxiliares materiales como el ábaco o la tabla o crear todo un conjunto de reglas y artificios muy complicados. La práctica del cálculo, que exigía un aprendizaje largo y difícil, seguía siendo inasequible para el común de los mortales y constituía el dominio reservado de una casta privilegiada de especialistas.

Además, aunque la *representación de los números* también se ha simplificado al crear nuevos símbolos para los coeficientes, todavía no podemos escribir todos los números naturales con un número finito de símbolos fijados de antemano.

4. LOS SISTEMAS POSICIONALES COMO COMPLETACIÓN DE LOS HIBRIDOS

Las limitaciones de la actividad matemática que es posible llevar a cabo en $\mathbf{OM_h}$ ponen de manifiesto la necesidad de *ampliar* $\mathbf{OM_h}$ *como Organización Matemática*, esto es, construir otra Organización Matemática $\mathbf{OM_p}$ en la que puedan llevarse a cabo las tareas matemáticas que se pueden llevar a cabo en $\mathbf{OM_h}$ (si es posible de una forma más segura, económica y fiable) y que, al mismo tiempo, permita responder a cuestiones y realizar tareas matemáticas que no podían realizarse de manera eficaz dentro de $\mathbf{OM_h}$. Podemos tomar como tareas generadoras de $\mathbf{OM_p}$, las asociadas a las cuestiones:

> **(2)** ¿Cómo expresar los números naturales utilizando únicamente una pequeña cantidad de símbolos diferentes y fijados de antemano?
>
> **(7)** ¿Cómo representar los números naturales de manera que se simplifique el algoritmo de la multiplicación?
>
> **(8)** ¿Cómo representar los números naturales de manera que se simplifique el algoritmo de la división euclídea?
>
> **(9)** ¿Qué representación simplifica la divisibilidad elemental (múltiplos y divisores de un número, máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números, descomposición de un número en factores, etc.) sin complicar la suma?

4.1. La Organización Matemática en torno a un sistema posicional

Un sistema de numeración de tipo III ("*posicional*") constituye una técnica representativa, τ_p, que da una respuesta definitiva a la tarea **(2)** y permite resolver razonablemente las tareas **(8)** y **(9)** así como simplificar todavía más las anteriores **(1)**, **(3)**, **(4)**, **(5)**, **(6)** y **(7).**

La respuesta definitiva a las tareas asociadas a la cuestión **(2)** se consigue prescindiendo de los símbolos de las potencias de la base e indicando dichas potencias mediante las distintas *posiciones* que ocupan los respectivos coeficientes, que pasan así a estar completamente ligados a la posición que ocupan en el grupo de símbolos que representa al número en cuestión. De este modo, se obtiene un sistema donde los únicos símbolos disponibles son los coeficientes o multiplicadores de las potencias de la base y donde las potencias de la base vienen indicadas por las distintas posiciones. Por tanto, se simplifica extraordinariamente la representación de los números y, además, podemos escribir cualquier número natural con un número finito de símbolos fijados de antemano.

Ejemplos de sistemas "posicionales" son los sistemas *maya* y *babilónico* que para representar los coeficientes utilizaron símbolos que intentaban evocar visualmente lo que representaban. Así, por ejemplo, los mayas tenían como base del sistema n = 20 y utilizaban un símbolo[7] para el cinco (I) y otro para el uno (•) que hacían el papel de coeficientes (números menores que 20), por tanto,

17 → III•• , 9 → I •••• , 87 → •••• I••.

La base del sistema que idearon los babilónicos era n = 60 y disponían de un símbolo para el diez (〈) y otro para el uno (∨), para representar todos los coeficientes, es decir, para los números menores que 60. Veamos algún ejemplo:

35 → 〈〈〈 ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ , 57 → 〈〈〈〈〈 ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ , 247 → ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨

Observamos que esta respuesta a la tarea **(2)** crea dificultades nuevas ya que esta técnica posicional inicial, que denominamos τ_{pi}, no permite resolver las tareas asociadas a la cuestión **(1)** "*¿Cómo expresar los números naturales que necesitamos mediante símbolos de manera que no haya ninguna ambigüedad*?", puesto que aparecen ambigüedades como las siguientes:

(a) En el sistema *maya*, la designación III puede ser "15" ó "110" ó "205".

(b) En el sistema *babilónico* la designación ∨ ∨ puede ser "2" ó "61".

[7] Queremos señalar que, tanto para representar los números en el SN maya como el babilónico, hemos utilizado símbolos que son fáciles de reproducir, sabiendo que no coinciden con los originales.

Para resolver esta dificultad se utilizaron símbolos convencionales diferentes para cada uno de los coeficientes (los números menores que la base), desligándolos de toda evocación del número que representaban. Y, además, se añadió un nuevo símbolo: el *cero*, para indicar que en una determinada posición hay ausencia de elementos. De este modo hemos llegado a un sistema de numeración decimal posicional *completo*, como el que utilizamos actualmente de base diez, con los símbolos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 para los coeficientes y el símbolo 0 para indicar ausencia de elementos en una determinada posición.

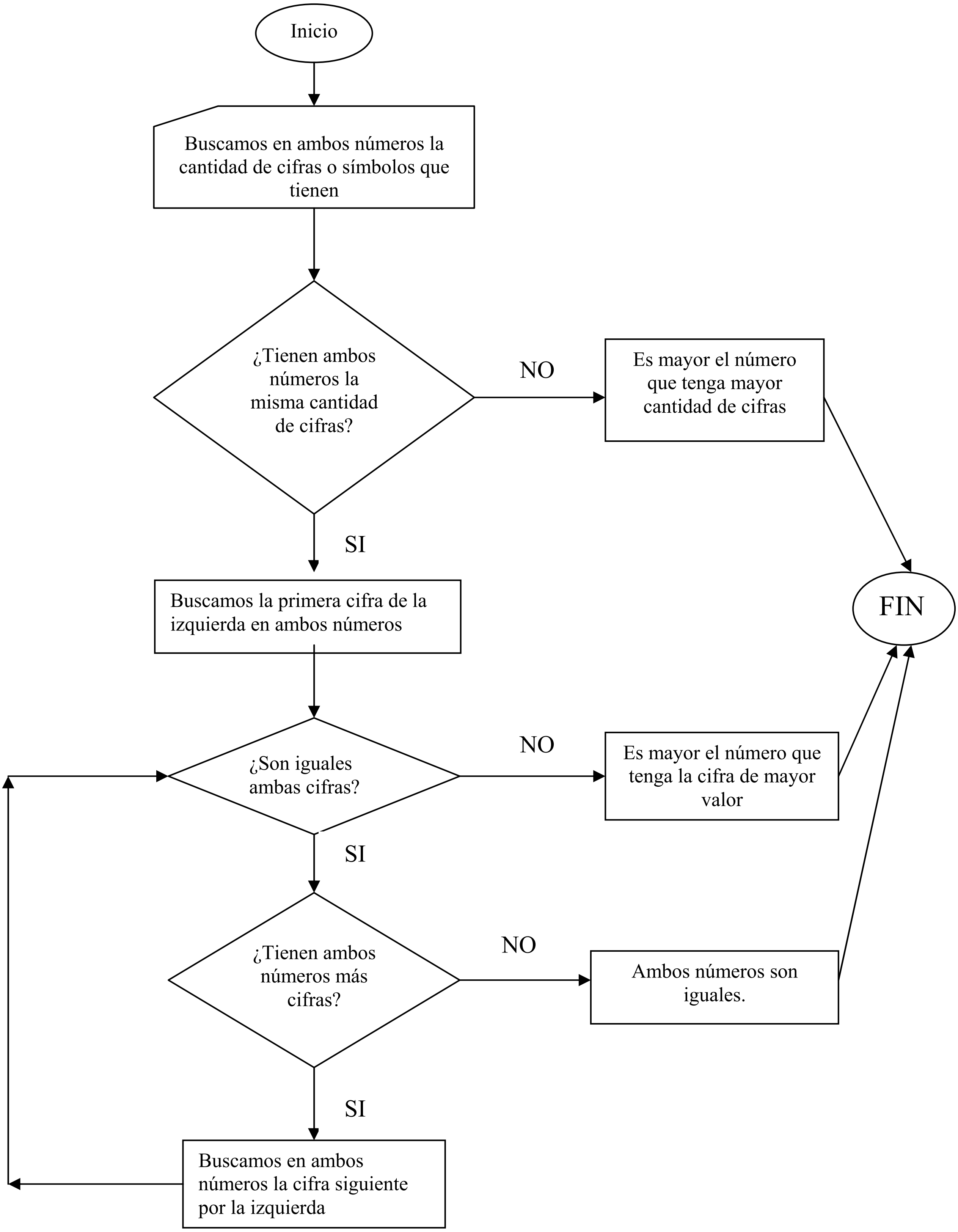
4.2. La comparación de números en el sistema posicional completo

Esta técnica de representación de los números, que denominaremos $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{pc}}$, genera una Organización Matemática que aporta una respuesta suficientemente eficaz para comparar dos números a partir de sus escrituras. Basta observar que el primer criterio para saber qué número es mayor es el de la longitud de la cadena de símbolos utilizados para designarlo: "*A mayor longitud, mayor número*". La misma representación está ligada a la magnitud del número, y por tanto, aporta información rápida e intuitiva sobre su tamaño. Solo será necesario analizar los símbolos empleados cuando tengamos que comparar dos o más números cuyas cadenas de símbolos tengan la misma longitud. El *algoritmo de comparación de dos números* dentro del SN posicional completo lo hemos esquematizado en el organigrama de la página siguiente.

Veremos cómo dentro de $\mathbf{OM_p}$, podemos resolver de una forma más económica y fiable las tareas asociadas a las cuestiones **(5)**, **(6)**, **(7)**, **(8)** y **(9)**.

En este punto queremos subrayar que, en el conjunto de algoritmos de las operaciones aritméticas que pueden utilizarse cuando los números están representados mediante un sistema posicional completo, se produce una cierta incompatibilidad relativa entre dos características deseables de todo algoritmo de cálculo: la *economía* y la *fiabilidad*. Algunos algoritmos ganan economía a base de ocultar (en la escritura) muchas de las operaciones y resultados intermedios, lo que provoca una pérdida de fiabilidad puesto que la detección de errores es mucho más complicada en las operaciones "ocultas". Recíprocamente, existen algoritmos que para ganar en fiabilidad y automatizar el algoritmo, aumentan la cantidad de resultados intermedios que dejan un rastro escrito, perdiendo de esta manera economía. Los algoritmos más interesantes serán aquellos que optimicen ambas características. Volveremos sobre esta cuestión más adelante, después de haber considerado distintos posibles algoritmos para las cuatro operaciones aritméticas elementales: adición, sustracción, multiplicación y división. Debemos señalar que hemos considerado sólo los algoritmos que creemos más habituales o los más interesantes por su economía y fiabilidad. Para un análisis exhaustivo de los diferentes algoritmos de las operaciones se pueden consultar los textos siguientes Banwitiya (1993), Guiet (1995), Guinet (1978a), Guinet (1978b), Guinet (1979), Pauvert (1990).

ALGORITMO DE COMPARACIÓN DE NÚMEROS EL SN POSICIONAL COMPLETO



4.3. Sumar en el sistema posicional completo

Para poder analizar las respuestas posibles a las tareas asociadas a la cuestión **(5)** vamos a explicar dos algoritmos posibles de la adicción dentro de $\mathbf{OM_p}$ que aplicaremos, a modo de ejemplo, al cálculo de la suma: 487 + 3592 + 23.

4.3.1. Primer algoritmo de la adición

Primero colocamos cada número en una fila, de modo que aparezcan las unidades, las decenas, etc., de cada número en la misma columna. A continuación sumamos los números que se presentan en la columna de las unidades, después los números de la columna de las decenas, y así sucesivamente. De modo que al final tendremos que volver a sumar la cantidad de unidades de primer orden con la cantidad de unidades de segundo orden y así hasta la última cantidad unidades que haya.

		4	8	7
	3	8	9	2
			2	3
Suma de unidades			1	2
Suma de decenas		1	9	
Suma de centenas	1	2		
Suma de unidades de mil	3			
	4	4	0	2

Con este algoritmo se pretende evitar el uso de las "llevadas". Para ello, es necesario tener que realizar más escrituras, y en consecuencia, aunque se gana en fiabilidad se pierde en economía de escrituras.

4.3.2. Segundo algoritmo de la adición

Colocamos los números unos debajo de otros, cada uno en una fila y alineados a la derecha, de modo que las unidades de un mismo orden estén en la misma columna. El algoritmo consiste en tomar directamente las unidades de primer orden de cada sumando y sumarlas, a continuación se suman las de segundo orden y así sucesivamente hasta terminar. Cuando en una columna surjan unidades de la columna siguiente, éstas se suman a las unidades de dicha columna. Estas unidades que se añaden a la columna siguiente son las que se llaman "llevadas".

$$\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 1 & \\
 & 4 & 8 & 7 \\
3 & 8 & 9 & 2 \\
 & & 2 & 3 \\
\hline
4 & 4 & 0 & 2
\end{array}$$

Hay que señalar que cuando este algoritmo se utiliza de forma habitual ya no se suelen representar las "llevadas", con lo que se consigue un algoritmo más económico que el primero (pero, quizá, menos fiable). Se puede observar que para poder llevar a cabo los algoritmos anteriores con facilidad es necesario conocer bien la tabla de sumar.

4.4. Restar en el sistema posicional completo

Para poder analizar las posibles respuestas a las tareas asociadas a la cuestión **(6)** dentro de **OM_p**, expondremos a continuación cuatro de las técnicas de sustracción más interesantes, aplicadas al cálculo de 2475 – 1879.

4.4.1. El algoritmo de "pedir prestado"

Se colocan los dos números uno encima del otro alineándolos a la derecha y se empieza a restar de derecha a izquierda, a las unidades de primer orden las unidades de primer orden, a las unidades de segundo orden las de segundo orden, y así sucesivamente. Si las cifras del minuendo son siempre mayores que las correspondientes del sustraendo, esta técnica se reduce a realizar tantas restas independientes como cifras haya en el minuendo. Cuando esto no es así, como es el caso que nos ocupa, la técnica consiste en transformar la escritura del minuendo hasta conseguir que cada uno de los valores que aparecen en cada posición sea mayor que cada una de las cifras correspondientes que aparecen en el sustraendo.

Por ejemplo: Si queremos calcular 2475 – 1879 lo que haremos será transformar la escritura de 2475 de modo que todos los valores que aparezcan en cada una de las posiciones sean mayores que las correspondientes a 1879. Entonces pasaremos a escribir 2475 como 1 (13) (16) (15), de este modo tendremos 15 unidades de primer orden, 16 de 2º orden, 13 de 3º orden y 1 de 4º orden. Ahora ya podemos realizar la sustracción posición a posición.

1	13	16	15
1	8	7	9
0	5	9	6

Podríamos decir que en esta técnica se realiza una descripción del proceso que podría realizarse de forma manipulativa y, además, incorpora la tecnología que justifica la técnica, lo que hace que sea fácil su comprensión. Sin embargo, hay casos en los que su puesta en práctica es poco económica, por ejemplo, cuando hay varias cifras cero en el minuendo, caso de cálculo 3001 – 1567. Por ello, es una técnica difícil de utilizar posteriormente en la división.

4.4.2. El algoritmo clásico o de Fibonacci

Se colocan minuendo y sustraendo como en el caso anterior y cuando existe alguna cifra en el minuendo menor que la correspondiente del sustraendo se suman 10 unidades de ese orden al minuendo. A continuación, se hace la resta y después se suma una unidad del orden siguiente al sustraendo, de este modo si sumamos el mismo número al minuendo y al sustraendo la diferencia no varía (pues 10 unidades de un orden equivalen a 1 unidad del orden siguiente). Por ejemplo:

2	${}_{1}4$	${}_{1}7$	${}_{1}5$
1_{+1}	8_{+1}	7_{+1}	9
0	5	9	6

Se dice:
5 menos 9 no puedo; 15 menos 9, 6 y me llevo 1.
7 menos (7+1) no puedo; 17 menos 8, 9 y me llevo 1.
4 menos (8+1) no puedo, 14 menos 9, 5 y me llevo 1.
2 menos (1+1), 0.

Este método tiene el inconveniente de que es difícil de justificar (no incorpora la tecnología), por lo que a la larga, se aplica mecánicamente, lo que dificulta la posibilidad de rectificar errores motivados por el olvido ocasional de algún aspecto del algoritmo.

4.4.3. El algoritmo por compensación

Esta técnica se inicia colocando igualmente minuendo y sustraendo uno encima del otro, alineándolos a la derecha y cuando existe alguna cifra en el minuendo menor que la correspondiente del sustraendo, se transforma el minuendo en otro número donde la primera cifra de la izquierda queda igual y todas las demás cifras pasan a ser nueve, de este modo lo que se hace es sumar un número al minuendo y para que la diferencia no varíe debemos también sumar ese mismo número al sustraendo. Por ejemplo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & 4 & 7 & 5 & \xrightarrow{+\,524} & 2 & 9 & 9 & 9 \\ 1 & 8 & 7 & 9 & \xrightarrow{+\,524} & 2 & 4 & 0 & 3 \\ \cline{6-9} & & & & & 0 & 5 & 9 & 6 \end{array}$$

4.4.4. El algoritmo de “adición con huecos”

Esta técnica se inicia colocando los dos números como en el caso anterior y ahora se trata de buscar qué número se tiene que sumar al sustraendo para obtener el minuendo. Por ejemplo:

$$\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 7 & 5 \\ 1^{1} & 8^{1} & 7^{1} & 9 \\ \hline 0 & 5 & 9 & 6 \end{array}$$

Se procede de derecha a izquierda posición a posición del siguiente modo: Se calcula qué número hay que añadir a 9 para obtener 15, (9 para llegar a 15, 6 y me llevo 1), luego lo que hay que añadir a 7+1 para obtener 17, (de 8 para ir a 17, 9 y me llevo 1), a continuación lo que hay que añadir a 8+1 para obtener 14, (de 9 para llegar a 14, 5 y me llevo 1) y por fin lo que hay que añadir a 1+1 para obtener 2. Esta es una buena técnica para ser utilizada posteriormente en la división.

De los cuatro algoritmos considerados, podemos decir que los más económicos son el algoritmo clásico y el de “adición con huecos”. En cuanto al algoritmo de “pedir prestado” y al de “por compensación” podemos decir que, aunque son menos económicos, permiten una mayor integración del discurso tecnológico con la práctica concreta del algoritmo, lo que comporta mayores posibilidades de corregir posibles errores originados por el olvido de la mecánica del algoritmo y, lo que es más importante, una mayor capacidad de desarrollo de dicho algoritmo en manos de los estudiantes.

Creemos que el que reúne mejores condiciones en cuanto a economía, fiabilidad e integración del discurso tecnológico es el que hemos llamado algoritmo de "adición con huecos". Las razones de esta elección provienen de considerar:

1. Que es una técnica al menos tan económica en escrituras como el algoritmo clásico o de Fibonacci, y más económica que los algoritmos de "pedir prestado" y de "por compensación".

2. Que debido a que su justificación se basa en la equivalencia entre las expresiones $a - b = c$ y $a = b + c$, dicha técnica no exige más que saber realizar una adición, lo que la convierte en más fiable que la técnica clásica ya que integra su justificación en la propia realización del algoritmo.

Algunos autores (Pauvert, 1990; Guinet, 1978a) afirman que el inconveniente de la técnica "de adición con huecos" es de orden cultural, pues es poco conocida. Sin embargo, le atribuyen dos ventajas:

a) La primera de tipo pedagógico, ya que aprovecha la inclinación de los alumnos a querer realizar una adición en lugar de una sustracción.

b) La segunda de orden práctico, pues esta técnica se adapta mejor que las demás para ser aplicada en la técnica clásica de la división.

Hay que notar también que para poner en práctica los algoritmos anteriores con facilidad es necesario dominar las tablas de sumar.

4.5. Multiplicar en el sistema posicional completo

Si queremos analizar las posibles respuestas a las tareas asociadas a la cuestión **(7)** dentro de $\mathbf{OM_p}$, expondremos a continuación tres de las técnicas de multiplicación más utilizadas y las aplicaremos a calcular 2745×389.

4.5.1. La técnica de doble entrada

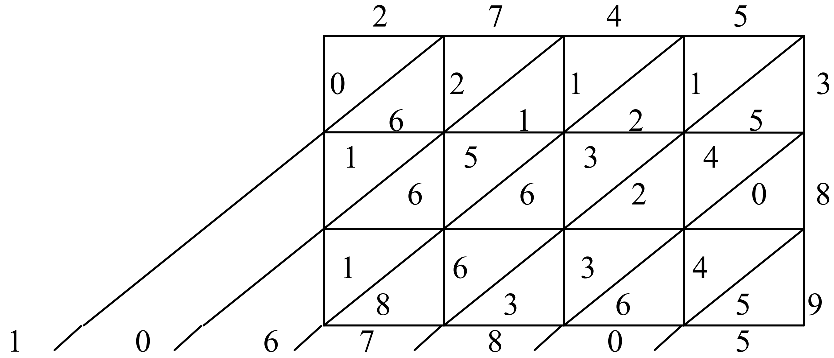
Colocamos los números que intervienen en el cálculo como si fueran las dimensiones de un rectángulo haciendo la descomposición canónica de cada número y realizamos la reducción de las escrituras por trozos. Luego sumamos lo obtenido en cada una de las columnas y, por último, sumamos los totales de cada columna. Por ejemplo:

2000	700	40	5	
600000	210000	12000	1500	300
160000	56000	3200	400	80
18000	6300	360	45	9

778000 + 272300 + 15560 + 1945 = 1067805

4.5.2. La técnica "per gelosia"

Se coloca uno de los factores en la parte superior del cuadro de modo que la cifra de las unidades coincida con la primera columna de la derecha, la cifra de las decenas con la segunda columna y así sucesivamente. El otro factor se coloca en el lateral derecho de modo que la cifra de las unidades coincida con la última fila, la cifra de las decenas con la penúltima fila, y así sucesivamente. A continuación, se multiplica cada cifra de un factor por cada cifra del otro factor y el resultado se coloca en el lugar de la fila y columna correspondiente. Cada celda de la matriz esta dividida en dos, la de la izquierda-arriba para las decenas y la de la derecha-abajo para las unidades. Una vez relleno todo el cuadro se obtiene el resultado de la multiplicación sumando los números de cada diagonal, ya que cada diagonal corresponde a una cierta potencia de la base $n = 10$. Así, la primera diagonal de la derecha corresponde a las unidades, la siguiente a las decenas, y así sucesivamente.



En nuestro ejemplo se obtiene como resultado de la multiplicación: $2745 \times 389 = 1067805$. Vemos que esta técnica de multiplicar es mucho *más económica* que la que se utilizaba con los Sistemas de Numeración "híbridos" (ver sección *3.4.*) y, además, es mucho *más fiable*, puesto que permite realizar los productos parciales en cualquier orden, desembocando siempre en una matriz que estructura la organización de los cálculos, lo que reduce enormemente el peligro de cometer errores. En APMEP (1976), se señala que hay cuatro razones por las que esta técnica es importante:

- No se impone ningún orden en la realización de los cálculos parciales.
- La memoria interviene poco, pues uno se puede parar en el transcurso de su realización y posteriormente volver a continuar sin tener que volver a empezar.
- Los errores son muy fáciles de detectar.
- Al contrario de lo que ocurre con la técnica clásica no hay llevadas que memorizar, lo que disminuye el peligro de cometer errores.

4.5.3. La técnica clásica

Se colocan los dos factores uno debajo del otro alineados a la derecha. Se llama al primer número (en este caso, 2745) multiplicando y al segundo (en este caso, 389) multiplicador. Luego se multiplica la cifra de las unidades de primer orden del multiplicador por cada una de las cifras del multiplicando. Así se multiplica 9 por 5 y se obtiene 45, el 5 se coloca en las unidades de primer orden y el 4 se deja para sumarlo a las unidades de segundo orden que aparezcan al multiplicar 9 por 4. Así a $9 \times 4 = 36$ unidades de segundo orden se le suman las 4 unidades que teníamos, y se obtiene 40 unidades de segundo orden. Iterando este proceso obtenemos el resultado de multiplicar 9×2745 = 24705 y se coloca en la primera fila debajo de la línea que separa de los dos factores. A continuación se multiplica la cifra de las unidades de segundo orden por cada una de las cifras del multiplicando, y el primer resultado se coloca en la posición de las unidades de segundo orden y se continúan los cálculos de modo análogo al caso anterior. Por último, se multiplica la cifra de las unidades de tercer orden por cada una de las cifras del multiplicando. El primer resultado se coloca en la posición de las unidades de tercer orden y se siguen realizando los cálculos de forma semejante a los casos anteriores. Una vez obtenidos los productos parciales de cada cifra del multiplicador por cada una de las cifras del multiplicando, se suman y se obtiene el resultado final.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 2 & 7 & 4 & 5 \\
 & & \times & & 3 & 8 & 9 \\
\hline
 & & 2 & 4 & 7 & 0 & 5 \\
 & 2 & 1 & 9 & 6 & 0 & \\
 & 8 & 2 & 3 & 5 & & \\
\hline
1 & 0 & 6 & 7 & 8 & 0 & 5
\end{array}
$$

Para poder realizar estos algoritmos es necesario conocer bien las tablas de multiplicar de los coeficientes. De los tres algoritmos considerados podemos decir que el menos económico es el primero, a continuación el segundo y por último el tercero que es el más económico de los tres. En cuanto a la fiabilidad podemos considerar que sucede al revés, es decir, que el más fiable es el primero, después el segundo y luego el tercero.

Con respecto a los algoritmos de la multiplicación creemos importante reseñar la experiencia realizada por Guy Brousseau en el IREM de Bordeaux, donde en (Brousseau, 1973) expone las ventajas del algoritmo “per gelosía” y los inconvenientes del algoritmo “clásico” para el proceso de enseñanza aprendizaje de la multiplicación en Primaria. Además posteriormente en el Grupo de investigación del IREM de Bordeaux (IREM de Bordeaux, 1985) ha realizado un trabajo de investigación sobre el aprendizaje de la multiplicación en Primaria (2º curso (7-8 años) y 3º curso (8-9 años)) donde la técnica “per gelosía” es considerada como el objetivo de un proceso didáctico, y no como una técnica mecánica que puede ser mostrada tal cual por el enseñante.

4.6. Dividir en el sistema posicional completo

Si queremos analizar las posibles respuestas a las tareas asociadas a la cuestión **(8)** dentro de $\mathbf{OM_p}$, expondremos a continuación tres de las técnicas de división que creemos más interesantes, y las aplicaremos a calcular 3621 dividido entre 76.

4.6.1. El algoritmo de los múltiplos útiles

Primero se escriben los primeros múltiplos de 76:

76 152 228 304 380 456 532 608 684

760 1520 2280 3040

Nos paramos en 3040 porque el siguiente múltiplo útil sería 3800 y ya es mayor que el dividendo.

A continuación se procede del siguiente modo: primero restamos 3040 (40 veces 76) al dividendo, al resultado 581 le restamos el mayor múltiplo útil de 76 que podemos y éste es 532 (7 veces 76), y obtenemos 49 que ya es menor que 76 y por tanto es el resto de la división. Para hallar el cociente sumamos 40 y 7 que es 47 el número de veces que hemos restado 17.

3621	**76**
3040	40
0581	
0532	7
49	47

*Luego el cociente es **47** y el resto **49***

4.6.2. El algoritmo anglosajón

Se dispone el dividendo bajo una portería de rugby. El cociente se colocará por encima de la barra de la portería. En la parte izquierda se coloca el divisor y se calculan sus diferentes múltiplos que se han de ir restando hasta obtener un número más pequeño que el divisor. Así, se resta uno de estos múltiplos al dividendo y la cifra del cociente correspondiente se coloca encima de la cifra de la unidades del múltiplo que se resta. Esto permite observar desde el principio el número de cifras que va a tener el cociente.

	47
76	7
	40
$76 \times 40 = 3040$	**3621**
	-3040
$76 \times 7 = 532$	0581
	- 532
	049

Según Guy Brousseau (APMEP, 1983, anexo III) este algoritmo presenta ciertas ventajas:

- Los cálculos intermedios figuran explícitamente y la detección de errores es más fácil
- Los productos parciales no se calculan más que una vez
- Los ceros intermedios causan menos errores
- El número de cifras del cociente está presente desde el comienzo
- Los tanteos legítimos no dan lugar a ninguna tachadura traumatizante
- El aprendizaje es más flexible, pues la técnica óptima puede ser obtenida progresivamente, sin mecanización.

4.6.3. El algoritmo habitual abreviado

Se comienza tomando, por la izquierda, cifras del dividendo hasta tener un número mayor que el divisor. Se toma el 3, y como 3 es más pequeño que 76, se toma 36, que todavía es más pequeño que 76 y a continuación se toma 362 que ya es mayor que 76. Ahora se busca un número de una cifra que al multiplicarlo por 76 el resultado se acerque lo más posible a 362 y resulta que es el 4. Entonces decimos: “4 por 6, 24; al 32 van 8 y me llevo 3; 4 por 7, 28 más 3, 31 al 36 van 5”[8].

[8] Aquí podríamos decir que hemos realizado una operación mixta, mezcla de una multiplicación y una sustracción. Porque se trata de calcular $362 - (4 \times 76) = 362 - 304 = 58$, y esto se realiza del siguiente modo: $4 \times 6 = 24$ y se descompone $362 = 330 + 32$ y se calcula $32 - 24$ que es 8. Se escribe 8 y se llevan 3 de 32. A continuación se calcula $4 \times 7 = 28$ y se añaden las 3 que nos llevábamos y se obtiene 31 que se resta de 36, obtenido a su vez de sumar implícitamente también 3 al 33 de 330. En el cálculo de 4×76, al multiplicar 4×6, nos llevamos 2; y en el cálculo de $32 - 24$ nos llevamos 1. Mientras que en la operación mixta realizada nos llevamos 3. Es decir, se ha realizado una operación que entremezcla el cálculo de un producto y de una diferencia dando lugar a “llevadas” no habituales.

$$\begin{array}{r|l} 3621 & 76 \\ \cline{2-2} 58 & 4 \end{array}$$

A continuación se baja la cifra siguiente, el 1. Se busca un número de una cifra que al multiplicarlo por 76 el resultado se acerque lo más posible a 581, y se obtiene el 7. Así decimos: “7 por 6, 42 al 51 van 9 y me llevo 5; 7 por 7, 49 más 5, 54 al 58 va 4”.

$$\begin{array}{r|l} 3621 & 76 \\ \cline{2-2} 581 & 47 \\ 49 & \end{array}$$

Se obtiene, en resumen, que el cociente es 47 y el resto 49.

Hemos visto cómo, gracias a las propiedades del sistema posicional completo, existen varios algoritmos muy económicos para realizar la división euclídea. Si ordenamos los tres algoritmos en lo que se refiere a su economía, el menos *económico* será el primero, después el segundo y el más económico será el tercero. Sin embargo, si los ordenamos en cuanto a su fiabilidad, obtenemos un orden al revés, es decir, el más fiable es el primero, después el segundo y el menos fiable es el tercero.

Debido a la *economía y fiabilidad* con que se pueden efectuar los algoritmos de multiplicar y dividir (a pesar de que deban utilizarse las tablas de sumar y de multiplicar), podemos afirmar que la técnica $\boldsymbol{\tau_{pc}}$ de representación de los números nos va a permitir una caracterización muy sencilla de los criterios de divisibilidad a partir de sus escrituras, la descomposición en factores primos, y la obtención del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo de dos o más números.

4.7. Elementos tecnológico-teóricos del sistema posicional completo

Así como sucedía en los SN aditivos e híbridos, si tenemos en cuenta el resultado que nos proporciona el *teorema fundamental de los Sistemas de Numeración* (sección 2.2.6) podemos asegurar que el SN posicional completo nos proporciona una técnica de representación de los números, $\boldsymbol{\tau_{pc}}$**,** en la que todo número natural, independientemente de su tamaño, tiene una única representación.

Como ya hemos dicho, en este sistema sólo hay símbolos multiplicadores de las potencias de la base, y las potencias de la base vienen indicadas por las posiciones que ocupan sus respectivos coeficientes o multiplicadores. Así la escritura de cada número viene determinada por los respectivos coeficientes, colocados de derecha a izquierda desde el coeficiente de la potencia de menor valor al coeficiente de la potencia de mayor valor. Por ello, tenemos que esta técnica nos da una respuesta válida a las tareas asociadas a la cuestión **(1)**, de modo que no existe ningún tipo de ambigüedad en la expresión escrita de los números.

Con esta técnica de representación τ_{pc} se da una respuesta más eficaz y de mayor alcance que con τ_a y τ_h, a las tareas de comparación y de cálculo asociadas a las cuestiones **(4)**, **(5)**, **(6)**, **(7)**, **(8)** y **(9)**. Por ello, en lo que sigue vamos a exponer algunos elementos que permiten justificar los algoritmos de cálculo asociado a τ_{pc}.

En primer lugar hay que resaltar que, en el SN posicional completo, la representación escrita de cada número viene ya ordenada, como una exigencia de sus reglas de funcionamiento. Por ello, tanto en las tareas de comparación como en las de cálculo, no será necesario colocar previamente de forma ordenada los símbolos, como sucede en el caso de los SN aditivos e híbridos.

La técnica de comparación de dos números es más económica que las utilizadas en $\mathbf{OM_a}$ y en $\mathbf{OM_h}$. Aquí sólo tenemos que comparar los coeficientes, cuando en los SN aditivos e híbridos era necesario comparar, en cada paso, primero los símbolos de las potencias de la base y después los coeficientes. Podemos afirmar que en $\mathbf{OM_p}$, la técnica τ_{pc} es una técnica de representación de los números más eficaz para la comparación de números porque la representación de cada número está muy ligada a su tamaño, cosa que no ocurre tanto en $\mathbf{OM_a}$ como en $\mathbf{OM_h}$. Dicho de otra manera, el tamaño de la escritura de los números nos informa también del tamaño del número.

En cuanto a los algoritmos de adición, su justificación está basada primero en el principio de cambio de la numeración de base 10 descrito anteriormente. También están basadas en el carácter posicional del SN, ya que el hecho de empezar alineando a la derecha todos lo números que hay que sumar, hace que todas las unidades de un mismo orden estén en una misma columna.

En lo que se refiere a las técnicas de sustracción, los cuatro métodos difieren en la manera que hacen frente al problema que se presenta cuando alguna de las cifras del minuendo es inferior que la correspondiente del sustraendo En todos ellos el objetivo es transformar el cálculo de la diferencia de dos números a y b (con $a \geq b$) (donde a es el minuendo con n cifras y b el sustraendo con n o menos cifras) en n cálculos independientes columna por columna.

La **técnica de "pedir prestado"** es un algoritmo que también está basado en el principio de cambio de la numeración decimal. En este algoritmo lo que se realiza es una transformación de la escritura del minuendo con el fin de conseguir que todas las posiciones del minuendo dispongan de coeficientes mayores que las correspondientes del sustraendo. De este modo se reduce el algoritmo a realizar el cálculo columna por columna.

La **técnica clásica o de Fibonacci** es un algoritmo cuya justificación está basada en una propiedad fundamental de la sustracción: "Si al minuendo y al sustraendo les sumamos el mismo número la diferencia no varía". En otros términos, dados $a \in \mathrm{N}$ y $b \in \mathrm{N}$, con $a \geq b$, se cumple que $\forall c \in \mathrm{N}$, $a - b = (a + c) - (b + c)$. En el cálculo de la sustracción de dos números, cuando en una de las columnas la cifra del minuendo es menor que la del sustraendo, se aplica esta propiedad sumando 10 unidades del orden que corresponde a esa columna a la cifra del minuendo, de modo que ya se puede realizar la sustracción en dicha columna. Luego, para terminar de aplicar la propiedad se suma a la cifra de la columna siguiente del minuendo una unidad del orden de dicha columna. Así hemos sumado primero al minuendo 10 unidades de un orden y después también hemos sumado una unidad del orden inmediatamente siguiente al sustraendo, con lo que la diferencia no varía.

La **técnica por compensación** está basada también en la misma propiedad que el algoritmo anterior, con la diferencia de que aquí se aplica de forma global a todo el número y en el anterior se hacía en cada una de las columnas o posiciones en que era necesario.

La **técnica de "adición con huecos"** se basa en considerar que la sustracción es la operación inversa de la adición. Dados $a \in \mathrm{N}$ y $b \in \mathrm{N}$, con $a \geq b$, se cumple que $a - b = c \Leftrightarrow b + c = a$. Aquí, para calcular $a - b$, buscamos un c tal que $b + c = a$.

En cuanto a la multiplicación, los tres algoritmos propuestos están basados en la descomposición aditiva de cada uno de los factores, donde cada sumando está formado por cada coeficiente multiplicado por su correspondiente potencia de la base. Posteriormente a esta descomposición se le aplica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición. Así, si queremos efectuar el producto 2745 × 389, se realiza lo siguiente:

$2745 \times 389 = (2000 + 700 + 40 + 5) \times (300 + 80 + 9) =$

$= ((2000 + 700 + 40 + 5) \times 300) + ((2000 + 700 + 40 + 5) \times 80) + ((2000 + 700 + 40 + 5) \times 9) =$

$= [(2000\times300) + (700\times300) + (40\times300) + (5\times300)] +[(2000\times80) + (700\times80) + (40\times80) + (5\times80)] + [(2000\times9) + (700\times9) + (40\times9) + (5\times9)]$

$= [600000 + 210000 + 12000 + 1500] + [160000 + 56000 + 3200 + 400] + [18000 + 6300 + 360 + 45] = 823500 + 219600 + 24705 = 1067805.$

O también:

$2745 \times 389 = (2000 + 700 + 40 + 5) \times (300 + 80 + 9)$

$= (2000 \times (300 + 80 + 9)) + (700 \times (300 + 80 + 9)) + (40 \times (300 + 80 + 9)) + (5 \times (300 + 80 + 9))$

$= [(2000 \times 300) + (2000 \times 80) + (2000 \times 9)] + [(700 \times 300) + (700 \times 80) + (700 \times 9)] + [(40 \times 300) + (40 \times 80) + (40 \times 9)]+ [(5 \times 300) + (5 \times 80) + (5 \times 9)]$

$= [600000 + 160000 + 18000] + [210000 + 56000 + 6300] + [12000 + 3200 + 360] + [1500 + 400 + 45]$

$= 778000 + 272300 + 15560 + 1945 = 1067805.$

La segunda descomposición da lugar al algoritmo que hemos llamado de **la tabla de doble entrada**. Además este algoritmo permite justificar el funcionamiento del **algoritmo "per gelosia"**, pues dentro de cada celda de la tabla de doble entrada siempre aparecen entre una o dos cifras significativas distintas de cero.

2000	700	40	5	
600000	**21**0000	**12**000	**15**00	300
160000	**56**000	**32**00	**4**00	80
18000	**63**00	**36**0	**45**	9

Dichas cifras significativas son las únicas que aparecen dentro de cada celda que, a su vez, es dividida en dos, para poder poner en la parte de la derecha la cifra o coeficiente que multiplica a la potencia de menor valor y en la parte de la izquierda la cifra o coeficiente que multiplica a la potencia de mayor valor.

De esta manera la celda $\boxed{{}^{\mathbf{3}}\diagup{}_{\mathbf{2}}}$ se corresponde con $\boxed{\mathbf{32}00}$ que a su vez proviene

de $40 \times 80 = (4 \times 10) \times (8 \times 10) = 32 \times 10^2$, donde $32 \times 10^2 = (30 \times 10^2) \times (2 \times 10^2) = (3 \times 10^3) \times (2 \times 10^2)$. De este modo en cada una de las celdillas en que está descompuesta cada celda aparece una cifra que es el coeficiente de una potencia de la base. Así las cifras que aparecen en cada una de las diagonales son los coeficientes que multiplican a la misma potencia de la base. Por ello, al final se suman los coeficientes de la matriz que resulta siguiendo las diagonales.

En lo que se refiere al **algoritmo clásico**, su justificación se hace a partir de la descomposición aditiva realizada en primer lugar, donde la disposición de los cálculos nos permite dar cuenta de la manera efectiva de realizar de dicha técnica:

$$
\begin{array}{r}
2745 \\
\times\, 389 \\
\hline
\left.\begin{array}{r} 45 \\ 360 \\ 6\,300 \\ 18\,000 \end{array}\right\} \\
\left.\begin{array}{r} 400 \\ 3\,200 \\ 56\,000 \\ 160\,000 \end{array}\right\} \\
\left.\begin{array}{r} 1500 \\ 12000 \\ 210000 \\ 600000 \end{array}\right\} \\
\hline
1067805
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\\ \\ \longrightarrow \\ \\ \longrightarrow \\ \\ \longrightarrow \\ \\
\end{array}
\quad
\begin{array}{r}
2745 \\
\times\, 389 \\
\hline
24705 \\
219600 \\
823500 \\
\hline
1067805
\end{array}
$$

En lo que se refiere a los algoritmos de división, dados dos números naturales a y b que llamamos dividendo y divisor respectivamente, se trata de encontrar otros dos números c y r, que llamamos cociente y resto respectivamente, tales que cumplan las dos condiciones siguientes:

- $a = b \times c + r$
- $0 \leq r < b$

Resulta que *c* es el número por el que tenemos que multiplicar *b* para obtener el mayor múltiplo de *b* inferior o igual a *a*. Por tanto, dicho múltiplo de *b*, es $(b \times c)$. Una vez calculado $(b \times c)$, podremos encontrar también *c* y *r*. Dicho múltiplo debe de cumplir que $a - (b \times c) = r$, con $0 \leq r < b$. Esta condición nos permite justificar las tres técnicas utilizadas, pues el principio de estos algoritmos consiste en ir restando al dividendo, *a*, múltiplos del divisor, *b*, hasta obtener un número *r* inferior a *b*. La suma de todos los múltiplos $(b \times c_1) + (b \times c_2) + \ldots + (b \times c_h)$ que se han ido restando al dividendo coincide con el mayor múltiplo de *b* que estamos buscando. Del mismo modo, la suma de $c_1 + c_2 + \ldots + c_h = c$. En general, el procedimiento seguido es:

$a - (b \times c_1) = a_1$, como $a_1 \geq b$ entonces seguimos restando múltiplos de *b*,

$a_1 - (b \times c_2) = a_2$, como $a_2 \geq b$ seguimos restando múltiplos de *b*,

………………..

Hasta que $a_{h-1} - (b \times c_h) = r$, con $r < b$.

Juntando todos los cálculos anteriores tendremos que

$$a - (b \times c_1) - (b \times c_2) - \ldots - (b \times c_h) =$$

$$= a - [(b \times c_1) + (b \times c_2) + \ldots + (b \times c_h)] = a - [b \times (c_1 + c_2 + \ldots + c_h)] =$$

$$= a - (b \times c) = r, \text{ donde } c \text{ es el cociente y } r \text{ el resto.}$$

Los tres algoritmos que hemos utilizado se basan en este mismo principio de restar múltiplos del dividendo, pero difieren en el modo de elegir dichos múltiplos.

El algoritmo de los "múltiplos útiles" consiste primero en escribir los productos del divisor *b* por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30,…, 90, 100, 200, …900, 1000, 2000, …que sean menores que *a*. Dichos productos son los que se llaman "múltiplos útiles" y se llaman así porque son los que permiten obtener cada una de las cifras del cociente. El hecho de escribir a priori todos los múltiplos útiles, hace que este algoritmo sea fácil de interpretar y justificar, sin embargo es poco económico debido a que hay que escribir varios múltiplos que posteriormente no serán utilizados.

En **el algoritmo anglosajón**, la elección de los múltiplos se va realizando a cada paso, y con el fin de hacerlo regularmente de forma organizada y económica se privilegian los múltiplos del divisor *b* y de las potencias de 10. Cada uno de los múltiplos elegidos nos va a permitir obtener las sucesivas cifras del cociente. De este modo, en la forma más económica se realizarán tantas sustracciones como cifras tiene el cociente, salvo en el caso que alguna de las cifras del cociente sea cero.

En **el algoritmo habitual abreviado**, la elección de los múltiplos también se va realizando paso a paso. Pero lo que le diferencia con el anterior es que dichos múltiplos no se escriben, ya que para cada cifra del cociente se realiza una operación mixta, mezcla de una multiplicación y una sustracción. Esto convierte a este algoritmo en el más económico y menos fiable.

4.8. Criterios para el análisis de la economía y la fiabilidad de los algoritmos

Para intentar aclarar las nociones de *economía* y *fiabilidad* que hemos venido utilizando para caracterizar los algoritmos de cálculo en los distintos SN, vamos a explicitar algunos criterios que nos pueden ayudar a decidir en un sentido u otro. Para la elaboración de estos criterios hemos tomado como referencia el análisis de algoritmos que se realiza en (Horowitz , Sahni y Rajasecaran , 1998) y (Duch, 2006).

(a) Criterio para determinar si un algoritmo es más económico que otro

- El número de rasgos ó símbolos escritos necesarios para realizar dicho algoritmo en el peor caso posible.

En consecuencia un algoritmo será más *económico* en escrituras si su número de rasgos o símbolos es menor.

(b) Criterios para determinar si un algoritmo es más fiable que otro

1. El número de operaciones mentales internas que es necesario realizar en el caso peor posible.
2. El número de operaciones que es necesario memorizar.
3. Robustez de la técnica frente a posibles paradas (no dependencia de los pasos a seguir respecto de los demás).
4. La manera en que la justificación de la técnica interviene en la propia técnica (claridad conceptual del algoritmo).

En definitiva un algoritmo será más *fiable* que otro si el número de operaciones mentales internas y el número de operaciones que es necesario memorizar es menor. Además favorece dicha fiabilidad el hecho de que el algoritmo integre elementos tecnológicos y el que no sea necesario realizar encadenamientos de unos cálculos con respecto a otros.

Con el fin de mostrar la validez y utilidad de los criterios anteriores vamos aplicarlos a dos algoritmos de la multiplicación: el algoritmo "clásico" (ver sección 4.5.3) y el algoritmo "per gelosia" (ver sección 4.5.2):

El algoritmo "clásico"

Supongamos que queremos multiplicar dos números naturales $a = a_1a_2\ldots a_p$ y $b = b_1b_2\ldots b_q$ utilizando para ello el algoritmo "clásico" o de Fibonacci.

Si aplicamos el *criterio de economía*, diremos que necesitaremos escribir primero los p símbolos de a y los q símbolos de b, luego un segmento de recta para separar los factores de los productos parciales, a continuación escribiremos en la primera fila debajo del segmento, en el peor de los casos, $(p + 1)$ símbolos del producto parcial de la cifra b_q por cada una de las cifras de a; en la segunda fila, también escribiremos $(p + 1)$ símbolos del producto parcial de la cifra b_{q-1} por cada una de las cifras de a, y así hasta la fila q donde escribiremos los $(p + 1)$ símbolos del producto parcial de la cifra b_1 por cada una de las cifras de a. Para terminar se vuelve a trazar otro segmento de recta para separar los productos parciales del resultado final, y se escriben, en el peor de los casos, $(p + q)$ símbolos ó cifras. Por tanto, si hacemos el recuento, tendremos que en total es necesario escribir, en el peor de los casos, $(p + 1) \times q + 2\,(p + q)$ símbolos ó cifras y dos segmentos de recta.

Si aplicamos los *criterios de fiabilidad*, diremos que para el cálculo $a_1a_2\ldots\ a_p \times b_1b_2\ldots b_q$ necesitaremos, en el peor de los casos, realizar $q \times (p - 1)$ memorizaciones y $q \times (p - 1)$ sumas internas, ya que cada producto $a_i \times b_j$ tiene llevadas y, por ello, es necesario realizar mentalmente el cálculo de sumar las llevadas, salvo para la última cifra de a, ya que en este caso la llevada se escribe. Por tanto, necesitamos realizar $2 \times q \times (p - 1)$ operaciones mentales internas. Además al realizar todos los productos $a_i \times b_j$ se han obtenido colocados en q filas (una por cada cifra de b). Cada fila es el resultado de multiplicar cada b_j por cada una de las cifras de a. Para obtener el producto de $a \times b$ necesitamos sumar todos los resultados parciales que aparecen en las q filas. En la adición de dichos productos parciales podemos considerar que en el peor de los casos se pueden presentar las llevadas en $(p + q - 2)$ casos, ya que el producto total $a \times b$ tendrá como máximo $(p + q)$ cifras y no puede haber llevadas ni en la cifra de las unidades, porque sólo hay una cifra, ni en la cifra de las unidades de mayor valor, porque sólo hay una cifra o porque coincide con las llevadas. Con lo que en este caso tendríamos que realizar $2 \times q \times (p - 1) + p + q - 2$ operaciones mentales internas.

En cuanto al número de operaciones que es necesario memorizar para poder realizar dicho algoritmo diremos que es necesario conocer las tablas de multiplicar. Más concretamente, de la tabla de multiplicar siguiente se necesita memorizar los 36 productos señalados ya que la tabla es simétrica respecto de la diagonal principal, y los nueve primeros resultados coinciden con los 9 primeros números.

Tabla de multiplicar

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

En cuanto a la suma, también es necesario memorizar las 45 sumas señaladas, debido a que la tabla también es simétrica respecto a la diagonal principal, y además será necesario dominar el algoritmo de la suma para q sumandos.

Tabla de sumar:

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

En cuanto al tercer criterio, hay que señalar que en este algoritmo la realización de los productos $a_i \times b_j$ está encadenada y ligada para todos los productos $(a_i \times b_j)$ con j fijo e $i = 1, 2,\ldots, p$. Esto obliga a no perder el hilo de los cálculos de cada b_j por todos los a_i para $i = 1, 2,\ldots, p$.

Y, en lo que se refiere al cuarto criterio de *fiabilidad*, podemos decir que no aparecen de forma explícita en la propia técnica elementos que la justifiquen.

El algoritmo "per gelosia"

Queremos multiplicar dos números naturales $a = a_1a_2\ldots\ a_p$ y $b = b_1b_2\ldots b_q$ utilizando para ello el algoritmo "per gelosia".

Si aplicamos el *criterio de economía*, diremos que necesitaremos escribir primero los p símbolos de a y los q símbolos de b. En segundo lugar, trazaremos una tabla con $(p + 1)$ segmentos de recta paralelos y $(q + 1)$ segmentos de recta perpendiculares a los anteriores. En total $(p + q + 2)$ segmento de recta. A continuación trazaremos $(p \times q)$ segmentos que son las diagonales de cada celda y rellenaremos la tabla con $2(p \times q)$ símbolos ó cifras. Para terminar escribiremos, en el peor de los casos, los $(p + q)$ símbolos del resultado final. En resumen, si hacemos un recuento, necesitaremos escribir $2 (p \times q) + 2(p + q)$ símbolos ó cifras y $(p + q + 2) + (p \times q)$ segmentos de recta.

Si aplicamos los *criterios de fiabilidad*, diremos que tendremos que fabricar una tabla de p columnas y q filas e ir colocando cada uno de los productos $a_i \times b_j$ en la celda correspondiente a la fila j y la columna i. Después de realizar todos estos productos parciales en el orden que se desee, se pasa a sumar, en el peor de los casos, las $p + q$ diagonales. Entonces se pueden presentar en el peor de los casos $p + q – 2$ llevadas, pues la cifra de las unidades es única y lo mismo ocurre con la cifra de las unidades de mayor valor, ya que ésta o es única o es la misma llevada. Por tanto en este algoritmo se puede presentar a lo sumo $p + q – 2$ operaciones mentales internas.

En cuanto a número de resultados que hay que memorizar coincide con el número de resultados que hay memorizar para el algoritmo “clásico”, es decir, 36 resultados de la tabla de multiplicar y 45 de la tabla de sumar, y además en el caso de la suma es necesario conocer el algoritmo de la suma, en el peor de los casos, para $(p + q – 1)$ sumandos, pues éste será el número de cifras que tiene la diagonal mayor.

En lo que se refiere al tercer criterio podemos afirmar que una característica importante de este algoritmo es que los productos parciales $a_i \times b_j$ pueden realizarse en cualquier orden, ya que no están encadenados unos con otros.

Y con respecto al cuarto criterio, diremos que tampoco aparecen de forma explícita en esta técnica los elementos que la justifiquen.

Para terminar hacemos un balance en la siguiente tabla:

	ALGORITMO CLÁSICO	ALGORITMO "PER GELOSIA"
Economía	$(p + 1) \times q + 2(p + q)$ símbolos 2 segmentos de recta	$2(p \times q + p + q)$ símbolos $(p + q + 2 + (p \times q)$ segmentos
Fiabilidad	• $2qp + p - q - 2$ operaciones mentales internas. • 36 resultados de la tabla de multiplicar y 45 de la tabla de sumar, además de dominar el algoritmo de la suma para q sumandos. • No aparecen elementos tecnológicos. • Los productos $(a_i \times b_j)$ con j fijo e $i = 1, 2,\ldots, p$. deben realizarse de forma encadenada.	• $p + q - 2$ operaciones mentales internas. • 36 resultados de la tabla de multiplicar y 45 de la tabla de sumar, además de dominar el algoritmo de la suma para $(p + q - 1)$ sumandos. • No aparecen elementos tecnológicos. • Los productos parciales se pueden realizar en cualquier orden

En el caso que $a = a_1a_2a_3a_4$ y $b = b_1b_2b_3$

	ALGORITMO CLÁSICO	ALGORITMO "PER GELOSIA"
Economía	$(4 + 1) \times 3 + 2(4 + 3) = 29$ símbolos 2 segmentos de recta	$2(4\times 3+ 4 + 3) = 38$ símbolos $(4 + 3 + 2 + (4 \times 3)) = 21$ segmentos
Fiabilidad	• $2 \times 4 \times 3 + 4 - 3 - 2 = 23$ operaciones mentales internas. • 36 resultados de la tabla de multiplicar y 45 de la tabla de sumar, además de dominar el algoritmo de la suma para 3 sumandos. • No aparecen elementos tecnológicos. • Los 4 productos $(a_i \times b_j)$ con j fijo e $i = 1, 2, 3$ y 4. deben realizarse de forma encadenada y esto para $j = 1, 2$ y 3.	• $4 + 3 - 2 = 5$ operaciones mentales internas. • 36 resultados de la tabla de multiplicar y 45 de la tabla de sumar, además de dominar el algoritmo de la suma para $(4 + 3 - 1) = 6$ sumandos. • No aparecen elementos tecnológicos. • Los 12 productos parciales se pueden realizar en cualquier orden

4.9. Posibles ampliaciones y completaciones de la Organización Matemática Local

En los apartados anteriores, hemos aportado elementos tecnológico-teóricos que proporcionan una explicación y justificación de los algoritmos asociados al SN posicional completo y que constituyen los componentes básicos, junto a las tareas descritas, de la $\mathbf{OM_p}$ en torno al citado SN posicional. Además esto nos ha permitido poner de manifiesto cómo este SN es eficaz no sólo para representar los números sino también para hacer aritmética elemental.

Por lo tanto, hemos abordado el problema de la escritura de los números buscando dar una respuesta eficaz a cuestiones relativas a:

a) Que la representación y designación de los números sea unívoca y cómoda

b) Que la comparación de los números a partir de sus escrituras sea fácil

c) Que la realización de cálculos en las distintas operaciones con dichas escrituras sea una tarea económica, sencilla y fiable.

Toda esta problemática la hemos tratado con una sucesión de diferentes tipos de SN, de modo que cada nuevo SN iba aportando una mejor respuesta, pues la sucesión de SN se ha ido generando a partir de las limitaciones del SN anterior. Hay que notar que casi todos los SN de dicha sucesión tienen la característica común de utilizar la misma base decimal. Pero creemos que es importante subrayar la relatividad de la base $b = 10$ que hemos utilizado, por razones históricas y culturales.

Pensamos que para completar y ampliar la problemática en torno a los Sistemas de Numeración debemos intentar la búsqueda de algunas respuestas a las cuestiones siguientes:

- *¿Qué ventajas y limitaciones puede presentar la escritura de los números en un SN de base o bases diferentes de la base diez?*

- *¿Cómo podemos ampliar el SN posicional con el fin de que nos permita representar y realizar cálculos con cualquier número real de forma económica y fiable?*

- *¿Cómo podemos transformar el SN posicional para que nos permita representar y calcular con números "muy grandes" de forma económica y fiable?*

- *¿Es necesario la utilización de un símbolo para el cero en los SN posicionales?*

Siendo conscientes de que no hemos agotado las cuestiones que se pueden plantear en torno a los SN posicionales, de momento vamos a intentar adelantar un itinerario posible de respuesta a los interrogantes planteados.

4.9.1. Sistemas de Numeración con diferentes bases

Según se afirma en Cuppens (2001), la elección de la base del SN está sometida a diferentes condiciones que a veces pueden parecer contradictorias:

- La primera es la *sencillez*. Un SN posicional será sencillo si los coeficientes que utiliza se componen de un solo símbolo, Por ello, conviene que la base *b* no sea demasiado grande. Un ejemplo de este tipo de sistema es el SN posicional decimal habitual y, por supuesto, más sencillo todavía el SN posicional binario. Sin embargo, en el SN babilónico de base 60 y en el SN maya de base 20, los coeficientes utilizados se componen de varios símbolos según un sistema aditivo.

- La segunda condición es la *legibilidad*. Conviene para ello que la base *b* no sea demasiado pequeña. Por ejemplo, el SN binario que es muy cómodo para los ordenadores, sin embargo para nosotros tiene el inconveniente de que la cadenas de símbolos utilizadas para representar cada número son excesivamente largas. Precisamente, debido a esta dificultad, como veremos más adelante los informáticos han optado por utilizar el SN de base 8 o el de base 16.

- La tercera condición tiene que ver con las *propiedades del número b*. Así, el hecho de que de la base *b* pueda tener un gran número de divisores, parece que podría ser ciertamente una ventaja. Más adelante, veremos que una buena característica de *b* es que sea un número que tiene más divisores que todos los números que le preceden. Por ejemplo, $b = 12$ ó también $b = 60$.

La cuestión a la que queremos dar una posible respuesta ahora es la siguiente:

- *¿Qué ventajas y limitaciones puede presentar la escritura de los números en un SN de base o bases diferentes de la base diez?*

Entendiendo que cuando hablamos de ventajas o limitaciones lo hacemos en referencia a la economía y fiabilidad de los algoritmos útiles para llevar a cabo las operaciones aritméticas pero, también, nos referimos a las ventajas y limitaciones del Sistema de Numeración para abordar otros problemas matemáticos en los que, por ejemplo, intervengan números no naturales.

Los sistemas binario, octal y hexadecimal

Así, por ejemplo, podemos estudiar las ventajas y limitaciones del sistema binario o en base 2, que fue introducido por Leibniz en el siglo XVIII, y que posteriormente ha sido utilizado en las máquinas electrónicas, ya que sólo se emplean dos cifras: 0 y 1, que pueden interpretarse como dos estados: apagado 0 y encendido 1. Es el sistema utilizado por el hardware de los ordenadores.

Para paliar uno de los inconvenientes del sistema binario como es el gran tamaño de las cadenas de símbolos resultantes, se suelen utilizar también otros sistemas como el de base 8 o el de base 16. Así, por ejemplo, el paso del SN binario al de base 16, o hexadecimal, (y viceversa), se puede llevar a cabo de forma directa. El siguiente ejemplo nos permite ver de manera sencilla estos pasos:

En el SN binario sólo tenemos las cifras 0 y 1.

En el SN hexadecimal tendremos los 16 símbolos siguientes: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, c, d, e y f.

Dado el número n = 3465 escrito en la base 10, se ve fácilmente cómo se puede hacer directamente el paso del SN binario al SN hexadecimal agrupando las cifras del SN binario en grupos de 4 partiendo de derecha a izquierda.

LA ESCRITURA DE *N* EN BASE 2	1101	1000	1001
Significado de cada grupo en base 10	13	8	9
La escritura de *n* en base 16	d	8	9

Del mismo modo se puede realizar el paso de la escritura en base 16 a la escritura en base 2.

En este caso, tenemos n = a e $3_{(16}$ y ahora se trata de escribir el número que representa cada cifra de n en el SN binario.

LA ESCRITURA DE *N* EN BASE 16	a	e	3

Significado de cada cifra en base 10	10	14	3
La escritura de *n* en base 2	1010	1110	0011

El sistema duodecimal

Igualmente, podemos estudiar las ventajas e inconvenientes que proporciona el SN duodecimal o de base 12 que propuso Georges-Louis Leclerc, conde de Bufón, en el siglo XVIII, ya que dicha base tiene más divisores que los números que le preceden. Así sus divisores serán el 1, 2, 3, 4, 6 y 12. Una ventaja importante que proporciona el SN duodecimal es que las fracciones de denominador 2, 3, 4 y 6 se puede expresar con una sola cifra duodecimal y las de denominador 8 y 9 con dos cifras duodecimales. Sin embargo, en el SN decimal habitual tienen una sola cifra decimal las fracciones de denominador 2 y 5 y dos cifras decimales las fracciones de denominador 4.

Los sistemas cuya base es de gran tamaño

Asimismo cabe analizar las ventajas e inconvenientes de un tamaño demasiado grande de la base como utilizaron los babilónicos (base fundamental 60 y base auxiliar 10) y los mayas (base fundamental 20 y base auxiliar 5). En el caso del SN babilónico la base $b = 60$ tiene 12 divisores, es decir, tiene más divisores que todos los números que le preceden, lo que podría ser una de las razones por la que eligieron dicha base, ya que los babilonios usaban dicho sistema para representar fracciones sexagesimales, o sea, con potencias de 60 en el denominador. Así en una de las tablillas de la colección de Yale[9], aparece el cálculo de la raíz cuadrada de 2 con tres cifras "decimales" sexagesimales:

$$\sqrt{2} \cong 1;24,51,10 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{3600} + \frac{10}{216000} \cong 1{,}414212963 .$$

[9] Según se informa en la página web: http://descartes.cnice.mecd.es/taller_de_matematicas/Historia/Mesopotamia.htm#ilustración del Ministerio de Educación Ciencia.

Por otro lado, hay que señalar que estos SN al no disponer de un solo símbolo para cada uno de los números más pequeños que la base, pueden presentar problemas de ambigüedad de escrituras. Una de las maneras de evitar esta posible ambigüedad sería dotando al sistema de un símbolo diferente para cada uno de los números más pequeños que la base, lo que, por otra parte, lo convertiría en un SN más complejo pues sería necesario utilizar 20 símbolos distintos para el SN maya y 60 para el babilónico.

Los sistemas regulares e irregulares

Entre los diferentes tipos de SN posicionales cabe considerar aquellos en los que los agrupamientos se realizan de forma *regular* y aquellos en los que existe alguna irregularidad. De este modo el agrupamiento fundamental en el SN maya es de veinte en veinte, considerando que primero se realiza un agrupamiento de 5 en 5 y posteriormente de 4 en 4, con lo que al final veinte unidades de primer orden equivalen a una unidad de segundo orden. Pero este SN tiene la particularidad de que en el paso de las unidades de segundo orden a las unidades de tercer orden se agrupa de 18 en 18. Esta irregularidad provoca que este SN presente la limitación de no cumplir la regla de los ceros a partir de la tercera posición. Dicha regla, que es fundamental para poder realizar con eficacia el algoritmo de la multiplicación, consiste en lo siguiente:

> *Para multiplicar un número por una potencia de la base basta con añadir a la escritura de dicho número tantos ceros como indica el exponente de dicha potencia*.

De este modo podemos afirmar que dicha irregularidad convierte al SN maya en un SN ineficaz para la realización de cálculos multiplicativos.

Los sistemas con diversos tipos de agrupamiento

Un ejemplo interesante de SN posicional donde se realiza un agrupamiento diferente en cada posición es el *SN posicional de base factorial*.

Así, por ejemplo, si queremos escribir en base factorial el número de elementos de una colección que tiene 79 objetos, primero los agrupamos de 2 en 2 y obtenemos 39 grupos de 2 y 1 objeto suelto. A continuación agrupamos de 3 en 3 los 39 grupos de 2, y obtenemos 13 grupos de 3 de 2 (es decir, de 3! = 6), 0 grupos de 2 y 1 objeto suelto. En tercer lugar agrupamos de 4 en 4 los 13 grupos de 6, y resultan 3 grupos de 4 de 6 (es decir, de 4! = 24), 1 grupo de 6, 0 grupos de 2 y 1 objeto suelto. Por tanto, la representación del número de elementos de dicha colección en la base factorial es $3101_{(!}$.

Para dar una definición más general del SN posicional de base factorial, nos basaremos en Laisant (1888):

> Dado $a \in N$ siempre va a ocurrir que existe un $p \in N$ tal que $p! \leq a \leq (p+1)!$
>
> En primer lugar vamos a suponer que a es tal que $p! < a < (p+1)!$, si dividimos a entre $p!$ obtendremos un cociente $a_p < (p+1)$ y un resto $r < p!$.
>
> Entonces se cumple que: $a = a_p\, p! + r$ y $r < p!$
>
> A continuación podemos dividir r entre $(p-1)!$, y obtendremos un cociente $a_{n-1} < p$ y un resto $r_1 < (p-1)!$
>
> Con lo que se cumple que: $r = a_{p-1}\ (p-1)! + r_1$ y $r_1 < (p-1)!$
>
> Se puede observar que si repetimos la misma operación con r_1 y con los sucesivos restos que vayan apareciendo, podemos concluir que el número a puede ser representado en la forma:
>
> $$a = a_p\, p! + a_{p-1}\ (p-1)! + \ldots + a_3\, 3! + a_2\, 2! + a_1\, 1!$$
>
> Donde cada uno de los coeficientes $a_i \in \{0,1,\ldots,i\}$.
>
> Así tendremos que la representación del número a en el SN posicional de base factorial es
>
> $$a = a_p a_{p-1} \ldots a_3 a_2 a_{1(!}.$$
>
> En el caso de que a, o uno de los restos obtenidos coincida con un factorial, el cociente al dividir por el factorial correspondiente será 1 y el resto 0, con lo que a partir de ese resto la representación sería 100…00.

Una propiedad fácil de observar en este SN es que la escritura de los números pares siempre termina en 0, y la de los impares en 1. En este sistema también pueden realizarse las distintas operaciones de cálculo, pero quizás su característica más importante es que *permite escribir cualquier número racional utilizando una cantidad finita de cifras distintas de cero*.

Desde el punto de vista matemático se pueden tomar una o varias bases que en principio hemos exigido que fueran naturales y mayores o iguales que 2. Pero en realidad la noción de SN puede generalizarse utilizando bases negativas, racionales, reales, e incluso complejas (ver, por ejemplo, Murillo (2002)).

Cambios de bases

Para estudiar una posible respuesta a la cuestión sobre qué ventajas o limitaciones presenta trabajar en un SN posicional con una o varias bases diferentes de la base 10, será importante disponer de una técnica que nos permita *cambiar de base* con relativa facilidad.

La tarea que queremos abordar consiste en:

> *Dado un número natural escrito en un SN posicional con una o varias bases necesitamos una técnica que nos permita escribir dicho número en otro SN posicional con una o varias bases, donde al menos alguna de ellas sea distinta de las anteriores.*

Para dar una respuesta a la tarea anterior vamos a considerar dos casos:

1. Los SN posicionales que utilizan siempre el mismo tipo de agrupamiento y, por tanto, tienen una sola base.

2. Los SN posicionales en los que en cada posición se realiza un tipo de agrupamiento diferente y, en consecuencia, utilizan diferentes bases.

Cambio de base para los sistemas de un solo tipo de agrupamiento

La tarea de cambio de base para los sistemas de una sola base, la hemos descompuesto en las siguientes subtareas:

1. Dado un número escrito en el SN posicional completo de base $b = 10$, cómo pasar a escribirlo en un SN posicional completo de base $b \neq 10$.

2. Dado un número escrito en el SN posicional completo de base $b \neq 10$, cómo pasar a escribirlo en un SN posicional completo de base $b = 10$.

3. Dado un número escrito en el SN posicional completo de base b_1 *cualquiera* cómo pasar a escribirlo en un SN posicional completo de base $b_2 \neq b_1$ *cualquiera*.

Para resolver estas subtareas se utilizan las siguientes técnicas:

1. Paso de la escritura de un número natural en base 10 a la escritura en otra base $b \neq 10$

Tenemos un número a escrito en base diez y queremos escribirlo en base $b \neq 10$, es decir queremos escribirlo en la forma $a_p a_{p-1} \dots a_2 a_1$ con todos los a_i menores que b, de tal forma que

$$a = a_1 + a_2 b + a_3 b^2 + \dots + a_p b^{p-1}$$

Para ello, si dividimos a entre b obtenemos un cociente a' y un resto $a_1 < b$, de modo que nos quedará:

$$(1) \quad a = a_1 + a' b$$

Del mismo modo, si volvemos a dividir a' entre b obtendremos como cociente a'' y como resto a_2. En consecuencia, tenemos que $a' = a_2 + a'' b$. Por lo tanto, sustituyendo el valor de a' en (1) obtenemos

$$a = a_1 + a' b = a_1 + (a_2 + a'' b)\, b = a_1 + a_2 b + a'' b^2$$

Si reiteramos este procedimiento de ir dividiendo entre b hasta obtener un cociente menor que b, habremos obtenido la expresión del número a en la base $b \neq 10$, donde a_p será ese último cociente menor que b y $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$ serán los correspondientes restos que se han obtenido de dividir entre b.

Así, por ejemplo, si tenemos el número a = 7893 escrito en base 10 y queremos escribirlo en base 6, procederemos a realizar las divisiones sucesivas entre 6 de 7893 y de los sucesivos cocientes que vayamos obteniendo hasta conseguir un cociente que sea menor que 6.

$$\begin{array}{rrrrrrr}
7893 & \multicolumn{1}{|l}{\underline{6\quad}} & & & & & \\
\mathbf{3} & 1315 & \multicolumn{1}{|l}{\underline{6\quad}} & & & & \\
& \mathbf{1} & 219 & \multicolumn{1}{|l}{\underline{6\quad}} & & & \\
& & \mathbf{3} & 36 & \multicolumn{1}{|l}{\underline{6\quad}} & & \\
& & & \mathbf{0} & 6 & \multicolumn{1}{|l}{\underline{6\quad}} & \\
& & & & \mathbf{0} & \mathbf{1} &
\end{array}$$

Así hemos obtenido que

$$a = 7893 = \mathbf{3} + \mathbf{1} \times 6 + \mathbf{3} \times 6^2 + \mathbf{0} \times 6^3 + \mathbf{0} \times 6^4 + \mathbf{1} \times 6^5 = \mathbf{100313}_{(6}$$

2. Paso de la escritura de un número natural en base $b \neq 10$ a la escritura en base 10

Tenemos un número a escrito en la base b, es decir $a = a_{p.}\ a_{p-1}\ _{..}\ a_2 a_1$ lo que también puede expresarse en la forma polinómica siguiente: $a = a_1 + a_2\, b + a_3\, b^2 + \ldots + a_p\, b^{p-1}$.

Si lo que queremos es expresar dicho número en la base 10, debemos hallar el valor de dicha expresión polinómica sustituyendo el valor de b por su valor correspondiente, realizando un procedimiento inverso al que hemos realizado antes de las divisiones sucesivas.

Así, por ejemplo, si tenemos $a = 23456_{(7}$ y queremos expresarlo en base 10, escribiremos la expresión polinómica correspondiente:

$a = 6 + 5 \times 7 + 4 \times 7^2 + 3 \times 7^3 + 2 \times 7^4 = 6 + 35 + 4 \times 49 + 3 \times 343 + 2 \times 2401 = 6 + 35 + 196 + 1029 + 4802 = 6068.$

Por tanto el número $a = 23456_{(7}$ se escribe en base 10, $a = 6068$.

3. Cambio de base entre dos bases b_1 y b_2 cualesquiera.

La técnica en este caso se reduce a aplicar las dos técnicas anteriores. Primero pasaremos de la base b_1 a la base 10 y posteriormente de la base 10 a la base b_2 (si $b_2 \neq 10$).

Cambio de base para los sistemas en los que se realizan diferentes agrupamientos

Para dar respuesta a esta tarea utilizaremos el ejemplo de cambio de la base factorial a la base decimal y viceversa.

1. **Cambio de la base factorial a la base decimal**

Dado $a \in N$ tal que $a = a_p a_{p-1} \dots a_3 a_2 a_{1(!}$ en el SN de base factorial, lo escribiremos en la forma polinómica:

$$a = a_p\, p! + a_{p-1}\ (p-1)! + \dots + a_3\, 3! + a_2\, 2! + a_1\, 1!$$

Una vez calculados los diferentes factoriales, los multiplicaremos por los correspondientes coeficientes y la suma total de los productos obtenidos nos dará la representación de a en el SN posicional decimal. Hay que advertir que todos los cálculos realizados se llevan a cabo dentro del SN decimal.

Existe otra técnica que resulta más económica que la anterior que consiste en lo siguiente:

Se empieza multiplicando a_p por p y al resultado obtenido se le suma a_{p-1}, y a lo obtenido se le multiplica por $(p-1)$, y al resultado se le suma el siguiente coeficiente, y al número obtenido se le multiplica por $(p-2)$, …, y este procedimiento se reitera hasta llegar a sumar a_1. Veamos el funcionamiento de la técnica anterior con el ejemplo siguiente:

Tenemos a = $6514201_{(!}$ y queremos obtener su expresión en la base decimal.

Para ello realizamos los siguientes cálculos:

$6 \times 7 + 5 = 47$, $47 \times 6 + 1 = 283$, $283 \times 5 + 4 = 1419$

$1419 \times 4 + 2 = 5678$, $5678 \times 3 + 0 = 17034$, $17034 \times 2 + 1 = 34069$.

Hemos obtenido que la representación de a en el SN decimal es $a = 34069$.

2. **Cambio de la base decimal a la base factorial**

Tenemos el número a escrito en la base 10 y queremos obtener su escritura en la base factorial.

Primero dividimos a entre 2, y obtenemos un cociente a' y un resto $a_1 < 2$, de modo que nos quedará:

$$(1) \quad a = 2\,a' + a_1$$

A continuación, dividimos el cociente obtenido a' entre 3 obtendremos como cociente a'' y como resto $a_2 < 3$. En consecuencia, $a' = 3\,a'' + a_2$. Sustituyendo el valor de a' en (1) obtenemos

$$a = 2\,a' + a_1 = a = 2\,(3\,a'' + a_2) + a_1 = a''\,3! + a_2\,2! + a_1$$

Y continuamos dividiendo el cociente que resulta entre 4, luego entre 5,… hasta obtener un cociente, que llamaremos a_p, y que será menor que $(p + 1)$.

Al final, hemos obtenido los restos $a_1 < 2$, $a_2 < 3$, $a_3 < 4$,…, $a_{p-1} < p$ y el último cociente que es $a_p < (p + 1)$. Entonces, la expresión del número a en la base *factorial* será:

$$a = a_p a_{p-1} \ldots a_3\; a_2\; a_{1(!}$$

Pues se cumple que

$$a = a_p\,p! + a_{p-1}\,(p-1)! + \ldots + a_3\,3! + a_2\,2! + a_1\,1!$$

A continuación veamos la aplicación de esta técnica con el ejemplo siguiente:

Queremos obtener la escritura del número a = 87653 en la base factorial.

Primero dividimos *a* entre 2, luego el cociente obtenido entre 3, etc.

$$\begin{array}{lllllllll}
87653 & \underline{|\,2\quad} & & & & & & & \\
\mathbf{1} & 43826 & \underline{|\,3\quad} & & & & & & \\
 & \mathbf{2} & 14608 & \underline{|\,4\quad} & & & & & \\
 & & \mathbf{0} & 3652 & \underline{|\,5\quad} & & & & \\
 & & & \mathbf{2} & 730 & \underline{|\,6\quad} & & & \\
 & & & & \mathbf{4} & 121 & \underline{|\,7\quad} & & \\
 & & & & & \mathbf{2} & 17 & \underline{|\,8\quad} & \\
 & & & & & & \mathbf{1} & \mathbf{2} &
\end{array}$$

Por tanto la escritura de a en la base factorial es $a = 21242021_{(!}$.

4.9.2. La escritura de los números decimales limitados y de los números reales

Pero los números y su sistema de representación deben ser útiles, más allá de la aritmética elemental, para hacer matemáticas. Por ello cabe plantearse, en particular, la necesidad de ampliar la $\mathbf{OM_p}$ con el objetivo de poder representar de manera económica y fiable todos los números reales (o al menos, los decimales limitados) para poder realizar cálculos con dichos números.

Esto nos lleva a considerar que dicha $\mathbf{OM_p}$ puede ser ampliada y completada para representar y calcular con los números decimales, y, en consecuencia, para representar y realizar cálculos con las escrituras decimales de los números reales. La justificación de esta posible ampliación podemos basarla en la proposición siguiente:

Todo número real puede escribirse en la forma:

$$a_n\, 10^n + \ldots + a_0\, 10^0 + d_1\, 10^{-1} + d_2\, 10^{-2} + \ldots$$

donde los números a_0, a_1, …, a_n, y d_i, son números naturales menores que 10. Esta representación es única, en tanto que no exista un índice i (tomemos el menor de ellos) tal que para todo $k \geq i$ sea $d_k = 9$, ya que dichos números pueden escribirse también con la representación que hace que la posición anterior a d_i se incremente en una unidad y tomando los $d_k = 0$ para $k \geq i$.

Se llama "escritura decimal de un número real", a la cadena de cifras acompañada de una coma o un punto, que se utiliza como separador de la dos partes, la parte entera y la parte decimal.

La proposición anterior ha sido realizada para el caso en que la base del sistema sea 10, pero puede generalizarse para cualquier base b.

Como ya hemos adelantado en la sección anterior el hecho de utilizar la base 12 para representar los números reales puede aparecer como una ventaja, ya que ello va a permitir escribir una mayor cantidad de números mediante una expresión donde el número de cifras distintas de cero después de la coma será finito, esto es, decimales limitados.

Cambio de base

Para poder estudiar cuál es la base del SN posicional que ofrece mayores ventajas a este respecto vamos a necesitar una técnica que nos permita cambiar de base para los números reales. Es decir, dado un número real escrito en una base b_1 necesitamos una técnica que nos permita pasar a escribir dicho número en otra base b_2.

La expresión decimal de un número real a viene dada en la forma:

$$a = a_0\, a_1 \ldots a_n,\, d_1 d_2 d_3 \ldots$$

Donde $a_0\, a_1 \ldots a_n$ se llama la parte entera y $d_1 d_2 d_3 \ldots$la parte decimal.

Para resolver la tarea de cambio de base primero lo haremos con la parte entera y después con la parte decimal.

Tarea de cambio de base de la parte entera

El cambio de base de la parte entera se realiza aplicando la técnica ya explicada en la sección anterior para el cambio de base dentro de los números naturales.

Tarea de cambio de base de la parte decimal

Aquí consideraremos también tres subtareas:

1.- Dado un número d real tal que $0 < d < 1$, escrito en el SN posicional de base $b \neq 10$, se trata de obtener su escritura en el SN posicional de base 10.

2.- Dado un número d real tal que $0 < d < 1$, escrito en el SN posicional de base 10, se trata de obtener su escritura en el SN posicional de base $b \neq 10$.

3.- Dado un número d real tal que $0 < d < 1$, escrito en el SN posicional de base b_1, se trata de obtener su escritura en el SN posicional de base b_2.

Primera subtarea: Paso de una base $b \neq 10$ a la base 10

Tenemos $d = 0,\, d_1 d_2 d_3 \ldots$ con todos los d_j menores que $b \neq 10$ de modo que:

$$d = d_1\, b^{-1} + d_2\, b^{-2} + d_3\, b^{-3} + \ldots$$

y queremos obtener la escritura de d en la base 10. Para ello en la expresión anterior sustituimos b por su valor y efectuamos los cálculos correspondientes.

Por ejemplo, $d = 0,\, 3527_{(8}$ está escrito en el SN posicional de base 8 y queremos expresarlo en el SN posicional de base 10. Para ello escribimos primero d en la forma polinómica y después realizaremos los cálculos siguientes:

$$d = 0,\, 3527_{(8} =$$

$$= \frac{3}{8^1} + \frac{5}{8^2} + \frac{2}{8^3} + \frac{7}{8^4} = \frac{3 \times 8^3 + 5 \times 8^2 + 2 \times 8 + 7}{8^4} = \frac{1536 + 320 + 16 + 7}{4096} = \frac{1897}{4096} = 0{,}458740234$$

Hemos obtenido que $d = 0,\, 3527_{(8}$ se expresa en le SN de base 10 como $d = 0{,}458740234$.

Segunda subtarea: Paso de la base 10 a una base $b \neq 10$

Tenemos d expresado en el SN posicional de base 10 y queremos obtener su representación en un SN posicional de base $b \neq 10$, es decir, queremos obtener $d = 0,\, d_1 d_2 d_3 \ldots$ con todos los d_j menores que b, de forma que

$$d = d_1\, b^{-1} + d_2\, b^{-2} + d_3\, b^{-3} + \ldots$$

Para ello multiplicaremos en ambos miembros de la igualdad anterior por b

$$b\, d = b\, (d_1\, b^{-1} + d_2\, b^{-2} + d_3\, b^{-3} + \ldots)$$

y obtendremos en ambos miembros de la igualdad una parte entera y otra parte decimal.

$$e_1,\, d' = d_1 + (d_2\, b^{-1} + d_3\, b^{-2} + \ldots)$$

Con lo que igualando las partes enteras y las partes decimales tendremos

$$\begin{cases} e_1 = d_1 \\ d' = d_2\, b^{-1} + d_3\, b^{-2} + \ldots \text{ (2)} \end{cases}$$

Entonces la primera cifra decimal de d en el SN posicional de base $b \neq 10$ es $d_1 = e_1$, que siempre será menor que b.

Para obtener la segunda cifra decimal volvemos a multiplicar los dos miembros de la igualdad (2) por b:

$$b\,d' = b\,(d_2\,b^{-1} + d_3\,b^{-2} + \ldots)$$

De nuevo aparece en ambos miembros una parte entera y una parte decimal:

$$e_2, d'' = d_2 + (d_3\,b^{-1} + \ldots)$$

Si igualamos las partes enteras y las partes decimales tendremos

$$\begin{cases} e_2 = d_2 \\ d'' = d_3\,b^{-1} + d_4\,b^{-2} + \ldots \end{cases}$$

Por tanto, la segunda cifra decimal de d en el SN posicional de base $b \neq 10$ es $d_2 = e_2$ que siempre será menor que b. Con lo que hasta ahora tenemos que $d = 0, e_1\,e_2\ldots$ con los e_j menores que b.

Reiterando este procedimiento podemos obtener cada una de las cifras de d en el SN posicional de base b ≠ 10.

Por ejemplo: Queremos obtener la representación de d = 0,89 en el SN posicional de base 6.

Multiplicamos 0,89 por 6 y la parte entera del resultado obtenido será la primera cifra decimal:

$$0{,}89 \times 6 = \mathbf{5}{,}34$$

Multiplicamos de nuevo por 6 la parte decimal y la parte entera obtenida será la segunda cifra decimal:

$$0{,}34 \times 6 = \mathbf{1}{,}84$$

Reiterando este procedimiento vamos obteniendo las diferentes cifras decimales de 0,89 en el SN posicional de base 6:

$$0{,}84 \times 6 = \mathbf{5}{,}04$$

$$0{,}04 \times 6 = \mathbf{0}{,}24$$

$$0{,}24 \times 6 = \mathbf{1}{,}44$$

$$0{,}44 \times 6 = \mathbf{2}{,}64$$

$$0{,}64 \times 6 = \mathbf{3}{,}84$$

$$0{,}84 \times 6 = \mathbf{5}{,}04$$

En consecuencia, el número que en base 10 se escribe $d = 0{,}89$, en la base 6 se escribe:

$$d = 0,\ 515012350123\ldots_{(6}$$

Tercera subtarea: Paso de una base b_1 a otra base b_2

La técnica en este caso se reduce a aplicar las dos técnicas anteriores. Primero pasaremos de la base b_1 a la base 10 y luego de la base 10 a la base b_2.

Del mismo modo que lo hemos hecho en la sección anterior, también se puede construir una técnica de cambio de base para los números reales con Sistemas de Numeración en los que se realizan *diferentes tipos de agrupamientos*. Podemos poner como ejemplo el paso de la escritura de un número real en el SN posicional decimal a la escritura en el SN posicional de *base factorial* y viceversa.

La gran ventaja que presenta este sistema de *base factorial* es que todo *número racional* se puede escribir con una *cantidad finita de cifras distintas de cero*, esto es, en la base factorial todo número racional se expresa como un decimal finito.

Una vez que disponemos de un SN posicional que nos permiten representar de forma eficaz cualquier número real, será necesario abordar también la siguiente cuestión:

> *¿Cómo debemos transformar las técnicas de cálculo utilizadas en el SN posicional con el fin de que nos permitan realizar cálculos de forma económica y fiable dentro del campo de los números reales?*

4.9.3. La escritura y el cálculo con números "grandes o muy grandes"

Análogamente, cabe pensar que el SN posicional completo presenta limitaciones para el cálculo con "números grandes o muy grandes". Por ello, será interesante abordar la **notación científica** utilizada para escribir los números "muy grandes", y análogamente podemos estudiar también cómo este tipo de notación nos permite escribir los números "muy pequeños".

La **notación científica** de un número $n \neq 0$ decimal es la representación de n en la forma $a \times 10^p$ donde a es un número decimal tal que $1 \leq a < 10$ y p un número entero, (de este modo, a sólo tiene una cifra distinta de cero antes de la coma).

Vemos algunos ejemplos:

- La notación científica del número 642178000 es $6{,}42178 \times 10^8$ (ó 6,42178e+8)
- La de 345,76 es $3{,}4576 \times 10^2$ (ó 3,4576e+2)
- La de 0,0000547 es $5{,}47 \times 10^{-5}$ (ó 5,47e–5)

Esta notación es muy utilizada en informática y en las calculadoras. La razón del uso de esta notación se debe a que en las calculadoras sólo es posible escribir números con diez o doce cifras significativas como máximo. De esta manera pueden ampliar sus posibilidades de cálculo de manera muy eficaz. Por ello, en la calculadora cuando se pasa de una determinada cifra (que suele ser la décima o la duodécima cifra) de modo automático aparece la notación científica. Por ejemplo: para 12347800000 aparece la escritura 1,23478e+10, y para 180000000000 la escritura 1,8e+11. Análogamente sucede para los números muy pequeños: para 0,0000000014 aparece la escritura 1,4e–9, para 0,0000000234 la escritura 2,34e–8 .

Existen diferentes situaciones cuya modelización matemática requiere expresar y realizar operaciones con números "muy grandes". Por ejemplo:

- La población de la Tierra es de aproximadamente 6 300 000 000 habitantes, es decir, de $6{,}3 \times 10^9$ habitantes.

- Un año luz (la distancia que recorre la luz en un año) es de 9 500 000 000 000 Km., o sea, de $9,5 \times 10^{12}$ km.

- La distancia de la tierra al sol es de 150 000 000 Km., es decir, de $1,5 \times 10^{8}$ Km.

- La masa de la Tierra es del orden 6 000 000 000 000 000 000 000 000 kg, es decir, del orden de 6×10^{24} kg.

Por tanto, vemos que esta representación de los números resulta más económica cuando necesitamos expresar números "muy grandes" como el número de átomos del universo, las distancias entre los planetas y el Sol o las distancias interestelares, la superficie de los planetas y del Sol, el peso de los planetas y de las estrellas, el número de Avogadro, etc.

Del mismo modo, también se pueden presentar situaciones en las que necesitamos expresar y realizar operaciones con números "muy pequeños". Así, por ejemplo:

- El diámetro de un átomo tiene un tamaño en torno a 0,000 000 000 25 metros, es decir, $2,5 \times 10^{-10}$ m.

- La masa de un electrón es aproximadamente 0,000 000 000 000 000 000 000 000 009 11 g., es decir, de $9,11 \times 10^{-27}$ g.

De este modo, se puede observar también que esta representación es más económica cuando queremos expresar números "muy pequeños" como las dimensiones de una molécula o de un átomo, el tamaño de un virus o de una bacteria, el tamaño del núcleo atómico, y la distancia interatómica en un sólido, la masa de un átomo, etc.

También podemos considerar la **notación de ingeniería**, que es una adaptación de la notación científica.

La **notación de ingeniería** de un número $n \neq 0$ es la representación de n en la forma $a \times 10^{p}$ donde a puede ser un número que admite hasta tres cifras antes de la coma y p es un número entero múltiplo de 3. Así, por ejemplo:

- El número 123478000 se escribe $123,478 \times 10^{3}$, o también 123,478e+3.

- El número 0,000000014 se escribe 14×10^{-9} ó 14e-9.

Esta notación está ligada a los sistemas de unidades de medida, y sirve, sobre todo, a los que estudian fenómenos en los que aparecen magnitudes medibles tales como los ingenieros, los físicos, los químicos, etc. Para medir esos fenómenos es necesario elegir una unidad. El sistema internacional de unidades de medida no es suficiente para llegar a medir la diversidad de la naturaleza y ha sido necesario adaptarlo creando múltiplos y submúltiplos que van desde lo "muy grande" a lo "muy pequeño", de mil en mil.

La **notación de ingeniería** utiliza prefijos para designar tanto los "números muy grandes" como los "muy pequeños":

Para los **"muy grandes"** utiliza**:**

Kilo(k) 10^3; mega (M), 10^6; giga (G), 10^9; tera(T), 10^{12}; peta(P), 10^{15}; exa(E), 10^{18}; zeta(Z), 10^{21}; yota(Y), 10^{24}.

Y para los **"muy pequeños":**

Mili (m), 10^{-3}; micro (μ), 10^{-6}; nano (n), 10^{-9}; pico (p), 10^{-12}; femto (f), 10^{-15}; ato (a), 10^{-21}; zepto (z), 10^{-24}; docto (y), 10^{-30}.

Una vez que disponemos de una técnica que resulta más económica para representar números "grandes ó muy grandes" o números "muy pequeños", cabe preguntarse:

> *¿Cómo realizar cálculos con dichos números y cuáles son los algoritmos de cálculo más eficaces con estos números?*

Así en (Chevallard, 2003-2004) se propone una técnica de multiplicación del siguiente tipo:

> • Dado un número grande a = 9876512345, queremos calcular con una calculadora habitual a^2.
>
> Debido a que no es posible dicho cálculo de manera directa, se propone escribir $9876512345 = 98765 \times 10^5 + 12345$ pues la calculadora sólo permite calcular de forma directa y exacta el cuadrado de números que tienen como máximo 5 cifras. Para ello se propone la técnica siguiente:

$9876512345^2 = (98765 \times 10^5 + 12345)^2 = 98765^2 \times 10^{10} + 2 \times 98765 \times 12345 \times 10^5 + 12345^2 = 9754525225 \times 10^{10} + 2438507850 \times 10^5 + 152399025 = 97545252250000000000 + 243850785000000 + 152399025 = 97545496100937399025.$

Una técnica análoga puede utilizarse para el cálculo con "números pequeños" o "muy pequeños".

Si queremos calcular el cuadrado de $a = 2{,}345678918$, podemos escribirlo en la forma

$$a = 2345678918 \times 10^{-9}$$

Y proceder a aplicar la técnica utiliza en el caso anterior.

Para constatar el fracaso de la calculadora habitual en el cálculo con números grandes y provocar la búsqueda de una técnica de cálculo alternativa para dichos números, en (Chevallard, 2003-2004) se propone la siguiente tarea:

Dado $a = 123456789$, *comparar los números* a^2 *y* $(a + 1)(a - 1)$.

Aquí puede observarse fácilmente que si realizamos de modo directo con la calculadora ambos cálculos obtenemos el mismo resultado, lo cual nos obliga a construir una técnica "mixta" (calculadora + lápiz y papel) que permita detectar el error.

El código CLE

Como hemos visto antes, si queremos hallar el valor del producto 123456789 × 987654321 con una calculadora habitual utilizando el SN posicional decimal, aquélla sólo permite hallar un valor aproximado.

Con el objetivo de superar esta limitación se ha construido un sistema llamado Código CLE[10]. Este código pretende dar una respuesta eficaz tanto a la representación como al cálculo con "números grandes".

[10] La palabra CLE proviene del francés Code à Large Échelle. La información sobre este Código CLE la hemos obtenido en internet en las direcciones:
http://www4.ac-lille.fr/~math/classes/themes/numer/Telechargement/Numeration.doc
http://www.lyc-hoche-versailles.ac-versailles.fr/~dupont/Maple/dm04(partition).pdf

Para representar un número en el Código CLE, primero debemos hallar su escritura en el SN posicional binario, es decir, debemos descomponer el número en suma de potencias de 2. Así la escritura del número dado en el Código CLE será la n-upla de los exponentes de las potencias de 2 que aparecen en la descomposición obtenida. Veamos un ejemplo:

1. Sea $a = 83$ en el SN decimal y queremos obtener su escritura en el Código CLE.

Primero realizamos la descomposición binaria de a:

$a = 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

Por tanto, el número a en base 2 se escribe 1010011 y su escritura en el Código CLE será $a = (6, 4, 1, 0)$

2. Dado un número escrito en el Código CLE, $a = (8, 4, 2,0)$ queremos obtener su representación en el SN posicional decimal.

Para ello escribimos $a = 2^8 + 2^4 + 2^2 + 2^0$ y realizamos los cálculos correspondientes: $a = 256 + 16 + 4 + 1 = 276$.

Ahora daremos una definición más general de Código CLE de un número natural:

Sea un $a \in N$, se sabe que todo número natural admite una representación binaria en la forma de una serie de 0 y de 1, de modo la primera cifra de la izquierda sea un 1.

De modo que se cumple $a = \sum_{i=0}^{p} a_i \cdot 2^i$. Aquí se dice que p es el tamaño de a.

Entonces con el objetivo de que la escritura de los números naturales "grandes", es decir, que su tamaño p es grande, sea más corta el Código CLE asocia a cada número natural a la n-upla con los exponentes de las potencias de 2 cuyo coeficiente es 1 de la descomposición binaria de a.

A continuación exponemos algunas de los algoritmos de cálculo que se simplifican utilizando este sistema de numeración.

La adición en el Código CLE

Dados dos números $(a)_{\text{CLE}}$ y $(b)_{\text{CLE}}$, se trata de obtener $(a)_{\text{CLE}} + (b)_{\text{CLE}}$.

Sean $a = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$ y $b = (b_1, b_2, \ldots, b_q)$ con $a_i > a_{i+1}$ y $b_j > b_{j+1}$.

Entonces $(a + b)$ será la n-upla formada por todos los elementos de a y de b y ordenados de mayor a menor y de izquierda a derecha. Cuando haya algún a_i igual a algún b_j, el par $(a_i\ ,\ b_j)$ se sustituye por $a_i + 1$.

Veámoslo con un ejemplo: Sean $a = (7, 6, 4, 2, 0)$ y $b = (8, 6, 4, 2, 1, 0)$, entonces

$$(a + b) = (8, 7, 6, 6, 4, 4, 2, 2, 1, 0, 0)$$

sustituimos el par (6,6) por 7, el par (4, 4) por 5, el par (2, 2) por 3 y el par (0, 0) por 1

$$(a + b)= (8, 7, 7, 5, 3, 1, 1)$$

Sustituimos el par (7, 7) por 8 y el par (1, 1) por 2. Para terminar con (8, 8) por 9.

$$(a + b) = (8, 8, 5, 3, 2) = (9, 5, 3, 2).$$

Con lo que tenemos que (7, 6, 4, 2, 0) + (8, 6, 4, 2, 1, 0) = (9, 5, 3, 2).

Podemos decir que una regla fundamental a tener en cuenta en la adición es la equivalencia $(a_i, a_i) = (a_i + 1)$, es decir $(a_\mathrm{i}) + (a_\mathrm{i}) = (a_i + 1)$.

La sustracción en el Código CLE

Para la sustracción utilizaremos también la regla anterior pero en sentido contrario:

$(a_\mathrm{i}) = (a_i - 1) + (a_i - 1)$.

Explicaremos el algoritmo de la resta con un ejemplo:

Queremos calcular (8, 5, 4, 3) – (6, 5, 4, 2, 0).

Para ello colocamos el minuendo (8, 5, 4, 3) y vamos aplicando la regla anterior de modo que descomponemos 8 como (7, 7), luego 7 como (6, 6), y 3 como (2, 2) y 2 como (1, 1) y 1 como (0, 0).

$$(8, 5, 4, 3) = (7, 7, 5, 4, 2, 2) = (7, 6, 6, 5, 4, 2, 1, 1) = (7, 6, 6, 5, 4, 2, 1, 0, 0)$$

Ahora ya podemos realizar la sustracción:

$$(7, 6, 6, 5, 4, 2, 1, 0, 0) – (6, 5, 4, 2, 0) = (7, 6, 1, 0)$$

La multiplicación en el Código CLE

La regla que utilizamos para multiplicar es $(a_i) \times (b_j) = (a_i + b_j)$, además de la regla utilizada en la suma.

Dados dos números $(a)_{CLE}$ y $(b)_{CLE}$, se trata de obtener $(a)_{CLE} \times (b)_{CLE}$.

Sean $a = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$ y $b = (b_1, b_2, \ldots, b_q)$ con $a_i > a_{i+1}$ y $b_j > b_{j+1}$.

Entonces $(a \times b)$ será la n-upla formada por todos los elementos $(a_i + b_j)$ y que luego se ordenan de mayor a menor y de izquierda a derecha. Si alguno de los elementos $c_{ij} = a_i + b_j$ resulta igual a otro se aplicará la regla de la suma.

Explicaremos el algoritmo de la multiplicación con un ejemplo:

> Queremos calcular (4, 3, 1) × (5, 3).
>
> (4, 3, 1) × (5, 3) = (4 + 5, 4 + 3, 3 + 5, 3 + 3, 1 + 5. 1 + 3) = (9, 7, 8, 6, 6, 4) =
>
> = (9, 8, 7, 6, 6, 4) = (9, 8, 7, 7, 4) = (9, 8, 8, 4) = (9, 9, 4) = (10, 4).
>
> En resumen, (4, 3, 1) × (5, 3) = (10, 4).

La división en el Código CLE

Para realizar la división aplicaremos las reglas utilizadas en la multiplicación y la sustracción. Veamos con un ejemplo el funcionamiento de un algoritmo de la división con el Código CLE.

> Queremos la división de (12, 8, 7, 4, 2) entre (6, 1, 0).
>
> Para ello buscamos un número que multiplicado por (6, 1, 0) se acerque lo más posible al dividendo. Por ello tomamos (6) y realizamos (6) × (6, 1, 0) = (12, 7, 6) y a continuación realizamos la resta siguiente: (12, 8, 7, 4, 2) – (12, 7, 6).
>
> Para llevar a cabo la resta debemos aplicar la regla de la sustracción $(a_i) = (a_i - 1) + (a_i - 1)$.
>
> Entonces (12, 8, 7, 4, 2) = (12, 7, 7, 7, 4, 2) = (12, 7, 7, 6, 6, 4, 2)
>
> Por tanto (12, 8, 7, 4, 2) – (12, 7, 6) = (12, 7, 7, 6, 6, 4, 2) – (12, 7, 6) = (7, 6, 4, 2)

Ahora buscamos un número que multiplicado por (6, 1, 0) se acerque lo más posible a (7, 6, 4, 2) y encontramos el (1). Entonces realizamos el producto siguiente:

(1) × (6, 1, 0) = (7, 2, 1) y se lo restamos a (7, 6, 4, 2).

Para ello aplicamos la regla de la sustracción así:

(7, 6, 4, 2) = (7, 6, 3, 3, 2) = (7, 6, 3, 2, 2, 2) = (7, 6, 3, 2, 2, 1, 1)

Entonces (7, 6, 4, 2) – (7, 2, 1) = (7, 6, 3, 2, 2, 1, 1) – (7, 2, 1) = (6, 3, 2, 1).

Por último tenemos que buscar un número que multiplicado por (6, 1, 0) se acerque lo más posible a (6, 3, 2, 1) y encontramos el (0).

Realizamos el producto (0) × (6, 1, 0) = (6, 1, 0) y se lo restamos a (6, 3, 2, 1).

Aplicamos de nuevo la regla de la resta: (6, 3, 2, 1) = (6, 3, 1, 1, 1) = (6, 3, 1, 1, 0, 0)

Entonces (6, 3, 2, 1) – (6, 1, 0) = (6, 3, 1, 1, 0, 0) – (6, 1, 0) = (3, 1, 0).

Por tanto se cumple que (12, 8, 7, 4, 2) = (6, 1, 0) × (6, 1, 0) + (3, 1, 0).

En resumen, el cociente es (6, 1, 0) y el resto (3, 1, 0).

4.9.4. Los sistemas posicionales sin cero

Del mismo modo, partiendo de **$\mathbf{OM_p}$** se puede considerar la existencia de SN posicionales completos *sin cero*. Así, podemos estudiar las ventajas e inconvenientes del sistema de numeración de Charles Cros que se presenta en (Cuppens, 2001). Dicho sistema tiene tres símbolos que designaremos con las tres primeras cifras de nuestro SN posicional habitual: 1, 2 y 3. La base del sistema posicional es b = 3 y no tiene símbolo para el cero. La escritura de los primeros números en este sistema será: 1, 2, 3, 11, 12, 13, 21, 22, 23,… Veamos otros ejemplos:

LA ESCRITURA EN EL SN HABITUAL DE BASE 10	10	18	30	40	120	282
La escritura en el SN de Charles Cros	31	123	233	1111	3333	23333

Este sistema puede generalizarse para cualquier valor de la base b. Así en (Cuppens, 2001) se expone el caso general del siguiente modo:

> Sean x y b dos números. Existe un número natural p y los números $a_0, \ldots, a_p$ que verifican $1 \leq a_j \leq b$ (con $j = 0, \ldots, p$) tales que x se escribe de manera única en la forma :
>
> $$x = a_p\, b^p + a_{p-1}\, b^{p-1} + \ldots + a_1\, b + a_0.$$

Para demostrarlo, se define en N – {0} una nueva división:

Si $a > b$, se llama C–cociente[11] y C–resto de la C–división de a entre b a los números q y r que verifican:

$$\begin{cases} a = b\, q + r, \\ 1 \leq r \leq b. \end{cases}$$

De este modo se obtiene que si a no es divisible por b, el C–cociente y el C–resto son idénticos al cociente y al resto habituales, mientras que si a es divisible por b el C–cociente es el número anterior al cociente habitual y el C–resto es igual a b. Así tendremos un SN posicional en base b que utiliza b cifras, pero no tiene un símbolo para el cero.

En (Cuppens, 2001) se pone como ejemplo de este tipo de sistema el SN en base b = 10. Para ello toma las cifras del SN habitual, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y añade el símbolo X para el 10. Así, en este sistema el número 2006 se escribe 19X6. Se puede observar que en dicho sistema la representación de los números es idéntica a la representación habitual salvo en los casos en que hay algún cero.

También se muestra en dicho artículo cómo los algoritmos de cálculo de las operaciones de adición, sustracción y multiplicación tienen un gran parecido con los mismos algoritmos en el SN habitual. Sin embargo, la técnica de la división funciona de modo diferente, pues es necesario realizar en algunos casos vueltas hacia atrás.

[11] Para identificar esta nueva división, así como el cociente y el resto correspondientes colocamos delante una C.

Veamos a continuación algún ejemplo de dichos algoritmos.

Primero es necesario realizar las tablas de sumar y de multiplicar en dicho sistema.

Tabla de sumar:

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	X
1	2	3	4	5	6	7	8	9	X	11
2	3	4	5	6	7	8	9	X	11	12
3	4	5	6	7	8	9	X	11	12	13
4	5	6	7	8	9	X	11	12	13	14
5	6	7	8	9	X	11	12	13	14	15
6	7	8	9	X	11	12	13	14	15	16
7	8	9	X	11	12	13	14	15	16	17
8	9	X	11	12	13	14	15	16	17	18
9	X	11	12	13	14	15	16	17	18	19
X	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1X

Tabla de multiplicar

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	X
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	X
2	2	4	6	8	X	12	14	16	18	1X
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	2X
4	4	8	12	16	1X	24	28	32	36	3X
5	5	X	15	1X	25	2X	35	3X	45	4X
6	6	12	18	24	2X	36	42	48	54	5X
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	6X
8	8	16	24	32	3X	48	56	64	72	7X
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	8X
X	X	1X	2X	3X	4X	5X	6X	7X	8X	9X

A continuación para realizar los cálculos siguientes nos basamos en las tablas anteriores.

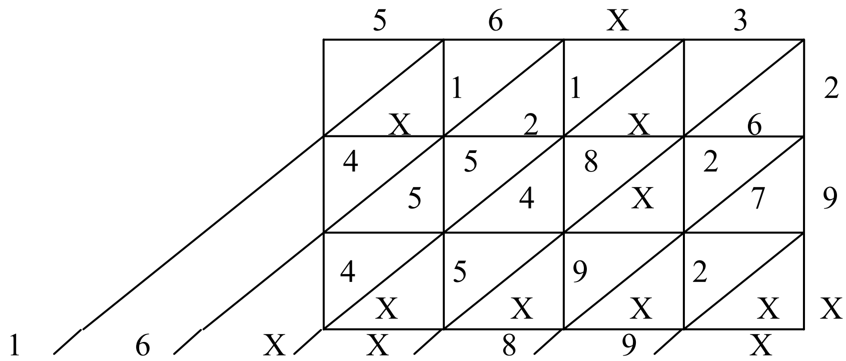
Para calcular 356 + 5X9, colocamos ambos sumandos como en el SN habitual:

$$\begin{array}{ccc} 3 & 5 & 6 \\ 5 & X & 9 \\ \hline 9 & 6 & 5 \end{array}$$

Para realizar las sustracciones 3X1 – 2X9, 689 – 39X, 12X4 – 11X9, utilizamos también la tabla de sumar y un procedimiento análogo al utilizado en el SN habitual:

$$\begin{array}{ccc} 3 & X & 1 \\ 2 & X & 9 \\ \hline & 9 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 6 & 8 & 9 \\ 3 & 9 & X \\ \hline 2 & 8 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & X & 4 \\ 1 & 1 & X & 9 \\ \hline & & 9 & 5 \end{array}$$

Para realizar el cálculo multiplicativo 56X3 × 29X, utilizaremos los resultados de la tabla de multiplicar y luego la técnica "per gelosía" empleada en el SN habitual.



Ahora, para la división de 89X123 entre 8X, utilizaremos también los resultados de la tabla de multiplicar.

Primero realizaremos la tabla de los múltiplos de 8X:

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	X
8X	8X	17X	26X	35X	44X	53X	62X	71X	7XX	89X

Para llevar a cabo la división utilizaremos la técnica del algoritmo anglosajón (ver sección 4.6.2) aunque con algunas variaciones.

	9 9 X 1
	9 9
8X	**X X X 1**
	8 9 X 1 2 3
	7 X X
	8 X 1
	7 X X
	9 1 2
	8 9 X
	1 2 3
	8 X
	3 3

Donde hemos obtenido que el C–cociente es 99X1 y el C–resto es 33.

En la realización del cálculo de la división hemos necesitado volver hacia atrás en dos ocasiones:

En la primera ocasión hemos considerado las tres primeras cifras 89X y hemos encontrado en la tabla de los múltiplos de 8X, el resultado 89X, pero no obtenemos nada como resto parcial y bajando la cifra siguiente el 1 resulta más pequeño que 8X:

	X
8X	**8 9 X 1 2 3**
	8 9 X
	1

Por tanto necesitamos volver hacia atrás y coger el resultado anterior en la tabla de los múltiplos de 8X, que es 7XX, con lo que la cifra del cociente pasa a ser 9. Realizamos la resta y obtenemos 8X y bajando la cifra siguiente resulta 8X1. Miramos en la tabla de los múltiplos de 8X y tomamos 89X, y colocamos en el cociente la cifra correspondiente que es X:

	9
	X X
8X	**8 9 X 1 2 3**
	7 X X
	8 X 1
	8 9 X
	1 2

Aquí se presenta la segunda ocasión donde de nuevo el resto parcial es 1 y bajando la cifra siguiente que es 2, resulta 12 que es menor que 8X, con lo que debemos volver hacia atrás y tomar en la tabla de los múltiplos de 8X el múltiplo anterior que es 7XX, y ahora cambiando en el cociente la cifra X por 9 ya podemos continuar los cálculos sin necesidad de realizar más vueltas hacia atrás.

Esto nos permite concluir como en (Cuppens, 2001) que la afirmación de que la introducción de un símbolo para el cero es *esencial* para los SN posicionales es falsa y que como afirmaba Charles Cros el empleo de un símbolo para el cero es sobre todo *convencional*. Esto no impide que a pesar de ello pensemos que la introducción del cero primero como cifra y luego como número ha sido fundamental para el desarrollo de la Matemáticas.

4.10. Elementos tecnológico-teóricos de la Organización Matemática Local de los Sistemas de Numeración

En el proceso de reconstrucción del Modelo Epistemológico de Referencia hemos sentido la necesidad de elaborar elementos tecnológico-teóricos que permitan explicar, justificar y generalizar cualquier Sistema de Numeración, dicho en otros términos, elementos tecnológicos-teóricos de la OM local en torno a los Sistemas de Numeración. Esta necesidad nos ha llevado a dar una definición de Sistema de Numeración generalizado y a demostrar que dicho sistema funciona como tal.

4.10.1. Sistema de Numeración generalizado para cualquier número natural

Un sistema de numeración generalizado viene dado por una sucesión $(a_n)_{n\in N} \subset N$ tal que $a_1 = 1$ y $c_i = \dfrac{a_{i+1}}{a_i} \in N - \{0, 1\}, \forall i \in N - \{0\}$.

Entonces se cumple el siguiente teorema:

Sea $(a_n)_{n\in N}$ un sistema de numeración generalizado. Entonces cualquier número $x \in N$ siempre se puede expresar de forma única como

$$x = q_k\, a_k + q_{k-1}\; a_{k-1} + \ldots + q_1\, a_1 = \sum_{i=1}^{k} q_i a_i \text{, siendo } q_i \in N \text{ y } 0 \le q_i < c_i \text{ y } q_k \neq 0$$

Demostración: (Existencia)

En efecto, dado $x \in$ N, siempre existe un único $k \in$ N tal que $a_k \le x < a_{k+1}$, ya que la sucesión está formada por números naturales y es estrictamente creciente. El algoritmo de la división euclídea asegura que existen únicos q_k, $r_k \in$ N tales que

$$x = q_k\, a_k + r_k, \text{ con } r_k < a_k. \ (q_k \neq 0, \text{ pues si no } x < a_k)$$

De este modo obtenemos una sucesión de enteros q_{k-1}, …, q_1 por divisiones sucesivas de los restos r_k, r_{k-1}, …, r_2 como sigue:

$$r_k = q_{k-1}\; a_{k-1} + r_{k-1}, \text{ con } 0 \le r_{k-1} < a_{k-1},$$

$$r_{k-1} = q_{k-2}\; a_{k-2} + r_{k-2}, \text{ con } 0 \le r_{k-2} < a_{k-2},$$

. .

$$r_2 = q_1\, a_1 + r_1, \text{ con } 0 \le r_1 < a_1 = 1, \text{ luego } r_1 = 0.$$

De forma que

$$x = q_k\, a_k + r_k = q_k\, a_k + q_{k-1}\; a_{k-1} + r_{k-1} = \ldots = q_k\, a_k + q_{k-1}\; a_{k-1} + \ldots + q_2\, a_2 + q_1\, a_1.$$

Además, como cada $r_{j+1} < a_{j+1}$ se tiene que

$$r_{j+1} = q_j\, a_j + r_j < a_{j+1} \text{ de donde}$$

$$q_j\, a_j < a_{j+1} \text{ y así pues}$$

$$\text{cada } q_j < \frac{a_{j+1}}{a_j}$$

Esto demuestra la existencia de la representación de $x = q_k\, a_k + q_{k-1}\; a_{k-1} + \ldots + q_1\, a_1$.

(Unicidad)

Ahora tenemos que demostrar la unicidad de dicha representación, para ello supondremos que existe otra representación de x y demostraremos que dichas representaciones son iguales.

Supongamos que

$$x = q_k\, a_k + q_{k-1}\; a_{k-1} + \ldots + q_1\, a_1$$

es la representación obtenida antes y además suponemos que tiene otra representación como la siguiente:

$$x = q'_m\, a_m + q'_{m-1}\; a_{m-1} + \ldots + q'_1\, a_1,$$

$$\text{siendo } q'_m \neq 0 \text{ y además } 0 \leq q'_i < c_i = \frac{a_{i+1}}{a_i}.$$

Entonces $q'_i \leq \frac{a_{i+1}}{a_i} - 1$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, (m-1)\}$ y en consecuencia

$$x = q'_m\, a_m + q'_{m-1}\; a_{m-1} + \ldots + q'_1\, a_1 \leq (\frac{a_{m+1}}{a_m} - 1)a_m + (\frac{a_m}{a_{m-1}} - 1)a_{m-1} + \ldots + (\frac{a_2}{a_1} - 1)a_1 =$$

$$= (a_{m+1} - a_m) + (a_m - a_{m-1}) + \ldots + (a_2 - a_1) = a_{m+1} - a_1 = a_{m+1} - 1 < a_{m+1}$$

Esto nos permite concluir que $a_m \leq x < a_{m+1}$ y por lo tanto, dado que la sucesión $(a_n)_{n \in N}$ es estrictamente creciente, y que teníamos que $a_k \leq x < a_{k+1}$ resulta que $m = k$, con lo cual tenemos las dos expresiones siguientes:

$$x = q_k\, a_k + q_{k-1}\; a_{k-1} + \ldots + q_1\, a_1$$

$$x = q'_k\, a_k + q'_{k-1}\; a_{m-1} + \ldots + q'_1\, a_1$$

Entonces se puede considerar que por un lado

$$x = q_k\, a_k + r_k \text{ donde } r_k = (q_{k-1}\; a_{k-1} + \ldots + q_1\, a_1) < a_k$$

y por otro lado

$$x = q'_k\, a_k + r'_k \text{ donde } r'_k = (q'_{k-1}\; a_{k-1} + \ldots + q'_1\, a_1) < a_k$$

Debido a la unicidad del cociente y del resto que se obtiene al dividir x por a_k se concluye que

$$q_k = q'_k \text{ y } r_k = r'_k \,,$$

es decir $(q_{k-1}\ a_{k-1} + \ldots + q_1\ a_1) = (q'_{k-1}\ a_{k-1} + \ldots + q'_1\ a_1)$.

Del mismo modo podemos considerar que

$$r_k = q_{k-1}\ a_{k-1} + r_{k-1} \quad \text{con} \quad r_{k-1} = (q_{k-2}\ a_{k-2} + \ldots + q_1\ a_1) < a_{k-1} \quad \text{y}$$

$$r_k = q'_{k-1}\ a_{k-1} + r'_{k-1} \text{ con } \quad r'_{k-1} = (q'_{k-2}\ a_{k-2} + \ldots + q'_1\ a_1) < a_{k-1}$$

Igualmente debido a la unicidad del cociente y del resto que se obtiene al dividir r_k por a_{k-1} se concluye que

$$q_{k-1} = q'_{k-1} \text{ y } r_{k-1} = r'_{k-1},$$

es decir que $(q_{k-2}\ a_{k-2} + \ldots + q_1\ a_1) = (q'_{k-2}\ a_{k-2} + \ldots + q'_1\ a_1)$

Repitiendo el mismo procedimiento llegaremos a que los coeficientes q_k , q_{k-1}, … , q_1 son únicos.

Al mismo tiempo que hemos estado demostrando este teorema también hemos realizado una búsqueda entre la bibliografía de referencia en torno a este tema de un Sistema de Numeración generalizado y hemos encontrado dos demostraciones para el caso de los números naturales en Aviezri (1985) y Smarandache (1991), la primera de ellas tiene unas características similares a la realizada en esta memoria.

4.10.2. Distintas representaciones de un Sistema de Numeración generalizado

De forma general podemos decir que en un Sistema de Numeración generalizado, que viene determinado por una sucesión $(a_n)_{n\in N} \subset N$ tal que $a_1 = 1$ y $c_i = \dfrac{a_{i+1}}{a_i} \in N - \{0, 1\}$, $\forall i \in N - \{0\}$, el número natural $x = q_k\ a_k + q_{k-1}\ a_{k-1} + \ldots + q_1\ a_1$ con $q_k \neq 0$, puede venir representado en cualquiera de las formas siguientes:

- Como q_1 veces el símbolo de a_1,... , q_k veces el símbolo de a_k, si el sistema es aditivo. En este caso el sistema sólo dispone de símbolos para los a_i, con lo que el sistema necesitará un número infinito de símbolos.

- Si el SN dispone de símbolos para los a_i y para los q_i entonces vendrá representado por $q_k a_k \; q_{k-1} a_{k-1} \ldots q_1 a_1$. En este caso el SN se dice híbrido y el sistema necesitará también un número infinito de símbolos para los a_i y el número de símbolos de los q_i debe ser < max $\{\frac{a_{i+1}}{a_i}\}$

- Si el SN dispone de símbolos sólo para los q_i entonces vendrá representado por $q_k \, q_{k-1} \ldots q_1$. En este caso el SN se dice posicional, ya que los a_i viene representados por las diferentes posiciones y el número de símbolos de los q_i debe ser ≤ max $\{\frac{a_{i+1}}{a_i}\}$.

Ejemplos de diferentes Sistemas de Numeración

El SN egipcio:

La sucesión $(a_n)_{n\in N} \subset N$ es $a_1 = 1$, $a_2 = 10$, $a_3 = 10^2, \ldots, a_7 = 10^6$ y $c_i = 10$ para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

El SN romano:

La sucesión $(a_n)_{n\in N} \subset N$ es $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 10$, $a_4 = 50$, $a_5 = 100$, $a_6 = 500$, $a_7 = 1000$.

Y aquí c_i toma los valores 5 y 2 alternativamente.

El SN chino:

La sucesión $(a_n)_{n\in N} \subset N$ es $a_1 = 1$, $a_2 = 10$, $a_3 = 100$, $a_4 = 1000$, $a_5 = 10000$, $a_6 = 100000, \ldots$

Aquí los c_i toman el valor 10 siempre. Además existen q_i y el número de ellos es menor que 10.

El SN maya:

La sucesión $(a_n)_{n\in N} \subset N$ es $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 20$, $a_4 = 100$, $a_5 = 360$, $a_6 = 1800$, $a_7 = 7200, \ldots$

Y aquí c_i toma los valores 5 y 4 alternativamente hasta a_4. Aquí hay que señalar, que hay una irregularidad de modo que $c_4 = \frac{360}{100}$ y a partir de aquí los valores de c_i vuelven a tomar los valores 5 y 4 alternativamente:

El SN babilónico:

La sucesión $(a_n)_{n\in N} \subset N$ es $a_1 = 1$, $a_2 = 10$, $a_3 = 60$, $a_4 = 600$, $a_5 = 3600$, $a_6 = 36000$, $a_7 = 216000$,…Aquí los c_i son 10 y 6 alternativamente.

El SN factorial:

La sucesión $(a_n)_{n\in N} \subset N$ es $a_1 = 1!$, $a_2 = 2!$, $a_3 = 3! = 6$, $a_4 = 4! = 24$, $a_5 = 5! = 120$, $a_6 = 6! = 720$, $a_7 = 7! = 5040$,…Aquí los c_i son $i + 1$.

4.10.3. Sistema de Numeración generalizado para cualquier número real

Hasta ahora tenemos un modelo de Sistema de Numeración generalizado que nos permite escribir y calcular con los Números Naturales, pero creemos que es necesario completar y ampliar dicho modelo con el fin de demostrar que también nos sirve para escribir y calcular con cualquier Número Real. Para ello, enunciamos el siguiente teorema:

Sea $(a_n)_{n\in N}$ un sistema de numeración generalizado. Entonces cualquier número $x \in R$ siempre se puede expresar en la forma:

$$x = q_k a_k + q_{k-1} a_{k-1} + \ldots + q_1 a_1 + \frac{d_2}{a_2} + \frac{d_3}{a_3} + \frac{d_4}{a_4} + \ldots = \sum_{i=1}^{k} q_i a_i + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{d_j}{a_j}, \text{ con } q_i \in N \text{ y } 0 \le q_i < c_i,$$

siendo $c_i = \frac{a_{i+1}}{a_i} \in N - \{0, 1\}$, $\forall i \in N - \{0\}$ y $q_k \neq 0$

y además $d_i \in N$ y $0 \le d_i < c_{i-1}$ $\forall i \in N - \{0,1\}$

Supongamos que $x \ge 0$, sin pérdida de generalidad.

Todo número real puede descomponerse en una parte entera y otra parte decimal, de modo que $x = x_E + x_D$, donde x_E es la parte entera y x_D es la parte decimal.

La parte entera es un número natural x_E que se puede escribir de forma única, según el teorema anterior, como $x_E = q_k\, a_k + q_{k-1}\, a_{k-1} + \ldots + q_1\, a_1$ con $q_k \neq 0$.

La parte decimal es un número $x_D \in [0,1)$ que debemos demostrar que se puede escribir en la forma:

$$x_D = \frac{d_2}{a_2} + \frac{d_3}{a_3} + \frac{d_4}{a_4} + \ldots + \frac{d_{h+1}}{a_{h+1}} + \ldots = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{d_j}{a_j}$$

Para ello demostraremos el siguiente teorema:

Sea $x \in [0, 1)$, *entonces existe una representación* $x = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{d_j}{a_j}$ *con cada* $d_j \in N$ *y* $d_j \leq c_{j-1}$ *y además los* d_j *vienen dados por la fórmula* $d_j = \lfloor a_j\, x \rfloor - c_{j-1} \lfloor a_{j-1}\, x \rfloor$, *siendo* $\lfloor a_j\, x \rfloor$ *la parte entera inferior de* $(a_j\, x)$.

Demostración:

En primer lugar observemos que $c_j = \frac{a_{j+1}}{a_j} \geq 2$, luego $a_{j+1} \geq 2a_j \geq 2^2 a_{j-1} \geq \ldots \geq 2^j a_1 = 2^j$.

Por tanto, $\lim_{j\to\infty} a_j = \infty$, y los a_j forman una sucesión estrictamente creciente. En consecuencia $\left\{\frac{1}{a_j}\right\}$ es una sucesión estrictamente decreciente y $\lim_{j\to\infty} \frac{1}{a_j} = 0$.

Por tanto $(0,1) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left[\frac{1}{a_{j+1}}, \frac{1}{a_j}\right)$, siendo esta una unión disjunta.

Si $x = 0$, hacemos todos los $d_j = 0$.

Si $x \neq 0$, existe un único j tal que $x \in \left[\frac{1}{a_{j+1}}, \frac{1}{a_j}\right)$.

Sean $d_2 = d_3 = \ldots = d_j = 0$, y hagamos $d_{j+1} \in N$ el mayor entero tal que $\frac{d_{j+1}}{a_{j+1}} \leq x$.

Como $x < \dfrac{1}{a_j}$, es $d_{j+1} < \dfrac{a_{j+1}}{a_j} = c_j$.

Tomemos ahora $d_{j+2} \in N$ el mayor entero tal que $\dfrac{d_{j+1}}{a_{j+1}} + \dfrac{d_{j+2}}{a_{j+2}} \leq x$.

Entonces $d_{j+2} \leq c_{j+1}$, porque si $d_{j+2} > c_{j+1}$ entonces $d_{j+2} = c_{j+1} + h$ y

$\dfrac{d_{j+1}}{a_{j+1}} + \dfrac{c_{j+1}+h}{a_{j+2}} = \dfrac{d_{j+1}}{a_{j+1}} + \dfrac{1}{a_{j+1}} + \dfrac{h}{a_{j+2}} \leq x$, lo que contradice la definición de d_{j+1}, ya que d_{j+1} era el mayor entero tal que $\dfrac{d_{j+1}}{a_{j+1}} \leq x$ y hemos encontrado $d_{j+1} + 1$ que cumple $\dfrac{d_{j+1}+1}{a_{j+1}} \leq x$.

Supongamos ahora por inducción que $\dfrac{d_{j+1}}{a_{j+1}} + \dfrac{d_{j+2}}{a_{j+2}} + ... + \dfrac{d_{j+k}}{a_{j+k}} \leq x$, entonces definimos d_{j+k+1} como el mayor entero tal que $\dfrac{d_{j+1}}{a_{j+1}} + \dfrac{d_{j+2}}{a_{j+2}} + ... + \dfrac{d_{j+k}}{a_{j+k}} + \dfrac{d_{j+k+1}}{a_{j+k+1}} \leq x$ y se ve como antes que $d_{j+k+1} \leq c_{j+k}$ por la propiedad correspondiente de d_{j+k}.

Entonces veamos que $x = \sum\limits_{h=2}^{\infty} \dfrac{d_h}{a_h}$.

Sea $S_n = \sum\limits_{h=2}^{n} \dfrac{d_h}{a_h}$. Por definición $S_n = \sum\limits_{h=2}^{n} \dfrac{d_h}{a_h} \leq x < \dfrac{d_2}{a_2} + ... + \dfrac{d_n}{a_n} + \dfrac{1}{a_n} = S_n + \dfrac{1}{a_n}$, es decir,

$|x - S_n| \leq \dfrac{1}{a_n}$, y por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} |x - S_n| = 0$, luego $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{d_n}{a_n} = x$

Por otro lado la fórmula $d_j = \lfloor a_j x \rfloor$ - $c_{j-1} \lfloor a_{j-1} x \rfloor$ la demostraremos por inducción.

Para $j = 2$, $x = \dfrac{d_2}{a_2} + \dfrac{d_3}{a_3} + ... \Rightarrow a_2 \cdot x = d_2 + \dfrac{d_3}{a_3 / a_2} + \dfrac{d_4}{a_4 / a_2} + ... = d_2 + \dfrac{d_3}{c_2} + \dfrac{d_4}{c_2 \cdot c_3} + ...$

Notemos que $\sigma_1 = \dfrac{d_3}{c_2} + \dfrac{d_4}{c_2 \cdot c_3} + ... < 1$, porque en otro caso si $\sigma_1 \geq 1$ entonces

$a_2 \cdot x = d_2 + \sigma_1 = d_2 + \lfloor \sigma_1 \rfloor + (\sigma_1 - \lfloor \sigma_1 \rfloor)$ y $x = \dfrac{d_2 + \lfloor \sigma_1 \rfloor}{a_2} + \dfrac{\sigma_1 - \lfloor \sigma_1 \rfloor}{a_2}$, luego $\dfrac{d_2 + \lfloor \sigma_1 \rfloor}{a_2} \leq x$ lo que contradice la definición de d_2, ya que d_2 era el mayor entero posible tal que $\dfrac{d_2}{a_2} \leq x$.

Entonces tenemos que $d_2 = \lfloor a_2 \cdot x \rfloor - c_1 \lfloor a_1 \cdot x \rfloor$ y como $a_1 = 1$, resulta que $d_2 = \lfloor a_2 \cdot x \rfloor$ ya que $\lfloor x \rfloor = 0$.

Supongamos ahora que $d_j = \lfloor a_j x \rfloor$ - $c_{j-1} \lfloor a_{j-1} x \rfloor$ $\forall j = 1, 2, \ldots, k$ y veamos que la fórmula es cierta para $j = k + 1$.

Tenemos que

$$x = \frac{d_2}{a_2} + \frac{d_3}{a_3} + \ldots + \frac{d_k}{a_k} + \frac{d_{k+1}}{a_{k+1}} + \ldots \Rightarrow a_{k+1} \cdot x = \sum_{j=2}^{k} (\lfloor a_j \cdot x \rfloor - c_{j-1} \lfloor a_{j-1} \cdot x \rfloor) c_j \cdots c_k + d_{k+1} + \sigma_{k+1} =$$

$$= (\lfloor a_2 \cdot x \rfloor - c_1 \lfloor a_1 \cdot x \rfloor) c_2 \cdot c_3 \cdots c_k + (\lfloor a_3 \cdot x \rfloor - c_2 \lfloor a_2 \cdot x \rfloor) c_3 \cdot c_4 \cdots c_k + \ldots + (\lfloor a_k \cdot x \rfloor - c_{k-1} \lfloor a_{k-1} \cdot x \rfloor) c_k +$$

$+ d_{k+1} + \sigma_{k+1} = \lfloor a_k \cdot x \rfloor c_k + d_{k+1} + \sigma_{k+1}$. Ya que en la suma anterior van apareciendo sumandos iguales pero con signos opuestos.

Entonces tenemos que si $\sigma_{k+1} < 1$ se cumplirá que $d_{k+1} = \lfloor a_{k+1} \cdot x \rfloor - c_k \lfloor a_k \cdot x \rfloor$.

Para ver que $\sigma_{k+1} < 1$ argumentaremos como hemos hecho antes.

Si fuera $\sigma_{k+1} \geq 1$, entonces $\sigma_{k+1} = \lfloor \sigma_{k+1} \rfloor - (\sigma_{k+1} - \lfloor \sigma_{k+1} \rfloor)$ donde $\lambda = (\sigma_{k+1} - \lfloor \sigma_{k+1} \rfloor < 1$.

Entonces $a_{k+1} \cdot x = a_{k+1} \sum_{j=2}^{k} \dfrac{d_j}{a_j} + d_{k+1} + \lfloor \sigma_{k+1} \rfloor + \lambda$ y

$x = \sum_{j=2}^{k} \dfrac{d_j}{a_j} + \dfrac{d_{k+1} + \lfloor \sigma_{k+1} \rfloor}{a_{k+1}} + \dfrac{\lambda}{a_{k+1}}$ de donde se deduce que

$\sum_{j=2}^{k+1} \dfrac{d_j}{a_j} < \sum_{j=1}^{k} \dfrac{d_j}{a_j} + \dfrac{d_{k+1} + \lfloor \sigma_{k+1} \rfloor}{a_{k+1}} \leq x$, lo que contradice la definición de d_{k+1}. Con lo que la demostración queda concluida.

La demostración de este teorema nos ha permitido avanzar en la dinámica de completar y ampliar los elementos tecnológico-teóricos de la OM Local en torno a los Sistemas Numeración.

En resumen, y para finalizar la presentación del Modelo Epistemológico de Referencia sobre los Sistemas de Numeración que utilizaremos a partir de aquí en nuestra investigación, diremos que éste se compone de una *sucesión evolutiva de organizaciones matemáticas* que parte de una OM inicial rudimentaria (basada en la correspondencia término a término) y, mediante ampliaciones y completaciones progresivas, y de momento culmina en $\mathbf{OM_p}$, la OM en torno al sistema de numeración posicional completo en el que trabajamos actualmente. Dentro de cada una de las **OM** que componen esta sucesión, hemos valorado el *alcance* (o dominio de validez), la *economía* y la *fiabilidad* de los distintos algoritmos asociados a cada sistema de numeración, lo que nos ha permitido ir ampliando y optimizando los distintos ingredientes praxeológicos de cada SN. Dicho proceso puede interpretarse como un proceso de *modelización matemática* $\boldsymbol{\mu}$ que transforma la Organización Matemática inicial $\mathbf{OM_i}$ (que hace el papel de *sistema por modelizar*) en $\mathbf{OM_p}$ (que hace el papel de *modelo final*):

$$\begin{tikzcd} \mathbf{OM_i = [T_i/\tau_i/\theta_i/\Theta_i]} \arrow[r] \arrow[drr, "\mu"] & \mathbf{OM_a = [T_a/\tau_a/\theta_a/\Theta_a]} \arrow[r] & \mathbf{OM_h = [T_h/\tau_h/\theta_h/\Theta_h]} \arrow[d] \\ & & \mathbf{OM_p = [T_p/\tau_p/\theta_p/\Theta_p]} \end{tikzcd}$$

Este proceso dinámico puede considerarse como el esqueleto (o núcleo duro) y punto de partida para una posible *reconstrucción escolar* de $\mathbf{OM_p}$ en una institución escolar como la Formación de Maestros, la Enseñanza Secundaria o la Enseñanza Primaria. Dedicaremos el próximo capítulo al estudio de los procesos didácticos en torno a los Sistemas de Numeración en la institución de Formación de Maestros.

CAPÍTULO III

DISEÑO, EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS DE PROCESOS DIDÁCTICOS EN TORNO A LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN EN LA INSTITUCIÓN DE FORMACIÓN DE MAESTROS

En este capítulo utilizaremos el Modelo Epistemológico de Referencia (en adelante MER) de los Sistemas de Numeración (en adelante SN) presentado en el capítulo anterior con un doble propósito. En primer lugar, nos servirá para analizar las distintas Organizaciones Matemáticas (en adelante OM) que se han propuesto como *saber a enseñar* en la institución de Formación de Maestros, considerando tres grandes períodos: la "enseñanza clásica" previa a la matemática moderna (que estructuraba la matemática en tres grandes bloques, la aritmética, la geometría y el álgebra), el período marcado por la matemática moderna y la situación actual. Basándonos en el análisis de algunos libros de texto representativos de cada época, mostraremos que las razones de ser del sistema de numeración posicional tal como las describe nuestro MER, esto es, las cuestiones problemáticas a las que responde $\mathbf{OM_p}$ como desarrollo de $\mathbf{OM_a}$ y $\mathbf{OM_h}$ tienen una presencia casi nula tanto en la enseñanza "clásica" como en los desarrollos posteriores de ésta que han desembocado en la enseñanza actual.

Esta ausencia de las razones de ser del SN posicional en la formación de maestros en España constituye un fenómeno relativamente universal que, como todo fenómeno didáctico, debe responder a restricciones y limitaciones que conviene estudiar para empezar a establecer las condiciones que permitan superarlas. En la segunda y tercera partes del capítulo examinaremos precisamente, mediante una propuesta concreta de instrucción y su experimentación con un grupo de alumnos de magisterio, qué características debería poseer un proceso de estudio capaz de reconstruir, en la institución de Formación de Maestros, el SN posicional *integrando su razón de ser como cuestión generatriz del proceso*. A lo largo de todo el capítulo podremos considerar las distintas funciones que asume el MER propuesto, tanto en el análisis como en el diseño, gestión y posterior evaluación de los procesos didácticos.

1. LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN EN LOS MANUALES ESPAÑOLES PARA LA FORMACIÓN DE MAESTROS

1.1. Los Sistemas de Numeración en la enseñanza clásica

Tomamos como ejemplo de libro de texto característico de lo que se ha llamado la enseñanza "clásica" de las matemáticas (siguiendo a Bosch, 1994): un libro de texto para maestros titulado *Aritmética y su metodología y Álgebra* de Julio García Pradillo, publicado en 1957 en la editorial Nuevas Gráficas de Madrid (García Pradillo, 1957). Este libro se presenta como un manual de la asignatura "Matemáticas: Aritmética y su metodología. Álgebra" propuesta para la formación de maestros en el plan de estudios de 1950.

El autor propone una estructura del curso en 48 lecciones del que presentamos aquí el índice

Páginas

En este manual, el estudio de la Numeración corresponde a la lección 2 que consta de los siguientes epígrafes:

- Numeración: Oral y escrita
- Sistema decimal: Metodología
- Idea de la escritura de un número en un sistema básico
- Sistema romano
- Igualdades y desigualdades. Propiedades
- Representación gráfica de los números naturales

La lección (p. 6) empieza con el problema de la designación de un conjunto infinito de números:

> Una vez visto que el conjunto de los números naturales es ilimitado, se presenta el problema, al parecer muy complicado, de darles nombre, y el, al parecer menos necesario pero no menos complicado, de asignar un símbolo a cada uno de ellos.

A continuación define la Numeración como:

> La parte de la Aritmética que se ocupa de la representación de los números mediante palabras y símbolos.

El autor explica que cuando se utiliza una palabra o un grupo de palabras para designar los números estamos ante la *numeración oral o hablada*, y cuando se utiliza un símbolo para cada número estamos ante la *numeración escrita*. De todos modos, cuando hable del sistema decimal, se referirá a un único sistema de numeración que se escribe de una manera y se lee de otra.

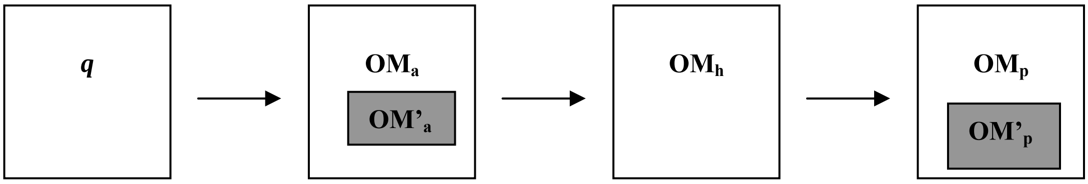
Más adelante hace una clasificación de los sistemas. Por un lado considera el sistema decimal con los sistemas análogos, que el autor llama sistemas "básicos", y, por otro, los sistemas "no básicos", de los que pone como ejemplo el sistema romano. En el epígrafe destinado a este sistema, explica su funcionamiento dando primero un criterio para la escritura de los números, comentando después el principio del valor relativo de la cifras. En tercer lugar, expone el criterio para la lectura de números y, por último, propone una metodología para enseñar a utilizar el sistema decimal, para lo que indica como materiales interesantes: un retículo de madera donde caben 100 pequeños cubos, las regletas de Cuisenaire y objetos concretos como lápices, palillos, botones, monedas, e incluso los propios alumnos…

En el epígrafe sobre la escritura de un número en un sistema básico, el autor explica muy brevemente cómo se puede escribir un número en dicho sistema, tomando como ejemplo el sistema posicional de base 3. Para afirmar la idea de que en los sistemas "básicos" los números se escriben de un modo y se leen de otro, indica que en el sistema de base 3, las unidades se llaman, unidades, ternas, novenas, etc.

En siguiente apartado, se explican las características del sistema romano, en su forma más evolucionada o final, sin relacionarlo en ningún momento con los demás sistemas.

En definitiva, estamos ante una lección que consiste en mostrar de modo muy breve el funcionamiento del sistema decimal y el sistema romano, con la ambigüedad arriba señalada en relación al sistema oral, considerado aquí como una característica más de los sistemas básicos. La única cuestión planteada inicialmente es el problema de la representación de una infinitud de números, sin que aparezca ningún otro tipo de cuestionamiento tecnológico, por ejemplo en lo que se refiere a la comparación de los distintos Sistemas de Numeración considerados. En cierta manera, al ser ésta una de las primeras lecciones del manual, el autor no se permite hacer alusión a la pertinencia de uno y otro sistema para la efectuación de las operaciones aritméticas básicas, dado que éstas aún no han sido presentadas.

Podemos pues considerar que el autor tan sólo se sitúa, de manera muy parcial, en la segunda y cuarta etapa de la sucesión de OM de nuestro MER, donde, recordémoslo, ***q*** es el conjunto de cuestiones que dan origen a la OM local en torno a los Sistemas de Numeración, $\mathbf{OM_a}$ es la Organización Matemática en torno a los SN aditivos, $\mathbf{OM_h}$ la organización en torno a los SN híbridos y $\mathbf{OM_p}$ la Organización Matemática en torno a los SN posicionales:



La OM presentada en el texto que acabamos de analizar queda situada en un recuadro en oscuro en $\mathbf{OM_a}$, designada por $\mathbf{OM'_a}$, y en otro recuadro en oscuro del gráfico dentro de $\mathbf{OM_p}$, designada por $\mathbf{OM'_p}$, sin plantear ninguna comparación entre ambos sistemas ni su incidencia en la definición de los algoritmos de las operaciones aritméticas.

Como complemento al análisis anterior, también hemos considerado otro manual de texto para formación de Maestros del año 1943, titulado *Matemáticas segundo curso*, cuyo autor es José Taboas Salvador, profesor numerario de la Escuela Normal nº 1 de Madrid. En este libro el autor divide el curso en dos partes: 24 lecciones dedicadas a la Aritmética y al Álgebra y 22 lecciones a la Geometría.

Dentro de las 24 lecciones dedicadas a la Aritmética y al Álgebra aparece la primera lección sobre los Sistemas de Numeración con los siguientes epígrafes:

1.- Sistemas de Numeración
2.- Unidades simples y colectivas
3.- Órdenes de unidades: base
4.- Escritura de un número en un sistema de base b
5.- Forma polinómica de los números
6.- Ejercicios de cambio de sistema

El autor empieza la lección indicando la imposibilidad de hacer corresponder a cada número un nombre particular arbitrario. Por ello plantea la necesidad de adoptar una técnica de representar los números imaginables empleando un corto número de palabras y de representarlos en la escritura con un número limitado de signos, dando la definición de sistema de numeración siguiente:

> Se llama sistema de numeración a un conjunto de reglas y convenios que nos permiten expresar verbal y gráficamente los números mediante ciertas palabras y signos en número limitado.

A continuación propone la distinción entre unidad simple y unidad colectiva, señalando que esta distinción es el fundamento de los Sistemas de Numeración. Pone como ejemplo:

> En el ejército, un soldado es una unidad simple, una compañía es una unidad colectiva compuesta de soldados, un batallón es una unidad colectiva compuesta de compañías, etc.

El autor propone clasificar dichas unidades simples y colectivas en órdenes y elige un número *b* distinto de cero y de la unidad que llama base. Así la unidad simple se llama unidad de primer orden, el conjunto de *b* unidades de primer orden se llama unidad de segundo orden, y en general *b* unidades de un orden cualquiera constituye otra unidad colectiva del orden inmediatamente superior.

En el epígrafe 4 se explicará entonces cómo se puede escribir un número cualquiera en un sistema de base *b*. En este caso sólo son considerados los sistemas posicionales. Sigue un epígrafe donde el autor se limita a explicar la equivalencia entre la escritura posicional y la escritura polinómica de los números; y la lección termina en un epígrafe que propone los tres tipos siguientes de ejercicios de cambio de sistema de numeración:

> 1º Dado un número en el sistema decimal, escribirlo en otro sistema.
>
> 2º Dado un número escrito en un sistema cualquiera distinto del decimal, escribirlo en el sistema decimal.
>
> 3º Dado un número en un sistema cualquiera distinto del decimal, escribirlo en otro sistema que no sea el decimal.

En definitiva, la lección sigue un principio expositivo clásico en el que, de hecho, *el único problema que se plantea acerca de los Sistemas de Numeración es el cambio de un sistema a otro*, limitándose a los SN posicionales completos. Ante los alumnos, el SN posicional decimal se muestra como la respuesta a un problema que no ha sido planteado.

La OM tratada en esta lección podemos situarla, en el esquema dinámico considerado en nuestro MER, dentro de $\mathbf{OM_p}$ con un recuadro en oscuro.

$$q \longrightarrow OM_a \longrightarrow OM_h \longrightarrow \boxed{OM_p \ \boxed{OM'_p}}$$

La OD considerada en este manual intenta mostrar de modo pobre la técnica posicional sin que aparezcan las cuestiones y tareas a las que da respuesta. En resumen, podemos decir que sólo se muestra de forma aislada la técnica, que es un aspecto parcial de la OM que se pretende que el estudiante aprenda. Sin embargo, no son tratadas ni las tareas ni los elementos tecnológicos-teóricos de dicha OM.

Hemos consultado otros textos como “Metodología de las Matemáticas” de Xiberta y Roqueta (1934); y “Aritmética razonada” de Sabrás Gurrea (1931). Y de los mismos autores analizados, aunque de distinto año: “Matemática de siempre. Didáctica de hoy”. Tomo 1, de García Pradillo (1969); y “Nociones y ejercicios de Aritmética y Geometría” de Taboas Salvador (1942). Creemos que los dos casos tratados aquí son suficientemente representativos de los manuales utilizados antes de los años 70. Dicho en otros términos, los manuales analizados parecen una buena representación de la *Organización Matemática a enseñar* en torno a los Sistemas de Numeración, en la institución de la Formación de Maestros, a lo largo del periodo de “enseñanza clásica”.

1.2. Los Sistemas de Numeración a partir de la Ley de Educación de 1970

En España, la reforma que promovía la Ley de Educación de 1970 trajo consigo el fin de la estructuración clásica de las matemáticas escolares en los 3 bloques aritmética, geometría y álgebra. El cambio curricular que se produce en la formación de maestros queda bien de manifiesto con la aparición del libro de texto titulado: *Didáctica de las Matemáticas* del profesor de la Universidad Complutense de Madrid Eugenio Roanes Macías, publicado por la editorial Anaya en 1983.

En este libro se propone una organización de las matemáticas para maestros estructurada en 24 temas de longitud comparable, como muestra su índice que reproducimos a continuación:

Este libro de texto fue aprobado por el Ministerio de Educación y Ciencia con fecha 27-1-1970. Por tanto, surge en el momento que se aprueba la Ley general de Educación de 1970 del ministro Villar Palasí. Es con esta Ley que se promueve la enseñanza de las Matemáticas Modernas. Y es también con esta Ley que se propone tanto en el currículo de Primaria (entonces E.G.B.) como en el de Secundaria (entonces dividida en B.U.P. y C.O.U.) el estudio de los Sistemas de Numeración.

Volviendo al libro de texto, observamos que el estudio de los Sistemas de Numeración aparece dentro del tema 9 dedicado al número natural, con 6 apartados de un total de 17. Los apartados relativos a los Sistemas de Numeración son los siguientes (pp. 257- 272):

12. Sistemas de Numeración
13. Sistemas de Numeración de base cuatro
14. Sistemas de Numeración en otras bases
15. Paso de un sistema de numeración a otro
16. Teorema fundamental de los Sistemas de Numeración
17. Práctica y didáctica de las operaciones en cualquier base

Como en el manual de 1957 examinado inicialmente, *la cuestión que da origen a la consideración de los Sistemas de Numeración* radica en la dificultad de tener que nombrar el conjunto infinito de los números naturales sin tener que recurrir a infinitos nombres y, por tanto, infinitos signos para designarlos. Para evitar este inconveniente, el autor explica que existen métodos que mediante un número pequeño de signos y reglas permiten nombrar y escribir todos los números naturales. El autor presenta el sistema de numeración como este sistema de reglas y signos.

Se desprende entonces que aquellos sistemas que no permiten la escritura de cualquier número natural con un número finito de símbolos fijados de antemano (como los sistemas aditivos o los híbridos) no son considerados por el autor como Sistemas de Numeración. Tampoco aparece como cuestión problemática la ambigüedad de la designación ni la longitud de la cadena de símbolos necesaria para designar cada número. De hecho, el autor sólo considera como Sistemas de Numeración los sistemas posicionales, dando por sentado que para representar los números sólo se utilizan signos para los multiplicadores de las potencias de la base.

Sin más preámbulo sobre los SN y sus razones de ser, el autor introduce los SN posicionales de base 4, cuyos símbolos elementales se suponen conocidos por el lector (Roanes, 1983, p. 259):

> Los cardinales de los conjuntos ∅, A, B y C de la figura 13.1 se llaman como es sabido, *cero, uno, dos* y *tres* y se designan, respectivamente, con los signos 0, 1, 2 y 3, como es habitual.

A continuación explica las reglas que hay que seguir para designar y nombrar cualquier otro número en dicho sistema en base 4, es decir un sistema en el que sólo se pueden utilizar las cifras 0, 1, 2 y 3. Después de indicar, mediante agrupamientos de 4, cómo designar el cardinal de algunas colecciones de objetos, concluye:

> Resumiendo, podríamos decir que *el sistema de numeración de base cuatro es aquel en que cada cuatro unidades de un orden forman una unidad de orden inmediatamente superior*. Por tanto, lo mismo que en el sistema de numeración habitual (de base diez), una misma cifra puede tener distinto significado dependiendo del lugar que ocupe.

Como hemos indicado antes, el autor se sitúa directamente en el ámbito de los Sistemas de Numeración posicionales y sólo particulariza el sistema decimal habitual por la elección de la base 10, que contrapone al ejemplo de la base 4. Siguen entonces una colección de tareas matemáticas que consisten únicamente en el cambio del SN posicional de base cuatro al de base diez y viceversa:

- Escribe en base cuatro un número dado, por ejemplo 38.
- Escribe en base diez el número $2301_{(4}$.

En el apartado 14 propone utilizar el razonamiento anterior pero disponiendo de cajas donde caben 7 pelotas y cajones con 7 cajas, así sucesivamente, para el sistema en base 7. Del mismo modo, considera el sistema de base 12 y el de base 15, y termina con el sistema binario, indicando su utilización en las calculadoras electrónicas.

Las tareas que se proponen al estudiante son:

- ¿Cuáles son las cifras significativas en una base dada, por ejemplo la base 7, ó también la base 12, con las cuales se puede escribir cualquier número es esta base?
- Escribe en una base dada, por ejemplo, la base siete, el cardinal de una colección dibujada o también un número escrito en base 10.
- Escribe en base 10 el número $34_{(7}$.
- ¿Es cierta la igualdad $23_{(4} = 14_{(7}$?

El apartado 15 acaba de corroborar que los únicos SN existentes son los SN posicionales. En este apartado las tareas propuestas son de aplicación de una técnica general de cambio de base, considerando tres casos distintos:

1º Paso de un sistema de base cualquiera a la base decimal.

2º Paso de un número del sistema decimal a otro sistema.

3º Paso de un sistema a otro, ambos de base distinta a la base diez.

Las tareas para el estudiante son:

- Pasar a la base decimal números escritos en otra base.
- Escribir en base decimal el mayor número que en base cinco tiene tres cifras.
- Escribir en diferentes bases un número dado en base 10, por ejemplo en base 8 y en base 13.
- Pasar a una base dada el numero escrito en otra base.
- Para escribir en base diez el número $3412_{(5}$ basta hallar el valor numérico del polinomio $3x^3 + 4x^2 + x + 2$ sustituyendo x por 5, lo que se hace cómodamente aplicando la regla de Ruffini. Hágalo y generalice el proceso.
- Encontrar la base n, de modo que sea cierta la igualdad $213_{(n} = 130_{(n+2}$.

Las cuatro primeras tareas pueden considerarse tareas de aplicación de la técnica explicada anteriormente. Las dos últimas, en cambio, constituyen dos posibles desarrollos de la Organización Matemática introducida por el autor alrededor del problema del cambio de base de un sistema posicional a otro. La quinta tarea propone una variación de la técnica del paso de una base cualquiera a la base 10 utilizando la descomposición de un polinomio mediante la regla de Ruffini (regla que se supone conocida por el alumno, ya que ésta no aparece en el libro de texto). En efecto, la factorización del polinomio $P(x)$:

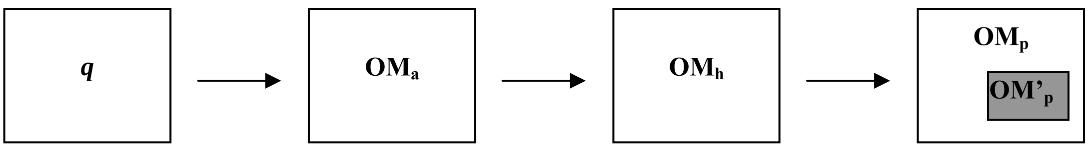
$$P(x) = 3x^3 + 4x^2 + x + 2 = (x - 5)\,(3x^2 + 19x + 96) + 482$$

proporciona directamente el resultado $P(5) = 482$. Y la sexta propone la realización de una tarea "inversa": hallar las bases en las que dos escrituras dadas son equivalentes.

El autor no va más allá en este desarrollo y pasa a la justificación teórica del trabajo propuesto. Así el siguiente apartado indica que todo lo tratado anteriormente puede generalizarse con el *teorema fundamental de la numeración*, teorema que plantea y demuestra. Por último, en el apartado 17, propone la realización de cálculos de las distintas operaciones en los distintos Sistemas de Numeración, proponiendo tareas del tipo:

- Efectuar una sustracción en base cuatro.
- Construir la tabla de sumar en una base dada y a continuación efectuar una suma en dicha base o una resta y explicar cómo se hace.
- Construir la tabla de multiplicar en una base dada y aplicarla a efectuar una multiplicación de números escritos en dicha base.
- Construir la tabla de multiplicar en una base dada y realizar una división con la ayuda de dicha tabla.

Para concluir, diremos que la Organización Matemática propuesta en este texto se sitúa directamente en el ámbito de los Sistemas de Numeración posicionales y tan sólo se propone "tematizar" la elección de la base de estos sistemas, mediante el estudio de la conversión de escrituras de una base a la otra y de la realización de las operaciones elementales básicas en distintas base. Podemos pues situarla, dentro del MER que hemos elaborado, como un aspecto de la última de las OM consideradas:



Debió ser sin duda la importancia otorgada por las Matemáticas Modernas al trabajo con distintas bases para la construcción del concepto de número en los niños lo que explica la importancia otorgada a este tema en los nuevos libros de texto para maestros, donde el estudio no se centra tanto en los Sistemas de Numeración como en el cambio de escritura de un sistema de numeración posicional a otro. A continuación analizaremos otro manual representativo de los libros de texto utilizados por el profesorado de maestros de los años 80 en el que veremos reproducirse el mismo fenómeno. Se trata del libro titulado *Matemáticas – 1 (Escuelas universitarias de profesorado de E.G.B.)* de los autores: Jacinto Martínez, María Paz Bujanda y José María Velloso, publicado por la Editorial SM en 1981.

La organización que proponen estos autores se estructura en los temas siguientes:

Tema 1. Teoría conjuntos	Pág. 15
Tema 2. El álgebra de Boole de las proposiciones, de los circuitos de conmutación y de los sucesos aleatorios	Pág. 42
Tema 3. Relaciones y correspondencias	Pág. 78
Tema 4. El número natural	Pág. 110
Tema 5. Divisibilidad en N	Pág. 156
Tema 6. El número entero	Pág. 184
Tema 7. La Divisibilidad en el anillo Z	Pág. 211
Tema 8. El número racional	Pág. 240
Tema 9. Las traslaciones en el plano. Ecuaciones de la recta, circunferencia, parábola e hipérbola equilátera	Pág. 275
Tema 10. Los movimientos en el plano	Pág. 314
Tema 11. Homotecia y semejanza en el plano	Pág. 354
Tema 12. La inversión en el plano	Pág. 387
Apéndice: Magnitudes proporcionales	Pág. 415

El tema de los Sistemas de Numeración es tratado dentro del tema 4 sobre el número natural con los siguientes apartados (pp. 135 – 155):

4.32. Sistemas de Numeración

4.33. Expresión de un número en el sistema de base *n*

4.34. Observaciones

4.35. Paso de un sistema de numeración a otro

4.36. Práctica de la adición en base diez

4.37. Adición de números en cualquier base

4.38. Sustracción en cualquier base

4.39. Multiplicación en base diez

4.40. Multiplicación en base cualquiera

4.41. La división en base diez

4.42. División entera en base cualquiera

Ejercicios resueltos. Ejercicios propuestos

En el apartado 4.32 los autores inician el tema proponiendo la siguiente definición de Sistemas de Numeración:

> Tienen por objeto expresar verbal y gráficamente los infinitos números naturales mediante el menor número de palabras y signos.

A continuación indican muy brevemente dos de las características del sistema posicional completo decimal, lo que los autores llaman “el principio del valor relativo de las cifras” y argumentan históricamente el porqué de la base decimal de nuestro sistema:

> [Según] el principio del valor relativo de las cifras […] una misma cifra representa valores distintos según el lugar que ocupa en el número. Se eligió el número diez como base, por ser éste el número de dedos de ambas manos, ya que los hombres primitivos empleaban este conjunto para contar los conjuntos que manejaban a diario.

Este comentario sirve para introducir, muy brevemente, la idea de que existen sistemas que utilizan otras bases, como la base 12 y la base 2. También aquí, los autores pasan por alto la existencia de otros SN que no sean posicionales. En los apartados 4.33 y 4.34 siguientes, los autores explican cómo se puede expresar un número en un SN posicional de base m, con un ejemplo en el que $m = 2$. En este ejemplo explican cómo al ir agrupando de 2 en 2 van apareciendo las unidades de primer orden, las de segundo orden, etc. En el apartado 4.35 exponen la regla para el paso de un sistema de numeración a otro con tres ejemplos. Por último en los apartados siguientes los autores explican un algoritmo de cada una de las operaciones (suma, resta, multiplicación y división) primero en el SN de base 10 y luego en otro SN de base distinta. Hay que resaltar que además de explicar el funcionamiento de cada algoritmo, se añade una justificación.

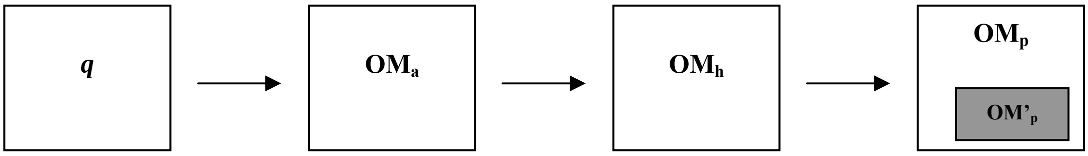
Al final del tema se proponen algunas tareas, con su solución, para que los estudiantes se entrenen realizándolas. A continuación exponemos alguno de estos tipos de tareas:

1. Suma en el sistema de base 7:

$$3440_{(7} + 32521_{(7} + 142606_{(7}$$

2. Divide en base 8: $123745_{(8} : 670_{(8}$
3. Escribe el número 7511 en el sistema de base 8 y en el sistema de base 14.
4. ¿En qué base el número $136335_{(9}$ viene expresado por el número $40305_{(x}$.?
5. Demuestra que $121_{(n}$, siendo $n > 2$, es un cuadrado perfecto. Calcula su raíz cuadrada.
6. ¿En qué sistema de numeración se verifica que $55_{(x} + 43_{(x} = 131_{(x}$.?
7. ¿Cuál es la base *n* del sistema de numeración en el cual los números que en dicho sistema se escriben $123_{(n}$, $140_{(n}$ y $156_{(n}$, están en progresión aritmética?

En resumen podemos decir que, al igual que en el caso anterior, se trata de un tema donde se da una breve exposición o muestra de algunas características de los SN posicionales indicando cómo se puede pasar de una escritura en un SN de base *m* a otra en un SN de base *n*, añadiendo para terminar la explicación y justificación de un algoritmo de cada una de las operaciones en el SN de base 10 y en un SN de base cualquiera. Así pues, la exposición del tema que realiza este manual vuelve a situarse como una pequeña parte de la $\mathbf{OM_p}$ situada al final del recorrido del MER:



El análisis de otros textos pone de manifiesto que los dos manuales que hemos descrito son suficientemente representativos de los libros de texto utilizados durante las décadas de los 70 y 80, en cuanto al tratamiento que realizan del tema de los SN. Entre los textos consultados están:

"Matemáticas para el maestro de enseñanza elemental" de Nichols y Swain (1975), traducción de: *Mathematics for the elementary school teacher* de Holt, Rine Hart y Winston (1971).

"Matemáticas primer curso. Escuelas Universitarias del profesorado de E.G.B." de Nortes Checa (1978).

"Los números y el cálculo numérico" de Aizpún y otros (1976)

"Teoría y didáctica de la matemática actual" de Aizpún (1970).

1.3. Los Sistemas de Numeración en la enseñanza actual

Para analizar el tratamiento que se da al tema de los Sistemas de Numeración en la enseñanza actual hemos elegido el libro de texto siguiente *Matemáticas para maestros. Manual para el estudiante* del "Proyecto Edumat-Maestros" dirigido por el profesor Juan D. Godino de la Universidad de Granada y publicado en Internet en octubre 2004.

Este libro propone una organización de la matemática para maestros estructurada en 6 temas de longitud comparable (sólo especificamos los apartados del Tema I):

Este libro de texto, recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/, trata los SN dentro del tema dedicado a los sistemas numéricos y, más concretamente, en el apartado 3 del capítulo I, titulado "Tipos de Sistemas de Numeración y aspectos históricos" cuyo índice reproducimos a continuación (pp. 27 – 43):

CAPÍTULO 1:

NÚMEROS NATURALES. SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Los autores introducen los SN mediante tres situaciones:

- En la primera se le pide al alumno que escriba el 9 en un SN que funciona como el SN posicional completo, pero con cuatro símbolos (□ para el cero, | para el uno, ⊥ para el dos y T para el tres).

- En la segunda se pide escribir los 25 primeros números en dos sistemas análogos al SN decimal posicional (uno con los símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5 (base 6) y el otro en base 12 con los símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α y β).

- En la tercera se proporciona al alumno cuatro colecciones de estrellas y se le propone que las agrupe dentro de cada colección. En la primera colección, se proponen agrupamientos sucesivos de 4 elementos. Una vez finalizados los sucesivos agrupamientos se le pide que, en una banda horizontal de seis casillas, escriba el número de elementos de cada agrupamiento que le ha quedado, empezando de derecha a izquierda, primero el número de estrellas, después el número de grupos de 4, etc. En la demás colecciones se proponen agrupamientos de 6, de 10 y de 12.

De entrada pues, los autores hacen sólo referencia a los sistemas posicionales análogos a nuestro SN posicional completo. Creemos que el objetivo de dichas situaciones es que el estudiante se cuestione acerca de la forma y del número de símbolos utilizados en el sistema y que experimente lo que sucede cuando realiza agrupamientos sucesivos de n elementos (con $n < 10$, $n = 10$ y $n > 10$).

En los siguientes apartados, los autores irán más allá de los Sistemas de Numeración posicionales presentando las características de los diferentes Sistemas de Numeración que han existido a lo largo de la Historia. Por ejemplo, en el apartado 3.2, presentan las características del sistema egipcio, del sistema chino y del sistema hindú, y proponen como tareas para el alumno:

- Escribe en el sistema egipcio, romano y chino el número 1386
- ¿Cuál es el menor número que se escribe con 25 símbolos en el SN egipcio?

Estas tareas sirven para que el estudiante aplique algunas de las características de los SN presentados. En el apartado 3.3 proponen la siguiente clasificación de los Sistemas de Numeración:

a) Sistema aditivo regular

En este sistema se definen símbolos para la unidad, la base y las potencias de la base. El número representado se obtiene sumando los valores de los signos que componen su representación. El sistema egipcio es un ejemplo de sistema aditivo regular de base 10.

b) Sistema multiplicativo regular

En él se definen símbolos para la unidad, la base, las potencias de la base y todos los números comprendidos entre la unidad y la base. El número representado se obtiene multiplicando cada potencia de la base por el valor del símbolo que le precede y sumando los resultados junto con las unidades. Un ejemplo de este tipo de sistemas es el sistema chino de numeración que es un sistema multiplicativo regular de base 10.

c) Sistema posicional regular

En este sistema se definen símbolos para la unidad y los números comprendidos entre la unidad y la base. También se define un símbolo, el cero, para indicar la no existencia de unidades. En cambio, no se definen símbolos específicos para la base ni para las potencias de la base, representándose éstas por medio de combinaciones de los símbolos de la unidad y del cero. En estas condiciones, cada uno de los signos que componen la representación del número, dependiendo del lugar que ocupa, hace referencia a las unidades o a una determinada potencia de la base. El número representado se obtiene de la misma manera que en un sistema multiplicativo. Nuestro sistema de numeración escrito es un ejemplo de sistema posicional decimal.

A continuación, los autores presentan una técnica general de cambio de base dentro de los SN posicionales, considerando dos casos distintos:

(1) Paso de la escritura en base 10 de un número n a la base $b \neq 10$

(2) Paso de la escritura de un número n en base b a la base 10.

Y, para el paso de la escritura de un número de base $b_1 \neq 10$ a base $b_2 \neq 10$, se propone aplicar el caso 2º a b_1 y luego el caso 1º a b_2. Para aplicar esta técnica proponen las siguientes tareas (pág.34):

1. Efectúa los cambios de base siguientes: 3415 (de base 10 a base 3); 999 (de base 10 a base 7); 25842 (de base 10 a base 12); 1001110 (de base 2 a base 10); ABC6 (de base 13 a base 10); 33421 (de base 5 a base 3); 34250 (de base 6 a base 4) y 102102 (de base 3 a base 7).
2. Escribe las cifras del número siguiente en base 3:

   $1 + 3 + 3^2 + 3^4 + 3^6$

   Expresa el número anterior en base 9
3. Escribe en base 5 las cifras del siguiente número
   5 x (5 x (5 x (5 + 4) + 3) + 2) + 1, donde x significa el signo de multiplicar.
4. En base 16 (hexadecimal) los dígitos usados son 0 hasta 9 y las letras A, B, C, D, E, F para los números del diez hasta el quince.
   a) Convierte $B6_{(16}$ a base 10;
   b) Convierte $B6_{(16}$ a base 2;
   c) Explica cómo se puede pasar $B6_{(16}$ a base 2 directamente, esto es, sin pasarlo primero a base 10.

Como se puede observar, la mayoría de tareas son de aplicación de la técnica de cambio de base, salvo las tareas 2, 3 y 4c, donde el estudiante debe utilizar sus conocimientos sobre descomposición de un número en potencias de otro dado y debe saber operar con paréntesis.

En el apartado 3.6 se presentan las características de nuestros actuales Sistemas de Numeración escrito y oral y se proponen tareas de paso de un sistema a otro, junto con un último problema de contar:

1. Utiliza nuestro sistema de numeración oral para expresar el número:

   754.120.004.002000.000.000
2. Utiliza nuestro sistema posicional de numeración escrita para representar el número siete trillones, setenta mil siete billones, siete millones, setenta y siete.
3. Expresa mediante nuestro sistema oral ordinal los números 11, 14, 27, 53, 99, 135, 366, 584 y 1336.
4. ¿Cuántos números capicúas hay comprendidos entre 1 y 1000?

En el apartado 3.7 se presentan otros Sistemas de Numeración orales y en el 3.8 sistemas basados en colecciones de objetos como muescas, collares, ábacos, nudos, etc. Por último, en el apartado 3.9 los autores presentan la variedad de SN según el origen de algunas bases. Las tareas propuestas en este apartado son:

1. El uso de la base 10 en el sistema de numeración indoarábigo se puede suponer que se debe a que tenemos 10 dedos entre ambas manos. Supongamos que entre los

marcianos ocurrió lo mismo, esto es, usaron un sistema de numeración basado en el número de dedos de sus manos. ¿Cuántos dedos tenían los marcianos en sus manos si sabemos que en dicho planeta el número diecisiete se escribía 21?.

2. Construye un sistema aditivo de base 12 y utilízalo para expresar los números 1245674, 23478 y 100.
3. Construye un sistema aditivo de base 20 y utilízalo para representar los números del ejercicio anterior.

Aquí aparecen las tareas 2 y 3 que son de un nuevo tipo y que tal vez el estudiante tendrá dificultades para resolverlas, ya que en ningún momento se ha cuestionado cuántos símbolos y de qué tipo deben ser los símbolos de un sistema aditivo. Y, por último, en el apartado 3.10 se muestran otros ejemplos históricos de SN escritos como el babilónico y el romano.

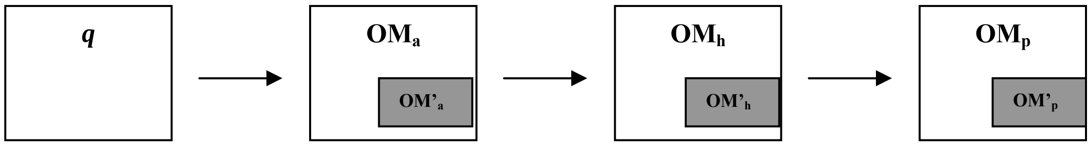
Vemos pues que el tratamiento que ofrecen estos autores de los Sistemas de Numeración es mucho más amplio que el examinado en los textos anteriores, puesto que el examen de los sistemas posicionales en distintas bases se amplía al caso de los dos otros tipos de sistemas (aditivo y multiplicativo regular). Por desgracia, y tal vez debido al detalle y a la longitud del tratamiento propuesto de estos sistemas, no aparece el estudio de las limitaciones de unos y otros, tanto en la designación como en la efectuación de las operaciones aritméticas elementales. En otros términos, no se plantean las ventajas y limitaciones de los distintos SN considerados y las posibles relaciones entre ellos. Las últimas tareas propuestas en el texto, bajo el epígrafe "Taller de matemáticas" tampoco realizarán el estudio comparativo, aunque se encuentren las dos tareas siguientes en las que aparece un principio de cuestionamiento de las relaciones entre el SN posicional y el multiplicativo:

3. Construye un sistema multiplicativo de base 8 y utilízalo para expresar los números 32768, 5400 y 89. Haz las transformaciones necesarias para convertirlo en un sistema posicional de base 8. Vuelve a escribir los números anteriores en el nuevo sistema.

4. Construye un sistema multiplicativo de base 5 y utilízalo para expresar los números del ejercicio anterior. Haz las transformaciones necesarias para convertirlo en un sistema posicional de base 5. Vuelve a escribir los números anteriores en el nuevo sistema.

Por último, señalaremos que las tareas propuestas no cuestionan la eficacia de los diferentes Sistemas de Numeración, en cuanto a los símbolos y al tipo de agrupamiento utilizados o en cuanto a las operaciones de cálculo que son posibles realizar, además de no cuestionar la posible ambigüedad de algunos sistemas.

Hemos visto pues que la OM considerada en el texto que acabamos de analizar amplía considerablemente las de los libros de texto anteriores puesto que aparecen aquí tratados aspectos de $\mathbf{OM_a}$, $\mathbf{OM_h}$ y $\mathbf{OM_p}$. En relación con el MER propuesto como referencia del estudio, faltarían en la propuesta de la colección dirigida por J. D. Godino las relaciones de ampliación y completación que existen entre estas distintas organizaciones matemáticas, así como la dependencia entre los algoritmos de las operaciones aritméticas elementales y los SN.



1.4. Restricciones transpositivas que inciden sobre la enseñanza de los Sistemas de Numeración en la formación de maestros

Después de haber examinado el tratamiento de los Sistemas de Numeración que proponen y han propuesto los distintos libros de texto para la formación de maestros, podemos destacar tres rasgos comunes que consideramos importantes para los desarrollos que siguen:

(1) La construcción o reconstrucción de los Sistemas de Numeración se centra esencialmente en los SN posicionales de base 10 (período clásico) o de base cualquiera (período moderno y actual). Sólo en los textos recientes aparecen tratados otros SN como los aditivos y los híbridos.

(2) El estudio de las características de los SN considerados se vincula exclusivamente a la capacidad de los SN para *designar* los números naturales y no a su capacidad para *operar* con estos números.

(3) No se hace especial hincapié en los factores que podrían explicar el predominio del SN posicional sobre los demás SN que han existido en la historia, esto es, sus “buenas características” para la realización de las operaciones aritméticas elementales, más allá de su capacidad para representar un número infinito de números con un número finito de símbolos, es decir, no se resalta y por tanto no aparece explícitamente lo que hemos llamado la “razón de ser” de $\mathbf{OM_p}$.

Este último punto constituye precisamente el principal motor del proceso didáctico que hemos diseñado y experimentado nosotros y que presentaremos a continuación. Pero, antes de hacerlo, creemos importante detenernos un momento sobre las *restricciones* *transpositivas* que pueden explicar que la mayoría de procesos didácticos que se llevan a cabo en España sobre la enseñanza de los Sistemas de Numeración no tomen en consideración un aspecto – el de la inclusión de su "razón de ser" como motor del estudio – que para nosotros es fundamental.

Siguiendo a Arsac (1988) y tal como se desarrolla en el trabajo de Bolea, Bosch y Gascón (2001), podemos considerar distintos tipos de restricciones transpositivas: restricciones que provienen de la *representación institucional* del saber matemático, restricciones impuestas por el *tiempo didáctico* (cronogénesis) que, por ejemplo, provocan serias dificultades para cuestionar conocimientos previamente aprendidos, y restricciones impuestas por la *topogénesis* del proceso y, en particular, por la *necesidad de evaluar* el trabajo llevado a cabo por los alumnos.

En el caso de los Sistemas de Numeración, es importante destacar que éstos se sitúan en una de las bases de la construcción teórica del saber matemático, en aquella parte del edificio que trata sobre lo numérico: para hablar de los números y para hacer algo con ellos, hay que disponer de un sistema de numeración. Esto explica que los temas de numeración aparezcan en el principio de los manuales ("hay que empezar la construcción por los cimientos") y no se puedan vincular con unas operaciones aritméticas *que todavía están por definir*. Dado que las restricciones del tiempo didáctico y la "necesidad" de considerar como "definitivo" el saber enseñado hacen dificultoso el retorno hacia conocimientos previamente presentados, el estudio de las operaciones aritméticas y sus algoritmos se realiza directamente con el SN posicional sin cuestionar la elección de éste.

Son también estas restricciones ligadas a la cronogénesis del saber las que pueden explicar que los procesos didácticos habituales no se "entretengan" en hacer trabajar a los alumnos en SN que, como el aditivo y el híbrido, no proponen algoritmos de cálculo eficaces. La ausencia en los textos de un trabajo desarrollado de cálculo en $\mathbf{OM_a}$ y $\mathbf{OM_h}$ marca en realidad una dificultad transpositiva con la que nos vamos a encontrar al llevar a cabo un proceso didáctico centrado en la sucesión de organizaciones matemáticas: $\mathbf{OM_a} \rightarrow \mathbf{OM_h} \rightarrow \mathbf{OM_p}$. Tendremos que hacer trabajar a los alumnos con herramientas de cálculo basadas en el SN aditivo y en el híbrido *que pronto se revelarán ineficaces* para los objetivos propuestos.

Finalmente, la exigencia de evaluación podría explicar el gran predominio asignado al trabajo con SN de distintas bases, que proporcionan un sinfín de tareas de conversión de un SN a otro, junto con tareas de ampliación y cuestionamiento tecnológico que pueden resolverse mediante el álgebra ecuacional elemental. En el período de la Matemática Moderna, la enseñanza de los SN posicionales en distintas bases viene también legitimado por la importancia atribuida a la teoría de conjuntos en la construcción del concepto de número y a la introducción en la enseñanza primaria de actividades de agrupaciones sucesivas para establecer distintas escrituras equivalentes de un mismo cardinal.

Es importante tener en cuenta todas estas restricciones en el momento de diseñar un proceso de estudio sobre los Sistemas de Numeración como el que presentamos a continuación.

2. DISEÑO A PRIORI DE UN PROCESO DE ESTUDIO

Tomando como base el Modelo Epistemológico de Referencia de los Sistemas de Numeración elaborado en el capítulo II de esta memoria, y una vez examinadas, a la luz de dicho modelo, las principales restricciones transpositivas que pesan sobre la enseñanza de los SN para la formación de maestros en España, nos proponemos diseñar un proceso de estudio que permita llegar a la construcción del SN posicional de base 10 haciendo que éste aparezca como la respuesta a un conjunto de cuestiones problemáticas para las cuales tanto los SN aditivos como los multiplicativos presentarán grandes limitaciones. Este conjunto de cuestiones constituye lo que consideramos como la “razón de ser” del SN posicional de base 10.

Inicialmente partiremos de la necesidad de representar los números naturales mediante un conjunto **S** de símbolos, de tal manera que sean compatibles las siguientes condiciones:

> **(1)** No haya ninguna ambigüedad.
>
> **(2)** **S** sea un conjunto de símbolos diferentes, fijados de antemano y de cardinal lo más pequeño posible.
>
> **(3)** La cadena de símbolos (repetidos o no) usados para cada número no debe ser excesivamente larga.

La representación de los números debe además permitir optimizar la *economía* y la *fiabilidad* de los algoritmos que sirven para:

(4) Comparar dos o más números.

(5) Sumar.

(6) Restar.

(7) Multiplicar.

(8) Realizar la división euclídea.

(9) Calcular múltiplos y divisores.

Queremos subrayar que estas condiciones integran voluntariamente la tarea de designar los números naturales (**(1)** a **(3)**) con las tareas de comparar números naturales y realizar operaciones aritméticas con ellos (**(4)** a **(9)**). De esta manera postulamos que:

La reconstrucción de los SN en la formación de Maestros debe integrar ambos tipos de condiciones para mostrar explícitamente como "*razón de ser*" de la Organización Matemática que se pretende reconstruir (esto es, como conjunto de cuestiones a las que dicha organización debe responder) tanto las cuestiones relativas a la *designación o representación* de los números naturales, como las que hacen referencia a la *fiabilidad*, la *economía* y el *alcance o dominio de validez* de los algoritmos de cálculo aritmético que pueden elaborarse mediante dicha representación.

La dificultad principal con la que nos topamos al intentar diseñar un proceso didáctico con estas características consiste precisamente en integrar de manera *explícita* y *nuclear* esta *razón de ser* como motor del proceso de estudio.

En coherencia con el modelo epistemológico de las matemáticas que propone la TAD interpretamos el MER elaborado como un *modelo dinámico*, esto es, un modelo en que lo fundamental es el proceso de construcción de las sucesivas ampliaciones de la OM inicial y no únicamente la $\mathbf{OM_p}$ en la que converge y cristaliza dicho proceso:

$$q \rightarrow \mathbf{OM_a} \rightarrow \mathbf{OM_h} \rightarrow \mathbf{OM_p}$$

Si ahora aplicamos nuestro postulado de la codeterminación entre lo matemático y lo didáctico, nos vemos obligados a diseñar un proceso didáctico que pretende reconstruir, en una institución determinada (en nuestro caso, la Formación de Maestros) la actividad matemática que, partiendo de una cuestión inicial y una primera respuesta ingenua a dicha cuestión, lleva a cabo un proceso de ampliaciones y completaciones sucesivas de dicha respuesta. La respuesta "final" (que siempre es provisional, hasta que nuevas cuestiones requieran seguir ampliándola y completándola) sólo toma sentido cuando se interpreta a la luz de todo el proceso de reconstrucción.

Por tanto, el proceso de estudio que proponemos consistirá en analizar las características de la correspondiente técnica de representación escrita de cada una de las OM que van apareciendo y su relación con la fiabilidad, el alcance (o dominio de validez) y la economía de los algoritmos de comparación y de cálculo aritmético que forman parte de dicha OM. Este proceso de estudio es necesario para sacar a la luz y dar sentido a las propiedades del SN posicional, que son transparentes en nuestra práctica matemática habitual.

El proceso de construcción de las OM en torno a los SN partirá de una primera OM en torno al SN aditivo. Las limitaciones de $\mathbf{OM_a}$ para cumplir la condición **(3)** y sobre todo las condiciones **(7)**, **(8)** y **(9)** motivarán su modificación para crear una nueva OM basada en el SN híbrido que requiere una mayor cantidad de símbolos. Se obtendrá así $\mathbf{OM_h}$, que adopta el SN chino como prototipo. Las limitaciones de $\mathbf{OM_h}$ para responder adecuadamente a la condición **(2)**, así como el excesivo coste que presentan las técnicas de cálculo de $\mathbf{OM_h}$, motivarán la introducción de una OM en torno al SN posicional completo: $\mathbf{OM_p}$, con lo que la dinámica del proceso didáctico estará completamente guiada por la correspondiente dinámica del Modelo Epistemológico de Referencia:

$$\boldsymbol{q} \rightarrow \mathbf{OM_a} \rightarrow \mathbf{OM_h} \rightarrow \mathbf{OM_p}$$

Dicha cuestión puede formularse, en primera instancia, como sigue:

q: ¿Cómo expresar los números naturales mediante una representación escrita que sea un instrumento útil de la aritmética elemental?

Mostraremos que dicha cuestión debe constituirse, también, como cuestión generatriz del diseño a priori y como motor del proceso de estudio de los SN.

Presentaremos primero el diseño a priori del recorrido de estudio, sesión por sesión, y mostraremos, en el próximo apartado, los resultados de una experimentación del proceso llevada a cabo en el curso 2003-2004 con estudiantes de magisterio la Facultad de Educación de la Universidad Complutense de Madrid.

2.1. El problema de la existencia de múltiples Sistemas de Numeración

DISEÑO A PRIORI DE LA 1ª SESIÓN

La primera sesión del proceso tendrá una doble función: llevar a cabo el primer encuentro con la "razón de ser" de la **OM$_p$** que se pretende reconstruir (esto es, con algunas de las cuestiones a las que ésta OM deberá responder) y, al mismo tiempo, vivir un primer encuentro con la Organización Didáctica (en adelante OD) que estructurará el proceso de estudio. Aparece aquí un primer aspecto de la interrelación o codeterminación entre lo matemático (la actividad que se pretende realizar) y lo didáctico (la manera cómo el profesor propone organizar dicha actividad).

Objetivo: *Momento del primer encuentro* con la OM en torno a los Sistemas de Numeración.

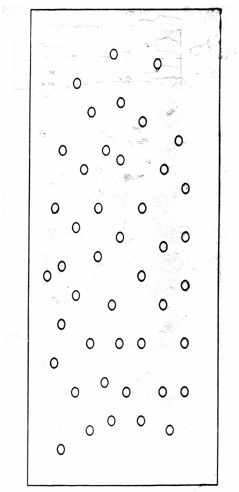
El profesor propone a los estudiantes el estudio de los Sistemas de Numeración, explicando la duración aproximada del tema, el número de sesiones, el tipo de trabajo a realizar y la forma de evaluar el estudio realizado.

El profesor continúa la sesión invitando a los alumnos a realizar la siguiente tarea:

Tarea inicial: *"Tenemos un emisor y un receptor. El emisor dispone de una colección de platos, análoga a la que aparece representada en la figura de la derecha, y que no puede ver el receptor. Aquél debe enviar un mensaje escrito al receptor para que éste le traiga exactamente las cucharas necesarias para poner una en cada plato."*

Este problema tiene múltiples soluciones. Nuestro objetivo general es estudiar las diferentes soluciones y analizar sus características y sus limitaciones.

Para ello empezaremos buscando, por grupos, al menos cuatro maneras distintas de emitir dicho mensaje.



Forma de trabajo: En pequeños grupos de 4 a 6 alumnos.

Puesta en común: Cada grupo expone sus respuestas a todo el grupo de clase. Se analizan, evalúan y clasifican los distintos tipos de mensajes que hayan surgido, justificando sus ventajas e inconvenientes.

El profesor puede acabar haciendo una síntesis de los resultados obtenidos.

A continuación, el profesor podrá proponer como tarea para realizar fuera del aula, un documento donde se presentan varias colecciones dispuestas en distintas formas (triangular, cuadrangular, etc.). De este modo se pretende conseguir que el estudiante descubra cómo la disposición de la colección puede influir en la utilización de las posibles escrituras del número.

2.2. Análisis de un Sistema de Numeración aditivo

DISEÑO A PRIORI DE LA 2ª SESIÓN

Objetivo: *Momentos del primer encuentro y exploratorio inicial* de la OM "Sistema de Numeración aditivo"

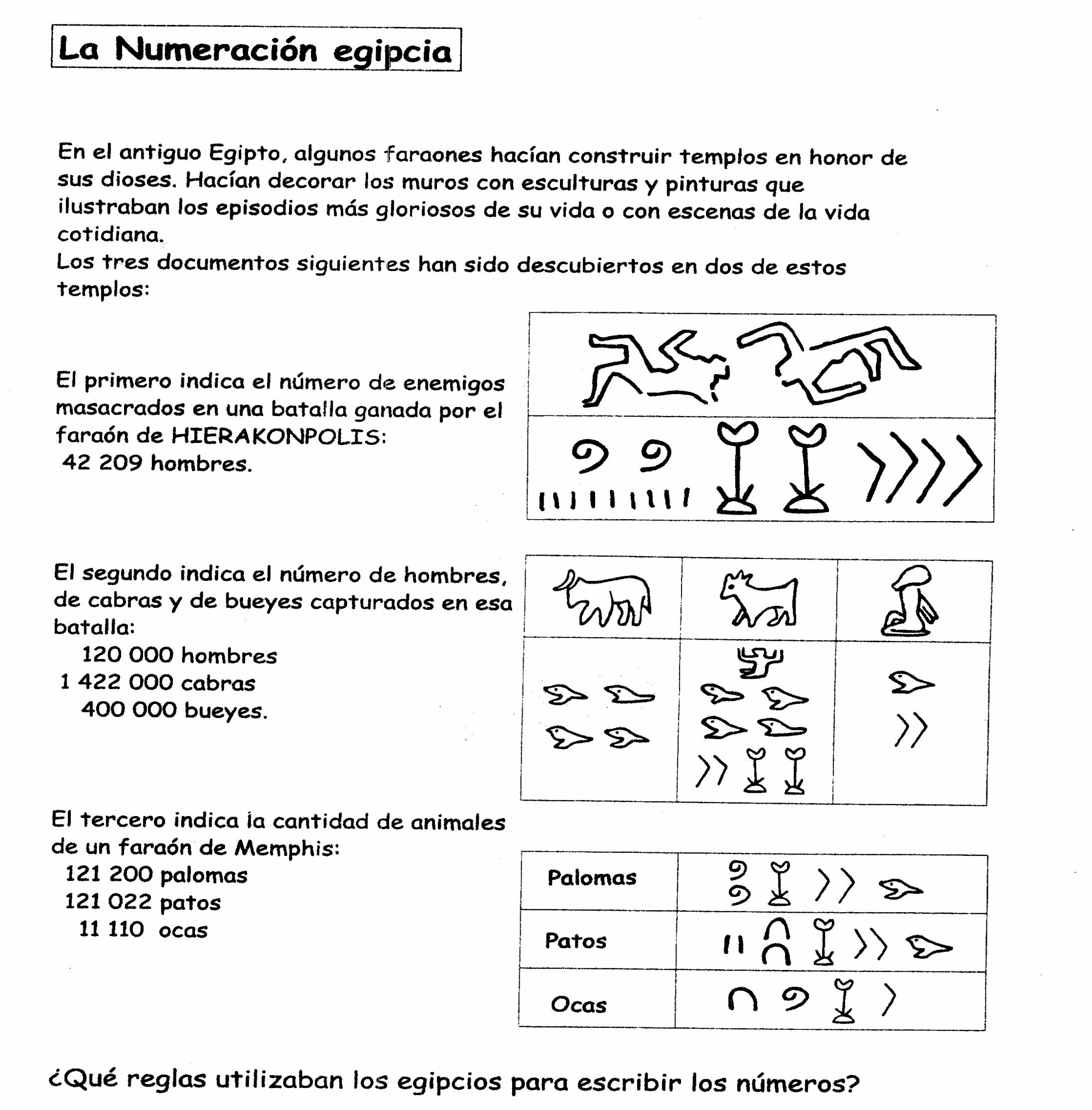
Se presenta a los estudiantes un Sistema de Numeración aditivo (el de los antiguos egipcios) y se les plantean algunas cuestiones acerca de las características de dicho sistema.

Para provocar que los estudiantes analicen las características de un Sistema de Numeración, el profesor puede utilizar una de las dos *técnicas didácticas* siguientes (Chevallard 1999):

> **OPCIÓN 1. (Encuentro en situación)**
>
> Proponer una actividad de contar que requiera la construcción de un SN ad hoc.
>
> Ejemplos:
>
> "Construir una técnica que, sin utilizar las escrituras habituales de los números, permita designar el cardinal de una colección (por ejemplo, contar las veces que un locutor dice la palabra "vale")".
>
> "Proponer una técnica que permita designar una colección de, por ejemplo, 2784 elementos (palillos, cerillas, tizas ó clips)".
>
> **OPCIÓN 2. (Encuentro cultural-mimético)**
>
> El profesor realiza un discurso donde expone las características y funcionamiento del sistema de numeración egipcio, así como las cuestiones que permite resolver.

En nuestro caso hemos optado por una técnica didáctica intermedia debido, entre otras cosas, al tiempo de que disponemos y también al tipo de alumnos a los que va dirigido el proceso.

Se presenta a los estudiantes un documento como el siguiente:


La Numeración egipcia

En el antiguo Egipto, algunos faraones hacían construir templos en honor de sus dioses. Hacían decorar los muros con esculturas y pinturas que ilustraban los episodios más gloriosos de su vida o con escenas de la vida cotidiana.
Los tres documentos siguientes han sido descubiertos en dos de estos templos:

El primero indica el número de enemigos masacrados en una batalla ganada por el faraón de HIERAKONPOLIS:
42 209 hombres.

El segundo indica el número de hombres, de cabras y de bueyes capturados en esa batalla:
120 000 hombres
1 422 000 cabras
400 000 bueyes.

El tercero indica la cantidad de animales de un faraón de Memphis:
121 200 palomas
121 022 patos
11 110 ocas

Palomas
Patos
Ocas

¿Qué reglas utilizaban los egipcios para escribir los números?

En este documento extraído de (ERMEL 1997, pág. 158) aparecen varios números escritos en el SN egipcio y, también, en el SN decimal posicional completo. El profesor, después de proporcionar a cada estudiante un documento como el anterior, plantea las siguientes cuestiones:

Tarea para gestionar el primer encuentro con un SN aditivo:

(a) ¿Qué número natural representa cada uno de los símbolos que aparecen en el sistema egipcio?

(b) ¿Existe algún símbolo en el sistema egipcio para representar al número cero? ¿Cómo se representa el número cero?

(c) ¿Qué operaciones aritméticas se corresponden con la yuxtaposición o adjunción de los símbolos en el sistema egipcio?

(d) ¿Qué papel juega la posición de los símbolos dentro del grupo de símbolos que representa a un número en el sistema egipcio?

Forma de trabajo: En pequeños grupos de 4 a 6 alumnos.

Puesta en común: Cada grupo expone sus respuestas a todo el grupo de clase. Se evalúan y se discuten dichas respuestas. Y el profesor hace una síntesis de los resultados obtenidos, justificando las primeras características encontradas del SN egipcio.

Trabajo dentro del SN egipcio: Se propone sustituir los símbolos egipcios por otros más sencillos (por ejemplo, las primeras letras del alfabeto) y se proponen las siguientes actividades como tareas a realizar individualmente: *(Momento exploratorio de* $\boldsymbol{OM_a}$*)*

Tarea exploratoria a_1: Designar mediante el SN egipcio el cardinal de cada una de las siguientes colecciones:

1ª colección

⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗

⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗

⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗

2ª Colección

♦♦♦

♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦

3ª Colección

****

****

****

****

****

Tarea exploratoria a_2: Suponiendo que los símbolos, más fáciles de utilizar, que hemos elegido para representar los números en el sistema egipcio son:

$1 \rightarrow I \quad 10^1 \rightarrow A \quad 10^2 \rightarrow B \quad 10^3 \rightarrow C \quad 10^4 \rightarrow D \quad 10^5 \rightarrow E$ y $10^6 \rightarrow F$

Construye una colección que tenga:

a) AAAIIIIII elementos,

b) AAAAAAAAAIIIIII elementos.

Tarea exploratoria a_3

Escribe en el sistema egipcio los números: 8, 51, 99, 103, 320, 895, 999, 2874, 10001, 8000100 y 25384295. (τ_a)

Tarea exploratoria a_4

Ordena las siguientes series de números (sin traducirlos a su expresión habitual) y explica la técnica que has utilizado: (τ_{ac})

E, CAAIIII, FFDCCAII, AAAAIIIIII, DCAI, DDDDDCCCCCBBBAAAAIIIII, BBBBBBBBBAAAAAAAAAIIIIIIII,

ECC, DCAAII, FBI, AAAAAAAA, AAAAAAAIIIIII, BBBBBBBAAAAAAI, DBBBBBBBBBIIIIIIII, ECBBBBBBBBAAAAAAAIIIIIIIII, DDI,

Según el tiempo disponible, las tareas exploratorias a_1 y a_2 pueden empezarse a realizar en el aula en pequeños grupos y se dejan las demás para realiza individualmente.

Puesta en común: La sesión termina con una exposición y justificación del profesor de las primeras respuestas obtenidas.

2.3. Limitaciones del Sistema de Numeración aditivo

DISEÑO A PRIORI DE LA 3ª SESIÓN

Objetivo: Realizar operaciones aritméticas simples con el SN egipcio y empezar a experimentar las ventajas y limitaciones del SN aditivo. *Momento exploratorio de* $\boldsymbol{OM_a}$.

Puesta en común y evaluación del trabajo realizado fuera del aula: Cada grupo expone sus respuestas respecto a las tareas exploratorias a_1 a a_4 de la sesión anterior ante toda la clase. Se discuten y valoran entre todos las respuestas de cada grupo. El profesor termina realizando una síntesis de los resultados obtenidos.

Forma de realización: Puesta en común de toda la clase, dirigida por el profesor.

Tarea exploratoria a_5: Realizar las siguientes operaciones dentro del SN aditivo, explicar, en cada caso, el algoritmo utilizado y comprobar posteriormente el resultado con el SN habitual: **(τ_{as}, τ_{ar}, τ_{am}, τ_{ad})**[1]

Calcular CCCBBBBBBBBBAAAAAAIIIIIIII + CCCCCCCAAAAAAAII

Calcular BBBBAAAIIIIIII – BAAAAAAAAAII

Calcular CAIIIIII – BBBBAAAIIIIIIIII

Calcular AIIII × IIIIII

Calcular AAAAIIIIIII × AAIII

Dividir AAAAIIIII entre IIIIII

Dividir BBBBBAAAIIIIIII entre AAIIII

Hallar los divisores comunes de AAIIII y AAA

Hallar los múltiplos comunes de AAIIII y AAA

Forma de realización: En pequeños grupos de 4 a 6 alumnos. *Aquí puede optarse por dejar a los alumnos que busquen sus propios algoritmos de cálculo o que el profesor exponga los algoritmos que los egipcios utilizaban para calcular (ver capítulo2 sección 2.2) y a continuación sean los alumnos los que apliquen dichos algoritmos.*

Puesta en común y evaluación de las actividades realizadas en clase: Terminada la tarea exploratoria $\mathbf{a_5}$ se realiza una puesta en común, acabando el profesor con una síntesis de los algoritmos de cálculo utilizados.

Forma de realización: Puesta en común de toda la clase, dirigida por el profesor.

Aquellas tareas que no sea posible realizar en clase por falta de tiempo se dejarán como trabajo a realizar individualmente fuera del aula y serán discutidas y evaluadas en la sesión siguiente.

[1] Siendo τ_{as} = algoritmo de sumar, τ_{ar}= algoritmo de restar, τ_{am} = algoritmo de multiplicar y τ_{ad} = algoritmo de dividir dentro de $\mathbf{OM_a}$.

2.4. Transformación hacia el Sistema de Numeración híbrido

DISEÑO A PRIORI DE LA 4ª SESIÓN

Objetivo: Percibir las limitaciones del SN egipcio, especialmente al realizar cálculos, y empezar a considerar las posibles modificaciones de la técnica de representación.

Puesta en común y evaluación de las tareas realizadas fuera del aula: Cada grupo expone el trabajo realizado a toda la clase y conjuntamente se evalúan y discuten los algoritmos utilizados. El profesor termina haciendo una síntesis. (*Momentos tecnológico-teórico, y de institucionalización en* $\boldsymbol{OM_a}$*)*

Forma de realización: Puesta en común de toda la clase, dirigida por el profesor.

A continuación el profesor debe gestionar la posible evolución de la técnica de representación $\boldsymbol{\tau_a}$ *en la dirección adecuada y potenciar los cambios hacia la técnica de representación híbrida.*

Tarea de trabajo de la técnica: El profesor propone realizar las mismas actividades exploratorias que se han realizado con el SN egipcio, pero con *el sistema de numeración romano*. Este trabajo se inicia en clase y se deja el resto como tarea para realizar fuera del aula.

Al mismo tiempo que se realizan estas actividades el profesor propone que se vayan dando respuesta a las siguientes preguntas: *(Momentos de evaluación, de institucionalización y tecnológico-teórico en* $\boldsymbol{OM_a}$*).*

a) ¿Se pueden escribir todos los números naturales mediante el SN aditivo?

b) ¿Se pueden realizar todas las operaciones aritméticas? ¿Con qué números el cálculo es casi impracticable? (alcance o dominio de validez)

c) ¿En $\boldsymbol{OM_a}$ *se necesitan tablas de sumar y multiplicar? ¿Por qué? ¿Cómo son estas tablas?*

d) ¿A partir de qué números o de qué magnitud de números las operaciones son muy difíciles de realizar sin acumular errores? (fiabilidad)

e) ¿A partir de qué números o de qué magnitud de números las operaciones son demasiado tediosas y lentas? (economía)

f) *¿Cómo cambia la representación escrita de un número cuando éste se multiplica por una potencia de la base?*

g) *¿Cómo debería modificarse la técnica* τ_a *para mejorar los algoritmos de multiplicación y división?*

2.5. Análisis de un Sistema de Numeración híbrido

DISEÑO A PRIORI DE LA 5ª SESIÓN

Objetivo: Que el estudiante descubra y utilice las reglas de funcionamiento del SN chino. *(Momentos del primer encuentro y exploratorio con* $\mathbf{OM_h}$).

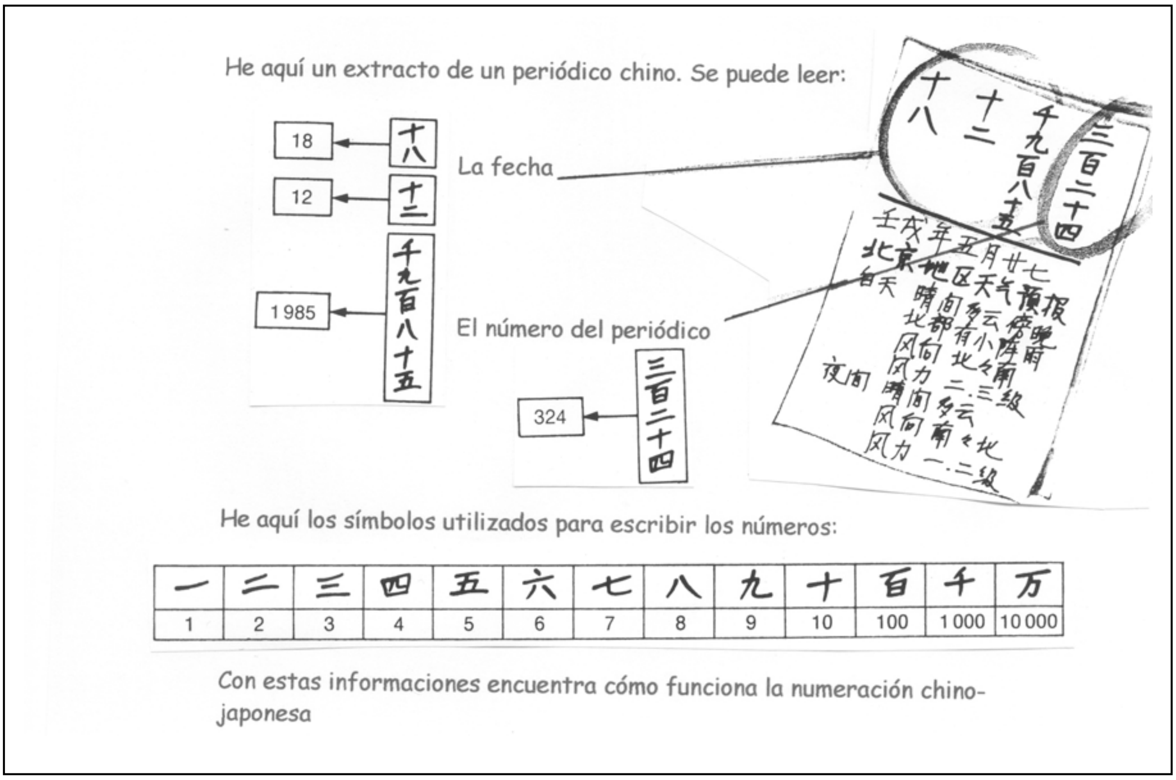
Aquí, el *momento del primer encuentro* con $\mathbf{OM_h}$ puede coincidir en el tiempo con el *momento de evaluación* de $\mathbf{OM_a}$.

Puesta en común y evaluación de las preguntas realizadas: Analizar y justificar las respuestas a las preguntas propuestas el día anterior, con una evaluación en gran grupo de la $\mathbf{OM_a}$ construida, donde se apunten las debilidades de la técnicas de representación egipcia y romana y se expliciten los cambios que debe sufrir la técnica aditiva para evolucionar hacia una técnica "híbrida" (aditivo-multiplicativa).

Forma de realización: Todo el grupo de clase dirigido por el profesor.

A lo largo de la sesión anterior es muy probable que los alumnos hayan conseguido hacer emerger una técnica análoga al Sistema de Numeración chino a partir de la técnica egipcia. Si no fuera así, se propone realizar la tarea siguiente.

Tarea para gestionar el primer encuentro con el SN chino: Se presenta a los estudiantes un documento como el siguiente:



He aquí un extracto de un periódico chino. Se puede leer:

La fecha

18 ← 十八

12 ← 十二

1 985 ← 千九百八十五

El número del periódico

324 ← 三百二十四

He aquí los símbolos utilizados para escribir los números:

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千	万
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1 000	10 000

Con estas informaciones encuentra cómo funciona la numeración chino-japonesa

En este documento extraído de Clavier, Bia y Maréchal (1987, pág. 32), aparecen varios números escritos en el sistema de numeración chino y, también, en el sistema de numeración decimal.

El profesor da a cada estudiante un documento como el anterior y les propone responder a las siguientes cuestiones:

a) *¿Qué número natural representa cada uno de los símbolos que aparecen en el sistema chino?*

b) *Cambia los símbolos del sistema chino por otros más fáciles de dibujar y que cumplan las mismas funciones.*

c) *Explica el papel que desempeña cada uno de los símbolos que aparecen en el sistema chino.*

d) *¿Qué operaciones aritméticas se corresponden con la yuxtaposición o adjunción de los símbolos en el sistema chino?*

e) *¿Qué papel juega la posición de los símbolos dentro del grupo de símbolos que representa a un número en el sistema chino?*

f) *¿Existe algún símbolo en el sistema chino para representar al número cero?*

g) *¿Qué cambios aparecen el SN chino en relación con el SN egipcio?*

Forma de realización: En pequeños grupos de 4 a 6 alumnos.

Tarea de evaluación e institucionalización: Se termina el análisis del documento con una puesta en común de las respuestas de cada grupo. Aquí ha de surgir una síntesis y una valoración de las primeras características a partir del trabajo en grupo.

Forma de realización: Todo el grupo de clase dirigido por el profesor.

En el caso de que no sea necesario utilizar el estudio del documento anterior sobre el SN chino, será necesario igualmente realizar una tarea de evaluación del primer encuentro con la técnica de representación aditivo-multiplicativa.

Tarea de evaluación del primer encuentro con la técnica híbrida: Se propone a los alumnos que respondan a las siguientes preguntas:

- *a) ¿Qué número natural representa cada uno de los símbolos que aparecen en el sistema híbrido?*
- *b) Explica la función que desempeña cada uno de los símbolos que aparecen en el sistema híbrido.*
- *c) ¿Qué operaciones aritméticas se corresponden con la yuxtaposición o adjunción de los símbolos en el sistema híbrido?*
- *d) ¿Qué papel juega la posición de los símbolos dentro del grupo de símbolos que representa a un número en el sistema híbrido?*
- *e) ¿Existe algún símbolo en el sistema híbrido para representar al número cero?*
- *f) ¿Qué cambios aparecen el SN híbrido en relación con el SN egipcio?*

Forma de realización: En pequeños grupos de 4 a 6 alumnos.

Puesta en común e institucionalización: Cada grupo expone sus respuestas a toda la clase. Se evalúan y discuten las distintas respuestas y el profesor termina haciendo una síntesis.

Forma de realización: Todo el grupo de clase dirigido por el profesor.

A continuación el profesor propondrá comenzar a realizar las siguientes tareas exploratorias de la técnica de representación híbrida, dejando como tarea para realizar fuera de la clase el resto de actividades. Siempre dependiendo del tiempo y de las *necesidades de los alumnos podrá elegirse realizar al menos <u>una actividad de cada tipo</u>, es decir una de ordenar, una de sumar, una de restar, etc.*

Tarea exploratoria h_1: Designar mediante el SN híbrido el cardinal de cada una de las siguientes colecciones:

1ª Colección

⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗ ⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗

⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗ ⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗

⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗ ⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗ ⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗

2ª Colección

♦♦♦♦♦♦ ♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦ ♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦

♦♦

♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦ ♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦ ♦♦♦♦♦♦♦♦♦

♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦ ♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦ ♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦

3ª Colección

****

****

****

****

Tarea exploratoria h_2: Suponiendo que los símbolos, más fáciles de utilizar, que hemos elegido para representar los números en el sistema chino son:

$$I \rightarrow 10^0; \quad A \rightarrow 10^1; \quad B \rightarrow 10^2; \quad C \rightarrow 10^3; \quad D \rightarrow 10^4; \quad E \rightarrow 10^5; \quad F \rightarrow 10^6; \ldots$$

y como nuevos símbolos que harán la función de *multiplicadores* de dichas potencias 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Construye una colección con 3B 7 elementos, 9A 6 elementos, etc.

Tarea exploratoria h_3: Escribir en el sistema chino los números: 8, 51, 99, 103, 320, 895, 999, 2874, 10001, 8000100 y 25384295. (τ_h)

Tarea exploratoria h_4:
Ordena las siguientes series de números (sin traducirlos a su expresión habitual) y explica el algoritmo que has utilizado: (τ_{hc})[2]
E, C 2A 4, 2F D 2C A 2, 4A 6, D C A I, 5D 6C 3B 4A 5, 9B 9A 8.
E 2C, D C 2A 2, F B I, 8A, 7A 6, 7B 6A I, D 9B 8, E C 8B 7A 9, 2D I.

Tarea exploratoria h_5: Realizar las siguientes operaciones dentro del SN híbrido, explicar la técnica utilizada en cada caso y comprobar posteriormente el resultado con el SN habitual: (τ_{hs}, τ_{hr}, τ_{hm}, τ_{hd})
Calcular 3C 9B 6A 8 + 7C 7A 2
Calcular 2D 9B 3A I − 8C 9B 5A 3
Calcular 4A 7 × 9A 2
Calcular 4C 2B 5A 8 × 3B 9
Dividir 2C 3B 4 entre 7A 9
Dividir D 9C B 2 entre 3B 8A 7
Hallar los divisores comunes de 2A 4 y 3A
Hallar los divisores comunes de 3B 7A 2 y 2B 2A 2
Hallar los primeros múltiplos comunes de 2A 4 y 3A
Hallar los primeros múltiplos comunes de 3B 7A 2 y 2B 2A 2

*En la **tarea exploratoria h_5** puede optarse por dejar a los alumnos que busquen sus propios algoritmos de cálculo o que el profesor exponga los algoritmos propios del sistema "híbrido" (ver capítulo 2 sección 3), de manera que los alumnos solo tengan que aplicarlos. Además, es muy probable que no sea necesario realizar todas las actividades propuestas, sin embargo, si será aconsejable realizar al menos <u>una actividad de cada tipo</u>.*

[2] Siendo τ_{hc} = algoritmo de comparar, τ_{hs} = algoritmo de sumar, τ_{hr} = algoritmo de restar, τ_{hm} = algoritmo de multiplicar y τ_{hd} = algoritmo de dividir dentro de **OM_h**.

2.6. Limitaciones del Sistema de Numeración híbrido

DISEÑO A PRIORI DE LA 6ª SESIÓN

Primer objetivo: Que el estudiante perciba las limitaciones del SN híbrido, especialmente, en la realización de los cálculos. (*Momento del trabajo de la técnica en* $\boldsymbol{OM_h}$)

Tarea de evaluación e institucionalización: La sesión comienza con una puesta en común donde cada grupo expone las respuestas a las tareas llevadas a cabo en la sesión anterior y a las propuestas para realizar fuera del aula. Todos valoran y discuten los algoritmos de cálculo utilizados. El profesor termina haciendo una síntesis. (*Momentos tecnológico-teórico, y de institucionalización en* $\boldsymbol{OM_h}$).

Forma de realización: Puesta en común de toda la clase, dirigida por el profesor.

Segundo objetivo: Que el estudiante empiece a considerar las posibles modificaciones de la técnica $\boldsymbol{\tau_h}$, hacia la técnica de representación posicional.

Para ello el profesor debe gestionar la posible evolución de la técnica $\boldsymbol{\tau_h}$ en la dirección adecuada y potenciar los cambios hacia la técnica de representación posicional.

Tarea de trabajo de la técnica: El profesor propone realizar individualmente o en pequeños grupos al menos una de cada tipo de las siguientes actividades:

Realizar F 8A 9 – 9C 9B 8A
Ordenar 5E 7C 9B 7 y 6E 7C 7B 9.
Ordenar 5F 9D 7C 8A 9 y 5F 9D 7C 9A 8.
Ordenar C B I y 9B 5A 9.
Calcular F A I – 3E C B.
Calcular E – 5B 7.
Calcular C 3A I – 6B 3A 2
Calcular 3C 7B × D 3A.
Dividir 2E 3D 3C 5B I entre 2C 5A 7

Forma de realización: En pequeños grupos de 4 a 6 alumnos o individualmente.

Durante la realización de estas actividades el profesor propone la siguientes preguntas: *(Momentos de evaluación, de institucionalización y tecnológico-teórico en* ***OM_h*****)**.

a) *¿Se pueden escribir todos los números naturales mediante el sistema híbrido?*

b) *¿Se pueden realizar todas las operaciones? ¿Con qué números el cálculo es casi impracticable? (alcance o dominio de validez)*

c) *¿En* ***OM_h*** *se necesitan tablas de sumar y multiplicar? ¿Por qué? ¿Cómo son estas tablas?*

d) *¿A partir de qué números o de qué magnitud de números las operaciones son demasiado tediosas y lentas? (fiabilidad)*

e) *¿A partir de qué números o de qué magnitud de números las operaciones son demasiado tediosas? (economía)*

f) *¿Cómo cambia la representación escrita de un número cuando éste se multiplica por una potencia de la base?*

g) *Cuando nosotros utilizamos la escritura "novecientos cuarenta y cinco mil doscientos ochenta y tres" para designar el número 945283 ¿qué tipo de sistema de numeración estamos empleando? Analiza las características de dicho sistema.*

h) *¿Cómo debería modificarse la técnica de representación* τ_h *para que los algoritmos de la multiplicación y la división fuesen más fiables y económicos?*

Tarea de evaluación e institucionalización: Se termina la sesión iniciando el análisis de las respuestas a las preguntas anteriores, con una evaluación en gran grupo de la **OM_h** construida, donde se apunten las debilidades de la técnica de representación híbrida y se explicite la dirección de evolución de la técnica τ_h hacia la técnica de representación posicional.

Forma de realización: Todo el grupo de clase dirigido por el profesor.

De este modo, debe empezar a aparecer la evolución de la técnica híbrida que consiste en quedarnos sólo con los símbolos que representan a los coeficientes o multiplicadores de las potencias de la base y, lo que es más interesante, debe aparecer la nueva función de la posición que ocupan dichos coeficientes.

Así se va a presentar en esta sesión *el Momento del primer encuentro con el sistema posicional.*

2.7. Análisis de un Sistema de Numeración posicional completo

DISEÑO A PRIORI DE LA 7ª SESIÓN

Primer objetivo: Que el estudiante perciba las limitaciones del SN híbrido y construya la nueva técnica de representación que permite superarlas.

Puesta en común e institucionalización: Se propone continuar con lo realizado en la sesión anterior, evaluando en gran grupo la $\mathbf{OM_h}$ construida, donde se apunten las limitaciones de la técnica de representación híbrida y se ponga de manifiesto la dirección de evolución hacia la técnica de representación posicional.

Forma de realización: Toda la clase dirigida por el profesor.

Segundo objetivo: Que el estudiante empiece a experimentar las ventajas del SN posicional, tanto en lo referente a la representación de los números como con respecto a la simplificación de los cálculos (en economía y fiabilidad), entendiendo el cálculo como una transformación de escrituras. (*Momento exploratorio con* $\boldsymbol{OM_p}$)

Durante esta sesión y la siguiente pretendemos que el estudiante llegue a la conclusión de que ***la gran aportación del SN posicional completo es la facilidad, economía y eficacia para la realización del cálculo****. Es por ello que además de plantear la realización de cálculos proponemos el análisis de distintos algoritmos de cálculo en términos de economía y fiabilidad.*

A continuación se propone a los alumnos realizar las siguientes tareas exploratorias dentro del SN posicional completo:

Tarea exploratoria $\mathbf{p_1}$:

Ordenar los números siguientes:

1230000004500321009876, 1230000004500321009879, 1239987899672348213, y 1239987899672345678.

Explicar el algoritmo utilizado.

Forma de realización: En pequeños grupos de 4 a 6 alumnos.

Tarea exploratoria p_2:

Calcular mediante tres técnicas algorítmicas distintas:

a) 27 + 38 + 16 + 9 + 24 + 12 + 33,

b) 35073 + 38 + 2300045007 + 895000 + 5,

Describir detalladamente y justificar cada uno de los algoritmos utilizados.

Forma de realización: En pequeños grupos de 4 a 6 alumnos.

Aquí además de utilizarse los algoritmos de adición que se presentan en el capítulo 2 sección 4.3, también podría emplearse la que llamamos técnica del "árbol de cálculo" que consiste en ir agrupando los distintos sumandos de dos en dos de modo que su suma sea múltiplo de 10 ó de 5.

Las dos primeras técnicas son de cálculo "automático" (entendiendo por cálculo automático un cálculo estándar que sirve para cualesquiera números y se ejecuta siempre del mismo modo) y la tercera de cálculo "deliberado" o "reflexivo", ya que cada cálculo, se realiza de forma diferente, dependiendo del tipo de números que haya que sumar.

Tarea exploratoria p_3:

Calcular mediante cuatro técnicas algorítmicas distintas:

- 4897 – 2653,
- 87675 – 34564,
- 2475 – 1879,
- 3000121 – 1200123.

Describir detalladamente y justificar los algoritmos utilizados.

Forma de realización: En pequeños grupos de 4 a 6 alumnos.

Aquí se pueden utilizar las técnicas que se presentan en el capítulo 2 sección 4.4.

Tarea de evaluación e institucionalización: La sesión termina con una puesta en común donde cada grupo expone las respuestas a las tareas llevadas a cabo en la sesión. El profesor junto con los alumnos acuerda un criterio para evaluar las técnicas utilizadas según su economía, fiabilidad y alcance. El profesor termina haciendo una síntesis. (*Momentos tecnológico-teórico, de evaluación y de institucionalización*)

Forma de realización: Todo el grupo de clase dirigido por el profesor.

2.8. Análisis de algoritmos de cálculo en el Sistema de Numeración posicional

DISEÑO A PRIORI DE LA 8ª SESIÓN

Objetivo: Que el alumno encuentre las ventajas del SN posicional con respecto a los SN aditivo y SN híbrido tanto en lo referente a la representación de los números como a su utilización para calcular**.**

Tarea exploratoria p_4: Calcular mediante tres técnicas algorítmicas distintas:

- 2345×1789,
- $2900150007 \times 93500680$.

Describir detalladamente y justificar los algoritmos utilizados.

Forma de realización: En pequeños grupos de 4 a 6 alumnos.

En este caso se pueden emplear los algoritmos presentados en el capítulo 2 sección 4.5.

Tarea exploratoria p_4: Utilizar tres técnicas algorítmicas distintas para hallar el cociente y el resto en los siguientes casos:

- Dividir 81207 entre 75
- Dividir 7300 897 entre 365

Describir detalladamente y justificar los algoritmos utilizados.

Forma de realización: En pequeños grupos de 4 a 6 alumnos.

Los tres algoritmos posibles a utilizar podrían ser los presentados en el capítulo 2 sección 4.6.

Tarea exploratoria p_5:

a) Hacer una recopilación de los distintos criterios de divisibilidad e intentar traducir dichos criterios a las condiciones del SN aditivo y del SN híbrido.

b) Calcular los divisores comunes y los múltiplos comunes de 24 y 30; y de 372 y 222.

c) Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de 24 y 30; y de 372 y 222.

Forma de realización: En pequeños grupos de 4 a 6 alumnos.

Posibles algoritmos a utilizar:

1.- El algoritmo de Euclides.

2.- La técnica de descomposición en factores primos.

2.9. Evaluación de algoritmos de cálculo en el Sistema de Numeración posicional

DISEÑO A PRIORI DE LA 9ª SESIÓN

Objetivo: Analizar algunos algoritmos de cálculo utilizados en el SN posicional completo desde el punto de vista de su *alcance, su fiabilidad y su economía*.

Puesta en común e institucionalización: La sesión termina con una puesta en común donde cada grupo expone las respuestas a las tareas llevadas a cabo en la sesión. El profesor junto con los alumnos acuerda un criterio para evaluar las técnicas utilizadas según su *economía y fiabilidad*. El profesor termina haciendo una síntesis. (*Momentos tecnológico-teórico, de evaluación y de institucionalización*)

Forma de realización: Toda la clase dirigida por el profesor.

Tarea de trabajo de la técnica: El profesor propone realizar individualmente o en pequeños grupos las siguientes actividades, indicando para cada uno de los algoritmos utilizados su valoración respecto a la *fiabilidad, la economía y el alcance* de los cálculos realizados (*Momento del trabajo de la técnica y de la evaluación*):

a) Calcular 3001005 – 2890719

b) Calcular 630098 × 700400

c) Dividir 74800358 entre 379

d) Hallar el m.c.d. y el m.c.m. de (735 y 2970)

El profesor planteará las siguientes preguntas:

a) ¿Se pueden escribir todos los números naturales mediante el sistema posicional?

b) *¿Se pueden realizar siempre las distintas operaciones? ¿Con qué números el cálculo es casi impracticable? (alcance o dominio de validez)*

c) *¿En* ***OM_p*** *se necesitan tablas de sumar y multiplicar? ¿Por qué? ¿Cómo son estas tablas?*

d) *¿Cuál es, para cada operación, el algoritmo más fiable?*

e) *¿Cuál es, para cada operación, el algoritmo más económico?*

f) *¿Cómo cambia la representación escrita de un número cuando éste se multiplica por una potencia de la base?*

Forma de realización: Individualmente o en grupos de 4 a 6 alumnos.

Puesta en común e institucionalización: Se terminará la sesión analizando y justificando las respuestas a las preguntas anteriores. (*Momento tecnológico-teórico y de evaluación*)

Al final el profesor hará una síntesis de todo el trabajo realizado. (*Momento de la institucionalización*).

Forma de realización: Todo el grupo de clase dirigido por el profesor.

2.10. Análisis y evaluación del proceso de estudio realizado

DISEÑO A PRIORI DE LA 10ª SESIÓN

(*Momento de evaluación e institucionalización*)

Objetivo: En esta sesión se propone que tanto los alumnos como el profesor realicen una síntesis de la dinámica de todo el proceso llevado a cabo con las distintas OM.

Puesta en común e institucionalización: Se analizarán las cuestiones a las que se ha dado respuesta, las tareas resueltas o sin resolver, las técnicas empleadas y los elementos tecnológicos que hayan ido apareciendo. Interesa sobre todo reflexionar sobre cómo han ido evolucionando y completándose las OM construidas hasta llegar a la OM en torno al SN posicional completo.

2.11. Evaluación individual del proceso realizado

DISEÑO A PRIORI DE LA 11ª SESIÓN

Objetivo: Evaluar los conocimientos de que disponen los alumnos después del proceso de estudio realizado.

Examen individual: Cada alumno de forma individual deberá responder por escrito a algunas cuestiones importantes y representativas del proceso de estudio realizado.

Forma de realización: trabajo individual

Propuesta de algunos de los tipos cuestiones que creemos pueden formar parte de dicha evaluación individual:

1.- Realización de algún cálculo, sea aditivo, sustractivo, multiplicativo o de división en uno o varios Sistemas de Numeración, indicando y comparando las limitaciones y ventajas de la realización de dichas técnicas algorítmicas dentro de cada sistema.

2.- Explicar las distintas respuestas posibles a la cuestión inicial, y ordenarlas en cuanto a su eficacia.

.3.- Caracterización y comparación de algunos de los Sistemas de Numeración estudiados, analizando sus ventajas y limitaciones en torno a las siguientes condiciones:

- Ambigüedad en la designación de los números
- Cantidad (y clases) de símbolos necesarios para escribir todos los números
- Longitud de la cadena que designa un número concreto
- Cantidad de números representables con cadenas “manejables” (no muy largas)
- Complejidad de las técnicas de comparación y de cálculo.

4.- Análisis desde el punto de vista de su *economía* y su *fiabilidad*, de algunas de las técnicas algorítmicas utilizadas en el SN posicional completo.

5.- Construcción de un sistema de numeración con un determinado número de símbolos y una base prefijada, con características similares a alguno de los estudiados en el tema y escribir en dicho sistema diferentes números. Explicación de las limitaciones y ventajas de dicho sistema.

De entre estas cuestiones se escogerán posteriormente las que formarán parte del dispositivo de evaluación en la experimentación del proceso de estudio.

3. EXPERIMENTACIÓN DE UN PROCESO DE ESTUDIO PARA LA FORMACIÓN DE MAESTROS

Hemos de señalar que el esquema general de este proceso de estudio ha sido experimentado por diferentes profesores dentro de la Formación de Maestros:

- La profesora Luisa Ruiz Higueras del departamento de Didáctica de las Ciencias en la Facultad de Educación de la Universidad de Jaén en la asignatura "Desarrollo del Pensamiento Matemático y su Didáctica" con un grupo de 147 alumnos, durante el curso 2002 – 03.
- La profesora Alicia Ruiz Olarría del departamento de Didácticas Específicas de la Facultad de Educación de la Universidad Autónoma de Madrid en la asignatura "Matemáticas y su didáctica" de la especialidad de Educación Física con un grupo de 70 alumnos durante los cursos 2002 – 03 y 2003 – 04.
- La profesora Pilar Bolea Catalán del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza de la Escuela Universitaria de Formación de Maestros de Huesca en la especialidad de Educación Física en la asignatura "Matemáticas y su Didáctica I" con un grupo de 40 alumnos durante el curso 2003 – 04.
- La profesora Sagrario Simarro Fernández del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid con diferentes grupos en las Asignaturas "Fundamentos de Matemáticas" de primer curso de las distintas especialidades, "Matemáticas y su Didáctica I" de Educación Primaria y

"Reeducación del Pensamiento Matemático" de Educación Especial desde el curso 2002 – 03.

Pero en esta sección describiremos solamente el proceso de estudio que se desarrolló a lo largo de 11 sesiones de unos 80 minutos de duración cada una. Dicha experimentación se llevó a cabo durante el primer cuatrimestre del curso 2003-04, con un grupo de 80 de alumnos del segundo curso de la diplomatura de Maestro de Educación Primaria, dentro de la asignatura "Matemáticas y su Didáctica I". El profesor del grupo fue el propio investigador y autor de esta memoria. Presentamos a continuación una descripción del desarrollo del proceso, indicando los momentos didácticos y las distintas praxeologías matemáticas y didácticas, tal como se fueron sucediendo. Además en el Anexo 1 se muestran los materiales que fueron entregados a los alumnos en cada una de las sesiones.

3.1. El problema de la existencia de múltiples Sistemas de Numeración.

1ª SESIÓN (80'): *Primer encuentro* con la cuestión ***q***

Se empieza planteando a los alumnos la cuestión matemática a estudiar:

q*: *¿Cómo expresar los números naturales mediante una representación escrita que sea un instrumento útil para el desarrollo de la aritmética elemental?

El profesor les indica que, aunque ellos ya conocen la respuesta a la pregunta planteada, se trata de realizar un *estudio de dicha respuesta* para hallar *las razones* por las que el SN posicional completo es una buena respuesta a dicha cuestión. El profesor también explica cuál será la duración aproximada del tema, el número de sesiones, el tipo de trabajo por realizar y cómo será la evaluación final del proceso. (Duración aproximada: 20').

A continuación se plantea a los alumnos la siguiente tarea[3](ver Anexo1):

> **T_i:** *Tenemos un emisor y un receptor. El emisor dispone de una colección de unos 43 platos dibujados que no puede ver el receptor. Debe mandar un mensaje escrito al receptor para que éste le traiga exactamente las cucharas necesarias para poner una en cada plato.*

Se distribuyen los alumnos en grupos de 4 a 6 alumnos y se les pide que *propongan al menos cuatro maneras distintas de emitir dicho mensaje*. (Tiempo aproximado: 15')

[3] Tareas análogas a ésta son consideradas por Guy Brousseau dentro de la Teoría de Situaciones Didácticas como parte de la situación fundamental del número y la numeración. Ver (Brousseau, 1998; Gairin-Calvo, 1988).

Existen múltiples soluciones a este problema. El objetivo de esta tarea es el de estudiar las diferentes soluciones, analizar sus características y sus limitaciones. La sesión termina con una puesta en común de unos 40’ donde cada grupo expone sus respuestas a todo el grupo de clase. Se analizan, evalúan y clasifican los distintos tipos de mensajes que han surgido en la clase, justificando sus ventajas e inconvenientes.

En síntesis, aparecen las siguientes escrituras del mensaje:

- τ_i**:** Escrituras que se sirven de la correspondencia término a término, es decir, utilizan un solo símbolo (en este caso, el “palote”) y lo repiten tantas veces como objetos tiene la colección: IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII III
- τ_a**:** Escrituras aditivas: 10 + 10 + 10 + 10 + 3, 10 + 8 + 7 + 8 + 10,...
- τ_h**:** Escrituras aditivo-multiplicativas: 7×6 + 1, 8×5 + 3, cuarenta y tres, 4×10 +3,..
- τ_p**:** Escrituras posicionales: 43, $53_{(8}$, $133_{(5}$, ..
- Y escrituras donde es necesario realizar un cálculo como: 86/2, 100 – 57, 50 –7,…

De este modo, podemos decir que en el **momento del primer encuentro con *q*** el profesor ha conseguido *hacer surgir, del repertorio matemático de los alumnos, el abanico de técnicas que permiten representar los números*.

La sesión termina con una tarea propuesta para realizar individualmente (ver Anexo1):

> **T_i’**: *Escribir el cardinal de colecciones dispuestas en diferentes formas (forma triangular, rectangular, etc.)*

Con esta tarea el profesor pretende poner en evidencia que la disposición de la colección influye en la técnica de designación de los números.

3.2. Análisis de un Sistema de Numeración aditivo

2ª SESIÓN (80‘): *Primer encuentro y exploración inicial* de **OM_a.**

La clase empieza con una puesta en común y evaluación del trabajo propuesto en la sesión anterior (20’). En síntesis, los estudiantes aportaron, como respuestas a la tarea **T_i’**, tanto escrituras aditivas como aditivo-multiplicativas.

A continuación, y para provocar el *momento del primer encuentro* con OM_a, decidimos una opción intermedia entre lo que Chevallard (1999) considera como un "encuentro en situación" y lo que designa como el "encuentro cultural mimético".

Optamos por partir de una tarea, sacada de un manual de texto francés (ver diseño a priori en sección 2.2 y Anexo 1), debido entre otras cosas al tiempo del que disponemos y también a los alumnos a los que va dirigido el proceso (estudiantes de magisterio). La opción elegida consiste en proponer a los alumnos la siguiente tarea para contestar en grupos de 4 a 6 miembros en unos 20 minutos

> $\mathbf{T_{a1}}$: *A partir de un documento en el que aparecen las escrituras de diferentes números en el sistema de numeración egipcio con su traducción al sistema de numeración posicional decimal, contestar a las siguientes preguntas:*
>
> *(a) ¿Qué número natural representa cada uno de los símbolos que aparecen en el sistema egipcio?*
>
> *(b) ¿Existe algún símbolo en el sistema egipcio para representar al número cero? ¿Cómo se representa el número cero?*
>
> *(c) ¿Qué operaciones aritméticas se corresponden con la yuxtaposición o adjunción de los símbolos en el sistema egipcio?*
>
> *(d) ¿Qué papel juega la posición de los símbolos dentro del grupo de símbolos que representa a un número en el sistema egipcio?*

Mediante esta técnica didáctica, el profesor tiene como objetivo conseguir que los alumnos descubran las características de la técnica de representación de los números que utilizaban los egipcios.

La actividad termina con una puesta en común. Para finalizar, el profesor, basándose en las respuestas de los alumnos, hace una síntesis justificando las primeras características del SN egipcio (Tiempo aproximado 20'). Una vez descubierta la técnica matemática $\boldsymbol{\tau_a}$ que utilizaban los egipcios para designar los números, el proceso didáctico continúa proponiendo a los alumnos una exploración sistemática de $\boldsymbol{\tau_a}$ mediante la tarea siguiente (ver diseño a priori en las secciones 2.3 y 2.4 y Anexo 1):

> $\mathbf{T_{a2}}$: *Practicar los algoritmos*[4] *asociados a la técnica* $\boldsymbol{\tau_a}$: $\boldsymbol{\tau_{ac}}$, $\boldsymbol{\tau_{as}}$, $\boldsymbol{\tau_{ar}}$, $\boldsymbol{\tau_{am}}$ y $\boldsymbol{\tau_{ad}}$.

[4] Siendo τ_{ac} = algoritmo de comparar dos números, τ_{as} = algoritmo de sumar, τ_{ar} = algoritmo de restar, τ_{am} = algoritmo de multiplicar y τ_{ad} = algoritmo de dividir dentro de $\mathbf{OM_a}$.

El profesor pretende que los alumnos exploren el uso de dicha técnica y empiecen a experimentar las ventajas y limitaciones de la misma y de los algoritmos de comparación y de cálculo asociados.

Las tareas que no pueden llevarse a cabo en la clase, debido a que requieren más tiempo, se dejan como tarea para realizar individualmente y también se tratan en sesiones posteriores.

Para la realización de este trabajo exploratorio se propone a los alumnos sustituir los símbolos egipcios por otros más sencillos (por ejemplo, las primeras letras mayúsculas del alfabeto) con el fin de que las tareas sean menos farragosas.

3.3. Primeras limitaciones del Sistema de Numeración aditivo

3ª SESIÓN (80'): *Momento exploratorio y del trabajo de la técnica* en $\mathbf{OM_a}$

Durante esta sesión, los alumnos han terminado de realizar las tareas matemáticas propuestas en la sesión anterior y se pretende que empiecen a experimentar las ventajas y limitaciones de $\mathbf{OM_a}$. Por ello, se propone la siguiente tarea para realizar en gran grupo durante toda la sesión:

$\mathbf{T_{a3}}$: *Evaluar los resultados obtenidos en el trabajo con* τ_{ac}, τ_{as}, τ_{ar}, τ_{am} y τ_{ad}.

El profesor quiere conseguir que los alumnos descubran las ventajas y limitaciones de la técnica aditiva de representación de los números. (Tiempo aproximado 80').

Las incidencias a destacar son las siguientes:

- En la tarea de escribir en sistema egipcio 25384295 se presentan varias alternativas:

✓ Algunos alumnos dicen que no es posible realizar dicha escritura en el SN egipcio.

✓ Otros escriben 25 veces el símbolo F y luego el resto de símbolos.

✓ Otros se inventan un nuevo símbolo para representar 10^7.

✓ Otros hacen grupos imponiendo la condición de que cada grupo no puede tener más de 9 veces el mismo símbolo, de modo que sumando los distintos grupos se obtiene el número dado.

- La adición no presenta ninguna dificultad.
- En la sustracción ha sido necesario la realización en clase de dos ejemplos.

- En la multiplicación, la dificultad se ha presentado cuando los números eran "grandes", ya que la técnica utilizada inicialmente por los alumnos consiste en repetir el multiplicando tantas veces como indica el multiplicador. Con el fin de hacer más económica la técnica, un alumno sugiere utilizar el recurso, cuando sea posible, de multiplicar por 10, que consiste en cambiar cada símbolo por el inmediatamente superior. A continuación el profesor enseña la técnica de multiplicación que utilizaban los egipcios que consiste en realizar duplicaciones sucesivas.

3.4. Análisis sistemático de las limitaciones del Sistema aditivo

4ª SESIÓN (80'). *Momentos del trabajo de la técnica, tecnológico-teórico y de evaluación* en $\mathbf{OM_a}$.

Para dividir AAAAIIIII entre IIIIII (es decir, de 45 entre 6), una alumna ha utilizado la técnica de pasar todo a "palotes" (representación aditiva "rudimentaria") y luego hacer grupos de 6. Al intentar buscar una técnica de división más eficaz, ha surgido la pregunta: "¿Qué es dividir?" Algunos alumnos creen que el 7 obtenido en el ejemplo propuesto es el resto. A continuación, el profesor ha explicado en qué consiste la división euclídea y ha pasado a enseñarles el método que utilizaban los egipcios para dividir basado, a su vez en la inversión de la técnica de las duplicaciones sucesivas que utilizaban para multiplicar.

Para profundizar y sistematizar el análisis de las limitaciones del sistema aditivo se les propone la siguiente tarea (ver Anexo 1):

$\mathbf{T_{a4}}$: *Practicar los algoritmos* τ_{as}, τ_{ar}, τ_{am} y τ_{ad}, *y ampliar esta práctica con los posibles algoritmos de cálculo asociadas a* τ'_a *y* τ''_a (*SN romano). A continuación, responder las siguientes preguntas:*

a) *¿Se pueden escribir todos los números naturales mediante el SN aditivo?*

b) *¿Se pueden realizar siempre las distintas operaciones aritméticas? ¿A partir de qué tamaño de los números el cálculo es casi impracticable? (alcance o dominio de validez)*

c) *¿En* $\mathbf{OM_a}$ *se necesitan tablas de sumar y multiplicar? ¿Por qué? ¿Cómo son estas tablas?*

d) *¿A partir de qué tamaño de los números las operaciones son muy difíciles de realizar sin acumular errores? (fiabilidad)* *e) ¿A partir de qué tamaño de los números las operaciones son demasiado tediosas y lentas? (economía)*

f) ¿Cómo cambia la representación escrita de un número cuando éste se multiplica por una potencia de la base?

g) ¿Cómo debería modificarse la técnica τ_a *para mejorar la economía y fiabilidad de los algoritmos de multiplicación y división?*

El profesor pretende realizar un análisis más profundo de las limitaciones de la técnica aditiva de designación de los números con el objetivo de superarlas y construir una técnica más eficaz.

El *trabajo sistemático de la técnica* no es posible terminarlo en la sesión de clase y el resto se deja como tarea para realizar individualmente fuera del aula.

3.5. Transformación hacia el Sistema de Numeración híbrido

5ª SESIÓN (80‘). Momento del primer encuentro con $\mathbf{OM_h}$.

Para terminar de abordar el trabajo de la técnica en $\mathbf{OM_a}$, se plantea la siguiente tarea:

$\mathbf{T_{a4'}}$: *Poner en común y evaluar en gran grupo los resultados obtenidos en la tarea* $\mathbf{T_{a4}}$*, con el fin de buscar una dirección de evolución de dicha técnica que permita ir superando sus limitaciones.*

> En la puesta en común (60’), la comunidad de estudio ha llegado al acuerdo siguiente: “Cuando la escritura de los números necesita “muchos” símbolos, el cálculo en $\mathbf{OM_a}$ se hace tedioso, pesado y es muy fácil equivocarse”.
>
> Ante la pregunta: *¿Cómo debería cambiarse la técnica* τ_a *para mejorar los algoritmos de multiplicación y división?*
>
> Una alumna ha sugerido escribir BBBBBBBBB AAAAAAA IIIIIII como 9B 7A 8I

Se ha vivido así un *primer encuentro* con $\mathbf{OM_h}$ y el proceso de estudio puede continuar. Este *primer encuentro* se refuerza con la tarea:

$\mathbf{T_{h1}}$: *Utilizando como “medio” un documento* (ver diseño a priori en la sección 2.5 y Anexo 1) *en el que aparecen las escrituras de diferentes números en el sistema chino y su traducción al sistema de numeración posicional completo de base 10, responder a las siguientes cuestiones*:

a) ¿Qué número natural representa cada uno de los símbolos que aparecen en el sistema híbrido?

b) Explica la función que desempeña cada uno de los símbolos que aparecen en el sistema híbrido.

c) ¿Qué operaciones aritméticas se corresponden con la yuxtaposición o adjunción de los símbolos en el sistema híbrido?

d) ¿Qué papel juega la posición de los símbolos dentro del grupo de símbolos que representa a un número en el sistema híbrido?

e) ¿Existe algún símbolo en el sistema híbrido para representar al número cero?

f) ¿Qué cambios aparecen el SN híbrido en relación con el SN egipcio?

(Duración 20')

El objetivo del trabajo es conseguir que los alumnos descubran las características de la técnica de representación híbrida.

3.6. Análisis de un Sistema de Numeración híbrido

6ª SESIÓN (80'). *Momento exploratorio* en $\mathbf{OM_h}$.

Para poder iniciar una exploración de las técnicas en $\mathbf{OM_h}$ se realiza primero $\mathbf{T_{h1'}}$ y luego $\mathbf{T_{h2}}$ y $\mathbf{T_{h2'}}$.

$\mathbf{T_{h1'}}$: *Poner en común y evaluar en gran grupo los resultados obtenidos en la tarea* $\mathbf{T_{h1}}$. (20')

$\mathbf{T_{h2}}$: *Practicar los algoritmos*[5] τ_{hc}, τ_{hs}, τ_{hr}, τ_{hm} y τ_{hd} . (40')(Ver el diseño a priori en las secciones 2.5 y 2.6 y Anexo 1)

$\mathbf{T_{h2'}}$: *Analizar en gran grupo los resultados obtenidos en la tarea* $\mathbf{T_{h2}}$. (20')

En la corrección de las tareas exploratorias realizadas podemos destacar:

- Para la sustracción los alumnos piden la realización de varios ejemplos.
- Para la multiplicación utilizan el método egipcio. El profesor les propone otro método, análogo a la multiplicación de polinomios, pero al intentar llevarlo a cabo ha surgido la necesidad de fabricar las tablas de multiplicar y de sumar.

[5] Siendo τ_{hc} = algoritmo de comparar dos números, τ_{hs} = algoritmo de sumar, τ^{-}_{hr} = algoritmo de restar, τ_{hm} = algoritmo de multiplicar y τ_{hd} = algoritmo de dividir dentro de $\mathbf{OM_h}$.

El profesor pretende conseguir que los alumnos exploren el uso de la técnica híbrida y experimenten las ventajas y limitaciones de dicha técnica y de los algoritmos de cálculo asociados.

3.7. Limitaciones del Sistema híbrido y primer encuentro con el Sistema posicional

7ª SESIÓN (80') *Momentos de trabajo de la técnica y evaluación* en $\mathbf{OM_h}$.

Se sigue con la puesta en común de las tareas de cálculo en $\mathbf{OM_h}$. (Tiempo 55')

Para la división, los alumnos utilizan también la técnica egipcia. Pero, una alumna pregunta si es posible utilizar otra técnica. Ante esta cuestión un alumno propone hallar 10 veces el divisor y restarlo del dividendo y así hasta encontrar el resto. A pesar de la aparente eficacia de esta técnica, algunos alumnos piensan que es demasiado tediosa. Surge la pregunta: ¿Cómo mejorar (en el sentido de hacerle más económico) dicho algoritmo de la división? Y aparece el algoritmo que consiste en ir restando múltiplos del divisor y de la potencias de 10.

Para terminar de descubrir las ventajas y limitaciones del SN híbrido se propone (ver Anexo 1): (25')

$\mathbf{T_{h3}}$: *Practicar los algoritmos* τ_{hs}, τ_{hr}, τ_{hm} y τ_{hd} *y responder las siguientes preguntas:*

a) *¿Se pueden escribir todos los números naturales mediante el sistema híbrido?*

b) *¿Se pueden realizar siempre las distintas operaciones? ¿A partir de qué tamaño de los números el cálculo es casi impracticable? (alcance o dominio de validez)*

c) *¿En el SN híbrido se necesitan tablas de sumar y multiplicar? ¿Por qué? ¿Cómo son estas tablas?*

d) *¿A partir de qué tamaño de los números las operaciones son muy difíciles de realizar sin acumular errores? (fiabilidad)*

e) *¿Hasta qué tamaño de los números las operaciones se pueden realizar rápidamente? (economía)*

f) *¿Cómo cambia la representación escrita de un número cuando éste se multiplica por una potencia de la base?*

g) *Cuando utilizamos la escritura "novecientos cuarenta y cinco mil doscientos ochenta y tres" para designar el número 945283 ¿qué tipo de sistema de numeración estamos empleando? Analiza las características de dicho sistema.*

h) ¿Cómo debería modificarse la técnica τ_h *para mejorar los algoritmos de multiplicación y división?*

En la puesta en común del cuestionamiento de **OM$_h$** (Tiempo aproximado 15'), los alumnos ponen de relieve que no es posible escribir todos los números naturales mediante el SN híbrido, pues, según sus palabras, llegaría un momento en el que "se nos acabarían las letras". También les parece claro que el tamaño de los números con los que trabajemos condicionará la fiabilidad, la economía y hasta la realización del cálculo. Algunos alumnos apuntan que la mejora de **OM$_h$** va a venir de eliminar los símbolos de las potencias de la base e indicar dichas potencias mediante la posición.

Al llevar a cabo la tarea **T$_{h3}$** aparece *un primer encuentro* con el SN posicional.

El profesor ha pretendido realizar un análisis más profundo de las limitaciones de la técnica híbrida de representación de los números con el objetivo de superarlas y construir una técnica más eficaz.

Para el análisis del sistema oral se propone la tarea:

T$_{h4}$: *Comparar el sistema de numeración oral y el sistema de numeración posicional.*

Con esta tarea el profesor pretende que los alumnos analicen las características de otro sistema híbrido como el sistema de numeración oral y lo comparen con el SN posicional completo. Las respuestas a esta tarea se dejan para la siguiente sesión.

3.8. Análisis de los Sistemas de Numeración oral y posicional

8ª SESIÓN (70'). *Momentos del trabajo de la técnica y de evaluación* en **OM$_p$**

Se termina el análisis del SN oral con la tarea:

T$_{h4'}$: *Analizar en gran grupo los resultados obtenidos en la tarea* **T$_{h4}$**. (55')

El profesor pregunta por las diferencias entre el sistema de numeración oral y el sistema de numeración posicional completo. Se llega a la conclusión de que cuando trabajamos con los números, utilizamos a la vez los dos Sistemas de Numeración, el sistema de numeración oral para designar los números y el sistema posicional completo para realizar cálculos.

Luego entre todos se concluye que el sistema de numeración oral tiene las características de un sistema de numeración híbrido, es decir, utiliza dos tipos de símbolos, los que representan a las potencias de la base (la base es 10) que son uno, diez, cien, mil, diez mil, cien mil, millón, diez millones, etc.; y los que representan a los multiplicadores de las potencias de la base, o sea, los coeficientes, que son uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y nueve. Se observa que el uno se utiliza como coeficiente sólo cuando es necesario[6] y, además, que necesitamos un número infinito de símbolos para poder representar todas las posibles potencias de la base. También se ha realizado un análisis detallado de la peculariedades que presenta este SN oral: irregularidades y uso de diferentes bases.

Una vez aparecido el SN posicional como respuesta a las limitaciones del SN híbrido se proponen las tareas:

$\mathbf{T_{p1}}$**:** *Tarea destinadas a practicar los algoritmos*[7] τ_{pc}, τ_{ps} *y* τ_{pr} *del sistema posicional.*

$\mathbf{T_{p1'}}$**:** *Poner en común y evaluar en gran grupo los resultados obtenidos en la tarea* $\mathbf{T_{p1}}$.

En esta sesión se dedica a estas tareas unos 15’, y el resto se deja como tarea para realizar fuera del aula.

Durante esta sesión y la siguiente se pretende que el estudiante llegue a la conclusión de que la gran *aportación* del SN posicional completo tiene que ver con el alcance o *dominio de validez*, *economía* y *fiabilidad* de los algoritmos de cálculo de las operaciones aritméticas. Para ello hemos propuesto a los alumnos, como tareas matemáticas, el análisis de dichas características para diferentes algoritmos de cálculo así como la comparación de dos o más algoritmos en términos de su dominio de validez, su economía y su fiabilidad (ver diseño a priori en las secciones 2.7 y 2.8 y Anexo 1).

A fin de precisar, en la medida de lo posible, el significado de las citadas características hemos propuesto una “definición” provisional:

---

[6] Por ejemplo, en “mil ciento veintiuno” sólo se utiliza el coeficiente “uno” en las unidades.
[7] Siendo τ_{pc} = algoritmo de comparar dos números, τ_{ps} = algoritmo de sumar, τ_{pr}= algoritmo de restar, τ_{pm} = algoritmo de multiplicar y τ_{pd} = algoritmo de dividir dentro de $\mathbf{OM_p}$.

> El *dominio de validez* de un algoritmo hace referencia al campo numérico al que puede aplicarse; la *economía* se refiere al conjunto de tareas (sean escritas o no) que se requieren para realizar un cálculo con dicho algoritmo; la *fiabilidad* de un algoritmo tiene que ver con la probabilidad de cometer un error cuando se realiza un cálculo con dicho algoritmo. Puede postularse (y comprobarse empíricamente) que un algoritmo será menos fiable cuanto más operaciones elementales se requieran para su realización y será más fiable, a igualdad de las demás condiciones, cuanto más rastro escrito deje de las operaciones realizadas.

Hemos comprobado la gran dificultad que entraña esta tarea matemática para los estudiantes que están habituados a aplicar técnicas que permiten resolver una determinada tarea, pero nunca han tenido que analizar las características de una técnica ni, mucho menos, comparar distintas técnicas que permiten resolver la misma tarea, como pone en evidencia el estudio de Fonseca sobre el carácter "puntual" de las organizaciones matemáticas enseñadas en Secundaria (Fonseca 2004).

3.9. Evaluación de algoritmos de cálculo en el Sistema posicional

9ª SESIÓN (70'). *Momentos de trabajo de la técnica y tecnológico-teórico* en $\mathbf{OM_p}$

Durante esta sesión se ha seguido con el análisis de los algoritmos τ_{pm} y τ_{pd} y del cálculo de divisores y múltiplos comunes. El trabajo de análisis de los algoritmos en los términos descritos anteriormente ha resultado muy costoso y de difícil comprensión, por lo que, en gran medida, ha sido realizado por el profesor. (Duración aproximada 70')

3.10. Análisis y evaluación del proceso de estudio realizado

10ª SESIÓN (80'). *Momento de evaluación y de institucionalización* en $\mathbf{OM_p}$

En esta sesión el profesor pretende *conseguir que los alumnos evalúen las características del SN posicional completo.* Para ello ha propuesto a los alumnos la tarea siguiente:

> $\mathbf{T_{p2}}$**:** *Responder de modo razonado a las siguientes preguntas:*
>
> *a) ¿Se pueden escribir todos los números naturales mediante el sistema posicional?*
>
> *b) ¿Se pueden realizar siempre las distintas operaciones? ¿A partir de qué tamaño de los números el cálculo es casi impracticable? (alcance o dominio de validez)*

c) *¿En* **OM_p** *se necesitan tablas de sumar y multiplicar? ¿Por qué? ¿Cómo son estas tablas?*

d) *¿Con qué algoritmos las diferentes operaciones son muy difíciles de realizar sin acumular errores? (fiabilidad)*

e) *¿Con qué algoritmos las diferentes operaciones se pueden realizar más rápidamente? (economía)*

f) *¿Cómo cambia la representación escrita de un número cuando éste se multiplica por una potencia de la base?*

Después de realizar una puesta en común sobre las características de **OM_p**, el profesor ha realizado una síntesis e *institucionalización* de todo el proceso de estudio llevado a cabo. El profesor ha explicado que el objetivo del proceso de estudio no ha sido enseñar las distintas OM que han ido apareciendo (**OM_a, OM_h, OM_p**), en el sentido de aprender a operar en ellas, considerándolas como obras cristalizadas; sino que el objetivo de la enseñanza ha sido el propio proceso, es decir, la dinámica del proceso de estudio:

$$\boldsymbol{q} \rightarrow \mathbf{OM_i} \rightarrow \mathbf{OM_a} \rightarrow \mathbf{OM_h} \rightarrow \mathbf{OM_p}$$

En otras palabras, para construir **OM_p** como respuesta a ***q***, hemos construido las OM intermedias, hemos ido explicitando y analizando sus limitaciones. Este trabajo nos ha llevado a identificar las características de **OM_p** como una "respuesta" a dichas limitaciones, con lo que dichas OM intermedias han aparecido como la "razón de ser" de **OM_p**.

El estudio se interrumpió aquí, para, en la siguiente sesión, realizar una evaluación individual del proceso de estudio realizado.

Pensamos que este trabajo podría proseguir con un estudio más desarrollado que llevase a los alumnos a superar las limitaciones del sistema posicional, donde, además de poner de manifiesto la arbitrariedad de la base decimal, se provocase la necesidad de encontrar sistemas que permiten dar una respuesta más eficaz para el cálculo con "números grandes".

3.11. Evaluación individual del proceso de estudio realizado

11ª SESIÓN (80')

En esta sesión se propuso a los alumnos una prueba, para realizar individualmente, que constaba de las siguientes tareas:

1a.- Realizar los cálculos siguientes: 542 + 478, 4001 – 2015 y dividir 6407 entre 372 en los SN aditivo, híbrido y posicional destacando en cada caso las principales limitaciones y ventajas del SN adoptado. (8 puntos)

1b.- Construir un sistema de numeración posicional con 4 símbolos y base 40 y escribir en dicho sistema los números 2, 10, 40, 41, 1601, 1641 y 64064. Explicar las limitaciones y ventajas de dicho sistema. ¿Pueden presentarse algún caso de ambigüedad en sus escrituras? Si es así, poner un ejemplo. (2 puntos)

2a.- Analizar desde el punto de vista de su economía y su fiabilidad, las técnicas de multiplicar "Per Gelosía" y "Clásica" en el SN posicional para el caso de 563 × 28, sabiendo que una técnica es más económica cuanto menos escrituras y tareas es necesario realizar en su puesta en práctica y que una técnica es más fiable cuanto menos probabilidad hay de cometer error al realizarla. Este error va a ser menor, cuantas menos operaciones elementales haya que realizar y cuanto más rastro escrito haya de tales operaciones. (4 puntos)

2b.- Juan ha hecho un error en el siguiente cálculo:

¿Qué relación hay entre 4644 y 387? Justificar la respuesta. (3 puntos)

$$\begin{array}{r} 387 \\ \times\ 48 \\ \hline 3096 \\ 1548 \\ \hline 4644 \end{array}$$

2c.- Los romanos utilizaron dos técnicas de representación de los números. Los siguientes números están escritos utilizando la técnica más tardía: 4 –> IV, 49 –> XLIX, 99 –> XCIX, 499 –> CDXCIX, 999 –> CMXCIX. Caracterizar esas dos técnicas de representación de los números, indicando sus ventajas y limitaciones. (3 puntos)

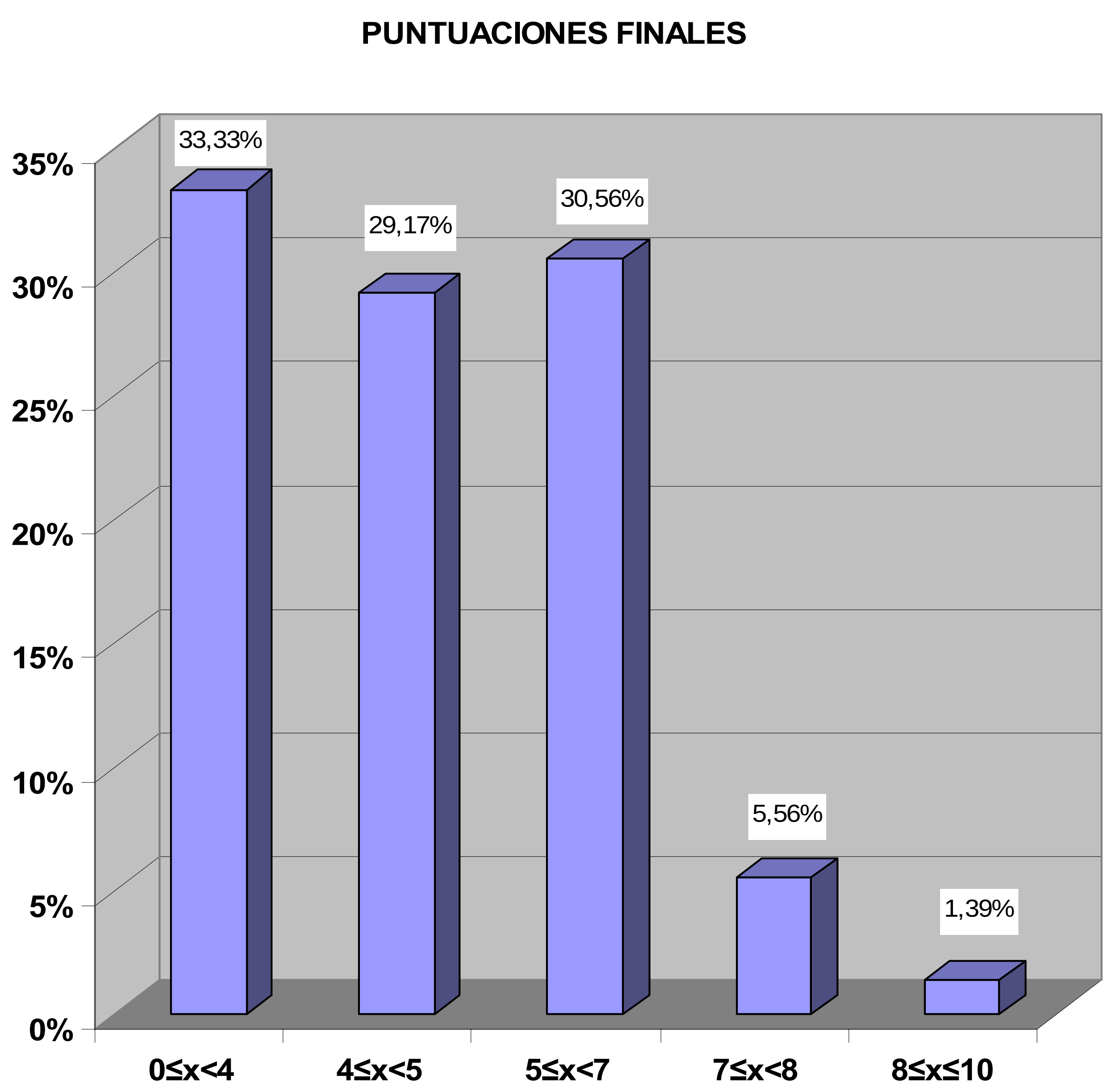
La corrección de los exámenes individuales por parte del profesor ha dado los resultados que mostramos en la siguiente tabla, donde aparece la nota obtenida en cada tarea y la nota final del ejercicio para cada uno de los alumnos.

Tarea 1a (8p)	Tarea 1b (2p)	Tarea 2a (4p)	Tarea 2b (3p)	Tarea 2c (3p)	Nota final
4	1	1	0	2,5	4,25
5	0	1	1	1,5	4,25
4,5	0	1,5	0	2	4
5	1	1,5	0	1,5	4,5
4,5	1	3	0	1,5	5
6	2	3	0	3	7
2	0	1	1	1,5	2,75
1,5	0	0	0	1,5	1,5
2	0	0	0,5	2	2,25
5	1	1,5	0	2	4,75
5	0	2	0,5	1,5	4,5
5	1	2,5	1,5	1,5	5,75
6	0	2	0,5	1,5	5

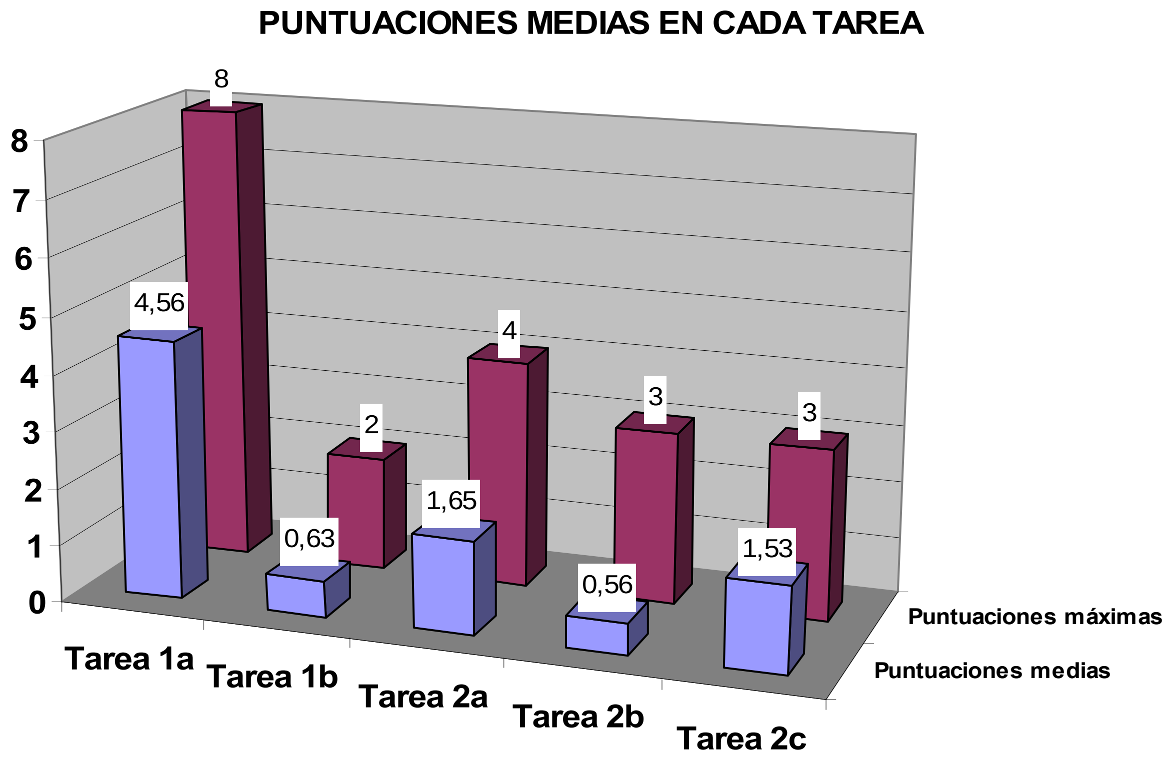
4,5	1	2	1	1,5	5
6	1	2	1	2	6
7	0	1,5	0	1,5	5
5,5	1	1,5	0	2,5	5,25
3	0	0	0	1,5	2,25
3	0	0	0	0	1,5
6,5	0	2	0	1,5	5
5	1	2	0,5	1,5	5
4,5	1	0	1,5	1,5	4,25
3,5	0	3,5	0	1,5	4,25
5	1	2	0	1,5	4,75
6	0	1	1	1	4,5
3,5	0	2	0,5	1,5	3,75
3	0	1	0	1	2,5
2	0	0	0	0,5	1,25
1	0	0,5	0	0	0,75
1	0	2	0	1,5	2,25
4	1	1	0	1	3,5
3	0	1	0	1	2,5
2	0	1,5	0	1,5	2,5
5,5	1	2	1,5	1,5	5,75
6	1	1,5	0	1,5	5
5	0	2,5	1,5	1,5	5,25
4	1	2	0,5	1,5	4,5
5	0	2,5	0	1,5	4,5
6,5	1	2	1	1,5	6
6	0	2	0	2,5	5,25
5	1	2	0,5	1,5	5
6,5	0	0	0	0	3,25
4	0	1,5	0	1,5	3,5
3	0	1,5	0	1,5	3
5	1	2	0	1,5	4,75
6,5	1	2	1,5	1,5	6,25
8	1,5	4	2	1,5	8,5
6	1	2	1,5	1,5	6
5,5	2	4	1,5	1,5	7,25
0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	1
4,5	2	2	0,5	1,5	5,25
5,5	1	2	1,5	1,5	5,75
6	1	2	1,5	1,5	6
5	2	0	0	3	5
5,5	1	2	0,5	3	6
6	0	2,5	0,5	2,5	5,75
3,5	0	1	0	1	2,75
3,5	0	0	0	0	1,75
3	0	0	1	1,5	2,75
4,5	1	2	1,5	2	5,5
4,5	2	3	0	2,5	6
5	0	0	0	0	2,5
4	1,5	2	1,5	1,5	5,25
6	2	4	0,5	2	7,25

4	1	0	0	2,5	3,75
5	1	4	1,5	3	7,25
5	2	2	3	2	7
5	1	2	1	1,5	5,25
6	0	2	1,5	2	5,75
7	1	4	1	1,5	7,25
5,5	0	2	1,5	2	5,5

Las notas finales del conjunto de alumnos las hemos reflejado, agrupadas en intervalos, en el siguiente gráfico de barras:



Las representaciones gráficas siguientes pretenden mostrar los resultados de los alumnos en cada tarea.



La **tarea 1a** ha sido realizada correctamente por la mayoría de alumnos en lo que se refiere a la realización de los cálculos, sin embargo la dificultad se ha presentado en el momento de explicar las limitaciones y ventajas de los diferentes sistemas con respecto a cada cálculo.

En la **tarea 1b,** los alumnos que han construido el SN con las condiciones pedidas han tenido menos dificultades en explicar sus ventajas y limitaciones y la mayoría han puesto un ejemplo en el que se presentaba la ambigüedad de escrituras. Pero muchos alumnos ni siquiera han intentado dar una respuesta. Creemos que esto ha sido debido a dos razones:

- Se trata de una tarea “inversa” de la realizada de forma habitual durante todo el proceso de estudio. En efecto, en clase se han analizado las características de un SN dado previamente.

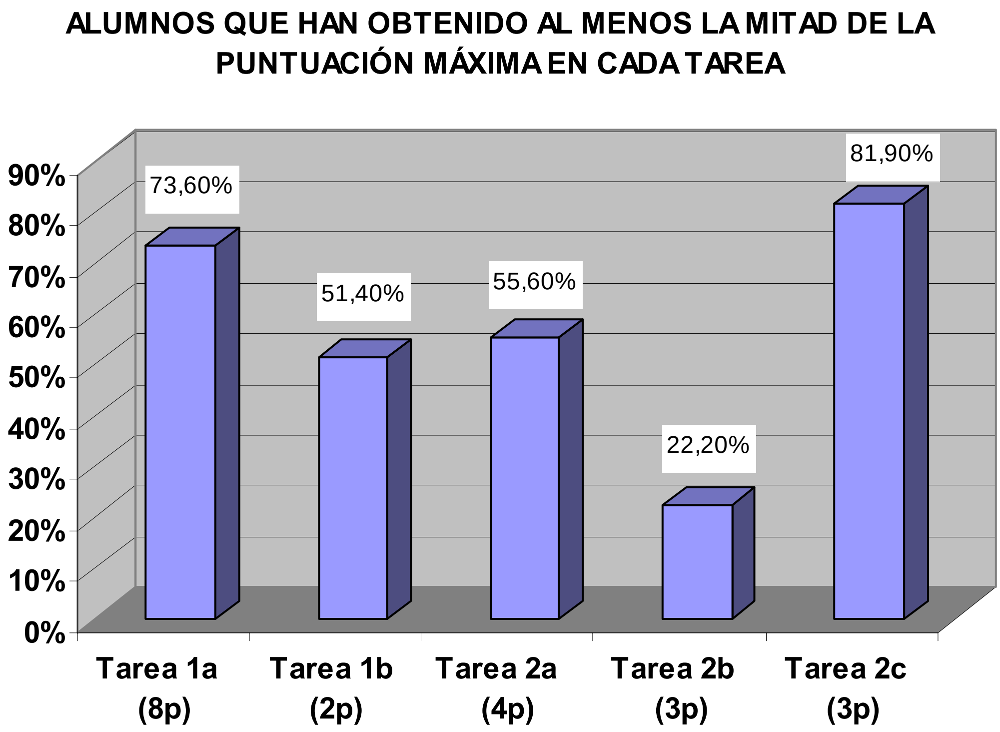
- Se trata de una tarea que se sitúa a nivel tecnológico puesto que requiere un análisis de las técnicas (más allá de su uso).

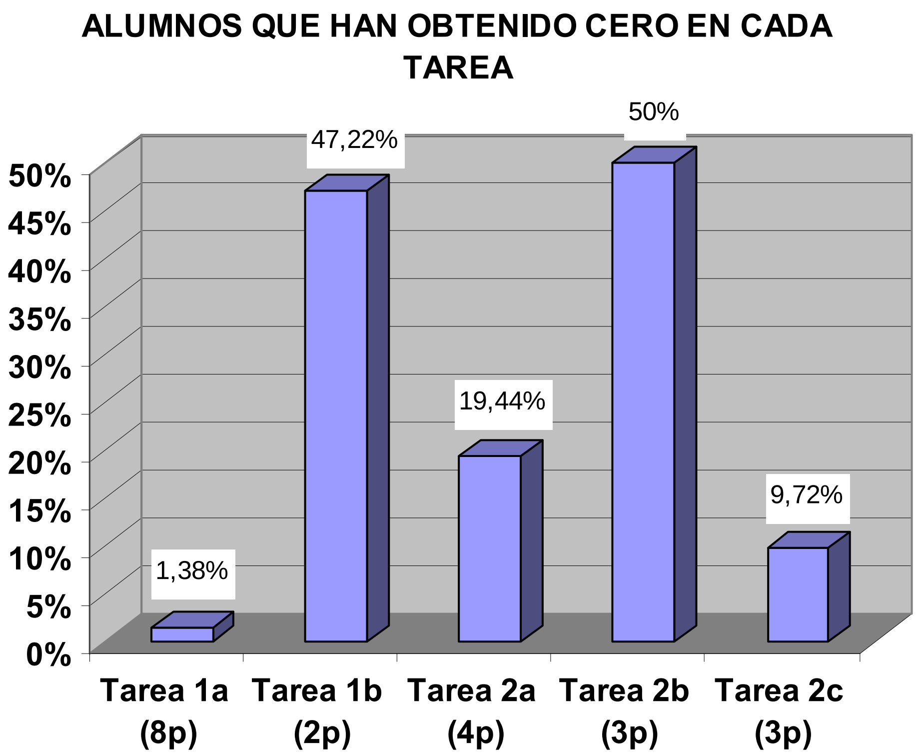
Creemos que esta tarea nos muestra un ejemplo de un fenómeno que se produce bastante frecuentemente en las evaluaciones individuales de los alumnos: El profesor sabe que durante el proceso de estudio se han realizado de forma sistemática un determinado tipo de tareas y quiere proponer una tarea que sea una variante de dichas tareas, pero con un poco más de dificultad y para ello elige una tarea inversa de las realizadas. El resultado obtenido suele ser, en general, bastante negativo debido a que la mayor parte de los alumnos no relacionan ambas tareas. Generalmente las tareas inversas presentan una mayor dificultad que las tareas directas, debido fundamentalmente a su ausencia escolar (de hecho la noción de Tarea “inversa” o “directa” es relativa a la institución escolar en cuestión). Por ello, según se afirma en Fonseca (2004), tanto las tareas directas como las inversas deben ser objeto de un trabajo sistemático.

En la **tarea 2a** la mayoría de los alumnos ha sabido aplicar las técnicas, y ha tenido mayor dificultad en valorar la fiabilidad que la economía. Ha habido un grupo amplio de alumnos que ha indicado como más fiable la técnica clásica. Aquí los alumnos responden de este modo porque piensan que la técnica más fiable es la que ellos mejor dominan.

En la **tarea 2b** es la que ha presentado más dificultades. Es posible que parte de estas dificultades provengan de una mala “comprensión” del enunciado (a pesar de que bastantes alumnos han identificado el error).

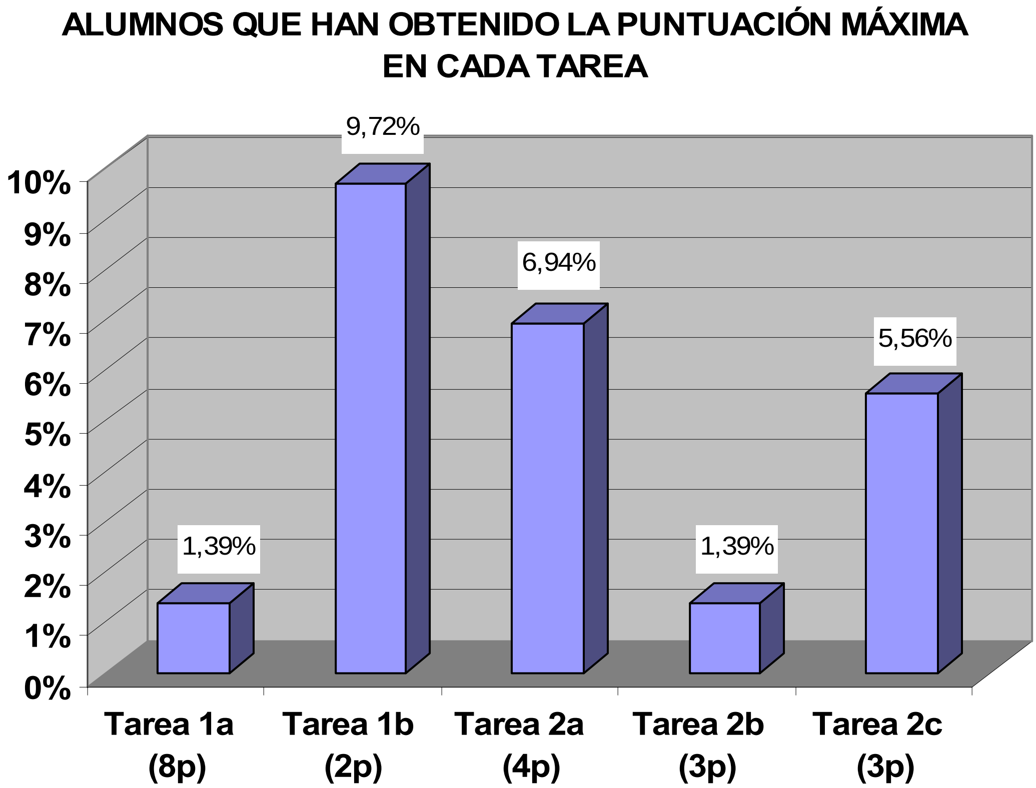
En la **tarea 2c** la mayor parte de los alumnos conocen bien las dos técnicas del SN romano pero encuentran de nuevo dificultades al querer explicar las limitaciones y ventajas de cada una de ellas.


ALUMNOS QUE HAN OBTENIDO AL MENOS LA MITAD DE LA PUNTUACIÓN MÁXIMA EN CADA TAREA
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
73,60%
51,40%
55,60%
22,20%
81,90%
Tarea 1a (8p)
Tarea 1b (2p)
Tarea 2a (4p)
Tarea 2b (3p)
Tarea 2c (3p)


ALUMNOS QUE HAN OBTENIDO CERO EN CADA TAREA
50%
45%
40%
35%
30%
25%
20%
15%
10%
5%
0%
1,38%
47,22%
19,44%
50%
9,72%
Tarea 1a (8p)
Tarea 1b (2p)
Tarea 2a (4p)
Tarea 2b (3p)
Tarea 2c (3p)

Las tareas con peores resultados han sido la **tarea 1b,** la **tarea 2a** y la **tarea 2b** y las tareas con mejores resultados ha sido la **tarea 1a** y la **tarea 2c.**

Esto nos permite afirmar que las tareas con mayor carácter tecnológico han sido las de mayor dificultad para los alumnos.



Las principales dificultades que hemos encontrado en los alumnos de 2º de Educación Primaria de la Diplomatura de Maestros, teniendo en cuenta el proceso de estudio seguido en las sesiones de clase y la corrección del examen, son:

- El hecho de que en las instituciones escolares para cada tarea matemática exista una única técnica (o, al menos una técnica privilegiada) provoca muchas dificultades para aceptar la existencia de un algoritmo, diferente del habitual, para realizar la división.

- Al utilizar un algoritmo de la división diferente del habitual se relajan las restricciones (por ejemplo, no tienen en cuenta que el resto debe ser menor que el divisor).
- Saben comparar números a partir de sus escrituras, pero tienen muchas dificultades para explicitar los diferentes pasos que hay que realizar. Se trata de una muestra de las dificultades para describir una técnica.
- Gran dificultad para realizar los cálculos en un SN diferente del habitual. Algunos alumnos optan por realizar los cálculos con la técnica habitual en el SN decimal posicional y luego traducen los resultados al nuevo SN.
- Dificultad para explicar las ventajas o limitaciones de un SN o de una técnica de cálculo como consecuencia de la dificultad para comparar las características de dos técnicas diferentes útiles para llevar a cabo una misma tarea.
- Para realizar un cálculo en el SN híbrido intentan aplicar la misma técnica que ellos han utilizado siempre en el SN posicional decimal, pero añadiendo algunas características del SN híbrido (intento de interpretar el nuevo algoritmo como una variación del antiguo).
- Existe cierta resistencia por parte de algunos alumnos a considerar otra escritura de los números diferente de la habitual. Por ello, en el caso del SN híbrido consideran que los coeficientes son los números y sin embargo, los símbolos de las potencias de la base no se considera que representen números.
- Cuando el profesor ha explicado la técnica de multiplicar que utilizaban los egipcios, los alumnos consideran que esa es la técnica que deben utilizar para todos los SN diferentes del SN posicional decimal. Así, por ejemplo, cuando se les pide realizar una multiplicación en el SN híbrido algunos alumnos tienden a utilizar la misma técnica que se ha propuesto para el SN egipcio.

Podríamos resumir diciendo que las mayores dificultades que presentan estos alumnos son de carácter tecnológico, es decir, dificultades para explicar y justificar las técnicas, así como para analizar las ventajas y limitaciones tanto de los SN como de las técnicas asociadas.

Cabe señalar que la asistencia a clase de los alumnos no ha sido regular, habitualmente entre 50 y 60 alumnos de 72 presentados al examen. Y como característica general hay que añadir que muy pocos alumnos traían hecha la tarea propuesta para realizar fuera del aula. Esta falta de trabajo individual fuera de clase ha dificultado la discusión en clase y el posible trabajo autónomo.

4. ANÁLISIS Y EVALUACIÓN DEL PROCESO EXPERIMENTADO

El problema didáctico de cómo organizar, en la institución de Formación de Maestros, el estudio de la cuestión "*¿Cómo expresar los números naturales mediante una representación escrita que sea un instrumento útil para el desarrollo de la aritmética elemental*?" tiene algunas características especiales. En particular, se trata de una cuestión cuya respuesta ("el sistema de numeración posicional completo") es perfectamente conocida por los estudiantes de dicha institución. Éstos han trabajado largamente en el sistema posicional de base 10 y lo han utilizado para hacer todo tipo de cálculos. La OM en torno a dicho sistema de numeración está *naturalizada* para los sujetos de la institución de Formación de Maestros y ha llegado a ser casi *transparente* para ellos.

Sin embargo, y a pesar de lo anterior, los estudiantes de dicha institución docente no pueden justificar la validez de dicha respuesta ya que, para ellos, es sólo una respuesta en el sentido "débil". Por lo tanto, no están en condiciones de *utilizarla* para llevar a cabo aquellas actividades, matemáticas o no, que requieren dicha justificación. Así, por ejemplo, no pueden cuestionar la pertinencia de la base 10 para llevar a cabo determinadas actividades matemáticas, ni proponer cómo podría modificarse dicha base para trabajar con números "grandes". Tampoco están en condiciones, como futuros maestros, de dirigir un proceso de estudio, con sus alumnos de Primaria, en el que se integre la "razón de ser" de los SN.

Esta situación ha provocado algunas dificultades para llevar a cabo el proceso de estudio experimentado porque los estudiantes son reacios a implicarse en el estudio de una cuestión cuya respuesta supuestamente conocen. De todos modos, ha tenido la virtud de poner de manifiesto la insuficiencia de las respuestas "débiles" incluso en el caso en que éstas vayan acompañadas de un cierto manejo de las técnicas que forman parte de la OM que se insinúa en dichas respuestas. Todas estas circunstancias nos han llevado a pensar en la necesidad de replantear *la cuestión inicial*, si queremos volver a llevar a cabo un proceso de estudio análogo.

Recordemos la formulación precisa del *problema didáctico* que abordamos:

> ¿*Cómo reconstruir en la Institución de Formación de Maestros una OM en torno al sistema de Numeración Posicional,* $\mathbf{OM_p}$, *de tal manera que dicha reconstrucción contenga explícitamente su "razón de ser", esto es, las cuestiones a las que* $\mathbf{OM_p}$ *responde*?

Esta formulación del problema didáctico planteado tiene la virtud de precisar el objetivo de la Organización Didáctica que se pretende diseñar y al mismo tiempo, intenta paliar las dificultades con las que tropieza la enseñanza de los SN en la institución de Formación de Maestros.

4.1. Los Recorridos de Estudio e Investigación como criterio de evaluación del proceso

A fin de resolver el problema didáctico tal como ha sido replanteado, era necesario diseñar un proceso de estudio fundado en una cuestión, que llamaremos *cuestión generatriz,* que fuese susceptible de hacer emerger numerosas cuestiones derivadas. El proceso debía permitir integrar de manera *funcional* las sucesivas *respuestas provisionales* que fuesen apareciendo a lo largo de su desarrollo (respuestas que, al ser consideradas en sentido "fuerte", tienen estructura praxeológica) en una OM al menos local. Además dicho proceso debía diseñarse de tal forma que permitiese y potenciase una *reestructuración de las responsabilidades* matemáticas y didácticas asignadas a los miembros de la comunidad de estudio por el contrato didáctico vigente. Dicha reestructuración debería permitir que los alumnos llevaran a cabo una actividad bastante *autónoma* y el profesor pudiese considerarse como *director del estudio* más que como un *enseñante* que muestra a los alumnos el modo de resolver las tareas propuestas.

En los últimos desarrollos de la TAD, Chevallard (2004, 2005, 2006) ha introducido la noción de Recorrido de Estudio e Investigación (REI) como un modelo o referente amplio para el análisis de los procesos de estudio. Sintetizando mucho, podemos decir que un REI tiene las siguientes características:

- ✓ Debe partir de una cuestión viva y rica que llamaremos *cuestión generatriz*.

- ✓ Dicha cuestión debe tomarse en serio, es decir, debe ser *estudiada en el sentido fuerte* del término.
- ✓ La dirección del proceso de estudio se apoya en la formulación de *cuestiones cruciales* cuyas respuestas provisionales ayudan a elaborar una respuesta a la *cuestión generatriz*.
- ✓ Los alumnos deben realizar una actividad lo más *autónoma* posible.
- ✓ El profesor debe ser considerado como un *director de estudio*.
- ✓ Se deben proporcionar los recursos suficientes, o sea, debe existir un "*medio*" que permita que los alumnos se apropien de la cuestión, para a continuación pasar a estudiarla con la mayor autonomía posible. Dicho medio también debe aportar los *instrumentos* que permitan contrastar las sucesivas respuestas provisionales a la cuestión generatriz que la comunidad de estudio propone.

Si queremos evaluar, en términos de un REI, el proceso de estudio diseñado y experimentado que acabamos de presentar, deberemos empezar por preguntarnos si la cuestión generatriz q elegida: "¿*Cómo expresar los números naturales mediante una representación escrita que sea un instrumento útil para el desarrollo de la aritmética elemental*?" ha sido la más adecuada. El análisis retrospectivo del proceso didáctico experimentado nos permite afirmar que, dadas las características de la institución docente de Formación de Maestros en la que se llevó a cabo el proceso de estudio, no parece que esta elección haya sido la más acertada. Aunque es cierto que a lo largo del proceso de estudio el profesor ha planteado cuestiones relativas a las limitaciones de los sucesivos Sistemas de Numeración que iban apareciendo y ha intentado que los alumnos tomaran conciencia de determinadas características de los algoritmos de comparación y de cálculo aritmético que era posible implementar en cada uno de ellos (como el *dominio de validez*, la *economía* y la *fiabilidad*), lo cierto es que dichas cuestiones no constituyeron el principal motor de la actividad matemática de los alumnos. Eran en realidad demandas del profesor, mediante una negociación "ad hoc".

Pensamos que en la institución docente de Formación de Maestros hubiese cumplido mucho mejor la función de *cuestión generatriz* una *cuestión tecnológica* como:

q': *¿Qué propiedades y características especiales tiene nuestro sistema de numeración para que se haya impuesto sobre todos los que han existido a lo largo de la historia y que han coexistido durante muchos siglos?*

Partiendo de esta nueva cuestión, decidimos experimentar un nuevo proceso de estudio con alumnos de 14-15 años de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (Bosch, Gascón y Sierra, 2004). El diseño, experimentación y evaluación de este proceso está desarrollado en el capítulo IV de esta memoria.

Esta nueva experimentación nos ha llevado a considerar que, cuando se trata de alumnos que ya conocen y usan habitualmente el sistema de numeración posicional, las *cuestiones tecnológicas* tienen un mayor poder generador de preguntas y en consecuencia mayor motivación para el estudio y búsqueda de las posibles respuestas. En efecto, si la cuestión "se toma en serio", aparecen inmediatamente cuestiones derivadas que llevan a comparar las características de distintos Sistemas de Numeración, con la ventaja adicional de que la propia cuestión generatriz propone un primer "medio" (los Sistemas de Numeración que han existido históricamente) para contrastar las conjeturas que vayan surgiendo. Esto no impide, sino que posibilita, que a lo largo del proceso surja la necesidad de construir Sistemas de Numeración con características prefijadas (que no tienen por qué haber existido históricamente) para utilizarlos como medio complementario para seguir contrastando hipótesis o bien para compararlos con el sistema posicional completo o con cualquier otro.

Entre las cuestiones que pueden plantearse para evaluar el proceso de estudio experimentado en términos de un REI pueden citarse las siguientes:

- ¿Se ha "*tomado en serio*" la respuesta a la cuestión *q* de partida?
- ¿Cómo se ha *reestructurado* a lo largo del proceso de estudio el reparto de responsabilidades matemático- didácticas entre el profesor y los alumnos?
- ¿Hasta qué punto los alumnos han llevado a cabo el recorrido de manera *autónoma* y en qué medida se han dejado conducir por el profesor?

Estas cuestiones pueden responderse, en parte, a partir de la confluencia entre las restricciones de la institución docente y la naturaleza de la cuestión inicial ***q*** elegida. En general puede decirse que el proceso de estudio resultó ser demasiado *guiado* y, por lo tanto, la pretendida *autonomía de los alumnos* ha sido bastante relativa.

Pero lo anterior no significa que, en el estado actual de desarrollo de la TAD, estemos en condiciones de precisar el grado de autonomía que pueden asumir los alumnos ni, mucho menos, cuáles son las condiciones que hacen posible que los alumnos asuman dicha autonomía efectivamente. En términos generales, hemos de reconocer que muchas de las cuestiones relativas a la *reestructuración del reparto de responsabilidades entre el profesor y los alumnos* están esencialmente abiertas. Dado que en cada institución escolar (por ejemplo en la Formación de Maestros) se ha forjado históricamente un contrato didáctico institucional que evoluciona bastante lentamente, se plantean dos cuestiones abiertas e inseparables (en el sentido que la respuesta que pueda darse a cada una de ellas condiciona profundamente las posibles respuestas a la otra):

- ¿Cómo cambiar la distribución –implícita pero fuertemente arraigada– de las responsabilidades matemático-didácticas que otorga el contrato didáctico institucional para que sea posible poner en marcha un REI?
- ¿En qué medida y en qué forma la puesta en marcha de un REI en una institución docente actual modifica las restricciones institucionales que pesan sobre la reconstrucción escolar de una OM y, en consecuencia, provoca cambios en la distribución de responsabilidades matemático-didácticas?

En lo que hace referencia a la evaluación del proceso de estudio experimentado, hay una cuestión importante que queremos volver a subrayar. Nos referimos a la estructura de las OM progresivamente construidas a lo largo del proceso. El cambio que proponemos en la cuestión inicial $\boldsymbol{q}$ impide que ésta se trivialice y pueda ser zanjada con una simple información puntual. Se devuelve el protagonismo a las OM intermedias que, de esta forma, no sólo forman parte del recorrido sino que constituyen, por así decirlo, su *núcleo*. Por lo tanto, la evaluación del proceso de estudio debe comprender una evaluación de todas las OM construidas a lo largo del mismo y el grado de integración funcional de estas OM que funcionan como *respuestas provisionales* a la cuestión inicial $\boldsymbol{q}$.

4.2. Una amalgama de organizaciones didácticas "puntuales"

Hemos visto que la $\mathbf{OM_p}$ en torno a los SN posicionales aparece como el resultado final de un proceso de ampliaciones y completaciones progresivas que, partiendo de una praxeología puntual $\mathbf{OM_i}$, ha pasado por una serie de praxeologías intermedias $\mathbf{OM_a}$ y $\mathbf{OM_h}$ generadas sucesivamente por un determinado desarrollo evolutivo de las cuestiones problemáticas y los tipos de tareas asociados que debían aparecer como las "razones de ser" de $\mathbf{OM_p}$ para los sujetos de la institución de Formación de Maestros. De este modo, *el proceso de estudio* o reconstrucción de $\mathbf{OM_p}$ *ha estado guiado por la actividad matemática* que ha sido posible llevar a cabo en cada una de esas OM intermedias y, en particular, por las restricciones específicas que han ido apareciendo en cada una de ellas y que han evolucionado a medida que avanzaba el proceso de ampliación.

Resulta, en definitiva, que la Organización Didáctica ha estado fuertemente condicionada por la estructura de las OM intermedias y, en última instancia, por la cuestión matemática inicial $\boldsymbol{q}$ (independientemente del carácter más o menos "generador" del proceso que haya tenido efectivamente dicha cuestión) así como por el bloque práctico-técnico de $\mathbf{OM_p}$ que constituye una respuesta explícita a la citada cuestión inicial.

Para contrastar la tesis anterior y, sobre todo, para bajar a los detalles y mostrar cuál es el mecanismo mediante el cual "lo matemático" condiciona la Organización Didáctica del proceso de estudio, sería necesario explicitar las *tareas didácticas* a las que se han enfrentado el profesor y los alumnos para reconstruir $\mathbf{OM_p}$, las *técnicas didácticas* (esto es, de ayuda al estudio) que han utilizado para llevar cabo dichas tareas didácticas, así como el *discurso tecnológico-teórico* disponible para interpretar y justificar dichas técnicas.

En el caso concreto del proceso de estudio experimentado, un análisis minucioso del recorrido vivido por el profesor y los alumnos muestra que se llevaron a cabo una sucesión de tareas matemáticas $\mathbf{T_{mk}}$ en los distintos SN considerados (aditivo, híbrido, posicional):

$$\mathbf{T_i} \rightarrow \mathbf{T_{a1}} \rightarrow \mathbf{T_{a2}} \rightarrow \mathbf{T_{a3}} \rightarrow \mathbf{T_{a4}} \rightarrow \mathbf{T_{h1}} \rightarrow \mathbf{T_{h2}} \rightarrow \mathbf{T_{h3}} \rightarrow \mathbf{T_{h4}} \rightarrow \mathbf{T_{p1}} \rightarrow \mathbf{T_{p2}}$$

Donde $\mathbf{T_i}$ permite *un primer encuentro* con el problema genérico de los distintos Sistemas de Numeración. $\mathbf{T_{a1}}$, $\mathbf{T_{h1}}$ y $\mathbf{T_{p1}}$ son tareas que provocan un primer encuentro con $\mathbf{OM_a}$, $\mathbf{OM_h}$, y $\mathbf{OM_p}$ respectivamente. $\mathbf{T_{a2}}$ y $\mathbf{T_{h2}}$ son tareas para un trabajo exploratorio dentro de $\mathbf{OM_a}$ y $\mathbf{OM_h}$, realizando algunas operaciones elementales en el SN considerado, $\mathbf{T_{a3}}$ y $\mathbf{T_{h3}}$ pretenden un trabajo sistemático de la técnica, de la evaluación y del análisis de las limitaciones dentro de $\mathbf{OM_a}$ y $\mathbf{OM_h}$ respectivamente, $\mathbf{T_{a4}}$ y $\mathbf{T_{h4}}$ consisten en destacar las limitaciones del SN aditivo e híbrido respectivamente, para el cálculo cuando el tamaño de los números aumenta y, en consecuencia, tienen el objetivo de provocar la construcción de una técnica más eficaz. Además en $\mathbf{T_{h4}}$ se propone la comparación del SN oral con el SN posicional. Por último, el objetivo de $\mathbf{T_{p2}}$ es que el estudiante descubra la gran aportación del SN posicional completo en lo que se refiere al *alcance*, *economía y fiabilidad* de los algoritmos de cálculo de las operaciones aritméticas elementales.

Esta sucesión viene guiada por una sucesión paralela de *tareas didácticas* que, en el caso presentado, el profesor fue planteando "paso a paso" a los alumnos. Cada una de estas tareas didácticas tiene como finalidad ayudar a evolucionar el estudio en la dirección marcada por el modelo epistemológico de referencia. En consecuencia, con la realización de cada una de dichas tareas didácticas, el profesor pretendía ayudar a los alumnos a avanzar un paso en dicha dirección. Podemos describirlas esquemáticamente como tareas didácticas, $\mathbf{T^D}$, dirigidas a *posibilitar* (*provocar*, *inducir* o *estimular*) que los alumnos:

$\mathbf{T_i^D}$**:** *Utilicen distintas técnicas para representar números.*

$\mathbf{T_{a1}^D}$**:** *Descubran las características de la técnica aditiva* $\boldsymbol{\tau_a}$ *de representar los números naturales y cuyo prototipo histórico es el sistema egipcio.*

$\mathbf{T_{a2}^D}$**:** *Exploren el uso de la técnica matemática* $\boldsymbol{\tau_a}$ *y empiecen a experimentar las ventajas y limitaciones de dicha técnica y de los algoritmos de cálculo asociados.*

$\mathbf{T_{a3}^D}$**:** *Descubran las ventajas y limitaciones de la técnica aditiva de designación de los números.*

$\mathbf{T_{a4}^D}$: *Lleven a cabo un análisis más profundo de las limitaciones de la técnica aditiva de representación de los números con el objetivo de superarlas y construir una técnica más eficaz, esto es, más económica y más fiable.*

$\mathbf{T_{h1}^D}$**:** *Descubran las características de la técnica híbrida.*

$\mathbf{T_{h2}^D}$: *Exploren el uso de la técnica híbrida y experimenten las ventajas y limitaciones de dicha técnica y de los algoritmos asociados.*

$\mathbf{T_{h3}^{D}}$**:** *Realicen un análisis más profundo de las limitaciones de la técnica híbrida de representación de los números con el objetivo de superarlas y construir una técnica más eficaz.*

$\mathbf{T_{h4}^{D}}$**:** *Analicen las características de otro sistema de numeración híbrido, el sistema oral, para que entiendan que existen diferentes prototipos.*

$\mathbf{T_{p1}^{D}}$**:** *Experimenten las ventajas de la técnica posicional tanto en lo referente a la representación de los números como con respecto a la realización de los cálculos con los diferentes algoritmos asociados.*

$\mathbf{T_{p2}^{D}}$**:** *Evalúen las características del sistema posicional completo.*

A su vez, cada una de dichas tareas didácticas requiere, para su realización, de una *técnica didáctica*. En el caso que nos ocupa podemos afirmar que cada una de las técnicas didácticas utilizadas explícitamente por el profesor está asociada a una *tarea matemática* propuesta a los alumnos. Concretamente, si denominamos $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{mk}}^{\mathbf{D}}$ a la *técnica didáctica* que utiliza el profesor para llevar a cabo la *tarea didáctica* $\mathbf{T_{mk}^{D}}$, entonces podemos describir $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{mk}}^{\mathbf{D}}$ de una vez por todas, independientemente de los subíndices, como sigue:

$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{mk}}^{\mathbf{D}}$**:** *Proponer a los alumnos la realización de la tarea matemática* $\mathbf{T_{mk}}$ (ya sea individualmente, en pequeños grupos o en gran grupo), con el objetivo de dirigir el proceso de estudio en la dirección marcada por el Modelo Epistemológico de Referencia.

Esto nos permite afirmar la existencia de una profunda interrelación o codeterminación entre los bloques práctico-técnicos matemático $[\mathbf{T_{mk}}/\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{mk}}]$ y didáctico $[\mathbf{T_{mk}^{D}}/\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{mk}}^{\mathbf{D}}]$. Pero, más allá de la práctica matemático-didáctica, debemos preguntarnos: ¿De donde surge la sucesión de tareas didácticas ($\mathbf{T_{mk}^{D}}$), esto es, en base a qué criterio el profesor decide, por ejemplo, que después de abordar la tarea didáctica $\mathbf{T_{a4}^{D}}$ abordará $\mathbf{T_{h1}^{D}}$? ¿Con qué criterios podría el profesor interpretar y justificar (aunque no se le reclame explícitamente) la sucesión de técnicas didácticas ($\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{mk}}^{\mathbf{D}}$) que utiliza? ¿De donde puede extraer los elementos *tecnológico-teóricos* capaces de sustentar su práctica didáctica?

Parece claro que la OD puesta en práctica se sustenta en el Modelo Epistemológico de Referencia que hemos esquematizado mediante la sucesión

$$\boldsymbol{q} \rightarrow \mathbf{OM_i} \rightarrow \mathbf{OM_a} \rightarrow \mathbf{OM_h} \rightarrow \mathbf{OM_p}$$

y que constituye, por ello, un ingrediente esencial de la *tecnología didáctica* del profesor.

De lo anterior se desprende que la *Organización Didáctica* (OD) global efectivamente puesta en práctica consistió en una amalgama de OD "puntuales" en el sentido de que cada una sólo permitía construir "un pedazo" de la organización praxeológica global. A pesar de tener una estrategia didáctica global (la construcción de la sucesión $\boldsymbol{q} \rightarrow \mathbf{OM_i} \rightarrow \mathbf{OM_a} \rightarrow \mathbf{OM_h} \rightarrow \mathbf{OM_p}$), el profesor se planteó tareas didácticas aisladas: una para cada etapa de la construcción. Utilizó para ello únicamente técnicas didácticas "puntuales" que consistían en proponer tareas matemáticas concretas que aparecieron, a ojos de los alumnos, como totalmente aisladas las unas de las otras. En particular, el contrato didáctico establecido no consiguió asignar a los estudiantes ninguna responsabilidad más allá de la resolución de las tareas matemáticas aisladas que les iba proponiendo paso a paso el profesor. Incluso podríamos afirmar que se ha reproducido un fenómeno de "didactificación" de la actividad matemática desarrollada.

También podemos decir que el ingrediente "matemático" no ha sido suficiente para la realización efectiva de una OD que vaya más allá de una amalgama de construcciones aisladas. La vía iniciada por los REI, y el nuevo reparto de responsabilidades que propone entre profesores y alumnos, podría ser una dirección prometedora en aras de superar las restricciones que emanan de los contratos didácticos habituales.

Otra de las características que podría considerarse como "muy particular" del proceso didáctico descrito es el hecho de que la Organización Matemática $\mathbf{OM_p}$ que acaba siendo la respuesta a la cuestión planteada, se construya mediante un proceso de ampliaciones y completaciones sucesivas que parte de una OM puntual. Pues bien, queremos subrayar que este proceso de reconstrucción escolar de una OM, sin ser universal, es aplicable a una amplia gama de casos.[8] De hecho, la reconstrucción de $\mathbf{OM_p}$, tal como ha sido descrita, puede considerarse como el resultado de aplicar una *técnica didáctica* muy general al caso particular del Sistema de Numeración y la institución de Formación de Maestros:

> $\boldsymbol{\tau_g^D}$*: La construcción de una OM, aparece como la respuesta a una cuestión generatriz propuesta, mediante un proceso de ampliaciones y completaciones progresivas a partir de una OM puntual (o respuesta inicial).*

[8] Ver por ejemplo Bolea *et al.* (2001) y García (2005) para los casos de las magnitudes proporcionales, el proceso de algebrización y la modelización funcional. También Gascón (2004) presenta la ampliación de la geometría sintética enseñada en la Secundaria obligatoria hacia la geometría analítica del Bachillerato.

Postulamos que, en general, la reconstrucción “artificial” o “escolar” de una OM en una institución docente I puede estar guiada por el desarrollo evolutivo de cierta problemática que proporcionará las “razones de ser” iniciales de la OM en I. Éstas no tienen por qué coincidir con las “razones de ser” de la OM en la institución I’, en la cual, la OM aparece como respuesta aceptable a la cuestión a estudiar. En todo caso, la problemática y los tipos de tareas asociados (así como las técnicas y el entorno tecnológico-teórico) deberán estar adaptados a las restricciones ecológicas que I impone (Gascón, 2001). En el capítulo V de esta memoria se analizará el proceso de estudio de la Medida de Magnitudes Continuas y se observará que, si bien con ciertas modificaciones, la técnica didáctica $\boldsymbol{\tau_g^D}$ es, también en este caso, perfectamente aplicable.

4.3. El papel de lo matemático en la creación de organizaciones didácticas

Ante todo hay que decir que, si bien es cierto que el proceso de estudio analizado ha sido realizado en condiciones un poco “especiales” y, en particular, después de explicitar el modelo epistemológico de referencia de $\mathbf{OM_p}$, postulamos que, en términos generales, el caso descrito muestra claramente el papel central de lo matemático en la creación de la OD. En efecto, de un modo general, podemos afirmar que, aunque un profesor no utilice de manera explícita y consciente un modelo epistemológico de la OM que da respuesta a la cuestión estudiada, su práctica docente estará igualmente condicionada por el modelo epistemológico (de dicha OM) dominante en la institución docente. En el caso considerado, y tal como hemos comentado al inicio del capítulo con el examen de las OD propuestas por los distintos libros de texto analizados, podemos decir que el modelo epistemológico de referencia habitual de los SN consiste en considerarlos como una técnica de *representación* de los números sin hacer hincapié sobre la simplificación de los algoritmos de cálculo aritmético asociados. Esto conduce a que las OD propuestas para el estudio de los SN planteen sólo tareas que hacen referencia a la representación de los números y dejen de lado las tareas de cálculo.

Incluso es posible que en el caso en que el MER quede completamente implícito, que se corresponde mejor con la práctica docente habitual de la inmensa mayoría de profesores de matemáticas, la incidencia del modelo epistemológico específico de la OM que se pretende reconstruir sobre la OD sea incluso más determinante que en el caso relativamente “experimental” que hemos analizado. En efecto, dado el carácter implícito, transparente y, por tanto, no cuestionable del modelo epistemológico dominante en una institución docente, es muy difícil que el profesor pueda considerar que existe otra manera de interpretar la OM en cuestión y, en consecuencia, una forma diferente de organizar el proceso de reconstrucción escolar de la misma.

En el capítulo siguiente ahondaremos en las relaciones entre el MER considerado y las distintas posibles OD que éste sustenta, considerando dos procesos de estudio diferentes en dos instituciones de formación también distintas: la Enseñanza Secundaria Obligatoria, en la que los alumnos también conocen el SN posicional decimal en el sentido de saber operar en él, y el Primer ciclo de la Enseñanza Primaria en la que los alumnos deben aprender a trabajar en $\mathbf{OM_p}$.

Capítulo IV

La Relatividad Institucional de lo Matemático y lo Didáctico

En el capítulo anterior, hemos mostrado, en el caso particular de la institución de Formación de Maestros, la estrecha relación que existe entre “lo matemático” y “lo didáctico”, esto es, la determinación recíproca entre la estructura de una Organización Matemática (en adelante OM) que se reconstruye en una institución y la forma de organizar su estudio.

Ya hemos señalado en el Capítulo I que la *relatividad institucional del saber matemático* constituye una de las consecuencias más importantes de la Teoría de la Transposición Didáctica y debe ser interpretada, simultáneamente, como una relatividad institucional de las formas posibles de organizar el estudio de las matemáticas, esto es, como una *relatividad institucional de lo didáctico*. Esta relatividad institucional conjunta proviene del hecho de que las restricciones y condiciones específicas que cada institución impone sobre una Organización Matemática, se materializan en la *relación institucional* de dicha institución *a* la Organización Matemática en cuestión, esto es, en la *forma como se interpreta* esta organización en la institución y, más allá, en *el sistema de prácticas matemáticas* que pueden llevar a cabo los sujetos de la institución con los componentes de la Organización Matemática.

El objetivo principal de este capítulo consiste precisamente en analizar la relatividad institucional conjunta de lo matemático y lo didáctico. Para ello *variaremos la institución docente* en la que se pretende reconstruir la OM en torno a los Sistemas de Numeración y estudiaremos los cambios que esta variación produce, simultáneamente, en el proceso de estudio de los Sistemas de Numeración y en el modelo epistemológico en el que éste se sustenta. En concreto, consideraremos dos nuevas instituciones docentes: la del Segundo Ciclo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (E.S.O.), cuya relación institucional a los SN es relativamente “próxima” a la correspondiente relación institucional en el caso de la Formación de Maestros; y la del Primer Ciclo de Primaria, cuya relación institucional es muy diferente.

En el caso de la institución del Segundo Ciclo de la E.S.O., veremos que la Organización Didáctica (en adelante OD) experimentada ha resultado ser bastante similar a la realizada en la Formación de Maestros. Esta semejanza es debida a que las *relaciones institucionales* de dichas instituciones con los SN comparten una característica común muy importante. En ambos casos los Sistemas de Numeración (en adelante SN) aparecen como no problemáticos, son considerados como un conjunto de técnicas relativamente transparentes y relativamente incuestionables. En el caso de la Formación de Maestros aparece un cuestionamiento superficial de los SN motivado por las futuras necesidades profesionales del Maestro. Dicho en otros términos, dado que los SN aparecerán forzosamente problemáticos en Primaria, dicha OM no puede considerarse completamente transparente en la institución de FM. Pero este cuestionamiento es muy débil, se limita a plantear cuestiones *docentes*: ¿cómo enseñar y qué hay que enseñar a los alumnos de Primaria a propósito de los SN? Y muy raramente se plantean cuestiones matemáticas como ¿qué relación hay entre la estructura del Sistema de Numeración posicional y las propiedades de los algoritmos de las operaciones aritméticas? Por lo tanto, en ambas instituciones se utiliza el SN posicional (en base 10) de forma esencialmente transparente, sin cuestionarse la justificación ni las propiedades de las técnicas que se utilizan para designar y para operar con los números. Podríamos decir que, en ambos casos, la relación institucional a los SN se reduce a una relación con el bloque práctico-técnico de la OM asociada, mientras que está ausente la relación con el bloque tecnológico-teórico. En otros términos, podría decirse que ambas instituciones comparten un mismo modelo epistemológico de los SN y que dicho modelo dominante en ambas instituciones se caracteriza por la transparencia del bloque tecnológico-teórico.

Para romper esa *ilusión de transparencia* y plantear una situación problemática capaz de generar la reconstrucción de los SN como organización praxeológica, hemos tenido que introducir *cuestiones de nivel tecnológico*, esto es, relativas a la descripción, justificación e interpretación de la actividad técnico-práctica que se lleva a cabo con los SN. El estudio de estas cuestiones recorre una sucesión de praxeologías $\mathbf{OM_i} \rightarrow \mathbf{OM_a} \rightarrow \mathbf{OM_h} \rightarrow \mathbf{OM_p}$ que conducen finalmente al SN posicional. Es importante resaltar que las OM intermedias que, en cierta manera, acaban "desapareciendo" de la construcción final, juegan un papel fundamental en el recorrido ya que son ellas (sus limitaciones) las que motivan la aparición del SN posicional, aportándole así su razón de ser. De ahí que consideremos que los SN posicionales no se limitan sólo a $\mathbf{OM_p}$ sino que incluyen toda la sucesión $\mathbf{OM_i} \rightarrow \mathbf{OM_a} \rightarrow$

OM_h → OM_p siguiendo con lo que hemos denominado nuestro “Modelo Epistemológico de Referencia” de los Sistemas de Numeración.

En el caso de la institución del Primer ciclo de Primaria (alumnos de 6 a 8 años) volveremos a utilizar este Modelo Epistemológico de Referencia para reconstruir el SN posicional. En contraste con lo que pasaba en las instituciones de Formación de Maestros y de Secundaria, la OM en torno a los SN es completamente problemática en esta institución. Esto significa que la relación institucional a dicha OM, esto es, el sistema de prácticas matemáticas que pueden llevarse a cabo en el Primer ciclo de Primaria con los objetos que constituyen el SN, tiene un carácter completamente diferente. En particular, la “razón de ser” y, por tanto, las cuestiones a las que la Numeración dará respuesta en dicha institución serán de naturaleza distinta. En efecto, en el primer ciclo de Primaria, la Numeración viene a resolver el problema de *cómo representar de forma sencilla y económica el cardinal de un conjunto finito*. En esta institución este problema es un problema “vital” (y no trivial) que requiere toda una construcción praxeológica y está en el núcleo de toda la actividad matemática que se desarrolla en esta institución[1]. Además, dado que el problema de la representación de los números antecede en este caso al aprendizaje de los algoritmos de cálculo, no se puede incluir en el proceso de estudio una de las principales “razones de ser” del SN posicional: su economía y fiabilidad en la realización escrita de estas operaciones. Esta diferencia es crucial y modifica profundamente el proceso de estudio en comparación con los diseñados y experimentados en las otras instituciones.

Conviene señalar, por último, que el proceso didáctico que describiremos en el caso del primer ciclo de Primaria se basa en los trabajos de la Escuela Michelet de Burdeos dirigidos por Guy Brousseau para la construcción de los números en Primaria. Como ya hemos indicado anteriormente, estos trabajos se sitúan en el origen del MER presentado en el capítulo II y que sirve de hilo conductor de nuestros análisis. Por lo tanto, la última parte de este capítulo constituye en realidad una concreción y explicitación del MER para el diseño de Organizaciones Didácticas de Primaria. A diferencia del caso de la Formación de Maestros y de la Enseñanza Secundaria Obligatorio, el MER para la Enseñanza Primaria

[1] Cuando se pretende trasladar “miméticamente” este problema a otras instituciones (por ejemplo a la institución de Formación de Maestros) y darle la categoría de “cuestión generatriz”, entonces la actividad matemática concluye en el mismo momento que se inicia ya que en dicha institución la respuesta es conocida, el problema es trivial y, por tanto, no tiene ninguna capacidad generadora.

está, en este caso, pendiente de experimentación en el Sistema de Enseñanza de las Matemáticas del Estado Español.[2]

1. CRITERIOS PARA DISEÑAR UN PROCESO DE ESTUDIO EN TORNO A LA NUMERACIÓN PARA LA ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA

Para el diseño de este proceso nos hemos basado en los últimos desarrollos de la TAD (Chevallard, 2004, 2005, 2006) sobre la noción de Recorridos de Estudio e Investigación. Para ello se propone, por un lado, que el profesor pase de ser "enseñante" a asumir el papel de *director de estudio,* guiando y animando el estudio e investigación de los alumnos, sobre una cuestión problemática a la que intentan aportar una respuesta; y, por otro, que las *razones de ser* que han motivado la creación y el desarrollo del conocimiento matemático, esto es, las cuestiones a las que dicho conocimiento responde, formen parte integrante y nuclear del programa de estudios.

En los últimos avances de la Teoría Antropológica de lo Didáctico se plantea la necesidad de recubrir el programa de estudios, correspondiente a un curso de la Enseñanza Secundaria Obligatoria, mediante un número determinado de procesos de estudio e investigación.

Un proceso de estudio va a hacer emerger un tipo de problemas y una técnica de resolución de dichos problemas que irá evolucionando hacia una técnica más *fiable*, más *económica* y de mayor *alcance*. Igualmente aparecerá la tecnología apropiada que nos va a permitir no sólo hablar de lo que se ha comenzado a construir sino también justificar y comprender mejor lo que se ha hecho.

Todo proceso de estudio debe establecerse en un tiempo relativamente amplio, pues el trabajo matemático requiere a menudo desarrollarse en el marco de varias sesiones sucesivas, con el fin permitir al estudiante profundizar y trabajar de manera útil y eficaz. Esto nos lleva a considerar que un proceso de estudio debe tener un objetivo matemático amplio y además no deben proponerse procesos de estudio aislados.

Al decidir qué contenidos matemáticos deben proponerse para ser estudiados, la cuestión fundamental que conviene plantearse y a la que es necesario aportar una respuesta, es la

---

[2] Queremos mencionar al respecto el excelente trabajo del equipo dirigido por la profesora Lorena Espinoza de la Universidad Santiago de Chile en el marco de la Estrategia Lectura-Escritura-Matemáticas del Ministerio de Educación chileno. La experimentación realizada también se basa en los trabajos dirigidos por Brousseau sobre la numeración y también se inscriben el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Para más detalles, ver (Espinoza y Barbé, 2006) y la web http://web.lem.usach.cl.

cuestión de sus *razones de ser*, es decir, las *cuestiones generatrices* de dicho contenido, que han motivado su creación y su desarrollo.

Por consiguiente, el punto de partida del proceso de estudio será una cuestión que designaremos como *la cuestión generatriz*. Todo el proceso va a venir inducido por esta cuestión, aunque lo que se derive no estará a priori totalmente determinado, ya que muchas decisiones tendrán que ser tomadas con el fin de llevar a buen término el recorrido de estudio e investigación que esta cuestión conlleva.

En la Organización Didáctica que presentamos aquí, *la cuestión generatriz* considerada, que designaremos como $\boldsymbol{Q_1}$, es:

> $\boldsymbol{Q_1}$: *¿Qué propiedades y características especiales tiene nuestro Sistema de Numeración (posicional completo en base 10) para que se haya impuesto de manera absoluta sobre todos los que han existido a lo largo de la historia y que han coexistido durante muchos siglos?*

Un segundo aspecto importante a considerar es la noción de *cuestión crucial*. Se dirá que *una cuestión* $\boldsymbol{Q_2}$ *es crucial para una cuestión* $\boldsymbol{Q_1}$ *si el hecho de saber responder a* $\boldsymbol{Q_2}$ *permite avanzar en la elaboración de una respuesta a* $\boldsymbol{Q_1}$. Además, pueden existir varias *cuestiones* $\boldsymbol{Q_2}$, $\boldsymbol{Q_2}$', $\boldsymbol{Q_2}$'', etc., *cruciales* para $\boldsymbol{Q_1}$, lo que puede dar lugar también a distintos posibles recorridos de estudio. Por lo tanto, el profesor como director del estudio, debe aprender a plantear cuestiones cruciales y, poco a poco, a hacer que el alumno aprenda no sólo a responderlas, sino también a planteárselas. Tendremos, entonces, que el instrumento principal de la dirección de un proceso de estudio será el *planteamiento de las cuestiones cruciales* que marcarán el recorrido.

El tercer aspecto a destacar es que, tanto para poder plantearse como para poder responder a las cuestiones que se presentarán en un proceso de estudio, conviene disponer de recursos didácticos que permitan contrastar la pertinencia de las cuestiones intermedias y la validez de las respuestas provisionales. En nuestro caso, los recursos didácticos utilizados serán la realización de los distintos cálculos aritméticos elementales (suma, resta, multiplicación y división) en algunos de los Sistemas de Numeración históricos más representativos.

Para aportar una respuesta a $\boldsymbol{Q_1}$, vamos a utilizar el recorrido inicial siguiente:

- Buscaremos posibles Sistemas de Numeración distintos al nuestro (que hayan existido o puedan existir) y obtendremos, por lo tanto, Organizaciones Matemáticas (en adelante, OM) en las que se podrán representar los números y elaborar algoritmos para calcular con dichos números.

- En estas OM empezaremos a plantear y responder las cuestiones cruciales que ayudarán a responder a Q_1, determinando qué propiedades deben cumplir estas OM y contrastando si las cumplen o no.

- Y por fin describiremos las propiedades de los diferentes Sistemas de Numeración, que históricamente hayan existido o no, y las compararemos con las propiedades de nuestro SN posicional de base 10.

2. EXPERIMENTACIÓN EN SECUNDARIA DEL PROCESO DIDÁCTICO DISEÑADO

El proceso de estudio que describiremos a continuación se ha experimentado durante 11 sesiones de 50 minutos, en una clase de 30 alumnos, de 3º de Educación Secundaria Obligatoria (14 - 15 años) de un Instituto de Madrid, durante el segundo trimestre del curso 2003-04.

Para la realización de esta experimentación nos hemos basado en el diseño a priori realizado en el capítulo III con algunas variaciones que hemos introducido a la luz de la experiencia realizada en la Formación de Maestros y tomando en consideración las diferencias entre las respectivas relaciones institucionales a la OM de los SN. Por otra parte, en el Anexo 2 de esta memoria se presentan todos los materiales entregados a los alumnos durante las diferentes sesiones realizadas.

El profesor del proceso de estudio ha sido también el investigador y autor de esta memoria. Pero, a diferencia del caso anterior, éste no era el profesor habitual de los alumnos.

2.1. ¿Cómo se escriben los números?

$$\boxed{Q_1} \longrightarrow OM_a \longrightarrow OM_h \longrightarrow OM_p$$

SESIÓN INTRODUCTORIA: *Primer encuentro* con la cuestión generatriz Q_1

El profesor habitual de los alumnos al terminar la clase les comunica:

"Durante unos días (unas 2 ó 3 semanas) vendrá un nuevo profesor y estudiaremos con él la escritura de los números.

Observad que en el mundo se hablan muchas lenguas que se escriben con alfabetos muy distintos. ¿Cuáles conocéis? (por ejemplo: el romano, el griego, el árabe, el cirílico, el chino, el japonés, el hebreo, etc.). Podéis observar que también tienen reglas de escritura diferentes.

¿Qué pasa con los números? ¿Hay diferentes sistemas? ¿Cómo escriben los números los árabes, los chinos, los japoneses?

Buscad información para el próximo día y le daremos una sorpresa al nuevo profesor."

2.2. El problema de la numeración y la existencia de múltiples Sistemas de Numeración

$$\boxed{\boldsymbol{Q_1} \longrightarrow \boldsymbol{OM_a} \longrightarrow \boldsymbol{OM_h} \longrightarrow \boldsymbol{OM_p}}$$

1ª SESIÓN (50 minutos)

Durante esta sesión el profesor empieza presentando la Organización Didáctica y comunicando a los alumnos lo siguiente: (20')

"Durante unos días estudiaremos la escritura de los números. Para ello llevaremos a cabo un trabajo en pequeños grupos para realizar las tareas propuestas, y luego haremos una puesta en común de los resultados obtenidos por cada grupo. Al terminar cada sesión de clase se plantearán algunas tareas para realizar en casa, que corregiremos y continuaremos trabajando al día siguiente. Al terminar de estudiar el tema de los Sistemas de Numeración, realizaremos un examen individual para comprobar el conocimiento que cada uno tiene del tema estudiado."

Para a continuación provocar un *primer encuentro* con la cuestión generatriz:

"Observad que en el mundo se hablan muchas lenguas que se escriben con alfabetos muy distintos. ¿Alguno de vosotros conoce un alfabeto distinto al que utilizamos habitualmente? Las reglas de escritura también son diferentes: por ejemplo, ¿sabíais que el sonido de la ñ se escribe 'gn' en francés, 'ny' en catalán, 'nh' en portugués?"

Aquí algunos alumnos proponen el chino, griego, árabe, y el profesor añade el japonés, el hebreo, el cirílico, etc. A raíz de estas respuestas el profesor pregunta:

"¿Qué pasa con los números? ¿Hay diferentes sistemas? ¿Cómo escriben los números los árabes, los chinos, los japoneses?

El mundo entero utiliza una misma manera de escribir los números (o casi, con variantes menores) para hacer los cálculos.

De todos modos, eso no ha sido siempre así. ¿Conocéis algún Sistema de Numeración que haya existido en otra época?"

Algunos alumnos proponen el sistema romano. El profesor continúa:

"¿Es posible que una civilización inteligente invente un Sistema de Numeración más eficaz que el que utilizamos habitualmente? ¿Qué querrá decir "más eficaz"?.

"Podemos empezar con el Sistema de Numeración más sencillo o elemental de todos los sistemas imaginables (probablemente muy poco eficaz) y, a partir de ahí, ir construyendo Sistemas de Numeración cada vez más eficaces (aunque no sabemos muy bien, todavía, lo que esto significa)."

"Es muy probable que no haya una única manera de construir un Sistema de Numeración un poco más eficaz que el anterior. ¿Llegaremos de esta manera a construir nuestro Sistema de Numeración como el más eficaz o bien descubriremos otros sistemas más eficaces?"

"Nuestro Sistema de Numeración posicional completo en base 10 debe poseer unas propiedades especiales que le permiten expresar el cardinal de una colección finita (es decir, un número natural) por muy grande que sea y manejar los números comparándolos, efectuando cálculos y construyendo otros números a partir de los que ya se conocen. ¿Cuáles son estas propiedades tan especiales?"

"Sólo podremos describir las propiedades de nuestro Sistema de Numeración si somos capaces de concebir y utilizar otros Sistemas de Numeración que carezcan de dicha propiedades. Por esta razón debemos construir y manipular algunos de los Sistemas de Numeración más importantes que han existido a lo largo de la historia."

Para provocar un *primer encuentro* con la OM en torno a los Sistemas de Numeración, el profesor ha propuesto una tarea inicial $\mathbf{T_i}$ (ver Anexo 2), análoga a la propuesta en la sección 2.1 del capítulo III (10') y que va a permitir que aparezca el repertorio de las distintas escrituras del número. Una vez realizada esta tarea, hay una puesta en común (15') donde cada grupo expone sus respuestas a todo el grupo de clase. Se analizan, evalúan y clasifican los distintos tipos de mensajes que han surgido en la clase, justificando sus ventajas e inconvenientes.

En definitiva, acaban apareciendo las siguientes escrituras:

✓ *Las escrituras que se sirven de la correspondencia término a término, es decir, utilizan un solo símbolo (en este caso, el palote) y lo repiten tantas veces como objetos tiene la colección:* IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII III
✓ *Las escrituras aditivas: 10 + 7 + 8 + 6 + 5 +7, 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 3,...*
✓ *Las escrituras aditivo-multiplicativas:* $6\times 7+1$, $8\times 5+3$, *cuarenta y tres,* $4\times 10+3$, *...*
✓ *La escritura "habitual" en el sistema posicional en base 10: 43*

El profesor acaba haciendo una síntesis de los resultados obtenidos, destacando algunas de las principales características de los SN como:

- Cantidad (y clases) de símbolos necesarios para escribir todos los números.
- Longitud de la cadena que designa cada número concreto.
- En el caso de la escritura "43" en el sistema posicional en base 10, el profesor señala que se podría cambiar la base y entonces cambiaría la cantidad de símbolos necesarios para escribir el número "43" y los restantes números.

Para terminar la sesión se propone para realizar fuera del aula: (5')

- *Escribir el cardinal de varias colecciones dibujadas que vienen dispuestas de forma diferente (forma triangular, rectangular, etc.)*

Con esta actividad se trata de que el estudiante descubra cómo la disposición de la colección va a influir en la utilización de una escritura del número u otra. (Ver Anexo 2)

- *Escribir los números 143, 1001, 1998 y 2004 en el sistema romano.*
- *Sumar los cuatro números anteriores en el Sistema Romano.*
- *Destacar tres diferencias entre nuestro SN y el Sistema Romano*

2.3. Análisis de un Sistema de Numeración aditivo

$$Q_1 \longrightarrow \boxed{OM_a} \longrightarrow OM_h \longrightarrow OM_p$$

2ª SESIÓN (45'): *Momento del primer encuentro en* OM_a

La clase comienza con una puesta en común y evaluación de las tareas propuestas: (40')

Los alumnos comienzan explicando las características del sistema romano. El profesor tiene que aclarar las reglas de escrituras, ya que existe confusión para escribir 999, pues un grupo de alumnos cree que debe escribirse IM, cuando su escritura es CM XC IX. Se llega a la conclusión de que en el SN romano la *posición* de los símbolos sólo tiene importancia para indicar que hay que restar en vez de sumar. Sin embargo, en el SN posicional completo la posición de cada símbolo modifica su valor relativo y hace referencia a las distintas potencias de la base. Además en el SN romano no hay un símbolo para el cero.

En la tarea donde las colecciones estaban colocadas de modo diferente, los alumnos han propuesto las siguientes escrituras:

- Escrituras aditivas: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9
- Escrituras aditivo-multiplicativas: 6×5 + 4×4
- Escrituras multiplicativas: 6×4×4, 6×6
- Escrituras multiplicativas y de división: 10×9 / 2
- Escrituras multiplicativas y sustractivas: 6×9 – 8

Para terminar la sesión se propone como tarea para casa una ficha sobre el SN egipcio. (Ver sección 2.2 del capítulo III y Anexo 2) (5')

2.4. Continuación del análisis del Sistema de Numeración aditivo

$$q_1 \longrightarrow \boxed{OM_a} \longrightarrow OM_h \longrightarrow OM_p$$

3ª SESIÓN (50 minutos): *Momento exploratorio dentro de* ***OM$_a$***

La clase comienza con la puesta en común sobre las cuestiones planteadas en torno al SN egipcio. (40') En general los alumnos responden en la forma esperada sin dificultades.

Con esta tarea los alumnos llegan a descubrir las características del SN egipcio:

- *Cada uno de los símbolos que se utilizan en el SN egipcio represent a cada una de las potencias de diez hasta 10^6 y todos tienen el mismo papel, el de representar a las potencias de la base. Además, se pueden escribir, como máximo, 9 símbolos iguales.*

- *La equivalencia que existe entre cada símbolo y el inmedato anterior es que el primero es 10 veces el segundo. Por tanto, se realizan agrupamientos sucesivos de 10 en 10, y en consecuencia la base del sistema es 10.*

- *No existe un grupo de símbolos que pueda representar dos números diferentes, es decir, no presenta ambigüedad de escrituras.*

- *No existe una relación entre la cantidad de símbolos necesarios para representar un número y la magnitud del número, Por ejemplo, para representar 10^6 se utiliza un símbolo y para 99 se necesitan 18 símbolos.*

- *La posición en la que se colocan los símbolos no juega ningún papel, y, por tanto, no es relevante.*

- *La operación que corresponde a la yuxtaposición de los símbolos es la adición.*

- *El número mayor que se puede escribir es el 9999999, es decir 9 de cada uno de los símbolos que hay.*

Ante la falta de tiempo y a propuesta del profesor habitual del curso, se propone a los alumnos que en grupos de cuatro realicen las tareas exploratorias (ver secciones 2.2 y 2.3 del capítulo III y Anexo 2) pero sólo para un caso. Aquellas tareas que no sea posible resolver en clase se dejan como tarea para casa. (10')

2.5. Limitaciones del Sistema de Numeración aditivo

$$Q_1 \longrightarrow \boxed{OM_a} \longrightarrow OM_h \longrightarrow OM_p$$

4ª SESIÓN (50 minutos)**:** *Momento exploratorio y de evaluación en* ***OM_a***

Comienza la sesión con una puesta en común sobre las tareas exploratorias y para ello el profesor plantea las siguientes cuestiones (50'):

a) *¿Se pueden escribir todos los números naturales mediante el SN aditivo? ¿Qué tiene de particular el sistema romano? ¿Mejora, en algún aspecto, la eficacia de los restantes sistemas aditivos?*

b) *¿Se pueden realizar siempre las distintas operaciones aritméticas? ¿Con qué números el cálculo es casi impracticable? (alcance o dominio de validez) ¿Las peculiaridades del sistema romano lo hacen más o menos eficaz para el cálculo?*

c) *¿En el SN aditivo se necesitan tablas de sumar y multiplicar? ¿Por qué? ¿Cómo son estas tablas?*

d) *¿A partir de qué magnitud de números las operaciones son muy difíciles de realizar sin acumular errores? (fiabilidad)*

e) *¿A partir de qué magnitud de números las operaciones son demasiado tediosas y lentas? (economía)*

f) *¿De qué modo influiría en el sistema aditivo, tanto en la representación como en la comparación y en el cálculo, un cambio en el tipo de agrupamiento?*

g) *¿Cómo cambia la representación escrita de un número cuando éste se multiplica por una potencia de la base?*

h) *¿Qué cambios habría que introducir en la técnica de representación aditiva para mejorar los algoritmos de multiplicación y división?*

Las primeras dificultades se han presentado cuando se pide escribir el número 25384295, los alumnos han realizado las dos siguientes propuestas:

a) Utilizar una letra nueva, la G.

b) Hacer tres paquetes: representando en el primero 9999999, en el segundo 9999999 y en el tercero 7384295 (esta solución se sugirió en la sesión anterior).

La tarea de *comparación* se ha realizado correctamente, pero se ha dejado para el día siguiente intentar escribir una regla general de comparación de números a partir de sus escrituras en $\mathbf{OM_a}$.

Un alumno ha propuesto que para comparar varios números hay que buscar primero cuál es el menor de ellos. El profesor ha preguntado:

"*¿Qué es más fácil a la hora de comparar varios números, encontrar el menor o el mayor?*"

La respuesta se ha dejado para el día siguiente.

En la tarea de calcular, las dificultades se han presentado al tener que realizar multiplicaciones y divisiones.

Para la multiplicación AIII × IIIIII se han propuesto las siguientes técnicas:

1. Los alumnos han escrito AIII seis veces y luego han agrupado y sustituido cada grupo de 10 símbolos por el inmediatamente superior.
2. Un alumno ha dicho que multiplicar un número por A es como cambiar cada símbolo por el inmediatamente superior, y si multiplicamos por B entonces habrá que cambiar cada símbolo por el siguiente al inmediatamente superior, y así sucesivamente.

El profesor propone entonces calcular DAAI × BAI utilizando la segunda técnica, obteniéndose los siguientes resultados:

$$\text{DAAI} \times \text{BAI} = (\text{DAAI} \times \text{B}) + (\text{DAAI} \times \text{A}) + (\text{DAAI} \times \text{I}) =$$

$$\text{FCCB EBBA DAAI} = \text{FEDCCBBBAAAI}$$

Para la división, la técnica utilizada por los alumnos ha consistido en convertir todos los símbolos en "palotes" y luego ir haciendo grupos del número indicado por el divisor, así el cociente será el número de estos grupos y el resto el número de palotes que sobren.

Llegados a este punto el profesor ha optado por explicar a los alumnos la técnica de multiplicar que utilizaban los egipcios (ver capítulo II, sección 2.2.4.).

Como tarea para casa se les ha pedido que busquen cuál era la técnica que utilizaban los egipcios para dividir. Además el profesor habitual les ha planteado las siguientes preguntas:

a) ¿Todos los números pueden escribirse como potencias de 2?

b) ¿Pasa lo mismo para las potencias de 3?

2.6. Análisis de las limitaciones del cálculo en el Sistema aditivo

5ª SESIÓN (50') *Momentos de trabajo de la técnica, de evaluación y de institucionalización en* $\boldsymbol{OM_a}$

A partir de un documento donde se explica cómo se realizan los algoritmos de la multiplicación y de la división en el SN egipcio (ver Anexo 2), el profesor ha explicado el funcionamiento del algoritmo de la división. También se ha empezado a responder las cuestiones planteadas en la sesión anterior.

2.7. Transformación hacia el Sistema de Numeración híbrido

$$q_1 \longrightarrow \boxed{OM_a \longrightarrow OM_h} \longrightarrow OM_p$$

6ª SESIÓN (50'): *Momento de evaluación e institucionalización en* $\boldsymbol{OM_a}$*. Momento del primer encuentro en* $\boldsymbol{OM_h}$*.*

El profesor ha propuesto a sus alumnos realizar una división y una multiplicación según la técnica egipcia, pero utilizando la escritura de los números en el SN posicional completo. Esto ha llevado a una discusión sobre la necesidad de escribir los números en el SN egipcio para hacer los cálculos. Así podremos observar con claridad las ventajas y limitaciones de realizar cálculos en dicho sistema. Por ejemplo, de este modo, hemos podido ver con claridad que no es necesario utilizar tablas de sumar ni de multiplicar. Hemos seguido respondiendo a las preguntas planteadas sobre el SN aditivo. Al llegar a la última cuestión:

> *¿Qué cambios habría que introducir en la técnica de representación aditiva para mejorar los algoritmos de multiplicación y división?*

Después de un tiempo de reflexión un alumno ha propuesto escribir el número

$$\text{BBBBB AAAAAAAA IIIIIIIII como } \overbrace{\text{IIIII}}^{}\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\underset{\text{B}}{} \quad \underbrace{\text{IIIII}}_{\text{B}} \quad \underbrace{\text{IIIIIIII}}_{\text{A}} \quad \underbrace{\text{IIIIIIIII}}_{\text{I}}$$

A raíz de esta propuesta el profesor les propone escribirlo como 6B 8A 9I o mejor 6B 8A 9. Para conseguir una mejor comprensión de este nuevo tipo de SN el profesor les entrega un documento para el estudio de las características del SN chino, (ver capítulo III sección 2.5 y

Anexo 2) y los estudiantes deberán responder a las cuestiones planteadas en dicho documento.

Es necesario resaltar que, llegado este momento, los alumnos han suscitado una discusión sobre la necesidad de que haya un examen individual. Un grupo de alumnos no quiere que haya un examen individual sobre la materia tratada, y, por tanto, no desea que su calificación sea considerada como una nota más para la evaluación del curso. Aquí el profesor habitual del grupo les confirma que el examen es inevitable, pues así se había anunciado al principio del tema y nadie había puesto ninguna objeción. Ante lo inevitable, los alumnos han preguntado qué características iba a tener dicho examen. El profesor les ha explicado que iba a tratar fundamentalmente de valorar el trabajo realizado a lo largo de todas las sesiones y, por tanto, las cuestiones a responder tendrían un carácter análogo a las trabajadas en clase.

Por otra parte, el profesor ha tenido que hacer un repaso de la división euclídea entre dos números naturales *a* y *b*. También les ha entregado un documento con tareas para explorar en $\mathbf{OM_h}$. (Ver capítulo III sección 2.5. y Anexo 2)

2.8. Análisis del Sistema de Numeración híbrido

$$q_1 \longrightarrow OM_a \longrightarrow \boxed{OM_h} \longrightarrow OM_p$$

7ª SESIÓN (50 ’): *Momento exploratorio de* $\boldsymbol{OM_h}$

La clase ha empezado con una puesta en común sobre las características del SN chino. Las dificultades han aparecido al tener que realizar una multiplicación. El profesor les ha propuesto realizar 6A 7 × 3A 8.

> Un alumno ha señalado que había que hacerlo como se hace al multiplicar polinomios. Por tanto, en este caso, hay que hacer: 8×7, 6A×3A, 6A×8, 7×3B, y para realizar 6A×3A había que multiplicar 6×3 = A 8 y A×A = B y A 8×B = C 8B.
>
> Este mismo alumno ha indicado que, para poder realizar los cálculos de modo rápido, habría que utilizar las tablas de multiplicar no sólo de los coeficientes sino también de las potencias de la base.

El profesor entrega a los alumnos un documento donde se presenta un organigrama para la comparación de números en el SN aditivo (ver Anexo 2), y les pide que elaboren otro similar para el SN híbrido que será discutido la próxima sesión. Además deben seguir realizando los demás cálculos pedidos.

El profesor responsable del grupo sugiere que terminemos el estudio de los SN en otras tres sesiones, ya que piensa que los estudiantes deben estudiar otros temas del curso. Por ello, el profesor decide dejar para otra ocasión el estudio de los criterios de divisibilidad.

2.9. Trabajo de la técnica en el Sistema híbrido y análisis del Sistema oral

$$Q_1 \longrightarrow OM_a \longrightarrow \boxed{OM_h \longrightarrow OM_p}$$

8ª SESIÓN (50') *Momentos del trabajo de la técnica, de evaluación y de institucionalización en* $\boldsymbol{OM_h}$*. Momento del primer encuentro con* $\boldsymbol{OM_p}$*.*

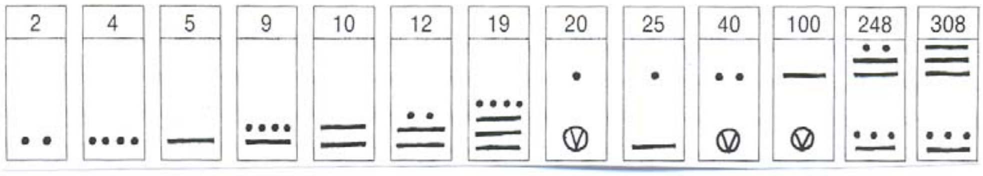
En la puesta en común sobre las actividades de cálculo en $\mathbf{OM_h}$ se han resuelto dudas sobre cómo realizar una multiplicación y una división. También se ha respondido a las cuestiones planteadas sobre el SN híbrido. Además se ha aprovechado para analizar las características del SN *oral*.

Para terminar se ha propuesto que, para mejorar el SN híbrido, habría que eliminar los símbolos de las potencias de la base e indicar dichos símbolos mediante la posición que ocupan sus coeficientes correspondientes.

Para favorecer un *primer encuentro* con $\mathbf{OM_p}$ el profesor entrega un documento como el siguiente sobre la numeración maya, extraído de Clavier, Bia y Maréchal (1987, p. 26).

Originarios de América Central, los mayas se interesaron mucho por la astronomía. También tuvieron necesidad de escribir grandes números. Sin embargo, no utilizaban nada más que tres símbolos.

A continuación presentamos varios números escritos en el sistema maya:



1.- Encuentra como funciona el sistema de numeración maya.

2.- Intenta explicar porqué este sistema permite escribir números mucho mayores que el sistema egipcio

Los alumnos, en grupos de 4, analizan el documento y responden a las preguntas propuestas:

a) *¿Qué número natural representa cada uno de los símbolos que aparecen en el sistema maya?*

b) *Explica el funcionamiento del sistema maya. ¿Todos los símbolos juegan el mismo papel? ¿Cuántas veces se puede repetir un mismo símbolo? ¿Qué tipo de equivalencia existe entre los distintos símbolos? ¿Qué tipo de agrupamientos se realizan?*

c) *¿Es posible que una misma escritura pueda representar dos números distintos? Si es así, pon un ejemplo e indica cómo podría evitarse dicho problema de ambigüedad.*

d) *¿Qué operaciones aritméticas se corresponden con la yuxtaposición o adjunción de los símbolos en el sistema maya?*

e) *¿Qué papel juega la posición de los símbolos dentro del grupo de símbolos que representa a un número en el sistema maya?*

f) *¿En el sistema maya se utiliza el cero como símbolo? Si es así, ¿qué uso se le da?*

g) *¿Qué cambios aparecen en el SN maya en relación con los SN egipcio y chino?*

h) *Escribe en el sistema maya los números 205, 999, 100000 y 25384 987.*

En la siguiente sesión se analizarán las respuestas propuestas por los alumnos.

El profesor entrega a los alumnos tres documentos donde aparecen escritos y explicados distintos algoritmos de la sustracción, de la multiplicación y de la división en $\mathbf{OM_p}$, con el fin de que los alumnos los estudien y analicen en cuanto a su economía y fiabilidad. (Ver Anexo 2). Esta tarea se deja para realizar individualmente fuera de clase.

2.10. Evaluación de los algoritmos de cálculo en el Sistema posicional completo

$$Q_1 \longrightarrow OM_a \longrightarrow OM_h \longrightarrow \boxed{OM_p}$$

9ª SESIÓN (50'): *Momento exploratorio en* $\mathbf{OM_p}$

Se ha realizado una puesta en común sobre las cuestiones planteadas en torno al SN maya.

> Primero se ha trabajado con el SN maya sin agrupamiento irregular en el paso del 2º al 3º orden y más tarde se ha explicado el porqué de dicha irregularidad.
>
> Con el estudio de este sistema, los alumnos han dado vida al *problema de la ambigüedad* de escrituras. Como respuesta a la demanda de escribir 1000000 en el SN maya, se obtuvo:
>
> $$(5 + 1)\times 20^4 + 5\times 20^3 + 0\times 20^2 + 0\times 20^1 + 0\times 20^0.$$
>
> Y un alumno propuso también la escritura siguiente:
>
> $11\times 20^3 + 0\times 20^2 + 0\times 20^1 + 0\times 20^0$ que, en realidad, corresponde a 88000.

Entonces el profesor plantea la siguiente pregunta:

¿Cómo resolver este problema de la ambigüedad de escrituras en el SN maya?

> Después de varias propuestas un alumno ha planteado utilizar un solo símbolo para cada uno de los coeficientes, es decir, utilizar 20 símbolos.

El análisis de los distintos algoritmos de cálculo en $\mathbf{OM_p}$ no se ha podido llevar a cabo en clase por falta de tiempo.

2.11. Análisis y evaluación del proceso de estudio realizado

10ª SESIÓN (50')

$$Q_1 \longrightarrow OM_a \longrightarrow OM_h \longrightarrow OM_p$$

El profesor, junto con los alumnos, ha realizado una síntesis de las organizaciones matemáticas construidas, señalando las ventajas y limitaciones de cada uno de los SN estudiados y haciendo un balance del proceso de estudio realizado. Se ha terminado exponiendo de nuevo *la cuestión generatriz* a la que entre todos se ha intentado dar una posible respuesta.

Aquí el profesor ha entregado a los alumnos un pequeño dossier resumen del estudio realizado (ver Anexo 2).

2.12. Evaluación individual de los alumnos

11ª SESIÓN (50')

Para evaluar individualmente a los alumnos, el profesor propuso la realización de un examen donde cada alumno debía responder individualmente a las preguntas durante los 50 minutos de clase.

PRIMER EXAMEN REALIZADO

IES San Juan Bautista **Examen 3º E.S.O.**

Nombre y Apellidos:..

1.- **Realiza los cálculos** siguientes: **4001 – 2015** y **dividir 6407 entre 372** en los **SN aditivo** e **híbrido** destacando en cada caso las principales **limitaciones y ventajas** del SN adoptado. (4p)

2.- Construye un **Sistema de Numeración posicional** con **4 símbolos** y **base 60** y escribe en dicho sistema los números 3, 11, 30, 60, 100, 3661 y 216216. **Explica** las **limitaciones** y **ventajas** de dicho sistema. ¿Puede presentarse algún caso de **ambigüedad** en sus escrituras? Si es así, **pon un ejemplo**, e indica cómo podría evitarse dicho problema de ambigüedad. (2p)

3.- Un compañero tuyo ha hecho un **error** en el siguiente **cálculo**:

$$\begin{array}{r} 387 \\ \times\ 48 \\ \hline 3096 \\ 1548 \\ \hline 4644 \end{array}$$

¿Qué **relación** hay **entre 4644 y 387**? **Justifica** la respuesta.

(1p)

4.- Los romanos utilizaron **dos técnicas de representación** de los números. Los siguientes números están escritos utilizando la técnica más tardía:

4 –> IV, 49 –> XLIX , 99 –> XCIX, 499 –> CDXCIX, 999 –> CMXCIX

Caracteriza estas dos **técnicas de representación** de los números, indicando **sus ventajas y limitaciones**. (2p)

5.- Sabiendo que 15368 × 18 = 276624 y que 15368 × 23 = 353464.

Realiza los siguientes cálculos, **sin llevar a cabo cálculos multiplicativos**, (para ello puedes utilizar los cálculos anteriores y las propiedades de las operaciones): **23018 × 15368**, **41 × 15368**.

Justifica la respuesta, indicando las propiedades utilizadas. (1p)

Dada la sorpresa con la que los alumnos recibieron las preguntas y vistos los resultados obtenidos tan negativos, nos pusimos de acuerdo entre todos (el profesor del tema, el profesor habitual del curso y los alumnos) en dedicar otra sesión de clase a realizar la corrección del examen (sesión que sirvió para aclarar entre todos algunas dudas que estaban todavía sin resolver) y volver a llevar a cabo un segundo examen dos semanas más tarde.

SEGUNDO EXAMEN REALIZADO

IES San Juan Bautista **Examen 3º E.S.O. 23- 3 - 2004**

Nombre y Apellidos:...

1. Realiza el cálculo siguiente: **546 x 86**

en el **SN aditivo** y destaca las principales **limitaciones y ventajas de dicho sistema**. (2p)

2. Realiza la división siguiente: **3548 entre 83**

en el **SN híbrido** e indica las principales **limitaciones y ventajas de dicho sistema**. (2p)

3. Construye un **Sistema de Numeración posicional de base 8** de modo que presente dificultades de ambigüedad de escrituras y escribe en dicho sistema los números 2, 8, 65, 1000.

Explica **cómo se podría evitar el problema de la ambigüedad** en dicho sistema. (2p)

4. Caracteriza el **Sistema de Numeración Oral** que utilizamos habitualmente para expresar oralmente los números. (2p)
5. Al **restar** dos números de 3 cifras, María **se ha olvidado una ”llevada” en la segunda columna**. ¿En **cuánto se ha equivocado**? ¿**Por qué**?
(1p)
6. Dado el cálculo siguiente:

$$\begin{array}{r} 364 \\ \times\ 402 \\ \hline 145600 \\ 728 \\ \hline 146328 \end{array}$$

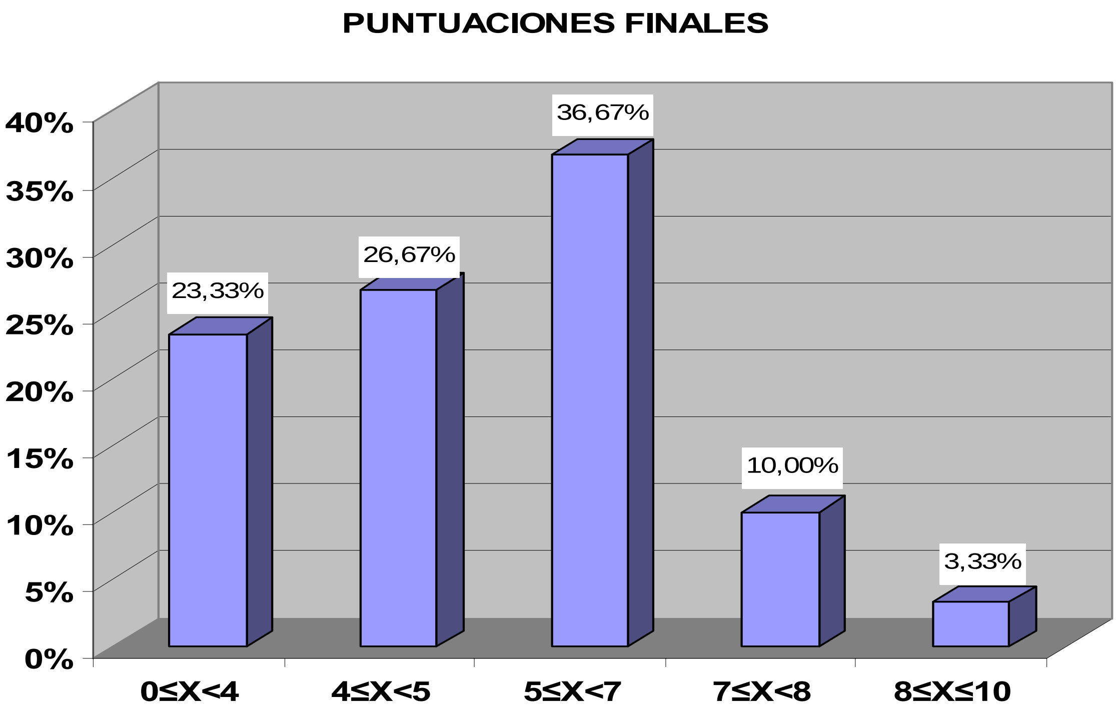
Realiza los siguientes cálculos, sin llevar a cabo cálculos multiplicativos, (para ello puedes utilizar los cálculos anteriores y las propiedades de las operaciones):

804 × 364, **644 × 364**. **Justifica la respuesta**. (1p)

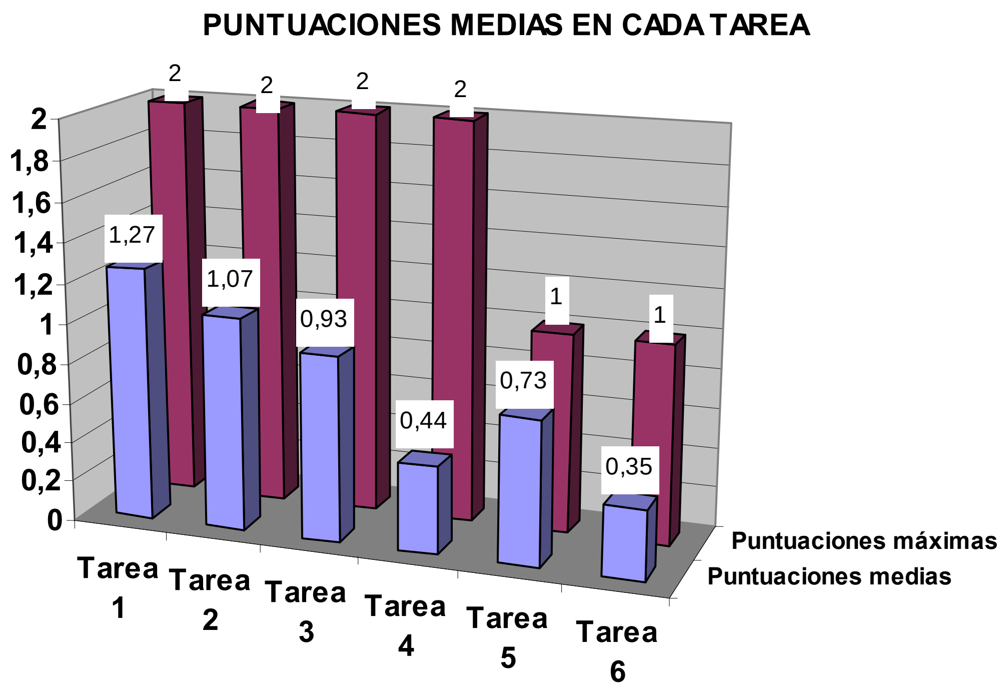
La tabla siguiente corresponde a los resultados obtenidos por los alumnos en el segundo examen, donde se muestra la nota obtenida en cada tarea y la nota final en la prueba:

Tarea 1 (2p)	Tarea 2 (2p)	Tarea 3 (2p)	Tarea 4 (2p)	Tarea 5 (1p)	Tarea 6 (1p)	Nota final del examen (sobre 10p)
0	0	0	0	1	0	1
1	0	1,5	0,5	1	0	4
1	0,5	0	0	0,5	0	2
1,5	1,5	0,5	0	1	0	4,5
2	1,5	1	1	1	0	6,5
1,5	1,5	1	0,5	1	0	5,5
0,75	0,25	1	0	1	0	3
1	0	1,5	1	1	0	4,5
2	1	0,75	0,75	0	0,5	5
1,25	1	0	0	0,5	0,5	3,25
0,5	0,5	1,25	0,25	0	0,5	3
1	1,5	1,5	0,5	1	0	5,5
1,5	1,5	0	0,25	1	0	4,25
0,5	0	0	0	0	0	0,5
1,25	1,25	0,5	0,5	1	0	4,5
1,5	1,25	1,25	0,25	0,25	1	5,5
1,5	1,5	1,5	0,5	1	1	7
1	1	0,5	0	1	0,5	4
0,75	0,75	1	0,5	1	0	4
1	1	1	0	0,5	0	3,5
2	1,25	1	0,25	1	0,5	6
1,75	1,75	2	2	1	0	8,5
2	1,5	1,5	0,5	0	1	6,5
0,5	1	1	0,5	1	1	5
1,75	1,75	2	0,5	1	0	7
1,75	1,25	1,5	0	1	0,5	6
1,25	1	1	0,5	1	0,5	5,25
1	2	1	1	0	1	6
2	1,5	1	1	1	1	7,5
1,5	1,5	0	0,5	0	1	4,5

En el siguiente gráfico mostramos mediante un diagrama de barras las notas finales obtenidas por los alumnos, agrupadas en intervalos:



Los siguientes gráficos pretenden mostrar la situación del conjunto de alumnos con respecto a cada tarea.



La **tarea 1** y la **tarea 2** se caracterizan por tener un marcado carácter práctico-técnico. Creemos que éste puede ser la razón por la que una mayoría de los alumnos ha obtenido más de la mitad de la puntuación máxima. En estas tareas la mayor dificultad se ha presentado cuando han tenido que explicar las limitaciones y ventajas del SN considerado.

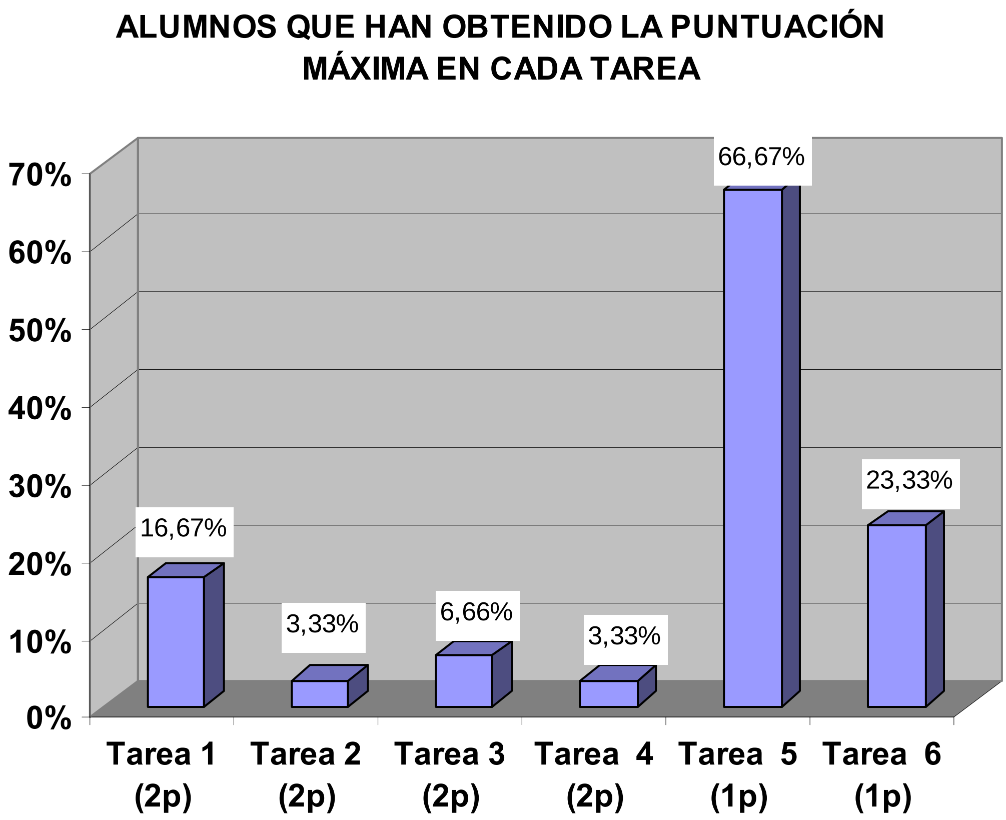
La **tarea 3** podemos considerarla como la tarea *inversa* de la que consiste en analizar las características de un SN determinado[3]. En esta tarea, los alumnos han experimentado mayor dificultad al querer explicar la ambigüedad de escrituras.

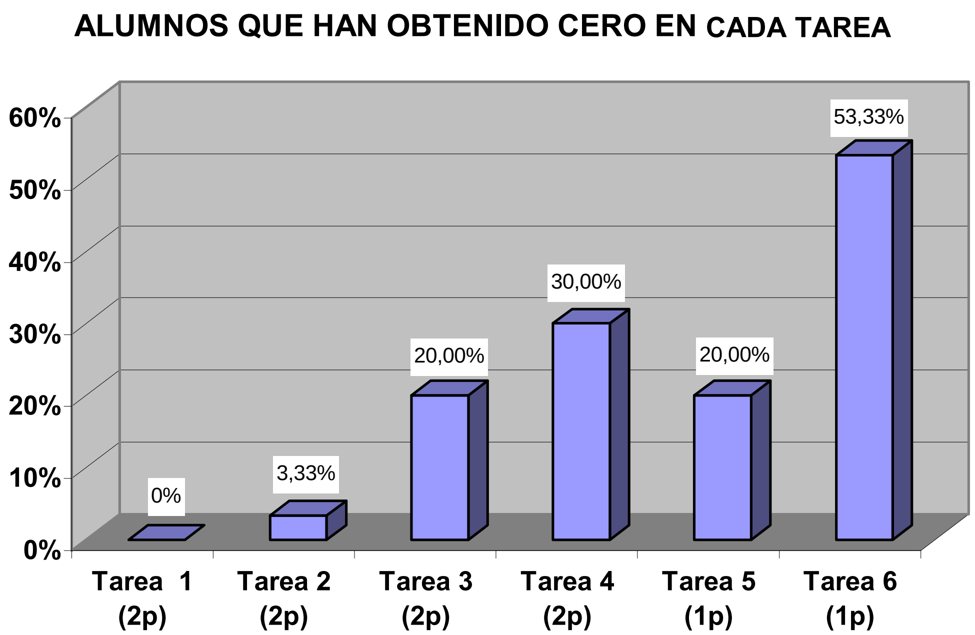
En cuanto a la **tarea 4**, a pesar de ser un tipo de tarea realizado de forma bastante habitual durante todo el proceso, ha sido la que peor respuesta ha obtenido. La explicación más plausible podemos encontrarla en la tendencia de los alumnos a percibir el SN oral como un conjunto de palabras que sirven para expresar oralmente la escritura de los números en el SN posicional. Esta identificación cultural hace muy difícil considerar que el SN oral tiene unas características específicas como SN que son diferentes de las del SN posicional, y ha provocado un importante aumento de la dificultad de esta tarea.

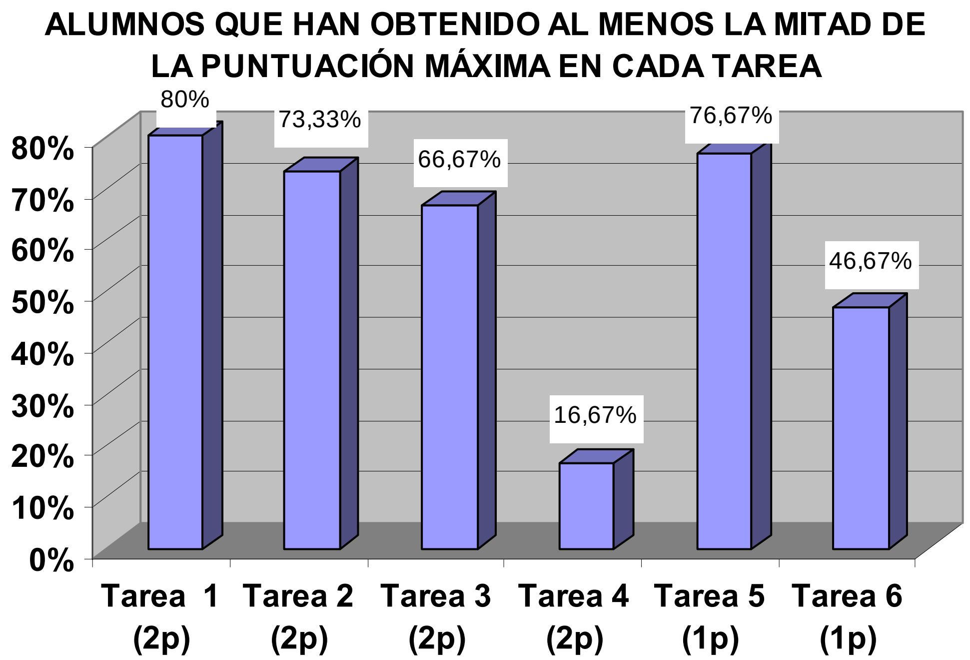
La **tarea 5** tiene un carácter tecnológico y, a pesar de ello, ha habido un gran porcentaje de alumnos que ha obtenido una puntuación mayor que la mitad de la puntuación máxima. Podemos decir que en esta tarea se produce una cierta excepción, ya que generalmente los alumnos tienen bajos resultados con las cuestiones de tipo tecnológico.

La **tarea 6**, también de carácter tecnológico, ha presentado bastantes dificultades para los alumnos. Creemos que éstas provienen de la *rigidez* con que los alumnos han construido las técnicas de cálculo, pues en el momento que se propone realizar un cálculo de forma diferente a la habitual, el alumno se muestra incapaz de intentar otro camino de resolución.

[3] Tal como hemos dicho anteriormente, las nociones de tarea "directa" y tarea "inversa" son relativas a la institución. En una institución determinada, una tarea matemática se considera "directa" si se realiza habitualmente durante el proceso de estudio. En ese caso la correspondiente tarea "inversa" (que se obtiene intercambiando los datos y las incógnitas) suele estar ausente o, en todo caso, no suele relacionarse con la primera. Además, la técnica que se utiliza para resolver la tarea "directa" no es reversible en dicha institución y, en consecuencia, no se dispone de ninguna técnica institucionalizada para llevar a cabo la tarea "inversa" que, por tanto, es mucho más difícil que la "directa" para los sujetos de dicha institución.


ALUMNOS QUE HAN OBTENIDO LA PUNTUACIÓN MÁXIMA EN CADA TAREA
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
16,67%
3,33%
6,66%
3,33%
66,67%
23,33%
Tarea 1 (2p)
Tarea 2 (2p)
Tarea 3 (2p)
Tarea 4 (2p)
Tarea 5 (1p)
Tarea 6 (1p)


ALUMNOS QUE HAN OBTENIDO CERO EN CADA TAREA
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
0%
3,33%
20,00%
30,00%
20,00%
53,33%
Tarea 1 (2p)
Tarea 2 (2p)
Tarea 3 (2p)
Tarea 4 (2p)
Tarea 5 (1p)
Tarea 6 (1p)



Las tareas con mejores resultados han sido, por este orden, la **tarea 1**, la **tarea 5**, la **tarea 2** y la **tarea 3**. Por el contrario, las tareas con peores resultados han resultado ser la **tarea 4** y la **tarea 6**. Lo que sorprende de estos resultados es que la **tarea 4**, que, en principio, pudiera parecer de baja dificultad, ha resultado ser la más difícil. Quizás esta dificultad provenga, como ya hemos comentado, de la transparencia y de la falta de cuestionamiento con que los alumnos perciben el SN oral.

A la vista del proceso de estudio realizado, y ateniéndonos ahora a un análisis cualitativo de las respuestas aportadas por los alumnos a las tareas propuestas en el examen, podemos enumerar algunas de las principales dificultades que hemos encontrado en los alumnos de tercer curso de la ESO:

- Dificultad para utilizar un algoritmo diferente al habitual. Los alumnos realizan el cálculo con la técnica habitual en el SN posicional y luego traducen el resultado al SN híbrido o, en otros casos, intentan aplicar la misma técnica habitual del SN posicional en el SN híbrido.
- Dificultad para explicar las ventajas y limitaciones de las técnicas utilizadas.
- Dificultad para resolver el problema de la ambigüedad de escrituras.
- Dificultad para crear un SN nuevo y luego escribir los números en dicho SN.

- Los alumnos saben utilizar en la práctica el SN oral, sin embargo, tienen mucha dificultad para explicitar las características del mismo.
- Existe cierta confusión entre cifra y número. Los alumnos tienden a identificar los símbolos con los números que representan.
- Dificultad para explicar los elementos tecnológicos de las técnicas. Esta actividad no cae dentro de las responsabilidades asignadas al alumno en el contrato didáctico vigente en la ESO.
- Gran dificultad para pensar y utilizar una técnica distinta de la habitual. Esto les lleva a cometer errores, como el de no tener en cuenta que el resto de la división debe ser menor que el divisor. En la ESO existe una técnica privilegiada para cada tipo de tarea matemática.
- El hecho de que el cálculo con las potencias de la base quede de algún modo enmascarado en el SN posicional decimal, hace que los alumnos sientan cierto desconcierto cuando tienen que realizar cálculos en un SN que necesita símbolos explícitos para dichas potencias.

Si comparamos estos resultados con los obtenidos en Magisterio podemos decir que las dificultades de índole tecnológico son prácticamente las mismas en ambos casos, es decir, los alumnos de la ESO coinciden con los estudiantes de Magisterio en la dificultad para justificar y explicar tanto las técnicas utilizadas como las limitaciones y ventajas de unas técnicas con respecto a otras.

La única diferencia que hemos podido detectar es que los alumnos de 3º de ESO tienen mayor dificultad en explicar o en caracterizar los SN estudiados. Esto puede ser debido a que los alumnos de Magisterio, como futuros profesores de Enseñanza Primaria, tienen una mayor predisposición (y, probablemente, más práctica) en el análisis de algoritmos elementales.

3. ANÁLISIS DEL PROCESO EXPERIMENTADO EN SECUNDARIA

El objetivo del proceso de estudio que acabamos de presentar, como ya hemos dicho anteriormente, no es enseñar las distintas organizaciones matemáticas que se han estado considerando (**$\mathbf{OM_a}$**, **$\mathbf{OM_h}$**, **$\mathbf{OM_p}$**), en el sentido de aprender a operar en ellas considerándolas como obras cristalizadas. El motor del proceso es el estudio de las propiedades de **$\mathbf{OM_p}$** que explicarían la persistencia del Sistema de Numeración posicional frente a los otros tipos de Sistemas de Numeración posible, es decir, el estudio de **$\mathbf{OM_p}$** como respuesta a ***Q_1***, "tomándose en serio" ***Q_1***. Pero esto requiere estudiar algunas respuestas provisionales a ***Q_1*** (respuestas que se materializan en **$\mathbf{OM_a}$** y **$\mathbf{OM_h}$**), utilizarlas para desarrollar tareas de designación, comparación y cálculo, y cuestionarlas destacando sus ventajas y también sus limitaciones. La superación de dichas limitaciones es lo que va a permitir llegar a descubrir las características principales de **$\mathbf{OM_p}$**.

En consecuencia, el objetivo de la enseñanza considerada no es únicamente la construcción de una OM que responda a tal o cuál cuestión problemática, sino el propio proceso de estudio que se lleva a cabo para dar respuesta a ***Q_1*,** es decir, la *dinámica*:

$$Q_1 \rightarrow \mathbf{OM_a} \rightarrow \mathbf{OM_h} \rightarrow \mathbf{OM_p}$$

que está guiada por una cadena (no predeterminada) de *cuestiones cruciales*, a las que hemos ido respondiendo a lo largo del proceso.

La propuesta de realizar una Organización Didáctica con estas características creemos que constituye una nueva aportación interesante, ya que amplía la perspectiva desde la cual se diseñan los procesos de estudio, en el sentido siguiente:

- Tanto el *diseño del recorrido* como la *estrategia del estudio* no tienen por qué estar únicamente en el *topos* del profesor. También los alumnos deben corresponsabilizarse de la estrategia a seguir para intentar elaborar una respuesta a la cuestión considerada.

- Del mismo modo, el planteamiento de las cuestiones cruciales, el orden de estudio (cronogénesis) y los recursos didácticos y matemáticos movilizados para el estudio (el *medio* en el sentido de la Teoría de las Situaciones Didácticas) no deben depender sólo del profesor sino que deben integrarse progresivamente en el *topos* del alumno.

- Finalmente, los *momentos* del estudio, lejos de ser un "artefacto didáctico" para la reconstrucción artificial de organizaciones matemáticas, aparecen como instrumentos necesarios para el trabajo de investigación que se inicia al intentar aportar una respuesta a $\boldsymbol{Q_1}$.

La propuesta de los procesos didácticos que promueve la TAD, al poner en cuestión el reparto tradicional de responsabilidades entre profesor y alumnos en la gestión del estudio, permite un nuevo planteamiento del contrato didáctico que afecta al contrato pedagógico (común a todas las disciplinas que se estudian en la escuela) e incluso incide sobre el contrato escolar. Su desarrollo requiere un amplio trabajo experimental para "desnaturalizar" los gestos didácticos que espontáneamente asignamos a la responsabilidad del profesor y permitir que el alumno pueda asumir las responsabilidades propias del trabajo matemático. Entre estas últimas podemos destacar, por ejemplo:

- Plantear las preguntas cruciales que pautan el proceso de estudio y sugieren posibles vías o direcciones de avance;
- Buscar recursos matemáticos para el desarrollo del estudio, como material para practicar el trabajo de la técnica o para evaluar las respuestas provisionales;
- Planificar el proceso de estudio y el reparto de funciones en el grupo.

Plantear el objetivo de la enseñanza de las matemáticas como la realización de una serie de *recorridos de estudio e investigación* que permitan dar respuesta a un conjunto de cuestiones consideradas cruciales por la sociedad, es proponer un giro copernicano en el diseño de un nuevo currículum de matemáticas en el que la "imposición" de la escolaridad obligatoria pasaría de ser una imposición de *contenidos* que habría que aprender a una imposición de *cuestiones* que habría que estudiar.

3.1. Evaluación del proceso

Para evaluar el proceso de estudio experimentado es necesario analizar conjuntamente la Organización Matemática construida efectivamente en el aula y el desarrollo de la Organización Didáctica llevada a cabo conjuntamente por todos los participantes en el estudio de dicha OM. Metodológicamente es inevitable distinguir, en primera instancia, entre la OM construida y el proceso de OD de construcción.

En lo que se refiere a la OM construida, evaluaremos hasta qué punto cada uno de sus componentes ha podido ser tratado de modo adecuado y oportuno. Utilizaremos como referente el Modelo Epistemológico de Referencia de dicha OM construido en el Capítulo II de esta memoria.

En cuanto a la *cuestión generatriz* planteada podemos afirmar, después de las experiencias realizadas, que es una cuestión *suficientemente rica* como para generar el estudio de la OM que se pretende. La misma cuestión propone un “medio”, que va a ser fuente de recursos para que el alumno pueda construir y contrastar las sucesivas respuestas provisionales que irán apareciendo. Estos recursos, los distintos Sistemas de Numeración históricos que han existido, creemos que son un buen elemento motivador para el estudio que se propone. En este sentido, es significativo que los alumnos se empeñaran en utilizar los propios símbolos empleados por el SN chino[4] y el SN maya para hacer los cálculos propuestos.

En cuanto a los componentes praxeológicos de la OM, se ha trabajado sobre todo el componente práctico-técnico y, sin duda debido a las restricciones de la institución, ha sido muy difícil realizar un trabajo que involucre el bloque tecnológico teórico al que los alumnos no están nada acostumbrados.

Para la evaluación de la Organización Didáctica tomaremos como referencia las características de una OD propuesta por los últimos desarrollos de la TAD, que se concreta en los denominados *recorridos de estudio e investigación* (REI). En este sentido, pensamos que el modelo epistemológico dominante en la institución de Secundaria consiste en considerar que los SN son sólo una técnica de representación de los números sin tener en cuenta que además son un instrumento fundamental para diseñar algoritmos con los que poder realizar cálculos, es decir, que el hecho de que el SN con el que trabajemos sea eficaz o no, nos va a permitir hacer matemáticas con mayor o menor solvencia. Este modelo, generalmente no explícito, ha hecho que se haya considerado excesivo el tiempo dedicado al estudio de los SN. Por ello el profesor, cuando proponía tareas para realizar por los alumnos, siempre tenía presente la presión institucional de avanzar con más celeridad de la adecuada. Este fenómeno ha tenido una gran influencia en el reparto de responsabilidades en el aula y, en particular, en el hecho de que los materiales siempre han sido aportados por el profesor. Esta presión ha provocado que la actividad se desarrollase de forma más rápida, pues la búsqueda de información en la biblioteca o en Internet ralentiza el trabajo. También ha

[4] Concretamente un alumno construyó la tabla de multiplicar en el SN chino con los propios caracteres utilizados en dicho SN (ver Anexo 2).

disminuido la capacidad de los alumnos para buscar con criterio la información necesaria para responder a las cuestiones planteadas. Asimismo, la propuesta de realizar las diferentes tareas y las cuestiones a responder casi siempre se ha asignado al topos del profesor.

Por otra parte, al no trabajar en grupo dentro del aula de forma habitual, los alumnos han tenido que aprender a hacerlo, lo cual ha ralentizado el trabajo de las primeras sesiones. Esto ha llevado a que la parte final del tema, es decir, el trabajo de análisis de las distintas técnicas que se pueden realizar dentro del SN posicional completo, no se haya podido realizar con la calma suficiente como para que el alumno pudiera adquirir una destreza suficiente en este tipo de evaluación.

Además, el hecho de que el profesor de las sesiones no fuera el habitual del curso, ha provocado en los alumnos la idea de que el estudio del tema no iba en serio, a pesar de que al principio se había dejado claro que el estudio de este tema formaba parte del curso y que, por tanto, se haría un examen individual con su calificación correspondiente. Esto ha llevado a que en la séptima sesión haya habido una discusión sobre la necesidad de tomarse en serio el tema, pues ha habido un grupo de alumnos que no realizaban las tareas propuestas, porque no acababan de creerse que este tema formaba parte del curso. Éste ha sido otro factor a tener en cuenta, que ha influido en que el grupo de alumnos no haya tomado el tema como suyo, dificultando que los alumnos trabajasen de forma autónoma.

3.2. Diferencias con el proceso realizado en la Formación de Maestros

Debemos señalar que los procesos de estudio realizados en la Formación de Maestros y en Secundaria son relativamente análogos, debido a que, como ya hemos dicho al principio de este capítulo, las respectivas relaciones institucionales con los SN son semejantes. En las dos instituciones los SN se presentan como técnicas ya conocidas y relativamente incuestionables. En consecuencia, si queremos considerarlos como objeto de estudio, es necesario crear en ambas instituciones una problemática en torno a cuestiones de carácter tecnológico. Dicha problemática puede aparecer, en ocasiones, un poco artificial y hasta innecesaria, pero es absolutamente imprescindible.

A pesar de la gran semejanza entre ambos procesos, ya que se han basado en el mismo diseño a priori, el día a día del proceso ha presentado algunas diferencias.

- En primer lugar, la *cuestión generatriz* ha cambiado y ha pasado a tener un carácter tecnológico, más acorde con el tipo de proceso de estudio que es posible realizar en el segundo ciclo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria.
- En la octava sesión del proceso de estudio en el caso de Secundaria, los alumnos se han enfrentado al problema de la *ambigüedad de escrituras* y al *cambio de base* de un sistema, cuando han realizado el análisis de SN maya. Sin embargo, en el caso de la Formación de Maestros estos dos problemas, no han sido estudiados con suficiente profundidad a pesar de haber sido mencionados a lo largo del estudio. Hay que señalar que el problema del cambio de base no fue tratado con profundidad en la Formación de Maestros porque ya había sido estudiado por los alumnos durante el curso anterior.
- El tiempo dedicado a trabajar en pequeños grupos dentro de la clase para resolver las tareas propuestas ha disminuido considerablemente en el caso de Secundaria (en comparación con la Formación de Maestros), debido al tiempo dedicado a cada sesión que no debe exceder de 50'y a la falta de costumbre de trabajo en equipo por parte de los alumnos.

Podemos decir, en resumen, que la diferencia fundamental entre ambos procesos proviene del cambio en la cuestión generatriz y la modificación de las sucesivas cuestiones cruciales que dicho cambio provoca. Mientras que en el caso de la Formación de Maestros, la cuestión generatriz propuesta era demasiado débil y corría el peligro de ser *trivializada* mediante una *respuesta en sentido débil* (una mera información: "el sistema más adecuado para representar los números naturales es el sistema posicional de base 10"), en el caso de Secundaria el carácter tecnológico de la cuestión generatriz propuesta, esto es, el hecho de que ésta se refiera a la comparación entre las características de diferentes técnicas de representación de los números naturales, ha aumentado su capacidad generadora del proceso y, sobre todo, ha integrado la razón de ser del SN posicional de una manera mucho más natural en el núcleo del programa de estudio.

Veamos ahora qué cambios sufre la Organización Matemática objeto de estudio cuando pasamos de la enseñanza Secundaria a la enseñanza Primaria.

4. UNA ORGANIZACIÓN DIDÁCTICA EN TORNO A LA NUMERACIÓN EN EL PRIMER CICLO DE LA EDUCACIÓN PRIMARIA

Al cambiar bruscamente de institución docente, esto es, al pasar del Segundo Ciclo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (14-16 años) al Primer Ciclo de Primaria (6-8 años), nos planteamos un conjunto de cuestiones que intentaremos responder, al menos "en acto", en la segunda parte de este capítulo:

(1) ¿Es posible utilizar en ambas instituciones docentes el "mismo" Modelo Epistemológico de Referencia para reconstruir el Sistema de Numeración posicional?

(2) Si comparamos con los casos, bastante similares entre sí, de la Formación de Maestros y el Segundo Ciclo de Secundaria, ¿cuáles serán las transformaciones que sufrirá el proceso de estudio de los Sistemas de Numeración como consecuencia de las nuevas condiciones y restricciones impuestas en el Primer Ciclo de Educación Primaria?

(3) ¿Será posible, por ejemplo, integrar en esta nueva institución la problemática de la representación (todavía inédita al iniciar esta etapa educativa) con la problemática del cálculo aritmético (aún más lejana para los alumnos de esta institución)?

(4) ¿Cómo se pondrá de manifiesto en este caso la *relatividad institucional* conjunta de lo matemático y lo didáctico?

(5) ¿Será pertinente utilizar como "*cuestión generatriz*" del proceso de estudio alguna de las cuestiones planteadas en los dos casos anteriores?

(6) Teniendo en cuenta que la relación institucional del Primer Ciclo de Primaria a los Sistemas de Numeración es, inicialmente, "casi vacía" (al menos para los sujetos en *posición ideal de* "*alumno*" de dicha institución) y que, por otra parte, esas mismas personas están en contacto e incluso son "sujetos" de otras instituciones cuya relación institucional a los Sistemas de Numeración es compleja y variada, ¿qué obstáculos es previsible que aparezcan para gestionar e integrar ese conjunto de relaciones institucionales en un proceso de estudio coherente y que no caiga en la artificialidad de separar radicalmente lo "escolar" de lo "no escolar"?

Algunas de estas cuestiones señalan, inevitablemente, en la dirección de problemas teóricos mucho más generales. Por ejemplo, sobre los *criterios* y la *base empírica* que utiliza el didacta para elaborar un Modelo Epistemológico de Referencia de cierta OM o para diseñar un proceso de estudio que permita reconstruir la OM en cuestión en una institución docente determinada. También hacen referencia a nuestra hipótesis, ya desarrollada en el capítulo I, de que todo Modelo Epistemológico de Referencia debe poder formularse como un modelo "dinámico" que, partiendo de una *cuestión generatriz*, provoque la emergencia de respuestas progresivamente más completas, aunque siempre provisionales, que generen una *sucesión de praxeologías matemáticas que constituyan una ampliación progresiva de la* OM *inicial*.

En el caso del estudio de los SN en Formación de Maestros y en Secundaria, hemos partido del diseño de un MER y éste nos ha delimitado con bastante precisión el tipo de organizaciones didácticas posibles (sustentadas por dicho MER). Por el contrario, en el caso del Primer Ciclo de Primaria, nos limitaremos aquí a presentar una concreción posible del MER inicial, siguiendo una propuesta previa diseñada y experimentada con las herramientas que proporciona la Teoría de las Situaciones Didácticas. En este caso hemos querido mostrar que, al disponer de un MER como sistema de referencia (relativo y provisional), es posible "reinterpretar" el itinerario didáctico seguido efectivamente como uno de los itinerarios "posibles" en coherencia con el modelo epistemológico que lo sustenta. En particular esta reinterpretación permite una mejor "explicación" de algunos de los fenómenos que aparecen a lo largo del proceso didáctico.

Las actividades utilizadas para la construcción de este proceso han sido tomadas de los trabajos realizados dentro de la Teoría de Situaciones Didácticas y presentados en los trabajos de Deramecourt, Olejniczak y Martin (1984), Destouesse (1996-1997), Gairin-Calvo (1988). Para ello empezaremos por enunciar la cuestión generatriz del proceso:

Cuestión generatriz *Q*:

"Dada una colección, qué podemos hacer para construir/obtener otra colección que tenga tantos elementos como la primera, en ausencia de ésta."

O también:

"Dadas dos colecciones, cómo determinar cuál de las dos tiene más elementos cuando ambas colecciones están alejadas."

Se propone a los alumnos un "*encuentro en situación*" con dichas cuestiones. Pero la situación, junto a la dificultad de la cuestión correspondiente, dependerá de los "valores" que tomen cada una de las siguientes variables:

- *Tamaño de la colección*
- *Disposición de los elementos*
- *Tipo de comunicación*
- *Tamaño de los números utilizables por el alumno*
- *Número de viajes que se permite realizar para ir de una colección a la otra*
- *La accesibilidad simultánea a las dos colecciones (esta variable sólo puede tomar dos valores)*
- *El hecho de que los objetos de las colecciones tengan o no movilidad (dos valores)*

Siguiendo el espíritu de la Teoría de Situaciones Didácticas (de la que, como hemos dicho, hemos obtenido la mayor parte de los componentes de la OD que vamos a diseñar) propondremos un proceso de estudio en el que los alumnos, guiados por la *evolución progresiva de la situación* a la que se enfrentan, deberán ir modificando sucesivamente la técnica matemática que utilizan para poder resolver los problemas que van apareciendo. En concreto, cuando el profesor quiera conseguir que los alumnos cambien a una técnica más eficaz, deberá proponer *tipos de problemas* con las siguientes cualidades:

- El alumno dispondrá de una *técnica inicial* o *técnica base* para empezar a resolver los problemas del primer tipo.
- Esta técnica inicial no debe coincidir con la *técnica objetivo*, que será la técnica óptima para resolver el tipo de problemas considerado.
- Los problemas deben presentarse al alumno como un medio no didáctico, es decir, el alumno no debe percibir la intencionalidad didáctica de la tarea propuesta.
- El alumno debe disponer de medios para comprobar si la solución o respuesta obtenida es válida o no, es decir, debe disponer de una técnica que le permita realizar dicho contraste.

En el lenguaje de la Teoría de las Situaciones Didácticas este tipo de tareas matemáticas se llaman "situaciones adidácticas". Sin querer equiparar las nociones de "situación" en la Teoría de las Situaciones Didácticas y "tipo de tareas matemáticas" en la TAD, queremos subrayar que se trata de nociones mucho más próximas de lo que algunas interpretaciones suponen. Una *situación* en la TSD contiene las condiciones de realización de la actividad matemática que ella misma (la situación) permite contextualizar y, en particular, las restricciones institucionales que pesan sobre las posibles formas de llevar a cabo dicha actividad. Cuando se interpreta un *tipo de tareas matemáticas* como una noción aislada y descontextualizada ("Descomponer un polinomio en factores primos"), la distancia entre ambas nociones es enorme. Pero si nos tomamos en serio el postulado de la TAD según el cual la *unidad mínima de análisis* de los procesos didácticos debe contener una Organización Didáctica asociada a una OM local (Bosch y Gascón 2003), entonces deberemos interpretar un *tipo de tareas matemáticas* como un componente inseparable de una Praxeología Matemático-Didáctica que vive en una institución determinada y que es el resultado de un complejo proceso de transposición institucional. Según esta última interpretación, un tipo de tareas matemáticas siempre hace referencia de manera inseparable a una técnica institucionalizada (esto es, a un dispositivo y un repertorio de gestos compartidos en dicha institución), a un entorno tecnológico-teórico necesario para que la práctica matemática correspondiente pueda vivir y desarrollarse y a una forma concreta de organizar esa práctica matemática. Desde este punto de vista la noción de "*tipo de tareas matemáticas*" es bastante próxima a la de "*situación*", aunque pertenece a teorías didácticas diferentes.

El proceso de estudio que vamos a desarrollar pretende dar una respuesta inicial, general y eficaz a la cuestión generatriz propuesta ***Q*** y, para ello, utilizaremos el siguiente recorrido:

- *La OM inicial.* En una primera fase del recorrido, propondremos problemas que permitan al alumno de primer curso de Primaria iniciar su resolución con una técnica matemática base, sin necesidad de utilizar las palabras-número. Una de estas técnicas iniciales es la de la correspondencia término a término, donde cada objeto de la colección es representado por el símbolo I. Aquí ya tenemos un primer tipo muy rudimentario de Sistema de Numeración, aquél en el que sólo disponemos de un símbolo y con el que podemos representar cualquier número, por ejemplo, el 12 se representa IIIIIIIIIIII. Al cambiar las características de los problemas matemáticos se empujará a los alumnos a buscar una técnica más eficaz para resolver dichos problemas: aparecerá así la técnica de conteo. Aquí el uso que se hace, tanto en su forma oral como escrita, del número es de una forma global[5], mediante la designación oral, aunque también se

[5] Por ejemplo el número "doce" es leído globalmente, sin utilizar el hecho de que en la escritura con cifras aparece la noción de agrupamiento de diez en diez. Es decir, el alumno no percibe todavía esta escritura como un grupo de diez y otro de 2 unidades. Además, el alumno también sabe que 12 es el siguiente de 11 y el anterior de 13, pero sin relacionarlo con que 2 es el siguiente de 1 y el anterior de 3.

escriban y se lean dichos números. La numeración que se utiliza es la que representa cada número mediante un símbolo distinto, en este caso una designación oral distinta.

- *El paso a OM_a: las agrupaciones*. En la segunda fase, propondremos problemas donde la técnica de conteo se muestre ineficaz, lo que va a conducir a la utilización de la técnica de la escritura aditiva, técnica que podríamos considerar dentro de $\mathbf{OM_a}$. El alumno va a disponer de una colección de símbolos para designar los números (aproximadamente hasta el veinte), pero las condiciones de la situación no le van a permitir resolverla sólo con esos símbolos. Por ello, va a ser necesario constituir o realizar agrupamientos, y se podrán utilizar expresiones orales o escritas de tipo aditivo para designar el cardinal de toda la colección considerada. Por ejemplo, para una colección de 46 elementos, como no se dispone más que de símbolos hasta el veinte, la técnica utilizada consistiría en hacer agrupaciones como 9 y 12 y 10 y 7 y 8.

- *El paso a OM_h: agrupaciones regulares*. En la tercera fase, el tipo de problemas que habrá que resolver va a requerir que la técnica de realización de agrupamientos o paquetes cualesquiera evolucione hacia la técnica de agrupamientos equipotentes, de modo que en una colección de 47 elementos se dirá que hay 8 y 8 y 8 y 8 y 8 y 7 elementos y de modo más económico se expresará que hay 5 grupos de 8 y 7. De este modo habremos llegado a una técnica aditivo-multiplicativa donde hay dos tipos de símbolos: unos que indican el número de grupos y otros el número de elementos de cada grupo. Aquí nos encontramos dentro de $\mathbf{OM_h}$.

- *El paso a OM_p: agrupaciones regulares en base 10*. En la cuarta fase, dada la importancia que tiene el realizar agrupamientos y además agrupamientos equipotentes, va a ser necesario ponerse de acuerdo en el número de elementos que tendrá cada uno de los grupos que vamos a realizar. Por ello, lo lógico será llegar al acuerdo de que se harán siempre grupos de 10. Por tanto, en una colección de 47 elementos se dirá que hay 4 grupos de 10 y 7. Con lo que a partir de este momento, y buscando una técnica más económica, no será necesario indicar el número de elementos que tiene cada grupo y se podrá decir que en 47 el primer símbolo de la izquierda indica el número de grupos de 10 y el segundo símbolo el número de elementos sueltos. Así hemos llegado a la técnica de la escritura posicional, es decir, estamos en la transición de $\mathbf{OM_h}$ a $\mathbf{OM_p}$.

- *El trabajo en OM_p: agrupamientos regulares y sucesivos y la escritura posicional*. En la última fase del recorrido, y para generalizar y trabajar la técnica de la escritura posicional, hay que plantear situaciones que requieran la realización de *agrupamientos regulares y sucesivos*, de modo que primero habrá que hacer grupos de 10, a continuación agrupamientos de 10 de los grupos de 10 que hemos obtenido, después agrupamientos de 10 de los grupos de 10 de 10 obtenidos y así sucesivamente. Así en una colección de 2437 elementos, después de haber realizado todos los agrupamientos posibles, tendremos 7 elementos sueltos, 3 grupos de 10, 4 grupos de 100 (o sea, 4 grupos de 10 de 10) y 2 grupos de 1000 (o sea, 2 grupos de 10 de 10 de 10). Con esto ya podemos considerar que estamos dentro de $\mathbf{OM_p}$.

En el texto siguiente, proponemos una versión del MER presentado en el capítulo II que sigue el itinerario que acabamos de describir brevemente, en vistas al diseño de una Organización Didáctica para el estudio de la Numeración con alumnos del Primer ciclo de la Educación Primaria. Con esta "nueva" versión del MER pondremos de manifiesto, una vez más, la relatividad institucional conjunta de lo matemático y lo didáctico, en particular, la incidencia de las restricciones institucionales sobre el tipo de actividad matemática y las posibles formas de organizar dicha actividad en una institución determinada. Primero definiremos cada una de las técnicas matemáticas cuyas variaciones generan la dinámica del proceso, indicando la dirección o recorrido de evolución que propondremos para dichas técnicas. En segundo lugar, iremos describiendo y analizando los tipos de problemas que se han de llevar a cabo y su relación con las técnicas asociadas, señalando, en cada caso, qué valores toman las variables definidas en cada situación.

4.1. Las técnicas elementales de la numeración

Con el fin de clarificar en qué consiste cada una de las técnicas matemáticas a construir por los alumnos, daremos a continuación una descripción detallada de cada una de ellas y propondremos un esquema de la evolución y el recorrido realizado por cada una de dichas técnicas.

→ τ_{i01} = "*La correspondencia término a término*" o "*correspondencia uno a uno*" consiste en ir asociando o relacionando cada objeto de la primera colección con un objeto distinto de la segunda colección, de modo que cada objeto de la primera colección tenga asociado un único elemento de la segunda colección y que cada elemento de la segunda colección esté relacionado con un solo elemento de la primera colección.

→ τ_{i02} = "*La correspondencia grupo a grupo*" consiste en ir asociando a cada grupo o subconjunto de la primera colección un subconjunto o grupo equipotente distinto de la segunda colección.

Esta técnica es utilizada cuando el tamaño de las colecciones aumenta. En otras palabras, esta técnica es una generalización de la anterior donde cada término en lugar de reducirse necesariamente a un solo elemento, es un grupo o subconjunto.

→ τ_{i03} = *“La estimación puramente visual”* consiste en comparar la colección con otra presente o no, utilizando su disposición espacial. Esta técnica es muy poco fiable.

→ τ_{i1} = *“El reconocimiento inmediato de la cantidad”* consiste en enunciar rápidamente el número de elementos de una colección sin necesidad de realizar un conteo de modo explícito. Esta técnica puede ser utilizada para colecciones cuyo número de elementos no sea mayor de 5 ó 6.

→ τ_{i2} = *“La técnica de conteo”* consiste en realizar la siguiente serie de tareas:

1. Distinguir dos elementos diferentes de un conjunto dado.

2. Reconocer la pertenencia o no de todos los elementos a la colección.

3. Elegir un primer elemento de la colección.

4. Enunciar la primera palabra-número (uno).

5. Determinar un sucesor en el conjunto de elementos no elegidos aún.

6. Atribuir una palabra-número (la siguiente de la anterior en la serie de palabras número) al sucesor.

7. Conservar en la memoria las elecciones anteriores.

8. (Volver a comenzar en 5) y 6 sincronizándoles.

9. Discernir cuando se ha elegido el último elemento.

10. Enunciar la última palabra-número.

11. Considerar que la última palabra dicha es el cardinal de toda la colección[6].

En otras palabras, *el conteo* es un medio de cardinar[7] una colección y para ello hay que poner en correspondencia uno a uno cada objeto de la colección con una y una sola palabra-número, lo que supone dominar la enumeración. Además, hay que memorizar la cantinela numérica (uno, dos, tres,...) en el buen orden y tener en cuenta que la última palabra-número enunciada en el conteo designa una propiedad de la colección de objetos (principio cardinal), Gelman, (1983).

También podemos decir que *el conteo* es un procedimiento de *cardinación* que utiliza la cantinela siguiendo los cinco principios siguientes:

1. Principio de adecuación única. Decir una designación y una sola para cada objeto.

[6] Se trata del paso de considerar la última palabra-número enunciada como una propiedad del último elemento, a considerarla como una propiedad (el cardinal) de toda la colección.

[7] “Cardinar una colección” consiste en atribuir a una colección el nombre o la escritura de su cardinal (el número de sus elementos), por cualquier procedimiento.

2. Principio de orden estable: La serie de palabras de la cantinela debe ser siempre la misma y dicha siempre en el mismo orden.
3. Principio cardinal: Asignar la última palabra pronunciada al número de objetos de la colección.
4. Principio de abstracción: Hay que hacer abstracción de la naturaleza de los objetos.
5. Principio de la no pertinencia del orden: El comienzo del conteo con un objeto u otro de la colección no tiene ninguna consecuencia sobre el resultado.

→ τ_{a1} = "*Escritura aditiva con agrupamientos no necesariamente equipotentes*" consiste en realizar agrupamientos o paquetes no necesariamente equipotentes y a continuación expresar el número de elementos de la colección mediante la expresión oral o escrita del número de elementos de cada paquete o agrupamiento. Así, por ejemplo, para una colección de 65 elementos, se puede decir que tiene 12 y 9 y 8 y 13 y 7 y 10 y 6 elementos, o también, 12+9+8+13+7+10+6 elementos.

→ τ_{a2} = "*Escritura aditiva con agrupamientos equipotentes*" consiste en realizar agrupamientos equipotentes y expresar el número de elementos de una colección mediante la expresión oral o escrita del número de elementos de cada grupo. Así para una colección de 65 elementos, podremos decir que hay 9 y 9 y 9 y 9 y 9 y 9 y 9 y 2 elementos, o también, 9+9+9+9+9+9+9+2 elementos.

→ τ_{a3} = "*Escritura aditiva con agrupamientos equipotentes y el mismo tipo de agrupamiento para todas las colecciones*"

→ τ_{h1} = "*Escritura aditivo-multiplicativa*" consiste en realizar agrupamientos equipotentes y luego contar el número de grupos equipotentes y el número de elementos sueltos, de modo que la expresión del número de elementos de la colección va a contener dos tipos de símbolos, uno que indicará el número de agrupamientos y el otro el número de elementos que tiene cada grupo. Así para la colección de 65 elementos, se puede expresar que tiene 7 grupos de 8 y 9 elementos, o también, de forma más reducida, 7 de 8 y 9 elementos. Se trata de escribir el número en la forma "*n* de *b* y *a*", donde $b \geq 2$ y *n* y *a* números cualesquiera.

→ τ_{h2} = "*Escritura aditivo-multiplicativa del tipo* "*n* de *b* y *a*", *donde* $b \geq 2$, $a<b$ y *n cualquiera*".

→ τ_{h3} = "*Escritura aditivo-multiplicativa del tipo* "*n* de *b* y *a*", *donde* $b = 10$, $a<b$ y *n cualquiera*".

→ τ_p = "*Escritura posicional en base 10*" donde cada uno de los agrupamientos realizados (siempre ya de 10, de 100, de 1000, etc.) viene indicado por las distintas posiciones y las cifras que aparecen en cada una de las posiciones indican la cantidad de dichos agrupamientos. De este modo, una colección de 325 elementos indica que hay 3 grupos de 100, 2 grupos de 10 y 5 elementos sueltos.

En resumen, podemos sintetizar gráficamente la evolución de las técnicas descritas de la manera siguiente:

- La Organización Matemática inicial **OM$_i$**

$$\begin{tikzcd}
\tau_{i01} \arrow[dr] \arrow[ddrr] & & \\
 & \tau_{i02} \arrow[dr] & \\
\tau_{i03} \arrow[rr] & & \tau_{i2} \\
 & \tau_{i1} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

- La Organización Matemática aditiva **OM$_a$**

$$\tau_{i2} \longrightarrow \tau_{a1} \longrightarrow \tau_{a2} \longrightarrow \tau_{a3}$$

- La Organización Matemática aditivo-multiplicativa **OM$_h$**

$$\tau_{a3} \longrightarrow \tau_{h1} \longrightarrow \tau_{h2} \longrightarrow \tau_{h3}$$

- La Organización Matemática posicional **OM$_p$**

$$\tau_{h3} \longrightarrow \tau_{p}$$

4.2. La Organización Matemática inicial

El primer *tipo de tareas* a proponer para conseguir *el primer encuentro* con la cuestión generatriz de la Numeración es la siguiente:

T$_{i1}$ = *Disponemos de una colección de* ***n*** *platos y tenemos que conseguir una colección de cucharas para que haya una en cada plato.*

Este tipo de tareas consiste en la construcción de una colección equipotente a una dada donde:

*El tamaño de la colección **n** es pequeño (**n** = 6, **n** = 4, **n** = 9).*

Ambas colecciones están presentes.

Los objetos son manipulables y materiales.

Las técnicas matemáticas básicas o iniciales, donde no es necesario utilizar las palabras-número para resolver el tipo de tareas anterior, son:

$\tau_{\mathbf{i01}}$ = "*La correspondencia término a término*"

$\tau_{\mathbf{i02}}$ = *"La correspondencia grupo a grupo"*

$\tau_{\mathbf{io3}}$ = *"La estimación puramente visual"*

Partimos del supuesto que los alumnos ya conocen estas técnicas básicas y, por tanto, ellas deben formar parte de sus conocimientos previos.

Para resolver la tarea $\mathbf{T_{i1}}$**,** también existe otra técnica matemática básica, donde sí se utiliza el número, pero sólo para los casos en que $n < 6$:

$\tau_{\mathbf{i1}}$ = *El reconocimiento inmediato de la cantidad*

El momento exploratorio de esta OM inicial comienza cuando los alumnos se enfrentan y empiezan a resolver el tipo de tareas $\mathbf{T_{i1}}$. Además, si queremos conseguir que el alumno deje de utilizar la técnica $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{i01}}$ y pase a utilizar la técnica $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{i02}}$, variaremos la tarea $\mathbf{T_{i1}}$ aumentando el tamaño ***n*** de la colección.

Si hay alumnos que tienen dificultades en utilizar estas técnicas iniciales, el profesor deberá proponer la realización de tareas de enumeración[8] donde el alumno tenga que utilizar alguna de las técnicas de enumeración, técnicas que son previas al conteo y que son imprescindibles para que el alumno construya la técnica de conteo.

El objetivo siguiente del enseñante es conseguir que alumno deje de utilizar las técnicas $\tau_{\mathbf{i01}}$, $\tau_{\mathbf{i02}}$ y $\tau_{\mathbf{io3}}$. Debe ser el propio alumno el que las considere poco económicas e ineficaces para resolver las tareas que se le proponen. En definitiva, se pretende conseguir que sean los alumnos los que decidan usar la técnica matemática $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{i2}}$, que hemos llamado *el conteo*.

[8] "Enumerar una colección" consiste en pasar revista una y una sola vez a cada elemento de una colección. Etimológicamente, esta palabra se refiere al número aunque esta acción no necesita el conocimiento de los números. Para encontrar una propuesta de tareas de enumeración aconsejamos la siguiente publicación: (Briand, J; Loubet, M.; Salin, M.H.; (2004)) *Apprentissages mathèmatiques en maternelle* Hatier Pédagogie Paris.

Para ello, propondremos tareas donde la construcción de la segunda colección se haga en ausencia de la primera e iremos aumentando el tamaño de *n*. Esto consiste, en definitiva, en proponer a los alumnos que realicen varias tareas del tipo siguiente:

$\mathbf{T_{i2}}$ = *Se dispone de una colección de* ***n*** *platos y tenemos que ir a buscar al otro rincón de la clase una colección de cucharas para que haya una en cada plato.*

Este tipo de tareas se caracteriza por:

Tamaño: primero para ***n*** *< 6 y luego para 6 <* ***n*** *< 12.*

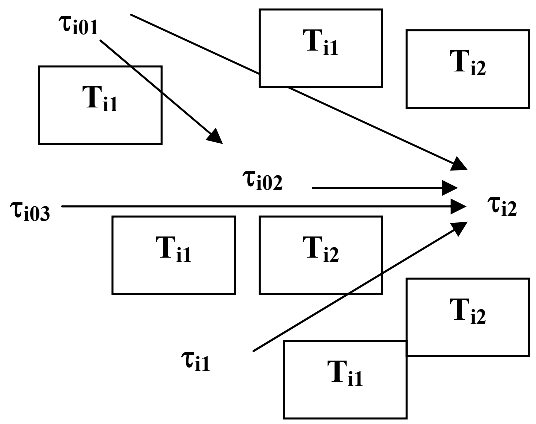
No se tiene acceso a las dos colecciones a la vez.

Los objetos son manipulables y movibles.

El número permitido de viajes puede ser primero ***n****, después menor que* ***n****, y al final igual a 1.*

El tipo de comunicación es autocomunicación

En consecuencia, el esquema de la evolución de las primeras técnicas queda como sigue:



El enseñante propondrá diferentes tareas del tipo anterior hasta conseguir que los alumnos acaben utilizando la técnica τ_{i2} (= *El conteo*). Para ello, después de que los alumnos lleven a cabo cada una de las tareas del tipo anterior, el enseñante debe realizar una puesta en común con todos los alumnos, con el objetivo de que cada alumno explique la técnica utilizada para resolverla. Con esta serie de actividades se conseguirá hacer vivir tanto *el momento del trabajo de la técnica* como los de *la evaluación e institucionalización*.

Al final de estas tareas los alumnos deben llegar a la conclusión de que la mejor técnica matemática para realizar las tareas del tipo $\mathbf{T_{i2}}$ es τ_{i2} ("el conteo").

Otro objetivo de esta primera etapa del proceso de estudio (que puede considerarse como una *tarea didáctica* que debe realizarse para que el proceso de estudio no se estanque) es conseguir que los alumnos afiancen el uso de τ_{i2}. Para ello, el enseñante propondrá tareas análogas a las del tipo $\mathbf{T_{i2}}$, donde el valor de ***n*** debe ir cambiando hasta tomar valores en torno a 20, y el número de viajes permitidos tienda a 1.

Una vez que los alumnos ya han descubierto que la utilización de la técnica τ_{i2} les permite resolver de modo eficaz las tareas del tipo $\mathbf{T_{i2}}$, el profesor, con el objetivo de afianzar y hacer robusta en los alumnos dicha técnica, propondrá actividades análogas a $\mathbf{T_{i2}}$, como las siguientes:

$\mathbf{T_{i21}}$ **=** *Tenemos una colección de **n** bolígrafos y deberemos ir a buscar al otro rincón de la clase una colección de capuchones para que haya uno para cada bolígrafo.*

$\mathbf{T_{i22}}$ **=** *Tenemos una colección de **n** círculos dibujados y necesitamos ir a buscar al otro rincón de la clase una colección de fichas para poner una en cada círculo.*

$\mathbf{T_{123}}$ **=** *Tenemos una colección de **n** plazas libres en un autobús y tenemos que ir a buscar al otro rincón de la clase una colección de viajeros para que todas las plazas libres queden ocupadas.*

Las características de este tipo de tareas, análogas a $\mathbf{T_{i2}}$, serán:

Tamaño: ***n*** *< 20.*

No se tiene acceso a las dos colecciones a la vez.

Los objetos son manipulables y movibles.

La tarea tiene que realizarse mediante un único viaje.

El tipo de comunicación es de autocomunicación.

Hasta aquí, para poder realizar los dos tipos de tareas $\mathbf{T_{i1}}$ y $\mathbf{T_{i2}}$ propuestas, los alumnos han utilizado, básicamente, las técnicas iniciales τ_{i01}, τ_{i1} y τ_{i2} que habíamos considerado como técnicas iniciales extremas en nuestro MER.

τ_{i01} consiste en la correspondencia término a término, donde cada objeto de la colección es representado por un solo tipo de símbolo, por ejemplo *I*. Es una técnica de representación de los números muy poco económica, que sólo dispone de un símbolo y con el se puede representar cualquier número.

τ_{i1} y τ_{i2} son técnicas donde se utilizan las palabras-número de forma global y pueden considerarse también como técnicas iniciales extremas donde cada número viene designado por una palabra distinta.

4.3. La Organización Matemática aditiva

Una vez que todos los alumnos dominan τ_{i2}, el objetivo a conseguir (que se corresponde con una *tarea didáctica* a cumplir) consiste en que los alumnos modifiquen y hagan evolucionar la técnica τ_{i2} hacia τ_{a1}. Para este *primer encuentro* con τ_{a1} el enseñante va a proponer un tipo de tareas análogas a $\mathbf{T_{a1}}$, donde la comunicación será escrita. Va a dividir la clase en un número par de grupos, donde cada grupo A se empareja con un grupo B. Un grupo hará de emisor y el otro de receptor y luego se intercambiarán los papeles[9].

$$\tau_{i2} \xrightarrow{\boxed{\mathbf{T_{a1}}}} \tau_{a1}$$

Por tanto, el próximo objetivo es conseguir que el alumno construya la técnica τ_{a1}:

τ_{a1} = Escritura aditiva con agrupamientos no necesariamente equipotentes.

El enseñante podrá proponer a los alumnos tareas $\mathbf{T_{a1}}$ de los dos tipos siguientes:

$\mathbf{T_{a11}}$ = *Se divide la clase en un número par de grupos (dos o tres niños por grupo). Cada grupo A se empareja con un grupo B. Cada grupo A dispone de una hoja en la cual hay dibujada una colección de flores sin pétalos (pero con el hueco de los **n** pétalos indicado). Este grupo debe transmitir al grupo B un mensaje escrito para que traiga justo los **n** pétalos necesarios para rellenar los huecos, y de este modo todas las flores tengan los pétalos indicados. Para **n** > 60.*

Las características de este primer tipo de tareas son:

*Tamaño: 60 < **n** < 80.*

No se tiene acceso a las dos colecciones a la vez.

Hay que producir un mensaje escrito e interpretar el mensaje escrito por otros.

[9] En la terminología de la TAD diremos que este *dispositivo*, junto al *repertorio de gestos* que hemos descrito, constituyen la *técnica didáctica* que se propone para llevar a cabo la tarea didáctica enunciada.

El tipo de comunicación es de comunicación escrita.

La disposición de los elementos induce el tipo de agrupamiento.

$\mathbf{T_{a12}}$ = *Dada una cantidad* ***n*** *> 9 de platos, los niños deben pedir (por escrito) a una marioneta que le dé los vasos necesarios para tener tantos como platos. La marioneta no puede hablar, y sólo sabe interpretar mensajes que constituyan números del 1 al 9.*

Las tareas de este segundo tipo se caracterizan por las siguientes propiedades:

No se aumenta bruscamente el tamaño de la colección.

Se impone la restricción de que sólo se pueden utilizar los números del 1 al 9, debido a la condición de la marioneta.

No se tiene acceso a las dos colecciones a la vez.

Hay que producir un mensaje escrito. La comunicación es escrita.

No hay disposición especial de los elementos.

Con la resolución de este tipo de tareas los alumnos empiezan a vivir el *momento exploratorio* de la técnica aditiva. Una vez que ha surgido la técnica $\boldsymbol{\tau_{a1}}$ = *La escritura aditiva con agrupamientos no necesariamente equipotentes*, se deben seguir proponiendo tareas matemáticas del tipo $\mathbf{T_{a1i}}$ anterior, con el fin de que todos los alumnos continúen explorando y familiarizándose con dicha técnica.

La disposición de objetos de la primera colección también puede inducir a utilizar $\boldsymbol{\tau_{a1}}$, por ello, en un primer momento, para conseguir que los alumnos se decidan a emplear la técnica $\boldsymbol{\tau_{a1}}$, se puede optar por colocar en grupos o en paquetes la colección del emisor. Posteriormente, esta disposición debe presentarse de modo que los objetos estén colocados en forma arbitraria, con el fin de que la técnica $\boldsymbol{\tau_{a1}}$ no dependa de la disposición de los objetos de la colección. Al principio, para indicar que la colección tiene 60 objetos, los alumnos dirán por ejemplo, que la colección tiene 8, 9, 10, 7, 12, 5 y 9 elementos, y será el enseñante el que indique que esa escritura a partir de un momento determinado, deberá realizarse en la forma 8 + 9 + 10 + 7 + 12 + 5 + 9. De este modo, será el enseñante el que realice la institucionalización del uso del signo "+" en dicha representación de los números.

Para afianzar, rutinizar y flexibilizar la técnica matemática $\boldsymbol{\tau_{a1}}$, habrá que proponer más tareas del tipo $\mathbf{T_{a1i}}$. De este modo, los alumnos vivirán el *momento del trabajo de la técnica* y se conseguirá que la utilización de τ_{a1} no dependa de la disposición de los objetos de la colección.

De este modo, a través de las tareas del tipo T_{a1} y T_{a1i} se puede hacer evolucionar desde la técnica τ_{i2} a la técnica τ_{a1}.

$$\tau_{i2} \xrightarrow{\boxed{T_{a1}}\ \boxed{T_{a1i}}} \tau_{a1}$$

T_{a13} = *Tenemos una colección de **n** platos ubicados espacialmente en forma arbitraria y hay que ir a buscar al otro rincón de la clase una colección de cucharas para que haya una en cada plato. Siendo **n** > 60*

Este tipo de tareas se caracteriza por:

*El tamaño es grande (60 < **n** < 80).*

El tipo de comunicación es autocomunicación.

No hay disposición especial de los elementos.

No se tiene acceso a las dos colecciones a la vez.

*El número de viajes debe ser menor que **n** y, al final, igual a 1.*

T_{a14} = *Tenemos una colección de **n** coches y tenemos que mandar un mensaje escrito a un compañero con el fin de que nos reserve una colección de plazas de aparcamiento para que podamos poner un coche en cada plaza. Siendo **n** > 70*

Las características de este tipo de tareas será:

*El tamaño es grande (70 < **n** < 90).*

El tipo de comunicación es escrita.

No hay disposición especial de los elementos.

No se tiene acceso a las dos colecciones a la vez.

T_{a15} = *Tenemos una colección de **n** conejos y tenemos que mandar un mensaje escrito a un compañero con el fin de que nos traiga una colección de zanahorias para que podamos dar una zanahoria a cada conejo. Siendo **n** > 80.*

Este tipo de tareas tiene las características siguientes:

*El tamaño es grande (80 < **n** < 90).*

El tipo de comunicación es escrita.

No hay disposición especial de los elementos.

No se tiene acceso a las dos colecciones a la vez.

Cada una de las tareas anteriores puede descomponerse en dos tipos de subtareas que pueden ser consideradas “inversas” (Fonseca 2004) entre sí:

- Dada una colección designar su cardinal y
- Dada la designación del cardinal de una colección construir dicha colección.

Cuando se proponen como tipos de tareas de comunicación escrita u oral, el primer tipo de tarea es resuelto por el emisor y el segundo tipo por el receptor, por ello, es conveniente que los alumnos se intercambien los papeles de emisor y receptor.

Interesa que el alumno domine de manera robusta la técnica $\boldsymbol{\tau_{a1}}$. Siguiendo con el *momento del trabajo de la técnica*, será oportuno proponer tareas de comparación (**TC**) de colecciones a partir de sus escrituras aditivas como las siguientes:

> $\mathbf{TC_{a1}}$ **=** *Los alumnos juegan en equipos de dos: el alumno A y el alumno B. El equipo dispone de un dado y A de una colección de 36 fichas azules y B de una colección 36 fichas rojas. Cada alumno del equipo, a su turno, lanza el dado seis veces y cada vez anota el resultado en una hoja. Al final de la partida, cada equipo determina cuál de los dos alumnos ha ganado, escribiendo su nombre en la hoja e indicando porqué ha ganado.*

Aquí se pretende que los alumnos comparen colecciones a partir de las escrituras aditivas obtenidas por cada alumno, como resultado de haber lanzado el dado seis veces. Por ejemplo: el alumno A puede haber obtenido “6, 4, 5, 3, 2 y 5” y el alumno B “5, 5, 4, 3, 6 y 4”. Después, con el fin de sistematizar esta comparación usando las escrituras aditivas, se proponen ejercicios de supuestas partidas de 5 turnos y los alumnos de forma individual deben indicar quién ha ganado.

El siguiente objetivo es conseguir que el alumno empiece a utilizar agrupamientos equipotentes. Para ello, el enseñante propondrá la comparación de dos colecciones a partir de las escrituras aditivas de sus cardinales, utilizando para ello las tareas del tipo $\mathbf{TC_{a2}}$ que describiremos a continuación[10].

[10] Se trata, de nuevo, del planteamiento de una *tarea didáctica* y de la utilización de una *técnica didáctica* (que, como todas, puede describirse como la realización de cierto repertorio de gestos en el ámbito de un dispositivo) para llevar a cabo dicha tarea.

Una condición importante, que debe cumplirse para poder proponer este tipo de tareas, es que los alumnos no deben ser capaces, todavía, de utilizar las escrituras usuales del número para *70 < n < 80*. De esta manera podremos conseguir que los alumnos utilicen la técnica:

τ_{a2} = *Escritura aditiva con agrupamientos equipotentes*

$$\tau_{a1} \xrightarrow{\boxed{TC_{a2}}} \tau_{a2}$$

De este modo, como indica el esquema anterior, una vez que los alumnos se han familiarizado con la técnica τ_{a1}, queremos provocar que los alumnos hagan evolucionar la técnica τ_{a1} hacia la técnica τ_{a2} de manera que la tarea matemática propuesta exija la realización de agrupamientos equipotentes. Para ello, el maestro propondrá un tipo de tareas análogas a la siguiente:

TC_{a21} = *Dividimos la clase en equipos y cada equipo, a su vez, en dos grupos, el grupo A y el grupo B que están alejados el uno del otro, de modo que el grupo B no puede ver la colección que tiene el grupo A, ni el grupo A la colección que tiene el grupo B . Se va a repartir a cada equipo dos colecciones de vagones de distinto tamaño, o sea, dos trenes, uno de* ***n*** *vagones rojos para el grupo A y otro de* ***m*** *vagones azules para el grupo B. Dentro de cada equipo, cada grupo debe escribir el número de elementos de su colección. Con estas escrituras ambos grupos deben juntarse en otra mesa alejada de las mesas donde están sus colecciones, y ahí compararlas a partir de las escrituras que han realizado. Ganará el equipo que antes haya logrado realizar correctamente la comparación.*

Este tipo de tareas se caracteriza porque:

El tamaño es 70 < ***n*** *< 80 y 70 <* ***m*** *< 80.*

El tipo de comunicación es escrita.

No hay disposición especial de los elementos.

No se tiene acceso a las dos colecciones a la vez

La técnica que permite la comparación más rápida es τ_{a2} = *Escritura aditiva con agrupamientos equipotentes*, con la condición de que se utilice el mismo tipo de agrupamiento para las dos colecciones.

Queremos conseguir que el alumno descubra la equivalencia entre las técnicas τ_{a1} y τ_{a2} y, posteriormente, pueda decidir cuál es más eficaz. Para ello, propondremos un tipo de tareas como el siguiente:

T_{a21} = *Tenemos una colección de 12 + 7+ 13 + 9 + 8 huevos y para venderlos debemos colocarlos en cajas de 6. ¿Cuántas cajas necesitamos y cuántos huevos quedan sueltos?*

Las características de este tipo de tareas son:

*El número de elementos de las colecciones viene dado en la forma "**a + b + c + … + s**", con **a, b, c, … s** números naturales entre 2 y 20.*

*El tipo de agrupamiento que se pide realizar es de **n** en **n**, con 2 < **n** < 12.*

A partir de la expresión escrita del número de elementos de una colección en la forma de escritura aditiva con agrupamientos cualesquiera, haya que expresar dicho número con agrupamientos equipotentes.

El esquema siguiente indica que, partiendo de la técnica τ_{a1} y mediante las tareas del tipo **TC_{a2}** y del tipo **T_{a21}**, se puede conseguir que el alumno construya la técnica τ_{a2} y posteriormente afiance su empleo.

$$\tau_{a1} \xrightarrow{\boxed{TC_{a2}}\ \boxed{T_{a21}}} \tau_{a2}$$

Una vez que los alumnos han empezado a utilizar τ_{a2}, queremos conseguir que los alumnos descubran las ventajas de utilizar dicha técnica y además caigan en la cuenta de que conviene hacer el mismo tipo de agrupamiento en las diferentes colecciones. Para ello, se propondrán tareas del tipo siguiente:

TC_{a22} = *Tenemos tres colecciones dibujadas de objetos, una de **n** galletas de sésamo colocadas en grupos de 12, otra de **m** tortas de arroz en grupos de 7 y una tercera de **p** aceitunas dispuestas en desorden, y debéis escribir en una hoja aparte el número de elementos de cada colección y a continuación comparar las tres colecciones a partir de sus escrituras*

Las características de este tipo de tareas son:

*El tamaño para **n**, **m** y **p** está entre 60 y 80.*

Sí hay una disposición especial de los elementos.

El tipo de comunicación es escrita.

Las colecciones están separadas y no es posible el acceso simultáneo a todas ellas.

$$\tau_{a2} \xrightarrow{\boxed{TC_{a22}}} \tau_{a3}$$

Con el esquema anterior indicamos que con la tarea $\mathbf{TC_{a22}}$ queremos provocar que el alumno utilice τ_{a2} con el mismo tipo de agrupamiento para todas las colecciones, es decir, que τ_{a1} se desarrolle en manos de los alumnos y desemboque en τ_{a3}.

Aquí el enseñante debe proponer una puesta en común en la que se evaluará lo realizado hasta este momento. El objetivo que se pretende es que los alumnos convengan qué escritura es la que permite la comparación más fácil. De este modo, los alumnos junto con el enseñante empiezan a vivir los *momentos de evaluación y de institucionalización* de la técnica aditiva.

Se pretende que al final lleguen a la conclusión de que lo importante es hacer agrupamientos equipotentes y siempre del mismo número de elementos, es decir que los alumnos utilicen la técnica:

> τ_{a3} = *Escritura aditiva con agrupamientos equipotentes y el mismo tipo de agrupamiento para todas las colecciones*

Hasta aquí, los alumnos han descubierto las ventajas de algunas de las técnicas aditivas de representación de los números. Han realizado su estudio dentro de la $\mathbf{OM}_a$, limitándose a la construcción de la técnica de representación aditiva y a los aspectos práctico-técnicos de dicha OM.

En este proceso de estudio nos centraremos en el bloque práctico-técnico de la $\mathbf{OM_a}$, porque en esta fase del proceso de estudio lo que pretendemos es que los alumnos puedan construir la técnica de representación posicional como *técnica óptima* para resolver las tareas problemáticas que se les plantean. Para conseguir este objetivo es necesario que los alumnos hayan construido previamente la técnica aditiva como parte de una OM intermedia que va a dar sentido a la técnica posicional.

Esta técnica aditiva todavía presenta limitaciones. Para seguir avanzando en el estudio de la Numeración habrá que proponer nuevas tareas que requieran una mejora de la técnica, sobre todo, en lo que se refiere a la *economía de las escrituras*. Es en esta dirección que proponemos el trabajo en la nueva Organización Matemática en torno a la escritura aditivo-multiplicativa de los números.

4.4. La Organización Matemática aditivo-multiplicativa

El enseñante pretende que los alumnos tengan *un primer encuentro* con la técnica:

τ_{h1}= *Escritura aditivo-multiplicativa*

Para ello, se propone a los alumnos que realicen el siguiente tipo de tareas:

> $\mathbf{T_{h1}}$ **=** *Tenemos una colección de* ***n*** *conejos y tenemos que mandar un mensaje oral a un compañero con el fin de que nos traiga una colección de zanahorias para que podamos dar una zanahoria a cada conejo. Siendo* ***n*** *> 80.*

Este tipo de tareas se caracteriza por proponer la construcción de una colección de ***n*** elementos equipotente a una dada, en ausencia de ésta, y a partir de un mensaje oral, donde:

El tamaño de la colección es 80 < ***n*** *< 90.*

No se tiene acceso a las dos colecciones a la vez.

El tipo de comunicación es oral.

No hay disposición especial de los elementos.

El esquema siguiente esquematiza la evolución de τ_{a3} hacia τ_{h1} mediante la tarea $\mathbf{T_{h1}}$.

$$\tau_{a3} \xrightarrow{\boxed{\mathbf{T_{h1}}}} \tau_{h1}$$

Nos interesa que los alumnos vivan *el momento exploratorio* de la técnica de representación aditivo-multiplicativa τ_{h1}. Para ello se pedirá a los alumnos que produzcan un mensaje oral, lo que les va a llevar a la necesidad de realizar el mensaje lo más corto posible, es decir, la búsqueda de la mejor solución a la tarea $\mathbf{T_{h1}}$ ha de conducir al alumno a realizar un mensaje del tipo "*Debes traerme 7 grupos de 8 zanahorias y 5 sueltas*" que es más fácil de recordar que "*Debes traerme 8 y 8 y 8 y 8 y 8 y 8 y 8 y 5 zanahorias*". De este modo, conseguiremos que los alumnos empiecen a utilizar mensajes del tipo "7 de 8 y 5" que es una designación oral de la escritura aditivo-multiplicativa, o sea de la técnica τ_{h1}, que consiste en un mensaje del "*n* de *b* y *a*", siendo b ≥ 2, con *n* y *a* números cualesquiera.

Una vez descubierta y explorada la técnica τ_{h1} nos interesa mejorarla en la siguiente dirección: cuando se hagan los agrupamientos de *b* elementos, se deben realizar todos los que sean posibles, con el fin de que el número de elementos que queden sueltos siempre sea menor que *b*. Ahora los alumnos van a empezar a vivir *el momento del trabajo de la técnica* de representación aditivo-multiplicativa y queremos conseguir que utilicen la técnica $\boldsymbol{\tau_{h2}}$, que es una variante de $\boldsymbol{\tau_{h1}}$, y a la vez afiancen el uso de dicha técnica de representación. Para ello, el enseñante propondrá una tarea del siguiente tipo:

> $\mathbf{T_{h2}}$ = *Se divide la clase en equipos de cuatro alumnos, en cada equipo hay un grupo A y un grupo B. Cada grupo recibe una hoja donde aparece dibujada una colección de* ***m*** *elementos dispuesta en forma de tabla rectangular* ***r × s****. Se pide realizar el mayor número posible de paquetes o agrupamientos de* ***b*** *(distinto de* ***r*** *y* ***s****) elementos y a continuación escribir el número de elementos de la colección mediante un mensaje lo más corto posible, donde se indique el número de grupos y el número de elementos sueltos. Luego se intercambiarán los mensajes y deberán dibujar la colección descrita en el mensaje*

Las tareas de este tipo se caracterizan porque:

El tamaño de las colecciones es 40 < ***n*** *< 80.*

Los valores de ***r****,* ***s*** *y* ***b*** *deben estar entre 5 y 14.*

El tipo de comunicación es escrita.

No se tiene acceso a las dos colecciones a la vez.

En este tipo de tareas se pide ya, de forma explícita, la utilización de agrupamientos equipotentes pero con la condición, hasta ahora no necesaria, de que siempre el número de elementos que queden sueltos sea menor que *b*. A lo largo de esta actividad es conveniente insistir en que el mensaje realizado sea lo más corto posible.

Después de realizar tareas del tipo $\mathbf{T_{h2}}$ el enseñante propondrá una puesta en común para comprobar los resultados obtenidos y se compararán las colecciones dibujadas con los dibujos iniciales. Se realizará un análisis de los distintos mensajes producidos, con el objetivo de llegar a convenir que el tipo de escritura que hemos de utilizar es "*n de b y a*", donde *a < b*. Así se vivirán los *momentos de evaluación* y *de institucionalización* de la técnica.

El esquema siguiente muestra el paso de $\boldsymbol{\tau_{a3}}$ hacia $\boldsymbol{\tau_{h1}}$ y de está hacia $\boldsymbol{\tau_{h2}}$.

$$\tau_{a3} \xrightarrow{\boxed{\mathbf{T_{h1}}}} \tau_{h1} \xrightarrow{\boxed{\mathbf{T_{h2}}}} \tau_{h2}$$

El siguiente objetivo es conseguir que los alumnos lleguen al acuerdo de hacer siempre grupos de 10. Para ello, se propone discutir y analizar con toda la clase sobre qué tipo de agrupamientos conviene hacer, ya que hemos encontrado anteriormente que era eficaz realizar siempre el mismo tipo de agrupamiento. Con este fin se pueden proponer tareas del siguiente tipo:

$\mathbf{T_{h3}}$ = *Se reparte a cada alumno de la clase una hoja donde aparece dibujada una colección de **m** elementos dispuesta en forma de tabla donde aparecen 10 columnas de **n** elementos y una más de **a** elementos (con **a** < 10), de manera que la colección tiene en total **n** × 10 + **a** elementos con **a** < 10. Se pide elegir una manera de agrupar los elementos, y dar la escritura aditiva y la escritura corta asociada, (o sea, la escritura aditivo-multiplicativa).*

Las características de este tipo de tareas son:

La colección tiene una disposición especial en forma de tabla.

El tipo de agrupamiento es inducido por la disposición de la colección.

El objetivo de este tipo de tareas es llegar al acuerdo de que *b* sea siempre constante e igual a 10 y, por tanto, de utilizar τ_{h3}. De este modo, la evolución de τ_{h2} hacia τ_{h3} se produce mediante $\mathbf{T_{h3}}$.

$$\tau_{h2} \xrightarrow{\boxed{\mathbf{T_{h3}}}} \tau_{h3}$$

También se pueden proponer más ejercicios que permitan la rutinización de la técnica τ_{h3}. Para ello, será necesario realizar ejercicios donde haya que escribir el número de elementos de diferentes colecciones en la forma "*n de 10 y a*" y también ejercicios inversos donde, dadas escrituras del tipo "*n de 10 y a*", se trata de dibujar colecciones de ese número de elementos.

Una vez rutinizada la técnica τ_{h3}, se realizará una puesta en común con toda la clase para que los alumnos puedan explicitar que entre todos hemos llegado al acuerdo de que los agrupamientos se harán siempre de 10 elementos y, en consecuencia, la escritura que obtendremos siempre será del tipo "*n de 10 y a*". Dado que los números forman parte esencial del lenguaje que compartimos, es muy importante consensuar la técnica que utilizaremos para representar los números.

Para ayudar a encontrar las relaciones entre las distintas escrituras de los números que hemos utilizado hasta el momento, será oportuno proponer ejercicios de comparación de escrituras en los que se proporcionen diferentes escrituras aditivas y aditivo-multiplicativas y se pide compararlas indicando si son equivalentes (representan al mismo número) o no. Así, se pueden proponer con este objetivo tareas del tipo siguiente:

> **TC_{ah}** = *Se entrega a los alumnos una hoja donde vienen dibujadas distintas colecciones dispuestas en diferentes formas: en grupos de 5, en grupos de 7, en grupos de 3, con posibles elementos no agrupados en cada caso. En dicha hoja aparecen también escrituras de las distintas colecciones dibujadas en la forma 10 + 10 + 10 +…+* ***a*** *con* ***a*** *< 10 y* ***n*** *de 10 y* ***a*** *con* ***a*** *< 10. Se pide a los alumnos:*
>
> *a) Recortar las colecciones y las etiquetas que contienen las escrituras.*
>
> *b) Asociar a cada colección las dos escrituras posibles (la aditiva y la aditivo-multiplicativa).*
>
> *c) Ordenar las colecciones y ordenar las escrituras.*

Con este tipo de tareas pretendemos que los alumnos se encuentren con los dos tipos de escrituras estudiados y, al ordenarlas, puedan encontrar las ventajas o limitaciones de cada una de ellas.

Hasta aquí los alumnos han trabajado tanto en la **OM_a** como en la **OM_h**, haciendo mucho hincapié en la técnica de representación de los números que da origen a dichas OM intermedias. También se pueden proponer tareas donde haya que poner en práctica algunos de los algoritmos asociados a dichas OM, como el algoritmo de comparación de escrituras o incluso el algoritmo de la suma. Como ya hemos indicado en el apartado anterior, en el primer ciclo de Primaria nos limitamos al trabajo en el bloque práctico-técnico de dichas OM intermedias (y, en particular, nos centramos en el desarrollo de las técnicas de *representación* de los números), porque lo que se pretende es que los alumnos lleguen a descubrir que la técnica posicional de representación de los números es la que permite hacerlo de forma más *económica* y *eficaz*. El paso por las OM intermedias puede parecer estéril, pero es imprescindible para integrar la *razón de ser* del SN posicional en el proceso de estudio.

4.5. La Organización Matemática posicional

En la última fase del proceso pretendemos construir una técnica para escribir los números de forma todavía más económica que la anterior. Queremos conseguir que los alumnos decidan, por economía, utilizar la técnica **τ_p**. Para ello, proponemos una tarea **T_{p1}** de discusión con toda la clase sobre cómo podemos hacer más económica la técnica τ_{h3}. Este será el momento del *primer encuentro* con la técnica posicional τ_p.

Debido a que los agrupamientos que vamos a realizar van a ser siempre de 10 en 10, no será necesario indicar que los grupos que realizamos son grupos de 10. Por ello, podremos reducir dicha escritura a la escritura "*na*" donde "*n*" indicará el número de grupos de 10 y "*a*" el número de unidades sueltas. Aquí va a ser muy importante la posición de las cifras, ya que la cifra de la izquierda nos indica el número de grupos de 10. En el caso en que $n < 10$ aparece casualmente la forma habitual de escribir los números menores que 100 en el sistema posicional de base 10. De este modo, hemos llegado a la técnica τ_p= *Escritura posicional en base 10*.

A partir de ahora queremos conseguir que los alumnos generalicen el uso de la técnica τ_p para colecciones de mayor tamaño. De este modo, la evolución de de τ_{h3} hacia τ_p se produce mediante la tarea $\mathbf{T_{p1}}$. Además, la tarea $\mathbf{T_{p2}}$ permite generalizar y afianzar el uso de τ_p.

$$\tau_{h3} \xrightarrow{\boxed{\mathbf{T_{p1}}}\ \boxed{\mathbf{T_{p2}}}} \tau_p$$

Con el fin de generalizar esta técnica propondremos la tarea $\mathbf{T_{p2}}$**,** que consiste en hallar cuántos elementos hay en una colección que tenga entre 2000 ó 3000 objetos pequeños, efectuando agrupamientos de 10, de 100 (10×10) y luego de 1000 (10×100) (los agrupamientos se materializarán por sacos opacos cerrados, sobres cerrados, etc.). Esta tarea se realizará en el 2º curso de Primaria y ha sido extraída de Destouesse (1996-1997).

Con esta tarea se pretende que los alumnos:

- Tengan que utilizar los agrupamientos de 10 para organizar la cardinación de una colección grande y lo hagan en agrupamientos de 1000, 100, 10 y unidades.
- Descubran la recursividad de los agrupamientos y la relaciones entre 10 y 100, entre 100 y 1000.
- Vivan una situación de referencia que dé sentido a la lectura de los números de 3 ó 4 cifras.

En $\mathbf{T}_{\mathbf{p2}}$ se utilizará:

- El material a contar: tapones, cápsulas, garbanzos, alubias, cubos, cerillas, palillos, arandelas,... o cualquier otro material que se pueda tener en gran cantidad (un poco más de 3000)
- El material para embalar: 300 sobres pequeños blancos, 30 sobres medianos beiges y 3 sobres grandes, o bien cajas de diferentes tamaños o sacos de diferentes colores.

La tarea $\mathbf{T}_{\mathbf{p2}}$ se desarrolla en dos sesiones:

En la primera sesión, se parte de una colección y se pretende encontrar una técnica que nos permita organizar la colección con el objetivo de poder expresar su número de elementos de forma sencilla.

En la segunda sesión, partiremos de una colección que está ya organizada en distintos agrupamientos y habrá que expresar su número de elementos y las relaciones que existen entre los distintos agrupamientos realizados.

Primera Sesión

Etapa 1 : Planteamiento el problema

Se reúnen los alumnos alrededor del montón de objetos que tenemos (comprendido entre 2000 y 3000 objetos). Luego se pregunta: *¿Cuántos objetos hay? ¿Cómo podemos hacer para saber cuántos hay? Todos juntos vamos analizar los procedimientos y respuestas posibles.*

Aquí aparecerán distintas técnicas posibles:

“Hay que contarlos”

“Hay que coger la calculadora”

“Hay que hacer paquetes de 10, de 100”

“Se podrá hacer 10, 20, 30, ...”

El enseñante dejará tiempo para iniciar una cardinación uno a uno y darse cuenta que es costoso en tiempo.

La idea de agrupar de 10 en 10 puede venir de los niños; algunos pueden haber visto esto antes.

Si nadie hace dicha propuesta, es el maestro quien debe hacerla: “Vamos a hacer montones de 10 y los pondremos dentro de los sobres blancos”.

Etapa 2: Los agrupamientos de 10.

El maestro deposita en cada mesa una cantidad de objetos. Cada niño cuenta 10 objetos y los pone en un sobre blanco, y así hasta agotar todos los objetos.

Al terminar este trabajo cada grupo se encuentra con objetos aislados, que se decide reagruparlos y se encarga a un pequeño grupo de niños que haga agrupamientos de 10 y los pongan en sobres blancos.

Una vez realizadas las decenas y planteado el problema de continuar, los alumnos proponen dos estrategias:

- Continuar haciendo paquetes de 10 (10 sobres blancos en un sobre más grande)
- Se mira lo que cada alumno tiene en ese momento ("yo tengo 4 sobres blancos y 3 cerillas"; "yo tengo 5 sobres blancos y 8 cerillas"; etc.) y se hace la suma de los números de cerillas de todas las pequeñas colecciones (43 + 58 +...etc.).

El maestro puede proponer a un grupo de alumnos efectuar el cálculo de esta suma en un sitio aparte, mientras que el resto de la clase continua los agrupamientos.

Y del mismo modo se continúa para las centenas.

Al final de la sesión, los alumnos con la ayuda del enseñante leen en voz alta el número total de la colección. El enseñante lo hace repetir por varios alumnos. Se podrá llamar a los alumnos de una clase del nivel superior de Educación Primaria (EP) para que vengan a confirmar el nombre del número de elementos de la colección, sirviéndose de la organización decimal realizada por los de 2º de EP. Esto permite una puesta a prueba inmediata del método de los agrupamientos de 10 en 10 y muestra "la universalidad" social de este tipo de cardinación: "es así como todo el mundo lo hace".

A la largo de la primera sesión, se escribirá en el encerado:

1 sobre blanco 10 objetos

1 sobre beige 100 objetos porque $10 \times 10 = 100$

ó porque $10+10+10+10+10+10+10+10+10+10 = 100$

1 sobre grande 1000 objetos porque $10 \times 100 = 1000$

ó porque $100+100+100+100+100+100+100+100+100+100=1000$

Pero en las sesiones posteriores, se escribirá:

1 sobre blanco 10 objetos

1 sobre beige 10 sobres blancos

1 sobre grande 10 sobres beiges

Segunda Sesión

Ahora se pretende:

- Por un lado, que una vez organizada la colección en miles, centenas, decenas y unidades, los alumnos escriban su cardinal.
- Y por otro, que los alumnos encuentren el número de centenas, de decenas o de unidades en una colección ya organizada.

El material a utilizar será:

- 2524 objetos colocadas en sobres
- los millares en sobres grandes beige, las centenas en sobres medianos beige y las decenas en sobres pequeños blancos, dispuestos en medio de la clase, visibles a todos (las cantidades no están en los sobres, pero están escritas en el encerado).
- 25 sobres beige suplementarios.
- Hojas blancas y un fieltro negro para cada niño.
- Cajas de cartón para colocar todo.

DESARROLLO

Fase I

Consigna:

"*La última vez, para conocer el número de objetos de nuestra gran colección, los habíamos colocado en sobres* (recuerdo sobre los agrupamientos hechos por paquetes de 10 –las decenas-, por paquetes de 100 –las centenas-, etc.) *y luego habíamos escrito el número.*

Hoy os propongo una colección nueva de objetos: la de la clase A. Pero esta vez ya están colocados en los sobres y os pido que me digáis oralmente y rápido cuál es el número de objetos".

El enseñante deja en el centro de la clase, de manera visible para todos, la colección de la clase A (los sobres están colocados por el color), sin decir nada.

Aquí se pretende reactivar el método y utilizarlo para "decir cuántos hay, rápidamente".

Fase II

Consigna I

"*Ahora voy a pediros prever cuántos sobres blancos hay, se podría decir también cuántas decenas hay en total en esta colección. Prever, significa ser capaz de decir sin contarlos, cuántos sobres blancos se han utilizado para esta colección, cuántas decenas contiene. Vosotros diréis vuestra previsión y luego verificaremos si vuestra previsión era exacta* *contando los sobres blancos. Si queréis escribir, tenéis papel a vuestra disposición y podéis hacer lo que queráis en la hoja. Cuando penséis que habéis encontrado el número de sobres blancos, es decir, el número de decenas, lo escribiréis en este papel verde que os reparto*".

En el papel verde está inscrito: "Hay .... sobres blancos".

Los alumnos trabajan individualmente. El enseñante circula e incita a los alumnos a que intenten hacer una previsión, incluso aproximada. Al cabo de 10 minutos, escribe en el encerado todas las respuestas propuestas.

Un grupo de alumnos es encargado de controlar las respuestas.

La verificación se hace abriendo los sobres grandes (los millares) luego los sobres beige (las centenas) y contando colectivamente el número de sobres blancos.

El conjunto de la clase se pronuncia sobre las previsiones: exactas o inexactas.

Consigna II

"*Ahora miramos cómo han hecho los que habían previsto bien para poder ganar todos la próxima vez*".

El enseñante pide a los ganadores que expliquen cómo han hecho y apunta con todos, las diferentes estrategias utilizadas:

- "Yo he puesto 10+10+10+ etc. Para cada sobre beige y luego he calculado".
- "Me he acordado que en cada sobre beige había 10 y he contado en mi cabeza".
- "He visto el número de la colección y mirándolo, he visto las decenas", etc.

También pregunta a los que han realizado una previsión incorrecta, con la ayuda de la clase y formulando las explicaciones, qué errores han podido hacer. Esta partida es bastante rápida porque los alumnos todavía están tanteando y no pueden descifrar o explicitar sus errores.

Se escribe en el encerado:

2524 objetos... 252 decenas o 252 sobres blancos.

La colección es reconstruida con los diferentes tipos de sobres.

Consigna:

"*Otra pregunta a propósito de nuestra colección: ¿cuántos sobres beige hay o cuántas centenas hay?*"

El desarrollo es el mismo que para la partida anterior y se completa en el encerado: 2524 cerillas...

Hay 252 decenas o 252 sobres blancos;

Hay 25 centenas o 25 sobres beige.

Fase III

El enseñante señala con los alumnos lo que ellos saben hacer ahora y que no sabían hacer antes de la sesión. Da también la posibilidad a los alumnos de entrever lo que queda aún por resolver o por explorar.

Conclusión

"*Hemos visto que se puede prever el número de decenas y de centenas cuando se conoce el número escrito de la colección. Pero todo el mundo no lo consigue aún muy bien. Os voy a dar otras colecciones para que os entrenéis en un taller.*

Si, al contrario, se conociera el número de centenas o de decenas de una colección, ¿se podría prever el número total de cerillas de una colección? Nosotros lo intentaremos también."

Hasta aquí hemos esbozado un posible proceso para abordar el estudio de la Numeración en el primer ciclo de Primaria, especificando el MER presentado en el Capítulo II. El proceso diseñado a partir de situaciones propuestas dentro de la Teoría de Situaciones Didácticas no pretende ser exhaustivo sino señalar un posible recorrido que permite hacer evolucionar las distintas técnicas hasta llegar al SN posicional completo en base 10. Somos conscientes que hay que realizar otras tareas para el estudio de la Numeración en Primaria como, por ejemplo, las relacionadas con la numeración oral, y por supuesto, las relacionadas con las técnicas de cálculo. Aquí nos hemos limitado a la construcción del SN posicional y su utilización para representar los números que se requieren y estudian en este nivel educativo.

A diferencia del caso de la Formación de Maestros y de la Enseñanza Secundaria Obligatoria, sólo proponemos aquí la concreción del MER en forma de un análisis a priori que no ha sido directamente experimentado por nosotros. Dejamos pendiente, para investigaciones posteriores, su experimentación y evaluación en el marco de la enseñanza española, trabajo que requerirá sin duda nuevas adaptaciones y desarrollos del MER.

Tal como hemos señalado anteriormente, un trabajo análogo a partir de un MER próximo al presentado aquí, se está llevando a cabo en Chile dentro del proyecto "Estrategia Lectura-Escritura-Matemáticas" del Ministerio de Educación, dirigido por la profesora Lorena Espinoza, miembro de nuestro grupo de investigación (Espinoza y Barbé, 2006). Sin duda los resultados obtenidos en la experimentación del equipo chileno, que se inició en el 2003 con un plan piloto en la región Metropolitana de Santiago de Chile, trabajando con 20 escuelas, 4500 alumnos y 160 profesores, nos permitirá, en un futuro próximo, avanzar en el diseño e implementación de un proceso de estudio análogo para la Enseñanza Primaria española.

CAPÍTULO V

CODETERMINACIÓN ENTRE LO MATEMÁTICO Y LO DIDÁCTICO EN LA MEDIDA DE MAGNITUDES CONTINUAS

En este capítulo presentamos un Modelo Epistemológico de Referencia (MER) en torno a otro ámbito matemático: *la Medida de Magnitudes Continuas*. Veremos en este caso otra ilustración del fenómeno analizado en los dos capítulos anteriores: partiendo de una propuesta de ingeniería didáctica para la enseñanza de la medida realizada en el marco de la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1987), interpretaremos la actividad de medir como una *sucesión de praxeologías u organizaciones matemáticas* cuyo punto de partida es una praxeología en torno a la manipulación de objetos concretos. Mediante un proceso de "algebrización progresiva", esta praxeología dará lugar a la consideración de Organizaciones Matemáticas (OM) intermedias según los objetos que se eligen como "unidades" de medida y según el conjunto de números que juegan el papel de escalares (números medida), hasta llegar a una OM final basada en la elección de una única unidad y el conjunto de los números reales como escalares.

Siguiendo con el estudio de la determinación recíproca entre "lo matemático" y "lo didáctico", mostraremos que también en este nuevo caso la estructura, la dinámica y los componentes del MER nos proporcionarán los elementos para explicar, analizar y justificar las Organizaciones Didácticas (OD) asociadas.

En un trabajo anterior, Brousseau (2000) considera que existen tres dominios vinculados a la Medida de Magnitudes. Aunque éstos aparecen como separados para los alumnos y su delimitación es siempre confusa en la práctica escolar. Brousseau los designa como:

(1) El universo de los objetos medibles concretos.

(2) El universo de los procedimientos de definición de la aplicación medida.

(3) El universo de la estructura numérica.

El MER que proponemos permitirá integrar estos tres dominios a partir de una representación del ámbito de los objetos medibles con respecto a una magnitud determinada: contiene un conjunto de modelizaciones matemáticas sucesivas que finalizan en una OM que recubre el universo de la estructura numérica. Nos proponemos utilizar este modelo epistemológico como herramienta para articular los tres universos citados tanto a nivel “matemático” como en lo que hace referencia a su proceso de reconstrucción escolar, es decir, a nivel “didáctico”.

Posteriormente utilizaremos dicho modelo para explicar, analizar y justificar la Organización Didáctica en torno a la Medida de Magnitudes Continuas diseñada por Nadine y Guy Brousseau para alumnos de cuarto curso de Primaria (Brousseau, 1987).

1. UN MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERENCIA PARA LA MEDIDA DE MAGNITUDES[1]

En este apartado presentamos un Modelo Epistemológico de Referencia que nos permitirá abordar el análisis y evaluación en términos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de cualquier proceso didáctico sobre la Medida de Magnitudes. Este modelo, como ya hemos insistido a lo largo de esta memoria, se formula en términos de *organizaciones o praxeologías matemáticas* (Chevallard, 1999). Dicho de otra manera, debemos concretar, en el caso que nos ocupa, qué es la “Medida de Magnitudes”, en el sentido amplio de “actividad matemática en torno a la medición de magnitudes” y proponer una respuesta en términos de praxeologías: qué tipos de “*problemas* de medición” y de “*técnicas de* medición” pueden considerarse, cómo se articulan y relacionan entre sí, qué dinámica permite una evolución entre ellos, *qué discurso tecnológico* y qué *elementos teóricos* justifican y explican dicha actividad.

El modelo epistemológico que presentamos está formado por una sucesión de tres *tipos de organizaciones o praxeologías matemáticas* de distinta naturaleza, de modo que cada una modeliza a la anterior. Pueden ser consideradas como tres etapas en la evolución de la actividad matemática de construcción de la Medida de Magnitudes.

Hemos utilizado como punto de partida de nuestro modelo, las indicaciones epistemológicas siguientes realizadas por Guy y Nadine Brousseau (1991-92, p. 84, la traducción es nuestra):

> El universo de la medida y de la medición pone en presencia al menos dos dominios bastantes separados para los alumnos, aunque lo que les distingue permanezca difuso:

[1] Este modelo se empezó a elaborar en Bolea, Bosch, García, Gascón, Ruiz y Sierra (2000) y ha continuado desarrollándose en Bolea, Bosch, García, Gascón, Ruiz y Sierra (2002, 2005).

> • el ámbito de los objetos concretos y de las magnitudes con su entorno de propiedades y manipulaciones,
>
> • el ámbito de los números y el entorno de cálculo.
>
> [dichas relaciones] no parecen tratadas de manera conveniente y no son objeto de verdaderos análisis didácticos.

Partiendo de esta aportación, describiremos los dos ámbitos citados mediante dos tipos de praxeologías *extremas*, ligadas entre sí por un tercer tipo de praxeologías, que denominaremos *intermedias*. Dichas praxeologías intermedias representan una serie de modelizaciones matemáticas sucesivas del "ámbito de los objetos concretos y de las magnitudes", que finalizan en una praxeología que recubre lo que Brousseau denomina "el ámbito de los números y el entorno de cálculo". De hecho, en un trabajo posterior Brousseau considera, en lugar de dos dominios, tres universos que designa como: el universo de los objetos matemáticos medibles, el universo de los procedimientos de definición de la aplicación-medida y el universo de la estructura numérica de llegada (Brousseau, 2000). Por ello, el Modelo Epistemológico de Referencia que estamos proponiendo puede considerarse como un intento de *articulación de estos tres universos*.

La praxeología *inicial* es la generada por *tareas* de comparación de objetos concretos, según una determinada magnitud, que se realizan mediante *técnicas* de manipulación efectiva de objetos (con la utilización, en algunos casos, de instrumentos de comparación específicos) y en un entorno *tecnológico-teórico* muy naturalizado. "Medir" consiste en comparar dos objetos de forma material: ponerlos uno al lado del otro (longitudes), colocarlos sobre los dos platillos de una balanza (peso), etc. Estas actividades presentan, bastante rápidamente, fuertes limitaciones prácticas, lo que conduce a su "enriquecimiento" por una praxeología que contiene una infinidad de objetos medibles y cuya manipulación material es impracticable por lo que debe ser reemplazada por un trabajo simbólico a través de la escritura. En esta praxeología inicial, "medir" se reduce a la comparación local de pares de objetos; pero todavía no se pone en práctica la comparación sistemática partiendo de uno o varios objetos privilegiados (aquí todavía no podemos hablar propiamente de "medida").

El primer paso hacia esa comparación sistemática consiste en elegir un "sistema de generadores" de los objetos considerados (suponiendo que existe) e intentar expresar cada objeto como una "combinación lineal" de esos generadores, combinación que puede considerarse como una primera expresión de la "medida" del objeto. La elección de este sistema determina el tipo de objetos materiales que se pueden considerar como “objetos medibles”. Aquí cabe plantearse las siguientes cuestiones:

- ¿El sistema de generadores elegido es suficiente, esto es, permite medir todos los objetos que queremos medir?
- ¿Se pueden considerar también “partes” de objetos para ser medidas? En este caso, ¿qué partes pueden considerarse como nuevos objetos medibles?

Veremos que las sucesivas respuestas a estas preguntas pueden conducir a ampliar o, en general, a modificar el sistema de generadores, de modo que se obtiene una sucesión de conjuntos de objetos “medibles” (donde cada uno está contenido en el siguiente) que serán la base de las praxeologías *intermedias* a considerar.

El “ámbito de los números y su entorno de cálculo” se presenta como la praxeología *final* de la construcción, que viene a ser la que completa las praxeologías *intermedias*. Dicha praxeología *final* surge de la necesidad, tanto teórica como práctica, de reducir el “sistema de generadores” a un número mínimo de elementos y, si es posible, a un solo elemento que se presenta como la *unidad base* del sistema de medida considerado. Aquí, la “medida” de un objeto debe llevarnos a la escritura del producto de un número por esta unidad.

Notemos que, como en muchas de las evoluciones praxeológicas, este último escalón va, en cierto sentido, a empobrecer las praxeologías que le han dado vida, en la medida en que gran cantidad de problemas y de técnicas de las praxeologías intermedias van a ser trivializadas o, incluso, a desaparecer. Se trata de un fenómeno de *ecología de las Organizaciones Matemáticas*, núcleo central de nuestro trabajo de análisis didáctico.

A continuación, pasaremos a exponer una posible caracterización más detallada del proceso dinámico de organizaciones matemáticas que nos van a servir de modelo epistemológico de referencia para el diseño, análisis y evaluación de procesos didácticos en torno a la Medida de Magnitudes.

1.1. La Organización Matemática inicial

1.1.1. La primera etapa del modelo

Consideramos un sistema ***S(G)*** de objetos O_i (generalmente objetos materiales o matemáticos familiares[2], fácilmente manipulables) susceptibles de ser medidos con relación a una magnitud ***G*** y un conjunto de acciones realizables con estos objetos, como son:

- *Construir* un objeto nuevo medible *adjuntando* dos o más objetos (operación binaria que designaremos mediante $O_i \oplus O_j$**,** definida sólo cuando $O_i \neq O_j$).
- *Comparar* dos objetos distintos respecto de ***G*** para saber si son o no equivalentes (relación de equivalencia que designaremos por $\sim$). Aquí puede presentarse eventualmente la necesidad de utilizar un instrumento (por ejemplo, la balanza para el peso).
- *Decidir* el sentido de la comparación, es decir, decidir qué objeto es "más grande" con relación a ***G***, cuando no son equivalentes (relación de preorden total asociada a $\sim$ y que designaremos por $\prec$).[3]
- *Evaluar* algunos aspectos de la comparación con respecto a la rareza, la calidad y la precisión de la medida.

Obtenemos así un conjunto de objetos dotado de una estructura (***S(G)***; $\sim$; $\prec$; $\oplus$) cuyo conjunto cociente ***S(G)***/$\sim$ está formado por clases de equivalencia que corresponden a las *cantidades de magnitud* de los objetos O_i con respecto a ***G***.

Por un abuso de lenguaje, designaremos mediante ***S(G)***, tanto el conjunto de objetos $\{O_i\}$ como la actividad que resulta de la manipulación y comparación de estos objetos (es decir, la praxeología). Aunque ***S(G)*** es el germen de una praxeología matemática en torno a la Medida de Magnitudes, muy pronto será necesario considerar un primer modelo matemático ***MS(G)*** de ***S(G)*** que permitirá superar un gran número de las limitaciones iniciales de ***S(G)***: por ejemplo, el hecho de que no se pueda adjuntar un objeto a sí mismo para comparar un objeto con otro que es dos veces uno dado, o la imposibilidad de manipular un número grande de objetos. Dicho en otras palabras, para

[2] Como, por ejemplo, segmentos para medir su longitud o rectángulos para medir su superficie.

[3] Una relación de preorden total "$\prec$" asociada a una relación de equivalencia "$\sim$" es una relación transitiva tal que, para todo x, y con $x \neq y$, uno y uno solo de los tres enunciados es verdadero: $x \prec y$, $y \prec x$, $x \sim y$.

que ***S(G)*** pueda ser considerado el soporte de una praxeología matemática, es necesario considerar muy pronto un primer modelo que denominaremos ***MS(G)***.

Definimos ***MS(G),*** *primer modelo matemático de* ***S(G)***, así:

$$\boldsymbol{S(G)} \longrightarrow \boldsymbol{MS(G)}$$

$$O_i \longrightarrow \overline{O_i} \in \boldsymbol{S(G)/\sim}$$

(1) Cada objeto O_i de ***S(G)*** se modeliza por su cantidad de magnitud q_i que designa su representante en el conjunto cociente ***S(G)***/~, pero *sin ninguna referencia numérica*.

(2) La adjunción "⊕" de objetos en ***S(G)*** corresponde a la suma formal "+" en ***MS(G),*** que es el conjunto de sumas formales $\sum_{i=1}^{i=r} n_i q_i$ con $n_i \in \mathbf{N}$.

(3) La relación "~" en ***S(G)*** permite construir una relación de equivalencia "=" en ***MS(G)***: dos sumas formales son iguales cuando los objetos correspondientes son equivalentes en ***S(G)***.

(4) La relación de preorden total "≺" en ***S(G)*** permite construir en ***MS(G)*** una relación de orden total " < " compatible con la suma formal anterior, que verifica el axioma de Arquímedes.[4] Por tanto, **(*MS(G)*; + ; = ; <)** es un *semigrupo totalmente ordenado y arquimediano.*

Podríamos tomar ***MS(G)*** como praxeología *inicial* de nuestro MER, pero es preferible considerar que todo el proceso de modelización ***S(G)*** $\rightarrow$ ***MS(G)*** constituye la primera etapa, o praxeología inicial, de nuestro MER para la Medida de Magnitudes. Esto nos permite formalizar el conjunto inicial ***S(G)*** de objetos medibles, las propiedades y los resultados de las comparaciones de los objetos, y presenta ya algunas ventajas:

a) Proporciona un sistema de escritura para designar las cantidades de magnitud sin tener que recurrir a la escritura numérica de su medida. Así, por ejemplo, una cantidad de magnitud puede designarse mediante $3q_1 + 2q_2 + q_3$ donde q_i es la cantidad de magnitud asignada al objeto O_i.

[4] En el paso al cociente, el preorden se convierte en una relación de orden " < " ya que dos objetos en **S(G)** diferentes pero equivalentes, representan la misma clase.

b) El paso de ***S(G)*** a ***MS(G)*** nos permite también realizar tareas que eran problemáticas (e incluso, materialmente imposibles) en ***S(G)*** y que, en adelante, pueden realizarse evitando la manipulación efectiva de los objetos.

c) Finalmente, se puede concebir y trabajar con cantidades de magnitud fuera del alcance de ***S(G)***, por ejemplo, con cantidades muy grandes de objetos O_i.

El soporte de la praxeología inicial comprende a la vez ***S(G)*** y su modelo ***MS(G)***:

$$S(G) \rightarrow MS(G)$$

- En ***S(G)*** se manipulan objetos, pero esta manipulación adquiere muy pronto un valor simbólico.
- La validación del trabajo en ***MS(G)*** se hace inicialmente en ***S(G)***.

Las técnicas de ***S(G)*** se enriquecen, por *simulación*, en ***MS(G)***, mediante un *trabajo escrito con símbolos*.

El tipo de tareas nucleares en esta Organización Matemática inicial consiste en:

- La comparación de cantidades (presentes o ausentes)

T₁ = *Dadas dos cantidades de magnitud* $q_1 = \sum_{i=1}^{i=p} n_{1i} q_{1i}$ *y* $q_2 = \sum_{i=1}^{i=s} n_{2i} q_{2i}$, *¿son iguales? ¿Cuál es mayor?*

Aquí se plantea el *problema de la unicidad de la escritura*, o sea, el de la equivalencia de dos sumas formales.

- La construcción de una cantidad equivalente a una cantidad dada (presente o ausente):

T₂ = *Dadas las cantidades de magnitud* q *y* $q_1, q_2, \ldots, q_m$, *¿existen* $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbf{N}$ *tales que* $\lambda \cdot q = \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i q_i$ *?*

En este caso cuando $m = 1$ estamos ante el problema clásico de la *commensurabilidad*.

El tipo de técnicas básicas utilizadas en ***S(G)*** $\rightarrow$ ***MS(G)*** son:

- La expresión escrita de las comparaciones materiales.
- La manipulación algebraica de escrituras.
- La interpretación de expresiones escritas.

- La utilización particular de una cantidad como patrón (comparación indirecta).

1.1.2. El ejemplo de la medida de longitudes

Para clarificar el tipo de actividad matemática que es posible llevar a cabo con esta organización o praxeología matemática inicial, analizaremos en qué medida y en qué forma sustenta la Organización Didáctica elaborada por Nadine Brousseau, (1987). Primero haremos un breve resumen de dicha OD en torno a la magnitud *longitud* para alumnos de 4º de Primaria. La autora propone las dos sesiones siguientes:

Primera sesión

Medida de longitudes: juego de comunicación. Planteamiento y exploración del problema**.**

Material:

- Bandas de cartón de 1,5 cm de ancho de diferentes colores y longitudes: 2 bandas verdes de 64 cm, 2 bandas verdes de 57 cm, 2 bandas amarillas de 42 cm, 2 bandas amarillas de 40 cm, 2 bandas azules de 32 cm, 2 bandas azules de 51 cm.
- Un número suficientemente grande de bandas de color verde, amarillo y azul de 1,5 cm de ancho de unos 70 cm.
- Bandas patrón de 5 mm de ancho de color marrón, todas de 12 cm de longitud y marcadas con la letra u. Estas bandas serán usadas como *unidades de medida*, por ello, ha de haber suficientes.
- Hojas blancas para escribir los mensajes.

Desarrollo:

Los alumnos trabajan en grupos de 4 (dos emisores y dos receptores que trabajarán separados pero coordinados).

La maestra da la siguiente consigna:

“Voy a dar una banda de color a los emisores. Unos tendrán una banda verde, otros amarilla, y otros azul. Estos emisores deberán escribir un mensaje para que los receptores puedan construir una banda de la misma longitud. Para ello podéis utilizar esta banda “patrón” (la maestra muestra la banda unidad marrón). Todos estos patrones tienen la misma longitud. (La maestra muestra esta igualdad superponiendo dos de ellas).”

A continuación, la maestra distribuye una banda de color y dos bandas patrón a cada grupo de emisores. Más adelante distribuirá las bandas de color de 70 cm a los receptores.

Primera fase: Mientras los emisores se dedican a redactar el mensaje, los receptores realizan un ejercicio de cálculo preparado por la maestra. Desde un primer momento los alumnos tienden a traducir las longitudes de las bandas a cm y mm, pues unos meses antes ya se había utilizado el doble decímetro para medir segmentos. La maestra debe insistir en que sólo se debe utilizar el material aportado para la actividad, en ningún caso se debe usar el doble decímetro. Más adelante, a consecuencia de un fracaso en la estrategia utilizada por los alumnos, la maestra propone que se pongan de acuerdo entre los emisores y receptores de cada grupo, para tratar de buscar una estrategia de resolución.

Segunda fase: Los emisores y los receptores intercambian sus papeles. La maestra vuelve a distribuir otras bandas verdes, amarillas y azules. Los emisores redactan los mensajes, que luego son transmitidos a los receptores, y los receptores construyen las bandas. Terminan reuniéndose los grupos para verificar si la banda construida coincide con la de los emisores.

Ejemplos de mensajes:

1ª fase

Clase A: “2 bandas pequeñas marrón, una banda pequeña no completa, hay que eliminar 3 o 4 cm”; “hay que poner 2 bandas y otra más a la que le falta un poco al final”

Clase B: “2 u más 3 cuartos, se hace un cuarto doblando u en cuatro”, “3 veces u, mitad, mitad de la mitad, la mitad de la mitad de la mitad”

2ª fase

Clase A: después de la concertación: “hay que poner 3 u, una a continuación de otra y la mitad exactamente de una u (borde con borde)”, “hay que poner 5 bandas y plegar una banda pequeña que se llama u en partes iguales”

Segunda sesión

Medida de longitudes (discusión)

Material:

El mismo que en la sesión anterior.

Los mensajes realizados en la sesión anterior por los alumnos.

Desarrollo:

Se analizan los mensajes mediante una discusión de todo el grupo. La maestra pregunta: ¿Qué grupos no han tenido éxito? Y propone examinar los casos que han tenido dificultades. Para ello, los niños que no han tenido éxito leen sus mensajes y la maestra los escribe en la pizarra.

En la discusión se presentan dos casos:

• El mensaje es correcto y han sido los receptores quienes lo han comprendido mal y han construido mal la varilla: en este caso los emisores justifican su mensaje realizando las manipulaciones (con la ayuda de las varillas) delante de los niños.

• O bien el mensaje no es correcto y la maestra trata de que los niños encuentren el fallo.

Los errores realizados son:

- la anchura del patrón ha sido utilizada como unidad;

- las medidas no son lo suficientemente precisas debido a que los pliegues están mal hechos.

Resultados:

Al final de esta sesión la maestra ha introducido la palabra "unidad" y los alumnos se han puesto de acuerdo sobre las dos ideas siguientes:

- Para comunicar la medida de las varillas y para construirlas es necesario una unidad de medida que se pueda trasladar.

- Es necesario usar unidades cada vez más pequeñas para medir con la mayor precisión posible. Estas unidades se obtienen doblando la varilla patrón, y dividiéndola en partes iguales.

Observación:

Después de esta segunda sesión, la maestra ha tomado la decisión de continuar el trabajo sobre la medida utilizando un material completamente diferente: material de pesada con la balanza de platillos (Roverbal). Esta decisión puede parecer sorprendente ya que aún no se han explotado todas las posibilidades que permite el trabajo con las longitudes. Dicha elección se ha hecho por las siguientes razones:

- En primer lugar, los niños que utilizan el doble decímetro desde el curso preparatorio, no comprenden la utilidad de una actividad de medida de longitudes sin este instrumento. Han sido muy reticentes a utilizar el patrón proporcionado, no graduado, en lugar del sistema habitual.

- Además, estos niños no se plantean la cuestión de la significación de una medida y no admiten por tanto que se pueda utilizar un objeto cualquiera (el pulgar, el pie, la varilla, una cuerda,...) para medir una longitud.

Para superar estas dificultades, la maestra ha escogido una actividad sobre la medida de masas que permite: - Introducir la balanza de platillos, que no es un instrumento familiar para los niños (conocen, esencialmente, las balanzas automáticas). - Utilizar esta balanza sin las masas marcadas sino con unidades elegidas por la maestra: diferentes tipos de clavos y plaquetas.

En las sesiones descritas, el conjunto ***S(L)*** (designando por ***L*** a la magnitud *longitud*) está formado por bandas de diferentes longitudes l_i :

- Bandas B_i de 32 cm, 40 cm, 42 cm, 51 cm, 57 cm y 64 cm (emisores).
- Bandas B_j de aproximadamente 70 cm (receptores).
- Bandas u de 12 cm (unidades).

Aquí ***MS(L)*** $= < l_i >_{\mathbf{N}}$ donde l_i designa la longitud de cada banda. El subíndice "N" hace referencia al hecho de que, en principio, las sumas formales (esto es, los elementos de ***MS(L)***), lo son con coeficientes en N.

La *comparación* de dos objetos en ***S(L)*** y, por tanto, la relación de equivalencia en ***S(L)*** se establece superponiendo una banda sobre la otra, haciendo coincidir dos de los extremos y observando si los otros dos coinciden o no. Si la respuesta es no, la banda que sobresale es la más larga. En este caso, ninguna de las bandas B_i es múltiplo de u.

La construcción de un objeto nuevo, o sea, de una banda nueva, se realiza cortando o plegando una banda o adjuntando dos o más bandas juntándolas extremo con extremo.

El tipo de *tareas* en la praxeología inicial ***S(L)*** $\rightarrow$ ***MS(L)*** se pueden resumir en:

- Comparar bandas presentes o ausentes
- Construir una banda equivalente a una banda dada (presente o ausente)

El tipo de t*écnicas* que forman parte de esta organización praxeológica inicial son las siguientes:

- La manipulación material de las bandas para ponerlas extremo con extremo.
- El trabajo escrito sobre las igualdades de sumas formales. Así, por ejemplo, si

$$\left.\begin{array}{r} l_3 = 3l_1 + 2l_2 \\ l_4 = l_1 + l_2 \end{array}\right\} \text{ entonces } 2l_4 + l_1 = l_3$$

- La articulación del trabajo escrito con la manipulación material para validar el trabajo escrito realizado.

El trabajo en ***MS(L)*** consistirá en la búsqueda de escrituras de igualdades entre combinaciones lineales de bandas: por ejemplo: $l_i = l_j + 2l_k$.

Este trabajo no aparece en las actividades presentadas anteriormente porque desde el principio se elige una unidad o elemento generador.

1.2. Las Organizaciones Matemáticas intermedias y la construcción de la medida

1.2.1. La segunda etapa del modelo

En general, las limitaciones en la comparación de cantidades en ***MS(G)*** llevan a buscar un conjunto de objetos u_1, u_2, ..., u_s que funcione como "sistema de generadores": se trata de buscar el menor subconjunto de $\{q_i\}$ tal que todo elemento de ***MS(G)*** pueda escribirse como una combinación lineal con coeficientes enteros de esos objetos. Aquí aparece la *necesidad de la construcción de la medida como medio canónico de caracterización de magnitudes* para su comparación.

Sea $\{u_i$, con $i \in \{1,\ldots,s\}\}$ el primer *sistema de generadores* elegido. Entonces

$$\boldsymbol{MS(G)} = \langle u_i \rangle_{\boldsymbol{N}} = \{ \sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i u_i \ / \ \lambda_i \in N \}$$

y aparecen dos tipos de dificultades aparentemente contradictorias:

(a) La primera dificultad surge al querer simplificar las escrituras para establecer de modo más sencillo las igualdades. Para ello $\{u_i\}$ debe contener un número "mínimo" de elementos y así se podrá expresar la medida de un objeto del modo más sencillo posible.

(b) La segunda dificultad surge al querer comparar objetos con la mayor precisión posible. Para ello, no hay que restringir demasiado el conjunto de unidades $\{u_i\}$ porque podría disminuir su poder generador de **MS(*G*)** y lo que interesa es conseguir que haya el menor número posible de objetos no medibles.

Cabe señalar que no siempre es posible construir un sistema de generadores (o unidades de referencia) $\{u_1, u_2,..., u_s\}$ tales que:

$$\forall\ q \in \boldsymbol{MS(G)},\ \text{existen } \lambda_1, \lambda_2,...,\lambda_s \in \text{N tal que } q = \sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i u_i\ .$$

Pero, incluso cuando esto sea posible y tengamos $\boldsymbol{MS(G)} = <u_1, u_2, ..., u_s>_N$, la escritura de la medida de un objeto puede ser demasiado "complicada" porque s (la cantidad de unidades u_i) puede ser muy grande. Así, para que la escritura de q sea sencilla, necesitamos que haya pocos generadores. Pero en muchos casos no conseguiremos realizar la medida más que de modo muy aproximado. Entonces, para poder obtener mayor precisión, ampliaremos el conjunto de escalares λ_i. Por tanto, una respuesta a las dos dificultades mencionadas suele pasar por ampliar el conjunto **K** de escalares tomando algunas "fracciones" de los $\{u_i\}$, esto es, tomando como conjunto de escalares un conjunto **K** entre **N** y $\mathbf{Q}^+$: o sea, $\mathbf{N} \subset \mathbf{K} \subset \mathbf{Q}^+$. Esta ampliación permite considerar más objetos medibles, o, en otros términos, ganar precisión en la medida (entendida como comparación de objetos) sin aumentar la cantidad de unidades u_i. Así aparecen lo que llamaremos los *dos motores de la construcción de la medida*:

- La reducción del número de generadores.
- La ampliación del conjunto de escalares.

Esta doble dinámica se resume mediante el esquema siguiente, cuya última fila corresponde a la elección de un sistema de un solo elemento $\{u\}$, o sea, de una *unidad de medida*, y donde $\boldsymbol{S(G)} \rightarrow \boldsymbol{MS(G)} = \{ \sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i u_i \ / \ \lambda_i \in \mathbf{K} \} := <u_i>_{\mathbf{K}}$ es la definición de un elemento cualquiera de la primera fila.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\langle u_i\rangle_{\mathbf{N}} & \subset & \langle u_i\rangle_{K_1} & \subset & \langle u_i\rangle_{K_2} & \subset \ \dots \ \subset & \langle u_i\rangle_{\mathbf{Q}+} & \subset \dots \subset & \langle u_i\rangle_{\mathbf{R}+} \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\langle u_1, u_2, u_3\rangle_{\mathbf{N}} & \subset & \langle u_1, u_2, u_3\rangle_{K_1} & & \dots & \subset \ \dots \ \subset & \langle u_1, u_2, u_3\rangle_{\mathbf{Q}+} & \subset \dots \subset & \langle u_1, u_2, u_3\rangle_{\mathbf{R}+} \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\langle u_1, u_2\rangle_{\mathbf{N}} & \subset & \langle u_1, u_2\rangle_{K_1} & \subset & \langle u_1, u_2\rangle_{K_2} & \subset \ \dots \ \subset & \langle u_1, u_2\rangle_{\mathbf{Q}+} & \subset \dots \subset & \langle u_1, u_2\rangle_{\mathbf{R}+} \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\langle u\rangle_{\mathbf{N}} & \subset & \langle u\rangle_{K_1} & \subset & \langle u\rangle_{K_2} & \subset \ \dots \ \subset & \langle u\rangle_{\mathbf{Q}+} & \subset \dots \subset & \langle u\rangle_{\mathbf{R}+}
\end{array}
$$

En las praxeologías intermedias, la medida numérica comienza a aparecer cuando nos situamos en un conjunto $\langle u_i\rangle_{\mathbf{K}}$ y consideramos la correspondencia

$$\langle u_i\rangle_{\mathbf{K}} \to \boldsymbol{K}^s$$

$$\boldsymbol{q} = \sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i u_i \to (\boldsymbol{\lambda_1}, \dots, \boldsymbol{\lambda_s})$$

De este modo, se caracterizan las *cantidades de magnitud* mediante los coeficientes de las combinaciones lineales.

Las tareas nucleares de las praxeologías intermedias incluyen, además de las consideradas dentro de la praxeología inicial, las siguientes:

- Tareas problemáticas sobre el sistema de generadores, como:
    - ¿Se puede reducir el número de generadores?
    - ¿Faltan generadores para poder medir todos los objetos considerados?
    - ¿La escritura de la medida es única?
    - ¿Son equivalentes dos sistemas de generadores dados? ¿Cuál de ellos es el mejor (el más *económico*, el más *preciso*)?
    - Etc.

- Tareas problemáticas sobre el sistema de escalares:
    - ¿Cómo aumentar los escalares para compensar la falta de generadores?
    - Recíprocamente: ¿Cómo aumentar los generadores para compensar la falta de escalares?
    - Etc.

Las técnicas nucleares de las praxeologías intermedias pueden caracterizarse como:

- Técnicas de manipulación algebraica más sofisticadas que en ***S(G)*** $\rightarrow$ ***MS(G),***
    - Para buscar relaciones entre los diferentes generadores.
    - Para realizar cambios de unidades.
    - Para transformar relaciones o expresiones con coeficientes en K_i en relaciones con coeficientes en K_j.

      Por ejemplo: $u_1 = (2/3)u_2 \Leftrightarrow 3u_1 = 2u_2$
    - Etc.

1.2.2. El ejemplo de la medida de longitudes

Para ejemplificar estas organizaciones praxeológicas intermedias, analizaremos cómo aparecen dentro de la Organización Didáctica elaborada por Nadine Brousseau para la medida de longitudes. En este caso, podemos decir que aparecen tres praxeologías intermedias:

(1) La *primera praxeología intermedia* tiene un único generador u = 12cm. Así, la primera etapa de la sucesión es: $S(L) \rightarrow MS(L) = < u >_{\mathbf{N}}$. Aquí no se pueden medir todas las bandas. En consecuencia, aparece una ampliación del conjunto de generadores: u, ½ u, ¼ u, etc. de tal forma que la longitud l_i de una banda cualquiera puede expresarse mediante:

$$l_i \approx n \cdot u + \sum \frac{u}{2^k}$$

(2) Por tanto, tenemos *una segunda praxeología intermedia*, donde también podemos considerar que hemos ampliado el conjunto de escalares:

$$< u >_{\mathbf{N}} \subset < u, \tfrac{1}{2} u, \tfrac{1}{4} u, \ldots >_{\mathbf{N}} = < u >_{\mathbf{N}[1/2]}$$

Las *tareas* presentes en las sesiones coinciden esencialmente con las que hemos definido anteriormente de forma genérica:

- Construir un objeto en ***S(L)*** que sea equivalente a un objeto dado ausente, utilizando un sistema de generadores dado (unidades).

- Determinar si dos expresiones son iguales: con un mismo sistema de generadores o con dos sistemas diferentes.
- Buscar relaciones (de igualdad) entre los generadores con el fin de simplificar las escrituras. (Elección de la mejor unidad).

Las *técnicas* presentes en las sesiones son las siguientes:

- La escritura y lectura de mensajes del tipo $q = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i u_i$
- La manipulación y comparación de escrituras (la manipulación de objetos materiales siempre está presente).

(3) Además, uno de los grupos de niños también considera una *tercera praxeología intermedia*: $< u, v >_{\mathbf{N}}$, donde v es la anchura de la unidad u. En resumen, tenemos

$$\begin{array}{l} < u >_{\mathbf{N}} \subset < u >_{\mathbf{N}[½]} \subset < u >_{\mathbf{N}[½,1/3]} \subset \ldots \subset < u >_{\mathbf{Q}} \\ \quad \cap \\ < u, v >_{\mathbf{N}} \subset \ldots \subset \text{ etc.} \end{array}$$

Conviene señalar que cada nueva praxeología intermedia permite realizar nuevas tareas y utilizar nuevas técnicas.

1.3. La Organización Matemática final: asignación de un número y una unidad de medida a cada cantidad de magnitud

Como ya hemos dicho, la medida de una magnitud continua aparece por primera vez en nuestro modelo cuando nos situamos en cualquiera de las praxeologías intermedias $<u_1,\ldots u_s>_{\mathbf{K}}$ y se considera la correspondencia:

$$\begin{array}{lcl} <u_1,\ldots u_s >_{\mathbf{K}} & \longrightarrow & \mathbf{K}^s \\ q = \sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i u_i & \longrightarrow & (\lambda_1,\ldots, \lambda_s) \end{array}$$

La cuestión que tenemos pendiente es cómo resolver el problema de la *unicidad de la escritura*. Para ello, la técnica que utilizamos es reducir el número de generadores, pero esto no siempre permite resolver el problema. Un primer paso que conduce a la solución del problema es la elección de un único elemento u como generador o base de ***MS(G)***, aunque esto debe ir acompañado de un aumento del conjunto de escalares. De este modo, habrá que ir ampliando

$$\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{D}^{+} \rightarrow \mathbf{Q}^{+} \rightarrow \mathbf{R}^{+}$$

Así, cuando se elige una única unidad como sistema generador, se puede asociar a cada cantidad de magnitud q un único número

$$\boxed{\begin{array}{c} < u >_{\mathbf{K}} \rightarrow \mathbf{K} \\ q = \lambda \cdot u \rightarrow \lambda \end{array}}$$

Entonces podemos identificar la cantidad de magnitud con su medida y trabajar únicamente con los números (o elementos de K).

El último de los conjuntos obtenidos es $<u>_{\mathbf{R}}+ = \mathbf{R}^{+} \cdot u \cong \mathbf{R}^{+}$, o sea, el conjunto de las escrituras de la forma $\lambda \cdot u$, con $\lambda \in \mathbf{R}^{+}$. Este conjunto es isomorfo a $\mathbf{R}^{+}$ y corresponde al *modelo universal de la Medida de Magnitudes Continuas*.

En el caso de las sesiones de enseñanza sobre la magnitud longitud, sucede que la elección de una praxeología inicial ***S(L)*** $\rightarrow$ $<u>_{\mathbf{N}}$ demasiado ligada culturalmente a la praxeología final $<cm>_{\mathbf{N}}$ impide el trabajo de los alumnos en las praxeologías intermedias. La opción tomada por la maestra es tomar una praxeología inicial en torno el peso porque ésta es una magnitud menos familiar para el alumno.

En el caso de una magnitud cualquiera ***G***, la *construcción progresiva de la medida*, tal como ha sido evocado anteriormente, supone una modificación importante de la praxeología inicial ***S(G)*** $\rightarrow$ ***MS(G)*** y, en particular, de las *condiciones de realización de la comparación de objetos*. Como ya hemos dicho, la posibilidad de elegir un solo objeto (o un conjunto muy reducido de objetos) como base de la medida, es una posibilidad teórica que no podrá realizarse siempre en la práctica con el instrumento concreto de comparación de que se dispone en ***S(G)*** (por ejemplo, si la medida de uno de los objetos es *inconmensurable* con la medida del objeto tomado como base).

Lo anterior nos conduce a introducir una OM en torno a la noción de « medida aproximada » (y la de « grado de aproximación » de una medida), noción que surge más del trabajo en las praxeologías intermedias que de la manipulación de objetos en ***S(G)***. Si, por ejemplo, un objeto ***O*** no pertenece a $<u_1,\ldots, u_s>_{\mathbf{K}}$ (es decir, no es medible), se buscará el objeto de la forma $\sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i u_i$ cuya medida se aproxima tanto como sea posible a la medida de ***O***. El hecho de que dos magnitudes sean *aproximadamente equivalentes* en ***S(G)*** depende de la praxeología intermedia en la que nos situemos, y no del propio ***S(G)***. En otras palabras, la necesidad de disponer de un sistema simple de « generadores de magnitudes » conduce a la construcción de una nueva relación de equivalencia en ***S(G)*** menos exigente que la primera[5].

La matematización progresiva del sistema ***S(G)*** conduce a una modificación progresiva de la noción de «magnitudes equivalentes » hacia la noción de « magnitudes aproximadamente equivalentes ». Es importante determinar el papel que juegan las técnicas de comparación en ***S(G)*** en estas progresivas modificaciones de la actividad de medición : ¿qué margen de error es aceptado inicialmente?, ¿cómo varía el error y se precisa cuando se asume en $<u_i>_{\mathbf{K}}$ la existencia de un sistema de generadores?, ¿cómo se toma en consideración dicho error?, etc.

Esto nos permite poder afirmar que las praxeologías intermedias son necesarias para hacer vivir y para "dar sentido" al problema de las medidas aproximadas y del grado de aproximación de una medida. Aparece, de nuevo, la evidencia de que *la razón de ser de una praxeología* es un problema que se plantea en una praxeología anterior.

La construcción de este MER ha tenido como principal objetivo el análisis de una Organización Didáctica que ha sido elaborada previamente dentro del modelo de la Teoría de Situaciones Didácticas. Este análisis, a su vez, nos ha permitido perfilar mejor la construcción de dicho MER. Como ya hemos dicho con respecto al MER construido para los Sistemas de Numeración, todo MER es una organización provisional y dinámica que va completándose y ampliándose a medida que se van abordando nuevos problemas. El nuevo reto que habrá que llevar a cabo será la utilización de dicho MER para el diseño de un proceso de estudio, para ello creemos que será necesario ampliar y completar nuestro MER con los *elementos tecnológico-teóricos* en torno a la Medida de Magnitudes Continuas. Para realizar dicha ampliación creemos muy importantes los siguientes textos: Chamorro y Belmonte (1988), Chevallard y Bosch (2000-2001 y 2002), Félix (1970), Lebesgue (1995) y Rouche (1992).

[5] Esta última afirmación es, en cierto sentido, trivial: se podrán obtener medidas más aproximadas si se dispone de unidades más finas de medida o de más números para expresarlas. Pensamos que toda la problemática de la "estimación de magnitudes" se encuentra en este juego entre ***S(G)*** y las diferentes $<u_i>_{\mathbf{K}}$.

1.4. Dinámica de las Organizaciones Matemáticas en un proceso de estudio sobre la medida

La estructura y la dinámica de este Modelo Epistemológico de Referencia comporta que si queremos diseñar, analizar o evaluar una organización matemático-didáctica en torno a la Medida de Magnitudes deberemos tener en cuenta los siguientes elementos:

- La magnitud ***G*** considerada.
- El sistema ***S(G)*** de objetos concretos a medir, así como las limitaciones y condiciones que se imponen en la manipulación, comparación y adjunción de objetos.
- Las relaciones conocidas o que pueden establecerse fácilmente entre elementos de ***MS(G)*** y las manipulaciones materiales en ***S(G)***.
- Los diferentes sistemas de unidades $\{u_1,\ldots, u_s\}$ elegidos en la construcción de las sucesivas praxeologías intermedias $<u_1,\ldots u_s>_{\mathbf{K}}$.
- Las ampliaciones de $<u_1,\ldots u_s>_{\mathbf{N}}$ hasta obtener un $< u >_{\mathbf{K}}$.

Será necesario analizar qué papel juegan los objetos, así como las relaciones que surgen entre ellos y los objetos matemáticos en construcción, qué validaciones proporcionan, qué relación tienen con la elección de los u_i y qué función asumen en la construcción de las sucesivas OM.

2. ANÁLISIS DE UNA ORGANIZACIÓN DIDÁCTICA SOBRE LA MEDIDA DE MAGNITUDES EN PRIMARIA

En el apartado anterior, hemos descrito un Modelo Epistemológico de Referencia sobre la Medida de Magnitudes Continuas y, al mismo tiempo, nos hemos servido de las dos primeras sesiones que Nadine Brousseau (1987) ha experimentado para la enseñanza de la medida en 4º de Primaria, para clarificar, con un ejemplo, la sucesión de praxeologías que proponemos en nuestro MER. Pero estas dos sesiones no son más que el comienzo de un conjunto de secuencias didácticas bastante más amplio. Por ello, debido a que nuestro objetivo es analizar, de forma completa, la Organización Didáctica experimentada por dicha autora, vamos a seguir explicando y evaluando las siguientes sesiones, tomando como referencia el MER construido.

Pensamos que el objetivo de estas sesiones es un intento de articular dentro del ámbito de la Medida de Magnitudes Continuas los tres universos de la medida: el de los objetos medibles, el de los procedimientos de definición de la aplicación medida y el de los números y el entorno del cálculo. Guy Brousseaau (1992, 2000) considera, como ya hemos indicado, que en la práctica didáctica habitual estos dominios o universos aparecen ante los alumnos de forma separada y poco clara. Así, en las citas siguientes, se atribuye a razones de *economía didáctica* el origen de dicha separación (G. y N. Brousseau, 1992, pág. 14): [6]

> Ahora bien, la complejidad de la realización efectiva de las mediciones, las dificultades materiales y conceptuales ligadas a estas prácticas de todo tipo, han conducido rápidamente a los profesores a renunciar a la mayor parte de las actividades efectivas de medición (en particular a las que son difíciles de controlar en situación escolar) restringiéndose al uso de situaciones simplificadas o metafóricas y a actividades de cálculo. Esta circunstancia, aunque tiende a simplificar el acto de enseñanza, no favorece el dominio del concepto de medida ni la representación de las matemáticas como medio eficaz y simplificador para la realización y el control de actividades efectivas.

Y, más adelante, se insiste en que esta separación y confusión obedecen también a reglas de economía que favorecen la *pérdida de sentido* del estudio de la Medida de Magnitudes Continuas:

> Las necesidades del dominio de los objetos no se toman en cuenta. Por ejemplo, las correspondencias “semánticas” entre las manipulaciones de los objetos y las operaciones sobre los números: poner extremo con extremo para “sumar” longitudes, poner en el mismo platillo para “sumar” pesos, yuxtaponer para concretizar la “suma”. No son efectivamente realizadas en las situaciones de acción; si a veces se enseñan, es con un estatuto falseado. De hecho, la práctica del alumno está invertida con relación al discurso del maestro: la medición considerada como “concreta” no es nunca, de hecho, realizada bajo control ni practicada. Hay un estatuto de saber escolar “teórico” mientras que las manipulaciones familiares al alumno son las de los cálculos y de los números.
>
> Los alumnos están inmersos en “situaciones” y entornos institucionales en las que ni ellos, ni los maestros, pueden fácilmente aprehender o controlar el desfase con relación a las diferentes exigencias: conocimientos teóricos “sabios”, conocimientos escolares, situaciones “objetivas” escolares oficiales, situaciones efectivas,…

[6] Este texto procede de "El peso de un recipiente. Estudio de los problemas de la medida en CM." (N. y G. Brousseau 1992), traducido por J. D. Godino. Recuperable en www.ugr.es/~jgodino/siidm/welcome.htm.

> Las interpretaciones de estas situaciones son, por el contrario, exigidas por los profesores como evidencias, como aportes intuitivos del alumno, como resultado de su desarrollo o de sus aprendizajes espontáneos.
>
> Las relaciones entre el saber y lo “concreto”, entre las actividades y el discurso, la práctica y la teoría, la verdad y el error,..., no son tratadas como objetos de enseñanza ni explícitos ni implícitos.
>
> La articulación macrodidáctica de los saberes obedece a reglas de economía que impiden los esclarecimientos y las adaptaciones. (*Ibid.*)

Por otra parte, Nadine Brousseau, al presentar esta Organización Didáctica para 4º de Primaria, se pregunta si merece la pena realizar este trabajo. Su respuesta es que, aunque exige más tiempo y esfuerzo por parte del enseñante y de los alumnos, sin embargo es una muy buena forma de conseguir que los alumnos se encuentren ante las cuestiones que dan sentido a la medida y, por lo tanto, ante la razón de ser de la medida de las magnitudes continuas:

> Podemos preguntarnos si los resultados obtenidos compensan los esfuerzos realizados, y si las diferencias de resultados entre tales aprendizajes y los aprendizajes clásicos son significativas.
>
> Sin ninguna duda, podemos decir que, efectivamente, la diferencia es sensible y que este trabajo ha sido completamente provechoso para los alumnos.
>
> En primer lugar, la noción de “unidad”: Los niños han comprendido cómo se eligen las unidades y cómo funcionan. Una unidad no es necesariamente la que se estudia en el sistema legal. Hemos constatado una mayor familiaridad (pero, sobre todo, una comprensión más segura) con la idea de que se puede cambiar de unidad para medir una misma magnitud, lo que facilita mucho el dominio de los cálculos y les da sentido.
>
> Para los alumnos que no tienen esa representación mental, estos ejercicios de transformaciones, incluso bien dominados, casi siempre no son más que algoritmos desprovistos de todo significado.
>
> Otra constatación es que los alumnos se han sensibilizado con las nociones de aproximación, con los diferentes tipos de errores (errores debidos a la falta de fidelidad, a la imprecisión, a la sensibilidad de la balanza) que son algunas componentes importantes de los estudios sobre la medida.
>
> Por otra parte, los conocimientos matemáticos relativos a la estructura numérica son mucho mejor dominados (escritura de los números, numeración decimal, problemas ligados a la unidad, a los cambios de unidades,…).
>
> Asimismo, no hemos constatado a lo largo de estas actividades, ninguna señal de cansancio o de aburrimiento de los alumnos sino, al contrario, curiosidad, placer de

descubrir, de avanzar en el conocimiento…que nos han recompensado bien todos nuestros esfuerzos.” (N. Brousseau, 1987, pág. IV)

Volvamos ahora a la secuencia de las 25 sesiones que vamos a considerar. La distribución de los contenidos queda como sigue:

1ª sesión: Medida de longitudes: juego de comunicación.

2ª sesión: Medida de longitudes (continuación).

3ª sesión: Medida de masas: juego de comunicación.

4ª sesión: Medida de masas: estudio de mensajes, trabajo sobre las escrituras.

5ª sesión: Medida de masas: Comparación de escrituras.

6ª sesión: Medida de masas: Comparación de escrituras (continuación). Ejercicios de conversión.

7ª sesión: Medida de masas: Ejercicios de conversión: Transformación de mensajes.

8ª sesión: La suma de pesos.

9ª sesión: Comparación de los resultados de la suma de los pesos de objetos con el peso global de los tres objetos.

10ª sesión: Medida de masas: Ejercicios de transformación en base 60.

11ª sesión: Medida del tiempo: Cálculo sobre los números sexagesimales.

12ª sesión: Medida del tiempo: Cálculo sobre los números sexagesimales.

13ª sesión: Medida del peso: Unidades legales de peso.

14ª sesión: Medida del peso: Ejercicios de conversión con las unidades legales de peso.

15ª sesión: Encontrar el peso de un recipiente vacío (1ª parte).

16ª sesión: Encontrar el peso de un recipiente vacío (2ª parte).

17ª sesión: Las medidas de longitud: la suma.

18ª sesión: Las medidas de longitud: introducción de la coma.

19ª sesión: Escritura de las medidas decimales: medidas de longitud y de peso.

20ª sesión: Medidas decimales de longitudes y de pesos: Ejercicios (1ª sesión).

21ª sesión: Medidas decimales de longitudes y de pesos: Ejercicios (2ª sesión).

22ª sesión: Medidas decimales de longitudes y de pesos: Ejercicios (3ª sesión).

23ª sesión: Comparación de medidas decimales.

24ª sesión: El orden en las medidas decimales.

25ª sesión: El orden en las medidas decimales.

Como ya hemos visto en el apartado anterior, las dos primeras sesiones se dedican a la medida de longitudes. Las sesiones 3 a 10 se dedican al estudio de la magnitud peso y su medida. Las sesiones 11 y 12 a la medida del tiempo. Las sesiones 13 y 14 a la medida del peso. La 15 y la 16 a buscar el peso de un recipiente vacío. La 17 y 18 a la medida de longitudes. Y las restantes, desde la 19 a la 25, al estudio de las medidas decimales, tanto de longitudes como de pesos.

Debemos insistir en que el hecho de que la maestra haya continuado el estudio de la Medida de Magnitudes Continuas, cambiando de magnitud y utilizando un material completamente diferente, no es gratuito, ni debido al azar. Según la propia autora, esta decisión se basa en el hecho siguiente (N. Brousseau, 1987, pág. 8):[7]

> En primer lugar, los niños que utilizan el doble decímetro desde primero de Primaria, no comprenden la utilidad de una actividad de medida de longitudes sin este instrumento. Han tenido muchas reticencias para utilizar el patrón proporcionado, no graduado en el sistema habitual.
>
> Además, estos niños no se plantean la cuestión de la significación de una medida y no admiten, por tanto, que se pueda utilizar un objeto cualquiera (el pulgar, el pie, la varilla, una cuerda,...) para medir una longitud.
>
> Para superar estas dificultades, hemos escogido una actividad sobre la medida de masas que permite:
>
> - introducir la balanza de platillos, que no es un instrumento familiar para los niños (conocen esencialmente las balanzas automáticas);
>
> - utilizar esta balanza sin las masas marcadas sino con unidades elegidas por la maestra: diferentes tipos de clavos y plaquetas.

Esta decisión podemos interpretarla en términos de nuestro MER del siguiente modo:

La elección de una praxeología inicial muy ligada a la praxeología final $\langle \mathrm{cm} \rangle_{\mathbf{N}}$, que es muy familiar para los alumnos, imposibilita el trabajo en las praxeologías intermedias, como $\langle u \rangle_{\mathbf{N}}$. Por ello, la maestra ante la tarea didáctica: *¿Cómo hacer vivir las praxeologías intermedias* $\langle u_i \rangle_{K}$ *para dar sentido a la actividad de medir longitudes?* utiliza la técnica didáctica siguiente: *Elegir un material con características poco familiares para el alumno*.

[7] La traducción se debe a J.D. Godino, en "Matemáticas para Maestros" Manual para el estudiante. Proyecto Edumat-Maestros. Director Juan D: Godino. Octubre 2004. Recuperable en http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/.

A continuación, describiremos y evaluaremos la Organización Didáctica en torno a la medida de pesos que aparece en las sesiones de la secuencia de enseñanza presentada en N. Brousseau (1987, p. 9-45), dedicadas a la magnitud ***P*** (peso). Para ello, hemos hecho una clasificación de las distintas sesiones, atendiendo al tipo de tareas que se realizan. Dentro de cada apartado, expondremos un breve resumen de cada sesión y, a continuación, pasaremos a explicar y analizar con ayuda de nuestro MER, que utilizaremos a modo de sistema de referencia relativo, los componentes matemáticos y didácticos presentes y la dinámica de la OD desarrollada.

2.1. La cuestión inicial: ¿Cómo caracterizar los objetos por su peso?

Tercera sesión
La clase se divide en grupos de 4 niños cada uno. Cada equipo tiene 2 emisores y 2 receptores que trabajan juntos en colaboración pero separados físicamente. Material: una balanza Roberval, un saco de arena fina, 4 o 5 objetos a pesar (por ejemplo: un pequeño diccionario, un libro de historia, un plumier y un estuche de niño) 4 categorías de clavos (clavos grandes, clavos medianos, clavos pequeños y clavos minis), placas de metal (todas iguales) y hojas blancas para la escritura de los mensajes. Se plantea un juego de comunicación: Primera fase - Se distribuye un objeto que hay que pesar a cada grupo de emisores que va a tener que pesar con la ayuda de las cuatro categorías de clavos, las placas y la balanza. - Los emisores redactan un mensaje para que los receptores construyan una cierta cantidad de arena que tenga el mismo peso que el objeto recibido. (La balanza debe ser la misma para emisores y receptores). - Los mensajes son transmitidos a los receptores por el enseñante junto con la balanza y las categorías de clavos y las placas. - Emisores y receptores verifican que el peso de la arena es igual al peso del objeto pesado por los emisores. Segunda fase - Los receptores se convierten en emisores y recíprocamente. Los objetos a pesar son los mismos pero no se distribuyen en los mismos grupos.

Ejemplos de mensajes obtenidos a lo largo de la actividad
- “El estuche pesa 3 placas + 56 clavos”
- “Nuestro libro de historia pesa 12 clavos grandes, más 2 clavos medianos, más 9 clavos pequeños, más 4 placas”.
- “El estuche pesa 32 placas + 56 clavos pequeños”.
- “El plumier pesa 2 puntas pequeñas, 3 puntas medianas, 1 clavo grande y 6 placas”
- “El peso del plumier hace: 8 placas, 1 clavo grande y 4 clavos pequeños”.
- “Para pesar el Larousse, son necesarios 7 clavos grandes, 7 clavos medianos, 34 pequeños y 296 minis para equilibrar la balanza”.

$$\boxed{\boldsymbol{S(P)} \to \boldsymbol{M(S(P)} \quad \to \quad <u_1, \ldots, u_5>_{\boldsymbol{N}}} \to \quad <u_1>_{\boldsymbol{N}} \quad \to \quad <u_1>_{\boldsymbol{D}}+$$

Como ya hemos dicho antes, se ha elegido un sistema menos familiar ***S(P)***, donde ***P*** es la magnitud *peso*, y se propone un sistema de generadores formado por objetos cuyo “peso” es difícil de evaluar “a ojo”: mini-clavos (u_1), clavos pequeños (u_2), clavos medianos (u_3), clavos grandes (u_4) y placas metálicas (u_5).

- El sistema ***S(P)*** se compone de arena, objetos familiares (diccionario, libro, plumier y estuche), y los 5 tipos de objetos (clavos y placas) citados anteriormente.
- La operación de *adjunción* de objetos es trivial en este sistema (ponerlos juntos).
- La de *comparación* se efectúa por medio de una balanza Roverbal que aparece aquí como el instrumento de medida, ***I***, en ***S(P)***.
- Se supone inicialmente que ***MS(P)*** está generado por los clavos y las placas: ***MS(P)*** = $<u_1, u_2, u_3, u_4, u_5>_{\mathbf{N}}$, es decir que todo elemento de ***MS(P)*** es “equivalente” a una combinación lineal de los u_i con coeficientes en **N**.

Las *tareas* y *técnicas* que se presentan en esta sesión en la praxeología inicial ***S(P)*** $\to$ ***MS(P)*** son:

$\mathbf{T_{i0}}$ = *Comparar los pesos de los objetos utilizando la balanza Roberval*

Esta tarea se resuelve mediante la técnica:

τ_{i0} = *Dados dos objetos O_i y O_j, se colocan cada uno de ellos en un plato de la balanza. Si desciende el plato que contiene O_i y, por tanto la aguja de la balanza se desplaza hacia O_i, entonces O_i es más pesado que O_j; si, por el contrario, es el plato donde está O_j el que desciende y la aguja se desplaza hacia el lado de O_j, entonces O_j es más pesado que O_i. Cuando los dos platos quedan al mismo nivel entonces O_i y O_j tienen el mismo peso.*

$\mathbf{T_{i1}}$ = *Pesar un objeto O_i utilizando la balanza y los objetos del sistema de referencia $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$.*

Se resuelve con la técnica:

τ_{i1} = *Colocar en un plato de la balanza O_i y en el otro plato elementos del sistema de referencia hasta que los dos platos queden al mismo nivel.*

Pero esta técnica tiene distintas variantes según el modo de colocar los objetos del sistema de referencia en el otro plato.

τ_{i11} = *Colocar los u_i al azar.*

τ_{i12} = *Colocar primero el mayor número posible de u_i más grandes, luego el mayor número posible de u_i inmediatamente inferiores y así sucesivamente hasta llegar a los más pequeños que sirven para afinar la pesada.*

τ_{i13} = *Utilizar sólo los u_i más pequeños.*

En esta sesión, las *tareas* y *técnicas* se realizan en la praxeología intermedia $< u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 >_N$ son:

$\mathbf{T_{m1}}$ = *Dado un objeto, expresar su peso con la ayuda de los clavos y las placas y expresarlo por escrito para los receptores.*

Para ello se utiliza la técnica:

τ_{m1} = *Elección de un símbolo para cada uno de los objetos del sistema de referencia, contar los objetos de cada clase que se han utilizado y escribir el número de elementos de cada clase que se han utilizado como coeficientes.*

$\mathbf{T_{m2}}$ = *Interpretar el mensaje enviado y tomar una cantidad de arena del mismo peso que el objeto dado a los emisores.*

Para lo que se utiliza la técnica:

τ_{m2} = *Tomar las distintas cantidades de unidades u_i que indica el mensaje y colocarlas en un plato de la balanza y en el otro plato tomar la cantidad de arena que equilibra la balanza*

Para verificar si el peso de los objetos dados a los emisores coincide con el peso de los objetos construidos por los receptores, los alumnos utilizan la técnica τ_{i0}. Vemos aquí que, para comprobar y validar la respuesta obtenida, se vuelve a la praxeología inicial, donde las técnicas utilizadas son más sencillas para ellos.

Cuarta sesión

Estudio de los mensajes y trabajo sobre las escrituras

Se analizan los dos mensajes producidos durante la actividad anterior, para cada uno de los objetos pesados. Por ejemplo, para el estuche:

Primer mensaje: 8 placas, 4 clavos grandes, 1 mediano, 1 pequeño, 6 minis.

Segundo mensaje: 0 placas, 5 clavos grandes, 8 medianos, 11 pequeños, 2 minis.

La comprobación de que los dos mensajes son correctos ya se ha realizado en la sesión anterior.

La cuestión es: ¿Qué estrategia nos permitirá mostrar si dos escrituras diferentes designan el mismo peso?

Hay que recordar que ninguna de las categorías de clavos tiene un peso que sea múltiplo de la de otra categoría.

$$\boxed{\boldsymbol{S(P)\rightarrow M(S(P))} \rightarrow \langle u_1, \ldots, u_5\rangle_N} \rightarrow \langle u_1\rangle_N \rightarrow \langle u_1\rangle_D{+}$$

Esta sesión se desarrolla entre la praxeología inicial ***S(P)*** y la praxeología intermedia $\langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\rangle_N$. La tarea planteada es:

$\mathbf{T_{m3}}$ = *¿Cómo demostrar si dos escrituras diferentes designan el mismo peso?*

Para resolver esta tarea se intentan las técnicas siguientes (aquí se trabaja en ***S(P)***):

τ_{m31} = *Utilizar la balanza, con la técnica* τ_{i0}*, colocando los* $\boldsymbol{u_i}$ *de un mensaje en un plato de la balanza y los del otro mensaje en el otro plato.*

τ_{m32} = *Equilibrar el peso de un clavo de cada categoría con miniclavos, construyendo una tabla de equivalencias en función de los miniclavos* $\boldsymbol{u_1}$*, y reescribir cada mensaje utilizando únicamente los miniclavos. Para ello, se sustituye cada unidad por su equivalencia en* $\boldsymbol{u_1}$*, se calculan los miniclavos totales y luego se compara el número de miniclavos de los dos mensajes.*

Aquí la comparación de escrituras se ha convertido en una comparación de números. Esta técnica consta de dos partes bien diferenciadas: una primera desarrollada en ***S(P)***, en la que se construye la tabla de equivalencias, y una segunda entre $<u_1, u_2, u_3, u_4, u_5>_N$ y $<u_1>_N$ en la que se reformulan los mensajes en términos de los miniclavos y se comparan los números obtenidos. Esta técnica será utilizada en la siguiente sesión.

En cuanto a los momentos o dimensiones del proceso de estudio en marcha, hay que decir que se han planteado dos cuestiones importantes para el estudio de la medida del peso que pueden ser consideradas, en parte, como *cuestiones generatrices* del proceso de estudio:

- *¿Cómo caracterizar un objeto mediante su peso?*
- *¿Cómo demostrar que dos escrituras diferentes designan el mismo peso?*

Para empezar a responder dichas cuestiones, se ha llevado a cabo un *primer encuentro* con la medida de peso y se ha empezado a vivir el *momento de exploración* de la medida de peso.

También se observa bastante autonomía por parte de los alumnos a la hora de decidir qué técnica utilizar para resolver la tarea propuesta. Sin embargo, las tareas y los materiales y recursos son siempre aportados por la maestra.

En resumen, diremos que los componentes de las OM utilizadas son:

OM	***S(P)***
Objetos	*Arena, objetos familiares, los 5 tipos de u_i.*
Acciones	*Adjuntar = poner juntos* *Comparar = Con la balanza I*
OM	***MS(P)***
Objetos	*Las escrituras algebraicas de* $< u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 >$
Acciones	*Comparar mediante la relación de orden* (<) *Sumar medidas de peso* (+) *Multiplicar un nº por una medida*

OM	***S(P)→MS(P)***
Tipos de tareas	**T_{i0}** = *Comparar $p(O_i)$ con I (la balanza).* **T_{i1}** = *Pesar O_i con I y $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$.*
Técnicas	**T_{m1}** = *Expresar $p(O_i)$ en función de $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$.* **$T_{m2}$** = *Interpretar $p(O_i)$ en función de $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$.* **$T_{m3}$**= *Demostrar la equivalencia de escrituras.*
OM	$<u_1, \ldots, u_5>_N$
Tipos de tareas	τ_{i0} = *Manejar I (la balanza) con los O_i.* τ_{i1} = *Manejar I con los O_i y $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$* con las variantes τ_{i11}, τ_{i12}, τ_{i13}.
Técnicas	τ_{m1}= *Escribir el nº de cada **u_i** utilizado.* τ_{m2} = *Tomar el nº de cada **u_i** utilizado.* τ_{m31} = *Utilizar la balanza, o sea, realizar τ_{i0}.* τ_{m32} = *Realizar una tabla de equivalencia entre los u_i, transformar los dos mensajes a u_1 y comparar el número de u_1 que hay en ambos.*

2.2. El problema de la equivalencia de escrituras y la elección de un sistema de unidades

Quinta sesión

Comparación de escrituras

Para evitar que aparezca el desánimo, la maestra propone reemplazar cada uno de los clavos por un peso equivalente de miniclavos.

Los niños realizan la tarea por grupos y la maestra escribe en el encerado las equivalencias. A continuación, los alumnos intentan verificar la equivalencia de escrituras, haciendo un cálculo de los miniclavos necesarios para reemplazar a las placas y a los otros clavos de los mensajes. Como el número de miniclavos total para cada uno de los dos mensajes no es el mismo, la cuestión que se plantea es: ¿Podéis explicar de dónde viene esa diferencia? Ésta será la cuestión crucial de esta sesión y las siguientes.

$\boxed{\boldsymbol{S(P)\to M(S(P)} \quad \to \quad <u_1, \ldots, u_5>_{\boldsymbol{N}} \quad \to \quad <u_1>_{\boldsymbol{N}}} \to \quad <u_1>_{\boldsymbol{D}}+$

Esta sesión se desarrolla dentro de la praxeología intermedia $<u_1, u_2, u_3, u_4, u_5>_{\boldsymbol{N}}$ y aparece un nuevo modelo intermedio $<u_1>_{\boldsymbol{N}}$, muy vinculado a $<u_1, u_2, u_3, u_4, u_5>_{\boldsymbol{N}}$, aunque en un primer momento para encontrar las equivalencias entre las distintas unidades se trabaja en ***S(P)***, utilizando la balanza.

La tarea planteada sigue siendo $\mathbf{T_{m3}}$ y se intenta resolver, en este caso, a instancias de la maestra, con la técnica $\boldsymbol{\tau_{m32}}$, ya anunciada en la sesión anterior

Se plantea una nueva tarea:

> $\mathbf{T_{m4}}$ = *¿Por qué dos escrituras que designan el peso del mismo objeto, al traducirlas a la unidad más pequeña, no coinciden y hasta tienen una diferencia importante?*

Aquí surge un nuevo problema: los *errores de medida*. Aparecen los errores inherentes a toda medida y que, en un primer momento, se presentan como inexplicables para los alumnos.

Esta tarea se deja sin resolver para una sesión siguiente.

El trabajo en $<u_1, u_2, u_3, u_4, u_5>_{\boldsymbol{N}}$ ha permitido que se plantee el problema de la *unicidad de la escritura* y la necesidad de expresar cada una de las u_i en función de un único tipo de objeto, que aquí será u_1 = mini-clavo.

Vemos que se produce una transición de la praxeología $<u_1, u_2, u_3, u_4, u_5>_{\boldsymbol{N}}$ a la praxeología $<u_1>_{\boldsymbol{N}}$, pero surgen dificultades, ya que se sigue presentando el problema de que dos escrituras significativamente distintas designan el peso del mismo objeto.

Sexta sesión

Comparación de escrituras (continuación). Ejercicios de conversión

Material: Los mensajes de los niños sobre el peso del diccionario, del libro y del plumier.

Los alumnos deben verificar para cada uno de los tres objetos si las dos escrituras designan el mismo peso. Como siguen obteniendo diferencias significativas, piensan que se deben haber equivocado al contar el número de miniclavos, ya que hay muchos.

La maestra plantea un problema nuevo, que consiste en transformar la escritura de un mensaje de modo que se utilicen el menor número posible de miniclavos. Aquí la maestra cambia el problema con el fin de provocar el uso y repaso de conocimientos anteriores relativos a las operaciones con números naturales. Por ello, el problema será retomado en la siguiente sesión, donde los alumnos ya podrán servirse de esos conocimientos anteriores, sobre todo para realizar los cálculos con mayor seguridad y rapidez.

$$S(P) \to MS(P) \;\to\; \boxed{<u_1, \ldots, u_5>_N \;\to\; <u_1>_N} \;\to\; <u_1>_{D^+}$$

Esta sesión se inscribe dentro de las praxeologías intermedias $<u_1, u_2, u_3, u_4, u_5>_N$, y $<u_1>_N$. Se continúa planteando la tarea $\mathbf{T_{m3}}$ y se utiliza la técnica τ_{m32} para resolverla.

También se presenta la tarea $\mathbf{T_{m4}}$ para los demás objetos.

Para algunos alumnos, la diferencia importante entre los mensajes se debe a un error en el conteo de miniclavos.

La maestra propone una tarea nueva con el objetivo de provocar el uso y repaso de conocimientos anteriores relativos a las operaciones con números naturales: algoritmo de la multiplicación, revisión del sentido y del cálculo de la sustracción, aplicación a una situación nueva y diferente del sentido de la división.

> $\mathbf{T_{m5}}$ = *Transformar un mensaje de modo que haya el menor número posible de miniclavos.*

Las técnicas utilizadas son muy parecidas:

> τ_{m51} = *Reemplazar los miniclavos por clavos grandes y luego si sobran suficientes, sustituirlos por medianos y, si vuelven a sobrar suficientes, reemplazarlos por pequeños.*
>
> τ_{m51}’ = *Reemplazar los miniclavos por clavos medianos y, si sobran suficientes, reemplazarlos por pequeños.*

Además, se propone la tarea:

> $\mathbf{T^{-1}_{m5}}$ = *Verificar si los cálculos hechos en T_{m5} son correctos.*

Para ello utilizan la técnica τ_{m32}.

Séptima sesión

Ejercicios de conversiones: Transformación de mensajes

Los alumnos deben transformar los mensajes de modo que se utilice el menor número posible de miniclavos.

Se continúa con el estudio de los mensajes relativos a los otros objetos pesados en las sesiones anteriores.

$$S(P)\rightarrow MS(P) \rightarrow \boxed{<u_1, \ldots, u_5>_N \rightarrow <u_1>_N} \rightarrow <u_1>_{D^+}$$

Esta sesión se enmarca dentro de las praxeologías intermedias $<u_1, u_2, u_3, u_4, u_5>_N$, y $<u_1>_N$ y se plantea de nuevo una tarea análoga a $\mathbf{T_{m5}}$ y para ello los alumnos utilizan $\boldsymbol{\tau_{m51}}$ pero de dos maneras diferentes:

τ_{m511} = *Realizando un encuadramiento mediante productos sucesivos.*

Así por ejemplo: un clavo grande = 130 miniclavos, 10 clavos grandes = 1300 miniclavos, 30 clavos grandes = (3×1300) miniclavos = 3900 miniclavos.

Por tanto, 3975 – 3900 = 75, así tenemos que 3975 miniclavos equivale a 30 clavos grandes y 75 miniclavos. Si continuamos reemplazando miniclavos por clavos medianos: 75 – 52 = 23, tenemos un clavo mediano más.

Entonces el mensaje obtenido es 30 clavos grandes, 1 mediano y 23 minis.

τ_{m512} = *Planteando y realizando una división.*

Algunos alumnos han llevado a cabo la división de 3975 entre 130, y han obtenido como cociente 30 y como resto 75 miniclavos.

Otros han comenzado por reemplazar primero los miniclavos por el mayor número de placas, pero han utilizado los mismos procedimientos anteriores.

Se ha continuado con la tarea:

$\mathbf{T_{m3}}$ = *¿Cómo demostrar que dos escrituras diferentes pueden designar el mismo peso?*

para el libro de historia y el plumier, y se ha utilizado la técnica $\boldsymbol{\tau_{m32}}$ pero ahora de forma más rápida debido a las tareas $\mathbf{T_{m5}}$ realizadas anteriormente.

Para terminar, con respecto a las diferencias que existen entre los resultados de las pesadas y los de los cálculos hechos, los alumnos convienen que *las pesadas no habían sido siempre bien realizadas* (respuesta inicial a $\mathbf{T_{m4}}$). Piensan que habrían sido necesarios unos clavos aún más finos. *Todavía no admiten bien la idea de aproximación.*

En cuanto al desarrollo de la OD, el trabajo realizado en las sesiones tiene como objetivo encontrar una respuesta la cuestión:

- *¿Cómo demostrar que dos escrituras diferentes designan el mismo peso?*

Se sigue realizando el *momento de exploración* de la medida de peso, y se empieza a vivir el momento del *trabajo de la técnica*, pues se propone una tarea nueva $\mathbf{T_{m5}}$, con el objetivo de que los alumnos, después de resolverla, dominen mejor la técnica $\boldsymbol{\tau_{m32}}$, que es la que permite dar una respuesta adecuada a la tarea principal a resolver, $\mathbf{T_{m3}}$. También aparece un *momento de puesta en común y de evaluación* de las técnicas utilizadas para resolver $\mathbf{T_{m5}}$.

Por otra parte, se observa cierta autonomía por parte de los alumnos a la hora de decidir qué técnicas utilizar para resolver la tareas propuestas, sin embargo, la técnica $\boldsymbol{\tau_{m32}}$ es utilizada a instancias de la maestra y las actividades y los materiales y recursos son, de nuevo, aportados por la maestra.

En resumen, diremos que los componentes de las OM utilizadas son:

OM	***S(P)***
Objetos	*Los 5 tipos de u_i.*
Acciones	*Adjuntar = Poner juntos* *Comparar = Con la balanza I*
OM	***MS(P)***
Objetos	*Las escrituras algebraicas de* $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ *y de* $\{u_1\}$
Acciones	*Comparar mediante la relación de orden* (<) *Sumar medidas de peso* (+) *Multiplicar un nº por una medida*

OM	*S(P)→MS(P)*
Tipos de tareas	$\mathbf{T_{i1}}$ = *Realizar con la balanza la tabla de equivalencia entre los* u_i.
Técnicas	τ_{i1} = *Manejar la balanza con cada* u_i *y todos los demás* u_j.
OM	$<u_1, \ldots, u_5>_N$ *y* $<u_1>_N$
Tipos de tareas	$\mathbf{T_{m3}}$= *Demostrar la equivalencia de escrituras.* $\mathbf{T_{m5}}$ = *Transformar el mensaje para que haya la menor cantidad posible de cada* u_i. $\mathbf{T^{-1}_{m5}}$ = *Verificar si* $\mathbf{T_{m5}}$ *está bien realizada.* $\mathbf{T_{m4}}$ = *El problema del error.*
Técnicas	τ_{m32} = *Realizar una tabla de equivalencia entre los* u_i, *transformar los dos mensajes a* u_1 *y comparar el número de* u_1 *que hay en ambos.* τ_{m51} = *Reemplazar* u_1 *por* u_5, *luego por* u_4, *etc*. Utilizando las dos variantes τ_{m511} y τ_{m512} *Se empieza a considerar una posible respuesta inicial a* $\mathbf{T_{m4}}$.

2.3. El problema de la aditividad de la medida

Octava sesión

La suma de pesos

Material: una balanza Roberval, las cajas de clavos y las placas, y 8 objetos para pesar (Una caja de clips, una regla, un doble decímetro, 2 cuadernos juntos, una caja de tizas, un libro de la biblioteca, un par de tijeras, un paquete de pinturas) y hojas blancas para los mensajes).

La clase se reparte en los equipos A, B, C, D, E, F de 4 ó 5 niños (2 grupos de 2 ó 3 niños, A1 y A2, B1 y B2,…)

Los grupos A1 y A2, B1 y B2, etc. están separados pero trabajan juntos en colaboración y van a comunicarse los resultados.

La maestra distribuye 2 ó 3 objetos a los grupos A1, B1, C1, D1, E1, F1, que van a pesarlos con la ayuda de las cuatro categorías de clavos, las placas y la balanza. Después van a indicar su peso en una hoja en blanco.

Luego, la maestra dará estos mismos objetos a los grupos A2, B2, C2, D2, E2, F2, así como las balanzas. Estos grupos pesarán juntos esos objetos poniéndolos en el mismo plato de la balanza e indicarán el peso obtenido en otra hoja en blanco. Durante este tiempo los grupos A1, B1, C1, D1, E1, F1 calcularán en su hoja la suma de los pesos que han escrito. Se termina haciendo una verificación colectiva y reflexión del modo de mostrar si esas escrituras designan el peso de los mismos objetos.

$$\boxed{\boldsymbol{S(P)\to M(S(P)} \;\to\; <u_1, \ldots, u_5>_N \;\to\; <u_1>_N} \;\to\; <u_1>_{D^+}$$

Esta sesión se enmarca dentro de las praxeologías intermedias $< u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 >_N$ y $< u_1>_N$, aunque al principio, al utilizar la balanza para pesar los distintos objetos, también trabajan en ***S(P)***.

Primero se plantea la tarea $\mathbf{T_{i1}}$ ya realizada en la tercera sesión, que consiste pesar uno o varios objetos utilizando la balanza y las unidades $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ para después trabajar, ya, dentro de las praxeologías intermedias realizando las tareas:

$\mathbf{T_{m6}}$ = *Hallar* $\sum p_i$, siendo p_i el peso de O_i.

Además, se propone una tarea análoga a la tarea

$\mathbf{T_{m3}}$ = *Comprobar que* $\sum p_i = P(\oplus O_i)$,

propuesta en la 4ª sesión.

Para hallar $\sum p_i$ se utiliza la técnica:

$\tau_{\mathbf{m6}}$ = *Se suman los números de cada uno de los tipos de clavos por separado, y así se obtiene el número de cada tipo de clavos que pesan todos los objetos adjuntados.*

Pero aquí, para resolver las tareas del tipo $\mathbf{T_{m3}}$, aparece una técnica nueva:

$\tau_{\mathbf{m33}}$ = *Compensar en cada mensaje el menor número de clavos de un tipo por el mayor de otro tipo, de manera que ambos mensaje puedan reformularse con el mismo número de cada tipo de clavos salvo, si acaso, el número de miniclavos.*

En esta sesión, se pretende poner en evidencia la equivalencia entre la *adjunción* en la praxeología ***S(P)*** y la *suma formal* en la praxeología intermedia $<u_1, u_2, u_3, u_4, u_5>_N$, o mejor dicho la cuasi-equivalencia, ya que los pequeños errores de medición, la precisión de la balanza, etc. hacen que los dos mensajes no sean exactamente equivalentes.

Novena sesión

Comparar la suma de los pesos de objetos con el peso global de tres objetos

Material: Las hojas de los resultados de los niños de la sesión anterior.

Se escriben en el encerado los resultados de los grupos A1 y A2 y se trata de mostrar que ambas escrituras designan el mismo peso.

$$S(P) \to M(S(P)) \to \boxed{<u_1, \ldots, u_s>_N \to <u_1>_N} \to <u_1>_D+$$

Esta sesión se enmarca dentro de las praxeologías intermedias $<u_1, u_2, u_3, u_4, u_5>_N$ y $<u_1>_N$.

Aquí se continua planteando la tarea $\mathbf{T_{m3}}$ para el caso en que los mensajes correspondan a la suma de los pesos, $\sum p_i$ y al peso de los objetos juntos, $P(\oplus O_i)$. Los alumnos, en primer lugar, utilizan la técnica que apareció en la sesión anterior $\boldsymbol{\tau_{m33}}$, pero hay un momento que encuentran dicha técnica muy tediosa y se pierden, así que recurren de nuevo a la técnica $\boldsymbol{\tau_{m32}}$ que consiste en pasar todo a miniclavos y luego comparar el número de miniclavos.

Al final de esta sesión la maestra propone una reflexión sobre las ventajas y los inconvenientes de las distintas estrategias utilizadas para resolver $\mathbf{T_{m3}}$.

Los alumnos han valorado las técnicas utilizadas para resolver la tarea $\mathbf{T_{m3}}$ y hacen una propuesta de mejora de dicha técnica: *Utilizar un sistema de generadores donde cada generador contiene al inmediatamente inferior un número exacto de veces*. Los alumnos piensan que esto haría más cómoda la solución a la tarea $\mathbf{T_{m3}}$.

En cuanto al desarrollo de la OD, el trabajo realizado en las sesiones tiene como objetivo encontrar la respuesta a una nueva cuestión crucial:

- *¿Cómo caracterizar la adjunción de pesos mediante la medida?*

Además se sigue planteando la misma cuestión que en las sesiones anteriores:

- *¿Cómo demostrar si dos escrituras diferentes designan el mismo peso?*

Se lleva a cabo un *primer encuentro* con la tarea de sumar pesos y se sigue el *momento de exploración* de la medida de peso. Se continúa con el *trabajo de la técnica* para resolver $\mathbf{T_{m3}}$ y aparece el *momento de evaluación* de las técnicas utilizadas, donde además los propios alumnos proponen que, para mejorar la técnica, habría que disponer de un sistema de unidades donde cada unidad contenga a la anterior un número entero de veces.

Los alumnos son autónomos a la hora de buscar la manera de resolver las tareas y en la verificación y valoración de las posibles respuestas, hasta el punto, en este caso, de hacer una propuesta de cómo modificar el sistema de unidades para que la técnica utilizada sea más cómoda y permita dar una respuesta más eficaz.

En resumen, diremos que los componentes de las OM utilizadas son:

OM	***S(P)***
Objetos	*Los 5 tipos de* u_i *y los 8* O_i *para pesar.*
Acciones	*Adjuntar = Poner juntos* *Comparar = Con la balanza I*
OM	***MS(P)***
Objetos	*Las escrituras algebraicas de* $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ *y de* $\{u_1\}$
Acciones	*Comparar mediante la relación de orden* (<) *Sumar medidas de peso* (+) *Multiplicar un nº por una medida*

OM	***S(P)→MS(P)***
Tipos de tareas	$\mathbf{T_{i1}}$ = *Pesar* O_i *y* ($\oplus O_i$) *con la balanza y* $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$
Técnicas	$\mathbf{\tau_{i1}}$ = *Manejar la balanza con los* O_i *y* ($\oplus O_i$) *y* $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$
OM	$\langle u_1, \ldots, u_5\rangle_N$ *y* $\langle u_1\rangle_N$
Tipos de tareas	$\mathbf{T_{m3}}$= *Demostrar la equivalencia de escrituras entre* $\sum p_i$ *y* $P(\oplus O_i)$. $\mathbf{T_{m6}}$ = *Hallar* $\sum p_i$. $\mathbf{T_{m4}}$ = *El problema del error*.
Técnicas	$\mathbf{\tau_{m32}}$ = *Realizar una tabla de equivalencia entre los* u_i*, transformar los dos mensajes a* u_1 *y comparar el número de* u_1 *que hay en ambos.* $\mathbf{\tau_{m33}}$ = *Compensar en cada mensaje el menor número de clavos de un tipo por el mayor de otro tipo.* $\mathbf{\tau_{m6}}$ = *Sumar los números de cada* u_i *por separado.* *La idea de aproximación comienza a madurar y a ser aceptada.*

Diremos, para resumir, que, en un primer momento, las técnicas se desarrollan principalmente en ***S(P)*** y que la necesidad de ***MS(P)*** no aparece más que como medio para *comunicar* las acciones realizadas. Esta función de ***MS(P)*** evolucionará hasta la construcción de una tabla de equivalencias entre los objetos de la base (equivalencias establecidas en ***S(P)***), lo que conducirá a una ampliación de los tipos de problemas abordados y a un cambio radical de las técnicas, que abandonarán el sistema ***S(P)*** para vivir en una autonomía relativa en ***MS(P)***.

2.4. Sistemas regulares de medida con un generador: del peso al tiempo

10ª Sesión

Ejercicios de transformación en base 60

La maestra recuerda el deseo que manifestaron los alumnos en la sesión anterior, de que cada clavo grande se pudiera reemplazar por un número exacto de clavos de una categoría inferior.

La maestra propone la siguiente consigna:

"En la ferretería, hay varias clases de clavos. Imaginemos que existen clavos que:

- El peso de un clavo grande = el peso de 60 placas
- El peso de una placa = el peso de 60 clavos medianos
- El peso de un clavo mediano = el peso de 60 clavos pequeños
- El peso de un clavo pequeño = el peso de 60 miniclavos

¿Sabrías, utilizando este repertorio, comparar las escrituras que designan los pesos de dos objetos diferentes?

Por ejemplo, comparar el peso de dos objetos A y B:

A $\rightarrow$ 3 clavos grandes, 25 medianos, 2 pequeños

B $\rightarrow$ 2 clavos grandes, 14 medianos, 3 pequeños, 5 miniclavos

¿Cuál es el objeto más pesado?"

Como la comparación de las escrituras de los pesos anteriores es muy sencilla, la maestra propone otro caso, para motivar a los alumnos a hacer cálculos:

A $\rightarrow$ 2 clavos grandes, 25 medianos, 4 pequeños

B $\rightarrow$ 3 clavos grandes, 14 medianos, 3 pequeños, 5 miniclavos

$$S(P) \rightarrow M(S(P)) \rightarrow \boxed{<u_1, \ldots, u_5>_N \;\rightarrow\; <u_1>_N} \rightarrow <u_1>_{D^+}$$

Esta sesión se enmarca dentro de las praxeologías intermedias $<u_1, u_2, u_3, u_4, u_5>_N$ y $<u_1>_N$. Además, ahora cada u_i contiene un número exacto de veces a u_{i-1} (Por ello, en este caso, $u_i = 60\, u_{i-1}$, para i = 2, 3, 4 y 5)

La tarea que se propone sigue siendo $\mathbf{T_{m3}}$. Los alumnos utilizan la siguiente técnica:

τ_{m34} = *Comparar el número de clavos de cada clase empezando por las de mayor categoría, si se cumple que para las unidades de mayor categoría el número de clavos es mayor en uno de los mensajes, se pasa a la siguiente y si se continua produciendo lo mismo, se pasa a la siguiente. Si nos encontramos con un caso que no sucede de esta manera, transformamos una unidad en 60 unidades de la categoría inferior, y así hasta conseguir que todas las categorías de clavos sean mayores en uno de los mensajes.*

Pero esta técnica que sirve para el primer caso propuesto en esta sesión, sin embargo no sirve para el segundo caso.

La maestra propone utilizar la técnica τ_{m32}, que consiste en pasarlo todo a miniclavos paso a paso, para realizar una corrección con toda la clase en el encerado. De este modo, todo se reduce a comparar el número de miniclavos de cada escritura.

Para terminar la sesión, la maestra propone evaluar cada una de las técnicas utilizadas y se acuerda que, dependiendo de las escrituras que haya que comparar, será mejor utilizar una técnica u otra. Así, en el primer ejemplo propuesto en esta sesión, era más interesante utilizar la técnica τ_{m34}, pero en el segundo caso resulta mejor utilizar τ_{m32}.

Según la maestra, la elección del sistema de generadores no ha simplificado mucho las estrategias, sin embargo los niños se han dado cuenta de que los cálculos son más sencillos y rápidos. Sólo se necesita saber que cada unidad es 60 veces mayor que la que le sigue. Dicha elección ha sido arbitraria, pero se ha utilizado para que posteriormente los alumnos puedan ver su aplicación en el sistema sexagesimal. Por ello, las dos sesiones siguientes se han dedicado a trabajar sobre las unidades de tiempo.

11ª y 12ª Sesiones

Cálculo con números sexagesimales

Estas dos sesiones se dedican a actividades que son consideradas por los niños más como un juego que como una actividad de enseñanza.

Ejercicios para:

- Aprender a leer la hora en un reloj de pared.
- Saber a qué hora terminará la actividad, sabiendo qué hora es y la duración en minutos de la actividad.
- Saber a qué hora ha empezado la actividad, si sabemos qué hora es y cuánto ha durado la actividad.
- Evaluar la duración de una actividad dada sin mirar el reloj.

Una vez que los alumnos conocen que 1 hora equivale a 60 minutos y que 1 minuto a 60 segundos, se plantean ejercicios de cálculo con los números sexagesimales como los siguientes:

- Dadas dos duraciones en horas, minutos y segundos, se pide compararlas.
- Dadas dos duraciones, compararlas.
- Pasar una duración en segundos a minutos y horas.
- Sumar o restar dos duraciones dadas, multiplicación de una duración por un número natural e incluso una división de una duración por un natural.

$$\boldsymbol{S(T)\rightarrow M(S(T)} \quad \rightarrow \quad <\textit{seg, min, hora}>_{N}$$

Esta sesión se enmarca en la praxeología $<$*seg, min, hora*$>_N$.

Aquí, los objetos ***S(T)*** = {las duraciones en realizar una actividad determinada}. Existe un instrumento para medir el tiempo que es ***I*** = {el reloj de pared}.

Las tareas que se proponen consisten en:

- Leer la hora en el reloj de pared.
- Comparar dos duraciones y calcular su diferencia.
- Cambiar las unidades de tiempo con las que se expresa una duración determinada.
- Evaluar la duración de algunas actividades.
- Realizar cálculos con los números escritos en el sistema sexagesimal: sumar y restar tiempos, multiplicación por un natural y división por un natural.

La autora señala que estas actividades son una buena ocasión para abordar el problema de las llevadas y dar sentido a un mecanismo que se presenta desprovisto de significado, y para hacer notar que este sistema es diferente al sistema de base 10.

En cuanto al desarrollo de la OD, el trabajo realizado en la sesión 10 tiene como objetivo seguir planteando la cuestión:

- *¿Cómo demostrar que dos escrituras diferentes designan el mismo peso?*

Pero se propone hacerlo con un sistema de unidades donde cada unidad contiene a la anterior un número entero de veces, es decir, con un sistema *regular*.

Se continúa con el momento del *trabajo de la técnica* para resolver **T_{m3}** y en la corrección colectiva se presenta un *momento de evaluación* de las técnicas utilizadas. Aquí los alumnos se dan cuenta de que los cálculos con el nuevo sistema de unidades son mucho más sencillos y rápidos.

Los alumnos son autónomos a la hora de buscar la manera de resolver la tarea con el nuevo sistema. Pero es la maestra la que sigue proporcionando a los alumnos tanto la actividad a resolver como los recursos a utilizar.

En resumen, diremos que los componentes de las OM en torno a la medida de peso que se utilizan son:

OM	***MS(P)***
Objetos	*Las escrituras algebraicas de* $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ *y de* $\{u_1\}$
Acciones	*Comparar mediante la relación de orden* $<$ *Sumar medidas de peso* $+$ *Multiplicar un nº por una medida*

OM	$<u_1, \ldots, u_5>_N$ *y* $<u_1>_N$
Tipos de tareas	**T_{m3}** =*Demostrar la equivalencia de escrituras.*
Técnicas	**τ_{m32}** = *Utilizar la tabla de equivalencia entre los* u_i*, transformar los dos mensajes a* u_1 *y comparar el número de* u_1 *que hay en ambos.* **τ_{m34}** = *Comparar el nº de clavos de cada clase empezando por los de mayor categoría, y así hasta conseguir que en todas las categorías los números sean mayores en uno de los mensajes.*

En cuanto a la OD de la medida del tiempo, es considerada por la maestra más como un juego que como una actividad de enseñanza. Es la maestra la que va proponiendo distintas cuestiones relativas a la medida del tiempo, a la vez que se van realizando diferentes actividades como lectura, estar en silencio o en calma, etc. Los alumnos realizan ejercicios de cálculo de números-medida del tiempo propuestos por la maestra. Podemos suponer que en estas sesiones se realiza el *momento exploratorio* y un breve *trabajo de la técnica* aunque no se especifica qué técnicas son utilizadas.

OM	***S(P)***
Objetos	*Tiempo que se tarda en la lectura de un texto,* *tiempo que se tarda en realizar una acción.*
Acciones	*Leer la hora en el reloj.* *Adjuntar = Realizar a continuación* *Comparar = Con el reloj*
OM	***MS(P)***
Objetos	*Las escrituras algebraicas de* {*seg, min, hora*}
Acciones	*Comparar periodos de tiempo mediante la relación de orden* (<) *Sumar medidas de tiempo* (+) *Multiplicar una medida de tiempo por un número*

OM	***Tipos de tareas***	***Técnicas***
S(P)→ MS(P)	*Leer la hora en el reloj*	La técnica utilizada es casi "natural" y espontánea.
<seg, min, hora> $_N$	*Estimar la duración de algunas actividades* *Comparación de dos duraciones y cálculo de su diferencia* *Conversión de medidas dadas en unas unidades a otras unidades* *Realizar cálculos con los números sexagesimales: sumar y restar tiempos, multiplicación por un nº natural y división por un nº natural*	Durante estas dos sesiones no se especifican las técnicas utilizadas por los alumnos para resolver las tareas propuestas por la maestra

2.5. Sistemas legales de medida

13ª Sesión

Las unidades legales de peso

Material:

2 cajas de pesos de latón que cada una contiene:

1 peso de 500 gramos

1 peso de 200 gramos

2 pesos de 100 gramos

1 peso de 50 gramos

1 peso de 20 gramos

2 pesos de 10 gramos

1 peso de 5 gramos

2 pesos de 2 gramos

1 peso de 1 gramo

y un peso de hierro fundido de 1 kg

La maestra recuerda a los alumnos las actividades realizadas con los clavos en las sesiones anteriores y les pregunta si los comerciantes del mercado también utilizan clavos para pesar en la balanza.

A continuación les presenta el material de las cajas y les da la consigna siguiente:

“He puesto un objeto A en uno de los platos de la balanza. En el otro, he puesto un peso de 500 g, un peso de 200 g, un peso de 100 g, un peso de 20 g y un peso de 10 g. La balanza está en equilibrio.

Luego, he pesado un objeto B que ha sido equilibrado con un peso de 500 g, 2 pesos de 200 g y un peso de 5 g. ¿Cuál es el peso de A? ¿Cuál es el peso de B? ¿Cuál es el peso total de los dos objetos A y B, juntos?”

Al final la maestra realiza una institucionalización de las unidades legales de peso.

$$S(P) \rightarrow MS(P) \rightarrow \boxed{<kg, 500\ g, 200\ g, 100\ g, 50\ g, 20\ g, 10\ g, 5\ g, 2\ g, g>_N \rightarrow\ <g>_N} \rightarrow$$

Esta sesión se encuadra dentro de las praxeologías intermedias $<kg, 500\ g, 200\ g, 100\ g, 50\ g, 20\ g, 10\ g, 5\ g, 2\ g, g>_N$ y $<g>_N$ y el tipo de tareas y técnicas que se aparecen son:

La tarea $\mathbf{T_{m1}}$ para los objetos A y B, por separado, y luego para los dos objetos juntos. Para ello se utiliza la técnica análoga $\boldsymbol{\tau_{m1}}$ que consiste en traducir todo a la unidad más pequeña que es el *g* y sumar los números obtenidos.

Otra tarea que se propone es $\mathbf{T_{m3}}$ para tres escrituras que designan la suma de los pesos de A y de B. Para realizar esta tarea se utiliza una técnica análoga a $\boldsymbol{\tau_{m32}}$, transformando todo en gramos y haciendo los cálculos numéricos necesarios para obtener el número total de gramos y, al final, comparar el número de gramos obtenido en cada caso. La autora resalta que los alumnos han realizado esta tarea con mucha facilidad, sobre todo si comparamos con las dificultades que tenían en la 5ª y 6ª sesiones. Los alumnos se han percibido de esta facilidad y la atribuyen a que todos los pesos son expresados en la misma unidad y que son múltiplos los unos de los otros.

Para terminar la sesión, la maestra realiza una institucionalización de la unidades legales de peso, indicando su nombre, la manera habitual de expresarlas brevemente y la relación entre las diferentes unidades. Aquí los alumnos se dan cuenta del parecido con el Sistema de Numeración habitual de base 10. La familiarización con estas unidades se realizará en las siguientes sesiones.

14ª sesión

Ejercicios de conversión con las unidades legales de peso

Se proponen a los alumnos ejercicios de cálculo rápido con el fin de que se familiaricen con el vocabulario y las relaciones entre las diferentes unidades de peso introducidas en la sesión anterior. Los ejercicios son corregidos de forma colectiva en el encerado. También la maestra propone un problema análogo al presentado en la sesión anterior.

La maestra da la ocasión a los alumnos de poder volver a reutilizar las nociones de doble y de mitad (1/2), en un dominio diferente al que habían sido introducidas.

Al final de la sesión, la autora expone una muestra de ejercicios de conversiones de las medidas de tiempo y de peso, que han sido propuestos a los alumnos de forma regular al principio de las sesiones durante 10 minutos. Los ejercicios eran escritos en el encerado (2 ó 3 por día) y los alumnos debían realizarlo en su cuaderno. Luego eran corregidos.

$$S(P) \to M(S(P) \to \boxed{<kg, hg, dag, g>_{N[1/2]} \to <g>_N} \to <g>_D+$$

Esta sesión se encuadra entre las praxeologías $<kg, hg, dag, g>_{N[1/2]} \to <g>_N$. Los tipos de tareas y las técnicas que aparecen son:

Tareas de conversión de una escritura dada en diferentes unidades a una escritura expresada sólo en gramos, es decir, de paso de la praxeología $<kg, hg, dag, g>_{N[1/2]}$ a la praxeología $<g>_N$. También se proponen tareas de comparación de pesos análogas a $\mathbf{T_{m3}}$ y de cálculos de sumas análogas a $\mathbf{T_{m6}}$ en $<kg, hg, dag, g>_{N[1/2]}$ y luego su transformación dentro de $<g>_N$.

Las técnicas utilizadas por los alumnos se realizan en $<kg, hg, dag, g>_{N[1/2]}$ como cuando utilizan $\boldsymbol{\tau_{m34}}$ para comparar las escrituras de los pesos de dos objetos, y van comparando los pesos categoría por categoría. También resuelven las tareas en $<g>_N$ como cuando para comparar dichas escrituras, utilizan una técnica análoga $\boldsymbol{\tau_{m32}}$, donde primero transforman todas las unidades a gramos y luego suman el total de gramos de cada escritura y terminan comparando los números totales de gramos.

En cuanto a los ejercicios de entrenamiento propuestos por la maestra, diremos que son tareas de transición de una praxeología intermedia a otra.

La OD que se desarrolla en estas dos sesiones sigue teniendo como objetivo dar una respuesta eficaz a la cuestión:

- *¿Cómo demostrar si dos escrituras diferentes designan el mismo peso?*

Las tareas son propuestas por la maestra y pretenden que los alumnos descubran las facilidades de cálculo que aporta un sistema de unidades donde cada unidad contiene a la anterior un número entero de veces. Se sigue realizando el *trabajo de la técnica* y se produce el *momento de la evaluación y de la institucionalización* de las unidades legales.

OM	***MS(P)***
Objetos	*Las escrituras algebraicas de* {*kg, 500 g, 200 g, 100 g, 50 g, 20 g,10 g, 5 g, 2 g, g* }, *de* {*kg, hg, dag, g*} *y de* {*g*}
Acciones	*Comparar pesos mediante la relación de orden* (<) *Sumar medidas de peso* (+) *Multiplicar un nº por una medida*

OM	$\langle kg, 500\ g, 200\ g, 100\ g, 50\ g, 20\ g, 10\ g, 5\ g, 2\ g, g\rangle_N \rightarrow \langle kg, hg, dag, g\rangle_{N[1/2]} \rightarrow \langle g\rangle_N$
Tipos de tareas	$\mathbf{T_{m1}}$= *Expresar* $p(O_i)$ *en función de* {*kg, 500 g, 200 g, 100 g, 50 g, 20 g,10 g, 5 g, 2g, g*}. $\mathbf{T_{m3}}$= *Demostrar la equivalencia de escrituras.* $\mathbf{T_{m6}}$ = *Hallar* $\sum p_i$.
Técnicas	τ_{m1}= *Escribir el nº de cada unidad, traducirlo todo a g, y calcular el nº total de g.* τ_{m32} = *Transformar los dos mensajes a g y comparar el número de g que hay en ambos.* τ_{m34} = *Comparar el nº de clavos de cada clase empezando por los de mayor categoría, y así hasta conseguir que todas las categorías sean mayores en uno de los mensajes.* τ_{m6} = *Sumar los números de cada unidad por separado y aplicar* τ_{m1}.

2.6. El problema del peso del recipiente vacío

15ª y 16ª Sesiones

<u>Encontrar el peso de un recipiente vacío</u>

Material: una balanza Roberval, un cubo lleno de agua, un recipiente vacío ligero de plástico (de alrededor de 60 g) (un recipiente de helado comprado en el comercio), una caja de pesos de latón, un vaso.

Preparación de la clase: Antes de la lección, la maestra ha preparado una tabla como la siguiente:

<table>
<tr><td colspan="4">Cálculos sobre los pesos</td><td rowspan="5">Nº de vasos de agua: Peso total

1…
2…
3…</td><td>Explicación esquema</td><td>Previsiones</td></tr>
<tr><td>100 g
hg</td><td>10 g
dag</td><td>1 g
g</td><td>Total</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4">1…
2…
3…</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

El material queda a disposición de los alumnos. En una mesa, delante de los alumnos, la maestra ha colocado: la balanza y los pesos, el recipiente plástico y el vaso; y en el suelo, un cubo lleno de agua.

Desarrollo:

Primera etapa

Consigna**:** "*Tenéis que adivinar el peso de un recipiente con agua*". La maestra toma el recipiente vacío y el vaso, que llena de agua. Vacía el agua del vaso en el recipiente.

"*Vamos a pesar el recipiente. ¿Qué peso pensáis que vamos a encontrar? Escribid vuestra previsión en el cuaderno*"

Cada niño hace una previsión y luego se hace una verificación con la balanza ante toda la clase y se indican las cantidades de cada peso en la tabla siguiente:

Cálculo sobre las pesas			
100 g hg	10 g dag	1 g g	Total
2	2	8	228 g

La maestra escribe 228 g y pregunta: "*¿Quién ha encontrado el valor exacto?*". "*¿Quién ha encontrado más? ¿Quién ha encontrado menos?*", y escribe ella misma los valores dados por los niños en la parte derecha de la pizarra: "previsiones", línea 1, en un orden creciente, así como el número de niños que han previsto estos valores.

"¿Quién había previsto entre 80 g y 125 g?" (5 niños).

"*¿Quién había previsto entre 125 g y 450 g?*" (2 niños) ..

Los niños se han sorprendido ya que ellos han dado un número al azar en su estimación.

Segunda etapa

Esta segunda etapa se desarrolla como la primera: la maestra llena de nuevo el vaso (es necesario que esté bien lleno) y lo vacía en el recipiente que contiene aún el primer vaso de agua.

Consigna: *"¿Qué peso prevéis ahora para el recipiente? Anotad este peso en vuestro cuaderno"*.

Se recogen las estimaciones y luego se hace una verificación ante toda la clase.

Cálculo sobre las pesas			
100 g hg	10 g dag	1 g g	Total
2	2	8	228 g
3	8	3	383 g

Tercera etapa

El desarrollo es el mismo que el de la segunda etapa:

a) La maestra vierte un tercer vaso de agua en el recipiente.

b)Los niños hacen previsiones que se recogen en la parte derecha de la pizarra (línea 3).

c) Se hace una verificación de la pesada

Cuarta etapa

a) La maestra vierte un cuarto vaso de agua en el recipiente.

b) Los niños hacen previsiones escritas que se recogen en la tabla, se hace un debate y se permite que aquellos que lo deseen puedan rectificar sus previsiones. Después se hace la verificación ante todos con la balanza.

Quinta etapa: Previsión del peso del recipiente *vacío*

a) La maestra propone en primer lugar vaciar un quinto vaso para los niños que deseen utilizar el método enunciado anteriormente por sus compañeros... (mismo proceso)

b) “Ahora, voy a vaciar el agua y a pesar el recipiente. ¿Qué es lo que voy a encontrar?”

Los niños hacen su previsión sobre su cuaderno.

Pero el recipiente no se pesa: no hay verificación en esta sesión.

16ª sesión (2ª parte)

Primero la maestra recoge las previsiones (peso del recipiente vacío) que los niños habían hecho al final de la sesión anterior.

Estas previsiones se escriben a la derecha de la pizarra. La profesora coloca una barra en la región propuesta e indica el número de niños que han previsto el mismo valor:

"*¿Quién ha encontrado menos*?"

"*¿Quién ha encontrado más? etc.*"

Listado de las estrategias utilizadas por los alumnos

Los alumnos que han utilizado métodos de previsión mediante cálculo los explican a los compañeros. La maestra los enumera. Hay dos:

1. Cálculo con los dos primeros números obtenidos en la pesada

R: recipiente

V: vaso

383	–	228	=	155		228	–	155	=	73
↓		↓		↓		↓		↓		↓
R+2V		R+1V		1V		R+1V	–	1V		R

La maestra escribe estas operaciones y fórmulas en la pizarra, sin comentarios. Los alumnos comprenden perfectamente su sentido por las necesidades de la lección.

2. Cálculo con el primero, el segundo y el tercer número obtenidos por la pesada

$$\begin{array}{ccccc} 553 & - & 383 & = & 170 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ R+3V & & R+2V & & 1V \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 228 & - & 170 & = & 58 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ R+1V & & 1V & & R \end{array}$$

Los pesos son diferentes ¡73 g en un caso, 58 g en el otro! Los niños quedan muy sorprendidos y frustrados y no comprenden, sino muy progresivamente, que el cálculo no da forzosamente el valor indicado por la balanza. La maestra les pide entonces que traten de encontrar otros métodos de cálculo que permitan encontrar el peso del recipiente vacío. Y, animándoles de este modo, proponiéndoles desafíos, los lleva poco a poco a buscar otros métodos que son elaborados en común y anotados en la pizarra.

$$\begin{array}{ccccc} 553 & - & 228 & = & 325 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ R+3V & & R+1V & & 2V \end{array}$$

3. Cálculo con el primer y el tercer número obtenido por la pesada.

Los niños comprenden que es necesario encontrar la mitad de 325 para obtener el peso de un vaso.

Proceden por descomposición, pues se trata de una división por 2. No sienten la necesidad de plantear la operación. Seguramente hubiera sido de otro modo si hubiera sido necesario dividir por 3, 4, 5,...

La mitad de 300 → 150

La mitad de 20 → 10

La mitad de 5 → 2 1/2

La mitad de 325 → 162 1/2

$$\begin{array}{ccccc} 228 & - & 162\ 1/2 & = & 65\ 1/2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ R+1V & & 1V & & R \end{array}$$

4. Otros cálculos con el tercer número:

553 – 383 = 170 (ref. al cálculo 2)
↓ ↓ ↓
R+3V R+2V 1V

3 x 170 = 510
↓ ↓
1V 3V

553 – 510 = 43
↓ ↓
R+3V 3V

2 x 170 = 340
↓ ↓
1V 2V

5. Otros cálculos con los números tercero y segundo

383 – 340 = **43**
↓ ↓ ↓
R+2V 2V R

383 – 228 = 155 (ref. al cálculo 1)
↓ ↓ ↓
R+2V R+1V 1V

155 x 3 = 465
↓
3V

553 – 465 = 88 g
↓ ↓ ↓
R+3V 3V R

Se termina la sesión con un inventario de las explicaciones sobre las desviaciones y con un debate sobre las respuestas dadas al azar.

Los niños comparan todos los resultados obtenidos para el peso del recipiente.

R: 73 g, 58 g, 43 g, 65 1/2 g, 43 g, 88 g.

La maestra les pide explicar y dar razones de estas diferencias. Los alumnos dicen lo siguiente:

"¡la balanza no está bien ajustada!"

"¡la aguja no estaba siempre exactamente en la mitad!"

"¡el vaso no estaba siempre lleno de la misma manera!"

"¡las pesadas no eran bastante precisas!"

En el debate sobre las respuestas al azar, la maestra les propone:

"Vamos a hacer un gran número de pesadas (una quincena) con otro recipiente y cada vez, haréis una previsión que puede ser:

(a) Siempre mediante el cálculo, o bien

(b) Siempre al azar.

Anotaré para cada uno de vosotros las previsiones que hayáis hecho. Después pesaremos el recipiente vacío. Contaremos a continuación el número de previsiones que sean las más precisas del peso. ¡Aquellos cuyo número total de previsiones se aproximen lo más posible al peso habrán ganado!"

"¿Quién prevé mediante el cálculo?"

"¿Quién prevé al azar?"

Los alumnos se quedan estupefactos en la clase y nadie quiere prever al azar.

$$\boxed{\boldsymbol{S(P)} \rightarrow \boldsymbol{R} + \boldsymbol{<V>_N} \subset < R\,,\, V >_N \;\rightarrow\; < hg, dag, g >_N \;\rightarrow\; < g >_N} \rightarrow\; < g >_{\boldsymbol{D}}+$$

El conjunto ***S(P)*** está formado por el recipiente y el agua contenida en vasos (completos). Se trata de objetos reales susceptibles de ser medidos respecto de su peso. Se pueden adjuntar varios vasos de agua y el recipiente, vertiéndolos en éste (acción de *adjuntar*) y, gracias a la *balanza de Roverbal*, se pueden *comparar* dos objetos respecto de su peso[8] así como *evaluar* algunos aspectos de la medición respecto de la magnitud peso.

La modelización del sistema **S(*P*)** la denotaremos por $R + <V>_{\mathbf{N}} \subset < R\,,\, V >_{\mathbf{N}}$ donde R es la cantidad de magnitud peso del recipiente y V la cantidad de magnitud peso del agua contenida en un vaso completo. En este sistema tenemos definida una suma formal así como el producto, por un número entero, de la cantidad de magnitud del agua contenida en un vaso completo. Toda cantidad de la magnitud peso usada en la praxeología descrita se podrá expresar, bien en la forma $R + n{\cdot}V$ (con $n \geq 0$), bien en la forma $k{\cdot}V$ (con $k > 0$). Por consiguiente, la praxeología que vamos a describir estaría estrictamente contenida en el sistema $< R, V >_{\mathbf{N}}$.

[8] En la actividad 3 de N. Brousseau (1987) aparece, en otro sistema ***S(P)***, la tarea de comparar dos objetos respecto de su peso por medio de la balanza de Roverbal, por lo que se supone que el alumno ha construido ya una técnica para abordar esta comparación.

Además, tenemos las praxeologías ya utilizadas en las sesiones anteriores $< hg, dag, g>_{\boldsymbol{N}}$ y $< g >_{\boldsymbol{N}}$.

En lo que sigue, usaremos la siguiente notación:

- R: recipiente; V: vaso de agua.
- $R + n{\cdot}V$: recipiente con n vasos de agua.
- p_{R}: peso del recipiente; p_{V}: peso del agua contenida en el vaso.
- p_{n}: peso del recipiente con n vasos de agua = $p_{\mathrm{R}} + n \cdot p_{\mathrm{V}}$

En estas sesiones se presentan las tareas y técnicas siguientes:

> $\mathbf{T_{R1}}$: *Hacer una previsión de la medida concreta del peso p_1 del recipiente con un vaso de agua.*

Puesto que en este instante no se conoce ningún dato, lo más que se puede hacer es *adivinar* este peso:

> $\boldsymbol{\tau_{R11}}$: *Dar una medida concreta al azar.*
>
> $\boldsymbol{\tau_{R12}}$: *Estimar la medida concreta por comparación perceptiva con el peso, conocido, de algún objeto familiar.*

En este primer instante, se toma un objeto de **S(*P*)** y se pide su medida concreta en $<g>_{\boldsymbol{N}}$**,** por lo que el sistema $< R\ ,\ V >_{\boldsymbol{N}}$ no aparece de momento. La segunda tarea es similar, pero con dos vasos de agua:

> $\mathbf{T_{R1}}$’: *Hacer una previsión de la medida concreta del peso p_2 del recipiente con dos vasos de agua, conocido el peso p_1 del recipiente con un vaso de agua.*

En este instante ya conocemos un dato, que es la pesada anterior. Las *técnicas de estimación* $\boldsymbol{\tau_{R11}}$ y $\boldsymbol{\tau_{R12}}$ vuelven a presentarse para abordar este problema. Pero aparece una nueva técnica consistente en duplicar el peso conocido y que, como volverá a aparecer más adelante, la podemos formular de manera general como sigue:

> $\boldsymbol{\tau_{R13}}$: *Conocido el peso p_1 de $R + V$, el peso $p_{\mathrm{n}} = p_R + n{\cdot}p_V$ será:* $p_{\mathrm{n}} = n{\cdot}p_1$

Como se observa, esta técnica fracasa, ya que nos daría el peso de ***n*** recipientes y del agua contenida en ***n*** vasos. Sin embargo, a medida que crece ***n*** (se añaden más vasos), este error es cada vez menos significativo, de manera que el valor obtenido por esta técnica puede ser admitido como un posible peso del $R + n{\cdot}V$ dentro de un margen de error aceptable (si ***n*** "mucho mayor que" 1) y difícilmente disociable de otros errores. Sin embargo, aún cuando las demás causas de error son formuladas más adelante, ésta se deja de lado incluso cuando se propone determinar el peso de $R + 15\ V$.

Hasta este instante, hemos formulado dos tareas similares; en la primera, la ausencia total de datos obligaba a la estimación del resultado y, en la segunda, la insuficiencia de datos también nos llevaba, bien a conjeturar el resultado, bien a movilizar una técnica que fracasa. Las tareas que aparecen a continuación son, en esencia, similares, pero con la particularidad de que ya conocemos datos suficientes para poner en práctica técnicas efectivas de resolución. De manera general, las podemos formular como sigue:

> $\mathbf{T_{R1}}$**'':** *Hacer una previsión del peso* p_n *de* $R + n \cdot V$ $(n > 2)$, *conocido el peso* p_i *de* $R + i \cdot V$ *con* $1 \leq i \leq n - 1$.

En la 15ª sesión se sigue un riguroso orden, planteándose para $R + 3V$, luego para $R + 4V$, para acabar en $R + 5V$, aunque, como ya hemos comentado, luego también se plantea el caso de $R + 15V$. Además de las técnicas anteriores, la presencia de los datos relativos a los dos casos inmediatamente anteriores nos permite poner en funcionamiento una nueva técnica:

> $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{R14}}$**:** *Puesto que* p_{n-1} *corresponde al peso de* $R + (n - 1) \cdot V$ *y* p_{n-2} *al de* $R + (n - 2) \cdot V$, *la diferencia entre ambos nos dará como resultado el peso de:*
>
> $[R + (n - 1) \cdot V] - [R + (n - 2) \cdot V] = V$, *esto es*, p_V.
>
> *Por lo tanto:* $p_n = p_{n-1} + p_V$ (*ya que* $R + (n - 1) \cdot V + V = R + n \cdot V$).

Hemos denotado las sucesivas tareas con los mismos subíndices, ya que cada una supone una evolución de la anterior, en el sentido en que posibilita la creación de nuevas técnicas, hasta llegar a $\mathbf{T_{R1}}$**''** que da lugar a la "*técnica canónica*" para esta *Organización Matemática puntual*.

Es importante señalar que, hasta la técnica $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{R13}}$, el trabajo se ha realizado básicamente en $<g>_N$**,** puesto que se han manejado datos relativos a medidas en gramos de distintos objetos. Sin embargo, para poner en marcha la técnica $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{R13}}$ es necesario un trabajo dentro de la praxeología $< R\ , V >_N$ en un doble sentido:

(a) Por un lado, este trabajo en $< R\ , V >_N$ *crea* la técnica, ya que el trabajo sobre las escrituras $R + (n - 1) \cdot V$ y $R + (n - 2) \cdot V$ nos permite prever las operaciones a realizar, en $<g>_N$, con los datos numéricos que tenemos.

(b) Además, dicho trabajo permite *justificar* la técnica, en el sentido de que los datos que tenemos de las anteriores medidas no distinguen entre recipiente y vasos y, por consiguiente, la diferencia $p_n - p_{n-1}$ nos da un número que, a priori, no tiene ningún sentido para nosotros. Debemos subrayar que, como era de esperar, no son los niños los que movilizan por sí mismos estas escrituras en $< R\ , V >_N$, sino que es la profesora la que las escribe debajo de las operaciones que realizan[9].

Para cada una de estas situaciones problemáticas, se plantea una validación de la conjetura hecha por los alumnos. Esta validación la podemos interpretar dentro de la praxeología como un nuevo tipo de tareas y la técnica asociada:

$\mathbf{T_{R2}}$: *Pesar con la balanza de Roberval el recipiente con cierto número de vasos de agua.*

τ_{R2}: *Utilizar, por sucesivos ensayos, las pesas de g, dg y hg, hasta conseguir el equilibrio de la balanza.*

Para la validación, cambian completamente los dos primeros sistemas. Así, el sistema de objetos concretos estará formado por pesas de un hectogramo, de un decagramo y de un gramo, además del recipiente con los vasos de agua. Aquí aparece la praxeología $< hg,\ dag,\ g >_N$. Observamos que las tablas, como la que aparece a continuación[10], permiten la articulación entre las tres praxeologías intermedias, evitando en este momento[11], un trabajo efectivo en ***S(P)***:

Cálculo sobre las pesas			
100 g	10 g	1 g	Total
hg	dag	g	
2	2	8	228 g

Una vez realizado el trabajo con el peso de hasta 5 vasos ($R + 5V$), el tipo de tarea cambia:

$\mathbf{T_{R3}}$: *Hacer una previsión del peso* p_R *del recipiente, conocidos los pesos* p_n *de* $R + n\cdot V$ *con* $1 \le n \le 5$.

[9] “La maestra escribe estas operaciones y fórmulas en la pizarra, sin comentarios. Los alumnos comprenden perfectamente su sentido por las necesidades de la lección.” (Brousseau, 1987, p. 67).
[10] Página 63 del texto de N. Brousseau (1987).
[11] Este trabajo se ha llevado a cabo en las lecciones anteriores.

En las sesiones se presentan hasta tres técnicas distintas, aparte de la estimación, para resolver esta tarea. En común tienen el trabajo de tipo pre-algebraico realizado sobre **<** *R, V* **>*N*,** aunque cada uno con su particularidad:

> τ_{R31}: *A partir de cualquier* $p_{n\text{-}1}$ *y* p_n *como antes, podemos obtener el peso del agua de un vaso*:
>
> $p_n - p_{n-1} = p_V$ *[pues* $R + n\cdot V - (R + (n-1)\cdot V) = V$*]*
>
> *Como* p_1 *corresponde al peso de R + V, obtenemos que* $p_R = p_1 - p_V$.
>
> τ_{R32}: *Como antes:* $p_n - p_{n-1} = p_V$ *Entonces, como* p_k *corresponde al peso de R + kV,* $p_k = p_R + kp_V$ *, de donde obtenemos que:* $p_R = p_k - kp_V$
>
> $\tau_{R\,33}$: *A partir de un* p_n *y un* $p_{n\text{-}k}$*, podemos obtener que:* $p_n - p_{n-k} = p_{kV}$
>
> *De donde:* $p_V = p_{kV}/k$*. Por consiguiente:* $p_R = p_1 - p_V$.

De nuevo se observa cómo el trabajo sobre **<** *R, V* **>*N*** es fundamental para el desarrollo y la justificación de estas técnicas, podríamos decir que es en este modelo donde surgen las tecnologías algebraicas que avalan las técnicas empleadas.

Si bien el trabajo realizado en las sesiones se queda aquí, pensamos que sería interesante proponer la siguiente tarea:

> *¿Cómo determinar el peso de la “materia” contenida en un recipiente cuando es imposible manejarla sin recipiente (caso del agua)?*

No obstante, debemos observar que, aunque el problema no se plantea en general, sí que se utilizan las técnicas descritas para determinar el peso p_V del agua contenida en un vaso.

Los cálculos indicados arriba llevan a diferentes valores para p_R, algo que se usa para poner en evidencia los *errores* que se pueden cometer en todo proceso de medición. En este sentido, se plantean algunas tareas:

> $\mathbf{T}_{R4}$: *Dados los resultados del peso del recipiente (73g, 58g, 43g,...) ¿qué explicaciones puedes dar a estos resultados?*
>
> $\mathbf{T}_{R5}$: *¿Qué consecuencias tiene el error en las sumas y en los productos?*

Para la primera, no vemos una técnica clara de resolución mientras que la segunda queda, simplemente, planteada y su resolución sería bastante compleja (dadas dos cotas del error, una para cada medida, obtener a partir de ellas una cota del error para la suma y otra para el producto).

En resumen, podemos considerar que en estas dos sesiones se lleva a cabo un proceso de estudio de una ***praxeología matemática puntual en torno al peso***. Esta organización puntual viene generada por una técnica que podemos describir, en general, como sigue:

> τ: *Conocidos los pesos de ciertos objetos (del recipiente con los correspondientes vasos de agua), manipular "algebraicamente", en* $< R\ , V >_N$ *, las simbolizaciones de dichos objetos para determinar las operaciones a realizar en* $<g>_N$ *con los pesos dados.*

Esta técnica permite realizar las tareas $\mathbf{T_{R1}}$**"** y $\mathbf{T_{R3}}$. Ya comentamos que se podría formular un último problema, *determinar el peso del agua contenida en un vaso (conocidos los pesos anteriores)*, que también se podría resolver con esta técnica. Como se observa, esta técnica se desarrolla entre $< R, V >_N$ y $<g>_N$. Sin embargo, no permite abordar las tareas $\mathbf{T_{R1}}$ y $\mathbf{T_{R1}}$**'** y, de hecho, estas tareas sólo se pueden resolver mediante la pesada efectiva en la balanza de Roverbal con pesas de gramo, decagramo y hectogramo, lo que supone volver a la manipulación de objetos, para pasar a la medida concreta en $<g>_N$ mediante una tabla que simplifica el trabajo formal en $<hg,\ dag,\ g>_N$. La justificación tecnológica de estas técnicas se sigue llevando a cabo, sin embargo, en las praxeologías intermedias.

Observamos, por fin, que esta técnica se podría desarrollar para proponer una *ampliación del campo de problemas* y dar origen a nuevas técnicas. Destacamos, en particular, el caso en que una de las praxeologías intermedias estaba generada por cinco objetos y se trabajaba con cualquier tipo de combinación lineal de estos generadores. Esto permitía tanto la existencia de un campo de problemas más amplio como el desarrollo de un conjunto de técnicas más potentes, flexibles e interrelacionadas.

Por todo lo anterior, parece lógico pensar que la razón de ser de la praxeología $R + <V>_N$, así como su introducción en este proceso de estudio, está más ligada a la *problemática de la función lineal y afín* que a la Medida de Magnitudes propiamente dicha (Brousseau, N., 1987, p.71).

La OD que se desarrolla en estas dos sesiones sigue teniendo como objetivo dar una respuesta a la cuestión:

- *¿Cuál es el peso de un recipiente vacío?*

Las tareas son propuestas por la maestra y pretenden poner en evidencia que en todo proceso de medición aparecen errores. La maestra se propone que sean los propios alumnos los que planteen el problema de la aproximación y el error en la medida, aunque no se presente de forma clara una respuesta a este problema. En la sesión 15 se produce un *primer encuentro* con la tarea de calcular el peso de un recipiente vacío y, a continuación, se realiza el *momento exploratorio* de dicha tarea, para poder vivir posteriormente el *momento del trabajo de la técnica* y el de la *evaluación* en la sesión 16.

Los componentes de las OM utilizadas, los podemos resumir en la siguiente tabla:

OM	***S(P)***
Objetos	*El recipiente vacío, el agua contenida en vasos completos, una caja de pesos de latón.*
Acciones	*Adjuntar = poner juntos* *Comparar = Con la balanza* *Evaluar las mediciones de peso realizadas*
OM	***MS(P)***
Objetos	*Las escrituras algebraicas de* {*R* , *V*}, {*hg, dag, g*} *y de* {*g*}
Acciones	*Comparar pesos mediante la relación de orden* (<) *Sumar medidas de peso* (+) *Multiplicar un nº por una medida*

OM	***S(P)***
Tipos de tareas	$\mathbf{T_{R2}}$: *Pesar con la balanza de Roberval el recipiente con cierto número de vasos de agua.*
Técnicas	τ_{R2}: *Utilizar, por sucesivos ensayos, las pesas de g, dg y hg, hasta conseguir el equilibrio de la balanza.*
	$< R , V >_N$, $<hg, dag, g>_N$ *y* $<g>_N$
Tareas	$\mathbf{T_{R1}}$: *Hacer una previsión de la medida concreta del peso* $\mathbf{p_1}$ *del recipiente con un vaso de agua*

	T_{R1}’: *Hacer una previsión de la medida concreta del peso p_2 del recipiente con dos vasos de agua, conocido el peso p_1 del recipiente con un vaso de agua* **T_{R1}”:** *Hacer una previsión del peso p_n del $R + n{\cdot}V$ ($n > 2$), conocido el peso p_i de $R + i{\cdot}V$ con $1 \leq i \leq n - 1$* **T_{R3}**: *Hacer una previsión del peso p_R del recipiente, conocidos los pesos p_n de $R + n{\cdot}V$ con $1 \leq n \leq 5$.* **T_{R4}**: *¿Qué explicaciones pueden darse al hecho de que se obtengan pesos significativamente distintos (73 g, 58 g, 43 g,...) para el peso del recipiente?* **T_{R5}**: *¿Qué consecuencias tiene el error en las sumas y en los productos?*
Técnicas	**τ_{R11}**: *Proponer una medida concreta, al azar.* **τ_{R12}**: *Estimar la medida concreta por comparación perceptiva con el peso, conocido, de algún objeto familiar.* **τ_{R13}**: *Conocido el peso p_1 de $R + V$, el peso p_n de $R + n{\cdot}V$ será:* $p_n = n{\cdot}p_1$ **τ_{R14} :** *Puesto que p_{n-1} corresponde al peso de $R + (n - 1){\cdot}V$ y p_{n-2} al de $R + (n - 2){\cdot}V$, la diferencia entre ambos nos dará como resultado el peso de:* $[R + (n - 1){\cdot}V] - [R + (n - 2){\cdot}V] = V$, *esto es,* p_V. *Por lo tanto:* $p_n = p_{n-1} + p_V$ **τ_{R31}**: *A partir de cualquier p_{n-1} y p_n como antes, podemos obtener el peso del agua de un vaso*: $$p_n - p_{n-1} = p_V$$ *Como p_1 corresponde al peso de $R + V$, obtenemos que* $p_R = p_1 - p_V$. **τ_{R32}**: *Como p_k corresponde al peso de $R + kV$,* $p_k = p_R + kp_V$, *de donde obtenemos que:* $p_R = p_k - kp_V$ **$\tau_{R\,33}$**: *A partir de un p_n y un p_{n-k}, podemos obtener que:* $p_n - p_{n-k} = p_{kV}$ *De donde:* $p_V = p_{kV}/k$. Técnica general que caracteriza la OM generada por $\langle R, V\rangle_N$: *Conocidos los pesos de ciertos objetos (del recipiente con los correspondientes vasos de agua), manipular “algebraicamente”, en $\langle R, V\rangle_N$, las simbolizaciones de dichos objetos, para determinar las operaciones a realizar en $\langle \mathbf{g}\rangle_N$ con los pesos dados.* No existe una técnica clara de resolución de cada una de estas tareas sobre el error.

2.7. Ampliación del sistema de escalares: medir longitudes con números decimales

17ª sesión

Las medidas de longitud: la suma

Material:

Bandas (1cm de ancho) de cartulina de 4 colores diferentes:

- 3 bandas amarillas (2 juegos) de longitudes: 12 cm 7 mm, 9 cm 3 mm y 3 cm 6mm
- 3 bandas verdes (2 juegos) de longitudes: 11 cm 5 mm, 8 cm 7 mm y 4 cm
- 3 bandas azules (2 juegos) de longitudes: 15 cm 2 mm, 6 cm 5 mm y 9 mm

Un doble decímetro por cada grupo de 2 niños.

Hojas de papel blanco para anotar los resultados (una hoja por cada 2 niños)

4 botes de pegamento.

La organización de la clase es la misma que la de la 8ª sesión sobre la suma de pesos.

En una primera fase se pretende que los alumnos midan las bandas y realicen una anticipación de la escritura de la suma.

La maestra dice a los alumnos: "Voy a distribuiros 3 bandas a cada uno de los grupo A1, B1, C1, D1, E1, F1. Debéis medir cada banda y luego indicaréis la medida en esta hoja."

A continuación dice a todos: "Cuando los grupos A1, B1, C1, D1, E1, F1 hayan terminado, daré las tres bandas a los grupos A2, B2, C2, D2, E2, F2, que deberán pegarlas extremo con extremo en una hoja en blanco, medir la longitud total obtenida y escribir dicha medida debajo de las bandas pegadas." "Mientras tanto, los grupos A1, B1, C1, D1, E1, F1 deben intentar encontrar la suma de las medidas de las 3 bandas".

Los alumnos han entendido que lo que deberán hacer a continuación será comparar las sumas encontradas y las medidas de las tres bandas pegadas extremo con extremo.

Se hace un inventario de los resultados y una comparación de las escrituras de la suma. Es decir, para cada grupo se escribe en el encerado:

La medida de las bandas.

El cálculo de la suma.

La medida de la banda suma obtenida como resultado de pegar las bandas.

$$\boxed{S(L) \rightarrow \langle dm, cm, mm\rangle_N \rightarrow \langle mm\rangle_N} \rightarrow \langle u\rangle_D+$$

En esta sesión, ***S(L)*** está formado por las bandas de distintos colores y un instrumento para medir longitudes: el doble-decímetro. Las bandas B_i se van a *adjuntar* colocándolas una a continuación de la otra, juntando el extremo de una con el extremo de la otra. La comparación de bandas no se va a realizar en ***S(L)***, sino que se hará dentro de su modelo que aquí será, según los casos, cualquiera de la dos praxeologías intermedias $<mm>_N$ o $<dm, cm, mm>_N$. La *evaluación* de las medidas de longitud también se puede hacer en ***S(L)***, utilizando el doble-decímetro.

El modelo de ***S(L)*** será la praxeología $<dm, cm, mm>_N$ o la praxeología $<mm>_N$ dependiendo de los casos.

La primera tarea se propone entre ***S(L)*** y $<dm, cm, mm>_N$ y consiste en:

$\mathbf{T_{i1}}$ = *Medir cada banda utilizando el doble decímetro y expresar por escrito la medida.*

Para resolverla se utiliza la técnica:

τ_{i1} = *Se coloca cada banda encima del doble-decímetro superponiendo dos de los extremos, y la medida nos vendrá indicada por la escritura que coincide con el otro extremo.*

La siguiente tarea se realiza en $<dm, cm, mm>_N$ y consiste en:

$\mathbf{T_{m6}}$ = *Hallar* $\sum l_i$

Siendo l_i la longitud de cada banda B_i. Para resolverla se utiliza la técnica:

τ_{m6} = *Se suman los números de cada categoría y se obtienen 10 o más de una categoría determinada, se añade una unidad a la categoría superior.*

Otra tarea que se propone dentro de $<dm, cm, mm>_N$ o de $<mm>_N$ consiste en:

$\mathbf{T_{m3}}$ = *Comprobar que* $\sum l_i = l\,(\oplus B_i)$

Para ello se utilizan las técnicas

τ_{m34} = *Ir comparando los números de cada categoría, empezando por los de mayor categoría, si son iguales se pasa a los de categoría inferior inmediata, y así hasta llegar a los de la categoría inferior.*

τ_{m33} = *Pasar todo a la categoría más pequeña y comparar los números*

Si los alumnos hubiesen querido verificar los resultados tendrían que volver a realizar la tarea $\mathbf{T_{m1}}$, utilizando de nuevo el doble-decímetro.

18ª Sesión

Las medidas de longitud: introducción de la coma

Se retoma la actividad de la suma de longitudes y se analizan los resultados de los grupos que todavía no se habían evaluado. Después de haber comparado diferentes escrituras, la maestra propone la longitud de una banda nueva pero utilizando sólo una unidad. Después de analizar las posibles respuestas de los alumnos, la maestra muestra a los alumnos cómo escribir una medida de longitud, con una sola unidad, utilizando la coma.

$$S(L) \rightarrow \boxed{\langle m, dm, cm, mm\rangle_N \rightarrow \langle mm\rangle_N \rightarrow \langle u\rangle_{D^+}}$$

Donde *u* puede ser *cm, dm, mm* ó *m*.

Las *tareas* y *técnicas* se desarrollan entre las tres praxeologías intermedias indicadas en el esquema.

Se sigue planteando la tarea de comparar la suma de las medidas de las longitudes de tres bandas con la medida de la longitud de la banda que se obtiene al *adjuntar* las tres bandas, o sea, $\mathbf{T_{m3}}$. A partir del trabajo de comparación de estas escrituras surge una nueva tarea, propuesta por la maestra:

> $\mathbf{T_{m7}}$ = *Escribir una medida de longitud utilizando sólo una categoría cualquiera de los generadores.*

Esta tarea es la que va a provocar la necesidad de *ampliar el conjunto de escalares*, es decir, al reducir el conjunto de generadores vamos a necesitar ampliar el conjunto de escalares, de **N** a $\mathbf{D^+}$.

Para resolver dicha tarea, que en el primer caso consiste en escribir la longitud de una banda de 2*dm* 5*mm*, utilizando sólo como unidad el decímetro, los alumnos expresan el resultado mediante tres notaciones diferentes:

- 2 *dm* 5
- 2 *dm* 05
- 2 *dm* 50

Para comprobar cuál de ellas es la correcta, los alumnos convierten la escritura a milímetros, y convienen que como 2*dm* 5*mm* = 205*mm* = 2*dm* 0*cm* 5*mm*, la escritura correcta es 2*dm* 05.

Pero para poder realizar esta tarea sin problemas de ambigüedad, la maestra propone utilizar la coma, es decir, en este caso, propone escribir 2*dm* 5*mm* como 2,05*dm*, o también *dm*: 2,05. La unidad se escribe al principio o al final y la coma indica la categoría de la unidad.

La maestra muestra una manera eficaz de realizar dicha tarea:

> $\tau_{\mathbf{m7}}$ = *Se escriben todos los números correspondientes a cada unidad o generador en el orden de mayor a menor, de izquierda a derecha, si algún generador o unidad no aparece, se coloca un cero en dicho lugar, luego se indica, al principio o al final de la escritura, la unidad en que viene expresada dicha medida, y por último, se pone una coma detrás de la cifra que corresponde a dicha unidad.*

19ª, 20ª, 21ª y 22ª Sesiones

Escritura de las medidas decimales de longitudes y de pesos

La maestra recuerda lo que han aprendido hasta el momento, y los alumnos recuerdan cómo habían empezado a utilizar la coma para expresar una medida en una sola unidad. La maestra vuelve a proponer ejercicios de escritura de medidas utilizando sólo una unidad cualquiera, primero lo hace para medidas de longitud y luego para medidas de peso. En la sesión 19 introduce los múltiplos del metro. La 20ª sesión transcurre con ejercicios de transformación de escrituras de medidas de longitud y de peso en diferentes unidades, a escrituras de dichas medidas en una sola unidad. En la 21ª sesión se continúa con ejercicios del mismo tipo, y la maestra termina dando información sobre las diferentes unidades de longitud y de peso, por ejemplo, para el peso introduce el quintal y la tonelada. Luego propone algunos ejercicios para que se familiaricen con el vocabulario, con las relaciones entre las unidades y el paso de una unidad a otra. En la 22ª sesión, la maestra sigue con la corrección de ejercicios del mismo tipo

$$S(L) \rightarrow MS(L) \rightarrow \quad \boxed{\langle km, hm, dam, m, dm, cm, mm\rangle_N \rightarrow \langle u\rangle_D+}$$

Donde *u* puede ser *km, hm, dam, m, dm, cm,* ó *mm.*

$$S(P) \rightarrow MS(P) \rightarrow \boxed{<t, q, kg, hg, dag, g, dg, cg, mg>_N \rightarrow <u>_D+}$$

Donde *u* puede ser *t, q, kg, hg, dag, g, dg, cg,* ó *mg.*

En estas sesiones, se realiza el trabajo con las magnitudes longitud y peso y las *tareas* y las *técnicas* se desarrollan dentro de las dos praxeologías intermedias señaladas en ambos esquemas, y en el paso de una a otra.

Las tareas propuestas son siempre del tipo $\mathbf{T_{m7}}$ y son resueltas utilizando una técnica análoga a $\boldsymbol{\tau_{m7}}$. Para poder realizar estas tareas es necesario conocer las distintas unidades de cada magnitud, las relaciones entre dichas unidades y saber pasar de una unidad a otra.

En cuanto al desarrollo de la OD, el trabajo realizado en las sesiones tiene como objetivo encontrar una respuesta a la cuestión:

- *¿Cómo caracterizar la adjunción de longitudes mediante la medida?*

Además se sigue planteando la misma cuestión que en las sesiones anteriores:

- *¿Cómo demostrar si dos escrituras diferentes designan la misma longitud?*

Se lleva a cabo un *primer encuentro* con la tarea de sumar longitudes y se sigue con el *momento de exploración* de la medida de longitud. Se continúa con el *trabajo de la técnica* para resolver $\mathbf{T_{m3}}$ y aparece el *momento de evaluación* de las técnicas utilizadas.

La maestra propone una tarea, $\mathbf{T_{m7}}$ que pretende provocar en los alumnos la necesidad de ampliar el campo de escalares de **N** a $\mathbf{Q}^+$, aunque la propuesta de utilizar los números con coma es realizada de forma explícita por la maestra. En las sesiones 19, 20, 21 y 22 se realiza el *momento del trabajo de la técnica* que resuelve $\mathbf{T_{m7}}$ tanto para la longitud como para el peso. En la sesiones 19 y 21 se lleva a cabo una *institucionalización* de las unidades legales y su relación entre ellas, tanto para la longitud como para el peso.

Los alumnos disponen de cierta autonomía a la hora de buscar la manera de resolver las tareas.

En resumen, diremos que los componentes de las OM utilizadas son:

OM	***S(L)***
Objetos	*Las bandas de distintos colores.*
Acciones	*Adjuntar = poner a continuación juntando un extremo con otro* *Comparar = Con el doble decímetro*
OM	***MS(L)***
Objetos	*Las escrituras algebraicas de* {*dm, cm, mm*} *y de* {*mm*}
Acciones	*Comparar longitudes mediante la relación de orden* (<) *Sumar medidas de longitud* (+) *Multiplicar un nº por una medida*

OM	***S(P) → MS(P)***
Tareas	$\mathbf{T_{i1}}$ = *Medir cada banda utilizando el doble decímetro y expresar por escrito la medida.*
Técnicas	τ_{i1} = *Se coloca cada banda encima del doble-decímetro superponiendo dos de los extremos, y la medida nos vendrá indicada por la escritura que coincide con el otro extremo*
OM	$<u_1, \ldots, u_5>_N$ *y* $<u_1>_N$
Tareas	$\mathbf{T_{m6}}$ = *Hallar* $\sum l_i$, siendo l_i la longitud de cada banda B_i. $\mathbf{T_{m3}}$ = *Comprobar si* $\sum l_i = L(\oplus B_i)$. $\mathbf{T_{m7}}$ = *Escribir una medida de longitud utilizando sólo una categoría cualquiera de los generadores.*
Técnicas	τ_{m6} = *Se suman los números de cada categoría y si se obtienen 10 o más de una categoría determinada se añade una unidad a la categoría superior.* τ_{m34} = *Ir comparando los números de cada categoría, empezando por los de mayor categoría, si son iguales se pasa a los de categoría inferior, y así hasta llegar a los más pequeños.* τ_{m33} = *Pasar todas las medidas a la categoría más pequeña y comparar los números.*

	τ_{m7} = *Se escribe todos los números correspondientes a cada unidad o generador en el orden de mayor a menor, de izquierda a derecha, si algún generador o unidad no aparece, se coloca un cero en dicho lugar. Luego se indica, al principio o al final de la escritura, la unidad en que viene expresada dicha medida y, por último, se pone una coma detrás de la cifra que corresponde a dicha unidad.*

2.8. El problema de la comparación de medidas decimales

23ª, 24ª y 25ª sesiones

Comparación de las medidas decimales

En la sesión 23, la maestra propone realizar la comparación de dos escrituras de medidas decimales. Después verifican si la respuesta es correcta. En la sesión 24, propone ordenar de la más pequeña a la mayor un conjunto de medidas decimales. Se trata de que los alumnos construyan una técnica que les permita una ordenación rápida de varias medidas decimales. En la sesión 25, la maestra propone una carrera para comparar varias medidas decimales utilizando la técnica que ellos prefieran. Para terminar propone ordenar diferentes medidas decimales que están expresadas en diferentes unidades, con el fin de que los niños entiendan bien que una medida está compuesta de un número y de una unidad.

$$\boldsymbol{S(L) \rightarrow MS(L) \rightarrow} \quad <km, hm, dam, m, dm, cm, mm>_{\boldsymbol{N}} \rightarrow <u>_{\boldsymbol{D}}+$$

Aquí *u* puede ser *km, hm, dam, m, dm, cm* ó *mm***.**

$$\boldsymbol{S(P) \rightarrow MS(P) \rightarrow} \quad <t, q, kg, hg, dag, g, dg, cg, mg>_{\boldsymbol{N}} \rightarrow <u>_{\boldsymbol{D}}+$$

Aquí *u* puede ser *t, q, kg, hg, dag, g, dg, cg* ó *mg***.**

En estas sesiones se sigue trabajando con las magnitudes longitud y peso. Se realiza el estudio dentro de las dos praxeologías intermedias indicadas, y cuando se quiere realizar una verificación de los resultados obtenidos, se acude en alguna ocasión a la praxeología inicial ***S(L)*** para verificar si la comparación ha sido bien realizada. Las *tareas* y *técnicas* se desarrollan en la transición de la praxeología intermedia de varios generadores que tiene como conjunto de escalares ***N***, a la praxeología intermedia de un solo generador, ampliando el conjunto de escalares de ***N*** a $\boldsymbol{D}^{+}$.

La principal tarea que se propone en esta sesión consiste en:

T_{m8} = *Dadas dos o más escrituras de medidas decimales, compararlas y ordenarlas*.

En un primer momento esta tarea se propone cuando las medidas decimales vienen expresadas en la misma unidad y, posteriormente (en la 25ª sesión), las medidas decimales vendrán expresadas en diferentes unidades.

Para resolver esta tarea se utilizan varias técnicas:

τ_{m81} = *Descomponer una medida, expresada en una sola unidad, en cada una de las unidades que contiene, y luego ir comparando el número de cada categoría empezando por la de mayor valor*.

τ_{m82} = *Transformar la medida en la unidad más pequeña.*

Debido a que algunos niños tienen dificultades para transformar las escrituras, la maestra les propone utilizar la tabla de medidas siguiente:

kg	hg	dag	g	dg	cg	mg

Los alumnos encuentran que dicha tabla es útil, porque les ayuda a no equivocarse. Así tendremos otra técnica posible:

τ_{m83} = *Transformar la medida en la unidad más pequeña, utilizando la tabla anterior.*

Otra de las tareas propuesta es verificar si la comparación y ordenación realizada es correcta, para ello algunos alumnos proponen la tarea:

T_{i2} = *Dadas las escrituras a comparar, dibujar los segmentos de longitud correspondientes y luego compararlas y ordenarlas.*

y para ello utilizan la técnica:

τ_{i2} = *Utilizar el doble-decímetro o superponiéndolos, haciendo coincidir dos de los extremos y observando, si los otros dos coinciden o no, si no coinciden, el segmento que sobresale es mayor.*

Pero esta técnica que se desarrolla dentro de ***S(L)***, enseguida se muestra poco eficaz, sobre todo si las medidas dadas son grandes. También para la verificación, la mayor parte de los alumnos proponen utilizar $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{m82}}$ ó $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{m83}}$ y algunos utilizan $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{m81}}$, aunque no sin dificultades.

En la sesión 25, la maestra quiere que los alumnos utilicen una técnica más rápida como técnica de comparación de medidas decimales, o sea, que utilicen $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{m81}}$, la comparación de las cifras categoría por categoría. Para ello, propone una carrera de velocidad para ordenar diversas medidas decimales.

En concreto la maestra propone realizar la siguiente tarea:

$\mathbf{T_{m8}}$**’** = *Realizar* $\mathbf{T_{m8}}$ *pero en el menor tiempo posible.*

El objetivo es conseguir que los alumnos descubran que la técnica $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{m81}}$ es la más rápida, ya que aquellos que la utilicen ganarán.

Por último, la maestra propone la tarea $\mathbf{T_{m8}}$ para medidas decimales dadas en diferentes unidades, con el objetivo de conseguir que los alumnos caigan en la cuenta de que una medida está compuesta de un número y una unidad.

En cuanto al desarrollo de la OD, el trabajo realizado en las sesiones tiene como objetivo encontrar una respuesta a la cuestión:

- *¿Cómo comparar dos o más escrituras diferentes y decidir cuál de ellas es mayor, es decir, cómo realizar la ordenación de dos o más escrituras de medidas decimales?*

Se lleva a cabo *el momento de trabajo de la técnica* para resolver $\mathbf{T_{m8}}$ y aparece el *momento de evaluación*, para decidir cuál de las técnicas utilizadas es la más eficaz. Con el objetivo de que sean los propios alumnos los que encuentren cuál es la técnica más eficaz de comparación de medidas decimales, la maestra les propone la tarea $\mathbf{T_{m8}}$**’**, ya que la técnica que consiste en comparar unidad por unidad ($\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{m81}}$) es la que permite resolver dicha tarea de modo satisfactorio. A lo largo de las tres sesiones se trabaja con medidas decimales de longitud y de peso.

Los alumnos disponen de bastante autonomía a la hora de buscar y encontrar las distintas técnicas para resolver las tareas propuestas. Sin embargo, las tareas son siempre propuestas por la maestra.

En resumen, diremos que los componentes de las OM utilizadas son:

OM	***S(L)***
Objetos	*Los dibujos de segmentos de longitud dada.*
Acciones	*Comparar = Con el doble decímetro* *Decidir el sentido de la comparación cuando no son equivalentes*
OM	$<km, hm, dam, m, dm, cm, mm>_N$ y $<u>_D^+$
Objetos	*Las escrituras algebraicas de* {*km, hm, dam, m, dm, cm, mm*} *y de* {*u*} *donde u puede ser km, hm, dam, m, dm, cm, ó mm.*
Acciones	*Comparar longitudes mediante la relación de orden* (<) *Sumar medidas de longitud* (+) *Multiplicar un nº por una medida de longitud*
OM	$<t, q, kg, hg, dag, g, dg, cg, mg>_N$ y $<u>_D^+$
Objetos	*Las escrituras algebraicas de* {*t, q, kg, hg, dag, g, dg, cg, mg*} *y de* {*u*} *donde u puede ser t, q, kg, hg, dag, g, dg, cg, mg.*
Acciones	*Comparar peso mediante la relación de orden* (<) *Sumar medidas de peso* (+) *Multiplicar un nº por una medida de peso*

OM	***S(L) → MS(L)***
Tipos de tareas	$\mathbf{T}_{i2}$ = *Dadas varias escrituras dibujar los segmentos de longitud correspondientes para compararlas y ordenarlas.*
Técnicas	τ_{i2} = *Utilizar el doble-decímetro o superponiéndolos, haciendo coincidir dos de los extremos y observando, si los otros dos coinciden o no, si no coinciden, el segmento que sobresale es mayor.*
OM	$<km, hm, dam, m, dm, cm, mm>_N$ ***y*** $<u>_D^+$

Tipos de tareas	$\mathbf{T_{m8}}$ = *Dadas dos o más escrituras de medidas decimales, se trata de compararlas y ordenarlas.* $\mathbf{T_{m8}}$’ = *Realizar* $\mathbf{T_{m8}}$ *en el menor tiempo posible.*
Técnicas	τ_{m81} = *Descomponer la medida, que está expresada en una sola unidad, en cada una de las unidades que contiene, y luego ir comparando el número de cada categoría empezando por la de mayor valor.* τ_{m82} = *Transformar la medida en la unidad más pequeña.* τ_{m83} = *Transformar la medida en la unidad más pequeña, utilizando una tabla donde aparecen las distintas unidades.*

Los tipos de tareas y las técnicas para las medidas de peso son análogas.

La autora nos indica que, en sesiones posteriores, se prosigue el estudio de la Medida de Magnitudes Continuas, trabajando las operaciones con las medidas decimales (la adición, la multiplicación por un entero, la sustracción). Estas actividades están publicadas en (N y G. Brousseau 1987) en *Rationels et décimaux dans la scolarité obligatoire: activités 1, 2, 3 du module 6* y ocuparían las sesiones 26, 27, 28, 29 y 30.

3. CONCLUSIÓN: FUNCIONES DEL MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERENCIA EN TORNO A LA MEDIDA DE MAGNITUDES

En este capítulo, hemos presentado un Modelo Epistemológico de Referencia (MER) dinámico, constituido por la sucesión de tres tipos de organizaciones praxeológicas que pueden ser interpretadas como las tres etapas en la evolución de la actividad matemática de construcción de la Medida de Magnitudes:

(1) Las *praxeologías en torno a los objetos concretos y su manipulación efectiva,* consideradas escolarmente como “*no matemáticas*”: comparar el peso de dos objetos en una balanza de Roberval, adosar o superponer dos objetos para comparar su longitud, etc.

(2) Las *praxeologías en torno a las magnitudes y a la medición de una cantidad de magnitud,* en las que ya aparece un primer grado de formalización escrita al representar la medida de unos objetos en función de otros. Estas praxeologías se consideran generalmente como sólo “*parcialmente matemáticas*” puesto que no

constituyen todavía la escritura matemática estándar de la medida. Además, y dada la ausencia absoluta, dentro de la matemática escolar actual, de una teoría matemática de las magnitudes (Bosch, 1994) es muy difícil que las tareas involucradas en la *medida efectiva* de magnitudes sean consideradas institucionalmente como tareas propiamente "matemáticas".

(3) Las *praxeologías en torno a las estructuras numéricas que se utilizan en la Medida de Magnitudes*, que ya se consideran generalmente como "*puramente matemáticas*", en la que las unidades elegidas son las del sistema decimal y se tiende a un sistema con una única unidad como paso previo al trabajo con números "abstractos" desprovistos de toda mención escrita de la magnitud correspondiente.

La primera función de este MER ha consistido en *integrar estos tres tipos de praxeologías en una actividad global coherente* que se puede describir mediante una Organización Matemática más amplia y completa. Esta unificación de todos los aspectos, dimensiones o universos que forman parte de la actividad de Medida de Magnitudes nos ha proporcionado un punto de vista adecuado (o sistema de referencia relativo) desde el cual describir, analizar, evaluar e interpretar un proceso didáctico tan rico como el desarrollado por N. Brousseau (1987). En base a nuestra hipótesis de la codeterminación entre lo matemático y lo didáctico (hipótesis que se materializa y concreta en el citado MER), hemos podido describir e interpretar las *tareas didácticas* que jalonan dicho proceso, las *técnicas didácticas* que se utilizan e incluso algunos componentes del *discurso tecnológico*, relativamente implícito, que justifica la *práctica didáctica* desarrollada. Ésta sería, por tanto, la segunda función que ha desempeñado nuestro MER en este capítulo.

Quedan todavía otras funciones potenciales de todo MER y, en particular, del que hemos construido en torno a la Medida de Magnitudes. Una de dichas funciones consiste en la *posibilidad de sustentar el diseño y experimentación de diversos itinerarios didácticos,* diferentes entre sí y también diferentes a los que existen efectivamente en las instituciones docentes. En nuestro caso se podrían diseñar y experimentar itinerarios "extremos" como, por ejemplo, los que se mantienen dentro de un único tipo de organizaciones praxeológicas del modelo (ya sea sin salirse del ámbito de los objetos medibles y su manipulación o sin salirse del ámbito numérico) o itinerarios que llevan a cabo toda la actividad sin salirse de las praxeologías que operan con números naturales o de las praxeologías que sólo operan con un número fijo de unidades de medida.

$$S(G) \to MS(G) = \{ \sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i u_i \ / \ \lambda_i \in \mathbf{K} \} := \langle u_i \rangle_{\mathbf{K}}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
< u_i >_{\mathbf{N}} & \subset & < u_i >_{K_1} & \subset & < u_i >_{K_2} & \subset & \cdots & \subset & < u_i >_{\mathbf{Q}+} & \subset \cdots \subset & < u_i >_{\mathbf{R}+} \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & & & \cdots & & \cdots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup \\
< u_1, u_2 >_{\mathbf{N}} & \subset & < u_1, u_2 >_{K_1} & \subset & < u_1, u_2 >_{K_2} & \subset & \cdots & \subset & < u_1, u_2 >_{\mathbf{Q}+} & \subset \cdots \subset & < u_1, u_2 >_{\mathbf{R}+} \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup \\
< u >_{\mathbf{N}} & \subset & < u >_{K_1} & \subset & < u >_{K_2} & \subset & \cdots & \subset & < u >_{\mathbf{Q}+} & \subset \cdots \subset & < u >_{\mathbf{R}+}
\end{array}$$

Además, al igual que en el caso de los Sistemas de Numeración, el MER presentado en este capítulo puede utilizarse para *analizar los cambios necesarios en el itinerario didáctico* cuando se trata de construir la Medida de Magnitudes en diferentes instituciones docentes. Así, por ejemplo, permitiría imaginar nuevos itinerarios posibles para enseñar la Medida de Magnitudes en las instituciones de la Enseñanza Secundaria (donde actualmente está completamente trivializada) y en Formación de Maestros. En este último caso, tendría sentido plantear, como cuestión generatriz, un cuestionamiento tecnológico motivado por el propio modelo epistemológico con preguntas como las siguientes: ¿Qué papel juega la extensión de escalares en la precisión de la medida? ¿Qué ventajas e inconvenientes presenta un sistema de unidades muy bien estructuradas? ¿Hasta qué punto es necesario utilizar un modelo algebraico de las magnitudes? ¿En qué sentido todas las magnitudes son "equivalentes" entre sí? ¿Es necesario desde el punto de vista didáctico-matemático mantener las magnitudes en el discurso matemático o es preferible eliminarlas rápidamente para simplificar dicho discurso?

Citaremos, para acabar, otra importante función potencial de nuestro MER. Éste, como todos, puede utilizarse para *describir*, *analizar* y *evaluar* no sólo organizaciones didácticas "experimentales" (como la descrita de N. Brousseau) sino también *la forma como se organiza "habitualmente" la enseñanza de la Medida de Magnitudes* en la Enseñanza Primaria y, en especial, los *fenómenos didácticos* emergentes. Se trata, en definitiva, de un análisis de los efectos de la Transposición Didáctica sobre la Organización Matemática "*a enseñar*" y la OM "*efectivamente enseñada*" en torno a la Medida de Magnitudes.

De una manera muy sintética podemos decir que la Transposición Didáctica de las OM relacionadas con la actividad de la Medida de Magnitudes es generalmente *reductora* y *desequilibrada*, tal como ponen de manifiesto las investigaciones de Chamorro (1995, 1996, 1997 y 2003) al analizar las OM a enseñar y, más claramente, las OM efectivamente enseñada en la Enseñanza Primaria española. En los dos primeros cursos de la Enseñanza Secundaria Obligatoria los efectos son muy similares a los de Primaria, y en el resto de la Enseñanza Secundaria el estudio de la Medida de Magnitudes está prácticamente ausente. Este carácter reductor y desequilibrado de la Transposición Didáctica se pone de manifiesto especialmente en dos fenómenos didácticos (Chamorro, 2003):

- La ***aritmetización de la medida*** que comporta una desaparición casi absoluta no sólo de los objetos medibles concretos y de su manipulación efectiva, sino también de las distintas magnitudes presentes en la mayoría de problemas matemáticos estudiados en la escuela. Se produce, además, una identificación entre las *cantidades de magnitud* y los *números* que se utilizan para medirlas. En términos del MER considerado, podemos interpretar este fenómeno como una reducción muy rápida del primer nivel del MER: $< \boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3}, \boldsymbol{u_4}, \ldots >_{\mathbf{N}}$ a los últimos niveles: $< \boldsymbol{u} >_{\mathbf{N}} \subset\ < \boldsymbol{u} >_{\mathbf{Q}} \subset\ < \boldsymbol{u} >_{\mathbf{R}}$. Esta reducción precoz provoca la *desaparición de las magnitudes del trabajo matemático elemental* y tiene consecuencias en distintos ámbitos y niveles escolares, como muestra Comin (2000 y 2002) en su análisis del fenómeno de la "numerización de la proporcionalidad" cuyas consecuencias van más allá de la Enseñanza Primaria.
- La desaparición de la dialéctica entre la ***medida exacta*** y la ***medida aproximada*** en la enseñanza escolar de la Medida de Magnitudes. En efecto, la distinción entre los diferentes tipos de errores (de cálculo, de redondeo, de medida por

imperfecciones del instrumento o por defectos en el procedimiento de medida), así como la función de cada uno de ellos también son completamente ignorados tanto en la Enseñanza Primaria como en Secundaria.

Sin querer entrar en el detalle de estos fenómenos, acabaremos este capítulo comentando los diferentes tipos de *restricciones transpositivas genéricas* que ya mencionamos en el capítulo III, que hacen referencia tanto a la *topogénesis* como a la *cronogénesis* del saber a enseñar y que permite explicar, en parte, dichos fenómenos:

(1) Restricciones que provienen de la *representación institucional* del saber matemático que se enseña, de la manera como el alumno aprende, y de lo que comporta enseñar Matemáticas.

Dado que en el modelo epistemológico dominante en las instituciones escolares las praxeologías en torno a los objetos medibles concretos, así cómo la actividad de medición efectiva, son consideradas como "***no matemáticas***", la transposición ha eliminado el estudio de la praxeología **S(*G*)** tanto en la matemática "a enseñar" como, sobre todo, en la matemática "efectivamente enseñada". Una vez eliminada **S(*G*)** pierden todo el sentido y, en consecuencia, también desaparecen, las Organizaciones Matemáticas intermedias $\boldsymbol{< u_1, u_2, \ldots, u_n >_K}$.

(2) Restricciones provocadas por la *necesidad de evaluar* la eficacia de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las instituciones didácticas. Esta necesidad tiende a provocar una *diferenciación* y *autonomización* interna del corpus enseñado, así como una mayor *algoritmización* del mismo.

Dada la enorme complejidad que comportaría evaluar procesos de manipulación efectiva de los objetos medibles, la transposición elimina completamente la praxeología inicial de la Medida de Magnitudes y, en consecuencia, desaparece totalmente el *proceso de modelización* **S(*G*) → MS(*G*)** que es el que da sentido a toda la actividad matemática posterior.

(3) Restricciones impuestas por el *tiempo didáctico* en diversos aspectos como, por ejemplo: la exigencia de un *aprendizaje rápido* o en un tiempo muy limitado, que puede llegar a la exigencia cultural del *aprendizaje instantáneo*.

Diseñar un proceso de construcción de la Medida de Magnitudes sustentado en nuestro Modelo Epistemológico de Referencia, en el que se unifican los diferentes aspectos o universos que constituyen dicha actividad, requiere forzosamente (como hemos visto sobradamente en el proceso descrito en este capítulo) proponer *objetivos a muy largo plazo* incompatibles con este tipo de restricciones transpositivas.

(4) Restricciones que provienen de la necesidad de que todo *saber enseñado aparezca como definitivo* e *incuestionable*.

En el caso de la Medida de Magnitudes Continuas, estas restricciones empujan a concentrar el estudio en las praxeologías en torno a las estructuras numéricas que se utilizan en la Medida de Magnitudes, consideradas como el saber matemático definitivo o *modelo universal de la medida*.

En el análisis de la Organización Didáctica propuesta por Nadine Brousseau sobre la construcción de la Medida de Magnitudes Continuas, hemos visto una posible forma de superar estas restricciones mediante un proceso didáctico exigente y en unas condiciones que, sin duda, son muy difíciles de reproducir en la enseñanza habitual de la Medida de Magnitudes en los actuales Sistemas de Enseñanza. Es necesario avanzar en el análisis de estas restricciones mediante la experimentación de nuevos procesos didácticos que, variando las condiciones institucionales de realización, permitan poner en evidencia las potencialidades y las limitaciones de la propuesta y del MER que la sustenta.

CAPÍTULO VI

SÍNTESIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

1. PRINCIPALES APORTACIONES DE ESTA MEMORIA

Llegados a este punto de la investigación, y considerando retrospectivamente, todo el trabajo realizado hasta aquí, resumiremos brevemente las aportaciones más importantes del mismo.

1.1. Propuesta de un Modelo Epistemológico de Referencia en torno a los Sistemas de Numeración para la investigación en didáctica

El **Capítulo II** presenta un *Modelo Epistemológico de Referencia* en torno a los Sistemas de Numeración, que permite integrar las principales aportaciones sobre este tema que provienen de investigaciones realizadas en el marco de la Teoría de Situaciones Didácticas. En particular:

- El modelo propuesto se presenta como una *sucesión de praxeologías de complejidad creciente, cada una de las cuales halla su razón de ser en las limitaciones de la praxeología anterior*. Se obtiene, así, una “reconstrucción racional” hipotética de la evolución de los principales Sistemas de Numeración (aditivo, híbrido y posicional) que conducen al sistema posicional decimal y sus derivados, con los que trabajamos actualmente.
- En el MER propuesto, el *Sistema de Numeración posicional incluye como razón de ser primordial el progreso espectacular que supone para la economía, fiabilidad y eficacia del cálculo aritmético elemental*. En otros términos, lo que explica la evolución de los Sistemas de Numeración no es únicamente su eficacia en la *representación* o *designación* de los números, sino su economía y fiabilidad en el *cálculo* con ellos. Asimismo, el problema del estudio de la “economía” y “fiabilidad”, tanto en lo que respecta a la designación de los

números como a los algoritmos de cálculo, surge como la cuestión generatriz de la sucesión de praxeologías que constituyen el MER considerado.

1.2. Utilización del Modelo Epistemológico de Referencia para el análisis de las restricciones transpositivas sobre los Sistemas de Numeración en la Formación de Maestros en España

El MER elaborado permite poner en evidencia las limitaciones de algunas propuestas (tradicionales y actuales) sobre la enseñanza de los Sistemas de Numeración para la Formación de Maestros. En particular, se señalan las restricciones transpositivas que explican que dichas propuestas se centren en el estudio de las características de los SN para la *designación* de los números (linealidad del saber a enseñar), otorguen gran importancia a los *SN posicionales en distintas bases* en detrimento de los SN aditivos e híbridos (exigencia de evaluación, presión del saber sabio, modelo epistemológico de la reforma de las “matemáticas modernas”) y no integren plenamente el problema de la *razón de ser* de los SN, que no puede desligarse de su eficacia operatoria en los algoritmos aritméticos elementales escritos (dificultades para cuestionar el saber previamente enseñado) (**Capítulo III.** § 1).

1.3. Funcionalidad y limitaciones del Modelo Epistemológico de Referencia para el diseño y evaluación de procesos didácticos

Una vez explicitado el MER, lo hemos utilizado como núcleo central para el diseño, el análisis a priori, la experimentación y la evaluación de distintos procesos de estudio en torno a los Sistemas de Numeración (**Capítulos III y IV**). La especificación del MER como una sucesión de praxeologías, con sus tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías matemáticas, nos ha proporcionado el material analítico necesario para explicitar las *tareas* y las *técnicas didácticas* que estructuran el proceso didáctico experimentado. En particular, la evaluación de dicho proceso ha puesto en evidencia la atomización de dichas tareas didácticas, al quedar demasiado determinadas por los tipos de tareas y de técnicas matemáticas que se proponían a los alumnos. El MER aparece, así, como una herramienta fundamental para el análisis de los procesos didácticos y del contrato que los rige. Surge, al mismo tiempo, la necesidad de completar el Modelo *Epistemológico* de Referencia con un Modelo *Didáctico* de Referencia que proporcione un punto de vista externo respecto a los contratos institucionales imperantes. Los *Recorridos de Estudio e Investigación* nos parecen la vía de progreso en esta dirección.

1.4. Contraste empírico de la relatividad institucional del MER en torno a los Sistemas de Numeración

El **Capítulo IV** de esta memoria aborda el problema de la relatividad institucional del saber matemático a enseñar. Se examinan las *restricciones transpositivas institucionales* que se imponen en el desarrollo de un proceso didáctico sobre los Sistemas de Numeración en dos instituciones didácticas (la Formación de Maestros y la Educación Secundaria Obligatoria), cuyas relaciones institucionales respectivas a los Sistemas de Numeración están muy próximas entre sí. Se muestran las variaciones necesarias para adaptar el MER inicial a la enseñanza de los Sistemas de Numeración en el primer ciclo de la Educación Primaria, institución ésta que mantiene una relación institucional muy diferente a los Sistemas de Numeración. Hemos estudiado, en definitiva, como cambian los efectos provocados por las restricciones institucionales sobre el MER al *variar la institución*.

En particular, hemos empezado a estudiar cómo se transforman las cuestiones a las que debe responder una OM cuando se cambia la institución docente en la que ésta debe reconstruirse. Por último, hemos descrito algunos fenómenos didácticos que emergen en aquellas instituciones en las que se propone estudiar una OM cuya razón de ser ha sido olvidada.

1.5. Propuesta de un Modelo Epistemológico de Referencia para la Medida de Magnitudes

Hemos elaborado un *Modelo Epistemológico de Referencia* en torno a la Medida de Magnitudes que integra las principales aportaciones sobre este tema que provienen de investigaciones realizadas en el marco de la Teoría de Situaciones Didácticas. (**Capítulo V**). En particular, el modelo que proponemos:

- Viene constituido por la sucesión de tres tipos de praxeologías que pueden ser interpretadas como las tres etapas en la evolución de la actividad matemática de construcción de la Medida de Magnitudes: las praxeologías en torno a los objetos medibles concretos y su manipulación efectiva; las praxeologías en torno a las magnitudes y a la medición de una cantidad de magnitud; y las praxeologías en torno a las estructuras numéricas que se utilizan en la Medida de Magnitudes.

- De este modo, el MER permite integrar estos tres tipos de praxeologías en una actividad global coherente que puede ser descrita mediante una Organización Matemática más amplia y completa.

1.6. Funcionalidad del Modelo Epistemológico de Referencia sobre la Medida de Magnitudes para el análisis de un proceso didáctico elaborado en el marco de la Teoría de Situaciones Didácticas

Esta unificación de todos los aspectos, dimensiones o universos que forman parte de la actividad de Medida de Magnitudes proporciona un punto de vista adecuado desde el cual describir, analizar, evaluar e interpretar un proceso didáctico empírico desarrollado por N. Brousseau (1987). En base a nuestra hipótesis de la codeterminación entre lo matemático y lo didáctico (hipótesis que se materializa y concreta en el citado MER), hemos podido describir e interpretar las tareas didácticas que jalonan dicho proceso, las técnicas didácticas que se utilizan e incluso algunos componentes del discurso tecnológico, relativamente implícito, que justifica la práctica didáctica desarrollada (**Capítulo V**).

1.7. Potencialidad del MER para la reformulación de fenómenos transpositivos que inciden sobre la enseñanza de la medida

A pesar de no haber presentado ningún proceso de estudio original asociado al MER considerado, hemos mostrado la posibilidad de sustentar el diseño y experimentación de diversos itinerarios didácticos diferentes entre sí y también diferentes a los que existen efectivamente en las instituciones docentes. Cabe destacar, finalmente, la manifestación de algunas restricciones transpositivas importantes que pesan sobre la enseñanza de la medida en las instituciones docentes actuales y que pueden formularse en términos del MER elaborado: el fenómeno ya citado de la "*aritmetización de la medida*", la ausencia del estudio de la dialéctica entre la *medida exacta* y la *medida aproximada* en la enseñanza escolar de la Medida de Magnitudes , y la dificultad para integrar el trabajo con objetos considerados como *no matemáticos* pero que resultan imprescindibles para la construcción escolar de la medida (**Capítulo V**).

1.8. Tematización de nociones paradidácticas y formulación de un nuevo tipo de problemas didácticos

Una aportación de esta memoria, quizá menos tangible, pero no por ello menos importante, es la de *tematizar* (esto es, tomar como objeto de estudio en sí mismas) algunas nociones como, por ejemplo, las de "Modelo Epistemológico de Referencia", "Razón de ser de una praxeología" y "Relatividad institucional de las praxeologías matemático-didácticas", que se habían mantenido hasta la fecha en el discurso didáctico como nociones "paradidácticas" (esto es, como nociones útiles únicamente para analizar y describir otras nociones y determinados hechos didácticos). Esta tematización ha permitido plantear y empezar a abordar un nuevo tipo de problemas didácticos que, en cierto sentido, se sitúan en un *segundo nivel de reflexión didáctica*, puesto que hacen referencia a cuestiones sobre la propia metodología de la investigación. Entre dichas cuestiones podemos citar las siguientes:

- ¿Cuáles son los criterios y mecanismos que utiliza el investigador para elaborar el Modelo Epistemológico de Referencia? ¿Qué datos empíricos utiliza? ¿En qué *posición institucional* se sitúa?
- ¿Cómo incide la relatividad institucional de los saberes matemáticos sobre las posibles formas de organizar el proceso de estudio en cada una de las instituciones docentes? ¿Cómo se materializa la codeterminación entre lo matemático y lo didáctico en el análisis de las restricciones transpositivas? ¿Y en el ámbito de la *unidad mínima de análisis* (de los procesos didácticos) definida por cada teoría didáctica?

La construcción de esta nueva problemática conecta perfectamente con la "razón de ser" de la Teoría Antropológica de lo Didáctico tal como mostraremos a continuación.

2. REFORMULACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA QUE SE ABORDA EN ESTA MEMORIA

Es habitual que a lo largo de una investigación los problemas tratados evolucionen a medida que avanza la propia investigación. Esta evolución es obvia en lo que se refiere al desarrollo histórico de una disciplina científica cualquiera, puesto que a lo largo de dicho desarrollo se producen cambios importantes e inesperados de los campos de problemas, de las técnicas pertinentes para estudiarlos, de las teorías y de las propias reglas del juego científico. Estos cambios también se producen, aunque en menor escala, en el ámbito de la investigación que lleva a cabo un grupo y hasta en cada trabajo de investigación particular. En muchas ocasiones, y de una forma más o menos consciente para los propios autores del trabajo, el cambio consiste en tratar un problema más general y aparentemente más alejado de la problemática inicial. Como dice Lakatos (1978, p. 76) citando a Pólya:

> Puede resultar más fácil resolver varias cuestiones que resolver una sola. Un nuevo problema más ambicioso puede resultar más fácil de manejar que el problema original. (Pólya 1954, p. 110)

En nuestro caso, podemos constatar a posteriori que, efectivamente, hemos planteado y abordado algunos problemas más ambiciosos que los que inicialmente nos proponíamos, sin pretender con ello haber obtenido una solución completa de aquellos.

Para clarificar la naturaleza de esta problemática más general, utilizaremos la formulación que propone Yves Chevallard en uno de sus últimos trabajos[1]. En lo que sigue, mostraremos en qué sentido los problemas abordados en esta memoria y los resultados obtenidos en la misma se integran en dicha problemática más general.

En la citada conferencia, Chevallard enunció claramente dos grandes problemas que, en su opinión, han constituido *las razones de ser* fundamentales de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante, TAD) a lo largo de sus aproximadamente 25 años de existencia.

(1) El problema de la *emancipación epistemológica e institucional* de la posición del didacta y de la ciencia didáctica en relación con las instituciones que sirven

[1] Nos referimos a la conferencia pronunciada como clausura del "Primer Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Sociedad, Escuela y Matemáticas", celebrado en Baeza (Jaén) a finales de 2005 (Chevallard 2006).

de hábitat a sus objetos de estudio, especialmente la institución escolar y la institución “sabia” productora del saber.

(2) El problema de la *difusión* (*y de la no difusión*) *de las praxeologías didácticas* en el espacio institucional de una Sociedad y, particularmente, en el seno de su Escuela.

Veremos que, en realidad, se trata de dos problemas muy relacionados entre sí. El primero de ellos aparece como tal problema en la comunidad didáctica con los primeros trabajos de Chevallard sobre los fenómenos de transposición didáctica y está asociado al esfuerzo de liberar el estudio de la Enseñanza de las Matemáticas de la sujeción a los códigos de la Escuela y, en particular, a los que rigen y naturalizan su relación a las Matemáticas como disciplina escolar. Se trata, en otros términos, de la búsqueda de una posición institucional para el didacta desde la cual éste pueda tomar distancia de su objeto de estudio. Como dicen Bosch y Gascón (2006b, p. 7):

> La investigación en didáctica necesita elaborar sus propios modelos de referencia para ser capaz de evitar la excesiva sujeción a las diferentes instituciones observadas, especialmente a aquellas que, por su prestigio o legitimidad social, aparecen como instituciones dominantes y que conforman la institución del “saber sabio”. La teoría de la transposición didáctica nos enseña que no hay ningún sistema de referencia privilegiado para el análisis de las diferentes etapas del proceso de transposición didáctica. Pero la ausencia de un sistema de referencia *absoluto* no hace menos imprescindible la utilización de sistemas de referencia *relativos* adecuados a cada problema y situación, modelos cuyo carácter hipotético les atribuye una provisionalidad permanente –o, mejor dicho, una evolución permanente– siempre sometidos a la prueba del contraste empírico y reformulados en función de los nuevos problemas por abordar. Éste es el sentido que debe atribuirse al “análisis epistemológico” en didáctica, que ya estaba presente en los orígenes de la didáctica como “epistemología experimental”.

En esta formulación del primer problema, se subraya la importancia crucial, para el didacta, de elaborar y utilizar *modelos epistemológicos de referencia* (siempre relativos y provisionales) como instrumentos de la imprescindible emancipación epistemológica e institucional. En esta memoria hemos llevado a cabo este trabajo en dos casos concretos: los Sistemas de Numeración y la Medida de Magnitudes Continuas.

El segundo de los problemas citados por Chevallard es el problema de la *difusión* (*y de las restricciones y dificultades en la difusión*) *de las Praxeologías Didácticas* en el espacio institucional. Su formulación tiene como principal virtud situar el problema didáctico en el ámbito de una *problemática ecológica*, expresada en términos de *condiciones* y *restricciones* que surgen en muy diversas instituciones.

De hecho, en este punto, Chevallard hace referencia explícita a las dificultades de difusión, especialmente en la Enseñanza Secundaria francesa, de las Organizaciones Didácticas engendradas por la *Teoría de las Situaciones Didácticas* (en adelante, TSD). Refiriéndose a dichas praxeologías se pregunta:

> ¿Qué restricciones impiden su libre circulación y su plena penetración institucional? ¿Bajo qué condiciones estas praxeologías eran durablemente viables, bajo un coste soportable, en tal o cual parte de la institución escolar?

Mostraremos que algunos de los resultados obtenidos a lo largo de esta memoria, utilizando precisamente material empírico extraído de trabajos desarrollados en el ámbito de la TSD sobre la enseñanza de los Sistemas de Numeración y de la Medida de Magnitudes, empiezan a responder parcialmente a estas cuestiones.

Como ya hemos señalado en el primer capítulo, el Programa Epistemológico en Didáctica de las Matemáticas se opone frontalmente a la ideología pedagógica dominante según la cual los factores que inciden sobre la enseñanza y el aprendizaje (de todas las materias):

(a) Pueden reducirse a unos pocos y, en el límite de la simplificación, se reducen a un *único factor*.

(b) Son detectables y analizables desde el "*sentido común*" y, en general, *no dependen de la estructura del contenido a estudiar*.

(c) Tienen su origen en la *propia institución docente* y, esencialmente, son manipulables y modificables desde el *ámbito de actuación del profesor* (esencialmente desde su trabajo en el *aula*) que, de esta forma, pasa a ser el protagonista principal del proceso educativo sobre el que recae el peso principal de los éxitos y fracasos del mismo.

En contraposición a esta ideología, la TAD considera que todo problema didáctico-matemático es un *problema ecológico* cuyo estudio no puede reducirse a los factores identificables inmediatamente en el aula. La TAD tiene la ambición de tomar en consideración de forma conjunta las restricciones que surgen y las condiciones que se imponen en *todas las instituciones* que intervienen en el proceso de Transposición Didáctica. Se subraya así, junto al carácter ecológico de todo problema didáctico, la importancia del análisis de la *relatividad institucional de las Praxeologías Matemático-Didácticas* para abordar el problema de *las restricciones y dificultades en la difusión de las Praxeologías Matemático-Didácticas* en el espacio institucional. Es obvio que se trata de dos problemas profundamente relacionados, como se indica en el trabajo ya citado de Bosch y Gascón (2006b, p. 10):

> ¿Por qué una nueva ampliación del objeto de estudio con la correspondiente complejidad del marco teórico? La respuesta es siempre la misma: para liberarse de las concepciones espontáneas del conocimiento matemático que, al analizar su objeto de estudio, los investigadores podrían asumir sin cuestionarlas previamente. […] Quizá debido a su familiaridad con el "problema del profesor" ("dado un contenido matemático para ser enseñado, ¿cuál es la mejor forma de hacerlo?"), a menudo los didactas asumen como incuestionable la delimitación de contenidos que ofrecen las instancias educativas o académicas.

En lo que sigue, mostraremos en qué sentido la totalidad de los problemas tratados y los resultados obtenidos en esta memoria, así como los nuevos problemas que surgen de dichos resultados, se incluyen en la dirección marcada por el primero de los dos grandes problemas enunciados anteriormente (el de la emancipación del didacta) y, en menor medida, se relacionan con el segundo.

3. EL PROBLEMA DE LA EMANCIPACIÓN EPISTEMOLÓGICA E INSTITUCIONAL DE LA DIDÁCTICA

Como ya hemos indicado anteriormente, la emancipación del didacta y de la ciencia didáctica se refiere, en general, a una *liberación de la sujeción a la ideología dominante* en las instituciones que forman parte de su objeto de estudio. Desde el punto de vista de la TAD, dicha emancipación debe iniciarse tomando distancia y analizando críticamente la forma de interpretar el conocimiento matemático y los presupuestos que sobre su enseñanza y aprendizaje se dan por sentado en las citadas instituciones.

Pero sólo es posible tomar distancia y analizar críticamente los modelos epistemológicos y docentes dominantes en dichas instituciones si se construye un "sistema de referencia" que proporcione una "posición" desde la cual mirar, analizar, evaluar y criticar las Organizaciones Matemáticas y su ecología institucional, esto es, las condiciones bajo las cuales dichas OM se generan, viven, se desarrollan, se transforman, se debilitan, se difunden, desaparecen, etc., en el seno de las instituciones humanas. En particular, el citado sistema de referencia es imprescindible para analizar el proceso de reconstrucción escolar de las OM que hemos denominado “proceso (escolar) de estudio de las matemáticas”.

Esta posición “exterior” que proporciona un cierto carácter “objetivo” al punto de vista del didacta requiere, en definitiva, la construcción de un Modelo Epistemológico de Referencia a modo de sistema de referencia epistemológico (que siempre será relativo y, como toda hipótesis científica, provisional). Dado que uno de los objetivos centrales de esta memoria consiste en analizar el proceso de construcción del MER y estudiar las funciones que éste desempeña en el análisis, diseño y evaluación de Organizaciones Matemáticas, es claro que la mayor parte de los resultados obtenidos en la misma deben interpretarse como aportaciones al estudio del problema de la emancipación epistemológica e institucional de la Didáctica de las Matemáticas.

En el **Capítulo II** hemos descrito una posible *reconstrucción racional* de la OM en torno a los Sistemas de Numeración que constituye la base sobre la que hemos elaborado el Modelo Epistemológico de Referencia para el diseño, experimentación y análisis de los procesos de estudio en diferentes instituciones.

Ante todo hay que decir que la mera elaboración del MER constituye, para el didacta, una herramienta de distanciamiento y de emancipación de las diversas instituciones que constituyen el ámbito de su objeto de estudio, porque es el medio mediante el cual la investigación didáctica puede explicitar su propio punto de vista sobre el contenido matemático en juego en los procesos didácticos. Es cierto que para elaborar el MER el didacta debe tomar muy en consideración las Organizaciones Matemáticas “sabias” que legitiman epistemológicamente el proceso de enseñanza de dicha OM. Pero no es menos cierto que también deben tomarse en consideración:

(a) La evolución histórica de las OM sabias, aunque sin copiarlas miméticamente.

(b) Las restricciones que provienen de las instituciones escolares en las que la OM en cuestión es designada como OM “a enseñar”.

Dicho en otras palabras, la elaboración del MER debe tomar en consideración *todas las restricciones transpositivas* y, en particular, la *relatividad institucional* de los conocimientos matemáticos.

Así pues, aunque el MER se elabora *en base a* una *reconstrucción racional*[2], debemos considerarlo, con más precisión, como una *reconstrucción didáctica* que corrige no sólo la "historia real" sino también las reconstrucciones racionales que utilizan como única base empírica los "datos históricos".

Para explicar de qué modo la historia de la ciencia debería aprender de la filosofía de la ciencia y viceversa, Lakatos parte de la siguiente paráfrasis de una famosa frase de Kant:

> La Filosofía de la ciencia sin la historia de la ciencia es vacía; la Historia de la ciencia sin la filosofía de la ciencia es ciega (Lakatos 1982, p. 11)

La intención de Lakatos en esta obra era múltiple:

(a) Subrayar el carácter empírico de la Filosofía de la ciencia (carácter éste negado, por ejemplo, por Popper que no creía que la historia de la ciencia pudiera servir para contrastar las teorías de la filosofía de la ciencia).

(b) Mostrar la necesidad ineludible para la Historia de la ciencia de utilizar, de forma más o menos explícita, un modelo epistemológico del saber científico.

(c) Contribuir a emancipar al filósofo de la ciencia y a la Filosofía de la ciencia de la sujeción a la ideología dominante en la comunidad científica de su época, en lo que hace referencia a la naturaleza de la ciencia.

En el caso de la Didáctica de las Matemáticas, una vez aceptado sin reservas su carácter de disciplina *empírica* así como, al menos en el ámbito del Programa Epistemológico, la necesidad ineludible de utilizar un modelo epistemológico de las matemáticas, hemos visto que se requiere ampliar la base empírica más allá de los datos históricos para incluir los datos empíricos que provienen del conjunto de instituciones que participan en todas las etapas de la Transposición Didáctica. De esta manera, la elaboración del MER requiere y posibilita una emancipación no tan sólo de la sujeción a la ideología dominante en la comunidad matemática, sino que dicha emancipación debe abarcar asimismo las ideologías dominantes en la noosfera y en el Sistema de Enseñanza de las Matemáticas y no sólo en referencia a la naturaleza de las matemáticas. La Didáctica debe emanciparse, también, de las ideologías relativas a la forma de organizar el estudio de las Matemáticas y, en particular, su enseñanza y aprendizaje escolar. Éste es, en

[2] En el sentido de Lakatos (1982).

definitiva, el alcance de la emancipación necesaria para llevar a cabo el trabajo del didacta y que las funciones del MER posibilitan.

Es importante subrayar que el MER en torno a los Sistemas de Numeración elaborado en el **Capítulo II** participa de la estructura común que hemos denominado en el **Capítulo I** "modelo unitario de las Organizaciones Matemático-Didácticas" y que constituyen el modelo epistemológico general propuesto por la TAD. En otros términos, los modelos epistemológicos *locales* que permite construir la TAD, son coherentes con un modelo epistemológico *general* del saber matemático y al mismo tiempo participan de su constitución. Esta coherencia entre los modelos epistemológicos locales y el modelo epistemológico general, contribuye a la *emancipación epistemológica* del didacta y de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina, porque impide aceptar acríticamente y, a veces implícitamente, modelos epistemológicos *localistas* elaborados a partir de propiedades accidentales y secundarias de los objetos matemáticos que intervienen en una OM determinada.

Otro aspecto importante del citado MER local es su amplitud suficiente para cubrir la "unidad de análisis de los procesos didácticos" (**Capítulo I**). Esta condición es importante, también, en relación a la función del MER como instrumento de *emancipación institucional* de la didáctica, puesto que el encierro en una institución concreta (especialmente en el aula) es una de las principales causas de la sujeción a la ideología dominante en dicha institución.

En el **Capítulo III**, hemos utilizado el MER dinámico en torno a los SN para describir y analizar críticamente la OM que se propone para ser enseñada (la OM "a enseñar") en la institución de Formación de Maestros. Se trata de una función del MER especialmente "emancipadora" dado que permite cuestionar sistemáticamente el modelo epistemológico dominante en la *noosfera* que, como sabemos, (Chevallard 1985) es especialmente influyente y hasta determinante en la constitución de los modelos epistemológicos escolares. El nuevo punto de vista que aporta el MER nos ha permitido poner en evidencia las principales *restricciones transpositivas* que pesan –o han pesado, en un pasado reciente– en la enseñanza de los Sistemas de Numeración en la Formación de Maestros.

En este mismo capítulo, una vez situados en la posición “exterior” que proporciona el MER considerado como sistema de referencia relativo, hemos llevado a cabo el diseño, experimentación y evaluación de un proceso de estudio en torno a los SN en la institución de Formación de Maestros. A lo largo de este proceso (diseño-experimentación-evaluación) se ha puesto claramente de manifiesto la determinación recíproca entre lo matemático y lo didáctico y, en particular, la dependencia entre las formas posibles de organizar el proceso de estudio y el modelo epistemológico subyacente. Pensamos que el sacar a la luz esta dependencia habitualmente oculta, contribuye asimismo a la emancipación del análisis didáctico.

En el **Capítulo IV** hemos empezado a analizar la relatividad institucional simultánea de lo matemático y lo didáctico. Hemos visto que dicha relatividad, que constituye una de las principales consecuencias de la Teoría de la Transposición Didáctica, se refleja en la *relación institucional* a las OM, esto es, en el sistema de prácticas matemáticas que es posible llevar a cabo en cada institución con los componentes de las OM consideradas. Pero se refleja sobre todo, o tal vez simultáneamente, en la forma de organizar el proceso de estudio de dichas OM. En particular, la relatividad institucional incide sobre la “razón de ser” que permite generar efectivamente una OM en cada una de las instituciones. Así, un conjunto determinado de cuestiones problemáticas puede constituir una poderosa “cuestión generatriz” de una OM en una institución docente y ser perfectamente *inerte* e *ineficaz* para generar o reconstruir dicha OM en otra institución. Al explicitar y especificar algunos de los aspectos concretos de la relatividad institucional, nuestro trabajo contribuye, aunque sea modestamente, en la dirección de la emancipación institucional de la Didáctica de las Matemáticas.

Finalmente, en el **Capítulo V**, hemos propuesto un MER en torno a la Medida de Magnitudes Continuas que permite poner nuevamente en evidencia la codeterminación entre lo matemático y lo didáctico. La aportación más importante de este capítulo en lo que hace referencia al problema de la emancipación epistemológica, consiste en el *análisis minucioso del proceso de construcción* del MER. Dicha construcción se ha basado en un análisis didáctico previo, que subrayaba la necesidad de integrar los tres universos de la medida que señala Brousseau (el universo de los objetos medibles, el de la definición de la medida y el numérico) que aparecen escindidos en la Escuela. La decisión de reintegrar el primero de dichos universos como un componente esencial del MER, constituye un gesto de emancipación de la didáctica que contrasta con la sujeción de la Escuela a la institución del saber sabio. Esta sujeción se pone de manifiesto, en este caso, mediante la eliminación del universo de los objetos medibles del ámbito de la enseñanza escolar de la Medida de Magnitudes.

4. EL PROBLEMA DE LA DIFUSIÓN INSTITUCIONAL DE LAS PRAXEOLOGÍAS DIDÁCTICAS

Las dos Modelos Epistemológicos de Referencia que presentamos en esta memoria tienen su origen en sendos trabajos elaborados previamente en el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas y, como puede suponerse, no se trata de una coincidencia casual. Ya hemos comentado, en el **Capítulo I**, la estrecha vinculación –y hasta filiación– entre la Teoría Antropológica de lo Didáctico, en la que se enmarca esta investigación, y la Teoría de las Situaciones Didácticas.

Nuestro análisis de dos Organizaciones Didácticas generadas en el ámbito de la Teoría de las Situaciones Didácticas ha pretendido, entre otras cosas, subrayar la importancia de explicitar el MER subyacente en cada caso así como la relatividad institucional de las Praxeologías Matemático-Didácticas, empezando por su "razón de ser". Al mismo tiempo, ha permitido poner de manifiesto un mecanismo de elaboración del espacio de las Organizaciones Didácticas posibles sustentadas por una OM determinada. Sin pretender estudiar las condiciones y restricciones que dificultan la libre difusión y plena penetración institucional de dichas Praxeologías (problema éste que sobrepasa con mucho las posibilidades y los límites de esta memoria), hemos hecho algunas aportaciones al estudio de esa inmensa *problemática ecológica*. Concluiremos esta memoria citando brevemente algunas de estas aportaciones que constituyen, en realidad, problemas didácticos abiertos:

- La TSD y la TAD comparten la misma base empírica –que se materializa en la unidad de análisis–tal como se ha puesto de manifiesto en los MER que hemos explicitado a partir de sendos trabajos de la TSD. Dado que esta unidad mínima de análisis depende fuertemente de la OM a estudiar, está condicionada por todas las restricciones transpositivas y, en definitiva, rebasa ampliamente la propia institución docente y el ámbito de actuación del profesor. No es de extrañar, por tanto, que resulte "incomprensible" y hasta "inaceptable" desde una cultura escolar delimitada por la ideología pedagógica dominante.

Postulamos que éste es uno de los factores que dificultan la difusión escolar de las Praxeologías Didácticas generadas tanto por la TSD como por la TAD. El cuestionamiento de este postulado y, en su caso, el contraste empírico del mismo constituye el primero de los problemas abiertos que aquí proponemos.

- En base a los procesos didácticos experimentados y, también, al análisis que hemos llevado a cabo de otros procesos didácticos previamente vividos, postulamos que, en el ámbito de la metodología de investigación didáctica, el MER subyacente al diseño de un proceso de estudio constituye un instrumento esencial para interpretar la actividad didáctica que se lleva a cabo efectivamente en dicho proceso (esto es, las *tareas didácticas* que se plantean y las *técnicas didácticas* –de ayuda al estudio– que se utilizan para llevar a cabo dichas tareas) y, lo que es más importante, para descifrar los discursos tecnológicos (de *tecnología didáctica*) que pueden utilizarse en la institución en cuestión para interpretar y justificar la práctica docente. Parece lógico preguntarse, ¿en qué sentido y en qué medida, la explicitación del MER y de las relaciones de sus componentes con los de las Praxeologías Didácticas puede clarificar la dinámica de éstas y favorecer (o dificultar) la difusión escolar de las mismas?
- En la TSD el MER está implícitamente contenido en una situación fundamental que, por tanto, integra lo matemático y lo didáctico como aspectos inseparables. Se pone así de manifiesto que no tiene sentido hablar de modelos epistemológicos “puros”, porque lo matemático no existe en ninguna institución sin lo didáctico, es decir, sin las condiciones de su emergencia, desarrollo, utilización y difusión. En la TAD, al explicitar la estructura y la dinámica del MER (sus componentes y las relaciones entre ellos), hacemos una abstracción que podría poner en peligro la unidad indisoluble de lo matemático y lo didáctico y que se salvaguarda en la unidad mínima de análisis de los procesos didácticos (**Capítulo I**). Uno de los problemas que aparece aquí, relacionado con la difusión de las Praxeologías Didácticas, es el siguiente: el asignar a la actividad didáctica, de ayuda al estudio de las matemáticas, una estructura praxeológica y descomponerla en tipos de tareas didácticas, técnicas didácticas y tecnologías y teorías didácticas, ¿puede ayudar a formular un Programa de Formación del Profesorado de Matemáticas y, en consecuencia, favorecer (o dificultar), a largo plazo, la difusión escolar de las Praxeologías Didácticas?

Estos problemas abiertos, y muchos otros, señalan claramente la importancia y hasta la necesidad de avanzar en el estudio de la articulación entre la Teoría de las Situaciones Didácticas y la Teoría Antropológica de lo Didáctico a partir de trabajos de análisis empírico como el propuesto aquí.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTIBI, A. y BROUSSEAU, G. (2000). La dé-transposition didactique des connaissances scolaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 20* (1), 7-40.

ANTIBI, A. y BROUSSEAU, G. (2002). Vers l'ingénierie de la dé-transposition. *Revue des Sciences de l'éducation du LEMME, 8*, 45 – 47.

AVIEZRI, S. F. (1985). Systems of Numeration. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 92, No. 2. (Feb. 1985), pp. 105-114. Recuperable en: http://www.jstor.org/browse/00029890/di991699/99p0918q/0?frame=noframe&userID=93602baa@ucm.es/01cce440310050de16f&backcontext=page&backurl=/cgibin/jstor/viewitem/00029890/di991699/99p0918q/0%3fcitationAction%3dsave%26frame%3dnoframe%26charset%3du%26userID%3d93602baa@ucm.es/01cce440310050de16f%26dpi%3d3%26config%3djstor%26citationPath%3d00029890-di991699-99p0918q%26PAGE%3d0&config=jstor

APMEP (1976). *La multiplication des naturels à l'école élémentaire,* Elem Math II. nº 16, 2ème édition. París : APMEP.

APMEP (1983). *La division à l'école élémentaire,* Elem Math III. APMEP: Paris.

ARSAC, G. (1988). Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9* (3), 247 – 280.

ARTIGUE, M. y ROBINET, J. (1984). Numération à l'école élémentaire. *Educational Studies in Mathematics, 16*, 155 – 175.

BAHRA, M. (1995). *Problèmes de Didactique de la Numération. Echecs et Succés de la Remathematisation*. Thèse doctoral. Bordeaux : Université de Bordeaux I.

BANWITIYA, Y. (1993). *L'ingénierie du sens en mathématique : la division dans N, Q et D à l'école primaire*. Thèse doctoral. Bordeaux : Université de Bordeaux I.

BEDNARRZ, N. y JANVIER, B. (1984). La numération. Première partie: Les dificultés suscitées para son apprentissage. *Grand N, 33*, 5 – 31.

BEDNARRZ, N. y JANVIER, B. (1985). La numération. 2éme partie: Une strategie didactique cherchant à favoriser une meilleure compréhension. *Grand N, 34,* 5 – 17).

BOLEA, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*, Tesis doctoral. Monografías del Seminario Matemático "García de Galdeano" nº 29. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

BOLEA, P., BOSCH, M., GARCÍA, J., GASCÓN, J., RUIZ, L. y SIERRA, T.A. (2000). Análisis didáctico del artículo "El peso del recipiente. Estudio de los problemas de la medición en CM" en el marco de la teoría antropológica, *Actas del XIV Seminario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM)*. Recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino/si-idm/Cangas/Bahujama.rtf.

BOLEA, P., BOSCH, M., GARCÍA, J., GASCÓN, J., RUIZ, L. y SIERRA, T.A. (2002). Analyse des praxeologies mathématiques autour de la mesure des grandeurs, *Actes de la XI École d'été de Didactique des Mathématiques* (pp. 369-374). Grenoble: La Pensée Sauvage.

BOLEA, P., BOSCH, M., GARCÍA, J., GASCÓN, J., RUIZ, L. y SIERRA, T.A. (2005). Analyse de "Le mesure en CM1" d'après la Théorie Anthropologique du Didactique. En M.H. Salin, P. Clanché y B. Sarrazy (Eds.), *Sur la Théorie des Situations Didactiques. Hommage à Guy Brousseau* (pp. 153-166). Grenoble: La Pensée Sauvage.

BOLEA, P., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 20* (1). 7-40.

BOLEA, P., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (2004). Why is modelling not included in the teaching of algebra at secondary school? *Quaderni di Ricerca in Didattica*, *14*, 125-133.

BOSCH, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. Tesis doctoral. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

BOSCH, M., ESPINOZA, L. y GASCÓN, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudio: análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *23* (1), 79-136.

BOSCH, M., FONSECA, C. y GASCÓN, J. (2004). Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *24* (2.3), 205-250.

BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1994). La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, *12* (3), 314-332.

BOSCH, M. y GASCÓN, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. En A. Mercier y C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 107-122). Grenoble: La Pensée Sauvage.

BOSCH, M. y GASCÓN, J. (2006a). La miseria del Generalismo Pedagógico ante el problema de la Formación del Profesorado. *Actas del I Congreso internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico*. Baeza. (Pendiente de publicación).

BOSCH, M. y GASCÓN, J. (2006b). 25 años de transposición didáctica. *Actas del I Congreso internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico*. Baeza. (pendiente de publicación).

BOSCH, M., GASCÓN, J. y SIERRA, T.A. (2004). Análisis de un proceso de estudio en torno a la numeración. En C. De Castro y M. Gómez (Eds.), *Análisis del currículo actual de matemáticas y posibles alternativas* (pp. 39-74). Barcelona: Edebé.

BOURBAKI, N. (1969). *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza Universidad.

BROUSSEAU, G. (1994). *Problèmes et résultats de Didactique des Mathématiques*. ICMI Study 94. Washington.

BROUSSEAU, G. (1973). Peut-on améliorer le calcul des produits de nombres naturels? *Actes du Congrès International des Sciences de l'Education*. Paris.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970-1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland et V. Warfield, Eds.). Grenoble: La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU, G. (2000). Les différents univers de la mesure et leurs situations fondamentales. Un exemple d'utilisation de la théorie des situations pour l'ingénierie. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 9. Disponible en: http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno9.htm.

BROUSSEAU, G. (2002). Les grandeurs dans la scolarité obligatoire. En J.L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot y R. Floris (Eds.), *Actes de la 11ème École d'été de Didactique des Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage Editions. (pp. 331 – 348).

BROUSSEAU, G. y BROUSSEAU, N. (1987). *Rationnels et decimaux dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux: IREM de Bordeaux

BROUSSEAU, G. y BROUSSEAU, N. (1991-92). Le poids d'un recipient. Etude des problèmes du mesurage en CM. *Grand N*, *50*, 65-87.

BROUSSEAU, N. (1987). *La mesure en CM1. Compte-rendu d'activités*. Publications de l'IREM de Bordeaux. Burdeos: Université de Bordeaux I.

CASTRO, E. y OTROS (2001). *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Editorial Síntesis.

CHAMORRO, M.C. y BELMONTE, J.M. (1988). *El problema de la medida*. *Didáctica de las magnitudes lineales*. *Matemáticas: cultura y aprendizaje*. Madrid: Editorial Síntesis.

CHAMORRO, M.C. (1995). Aproximación a la medida de magnitudes en la Enseñanza Primaria. *UNO, 3*, Editorial Grao. Barcelona.

CHAMORRO, M.C. (1996). El currículum de medida en Educación Primaria y E.S.O y las capacidades de los escolares, *UNO*, 10. Editorial Grao: Barcelona.

CHAMORRO, M.C. (1997). *Estudio de las situaciones de enseñanza de la medida en la escuela elemental*. Tesis doctoral. Madrid: UNED.

CHAMORRO, M.C. (2003). El tratamiento escolar de las magnitudes y su medida. En M.C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Pearson Educación.

CHAMORRO, M.C. (2004). A la búsqueda de la numeración. De la filogénesis a la ontogénesis: aspectos didácticos e históricos. *Números, formas y volúmenes en el entrono del niño*. Madrid: Instituto Superior de Formación del Profesorado, Ministerio de Educación y Ciencia.

CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12* (1), 73-112.

CHEVALLARD, Y. (1985, 1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La Pensée Sauvage. [Traducción en español de Claudia Gilman (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique].

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19* (2), 221-266.

CHEVALLARD, Y. (2000). La recherche en didactique et la formation des professeurs : problématiques, concepts, problèmes. En M. Bailleul (Ed.), *Actes de la x*[e] *École d'été de didactique des mathématiques (Houlgate, 18-25 août 1999)* (pp. 98-112). Caen: ARDM et IUFM de Caen.

CHEVALLARD, Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente. *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, Huesca. Disponible en: http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm.

CHEVALLARD, Y. (2002-2003) : *Séminaire de didactique des mathématiques: Séance 14: mardi 21 janvier 2003 (p. 309 – 315).* IUFM de l'Academie d'Aix- Marseille. Recuperable en http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/data/pcl2/2005-2006/seminaire_PCL2_2003-2004.pdf

CHEVALLARD, Y. (2003-2004) : *Séminaire de didactique des mathématiques: Séance 14: Mardi 13 Janvier 2004 (p. 274- 277).* IUFM de l'Académie d'Aix-Marseille. Recuperable en http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/data/pcl2/2005-2006/seminaire_PCL2_2003-2004.pdf

CHEVALLARD, Y. (2004). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. *3*[e] *Université d'été Animath*, Saint-Flour (Cantal), 22 al 27 août 2004.

CHEVALLARD, Y. (2005). Steps towards a new epistemology in mathematics education. *IV Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4).* Sant Feliu de Guíxols (Spain).

CHEVALLARD, Y. (2006). La problématique anthropologique en didactique, d'hier à demain. *Actas del I Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico*. Baeza (España).

CHEVALLARD, Y. y BOSCH, M. (2000-2001). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oublié. *Petit X, 55*, 5-32.

CHEVALLARD, Y. y BOSCH, M. (2002). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations. *Petit X*, nº 59, 43-76. CRDP de Grenoble. Grenoble.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997*). Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori.

CLAVIER, Y., BIA, J. y MARÉCHAL, C. (1987). *Objectif calcul. CM1*. Paris: Hatier.

CID, E., DÍAZ GODINO, J y BATANERO, C. (2004). Sistemas numéricos. En DÍAZ GODINO, J. (Dir.) (2004). *Matemáticas para maestros. Manual para el estudiante*. Recuperable en **http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/**

COMIN, E. (2000). *Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire*. Tesis doctoral. Bourdeaux : Université de Bordeaux I.

COMIN, E. (2002). L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22* (2/3), 135-182.

CUPPENS, R, **(**2001). Le système de numération de Charles Cros. *Bulletin de l'APMEP*, 434, 355-364.

DAMPHOUSSE, P. (2002). *L'arithmétique ou l'art de compter.* Dijon-Quetigny: La Pommier.

DE PRADA, M.D. (1990). *Cómo enseñar las magnitudes, la medida y la proporcionalidad,* Cuadernos de Matemáticas 1, Editorial Ágora: Málaga.

DERAMECOURT, G., OLEJNICZAK, E. y MARTIN, F. (1984). *Math – CP*. IREM de Bordeaux. Université de Bordeaux I. Bordeaux.

DESTOUESSE, C. (1996-1997). Ça fourmillionne. *Grand N, 59*, 11-17.

DUCH, A. (2006). *Análisis de Algoritmos (ADA Grupo 30).* Recuperable en http://www.lsi.upc.edu/~duch/analisis.pdf

EL BOUAZZAOUI, H. (1978). *La numération au cours préparatoire*. IREM de Bordeaux. Université de Bordeaux I. Bordeaux.

EL BOUAZZAOUI, H. (1982). *Étude de situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération. Relations entre divers caractères de ces situations et le sens, la compréhension de l'apprentissage de ces notions.* Thèse de 3e cycle. Bordeaux: Université de Bordeaux I.

ERMEL (1977). *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire (cours CP).* Paris: Hatier.

ERMEL (1993) : *Apprentissages numériques CE1*. París: Hatier.

ERMEL (1997) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes (CM1)*. Paris: Hatier**.**

ESPINOZA, L. (1998). *Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "límite de función". Del "pensamiento del profesor" a la gestión de los momentos del estudio.* Tesis Doctoral. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona.

ESPINOZA, L. y BARBÉ, J. (2006). El problema de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Básica Chilena: la "Estrategia de Asesoría a la escuela en la implementación curricular LEM-Matemática" como una vía de abordaje**.** *Actas del I Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico*. Baeza (España). (Pendiente de publicación)

FÉLIX, L. (1970). *Notions de mesures et nombres réels*. París: Librerie A. Blanchard.

FENNEMA, E. y LOEF, F. (1992). Teacher's knowledge and its impact. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147-164). Nueva York: Macmillan.

FENNEMA, E. CARPENTER, T.P., y PETERSON, P.L. (1989). Teachers' decision making and cognitively guided instruction: A new paradigm for curriculum development. En K. Clements y N.F. Ellerton (Eds.), *Facilitating change in mathematics education*. Geelong, Victoria, Australia: Deakin University Press.

FONSECA, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria.* Tesis doctoral. Vigo: Universidad de Vigo.

FREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

GAIRIN-CALVO, S. (1988). *Les nombres au CP. Avec ou sans logiciels*. IREM de Bordeaux. Université de Bordeaux I. Bordeaux.

GARCÍA, F.J. (2005). *La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. Tesis doctoral. Jaén: Departamento de Didáctica de las Ciencias, Universidad de Jaén.

GASCÓN, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *13* (3), 295–332.

GASCÓN, J. (1994). El papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas. *Educación Matemática*, *6* (3), 37–51.

GASCÓN, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *18* (1), 7-34.

GASCÓN, J. (2000). Sentido de un conocimiento matemático e incompletitud de las praxeologías matemático-didácticas, (pendiente de publicación).

GASCÓN, J. (2001). Algunos problemas de investigación relacionados con la práctica docente del profesor de matemáticas. *XVI Jornadas del SI-IDM*, Huesca (España). Recuperable en **http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/**.

GASCÓN, J. (2002). El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas. *La Gaceta Real Sociedad Matemática Española*, *5* (3), 673-698.

GASCÓN, J. (2003). ¿Por qué lo matemático es "denso" en lo didáctico? Respuesta provisional a las sugerencias de T. Recio. *La Gaceta Real Sociedad Matemática Española*, *6* (1), 151-159.

GASCÓN, J. (2004). Incidencia del "*autismo temático*" sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. En E. Palacián (Ed.), *Aspectos didácticos de matemáticas* (pp. 81-124). Zaragoza: ICE de la Universidad de Zaragoza.

GASCÓN, J. y SIERRA, T.A. (2002). Reconstrucción escolar de la numeración para la formación de maestros. Parte II: Hacia la simplificación de los algoritmos de cálculo. En M.C. Peñalva, G. Torregrosa y J. Valls (Coord.), *Aportaciones de la Didáctica de las Matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 229-244), Alicante: Universidad de Alicante.

GASCÓN, J. y SIERRA, T.A. (2003). *Reconstrucción escolar de la numeración. De la representación de los números a la simplificación de los algoritmos de cálculo.* Recuperable en: **http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/boletin15.htm**.

GELMAN, R. (1983). Les bébés et le calcul. *La Recherche*, *149* (83), 1382-1389.

GÓMEZ, B.: *Numeración y cálculo*. Madrid: Editorial Síntesis.

GUIET, J. (1995). Une petite histoire de la division: de ses origines jusqu'à la méthode "Galley". *Grand N, 57,* 33–54. Grenoble: CRDP de Grenoble.

GUINET, R. (1978a). Histoire des techniques operatoires: La addition et la soustraction. *Grand N, 14,* 55-64. Grenoble: CRDP de Grenoble.

GUINET, R. (1978b). Histoire des techniques operatoires: La multiplication. *Grand N, 15,* 27-41. Grenoble: CRDP de Grenoble.

GUINET, R. (1979). Histoire des techniques operatoires: La division. *Grand N, 17,* 21-37. Grenoble: CRDP de Grenoble.

GUITEL, G. (1975). *Histoire comparée des numérations écrites*. Paris: Flammarion.

HOROWITZ E., SAHNI S. y RAJASECARAN S. (1998). *Computer algorithms*. New York: Computer Science Press.

IFRAH, G. (1987). *Las cifras. Historia de una gran invención*. Madrid: Alianza.

IFRAH, G. (1997). *Historia universal de las cifras*. Madrid: Espasa Calpe.

IREM de Bordeaux (1985). *La multiplication au* CE_1. IREM de Bordeaux. Bordeaux: Université de Bordeaux.

LAISANT, A. (1888). Sur la numération factorielle, application aux permutations. *Bulletin de la S.M.F,* Tome 16, 176-183. Recuperable en : **http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1888__16__176_0**.

LAKATOS, I. (1971). *History of Science and its Rational Reconstructions.* En R.C. Buck y R.S. Cohen (Eds.). *P.S.A.*., 1970, Boston Studies in the Philosophy of Science, 8, pp. 91-135. Dordrecht: Reidel [Trad. española: *Historia de la ciencia y sus reconstrucciones racionales*. Tecnos. Madrid, 1974

LAKATOS, I. (1978). *Mathematics, Science and Epistemology: Philosophical Papers*, Vol 2. Cambridge: University Press. [Trad. española: *Matemáticas, ciencia y epistemología*. Madrid: Alianza, 1981].

LAKATOS, I. (1982). *Historia de la ciencia y sus reconstrucciones racionales*. Madrid: Tecnos.

LEBESGUE, H. (1995). *La medida de magnitudes*. México: Limusa.

MURILLO, M, (2002). Taller sobre sistemas de numeración. *Actas XVI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Julio de 2002. La Habana.

PAUVERT, M. (1990). *Faire comprendre la soustraction*. Éditions Nathan.

PIAGET, J. y GARCÍA, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México, D.F.: Siglo Veintiuno (4ª edición, 1989).

POLYA, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning*, 2 vols. Princeton, NJ: Princeton University Press. [Trad. española: *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos, 1966].

PUIG ADAM, P. (1973). *Curso de geometría métrica*. (Tomo I: Fundamentos). Madrid: Biblioteca Matemática.

RECIO, T. (2002). Sobre “El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de a Didáctica de las Matemáticas” de J. Gascón. *La Gaceta Real Sociedad Matemática Española, 5* (3), 699-702.

ROANES MACÍAS, E. (1983). *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Editorial Anaya.

RODRIGUEZ, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas: una propuesta integradora desde el enfoque antropológico.* Tesis Doctoral. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

ROUCHE, N. (1992). *Le sens de la mesure.* Bruxelles : Didier Hatier.

SCHOENFELD, A.H. (2000). Models of the Teaching Process. *Journal of Mathematical Behavior*, *18* (3), 243-261.

SHULMAN, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching, *Educational Researcher*, 15/2, 4-14.

SHULMAN, L.S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *157* (1), 1-22.

SMARANDACHE, F. (1991). A Generalized Numeration Base. University of New Mexico. Gallup, NM 87301, USA. Recuperable en: http://arxiv.org/ftp/math/papers/0010/0010158.pdf

SIERRA, T.A. y GASCÓN, J. (2002). Reconstrucción escolar de la numeración para la formación de maestros. Parte I: La representación simbólica de los números. En M.C. Peñalva, G. Torregrosa y J. Valls (Coords.), *Aportaciones de la Didáctica de las Matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 213-228). Alicante: Universidad de Alicante.

SIERRA, T.A., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (2006). Interrelación entre lo matemático y lo didáctico en la reconstrucción escolar de los sistemas de numeración. *Actas del I Congreso Internacional de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*, Baeza (España).

THOMPSON, A.G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). New York: Mac. Millan.

THURSTON, W.P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *30* (2), 161-177.

TEXTOS ESCOLARES

AIZPÚN A. y otros (1976). *Los números y el cálculo numérico*. Universidad Nacional de Educación a Distancia. Madrid: Editorial Gráficas Torroba.

AIZPÚN, A. (1970). *Teoría y didáctica de la matemática actual*. Barcelona: Editorial Vicens-Vives.

DÍAZ GODINO, J. (Dir.) (2004). *Matemáticas para maestros. Manual para el estudiante*. Recuperable en **http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/**

GARCÍA PRADILLO, J. (1957). *Aritmética y su metodología y Álgebra*. Madrid: Editorial Nuevas Gráficas.

GARCÍA PRADILLO, J. (1969). *Matemática de siempre. Didáctica de hoy*. Tomo 1. Madrid: Editorial Nuevas Gráficas.

MARTÍNEZ, J. y otros (1981). *Matemáticas–1 (Escuelas Universitarias de Profesorado de E.G.B.)*. Madrid: Editorial SM.

NICHOLS, E.D. y SWAIN, R.L. (1975). *Matemáticas para el maestro de enseñanza elemental.* México: Editorial CECSA.

NORTES CHECA, A. (1978). *Matemáticas primer curso. Escuelas Universitarias del profesorado de E.G.B.* Burgos: Editorial Santiago Rodríguez, S.A..

ROANES MACÍAS, E. (1972). *Matemáticas para profesores.* Salamanca: Editorial Anaya.

ROANES MACÍAS, E. (1983). *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Editorial Anaya.

SABRÁS GURREA, A. (1931). *Aritmética razonada*. Barcelona: Imprenta Ángel Ortega.

TABOAS SALVADOR, J. (1942). *Nociones y ejercicios de Aritmética y Geometría*. Madrid: Gráficas Sánchez.

TABOAS SALVADOR, J. (1943). *Matemáticas segundo curso*. Madrid: Imprenta Sáez.

XIBERTA y ROQUETA, M. (1934). *Metodología de las Matemáticas*. Gerona: Talleres de Salomón Marqués.

ANEXO I

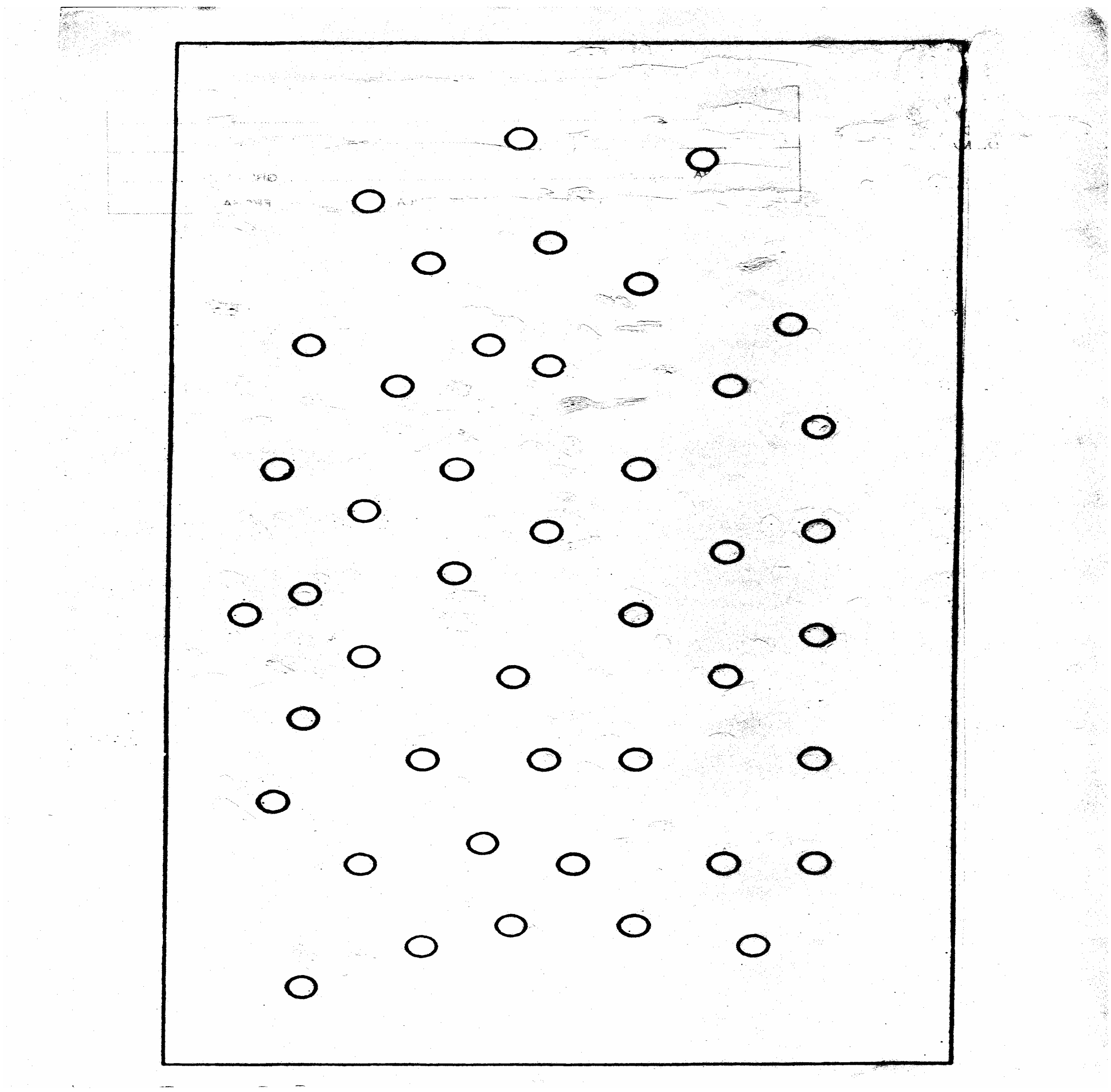
Material entregado a los alumnos de 2º de Magisterio

Cuestión inicial

"Tenemos un emisor y un receptor. El emisor dispone de la siguiente colección de platos que no puede ver el receptor y debe mandar un mensaje escrito al receptor para que le traiga *exactamente las cucharas necesarias para poner una en cada plato*."

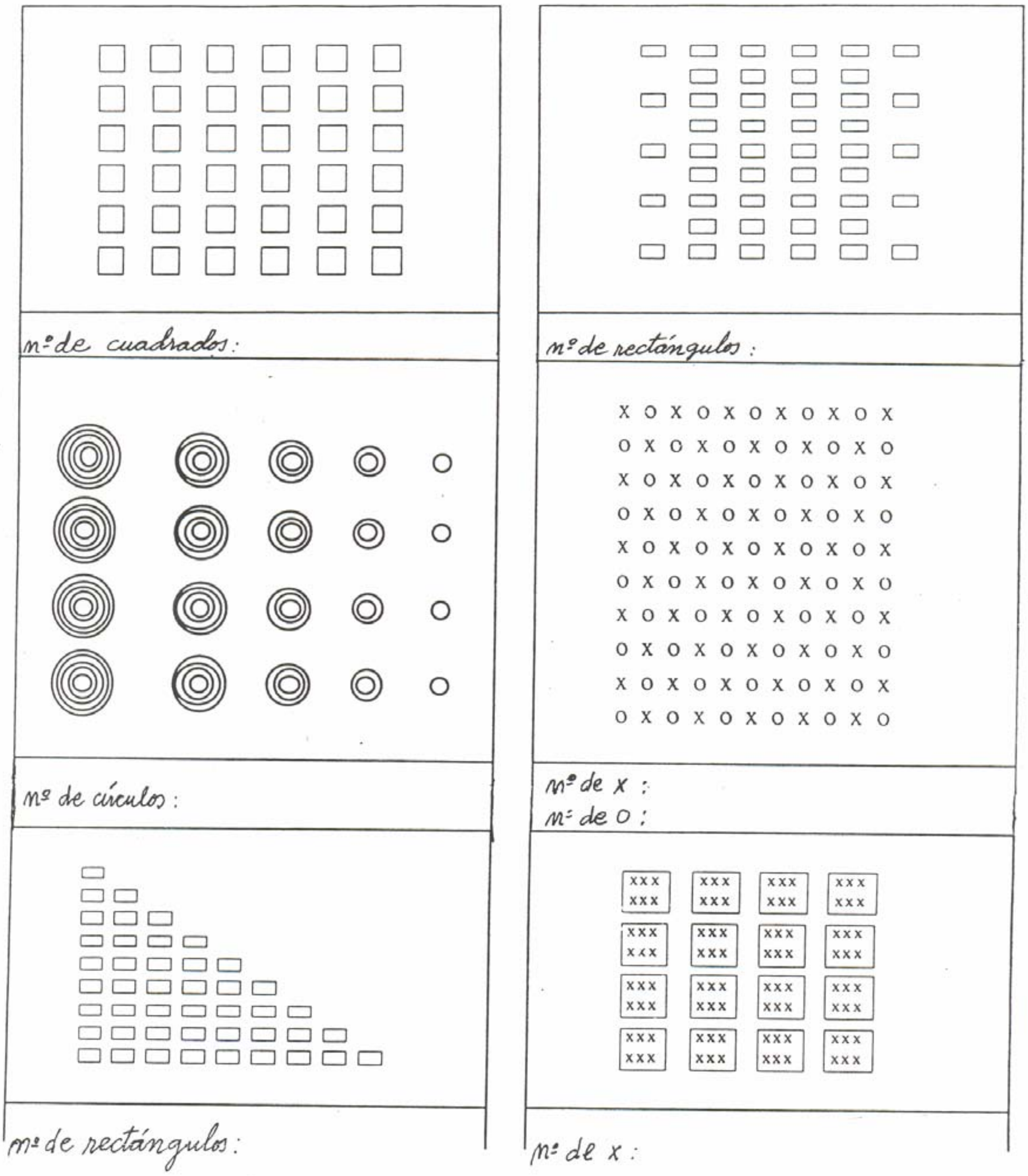
Hay múltiples soluciones a este problema. Nuestro objetivo general es estudiar las diferentes soluciones, analizar sus características y sus limitaciones.

Para ello empezaremos buscando por grupos al menos cuatro maneras distintas de emitir dicho mensaje.



Entregado al final de la Sesión 1

Encontrar el número de objetos que hay en cada casilla, sin contarlos de uno en uno e indicar cómo lo has hecho.

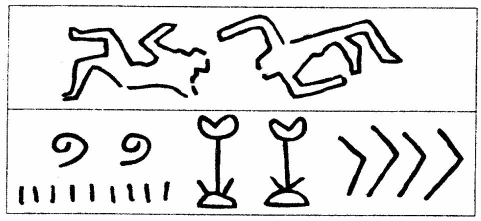


Entregado en la 2º Sesión

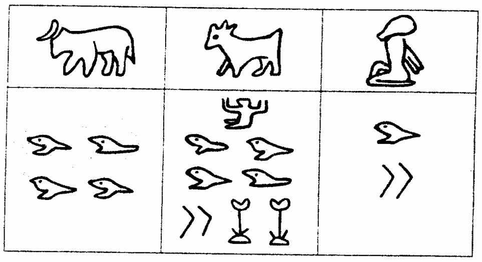
La Numeración egipcia

En el antiguo Egipto, algunos faraones hacían construir templos en honor de sus dioses. Hacían decorar los muros con esculturas y pinturas que ilustraban los episodios más gloriosos de su vida o con escenas de la vida cotidiana.
Los tres documentos siguientes han sido descubiertos en dos de estos templos:

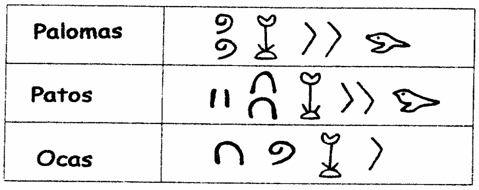
El primero indica el número de enemigos masacrados en una batalla ganada por el faraón de HIERAKONPOLIS:
42 209 hombres.



El segundo indica el número de hombres, de cabras y de bueyes capturados en esa batalla:
120 000 hombres
1 422 000 cabras
400 000 bueyes.



El tercero indica la cantidad de animales de un faraón de Memphis:
121 200 palomas
121 022 patos
11 110 ocas



¿Qué reglas utilizaban los egipcios para escribir los números?

- ¿Qué número natural representa cada uno de los símbolos que aparecen en el sistema egipcio?
- ¿Existe algún símbolo en el sistema egipcio para representar al número cero? ¿Cómo se representa el cero?
- ¿Qué operaciones aritméticas se corresponden con la yuxtaposición o adjunción de los símbolos en el sistema egipcio?
- ¿Qué papel juega la posición de los símbolos dentro del grupo de símbolos que representa a un número en el sistema egipcio?

Entregado en la 2ª Sesión

Tarea exploratoria a_1

Designa mediante el SN egipcio el cardinal de cada una de las siguientes colecciones:

⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗
⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗
⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗

♦♦♦
♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦

****
****
****
****
****

Tarea exploratoria a_2

Suponiendo que los símbolos, más fáciles de utilizar, que hemos elegido para representar los números en el sistema egipcio son:

$1 \rightarrow I \quad 10^1 \rightarrow A \quad 10^2 \rightarrow B \quad 10^3 \rightarrow C \quad 10^4 \rightarrow D \quad 10^5 \rightarrow E$ y $10^6 \rightarrow F$

Construye una colección que tenga: a) AAAIIIIIII elementos,

b) AAAAAAAAAIIIIII elementos.

Tarea exploratoria a_3

Escribe en el sistema egipcio los números: 8, 51, 99, 103, 320, 895, 999, 2874, 10001, 8000100 y 25384295.

Tarea exploratoria a_4

Ordena las siguientes series de números (*sin traducirlos a su expresión habitual*) y explica la técnica que has utilizado:

- E, CAAIIII, FFDCCAII, AAAAIIIIII, DCAI, DDDDDCCCCCCBBBAAAAIIIII, BBBBBBBBBAAAAAAAAAIIIIIIII,
- ECC, DCAAII, FBI, AAAAAAAA, AAAAAAAIIIIII, BBBBBBBAAAAAAI, DBBBBBBBBBIIIIIIII, ECBBBBBBBBAAAAAAAIIIIIIIII, DDI,

Tarea exploratoria a_5

Realizar las siguientes operaciones dentro del SN aditivo, explicar, en cada caso, la técnica utilizada, comprobar posteriormente el resultado con el SN habitual:

1. Calcular CCCBBBBBBBBBAAAAAAIIIIIIII + CCCCCCCAAAAAAAII
2. Calcular BBBBAAAIIIIIII – BAAAAAAAAAII
3. Calcular AIIII × IIIIII
4. Dividir AAAAIIIII entre IIIIII

Entregado en la 4ª sesión

Realizar las siguientes operaciones dentro del SN aditivo, explicar, en cada caso, la técnica utilizada, comprobar posteriormente el resultado con el SN habitual:

1. Calcular DDBBBBBBBBBBAAAI – CCCCCCCCBBBBBBBBBAAAAAIII
2. Calcular CAIIIIII – BBBBAAAIIIIIIIII
3. Calcular AAAAIIIIIII × AAIII
4. Calcular CCCCBBAAAAAIIIIIIII × BBBIIIIIIIII
5. Dividir BBBBBAAAIIIIIII entre AAIIII
6. Dividir CCBBBIIII entre AAAAAAAIIIIIIII
7. Hallar los divisores comunes de AAIIII y AAA
8. Hallar los múltiplos comunes de AAIIII y AAA

Preguntas sobre el Sistema de Numeración aditivo

a) ¿Se pueden escribir todos los números naturales mediante el SN aditivo?

b) ¿Se pueden realizar siempre las distintas operaciones aritméticas? ¿A partir de qué tamaño de los números el cálculo es casi impracticable? (*alcance o dominio de validez*)

c) ¿En el SN aditivo se necesitan tablas de sumar y multiplicar? ¿Por qué? ¿Cómo son estas tablas?

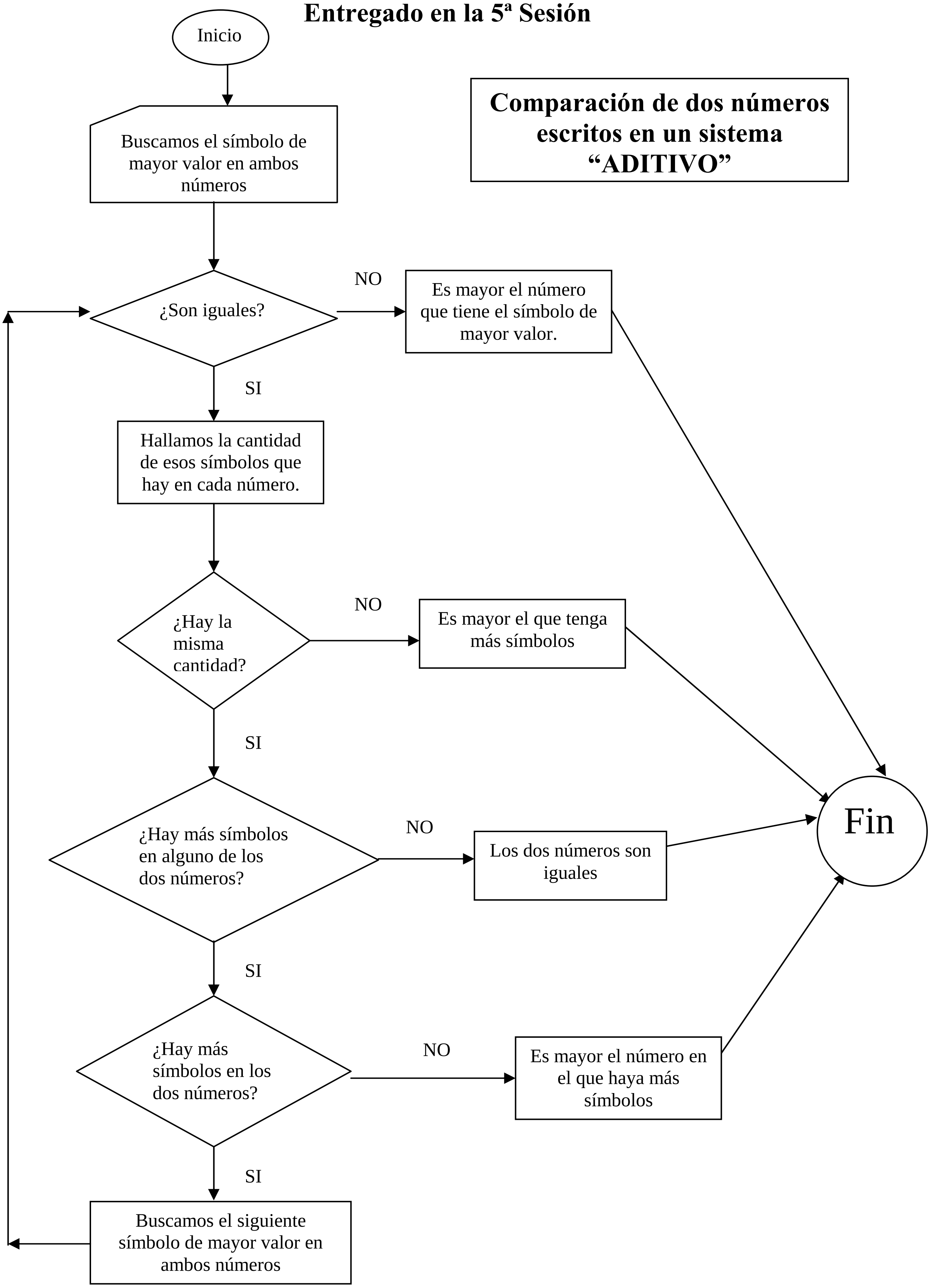
d) ¿A partir de qué tamaño de los números las operaciones son muy difíciles de realizar sin acumular errores? (*fiabilidad*)

e) ¿A partir de qué tamaño de los números las operaciones son demasiado tediosas y lentas? (*economía*)

f) ¿Cómo cambia la representación escrita de un número cuando éste se multiplica por una potencia de la base?

g) ¿Cómo debería modificarse la técnica de representación aditiva para mejorar la economía y fiabilidad de los algoritmos de multiplicación y división?

Entregado en la 5ª Sesión



Entregado en la 5ª Sesión

Multiplicar 37 × 245 en un sistema “aditivo”

Se procede mediante sucesivas duplicaciones de uno de los dos términos (aquí de 245) del siguiente modo:

→ I	BB AAAA IIIII	BB AAAA IIIII ←
I I	BB AAAA A ~~IIIII~~ BB AAAA ~~IIIII~~	BB AAAA A BB AAAA
→ II II	BB AAAA BB B ~~AAAA A~~ BB ~~AAAA A~~ CC XXXX	BBBB B AAAA ← BBBB AAAA
IIII IIII	BBBB AAA B C ~~BBBBB~~ ~~AAAAA~~ ~~BBBBB~~ ~~AAAAA~~ BBBB AAA	BBBB B AAA C BBBB AAA
A ~~IIIII~~ III ~~IIIII~~ III	BBBB B CC ~~BBBBB~~ ~~AAAAA~~ ~~BBBBB~~ ~~AAAAA~~ C BBBB AA	CCC BBBBB AA BBBB
→ A A ~~IIIII~~ I A ~~IIIII~~ I	CCC BBBB AA ~~BBBBB~~ CCC C ~~BBBBB~~ BBBB AA	CCC BBBB AA ← CCCC BBBB AA

Ayudándonos de nuestro sistema de numeración posicional decimal, podemos representar de forma mucho más sencilla los cálculos anteriores:

→ 1	245 ←
2	490
→ 4	980 ←
8	1960
16	3920
→ 32	7840 ←

Para calcular 37 veces 245, se hacen sucesivas duplicaciones de 245 y se detiene el proceso en 32 veces 245, ya que la siguiente duplicación proporcionaría 64 veces 245 que supera las 37 veces 245 que se pretende calcular. Para completar desde las 32 veces 245 hasta las 37 veces 245, se buscan en la columna de la izquierda los números que sumados a 32 den 37 (son el 4 y el 1) y se señalan éstos y el 32 y sus correspondientes en la columna de la derecha (o sea 980, 245 y 7480). Por último se suman los números señalados en la columna de la derecha y se obtiene el producto:

7840	CCC CCCC	BBBB BBBB	AA AA	
980		BBBBB BBBB	AAAA AAAA	
245		BB	AAAA	IIIII
9065	CCCCC CCCC		AAA AAA	III II

Dividir 1475 entre 43 en un sistema "aditivo"

Se hacen duplicaciones de 43 hasta acercarnos lo más posible a 1475:

I	AAAA III	AAAA III
→ I I	AAAA III AAAA III	AAAA III ← AAAA III
II II	~~AAAAA~~ AAA ~~IIIII~~ I ~~AAAAA~~ AAA ~~IIIII~~ I B A	B AAAA II AAA
IIII IIII	B B ~~AAAAA~~ AA II B ~~AAAAA~~ AA II	BBB AAAA IIII
A IIIIII	BBB AAAA IIII BBB AAAA IIII	BBB AAAA IIII BBB AAAA IIII
→ AAA II	~~BBBBB~~ B ~~AAAAA~~ AAA ~~IIIII~~ III ~~BBBBB~~ B ~~AAAAA~~ AAA ~~IIIII~~ III C B A	← C BBB AAAA III AAA III

Ayudándonos, de nuevo, de nuestro sistema de numeración, podemos representar de forma mucho más sencilla los cálculos anteriores:

1	43
→ 2	86 ←
4	172
8	344
16	688
→ 32	1376 ←

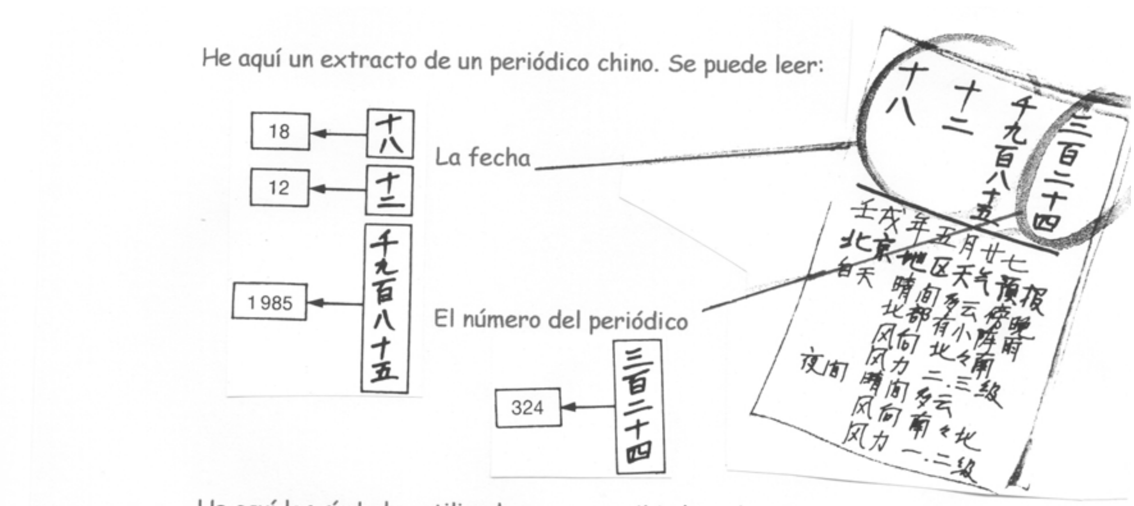
Nos detenemos en 1376, en la columna de la derecha, porque la duplicación siguiente daría un número superior al dividendo 1475. A continuación se buscan en la columna de la derecha los números que sumados a 1376 se acerquen lo más posible a 1475. Obtenemos que es el 86: 1376 + 86 =1462

1376	{	C	BBB	AAAA	III
				AAA	III
86	{			AAAA	III
				AAAA	III
1462	{	C	BBBB	AAA	II
				AAA	

Como a 1462 le faltan 13 para alcanzar 1475, el *resto de la división* es 13. Y como los números que acompañan a 1376 y a 86 son, respectivamente, 32 y 2, resulta que el *cociente de la división* es 34.

Documento entregado al final de la 5ª sesión

En el siguiente documento aparecen unos cuantos números escritos en el *sistema de numeración chino* y, también, en el sistema de numeración decimal.



一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千	万
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1 000	10 000

Primeras preguntas sobre el SN híbrido

a) ¿Qué número natural representa cada uno de los símbolos que aparecen en el sistema híbrido?

b) Explica la función que desempeña de cada uno de los símbolos que aparecen en el sistema híbrido.

c) ¿Qué operaciones aritméticas se corresponden con la *yuxtaposición o adjunción* de los símbolos en el sistema híbrido?

d) ¿Qué papel juega la *posición* de los símbolos dentro del grupo de símbolos que representa a un número en el sistema híbrido?

e) ¿Existe algún símbolo en el sistema híbrido para representar al número cero?

f) ¿Qué cambios aparecen el SN híbrido en relación con el SN egipcio?

Documento entregado en la 6ª sesión

<u>Tarea exploratoria h_1</u>:

Designa mediante el SN híbrido el cardinal de cada una de las siguientes colecciones:

⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗ ⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗

⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗ ⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗

⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗ ⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗ ⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗

♦♦♦♦♦♦ ♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦ ♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦

♦♦

♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦ ♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦ ♦♦♦♦♦♦♦♦♦

♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦ ♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦ ♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦

****

****

****

****

<u>Tarea exploratoria h_2</u>:

Suponiendo que los símbolos, más fáciles de utilizar, que hemos elegido para representar los números en el sistema híbrido son:

$I \rightarrow 10^0$; $A \rightarrow 10^1$; $B \rightarrow 10^2$; $C \rightarrow 10^3$; $D \rightarrow 10^4$; $E \rightarrow 10^5$; $F \rightarrow 10^6$; ...

y como nuevos símbolos que harán la función de *multiplicadores* de dichas potencias 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9[1].

Construye una colección con 3B 7 elementos, 9A 6 elementos, etc.

<u>Tarea exploratoria h_3</u>:

Escribe en el sistema híbrido los números: 8, 51, 99, 103, 320, 895, 999, 2874, 10001, 8000100 y 25384295.

<u>Tarea exploratoria h_4</u>:

Ordenar las siguientes series de números (<u>sin traducirlos a su expresión habitual</u>) y <u>explica la técnica</u> que has utilizado:

E, C 2A 4, 2F D 2C A 2, 4A 6, D C A I, 5D 6C 3B 4A 5, 9B 9A 8.

E 2C, D C 2A 2, F B I, 8A, 7A 6, 7B 6A I, D 9B 8, E C 8B 7A 9, 2D I.

[1] El número 1 no se utiliza como multiplicador ya que es innecesario.

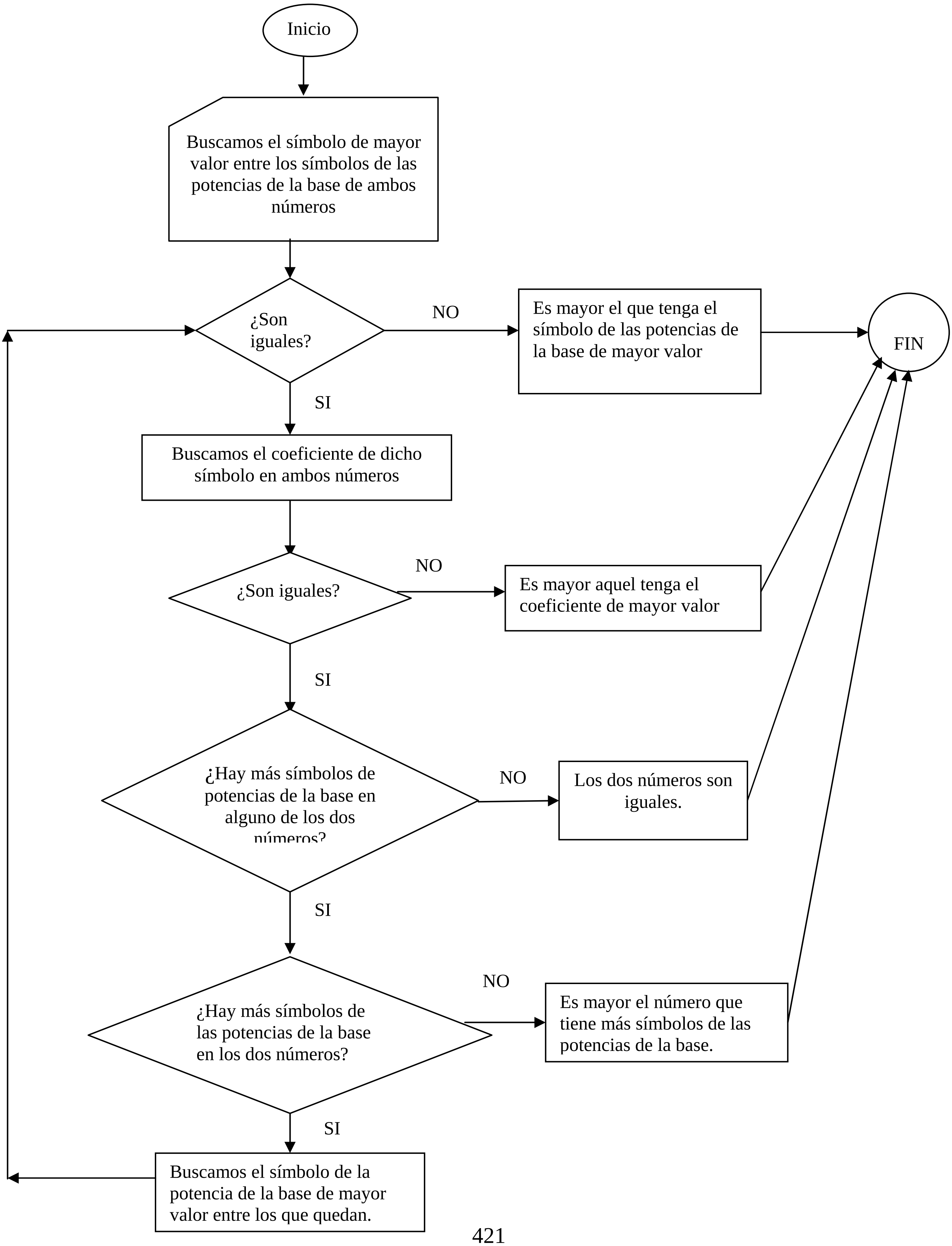
<u>Tarea exploratoria h_5</u>:

Realizar las siguientes operaciones dentro del SN híbrido, explicar la técnica utilizada en cada caso y comprobar posteriormente el resultado con el SN habitual:

- ¬ Calcular 3C 9B 6A 8 + 7C 7A 2
- ¬ Calcular 2D 9B 3A I – 8C 9B 5A 3
- ¬ Calcular 4A 7 × 9A 2
- ¬ Calcular 4C 2B 5A 8 × 3B 9
- ¬ Dividir 2C 3B 4 entre 7A 9
- ¬ Dividir D 9C B 2 entre 3B 8A 7
- ¬ Hallar los divisores comunes de 2A 4 y 3A
- ¬ Hallar los divisores comunes de 3B 7A 2 y 2B 2A 2
- ¬ Hallar los múltiplos comunes de 2A 4 y 3A
- ¬ Hallar los múltiplos comunes de 3B 7A 2 y 2B 2A 2

Entregado en la 7ª Sesión

Algoritmo de comparación de números en el SN híbrido



Entregado en la 7ª Sesión

Multiplicar 2745 × 389 en un sistema "híbrido"

Para multiplicar 2C 7B 4A 5 por 3B 8A 9, se deberán utilizar dos tablas de multiplicar: la de los coeficientes y la de las potencias de la base.

Para efectuar el producto, se debe multiplicar cada componente del primer número, 3B 8A 9, por cada componente del segundo, 2C 7B 4A 5. Se empieza multiplicando 9 por 2C, por 7B, por 4A y por 5 y se suman los cuatro resultados obtenidos. A continuación se multiplica 8A por 2C, por 7B, por 4A y por 5 y así sucesivamente. Para obtener el resultado final se suman las cantidades obtenidas en las tres multiplicaciones parciales.

	2C	7B	4A	5
×		3B	8A	9

→

		2C	7B	4A	5
×					9
				4A	5
			3B	6A	
		6C	3B		
	D	8C			
	2D	4C	7B		5

→

		2C	7B	4A	5
×				8A	
				4B	
			3C	2B	
		5D	6C		
	E	6D			
	2E	D	9C	6B	

→

		2C	7B	4A	5
×			3B		
			C	5B	
		D	2C		
	2E	D			
	6E				
	8E	2D	3C	5B	

A continuación se suman los tres resultados parciales:

		2D	4C	7B	5
	2E	D	9C	6B	
	8E	2D	3C	5B	
F		6D	7C	8B	5

Tabla de multiplicar de los coeficientes:

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	A	A 2	A 4	A 6	A 8
3	3	6	9	A 2	A 5	A 8	2A 1	2A 4	2A 7
4	4	8	A 2	A 6	2A	2A 4	2A 8	3A 2	3A 6
5	5	A	A 5	2A	2A 5	3A	3A 5	4A	4A 5
6	6	A 2	A 8	2A 4	3A	3A 6	4A 2	4A 8	5A 4
7	7	A 4	2A 1	2A 8	3A 5	4A 2	4A 9	5A 6	6A 3
8	8	A 6	2A 4	3A 2	4A	4A 8	5A 6	6A 4	7A 2
9	9	A 8	2A 7	3A 6	4A 5	5A 4	6A 3	7A 2	8A 1

Tabla de multiplicar de las potencias de la base:

×	A	B	C	D...
A	B	C	D	E
B	C	D	E	F
C	D	E	F	...
D	E	F	...	...

Entregado en la 7ª Sesión

Dividir 3589 entre 74 en un sistema "híbrido"

```
  3C  5B  8A   9     |    7A  4
  2C  9B  6A          ---------
 -------------          4A  8
      6B  2A   9
      5B  9A   2
 -------------
          3A   7
```

Se busca en la tabla de multiplicar de las potencias de la base cuál es la potencia de la base que multiplicada por A da C y resulta ser B, B × A = C, pero como el coeficiente de A es 7, B × 7A = 7C, que es mayor que 3C. Debe tomarse A que es la potencia de la base inmediatamente inferior. A continuación, se utiliza la tabla de los coeficientes para ver qué coeficiente le corresponde a A, y vemos que debe tomarse 4A.

De este modo, 4A × (7A 4) = 2C 9B 6A, que restado de 3C 5B 8A 9, proporciona el dividendo parcial 6B 2A 9. Análogamente debemos buscar qué potencia de la base con su correspondiente coeficiente multiplicada por 7A 4 se acerca lo más posible a 6B 2A 9. Según las tablas de multiplicar el número buscado es el "8", por lo que: 8 × (7A 4) = 5B 9A 2 y restado de 6B 2A 9 da como resto 3A 7.

Resulta, en resumen, que el *cociente* es 4A 8 y el *resto* 3A 7, ya que

3C 5B 8A 9 = (7A 4) × (4A 8) + 3A 7

Entregado en la 7ª Sesión

Trabajo en el Sistema de Numeración Híbrido

a) Realizar F 8A 9 – 9C 9B 8A

b) Ordenar 5E 7C 9B 7 y 6E 7C 7B 9.

c) Ordenar 5F 9D 7C 8A 9 y 5F 9D 7C 9A 8.

d) Diseñar un algoritmo que permita comparar dos números cualesquiera escritos en el SN híbrido.

e) Calcular F A I – 3E C B.

f) Calcular E – 5B 7.

g) Calcular C 3A I – 6B 3A 2

h) Calcular 3C 7B × D 3A.

i) Dividir 2E 3D 3C 5B I entre 2C 5A 7

Preguntas sobre el Sistema de Numeración Híbrido

a) ¿Se pueden escribir todos los números naturales mediante el sistema híbrido?

b) ¿Se pueden realizar todas las operaciones? ¿Con qué números el cálculo es casi impracticable? (*alcance o dominio de validez*)

c) ¿En el SN híbrido se necesitan tablas de sumar y multiplicar? ¿Por qué? ¿Cómo son estas tablas?

d) ¿A partir de qué números o de qué magnitud de números las operaciones son demasiado tediosas y lentas? (*fiabilidad*)

e) ¿A partir de qué números o de qué magnitud de números las operaciones son demasiado tediosas? (*economía*)

f) ¿Cómo cambia la representación escrita de un número cuando éste se multiplica por una potencia de la base?

g) Cuando nosotros utilizamos la escritura “novecientos cuarenta y cinco mil doscientos ochenta y tres” para designar el número 945283 ¿qué tipo de sistema de numeración estamos empleando? Analiza las características de dicho sistema.

h) ¿Cómo debería modificarse la técnica de representación híbrida para que los algoritmos de la multiplicación y la división fuesen más fiables y económicos?

Material entregado en la 8ª Sesión

Tareas a realizar en el SN posicional completo

1.- Ordenar los números siguientes:
12300000450032100987б, 123000004500321009879,
1239987899672348213, y 1239987899672345678.
Explicar la técnica utilizada. Proponer **una técnica en general** que nos permita comparar dos números a partir de sus escrituras en el SN posicional completo.

2.- Calcular mediante tres técnicas distintas que se **explicarán y justificarán**:

a) 27 + 38 + 16 + 9 + 24 + 12 + 33,
b) 35073 + 38 + 2300045007 + 895000 + 5,

3.- Calcular mediante cuatro técnicas algorítmicas distintas que se **explicarán y justificarán**:

a) 87675 – 34564,
b) 3000121 – 1200123.

4.- Calcular mediante tres técnicas algorítmicas distintas que se **explicarán y justifícarán**:

a) 2345 × 789,
b) 2900150007 × 93500680.

5.- **Utilizar y justificar** cuatro técnicas distintas para hallar el cociente y el resto en los siguientes casos:

a) Dividir 81207 entre 75
b) Dividir 7300 897 entre 365

6.- a) Hacer una recopilación de los distintos criterios de divisibilidad e intentar traducir dichos criterios a las condiciones del SN aditivo y del SN híbrido.

b) Calcular los divisores comunes y los múltiplos comunes de 24 y 30, y de 372 y 222.

c) Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de 24 y 30, y de 372 y 222.

Entregado en la 8ª Sesión

Algunas técnicas algorítmicas de sustracción en el Sistema posicional completo

Se pueden utilizar las siguientes técnicas de sustracción:

1. **Técnica de "pedir prestado"**.

Se colocan los dos números uno encima del otro alineándoles a la derecha y se empieza restar de derecha a izquierda, a las unidades de primer orden las unidades de primer orden, a las unidades de 2º orden las de 2º orden, y así sucesivamente. Con esta técnica el apartado a) se convierte en cinco restas independientes, una por cada posición. Esto sucede cuando las cifras del minuendo son siempre mayores que las correspondientes del sustraendo.
Cuando esto no es así, como es en el caso b) entonces una técnica consiste en transformar la escritura del minuendo hasta conseguir que cada uno de los valores que aparecen en cada posición sea mayor que cada una de las cifras correspondientes que aparecen en el sustraendo:
Por ejemplo: Si queremos reducir 2475 – 1879 lo que haremos será transformar la escritura de 2475 de modo que todos los valores que aparezcan en cada una de las posiciones sean mayores que las correspondientes a 1879. Entonces pasaremos a escribir 2475 como 1 (13) (16) (15), de este modo tendremos 15 unidades de primer orden, 16 de 2º orden, 13 de 3º orden y 1 de 4º orden. Lo que hemos hecho es pasar una unidad de 2º orden a unidades de primer orden, de este modo tenemos 10+5 unidades de primer oren y nos quedan 6 unidades de 2º orden, análogamente pasamos una unidad de 3º orden a unidades de 2º orden y así tenemos 10+6 unidades de 2º orden, e igualmente pasamos una unidad de 4º orden a unidades de 3º orden, con lo que tenemos 10+3 unidades de 3º orden, y nos queda 1 unidad de 4º orden. Ahora ya podemos realizar la sustracción posición a posición.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 13 & 16 & 15 \\ 1 & 8 & 7 & 9 \\ \hline 0 & 5 & 9 & 6 \end{array}$$

2. **Técnica clásica o de Fibonacci.**

Esta técnica consiste en colocar igualmente minuendo y sustraendo uno encima del otro, alineándolos a la derecha y cuando existe alguna cifra en el minuendo menor que la correspondiente del sustraendo se suma 10 unidades de ese orden al minuendo y a continuación se hace la resta y después se suma una unidad del orden siguiente al sustraendo, de este modo si sumamos el mismo número al minuendo y al sustraendo la diferencia no varía (pues 10 unidades de un orden equivalen a 1 unidad del orden siguiente). Por ejemplo:

$$\begin{array}{cccc} 2 & {}_{1}4 & {}_{1}7 & {}_{1}5 \\ 1_{+1} & 8_{+1} & 7_{+1} & 9 \\ \hline 0 & 5 & 9 & 6 \end{array}$$

3. **Técnica por compensación.**

Esta técnica consiste en colocar igualmente minuendo y sustraendo uno encima del otro, alineándolos a la derecha y cuando existe alguna cifra en el minuendo menor que la correspondiente del sustraendo, se transforma el minuendo en otro número donde la primera cifra de la izquierda queda igual y todas las demás cifras pasar a ser nueve, de este modo lo que se hace es sumar un número al minuendo y para que la diferencia no varíe debemos también sumar ese mismo número al sustraendo. Por ejemplo:

2	4	7	5	$\xrightarrow{+524}$	2	9	9	9
1	8	7	9	$\xrightarrow{+524}$	2	4	0	3
					0	5	9	6

4. **Técnica de “adición con huecos”.**

Esta técnica consiste en colocar igualmente minuendo y sustraendo uno encima del otro, alineándolos a la derecha y ahora se trata de buscar qué número tengo que sumar al sustraendo para obtener el minuendo. Por ejemplo:

2	4	7	5
1^{1}	8^{1}	7^{1}	9
0	5	9	6

Se procede de derecha a izquierda posición a posición del siguiente modo: Se calcula qué número hay que añadir a 9 para obtener 15, (9 para llegar a 15, 6 y me llevo 1), luego lo que hay que añadir a 7+1 para obtener 17, (de 8 para ir a 17, 9 y me llevo 1), a continuación lo que hay que añadir a 8+1 para obtener 14, (de 9 para llegar a 14, 5 y me llevo 1) y por fin lo que hay que añadir a 1+1 para obtener 2.

Entregado en la 8ª Sesión

Algunas técnicas algorítmicas de la multiplicación en el Sistema posicional

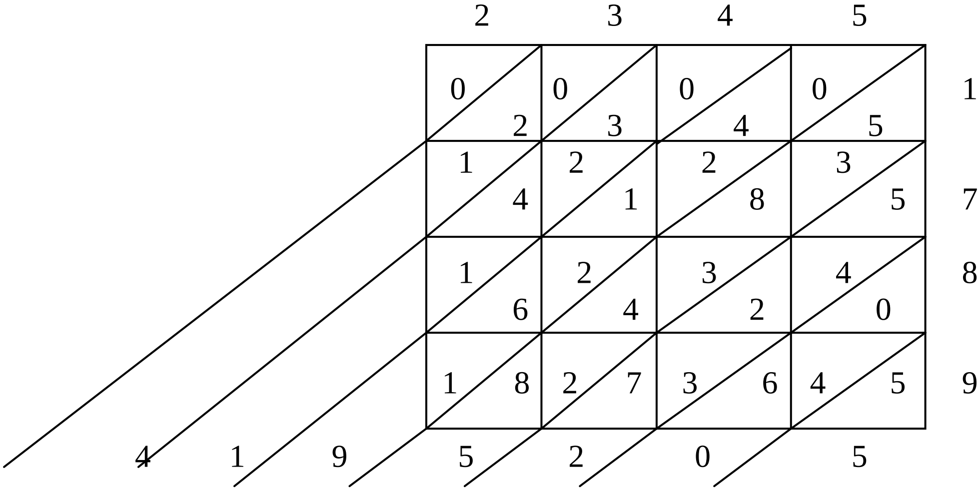
1. La técnica de doble entrada.

Colocamos los números que intervienen en el cálculo como si fueran las dimensiones de un rectángulo, y para ello hacemos la descomposición canónica de cada número y realizamos la reducción de las escrituras por trozos, luego sumamos lo obtenido en cada una de las columnas y por último, sumamos los totales de cada columna. Por ejemplo:

2000	300	40	5	
2000000	300000	40000	5000	1000
1400000	210000	28000	3500	700
160000	24000	3200	400	80
18000	2700	360	45	9

3578000+536700+ 71560 + 8945 = 4195205

2. La técnica "per Gelosía"



3. La técnica clásica

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 & & & \times & 1 & 7 & 8 & 9 \\
\hline
 & & & 2 & 1 & 1 & 0 & 5 \\
 & & 1 & 8 & 7 & 6 & 0 & \\
 & 1 & 6 & 4 & 1 & 5 & & \\
 & 2 & 3 & 4 & 5 & & & \\
\hline
 & 4 & 1 & 9 & 5 & 2 & 0 & 5
\end{array}$$

Entregado en la 8ª Sesión
Algunas técnicas de la división en el sistema posicional

1. **La técnica anglosajona.** (Dos ejemplos)
2.

Dividir 3589 entre 74 utilizando

	48
74	8
	40
74 × 40 = 2960	**3589**
	-2960
74 × 8 = 592	0629
	- 592
	037

El cociente es 48 y el resto 37, ya que
3584 = 74 × 48 +37 y 37< 74.

Dividir 960084 entre 562

562	
562 × 1	**1708**
562 × 7 = 3934	
562 × 8 = 4496	**960084**
	- 562000
	398084
	- 393400
	004684
	- 4496
	0188

O también

	1708
562	1 2
562 × 1	16 6
562 × 6 = 3372	
562 × 2 = 1124	**960084**
	- 562000
	398084
	- 337200
	060884
	56200
	004684
	3372
	1312
	1124
	0188

2.- Técnica de los múltiplos útiles.

Dividir 4837 entre 17

Primero se escriben los múltiplos de 17 siguientes:

17	34	51	68	85	102	119	136	153
170	340	510	680	850	1020	1190	1360	1530
1700	3400							

A continuación se procede del siguiente modo:

$$
\begin{array}{rr}
4837 & \\
-\underline{3400} & 200 \\
1437 & \\
-\underline{1360} & 80 \\
77 & \\
-\underline{68} & \underline{\quad 4} \\
9 & 284
\end{array}
$$

Luego el cociente es 284 y el resto 9

Explicar dicho algoritmo e indicar qué razones hay para tener en cuenta sólo los múltiplos de 17 que se han escrito antes y no otros. Aplicarlo a la división de 43257 entre 58.

Entregado en la 10ª Sesión

Preguntas sobre el SN posicional completo

- Calcular 3001005 – 2890719
- Calcular 630098 × 700400
- Dividir 74800358 entre 379
- Hallar el m.c.d. y el m.c.m. de (735 y 2970)

a) ¿Se pueden escribir todos los números naturales mediante el sistema posicional?

b) ¿Qué símbolos se utilizan en el SN posicional y de qué tipo son? ¿Cómo se representan las distintas potencias de la base del sistema? ¿Qué significa el que sea posicional?

c) ¿Se pueden realizar siempre las distintas operaciones? ¿Con qué números el cálculo es casi impracticable? (*alcance* o *dominio de validez*)

d) ¿En el SN posicional completo se necesitan tablas de sumar y multiplicar? ¿Por qué? ¿Cómo son estas tablas?

e) ¿Con qué técnicas las operaciones son muy difíciles de realizar sin acumular errores? (*fiabilidad*)

f) ¿Con qué técnicas las operaciones se pueden realizar rápidamente? (*economía)*

g) ¿Cómo cambia la representación escrita de un número cuando éste se multiplica por una potencia de la base?

h) ¿Qué cambios aparecen en el SN posicional completo con respecto a los SN aditivos (el egipcio y el romano), a los SN híbridos (el chino, el oral) y a los SN posicionales no completos o primitivos?

Resumen del estudio de la Numeración en 2º de Magisterio

Una **representación escrita** de los números naturales para que sea **eficaz** debe permitir, como mínimo:

(A) Que la escritura sea **unívoca** y cómoda. Pocos símbolos, **fácil memorizarlos** y que la **longitud de las escrituras haga fácil su lectura.**
(B) Que la **comparación** de los números a partir de sus escrituras sea **lo más fácil posible**.
(C) Que se puedan realizar **cálculos de forma rápida, sencilla y fiable**.

Tres tipos de Sistemas de Numeración.

(1) **Sistemas de numeración de tipo I** (“**aditivos**”).

Primero cifras para $1, n, n^2, n^3, n^4, n^5, \dots$ donde n es la ***base del sistema de numeración***. *Ej: el sistema egipcio* : $1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, \dots$

- En un segundo momento cifras para $1, a, n, an, n^2, an^2, n^3, an^3, n^4, \dots$, y $a < n$ es un divisor privilegiado de n que recibe el nombre de ***base auxiliar del sistema***. *Ej*: el *sistema romano*: $1, 5, 10, 5 \times 10, 10^2, 5 \times 10^2, 10^3, \dots$

(2) **Sistemas de numeración de tipo II (“híbridos”)**
Dos tipos de símbolos:

- Los que representan las distintas potencias de la base n, es decir, $n^0, n, n^2, n^3, n^4, \dots$

- Los que representan a los **multiplicadores** de dichas potencias, o sea, para 2, 3, ..., (n–1), (son los coeficientes).

Siempre se colocan encima o delante de la potencia a la que multiplican (aquí la posición es importante).

Ej: el *sistema chino* y nuestro *sistema decimal oral.*

(3) **Sistemas de numeración de tipo III (“de posición”).**

- Sólo cifras para representar los $n-1$ primeros números naturales: 1, 2, 3,..., (n – 1) (funcionan como coeficientes de las potencias de la base n).
- Cada una de las potencias n^i está representada por la posición i-ésima que ocupa un coeficiente dentro del grupo de símbolos que representa al número.

Ej: Sistemas maya y babilónico (primitivos con símbolos para 1 y *a, a divisor privilegiado de n y para el cero.*)
El sistema de numeración decimal escrito.

Un SN debe permitir expresar los números naturales mediante un conjunto **S** de símbolos, de tal manera que sean compatibles las condiciones siguientes:

(1) No haya ninguna ambigüedad.
(2) El cardinal del conjunto **S** de símbolos utilizados en SN no sea excesivamente grande.
(3) Cada número natural venga representado por una cadena de símbolos (repetidos o no) que no sea excesivamente larga.
(4) Que sean potentes, económicas y fiables las técnicas que permiten:
(4.1) comparar dos o más números
(4.2) sumar dos o más números
(4.3) restar un número de otro mayor
(4.4) multiplicar dos números
(4.5) dividir un número por otro
(4.6) hallar múltiplos y divisores de uno o más números.

Técnicas extremas:

- Utilizar un **único símbolo** y repetirlo tantas veces como indica el número que queramos representar,
- Utilizar un símbolo diferente para cada número natural.

La primera permite resolver (1) y (2) pero no (3) y
la segunda permite resolver (1) y (3) pero no (2).

Una primera técnica intermedia:

Consiste en mejorar la técnica de un único símbolo realizando un único tipo de agrupamiento.

IIIII IIIII IIIII IIIII III ⟶ **23**

V V V V III ⟶ **23**

Aparece nuevo símbolo para el agrupamiento.

El Sistema de Numeración "aditivo"

- Consiste en realizar **agrupamientos de forma regular**, utiliza agrupamientos de primer orden, de segundo orden, etc.
- Semejante al *sistema egipcio*.
- Símbolos: I, A, B, C, D, E y F

$$\begin{array}{ccccccc} I & A & B & C & D & E & F \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 10^0, & 10^1, & 10^2, & 10^3, & 10^4, & 10^5 & \text{y } 10^6 \end{array}$$

Designan **unidades sucesivas**, cada una de las cuales es diez veces la anterior.

Sistema egipcio

- Los símbolos representan a las potencias de la base.
- La base es 10. Se agrupa de 10 en 10.
- No existe ambigüedad de escrituras.
- Se utiliza la adición.
- No es posicional. No tiene cero como cifra.
- No es posible escribir cualquier número

Características de SNa

- No presenta ambigüedades.
- Sigue habiendo dificultades para resolver la tarea de disminuir el número de símbolos necesarios para representar cada número. pues para representar 9.999.999 necesitamos 63 símbolos.
- No permite comparar dos números de forma satisfactoria.
- Permite realizar las tareas de **sumar**, **restar**, **multiplicar** y **dividir** para números pequeños de "forma razonablemente económica". Pero si los números aumentan la técnica es muy poco económica.
- Presenta la ventaja de no tener que recurrir a utilizar las tablas de sumar y de multiplicar.

Una dirección de evolución de **la técnica de representación aditiva**

Objetivo: Dar una respuesta **más eficaz y económica** a la tarea de disminuir el número de símbolos necesarios para representar cada número.

Variación aportada por **el sistema romano**.

Símbolos: I, V, X, L, C, D y M

10^0, 5×10^0, 10^1, 5×10^1, 10^2, 5×10^2 y 10^3

Designan unidades sucesivas que son alternativamente el quíntuplo o el doble de la anterior.

Otra variación dentro del sistema romano

Todo símbolo colocado a la izquierda de un símbolo de valor inmediatamente superior, indica que el menor debe restarse del mayor:

9 $\rightarrow$ IX; 4 $\rightarrow$ IV; 40 $\rightarrow$ XL; 90 $\rightarrow$ XC;
400 $\rightarrow$ CD; 900 $\rightarrow$ CM.

Estas mejoras, para dar respuesta a la tarea de disminuir el número de símbolos necesarios para representar cada número, hacen que la técnica sea ***menos económica** y **menos eficaz*** para realizar **operaciones aritméticas**, incluso con números pequeños.

CONCLUSIÓN

EL OBJETIVO PRINCIPAL O "RAZÓN DE SER" de los sistemas de numeración *aditivos* es la *representación de los números naturales* sin ambigüedades y con una pequeña cantidad de símbolos y no la simplificación de los algoritmos de las operaciones aritméticas.

El Sistema Híbrido

- Constituye un sistema ***aditivo-multiplicativo***, semejante al sistema *chino* o a nuestro *sistema oral*.
- Utiliza los símbolos para las potencias de la base:

$$I \rightarrow 10^0;\quad A \rightarrow 10^1;\quad B \rightarrow 10^2;\quad C \rightarrow 10^3;$$
$$D \rightarrow 10^4;\quad E \rightarrow 10^5;\quad F \rightarrow 10^6; \ldots$$

- Utiliza un nuevo tipo de símbolos que hacen la función de **multiplicadores** de dichas potencias :(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9).
- Mejora la solución a la tarea de disminuir el número de símbolos necesarios para representar cada número pues evita la repetición de símbolos de las potencias de la base.
- La *representación de los números se simplifica*, aunque todavía no podemos escribir todos los números naturales con un número finito de símbolos, fijados de antemano.
- El **algoritmo de comparación** es **más económico** que el del SN aditivo, pues **no** es **necesario contar** cuántas veces se repite cada símbolo.
- Las **operaciones aritméticas** pueden realizarse de forma ***más sencilla y económica*** que con el SN aditivo, sobre todo, con **números "grandes**".
- Sin embargo, hay que **utilizar la tabla de sumar de los coeficientes y las dos tablas de multiplicar** (la de las potencias de la base y la de los coeficientes).

Sistema chino

- Tiene símbolos que representan a las potencias de la base y a sus multiplicadores.
- La base es 10. Agrupa de 10 en 10.
- No hay ambigüedad de escrituras.
- La posición es importante. No tiene cero como cifra.
- Utiliza las operaciones de adición y multiplicación.
- No se puede escribir cualquier número.

Características de los SN posicionales

- Dan una respuesta definitiva a (2), y permite resolver las tareas de comparar y calcular.
- Prescinden de los símbolos de las potencias de la base ya que éstas vienen indicadas por las distintas posiciones que ocupan los respectivos coeficientes.
- Permiten escribir ***todos*** los números naturales con un ***número finito de símbolos*** (fijados de antemano).
- Los únicos símbolos que utilizan son los coeficientes o multiplicadores de las potencias de la base.

Características de los SN posicionales primitivos

- Utilizan símbolos para los coeficientes que intentan **evocar visualmente** lo que representan.
  Ejemplos: **9 → I ••••   ,   87 → •••• I••**
  57 → 〈〈〈〈〈 ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ **,   247 →** ∨ ∨ ∨ ∨   ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨
- No permiten resolver la tarea "*¿Cómo expresar los números naturales que necesitamos mediante símbolos de manera que* ***no haya ninguna ambigüedad***?
  III puede ser "15" ó "110" ó "205".
  ∨ ∨ **puede ser "2" ó "61".**

El sistema "posicional completo".

- Da una respuesta definitiva a la tarea de disminuir el número de símbolos necesarios para representar cada número.
- Prescinde de los símbolos de las potencias de la base ya que éstas vienen indicadas por las distintas posiciones que ocupan los respectivos coeficientes.
- Permite escribir todos los números con un número finito de símbolos (fijados de antemano).
- Los únicos símbolos son los coeficientes o multiplicadores de las potencias de la base. Las potencias de la base vienen indicadas por las distintas posiciones.
- Utiliza símbolos convencionales diferentes para cada uno de los coeficientes (los números menores que la base).
- Añade un nuevo símbolo: el ***cero***, para indicar que en una determinada posición hay **ausencia de elementos**.
- La base es diez y dispone de los símbolos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 para los coeficientes y del símbolo 0 para indicar ausencia de elementos en una determinada posición.
- No presenta ambigüedades.
- Permite **comparar** dos números de una forma muy eficaz.
- Proporciona una respuesta más **económica** y **eficaz** a las tareas de cálculo.

Cuestión inicial q: *¿Cómo expresar los números naturales mediante una representación escrita que sea un instrumento útil para el desarrollo de la aritmética elemental?*

ANEXO II

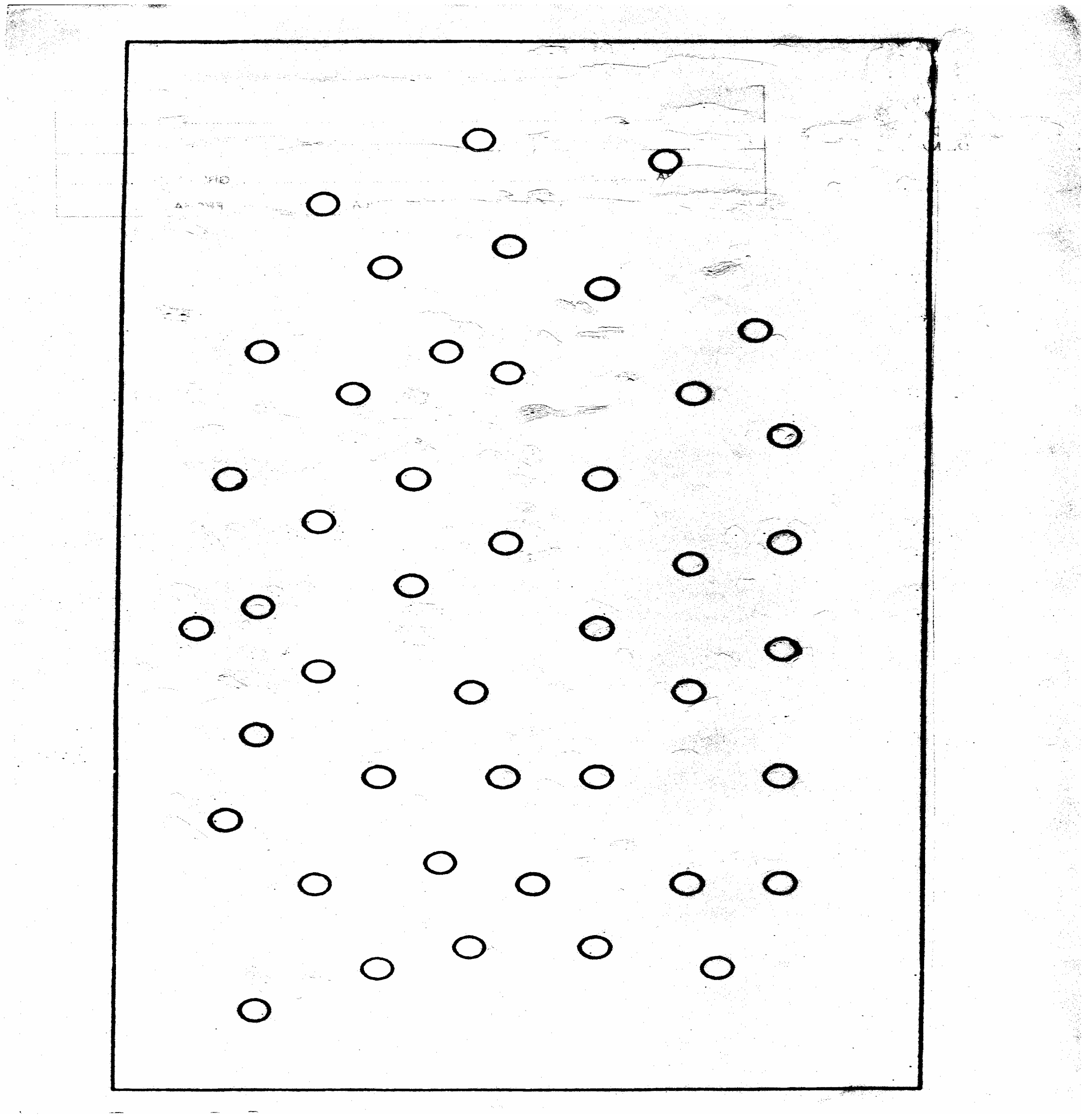
Materiales entregados a los alumnos de 3º de la ESO

Cuestión inicial:

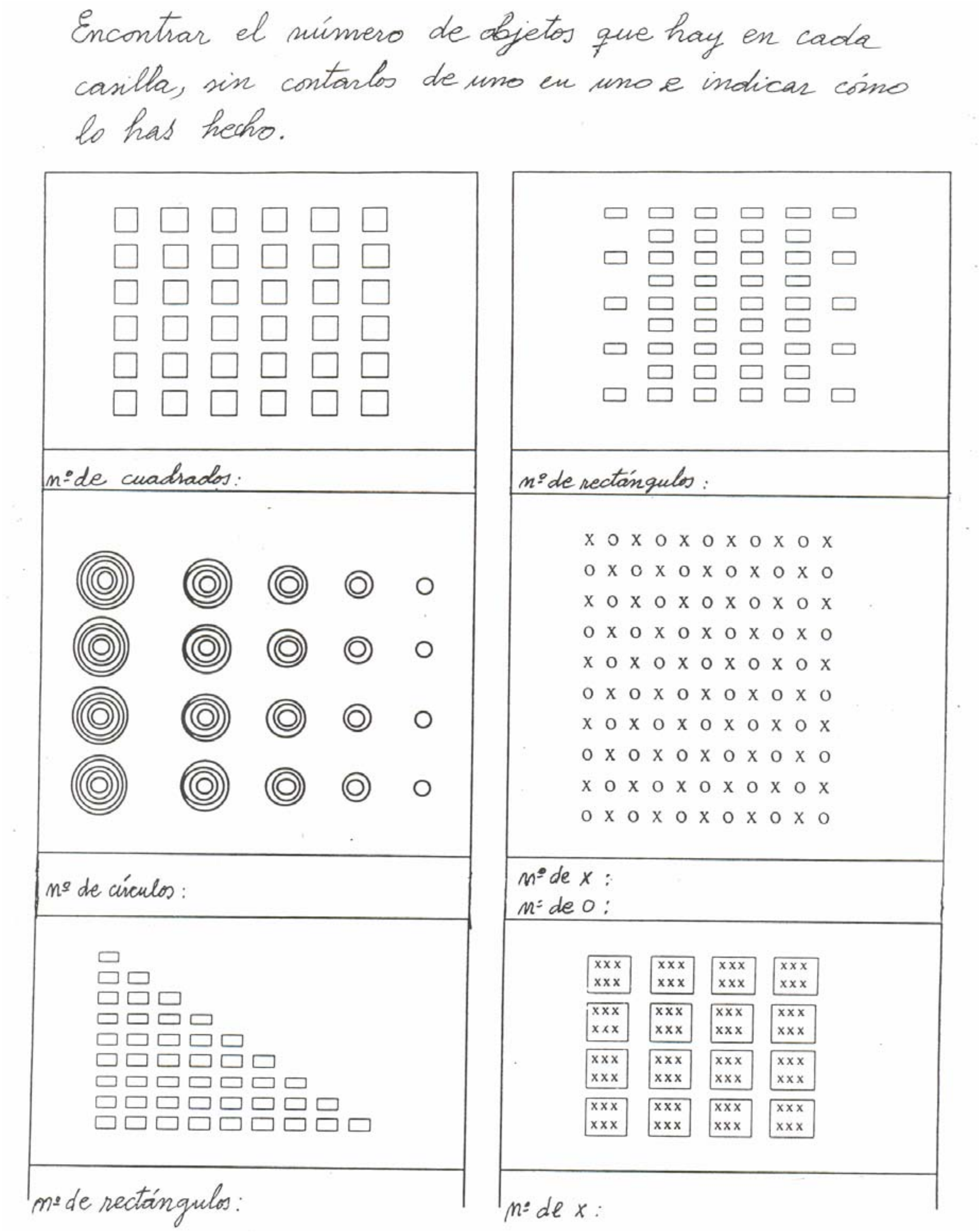
"Tenemos un emisor y un receptor. El emisor dispone de la siguiente colección de platos que no puede ver el receptor y debe mandar un mensaje escrito al receptor para que le traiga *exactamente las cucharas necesarias para poner una en cada plato.*"

Hay múltiples soluciones a este problema. Nuestro objetivo general es estudiar las diferentes soluciones, analizar sus características y sus limitaciones.

Para ello empezaremos buscando por grupos al menos cuatro maneras distintas de emitir dicho mensaje.



Entregado en la 1ª Sesión como tarea para casa


Encontrar el número de objetos que hay en cada casilla, sin contarlos de uno en uno e indicar cómo lo has hecho.

nº de cuadrados:

nº de rectángulos:

nº de círculos:

nº de x :

nº de o :

nº de rectángulos:

nº de x :

EL SISTEMA ROMANO

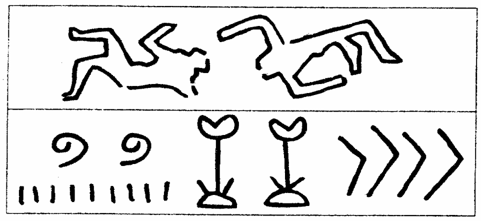
1. Escribir los números 143, 1001, 1998 y 2004 en el sistema romano.
2. Sumar los cuatro números anteriores en el Sistema Romano.
3. Destacar tres diferencias entre nuestro SN y el Sistema Romano.

Entregado en la 2ª Sesión

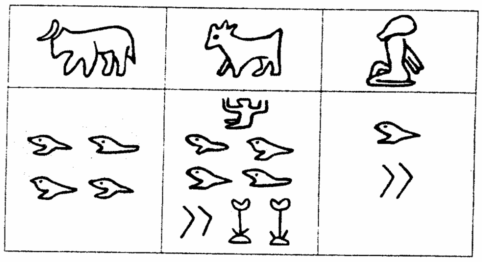
La Numeración egipcia

En el antiguo Egipto, algunos faraones hacían construir templos en honor de sus dioses. Hacían decorar los muros con esculturas y pinturas que ilustraban los episodios más gloriosos de su vida o con escenas de la vida cotidiana.
Los tres documentos siguientes han sido descubiertos en dos de estos templos:

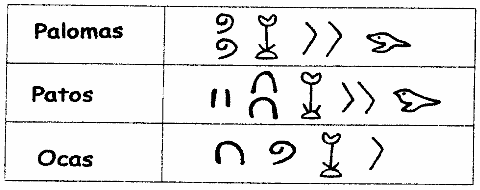
El primero indica el número de enemigos masacrados en una batalla ganada por el faraón de HIERAKONPOLIS:
42 209 hombres.



El segundo indica el número de hombres, de cabras y de bueyes capturados en esa batalla:
120 000 hombres
1 422 000 cabras
400 000 bueyes.



El tercero indica la cantidad de animales de un faraón de Memphis:
121 200 palomas
121 022 patos
11 110 ocas



¿Qué reglas utilizaban los egipcios para escribir los números?

En este documento aparecen varios números escritos en el SN egipcio y, también, en el SN decimal posicional completo.

¿Cuál es la manera egipcia de escribir los números?

(a) ¿Qué *conjunto de símbolos* se utilizan? ¿Tienen todos el mismo papel?
(b) ¿Qué número natural representa *cada símbolo*?
(c) ¿Cómo se puede saber si un grupo de símbolos representa o no un número (es decir, cómo saber si un número está bien o mal escrito)? ¿Qué reglas de escritura hay? ¿Cómo se obtiene el valor de un número?
(d) ¿Un mismo grupo de símbolos puede representar dos números diferentes?
(e) Si queremos escribir números muy grandes, ¿necesitaremos muchos símbolos?
(f) Si un número es mayor que otro, ¿se necesitarán más símbolos para escribirlo?

Entregado al final de la 3ª sesión

Tarea exploratoria a_1

Designa mediante el SN egipcio el cardinal de cada una de las siguientes colecciones:

1ª Colección

⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗
⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗
⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗⊗

2ª Colección

♦ ♦
♦ ♦

3ª Colección

****
****
****
****
****

Tarea exploratoria a_2

Suponiendo que los símbolos, más fáciles de utilizar, que hemos elegido para representar los números en el sistema egipcio son:

$1 \rightarrow$ I $10^1 \rightarrow$ A $10^2 \rightarrow$ B $10^3 \rightarrow$ C $10^4 \rightarrow$ D $10^5 \rightarrow$ E   y $10^6 \rightarrow$ F

Construye una colección que tenga: a) AAAIIIIIII elementos,

b) AAAAAAAAAIIIIII elementos.

Tarea exploratoria a_3

Escribe en el sistema egipcio los números: 8, 51, 99, 103, 320, 895, 999, 2874, 10001, 8000100 y 25384295.

Tarea exploratoria a_4

Ordena las siguientes series de números (*sin traducirlos a su expresión habitual*) y explica la técnica que has utilizado:

- E, CAAIIII, FFDCCAII, AAAAIIIIII, DCAI, DDDDDCCCCCCBBBAAAAIIIII, BBBBBBBBBAAAAAAAAAIIIIIIII,
- ECC, DCAAII, FBI, AAAAAAAA, AAAAAAAIIIIII, BBBBBBBAAAAAAI, DBBBBBBBBBIIIIIIII, ECBBBBBBBBAAAAAAAIIIIIIIII, DDI,

Tarea exploratoria a_5: Realizar las siguientes operaciones dentro del SN aditivo, explicar, en cada caso, la técnica utilizada, comprobar posteriormente el resultado con el SN habitual:

¬ Calcular CCCBBBBBBBBBAAAAAAIIIIIIII + CCCCCCCAAAAAAAII

¬ Calcular BBBBAAAIIIIIII – BAAAAAAAAAII

¬ Calcular AIIII × IIIIII

¬ Dividir AAAAIIIII entre IIIII

¬ Hallar los divisores comunes de AAIIII y AAA

¬ Hallar los múltiplos comunes de AAIIII y AAA

Entregado en la 4ª sesión como tarea para casa.

Trabajo en los SN aditivos

Tarea a_6 : Realizar las siguientes operaciones dentro del SN aditivo, explicar, en cada caso, la técnica utilizada, y comprobar posteriormente el resultado con el SN habitual:

¬ Calcular CAIIIIII – BBBBAAAIIIIIIII

¬ Calcular AAAAIIIIIII × AAIII

¬ Dividir BBBBBAAAIIIIIII entre AAIIII

Tarea a_7 : El profesor propone empezar a realizar las mismas actividades que se han realizado con el SN egipcio, pero con *el sistema de numeración romano*.

Preguntas sobre los SN aditivos

a) ¿Se pueden escribir todos los números naturales mediante el SN aditivo? ¿Qué tiene de particular el sistema romano? ¿Mejora, en algún aspecto, la *eficacia* de los restantes sistemas aditivos?
b) ¿Se pueden realizar siempre las distintas operaciones aritméticas? ¿Con qué números el cálculo es casi impracticable? (*alcance* o *dominio de validez*) ¿Las peculiaridades de sistema romano lo hacen más o menos *eficaz* para el cálculo?
c) ¿En el SN aditivo se necesitan tablas de sumar y multiplicar? ¿Por qué? ¿Cómo son estas tablas?
d) ¿A partir de qué números o de qué magnitud de números las operaciones son muy difíciles de realizar sin acumular errores? (*fiabilidad*)
e) ¿A partir de qué números o de qué magnitud de números las operaciones son demasiado tediosas y lentas? (*economía)*
f) ¿Cómo cambia la representación escrita de un número cuando éste se multiplica por una potencia de la base?
g) ¿Qué cambios habría que introducir en la técnica de representación aditiva para mejorar los algoritmos de multiplicación y división?

Entregado en la 5ª Sesión

Ejercicios resueltos de multiplicación y de división en el SN egipcio.

Multiplicar 37 × 245 en un sistema "aditivo"

Se procede mediante sucesivas duplicaciones de uno de los dos términos (aquí de 245) del siguiente modo:

→ I	BB AAAA IIIII	BB AAAA IIIII ←
I I	BB AAAA A ~~IIIII~~ BB AAAA ~~IIIII~~	BB AAAA A BB AAAA
→ II II	BB AAAA BB B ~~AAAA A~~ BB ~~AAAA A~~ CC XXXX	BBBB B AAAA ← BBBB AAAA
IIII IIII	BBBB AAA B C ~~BBBBB~~ ~~AAAAA~~ ~~BBBBB~~ ~~AAAAA~~ BBBB AAA	BBBB B AAA C BBBB AAA
A ~~IIIII~~ III ~~IIIII~~ III	BBBB B CC ~~BBBBB~~ ~~AAAAA~~ ~~BBBBB~~ ~~AAAAA~~ C BBBB AA	CCC BBBBB AA BBBB
→ A A ~~IIIII~~ I A ~~IIIII~~ I	CCC BBBB AA ~~BBBBB~~ CCC C ~~BBBBB~~ BBBB AA	CCC BBBB AA ← CCCC BBBB AA

Ayudándonos de nuestro sistema de numeración posicional decimal, podemos representar de forma mucho más sencilla los cálculos anteriores:

→ 1	245 ←
2	490
→ 4	980 ←
8	1960
16	3920
→ 32	7840 ←

Para calcular 37 veces 245, se hacen sucesivas duplicaciones de 245 y se detiene el proceso en 32 veces 245, ya que la siguiente duplicación proporcionaría 64 veces 245 que supera las 37 veces 245 que se pretende calcular. Para completar desde las 32 veces 245 hasta las 37 veces 245, se buscan en la columna de la izquierda los números que sumados a 32 den 37 (son el 4 y el 1)[1] y se señalan éstos y el 32 y sus correspondientes en la columna de la derecha (o sea 980, 245 y 7480). Por último se suman los números señalados en la columna de la derecha y se obtiene el producto:

7840	CCC CCCC	BBBB BBBB	AA AA	
980		BBBBB BBBB	AAAA AAAA	
245		BB	AAAA	IIIII
9065	CCCCC CCCC		AAA AAA	III II

Dividir 1475 entre 43 en un sistema "aditivo"

Se hacen duplicaciones de 43 hasta acercarnos lo más posible a 1475:

I	AAAA III	AAAA III
→ I I	AAAA III AAAA III	AAAA III ← AAAA III
II II	~~AAAAA~~ AAA ~~IIII~~ I ~~AAAAA~~ AAA ~~IIII~~ I B A	B AAAA II AAA
IIII IIII	B B ~~AAAAA~~ AA II B ~~AAAAA~~ AA II	BBB AAAA IIII
A IIIIII	BBB AAAA IIII BBB AAAA IIII	BBB AAAA IIII BBB AAAA IIII
→ AAA II	~~BBBBB~~ B ~~AAAAA~~ AAA ~~IIII~~ III ~~BBBBB~~ B ~~AAAAA~~ AAA ~~IIII~~ III C B A	← C BBB AAAA III AAA III

Ayudándonos, de nuevo, de nuestro sistema de numeración, podemos representar de forma mucho más sencilla los cálculos anteriores:

1	43
→ 2	86 ←
4	172
8	344
16	688
→ 32	1376 ←

[1] Puede demostrarse fácilmente que cualquier número natural es suma de potencias de 2.

Nos detenemos en 1376, en la columna de la derecha, porque la duplicación siguiente daría un número superior al dividendo 1475. A continuación se buscan en la columna de la derecha los números que sumados a 1376 se acerquen lo más posible a 1475. Obtenemos que es el "86": 1376 + 86 =1462

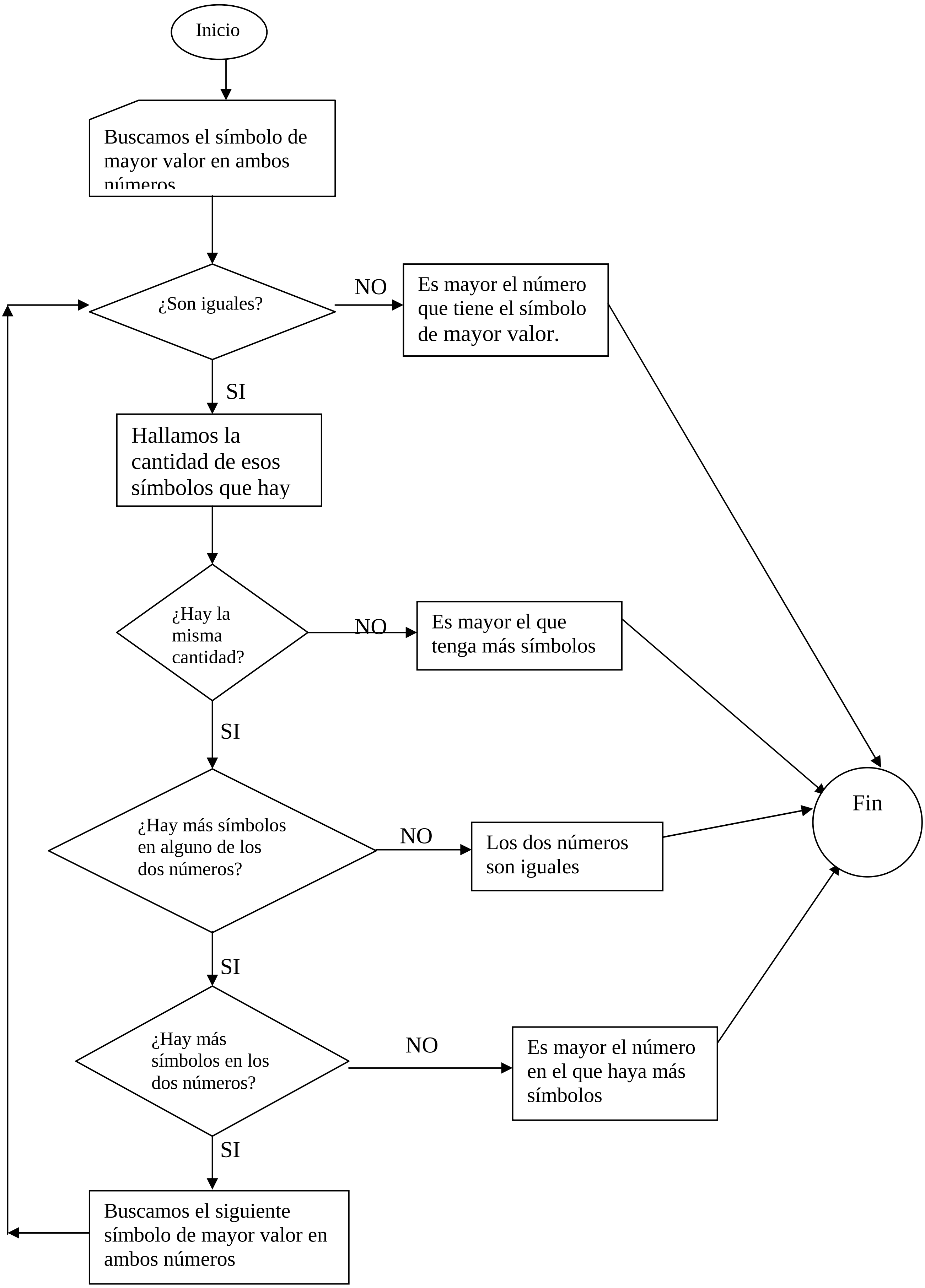
1376 C BBB AAAA III
AAA III

86 AAAA III
AAAA III

1462 C BBBB AAA II
AAA

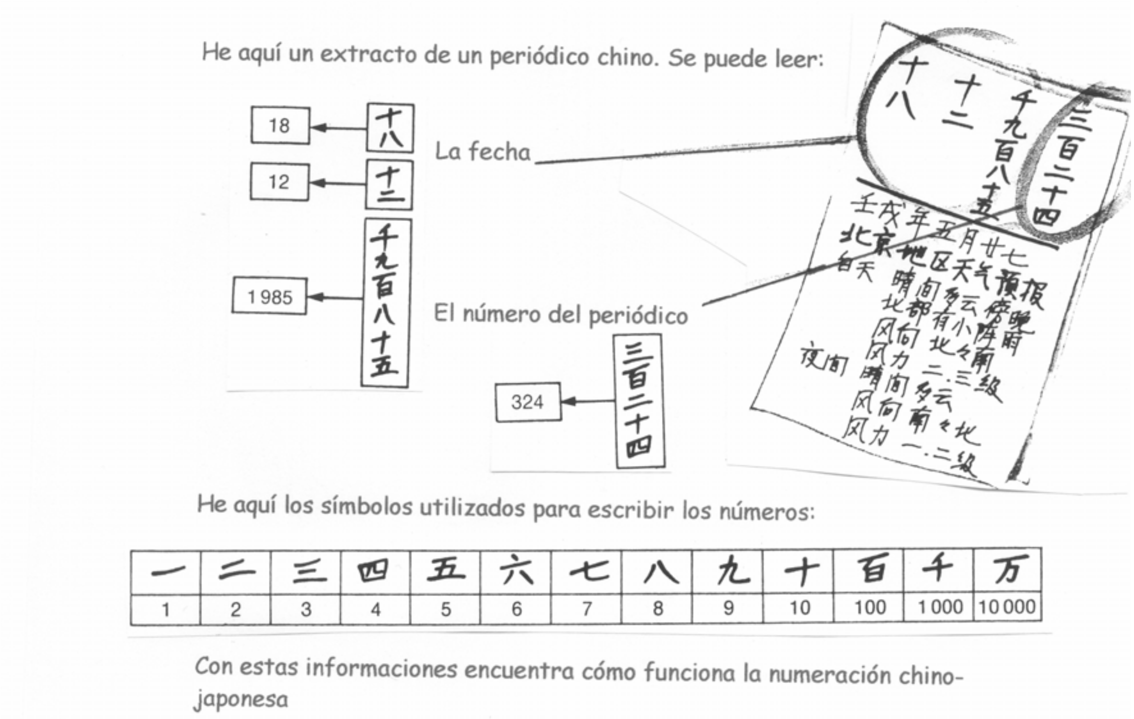
Como a "1462" le faltan "13" para alcanzar "1475", el *resto de la división* es "13". Y como los números que acompañan a "1376" y a "86" son, respectivamente, "32" y "2", resulta que el *cociente de la división* es "34".

Comparación de dos números escritos en un sistema "ADITIVO"



Entregado en la 6ª Sesión

<u>Tarea para gestionar el primer encuentro con el SN chino</u>:
En el siguiente documento aparecen unos cuantos números escritos en el *sistema de numeración chino* y, también, en el sistema de numeración decimal.



Se proponen las siguientes cuestiones:

a) ¿Qué número natural representa cada uno de los símbolos que aparecen en el sistema chino?
b) Cambia los símbolos del sistema chino por otros más fáciles de dibujar y que cumplan las mismas funciones.
c) Explica el funcionamiento de cada uno de los símbolos que aparecen en el sistema chino.
d) ¿Qué operaciones aritméticas se corresponden con la *yuxtaposición o adjunción* de los símbolos en el sistema chino?
e) ¿Qué papel juega la *posición* de los símbolos dentro del grupo de símbolos que representa a un número en el sistema chino?
f) ¿Existe algún símbolo en el sistema chino para representar al número *cero*?
g) ¿Qué cambios aparecen el SN chino en relación con el SN egipcio?

Entregado en la 7ª Sesión para realizar en casa

Trabajo exploratorio en el sistema híbrido

Tarea exploratoria h_1:
Designa mediante el SN híbrido el cardinal de cada una de las siguientes colecciones:
Colección

♦♦♦♦♦♦   ♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦   ♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦
♦♦
♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦   ♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦   ♦♦♦♦♦♦♦♦♦
♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦   ♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦   ♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦

Tarea exploratoria h_2:
Suponiendo que los símbolos, más fáciles de utilizar, que hemos elegido para representar los números en el sistema chino son:

$$\mathrm{I} \to 10^0;\quad \mathrm{A} \to 10^1;\quad \mathrm{B} \to 10^2;\quad \mathrm{C} \to 10^3;\quad \mathrm{D} \to 10^4;\quad \mathrm{E} \to 10^5;\quad \mathrm{F} \to 10^6; \ldots$$

y como nuevos símbolos que harán la función de *multiplicadores* de dichas potencias 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9[2].

Construye una colección con 9A 6 elementos, etc.

Tarea exploratoria h_3:
Escribe en el sistema chino los números: 8, 99, 103, 999, 10001, 8000100 y 25384295.

Tarea exploratoria h_4:
Ordena las siguientes series de números (*sin traducirlos a su expresión habitual*) y explica la técnica que has utilizado:

E, C 2A 4, 2F D 2C A 2, 4A 6, D C A I, 5D 6C 3B 4A 5, 9B 9A 8.
E 2C, D C 2A 2, F B I, 8A, 7A 6, 7B 6A I, D 9B 8, E C 8B 7A 9, 2D I.

Tarea exploratoria h_5:
Realizar las siguientes operaciones dentro del SN híbrido, explicar la técnica utilizada en cada caso y comprobar posteriormente el resultado con el SN habitual:

- Calcular 3C 9B 6A 8 + 7C 7A 2
- Calcular 2D 9B 3A I − 8C 9B 5A 3
- Calcular 4A 7 × 9A 2
- Dividir 2C 3B 4 entre 7A 9
- Hallar los divisores comunes de 2A 4 y 3A
- Hallar los múltiplos comunes de 2A 4 y 3A

[2] El número 1 no se utiliza como multiplicador ya que es innecesario.

Entregado y corregido en la 8ª Sesión

Trabajo en el Sistema de Numeración Híbrido

- **Ordenar 5F 9D 7C 8A 9 y 5F 9D 7C 9A 8.**
- **Diseñar un algoritmo que permita comparar dos números cualesquiera escritos en el SN híbrido.**
- **Calcular F A I – 3E C B.**
- **Calcular 3C 7B × D 3A.**
- **Dividir 2E 3D 3C 5B I entre 2C 5A 7**

Preguntas sobre el Sistema de Numeración Híbrido

a) ¿Se pueden escribir todos los números naturales mediante el sistema híbrido?
b) ¿Se pueden realizar siempre todas las operaciones aritméticas? ¿Cuál es la magnitud de los números para los que el cálculo es casi impracticable? (*alcance* o *dominio de validez*)
c) ¿En SN híbrido se necesitan tablas de sumar y multiplicar? ¿Por qué? ¿Cómo son estas tablas?
d) ¿A partir de qué magnitud de números las operaciones son muy difíciles de realizar sin acumular errores? (*fiabilidad*)
e) ¿A partir de qué magnitud de números las operaciones se pueden realizar rápidamente? (*economía)*
f) ¿Cómo cambia la representación escrita de un número cuando éste se multiplica por una potencia de la base?
g) Cuando nosotros utilizamos la escritura "*novecientos cuarenta y cinco mil doscientos ochenta y tres*" para designar el número 945283 ¿qué tipo de sistema de sistema de numeración estamos empleando? Analiza las características de dicho sistema.
h) ¿Qué cambios habría que introducir en la técnica de representación híbrida para mejorar las posibles técnicas de multiplicación y división?

Multiplicar 2745 × 389 en un sistema “híbrido”

Para multiplicar 2C 7B 4A 5 por 3B 8A 9, se deberán utilizar dos tablas de multiplicar: la de los coeficientes y la de las potencias de la base.

Para efectuar el producto, se debe multiplicar cada componente del primer número, 3B 8A 9, por cada componente del segundo, 2C 7B 4A 5. Se empieza multiplicando 9 por 2C, por 7B, por 4A y por 5 y se suman los cuatro resultados obtenidos. A continuación se multiplica 8A por 2C, por 7B, por 4A y por 5 y así sucesivamente. Para obtener el resultado final se suman las cantidades obtenidas en las tres multiplicaciones parciales.

	2C	7B	4A	5
×		3B	8A	9

$\longrightarrow$

	2C	7B	4A	5
×				9
			4A	5
		3B	6A	
	6C	3B		
D	8C			
2D	4C	7B		5

$\longrightarrow$

	2C	7B	4A	5
×			8A	
			4B	
		3C	2B	
	5D	6C		
E	6D			
2E	D	9C	6B	

$\longrightarrow$

	2C	7B	4A	5
×		3B		
			C	5B
		D	2C	
	2E	D		
	6E			
	8E	2D	3C	5B

A continuación se suman los tres resultados parciales:

		2D	4C	7B	5
	2E	D	9C	6B	
	8E	2D	3C	5B	
F		6D	7C	8B	5

Tabla de multiplicar de los coeficientes:

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	A	A 2	A 4	A 6	A 8
3	3	6	9	A 2	A 5	A 8	2A 1	2A 4	2A 7
4	4	8	A 2	A 6	2A	2A 4	2A 8	3A 2	3A 6
5	5	A	A 5	2A	2A 5	3A	3A 5	4A	4A 5
6	6	A 2	A 8	2A 4	3A	3A 6	4A 2	4A 8	5A 4
7	7	A 4	2A 1	2A 8	3A 5	4A 2	4A 9	5A 6	6A 3
8	8	A 6	2A 4	3A 2	4A	4A 8	5A 6	6A 4	7A 2
9	9	A 8	2A 7	3A 6	4A 5	5A 4	6A 3	7A 2	8A 1

Tabla de multiplicar de las potencias de la base:

×	A	B	C	D...
A	B	C	D	E
B	C	D	E	F
C	D	E	F	...
D	E	F	...	...

Tabla de multiplicar en el SN Chino realizada por un alumno de 3º de ESO

×	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
一	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
二	二	四	六	八	十	十二	十四	十六	十八	二十
三	三	六	九	十二	十五	十八	二十一	二十四	二十七	三十
四	四	八	十二	十六	二十	二十四	二十八	三十二	三十六	四十
五	五	十	十五	二十	二十五	三十	三十五	四十	四十五	五十
六	六	十二	十八	二十四	三十	三十六	四十二	四十八	五十四	六十
七	七	十四	二十一	二十八	三十五	四十二	四十九	五十六	六十三	七十
八	八	十六	二十四	三十二	四十	四十八	五十六	六十四	七十二	八十
九	九	十八	二十七	三十六	四十五	五十四	六十三	七十二	八十一	九十
十	十	二十	三十	四十	五十	六十	七十	八十	九十	百

Dividir 3589 entre 74 en un sistema "híbrido"

3C	5B	8A	9	7A	4
2C	9B	6A		4A	8
	6B	2A	9		
	5B	9A	2		
		3A	7		

Se busca en la tabla de multiplicar de las potencias de la base cuál es la potencia de la base que multiplicada por A da C y resulta ser B, B × A = C, pero como el coeficiente de A es 7, B × 7A = 7C, que es mayor que 3C. Debe tomarse A que es la potencia de la base inmediatamente inferior. A continuación, se utiliza la tabla de los coeficientes para ver qué coeficiente le corresponde a A, y vemos que debe tomarse 4A.

De este modo, 4A × (7A 4) = 2C 9B 6A, que restado de 3C 5B 8A 9, proporciona el dividendo parcial 6B 2A 9. Análogamente debemos buscar qué potencia de la base con su correspondiente coeficiente multiplicada por 7A 4 se acerca lo más posible a 6B 2A 9. Según las tablas de multiplicar el número buscado es el "8", por lo que: 8 × (7A 4) = 5B 9A 2 y restado de 6B 2A 9 da como resto 3A 7.

Resulta, en resumen, que el *cociente* es 4A 8 y el *resto* 3A 7, ya que

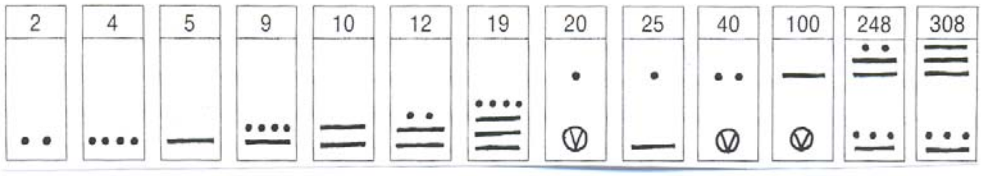
3C 5B 8A 9 = (7A 4) × (4A 8) + 3A 7

Entregado en la 8ª Sesión como tarea para casa

La numeración de los Mayas

Originarios de América Central, los mayas se interesaron mucho por la astronomía. También tuvieron necesidad de escribir grandes números. Sin embargo, no utilizaban nada más que tres símbolos.

A continuación presentamos varios números escritos en el sistema maya:



1.- Encuentra como funciona el sistema de numeración maya.

2.- Intenta explicar porqué este sistema permite escribir números mucho mayores que el sistema egipcio

Se proponen las siguientes preguntas:

a) ¿Qué número natural representa cada uno de los símbolos que aparecen en el sistema maya?
b) Explica el funcionamiento de cada uno de los símbolos que aparecen en el sistema maya.
c) ¿Es posible que una misma escritura pueda representar dos números distintos? Si es así, pon un ejemplo e indica cómo podría evitarse dicho problema de ambigüedad.
d) ¿Qué operaciones aritméticas se corresponden con la *yuxtaposición o adjunción* de los símbolos en el sistema maya?
e) ¿Qué papel juega la *posición* de los símbolos dentro del grupo de símbolos que representa a un número en el sistema maya?
f) ¿ En el sistema maya se utiliza el *cero* como símbolo? Si es así, ¿qué uso se le da?
g) ¿Qué cambios aparecen el SN maya en relación con los SN egipcio y chino?
h) Escribe en el sistema maya los números 205, 999, 100000 y 25384 987.

Entregado en la 8ª Sesión para que se vayan familiarizando con las distintas técnicas de cálculo en el SN posicional completo

Algunas técnicas algorítmicas de sustracción en el Sistema posicional completo

Se pueden utilizar las siguientes técnicas de sustracción:

1. **Técnica de "pedir prestado"**.

Se colocan los dos números uno encima del otro alineándoles a la derecha y se empieza restar de derecha a izquierda, a las unidades de primer orden las unidades de primer orden, a las unidades de 2º orden las de 2º orden, y así sucesivamente. Con esta técnica el apartado a) se convierte en cinco restas independientes, una por cada posición. Esto sucede cuando las cifras del minuendo son siempre mayores que las correspondientes del sustraendo.
Cuando esto no es así, como es en el caso b) entonces una técnica consiste en transformar la escritura del minuendo hasta conseguir que cada uno de los valores que aparecen en cada posición sea mayor que cada una de las cifras correspondientes que aparecen en el sustraendo:
Por ejemplo: Si queremos reducir 2475 – 1879 lo que haremos será transformar la escritura de 2475 de modo que todos los valores que aparezcan en cada una de las posiciones sean mayores que las correspondientes a 1879. Entonces pasaremos a escribir 2475 como 1 (13) (16) (15), de este modo tendremos 15 unidades de primer orden, 16 de 2º orden, 13 de 3º orden y 1 de 4º orden. Lo que hemos hecho es pasar una unidad de 2º orden a unidades de primer orden, de este modo tenemos 10+5 unidades de primer oren y nos quedan 6 unidades de 2º orden, análogamente pasamos una unidad de 3º orden a unidades de 2º orden y así tenemos 10+6 unidades de 2º orden, e igualmente pasamos una unidad de 4º orden a unidades de 3º orden, con lo que tenemos 10+3 unidades de 3º orden, y nos queda 1 unidad de 4º orden. Ahora ya podemos realizar la sustracción posición a posición.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 13 & 16 & 15 \\ 1 & 8 & 7 & 9 \\ \hline 0 & 5 & 9 & 6 \end{array}$$

2. **Técnica clásica o de Fibonacci.**

Esta técnica consiste en colocar igualmente minuendo y sustraendo uno encima del otro, alineándolos a la derecha y cuando existe alguna cifra en el minuendo menor que la correspondiente del sustraendo se suma 10 unidades de ese orden al minuendo y a continuación se hace la resta y después se suma una unidad del orden siguiente al sustraendo, de este modo si sumamos el mismo número al minuendo y al sustraendo la diferencia no varía (pues 10 unidades de un orden equivalen a 1 unidad del orden siguiente). Por ejemplo:

$$\begin{array}{cccc} 2 & {}_{1}4 & {}_{1}7 & {}_{1}5 \\ 1_{+1} & 8_{+1} & 7_{+1} & 9 \\ \hline 0 & 5 & 9 & 6 \end{array}$$

3. **Técnica por compensación.**

Esta técnica consiste en colocar igualmente minuendo y sustraendo uno encima del otro, alineándolos a la derecha y cuando existe alguna cifra en el minuendo menor que la correspondiente del sustraendo, se transforma el minuendo en otro número donde la primera cifra de la izquierda queda igual y todas las demás cifras pasar a ser nueve, de este modo lo que se hace es sumar un número al minuendo y para que la diferencia no varíe debemos también sumar ese mismo número al sustraendo. Por ejemplo:

$$\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 7 & 5 \\ 1 & 8 & 7 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{+524} \\ \xrightarrow{+524} \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 2 & 9 & 9 & 9 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 5 & 9 & 6 \end{array}$$

4. **Técnica de "adición con huecos".**

Esta técnica consiste en colocar igualmente minuendo y sustraendo uno encima del otro, alineándolos a la derecha y ahora se trata de buscar qué número tengo que sumar al sustraendo para obtener el minuendo. Por ejemplo:

$$\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 7 & 5 \\ 1^{1} & 8^{1} & 7^{1} & 9 \\ \hline 0 & 5 & 9 & 6 \end{array}$$

Se procede de derecha a izquierda posición a posición del siguiente modo: Se calcula qué número hay que añadir a 9 para obtener 15, (9 para llegar a 15, 6 y me llevo 1), luego lo que hay que añadir a 7+1 para obtener 17, (de 8 para ir a 17, 9 y me llevo 1), a continuación lo que hay que añadir a 8+1 para obtener 14, (de 9 para llegar a 14, 5 y me llevo 1) y por fin lo que hay que añadir a 1+1 para obtener 2.

Algunas técnicas algorítmicas de la multiplicación en el Sistema posicional

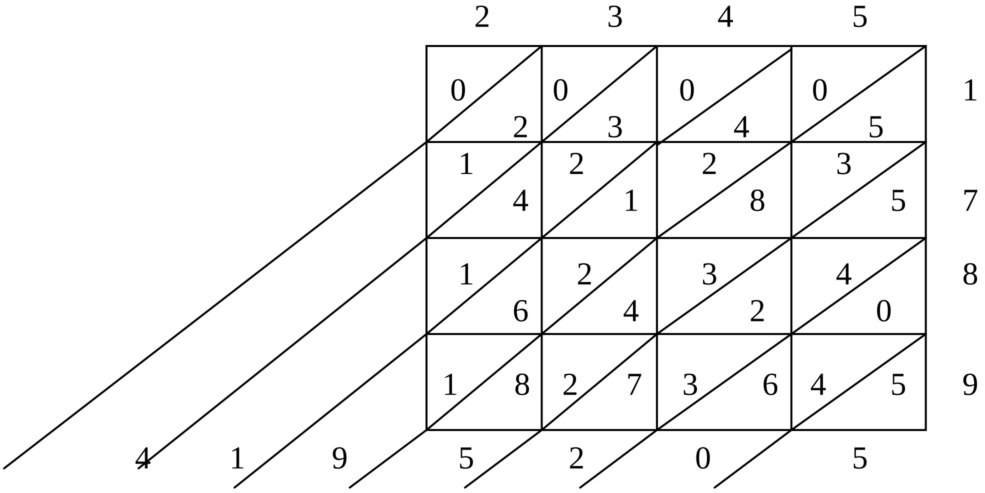
1. La técnica de doble entrada.

Colocamos los números que intervienen en el cálculo como si fueran las dimensiones de un rectángulo, y para ello hacemos la descomposición canónica de cada número y realizamos la reducción de las escrituras por trozos, luego sumamos lo obtenido en cada una de las columnas y por último, sumamos los totales de cada columna. Por ejemplo:

2000	300	40	5	
2000000	300000	40000	5000	1000
1400000	210000	28000	3500	700
160000	24000	3200	400	80
18000	2700	360	45	9

3578000+536700+ 71560 + 8945 = 4195205

2. La técnica "per Gelosía"



3. La técnica clásica

			2	3	4	5
		×	1	7	8	9
		2	1	1	0	5
	1	8	7	6	0	
1	6	4	1	5		
2	3	4	5			
4	1	9	5	2	0	5

Algunas técnicas de la división en el sistema posicional

1. La técnica anglosajona. (Varios ejemplos)

Dividir 3589 entre 74 utilizando

	48
74	8
	40
74 × 40 = 2960	**3589**
	-2960
74 × 8 = 592	0629
	- 592
	037

El cociente es 48 y el resto 37, ya que
3584 = 74 × 48 +37 y 37< 74.

Dividir 960084 entre 562

562	
562 × 1	**1708**
562 × 7 = 3934	
562 × 8 = 4496	**960084**
	- 562000
	398084
	- 393400
	004684
	- 4496
	0188

O también

	1708
562	1 2
562 × 1	16 6
562 × 6 = 3372	
562 × 2 = 1124	**960084**
	- 562000
	398084
	- 337200
	060884
	56200
	004684
	3372
	1312
	1124
	0188

2.- Técnica de los múltiplos útiles.

Dividir 4837 entre 17

Primero se escriben los múltiplos de 17 siguientes:

17	34	51	68	85	102	119	136	153
170	340	510	680	850	1020	1190	1360	1530
1700	3400							

A continuación se procede del siguiente modo:

$$
\begin{array}{rr}
4837 & \\
-\underline{3400} & 200 \\
1437 & \\
-\underline{1360} & 80 \\
77 & \\
-\underline{68} & \underline{4} \\
9 & 284
\end{array}
$$

Luego el cociente es 284 y el resto 9

Explicar dicho algoritmo e indicar qué razones hay para tener en cuenta sólo los múltiplos de 17 que se han escrito antes y no otros. Aplicarlo a la división de 43257 entre 58.

Entregado en la 9ª Sesión como tarea para casa.

Tareas a realizar en el SN posicional completo

1.- Ordenar los números siguientes:
12300000450032100 9876, 12300000450032100 9879,

Explicar la técnica utilizada. Proponer una técnica en general que nos permita comparar dos números a partir de sus escrituras en el SN posicional completo.

2.- Calcular mediante tres técnicas distintas que se **explicarán y justificarán**:

a) 27 + 38 + 16 + 9 + 24 + 12 + 33,
b) 35073 + 38 + 2300045007 + 895000 + 5,

3.- Calcular mediante cuatro técnicas algorítmicas distintas que se **explicarán y justificarán**:

a) 87675 – 34564,
b) 3000121 – 1200123.

4.- Calcular mediante tres técnicas algorítmicas distintas que se **explicarán y justifícarán**:

a) 2345 × 789,
b) 2900150007 × 93500680.

5.- **Utilizar y justificar** cuatro técnicas distintas para hallar el cociente y el resto en los siguientes casos:

a) Dividir 81207 entre 75
b) Dividir 7300 897 entre 365

6.- a) Hacer una recopilación de los distintos criterios de divisibilidad e intentar traducir dichos criterios a las condiciones del SN aditivo y del SN híbrido.

b) Calcular los divisores comunes y los múltiplos comunes de 24 y 30, y de 372 y 222.

c) Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de 24 y 30, y de 372 y 222.

Preguntas sobre el SN posicional completo

- Calcular 3001005 – 2890719
- Calcular 630098 × 700400
- Dividir 74800358 entre 379
- Hallar el m.c.d. y el m.c.m. de (735 y 2970)

a) ¿Se pueden escribir todos los números naturales mediante el sistema posicional?
b) ¿Qué símbolos se utilizan en el SN posicional y de qué tipo son? ¿Cómo se representan las distintas potencias de la base del sistema? ¿Qué significa el que sea posicional?
c) ¿Se pueden realizar siempre las distintas operaciones? ¿Con qué números el cálculo es casi impracticable? (*alcance* o *dominio de validez*)
d) ¿En el SN posicional completo se necesitan tablas de sumar y multiplicar? ¿Por qué? ¿Cómo son estas tablas?
e) ¿Con qué técnicas las operaciones son muy difíciles de realizar sin acumular errores? (*fiabilidad*)
f) ¿Con qué técnicas las operaciones se pueden realizar rápidamente? (*economía)*
g) ¿Cómo cambia la representación escrita de un número cuando éste se multiplica por una potencia de la base?
h) ¿Qué cambios aparecen en el SN posicional completo con respecto a los SN aditivos (el egipcio y el romano), a los SN híbridos (el chino, el oral) y a los SN posicionales no completos o primitivos?

Entregado al comienzo de la 10ª Sesión

Resumen del estudio de la Numeración en 3º de ESO

Una **representación escrita** de los números naturales para que sea **eficaz** debe permitir, como mínimo:

(A) Que la escritura sea **unívoca** y cómoda. Pocos símbolos, **fácil memorizarlos** y que la **longitud de las escrituras haga fácil su lectura.**
(B) Que la **comparación** de los números a partir de sus escrituras sea **lo más fácil posible**.
(C) Que se puedan realizar **cálculos de forma rápida, sencilla y fiable**.

Tres tipos de Sistemas de Numeración.

(1) **Sistemas de numeración de tipo I** (“**aditivos**”).

Primero cifras para $1, n, n^2, n^3, n^4, n^5, \ldots$ donde n es la ***base del sistema de numeración***. *Ej: el sistema egipcio* : $1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, \ldots$

- En un segundo momento cifras para $1, a, n, an, n^2, an^2, n^3, an^3, n^4,\ldots$, y $a < n$ es un divisor privilegiado de n que recibe el nombre de ***base auxiliar del sistema***. *Ej*: el *sistema romano* : $1, 5, 10, 5 \times 10, 10^2, 5 \times 10^2, 10^3,\ldots$

(2) **Sistemas de numeración de tipo II (“híbridos”)**
Dos tipos de símbolos:

- Los que representan las distintas potencias de la base n, es decir, n^0, n, n^2, n^3, n^4, ...

- Los que representan a los **multiplicadores** de dichas potencias, o sea, para 2, 3, ..., $(n–1)$, (son los coeficientes).

Siempre se colocan encima o delante de la potencia a la que multiplican (aquí la posición es importante).

Ej: el *sistema chino-japonés* y nuestro *sistema decimal oral.*

(3) **Sistemas de numeración de tipo III (“de posición”).**

- Sólo cifras para representar los $n-1$ primeros números naturales: $1, 2, 3, \ldots, (n-1)$ (funcionan como coeficientes de las potencias de la base n).
- Cada una de las potencias n^i está representada por la posición i-ésima que ocupa un coeficiente dentro del grupo de símbolos que representa al número.

Ej: Sistemas maya y babilónico (primitivos con símbolos para 1 y *a, a divisor privilegiado de n y para el cero*.)
El sistema de numeración decimal escrito.

Un SN debe permitir expresar los números naturales mediante un conjunto **S** de símbolos, de tal manera que sean compatibles las condiciones siguientes:

(1) No haya ninguna ambigüedad.
(2) El cardinal del conjunto **S** de símbolos utilizados en SN no sea excesivamente grande.
(3) Cada número natural venga representado por una cadena de símbolos (repetidos o no) que no sea excesivamente larga.
(4) Que sean potentes, económicas y fiables las técnicas que permiten:
- (4.1) comparar dos o más números
- (4.2) sumar dos o más números
- (4.3) restar un número de otro mayor
- (4.4) multiplicar dos números
- (4.5) dividir un número por otro
- (4.6) hallar múltiplos y divisores de uno o más números.

Técnicas extremas:

- Utilizar un **único símbolo** y repetirlo tantas veces como indica el número que queramos representar,
- Utilizar un símbolo diferente para cada número natural.

La primera permite resolver (1) y (2) pero no (3) y
la segunda permite resolver (1) y (3) pero no (2).

Una primera técnica intermedia:

Consiste en mejorar la técnica de un único símbolo realizando un único tipo de agrupamiento.

IIIII IIIII IIIII IIIII III $\longrightarrow$ **23**

V V V V III $\longrightarrow$ **23**

Aparece nuevo símbolo para el agrupamiento.

El Sistema de Numeración "aditivo"

- Consiste en realizar **agrupamientos de forma regular**, utiliza agrupamientos de primer orden, de segundo orden, etc.
- Semejante al *sistema egipcio*.
- Símbolos: I, A, B, C, D, E y F

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$ y 10^6

Designan **unidades sucesivas**, cada una de las cuales es diez veces la anterior.

Sistema egipcio

- Los símbolos representan a las potencias de la base.
- La base es 10. Se agrupa de 10 en 10.
- No existe ambigüedad de escrituras.
- Se utiliza la adición.
- No es posicional. No tiene cero como cifra.

- No es posible escribir cualquier número

Características de SNa

- No presenta ambigüedades.
- Sigue habiendo dificultades para resolver la tarea de disminuir el número de símbolos necesarios para representar cada número. pues para representar 9.999.999 necesitamos 63 símbolos.
- No permite comparar dos números de forma satisfactoria.
- Permite realizar las tareas de **sumar**, **restar**, **multiplicar** y **dividir** para números pequeños de "forma razonablemente económica". Pero si los números aumentan la técnica es muy poco económica.
- Presenta la ventaja de no tener que recurrir a utilizar las tablas de sumar y de multiplicar.

Una dirección de evolución de **la técnica de representación aditiva**

Objetivo: Dar una respuesta **más eficaz y económica** a la tarea de disminuir el número de símbolos necesarios para representar cada número.

Variación aportada por **el sistema romano**.

Símbolos: I, V, X, L, C, D y M

10^0, 5×10^0, 10^1, 5×10^1, 10^2, 5×10^2 y 10^3

Designan unidades sucesivas que son alternativamente el quíntuplo o el doble de la anterior.

Otra variación dentro del sistema romano

Todo símbolo colocado a la izquierda de un símbolo de valor inmediatamente superior, indica que el menor debe restarse del mayor:

9 $\rightarrow$ IX; 4 $\rightarrow$ IV; 40 $\rightarrow$ XL; 90 $\rightarrow$ XC;

400 $\rightarrow$ CD; 900 $\rightarrow$ CM.

Estas mejoras, para dar respuesta a la tarea de disminuir el número de símbolos necesarios para representar cada número, hacen que la técnica sea ***menos económica** y **menos eficaz*** para realizar **operaciones aritméticas**, incluso con números pequeños.

CONCLUSIÓN

EL OBJETIVO PRINCIPAL O "RAZÓN DE SER" de los sistemas de numeración *aditivos* es la *representación de los números naturales* sin ambigüedades y con una pequeña cantidad de símbolos y no la simplificación de los algoritmos de las operaciones aritméticas.

El Sistema Híbrido

- Constituye un sistema ***aditivo-multiplicativo***, semejante al sistema *chino* o a nuestro *sistema oral*.
- Utiliza los símbolos para las potencias de la base:

I $\rightarrow 10^0$; A $\rightarrow 10^1$; B $\rightarrow 10^2$; C $\rightarrow 10^3$;
D $\rightarrow 10^4$; E $\rightarrow 10^5$; F $\rightarrow 10^6$; ...

- Utiliza un nuevo tipo de símbolos que hacen la función de **multiplicadores** de dichas potencias :(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9).
- Mejora la solución a la tarea de disminuir el número de símbolos necesarios para representar cada número pues evita la repetición de símbolos de las potencias de la base.
- La *representación de los números se simplifica,* aunque todavía no podemos escribir todos los números naturales con un número finito de símbolos, fijados de antemano.
- El **algoritmo de comparación** es **más económico** que el del SN aditivo, pues **no** es **necesario contar** cuántas veces se repite cada símbolo.
- Las **operaciones aritméticas** pueden realizarse de forma ***más sencilla y económica*** que con el SN aditivo, sobre todo, con **números "grandes**".
- Sin embargo, hay que **utilizar la tabla de sumar de los coeficientes y las dos tablas de multiplicar** (la de las potencias de la base y la de los coeficientes).

Sistema chino

- Tiene símbolos que representan a las potencias de la base y a sus multiplicadores.
- La base es 10. Agrupa de 10 en 10.
- No hay ambigüedad de escrituras.
- La posición es importante. No tiene cero como cifra.
- Utiliza las operaciones de adición y multiplicación.
- No se puede escribir cualquier número.

Características de los SN posicionales

- Dan una respuesta definitiva a (2), y permiten resolver las tareas de comparar y calcular.
- Prescinden de los símbolos de las potencias de la base ya que éstas vienen indicadas por las distintas posiciones que ocupan los respectivos coeficientes.
- Permiten escribir ***todos*** los números naturales con un ***número finito de símbolos*** (fijados de antemano).
- Los únicos símbolos que utilizan son los coeficientes o multiplicadores de las potencias de la base.

Características de los SN posicionales primitivos

- Utilizan símbolos para los coeficientes que intentan **evocar visualmente** lo que representan.

  Ejemplos: **9 → I ••••** , **87 → •••• I••**

  57 → ⟨⟨⟨⟨⟨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ , **247 →** ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨ ∨
- No permiten resolver la tarea "*¿Cómo expresar los números naturales que necesitamos mediante símbolos de manera que* ***no haya ninguna ambigüedad***?

  III puede ser "15" ó "110" ó "205".

  ∨ ∨ **puede ser "2" ó "61".**

El sistema "posicional completo".

- Da una respuesta definitiva a la tarea de disminuir el número de símbolos necesarios para representar cada número.
- Prescinde de los símbolos de las potencias de la base ya que éstas vienen indicadas por las distintas posiciones que ocupan los respectivos coeficientes.
- Permite escribir todos los números con un número finito de símbolos(fijados de antemano).
- Los únicos símbolos son los coeficientes o multiplicadores de las potencias de la base. Las potencias de la base vienen indicadas por las distintas posiciones.
- Utiliza símbolos convencionales diferentes para cada uno de los coeficientes (los números menores que la base).
- Añade un nuevo símbolo: el ***cero***, para indicar que en una determinada posición hay **ausencia de elementos**.
- La base es diez y dispone de los símbolos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 para los coeficientes y del símbolo 0 para indicar ausencia de elementos en una determinada posición.
- No presenta ambigüedades.
- Permite **comparar** dos números de una forma muy eficaz.
- Proporciona una respuesta más **económica** y **eficaz** a las tareas de cálculo.

Cuestión inicial: ¿Qué propiedades y características especiales tiene nuestro sistema de numeración (posicional completo en base 10) para que se haya impuesto de manera absoluta sobre todos los que han existido a lo largo de la historia y que han coexistido durante muchos siglos?

Nuestro sistema de numeración posicional completo en base 10 (SNp) debe poseer unas propiedades especiales que le permiten expresar el cardinal de una colección finita (es decir, un número natural) por muy grande que sea y manejar los números comparándolos, efectuando cálculos y construyendo otros números a partir de los que ya se conocen. ¿Cuáles son estas propiedades tan especiales?

Material utilizado en la 11ª Sesión

Examen realizado por los 30 alumnos de 3º de ESO

IES San Juan Bautista
Examen 3º E.S.O.

Nombre y Apellidos:...

1.- **Realizar los cálculos** siguientes:
- **4001 – 2015**
- **Dividir 6407 entre 372**

en los **SN aditivo, híbrido** destacando en cada caso las principales **limitaciones y ventajas** del SN adoptado. (4p)

2.- Construir un **sistema de numeración posicional** con **4 símbolos** y **base 60** y escribe en dicho sistema los números 3, 11, 30, 60, 100, 3661 y 216216. **Explicar** las **limitaciones** y **ventajas** de dicho sistema. ¿Pueden presentarse algún caso de **ambigüedad** en sus escrituras? Si es así, **poner un ejemplo**, e indicar cómo podría evitarse dicho problema de ambigüedad. (2p)

3.- Juan ha hecho un **error** en el siguiente **cálculo**:

$$\begin{array}{r} 387 \\ \times\ 48 \\ \hline 3096 \\ 1548 \\ \hline 4644 \end{array}$$

¿Qué **relación** hay **entre 4644 y 387**? **Justificar** la respuesta. (1p)

4.- Los romanos utilizaron **dos técnicas de representación** de los números. Los siguientes números están escritos utilizando la técnica más tardía: 4 –> IV, 49 –> XLIX , 99 –> XCIX, 499 –> CDXCIX, 999 –> CMXCIX

Caracterizar esas dos **técnicas de representación** de los números**,** indicando **sus ventajas y limitaciones**. (2p)

5.- Sabiendo que $15368 \times 18 = 276624$ y que $15368 \times 23 = 353464$.

Realizar los siguientes cálculos, **sin llevar a cabo cálculos multiplicativos**, (para ello puedes utilizar los cálculos anteriores y las propiedades de las operaciones):

23018 × 15368, **41 × 15368**.

Justificar la respuesta, indicando las propiedades utilizadas. (1p)

IES San Juan Bautista

Examen 3º E.S.O. 23- 3 - 2004

Nombre y Apellidos:...

1. Realizar el cálculo siguiente: **546 x 86**
   en el **SN aditivo** y destacar las principales **limitaciones y ventajas de dicho sistema**. (2p)

2. Realizar la división siguiente: **3548 entre 83**
   en el **SN híbrido** e indicar las principales **limitaciones y ventajas de dicho sistema**. (2p)

3. Construir un **sistema de numeración posicional de base 8** de modo que presente dificultades de ambigüedad de escrituras y escribe en dicho sistema los números 2, 8, 65, 1000. Explicar **cómo se podría evitar el problema de la ambigüedad** de dicho sistema. (2p)

4. Caracterizar el **Sistema de Numeración Oral** que utilizamos habitualmente para expresar oralmente los números. (2p)

5. Al **restar** dos números de 3 cifras, María **se ha olvidado una llevada en la segunda columna**. ¿En **cuánto se ha equivocado**? ¿**Por qué**? (1p)

6. Dado el cálculo siguiente:

$$\begin{array}{r} 364 \\ \times\ 402 \\ \hline 145600 \\ 728 \\ \hline 146328 \end{array}$$

Realizar los siguientes cálculos, sin llevar a cabo cálculos multiplicativos, (para ello puedes utilizar los cálculos anteriores y las propiedades de las operaciones):
804×364, **644×364** . **Justificar la respuesta**. (1p)